ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, მ. გაგიძაშვილი,
ნ. მაჭარაშვილი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვა

დიფერენციალური განტოლებები

(თეორია და ამოცანათა კრებული)

საქართველოს რესპუბლიკის განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

პროფესორ ს. თოფურიას რედაქციით

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1991

22.11
510 (022)
თ 776

უმაღლესი მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს პროგრამით გათვალისწინებულ მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვის, ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვის და ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის საკითხებს.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკური, ბიოლოგიური და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებსაც.

რეცენზენტები: 1. თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის განყოფილების გამგე, პროფესორი

თ. ჭანტურია

2. საქ. სსრ მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფრ. მეცნ. თანამშრომელი, პროფესორი ვ. პაატაშვილი

T $\dfrac{1602010000-515}{M-602(08)-91}$ 10-91

ISBN 5-505-01244-2

წინასიტყვაობა

წიგნი ერთ-ერთი ნაწილია სახელმძღვანელოთა იმ სერიისა, რომელმაც, ავტორთა აზრით, უნდა შეადგინოს უმაღლესი მათემატიკის სრული კურსი (თეორია და ამოცანათა კრებული) უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისათვის. იგი დაწერილია მოქმედი პროგრამის მიხედვით.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკური, ბიოლოგიური, ქიმიური და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებს.

წიგნი შედგება ორი განყოფილებისაგან. პირველში გადმოცემულია თეორიული მასალა. მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის მრავალ ამოცანასა და სავარჯიშოს. ისინი დალაგებულია თეორიული მასალის შესაბამისად მათი ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით.

წიგნის ხელნაწერი გულდასმით წაიკითხეს და სასარგებლო შენიშვნები მოგვცეს რეცენზენტებმა: საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსმა მეცნიერმა თანამშრომელმა, პროფესორმა ვ. პაატაშვილმა, თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის განყოფილების გამგემ პროფესორმა თ. ჭანტურიამ, რისთვისაც მათ გულწრფელ მადლობას მოვახსენებთ.

ავტორები

პირველი თავი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის მრავალი საკითხის შესწავლისას გვხვდება ცვლად სიდიდეებს შორის ისეთი დამოკიდებულებანი, რომლის დროსაც ამ ცვლადი სიდიდეებიდან ერთი მათგანის მნიშვნელობები სავსებით განისაზღვრება დანარჩენი ცვლადების მნიშვნელობებით.

მაგალითად, მოძრავი მატერიალური წერტილის კინეტიკური T ენერგია გამოითვლება ფორმულით

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

სადაც m წერტილის მასაა, ხოლო v მისი სიჩქარეა. მაშასადამე T წარმოადგენს მასისა და სიჩქარის ფუნქციას.

მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა როგორც ცნობილია გამოითვლება ფორმულით

$$V = xyz,$$

სადაც x, y და z პარალელეპიპედის განზომილებებია, ე. ი. მოცულობა V არის სამი x, y და z ცვლადის ფუნქცია.

ფიზიკური პროცესების განხილვისას, ფიზიკური მახასიათებლები (მაგალითად, ρ სიმკვრივე ან T ტემპერატურა) განისაზღვრება ოთხი ცვლადის მნიშვნელობებით, რომელთაგან სამი x, y და z წერტილის დეკარტის კოორდინატებია, ხოლო მეოთხე არის t დრო.

სანამ გადავიდოდეთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის შესწავლაზე, წინასწარ გავეცნოთ ევკლიდეს* კოორდინატული R^m სივრცის წერტილთა სიმრავლის ზოგიერთ თვისებას.

§ 1. მანძილი ევკლიდეს კოორდინატულ R^m სივრცეში და მისი ზოგიერთი თვისება

ვთქვათ, R^m $(m \geqslant 1)$ ევკლიდეს m — განზომილებიანი კოორდინატული სივრცეა. შემდეგში ამ სივრცის წერტილებს აღვნიშნავთ a, b, c, ..., x, y, z, ... ასოებით, მის კოორდინატებს კი — იმავე ასო-

* ევკლიდე (III საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე) — ბერძენი მათემატიკოსი.

ებით, რომელთაც დასმული ექნებათ ინდექსები. მაგალითად, $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ არის R^m სივრცის x წერტილი, რომლის კოორდინატებია $x_1, x_2, \dots, x_m$. ამასთან შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ეს კოორდინატები R^m-ის ბუნებრივი $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ ბაზისის შესაბამისია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $m=2$, ნაცვლად (x_1, x_2)-ისა წერენ (x, y)-ს, ხოლო, როცა $m = 3$, ნაცვლად (x_1, x_2, x_3)-ისა კი — (x, y, z)-ს.

R^m სივრცის $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ და $y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$ წერტილებს შორის მანძილი განისაზღვრება ფორმულით

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_m-y_m)^2}\,. \qquad (1.1)$$

როცა $m=1$, ე. ი. R^1 წრფის შემთხვევაში

$$\rho(x, y) = |x-y|.$$

როცა $m=2$, ე. ი. R^2 სიბრტყის შემთხვევაში

$$\rho(x, y)= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,,$$

ხოლო, როცა $m=3$, ე. ი. R^3 სივრცის შემთხვევაში

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

(1.1) ტოლობით განსაზღვრულ მანძილს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $\rho(x, y)\geqslant 0$, ამასთან $\rho(x, y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=y$.

2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ ნებისმიერი ორი x და y წერტილისათვის R^m-დან.

3) თუ x, y და z სამი ნებისმიერი წერტილია R^m-დან, მაშინ

$$\rho(x, z)\leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z).$$

1) და 2) თვისებები უშუალოდ გამომდინარეობს (1.1) ფორმულიდან, ხოლო 3) თვისება, რომელსაც უწოდებენ სამკუთხედის უტოლობას და რომელიც კარგად ცნობილია ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში ზოგად შემთხვევაში (ნებისმიერი m-სათვის) საჭიროებს დამტკიცებას.

წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლ ე მ ა. ნებისმიერი $a_1, a_2, \ldots, a_m$ და $b_1, b_2, \ldots, b_m$ რიცხვებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}\,. \tag{1.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ ყველა $a_i=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, მაშინ (1.2) უტოლობა ცხადია. დავუშვათ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2>0$. განვიხილოთ კვადრატული ფუნქცია

$$F(t)=\sum_{i=1}^{m}(a_i t+b_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{m} a_i^2+2t\sum_{i=1}^{m} a_i b_i+\sum_{i=1}^{m} b_i^2.$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი t-სათვის

$$F(t)\geqslant 0. \tag{1.3}$$

იმისათვის, რომ (1.3) უტოლობას ჰქონდეს ადგილი, აუცილებელია და საკმარისი $t^2\sum_{i=1}^{m} a_i^2+2t\sum_{i=1}^{m} a_i b_i+\sum_{i=1}^{m} b_i^2$ სამწევრის დისკრიმინანტი იყოს არადადებითი, ე. ი.

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m} b_i^2\right)\leqslant 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1. 2) უტოლობა.

ლემა დამტკიცებულია.

(1.2) უტოლობას ეწოდება კოში — ბუნიაკოვსკის* უტოლობა. ადვილია ჩვენება, რომ (1.2) დამოკიდებულებაში ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $a_i=\lambda b_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, სადაც λ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

შ ე დ ე გ ი.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}\,. \tag{1.4}$$

---

* ო. კოში (1789—1857) — ფრანგი მათემატიკოსი.
ვ. ბუნიაკოვსკი (1804—1889) — რუსი მათემატიკოსი.

მართლაც, (1. 2) უტოლობის გამოყენებით გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{m}a_i^2+\sum_{i=1}^{m}b_i^2+2\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\leqslant\sum_{i=1}^{m}a_i^2+\sum_{i=1}^{m}b_i^2+$$

$$+2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}\right)^2,$$

საიდანაც მიიღება (1.4).

ახლა, ვთქვათ $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ და $z=(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ არის R^m სივრცის სამი ნებისმიერი წერტილი. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$, მაშინ $a_i+b_i=x_i-z_i$, $i=1, 2, \ldots, m$. ცხადია ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით (1.4) უტოლობა ასე ჩაიწერება

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-z_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i-z_i)^2}.$$

ანუ (1.1)-ის ძალით

$$\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z).$$

ამით, სამკუთხედის უტოლობა დამტკიცებულია.

§ 2. ევკლიდეს კოორდინატული R^m სივრცის წერტილთა სიმრავლეები

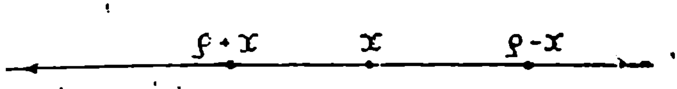
ვთქვათ $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in R^m$ და $\delta>0$. სიმრავლეს

$$u(x, \delta)=\{y: y\in R^m,\ \rho(x, y)<\delta\}$$

ეწოდება m-განზომილებიანი ღია ბირთვი ცენტრით $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ წერტილში და რადიუსით δ.

როცა $m=1$, მაშინ $x=x_1$ და $y=y_1$, ამიტომ

$$u(x, \delta)=\{y: |y-x|<\delta\},$$



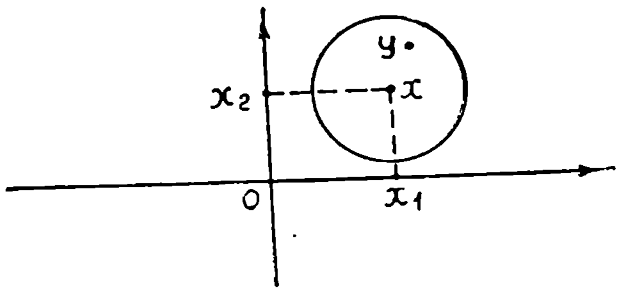
ნახ. 1

ე. ი. ამ შემთხვევაში $u(x, \delta)$ არის 2δ სიგრძის ინტერვალი ცენტრით x წერტილში (ნახ. 1).

როცა $m=2$, მაშინ

$$u(x, \delta)=\{y=(y_1, y_2) : y\in R^2, \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}<\delta\},$$

ე. ი. $u(x, \delta)$ არის δ რადიუსიანი ღია წრე ცენტრით $x=(x_1, x_2)$ წერტილში (ნახ. 2).



ნახ. 2

როცა $m=3$, მაშინ $u(x, \delta)$ არის ღია ბირთვი რადიუსით δ და ცენტრით $x=(x_1, x_2, x_3)$ წერტილში.

სიმრავლეს

$$\overline{u}(x, \delta)=\{y : y\in R^m, \rho(x, y)\leqslant\delta\}.$$

ეწოდება m განზომილებიანი ჩაკეტილი ბირთვი ცენტრით x წერტილში და რადიუსით δ.

სიმრავლეს

$$s(x, \delta)=\{y : y\in R^m, \rho(x, y)=\delta\}$$

ეწოდება m განზომილებიანი სფერო ცენტრით $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ წერტილში და რადიუსით δ.

შევნიშნოთ, რომ m-განზომილებიანი $u(x, \delta)$ ღია ბირთვისა და m-განზომილებიანი $s(x, \delta)$ სფეროს გაერთიანება გვაძლევს m განზომილებიან ჩაკეტილ $\overline{u}(x, \delta)$ ბირთვს.

$u(x, \delta)$ სიმრავლეს ეწოდება $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ წერტილის სფერული მიდამო (δ-მიდამო).

ვთქვათ $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in R^m$ და $a_i>0$, $i=1, 2, \ldots, m$. სიმრავლეს

$$I(x; a_1, a_2, \ldots, a_m)=\{y=(y_1, y_2, \ldots, y_m) : x_i-a_i<y_i<x_i+a_i,$$
$$i=1, 2, \ldots, m\}$$

ეწოდება m-განზომილებიანი ღია პარალელეპიპედი ან m-განზომილებიანი ინტერვალი ცენტრით x წერტილში. მას უწოდებენ აგრეთვე x წერტილის მართკუთხოვან მიდამოს.

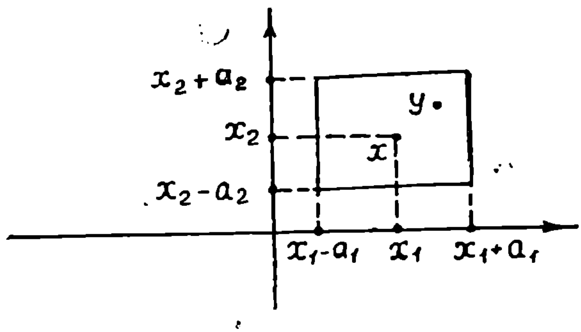
სიმრავლეს

$$\overline{I}(x; a_1, a_2, \dots, a_m) = \{y : x_i - a_i \leqslant y_i \leqslant x_i + a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$$

ეწოდება m განზომილებიანი სეგმენტი.

კერძოდ, როცა $m = 1$, მაშინ $I =]x_1 - a_1; x_1 + a_1[$, ხოლო $\overline{I} = [x_1 - a_1; x_1 + a_1]$.

თუ $m=2$, მაშინ $\overline{I}$ სეგმენტი იქნება მართკუთხედი, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია (ნახ. 3), ხოლო I



ნახ. 3

ინტერვალი მართკუთხედია, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, ამასთან მართკუთხედის გვერდებზე მდებარე წერტილები მას არ ეკუთვნის.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. x წერტილის ყოველი სფერული $u(x, \delta)$ მიდამო შეიცავს ამ წერტილის რაიმე მართკუთხოვან მიდამოს და პირიქით x წერტილის ყოველი მართკუთხოვანი მიდამო შეიცავს ამ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $u(x, \delta)$ არის x წერტილის რაიმე სფერული მიდამო. დავუშვათ, რომ $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = \frac{\delta}{\sqrt{m}}$, მაშინ ცხადია, რომ

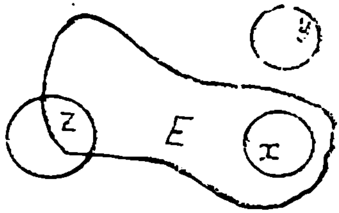
$$I(x, a_1, a_2, \dots, a_m) \subset u(x, \delta).$$

ახლა, ვთქვათ $a_1>0,\ a_2>0,\dots,a_m>0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვებია. დავუშვათ, რომ $\delta=\min\{a_1, a_2,\dots,a_m\}$, მაშინ ცხადია, რომ

$$u(x,\ \delta)\subset I(x,\ a_1,\ a_2,\dots,\ a_m).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 2.1. R^m სივრცის x წერტილს ეწოდება E სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო $u(x,\delta)$, რომ $u(x,\delta)\subset E$ (ნახ. 4).



ნახ. 4

განსაზღვრება 2.2. R^m სივრცის y წერტილს ეწოდება E სიმრავლის გარე წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო $u(y,\delta)$, რომელიც არ შეიცავს E სიმრავლის არცერთ წერტილს (ნახ. 4).

განსაზღვრება 2.3. R^m სივრცის z წერტილს ეწოდება E სიმრავლის საზღვრის წერტილი, თუ იგი არ არის E სიმრავლის არც შიგა და არც გარე წერტილი (ნახ. 4). E სიმრავლის საზღვრის წერტილების სიმრავლეს E სიმრავლის საზღვარი ეწოდება.

განსაზღვრება 2.4. სიმრავლეს, რომელიც შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან, ღია სიმრავლე ეწოდება.

მაგალითად, ყოველი m-განზომილებიანი ინტერვალი წარმოადგენს ღია სიმრავლეს R^m სივრცეში. ასევე m-განზომილებიანი ღია ბირთვი ღია სიმრავლეა R^m სივრცეში.

ყოველ ღია სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს x_0 წერტილს, მიღებულია ვუწოდოთ ამ წერტილის მიდამო.

განსაზღვრება 2.5. სიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი თუ ის შეიცავს მის საზღვრის ყველა წერტილს.

მაგალითად, m-განზომილებიანი სეგმენტი ჩაკეტილი სიმრავლეა. ასევე m-განზომილებიანი $\overline{u}(x,\delta)$ ბირთვი ჩაკეტილი სიმრავლეა R^m სივრცეში.

განსაზღვრება 2.6. $E\subset R^m$ სიმრავლის დიამეტრი ეწოდება სიდიდეს

$$d=\sup_{x,\ y\in E}\rho(x,\ y).$$

განსაზღვრება. 2.7. E სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ მისი დიამეტრი სასრულია.

განსაზღვრება 2.8. 1) R^m სივრცის წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება R^m სივრცის უწყვეტი წირი, თუ ამ სიმრავლის წერტილთა $x_1, x_2, \ldots, x_m$ კოორდინატები არიან t პარამეტრის უწყვეტი ფუნქციები:

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_m=\varphi_m(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{2.1}$$

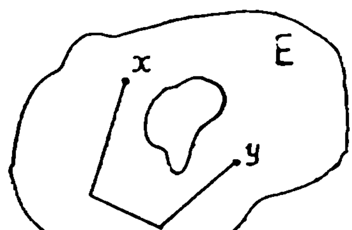
2) ვიტყვით, რომ (2.1) განტოლებებით მოცემული უწყვეტი წირი აერთებს R^m სივრცის $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ და $y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ წერტილებს, თუ

$$x_1=\varphi_1(\alpha),\ x_2=\varphi_2(\alpha), \ldots, x_m=\varphi_m(\alpha),$$

$$y_1=\varphi_1(\beta),\ y_2=\varphi_2(\beta), \ldots, y_m=\varphi_m(\beta).$$

განსაზღვრება 2.9. 1) R^m სივრცის ღია სიმრავლეს ეწოდება არე, თუ მისი ორი ნებისმიერი წერტილი შეიძლება შევაერთოთ ისეთი უწყვეტი წირით, რომლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს (ნახ. 5).

2) არისა და მისი საზღვრის გაერთიანებას ჩაკეტილი არე ეწოდება.



ნახ. 5

§ 3. R^m სივრცის წერტილთა მიმდევრობა და მისი ზღვარი

თუ რაიმე წესით ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეესაბამება R^m სივრცის $x^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ წერტილი (არ არის აუცილებელი განსხვავებული წერტილი განსხვავებული n-სათვის), მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია R^m სივრცის წერტილთა მიმდევრობა

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots.$$

მიმდევრობას მოკლედ $x^{(n)}$, $n=1, 2, \ldots$ ან $\{x^{(n)}\}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავენ.

განსაზღვრება 3.1. $a(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in R^m$ წერტილს ეწოდება $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის

არსებობს ისეთი (ε-ზე დამოკიდებული) რიცხვი $n_0 = n_0(\varepsilon)$, რომ ყოველი ნატურალური $n > n_0(\varepsilon)$-თვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

ე. ი. a არის $x^{(n)}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, a) = 0.$$

ის ფაქტი, რომ a წერტილი $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობის ზღვარია, ასე ჩაიწერება

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a,$$

ან შემოკლებით $\lim x^{(n)} = a$, ან კიდევ $x^{(n)} \to a$.

(3.1) უტოლობა ნიშნავს იმას, რომ $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობის ყველა წევრი დაწყებული n_0-დან ეკუთვნის a წერტილის ε მიდამოს, ე. ი. $x^{(n)} \in u(a, \varepsilon)$, როცა $n > n_0$.

ამრიგად, ის ფაქტი, რომ a წერტილი არის $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობის ზღვარი, გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ a წერტილის ნებისმიერ ε მიდამოში მოთავსებულია $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის წევრებისა.

მიმდევრობას, რომელსაც ზღვარი გააჩნია, ეწოდება კრებადი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობას განშლადი ეწოდება.

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. იმისათვის, რომ $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ მიმდევრობა იყოს კრებადი $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ წერტილისაკენ აუცილებელია და საკმარისი

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს უტოლობიდან

$$|x_i^{(n)} - a_i| \leqslant \rho(x^{(n)}, a) \leqslant |x_1^{(n)} - a_1| + |x_2^{(n)} - a_2| + \dots + |x_m^{(n)} - a_m|, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{3.1}$$

ვთქვათ, მოცემულია $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობა. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

ცხადია $n_k \geqslant k$.

მიმდევრობას $\{x^{(n_k)}\}$ ეწოდება $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3.2. $x^{(n)} \in R^m$ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული თუ არსებობს ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ $\rho(0, x^{(n)}) < M$, $n = 1, 2, \dots$.

(3.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს: $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი შემოსაზღვრული იყოს რიცხვთა $\{x_i^{(n)}\}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ მიმდევრობები.

თეორემა 3.1-დან და რიცხვითი მიმდევრობის ზღვრის შესახებ ცნობილი თეორემებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემების მართებულობა.

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. თუ მიმდევრობას ზღვარი აქვს, მაშინ ის ერთადერთია.

თ ე ო რ ე მ ა 3.3. თუ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მისი ყოველი ქვემიმდევრობა აგრეთვე კრებადია იმავე ზღვრისაკენ.

თ ე ო რ ე მ ა 3.4. თუ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია.

თ ე ო რ ე მ ა 3.5. (ბოლცანო-ვაიერშტრასი*). ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. გამომდინარე აქედან რიცხვთა მიმდევრობები $\{x_i^{(n)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ აგრეთვე შემოსაზღვრულია. რიცხვითი მიმდევრობებისათვის ცნობილი ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის ძალით $\{x_1^{(n)}\}$ მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ კრებადი $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ ქვემიმდევრობა. $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ მიმდევრობა არის $\{x_2^{(n)}\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, ამიტომ ის შემოსაზღვრულია, ამდენად მისგან შეიძლება გამოვყოთ კრებადი $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ ქვემიმდევრობა. მიმდევრობა $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$, როგორც კრებადი $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა იქნება კრებადი. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს მივიღებთ m კრებად $\{x_i^{(n_{k_m})}\}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ მიმდევრობებს. თეორემა 3.1-ის ძალით აქედან გამომდინარეობს, რომ R^m სივრცის წერტილთა $\{x^{(n_{k_m})}\}$ მიმდევრობა კრებადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3.3. $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ $\forall \varepsilon > 0$-თვის $\exists\ n_0 \in R$ ისეთი, რომ

$$\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) < \varepsilon$$

ყოველი $n > n_0$-თვის და ყველა არაუარყოფითი მთელი p-თვის.

---

* ბოლცანო (1781—1848) — ჩეხი მათემატიკოსი.
კ. ვაიერშტრასი (1815—1897) — გერმანელი მათემატიკოსი.

თ ე ო რ ე მ ა 3.6. იმისათვის, რომ $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობა იყოს ფუნდამენტური აუცილებელია და საკმარისი ფუნდამენტური იყოს რიცხვითი $\{x_i^{(n)}\}$ $(i=1,\ 2,\ldots,m)$ მიმდევრობები.

თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს უტოლობებიდან

$$| x_i^{(n+p)} - x_i^{(n)} | \leqslant \rho\,(x^{(n+p)},\ x^{(n)}) \leqslant | x_1^{(n+p)} - x_1^{(n)} | + \\ + | x_2^{(n+p)} - x_2^{(n)} | + \cdots + | x_m^{(n+p)} - x_m^{(n)} | .$$

თეორემა 3.1 და 3.6-დან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა.

თ ე ო რ ე მ ა 3.7 (კოში). R^m სივრცის წერტილთა მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ის იყოს ფუნდამენტური.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3.4. ვიტყვით, რომ R^m სივრცის წერტილთა $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობა კრებადია უსასრულობისაკენ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \rho\,(x^{(n)},\ 0) = \infty\ . \tag{3.2}$$

ის ფაქტი რომ $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობა კრებადია უსასრულობისაკენ ასე ჩაიწერება

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \infty .$$

ნებისმიერი $a \in R^m$ წერტილისათვის სამკუთხედის უტოლობის ძალით

$$\rho\,(x^{(n)},\ 0) \leqslant \rho\,(x^{(n)},\ a) + \rho\,(a,\ 0),$$

საიდანაც გვაქვს

$$\rho\,(x^{(n)},\ a) \geqslant \rho\,(x^{(n)},\ 0) - \rho\,(a,\ 0). \tag{3.3}$$

(3.2) და (3.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \rho\,(x^{(n)},\ a) = \infty\ .$$

ე. ი. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \infty$, მაშინ $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობის წერტილებიდან მანძილი R^m სივრცის ნებისმიერ ფიქსირებულ a წერტილამდე მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ

აქვე შევნიშნოთ, რომ, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \infty$, მაშინ $x^{(n)}$ წერტილების ერთი კოორდინატი მაინც მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

§ 4. მრავალი ცვლადის ფუნქცია, მისი გრაფიკი. დონის წირები, ზედაპირები და სიმრავლე

განსაზღვრება 4.1. ვთქვათ $E \subset R^m$. თუ E სიმრავლის ყოველ $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ წერტილს რაიმე წესით შეესაბამება ნამდვილი u რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია x წერტილის ფუნქცია, ანუ m ცვლადის ფუნქცია და მას ჩვეულებრივ ასე აღნიშნავენ:

$$u=u(x) \text{ ან } u=f(x), \text{ ან } u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

x წერტილის $x_1, x_2, \ldots, x_m$ კოორდინატებს უწოდებენ არგუმენტებს ან დამოუკიდებელ ცვლადებს, ხოლო E სიმრავლეს — ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

იმ შემთხვევაში, როცა $m=2$ ნაცვლად $f(x_1, x_2)$-ისა ზოგჯერ წერენ $f(x, y)$-ს, ხოლო, როცა $m=3$, მაშინ $f(x_1, x_2, x_3)$-ის ნაცვლად კი — $f(x, y, z)$-ს.

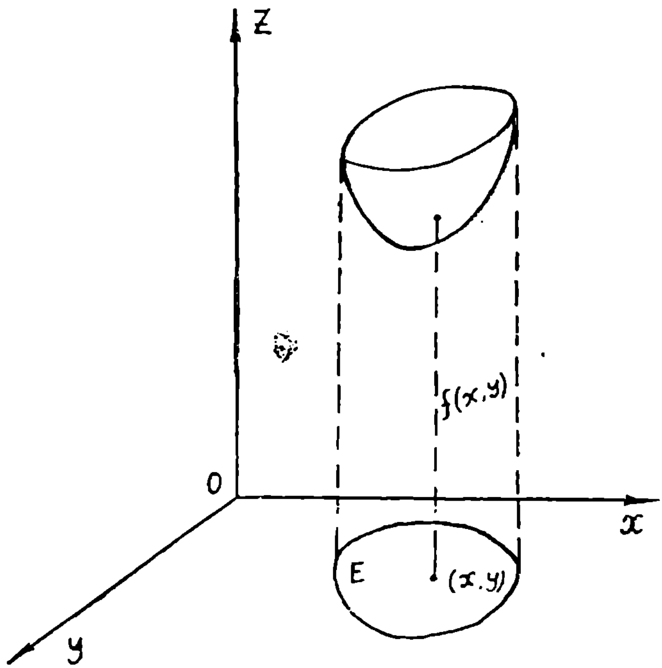
განსაზღვრების თანახმად ფუნქცია ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია ფუნქციის განსაზღვრის არე და შესაბამისობის წესი. ამასთან, ამ წესის მოცემის ხერხი შეიძლება იყოს სხვადასხვა. კერძოდ: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური. თუ ფუნქცია მოცემულია ანალიზურად და არ არის მითითებული განსაზღვრის არე, მაშინ იგულისხმება, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ წერტილთა სიმრავლე, რომლისთვისაც მოცემულ გამოსახულებას აზრი აქვს. მაგალითად, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა R^2 სივრცის ერთეულოვანი ჩაკეტილი წრე ცენტრით $(0, 0)$ წერტილში, ხოლო $z=\ln(x^2+y^2)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან გარდა $(0, 0)$ წერტილისა.

ვთქვათ, ევკლიდეს R^m სივრცის E სიმრავლეზე განსაზღვრულია $u=f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ფუნქცია. დავუშვათ, რომ R^{m+1} არის $(x; u)=(x_1, x_2, \ldots, x_m, u)$ წერტილთა ევკლიდეს $m+1$ განზომილებიანი სივრცე. $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება R^{m+1} სივრცის ყველა იმ $(x_1, x_2, \ldots, x_m, u)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლისთვისაც $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, სადაც $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E$. ნახ. 6-ზე გამოსახულია ორი ცვლადის $z=f(x, y)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია $E \subset R^m$ სიმრავლეზე. R^m სივრცის იმ $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)=h$$

განტოლებას, f ფუნქციის დონის სიმრავლე ეწოდება, რომელიც შეესაბამება $u=h$ მნიშვნელობას.



ნახ. 6

იმ შემთხვევაში, როცა $m=2$ დონის სიმრავლეებს უწოდებენ აგრეთვე დონის წირებს, როცა $m=3$ მას უწოდებენ დონის ზედაპირებს, ხოლო როცა $m>3$ — კი დონის ჰიპერზედაპირებს.

დონის წირებითა და ზედაპირებით ხშირად სარგებლობენ გამოყენებით მეცნიერებებში.

§ 5. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი

განსაზღვრება 5.1. A რიცხვს ეწოდება $f(x)=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქციის ზღვარი $a=(a_1, a_2, \dots, a_m)$ წერტილში, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა და ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს

$\delta=\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია ε-ზე, ისეთი, რომ, თუ $0<\rho(x, a)<\delta$, მაშინ

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში, შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,$$

ან

$$\lim_{\rho(x, a)\to 0} f(x)=A,$$

ან კიდევ

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\\ x_m\to a_m}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)=A.$$

ფუნქციის ზღვრის ეს განსაზღვრება ეკუთვნის კოშს. არსებობს აგრეთვე ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრება ჰეინეს* მიხედვით.

განსაზღვრება 5.2. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა და ნებისმიერი $\{x^{(n)}\}=\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ მიმდევრობისათვის ($x^{(n)}\neq a$, $n=1, 2, \ldots$), რომელიც კრებადია a-საკენ, ფუნქციის მნიშვნელობათა სათანადო $\{f(x^{(n)})\}$ მიმდევრობა კრებადია A რიცხვისაკენ.

ამ განსაზღვრებაში იგულისხმება, რომ a წერტილისაკენ კრებადი $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობა შესდგება მხოლოდ იმ წერტილებისაგან, რომლისთვისაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია.

ერთი ცვლადის ფუნქციის ანალოგიურად, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციის ზღვრის ეს ორი განსაზღვრება ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

შემოვიყვანოთ ახლა ფუნქციის ზღვრის ცნება, როცა $x\to\infty$. განსაზღვრება მოვიყვანოთ მხოლოდ კოშის მიხედვით.

განსაზღვრება 5.3. ვიტყვით, რომ A რიცხვი არის $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to\infty$ და ჩავწერთ

---

* ჰეინე (1821—1881) — გერმანელი მათემატიკოსი.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ, როცა $\rho(0, x)>M$, მაშინ

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვისაც, ერთი ცვლადის ფუნქციის ანალოგიურად, განისაზღვრება

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{და} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზოგჯერ საჭიროა ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა ისეთ a წერტილში, რომლის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს წერტილებს, რომელზედაც ფუნქცია არ არის განსაზღვრული და აგრეთვე წერტილებს, რომელზედაც ფუნქცია განსაზღვრულია. ამ შემთხვევაში განსაზღვრება 5.1-ში განიხილება a წერტილის მიდამოს მხოლოდ ის წერტილები, რომელზედაც ფუნქცია განსაზღვრულია.

ისევე როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, მრავალი ცვლადის ფუნქციათა ზღვრებისთვისაც ადგილი აქვს შესაბამის თეორემებს, ჯამის, ნამრავლის, ფარდობის ზღვრების შესახებ და სხვა თეორემებსაც.

განვიხილოთ მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ ჩასმა $x^2+y^2=t$, მაშინ $t\to 0$, როცა $x\to 0$ და $y\to 0$, ამიტომ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1+t}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{t(1+\sqrt{1+t})}=-\frac{1}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{(x, y)\to(0,1)} \frac{\sin(x-y+1)}{x-y+1}=1.$$

მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი მიმდევრობა $\{(x_n, y_n)\}$ ისეთი, რომ $x_n-y_n+1\neq 0$ და $x_n\to 0$ $y_n\to 1$.

შემოვიღოთ ჩასმა $x_n - y_n + 1 = \alpha_n$, მაშინ $\alpha_n \to 0$, როცა $x_n \to 0$ და $y_n \to 1$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} = 1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$$

მართლაც, $x^2+y^2 \geqslant 2|x|\cdot|y|$ უტოლობის ძალით გვაქვს:

$$|f(x, y) - 0| = \frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$$

ამიტომ თუ მოცემული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ავიღებთ $\delta = 2\varepsilon$, მაშინ იმ (x, y) წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ გვექნება:

$$|f(x, y) - 0| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვაჩვენოთ, რომ $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ფუნქციას $(0, 0)$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

მართლაც, განვიხილოთ $(0, 0)$ წერტილისაკენ კრებადი ორი მიმდევრობა $\{(x_n, y_n)\}$ და $\{(x_n', y_n')\}$, სადაც $y_n = x_n$ და $y_n' = 2x_n'$. გვაქვს

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^2}{2x_n^2} = \frac{1}{2},$$

$$f(x_n', y_n') = \frac{2x_n'^2}{x_n'^2 + 4x_n'^2} = \frac{2}{5}.$$

მაშასადამე

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = \frac{2}{5},$$

ე. ი. $f(x, y)$ ფუნქციას (0,0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვაჩვენოთ, რომ $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ ფუნქციას (0,0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია, თუმცა (0,0) წერტილზე გამავალი ნებისმიერი $y=kx$ წრფის გასწვრივ მას გააჩნია ზღვარი და ის უდრის ნულს.

მართლაც,

$$f(x, kx) = \frac{k x^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \to 0,$$

როცა $x \to 0$.

ახლა, ვთქვათ, $y = x^2$, მაშინ

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2},$$

ე. ი.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x^2}} f(x, y) = \frac{1}{2}.$$

ამრიგად, მოცემულ ფუნქციას (0,0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} = 0.$$

მართლაც, როცა $x > 0$ და $y > 0$, მაშინ

$$0 < \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} \leqslant \frac{(x + y)^2}{e^{x+y}},$$

ამიტომ

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} \leqslant \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0.$$

ე. ი.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} = 0.$$

ვთქვათ $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე $|x-x_0|<a$, $|y-y_0|<b$ მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით (x_0, y_0) წერტილისა. დავუშვათ, რომ $\forall x \in]x_0-a, x_0+a[$, $x \neq x_0$ არსებობს

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = g(x).$$

თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

მაშინ, მას ეწოდება განმეორებითი ზღვარი.

ანალოგიურად განისაზღვრება განმეორებითი ზღვარი

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

როგორც § 5-ში (მაგალითი 4) ვნახეთ ამ ფუნქციას (0,0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. მიუხედავად ამისა

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ $f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. ცხადია, რომ

$\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ არ არსებობს, თუმცა

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1,$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1.$$

ეს არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც გააჩნია ერთმანეთის არატოლი განმეორებითი ზღვრები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} + y \sin \dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad xy \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad xy = 0. \end{cases}$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

რაც შეეხება განმეორებით

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)\right] \text{ და } \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)\right]$$

ზღვრებს ისინი არ არსებობენ. ეს არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც გააჩნია ზღვარი, მაგრამ არ გააჩნია არცერთი განმეორებითი ზღვარი.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან გამომდინარეობს, რომ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის არსებობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს განმეორებითი ზღვრების არსებობა, და პირიქით, განმეორებითი ზღვრების (თანაც ერთმანეთის ტოლი განმეორებითი ზღვრების) არსებობიდან არ გამომდინარეობს ფუნქციის ზღვრის არსებობა. მიუხედავად ამისა ამ ცნებებს შორის არსებობს გარკვეული კავშირი.

თ ე ო რ ე მ ა 6.1. ვთქვათ $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე $|x-x_0|<a$, $|y-y_0|<b$ მიდამოში, გარდა შესაძლებელია (x_0, y_0) წერტილისა. თუ არსებობს

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = A \tag{6.1}$$

და $\forall y \in (y_0 - b,\ y_0 + b),\ y \neq y_0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = g(y)$$

ზღვრები, მაშინ განმეორებითი $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ ზღვარი არსებობს, და

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $\varepsilon>0$ ნებისმიერი ფიქსირებული რიცხვია. (6.1)-ის ძალით, არსებობს ისეთი $\delta_1>0$ და $\delta_2>0$ რიცხვები, რომ

$$|f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.2}$$

როცა $0<|x-x_0|<\delta_1<a$, $0<|y-y_0|<\delta_2<b$.

თუ ავიღებთ y-ს იმ პირობით, რომ $0<|y-y_0|<\delta_2$, მაშინ (6.2) უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $x\to x_0$, მივიღებთ

$$|g(y) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{6.3}$$

ამრიგად (6.3) უტოლობას ადგილი აქვს ყოველი y-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $0<|y-y_0|<\delta_2$ უტოლობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{y\to y_0} g(y)=A,$$

ე. ი.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y)=A.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განმეორებითი ზღვრის ცნება შეიძლება შემოვიყვანოთ ეგრეთწოდებული რიცხვთა ორმაგი $\{a_{m,n}\}$ მიმდევრობისათვის, $m, n\in N$ (ე. ი. ისეთი ფუნქციისათვის რომლის არგუმენტები ღებულობენ ნატურალურ რიცხვთა მნიშვნელობებს). სახელდობრ, სიმბოლო $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a_{m,n}$ ნიშნავს, რომ ჯერ ყოველი ფიქსირებული m-სათვის განისაზღვრება $b_m=\lim\limits_{n\to\infty} a_{m,n}$ და შემდეგ კი გამოითვლება $\{b_m\}$ მიმდევრობის ზღვარი.

განვიხილოთ ორმაგი მიმდევრობა $\{a_{m,n}\}$, სადაც

$$a_{m,n}=\cos^m 2\pi n!\,x.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n!\,x=\begin{cases}1, & \text{როცა } x \text{ — რაციონალური რიცხვია,}\\ 0, & \text{როცა } x \text{ — ირაციონალური რიცხვია.}\end{cases}$$

მართლაც, ვთქვათ $x=\dfrac{p}{q}$, სადაც p და q — მთელი რიცხვებია, ამასთან q დადებითია. მაშინ როცა $n\geqslant q$ გვაქვს $\cos 2\pi n!\,x=1$, ამიტომ

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\geqslant q}}\cos^m 2\pi n!\,x=1,$$

აქედან გამომდინარე

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n!\,x=1.$$

ახლა ვთქვათ, x—ირაციონალური რიცხვია, მაშინ ნებისმიერი n-სათვის $|\cos 2\pi n!\,x|<1$, ამიტომ

$$\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n!\,x=0.$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n!\,x = 0.$$

ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ დირიხლეს* ფუნქცია შეიძლება ანალიზურად წარმოვიდგინოთ განმეორებითი ზღვრის საშუალებით:

$$D(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi n!\,x.$$

§ 7. მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა

განსაზღვრება 7.1. $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ წერტილში, თუ იგი განსაზღვრულია $x^{(0)}$ წერტილის რაიმე მიდამოში (ან $x^{(0)}$ ფუნქციის განსაზღვრის არის საზღვრის წერტილია) და

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})\,. \tag{7.1}$$

წერტილს, რომელშიც ფუნქცია უწყვეტია, ამ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი ეწოდება.

თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის ზღვრის კოშისა და ჰეინეს განსაზღვრებებს, ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრება შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

ა) $u = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $x^{(0)}$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad \rho(x, x^{(0)}) < \delta.$$

ბ) $u = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $x^{(0)}$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია $x^{(0)}$ წერტილისაკენ, $\{f(x^{(n)})\}$ მიმდევრობა კრებადია $f(x^{(0)})$ რიცხვისაკენ.

მოვიყვანოთ ფუნქციის უწყვეტობის კიდევ ერთი განსაზღვრება. (7.1) ტოლობიდან გვაქვს

$$\lim_{\substack{x_1 - x_1^{(0)}\to 0\\ x_2 - x_2^{(0)}\to 0\\ \cdots\cdots\\ x_m - x_m^{(0)}\to 0}} [f(x) - f(x^{(0)})] = 0. \tag{7.2}$$

* დირიხლე (1805—1859) — გერმანელი მათემატიკოსი.

$x_i - x_i^{(0)}$, $(i=1, 2, \dots, m)$ სხვაობას ეწოდება x_i არგუმენტის ნაზრდი და Δx_i $(i=1, 2, \dots, m)$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო

$$f(x) - f(x^{(0)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) =$$
$$= f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$$

—სხვაობას ფუნქციის სრული ნაზრდი $x^{(0)}$ წერტილში და Δu სიმბოლოთი აღინიშნება.

(7.2) ტოლობა ახალი აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} \Delta u = 0 \quad \text{ან} \quad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ x_2 \to x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} \Delta u = 0. \tag{7.3}$$

(7.3) ტოლობის საფუძველზე ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს: ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი წერტილში, თუ ამ წერტილში არგუმენტების უსასრულოდ მცირე ნაზრდებს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე სრული ნაზრდი.

ვთქვათ $f(x)$ უწყვეტია $x^{(0)}$ წერტილში, ე. ი.

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}) .$$

რადგან $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} x = x^{(0)}$, ამიტომ ეს ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(\lim_{x \to x^{(0)}} x).$$

მაშასადამე, თუ ფუნქცია უწყვეტია, შეიძლება ზღვარზე გადასვლა „ფუნქციის ნიშნის“ ქვეშ — არგუმენტში.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი რაიმე D არეში, თუ იგი უწყვეტია ამ არის ყოველ წერტილში.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x^{(0)}$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით $x^{(0)}$ წერტილისა (ან $x^{(0)}$ ფუნქციის განსაზღვრის არის საზღვრის წერტილია). $x^{(0)}$ წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

ა) $x^{(0)}$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის;

ბ) ფუნქციას $x^{(0)}$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია;

გ) $x^{(0)}$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა განსხვავებულია $x^{(0)}$ წერტილში ფუნქციის ზღვრისაგან.

თუ $x^{(0)}$ არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას (წყვეტილია) $x^{(0)}$ წერტილში.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას $x^{(0)}$ წერტილში, მაშინ არსებობს $\varepsilon_0>0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $\delta>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება x' წერტილი, რომლისთვისაც $\rho(x', x^{(0)})<\delta$, ხოლო $|f(x')-f(x^{(0)})|\geqslant\varepsilon_0$.

მოვიყვანოთ უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციის მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ფუნქცია.

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0.\end{cases}$$

როგორც § 5-ში (მაგალითი 4) ვნახეთ ამ ფუნქციას (0.0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია, ე. ი. ის ამ წერტილში განიცდის წყვეტას. Oxy სიბრტყის სხვა წერტილებში მოცემული ფუნქცია უწყვეტია (აჩვენეთ).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}, & \text{როცა} \quad x\neq y,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=y.\end{cases}$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან. ვაჩვენოთ, რომ $y=x$ წრფის ყოველი წერტილი ამ ფუნქციის წყვეტის წერტილია. ავიღოთ $y=x$ წრფეზე რაიმე $M(a, a)$ წერტილი. განვიხილოთ ამ წერტილისაკენ კრებადი წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა

$$\left\{M_n\left(a+\frac{1}{n},\ a-\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

ცხადია $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=M$, ხოლო

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=+\infty.$$

ამრიგად, მოცემული ფუნქცია წყვეტილია $y=x$ წრფის ყოველ წერტილში. ადვილია ჩვენება, რომ ეს ფუნქცია უწყვეტია Oxy სიბრტყის დანარჩენ წერტილებში.

მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა.

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. თუ მრავალი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამ წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ*.

ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა საზოგადოდ მართებული არ არის. მართლაც, მაგალით 1-ში განხილული ფუნქცია წყვეტილია (0,0) წერტილში. ვაჩვენოთ, რომ იგი ამ წერტილში უწყვეტია ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ. ცხადია

$$f(x,\ 0) = f(0,\ y) = 0,$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x,\ 0) = \lim_{y\to 0} f(0,\ y) = 0 = f(0,\ 0).$$

ე. ი. $f(x,\ y)$ ფუნქცია უწყვეტია (0,0) წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ.

§ 8. მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის თვისებები

ისე, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვისაც მართებულია შემდეგი თეორემები:

თ ე ო რ ე მ ა 8.1. რაიმე წერტილში უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ წერტილში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან, აგრეთვე უწყვეტია ამ წერტილში.

თ ე ო რ ე მ ა 8.2. თუ ფუნქცია უწყვეტია წერტილში, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ წერტილის რაიმე მიდამოში.

თ ე ო რ ე მ ა 8.3. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x^{(0)}$ წერტილში და $f(x^{(0)}) \neq 0$, მაშინ არსებობს $x^{(0)}$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს იგივე ნიშანი, რაც $f(x^{(0)})$-ს.

თ ე ო რ ე მ ა 8.4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქციაც უწყვეტია იმავე წერტილში.

თ ე ო რ ე მ ა 8.5 (უწყვეტ ფუნქციათა კომპოზიციის შესახებ). ვთქვათ

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1,\ x_2, \dots, x_m),\ i = 1,\ 2, \dots, n$$

---

* $f(x_1,\ x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ წერტილში x_1 ცვლადის მიმართ, თუ ერთი ცვლადის $f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ფუნქცია უწყვეტია $x_1^{(0)}$ წერტილში.

ფუნქციები უწყვეტია $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})\in R^m$ წერტილში, ხოლო $f(y)=f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ფუნქცია უწყვეტია $y^{(0)}=(\varphi_1(x^{(0)}), \varphi_2(x^{(0)}), \ldots, \ldots, \varphi_n(x^{(0)}))\in R^n$ წერტილში. მაშინ რთული ფუნქცია

$$F(x)=f[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

უწყვეტია $x^{(0)}$ წერტილში.

თ ე ო რ ე მ ა 8.6 (ვაიერშტრასის პირველი თეორემა). ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ არეზე.

თ ე ო რ ე მ ა 8.7 (ვაიერშტრასის მეორე თეორემა). ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქცია აღწევს ამ არეზე თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს.

ამრიგად, ჩაკეტილ არეზე უწყვეტ ფუნქციას ამ არეზე აქვს მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობანი.

თ ე ო რ ე მ ა 8.8 (კოში). ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ჩაკეტილ D არეზე. თუ $x^{(1)}, x^{(2)}\in D$ და $f(x^{(1)})\neq f(x^{(2)})$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია D-ში მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $f(x^{(1)})$ და $f(x^{(2)})$ რიცხვებს შორის.

შ ე დ ე გ ი. ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქცია ამ არეში ღებულობს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია მის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის, ე. ი. ჩაკეტილ არეში უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის სეგმენტი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 8.1. D არეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება თანაბრად უწყვეტი D-ზე, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ε-ზე, ისეთი, რომ D არის ნებისმიერი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\rho(x', x'')<\delta$, მართებულია უტოლობა

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტი არ არის D არეზე, მაშინ არსებობს ისეთი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი $\delta>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება D არეზე ორი x' და x'' წერტილი, რომლისთვისაც $\rho(x', x'')<\delta$, ხოლო $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$.

თ ე ო რ ე მ ა 8.9 (კანტორი*). შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამ არეზე.

---

* კანტორი (1845—1918) — გერმანელი მათემატიკოსი.

§ 9. მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების გეომეტრიული შინაარსი

სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი ცვლადის $z=f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე D არეში. ვთქვათ $(x_0, y_0)\in D$. გამოსახულებებს

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0),$$

სადაც $\Delta x = x - x_0$ და $\Delta y = y - y_0$, ეწოდება შესაბამისად $z=f(x, y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდი x-ით და კერძო ნაზრდი y-ით (x_0, y_0) წერტილში.

განსაზღვრება 9.1. f ფუნქციის კერძო წარმოებული x ცვლადით (x_0, y_0) წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის x არგუმენტით კერძო ნაზრდის x არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როდესაც არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

(x_0, y_0) წერტილში $z=f(x, y)$ ფუნქციის x ცვლადით კერძო წარმოებულის აღსანიშნავად მიღებულია z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ან $z'_x(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ სიმბოლოები. ე. ი. თანახმად განსაზღვრებისა

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $z=f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y ცვლადით (x_0, y_0) წერტილში:

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებული რომელიმე ცვლადით არის ამ ფუნქციის, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებული, თუ მეორე ცვლადს გაწარმოებისას ჩავთვლით, როგორც მუდმივს. ამიტომ, კერძო წარმოებულები გამოითვლება ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულებითა და წესებით.

მაგალითები:

1. $z = x^2 \sin y;$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y,$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y;$

2. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y};$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2},$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2+y^2};$

3. $z = \ln(x^2+y^2);$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2},$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}.$

თუ m ცვლადის $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $D\subset R^m$ არეში, მაშინ მისი კერძო წარმოებულები რაიმე $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})\in D$ წერტილში განისაზღვრება ისევე, როგორც ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში. მაგალითად

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1} u}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1^{(0)}+\Delta x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})}{\Delta x_1}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობიდან მოცემულ წერტილში არ გამომდინარეობს მისი კერძო წარმოებულების არსებობა ამ წერტილში. მაგალითად $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქცია უწყვეტია (0,0) წერტილში, მაგრამ მას ამ წერტილში კერძო წარმოებულები არ გააჩნია. მართლაც

$$\frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

მაგრამ $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია, როცა $\Delta x\to 0$. ე. ი. $f_x'(0, 0)$ არ არსებობს. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $f_y'(0, 0)$-იც არ არსებობს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების არსებობიდან მოცემულ წერტილში არ გამომდინარეობს მისი უწყვეტობა ამ წერტილში. მართლაც,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტილია (0,0) წერტილში (§ 7, მაგალითი 1), ადვილია ჩვენება, რომ

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

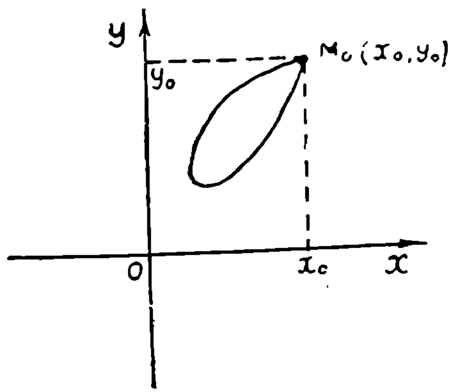
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. კერძო წარმოებულების ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრება გამოიყენება ფუნქციის განსაზღვრის არის შიგა წერტი-

ლებისათვის. ეს განსაზღვრება ფუნქციის განსაზღვრის არის საზღვრის წერტილებისათვის საზოგადოდ არ გამოდგება. მართლაც, საზღვრის წერტილი შეიძლება იყოს ისეთი, რომ ამ წერტილზე კერძო ნაზრდები არ არსებობდეს. ასეთია მაგალითად ნახ. 7-ზე მოყვანილი არისათვის M_0 წერტილი. ასეთ შემთხვევაში თუ არსებობს $\frac{\partial f(M)}{\partial x}$ არის ყოველ შიგა წერტილში და არსებობს

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\partial f(M)}{\partial x},$$

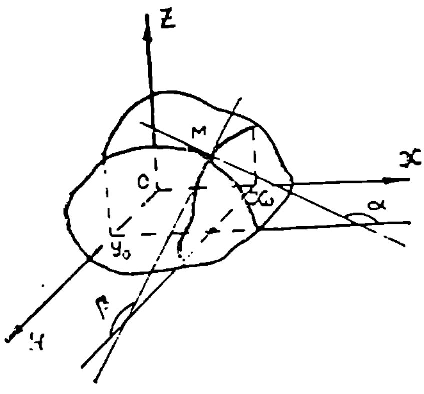
მაშინ განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \lim_{M \to M_0} \frac{\partial f(M)}{\partial x}.$$



ნახ. 7

ორი ცვლადის $z = f(x, y)$ ფუნქციის $f'_x(x_0, y_0)$ და $f'_y(x_0, y_0)$ კერძო წარმოებულების განსაზღვრების ძალით მათი გეომეტრიული შინაარსი უშუალოდ გამომდინარეობს ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან.



ნახ. 8

კერძოდ, გეომეტრიულად $f'_x(x_0, y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს $z = f(x, y)$ ზედაპირისა და $y = y_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან (ნახ. 8), ხოლო კერძო წარმოებული $f'_y(x_0, y_0)$ წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც შეადგენს $z = f(x, y)$ ზედაპირისა და $x = x_0$ სიბრტყის გადაკვეთით მიღებული წირის $M[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები Oy ღერძის დადებით მიმართულებასთან (ნახ. 8). ამრიგად

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta.$$

§ 10. მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობა. სრული დიფერენციალი. კავშირი კერძო წარმოებულებთან. დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობა

განვიხილოთ ორი ცვლადის $z=f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე D არეში. ვთქვათ $(x, y)\in D$.

გამოსახულებას

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y)$$

ეწოდება $z=f(x, y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი (x, y) წერტილში.

განსაზღვრება 10.1. f ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (x, y) წერტილში, თუ ამ წერტილში ფუნქციის სრული ნაზრდი შეიძლება წარმოიდგინოს შემდეგი სახით

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x,\ \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x,\ \Delta y)\,\Delta y, \qquad (10.1)$$

სადაც A და B რაღაც რიცხვებია, რომლებიც არ არის დამოკიდებული Δx-ზე და Δy-ზე, ხოლო $\alpha(\Delta x,\ \Delta y)$ და $\beta(\Delta x,\ \Delta y)$ უსასრულოდ მცირეებია, როცა $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

შეთანხმებით მივიღოთ, რომ $\alpha(\Delta x, \Delta y)=\beta(\Delta x,\ \Delta y)=0$, როცა $\Delta x=\Delta y=0$ (ე. ი. α და β უწყვეტი ფუნქციებია $(0,\ 0)$ წერტილში)

განსაზღვრება 10.2. $A\Delta x+B\Delta y$ წრფივ ფუნქციას (Δx-ისა და Δy-ის მიმართ) ეწოდება f ფუნქციის სრული დიფერენციალი (x, y) წერტილში და აღინიშნება dz ან $df(x, y)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (10.2)$$

(10.1) და (10.2) დამოკიდებულებებიდან გვაქვს:

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x,\ \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $z=f(x, y)$ ფუნქციის სრულ ნაზრდსა და სრულ დიფერენციალს შორის $\Delta z - dz$ სხვაობა მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ უსასრულოდ მცირესთან შედარებით. მართლაც

$$\left|\frac{\Delta z - dz}{\rho}\right| = \frac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\rho} \leqslant \frac{|\Delta x|}{\rho}|\alpha| + \frac{|\Delta y|}{\rho}|\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

საიდანაც

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{|\Delta z - dz|}{\rho} = 0.$$

ამრიგად

$$\Delta z = dz + o(\rho). \qquad (10.3)$$

.3)-დან გვაქვს, რომ თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ მისი ული ნაზრდი ასე წარმოიდგინება

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho). \tag{10.4}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (10.4) წარმოდგენა (10.1)-ის ეკვივალენტურია. მართლაც, გვაქვს

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\rho} =$$

$$= \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x}{\rho}\right]\Delta x + \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right]\Delta y =$$

$$= \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

დაც $\alpha \to 0$ და $\beta \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. ე. ი. (10.1 ა (10.4) წარმოდგენები ეკვივალენტურია.

თ ე ო რ ე მ ა 10.1. თუ f ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს კერძო წარმოებულები $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ და ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f'_x(x, y) = A, \; f'_y(x, y) = B.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $z = f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში, ამიტომ ადგილი აქვს (10.1) წარმოდგენას. თუ ამ ტოლობაში დავუშვებთ $\Delta y = 0$, მივიღებთ

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\,\Delta x,$$

სადაც $\alpha(\Delta x, 0) \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$. თუ გავყოფთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს Δx-ზე და მიღებულ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$, გვექნება

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = B.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, თუ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილზე, მაშინ თეორემა 10.1-ის ძალით

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \tag{10.5}$$

დამოუკიდებელი x და y ცვლადების დიფერენციალები ვუწოდოთ ამ ცვლადების ნაზრდებს: $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. მაშინ (10.5) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \tag{10.6}$$

თ ე ო რ ე მ ა 10.2. თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $z=f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში, მაშინ (10.1) ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0,$$

ე. ი. $f(x, y)$ უწყვეტია (x, y) წერტილში.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თეორემა 10.1-სა და 10.2-ის შებრუნება საზოგადოდ არ შეიძლება. მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x, y)=\sqrt{|xy|}\,.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია (0,0) წერტილში და გააჩნია კერძო წარმოებულები:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{0\cdot|\Delta x|}-0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y} = 0.$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი (0,0) წერტილში. ამისათვის განვიხილოთ სრული ნაზრდი (0,0) წერტილში:

$$\Delta z = \sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}\,.$$

დავუშვათ, რომ მოცემული ფუნქცია დიფერენცირებადია (0,0) წერტილში, მაშინ თეორემა 10.1-ის ძალით ადგილი ექნება ტოლობას

$$\Delta z = 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\,\Delta y = \alpha\,\Delta x + \beta\Delta y,$$

სადაც $\alpha\to 0$ და $\beta\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

მაგრამ, თუ $\Delta x=\Delta y>0$, მაშინ გვაქვს

$$\Delta z = \sqrt{\Delta x\cdot\Delta y} = \Delta x = \alpha\Delta x + \beta\Delta x,$$

საიდანაც $\alpha+\beta=1$. ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ α და β უსასრულოდ მცირეებია. გამომდინარე აქედან მოცემული ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი (0,0) წერტილში.

ამრიგად, $z=\sqrt{|xy|}$ არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა რომელიც უწყვეტია (0,0) წერტილში, აქვს კერძო წარმოებულები ამ წერტილში, მაგრამ დიფერენცირებადი არ არის ამ წერტილში. ე. ი. ფუნქციის უწყვეტობა და კერძო წარმოებულების არსებობა არის დიფერენცირებადობის აუცილებელი მაგრამ არა საკმარისი პირობები.

თ ე ო რ ე მ ა 10.3 (ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობა). თუ $f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ არსებობს $M(x, y)$ წერტილის რაიმე $u(M, \delta)$ მიდამოში და $M(x, y)$ წერტილში ისინი უწყვეტია, მაშინ ამ წერტილში $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ნებისმიერი Δx და Δy-სათვის, რომლებისთვისაც $(x+\Delta x, y+\Delta y)\in u(M, \delta)$, ფუნქციის სრული ნაზრდი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$\Delta z=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)].$$

ლაგრანჟის* თეორემის ძალით

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x,$$
$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

სადაც $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$. მაშასადამე

$$\Delta z=f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y. \qquad (10.7)$$

f'_x და f'_y წარმოებულები უწყვეტია $M(x, y)$ წერტილზე, ამიტომ

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)&=f'_x(x, y)+\alpha(\Delta x, \Delta y),\\ f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)&=f'_y(x, y)+\beta(\Delta x, \Delta y),\end{aligned}\right\} \qquad (10.8)$$

სადაც

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x, \Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(\Delta x, \Delta y)=0. \qquad (10.9)$$

---

* ლაგრანჟი (1736—1813) — ფრანგი მათემატიკოსი.

(10.6) ტოლობების გათვალისწინებით (10.7) ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

ეს კი (10.9)-ის ძალით ნიშნავს, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. არსებობს მრავალი ცვლადის ისეთი დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომლის კერძო წარმოებულები წყვეტილია.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{როცა} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

ადვილია ჩვენება, რომ $f(x, y)$ უწყვეტია R^2-ზე და $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. ვაჩვენოთ, რომ $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ წყვეტილი ფუნქციებია $(0, 0)$ წერტილში.

თუ $x^2 + y^2 \neq 0$, მაშინ

$$f'_x(x, y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

ეს ფუნქცია განიცდის წყვეტას $(0,0)$ წერტილში. მართლაც, Ox ღერძის $x>0$ წერტილებზე გვაქვს

$$f'_x(x, 0) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

ამ ფუნქციას კი $(0,0)$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია, ე. ი. $f'_x(x, y)$ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $f'_y(x, y)$ ფუნქციაც განიცდის წყვეტას $(0, 0)$ წერტილში.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მოცემული ფუნქცია დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილში. გვაქვს

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \rho^2\sin\frac{1}{\rho}.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $A = B = 0$ და $\varepsilon = \rho\sin\dfrac{1}{\rho}$ მივიღებთ

$$\Delta f(0, 0) = 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + \varepsilon\rho,$$

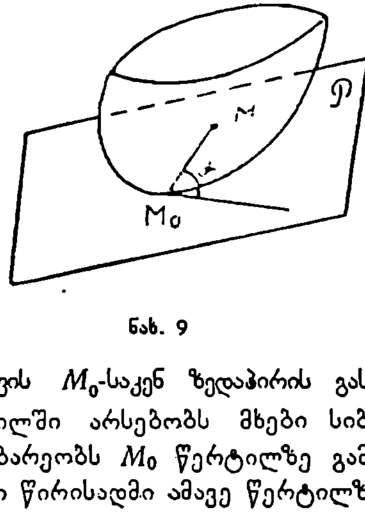
სადაც $\varepsilon \to 0$, როცა $\rho \to 0$ ე. ი. მოცემული ფუნქცია დიფერენცირებადია (0,0) წერტილში.

ამრიგად, კერძო წარმოებულების უწყვეტობა არის საკმარისი მაგრამ არა აუცილებელი პირობა ფუნქციის დიფერენცირებადობისათვის.

§ 11. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი. ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობისა და სრული დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსის გასარკვევად თავდაპირველად შემოვიყვანოთ $z = f(x, y)$ ზედაპირისადმი მოცემულ წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის ცნება.

ვთქვათ ზედაპირზე მოცემულია რაიმე M_0 წერტილი. განვიხილოთ ამ ზედაპირზე ნებისმიერი მეორე M წერტილი და გავავლოთ M_0M მკვეთი (ნახ. 9). თუ M წერტილი მოძრაობს ზედაპირზე, ხოლო M_0 უძრავია, მაშინ მკვეთი იცვლის თავის მდებარეობას. ზედაპირის M_0 წერტილში გავლებულ **P** სიბრტყეს ეწოდება მოცემული ზედაპირის მხები სიბრტყე M_0 წერტილში, თუ კუთხე **P** სიბრტყესა და M_0M მკვეთს შორის მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა M წერტილი მიისწრაფვის M_0-საკენ ზედაპირის გასწვრივ.



ნახ. 9

შევნიშნოთ, რომ თუ M_0 წერტილში არსებობს მხები სიბრტყე, მაშინ ცხადია, ამ სიბრტყეში მდებარეობს M_0 წერტილზე გამავალი და ზედაპირზე მდებარე ნებისმიერი წირისადმი ამავე წერტილზე გავლებული მხები წრფე.

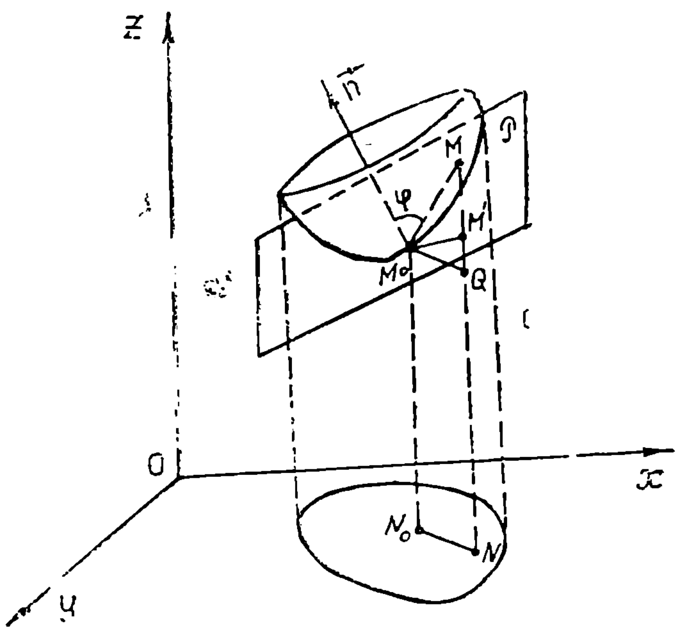
მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 11.1. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $N_0(x_0, y_0)$ წერტილში, მაშინ $z = f(x, y)$ ფუნქციის გრაფიკის შესაბამის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში, სადაც $z_0 = f(x_0, y_0)$, გააჩნია მხები სიბრტყე და მისი განტოლებაა

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \qquad (11.1)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. (11.1) განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყე გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში და მისი ნორმალური ვექტორია $\vec{n}=\{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\}$. ვაჩვენოთ, რომ ეს სიბრტყე არის მხები სიბრტყე. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ φ კუთხე $\vec{n}$ და $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორებს შორის (ნახ. 10) მიისწრაფვის $\frac{\pi}{2}$-კენ, როცა $M(x, y)$ წერტილი ზედაპირის გასწვრივ ნებისმიერად მიისწრაფვის M_0-საკენ. $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის კოორდინატებია $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$. ორ ვექტორს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულის ძალით

$$\cos\varphi = \frac{f'_x\cdot(x-x_0)+f'_y\cdot(y-y_0)-(z-z_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\cdot\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}.$$



ნახ. 10

$z=f(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობიდან $N_0(x_0, y_0)$ წერტილში, გამომდინარეობს, რომ (იხილეთ (10.3))

$$f'_x\cdot(x-x_0)+f'_y\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=dz-\Delta z=o(\rho),$$

სადაც $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, ამიტომ

$$|\cos\varphi| \leqslant \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho} \to 0,$$

როცა $\rho \to 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{M\to M_0} \varphi = \frac{\pi}{2}$.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, $z=f(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა (x_0, y_0) წერტილში გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ $z=f(x, y)$ ზედაპირს $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ წერტილში გააჩნია მხები სიბრტყე.

განსაზღვრება 11.1. წრფეს, რომელიც მხები სიბრტყის მართობია და გადის შეხების წერტილში, ზედაპირის ნორმალი ეწოდება.

რადგანაც ნორმალის მიმმართველი ვექტორია $\vec{n} = \{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\}$, ამიტომ მისი განტოლება იქნება

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

თუ ნორმალის მიმართულების კოსინუსებს აღვნიშნავთ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$-თი, გვექნება

$$\cos\alpha = \frac{f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \quad \cos\beta = \frac{f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}.$$

დავადგინოთ ახლა სრული დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი. რადგანაც $z=f(x, y)$ დიფერენცირებადია $N_0(x_0, y_0)$ წერტილში, ამიტომ

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0). \qquad (11.2)$$

(11.1) და (11.2) ტოლობებიდან გვაქვს

$$dz = Z - z_0,$$

სადაც $z_0=f(x_0, y_0)$, ხოლო Z არის (x_0, y_0, z_0) წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის აპლიკატი $N(x, y)$ წერტილზე. ე. ი. $z=f(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი dz წერტილში უდრის ამ ფუნქციის გრაფიკისადმი შესაბამის წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის აპლიკატის ნაზრდს QM'-ს ($N_0M_0=NQ$) (ნახ. 10).

§ 12. რთული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, რაიმე D არეში მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია

$$z = f(x, y).$$

ვიგულისხმოთ, რომ x და y წარმოადგენენ ერთი t ცვლადის ფუნქციებს:

$$x = \varphi(t), \quad y = g(t),$$

რომლებიც განსაზღვრულია $]\alpha, \beta[$ შუალედში. დავუშვათ, რომ (x, y) წერტილი არ გამოდის D არიდან, როცა t იცვლება $]\alpha, \beta[$ შუალედში. ამ შემთხვევაში

$$z = f[\varphi(t), \ g(t)]$$

წარმოადგენს ერთი t ცვლადის რთულ ფუნქციას. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 12.1. ვთქვათ $x=\varphi(t)$ და $y=g(t)$ წარმოებადი ფუნქციებია t_0 წერტილში. ამასთან $x_0=\varphi(t_0)$ და $y_0=g(t_0)$. თუ $z=f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში, მაშინ $z=f[\varphi(t), g(t)]$ რთული ფუნქცია წარმოებადია t_0 წერტილში და იგი გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{12.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მივცეთ t არგუმენტს t_0 წერტილში Δt ნაზრდი. მაშინ x და y ფუნქციებიც მიიღებს Δx, Δy ნაზრდებს. x და y-ის მიღებულ ნაზრდებს შეესაბამება $z=f(x, y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

რადგანაც $z=f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, ამიტომ

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y, \tag{12.2}$$

სადაც $\alpha \to 0$ და $\beta \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. ამასთან $\alpha(0,0) = \beta(0,0) = 0$.

თუ (12.2) ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ Δt-ზე და შემდეგ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta t \to 0$ მივიღებთ (12.1) ტოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ $z=f(x, y)$, $y=\varphi(x)$, მაშინ (12.1) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dz}{dx}$ წარმოებულს ეწოდება z ფუნქციის სრული წარმოებული.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თეორემა 12.1-ში $z=f(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის მოთხოვნა არსებითია, მისი შეცვლა z'_x, z'_y კერძო

წარმოებულების არსებობით საზოგადოდ არ შეიძლება. მართლაც, ვანვიხილოთ რთული ფუნქცია

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = y = 0, \end{cases} \tag{12.3}$$

სადაც

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = g(t) = t. \tag{12.4}$$

ადვილია ჩვენება, რომ $z=f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია (0, 0) წერტილში (§ 5, მაგალითი 3) და გააჩნია კერძო წარმოებულები ამ წერტილში, ამასთან $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

თუ მოცემულ რთულ ფუნქციას წარმოებული გააჩნია $t=0$ წერტილში, მაშინ ის (12.1)-ის ძალით უნდა იყოს

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$$

მაგრამ (12.3) და (12.4)-დან გვაქვს, რომ $z= \dfrac{|t|}{\sqrt{2}}$. ეს ფუნქცია, კი როგორც ვიცით არ არის წარმოებადი $t=0$ წერტილში.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$z=f(x, y),$$

სადაც $x = \varphi(t, \tau)$, $y = g(t, \tau)$. ამ შემთხვევაში z წარმოადგენს ორი t და τ ცვლადის რთულ ფუნქციას. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 12.2. ვთქვათ $x=\varphi(t, \tau)$ და $y=g(t, \tau)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია (t_0, τ_0) წერტილში, ხოლო $z=f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილში, სადაც $x_0 = \varphi(t_0, \tau_0)$, $y_0 = g(t_0, \tau_0)$. მაშინ $z = f[\varphi(t, \tau), g(t, \tau)]$ რთული ფუნქცია დიფერენცირებადია (t_0, τ_0) წერტილში და კერძო წარმოებულები გამოითვლება ფორმულებით

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}. \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$[*]

---

[*] 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ და $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები გამოთვლილია (x_0, y_0) წერტილში, ხოლო $\dfrac{\partial x}{\partial t}$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \tau}$ კი (t_0, τ_0) წერტილში.

2) თეორემა 12.2-ში მტკიცდება რთული $f[\varphi(t, \tau), g(t, \tau)]$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა და გამომდინარე აქედან (12.5) ფორმულების მართებულობა. თუმცა (12.5) ფორმულები უშუალოდ მიიღება (12.1) ფორმულიდან.

დამტკიცება. t და τ ცვლადებს (t_0, τ_0) წერტილში მივცეთ ნაზრდები Δt და $\Delta\tau$; მაშინ x და y-იც მიიღებენ სათანადო ნაზრდებს Δx და Δy. რადგანაც $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, ამიტომ

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad (12.6)$$

სადაც $\alpha \to 0$ და $\beta \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, ამასთან $\alpha(0, 0) = \beta(0, 0) = 0$.

პირობით $x = \varphi(t, \tau)$ და $y = g(t, \tau)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია (t_0, τ_0) წერტილში. ამიტომ

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial x}{\partial \tau}\Delta\tau + o(\rho), \\ \Delta y &= \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial y}{\partial \tau}\Delta\tau + o(\rho), \end{aligned}\right\} \quad (12.7)$$

სადაც $\rho = \sqrt{\Delta t^2 + \Delta\tau^2}$. თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (12.6) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial x}{\partial \tau}\Delta\tau\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial y}{\partial \tau}\Delta\tau\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)o(\rho) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Delta t + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)\Delta\tau +$$
$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)o(\rho) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \quad (12.8)$$

შევაფასოთ (12.8) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ბოლო ორი შესაკრები. რადგანაც $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ გამოთვლილია (x_0, y_0) წერტილში, ამდენად ის არ არის დამოკიდებული ρ-ზე, ამიტომ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right)o(\rho) = o(\rho). \quad (12.9)$$

(12.7) ტოლობებიდან გვაქვს

$$|\Delta x| < c_1\rho, \quad |\Delta y| < c_2\rho,$$

ხოლო $\alpha=0$ (1) და $\beta=0$ (1). გარდა ამისა რადგანაც x და y დიფერენ-ცირებადია, ამიტომ $\Delta x \to 0$ და $\Delta y \to 0$, როცა $\rho \to 0$. ამრიგად:

$$\alpha \Delta x + \beta \Delta y = o(\rho). \qquad (12.10)$$

(12.8), (12.9) და (12.10) დამოკიდებულებებიდან გვაქვს

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Delta t +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \Delta \tau + o(\rho).$$

ე. ი. $z=f[\varphi(t, \tau), g(t, \tau)]$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (t_0, τ_0) წერტილზე და ადგილი აქვს (12.5) ტოლობებს.

თეორემა დამტკიცებულია.

$\frac{\partial z}{\partial t}$ და $\frac{\partial z}{\partial \tau}$ წარმოებულებს ეწოდება z ფუნქციის სრული კერძო წარმოებულები.

შ ე დ ე გ ი. ვთქვათ $u=f(x, y, z)$, სადაც $x=t$, $y=\tau$ და $z=\varphi(t, \tau)$. თუ გავითვალისწინებთ ტოლობებს $\frac{\partial x}{\partial t}=1$, $\frac{\partial y}{\partial \tau}=1$, $\frac{\partial y}{\partial t}=0$, $\frac{\partial x}{\partial \tau}=0$, მაშინ (12.5) ფორმულები ჩაწერილი სამი ცვლადის ფუნქციისა-თვის მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

აქ $\frac{\partial u}{\partial t}$ და $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ არიან $f(t, \tau, \psi(t, \tau))$ რთული ფუნქციის სრული კერ-ძო წარმოებულები, ხოლო $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ და $\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)$ კი სამი ცვლადის $f(t, \tau, z)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებია t და τ ცვლადებით, რომლის გამოთვლის დროს z ჩათვლილია მუდმივად.

§ 13. სრული დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა

ვთქვათ $x=\varphi(t, \tau)$ და $y=g(t, \tau)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია (t_0, τ_0) წერტილში, ხოლო $z=f(x, y)$ — კი დიფერენცირებადია შესაბამის (x_0, y_0) წერტილში, სადაც $x_0=\varphi(t_0, \tau_0)$ და $y_0=g(t_0, \tau_0)$. თეორემა

12.2-ის ძალით რთული $z=f[\varphi(t, \tau), g(t, \tau)]$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (t_0, τ_0) წერტილში, ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial \tau} d\tau, \tag{13.1}$$

სადაც $\frac{\partial z}{\partial t}$ და $\frac{\partial z}{\partial \tau}$ განისაზღვრებიან (12.5) ტოლობებით. თუ $\frac{\partial z}{\partial t}$ და $\frac{\partial z}{\partial \tau}$-ს ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (13.1) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right) dt + \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}\right) d\tau = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau\right) + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial \tau} d\tau\right) = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \end{aligned} \tag{14.2}$$

ეს კი გარეგნულად იგივე ფორმულაა, რაც პირველი რიგის სრული დიფერენციალისათვის გვქონდა, როცა x და y დამოუკიდებელი ცვლადები იყო, ე. ი. ფუნქციის პირველი რიგის სრული დიფერენციალის ფორმა უცვლელი რჩება.

ამ თვისებას ეწოდება მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირველი რიგის სრული დეფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა.

შევნიშნოთ, რომ (10.6) და (13.2)ფორმულებში dx და dy სხვადასხვაა. პირველში dx და dy იგივეა, რაც Δx და Δy, მეორეში კი

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial \tau} d\tau,$$

ე. ი. dx და dy აქ წარმოადგენენ დამოუკიდებელი t და τ ცვლადების ფუნქციებს.

ვთქვათ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია, სადაც x და y დამოუკიდებელი ან დამოკიდებული ცვლადებია. სრული

დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ გადიფერენციალების შემდეგი წესები

$$
\begin{aligned}
&d(Cu) = Cdu \qquad (C = \text{const}),\\
&d(u+v) = du + dv,\\
&d(uv) = vdu + udv, \qquad\qquad (13.3)\\
&d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.
\end{aligned}
$$

დავამტკიცოთ, მაგალითად მეოთხე. გვაქვს

$$dz = d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

მაგრამ

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

ამიტომ

$$dz = d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2}dv = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

§ 14. ერთგვაროვანი ფუნქციები და ეილერის* თეორემა

განსაზღვრება 14.1. $D \subset R^m$ არეზე განსაზღვრულ m ცვლადის $u=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქციას ეწოდება p რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია ამ არეზე, თუ $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$ წერტილისათვის და ყოველი ისეთი $t \neq 0$ რიცხვისათვის, რომლისთვისაც $(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) \in D$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p f(x_1, x_2, \dots, x_m). \qquad (14.1)$$

p რიცხვს ეწოდება ფუნქციის ერთგვაროვნების მაჩვენებელი, ის შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი.

მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x, y, z) = \frac{\sin\dfrac{x}{y+z}}{\sqrt{x^5 + y^5 - z^5}}.$$

* ეილერი (1707—1783) — მათემატიკოსი, ფიზიკოსი, მექანიკოსი და ასტრონომი, წარმოშობით შვეიცარიელი.

ერთგვაროვანია. მართლაც

$$f(tx, ty, tz) = \frac{\sin \dfrac{tx}{ty+tz}}{\sqrt{x^5 t^5 + y^5 t^5 - z^5 t^5}} = t^{-\frac{5}{2}} f(x, y, z).$$

ამ ფუნქციის ერთგვაროვნების მაჩვენებელი $p = -\dfrac{5}{2}$.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 14.1 (ეილერი). თუ $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ რაიმე D არეში დიფერენცირებადი p რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა, მაშინ $A(x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$ წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} x_m = pu. \quad (14.2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ არის D არის ნებისმიერი წერტილი. განვიხილოთ რთული $u = f(t\, x_1^{(0)}, t\, x_2^{(0)}, \dots, t\, x_m^{(0)})$ ფუნქცია. თეორემა 12.1-ის ძალით

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} x_1^{(0)} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2^{(0)} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} x_m^{(0)}, \quad (14.3)$$

სადაც $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ წარმოებულები გამოთვლილია $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ წერტილზე. მეორეს მხრივ (14.1)-ის ძალით

$$u = f(t\, x_1^{(0)}, t\, x_2^{(0)}, \dots, t\, x_m^{(0)}) = t^p f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}).$$

ამ ტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{du}{dt} = p\, t^{p-1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}).$$

ე. ი.

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = pf(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}). \quad (14.4)$$

(14.3) და (14.4) ტოლობებიდან გამომდინარეობს (14.2) ტოლობის მართებულობა.

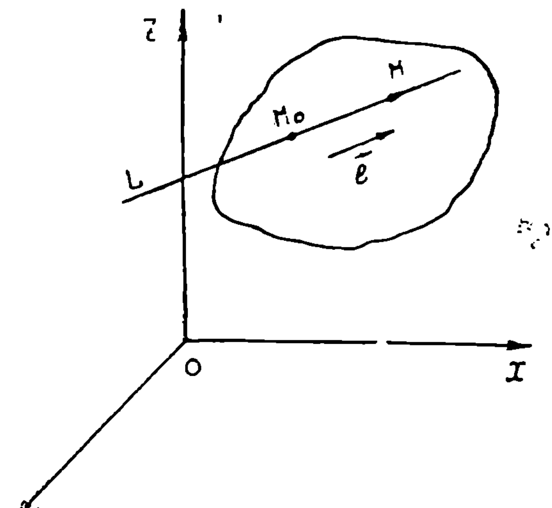
თეორემა დამტკიცებულია.

§ 15. წარმოებული მოცემული მიმართულებით. გრადიენტი

განვიხილოთ სამი ცვლადის $u=f(x, y, z)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე $D\subset R^3$ არეში.

ავიღოთ D არეში რაიმე $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი. ვთქვათ $\vec{e}=(\cos\alpha, \text{soc}\,\beta, \cos\gamma)$ ნებისმიერი ერთეულოვანი ვექტორია. გავავლოთ M_0 წერტილში $\vec{e}$ ვექტორის პარალელური რაიმე L წრფე. $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ იყოს D არეში მოთავსებული L წრფის ნებისმიერი წერტილი (ნახ. 11). $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის სიდიდე $\vec{e}$-ს მიმართ აღვნიშნოთ $\Delta_{\vec{e}} M_0M$-ით, ე. ი.

$$\Delta_{\vec{e}} M_0M=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$



ნახ. 11

თუ $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორს აქვს $\vec{e}$ ვექტორის მიმართულება და

$$\Delta_{\vec{e}} M_0M=-\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$

თუ $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორს აქვს $\vec{e}$-ის საწინააღმდეგო მიმართულება.

განსაზღვრება 15.1. ზღვარს

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\Delta_{\vec{e}} M_0M}=$$

$$=\lim_{\Delta_{\vec{e}} M_0M\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\Delta_{\vec{e}} M_0M},$$

თუ ის არსებობს, ეწოდება f ფუნქციის წარმოებული M_0 წერტილში $\vec{e}$ ვექტორის მიმართულებით და აღინიშნება $\frac{\partial u}{\partial e}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}$ ან $\frac{\partial f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial e}$ სიმბოლოებით.

თეორემა 15.1. თუ $u=f(x,\ y,\ z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში $f(x,\ y,\ z)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული ნებისმიერი $\vec{e}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ მიმართულებით და ეს წარმოებული გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (15.1)$$

დამტკიცება. ავიღოთ L წრფეზე ნებისმიერი წერტილი $M(x,\ y,\ z)$, $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის კოორდინატებია $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$. რადგანაც $\vec{e}\parallel\overrightarrow{M_0M}$, ამიტომ

$$x-x_0=t\cos\alpha,\ y-y_0=t\cos\beta,\ z-z_0=t\cos\gamma,$$

საიდანაც

$$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta,\ z=z_0+t\cos\gamma.$$

ამრიგად M_0M წრფის გასწვრივ f ფუნქცია არის ერთი t ცვლადის ფუნქცია

$$f(x,\ y,\ z)=f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma).$$

ცხადია ამ ფუნქციის წარმოებული t ცვლადით $t=0$ წერტილში (თუ ის არსებობს) არის f-ის წარმოებული M_0 წერტილში $\overrightarrow{M_0M}$ ვექ-

ტორის მიმართულებით, ამიტომ რთული ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელი (12.1) ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}=\frac{df}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

მაგრამ $\frac{dx}{dt}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt}=\cos\beta$, $\frac{dz}{dt}=\cos\gamma$, ამიტომ საბოლოოდ გვაქვს

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}=\frac{df(M_0)}{dt}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

კერძოდ, $\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial x}$, თუ $\alpha=0$, $\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial y}$, თუ $\beta=0$, $\alpha=\gamma=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial z}$, თუ $\gamma=0$, $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ $z=xy+y^2$ ფუნქციის წარმოებული $M_0(2,1)$ წერტილში $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის მიმართულებით, სადაც M არის წერტილი კოორდინატებით (5,—3).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ ერთეულოვანი $\vec{e}$ ვექტორი, რომელსაც აქვს $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის მიმართულება:

$$\overrightarrow{M_0M}=\{3,-4\};\quad |\overrightarrow{M_0M}|=5,\ \vec{e}=\frac{\overrightarrow{M_0M}}{|M_0M|}=\left\{\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right\},$$

ე. ი.

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\beta=-\frac{4}{5}.$$

გამოვითვალოთ მოცემული ფუნქციის კერძო წარმოებულები $M_0(2,1)$ წერტილში:

$$f'_x(2,1)=y\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=1,\quad f'_y(2,1)=x+2y\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=4.$$

(15.1) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial e}=\frac{3}{5}-\frac{16}{5}=-\frac{13}{5}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება ფუნქცია დიფერენცირებადი არ იყოს, მაგრამ მას ჰქონდეს წარმოებული ნებისმიერი მიმართულებით.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^6 + y^2}, & \text{როცა} \quad x \neq 0, \ y \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

ამ ფუნქციას (0,0) წერტილში გააჩნია წარმოებული ნებისმიერი მიმართულებით და ის უდრის 0-ს. მართლაც, ვთქვათ $y=kx$, მაშინ

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial e} = \lim_{\Delta_{\vec{e}} M_0M \to 0} \frac{f(x, kx) - f(0, 0)}{\Delta_{\vec{e}} M_0M} = \lim_{x \to 0} \frac{k x^4}{x^3(x^4 + k^2)\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

(0,0) წერტილში ფუნქცია განიცდის წყვეტას*, ამდენად ის ამ წერტილში დიფერენცირებადი არ არის.

განსაზღვრება 15.2. ვექტორს, რომლის კოორდინატებია $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial z}$, ეწოდება $u = f(x, y, z)$ ფუნქციის გრადიენტი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში და აღინიშნება $\operatorname{grad} f(M_0)$ სიმბოლოთი. ამრიგად

$$\operatorname{grad} f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\vec{k}, \tag{15.2}$$

სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ საკოორდინატო ღერძების მგეზავებია.

თუ $\vec{e}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსებია $\cos\alpha$, $\cos\beta$ და $\cos\gamma$, მაშინ (15.1) და (15.2)-დან გვაქვს

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e} = \vec{e} \operatorname{grad} f(M_0), \tag{15.3}$$

ე. ი. $f(x, y, z)$ ფუნქციის წარმოებული $\vec{e}$ ვექტორის მიმართულებით უდრის, ამ ვექტორისა და მოცემული ფუნქციის გრადიენტის სკალარულ ნამრავლს.

---

* ფუნქციას (0,0) წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. ნებისმიერი $y=kx$ წრფის გასწვრივ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} f(x, y)=0$, ხოლო $y=x^3$ წირის გასწვრივ კი $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^3+x^3} = \dfrac{1}{2}$.

(15.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს გრადიენტის შემდეგი ძირითადი თვისება: $f(x, y, z)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ყველაზე სწრაფად იზრდება გრადიენტის მიმართულებით; ეს იმას ნიშნავს, რომ გრადიენტის მიმართულებით ფუნქციის წარმოებულს აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, ნებისმიერი სხვა მიმართულებით წარმოებულთან შედარებით.

მართლაც, თუ φ არის კუთხე $\vec{e}$ და $\operatorname{grad} f(M_0)$ ვექტორებს შორის, მაშინ

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e} = |\operatorname{grad} f(M_0)| \cos \varphi.$$

აქედან ჩანს, რომ $\frac{\partial f}{\partial e}$ წარმოებულს აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, როცა $\varphi=0$, ხოლო უმცირესი, როცა $\varphi=\pi$.

§ 16. სრული დიფერენციალის გამოყენება ფუნქციის მნიშვნელობის მიახლოებით გამოთვლაში

განვიხილოთ ორი ცვლადის $z=f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე $D \subset R^2$ არეში და დიფერენცირებადია ამ არის (x_0, y_0) წერტილში. მაშინ (10.3)-ის ძალით ფუნქციის სრული ნაზრდი (x_0, y_0) წერტილში იქნება

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho) = dz + o(\rho). \tag{16.1}$$

ვინაიდან $o(\rho)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$-თან შედარებით, ამიტომ (16.1) ტოლობაში $o(\rho)$ შესაკრების უკუგდებით მივიღებთ მიახლოებით ტოლობას

$$\Delta z \approx dz, \tag{16.2}$$

რომელიც მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა Δx და Δy. (16.2)-დან გვაქვს

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y, \tag{16.3}$$

რომელიც გამოიყენება ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლაში.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\ln(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1)$ გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

დავუშვათ, რომ $f(x,\ y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$, $x_0=1$, $y_0=1$, $\Delta x=0,03$, $\Delta y=-0,02$.

ადვილია ჩვენება, რომ

$$f'_x(x,\ y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)},$$

$$f'_y(x,\ y)=\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)}.$$

აქედან ცხადია, რომ f'_x და f'_y ფუნქციები უწყვეტია $(1,1)$ წერტილში, ამიტომ თეორემა 10.3-ის ძალით ის დიფერენცირებადია ამ წერტილში და $df(1,1)=f'_x(1,1)\Delta x+f'_y(1,1)\Delta y$. მაგრამ $f'_x(1,1)=\frac{1}{3}$ და $f'_y(1,1)=\frac{1}{4}$, ამიტომ

$$df(1,1)=\frac{1}{3}\cdot 0,03+\frac{1}{4}(-0,02)=0,005.$$

(16.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\ln(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1)\approx f(1,1)+df(1,1)=0,005.$$

§ 17. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები

ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია კერძო $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ წარმოებულები რაიმე $D\subset R^2$ არეში. საზოგადოდ ეს კერძო წარმოებულები წარმოადგენენ x და y ცვლადების ფუნქციებს, რომლის განსაზღვრის არეა D.

განსაზღვრება 17.1. თუ $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციებს აქვს წარმოებული x ცვლადით $(x,\ y)$ წერტილში, მაშინ მათ ეწოდებათ $f(x,\ y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები $(x,\ y)$ წერტილში და აღინიშნება შესაბამისად შემდეგი სიმბოლოებით

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,\ y)=z''_{x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f''_{yx}(x, y) = z''_{yx}.$$

ასევე განისაზღვრება $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციების კერძო წარმოებულები y ცვლადით (x, y) წერტილში.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2}.$$

მაშასადამე, ორი ცვლადის ფუნქციისათვის გვაქვს ოთხი მეორე რიგის კერძო წარმოებული. $f''_{xy}(x, y)$ და $f''_{yx}(x, y)$ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს უწოდებენ შერეულ კერძო წარმოებულებს.

ანალოგიურად განისაზღვრება მესამე, მეოთხე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. მაგალითად, განსაზღვრებით

$$\frac{\partial^{n+k+1} f}{\partial y^n\, \partial x^{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n+k} f}{\partial y^n\, \partial x^k}\right).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$z = xy^2 + \sin(x + y)$$

ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

გვაქვს

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + \cos(x + y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \cos(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x + y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x - \sin(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 2y - \sin(x+y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2y - \sin(x + y).$$

ამ მაგალითში

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}. \tag{17.1}$$

ისმება კითხვა: მართებულია თუ არა (17.1) ტოლობა ნებისმიერი ფუნქციისათვის? პასუხი უარყოფითია, (17.1) ტოლობა საზოგადოდ მართებული არ არის. ვაჩვენოთ ეს შემდეგ მაგალითზე:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=y=0\end{cases}$$

ფუნქციის f''_{xy} და f''_{yx} კერძო წარმოებულები (0,0) წერტილში. გვაქვს:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=y \frac{x^4+3 x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

და

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0)-f(0,0)}{x}=0.$$

ანალოგიურად

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=x^3 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

და

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y \to 0} \frac{f(0, y)-f(0,0)}{y}=0.$$

შემდეგ, განსაზღვრებით

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}=\lim_{x \to 0} \frac{f'_y(x, 0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x \to 0} \frac{x-0}{x}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}=\lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0, y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y}=0,$$

ე. ი.

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

ისმის კითხვა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია, რომ მისი შერეული კერძო წარმოებულები იყოს ერთმანეთის ტოლი? მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების შემთხვევაში დასმულ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 17.1 (შვარცი)*. ვთქვათ $f''_{xy}(x, y)$ და $f''_{yx}(x, y)$ წარმოებულები არსებობენ $M(x_0, y_0)$ წერტილის რაიმე $u(M, \delta)$ მიდამოში. თუ ეს ფუნქციები უწყვეტია $M(x_0, y_0)$ წერტილში, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0).$$

---

* შვარცი (1843—1921) — გერმანელი მათემატიკოსი.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$F(\Delta x, \Delta y)=[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,\ y_0)]-$$
$$-[f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)], \tag{17.2}$$

სადაც

$$(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\in u(M, \delta).$$

განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+t\Delta x,\ y_0),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

ცხადია $(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)\in u(M,\ \delta)$, მაშინ (17.2) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$F(\Delta x,\ \Delta y)=\varphi(1)-\varphi(0).$$

აქედან ლაგრანჟის თეორემის ძალით და რთული ფუნქციის წარმოებულის გამოყენებით, გვაქვს

$$F(\Delta x,\ \Delta y)=\varphi'(\theta_1)=[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)-$$
$$-f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)]\,\Delta x,\ 0<\theta_1<1.$$

ამ უკანასკნელ ტოლობაზე თუ კიდევ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას, მივიღებთ:

$$F(\Delta x, \Delta y)=f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\,\Delta y\,\Delta x,\ 0<\theta_2<1. \tag{17.3}$$

ახლა განვიხილოთ კიდევ ერთი დამხმარე ფუნქცია

$$g(t)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+t\Delta y)-f(x_0,\ y_0+t\Delta y).$$

მაშინ (17.2) ტოლობა ჩაიწერება ასე

$$F(\Delta x,\ \Delta y)=g(1)-g(0).$$

აქედან კი, ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად მივიღებთ

$$F(\Delta x,\ \Delta y)=f''_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,\ \ y_0+\theta_4\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y,\ 0<\theta_3<1,\ 0<\theta_4<1. \tag{17.4}$$

(17.3) და (17.4) ტოლობებიდან გვაქვს

$$f''_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)=f''_{xy}(x_0+\theta_3\Delta x,\ \ y_0+\theta_4\Delta y), \tag{17.5}$$
$$\theta_i\in]\,0, 1\,[,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

რადგანაც f''_{xy} და f''_{yx} ფუნქციები უწყვეტია $(x_0,\ y_0)$ წერტილ-

ში, ამიტომ თუ (17.5) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$ და $\Delta y \to 0$, მივიღებთ

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 18. მაღალი რიგის დიფერენციალები. მაღალი რიგის დიფერენციალის ფორმის არაინვარიანტობა

ვთქვათ $z=f(x, y)$ ფუნქციას რაიმე D არეში აქვს ყველა რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები n რიგამდე ჩათვლით. მაშინ როგორც ვიცით მისი დიფერენციალი, გამოითვლება ფორმულით

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{18.1}$$

აქ dx და dy შესაბამისად დამოუკიდებელი x და y ცვლადების Δx და Δy ნაზრდებია. ისინი არ არიან დამოკიდებული x-ზე და y-ზე.

$z=f(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი, რომელიც აღინიშნება d^2z სიმბოლოთი, ეწოდება პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს, ე. ი. განსაზღვრებით

$$d^2 z = d(dz).$$

თუ გავითვალისწინებთ (18.1) ტოლობას, გვექნება

$$\begin{aligned} d^2z = d(dz) &= \frac{\partial (dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial (dz)}{\partial y} dy = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \end{aligned} \tag{18.2}$$

სადაც dx^2 და dy^2-ით აღნიშნულია შესაბამისად $(dx)^2$ და $(dy)^2$.

მეორე რიგის წარმოებულების უწყვეტობის ძალით

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x},$$

ამიტომ (18.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \tag{18.3}$$

საზოგადოდ, განსაზღვრებით n-ური რიგის დიფერენციალი ეწოდება $n-1$ რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს და აღინიშნება $d^n z$ სიმბოლოთი. ადვილია ჩვენება, რომ

$$d^n z = d(d^{n-1} z) = f^{(n)}_{x^n}\, dx^n + n f^{(n)}_{x^{n-1} y}\, dx^{n-1} dy + \cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f^{(n)}_{x^{n-k} y^k}\, dx^{n-k} dy^k + \cdots + f^{(n)}_{y^n}\, dy^n.$$

ამ ფორმულას ჩვეულებრივ სიმბოლურად წერენ შემდეგი სახით

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f(x, y), \tag{18.4}$$

რომელიც ასე უნდა გვესმოდეს: გამოსახულება, რომელიც ფრჩხილებშია მოთავსებული, ფორმალურად უნდა ავიყვანოთ n ხარისხში და შემდეგ ∂-ს ხარისხებს (რაც წარმოებულის რიგს გამოსახავს) მარჯვნივ უნდა მივუწეროთ $f(x, y)$ ან, რაც იგივეა z.

თუ მოცემულია m ცვლადის $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ფუნქცია, მაშინ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 f =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი.

გვაქვს

$$z'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad z'_y = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad z''_{x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z''_{y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(18.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$d^2 z = \frac{-2xy\,dx^2 + 2(x^2 - y^2)\,dx\,dy + 2xy\,dy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

ახლა ვთქვათ გვაქვს რთული $z = f(x, y)$ ფუნქცია, სადაც $x = \varphi(t, \tau)$ და $y = g(t, \tau)$*, თუ გავითვალისწინებთ პირველი რიგის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას და გადიფერენციალების (13.3) წესს, გვექნება

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}d^2y = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y, \qquad (18.5)$$

სადაც

$$d^2x = \left(\frac{\partial}{\partial t}dt + \frac{\partial}{\partial \tau}d\tau\right)^2 \varphi(t, \tau),$$

$$d^2y = \left(\frac{\partial}{\partial t}dt + \frac{\partial}{\partial \tau}d\tau\right)^2 g(t, \tau).$$

(18.3) და (18.5) ტოლობების შედარებიდან გამომდინარეობს, რომ მეორე რიგის დიფერენციალისათვის ფორმა შენარჩუნებული არ არის. (18.5) ტოლობაში $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x, y)$-ს ემატება $\frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$, რომელიც საზოგადოდ ნულის ტოლი არ არის.

ამრიგად, მეორე რიგის დიფერენციალისათვის ფორმის ინვარიანტობას ადგილი არა აქვს.

დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობის თვისებას მით უფრო არა აქვს ადგილი უფრო მაღალი რიგის დიფერენციალებისათვის.

---

* ვიგულისხმოთ, რომ ამ ფუნქციებს გააჩნიათ მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები.

§ 19. ტეილორის* ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის

სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია.

თ ე ო რ ე მ ა 19.1. თუ $f(x, y)$ ფუნქციას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის რაიმე $u(M_0, \delta)$ მიდამოში აქვს ყველა რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები n $(n \geqslant 1)$ რიგამდე ჩათვლით, მაშინ ამ მიდამოს ნებისმიერი $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ წერტილისათვის

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0, y_0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0, y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0, y_0)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n-1} f(x_0, y_0)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), \qquad (19.1)$$

სადაც $\theta=\theta(\Delta x, \Delta y)$, $0<\theta<1$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$F(t)=f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y), \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \qquad (19.2)$$

რომელიც წარმოადგენს ერთი t ცვლადის რთულ ფუნქციას. $F(t)$-ს, რთული ფუნქციის წარმოებულის შესახებ თეორემა 12.1-ის ძალით, აქვს [0; 1]-ზე ყველა რიგის უწყვეტი წარმოებული n რიგამდე ჩათვლით. ამიტომ ამ ფუნქციისათვის შეიძლება დავწეროთ მაკლორენის* ფორმულა

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}, \quad 0<\theta<1. \qquad (19.3)$$

(19.2)-ის ძალით გვაქვს

$$F(1)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y), \ F(0)=f(x_0, y_0),$$
$$F'(0)=F'(t)\Big|_{t=0}=[f'_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta y]\Big|_{t=0}=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0, y_0);$$

* ტეილორი (1685—1731) — ინგლისელი მათემატიკოსი.
* მაკლორენი (1698—1746) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

$$F''(0)=F''(t)\Big|_{t=0}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0, y_0),$$

$$\cdot \qquad \cdot$$

$$F^{(n)}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (19.3) ტოლობაში, მივიღებთ დასამტკიცებელ (19.1) ფორმულას.

(19.1) ფორმულას უწოდებენ ორი ცვლადის ფუნქციის ტეილორის ფორმულას, ნაშთითი წევრით

$$r_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y). \quad (19.4)$$

(19.4) ფორმით ჩაწერილ r_n-ს ეწოდება ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი ლაგრანჟის სახით.

(19.1) ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\Delta f(x_0, y_0)=df(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0, y_0)+\frac{1}{n!}d^n f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y).$$

როცა $x_0=y_0=0$, ფორმულა (19.1) ღებულობს სახეს

$$f(x_0, y_0)=f(0, 0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(0, 0)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(\theta\Delta x, \theta\Delta y). \quad (19.5)$$

(19.5) სახით ჩაწერილ ტეილორის ფორმულას უწოდებენ მაკლორენის ფორმულას.

ტეილორის ფორმულას m $(m>2)$ ცვლადის ფუნქციისათვის აქვს, ზემოთ მოყვანილის ანალოგიური სახე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $n=1$ (19.1) ტოლობიდან მიიღება

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y, \quad (19.6)$$

რომელიც წარმოადგენს ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის ცნობილ ლაგრანჟის ფორმულის (სასრული ნაზრდის შესახებ) ანალოგს ორი ცვლადის ფუნქციისათვის.

(19.6) ტოლობიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ თუ $f'_x=f'_y=0$, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი იგივურად უდრის ნულს, ე. ი. $f(x, y)$ წარმოადგენს მუდმივს.

§ 20. არაცხადი ფუნქციები. არსებობის თეორემა. არაცხადი ფუნქციის წარმოებულები

1. არაცხადი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ერთი განტოლებით. ვთქვათ, x და y ცვლადები დაკავშირებულია ერთმანეთთან განტოლებით

$$F(x, y)=0. \tag{20.1}$$

თუ E სიმრავლეზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(x, f(x))=0, \quad \forall x\in E,$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია (20.1) განტოლებით არაცხადი სახით.

ცხადია, რომ (20.1) სახის განტოლება ყოველთვის არ განსაზღვრავს არაცხად ფუნქციას. მაგალითად $x^2+y^2+1=0$ განტოლება არ განსაზღვრავს არაცხად ფუნქციას. ასევე, შევნიშნოთ, რომ (20.1) განტოლებით მოცემული არაცხადი ფუნქცია ყოველთვის არ ჩაიწერება ცხადი სახით. ე. ი. (20.1) განტოლება ყოველთვის არ ამოიხსნება y-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში. განვიხილოთ ფუნქცია $x=\varphi(y)=$

$$=2y-\sin y\ (-\infty<y<\infty).\ \text{რადგანაც}\ \frac{dx}{dy}=2-\cos y>0\ \text{ყოველი}$$

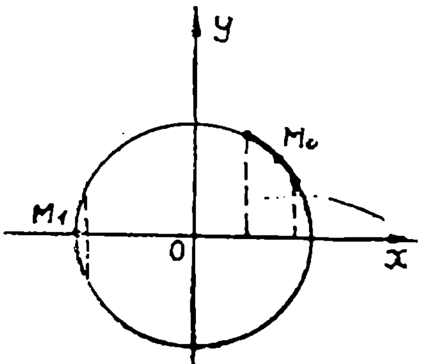
y-სათვის, ამიტომ $\varphi(y)$ ზრდადია $(-\infty, +\infty)$ შუალედზე. გამომდინარე აქედან არსებობს $x=\varphi(y)$ ფუნქციის შექცეული $y=f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება არაცხადად $2y-\sin y-x=0$ განტოლებიდან. მაგრამ ამ განტოლებიდან y ცხადი სახით x-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში არ გამოისახება.

თუ განვიხილავთ $x^2+y^2-1=0$ განტოლებას, რომელიც სიბრტყეზე განსაზღვრავს ერთეულ რადიუსიან s წრეწირს, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 12), ცხადია ეს განტოლება $[-1; 1]$ სეგმენტზე განსაზღვრავს არაცხადი ფუნქციების უსასრულო სიმრავლეს.

კერძოდ, ასეთებია $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ ფუნქციები და ნებისმიერი ფუნქცია, რომელიც $[-1;\ 1]$ სეგმენტის გარკვეულ წერტილებზე უდრის $\sqrt{1-x^2}$, ხოლო დანარჩენ წერტილებზე კი $-\sqrt{1-x^2}$, ე. ი.

$$y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & \text{თუ} \quad x\in A,\ A\subset[-1,\ 1],\\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{თუ} \quad x\notin A.\end{cases}$$

ისმება ამოცანა: რა პირობებში არსებობს ერთადერთი ცხადი ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს $F(x,\ y)=x^2+y^2-1=0$ განტოლებას? დავაფიქსიროთ s წრეწირზე ნებისმიერი $M_0(x_0,\ y_0)$ წერტილი, რომელიც არ მდებარეობს Ox ღერძზე (ნახ. 12), ე. ი. ისეთი, რომ $y_0\neq0$. ცხადია, რომ s წრეწირის ის ნაწილი რომელიც მდებარეობს M_0 წერტილის საკმარისად მცირე მიდამოში ცალსახად გეგმილდება Ox ღერძზე. ანალიზურად ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ განვიხილავთ



ნახ. 12

$$F(x,\ y)=x^2+y^2-1$$

ფუნქციას M_0 წერტილის საკმარისად მცირე მიდამოში, მაშინ $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ განტოლება აღნიშნულ მიდამოში ცალსახად ამოიხსნება y-ის მიმართ და განსაზღვრავს ერთადერთ ცხად $y=\sqrt{1-x^2}$ ფუნქციას, როცა $y>0$ და შესაბამისად $y=-\sqrt{1-x^2}$-ს, როცა $y<0$.

თუ s წრეწირზე ავიღებთ $M_1(x,\ 0)$ წერტილს, მაშინ ცხადია, რომ s წრეწირის ის ნაწილი, რომელიც ძევს M_1 წერტილის ნებისმიერ მიდამოში არაცალსახად გეგმილდება Ox ღერძზე (ნახ. 12). ანალიზურად ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ განვიხილავთ $F(x,y)=x^2+y^2-1$ ფუნქციას M_1 წერტილის ნებისმიერ მიდამოში, მაში $F(x,\ y)=x^2+y^2-1=0$ ცალსახად არ ამოიხსნება y-ის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ F ფუნქციის კერძო წარმოებული $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y$ არ უდრის ნულს M_0 წერტილში და უდრის ნულს M_1 წერტილში. ქვემოთ ვნახავთ: იმისათვის, რომ $F(x,\ y)=0$ განტოლება ცალსახად იყოს ამოხსნადი y-ის მიმართ M_0 წერტილის მიდამოში, არსებითი მნიშვნელობა აქვს პირობას $F'_y(M_0)\neq0$.

მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 20.1. ვთქვათ $F(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს:

1) განსაზღვრულია და აქვს უწყვეტი F'_x და F'_y კერძო წარმოებულები რაიმე $I=[|x-x_0|\leqslant a, |y-y_0|\leqslant b]$ მართკუთხედზე;

2) $F(x_0, y_0)=0$,

3) $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$,

მაშინ $F(x, y)=0$ განტოლება x_0 წერტილის რაიმე $]x_0-\delta; x_0+\delta[$ $(0<\delta\leqslant a)$ მიდამოში განსაზღვრავს ერთადერთ $y=f(x)$ ფუნქციას, ამასთან $y_0=f(x_0)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის ძალით $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $F'_y(x_0, y_0)>0$. მაშინ, რადგანაც $F'_y(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილზე, ამიტომ თეორემა 8.3-ის ძალით არსებობს ისეთი $I'=[|x-x_0|\leqslant\delta', |y-y_0|\leqslant\delta']$ $(0<\delta'\leqslant\min(a, b))$ კვადრატი, რომ

$$F'_y(x, y)>0, \quad \forall (x, y)\in I'. \tag{20.2}$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$g(y)=F(x_0, y), \quad y_0-\delta'\leqslant y\leqslant y_0+\delta'.$$

$g(y)$ ფუნქცია ზრდადია $[y_0-\delta'; y_0+\delta']$ სეგმენტზე, რადგანაც ამ სეგმენტზე

$$g'(y)=F'_y(x_0, y)>0.$$

გარდა ამისა, პირობის ძალით

$$g(y_0)=F(x_0, y_0)=0,$$

ამიტომ ამ სეგმენტის ბოლოებზე გვექნება:

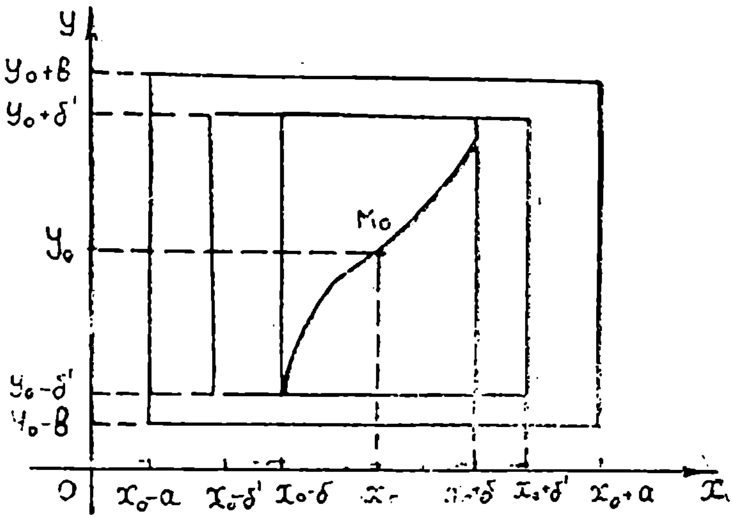
$$g(y_0-\delta')=F(x_0, y_0-\delta')<0, \quad g(y_0+\delta')=F(x_0, y_0+\delta')>0. \tag{20.3}$$

ახლა განვიხილოთ x-ის ორი ფუნქცია:

$$F(x, y_0-\delta') \text{ და } F(x, y_0+\delta').$$

პირობის ძალით ეს ფუნქციები უწყვეტია $[x_0-\delta'; x_0+\delta']$ სეგმენტზე. ამიტომ (20.3)-ის ძალით არსებობს x_0-ის ისეთი მიდამო $]x_0-\delta; x_0+\delta[$ $(0<\delta<\delta')$, რომ

$$F(x, y_0-\delta')<0, \quad F(x, y_0+\delta')>0, \quad \forall x\in]x_0-\delta, x_0+\delta[. \tag{20.4}$$



ნახ. 13

ავიღოთ $]x_0—\delta;\ x_0+\delta[$ ინტერვალის ნებისმიერი $\bar{x}$ წერტილი და დავაფიქსიროთ ის. განვიხილოთ $[y_0—\delta';\ y_0+\delta']$ სეგმენტზე ერთი ცვლადის უწყვეტი $\varphi(y)=F(\bar{x},\ y)$ ფუნქცია. (20.4) პირობის ძალით ეს ფუნქცია სეგმენტის ბოლოებზე ღებულობს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობებს:

$$\varphi(y_0—\delta') = F(\bar{x};\ y_0—\delta') < 0;\ \varphi(y_0+\delta') = F(\bar{x},\ y_0+\delta') > 0.$$

ამიტომ $\exists\, \bar{y} \in [y_0—\delta';\ y_0+\delta']$, რომ

$$\varphi(\bar{y}) = F(\bar{x},\bar{y}) = 0.$$

რადგანაც $\varphi'(y) = F'_y(\bar{x},\ y) > 0$, ამიტომ $\varphi(y)$ ზრდადია $]y_0—\delta',\ y_0+\delta]$ სეგმენტზე. გამომდინარე აქედან $\varphi(y)$ მხოლოდ ერთ წერტილში გახდება ნული.

ამრიგად, $]x_0—\delta,\ x_0+\delta[$ შუალედიდან x-ის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის ერთი მნიშვნელობა, რომელიც $F(x,\ y)=0$ განტოლებას აკმაყოფილებს. მაშასადამე, არსებობს $]x_0—\delta,\ x_0+\delta[$ ინტერვალზე განსაზღვრული ისეთი $y=f(x)$ ფუნქცია, რომ

$$F(x,\ f(x)) = 0,\ f(x_0) = y_0,\ x \in]x_0—\delta;\ x_0+\delta[.$$

ამით, არაცხადი ფუნქციის არსებობა და ერთადერთობა ნაჩვენებია. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 20.2. თუ $F(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 20.1-ის პირობებს, მაშინ $F(x, y)=0$ განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში და

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}. \tag{20.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ არაცხადი $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ ინტერვალში (იხ. თეორემა 20.1). დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია ამ ინტერვალში. ვთქვათ $x,\ x+\Delta x\in]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$. ამ წერტილებზე

$$F(x, f(x))=F(x+\Delta x, f(x+\Delta x))=0,\ y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

ამრიგად, გვაქვს

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=0,\quad y=f(x),\quad y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

ლაგრანჟის თეორემის ძალით მივიღებთ:

$$\begin{gathered}F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-\\ -F(x, y+\Delta y)+F(x, y+\Delta y)-F(x, y)=\\ =F_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f_y'(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y=0,\end{gathered} \tag{20.6}$$

სადაც $0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1$; გამომდინარე აქედან $(x+\theta_2\Delta x, y+\Delta y)$ და $(x, y+\theta_2\Delta y)$ წერტილები ეკუთვნიან $[|x-x_0|\leqslant\delta,\ |y-y_0)\leqslant\delta]$ სეგმენტს (იხ. თეორემა 20.1). რადგანაც $F_y'(x, y+\theta_2\Delta y)\neq 0$, ამიტომ (20.6)-დან გვაქვს

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}{F_y'(x, y+\theta_2\Delta y)}. \tag{20.7}$$

პირობით $F_x'(x, y)$ უწყვეტია I მართკუთხედზე, ამდენად $I'\subset I$ კვადრატზეც; ამიტომ თეორემა 8.7-ის ძალით ის შემოსაზღვრულია ამ კვადრატზე, ე. ი. $\exists M>0$ ისეთი, რომ

$$|F_x'(x, y)|\leqslant M,\quad \forall (x, y)\in I'. \tag{20.8}$$

ასევე, თეორემა 8.7-ის ძალით $F_y'(x, y)$ უწყვეტი ფუნქცია აღწევს უმცირეს მნიშვნელობას m-ს, ამიტომ

$$F_y'(x, y)\geqslant m>0,\quad (x, y)\in I'. \tag{20.0}$$

(20.8) და (20.9) უტოლობების ძალით (20.7)-დან გვაქვს

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|=\left|\frac{F_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}{F_y'(x, y+\theta_2\Delta y)}\right|\leqslant\frac{M}{m},$$

საიდანაც

$$|\Delta y| \leqslant \frac{M}{m} |\Delta x|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\Delta y \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$, ე. ი. არაცხადი $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ინტერვალში. F'_x და F'_y ფუნქციები უწყვეტია I'-ზე და, გარდა ამისა, ადგილი აქვს (20.2) უტოლობას. ამიტომ (20.7) ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$, მივიღებთ დასამტკიცებელ (20.5) ტოლობას. ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ $f'(x)$ ფუნქცია, როგორც სუპერპოზიცია უწყვეტი ფუნქციებისა, უწყვეტია $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ინტერვალზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. თუ წინასწარ ცნობილია $F(x, y) = 0$ განტოლებიდან არაცხადი $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის არსებობა, მაშინ (20.5) ფორმულა შეიძლება მივიღოთ $F(x, f(x)) = 0$ იგივეობიდან მისი ფორმალური გაწარმოებით:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \tag{20.10}$$

აქედან კი მიიღება (20.5) ფორმულა.

თუ (20.10) ტოლობას კიდევ გავაწარმოებთ x-ით, მივიღებთ

$$F''_{x^2} + 2 F''_{xy} \cdot y' + F''_{y^2} \cdot y'^2 + F'_y \cdot y'' = 0,$$

საიდანაც

$$y'' = -\frac{F''_{x^2} + 2 F''_{xy} \cdot y' + F''_{y^2} \cdot y'^2}{F'_y}. \tag{20.11}$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $F(x, y) = x^4 + xy + y^3 - 3 = 0$ განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, როცა $x = 1$ და $y = 1$.

გვაქვს

$$F'_x = 4x^3 + y, \; F'_y = x + 3y^2, \quad F''_{x^2} = 12x^2, \; F''_{xy} = 1, \; F''_{y^2} = 6y.$$

შემდეგ

$$F'_x(1, 1) = 5, \; F'_y(1, 1) = 4, \; F''_{x^2}(1, 1) = 12, \; F''_{xy}(1, 1) = 1, \; F''_{y^2}(1, 1) = 6.$$

ამრიგად (20.5) და (20.11) ტოლობების ძალით მივიღებთ

$$y'(0) = -\frac{5}{4}, \qquad y''(0) = -\frac{12 - \frac{5}{2} + \frac{75}{8}}{4} = -\frac{151}{32}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ერთი ცვლადის ანალოგიურად განისაზღვრება

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u) = 0$$

განტოლებით განსაზღვრული მრავალი ცვლადის არაცხადი ფუნქცია. მართებულია ზემოთ დამტკიცებული თეორემების ანალოგიური თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 20.3. ვთქვათ $F(x_1, x_2, \dots, x_m, u)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს:

1) განსაზღვრულია და აქვს უწყვეტი F'_{x_1}, $F'_{x_2}, \dots, F'_{x_m}, F'_u$ კერძო წარმოებულები რაიმე $m+1$ განზომილებიან პარალელეპიპედზე ცენტრით $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, u^{(0)})$ წერტილში;

2) $F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, u^{(0)}) = 0$;

3) $F'_u(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, u^{(0)}) \neq 0$.

მაშინ $F(x_1, x_2, \dots, x_m, u)=0$ განტოლება $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ წერტილის რაიმე მართკუთხოვან მიდამოში, ცენტრით $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ წერტილში, განსაზღვრავს ერთადერთ $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ არაცხად ფუნქციას ისეთს, რომ $u^{(0)} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$. გარდა ამისა, ამ ფუნქციას $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ წერტილის აღნიშნულ მიდამოში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები და

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F_u}, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

2. მ რ ა ვ ა ლ ი ც ვ ლ ა დ ი ს ა რ ა ც ხ ა დ ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა ს ი ტ ე მ ა. ვთქვათ მოცემულია $n+m$ უცნობიანი m განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{20.12}$$

სადაც $F_1, F_2, \dots, F_m$ ფუნქციები მოცემულია R^{n+m} სივრცის რაიმე არეში. $D \subset R^n$ არეზე განსაზღვრულ

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{20.13}$$

ფუნქციებს ეწოდება (20.12) განტოლებათა სისტემით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციების სისტემა, თუ ნებისმიერი $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$F_1[x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 0,$$
$$F_2[x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_m[x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1 x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 0.$$

ფუნქციონალურ დეტერმინანტს

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \tag{20.14}$$

ეწოდება $u_1, u_2, \dots, u_m$ ცვლადების $F_1, F_2, \dots, F_m$ ფუნქციათა იაკობის* დეტერმინანტი, ანუ მოკლედ იაკობიანი და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)}.$$

მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 20.4. ვთქვათ (20.12) სისტემაში $F_1, F_2, \dots, F_m$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობებს:

1) განსაზღვრულია და აქვთ უწყვეტი

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ და } \frac{\partial F_j}{\partial u_k}, \quad j=1, 2, \dots, m, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad k=1, 2, \dots, m,$$

კერძო წარმოებულები რაიმე $n+m$ განზომილებიდან პარალელეპიპედზე ცენტრით $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_m^{(0)})$ წერტილში;

2) $F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$

3) $\left.\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)}\right|_{M_0} \neq 0;$

---

* კარლ გუსტავ იაკობ იაკობი (1804—1851) — გერმანელი მათემატიკოსი და მექანიკოსი.

მაშინ განტოლებათა (20.12) სისტემა $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ წერტილის რაიმე მართკუთხოვან მიდამოში, ცენტრით $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ წერტილში, განსაზღვრავს ერთადერთ (20.13)-ით ჩაწერილ არაცხად φ_i ფუნქციათა სისტემას ისეთს, რომ

$$u_i^{(0)} = \varphi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

გარდა ამისა, ამ ფუნქციებს $x^{(0)}$ წერტილის აღნიშნულ მიდამოში აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები და

$$\left.\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right|_{x^{(0)}} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, x_i, u_{i+1}, \ldots, u_m)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}} \tag{20.15}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ამ თეორემის პირველი ნაწილის დამტკიცებას არ მოვიყვანთ, ვაჩვენოთ მხოლოდ (20.15) ტოლობის მართებულობა.

დავუშვათ, რომ თეორემა 20.4-ის პირობები შესრულებულია, ე. ი. (20.13) სისტემის ფუნქციები წარმოადგენენ (20.12) სისტემის ამონახსენს. ჩავსვათ (20.13) ტოლობებით განსაზღვრული u_k ($k=1, 2, \ldots m$) ფუნქციები (20.12) ტოლობებში და გავაწარმოოთ მიღებული ტოლობები x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) ცვლადით. მივიღებთ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \cdot \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \cdot \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i} = 0. \end{array}\right\} \tag{20.16}$$

(20.16) არის $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}$ ცვლადების წრფივ განტოლებათა სისტემა. ამ სისტემის დეტერმინანტია (20.14) იაკობიანი, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან M_0 წერტილის მიდამოში. ამიტომ (20.16) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განისაზღვრება კრამერის* ფორმულებით და მას აქვს (20.15) სახე.

---

* გ. კრამერი (1704—1752) — შვეიცარიელი მათემატიკოსი.

§ 21. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის ცნება. ვთქვათ $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე $D \subset R^m$ არეში.

განსაზღვრება 21.1. $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \in D$ წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ მოიძებნება $x^{(0)}$ წერტილის ისეთი $u(x^{(0)}, \delta)$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის სრულდება უტოლობა $f(x) \leqslant f(x^{(0)})$ $(f(x) \geqslant f(x^{(0)}))$.

ფუნქციის მნიშვნელობებს მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებში უწოდებენ შესაბამისად ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმს* და ლოკალურ მინიმუმს.

ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი ანუ ექსტრემუმები.

მოყვანილი განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ფუნქციის მაქსიმუმი (მინიმუმი) უდიდესია (უმცირესია) იმ მნიშვნელობებთან შედარებით, რომელიც მას აქვს მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილის გარკვეულ მიდამოში. მაშასადამე, ის ფაქტი, რომ ფუნქციას გააჩნია ექსტრემუმი რაიმე წერტილში არის ამ ფუნქციის ლოკალური, ე. ი. მხოლოდ ამ წერტილის რაიმე მიდამოსათვის დამახასიათებელი თვისება.

2. ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა. მართებულია შემდეგი თეორემა

თეორემა 21.1. ვთქვათ $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ფუნქციას $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \in D$ წერტილში აქვს ექსტრემუმი. თუ ამ წერტილში არსებობს რომელიმე სასრული კერძო $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ წარმოებული, მაშინ

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}=0, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ არსებობს $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}$. ვაჩვენოთ, რომ $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}=0$. განვიხილოთ

$$\varphi(x_1)=f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$$

* შემდგომში, იქ სადაც გაურკვევლობას არ გამოიწვევს, ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) ნაცვლად გამოვიყენებთ გამოთქმას მაქსიმუმი (მინიმუმი).

ტოლობით განსაზღვრული ერთი ცვლადის ფუნქცია. პირობის ძალით ამ ფუნქციას $x_1^{(0)}$ წერტილში აქვს ექსტრემუმი. ვინაიდან $\varphi(x_1)$ ფუნქციას $x_1^{(0)}$ წერტილში აქვს წარმოებული, ამიტომ ფერმას* თეორემის ძალით

$$\frac{d\varphi(x_1^{(0)})}{dx_1} = \left.\frac{df(x_1, x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})}{dx_1}\right|_{x_1=x_1^{(0)}} =$$

$$= \frac{\partial f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})}{\partial x_1} = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

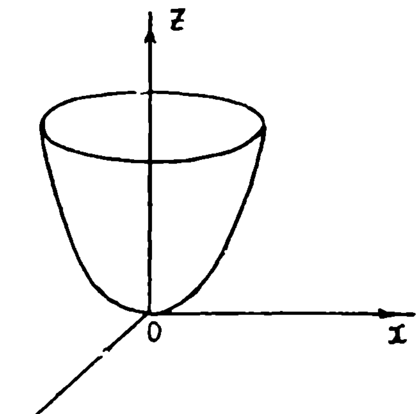
შ ე დ ე გ ი. თუ $u=f(x)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი $x^{(0)}$ წერტილში და დიფერენცირებადია ამ წერტილში, მაშინ

$$df(x^{(0)}) = 0 \quad \text{ანუ} \quad \operatorname{grad} f(x^{(0)}) = \vec{0}\,.$$

ამ შედეგის მართებულობა გამომდინარეობს დიფერენციალისა და გრადიენტის განსაზღვრებიდან.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება გააჩნდეს იმ წერტილში, სადაც კერძო წარმოებულებიდან ერთი მაინც არ არსებობს.

მაგალითად $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქციას (0, 0) წერტილში კერძო წარმოებულები არ გააჩნია (§ 9, შენიშვნა 1) მაგრამ ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი (ნახ. 14).



ნახ. 14

უნდა აღინიშნოს რომ წერტილში ფუნქციის დიფერენციალის ნულთან ტოლობა ან რომელიმე კერძო წარმოებულების არ არსებობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას, ე. ი. იქიდან, რომ ფუნქციის დიფერენციალი რაიმე წერტილში ნულია ან კერძო წარმოებულებიდან რომელიმე არ არსებობს, არ გამომდინარეობს, რომ ეს წერტილი ექსტრემუმის წერტილია.

---

* ფერმა (1601—1655) — ფრანგი მათემატიკოსი.

მაგალითად, (0, 0) წერტილში $f(x, y)=xy$ ფუნქციის დიფერენციალი ნულის ტოლია, ხოლო

$$f(x, y)=\begin{cases} x(y^2+1), & \text{როცა } x \geqslant 0, \ -\infty < y < \infty, \\ 2x(y^2+1), & \text{როცა } x < 0, \ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

ფუნქციის კერძო წარმოებული x-ით არ არსებობს, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციებს ექსტრემუმი არ გააჩნიათ.

განსაზღვრება 21.2. წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის ყველა კერძო წარმოებული ნულის ტოლია, ამ ფუნქციის სტაციონალური წერტილი ეწოდება.

განსაზღვრება 21.3. წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის კერძო წარმოებულები ნულია ან ერთი მაინც არ არსებობს, კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

მაშასადამე, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ ამ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს შორის.

დავადგინოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

3. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა.

თეორემა 21.2. ვთქვათ $f(x, y)$ ფუნქციას სტაციონარული $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის მიდამოში გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და

$$\Delta(x_0, y_0)=\begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}=AC-B^2$$

$$(A=f''_{x^2}(x_0, y_0),\ C=f''_{y^2}(x_0, y_0),\ B=f''_{xy}(x_0, y_0)),$$

მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციას M_0 წერტილში:

1) როცა $\Delta>0$ აქვს ექსტრემუმი, კერძოდ მაქსიმუმი, თუ $A<0$ და მინიმუმი, თუ $A>0$;

2) როცა $\Delta<0$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია.

დამტკიცება. 1) ვთქვათ $\Delta>0$. ტეილორის ($f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ ტოლობების გათვალისწინებით) ფორმულის ძალით

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=$$

$$=\frac{1}{2!}[A_1(\Delta x)^2+2B_1\,\Delta x\,\Delta y+C_1(\Delta y)^2], \qquad (21.1)$$

სადაც

$$A_1=f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,\ \ y_0+\theta\Delta y),\quad B_1=f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y),$$
$$C_1=f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,\ \ y_0+\theta\Delta y),\quad 0<\theta<1.$$

M_0 წერტილში, მეორე რიგის კერძო წარმოებულების უწყვეტობის ძალით გვაქვს

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} A_1=f''_{x^2}(x_0,\ y_0)=A>0\quad (\text{ან}\quad A<0),$$

ასევე

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A_1C_1-B_1)=f''_{x^2}(x_0,\ y_0)f''_{y^2}(x_0,y_0)-[f''_{xy}(x_0,\ y_0)]^2=\Delta>0.$$

ამიტომ თეორემა 8.3-ის ძალით, საკმარისად მცირე Δx და Δy-სათვის გვექნება

$$A_1>0\ (\text{ან}\ A_1<0),\ A_1C_1-B_1^2=\Delta_1>0. \tag{21.2}$$

რადგანაც $A_1\neq 0$, ამიტომ (21.1) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\Delta f=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{A_1}[A_1^2\cdot(\Delta x)^2+2A_1B_1\Delta x\Delta y+A_1C_1(\Delta y)^2]=$$
$$=\frac{1}{2A_1}[(A_1\Delta x+B_1\Delta y)^2+(A_1C_1-B_1^2)(\Delta y)^2]. \tag{21.3}$$

(21.2)-ის ძალით, (21.3) ტოლობის კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება დადებითია. გამომდინარე აქედან, თანახმად (21.3) ტოლობისა

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)<0,\quad \text{როცა}\ A<0,$$

ე. ი. $f(x,\ y)$ ფუნქციას $(x_0,\ y_0)$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი, ასევე

$$\Delta f(x_0,\ y_0)>0,\quad \text{როცა}\ A>0$$

და, მაშასადამე $(x_0,\ y_0)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

2) ახლა ვთქვათ $\Delta=AC-B^2<0$. განვიხილოთ მრავალწევრი

$$Cx^2+2Bx+A.$$

რადგანაც $B^2-AC>0$, ამიტომ შეიძლება შევარჩიოთ ორი x_1 და x_2 რიცხვი ისეთი, რომ

$$Cx_1^2+2Bx_1+A>0,\ \ Cx_2^2+2Bx_2+A<0.$$

მეორე რიგის კერძო წარმოებულობის უწყვეტობის ძალით

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (C_1 x_1^2 + 2 B_1 x_1 + A_1) = C x_1^2 + 2 B x_1 + A > 0.$$

გამომდინარე აქედან არსებობს M_0 წერტილის ისეთი მიდამო $u(M_0, \delta)$, რომ თუ $M(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) \in u(M_0, \delta)$, მაშინ

$$C_1 x_1^2 + 2 B_1 x_1 + A_1 > 0. \tag{21.4}$$

განვიხილოთ ახლა M_0 წერტილის ნებისმიერი $u(M_0, \delta')$ მიდამო ისეთი, რომ $\delta' \leqslant \delta$. შეიძლება შევარჩიოთ ისეთი $t > 0$ რიცხვი, რომ $M_1(x_0 + t, y_0 + t x_1) \in u(M_0, \delta')$. დავუშვათ, რომ $\Delta x = t$, $\Delta y = t x_1$, მაშინ (21.4) უტოლობის ძალით, (21.1) ტოლობიდან გვექნება

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{1}{2} t^2 (C_1 x_1^2 + 2 B_1 x_1 + A_1) > 0. \tag{21.5}$$

თუ x_2-ის მიმართ ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობას, მივიღებთ, რომ არსებობს $M_2(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) \in u(M_0, \delta')$ წერტილი ისეთი, რომლისთვისაც

$$\Delta f(x_0, y_0) < 0. \tag{21.6}$$

(21.5) და (21.6) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ M_0 წერტილის ნებისმიერ მცირე მიდამოში $f(x, y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი არ ინარჩუნებს ნიშანს, ე. ი. M_0 ექსტრემუმის წერტილი არ აირს.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 1. თუ $AC - B^2 = 0$, მაშინ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი და შეიძლება არა ე. ი. „საეჭვო" შემთხვევაა, რის გამოც საჭირო ხდება დამატებითი გამოკვლევის ჩატარება.

მართლაც, თუ $f(x, y) = x^4 + y^4$, მაშინ $f'_x = 4x^3$ და $f'_y = 4y^3$, $f''_{x^2} = 12 x^2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{y^2} = 12 y^2$.

ადვილია შემჩნევა, რომ (0,0) არის სტაციონალური წერტილი და $\Delta(0, 0) = AC - B^2 = 0$, ე. ი. საეჭვო შემთხვევაა. ცხადია, რომ (0, 0) წერტილზე მოცემული ფუნქცია ღებულობს მინიმუმს.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია $f(x, y) = x^4 + y^3$. წერტილი (0, 0) ამ ფუნქციის სტაციონალური წერტილია და $\Delta(0, 0) = AC - B^2 = 0$, ე. ი. საეჭვო შემთხვევაა. ადვილია ჩვენება, რომ (0,0) არ არის ექსტრემუმის წერტილი. მართლაც სხვაობა $f(0, y) - f(0, 0) > 0$, როცა $y > 0$ და $f(0, y) - f(0, 0) < 0$, როცა $y < 0$. ამრიგად, სრული ნაზრდი (0,0) წერ-

ტილში ნიშანს არ ინარჩუნებს. ე. ი. (0,0) წერტილი ექსტრემუმის წერტილი არ არის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ $\Delta > 0$, მაშინ $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$ და $C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$ რიცხვებს აქვთ ერთნაირი ნიშანი. ამიტომ $A > 0$ ან $A < 0$ პირობების შემოწმების ნაცვლად შეიძლება შევამოწმოთ $C > 0$ ან $C < 0$ პირობები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი ვიპოვოთ ექსტრემუმი ფუნქციის

$$z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ $f(x, y)$ ფუნქციის სტაციონალური წერტილები სისტემიდან

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნებია (—1;—2), (1;2), (2;1), (—2;—1), ე. ი. სტაციონალური წერტილებია $M_1(-1; -2)$, $M_2(1; 2)$, $M_3(2; 1)$, $M_4(-2; -1)$.

გვაქვს $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 6y$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$, $\Delta f(x, y) = AC - B^2 = 36(x^2 - y^2)$.

1) $\Delta(-1; -2) = -108 < 0$, ამიტომ ფუნქციას $M_1(-1; -2)$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია.

2) $\Delta(1; 2) = -108 < 0$, ამიტომ ფუნქციას $M_2(1; 2)$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია.

3) $\Delta(2; 1) = 108 > 0$ და $A = 12 > 0$ ამიტომ ფუნქციას $M_3(2; 1)$ წერტილში აქვს მინიმუმი $z_{\min} = f(2; 1) = -28$.

4) $\Delta(-2, -1) = 108 > 0$ და $A = -12 < 0$ ამიტომ ფუნქციას $M_4(-2; -1)$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი $z_{\max} = f(-2; -1) = 28$.

4. m $(m > 2)$ ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობების დასადგენად დაგვჭირდება ზოგიერთი დებულება კვადრატულ ფორმებთან დაკავშირებით (რომელსაც მოვიყვანთ დაუმტკიცებლად). კვადრატული ფორმა ეწოდება შემდეგი სახის ფუნქციას

$$\Phi(h) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j,$$

სადაც $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in R^m$, $a_{ij} = a_{ji}$.

განსაზღვრება 21.4. $\Phi(h)$ კვადრატულ ფორმას ეწოდება:

1) დადებითად განსაზღვრული, თუ ნებისმიერი $h(h_1, h_2, \dots, h_m) \neq \neq 0(0,\ 0, \dots, 0)$-სათვის

$$\Phi(h) > 0.$$

2) უარყოფითად განსაზღვრული, თუ ნებისმიერი $h(h_1,\ h_2, \dots, h_m) \neq \neq 0(0,\ 0, \dots, 0)$-სათვის

$$\Phi(h) < 0.$$

3) არაგანსაზღვრული (ნიშანცვლადი), თუ არსებობს h და h' წერტილები, ისეთი, რომ $\Phi(h) > 0$, ხოლო $\Phi(h') < 0$.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ სილივერსტროვის* შემდეგი თეორემა.

თეორემა 21.3 (კრიტერიუმი კვადრატული ფორმის განსაზღვრულობის შესახებ). იმისათვის, რომ $\Phi(h)$ კვადრატული ფორმა იყოს: 1) დადებითად განსაზღვრული, აუცილებელია და საკმარისი, ამ ფორმის მატრიცის მთავარი მინორები იყოს დადებითი, ე. ი.

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,\ \ \Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

2) უარყოფითად განსაზღვრული, აუცილებელია და საკმარისი — $\Phi(h)$ ფორმა იყოს დადებითად განსაზღვრული ე. ი. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0, \dots$.

ლემა 1. თუ $\Phi(h)$ კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\gamma > 0$ რიცხვი, რომ;

$$\Phi(h) \geqslant \gamma\,|h|^2, \quad \text{სადაც} \quad |h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_m^2}. \qquad (21.7)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $\Phi(z)$ კვადრატული ფორმა სფეროზე

$$s = \{r\,;\ r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_m^2 = 1\}.$$

რადგანაც $(0,\ 0, \dots, 0) \notin s$ და $\Phi(h)$ კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, ამიტომ $\Phi(r) > 0$, ყოველი $r \in s$-სათვის.

---

* დ. სილივერსტროვი (1814—1897) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

s—ჩაკეტილი[*] შემოსაზღვრული სიმრავლეა R^m-ში, ამიტომ $\Phi(r)$ როგორც უწყვეტი ფუნქცია s-ზე ღებულობს თავის უმცირეს მნიშვნელობას რაიმე $\overline{r}\in s$ წერტილზე, თუ აღვნიშნავთ $\gamma=\Phi(\overline{r})$ $(\gamma>0)$, გვექნება $\Phi(r)\geqslant\gamma$, $\forall r\in s$.

თუ $h\neq(0,0,\dots,0)$, მაშინ $\dfrac{h}{|h|}\in s$ და $\Phi\left(\dfrac{h}{|h|}\right)\geqslant\gamma$.

მაგრამ $\Phi(h)$ არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, ამიტომ $\Phi\left(\dfrac{h}{|h|}\right)=\dfrac{1}{|h|^2}\Phi(h)\geqslant\gamma$. აქედან მიიღება (21.7).

ლემა დამტკიცებულია.

ლ ე მ ა 2. თუ $f(x)$ ფუნქციას $x^{(0)}$ წერტილის რაიმე მიდამოში გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და $df(x^{(0)})=0$, მაშინ

$$\Delta f(x^{(0)})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}f''_{x_i x_j}(x^{(0)})\,\Delta x_i\,\Delta x_j+o(\rho^2), \qquad (21.8)$$

სადაც $\rho^2=\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\dots+\Delta x_m^2$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ტეილორის ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\Delta f(x^{(0)})=df(x^{(0)})+\frac{1}{2!}d^2f(x^{(0)}+\theta\Delta x)=\frac{1}{2}d^2f(x^{(0)}+\theta\Delta x)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}f''_{x_i x_j}(x^{(0)}+\theta\Delta x)\,\Delta x_i\,\Delta x_j=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(f''_{x_i x_j}(x^{(0)})+\varepsilon_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta x_j=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}f''_{x_i x_j}(x^{(0)})\,\Delta x_i\,\Delta x_j+$$

---

* $E\subset R^m$ სიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი, თუ ამ სიმრავლის წერტილთა $\{x^{(k)}\}$ კრებადი ნებისმიერი მიმდევრობისათვის $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^{(0)}\in E$. შევნიშნოთ, რომ ვაიერშტრასის თეორემა 8.6-ს ადგილი აქვს ჩაკეტილ სიმრავლეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებისთვისაც.

$$+\frac{\rho^2}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_j}{\rho}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^{(0)})\,\Delta x_i\,\Delta x_j+\frac{\rho^2}{2}\alpha(\Delta x),$$

სადაც $0<\theta<1$, $\Delta x=(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$, $\rho=|\Delta x|$. ვაჩვენოთ, რომ $\alpha(\Delta x)\to 0$, როცა $\rho\to 0$. მართლაც, მეორე რიგის კერძო წარმოებულების უწყვეტობის ძალით, გვაქვს $\varepsilon=\max\varepsilon_{ij}\to 0$, როცა $\rho\to 0$, ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ $\frac{|\Delta x_i|}{\rho}\leqslant 1$ უტოლობას, მივიღებთ:

$$|\alpha(\Delta x)|=\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_i}{\rho}\right|\leqslant\varepsilon\, m^2\to 0,$$

როცა $\rho\to 0$.

ამრიგად (21.8) დამოკიდებულება დამტკიცებულია.

ლემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 21.4 (ექსტრემუმის საკმარისი პირობები). ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას $x^{(0)}\in R^m$ წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და $df(x^{(0)})=0$. მაშინ $f(x)$ ფუნქციას $x^{(0)}$ წერტილში:

1) აქვს მინიმუმი, როცა მეორე რიგის დიფერენციალი

$$d^2 f\, x^{(0)})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\,\partial x_j}\Delta x_i\,\Delta x_j$$

დადებითად განსაზღვრულია.

2) აქვს მაქსიმუმი, როცა $d^2 f(x^{(0)})$ უარყოფითად განსაზღვრულია.

3) ექსტრემუმი არ გააჩნია, როცა $d^2 f(x^{(0)})$ არაგანსაზღვრულია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. 1) ვთქვათ

$$d^2 f(x^{(0)})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\Delta x_i\,\Delta x,$$

დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა. მაშინ ლემა 1-ის ძალით არსებობს $\gamma>0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$d^2 f(x^{(0)}) \geqslant \gamma \mid \Delta x \mid^2 = \gamma \rho^2.$$

ამ უტოლობის გამოყენებით (21.8)-დან მივიღებთ:

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)}) \geqslant \frac{\gamma}{2} \mid \Delta x \mid^2 + o(\mid \Delta x \mid^2)^2 =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \rho^2 (1 + \alpha(\Delta x)), \tag{21.9}$$

სადაც $\alpha(\Delta x) \to 0$, როცა $\rho \to 0$. არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ $|\alpha(\Delta x)| < \frac{1}{2}$, როცა $|\Delta x| < \delta$. ამიტომ (21.9)-დან გამომდინარეობს, რომ $\forall (x^{(0)} + \Delta x) \in u(x^{(0)}, \delta)$ წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Delta f(x^{(0)}) \geqslant \frac{\gamma}{2} \rho^2 (1 - |\alpha(\Delta x)|) \geqslant \frac{\gamma}{4} \rho^2 > 0.$$

ე. ი. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ არის $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. დებულება 2) ანალოგიურად დამტკიცდება.

3) (21.8) ტოლობა ჩავწეროთ ასე

$$\Delta f(x^{(0)}) = \frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^{(0)}) \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_j}{\rho} + \alpha(\Delta x)\right] =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j} r_i r_j + \alpha(\Delta x)\right] = \frac{\rho^2}{2}\left[A(r) + \alpha(\Delta x)\right], \tag{21.10}$$

სადაც $r_i = \frac{\Delta x_i}{\rho}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

პირობის ძალით არსებობს z' წერტილი ისეთი, რომ ფორმა დადებითია და არსებობს z'' წერტილი ისეთი, რომ ფორმა უარყოფითია, მაშინ მათ შესაბამის $y' = \frac{z'}{\rho}$ და $y'' = \frac{z''}{\rho}$ წერტილებზე გვექნება $A(y')>0$ და $A(y'')<0$. გამომდინარე აქედან მცირე ρ-სათვის

$$A(y') + \alpha(\Delta x) > 0; \quad A(y'') + \alpha(\Delta x) < 0.$$

ე. ი. $x^{(0)}$ წერტილის ნებისმიერ მცირე მიდამოში არის x' და x'' წერტილები, რომელთათვისაც $f(x') > f(x^{(0)})$ და $f(x'') < f(x^{(0)})$. ამრიგად $x^{(0)}$ ექსტრემუმის წერტილი არ არის.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თეორემა 21.2 მიიღება თეორემა 21.4-დან, როცა $m=2$. მართლაც, ამ შემთხვევაში

$$d^2 f(x^{(0)}) = f''_{x^2}(x^{(0)})\,\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(x^{(0)})\,\Delta x\,\Delta y + f''_{y^2}(x^{(0)})\,\Delta y^2.$$

სილივერსტროვის თეორემიდან გამომდინარე ეს ფორმა დადებითად განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$A = a_{11} = f''_{x^2}(x^{(0)}) > 0$$

და

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix} > 0,$$

ე. ი. f ფუნქცია $x^{(0)}$ წერტილში ღებულობს მინიმუმს. ანალოგიურად მიიღება თეორემა 21.2-ის სხვა დებულებებიც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$u = f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2$$

ფუნქციის ექსტრემუმი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ $f(x, y, z)$ ფუნქციის სტაციონალური წერტილები

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 4z = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x + 10y + 8z = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 4x + 8y + 18z = 0 \end{cases} \tag{21.11}$$

სისტემიდან. ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0,$$

ამიტომ ერთგვაროვან (21.11) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $x=y=z=0$.

ამრიგად, u ფუნქციას აქვს ერთადერთი სტაციონალური წერტილი (0, 0, 0). ვიპოვოთ d^2f (0, 0, 0).

$$d^2 f(0, 0, 0) = 2\,dx^2 + 4dx\,dy + 8dx\,dz + 16\,dy\,dz + 10\,dy^2 + 18\,dz^2.$$

რადგანაც

$$\Delta_1 = 2 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 128 > 0,$$

ამიტომ სილივერსტროვის თეორემის ძალით d^2f (0, 0, 0) ფორმა დადებითად განსაზღვრულია. გამომდინარე აქედან (0, 0, 0) არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და f (0, 0, 0) = 0.

§ 22. მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები ჩაკეტილ არეზე

ვთქვათ $u = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია R^m სივრცის რაიმე ჩაკეტილ არეზე. როგორც ვიცით ჩაკეტილ არეზე უწყვეტ ფუნქციას ამ არეზე აქვს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები (თეორემა 8.7).

ცხადია, ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა ჩაკეტილ არეზე შესაძლოა არ უდრიდეს ამ ფუნქციის რომელიმე ლოკალურ მაქსიმუმს (მინიმუმს) ამ არეზე.

ასევე ცხადია, რომ, თუ ფუქცია უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას ღებულობს არის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილია.

ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარეობს ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის შემდეგი წესი:

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ ჩაკეტილ არეზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა ამ არეზე, საჭიროა გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები ყველა კრიტიკულ წერტილებზე, ვიპოვოთ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა არის საზღვარზე; გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი იქნება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი კი — ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

კერძოდ თუ ორი ცვლადის $z = f(x, y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არის საზღვარი არის უწყვეტი $x = \varphi(t)$, $y = g(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ წირი, მაშინ ამ საზღვრის გასწვრივ $f(x, y)$ ფუნქცია არის ერთი t ცვლადის $f[\varphi(t), g(t)]$ ფუნქცია, რომლის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის მოძებნის წესი სეგმენტზე ცნობილია.

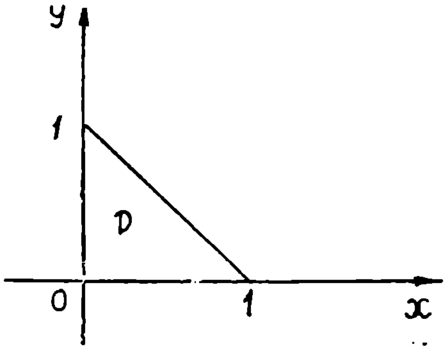
მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $z=1-x+x^2+2y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები D ჩაკეტილ არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ წრფეებით (ნახ. 15).

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$z'_x = -1 + 2x = 0,$$
$$z'_y = 2 \neq 0.$$

ე. ი. ფუნქციას სტაციონალური წერტილი არ გააჩნია.

გამოვიკვლიოთ ფუნქცია არის საზღვარზე.



ნახ. 15

1) ვთქვათ $x=0$, მაშინ $z=1+2y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. $[0;1]$ სეგმენტზე $z=1+2y$ ფუნქციას სტაციონალური წერტილი არ გააჩნია და $z(0)=1$, $z(1)=3$.

2) ვთქვათ $y=0$, მაშინ $z=1-x+x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. $z'_x = -1+2x=0$. აქედან $x=\frac{1}{2}$, ამიტომ $z\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, $z(0)=1$, $z(1)=1$.

3) ვთქვათ $x+y=1$, მაშინ $z=3-3x+x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. $z'_x=-3+2x=0$, $x=\frac{3}{2} \notin [0, 1]$, ე. ი. $[0, 1]$ სეგმენტზე სტაციონალური წერტილი არ არის, $z(0)=3$, $z(1)=1$. მიღებული მნიშვნელობების შედარებიდან გვაქვს, რომ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს $x^{(0)}=(0, 1)$ წერტილზე და ეს მნიშვნელობაა 3, ხოლო უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს (0,0) და (1,0) წერტილებში და ეს მნიშვნელობაა 1.

§ 23. არაცხადი ფუნქციის ექსტრემუმი

ვთქვათ $y=f(x)$ წარმოებადი არაცხადი ფუნქცია განსაზღვრულია $F(x, y)=0$ განტოლებით. როგორც ვიცით (თეორემა 20.2)

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

აქედან ჩანს, რომ $f'(x)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $F'_x(x,y)=0$. მაშასადამე, x-ის იმ მნიშვნელობათა მოსაძებნად, სადაც $y=f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი, საჭიროა შემდეგი

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ F'_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.

ვთქვათ (x_0, y_0) არის (23.1) სისტემის რაიმე ამონახსნი. რადგან $f'(x_0)=0$, ამიტომ (20.11) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$f''(x_0) = -\frac{F''_{x^2}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

მაშასადამე $y=f(x)$ არაცხად ფუნქციას ექნება x_0 წერტილში მაქსიმუმი, თუ

$$\frac{F''_{x^2}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} > 0,$$

ხოლო მინიმუმი, თუ

$$\frac{F''_{x^2}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} < 0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$F(x, y) = x^3+y^3-3xy=0$$

განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (23.1) განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0, \\ 3x^2 - 3y = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსენია (0, 0) და $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. რადგანაც $F'_y(0,0)=0$, ამიტომ (0, 0) უვარგისია. $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ წერტილზე $F'_y=3\sqrt[3]{2}$, $F'_x=0$. ამიტომ $f'(\sqrt[3]{2})=0$. შემდეგ $F''_{x^2}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = 6\sqrt[3]{2}$ და ამრიგად $f''(\sqrt[3]{2}) = -\frac{6\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{2}} = -2 < 0$. გამომდინარე აქედან არაცხად $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი $x = \sqrt[3]{2}$ წერტილზე.

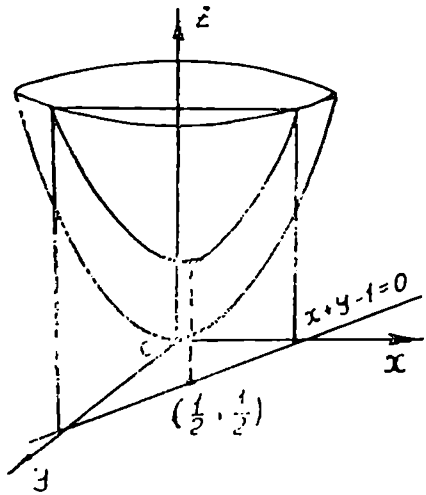
§ 24. პირობითი ექსტრემუმი

§ 21-ში ჩვენ შევისწავლეთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის პოვნის ამოცანა. ამ ამოცანის განხილვის დროს ფუნქციის არგუმენტებზე არ იყო დადებული არავითარი პირობა, გარდა იმისა, რომ არგუმენტების შესაბამისი წერტილები უნდა ეკუთვნოდეს მოცემულ არეს. ასეთ ექსტრემუმს ეწოდება ჩვეულებრივი ანუ უპირობო ექსტრემუმი.

ზოგჯერ, მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნაზე ისეთი ამოცანებიც გვხვდება, როცა ფუნქციის არგუმენტები დაკავშირებული არიან ერთი ან რამდენიმე დამოკიდებულებით. ასეთ ექსტრემუმს უწოდებენ პირობით ექსტრემუმს.

მოვიყვანოთ მაგალითები პირობითი ექსტრემუმის პოვნაზე:

1. ვიპოვოთ მანძილი* კოორდინატთა სათავიდან $\varphi(x, y)=0$ წირამდე.



ნახ. 16

ამ შემთხვევაში საძებნია $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქციის მინიმუმი იმ პირობით, რომ $\varphi(x, y)=0$.

2. $2a$ ფართობის მქონე თუნუქის ფირფიტისაგან უნდა გაკეთდეს პარალელეპიპედის ფორმის დახურული ყუთი, რომელსაც აქვს უდიდესი მოცულობა.

აღვნიშნოთ სიგრძე, სიგანე და სიმაღლე შესაბამისად x, y და z-ით, ამოცანა დაიყვანება $u=xyz$ ფუნქციის მაქსიმუმის პოვნაზე, იმ პირობით, რომ $2xy+2xz+2yz=2a$. აქ საქმე გვაქვს პირობით ექსტრემუმთან.

3. პირობითი და უპირობო (ჩვეულებრივი) ექსტრემუმების შედარებისათვის განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: $z=x^2+y^2$ ფუნქციის უპირობო მინიმუმი ცხადია არის 0 და ის მიღწევა (0,0) წერტილზე.

* მანძილი რაიმე $M_0(x_0, y_0)$ წერტილიდან $\varphi(M)=\varphi(x, y)=0$ წირამდე განსაზღვრებით არის $\rho(M_0; \varphi)=\inf\limits_{\varphi(M)=0} \rho(M_0, M)$.

ვიპოვოთ ახლა ამ ფუნქციის მინიმუმი იმ პირობით, რომ $x+y-1=0$. ცხადია პირობითი ექსტრემუმი არ შეიძლება ამ ფუნქციამ მიიღოს (0,0) წერტილზე, რადგან ეს წერტილი არ მდებარეობს $x+y-1=0$ წრფეზე. ეს მინიმუმი უდრის $\frac{1}{2}$-ს და ის მიიღწევა $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ წერტილზე* (ნახ. 16). პირველ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს მინიმუმი ყველა აპლიკატთა შორის, ხოლო მეორე შემთხვევაში მინიმუმი იმ აპლიკატთა შორის რომლებიც შეესაბამებიან $x+y-1=0$ წრფის წერტილებს.

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით პირობითი ექსტრემუმების პოვნის მეთოდებს.

ვთქვათ, რაიმე $D\subset R^{n+m}$ არეზე მოცემულია ფუნქციები

$$u_i=\varphi_i(x,\ y),\ i=1,\ 2,\dots,m,$$

სადაც $\quad x=(x_1,\ x_2,\dots,x_n),\quad y=(y_1,\ y_2,\dots,y_m).$

განვიხილოთ სიმრავლე

$$E=\{(x,\ y):\varphi_i(x,\ y)=0,\ \ i=1,\ 2,\dots,m;\ (x,\ y)\in D\}.$$

განტოლებებს

$$\varphi_i(x,\ y)=0,\ \ i=1,\ 2,\dots,m \tag{24.1}$$

ეწოდება ბმის განტოლებები.

განსაზღვრება 24.1. ვთქვათ D არეზე მოცემულია $u=f(x,y)$ ფუნქცია. $M_0(x^{(0)},\ y^{(0)})$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის ლოკალური პირობითი მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი ბმის (24.1) განტოლების მიმართ (ან (24.1) პირობებში), თუ მოიძებნება M_0 წერტილის ისეთი $u(M_0\ \delta)$ მიდამო, რომ ყოველი $(x,y)\in u(M_0,\ \delta)\cap E$ წერტილისათვის სრულდება უტოლობა $f(x,\ y)\leqslant f(x^{(0)},\ y^{(0)})$ ($f(x,\ y)\geqslant f(x^{(0)},\ y^{(0)})$).

ფუნქციის მნიშვნელობებს პირობითი მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებში უწოდებენ შესაბამისად ფუნქციის პირობით მაქსიმუმს და პირობით მინიმუმს.

---

* ვპოულობთ y-ს $x+y-1=0$ განტოლებიდან, ვსვამთ y-ის ამ მნიშვნელობას $z=(x^2+y^2)$-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ $z=2x^2-2x+1$. ჩვეულებრივი მეთოდებით ვპოულობთ ამ ფუნქციის მინიმუმს. ის მიიღწევა $x=\frac{1}{2}$ წერტილზე. ამასთან $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}$.

ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ამ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები.

ვიპოვოთ $u=f(x, y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი ბმის (24.1) პირობით ნიშნავს, ვიპოვოთ f ფუნქციის ჩვეულებრივი ლოკალური ექსტრემუმი E სიმრავლეზე.

შევისწავლოთ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა ორი x და y ცვლადის

$$z=f(x, y) \tag{24.2}$$

ფუნქციისათვის, ბმის ერთი

$$\varphi(x, y)=0 \tag{24.3}$$

განტოლებით.

ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია პირობები:

1) f და φ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია რაიმე $D\subset R^2$ არეში.

2) განსახილველ $M_0(x_0, y_0)\in D$ წერტილში $\dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y}\neq 0$.

ამ პირობებში თეორემა 20.1 და 20.2-ის ძალით (24.3) განტოლება M_0 წერტილის რაიმე $u(M_0, \delta)$ მიდამოში განსაზღვრავს y-ს, როგორც x ცვლადის უწყვეტად წარმოებად

$$y=g(x) \tag{24.4}$$

ფუნქციას.

თუ y-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (24.2)-ში, მივიღებთ ერთი ცვლადის რთულ ფუნქციას

$$z=f(x, g(x)), \tag{24.5}$$

რომელსაც აქვს უწყვეტი წარმოებული x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში.

თეორემა 20.1-ის (არაცხადი ფუნქციის არსებობის შესახებ) ძალით (24.3) და (24.4) განტოლებები ეკვივალენტურია, ამიტომ გამომდინარე აქედან მართებულია შემდეგი დებულება: M_0 წერტილი არის $f(x, y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი (24.3) ბმის განტოლების მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x_0 არის (24.5) ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმის წერტილი.

ამრიგად, იმ შემთხვევაში, როცა (24.3) განტოლება ცხადად ამოიხსნება y-ის მიმართ, პირობითი ექსტრემუმის პოვნის ამოცანა დაიყ-

ვანება ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმის პოვნაზე. მაგრამ (24.3) ტოლობიდან y საზოგადოდ არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში x-ის მიმართ, ამიტომ მიმართავენ პირობითი ექსტრემუმის პოვნის სხვა მეთოდებს, რომლებიც არ მოითხოვს (24.3)-ის ამოხსნას y-ის მიმართ. ამ მეთოდის მიღების დროს ნაგულისხმევი იქნება მხოლოდ $y=g(x)$ არაცხადი ფუნქციის არსებობის ფაქტი. მართებულია შემდეგი.

თ ე ო რ ე მ ა 24.1 (პირობითი ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობები). ვთქვათ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი არის $z=f(x, y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი ბმის $\varphi(x, y)=0$ განტოლების მიმართ. თუ შესრულებულია პირობები:

1) M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში f და φ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები;

2) $\dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$,

მაშინ არსებობს ისეთი λ რიცხვი, რომელიც x_0 და y_0-თან ერთად დააკმაყოფილებენ სისტემას

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{24.6}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თეორემის პირობის ძალით ადგილი აქვს (24.5) ტოლობას. რადგანაც x_0 არის $z=f[x, g(x)]$ ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმის წერტილი, ამიტომ

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \frac{dy(x_0)}{dx} = 0. \tag{24.7}$$

მეორეს მხრივ (24.3) ტოლობის ძალით (x_0, y_0) წერტილში გვაქვს

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{24.8}$$

(24.8) ტოლობა გავამრავლოთ რაიმე განუსაზღვრელ λ მუდმივზე და შევკრიბოთ (24.7) ტოლობასთან, მივიღებთ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \frac{dy}{dx} = 0. \tag{24.9}$$

შევარჩიოთ λ მუდმივი ისე, რომ შესრულდეს პირობა

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

(ეს შესაძლებელია 2) პირობის ძალით). მაშინ ასეთნაირად შერჩეული λ-სათვის (24.9) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

$M(x, y)$ წერტილს რომლის x და y კოორდინატები აკმაყოფილებენ (24.6) სისტემას უწოდებენ პირობითი ექსტრემუმის სტაციონალურ წერტილს ბმის $\varphi(x, y)=0$ განტოლების მიმართ.

შ ე დ ე გ ი. პირობითი ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ (24.6) სისტემის ამონახსნის წერტილებსა და იმ წერტილებს შორის რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ბმის განტოლებას, მაგრამ არ აკმაყოფილებენ თეორემა 24.1-ის 1) და 2) პირობებიდან ერთ-ერთს მაინც.

შედეგში აღნიშნულ წერტილებს, პირობითი ექსტრემუმის კრიტიკული წერტილები ეწოდება.

შევნიშნოთ ,რომ ყოველი კრიტიკული წერტილი საზოგადოდ არ არის ექსტრემუმის წერტილი, საჭიროა დამატებითი გამოკვლევის ჩატარება, რათა დავადგინოთ კრიტიკული წერტილებიდან რომელია ექსტრემუმის წერტილები და რომელი არა.

ასევე შევნიშნოთ, რომ (24.6) სისტემის მარცხენა მხარეები წარმოადგენენ

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \tag{24.10}$$

ფუნქციის კერძო წარმოებულებს x, y და λ ცვლადებით.

λ რიცხვს ეწოდება ლაგრანჟის მამრავლი, ხოლო $L(x, y, \lambda)$ ფუნქციას ლაგრანჟის ფუნქცია.

ამრიგად, იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $z=f(x, y)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის სტაციონალური წერტილი იმ პირობით, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $\varphi(x, y)=0$, საჭიროა შევადგინოთ ლაგრანჟის $L(x, y, \lambda)$ ფუნქცია და შემდეგ მისი კერძო წარმოებულები x, y და λ ცვლადებით გავუტოლოთ ნულს, ე. ი. შევადგინოთ (24.6) სისტემა. მიღებული სისტემის ამონახსნი გვაძლევს სტაციონალურ წერტილებს.

დავადგინოთ ახლა პირობითი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

ბმის $\varphi(x, y)=0$ პირობებში $z=f(x, y)$ ფუნქციას და (24.10) ტოლობით განსაზღვრული ლაგრანჟის L ფუნქციას ერთმანეთის ტოლი ერთი და იგივე ექსტრემუმები გააჩნიათ*, ამიტომ თეორემა 21.4-ის ძალით გვაქვს შემდეგი:

თ ე ო რ ე მ ა 24.2 (პირობითი ექსტრემუმის საკმარისი პირობები). ვთქვათ $M_0(x_0, y_0)$ არის სტაციონალური წერტილი. და მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს ბმის $\varphi(x, y)=0$ განტოლებას. თუ M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში f და φ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი მეორე რიგის კერძო წარმოებული, მაშინ f ფუნქციას M_0 წერტილში:

1) აქვს პირობითი მინიმუმი, როცა d^2L ამ წერტილში dx და dy ცვლადების მიმართ დადებითად განსაზღვრულია.

2) აქვს პირობითი მაქსიმუმი, როცა d^2L ამ წერტილში dx და dy ცვლადების მიმართ უარყოფითად განსაზღვრულია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ:

1) სტაციონალურ M_0 წერტილში მეორე რიგის d^2L დიფერენციალის გამოთვლისას x და y შეიძლება ჩავთვალოთ როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები.

მართლაც, როგორც ვიცით (§ 18) ზოგად შემთხვევაში მეორე რიგის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას ადგილი არა აქვს:

$$d^2 L=\left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx+\frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^2 L+\frac{\partial L}{\partial y}\, d^2y.$$

მაგრამ სტაციონალურ M_0 წერტილზე $\dfrac{\partial L}{dy}=0$. ამდენად

$$d^2 L=\left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx+\frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^2 L. \qquad (24.11)$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში d^2L გამოითვლება ისე როგორც დამოუკიდებელი x და y ცვლადების შემთხვევაში.

2) რადგან საჭიროა დადგინდეს d^2L-ის ნიშანმუდმივობის საკითხი ბმის $\varphi(x, y)=0$ პირობებში, ამიტომ გამოთვლების ჩატარების დროს საჭიროა (24.11) ფორმულაში dy-ის ნაცვლად ჩაისვას მისი მნიშვნელობა ფორმულიდან $dy=-\dfrac{\varphi_x'(x_0, y_0)}{\varphi_y'(x_0, y_0)}dx$. ამის შემდეგ უნდა შევისწავლოთ d^2L-ის ნიშანმუდმივობის საკითხი M_0 წერტილში.

---

* ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $E=\{(x, y) : \varphi(x, y)=0\}$ სიმრავლეზე $f(x, y)-f(x_0, y_0)=L(x, y, \lambda)-L(x_0, y_0, \lambda)$.

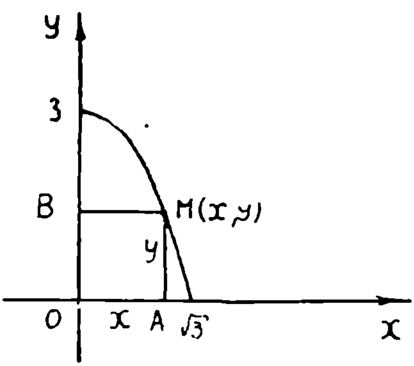
მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ $f(x, y)=y^2-x^2$ ფუნქციის ექსტრემუმი იმ პირობით, რომ $y=2x$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ $y=2x$-ს ჩავსვამთ $f(x, y)$ ფუნქციაში, მივიღებთ $f(x, 2x)=3x^2$. ამ ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი $x=0$ წერტილში. ე. ი. $f(x, y)=y^2-x^2$ ფუნქციას ბმის $y=2x$ განტოლების მიმართ აქვს მინიმუმი (0,0) წერტილში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ თვით $f(x, y)$ ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმის სიბრტყის არცერთ წერტილში. ამრიგად განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ფუნქციას შეიძლება არ ჰქონდეს ჩვეულებრივი ექსტრემუმი მაგრამ ბმის გარკვეულ პირობებში კი შეიძლება ჰქონდეს პირობითი ექსტრემუმი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვთქვათ Oxy სიბრტყეზე მოცემულია ფიგურა რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო ღერძებით და $y+x^2-3=0$ $(0\leqslant x\leqslant\sqrt{3})$ პარაბოლით. ჩავხაზოთ ამ ფიგურაში მართკუთხედი ისე რომ გვერდები საკოორდინატო ღერძების პარალელური იყოს და ერთი წვერო $M(x, y)$ მდებარეობდეს ამ პარაბოლაზე. ვიპოვოთ ასეთ მართკუთხედთა შორის ის რომელსაც აქვს უდიდესი ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ M წერტილის კოორდინატებია x და y (ნახ. 17), მაშინ მართკუთხედის ფართობი $S=xy$. რადგანაც $M(x, y)$ წერტილი ძევს პარაბოლაზე, ამიტომ მისი კოორდინატები დააკმაყოფილებენ განტოლებას $y+x^2-3=0$. ამრიგად, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $S=xy$ ფუნქციის ექსტრემუმი ბმის $y+x^2-3=0$ განტოლების მიმართ. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია



ნახ. 17

$$L(x, y, \lambda)=xy+\lambda(y+x^2-3).$$

ვიპოვოთ დასმული ამოცანის სტაციონალური წერტილები სისტემიდან

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2x\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+\lambda=0, \\ y+x^2-3=0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $x=1$, $y=2$, $\lambda=-1$, ე. ი. (1, 2) სტაციონალური წერტილია, რომელიც შეესაბამება $\lambda=-1$ მნიშვნელობას. გა-

მოვიკვლიოთ სტაციონალურ წერტილზე ლაგრანჟის $L(x, y, -1) = xy - y - x^2 + 3$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი

$$d^2 L(x, y, -1) = L''_{x^2} dx^2 + 2 L''_{xy} dx\, dy + L''_{y^2} dy^2 =$$

$$= -2dx^2 + 2\, dx\, dy = 2\, dx\, (dy - dx).$$

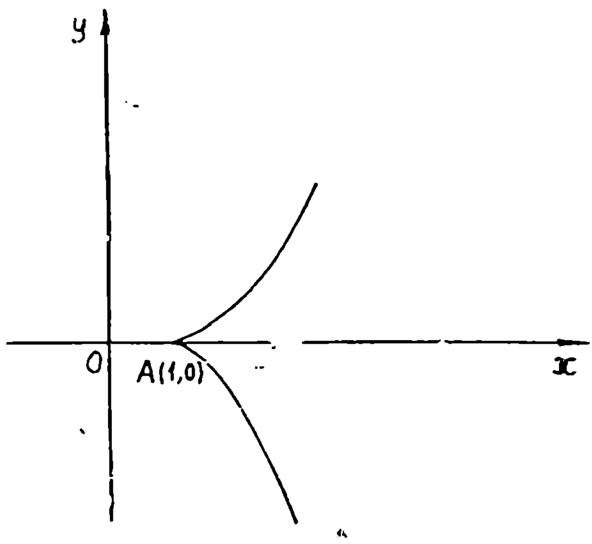
ბმის $y + x^2 - 3 = 0$ განტოლებიდან გვაქვს $dy = -2x dx$. კერძოდ, (1;2) წერტილზე $dy = -2dx$, ამიტომ

$$d^2 L(1, 2, -1) = -6\, dx^2 < 0 \quad (dx \neq 0).$$

ამრიგად, $S = xy$ ფუნქციას (1; 2) წერტილში აქვს პირობითი მაქსიმუმი.

მაშასადამე, ყველა მართკუთხედებიდან უდიდესი ფართობი აქვს იმ მართკუთხედს, რომლის გვერდებია $OA = 1$, $OB = 2$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვიპოვოთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $y^2 = (x-1)^3$ წირამდე (ნახ. 18).



ნახ. 18

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძებნია $f(x, y) = x^2 + y^2$ ფუნქციის მინიმუმი ბმის $\varphi(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$ განტოლების მიმართ. ნახაზიდან ცხადია, რომ ეს მინიმუმი მიღწევა A (1; 0) წერტილში. აქვე შევნიშნოთ, რომ ლაგრანჟის მეთოდით ეს წერტილი არ მიიღება.

მართლაც, ამ შემთხვევაში (24.6) სისტემას აქვს სახე

$$\begin{cases}2x+3\lambda(x-1)^2=0,\\ 2y-2\lambda y=0,\\ (x-1)^3-y^2=0.\end{cases}$$

ამ სისტემას კი A (1; 0) წერტილის კოორდინატები არ აკმაყოფილებენ. საქმე იმაშია, რომ არ სრულდება თეორემა 24.1-ის 2) პირობა $\varphi_y'(1, 0)=0$.

ამრიგად (1,0) წერტილი დასმული ამოცანისათვის არ არის სტაციონალური წერტილი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზოგჯერ უფრო მოსახერხებელია პირობითი ექსტრემუმის შემდეგი საკმარისი პირობის გამოყენება: თუ (x_0, y_0, λ_0) არის (24.6) სისტემის ამონახსნი და

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0 & \varphi_x'(x_0, y_0) & \varphi_y'(x_0, y_0)\\ \varphi_x'(x_0, y_0) & L_x''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0)\\ \varphi_y'(x_0, y_0) & L_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) & L_y''(x_0, y_0, \lambda_0)\end{vmatrix}\neq 0,$$

მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში აქვს პირობითი მინიმუმი თუ $\Delta>0$, ხოლო პირობითი მაქსიმუმი თუ $\Delta<0$.

განვიხილოთ ახალი ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ საძებნია $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ფუნქციის ექსტრემუმი ბმის

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)=0,\\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)=0\end{array}\right\}\qquad(24.12)$$

განტოლებების მიმართ. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 24.3 (პირობითი ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობები). ვთქვათ $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$ წერტილი არის $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი ბმის (24.12) განტოლებების მიმართ. თუ შესრულებულია პირობები:

1) M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში f და φ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები;

2) M_0 წერტილზე

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

მაშინ არსებობს ისეთი $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ რიცხვები, რომლებიც $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}$ რიცხვებთან ერთად დააკმაყოფილებენ სისტემას

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} = 0, \\ &\cdot \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial y_2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_2} = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\frac{\partial f}{\partial y_m} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} = 0, \\ &\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24.13)$$

ეს თეორემა მტკიცდება ისევე როგორც თეორემა 24.1.

შ ე დ ე გ ი. პირობითი ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ (24.13)-ის ამონახსნის წერტილებსა და იმ წერტილებს შორის რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ბმის (24.12) განტოლებებს, მაგრამ არ აკმაყოფილებენ თეორემა 24.3-ის 1) და 2) პირობებიდან ერთერთს მაინც.

თუ განვიხილავთ დამხმარე ფუნქციას

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k, \quad (24.14)$$

მაშინ (24.13) სისტემა ჩაიწერება მოკლედ

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

$\lambda_j (j=1, 2, \dots, m)$ რიცხვებს ეწოდება ლაგრანჟის მამრავლები, ხოლო L ფუნქციას ლაგრანჟის ფუნქცია.

თ ე ო რ ე მ ა 24.4 (პირობითი ექსტრემუმის საკმარისი პირობები). ვთქვათ $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, არის სტაციონალური წერტილი და მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს ბმის (24. 12) განტოლებებს. თუ M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში f და φ_i $(i=1, 2, \dots, m)$ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, მაშინ f ფუნქციას M_0 წერტილში:

1) აქვს პირობითი მინიმუმი, როცა d^2L ამ წერტილში dx_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ და dy_j $(j = 1, 2, \dots, m)$ ცვლადების მიმართ დადებითად განსაზღვრულია.

2) აქვს პირობითი მაქსიმუმი, როცა d^2L ამ წერტილში აღნიშნული ცვლადების მიმართ უარყოფითად განსაზღვრულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვიპოვოთ $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$ ფუნქციის ექსტრემუმი ბმის $x_1 + x_2 + \dots + x_m + 1 = 0$ განტოლების მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_m + 1).$$

სტაციონალურ წერტილებს ვპოულობთ სისტემიდან

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2x_i + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + 1 = 0.$$

ამ სისტემის ამონახსენია $x_i = -\frac{1}{m}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\lambda = \frac{2}{m}$.

ე. ი. $M_0\left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \ldots, -\frac{1}{m}\right)$ წერტილი — სტაციონალურია, რომელიც შეესაბამება $\lambda = \frac{2}{m}$ მნიშვნელობას.

ცხადია, რომ

$$d^2 L = 2\ (dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_m^2) > 0.$$

ამრიგად M_0 წერტილზე ფუნქციას აქვს პირობითი მინიმუმი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. ვიპოვოთ $f(x, y) = e^{axy}$ $(a \neq 0)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი ბმის $\varphi(x, y) = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ განტოლების მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x, y) = e^{axy} + \lambda(x^3 + y^3 + x + y - 4).$$

სტაციონალურ წერტილებს ვპოულობთ სისტემიდან

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= ay\, e^{axy} + \lambda(3x^2 + 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= ax\, e^{axy} + \lambda(3y^2 + 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24.15}$$

სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ x-ზე, ხოლო მეორე y-ზე და პირველს გამოვაკლოთ მეორე, მივიღებთ

$$\lambda(3x^3 - 3y^3 + x - y) = 0$$

ანუ

$$\lambda(x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1) = 0. \tag{24.16}$$

თუ $\lambda = 0$, მაშინ (24.15) სისტემის პირველი ორი განტოლებიდან გვაქვს $x = y = 0$, მაგრამ $x = y = 0$ არ აკმაყოფილებს სისტემის მესამე განტოლებას, ამრიგად $\lambda \neq 0$. მაგრამ თუ $\lambda \neq 0$, მაშინ რადგანაც

$3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1 = 3(x^2 + xy + y^2) + 1 > 0$, ამიტომ (24.16) ტოლობიდან გამომდინარეობს $x = y$. თუ ბმის განტოლებაში ჩავსვამთ $y = x$, მივიღებთ

$$x^3 + x = 2,$$

საიდანაც $x = y = 1$.

(24.15) სისტემის პირველი განტოლებიდან, როცა $x = y = 1$, ვპოულობთ

$$\lambda = -\frac{a}{4} e^a.$$

მაშასადამე $\left(1,\ 1,\ -\frac{a}{4} e^a\right)$ არის ლაგრანჟის ფუნქციის სტაციონალური წერტილი.

რადგანაც

$$d\,(e^{axy}) = a\,(xdy + ydx)\,e^{axy},$$

$$d^2\,(e^{axy}) = a^2\,(xdy + ydx)^2\,e^{axy} + 2a\,dx\,dy\,e^{axy},$$

$$d^2\,(x^3 + y^3 + x + y - 4) = 6x\,dx^2 + 6y\,dy^2,$$

ამიტომ

$$d^2L\left(1, 1, -\frac{a}{4} e^a\right) = a\,e^a\left[a\,(dx + dy)^2 + 2dxdy - \frac{3}{2}\,(dx^2 + dy^2)\right]. \tag{24.17}$$

როცა $x = y = 1$ ბმის განტოლებიდან გვაქვს

$$dx + dy = 0 \quad \text{ანუ} \quad dy = -dx.$$

თუ dy-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (24.17)-ში, გვექნება

$$d^2L\left(1,\ 1,\ -\frac{a}{4} e^a\right) = -5a\,e^a\,dx^2.$$

ამრიგად (1,1) წერტილში, როცა $a < 0$ გვაქვს პირობითი მინიმუმი, ხოლო როცა $a > 0$ — პირობითი მაქსიმუმი, ამასთან ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობაა e^a.

§ 25. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება, რომ ცვლადთა შორის დამოკიდებულება ექსპერიმენტით, დაკვირვებით ან გაზომვის შედეგადაა მიღებული, ე. ი. ამ ცვლადებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება

ცხრილების საშუალებითაა მოცემული (ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი). ცხრილით მოცემული ფუნქციისათვის ზოგჯერ ისმება ამოცანა: ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობა ცხრილით მოცემულ მნიშვნელობათა შორის (ინტერპოლირების ამოცანა) ან ფუნქციის მნიშვნელობა ცხრილით მოცემულ მნიშვნელობათა გარეთ (ექსტრაპოლირების ამოცანა). ცხადია ამ ამოცანის ზუსტი ამოხსნა შეუძლებელია. ჩვენ ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ამ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ერთ მეთოდს, რომელიც უმცირეს კვადრატთა მეთოდის სახელწოდებითაა ცნობილი.

$P_m(x)$-ით აღვნიშნოთ m-ური რიგის ალგებრული მრავალწევრი:

$$P_m'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m,$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_m$ ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო H_m-ით იმ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა რიგი არ აღემატება m-ს. ცხადია, ადგილი აქვს ჩართვას

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_m \subset \cdots .$$

ვთქვათ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით

x	x_1	x_2	. . . .	x_n
y	y_1	y_2	. . . .	y_n

გამოვთვალოთ $y=P_m(x)$ მრავალწევრის (a_i კოეფიციენტები ჯერჯერობით რაღაც ნებისმიერი რიცხვებია) მნიშვნელობები არგუმენტის $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობებისათვის. ვთქვათ ეს მნიშვნელობებია

$$\tilde{y}_i = P_m(x_i), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

მაშინ სხვაობები

$$y_i - \tilde{y}_i = y_i - P_m(x_i), \quad i=1, 2, \dots, n$$

არის ის ცდომილებანი, რომლებიც მიიღებიან თუ y_i-ის მნიშვნელობებს შევცვლით $\tilde{y}_i$ მნიშვნელობებით ($i=1, 2, \dots, n$).

განვიხილოთ ფუნქცია

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m)]^2, \quad (25.1)$$

ის $m+1$ ცვლადის ფუნქციაა (ცვლადებია $a_0, a_1, \ldots, a_m$), თანაც არის ამ ცვლადების მეორე რიგის მრავალწევრი, ამასთან $S \geqslant 0$.

ჩვენ შევისწავლით ამოცანას: H_m კლასში ვიპოვოთ $P_m(x)$ მრავალწევრი ისეთი, რომლისთვისაც $S(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ ფუნქცია მიიღებს უმცირეს მნიშვნელობას, ე. ი. (25.1) გამოსახულებაში შევარჩიოთ $a_0, a_1, \ldots, a_m$ კოეფიციენტები ისე რომ S ფუნქციამ მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა. a_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ კოეფიციენტების ასეთ მნიშვნელობებს ეწოდება საუკეთესო მნიშვნელობები, ხოლო ამ კოეფიციენტებით შედგენილ $P_m(x)$ მრავალწევრს საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი უმცირეს კვადრატთა მეთოდისათვის.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 25.1. H_m კლასში არსებობს ერთადერთი საუკეთესო მიახლოების $t_m(x)$ მრავალწევრი, ე. ი. არსებობს ერთადერთი $t_m(x) \in H_m$ მრავალწევრი ისეთი, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - t_m(x_i)]^2 = \min_{P_m(x) \in H_m} \sum_{i=1}^{n} [y_i - P_m(x_i)]^2.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. სიმარტივისათვის დამტკიცება ჩავატაროთ $m=1$-თვის, ე. ი. ვეძებოთ ისეთი $y = ax + b \in H_1$ მრავალწევრი, რომლისთვისაც

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

ფუნქცია მიიღებს უმცირეს მნიშვნელობას.

ამრიგად, ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვიპოვოთ a და b-ს ის მნიშვნელობები, რომლისთვისაც $S(a, b)$ ფუნქციას ექნება მინიმუმი. ვიპოვოთ ექსტრემუმის წერტილები სისტემიდან

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]\, x_i = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)] = 0.$$

აქედან

$$
\left\{
\begin{aligned}
& a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\
& a \sum_{i=1}^{n} x_i + b_n = \sum_{i=1}^{n} y_i.
\end{aligned}
\right. \tag{25.2}
$$

ვაჩვენოთ, რომ (25.2) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი a და b-ს მიმართ და რომ a და b-ს ამ მნიშვნელობებისათვის $S(a, b)$ ფუნქცია მიიღებს მინიმუმს.

(25.2) სისტემის დეტერმინანტია

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 =
$$

$$
= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2. \tag{25.3}
$$

რადგანაც $x_i \neq x_j$, როცა $i \neq j$, ამიტომ (25.3)-დან გამომდინარეობს, რომ $\Delta > 0$, ე. ი. (25.2) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ a და b-ს ამ მნიშვნელობებისათვის $S(a, b)$ ფუნქცია ღებულობს მინიმუმს. გვაქვს

$$
A = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad B = \frac{\partial^2 S}{\partial a \, \partial b} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad C = \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.
$$

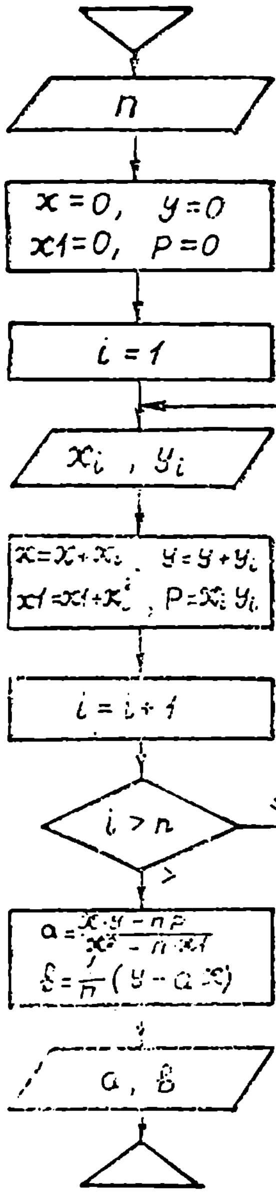
გამომდინარე აქედან

$$
AC - B^2 = 4n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2 \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 > 0.
$$

რადგანაც $A = \dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0$, ამიტომ $M(a, b)$ წერტილზე გვაქვს მინიმუმი.

ანალოგიურად შეიძლება ჩავატაროთ მსჯელობა $m>1$-ისათვის. თეორემა დამტკიცებულია.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ბლოკ-სქემა



უმცირეს კვადრატთა მეთოდის პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
5   REM — — — Метод наименьших квадратов — — —
10  OPEN 'LP:' FOR OUTPUT AS FILE # 1
20  DIM X(n), Y(n)
30  DATA n, X(1), Y (1), X (2), Y(2),..., X (n), Y (n)
40  READ N
50  X=0 \ Y=0 \ X1=0 / P=0.
60  FOR I=1 TO N
70  READ X(I), Y(1)
80  X=X+X(I) \ Y=Y+Y(I)
90  X1=X1+(X (I))^2 \ P=P+X (I)* Y(I)
100 NEXT I
110 A=(X * Y—N * P) / (X^2—N * X1)
120 B=(1 / N) * (Y — A * X)
130 PRINT # 1, ' Y= '; A; ' X = ' ; B
140 END
```

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის პროგრამა ფორტრანის ენაზე

```
    PROGRAM — — Метод наименьших квадратов ——
    DIMENSION X(n), Y(n)
    READ (5, 1) X, Y
1   FORMAT (F7, 4)
    X=0
    Y=0
    X1=0
    P=θ.
    DO 10 I=1, N
    X=X+X (I)
    Y=Y+Y(I)
    X1=X1+(X (1))**2
    P=P+X(I) * Y (I)
10  CONTINUE
    A=(X * Y— N * P) / (X * * 2 —N * X1)
    B=(1 / N) * (Y — A * X)
    WRITE (6, 1) A, B
    STOP ,
    END
```

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§ 1. პირველადი ფუნქცია. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

დიფერენციალური აღრიცხვის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მოძებნა. მათემატიკური ანალიზის მრავალმხრივ გამოყენებებს (გეომეტრიაში, მექანიკაში, ფიზიკაში, ტექნიკაში) მივყავართ შებრუნებულ ამოცანამდე: ვიპოვოთ ისეთი $F(x)$ ფუნქცია რომლის წარმოებული უდრის მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას.

ასეთი ამოცანაა მაგალითად მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონის დადგენა, როდესაც მოცემულია მისი მოძრაობის სიჩქარე ან აჩქარება.

განსაზღვრება 1.1. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი $]a; b[$ შუალედზე, თუ ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $F(x)$ წარმოებადია და $F'(x)=f(x)$.

ანალოგიურად განისაზღვრება პირველადი ფუნქცია უსასრულო შუალედებზე.

$F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ $]a, b[$ შუალედის ყოველ წერტილზე $F'(x)=f(x)$ და $F'(a+)=f(a+)$, $F'(b-)=f(b-)$.

მაგალითი 1. $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ წარმოადგენს $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ფუნქციის პირველადს $]-1; 1[$ შუალედზე, ვინაიდან ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $(\sqrt{1-x^2})'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

მაგალითი 2. $\sin x$ წარმოადგენს $\cos x$ ფუნქციის პირველადს $]-\infty; +\infty[$ შუალედზე, ვინაიდან ამ შუალედის ყოველ წერტილში $(\sin x)'=\cos x$.

მაგალითი 3. $\ln x$ წარმოადგენს $\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის პირველადს $]0; +\infty[$ შუალედზე, ვინაიდან ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

მაგალითი 4. ფუნქცია $F(x)=\dfrac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})$ წარმოადგენს $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ფუნქციის პირველადს $[-1; 1]$ სეგმენტზე, ვი-

ნაიდან $]-1;\ 1[$ ინტერვალის ყოველ წერტილზე $\left(\frac{1}{2}(\arcsin x+\right.$
$\left.+x\sqrt{1-x^2}\,)\right)' = \sqrt{1-x^2}$ და $F'(-1+)=f(-1+)$, $F'(1-)=f(1-)$.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $F(x)$ წარმოადგენს მოცემული $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელს, მაშინ $F(x)+C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელს, რადგან $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

თეორემა 1.1. თუ $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელია $F(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირვანდელების სიმრავლეა $\{F(x)+C : C\in R\}$. ე. ი. ერთიდაიგივე ფუნქციის ორი პირვანდელი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით.

დამტკიცება. ვთქვათ $\Phi(x)$ არის $F(x)$ ფუნქციისაგან განსხვავებული $f(x)$-ის პირვანდელი ფუნქცია. ე. ი. $\Phi'(x)=f(x)$ და $F'(x)=f(x)$. აქედან $F'(x)=\Phi'(x)$.

როგორც ვიცით, თუ ორი ფუნქციის წარმოებული ტოლია, მაშინ ეს ფუნქციები ერთმანეთისაგან მუდმივი სიდიდით განსხვავდებიან, ე. ი. $\Phi(x)=F(x)+C$.

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 1.2. $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირვანდელების სიმრავლეს რაიმე Δ შუალედზე ეწოდება განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან ამ შუალედზე და $\int f(x)\,dx$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ე. ი. თუ $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელ ფუნქციას, მაშინ

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

უკანასკნელ ტოლობაში $f(x)$-ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, $f(x)\,dx$-ს ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, ხოლო სიმბოლოს $\int$ — ინტეგრალის ნიშანი.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნის ოპერაციას (გაწარმოების შებრუნებულ ოპერაციას) ინტეგრება ეწოდება.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პირვანდელი ფუნქცია, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა რაიმე შუალედზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია? ამ კითხვაზე პასუხი საზოგადოდ უარყოფითია, თუმცა შემდეგ თავში ნაჩვენები იქნება (იხ. თავი III, თეორემა 7.3), რომ შუალედზე უწყვეტ ყოველ ფუნქციას გააჩნია პირვანდელი ფუნქცია.

შევნიშნოთ, რომ ელემენტარული ფუნქციის წარმოებული არის ელემენტარული ფუნქცია. მტკიცდება, რომ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. მაგალითად,

$$e^{-x^2}, \ \sin x^2, \ \cos x^2, \ \frac{1}{\ln x}, \ \frac{\sin x}{x}, \ \frac{\cos x}{x}, \ \frac{e^x}{x}$$

უწყვეტი ფუნქციებია თავიანთ განსაზღვრის არეში, ამიტომ მათ გააჩნიათ პირვანდელი ფუნქციები, მაგრამ მათი პირვანდელები არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს, ე. ი.

$$\int e^{-x^2} dx, \ \int \sin x^2\, dx, \ \int \cos x^2 dx, \ \int \frac{1}{\ln x}\, dx, \ \int \frac{\sin x}{x} dx, \ \int \frac{\cos x}{x}\, dx$$

არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს.

§ 2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

1. განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენციალი ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ტოლია, ე. ი.

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx.$$

მართლაც განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრების თანახმად

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx \right) = f(x).$$

აქედან ცხადია, რომ

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx.$$

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალი რაიმე ფუნქციის წარმოებულიდან ამ ფუნქციისა და ნებისმიერი მუდმივის ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\int F'(x)\, dx = F(x) + C,$$

ან რაც იგივეა

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრებიდან.

3. თუ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ $Af(x)$, სადაც A მუდმივი სიდიდეა, აგრეთვე ინტეგრებადია და როცა $A \neq 0$ მართებულია ტოლობა

$$\int Af(x)\,dx = A \int f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

4. ორი ინტეგრებადი ფუნქციის ჯამი ინტეგრებადია და

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{2.2}$$

მე-3 და მე-4 თვისებები გამომდინარეობს იქიდან, რომ 1-ლი თვისების ძალით (2.1) და (2.2) ტოლობების ორივე ნაწილის წარმოებულები ერთმანეთის ტოლია, ე. ი. ისინი წარმოადგენენ ერთიდაიგივე ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალებს.

შევნიშნოთ, რომ (2.2) ტოლობა მართებულია ინტეგრებად ფუნქციათა ნებისმიერი სასრული ჯამისათვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (2.1) და (2.2) ტოლობები გვესმის სიმრავლური თვალსაზრისით.

5. თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია, მაშინ

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

ამ თვისების მართებულობა უშუალოდ გამომდინარეობს განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრებიდან და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესიდან.

§ 3. ძირითად ინტეგრალთა ცხრილი

ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილიდან, განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრების ძალით, მიიღება ძირითად ინტეგრალთა შემდეგი ცხრილი:

1) $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

3) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$

4) $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

7) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

8) $\int e^x\, dx = e^x + C,$

9) $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$

11) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C,$

12) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C,$

13) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{c\,th} x + C.$

თუ გავითვალისწინებთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის § 2-ში მოყვანილ მე-5 თვისებას, უშუალოდ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ინტეგრალები ისეთი ფუნქციებიდან, რომლებიც მიიღებიან ძირითად ინტეგრალთა ცხრილის ინტეგრალქვეშა ფუნქციებისაგან დამოუკიდებელი ცვლადის წრფივი ფუნქციით შეცვლით.

მაგალითად:

1. $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C,$

2. $\int \sin(ax + b)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C,$

3. $$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b) + C,$$

4. $$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$$

მომდევნო პარაგრაფებში განხილული იქნება ინტეგრების ძირითადი მეთოდები და დადგენილი იქნება ზოგიერთი კლასი ფუნქციებისა, რომელთა ინტეგრალები წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

§ 4. ზოგიერთი მაგალითი განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლაზე

ისეთი ფუნქციების ინტეგრება, რომლებიც წარმოადგენს ძირითად ინტეგრალთა ცხრილის ინტეგრალქვეშა ფუნქციების წრფივ კომბინაციას, ხდება განუსაზღვრელ ინტეგრალთა § 2-ში მოყვანილი მე-3 და მე-4 თვისებების გამოყენებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.

$$\int\left(4x^3 - 3\cos x + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int 4x^3\,dx - \int 3\cos x\,dx +$$

$$+\int \sqrt[3]{x}\,dx - \int \frac{2}{1+x^2}dx = 4\int x^3dx - 3\int \cos x\,dx +$$

$$+\int x^{1/3}\,dx - 2\int \frac{dx}{1+x^2} = x^4 - 3\sin x + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - 2\operatorname{arctg} x + C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.

$$\int\left(3e^x - \frac{1}{4\sqrt[4]{x}} + 2^x - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x} - 2\right)dx = 3\int e^x dx - \frac{1}{4}\int x^{-\frac{1}{4}}dx +$$

$$+\int 2^x\,dx - 2\int x^{-3}\,dx + 3\int \frac{dx}{x} - 2\int dx =$$

$$= 3e^x - \frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} + \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{x^2} + 3\ln|x| - 2x + C.$$

ზოგჯერ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მარტივი გარდაქმნებით შეიძლება წარმოვადგინოთ ძირითად ინტეგრალთა ცხრილის ინტეგრალქვეშა ფუნქციების წრფივი კომბინაციით.

მაგალითი 3.

$$\int \frac{x+2}{x}\,dx = \int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx = \int dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx = x + 2\ln|x| + C.$$

მაგალითი 4.

$$\int \frac{x^2-2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-3}{x^2+1}\,dx = \int\left(1-\frac{3}{x^2+1}\right)dx = x - 3\operatorname{arctg} x + C.$$

მაგალითი 5.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{x^4+3}{x+1}\,dx.$$

თუ (x^4+3)-ს გავყოფთ $(x+1)$-ზე, მივიღებთ

$$\frac{x^4+3}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{4}{x+1}.$$

ამიტომ

$$\int \frac{x^4+3}{x+1}\,dx = \int\left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{4}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 4\ln|x+1| + C.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}.$$

ვინაიდან

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

ამიტომ

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

§ 5. ცვლადის გარდაქმნის ხერხი

ხშირად ახალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემოღებით ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შესაძლებელია მივიყვანოთ ისეთ სახეზე, რომლის ინტეგრება უფრო მარტივია. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის ეს ხერხი ემყარება შემდეგ თეორემას:

თ ე ო რ ე მ ა 5.1. ვთქვათ $x = \varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია რაიმე T შუალედზე და X მისი მნიშვნელობათა არეა. თუ X-ზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია პირვანდელი ფუნქცია, მაშინ T შუალედზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int f(x)\,dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირვანდელი ფუნქცია X-ზე. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$(F(\varphi(t)))' = F'_x[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ ფუნქციის პირვანდელია $F[\varphi(t)]$, ე. ი.

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

აქედან თუ შევნიშნავთ, რომ

$$F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C)\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$$

მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

(5.1)-ს უწოდებენ ცვლადის გარდაქმნის ფორმულას განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (5.1) ტოლობა საშუალებას გვაძლევს $x=\varphi(t)$ ცვლადთა გარდაქმნით $\int f(x)dx$-ის გამოთვლა დავიყვანოთ $\int f(\varphi(t))\varphi'(t))dt$-ს გამოთვლაზე და პირიქით $t=\varphi(x)$ ჩასმით $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$-ის გამოთვლა დავიყვანოთ $\int f(t)dt$-ს გამოთვლაზე, ე. ი.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\Big|_{t=\varphi(x)}=\int f(t)dt. \tag{5.2}$$

(5.2) ტოლობაში ზოგჯერ ნაცვლად $t=\varphi(x)$ ჩასმისა გამოიყენება დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ ფუნქციის შეტანა, ე. ი.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d\varphi(x). \tag{5.3}$$

მოვიყვანოთ მაგალითები:

1. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{xdx}{x^2+a}.$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $x^2+a=t$. გვაქვს $xdx=\frac{1}{2}dt$, ამიტომ

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+a|+C.$$

2. გამოვთვალოთ

$$I=\int xe^{-x^2}dx.$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $-x^2=t$. აქედან $xdx=-\frac{1}{2}dt$, ამიტომ

$$I=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

შევნიშნოთ, რომ მოყვანილი და მისი მსგავსი ზოგიერთი მაგალითი შეიძლება აგრეთვე გამოვთვალოთ დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ ფუნქციის შეტანის (5.3) ფორმულის გამოყენებით.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ (a>0).$

5. $\displaystyle\int tg\, x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

6. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

7. $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int e^{\cos x}\,d\cos x = -e^{\cos x} + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int \ln^2 x\,d\ln x = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a)}{\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a} + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} =$

$$= \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} =$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

12. გამოვთვალოთ

$$I = \int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx.$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $x-1=t$. მაშინ $x=t+1$, $dx=dt$. ამიტომ

$$I=\int\frac{(t+1)^3}{t^2}\,dt=\int\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\,t^2+3t+3\ln|t|-\frac{1}{t}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\,(x-1)^2+3\,(x-1)+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

13. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}-2}\,.$$

დავუშვათ $\sqrt{x-1}-2=t$, მაშინ $x=(t+2)^2+1$, $dx=2\,(t+2)dt$, ამიტომ გვაქვს

$$I=\int\frac{2\,(t+2)}{t}\,dt=2\int\left(1+\frac{2}{t}\right)dt=2t+4\ln|t|+C=$$

$$=2\sqrt{x-1}+4\ln|\sqrt{x-1}-2|+C\,.$$

14. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{xdx}{(x^2+1)^\alpha}\,dx,\quad(\alpha\neq 1).$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $x^2+1=t$, მაშინ $xdx=\frac{1}{2}dt$. ამიტომ გვაქვს

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^\alpha}=-\frac{1}{2\,(\alpha-1)}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{2\,(\alpha-1))}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\alpha-1}}+C.$$

15. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\,.$$

დავუშვათ $\sqrt{x^2+a}+x=t$, მაშინ

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx=dt,$$

ე. ი.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t}.$$

ამიტომ გვაქვს

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C.$$

16. გამოვთვალოთ

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0).$$

მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $x = a\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. მაშინ $dx = a\cos t\,dt$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$. ამიტომ გვაქვს

$$I = \int \sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\sqrt{1 - \sin^2 t}) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}\right) + C.$$

§ 6. ინტეგრება ზოგიერთი ფუნქციისა, რომელიც კვადრატულ სამწევრს შეიცავს

1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \tag{6.1}$$

სადაც $a \neq 0$, b, c ნამდვილი რიცხვებია.

ვინაიდან

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)\right],$$

ამიტომ

$$I = 4a \int \frac{dx}{(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)}.$$

აქედან ჩანს, რომ ინტეგრალის გამოთვლა დამოკიდებულია ax^2+bx+c სამწევრის b^2-4ac დისკრიმინანტზე. თუ $b^2-4ac=0$, მაშინ გვექნება

$$I = 4a \int \frac{dx}{(2ax+b)^2} = -\frac{2}{2ax+b} + C$$

ვთქვათ $b^2-4ac>0$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $z=2ax+b$, $b^2-4ac=k^2$, გვექნება (იხ. § 4, მაგალითი 7):

$$I = 2 \int \frac{dz}{z^2-k^2} = \frac{1}{k} \ln\left|\frac{z-k}{z+k}\right| + C.$$

ვთქვათ ახლა, $b^2-4ac<0$. თუ შემღვიღებთ აღნიშვნებს $z=2ax+b$, $b^2-4ac=-k^2$, მივიღებთ (იხ. § 5, მაგალითი 3)

$$I = 2\int \frac{dz}{z^2+k^2} = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{z}{k} + C.$$

ამრიგად საბოლოოდ გვაქვს

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} -\dfrac{2}{2ax+b} + C, \text{ როცა } b^2-4ac=0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C, \text{ როცა } b^2-4ac>0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \text{ როცა } b^2-4ac<0 \end{cases}$$

2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \; a \neq 0.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $a<0$ და $b^2-4ac<0$, მაშინ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ არის განსაზღვრული არცერთი ნამდვილი x რიცხვისათვის. ამიტომ განვიხილოთ დანარჩენი ორი შემთხვევა:

ა) $a>0$. ამ შემთხვევაში ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრი ასე წარმოვადგინოთ

$$ax^2+bx+c = \frac{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}{4a}.$$

მაშასადამე

$$I = 2\sqrt{a} \int \frac{dx}{\sqrt{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}}.$$

დავუშვათ $2ax+b=t$ და $4ac-b^2=k$. მივიღებთ (იხ. § 5, მაგალითი 15):

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+k}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t+\sqrt{t^2+k}|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+\sqrt{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}|+C.$$

ბ) $a<0$ და $b^2-4ac>0$. ამ შემთხვევაში სამწევრი ასე წარმოვადგინოთ:

$$ax^2+bx+c=\frac{(b^2-4ac)-(2ax+b)^2}{-4a}.$$

მაშასადამე,

$$I=2\sqrt{-a}\int\frac{dx}{\sqrt{(b^2-4ac)-(2ax+b)^2}}.$$

ვინაიდან

$$\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{k}+C,$$

ამიტომ

$$I=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

ამრიგად

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}|+C, & \text{როცა } a>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C, & \text{როცა } a<0,\ b^2-4ac>0.\end{cases}$$

§ 7. ნაწილობითი ინტეგრება

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. ვთქვათ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე X შუალედზე. თუ ამ შუალედზე არსებობს $\int v(x)u'(x)\,dx$, მაშინ არსებობს $\int u(x)v'(x)\,dx$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \tag{7.1}$$

ანუ

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{7.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ტოლობიდან

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

გვაქვს, რომ

$$u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]'\,dx - u'(x)v(x)\,dx. \tag{7.3}$$

ვინაიდან $\int [u(x)v(x)]'\,dx = u(x)v(x) + C$ და არსებობს $\int v(x)u'(x)\,dx$, ამიტომ (7.3) ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ (7.1) ტოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

(7.2) ტოლობას უწოდებენ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს $\int udv$ ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ $\int vdu$ ინტეგრალის გამოთვლამდე, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი გამოსათვლელი აღმოჩნდეს, ვიდრე მოცემული ინტეგრალი.

მოვიყვანოთ მაგალითები ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებაზე.

1. $$\int x\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x, & dv = \sin x\,dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right|^{*)} = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2. გამოვთვალოთ

$$\int x^{\alpha} \ln x\,dx, \quad \alpha \neq -1.$$

---

* ვერტიკალური ხაზებით გამოყოფილია დამხმარე ჩანაწერი.

გვაქვს

$$\int x^{\alpha}\ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & dv = x^{\alpha}dx \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C.$$

3. $$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg} x, & dv = xdx \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, & v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

4. $$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left|\begin{array}{ll} u=x, & dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \\ du=dx, & v=-\operatorname{ctg} x\end{array}\right| =$$

$$= -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x\,dx = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$$

ზოგიერთი ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის რამოდენიმეჯერ გამოყენება:

5. $$\int x^2 e^x dx = \left|\begin{array}{ll} u=x^2, & dv = e^x dx \\ du=2xdx, & v=e^x\end{array}\right| =$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x dx = \left|\begin{array}{ll} u=x & dv = e^x dx \\ du=dx & v=e^x\end{array}\right| =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

6. $$\int \arcsin^2 x dx = \left|\begin{array}{ll} u=\arcsin^2 x, & dv = dx \\ du=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v=x\end{array}\right| =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left|\begin{array}{ll} u=\arcsin x, & dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v=-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right| =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx \quad (\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0).$$

გვაქვს

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\left|\begin{matrix} u=e^{\alpha x} & dv=\cos\beta\, xdx \\ du=\alpha e^{\alpha x}\,dx, & v=\dfrac{1}{\beta}\sin\beta x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\left|\begin{matrix} u=e^{\alpha x}, & dv=\sin\beta x dx \\ du=\alpha e^{\alpha x}dx, & v=-\dfrac{1}{\beta}\cos\beta x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

მაშასადამე

$$I=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}I,$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}+C.$$

8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx.$$

გვაქვს

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{x^2+a}, & dv=dx \\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}, & v=x\end{matrix}\right|=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

აქედან § 5-ის მაგალითი 15-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

9. $\int\sqrt{x^2+px+q}\,dx=\int\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\,dx=$

$$=\frac{2x+p}{4}\sqrt{x^2+px+q}+\frac{4q-p^2}{8}\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C.$$

10. მივიღოთ

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\,,\quad n\in N,\ a\neq 0$$

ინტეგრალის გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულა.

გვაქვს:

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\left|\begin{matrix} u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}, & dv=dx \\ du=-\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, & v=x\end{matrix}\right|=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+$$

$$+2n\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}.$$

საიდანაც მივიღებთ

$$I_{n+1}=\frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n. \tag{7.4}$$

რადგან

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$$

ამიტომ (7.4) ფორმულიდან მივიღებთ

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

§ 8. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

1. მრავალწევრის დაშლა მამრავლებად. განვიხილოთ n-ური ხარისხის მრავალწევრი

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

სადაც $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია, ამასთან $a_n \neq 0$, ხოლო n წარმოადგენს არაუარყოფით მთელ რიცხვს. დამოუკიდებელ x ცვლადს შეუძლია მიიღოს როგორც ნამდვილი, ასევე კომპლექსური მნიშვნელობა.

განსაზღვრება 8.1. ორ მრავალწევრს ტოლი ეწოდება, თუ მათი ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტები ტოლია.

განსაზღვრება 8.2. a რიცხვს ეწოდება $P_n(x)$ მრავალწევრის ფესვი, თუ $P_n(a)=0$, ე. ი. $P_n(x)$ მრავალწევრის ფესვები წარმოადგენს $P_n(x)=0$ განტოლების ამონახსნებს.

თეორემა 8.1 (ბეზუ).* თუ $P_n(x)$ მრავალწევრს გავყოფთ $x-a$ სხვაობაზე, მივიღებთ ნაშთს, რომელიც უდრის $P_n(a)$-ს.

დამტკიცება. თუ მოცემულ მრავალწევრს გავყოფთ $x-a$ $(x \neq a)$ სხვაობაზე, განაყოფში მივიღებთ $n-1$ ხარისხის $P_{n-1}(x)$ მრავალწევრს, ხოლო R ნაშთი იქნება მუდმივი სიდიდე, ე. ი.

$$P_n(x)=(x-a)P_{n-1}(x)+R.$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to a$, მივიღებთ

$$R=P_n(a).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი, იმისათვის, რომ $P_n(x)$ მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოს $x-a$ სხვაობაზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ a იყოს მოცემული მრავალწევრის ფესვი.

განსაზღვრება 8.3. a რიცხვს ეწოდება $P_n(x)$ მრავალწევრის k—ჯერადი ფესვი, თუ არსებობს $k \in N$ რიცხვი და მრავალწევრი $P_{n-k}(x)$ ისეთები, რომ ყოველი x-სათვის სრულდება ტოლობა

$$P_n(x)=(x-a)^k P_{n-k}(x), \tag{7.1}$$

სადაც $P_{n-k}(a) \neq 0$.

თეორემა 8.2. $a \in R$ რიცხვი არის ნამდვილკოეფიციენტებიანი** $P_n(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი ფესვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$P_n^{(r)}(a)=0, \text{ თუ } r=0, 1, \ldots, k-1 \text{ და } P_n^{(k)}(a) \neq 0. \tag{8.2}$$

* ე. ბეზუ (1730—1783) — ფრანგი მათემატიკოსი.

** მრავალწევრს ეწოდება ნამდვილკოეფიციენტებიანი, თუ მისი ყველა კოეფიციენტი ნამდვილი რიცხვია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ a არის $P_n(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი ფესვი, მაშინ ადგილი აქვს (8.1) ტოლობას. ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$P_n'(x) = k(x-a)^{k-1} P_{n-k}(x) + (x-a)^k P_{n-k}'(x) =$$
$$= (x-a)^{k-1}[k P_{n-k}(x) + (x-a) P_{n-k}'(x)] = (x-a)^{k-1} \varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x) = k P_{n-k}(x) + (x-a) P_{n-k}'(x)$. ცხადია, რომ $\varphi(a) = k P_{n-k}(a) \neq 0$. გამომდინარე აქედან a არის $P_n'(x)$ მრავალწევრის $(k-1)$-ჯერადი ფესვი. თუ გავაგრძელებთ ამ მსჯელობას, მივიღებთ (8.2) პირობის აუცილებლობას.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ ადგილი აქვს (8.2) პირობებს, ე. ი. a არის $P_n(x)$ მრავალწევრის ფესვი, ამიტომ

$$P_n(x) = (x-a)\, g(x). \tag{8.3}$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$P_n'(x) = g(x) + (x-a)\, g'(x).$$

საიდანაც $g(a) = P_n'(a) = 0$. ე. ი. a არის $g(x)$ მრავალწევრის ფესვი, ამიტომ (8.3) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$P_n(x) = (x-a)^2 g_1(x).$$

ამ პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ, რომ a არის $P_n(x)$ მრავალწევრის k ჯერადი ფესვი.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.3 (ალგებრის ძირითადი თეორემა). ყოველ $n \geqslant 1$ ხარისხის მრავალწევრს აქვს ერთი ფესვი მაინც, ნამდვილი ან კომპლექსური.

ეს თეორემა მტკიცდება უმაღლესი ალგებრის კურსში. ჩვენ მის დამტკიცებას არ მოვიყვანთ.

ამ თეორემის გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 8.4. n ხარისხის $P_n(x)$ მრავალწევრს ($a_n \neq 0$), (ჯერადობის გათვალისწინებით) აქვს n ფესვი, ე. ი. $P_n(x)$ მრავალწევრი წარმოიდგინება შემდეგი ნამრავლის სახით

$$P_n(x) = a_n (x-x_1)^{r_1} (x-x_2)^{r_2} \cdots (x-x_l)^{r_l}, \tag{8.4}$$
$$r_1 + r_2 + \cdots + r_l = n,$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_l$ არის $P_n(x)$ მრავალწევრის ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვები, შესაბამისად $r_1, r_2, \ldots, r_l$ ჯერადობის. ამასთან (8.4) გაშლა ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ალგებრის ძირითადი თეორემის ძალით $P_n(x)$ მრავალწევრს აქვს ერთი ფესვი მაინც. აღვნიშნოთ ის x_1-ით, ხოლო მისი ჯერადობა r_1-ით, მაშინ

$$P_n(x) = (x - x_1)^{r_1} P_{n-r_1}(x), \quad P_{n-r_1}(x_1) \neq 0.$$

თუ $n - r_1 = 0$, ე. ი. $n = r_1$, მაშინ აუცილებლად $P_{n-r_1}(x) = a_n$, ამიტომ ამ შემთხვევაში

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^n$$

და ამით თეორემაც დამტკიცებულია.

თუ კი $r_1 < n$, მაშინ $P_{n-r_1}(x)$ არის $n - r_1$ ხარისხის მრავალწევრი, რომელიც არ იყოფა $x - x_1$-ზე, ამასთან მისი უმაღლესი ხარისხის კოეფიციენტია $a_n \neq 0$. ალგებრის ძირითადი თეორემის ძალით $P_{n-r_1}(x)$ მრავალწევრსაც თავის მხრივ აქვს ერთი ფესვი მაინც, აღვნიშნოთ ის x^2-ით, მისი ჯერადობა კი r_2-ით. ამიტომ გვექნება

$$P_n(x) = (x - x_1)^{r_1} (x - x_2)^{r_2} P_{n-r_1-r_2}(x),$$

$$(P_{n-r_1-r_2}(x_j) \neq 0, \quad j = 1, 2).$$

თუ $n - r_1 - r_2 = 0$, მაშინ $P_{n-r_1-r_2}(x) = a_n$. თუ კი $n - r_1 - r_2 \neq 0$, მაშინ ეს პროცესი შეიძლება გავაგრძელოთ. ამასთან ეს პროცესი სასრული რაოდენობა (არა უმეტეს n-ისა) საფეხურის შემდეგ დამთავრდება და ჩვენ მივიღებთ (8.4) გაშლას.

თუ (8.4) ტოლობაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $x_1, x_2, \ldots, x_k$. რიცხვებისაგან განსხვავებულ რაიმე x_0 რიცხვს, მაშინ $P_n(x_0) \neq 0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $P_n(x)$ მრავალწევრს, ზემოთ ნაპოვნი ფესვების გარდა სხვა ფესვები არ გააჩნია, ეს (8.4) გაშლის ერთადერთობასაც ამტკიცებს.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. თუ n-ური ხარისხის $P_n(x)$ მრავალწევრის სხვადასხვა ფესვების რიცხვი (ჯერადობის გათვალისწინებით) n-ზე მეტია, მაშინ $P_n(x)$ მრავალწევრი იგივურად 0-ის ტოლია.

შ ე დ ე გ ი 2. თუ ორი მრავალწევრის ხარისხები არ აღემატება n-ს და ეს მრავალწევრი ერთმანეთის ტოლია x არგუმენტის $n+1$ სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის, მაშინ ისინი თანატოლია.

მრავალწევრების ეს თვისება უდევს საფუძვლად რაციონალური წილადის უმარტივეს წილადებად დაშლის კოეფიციენტების მოძებნის ხერხს.

თ ე ო რ ე მ ა 8.5. თუ ნამდვილკოეფიციენტებიან $P_n(x)$ მრავალწევრს აქვს კომპლექსური ფესვი $z=\alpha+\beta i$ ($\beta\neq 0$), მაშინ მისი შეუღლებული $\overline{z}=\alpha-\beta i$ კომპლექსური რიცხვი აგრეთვე იქნება $P_n(x)$ მრავალწევრის ფესვი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის ძალით $P_n(z)=P_n(\alpha+\beta i)=0$, ამიტომ

$$P_n(\alpha-\beta i)=P_n(\overline{z})=\sum_{k=0}^{n} a_k\,\overline{z}^k=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\,\overline{z}^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k z^k}=\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}=\overline{P_n(z)}=\overline{0}=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ $z=\alpha+\beta i$ ($\beta\neq 0$) არის $P_n(x)$ მრავალწევრის r ჯერადობის ფესვი, მაშინ $\overline{z}=\alpha-\beta i$ აგრეთვე არის $P_n(x)$ მრავალწევრის r ჯერადობის ფესვი.

თუ (8.4) გაშლაში გადავამრავლებთ წრფივ თანამამრავლებს, რომლებიც შეესაბამებიან შეუღლებულ კომპლექსურ ფესვებს, მივიღებთ

$$[x-(\alpha+\beta i)]\,[x-(\alpha-\beta i)]=[(x-\alpha)-\beta i]\,[(x-\alpha)+\beta i]=$$
$$=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q,$$

სადაც $p=-2\alpha,\ q=\alpha^2+\beta^2$ და $p^2-4q<0$.

ამრიგად, თუ გავითვალისწინებთ ფესვების ჯერადობას, მაშინ ნამდვილკოეფიციენტებიანი $P_n(x)$ მრავალწევრის (8.4) გაშლა მიიღებს სახეს

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_h)^{r_k}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\,(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

სადაც $x_1,\ x_2,\dots,x_r,\ p_1,\ q_1,\dots,\ p_s\,q_s$ ნამდვილი რიცხვებია და

$$r_1+r_2+r_3+\cdots+r_h+2\,(l_1+l_2+\cdots+l_s)=n.$$

2. რაციონალური ფუნქციის დაშლა უმარტივეს წილადებად.

რაციონალური ფუნქცია (წილადი) ეწოდება $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ სახის ფუნქციას, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია. ამ პარაგრაფში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ x ნამდვილი ცვლადია, ხოლო $P(x)$ და $Q(x)$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია. ამის გარდა ვიგულისხმებთ, რომ $P(x)$ და $Q(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, ე. ი. მათ არა აქვთ საერთო ფესვები*.

რაციონალურ წილადს ეწოდება წესიერი, თუ მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას არაწესიერი წილადი ეწოდება.

ცხადია, რომ ყოველი არაწესიერი წილადი, მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით, შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მრავალწევრისა და წესიერი წილადის ჯამი.

ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ წესიერ წილადს, ამასთან ვიგულისხმებთ, რომ მნიშვნელში x-ის უმაღლესი ხარისხის კოეფიციენტი ერთის ტოლია.

განსაზღვრება 8.4. უმარტივესი წილადები ეწოდება შემდეგი სახის რაციონალურ წილადებს:

1. $\dfrac{A}{x-a}$, 2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,\ 3,\dots)$,

3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(k=2,\ 3,\dots)$,

სადაც $A,\ M,\ N,\ a,\ p,\ q$ ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო x^2+px+q კვადრატულ სამწევრს აქვს კომპლექსური ფესვები.

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჯამის სახით.

თეორემა 8.6. ვთქვათ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ წესიერი წილადია და $Q(x)=(x-a)^kQ_1(x)$,

---

* თუ $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებს აქვს საერთო მამრავლები, მაშინ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ წილადი შეიძლება შევკვეცოთ აღნიშნულ საერთო მამრავლზე და ვიპოვოთ მიღებული რაციონალური ფუნქციის პირვანდელი, რომელიც ემთხვევა მოცემული ფუნქციის პირვანდელს მის განსაზღვრის არეში.

$Q_1(a) \neq 0$, მაშინ მოცემული წილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}\, Q_1(x)}, \tag{8.5}$$

სადაც A_1 ნულისაგან განსხვავებული მუდმივია, ხოლო მეორე შესაკრები წესიერი წილადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ იგივეობა

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k\, Q_1(x)}, \tag{8.6}$$

რომელიც მართებულია A-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. შევარჩიოთ A მუდმივი, იმ პირობით, რომ $P(x) - AQ_1(x)$ მრავალწევრი გაიყოს $x-a$ სხვაობაზე. ამისათვის ბეზუს თეორემის თანახმად აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულდეს პირობა

$$P(a) - AQ_1(a) = 0.$$

რადგან $P(a) \neq 0$ და $Q_1(a) \neq 0$, ამიტომ ამ ტოლობიდან გვაქვს

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)} \neq 0. \tag{8.7}$$

ასეთი A რიცხვი აღვნიშნოთ A_1-ით*. მაშინ

$$P(x) - A_1 Q_1(x) = (x-a)\, P_1(x), \tag{8.8}$$

სადაც $P_1(x)$ არის მრავალწერი, რომლის ხარისხი ნაკლებია $(x-a)^{k-1} Q_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე

(8.8) ტოლობის გათვალისწინებით (8.6)-დან მიიღება დასამტკიცებლად (8.5) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა წესიერ $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}\, Q_1(x)}$ წილადზე თეორემა 8.6-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}\, Q_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-2}\, Q_1(x)}.$$

---

* თუ a წარმოადგენს $P(x)$ მრავალწევრის ფესვს, ე. ი. მოცემული წილადი წინასწარ არ იყო შეკვეცილი, მაშინ (8.7) ტოლობიდან მივიღებთ $A=0$ და (8.5) ტოლობა ამ შემთხვევაში ფაქტიურად გვაძლევს მოცემული წილადის $x-a$ სხვაობაზე შეკვეცას.

თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, საბოლოოდ გვექნება

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x-a} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)}, \qquad (8.9)$$

სადაც $\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$ წესიერი წილადია.

თუ $Q_1(x)$ მრავალწევრს აქვს სხვა ნამდვილი ფესვები, მაშინ $\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$ წესიერ წილადზე შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა 8.6.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $Q(x)$ მრავალწევრს აქვს კომპლექსური ფესვები.

თ ე ო რ ე მ ა 8.7. ვთქვათ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წესიერი წილადია და

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x),$$

სადაც x^2+px+q სამწევრს არა აქვს ნამდვილი ფესვები და $Q_1(x)$ არ იყოფა ამ სამწევრზე. მაშინ მოცემული წილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q_1(x)}, \qquad (8.10)$$

სადაც M_1 და N_1 რაიმე მუდმივებია, ხოლო მეორე შესაკრები წესიერი წილადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ნებისმიერი M და N რიცხვებისათვის მართებულია იგივეობა

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^k Q_1(x)}. \qquad (8.11)$$

შევარჩიოთ M და N რიცხვები ისე, რომ $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ მრავალწევრი გაიყოს x^2+px+q სამწევრზე. ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ x^2+px+q სამწევრის ფესვები, ვთქვათ $\alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, იყოს $P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)$ მრავალწევრის ფესვებიც, ე. ი. ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$P(\alpha+\beta i) - [M\cdot(\alpha+\beta i) + N]\, Q_1(\alpha+\beta i) = 0,$$

საიდანაც

$$M\alpha + N + M\beta i = \frac{P(\alpha+\beta i)}{Q_1(\alpha+\beta i)}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი კომპლექსური რიცხვია, რომელიც ასე აღვნიშნოთ $\gamma+\delta i$, სადაც γ და δ რაღაც ნამდვილი რიცხვებია. ამრიგად

$$(M\alpha+N)+M\beta i=\gamma+\delta i.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გვაქვს

$$M\alpha+N=\gamma,\quad M\beta=\delta,$$

აქედან

$$M=\frac{\delta}{\beta},\quad N=\frac{\gamma\beta-\delta\alpha}{\beta}. \tag{8.12}$$

ასეთი M და N რიცხვები აღვნიშნოთ შესაბამისად M_1 და N_1-ით, მაშინ (8.12) ტოლობით განსაზღვრული M_1 და N_1 რიცხვებისათვის გვექნება

$$P(x)-(M_1x+N_1)Q_1(x)=(x^2+px+q)P_1(x), \tag{8.13}$$

სადაც $P_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე.

(8.13) ტოლობის გათვალისწინებით (8.11)-დან მიიღება დასამტკიცებელი (8.10) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ვინაიდან (8.10) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მეორე შესაკრები არის წესიერი რაციონალური წილადი, ამიტომ მასზე შეგვიძლია გავიმეოროთ ანალოგიური მსჯელობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $\alpha\pm\beta i$ არის $Q(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი ფესვი, მართებულია შემდეგი სახის დაშლა:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}+\frac{P_k(x)}{Q_1(x)},$$

სადაც $\dfrac{P_k(x)}{Q_1(x)}$ წესიერი წილადია. ცხადია, რომ $\dfrac{P_k(x)}{Q_1(x)}$ წილადზე შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა 8.6 და თეორემა 8.7 $Q_1(x)$ მრავალწევრის ყველა სხვა ფესვების მიმართ.

ამრიგად დამტკიცებული 8.6 და 8.7 თეორემების საფუძველზე გვექნება შემდეგი დასკვნა:

თუ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს სახე

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\times$$
$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

მაშინ ეს წილადი ასე წარმოიდგინება:

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{x-x_1} + \\
& + \frac{A_1^{(2)}}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \cdots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{x-x_2} + \\
& + \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad + \\
& + \frac{A_1^{(r)}}{(x-x_r)^{k_r}} + \frac{A_2^{(r)}}{(x-x_r)^{k_r-1}} + \cdots + \frac{A_{k_r}^{(r)}}{x-x_r} + \\
& + \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \cdots + \frac{M_{l_1}^{(1)}x+N_{l_1}^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \\
& + \frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_2}} + \frac{M_2^{(2)}x+N_2^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2-1}} + \cdots + \frac{M_{l_2}^{(2)}x+N_{l_2}^{(2)}}{x^2+p_2x+q_2} + \\
& + \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad + \\
& + \frac{M_1^{(s)}x+N_1^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} + \frac{M_2^{(s)}x+N_2^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}} + \cdots + \frac{M_{l_s}^{(s)}x+N_{l_s}^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s}, \qquad (8.14)
\end{aligned}
$$

სადაც $A_k^{(n)}$, $M_k^{(n)}$, $N_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ გარკვეული მუდმივებია. ისინი შეიძლება გამოითვალოს კოეფიციენტთა გატოლების ხერხით, რისთვისაც საჭიროა (8.14) ტოლობის მარჯვენა მხარე დავიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე და მრიცხველების x-ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტები გავუტოლოთ ერთმანეთს, რის შედეგადაც უცნობი კოეფიციენტების მიმართ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნაც მოგვცემს გაშლის საძიებელ კოეფიციენტებს.

ზოგ შემთხვევაში (8.14) დაშლის კოეფიციენტების გამოთვლა მარტივდება, თუ x ცვლადის მიმართ მიღებული ორი მრავალწევრის იგივურ ტოლობაში x-ს მივანიჭებთ სხვადასხვა კერძო რიცხვით მნიშვნელობებს და ამის მიხედვით შევადგენთ წრფივ განტოლებათა სისტემას საძებნი კოეფიციენტების მიმართ.

3. წესიერი რაციონალური წილადის ინტეგრება. როგორც ვნახეთ (თეორემები 8. 6—8.7), ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჯამის სახით,

ამიტომ განუსაზღვრელი ინტეგრალი წესიერი რაციონალური წილადიდან წარმოადგენს უმარტივესი წილადების შემდეგი სახის განუსაზღვრელი ინტეგრალების ჯამს:

1) $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2) $$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C, \quad (k \neq 1).$$

3) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C, \; p^2-4q<0.$$

4) $$I_k = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}dx.$$

დავუშვათ $t = x + \frac{p}{2}$, $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = a$ $\left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$. მივიღებთ

$$I_k = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{(t^2+a^2)^k}dt.$$

აქედან ცხადია, რომ I_k ინტეგრალი წარმოადგენს

$$I_k' = \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} \quad \text{და} \quad I_k'' = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

ინტეგრალების წრფივ კომბინაციას. გვაქვს

$$I_k' = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C,$$

ხოლო I_k'' ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვთვალოთ § 7-ის მაგალითი 10-ში მიღებული რეკურენტული ფორმულით

$$I_{k+1}'' = \frac{x}{2ka^2(x^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_k'',$$

ამასთან

$$I_1'' = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

ამრიგად, მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 8.8. ინტეგრალი ყოველი რაციონალური ფუნქციიდან თავის განსაზღვრის არეში წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას, რომელიც გამოისახება რაციონალური, არკტანგენს და ლოგარითმული ფუნქციების წრფივი კომბინაციით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს წესიერ რაციონალურ წილადს და მნიშვნელს აქვს ნამდვილი და მარტივი ფესვები, ამიტომ

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3};$$

აქედან გვაქვს

$$1 = A(x-1)(x-3) + B(x+2)(x-3) + C(x+2)(x-1).$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $x=-2$, $x=1$ და $x=3$-ს, შესაბამისად მივიღებთ

$$15A = 1, \ -6B = 1 \quad \text{და} \quad 10C = 1.$$

აქედან

$$A = \frac{1}{15}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = \frac{1}{10}.$$

ამრიგად,

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{10} \frac{1}{x-3},$$

საიდანაც

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{1}{15} \ln|x+2| - \frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{1}{10} \ln|x-3| + C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{3x^3 - 5x + 10}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 5)} dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წესიერი რაციონალური წილადია, ხოლო მნიშვნელს აქვს ნამდვილი ორჯერადი ფესვი და მარტივი კომპლექსური ფესვები, ამიტომ იგი დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{3x^3 - 5x + 10}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 5)} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Bx + D}{x^2 + 2x + 5},$$

აქედან გვაქვს ტოლობა

$$3x^3 - 5x + 10 = A_1(x^2 + 2x + 5) + A_2(x-1)(x^2 + 2x + 5) + (Bx + D)(x-1)^2.$$

ამ იგივეობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეების x ცვლადის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტების გატოლებით და მიღებული სისტემის ამოხსნით, გვექნება

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad B = 3, \quad D = 5.$$

ამრიგად

$$\frac{3x^3 - 5x + 10}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 5)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3x + 5}{x^2 + 2x + 5} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} + 2 \frac{1}{(x+1)^2 + 4},$$

საიდანაც გვაქვს

$$\int \frac{3x^3 - 5x + 10}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 5)} dx = -\frac{1}{x-1} +$$

$$+ \frac{3}{2} \ln (x^2 + 2x + 5) + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

§ 9. ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

ორი x და y ცვლადის n-ური ხარისხის მრავალწევრი ეწოდება გამოსახულებას

$$P_n(x, y) = a_{00} + a_{10} x + a_{01} y + a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 + \cdots +$$

$$+ a_{0n} y^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} x^i y^j,$$

სადაც $a_{00}, a_{10}, \dots, a_{0n}$ რაიმე ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $a_{n0}, a_{n-1,1}, \dots, a_{0n}$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

x და y ცვლადების რაციონალური ფუნქცია ეწოდება

$$R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$$

გამოსახულებას, სადაც $P_n(x, y)$ და $Q_m(x, y)$ არის x და y ცვლადების ნებისმიერი მრავალწევრები.

ამ თავში, შემდგომში R ასოთი აღვნიშნავთ რაციონალურ ფუნქციას. მაგალითად ჩანაწერი $R(f(x), \varphi(x))$ აღნიშნავს u და v ცვლადების რაციონალურ ფუნქციას, სადაც $u=f(x)$ და $v=\varphi(x)$. ასე მაგალითად, ფუნქცია

$$\frac{x + \sqrt{(x^2-1)^3}}{x^3 - 4\sqrt{x^2-1}}$$

წარმოადგენს $u = x$ და $v = \sqrt{x^2-1}$ ცვლადების რაციონალურ ფუნქციას. ასევე

$$f(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^2 x}{\cos^5 x + 2\sin^2 x}$$

ფუნქცია წარმოადგენს $\sin x$-ის და $\cos x$-ის რაციონალურ ფუნქციას.

რაციონალური ფუნქციის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ $R(x, y)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$ და $R_3(t)$ ნებისმიერი რაციონალური ფუნქციებია, მაშინ გამოსახულება

$$R[R_1(t), R_2(t)] \cdot R_3(t)$$

წარმოადგენს ერთი t ცვლადის რაციონალურ ფუნქციას.

იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ ინტეგრალი რაიმე გამოსახულებიდან წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას, თეორემა 8.8-ის ძალით საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სპეციალურად შერჩეული ჩასმის საშუალებით ინტეგრალი მოცემული ფუნქციიდან დაიყვანება ინტეგრალზე რაციონალური ფუნქციიდან. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ მითითებული ჩასმა ახდენს ინტეგრალქვეშა გამოსახულების რაციონალიზაციას.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ზოგიერთ კლასს ირაციონალური ფუნქციებისა, რომელთა ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

1. წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \tag{9.1}$$

სადაც α, β, γ, δ — მუდმივი რიცხვებია და $n \in N$, $n \neq 1$. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. თუ $\alpha\delta = \beta\gamma$, მაშინ $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ ფარდობა მუდმივი სიდიდეა და (9.1) ინტეგრალი წარმოადგენს ინტეგრალს რაციონალური ფუნქციიდან.

$R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ სახის ფუნქციას უწოდებენ წილად-წრფივ ირაციონალურ ფუნქციას. ვაჩვენოთ, რომ

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} \tag{9.2}$$

ჩასმა ახდენს ინტეგრალქვეშა გამოსახულების რაციონალიზაციას. მართლაც (9.2)-დან გვაქვს

$$x = \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, \quad \text{საიდანაც} \quad dx = \frac{n(\alpha\delta - \beta\gamma)\, t^{n-1}}{(\alpha - \gamma t^n)^2}\, dt.$$

ამიტომ

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx = n(\alpha\delta - \beta\gamma)\int R\left(\frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, t\right)\frac{t^{n-1}\, dt}{(\alpha - \gamma t^n)^2}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის t ცვლადის რაციონალური ფუნქცია და მისი ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვახდინოთ ჩასმა

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

საიდანაც

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

მაშასადამე,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t - 2\,\mathrm{arctg}\, t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

2. ზოგადი სახის წილად-წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_1}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_k}\right] dx, \qquad (9.3)$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ რაციონალური რიცხვებია, ხოლო $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $\alpha\delta \neq \beta\gamma$.

ვაჩვენოთ, რომ (9.3) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს. მართლაც ვთქვათ λ არის $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ რიცხვების საერთო მნიშვნელი, მაშინ $\lambda\lambda_1, \ldots, \lambda\lambda_k$ მთელი რიცხვებია. დავუშვათ

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^\lambda,$$

მაშინ

$$x = \frac{\delta t^\lambda - \beta}{\alpha - \gamma t^\lambda}, \qquad dx = \frac{\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)\, t^{\lambda-1}}{(\alpha - \gamma t^\lambda)^2}\, dt$$

და (9.3) ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_1}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_k}\right] dx =$$

$$= \lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)\int R\left(\frac{\delta t^\lambda - \beta}{\alpha - \gamma t^\lambda}, t^{\lambda\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda\lambda_k}\right) \frac{t^{\lambda-1}}{(\alpha - \gamma t^\lambda)^2}\, dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს t ცვლადის რაციონალურ ფუნქციას და, მაშასადამე, მისი ინტეგრალი იქნება ელემენტარული ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2x-1}}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევნიშნოთ, რომ $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ და ამიტომ $\lambda = 6$. მაშასადამე, საჭიროა ვისარგებლოთ ჩასმით $\sqrt[6]{2x-1} = t$. აქედან გვექნება

$$x = \frac{1}{2}(t^6 + 1), \quad dx = 3t^5 dt.$$

ამიტომ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2x-1}} = \int \frac{3t^5}{t^3+t^2} dt = 3\int \frac{t^3}{t+1} dt =$$

$$= 3\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3\ln|t+1| + C =$$

$$= \sqrt{2x-1} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1} + 3\sqrt[6]{2x-1} - \ln(\sqrt[6]{2x-1} + 1) + C.$$

3. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება. ინტეგრალს

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx, \quad a \neq 0 \tag{9.4}$$

უწოდებენ ინტეგრალს კვადრატული ირაციონალობიდან.

(9.4) ინტეგრალი ე. წ. ეილერის ჩასმებით ყოველთვის დაიყვანება ინტეგრალამდე რაციონალური ფუნქციიდან. განვიხილოთ შემთხვევები:

I. ვთქვათ ax^2+bx+c კვადრატულ სამწევრს აქვს ნამდვილი x_1 და x_2 ფესვები ($x_1 < x_2$). მაშინ

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_1| \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}.$$

როცა $a<0$ გვაქვს

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R\left(x, (x-x_1)\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right) =$$

$$= R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right).$$

ხოლო, როცა $a>0$, გვექნება

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \begin{cases} R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right), & \text{თუ } x > x_2, \\ R_2\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right), & \text{თუ } x < x_1, \end{cases}$$

სადაც R_1 და R_2 რაციონალური ფუნქციებია.

ამრიგად, ამ შემთხვევაში (9.4) ინტეგრალი დაიყვანება წილად-წრფივი ფუნქციიდან ინტეგრალის გამოთვლამდე, რომელიც ამოიხსნება ჩასმით

$$t = \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}. \tag{9.5}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $x_1 = x_2$ და $a < 0$, მაშინ $ax^2+bx+c<0$ ყველა $x \neq x_1$-სათვის. ამიტომ ამ შემთხვევას არ განვიხილავთ, ხოლო თუ $x_1 = x_2$ და $a > 0$, მაშინ გვაქვს

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-x_1|.$$

ე. ი. $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ წარმოადგენს რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც საზოგადოდ სხვადასხვაა $]-\infty; x_1[$ და $]x_1; +\infty[$ შუალედებში.

II. ვთქვათ $a > 0$. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}. \tag{9.6}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში ფესვის წინ შეგვიძლია ავიღოთ, როგორც „+" ასევე „—" ნიშანი. ავიღოთ, მაგალითად, „+" ნიშანი. თუ (9.6) ტოლობის ორივე მხარეს ავახარისხებთ კვადრატში, მიღებული ტოლობიდან გვექნება

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}.$$

ამიტომ

$$dx = -2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2 - bt + c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\frac{\sqrt{a}\,t^2-bt+c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}.$$

აქედან ცხადია, რომ ჩასმის შედეგად მიღებული ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს t ცვლადის რაციონალურ ფუნქციას და მაშასადამე, მისი ინტეგრალი იქნება ელემენტარული ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ ჩასმა

$$\sqrt{x^2+x+1} = t - x.$$

საიდანაც

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, \quad dx = 2\frac{t^2 + t + 1}{(1 + 2t)^2}\, dt.$$

ამრიგად,

$$J = 2\int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2}\, dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1 + 2t| + \frac{3}{2(1 + 2t)} + C =$$

$$= 2\ln|x + \sqrt{x^2 + x + 1}| - \frac{3}{2}\ln|1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| +$$

$$+ \frac{3}{2(1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} + C.$$

ამრიგად, (9.5) ან (9.6) ჩასმებით ყოველთვის შესაძლებელია (9.4) ინტეგრალის რაციონალიზაცია. მიუხედავად ამისა, როცა $c>0$ შესაძლებელია გამოვიყენოთ აგრეთვე ჩასმა, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

III. ვთქვათ $c>0$. გამოვიყენოთ ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში ფესვის ნიშნის წინ ავიღოთ „+“ ნიშანი. თუ ტოლობის ორივე მხარეს ავახარისხებთ კვადრატში, მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}\, dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}.$$

აქედან ჩანს, რომ მოცემული ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 + x - x^2}}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ ჩასმა

$$\sqrt{1 + x - x^2} = tx - 1.$$

აქედან

$$x = \frac{1+2t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2(1-t-t^2)}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{1+x-x^2} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

მაშასადამე

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2+2t+2} = -2\int \frac{dt}{1+(t+1)^2} =$$

$$= -2\operatorname{arctg}(t+1) + C = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x} + C.$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ეილერის ჩასმების საშუალებით ინტეგრალის გამოთვლა, როგორც წესი, მოითხოვს შრომატევად გამოთვლებს, ამიტომ ეილერის ჩასმებს უნდა მივმართოთ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ვერ ვახერხებთ მოცემული ინტეგრალის გამოთვლას უფრო მარტივი გზით.

4. ელიფსური ინტეგრალები. ინტეგრალს

$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)})\,dx, \tag{9.7}$$

სადაც $P_n(x)$ არის n-ური ხარისხის მრავალწევრი ($n>2$), როცა $n=3$ და $n=4$ ეწოდება ელიფსური ინტეგრალი, ხოლო, როცა $n>4$— ჰიპერელიფსური ინტეგრალი. მტკიცდება, რომ (9.7) ინტეგრალი საზოგადოდ არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

ყოველი ელიფსური ინტეგრალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ელემენტარული ფუნქციებისა და

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0<k<1,$$

ე. წ. სტანდარტული ელიფსური ინტეგრალების წრფივი კომბინაციით.

$x=\sin\varphi$ ჩასმით სტანდარტული ელიფსური ინტეგრალები წარმოიდგინებიან

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{9.8}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{9.9}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad (0<k<1),$$

ინტეგრალების წრფივი კომბინაციით. მათ შესაბამისად უწოდებენ პირველი, მეორე და მესამე გვარის ელიფსურ ინტეგრალებს ჩაწერილს ლეჟანდრის* სახით.

$E(\varphi, k)$ და $F(\varphi, k)$-თი შესაბამისად აღინიშნება (9.8) და 9.9) ფუნქციებიდან ისინი, რომლებიც, როცა $\varphi=0$ ღებულობენ 0-ის ტოლ მნიშვნელობას.

შევნიშნოთ, რომ ეილერის ინტეგრალების საშუალებით გამოითვლება ელიფსის რკალის სიგრძე.

5. ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება. ინტეგრალს

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{9.10}$$

სადაც m, n, p რაციონალური რიცხვებია, ხოლო a და b ნამდვილი რიცხვები — უწოდებენ ინტეგრალს ბინომური დიფერენციალიდან.

თ ე ო რ ე მ ა 9.1. თუ m, n, p რაციონალური რიცხვები აკმაყოფილებენ ერთ-ერთს შემდეგი სამი პირობიდან: 1) p მთელია, 2) $\frac{m+1}{n}$ მთელია, 3) $\frac{m+1}{n}+p$ მთელია, მაშინ ინტეგრალი ბინომური დიფერენციალიდან წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x=t^{1/n}, \tag{9.11}$$

მაშინ

$$dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

---

* ა. ლეჟანდრი (1752—1833) — ფრანგი მათემატიკოსი.

ამიტომ

$$\int x^m (a+b\,x^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt.$$

ამრიგად, (9.11) ჩასმით (9.10) ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება

$$\int (a+bt)^p\, t^q\,dt \tag{9.12}$$

სახის ინტეგრალის გამოთვლაზე, სადაც p და $q=\frac{m+1}{n}-1$ რაციონალური რიცხვებია.

განვიხილოთ შემთხვევები:

I. თუ p მთელი რიცხვია (9.12) წარმოადგენს ინტეგრალს ზოგადი სახის წრფივი ირაციონალობიდან, რომელიც გამოითვლება ჩასმით

$$z=t^{1/s};$$

სადაც s არის q-ს მნიშვნელი.

II. თუ q მთელია, მაშინ (9.12) ისევ წარმოადგენს ინტეგრალს ზოგადი სახის წრფივი ირაციონალობიდან, რომელიც გამოითვლება ჩასმით

$$z=(a+bt)^{1/r},$$

სადაც r არის p-ს მნიშვნელი.

III. $p+q$ მთელია. (9.12) ინტეგრალი ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\int (a+bt)^p\, t^q\,dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q}\,dt.$$

ე. ი. ამ შემთხვევაშიც (9.12) წარმოადგენს ინტეგრალს ზოგადი სახის წრფივი ირაციონალობიდან, რომელიც გამოითვლება ჩასმით

$$z=\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/r},$$

სადაც r არის p-ს მნიშვნელი.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემის მტკიცებიდან ჩანს, რომ ბინომური დიფერენციალიდან ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა მოვახდინოთ შემდეგი ჩასმები:

1) თუ $p \in Z$, მაშინ $x = z^{s/n}$, სადაც s არის $\dfrac{m+1}{n}$-ის მნიშვნელი. ადვილია ჩვენება, რომ $\dfrac{s}{n}$ არის m და n რიცხვების საერთო მნიშვნელი.

2) თუ $\dfrac{m+1}{n} \in Z$, მაშინ $a + b x^n = z^r$, სადაც r არის p-ს მნიშვნელი; 3) თუ $\dfrac{m+1}{n} + p \in Z$, მაშინ $a x^{-n} + b = z^r$, სადაც r არის p-ს მნიშვნელი.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 9.1-ში მოყვანილი სამი შემთხვევა ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ნიუტონისთვის*, მაგრამ მხოლოდ მეცხრამეტე საუკუნეში აჩვენა რუსმა მათემატიკოსმა ჩებიშევმა**, რომ სხვა შემთხვევებში (9.10) ინტეგრალი არ წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[10]{x^7}\,(1 + \sqrt[5]{x^3})} .$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია

$$I = \int x^{-\frac{7}{10}} (1 + x^{3/5})^{-1}\, dx .$$

როგორც ვხედავთ $p = -1$ მთელი რიცხვია. ამიტომ მოვახდინოთ ჩასმა

$$x = t^{10}.$$

გვაქვს

$$dx = 10\, t^9\, dt, \quad x^{-\frac{7}{10}} = t^{-7}, \quad x^{3/5} = t^6.$$

მაშასადამე,

$$I = 10 \int \frac{t^2\, dt}{1 + t^6} = \frac{10}{3} \int \frac{dt^3}{1 + (t^3)^2} = \frac{10}{3} \operatorname{arctg} t^3 + C =$$

$$= \frac{10}{3} \operatorname{arctg} \sqrt[10]{x^3} + C .$$

---

* ი. ნიუტონი (1643—1727) — ინგლისელი ფილოსოფოსი, მექანიკოსი, ასტრონომი და მათემატიკოსი.

** პ. ჩებიშევი (1821—1894) — რუსი მათემატიკოსი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \sqrt{x}\,\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან $m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{3}{2}$, $p=\frac{1}{4}$ და $\frac{m+1}{n}=$ $=-1$, გვაქვს მეორე შემთხვევა. მოვახდინოთ ჩასმა

$$z=\left(1-x^{-\frac{3}{2}}\right)^{1/4}$$

აქედან

$$x=(1-z^4)^{-\frac{2}{3}},\quad dx=\frac{8}{3}\,(1-z^4)^{-\frac{5}{3}}\,z^3\,dz.$$

ამიტომ

$$I=\frac{8}{3}\int\frac{z^4}{(1-z^4)^2}\,dz=\begin{vmatrix} z=u, & \frac{z^3}{(1-z^4)^2}dz=dv \\ du=dz, & v=\frac{1}{4\,(1-z^4)}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{1-z^4}-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{1-z^4}=\frac{2z}{3(1-z^4)}-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)dz=$$

$$=\frac{2z}{3(1-z^4)}-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} z+C\,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$ და $\frac{m+1}{n}+p=0$ მთელი რიცხვია. ამიტომ მოვახდინოთ ჩასმა

$$t=(1+x^{-4})^{1/4}\,.$$

გვაქვს

$$t^4=1+x^{-4},\ 4\,t^3\,dt=-4\,x^{-5}\,dx,\quad x^4=\frac{1}{t^4-1}\,.$$

მაშასადამე

$$I=\int\frac{x^4\,dx}{x^5\sqrt[4]{1+x^{-4}}}=\int\frac{-t^3\,dt}{t\,(t^4-1)}=\int\frac{t^2}{1-t^4}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

§ 10. ზოგიერთი ტრანსცენდენტული ფუნქციის ინტეგრება

1. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx, \tag{10.1}$$

სადაც $R(u,\ v)$ არის u და v არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია. მოვახდინოთ ჩასმა:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\quad x\in\left]-\pi;\ \pi\right[. \tag{10.2}$$

ვინაიდან

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

ამიტომ

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

ტოლობის მარჯვენა მხარეში გვაქვს ინტეგრალი t ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან.

ამრიგად, ჩასმა $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, რომელსაც უწოდებენ უნივერსალურ ჩასმას, ყოველთვის ახდენს (10.1) ინტეგრალის რაციონალიზაციას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{2 + \cos x}\ .$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვახდინოთ (10.2) ჩასმა; გვექნება

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როგორც ვნახეთ უნივერსალური ჩასმა ყოველთვის ახდენს (10.1) ინტეგრალის რაციონალიზაციას, მაგრამ არის ამ ინტეგრალის ისეთი კერძო შემთხვევები, როდესაც მისი გამოთვლა უფრო მოხერხებულია სხვა ჩასმებით. მოვიყვანოთ ასეთი შემთხვევებიდან ზოგიერთი.

I. თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია $\cos x$-ის მიმართ, ე. ი.

$$R(\sin x,\ -\cos x) = -R(\sin x,\ \cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა $\sin x = t$.

II. თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია $\sin x$-ის მიმართ, ე. ი.

$$R(-\sin x,\ \cos x) = -R(\sin x,\ \cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა $\cos x = t$.

III. თუ

$$R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x),$$

მაშინ გამოიყენება ჩასმა $\operatorname{tg} x = t$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ

$$I = \int \frac{\sin^2 x \cos^3 x}{2 - \cos^2 x}\, dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია $\cos x$-ის მიმართ. ამიტომ გამოვიყენოთ ჩასმა $\sin x = t$. გვექნება

$$I=\int\frac{\sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\,d\sin x}{1+\sin^2 x}=\int\frac{t^2(1-t^2)}{1+t^2}dt=-\int\frac{t^4-t^2}{1+t^2}dt=$$

$$=-\int\left(t^2-2+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=-\frac{t^3}{3}+2t-2\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=-\frac{\sin^3 x}{3}+2\sin x-2\operatorname{arctg}(\sin x)+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ

$$I=\int\sin^3 x\cos^4 x dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია $\sin x$-ის მიმართ. თუ გამოვიყენებთ $\cos x=t$ ჩასმას, გვექნება

$$I=-\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x\,d\cos x=\int(t^2-1)\,t^4\,dt=\int(t^6-t^4)\,dt=$$

$$=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{\sin x+2\cos x}{\sin^2 x\cos x+4\cos^3 x}dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ ჩასმით $\operatorname{tg} x=t$. თუ მრიცხველსა და მნიშვნელს გავყოფთ $\cos^3 x$-ზე მივიღებთ

$$I=\int\frac{\operatorname{tg} x+2}{tg^2 x+4}\,d\operatorname{tg} x=\int\frac{t+2}{t^2+4}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+4)+\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(tg^2 x+4)+\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2}+C.$$

2. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I=\int\sin^m x\cos^n x dx, \tag{10.3}$$

სადაც m და n რაციონალური რიცხვებია. ცხადია, როცა m და n მთელი რიცხვებია, მაშინ (10.3) ინტეგრალი წარმოადგენს (10.1) ინტეგრალის კერძო შემთხვევას და მაშასადამე ის არის ელემენტარუ-

ლი ფუნქცია. ვთქვათ m და n წილადი რიცხვებია. წარმოვადგინოთ (10.3) ინტეგრალი შემდეგი სახით

$$I = \frac{1}{2}\int (\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\, d(\sin^2 x) =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (1-\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\, d(\sin^2 x)$$

და მოვახდინოთ ჩასმა $t=\sin^2 x$, მივიღებთ

$$I = \frac{1}{2}\int t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}}\, dt. \tag{10.4}$$

ამრიგად, (10.3) ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ბინომური დიფერენციალს ინტეგრებამდე. როგორც § 9-ში ვაჩვენეთ (10.4) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი სამი პირობიდან:

1) $\frac{n-1}{2}$ მთელი რიცხვია; 2) $\frac{m+1}{2}$ მთელი რიცხვია, 3) $\frac{m+n}{2}$ მთელი რიცხვია.

ცხადია ამ შემთხვევებს მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როცა 1) n კენტი რიცხვია; 2) m კენტი რიცხვია, 3) $n+m$ ლუწი რიცხვია. გამომდინარე აქედან $\int\sqrt{\sin x}\,dx$ და $\int\sqrt{\cos x}\,dx$ არ წარმოადგენენ ელემენტალურ ფუნქციებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}}\, dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს 2) შემთხვევა. გამოვიყენოთ ჩასმა $t=\cos x$. გვექნება:

$$I = -\int \frac{1-t^2}{t^{1/3}}\, dt = -\frac{3}{2} t^{2/3} + \frac{3}{8} t^{8/3} + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\cos^2 x\,\sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში $m=-\frac{1}{2}$, $n=-\frac{7}{2}$, $m+n=-4$. გამოვიყენოთ ჩასმა $\operatorname{tg} x=t^2$. გვექნება

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x\cdot\cos^8 x}}=\int(\operatorname{tg} x)^{-\frac{1}{2}}(1+\operatorname{tg}^2 x)\,d\operatorname{tg} x=$$

$$=2\int(1+t^4)\,dt=2\left(t+\frac{t^5}{5}\right)+C=\frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,(5+\operatorname{tg}^2 x)+C.$$

3. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(e^x)\,dx. \tag{10.5}$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $t=e^x$. საიდანაც $dx=\frac{dt}{t}$. ამიტომ

$$\int R(e^x)\,dx=\int\frac{R(t)}{t}dt=\int R_1(t)\,dt.$$

ე. ი. (10.5) ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. გამოვთვალოთ

$$I=\int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ ჩასმა $t=e^x$. საიდანაც $dx=\frac{dt}{t}$. ამიტომ გვაქვს

$$I=\int\frac{t-1}{t(t+1)}\,dt=2\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{t}=2\ln(1+t)-\ln t+C=$$

$$=2\ln(1+e^x)-x+C.$$

4. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)\,dx. \tag{10.6}$$

ამ ინტეგრალის რაციონალიზაცია ხდება ჩასმით $t = \mathrm{th}\frac{x}{2}$. მართლაც,

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \mathrm{ch}\, x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

და ამიტომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება t ცვლადის რაციონალური ფუნქციაა.

შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ (10.6) ინტეგრალის გამოთვლა უფრო მოხერხებულია ჩასმებით $t=shx$ ან $t=chx$ ან $t=thx$ ანდა ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. გამოვთვალოთ

$$I = \int \mathrm{ch}^5 x\, \mathrm{sh}^4 x dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ ჩასმა $\mathrm{sh}\, x = t$. რადგან $\mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x$, $\mathrm{ch}\, x\, dx = d\,(\mathrm{sh}\, x)$, ამიტომ

$$I = \int (1+t^2)^2\, t^4\, dt = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \mathrm{sh}^5 x \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7}\mathrm{sh}^2 x + \frac{1}{9}\mathrm{sh}^4 x \right) + C.$$

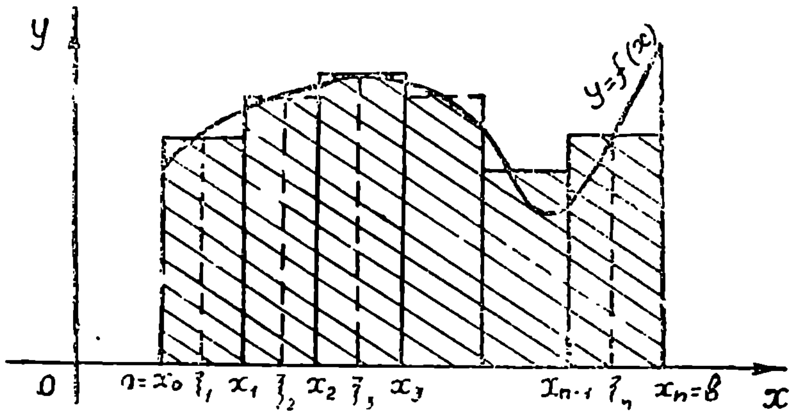
მესამე თავი

განსაზღვრული ინტეგრალი

§ 1. ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებამდე

1. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოთვლა. ვთქვათ მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი, არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, $x=a$, $x=b$ წრფეებით და Ox ღერძით. ასეთ ფიგურას მრუდწირული ტრაპეცია ეწოდება (ნახ. 19). ისმის კითხვა: რას ვუწოდოთ მრუდწი-

რული ტრაპეციის ფართობი და როგორ გამოვთვალოთ იგი? ამ ამოცანის გადასაწყვეტად მოვიქცეთ შემდეგნაირად:



ნახ. 19

დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

მივიღებთ სეგმენტებს

$$[a,\ x_1],\ [x_1,\ x_2], \ldots,\ [x_{n-1},\ b]. \tag{1.1}$$

აღვნიშნოთ λ-თი $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი, სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

სეგმენტთა (1.1) სისტემას უწოდებენ $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილებას. ცხადია, რომ ყოველ λ რიცხვს შეესაბამება უამრავი λ-დანაწილება.

ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი $(k=1, 2, \ldots, n)$ და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k. \tag{1.2}$$

ცხადია, ეს ჯამი უდრის მე-19 ნახაზზე დაშტრიხული მართკუთხედების ფართობთა ჯამს.

თუ არსებობს (1.2) ჯამის S ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილებაზე და არც ξ_k წერტილების შერჩევაზე, მაშინ S სიდიდეს ვუწოდოთ მოცემული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი. მაშასადამე

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k. \tag{1.3}$$

ამრიგად, შემოვიყვანეთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ცნება. ისმის კითხვა: ყოველ მრუდწირულ ტრაპეციას გააჩნია თუ არა ფართობი მოყვანილი განსაზღვრების მიხედვით, ან რაც იგივეა არსებობს თუ არა (1.3) ზღვარი. შემდგომში ნაჩვენები იქნება, რომ ამ კითხვაზე პასუხი დადებითია, ე. ი. უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის ყოველთვის არსებობს (1.3) ზღვარი.

შევნიშნოთ, რომ ფართობის ზემოთმოყვანილი ცნების ბუნებრივობაში ჩვენ შემდგომში მრავალჯერ დავრწმუნდებით.

2. მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი მანძილის გამოთვლა. ვთქვათ მატერიალური M წერტილი წრფივად მოძრაობს არათანაბარი v სიჩქარით. ეს სიჩქარე წარმოადგენს t დროის უწყვეტ $v = v(t)$ ფუნქციას. ვიპოვოთ M წერტილის მიერ გავლილი S მანძილი დროის $t = a$ მომენტიდან $t = b$ მომენტამდე.

ამისათვის განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილება

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

ყოველ $[t_{k-1}, t_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი τ_k წერტილი ($k = 1, 2, \ldots, n$) და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k.$$

როდესაც λ მცირეა, ეს ჯამი გვაძლევს გავლილი მანძილის მიახლოებით მნიშვნელობას.

გავლილი მანძილის ზუსტი S მნიშვნელობა მიიღება, თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda \to 0$. ე. ი.

$$S = \lim_{\lambda \leftarrow 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k .^{(*}$$

3. არაერთგვაროვანი ძელის მასის გამოთვლა. განვიხილოთ არაერთგვაროვანი ძელი, რომელიც ძევს Ox ღერძის რაიმე $[a, b]$ სეგმენტზე. ვთქვათ, $\rho(x)$ არის ძელის მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი ფუნქცია.

ძელის მასის გამოსათვლელად განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილება

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი $(k = 1, 2, \ldots, n)$ და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) \Delta x_k.$$

როდესაც λ რიცხვი მცირეა, ეს ჯამი გვაძლევს ძელის მასის მიახლოებით მნიშვნელობას.

ძელის მასის ზუსტი m მნიშვნელობა მიიღება, თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda \to 0$, ე. ი.

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) \Delta x_k.$$

---

* მართლაც, თუ $S(t)$ არის გავლილი გზა t მომენტისათვის, მაშინ თანახმად სიჩქარის განსაზღვრებისა $v(t) = S'(t)$. რადგან დროის $t = a$ მომენტიდან $t = b$ მომენტამდე გავლილი გზა $S = S(b) - S(a) = \sum_{k=1}^{n} [S(t_k) - S(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} S'(\xi_k) \Delta t_k =$ $= \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k) \Delta t_k$, სადაც $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, ამიტომ $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k =$ $= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [v(\tau_k) - v(\xi_k)] \Delta t_k + S = S.$

წინა პარაგრაფში განხილულმა სხვადასხვა შინაარსის სამივე ამოცანამ მიგვიყვანა $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციაზე ერთიდაიგივე მათემატიკური ოპერაციების ჩატარებამდე. ე. ი. სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების ამოხსნა მოითხოვს ერთიდაიგივე სახის ჯამის ზღვრის გამოთვლას.

მათემატიკის, ფიზიკის, ტექნიკისა და მეცნიერების სხვა დარგებში გვხვდება უამრავი ამოცანა, რომელთა ამოხსნა საჭიროებს აღნიშნული სახის ზღვრის გამოთვლას. ამიტომ შევისწავლოთ ასეთი ჯამის ზღვრის არსებობისა და გამოთვლის საკითხი.

ვთქვათ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

მივიღებთ სეგმენტებს

$$[a_1 x_1],\ [x_1,\ x_2], \dots, [x_{n-1},\ b]. \tag{2.1}$$

აღვნიშნოთ λ-თი $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, რიცხვებს შორის უდიდესი, სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k=1, 2, \dots, n)$. სეგმენტთა (2.1) სისტემას ეწოდება $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილება.

ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{2.2}$$

ამ ჯამს ინტეგრალური ჯამი ეწოდება. იგი დამოკიდებულია როგორც $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილებაზე, ისე ξ_k წერტილების შერჩევაზე.

განსაზღვრება 2.1. I რიცხვს ეწოდება σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda < \delta$, და ნებისმიერი $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ წერტილებისათვის, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

და ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩავწერთ $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I.$

განსაზღვრება 2.2. თუ არსებობს (2.2) ინტეგრალური ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = I,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a, b]$ სეგმენტზე და იგი

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{2.3}$$

სიმბოლოთი აღინიშნება.

(2.3) შემდეგნაირად იკითხება: „ინტეგრალი a-დან b-მდე $f(x)\,dx$ a და b რიცხვებს ეწოდებათ შესაბამისად ინტეგრების ქვედა და ზედა საზღვრები, $[a, b]$ სეგმენტს — ინტეგრების შუალედი, x ცვლადს კი— ინტეგრების ცვლადი.

ამრიგად, განსაზღვრული ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a, b]$ სეგმენტზე წარმოადგენს (2.2) ინტეგრალური ჯამის ზღვარს:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (2.3) ინტეგრალი, ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის* აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე. შემდეგში, თუ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე, სიმოკლისათვის ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალური ჯამის ზღვრის არსებობის დადგენა და არსებობის შემთხვევაში მისი უშუალოდ გამოთვლა საზოგადოდ რთულია. ამიტომ ბუნებრივად ისმის ამოცანა: 1) რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია, რომ არსებობდეს განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b (x)dx$. 2) განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობის შემთხვევაში მივიღოთ მისი გამოთვლის ეფექტური მეთოდები.

---

* ბ. ფ. რიმანი (1826—1866) — გერმანელი მათემატიკოსი.

პირველ კითხვაზე გარკვეული კლასის ფუნქციებისათვის პასუხი გაცემული იქნება § 4-ში, ხოლო მეორე კითხვაზე უწყვეტი ფუნქციისათვის პასუხს იძლევა თეორემა 8.1.

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ, როგორც შემდგომში ვნახავთ (იხ. თეორემა 4.1) ყოველთვის არსებობს განსაზღვრული ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a, b]$ სეგმენტზე. ამიტომ (1.3) ტოლობით მოცემული მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობისათვის გვაქვს:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

ამრიგად, განსაზღვრული ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციიდან, უდრის იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, Ox ღერძით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით.

ზემოთ ჩვენ შემოვიყვანეთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალის ცნება. განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია სასრულია a წერტილში, მაშინ

$$\int_a^a f(x)\,dx=0. \tag{2.4}$$

ასევე განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.5}$$

შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინტეგრების ცვლადზე, ამიტომ შეგვიძლია ვწეროთ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du=\cdots$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. თუ ფუნქცია ინტეგრებადია რაიმე სეგმენტზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე λ-დანაწილება და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

ცხადია, რომ $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული დანაწილების ერთ-ერთ სეგმენტზე მაინც. ვთქვათ ეს სეგმენტია $[x_0, x_1]$. მაშინ σ ინტეგრალური ჯამის $f(\xi_1)\Delta x_1$ შესაკრები შეიძლება გავხადოთ ნებისმიერად დიდი, თუ ξ_1 წერტილს შესაბამისად შევარჩევთ. თუ $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ წერტილები ფიქსირებულია, მაშინ ინტეგრალური ჯამის დანარჩენი შესაკრებები მუდმივია. ამრიგად, ξ_1 წერტილის შერჩევით σ ინტეგრალური ჯამი შეიძლება გავხადოთ ნებისმიერად დიდი და ამიტომ ცხადია არ არსებობს მისი ზღვარი. ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, იმისათვის, რომ ფუნქცია იყოს ინტეგრებადი რაიმე სეგმენტზე, აუცილებელია იგი იყოს შემოსაზღვრული ამ სეგმენტზე.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 2.1-ის შებრუნებული თეორემა მართებული არ არის, ე. ი. ფუნქციის შემოსაზღვრულობა არ წარმოადგენს ინტეგრებადობის საკმარის პირობას. მაგალითად, დირიხლეს ფუნქცია

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია,} \\ 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია,} \end{cases}$$

შემოსაზღვრულია, მაგრამ არ არის ინტეგრებადი არცერთ $[a, b]$ სეგმენტზე.

მართლაც, თუ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილების შესაბამის ინტეგრალურ ჯამში ξ_k წერტილებად ავიღებთ რაციონალურ რიცხვებს, მაშინ

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a.$$

ხოლო, თუ ξ_k წერტილები ირაციონალური რიცხვებია, მაშინ

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k = 0.$$

გამომდინარე აქედან σ ინტეგრალურ ჯამს ზღვარი არ გააჩნია. ე. ი. $D(x)$ ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე.

§ 8. დარბუს* ჯამები. ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე λ-დანაწილება

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b].$$

M_k და m_k იყოს შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. ჯამებს

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k$$

ეწოდებათ, შესაბამისად, $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები, ანუ დარბუს ჯამები. ცხადია, რომ $\underline{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant \overline{\sigma}$.

ლ ე მ ა. 1. სეგმენტის მოცემული დანაწილებისათვის დაყოფის ახალი წერტილების დამატებით დარბუს ქვედა ჯამი არ მცირდება, ხოლო ზედა ჯამი კი არ იზრდება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. საკმარისია მსჯელობა ჩავატაროთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მოცემულ დანაწილებას ვუმატებთ დაყოფის მხოლოდ ერთ ახალ წერტილს. ვთქვათ $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ არის $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები $[a, b]$ სეგმენტის მოცემული დანაწილებისათვის, ხოლო $\overline{\sigma}'$ და $\underline{\sigma}'$ ზედა და ქვედა ჯამები, თუ დანაწილების წერტილებს დავუმატებთ ახალ ξ წერტილს. ვთქვათ $x_{k-1} < \xi < x_k$,

* გასტონ დარბუ (1842—1917) — ფრანგი მათემატიკოსი.

მაშინ $\overline{\sigma}'$ ზედა ჯამი მიიღება $\overline{\sigma}$-საგან, თუ მასში $M_k \Delta x_k$ შესაკრებს შევცვლით ორი შესაკრების ჯამით

$$M_k' (\xi - x_{k-1}) + M_k'' (x_k - \xi),$$

სადაც M_k' და M_k'' არის $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა საზღვრები შესაბამისად $[x_{k-1}, \xi]$ და $[\xi, x_k]$ სეგმენტებზე. ცხადია, რომ $M_k' \leqslant M_k$ და $M_k'' \leqslant M_k$. ამიტომ

$$M_k' (\xi - x_{k-1}) + M_k'' (x_k - \xi) \leqslant M_k [(\xi - x_{k-1}) + (x_k - \xi)] = M_k \Delta x_k,$$

ე. ი. $\overline{\sigma}' \leqslant \overline{\sigma}$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ქვედა ჯამი არ შემცირდება, თუ მოცემულ დანაწილებას დავუმატებთ დაყოფის ახალ წერტილს.

ლემა დამტკიცებულია.

ლ ე მ ა 2. არცერთი ქვედა ჯამი არ აღემატება არცერთ ზედა ჯამს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\underline{\sigma}_1$ არის მოცემული ფუნქციის ქვედა ჯამი სეგმენტის რაიმე დანაწილებისათვის, ხოლო $\overline{\sigma}_2$ — ამავე ფუნქციის ზედა ჯამი სეგმენტის რაიმე სხვა დანაწილებისათვის. $\underline{\sigma}_3$ და $\overline{\sigma}_3$ იყოს შესაბამისად ქვედა და ზედა ჯამები იმ დანაწილებისათვის, რომლის დაყოფის წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს ზემოთ აღნიშნული ორი დანაწილების დაყოფის წერტილთა სიმრავლეების გაერთიანებას. მაშინ ლემა 1-ის ძალით გვაქვს

$$\underline{\sigma}_1 \leqslant \underline{\sigma}_3 \leqslant \overline{\sigma}_3 \leqslant \overline{\sigma}_2 .$$

ლემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\lim_{\lambda \to 0} (\overline{\sigma} - \underline{\sigma}) = 0,$$

ე. ი. ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda < \delta$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon.$$

აუცილებლობა. ვთქვათ არსებობს ინტეგრალი

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda < \delta$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{3.1}$$

სადაც σ წარმოადგენს აღებული დანაწილების სათანადო ინტეგრალურ ჯამს.

შევნიშნოთ, რომ მოცემული λ-დანაწილებისათვის ისე შეიძლება შევარჩიოთ ξ_k' და ξ_k'' წერტილები $k=1, 2, \ldots, n$, რომ შესაბამისი σ_1 და σ_2 ინტეგრალური ჯამებისათვის ადგილი ექნება უტოლობებს

$$\overline{\sigma} - \sigma_1 < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sigma_2 - \underline{\sigma} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

მართლაც, ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრების ძალით მოცემული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $\xi_k' \in [x_{k-1}, x_k]$ წერტილი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$0 \leqslant M_k - f(\xi_k') \leqslant \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

თუ ამ უტოლობებს გავამართლებთ Δx_k-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ

$$0 \leqslant \overline{\sigma} - \sigma_1 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ მეორე უტოლობის მართებულობას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ, როცა $\lambda < \delta$, მაშინ (3.1)-ის ძალით σ_1 და σ_2 ინტეგრალური ჯამებისათვის გვაქვს

$$|\sigma_1 - I| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\sigma_2 - I| < \frac{\varepsilon}{4},$$

მივიღებთ

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}=\overline{\sigma}-\sigma_1+\sigma_1-I+I-\sigma_2+\sigma_2-\underline{\sigma}\leqslant$$

$$\leqslant|\overline{\sigma}-\sigma_1|+|\sigma_1-I|+|I-\sigma_2|+|\sigma_2-\underline{\sigma}|<\varepsilon.$$

აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილების, $\lambda<\delta$, სათანადო $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ ჯამებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<\varepsilon. \tag{3.2}$$

ლემა 2-ის ძალით

$$\underline{\sigma}\leqslant\sup\{\underline{\sigma}\}\leqslant\inf\{\overline{\sigma}\}\leqslant\overline{\sigma},$$

საიდანაც (3.2)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$0\leqslant\inf\{\overline{\sigma}\}-\sup\{\underline{\sigma}\}\leqslant\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<\varepsilon.$$

ე. ი.

$$\inf\{\overline{\sigma}\}=\sup\{\underline{\sigma}\}.$$

აღვნიშნოთ

$$I=\inf\{\overline{\sigma}\}=\sup\{\underline{\sigma}\}.$$

რადგან

$$\underline{\sigma}\leqslant I\leqslant\overline{\sigma},\quad \underline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\sigma},$$

ამიტომ $|\sigma-I|<\varepsilon$, როცა $\lambda<\delta$, ე. ი.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I.$$

საკმარისობა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია მის ნებისმიერ ქვესეგმენტზე.

მართლაც, ვთქვათ $[c, d] \subset [a, b]$. დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი წერტილთა ისეთი სისტემით, რომელთა შორის არის c და d წერტილები. ცხადია, ამ დროს მიიღება $[c, d]$ სეგმენტის გარკვეული დანაწილებაც. $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ იყოს დარბუს ჯამები $[a, b]$ სეგმენტისათვის, ხოლო $\overline{\sigma}_1$ და $\underline{\sigma}_1$ ასეთივე ჯამები $[c, d]$ სეგმენტისათვის. რადგან ზედა და ქვედა ჯამებს შორის სხვაობის ყოველი შესაკრები არაუარყოფითია, ამიტომ

$$0 \leqslant \overline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_1 \leqslant \overline{\sigma} - \underline{\sigma}.$$

აქედან თეორემა 3.1-ის ძალით

$$\lim (\overline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_1) = \lim (\overline{\sigma} - \underline{\sigma}) = 0.$$

ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[c, d]$ სეგმენტზე.

§ 4. ინტეგრებად ფუნქციათა ზოგიერთი კლასი

თ ე ო რ ე მ ა 4.1. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ კანტორის თეორემის თანახმად ეს ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია მოცემულ სეგმენტზე. მაშასადამე, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x' - x''| < \delta$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

თუ განვიხილავთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ λ-დანაწილებას, $\lambda < \delta$, მაშინ

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

სადაც M_k და m_k არის $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისად უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. გვაქვს

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon.$$

აქედან თეორემა 3.1-ის ძალით გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა $[a, b]$ სეგმენტზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 4.2. თუ სეგმენტზე შემოსაზღვრულ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე სასრულია, მაშინ იგი ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს წყვეტის მხოლოდ ერთი c წერტილი, $a<c<b$. განვიხილოთ c წერტილის ისეთი $[c-\delta, c+\delta]$ მიდამო, რომელიც $[a, b]$ სეგმენტშია მოთავსებული. $[a, b]$ სეგმენტის λ-დანაწილებისათვის, სადაც $\lambda<\delta$ შევადგინოთ $f(x)$ ფუნქციის დარბუს ჯამების სხვაობა

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma} = P + R + Q,$$

სადაც P არის $\overline{\sigma}-\underline{\sigma}$ სხვაობის იმ შესაკრებთა ჯამი, რომელთა შესაბამისი $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტები მოთავსებულია $[a, c-\delta]$ ან $[c+\delta, b]$ სეგმენტში, R-იმ შესაკრებთა ჯამი, რომელთა შესაბამისი ქვესეგმენტები შედის $[c-\delta, c+\delta]$ სეგმენტში, ხოლო Q-დანარჩენ შესაკრებთა ჯამი, თუ ასეთი არსებობს.

თუ M და m არის $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ცხადია,რომ

$$R < 2\delta(M-m),\ Q < 2\lambda(M-m).$$

ვთქვათ $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია. შევარჩიოთ δ რიცხვი ისე, რომ

$$\delta < \frac{\varepsilon}{6(M-m)}.$$

მაშინ გვექნება

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<p+2\lambda(M-m)+2\delta(M-m)<p+4\delta(M-m)=p+\frac{2}{3}\varepsilon. \tag{4.1}$$

რადგან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, c-\delta]$ და $[c+\delta, b]$ სეგმენტებზე, ამიტომ ამავე სეგმენტებზე იგი თანაბრად უწყვეტია. მაშასა-

დამე, აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებით $\eta < \delta$ რიცხვი, რომ

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

როდესაც $|x' - x''| < \eta$, სადაც $x', x'' \in [a, c-\delta]$ ან $x', x'' \in [c+\delta, b]$ ამიტომ, თუ $\lambda < \eta$, გვექნება

$$p < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b - a - 2\delta) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაშასადამე, (4.1)-დან ვღებულობთ

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon.$$

თეორემა 3.1-ის ძალით ეს კი ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცი განსხვავებულია ნულისაგან მხოლოდ წერტილთა სასრულ სიმრავლეზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0. \tag{4.2}$$

მართლაც, პირობის თანახმად $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული რიცხვი წყვეტის წერტილებისა და ამიტომ იგი ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე. თუ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი დანაწილებისათვის ξ_k წერტილებს ისე შევარჩევთ, რომ ისინი განსხვავდებოდნენ $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებისაგან, მაშინ ინტეგრალური ჯამი $\sigma = 0$ და მაშასადამე მართებულია (4.2) ტოლობა.

თ ე ო რ ე მ ა 4.3. სეგმენტზე მონოტონური ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე*.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ცხადია $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x_k,$$

---

* სეგმენტზე მონოტონურ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს წყვეტის წერტილთ უსასრულო სიმრავლე.

ამიტომ

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\Delta x_k\leqslant$$

$$\leqslant\lambda\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]=\lambda[f(b)-f(a)].$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}-\underline{\sigma})=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. განსაზღვრული ინტეგრალის უმარტივესი თვისებები

1. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)=M$, სადაც M მუდმივია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=M(b-a). \tag{5.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილებისათვის და ნებისმიერი ξ_k წერტილებისათვის გვაქვს

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=M(b-a),$$

საიდანაც გამომდინარეობს (5.1) ტოლობა.

2. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და A მუდმივია, მაშინ $Af(x)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b Af(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5.3}$$

ე. ი. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ნიშნის გარეთ.

დამტკიცება. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n} A f(\xi_k) \Delta x_k = A \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

ამ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მიიღება (5.2) ტოლობა.

3. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი ჯამიც ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

დამტკიცება. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k) + g(\xi_k)] \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k. \quad (5.3)$$

ამ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მიიღება (5.3) ტოლობა.

შედეგი. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო A და B ნებისმიერი მუდმივებია, მაშინ $Af(x)+Bg(x)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]\, dx = A\int_a^b f(x)\, dx + B\int_a^b g(x)\, dx.$$

ადვილია ჩვენება, რომ ეს თვისება მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

4. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტებზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზეც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \quad (5.4)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება, რომლის დაყოფის ერთ-ერთი წერტილია c. $f(x)$ ფუნქციის σ ინტეგრალური ჯამი, რომელიც შეესაბამება $[a, b]$ სეგმენტს, ასე წარმოვადგინოთ

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{5.5}$$

სადაც σ_1 და σ_2 არის $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი შესაბამისად $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტებისათვის. რადგან $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტებზე, ამიტომ განხილული სახის დანაწილებისათვის (5.5) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.6}$$

განვიხილოთ ახალი $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება, რომლისთვისაც c არ არის დაყოფის წერტილი

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} < \cdots < x_n = b,$$

სადაც $x_m < c < x_{m+1}$. σ^*, იყოს ამ დანაწილების ინტეგრალური ჯამი:

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

აღვნიშნოთ σ-თი იმ დანაწილების შესაბამისი ინტეგრალური ჯამი, რომელიც მიიღება, თუ განხილული დანაწილების დაყოფის წერტილებს დავუმატებთ c წერტილს. ე. ი.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,\Delta x_k + f(\xi_m')(c - x_m) + f(\xi_m'')(x_{m+1} - c) + \sum_{k=m+2}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

სადაც $x_m \leqslant \xi_m' \leqslant c$, $c \leqslant \xi_m'' \leqslant x_{m+1}$.

ცხადია, რომ

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sigma + \mu, \tag{5.7}$$

სადაც

$$\mu = f(\xi_m)(x_{m+1} - x_m) - f(\xi_m')(c - x_m) - f(\xi_m'')(x_{m+1} - c).$$

თუ M არის $|f(x)|$ ფუნქციის ზუსტი ზედა საზღვარი $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$|\mu| \leqslant M(x_{m+1}-x_m)+M(c-x_m)+M(x_{m+1}-c)=2M(x_{m+1}-x_m). \quad (5.8)$$

რადგან $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ არსებობს, ამიტომ (5.7)-დან (5.8)-ის ძალით გვაქვს

$$\lim \sigma^* = \lim \sigma.$$

ამრიგად (5.6) ტოლობას ადგილი აქვს $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი სახის დანაწილებისათვის, საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი (5.4) ტოლობა.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, მაშინ (2.4) და (2.5)-ის გათვალისწინებით ადვილია ჩვენება, რომ (5.4) ტოლობა მართებულია ნებისმიერი a, b, c რიცხვებისათვის $[\alpha, \beta]$ სეგმენტიდან.

5. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები განსხვავდება შემოსაზღვრული $\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობისაგან წერტილთა მხოლოდ სასრულ სიმრავლეზე, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციაც ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ფუნქცია $g(x)=\varphi(x)-f(x)$, რომლისთვისაც თეორემა 4.2-ის შედეგის ძალით გვაქვს

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0.$$

ამიტომ მე-3 თვისების თანახმად

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამ თვისებიდან ჩანს, რომ ფუნქციის ინტეგრებადობა და ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მნიშვნელობას ღებულობს ფუნქცია რაიმე კონკრეტულ სასრული რაოდენობის წერტილებში.

6. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x) \leqslant \varphi(x)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{5.9}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $\Delta x_k > 0$, ამიტომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda \to 0$, მივიღებთ დასამტკიცებელ (5.9) უტოლობას.

შ ე დ ე გ ი. თუ არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

7. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b \left| f(x) \right| dx. \tag{5.10}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

M_k და m_k იყოს შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე, ხოლო M_k^* და m_k^* — $|f(x)|$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი ამავე სეგმენტზე. მაშინ ცხადია

$$M_k^* - m_k^* = \sup_{x, x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \big|\, |f(x')| - |f(x'')| \,\big| < \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')| = M_k - m_k.$$

$f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები $[a, b]$ სეგმენტზე აღვნიშნოთ შესაბამისად $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$-ით, ხოლო $|f(x)|$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები $\overline{\sigma}^*$ და $\underline{\sigma}^*$-ით. $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო თეორემა 3.1-ის ძალით გვაქვს

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}^*-\underline{\sigma}^*)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(M_k^*-m_k^*)\,\Delta x_k\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k=\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}-\underline{\sigma})=0.$$

ე. ი.

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}^*-\underline{\sigma}^*)=0.$$

მაშასადამე $|f(x)|$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. ვაჩვენოთ ახლა (5.10) უტოლობის მართებულობა. რადგან

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|,$$

ამიტომ

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

აქედან გამომდინარეობს (5.10) უტოლობა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $|f(x)|$ ფუნქციის ინტეგრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა. მაგალითად, თუ

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია,}\\ -1, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია,}\end{cases}$$

მაშინ $|f(x)|$ ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $f(x)$ არ არის ინტეგრებადი.

8. ვთქვათ $f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი არაუარყოფითი ფუნქცია. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $c\in[a, b]$ წერტილში და $f(c)>0$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $f(x)$ ფუნქციის c წერტილში უწყვეტობის გამო, არსებობს $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს c წერტილს და $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$, როცა $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

ვინაიდან

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx \geqslant 0, \quad \int_\beta^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

ამიტომ მე-4, მე-6 და 1-ლი თვისებების ძალით გვაქვს

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{f(c)}{2}\,dx = \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0.$$

შ ე დ ე გ ი. თუ არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

მაშინ $f(x)$ იგივურად ნულის ტოლია $[a, b]$ სეგმენტზე.

9. რაიმე სეგმენტზე ინტეგრებადი ორი ფუნქციის ნამრავლი აგრეთვე ინეტგრებადია ამ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$, სადაც $\varphi(x)$ და $g(x)$ რაიმე $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი ფუნქციებია. ამ ფუნქციების ინტეგრებადობიდან გამომდინარეობს მათი შემოსაზღვრულობა $[a, b]$ სეგმენტზე, ე. ი. არსებობს ისეთი A და B მუდმივები, რომ ნებისმიერი x-ისათვის $[a, b]$ სეგმენტიდან $|\varphi(x)| \leqslant A$ და $|g(x)| \leqslant B$.

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება და აღვნიშნოთ M_k' და m_k', M_k'' და m_k'', M_k და m_k სიმბოლოებით შესაბამისად $\varphi(x)$, $g(x)$ და $f(x)$ ფუნქციების ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის ნებისმიერი ორი x' და x'' წერტილისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned}
&|f(x') - f(x'')| = |\varphi(x')\,g(x') - \varphi(x'')\,g(x'')| = \\
&= |\varphi(x')\,g(x') - \varphi(x'')\,g(x') + \varphi(x'')\,g(x') - \varphi(x'')\,g(x'')| \leqslant \\
&\leqslant |g(x')|\,|\varphi(x') - \varphi(x'')| + |\varphi(x'')|\,|g(x') - g(x'')| \leqslant \\
&\leqslant B(M_k' - m_k') + A(M_k'' - m_k'').
\end{aligned}$$

მაშასადამე

$$M_k - m_k \leqslant B(M'_k - m'_k) + A(M''_k - m''_k).$$

თუ $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}'$ და $\underline{\sigma}'$, $\overline{\sigma}''$ და $\underline{\sigma}''$ არის შესაბამისად $f(x)$, $\varphi(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზედა და ქვედა ჯამები $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma} - \underline{\sigma}) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\,\Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant B\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(M'_k - m'_k)\,\Delta x_k + A\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(M''_k - m''_k)\,\Delta x_k =$$

$$= B\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}' - \underline{\sigma}') + A\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}'' - \underline{\sigma}'') = 0.$$

ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

§ 6. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

თ ე ო რ ე მ ა 6.1. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და $g(x)$ ამ სეგმენტზე ნიშანს არ იცვლის, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx, \tag{6.1}$$

სადაც $m \leqslant \mu \leqslant M$, ხოლო M და m არის $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი $[a, b]$ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვიგულისხმოთ, რომ $g(x) \geqslant 0$. მაშინ

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

უტოლობებიდან გვაქვს

$$mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x).$$

აქედან

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.2}$$

რადგან $g(x) \geqslant 0$, ამიტომ

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0.$$

თუ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია, მაშინ (6.2)-დან

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

და (6.1) ტოლობის მართებულობა ცხადია.

ახლა ვთქვათ ინტეგრალი $g(x)$ ფუნქციიდან დადებითია, მაშინ (6.2) უტოლობებიდან გვაქვს

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}, \tag{6.3}$$

მაშინ (6.3)-დან მიიღება (6.1) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

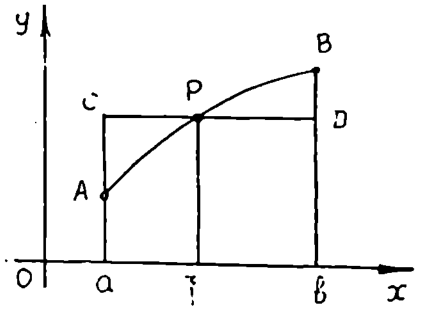
შ ე დ ე გ ი 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.4}$$

შ ე დ ე გ ი 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi). \tag{6.5}$$

ეს ტოლობა მიიღება (6.4) ტოლობიდან, თუ დავუშვებთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე $g(x)=1$.



ნახ. 20

(6.5) ფორმულის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: თუ არაუარყოფითი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკზე მოიძებნება ისეთი P წერტილი, რომ $aABb$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი ტოლია $aCDb$ მართკუთხედის ფართობის (ნახ. 20), მაგრამ ასეთი წერტილის მოძებნა პრაქტიკულად საზოგადოდ არ ხერხდება.

§ 7. ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ იგი ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a, x]$ სეგმენტზე, სადაც $a\leqslant x\leqslant b$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{7.1}$$

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ (7.1) ტოლობით განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $x\in[a, b]$ და $x+\Delta x\in[a, b]$, მაშინ (7.1) ტოლობის ძალით

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

საიდანაც

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \tag{7.2}$$

რადგან $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე. ვთქვათ $|f(x)| \leqslant M$ ყოველი $x \in [a, b]$-სათვის. გვაქვს

$$|\Delta F| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} M dt\right| = M\,|\Delta x|.$$

აქედან ცხადია, რომ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ ნებისმიერი $x \in [a, b]$-სათვის, ე. ი. $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 7.2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ამ სეგმენტის x_0 წერტილში, მაშინ (7.1) ტოლობით განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $x_0 + \Delta x \in [a, b]$, მაშინ გვაქვს (იხ. (7.2))

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt. \tag{7.3}$$

რადგან

$$f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt, \tag{7.4}$$

ამიტომ (7.3.) და (7.4) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|. \tag{7.5}$$

რადგან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $|x-x_0|<\delta$, მაშინ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. ამიტომ, თუ Δx-ს შევარჩევთ ისე, რომ $|\Delta x|<\delta$, (7.5) უტოლობიდან გვექნება

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x}-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right|=\varepsilon,$$

ე. ი. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(x_0)$, ანუ $F'(x_0)=f(x_0)$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 7.3. სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას გააჩნია პირვანდელი ფუნქცია ამ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ თეორემა 7.2-ის ძალით

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt \tag{7.5}$$

ფუნქცია წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში და $F'(x)=f(x)$.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირვანდელია (7.6) ტოლობით განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს ინტეგრალს $f(x)$ ფუნქციიდან ცვლადი ზედა საზღვრით. ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int f(x)\,dx=\int\limits_a^x f(t)\,dt+C,$$

რომელიც ადგენს კავშირს განუსაზღვრელ და განსაზღვრულ ინტეგრალებს შორის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. არსებობს წყვეტილი ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია პირვანდელი ფუნქცია.

მართლაც, ადვილია შემოწმება, რომ ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=0\end{cases}$$

არის

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=0\end{cases}$$

ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. $f(x)$ ფუნქცია $x=0$ წერტილში განიცდის მეორე გვარის წყვეტას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ ფუნქცია შუალედის რაიმე წერტილში განიცდის პირველი გვარის წყვეტას, მაშინ ამ შუალედში მას პირვანდელი ფუნქცია არ გააჩნია, ვინაიდან წარმოებულ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

§ 8. ნიუტონ-ლეიბნიცის* ფორმულა

§ 2-ში იყო აღნიშნული, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის უშუალოდ გამოთვლა, როგორც ინტეგრალური ჯამის ზღვრისა საზოგადოდ რთულია.

ამ პარაგრაფში მივიღებთ, უწყვეტი ფუნქციის შემთხვევაში, განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის მეთოდს, რომელიც ეფექტურია, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში.

თ ე ო რ ე მ ა 8.1. (ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა). თუ $F(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირვანდელი ფუნქცია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $\int_a^x f(t)\,dt$ აგრეთვე წარმოადგენს $f(x)$

---

* გ. ლეიბნიცი (1646—1716) — გერმანელი მათემატიკოსი.

ფუნქციის პირველადს, (იხ. თეორემა 7.3), ამიტომ არსებობს ისეთი C მუდმივი, რომ

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

როცა $x=a$ ამ ტოლობიდან მივიღებთ $C=-F(a)$, მაშასადამე

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

თუ ამ ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $x=b$, მიიღება დასამტკიცებელი (8.1) ფორმულა.

თეორემა დამტკიცებულია.

(8.1) ფორმულას ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა ეწოდება.

ამ ფორმულის ჩასაწერად ხშირად იყენებენ აღნიშვნას $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$. ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

ამრიგად, უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი გამოითვლება ამავე ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალის საშუალებით.

შევნიშნოთ, რომ ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა სამართლიანია მაშინაც, როცა $a>b$.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

2. $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

3. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$

4. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

ნიუტონ-ლეიბნიცის (8.1) ფორმულა მივიღეთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს ფორმულა მართებულია უფრო ზოგად შემთხვევაშიც.

თეორემა 8.2. ვთქვათ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას აქვს წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობა. თუ $F(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ისეთი ფუნქცია, რომ $f(x)$-ის უწყვეტობის ყოველ წერტილზე $F'(x) = f(x)$, მაშინ ადგილი აქვს ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულას

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$, მაშინ თეორემა 7.2-ი ძალით $F'(x) = \Phi'(x)$, გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა. მაშინ $F(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციების უწყვეტობიდან გამომდინარე ადვილი ჩვენება, რომ

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in [a, b],\ C = \text{const}.$$

ამრიგად

$$\int\limits_a^x f(t)\, dt = F(x) + C.$$

აქედან როცა $x = a$ გვაქვს $C = -F(a)$, ამიტომ

$$\int\limits_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a).$$

კერძოდ, როცა $x=b$, გვექნება:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.3. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $F(x)$ ისეთი უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$-ზე, რომ $F'(x)=f(x)$ გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა, მაშინ მართებულია ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ არის $[a, b]$ სეგმენტის წერტილები, სადაც $F'(x) \neq f(x)$. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ისეთი ნებისმიერი λ-დანაწილება $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, რომლის დაყოფის წერტილებს შორის არის a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ წერტილებიც. მაშინ ყოველი $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ სეგმენტზე $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და წარმოებადია მის შიგნით, ამიტომ $F(x)$ ფუნქციისათვის აღნიშნულ სეგმენტზე შეიძლება გამოვიყენოთ სასრული ნაზრდის შესახებ ლაგრანჟის თეორემა

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{8.2}$$

სადაც

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \xi_i \in]\, x_{i-1}, x_i[, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a),$$

მაშინ (8.2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{8.3}$$

(8.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი არის $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი. თუ (8.3) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda \to 0$ მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{2} \operatorname{sign} x dx.$$

განვიხილოთ ფუნქცია $F(x)=|x|$, ცხადია ის უწყვეტია $[-1; 2]$ სეგმენტზე და $F'(x)=\operatorname{sign} x$ გარდა $x=0$ წერტილისა, ამიტომ

$$\int_{-1}^{2} \operatorname{sign} x dx = |x| \Big]_{-1}^{2} = 1.$$

§ 9. ცვლადის გარდაქმნა განსაზღვრულ ინტეგრალში

თ ე ო რ ე მ ა 9.1. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $x=\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამასთან $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$, როცა $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ და $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, მაშინ

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \tag{9.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია, მაშინ

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \tag{9.2}$$

განუსაზღვრელ ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნა გვაძლევს

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)[+ C. \tag{9.3}$$

ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის თანახმად (9.2)-დან გვაქვს

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a). \tag{9.4}$$

ანალოგიურად (9.3)-დან მივიღებთ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad (9.5)$$

(9.4) და (9.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი (9.1) ფორმულა.

თეორემა დამტკიცებულია.

(9.1) ფორმულას ეწოდება ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში. განვიხილოთ მაგალითები.

1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x = a\sin t$ გვექნება, როდესაც $x=0$, მაშინ $t=0$, ხოლო, როდესაც $x=a$, მაშინ $t=\dfrac{\pi}{2}$. ამრიგად

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t\,dt = a^2 \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{x+1} = t$, ე. ი. $x = t^2 - 1$. როცა $x = 3$, მაშინ $t=2$, ხოლო როცა $x=8$, მაშინ $t = 3$. გვაქვს

$$I = \int_{2}^{3} \frac{t^2-1}{t}\,2t\,dt = 2\int_{2}^{3} (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_{2}^{3} = 10\,\frac{2}{3}.$$

3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{e^x - 1} = t$, ე. ი. $x = \ln(1 + t^2)$, საიდანაც $dx = \frac{2t\,dt}{1 + t^2}$. როცა $x = \ln 2$, მაშინ $t = 1$, ხოლო როცა $x = \ln 4$, მაშინ $t = \sqrt{3}$. გვაქვს

$$I = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1 + t^2} = 2 \operatorname{arctg} t \Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

§ 10. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის

თ ე ო რ ე მ ა 10.1. თუ $u(x)$ და $v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int\limits_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) \Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\, u'(x)\, dx. \qquad (10.1)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როგორც ვიცით

$$[u(x)\, v(x)]' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x).$$

თუ მოვახდენთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრებას a-დან b-მდე და გავითვალისწინებთ ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულას, მივიღებთ

$$u(x)\, v(x) \Big|_a^b = \int\limits_a^b u'(x)\, v(x)\, dx + \int\limits_a^b u(x)\, v'(x)\, dx.$$

საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი (10.1) ფორმულა.

თეორემა დამტკიცებულია.

(10.1) ფორმულას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის. იგი შეიძლება მოკლედ შემდეგნაირად ჩაიწეროს

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

განვიხილოთ მაგალითები:

1. $$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} x=u, & \sin x\,dx = dv \\ du = dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\int_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

2. $$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u; & \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = dv \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = 2\sqrt{x} \end{matrix} \right| = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - 2\int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 2\sqrt{e} - 4\sqrt{x}\Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 2(2-\sqrt{e}).$$

§ 11. ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციების ინტეგრება

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნულის მიმართ რაიმე სიმეტრიულ არეში.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ ნებისმიერი x-სათვის განსაზღვრის არიდან $f(-x)=f(x)$.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ ნებისმიერი x-სათვის განსაზღვრის არიდან $f(-x)=-f(x)$.

ვთქვათ a ნებისმიერი დადებითი რიცხვია და $[-a, a]$ სეგმენტზე $f(x)$ ინტეგრებადია, მაშინ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა [illegible]
ჩასმას $x=-t$, გვექნება

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx.$$

აქედან

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{თუ } f(x) \text{ — ლუწია,} \\ 0 & \text{თუ } f(x) \text{ — კენტია.} \end{cases} \tag{11.1}$$

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, პერიოდით $l \neq 0$, თუ ნებისმიერი $x \in D(f)$-ისათვის რიცხვები $x-l$ და $x+l$ აგრეთვე ეკუთვნის $D(f)$-ს და მართებულია ტოლობა

$$f(x+l) = f(x).$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია, პერიოდით l და ინტეგრებადია $[0, l]$ სეგმენტზე მაშინ ნებისმიერი $c \in R$-ისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{c}^{c+l} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

მართლაც, გვაქვს

$$\int_{c}^{c+l} f(x)\,dx = \int_{c}^{l} f(x)\,dx + \int_{l}^{c+l} f(x)\,dx.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $x=t+l$, გვექნება

$$\int_{c}^{c+l} f(x)\,dx = \int_{c}^{l} f(x)\,dx + \int_{0}^{c} f(t+l)\,dt =$$

$$= \int_{c}^{l} f(x)\,dx + \int_{0}^{c} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

ამრიგად, ინტეგრალი პერიოდული ფუნქციიდან, პერიოდის სიგრძის ნებისმიერ შუალედში ერთმანეთის ტოლია.

§ 12. ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, dx.$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, dx = 0$, რადგან $\sin mx$ კენტი ფუნქციაა (იხ. (11.1)).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx$, $m \in Z$, $m \neq 0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $\cos mx$ ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx = 2 \int\limits_{0}^{\pi} \cos mx\, dx = \frac{2}{m} \sin m x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos n x\, dx$; $m, n \in Z$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = 0.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოთვალეთ ინტეგრალი $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$; $m, n \in Z$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ $m = n \neq 0$, მაშინ

$$I = 2 \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \int\limits_{0}^{\pi} (1 - \cos 2mx)\, dx = \pi.$$

როცა $m = -n \neq 0$, მაშინ ცხადია $I = -\pi$.

თუ $m\neq n$ და $m\neq -n$, გვექნება

$$I = 2\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \int_0^{\pi} [\cos (m-n)\,x - \cos (m+n)\,x]\,dx = 0.$$

ამრიგად

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad m\neq n \quad \text{და} \quad m\neq -n, \\ \pi, & \text{როცა} \quad m = n\neq 0, \\ -\pi, & \text{ოოცა} \quad m = -n. \end{cases}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad m\neq n \quad \text{და} \quad m\neq -n, \\ \pi, & \text{როცა} \quad m=n\neq 0 \ \text{ან} \ m=-n\neq 0, \\ 2\pi, & \text{როცა} \quad m=n=0. \end{cases}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალები

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx, \quad t_k = \int_0^{\pi/2} \cos^k x\,dx, \quad k\in N.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით შივიღებთ

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sin^{k-1} x, \quad dv = \sin x\,dx \\ du = (k-1)\sin^{k-2} x \cos x\,dx, \ v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= \Big[-sin^{k-1} x \cos x\Big]_0^{\pi/2} + (k-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{k-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$=(k-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{k-2} x\,dx - (k-1)\int_0^{\pi/2} \sin^k x dx = (k-1)\,I_{k-2} - (k-1)I_k.$$

აქედან

$$I_k = \frac{k-1}{k}\,I_{k-2}. \tag{12.1}$$

(12.1) არის I_k ინტეგრალის რედუქციის ფორმულა. ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით I_k-ს გამოთვლა მიიყვანება I_0 ან I_1 ინტეგრალის გამოთვლაზე, იმისდა მიხედვით, k ლუწია თუ კენტი.

როცა $k=2n$, მაშინ (12.1)-ის გამოყენებით გვაქვს

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\ I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\ I_{2n-4}=\cdots=$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\ I_0=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

თუ $k=2n+1$, მაშინ (12.1)-ის ძალით მივიღებთ

$$I_{2n+1}=\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

ამრიგად

$$\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & \text{როცა } k \text{ კენტია,}\\[2mm] \dfrac{(k-1)!!}{k!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{როცა } k \text{ ლუწია.}\end{cases}$$

თუ გამოვიყენებთ ჩასმას $x=\dfrac{\pi}{2}-t$, გვექნება

$$t_k=\int_0^{\pi/2}\cos^k x\,dx=-\int_{\pi/2}^{0}\cos^k\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt=\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx.$$

§ 13. არასაკუთრივი ინტეგრალები

როგორც ვიცით (იხ. § 2) სეგმენტზე შემოუსაზღვრელი ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი რიმანის აზრით ამ სეგმენტზე. ასევე, რადგანაც რიმანის ინტეგრალის ცნება შემოყვანილია სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის, ამიტომ არ შეიძლება ვილაპარაკოთ რიმანის აზრით ინტეგრალზე ფუნქციიდან, რომელიც განსაზღვრულია უსასრულო შუალედზე; ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ინტეგრალის ცნების განზოგადებას იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქცია განსაზღვრულია უსასრულო შუალედზე და იმ შემთხვევისათვის, როცა ფუნქცია განსაზღვრულია სასრულ შუალედზე, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული ამ შუალედზე.

1. არასაკუთრივი ინტეგრალები უსასრულო საზღვრით. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, +\infty[$ შუალედში და ინტეგრებადია ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე.

განსაზღვრება 13.1. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx, \tag{13.1}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a, +\infty[$ შუალედზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{13.2}$$

ამრიგად

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$$

იმ შემთხვევაში, როცა (13.1) ზღვარი სასრულია (13.2) ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას — ინტეგრებადი (არასაკუთრივი აზრით) $[a, +\infty[$ შუალედზე. თუ (13.1) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია; მაშინ ამბობენ, რომ (13.2) ინტეგრალი განშლადია.

შენიშვნა. თუ $C > a$, მაშინ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ და $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია. მართლაც, რადგანაც

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^t f(x)\,dx, \tag{13.3}$$

ამიტომ ზღვრები $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ და $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)\,dx$ ერთდროულად

არსებობს ან არ არსებობს. ამასთან თუ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ კრებადია, მაშინ (13.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{C\to+\infty}\int\limits_C^{+\infty} f(x)\,dx = 0.$$

თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია $[a, +\infty[$ შუალედზე, მაშინ

$$\int\limits_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a),$$

ამიტომ

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}, \quad (13.4)$$

სადაც

$$F(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} F(t).$$

$]-\infty, a]$ შუალედზე მოცემული ფუნქციისათვის არასაკუთრივი ინტეგრალი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{l\to-\infty}\int\limits_l^a f(x)\,dx.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, მაშინ მას ინტეგრებადი ეწოდება ამ შუალედში, თუ კრებადია ინტეგრალები

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx \quad \text{და} \quad \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

მათ ჯამს ეწოდება ინტეგრალი $]-\infty, +\infty[$ შუალედზე $f(x)$ ფუნქციიდან და

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$\frac{1}{1+x^2}$ ფუნქციის პირვანდელი ფუნქციაა $F(x) = \operatorname{arctg} x$. ცხადია, რომ $F(0) = 0$, $F(+\infty) = \frac{\pi}{2}$. ამიტომ (13.4) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ განშლადია.

$\cos x$ ფუნქციის პირვანდელი ფუნქციაა $\sin x$. მაგრამ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ არ არსებობს, ე. ი. $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, სადაც $a > 0$, კრებადია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია როცა $\alpha \leqslant 1$.

თუ $\alpha \neq 1$, მაშინ

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^t =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{როცა } \alpha < 1, \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \text{როცა } \alpha > 1. \end{cases}$$

თუ $\alpha = 1$, მაშინ

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty.$$

მაშასადამე $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, სადაც $a > 0$, კრებადია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \leqslant 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx$.

გვაქვს

$$\int\limits_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x} \Big|_{2/\pi}^{+\infty} = 1.$$

2. არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი. აბსოლუტური და პირობითი კრებადობა. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 13.1. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, +\infty[$ შუალედში და ინტეგრებადია ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $T > a$ რიცხვი, რომ

$$\left| \int\limits_{t'}^{t''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon, \text{ როცაა } \quad t' > T, \quad t'' > T.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(t) = \int\limits_a^t f(x)\, dx.$$

კოშის ნიშნის ძალით, $F(t)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის, როცა $t \to +\infty$, აუცილებელია და საკმარისი ,რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი $T > a$ რიცხვი, რომ $|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$, როცა $t' > T$, $t'' > T$. მაგრამ

$$F(t'') - F(t') = \int\limits_{t'}^{t''} f(x)\, dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 13.2. თუ $[a, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე და $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია აგრეთვე $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ და მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{13.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ კრებადია, ამიტომ თეორემა 13.1-ის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $T > a$ რიცხვი, რომ

$$\left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad t' > T, \ t'' > T.$$

მაგრამ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|\,dx\right|.$$

ამიტომ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad t' > T, \ t' > T.$$

აქედან თეორემა 13.1-ის ძალით გამომდინარეობს $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$-ის კრებადობა.

თუ უტოლობაში

$$\left|\int_a^t f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^t |f(x)|\,dx$$

გადავალთ ზღვარზე, როცა $t\to+\infty$ მივიღებთ (13.5) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, რომ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$-ის კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$-ის კრებადობა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 13.2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, როცა კრებადია $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ ინტეგრალი. თუ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ კრებადია, ხოლო $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ განშლადია, მაშინ ამბობენ, რომ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალი პირობით კრებადია.

თ ე ო რ ე მ ა 13. 3. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, +\infty[$ შუალედში და $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a, +\infty[$. მაშინ იმისათვის, რომ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალი იყოს კრებადი აუცილებელია და საკმარისი

$$\left|\int_a^t f(x)\,dx\right| \leqslant M \text{ ყოველი } t>a\text{-სათვის.}$$

თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს იქიდან რომ ფუნქცია

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,dx \text{ არაკლებადია.}$$

თ ე ო რ ე მ ა 13.4 (დირიხლეს ნიშანი). ვთქვათ:

1) $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ყოველ $[a.\ t] \subset [a, +\infty[$ სეგმენტზე და

$$\left| \int_a^t f(x)\, dx \right| \leqslant M, \quad t > a;$$

2) $g(x)$ არაზრდადი, უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა, როცა $x \geqslant a$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0.$

მაშინ

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx \tag{13.6}$$

კრებადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\, dx$ ფუნქცია. პირობის ძალით

$$|F(t)| \leqslant M, \quad \text{როცა} \quad t > a.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით, გვაქვს

$$\int_a^t f(x)\, g(x)\, dx = F(t)\, g(t) - F(a)\, g(a) - \int_a^t F(x)\, g'(x)\, dx. \tag{13.7}$$

რადგანაც $g(x)$ არაზრდადია, ამიტომ $g'(x) \leqslant 0$ და

$$\int_a^t |F(x)\, g'(x)|\, dx \leqslant M \int_a^t |g'(x)|\, dx = -M \int_a^t g'(x)\, dx =$$

$$= M\,[g(a) - g(t)] \leqslant M\, g(a).$$

აქედან, თეორემა 13.3-ის ძალით, გამომდინარეობს, რომ $\int\limits_a^{+\infty} |F(x) g'(x)|\, dx$

ინტეგრალი კრებადია. ამიტომ თეორემა 13.2-ის თანახმად კრებადია $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\, g'(x)\, dx$ ინტეგრალი.

თუ (13.7) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $t\to+\infty$, თეორემის მესამე პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ (13.6) ინტეგრალი კრებადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვაჩვენოთ, რომ

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (a>0)$$

ინტეგრალი კრებადია, როცა $\alpha>0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x)=\sin x, \quad g(x)=\frac{1}{x^\alpha} .$$

ცხადია, რომ $g(x)$ კლებადი, უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[a.\ +\infty[$ შუალედში, როცა $\alpha>0$, ხოლო

$$\left|\int\limits_a^t f(x)\, dx\right| = \left|\int\limits_a^t \sin x\, dx\right| = \left|-\cos t+\cos a\right| \leqslant 2.$$

ამიტომ თეორ. მა 13.4-ის ძალით $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ ინტეგრალი კრებადია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx \ (a>0)$ ინტეგრალი კრებადია, როცა $\alpha>0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვაჩვენოთ, რომ

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (a>0)$$

ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია, როცა $a>1$ და პირობით კრებადია, როცა $0<\alpha\leqslant 1$.

დამტკიცება. რადგან $|\sin x|\geqslant \sin^2 x$, ამიტომ

$$\int_a^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx\geqslant\int_a^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx=\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^\alpha}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx. \tag{13.8}$$

$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty$, როცა $\alpha\leqslant 1$, ხოლო $\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx$ კრებადია, როცა $\alpha>0$, ამიტომ (13.8) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_a^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx=+\infty,\quad \text{როცა}\quad \alpha\leqslant 1.$$

როცა $\alpha>1$, გვაქვს

$$\int_a^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx\leqslant\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ $(a>0)$ აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>1$ და პირობით კრებადია, როცა $0<\alpha\leqslant 1$.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ ფრენელის* ინტეგრალები

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx \quad \text{და} \quad \int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx$$

კრებადია.

---

* ა. ფრენელი (1788—1827) — ფრანგი ფიზიკოსი.

მართლაც $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx$ ინტეგრალის კრებადობისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ კრებადია ინტეგრალი $\int\limits_1^{+\infty} \sin x^2\, dx$. გვაქვს

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin x^2\, dx = \int\limits_1^{+\infty} x \sin x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x) = x \sin x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

ცხადია, $g(x)$ კლებადი, უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[1, +\infty[$ შუალედში, ხოლო

$$\left| \int\limits_1^{t} f(x)\, dx \right| = \left| \int\limits_1^{t} x \sin x^2\, dx \right| \leqslant 1.$$

ამიტომ თეორემა 13.4-ის ძალით $\int\limits_1^{+\infty} \sin x^2\, dx$ კრებადია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx$ კრებადია.

თ ე ო რ ე მ ა 13.5 (აბელის* ნიშანი). ვთქვათ:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ ინტეგრალი კრებადია;

2) $g(x)$ მონოტონური, უწყვეტად წარმოებადი და შემოსაზღვრული ფუნქციაა $[a, +\infty[$ შუალედში. მაშინ ინტეგრალი

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx \tag{13.9}$$

კრებადია.

---

* ნ. აბელი (1802—1829) — ნორვეგიელი მათემატიკოსი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვაჩვენოთ, რომ ამ თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს თეორემა 13.4-დან. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $g(x)$ ფუნქცია არაზრდადია. გამომდინარე აქედან არსებობს

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = C.$$

ვანვიხილოთ ფუნქცია $\varphi(x)=g(x)-C$. ცხადია, რომ $\varphi(x)$ არაზრდადია და $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

გარდა ამისა, რადგან $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ კრებადია, ამიტომ $F(t)=\int\limits_a^t f(x)\,dx$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

ამრიგად, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ თეორემა 13.4-ის პირობებს. გამომდინარე აქედან

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

ინტეგრალი კრებადია. მაგრამ

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} C f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (13.9) ინტეგრალი კრებადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვაჩვენოთ, რომ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$, კრებადია.

მართლაც $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ კრებადია, როცა $\alpha > 0$, ხოლო $g(x)=\operatorname{arctg} x$ მონოტონური, უწყვეტად წარმოებადი, შემოსაზღვრული ფუნქციაა. ამიტომ თეორემა 13.5-ის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

თ ე ო რ ე მ ა 13.6. ვთქვათ $[a, +\infty[$ შუალედზე განსაზღვრული არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია ყოველ $[a, t] \subset [a, +\infty[$ სეგმენტზე და $f(x) \leqslant g(x)$. მაშინ $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალის კრებადობა და პირიქით $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ფუნქციები

$$F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx, \; G(t) = \int\limits_a^t g(x)\,dx, \quad t \geqslant a.$$

ცხადია, რომ $F(t)$ და $G(t)$ მონოტონური ფუნქციებია და

$$F(t) \leqslant G(t).$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს თეორემის მართებულობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. ვთქვათ $[a, +\infty[$ შუალედზე განსაზღვრული არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები $(g(x) \neq 0)$ ინტეგრებადია ყოველ $[a, t] \subset [a, +\infty[$ სეგმენტზე და არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

მაშინ:

1) როცა $0 \leqslant A < +\infty$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$-ის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალის კრებადობა;

2) როცა $0 < A \leqslant +\infty$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$-ის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

კერძოდ, როცა $0 < A < +\infty$, მაშინ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ და $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

კრებადია.

რადგან

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x^2},$$

ამიტომ თეორემა 13.6-ის ძალით (იხ. წინა პუნქტის მაგალითი 3) მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}\,dx$$

განშლადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} \quad \text{და} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

რადგან $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ინტეგრალი განშლადია, ამიტომ თეორემა 13.6-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$$

კრებადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}} \quad \text{და} \quad g(x) = \frac{1}{x^{5/4}}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/4}\ln x}{\sqrt{x^3+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^3+1}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/4}} = 0.$$

რადგან $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/4}}$ კრებადია, ამიტომ თეორემა 13.6-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

3. არასაკუთრივი ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციებიდან. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b[$ შუალედში, შემოუსაზღვრელია ამ შუალედში და ინტეგრებადია ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, სადაც $a<t<b$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 13.3. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t\to b-} \int\limits_a^t f(x)\, dx, \tag{13.10}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a, b]$ შუალედზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{13.11}$$

იმ შემთხვევაში, როცა (13.10) ზღვარი სასრულია, (13.11) ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას — ინტეგრებადი (არასაკუთრივი აზრით) $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ (13.10) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ამბობენ, რომ (13.11) ინტეგრალი განშლადია.

შენიშვნა. თუ $a < c < b$, მაშინ $\int_a^b f(x)\,dx$ და $\int_c^b f(x)\,dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან განშლადია, ამასთან, თუ $\int_a^b f(x)\,dx$ კრებადია, მაშინ

$$\lim_{c \to b-} \int_c^b f(x)\,dx = 0.$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პირვანდელი $F(x)$ ფუნქცია $[a, b[$ შუალედზე, მაშინ

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a),$$

ამიტომ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-} F(t) - F(a) = F(b-) - F(a),$$

სადაც

$$F(b-) = \lim_{t \to b-} F(t).$$

ანალოგიურად განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ განსაზღვრულია $]a, b]$ შუალედში, შემოუსაზღვრელია ამ შუალედში და ინტეგრებადია ყოველ $[l, b]$ სეგმენტზე, სადაც $a < l < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{l \to a+} \int_l^b f(x)\,dx.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]a, b[$ ინტერვალზე, შემოუსაზღვრელია ამ ინტერვალზე, მაშინ მას ეწოდება ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ყოველი $c \in]a, b[$-სათვის კრებადია ინტეგრალები

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{და} \quad \int_c^b f(x)\,dx.$$

ამ ინტეგრალების ჯამს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a, b]$ სეგმენტზე და განსაზღვრით:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

ახლა ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე შიგა c წერტილის მიდამოში. თუ არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები $\int_a^c f(x)\,dx$ და $\int_c^b f(x)\,dx$, მაშინ ჯამს

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a, b]$ სეგმენტზე და განსაზღვრით:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha < 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \geqslant 1$.

როცა $\alpha \neq 1$, მაშინ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{თუ} \quad \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{თუ} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

როცა $a=1$, მაშინ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = +\infty.$$

მაშასადამე $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^a}$ კრებადია, როცა $a<1$ და განშლადია, როცა $a \geqslant 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

გვაქვს

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_0^1 \ln x dx$ კრებადია.

$\ln x$ ფუნქციის პირვანდელი ფუნქციაა $F(x) = x\ln x - x$. ცხადია $F(1) - F(0+) = -1$. ე. ი.

$$\int_0^1 \ln x\, dx = -1.$$

4. კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი. აბსოლუტური და პირობითი კრებადობა. ქვემოთ მოყვანილი თეორემები მტკიცდება ისევე როგორც შესაბამისი თეორემები არასაკუთრივი ინტეგრალებისათვის უსასრულო საზღვრით.

თ ე ო რ ე მ ა 13.7. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b[$ შუალედში, შემოუსაზღვრელია ამ შუალედში და ინტეგრებადია ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, $a<t<b$. თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია აგრეთვე $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალი და მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

შევნიშნოთ, რომ $\int_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ინტეგრალის კრებადობა.

განსაზღვრება 13.4. $\int_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, როცა კრებადია $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ინტეგრალი. თუ $\int_a^b f(x)\,dx$ კრებადია, ხოლო $\int_a^b |f(x)|\,dx$ განშლადია, მაშინ ამბობენ, რომ $\int_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალი პირობით კრებადია.

თეორემა 13.8. ვთქვათ არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია $[a, b[$ შუალედში, შემოუსაზღვრელია ამ შუალედში და $f(x) \leqslant g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. მაშინ $\int_a^b g(x)\,dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალის კრებადობა და პირიქით $\int_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^b g(x)\,dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

შედეგი. ვთქვათ არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები

$(g(x) \neq 0)$ განსაზღვრულია $[a, b[$ შუალედში, შემოუსაზღვრელია ამ შუალედში და არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

მაშინ:

1) როცა $0 \leqslant A < +\infty$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალის კრებადობა;

2) როცა $0 < A \leqslant +\infty$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

კერძოდ, როცა $0 < A < +\infty$, მაშინ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ და $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx$ კრებადია, როცა $\alpha < 2$ და განშლადია, როცა $\alpha \geqslant 2$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავამტკიცოთ უტოლობა

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x, \quad \text{როცა} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{13.12}$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{როცა} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{როცა} \quad x = 0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ შუალედში, ამასთან

$$\varphi'(x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x).$$

რადგანაც $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალში $\cos x > 0$ და $\operatorname{tg} x > x$, ამიტომ გვაქვს $\varphi'(x) < 0$, ე. ი. $\varphi(x)$ კლებადია $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, გამომდინარე აქედან $\varphi(x) > \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ყოველი x-სათვის $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალიდან. ამრიგად

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}.$$

აქედან მიიღება (13.12) უტოლობა. ცნობილია აგრეთვე, რომ $\sin x < x$, როცა $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

მაშასადამე ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

საიდანაც

$$\frac{2}{\pi} x^{1-\alpha} \leqslant \frac{\sin x}{x^\alpha} \leqslant x^{1-\alpha} \quad (0 < x \leqslant 1).$$

ამ უტოლობებიდან გვაქვს

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \leqslant \int_0^1 x^{1-\alpha} dx < +\infty, \text{ როცა } \alpha < 2,$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^1 x^{1-\alpha} dx = +\infty, \text{ როცა } \alpha \geqslant 2.$$ თეორემა 13.8-ის ძალით აქედან გვაქვს $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha < 2$ და განშლადია, როცა $\alpha \geqslant 2$.

თუ ამ მაგალითს შევადარებთ მე-2 პუნქტის მაგალით 2-ს, მივიღებთ რომ

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

ინტეგრალი პირობით კრებადია, როცა $0 < \alpha \leqslant 1$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $1 < \alpha < 2$ და განშლადია, როცა $\alpha \geqslant 2$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx$ კრებადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}} \quad \text{და} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

რადგანაც $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ კრებადია, ამიტომ თეორემა 13.8-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ განშლადია.

განვიხილოთ ფუნქციები,

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{და} \quad g(x) = \frac{1}{1-x}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1-} \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{2}.$$

რადგანაც $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ განშლადია, ამიტომ თეორემა 13.8-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ განშლადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad \text{და} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1-} \frac{x-1}{\ln x} = 1.$$

ე. ი. მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვაჩვენოთ, რომ $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ აბსოლუტურად კრებადია.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} \quad \text{და} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^{2/3}\, |\ln x|}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0+} x^{1/2}\, |\ln x| = 0.$$

რადგანაც $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ ინტეგრალი კრებადია, ამიტომ თეორემა 13.8-ის შედეგის ძალით მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

§ 14. პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალები

1. პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის ცნება. განვიხილოთ ორი ცვლადის $f(x, \alpha)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant \alpha \leqslant d]$ ორგანზომილებიან სეგმენტზე. ვთქვათ ყოვე-

ლი $\alpha \in [c, d]$-სათვის $f(x, \alpha)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე საკუთრივი ან არასაკუთრივი აზრით. მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \tag{14.1}$$

წარმოადგენს α პარამეტრის ფუნქციას $[c, d]$ სეგმენტზე.

ახლა ვთქვათ, რომ (14.1) ინტეგრალში ინტეგრების a და b საზღვრები წარმოადგენენ α ცვლადის ფუნქციებს $a=a(\alpha)$, $b=b(\alpha)$, ამასთან $a(\alpha) \leqslant b(\alpha)$, როცა $c \leqslant \alpha \leqslant d$. ამ შემთხვევაში (14.1) ინტეგრალს აქვს სახე

$$F_1(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx. \tag{14.2}$$

(14.1) და (14.2) სახის ინტეგრალებს ეწოდება პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალები.

2. პარამეტრზე დამოკიდებული საკუთრივი ინტეგრალის უწყვეტობა, გაწარმოება და ინტეგრება პარამეტრით. მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 14.1. თუ $f(x, \alpha)$ როგორც ორი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია $R=[a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant \alpha \leqslant d]$ სეგმენტზე, მაშინ (14.1) ტოლობით განსაზღვრული $F(\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია $[c, d]$ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\alpha \in [c, d]$ და $\alpha + \Delta\alpha \in [c, d]$. ცხადია, რომ

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx. \tag{14.3}$$

$f(x, \alpha)$ ფუნქციის R სეგმენტზე თანაბარი უწყვეტობის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს x-სა და α-საგან დამოუკიდებელი ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

როცა

$$|\Delta\alpha| < \delta, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

(14.3) ტოლობიდან გვაქვს

$$|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)|\leqslant\int_a^b|f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|\,dx<\varepsilon,$$

როცა $|\Delta\alpha|<\delta$. ე. ი. $F(\alpha)$ უწყვეტია $[c, d]$ სეგმენტზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 14.2. თუ $f(x, \alpha)$ და მისი კერძო წარმოებული $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ უწყვეტია R მართკუთხედზე, მაშინ ყოველი $\alpha\in[c, d]$-სათვის $F(\alpha)$ წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(\alpha)=\left[\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right]_\alpha'=\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,d\alpha. \tag{14.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\alpha\in[c, d]$ და $\alpha+\Delta\alpha\in[c, d]$, მაშინ

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx. \tag{14.5}$$

სასრული ნაზრდის ფორმულის ძალით

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha\, f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha),\quad 0<\theta<1.$$

თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (14.5) ტოლობაში მივიღებთ

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)\,dx,\ 0<\theta<1. \tag{14.6}$$

რადგან $f'_\alpha(x,\alpha)$ უწყვეტია R სეგმენტზე, ამიტომ თეორემა 14.1-ის ძალით (14.6) ტოლობიდან გვაქვს

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)\,dx=$$

$$=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx,$$

ე. ი. ადგილი აქვს (14.4) ტოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 14.3. ვთქვათ $f(x, \alpha)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებული $\dfrac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ უწყვეტია $[a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant \alpha \leqslant d]$ სეგმენტზე, ხოლო $a(\alpha)$ და $b(\alpha)$ ფუნქციები წარმოებადია $[c, d]$ სეგმენტზე, და $a_0 \leqslant a(\alpha) \leqslant b(\alpha) \leqslant b_0$, როცა $c \leqslant \alpha \leqslant d$. მაშინ (14.2) ტოლობით განსაზღვრული $F(\alpha)$ ფუნქცია წარმოებადია $[c, d]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_{\alpha}(x, \alpha)\, dx + f[b(\alpha), \alpha)]\, b'(\alpha) - f[a(\alpha), \alpha]\, a'(\alpha). \quad (14.7)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\alpha \in [c, d]$. მივცეთ α-ს ნაზრდი $\Delta\alpha$ ისეთი, რომ $\alpha + \Delta\alpha \in [c, d]$, მაშინ $a(\alpha)$ და $b(\alpha)$ ფუნქციებიც მიიღებს, შესაბამისად Δa და Δb ნაზრდებს. გვაქვს

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \int\limits_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int\limits_{a}^{b} f(x, \alpha)\, dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} [f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx + \int\limits_{b}^{b+\Delta b} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx - \int\limits_{a}^{a+\Delta a} f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx. \quad (14.8)$$

საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის ძალით

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{b}^{b+\Delta b} f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx = f(x + \theta_1 \Delta b, \alpha + \Delta\alpha)\, \Delta b, \quad 0 < \theta_1 < 1, \\ &\int\limits_{a}^{a+\Delta a} f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx = f(x + \theta_2 \Delta a, \alpha + \Delta\alpha)\, \Delta a, \quad 0 < \theta_2 < 1. \end{aligned}\right\} \quad (14.9)$$

ხოლო ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის ფორმულის გამოყენებით

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha) = f'_{\alpha}(x, \alpha + \theta_3 \Delta\alpha)\, \Delta\alpha, \quad 0 < \theta_3 < 1. \quad (14.10)$$

(14.9) და (14.10) ტოლობების გათვალისწინებით (14.8) ტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta_3\Delta\alpha)\,dx+$$

$$+f(x+\theta_1\Delta b,\ \alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}-f(x+\theta_2\Delta a,\ \alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta a}{\Delta\alpha}.$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta\alpha\to 0$, მაშინ თეორემა 14.1-ის ძალით მივიღებთ (14.7) დასამტკიცებელ ტოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ წინასწარ ცნობილია (14.2) ტოლობით განსაზღვრული $F(\alpha)$ ფუნქციის წარმოებულის არსებობა, მაშინ (14.7) ფორმულა შეიძლება მივიღოთ $F(\alpha)=\Phi[\alpha,\ a(\alpha),\ b(\alpha)]$ რთული ფუნქციის გაწარმოებით:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\cdot\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\cdot\frac{db}{d\alpha}.$$

აქედან კი მიიღება (14.7) ფორმულა.

(14.4) და (14.7) ფორმულებს ეწოდება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოების ფორმულები.

თ ე ო რ ე მ ა 14.4. თუ $f(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია $R=[a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant\alpha\leqslant d]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_c^d F(\alpha)\,d\alpha=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right]d\alpha=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,\ \alpha)\,d\alpha\right]dx. \quad (14.11)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$F(t)=\int_a^t\left[\int_c^d f(x,\ \alpha)\,d\alpha\right]dx,\ \ \Phi(t)=\int_c^d\left[\int_a^t f(x,\alpha)\,dx\right]d\alpha,\ a\leqslant t\leqslant b.$$

თეორემა 14.2-ის ძალით

$$\Phi'(t)=\int_c^d f(t,\ \alpha)\,d\alpha.$$

გარდა ამისა

$$F'(t)=\int_c^d f(t,\ \alpha)\,d\alpha.$$

ბოლო ორი ტოლობიდან გვაქვს

$$\Phi'(t) = F'(t).$$

საიდანაც

$$\Phi(t) = F(t) + C, \quad C = \text{const}.$$

რადგან $\Phi(a) = F(a) = 0$, ამიტომ

$$F(t) = \Phi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

ე. ი.

$$\int_a^t \left[\int_c^d f(x, \alpha)\, d\alpha\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^t f(x, \alpha)\, dx\right] d\alpha.$$

აქედან, როცა $t=b$ მიიღება (14.11) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

3. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალები. ახლა განვიხილოთ პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალები

$$F(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx, \tag{14.12}$$

სადაც $f(x, \alpha)$ ინტეგრებადია $[a, +\infty[$ შუალედში, ყოველი $\alpha \in [c, d]$-სათვის.

განსაზღვრება 14.1. (14.12) ინტეგრალს ეწოდება თანაბრად კრებადი α-ს მიმართ $[c, d]$ სეგმენტზე, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს α-ზე დამოუკიდებელი ისეთი $b_0 > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $b > b_0$-ზე:

$$\left| \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon$$

ყოველი α-სათვის $[c, d]$ სეგმენტიდან. მართებულია შემდეგი თეორემა (რომლის დამტკიცებას არ მოვიყვანთ).

თეორემა 14.5. თუ $f(x, \alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია ($a \leqslant x < \infty$; $c \leqslant \alpha \leqslant d$) არეში და (14.12) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია α-ს მიმართ $[c, d]$ სეგმენტზე, მაშინ:

1) (14.12) ინტეგრალი უწყვეტია $[c, d]$ სეგმენტზე;

2) მართებულია ტოლობა

$$\int_c^d \left[\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx \right] d\alpha = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x, \alpha)\, d\alpha \right] dx; \qquad (14.13)$$

3) თუ, გარდა ამისა, კერძო წარმოებული $f'_\alpha(x, \alpha)$ უწყვეტია $(a \leqslant x < \infty;\ c \leqslant \alpha \leqslant d)$ არეში, ხოლო $\int_a^\infty |f'(x, \alpha)\, dx$ ინტეგრალი თანაბრად კრებადია α-ს მიმართ $[c, d]$ სეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი $\alpha \in [c, d]$-სთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(\alpha) = \left[\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx \right]'_\alpha = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha) dx. \qquad (14.14)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ პუასონის* $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ ინტეგრალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $x = ut$, სადაც $u > 0$, ჩასმით მივიღებთ

$$I = u \int_0^\infty e^{-u^2t^2} dt.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $e^{-u^2} du$-ზე და ვაინტეგრებთ u პარამეტრით 0-დან $+\infty$-მდე, გვექნება

$$I \int_0^\infty e^{-u^2} du = I^2 = \int_0^\infty u \cdot e^{-u^2} \left[\int_0^\infty e^{-u^2t^2} dt \right] du.$$

(14.13) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$I^2 = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-u^2(1+t^2)} u du \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

* ს. პუასონი (1781—1840) — ფრანგი მათემატიკოსი, მექანიკოსი, ფიზიკოსი.

აქედან, რადგან $I>0$, ამიტომ

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ

$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}e^{-x}\,dx$$

ინტეგრალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის გამოყენებით მოცემულ ინტეგრალს ვერ გამოვთვლით, რადგან $\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-x}$ ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია ელემენტარულ ფუნქციებში არ გამოისახება. (14.14) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$F'(\alpha)=\int_0^\infty\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot e^{-x}\right)'_\alpha dx=\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{1+\alpha^2}$$

(შეამოწმეთ), საიდანაც

$$F(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha+C.$$

აქედან, რადგან $F(0)=0$ და $\operatorname{arc\,tg}0=0$, ამიტომ $C=0$. მაშასადამე

$$\int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-x}\,dx=\operatorname{arctg}\alpha.$$

4. ეილერის ინტეგრალები. განვიხილოთ, პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალით განსაზღვრული ფუნქცია

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

მას ეწოდება ეილერის მეორე გვარის ინტეგრალი ანუ გამა-ფუნქცია.

თ ე ო რ ე მ ა 14.6. $\Gamma(\alpha)$ ინტეგრალი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha>0$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha>0$. წარმოვადგინოთ $\Gamma(\alpha)$ ინტეგრალი ორ შესაკრებად:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=\int_0^{1} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx+\int_1^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

ადვილია ჩვენება, რომ, როცა $\alpha>0$ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$0<\int_0^{1} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx<\frac{1}{\alpha}\,; \quad 0<\int_1^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx<+\infty$$

(შეამოწმეთ). ე. ი. მოცემული ინტეგრალი კრებადია, როცა $\alpha>0$.

ახლა ვთქვათ $\alpha\leqslant 0$. ამ შემთხვევაში $\int\limits_0^{1} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ განშლადია, ამიტომ განშლადია $\Gamma(\alpha)$ ინტეგრალიც.

თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ გამა-ფუნქციის ზოგიერთი თვისება. ვთქვათ $\alpha>1$, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$\Gamma(\alpha)=\Big[-x^{\alpha-1}e^{-x}\Big]_0^{\infty}+(\alpha-1)\int_0^{\infty} x^{\alpha-2}e^{-x}\,dx=(\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1).$$

ე. ი.

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\,!\,\Gamma(\alpha-1). \qquad (14.15)$$

თუ $\alpha=n\in N$, მაშინ (14.15) ფორმულის გამოყენებით $(n-1)$-ჯერ, მივიღებთ

$$\Gamma(n)=(n-1)\,!\,\Gamma(1).$$

მაგრამ

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=1.$$

მაშასადამე

$$\Gamma(n)=(n-1)\,!$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

ჩას ეწოდება ეილერის პირველი გვარის ინტეგრალი ანუ ბეტა-ფუნქცია.

თ ე ო რ ე მ ა 14.7. $B(\alpha, \beta)$ ინტეგრალი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha>0$, $\beta>0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $0<\delta<1$. წარმოვადგინოთ $B(\alpha, \beta)$ ინტეგრალი ორ შესაკრებად

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\delta x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx + \int_\delta^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx. \qquad (14.16)$$

ადვილია ჩვენება, რომ (14.16) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი კრებადია, როცა $\alpha>0$ და განშლადია როცა $\alpha\leqslant 0$, ხოლო მეორე ინტეგრალი კრებადია, როცა $\beta>0$ და განშლადია, როცა $\beta\leqslant 0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

მტკიცდება, რომ გამა და ბეტა-ფუნქციებს შორის კავშირი მყარდება ფორმულით

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\Gamma(\alpha)$ და $B(\alpha, \beta)$ ფუნქციები არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს.

მეოთხე თავი

განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენება

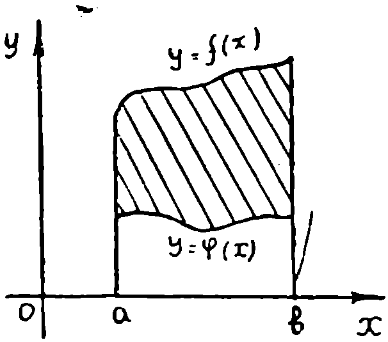
§ 1. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

1. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის* კოორდინატებში. როგორც ვიცით იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია არაუარყოფითი,

* რ. დეკარტი (1596—1650) — ფრანგი ფილოსოფოსი, მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და ფიზიოლოგი.

უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძითა და $x=a$, $x=b$ წრფეებით გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$



ნახ. 21

ვთქვათ ახლა ფიგურა შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ და $y=\varphi(x)$, $\varphi(x)\leqslant f(x)$, უწყვეტ ფუნქციათა გრაფიკებით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით (ნახ. 21). ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $f(x)$ და $\varphi(x)$ არაუარყოფითი ფუნქციებია. მაშინ მოცემული ფიგურის S ფართობი უდრის იმ მრუდწირულ ტრაპეციათა ფართობების სხვაობას, რომლებიც ზემოდან შემოსაზღვრულია შესაბამისად $y=f(x)$ და $y=\varphi(x)$ ფუნქციათა გრაფიკებით, მაშასადამე

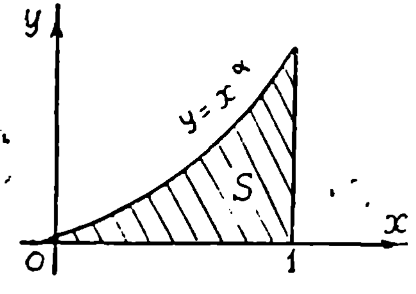
$$S=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)\,dx=\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]dx. \tag{1.2}$$

ახლა ვთქვათ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციებია, ისეთი, რომ $\varphi(x)\leqslant f(x)$. მაშინ, რადგან $f(x)$ და $\varphi(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციებია, ამიტომ არსებობს ისეთი $C>0$ რიცხვი, რომ $F(x)=f(x)+C$ და $\Phi(x)=\varphi(x)+C$ ფუნქციები არაუარყოფითია. მოცემული ფიგურის ფართობი უდრის $F(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციათა გრაფიკებითა და $x=a$, $x=b$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობს, ამიტომ

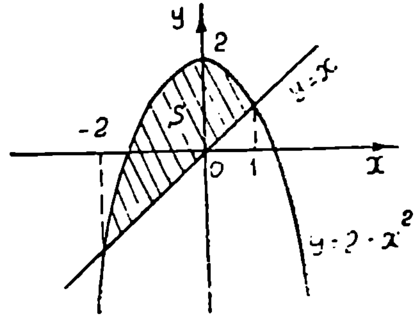
$$S=\int_a^b[F(x)-\Phi(x)]dx=\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]\,dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომე-

ლიც შემოსაზღვრულია $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძით და $x = 1$ წრფით (ნახ. 22 ა).



ნახ. 22 ა)



ნახ. 22 ბ)

ა მ ო ხ ს ნ ა. (1.1) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$S = \int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}\,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = 2 - x^2$ და $y = x$ ფუნქციათა გრაფიკებით (ნახ. 22 ბ).

ა მ ო ხ ს ნ ა. თავდაპირველად ვიპოვოთ ამ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილთა აბსცისები. $2 - x^2 = x$ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ, რომ ეს აბსცისებია $x_1 = -2$ და $x_2 = 1$. (1.2) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}\,.$$

2. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით. ვთქვათ მრუდწირული ტრაპეცია შემოსაზღვრულია Ox ღერძით, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ წრფეებით და ფუნქციის გრაფიკით, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = g(t), \end{cases} \tag{1.3}$$

სადაც $g(t)$ უწყვეტი, ხოლო $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა, ამასთან $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. თუ (1.3) სისტემიდან გამოვრიცხავთ t ცვლადს მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $y = g(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$

ფუნქციას და მაშასადამე მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y dx.$$

თუ მიღებულ ინტეგრალში მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x = \varphi(t)$, გვექნება

$$S = \int_\alpha^\beta g(t)\, \varphi'(t)\, dt. \tag{1.4}$$

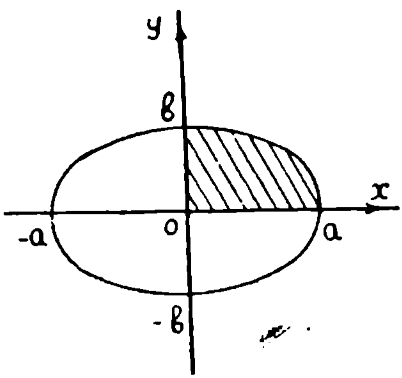
(1.4) წარმოადგენს მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას, როდესაც ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან ელიფსი სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ, ფიგურის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ საკოორდინატო მეოთხედში (ნახ. 24 გ). როდესაც $x = 0$, მაშინ $t = \frac{\pi}{2}$, ხოლო, როცა $x=a$, მაშინ $t=0$. ე. ი. $\alpha=\frac{\pi}{2}$ და $\beta = 0$. მაშასადამე (1.4) ფორმულის ძალით გვაქვს



ნახ. 22 გ)

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\,(a\cos t)'dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt =$$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)\, dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

კერძოდ, როცა $a=b=R$, მივიღებთ წრის ფართობის გამოსათვლელ ცნობილ ფორმულას $S=\pi R^2$.

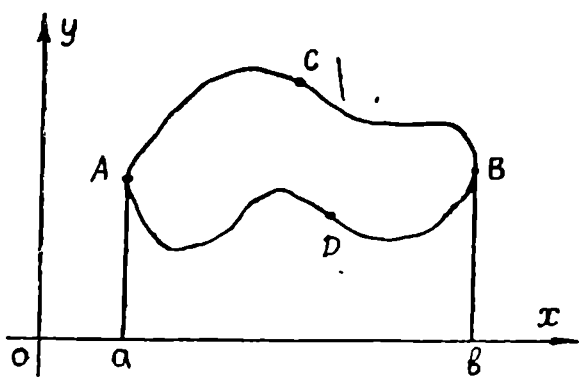
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \end{cases} \tag{1.5}$$

სადაც $x(t)$ ფუნქციას $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე აქვს უწყვეტი არაუარყოფითი წარმოებული და $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, ხოლო $y(t)$ ფუნქცია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე უწყვეტია და არაუარყოფითი, მაშინ როგორც ვიცით მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით (იხ. (1.4)):

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt.$$

ახლა ვთქვათ გამოსათვლელია იმ ფიგურის ფართობი რომელიც შემოსაზღვრულია ჩაკეტილი L წირით ($x(\alpha)=x(\beta)$, $y(\alpha)=y(\beta)$), რომლის განტოლება მოცემულია (1.5) პარამეტრული სახით. ვიგუ-



ნახ. 23

ლისხმოთ, რომ L წირს Oy ღერძის პარალელური წრფეები ჰკვეთენ არაუმეტეს ორი წერტილისა (ნახ. 23). ვთქვათ $a=x(\alpha)=\min\limits_{[\alpha,\beta]} x(t)$, $b=\max\limits_{[\alpha,\beta]} x(t)=x(t_1)$.

მოცემული L წირის ქვედა ADB რკალი არის იმ ფუნქციის გრაფიკი რომელიც მოცემულია (1.5) პარამეტრული განტოლებებით $[\alpha, t_1]$ სეგმენტზე.

ზედა ACB რკალი არის იმ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც მოცემულია აგრეთვე (1.5) პარამეტრული განტოლებებით $[t_1, \beta]$ სეგმენტზე.

ცხადია, 23-ნახაზზე გამოსახული ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \int_{\beta}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt - \int_{\alpha}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt =$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt. \qquad (1.6)$$

თუ გავითვალისწინებთ

$$x(t)\, y(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = 0$$

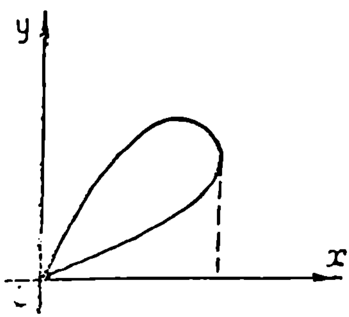
ტოლობას და ვიგულისხმებთ, რომ $y(t)$ უწყვეტად წარმოებადია, მაშინ (1.6) ინტეგრალზე ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y'(t) dt. \qquad (1.7)$$

(1.6) და (1.7) ტოლობებიდან გვაქვს

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t)]\, dt. \qquad (1.8)$$

ზოგჯერ, (1.8) ფორმულის გამოყენებით, ჩაკეტილი წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობის გამოთვლა უფრო მარტივია ვიდრე (1.6) და (1.7) ფორმულებით.



ნახ. 24 ა)

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი რომელიც შემოსაზღვრულია წირით (ნახ. 24 ა))

$$\begin{cases} x = a \sin t \cos^2 t. \\ y = a \cos t \sin^2 t, \; 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

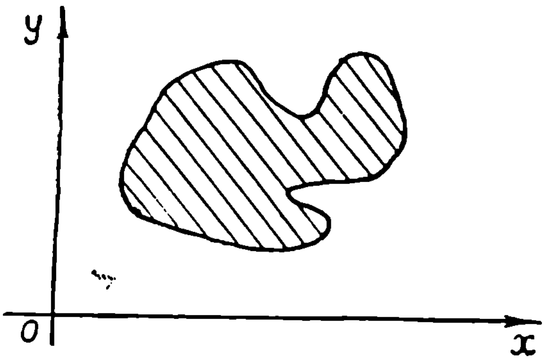
ა მ ო ხ ს ნ ა. (1.8) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$S = \frac{a^2}{2} \int_{0}^{\pi/2} [\sin t \cos^2 t\, (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t)) -$$

$$-\cos t\sin^2 t\,(\cos^3 t - 2\sin^2 t\cos t)]\,dt =$$

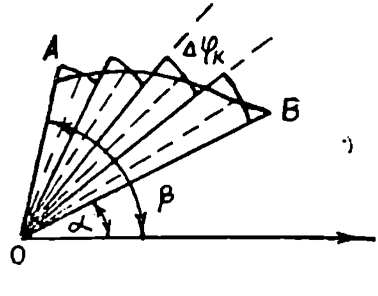
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{\pi a^2}{32}.$$

მტკიცდება, რომ (1.6), (1.7) და (1.8) ფორმულები მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ფიგურა შემოსაზღვრულია ისეთი ჩაკეტილი კონტურით, რომელსაც საკოორდინატო ღერძების პარალელური წრფეები ჰკვეთენ ორზე მეტ წერტილში (ნახ. 24 ბ)).



ნახ. 24 ბ)

3. ფართობის გამოთვლა პოლარულ კოორდინატებში. ვთქვათ L წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, სადაც $\rho(\varphi)$ არის $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე უწყვეტი, არაუარყოფითი ფუნქცია. ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვრულია L წირით და ორი სხივით, რომლებიც პოლარულ ღერძთან ადგენენ α და β კუთხეებს, მრუდწირული სექტორი ეწოდება (ნახ. 25).



ნახ. 25

დავყოთ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი ნებისმიერად წერტილებით

$$\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\cdots<\varphi_n=\beta.$$

ყოველი $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$, $k=1, 2, \dots, n$ სეგმენტისათვის ავაგოთ წრიული სექტორი, რომლის რადიუსია $\rho(\xi_k)$, სადაც ξ_k არის ნებისმიერი წერტილი

$[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ სეგმენტიდან. ცხადია, ასეთ წრიულ სექტორთა ფართობების ჯამია

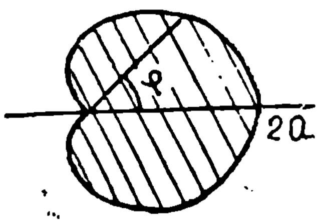
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho^2(\xi_k)\,\Delta\varphi_k, \tag{1.9}$$

სადაც $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. მეორეს მხრივ (1.9) წარმოადგენს $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. რადგან $\rho(\varphi)$ ფუნქცია უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ, თუ $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta\varphi_k\}$, გვაქვს

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho^2(\xi_k)\,\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

განსაზღვრებით მიღებულია, რომ მრუდწირული სექტორის ფართობია (1.9) ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda\to 0$, ე. ი.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{1.10}$$



ნახ. 26

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ $\rho = a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (ნახ. 26).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში $\alpha = 0$ და $\beta = 2\pi$, ამიტომ თუ გამოვიყენებთ (1.10) ფორმულას, მივიღებთ

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos^2\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

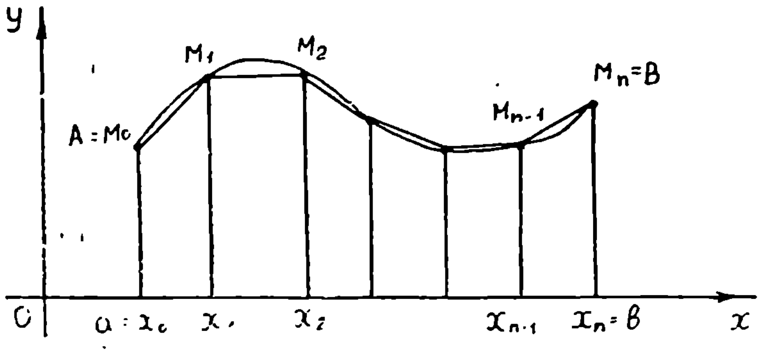
$$=\frac{a^2}{2}\left(\varphi+2\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

§ 2. წირის რკალის სიგრძე

1. რკალის სიგრძის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში. ვთქვათ ბრტყელი AB წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით, სადაც $f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენ-

ტზე უწყვეტი ფუნქცია. დავყოთ AB წირი n ნაწილად წერტილებით (ნახ. 27)

$$A = M_0,\ M_1,\ M_2, \dots, M_n = B$$



ნახ. 27

თუ დაყოფის მეზობელ წერტილებს შევაერთებთ ქორდებით მივიღებთ მოცემულ წირში ჩახაზულ გარკვეულ ტეხილს. თუ σ არის ამ ტეხილის სიგრძე, ხოლო $l_k = |M_{k-1} M_k|$, $k = 1, 2, \dots, n$, მაშინ $\sigma = \sum_{k=1}^{n} l_k$. ვთქვათ $\mu = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{l_k\}$.

განსაზღვრება 2.1. L რიცხვს ეწოდება $\sigma = \sum_{k=1}^{n} l_k$ ჯამის ზღვარი, როცა $\mu \to 0$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ ნებისმიერი ტეხილისათვის, რომლისთვისაც $\mu < \delta$, სრულდება უტოლობა

$$|\sigma - L| < \varepsilon$$

და ეს ფაქტი შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\lim_{\mu \to 0} \sigma = L.$$

განსაზღვრება 2.2. თუ არსებობს $\sigma = \sum_{k=1}^{n} l_k$ ჯამის ზღვარი:

$$\lim_{\mu \to 0} \sigma = L,$$

მაშინ AB წირს ეწოდება წრფევადი, ხოლო L რიცხვს — AB წირის სიგრძე.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. თუ AB წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით, სადაც $f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, მაშინ AB წირი წრფევადია და მისი L სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{2.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავყოთ AB წირი n ნაწილად წერტილებით $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ და M_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ წერტილის აბსცისა აღვნიშნოთ x_k-თი. ე. ი. M_k წერტილის კოორდინატებია $(x_k, f(x_k))$, მაშინ $M_{k-1}M_k$ მონაკვეთის l_k სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}.$$

ლაგრანჟის ფორმულის ძალით გვაქვს

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k.$$

მაშასადამე

$$l_k = \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\cdot\Delta x_k, \tag{2.2}$$

სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. ამრიგად AB წირში ჩახაზული ტეხილის სიგრძისათვის გვაქვს

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k.$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს. თუ $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta x_k\}$, მაშინ ცხადია $\lambda \leqslant \mu$, სადაც $\mu = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{l_k\}$. ამიტომ, როდესაც $\mu \to 0$, მაშინ $\lambda \to 0$. მაშასადამე

$$L = \lim_{\mu\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ $y=\operatorname{ch} x$ განტოლებით მოცემული წირის რკალის სიგრძე, როცა $0 \leqslant x \leqslant 1$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (2.1) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$L=\int_{0}^{1} \sqrt{1+\operatorname{sh}^{2} x}\, d x=\int_{0}^{1} \operatorname{ch} x\, d x=\left.\operatorname{sh} x\right|_{0}^{1}=\operatorname{sh} 1=\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{e^{2}-1}{2 e} .$$

2. რკალის სიგრძის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით. ვთქვათ AB წირი წარმოადგენს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=g(t), \end{array} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,\right.$$

სადაც $\varphi(t)$ და $g(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. რადგანაც $x=\varphi(t)$ მონოტონური ფუნქციაა (იხილეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრება), ამიტომ, როცა ის ზრდადია $a=\varphi(\alpha)$ და $b=\varphi(\beta)$, ხოლო, როცა კლებადია — $a=\varphi(\beta)$ და $b=\varphi(\alpha)$ (a და b შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებია). თუ (2.1) ფორმულაში მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x=\varphi(t)$, მივიღებთ

$$L=\int_{a}^{b} \sqrt{1+\left[y^{\prime}(x)\right]^{2}}\, d x=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+\left[\frac{g^{\prime}(t)}{\varphi^{\prime}(t)}\right]^{2}}\left|\varphi^{\prime}(t)\right| d t=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi^{\prime}(t)\right]^{2}+\left[g^{\prime}(t)\right]^{2}}\, d t^{*)}.$$

მაშასადამე, თუ წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ მისი სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi^{\prime}(t)\right]^{2}+\left[g^{\prime}(t)\right]^{2}}\, d t. \tag{2.3}$$

---

* ეს ფორმულა მართებულია პარამეტრული სახით მოცემული ნებისმიერი წირისათვის, თუ $\varphi(t)$ და $g(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია.

შევნიშნოთ, რომ თუ სივრცითი წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ z=z\ (t), \end{cases}$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$ და $z(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ წირი წრფევადია და მისი სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)\ ]^2+[y'(t)\ ]^2+[z'(t)]^2}\, dt\ .$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ

$$x=a\,(t-\sin t), \quad y=a\,(1-\cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

ციკლოიდის ერთი თაღის სიგრძე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $x'=\varphi'(t)=a\,(1-\cos t)$ და $y'=g'(t)=a\sin t$, ამიტომ (2.3) ფორმულის ძალით

$$L=\int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\, dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

3. რკალის სიგრძის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში. ახლა ვთქვათ, AB წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში განტოლებით $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, სადაც $\rho(\varphi)$ არის $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, ამასთან A და B წერტილებს შეესაბამება φ-ს α და β მნიშვნელობები. თუ გადავალთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებზე, მაშინ მივიღებთ მოცემული წირის პარამეტრულ განტოლებებს $x=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ (φ — პარამეტრია). რადგან

$$x'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi,$$

ამიტომ (2.3) ფორმულიდან მივიღებთ

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\, d\varphi. \tag{2.4}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ $\rho = a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის სიგრძე (ნახ. 26).

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან კარდიოიდი სიმეტრიულია პოლარული ღერძის მიმართ ამიტომ (2.4) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{[a(1+\cos\varphi)]^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a.$$

4. რკალის დიფერენციალი. თუ (2.1) ფორმულაში დავუშვებთ, რომ ინტეგრების ქვედა საზღვარი მუდმივია, ხოლო ზედა საზღვარი იცვლება, მივიღებთ

$$L(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\, dt,$$

სადაც $a \leqslant x \leqslant b$. აქედან მესამე თავის თეორემა 7.2-ის ძალით

$$L'(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

ამიტომ

$$dL(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

რადგან $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, ამიტომ

$$dL(x) = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ

$$[dL(x)]^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2.5}$$

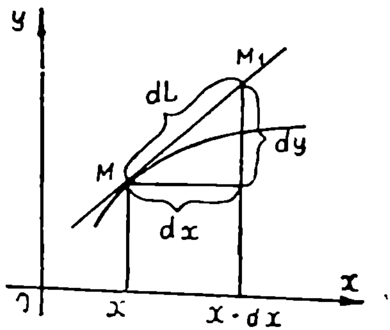
თუ გავიხსენებთ, რომ ფუნქციის დიფერენციალი მხების ორდინატის ნაზრდის ტოლია, (2.5) ფორმულიდან მივიღებთ რკალის დიფერენციალის გეომეტრიულ შინაარსს (ნახ. 28): რკალის dL დიფერენციალი უდრის მხების მონაკვეთის ნაზრდს, x აბსცისის მქონე, შეხების M წერტილიდან, $x+dx$ აბსცისის მქონე M_1 წერტილამდე.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2. ვთქვათ რკალი მოცემულია $y=f(x)$ განტოლებით, სადაც $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ რკალისა

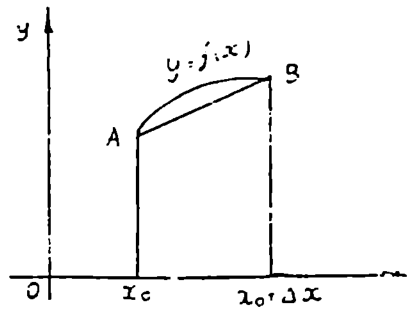
და მისი მომჭიმავი ქორდის სიგრძეთა შეფარდების ზღვარი, როცა ქორდის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ ერთის ტოლია.

დამტკიცება. (2.1) ფორმულის თანახმად AB რკალის L სიგრძე (ნახ. 29), სადაც A და B წერტილების აბსცისებია შესაბამისად x_0 და $x_0+\Delta x$ ($\Delta x>0$), შემდეგნაირად გამოითვლება

$$L=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$



ნახ. 28



ნახ. 29

თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის შედეგს (თავი III, ფორმულა (6.5)) მივიღებთ

$$L=\sqrt{1+[f'(\xi_1)]^2}\Delta x,$$

სადაც $x_0<\xi_1<x_0+\Delta x$.

მეორეს მხრივ (2.2) ფორმულის გამოყენებით AB ქორდის სიგრძე შემდეგნაირად გამოითვლება

$$|AB|=\sqrt{1+[f'(\xi_2)]^2}\Delta x,$$

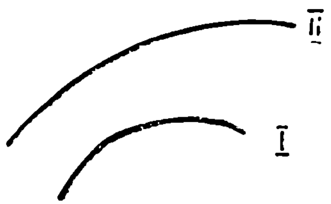
სადაც $x_0<\xi_2<x_0+\Delta x$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ, როცა $\Delta x\to 0$, მაშინ $\xi_1\to x_0$ და $\xi_2\to x_0$, მივიღებთ:

$$\lim_{AB\to 0}\frac{L}{AB}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+[f'(\xi_1)]^2}\,\Delta x}{\sqrt{1+[f'(\xi_2)]^2}\,\Delta x}=\frac{\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}}{\sqrt{1+]f'(x_0)]^2}}=1.$$

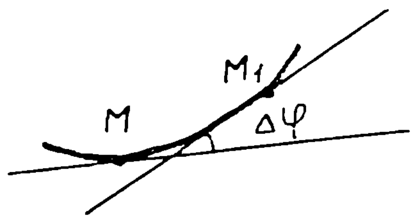
თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. წირის სიმრუდე და სიმრუდის რადიუსი. ევოლუტა და ევოლვენტა

1. წირის სიმრუდე. წრფის ერთი წერტილიდან მეორეზე გადასვლის დროს მისდამი გავლებული მხები (რომელიც ამ წრფეს ემთხვევა) არ იცვლის თავის მიმართულებას. საზოგადოდ კი, წირის ერთი წერტილიდან მეორეზე გადასვლის დროს მხები მობრუნდება გარკვეული კუთხით, რაც წირის ე. წ. „გამრუდებით" აიხსნება. თუ ორ წირს ერთმანეთს შევადარებთ, შეიძლება შევნიშნოთ, რომ ერთი მათგანი მეორესთან შედარებით მეტად ან ნაკლებად „გამრუდებულია". მაგალითად, 30-ე ნახაზზე მოცემული I წირი უფრო „გამრუდებულია", ვიდრე II. თუ რაიმე წირის ფორმას დავაკვირდებით, აქაც შეიძლება შევნიშნოთ, რომ წირის „გამრუდება" სხვადასხვა ადგილას სხვადასხვაა. იმისათვის, რომ შევაფასოთ ამა თუ იმ წირის „გამრუდების" ხარისხი, შემოვიყვანოთ წირის სიმრუდის განსაზღვრება.



ნახ. 30



ნახ. 31

ვთქვათ მოცემულია რაიმე წრფევადი წირი. განვიხილოთ ამ წირის $\overset{\frown}{MM_1}$ რკალი, რომლის სიგრძეა ΔL (ნახ. 31). M და M_1 წერტილებში გავავლოთ მხებები მოცემული წირისადმი. წირის M წერტილიდან M_1 წერტილზე გადასვლის დროს მხები მობრუნდება გარკვეული $\Delta\varphi$ კუთხით. ვიგულისხმოთ, რომ ეს კუთხე ყოველთვის დადებითია.

განსაზღვრება 3.1. წირის $\overset{\frown}{MM_1}$ რკალის საშუალო სიმრუდე ეწოდება, მხების მობრუნების $\Delta\varphi$ კუთხის და ამ რკალის ΔL სიგრძის ფარდობას.

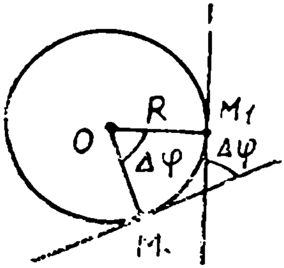
მაგალითი 1. გამოვთვალოთ R რადიუსიანი წრეწირის $\overset{\frown}{MM_1}$ რკალის (ნახ. 32) საშუალო სიმრუდე.

ამოხსნა. ცხადია, რომ წრეწირისადმი M და M_1 წერტილებში გავლებულ მხებებს შორის კუთხე $\Delta\varphi$, ტოლია OM და OM_1 რადიუსებს შორის ცენტრალური კუთხისა. წრეწირის $\overset{\frown}{MM_1}$ რკალის სიგრ-

ძეა $\Delta L = R\Delta\varphi$. მაშასადამე, წრეწირის $\overset{\frown}{MM_1}$ რკალის საშუალო სიმრუდეა

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta L} = \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}\,.$$

ამრიგად, მოცემული წრეწირის ნებისმიერი რკალის საშუალო სიმრუდე ერთიდაიგივეა და უდრის ამ წრეწირის რადიუსის შებრუნებულ სიდიდეს. საზოგადოდ კი, ცხადია, რომ წირის სხვადასხვა რკალის საშუალო სიმრუდე სხვადასხვაა. იმისათვის, რომ უფრო ზუსტად დავახასიათოთ წირის „გამრუდება“ მოცემულ წერტილში, საჭიროა გამოვთვალოთ საშუალო სიმრუდე ამ წერტილის შემცველი უფრო და უფრო მცირე სიგრძის რკალებისათვის. ასეთნაირად ბუნებრივად მივდივართ მოცემულ წერტილში წირის სიმრუდის ცნებასთან.



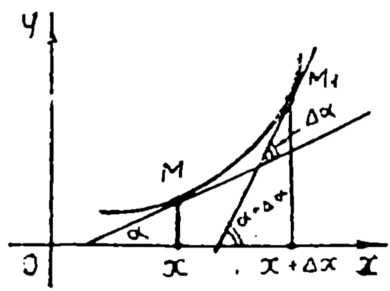
ნახ. 32

განსაზღვრება 3.2. მოცემული წირის სიმრუდე ამ წირის რაიმე M წერტილში ეწოდება $\overset{\frown}{MM_1}$ რკალის საშუალო სიმრუდის ზღვარს, როდესაც M_1 წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ წირის გასწვრივ.

ამრიგად, თუ სიმრუდეს წირის მოცემულ M წერტილში აღვნიშნავთ K-თი, მაშინ განსაზღვრების ძალით

$$K = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}\,.$$

ცხადია, რომ მოცემული წრეწირის ნებისმიერ წერტილში სიმრუდე ერთიდაიგივეა და უდრის რადიუსის შებრუნებულ სიდიდეს. ე. ი. რაც უფრო დიდია რადიუსი, მით უფრო მცირეა სიმრუდე წრეწირის ნებისმიერ წერტილში. შევნიშნოთ, რომ წრფის სიმრუდე მის ნებისმიერ წერტილში ნულის ტოლია.



ნახ. 33

2. სიმრუდის გამოთვლა. ვთქვათ წირის განტოლება მოცემულია $y = f(x)$ სახით, სადაც $f(x)$ ორჯერ წარმოებადი ფუნქციაა რაიმე შუა-

ლედში. გამოვთვალოთ ამ წირის სიმრუდე M წერტილში, რომლის აბსცისაა x (ნახ. 33). განვიხილოთ ამ წირის მეორე M_1 წერტილი, რომლის აბსცისაა $x+\Delta x$. M და M_1 წერტილებში წირისადმი გავლებული მხებების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხეები იყოს შესაბამისად α და $\alpha+\Delta\alpha$. მაშინ ცხადია, რომ მხებებს შორის კუთხე $\Delta\varphi=|\Delta\alpha|$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ, როცა M_1 წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ წირის გასწვრივ, მაშინ $\Delta x\to 0$, გვექნება

$$K=\lim_{M_1\to M}\frac{\Delta\varphi}{\Delta L}=\lim_{M_1\to M}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta L}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\dfrac{\Delta L}{\Delta x}}\right|=$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right|}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{\Delta L}{\Delta x}\right|}=\frac{\left|\dfrac{d\alpha}{dx}\right|}{\left|\dfrac{dL}{dx}\right|}. \qquad (3.1)$$

წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსის თანახმად $y'=\operatorname{tg}\alpha$, საიდანაც $\alpha=\operatorname{arctg}y'$ (როცა $y'\geqslant 0$) ან $\alpha=\pi+\operatorname{arctg}y'$ (როცა $y'<0$). ორივე შემთხვევაში

$$\frac{d\alpha}{dx}=(\operatorname{arctg}y')'=\frac{y''}{1+(y')^2}. \qquad (3.2)$$

ამას გარდა, თუ გავიხსენებთ, რომ $\dfrac{dL}{dx}=\sqrt{1+(y')^2}$ (იხ. § 2, პუნქტი 4), მაშინ (3.2)-ის გამოყენებით (3.1)-დან მივიღებთ

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}. \qquad (3.3)$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $y=\dfrac{1}{x}$ ჰიპერბოლის სიმრუდე წერტილში, რომლის აბსცისაა $x=1$.

ამოხსნა. რადგან $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, $y''=\dfrac{2}{x^3}$, ამიტომ $y'(1)=-1$ და $y''(1)=2$. აქედან (3.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$K=\frac{2}{(1+1)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ვთქვათ წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,\end{cases}$$

სადაც $x(t)$ და $y(t)$ ორჯერ წარმოებადი ფუნქციებია. თუ გავიხსენებთ, პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციების გაწარმოების ფორმულებს, გვაქვს

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_x = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}. \tag{3.4}$$

(3.4)-ის გათვალისწინებით (3.3)-დან მივიღებთ

$$K = \frac{|x'_t y''_t - x''_t y'_t|}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2}}. \tag{3.5}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის სიმრუდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$, $x''_t = a \sin t$, $y''_t = a \cos t$. თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (3.5) ფორმულაში მივიღებთ

$$K = \frac{|a(1 - \cos t)\, a \cos t - a^2 \sin^2 t|}{[a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}} =$$

$$= \frac{|\cos t - 1|}{a[2(1 - \cos t)]^{3/2}} = \frac{1}{4a\left|\sin \frac{t}{2}\right|}.$$

ვთქვათ, ახლა, წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $P = \rho(\varphi)$, სადაც $\rho(\varphi)$ ორჯერ წარმოებადი ფუნქციაა. თუ გადავალთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებზე, მაშინ მივიღებთ მოცემული წირის პარამეტრულ განტოლებებს $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$ (φ პარამეტრია). რადგან

$$x'(\varphi) = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi,$$
$$y'(\varphi) = \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi,$$
$$x''(\varphi) = \rho''(\varphi) \cos \varphi - 2\rho'(\varphi) \sin \varphi - \rho(\varphi) \cos \varphi,$$
$$y''(\varphi) = \rho''(\varphi) \sin \varphi + 2\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi,$$

ამიტომ (3.5) ფორმულიდან მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}.$$

3. სიმრუდის რადიუსი, სიმრუდის წრეწირი და ცენტრი. წირის რაიმე წერტილში სიმრუდის რადიუსი ეწოდება ამ წერტილში წირის სიმრუდის შებრუნებულ სიდიდეს. ე. ი. თუ წირის სიმრუდის რადიუსს მოცემულ წერტილში აღვნიშნავთ R-ით, მაშინ

$$R = \frac{1}{K}.$$

თუ წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით, სადაც $f(x)$ ორჯერ წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ სიმრუდის რადიუსი, (3.3)-ის საფუძველზე, გამოითვლება ფორმულით

$$R=\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}. \tag{3.6}$$

პარამეტრული სახით მოცემული წირისათვის მისი სიმრუდის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით

$$R=\frac{[(x_t')^2+(y_t')^2]^{3/2}}{|x_t' y_t''-x_t'' y_t'|},$$

ხოლო პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირისათვის

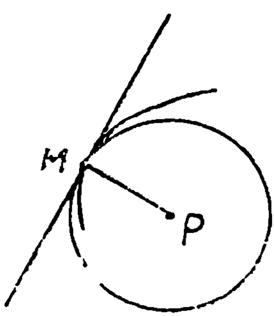
$$R=\frac{[\rho^2+(\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ $y=\ln x$ წირის სიმრუდის რადიუსი $M(1;0)$ წერტილში.

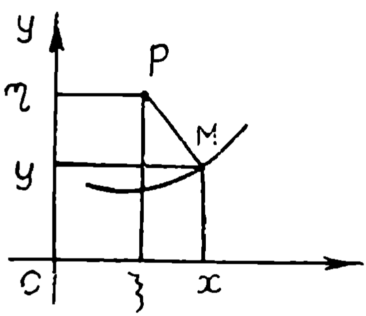
ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$, ამიტომ $y'(1)=1$ და $y''(1)=-1$. აქედან (3.6) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$R=2\sqrt{2}.$$

წირის მოცემული M წერტილიდან ნორმალზე, წირის ჩაზნექილობის მხარეს, ავაგოთ $M\mathbf{P}$ მონაკვეთი, რომლის სიგრძე ტოლია წირის სიმრუდის რადიუსისა M წერტილში (ნახ. 34). ე. ი. $M\mathbf{P}=R$. წრეწირს, ცენტრით $\mathbf{P}$ წერტილში და რადიუსით R, ეწოდება წირის სიმრუდის წრეწირი მოცემულ წერტილში, ხოლო ამ წრეწირის $\mathbf{P}$ ცენტრს — სიმრუდის ცენტრი. ცხადია, რომ წირს და სიმრუდის წრეწირს მოცემულ წერტილში აქვს საერთო მხები (ნახ. 34).



ნახ. 34



ნახ. 35

გამოვიყვანოთ წირის სიმრუდის ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები. ვთქვათ, წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით. $M(x, y)$ იყოს წირის მოცემული წერტილი, ხოლო $\mathbf{P}(\xi, \eta)$ — ამ წერტილში წირის სიმრუდის ცენტრი (ნახ. 35). $M(x, y)$ წერტილში გავლებული წირის ნორმალის განტოლებაა

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

რადგან სიმრუდის ცენტრი ძევს ნორმალზე, ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას, ე. ი.

$$\eta-y=-\frac{1}{y'}(\xi-x). \tag{3.7}$$

მეორეს მხრივ, გვაქვს, რომ

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=R^2. \tag{3.8}$$

(3.7) ტოლობიდან

$$\xi-x=-y'(\eta-y). \tag{3.9}$$

თუ შევიტანთ ამ გამოსახულებას (3.8) ტოლობაში, გვექნება

$$(y')^2(\eta-y)^2+(\eta-y)^2=R^2.$$

აქედან (3.6) ფორმულის გათვალისწინებით გვაქვს

$$(\eta-y)^2[1+(y')^2]=\frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2},$$

საიდანაც

$$|\eta-y|=\frac{1+(y')^2}{|y''|}. \tag{3.10}$$

შევნიშნოთ, რომ $\eta-y>0$, როცა $y''>0$ (ჩაზნექილობის შემთხვევა) და $\eta-y<0$, როცა $y''<0$ (ამოზნექილობის შემთხვევა). ამიტომ (3.10)-დან მივიღებთ

$$\eta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \tag{3.11}$$

თუ მოვახდენთ (3.11)-ის ჩასმას (3.9)-ში, გვექნება

$$\xi=x-y'\cdot\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

ამრიგად, სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით

$$\xi = x - y' \cdot \frac{1 + (y')^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}. \qquad (3.12)$$

4. ევოლუტა და ევოლვენტა. თუ M წერტილი მოძრაობს მოცემული წირის გასწვრივ, მაშინ მისი შესაბამისი სიმრუდის **P** ცენტრი, საზოგადოდ, ასევე აღწერს რაიმე წირს, რომელსაც ევოლუტა ეწოდება. მოცემულ წირს ეწოდება ევოლვენტა თავისი ევოლუტის მიმართ.

თუ ცნობილია წირის განტოლება, მაშინ, როგორც ვიცით, (3.12) ფორმულებით სიმრუდის ცენტრის ξ და η კოორდინატები შეიძლება გამოვსახოთ x აბსცისის საშუალებით, ე. ი. მივიღოთ ევოლუტის განტოლება პარამეტრული სახით (პარამეტრია x). თუ ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ x პარამეტრს, მივიღებთ ევოლუტის განტოლებას $F(\xi, \eta) = 0$ სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ $y = \frac{x^2}{2}$ პარაბოლის ევოლუტის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $y' = x$ და $y'' = 1$, ამიტომ (3.12) ფორმულების ძალით გვაქვს

$$\xi = x - y' \cdot \frac{1 + (y')^2}{y''} = x - \frac{x(1 + x^2)}{1} = -x^3,$$

$$\eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} = \frac{x^2}{2} + \frac{1 + x^2}{1} = \frac{3}{2} x^2 + 1.$$

ე. ი. ევოლუტის პარამეტრულ განტოლებას აქვს სახე

$$\xi = -x^3,$$

$$\eta = \frac{3}{2} x^2 + 1.$$

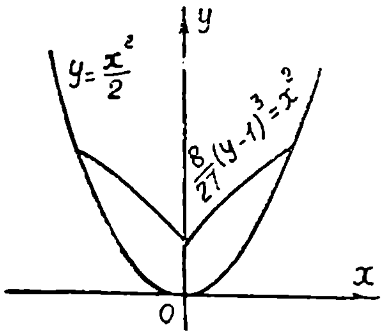
თუ ამ განტოლებიდან გამოვრიცხავთ x პარამეტრს, გვექნება

$$\frac{8}{27}(\eta - 1)^3 = \xi^2.$$

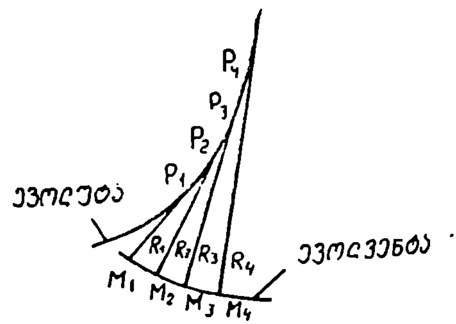
ამრიგად მივიღეთ ევოლუტის განტოლება, რომელიც უშუალოდ აკავშირებს მის მიმდინარე კოორდინატებს. 36-ე ნახაზზე გამოსახულია $y = \frac{x^2}{2}$ პარაბოლა და მისი ევოლუტა.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ ევოლუტისა და ევოლვენტის ორი მნიშვნელოვანი თვისება, რომელიც ადგენს კავშირს მათ შორის.

I. ევოლვენტის ნორმალი რაიმე წერტილში, წარმოადგენს ევოლუტის მხებს შესაბამის წერტილში (ნახ. 37).



ნახ. 36



ნახ. 37

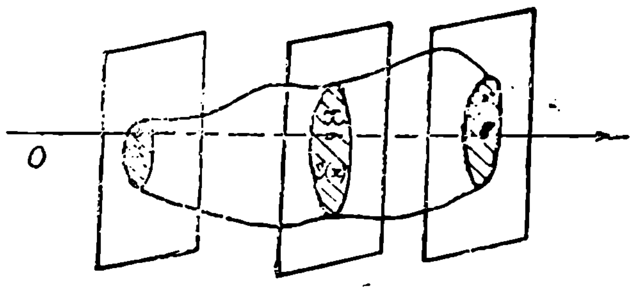
II. თუ ევოლვენტის რაიმე რკალზე სიმრუდის რადიუსი მონოტონურად იცვლება, მაშინ ამ რკალზე სიმრუდის რადიუსის ნაზრდის მოდული, ევოლუტის შესაბამისი რკალის სიგრძის ტოლია. მაგალითად, 37-ე ნახაზზე

$$R_2 - R_1 = |\overset{\smile}{P_1 P_2}|, \quad R_3 - R_2 = |\overset{\smile}{P_2 P_3}|.$$

§ 4. სხეულის მოცულობის გამოთვლა განივი კვეთების ფართობების საშუალებით

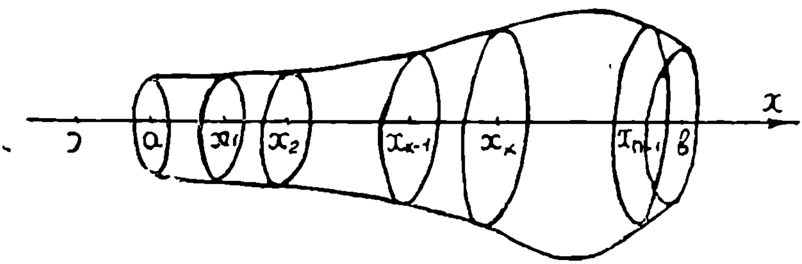
ვთქვათ მოცემულია რაიმე სხეული, რომლისთვისაც ცნობილია Ox ღერძის მართობული ნებისმიერი სიბრტყით კვეთის ფართობი (ნახ. 38). ასეთ კვეთებს განივ კვეთებს უწოდებენ. ცხადია განივი კვეთა სავსებით განისაზღვრება სიბრტყით Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის x აბსცისით.

მაშასადამე განივი კვეთის ფართობი წარმოადგენს x-ის ფუნქციას. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $S(x)$-ით და ვიგულისხმოთ, რომ იგი ცნობილია. a და b-თი აღვნიშნოთ კიდური კვეთების შესაბამისი აბსცისები.



ნახ. 38

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე λ-დანაწილება. თუ დაყოფის წერტილებზე გავავლებთ Ox ღერძის მართობულ სიბრტყეებს, მაშინ სხეული დაიყოფა n ნაწილად (ნახ. 39).



ნახ. 39

ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავილოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k, \tag{4.2}$$

სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. ეს ჯამი უდრის იმ ცილინდრების მოცულობათა ჯამს, რომელთა ფუძის ფართობია $S(\xi_k)$, ხოლო სიმაღლე Δx_k, $k=1, 2, \ldots, n$.

თუ არსებობს (4.1) ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$, მაშინ ამ ზღვარს უწოდებენ მოცემული სხეულის მოცულობას, ე. ი.

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\, \Delta x_k. \tag{4.2}$$

რადგან (4.1) წარმოადგენს $S(x)$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს, ამიტომ, თუ $S(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, (4.2)-დან გვაქვს

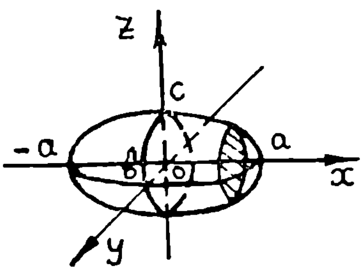
$$V = \int_a^b S(x)\, dx. \tag{4.3}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ელიფსოიდით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ელიფსოიდის განივი კვეთა, რომლის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისაა x, წარმოადგენს



ნახ. 40 ა)

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

ელიფსს, რომლის ნახევარღერძებია $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ და $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ (ნახ. 40 ა)).

თუ ამ ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობს აღვნიშნავთ $S(x)$-ით, გვექნება (იხ. § 1-ის მაგალითი 3)

$$S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

აქედან კი (4.3)-ის ძალით

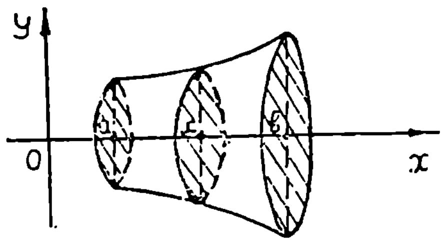
$$V = \int_{-a}^{a} S(x)\, dx = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

კერძოდ, თუ $a=b=c=R$, მივიღებთ R-რადიუსიანი ბირთვის მოცულობის გამოსათვლელ ფორმულას

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 5. ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოთვლა

1. ვთქვათ არაუარყოფითი $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, Ox ღერძით და $x=a$, $x=b$ წრფეებით. ვიპოვოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 40 ბ).



ნახ. 40 ბ)

ამ სხეულის განივი კვეთა, რომელიც შეესაბამება $[a,b]$ სეგმენტის x წერტილს წარმოადგენს წრეს რადიუსით $f(x)$. ამიტომ კვეთის ფართობია

$$S(x)=\pi\,[f(x)]^2=\pi y^2.$$

(4.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx. \tag{5.1}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $[0, \pi]$ სეგმენტზე მოცემული $y=\sin x$ სინუსოიდით შექმნილი მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (5.1) ფორმულის ძალით

$$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{\pi^2}{2}.$$

2. ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია რომელიც განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია პარამეტრული სახით $x=x(t)$, $y=y(t)$,

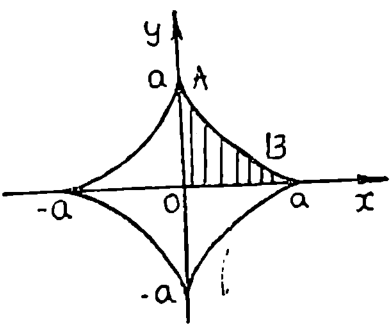
$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. თუ $x(t)$ ფუნქციას $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე აქვს არაუარყოფითი უწყვეტი წარმოებული და $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, ხოლო $y(t)$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, მაშინ მრუდწირული ტრაპეციის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V=\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\, x'(t)\, dt. \tag{5.2}$$

თუ $x(t)$ ფუნქცია კლებადია და $x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$, მაშინ ზემოთმოყვანილ პირობებში

$$V=-\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\, x'(t)\, dt. \tag{5.3}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ ასტროიდის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.



ნახ. 41 ა)

ამოხსნა. ასტროიდა სიმეტრიულია Ox და Oy ღერძების მიმართ, ამიტომ საძებნი მოცულობა უდრის $2V$, სადაც V არის იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება OAB (ნახ. 41 ა)) მრუდწირული სამკუთხედის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო. (5.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$V=-\pi \int_{0}^{\pi/2} a^2 \sin^6 t \cdot 3a\cos^2 t\,(-\sin t)\, dt =$$

$$=-3\pi a^3 \int_{0}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t\, d(\cos t) = \frac{16}{105}\pi a^3.$$

ამრიგად საძებნი მოცულობაა $\dfrac{32}{105}\pi a^3$.

3. ვთქვათ $y=f(x)$ უწყვეტი არაუარყოფითი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ მრუდწირული ტრაპეცია

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო, მაშინ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx. \tag{5.4}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე λ — დანაწილება: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ სეგმენტზე განვიხილოთ ორი მართკუთხედი ფუძით $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ და სიმაღლით

$$m_i = \min_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x); \quad M_i = \max_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x).$$

მივიღებთ ორ საფეხურა ფიგურას, რომელთაგან ერთი ჩახაზულია, ხოლო მეორე შემოხაზულია მოცემულ მრუდწირულ ტრაპეციაზე. ამ საფეხურა ფიგურების ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო, მიიღება ორი T_1 და T_2 ცილინდრული რგოლებით შედგენილი სხეულები.

ამ სხეულების მოცულობები შესაბამისად ტოლია

$$V_{T_1} = \sum_{i=1}^{n} \pi m_i (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \Delta x_i,$$

$$V_{T_2} = \sum_{i=1}^{n} 2\pi M_i \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \Delta x_i.$$

ცხადია საძებნი V მოცულობისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$V_{T_1} \leqslant V \leqslant V_{T_2}. \tag{5.5}$$

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $\varphi(x) = 2\pi x f(x)$ ფუნქცია. ვთქვათ.

$$s_i = \min_{[x_{i-1},\, x_i]} \varphi(x); \quad S_i = \max_{[x_{i-1},\, x_i]} \varphi(x).$$

ჯამები $\underline{\sigma}=\sum_{i=1}^{n} s_i \Delta x_i$; $\overline{\sigma}=\sum_{i=1}^{n} S_i \Delta x_i$ წარმოადგენენ, შესაბამისად, $\varphi(x)$ ფუნქციის დარბუს ქვედა და ზედა ჯამებს. რადგან $\varphi(x)$ უწყვეტია a, b[სეგმენტზე, ამიტომ

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{\sigma}=\lim_{\lambda\to 0}\overline{\sigma}=2\pi\int_a^b x f(x)\,dx. \tag{5.6}$$

ცხადია, რომ

$$\left|2\pi m_i \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Delta x_i - s_i\Delta x_i\right| \leqslant 2\pi M_i x_i \Delta x_i - 2\pi m_i x_{i-1}\Delta x_i =$$

$$= 2\pi x_i (M_i-m_i)\Delta x_i + 2\pi m_i \Delta x_i^2 \leqslant 2\pi b (M_i-m_i)\Delta x_i + 2\pi m_i \Delta x_i^2.$$

ამ უტოლობის ძალით გვაქვს:

$$|V_{T_1}-\underline{\sigma}| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(2\pi m_i \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Delta x_i - s_i\Delta x_i\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi b\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i + 2\pi\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i^2.$$

რადგან სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის λ ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ $M_i-m_i<\varepsilon$, როცა $\Delta x_i\leqslant\lambda$, $i=1, 2,\dots, n$. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$|V_{T_1}-\underline{\sigma}| \leqslant 2\pi b(b-a)\varepsilon + 2\pi M(b-a)\lambda. \tag{5.7}$$

სადაც $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$, $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$.

(5.7) უტოლობიდან ε-ის ნებისმიერობის ძალით, გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0} V_{T_1}=\lim_{\lambda\to 0}\underline{\sigma}. \tag{5.8}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{\lambda\to 0} V_{T_2}=\lim_{\lambda\to 0}\overline{\sigma}. \tag{5.9}$$

(5.6), (5.8) და (5.9) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\lim_{\lambda\to 0} V_{T_1} = \lim_{\lambda\to 0} V_{T_2} = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (5.10)$$

(5.5) და (5.10)-დან გამომდინარეობს (5.4) ტოლობის მართებულობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y=\frac{k^2}{x}$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ $(b>a>0)$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით oy ღერძის გარშემო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (5.4) ფორმულის ძალით

$$V = 2\pi\int_a^b k^2\,dx = 2\pi k^2(b-a).$$

4. ვთქვათ $r=r(\varphi)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi)$. იმ T სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=r(\varphi)$, $\varphi=\alpha$ და $\varphi=\beta$ წირებით შემოსაზღვრული სექტორის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

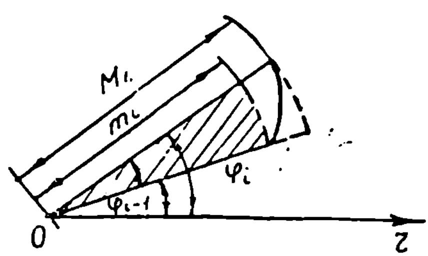
$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi. \qquad (5.11)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $[\alpha\ \beta]$ სეგმენტის რაიმე λ — დანაწილება $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\cdots<\varphi_n=\beta$.

ვთქვათ

$$M_i = \max_{[\varphi_{i-1},\,\varphi_i]} r(\varphi);$$

$$m_i = \min_{[\varphi_{i-1},\,\varphi_i]} r(\varphi).$$



ნახ. 41 ბ)

ყოველი $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ სეგმენტისათვის განვიხილოთ ორი წრიული სექტორი, რომლებიც შემოსაზღვრულია $\varphi=\varphi_{i-1}$, $\varphi=\varphi_i$ სხივებითა და შესაბამისად $r=M_i$, $r=m_i$ რადიუსიანი წრიული რკალებით (ნახ. 41, ბ)).

ცხადია, $T_2 \subset T \subset T_1$, სადაც T_1 და T_2 შესაბამისად არის $r = M_i$ და $r = m_i$ რადიუსიანი წრიული სექტორების პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულები.

თუ გავიხსენებთ, რომ ბირთვული სექტორის მოცულობა გამოითვლება $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$ ფორმულით, სადაც R არის ბირთვის რადიუსი, ხოლო h შესაბამისი ბირთვული სეგმენტის სიმაღლე, მაშინ T_1 და T_2 სხეულების მოცულობა ტოლია

$$V_{T_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3} \pi M_i^3 (\cos \varphi_{i-1} - \cos \varphi_i);$$

$$V_{T_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3} \pi m_i^3 (\cos \varphi_{i-1} - \cos \varphi_i).$$

ამ ტოლობიდან, ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის ფორმულის გამოყენებით, გვაქვს

$$V_{T_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3} \pi M_i^3 \sin \overline{\varphi_i} \cdot \Delta \varphi_i;$$

$$V_{T_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3} \pi m_i^3 \sin \overline{\varphi_i} \cdot \Delta \varphi_i,$$

სადაც

$$\varphi_{i-1} < \overline{\varphi_i} < \varphi_i, \quad \Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

ცხადია საძებნი V მოცულობისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$V_{T_2} \leqslant V \leqslant V_{T_1}.$$

განვიხილოთ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე უწყვეტი $g(\varphi) = \frac{2\pi}{3} r^3(\varphi) \sin \varphi$ ფუნქცია. ვთქვათ

$$s_i = \min_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} g(\varphi); \quad S_i = \max_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} g(\varphi).$$

ჯამები

$$\underline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} s_i \Delta \varphi_i; \quad \overline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} S_i \Delta \varphi_i$$

წარმოადგენენ, შესაბამისად $g(\varphi)$ ფუნქციის დარბუს ქვედა და ზედა ჯამებს. რადგან $g(\varphi)$ უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ

$$\lim_{\lambda \to 0} \underline{\sigma} = \lim_{\lambda \to 0} \overline{\sigma} = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi. \tag{5.13}$$

ცხადია, რომ

$$\left| \frac{2}{3} \pi M_i^3 \sin \overline{\varphi_i} \, \Delta \varphi_i - S_i \, \Delta \varphi_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3} \pi M_i^3 \max_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} \{\sin \varphi\} \Delta \varphi_i - \frac{2}{3} \pi m_i^3 \min_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} \{\sin \varphi\} \Delta \varphi_i =$$

$$= \frac{2}{3} \pi M_i^3 \max \{\sin \varphi\} \Delta \varphi_i - \frac{2}{3} \pi m_i^3 \max \{\sin \varphi\} \Delta \varphi_i +$$

$$+ \frac{2}{3} \pi m_i^3 \max \{\sin \varphi\} \Delta \varphi_i - \frac{2}{3} \pi m_i^3 \min \{\sin \varphi\} \Delta \varphi_i =$$

$$= \frac{2}{3} \pi \max_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i[} \{\sin \varphi\} \, (M_i^3 - m_i^3) \, \Delta \varphi_i +$$

$$+ \frac{2}{3} \pi m_i^3 (\max \{\sin \varphi\} - \min \{\sin \varphi\}) \, \Delta \varphi_i \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M^2 (M_i - m_i) \Delta \varphi_i + \frac{2}{3} \pi M^3 \Delta \varphi_i^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M^2 (M_i - m_i) \Delta \varphi_i + \frac{2}{3} \pi M^3 \lambda \cdot \Delta \varphi_i, \tag{5.14}$$

სადაც

$$M = \max_{[\alpha, \beta]} r(\varphi), \quad \lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i.$$

(5.14) უტოლობის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და სათანადოდ შერჩეული $\lambda = \max \Delta x_i$ რიცხვისათვის მივიღებთ (იხ. (5.7) უტოლობის მიღება)

$$| V_{T_1} - \overline{\sigma} | = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3} \pi M_i^3 \sin \overline{\varphi_i} \cdot \Delta \varphi_i - S_i \Delta \varphi_i) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M^2 \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta \varphi_i + \frac{2\pi \lambda M^3}{3} \sum_{i=1}^{n} \Delta \varphi_i \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M^2 (\beta - \alpha) \varepsilon + \frac{2}{3} \pi M^3 (\beta - \alpha) \lambda.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\lambda \to 0} V_{T_1} = \lim_{\lambda \to 0} \overline{\sigma}. \tag{5.15}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{\lambda \to 0} V_{T_2} = \lim_{\lambda \to 0} \underline{\sigma}. \tag{5.16}$$

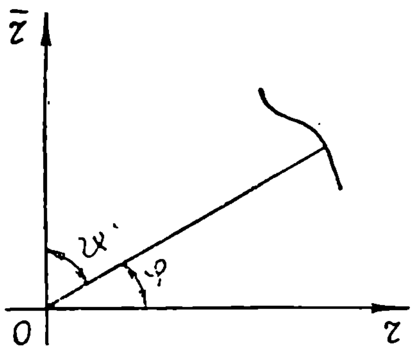
(5.13), (5.15) და (5.16) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\lim_{\lambda \to 0} V_{T_1} = \lim_{\lambda \to 0} V_{T_2} = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 (\varphi) \sin \varphi \, d\varphi. \tag{5.17}$$

(5. 12) და (5.17)-დან გამომდინარეობს (5.11) ტოლობის მართებულობა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ვთქვათ $r = r(\varphi)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < \beta \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$. იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$ და $\varphi = \beta$ წირებით შემოსაზღვრული სექტორის ბრუნვით $\varphi = \frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 (\varphi) \cos \varphi \, d\varphi.$$



ნახ. 41 გ)

მართლაც, თუ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ სხივს მივიღებთ $\overline{r}, \vartheta$ სისტემის პოლარულ ღერ-

ძალ, მაშინ (ნახ, 41 გ)) $\overline{r}(\vartheta)=r(\varphi)$; $\vartheta=-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\varphi-\frac{\pi}{2}$ და (5.11) ფორმულის ძალით, $\sin\vartheta\leqslant 0$ უტოლობის გათვალისწინებით, გვაქვს

$$V=\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}}\overline{r^3}(\vartheta)\,|\sin\vartheta|\,d\vartheta=\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha}^{\beta}r^3(\varphi)\cos\varphi d\varphi.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=a\sqrt[3]{\sin\varphi}$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (5.11) ფორმულის ძალით

$$V=\frac{2\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\pi^2a^3.$$

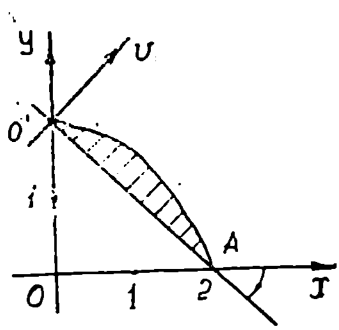
მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y=2-\frac{1}{2}x^2$ და $x+y-2=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით $x+y-2=0$ წრფის გარშემო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვახდინოთ Oxy კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა (მობრუნება და პარალელური გადატანა) ისე, რომ ახალი $O'uv$ სისტემის $O'u$ ღერძი დაემთხვას ბრუნვის $x+y-2=0$ წრფეს (ნახ. 41 დ)). მობრუნების კუთხე, როგორც ეს გამომდინარეობს ბრუნვის წრფის განტოლებიდან, ტოლია $-\frac{\pi}{4}$-ის.

სისტემის გარდაქმნის ფორმულებს ექნება სახე

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+2),$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2).$$



ნახ. 41 დ)

$O'uv$ სისტემაში $y=2-\frac{1}{2}x^2$ პარაბოლის პარამეტრული სახის განტოლება იქნება

$$u = u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[x - y(x) + 2],$$

$$v = v(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + y(x) - 2],$$

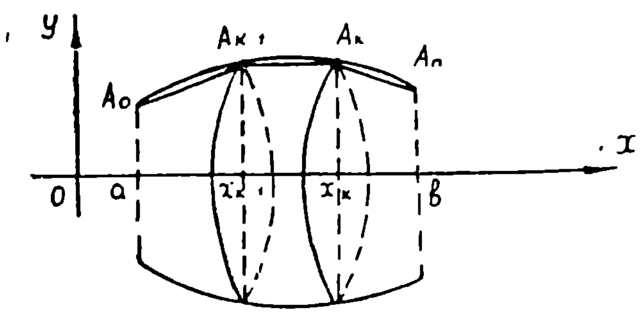
სადაც $y(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ პარაბოლის $O'A$ რკალი შეესაბამება $O \leqslant x \leqslant 2$ სეგმენტს. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება (5.2) ფორმულით:

$$V = \pi\int_0^2 v^2(x)\,u'(x)\,dx = \pi\int_0^2 \frac{1}{8}(2x - x^2)^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)' dx =$$

$$= \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)(1 + x)\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{15}\pi.$$

§ 6. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ $y=f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი, არაუარყოფითი ფუნქცია. განვიხილოთ ზედაპირი, რომელიც მიიღება ამ ფუნქციის გრაფიკის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (ნახ. 34).



ნახ. 42

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$ იყოს ფუნქციის გრაფიკის შესაბამისი წერტილები. ავაგოთ ტეხილი $A_0 A_1 \dots A_n \cdot Ox$ ღერძის გარშემო ამ ტეხილის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი უდრის წაკვეთილი კონუსების (ცილინდრების) გვერდითი ზედაპირების ფართობთა ჯამს. ვთქვათ $l_k = |A_{k-1} A_k|$, მაშინ (იხ. (2.2))

$$l_k = \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k, \quad k=1,\ 2, \dots, n,$$

სადაც $x_{k-1} < \xi_k < x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. ამიტომ ტეხილის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობია

$$\sum_{k=1}^{n} \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] l_k = \pi \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \cdot \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k. \quad (6.1)$$

უკანასკნელი ჯამი წარმოვადგინოთ შემდეგი ორი შესაკრების სახით

$$2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k +$$

$$+ \pi \sum_{k=1}^{n} \{[f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] + [f(x_k) - f(\xi_k)]\} \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k = \sigma + R.$$

σ წარმოადგენს $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $2\pi f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს, ამიტომ

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\lambda \to 0} R = 0. \quad (6.2)$$

მართლაც, რადგან კანტორის თეორემის თანახმად $f(x)$ თანაბრად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $\lambda < \delta$ სრულდება უტოლობები

$$|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)| < \varepsilon, \ |f(x_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon, \ k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

თუ M-ით აღვნიშნავთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობას, მაშინ, როდესაც $\lambda < \delta$, (6.3)-ის ძალით გვაქვს

$$|R| \leqslant 2\pi M\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 2\pi M(b-a)\varepsilon.$$

რადგან ε ნებისმიერად მცირეა, აქედან გამომდინარეობს (6.2).

ამრიგად, მივიღეთ, რომ (6.1) ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$ არის

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

განსაზღვრებით მიღებულია, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი, უწყვეტად წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობია (6.1) ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$. ე. ი.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{6.4}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ R-რადიუსიანი და H სიმაღლის სფერული სარტყლის ზედაპირის ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული სფერული სარტყელი წარმოადგენს $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a \leqslant x \leqslant b$, $b - a = H$, ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებულ ზედაპირს. ამიტომ (6.4) ფორმულის ძალით

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_a^b R\,dx = 2\pi R(b-a) = 2\pi RH.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. ვთქვათ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება

ამ ფუნქციის გრაფიკის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო გამოითვლება ფორმულით

$$S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

(6.5) ფორმულის მისაღებად საკმარისია ჩავატაროთ (6.4) ფორმულის მიღების დროს ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ იმ ზედაპირის ფართობი რომელიც მიიღება $y=\frac{1}{2}x^2,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$ წირის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (6.5) ფორმულის ძალით

$$S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ვთქვათ AB წირი წარმოადგენს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=g(t),\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

სადაც $\varphi(t)$ და $g(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, ამასთან $g(t)\geqslant 0$. რადგანაც $x=\varphi(t)$ მონოტონური ფუნქციაა (იხილეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრება), ამიტომ, როცა ის ზრდადია $a=\varphi(\alpha)$ და $b=\varphi(\beta)$, ხოლო, როცა კლებადია—$a=\varphi(\beta)$ და $b=\varphi(\alpha)$, (a და b შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებია). Ox ღერძის გარშემო ასეთი წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის მისაღებად (6.4) ფორმულაში მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $x=\varphi(t)$. მივიღებთ

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta g(t)\sqrt{1+\left[\frac{g'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\cdot|\varphi'(t)|\,dt=$$

$$=2\pi\int_\alpha^\beta g(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt. \qquad (6.6)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი თაღის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ციკლოიდის ერთი თაღისათვის $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, ამიტომ (6.6) ფორმულის ძალით

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+a^2(1-\cos t)^2}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. ვთქვათ, AB წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში განტოლებით $\rho=\rho(\varphi)$, $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi$, სადაც $\rho(\varphi)$ არის $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია. თუ ჩავატარებთ იგივე მსჯელობას, რაც გვქონდა § 2-ის მე-3 პუნქტში, მაშინ ასეთი წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელად მივიღებთ ფორმულას

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \qquad (6.7)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ $\rho=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის (ნახ.26) Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (6.7) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$S=2\pi\int_0^\pi a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^{3/2}\sin\varphi\,d\varphi=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4. ვთქვათ $r=r(\varphi)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. იმ ზედაპირის ფართობი, რო-

შელიც მიიღება $r=r(\varphi)$ წირის ბრუნვით $\varphi=\frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$S=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \tag{6.8}$$

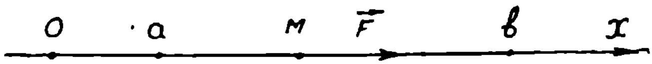
მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვითვალოთ $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატის $\varphi=\frac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (6.8) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$S=4\pi a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos\varphi d\varphi=4\sqrt{2}\cdot\pi a^2.$$

§ 7. ძალის მუშაობა. სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები

1. **ძალის მუშაობა.** ვთქვათ მატერიალური M წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით, რომლის მიმართულება ემთხვევა Ox ღერძის მიმართულებას. გამოვთვალოთ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, როცა M წერტილი გადაადგილდება $x=a$ წერტილიდან $x=b$ წერტილამდე (ნახ. 43). ვიგულისხმოთ, რომ $\vec{F}$ ძალის F სიდიდე x-ის უწყვეტი ფუნქციაა.



ნახ. 43

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე λ-დანაწილება

$$a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b.$$

ყოველ $[x_{n-1}, x_n]$ $(k=1, 2, \dots, n)$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი. განვიხილოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{7.1}$$

სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k=1, 2, \dots, n$.

განსაზღვრებით, $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებულ მუშაობად $[a, b]$ სეგმენტზე მიღებულია ზღვარი

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k) \Delta x_k.$$

მაგრამ (7.1) ჯამი წარმოადგენს უწყვეტი $F(x)$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს $[a, b]$ სეგმენტზე. ამიტომ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა $[a, b]$ სეგმენტზე გამოისახება ინტეგრალით

$$W = \int_a^b F(x)\, dx.$$

2. მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრი. ვთქვათ Oxy სიბრტყეზე მოცემულია მატერიალური წერტილები

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n),$$

რომელთა მასებია $m_1, m_2, \ldots, m_n$. როგორც მექანიკიდან ცნობილია, ა წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები ξ და η გამოითვლება ფორმულებით

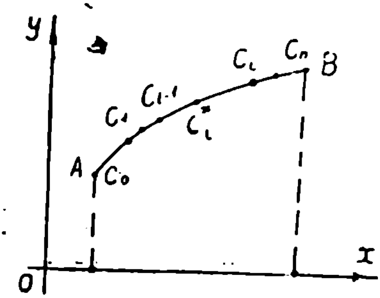
$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},$$

$$\eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

ახლა ვთქვათ, გვაქვს მატერიალური AB წირი (ნახ. 44), რომლის განტოლებებია

$$x = x(s)$$

$$y = y(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l,$$



ნახ. 44

სადაც $x(s)$ და $y(s)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, ხოლო l არის AB წირის სიგრძე.

დავუშვათ, რომ AB წირის სიმკვრივე ყოველ $M(s)$ წერტილში გამოისახება უწყვეტი $\rho(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$ ფუნქციით. ვიპოვოთ ამ წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები. ამ მიზნით AB წირი გავყოთ ნებისმიერად შემდეგი წერტილებით

$$A = C_0,\ C_1, \ldots, C_n = B.$$

AC_i რკალის სიგრძე აღვნიშნოთ s_i-თი მაშინ $C_{i-1}C_i$ რკალის სიგრძე იქნება $s_i - s_{i-1} = \Delta s_i$

ვთქვათ $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta s_i$. ავიღოთ $C_{i-1}C_i$ რკალზე ნებისმიერი წერტილი C_i^*. აღვნიშნოთ s_i^*-ით AC_i^* რკალის სიგრძე. ცხადია $s_{i-1} \leqslant s_i^* \leqslant s_i$. განვიხილოთ გამოსახულებები

$$\overline{\xi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(s_i^*)\, x(s_i^*)\, \Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(s_i^*)\, \Delta s_i}; \qquad \overline{\eta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(s_i^*)\, y(s_i^*)\, \Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(s_i^*)\, \Delta s_i}.$$

განსაზღვრება 7.1. AB წირის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება $C(\xi, \eta)$ წერტილს, სადაც

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(s_i^*)\,x(s_i^*)\,\Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(s_i^*)\,\Delta s_i},\\
\eta &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(s_i^*)\,y(s_i^*)\,\Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(s_i^*)\,\Delta s_i}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

მაგრამ ჯამები $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(s_i^*)\,x(s_i^*)\,\Delta s_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(s_i)y(s_i^*)\Delta s_i$ და $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(s_i^*)\Delta s_i$, წარმოადგენენ შესაბამისად უწყვეტი $\rho(s)\,x(s)$, $\rho(s)\,y(s)$ და $\rho(s)$ ფუნქციების ინტეგრალურ ჯამებს. ამიტომ (7.2)-დან გვაქვს

$$\xi=\frac{\int\limits_0^l\rho(s)\,x(s)\,ds}{\int\limits_0^l\rho(s)\,ds};\quad \eta=\frac{\int\limits_0^l\rho(s)\,y(s)\,ds}{\int\limits_0^l\rho(s)\,ds}. \tag{7.3}$$

ამრიგად, (7.3) არის მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები. თუ მატერიალური AB წირი ერთგვაროვანია, მაშინ (7.3)-დან გვაქვს

$$\xi=\frac{1}{l}\int\limits_0^l x(s)\,ds;\quad \eta=\frac{1}{l}\int\limits_0^l y(s)\,ds. \tag{7.4}$$

ახლა ვთქვათ, AB წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით, სადაც $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში (7.4) ფორმულები მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\xi = \frac{\int\limits_a^b x \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}; \qquad \eta = \frac{\int\limits_a^b y \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}. \tag{7.5}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 1. გამოვთვალოთ ერთგვაროვანი $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ნახევარი წრეწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}; \quad \sqrt{1+(y')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^3}}.$$

(7.5) ფორმულების ძალით გვაქვს

$$\xi = \frac{r\int\limits_{-r}^{r} \frac{xdx}{\sqrt{r^2-x^2}}}{\pi r} = 0$$

(ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია),

$$\eta = \frac{1}{\pi r}\int\limits_{-r}^{r} \frac{ry\,dx}{\sqrt{r^2-x^3}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r} dx = \frac{2r}{\pi}.$$

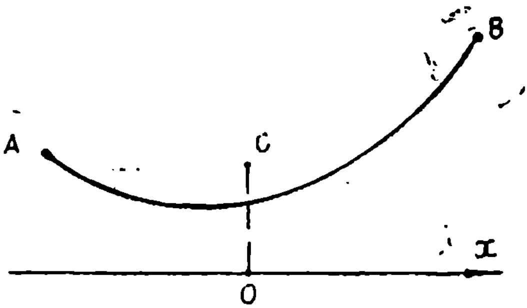
ამრიგად, მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია $\xi=0,\ \eta=\frac{2r}{\pi}$.

თ ე ო რ ე მ ა 7.1 (გულდინის* პირველი თეორემა). ღერძის არაგადამკვეთი წრფევადი AB წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი ტოლია წირის სიგრძისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლის, რომელსაც შემოხაზავს წირის სიმძიმის C ცენტრი.

---

* პ. გულდინი (1577—1643) — შვეიცარიელი მათემატიკოსი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ბრუნვის ღერძად ავიღოთ Ox ღერძი (ნახ. 45). (7.4)-ის მეორე ფორმულა ასე გადავწეროთ



ნახ. 45

$$\eta l = \int_0^l y(s)\,ds.$$

აქედან

$$2\pi\eta l = 2\pi \int_0^l y(s)\,ds.$$

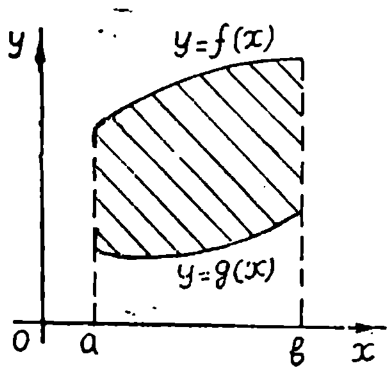
ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს იმ ზედაპირის ფართობს, რომელიც მიიღება AB წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო. ამრიგად

$$S = l \cdot 2\pi\eta,$$

სადაც S არის აღნიშნული ზედაპირის ფართობი.

თეორემა დამტკიცებულია.

3. ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი. განვიხილოთ თხელი მატერიალური ერთგვაროვანი ფირფიტა, რომელიც შემოსაზღვრულია უწყვეტი $y=f(x)$, $y=g(x)$ წირებით $(f(x) \geqslant g(x))$ და წრფეებით $x=a$, $x=b$ (ნახ. 46). დავუშვათ, რომ ფირფიტის ზედაპირული სიმკრივე ყოველ წერტილში უდრის ρ-ს.

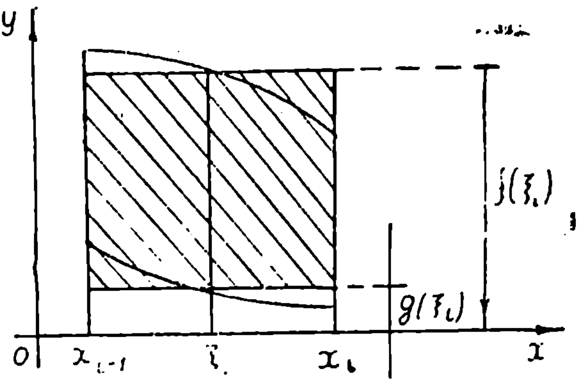


ნახ. 46

ვიპოვოთ ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები. ამ მიზნით განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე λ-დანაწილება

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტზე ავიღოთ ამ სეგმენტის შუაწერტილი $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ (ნახ. 47). განვიხილოთ გამოსახულებები



ნახ. 47

$$\bar{\xi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \rho [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i};$$

$$\bar{\eta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(\xi_i) + g(\xi_i)}{2} \rho [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \{ [f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2 \} \Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i}.$$

განსაზღვრება 7.2. ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება $C(\xi, \eta)$ წერტილს, სადაც

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \left[f(\xi_i) - g(\xi_i)\right] \Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i) - g(\xi_i)\right] \Delta x_i}, \\
\eta &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ [f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2 \right\} \Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i) - g(\xi_i)\right] \Delta x_i}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

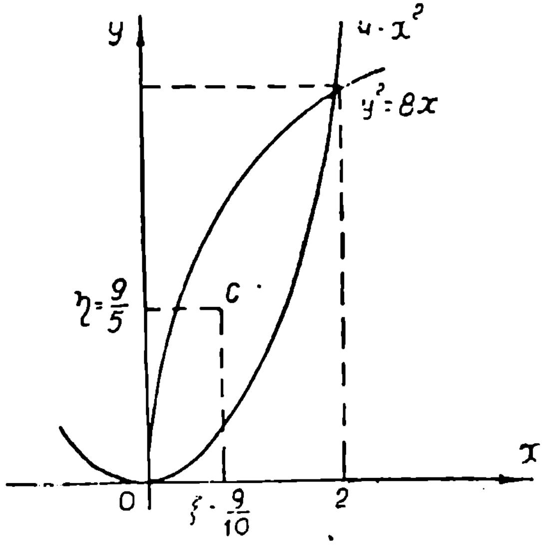
რადგან ჯამები $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \left[f(\xi_i) - g(\xi_i)\right] \Delta x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \{[f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2\} \Delta x_i$ და $\sum\limits_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i$ წარმოადგენენ შესაბამისად უწყვეტი $x[f(x)-g(x)]$; $[f(x)]^2 - [g(x)]^2$ და $f(x) - g(x)$ ფუნქციების ინტეგრალურ ჯამებს, ამიტომ (7.6)-დან გვაქვს

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{\int\limits_a^b x\left[f(x) - g(x)\right] dx}{\int\limits_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx}, \\
\eta &= \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} dx}{\int\limits_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.7)$$

ამრიგად (7.7) არის მატერიალური ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები. რადგან $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$ არის მოცემული ფირფიტის ფართობი, ამიტომ თუ მას აღვნიშნავთ S-ით, მაშინ (7.7) ფორმულა ასე ჩაიწერება

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{S}\int_a^b x\,[f(x)-g(x)]\,dx, \\ \eta &= \frac{1}{2S}\int_a^b \{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 2. გამოვთვალოთ იმ ერთგვაროვანი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $y=x^2$ და $y^2=8x$ (ნახ. 48).



ნახ. 48

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული წირების გადაკვეთის წერტილებია (0; 0) და (2; 4). აქ $f(x)=\sqrt{8x}$, $g(x)=x^2$. ადვილია ჩვენება, რომ

$$\int_0^2 x\,(\sqrt{8x}-x^2)\,dx=\frac{12}{5}\,,\qquad S=\int_0^2(\sqrt{8x}-x^2)\,dx=\frac{8}{3}\,;$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2\left[(\sqrt{8x})^2-(x^2)^2\right]dx=\frac{24}{5}\,.$$

(7.8) ფორმულების ძალით გვაქვს

$$\xi=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{8}{3}}=\frac{9}{10}\,,\qquad \eta=\frac{\frac{24}{5}}{\frac{8}{3}}=\frac{9}{5}\,.$$

მეხუთე თავი

ფუნქციათა ინტერპოლირება და განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

§ 1. ფუნქციათა ინტერპოლირება

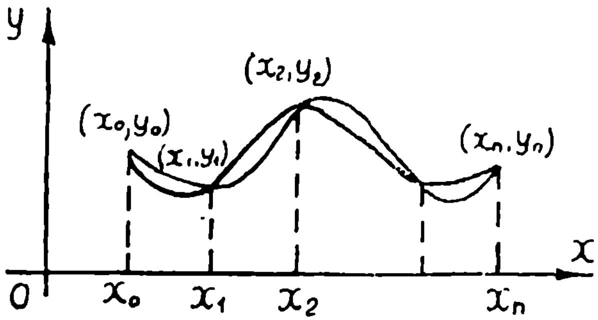
1. ინტერპოლირების ამოცანის დასმა. საინტერპოლაციო მრავალწევრის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა. ვთქვათ ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის $y_0, y_1, \ldots, y_n$ მნიშვნელობები შესაბამისად არგუმენტის $x_0, x_1, \ldots, x_n$ მნიშვნელობებისათვის, ე. ი.

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1, \ldots,\ f(x_n)=y_n. \tag{1.1}$$

ისმება ამოცანა: ავაგოთ ისეთი $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს

$$F(x_0)=y_0,\ F(x_1)=y_1, \ldots,\ F(x_n)=y_n. \tag{1.2}$$

გეომეტრიულად $F(x)$ ფუნქციის მოძებნის ამოცანა, რომელიც დააკმაყოფილებს (1.2) პირობებს, ნიშნავს ისეთი წირის აგებას, რომელიც გაივლის (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ წერტილებზე. ცხადია, ამ წერტილებზე შეიძლება გავავლოთ უამრავი წირი (ნახ. 49), ე. ი. არსებობს უამრავი $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს (1.2) პირობებს. ამიტომ ბუნებრივად ისმება ამოცანა: ვიპოვოთ ფუნქციათა კლასი, რომელშიც იარსებებს ისეთი $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს (1.2) პირობებს და იქნება ერთადერთი ამ კლასში.



ნახ. 49

ჩვენ შევისწავლით ამოცანას: ავაგოთ ისეთი $P(x)$ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება მოცემულ m რიცხვს და დააკმაყოფილებს პირობებს

$$P(x_0) = y_0, \ P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n. \tag{1.3}$$

ასეთ ამოცანას უწოდებენ პარაბოლური ინტერპოლირების ამოცანას, ხოლო $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებს — ინტერპოლაციის კვანძებს. $P(x)$ მრავალწევრს, რომელიც (1.3) პირობებს აკმაყოფილებს, $f(x)$ ფუნქციის საინტერპოლაციო მრავალწევრი ეწოდება $x_0, x_1, \dots, x_n$ კვანძების მიმართ.

ინტერპოლირების ძირითადი იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ ფუნქცია, რომლისთვისაც ცნობილია, მხოლოდ მნიშვნელობათა (1.1) ცხრილი, უნდა შევცვალოთ საინტერპოლაციო მრავალწევრით, რომელიც განიხილება როგორც $f(x)$ ფუნქციის მიახლოებითი ანალიზური გამოსახულება:

$$f(x) \approx P(x).$$

შევისწავლოთ ყოველთვის შესაძლებელია თუ არა საინტერპოლაციო მრავალწევრის აგება და თუ შესაძლებელია მაშინ როდის იქნება ის ერთადერთი? ამასთან დავადგინოთ როგორია მიახლოების სიზუსტე.

თ ე ო რ ე მ ა 1.1. არსებობს ერთადერთი (ჩაწერის ფორმის სიზუსტემდე) $P_n(x)$ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს და რომელიც დააკმაყოფილებს (1.3) პირობებს.

შემდეგ პუნქტში აგებული იქნება ე. წ. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი, რომელიც დააკმაყოფილებს (1.3) პირობებს, ამით ნაჩვენები იქნება საინტერპოლაციო მრავალწევრის არსებობაც. რაც შეეხება ერთადერთობას ის გამომდინარეობს მეორე თავის თეორემა 8.4-ის შედეგი 2-დან.

2. **ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი.** ავაგოთ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს და დააკმაყოფილებს (1.3) პირობებს.

ამ მიზნით განვიხილოთ n-ური ხარისხის შემდეგი მრავალწევრი

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} .$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$l_i(x)$-ს ლაგრანჟის კოეფიციენტი ეწოდება. ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad i = j, \\ 0, & \text{როცა} \quad i \neq j. \end{cases}$$

ცხადია,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \tag{1.4}$$

მრავალწევრის ხარისხი არ აღემატება n-ს და ის აკმაყოფილებს (1. 3) პირობებს, ე. ი.

$$L_n(x_j) = y_j \quad (j=0, 1, \ldots, n). \tag{1.5}$$

ამრიგად $L_n(x)$ არის საძიებელი საინტერპოლაციო მრავალწევრი.

საინტერპოლაციო მრავალწევრს, რომელიც ჩაწერილია (1.4) სახით, ეწოდება ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი.

3. **ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრით მიახლოების ცდომილების შეფასება.** დავადგინოთ ახლა რა სიზუსტით გამოსახავს $[a, b]$ სეგმენტზე ლაგრანჟის საინტერპოლაციო $L_n(x)$ მრავალწევრი $f(x)$ ფუნქციას. ამ საკითხის შესასწავლად განვიხილოთ სხვაობა

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x).$$

$R_n(x)$ ფუნქციას ეწოდება საინტერპოლაციო მრავალწევრის ნაშთითი წევრი, ანუ ინტერპოლაციის ცდომილება. ვიპოვოთ ცდომილების გამოსახულება. თუ $f(x)$ ფუნქციის მიმართ, გარდა საინტერპოლაციო კვანძებში მისი მნიშვნელობისა, სხვა მეტი არაფერია ცნობილი, მაშინ $R_n(x)$-ის მიმართ რაიმე მსჯელობის ჩატარება არ შეიძლება. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია $n+1$ რიგის უწყვეტი წარმოებული $[a, b]$ სეგმენტზე, სადაც $[a, b]$ არის მონაკვეთი რომელიც შეიცავს ინტერპოლაციის ყველა კვანძს. ცხადია, რომ

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

რადგან $L_n^{(n+1)}(x) = 0$.

ვთქვათ, x არის $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი, $x \neq x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\varphi(t) = R_n(t) - \frac{R_n(x)}{\omega(x)} \omega(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1.7}$$

სადაც

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \tag{1.8}$$

ცხადია, რომ

$$\omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!. \tag{1.9}$$

$\varphi(t)$ ფუნქცია $(n+1)$-ჯერ წარმოებადია. (1.6) და (1.9)-ის ძალით გვაქვს

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \frac{R_n(x)}{\omega(x)}. \tag{1.10}$$

(1.5), (1.7) და (1.8)-დან გვაქვს

$$\varphi(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

და

$$\varphi(x) = 0.$$

ე. ი. $\varphi(t)$ უდრის ნულს $[a, b]$ სეგმენტის $n+2$ წერტილში მაინც. როლის* თეორემის ძალით $\varphi'(t)$ ნულის ტოლი გახდება სეგმენტის $n+1$ წერტილში მაინც, $\varphi''(t)$ ნული გახდება n წერტილში მაინც და ასე შემდეგ. ამრიგად, არსებობს ერთი მაინც წერტილი $\xi \in]a, b[$, სადაც $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

თუ (1.10) ტოლობაში ჩავსვამთ $t = \xi$, გვექნება

$$R_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

სადაც ξ დამოკიდებულია x-ზე.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$M_{n+1} = \max_{[a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

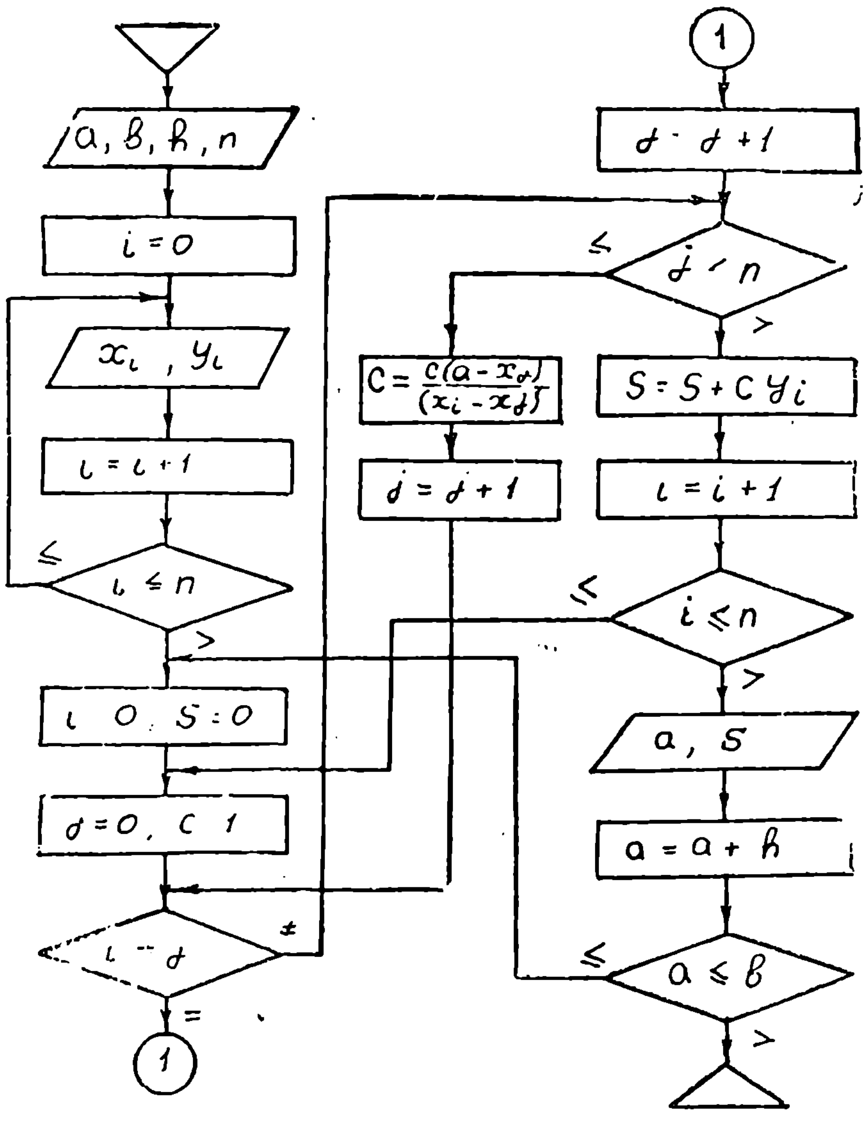
მაშინ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრის ნაშთითი წევრის აბსოლუტური ცდომილებისათვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\max_{[a, b]} |R_n(x)| = \max_{[a, b]} |f(x) - L_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a, b]} |\omega(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

* მ. როლი (1652—1718) — ფრანგი მათემატიკოსი.

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრის მნიშვნელობების გამოთვლის ბლოკ-სქემა



ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრის მნიშვნელობების გამოთვლის პროგრამა ბეისიკის ენაზე.

```
5   REM — — МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА — —
10  OREN 'LP:' FOR OUTPUT AS FILE # 1
20  DATA a, b, h, n, x(1), y(1),..., x(n), y(n)
30  READ A, B, H, N
40  DIM X(n), Y(n)
50  FOR I=0 TO N
60  READ X(I), Y(I)
70  NEXT I
80  FOR A=A TO B BTEP H
90  S=0
100 FOR 1 = TO N
110 C = 1
120 FOR J = 0 TO N
130 IF I = J THEN J = J + 1
140 IF J < = N THEN C=C * (A — X(J)) / (X(I) — X(J))
150 NEXT J
160 S = S + C * Y(I)
170 NEXT I
180 PRINT # 1, 'A = '; A, 'S = '; S
190 NEXT A
200 END
```

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრის მნიშვნელობების გამოთვლის პროგრამა ფორტრანის ენაზე.

```
PROGRAM LAGRAN
DIMENSION X(10), Y(10)
READ * , A, B, H, N
READ *X, Y
DO 10 A = A, B, H
S = 0
DO 20 I = 1, N
C = 1
DO 30 J = 1, N
```

```
      IF (I. EQ. J)  J = J + 1
      IF (J. LE. N)  C = C * (A — X (J)) / (X (I) — X (J))
   30 CONTINUE
   20 S = S + C * Y (I)
      PRINT * , ' A = ' A , ' S = ' , S
   10 CONTINUE
      STOP
      END
```

§ 2. განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ამოცანა. როგორც ვიცით, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $F(x)$ მისი პირვანდელი ფუნქციაა, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად ადგილი აქვს ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულას

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$

მაგრამ ხშირად პრაქტიკაში საქმე გვაქვს ისეთ შემთხვევასთან, როდესაც $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელი $F(x)$ ფუნქცია არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში $\left(\text{მაგალითად } \int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx,\ \int \frac{dx}{\ln x} \text{ არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს}\right)$. ასევე შეიძლება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ იყოს ელემენტარული ფუნქცია $\left(\text{მაგალითად, } f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,\ \varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$. ამიტომ ასეთ შემთხვევებში განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად ნიუტონ-ლეიბნიცის (2.1) ფორმულით სარგებლობა პრაქტიკულად შეუძლებელია. გარდა ამისა, პრაქტიკაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ხშირად მოცემულია ცხრილით. ასეთი ფუნქციებიდან კი განსაზღვრული ინ-ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობის გამოთვლა შეუძლებელია. ამიტომ დიდი მნიშვნელობა აქვს განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლის მეთოდებს. კერძოდ, ჩვენ განვიხილავთ ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლის მეთოდებს,

რომლებიც მიიღებიან, თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას შევცვლით ამ ფუნქციის საინტერპოლაციო მრავალწევრით.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს $(n+1)$ რიგის უწყვეტი წარმოებული. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ იყოს მისი ინტერპოლაციის კვანძები $[a, b]$ სეგმენტიდან. თუ $P(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის საინტერპოლაციო მრავალწევრი $x_0, x_1, \ldots, x_n$ კვანძების მიმართ, მაშინ როგორც ცნობილია (იხ. § 1), ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \tag{2.2}$$

სადაც ξ არის $[a, b]$ სეგმენტის რაღაც წერტილი.

(2.2)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b P(x)\,dx+R, \tag{2.3}$$

სადაც

$$|R|=\left|\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\,dx, \tag{2.4}$$

$$M_{n+1}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|.$$

(2.3) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ თუ განსაზღვრულ $\int_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალში ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქციას შევცვლით ამ ფუნქციის საინტერპოლაციო $P(x)$ მრავალწევრით, მაშინ მოცემული ინტეგრალის გამოთვლაში დაშვებული იქნება ცდომილება R, რომელიც ფასდება (2.4) უტოლობით.

ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელ ფორმულებს კვადრატურულ ფორმულებს უწოდებენ.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\ \ x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n},\ \ k=1, 2, \ldots, n.$$

კვადრატურულ ფორმულებს, რომლებსაც განვიხილავთ, მივიღებთ ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ინტეგრალქვეშა ფუნქციის შეცვლით ამ ფუნქციის საინტერპოლაციო m-ური ხარისხის მრავალწევრით, რომელიც აგებულია $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტიდან აღებული კვანძებისათვის. ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევებს $m=0$, 1, 2. როცა $m=0$ შესაბამის კვადრატურულ ფორმულას ეწოდება მართკუთხედების ფორმულა, როცა $m=1$ — ტრაპეციების ფორმულა, ხოლო როცა $m=2$ — პარაბოლების ან სიმპსონის* ფორმულა.

2. **მართკუთხედების ფორმულა.** იმისათვის, რომ ავაგოთ $f(x)$ ფუნქციის ნულოვანი ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრი $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე, საკმარისია ერთი კვანძის მოცემა. კერძოდ, თუ კვანძად ავიღებთ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის შუაწერტილს $\xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, მაშინ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი იქნება $f(\xi_k)$ მუდმივი, ხოლო მისი ნაშთითი წევრი

$$\frac{f'(\xi)}{1\,!}(x-\xi_k), \quad k=1.\ 2, \dots, n.$$

ამ შემთხვევაში (2.3) და (2.4) ფორმულები $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტისათვის ღებულობს სახეს

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx=\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\,dx+R_k=(x_k-x_{k-1})f(\xi_k)+$$

$$+R_k=\frac{b-a}{n}f(\xi_k)+R_k. \tag{2.5}$$

$$|R_k|\leqslant\frac{M_1}{1\,!}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|x-\xi_k|\,dx=\frac{M_1}{1\,!}\left(\int_{x_{k-1}}^{\xi_k}(\xi_k-x)dx+\int_{\xi_k}^{x_k}(x-\xi_k)\,dx\right)=$$

$$=\frac{M_1}{4}(x_k-x_{k-1})^2=\frac{M_1}{4n^2}(b-a)^2. \tag{2.6}$$

(2.5) და (2.6)-დან გვაქვს

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)+R,$$

---

* ტ. სიმპსონი (1710—1761) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

სადაც

$$|R| = \left|\sum_{k=1}^{n} R_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |R_k| \leqslant \frac{M_1}{4n}(b-a)^2. \tag{2.7}$$

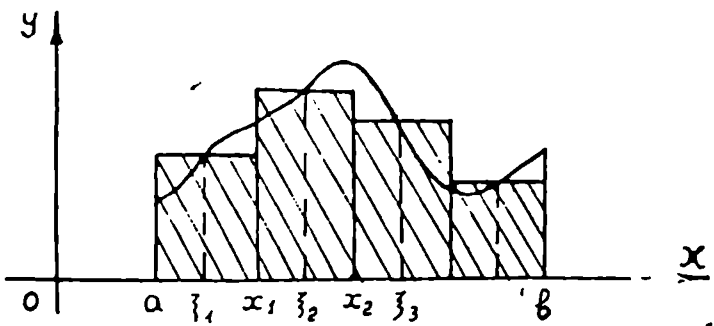
ამრიგად

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{a+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right]. \tag{2.8}$$

(2.8) არის მართკუთხედების კვადრატურული ფორმულა, ცდომილება ფასდება (2.7) უტოლობით.

ამრიგად, მართკუთხედების ფორმულის შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციას ვცვლით „საფეხურა ფუნქციით", ე. ი. ისეთი ფუნქციით, რომელიც მუდმივია ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე (ნახ. 50). აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია დადებითია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობის ტოლია, იცვლება 50-ე ნახაზზე დაშტრიხული მართკუთხედების ფართობთა ჯამით.



ნახ. 50

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $f(x)$ არის წრფივი ფუნქცია, მაშინ მისთვის (2.8) ფორმულა ზუსტია, ე. ი. მართკუთხედების ფორმულა ზუსტია ყველა მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხი არ აღემატება ერთს.

3. ტრაპეციების ფორმულა. ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

სეგმენტზე კვანძებად ავიღოთ x_{k-1} და x_k წერტილები, მაშინ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი იქნება

$$P(x) = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k}\, y_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\, y_k, \quad y_k = f(x_k),$$

ხოლო ნაშთითი წევრი —

$$\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_{k-1})(x - x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

ამ შემთხვევაში (2.3) და (2.4) ფორმულები $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტისათვის ღებულობს სახეს

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\,dx + R_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2}(x_k - x_{k-1}) + R_k =$$

$$= \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + R_k, \tag{2.10}$$

$$|R_k| \leqslant \frac{M_2}{2!}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |(x - x_{k-1})(x - x_k)|\,dx =$$

$$= \frac{M_2}{2!}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x_k - x)\,dx = \frac{M_2}{12}(x_k - x_{k-1})^3 =$$

$$= \frac{M_2}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^3}. \tag{2.11}$$

(2.10) და (2.11)-დან გვაქვს

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} + R =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) + R,$$

საიდან

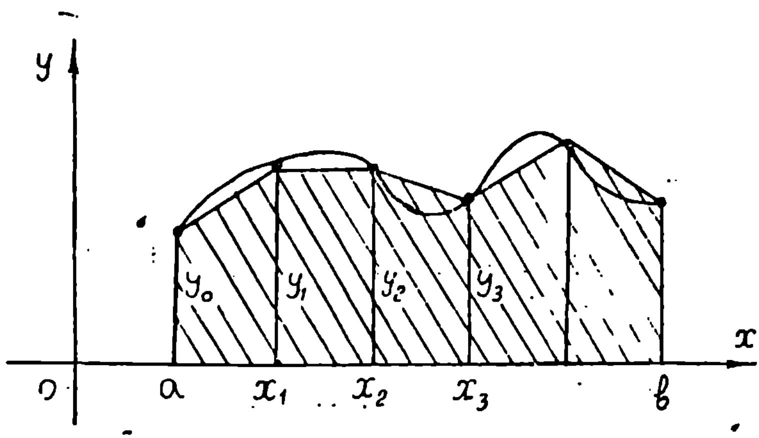
$$|R| = \left|\sum_{k=1}^{n} R_k\right| \leqslant \frac{M_2}{12n^3}\sum_{k=1}^{n}(b-a)^3 = \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3. \tag{2.12}$$

ამრიგად

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right). \qquad (2.13)$$

(2.13) არის ტრაპეციების კვადრატული ფორმულა, ცდომილება ფასდება (2.12) უტოლობით.

ამრიგად, ტრაპეციების ფორმულის შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციას ვცვლით უბან-უბან წრფივი ფუნქციით, რადგან (2.9) საინტერპოლაციო მრავალწევრი წრფივია (ნახ. 51). აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია დადებითია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობის ტოლია, იცვლება 51-ე ნახაზზე დაშტრიხული ტრაპეციების ფართობთა ჯამით.



ნახ. 51

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. როგორც მართკუთხედების ფორმულა, ტრაპეციების ფორმულაც ზუსტია წრფივი ფუნქციებისათვის, ე. ი. ის ზუსტია ყველა მრავალწევრისათვის, რომლის რიგი არ აღემატება ერთს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. მტკიცდება, რომ თუ ფუნქციას აქვს მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებული, მაშინ (2.12) შეფასებას აგრეთვე ადგილი აქვს მართკუთხედების ფორმულისთვისაც.

ამრიგად, ისეთი კლასის ფუნქციებისათვის რომელთაც აქვთ მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებული, მართკუთხედებისა და ტრაპეციების ფორმულების ნაშთით წევრებს აქვთ $O(n^{-2})$ რიგი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. მტკიცდება, რომ ფუნქციის ყოფაქცევის გაუმჯობესებით (ე. ი. თუ ფუნქციას აქვს უწყვეტი $l>2$ რიგის წარმოე-

ბული) მართკუთხედებისა და ტრაპეციების ფორმულებით მიახლოების რიგის გაუმჯობესება არ ხდება, ის რჩება იგივე $O(n^{-2})$ რიგის.

ეს გარემოება მჭიდროდ არის დაკავშირებული იმ ფაქტთან, რომ მართკუთხედებისა და ტრაპეციების ფორმულები ზუსტია ისეთი მრავალწევრებისათვის, რომელთა რიგი არ აღემატება ერთს, მაგრამ არ არის ზუსტი მრავალწევრებისათვის რომელთა რიგი მეტია ერთზე.

4. სიმპსონის (პარაბოლების) ფორმულა. ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, \dots, n)$ სეგმენტზე კვანძებად ავიღოთ x_{k-1}, $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ და x_k წერტილები, მაშინ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი იქნება

$$P(x) = \frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)} f(x_{k-1}) + \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(\xi_k-x_{k-1})(\xi_k-x_k)} f(\xi_k) + \frac{(x-x_{k-1})(x-\xi_k)}{(x_1-x_{k-1})(x_k-\xi_k)} f(x_k),$$

ხოლო ნაშთითი წევრი —

$$\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_{k-1})(x-\xi_k)(x-x_k), \quad k=1, 2, \dots, n.$$

ადვილია შემოწმება, რომ

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)} dx = \frac{1}{6}(x_k-x_{k-1}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(\xi_k-x_{k-1})(\xi_k-x_k)} dx = \frac{2}{3}(x_k-x_{k-1}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x-x_{k-1})(x-\xi_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_k-\xi_k)} dx = \frac{1}{6}(x_k-x_{k-1}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{b-a}{n}.$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (2.3) და (2.4) ფორმულები $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტისათვის ღებულობს სახეს

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\,dx + R_k = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6} f(x_{k-1}) + \frac{2}{3} f(\xi_k) + \frac{1}{6} f(x_k)\right] + R_k, \tag{2.14}$$

ხოლო

$$|R_k| \leqslant \frac{M_3}{3!}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |(x - x_{k-1})(x - \xi_k)(x - x_k)|\,dx =$$

$$=\frac{M_3}{3!}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{\xi_k}(x-x_{k-1})(\xi_k-x)(x_k-x)dx+\int\limits_{\xi_k}^{x_k}(x-x_{k-1})(x-\xi_k)(x_k-x)dx\right)=$$

$$= \frac{M_3}{192}(x_k - x_{k-1})^4 = \frac{M_3}{192}\cdot\frac{(b-a)^4}{n^4}. \qquad (2.15)$$

(2.14) და (2.15)-დან გვაქვს

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1}) + \frac{2}{3}f(\xi_k) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}f(x_k)\right] + R = \frac{b-a}{6n}\{f(a) + f(b) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] +$$

$$+ 4\left[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)\right]\} + R,$$

სადაც

$$|R| = \left|\sum_{k=1}^n R_k\right| \leqslant \frac{M_3}{192\,n^4}\sum_{k=1}^n (b-a)^4 = \frac{M_3}{192\,n^3}(b-a)^4. \qquad (2.16)$$

მაშასადამე

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6\,n}\{f(a) + f(b) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] +$$

$$+ 4\left[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)\right]\}. \qquad (2.17)$$

(2.17) არის სიმპსონის კვადრატურული ფორმულა, ცდომილება ფასდება (2.16) უტოლობით.

ამრიგად, სიმპსონის ფორმულის შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციას ვცვლით მეორე რიგის პარაბოლებით, რომლებიც x_{k-1}, ξ_k და x_k წერტილებზე ღებულობენ შესაბამისად $f(x_{k-1})$, $f(\xi_k)$ და $f(x_h)$ მნიშვნელობებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. (2.17) ფორმულა ზუსტია ყველა მრავალწევრისათვის, რომელთა რიგი არ აღემატება ორს, ვინაიდან ასეთი ფუნქცი-

ებისათვის საინტერპოლაციო მრავალწევრი თვით ეს ფუნქციაა. თუმცა ირკვევა, რომ -ს ზუსტია აგრეთვე მესამე რიგის მრავალწევრებისათვისაც. მართლაც

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4}. \tag{2.18}$$

ამასთან $f(x) = x^3$ ფუნქციისათვის

$$\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = \frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right] =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[(a+b)(a^2 - ab + b^2) + \frac{(a+b)^3}{2}\right] =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{6}\left[\frac{3(a^2+b^2)}{2}\right] = \frac{b^4 - a^4}{4}. \tag{2.19}$$

(2.18) და (2.19) ტოლობებიდან ჩანს, რომ (2.17) ფორმულა ზუსტია მესამე რიგის მრავალწევრებისათვის. ამრიგად, (2.17) ფორმულა ზუსტია ისეთი მრავალწევრებისათვის, რომელთა რიგი არ აღემატება სამს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. მტკიცდება, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს მეოთხე რიგის უწყვეტი წარმოებული, მაშინ სიმპსონის ფორმულის ნაშთითი წევრისათვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$|R| \leqslant \frac{M_4}{2880 n^4}(b-a)^5.$$

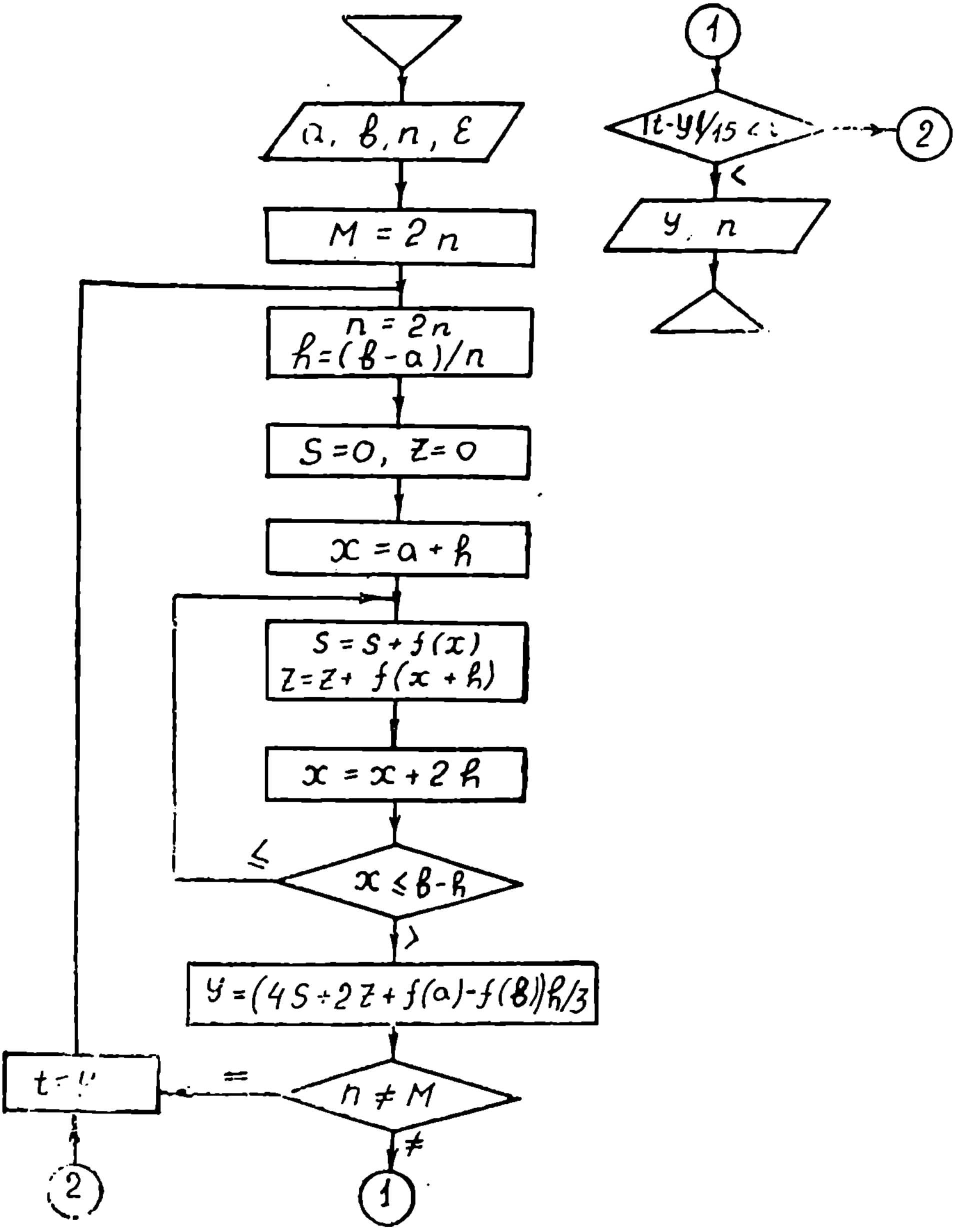
ე. ი. ასეთი კლასის ფუნქციებისათვის მიახლოებას აქვს $O(n^{-4})$ რიგი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. პრაქტიკულად უფრო მოსახერხებელია ცდომილების შემდეგი შეფასება

$$|R| < \frac{|I_2 - I_1|}{\lambda},$$

სადაც I_1 და I_2 არის ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობები გამოთვლილი შესაბამისად $[a, b]$ სეგმენტის n და $2n$ ტოლ ნაწილებად დანაწილებისათვის, ხოლო R კი — ცდომილება $2n$ ტოლ ნაწილად დანაწილებისათვის. ამასთან $\lambda = 3$ მართკუთხედებისა და ტრაპეციების ფორმულებისათვის, ხოლო სიმპსონის ფორმულისათვის $\lambda = 15$.

სიმპსონის მეთოდის ბლოკ-სქემა



სიმპსონის მეთოდის პროგრამა ბეისიკის ენაზე.

```
5   REM МЕТОД СИМПСОНА!— —
10  OPEN 'LP: 'FOR OUTPUT AS FILE #1
20  DATA a, b, c, e
30  READ A, B, C, E
40  DEF FNF (U)=f(U)
50  M=2 * C
60  C=2 * C \ H=(B — A) / C
70  S=0 \ Z=0
80  FOR X=A+H TO B—H STEP 2 * H
90  S=S+FNF (X) \ Z=Z+FNF (X+H)
100 NEXT X
110 U=(4 * S+2 * Z+FNF (A) —FNF (B)) * H / 3
120 IF C=M THEN L=U \ GO TO 60
130 IF ABS(L—U) / 15>E THEN L=U \ GO TO 60
140 PRINT #1, U=' ; U, 'C=' ; C
150 END
```

სიმპსონის მეთოდის პროგრამა ფორტრანის ენაზე.

```
    PROGRAM SIMPSO
    READ A, B, C, E
    M = 2 * C
5   C = 2 * C
    H = (B — A) / C
    S = 0
    Z = 0
    X = A + H
10  S = S + FUN(X)
    Z = Z + FUN (X + H)
    X = X + 2 * H
    IF (X. LE. B — H) GO TO 10
    U = (4 * S+2 * Z + FUN (A) — FUN(B))* H / 3
    IF (C — M) 1, 2, 1
2   AL = U
    GO TO 5
1   IF (ABS (AL — U) / 15 — E) 3, 3, 4
4   AL = U
    GO TO 5
```

```
3   PRINT *, ' , U = ', U, ' C = ', C
    END
    FUNCTION FUN (X)
    FUN = f (X)
    RETURN
    END
```

მეექვსე თავი

დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. ამოცანები, რომელთაც მივყავართ დიფერენციალური განტოლების ცნებამდე

ბუნებასა და ტექნიკაში მიმდინარე პროცესები, როგორც წესი, აღიწერება ამ პროცესებისათვის დამახასიათებელი რამოდენიმე პარამეტრის საშუალებით. ვთქვათ x და y რაიმე პროცესის დამახასიათებელი სიდიდეებია. ხშირად მათ შორის არსებობს დამოკიდებულება $F(x, y)=0$, მაგრამ მისი უშუალო დადგენა ყოველთვის არ ხერხდება, რადგან ამისათვის საჭიროა პროცესის დამახასიათებელი სხვა პარამეტრების ცოდნაც, რომლებიც ასევე შეიძლება x-ის ფუნქციებს წარმოადგენდნენ. მაგალითად, შეუძლებელია მოძრავი სხეულის მდებარეობასა და მოძრაობის დროს შორის დამოკიდებულების დადგენა, თუ არ გვეცოდინება სხეულის სიჩქარე და აჩქარება, რომლებიც აგრეთვე დროის ფუნქციებია.

საზოგადოდ, რაიმე პროცესის დამახასიათებელ ორ ან რამდენიმე პარამეტრს შორის დამოკიდებულების დადგენა საკმაოდ რთული ამოცანაა. მისი გადაწყვეტა ზოგ შემთხვევაში მოითხოვს დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას, ე. ი. ისეთი განტოლების ამოხსნას, რომელშიც უცნობ სიდიდეს წარმოადგენს ერთი ან რამოდენიმე ცვლადის ფუნქცია და რომელიც აუცილებლად შეიცავს ამ ფუნქციის წარმოებულს.

განვიხილოთ რამოდენიმე ამოცანა, რომელთა ამოხსნას მივყავართ დიფერენციალური განტოლების ცნებამდე.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. ვიპოვოთ დედამიწაზე ვარდნილი m მასის მქონე სხეულის სიჩქარის მოძრაობის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ ცნობილია, რომ სხეულზე ვარდნის დროს სიმძიმის ძალასთან ერთად მოქმედებს მოძრაობის საწინააღმდეგოდ მიმართული ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც სიჩქარის პროპორციულია.

ამოხსნა. ნიუტონის II კანონის თანახმად

$$m\frac{dV}{dt}=F,$$

სადაც $\frac{dV}{dt}$ წარმოადგენს სხეულის აჩქარებას, ხოლო F არის ძალა, რომელიც სხეულზე მოქმედებს მოძრაობის მიმართულებით. ცხადია, რომ F ძალა ტოლია სხეულზე მოქმედი სიმძიმის ძალისა და ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის სხვაობის (რადგან ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ). ამრიგად

$$m\frac{dV}{dt}=mg-kV. \tag{1.1}$$

მივიღეთ განტოლება, რომელშიც უცნობ სიდიდეს წარმოადგენს $V=V(t)$ ფუნქცია. ამასთანავე განტოლებაში შედის მისი $\frac{dV}{dt}$ წარმოებული. ე. ი. (1.1) განტოლება არის დიფერენციალური განტოლება.

ამოვხსნათ (1.1) დიფერენციალური განტოლება ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი $V=V(t)$, ფუნქცია, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას აქცევს იგივეობად.

ადვილია ჩვენება, რომ ნებისმიერი C რიცხვისათვის

$$V(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k} \tag{1.2}$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას.

ამრიგად, (1.1) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა, ბუნებრივია ვიკითხოთ — ამონახსნთა ამ სიმრავლიდან რომელი გამოხატავს ჭეშმარიტ დამოკიდებულებას კონკრეტული ვარდნის შემთხვევაში სხეულის სიჩქარესა და ვარდნის ხანგრძლივობას შორის?

იმისათვის, რომ მივიღოთ ამ კითხვაზე პასუხი, საჭიროა ვიცოდეთ ვარდნილი სხეულის მოძრაობის შესახებ რაიმე დამატებითი ინფორმაცია. მაგალითად, სხეულის სიჩქარე დროის რაიმე მომენტში. ვთქვათ, როდესაც $t=0$, მაშინ $V=V_0$. თუ დროისა და სიჩქარის ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (1.2) ტოლობაში, მივიღებთ $V_0=C+\frac{mg}{k}$, საიდანაც $C=V_0-\frac{mg}{k}$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში დამოკიდებულებას

ვარდნილი სხეულის სიჩქარესა და ვარდნის ხანგრძლივობას შორის ამყარებს ფუნქცია

$$V=\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}.$$

ა მ ო ც ა ნ ა 2. ცნობილია, რომ რადიაქტიური ნივთიერების დაშლის სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია რადიაქტიური ნივთიერების მასისა მოცემულ მომენტში. ვიპოვოთ რადიაქტიური ნივთიერების მასის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ ცნობილია, რომ დროის საწყისი $t=0$ მომენტში რადიაქტიური ნივთიერების მასა m_0-ის ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ დროის t მომენტში რადიაქტიური ნივთიერების მასაა m, ხოლო $t+\Delta t$ მომენტში კი $m+\Delta m$. შეფარდებას $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ ეწოდება დაშლის საშუალო სიჩქარე. ხოლო ამ შეფარდების ზღვარს $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}$ კი ეწოდება დაშლის სიჩქარე დროის t მომენტში. რადგან

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt},$$

ამიტომ ამოცანის პირობის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{dm}{dt}=-km, \qquad (1.3)$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია, ხოლო ნიშანი „—“ დასმულია იმიტომ, რომ დროის ზრდასთან ერთად რადიაქტიური ნივთიერების მასა კლებულობს. (1.3) განტოლება წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას. მას აკმაყოფილებს შემდეგი ფუნქციები

$$m=C\,e^{-kt}.$$

რადგან $m=m_0$, როცა $t=0$, ადვილად დავადგენთ, რომ მასის დროზე დამოკიდებულებას გამოსახავს ფუნქცია

$$m=m_0\,e^{-kt}. \qquad (1.4)$$

k კოეფიციენტის მნიშვნელობა გამოითვლება ექსპერიმენტულად. ვთქვათ t_0 დროის განმავლობაში დაიშალა თავდაპირველი მასის $\alpha\%$. ე. ი.

$$m_0\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)=m_0\,e^{-kt_0}.$$

აქედან $k = -\frac{1}{t_0} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)$. ასე იქნა დადგენილი, რომ რადიუმისათვის $k = 0{,}000436$.

ვიპოვოთ რადიუმის ნახევარდაშლის პერიოდი T, ანუ ის დრო, რომლის განმავლობაში რადიუმის თავდაპირველი მასის ნახევარი იშლება. ამისათვის (1.4) ტოლობაში ჩავსვათ $m = \frac{m_0}{2}$. მივიღებთ

$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$, საიდანაც

$$T = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0{,}000436} \approx 1590 \text{ წელი.}$$

ამოცანა 3 (პირველი გვარის ქიმიური რეაქცია). განვიხილოთ ქიმიური პროცესი, რომლის დროსაც ერთი ნივთიერება შედის რეაქციაში მეორესთან. რეაქციაში მონაწილე ნივთიერებების მასა გამოისახება გრამმოლებში. ცნობილია, რომ პირველი გვარის ქიმიური რეაქციებისათვის, თუ ნივთიერების მასა გამოისახება გრამ-მოლებში, რეაქციის სიჩქარე დროის t მომენტში პირდაპირპროპორციულია იმ ნივთიერების რაოდენობისა, რომელიც ამ მომენტში არ არის შესული რეაქციაში. ვიპოვოთ რეაქციაში შესული ნივთიერების რაოდენობის რეაქციის მიმდინარეობის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ ცნობილია, რომ დროის $t = 0$ მომენტში ქიმიურ რეაქციაში შემავალი ნივთიერების მასაა m_0.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ Δm-ით ნივთიერების მასის ის ნაწილი, რომელიც შევიდა რეაქციაში დროის t მომენტიდან $t + \Delta t$ მომენტამდე. ზღვარს $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$ ეწოდება ქიმიური რეაქციის სიჩქარე t მომენტში. ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება:

$$\frac{dm}{dt} = k\,(m_0 - m),$$

სადაც $m = m(t)$ არის რეაქციაში შესული ნივთიერების რაოდენობა დროის t მომენტში.

მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს შემდეგი ფუნქციები

$$m = m_0 - Ce^{-kt}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $m = 0$, როცა $t = 0$, მივიღებთ, რომ $C = m_0$. საბოლოოდ გვექნება

$$m = m_0\,(1 - e^{-kt}).$$

ვინაიდან t-ს ზრდასთან ერთად მაჩვენებლიანი ფუნქცია e^{-kt} უსასრულოდ მცირდება, ამიტომ გარკვეული დროის შემდეგ იგი გახდება იმდენად მცირე, რომ m თითქმის არ განსხვავდება m_0-გან და რეაქცია პრაქტიკულად შეწყდება.

§ 2. ძირითადი ცნებები

განსაზღვრება 2.1. განტოლებას რაიმე უცნობი ფუნქციის მიმართ, რომელიც შეიცავს ამ ფუნქციის ერთ რომელიმე წარმოებულს მაინც, დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

თუ უცნობი ფუნქცია ერთ ცვლადზეა დამოკიდებული, დიფერენციალურ განტოლებას ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება, ხოლო, თუ რამოდენიმე ცვლადზე — კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება. მაგალითად,

$$y''' + 3y' = 5x$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა, ხოლო

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

წარმოადგენს კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს.

დიფერენციალური განტოლება ზოგადი სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

განსაზღვრება 2.2. დიფერენციალური განტოლების რიგი ეწოდება ამ განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქციის წარმოებულის უმაღლეს რიგს.

მაგალითად, $y''-y'=1$ არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, ხოლო $y'-xy^3=5x$ კი — პირველი რიგისა.

განსაზღვრება 2.3. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი რაიმე ინტერვალში ეწოდება ფუნქციას, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას აქცევს იგივეობად არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის ამ ინტერვალიდან.

ამრიგად, დიფერენციალური განტოლების ყოველ ამონახსნს შეესაბამება გარკვეული ინტერვალი. შემდგომში, იქ სადაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, ჩვენ არ მივუთითებთ ინტერვალს, რომელზედაც ფუნქცია არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა საზოგადოდ დაკავშირებულია ინტეგრებასთან, ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებას უწოდებენ, მის ამონახსნს — დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს, ხოლო ამონახსნის გრაფიკს კი ინტეგრალურ წირს. რადგან დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებსა და ინტეგრალურ წირებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა, ამიტომ მათ აიგივებენ ერთმანეთთან და ხმარობენ გამოთქმას: მოცემული წირი არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

აქვე შევნიშნოთ, რომ დიფერენციალური განტოლების ამონახსენი საზოგადოდ ელემენტარული ფუნქციებით არ გამოისახება. მაგალითად,

$$y' = \sin x^2 \tag{2.2}$$

განტოლების ამონახსნი ელემენტარულ ფუნქციას არ წარმოადგენს.

მიღებულია, რომ დიფერენციალური განტოლება ამოხსნილად ითვლება, თუ მისი ამონახსნის მოძებნა დაყვანილია ინტეგრალის აღების ოპერაციამდე. ამ გაგებით (2.2) განტოლების ამონახსნია

$$y = \int \sin x^2\, dx$$

ფუნქცია.

ზოგ შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლება ისეთია, რომ საზოგადოდ მისი ამოხსნა ინტეგრებით არ ხერხდება. ასეთ შემთხვევაში მიმართავენ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის სხვა მეთოდებს. მაგალითად, ამონახსნს ეძებენ თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით და სხვა. ჩვენ შემდგომში ვნახავთ, რომ ე. წ. ბესელის* დიფერენციალური განტოლება

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0$$

ამოხსნადია ნებისმიერი n-სათვის, თუმცა ის ინტეგრებით საზოგადოდ არ ამოიხსნება.

განსაზღვრება 2.4. დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ამოხსნილია უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ, ეწოდება ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლება.

საზოგადოდ, n-ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

* ფ. ვ. ბესელი (1784—1846) — გერმანელი ასტრონომი.

§ 3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(x,\ y,\ y') = 0.$$

თუ იგი ამოხსნილია y' წარმოებულის მიმართ, ე. ი. მოცემულია ნორმალური სახით, მაშინ ის შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$y' = f(x, y). \tag{3.1}$$

(3.1) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{3.2}$$

მართლაც, თუ (3.1) განტოლებაში y'-ს შევცვლით $\dfrac{dy}{dx}$-ით და შემდეგ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ dx-ზე, მივიღებთ

$$f(x, y)\,dx - dy = 0,$$

რაც არის (3.1) დიფერენციალური განტოლების (3.2) სახე, როცა $M(x,\ y) = f(x,\ y)$ და $N(x.\ y) = -1$. ახლა, თუ მოცემულია (3.2) განტოლება, მაშინ მეორე წევრის მარჯვენა მხარეში გადატანით და $N(x,\ y)\,dx$-ზე გაყოფით ($N(x,\ y) \neq 0$), გვექნება

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,\ x)}{N(x,\ y)}\,,$$

რომელიც წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების (3.1) სახეს.

დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხის დადგენა. ამ მხრივ (3.1) განტოლებისათვის მართებულია შემდეგი თეორემა, რომელსაც ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის კოშის თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 3.1.* თუ $f(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციებია სიბრტყის წერტილთა რაიმე D არეში, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $(x_0,\ y_0) \in D$ წერტილი, არსებობს (3.1) განტოლების ერთადერთი $y = \varphi(x)$ ამონახსნი x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, რომელიც აკმაყოფილებს $\varphi(x_0) = y_0$ პირობას.

---

* თეორემა 3.1-ის დამტკიცება იხ. § 15.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ნებისმიერი $(x_0, y_0)\in D$ წერტილისათვის არსებობს (3.1) განტოლების ერთადერთი ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (x_0, y_0) წერტილში.

შევნიშნოთ, რომ, თუ D არეზე $f(x, y)$ ფუნქციას მოვთხოვთ მხოლოდ უწყვეტობას, მაშინ ყოველი $(x_0, y_0)\in D$ წერტილისათვის იარსებებს (3.1) განტოლების ისეთი $y=\varphi(x)$ ამონახსნი, რომ $\varphi(x_0)=y_0$, მაგრამ ის საზოგადოდ არ იქნება ერთადერთი. მართლაც, განვიხილოთ განტოლება $y'=\sqrt[3]{y^2}$. ამ განტოლებაში $f(x, y)=\sqrt[3]{y^2}$ ცხადია, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი მთელ Oxy სიბრტყეზე. ამასთანავე $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ კერძო წარმოებული განიცდის წყვეტას ნებისმიერ $(x_0, 0)$ წერტილში. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $y=0$ და $y=\dfrac{1}{27}(x-x_0)^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნებს და ორივე აკმაყოფილებს პირობას $y(x_0)=0$.

უნდა აღინიშნოს, რომ თეორემა 3.1 რჩება მართებული იმ შემთხვევაში, თუ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებულს ნაცვლად უწყვეტობისა მოვთხოვთ, რომ ის იყო შემოსაზღვრული ყოველი $(x_0, y_0)\in D$ წერტილის რაიმე მიდამოში.

თეორემა 3.1-დან გამომდინარეობს, რომ (3.1) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა, რადგან D არის განსხვავებულ (x_0, y_0) და (x_0, y_1) წერტილებს $(y_0\neq y_1)$ განსხვავებული ამონახსნები შეესაბამება.

პირობას, რომ $y(x_0)=y_0$, ეწოდება საწყისი პირობა. მას ხშირად შემდეგნაირად ჩავწერთ

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0.$$

ამოცანას, ვიპოვოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(x_0)=y_0$ საწყის პირობას, ეწოდება კოში-ს ამოცანა. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში აკმაყოფილებს თეორემა 3.1-ის პირობებს, მაშინ როგორც ეს აღნიშნული თეორემიდან გამომდინარეობს, კოშის ამოცანას (3.1) განტოლებისათვის გააჩნია ამონახსნი და იგივე ერთადერთია.

განსაზღვრება 3.1. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ანუ ზოგადი ინტეგრალი ეწოდება $y=\varphi(x, C)$ ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია ნებისმიერ C მუდმივზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) C-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარკვეული სიმრავლიდან, $y=\varphi(x, C)$ ფუნქცია არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

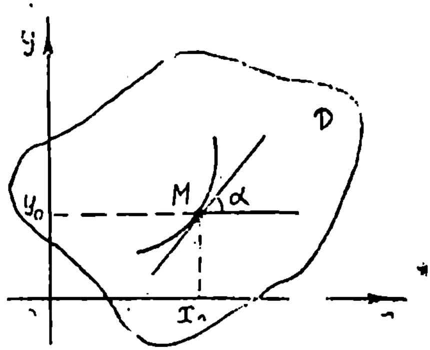
ბ) ნებისმიერი საწყისი $y(x_0)=y_0$ პირობისათვის, სადაც (x_0, y_0) ეკუთვნის (x, y)-ის ცვლილების იმ არეს, რომელშიც შესრულებულია არსებობის და ერთადერთობის თეორემის პირობები, შეიძლება ვიპოვოთ $C=C_0$ ისეთი მნიშვნელობა, რომ $y=\varphi(x, C_0)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას.

ზოგ შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ არაცხადი სახით: $\Phi(x, y, C)=0$, რომელიც y-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში შეიძლება საზოგადოდ არ ამოიხსნას.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან მასში C მუდმივის რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობის ჩასმით, ეწოდება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

§ 4. მიმართულებათა ველი. იზოკლინები

ვთქვათ (3.1) განტოლების მარჯვენა მხარე განსაზღვრულია და აკმაყოფილებს თეორემა 3.1-ის პირობებს რაიმე D არეში. დავუშვათ $y=y(x)$ არის მისი კერძო ამონახსნი, რომლის შესაბამისი ინტეგრალური წირი გადის D არის $M(x_0, y_0)$ წერტილში (ნახ. 52). გავავლოთ M წერტილში ამ წირის მხები და k-თი აღვნიშნოთ მისი კუთხური კოეფიციენტი, მაშინ, როგორც ვიცით $k=y'(x_0)$.



ნახ. 52

მაგრამ

$$y'(x_0)=f(x_0), \quad y(x_0)=f(x_0, y_0),$$

ე. ი.

$$k=f(x_0, y_0).$$

ამრიგად, თუ $M(x_0, y_0)$ წერტილში გადის (3.1) განტოლების ინტეგრალური წირი, მაშინ ამ წირისადმი M წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტია $f(x_0, y_0)$.

გავავლოთ D არის ყოველ $M(x, y)$ წერტილზე $l_{x,y}$ წრფე, რომლის კუთხური კოეფიციენტია $f(x, y)$. მივიღებთ ე. წ. მიმართულებათა ველს, რომელიც (3.1) განტოლებითაა განსაზღვრული. ამაში მდგომარეობს (3.1) განტოლების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. კავშირი (3.1) განტოლებისა და მისი ამონახსნის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციებს შორის იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველი $y=\varphi(x)$ ინტეგრალური წირი ყოველ თავის $(x, \varphi(x))$ წერტილში ეხება $l_{x,\varphi(x)}$ წრფეს.

განსაზღვრება 4.1. სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $f(x, y)=C$ $(C=\text{const})$, ეწოდება $y'=f(x, y)$ განტოლების იზოკლინი.

ამრიგად, იზოკლინი წარმოადგენს სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთაც მოცემული განტოლების მიმართულებათა ველში შეესაბამება ერთიდაიგივე მიმართულება. მაგალითად, $y'=\frac{y}{x}$ განტოლების იზოკლინებია $y=kx$ წრფეები.

§ 5. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით

განსაზღვრება 5.1. დიფერენციალურ განტოლებას

$$f_1(x)\,dx+f_2(y)\,dy=0, \tag{5.1}$$

სადაც $f_1(x)$ და $f_2(y)$ შესაბამისად x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით.

ვთქვათ ამ განტოლების ამონახსნია $y=\varphi(x)$ ფუნქცია, მაშინ $dy=\varphi'(x)\,dx$. შევიტანოთ (5.1) განტოლებაში y და dy-ის ეს მნიშვნელობები და მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ. გვექნება

$$\int f_1(x)\,dx+\int f_2(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=C\ ^{(*}.$$

თუ მეორე ინტეგრალში მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას $y=\varphi(x)$, მივიღებთ:

$$\int f_1(x)\,dx+\int f_2(y)\,dy=C. \tag{5.2}$$

---

* შემდგომში $\int f(x)dx$-ის ქვეშ ვიგულისხმებთ $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთ პირვანდელ ფუნქციას.

ამრიგად, (5.1) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი $y=\varphi(x)$ აკმაყოფილებს (5.2) ტოლობას. ცხადია აგრეთვე, რომ თუ $y=\varphi(x)$ აკმაყოფილებს (5.2) ტოლობას, მაშინ იგი დააკმაყოფილებს (5.1)-საც. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ (5.2)-ს გავადიფერენციალებთ.

ამრიგად, (5.2) ტოლობა ამყარებს დამოკიდებულებას დამოუკიდებელ x ცვლადს, (5.1) განტოლების y ამონახსნსა და C მუდმივს შორის. შეიძლება ჩვენება, რომ (5.2) წარმოადგენს (5.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

შევნიშნოთ, რომ (5.2) ტოლობა უშუალოდ მიიღება (5.1) განტოლებიდან, თუ პირველ შესაკრებს ვაინტეგრებთ x ცვლადით, მეორეს კი y-ით, ე. ი. მეორე შესაკრებს ვაინტეგრებთ ისე, თითქოს y დამოუკიდებელი ცვლადია. იგივე დასკვნამდე მივალთ, თუ გავიხსენებთ, რომ პირველი რიგის დიფერენციალს გააჩნია ფორმის ინვარიანტობის თვისება, ე. ი. მიუხედავად იმისა, რომ y არის x-ის ფუნქცია, $f(y)\,dy$ დიფერენციალის ფორმა უცვლელი რჩება. ამიტომ (5.1) განტოლების თითოეული შესაკრები შეიძლება ვაინტეგროთ ცალ-ცალკე, თავიანთი არგუმენტების მიხედვით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$\frac{dx}{1+x}+\frac{ydy}{1+y^2}=0$$

დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=1$ საწყის პირობას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაინტეგროთ მოცემული განტოლება. მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$\int\frac{dx}{1+x}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=C,$$

ანუ

$$\ln|1+x|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C.$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $x=0$, $y=1$. გვექნება

$$C=\frac{1}{2}\ln 2.$$

ამრიგად, საძიებელი კერძო ამონახსნია

$$\ln|1+x|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

განსაზღვრება 5.2. დიფერენციალურ განტოლებას

$$f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0, \tag{5.3}$$

სადაც $f_1(x)$, $f_2(x)$ და $g_1(y)$, $g_2(y)$ შესაბამისად x და y ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

ვიგულისხმოთ, რომ $g_1(y)\, f_2(x) \neq 0$ და გავყოთ (5.3) განტოლება ამ ნამრავლზე, მივიღებთ:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\, dy = 0.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით. მისი ინტეგრებით მიიღება (5.3) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\, dy = C. \tag{5.4}$$

შევნიშნოთ, რომ, თუ $f_1(x)\, g_1(y) \equiv 0$, მაშინ (5.3)-ის ამონახსნია $y=C$. თუ $g_1(y)=0$, როცა $y=y_0$, მაშინ (5.4) ზოგად ამონახსნთან ერთად (5.3) განტოლების ამონახსნია აგრეთვე $y=y_0$ ფუნქცია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $xy^2dx-(1+x^2)\ln y\, dy=0$ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. განტოლება გავყოთ $y^2(1+x^2)$ გამოსახულებაზე. გვექნება

$$\frac{xdx}{1+x^2} - \frac{\ln y\, dy}{y^2} = 0.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} - \int \frac{\ln y}{y^2}\, dy = C,$$

ანუ

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{y}(\ln y + 1) = C.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ვთქვათ $y\neq 0$. მაშინ გვექნება $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}$. ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+\ln C_1\ (C_1>0).$$

აქედან გვაქვს

$$\ln|y|=\ln C_1|x|,$$

ანუ $y=Cx$, სადაც C ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მუდმივია.

შევნიშნოთ, რომ $y=0$ ფუნქცია აგრეთვე მოცემული განტოლების ამონახსნია.

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y=Cx$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $y'=f(x)$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, სადაც

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } -\infty<x<0,\\ x+1, & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & \text{როცა } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

ამოხსნა. ცხადია

$$y=\int f(x)\,dx=\begin{cases}x+C_1, & \text{როცა } -\infty<x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C_2, & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2+C_3, & \text{როცა } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

რადგანაც განტოლების ზოგადი ამონახსნი უნდა იყოს უწყვეტი ფუნქცია, ამიტომ

$$C_1=C_2=C_3-\frac{1}{2}.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსენია

$$y=\begin{cases}x+C, & \text{როცა } -\infty<x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & \text{როცა } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & \text{როცა } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

განსაზღვრება 6.1. ორი ცვლადის $z=f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება n-ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, თუ ნებისმიერი $\lambda\neq 0$ რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$f(\lambda x, \lambda y)=\lambda^n f(x, y).$$

მაგალითად, $f(x, y)=x^2+y^2$ არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, ხოლო $f(x, y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ კი — პირველი რიგის. მართლაც პირველ მაგალითში $f(\lambda x, \lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda y)^2=\lambda^2(x^2+y^2)=\lambda^2 f(x, y)$, მეორეში კი — $f(\lambda x, \lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x, y)$.

განსაზღვრება 6.2. პირველი რიგის

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{6.1}$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $f(x, y)$ არის 0-რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ.

ერთგვაროვანი განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით. პირობის თანახმად $f(\lambda x, \lambda y)=f(x, y)$. თუ ამ ტოლობაში ავიღებთ $\lambda=\frac{1}{x}$, გვექნება

$$f(x, y)=f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

მოვახდინოთ ჩასმა $y=ux$. მაშინ $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. ამის გათვალისწინებით (6.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1, u),$$

ანუ

$$(f(1, u)-u)\,dx-x\,du=0.$$

მივიღეთ განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ამოხსნა. $\frac{x+y}{x-y}$ არის 0-რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია. გამოვიყენოთ ჩასმა $y=ux$, მაშინ $dy=udx+xdu$. მივიღებთ:

$$\frac{udx+xdu}{dx}=\frac{1+u}{1-u}.$$

აქედან გვაქვს

$$x(1-u)\,du-(1+u^2)\,dx=0,$$

ანუ

$$\frac{(1-u)\,du}{1+u^2}-\frac{dx}{x}=0.$$

უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრებით გვექნება

$$\operatorname{arctg} u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln C|x|,\ C>0.$$

თუ ჩავსვამთ $u=\frac{y}{x}$, მივიღებთ

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln C|x|. \tag{6.2}$$

რადგან, ყოველ $(0;\ y)$ წერტილში, სადაც $y\neq 0$, მოცემული დიფერენციალური განტოლება აკმაყოფილებს ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობებს, ამიტომ (6.2)-დან გამომდინარეობს, რომ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება $\Phi(x,\ y,\ C)=0$, სადაც

$$\Phi(x,y,C)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln C\sqrt{x^2+y^2}, & \text{როცა } x>0,\\ |y|-\frac{1}{C}e^{\pi/2}, & \text{როცა } x=0,\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln C\sqrt{x^2+y^2}+\pi, & \text{როცა } x<0,\ y>0\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln C\sqrt{x^2+y^2}-\pi, & \text{როცა } x<0,\ y<0.\end{cases}$$

შენიშვნა. $M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0$ განტოლება იქნება ერთგვაროვანი, თუ $M(x,\ y)$ და $N(x,\ y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთ-

გვაროვანი ფუნქციებია. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ერთი და იმავე რიგის ორი ერთგვაროვანი ფუნქციის შეფარდება ნულოვანი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$xydx - (x^2 + y^2)\,dy = 0$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=1$ საწყის პირობას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან xy და x^2+y^2 ფუნქციები მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია, ამიტომ ეს განტოლება არის ერთგვაროვანი. გამოვიყენოთ ჩასმა $y=ux$. მაშინ $dy=udx+xdu$ და გვექნება

$$x^2udx - x^2\,(1+u^2)\,(udx + xdu) = 0$$

ანუ

$$x\,(1+u^2)\,du + u^3\,dx = 0.$$

ცვლადთა განცალების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{1+u^2}{u^3}\,du = 0.$$

აქედან

$$\ln C\,|ux| = \frac{1}{2u^2}.$$

თუ ჩავსვამთ $u=\dfrac{y}{x}$, გვექნება

$$\ln C\,|y| = \frac{x^2}{2y^2}.$$

საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $C=1$, ე. ი. საძებნი ამონახსნია $\ln|y| = \dfrac{x^2}{2y^2}$.

ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right). \tag{6.3}$$

ეს განტოლება ცვლადთა გარდაქმნით დაიყვანება ერთგვაროვან, ანდა დიფერენციალურ განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით.

მართლაც, როცა $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$, მაშინ (6.3) განტოლება ცვლადთა გარდაქმნით

$$x = u + h,\ y = v + k,$$

სადაც h და k არის

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი, მიიყვანება ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{a_1u + b_1v}\right).$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda$, (6.3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right).$$

ეს განტოლება $z = ax + by$ ჩასმით მიიყვანება განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 5}{-x + y + 3}$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ $x = u + h$, $y = v + k$. მაშინ $dy = dv$, $dx = du$ და გვექნება

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v + h + k - 5}{-u + v - h + k + 3}.$$

შევარჩიოთ h და k ისე, რომ

$$\begin{cases} h + k - 5 = 0, \\ -h + k + 3 = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $k = 1$, $h = 4$. მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებას

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{-u + v}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $v=zu$. მაშინ $\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du}$ და გვექნება

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{z+1}{z-1}.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება:

$$\frac{(z-1)\,dz}{1+2z-z^2}-\frac{du}{u}=0.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2|-\ln|u|=-\frac{1}{2}\ln C_1,\ \ C_1>0.$$

ანუ

$$u^2(1+2z-z^2)=C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. რადგან $z=\frac{v}{u}$, ამიტომ

$$u^2+2uv-v^2=C.$$

დავუბრუნდეთ საწყის x და y ცვლადებს. მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$(x-4)^2+2(x-4)(y-1)-(y-1)^2=C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y-3}{4x-2y+1}$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $y(o)=0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{-3}{1}$, ეს განტოლება $z=2x-y$ ჩასმით დაიყვანება განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით. მართლაც, ამ შემთხვევაში $\frac{dy}{dx}=2-\frac{dz}{dx}$ და განტოლება მიიღებს სახეს

$$2-\frac{dz}{dx}=\frac{z-3}{2z+1}$$

ან

$$\frac{2z+1}{3z+5}\,dz-dx=0.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$\frac{2}{3} z - \frac{7}{9} \ln |3z + 5| - x = C.$$

თუ ჩავსვამთ $z = 2x - y$, გვექნება

$$\frac{2}{3}(2x - y) - \frac{7}{9} \ln |6x - 3y + 5| - x = C.$$

აქედან, საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$C = \frac{7}{9} \ln 5.$$

§ 7. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

განსაზღვრება 7.1. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ იგი წრფივია უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულის მიმართ.

პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x), \tag{7.1}$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალში. როდესაც $Q(x) \equiv 0$, მაშინ (7.1) განტოლებას ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში — არაერთგვაროვანი.

(7.1) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით $y = uv$. მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$$

თუ y და $\frac{dy}{dx}$-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ (7.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$v \frac{du}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + P(x) v \right] = Q(x). \tag{7.2}$$

v ფუნქცია შევარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\frac{dv}{dx} + P(x) v = 0.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს განტოლებას განცალებადი ცვლადებით. ცვლადთა განცალებით გვექნება

$$\frac{dv}{v} + P(x)\,dx = 0.$$

აქედან

$$\ln v + \int P(x)\,dx = 0,$$

ე. ი.

$$v = e^{-\int P(x)\,dx}.$$

ცხადია $v(x) \neq 0$. v-ს ასეთი მნიშვნელობისათვის (7.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$v\,\frac{du}{dx} = Q(x),$$

საიდანაც

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C = \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C.$$

თუ u და v ფუნქციების მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ $y = uv$ გამოსახულებაში, საბოლოოდ გვექნება

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(C + \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right). \tag{7.3}$$

ცხადია, (7.3) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია იქნება (7.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ზოგჯერ მიზანშეწონილია (7.3) ტოლობა ჩავწეროთ ცვლადი ზედა საზღვრის მქონე განსაზღვრული ინტეგრალების საშუალებით. ამ შემთხვევაში (7.3) ფორმულა ღებულობს სახეს

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}\left(C + \int_{x_0}^{x} Q(t)\,e^{\int_{x_0}^{t} P(u)\,du}\,dt\right), \tag{7.4}$$

სადაც x_0 რაიმე ფიქსირებული რიცხვია. (7.4) ფორმულიდან ადვილად

მივიღებთ, რომ (7.1) განტოლების კერძო ამონახსნი რომელიც აკმაყოფილებს $y(x_0)=y_0$ საწყის პირობას, არის შემდეგი ფუნქცია

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)\,dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\, e^{\int\limits_{x_0}^{t} P(u)\,du}\, dt\right).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sin x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში $P(x)=-\mathrm{tg}\,x$, $Q(x)=\sin x$. (7.3) ფორმულის თანახმად ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = e^{\int \mathrm{tg}\,x dx}\left(C+\int \sin x\, e^{-\int \mathrm{tg}\,x dx} dx\right) =$$

$$= e^{-\ln|\cos x|}\left(C+\int \sin x\, e^{\ln|\cos x|} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{|\cos x|}\left(C+\frac{1}{2}\ \mathrm{sign}\,(\cos x)\int \sin 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{|\cos x|}\left(C-\frac{1}{4}\ \mathrm{sign}\,(\cos x)\cdot\cos 2x\right) = \frac{1}{\cos x}\left(C-\frac{1}{4}\cos 2x\right)^{(*}$$

§ 8. ბერნულის** განტოლება

განტოლებას

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)y^n, \tag{8.1}$$

სადაც $n\neq 0$ და $n\neq 1$, ეწოდება ბერნულის განტოლება (როცა $n=0$ (8.1) წარმოადგენს წრფივ განტოლებას, ხოლო როცა $n=1$ — განტოლებას განცალებადი ცვლადებით).

---

* უკანასკნელ ტოლობას ადგილი აქვს იმ ინტერვალებისათვის, რომელშიც შესრულებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები.

** ი. ბერნული (1651—1705) — შვეიცარიელი მათემატიკოსი.

(8.1) განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ წრფივ განტოლებაზე. მართლაც, (8.1) განტოლების ორივე მხარე გავყოთ y^n-ზე, მივიღებთ

$$y^{-n} y' + P(x)\, y^{-n+1} = Q(x). \qquad (8.2)$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $z = y^{-n+1}$, მაშინ $(-n+1)\, y^{-n} y' = z'$ და (8.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$z' + (1-n)\, P(x)\, z = (1-n)\, Q(x).$$

ეს განტოლება z-ის მიმართ წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$y' - \frac{1}{x}\, y = xy^3.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლების ორივე მხარე გავყოთ y^2-ზე. მივიღებთ

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = x^2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{1}{y} = z$. მაშინ $-\frac{y'}{y^2} = z'$ და გვექნება

$$z' + \frac{1}{x}\, z = -x^2.$$

აქედან

$$z = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int (-x^2)\, e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{|x|} \left(C - \frac{\operatorname{sign} x}{4}\, x^4 \right)$$

საბოლოოდ

$$y = \frac{1}{x} \left(C - \frac{x^4}{4} \right).$$

შევნიშნოთ, რომ $y = 0$ აგრეთვე მოცემული განტოლების ამონახსნია.

§ 9. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

განვიხილოთ შემდეგი სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \qquad (9.1)$$

(9.1) განტოლებას ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებ-ში, თუ ამ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს რაიმე $u(x, y)$ ორი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ე. ი.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du(x, y).$$

ამ შემთხვევაში (9.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$du(x, y) = 0.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ (9.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$u(x, y) = C.$$

მაგალითად, ადვილია შემოწმება, რომ

$$2xydx + (x^2 - 2y)\,dy = 0$$

განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს $u(x, y) = x^2y - y^2$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ამიტომ ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$d(x^2 y - y^2) = 0,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$x^2y - y^2 = C.$$

ბუნებრივად ისმება კითხვა: რა პირობებში იქნება (9.1) განტოლების მარცხენა მხარე $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი და როგორ უნდა ვიპოვოთ იგი? პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 9.1. თუ $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ფუნქციები და მათი $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ და $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე D არეში, მაშინ იმისათვის, რომ გამოსახულება $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ წარმოადგენდეს რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს D არეში, აუცილებელია და საკმარისი რომ D არის ყოველ წერტილში ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{9.2}$$

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. დავუშვათ, არსებობს ისეთი $u(x, y)$ ფუნქცია, რომ $du = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$. ვაჩვენოთ, რომ ადგილი ექნება (9.2) ტოლობას. ვინაიდან

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

ამიტომ გვექნება ტოლობა

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

ეს წარმოადგენს იგივურ ტოლობას dx და dy-ის მიმართ, ამიტომ

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

გავაწარმოოთ პირველი ტოლობა y-ით, მეორე კი x-ით. მივიღებთ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}. \tag{9.3}$$

რადგან $\frac{\partial M}{\partial y}$ და $\frac{\partial N}{\partial x}$ უწყვეტი ფუნქციებია D არეში, ამიტომ უწყვეტი იქნება ამავე არეში $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ და $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ კერძო წარმოებულები და შვარცის თეორემის თანახმად ისინი იქნებიან ტოლი, ე. ი.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

აქედან, (9.3) ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

საკმარისობა. ვაჩვენოთ, რომ თუ შესრულებულია (9.2) პირობა, მაშინ არსებობს ისეთი $u(x, y)$ ფუნქცია, რომ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ წარმოადგენს $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ამისათვის, რადგან $M(x, y)$ და $N(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციებია, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \tag{9.4}$$

განვიხილოთ (9.4)-ის პირველი განტოლება. მისი ინტეგრებით მივიღებთ

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt + \varphi(y), \tag{9.5}$$

სადაც $\varphi(y)$ არის y ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია.

$\varphi(y)$ ფუნქცია შევარჩიოთ ისე, რომ $u(x, y)$ აკმაყოფილებდეს (9.4)-ის მეორე ტოლობასაც. ამისათვის (9.5) ტოლობა გავაწარმოოთ y ცვლადით. გვექნება

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt+\varphi'(y).$$

გავუტოლოთ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე $N(x, y)$ ფუნქციას. მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt+\varphi'(y)=N(x, y).$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში გაწარმოება, პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის გაწარმოების წესის თანახმად, შეგვიძლია შევასრულოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ. გვექნება

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t, y)}{\partial y}\,dt+\varphi'(y)=N(x, y).$$

თეორემის პირობის თანახმად $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, ამიტომ

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}\,dt+\varphi'(y)=N(x, y). \tag{9.6}$$

ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის თანახმად

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}\,dt=N(t, y)\Big|_{x_0}^{x}=N(x, y)-N(x_0, y).$$

ამიტომ (9.6)-ის თანახმად გვაქვს

$$N(x, y)-N(x_0, y)+\varphi'(y)=N(x, y),$$

ანუ

$$\varphi'(y)=N(x_0, y).$$

აქედან

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0, t)\,dt+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. თუ $\varphi(y)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (9.5)-ში, მივიღებთ

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)\,dt + C. \tag{9.7}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ არა მარტო $u(x, y)$ ფუნქციის არსებობა, არამედ მივიღეთ ფორმულა, რომელიც იძლევა მის პრაქტიკულად მონახვის საშუალებას (როგორც წესი, ამ ფორმულით პრაქტიკულად სარგებლობის დროს იღებენ $C=0$).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$(3x^2 y + y^2)\,dx + (x^3 + 2xy)\,dy = 0$$

განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირველ რიგში შევამოწმოთ (9.2) პირობა. გვაქვს

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2y.$$

ე. ი. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. მაშასადამე, მოცემული განტოლება წარმოადგენს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. ამიტომ (9.7) ფორმულის თანახმად მივიღებთ (ავიღოთ $x_0 = y_0 = 0$):

$$u(x, y) = \int_0^x (3t^2 y + y^2)\,dt = (t^3 y + t y^2)\Big|_0^x = x^3 y + xy^2.$$

ამრიგად მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$x^3 y + xy^2 = C.$$

§ 10. მაინტეგრებელი მამრავლი

განვიხილოთ

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{10.1}$$

განტოლება, რომლის მარცხენა ნაწილი არ წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს. ზოგჯერ შესაძლებელია მოიძებნოს ისეთი $\mu(x, y)$ ფუნ-

ქცია, რომელზედაც გამრავლებით (10.1) განტოლების მარცხენა ნაწილი სრულ დიფერენციალად გარდაიქმნება. ასეთ ფუნქციას ეწოდება (10.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მაინტეგრებელი მამრავლი, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: გავამრავლოთ (10.1) განტოლება $\mu(x, y)$ ფუნქციაზე, რომელიც ჯერჯერობით უცნობია. მივიღებთ

$$\mu(x, y)\, M(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, N(x, y)\, dy = 0.$$

ეს განტოლება რომ იყოს განტოლება სრულ დიფერენციალებში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს პირობა

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

აქედან

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

ანუ

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

გავყოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი μ ფუნქციაზე. გვექნება

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (10.2)$$

ცხადია, ყოველი $\mu(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (10.2) განტოლებას, იქნება (10.1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი.

(10.2) განტოლება კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებაა და საზოგადოდ უფრო ძნელი ამოსახსნელია, ვიდრე (10.1) განტოლება. მხოლოდ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში შესაძლებელია ვიპოვოთ $\mu(x, y)$ ფუნქცია.

კერძოდ, ვთქვათ μ დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ ცვლადზე, მაგალითად x-ზე. მაშინ $\dfrac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$ და (10.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

როდესაც $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ არ არის დამოკიდებული y ცვლადზე ამ განტოლებიდან ინტეგრებით ვიპოვით $\ln \mu$-ს, შემდეგ კი μ-ს.

ანალოგიურად, თუ $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული x ცვლადზე (ე. ი. μ შეგვიძლია ვეძებოთ, როგორც მხოლოდ y ცვლადის ფუნქცია), მაშინ

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

განტოლების ინტეგრებით ვიპოვით მაინტეგრებელ მამრავლს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოხსენით განტოლება.

$$(y+x y^2)\, dx-xdy=0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $M(x, y)=y+x y^2$, $N(x, y)=-x$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-1, \quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლება არ წარმოადგენს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. რადგანაც

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=-\frac{2}{y},$$

ამიტომ მაინტეგრებელი მამრავლი დამოკიდებულია მხოლოდ y ცვლადზე. გვექნება

$$\frac{d \ln \mu}{dy}=-\frac{2}{y},$$

აქედან $\ln \mu=-2 \ln y$, ანუ $\mu=\frac{1}{y^2}$.

გავამრავლოთ მოცემული განტოლების ორივე მხარე $\frac{1}{y^2}$-ზე. მივიღებთ განტოლებას

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\, dy=0,$$

რომელიც წარმოადგენს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C=0.$$

§ 11. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც არ არის ამოხსნილი წარმოებულის მიმართ

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ნორმალური სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს, ე. ი. ისეთ განტოლებებს, რომლებიც ამოხსნილია წარმოებულის მიმართ და აქვს შემდეგი სახე

$$y' = f(x, y).$$

მაგრამ პირველი რიგის დიფერენტიალური განტოლება შეიძლება არ იყოს ამოხსნილი წარმოებულის მიმართ. როგორც აღვნიშნეთ, საზოგადოდ მას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x, y, y') = 0.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან უშუალოდ y'-ის ამოხსნით ყოველთვის არ ხერხდება ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებაზე გადასვლა. მიუხედავად ამისა, ზოგიერთ შემთხვევაში დამხმარე პარამეტრის შემოტანით ზოგადი სახის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება მივიყვანოთ ისეთ განტოლებამდე, რომლის ამოხსნა წარმოებულის მიმართ შესაძლებელია. განვიხილოთ რამოდენიმე ასეთი შემთხვევა.

კერძოდ, ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ისეთ განტოლებებს, რომლებიც ამოხსნილია უცნობი ფუნქციის ან არგუმენტის მიმართ. ე. ი. განვიხილავთ შემდეგი სახის განტოლებებს

$$y = f(x, y'), \tag{11.1}$$

$$x = f(y, y'). \tag{11.2}$$

ჯერ განვიხილოთ (11.1) განტოლება. შემოვიტანოთ დამხმარე პარამეტრი $p = y'$. მაშინ (11.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$y = f(x, p). \tag{11.3}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით. გვექნება

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{dp}{dx}. \tag{11.4}$$

(11.4) განტოლებიდან მიიღება ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლება $\dfrac{dp}{dx}$-ის მიმართ. მისი ზოგადი ამონახსნი (11.3) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს (11.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$y = y'^2 + xy' - x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = y'$. მაშინ

$$y = p^2 + x(p-1). \tag{11.5}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით. მივიღებთ

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + p - 1 + x\frac{dp}{dx},$$

ანუ

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2p+x}.$$

უკანასკნელი განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{dx}{dp} = x + 2p.$$

ეს განტოლება წრფივია. მისი ზოგადი ამონახსნია:

$$x = ce^p + 2(p+1). \tag{11.6}$$

თუ x-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (11.5)-ში, მივიღებთ

$$y = ce^p(p-1) - p^2 + 2. \tag{11.7}$$

(11.6) და (11.7) ტოლობები წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით.

ახლა განვიხილოთ (11.2) განტოლება. შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = y'$. მივიღებთ

$$x = f(x, p). \tag{11.8}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა y-ით: გვექნება

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}. \tag{11.9}$$

(11.8) და (11.9) განტოლებებიდან ისევე, როგორც (11.1) განტოლების შემთხვევაში, ვღებულობთ (11.2) განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$x = y'^2 + \frac{y}{y'}.$$

ამოხსნა. დავუშვათ $p=y'$. მივიღებთ

$$x=p^2+\frac{y}{p}. \tag{11.10}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა y-ით. გვექნება

$$\frac{1}{p}=2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy},$$

ანუ

$$\frac{dp}{dy}\left(2p-\frac{y}{p^2}\right)=0.$$

აქედან

$$p_1=c\ (c\neq 0)\quad \text{და}\quad p_2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}y}.$$

ჩავსვათ p-ს ეს მნიშვნელობები (11.10)-ში, მივიღებთ

$$y=cx-c^3\quad \text{და}\quad y=\frac{2}{3\sqrt[3]{3}}x^{3/2}.$$

ახლა განვიხილოთ (11.1) და (11.2) განტოლებების კერძო შემთხვევები.

1. განტოლება, რომელიც ამოხსნილია y-ის მიმართ და არ შეიცავს x ცვლადს. ასეთ განტოლებას აქვს სახე

$$y=\varphi(y'). \tag{11.11}$$

შემოვიტანოთ დამხმარე პარამეტრი $p=y'$, მაშინ (11.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$y=\varphi(p). \tag{11.12}$$

$y'=p$ ტოლობა გადავწეროთ შემდეგნაირად $dx=\frac{dy}{p}$. აქედან

$$x=\int\frac{dy}{p}+C.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და გავითვალისწინოთ (11.12) ტოლობა. გვექნება

$$x=\int\frac{dy}{p}+c=\frac{y}{p}+\int\frac{ydp}{p^2}=\frac{y}{p}+\int\frac{\varphi(p)\,dp}{p^2}+C. \tag{11.13}$$

(11.13) და (11.12) განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს (11.11) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $y=y'+4(y')^3+(y')^4$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ $y'=p$, მაშინ $y=p+4p^3+p^4$. გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x ცვლადით. მივიღებთ

$$p=(1+12p^2+4p^3)\frac{dp}{dx}.$$

აქედან

$$dx=\left(\frac{1}{p}+12p+4p^2\right)dp \quad (p\neq 0).$$

საიდანაც

$$x=\ln|p|+6p^2+\frac{4}{3}p^3+C.$$

ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x=\ln|p|+6p^2+\frac{4}{3}p^3+C, \\ y=p+4p^3+p^4. \end{cases}$$

თუ $p=0$, მაშინ $y'=p$ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $y=C$, რომელიც მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს, როდესაც $C=0$.

2. განტოლება, რომელიც ამოხსნილია x-ის მიმართ და არ შეიცავს y-ს. მას აქვს შემდეგი სახე

$$x=\varphi(y'). \tag{11.14}$$

წინა შემთხვევის ანალოგიურად შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=p$. მაშინ (11.14) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$x=\varphi(p). \tag{11.15}$$

$y'=p$ ტოლობიდან გვაქვს $dy=pdx$, საიდანაც

$$y=\int pdx+C=px-\int xdp+C,$$

ანუ

$$y-p\varphi(p)-\int\varphi(p)\,dp+C. \tag{11.16}$$

(11.15) და (11.16) განტოლებათა სისტემა იქნება (11.14) განტოლების ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ $x=\operatorname{tg} y'$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავუშვათ $y'=p$. აქედან

$$y=\int p dx = px - \int x dp = px - \int \operatorname{tg} p dp = px + \ln|\cos p| + C =$$

$$= p \operatorname{tg} p + \ln|\cos p| + C,$$

ამიტომ

$$y = p \operatorname{tg} p + \ln|\cos p| + C.$$

ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით იქნება

$$\begin{cases} x = tg\, p, \\ y = p \operatorname{tg} p + \ln|\cos p| + C. \end{cases}$$

3. ლაგრანჟის განტოლება. ლაგრანჟის განტოლება ეწოდება ისეთ განტოლებას, რომელიც წრფივია x და y ცვლადების მიმართ და აქვს სახე

$$y = \varphi(y')x + g(y'). \tag{11.17}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(y') \neq y'$ ($\varphi(y') = y'$ შემთხვევას განვიხილავთ ქვემოთ). აღვნიშნოთ $y'=p$. მაშინ (11.17) განტოლებიდან გვექნება

$$y = \varphi(p)x + g(p) \tag{11.18}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით. მივიღებთ

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}.$$

აქედან გვაქვს

$$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + g'(p).$$

რადგან $\varphi(p) - p \neq 0$, ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{g'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება x ცვლადისა და მისი $\frac{dx}{dp}$ წარმოებულის მიმართ. ვთქვათ მისი ზოგადი ამონახსნია

$$\Phi(x, p, C) = 0. \tag{11.19}$$

(11.19) ტოლობა (11.18) ტოლობასთან ერთად წარმოადგენს ლაგრანჟის განტოლების ზოგად ამონახსენს პარამეტრული სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ $y=x(y')^2+(y')^2$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ $y'=p$. მაშინ $y=xp^2+p^2$, ანუ $y=p^2(x+1)$. გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით. მივიღებთ

$$p=p^2+2(x+1)p\frac{dp}{dx}.$$

მიღებული განტოლება შევკვეცოთ p-ზე (თუ $p=0$, მაშინ $y=C$, რომელიც მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს, მხოლოდ $C=0$-თვის). გვექნება

$$1=p+2(x+1)\frac{dp}{dx}.$$

აქედან

$$\frac{dx}{x+1}=\frac{2dp}{1-p},$$

საიდანაც

$$\ln|x+1|=-2\ln|1-p|+\ln C_1,\ C_1>0.$$

ამ ტოლობის პოტენცირებით მივიღებთ

$$x+1=\frac{C}{(1-p)^2},\quad C\in R.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{(1-p)^2}-1, \\ y=\dfrac{Cp^2}{(1-p)^2}. \end{cases}$$

ამ სისტემიდან p პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ

$$y=(\sqrt{|x+1|}+C)^2. \tag{11.20}$$

რადგან, მოცემული განტოლებისათვის $x=-1$ წრფის წერტილებში დარღვეულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები, ამიტომ (11.20) ზოგადი ამონახსნია იმ ინტერვალებში, რომლებიც არ შეიცავს $x=-1$ წერტილს.

4. კლეროს განტოლება. კლეროს განტოლება არის ლაგრანჟის განტოლების კერძო შემთხვევა, როდესაც $\varphi(y')=y'$, კლეროს განტოლების ზოგადი სახეა

$$y=xy'+g(y'). \tag{17.21}$$

---

* ა. კლერო (1713—1765) — ფრანგი მათემატიკოსი.

აქაც შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=p$. მაშინ

$$y = xp + g(p). \tag{11.22}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x ცვლადით. გვექნება

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}.$$

საიდანაც

$$\frac{dp}{dx}(x + g'(p)) = 0.$$

აქედან: $\dfrac{dp}{dx} = 0$, ან $x + g'(p) = 0$. $\dfrac{dp}{dx} = 0$ განტოლებიდან ვღებულობთ, რომ $p = C$. თუ p-ს მნიშვნელობას ჩავსვამთ (11.22) ტოლობაში, მივიღებთ კლეროს განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y = Cx + g(C), \tag{11.23}$$

რომელიც წარმოადგენს წრფეთა ერთობლიობას.

ასევე, $x+g'(p)=0$ განტოლება (11.22) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს კლეროს განტოლების ამონახსნს პარამეტრული სახით:

$$\begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -pg'(p) + g(p). \end{cases} \tag{11.24}$$

ეს ამონახსნი არ მიიღება კლეროს განტოლების ზოგადი ამონახსნიდან C-ს არცერთი მნიშვნელობისათვის, რადგან იგი არ არის წრფივი ფუნქცია. ეს არის ე. წ. განსაკუთრებული* ამონახსნი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვიპოვოთ $y=y'x+\dfrac{1}{y'}$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი და განსაკუთრებული ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=p$. (11.23) ფორმულის თანახმად განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება.

$$y = cx + \frac{1}{c}.$$

განსაკუთრებული ამონახსნი ვიპოვოთ (11.24) ფორმულის გამოყენებით. რადგან ჩვენ შემთხვევაში $g'(p) = -\dfrac{1}{p^2}$, ამიტომ განსაკუთრებული ამონახსნი იქნება

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2}, \\ y = \dfrac{2}{p}. \end{cases}$$

---

* განსაკუთრებული ამონახსნი იხ. § 12.

თუ ამ სისტემიდან გამოვრიცხავთ p პარამეტრს, გვექნება $y^2=4x$. ამრიგად, ზოგადი ამონახსნი არის $y=cx+\dfrac{1}{c}$ ერთპარამეტრიან წრფეთა ოჯახი, ხოლო განსაკუთრებული ამონახსნია $y^2=4x$ პარაბოლა, რომელშიც ცხადია არ მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან c-ს არცერთი მნიშვნელობისათვის.

§ 12. განსაკუთრებული ამონახსნი

განვიხილოთ განტოლება

$$y' = f(x, y). \tag{12.1}$$

როგორც ვიცით, თუ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის მიდამოში შესრულებულია არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობები, მაშინ M_0 წერტილში გადის (12.1) განტოლების ერთადერთი ინტეგრალური წირი. მაგრამ როდესაც კოშის თეორემის პირობები დარღვეულია, მაშინ შესაძლებელია, რომ M_0 წერტილში გადიოდეს არა ერთი, არამედ რამოდენიმე ინტეგრალური წირი. ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ, თუ ერთ წერტილში გადის (12.1) განტოლების ორი ან რამოდენიმე ინტეგრალური წირი, ეს წირები ეხებიან ერთმანეთს ამ წერტილში (ე. ი. გააჩნიათ აღნიშნულ წერტილში საერთო მხები).

შევნიშნოთ, რომ, თუ განტოლება არ არის მოცემული ნორმალური სახით, მაშინ შესაძლებელია, რომ ერთ წერტილში გამავალ სხვადასხვა ინტეგრალურ წირს ჰქონდეს სხვადასხვა მხები.

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლების ამონახსნს ეწოდება განსაკუთრებული ამონახსნი, თუ შესაბამის ინტეგრალურ წირს ნებისმიერ წერტილში ეხება სხვა რომელიმე ინტეგრალური წირი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y'=y^{\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი.

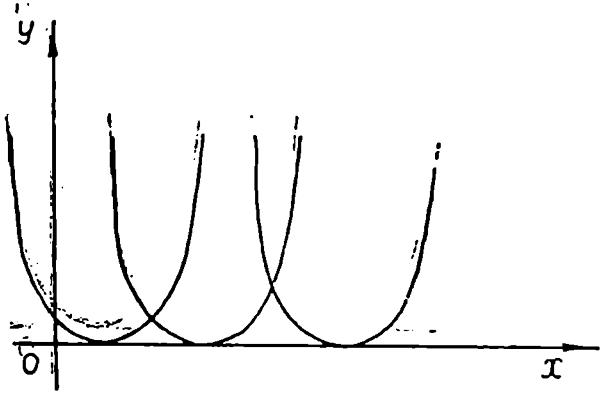
ა მ ო ხ ს ნ ა. განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y^{1-\alpha}=(x-c)(1-\alpha). \tag{12.2}$$

ცხადია, რომ მოცემული განტოლების ამონახსნია აგრეთვე $y=0$ ფუნქცია. ადვილია ჩვენება, რომ $y=0$ წირს ყოველ წერტილში ეხება (12.2) ტოლობით განსაზღვრული რომელიმე ინტეგრალური წირი. ე. ი. $y=0$ არის განსაკუთრებული ამონახსნი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $4xyy'-y'^3-8y^2=0$ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი.

ამოხსნა. ფუნქცია $y=c(x-c)^2$ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას ნებისმიერი c-თვის. ცხადია, რომ $y=0$ აგრეთვე მოცემული განტოლების ამონახსნია, ამასთან მას ყოველ წერტილში ეხება $y=c(x-c)^2$ ტოლობით განსაზღვრული რომელიმე ინტეგრალური წირი. ე. ი. $y=0$ არის განსაკუთრებული ამონახსნი (ნახ. 53).



ნახ. 53

§ 13. წირთა ოჯახის მომვლები

განვიხილოთ განტოლება

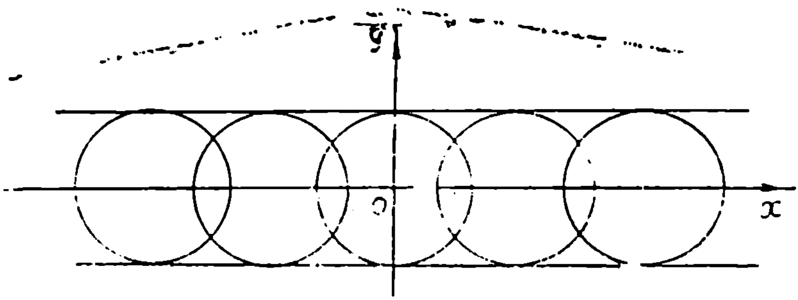
$$\Phi(x, y, c) = 0, \tag{13.1}$$

სადაც c პარამეტრია, რომელსაც შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა მნიშვნელობები. c მუდმივის ყოველი ფიქსირებული $c=c_0$ მნიშვნელობისათვის (13.1) განტოლება განსაზღვრავს გარკვეულ წირს Oxy სიბრტყეზე. c პარამეტრის ცვლილებით მივიღებთ წირთა სიმრავლეს, რომელსაც წირთა ერთპარამეტრიანი ოჯახი ეწოდება. (13.1) განტოლებას ეწოდება წირთა ოჯახის განტოლება.

განსაზღვრება 13. 1. რაიმე L წირს ეწოდება ერთპარამეტრიან წირთა ოჯახის მომვლები, თუ იგი ყოველ თავის წერტილში ეხება წირთა მოცემული ოჯახის რომელიმე წირს, ამასთანავე L წირი ამ ოჯახის ყოველ წირს ეხება და ფიქსირებულ წირთან მისი შეხების წერტილი ერთადერთია.

მაგალითად, განვიხილოთ $(x-c)^2+y^2=R^2$ განტოლება, სადაც c არის პარამეტრი. ეს განტოლება ყოველი ფიქსირებული c-თვის განსაზღვრავს წრეწირს, რომლის ცენტრი $(c; 0)$ წერტილში მდებარეობს და რადიუსია R, ამიტომ ამ განტოლებით განსაზღვრული წირთა ოჯახი იქნება ყველა იმ R-რადიუსიან წრეწირთა სიმრავლე, რომელთა

ცენტრი Ox ღერძზე მდებარეობს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ ოჯახის მომვლებებია $y=R$ და $y=-R$ წრფეები (ნახ. 54).



ნახ. 54

დავუშვათ, რომ (13.1) განტოლებით განსაზღვრულ წირთა ოჯახს გააჩნია მომვლები და მისი განტოლებაა $y=\varphi(x)$, სადაც φ არის დიფერენცირებადი ფუნქცია. ვთქვათ $M(x, y)$ წერტილი მდებარეობს მომვლებზე. მომვლების განსაზღვრების თანახმად, არსებობს მოცემული ოჯახის წირი, რომელსაც აგრეთვე ეკუთვნის $M(x, y)$ წერტილი. აღნიშნული წირი თავის მხრივ განისაზღვრება (13.1) განტოლებიდან c პარამეტრის რომელიმე მნიშვნელობისათვის. მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ მომვლების ყოველ $M(x, y)$ წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ c პარამეტრის რაიმე $c=c(x, y)$ მნიშვნელობა. რადგან $M(x, y)$ წერტილი ამასთან (13.1) განტოლებიდან პარამეტრის ამ მნიშვნელობით განსაზღვრული წირის წერტილიცაა, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მომვლების წერტილები აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$\Phi(x, y, c(x, y))=0. \tag{13.2}$$

ვთქვათ $c(x, y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა რომლის დიფერენციალი ყოველ წერტილში განსხვავებულია ნულისაგან. გავაწარმოოთ (13.2) ტოლობა x ცვლადით. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება:

$$\Phi_x' + \Phi_y' y' + \Phi_c'\left(\frac{\partial c}{\partial x} + y' \frac{\partial c}{\partial y}\right) = 0. \tag{13.3}$$

რადგან წირთა ოჯახის $M(x, y)$ წერტილში გამავალი წირისადმი ამავე წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი განისაზღვრება $\Phi_x'+\Phi_y'\cdot y'=0$ ტოლობიდან (ვიგულისხმოთ, რომ ერთდროულად Φ_x' და Φ_y' ნული არ ხდება), ხოლო მომვლები $M(x, y)$

წერტილში ეხება აღნიშნულ წირს, ამიტომ (13.3) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\Phi_c\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}y'\right)=0.$$

ვინაიდან $dc(x, y)\neq 0$, ამიტომ $\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}y'\neq 0$ და უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება

$$\Phi_c'(x, y, c)=0.$$

ამრიგად, გვაქვს

$$\begin{cases}\Phi(x, y, c)=0,\\ \Phi_c'(x, y, c)=0.\end{cases} \tag{13.4}$$

(13.4) სისტემა წარმოადგენს მომვლების არსებობის აუცილებელ პირობას. ე. ი. თუ (13.1) ტოლობით განსაზღვრულ წირთა ოჯახს აქვს მომვლები, მაშინ იგი დააკმაყოფილებს (13.4) სისტემას.

ვთქვათ მოცემულია $F(x, y, y')=0$ დიფერენციალური განტოლება და $\Phi(x, y, c)=0$ ინტეგრალურ წირთა ოჯახს აქვს მომვლები, მაშინ ცხადია ის იქნება მოცემული განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი.

ამრიგად, თუ

$$\begin{cases}\Phi(x, y, c)=0,\\ \dfrac{\partial\Phi(x, y, c)}{\partial c}=0\end{cases}$$

სისტემიდან გამოვრიცხავთ c პარამეტრს, ზოგიერთ შემთხვევაში მივიღებთ განსაკუთრებულ ამონახსნს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y=2cx-c^2$ წრფეთა ოჯახის მომვლები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გავაწარმოოთ აღებული განტოლება c პარამეტრით, გვექნება $2x-2c=0$, აქედან $x=c$. ამ და წინა განტოლებიდან მივიღებთ $y=x^2$.

შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ $y=x^2$ პარაბოლა იქნება მოცემულ წრფეთა ოჯახის მომვლები.

§ 14. მეტრიკული სივრცე. კუმშვითი ასახვის პრინციპი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 14.1. მეტრიკული სივრცე ეწოდება რაიმე E სიმრავლეს, რომელზედაც განსაზღვრულია მეტრიკა, ე. ი. ფუნქცია ρ, რომელიც E სიმრავლის ელემენტების ყოველ დალაგებულ (x, y)

წყვილს შეუსაბამებს არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვს ისე, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

2) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, ნებისმიერი $x, y, z \in E$.

მეტრიკული სივრცის მაგალითებია: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელზედაც ρ ფუნქცია განსაზღვრულია ტოლობით $\rho(x, y) = |x-y|$: n-განზომილებიანი ევკლიდის კოორდინატული სივრცე R^n, თუ

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე $C[a, b]$. ეს სიმრავლე იქნება მეტრიკული სივრცე, თუ მასზე მეტრიკას განვსაზღვრავთ ტოლობით

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|\ .$$

შევნიშნოთ, რომ მეტრიკული სივრცის ელემენტებს ზოგჯერ მეტრიკული სივრცის წერტილებს უწოდებენ.

განსაზღვრება 14.2. E მეტრიკული სივრცის წერტილთა $\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება კრებადი $x_0 \in E$ წერტილისაკენ, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$ და ეს ფაქტი შემდეგნაირად ჩაიწერება $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ან $x_n \to x_0$.

$\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $n_0 > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, როდესაც $m > n_0$, $n > n_0$.

მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება სრული, თუ ამ სივრცის ელემენტთა ნებისმიერი ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია. მაგალითად, $[0; 1]$ სიმრავლე $\rho(x, y) = |x-y|$ მეტრიკით სრული მეტრიკული სივრცეა, ხოლო $]0; 1[$ სიმრავლე იგივე მეტრიკით არ არის სრული მეტრიკული სივრცე. მართლაც ამ სივრცეში $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია, მაგრამ იგი არ არის კრებადი $]0; 1[$ სივრცის არცერთი ელემენტისაკენ.

ვთქვათ E — მეტრიკული სივრცეა. დავუშვათ $A: E \to E$ არის ასახვა (ფუნქცია) E მეტრიკული სივრცისა თავისთავში. A ასახვას

ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ, $\{A(x_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია $A(x_0)$-კენ. ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} (A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0).$$

თუ A ასახვა უწყვეტია E სივრცის ყოველ წერტილში, მაშინ მას ეწოდება უწყვეტი ასახვა E სივრცეში ან შემოკლებით უწყვეტი ასახვა.

A ასახვას ეწოდება კუმშვითი ასახვა, თუ არსებობს $0<q<1$ რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერი $x, y \in E$ წერტილებისათვის მართებულია უტოლობა

$$\rho(A(x), A(y)) \leqslant q\rho(x, y). \tag{14.1}$$

ყოველი კუმშვითი ასახვა უწყვეტია. მართლაც, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, მაშინ (14.1)-ის თანახმად

$$\rho(A(x_n), A(x)) < q\rho(x_n, x) \to 0, \text{ როცა } n\to\infty. \text{ ე. ი.}$$

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(x).$$

x_0 წერტილს ეწოდება A ასახვის უძრავი წერტილი, თუ $A(x_0) = x_0$.

თ ე ო რ ე მ ა 14.1 (კუმშვითი ასახვის პრინციპი). ყოველ კუმშვით ასახვას, რომელიც განსაზღვრულია სრულ E მეტრიკულ სივრცეში, გააჩნია უძრავი წერტილი და ამასთან მხოლოდ ერთი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $x_0 \in E$ მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი წერტილია. დავუშვათ $x_1 = A(x_0)$, $x_2 = A(x_1), \ldots, x_n = A(x_{n-1}), \ldots$. ვაჩვენოთ, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია. მართლაც, ვთქვათ $m \geqslant n$, მაშინ

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) &= \rho(A(x_{n-1}), A(x_{m-1})) \leqslant q\rho(A(x_{n-2}), A(x_{m-2})) \leqslant \\ &\leqslant q^2\rho(A(x_{n-3}), A(x_{m-3})) \leqslant \cdots \leqslant q^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant \\ &\leqslant q^n[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \leqslant \\ &\leqslant q^n\rho(x_0, x_1)[1+q+q^2+\cdots+q^{m-n-1}] < q^n\rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-q}.\end{aligned}$$

რადგან $q<1$, ამიტომ მიღებული უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია. რადგან E სივრცე სრულია, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა იქნება კრებადი. ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. იმის გამო, რომ A ასახვა უწყვეტია, გვექნება

$$A(x_0) = \lim_{n\to\infty} A(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0.$$

ამრიგად, x_0 არის A ასახვის უძრავი წერტილი. ვაჩვენოთ, რომ იგი ერთადერთია. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $y_0 \in E$ ისეთი, რომ $y_0 \neq x_0$ და $A(y_0) = y_0$. მაშინ (14.1)-დან მივიღებთ

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(A(x_0), A(y_0)) \leqslant q\rho(x_0, y_0).$$

ეს უტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho(x_0, y_0) = 0$. მაგრამ რადგან $x_0 \neq y_0$, ამიტომ $\rho(x_0, y_0) \neq 0$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე. ი. უძრავი წერტილი ერთადერთია.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 15. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის დამტკიცება

ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$y' = f(x, y), \tag{15.1}$$

სადაც $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა 3.1-ის პირობებს რაიმე D არეში. დავუშვათ $(x_0, y_0) \in D$. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს (15.1) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$y(x_0) = y_0. \tag{15.2}$$

განვიხილოთ განტოლება

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt. \tag{15.3}$$

ასეთი სახის განტოლებას ეწოდება ინტეგრალური განტოლება. (15.3) განტოლების ამონახსნი რაიმე ინტეგრალში ეწოდება ყოველ $y = y(x)$ ფუნქციას, რომლის ჩასმით (15.3) განტოლება გადაიქცევა იგივეობად ამ ინტერვალის ყოველი წერტილისათვის.

ადვილია ჩვენება, რომ (15.3) განტოლება და (15.1) განტოლება $y(x_0) = y_0$ საწყისი პირობით ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

განვიხილოთ (x_0, y_0) წერტილის შემცველი მართკუთხედი

$$A = \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}.$$

a და b რიცხვები შევარჩიოთ ისე, რომ $A \subset D$. რადგან f და $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

ფუნქციები უწყვეტია D არეზე, ხოლო $A \subset D$ და A სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ f და $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციები A სიმრავლეში იქნებიან შემოსაზღვრული. ვთქვათ

$$M = \max_{(x,y)\in A} |f(x,y)|, \quad N = \max_{(x,y)\in A} \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|.$$

დავუშვათ

$$0 < \delta < \min\left\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\right\}. \tag{15.4}$$

აღვნიშნოთ $C(\sigma)$-თი $\sigma=[x_0-\delta, x_0+\delta]$ სეგმენტზე უწყვეტ იმ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|y(x)-y_0| \leqslant b$ ყოველი $x \in \sigma$-თვის.

$C(\sigma)$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ მეტრიკა შემდეგი ტოლობით:

$$\rho(f, g) = \max_{x\in\sigma} |f(x)-g(x)|.$$

მტკიცდება, რომ $C(\sigma)$ არის სრული მეტრიკული სივრცე.

განვიხილოთ $C(\sigma)$ სივრცეზე განსაზღვრული F ასახვა, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით.

$$F(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt, \quad x\in\sigma, \quad y\in C(\sigma).$$

ვაჩვენოთ, რომ F ასახვა არის $C(\sigma)$ სივრცის თავისთავში ასახვა. მართლაც, თუ $y \in C(\sigma)$, მაშინ

$$|F[y(x)] - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\right| \leqslant M\delta \leqslant M\,\frac{b}{M} = b.$$

ე. ი. $F(y) \in C(\sigma)$. ამასთანავე, თუ $y_1, y_2 \in C(\sigma)$, მაშინ

$$|F[y_1(x)] - F[y_2(x)]| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\,dt\right| \leqslant N\delta \max_{x\in\sigma} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

ამ უტოლობიდან გვაქვს

$$\max_{x\in\sigma} | F[y_1(x)] - F[y_2(x)] | \leqslant N\delta \max_{x\in\sigma} | y_1(t) - y_2(t) |,$$

ანუ

$$\rho(F(y_1) - F(y_2)) \leqslant N\delta\rho(y_1, y_2), \tag{15.5}$$

რადგან $N\delta < N\cdot\frac{1}{N} = 1$, ამიტომ (15.5) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ F არის კუმშვითი ასახვა. თეორემა 14.1-ის თანახმად, არსებობს ერთადერთი ფუნქცია $y\in C(\sigma)$ ისეთი, რომ $F(y)=y$. ანუ

$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$, ყოველი $x \in \sigma$-თვის. რადგან (15.3) განტოლება და (15.1) განტოლება $y(x_0)=y_0$ საწყისი პირობით ერთმანეთის ეკვივალენტურია, ამიტომ (15.1) განტოლებასაც გააჩნია $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $y(x_0)=y_0$.

ამრიგად, კოშის თეორემა დამტკიცებულია.

უნდა აღინიშნოს, რომ ჩვენ არა მარტო დავამტკიცეთ კოშის თეორემა, არამედ ვიპოვეთ ის უმცირესი ინტერვალი, რომელშიც $y=y(x)$ ფუნქცია არის კოშის ამოცანის ამონახსნი.

§ 16. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა

ვთქვათ მოცემულია დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{16.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობებს. ამ თეორემის ძალით არსებობს $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ სეგმენტი და ამ სეგმენტზე განსაზღვრული, (16.1) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y(x)$, რომელიც დააკმაყოფილებს $y(x_0)=y_0$ საწყის პირობას.

ვთქვათ, მოითხოვება ვიპოვოთ $y(c)$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა, სადაც გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x_0 < c \leqslant x_0+\delta$. დავა-

ნაწილოთ $[x_0, c]$ სეგმენტი n ტოლ ნაწილად წერტილებით $x_0, x_1, \ldots, \ldots, x_n=c$. სხვაობას $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$ ეწოდება გამოთვლის ბიჯი. x_i წერტილზე ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ y_i.

1. ეილერის მეთოდი. ეილერის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნებისმიერი სიზუსტით.

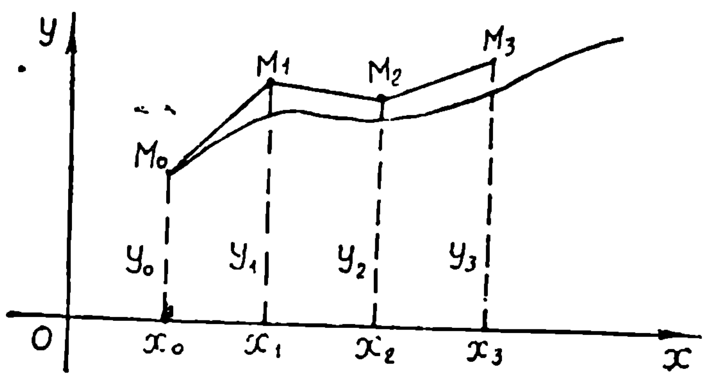
$[x_0, x_1]$ სეგმენტზე (16.1) განტოლების ნაცვლად განვიხილოთ

$$y_n'(x) = f(x_0, y_0) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$$

განტოლება, $y_n(x_0) = y_0$ საწყისი პირობით. ამ ამოცანის ამონახსნია

$$y_n(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) \qquad (16.2$$

ეს წრფივი ფუნქცია მივიღოთ (16.1) განტოლების მიახლოებით ამონახსნად $[x_0, x_1]$ სეგმენტზე. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $[x_0, x_1]$ სეგმენტზე საძებნი ინტეგრალური წირი შევცვალოთ ამ წირისადმი $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში გავლებული მხების მონაკვეთით (ნახ. 55).



ნახ. 55

(16.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$y_1 = y_n(x_1) = y_0 + h f(x_0, y_0),$$

$[x_1, x_2]$ სეგმენტზე (16.1) განტოლების ნაცვლად განვიხილოთ

$$y_n'(x) = f(x_1, y_1) \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$$

განტოლება, $y_n(x_1) = y_1$ საწყისი პირობით. ამ ამოცანის ამონახსნებია

$$y_n(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1). \tag{16.3}$$

ეს წრფივი ფუნქცია მივიღოთ (16.1) განტოლების მიახლოებით ამონახსნად $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე საძებნი ინტეგრალური წირი შევცვალეთ იმ წრფის მონაკვეთით, რომელიც გადის $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე და რომლის კუთხური კოეფიციენტია $f(x_1, y_1)$.

(16.3) ტოლობიდან გვაქვს

$$y_2 = y_n(x_2) = y_1 + h f(x_1, y_1).$$

გავაგრძელოთ ეს პროცესი. თუ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობები $y_1, y_2, \dots, y_k$ გამოთვლილია, მაშინ $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტზე (16.1)-ის ნაცვლად განვიხილოთ

$$y_n' = f(x_k, y_k) \quad (x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1})$$

განტოლება, $y_n(x_k) = y_k$ საწყისი პირობით. ამ ამოცანის ამონახსნი

$$y_n(x) = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k) \tag{16.4}$$

მივიღოთ (16.1) განტოლების ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $[x_k, x_{k+1}]$ სეგმენტზე.

(16.4)-დან გვაქვს

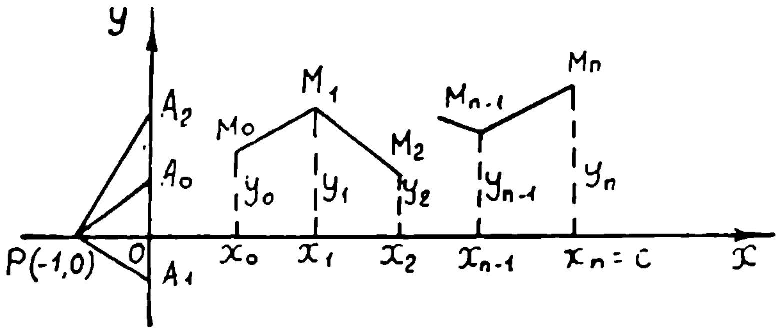
$$y_{k+1} = y_n(x_k) = y_k + f(x_k, y_k)\, h \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \tag{16.5}$$

(16.5) ფორმულით ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობათა ცხრილის აგების მეთოდს ეილერის მეთოდი ეწოდება.

(16.4) ტოლობით განსაზღვრულ $y_n(x)$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია $[x_0, c]$ სეგმენტზე ეწოდება „ეილერის ტეხილი". ამრიგად

$$y(c) \approx y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\, h.$$

ეილერის ტეხილი გეომეტრიულად შემდეგნაირად შეიძლება ავ-
გოს: ავიღოთ Ox ღერძზე პოლუსი $P(-1, 0)$ და შემდეგ ორდინატთა ღერძზე გადავზომოთ $OA_k = f(x_k, y_k)$ $(k=0, 1, \ldots)$ მონაკვეთები (ნახ. 56),



ნახ. 56

ცხადია, PA_k სხივის Ox ღერძთან დახრის კუთხის ტანგენსი $f(x_k, y_k)$-ს ტოლი იქნება. ამის შემდეგ M_0 წერტილზე გავავლოთ PA_0 სხივის პარალელური M_0M წრფე $x=x_1$ წრფესთან გადაკვეთამდე. გადაკვეთის $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე გავავლოთ PA_1 სხივის პარალელური M_1M_2 წრფე $x=x_2$ წრფესთან გადაკვეთამდე და ეს პროცესი გავაგრძელოთ.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 16.1. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია $R=[|x-x_0|\leqslant c,\ |y-y_0|\leqslant c]$ კვადრატში და

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N,$$

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M,$$

მაშინ ეილერის მეთოდის ცდომილება შეიძლება შეფასდეს უტოლობით

$$|y(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM}{2N}\left[(1+hN)^n - 1\right] \leqslant \frac{hM}{2N}\left(e^{nNh} - 1\right). \quad (16.6)$$

ამრიგად, არსებობის თეორემის პირობებში, ეილერის ტეხილთა $\{y_n(x)\}$ მიმდევრობა $[x_0, c]$ სეგმენტზე, როცა $n\to\infty$ თანაბრად კრებადია (16.1) განტოლების ჭეშმარიტი ამონახსნისაკენ..

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. ეილერის მეთოდი გამოთვლების ჩატარების თვალსაზრისით მარტივია, მაგრამ, როგორც (16.6) უტოლობიდან ჩანს, მისი ნაშთითი წევრი h-ის მიმართ პირველი რიგისაა, ამის გამო სასურველი სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა მცირე h-ის შერჩევა, რაც, თავის მხრივ, იწვევს გამოთვლებისათვის საჭირო დროის გაზრდას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. როდესაც საჭიროა ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა რაიმე c წერტილში ε სიზუსტით, პრაქტიკულად უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

გამოვთვალოთ $y(c)$-ს მიახლოებითი $\overline{y}(c)$ მნიშვნელობა $h=c-x_0$ ბიჯით, ე. ი.

$$\overline{y}(c)=y_0+hf(x_0, y_0).$$

$y^*(c)$ იყოს $y(c)$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოთვლილი $h_1=\dfrac{h}{2}=\dfrac{c-x_0}{2}$ ბიჯით, ე. ი.

$$y^*(c)=y_1^*+\frac{h}{2}f(x_1, y_1^*),$$

სადაც

$$x_1=x_0+\frac{h}{2}, \quad y_1^*=y_0+\frac{h}{2}f(x_0, y_0).$$

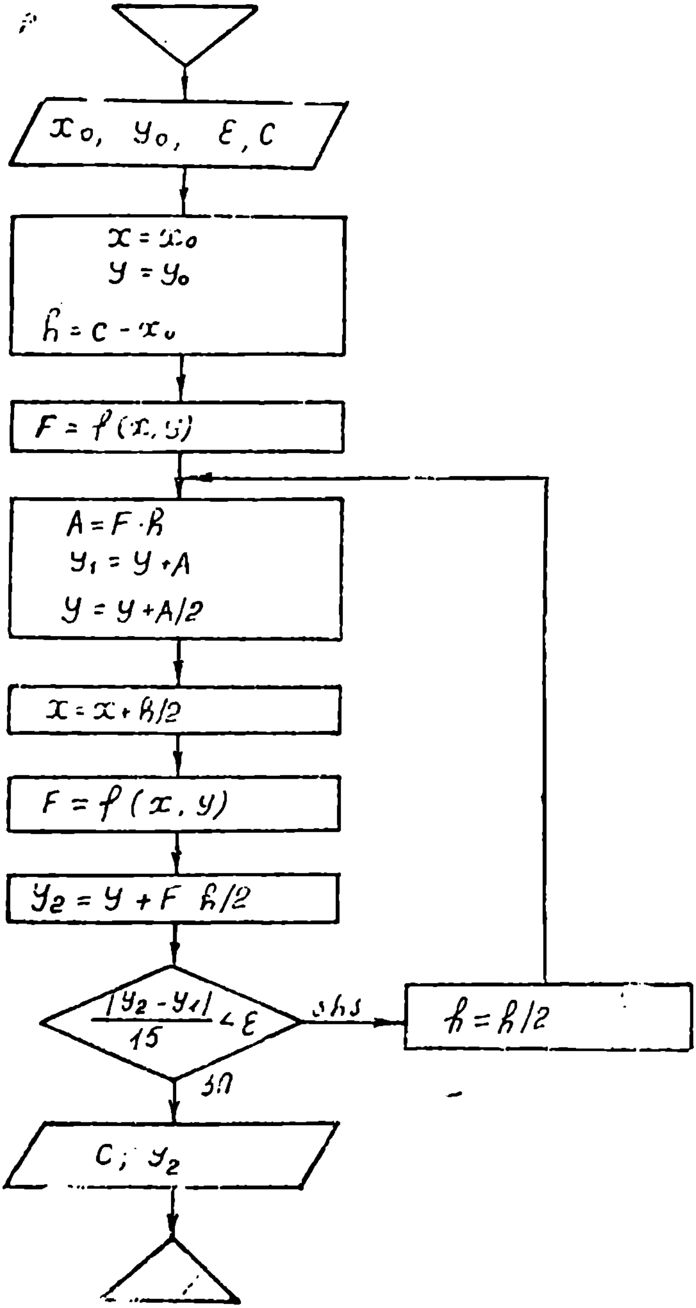
მტკიცდება, რომ, თუ

$$\frac{|y^*(c)-\overline{y}(c)|}{15}<\varepsilon, \tag{16.7}$$

მაშინ $y^*(c)$ არის $y(c)$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა ε სიზუსტით.

თუ (16.7) უტოლობა არ შესრულდება, მაშინ ზემოთ მოყვანილ პროცესს ჩავატარებთ $[x_1, c]$ სეგმენტისათვის ისე, რომ საწყისი (x_0, y_0) წერტილის როლში ავიღებთ (x_1, y_1^*) წერტილს. ამ პროცესს გავაგრძელებთ მანამ, სანამ არ შესრულდება (16.7) პირობა.

ეილერის მეთოდის ბლოკ-სქემა



ეილერის მეთოდის პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
1    OPEN ' LP : ' FOR OUTPUT AS FILE # 1
10   PRINT # 1, ' РЕШЕНИЕ  ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
     УРАВНЕНИЯ' ;
20   PRINT # 1 , ' МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА'
30   PRINT ' ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНОЕ  X0= ' ;\INPUT X0
40   PRINT ' ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНОЕ Y0 = ' ;\INPUT Y0
50   PRINT #1 , ' ДИФ. УР. - ИЕ;
60   PRINT #1, 'НАЧАЛЬНОЕ  УСЛОВИЕ Y('; X0; ')=';Y0
70   PRINT 'ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ  E=';\INPUT E
80   PRINT ' ДЛЯ C = ' ; \INPUT C\H=X—X0
90   X = X0\Y=Y0
100  GOSUB 1000
110  A = F * H\Y1=Y+A\Y=Y+A/2
120  X=X+H/2\'GOSUB 1 000\Y2=Y+F * H/2
130  IF ABS (Y2—Y1)/15<E THEN  Y=Y2\GOTO 150
140  H=H/2\GOTO 110
150  PRINT #1, ' OTBET: Y('; C;' ) = ; Y\GOTO 2000
1000 F=f (x, y)
1100 RETURN
2000 END
```

ეილერის მეთოდის პროგრამა ფორტრანის ენაზე

```
     PROGRAM EILER
     PRINT *, ' РЕШЕНИЕ  ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
     УРАВНЕНИЯ '
     PRINT * , ' МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА'
     TYPE 1
1    FORMAT (2X,' НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ X0='$)
     ACCEPT * . X0
     TYPE 2
2    FORMAT (2X, ' НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ  Y0=', $)
     ACCEPT * , Y0
     TYPE 3
```

```
 3   FORMAT (2X, ' ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ E ', *)
     ACCEPT * , E
     TYPE 4
 4   FORMAT (2X,' ДЛЯ C=', *)
     ACCEPT * , C
     H=C—X0
     X=X0
     Y=Y0
20   A=F (X, Y) * H
     Y1=Y+A
     Y=Y+A/2.
     X=X+H/2.
     Y2=Y+F(X, Y) * H/2.
     IF(ABS (Y2—Y1)/15. LT. E) GOTO 10
     H=H/2.
     GOTO 20
10   PRINT 2, C, Y2
 2   FORMAT (2X, Y (', F8. 5, ')=', F8, 5)
     STOP
     END
     FUNCTION F (U, V)
     F=f (u, v)
     RETURN
     END
```

2. რუნგე-კუტას მეთოდი. რუნგე-კუტას მეთოდისათვის, ისევე როგორც ეილერის მეთოდის შემთხვევაში, y_{i+1} მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა ხდება უკვე გამოთვლილი y_i მიახლოებითი მნიშვნელობის საშუალებით შემდეგი ფორმულის საფუძველზე

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}[K_1^{(i)}+2K_2^{(i)}+2K_3^{(i)}+K_4^{(i)}],\quad i=0, 1, 2,\dots \tag{16.8}$$

სადაც

$$K_1^{(i)}=hf(x_i,\ y_i),$$

$$K_2^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2};\ y_i+\frac{K_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_3^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{K_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_4^{(i)}=hf(x_i+h,\ y_i+K_3^{(i)}).$$

მტკიცდება, რომ, თუ $f(x, y)$ ფუნქციას განსახილველ არეში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები მეხუთე რიგამდე ჩათვლით, მაშინ რუნგე-კუტას მეთოდის ცდომილებას აქვს h^5-ის რიგი.

შენიშვნა 1. ისევე, როგორც ეილერის მეთოდის შემთხვევაში რუნგე-კუტას მეთოდისათვის ცდომილების შესაფასებლად გვაქვს

$$|y(c)-y^*(c)| < \frac{|y^*(c)-\overline{y}(c)|}{15},$$

სადაც $\overline{y}(c)$ არის $y(c)$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოთვლილი $h=c-x_0$ ბიჯით, ხოლო $y^*(c)$ კი — მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოთვლილი $h_1=\frac{h}{2}=\frac{c-x_0}{2}$ ბიჯით.

შენიშვნა 2. (16.8) ფორმულიდან $i=0$-თვის გვაქვს

$$y(x_0+h)-y_0 \approx \frac{1}{6}[K_1^{(0)}+2K_2^{(0)}+2K_3^{(0)}+K_4^{(0)}[. \quad (16.9)$$

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული y ცვლადზე, ე. ი. $f(x, y)=f(x)$, მაშინ (16.9) ფორმულა მიიღებს სახეს

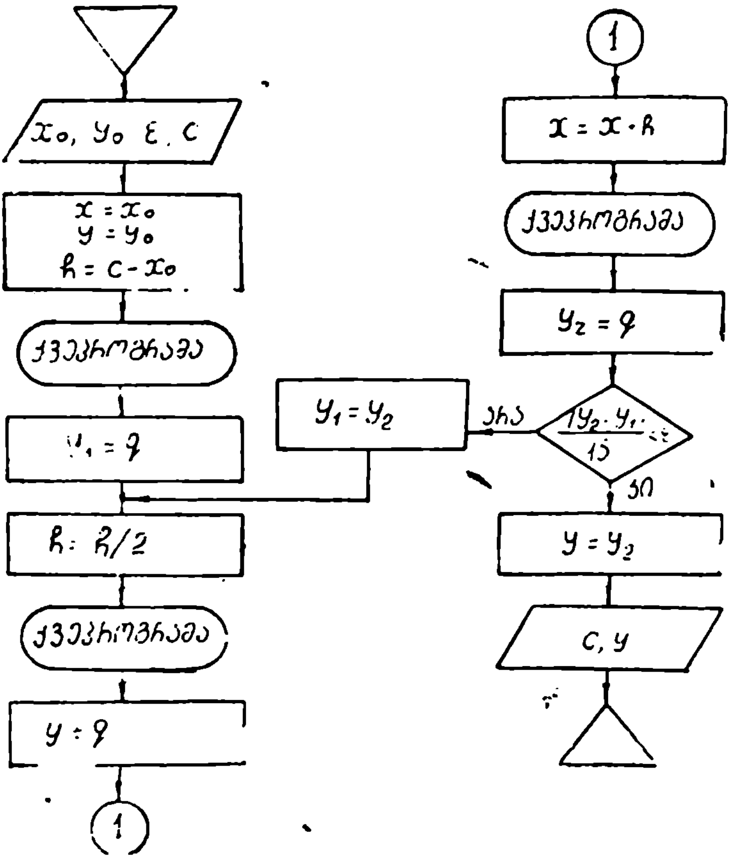
$$y(x_0+h)-y_0 \approx \frac{h}{6}\left[f(x_0)+4f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f(x_0+h)\right].$$

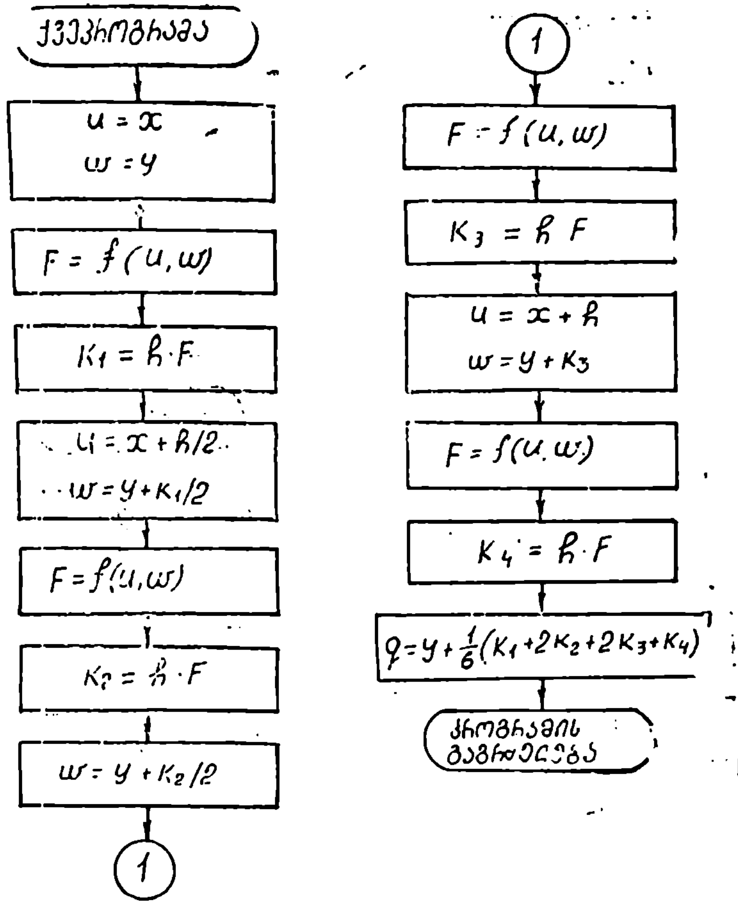
ეს ფორმულა შეიძლება მივიღოთ განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის სიმპსონის ფორმულის გამოყენებითაც. მართლაც (16.1) ტოლობიდან საწყისი პირობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$y(x_0+h)-y_0=\int_{x_0}^{x_0+h} y'(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}\left[f(x_0)+4f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f(x_0+h)\right].$$

რუნგე-კუტას მეთოდის ბლოკ-სქემა





რუნგე-კუტას მეთოდის (პირველი რიგის განტოლებისათვის) პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
1   OPEN 'LP:' FOR OUTPUT AS FILE #1
10  PRINT #1, ' РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
      УРАВНЕНИЯ'
20  PRINT #1, '  МЕТОДОМ РУНГЕ — КУТТА'
30  PRINT 'ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНОЕ X0=';\INPUT X0
40  PRINT 'ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНОЕ Y0=':\INPUT Y0
50  PRINT #1, 'ДИФ. УР. — ИЕ:
60  PRINT #1, НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ Y(': X0;')=';Y0
```

```
  70  PRINT 'ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ E=':\INPUT E
  80  PRINT 'ДЛЯ C=':\ INPUT C\ H=C—X0
  90  X=X0\Y=Y0
  95  GOSUB 500\Y1=0
 100  H=H/2\GOSUB 500\Y=Q
 110  X=X+H\GOSUB 500\Y2=Q
 120  IF ABS (Y2—Y1)/15<E THEN Y=Y2\GOTO 140
 130  Y1=Y2\GOTO 100
 140  PRINT #1, 'ОТВЕТ: Y('; C; ')='; Y\GOTO 2000
 200  REM - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
 500  U=X\W=Y
 510  GOSUB 1000\K1=H * F
 520  U=X+H/2\W=Y+K1/2\GOSUB 1000\K2=H * F
 530  W=Y+K2/2\GOSUB 1000\K3=H * F
 540  U=X+H\W=Y+K3\GOSUB 1000\K4=H * F
 550  Q=Y+(K1+2 * K2+2 * K3+K4)/6
 560  RETURN
 600  REM - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
1000  F=f (u, w)
1100  RETURN
2000  END
```

რუნგე-კუტას მეთოდის (პირველი რიგის განტოლებისათვის) პროგრამა ფორტრანის ენაზე

```
      PROGRAM RUNGE
      EXTERNAL KOEF, FUN
      REAL Q, E, X0, Y0, X, Y, H, Y1, Y2, C
      PRINT *, ' РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
      УРАВНЕНИЯ '
      PRINT * , ' МЕТОДОМ РУНГЕ—КУТТА '
      PRINT * , ' ДИФ. УР. — E;
      TUPE 1
    1 FORMAT (2X, 'НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ X0=' , *)
      ACCEPT * , X0
      TYPE 2
    2 FORMAT (2X, 'НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ Y0=', *)
      ACCEPT * , Y0
      TYPE 3
```

```
 3   FORMAT (2X, ' ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ E=' , $)
     ACCEPT * , E
     TYPE 4
 4   FORMAT (2X, '   ДЛЯ C=', $)
     ACCEPT * , C
     X=X0
     Y=Y0
     H=C—X0
     CALL KOEF (H, X0, Y0, Q)
     Y1=Q
 50  H=H * 0, 5
     CALL KOEF (H, X, Y, Q)
     Y=Q
     X=X+H
     CALL KOEF (H, X, Y, Q)
     Y2=Q
     IF (ABS (Y2—Y1)/15. LT. E) GOTO 100
     Y1=Y2
     GOTO 50
100  PRINT 5, C, Y2
 5   FORMAT (5X, ' ОТВЕТ:  Y (', F7, 4, ') =', F7, 4)
     STOP
     END
     SUBROUTINE KOEF (H, X, Y, Q)
     REAL D1, D2, D3, D4
     D1=H * FUN (X, Y)
     D2=H * FUN (X+H * 0.5, Y+D1 * 0. 5)
     D3=H * FUN (X+H * 0, 5, Y+D2+0, 5)
     D4=H * FUN (X+H, Y+D3)
     Q=Y+(D1+2 * D2+2 * D3+D4)/6
     RETURN
     END
     FUNCTION FUN (X, Y)
     FUN=f (x, y)
     RETURN
     END
```

§ 17. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გამოყენება ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნაში

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ამოცანებს, რომლებიც ამოიხსნებიან პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებით.

ქვემოთ, მსჯელობის შემოკლების მიზნით, ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის პროცესში მიღებული დიფერენციალური განტოლების შესახებ ჩვენ აღვნიშნავთ მის ტიპს, ხოლო ამონახსნს მოვიყვანთ პირდაპირ, გამოყვანის გარეშე.

1. რეაქტიული მოძრაობა. ვთქვათ დროის t მომენტში მატერიალური წერტილის მასა არის m, ხოლო სიჩქარე $\vec{v}$. დავუშვათ Δt დროის განმავლობაში მას უერთდება Δm მასის მქონე ნაწილაკები, რომელთა სიჩქარეა $\vec{u}$. დროის $t+\Delta t$ მომენტში მატერიალურ წერტილს მასთან მიერთებულ ნაწილაკებთან ერთად ექნება $m+\Delta m$ მასა და $\vec{v}+\Delta\vec{v}$ სიჩქარე. ცხადია, მთლიანად სისტემის იმპულსის (მოძრაობის რაოდენობის) ცვლილება Δt დროში იქნება

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}(t+\Delta t) - \vec{Q}(t) = (m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) - (m\vec{v}+\Delta m\,\vec{u}) =$$

$$= m\,\Delta\vec{v} + (\vec{v}-\vec{u})\,\Delta m + \Delta m\,\Delta\vec{v}\,. \tag{17.1}$$

დავუშვათ, რომ მასა, ისევე როგორც სიჩქარე, არის დროის დიფერენცირებადი ფუნქცია. გავყოთ (17.1) განტოლების ორივე მხარე Δt-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta t\to 0$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m\cdot\Delta\vec{v}}{\Delta t}=0$$

მივიღებთ

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt}\,.$$

როგორც ფიზიკის კურსიდან არის ცნობილი, „იმპულსის ცვლილების სიჩქარე“ სხეულზე მოქმედი ძალების $\vec{F}$ ტოლქმედის ტოლია, ე. ი. $\dfrac{d\vec{Q}}{dt}=\vec{F}$ და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt} = \vec{F}. \tag{17.2}$$

(17.2) განტოლებას ეწოდება მეშერსკის* განტოლება. იგი წარმოადგენს მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი კანონის, ნიუტონის მეორე კანონის განზოგადოებას ცვლადი მასის მქონე სხეულის შემთხვევაში. მართლაც, თუ $m = \mathrm{const}$, მაშინ $\frac{dm}{dt} = 0$ და (17.2) განტოლებიდან მივიღებთ ნიუტონის II კანონს

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

აღვნიშნოთ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u}_0$. ცხადია $\vec{u}_0$ იქნება მატერიალურ წერტილთან შეერთებულ ნაწილაკების ფარდობითი სიჩქარე მატერიალური წერტილის მიმართ. ამ აღნიშვნით მეშერსკის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}_0\frac{dm}{dt}. \tag{17.3}$$

სიდიდეს $\vec{u}_0\frac{dm}{dt}$ ეწოდება რეაქტიული ძალა და აღინიშნება $\vec{R}$-ით. ამრიგად,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R}. \tag{17.4}$$

როგორც (17.4) განტოლებიდან ჩანს, მატერიალურ წერტილს შეუძლია მოძრაობა მაშინაც, როდესაც $\vec{F} = \vec{0}$. ამ შემთხვევაში

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R}.$$

რეაქტიული ძალის მოდული

$$|\vec{R}| = \left|\frac{dm}{dt}\right| \cdot |\vec{u}_0|$$

მასის $\left|\frac{dm}{dt}\right|$ ცვლილების და მიერთებული (ან მოცილებული) ნაწილაკების ფარდობითი $|\vec{u}_0|$ სიჩქარის მოდულის ნამრავლის ტოლია.

---

* ი. მეშერსკი (1859—1935) — საბჭოთა მექანიკოსი.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. (ციოლკოვსკის* ამოცანა სიცარიელეში რაკეტის მოძრაობაზე). ვთქვათ საწყისი m_0 მასის მქონე რაკეტა მოძრაობს წრფივად საქშენიდან გამოტყორცნილი გაზის მოქმედებით. (რაკეტის მასის ცვლილების კანონია $m=m(t)$) დავუშვათ გამოტყორცნილი გაზის ფარდობითი სიჩქარე რაკეტის მიმართ არის $\vec{u}_0$ და მიმართულია რაკეტის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. ვიპოვოთ რაკეტის მოძრაობის განტოლება, თუ რაკეტის საწყისი სიჩქარეა $\vec{v}_0$. სიმძიმის ძალისა და წინააღმდეგობის ძალების მოქმედება უგულვებელვყოთ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ ვისარგებლებთ მეშჩერსკის (17.3) განტოლებით და მას დავაგეგმილებთ Ox ღერძზე, რომელიც მიმართულია რაკეტის საწყისი სიჩქარის მიმართულებით, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$m(t)\frac{dv}{dt}=-u_0\frac{dm}{dt}. \qquad (17.5)$$

(17.5) განტოლებაში ცვლადების განცალებით მივიღებთ

$$dv=-u_0\frac{dm}{m}.$$

აქედან

$$v=-u_0\ln m+c.$$

c მუდმივს ვიპოვით საწყისი პირობებიდან $v=v_0$, $m=m_0$, როცა $t=0$. გვექნება $c=u_0\ln m_0+v_0$ და ამიტომ

$$v=u_0\ln\frac{m_0}{m}+v_0. \qquad (17.6)$$

რადგან $v=\frac{dx}{dt}$, მივიღებთ

$$\frac{dx}{dt}=u_0\ln\frac{m_0}{m}+v_0.$$

აქედან

$$x=u_0\int_0^t\ln\frac{m_0}{m}\,d\tau+v_0t. \qquad (17.7)$$

(17.6) ფორმულიდან ჩანს, რომ რაკეტის სიჩქარე დროის რაიმე t მომენტში არ არის დამოკიდებული რაკეტის მასის ცვლილების კანონ-

---

* კ. ციოლკოვსკი (1857—1935) — გამოჩენილი საბჭოთა მეცნიერი, თანამედროვე კოსმონავტიკის ფუძემდებელი.

ზე, არამედ დამოკიდებულია რაკეტის საწყისი მასის ფარდობაზე რაკეტის მასასთან დროის t მომენტში, რაკეტის საწყის სიჩქარეზე და გამოტყორცნილი გაზების ფარდობით სიჩქარეზე. რაც შეეხება რაკეტის მდებარეობას დროის t მომენტში იგი დამოკიდებულია რაკეტის მასის ცვლილების ხასიათზე. კერძოდ, თუ რაკეტის მასა იცვლება ექსპონენციალურად, ე. ი. $m=m_0 e^{-\lambda t}$, სადაც $\lambda=\mathrm{const}$, $\lambda>0$, (17.7) განტოლებიდან მივიღებთ

$$x = u_0\int_0^t \ln\frac{m_0}{m_0 e^{-\lambda\tau}}d\tau + v_0 t = v_0\lambda \int_0^t \tau d\tau + v_0 t,$$

საიდანაც

$$x = \frac{u_0 \lambda t^2}{2} + v_0 t.$$

ა მ ო ც ა ნ ა 2 (ციოლკოვსკის ამოცანა რაკეტის მოძრაობის შესახებ, როდესაც მასზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა). ვთქვათ m_0 საწყისი მასის მქონე რაკეტა მოძრაობს ვერტიკალურად ზევით. რაკეტის მასა როგორც დროის ფუნქცია იცვლება კანონით $m=m(t)$. გამოტყორცნილი გაზების ფარდობითი სიჩქარე მუდმივია და $\vec{u}_0$-ის ტოლია. ვიპოვოთ რაკეტის მოძრაობის განტოლება, თუ მისი საწყისი სიჩქარეა $\vec{v}_0$ და მასზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივმართოთ Ox ღერძი ვერტიკალურად ზევით. მაშინ მეშჩერსკის (17.3) განტოლების მასზე დაგეგმილებით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას (გავითვალისწინოთ, რომ $\vec{F}=m(t)\vec{g}$):

$$m(t)\frac{dv}{dt} = -gm(t) - u_0 m'(t). \tag{17.8}$$

ცვლადთა განცალებით მივიღებთ

$$dv = -g dt - u_0\frac{m'(t)}{m(t)}dt,$$

აქედან გვაქვს

$$v = -gt - u_0 \ln m(t) + C.$$

როდესაც $t=0$, მაშინ $m=m_0$, ხოლო $v=v_0$. ამიტომ $c=u_0\ln m_0+$ $+v_0$ და მივიღებთ

$$v = -gt + u_0\ln\frac{m_0}{m(t)} + v_0.$$

რადგან $v=\dfrac{dx}{dt}$, უკანასკნელი განტოლება შეგვიძლია ჩავწე-როთ შემდეგი სახით

$$dx=\left[-gt+u_0\ln\frac{m_0}{m(t)}+v_0\right]dt.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$x=-\frac{gt^2}{2}+u_0\int_0^t\ln\frac{m_0}{m(\tau)}\,d\tau+v_0t+C_1.$$

რადგან, როდესაც $t=0$, მაშინ $x=0$, მივიღებთ $C_1=0$ და გვექნება

$$x=-\frac{gt^2}{2}+u_0\int_0^t\ln\frac{m_0}{m(\tau)}\,d\tau+v_0t. \tag{17.9}$$

(17.9) განტოლებიდან, იმ შემთხვევაში, როდესაც რაკეტის მასა იცვლება ექსპონენციალური კანონით $m=m_0e^{-\lambda t}$ ($\lambda=\mathrm{const}$, $\lambda>0$), გამომდინარეობს

$$x=\frac{u_0\lambda-g}{2}t^2+v_0t. \tag{17.10}$$

ამ შემთხვევაში

$$v=(u_0\lambda-g)t+v_0. \tag{17.11}$$

როგორც ამ განტოლებიდან ჩანს, თუ $u_0\lambda-g<0$, მაშინ დროის $t=\dfrac{v_0}{g-u_0\lambda}$ მომენტში რაკეტის სიჩქარე გახდება ნულის ტოლი. დროის ამ მომენტისათვის რაკეტა მიაღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს

$$x_{max}=\frac{v_0^2}{2(g-u_0\lambda)}.$$

ვიპოვოთ რაკეტის სიჩქარე და ასვლის მაქსიმალური სიმაღლე დროის იმ t_k მომენტისათვის, როდესაც რაკეტის საწვავი მთლიანად დაიწვება. (17.10) და (17.11) განტოლებების თანახმად, როდესაც $t=t_k$, გვექნება

$$x_k=x(t_k)=\frac{u_0\lambda-g}{2}t_k^2+v_0t_k,$$

$$v_k=v(t_k)=(u_0\lambda-g)t_k+v_0.$$

საწვავის გამოლევის შემდეგ რაკეტა სრულ გაჩერებამდე გაივლის მანძილს

$$S_{max} = \frac{v_k^2}{2g} .$$

რაკეტის მაქსიმალური დაშორება დედამიწის ზედაპირიდან იქნება

$$x_{max} = x_k + S_{max} = \frac{v_k^2}{2g} + x_k.$$

თუ v_k-ს და x_k-ს გამოვსახავთ u_0, λ და t_k-ს საშუალებით, მივიღებთ:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{u_0 \lambda (u_0 \lambda - g)}{2g} t_k^2 + \frac{\lambda u_0 v_0}{g} t_k.$$

2. **ჭურჭლიდან სითხის გამოდინება.** ა მ ო ც ა ნ ა. ვთქვათ $s = s(h)$ წარმოადგენს რაიმე ჭურჭლის განივკვეთის ფართობს სადაც h არის მანძილი ფსკერიდან ამ განივკვეთამდე. დავუშვათ ჭურჭელში ასხია სითხე, რომლის სიმაღლეა H_0. ვიპოვოთ დრო, რომლის განმავლობაშიც სითხის სიმაღლე შემცირდება H_0-დან H-მდე, ჭურჭლის ფსკერზე მოთავსებული ონკანის გაღების შემდეგ, თუ ონკანის განივკვეთის ფართობია ω. განვსაზღვროთ ჭურჭლის მთლიანად დაცლისათვის საჭირო დრო. ჩავთვალოთ, რომ ჭურჭელში სითხის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე $v = v(h)$, როგორც სითხის სიმაღლის ფუნქცია, ცნობილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ სითხის სიმაღლე დროის t მომენტში ჭურჭელში არის h. სითხის მოცულობა dv, რომელიც დროის t მომენტიდან $t+dt$ მომენტამდე გამოვიდა ონკანიდან, შეიძლება გამოვთვალოთ როგორც ცილინდრის მოცულობა, რომლის სიმაღლეა $v(h)\,dt$ და ფუძის ფართობია ω. ე. ი.

$$dv = \omega v(h)\, dt.$$

იგივე მოცულობა შეგვიძლია გამოვთვალოთ სხვაგვარად. ჭურჭლიდან სითხის გამოდინების გამო მისი სიმაღლე h შემცირდება dh სიდიდით და ამიტომ $dv = -s(h)\,dh$ (მინუსი აიღება იმის გამო, რომ $dh < 0$) თუ გავუტოლებთ dv-ს მიღებულ გამოსახულებებს, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\omega v(h)\, dt = -s(h)\, dh. \tag{17.12}$$

აქედან

$$dt = -\frac{s(h)}{\omega v(h)}\, dh,$$

საიდანაც

$$t = -\frac{1}{\omega}\int_{H_0}^{H}\frac{s(h)}{v(h)}\,dh = \frac{1}{\omega}\int_{H}^{H_0}\frac{s(h)}{v(h)}\,dh.$$

ჭურჭლის მთლიანად დაცლის დროს მივიღებთ, თუ ამ განტოლებაში ჩავსვამთ $H=0$. ე. ი.

$$T = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{H_0}\frac{s(h)}{v(h)}\,dh.$$

თუ ონკანის განივკვეთი მცირეა, მაშინ ტორიჩელის* ფორმულის ძალით $v=\mu\sqrt{2gh}$, სადაც g არის თავისუფალი ვარდნის აჩქარება, μ კი ცდის შედეგად მიღებული კოეფიციენტია, რომელიც დამოკიდებულია სითხის გვარობაზე. ამ შემთხვევაში ჩვენს მიერ მიღებულ ფორმულებს ექნებათ სახე

$$t = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_{H}^{H_0}\frac{s(h)}{\sqrt{h}}\,dh,\quad T = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_{0}^{H_0}\frac{s(h)}{\sqrt{h}}\,dh. \tag{17.13}$$

განვიხილოთ მიღებული ფორმულები ზოგიერთ კონკრეტულ შემთხვევაში.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 1. ვერტიკალური ღერძის მქონე ცილინდრის ფორმის ჭურჭელი, რომლის ფუძის რადიუსია R და სიმაღლე H, გავსებულია წყლით. გამოვთვალოთ დრო, რომელიც საჭიროა ჭურჭლის დასაცლელად, თუ მის ფსკერზე მოთავსებული წრიული ხვრელის რადიუსი, საიდანაც სითხე გამოედინება, არის r.

ამ შემთხვევაში ჭურჭლის განივკვეთის ფართობი $s(h)$ მუდმივია და ტოლია πR^2-ის, ხოლო ონკანის (ხვრელის) განივკვეთის ფართობია πr^2. ამიტომ (17.13)-ის მეორე ფორმულის ძალით მივიღებთ

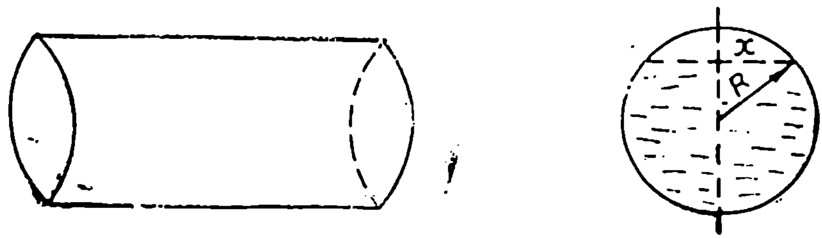
$$T = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_{0}^{H}\frac{\pi R^2}{\sqrt{h}}\,dh = \frac{2\pi R^2}{\pi r^2\mu\sqrt{2g}}\sqrt{H} = \frac{2R^2\sqrt{H}}{\mu r^2\sqrt{2g}}.$$

კერძოდ, თუ $R=1$ მ, $H=1{,}5$ მ, $r=0{,}05$ მ და $\mu=0{,}62$ (μ-ს მნიშვნელობა წყლისათვის), გვექნება $T\approx 356$ წმ$=5$ წთ და 56 წმ.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 2. გამოვთვალოთ ნავთით სავსე ცილინდრული ცისტერნის დაცლისათვის საჭირო დრო, თუ მისი სიგრძეა L, ხოლო

* ე. ტორიჩელი (1608—1647) — იტალიელი ფიზიკოსი.

დიამეტრი d, თუ ნავთი გამოედინება ცისტერნის ფსკერზე მოთავსებული ხვრელიდან, რომლის განივკვეთის ფართობია ω (ნახ. 57).



ნახ. 57

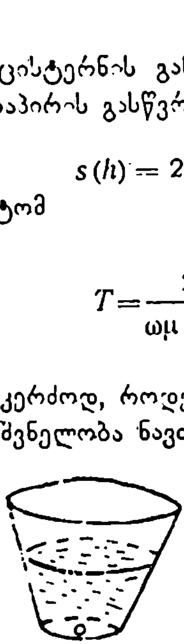
ცისტერნის განივკვეთის ფართობი $s(h)$ მასში ჩასხმული ნავთის ზედაპირის გასწვრივ გამოითვლება ფორმულით

$$s(h)=2xL=2L\sqrt{R^2-(h-R)^2}=2L\sqrt{(d-h)h}\,.$$

ამიტომ

$$T=\frac{2L}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_0^d \frac{\sqrt{(d-h)h}}{\sqrt{h}}\,dh=\frac{4Ld\sqrt{d}}{3\omega\mu\sqrt{2g}}\,.$$

კერძოდ, როდესაც $L=12$ მ, $d=2{,}6$ მ, $\omega=0{,}01$ მ^2 და $\mu=0{,}6$ (μ-ს მნიშვნელობა ნავთისათვის) მივიღებთ $T\approx 2520$ წმ$=42$ წთ.



ნახ. 58

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 3. ვიპოვოთ წყლით სავსე კონუსური ჭურჭლის დაცლის დრო, თუ მ-სი ზედა ფუძის დიამეტრია d_1, ქვედა ფუძისა d_2 და მასში სითხე გამოედინება ქვედა ფუძეში მოთავსებული წრიული ხვრელიდან, რომლის დიამეტრია d (ნახ. 58).

კონუსის ჰორიზონტალური კვეთის ფართობი იქნება,

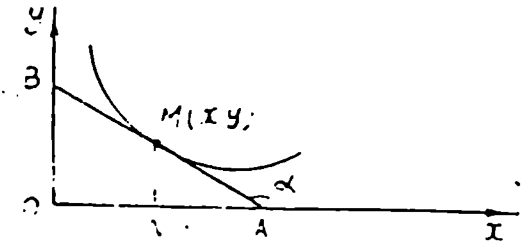
$$s(h)=\frac{\pi}{4}\left[d_2+(d_1-d_2)\frac{h}{H}\right]^2,$$

ამიტომ

$$T=\frac{1}{d^2\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{\left[d_2+(d_1-d_2)\frac{h}{H}\right]^2}{\sqrt{h}}\,dh=$$

$$=\frac{2\sqrt{H}}{15d^2\mu\sqrt{2g}}\left(3d_1^2+4d_2d_2+8d_2^2\right).$$

5. **სხვადასხვა ამოცანები.** ა მ ო ც ა ნ ა 1. ვიპოვოთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის (1; 1) წერტილში და რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ მის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების მონაკვეთი, რომელიც კოორდინატთა ღერძებს შორისაა მოთავსებული, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა.



ნახ. 59

ა მ ო ხ ს ნ ა: ვთქვათ $M(x, y)$ არის მხების AB მონაკვეთის შუაწერტილი, რომელიც პირობის თანახმად, AB-ს შეხების წერტილია წირთან, ე. ი. $AM=MB$ (ნახ. 59). ცხადია $NA=ON=x$. რადგან $\Delta AOB \sim \Delta ANM$, ამიტომ

$$\frac{OB}{OA}=\frac{NM}{NA}. \tag{17.14}$$

(17.14)-ში ჩავსვათ $NM=y$ და $NA=x$, მაშინ

$$\frac{OB}{OA}=\frac{y}{x}. \tag{17.15}$$

AOB მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$OB=OA\,\mathrm{tg}\,(180^\circ-\alpha)=-OA\,\mathrm{tg}\,\alpha, \tag{17.16}$$

სადაც α არის კუთხე, რომელსაც AB მხები შეადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. (17.16)-დან (17.15)-ის ძალით გვექნება

$$\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{OB}{OA}=-\frac{y}{x}. \tag{17.17}$$

მეორეს მხრივ, წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობის თანახმად

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{dy}{dx}.$$

ამიტომ (17.17)-დან მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

ეს არის საძიებელი წირის დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ამონახსნია $y=\frac{c}{x}$. თუ გავითვალისწინებთ პირობას, რომ საძიებელი წირი გადის $M(1;1)$ წერტილში, მივიღებთ $y=\frac{1}{x}$. იგი წარმოადგენს ტოლფერდა ჰიპერბოლის შტოს.

ა მ ო ც ა ნ ა 2 (სხეულის გაცივება). ვთქვათ სხეულის ტემპერატურაა T_0. ვიგულისხმოთ, რომ გარემოს ტემპერატურა უცვლელია და უდრის T_1 $(T_0>T_1)$. ვიპოვოთ სხეულის გაცივების კანონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნიუტონის კანონის თანახმად, სხეულის გაცივების სიჩქარე პროპორციულია სხეულის ტემპერატურისა და გარემოს ტემპერატურის სხვაობისა. დავუშვათ, სხეულის ტემპერატურა დროის t მომენტში არის T. ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე, როგორც ვიცით იქნება $\frac{dT}{dt}$. ნიუტონის კანონის თანახმად, ეს სიჩქარე პროპორციულია $T-T_1$ სხვაობისა, მაშასადამე

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_1), \quad (k>0). \tag{17.18}$$

ნიშანი „—" აღებულია იმის გამო, რომ t დროის ზრდასთან ერთად სხეულის ტემპერატურა კლებულობს. პროპორციულობის კოეფიციენტი k დამოკიდებულია როგორც სხეულის ფიზიკურ თვისებებზე, ასევე მის ფორმაზე. (17.18) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$T = T_1 + ce^{-kt}.$$

თუ ვისარგებლებთ საწყისი პირობით, რომლის თანახმად $T=T_0$, როცა $t=0$, გვექნება $c=T_0-T_1$. საბოლოოდ გაცივების კანონს ექნება სახე

$$T = T_1 + (T_0-T_1)e^{-kt}. \tag{17.19}$$

პროპორციულობის კოეფიციენტი k განისაზღვრება ექსპერიმენტით. (17.19) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $t\to\infty$, მაშინ სხეულის ტემპერატურა თეორიულად უტოლდება გარემოს ტემპერატურას (ე. ი. $T\to T_1$, როცა $t\to\infty$).

ამოცანა 3. წრედში, რომლის წინაღობაა R, ვიპოვოთ დენის ძალის დროზე დამოკიდებულების კანონი.

ამოხსნა. ვთქვათ ელექტრულ წრედში მოქმედებს ძაბვა v. ომის* კანონის თანახმად $v=RI$. როცა v ძაბვა ცვალებადია, ადგილი აქვს თვითინდუქციის მოვლენას, რომლის დროსაც წარმოიშობა დამატებითი ელექტრომამოძრავებელი ძალა. ეს ძალა წრედში გამავალი დენის ძალის ცვლილების სიჩქარის ანუ $\frac{dI}{dt}$-ს პროპორციულია და აქვს საწინააღმდეგო ნიშანი. ამრიგად, თვითინდუქციის ელექტრომამოძრავებელი ძალა შეიძლება გამოისახოს შემდეგნაირად $e=-L\frac{dI}{dt}$, სადაც L თვითინდუქციის კოეფიციენტია.

ომის კანონს ამ შემთხვევაში ექნება სახე

$$v-L\frac{dI}{dt}=RI.$$

ამრიგად, მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{v}{L}. \tag{17.20}$$

გავარჩიოთ ორი შემთხვევა:

ა) ვთქვათ $t=0$ მომენტში მუდმივი I_0 ძალის მქონე დენი გამოირთო. ვინაიდან ამ შემთხვევაში $v=0$, ამიტომ მივიღებთ

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{dI}{I}=-\frac{R}{L}\,dt.$$

აქედან გვექნება

$$I=I_0\,e^{-\frac{R}{L}t}.$$

ამ დენს, რომელიც წრედში გაივლის მხოლოდ თვითინდუქციის ელექტრომამოძრავებელი ძალის გავლენით ეწოდება გამორთვის ექსტრადენი. t დროის ზრდასთან ერთად ამ დენის ძალა სწრაფად ეცემა ნულამდე და საკმარისად მცირე დროში პრაქტიკულად შეწყდება.

---

* გ. ომი (1787—1854) — გერმანელი ფიზიკოსი.

ბ) თუ დროის $t=0$ მომენტში წრედი ჩაირთვება და მასში იწყებს მოქმედებს მუდმივი ძაბვა v, მაშინ (17.20) განტოლების ამონახსნი იქნება:

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(c+\frac{v}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right), \tag{17.21}$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, რომელსაც ადვილად ვიპოვით საწყისი პირობის საშუალებით. რადგან $I=0$, როცა $t=0$, (17.21)-დან მივიღებთ $c=-\frac{v}{R}$. თუ ჩავსვამთ (17.21)-ში, გვექნება

$$I=\frac{v}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ომის კანონის შესაბამისი $\frac{v}{R}$ დენთან ერთდროულად საწინააღმდეგო მიმართულებით გაივლის $\frac{v}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ სიდიდის დენი. ეს არის ჩართვის ექსტრადენი. მისი ძალაც აგრეთვე სწრაფად კლებულობს t დროის ზრდასთან.

ა მ ო ც ა ნ ა 4 (პოპულაციის რიცხობრიობის დინამიკა, ბიოლოგიის ამოცანა). პოპულაციის რიცხობრიობის დინამიკა, ანუ პოპულაციაში ცოცხალი არსებას რაოდენობის ცვალებადობა შობადობასა და სიკვდილიანობასთან დაკავშირებით — ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა პოპულაციის თეორიაში. ვიპოვოთ პოპულაციის რიცხობრიობის დინამიკა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ კანონით, რომლის თანახმად პოპულაციის სიჩქარე პროპორციულია პოპულაციის რიცხობრიობისა:

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N, \tag{17.22}$$

სადაც $N(t)$ არის პოპულაციის რიცხობრიობა დროის t მომენტში, ხოლო $\alpha>0$ — პროპორციულობის კოეფიციენტია. (17.22) განტოლების ამონახსნი $N(o)=N_0$ საწყისი პირობის გათვალისწინებით არის

$$N(t)=N_0\,e^{\alpha t}. \tag{17.23}$$

შევნიშნოთ, რომ (17.22) განტოლება მხოლოდ სახეობათა ვიწრო კლასისათვის არის მართებული. პოპულაციათა დინამიკის უფრო ზუს-

ტი შესწავლისათვის განიხილება შემდეგი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N-\beta N^2. \qquad (17.24)$$

გადავწეროთ (17.24) განტოლება შემდეგი სახით

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N\frac{n-N}{n}, \qquad (17.25)$$

სადაც $n=\dfrac{\alpha}{\beta}$. (17.25) განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $N=N_0$, როცა $t=0$, არის

$$N(t)=\frac{N_0 n e^{\alpha t}}{n-N_0+N_0 e^{\alpha t}}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $t\to\infty$, მაშინ $N(t)\to n$. ამიტომ n სიდიდეს ეწოდება პოპულაციის რიცხობრიობის მაქსიმუმი.

ა მ ო ც ა ნ ა 4 (შენობის ვენტილიაცია). საამქროში, რომლის მოცულობაა v_0 მ^3, ჰაერი შეიცავს α% ნახშირორჟანგს. ვენტილიატორებს ყოველ წუთში შენობაში შემოაქვთ a მ^3 ჰაერი, რომელიც შეიცავს β% ნახშირორჟანგს. ვიპოვოთ ნახშირორჟანგის პროცენტული შემცველობის ვენტილაციის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ დროის ნებისმიერ მომენტში ნახშირორჟანგის კონცენტრაცია ერთნაირია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახშირორჟანგის პროცენტული შემცველობა ჰაერში დროის t მომენტში აღვნიშნოთ x-ით. დროის მცირე dt შუალედში ვენტილიატორი საამქროში შემოიტანეს $\dfrac{a\beta}{100}dt$ მ^3 ნახშირორჟანგს, ხოლო ოთახიდან გავა $\dfrac{xa}{100}dt$ მ^3 ნახშირორჟანგი. ამრიგად dt დროში ნახშირორჟანგის შემცველობა ჰაერში შემცირდება $dq=0{,}01\,a(\beta-x)\,dt$ მ^3-ით. აღვნიშნოთ dx-ით ჰაერში ნახშირორჟანგის პროცენტული ცვლილება. მაშინ ოთახში ნახშირორჟანგის ცვლილება ჰაერში შეგვიძლია შემდეგნაირადაც გამოვთვალოთ

$$dq=-0{,}01\,v_0\,dx \text{ მ}^3.$$

ნიშანი „—“ აღებულია იმის გამო, რომ $dx<0$. თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს dq-ს გამოსახულებებს, გვექნება

$$0{,}01\,a\,(\beta-x)\,dt=-0{,}01\,v_0\,dx. \qquad (17.26)$$

ცვლადების განცალებით მივიღებთ

$$\frac{dt}{v_0}=-\frac{dx}{\beta-x},$$

რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$x = c\,e^{-\frac{at}{v_0}} + \beta.$$

რადგან $x = \alpha\%$, როდესაც $t = 0$, გვექნება, რომ $c = \alpha - \beta$ და (17.26) განტოლების კერძო ამონახსნს ექნება სახე

$$x = \beta + (\alpha - \beta)\,e^{-\frac{at}{v_0}}.$$

ეს ტოლობა გამოხატავს ჰაერში ნახშირორჟანგის პროცენტული შემცველობის ვენტილაციის დროზე დამოკიდებულებას. აქედან კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ დრო, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რათა ნახშირორჟანგის პროცენტული შემცველობა ჰაერში გახდეს $\theta\%$, იქნება

$$t = \frac{v_0}{a}\ln\frac{\alpha - \beta}{\theta - \beta}.$$

ა მ ო ც ა ნ ა 5 (სინათლის შთანთქმა წყალში გავლისას). სინათლის ნაკადი, რომელიც შთაინთქმება წყალში გავლისას, პროპორციულია წყლის სიღრმისა და დაცემული სინათლის ნაკადის ინტენსივობისა. ვიცით, რა რომ 2 მ წყლის ფენაში გავლისას შთაინთქმება წყლის ზედაპირზე დაცემული თავდაპირველი სინათლის ნაკადის 1/3, გამოვთვალოთ, თავდაპირველი სინათლის ნაკადის რამდენი პროცენტი მიაღწევს 12 მ სიღრმეს.

ა ხ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, h სიღრმეზე სინათლის ნაკადი არის Q. მცირე dh სიმაღლის მქონე წყლის ფენაში გავლისას, შთანთქმული სინათლის dQ ნაკადი იქნება

$$dQ = -kQdh, \tag{17.27}$$

სადაც k არის პროპორციულობის კოეფიციენტი. (17.27) განტოლების ზოგადი ამონახსნია $Q = c\,e^{-kh}$. ვთქვათ თავდაპირველი (წყლის ზედაპირზე დაცემული) სინათლის ნაკადია Q_0. მაშინ საწყისი პირობიდან $Q = Q_0$ როცა $t = 0$, მივიღებთ, რომ $c = Q_0$ და ამიტომ $Q = Q_0\,e^{-kh}$. ამოცანის პირობის თანახმად, თუ $h = 2$ მ, მაშინ $Q = \frac{2}{3}Q_0$, ამიტომ გვექნება, რომ $e^{-k} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, ე. ი.

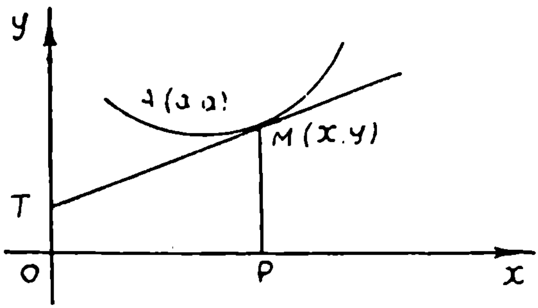
$$Q = Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^{h/2}.$$

აქედან ჩანს, რომ $h=12$ მ მიაღწევს სინათლის ნაკადი Q, რომელიც ტოლია

$$Q=Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^6\approx 0{,}0878\,Q_0,$$

რაც შეადგენს თავდაპირველი ნაკადის 8,78%-ს.

ა м ო ც ა ნ ა 6. ვიპოვოთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის $A\,(a,\,a)$ წერტილში და აქვს შემდეგი თვისება: ტრაპეციას, რომელიც შემოსაზღვრულია Ox ღერძით, Oy ღერძით, წირის $M\,(x,\,y)$ წერტილში გავლებული მხებით და $MP\perp Ox$ მონაკვეთით (ნახ. 60) აქვს ფართობი, რომელიც არ არის დამოკიდებული M წერტილის შერჩევაზე და ტოლია a^2-ის.



ნახ. 60

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტრაპეციის ფართობის ფორმულის თანახმად $S=\dfrac{OT+PM}{2}\cdot OP$. რადგან $OT=y-xy'$, $PM=y, OP=x$ და $S=a^2$, მივიღებთ

$$(2y-xy')\,x=2a^2,$$

ან

$$y'-\frac{2}{x}\,y=-\frac{2a^2}{x^2}\,. \tag{17.28}$$

(17.28) არის პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ამონახსნია

$$y=e^{2\ln x}\left(c-2a^2\int\frac{e^{-2\ln x}}{x^2}\,dx\right).$$

აქედან ვღებულობთ

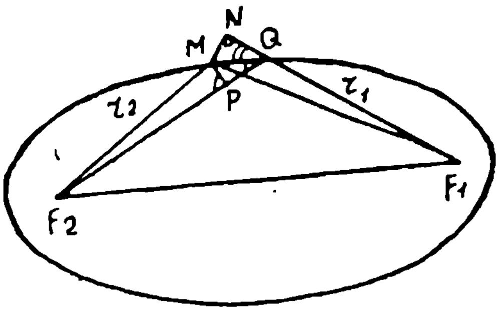
$$y=x^2\left(c+\frac{2a^2}{3x^3}\right).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $y=a$, როცა $x=a$, მივიღებთ $c=\dfrac{1}{3a}$ და წირის განტოლებას ექნება სახე

$$y=\frac{2a^2}{3x}+\frac{x^2}{3a}\,.$$

ამოცანა 7. როგორი ფორმის უნდა იყოს რეფლექტორის ამრეკლი ზედაპირი, რომ წერტილოვანი სინათლის წყაროდან მასზე დაცემული სხივები არეკვლის შემდეგ ერთ წერტილში იკვეთებოდეს.

ამოხსნა. ვთქვათ F_1 არის წერტილი, რომელშიაც მოთავსებულია სინათლის წყარო, ხოლო F_2 — წერტილი, რომელშიც თანაიკვეთება რეფლექტორიდან არეკვლილი სხივები (ნახ. 61). ცხადია, ამოცანა დაიყვანება იმ წირების განტოლების პოვნაზე, რომელიც მიიღება რეფლექტორის ამრეკლი ზედაპირის იმ სიბრტყესთან თანაკვეთით, რომელიც გადის F_1 და F_2 წერტილებში.



ნახ. 61

ვთქვათ MQ არის აღნიშნული თანაკვეთის იმდენად მცირე რკალი, რომ იგი შეიძლება ჩავთვალოთ წრფის მონაკვეთად. შემოვხაზოთ F_1 და F_2 წერტილებიდან, როგორც ცენტრებიდან MN და MP რკალები, რომელთა წრეწირების რადიუსებია შესაბამისად $F_1M=r_1$ და $F_2M\neq r_2$. ჩავთვალოთ, რომ ეს რკალებიც წრფის მონაკვეთებია. ცხადია ΔMQN და ΔMQP მართკუთხა სამკუთხედებია ($\angle MNQ=\angle MPQ=90°$), რომელთაც გააჩნიათ საერთო MQ ჰიპოტენუზა. სინათლის არეკვლის კანონის თანახმად, სინათლის სხივის დაცემის კუთხე არეკვლის კუთხის ტოლია. ამიტომ $\angle NQM=\angle MQP$ და $\angle QMN=\angle PMQ$, ე. ი. $\Delta MQN=\Delta MQP$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $QN=QP$, მაგრამ რადგან $QN=-\Delta r_1$ და $QP=\Delta r_2$, ამიტომ

$$\Delta r_1+\Delta r_2=0.$$

თუ რადიუს-ვექტორთა ნაზრდებს შევცვლით მათი დიფერენციალებით, მივიღებთ

$$d\,r_1 + d\,r_2 = 0. \tag{17.29}$$

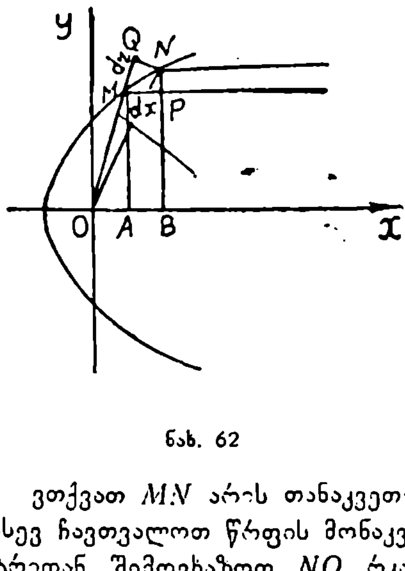
(17.29) განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$d\,(r_1 + r_2) = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$r_1 + r_2 = c. \tag{17.30}$$

ამრიგად, საძიებელი ზედაპირის კვეთა F_1 და F_2 წერტილებში გამავალი სიბრტყით წარმოადგენს ელიფსს, რომლის ფოკუსებია F_1 და F_2 წერტილები, ე. ი. რეფლექტორის ამრეკლ ზედაპირს უნდა ჰქონდეს ელიფსოიდის ფორმა.



ნახ. 62

ახლა ამოცანის კითხვა დავსვათ შემდეგნაირად: როგორი ფორმა უნდა ჰქონდეს რეფლექტორს, რომ მისგან არეკლილი სხივები ქმნიდნენ პარალელურ სხივთა კონას?

ეს ამოცანა ამოვხსნათ შემდეგნაირად: ავიღოთ Oxy კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ კოორდინატთა სისტემის სათავე ემთხვეოდეს წერტილოვანი სინათლის წყაროს, ხოლო Ox ღერძი იყოს არეკლილი სხივების პარალელური (ნახ. 62).

ვთქვათ MN არის თანაკვეთის წირის მცირე რკალი, რომელიც ისევ ჩავთვალოთ წრფის მონაკვეთად. O წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვხაზოთ NQ რკალი, რომლის წრეწირის რადიუსია $ON = OM + MQ$. ჩავთვალოთ ეს რკალი ასევე წრფის მონაკვეთად. M და N წერტილების აბსცისები აღვნიშნოთ შესაბამისად x-ით და $(x + \Delta x)$-ით. დავუშვათ M და N წერტილებიდან Ox ღერძზე MA და NB მართობები და ამას გარდა M წერტილიდან გავავლოთ BN-ის მართობი MP. ცხადია ΔMNQ და ΔMPN მართკუთხა სამკუთხედებია ($\angle MQN = \angle MPN = 90°$), რომელთა საერთო ჰიპოტენუზაა MN. რადგან სინათლის დაცემის და არეკვლის კუთხეები ტოლია, ამიტომ $\angle QMN = \angle PMN$. ამ კუთხეების ტოლობის გამო, გვექნება, რომ

$\Delta MNQ = \Delta MPN$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $MQ = MP$. ხოლო რადგან $MQ = dr$ (Δr შევცვალოთ dr-ით) და $MP = \Delta x = dx$, მივიღებთ

$$dr = dx.$$

აქედან

$$r = x + c.$$

ვინაიდან $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, გვექნება

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + c.$$

განტოლების ორივე მხარის კვადრატში აყვანით მივიღებთ

$$y^2 = 2cx + c^2.$$

ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ თანაკვეთა წარმოადგენს პარაბოლას. ე. ი. იმისათვის, რათა მივიღოთ არეკვლილ სხივთა პარალელური კონა, რეფლექტორს უნდა მივცეთ პარაბოლოიდის ფორმა.

ა მ ო ც ა ნ ა 8 (ფილტრის მუშაობა). გაზს, მავნე მინარევებისაგან გაწმენდის მიზნით ატარებენ ფილტრში. მავნე გაზის რაოდენობა, რომელსაც შთანთქავს ფილტრის თხელი ფენა, პროპორციულია გაზში მავნე მინარევის კონცენტრაციისა, აგრეთვე ფილტრის შთანთქავი ფენის სისქისა და ზედაპირის ფართობისა. ვთქვათ ფილტრს აქვს კონუსის ფორმა, რომლის ფუძის რადიუსია R და სიმაღლეა H. გაზს ატარებენ ფილტრში წვეროს მხრიდან. ვიპოვოთ ფილტრში გამავალ გაზში მავნე მინარევის, როგორც წვეროდან ფილტრის მოცემულ კვეთამდე მანძილის ფუნქცია, თუ ფილტრში შემავალ გაზში მავნე მინარევის კონცენტრაციაა $a\%$. ხოლო გამომავალში $b\%$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ წვეროდან h მანძილით დაშორებულ კვეთაში მავნე მინარევის კონცენტრაცია $q\%$-ით. შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება

$$dq = kq\pi r^2 dh, \tag{17.31}$$

სადაც r არის კონუსის თხელი ფენის კვეთის რადიუსი, რომელიც კონუსის ზომებთან დაკავშირებულია ტოლობით $r = \dfrac{Rh}{H}$. ამიტომ (17.31) განტოლება მიიღებს სახეს

$$dq = kq\pi \frac{R^2}{H^2} h^2 dh.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$q = ce^{\frac{k\pi R^2 h^3}{3H^2}}.$$

რადგან $q=a$, როცა $h=0$, მივიღებთ $c=a$ და გვექნება

$$q=a e^{-\frac{k\pi R^2 h^3}{3H^2}}$$

როცა $h=H$, მაშინ $q=b$. ამიტომ ამ განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $e^{-\frac{k\pi R^2}{3H^2}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{H^3}}$ და საბოლოოდ გვექნება

$$q=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{h^3}{H^3}}.$$

§ 18. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები. კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა

დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთა რიგი ერთზე მეტია, ეწოდება მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები. n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(y^{(n)},\ y^{(n-1)},\dots,\ y',\ y,\ x)=0. \qquad (18.1)$$

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ n-ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთა ზოგადი სახეა

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\dots,y^{(n-1)}). \qquad (18.2)$$

ისევე, როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დამოკიდებულია მუდმივებზე. ამიტომ ზოგადი ამონახსნიდან რაიმე კერძო ამონახსნის გამოყოფისათვის საჭიროა დიფერენციალურ განტოლებასთან ერთად რაიმე დამატებითი პირობები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ განვსაზღვროთ ზოგად ამონახსნში შემავალი მუდმივები. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის ასეთ პირობას წარმოადგენს ამონახსნის მნიშვნელობის დაფიქსირება რომელიმე წერტილში — $y_0=f(x_0)$. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის ასეთი პირობები სხვადასხვაგვარად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ. მაგალითად, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დამოკიდებულია ორ მუდმივზე. მათი მოძებნისათვის საჭიროა ორი პირობა. ასეთი პირობები შეიძლება იყოს ამონახსნის

მნიშვნელობების დაფიქსირება ორ სხვადასხვა წერტილში ან ერთსა და იმავე წერტილში ამონახსნისა და მისი წარმოებულის მნიშვნელობების ცოდნა. ამ ორი ხერხიდან უფრო მეტად გავრცელებულია მეორე. კერძოდ, ის უფრო მოხერხებულია მექანიკის იმ ამოცანების ამოხსნისათვის, რომლებიც დაკავშირებულია სხეულის მოძრაობის განტოლების პოვნასთან. ამ შემთხვევაში მოცემულია სხეულის საწყისი კოორდინატი (ფუნქციის მნიშვნელობა) და საწყისი სიჩქარე (ფუნქციის წარმოებული). ამიტომ პირობებს $y_0=y(x_0)$ და $y_0'=y'(x_0)$ უწოდებენ საწყის პირობებს.

პირობებს

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{18.3}$$

ეწოდება საწყისი პირობები n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის.

ამოცანას, ვიპოვოთ n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (18.3) საწყის პირობებს, ეწოდება კოშის ამოცანა.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 18.1. თუ f ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y'},\ldots,\ \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ უწყვეტი ფუნქციებია $n+1$ განზომილებიანი სივრცის რაიმე Ω არეში, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $(x_0, y_0, y_0',\ldots,\ldots, y_0^{(n-1)})\in\Omega$ წერტილი, არსებობს (18.2) განტოლების ერთადერთი $y=\varphi(x)$ ამონახსნი x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, რომელიც აკმაყოფილებს (18.3) საწყის პირობებს.

თეორემა 18.1-დან გამომდინარეობს, რომ თუ $(x_0, y_0, y_0',\ldots,y_0^{(n-1)})\in\Omega$, მაშინ კოშის ამოცანას (18.3) საწყისი პირობებით გააჩნია ამონახსნი და იგი ერთადერთია. ამიტომ თეორემა 18.1-ს უწოდებენ თეორემას კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 18.1. n-ური რიგის (18.2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ანუ ზოგადი ინტეგრალი ეწოდება $y=y(x, c_1, c_2,\ldots, c_n)$ ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია n ნებისმიერ მუდმივზე, და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $y=y(x, c_1, c_2,\ldots, c_n)$ ფუნქცია არის (18.2) განტოლების ამონახსნი $c_1, c_2,\ldots, c_n$ მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარკვეული სიმრავლიდან.

ბ) მოცემული (18.3) საწყისი პირობებისათვის $c_1, c_2,\ldots, c_n$ მუდმივები შეგვიძლია შევარჩიოთ ისე, რომ $y=y(x, c_1, c_2,\ldots, c_n)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (18.3) საწყის პირობებს (იგულისხმება, რომ $(x_0, y_0, y_0',\ldots, y_0^{(n-1)})\in\Omega$).

ზოგ შემთხვევაში n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ არაცხადი სახით: $\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$, რომელიც y-ის მიმართ ელემენტარულ ფუნქციებში შეიძლება საზოგადოდ არ ამოიხსნას.

შენიშვნა. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ მუდმივების ის კონკრეტული მნიშვნელობები, რომლებიც (18.3) პირობებით განისაზღვრებიან, მიიღება შემდეგი სისტემიდან:

$$\begin{cases} y(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = y_0, \\ y'(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = y_0', \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{18.4}$$

ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან $c_1, c_2, \ldots, c_n$ მუდმივების რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, ეწოდება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

§ 19. განტოლებები, რომელთა რიგის დაწევა ხერხდება

ზოგ შემთხვევაში შესაძლებელია, მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის დაყვანა უფრო დაბალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნამდე ანუ განტოლების რიგის დაწევა. განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

1. $y^{(n)} = f(x)$.

ამ განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c_1 = g_1(x) + c_1, \tag{19.1}$$

სადაც x_0 რაიმე ფიქსირებული რიცხვია ამონახსნის არსებობის შუალედიდან, ხოლო c_1 მუდმივია. (19.1)-დან გვაქვს

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} g_1(t)\,dt + c_1(x - x_0) + c_2 = g_2(x) + c_1(x - x_0) + c_2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$y = \int_{x_0}^{x} g_{n-1}(t)\,dt + \frac{c_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_n.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=2$, $y'(0)=0$ საწყის პირობებს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ინტეგრებით მივიღებთ

$$y' = \operatorname{tg} x + c_1, \quad y = -\ln|\cos x| + c_1 x + c_2.$$

შევარჩიოთ ის ამონახსნი რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს. გვაქვს

$$\begin{cases} -\ln|\cos 0| + 0 \cdot c_1 + c_2 = 2, \\ \operatorname{tg} 0 + c_1 = 0. \end{cases}$$

აქედან $c_1=0$, $c_2=0$. ე. ი. საძებნი ამონახსნია

$$y = -\ln|\cos x| + 2.$$

2. ვთქვათ (18.1) განტოლების მარცხენა მხარე ცხადი სახით არ შეიცავს y-ს, ე. ი. განტოლებას აქვს სახე

$$F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (19.2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $z(x) = y'(x)$. მაშინ $z' = y'', \ldots, z^{(n-1)} = y^{(n)}$ და (19.2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

მივიღეთ $(n-1)$ რიგის დიფერენციალური განტოლება. თუ $z=z(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ არის ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (იგი დამოკიდებულია $n-1$ მუდმივზე), მაშინ (19.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = \int_{x_0}^{x} z(t, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})\, dt + c_n.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $y''=1+(y')^2$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=z$. მაშინ მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$z' = 1 + z^2.$$

ცვლადთა განცალებით მივიღებთ

$$\frac{dz}{1+z^2} = dx, \qquad x + c_1 = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z.$$

ე. ი.

$$z = \operatorname{tg}(x + c_1).$$

რადგან $z = y'$, ამიტომ $dy=\operatorname{tg}(x + c_1)\,dx$ და $y = -\ln|\cos(x+c_1)| + c_2$.

3. ვთქვათ (18.1) განტოლების მარჯვენა მხარე ცხადი სახით არ შეიცავს x-ს, ე. ი. აქვს სახე

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{19.3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ ამ განტოლებაში y არის დამოუკიდებელი ცვლადი, y' — კი საძიებელი ფუნქცია. აღვნიშნოთ $y' = z(y)$. მაშინ

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(z \cdot z'_y)}{dx} = \frac{d(z \cdot z'_y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z(z_y'^2 + z \cdot z''_y), \tag{19.4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y^{(n)} = \varphi(z, z'_y, \ldots, z_y^{(n-1)}).$$

თუ y ფუნქციის წარმოებულების ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (19.3) განტოლებაში, z ფუნქციის მიმართ მივიღებთ n—1 რიგის დიფერენციალურ განტოლებას. ვთქვათ $z = z(y)$ $(\alpha < y < \beta)$ არის მიღებული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც $]\alpha, \beta[$ ინტერვალში განსხვავებულია ნულისაგან. რადგან $z(y) = \dfrac{dy}{dx}$, გვექნება

$$dx = \frac{dy}{z(y)}, \quad x = \int \frac{dy}{z(y)} + c.$$

მივიღეთ (19.3) განტოლების ამონახსნი არაცხადი სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ $yy'' - y'^2 = 0$ განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $z' = z(y)$, მაშინ

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = z \cdot z'_y.$$

ამ მნიშვნელობების ჩასმით მოცემულ განტოლებაში მივიღებთ

$$yzz'_y - z^2 = 0.$$

აქედან $z = 0$ ან $y\dfrac{dz}{dy} - z = 0$. ტოლობიდან $z = 0$ გვაქვს $y = c$, რომელიც ცხადია წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნს.

ვთქვათ, $z \neq 0$, მაშინ $y\dfrac{dz}{dy} - z = 0$ განტოლებიდან გვაქვს

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y},$$

აქედან

$$z = c_1 y.$$

რადგან $z = \dfrac{dy}{dx}$, ამიტომ გვაქვს

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y,$$

საიდანაც

$$\ln\left|\frac{y}{c_2}\right| = c_1 x,$$

ანუ

$$y = c_2 e^{c_1 x}.$$

4. (18.1) განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს m რიგის ერთგვაროვან ფუნქციას $y, y', \ldots, y^{(n)}$ ცვლადების მიმართ. ე. ი.

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \quad (t \neq 0).$$

განტოლების რიგის დაწევის მიზნით შემოვიტანოთ ახალი ფუნქცია $z(x)$ შემდეგი ტოლობით

$$y' = yz \quad (y \neq 0).$$

მაშინ

$$\begin{aligned}
y'' &= yz' + y'z = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'),\\
y''' &= y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') =\\
&= y(z^3 + 3zz' + z''),\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
y^{(n)} &= y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)}).
\end{aligned}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (18.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \ldots, y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

აქედან, რადგან F ფუნქცია ერთგვაროვანია, გვექნება

$$y^m F(x, 1, z, \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

რადგან $y \neq 0$, მივიღებთ $(n-1)$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$F(x, 1, z, \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

ვთქვათ $z=z(x)$ ამ განტოლების ამონახსნია. მაგრამ $z=\frac{y'}{y}$.

აქედან

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right|=\int z(x)\,dx,$$

საიდანაც

$$y=ce^{\int z(x)dx}.$$

მაგალითი 4. ამოვხსნათ $2yy''+y'^2=0$ განტოლება.

ამოხსნა. რადგან $F(x, y, y', y'')=2yy''+y'^2$ არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია y, y', y'' ცვლადების მიმართ $y=0$ ფუნქცია არის განტოლების ამონახსნი. ამიტომ ვიგულისხმებთ, რომ $y\neq 0$. გამოვიყენოთ ჩასმა $y'=zy$. მაშინ $y''=y(z'+z^2)$ და მივიღებთ

$$(y\cdot z)^2+2y^2(z'+z^2)=0.$$

აქედან $3z^2+2z'=0$. ამ განტოლებას აკმაყოფილებს ფუნქცია $z=0$ (მაშინ $y'=0$ საიდანაც $y=c$. ე. ი. ფუნქცია $y=c$ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას).

ვთქვათ $z\neq 0$, მაშინ

$$-\frac{2dz}{3z^2}=dx,\quad \frac{3}{2}z^{-1}=x+c_1,\ z=\frac{3}{2}(x+c_1)^{-1}.$$

$$\frac{dy}{y}=z\,dx=\frac{3}{2}\,\frac{dx}{x+c_1}.$$

აქედან

$$\ln\left|\frac{y}{c_2}\right|=\frac{3}{2}\ln|x+c_1|,$$

საიდანაც

$$y=c_2(x+c_1)^{3/2}. \tag{19.5}$$

შევნიშნოთ, რომ $y=0$ ამონახსნი მიიღება (19.5) ამონახსნისაგან, როცა $c_2=0$.

§ 20. წრფივი დიფერენციალური განტოლებები. ძირითადი ცნებები

განსაზღვრება 20.1. n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება n-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტო-

ლება, თუ იგი წრფივია უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ, ე. ი. აქვს შემდეგი სახე

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\,y=f(x). \tag{20.1}$$

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ განტოლებებს, რომელშიც $a_0(x)\equiv 1$.

თუ $f(x)\not\equiv 0$, (20.1) განტოლებას ეწოდება არაერთგვაროვანი, ხოლო თუ $f(x)\equiv 0$, ე. ი. (20.1) განტოლებას აქვს სახე

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\,y=0, \tag{20.2}$$

— ეწოდება ერთგვაროვანი. (20.2) განტოლებას ეწოდება (20.1) არაერთგვაროვანი განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება.

დავადგინოთ წრფივი დიფერენციალური განტოლების ძირითადი თვისებები. ამასთან შემოვისაზღვრებით მხოლოდ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებების განხილვით.

1. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებები.

თ ე ო რ ე მ ა 20.1. თუ y_1 და y_2 ფუნქციები არის მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი

$$y''+a_1(x)\,y'+a_2(x)\,y=0 \tag{20.3}$$

განტოლების ამონახსნები, მაშინ $c_1y_1+c_2y_2$ ფუნქცია, სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია, ასევე იქნება ამ განტოლების ამონახსნი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან y_1 და y_2 არის (20.3) განტოლების ამონახსნები, ამიტომ მართებულია ტოლობები

$$y_1''+a_1(x)\,y_1'+a_2(x)\,y_1=0,$$
$$y_2''+a_1(x)\,y_2'+a_2(x)\,y_2=0.$$

ამ ტოლობების ძალით გვაქვს

$$(c_1y_1+c_2y_2)''+a_1(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+a_2(x)(c_1y_1+c_2y_2)=$$
$$=c_1(y_1''+a_1(x)\,y_1'+a_2(x)\,y_1)+c_2(y_2''+a_1(x)\,y_2'+a_2(x)\,y_2)=0,$$

ე. ი. $c_1y_1+c_2y_2$ ფუნქცია (20.3) განტოლების ამონახსნია. თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 20.2. $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ფუნქციების წრფივი კომბინაცია ეწოდება $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_my_m$ სახის ჯამს, სადაც $c_1, c_2, \ldots, c_m$ რაიმე მუდმივებია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 20.3 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული E სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი $c_1, c_2, \ldots, c_m$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და E სიმრავლეზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_my_m\equiv 0. \tag{20.4}$$

თუ (20.4) ტოლობა სრულდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$, მაშინ $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ფუქციებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი E სიმრავლეზე.

მაგალითად, $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, ხოლო $\arcsin x$ და $\arccos x - \frac{\pi}{2}$ ფუნქციები კი წრფივად დამოკიდებულია ამავე სეგმენტზე.

განსაზღვრება 20.4. (20.3) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებისაგან შედგენილ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, თუ ამ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი წარმოადგენს მოცემული სისტემის ფუნქციათა წრფივ კომბინაციას.

განსაზღვრება 20.5. ვთქვათ y_1 და y_2 წარმოებადი ფუნქციებია. დეტერმინანტს

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

ეწოდება y_1, y_2 ფუნქციების ვრონსკის* დეტერმინანტი.

თეორემა 20.2. თუ y_1 და y_2 წრფივად დამოკიდებული ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი იგივურად ნულის ტოლია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგან y_1 და y_2 წრფივად დამოკიდებულია, ამიტომ $y_1(x) = \lambda y_2(x)$. აქედან $y_1'(x) = \lambda y_2'(x)$, რის გამოც

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20.3. თუ (20.3) განტოლების კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და მისი y_1, y_2 ამონახსნების ვრონსკის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ერთ წერტილში მაინც, მაშინ იგი განსხვავებული იქნება ნულისაგან $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ $W\Big|_{x=x_0} = W_0 \neq 0$, $(x_0 \in [\alpha, \beta])$. რადგან y_1 და y_2 (20.3) განტოლების ამონახსნებია, ამიტომ

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

---

* ვრონსკი (1778—1853) — პოლონელი მათემატიკოსი.

გავამრავლოთ პირველი განტოლება y_2-ზე, მეორე — y_1-ზე და შემდეგ მეორე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი. მივიღებთ

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \qquad (20.5)$$

სხვაობა, რომელიც მოთავსებულია (20.5) ტოლობის მეორე ფრჩხილებში, არის $W[y_1, y_2]$, ხოლო სხვაობა, მოთავსებული პირველ ფრჩხილებში, არის მ-სი წარმოებული. მართლაც

$$W'[y_1, y_2] = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

ამიტომ (20.5) ტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$W' + a_1 W = 0. \qquad (20.6)$$

ვიპოვოთ (20.6) განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $W\Big|_{x=x_0} = W_0$. გვექნება

$$W = C e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dt}$$

საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dt} \qquad (20.7)$$

რადგან $W_0 \neq 0$, ცხადია $W \neq 0$, ნებისმიერი $x \in [\alpha, \beta]$-თვის. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (20.7) ფორმულიდან ჩანს, რომ თუ ვრონსკის დეტერმინანტი ნულის ტოლია თუნდაც ერთ წერტილში, მაშინ იგი იგივურად ნულის ტოლია.

თ ე ო რ ე მ ა 20.4. თუ (20.3) განტოლების კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე, მაშინ იმისათვის, რომ ამ განტოლების y_1, y_2 ამონახსნები იყოს წრფივად დამოუკიდებელი $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $W[y_1, y_2] \neq 0$, ნებისმიერი $x \in]\alpha, \beta[$-სათვის.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. საკმარისობა უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 20.2-დან.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $x \in]\alpha, \beta[$-სათვის

$W[y_1, y_2]\neq 0$. დავუშვათ, საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $x_0\in\,]\alpha, \beta[$ წერტილი ისეთი, რომ $W\Big|_{x=x_0}=0$. მაშინ მოიძებნება ისეთი c_1 და c_2 რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და რომლებიც შემდეგ სისტემას აკმაყოფილებენ

$$\begin{cases} c_1\, y_1(x_0) + c_2\, y_2(x_0) = 0 \\ c_1\, y_1'(x_0) + c_2\, y_2'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{20.8}$$

რადგან y_1 და y_2 (20.3) განტოლების ამონახსნებია, თეორემა 20.1-ის თანახმად $y=c_1y_1+c_2y_2$ ფუნქცია აგრეთვე იქნება (20.3) განტოლების ამონახსნი. ამასთან, როგორც ეს (20.8) სისტემიდან ჩანს, იგი აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0.$$

მაგრამ ამ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს აგრეთვე $y\equiv 0$ ფუნქციაც, რომელიც ცხადია არის (20.3) განტოლების ამონახსნი. (20.3) განტოლებისათვის მართებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა 18.1, რადგან ამ განტოლების კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე. ამიტომ გვექნება $c_1y_1+c_2y_2\equiv 0$, რაიმე $]x_0-\delta, x_0+\delta[\,\subset\,]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე, სადაც δ განისაზღვრება მოცემული განტოლების კოეფიციენტებით. გამომდინარე აქედან ადვილია ჩვენება, რომ $c_1y_1+c_2y_2\equiv 0$ მთელ $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე. ე. ი. y_1 და y_2 წრფივად დამოკიდებული ამონახსნებია $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე, რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20.5. თუ (20.3) განტოლების კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე, მაშინ ამ ინტერვალზე წრფივად დამოუკიდებელი ნებისმიერი ორი ამონახსნისაგან შედგენილი სისტემა არის (20.3) განტოლების ფუნდამენტური სისტემა.

დამტკიცება. ვთქვათ y_1 და y_2 არის (20.3) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე. დავუშვათ $z=z(x)$ ამ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნია. ავიღოთ რაიმე $x_0\in\,]\alpha, \beta[$ რიცხვი. ვთქვათ

$$z(x_0)=z_0, \quad z'(x_0)=z_0'. \tag{20.9}$$

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} c_1\, y_1(x_0) + c_2\, y_2(x_0) = z_0, \\ c_1\, y_1'(x_0) + c_2\, y_2'(x_0) = z_0', \end{cases} \tag{20.10}$$

სადაც უცნობებია c_1 და c_2. რადგან y_1 და y_2 ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია, ამიტომ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი

x_0 წერტილში ნულისაგან განსხვავებულია. ამიტომ არსებობს (20.10) სისტემის ერთადერთი ამონახსნი c_1°, c_2°. განვიხილოთ ფუნქცია

$$y = c_1^0 y_1 + c_2^0 y_2.$$

თეორემა 20.1-ის ძალით y იქნება (20.3) განტოლების ამონახსნი. ამასთან ცხადია, იგი აკმაყოფილებს (20.9) საწყის პირობებს. ამიტომ ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ძალით მივიღებთ, რომ $z(x) = y(x)$, ყოველი $x \in]\alpha, \beta[$-სათვის. ე. ი.

$$z(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x), \; x \in]\alpha, \beta[.$$

რადგან $z = z(x)$ ამონახსნი ნებისმიერად იყო აღებული, განსაზღვრება 20.4-ის ძალით უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ y_1, y_2 არის (20.3) განტოლების ფუნდამენტური სისტემა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. (20.3) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{20.11}$$

სადაც y_1 და y_2 (20.3) განტოლების რაიმე წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ხოლო c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივები.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოძებნის საერთო მეთოდი არსებობს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც განტოლების კოეფიციენტები მუდმივი რიცხვებია (ეს მეთოდი განხილულია შემდეგ პარაგრაფში).

ახლა მოვიყვანთ მეთოდს, რომელიც იძლევა საშუალებას, მოვძებნოთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როდესაც ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსნი.

ვთქვათ y_1 არის (20.3) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი. ვიპოვოთ ამ განტოლების მეორე ისეთი კერძო ამონახსნი y_2, რომ y_1 და y_2 ფუნქციები იყოს წრფივად დამოუკიდებელი. მაშინ ზოგადი ამონახსნი წინა თეორემის შედეგის ძალით იქნება $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

როგორც თეორემა 20.3-ის დამტკიცების დროს ვნახეთ

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = c\, e^{-\int a_1 dx}$$

ამრიგად, y_2 ფუნქციის მიმართ გვაქვს პირველი რიგის წრფივი

დიფერენციალური განტოლება. ამოვხსნათ იგი შემდეგნაირად. გავყოთ განტოლება y_1^2-ზე, მივიღებთ

$$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} c e^{-\int a_1 dx},$$

ანუ

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} c e^{-\int a_1 dx}$$

ამ განტოლების ინტეგრებით გვექნება

$$\frac{y_2}{y_1} = c\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1 dx} dx + c_1.$$

რადგან ჩვენ ვეძებთ კერძო ამონახსნს, ავიღოთ $c=1$, $c_1=0$. მივიღებთ

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1 dx} dx. \tag{20.12}$$

ადვილია შემოწმება, რომ y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + 2y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი]—1,1[ინტერვალში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უშუალოდ შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ $y_1 = x$ არის მოცემული განტოლების ამონახსნი.

რადგან ჩვენ შემთხვევაში $a_1(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$, (20.12) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$y_2 = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx = x\int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx =$$

$$= x\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = x\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx =$$

$$= x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right).$$

ამრიგად, ზოგადი ამონახსნი $]-1;\ 1[$ ინტერვალში იქნება

$$y = C_1 x + C_2\left(\frac{1}{2}\, x \ln\frac{1+x}{1-x} - 1\right).$$

2. არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებები. ზოგადი ამონახსნის სტრუქტურა. განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x). \tag{20.13}$$

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 20.6. წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების $\overline{y}$ ზოგადი ამონახსნისა და მოცემული განტოლების რაიმე y^* კერძო ამონახსნის ჯამს. ე. ი. ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y = \overline{y} + y^*. \tag{20.14}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის თანახმად $\overline{y}$ არის $y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ამიტომ მას ექნება სახე $\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$, სადაც y_1 და y_2 ერთგვაროვანი განტოლების რაიმე წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. აქედან გამომდინარე ადვილად შევამოწმებთ, რომ $y = \overline{y} + y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y^*$ არის (20.13) განტოლების ამონახსნი c_1, c_2 მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. მეორეს მხრივ, თუ $z = z(x)$ არის (20.13) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი, მაშინ $z - y^*$ იქნება (20.13) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. მართლაც

$$(z - y^*)'' + a_1(x)(z - y^*)' + a_2(x)(z - y^*) =$$
$$= (z'' + a_1(x) z' + a_2(x) z) + ({y^*}'' + a_1(x)\, {y^*}' + a_2(x)\, y^*) = 0.$$

რადგან $z - y^*$ ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია, ამიტომ c_1 და c_2 მუდმივები ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ $z - y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2$. აქედან $z = y^* + c_1 y_1 + c_2 y_2 = y^* + \overline{y}$. ე. ი. (20.13) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი მიიღება (20.14)-დან მასში შემავალი მუდმივების სათანადოდ შერჩევით. ეს კი ნიშნავს, რომ $y = \overline{y} + y^*$ არის (20.13) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

თეორემა დამტკიცებულია.

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის მოძებნისათვის სასარგებლოა შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 20.7. თუ არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ორი ფუნქციის ჯამს, ე. ი.

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f_1(x) + f_2(x),$$

მაშინ ამ განტოლების კერძო ამონახსნია $y^* = y_1^* + y_2^*$, სადაც y_1^* და y_2^* არის შესაბამისად შემდეგი განტოლებების

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f_1(x),$$

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f_2(x)$$

კერძო ამონახსნი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თეორემის პირობის თანახმად გვაქვს

$$y_1^{*\prime\prime} + a_1(x)\,y_1^{*\prime} + a_2(x)\,y_1^* = f_1(x),$$

$$y_2^{*\prime\prime} + a_1(x)\,y_2^{*\prime} + a_2(x)\,y_2^* = f_2(x).$$

საიდანაც მივიღებთ

$$(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(x)(y_1^* + y_2^*)' + a_2(x)(y_1^* + y_2^*) = f_1(x) + f_2(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც ცნობილია (20.13) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების რაიმე ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, მაშინ (20.13) განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვიპოვოთ მათი საშუალებით. ე. წ. მუდმივთა ვარიაციის მეთოდის გამოყენებით. გავეცნოთ ამ მეთოდს.

ვთქვათ y_1 და y_2 ფუნქციები

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$$

განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. (20.13) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x),$$

სადაც $c_1(x)$ და $c_2(x)$ ჯერჯერობით უცნობი ფუნქციებია. შევარჩიოთ $c_1(x)$ და $c_2(x)$ ფუნქციები ისე, რომ შესრულდეს პირობა

$$c_1'(x)\,y_1(x) + c_2'(x)\,y_2(x) = 0. \tag{20.15}$$

მაშინ

$$y^{*\prime} = c_1(x)\,y_1'(x) + c_2(x)\,y_2'(x),$$

$$y^{*\prime\prime} = c_1(x)\,y_1''(x) + c_2(x)\,y_2''(x) + c_1'(x)\,y_1'(x) + c_2'(x)\,y_2'(x).$$

ჩავსვათ y^* ფუნქციის და მისი წარმოებულების მნიშვნელობები (20.13) განტოლებაში. მივიღებთ

$$c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + a_1(c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2') + a_2(c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2) = f(x),$$

ანუ

$$c_1(x)(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + c_2(x)(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x).$$

რადგან y_1 და y_2 ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებია, ამიტომ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებები ნულის ტოლია და გვექნება

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x). \tag{20.16}$$

ამრიგად, y^* ფუნქცია იქნება (20.13) განტოლების ამონახსნი იმ შემთხვევაში, თუ $c_1(x)$ და $c_2(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (20.15) და (20.16) განტოლებებს. ე. ი. აკმაყოფილებენ სისტემას:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{20.17}$$

(20.17) სისტემა $c_1'(x)$ და $c_2'(x)$ ფუნქციების მიმართ წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის დეტერმინანტი არის y_1 და y_2 ფუნქციების ვრონსკის დეტერმინანტი. იგი ყოველ წერტილში განსხვავებულია ნულისაგან. (20.17) სისტემის ამოხსნით ვიპოვით $c_1'(x)$ და $c_2'(x)$ ფუნქციებს, მათი ინტეგრებით კი მივიღებთ $c_1(x)$ და $c_2(x)$-ს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ $y_1 = x$ და $y_2 = x^2$ ფუნქციები მოცემული განტოლების ამონახსნებია. (ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\overline{y} = c_1x + c_2x^2).$$

მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^* = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2,$$

სადაც $c_1'(x)$ და $c_2'(x)$ აკმაყოფილებენ სისტემას

$$\begin{cases} xc_1'(x) + x^2c_2'(x) = 0, \\ c_1'(x) + 2xc_2'(x) = x. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $c_1'(x)=-x$ და $c_2'(x)=1$, საიდანაც $c_1=-\frac{x^2}{2}$, $c_2=x$. ე. ი. მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნია

$$y^*=-\frac{x^2}{2}x+x\cdot x^2=\frac{x^3}{2}.$$

ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1x+c_2x^2+\frac{x^3}{2},$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 21. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{21.1}$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივი რიცხვებია. ასეთ განტოლებას მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება.

როგორც წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, (21.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ვიპოვოთ მისი წრფივად დამოუკიდებელი ორი ამონახსნი. ვეძებოთ (21.1) განტოლების კერძო ამონახსნი შემდეგი სახით

$$y=e^{kx}, \quad \text{სადაც} \quad k=\text{const};$$

მაშინ

$$y'=ke^{kx}, \quad y''=k^2e^{kx}.$$

თუ y ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (21.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0.$$

რადგან $e^{kx}\neq 0$, გვექნება

$$k^2+a_1k+a_2=0. \tag{21.2}$$

ამრიგად, თუ k არის (21.2) განტოლების ფესვი, მაშინ e^{kx} იქნება (21.1) განტოლების ამონახსნი. (21.2) განტოლებას ეწოდება (21.1) განტოლების მახასიათებელი განტოლება. (21.2) განტოლება არის კვადრატული განტოლება. მას გააჩნია ორი ფესვი ჯერადობის გათვალისწინებით. განვიხილოთ შემთხვევები.

1. (21.2) განტოლებას აქვს ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვები.

ვთქვათ მახასიათებელი განტოლების ფესვებია k_1 და k_2 ($k_1 \neq k_2$). მაშინ $e^{k_1 x}$ და $e^{k_2 x}$ ფუნქციები იქნება (21.1) განტოლების ამონახსნები. ამასთან ეს ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია. ამიტომ ამ შემთხვევაში (21.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y'' + 5y' - 6y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2 + 5k - 6 = 0,$$

რომლის ფესვებია $k_1 = 1$, $k_2 = -6$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-6x}.$$

2. მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ორჯერადი ფესვი.

ვთქვათ k_1 არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი. მაშინ $y_1 = e^{k_1 x}$ ფუნქცია იქნება (21.1) განტოლების ამონახსნი. მეორე კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y_2 = u(x) e^{k_1 x},$$

სადაც $u(x)$ ჯერჯერობით უცნობი ფუნქციაა. გავაწარმოოთ y_2 ფუნქცია. მივიღებთ

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

y_2 ფუნქციისა და მისი წარმოებულების ჩასმით (21.1) განტოლებაში მივიღებთ

$$e^{k_1 x}[u'' + (2k_1 + a_1)u' + (k_1^2 + a_1 k + a_2)u] = 0.$$

რადგან k_1 ორჯერადი ფესვია, ამიტომ $k_1^2 + a_1 k_1 + a_2 = 0$ და $k_1 = -\frac{a_1}{2}$.

აქის გამო $2k_1 + a_1 = 0$. ამ ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ $u'' = 0$, რომლის ინტეგრებით გვექნება $u = Ax + B$. კერძოდ, ავიღოთ $A = 1$, $B = 0$. მაშინ $u = x$.

ამრიგად, y_2 კერძო ამონახსნი იქნება

$$y_2 = x\, e^{k_1 x},$$

რადგან y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია, (21.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$y = e^{k_1 x}(c_1 x + c_2).$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. y_2 კერძო ამონახსნის მოძებნა შეიძლება აგრეთვე (20.12) ფორმულის გამოყენებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2 + 4k + 4 = 0.$$

მისი ფესვია $k = -2$, ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = e^{-2x}(c_1 x + c_2).$$

3. (21.2) განტოლებას გააჩნია კომპლექსური ფესვები.

ვთქვათ $\alpha + i\beta$ არის (21.2) განტოლების ფესვი. მაშინ (21.2) განტოლების ფესვი იქნება აგრეთვე $\alpha - i\beta$ კომპლექსური რიცხვი. ამიტომ (21.1) განტოლების კერძო ამონახსნებია შემდეგი კომპლექსური ფუნქციები

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + i\, e^{\alpha x}\sin\beta x, \\ y_2 &= e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - i\, e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \qquad (21.3)$$

შევნიშნოთ, რომ, თუ ნამდვილი ცვლადის კომპლექსური ფუნქცია

$$y = u(x) + iv(x) \qquad (21.4)$$

არის (21.1) განტოლების ამონახსნი, მაშინ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციები აგრეთვე იქნება (21.1) განტოლების ამონახსნები. მართლაც, თუ (21.4) ფუნქციას ჩავსვამთ (21.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$[u(x) + iv(x)]'' + a_1[u(x) + iv(x)]' + a_2[u(x) + iv(x)] \equiv 0,$$

ანუ

$$(u''(x) + a_1 u'(x) + a_2 u) + i(v''(x) + a_1 v'(x) + a_2 v(x)) \equiv 0.$$

კომპლექსური ფუნქცია ნულის ტოლია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ნულის ტოლია მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, ე. ი.

$$u'' + a_1 u' + a_2 u = 0 \quad \text{და} \quad v'' + a_1 v' + a_2 v = 0.$$

ეს ტოლობები კი ნიშნავს, რომ u და v ფუნქციები არიან (21.1) განტოლების ამონახსნები.

ამ მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ რადგან (21.3) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციები არიან (21.1) განტოლების ამონახსნები, ამიტომ (21.1) განტოლების ამონახსნებია აგრეთვე $e^{\alpha x}\sin\beta x$ და $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ფუნქციები. ცხადია, ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ (21.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $y''+4y'+13y=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^2 + 4k + 13 = 0,$$

რომელსაც გააჩნია კომპლექსური ფესვები $k_1=2+3i$, $k_2=2-3i$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x).$$

§ 22. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ განტოლება

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{22.1}$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია.

§ 20-ში ჩვენ ვაჩვენეთ (თეორემა 20.6), რომ (22.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $y = \overline{y} + y^*$, სადაც $\overline{y}$ არის (22.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y^* კი (22.1) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი. ამავე პარაგრაფში განხილული იყო მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი, რომლის საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ (22.1) განტოლების კერძო ამონახსნი. მაგრამ მუდმივკოეფიციენტებიანი (22.1) განტოლების კერძო ამონახსნის პოვნა ზოგ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია სხვა გზით, ე. წ. „განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით“. განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

1. ვთქვათ (22.1) განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს მრავალწევრისა და მაჩვენებლიანი ფუნქციების ნამრავლს, ე. ი. აქვს სახე

$$f(x) = P_n(x)\,e^{\alpha x}, \tag{22.2}$$

სადაც $P_n(x)$ არის n-ური რიგის მრავალწევრი. შესაძლებელია სამი შემთხვევა.

ა) ვთქვათ α რიცხვი არ არის (22.1) განტოლების

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვი.

ამ შემთხვევაში (22.1) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}, \qquad (22.3)$$

სადაც $A_0, A_1, \dots, A_n$ ჯერჯერობით უცნობი რიცხვებია.

თუ y^*-ს ჩავსვამთ (22.1) განტოლებაში და მიღებულ განტოლებას შევკვეცავთ $e^{\alpha x}$-ზე, მივიღებთ

$$Q_n''(x) + (2\alpha + a_1) Q_n'(x) + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2) Q_n(x) = P_n(x). \qquad (22.4)$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარეში $Q_n(x)$ არის n-ური რიგის, $Q_n'(x)$ — $n-1$ რიგის, ხოლო $Q_n''(x)$ კი $n-2$ რიგის მრავალწევრი. ამრიგად, (22.4) განტოლების ორივე მხარეში n-ური რიგის მრავალწევრებია. თუ ამ მრავალწევრების შესაბამის კოეფიციენტებს გავუტოლებთ ერთმანეთს, მივიღებთ $n+1$ განტოლებისაგან შედგენილ წრფივ განტოლებათა სისტემას. მტკიცდება, რომ ამ სისტემის დეტერმინანტია $(\alpha^2+a_1\alpha+a_2)^{n+1}\neq 0$. ამიტომ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ბ) ვთქვათ α რიცხვი არის მახასიათებელი განტოლების მარტივი ფესვი. ამ შემთხვევაში $\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$ და $2\alpha+a_1\neq 0$. ამიტომ კერძო ამონახსნის მოძებნა (22.3) სახით, სადაც $Q_n(x)$ არის n-ური რიგის მრავალწევრი, არ შეიძლება, რადგან (22.4) ტოლობის მარცხენა მხარეში მივიღებთ $n-1$ რიგის მრავალწევრს და ეს ტოლობა ვერ გარდაიქცევა იგივეობად $A_0, A_1, \dots, A_n$ კოეფიციენტების ვერც-ერთი მნიშვნელობისათვის. ამის გამო უცნობი მრავალწევრი ვეძებოთ $n+1$ რიგის მრავალწევრის სახით, რომლის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია (თავისუფალი წევრი (22.4) განტოლების მარცხენა მხარეში არ მიიღებს მონაწილეობას, რადგან გაწარმოების დროს იგი ქრება). ე. ი. y^* ფუნქციას ვეძებთ

$$y^* = x\,Q_n(x)\,e^{\alpha x}$$

სახით.

გ) α რიცხვი არის მახასიათებელი განტოლების ორჯერადი ფესვი. ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0, \; 2\alpha + a_1 = 0.$$

ამიტომ (22.4) ტოლობის მარცხენა მხარეში გვექნება მხოლოდ $Q_n''(x)$, ე. ი. $n-2$ რიგის მრავალწევრი. აქედან გამომდინარეობს, რომ y^* უნდა ვეძებოთ e^{ax} ფუნქციისა და $n+2$ რიგის მრავალწევრის ნამრავლის სახით. ამასთან, საძებნი მრავალწევრის თავისუფალი წევრი და x-თან მდგომი კოეფიციენტი, რადგან ისინი გაწარმოების დროს მაინც ქრებიან, შეგვიძლია ავიღოთ ნულის ტოლი.

ამრიგად, როდესაც a არის მახასიათებელი განტოლების ორჯერადი ფესვი, კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვეძებოთ

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{ax}$$

სახით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როცა $a=0$, მაშინ (22.2) ტოლობით განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია არის n-ური რიგის მრავალწევრი. ამიტომ, როცა 0 არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნს ვეძებთ $y^*=Q_n(x)$ სახით. თუ 0 არის მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვი ($l=1$, $l=2$), მაშინ კერძო ამონახსნს ვეძებთ $y^*=x^l Q_n(x)$ სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$y'' + y' - 6y = x^2 + 3$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

რადგან რიცხვი ნული არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ამიტომ y^* ფუნქცია ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^* = Ax^2 + Bx + C.$$

მაშინ $y^{*\prime} = 2Ax + B$, $y^{*\prime\prime} = 2A$. მოცემულ განტოლებაში y^* ფუნქციისა და მისი წარმოებულების ჩასმით მივიღებთ

$$2A + (2Ax + B) - 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 3,$$

ანუ

$$-6Ax^2 + (2A - 6B)x + (2A + B - 6C) = x^2 + 3.$$

ორივე მხარეში მდგომი x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ 2A - 6B = 0, \\ 2A + B - 6C = 3. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{18}$, $C = -\frac{61}{108}$.

ამრიგად

$$y^* = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{18}x - \frac{61}{108}$$

და ზოგადი ამონახსნი იქნება $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{18}x - \frac{61}{108}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$y'' + 3y' = 1 - 2x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა $k^2 + 3k = 0$, რომლის ფესვებია $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y} = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

რადგან $k = 0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით.

$$y^* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

მაშინ $y^{*\prime} = 2Ax + B$, $y^{*\prime\prime} = 2A$. განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$2A + 6Ax + 3B = 1 - 2x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{9}$. ამიტომ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნია

$$y^* = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{9}x.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{9}x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$y'' - 9y = (x + 1)e^{3x}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

რადგან $\alpha=3$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^* = x(Ax+B)e^{3x} = (Ax^2+Bx)e^{3x},$$

მაშინ

$$y^{*'} = (2Ax+B)e^{3x} + 3(Ax^2+Bx)e^{3x}.$$

განტოლებაში ჩასმით და e^{3x}-ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$2A + 6(2Ax+B) + 9(Ax^2+Bx) - 9(Ax^2+Bx) = x+1,$$

ანუ

$$2A + 12Ax + 6B = x + 1.$$

აქედან

$$A=\frac{1}{12}, \quad B=\frac{5}{36}.$$

ე. ი.

$$y^* = \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{5}{36}x\right)e^{3x}.$$

ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{5}{36}x\right)e^{3x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ

$$y'' - 4y' - 5y = x + e^{-x}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}.$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ $y^* = y_1^* + y_2^*$ სახით, სადაც y_1^* არის $y'' - 4y' - 5y = x$ განტოლების კერძო ამონახსნი, ხოლო y_2^* არის $y'' - 4y' - 5y = e^{-x}$ განტოლების კერძო ამონახსნი. ადვილად მივიღებთ, რომ $y_1^* = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$ და

$y_2^* = -\frac{1}{6} x e^{-x}$, ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} - \frac{1}{5} x - \frac{1}{6} x e^{-x} + \frac{4}{25} .$$

2. ვთქვათ (22.1) განტოლების მარჯვენა მხარეს აქვს სახე

$$f(x) = (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}, \tag{22.5}$$

სადაც P (x) და Q (x) მრავალწევრებია.

ეს შემთხვევა შეიძლება განვიხილოთ წინა შემთხვევის ანალოგიურად, თუ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს ეილერის ფორმულის გამოყენებით შევცვლით მაჩვენებლიანი ფუნქციით. გვექნება

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x) e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} ,$$

ანუ

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} P(x) + \frac{1}{2i} Q(x)\right] e^{(\alpha + i\beta)x} + \\ + \left[\frac{1}{2} P(x) - \frac{1}{2i} Q(x)\right] e^{(\alpha - i\beta)x} .$$

ამ გამოსახულებაში კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებულია მრავალწევრები, რომელთა ხარისხი $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრების ხარისხებს შორის უდიდესის ტოლია. თუ ჩავატარებთ პირველი შემთხვევის ანალოგიურ მსჯელობას, ვიპოვით y^* ფუნქციას, როგორც მრავალწევრისა და მაჩვენებლიანი ფუნქციის ნამრავლს. მართალია, ამ შემთხვევაში y^* იქნება კომპლექსური ფუნქცია, მაგრამ როგორც ვიცით, მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, რომლებიც ნამდვილ ფუნქციებს წარმოადგენენ, ასევე იქნებიან განტოლების ამონახსნები.

არ ჩავატარებთ რა დაწვრილებით მსჯელობას, აღვნიშნოთ, რომ y^* ფუნქცია შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი სახით:

ა) თუ $\alpha + i\beta$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ

$$y^* = x\,[u(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + v(x) e^{\alpha x} \sin \beta x],$$

სადაც $u(x)$ და $v(x)$ არის ერთი და იმავე რიგის მრავალწევრები, რომელთა ხარისხი $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრის ხარისხებს შორის უდიდესის ტოლია.

ბ) თუ $\alpha+i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ

$$y^*=x\,[u(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x+v(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x].$$

ბოლოს განვიხილოთ (22.5)-ის ერთი კერძო შემთხვევა, როდესაც ფუნქციას აქვს სახე

$$f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x,$$

ე. ი. როდესაც $P(x)=M$, $Q(x)=N$, $\alpha=0$.

ამ შემთხვევაში, როდესაც $i\beta$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x,$$

ხოლო თუ $i\beta$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, მაშინ

$$y^*=x\,(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ

$$y''+2y'+5y=2\cos x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+2k+5=0$. მისი ფესვებია $k_1=-1+2i$, $k_2=-1-2i$, ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\overline{y}=e^{-x}\,(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x).$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=A\cos x+B\sin x.$$

მაშინ $y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$, $y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$-A\cos x-B\sin x-2A\sin x+2B\cos x+5A\cos x+5B\sin x=2\cos x$$

ანუ

$$(4A+2B)\cos x+(-2A+4B)\sin x=2\cos x.$$

განტოლების ორივე მხარეში $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=\dfrac{2}{5}$, $B=\dfrac{1}{5}$.

მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ამოვხსნათ განტოლება

$$y''+9y=\cos 3x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $\pm 3i$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\overline{y}=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x.$$

კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^*=x(A\cos 3x+B\sin 3x).$$

მაშინ

$$y^{*\prime}=A\cos 3x+B\sin 3x+x(-3A\sin 3x+3B\cos 3x),$$

$$y^{*\prime\prime}=-6(A\sin 3x-B\cos 3x)+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x).$$

განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x=\cos 3x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=0$, $B=\frac{1}{6}$.

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{x}{6}\sin 3x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ამოვხსნათ განტოლება

$$y''-y=3e^{2x}\cos x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი განტოლებაა $k^2-1=0$. მისი ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}.$$

რადგან კომპლექსური რიცხვი $2+i$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y^*=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$$

სახით.

განტოლებაში ჩასმითა და მსგავსი წევრების შეერთებით მივიღებთ

$$(2A+4B)e^{2x}\cos x+(-4A+2B)e^{2x}\sin x=3e^{2x}\cos x.$$

კოეფიციენტების გატოლებით გვექნება

$$2A+4B=3,\quad -4A+2B=0.$$

აქედან $A=\frac{3}{10}$, $B=\frac{3}{5}$. ე. ი. კერძო ამონახსნია

$$y^{*}=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right),$$

ხოლო ზოგადი ამონახსნი

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right).$$

§ 23. n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\,y=0. \tag{23.1}$$

ძართებულია შემდეგი თეორემა, რომელსაც მოვიყვანთ დამტკიცების გარეშე.

თ ე ო რ ე მ ა 23.1. თუ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ფუნქციები (23.1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, მაშინ

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n \tag{23.2}$$

ფუნქცია, სადაც $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, არის (23.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$ კოეფიციენტები მუდმივი რიცხვებია, (23.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს ვიპოვით ისევე, როგორც მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში:

1) უნდა შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^{n}+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\cdots+a_n=0.$$

2) ვიპოვოთ მახასიათებელი განტოლების ფესვები.

3. განტოლების ფესვების საშუალებით ვიპოვოთ (23.1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები შემდეგი წესის თანახმად:

ა) ყოველ ნამდვილ მარტივ k ფესვს შეესაბამება კერძო ამონახსნი e^{kx}.

ბ) ყოველ r ჯერად ნამდვილ k ფესვს შეესაბამება r ცალი კერძო ამონახსნი — e^{kx}, $x\,e^{kx}, \dots, x^{r-1}\,e^{kx}$.

გ) ყოველ მარტივ კომპლექსურ ფესვთა წყვილს $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\,\beta$ შეესაბამება ორი კერძო ამონახსნი $e^{\alpha x}\cos\beta x$ და $e^{\alpha x}\sin\beta\,x$.

დ) ყოველ μ ჯერად კომპლექსურ ფესვთა წყვილს $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\,\beta$ შეესაბამება 2μ კერძო ამონახსნი

$$e^{\alpha x}\cos\beta\,x,\ \ x\,e^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{\mu-1}\,e^{\alpha x}\cos\beta\,x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta\,x,\ \ x\,e^{\alpha x}\sin\beta\,x, \dots, x^{\mu-1}\,e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

ასეთი წესით შედგენილი კერძო ამონახსნთა სისტემა იქნება წრფივად დამოუკიდებელი. ამასთან სისტემაში იქნება ზუსტად n ცალი ამონახსნი. (23.2) ფორმულით ვიპოვით (23.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$y''' - 3\,y'' - y' + 3y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^3 - 3k^2 - k + 3 = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 3$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1\,e^x + c_2\,e^{-x} + c_3\,e^{3x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^3 + 3k^2 - 4 = 0,$$

რომლის ფესვებია $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. ამასთან -2 არის ორჯერადი ფესვი. ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = c_1\,e^x + c_2\,e^{-2x} + c_3\,x\,e^{-2x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^4-1=0.$$

მისი ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1 e^x+c_2 e^{-x}+c_3 \cos x+c_4 \sin x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ

$$y^{V}+2y^{IV}-8y''-12y'-8y=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^5+2k^4-8k^2-12k-8=0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $k_1=2$, $k_2=-1+i$, $k_3=-1-i$. ამასთან k_2 და k_3 ორჯერადი ფესვებია. ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1 e^{2x}+c_2 e^{-x}\cos x+c_3 x e^{-x}\cos x+c_4 e^{-x}\sin x+c_5 x e^{-x}\sin x.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 23.1. ცვლადკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას

$$x^n y^{(n)}+b_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+b_1 x y'+b_0 y=0, \qquad (23.3)$$

სადაც $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ მუდმივი რიცხვებია, ეწოდება ეილერის განტოლება.

ეილერის განტოლება $x=e^t$ ჩასმით დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებაზე. მართლაც, ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$y(x)=y(e^t)=v(t).$$

აქედან

$$y'(x)=v'(t)\frac{dt}{dx}=v'(t)e^{-t},$$

ანუ

$$xy'(x)=e^t v'(t)e^{-t}=v'(t).$$

თუ გავაგრძელებთ გაწარმოებას, მივიღებთ

$$y''(x)=v''(t)e^{-2t}-v'(t)e^{-2t},\ x^2y''(x)=v''(t)-v'(t), \dots$$

თუ (23.3) განტოლებაში ჩავსვამთ y ფუნქციასა და მის წარმოებულებს, მივიღებთ n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთ-

გვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას $v(t)$ ფუნქციის მიმართ. რადგან მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების მონახსნს ვეძებთ $v(t)=e^{kt}=x^k$ ან $v(t)=t^r e^{kt}=x^k \ln^r x$ სახით (k საზოგადოდ არის კომპლექსური რიცხვი), ამიტომ ეილერის განტოლების ამონახსნი თავიდანვე შეგვიძლია ვეძებოთ x^k ან $x^k \ln^r x$ სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^2 y'' - 4x y' + 6y = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. $x=e^t$ ჩასმით მოცემული განტოლება დაიყვანება

$$v''(t) - 5v'(t) + 6v(t) = 0$$

განტოლებაზე, სადაც $v(t)=y(e^t)=y(x)$. მიღებული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$v(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}.$$

მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. კერძო ამონახსნი ვეძებოთ $y=x^k$ სახით. მაშინ

$$y' = k x^{k-1},\ y'' = k(k-1) x^{k-2}.$$

განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$x^2 k(k-1) x^{k-2} + 3x k x^{k-1} + x^k = x^k \ (k^2 + 2k + 1) = 0.$$

აქედან, თუ $x \neq 0$, მივიღებთ $k^2+2k+1=0$. ამ განტოლებას აქვს ერთი ორჯერადი ფესვი $k=-1$. ამიტომ $y=x^k=\dfrac{1}{x}$ იქნება მოცემული განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი. მეორე კერძო ამონახსნი იქნება $y=x^{-1}\ln x = \dfrac{\ln x}{x}$, რაშიც უშუალო შემოწმებითაც დავრწმუნდებით. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 \ln x}{x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^2 y'' - 3x y' + 13y = 0.$$

ამოხსნა. ვთქვათ $y=x^k$. მაშინ $y'=kx^{k-1}$, $y''=k(k-1)x^{k-2}$. განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$x^k[k(k-1)-3k+13]=0.$$

აქედან, თუ $x\neq 0$ გვექნება

$$k^2-4k+13=0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $2\pm 3i$. ამიტომ განტოლების კომპლექსური ამონახსნები იქნება

$$y_{1,2}=x^{2\pm 3i}=x^2e^{\pm 3i\ln x}=x^2(\cos 3\ln x\pm i\sin 3\ln x).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x^2\cos 3\ln x$ და $x^2\sin 3\ln x$ მოცემული განტოლების ამონახსნებია. რადგან ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია, განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=x^2(c_1\cos 3\ln x+c_2\sin 3\ln x).$$

§ 24. n-ური რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ განტოლება

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\,y=f(x), \tag{24.1}$$

სადაც $a_1(x)$, $a_2(x),\ldots,a_n(x)$, $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია.

ვთქვათ (24.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)\,y=0 \tag{24.2}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y}=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n. \tag{24.3}$$

ისევე, როგორც მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 24.1. n-ური რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ამ განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და მოცემული განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნის ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$y=\bar{y}+y^*$$

სადაც $\bar{y}$ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია, y^* კი არაერთგვაროვანი განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი.

n-ური რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია ვიპოვოთ მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით.

ვთქვათ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ არის (24.2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა. განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots + c_n' y_n' = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases} \tag{24.4}$$

სადაც უცნობებს წარმოადგენენ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ფუნქციების წარმოებულები. ამ სისტემის დეტერმინანტი არის $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ფუნქციების ვრონსკის დეტერმინანტი. რადგან $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ფუნქციები (24.2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ისევე, როგორც მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, მტკიცდება, რომ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი ყოველ წერტილში განსხვავებულია ნულისაგან. ამიტომ (24.1) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $c_1', c_2', \ldots, c_n'$. მათი ინტეგრებით ვიპოვით $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ფუნქციებს (c_i' ფუნქციის ინტეგრების შემდეგ ავიღოთ ერთი რომელიმე კონკრეტული c_i ფუნქცია, $i=1, 2, \ldots, n$).

დავამტკიცოთ, რომ

$$y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n.$$

ფუნქცია იქნება (24.1) განტოლების ამონახსნი. ამისათვის ვიპოვოთ y^* ფუნქციის $y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}, \ldots, y^{*(n)}$ წარმოებულები. (24.4)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned} y^{*\prime} &= c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n', \\ y^{*\prime\prime} &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \cdots + c_n y_n'', \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y^{*(n)} &= c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \ldots + c_n y_n^{(n)} + f(x). \end{aligned}$$

y^* ფუნქციისა და მისი წარმოებულების ჩასმით (24.1) განტოლებაში მივიღებთ

$$\begin{aligned} y^{*(n)} + a_1(x)\, y^{*(n-1)} + \cdots + a_n(x) y^* &= (c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} + f) + \\ &+ a_1(x)\,(c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n y_n^{(n-1)} + \cdots + \\ &+ a_n(x)\,(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n) = c_1 (y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n y_1) + \\ &+ c_2\,(y_2^{(n)} + a_1(x)\, y_2^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y_2^{(n-1)}) + \cdots + \\ &+ c_n\,(y_n^{(n)} + a_1(x)\, y_n^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y_n) + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

$$y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

არის (24.1) არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი.

უნდა აღინიშნოს, რომ n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის მოძებნა ზოგ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით. განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

1. ვთქვათ

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x},$$

სადაც $P_m(x)$ არის m-ური რიგის მრავალწევრი. თუ α არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y^* = Q_m(x) e^{\alpha x},$$

სადაც $Q_m(x)$ არის m-ური რიგის მრავალწევრი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც α მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვია, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$y^* = x^l Q_m(x) e^{\alpha x}$$

სახით.

2. ვთქვათ

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x.$$

მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

სახით, თუ $i\beta$ კომპლექსური რიცხვი არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი და

$$y^* = x^\mu (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

სახით, როდესაც $i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების μ ჯერადობის კომპლექსური ფესვი.

3. ვთქვათ

$$f(x) = (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x) e^{\alpha x},$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია.

თუ $\alpha + i\beta$ კომპლექსური რიცხვი არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$y^* = (u(x) \cos \beta x + v(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

სახით, სადაც $u(x)$ და $v(x)$ ერთი და იმავე რიგის მრავალწევრებია, რომელთა რიგი $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრების რიგებს შორის უდიდესის ტოლია.

თუ $\alpha+i\beta$ არის მახასიათებელი განტოლების μ ჯერადობის ფესვი, y^* უნდა ვეძებოთ

$$y^* = x^{\mu}(u(x)\cos\beta x + v(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$y^{IV} - y = x^2 + x - 1$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$. ამიტომ მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y^* = Ax^2 + Bx + C$$

სახით. მაშინ $(y^*)^{IV} = 0$ და განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$-Ax^2 - Bx - C = x^2 + x - 1.$$

აქედან $A = -1$, $B = -1$, $C = 1$. ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - x^2 - x + 1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$y^{IV} - 3y'' + 2y = xe^x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი განტოლებაა

$$k^4 - 3k^2 + 2 = 0.$$

მისი ფესვებია $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = \sqrt{2}$, $k_4 = -\sqrt{2}$. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{\sqrt{2}x} + c_4 e^{-\sqrt{2}x}.$$

რადგან $\alpha = 1$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y^* = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$$

სახით. გვაქვს

$$y^{\bullet\prime}=(2Ax+B)\,e^x+(Ax^2+Bx)\,e^x,$$
$$y^{\bullet\prime\prime}=(2Ax+B)\,e^x+2Ae^x+(2Ax+B)\,e^x+(Ax^2+Bx)\,e^x,$$
$$y^{\bullet\prime\prime\prime}=(4Ax+2B)\,e^x+4A\,e^x+2A\,e^x+(2Ax+B)\,e^x+(Ax^2+Bx)e^x,$$
$$y^{\bullet\mathrm{IV}}=(4Ax+2B)\,e^x+4Ae^x+6A\,e^x+(2Ax+B)\,e^x+2A\,e^x+$$
$$+(2Ax+B)\,e^x+(Ax^2+Bx)\,e^x=(8Ax+4B)\,e^x+$$
$$+12A\,e^x+(Ax^2+Bx)\,e^x.$$

განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$e^x\,[8Ax+4B+12A+Ax^2+Bx-12Ax-6B-6A-$$
$$-3Ax^2-3Bx+2Ax^2+2Bx]=x\,e^x,$$

ანუ

$$-4Ax-2B+6A=x.$$

აქედან კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ $A=-\frac{1}{4},\ B=-\frac{3}{4}$.

ამრიგად, ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\sqrt{2}x}+c_4e^{-\sqrt{2}x}-\frac{1}{4}(x^2+3x)e^x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$y^{\mathrm{IV}}-y=5\cos x$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$. ამიტომ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

რადგან i არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$y^*=x\,(A\cos x+B\sin x)$$

სახით. განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$4A\sin x-4B\cos x=5\cos x.$$

აქედან $A=0,\quad B=-\frac{5}{4}$. ე. ი.

$$y^*=-\frac{5}{4}\,x\sin x.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x.$$

§ 25. მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა რუნგე-კუტას მეთოდით

ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,\ y,\ y'). \tag{25.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y, y')$ ფუნქცია (x_0, y_0, y_0') წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობებს. ვეძებოთ (25.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'.$$

ისევე, როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში y_{i+1} მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა ხდება უკვე გამოთვლილი y_i მიახლოებითი მნიშვნელობის საშუალებით შემდეგი ფორმულის საფუძველზე

$$y_{i+1} = y_i + h\left[y_i' + \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + K_2^{(i)} + K_3^{(i)}\right)\right],$$

სადაც

$$K_1^{(i)} = hf(x_i,\ y_i,\ y_i'),$$

$$K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} y_i' + \frac{h}{8} K_1^{(i)},\ y_i' + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} y_i' + \frac{h}{8} K_2^{(i)},\ y_i' + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$K_4^{(i)} = hf\left(x_i + h,\ y_i + h y_i' + \frac{h}{2} K_3^{(i)},\ y_i' + K_3^{(i)}\right),$$

$$y_{i+1}' = y_i' + \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right).$$

მტკიცდება, რომ, თუ $f(x, y, y')$ ფუნქციას განსახილველ არეში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები მეხუთე რიგამდე ჩათვლით, მაშინ რუნგე-კუტას მეთოდის ცდომილებას აქვს h^5-ის რიგი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როდესაც საჭიროა ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა რაიმე c წერტილში ε სიზუსტით, პრაქტიკულად უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

თავდაპირველად გამოვთვალოთ $y(c)$-ს მიახლოებითი $\overline{y}(c)$ მნიშვნელობა $h=c-x_0$ ბიჯით და (25.2) საწყისი პირობებით, ე. ი.

$$\overline{y}(c)=y_0+h\left[y_0'+\frac{1}{6}(K_1+K_2+K_3)\right],$$

სადაც

$$K_1=hf(x_0,\ y_0,\ y_0'),$$

$$K_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}y_0'+\frac{h}{8}K_1,\ y_0'+\frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{h}{2}y_0'+\frac{h}{8}K_1,\ y_0'+\frac{K_2}{2}\right).$$

გამოვთვალოთ ახლა $y(c)$-ს მიახლოებითი $y^*(c)$ მნიშვნელობა $h_1=\frac{h}{2}=\frac{c-x_0}{2}$ ბიჯით და საწყისი პირობებით

$$y(x_1)=y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=\widetilde{y}_1,\ y'(x_1)=\widetilde{y}_1', \tag{25.3}$$

სადაც $\widetilde{y}_1$ და $\widetilde{y}_1'$ არის შესაბამისად $y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$-ის და $y'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობები გამოთვლილი $\frac{h}{2}$ ბიჯით და (25.2) საწყისი პირობებით შემდეგი ფორმულებით

$$\widetilde{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[y_0' + \frac{1}{6}(\widetilde{K}_1 + \widetilde{K}_2 + \widetilde{K}_3)\right],$$

$$\widetilde{K}_1 = \frac{h}{2} f(x_0, y_0, y_0'),$$

$$\widetilde{K}_2 = \frac{h}{2} f\left(x_0 + \frac{h}{4},\ y_0 + \frac{h}{4} y_0' + \frac{h}{16}\widetilde{K}_1, y_0' + \frac{\widetilde{K}_1}{2}\right),$$

$$\widetilde{K}_3 = \frac{h}{2} f\left(x_0 + \frac{h}{4},\ y_0 + \frac{h}{4} y_0' + \frac{h}{16}\widetilde{K}_1,\ y_0' + \frac{\widetilde{K}_2}{2}\right),$$

$$\widetilde{K}_4 = \frac{h}{2} f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{h}{2} y_0' + \frac{h}{4}\widetilde{K}_3,\ y_0' + \widetilde{K}_3\right),$$

$$\widetilde{y}_1' = y_0' + \frac{1}{6}(\widetilde{K}_1 + 2\widetilde{K}_2 + 2\widetilde{K}_3 + \widetilde{K}_4).$$

$y^*(c)$-ს გამოსათვლელად (25.3) საწყისი პირობებით გვაქვს

$$y^*(c) = \widetilde{y}_1 + \frac{h}{2}\left[\widetilde{y}_1' + \frac{1}{6}(\overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \overline{K}_3)\right],$$

სადაც

$$\overline{K}_1 = \frac{h}{2} f(x_1, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_1'),$$

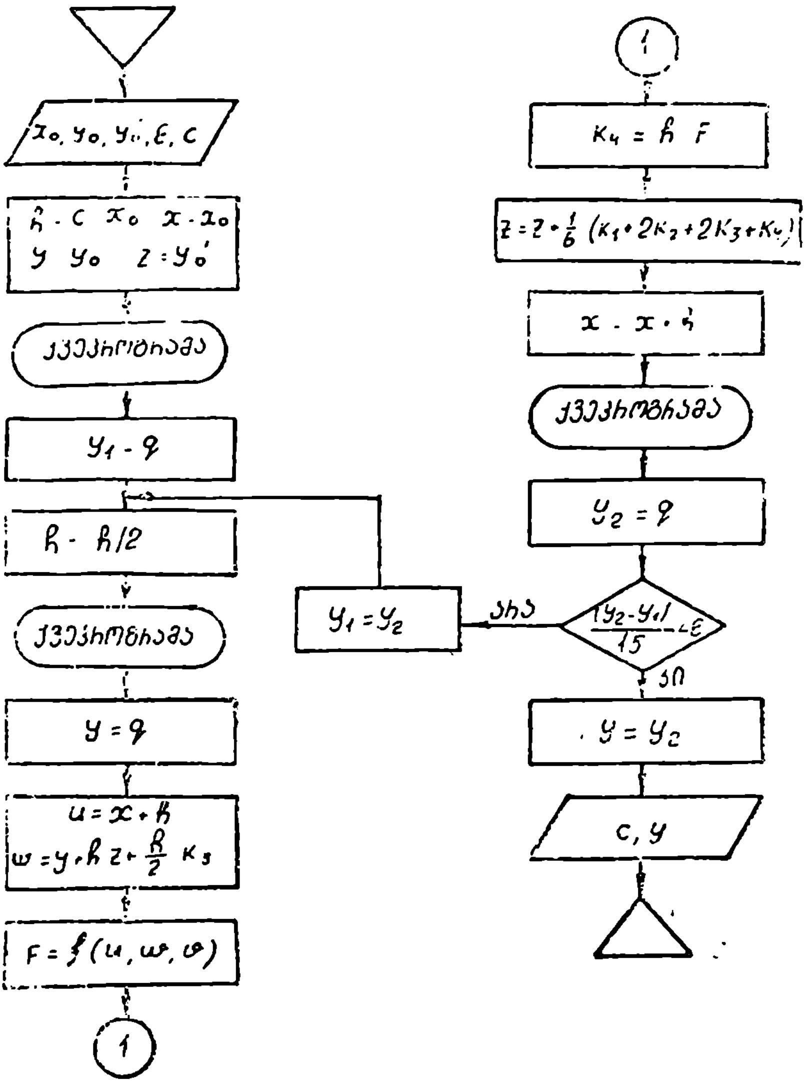
$$\overline{K}_2 = \frac{h}{2} f\left(x_1 + \frac{h}{4},\ \widetilde{y}_1 + \frac{h}{4}\widetilde{y}_1' + \frac{h}{16}\overline{K}_1, y_1' + \frac{\overline{K}_1}{2}\right),$$

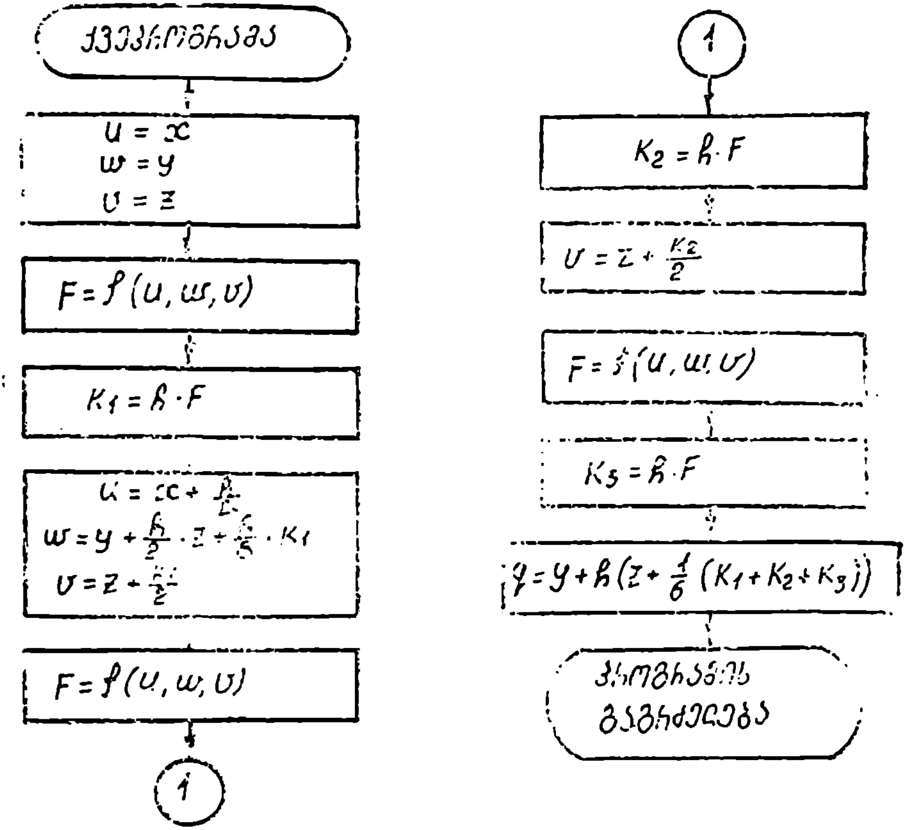
$$\overline{K}_3 = \frac{h}{2} f\left(x_1 + \frac{h}{4},\ \widetilde{y}_1 + \frac{h}{4}\widetilde{y}_1' + \frac{h}{16}\overline{K}_1, \widetilde{y}_1' + \frac{\overline{K}_2}{2}\right).$$

ისევე, როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისთვისაც ცდომილების შესაფასებლად გვაქვს

$$|y(c) - y^*(c)| < \frac{|y^*(c) - \overline{y}(c)|}{15} < \varepsilon.$$

რუნგე-კუტას მეთოდის ბლოკ-სქემა





რუნგე-კუტას მეთოდის (მეორე რიგის განტოლებისათვის) პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
1   OPEN 'LP:' FOR OUTPUT AS FILE #1
10  PRINT #1, 'РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
    УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА'
20  PRINT #1, ' МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА'
30  PRINT 'ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНОЕ X0 = '; \ INPUT X0
40  PRINT 'ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНОЕ Y0=' : \ INPUT Y0
45  PRINT 'ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНОЕ Z0=' : \ INPUT Z0
50  PRINT #1, 'ДИФ. УР. — ИЕ : '
60  PRINT #1, 'НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ Y (':X0: ')=': Y0
```

```
65   PRINT #1, '  Z(':X0;')=':Z0
70   PRINT 'ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ  E=':\INPUT E
80   PRINT 'ДЛЯ C=':\INPUT C\H=C--X0
90   X=X0\ Y=Y0 \ Z=Z0
95   GOSUB 500 \ Y1=Q
100  H=H/2 \ GOSUB 500\Y=Q
110  U=X+H \ W=Y+H * Z+H/Z * K3\ V=Z+K3\
     \ GOSUB 1000 \ K4=H * F
120  Z=Z+(K1+2 * K2+2 * K3+K4)/6
130  X=X+H\GOSUB 500 \ Y2=Q
140  IF ABS (Y2—Y1)/15<E THEN Y=Y2\GOTO 160
150  Y1=Y2 \ GOTO 100
160  PRINT #1, 'OTBET: Y('; C:')=':Y\ GOTO 2000
200  REM - - - - - - - - - - - - - - - - - -
500  U=X\W=Y \ V=Z
510  GOSUB 1000 \K1=H * F
520  U=X+H/2\W=Y+H/2 *Z+H/8 * K1\ V=
     =Z+K1/2 \ GOSUB 1000 \ K2=H *F
530  W=Y+H/2* Z+H/8 * K2\V=Z+K2/2\GOSUB
     1000\K3=H * F
540  Q=Y+H * (Z+(K1+K2+K3)/6)
550  RETURN
600  REM - - - - - - - - - - - - - - -
1000 F=f(u, w, v)
1100 RETURN
2000 END
```

რუნგე-კუტას მეთოდის (მეორე რიგის განტოლებისათვის) პროგრამა ფორტრანის ენაზე

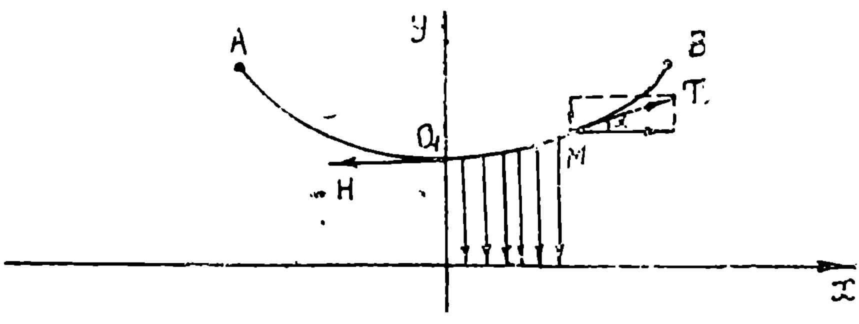
```
PROGRAM RUNG2
EXTERNAL KOEF, FUN
REAL Q, E, X0, Y0, Z0, X, Y, Z, H, Y1, Y2, C, D1,
D2, D3, D4
PRINT * , 'РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА'
```

```
      PRINT * , ' МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА'
      PRINT * , ' ДИФ. УР. — Е:
      TYPE 1
1     FOPMAT (2X, 'НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ X0=', *)
      ACCEPT * , X0
      TYPE 2
2     FORMAT (2X, 'НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ У0=', *)
      ACCEPT * , У0
      TYPE 3
3     FORMAT (2X, 'НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНЕ  Y0=', *)
      ACCEPT * , Z0
      TYPE 4
4     FOPMAT (2X, 'ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ  E=',*)
      ACCEPT * , E
      TYPE 5
5     FORMAT (2X,' ДЛЯ C=', *)
      ACCEPT * , C
      X=X0
      Y=Y0
      Z=Z0
      H=C—X0
      CALL KOEF (H, X0, Y0, Z0, D1, D2, D3, Q)
      Y1=Q
50    H=H * 0, 5
      CALL KOEF (H, X, Y, Z, D1, D2, D3, Q)
      Y=Q
      D4=H * FUN (X+H, Y+H * Z+H * 0, 5 * D3, Z+D3)
      Z=Z+(D1+2 * D2+2 * D3+D4)/6.
      X=X+H
      CALL KOEF (H, X, Y, Z1, D1, D2, D3, Q)
      Y2=Q
      IF (ABS (Y2—Y1)/15. LT. E) GOTO 100
      Y1=Y2
      GOTO 50
```

```
100  PRINT 15, C, Y2
 15  FORMAT (5X, OTBET: Y ( ', F 7, 4, ')=', F7. 4)
      STOP
      END
      SUBROUTINE KOEF (H, X, Y, Z, D1, D2, D3,Q)
      REAL D1, D2, D3
      D1=H * FUN (X, Y, Z)
      D2=H * FUN(X+H * 0, 5, Y+H * 0, 5 * Z+H / 8. *
      D1, Z+D1 * 0. 5)
      D3=H * FUN (X+H * 0, 5, Y+H * 0. 5 * Z+H/8. *
      D2, Z+D2 * 0. 5)
      Q=Y+H * (Z+(D1+D2+D3) / 6.)
      RETURN
      END
      FUNCTION FUN  (X, Y, Z)
      FUN=f (x, y, z)
      RETURN
      END
```

§ 26. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების გამოყენება სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნაში

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ამოცანებს, რომლებიც ამოიხსნებიან მეორე ან უფრო მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით.



ნახ. 63

ა მ ო ც ა ნ ა 1. ვთქვათ მოქნილი, უჭიმავი, ერთგვაროვანი ძაფის ბოლოები დამაგრებულია A და B წერტილებში (ნახ. 63). ვიპოვოთ ძაფის ფორმა, თუ მასზე მოქმედებს რაიმე დატვირთვა. ძაფის წონა უგულვებელყოთ.

ამოხსნა. სიბრტყეში, რომელშიც ძაფი მდებარეობს, ავიღოთ Oxy კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი მიმართული იყოს ჰორიზონტალურად, ხოლო Oy ღერძი გადიოდეს ძაფის ყველაზე ქვემოთ მდებარე წერტილში (ვთქვათ O_1 წერტილი მდებარეობს A და B წერტილების ქვემოთ).

ავიღოთ ძაფის O_1M უბანი, რომელიც მოთავსებულია O_1 წერტილსა და ძაფზე მდებარე რაიმე $M(x, y)$ წერტილს შორის. ძაფის ამ ნაწილზე მოქმედებს შემდეგი ძალები:

1) დაჭიმულობის ძალა $\vec{H}$, რომელიც მოდებულია O_1 წერტილში. იგი წარმოქმნილია AO_1 უბნის მოქმედებით და მიმართული ჰორიზონტალურად O_1 წერტილში გავლებული მხების გასწვრივ.

2) დაჭიმულობის ძალა $\vec{T}$, რომელიც მოდებულია M წერტილში. იგი წარმოქმნილია ძაფის MB უბნის მოქმედებით და მიმართულია M წერტილში გავლებული მხების გასწვრივ. მის მიერ Ox ღერძთან შექმნილი კუთხე აღვნიშნოთ α-თი.

3) დატვირთვა $\vec{W}$, რომელიც მოქმედებს O_1M უბანზე და მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით.

რადგან ძაფი წონასწორობაში იმყოფება, ამიტომ სტატიკის კანონების თანახმად, მასზე მოქმედი ძალების გეგმილთა ჯამი საკოორდინატო ღერძებზე იქნება ნულის ტოლი, ე. ი.

$$T\cos\alpha - H = 0, \quad T\sin\alpha - W = 0.$$

აქ T, H, W აღნიშნავს შესაბამისი ძალების მოდულებს (რიცხვით მნიშვნელობებს). ამ ორი განტოლებიდან გვაქვს

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W}{H}.$$

თუ წირის განტოლება, რომლის ფორმაც AB ძაფს აქვს. არის $y = y(x)$, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$. მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}. \tag{26.1}$$

ძაფის ჰორიზონტალური დაჭიმულობა H — მუდმივი სიდიდეა. ამიტომ თუ ცნობილია ძაფის დატვირთვა W, როგორც x ცვლადის ფუნქცია $W = F(x)$, (26.1) განტოლების ინტეგრალებით ვიპოვით $y = y(x)$

ფუნქციას, რომელიც წარმოადგენს ძაფის ფორმის განტოლებას. ამრიგად

$$y = \frac{1}{H} \int F(x)\, dx + C.$$

C მუდმივი განისაზღვრება საწყისი პირობით.

უფრო ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომელშიც ცნობილია არა W ფუნქცია, არამედ მისი წარმოებული $\frac{dW}{dx} = f(x)$. ამ შემთხვევაში (26.1) ტოლობის გაწარმოებით გვექნება

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dW}{dx}, \tag{26.2}$$

ანუ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} f(x).$$

ამ განტოლების ორჯერ ინტეგრებით მივიღებთ

$$y = \frac{1}{H} \int \left(\int f(x)\, dx \right) dx + c_1 x + c_2,$$

სადაც c_1 და c_2 მუდმივები საწყისი პირობებით განისაზღვრებიან. რაც შეეხება H სიდიდეს, მისი განსაზღვრა ხდება ძაფის ბოლო A და B წერტილებისა და O_1 წერტილის მდებარეობის საშუალებით.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი: ვთქვათ მოქნილი უჭიმავი ძაფი ბოლოებით დამაგრებულია ორ წერტილში და მასზე მოდებულია დატვირთვა, რომელიც თანაბრადაა განაწილებული. ვიპოვოთ ძაფის ფორმა (ძაფის საკუთარი წონა უგულვებელვყოთ).

როგორც წესი, ასე იხსნება ამოცანა კიდული ხიდების საყრდენი ბაგირის ფორმის განსაზღვრისათვის. ამ დროს ხიდის დატვირთვა თანაბრად არის განაწილებული და ისეთი სიდიდისაა, რომ მასთან შედარებით ბაგირის წონა შეიძლება რომ უგულვებელვყოთ. ამ შემთხვევაში $W = qx$, სადაც x არის M წერტილის კოორდინატი, რომელიც ამასთანავე ბაგირის O_1M მონაკვეთის ჰორიზონტალური პროექციის ტოლია, ხოლო q პროპორციულობის კოეფიციენტია. ამიტომ (26.1) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს $\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H}$. მისი ზოგადი ამონახსნია $y = \frac{qx^2}{2H} + C$, ე. ი. ბაგირს აქვს პარაბოლის

ფორმა. C მუდმივის დადგენისათვის საჭიროა ბაგირის ერთი წერტილის ორდინატის ცოდნა. ვთქვათ O_1 წერტილის ორდინატია $y=0$. მაშინ საწყისი პირობა იქნება $y(o)=0$ და მივიღებთ $C=0$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი: მოქნილი, ერთგვაროვანი, უჭიმავი ძაფი ბოლოებით დამაგრებულია ორ წერტილში. ვიპოვოთ ძაფის ფორმა, თუ მასზე მოქმედებს მხოლოდ საკუთარი სიმძიმის ძალა. ძაფის ერთეულოვანი მონაკვეთის წონაა q.

ამ მაგალითში $W=qS$, სადაც S არის O_1M რკალის სიგრძე. როგორც ცნობილია $S=\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$. ამიტომ $W = q\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$. აქედან კი გვაქვს $\frac{dW}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

(26.2) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{dy}{dx}=u$. მივიღებთ

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+u^2},$$

სადაც $a=\frac{H}{q}$. უკანასკნელი განტოლებიდან გვაქვს

$$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\frac{x}{a}+\ln c_1,$$

საიდანაც

$$u+\sqrt{1+u^2}=c_1 e^{\frac{x}{a}}.$$

გადავიტანოთ u ტოლობის მარჯვენა მხარეში და მიღებული ტოლობა ავიყვანოთ კვადრატში. გამარტივების შემდეგ გვექნება

$$c_1^2 e^{\frac{2x}{a}}-2c_1 u e^{\frac{x}{a}}=1.$$

აქედან, რადგან $u = \frac{dy}{dx}$, ამიტომ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{2} e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2c_1} e^{-\frac{x}{a}},$$

საიდანაც

$$y = \frac{a c_1}{2} e^{\frac{x}{a}} + \frac{a}{2 c_1} e^{-\frac{x}{a}} + c_2.$$

ვთქვათ O_1 წერტილის ორდინატია $y=a$. მაშინ რადგან O_1 წერტილში გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია, საწყისი პირობები იქნება $y(0)=a$ და $y'(0)=0$. ამ საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $c_1=1$ და $c_2=0$. ამრიგად საბოლოოდ გვექნება

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

ანუ

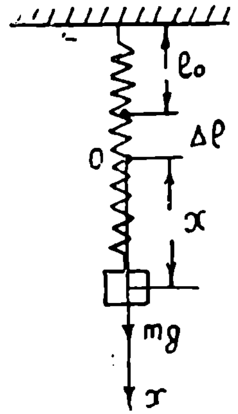
$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

მაშასადამე, მოქნილი, ერთგვაროვანი, უჭიმავი ძაფი, რომელიც ბოლოებითაა დამაგრებული, საკუთარი წონის მოქმედებით ღებულობს ჰიპერბოლური კოსინუსის გრაფიკის ფორმას.

ა მ ო ც ა ნ ა 2 (ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთის ჰარმონიული რხევა). m მასის მქონე ტვირთი ჩამოკიდებულია ვერტიკალურად მოთავსებულ ზამბარაზე, რომლის სიგრძე არადეფორმირებულ მდგომარეობაში არის l_0 და სიხისტეა k. ტვირთი გამოიყვანეს წონასწორობიდან და გაუშვეს ხელი. ვიპოვოთ ტვირთის რხევის განტოლება. ზამბარის წონა და ტვირთზე წინააღმდეგობის ძალების მოქმედება უგულვებელვყოთ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივმართოთ Ox ღერძი ვერტიკალურად ქვემოთ. სათავედ ავირჩიოთ წერტილი, რომელშიც ტვირთი იმყოფება წონასწო-

რობის მდგომარეობაში. (ნახ. 64). Δl-ით აღვნიშნოთ ზამბარის წაგრძელება, როდესაც ტვირთი წონასწორობაშია. ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად $\vec{F}=m\vec{a}$, სადაც $\vec{F}$ არის ტვირთზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი, $\vec{a}$ ტვირთის აჩქარება. ტვირთზე მოქმედებს ორი ძალა: სიმძიმის ძალა mg, რომელიც ვერტიკალურად ქვემოთ არის მიმართული და ზამბარის დრეკადობის ძალა, რომელიც ზამბარის წაგრძელების პირდაპირპროპორციულია და მიმართულია წაგრძელების საპირისპიროდ. $|\vec{F}_{დრ}| = kl$, სადაც l არის ზამბარის წაგრძელება. ამიტომ, თუ ნიუტონის მეორე კანონის გამომსახველ ფორმულას დავაგეგმილებთ Ox ღერძზე, მივიღებთ $\left(\text{გავითვალისწინოთ, რომ } a=\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)$:



ნახ. 64

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x+\Delta l)+mg.$$

რადგან წონასწორობის მდგომარეობაში სიმძიმის ძალა და დრეკადობის ძალა ერთმანეთს აწონასწორებს, ე. ი. $k\Delta l = mg$, ამიტომ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x = 0, \qquad (26.3)$$

სადაც $\omega^2=\dfrac{k}{m}$.

მივიღეთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. მის მახასიათებელ განტოლებას $\lambda^2+\omega^2=0$ გააჩნია კომპლექსური ფესვები $\lambda=\pm i\omega$. ამიტომ (26.3) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t.$$

მიღებული ამონახსნის ფიზიკური შინაარსის დადგენისათვის უმჯობესია იგი ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$x=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1\cos\omega t}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}+\frac{c_2\sin\omega t}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\sqrt{c_1^2+c_2^2}=A,\quad \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\sin\alpha,\quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\cos\alpha.$$

მაშინ ზოგადი ამონახსნი მიიღებს სახეს

$$x = A\sin(\omega t+\alpha). \tag{26.4}$$

(26.4) ტოლობა არის ე. წ. ჰარმონიული რხევის განტოლება. ამრიგად, მოცემული ამოცანის პირობებში ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი შეასრულებს ჰარმონიულ რხევას. A-ს ეწოდება რხევის ამპლიტუდა, ხოლო $\omega t+\alpha$ სიდიდეს რხევის ფაზა. ფაზის მნიშვნელობას $t=0$ მომენტში, ე. ი. α-ს ეწოდება საწყისი ფაზა. ჰარმონიული რხევა პერიოდული მოძრაობაა. მისი პერიოდი T, ანუ დრო, რომლის განმავლობაში ერთი რხევა სრულდება, როგორც (26. 4) განტოლებიდან ჩანს ტოლია $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ ტვირთის მასაზე და ზამბარის სიხისტეზე.

მერხევი ტვირთის სიჩქარეს მივიღებთ (26.4) ტოლობის გაწარმოებით

$$v=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\alpha).$$

ამპლიტუდისა და საწყისი ფაზის დადგენისათვის საჭიროა საწყისი პირობების ცოდნა. ვთქვათ დროის საწყის $t=0$ მომენტში $x=x_0$ და $v=v_0$. მაშინ მივიღებთ $x_0=A\sin\alpha$, $v_0=A\omega\cos\alpha$, საიდანაც

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}\,,\quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\omega x_0}{v_0}\,.$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3 (მილევადი რხევა). ვიპოვოთ წინა ამოცანის პირობებში ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთის რხევის განტოლება, თუ მასზე დამატებით მოქმედებს წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც ტვირთის სიჩქარის პირდაპირპროპორციულია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, წინააღმდეგობის ძალა გამოისახება ფორმულით $\vec{F}_{\text{წინ}}=-\mu\vec{v}$ (ნიშანი „—“ გვიჩვენებს, რომ წინააღმდეგობის ძალა მიმართულია სიჩქარის საპირისპიროდ). მაშინ $\vec{F}=m\vec{a}$ ტოლობის Ox ღერძზე დაგეგმილებით, სადაც $\vec{F}$ ტვირთზე მოქმედი ძალების ტოლქმედია, მივიღებთ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\mu\frac{dx}{dt}\,.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $\dfrac{k}{m}=\omega^2$, $\dfrac{\mu}{m}=2n$, გვექნება

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. მისი მახასიათებელი $\lambda^2+2n\lambda+\omega^2=0$ განტოლების ფესვებია

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-\omega^2}.$$

ტვირთის მოძრაობის ხასიათი მთლიანად განისაზღვრება ამ ფესვებით. შესაძლებელია სამი სხვადასხვა შემთხვევა. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $n^2-\omega^2<0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\omega^2-n^2=\omega_1^2$. მაშინ მახასიათებელი განტოლების ფესვებს ექნებათ სახე $\lambda_{1,2}=-n\pm$ $\pm i\omega_1$ და ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x=e^{-nt}(c_1\cos\omega_1 t+c_2\sin\omega_1 t). \tag{26.5}$$

ისევე, როგორც წინა ამოცანაში (26.5) შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x=A\,e^{-nt}\sin(\omega_1 t+\alpha), \tag{26.6}$$

სადაც A და α სიდიდეები განისაზღვრება საწყისი პირობებით. (26.6) გვიჩვენებს, რომ როდესაც $n^2-\omega^2<0$, მაშინ ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი ასრულებს მილევად რხევებს, რომლის ამპლიტუდა განუწყვეტლივ მცირდება.

ვთქვათ $n^2-\omega^2>0$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $n^2-\omega^2=h^2$, მაშინ მახასიათებელი განტოლების ფესვებს ექნებათ სახე $\lambda_{1,2}=-n\pm h$. რადგან $h<n$, ამიტომ ორივე ფესვი უარყოფითია. ამ შემთხვევაში ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x=c_1\,e^{-(n+h)t}+c_2\,e^{-(n-h)t}.$$

როგორც ამ განტოლებიდან ჩანს, ტვირთის მოძრაობას აღარ ექნება პერიოდული ხასიათი და ტვირთი საკმაოდ მალე გაჩერდება. ანალოგიური იქნება ტვირთის მოძრაობის ხასიათი, როდესაც $n^2-\omega^2=0$. ამ შემთხვევაში $\lambda=-n$ და $x=e^{-nt}(c_1+c_2 t)$.

ა მ ო ც ა ნ ა 4 (იძულებითი რხევები). ვიპოვოთ რხევის განტოლება, როდესაც ზამბარაზე დაკიდებულ სხეულზე გარდა ამოცანა 3-ში აღნიშნული ძალებისა დამატებით მოქმედებს გარეშე $y=f(t)$ ძალა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე:

$$x''+2nx'+\omega^2x=f(t),$$

სადაც $2n$ და ω^2 იგივე სიდიდეებია, რაც ამოცანა 3-ში.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც გარე ძალის ცვლილება პერი-

ოდული ხასიათისაა და გამოისახება $f(t)=a\sin\gamma t$ ტოლობით. მაშინ რხევის განტოლება იქნება

$$x''+2nx'+\omega^2x=a\sin\gamma t. \tag{26.7}$$

(26.7) წარმოადგენს მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. როგორც ვიცით, მის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე $x=\overline{x}+x^*$, სადაც $\overline{x}$ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია, ხოლო x^* კი მოცემული განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნი. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

I. ვთქვათ $n\neq0$ და $n^2-\omega^2<0$. მაშინ

$$\overline{x}=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\alpha)\quad(\omega_1^2=\omega^2-n^2).$$

რაც შეეხება x^*-ს, ამ შემთხვევაში მას ექნება სახე

$$x^*=M\sin(\gamma t+\varphi),$$

სადაც M და φ რიცხვები განისაზღვრება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით. ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება

$$x=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\alpha)+M\sin(\gamma t+\varphi).$$

რადგან ამ ტოლობაში მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $t\to\infty$ და ამასთანავე საკმაოდ სწრაფად, ამიტომ მოძრაობის დაწყებიდან გარკვეული დროის შემდეგ მოძრაობის ხასიათის განმსაზღვრელი იქნება მეორე შესაკრები. ამიტომ ხეულის რხევის პერიოდი და სიხშირე თითქმის გაუტოლდება გარე ძალის ცვლილების პერიოდსა და სიხშირეს.

II. ვთქვათ $n=0$. მაშინ (26.7)-დან მივიღებთ

$$x''+\omega^2x=a\sin\gamma t. \tag{26.8}$$

ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\overline{x}=A\sin(\omega t+\alpha).$$

თუ $\gamma\neq\omega$, მაშინ კერძო ამონახსნსაც ექნება ანალოგიური სახე

$$x^*=M\sin(\gamma t+\varphi).$$

თუ M და φ რიცხვებს განვსაზღვრავთ განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით, მივიღებთ, რომ $M=\dfrac{a}{\omega^2-\gamma^2}$, $\varphi=0$. საბოლოოდ გვექნება

$$x=A\sin(\omega t+\alpha)+\frac{a}{\omega^2-\gamma^2}\sin\gamma t.$$

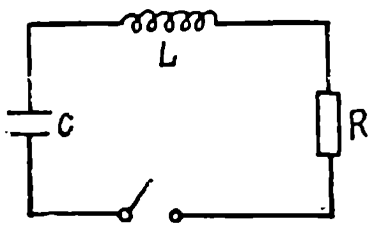
ამრიგად, მივიღებთ მოძრაობას, რომელიც წარმოადგენს სისტემის საკუთარი რხევისა და იძულებითი რხევის ზედდების შედეგს.

თუ $\omega=\gamma$, მაშინ (26.8) განტოლების კერძო ამონახსნს ექნება სახე $x^* = t(M\cos\omega t + N\sin\omega t)$. (26.8) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ $M = -\dfrac{a}{2\gamma\omega}$, $N=0$. მაშასადამე $x^* = -\dfrac{a}{2\omega}t\cos\omega t$.

ზოგადი ამონახსნი იქნება $x=A\sin(\omega t+\alpha)-\dfrac{a}{2\omega}t\cos\omega t$. როგორც ამ ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები გვიჩვენებს, რხევის ამპლიტუდა უსასრულოდ იზრდება, როდესაც $t\to\infty$. ამ მოვლენას, რომელსაც ადგილი აქვს, როდესაც სისტემის საკუთარი რხევის სიხშირე ემთხვევა იძულებითი რხევის სიხშირეს, რეზონანსი ეწოდება.

ა მ ო ც ა ნ ა 5 (ელექტრული რხევები). ვთქვათ რხევითი კონტური, რომლის ტევადობაა C, ინდუქტიურობა L და წინაღობა R, ჩართულია წრედში, რომლის ემძ არის $l=l(t)$. ვიპოვოთ რხევის კონტურში აღძრული დენის ძალის დროზე დამოკიდებულების კანონი $i=i(t)$, თუ დროის საწყის მომენტში დენის ძალა კონტურში და კონდენსატორის მუხტი ნულის ტოლია (ნახ. 65).

ა მ ო ხ ს ნ ა. კირხჰოფის* წესის თანახმად, ელექტრომამოძრავებელი ძალა წრედში ტოლია წინაღობაზე, ინდუქციურობაზე და კონდენსატორზე არსებული ძაბვათა ჯამისა:



ნახ. 65

$$l(t)=u_L+u_R+u_C,$$

რომლებიც თავის მხრივ დენის ძალასთან შემდეგნაირად არიან დაკავშირებული

$$u_L = L\frac{di}{dt},\quad u_R = Ri,\quad u_C = \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

ამრიგად, გვექნება განტოლება

$$l(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

---

* გ. რ. კირხჰოფი (1824—1887) — გერმანელი ფიზიკოსი.

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dl}{dt}. \tag{26.9}$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

I. $l(t)=l=\text{const}$. ამ შემთხვევაში $\frac{dl}{dt}=0$ და (26.9)-დან მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებას

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0. \tag{26.10}$$

ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლების ფესვებია

$$r_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}.$$

თუ $R^2C-4L\geqslant 0$, მაშინ მახასიათებელი განტოლების ფესვები ნამდვილია და (26.10) განტოლების ზოგადი ამონახსნი არაპერიოდული ფუნქციაა. ამიტომ დენის ცვლილებაც რხევით კონტურში არაპერიოდული იქნება. არავითარი ელექტრული რხევები არ წარმოიქმნება რხევით კონტურში იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $R^2C-4L=0$. თუ $R^2C-4L<0$, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$i=e^{-\delta t}(c_1\cos\omega_1 t+c_2\sin\omega_1 t),$$

სადაც $\delta=\frac{R}{2L}$, $\omega_1^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$. საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ $c_1=0$, $c_2=\frac{l}{L\omega_1}$ და გვექნება

$$i=\frac{l}{L\omega_1}e^{-\delta t}\sin\omega_1 t.$$

II. ვთქვათ $l(t)=l\sin\omega t$. ამ შემთხვევაში $\frac{dl}{dt}=l\omega\cos\omega t$ და (26.9)-დან მივიღებთ არაერთგვაროვან განტოლებას

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=l\,\omega\cos\omega t. \tag{26.11}$$

აქ განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება არის (26.10) განტოლება, რომელიც ზემოთ განვიხილეთ. ამიტომ შევჩერ-

დებით მხოლოდ კერძო ამონახსნის მოძებნაზე. ვეძებოთ იგი შემდეგი სახით

$$i=A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

i-ს ჩასმით (26.11) განტოლებაში მივიღებთ:

$$A=\frac{l\omega\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2},\quad B=\frac{l\omega^2R}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2}.$$

ამრიგად, კერძო ამონახსნი იქნება

$$i=\frac{l\omega}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2}\left[\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\cos\omega t+\omega R\sin\omega t\right].$$

(26.11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მიიღება შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის შეკრებით, ე. ი. (26.11)-ის ზოგადი ამონახსნია

$$i=e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)+$$

$$+\frac{e}{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}\left[\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\omega t+R\sin\omega t\right].$$

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც $\omega=\omega_1$, კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$i=t(A\cos\omega t+B\sin\omega t).$$

კერძო ამონახსნის გამოსახულებაში t თანამამრავლის არსებობა მიუთითებს, რომ როდესაც $t\to+\infty$, რხევის ამპლიტუდა უსასრულოდ იზრდება ე. ი. როდესაც $\omega=\omega_1$, ადგილი აქვს რეზონანსს.

§ 27. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა ვიპოვოთ უცნობი $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, ..., $y_n=y_n(x)$ ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, ე. ი. განტოლებებს, რომლებიც შეიცავენ დამოუკიდებელ x ცვლადს, საძიებელ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ფუნქციებსა და მათ წარმოებულებს.

განვიხილოთ შემდეგი სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n), \\ &\cdot \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,\ y_1\ y_2, \dots, y_n)\,. \end{aligned}\right. \tag{27.1}$$

დიფერენციალურ განტოლებათა ასეთ სისტემას ეწოდება ნორმალური სისტემა. ვიპოვოთ (27.1) სისტემის ისეთი $y_1, y_2, \dots, y_n$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},\ y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \tag{27.2}$$

ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად: გავაწარმოოთ (27.1) სისტემის პირველი განტოლება x-ით. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}\,.$$

ამ განტოლებაში $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, …, $\frac{dy_n}{dx}$ შევცვალოთ (27.1) სისტემის მიხედვით. გვექნება

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n,$$

ე. ი.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n).$$

ახლა ეს განტოლება კვლავ გავაწარმოოთ x-ით და მიღებულ განტოლებაში წარმოებულები $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, …, $\frac{dy_n}{dx}$ შევცვალოთ (27.1) სისტემიდან. მივიღებთ

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot f_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot f_n,$$

ანუ

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x,\ y_1,\ y_2, \dots y_n).$$

თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n).$$

ამრიგად, გვექნება შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n), \\ \cdot \\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{27.3}$$

(27.3) სისტემის პირველი $n-1$ განტოლებიდან $y_2, y_3, \dots, y_n$ ფუნქციები გამოვსახოთ (თუ ეს შესაძლებელია) $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$-ით:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2},\ \dots,\ \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right), \\ y_3 = \varphi_3\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2},\ \dots,\ \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right), \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = \varphi_n\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2},\ \dots,\ \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right). \end{cases} \tag{27.4}$$

თუ მათ ჩავსვამთ (27.3) სისტემის ბოლო განტოლებაში, მაშინ y_1 ფუნქციის მიმართ მივიღებთ n-ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right).$$

ვთქვათ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y_1 = \omega(x,\ c_1,\ c_2, \dots, c_n), \tag{27.5}$$

სადაც $c_1, c_2, \dots, c_n$ ნებისმიერი მუდმივებია. გავაწარმოოთ (27.5)

განტოლება $n-1$-ჯერ და $y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$-ის მნიშვნელობები ჩავსვათ (27.4) სისტემაში. გვექნება

$$\left\{\begin{array}{l} y_2 = \omega_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = \omega_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n). \end{array}\right. \tag{27.6}$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ (27.1) სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომელიც (27.2) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს, საჭიროა (27.5) და (27.6) განტოლებებიდან სათანადოდ განვსაზღვროთ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ მუდმივები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 - x, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2 - 2x \end{array}\right.$$

განტოლებათა სისტემის ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გავაწარმოოთ სისტემის პირველი განტოლება

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 2\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} - 1.$$

ჩავსვათ ამ განტოლებაში $\frac{dy_2}{dx}$-ის მნიშვნელობა სისტემის მეორე განტოლებიდან. მივიღებთ

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 2\frac{dy_1}{dx} + y_1 + 2y_2 - 2x - 1.$$

შევიტანოთ ამ განტოლებაში y_2-ის მნიშვნელობა, რომელსაც განვსაზღვრავთ სისტემის პირველი განტოლებიდან. გვექნება

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - 4\frac{dy_1}{dx} + 3y_1 = -1.$$

მივიღეთ y_1-ის მიმართ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ამონახსნია

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{3}.$$

რადგან $y_2=y_1'-2y_1+x$, ამიტომ

$$y_2=-C_1e^x+C_2e^{3x}+x+\frac{2}{3}.$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ $C_1=0$, $C_2=\frac{4}{3}$ და საბოლოოდ გვექნება

$$y_1=\frac{4}{3}e^{3x}-\frac{1}{3},\quad y_2=\frac{4}{3}e^{3x}+x+\frac{2}{3}.$$

§ 28. მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

ვთქვათ მოცემულია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n,\\ \frac{dy_2}{dx}=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n,\\ \cdot\\ \frac{dy_n}{dx}=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n,\end{cases}\tag{28.1}$$

სადაც a_{ij} კოეფიციენტები $(i,j=\overline{1,n})$ მუდმივი რიცხვებია, ხოლო $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ საძიებელი უცნობი ფუნქციებია. (28.1) სახის სისტემას ეწოდება მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

წინა პარაგრაფში ვნახეთ, რომ (28.1) სისტემა შეიძლება ამოვხსნათ მისი დაყვანით ერთ n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებაზე, რომელიც (28.1) სისტემის შემთხვევაში იქნება წრფივი. მაგრამ არსებობს (28.1) განტოლების ამოხსნის სხვა მეთოდიც, რომელიც უკეთეს წარმოდგენას იძლევა მისი ამონახსნის სტრუქტურის შესახებ. გავეცნოთ ამ მეთოდს. ვეძებოთ (28.1) სისტემის ამონახსნი შემდეგი სახით

$$y_1=\alpha_1e^{kx},\ y_2=\alpha_2e^{kx},\ldots,y_n=\alpha_ne^{kx},\tag{28.2}$$

სადაც $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,k$ მუდმივი რიცხვებია. ამ ფუნქციების სისტემაში ჩასმით მივიღებთ

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kx} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n)e^{kx}, \\ k\alpha_2 e^{kx} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n)e^{kx}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k\alpha_n e^{kx} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n)e^{kx}. \end{cases}$$

აქედან, რადგან $e^{kx} \neq 0$, გვექნება

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{28.3}$$

(28.3) სისტემა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ის მიმართ წარმოადგენს n-ური რიგის წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემის დეტერმინანტია

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix}.$$

თუ $\Delta(k) \neq 0$, მაშინ (28.3) სისტემას ექნება მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. ამ შემთხვევაში (28.2) ფორმულებით მივიღებთ (28.1) სისტემის ტრივიალურ ამონახსნს $y_1(x) = y_2(x) = \cdots = y_n(x) = 0$.

ამრიგად, მოცემული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის არატრივიალურ ამონახსნს მივიღებთ მხოლოდ ისეთი k-სათვის, რომლისთვისაც $\Delta(k) = 0$, ანუ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{28.4}$$

(28.4) განტოლება k-ს მიმართ წარმოადგენს n-ური ხარისხის განტოლებას. მას ეწოდება (28.1) სისტემის მახასიათებელი განტოლება, ხოლო მის ფესვებს კი მახასიათებელი განტოლების ფესვები. განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები.

1. მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ნამდვილი მარტივი ფესვები. ვთქვათ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ მახასიათებელი განტოლების ფესვებია. ყოვე-

ლი k_i ფესვისათვის ($i=1, 2, \ldots, n$) (28.3) სისტემას ექნება არანულოვანი ამონახსნი $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$. ამიტომ

$$y_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)} e^{k_1x}, \quad y_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)} e^{k_1x}, \ldots, y_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)} e^{k_1x}$$

იქნება (28.1) სისტემის არანულოვანი ამონახსნი, რომელიც k_1 ფესვის შეესაბამება. ანალოგიურად, k_2 ფესვის შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)} e^{k_2x}, \quad y_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)} e^{k_2x}, \ldots, y_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)} e^{k_2x}$$

და ა. შ. k_n ფესვის შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)} e^{k_nx}, \quad y_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)} e^{k_nx}, \ldots, y_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)} e^{k_nx}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ტოლობებს, უშუალო შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ფუნქციათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} y_1=c_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1x}+c_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2x}+\cdots+c_n\alpha_1^{(n)} e^{k_nx}, \\ y_2=c_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1x}+c_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2x}+\cdots+c_n\alpha_2^{(n)} e^{k_nx}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n=c_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1x}+c_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2x}+\cdots+c_n\alpha_n^{(n)} e^{k_nx}, \end{cases} \tag{28.5}$$

სადაც $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ნებისმიერი მუდმივებია, იქნება (28.1) სისტემის ამონახსნი. შეიძლება ჩვენება, რომ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ მუდმივების სათანადოდ შერჩევით (28.5) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციები დააკმაყოფილებენ მოცემულ საწყის პირობებს:

$$y_1(x_0)=y_1^{(0)}, \ y_2(x_0)=y_2^{(0)}, \ldots, y_n(x_0)=y_n^{(0)}.$$

ამრიგად, (28.5) ამონახსნი არის (28.1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_1+3y_2 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ $k^2 - 5k + 4 = 0$. მისი ფესვებია $k_1 = 1$, $k_2 = 4$.

შევადგინოთ (28.3) სისტეემა $k_1 = 1$ ფესვისათვის. მივიღებთ

$$\begin{cases}(2-1)\,\alpha_1^{(1)} + 2\,\alpha_2^{(1)} = 0,\\ \alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0.\end{cases}$$

აქედან $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. ავიღოთ $\alpha_1^{(1)} = 1$, მაშინ $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}$.

ამრიგად, მოცემული სისტემის კერძო ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(1)} = e^x,\ y_2^{(1)} = -\frac{1}{2}\, e^x.$$

ახლა (28.3) სისტემა შევადგინოთ $k = 4$ ფესვისათვის. გვექნება

$$\begin{cases}-2\,\alpha_1^{(2)} + 2\,\alpha_2^{(2)} = 0,\\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0.\end{cases}$$

აქედან $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$. ავიღოთ $\alpha_1^{(2)} = 1$, მაშინ $\alpha_2^{(2)} = 1$. მივიღებთ ამო-ამონახსნს

$$y_1^{(2)} = e^{4x},\quad y_2^{(2)} = e^{4x}.$$

საბოლოოდ მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{4x},$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

2. მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია, მარტივი კომპლექსური ფესვები. ვთქვათ, მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორი კომპლექსური ფესვი

$$k_1 = \alpha + i\beta,\quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

ამ ფესვების შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$y_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)x},\quad j = 1,\ 2, \ldots, n, \tag{28.6}$$

$$y_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)}\, e^{(\alpha-i\beta)x},\quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{28.7}$$

სადაც $\alpha_j^{(1)}$ და $\alpha_j^{(2)}$ კოეფიციენტები (28.3) სისტემიდან განისაზღვრება.

ისევე, როგორც n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (28.1) სისტემის კომპლექსური ამონახსნის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ასევე იქნება ამ სისტემის ამონახსნები. ამრიგად, გვექნება ორი ნამდვილი ამონახსნი:

$$\overline{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}(\lambda_j^{(1)} \cos \beta x + \lambda_j^{(2)} \sin \beta x),$$

$$\overline{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}(\overline{\lambda}_j^{(1)} \cos \beta x + \overline{\lambda}_j^{(2)} \sin \beta x),$$

სადაც $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\overline{\lambda}_j^{(1)}$, $\overline{\lambda}_j^{(2)}$ — ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც $\alpha_j^{(1)}$ და $\alpha_j^{(2)}$ რიცხვებით განისაზღვრება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -7y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

ანუ

$$k^2 + 12k + 37 = 0.$$

მისი ფესვებია $k_1 = -6 + i$, $k_2 = -6 - i$. k_1-ის ჩასმით (28.3) სისტემაში მივიღებთ (ავიღოთ $\alpha_1^{(1)} = 1$) $\alpha_1^{(1)} = 1$, $\alpha_2^{(1)} = 1 + i$. ამიტომ მოცემული სისტემის კომპლექსური ამონახსნი (28.6)-ის თანახმად იქნება

$$y_1^{(1)} = e^{(-6+i)x}, \; y_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)x}, \tag{28.8}$$

თუ $k_2 = -6 - i$ ჩავსვამთ (28.3) სისტემაში, გვექნება $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(2)} = 1 - i$. მივიღებთ კიდევ ერთ კომპლექსურ ამონახსნს

$$y_1^{(2)} = e^{(-6-i)x}, \; y_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)x}. \tag{28.9}$$

გადავწეროთ (28.8) ამონახსნი შემდეგნაირად

$$y_1^{(1)} = e^{-6x}\cos x + i\,e^{-6x}\sin x,$$

$$y_2^{(1)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x) + i\,e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

ანალოგიურად (28.9)-ს მივცეთ სახე

$$y_1^{(2)} = e^{-6x}\cos x - i\,e^{-6x}\sin x,$$

$$y_2^{(2)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x) - i\,e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

ავიღოთ ცალ-ცალკე მიღებული ამონახსნების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, რომლებიც, როგორც აღვნიშნეთ აგრეთვე იქნებიან მოცემული სისტემის ამონახსნები. გვექნება

$$\overline{y_1^{(1)}} = e^{-6x} \cos x, \quad \overline{y_2^{(1)}} = e^{-6x}(\cos x - \sin x),$$
$$\overline{y_1^{(2)}} = e^{-6x} \sin x, \quad \overline{y_2^{(2)}} = e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y_1 = c_1 e^{-6x} \cos x + c_2 e^{-6x} \sin x,$$
$$y_2 = c_1 e^{-6x}(\cos x - \sin x) + c_2 e^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

3. **მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ჯერადი ფესვები.** ვთქვათ k_1 არის (28.4) მახასიათებელი განტოლების r-ჯერადი ფესვი. (28.1) სისტემის ამონახსნი, რომელიც ამ ფესვს შეესაბამება ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} x + \cdots + \alpha_1^{(r)} x^{r-1})\, e^{k_1 x} \\ y_2(x) &= (\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} x + \cdots + \alpha_2^{(r)} x^{r-1})\, e^{k_1 x}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) &= (\alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} x + \cdots + \alpha_n^{(r)} x^{r-1})\, e^{k_1 x}. \end{aligned} \tag{28.10}$$

$\alpha_i^{(j)} (i=1, 2, \ldots, n,\ j=1, 2, \ldots, r)$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად: ჩავსვათ (28.10) ტოლობით განსაზღვრული $y_i\ (i=1, \ldots, n)$ ფუნქციები (28.1) სისტემაში და სისტემის ყოველ განტოლებაში ერთმანეთს გავუტოლოთ x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტები. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას $\alpha_i^{(j)}$ კოეფიციენტების მიმართ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული სისტემის მახასიათებელი განტოლებაა

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 4 & 6-k \end{vmatrix} = (k-4)^2 = 0.$$

ამრიგად, $k=4$ არის მახასიათებელი განტოლების ორჯერადი ფესვი. ვეძებოთ სისტემის ამონახსნი შემდეგი სახით

$$y_1(x) = (\alpha_1 + \beta_1 x)\, e^{4x},$$
$$y_2(x) = (\alpha_2 + \beta_2 x)\, e^{4x}.$$

თუ y_1 და y_2 ფუნქციების ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ მოცემულ სისტემაში და შევკვეცავთ e^{4x}-ზე, მივიღებთ

$$\begin{cases}\beta_1+4\alpha_1+4\beta_1 x=2\alpha_1-\alpha_2+(2\beta_1-\beta_2)\,x,\\ \beta_2+4\alpha_2+4\beta_2 x=4\alpha_1+6\alpha_2+(4\beta_1+6\beta_2)\,x.\end{cases}$$

გავუტოლოთ x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტები ერთმანეთს. გვექნება

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=0\\ 4\alpha_1+2\alpha_2-\beta_2=0\\ 2\beta_1+\beta_2=0\\ 2\beta_1+\beta_2=0.\end{cases}$$

ეს სისტემა ტოლფასია შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=0\\ 4\alpha_1+2\alpha_2-\beta_2=0.\end{cases}$$

აქედან

$$\begin{cases}\alpha_2=-(2\alpha_1+\beta_1)\\ \beta_2=-2\beta_1.\end{cases}\tag{28.11}$$

დავუშვათ $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, მაშინ (28.11)-დან მივიღებთ $\alpha_2=-2$, $\beta_2=0$. შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(1)}=e^{4x},\ y_2^{(1)}=-2\,e^{4x}.\tag{28.12}$$

ახლა ვთქვათ, $\alpha_1=0$, $\beta_1=1$. მაშინ $\alpha_2=-1$, $\beta_2=-2$. შესაბამისი ამონახსნია

$$y_1^{(2)}=x\,e^{4x},\ y_2^{(2)}=-(1+2x)\,e^{4x}.\tag{28.13}$$

(28.12) და (28.13) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნია

$$\begin{aligned}y_1&=(c_1+c_2x)\,e^{4x},\\ y_2&=-(2c_1+c_2+2c_2x)\,e^{4x}.\end{aligned}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ

$$\begin{cases}y_1'=y_2+y_3\\ y_2'=y_1+y_3\\ y_3'=y_1+y_2\end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^3 + 3k + 2 = 0.$$

მას აქვს ერთი მარტივი ფესვი $k_1 = 2$ და ერთი ორჯერადი ფესვი $k_2 = -1$. $k_1 = 2$ ფესვისათვის (28.3) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

აქედან

$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 \\ \alpha_3 = \alpha_1 \end{cases}$$

ავიღოთ $\alpha_1 = 1$. მაშინ $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. ამიტომ $k_1 = 2$ ფესვის შესაბამისი კერძო ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(1)} = e^{2x}, \quad y_2^{(1)} = e^{2x}, \quad y_3^{(1)} = e^{2x}. \tag{28.14}$$

$k_2 = -1$ ფესვის შემთხვევაში (28.3) სისტემის თანახმად გვექნება

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

აქედან $\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$. ჯერ ავიღოთ $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$. მაშინ $\alpha_3 = -1$ და შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$y_1^{(2)} = e^{-x}, \quad y_2^{(2)} = 0, \quad y_3^{(2)} = -e^{-x}. \tag{28.15}$$

თუ ავიღებთ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, მაშინ $\alpha_3 = -1$ და გვექნება ამონახსნი

$$y_1^{(3)} = 0, \quad y_2^{(3)} = e^{-x}, \quad y_3^{(3)} = -e^{-x}. \tag{28.16}$$

(28.14), (28.15), (28.16) ტოლობებიდან მივიღებთ ზოგად ამონახსნს

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \\ y_2 = c_1 e^{2x} + c_3 e^{-x} \\ y_3 = c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} - c_3 e^{-x}. \end{cases}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული სისტემის მახასიათებელი განტოლებაა

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 2-k \end{vmatrix} = (1-k)^2(4-k) = 0.$$

ამრიგად, $k=4$ არის მახასიათებელი განტოლების მარტივი ფესვი, ხოლო $k=1$ კი ორჯერადი ფესვი. $k=1$ ფესვისათვის (28.3) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0. \end{cases}$$

აქედან $\alpha_3=-(\alpha_1+\alpha_2)$. ავიღოთ $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$. მაშინ $\alpha_3=0$. შესაბამისი ამონახსნია

$$y_1^{(1)}=-e^x, \quad y_2^{(1)}=e^x, \quad y_3^{(1)}=0. \qquad (28.17)$$

ახლა ავიღოთ $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=0$. მაშინ $\alpha_3=1$. შესაბამისი ამონახსნია

$$y_1^{(2)}=-e^x, \ y_2^{(2)}=0, \ y_3^{(2)}=e^x. \qquad (28.18)$$

$k=4$ ფესვისათვის (28.3) სისტემა იქნება

$$\begin{cases} -2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=0 \end{cases}$$

ეს სისტემა ტოლფასია შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} -2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1-2\alpha_3+\alpha_3=0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$. მოცემული სისტემის შესაბამისი ამონახსნი არის

$$y_1^{(3)}=e^{4x}, \quad y_2^{(3)}=e^{4x}, \quad y_3^{(3)}=e^{4x}. \qquad (28.19)$$

(28.17), (28.18) და (28.19) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases} y_1=-(c_1+c_2)e^x+c_3e^{4x}, \\ y_2=c_1e^x+c_3e^{4x}, \\ y_3=c_2e^x+c_3e^{4x}, \end{cases}$$

მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნია.

როდესაც მოცემულია მაღალი რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, მისი ამოხსნა ხდება პირველი რიგის სისტემის ანალოგიურად.

მაგალითად, მექანიკაში და ელექტრული წრედების გამოკვლევისას ხშირად მიიღება მეორე რიგის სისტემა

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{28.20}$$

ამ სისტემის ამონახსნი აგრეთვე ვეძებოთ $x = \alpha e^{kt}$, $y = \beta e^{kt}$ სახით. მათი ჩასმით (28.20) სისტემაში და e^{kt}-ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$\begin{cases} (a_{11} - k^2)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k^2)\beta = 0. \end{cases} \tag{28.21}$$

ამ სისტემას α და β-ს მიმართ არანულოვანი ამონახსნი ექნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{28.22}$$

ეს განტოლება არის (28.20) სისტემის მახასიათებელი განტოლება. იგი წარმოადგენს მეოთხე რიგის განტოლებას k-ს მიმართ. ვთქვათ k_1, k_2, k_3, k_4 არის (28.22) განტოლების ფესვები (დავუშვათ, ფესვები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია). ყოველი k_i-სათვის ($i=1, 2, 3, 4$) (28.21) სისტემიდან ვიპოვით რაიმე α, β არანულოვან ამონახსნს. ზოგადი ამონახსნი კი იქნება

$$x = c_1\alpha_1 e^{k_1t} + c_2\alpha_2 e^{k_2t} + c_3\alpha_3 e^{k_3t} + c_4\alpha_4 e^{k_4t},$$
$$y = c_1\beta_1 e^{k_1t} + c_2\beta_2 e^{k_2t} + c_3\beta_3 e^{k_3t} + c_4\beta_4 e^{k_4t}.$$

კომპლექსური ფესვების შესაბამისი ნამდვილი ამონახსნებიც იძებნება (28.1) სისტემის ამონახსნების მოძებნის ანალოგიურად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = x - 4y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -x + y. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავწეროთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 1 - k^2 & -4 \\ -1 & 1 - k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

მისი ფესვებია $k_1 = i$, $k_2 = -i$, $k_3 = \sqrt{3}$, $k_4 = -\sqrt{3}$.

ამონახსნები ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$x_1 = \alpha_1 e^{it}, \qquad y_1 = b_1 e^{it},$$
$$x_2 = \alpha_2 e^{-it}, \qquad y_2 = \beta_2 e^{-it},$$
$$x_3 = \alpha_3 e^{\sqrt{3}\,t} \qquad y_3 = \beta_3 e^{\sqrt{3}\,t}$$
$$x_4 = \alpha_4 e^{-\sqrt{3}\,t}, \quad y_4 = \beta_4 e^{-\sqrt{3}\,t}.$$

(28. 21) განტოლებიდან განვსაზღვროთ α_j და β_j

$$\alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 = \frac{1}{2},$$
$$\alpha_2 = 1, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2},$$
$$\alpha_3 = 1, \qquad \beta_3 = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha_4 = 1, \qquad \beta_4 = -\frac{1}{2}.$$

ამოვწეროთ კომპლექსური ამონახსნები

$$x_1 = e^{it} = \cos t + i \sin t, \qquad y_1 = 0{,}5 (\cos t + i \sin t),$$
$$x_2 = e^{-it} = \cos t - i \sin t, \qquad y_2 = 0{,}5 (\cos t - i \sin t).$$

ავიღოთ მათი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, რომლებიც აგრეთვე იქნება ამონახსნები:

$$\overline{x_1} = \cos t, \qquad \overline{y_1} = 0{,}5 \cos t,$$
$$\overline{x_2} = \sin t, \qquad \overline{y_2} = 0{,}5 \sin t.$$

ამრიგად, მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 e^{\sqrt{3}\,t} + c_4 e^{-\sqrt{3}\,t},$$
$$y = \frac{1}{2} c_1 \cos t + \frac{1}{2} c_2 \sin t - \frac{1}{2} c_3 e^{\sqrt{3}\,t} - \frac{1}{2} c_4 e^{-\sqrt{3}\,t}.$$

§ 29. მდგრადობის თეორიის ელემენტები

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის დროს ზოგჯერ მნიშვნელოვანია არა იმდენად კონკრეტული ამონახსნის პოვნა, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს, არამედ ამონახსნის საწყის

პირობებზე დამოკიდებულების დადგენა. მართლაც, ვთქვათ რაიმე პროცესი აღიწერება

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{29.1}$$

დიფერენციალური განტოლებით და

$$y(x_0) = y_0 \tag{29.2}$$

საწყისი პირობით.

როგორც წესი, (29.2) საწყისი პირობა დგინდება ექსპერიმენტულად და ამიტომ მიიღება გარკვეული სიზუსტით. თუ საწყისი პირობის მცირეოდენი ცვლილება გამოიწვევს (29.1)—(29.2) ამოცანის ამონახსნის საკმაოდ დიდ ცვლილებას, მაშინ (29.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც ჭეშმარიტი საწყისი პირობების ნაცვლად მისგან „მცირედ" განსხვავებულ (29.2) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს, რეალური პროცესის აღწერისათვის არ გამოდგება, რადგან სასურველი მიახლოებითაც კი ვერ აღწერს მას. ამიტომ მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, თუ რა პირობებში გამოიწვევს საწყისი პირობების მცირე ცვლილება ამონახსნის მცირე ცვლილებას.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 29.1. (29.1)—(29.2) ამოცანის $y=y(x, x_0, y_0)$ ამონახსნს ეწოდება უწყვეტად დამოკიდებული საწყის პირობებზე რაიმე $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ ინტერვალზე, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ, როცა

$$|y_0 - \overline{y_0}| < \delta,$$

მაშინ

$$|y(x, x_0, y_0) - \overline{y}(x, x_0, \overline{y_0})| < \varepsilon, \quad x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,$$

სადაც $\overline{y}(x, x_0, \overline{y_0})$ არის (29.1) განტოლების ამონახსნი $y(x_0)=\overline{y_0}$ საწ- საწყისი პირობით. მართებულია შემდეგი თეორემა

თ ე ო რ ე მ ა 29.1. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია და მისი $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებული უწყვეტი ფუნქციებია

$$D = \{t_0 - a \leqslant t \leqslant t_0 + a, \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$$

მართკუთხედზე, მაშინ (29.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც (29.2) საწყის პირობას აკმაყოფილებს, უწყვეტად არის დამოკიდებული საწყის პირობაზე $|x-x_0|<T$ შუალედში, სადაც

$$T < T_0, \quad T_0 = \min\left\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\right\},$$

ხოლო

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|, \quad N = \max_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როგორც არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის დამტკიცების დროს ვნახეთ, მართებულია ტოლობები

$$y(x) = y(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt,$$

$$\overline{y}(x) = \overline{y}(x, x_0, \overline{y_0}) = \overline{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(t, \overline{y}(t))\,dt.$$

აქედან ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$|y(x) - \overline{y}(x)| \leqslant |y_0 - \overline{y_0}| + \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, \overline{y}(t))]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant |y_0 - \overline{y_0}| + N|x - x_0| \max_x |y(x) - \overline{y}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |y_0 - \overline{y_0}| + NT \max_x |y(x) - \overline{y}(x)|.$$

რადგან $NT < 1$, აქედან გვაქვს

$$(1 - NT)|y(x) - \overline{y}(x)| \leqslant |y_0 - \overline{y_0}|,$$

ანუ

$$|y(x) - \overline{y}(x)| \leqslant \frac{|y_0 - \overline{y_0}|}{1 - NT}.$$

თუ ამ უტოლობაში ავიღებთ $|y - y_0| < \delta$, სადაც $\delta = \varepsilon(1 - NT)$, მივიღებთ

$$|y(x) - \overline{y}(x)| < \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიური თეორემა მართებულია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის.

შემდგომი მსჯელობისას, ჩანაწერის შემოკლების მიზნით, მოსახერ-

ხებელია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ჩაწერა ვექტორული სახით

$$\vec{y}' = \vec{F}(t, \vec{y}), \tag{29.3}$$

სადაც $\vec{y'} = (y_1', y_2', \ldots, y_n')$, ხოლო

$$\vec{F}(t, \vec{y}) = (f_1(t, \vec{y}), f_2(t, \vec{y}), \ldots, f_n(t, \vec{y})).$$

ამ შემთხვევაში საწყისი პირობები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0. \tag{29.4}$$

(29.3) სისტემის ამონახსნს, რომელიც $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს, ჩავწერთ $\vec{y} = \vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0)$ სახით.

შევნიშნოთ, რომ ნორმალური სახის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ვექტორული სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{y}A + \vec{f}(t),$$

სადაც $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ არის სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა, ხოლო

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)).$$

განსაზღვრება 29.2. (29.3) სისტემის $\vec{y}(t) = \vec{y}(t, t_0, y_0)$ ამონახსნს, ეწოდება მდგრადი $[t_0, +\infty[$. შუალედში ლიაპუნოვის* მიხედვით, თუ ნებისმიერი მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ, როცა

$$|\vec{y}_0 - \vec{y}_1| < \delta,$$

მაშინ

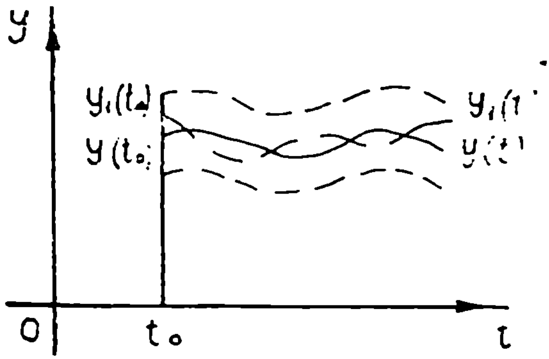
$$|\vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0) - \vec{y}(t, t_0, \vec{y}_1)| < \varepsilon,$$

როდესაც $t \in [t_0, +\infty[$.

ამრიგად, ლიაპუნოვის მიხედვით სისტემის ამონახსნი მდგრადია იმ შემთხვევაში, თუ საწყისი პირობების მცირე ცვლილება იწვევს ამო-

* ა. მ. ლიაპუნოვი (1857—1918)—რუსი მათემატიკოსი და მექანიკოსი.

ნახსნის მიერ ცვლილებას მთელ $[t_0, +\infty[$ შუალედში (ნახ. 66).



ნახ. 66

ანალოგიურად განისაზღვრება მდგრადობა ლიაპუნოვის მიხედვით $]-\infty, t_0]$ შუალედში.

თუ ამონახსნი არ არის მდგრადი, მას ეწოდება არამდგრადი ამონახსნი.

შემდგომ ჩვენ განვიხილავთ ამონახსნის მდგრადობის საკითხს $[t_0, +\infty[$ შუალედში.

განსაზღვრება 29.3. (29.3) სისტემის $\vec{y}=\vec{y}(t)$ ამონახსნს, რომელიც მდგრადია ლიაპუნოვის მიხედვით, ეწოდება ასიმპტოტურად მდგრადი, თუ

$$\lim_{t\to\infty}(\vec{y}(t,\ t_0,\ y_0)-\vec{y}(t,\ t_0,\ y_1))=0. \tag{29.5}$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. გამოვარკვიოთ, მდგრადია თუ არა

$$\frac{dy}{dt}=-y,\quad y(t_0)=y_0$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი.

ამოხსნა. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y=c\,e^{-t}$. ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობას აკმაყოფილებს იქნება

$$y=y_0e^{t_0-t}.$$

თუ ავიღებთ საწყის პირობებს $y(x_0)=y_1$, მაშინ შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$y = y_1 e^{t_0-t}.$$

ამიტომ

$$|y(t) - y_1(t)| = |y_0 - y_1| e^{t_0-t} < |y_0 - y_1|,$$

როცა $t \geqslant t_0$. ამიტომ თუ $|y_0-y_1|<\delta=\varepsilon$, მაშინ $|y(t)-y_1(t)| \leqslant \varepsilon$, როცა $t \geqslant t_0$. ამრიგად, $y = y_0 e^{t_0-t}$ ამონახსნი მდგრადია ლიაპუნოვის მიხედვით. ეს ამონახსნი არის აგრეთვე ასიმპტოტურად მდგრადიც, რადგან

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t) - y_1(t)| = \lim_{t\to+\infty} |y_0 - y_1| e^{t-t_0} = 0.$$

საკითხი იმის შესახებ, არის თუ არა (29.3) სისტემის ამონახსნი მდგრადი, ყოველთვის შეგვიძლია მივიყვანოთ ამ სისტემის გარდაქმნით მიღებული ახალი სისტემის ტრივიალური ამონახსნის მდგრადობის საკითხის შესწავლამდე. მართლაც, ვთქვათ $y_0(t)$ არის (29.3) სისტემის ამონახსნი, რომელიც $\vec{y}(t_0)=\vec{y_0}$ საწყის პირობას აკმაყოფილებს. (29.3) სისტემაში მოვახდინოთ ჩასმა $\vec{x}(t) = \vec{y}(t)-\vec{y_0}(t)$.

მაშინ $\vec{y}'(t) =\vec{x}'(t) + \vec{y}_0'(t)$ და (29.3) სისტემიდან მივიღებთ

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{y}_0(t) + \vec{x}(t)) - \vec{F}(t, \vec{y}_0(t)). \qquad (29.6)$$

ცხადია, (29.3) სისტემის $\vec{y_0}(t)$ ამონახსნს შეესაბამება (29.6) სისტემის ტრივიალური ამონახსნი $\vec{x}(t)=\vec{0}$.

შემდგომ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ (29.3) სისტემას გააჩნია ტრივიალური ამონახსნი $\vec{y}(t)\equiv 0$, $t\geqslant t_0$ და შემოვიფარგლებით ნულოვანი ამონახსნის მდგრადობის საკითხის შესწავლით. ამიტომ ზედმეტი არ იქნება მდგრადობის განსაზღვრება ცალკე ჩამოვაყალიბოთ ნულოვანი ამონახსნისათვის.

განსაზღვრება 29.4 ნულოვან ამონახსნს ეწოდება მდგრადი $[t_0, +\infty[$ შუალედში ლიაპუნოვის მიხედვით, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ თუ $|\vec{y_0}|<\delta$, მაშინ $|\vec{y}(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$, როცა $t\in[t_0, +\infty[$.

თუ გარდა ამისა

$$\lim_{t \to +\infty} \vec{y}(t, t_0, y_0) = 0,$$

მაშინ $\vec{y}(t) \equiv 0$ ამონახსნს ეწოდება ასიმპტოტურად მდგრადი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვარკვიოთ, არის თუ არა

$$y'(t) = 2 + t, \ \ y(0) = 1$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი მდგრადი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული კოშის ამოცანის ამონახსნია $y(t) = \frac{t^2}{2} + 2t + 1$.

როგორც ვნახეთ (29.3) განტოლების ამონახსნის მდგრადობა, რომელიც $y(t_0) = y_0$ პირობას აკმაყოფილებს (ჩვენ შემთხვევაში $n = 1$), ტოლფასია (29.6) სისტემის ნულოვანი ამონახსნის მდგრადობისა. მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$x(t) = y(t) - \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right).$$

მაშინ

$$y(t) = x(t) + \frac{t^2}{2} + 2t + 1.$$

მოცემულ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$x'(t) + t + 2 = 2 + t,$$

ანუ $x'(t) = 0$. მისი ზოგადი ამონახსნია $x(t) = c$. საწყის პირობას $x(0) = 0$ შეესაბამება $x(t) \equiv 0$ ამონახსნი, ხოლო $x(0) = x_0$ ნებისმიერ სხვა საწყის პირობას $x(t) = x_0$ ამონახსნი. ცხადია, რომ თუ $|x_0| < \delta = \varepsilon$, მაშინ $|x(t)| < \varepsilon$. ე. ი. $x(t) \equiv 0$ ამონახსნი არის მდგრადი (მაგრამ არ არის ასიმპტოტურად მდგრადი). ეს კი ნიშნავს, რომ მოცემული კოშის ამოცანის $y(t) = \frac{t^2}{2} + 2t + 1$ ამონახსნიც არის მდგრადი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ნორმალური სახის

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{y} \cdot A + \vec{f}(t). \tag{29.7}$$

წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი $\vec{y}_0(t)$ ამონახსნი მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მდგრადია შესაბამისი

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{y} \cdot A \tag{29.8}$$

ერთგვაროვანი სისტემის ნულოვანი ამონახსნი.

მართლაც, (29.7) არის (29.3) სისტემის კერძო შემთხვევა, ხოლო (29.8) შესაბამისია (29.6)-ის.

ვთქვათ $\vec{y}=\vec{y}(t)$ არის (29.3) სისტემის ამონახსნი. γ წირს, რომლის პარამეტრული სახის განტოლებაა

$$y_i = y_i(t) \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n)$$

ეწოდება (29.3) სისტემის ფაზური გრაფიკი (ტრაექტორია).

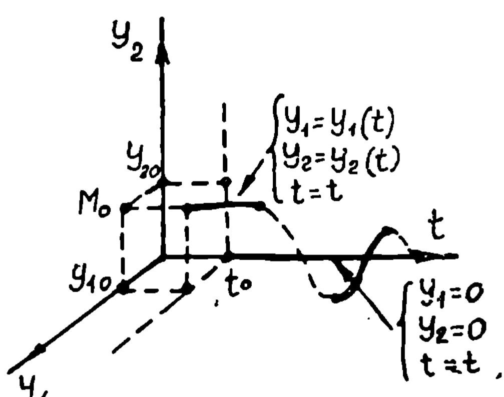
ევკლიდეს n-განზომილებიან კოორდინატულ R^n სივრცეს, რომელშიც მოთავსებულია (29.3) სისტემის ფაზური გრაფიკები, ეწოდება ფაზური სივრცე.

რადგან (29.3) სისტემის ინტეგრალური წირების განტოლება პარამეტრულად შემდეგნაირად შეიძლება ჩავწეროთ

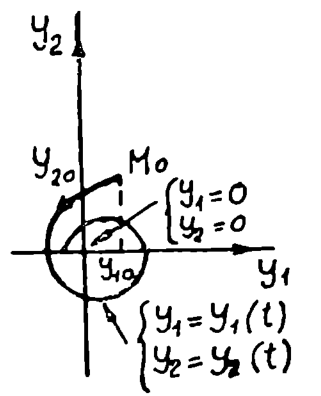
$$t=t,\ y_1=y_1(t),\ y_2=y_2(t), \ldots, y_n=y_n(t),$$

ამიტომ, ინტეგრალური წირი მდებარეობს R^{n+1} სივრცეში, რომლის წერტილებია $(t,\ y_1,\ y_2, \ldots, y_n)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ (29.3) სისტემის ფაზური გრაფიკები წარმოადგენს ინტეგრალური წირების გეგმილს R^n სივრცეში t ღერძის პარალელურად.

ამ მსჯელობაში სიცხადის შესატანად განვიხილოთ შემთხვევა $n=2$. მაშინ R^{n+1} იქნება სამგანზომილებიანი სივრცე, ხოლო R^n კი სიბრტყე. 67-ე ნახაზზე გამოსახულია ინტეგრალური წირი, რომლის პარამეტრული სახის განტოლებაა $t=t,\ y_1=y_1(t),\ y_2=y_2(t)$, ხოლო 68-ე ნახაზზე მისი გეგმილი სიბრტყეზე, ე. ი. ფაზური ტრაექტორია, რომლის პარამეტრული განტოლებაა $y_1=y_1(t),\ y_2=y_2(t)$.



ნახ. 67



ნახ. 68

თ ე ო რ ე მ ა 29.2 (ლიაპუნოვი). ვთქვათ მოცემულია სისტემა

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{y}), \tag{29.9}$$

სადაც $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\vec{F}(t, \vec{y}) = (f_1(t, \vec{y}), f_2(t, \vec{y}), \ldots, f_n(t, \vec{y}))$ რომელსაც გააჩნია ტრივიალური ამონახსნი.

დავუშვათ, არსებობს დიფერენცირებადი ფუნქცია $v = v(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:

1) $v(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqslant 0$ და $v = 0$ მხოლოდ მაშინ, როდესაც $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, ე. ი. v ფუნქციას გააჩნია მკაცრი მინიმუმი კოორდინატთა სათავეში.

2) (29.9) სისტემის ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ v ფუნქციის t ცვლადით სრული წარმოებული აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i} \cdot f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqslant 0, \text{ როცა } t \geqslant t_0,$$

მაშინ (29.9) სისტემის ნულოვანი ამონახსნი $\vec{y}(t) = 0$ მდგრადია ლიაპუნოვის მიხედვით.

თუ დამატებით შესრულებულია პირობა, რომ არსებობს $\beta > 0$ რიცხვი და კოორდინატთა სათავის შემცველი მიდამო ისეთი, რომ ამ მიდამოს გარეთ მართებულია უტოლობა

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0,$$

მაშინ $\vec{y}(t) \equiv 0$ ამონახსნი იქნება ასიმპტოტურად მდგრადიც. v ფუნქციას ეწოდება ლიაპუნოვის ფუნქცია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ლიაპუნოვის ფუნქციას უფრო ხშირად ეძებენ, როგორც $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადების კვადრატულ ფორმას

$$v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვარკვიოთ, არის თუ არა

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1^5 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 - y_1^2 \end{cases}$$

სისტემის ნულოვანი ამონახსნი მდგრადი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ფუნქცია $v(y_1, y_2)=y_1^2+y_2^2$. იგი აკმაყოფილებს თეორემა 29.2-ის პირობებს. მართლაც:

1) $v(y_1, y_2)\geqslant 0$ და $v=0$ მხოლოდ მაშინ, როდესაც $y_1=y_2=0$.

2) ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dt}=2y_1(-y_1^6-y_2)+$$

$$+2y_2(y_1-y_2^3)=-2(y_1^6+y_2^4)\leqslant 0.$$

ამას გარდა, თუ $y_1^2+y_2^2\geqslant\delta$ (კოორდინატთა სათავის შემცველ მიდამოს გარეთ), მაშინ

$$\frac{dv}{dt}\leqslant-\beta<0.$$

ამიტომ მოცემული სისტემის ნულოვანი ამონახსნი იქნება ასიმპტოტურად მდგრადი.

§ 30. ავტონომიური სისტემა. მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის მდგრადობა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 30.1. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ავტონომიური, თუ იგი ცხადი სახით არ შეიცავს დამოუკიდებელ ცვლადს.

ნორმალური სახის ავტონომიური სისტემა ვექტორული სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{F}(\vec{y}). \tag{30.1}$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 30.2. წერტილს $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ეწოდება (30.1) ავტონომიური სისტემის წონასწორობის წერტილი, თუ $\vec{F}(\vec{a})=\vec{0}$, სადაც $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

თუ $\vec{a}$ არის ავტონომიური სისტემის წონასწორობის წერტილი, მაშინ $\vec{y}=\vec{a}$ იქნება ამავე სისტემის ამონახსნი და პირიქით.

რადგან მდგრადობის საკითხის შესწავლა მიიყვანება ნულოვანი ამონახსნის მდგრადობის შესწავლამდე გარდაქმნილი სისტემისათვის (ცხადია, გარდაქმნილი სისტემაც იქნება ავტონომიური), ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ (30.1) სისტემას აქვს ნულოვანი ამონახსნი $\vec{y}(t)=0$, ე. ი. წონასწორობის წერტილი ემთხვევა ფაზური R^n სივრცის სათავეს.

ქვემოთ ჩვენ ავტონომიური სისტემებიდან განვიხილავთ ნორმალური სახის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორუცნობიანი სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2. \end{cases} \tag{30.2}$$

თუ $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, მაშინ როგორც (30.5)-დან ჩანს, (30.2) სისტემის ნულოვანი ამონახსნი $y_1 = y_2 = 0$ იქნება ასიმპტოტურად მდგრადი.

მართლაც, ვთქვათ $t_0 = 0$. მაშინ (30.2) სისტემის ამონახსნი, რომელიც $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$ პირობებს აკმაყოფილებს, მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან, თუ c_1 და c_2 მუდმივებს შევარჩევთ ისე, რომ მათ დააკმაყოფილონ სისტემა

$$\begin{cases} y_{10} = c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 \\ y_{20} = c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2, \end{cases}$$

რომლის დეტერმინანტი $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. ამ სისტემის ამონახსნია

$$c_1 = A y_{10} + B y_{20}, \quad c_2 = D y_{10} + E y_{20},$$

სადაც A, B, D, E რაიმე მუდმივებია. რადგან $|e^{\lambda_1 t}| < 1$, $|e^{\lambda_2 t}| < 1$, ამიტომ

$$|y_1(t)| \leqslant |A y_{10} + B y_{20}| \cdot |\alpha_1| + |D y_{10} + E y_{20}| \cdot |\beta_1|,$$

$$|y_2(t)| \leqslant |A y_{10} + B y_{20}| \cdot |\alpha_2| + |D y_{10} + E y_{20}| \cdot |\beta_2|.$$

ამ უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $e > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ თუ $|y_{10}| < \delta$ და $|y_{20}| < \delta$, მაშინ მართებული იქნება უტოლობები

$$|y_1(t)| \leqslant \varepsilon, \quad |y_2(t)| \leqslant \varepsilon, \text{ როცა } t > 0.$$

ე. ი. ნულოვანი ამონახსნი არის მდგრადი. თუ იმასაც გავითვალისწინებთ, რომ $e^{\lambda_i t} \to 0$, როცა $t \to +\infty$ $(i = 1, 2)$ დავასკვნით, რომ ეს ამონახსნი არის აგრეთვე ასიმპტოტურად მდგრადიც.

(30.2) სისტემის ამონახსნის მდგრადობის საკითხი შეიძლება გავარკვიოთ ლიაპუნოვის თეორემის საშუალებით. მაგრამ ამ შემთხვევაში მდგრადობის შესწავლა უფრო მოსახერხებელია უშუალო შემოწმებით, რადგან (30.2) სისტემის ამონახსნების მოძებნის გზა ჩვენთვის ცნობილია.

ცხადია, რომ (30.2) სისტემას გააჩნია ნულოვანი ამონახსნი. ამიტომ საკმარისია გამოვარკვიოთ, როდის იქნება ეს ამონახსნი მდგრადი.

შევადგინოთ (30.2) სისტემის მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\Delta=0, \qquad (30.3)$$

სადაც

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (30.4)$$

შემდგომ ვიგულისხმებთ, რომ $\Delta \neq 0$. ამიტომ $\lambda=0$ არ იქნება მახასიათებელი განტოლების ფესვი. განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები.

1. ვთქვათ მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ერთმანეთის არატოლი ორი ნამდვილი ფესვი λ_1 და λ_2. დავუშვათ (α_1, α_2) და (β_1, β_2) არის A მატრიცის საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც შესაბამისად λ_1 და λ_2 რიცხვებს შეესაბამება. როგორც ვიცით, ეს ვექტორები იქნება წრფივად დამოუკიდებელი. ამ შემთხვევაში (30.2) სისტემის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \\ y_2(t) = c_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \qquad (30.5)$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

2. ვთქვათ მახასიათებელი განტოლების ფესვები კომპლექსური რიცხვებია

$$\lambda_1 = p+iq, \quad \lambda_2 = p-iq \quad (q \neq 0).$$

ამ შემთხვევაში (30.2) სისტემის ზოგადი ამონახსნი შეგვიძლია ჩავწეროთ (30.5) სახით, სადაც (α_1, α_2) და (β_1, β_2) იქნებიან ვექტორები კომპლექსური კოორდინატებით. ამასთან $\beta_1 = \overline{\alpha}_1$ და $\beta_2 = \overline{\alpha}_2$. როგორც ვიცით, კომპლექსური ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები აგრეთვე ამონახსნებია, ამიტომ (30.2) სისტემის ზოგადი ამონახსნი (ნამდვილი) იქნება:

$$y_1 = e^{pt}(c_1\cos qt + c_2\sin qt),$$
$$y_2 = e^{pt}(a\cos qt + b\sin qt),$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო a და b მათი რაიმე წრფივი კომბინაციაა.

როცა $p=0$, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ნულოვანი ამონახსნი იქნება მდგრადი, ხოლო თუ $p<0$, მაშინ კი ასიმპტოტურად მდგრადიც.

3. ვთქვათ მახასიათებელი განტოლების ფესვები ტოლია $\lambda_1=\lambda_2$. ამ შემთხვევაში (30.2) სისტემის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$\begin{cases} y_1=(A+Bt)\,e^{\lambda_1 t}, \\ y_2=(C+Dt)\,e^{\lambda_1 t}, \end{cases}$$

სადაც A, B, C, D ერთმანეთთან ორი წრფივი განტოლებით დაკავშირებული რაიმე მუდმივებია. თუ $\lambda_1<0$, მაშინ $e^{\lambda_1 t}\to 0$, როცა $t\to+\infty$ და ნულოვანი ამონახსნი არის ასიმპტოტურად მდგრადი. თუ $\lambda_1>0$, ნულოვანი ამონახსნი არის არამდგრადი.

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

§ 1. მრავალი ცვლადის ფუნქცია, ზღვარი და უწყვეტობა.

1.1. გამოსახეთ წრეზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის S ფართობი, როგორც მისი x და y ფუძეების ფუნქცია.

1.2. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი l მსახველისა და ფუძის r რადიუსის ფუნქცია.

1.3. გამოსახეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის S ფართობი, როგორც მისი ფუძის a და b გვერდებისა და პარალელეპიპედის დიაგონალის ფუძის სიბრტყისადმი დახრის φ კუთხის ფუნქცია.

1.4. გამოსახეთ წესიერი წაკვეთილი ექვსკუთხა პირამიდის V მოცულობა, როგორც მისი ფუძეების x და y გვერდებისა და h სიმაღლის ფუნქცია.

1.5. იპოვეთ $f(0;\ 1)$, $f\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$ და $f\left(\frac{1}{x},\ -y\right)$, თუ

$$f(x,\ y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

1.6. იპოვეთ $f(0;\ -1)$, $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ და $f(xy,\ -y)$, თუ

$$f(x,\ y) = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2.$$

იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე (№№ 1.7—1.12):

1.7. 1) $z = x - \sqrt{-y}$; 2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

3) $z = \sqrt{xy}$; 4) $z = \ln(x - 2y)$.

1.8. 1) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$; 2) $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$;

3) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$; 4) $z = \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{4x - y^2}}$.

1.9. 1) $z = \operatorname{ctg} \pi (x + y)$; 2) $z = y\sqrt{\cos x}$;

3) $z = \sqrt{\sin \pi (x^2 + y^2)}$; 4) $z = \sqrt{x \sin y}$.

1.10. 1) $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$; 2) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{1 - x^2 - y^2}$;

3) $z = \arccos \dfrac{y - 1}{x}$; 4) $z = \arccos \dfrac{x}{x + y}$.

1.11. 1) $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$; 2) $z = \ln(25 - x^2 - y^2) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$;

3) $z = \ln \dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}$; 4) $z = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$.

1.12. 1) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$; 2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

3) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$; 4) $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

იპოვეთ ფუნქციის დონის წირები (№№ 1.13—1.15):

1.13. 1) $z = x + y$; 2) $z = x^2 + y^2$; 3) $z = xy$; 4) $z = \sqrt{xy}$.

1.14. 1) $z = \dfrac{y}{x^2}$; 2) $z = x^2 - y^2$; 3) $z = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$; 4) $z = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$.

1.15. 1) $z = f(y - ax)$; 2) $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$; 3) $z = f(xy)$; 4) $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

1.16. იპოვეთ ფუნქციის დონის ზედაპირები

1) $u = x + y + z$; 2) $u = x^2 + y^2 - z^2$;

3) $u = 2^{3x - y + 2z}$; 4) $u = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1.17. აჩვენეთ, რომ, თუ $z = f(x, y)$ არის k რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია*, მაშინ იგი წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$u = x^k F\left(\frac{y}{x}\right).$$

---

* ერთგვაროვანი ფუნქციის განსაზღვრება მოყვანილია პირველი თავის § 14-ში.

1.18. აჩვენეთ, რომ, თუ $u=f(x, y, z)$ არის k რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, მაშინ იგი წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$u = x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

გამოთვალეთ შემდეგი განმეორებითი ზღვრები (№№ **1.19 — 1.24**):

1.19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{x+y}{x+y^2}$; 2) $\lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+y}{x+y^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x-y}{x+y}$; 4) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-y}{x+y}$.

1.20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$;

2) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})}{\sin y\cdot \operatorname{tg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{xy}$;

4) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x+y)-\sin(y-x)}{\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg}(x-y)}$.

1.21. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to\infty} \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; 2) $\lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$; 4) $\lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$,

1.22. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to 0+} \dfrac{x^y}{1+x^y}$; 2) $\lim\limits_{y\to 0+} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^y}{1+x^y}$;

3) $\lim\limits_{y\to 2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{xy}-e^{2x}}{x(y^2-4)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} (1+\sin y)^{\frac{x}{\operatorname{tg} y}}$.

1.23. 1) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$ $(a\neq k\pi,\quad k=\pm 1;\ \pm 2, \ldots)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$;

4) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$.

1.24. 1) $\lim\limits_{x\to 1} \lim\limits_{y\to 1} (1-xy)\operatorname{tg}\dfrac{\pi xy}{2}$; 2) $\lim\limits_{y\to 1} \lim\limits_{x\to\infty} xy(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2-y})$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \lim\limits_{y\to 0} \log_x(x+y)$; 4) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 1} \log_x(x+y)$.

გამოთვალეთ ზღვარი (1.25—1.29):

1.25. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{4-\sqrt{yx+16}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} (1-xy)\operatorname{tg}\dfrac{\pi xy}{2}$.

1.26. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{3}{x^2+y^2}}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} (1+\operatorname{tg} y)^{x^2\operatorname{ctg} y}$.

1.27. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+\operatorname{tg} y)^{\frac{x^2}{y}}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) გამოიყენეთ ჩასმა $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

2) გამოიყენეთ უტოლობა $1<(1+y)^{\frac{1}{y}}<3$.

1.28. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}} xy\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2-y}\right)$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos xy}{y\sin^2 x}$ $(a\neq k\pi,\ k=\pm 1,\ \pm 2,\dots)$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 4) ისარგებლეთ ტოლობით

$$(x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$$

და ჩასმით $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

1.29. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^x$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \dfrac{x^k+y^p}{x^m+y^n}$ $(\max(k,\ p) < \min(m,\ n))$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \dfrac{x^m+y^n}{e^{x+y}}$ $(m,\ n\in N)$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 3) ისარგებლეთ ჩასმით $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. 4) ისარგებლეთ უტოლობით

$$0 < \frac{x^m+y^m}{e^{x+y}} < \frac{(x+y)^k}{e^{x+y}},$$

სადაც $k>m$, $k>n$ და $x>0$, $y>0$.

1.30. აჩვენეთ, რომ არ არსებობს ზღვარი

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

1.31. დაადგინეთ უწყვეტია თუ არა $f(x,\ y)$ ფუნქცია $(0;\ 0)$ წერტილზე, თუ:

1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{როცა } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=y=0; \end{cases}$$

2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{როცა } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=y=0; \end{cases}$$

3) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, & \text{როცა} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = y = 0; \end{cases}$

4) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}, & \text{როცა} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = y = 0. \end{cases}$

იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები (1.32, 1.33):

1.32. 1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; 2) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

3) $z = \dfrac{1}{y - 2x}$; 4) $z = \dfrac{y + 2x^2}{y - 2x^2}$.

1.33. 1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$; 2) $z = \sin \dfrac{1}{xy}$;

3) $z = \dfrac{1}{(x+y)(y^2-x)}$; 4) $z = \dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$.

1.34. აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები (0; 0) წერტილში უწყვეტია ცალცალკე ცვლადების მიმართ, მაგრამ ამ წერტილში განიცდის წყვეტას, როგორც ორი ცვლადის ფუნქცია:

1) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = y = 0; \end{cases}$

2) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{(x + y)^3}, & \text{როცა} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = y = 0. \end{cases}$

1.35. შეამოწმეთ, რომ ფუნქცია $z = 3x - 2y + 1$ თანაბრად უწყვეტია Oxy სიბრტყეზე.

1.36. შეამოწმეთ, რომ ფუნქცია $z = x^2 + y^2$ თანაბრად უწყვეტია Oxy სიბრტყეზე.

1.37. შეამოწმეთ, რომ ფუნქცია $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$ არ არის თანაბრად უწყვეტი თავის განსაზღვრის არეში.

§ 2. პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალი.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების კერძო წარმოებულები (№№ 2.1—2.7):

2.1. 1) $z = x^3 - y^2 + 4x^2y$; 2) $z = x^2y^3 - 3xy + x^2 + 2$;

3) $z = x^2\sqrt{y} - 2\sqrt[3]{xy}$; 4) $z = y\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{xy}$.

2.2. 1) $z = \dfrac{y}{x}$; 2) $z = xy + \dfrac{x}{y}$;

3) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$; 4) $z = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x^2 - y^2}$.

2.3. 1) $z = \sin(x^2 - y)$; 2) $z = \operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{ctg}(xy)$;

3) $z = x\sin(x+y)$; 4) $z = \cos\dfrac{x}{y}$.

2.4. 1) $z = \sin^3(xy)$; 2) $z = \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{y^2}$;

3) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; 4) $z = \arcsin\dfrac{y}{x+y}$.

2.5. 1) $z = e^{-\frac{x}{y}}$; 2) $z = x^y$;

3) $z = e^{\sin\frac{x}{y}}$; 4) $z = (x^2 + x)^{y^2-1}$.

2.6. 1) $z = \ln(x^2+y^2) + 5^{\sin\frac{1}{xy}}$; 2) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

3) $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; 4) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

2.7. 1) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 2) $u = xy + yz + zx$;

3) $u = (xy)^z$; 4) $u = z^{xy}$.

2.8. იპოვეთ ფუნქციის კერძო წარმოებულები მითითებულ M წერტილში

1) $f(x, y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$, $M(3;\ 2)$;

2) $f(x, y) = e^{x^2+y^2} - e^x$, $M(1;\ 2)$;

3) $f(x, y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$, $M(2;\ 1)$;

4) $f(x, y) = \dfrac{x\cos y - y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$, $\quad M(0; 0)$;

5) $f(x, y, z) = \ln(xy+z)$, $\quad M(1; 2; 0)$;

6) $f(x, y, z) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$, $\quad M\left(0; 0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.9. იპოვეთ $f'_x(1; 1; 1) + f'_y(1; 1; 1) + f'_z(1; 1; 1)$, თუ

$$f(x, y, z) = \ln(1+x+y^2+z^3).$$

2.10. გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix},$$

თუ $x = r\cos\varphi$, $\quad y = r\sin\varphi$.

2.11. გამოთვალეთ.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & 1 \end{vmatrix},$$

თუ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$.

2.12. გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix},$$

თუ $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$.

2.13. გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

თუ $x=uvw$, $y=uv-uvw$, $z=v-vw$.

აჩვენეთ, რომ ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას (№№ 2.14, 2.15):

2.14. 1) $z=\ln(x^2+xy+y^2)$, $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$;

2) $z=\ln(e^x+e^y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$;

3) $z=e^{\frac{x}{y^2}}$; $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$;

4) $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$ $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

2.15. 1) $u=x+\frac{x-y}{y-z}$, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$;

2) $u=(x-y)(y-z)(z-x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

3) $u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$;

4) $u=\frac{x-y}{z-t}+\frac{t-x}{y-z}$; $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$.

იპოვეთ ფუნქციის სრული დიფერენციალი (№№ 2.16—2.18):

2.16. 1) $z=x^3y-xy^3$; 2) $z=\cos(xy-y^2)$;

3) $z=\ln(x^2+y^2)$; 4) $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

2.17. 1) $z=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$; 2) $z=\operatorname{tg}\frac{y^2}{x}$;

3) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; 4) $z=\ln\cos\frac{x}{y}$.

2.18. 1) $u=\frac{z}{x^2+y^2}$; 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{xy}{z^2}$;

3) $u=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z$; 4) $u=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

2.19. გამოთვალეთ ფუნქციის სრული დიფერენციალი მითითებულ M წერტილში:

1) $f(x, y)=\frac{x}{y^2}$, $M(1; 1)$;

2) $f(x, y)=3^{x^2y}$, $M(1; 2)$;

3) $f(x, y, z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}$, $M(1; 1; 1)$;

4) $f(x, y, z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M(3; 4; 5)$.

2.20. იპოვეთ ფუნქციის სრული ნაზრდი და სრული დიფერენციალი M წერტილში, თუ:

1) $f(x, y)=x^2y$, $M(3; 4)$, $\Delta x=1$, $\Delta y=0{,}5$;

2) $f(x, y)=\frac{y}{x}$; $M(2; 1)$, $\Delta x=0{,}1$; $\Delta y=0{,}2$;

3) $f(x, y)=\sin(x-y)$, $M(0; 0)$, $\Delta x=\frac{\pi}{3}$; $\Delta y=\frac{\pi}{6}$;

4) $f(x, y)=\ln(x^2+y)$, $M(0; 1)$, $\Delta x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\Delta y=-0{,}5$.

2.21. იპოვეთ $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა დიფერენციალის გამოყენებით, თუ:

1) $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$;

2) $f(x, y)=\sqrt{x^3+y^3}$, $x_0=1$, $y_0=2$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=-0{,}03$;

3) $f(x, y)=x^y$, $x_0=2$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}03$;

4) $f(x, y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $x_0=5$, $y_0=5$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=-0{,}02$.

2.22. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია $a=12$ სმ, $b=5$ სმ. როგორ შეიცვლება მიახლოებით სამკუთხედის S ფართობი და c ჰიპოტენუზა, თუ a კათეტს შევამცირებთ 13 მმ-ით, ხოლო b კათეტს გავადიდებთ 26 მმ-ით.

2.23. სექტორის $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ცენტრალური კუთხე გაადიდეს $\Delta\alpha=\frac{\pi}{180}$-ით. რამდენით უნდა შემცირდეს სექტორის $R=20$ სმ რადიუსი, რომ სექტორის ფართობი დარჩეს უცვლელი.

2.24. მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია $a=2$ მ, $b=3$ მ, $c=6$ მ. როგორ შეიცვლება მიახლოებით პარალელეპიპედის l დიაგონალი თუ a-ს გავადიდებთ 2 სმ-ით, b-ს 1 სმ-ით, ხოლო c-ს შევამცირებთ 3 სმ-ით.

2.25. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია $R=20$ სმ, $r=10$ სმ, ხოლო სიმაღლე $h=30$ სმ. როგორ შეიცვლება მიახლოებით კონუსის V მოცულობა თუ R-ს გავადიდებთ 2 მმ-ით, r-ს 3 მმ-ით, ხოლო h-ს შევამცირებთ 1 მმ-ით.

2.26. აჩვენეთ, რომ

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{როცა} \quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{როცა} \quad x=y=0,\end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტია, აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებულები (0, 0) წერტილის მიდამოში და არ არის დიფერენცირებადი (0, 0) წერტილზე.

2.27. აჩვენეთ, რომ

$$f(x, y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{xy}, & \text{როცა} \quad xy\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad xy=0\end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტია R^2-ზე, $f'_x(0, 0)=f'_y(0, 0)=0$ და $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ წყვეტილი ფუნქციებია (0, 0) წერტილში.

2.28. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x, y)$ ფუნქციას რაიმე ამოზნექილ* E არეზე აქვს შემოსაზღვრული კერძო წარმოებულები, მაშინ $f(x, y)$ თანაბრად უწყვეტია E არეში.

2.29. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია x ცვლადით ყოველი ფიქსირებული y-ისათვის და აქვს შემოსაზღვრული $f'_x(x, y)$ წარმოებული, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია.

---

* E სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი თუ მისი ორი ნებისმიერი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს.

3.1. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$, თუ $z=e^{2x-3y}$, სადაც $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

3.2. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$, თუ $z=x^2+xy^2$, სადაც $x=e^{2t}$, $y=\sin t$.

3.3. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$, თუ $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y}$, სადაც $x=t$, $y=e^{(1+t)^2}$.

3.4. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$, თუ $z=x^y$, სადაც $x=\ln t$, $y=\sin t$.

3.5. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$, თუ $z=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, სადაც $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$.

3.6. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$, თუ $z=\cos^3(3x^2+y)$, სადაც $x=t^2$, $y=\dfrac{1}{t}$.

3.7. იპოვეთ $\dfrac{du}{dt}$, თუ $u=xyz$, სადაც $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\operatorname{tg} t$.

3.8. იპოვეთ $\dfrac{du}{dt}$, თუ $u=\ln(x^2+y+z)$, სადაც $x=e^t$, $y=\sin 2t$, $z=\operatorname{arctg} t$.

3.9. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dx}$, თუ $z=\ln(e^x+e^y)$, სადაც $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$.

3.10. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dx}$, თუ $z=\operatorname{arctg}(xy)$, სადაც $y=e^x$.

3.11. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dx}$, თუ $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, სადაც $y=\sqrt{x^2+1}$.

3.12. იპოვეთ $\dfrac{du}{dz}$, თუ $u=\operatorname{tg}(3z+2x^2-y)$, სადაც $x=\dfrac{1}{z}$, $y=\sqrt{z}$.

3.13. იპოვეთ $\dfrac{du}{dx}$, თუ $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, სადაც $y=a\sin x$, $z=\cos x$.

3.14. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ და $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=x^2\ln y$, სადაც $x=\dfrac{v}{u}$, $y=u^2+v^2$.

3.15. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ და $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=\dfrac{x^2}{y}$, სადაც $x=u-2v$, $y=v+2u$.

3.16. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ და $\dfrac{\partial z}{\partial \tau}$, თუ $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, სადაც $x=t\sin\tau$, $y=t\cos\tau$,

3.17. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z = u + v^2$, სადაც $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$.

3.18. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial t}$ და $\frac{\partial z}{\partial \tau}$, თუ $z = e^{x-2y}$, სადაც $x = \sin t$, $y = t^3 + \tau^2$.

3.19. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z = t^2 \cos t\tau^2$, სადაც $t = \frac{x}{y}$, $\tau = xy$.

3.20. იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial x}$ და $\frac{\partial u}{\partial y}$, თუ $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, სადაც $z = e^{x^2 - y}$.

3.21. იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial t}$ და $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, თუ $u = e^{x^2 - y + 3z}$, სადაც $x = \ln(t + \tau)$, $y = \sin \frac{t}{\tau}$, $z = t^2 - \tau^2$.

3.22. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$.

3.23. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z = f\left(xy + \frac{y}{x}\right)$.

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი f და φ დიფერენცირებადი ფუნქციებისათვის მართებულია ტოლობა (№№ 3.24—3.26):

3.24. 1) $\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$, თუ $z = f(x + ay)$;

2) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, თუ $z = \varphi(x^2 + y^2)$;

3) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x$, თუ $z = \varphi(x^2 - y^2) + y$;

4) $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, თუ $z = y\varphi(x^2 - y^2)$.

3.25. 1) $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, თუ $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$;

2) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$, თუ $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$;

3) $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, თუ $z = e^y \varphi\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$;

4) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, თუ $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3.26. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$, თუ $z=y\,\varphi(\cos(x-y))$;

2) $\frac{\partial z}{\partial y}\cos x+\frac{\partial z}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$, თუ $z=\sin x+\varphi(y-\sin x)$;

3) $\frac{\partial z}{\partial t}=a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z=f(x+at,\ y+bt)$;

4) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$, თუ $u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+$ $+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x,\ z-x)$.

5) $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$, თუ $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha},\ \frac{z}{x^\beta}\right)$;

6) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$, თუ $u=\frac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.

3.27. გამოსახეთ $\frac{\partial z}{\partial r}$ და $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ კერძო წარმოებულებით, თუ $z=f(x,y)$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

3.28. გამოსახეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$ კერძო წარმოებულებით, თუ: 1) $z=f(x,y)$, $u=mx+ny$, $v=px+qy$; 2) $z=f(x,y)$, $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.

3.29. იპოვეთ $\frac{du}{dx}$, თუ $u=f(x,\ y,\ z)$, $y=\varphi(x)$, $z=g(x,\ y)$.

3.30. აჩვენეთ, რომ $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$ და $\frac{\partial u}{\partial v}=0$, თუ $u=f(x^2+y^2+z^2)$, $x=r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y=r\cos\varphi\sin\vartheta$, $z=r\sin\varphi$.

3.31. შეამოწმეთ ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ ეილერის თეორემა შემდეგი ფუნქციებისათვის:

1) $u=x^2-2y^2+z^2+xz$; 2) $z=(x+2y)^2$;

3) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 4) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{xz}$.

3.32. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x,\ y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო x და y წარმოადგენენ u და v ცვლადების პირველი რიგის ერთგვაროვან ფუნქციებს, მაშინ

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}.$$

3.33. დაამტკიცეთ, რომ თუ $z=f(x, y)$ დიფერენცირებადი ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz,$$

მაშინ ის n-ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განიხილეთ ფუნქცია

$$F(t)=\frac{f(tx, ty)}{t^n}$$

და აჩვენეთ, რომ $F'(t)\equiv 0$.

3.34. აჩვენეთ, რომ თუ $f(x, y)$ არის n-ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, მაშინ $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ არიან $n-1$ რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციები.

§ 4. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები

იპოვეთ მითითებული კერძო წარმოებული (№№ 4.1—4.8):

4.1. 1) $z=x^3-3xy^2+x^2y-y^3$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$;

2) $z=xy+\dfrac{y}{x}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$;

3) $z=\ln(x^2+y)$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$;

4) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

4.2. 1) $z=\sqrt{2xy+y^2}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$;

2) $z=\arcsin(xy)$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

3) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$;

4) $z=y^{\ln x}$, იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

4.3. 1) $z=x e^{-xy}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

2) $z=y^x$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

3) $z=\frac{\cos x^2}{y}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{y^2 z}{\partial x \partial y}$;

4) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

4.4. 1) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$;

2) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$;

3) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$;

4) $u=x^{y/z}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

4.5. 1) $z=\sin xy$, იპოვეთ $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$;

2) $z=\ln(x^2+y^2)$, იპოვეთ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$;

3) $u=e^{xyz}$, იპოვეთ $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$;

4) $u=e^{xy}\sin z$, იპოვეთ $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

4.6. 1) $z=(x-a)^n (y-b)^m$, იპოვეთ $\frac{\partial^{n+m} z}{x^n \partial y^m}$;

2) $z=\frac{x+y}{x-y}$, იპოვეთ $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m}$;

3) $z=(x^2+y^2)e^{x+y}$, იპოვეთ $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m}$;

4) $u=xyz\, e^{x+y+z}$, იპოვეთ $\frac{\partial^{n+m+k} u}{\partial x^n \partial y^m \partial z^k}$.

4.7. იპოვეთ $f''_{x^2}(3;\ 2)$, $f''_{y^2}(3;\ 2)$ და $f''_{xy}(3;\ 2)$, თუ $f(x,\ y)=$ $=x^3y+xy^2-2x+3y-1$.

4.8. იპოვეთ $f'''_{x^3}(0;\ 1)$, $f'''_{y^3}(0;\ 1)$, $f'''_{x^2y}(0;\ 1)$ და $f'''_{xy^2}(0;\ 1)$, თუ $f(x,\ y)=e^{x^2y}$.

4.9. აჩვენეთ, რომ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, თუ;

1) $z=x^y$; 2) $z=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$;

3) $z=\cos\frac{y}{x}\left(\arccos\frac{x}{y}\right)$; 4) $z=x\sin(ax+by)$.

4.10. აჩვენეთ, რომ, თუ

$$f(x,\ y)=\begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{როცა}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა}\quad x=y=0,\end{cases}$$

მაშინ $f''_{xy}(0;\ 0)=-1$, ხოლო $f''_{yx}(0;\ 0)=1$.

4.11. იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, თუ $z=f(u,\ v)$, $u=x^2+y^2$, $v=xy$.

4.12. იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, თუ $u=f(x,\ y,\ z)$, $z=\varphi(x,\ y)$.

4.13. იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, თუ $z=f(u,\ v)$, $u=\varphi(x,\ y)$, $v=g(x,\ y)$.

იპოვეთ მითითებული რიგის დიფერენციალი (№№ 4.14—4.16):

4.14. 1) $z=xy^2-x^2y$, $d^2z=?$ 2) $z=\ln(x-y)$, $d^2z=?$

3) $z=e^{xy}$, $d^2z=?$ 4) $z=x\sin^2 y$, $d^2z=?$

4.15. 1) $u=xyz$, $d^2u=?$ 2) $u=e^{xyz}$, $d^2u=?$

3) $u=xy+yz+xz$, $d^2u=?$ 4) $u=\sin(x+y+z)$, $d^2u=?$

4.16. 1) $z=x^3+y^3-3xy(x-y)$, $d^2z=?$ 2) $z=\sin(x^2+y^2)$, $d^3z=?$

3) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$, $d^3u=?$ 4) $u=e^{ax+by+cz}$, $d^nu=?$

4.17. იპოვეთ $d^2f\ (1;\ 2)$, თუ

$$f(x,\ y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y.$$

4.18. იპოვეთ $d^2f\ (0;\ 0;\ 0)$, თუ

$$f(x,\ y,\ z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz.$$

4.19. იპოვეთ d^2z, თუ $z=\varphi(t)$, $t=x^2+y^2$.

4.20. იპოვეთ d^2z, თუ $z=u^v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=xy$.

4.21. იპოვეთ d^2z, თუ $z=f(u,\ v)$, $u=ax$, $v=by$.

4.22. აჩვენეთ, რომ, თუ $z=f(x, y)$ არის n-ური რიგის ერთგვაროვანი ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქცია, მაშინ

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z=n(n-1)z.$$

4.23. აჩვენეთ, რომ, თუ $P_n(x, y)$ არის n ხარისხის ერთგვაროვანი მრავალწევრი, მაშინ

$$d^n P_n(x, y)=n!\ P_n(dx, dy).$$

აჩვენეთ, რომ ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას (№№ 4.24—4.26):

4.24. 1) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\Delta z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (ლაპლასის* განტოლება);

2) $z=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3) $z=A\sin\lambda x\cdot\cos a\lambda t$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (სიმის რხევის განტოლება);

4) $z=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (სითბოგამტარობის განტოლება).

4.25. 1) $z=\varphi(x-at)+g(x+at)$ (φ და g ნებისმიერი ორჯერ წარმოებადი ფუნქციებია) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

2) $z=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (φ და g ნებისმიერი ორჯერ წარმოებადი ფუნქციებია) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

3) $z=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\,g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (φ და g ნებისმიერი ორჯერ წარმოებადი ფუნქციებია) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

4) $z=\varphi(x)+g(y)+(x-y)g'(y)$, $(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

---

* ტ. ს. ლაპლასი (1749—1827) — ფრანგი ასტრონომი, მათემატიკოსი, ფიზიკოსი.

4.26. 1) $u=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (ლაპლასის განტოლება);

2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$;

3) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 r=0$;

4) $u=e^{xyz}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+u$.

4.27. აჩვენეთ, რომ, თუ $z=z(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას (იხ. ამოცანა 4.24. 1)), მაშინ

$$U=z\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

ფუნქცია აგრეთვე აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას.

4.28. აჩვენეთ, რომ, თუ $z=z(x, t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სითბოგამტარობის განტოლებას (იხ. ამოცანა 2.24. 4)), მაშინ

$$u=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot z\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{a^4t}\right), \quad (t>0)$$

ფუნქცია აგრეთვე აკმაყოფილებს ამ განტოლებას.

4.29. აჩვენეთ, რომ, თუ $u=u(x, y, z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას (იხ. ამოცანა 4.26. 1)), მაშინ

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2}, \frac{k^2y}{r^2}, \frac{k^2z}{r^2}\right)$$

ფუნქცია, სადაც $k=\text{const}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, აგრეთვე აკმაყოფილებს ამ განტოლებას.

4.30. აჩვენეთ, რომ, თუ $u_1=u_1(x, y, z)$ და $u_2=u_2(x, y, z)$ აკმაყოფილებს $\Delta u=0$ ლაპლასის განტოლებას, მაშინ

$$u=u_1(x, y, z)+(x^2+y^2+z^2)\,u_2(x, y, z)$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს $\Delta(\Delta u)=0$ ბიჰარმონიულ განტოლებას.

გარდაქმენით დიფერენციალური გამოსახულება ცვლადთა მითითებული შეცვლით (№№ 4.31—4.35):

4.31. 1) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}$, $x=\cos t$;

2) $x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}+y$, $x=\frac{1}{t}$;

3) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+y$, $x=e^t$;

4) $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx}$ თუ ჩავთვლით, რომ x არის y არგუმენტის ფუნქცია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

4) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

4.32. 1) $\frac{dy}{dx}-\frac{x+y}{x-y}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$;

2) $\dfrac{x+y\frac{dy}{dx}}{x\cdot\frac{dy}{dx}-y}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$;

3) $\dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$;

4) $\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2-2xy\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

4.33. 1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$;

2) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

3) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $u=x$, $v=x^2+y^2$;

4) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-z$, $u=x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

4.34. 1) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{y}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}$, $u=\dfrac{x}{y}$, $v=x$, $\omega=xz-y$;

3) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$;

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

4.35. 1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$;

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\xi=x-at$, $\eta=x+at$;

3) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$, $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=$
$=r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=r\cos\vartheta$;

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$,
$z=r\cos\vartheta$.

§ 5. არაცხადი ფუნქციები.

იპოვეთ მითითებული წარმოებული (№№ 5.1; 5.2):

5.1. 1) $x^2e^{2y}-y^2e^{2x}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=?$

2) $y\sin x-\cos(x-y)=0$, $\dfrac{dy}{dx}=?$

3) $x e^{y} - y + 1 = 0, \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

4) $x + y - e^{x-y} = 0, \quad \dfrac{dy}{dx} = ?, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

5.2. 1) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - a \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 0 \; (a \neq 0), \; \dfrac{dy}{dx} = ? \; \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

2) $x^{y} - y^{x} = 0 \quad (x \neq y), \quad \dfrac{dy}{dx} = ? \; \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

3) $2x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - y = 0, \quad \dfrac{dy}{dx} = ? \; \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

4) $1 + xy - \ln (e^{xy} + e^{-xy}) = 0, \quad \dfrac{dy}{dx} = ? \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

5.3. იპოვეთ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები x_0 წერტილში:

1) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0;$
2) $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$
3) $x^2 + xy + y^2 = 3, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1;$
4) $4^{x-y} - x - y = 0, \quad x_0 = 0.$

5.4. იპოვეთ მითითებული კერძო წარმოებულები:

1) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0, \; \dfrac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \; \dfrac{\partial z}{\partial x} = ? \; \dfrac{\partial z}{\partial y} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?$

3) $z^3 - 3xyz = a^3, \; \dfrac{\partial z}{\partial x} = ? \; \dfrac{\partial z}{\partial y} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?$

4) $x + y + z - e^{z} = 0, \; \dfrac{\partial z}{\partial x} = ? \; \dfrac{\partial z}{\partial y} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ? \; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?$

5.5. იპოვეთ ფუნქციის მითითებული კერძო წარმოებული M_0 წერტილში:

1) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0, \; M_0(1; -2; 2), \; \dfrac{\partial z}{\partial x} = ? \; \dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

2) $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0, \; M_0(-1; 0; 1), \quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = ? \; \dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

3) $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0,\ M_0(1;\ -2;\ 1),$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=?\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=?\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$

4) $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-1=0,\ M_0(0;\ 1;\ 1),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=?$

5.6. აჩვენეთ, რომ მოცემული ტოლობით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ განტოლებას:

1) $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2},\quad x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z};$

2) $x^2y^2+x^2+y^2-1=0\ (xy>0),\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0;$

3) $z=\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$

4) $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,\ \frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$

5.7. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0.$

5.8. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $F(yz,\ e^{xz})=0.$

5.9. აჩვენეთ, რომ ყოველი დიფერენცირებადი φ ფუნქციისათვის ტოლობიდან $\varphi(cx-az,\ cy-bz)=0$, გვაქვს

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

5.10. აჩვენეთ, რომ თუ $F(x,\ y,\ z)=0$, მაშინ

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=1;\ \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=-1.$$

5.11. იპოვეთ არაცხადი ფუნქციის მითითებული რიგის დიფერენციალი:

1) $z^3-3xyz=a^3,\quad dz=?$

2) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1,\quad dz=?$

3) $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad dz=?\quad d^2z=?$

4) $\ln z=x+y+z-1,\quad dz=?\quad d^2z=?$

იპოვეთ სისტემით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციის მითითებული კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები (№№ 5.12, 5.13):

5.12. 1) $\begin{cases} 7x^2+y^2-3z^2+1=0, \\ 4x^2+2y^2-3z^2=0, \end{cases}$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=?\ \dfrac{dz}{dx}=?\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?\ \dfrac{d^2z}{dx^2}=?$

2) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ x^2+2y^2+3z^2-4=0, \end{cases}$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=?\ \dfrac{dz}{dx}=?\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?\ \dfrac{d^2z}{dx^2}=?$

3) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \end{cases}$ $\quad dy=?\quad dz=?$

4) $\begin{cases} xyz=a, \\ x+y+z=b, \end{cases}$ $\quad dy=?\quad dz=?\quad d^2y=?\quad d^2z=?$

5.13. 1) $\begin{cases} u+v=x+y, \\ ux+vy=1, \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=?\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=?\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=?\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=?$

2) $\begin{cases} xu-yv=0, \\ yu+xv=1, \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=?\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=?\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=?\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=?$

3) $\begin{cases} u+v=x, \\ u-yv=0, \end{cases}$ $\quad du=?\quad dv=?\quad d^2u=?\quad d^2v=?$

4) $\begin{cases} u+v=x+y, \\ \dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y}, \end{cases}$ $\quad du=?\quad dv=?\quad d^2u=?\quad d^2v=?$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) გადიფერენციალებით ვღებულობთ

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy, \\ xdu+udx+ydv+vdy=0. \end{cases}$$

აქედან

$$du=-\frac{(u+y)\,dx+(v+y)\,dy}{x-y},\quad dv=\frac{(u+x)\,dx+(v+x)\,dy}{x-y}.$$

საიდანაც გამოითვლება $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ და $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3) გადიფერენციალებით მივიღებთ

$$\begin{cases} du+dv=dx \\ du-ydv-vdy=0. \end{cases}$$

აქედან

$$du=\frac{ydx+vdy}{1+y},\quad dv=\frac{dx-vdy}{1+y}.$$

ამ ტოლობათა ხელახლა გადიფერენციალებით მივიღებთ:

$$d^2u = \frac{(dxdy + dvdy)(1+y) - (ydx + vdy)\,dy}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{\left(dxdy + \dfrac{dx - vdy}{1+y}dy\right)(1+y) - (ydx + vdy)\,dy}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{2\,(dxdy - vdy^2)}{(1+y)^2}.$$

ანალოგიურად გამოითვლება d^2v.

5.14. იპოვეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის მითითებული კერძო წარმოებულები და დიფერენციალი:

1) $\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2, \\ z = u^3 + v^3, \end{cases}$ $(u \neq v)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

2) $\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = v, \end{cases}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?$

3) $\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \\ z = u^2 v^2, \end{cases}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$

4) $\begin{cases} x = \cos\varphi \cos\vartheta, \\ y = \cos\varphi \sin\vartheta, \\ z = \sin\varphi, \end{cases}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ?$

5) $\begin{cases} x = e^u \cos v, \\ y = e^u \sin v, \\ z = uv, \end{cases}$ $dz = ?$

6) $\begin{cases} x = e^{u+v}. \\ y = e^{u-v}, \\ z = uv, \end{cases}$ $dz = ?$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ვთქვათ x და y ცვლადების დიფერენცირებადი z ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

თუ

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

$M(u_0, v_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში, მაშინ dz ამ მიდამოში გამოითვლება სისტემიდან

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \end{cases}$$

1) მოცემული

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$$

სისტემის გადიფერენციალებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} dx = du + dv \\ dy = 2udu + 2vdv \\ dz = 3u^2du + 3v^2dv. \end{cases}$$

აქედან

$$du = \frac{2vdx - dy}{2(v-u)}, \quad dv = \frac{dy - 2udx}{2(v-u)}.$$

თუ du და dv-ს ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ გადიფერენციალებით მიღებული სისტემის მესამე განტოლებაში გვექნება

$$dz = 3u^2 \frac{2vdx - dy}{2(v-u)} + 3v^2 \frac{dy - 2udx}{2(v-u)} = -3uvdx + \frac{3}{2}(u+v)dy.$$

აქედან გამოითვლება $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5.15. აჩვენეთ, რომ, თუ

$$\begin{cases} uv = 3x - 2y + z \\ v^2 = x^2 + y^2 + z^2, \end{cases}$$

მაშინ

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

5.16. აჩვენეთ, რომ, თუ

$$\begin{cases} y = f(x, t) \\ F(x, y, t) = 0, \end{cases}$$

მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

5.17. აჩვენეთ, რომ, თუ

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}}.$$

§ 6. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი. მიმართულებითი წარმოებული

6.1. ვთქვათ ზედაპირი მოცემულია $F(x, y, z) = 0$ განტოლებით. დაამტკიცეთ, რომ, თუ F'_x, F'_y და F'_z ფუნქციები უწყვეტია $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში და $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, მაშინ ზედაპირის M_0 წერტილში გატარებული მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებებია შესაბამისად

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

და

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

შეადგინეთ მოცემული ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები M_0 წერტილში (№№ 6.2—6.5):

6.2. 1) $z = x^2 + y^2, \quad M_0(1;\ -2;\ 5)$;

2) $z = 2x^2 - 4y^2, \quad M_0(2;\ 1;\ 4)$;

3) $z = xy, \quad M_0(1;\ 1;\ 1)$;

4) $z = \sin x \cos y, \quad M_0\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$.

6.3. 1) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, \quad M(3;\ 4;\ -7)$;

2) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad M_0\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $z = e^{x \cos y}, \quad M_0\left(1;\ \pi;\ \frac{1}{e}\right)$;

4) $z = \frac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}, \quad M_0(a;\ a;\ -a)$.

6.4. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 14, \quad M_0(1;\ 2;\ 3)$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, \quad M_0(R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ R)$;

3) $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1, \quad M_0(3;\ 2;\ 1)$;

4) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, \quad M_0(1;\ 2;\ -1)$.

6.5. 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0, \quad M_0(4;\ 3;\ 4)$;

2) $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0, \quad M_0(2;\ 1;\ 3)$;

3) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M_0(2;\ 2;\ 1)$;

4) $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z, \quad M_0(2;\ 3;\ 6)$.

6.6. 1) $\begin{cases} x = a\cos\vartheta\cos\varphi, \\ y = b\cos\vartheta\sin\varphi, \\ z = c\sin\vartheta, \end{cases} M_0(\varphi_0,\ \vartheta_0)$; 2) $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r, \end{cases} M_0(\varphi_0,\ r_0)$;

3) $\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = v, \end{cases} M_0(u_0,\ v_0)$; 4) $\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^3, \\ z = u^3 + v^3, \end{cases} M_0(0;\ 1)$.

6.7. იპოვეთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $z = y\,\operatorname{tg}\frac{x}{a}$ ზედაპირისადმი $M\left(\frac{\pi a}{4};\ a;\ a\right)$ წერტილში გავლებულ მხებ სიბრტყემდე.

6.8. იპოვეთ $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ ზედაპირის $M\left(1;\ 1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

6.9. იპოვეთ $z=4x-xy+y^2$ ზედაპირის ის მხები სიბრტყე, რომელიც პარალელურია $4x+y+2z+9=0$ სიბრტყის.

6.10. იპოვეთ $x^2+2y^2+3z^2=21$ ზედაპირის ის მხები სიბრტყე, რომელიც პარალელურია $x+4y+6z=0$ სიბრტყის.

6.11. $x^2+y^2-z^2-2x=0$ ზედაპირზე იპოვეთ წერტილები, რომლებზედაც გავლებული მხები სიბრტყეები პარალელურია საკოორდინატო სიბრტყეების.

6.12. იპოვეთ $z = xy$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ წრფის მართობულია.

6.13. იპოვეთ $x^2-z^2-2x+6y-4=0$ ზედაპირის ის ნორმალი, რომელიც $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{4}$ წრფის პარალელურია.

6.14. იპოვეთ $x^2-y^2-3z=0$ ზედაპირის იმ მხები სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M (0; 0; —1) წერტილზე $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ წრფის პარალელურად.

6.15. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდისადმი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის განტოლებაა

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

6.16. იპოვეთ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდის იმ მხები სიბრტყის განტოლება, რომელიც დადებით ნახევარღერძებიდან მოჰკვეთს ტოლ მონაკვეთებს.

6.17. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდზე იპოვეთ წერტილები, რომლებზედაც გატარებული ნორმალები საკოორდინატო კუთხეებთან შეადგენენ ტოლ კუთხეებს.

6.18. $x^2+y^2+z^2=169$ სფეროს M (3; 4; 12) წერტილზე გავლებულია Ox და Oy ღერძების პერპენდიკულარული სიბრტყეები. იპოვეთ კვეთაში მიღებული წრეწირისადმი M წერტილში გავლებულ მხებებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

6.19. აჩვენეთ, რომ $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ ხრახნწირისადმი გავლებული მხებები Oz ღერძთან ადგენენ ერთიდაიგივე კუთხეებს.

6.20. აჩვენეთ, რომ

$$\begin{cases} x = a\,e^t\cos t \\ y = a\,e^t\sin t \\ z = a\,e^t \end{cases}$$

წირი $x^2+y^2=z^2$ კონუსის ნებისმიერ მსახველს ჰკვეთს ერთიდაიგივე კუთხით.

6.21. აჩვენეთ, რომ $xyz=a^3$ $(a>0)$ ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყითა და საკოორდინატო სიბრტყეებით შედგენილი პირამიდების მოცულობები ერთიდაიგივეა და უდრის $\frac{9}{2}a^3$-ს.

6.22. აჩვენეთ, რომ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ ზედაპირის მხები სიბრტყეების მიერ საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთების ჯამი მუდმივი სიდიდეა და უდრის a-ს.

6.23. აჩვენეთ, რომ $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ ზედაპირის მხები სიბრტყეების მიერ საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთების კვადრატების ჯამი მუდმივი სიდიდეა და უდრის a^2-ს.

6.24. აჩვენეთ, რომ $x+2y-\ln z+4=0$ და $x^2-xy-8x+z+5=0$ ზედაპირები ეხებიან ერთმანეთს (ე. ი. აქვთ საერთო მხები სიბრტყე) $M\,(2;\ -3;\ 1)$ წერტილში.

6.25. აჩვენეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ კონუსი და $x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2+c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}(b^2+c^2)$ სფერო ეხებიან ერთმანეთს $(0;\ \pm b;\ c)$ წერტილებში.

6.26. აჩვენეთ, რომ $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ ზედაპირის ნებისმიერი მხები სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე.

6.27. აჩვენეთ, რომ $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ ბრუნვითი ზედაპირის ნებისმიერი ნორმალი ჰკვეთს ბრუნვით ღერძს.

6.28. რა კუთხით იკვეთება*) $x^2+y^2=R^2$ ცილინდრი და $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ სფერო $M\left(\frac{R}{2};\ \frac{R\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$ წერტილში?

---

* კუთხე ორ ზედაპირს შორის მათი გადაკვეთის წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ზედაპირების მხებ სიბრტყეებს შორის კუთხეს.

6.29. აჩვენეთ, რომ შემდეგი ზედაპირები ორთოგონალურია*:

1) $x^2+y^2+z^2=ax,\quad x^2+y^2+z^2=by;$

2) $xy=a^3,\quad 2z^2=x^2+y^2+f(x^2-y^2).$

6.30. აჩვენეთ, რომ შემდეგი ზედაპირები წყვილწყვილად ორთოგონალურია:

1) $xy=az^2,\quad x^2+y^2+z^2=b,\quad z^2+2x^2=c(z^2+2y^2);$

2) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ y=x\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ z^2=(x^2+y^2)\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta$ (ეს ზედაპირები წარმოადგენენ სფერულ კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო სიბრტყეებს).

6.31. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული M წერტილში $\vec{e}$ ვექტორის მიმართულებით:

1) $z=x^3-2xy+y^2-2x+1,\ \ M(1;\ 1);\quad \vec{e}=3\vec{i}+4\vec{j};$

2) $z=\ln(1+\sqrt{1+x^2y^2}),\ M(1;\ \sqrt{3}),\quad \vec{e}=\vec{i}+\sqrt{3}\ \vec{j};$

3) $u=\mathrm{tg}\,xyz,\ \ M\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right),\quad \vec{e}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k};$

4) $u=x^2y-\sqrt{xz+y^2},\quad M(2;\ 3;\ 8),\quad \vec{e}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}.$

6.32. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული M წერტილში $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მიმართულებით:

1) $z=x^3-2x^2y+xy^2+1,\quad M(1;2),\quad A(1;\ 2),\quad B(4;\ 6);$

2) $u=xy+yz+zx,\quad M(2;1;3),\quad A(2;1;3),\quad B(5;\ 5;\ 15).$

6.33. იპოვეთ $z=\ln(x^2+y^2)$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;\ 1)$ წერტილში პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის მიმართულებით.

6.34. იპოვეთ $u=x^2-3yz+5$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;\ 2;\ -1)$ წერტილში იმ ვექტორის მიმართულებით, რომელიც საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს ერთიდაიგივე კუთხეებს.

6.35. იპოვეთ $u=\ln(e^x+e^y+e^z)$ ფუნქციის წარმოებული $O(0;0;0)$ წერტილზე იმ ვექტორის მიმართულებით, რომელიც ox, oy და oz ღერძებთან შესაბამისად ადგენს α, β და γ კუთხეებს.

---

* ორ ზედაპირს ეწოდება ორთოგონალური, თუ მათ შორის კუთხე მათი გადაკვეთის წირის ყოველ წერტილში მართია.

6.36. აჩვენეთ, რომ $z=x^3+3x^2+4xy+y^2$ ფუნქციის წარმოებული $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ წერტილში ნებისმიერი მიმართულებით ნულის ტოლია.

6.37. აჩვენეთ, რომ $z=\frac{y^2}{x}$ ფუნქციის წარმოებული $2x^2+y^2=1$ ელიფსის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ელიფსის ნორმალის მიმართულებით ნულის ტოლია.

6.38. აჩვენეთ, რომ $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ $M(x; y; z)$ წერტილზე $\overrightarrow{MO}$ (O კოორდინატთა სათავეა) ვექტორის მიმართულებით უდრის $-\frac{2u}{r}$, სადაც

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

6.39. იპოვეთ $u=x+y+z$ ფუნქციის წარმოებული $x^2+y^2+z^2=1$ სფეროს $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში ამ წერტილში გავლებული სფეროს გარე ნორმალის მიმართულებით.

სფეროს რომელ წერტილში იქნება ეს წარმოებული უდიდესი, უმცირესი, ნულის ტოლი?

6.40. იპოვეთ $u=x^2+y^2+z^2$ ფუნქციის წარმოებული $x^2+y^2+z^2=1$ სფეროს $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში ამ წერტილში გავლებული სფეროს გარე ნორმალის მიმართულებით.

6.41. ვთქვათ $u=f(x, y, z)$ ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა. იპოვეთ $\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}=\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)$, თუ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ არის $\vec{e}$ ვექვექტორის მიმართულების კოსინუსები.

6.42. ვთქვათ $u=f(x, y, z)$ ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა და $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორებია. აჩვენეთ, რომ

1) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

6.43. იპოვეთ grad f მოცემულ M წერტილში, თუ:

1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $M(2;\ 1)$;

2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, $M(5;\ 3)$;

3) $f(x, y, z) = xyz$, $M(1;\ 2;\ 3)$;

4) $f(x, y, z) = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$, $M(-4;\ 3;\ 4)$.

6,44. ვთქვათ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. იპოვეთ: 1) $\operatorname{grad} r$; 2) $\operatorname{grad} r^2$; 3) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$.

6.45. იპოვეთ $|\operatorname{grad} u|$ წერტილში $M(2;\ 2;\ 4)$, თუ $u = x^y - z$.

6.46. იპოვეთ $u = x^2 + y^2 + z^2$ ფუნქციის გრადიენტის სიგრძე და მიმართულება $M(2;\ -2;\ 1)$ წერტილში.

6.47. იპოვეთ კუთხე $z = \ln \frac{y}{x}$ ფუნქციის გრადიენტებს შორის $M_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$ და $M_2(1;\ 1)$ წერტილებში.

6.48. იპოვეთ კუთხე $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ ფუნქციის გრადიენტებს შორის $M_1(1;\ 1)$ და $M_2(3;\ 4)$ წერტილებში.

6.49. იპოვეთ კუთხე $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ და $v = x - 3y + \sqrt{3xy}$ ფუნქციის გრადიენტებს შორის $M(3;\ 4)$ წერტილში.

6.50. იპოვეთ კუთხე $u = x^2 + y^2 - z^2$ და $v = \arcsin \frac{x}{x+y}$ ფუნქციების გრადიენტებს შორის $M(1;\ 1;\ \sqrt{7})$ წერტილში.

6.51. იპოვეთ $u = x^2 + y^2 + z^2$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;\ 1;\ 1)$ წერტილში ამავე წერტილში ფუნქციის გრადიენტის მიმართულებით.

6.52. იპოვეთ წერტილი, რომელშიც $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ ფუნქციის გრადიენტი ტოლია $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$ ვექტორის.

6.53. იპოვეთ წერტილები, რომელშიაც $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ ფუნქციის გრადიენტის სიგრძე ტოლია 2-ის.

6.54. დაამტკიცეთ ტოლობები (f და φ — დიფერენცირებადი ფუნქციებია, c — მუდმივია):

1) $\operatorname{grad}(f+\varphi)=\operatorname{grad} f+\operatorname{grad}\varphi$;
2) $\operatorname{grad}(c+f)=\operatorname{grad} f$;
3) $\operatorname{grad}(cf)=c\operatorname{grad} f$;
4) $\operatorname{grad}(f\varphi)=f\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad} f$;
5) $\operatorname{grad}(\varphi^n)=n\varphi^{n-1}\operatorname{grad}\varphi$;
6) $\operatorname{grad}[f(\varphi)]=f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi$.

6.55. აჩვენეთ, რომ, თუ $z=f(u, v)$, $u=\varphi(x, y)$, $v=g(x, y)$, მაშინ $\operatorname{grad} z=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v$.

§ 7. ტეილორის ფორმულა. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი.

7.1. ტეილორის ფორმულის გამოყენებით $f(x_0+h,\ y_0+k)$ გაშალეთ h და k-ს ნატურალურ ხარისხებად $M(x_0,\ y_0)$ წერტილის მიდამოში:

1) $f(x, y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$, $M(-2;\ 1)$;
2) $f(x, y)=x^3-2y^3+3xy$, $M(2;\ 1)$;
3) $f(x, y)=x^2y$, $M(1;\ 1)$;
4) $f(x, y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$, $M(1;\ -2)$;
5) $f(x, y)=x^3+2y^3-xy$, $M(x_0,\ y_0)$;
6) $f(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$, $M(x_0,\ y_0)$.

7.2. დაწერეთ f ფუნქციის მაკლორენის ფორმულით გაშლის მითითებული პირველი n_0 წევრი:

1) $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $n_0=4$;
2) $f(x, y)=e^x\sin y$, $n_0=3$;
3) $f(x, y)=e^y\cos x$, $n_0=3$;
f) $f(x, y)=\cos x\cos y$, $n_0=4$.

7.3. დაწერეთ M_0 წერტილის მიდამოში f ფუნქციის ტეილორის ფორმულით გაშლის მითითებული პირველი n_0 წევრი:

1) $f(x, y)=y^x$, $M_0(1;\ 1)$, $n_0=2$;
2) $f(x, y)=\frac{y}{x}$, $M_0(1;\ 1)$, $n_0=3$;
3) $f(x, y)=e^{x+y}$, $M_0(1;\ -1)$, $n_0=3$;
4) $f(x, y, z)=\ln(xy+z^2)$, $M_0(1;\ 1;\ 0)$, $n_0=2$.

7.4. დაწერეთ $x^3+3yz-4x=0$ განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი $z(x, y)$ ფუნქციის $(1;\ 1)$ წერტილის მიდამოში ტეილორის ფორმულით გაშლის პირველი ორი წევრი, თუ $z(1;\ 1)=1$.

7.5. დაწერეთ (1; 1) წერტილის მიდამოში $z=x^y$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულით გაშლის პირველი სამი წევრი და მიღებული შედეგი გამოიყენეთ $(1,1)^{1,02}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად.

7.6. დაწერეთ $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ წერტილის მიდამოში $z = e^x \sin y$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულით გაშლის პირველი სამი წევრი და მიღებული შედეგი გამოიყენეთ $e^{0,1} \sin 0{,}49\,\pi$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად.

გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე ფუნქცია (№№ 7.7—7.17):

7.7. 1) $z=(x+1)^2+(y-2)^2$; 2) $z=(x+1)^2-(y-2)^2$;
3) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$; 4) $z=xy-x^2-y^2+2x-y$.

7.8. 1) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$; 2) $z=x^3+y^3-3xy$;
3) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$; 4) $z=x^3+y^3+3xy$.

7.9. 1) $z=xy^2(1-x-y)$, $(x>0,\ y>0)$;
2) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$;
3) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$; 4) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

7.10. 1) $z=x^2y^3(6-x-y)$; 2) $z=x^3y^2(6-x-y)$, $(x>0, y>0)$;
3) $z=x^2-2xy^2+y^4-y^5$; 4) $z=xy^4+yx^2$.

7.11. 1) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, $(x>0,\ y>0)$;
2) $z=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$, $(x>0,\ y>0)$;
3) $z=x^2-xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$; 4) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-xy$.

7.12. 1) $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$;
2) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;
3) $z=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$; 4) $z=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

7.13. 1) $z=e^{x/2}(x+y^2)$; 2) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$;
3) $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$; 4) $z=(2x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$;
5) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$; 6) $z=4-\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

7.14. 1) $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$;
2) $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$;
3) $z=xy\ln(x^2+y^2)$, 4) $z=3\ln x+xy^2-y^3$.

7.15. 1) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $z=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$, $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$, $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $z=\sin x\,\sin y\,\sin(x+y)$, $(0\leqslant x\leqslant\pi,\quad 0\leqslant y\leqslant\pi)$.

7.16. 1) $u=x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z$;

2) $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$;

3) $u=x^2+y^2+z^2-yx+x-2z$;

4) $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

7.17. 1) $u=xy^2z^3(1-x-2y-3z)$, $(x>0,\ y>0,\ z>0)$;

2) $u=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{2}{z}$;

3) $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$, $(x>0,\ y>0,\ z>0)$;

4) $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$, $(0\leqslant x\leqslant\pi,$ $0\leqslant y\leqslant\pi,\ 0\leqslant z\leqslant\pi)$.

7.18. იპოვეთ არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის ექსტრემუმი:

1) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$;

2) $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z-7=0$;

3) $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$;

4) $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

იპოვეთ ფუნქციის ექსტრემუმი (№№ 7.19—7.23):

7.19. 1) $z=xy$, $x+y=1$ პირობით;

2) $z=xy$, $x^2+y^2=2a^2$ პირობით;

3) $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$, $x+y+3=0$ პირობით;

4) $z=xy^2$, $x+2y=1$ პირობით.

7.20. 1) $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $x+y=2$ პირობით;

2) $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$, $(a>0)$ პირობით;

3) $z=x^2+y^2$, $x+y=1$ პირობით;

4) $z=2x+y$, $x^2+y^2=1$ პირობით.

7.21. 1) $z=x^3+y^3$, $x+y=1$ პირობით;

2) $z=x^4+y^4$, $x+y=2$ პირობით;

3) $z=e^{xy}$, $x+y=2$ პირობით;

4) $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, $y-x=\dfrac{\pi}{4}$ პირობით.

7.22. 1) $u=2x+y-2z$, $x^2+y^2+z^2=36$ პირობით;

2) $u=x+y+z$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ პირობით;

3) $u=x^2+y^2+z^2$, $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ პირობით;

4) $u=x\,y^2z^3$, $x+y+z=12$, $(x>0,\ y>0,\ z>0)$ პირობით.

7.23. 1) $u=xyz$, $\begin{cases}x+y-z=3\\ x-y-z=8\end{cases}$ პირობებით;

2) $u=xyz$, $\begin{cases}x+y+z=4\\ xy+xz+yz=5\end{cases}$ პირობებით;

3) $u=x+y+z$, $\begin{cases}xyz=8\\ \dfrac{xy}{z}=12\end{cases}$ პირობებით;

4) $u=xy+yz$, $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y+z=2\end{cases}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$ პირობებით.

7.24. აჩვენეთ, რომ $z=(y-x^2)(y-2x^2)$ ფუნქციას $(0;0)$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია, თუმცა ამ წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის გასწვრივ მას გააჩნია მინიმუმი.

7.25. დაამტკიცეთ უტოლობები:

1) $\dfrac{x+y+z}{3}>\sqrt[3]{xyz}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$;

2) $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\geqslant\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$, $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$;

3) $\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) ადვილი საჩვენებელია, რომ $u=xyz$ ფუნქციას $x+y+z=s$ პირობით გააჩნია მაქსიმუმი $\left(\dfrac{s}{3},\ \dfrac{s}{3},\ \dfrac{s}{3}\right)$ წერტილში და $u_{\max}=\dfrac{s^3}{27}$. ე. ი. $xyz\leqslant\dfrac{s^3}{27}$, საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა.

2) იპოვეთ $u=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}$ ფუნქციის მინიმუმი $x+y+z=s$ პირობით.

3) იპოვეთ $u=\frac{x^n+y^n}{2}$ ფუნქციის მინიმუმი $x+y=s$ პირობით.

იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა მითითებულ არეზე (№№ 7.26—7.29):

7.26. 1) $z=x-2y-3,\quad x+y\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0;$

2) $z=1+x+2y,\quad x-y\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\leqslant 0;$

3) $z=x^2+y^2-xy-x-y,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad x+y\leqslant 3;$

4) $z=x^2+2xy-4x+8y,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 2.$

7.27. 1) $z=x^2-y^2,\quad x^2+y^2\leqslant 4;$

2) $z=x^2y,\quad x^2+y^2\leqslant 1;$

3) $z=x^2+y^2-12x+16y,\quad x^2+y^2\leqslant 25;$

4) $z=xy,\quad x^2+y^2\leqslant 1.$

7.28. 1) $z=x^3+8y^3-6xy+1,\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\quad -1\leqslant y\leqslant 1;$

2) $z=x^2y(4-x-y),\quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\quad x+y\leqslant 6;$

3) $z=x^2-xy+y^2,\quad |x|+|y|\leqslant 1;$

4) $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2),\quad x^2+y^2\leqslant 4.$

7.29. 1) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2};$

2) $z=\operatorname{arctg}(x^2-xy+y),\quad -2\leqslant x\leqslant 2,\quad -3\leqslant y\leqslant 3;$

3) $u=x^2+2y^2+3z^2,\quad x^2+y^2+z^2\leqslant 100;$

4) $u=x+y+z,\quad x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1.$

7.30. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ სამ ისეთ შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

7.31. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ ისეთ სამ თანამამრავლად, რომ მათი შებრუნებული სიდიდეების ჯამი იყოს უმცირესი.

7.32. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ ისეთ სამ შესაკრებად, რომ მათი კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი.

7.33. მოცემული V მოცულობის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ზედაპირის ფართობი უმცირესია.

7.34. მოცემული V მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის თავლია ყუთებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ზედაპირის ფართობი უმცირესია.

7.35. მოცემული პერიმეტრის მქონე სამკუთხედებიდან იპოვეთ ის სამკუთხედი, რომელსაც უდიდესი ფართობი აქვს.

7.36. იმ მართკუთხა პარალელეპიპედებს, შორის რომლის განზომილებების ჯამი მოცემული რიცხვია, იპოვეთ ის რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.37. მოცემული დიაგონალის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.38. მოცემული ზედაპირის ფართობის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.39. $2p$ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ერთ-ერთი გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა იქნება უდიდესი.

7.40. $2p$ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ერთ-ერთი გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა იქნება უდიდესი.

7.41. R რადიუსიან ნახევარსფეროში ჩახაზულ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.42. H სიმაღლისა და R ფუძის რადიუსის მქონე კონუსში ჩახაზულ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.43. კონუსის l მსახველი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. ამ კონუსში ჩახაზულ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის იპოვეთ ის, რომლის ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

7.44. მოცემული ფართობის მქონე სამკუთხედებს შორის იპოვეთ ის სამკუთხედი, რომლის პერიმეტრი უმცირესია.

7.45. მოცემული ფუძის გვერდისა და წვეროსთან მდებარე კუთხის მქონე სამკუთხედებს შორის იპოვეთ ის სამკუთხედი, რომლის; 1) პერიმეტრი უდიდესია, 2) ფართობი უდიდესია.

7.46. ოთხკუთხედის შიგნით იპოვეთ წერტილი, რომლიდანაც ოთხკუთხედის წვეროებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი უმცირესია.

7.47. Oxy სიბრტყეზე იპოვეთ M წერტილი, რომლიდანაც $x=0$, $y=0$, $x-y+1=0$ წრფეებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი უმცირესია.

7.48. იპოვეთ მანძილი (1; 0) წერტილიდან $4x^2+9y^2=36$ ელიფსამდე.

7.49. იპოვეთ მანძილი (—1; 5) წერტილიდან $y^2=x$ პარაბოლამდე.

7.50. იპოვეთ მანძილი $y=x^2$ პარაბოლასა და $x-y=5$ წრფეს შორის.

7.51. $x^2+4y^2=4$ ელიფსზე მოცემულია $A\left(-\sqrt{3};\ \frac{1}{2}\right)$ და $B\left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ წერტილები. ამავე ელიფსზე იპოვეთ ისეთი C წერტილი, რომ ABC სამკუთხედის ფართობი იყოს უდიდესი.

7.52. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომელზედაც გავლებული ელიფსის მხები საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს უმცირესი ფართობის მქონე სამკუთხედს.

7.53. R რადიუსიან სფეროში ჩახაზულ ცილინდრებს შორის იპოვეთ ის რომლის: 1) მოცულობა უდიდესია; 2) სრული ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

7.54. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდში ჩახაზულ მართკუთხა პარალელეპიპედებს შორის ის, რომლის მოცულობა უდიდესია.

7.55. ექსპერიმენტით მიღებულია საძებნი $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები არგუმენტის ხუთი მნიშვნელობისათვის, რომელიც ჩაწერილია ცხრილში. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქცია $y=ax+b$ სახით

1)

x	−2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

2)

x	2	4	6	8	10
y	5,5	6,3	7,2	8	8,6

3)

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

4)

x	1	2	3	4	5
y	4,5	5,5	4	2	2,5

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

§ 8. უშუალო ინტეგრება

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები (№№ 8.1—8.28):

8.1. 1) $\int x^3\,dx$; 2) $\int x^6\,dx$;

3) $\int 3x^2\,dx$; 4) $\int 4x^7\,dx$.

8.2. 1) $\int (x^2+3x+1)\,dx$; 2) $\int (3x^5-4x^3+2x-2)\,dx$;

3) $\int (x^2-2)^2\,dx$; 4) $\int (x^3+1)^2\,dx$.

8.3. 1) $\int \frac{2}{x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{3}{x^5}\,dx$;

3) $\int \left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x}+1\right)dx$; 4) $\int \left(\frac{4}{x^5}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x}-2\right)dx$.

8.4. 1) $\int (\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-1)\,dx$;

2) $\int (x\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x})\,dx$;

3) $\int (5x^{3/2}-7x^{4/3}-x^{1/2}+1)\,dx$;

4) $\int (x^{1/3}-7x^{2/5}+5x^{1/4}-x+1)\,dx$.

8.5. 1) $\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$;

2) $\int \left(\frac{2}{x^2\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{x\sqrt[5]{x}}\right)dx$;

3) $\int\left(3x^{-\frac{2}{5}}+x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{4}}\right)dx;$

4) $\int\left(4x^{-\frac{1}{5}}-4x^{-\frac{3}{7}}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx.$

3.6. 1) $\int\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}\,dx;$ 2) $\int\sqrt{x^2\sqrt[3]{x}}\,dx;$

3) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx;$ 4) $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt{x}}}\,dx.$

3.7. 1) $\int\frac{x^4+3x^2+2}{x^2}\,dx;$ 2) $\int\frac{3-x+x^3}{x}\,dx;$

3) $\int\frac{(x^3+1)^2}{x^3}\,dx;$ 4) $\frac{(x^2+1)^3}{x^2}\,dx.$

3.8. 1) $\int\frac{3\sqrt[3]{x}-2x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx;$ 2) $\int\frac{2\sqrt{x}-3x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\,dx;$

3) $\int\frac{(x^2+1)^2}{x\sqrt[4]{x^2}}\,dx;$ 4) $\int\frac{(x^2-\sqrt{x})^2}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$

3.9. 1) $\int(3\sin x-2\cos x+1)dx;$ 2) $\int\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx;$

3) $\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx;$ 4) $\int(2e^x-3^x+2\cdot 5^x)\,dx.$

3.10. 1) $\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx;$ 2) $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx;$

3) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx;$ 4) $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

3.11. 1) $\int a^x e^x\,dx;$ 2) $\int\frac{x^2e^x-x}{x^2}\,dx;$

3) $\int a^x\left(1-\frac{a^{-x}}{x^3}\right)dx;$ 4) $\int\frac{2^x+8^x}{4^x}\,dx.$

3.12. 1) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx;$ 2) $\int\frac{2-\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx;$

3) $\int\frac{2+\cos^2 t}{1+\cos 2t}\,dt;$ 4) $\int\frac{1-2\operatorname{ctg}^2 t}{\cos^2 t}\,dt.$

8.13. 1) $\int \sqrt{4\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2 x}\, dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$;

3) $\int \frac{\cos 2t}{\sin^2 t \cos^2 t} dt$; 4) $\int \frac{dt}{\sin^2 t \cos^2 t}$.

8.14. 1) $\int \left(\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}\right) dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1}\right) dx$;

3) $\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) dx$;

4) $\int \cos x \cdot \left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right) dx$.

8.15. 1) $\int (3\operatorname{ch} x - 2\operatorname{sh} x)\, dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{4}{\operatorname{ch}^2 x}\right) dx$;

3) $\int \operatorname{th}^2 x\, dx$; 4) $\int \operatorname{cth}^2 x\, dx$.

8.16. 1) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$; 2) $\int \frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)} dx$;

3) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$; 4) $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx$;

8.17. 1) $\int (3x+1)^4 dx$; 2) $\int (2-x)^5 dx$;

3) $\int \sqrt[3]{1-2x}\, dx$; 4) $\int \sqrt[7]{(3x-2)^5}\, dx$.

8.18. 1) $\int \frac{dx}{(4-5x)^3}$; 2) $\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(2x-1)^3}}$.

8.19. 1) $\int \frac{dx}{2x+5}$; 2) $\int \frac{dx}{1-3x}$;

3) $\int \sin 3x\, dx$; 4) $\int \cos 2x\, dx$.

8.20. 1) $\int \sin \pi x\, dx$; 2) $\int \cos(\pi x + 2)\, dx$;

3) $\int \cos\frac{x}{5}\, dx$; 4) $\int \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$.

8.21. 1) $\int(\cos\alpha-\cos 2x)\,dx$; 2) $\int\left(\sin\frac{x+1}{3}-\cos(1-2x)\right)dx$;

3) $\int\frac{dx}{\cos^2 4x}$; 4) $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$.

8.22. 1) $\int e^{-2x}\,dx$; 2) $\int a^{-x}\,dx$;

3) $\int(e^{3x}-e^{-x})\,dx$; 4) $\int(a^{-2x}+a^{2x})\,dx$.

8.23. 1) $\int \operatorname{sh}(2x-1)\,dx$; 2) $\int \operatorname{ch}(1-3x)\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$; 4) $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2\pi x}$.

8.24. 1) $\int\frac{x+2}{x+4}\,dx$; 2) $\int\frac{x-1}{2x+3}\,dx$;

3) $\int\frac{4-x}{4+x}\,dx$; 4) $\int\frac{2x-1}{1-3x}\,dx$.

8.25. 1) $\int\frac{x^2+6x+2}{x+3}\,dx$; 2) $\int\frac{6x^2+x+1}{3x-1}\,dx$;

3) $\int\frac{x^3+2}{1-2x}\,dx$; 4) $\int\frac{x^3-4x^2+1}{x+2}\,dx$.

8.26. 1) $\int\frac{x^4}{x-1}\,dx$; 2) $\int\frac{x^4+1}{x+2}\,dx$;

3) $\int\frac{x^5}{x+1}\,dx$; 4) $\int\frac{x^5-3x}{1-x}\,dx$;

8.27. 1) $\int\frac{dx}{x^2-4}$; 2) $\int\frac{dx}{5-x^2}$;

3) $\int\frac{dx}{5x^2-12}$; 4) $\int\frac{dx}{7-4x^2}$.

8.28. 1) $\int\frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$; 2) $\int\frac{4-3x^2}{x^2-2}\,dx$;

3) $\int\frac{x^4}{x^2-4}\,dx$; 4) $\int\frac{x^4+2}{3-x^2}\,dx$.

8.29. ვთქვათ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელი ფუნქცია მთელ რიცხვით ღერძზე. დაადგინეთ მართებულია, თუ არა შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $f(x)$ არის პერიოდული ფუნქცია, მაშინ $F(x)$ აგრეთვე პერიოდული ფუნქციაა;

2) თუ $f(x)$ არის კენტი ფუნქცია, მაშინ $F(x)$ ლუწი ფუნქციაა;

3) თუ $f(x)$ არის ლუწი ფუნქცია, მაშინ $F(x)$ კენტი ფუნქციაა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) $f(x)=1+\sin x$ პერიოდული ფუნქციის პირვანდელია $F(x)=x-\cos x$ არაპერიოდული ფუნქცია;

2) ვთქვათ $f(x)$ კენტი ფუნქციის პირვანდელია $F(x)$. მაშინ გვაქვს $F'(-x)=-f(-x)=f(x)$. ამიტომ $F(-x)=F(x)+c$. თუ ამ ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $x=0$, მივიღებთ $c=0$. ე. ი. $F(-x)=F(x)$;

3) $f(x)=x^2$ ლუწი ფუნქციის პირვანდელი ფუნქციაა $F(x)=$ $=\frac{1}{2}x^3+1$, რომელიც არ არის კენტი.

8.30. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=\operatorname{sign} x$ ფუნქციას მთელ რიცხვით ღერძზე პირვანდელი ფუნქცია არ გააჩნია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. დავუშვათ, რომ $\operatorname{sign} x$ ფუნქციის პირვანდელია $F(x)$. მაშინ ცხადია, რომ $F(x)$ ფუნქციას უნდა ჰქონდეს სახე

$$F(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა } x\geqslant 0, \\ -x, & \text{როცა } x<0. \end{cases}$$

ე. ი. $F(x)=|x|$. ამ ფუნქციას კი $x=0$ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

8.31. მოიყვანეთ მაგალითი წყვეტილი ფუნქციისა, რომელსაც მთელს რიცხვით ღერძზე გააჩნია პირვანდელი ფუნქცია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა.

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x=0 \end{cases}$$

ფუნქცია $x=0$ წერტილში განიცდის მეორე გვარის წყვეტას. მისი პირვანდელი ფუნქციაა

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x=0. \end{cases}$$

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 9.1—9.39):

9.1. 1) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; 2) $\int \frac{dx}{3x^2+2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}$.

9.2. 1) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; 2) $\int \frac{x}{4-5x^2}\,dx$;

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\int x\sqrt[5]{x^2+2}\,dx$.

9.3. 1) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$;

3) $\int x^4\sqrt[5]{x^5+1}\,dx$; 4) $\int \frac{x^{k-1}\,dx}{ax^k+b}$.

9.4. 1) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{7+x^4}}$; 2) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

3) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-3x^3}}$; 4) $\int x^4\sqrt[5]{1-4x^5}\,dx$.

9.5. 1) $\int x\sin(x^2+2)\,dx$, 2) $\int x^2\cos(1-3x^3)\,dx$;

3) $\int x^2 e^{-x^3}dx$; 4) $\int x\cdot 3^{-2x^2}dx$.

9.6. 1) $\int \frac{3^{1/x}}{x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$;

3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int \frac{2^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

9.7. 1) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+2}$;

3) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$; 4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$.

9.8. 1) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\,dx$; 2) $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}\,dx$;

3) $\int (2x^3-1)\cdot e^{x^4-2x}\,dx$; 4) $\int \frac{x^2+1}{x^2}\cdot 5^{x-\frac{1}{x}}\,dx$.

9.9. 1) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 4) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{1-\ln(x-1)}}$.

9.10. 1) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$;

3) $\int \operatorname{ctg} 3x\,dx$; 4) $\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx$.

9.11. 1) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{1-\operatorname{tg} x}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$; 4) $\int \frac{e^{-\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x}\,dx$.

9.12. 1) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$; 2) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$;

3) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; 4) $\int 3^{-\cos x}\sin x\,dx$.

9.13. 1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$; 2) $\int 3\cos^4 x\sin 2x\,dx$;

3) $\int \frac{\sin 2x}{(1-\cos 2x)^3}\,dx$; 4) $\int \sin x\cos x\sqrt{\cos 2x}\,dx$.

9.14. 1) $\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,dx$; 2) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\,dx$;

3) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[3]{\sin x+\cos x}}\,dx$; 4) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+4\cos^2 x}}\,dx$.

9.15. 1) $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+3}$; 2) $\int \frac{3^x\,dx}{1+3^x}$;

3) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$; 4) $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx$.

9.16. 1) $\int \frac{2^x\,dx}{1+4^x}$; 2) $\int \frac{3^x}{\sqrt{4-9^x}}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 4) $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

9.17. 1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{3^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

9.18. 1) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$.

9.19. 1) $\displaystyle\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2-\sin^4 x}}$.

9.20. 1) $\displaystyle\int \frac{x+(\operatorname{arcsos} 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{x+\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$.

9.21. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$;

3) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

9.22. 1) $\displaystyle\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{x^{n/2}\,dx}{1-x^{n+2}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^{n/2}\,dx}{\sqrt{1-x^{n+2}}}$.

9.23. 1) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{ch}^2 x}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^2 x\,dx}{\operatorname{ch}^6 x}$.

9.24. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin^2 x+5}}$.

9.25. 1) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$; 2) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x}{(x^2-2)^5}\,dx$.

9.26. 1) $\displaystyle\int x\sqrt{3+x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

9.27. 1) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$;

3) $\displaystyle\int (x-3)\sqrt{x+4}\,dx$, 4) $\displaystyle\int (x+4)\sqrt{x-1}\,dx$;

5) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3\sqrt{x+2}+2}$; 6) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4-3\sqrt{x-1}}$.

9.28. 1) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x+1}}$;

3) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

9.29. 1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int x^5(2-5x^3)^{2/3}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(x^2-4)^2}$.

9.30. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}-1)}$; 4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$.

9.31. 1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$; 4) $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

9.32. 1) $\int \frac{\ln x\, dx}{x(1-\ln^2 x)}$; 2) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx$;

3) $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\, dx$; 4) $\int \ln \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{x^2-1}$.

9.33. 1) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\, dx$;

3) $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\, \sin 2x \cos 2x\, dx$;

4) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}\, dx$.

9.34. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(e^x+1)e^x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

3) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{e^{\sin x}-1}}$; 4) $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

9.35. 1) $\int \frac{\ln \arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\, dx$; 2) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$;

3) $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x}\, dx$; 4) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

9.36. 1) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx$; 2) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

5) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$; 6) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$.

მითითება:

1) $$\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\, dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2};$$

3) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}};$$

5) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{dx}{|x|^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} =$

$$= -\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

9.87. 1) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

3) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx$; 4) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ჩასმა:

1) $x=\sin t$; 2) $x=a\sin t$; 3) $x=3\sin t$; 4) $x=2\sin t$.

9.88. 1) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

მითითება. 1) გამოვიყენოთ ჩასმა $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in[0{:}\ \pi]$, $t\neq\frac{\pi}{2}$.
მივიღებთ

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = |a|\operatorname{sgn}\frac{a}{x}\cdot(\operatorname{tg} t - t)+c=$$

$$=|a|\cdot\operatorname{sgn}\frac{a}{x}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\operatorname{sgn} x-\arccos\frac{a}{x}\right)+c=$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-|a|\operatorname{sgn}\frac{a}{x}\cdot\arccos\frac{a}{x}+c=$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-|a|\arccos\left|\frac{a}{x}\right|+c.$$

2) გამოვიყენოთ ჩასმა $x=\frac{a}{t}$, მივიღებთ

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=-\frac{1}{|a|}\operatorname{sgn} t\cdot\arcsin t+c=$$

$$=-\frac{1}{|a|}\operatorname{sgn}\frac{a}{x}\cdot\arcsin\frac{a}{x}+c=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|}+c.$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება აგრეთვე ჩასმით $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

3) გამოვიყენოთ ჩასმა $x = \dfrac{3}{t}$. მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = -\frac{1}{9}\operatorname{sgn} t \cdot \int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{9}\operatorname{sgn} t \cdot \sqrt{1-t^2} + c =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|}\sqrt{x^2-9} + c = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + c.$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება აგრეთვე ჩასმით $x = \dfrac{3}{\cos t}$.

4) გამოვიყენოთ ჩასმა $x = \dfrac{a}{t}$ მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{\operatorname{sgn} t}{a|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + c =$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn} \frac{a}{x}}{a|a|} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2-a^2}} + c = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + c.$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება აგრეთვე ჩასმით $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

9.89. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) გამოვიყენოთ ჩასმა $x = \dfrac{a}{t}$ მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\operatorname{sgn} t}{a|a|} \cdot \sqrt{1+t^2} + c =$$

$$= -\frac{1}{a|a|} \cdot \operatorname{sgn}\frac{a}{x} \cdot \frac{1}{|x|}\sqrt{x^2+a^2} + c = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + c.$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება აგრეთვე ჩასმით $x = a\operatorname{tg} t$;

2) გამოიყენეთ ჩასმა $x = \dfrac{1}{t}$ ან $x = \operatorname{tg} t$;

3) გამოიყენეთ ჩასმა $x = \dfrac{a}{t}$ ან $x = a\operatorname{tg} t$;;

4) გამოიყენეთ ჩასმა $x = \dfrac{1}{t}$ ან $x = tg\, t$.

§ 10. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 10.1—10.20):

10.1. 1) $\int x e^x \, dx$; 2) $\int x e^{-x} \, dx$;

3) $\int x \cdot 3^x \, dx$; 4) $\int (3x - 4) e^{2x} \, dx$.

10.2. 1) $\int x \sin x dx$; 2) $\int x \cos x \, dx$;

3) $\int x \sin 5x dx$; 4) $\int x \cos \frac{x}{3} \, dx$.

10.3. 1) $\int (2x + 5) \cos 2x \, dx$; 2) $\int (1 - 3x) \sin 4x \, dx$;

3) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

10.4. 1) $\int x \ln x \, dx$; 2) $\int \ln x \, dx$;

3) $\int x^\alpha \ln x \, dx$; 4) $\int (3x + 2) \ln x dx$.

10.5. 1) $\int (x^2 - x + 1) \ln x \, dx$; 2) $\int \ln (x^2 + 1) \, dx$;

3) $\int x^2 \ln (1 + x) dx$; 4) $\int (x^2 - 2x + 3) \ln(x + 1) \, dx$.

10.6. 1) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$; 2) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$;

3) $\int \arcsin x \, dx$;; 4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} \, dx$.

10.7. 1) $\int x \cos^2 x \, dx$; 2) $\int x \sin^2 x \, dx$;

3) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$; 4) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} \, dx$.

10.8. 1) $\int x^2 e^x \, dx$; 2) $\int x^2 \sin x dx$;

3) $\int \ln^2 x dx$; 4) $\int x^3 \sin x dx$.

10.9. 1) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$; 2) $\int x^3 e^{-x^2} dx$;

3) $\int x^2 \cos^2 x dx$; 4) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$.

10.10. 1) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$; 2) $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$;

3) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; 4) $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

10.11. 1) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$; 2) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$;

3) $\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx$; 4) $\int x \arcsin x dx$.

10.12. 1) $\int \arcsin^2 x \, dx$; 2) $\int x \operatorname{arctg}^2 x \, dx$;

3) $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x \, dx$; 4) $\int \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$.

10.13. 1) $\int \sin x \ln \operatorname{tg} x \, dx$; 2) $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} dx$;

3) $\int x^2 \arcsin 2x dx$; 4) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$.

10.14. 1) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$; 2) $\int e^{\sqrt{x}} dx$;

3) $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \, dx$; 4) $\int \cos^2 \sqrt{x} \, dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) აღნიშნეთ $u=\ln \sin x$, $dv=\frac{dx}{\sin^2 x}$; 2) — 4) გამოიყენეთ ჩასმა $\sqrt{x}=t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

10.15. 1) $\int x \arccos \frac{1}{x} \, dx$; 2) $\int \frac{\ln (x^2-1)}{\sqrt{x+1}} dx$;

3) $\int \cos x \ln (1+\sin^2 x) \, dx$; 4) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$.

მითითება 1) აღნიშნეთ $u = \arccos \frac{1}{x}$, $dv = x\,dx$;

2) აღნიშნეთ $u = \ln(x^2 - 1)$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$;

3) გამოიყენეთ ჩასმა $\sin x = t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

4) აღნიშნეთ $u = x^2 e^x$, $dv = \frac{dx}{(x+2)^2}$.

10.16. 1) $\int x\sqrt{1-x^2} \arcsin x dx$; 2) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$;

3) $\int \frac{x \ln x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 4) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$.

მითითება. 1) აღნიშნეთ $u = \arcsin x$, $dv = x\sqrt{1-x^2}\,dx$;

2) აღნიშნეთ $u = \arcsin x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$; ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენების შემდეგ მიღებულ ინტეგრალში გამოიყენეთ ჩასმა $x = \sin t$ ან $x = \frac{1}{t}$;

3) აღნიშნეთ $u = \ln x$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენების შემდეგ მიღებულ ინტეგრალში გამოიყენეთ ჩასმა $\sqrt{1+x^2} = t$;

4) გამოიყენეთ ჩასმა $\sqrt{x} = t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

10.17. 1) $\int e^x \sin x\, dx$; 2) $\int e^x \cos x\, dx$

3) $\int \sqrt{x^2+a}\, dx$; 4) $\int x^2 \sqrt{x^2+a^2}\, dx$.

მითითება. 4) აღნიშნეთ $\sqrt{x^2+a^2} = u$, $x^2 dx = dv$; ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენების შემდეგ მივიღებთ:

$$I = \int x^2 \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{3} x^3 \sqrt{x^2+a^2} - \frac{1}{3} \int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+a^2}} dx.$$

გვაქვს

$$I_1 = \int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \int \sqrt{x^2+a^2}\,(x^2-a^2)dx + a^4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= I - a^2 \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^4 \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right).$$

10.18. 1) $\int \sin x \operatorname{ch} x\, dx$; 2) $\int \cos x \operatorname{ch} x\, dx$;

3) $\int e^x \sin^2 x dx$; 4) $\int \left(\frac{\cos x}{e^x}\right)^2 dx$.

10.19. 1) $\int \sin \ln x\, dx$; 2) $\int \cos \ln x\, dx$;

3) $\int \cos^2 \ln x\, dx$; 4) $\int x^2 \sin \ln x\, dx$.

10.20. 1) $\int e^{\arccos x}\, dx$; 2) $\int x e^x \sin x dx$;

3) $\int x^2 e^x \cos x\, dx$; 4) $\int x e^x \sin^2 x dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 2) აღნიშნეთ $u=x$, $dv = e^x \sin x dx$; ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენების დროს და მიღებული ინტეგრალის გამოთვლისას იხილეთ მაგალითები 10. 17. 1) და 2).

§ 11. კვადრატული სამწევრის შემცველი ზოგიერთი ინტეგრალები

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 11.1—11.12):

1.11. 1) $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

3) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; 4) $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

11.2. 1) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2-6x}$; 4) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$.

11.3. 1) $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$; 2) $\int \frac{dx}{x-x^2-2,5}$;

3) $\int \frac{2dx}{2x-2x^2-5}$; 4) $\int \frac{dx}{2x^2-x-3}$.

11.4. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

11.5. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

11.6. 1) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$; 2) $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2-x-1}$;

3) $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}$; 4) $\int \frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}$.

11.7. 1) $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; 2) $\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$;

3) $\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}$; 4) $\int \frac{(3x+4)\,dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

11.8. 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ჩასმა $x = \frac{1}{t}$.

11.9. 1) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$; 2) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;

5) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$; 4) $\int \frac{dx}{(4x-3)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა.

$$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

სახის ინტეგრალები გამოითვლება ჩასმით $\frac{1}{mx+n}=t$.

11.10. 1) $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

მ ი თ ი თ ე ბა.

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

სახის ინტეგრალები გამოითვლება ჩასმით $\frac{1}{mx+n}=t$.

11·11. 1) $\int \frac{3^x\,dx}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}$; 2) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$;

3) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}$; 4) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$.

11.12. 1) $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$; 2) $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$;

3) $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$; 4) $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

§ 12. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 12.1—12.21):

I. მნიშვნელს აქვს მხოლოდ ნამდვილი მარტივი ფესვები.

12.1. 1) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

3) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; 4) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

12.2. 1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int \frac{3x-2}{x(x+1)(x-2)}\,dx$;

3) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$; 4) $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$.

12.3. 1) $\int \frac{14-3x}{x^2-4}\,dx$; 2) $\int \frac{x+13}{x^2+x-6}\,dx$;

3) $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$; 4) $\int \frac{9x-19}{2x^2-17x+21}\,dx$.

12.4. 1) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$; 2) $\int \frac{2x^2-15x-9}{x^3-9x}\,dx$;

3) $\int \frac{x^2-18x+5}{x^3-2x^2-5x+6}\,dx$; 4) $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$.

12.5. 1) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-3x+2}$;

3) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}\,dx$; 4) $\int \frac{x^4-3x^3-18x^2+38x-17}{x^2-x-20}\,dx$.

12.6. 1) $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}\,dx$; 2) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$;

3) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$; 4) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

II. მნიშვნელს აქვს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები, რომელთაგან ზოგიერთი ჯერადია.

12.7. 1) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$; 2) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$;

3) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$; 4) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$.

12.8. 1) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$; 2) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$;

3) $\int \frac{x^2+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx$; 4) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}\,dx$.

12.9. 1) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$; 2) $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}\,dx$;

3) $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$; 4) $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x-2)(x^2+x)^2}$.

12.10. 1) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$;

3) $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$; 4) $\int \frac{x^5-x+1}{x^6-x^5}\,dx$.

12.11. 1) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{3x^3+5x^2-25x-1}{x^3-3x+2}\,dx$;

3) $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$; 4) $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

III. მნიშვნელს აქვს კომპლექსური მარტივი ფესვები.

12.12. 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$;

3) $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x^4-1}\,dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}$.

12.13. 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$; 2) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3-1}$;

3) $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$.

12.14. 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x^2+2)}$;

3) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$; 4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-x^3-x+1}$.

12.15. 1) $\displaystyle\int\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$;

3) $\displaystyle\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$.

12.16. 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$;

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$; 4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^6+1}$.

12.17. 1) $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+x+3}{(x+3)(x^2+x+1)}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{x(x^2+1)\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.

IV. მნიშვნელს აქვს კომპლექსური ფესვები, რომელთაგან ზოგიერთი ჯერადია.

12.18. 1) $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx$.

12.19. 1) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$; 4) $\displaystyle\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

12.20. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$; 4) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$.

12.21. 1) $\displaystyle\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$; 4) $\displaystyle\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx$.

§ 13. ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 13.1—13.15):

1. წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება.

13.1. 1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$.

13.2. 1) $\displaystyle\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

13.3. 1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int x\sqrt[4]{x-2}\,dx$;

3) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

13.4. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

13.5. 1) $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx;$ 2) $\int \frac{1}{x^3}\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,dx;$

3) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3};$ 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}\cdot x\,dx.$

2. ზოგადი სახის წილად-წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება.

13.6. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}};$ 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx;$

3) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\,dx;$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$

13.7. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}};$ 2) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})};$

3) $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}};$ 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

13.8. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}};$ 2) $\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x^5})^3};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}};$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^2}.$

13.9. 1) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx;$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}-\sqrt[4]{x}};$

3) $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}};$ 4) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$

3. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება.

13.10. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}};$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}};$

3) $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx;$ 4) $\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx.$

13.11. 1) $\int \frac{4x+7}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx;$ 2) $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx;$

3) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}};$ 4) $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$

13.12. 1) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$; 2) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

13.13. 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; 2) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$;

3) $\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}}$;

13.14. 1) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+7)^{3/2}}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}$;

3) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{7/2}}$; 4) $\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^{3/2}}\,dx$.

13.15. 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$; 2) $\int \frac{x^3 dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$;

3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; 4) $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

13.16. აჩვენეთ, რომ ინტეგრალი

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx,$$

სადაც $R(x, u, v)$ არის x, u, v ცვლადების რაციონალური ფუნქცია მიიყვანება

$$\int R_1(t)\,dt$$

ინტეგრალის გამოთვლამდე, სადაც $R_1(t)$ — რაციონალური ფუნქციაა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ჩასმით $\sqrt{ax+b}=t$ მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალამდე კვადრატული ირაციონალობიდან.

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 13.17—13.24):

13.17. 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

3) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$; 4) $\int \frac{dx}{(\sqrt{2x-3}+2x-3)\sqrt{4-2x}}$.

4. ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება.

13.18. 1) $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x}+1)^2}$;

3) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$; 4) $\int \dfrac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$.

13.19. 1) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(1-\sqrt[6]{x})}$; 2) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2}\,dx$;

3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x})^3}$; 4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^{10}}$.

13.20. 1) $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$; 2) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$;

3) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; 4) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

13.21. 1) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$; 2) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$;

3) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$; 4) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

13.22. 1) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int \dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$;

3) $\int \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3-2\sqrt[5]{x^3}}}\,dx$; 4) $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

13.23. 1) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$; 2) $\int \dfrac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6}\,dx$;

3) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$; 4) $\int \dfrac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

13.24. 1) $\int \dfrac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; 2) $\int \dfrac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$;

3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; 4) $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$.

§ 14. ზოგიერთი ტრანსცენდენტული ფუნქციის ინტეგრება.

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 14.1—14.42):

1. $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$ სახის ინტეგრალები.

14.1. 1) $\int \sin 3x \cos x dx$; 2) $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$;

3) $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2}{3} x dx$; 4) $\int \sin (3x + 2) \cos (x - 1) \, dx$.

14.2. 1) $\int \sin 10x \sin 15x \, dx$; 2) $\int \sin 2x \sin 5x \, dx$.

3) $\int \sin \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{5} \, dx$; 4) $\int \sin (5x + 8) \sin (3x - 7) \, dx$.

14.3. 1) $\int \cos 4x \cos 7x \, dx$; 2) $\int \cos x \cos 4x \, dx$;

3) $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx$; 4) $\int \cos (ax + b) \cos (ax - b) \, dx$.

14.4. 1) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$; 2) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x \, dx$;

3) $\int \cos x \cos^2 3x \, dx$; 4) $\int \sin^2 x \cos (3x + 1) \, dx$.

2) $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, $(m, \ n \in z)$ სახის ინტეგრალები.

14.5. 1) $\int \sin^5 x \cos x \, dx$; 2) $\int \sin 3x \cos^8 3x \, dx$;

3) $\int \sin^3 x \, dx$; 4) $\int \cos^3 x \, dx$.

14.6. 1) $\int \sin^5 x \, dx$; 2) $\int \cos^5 x \, dx$;

3) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$; 4) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

14.7. 1) $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} \, dx$; 2) $\int \cos^3 x \sin^8 x \, dx$;

3) $\int \sin^7 x \, dx$; 4) $\int \cos^7 x \, dx$.

14.8. 1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$;

14.9. 1) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$; 4) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

14.10. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$.

14.11. 1) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$.

14.12. 1) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$; 2) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$;

3) $\displaystyle\int \sin^6 x\,dx$; 4) $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$.

14.13. 1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; 2) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$;

3) $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$; 4) $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$.

14.14. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

14.15. 1) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$.

14.16. 1) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$; 2) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}\,dx$;

3) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,dx$; 4) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x}\,dx$.

14.17. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$;

3) $\int \frac{dx}{\mathrm{siu}^4 x \cos^4 x}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^6 x}$.

3. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ სახის ინტეგრალები, სადაც $R(u, v)$ არის u და v ცვლადების რაციონალური ფუნქცია.

14.18. 1) $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$;

3) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; 4) $\int \frac{dx}{4-\sin x}$.

14.19. 1) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

3) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; 4) $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$.

14.20. 1) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$; 2) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$;

3) $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$.

14.21. 1) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$; 2) $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin^3 x}$;

3) $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx$; 4) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

14.22. 1) $\int \frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}\,dx$; 2) $\int \frac{1+\mathrm{ctg}\,x}{1-\mathrm{ctg}\,x}\,dx$;

3) $\int \frac{2-\sin x}{2-\cos x}\,dx$; 4) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\mathrm{tg}\,x}\,dx$.

14.23. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

14.24. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x - \sin x}$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3}\,dx$.

3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x + 5}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1 + 4\cos^2 x}\,dx$.

14.25. 1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\,dx$.

14.26. 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 3\sin 2x - 4\cos^2 x}$; 4) $\displaystyle\int \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x \cos^2 x + 4\sin^3 x}\,dx$.

14.27. 1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$; 4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x}\,dx$.

4. $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, $(m,\ n \in Q)$ სახის ინტეგრალები.

14.28. 1) $\displaystyle\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x \sqrt[4]{\cos x}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$.

14.29. 1) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

14.30. 1) $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}}\, dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}\, dx$;

3) $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\sin 2x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin^3 2x}}$;

5) $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$; 6) $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\, dx$.

5. $\int R(e^x)dx$ სახის ინტეგრალები, სადაც $R(t)$ არის t ცვლადის რაციონალური ფუნქცია.

14.31. 1) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$; 2) $\int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}\, dx$;

3) $\int \frac{dx}{a\, e^{mx} + b\, e^{-mx}}$; 4) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

14.32. 1) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$; 2) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+13}\, dx$;

3) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x-5}\, dx$; 4) $\int \frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}\, dx$.

6. $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$ სახის ინტეგრალები, სადაც $R(u, v)$ არის u და v ცვლადების რაციონალური ფუნქცია.

14.33. 1) $\int sh^2 x\, dx$; 2) $\int ch^2 x\, dx$;

3) $\int sh^3 x dx$; 4) $\int ch^3 x\, dx$.

14.34. 1) $\int th^2 x\, dx$; 2) $\int cth^2 x\, dx$;

3) $\int th\, x\, dx$; 4) $\int cth\, x dx$.

14.33. 1) $\int sh^3 x\; ch\, x dx$; 2) $\int sh^2 x\; ch^2 x\, dx$;

3) $\int th^4 x\, dx$; 4) $\int ch^4 x\, dx$.

14.36. 1) $\int th^3 x\,dx$; 2) $\int cth^5 x\,dx$;

3) $\int sh^2 x\,ch^3 x\,dx$; 4) $\int sh^3 x\,ch\,2x\,dx$.

14.37. 1) $\int \frac{dx}{sh\,x}$; 2) $\int \frac{dx}{sh\,x\,ch\,x}$;

3) $\int \frac{dx}{sh^2 x\,ch^2 x}$; 4) $\int \frac{ch^2 x}{sh^3 x}\,dx$;

14.38. 1) $\int \frac{dx}{sh\,x\,ch^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{sh^3 x\,ch^2 x}$;

3) $\int \frac{dx}{ch^5 x}$; 4) $\int \frac{sh^4 x}{ch^3 x}\,dx$.

14.39. 1) $\int \frac{sh^4 x}{ch^6 x}\,dx$; 2) $\int \frac{ch^5 x}{sh\,x}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{sh^4 x\,ch^2 x}$; 4) $\int \frac{dx}{sh^2 x\,ch^3 x}$.

14.40. 1) $\int \frac{dx}{1+ch\,x}$; 2) $\int \frac{dx}{1-th\,x}$;

3) $\int \frac{4\,ch\,x-3\,sh\,x}{2\,ch\,x-sh\,x}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{sh\,x+2\,ch\,x}$.

14.41. 1) $\int \frac{ch\,x}{3\,ch\,x-4\,ch\,x}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{2\,sh\,x+3\,ch\,x}$;

3) $\int \frac{dx}{(1+ch\,x)^2}$; 4) $\int \frac{dx}{ch^3 x+3\,ch\,x}$.

14.42. 1) $\int \frac{dx}{4+3\,ch^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{1-6\,sh\,2x-37\,ch^2 x}$;

3) $\int \frac{dx}{3\,sh^2 x-7\,sh\,x\,ch\,x+2\,ch^2 x}$;

4) $\int \frac{dx}{10\,ch^2 x-2\,ch\,2x-1}$.

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 15.1—15.30):

15.1. 1) $\int \frac{x\,dx}{2x^2 - x + 1}$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2 + 12x + 35}$;

3) $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{x^2 + 2x + 1}\,dx$; 4) $\int \frac{x\,dx}{x^3 + 8}$.

15.2. 1) $\int \frac{x^5\,dx}{x^3 + 2}$; 2) $\int \frac{x^5\,dx}{x^6 + 9x^3 + 8}$;

3) $\int \frac{x^3\,dx}{(x^8 + 1)^2}$; 4) $\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}$.

15.3. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1}$; 2) $\int \frac{3 - 4x}{(1 - 2\sqrt{x})^2}\,dx$;

3) $\int \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x^3}\,dx$; 4) $\int \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx$.

15.4. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x} + x\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x})^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^5} + 4\sqrt{x}}$; 4) $\int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x + \sqrt[3]{x^4}}\,dx$.

15.5. 1) $\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$; 4) $\int \frac{1 - \sqrt[5]{1+x}}{1 + x + \sqrt[3]{(1+x)^4}}\,dx$.

15.6. 1) $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$; 2) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$;

3) $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$; 4) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}$.

15.7. 1) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int \sqrt{\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}} \cdot \frac{dx}{x}$;

3) $\int \sqrt{\frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} + 1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

4) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{\sqrt{x}-1}+\sqrt{\sqrt{x}+1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

15.8. 1) $\int \sqrt{4x^2-4x+3}\,dx$; 2) $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$; 4) $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

15.9. 1) $\int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}$; 2) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

3) $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x^2+x}}\,dx$; 4) $\int \frac{(\sqrt{1+x+x^2}-1)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

15.10. 1) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$; 2) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; 4) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$.

15.11. 1) $\int x\ln(1+x^3)\,dx$; 2) $\int x\ln(4+x^4)\,dx$;

3) $\int \ln^4 x\,dx$; 4) $\int x^3\ln^3 x\,dx$.

15.12. 1) $\int \sin\sqrt{x}\,dx$; 2) $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$;

3) $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 4) $\int x e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

15.13. 1) $\int \frac{x^2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2(1+x^2)}\,dx$;

3) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$; 4) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\,dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) აღნიშნეთ $u=\mathrm{arctg}\,x$, $dv=\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$. მოცემული ინტეგრალი შეიძლება გამოვთვალოთ აგრეთვე ჩასმით $\mathrm{arc\,tg}\,x=t$ და შემდეგ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით;

2) გამოიყენეთ ჩასმა $\mathrm{arc\,tg}\,x=t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

3) გამოიყენეთ ჩასმა $\arcsin x = t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

4) ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მრიცხველი და მნიშვნელი გაამრავლეთ e^x-ზე და შემდეგ გამოიყენეთ ჩასმა $xe^x = t$.

15.14. 1) $\displaystyle\int x^3 \ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{x \ln|x|}{(1+x^2)^2}\, dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{(x+2)^2}\, dx$.

15.15. 1) $\displaystyle\int \cos x \cdot \operatorname{arctg} \sin x\, dx$; 2) $\displaystyle\int e^x \arcsin e^x dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\, dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

15.16. 1) $\displaystyle\int e^{-x} \operatorname{arctg} e^x dx$; 2) $\displaystyle\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$;

3) $\displaystyle\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2}\, dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) აღნიშნეთ $u = \operatorname{arctg} e^x$, $dv = e^{-x}\, dx$;

2) აღნიშნეთ $u = \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $dv = dx$;

3) აღვნიშნოთ $\arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = u$, $dv = dx$, მივიღებთ $v = x$,

$$du = \begin{cases} \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, & \text{როცა} \quad 0 < x < 1, \\ -\dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, & \text{როცა} \quad x > 1. \end{cases}$$

ამიტომ, როცა $0 < x < 1$

$$\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx = x \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c_1$$

ხოლო, როცა $x > 1$ გვექნება

$$\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx = x \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c_2.$$

რადგან პირვანდელი ფუნქცია უწყვეტია უნდა იყოს $x=1$ წერტილში, ამიტომ c_1 და c_2 მუდმივების სათანადო შერჩევით მივიღებთ

$$\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\, dx =$$

$$= \begin{cases} x \arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + 4 + c, & \text{როცა } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \pi + c, & \text{როცა } x \geqslant 1. \end{cases}$$

4) აღნიშნეთ $\arcsin x = u,\ \dfrac{xdx}{(1-x^2)^2} = dv.$

15.17. 1) $\displaystyle\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx;$ 2) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx;$

3) $\displaystyle\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\, dx;$ 4) $\displaystyle\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\, dx.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1), 2). გამოიყენეთ ჩასმა $\operatorname{arc\,tg} x = t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

3) აღნიშნეთ $\ln(\sin x) = u,\ \dfrac{dx}{\sin^2 x} = dv;$

4) აღნიშნეთ $\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) = u,\ dx = dv.$ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენების შემდეგ მიღებული ინტეგრალი ისევ გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

15.18. 1) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x(x+1)}\, dx;$ 2) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\, dx;$

3) $\displaystyle\int \frac{x\ln(1-x+x^2)}{(1+x^2)^2}\, dx;$ 4) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\, dx.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) აღნიშნეთ $\ln(x+1) - \ln x = t;$

2) აღნიშნეთ $\ln(1+x^2) = u,\ \dfrac{dx}{x^2} = dv;$

3) აღნიშნეთ $\ln(1-x+x^2) = u,\ \dfrac{xdx}{(1+x^2)^2} = dv;$

4) აღნიშნეთ $\ln x = u,\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = dv.$

15.19. 1) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 2) $\int \frac{x \ln (1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

3) $\int x\sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx$; 4) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) გამოიყენეთ ჩასმა $x=\sin t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

2) აღნიშნეთ $\ln (1+\sqrt{x^2+1}) = u$, $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = dv$;

3) გამოიყენეთ ჩასმა $\sqrt{x^2+1}=t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

4) აღნიშნეთ $\ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} = u$; $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = dv$.

15.20. 1) $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; 2) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx$;

3) $\int \frac{x \ln (x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx$; 4) $\int \frac{x \ln (x+\sqrt{x^2+1})}{(1-x^2)^2} dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1), 2) გამოიყენეთ ჩასმა $\operatorname{arc\,tg} x=t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

3) აღნიშნეთ $\ln (x+\sqrt{x^2+1})=u$, $\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=dv$;

4) აღნიშნეთ $\ln (x+\sqrt{x^2+1})=u$, $\frac{x}{(1-x^2)^2}dx = dv$. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენების შემდეგ მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ჩასმით $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=t$.

15.21. 1) $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x \, dx$; 2) $\int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x dx$;

3) $\int x^x (\ln x+1) dx$; 4) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{e^x}}{(1+e^x)\sqrt{e^x}} dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) აღნიშნეთ $\arcsin x=t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

2) აღნიშნეთ $\operatorname{arcctg} x = u$, $x(1+x^2)dx = dv$;

3) გამოიყენეთ ჩასმა $x^x=t$, საიდანაც $x^x(1+\ln x)dx = dt$;

4) გამოვიყენოთ ჩასმა $\sqrt{e^x}=t$. მივიღებთ

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}}{(1+e^x)\sqrt{e^x}}\,dx=2\int\frac{\operatorname{arctg} t}{t^2(1+t^2)}dt=2\int\frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}-2\int\frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,dt=$$

$$=2\int\frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}dt-\operatorname{arctg}^2 t+c.$$

მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

15.22. 1) $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$;

3) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) აღნიშვნებით $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}=u,\ e^x dx=dv$ გვექნება

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx=e^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int e^x\cdot\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=$$

$$=e^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x dx}{1+\cos x}+\int\frac{e^x d(\cos x)}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=e^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x dx}{1+\cos x}-e^x\cdot\frac{1}{1+\cos x}+$$

$$+\int\frac{e^x dx}{1+\cos x}=\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}+C;$$

2) გამოიყენეთ ჩასმა $\sqrt{1+\cos x}=t$;

3) გამოიყენეთ ჩასმა $\cos^2 x=t$;

4) გამოიყენეთ ჩასმა $\cos x=t$.

15.23. 1) $\displaystyle\int |x|\,dx$; 2) $\displaystyle\int x|x|\,dx$;

3) $\displaystyle\int (x+|x|)^2\,dx$; 4) $\displaystyle\int (|1+x|-|1-x|)\,dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) როცა $x>0$ გვაქვს

$$\int x dx=\frac{x^2}{2}+C_1.$$

ანალოგიურად, როცა $x<0$

$$-\int x dx = -\frac{x^2}{2} + C_2.$$

პირვანდელი ფუნქციის განსაზღვრების ძალით იგი უწყვეტი უნდა იყოს $x=0$ წერტილზე, ამიტომ $C_1=C_2=C$ — სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ამგვარად

$$\int |x| dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sign} x + C = \frac{x|x|}{2} + C.$$

4) გვაქვს

$$\int (|1+x| - |1-x|)\, dx = \int |1+x| d(1+x) + \int |1-x| d(1-x) =$$

$$= \frac{1}{2}((1+x)|1+x| + (1-x)|1-x|) + C.$$

15.24. 1) $\int e^{-|x|} dx$; 2) $\int \max(1, x^2)\, dx$;

3) $\int f(x)\, dx$, სადაც $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{როცა } |x| \leqslant 1; \\ 1-|x|, & \text{როცა } |x| > 1; \end{cases}$

4) $\int f(x)\, dx$, სადაც $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } -\infty < x < 0, \\ x+1, & \text{როცა } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, & \text{როცა } x > 1. \end{cases}$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) როცა $x \geqslant 0$, გვაქვს,

$$\int e^{-|x|} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_1,$$

ხოლო, როცა $x<0$

$$\int e^{-|x|} dx = \int e^{x} dx = e^{x} + C_2.$$

პირვანდელი ფუნქციის უწყვეტობის ძალით $x=0$ წერტილზე გვაქვს

$$-1 + C_1 = 1 + C_2,$$

საიდანაც

$$C_1 = 2 + C_2.$$

მრიგად

$$\int e^{-|x|}\,dx=\begin{cases}2-e^{-x}+C, & \text{როცა} \quad x\geqslant 0,\\ e^{x}+C, & \text{როცა} \quad x<0,\end{cases}$$

ადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

2) განიხილეთ შემთხვევები $|x|\leqslant 1$ და $|x|>1$. პირველ შემთხვე-
აში გვაქვს

$$\int \max(1,\ x^2)\,dx=\int dx=x+C_1.$$

ეორე შემთხვევაში

$$\int \max(1,\ x^2)\,dx=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C_2.$$

ირვანდელი ფუნქციის უწყვეტობის ძალით $x=1$ წერტილზე გვაქვს ($x>0$)

$$1+C_1=\frac{1}{3}+C_2.$$

ანალოგიურად $x=-1$ წერტილზე ($x<0$)

$$-1+C_1=-\frac{1}{3}+C_2.$$

ამრიგად, გვაქვს

$$\int \max(1,\ x^2)\,dx=\begin{cases}x+C, & \text{როცა} \quad 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}+C, & \text{როცა} \quad 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

$$\int \max(1,\ x^2)\,dx=\begin{cases}x+C, & \text{როცა} \quad -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}+C, & \text{როცა} \quad -\infty<x<-1.\end{cases}$$

აბოლოოდ გვაქვს

$$\int \max(1,\ x^2)\,dx=\begin{cases}x+C, & \text{როცა} \quad |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}\operatorname{sign}x+C, & \text{როცა} \quad |x|>1.\end{cases}$$

3) გვაქვს

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x + \dfrac{x^2}{2} + C_1, & \text{როცა} \quad -\infty < x < -1, \\ x - \dfrac{x^3}{3} + C_2, & \text{როცა} \quad -1 \leqslant x < 0, \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + C_3, & \text{როცა} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x - \dfrac{x^2}{2} + C_4, & \text{როცა} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

პირვანდელი ფუნქციის უწყვეტობის ძალით

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{6}, \quad C_2 = C_3, \; C_4 - C_3 = \frac{1}{6};$$

საიდანაც

$$C_2 = C_3 = \frac{1}{6} + C_1, \quad C_4 = \frac{1}{3} + C_1,$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. თუ დავუშვებთ, რომ $C_1 = -\dfrac{1}{6} + C$ ვექნება

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + C, & \text{როცა} \quad |x| \leqslant 1, \\ x - \dfrac{1}{2} x|x| + \dfrac{1}{6}\operatorname{sign} x + C, & \text{როცა} \quad 1 < |x| < +\infty. \end{cases}$$

4) გვაქვს

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x + C_1, & \text{როცა} \quad -\infty < x < 0, \\ \dfrac{x^2}{2} + x + C_2, & \text{როცა} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + C_3, & \text{როცა} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

პირვანდელი ფუნქციის უწყვეტობის ძალით $C_1 = C_2 = C_3 - \dfrac{1}{2}$.

ამრიგად

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x + C, & \text{როცა} \quad -\infty < x < 0, \\ \dfrac{x^2}{2} + x + C, & \text{როცა} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + \dfrac{1}{2} + C, & \text{როცა} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

15.25. 1) $\int e^{x+e^x}dx$; 2) $\int \frac{2x^2+1}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx$;

3) $\int \sin x\cdot\ln(\cos x+\sqrt{2-\sin^2 x})\,dx$;

4) $\int x^2\arccos 2x\,dx$.

მითითება. 1) გვაქვს

$$\int e^{x+e^x}dx=\int e^{e^x}d(e^x).$$

2) გვაქვს

$$\int\frac{2x^2+1}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx=2\int\operatorname{arctg} x\,dx-\int\frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1}.$$

3) აღნიშნეთ $\cos x=t$ და მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

4) აღნიშნეთ $\arccos 2x=u$, $x^2dx=dv$.

15.26. 1) $\int\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}dx$; 2) $\int x\arcsin(x-1)\,dx$;

3) $\int\frac{\arccos x}{x^2}dx$; 4) $\int\arcsin^3\frac{x}{3}dx$.

მითითება. 1) აღნიშნეთ $\operatorname{arctg} 2x=u$, $\frac{dx}{x^2}=dv$.

2) აღნიშნეთ $\arcsin(x-1)=u$, $xdx=dv$.

3) აღნიშნეთ $\arccos x=u$, $\frac{dx}{x^2}=dv$.

4) ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის სამჯერ გამოყენება.

15.27. 1) $\int x^3\arccos\frac{1}{x}dx$; 2) $\int\frac{3x^2-1}{x\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x\,dx$;

3) $\int\operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})\,dx$; 4) $\int\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}\,dx$.

მითითება. 1) აღნიშნეთ $\arccos\frac{1}{x}=u$; $x^3\,dx=dv$;

2) აღნიშნეთ $\operatorname{arctg} x = u,\ \frac{3x^2 - 1}{x\sqrt{x}}dx = dv.$

3) აღნიშნეთ $\operatorname{arctg}(1 - \sqrt{x}) = u,\quad dx = dv.$

4) აღნიშნეთ $\operatorname{arctg}\sqrt{1 - x} = u,\quad dx = dv.$

15.28. 1) $\int \frac{\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x+1}\,dx$; 2) $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

3) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$; 4) $\int \frac{x^2 \arccos x\ \sqrt{x}}{(1-x^3)^2}\,dx.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) აღნიშნეთ $\sqrt{x} = t$ და შემდეგ მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით;

2) აღნიშნეთ $\arcsin x = t$ და შემდეგ მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

3) აღნიშნეთ $\operatorname{arc\,tg} x = t$ და შემდეგ მიღებული ინტეგრალი გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.

4) აღნიშნეთ $x^3 = t$. მიღებული ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენების შემდეგ დადის ინტეგრალზე დიფერენციალური ბინომიდან.

15.29. 1) $\int \frac{th x}{\sqrt{1 - th x}}\,dx$; 2) $\int \frac{sh x}{\sqrt{ch\,2x}}\,dx$;

3) $\int sh\,x \operatorname{arctg} sh\,x\,dx$; 4) $\int sh\,x \arcsin e^x\,dx.$

15.30. 1) $\int x f''(x)\,dx$; 2) $\int f'(2x)\,dx$;

3) $\int x^2 f'''(x)\,dx$; 4) $\int x f''(3x)\,dx.$

15.31. იპოვეთ $f(x)$, თუ:

1) $f'(x^2) = \frac{1}{x}$; 2) $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$;

3) $f'(x) = 1 + f^2(x)$; 4) $f'(x) = f(x),\quad f(x) \neq 0.$

15.32. მიიღეთ რეკურენტული ფორმულები $I_n\ (n \in N)$ ინტეგრალისათვის, თუ:

1) $I_n = \int x^n e^{ax}\,dx;\quad a \neq 0$; 2) $I_n = \int \ln^n x\,dx$;

3) $I_n=\int x^{\alpha}\ln^n x\,dx,\quad \alpha\neq-1;$ 4) $I_n=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+a}};\quad n>2;$

5) $I_n=\int\sin^n x\,dx,\ n>2;$ 6) $I_n=\int\cos^n x\,dx,\ n>2;$

7) $I_n=\int sh^n x\,dx,\ n>2;$ 8) $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x},\quad n>2.$

განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება

§ 16. განსაზღვრული ინტეგრალი

16.1. გამოიყენეთ განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობის თეორემა და განსაზღვრების საფუძველზე გამოთვალეთ ინტეგრალი

1) $\int\limits_0^3(2+x)\,dx;$ 2) $\int\limits_1^2 x^2\,dx;$

3) $\int\limits_0^1 e^x\,dx;$ 4) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2}.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) ფუნქცია $f(x)=2+x$ ინტეგრებადია [0; 3] სეგმენტზე რადგან იგი უწყვეტია ამ სეგმენტზე. ამიტომ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არ არის დამოკიდებული არც სეგმენტის დანაწილების წესზე და არც წერტილების შერჩევაზე.

დავყოთ [0;3] სეგმენტი n ტოლ ნაწილად

$$0,\ \frac{3}{n},\ \frac{6}{n},\dots,\ \frac{3(n-1)}{n},\ 3$$

წერტილებით და ξ_k წერტილებად ავიღოთ შესაბამისი სეგმენტის მარჯვენა ბოლო, ე. ი. $\xi_k=\frac{3k}{n}$. რადგან $f(\xi_k)=2+\frac{3k}{n}$ და $\Delta x_k=\frac{3}{n}$, ამიტომ

$$\int_0^3 (2+x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(2+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n} = 6+\lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= 6+\lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = 6+\frac{9}{2} = \frac{21}{2}.$$

4) [1; 2] სეგმენტი დაყავით n ნაწილად წერტილებით

$$1,\ 2^{\frac{1}{n}},\ 2^{\frac{2}{n}},\dots,2^{\frac{k-1}{n}},\ 2,$$

რომლებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. აიღეთ $\xi_k=2^{\frac{k}{n}}$, $k=1, 2,\dots, n$. ცხადია $\Delta x_k = 2^{\frac{k}{n}} - 2^{\frac{k-1}{n}} = 2^{\frac{k-1}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

16.2. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული

1) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$; 2) $F(x) = \int_1^x \sin t^2\,dt$;

3) $F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\sin t}\,dt$; 4) $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$, $(x\neq 0)$;

5) $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$; 6) $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2\,dt$ $(x>0)$.

ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 16.3—16.9):

16.3. 1) $\int_0^1 x^2\,dx$; 2) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$;

3) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

16.4. 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$; 2) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int\limits_0^3 e^x\, dx$.

16.5. 1) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $\int\limits_0^1 2^x\, dx$; 4) $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\, dx$.

16.6. 1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx$;

3) $\int\limits_0^1 \cos \frac{\pi}{3} x dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi^2} \sin \frac{x}{3\pi}\, dx$.

16.7. 1) $\int\limits_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\, dx$; 2) $\int\limits_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}\, dx$;

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

16.8. 1) $\int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}\, dx$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx$; 4) $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\, dx$.

16.9. 1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x|\,dx$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{2} |x-1|\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\,dx$ 4) $\displaystyle\int_{0}^{3} |x^2-3x+2|\,dx$.

16.10. 1) $\displaystyle\int_{0}^{2} x\,e^{x^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} x^2\cos x^3\,dx$; 4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.

16.11. 1) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x\,dx}{x^2+4}$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; 4) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

გამოთვალეთ ინტეგრალები ჩასმის ხერხით (№№ 16.9—16.19):

16.12. 1) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$; 2) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

3) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$; 4) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

16.13. 1) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

3) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$; 4) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

16.14. 1) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; 4) $\int\limits_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

16.15. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\,dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx$.

16.16. 1) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 2) $\int\limits_0^1 x\,(2-x^2)^{12}\,dx$;

3) $\int\limits_1^9 x\,\sqrt[3]{1-x}\,dx$; 4) $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$.

16.17. 1) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx$; 4) $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{x^2+2x+4}\,dx$.

16.18. 1) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$; 2) $\int_0^1 \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} + 1}\, dx$;

3) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx$; 4) $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x + 1}}$.

16.19. 1) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}$;

3) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\, dx$; 4) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\, dx$.

გამოთვალეთ ინტეგრალები ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით (№№ 16.20—16.24):

16.20. 1) $\int_0^1 x e^x\, dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$;

3) $\int_0^1 x e^{-x}\, dx$; 4) $\int_1^2 x \ln x\, dx$.

16.21. 1) $\int_1^e \ln x\, dx$; 2) $\int_1^2 x^2 \ln x\, dx$;

3) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x + 1}}\, dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$.

16.22. 1) $\int_1^e \ln^2 x dx$; 2) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx$;

3) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$; 4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\, dx$.

16.23. 1) $\int_0^1 \arccos x\, dx$; 2) $\int_1^3 \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$;

3) $\int_0^1 \arcsin \sqrt{x}\, dx$; 4) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx$.

16.24. 1) $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$;

3) $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\, dx$; 4) $\int_1^e x^2 \ln^2 x\, dx$.

16.25. გამოთვალეთ ინტეგრალები

1) $\int_0^2 f(x)\, dx$, თუ $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{როცა} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & \text{როცა} \quad 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

2) $\int_0^1 f(x)\, dx$, თუ $f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t\dfrac{1-x}{1-t}, & \text{როცა} \quad t \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

3) $\int_0^1 x|x-t|\, dx$; 4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\sin x} + x\sqrt{\cos x} + \cos x) dx$;

5) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x^2} \sin^3 x\, dx$;

6) $\int\limits_{-1}^{1}\left(ch\, x \operatorname{tg} x - x\sqrt[3]{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{\pi}{4} x}\right) dx;$

7) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 \operatorname{sh} x \cos^2 x\, dx;$ 8) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x^9 - x + 2}{\cos^2 x}\, dx.$

16.26. აჩვენეთ, რომ, თუ $m, n \in z$, მაშინ

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0, \quad m \neq n;$

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0, \quad m \neq n;$

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0;$

4) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi.$

16.27. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

1) $\int\limits_{0}^{a} x^3 f(x^2)\, dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{a^2} x f(x)\, dx, \quad a > 0;$

2) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{a}^{b} f(a + b - x)\, dx;$

3) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = (b - a)\int\limits_{0}^{1} f(a + (b - a)x)\, dx;$

4) $\int\limits_0^a x^r f(x^r)\,dx = \frac{1}{r}\int\limits_0^{a^r} x^{2/r} f(x)\,dx.$

16.28. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0;\ 1]$ სეგმენტზე, მაშინ

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx;$

2) $\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) გამოიყენეთ ჩასმა $x=\frac{\pi}{2}-t$; 2) გამოიყენეთ ჩასმა $x=\pi-t$.

16.29. ვთქვათ $\varphi(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია $[a;\ b]$ სეგმენტზე, ამასთან $A\leqslant\varphi(x)\leqslant B$, $A\leqslant g(x)\leqslant B$, როცა $a\leqslant x\leqslant b$. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $f(x)$ უწყვეტია $[A;\ B]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t)\,dt, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

ფუნქცია წარმოებადია $[a;\ b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\cdot g'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

16.30. ვთქვათ $f(x)$ უწყვეტი დადებითი ფუნქციაა და

$$\varphi(x) = \frac{\int\limits_0^x t f(t)\,dt}{\int\limits_0^x f(t)\,dt}.$$

აჩვენეთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $x\geqslant 0$.

16.31. გამოთვალეთ ზღვრები

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \cos t^2\,dt}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}$.

16.32. აჩვენეთ, რომ

$$\int\limits_0^x e^{t^3}dt \sim \frac{e^{x^3}}{2x},\quad \text{როცა}\quad x\to+\infty.$$

16.33. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, თუ

1) $s_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{2n}$;

2) $s_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dots+\dfrac{n-1}{n^2}$;

3) $s_n=n\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\dots+\dfrac{1}{2n^2}\right)$;

4) $s_n=\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\dots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

5) $s_n=\dfrac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$;

6) $s_n=\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) რადგანაც

$$s_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}},$$

ამიტომ s_n არის $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი [0; 1] სეგმენტზე ([0; 1] სეგმენტი დაყოფილია n ტოლ ნაწილად, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობები აღებულია დაყოფის წერტილებზე). ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

2) s_n წარმოადგინეთ სახით $s_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{i}{n}$. საიდანაც ჩანს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x dx.$$

3) s_n წარმოადგინეთ სახით $s_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}$, საიდანაც

ვამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int\limits_0^1 \sin\pi x\, dx.$

5) $s_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x^p\, dx.$$

6) $s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx.$$

16.34. აჩვენეთ, რომ თუ

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx, \quad n \geqslant 2,$$

მაშინ

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\, dx.$$

ე. ი. $I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$, საიდანაც $I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$.

აქედან, რადგანაც

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1,$$

ამიტომ

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k\cdot(2k-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

16.35. გამოთვალეთ ინტეგრალები

$$1)\quad I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx; \qquad 2)\quad I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ორივე ინტეგრალში გამოიყენეთ ჩასმა $x=\sin t$.

16.36. აჩვენეთ, რომ, თუ

$$I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx,\quad n\in N,$$

მაშინ

$$I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}.$$

16.37. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0;\ +\infty[$ შუალედზე და

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx=A.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ჩასმა $nx=t$ და მიღებული ზღვარი გამოთვალეთ ლოპიტალის* წესით.

16.38. დაამტკიცეთ, უტოლობები

$$1)\quad \frac{1}{10\sqrt{2}}<\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx<\frac{1}{10},$$

$$2)\quad 0<\int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{x+20}<0{,}01.$$

$$3)\quad 1<\int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx<1+\frac{1}{42};$$

---

* გ. ლოპიტალი (1661—1704) — ფრანგი მათემატიკოსი.

4) $1-\dfrac{1}{n}<\displaystyle\int\limits_0^1 e^{-x^n}\,dx<1,\quad n>1;$

5) $0<\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{x}\,dx<\ln 3;$

6) $\sin 1<\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\cos x}{1+x^2}\,dx<2\sin 1.$

16.39. $F(x)$ ფუნქციის სიმეტრიული წარმოებული x_0 წერტილში $DF(x_0)$ განისაზღვრება ტოლობით

$$DF(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}.$$

დაამტკიცეთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a;b]$ სეგმენტზე და $x_0\in\,]a;b[$ წარმოადგენს მისი პირველი გვარის წყვეტის წერტილს, მაშინ

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$$

ფუნქცია არ არის წარმოებადი x_0 წერტილში, მაგრამ ამ წერტილში აქვს სიმეტრიული წარმოებული და

$$DF(x_0)=\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ ტოლობით

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}-\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2h}\left\{\int\limits_{x_0}^{x_0+h}[f(x)-f(x_0+)]\,dx+\int\limits_{x_0-h}^{x_0}[f(x)-f(x_0-)]\,dx\right\}.$$

16.40. ვთქვათ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a;\, b]$ სეგმენტზე, ხოლო F ფუნქციას ამ სეგმენტზე აქვს წყვეტის წერტილების სასრული რაოდენობა $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ამასთან ყველა ისინი პირველი გვარისაა. თუ $[a;\, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე $F(x)$ ფუნქცია წარმოებადია გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობა წერტილებისა და $F'(x) = f(x)$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) - \sum_{k=1}^{n} [F(x_k+) - F(x_k-)].$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ ტოლობებით

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_n}^{b} f(x)\,dx + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}} \int\limits_{x_{k-1}+\varepsilon}^{x_k-\delta} f(x)\,dx.$$

§ 17. არასაკუთრივი ინტეგრალები

1. არასაკუთრივი ინტეგრალები უსასრულო საზღვრით.

გამოთვალეთ ინტეგრალები ან აჩვენეთ მათი განშლადობა (№№ 17.1—17.7):

17.1. 1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$; 4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.

17.2. 1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} e^{-3x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin 2x\,dx$; 4) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x+1}$.

17.3. 1) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$; 2) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$;

3) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$; 4) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{\alpha}}$.

17.4. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x + 1}{x^2 + 1}\, dx$.

17.5. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$;

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} x \sin x\, dx$; 4) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

17.6. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1 + 2x}{x^2 (1 + x)}\, dx$; 2) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$;

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$.

17.7. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + x)^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^5 + x^{10}}}$;

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2}\, dx$; 4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^{3/2}}\, dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 2)

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=-\frac{1}{5}\int_1^{+\infty}\frac{d\left(\frac{1}{x^5}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^{10}}+\frac{1}{x^5}+1}}.$$

3) აღნიშნეთ $u=\ln x$, $dv=\dfrac{xdx}{(1+x^2)^2}$ და გამოიყენეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.

4) გამოიყენეთ ჩასმა $t=\operatorname{arc\,tg} x$.

დაადგინეთ კრებადია თუ განშლადი ინტეგრალები (№№ 17.8—17.12):

17.8. 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{x^4}\,dx;$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3+1}};$ 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx.$

17.9. 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}};$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1};$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}};$ 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+1}.$

17.10. 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt[4]{x}}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1+x\sqrt[3]{x}}\,dx;$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sin^2 x};$ 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+x)}{x}\,dx.$

17.11. 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2\sin^2 x};$

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 4) ცხადია

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx > \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$$

და $e^{-\frac{1}{x^2}} \geqslant e^{-1}$, როცა $x \geqslant 1$.

17.12. 1) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}\ln x}$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{4}{x^2}}\right)dx$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}dx, \quad n \geqslant 0, \quad a \neq 0.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) რადგან $\frac{1}{x^{\alpha}\ln x} < \frac{1}{x^{\alpha}}$, ამიტომ მოცემული ინტეგრალი კრებადია როცა $\alpha > 1$. თუ $\alpha = 1$, მაშინ ინტეგრალი განშლადია (იხ. მაგალითი 17.2. 3)). თუ $\alpha < 1$, მაშინ $\frac{1}{x^{\alpha}\ln x} > \frac{1}{x\ln x}$, ამიტომ მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

2) გამოიყენეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.

3) საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ კრებადია

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{4}{x^2}}\right)dx.$$

გვაქვს

$$\int_1^{+\infty}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}-e^{-\frac{4}{x^2}}\right)dx=\int_1^{+\infty} e^{-\frac{4}{x^2}}\cdot\frac{e^{\frac{3}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx.$$

რადგან

$$\frac{e^{-\frac{4}{x^2}}}{x^2} \quad \text{და} \quad \frac{e^{\frac{3}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}$$

შემოსაზღვრული ფუნქციებია, ამიტომ მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

4) შემოვიღოთ აღნიშვნა $f(x)=\cos ax$, $g(x)=\frac{1}{1+x^n}$. ცხადია, რომ $g(x)$ უწყვეტად წარმოებადია და $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, როცა $n>0$. ხოლო

$$\left|\int_0^{x_0}\cos at\,dt\right|\leqslant\frac{2}{|a|},$$

ამიტომ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის დირიხლეს ნიშნის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

გამოიკვლიეთ აბსოლუტურ და პირობით კრებადობაზე ინტეგრალები (№№ 17.13—17.15):

17.13. 1) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x^4\,dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\cos x^6\,dx$;

3) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}\,dx$; 4) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}\,dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) $x^2=t$ აღნიშვნით მოცემული ინტეგრალი დაიყვანება ფრენელის ინტეგრალზე (იხ. მეოთხე თავის § 13-ის მაგალითი 3).

3) $f(x)=\sin x$ და $g(x)=\frac{1}{\ln x}$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ დირიხლეს თეორემის პირობებს.

17.14. 1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha}\sin x}{x^3+1}\,dx;$

3) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 x\cdot\cos x}{x}\,dx;$ 4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}x^2\cos(e^x)\,dx.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) შემოვიღოთ აღნიშვნები $f(x)=\cos x$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$. ცხადია, რომ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, ხოლო

$$\left|\int\limits_1^{x} f(t)\,dt\right|\leqslant 2,$$

ამიტომ დირიხლეს ნიშნის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია. რადგანაც $|\cos x|\geqslant\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, ამიტომ

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{1+x}dx\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{1+x}\,dx.$$

ვინაიდან $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{1+x}\,dx$ კრებადია, ხოლო $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ განშლადია,

ამიტომ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{1+x}\,dx=+\infty.$

2) ვინაიდან

$$\frac{x^{\alpha}\,|\sin x|}{x^3+1}<\frac{|\sin x|}{x^{3-\alpha}}\leqslant\frac{1}{x^{3-\alpha}},$$

ამიტომ, როცა $\alpha<2$ მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია. დავუშვათ $2\leqslant\alpha<3$. ვინაიდან

$$\frac{x^{\alpha}\,|\sin x|}{x^3+1}\geqslant\frac{x^{\alpha}\sin^2 x}{x^3+1}\geqslant\frac{x^{\alpha}\sin^2 x}{2x^3}=\frac{x^{\alpha}(1-\cos 2x)}{4\,x^3}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^{3-\alpha}}-\frac{\cos 2x}{x^{3-\alpha}}\right),$$

ამიტომ

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \mid \sin x \mid}{x^3+1}\, dx = +\infty.$$

რადგანაც $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{x^3+1} = 0$, როცა $2 \leqslant \alpha < 3$ და

$$\left| \int_0^x \sin t\, dt \right| \leqslant 2,$$

ამიტომ დირიხლეს ნიშნის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

ვთქვათ ახლა $\alpha \geqslant 3$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x) = \sin x, \ g(x) = \frac{x^\alpha \sin x}{x^3+1}.$$

ვინაიდან

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad \alpha = 3, \\ +\infty & \text{როცა} \quad \alpha > 3 \end{cases}$$

და

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

განშლადია, ამიტომ მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

3) $f(x) = \cos x$ და $g(x) = \dfrac{\ln^3 x}{x}$ ფუნქციებისათვის სრულდება დირიხლეს თეორემის პირობები, ამიტომ მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

ვინაიდან

$$\frac{\ln^2 x \cdot \mid \cos x \mid}{x} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln^2 x}{x} + \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \frac{\ln^2 x}{x},$$

ამიტომ

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x \cdot \mid \cos x \mid}{x} dx = +\infty.$$

4) თუ გამოვიყენებთ ჩასმას $e^x = t$, მივიღებთ

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t \cdot \cos t}{t}\, dt.$$

17.15. 1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha + \ln x} dx$; 2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha \sin x}{\ln x} dx$;

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x^\alpha \ln x} dx$; 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x + x^2)}{x^\alpha} dx$.

მითითება. 1) ვინაიდან

$$\frac{|\cos x|}{x^\alpha + \ln x} < \frac{1}{x^\alpha},$$

ამიტომ, როცა $\alpha > 1$, მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

დავუშვათ $\alpha \leqslant 1$. რადგან

$$\frac{|\cos x|}{x^\alpha + \ln x} \geqslant \frac{1 + \cos 2x}{2(x^\alpha + \ln x)} > \frac{1}{4x^\alpha} + \frac{\cos 2x}{2(x^\alpha + \ln x)},$$

ამიტომ

$$\int_2^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^\alpha + \ln x} dx = +\infty.$$

ვინაიდან $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha + \ln x} = 0$ და

$$\left| \int_2^x \cos t\, dt \right| \leqslant 2,$$

ამიტომ დირიხლეს ნიშნის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

2) ვინაიდან

$$\frac{(x+1)^\alpha |\sin x|}{\ln x} \leqslant \frac{(x+1)^\alpha}{\ln x} \leqslant \frac{2^\alpha x^\alpha}{\ln x},$$

ამიტომ, როცა $\alpha < -1$, მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია

დავუშვათ $-1 \leqslant \alpha < 0$. რადგან

$$\frac{(x+1)^{\alpha}|\sin x|}{\ln x} \geqslant \frac{(x+1)^{\alpha}}{2\ln x} - \frac{(x+1)^{\alpha}\cos 2x}{2\ln x},$$

ამიტომ

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{(x+1)^{\alpha}|\sin x|}{\ln x}\,dx = +\infty.$$

ვინაიდან $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)^{\alpha}}{\ln x} = 0$, როცა $\alpha \leqslant 0$ და

$$\left|\int_{2}^{x} \sin t\,dt\right| \leqslant 2,$$

ამიტომ დირიხლეს ნიშნის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

ვთქვათ ახლა $\alpha > 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{(x+1)^{\alpha}\sin x}{\ln x}.$$

რადგან

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

და

$$\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$$

განშლადია, ამიტომ მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

3) გამოიყენეთ ჩასმა $x = t^2$ და მიღებული ინტეგრალისათვის ჩაატარეთ წინა მაგალითის ანალოგიური მსჯელობა.

4) როცა $\alpha > 1$ ცხადია მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია. დავუშვათ $-1 < \alpha \leqslant 1$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x) = (2x+1)\sin(x+x^2), \quad g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(2x+1)}.$$

რადგან $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ და

$$\left|\int_{1}^{x} (2t+1)\sin(t+t^2)\,dt\right| \leqslant 2,$$

ამიტომ დირიხლეს ნიშნის ძალით მოცემული ინტეგრალი კრებადია.
ვინაიდან

$$\frac{|\sin(x+x^2)|}{x^\alpha} \geqslant \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2(x+x^2)}{2x^\alpha},$$

ამიტომ

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x+x^2)|}{x^\alpha}\,dx = +\infty.$$

თუ $\alpha = -1$ გვაქვს

$$\int_1^{+\infty} x\sin(x+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(2x+1)\sin(x+x^2)\,dx - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\sin(x+x^2)dx.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში პირველი ინტეგრალი ცხადია, რომ განშლადია, ხოლო მეორე ინტეგრალი კრებადია (იხ. წინა შემთხვევა, $\alpha=0$).

ვთქვათ ახლა $\alpha < -1$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x) = \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}, \quad g(x) = x\sin(x+x^2),$$

რადგან

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

და

$$\int_1^{+\infty} x\sin(x+x^2)\,dx$$

განშლადია, ამიტომ მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

2. არასაკუთრივი ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან.

გამოთვალეთ ინტეგრალები ან აჩვენეთ მათი განშლადობა (№№ 17.16—17.19):

17.16. 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

17.17. 1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\, dx$; 2) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} e^{1/x}\, dx$;

$\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$; 4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

17.18. 1) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 2) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\ln x}$;

3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x}\, dx$; 4) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\ln^{\alpha} x}$.

17.19. 1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; 2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\, dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^3\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$; 6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\, dx$.

დაადგინეთ კრებადია თუ განშლადი ინტეგრალები (№№ 17.20—17.29):

17.20. 1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$; 4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

17.21. 1) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\ln x}$; 2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\ln(1+x)}$;

3) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\, dx$.

17.22. 1) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{\sin x}-1}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x\,(e^x-e^{-x})}}$;

3) $\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\, dx$; 4) $\int\limits_0^\pi \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$.

17.23. 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}$; 2) $\int\limits_0^\pi \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x\,(1-x)^3}}\, dx$; 4) $\int\limits_0^\pi \frac{\ln \sin x}{x\sqrt{\sin x}}\, dx$.

17.24. 1) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} dx$; 2) $\int\limits_0^\pi \frac{\operatorname{sh} x}{e^{x^2}-\cos x}\, dx$;

3) $\int\limits_0^1 \ln|1-4\sin^2 x|\, dx$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$.

17.25. 1) $\int\limits_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta\, dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha x \cos^\beta x}$;

3) $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^\beta \frac{1}{x}\, dx$; 4) $\int\limits_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \ln x\, dx$.

17.26. 1) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$;

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$; 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\, dx$.

17.27. 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx;$

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\cos\frac{2}{x} - 1\right) dx;$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^\alpha x}{x^\beta}\, dx.$

17.28. 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{x^2-1}};$ 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x};$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx;$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\, dx.$

17.29. 1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}\, dx}{x^\alpha \ln x};$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx;$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\, dx}{1+x^\beta}, \quad (\beta \geqslant 0);$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}.$

გამოვიკვლიოთ აბსოლუტურ და პირობით კრებადობაზე ინტეგრალები (№№ 17.30—17.32):

17.30. 1) $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{\cos \ln x}{x \ln x}\, dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin \ln x}{x \ln^\alpha x}\, dx;$

3) $\displaystyle\int_0^{1} (1-x)^\alpha \sin\frac{1}{1-x}\, dx;$ 4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^\alpha}{x^2+1} \sin\frac{1}{x}\, dx.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) ცვლადთა გარდაქმნით $\ln x = t$, მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{\cos t}{t}\, dt,$$

რომელიც პირობით კრებადია.

2) ცვლადთა გარდაქმნით $\ln x=t$, მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტერვალზე

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,dt,$$

რომელიც პირობით კრებადია, როცა $0<\alpha\leqslant 1$ და აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>1$.

3) ცვლადთა გარდაქმნით $1-x=\frac{1}{t}$, მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2+\alpha}}\,dt.$$

4) ჩასმით $\frac{1}{x}=t$, მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha}(t^2+1)}\,dt.$$

17.31. 1) $\int_{0}^{1}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\cdot\frac{dx}{x^{\alpha}}$; 2) $\int_{0}^{0,5}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\cos\frac{1}{x^2}\,dx$;

3) $\int_{0}^{1}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}-1}\sin\frac{1}{x}\,dx$; 4) $\int_{-1}^{1}\sin\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{(1-x^2)^{\alpha}}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) ჩასმით $\frac{1}{\sqrt{x}}=t$, მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos(t-1)}{t^{3-2\alpha}}\,dt.$$

2) ჩასმით $\frac{1}{x^2} = t$ მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგ-
რალზე

$$\int_4^{+\infty} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}\,(\sqrt{t}-1)^\alpha}\,dt.$$

3) ჩასმით $\frac{1}{x} = t$ მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგ-
რალზე

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}\,(e^{1/t}-1)}\,dt.$$

რადგანაც $e^{1/t} - 1 \sim \frac{1}{t}$, როცა $t \to +\infty$. ამიტომ საკმარისია შევის-
წავლოთ

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

ინტეგრალის კრებადობის საკითხი.

4) ჩასმით $\frac{1+x}{1-x} = t$ მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგ-
რალზე

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{2-2\alpha}\,t^\alpha}\,dt.$$

17.32. 1) $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg} x \cdot \cos\frac{1}{x}\,dx$; 2) $\int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^2}\,dx$;

3) $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{(\sqrt{x}-x)^\alpha}\,dx$; 4) $\int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) ჩასმით $\frac{1}{x}=t$ მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha+2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{t}dt.$$

რადგანაც $\operatorname{arctg}\frac{1}{t}\sim\frac{1}{t}$, როცა $t\to+\infty$, ამიტომ საკმარისია შევისწავლოთ

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha+3}}dt$$

ინტეგრალის კრებადობის საკითხი.

2. ჩასმით $x^{\alpha}=t$ მოცემული ინტეგრალი, როცა $\alpha>0$ მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^1\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{\alpha}+1}}dt,$$

ხოლო, როცა $\alpha<0$ მიიყვანება ინტეგრალზე

$$-\frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{\alpha}+1}}dt.$$

3) ჩასმით $\frac{1}{x}=t$ მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}(\sqrt{t}-1)^{\alpha}}dt.$$

4) ჩასმით $\frac{1}{x}=t$ მოცემული ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int_1^{+\infty}\frac{(t-1)^{\alpha}\sin t}{t^{\alpha+1}}dt.$$

§ 18. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული გამოყენება.

1. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა.

გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (№№ 18.1—18.17):

18.1. 1) $y=2x^2,\ y=0,\ x=4$; 2) $y=\dfrac{4}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=3$;

3) $y=x^3,\ y=0,\ x=1,\ x=3$ 4) $y=x^4,\ y=0,\ x=1,\ x=2$.

18.2. 1) $y=\dfrac{10}{x^2},\ y=0,\ x=1,\ x=2$; 2) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ y=0,\ x=1,\ x=4$.

3) $y=e^{-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1$; 4) $y=e^{x},\ y=0,\ x=1,\ x=\ln 7$;

18.3. 1) $y=2^x,\ y=0,\ x=0,\ x=4$; 2) $y=\sin x,\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant \pi$;

3) $y=4\cos 2x,\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}$;

4) $y=\dfrac{4}{\cos^2 x},\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

18.4. 1) $y=4x-x^2,\ y=0$; 2) $y=6x-x^2,\ y=0$;

3) $y=2+x-x^2,\ y=0$; 4) $y=7x-3x^2-2,\ y=0$.

18.5. 1) $y=\ln x,\ y=0,\ x=e$;

2) $y=|\ln x|,\ y=0,\ x=\dfrac{1}{e},\ x=e$;

3) $y=\operatorname{ch} x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$;

4) $y=\operatorname{tg} x,\ y=0,\ x=\dfrac{\pi}{3}$.

18.6. 1) $y=x,\ y=2x,\ x=0,\ x=4$; 2) $y=x^4,\ y=1$;

3) $y=x^2;\ y=2x$; 4) $y=x^2+4x,\ y=x+4$.

18.7. 1) $y=2x-x^2,\ y=x$; 2) $y=x^2+2x,\ y=x+2$;

3) $y=x^2-3x+4,\ y=x+1$; 4) $y=x^2+4x,\ y=x+4$.

18.8. 1) $y=x^2,\ y=2x-x^2$; 2) $y=\dfrac{1}{4}x^2,\ y=3x-\dfrac{1}{2}x^2$;

3) $y=x^2-2x+2,\ y=2+4x-x^2$;

4) $y=-x^2,\ y=x^2-2x-4$.

18.9. 1) $y^2=x,\ x=4$; 2) $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$;

3) $y=\sqrt{x},\ y=x-2,\ x=0$; 4) $y^2=4-x,\ y^2=12+3x$.

18.10. 1) $y^3 = 3x,\ x^2 = 3y;$ 2) $y = x^2,\ y = \sqrt{x};$

3) $y = x^2,\ y = \frac{1}{3}x^3;$ 4) $y = x^2,\ y = \sqrt[3]{x}.$

18.11. 1) $y = \frac{5}{x},\ y = 6 - x;$ 2) $y = \frac{6}{x},\ y = 7 - x;$

3) $y = \frac{6}{x+5},\ y = |x|,\ x \geqslant -2;$ 4) $y = \frac{4}{x^2},\ y = 7 - 2x.$

18.12. 1) $y = x + 1,\ y = 2 - x,\ y = 0;$

2) $y = 2 - 2x,\ y = x - 1,\ y = 2;$

3) $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{10}{3} - x,\ x \geqslant 1;$

4) $y = x - x^2,\ y = x\sqrt{1 - x}.$

18.13. 1) $y = x - \frac{\pi}{2},\ y = \cos x,\ x = 0;$

2) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4};$

3) $y = x,\ y = \frac{\pi}{2}\sin x,\ x \geqslant 0;$

4) $y = \sin^2 x,\ y = x\sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

18.14. 1) $y = \operatorname{tg} x,\ y = \frac{2}{3}\cos x,\ x = 0;$

2) $y = \ln(1 + x);\ y = -xe^{-x},\ x = 1;$

3) $y = 6x^2 - 5x + 1,\ y = \cos \pi x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2};$

4) $y = \sin 2x,\ y = \sin x,\ \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi.$

18.15. 1) $y = \frac{1}{2}x^2,\ y = \frac{1}{1 + x^2};$

2) $y = \sqrt{3}\,x^2,\ y = \sqrt{4 - x^2};$

3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1;$

4) $y^2 + x^2 = 2,\ y^2 = 2x - 1,\ x \geqslant \frac{1}{2}.$

18.16. 1) $y = x + 1,\ x = \sin \pi y,\ y = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1;$

2) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x},\ y = -x^2,\ x = 1;$

3) $x^2+y^2=8, \quad y=\frac{1}{2}x^2, \quad y\geqslant 0;$

4) $y=\frac{1}{2}x^2, \quad x^2+y^2=4y, \quad y>\frac{1}{2}x^2.$

18.17. 1) $y=\frac{x^2}{6}; \quad y=\frac{27}{x^2+9};$

2) $x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2-4y=4, \quad y=2;$

3) $y^2=2px, \quad y^2=\frac{4}{p}(x-p)^3, \quad p>0;$

4) $y=\frac{1}{1+x^2}, \quad y=\frac{x}{1+x^2}, \quad x=0.$

გამოთვალეთ პარამეტრული სახით მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (№№ 18.18; 18.19):

18.18. 1) $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t; \end{cases}$ (წრეწირი); 2) $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=4\sin t, \end{cases}$ (ელიფსი);

3) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, (ციკლოიდა), და $y=0$;

4) $\begin{cases} x=a\sin^3 t \\ y=b\cos^3 t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, (ასტროიდა).

18.19. 1) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (წრეწირის ევოლვენტა) და

$x=a; \ -2\pi a\leqslant y\leqslant 0;$

2) $\begin{cases} x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t, \end{cases}$ $c^2=a^2-b^2$, (ელიფსის ევოლუტა), $0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

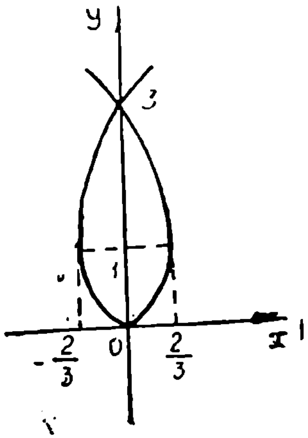
3) $\begin{cases} x=a\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ y=\frac{2at}{(1+t^2)^2}; \end{cases}$ (ლოკოკინა);

4) $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ (კარდიოიდი).

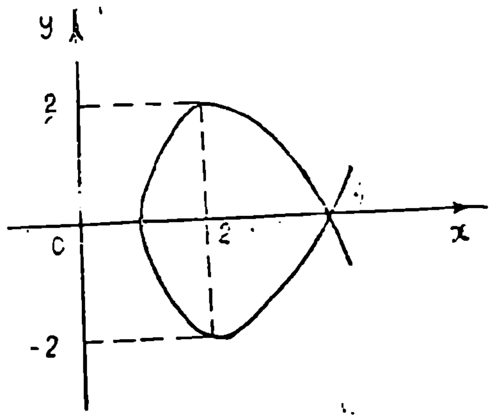
გამოთვალეთ პარამეტრული სახით მოცემული წირის მარყუჟით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (№№ 18.20; 18.21):

18.20. 1) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t(3 - t^2) \\ y = t^2; \end{cases}$ (ნახ. 69); 2) $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 - 3t; \end{cases}$ (ნახ. 70);

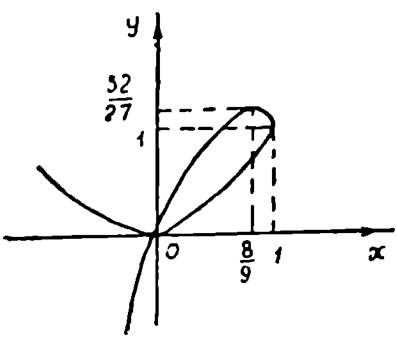
3) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3; \end{cases}$ (ნახ. 71); 4) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t. \end{cases}$ (ნახ 72).



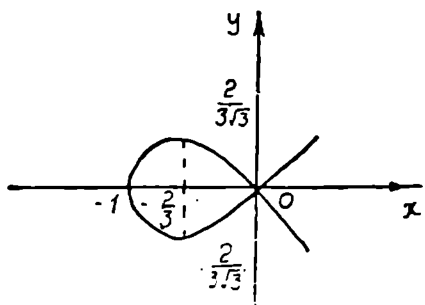
ნახ. 69



ნახ. 70



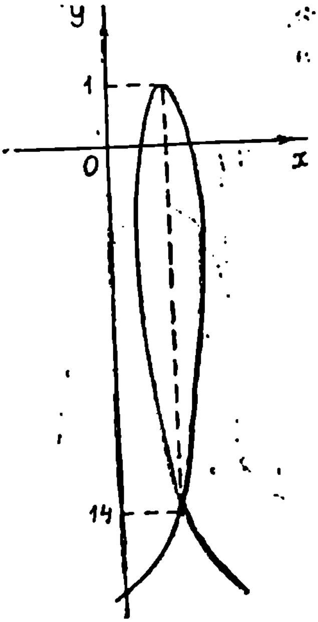
ნახ. 71



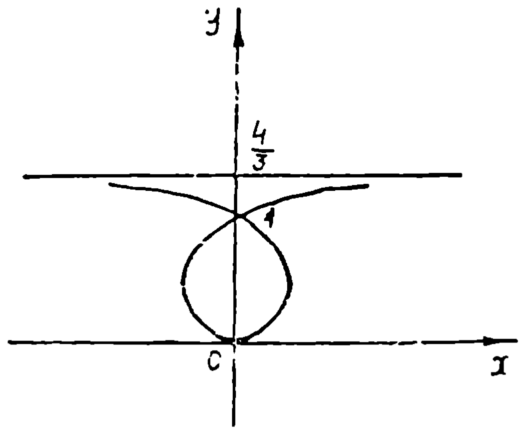
ნახ. 72

18.21. 1) $\begin{cases} x = 1 + t - t^3 \\ y = 1 - 15t^2; \end{cases}$ (ნახ. 73); 2) $\begin{cases} x = \frac{t(1 - t^2)}{1 + 3t^2} \\ y = \frac{4t^2}{1 + 3t^2}; \end{cases}$ (ნახ. 74);

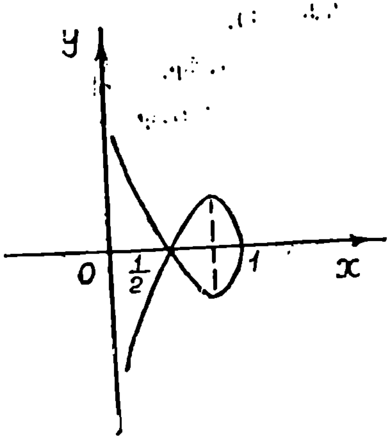
3) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$; (ნახ. 75); 4) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin t, \end{cases}$ (ნახ. 76).



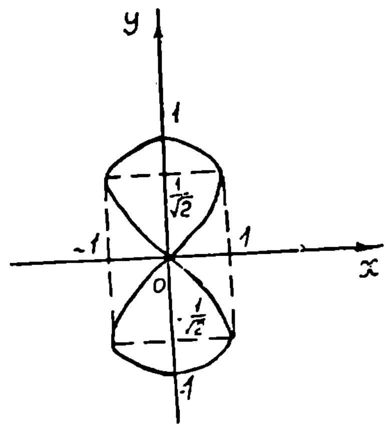
ნახ. 73



ნახ. 74



ნახ. 75



ნახ. 76

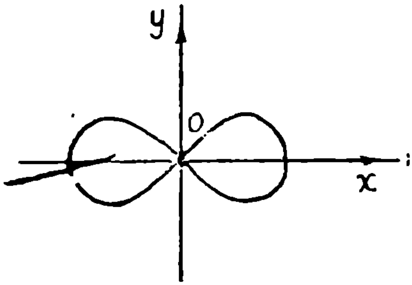
გამოთვალეთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (№№ 18.22—18.24):

18.22. 1) $r=a\cos\varphi$ (წრეწირი);

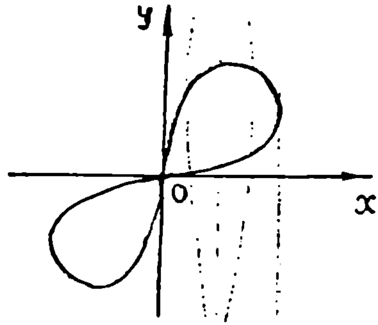
2) $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (ბერნულის ლემნისკატა), (ნახ. 77);

3) $r^2=a^2\sin 2\varphi$ (ლემნისკატა), (ნახ. 78);

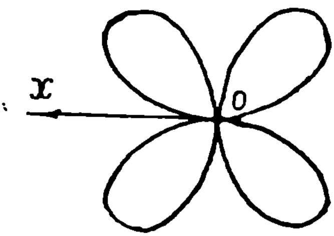
4) $r=a\sin 2\varphi$ (ოთხფოთოლა), (ნახ. 79).



ნახ. 77



ნახ. 78



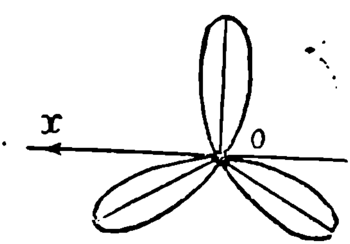
ნახ. 79

18.23. 1) $r=a\sin 3\varphi$ (სამფოთოლა) (ნახ. 80);

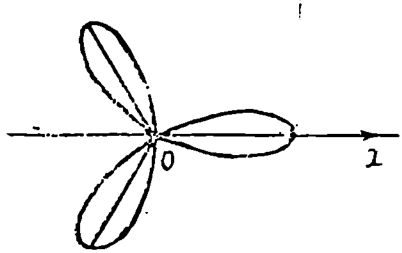
2) $r=a\cos 3\varphi$ (სამფოთოლა) (ნახ. 81);

3) $r^2=a^2\cos 4\varphi$;

4) $r=3+2\cos\varphi$.



ნახ. 80



ნახ. 81

18.24. 1) $r^2 = 1 - \varphi^2$; 2) $r = \dfrac{1}{\varphi}$ და $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$, $0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

3) $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$ (პარაბოლა); $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$;

4) $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$, $0 < \varepsilon < 1$, (ელიფსი).

18.25. იპოვეთ სექტორის ფართობი:

1) $r = \dfrac{a}{2\pi}\varphi$ (არქიმედის* ხვია) $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

2) $r = \dfrac{a}{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

3) $r = ae^{\varphi}$, (ლოგარითმული ხვია), $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

4) $r = \dfrac{a}{\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

18.26. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი:

1) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, (ლემნისკატა);
2) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$;
3) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$;
4) $x^3 + y^3 = 3axy$, (დეკარტის ფოთოლი).

18.27. გამოთვალეთ იმ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, რომლის პოლარული კოორდინატები მოცემულია პარამეტრული სახით:

1) $r = \sqrt{1 - t^2}$, $\varphi = \arcsin t + \sqrt{1 - t^2}$;

2) $r = a\sqrt{1 + t^2}$, $\varphi = t - \operatorname{arctg} t$, $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$;

3) $r = \dfrac{a}{\sqrt{1 + t^2}}$, $\varphi = t - \operatorname{arctg} t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;

4) $r = \dfrac{2at}{1 + t^2}$, $\varphi = \dfrac{\pi t}{1 + t}$.

---

* არქიმედი (დაახლოებით 287—212 ძ. წ. ა.) — ბერძენი მეცნიერი.

გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (№№ 18.28; 18.29):

18.28. 1) $(y-x+2)^2=9y, \quad x=0, \quad y=0;$

2) $a^2y^2=x^2(a^2-x^2);$

3) $a^4y^2=(a^2-x^2)^3;$

4) $x^4-ax^3+a^2y^2=0;$

5) $x^4y^2=a^5(x-a), \quad x=2a;$

6) $y^2=\sin^2 x\cos x, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

18.29. 1) $x^2+y^2=2x, \quad x^2+y^2=6x, \quad \sqrt{3}\,y+x=0, \quad y-\sqrt{3}\,x=0;$

2) $x^2+y^2=16, \quad x^2+y^2=4y, \quad \sqrt{3}y-x=4\sqrt{3}, \quad y+\sqrt{3}x=4;$

3) $x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=2\sqrt{3}x, \quad \sqrt{3}\,y-x=0, \quad x>0, \quad y>0,$ $x^2+y^2\leqslant 9;$

4) $x^2+y^2=6, \quad x^2+y^2=2x+2y, \quad x^2+y^2\geqslant 6.$

18.30. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2-2x+3$ პარაბოლით, საკოორდინატო ღერძებითა და პარაბოლისადმი (3;6) წერტილში გავლებული მხებით.

18.31. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2+4x+9$ პარაბოლით და ამ პარაბოლისადმი (—3; 6) და (0; 9) წერტილებში გატარებული მხებებით.

18.32. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=4x-x^2+1$ პარაბოლით და ამ პარაბოლისადმი (0; 1) და (3; 4) წერტილებში გატარებული მხებებით.

18.33. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $(y-2)^2=x-1$ პარაბოლით, Ox ღერძით და პარაბოლისადმი (2; 3) წერტილში გატარებული მხებით.

18.34. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსით, Ox ღერძით და ელიფსისადმი $\left(\frac{a}{2};\ \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ წერტილში გატარებული მხებით.

18.35. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2-y^2=9$ ჰიპერბოლით, Ox ღერძით და კოორდინატთა სათავეზე და (5;4) წერტილზე გამავალი წრფით.

18.36. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=(x-1)^5+1$ წირით, ox ღერძით და ამ წირისადმი $10x-2y-5=0$ წრფის პარალელურად გავლებული მხებით.

18.37. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ პარაბოლით და ამ პარაბოლისადმი (1; 1) წერტილში გავლებული ნორმალით.

18.38. იპოვეთ იმ ფიგურების ფართობთა შორის უმცირესი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^2=2x$ პარაბოლით და ამ პარაბოლის ნორმალით.

18.39. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია მოცემული წირით და მისი ასიმპტოტით:

1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; 2) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $y^2=\dfrac{x^3}{2-x}$; 4) $xy^2=8-4x$;

5) $y=x^2e^{-x^2}$; 6) $y^2=\dfrac{x^5}{2-x}$.

18.40. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^2=\dfrac{x^4}{1-x^2}$ წირით და მისი ასიმპტოტებით.

2. წირის რკალის სიგრძის გამოთვლა.

იპოვეთ მოცემული წირის რკალის სიგრძე (№№ 18.41—18.55):

18.41. 1) $y=2x^{3/2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $y=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

3) $y=\dfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 3$;

4) $y=\ln x$, $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$.

18.42. 1) $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln x}{4}$, $1\leqslant x\leqslant 3$;

2) $y=e^x$, $0\leqslant x\leqslant\ln 7$; 3) $y=\ln(x^2-1)$, $2\leqslant x\leqslant 5$;

4) $y=2\sqrt{1+e^{x/2}}$, $\ln 9\leqslant x\leqslant\ln 64$.

18.43. 1) $y=2\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $y=\ln\sin x$, $\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$;

3) $y=\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}$; 4) $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1$;

18.44. 1) $y = \frac{4}{5} x^{5/4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 9;$

2) $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12}; \quad -11 \leqslant x \leqslant -3;$

3) $x = \frac{x}{4}\sqrt{2-x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$

4) $y = \frac{3}{2}\left(x^{1/3} - \frac{1}{5} x^{5/3}\right), \quad 1 \leqslant x \leqslant 8.$

18.45. 1) $x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{3};$

2) $x = \ln\cos y, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{3};$

3) $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \quad 1 \leqslant y \leqslant e;$

4) $x = \frac{1}{8} y^2, \quad -4 \leqslant y \leqslant 4.$

18.46. 1) $y = \arcsin e^x, \quad -\ln 7 \leqslant x \leqslant -\ln 2;$

2) $y = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{6};$

3) $y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant a;$ 4) $y = sh^2 x, \quad |x| \leqslant a.$

18.47. 1) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{9}{16};$

2) $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{1-x}, \quad \frac{11}{36} \leqslant x \leqslant \frac{15}{16};$

3) $y = \ln(x - \sqrt{x^2-1}), \quad 2 \leqslant x \leqslant 4;$

4) $y = \ln th\,\frac{x}{2}, \quad 0 < a \leqslant x \leqslant b.$

18.48. 1) $x^2 = 5y^3, \quad x^2 + y^2 \leqslant 6;$

2) $y^3 = \frac{16}{27}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3, \quad y^2 \leqslant x;$

3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};$ 4) $9y^2 = x(x-3)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3.$

18.49. 1) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ (ასტროიდა);

2) $\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a} \cos^3 t, \\ y = \dfrac{c^2}{b} \sin^3 t, \end{cases}$ $c^2 = a^2 - b^2$, (ელიფსის ევოლუტა);

3) $\begin{cases} x = a\,(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a\,(3\sin t - \sin 3t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

4) $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t), \end{cases}$ (ციკლოიდა) $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

13.50. 1) $\begin{cases} x = a\,(\cos t + t\sin t), \\ y = a\,(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (წრეწირის ევოლვენტა);

2) $\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = ch^3 t, \\ y = sh^3 t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}$;

4) $\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 1$.

13.51. 1) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{a^2+1}} \cos(a \ln t), \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{a^2+1}} \sin(a \ln t), \end{cases}$ $1 \leqslant t \leqslant e$;

2) $\begin{cases} x = t - \dfrac{1}{2}\, sh\, 2t, \\ y = 2\, ch\, t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right), \\ y = a \sin t, \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

4) $\begin{cases} x = a\cos^5 t, \\ y = a\sin^5 t. \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

13.52. 1) $\begin{cases} x = \sin^4 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (t^2 - 2)\cos t - 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \pi$;

3) $\begin{cases} x = \displaystyle\int_0^t \cos\varphi^2\,d\varphi, \\ y = \displaystyle\int_0^t \sin\varphi^2\,d\varphi, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

4) $\begin{cases} x = \displaystyle\int_1^t \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi, \\ y = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos\varphi}{\varphi}\,d\varphi, \end{cases} \quad 1 \leqslant t \leqslant e.$

18.53. 1) $r = a\sin\varphi$; 2) $r = 2(1+\cos\varphi)$, $r \leqslant 1$;

3) $r = a(1-\sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant -\dfrac{\pi}{6}$;

4) $r = a\,th\,\dfrac{\varphi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2$.

18.54. 1) $r = a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$; 2) $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$;

3) $r = a\cos^5\dfrac{\varphi}{5}$; 4) $r = \dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$, $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

18.55. 1) $r = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$; 2) $r = a\varphi^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$;

3) $r = a\varphi^3$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$; 4) $r = a\varphi^4$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 3$.

გამოთვალეთ მოცემული წირის მარყუჟის სიგრძე (№№ 18.55; 18.56):

18.56. 1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t\left(\dfrac{1}{3} - t^2\right); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = a(t^2+1), \\ y = \dfrac{a}{3}(t^3 - 3t); \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2t^3(1-t^2), \\ y = \sqrt{15}\,t^4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = a(t^2-1), \\ y = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}\left(t^3 - \dfrac{t}{4}\right). \end{cases}$

18.57. 1) $r = \dfrac{a}{\sin^3\dfrac{\varphi}{3}}$; 2) $r = \dfrac{a}{\cos^4\dfrac{\varphi}{4}}$;

3) $9ay^2 = x(x-3a)^2$; 4) $16a^3y^2 = x^2(2a^2 - x^2)$.

18.58. ვთქვათ $r(t)$ და $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $]a;\ b[$ ინტერვალში. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $(r,\ \varphi)$ წერტილის პოლარული კოორდინატებია, მაშინ

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \quad a < t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < b,$$

რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r^2 \varphi'^2 + r'^2}\, dt.$$

18.59. გამოთვალეთ იმ წირის რკალის სიგრძე, რომლის პოლარული კოორდინატები მოცემულია პარამეტრული სახით:

1) $\begin{cases} r = 1 + \cos t, \\ \varphi = t - \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

2) $\begin{cases} r = t, \\ \varphi = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right), \end{cases} \quad 1 \leqslant t \leqslant \sqrt{e};$

3) $\begin{cases} r = t, \\ \varphi = \dfrac{\sqrt{t^2 - a^2}}{a} \arccos \dfrac{a}{t}, \end{cases} \quad a < t_1 \leqslant t \leqslant t_2;$

4) $\begin{cases} r = t, \\ \varphi = \arccos \dfrac{t^2 + ab}{(a+b)\,t}, \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant b.$

გამოთვალეთ სივრცითი წირის რკალის სიგრძე (№№ 18.60; 18.61):

18.60. 1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases}$ (ხრახნწირი) $0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

2) $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = \dfrac{2}{3} t^3, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 3.$

3) $\begin{cases} x = at^2, \\ y = a\left(t + \dfrac{1}{3}t^3\right), \\ z = a\left(t - \dfrac{1}{3}t^3\right), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$;

4) $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \\ z = t\sqrt{2}, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

18.61. 1) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0$;

2) $\begin{cases} x = a(1 + \cos t), \\ y = a(t - \sin t), \\ z = 4a \sin \dfrac{t}{2}, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$;

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \\ z = 4a \cos \dfrac{t}{2}, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

4) $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \\ z = at, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$

18.62. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდაზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც ციკლოიდის პირველ თაღს ყოფს შეფარდებით 1 : 3 სათავის მხრიდან.

18.63. იპოვეთ $r = e^{a\varphi}$ ლოგარითმული ხვიის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც ძევს $r=1$ წრეწირის შიგნით.

18.64. დაამტკიცეთ, რომ $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ელიფსის სიგრძე უდრის $y = c\sin\dfrac{x}{b}$ $(c = \sqrt{a^2 - b^2})$ სინუსოიდის ერთი ტალღის სიგრძეს.

18.65. იპოვეთ $y = \text{const}$ წრფე, რომელიც $x = a(t - \sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ ციკლოიდის ამ თაღს ყოფს სამ ერთნაირი სიგრძის რკალებად.

3. სხეულის მოცულობის გამოთვლა.

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (№№ 18.66—18.78):

18.66. 1) $y = 2x + 1, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0;$

2) $y = x + 3, \quad y = 0, \quad x = 0; \quad x = 3;$

3) $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1;$

4) $y = x^3 + 2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$

18.67. 1) $y = x^2 - 2x, \quad y = 0;$ 2) $y = x - x^2, \quad y = 0;$

3) $y = 8\sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1;$

4) $y = 5\sqrt{2x}, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{3}.$

18.68. 1) $y = x^3, \quad y = 0, \ x = 2;$ 2) $y = 1 - x^3, \ y = 0, \ x = 2;$

3) $y = \dfrac{4}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4;$

4) $xy = 5, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5.$

18.69. 1) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1;$

2) $y = 2^x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$

3) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$

4) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi.$

18.70. 1) $y^2 = 2px, \quad y = 0, \quad x = a;$

2) $xy = a^2, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = 2a;$

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = \dfrac{1}{4}, \quad x = 1;$

4) $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}, \quad y = 0, \quad x = a. \quad (x \geqslant 0).$

18.71. 1) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = b;$

2) $y = \sqrt{x}\, e^{-x}, \quad y = 0; \quad x = a;$

3) $y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad y = 0; \quad x = e;$

4) $y = \sin\sqrt{x}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi^2.$

18.72. 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$;

2) $y = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x - 3}}$, $y = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

4) $y = e^{ax} \sin \pi x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

18.73. 1) $y = \dfrac{1}{2} x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$;

2) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;

3) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = x$, $y = 0$, $x = 2$;

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

18.74. 1) $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$,

2) $y = 4 - x^2$, $x = 3x$, $y = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 0$;

3) $y = \dfrac{1}{4} x^2$, $y = \dfrac{1}{2} (x - 3)^2$, $y = 0$;

4) $y = \sqrt{2x}$, $y = 2 (x - 1)^{3/2}$, $y = 0$.

18.75. 1) $y^2 = 2x$, $y = 2$, $x = 0$; 2) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = x$, $x = 3$;

3) $y = \sin x$ $y = \dfrac{2x}{\pi}$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

4) $y = \sin^2 x$, $y = x \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

18.76. 1) $y = \dfrac{1}{4} x^2$, $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = 2x$, $y^2 = 2(1 - x)$;

3) $y^2 = 2x$, $y^2 = 4(x - 1)$;

4) $y = x \sqrt{\dfrac{x}{2 - x}}$, $y = \sqrt{x(2 - x)}$.

18.77. 1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \leqslant R, \ y \leqslant R)$;

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = H, \quad H > a;$

4) $y^2(2a - x) = x^3, \quad x = a \quad (0 \leqslant x \leqslant a).$

19.78. 1) 1) $2py = x^2$, $2py = x(2x - a), \quad y = 0;$

2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1, \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1;$

3) $x^2 + (y - 2)^2 = 1;$ 4) $x^2 - xy + y^2 = 9.$

18.79. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირის მარყუჟით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო:

1) $(x - 4)y^2 = x(x - 3);$ 2) $y^2(x - 1) + x^2(x + 1) = 0;$

3) $y^2(1 - 3x) = x^2(1 + x);$ 4) $x^2 y^2 = (x + 1)^2(4 - x)^2.$

გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო (№№ 18.80; 18.81):

18.80. 1) $y = e^{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1;$

2) $y = \operatorname{tg} x^2, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{\frac{\pi}{3}};$

3) $y = 2x - x^2, \ y = 0;$ 4) $y = \sin x, \ y = 0, \ 2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi.$

18.81. 1) $2py = 1 - (x - 2)^2, \ y = 0;$

2) $y = \sin x, \quad y = 1, \quad x = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2};$

3) $y = \cos x, \quad y = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$

4) $y^2 = 4x, \quad y = x.$

18.82. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო:

1) $y = (x - 1)(x - 2), \ y = 0;$

2) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$

3) $y = \arcsin x, \quad y = 0, \quad x = 1;$

4) $y = \frac{1}{1 + x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1;$

5) $y = e^x + 6, \quad y = e^{2x}, \quad x = 0;$

6) $y = x, \quad y = x + \sin^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

18.83. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით $y=1$ წრფის გარშემო:

1) $y = \dfrac{x^2}{4}, \quad y = 1;$ 2) $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \dfrac{1}{x}, \quad y=0, \quad x=2;$

3) $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = x^2;$ 4) $y = 2x^2 - 1, \quad y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad y = -1,$
$y = 8.$

18.84. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin 2t, \end{cases} \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a;$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{2at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{2at^3}{1+t^2}, \end{cases} \quad x = a;$ 3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a(1+\cos t), \\ y = a(\operatorname{tg} t + \sin t), \end{cases} \quad x = \dfrac{3}{2}a.$

18.85. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო.

1) $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\sin 2t, \end{cases} \quad 0 < t \leqslant 2\pi;$

2) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$

3) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases} \quad y = 0, \quad |x| = 1;$

4) $\begin{cases} x = at^2, \\ y = a\ln t, \end{cases} \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (a > 0).$

18.86. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირის მარყუჟით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო.

1) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 4t - t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \dfrac{2a}{t^2+1}, \\ y = a\dfrac{t^3-1}{t^2+1}. \end{cases}$

გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო (№№ 18.87—18.89):

18.87. 1) $r = a\varphi$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi$; 2) $r = \sqrt[3]{\dfrac{\varphi}{\pi}}$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi$;

3) $r = a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$;

4) $r = a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $\varphi = \dfrac{7\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

18.88. 1) $r = a\cos^2\varphi$; 2) $r = 2a\sin\varphi$;

3) $r = a\cos^3\varphi$; 4) $r = a\sin^2\varphi$.

18.89. 1) $r = ae^{\varphi}$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi$; 2) $r = a(1+\cos\varphi)$;

3) $r = 2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$;

4) $r = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$;

5) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$; 6) $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$.

18.90. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ სხივის გარშემო:

1) $r = a\sqrt{\sin\varphi}$; 2) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$;

3) $r = a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$;

4) $r = a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$;

5) $r = a\,(1 + \cos\varphi), \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{2}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2};$

6) $r = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi}, \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{2}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}.$

18.91. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო:

1) $x^4 + y^4 = a^2 x^2;$ 2) $x^4 + y^4 = 2axy^2;$

3) $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4;$ 4) $x\,(x^2 - y^2) = a\,(x^2 + y^2), \quad x = 3a.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. წირის განტოლება ჩაწერეთ პოლარულ კოორდინატებში.

18.92. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება მოცემული წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო:

1) $x^4 + y^4 = ay^3;$ 2) $x^4 + y^4 = 2axy^2;$

3) $(x^2 + y^2)^3 = a^4 y^2;$ 4) $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. წირის განტოლება ჩაწერეთ პოლარულ კოორდინატებში.

განივი კვეთის ფართობების საშუალებით იპოვეთ მოცემული ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (№№ 18.93—18.95):

18.93. 1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad Z = -H, \quad Z = H;$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{(z - H)^2}{H^2}, \quad z = 0;$

3) $2z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}, \quad z = H;$ 4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

18,94. 1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = -H, \quad z = H;$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \quad z = H \quad (H > C);$

3) $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x + z}{a} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$

4) $a^2 (z^2 - y^2) = x^2 z^2, \quad z = a.$

18.95. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ \dfrac{z}{H}=\dfrac{x}{a},\ \ z=0;$

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\ \ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0\ (z\geqslant 0);$

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \ \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$

4) $\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2},\ \ \dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$

4. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობის გამოთვლა

გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (№№ 18.96—18.98):

18.96. 1) $x^2+y^2=R^2;$ 2) $y=\sqrt{x},\ 2\leqslant x\leqslant 6;$

3) $y=x^3,\ 0\leqslant x\leqslant 1;$ 4) $y=\dfrac{1}{6}\sqrt{x}\,(x-12),\ 0\leqslant x\leqslant 12.$

18.97. 1) $y^2=4ax,\ 0\leqslant x\leqslant 3a;$ 2) $y=\sin x,\ \ 0\leqslant x\leqslant \pi;$

3) $y=e^{-x},\ 0\leqslant x\leqslant \ln 2;$ 4) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}2x,\ 0\leqslant x\leqslant 3.$

18.98. 1) $y^2=4+x,\ \ -4\leqslant x\leqslant 2;$

2) $2ay=a^2+x^2,\ \ 0\leqslant x\leqslant a;$

3) $x^2+(y-b)^2=a^2,\ \ b>a;$

4) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$

გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო (18.99; 18.100):

18.99. 1) $4x+2\ln y=y^2,\ e^{-1}\leqslant y\leqslant e;$

2) $9ay^2=4x^3,\ \ 0\leqslant y\leqslant \dfrac{2a}{3};$

3) $x=\operatorname{ch}y,\ \ \ln 2\leqslant y\leqslant \ln 3;$

4) $3x=4\cos y,\ \ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant 0.$

18.100. 1) $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x,\ \ 1\leqslant x\leqslant e;$

2) $y = a \ln \dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2-x^2}, \quad 0 < b \leqslant x \leqslant a;$

3) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}, \quad 0 \leqslant x \leqslant b;$

4) $y = \dfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება პარამეტრული სახით მოცემული წირის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო, ბ) Oy ღერძის გარშემო (18.101; 18.102):

18.101. 1) $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

2) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin t, \\ y = \dfrac{1}{4}\sin 2t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi;$

3) $\begin{cases} x = a\left(t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right), \\ y = a\sin^2 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

4) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

18.102. 1) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t}{3}(t^2-3), \end{cases} \quad |t| \leqslant 6;$

2) $\begin{cases} x = a(t^2+1), \\ y = \dfrac{at}{3}(3-t^2), \end{cases} \quad |t| \leqslant 3;$

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$

4) $\begin{cases} x = \sqrt{1+\sin t}, \\ y = \dfrac{1}{4}\cos t, \end{cases}$

18.103. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო:

1) $r = 2a\sin\varphi;$ 2) $r = a(1+\cos\varphi);$

3) $r = a + b\cos\varphi, \ (a > b);$ 4) $r = \sqrt{\cos 2\varphi}, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4};$

5) $r^2 = a^2\sin 2\varphi;$ 6) $r^2 = a^2\cos 2\varphi.$

18.104. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული წირის მარყუჟის ბრუნვით: ა) Ox ღერძის გარშემო; ბ) Oy ღერძის გარშემო.

1) $9x^2 = y(3-y)^2$; 2) $9ay^2 = x(3a-x)^2$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. წირის განტოლება ჩაწერეთ პარამეტრული სახით.

18.105. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $x = a(t^2+1)$, $y = \frac{at}{3}(3-t^2)$ წირის მარყუჟის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

§ 19. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ფიზიკაში.

19.1. რა მუშაობა უნდა დაიხარჯოს ზამბარის 5 სმ-ით გასაჭიმად, თუ მისი 1 სმ-ით გასაჭიმად საჭიროა 16 ძალა.

19.2. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს სპილენძის მავთულის გასაჭიმად 1 მმ-ით, თუ მისი სიგრძეა 1 მ, ხოლო განივი კვეთის დიამეტრი 4 მმ.

19.3. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს m მასის მქონე სხეულის ასატანად დედამიწის ზედაპირიდან h სიმაღლეზე, თუ დედამიწის რადიუსია R.

19.4. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ვერტიკალური ცილინდრის კასრიდან წყლის ამოსატუმბავად, თუ კასრის რადიუსია R, სიმაღლე კი h.

19.5. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ნახევარსფეროს ფორმის მქონე ჭურჭლიდან წყლის ამოსატუმბად, თუ ნახევარსფეროს რადიუსია 10 მ.

19.6. 2 მ რადიუსის მქონე რკინის ბირთვი ბრუნავს თავისი დიამეტრის გარშემო $\omega = 1000$ ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ბირთვის გასაჩერებლად, თუ რკინის კუთრი წონაა 7,8 გ/სმ^3.

19.7. ელექტრული მუხტი e კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული e_0 მუხტის მხრიდან მოქმედი განზიდვის ძალის მოქმედებით გადაადგილდა (a; 0) წერტილიდან (b, 0) წერტილში. გამოთვალეთ განზიდვის ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა.

19.8. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც სრულდება გაზის ადიაბატური შეკუმშვისას $v_0 = 8$ მ^3-დან $v_1 = 2$ მ^3-მდე, თუ მისი საწყისი წნევაა $p_0 = 10\,000$ პა.

19.9. ცილინდრი, რომელიც ზემოდან დახურულია უწონო მოძრავი დგუშით, ავსებულია ორთქლით, რომლის მოცულობაა $v_0=0{,}2$ მ^3 და წნევა — $p_0=10330\ \frac{\text{ნ}}{\text{მ}^2}$. რა მუშაობა უნდა შევასრულოთ, რომ მუდმივი ტემპერატურის პირობებში ორთქლის მოცულობა შევამციროთ 2-ჯერ.

19.10. რა ძალით მიიზიდავს მატერიალური წრფე m მასის მქონე მატერიალურ წერტილს, რომელიც მისგან დაშორებულია a მანძილით, თუ წრფის სიმკვრივეა μ_0.

19.11. რა ძალით მიიზიდავს r რადიუსის მქონე ერთგვაროვანი (δ სიმკვრივით) წრიული ფირფიტა m მასის მქონე p წერტილს, რომელიც მდებარეობს ფირფიტის ცენტრში გამავალ მართობზე და ფირფიტისაგან დაშორებულია b მანძილით.

19.12. ტორიჩელის კანონის თანახმად ავზის ხვრელიდან სითხის გამოდინების სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით

$$v = c\sqrt{2gh}\,,$$

სადაც g — თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა, h — სითხის სიმაღლე ხვრელიდან და $c=0{,}6$ არის ცდისეულად მიღებული პროპორციულობის კოეფიციენტი.

რა დროში დაიცლება პირთამდე სავსე ცილინდრული ვერტიკალური კასრი, თუ კასრის დიამეტრი $D=1$ მ, სიმაღლე $h=2$ მ და კასრის ფსკერზე არსებული წრიული ფორმის ხვრელის დიამეტრი $d=1$ სმ.

19.13. მატერიალური წერტილის სიჩქარე — $v=t\,e^{-0{,}01\,t}$ მ/წმ. გამოთვალეთ მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი გზის სიგრძე მოძრაობის დაწყებიდან სრულ გაჩერებამდე.

19.14. გამოთვალეთ v_0 საწყისი სიჩქარით ვერტიკალურად ზემოთ ასროლილი სხეულის ასვლის მაქსიმალური სიმაღლე, თუ მისი სიჩქარის მოძრაობის t დროზე დამოკიდებულების განტოლებაა $v=v_0-gt$, სადაც g არის თავისუფალი ვარდნის აჩქარება.

19.15. ცვლადი დენის წრედში ძაბვა და დენის ძალა იცვლება შემდეგი კანონით: $u=u_0\sin\omega t$, $I=I_0\sin(\omega t-\varphi)$. გამოთვალეთ დენის მუშაობა $T=\frac{2\pi}{\omega}$ დროში. ფაზათა სხვაობის რა მნიშვნელობის დროს იქნება ეს მუშაობა მაქსიმალური.

19.16. $H=20$ სმ სიმაღლის კონუსური ძაბრი გავსებულია წყლით. ძაბრის ზედა ფუძის რადიუსი $R=12$ სმ, ხოლო ქვედა ფუძის

რადიუსი, საიდანაც გამოედინება წყალი, არის $z=0{,}3$ სმ. გამოთვალეთ: ა) რა დროში დაიწევს ძაბრში წყლის დონე 5 სმ-ით; ბ) რა დროში დაიცლება ძაბრი.

19.17. გამოთვალეთ $l=1$ მ სიგრძის ძელის მასა, თუ მისი წრფივი სიმკვრივე $\delta=(2+0{,}001\ x^2)$ გ/სმ, სადაც x არის მანძილი ძელის ერთი ბოლოდან მოცემულ წერტილამდე.

19.18. გამოთვალეთ მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi;$

3) $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$

4) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}, \quad -a \leqslant x \leqslant a;$

5) $r = a\,(1 + \cos\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;$

6) $r = a e^{\varphi}, \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi.$

გამოთვალეთ მოცემული წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები (№№ 19.19; 19.20):

19.19. 1) $y = x^2, \quad y = \sqrt{x};$

2) $y^2 = \dfrac{x^3}{a}, \quad x = a, \quad y = 0, \quad a > 0, \quad y \geqslant 0;$

3) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$

4) $y = \dfrac{2}{\pi}\, x, \quad y = \sin x, \quad y = 0.$

19.20. 1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0;$

2) $y^2 = 2x, \quad x + y = 4;$

3) $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad y = 0;$

4) $r = a\,(1 + \cos\varphi).$

19.21. r რადიუსიანი წრეწირის რკალის ცენტრალური კუთხეა α. გულდინის თეორემისა და სფერული სარტყლის ფართობის გა-

მოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ ამ რკალის სიმძიმის ცენტრი.

19.22. გულდინის თეორემის გამოყენებით იპოვეთ $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ ასტროიდის სიმძიმის ცენტრი.

19.23. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ და $x = a(t - \sin t)$, $y = -a(1 - \cos t)$ ციკლოიდების პირველი თაღებით ბრუნავს oy ღერძის გარშემო. გულდინის თეორემის გამოყენებით იპოვეთ მიღებული ზედაპირის ფართობი.

§ 20. განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა*

გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები მართკუთხედების, ტრაპეციების ან სიმპსონის ფორმულის გამოყენებით ε სიზუსტით (№№ 20.1—20.14):

20.1. 1) $\int_0^1 e^{x^2} dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$; 2) $\int_0^2 e^{-x^2} dx$, $\varepsilon = 10^{-2}$;

3) $\int_0^1 e^{x^3} dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$; 4) $\int_{0,4}^{0,6} \frac{e^x}{x} dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

20.2. 1. $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$, $\varepsilon = 10^{-4}$; 2) $\int_0^{0,8} \frac{\sin x}{x} dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$;

3) $\int_1^5 \frac{dx}{1 + \ln x}$, $\varepsilon = 10^{-2}$; 4) $\int_0^1 e^{-x} \cdot \frac{1}{1 + x} dx$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

20.3. 1) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + x} dx$, $\varepsilon = 10^{-2}$; 2) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$;

---

* ამ პარაგრაფში მოცემული ამოცანების ამოხსნა გათვალისწინებულია ეგმ-ის გამოყენებით.

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx,\ \varepsilon = 10^{-4};$ 4) $\int\limits_{0}^{3,1416} \ln(5 + 4\cos x)\, dx,\ \ \varepsilon = 10^{-4}.$

20.4. 1) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{x} \cos x dx,\ \varepsilon = 10^{-4};$ 2) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\sin x}\, \sin \frac{x}{2}\, dx,\ \varepsilon = 10^{-4};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx,\ \varepsilon = 10^{-4};$ 4) $\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos x^2\, dx,\ \ \varepsilon = 10^{-3}.$

20.5. 1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{-x}}{x} dx,\ \varepsilon = 10^{-4};$ 2) $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^4 e^x}{\sqrt{5 + 2^x}} dx,\ \ \varepsilon = 10^{-5};$

3) $\int\limits_{1}^{3} \frac{e^{\sqrt{x}+1,2}}{x \cdot 10^{x^2}} dx,\ \varepsilon = 10^{-5};$ 4) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin(\sin x)\, dx,\ \ \varepsilon = 10^{-3}.$

20.6. 1) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx,\ \varepsilon = 10^{-3};$ 2) $\int\limits_{1,2}^{1,7} \frac{\sin^2(2x^2+3)\, dx}{\ln(x+2)},\ \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\int\limits_{1,3}^{1,9} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sin^2 x + 2}\, dx,\ \ \varepsilon = 10^{-3};$

4) $\int\limits_{1,4}^{2,3} \frac{e^{\sin x}}{\ln(3x+4)}\, dx,\ \ \varepsilon = 10^{-3}.$

20.7. 1) $\int\limits_{3,2}^{4,1} \frac{2x+1}{1 + \operatorname{arctg}^2 x} dx,\ \ \varepsilon = 10^{-3};$

2) $\int\limits_{1,6}^{2,3} \frac{\ln(1 + e^{\sin x})}{\sqrt{x+3}} dx,\ \ \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\int\limits_{3,5}^{4,3} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{2x+1}}{x+3} dx,\ \ \varepsilon = 10^{-3};$

4) $\displaystyle\int\limits_{4,8}^{5,6} \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{\ln(\cos^2 x + 2)}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

20.8. 1) $\displaystyle\int\limits_{3,5}^{4,1} \frac{e^{\frac{x}{\ln x}}}{\cos^2 x + 2}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

2) $\displaystyle\int\limits_{0,4}^{1,3} \frac{e^{x+2}}{\operatorname{arctg}(3x + 4)}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\displaystyle\int\limits_{1,8}^{2,7} \frac{\sin^4 x + 1,3}{\ln(3x + 4)}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

4) $\displaystyle\int\limits_{6,7}^{7,2} \frac{\cos^2(\ln x)}{x^2 + 1,7}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

20.9. 1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{2\cos^3 x - 3\sin^4 x}{1 + \sin^2 x}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-5};$

2) $\displaystyle\int\limits_{2}^{4,12} \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x^3 \sin x}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

3) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 \sqrt[3]{1 + x^5}}{1 + x^4}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-5};$

4) $\displaystyle\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^4 + 2}}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$

20.10. 1) $\displaystyle\int\limits_{1,8}^{2,6} \frac{\cos^2(e^x)}{\ln(e^x + 2)}\, dx; \quad \varepsilon = 10^{-3};$

2) $\displaystyle\int\limits_{5,6}^{6,2} \frac{\sin^2(e^x + 2)}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\int\limits_{4,8}^{5,6} \frac{\ln(\sin^2 x + 2)}{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

4) $\int\limits_{7,4}^{8,2} \frac{\sqrt{2 + \sin^2 \sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x} + 3)}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-2}.$

20.11. 1) $\int\limits_{4,2}^{6,4} \frac{x^2 + \sqrt{3^x}}{\sqrt{4 + \ln^2(x^2+1)}}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-5};$

2) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{x\, e^{4-2,6\cos x}}{e^{x \sin x}}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\int\limits_{0}^{2} x^3 (1 + x^6)^{2/3}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-5};$

4) $\int\limits_{8,2}^{9,1} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{arctg}^2 x}}{1 + e^{\sin x}}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

20.12. 1) $\int\limits_{1,8}^{2,7} \frac{\ln(2x + 1)}{\cos^2 x + 3}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

2) $\int\limits_{2,9}^{3,2} \frac{\cos^2(\sqrt{x} + 2)}{\ln(e^x + 1)}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\int\limits_{3,7}^{4,2} \frac{\ln(1 + \operatorname{arctg} x)}{\sqrt{x + 3}}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

4) $\int\limits_{5,6}^{6,2} \frac{\sqrt{1 + e^{\sqrt{x}}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{x} + 2}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

20.13. 1) $\int\limits_{1,8}^{2,6} \frac{\sin^2(\ln x + 2)}{e^{\operatorname{arctg} x} + 1}\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

2) $\displaystyle\int_{6,7}^{7,2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x+\ln x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,3} \frac{\sqrt{x+2}}{2x^2+3\sin^2 x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

4) $\displaystyle\int_{6,1}^{7,2} \frac{\cos^2(\sqrt{x}+\ln x)}{\operatorname{arc\,tg} x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}$

20.14. 1) $\displaystyle\int_{6,1}^{6,8} \frac{x+2}{(x\sin x)^2+3}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

2) $\displaystyle\int_{2,4}^{3,2} \frac{x+4}{x\ln x+\operatorname{arctg} x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\displaystyle\int_{3,4}^{4,1} \frac{x^2-1}{x\operatorname{arctg} x+e^{\sin x}}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

4) $\displaystyle\int_{1,8}^{2,4} \frac{e^{\cos x}+\operatorname{arctg} x}{x+1}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

დიფერენციალური განტოლებები

§ 21. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1. ძირითადი ცნებები

დაადგინეთ არე რომელზეც შესრულებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები (№№ 21.1; 21.2):

21.1. 1) $y' = x^2 - y^2;$ 2) $y' = \dfrac{x}{y};$

3) $y' = xy + e^{-y};$ 4) $y' = \dfrac{y}{y-x}.$

.2. 1) $y' = \sqrt{1 - y^2}$; 2) $y' = \sqrt{x - y}$;

3) $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$; 4) $y' = 1 + \operatorname{tg} y$.

1.3. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს მითითებული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს:

1) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$;

2) $y = x\,(c - \ln|x|)$, $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$;

3) $y = \sin x - 1 + c\,e^{-\sin x}$, $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$;

4) $y = c\,e^{-2x} + \dfrac{1}{3}e^{x}$, $y' + 2y = e^{x}$;

5) $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$, $(1 - x^2)\,y' + xy = 2x$;

6) $2x + y - 1 = c\,e^{2y - x}$, $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$.

1.4. წირთა ერთპარამეტრიანი ოჯახიდან გამოყავით წირი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ პირობას:

1) $y = x + c\,e^{y}$, $y(1) = 0$; 2) $x^2 + y^2 = \ln c\,x^2$, $y(1) = 1$;

3) $1 + 2cy + c^2x^2 = 0$, $y(0) = -\dfrac{1}{2}$;

4) $y(1 - cx) = 1$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$;

5) $y(\ln|x^2 - 1| + c) = 1$, $y(0) = 1$;

6) $y = 2 - c\sin 2x$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნს წარმოადგენს მოცემულ წირთა ოჯახის ყოველი წირი (№№ 21.5; 21.6):

5. 1) $x^2 + y^2 = 2cx$; 2) $y^2 = 2cx$;

3) $x^3 = c\,(x^2 - y^2)$; 4) $y = \sin(x + c)$.

6. 1) $x^2 + c\,y^2 = 2y$; 2) $y = c\,e^{x}$;

3) $\ln\dfrac{x}{y} = 1 + cy$; 4) $y^2 + \dfrac{1}{x} = 2 + c\,e^{-\frac{y^2}{2}}$.

2. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით.

ამოხსენით განტოლება (№№ 21.7—21.13):

21.7. 1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{3y^2+1}$; 2) $(1+y^2)\,dx+(1+x^2)dy=0$;

3) $(1+y^2)\,dx+xy\,dy=0$; 4) $xy\,dx+(x+1)\,dy=0$.

21.8. 1) $\sqrt{y^2+1}\,dx=xy\,dy$; 2) $y'\operatorname{tg}x=y$;

3) $y'=e^{x+y}$; 4) $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$.

21.9. 1) $xy\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$; 2) $y\,e^{2x}\,dx+(1+e^{2x})\,dy=0$;

3) $x^2y^3y'+1=y$; 4) $(1+y^2)\,xdx+(1+x^2)\,dy=0$

21.10. 1) $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$; 2) $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0$,

3) $y'-xy^2=2xy$; 4) $xy'+2y=xyy'$.

21.11. 1) $e^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1$; 2) $x\dfrac{dx}{dt}+t=1$;

3) $(t^2-xt^2)\dfrac{dx}{dt}+x^2+x^2t=0$;

4) $\varphi^2\,dr+(r-a)\,d\varphi=0$.

21.12. 1) $2x^2yy'+y^2=2$; 2) $3\,e^x\operatorname{tg}y\,dx+\dfrac{2-e^x}{\cos^2 y}\,dy=0$;

3) $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$;

4) $(1+y)\,(e^x\,dx-e^{2y}\,dy)-(1+y^2)\,dy=0$.

21.13. 1) $y'=\sin(x-y)$; 2) $y'=\dfrac{1}{2x+y}$;

3) $y=(x-y)^2+1$; 4) $y'-y=2x-3$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას (№№ 21.14—21.17):

21.14. 1) $(x^2-1)\,y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$;

2) $y'\operatorname{ctg}x+y=2$, $y(0)=-1$;

3) $xy'+y=y^2$, $y(1)=\dfrac{1}{2}$;

4) $(1+e^x)\,yy'=e^x$, $y(0)=1$.

21.15. 1) $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e;$

2) $(x y^2 + x)\, dy + (x^2 y - y)\, dx = 0, \quad y(1) = 1;$

3) $y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2};$

4) $3(x^2 y + y)\, dy + \sqrt{2 + y^2}\, dx, \ y(0) = \sqrt{2}.$

21.16. 1) $x^3 \sin y \cdot y' = 2, \quad y(\infty) = \dfrac{\pi}{2};$

2) $x^3 y' - \sin y = 1, \quad y(\infty) = 5\pi;$

3) $x^2 y' + \sin 2y = 1, \quad y(+\infty) = \dfrac{11}{4}\pi;$

4) $(1 + x^2)\, y' - \dfrac{1}{2} \cos^2 2y = 0, \quad y(-\infty) = \dfrac{7}{2}\pi.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) ზოგადი ამონახსნია

$$\cos y = \frac{1}{x^2} + C.$$

საწყისი პირობა გვაძლევს $C=0$. ე. ი. კერძო ინტეგრალია

$$\cos y = \frac{1}{x^2}.$$

მას შეესაბამება კერძო ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე

$$y = \pm \arccos \frac{1}{x^2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

ამ ტოლობიდან საწყისი პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\frac{\pi}{2} = \pm \arccos 0 + 2\pi n,$$

საიდანაც

$$\frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2} + 2n, \quad n \in Z.$$

აქედან $n=0$.

ამრიგად, საძებნი კერძო ამონახსნია

$$y = \arccos \frac{1}{x^2}.$$

21.17. 1) $(x+2y)\,y'=1, \quad y(0)=-1;$

2) $y'=(x+y)^2, \; y(0)=\dfrac{\pi}{4};$

3) $y'=(8x+2y+1)^2, \quad y(0)=-\dfrac{1}{2};$

4) $y'=\sqrt{4x+2y-1}, \quad y(0)=\dfrac{1}{2}.$

3. ერთგვაროვანი და მასზე დაყვანადი განტოლებები

ამოხსენით განტოლება (№№ 21.18—21.24):

21.18. 1) $y'=\dfrac{y}{x}-1;$ 2) $y'=-\dfrac{x+y}{x};$

3) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x};$ 4) $y'=e^{y/x}+\dfrac{y}{x}.$

21.19. 1) $(x+2y)\,dx-x\,dy=0;$ 2) $x\,dy-y\,dx=y\,dy;$

3) $(x-y)dx+(x+y)dy=0;$ 4) $(x-y)\,dx+x\,dy=0.$

21.20. 1) $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x};$ 2) $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x};$

3) $y'=\dfrac{x-y}{x+y};$ 4) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2.$

21.21. 1) $(x-y)\,y\,dx-x^2dy=0;$ 2) $(y^2-2xy)\,dx+x^2\,dy=0;$

3) $(3y^2+3xy+x^2)\,dx-(x^2+2xy)\,dy=0;$

4) $(4x^2+3xy+y^2)\,dx+(4y^2+3xy+x^2)\,dy=0.$

21.22. 1) $y^2+x^2y'=xyy';$ 2) $(x^2+y^2)\,y'=2xy;$

3) $2x^3y'=y\,(2x^2-y^2);$ 4) $x\,y^2\,y'=x^3+y^3.$

21.23. 1) $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x};$ 2) $xy'=y\cos\ln\dfrac{y}{x};$

3) $x\,y'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x};$

4) $x-y\cos\dfrac{y}{x}+x\,y'\cos\dfrac{y}{x}=0.$

21.24. 1) $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0;$

2) $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx;$

3) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$

4) $(x^2 + xy)\, y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2.$

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას (№№ 21.25; 21.26):

11.25. 1) $y' = 3\dfrac{y}{x} + 2, \; y\,(1) = 0;$.

2) $(y + \sqrt{xy}\,)\, dx = xdy, \quad y\,(1) = 0;$

3) $xy' + 2\sqrt{xy} = y, \quad y\,(1) = 0;$

4) $(y^2 - 3\,x^2)\, dy + 2\,xy\,dx = 0, \quad y(0) = 1;$

21.26. 1) $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}, \quad y\,(1) = 1;$

2) $x\,y' = y\left(1 + \ln \dfrac{y}{x}\right), \quad y\,(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\,;$

3) $(xy' - y)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} = x, \quad y\,(1) = 0;$

4) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}, \; y\,(-1) = 1.$

ამოხსენით განტოლება (№№ 21.27—21.30):

21.27. 1) $(2x - y + 1)\, dx + (2y - x - 1)\, dy = 0;$

2) $(y + 2)\, dx - (2x + y - 4)\, dy = 0;$

3) $(2x - y + 4)\, dy + (x - 2y + 5)\, dx = 0;$

4) $(2x - 4y + 6)\, dx + (x + y - 3)\, dy = 0.$

21.28. 1) $(2x + y + 1)\, dx - (4x + 2y - 3)\, dy = 0;$

2) $(x + y + 1)\, dx + (2x + 2y - 1)\, dy = 0;$

3) $(x + y - 2)\, dx + (x - y + 4)\, dy = 0;$

4) $(x + y)\, dx + (x - y - 2)\, dy = 0.$

21.29. 1) $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2;$ 2) $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}\,;$

3) $(y' + 1)\ln\dfrac{y + x}{x + 3} = \dfrac{y + x}{x + 3}\,;$ 4) $y' = \dfrac{y + 2}{x + 1} + \mathrm{tg}\,\dfrac{y - 2x}{x + 1}\,.$

21.80. 1) $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0$; 2) $2xy'(x-y^2)+y^3=0$;
3) $x^3(y'-x)=y^2$; 4) $2x^2y'=y^3+xy$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1). ჩასმით $y=z^\alpha$ მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})\,\alpha\,dz+2xz^{3\alpha}dx=0.$$

ეს განტოლება იქნება ერთგვაროვანი თუ $3\alpha+1=\alpha-1$. საიდანაც $\alpha=-1$. ამრიგად $y=\dfrac{1}{z}$ ჩასმით მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$(z^2-x^2)\,dz+2zx\,dx=0.$$

მოვახდინოთ ჩასმა $z=ux$. მივიღებთ

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^2-1}{u^3+u}du=0.$$

ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალია

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C.$$

თუ u-ს ნაცვლად შევიტანთ $\dfrac{1}{xy}$-ს მივიღებთ, მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$1+x^2y^2=Cy.$$

4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

ამოხსენით განტოლება (№№ 21.31—21.38):

21.81. 1) $y'-\dfrac{y}{x}=x$; 2) $y'-\dfrac{2y}{x}=2x^3$;

3) $y'+y=e^{-x}$; 4) $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

21.82. 1) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$; 2) $y'-xy=(1+x)\,e^{-x}$;

3) $y'-4x^3y=4(x^3+1)e^{-4x}$; 4) $y'-y=\dfrac{e^x}{x}$.

21.83. 1) $y'-\dfrac{ny}{x}=e^xx^n$; 2) $y'+ay=e^{mx}$.

3) $xy'-2y=x^3\cos x$; 4) $y'-\dfrac{2x-1}{x^2}y=2$

21.34. 1) $(2x+1)y' = 4x + 2y$; 2) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

3) $y' + 2y = 4x$; 4) $y' + y = \cos x$.

21.35. 1) $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$; 2) $y' x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$;

3) $y = x(y' - x\cos x)$; 4) $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

21.36. 1) $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$; 2) $y' + y\cos x = \sin 2x$;

3) $y' - y e^x = 2x e^{e^x}$ 4) $y' + x e^x y = e^{(1-x)e^x}$.

21.37.* 1) $(x+y^2)\,dy = y\,dx$; 2) $(2e^y - x)\,y' = 1$;

3) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$; 4) $(1 - 2xy)\,y' = y(y-1)$.

21.38*. 1) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$; 2) $(1 + y^2)\,dx = (\operatorname{arc\,tg} y - x)\,dy$;

3) $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)\,y' = 1$; 4) $y\,dx = (2x + y - 4\ln y)\,dy$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას (№№ 21.39—21.42):

21.39. 1) $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$;

2) $xy' + 2y = 3x$, $y(-2) = 0$;

3) $y' = 2y + e^x - x$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$;

4) $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$, $y(0) = 0$.

21.40. 1) $y'\cos x - y\sin x = 2x$, $y(0) = 0$;

2) $y' + y\cos x = \sin x\cos x$, $y(0) = 1$;

3) $t^2\dfrac{ds}{dt} = 2ts - 3$, $s(-1) = 1$;

4) $t(1 + t^2)\,ds = (s + s t^2 - t^2)\,dt$, $s(1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

21.41. 1) $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$, $y(0) = 1$;

---

* 21.37, 21.38 განტოლებები წრფივია x-ისა და $\dfrac{dx}{dy}$-ის მიმართ.

2) $y^2\,dx-(2xy+3)\,dy=0,\quad y\left(\frac{1}{2}\right)=2;$

3) $(1+y^2)\,dx=(\sqrt{1+y^2}\sin y-xy)\,dy,\quad y(0)=\pi;$

4) $y^2\,dx+(xy+1)\,dy=0.\quad y(0)=e.$

21.42. 1) $y'-y=-2e^{-x},\quad y(+\infty)=0;$

2) $y'\sin x-y\cos x=-\frac{\sin^2 x}{x^2},\quad y(\infty)=0;$

3) $x^2y'+y=(x^2+1)\,e^x,\quad y(-\infty)=1;$

4) $2xy'-y=1-\frac{2}{\sqrt{x}},\quad y(+\infty)=-1.$

21.43. ამოხსენით განტოლება

1) $(x+1)(yy'-1)=y^2;$ 2) $x\,dx=(x^2-2y+1)\,dy;$

3) $(x^2-1)\,y'\sin y+2x\cos y=2x-2x^3;$

4) $x(e^y-y')=2.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. აღნიშნეთ: 1) $y^2=z$; 2) $x^2=z$; 3) $\cos y$ 4) $e^{-y}=z$.

5. ბერნულის განტოლება

ამოხსენით განტოლება (№№ 21.44—21.48):

21.44. 1) $y'+2y=y^2e^x;$ 2) $3y'+y=\frac{1}{y^2};$

3) $y'=\frac{4}{x}y+x\sqrt{y};$ 4) $y'=\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y}.$

21.45. 1) $y'+2xy=2x^3y^3;$ 2) $y'-y\operatorname{tg}x=-y^2\cos x;$

3) $2y'-\frac{x}{y}=\frac{xy^1}{x^2-1};$ 4) $y'=y\operatorname{ctg}x+\frac{y^3}{\sin x}.$

21.46. 1) $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y};$ 2) $xy'+y=y^2\ln x;$

3) $xy'+2y+x^5y^3e^x=0;$ 4) $y'-2ye^x=2\sqrt{y}\,e^x.$

21.47. 1) $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}-\frac{1}{2x};$ 2) $y'x^3\sin y=xy'-2y;$

3) $y'=\frac{2x}{x^2\cos y+\sin 2y};$ 4) $(2x^2y\ln y-x)\,y'=y.$

21.48. 1) $y' - \operatorname{tg} y = \dfrac{e^x \sin^2 y}{\cos y}$; 2) $xy' \cdot \ln^2 y = y(x^2 + \ln^3 y)$;

3) $(x+1)(y' \cos y + \sin^2 y) = -\sin y$;

4) $xy' \sin 2y \cdot \ln x + \sin^2 y = x \cos x$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. აღნიშნეთ: 1) $\sin y = z$; 2) $\ln y = z$; 3) $\sin y = z$; 4) $\sin y = z$.

6. განტოლება სრულ დიფერენციალებში. მაინტეგრებელი მამრავლი

ამოხსენით განტოლება (№№ 21-49 — 21.55):

21.49. 1) $(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$;

2) $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$;

3) $(3x^2 + 2y)\,dx + (2x - 3)\,dy = 0$;

4) $(10xy - 8y + 1)\,dx + (5x^2 - 8x + 3)\,dy = 0$.

21.50. 1) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0$;

2) $(x^3 + xy^2)\,dx + (x^2 y + y^3)\,dy = 0$;

3) $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2 y + 4y^3)\,dy = 0$;

4) $(2x + 3x^2 y)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = 0$.

21.51. 1) $\dfrac{x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dx$;

2) $x\,dx + y\,dy = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$;

3) $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy$;

4) $\left(4 - \dfrac{y^2}{x^2}\right) dx + \dfrac{2y}{x}\,dy = 0$.

21.52. 1) $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$;

2) $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$;

3) $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$;

4) $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right) y\,dy = 0$.

21.53. 1) $3x^2 e^y\,dx + (x^3 e^y - 1)\,dy = 0$;

2) $e^{-y}\,dx + (1 - xe^{-y})\,dy = 0$;

3) $3x^2(1+\ln y)\,dx=\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy;$

4) $(2x+e^{x/y})\,dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy=0.$

21.54. 1) $(x\cos 2y+1)\,dx-x^2\sin 2y\,dy=0;$

2) $(1+y^2\sin 2x)\,dx-2y\cos^2 x\,dy=0;$

3) $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)\,dy=0;$

4) $(\sin xy+xy\cos xy)\,dx+x^2\cos xy\,dy=0.$

21.55. 1) $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}\,dy=0;$

2) $y\,x^{y-1}\,dx+x^y\ln x\,dy=0;$

3) $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1\right)dx+$

$+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)dy=0;$

4) $\dfrac{y+\sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}\,dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2 xy}+\sin y\right)dy=0.$

21.56. იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობას:

1) $\dfrac{2x}{y^3}\,dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0,\quad y(1)=1;$

2) $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0,\quad y(1)=0;$

3) $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0,$

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi;$

4) $(x+e^{x/y})\,dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy=0,\quad y(0)=2.$

იპოვეთ მაინტეგრებელი მამრავლი $\mu=\varphi(z)$ და ამოხსენით განტოლება (№№ 21.57—21.59):

21.57. 1) $(x^2-y)\,dx+x\,dy=0,\quad \mu=\varphi(x);$

2) $y^2\,dx+(xy-1)\,dy=0,\ \mu=\varphi(y);$

3) $(e^{2x}-y^2)\,dx+y\,dy=0,\ \mu=\varphi(x);$

4) $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0,\ \mu=\varphi(x).$

21.58. 1) $(\sin x + e^{y})\,dx + \cos x\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(y)$;

2) $2x \operatorname{tg} y\,dx + (x^2 - 2\sin y)\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(y)$;

3) $\left(2xy + x^2 y + \dfrac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2)dy = 0, \ \mu = \varphi(x)$;

4) $(1 + 3x^2 \sin y)\,dx - x \operatorname{ctg} y\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(y)$.

21.59. 1) $(y^4 - 4xy)\,dx + (2xy^3 - 3x^2)\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(xy)$;

2) $(3x + 2y + y^2)\,dx + (x + 4xy + 5y^2)\,dy = 0, \ \mu = \varphi(x + y^2)$;

3) $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2\,xy\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(y^2 - x^2)$;

4) $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0, \quad \mu = \varphi(x^2 + y^2)$.

7. განტოლებები რომლებიც არ არის ამოხსნილი წარმოებულის მიმართ

ამოხსენით განტოლება (№№ 21.60—21.62):

21.60. 1) $y = y'^2 + 4y'^3$; 2) $y = y'^2 e^{y'}$;

3) $y = y'^2 + 2\ln y'$; 4) $y = (y' - 1)\,e^{y'}$.

21.61. 1) $x = y'^3 + y'$; 2) $x = y' \cos y'$;

3) $x = \sin y' + \ln y'$; 4) $y'(x - \ln y') = 1$.

21.62. 1) $y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$; 2) $x = 2y' - \ln y'$;

3) $x = y' + \sin y'$; 4) $y = y'(1 + y' \cos y')$.

ამოხსენით კლეროს განტოლებები (№№ 21.63, 21.64):

21.63. 1) $y = xy' + y'$; 2) $y = xy' + y'^2$;

3) $y = xy' - \dfrac{1}{y'}$; 4) $y = xy' + \dfrac{1}{2y'}$.

21.64. 1) $y = xy' + \cos y'$; 2) $y = xy' + \dfrac{1}{y'^2}$;

3) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$; 4) $y = xy' - e^{y'}$.

ამოხსენით ლაგრანჟის განტოლება (№№ 21.65, 21.66):

21.65. 1) $y = 2xy' + \dfrac{1}{y'}$; 2) $y = 2xy' + \ln y'$;

3) $y = 2xy' + \sin y'$; 4) $y = \dfrac{3}{2}xy' + e^{y'}$

21.66. 1) $y=2xy'+\frac{1}{y'^2}$; 2) $y=(1+y')x+y'^2$;

3) $y=\frac{1}{2}(xy'+y'\ln y')$; 4) $y=x\,y'^2+y'^3$.

ამოხსენით განტოლება (№№ 21.67, 21.68):

21.67. 1) $4y=x^2+y'^2$; 2) $y=xy'-x^2y'^3$;

3) $y=y'^2-xy'+\frac{x^2}{2}$; 4) $y=\frac{y'^2}{2}+2x\,y'+x^2$.

21.68. 1) $x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{y'^2}$; 2) $e^x=\frac{y^2+y'^2}{2\,y'}$;

3) $x\,yy'=y'^3+y^2$; 4) $2xy'-y=y'\ln yy'$.

8. სხვადასხვა განტოლებები

ამოხსენით განტოლებები (№№ 21.69—21.83):

21.69. 1) $(xy^2-x)\,dx+(y+xy)\,dy=0$; 2) $\frac{y-x\,y'}{x+yy'}=2$;

3) $y'=\frac{y^2+xy-x^2}{y^2}$; 4) $(1-x^2)\,y'-2\,xy^2=xy$.

21.70. 1) $y'\,(y^2-x)=y$; 2) $(x+y)^2\,y'=1$;

3) $(x+y)\,y'=y$; 4) $y'=\frac{1}{x-y^2}$.

21.71. 1) $yy'+y^2\operatorname{ctg}x=\cos x$; 2) $(x\cos y+\sin 2y)\,y'=1$;

3) $y\,(y-x\,y')=\sqrt{x^4+y^4}$;

4) $(e^y+2xy)\,dx+(e^y+x)\,xdy=0$.

21.72. 1) $x\ln\frac{x}{y}\,dy-y\,dx=0$; 2) $2\,(x-y^2)\,dy=y\,dx$;

3) $x\,y'+y=x\,y^2\ln x$; 4) $xy'=e^y+2y'$.

21.73. 1) $y'=\frac{(1+y)^2}{x\,(y+1)-x^2}$; 2) $x^2\,y'=y\,(x+y)$;

3) $y'=\left(1+\frac{y-1}{2x}\right)^2$; 4) $2x^3\,yy'+3\,x^2\,y^2+7=0$.

21.74. 1) $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$; 2) $\dfrac{xy'}{y} + 2xy \ln x + 1 = 0$;

3) $2dx + \sqrt{\dfrac{x}{y}}\,dy - \sqrt{\dfrac{y}{x}}\,dx = 0$;

4) $y' = \dfrac{x}{y} e^{2x} + y$.

21.75. 1) $y'(x + \sin y) = 1$; 2) $y' - y + y^2 \cos x = 0$;

3) $y + y' \ln^2 y = (x + 2 \ln y)\, y'$;

4) $x y' \cos \dfrac{y}{x} = y \cos \dfrac{y}{x} - x$.

21.76. 1) $x(x - 1)\, y' + 2xy = 1$; 2) $x^3\, dx - (x^4 + y^3)\, dy = 0$;

3) $(\cos x - x \sin x)\, y\, dx + (x \cos x - 2y)\, dy = 0$;

4) $x^2 y'^2 + 3x y y' + 2 y^2 = 0$.

21.77. 1) $x y' = 2\sqrt{y} \cos x - 2y$; 2) $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$;

3) $x(x + 1)(y' - 1) = y$;

4) $\left(x - y \sin \dfrac{y}{x}\right) dx + x \sin \dfrac{y}{x}\, dy = 0$.

21.78. 1) $y^2 (y - xy') = x^3 y'$

2) $(1 + y^2)\, dx = (\sqrt{1 + y^2} \cos y - xy)\, dy$;

3) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}$; 4) $dy + (xy - xy^3)\, dx = 0$.

21.79. 1) $y = y'^2 + 2xy' + \dfrac{x^2}{2}$; 2) $xy' + y = \ln y'$;

3) $(2e^x + y^4) dy - y e^x dx = 0$; 4) $y = (xy' + 2y)^2$.

21.80. 1) $(x - 2y^3)\, dx + 3y^2 (2x - y^3)\, dy = 0$;

2) $y'^2 - y y' + e^x = 0$; 3) $\sqrt{y'^2 + 1} + xy' - y = 0$;

4) $y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \operatorname{ctg} x$.

21.81. 1) $x^4 y'^2 - x y' - y = 0$; 2) $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$;

3) $y' + y = x y'^2$; 4) $y^2 = (xyy' + 1) \ln x$.

21.82. 1) $y y'^2 + 2x y' - y' = 0$; 2) $2 x y' - y = \sin y'$;

3) $y'^2 - 2 x y' + y = 0$; 4) $y = y' \sqrt{1 + y'^2}$.

21.83. 1) $yy' = 4x + 3y - 2$; 2) $y^2 + x^2 y'^5 = xy(y'^2 + y'^3)$;

3) $2y' = x + \ln y'$; 4) $3y'^4 = y' + y$.

9. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა*

ეილერის ან რუნგე-კუტას მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული დიფერენციალური განტოლებებისათვის კოშის ამოცანის ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა c წერტილში $\varepsilon = 0{,}0001$ სიზუსტით (№№ 21.84—21.88):

21.84. 1) $y' + xy(1 - y^2) = 0$, $y(0) = 0{,}5$; $c = 1$;

2) $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $c = 0{,}4$;

3) $y' = 3{,}8 - y \operatorname{arctg} xy + 1{,}3 \cos^2 y$, $y(0) = 0$, $c = 1$;

4) $y' = \dfrac{2y - x}{y}$, $y(1) = 2$, $c = 2$.

21.85. 1) $y' = 8{,}5 - (2x + y)^2 \sin y + y^3$, $y(0) = 1$, $c = 1$;

2) $y' = 1{,}6(x - y)^3 + \cos(x + y) - 1{,}3$; $y(0) = 1$, $c = 1$;

3) $y' = x + \sin \dfrac{y}{3}$, $y(0) = 1$, $c = 2$;

4) $y' = \sin y + \cos^2(1{,}3x - y) + 1{,}1$, $y(0) = 0$, $c = 1$.

21.86. 1) $y' = 4{,}4(2x - y)^3 + \cos y^2 - 1{,}3$; $y(0) = 1$, $c = 1$;

2) $y' = \dfrac{1}{y^2 - x}$, $y(1) = 0$; $c = 2$;

3) $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0{,}5$; $c = 0{,}5$;

4) $y' = y^3 - (x + 2y^2) \sin y + 8{,}2$; $y(0) = 1$, $c = 1$.

21.87. 1) $y' = y^2 e^x - 2y$, $y(0) = 1$, $c = 1$;

2) $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$, $c = 0{,}1$;

3) $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$, $c = 1$;

4) $y' = 6{,}2 - (x + y)^2 \sin xy - 3{,}5y^3$, $y(0) = 1$, $c = 1$.

---

* ამ პუნქტში მოცემული ამოცანების ამოხსნა გათვალისწინებულია ეგმ-ის გამოყენებით.

21.88. 1) $y' = x^2 - xy + y^2, \quad y(0) = 0{,}1; \quad c = 1;$

2) $y' = 4{,}7\,x - \operatorname{arctg} y + (x + y)\cos y, \quad y(0) = 0, \quad c = 1;$

3) $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad c = 0{,}3;$

4) $y' = xy\sin(2x - 3y) + \cos^2 y + 7{,}1; \quad y(0) = 1, \quad c = 1.$

§ 22. ამოცანები პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გამოყენებაზე

22.1. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის M (2;3) წერტილში და აქვს ის თვისება, რომ მის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების მონაკვეთი, რომელიც კოორდინატთა ღერძებს შორის არის მოთავსებული, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა.

22.2. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის M (2; 0) წერტილში და მის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია შეხების წერტილსა და ორდინატთა ღერძს შორის, არის ორის ტოლი.

22.3. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალის მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია წირის წერტილსა და აბსცისთა ღერძს შორის, მუდმივია და a-ს ტოლია.

22.4. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალის მიერ Ox ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a-ს ტოლია.

22.5. იპოვეთ წირი, თუ ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო ღერძებით, საძიებელი წირის მხებითა და შეხების წერტილის ორდინატით, უდრის a^2-ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის M_0 $(a;\ a)$ წერტილზე.

22.6. იპოვეთ M (1; 0) წერტილზე გამავალი წირის განტოლება, თუ ამ წირის ნორმალის მიერ აბსცისთა ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის სიგრძე 2-ით მეტია იმ წერტილის აბსცისაზე, რომელშიაც გავლებულია ნორმალი.

22.7. იპოვეთ წირის განტოლება, რომლის მხებქვეშა არის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის საშუალო არითმეტიკული.

22.8. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის $M(\sqrt{2};\ 0)$ წერტილზე და რომლის მხების მონაკვეთისა და მხებქვეშას ჯამი ტოლია შეხების წერტილის კოორდინატების ნამრავლის.

22.9. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების მიერ ორდინატთა ღერძზე მოკვეთილი მონაკვეთის სიგრძის კვადრატი ტოლია შეხების წერტილის კოორდინატების ნამრავლის.

22.10. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლისთვისაც სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით, ამ წირის მხებითა და შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორით, მუდმივია და ტოლია a^2-ის.

22.11. იპოვეთ წირის განტოლება, თუ ამ წირის ნებისმიერი მხები ორდინატთა ღერძს ჰკვეთს წერტილში, რომელიც ერთნაირი მანძილით არის დაშორებული შეხების წერტილიდან და კოორდინატთა სათავიდან.

22.12. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და რომლის ყველა ნორმალი იკვეთება მოცემულ $M(x_0, y_0)$ წერტილში.

22.13. იპოვეთ წირის განტოლება, თუ იგი გადის $M(1; 1)$ წერტილში და ამ წირის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები აბსცისთა ღერძზე ჩამოჭრის მონაკვეთს, რომლის სიგრძე ამავე მხების კოორდინატთა ღერძებს შორის მოთავსებულ მონაკვეთის სიგრძის ტოლია.

22.14. იპოვეთ წირის განტოლება, თუ იგი გადის კოორდინატთა სათავეში და ამ წირის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალის მონაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია საძიებელ წირსა და აბსცისთა ღერძს შორის, $2y^2=x$ პარაბოლით შუაზე იყოფა.

22.15. იპოვეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის $M(0,2)$ წერტილში, თუ ნებისმიერი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ წირის რკალით, ორჯერ მეტია შესაბამისი რკალის სიგრძეზე.

22.16. რეზერვუარში მოთავსებულია 100 ლ მარილხსნარი, რომელიც შეიცავს 10 კგ გახსნილ მარილს. ყოველ წუთში რეზერვუარიდან გამოდის 2 ლ მარილხსნარი და ჩადის 3 ლ სუფთა წყალი. რამდენი მარილი დარჩება რეზერვუარში 1 სთ-ის შემდეგ, თუ მარილის კონცენტრაცია დროის ნებისმიერ მომენტში მთელ რეზერვუარში ერთნაირია?

22.17. ჭურჭელი, რომლის მოცულობა a ლიტრია, ავსებულია მარილხსნარით. დროის ყოველ მომენტში ჭურჭელში ჩადის b ლიტრი წყალი და გამოდის ამდენივე ხსნარი. განსაზღვრეთ, რა კანონის მიხედვით იცვლება მარილის რაოდენობა ჭურჭელში.

22.18. იპოვეთ ჰაერის წნევის სიმაღლეზე დამოკიდებულობის კანონი, თუ ცნობილია, რომ ზღვის დონეზე იგი ტოლია 1 კგ/სმ², ხოლო 500 მ სიმაღლეზე კი 0,92 კგ/სმ².

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ჩათვალეთ, რომ h სიმაღლეზე ჰაერის წნევა განისაზღვრება მის ზემოთ არსებული ჰაერის სვეტით. ტემპერატურის ცვლილება სიმაღლის მიხედვით უგულველყავით და გამოიყენეთ კანონი, რომლის მიხედვით მუდმივი ტემპერატურის დროს ჰაერის წნევა პროპორციულია სიმკვრივის.

22.19. ჰუკის კანონის თანახმად, l სიგრძის ელასტიური ღერო F ძალის მოქმედებით ღებულობს წაგრძელებას, რომელიც პროპორციულია F ძალისა და ღეროს l სიგრძისა ($\Delta l = klF$, $k = \text{const}$). იპოვეთ, რამდენით წაგრძელდება l სიგრძის ღერო, რომელიც ვერტიკალურად არის დაკიდებული ერთი ბოლოთი, თუ მისი წონა არის P.

22.20. სითხეში, წრიულ მბრუნავ დისკზე მოქმედი ხახუნის ძალა პროპორციულია ბრუნვის კუთხური სიჩქარის. ვიპოვოთ დისკის ბრუნვის კუთხური სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ 100 ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით მბრუნავი დისკის კუთხური სიჩქარე 1 წთ-ის გავლის შემდეგ გახდა 60 ბრ/წთ.

22.21. სხეულის ვერტიკალურად ქვემოთ ვარდნისას ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ვარდნილი სხეულის სიჩქარისა. ვიპოვოთ v_0 საწყისი სიჩქარით ვერტიკალურად ვარდნილი სხეულის სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების კანონი.

22.22. მატერიალური წერტილი, რომლის მასაა 1 გ, მოძრაობს წრფივად ისეთი ძალის მოქმედებით, რომლის სიდიდე პროპორციულია მოძრაობის დროისა და უკუპროპორციულია სიჩქარისა. ვიპოვოთ მატერიალური წერტილის სიჩქარე მოძრაობის დაწყებიდან 60 წმ-ის შემდეგ, თუ მოძრაობის დაწყებიდან 10 წმ-ის შემდეგ სიჩქარე იყო 0,5 მ/წმ, ხოლო მოქმედი ძალა $4 \cdot 10^{-5}$ ნ.

22.23. მოტორიანი ნავი მოძრაობს $v = 10$ კმ/სთ სიჩქარით. რაღაც მომენტში გამორთეს ძრავი და ძრავის გამორთვიდან 20 წმ-ის შემდეგ ნავის სიჩქარე შემცირდა $v_1 = 6$ კმ/სთ-მდე. ჩათვალეთ, რომ ნავის მოძრაობისადმი წყლის წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ნავის სიჩქარისა და იპოვეთ ნავის სიჩქარე 2 წთ-ის შემდეგ ძრავის გამორთვიდან.

22.24. m მასის მქონე მატერიალური წერტილი მოძრაობს წრფივად. მასზე მოქმედებს ძალა, რომელიც პროპორციულია მოძრაობის დროის კუბისა (პროპორციულობის კოეფიციენტია k) და უკუპროპორციულია სიჩქარის მოძრაობის დროზე ნამრავლისა

(პროპორციულობის კოეფიციენტია k_1). იპოვეთ მატერიალური წერტილის სიჩქარე დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ მისი საწყისი სიჩქარეა v_0.

22.25. ტყვია ხვდება $h=0,1$ მ სისქის ძელს $v_0=200$ მ/წმ სიჩქარით და გამოდის ძელიდან $v_1=80$ მ/წმ სიჩქარით. ჩათვალეთ, რომ ტყვიის მოძრაობისას ძელში მასზე მოქმედი წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ტყვიის სიჩქარის კვადრატისა და იპოვეთ დრო, რომელიც მოანდომა ტყვიამ ძელის გახვრეტას.

22.26. წყლის წვეთი, რომლის საწყისი მასაა M_0გ და საწყისი სიჩქარე v_0, მოძრაობს ინერციით და თან ორთქლდება თანაბრად m გ/წმ სიჩქარით. მასზე მოქმედებს გარემოს წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც პროპორციულია წვეთის სიჩქარისა და რადიუსის. იპოვეთ წვეთის მოძრაობის სიჩქარის დამოკიდებულება მოძრაობის დროზე, თუ საწყის მომენტში ($t=0$) წინააღმდეგობის ძალა იყო f_0 დინი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ტოლობა $F=\dfrac{d(mv)}{dt}$, სადაც F არის ტოლქმედი ძალა.

22.27. M_0 საწყისი მასის მქონე წყლის წვეთი თავისუფლად ვარდება ჰაერში და ვარდნის დროს თანაბრად ორთქლდება m გ/წმ სიჩქარით. გარემოს წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია წვეთის სიჩქარის (პროპორციულობის კოეფიციენტია k).

იპოვეთ წვეთის სიჩქარის ვარდნის ხანგრძლივობაზე დამოკიდებულების კანონი, თუ წვეთის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია. ჩათვალეთ, რომ $k\neq 2m$.

22.28. ძაბვა ელექტრული წრედის უბნის ბოლოებზე და წრედის წინაღობა თანაბრად იცვლება 1 წთ-ის განმავლობაში შესაბამისად ნულიდან 120 ვ-მდე და ნულიდან 120 ომამდე. წრედის ინდუქციურობაა 1 ჰენრი, დენის ძალა დროის საწყის მომენტში I_0. იპოვეთ დამოკიდებულება დენის ძალასა და დროს შორის.

22.29. მავთულიანი კოჭა ჩართულია ელექტრულ წრედში. 10 წმ-ის განმავლობაში ძაბვა კოჭის ბოლოებზე შეიცვალა $E_0=2$ ვ-დან $E_1=1$ვ-მდე. როგორი იქნება დენის ძალა კოჭაში მეათე წამის ბოლოს, თუ ცდის დაწყებისას მისი მნიშვნელობა იყო $16\dfrac{2}{3}$ ა? კოჭას წინააღმდეგობაა $R=0,01$ ომი, ინდუქციურობა კი 0,1 ჰენრი.

12.30. იპოვეთ დენის ძალა კოჭაში დროის t მომენტში, თუ მისი წინააღმდეგობაა R, ინდუქციურობა L, დენის საწყისი მნიშვნელობა $I_0=0$, ხოლო ელექტრომამოძრავებელი ძალა კოჭაში იცვლება $e=\varepsilon_0 \sin \omega t$ კანონით.

§ 23. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1. ძირითადი ცნებები

23.1. დაადგინეთ არე რომელზედაც შესრულებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობები:

1) $y''=\sin y'+e^{-x^2y}$; 2) $y''=x+\sqrt{x^2-y'}$;

3) $y''=y'\ln y'$; 4) $y''=\sqrt{y}$.

23.2. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს მითითებული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს:

1) $y=C_1x+C_2, \quad y''=0$;

2) $y=\ln\dfrac{1}{x+C_1}+C_2, \quad y''=y'^2$;

3) $y=x(\sin x-\cos x), \quad y''+y=2(\sin x+\cos x)$;

4) $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3, \quad xy'''=2$;

5) $y=\dfrac{1}{2}(x^2+1), \quad 1+y'^2=2yy''$;

6) $e^y\sin(C_1x+C_2)=2C_1^2. \quad y''=e^y$.

2. განტოლებები, რომლებიც ამოიხსნებიან რიგის დაწევით

ამოხსენით განტოლება (№№ 23.3—23.13):

23.3. 1) $y''=x+\sin x$; 2) $y''=\dfrac{1}{x}$;

3) $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 4) $y''=\dfrac{1}{1+x^3}$.

23.4. 1) $y'''=\dfrac{\ln x}{x^2}$; 2) $y'''=\cos 2x$;

3) $y'''=x+\cos x$; 4) $y'''=2x\ln x$.

23.5. 1) $xy'' = y'$; 2) $y'' + 2xy'^2 = 0$;

3) $x^2 y'' = y'^2$; 4) $y'' = 1 - y'^2$.

23.6. 1) $xy'' = (1 + 2x^2)\, y'$; 2) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$;

3) $x \ln x \cdot y'' = y'$; 4) $xy'' = y' + x^2$.

23.7. 1) $xy'' - y' = x \sin \dfrac{y'}{x}$; 2) $(1 - x^2)\, y'' + xy' - 2 = 0$;

3) $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$; 4) $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$.

23.8. 1) $y''' = (y'')^2$; 2) $y''' = \sqrt{1 - (y'')^2}$;

3) $xy''' - y'' = 0$; 4) $y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{ctg} x$;

5) $xy''' + y'' = 1 + x$; 6) $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$.

23.9. 1) $yy'' = y'^2$; 2) $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$;

3) $yy'' = y^2 y' + y'^2$; 4) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

23.10. 1) $y^3 y'' = 1$; 2) $yy'' - y'(1 + y') = 0$;

3) $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$; 4) $(y - 1)\, y'' = 2y'^2$.

23.11. 1) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; 2) $yy'' = y'^2 - y'^3$;

3) $2yy'' = y^2 + y'^2$; 4) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

23.12. 1) $y(1 - \ln y)\, y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$;

2) $\cos y \cdot y'' + \sin y\, (y')^2 = y'$;

3) $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$; 4) $y''(1 + 2 \ln y') = 1$.

23.13. 1) $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$; 2) $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$;

3) $(y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0$; 4) $y''' \cdot y'^2 = (y'')^3$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (№№ 23.14—23.18):

23.14. 1) $y''' = \dfrac{6}{x^3}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$;

2) $y'' = 4 \cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

3) $y''' = e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$;

4) $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

23.15. 1) $xy'' = y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$

2) $(1 + x^2) y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3;$

3) $xy'' + xy'^2 = y', \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1;$

4) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4.$

23.16. 1) $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}, \quad y(1) = 0, \quad y(e^2) = 1;$

2) $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

3) $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln \dfrac{y'}{x}\right), \quad y(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(1) = 1;$

4) $y''(1 + \ln x) + \dfrac{1}{x} y' = 2 + \ln x, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(1) = 1.$

23.17. 1) $2y'' = 3y^2, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1;$

2) $2yy'' - y'^2 = 0, \quad y(-1) = 4, \quad y'(-1) = 1;$

3) $y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

4) $yy'' = y'^2 - y'^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$

23.18. 1) $y^3 y'' = -1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0;$

2) $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y', \quad y(-1) = \dfrac{\pi}{6}, \quad y'(-1) = 2;$

3) $y^4 - y^3 y'' = 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

2) $2(y')^2 = y''(y - 1), \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$

ამოხსენით განტოლება, რომელიც ერთგვაროვანია y-ისა და მისი წარმოებულების მიმართ* (№№ 23.19, 23.20):

23.19. 1) $x^2 yy'' = (x - xy')^2;$ 2) $xyy'' - xy'^2 = yy';$

3) $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x};$ 4) $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'.$

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) ჩასმით $y' = zy$ განტოლება მიიღებს სახეს

$$x^2 (z' + z^2) y^2 = (y - xzy)^2.$$

აქედან

$$x^2 z' + 2xz = 1.$$

---

* ეს განტოლებები იხსნება ჩასმით $y' = zy$, სადაც z არის x ცვლადის უცნობი ფუნქცია.

ეს განტოლება წრფივია. მისი ამონახსნია

$$z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

აქედან მივიღებთ, რომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

23.20. 1) $x y y'' + x y'^2 = 2yy'$; 2) $y(x y'' + y') = x y'^2 (1 - x)$;

3) $x^2 (y'^2 - 2 y y'') = y^2$; 4) $x y y'' = y'(y + y')$.

3. წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებები

შეისწავლეთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოკიდებულების საკითხი (№№ 23.21—23.23):

23.21. 1) $x + 2, \ x - 2$; 2) $1, \ x, \ x^2$;

3) $6x + 9, \ 8x + 12$; 4) $4 - x, \ 2x + 3, \ 6x + 8$.

23.22. 1) $x, \ \ln x$; 2) $e^{-x}, \ x e^{-x}$;

3) $\sin 2x, \ \sin x \cos x$; 4) $1, \ \sin^2 x, \ \cos 2x$.

23.23. 1) $\sin x, \ \cos x, \ \sin 2x$; 2) $1, \ \sin x, \ \cos 2x$;

3) $x, \ 0, \ e^x$; 4) $\operatorname{sh} x, \ \operatorname{ch} x, \ 2e^x - 1, \ 3e^x + 5$.

შეადგინეთ წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება თუ ცნობილია მისი ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა (№№ 23.24, 23.25):

23.24. 1) $1, \ \cos x$; 2) $1, \ e^{-x}$;

3) $x, \ e^x$; 4) $x^3, \ x^4$.

23.25. 1) $x^2 - 3x, \ 2x + 3$; 2) $1, \ x, \ e^x$;

3) $x, \ x^2, \ e^x$; 4) $1, \ \sin x, \ \cos x$.

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსნი (№№ 23.26—23.28):

23.26. 1) $x^2 (x + 1) y'' - 2y = 0, \quad y_1 = 1 + \frac{1}{x}$;

2) $x y'' + 2 y' + xy = 0, \quad y_1 = \frac{\sin x}{x}$;

3) $(1 - x^2) y'' - 2 x y' + 2y = 0, \quad y_1 = x$;

4) $(x^2 + 1) y'' - 2 x y' + 2y = 0, \quad y_1 = x$.

23.27. 1) $xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1 = \dfrac{e^x}{x}$;

2) $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)\, y = 0, \quad y_1 = \operatorname{tg} x$;

3) $(c^x + 1)\, y'' - 2y' - e^x y = 0, \quad y_1 = e^x - 1$;

4) $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0, \quad y_1 = \sin x$.

23.28. 1) $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0, \ y_1 = x, \ y_2 = \dfrac{1}{x}$;

2) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0, \ y_1 = x, \ y_2 = x^2$;

3) $xy''' - y'' - xy' + y = 0, \quad y_1 = x, \quad y_2 = e^x$;

4) $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, \ y_1 = x, \ y_2 = \dfrac{1}{x}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 23.28 განტოლებების რიგი დაიწევს თუ ჯერ მოვახდენთ ჩასმას $y = y_1 z$, სადაც z — ახალი უცნობი ფუნქციაა, ხოლო შემდეგ მიღებულ განტოლებაში შემოვიღებთ აღნიშვნას $z' = u$.

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი ეძებეთ $y_1 = e^{ax}$ ან $y_1 = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ სახით (№ № 23.29, 23.30).

23.29. 1) $(2x + 1)\, y'' + 4xy' - 4y = 0$;

2) $xy'' - (2x + 1)\, y' + (x + 1)\, y = 0$;

3) $x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0$; 4) $x(x - 1)\, y'' - xy' + y = 0$.

23.30. 1) $xy'' + (x + 1)\, y' - 2(x - 1)\, y = 0$;

2) $xy'' - (2x + 1)\, y' + 2y = 0$;

3) $y'' - \dfrac{2x}{x^2 + 1} y' + \dfrac{2y}{x^2 + 1} = 0$

4) $x(2x + 1)\, y'' + 2(x + 1)\, y' - 2y = 0$.

4. წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლებები

23.31. იპოვეთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ ცნობილია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა:

1) $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = \dfrac{1}{x}, \quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}, \quad y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$;

2) $xy'' + 2y' + xy = x, \quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}, \quad y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$;

3) $(x^2-1)\,y''+4\,x\,y'+2y=6x,\quad y_1=\dfrac{1}{x+1},\quad y_2=\dfrac{1}{x-1};$

4) $\operatorname{ctg} x\cdot y''+2y'+(2\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)y=\cos^2 x,\quad y_1=\cos x,\quad y_2=x\cos x.$

23.32. იპოვეთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ ცნობილია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი:

1) $x^2\,y''-6\,x\,y'+12\,y=3x,\quad y_1=x^3;$

2) $x^2\,y''-x\,y'-3y=5\,x^4,\quad y_1=\dfrac{1}{x};$

3) $(x-1)\,y''-x\,y'+y=(x-1)^2\,e^x,\quad y_1=e^x;$

4) $x\,(x-1)\,y''-(2x-1)\,y'+2y=x^2\,(2x-3),\quad y_1=x^2.$

5. წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებები

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (№№ 23.33—23.38):

23.33. 1) $y''-5y'+6y=0;$ 2) $y''+3y'-4y=0;$
3) $y''+3y'=0;$ 4) $2\,y''+5\,y'-7y=0.$

23.34. 1) $y''-16y=0;$ 2) $y''-6y'+9y=0;$
3) $y''+4\,y'+4y=0;$ 4) $4\,y''+4\,y'+y=0.$

23.35. 1) $y''+y=0;$ 2) $4\,y''+9y=0;$
3) $y''-6\,y'+13\,y=0;$ 4) $y''+2y'+5y=0.$

23.36. 1) $y'''-4y''+3y'=0;$ 2) $y'''-2y''-y'+2y=0;$
3) $y'''-2y''+y'=0;$ 4) $y'''-3y'-2y=0.$

23.37. 1) $y'''-8y=0;$ 2) $y'''-y''+4\,y'-4y=0;$
3) $y'''-3y''+3y'-y=0;$ 4) $y'''-3y'+2y=0.$

23.38. 1) $y^{\mathrm{IV}}-16y=0;$ 2) $y^{\mathrm{IV}}-5y''+4y=0;$
3) $y^{\mathrm{IV}}+3y''-4y=0;$ 4) $y^{\mathrm{IV}}-8y'''+22y''-24y'+9y=0.$

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (№№ 23.29—23.42):

23.39. 1) $y''-5y'+4y=0,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=8;$

2) $y''+2y'=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0;$

3) $y''+4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2;$

4) $y''-2y'+y=0,\quad y(2)=1,\quad y'(2)=-2.$

23.40. 1) $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1;$

2) $y''' + y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1;$

3) $y^{\mathrm{IV}} - y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 1, \; y'''(0) = 1;$

4) $y^{\mathrm{V}} - y' = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 0,$
$y'''(0) = 1, \; y^{\mathrm{IV}}(0) = 2.$

23.41. 1) $y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 1;$

2) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha;$

3) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = e^{\pi};$

4) $y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

23.42. 1) $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 0;$

2) $y'' + \alpha y' = 0. \quad y(0) = e^{\alpha}, \quad y'(1) = 0;$

3) $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0;$

4) $y''' + y'' - y' - y = 0, \; y(0) = -1, \; y'(0) = 2, \; y(1) = 0.$

იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (№№ 23.43—23.57):

23.43. 1) $y'' - 5y' + 6y = 6x + 1;$ 2) $y'' + y' - 2y = 6x^2;$

3) $y'' + 2y' + y = -2;$ 4) $y'' - y' - 12y = 12.$

23.44. 1) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3;$

2) $y'' - 4y' + 5y = 10x^2 - 16x - 1;$

3) $y'' - 2y' + y = x^3;$ 4) $y'' + 4y = 4x^3 - 14x + 4.$

23.45. 1) $y'' + 8y' = 8x;$ 2) $y'' - 3y' = 6;$

3) $7y'' - y' = 14x;$ 4) $y'' - 2y' = x^2 - 1.$

23.46. 1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x};$ 2) $y'' - y = e^{-x};$

3) $y'' + 4y' + 4y = 25e^{3x};$ 4) $y'' + 9y = -39e^{2x}.$

23.47. 1) $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x};$ 2) $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^{x};$

3) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x};$ 4) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$

23.48. 1) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x};$ 2) $y'' + y' - 2y = 3xe^{x};$

3) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x};$ 4) $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}.$

23.49. 1) $y'' - 3y' + 2y = \sin x;$ 2) $y'' + 16y = -15\cos x;$

3) $y'' - 2y' = 12\cos 3x - 21\sin 3x;$

4) $y'' - 2y' + 2y = -\sin x - 3\cos x.$

23.50. 1) $4y'' + 8y' = x\sin x;$ 2) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x;$

3) $y'' - 4y = (2 - 5x^2)\sin x + 4x\cos x;$

4) $y'' - y' = (x^2 - 4x)\sin x + (2 - 2x - x^2)\cos x.$

23.51. 1) $y'' - y' = e^x \sin x$; 2) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$;

3) $2y'' + 5y' = 100xe^{-x}\cos x$; 4) $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}\cos x$.

23.52. 1) $y'' + y = 4x\cos x$; 2) $y'' + y = \cos x$;

3) $y'' + y = x^2 \sin x$; 4) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$.

23.53. 1) $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x$;

2) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$;

3) $y'' - 6y' + 10y = 2(\sin x + x\cos x)e^{3x}$;

4) $y'' + 2y' + 2y = (2\cos x - 4x\sin x)e^{-x}$.

23.54. 1) $y'' - y = 2e^x - x^2$; 2) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$;

3) $y'' + 2y' + 2y = (5x + 4)e^x + e^{-x}$;

4) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$.

23.55. 1) $y'' + 4y = \cos^2 x$; 2) $y'' - 4y' + 4y = \sin x\cos 2x$;

3) $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$; 4) $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$.

23.56. 1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$; 2) $y''' - 2y'' = 16 - 24x$;

3) $y^{(\mathrm{IV})} - 81y = 27e^{-3x}$; 4) $y''' + 8y = e^{-2x}$.

23.57. 1) $y^{\mathrm{IV}} + 5y'' + 4y = 3\sin x$; 2) $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$;

3) $y''' + 2y'' + y' = 2x + e^x$; 4) $y^{\mathrm{V}} + y''' = x + 2e^{-x}$.

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (№№ 23.58—23.60):

23.58. 1) $y'' - y = 4e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3{,}2$;

3) $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

4) $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$, $y(0) = \dfrac{1}{8}$, $y'(0) = 1$.

23.59. 1) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$;

2) $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$;

3) $y''' - y' = 6 - 3x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = (1)$;

4) $y^{\mathrm{IV}} - y = 8e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 1$.

23.60. 1) $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

3) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$;

4) $y'' + y = 2x - \pi$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$;

5) $y'' + y = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0;$

6) $y'' - 2y' + 2y = e^x, \quad y(0) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2},$

$y'(0) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით ამოხსენით განტოლება (№№ 23.61, 23.62):

23.61. 1) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$; 2) $y'' - 2y' + y = \frac{e}{x}$;

3) $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$; 4) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

23.62. 1) $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$; 2) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$;

3) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$; 4) $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$.

იპოვეთ ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნი (№№ 23.63, 23.64):

23.63. 1) $x^2 y'' + xy' - y = 0$; 2) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$;

3) $x^2 y'' + 2xy' + 6y = 0$; 4) $x^2 y''' - 3y y'' + 3y' = 0$.

23.64. 1) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$; 2) $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$;

3) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$;

4) $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$.

6. მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა*

რუნგე-კუტას მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა c წერტილში $\varepsilon = 0{,}0001$ სიზუსტით (№№ 23,65, 23.66):

23.65. 1) $y'' = y' + \sin(x + yy'), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad c = 1;$

2) $y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} + 1, \; y(3) = 6, \quad y'(3) = 3, \quad c = 4;$

3) $y'' = 2 - y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad c = 0{,}5;$

4) $y^3 y'' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad c = 1{,}5.$

* ამ პუნქტში მოცემული ამოცანების ამოხსნა გათვალისწინებულია ეგმ-ის გამოყენებით.

23.66. 1) $y'' + \dfrac{y}{2}\cos 2x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

2) $y'' = \dfrac{y - 2xy}{(1 + x^2)^2}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1, \ c = 1;$

3) $y'' = y' + \dfrac{2y}{x^2 + 1} + 2xe^x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ c = 1;$

4) $y'' = y' + \dfrac{2}{\cos^2 x}\, y + \dfrac{e^x}{\cos^2 x}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ c = 0{,}5.$

§ 24. ამოცანები მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებაზე

24.1. იპოვეთ წირის განტოლება, თუ ამ წირის რკალის სიგრძე, რომელიც ათვლილია რაიმე წერტილიდან, ტოლია რკალის ბოლო წერტილზე გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტისა.

24.2. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლის სიმრუდის რადიუსი მუდმივია.

24.3. იპოვეთ m მასის მქონე მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება, თუ იგი მოძრაობს წრფივად და მასზე მოქმედებს ძალა, რომელიც პროპორციულია სხეულის მოძრაობის დროისა. პროპორციულობის კოეფიციენტია k.

24.4. ვიპოვოთ ვერტიკალურად ვარდნილი სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ ვარდნის დროს მასზე სიმძიმის ძალასთან ერთად მოქმედებს ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც პროპორციულია სხეულის სიჩქარის კვადრატისა. პროპორციულობის კოეფიციენტია k.

24.5. m მასის მქონე სხეული მოძრაობს A წერტილისაკენ წრფივად რომელიღაც ძალის მოქმედებით, რომელიც პროპორციულია მოცემულ სხეულსა და A წერტილს შორის მანძილისა. დროის საწყის $t=0$ მომენტში მანძილი სხეულსა და A წერტილს შორის არის S_0, სხეულის სიჩქარე არის ნული, ხოლო მასზე მოქმედი ძალა F_0.

ვიპოვოთ სხეულსა და A წერტილს შორის მანძილის დროზე დამოკიდებულების კანონი.

24.6. m მასის მქონე სხეული მოძრაობს წრფივად A წერტილიდან B წერტილისაკენ F ძალის მოქმედებით. მოძრაობის დროს სხეულზე მოქმედებს წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც პროპორციულია სხეულსა და B წერტილს შორის მანძილისა და დროის საწყის მომენტში (A წერტილში) არის f_0-ის ტოლი ($f_0<F$).

სხეულის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია. რა დრო დაჭირდება სხეულს AB მანძილის გასასვლელად, თუ $AB=a$.

24.7. სხეული, რომლის მასაა 200 გ, ჩამოკიდებულია ზამბარაზე. ზამბარა გაჭიმეს 2 სმ-ით და გაუშვეს ხელი. მოძრაობის დროს სხეულზე მოქმედებს გარემოს წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც სხეულის სიჩქარის პროპორციულია, ამასთან იგი ტოლია 0,1 გ-ის, როდესაც სხეულის სიჩქარე $1\frac{\text{სმ}}{\text{წმ}}$. ზამბარაში აღძრული დრეკადობის ძალა მისი 2 სმ-ით წაგრძელების დროს 10 კგ-ია. ვიპოვოთ ზამბარაზე დაკიდებული სხეულის მოძრაობის განტოლება.

24.8. სხეული, რომლის წონაა $P=4$ კგ, ჩამოკიდებულია ზამბარაზე და ჭიმავს ზამბარას 1 სმ-ით. იპოვეთ ზამბარის მოძრაობის განტოლება, თუ ზამბარის ზედა ბოლო ასრულებს ჰარმონიულ რხევას, რომლის განტოლებაა $y=2\sin 30\,t$. სხეულის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.

24.9. ცილინდრული ფორმის ხის ძელი ($S=100$ სმ², $h=20$ სმ, $\rho=0{,}5$ გ/სმ³) მთლიანად ჩაძირულია წყალში. ძელი გაათავისუფლეს და მან დაიწყო წყლის ზედაპირზე ამოსვლა. ჩათვალეთ, რომ ძელზე მოქმედი გარემოს წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია ძელის ჩაძირული ნაწილის სიგრძისა და დაადგინეთ, როგორი უნდა იყოს პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომ წყლის ზედაპირზე პირველი ამოსვლისას წყლის ზემოთ ამოვიდეს ძელის სიგრძის ნახევარი. იპოვეთ ძელის ჩაძირული ნაწილის სიგრძის დროზე დამოკიდებულების კანონი.

24.10. სინათლის სხივი, რომელიც ვრცელდებოდა ჰაერში, ეცემა სითხის ზედაპირს α_0 კუთხით. სითხის გარდატეხის მაჩვენებელი წრფივად იცვლება სითხის სიღრმის ცვლილების მიხედვით. სითხის ზედაპირზე გარდატეხის მაჩვენებელი არის n_1, ხოლო h სიღრმეზე n_2. იპოვეთ სინათლის სხივის ტრაექტორიის განტოლება მოცემულ სითხეში.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. აბსცისთა ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვემოთ, კოორდინატთა სათავე ავიღოთ წყლის ზედაპირზე და ვისარგებლოთ სინათლის გარდატეხის კანონით

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n,$$

სადაც α არის სინათლის დაცემის კუთხე, β — გარდატეხის კუთხე.

24.11. ორი ერთნაირი მასის სხეული ჩამოკიდებულია ზამბარაზე. იპოვეთ რხევის განტოლება, რომელსაც შეასრულებს ერთ-ერთი

ტვირთი, თუ მეორე ტვირთი ზამბარიდან ჩამოვარდება. ზამბარის დრეკადობაა k, ერთი ტვირთის მასა m.

24.12. $m=1$ გ მასის მატერიალური წერტილი განიზიდება რომელიღაც O წერტილიდან. განზიდვის ძალა პროპორციულია მატერიალურ წერტილსა და O წერტილს შორის მანძილისა და მიმართულია მათი შემაერთებელი წრფის გასწვრივ (პროპორციულობის კოეფიციენტია 4). გარემოს წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია სიჩქარისა (პროპორციულობის კოეფიციენტია 3). დროის საწყის მომენტში მანძილი მატერიალურ წერტილსა და O წერტილს შორის არის 1 სმ, მატერიალური წერტილის სიჩქარე — ნული. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

24.13. ზამბარაზე, რომლის სიხისტეა $k=30$ ნ/მ, ჩამოკიდებულია $m=0{,}03$ კგ მასის სხეული. ზამბარა გაჭიმეს $x_0=4$ სმ-ით და გაუშვეს ხელი. რხევის დროს ტვირთზე მოქმედებს გარემოს წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც პროპორციულია ტვირთის სიჩქარისა და პროპორციულობის კოეფიციენტია $\mu=0{,}6$. იპოვეთ ტვირთის რხევის განტოლება.

24.14. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ასროლილია ვერტიკალურად ზემოთ $v_0=1$ მ/წმ სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ მიაღწევს სხეული უმაღლეს მდებარეობას?

§ 25. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

25.1. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქციები წარმოადგენენ მითითებულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს:

1) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2}, \\ y=t\ln t; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2t\,x^2, \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y+t}{t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=t, \\ y=2e^t, \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=e^{t-x}, \\ \dfrac{dy}{dt}=2e^x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=t-e^t, \\ y=e^{-t}, \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y-1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt}=(x-t)\,y^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}, \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

ამოხსენით მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (№№ 25.2—25.5):

25.2. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

25.3. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$

25.4. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

25.5. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + y + 5z; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y + 3z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y - 4z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - y - 2z. \end{cases}$

იპოვეთ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემ ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობე (№№ 25.6, 25.7):

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 2;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1;$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 0;$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 2x, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$

25.7. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = -2;$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 2;$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2z - 3x, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$

ამოხსენით მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (№№ 25.8—25.11):

25.8. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2e^t. \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

25.9. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \cos t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y + \cos t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \cos t, \\ 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = -3x + \sin t. \end{cases}$

25.10. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - e^t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + e^{2t}, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16t\,e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

25.11. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = \sin t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{3}{2}t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y + 4t + 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 2z + 2 - t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z + 1 - t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y + 4z - 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 7y + 6z + 1 - 7t \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + z + t. \end{cases}$

იპოვეთ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ პირობებს (№№ 25.12, 25.13):

25.12. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = -2;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 7t\,e^{-t} - 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y - 1, \end{cases} \quad x(0) = \dfrac{13}{4}, \quad y(0) = \dfrac{3}{4};$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0;$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + e^{t}, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

25.13. 1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + t^{2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \ y(0) = -2;$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y - 3\,e^{-2t}, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 4;$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + 2\,e^{-t}; \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - z + 1, \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + 1, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$

25.14. იპოვეთ ისეთი ორი წირი, რომლებსაც გააჩნიათ შემდეგი თვისებები: ა) ერთნაირი აბსცისების მქონე წერტილებში გავლებული მხებები იკვეთება ორდინატთა ღერძზე; ბ) ერთნაირი აბსცისების მქონე წერტილებში გავლებული ნორმალები იკვეთება აბსცისთა ღერძზე; გ) ერთი წირი გადის M_1 (1; 1) წერტილზე, მეორე — M_2 (1; 2) წერტილზე.

25.15. მოცემულია ორი წირი: ერთი $y=f(x)$, რომელიც გადის $M_1(0;\ 1)$ წერტილზე და $y=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, რომელიც გადის $M_2\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ წერტილზე. იპოვეთ $y=f(x)$ წირი, თუ მოცემული წირების ერთნაირი აბსცისების მქონე წერტილებში გავლებული მხები იკვეთებიან აბსცისთა ღერძზე.

25.16. ორი ერთნაირი, m მასის მქონე ბურთულა შეერთებულია ერთმანეთთან ზამბარით. ზამბარის სიგრძე არადეფორმირებულ მდგომარეობაში არის l_0. ზამბარა მოათავსეს ვერტიკალურად, გაჭიმეს l_1 სიგრძემდე და გაუშვეს ხელი. იპოვეთ თითოეული ბურთულას მოძრაობის განტოლება, თუ ვარდნის დაწყებიდან T დროის შემდეგ ზამბარის სიგრძე გახდა l_0. გარემოს წინააღმდეგობის ძალა და ზამბარის მასა უგულებელყავით.

25.17. m მასის მქონე მატერიალური წერტილი მიიზიდება O წერტილისაკენ ძალით, რომელიც პროპორციულია O წერტილამდე მანძილისა. სხეული მოძრაობას იწყებს A წერტილიდან, რომელიც დაშორებულია O-დან a მანძილით და დროის საწყის მომენტში აქვს v_0 სიჩქარე, რომელიც AO მონაკვეთის მართობულია. იპოვეთ სხეულის მოძრაობის ტრაექტორია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. წირის განტოლება ეძებეთ პარამეტრული სახით.

25.18. ქვემეხიდან გაისროლეს ჭურვი ჰორიზონტისადმი α კუთხით და v_0 საწყისი სიჩქარით. იპოვეთ ჭურვის მოძრაობის განტოლება, თუ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა ჭურვის სიჩქარის პროპორციულია.

25.19. ელექტრონი მოძრაობს ერთგვაროვან ელექტრულ ველში, რომლის დაძაბულობაა E ვ/მ. იპოვეთ ელექტრონის მოძრაობის ტრაექტორია, თუ დროის საწყის მომენტში ელექტრონის სიჩქარე არის v_0 და მიმართულია ელექტრული ველის ძალწირებისადმი α კუთხით.

25.20. ვთქვათ A ნივთიერება იშლება B და C ნივთიერებებად და თითოეული ნივთიერების წარმოქმნის სიჩქარე პროპორციულია A ნივთიერების დაუშლელი ნაწილის რაოდენობისა. იპოვეთ B და C ნივთიერებების x და y მასის A ნივთიერების დაშლის t დროზე დამოკიდებულების კანონი, თუ A ნივთიერების დაშლის დაწყებიდან ერთი საათის შემდეგ $x=\frac{m_0}{8}$, $y=\frac{3m_0}{8}$, სადაც m_0 არის A ნივთიერების საწყისი მასა.

25.21. ვთქვათ v_1 და v_2 მოცულობის მქონე ორი ჭურჭელი ავსებულია გაზით, რომელთა წნევა შესაბამისად არის P_1 და P_2 ($P_1 > P_2$). ჭურჭლები ერთმანეთთან შეაერთეს მილით, რომლის საშუალებითაც გაზი პირველი ჭურჭლიდან გადადის მეორეში. იპოვეთ გაზის წნევა თითოეულ ჭურჭელში მათი ერთმანეთთან შეერთებიდან t დროის შემდეგ, თუ ერთი ჭურჭლიდან მეორეში ერთი წამის განმავლობაში გადასული გაზის რაოდენობა პროპორციულია ჭურჭლებში დროის მოცემულ მომენტში არსებული წნევათა კვადრატების სხვაობისა. პროპორციულობის კოეფიციენტია k.

§ 26. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის მდგრადობა

26.1. გამოიკვლიეთ, მდგრადია თუ არა მოცემული განტოლებებისა და სისტემების ამონახსნები:

1) $y' = x(y-1)$, $y(0) = 1$; 2) $y' = x - 1$, $y(0) = -1$;

3) $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = y - z, \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$;

4) $\begin{cases} y' = \alpha y - z, \\ z' = \alpha z - x, \\ x' = \alpha x - y, \end{cases}$ $y(0) = z(0) = x(0) = 0$, $\alpha \in R$.

26.2. გამოარკვიეთ, არის თუ არა

$$\begin{cases} x' = \ln(1 + 2t - 2x) + 3y + 3t^2 + 1, \\ y' = x^2 - 2tx - 2x - y \end{cases}$$

სისტემის $x = t$, $y = -t^2$ ამონახსნი მდგრადი.

26.3. გამოარკვიეთ, არის თუ არა მოცემული სისტემის ნულოვანი ამონახსნი მდგრადი:

1) $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 3x + 2y, \\ z' = -x - y - z; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x - 2y, \\ z' = x + 3y - z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$

26.4. დიფერენციალურ განტოლებათა რომელიღაც სისტემის ზოგადი ამონახსნია

$$x=\frac{C_1-C_2t}{1+t^2}, \quad y=(C_1t^3+C_2)e^{-t}.$$

გამოარკვიეთ, იქნება თუ არა ამ სისტემის ნულოვანი ამონახსნი მდგრადი.

ლიაპუნოვის ფუნქციის გამოყენებით გამოიკვლიეთ, არის თუ არა მოცემული სისტემის ნულოვანი ამონახსნი მდგრადი (№№ 26.5—26.7):

26.5. 1) $\begin{cases}x'=x^3-y,\\ y'=x+y^3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x'=y-x+xy,\\ y'=x-y-x^2-y^3;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x'=2y^3-x^5,\\ y'=-x-y^3+y^5;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x'=y-3x-x^3,\\ y'=6x-2y.\end{cases}$

26.6. 1) $\begin{cases}x'=-x-y-x^3-y^2,\\ y'=x-y+xy;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x'=y+x^3,\\ x'=-x+y^3,\end{cases}$

3) $\begin{cases}x'=xy^4,\\ y'=-x^4y;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x'=-y+y^5,\\ y'=x+y^5.\end{cases}$

26.7. 1) $\begin{cases}x'=y+x^2y^2-\frac{1}{4}x^5,\\ y'=-2x-2x^3y-\frac{1}{2}y^3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x'=-2x+4xy^2,\\ y'=y+2x^2y;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x'=y^2-x^3y+\frac{1}{3}x^4,\\ y'=\frac{1}{2}x^2-xy+3y^3;;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x'=-\operatorname{sign}x-\operatorname{sign}y,\\ y'=\operatorname{sign}x-\operatorname{sign}y.\end{cases}$

პასუხები

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

§ 1

1.1. $s=\frac{x+y}{2}\sqrt{xy}$. **1.2.** $v=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{c^2-r^2}$. **1.3.** $s=2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\varphi$. **1.4.** $v=\frac{\sqrt{3}}{2}h(x^2+xy+y^2)$. **1.5.** $f(0;1)=0$, $f\left(-1;\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{5}$, $f\left(\frac{1}{x}, -y\right)=-\frac{2xy}{1+x^2y^2}$. **1.6.** $f(0;-1)=1$, $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=4$, $f(xy, -y)=\left(\frac{\operatorname{arctg} y(x-1)}{\operatorname{arctg} y(x+1)}\right)^2$.
1.7. 1) ნახევარსიბრტყე $y\leqslant 0$; 2) წრე $x^2+y^2\leqslant R^2$; 3) პირველი და მესამე საკოორდინატო მეოთხედები საკოორდინატო ღერძების ჩათვლით; 4) ნახევარსიბრტყე $y<\frac{x}{2}$. **1.8.** 1) $y^2>4x-8$; 2) $x^2+y^2\geqslant 1$; 3) აბსცისთა დადებით ნახევარღერძსა და $y=x^2$ პარაბოლას შორის მოთავსებული სიბრტყის ნაწილი საზღვრის წერტილების ჩათვლით; 4) $y^2=4x$ პარაბოლის შიგნით მოთავსებული $x^2+y^2<1$ წრის ნაწილი საზღვრის წერტილების ჩაუთვლელად. **1.9.** 1) მთელი სიბრტყე გარდა $x+y=k$ $(k\in z)$ წრფეებისა; 2) ზოლები $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in z$; 3) $x^2+y^2\leqslant 1$ წრისა და $2k\leqslant x^2+y^2\leqslant 2k+1$ $(k\in N)$ წრიული რგოლების გაერთიანება; 4) ზოლები $x\geqslant 0$, $2k\pi<y<\pi+2k\pi$ და $x<0$, $2k\pi-\pi<y<2k\pi$ $(k\in z)$. **1.10.** 1) $y=x$ და $y=-x$ წრფეებით შედგენილი მარჯვენა და მარცხენა ვერტიკალური კუთხეები გარდა წრფეთა გადაკვეთის წერტილისა: $-x\leqslant y\leqslant x$ $(x>0)$, $x\leqslant y\leqslant -x$ $(x<0)$; 2) მთელი სიბრტყე გარდა $x^2+y^2=1$ წრეწირის წერტილებისა; 3) $y=1+x$ და $y=1-x$ წრფეებით შედგენილი მარჯვენა და მარცხენა ვერტიკალური კუთხეები გარდა წრფეთა გადაკვეთის წერტილისა $1-x\leqslant y\leqslant 1+x$ $(x>0)$, $1+x\leqslant y\leqslant 1-x$ $(x<0)$; 4) $y=0$ და $y=-2x$ წრფეებით შედგენილი ბლაგვი ვერტიკალური კუთხეები გარდა წრფეთა გადაკვეთის წერტილისა **1.11.** 1) $x=\pm 2$ და $y=\pm 3$ წრფეებით შემოსაზღვრული მართკუთხედი; 2) რგოლი $9<x^2+y^2<25$; 3) მთელი სიბრტყე გარდა $(x+1)^2+y^2\leqslant 1$ და $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$, წრეების წერტილებისა; 4) $x=-y^2$, $x=y^2$ ჰიპერბო-

ლებითა და $y=2$ წრფით შედგენილი მრუდწირული სამკუთხედის გარდა (0; 0) წერტილისა. **1.12.** 1) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ ბირთვი; 2) პირველი ოქტანტი $x>0$, $y>0$, $z>0$; 3) კუბი $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$; 4) $x^2+y^2-z^2=0$ კონუსის გარე არე. **1.13.** 1) $x+y=h$ $(h\in R)$ პარალელური წრფეები; 2) $x^2+y^2=h^2$ კონცენტრული წრეწირები; 3) $xy=h$ ჰიპერბოლები; 4) პირველ და მესამე მეოთხედში მოთავსებული $xy=h^2$ ჰიპერბოლები. **1.14.** 1) $y=hx^2$ პარაბოლები წვეროს გარეშე; 2) $x^2-y^2=h$ ტოლფერდა ჰიპერბოლები; 3) hx^2+ $+2hy^2=1$ $(h>0)$ ელიფსები; 4) წრეწირები, რომლებიც ორდინატთა ღერძს ეხებიან სათავეში გარდა შეხების წერტილისა და ორდინატთა ღერძის გარდა. **1.15.** 1) $y=ax+h$ წრფეების თანაკვეთა f ფუნქციის განსაზღვრის არესთან; 2) $x^2+y^2=h^2$ წრეწირების თანაკვეთა f ფუნქციის განსაზღვრის არესთან; 3) $xy=h$ ელიფსების თანაკვეთა f ფუნქციის განსაზღვრის არესთან; 4) $y=hx$ წრფეების თანაკვეთა f ფუნქციის განსაზღვრის არესთან. **1.16.** 1) სიბრტყეები $x+y+z=h$; 2) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდები $x^2+y^2-z^2=h$ $(h>0)$, ორკალთა ჰიპერბოლოიდები $z^2-x^2-y^2=-h$ $(h<0)$ და $x^2+y^2=z^2$ კონუსი; 3) სიბრტყეები $3x-y+2z-h=0$; 4) $x^2+y^2-h^2z^2=0$ $(|h|\geqslant 1)$ კონუსები წვეროს გარდა და $z=0$ სიბრტყე გარდა კოორდინატთა სათავისა.

1.19. 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) -1. **1.20.** 1) 0; 2) 1; 3) -2; 4) 1. **1.21.** 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 1. **1.22.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 1. **1.23.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) არ არსებობს. **1.24.** 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) 1; 3) 1; 4) ∞. **1.25.** 1) 1; 2) a; 3) -8; 4) $\frac{2}{\pi}$. **1.26.** 1) e^3; 2) 1; 3) e^a; 4) e. **1.27.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **1.28.** 1) 1; 2) 0; 3) e; 4) 1. **1.29.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **1.31.** 1) უწყვეტია; 2) წყვეტილია; 3) უწყვეტია; 4) წყვეტილია. **1.32.** 1) (0; 0); 2) (0; 0) 3) $y=2x$ წრფის წერტილები; 4) $y=2x^2$. პარაბოლის წერტილები; **1.33.** 1) x^2+ $+y^2=1$ წრეწირის წერტილები; 2) საკოორდინატო ღერძების წერტილები; 3) $y=-x$ წრფისა და $x=y^2$ პარაბოლის წერტილები; 4) $x^2+y^2=1$ წრეწირისა და $x^2-y^2=1$ ჰიპერბოლის წერტილები.

§ 2

2.1. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+8xy$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y+4x^2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3-3y+2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2-3x$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sqrt{y}-\frac{2\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{2\sqrt{y}}-\frac{2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{4\sqrt[4]{x^3}}-\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt[4]{x}-\sqrt{\frac{x}{y}}$. **2.2.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-$ $-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

2.3. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos(x^2-y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\cos(x^2-y)$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2(x+y)}-$ $-\frac{y}{\sin^2(xy)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2(x+y)}-\frac{x}{\sin^2(xy)}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+$ $+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}$. **2.4.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3y\sin^2 xy\cdot\cos xy$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x\sin^2 xy\cos xy$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{y^2}}{y^2\cos^2\frac{x}{y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-4x\operatorname{tg}\frac{x}{y^2}}{y^3\cos\frac{x}{y^2}}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{x}{x^2+y^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{|x+y|\cdot\sqrt{x^2+2xy}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{|x+y|\sqrt{x^2+2xy}}$.

2.5. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=x^y\ln x$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=(y^2-1)(2x+1)(x^2+x)^{y^2-2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y(x^2+x)^{y^2-1}\ln(x^2+x)$.

2.6. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2y}\cdot 5^{\sin\frac{1}{xy}}\cdot\cos\frac{1}{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}-$ $-\frac{1}{xy^2}5^{\sin\frac{1}{xy}}\cdot\cos\frac{1}{xy}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}$. **2.7.** 1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y$; 3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ $=yz\,(xy)^{z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xz\,(xy)^{z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$; 4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\cdot z^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x\,z^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy\cdot z^{xy-1}$. **2.8.** 1) $f'_x\ (3,2)=56$, $f'_y\,(3,2)=42$; 2) $f'_x\,(1,2)=e(2e^4-1)$, $f'_y\,(1,2)=4e^5$; 3) $f'_x\,(2,1)=\dfrac{1}{2}$, $f'_y\,(1,2)=0$; 4) $f'_x\,(0,0)=1$, $f'_y\,(0,0)=-1$; 5) $f'_x\,(1,\ 2,\ 0)=1$, $f'_y\,(1,\ 2,\ 0)=\dfrac{1}{2}$, $f'_z\,(1,\ 2,\ 0)=\dfrac{1}{2}$; 6) $f'_x\left(0,\ 0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)=f'_y\left(0,\ 0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)=0$, $f'_z\left(0,\ 0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **2.9.** $\dfrac{3}{2}$; **2.10.** r; **2.11.** r; **2.12.** $-r^2\sin\theta$. **2.13.** uv^2. **2.16.** 1) $dz=(3x^2y-y^3)\,dx+(x^3-3xy^2)\,dy$; 2) $dz=$ $=-\sin(xy-y^2)\cdot(ydx+(x-2y)\,dy)$; 3) $dz=\dfrac{2}{x^2+y^2}\,(xdx+ydy)$; 4) $dz=\sin 2xdx-\sin_2 y\,dy$. **2.17.** 1) $dz=\dfrac{1}{x+y}\left(dx-\dfrac{x}{y}\,dy\right)$; 2) $dz=\dfrac{y}{x^2\cos^2\dfrac{y^2}{x}}(2xdy-ydx)$; 3) $dz=0$; 4) $dz=\dfrac{1}{y^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}(xdy-ydx)$. **2.18.** 1) $du=\dfrac{(x^2+y^2)dz-2z\,(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}$; 2) $du=\dfrac{z^2}{x^2y^2+z^4}\left(ydx+\right.$ $\left.+\,xdy-\dfrac{2xy}{z}\,dz\right)$; 3) $du=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}\left[\left(y+\dfrac{1}{y}\right)zdx+\right.$ $\left.+\left(1-\dfrac{1}{y^2}\right)xz\,dy+\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)\ln\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)dz\right]$; 4) $du=$ $=e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z\,dx+2y\sin^2 z\,dy+\sin 2z\,dz)$. **2.19.** 1) $df\,(1;\ 1)=$ $=dx-2dy$; 2) $df\,(1;\ 2)=9\,(4dx+dy)$; 3) $df\,(1;\ 1;\ 1)=dx-dy$; 4) $df\,(3;\ 4;\ 5)=\dfrac{1}{25}\,(5dz-3dx-4dy)$. **2.20.** 1) $\Delta f=36$, $df=28{,}5$; 2) $\Delta f=\dfrac{1}{14}$, $df=0{,}075$; 3) $\Delta f=\dfrac{1}{2}$, $df=\dfrac{\pi}{6}$; 4) $\Delta f=0$, $df=-\dfrac{1}{2}$.

2.21. 1) 5,08; 2) 2,95; 3) 8,29; 4) 0,788. **2.22.** $\Delta s \approx 1{,}235$, $\Delta c = -0{,}02$. **2.23.** $\Delta R = -\frac{1}{6}$ სმ. **2.24.** $\Delta l \approx -1{,}57$. **2.25.** $\Delta v \approx 617{,}5$ სმ³.

§ 3

3.1. $\frac{dz}{dt} = e^{2x-3y}\left(\frac{2}{\cos^2 t} - 6t + 3\right)$. **3.2.** $\frac{dz}{dt} = e^{2t}(4e^{2t} + 2\sin^2 t + \sin 2t)$. **3.3.** $\frac{dz}{dt} = \frac{1-2(x+1)^2}{y^2+(1+x)^2} e^{(1+x)^2}$. **3.4.** $\frac{dz}{dt} = x^y\left(\frac{y}{xt} + \ln x \cdot \cos t\right)$. **3.5.** $\frac{dz}{dt} = \frac{t}{\sqrt{y}} \operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$. **3.6.** $\frac{dz}{dt} = 3\cos^2(3x^2+y)\sin(3x^2+y)\left(\frac{1}{t^2} - 12t^3\right)$. **3.7.** $\frac{du}{dt} = 2t\ln t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2+1)\operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$. **3.8.** $\frac{du}{dt} = \frac{2xe^t}{x^2+y+z} + \frac{2\cos 2t}{x^2+y+z} + \frac{2\operatorname{arctg} t}{(1+t^2)(x^2+y+z)}$. **3.9.** $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}$. **3.10.** $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$. **3.11.** $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. **3.12.** $\frac{du}{dz} = \left(3 - \frac{4}{z^3} - \frac{1}{2\sqrt{z}}\right) \times \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(3z + \frac{2}{z^2} - \sqrt{z}\right)\right)$. **3.13.** $\frac{du}{dx} = e^{ax}\sin x$. **3.14.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 2x\left(\frac{ux}{y} - \frac{v\ln y}{u}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\left(\frac{\ln y}{u} + \frac{xv}{y}\right)$. **3.15.** $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{x}{y}\left(4 + \frac{x}{y}\right)$. **3.16.** $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial \tau} = 1$. **3.17.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2v}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \frac{2v}{x+y}$. **3.18.** $\frac{\partial z}{\partial t} = e^{x-2y}(\cos t - 6t^2)$, $\frac{\partial z}{\partial \tau} = -4\tau e^{x-2y}$. **3.19.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{t}{y}(2\cos t\tau^2 - t\tau^2 \sin t\tau^2) - 2t^3\tau y \sin t\tau^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y^3}(t\tau^2 \sin t\tau^2 - 2\cos t\tau^2) - 2t^3\tau x \sin t\tau^2$. **3.20.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+2xz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **3.21.** $\frac{\partial u}{\partial t} = e^{x^2-y+3z}\left(\frac{2x}{t+\tau} - \frac{1}{\tau}\cos\frac{t}{\tau} + 6t\right)$, $\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{x^2-y+3z}\left(\frac{2x}{t+\tau} + \frac{t}{\tau^2}\cos\frac{t}{\tau} - 6\tau\right)$. **3.22.**

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial u}+ye^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$, $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$.

3.23. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{df}{du}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{df}{du}$, $u=xy+\frac{y}{x}$.

3.27. $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}=r\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\varphi\right)$.

3.28. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=m\frac{\partial z}{\partial u}+p\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=n\frac{\partial z}{\partial u}+q\frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}$. **3.29.** $\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\varphi'(x)\right]$.

§ 4

4.1. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x+2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6x-6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2x-6y$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1-\frac{1}{x^2}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$. **4.2.** 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xy}{(2x+y^2)^{3/2}}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\ln y\cdot(\ln y+1)}{x^2}\times e^{\ln x\cdot\ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\ln x\ln y+1}{xy}e^{\ln x\cdot\ln y}$. **4.3.** 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x(xy-2)e^{-xy}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$. **4.4.** 1) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{y(x-z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$; 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=$

$= -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1 + z\ln\frac{x}{y}\right)$; 4) $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu\ln x}{z^4}\cdot(2z + y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{(z+y\ln x)u}{xz^2}$. **4.5.** 1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = -x^2 y\cos xy - 2x\sin xy$; 2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \frac{4y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$; 3) $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = (x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}$; 4) $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = (1+xy)e^{xy}\cos z$. **4.6.** 1) $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n\,\partial y^m} = n!\,m!$; 2) $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n\,\partial y^m} = \frac{2(-1)^n(n+m-1)!\,(mx+ny)}{(x-y)^{n+m+1}}$; 3) $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n\,\partial y^n} = e^{x+y}\left[x^2 + y^2 + 2(nx+my) + n(n-1) + m(m-1)\right]$; 4) $\frac{\partial^{n+m+k} u}{\partial x^n\,\partial y^m\,\partial z^k} = (x+n)(y+m)(z+k)\,e^{x+y+z}$. **4.7.** $f''_{x^2}(3;\ 2) = 36$, $f''_{y^2}(3;\ 2) = 6$, $f''_{xy}(3;\ 2) = 31$. **4.8.** $f'''_{x^3}(0;\ 1) = 0$, $f'''_{y^3}(0;\ 1) = 0$, $f'''_{x^2y}(0;\ 1) = 2$, $f'''_{xy^2}(0;\ 1) = 0$. **4.11.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'_u(u,v) + 4x^2 f''_{u^2}(u,v) + 4xy f''_{uv}(u,v) + y^2 f''_{v^2}(u,v)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f'_v(u,v) + 4xy f''_{u^2}(u,v) + 2(x^2+y^2)f''_{uv}(u,v) + xy f''_{v^2}(u,v)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f'_u(u,v) + 4y^2 f''_{u^2}(u,v) + 4xy f''_{uv}(u,v) + x^2 f''_{v^2}(u,v)$. **4.12.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{x^2} + 2f''_{xz}\varphi'_x + f''_{z^2}\cdot(\varphi'_x)^2 + f'_z\varphi''_{x^2}$. **4.13.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{u^2}\times(\varphi'_x)^2 + 2f''_{uv}\varphi'_x g'_x + f''_{v^2}(g'_x)^2 + f'_u\varphi''_{x^2} + f'_v g''_{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{u^2}\varphi'_x\varphi'_y + f''_{uv}\cdot(\varphi'_x g'_y + g'_x\varphi'_y) + f''_{v^2}g'_x g'_y + f'_u\varphi''_{xy} + f'_v g''_{xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{u^2}\cdot(\varphi'_y)^2 + 2f''_{uv}\varphi'_y g'_y + f''_{v^2}(g'_y)^2 + f'_u\varphi''_{y^2} + f'_v g''_{y^2}$ **4.14.** 1) $d^2z = -2y\,dx^2 + 4(y-x)\,dx\,dy + 2x\,dy^2$; 2) $d^2z = -\frac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$; 3) $d^2z = e^{xy}\left[(y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy\right]$; 4) $d^2z = 2\sin 2y\,dx\,dy + 2x\cos 2y\,dy^2$. **4.15.** 1) $d^2u = 2(x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy)$; 2) $d^2u = e^{xyz}\left((yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)^2 + 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dx\,dz)\right)$; 3) $d^2u = 2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz)$; 4) $d^2u = -\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$. **4.16.** 1) $d^3z = 6dx^3 - 3dx^2dy + 3dx\,dy^2 + dy^3$; 2) $d^3z = -8(x\,dx + y\,dy)^3\cos(x^2+y^2) - 12(x\,dx + y\,dy)\times(dx^2 + dy^2)\sin(x^2+y^2)$; 3) $d^3u = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx\,dy\,dz)$; 4) $d^nu = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^n$. **4.17.** $d^2f(1;\ 2) = 6dx^2 + 2dx\,dy +$

$+4{,}5\,dy^2$. **4.18.** $d^2f(0;\,0;\,0)=2dx^2+4dy^2+6dz^2-4dx\,dy+$ $+8dx\,dz+4dy\,dz$. **4.19.** $d^2z=4\varphi''(t)(xdx+ydy)^2+2\varphi'(t)(dx^2+dy^2)$.
4.20. $d^2z=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(y^2\ln^2\frac{ex}{y}+\frac{y}{x}\right)dx^2+2\left(xy\ln\frac{ex}{y}\ln\frac{x}{ey}+\right.\right.$ $\left.\left.+\ln\frac{x}{y}\right)dx\,dy+\left(x^2\ln^2\frac{x}{ey}-\frac{x}{y}\right)dy^2\right]$. **4.21.** $d^2z=a^2f''_{u^2}(u,v)dx^2+$ $+2abf''_{uv}(u,v)\,dx\,dy+b^2f''_{v^2}(u,v)\,dy^2$. **4.31.** 1) $\frac{d^2y}{dt^2}$; 2) $\frac{d^2y}{dt^2}+y$; 3) $y''-5y'+y$; 4) $x\frac{d^2x}{dy^2}+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-1$. **4.32.** 1) $\frac{dr}{d\varphi}-r$; 2) $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}$; 3) $\frac{2r'^2-rr''+r^2}{(r'^2+r^2)^{3/2}}$; 4) $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$. **4.33.** 1) $r\frac{\partial u}{\partial r}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial u}$; 4) $u\frac{\partial z}{\partial u}-z$. **4.34.** 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}$; 3) $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. **4.35.** 1) $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+$ $+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$; 2) $-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}$; 3) $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)^2+$ $+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)^2$; 4) $\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\right.$ $\left.+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$.

§ 5

5.1. 1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2e^{2x}-xe^{2y}}{x^2e^{2y}-ye^{2x}}$; 2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$; 3) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{2-y}$; 4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+y+1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$.
5.2. 1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+ay}{ax-y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$; 2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2[y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$; 3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$; 4) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y}{x^2}$. **5.3.** 1) $y'(1)=$

$=3,\ y''(1)=8$; 2) $y'(0)=0,\ y''(0)=-\dfrac{2}{3}$; 3) $y'(1)=-1,\ y''(1)=$ $=-\dfrac{2}{3}$; 4) $y'(0)=\dfrac{\ln 2-1}{\ln 2+1},\ \ y''(0)=\dfrac{8\ln^2 2}{(\ln 2+1)^3}$. **5.4.** 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $=\dfrac{x^3-yz}{xy-z^2},\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{c^2x}{a^2z},\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{c^2y}{b^2z}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3},\ \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\ \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^2}$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2-xy},\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy},\ \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3},\ \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=$ $=\dfrac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3},\ \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $=\dfrac{1}{x+y+z-1},\ \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$, **5.5.** 1) $\dfrac{\partial z(1;\,-2)}{\partial x}=1,\ \ \dfrac{\partial z(1;\,-2)}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{\partial z(-1;\,0)}{\partial x}=-1$, $\dfrac{\partial z(-1;\,0)}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{\partial^2 z(1;\,-2)}{\partial x^2}=-\dfrac{2}{5},\ \ \dfrac{\partial^2 z(1;\,-2)}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{\partial^2 z(1;\,-2)}{\partial y^2}=-\dfrac{394}{125}$; 4) $\dfrac{\partial^2 z(0;\,1)}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{2}$. **5.7.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-$ $-\dfrac{F'_u(u,v)+2xF'_v(u,v)}{F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)},\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_u(u,\ v)+2yF'_v(u,\ v)}{F'_u(n,\ v)+2zF'_v(u,\ v)},\ \ u=$ $=x+y+z,\ v=x^2+y^2+z^2$. **5.8.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z\,e^{xz}F'_v(u,\ v)}{yF'_u(u,v)+x\,e^{xz}F'_v(u,v)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{zF'_u(u,\ v)'}{yF'_u(u,v)+x\,e^{xz}F'_v(u,v)},\ \ u=yz,\ \ v=e^{xz}$. **5.11.** 1) $dz=$ $=\dfrac{yz}{z^2-xy}\,dx+\dfrac{xz}{z^2-xy}\,dy$; 2) $dz=-\dfrac{\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy}{\sin 2z}$; 3) $dz=-\dfrac{x}{z}\,dx-\dfrac{y}{z}\,dy,\ d^2z=\dfrac{y^2-u^2}{z^3}\,dx^2-\dfrac{2xy}{z^3}\,dx\,dy$; 4) $dz=$ $=\dfrac{z}{1-z}(dx+dy),\ d^2z=\dfrac{z}{1-z^3}(dx+dy)^2$. **5.12.** 1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x}{y},\ \ \dfrac{dz}{dx}=$ $=\dfrac{10x}{3z},\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3(y^2-3x^2)}{y^3},\ \ \dfrac{d^2z}{dx^2}=\dfrac{10(3z^2-10x)}{9z^3}$; 2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{5y}$,

$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{5z}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4(5y^2+4x^2)}{25y^3}$, $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{5z^2-x^2}{25z^3}$; 3) $dy=\frac{x-z}{z-y}dx$, $dz=\frac{y-x}{z-y}dx$; 4) $dy=\frac{y(z-x)}{x(y-z)}dx$, $dz=\frac{z(x-y)}{x(y-z)}dx$, $d^2y=-$ $-\frac{a}{x^3(y-z)^3}][(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]dx^2$, $d^2z=\frac{a}{x^3(y-z)^3}\times$ $\times[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]dx^2$. **5.13.** 1) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u+y}{x-y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=-\frac{v+y}{x-y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+x}{x-y}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$; 3) $du=\frac{ydx+vdy}{1+y}$, $dv=\frac{dx-vdy}{1+y}$, $d^2u=\frac{2(dx\,dy-vdy^2)}{(1+y)^2}$, $d^2v=\frac{2(vdy^2-dx\,dy)}{(1+y)^2}$;

4) $du=\frac{(\sin v+x\cos v)\,dx-(\sin u-x\cos v)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$,

$$dv=\frac{(y\cos u-\sin v)\,dx+(\sin u+y\cos u)\,dy}{x\cos v+y\cos u},$$

$$d^2u=\frac{(2\cos v\,dx-x\sin v\,dv)\,dv-(2\cos u\,dy-y\sin u\,du)\,du}{x\cos v+y\cos u},$$

$$d^2v=\frac{(x\sin v\,dv-2\cos v\,dx)\,dv+(2\cos u\,dy-y\sin u\,du)\,du}{x\cos v+y\cos u}.$$

5.14. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-3uv$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v)$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sin v}{u}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{\cos v}{u}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=\frac{\sin 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=uv^2+u^2v$, $\frac{\partial z}{\partial y}=uv^2-u^2v$; 4) $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\vartheta}{\sin^3\varphi}$; 5) $dz=e^{-u}((v\cos v-u\sin v)\,dx+(u\cos v+v\sin v)\,dy)$. 6) $dz=$ $=\frac{1}{2e^{2u}}[e^{u-v}(u+v)\,dx+e^{u+v}(v-u)\,dy]$.

§ 6

6.2. 1) $2x-4y-z-5=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$; 2) $8x-$ $-8y-z=4$, $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$; 3) $x+y-z-1=0$, $\frac{x-1}{1}=$

$=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$; 4) $x-y-2z+1=0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$.

6.3. 1) $17x+11y+5z=60$, $\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$; 2) $x-y+$ $+2z-\frac{\pi}{2}=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$; 3) $x+ez-2=0$, $\frac{x-1}{1}=$ $=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-1/e}{e}$; 4) $z+a=0$, $\begin{cases}x=a,\\ y=a.\end{cases}$ **6.4.** 1) $x+2y+$ $+3z-14=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$; 2) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0$, $\frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{z-R}{0}$; 3) $2x+3y+6z=18$, $\frac{x-3}{2}=$ $=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{6}$; 4) $x+11y+5z-18=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$.

6.5. 1) $3x+4y-6z=0$, $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$; 2) $2x+7y-5z+$ $+4=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$; 3) $x+y-4z=0$, $\frac{x-2}{1}=$ $=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$; 4) $5x+4y+z-28=0$, $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{1}$.

6.6. 1) $\frac{x}{a}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\vartheta_0=1$, $\frac{x-a\cos\vartheta_0\cos\varphi_0}{bc\cos\vartheta_0\cos\varphi_0}=\frac{y-b\sin\varphi_0\cos\vartheta_0}{ac\sin\varphi_0\cos\vartheta_0}=\frac{z-c\sin\vartheta_0}{ab\sin\vartheta_0}$; 2) $x\cos\varphi_0+$ $+y\sin\varphi_0-z=0$, $\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0}{-1}$;
3) $x\sin v_0-y\cos v_0+zu_0=u_0v_0$, $\frac{x-u_0\cos v_0}{\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-\cos v_0}=\frac{z-v_0}{u_0}$;
4) $3y-2z+1=0$, $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{3/2}=\frac{z-1}{-1}$. **6.7.** $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$.

6.8. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}}$. **6.9.** $4x+$ $+y+2z-78=0$. **6.10.** $x+4y+6z=\pm 21$. **6.11.** $(1; \pm 1; 0)$ წერტილებზე

გავლებული მხები სიბრტყეები პარალელურია oxz სიბრტყის; (0; 0; 0) და (2; 0; 0) წერტილებზე გავლებული მხები სიბრტყეები პარალელურია oyz სიბრტყის; ზედაპირზე არ არის წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები სიბრტყე პარალელური იქნება oxy სიბრტყის. **6.12.** $2x+y-z-2=0$. **6.13.** $\frac{x-2}{1}=\frac{3y-10}{9}=\frac{z+4}{4}$. **6.14.** $4x-2y-3z=3$ **6.16.** $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **6.17.** $\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$. **6.18.** $3x+4y+12z-169=0$. **6.28.** $\frac{\pi}{3}$.

6.31. 1) $-\frac{3}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$; 4) $\frac{11}{7}$. **6.32.** 1) 1; 2) $\frac{68}{13}$. **6.33.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.34.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **6.35.** $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}$. **6.39** $x_0+y_0+z_0$; უდიდესია, როცა $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$, უმცირესია, როცა $x_0=y_0=z_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ნულის ტოლია $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ წრეწირის წერტილებში. **6.40.** $\frac{2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. **6.41.** $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cos\alpha\cos\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cos\beta\cos\gamma$. **6.43.** 1) $9\vec{i}-3\vec{j}$; 2) $\frac{1}{4}(5\vec{i}-3\vec{j})$; 3) $6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$; 4) $\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$. **6.44.** 1) $\frac{\vec{r}}{r}$; 2) $2\vec{r}$; 3) $-\frac{\vec{r}}{r^3}$.

6.45. $\sqrt{17+16\ln^2 2}$. **6.46.** $|\operatorname{grad} u|=6$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$. **6.47.** $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **6.48.** $\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}$. **6.49.** $\cos\varphi=-\frac{12}{5\sqrt{145}}$. **6.50.** $\frac{\pi}{2}$. **6.51.** $2\sqrt{3}$.

§ 7

7.1. 1) $f(-2+h,\ 1+k)=1-h^2+2hk+3k^2$; 2) $f(2+h,\ 1+k)=12+15h+6h^2+3hk-6k^2+h^3-2k^3$; 3) $f(1+h,\ 1+k)=1+2h+k+h^2+2hk+h^2k$; 4) $f(1+h,\ -2+k)=5+2h^2-hk-k^2$; 5) $f(x_0+h,$

$y_0+k)=x_0^3+2y_0^3-x_0y_0+(3x_0^2-y_0)h+(6y_0^2-x_0)k+3x_0h^2-hk+$ $+6y_0k^2+h^3+2k^3$; 6) $f(x_0+h,\ y_0+k)=ax_0^2+2bx_0y_0+cy_0^2+$ $2(ax_0+by_0)h+2(bx_0+cy_0)k+ah^2+2bhk+ck$. **7.2.** 1) $1-$ $-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$; 2) $y+xy+\frac{3x^2y-y^3}{3!}$; 3) $1+y+$ $+\frac{1}{2!}(y^2-x^2)+\frac{1}{3!}(y^3-3x^2y)$; 4) $1-\frac{1}{2!}(x^2+y^2)+\frac{1}{4!}(x^4+6x^2y^2+y^4)$.
7.3. 1) $1+(y-1)+(x-1)(y-1)$; 2) $1-(x-1)+(y-1)+$ $+(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(x-1)^3+(x-1)^2(y-1)$; 3) $1+$ $+[(x-1)+(y+1)]+\frac{1}{2!}[(x-1)+(y+1)]^2+\frac{1}{3!}[(x-1)+(y+1)]^3$; 4) $[(x-1)+(y-1)]-\frac{1}{2!}[(x-1)^2+(y-1)^2]+z^2$. **7.4.** $1+\frac{2}{3}(x-1)-$ $-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{1}{8}(y-1)^2$. **7.5.** $1+(x-1)+(x-1)\times$ $\times(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$, $(1,1)^{1.02}\approx 1{,}1021$. **7.6** $1+h+$ $+\frac{1}{2}(h^2-k^2)+\frac{1}{6}(h^3-3hk^2)$, $e^{0,1}\sin 0{,}49\pi\approx 1{,}1051$. **7.7.** 1) $Z_{min}=$ $=Z(-1;\ 2)=0$; 2) სტაციონალური წერტილია $(-1;\ 2)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია; 3) $Z_{min}=Z(0;\ 3)=-9$; 4) $Z_{max}=Z(1;0)=1$.
7.8. 1) $Z_{min}=Z(2;\ 1)=-28$, $Z_{max}=Z(-2;\ -1)=28$, $(1;\ 2)$ და $(-1;\ -2)$ სტაციონალური წერტილებია; 2) $Z_{min}=Z(1;\ 1)=-1$, $(0;0)$ სტაციონალური წერტილია; 3) სტაციონალური წერტილია $\left(2;\ -\frac{2}{3}\right)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია; 4) $Z_{max}=Z(-1;\ -1)=1$, $(0,0)$ სტაციონალური წერტილია. **7.9.** 1) $Z_{max}=Z\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{64}$; 2) $Z_{min}=Z(-1;\ -1)=-2$, $Z_{min}=Z(1,\ 1)=-2$, $(0;\ 0)$ სტაციონალური წერტილია; 3) $Z_{min}=Z(0;\ 0)=0$, $\left(-\frac{5}{3};\ 0\right)$, $(1;\ 4)$, $(1;\ -4)$ — სტაციონალური წერტილებია. 4) $Z_{min}=Z(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})=$ $=Z(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})=-8$, $(0;\ 0)$ სტაციონალური წერტილია. **7.10.** 1) $Z_{max}=Z(2;\ 3)=108$, $Z_{min}=Z(0;\ y)=0$ $(0<y<6)$, $Z_{max}=Z(0;\ y)=$ $=0$ $(-\infty<y<0,\ 6<y<\infty)$; 2) $Z_{max}=Z(3;\ 2)=108$; 3) სტაციონალური წერტილია $(0;\ 0)$, ექსტრემუმი არა აქვს; 4) სტაციონალური წერტილია $(0;\ 0)$, ექსტრემუმი არა აქვს. **7.11.** 1) $Z_{min}=Z(5;\ 2)=30$;

2) $Z_{\min}=Z(4;2)=6$; 3) $Z_{\min}=Z(1;1)=3$; 4) $Z_{\max}=Z(-1;-1)=-1$.
7.12. 1) $Z_{\min}=Z(2;4)=0$; 2) $Z_{\max}=Z(4;4)=12$; 3) $Z_{\max}=Z\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)=Z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $Z_{\min}=Z\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=Z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$; 4) $Z_{\max}=Z(1;\ -1)=\sqrt{3}$. 7.13. 1) $Z_{\min}=Z(-2;\ 0)=-\frac{2}{e}$; 2) $Z_{\min}=Z\left(\frac{1}{2};\ -1\right)=-\frac{e}{2}$; 3) $Z_{\max}=Z(-4;\ -2)=\frac{8}{e^2}$, (0, 0) სტაციონალური წერტილია. 4) $Z_{\min}=Z(0;\ 0)=0$, $Z_{\max}=Z(1;\ 0)=Z(-1;\ 0)=\frac{2}{e}$. 5) $Z_{\max}=Z(0;\ 0)=1$; 6) $Z_{\max}=Z(0;\ 0)=4$.
7.14. 1) $Z_{\min}=Z(1;2)=7-10\ln 2$; 2) $Z_{\min}=Z(1;\ 3)=10-18\ln 3$. 3) $Z_{\min}=Z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}};\ \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=Z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}};-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=-\frac{1}{2e}$, $Z_{\max}=Z\left(\frac{1}{\sqrt{2e}};\ -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=Z\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}};\ \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=\frac{1}{2e}$, $(0;\ \pm 1)$, $(\pm 1;\ 0)$ — სტაციონალური წერტილებია, 4) სტაციონალური წერტილია $\left(-\frac{3\sqrt[3]{2}}{2};-\sqrt[3]{2}\right)$, ექსტრემუმი არა აქვს. 7.15. 1) $Z_{\max}=Z\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) $Z_{\max}=Z\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$. 3) $Z_{\max}=Z\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$; 4) $Z_{\min}=Z\left(\frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $Z_{\max}=Z\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 7.16. 1) $U_{\min}=U(2;\ -3;\ 1)=-14$; 2) $U_{\min}=U(-1;\ -2;\ 3)=-14$; 3) $U_{\min}=U\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\ 1\right)=-\frac{4}{3}$; 4) $U_{\min}=U(24;\ -144;\ -1)=-6913$. 7.17. 1) $U_{\max}=U\left(\frac{1}{7};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7^7}$; 2) $U_{\min}=U(2^{1/4};\ 2^{1/2};\ 2^{3/4})=2^{9/4}$; 3) $U_{\min}=U\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)=4$; 4) $U_{\max}=U\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)=4$.

$U_{\min}=U(0;\ 0;\ 0)=U(\pi;\ \pi;\ \pi)=0$. **7.18.** 1) განტოლება განსაზღვრავს ორ Z_1 და Z_2 არაცხად ფუნქციას. $(Z_1)_{\min}=Z_1(1;\ -1)=-2$; $(Z_2)_{\max}=Z_2(1;\ -1)=6$; 2) განტოლება განსაზღვრავს ორ Z_1 და Z_2 არაცხად ფუნქციას. $(Z_1)_{\max}=Z_1(-2;\ 1)=1$, $(Z_2)_{\min}=Z(-2;\ 1)=-2$. $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ წრეწირის ყოველი წერტილი არის ორივე ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი და $Z_1=Z_2=2$; 3) განტოლება განსაზღვრავს ორ არაცხად Z_1 და Z_2 ფუნქციას. $(Z_1)_{\min}=Z(0;\ -2)=1$, $(Z_2)_{\max}=Z\left(0;\ \frac{16}{7}\right)=-\frac{8}{7}$; 4) $Z_{\min}=Z(-(3+\sqrt{6}),\ -(3+\sqrt{6}))=-(4+2\sqrt{6})$, $Z_{\max}=Z(\sqrt{6}-3,\ \sqrt{6}-3)=2\sqrt{6}-4$.

7.19. 1) $Z_{\max}=Z\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$; 2) $Z_{\max}=Z(a;a)=Z(-a;-a)=a^2$, $Z_{\min}=Z(a;\ -a)=Z(-a,\ a)=-a^2$; 3) $Z_{\min}=Z\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$; 4) $Z_{\min}=Z(1;\ 1)=0$, $Z_{\max}=Z\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$. **7.20.** $Z_{\min}=Z(1;\ 1)=2$; 2) $Z_{\max}=Z(a\sqrt{2};\ a\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{a}$, $Z_{\min}=Z(-a\sqrt{2},\ -a\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{a}$; 3) $Z_{\min}=Z\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; 4) $Z_{\min}=Z\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$; $Z_{\max}=Z\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$. **7.21.** 1) $Z_{\min}=Z\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$; 2) $Z_{\min}=Z(1;\ 1)=2$; 3) $Z_{\max}=Z(1;\ 1)=e$; 4) $Z_{\max}=Z\left(\frac{7}{8}\pi+k\pi;\ \frac{9}{8}\pi+k\pi\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $Z_{\min}=Z\left(\frac{3}{8}\pi+k\pi,\ \frac{5}{8}\pi+k\pi\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **7.22.** 1) $U_{\min}=U(-4;\ -2;\ 4)=-18$, $Z_{\max}=Z(4;\ 2;\ -4)=18$; 2) $U_{\min}=U(3;\ 3;\ 3)=9$; 3) $U_{\min}=U(0;\ 0;\ \pm 2)=4$, $U_{\max}=U(\pm 4;\ 0;\ 0)=16$, $(0;\ \pm 3;\ 0)$ სტაციონალური წერტილია; 4) $U_{\max}=U(2;\ 4;\ 6)=6912$. **7.23.** 1) $U_{\max}=U\left(\frac{11}{4};-\frac{5}{2};-\frac{11}{4}\right)=-\frac{605}{32}$; 2) $U_{\max}=U(2;1;1)=U(1;2;1)=U(1;\ 1;\ 2)=2$, $U_{\min}=U\left(\frac{2}{3};\ \frac{5}{3};\ \frac{5}{3}\right)=U\left(\frac{5}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{3}\right)=$

$= U\left(\frac{5}{3};\ \frac{5}{3};\ \frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}$; 3) $U_{\min} = U\ (2\ \sqrt[4]{6};\ 2\sqrt[4]{6};\ \sqrt{\frac{2}{3}}\Big) = 4\sqrt[6]{6} + \sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $U_{\min} = U\ (1;\ 1;\ 1) = 2$.
7.26. 1) უდიდესი მნიშვნელობაა —2, უმცირესი მნიშვნელობაა —5; 2) უდიდესი მნიშვნელობაა 2, უმცირესი მნიშვნელობაა —1; 3) უდიდესი მნიშვნელობაა 6, უმცირესი მნიშვნელობაა —1; 4) უდიდესი მნიშვნელობაა 17, უმცირესი მნიშვნელობაა —3. **7.27.** 1) უდიდესი მნიშვნელობაა 4, უმცირესი მნიშვნელობაა —4; 2) უდიდესი მნიშვნელობაა $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, უმცირესი მნიშვნელობაა $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 3) უდიდესი მნიშვნელობაა 125, უმცირესი მნიშვნელობაა —75; 4) უდიდესი მნიშვნელობაა $\frac{1}{2}$, უმცირესი მნიშვნელობაა $-\frac{1}{2}$. **7.28.** 1) უდიდესი მნიშვნელობაა $9+4\sqrt{2}$, უმცირესი მნიშვნელობაა —11; 2) უდიდესი მნიშვნელობაა 4, უმცირესი მნიშვნელობაა —64; 3) უდიდესი მნიშვნელობაა 1, უმცირესი მნიშვნელობაა 0; 4) უდიდესი მნიშვნელობაა $\frac{3}{e}$, უმცირესი მნიშვნელობაა 0. **7.29.** 1) უდიდესი მნიშვნელობაა $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, უმცირესი მნიშვნელობაა 0; 2) უდიდესი მნიშვნელობაა arctg7, უმცირესი მნიშვნელობაა —arctg5; 3) უდიდესი მნიშვნელობაა 300, უმცირესი მნიშვნელობაა 0. 4) უდიდესი მნიშვნელობაა $1+\sqrt{2}$, უმცირესი მნიშვნელობაა $-\frac{1}{2}$. **7.30,** $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$.
7.31. $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}$. **7.32.** $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$. **7.32.** კუბი, რომლის წიბოს სიგრძეა $\sqrt[3]{v}$. **7.34.** ყუთის განზომილებებია $\sqrt[3]{2v}$, $\sqrt[3]{2v}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}$. **7.35.** ტოლგვერდა სამკუთხედი. **7.36.** კუბი. **7.37.** კუბი.
7.38. კუბი. **7.39.** მართკუთხედის გვერდებია $\frac{2p}{3}$ და $\frac{p}{3}$. **7.40.** სამკუთხედის გვერდებია $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ და $\frac{p}{2}$. **7.41.** მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოებია $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ და $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **7.42.** მართკუთხა პარა-

ლელეპიპედის წიბოებია $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$ და $\frac{H}{3}$. 7.43. თუ $\alpha \geqslant \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, მაშინ უდიდესი ზედაპირის ფართობი აქვს პარალელეპიპედს, რომლის სიმაღლე $H = l\sin\alpha\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}$, ხოლო ფუძე კვადრატია; თუ $0<\alpha<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, მაშინ $H=0$. 7.44. ტოლგვერდა. 7.45. 1) მოცემული ფუძის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედი; 2) მოცემული ფუძის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედი. 7.46. საძებნი წერტილის კოორდინატებია ოთხკუთხედის წვეროების კოორდინატთა საშუალო არითმეტიკული. 7.47. $M\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$. 7.48. $\frac{4}{\sqrt{5}}$. 7.49. $\sqrt{20}$. 7.50. $\frac{19\sqrt{2}}{8}$. 7.51. $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$. 7.52. $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. 7.53. 1) ცილინდრის ფუძის რადიუსია $\frac{R\sqrt{6}}{3}$, სიმაღლეა $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$; 2) ცილინდრის ფუძის რადიუსია $\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$, სიმაღლეა $R\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$. 7.54. პარალელეპიპედის წიბოებია $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$. 7.55. 1) $y=0{,}425x+1{,}175$; 2) $y=0{,}395x+4{,}75$; 3) $y=-0{,}75x+5{,}75$; 4) $y=-4{,}245x+16{,}435$.

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§ 8

8.1. 1) $\frac{1}{4}x^4+C$; 2) $\frac{1}{7}x^7+C$; 3) x^3+C; 4) $\frac{1}{2}x^8+C$. 8.2. 1) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x+C$; 2) $\frac{x^6}{2}-x^4+x^2-2x+C$; 3) $\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+4x+C$; 4) $\frac{x^7}{7}+\frac{x^4}{4}+x+C$. 8.3. 1) $-\frac{2}{x}+C$; 2) $-\frac{3}{4x^4}+C$; 3) $-\frac{1}{2x^2}-2\ln|x|+x+C$; 4) $-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}+$

$+\ln|x|-2x+C$. **8.4.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}-x+C$; 2) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-$ $-4x\sqrt[4]{x^3}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+C$; 3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-3x^2\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+$ $+x+C$; 4) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-5x\sqrt[5]{x^2}+4x\sqrt[4]{x}-\frac{1}{2}x^2+x+C$.

8.5. 1) $-2\sqrt{x}+\frac{9}{\sqrt[3]{x}}+\frac{10}{3}\sqrt[5]{x^3}+C$; 2) $-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}-12\sqrt[4]{x}-$ $-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+C$; 3) $5\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}-4\sqrt[4]{x}+C$; 4) $5\sqrt[5]{x^4}-7\sqrt[7]{x^4}+$ $+\frac{1}{x^2}+x+C$. **8.6.** 1) $\frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+C$; 2) $\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$; 3) $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$; 4) $\frac{24}{35}x\sqrt[24]{x^{11}}+C$. **8.7.** 1) $\frac{1}{3}x^3+3x-\frac{2}{x}+C$; 2) $3\ln|x|-x+$ $+\frac{x^3}{3}+C$; 3) $\frac{x^4}{4}+2x-\frac{1}{2x^2}+C$; 4) $\frac{x^5}{5}+x^3+3x-\frac{1}{x}+C$.

8.8. 1) $\frac{36}{13}x\sqrt[12]{x}-\frac{8}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C$; 2) $\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x}+C$; 3) $\frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+C$; 4) $\frac{4}{17}x^4\sqrt[4]{x}-\frac{3}{5}x^3\sqrt[3]{x}+$ $+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$. **8.9.** 1) $-3\cos x-2\sin x+x+C$, 2) $-2\operatorname{ctg}x-$ $-3\operatorname{tg}x+C$, 3) $\operatorname{arctg}x-2\arcsin x+C$; 4) $2e^x-\frac{3^x}{\ln 3}+2\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+C$.

8.10. 1) $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$; 2) $\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$; 3) $\operatorname{tg}x-x+C$; 4) $-\operatorname{ctg}x-x+C$, **8.11.** 1) $\frac{a^x e^x}{1+\ln a}+C$; 2) $e^x-\ln|x|+C$; 3) $\frac{a^x}{\ln a}+\frac{1}{2x^2}+C$; 4) $\frac{2^x-2^{-x}}{\ln 2}+C$. **8.12.** 1) $x-\cos x+C$; 2) $2\operatorname{tg}x-\sin x+C$; 3) $\operatorname{tg}t+\frac{t}{2}+C$; 4) $\operatorname{tg}t+2\operatorname{ctg}t+C$.

8.13. 1) $x+\sin x+C$; 2) $\operatorname{tg}x+C$; 3) $-\operatorname{ctg}t-\operatorname{tg}t+C$; 4) $\operatorname{tg}t-\operatorname{ctg}t+C$. **8.14.** 1) $-2\operatorname{ctg}x+C$; 2) $-2\operatorname{tg}x+C$; 3) $2\arcsin x+C$; 4) $x+\sin x+C$. **8.15.** 1) $3\operatorname{sh}x-2\operatorname{ch}x+C$;

2) $-\operatorname{cth} x-4\operatorname{th} x+C$; 3) $x-\operatorname{th} x+C$; 4) $x-\operatorname{cth} x+C$. **8.16.** 1) $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x+C$; 2) $\ln|x|-2\operatorname{arctg} x+C$; 3) $-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C$; 4) $-\frac{2}{x}+\operatorname{arctg} x+C$. **8.17.** 1) $\frac{(3x+1)^5}{15}+C$; 2) $-\frac{(2-x)^6}{6}+C$; 3) $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-2x)^4}+C$; 4) $\frac{7}{36}\sqrt[7]{(3x-2)^{12}}+C$.

8.18. 1) $\frac{1}{10(4-5x)^2}+C$; 2) $-\frac{1}{2(2x+1)}+C$; 3) $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x}+C$. 4) $\frac{5}{4}\sqrt[5]{(2x-1)^2}+C$. **8.19.** 1) $\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C$; 2) $-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+C$; 3) $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$; 4) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **8.20.** 1) $-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+C$; 2) $\frac{1}{\pi}\sin(\pi x+2)+C$; 3) $5\sin\frac{x}{5}+C$; 4) $-2\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)+C$. **8.21.** 1) $x\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin 2x+C$; 2) $-3\cos\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$; 3) $\frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x+C$; 4) $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+C$. **8.22.** 1) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$; 2) $-\frac{a^{-x}}{\ln a}+C$; 3) $\frac{1}{3}e^{3x}+e^{-x}+C$; 4) $\frac{a^{2x}}{2\ln a}-\frac{a^{-2x}}{2\ln a}+C$. **8.23.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x-1)+C$; 2) $-\frac{1}{3}\operatorname{sh}(1-3x)+C$; 3) $2\operatorname{th}\frac{x}{2}+C$; 4) $-\frac{1}{\pi}\operatorname{cth}\pi x+C$. **8.24.** 1) $x-2\ln|x+4|+C$; 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\ln|2x-1|+C$; 3) $8\ln|x+4|-x+C$; 4) $\frac{1}{9}\ln|1-3x|-\frac{2}{3}x+C$. **8.25.** 1) $\frac{x^2}{2}+3x-7\ln|x+3|+C$; 2) $x^2+x+\frac{2}{3}\ln|3x-1|+C$; 3) $C-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{8}-\frac{1}{8}x-\frac{17}{16}\ln|1-2x|$; 4) $\frac{x^3}{3}-3x^2+12x-23\ln|x+2|+C$. **8.26.** 1) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ln|x-1|+C$;

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+2x^2-8x+17\ln|x+2|+C$; 3) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-$ $-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$; 4) $C-\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|1-x|$.

8.27. 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\right|+C$;

3) $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}\,x-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,x+2\sqrt{3}}\right|+C$; 4) $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{7}}{2x-\sqrt{7}}\right|+C$.

8.28. 1) $x-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 2) $C-3x-\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$;

3) $\frac{x^3}{3}+4x+4\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$; 4) $C-\frac{x^3}{3}-3x-\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|$.

8.29. 1) არ არის მართებული; 2) მართებულია; 3) არ არის მართებული;

§ 9

9.1. 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}\,x}{2}+C$; 3) $\arcsin\frac{x}{3}+C$;

4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{10}\,x}{5}+C$. **9.2.** 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 2) $-\frac{1}{10}\ln|4-5x^2|+C$;

3) $-\sqrt{1-x^2}+C$; 4) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(x^2+2)^6}+C$. **9.3.** 1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4}+C$;

2) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}+C$; 3) $\frac{1}{6}\sqrt[5]{(x^5+1)^6}+C$; 4) $\frac{1}{ak}\ln|ax^k+b|+C$.

9.4. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{7+x^4}+C$; 2) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$; 3) $-\frac{2}{9}\sqrt{2-3x^3}+C$;

4) $-\frac{3}{80}\sqrt[3]{(1-4x^5)^4}+C$. **9.5.** 1) $-\frac{1}{2}\cos(x^2+2)+C$;

2) $\frac{1}{9}\sin(3x^3-1)+C$; 3) $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$; 4) $\frac{3^{-2x^2}}{4\ln 2}+C$.

9.6. 1) $-\frac{3^{1/x}}{\ln 3}+C$; 2) $\frac{1}{2e^{1/x^2}}+C$; 3) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 4) $\frac{3\cdot 2^{\sqrt[3]{x}}}{\ln 2}+C$.

9.7. 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$; 2) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{\sqrt{2}}+C$; 3) $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4}+C$. 9.8. 1) $\ln(x^2-3x+8)+C$; 2) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$; 3) $\frac{1}{2}e^{x^4-2x}+C$; 4) $\frac{5^{x-\frac{1}{x}}}{\ln 5}+C$. 9.9. 1) $\frac{1}{4}\ln^4 x+C$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$; 3) $\ln|\ln|x||+C$; 4) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-\ln(x-1))^2}+C$.

9.10. 1) $-\ln|\cos x|+C$; 2) $\ln|\sin x|+C$; 3) $\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+C$; 4) $-2\ln|\cos x|+C$. 9.11. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{tg} x+1)^3}+C$; 2) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-\operatorname{tg} x)^2}+C$; 3) $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+C$; 4) $\frac{1}{2}e^{-\operatorname{ctg} 2x}+C$.

9.12. 1) $\frac{1}{3\cos^3 x}+C$; 2) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$; 3) $e^{\sin x}+C$; 4) $\frac{3^{-\cos x}}{\ln 3}+C$.

9.13. 1) $3\sqrt[3]{\sin x}+C$; 2) $-\cos^6 x+C$; 3) $-\frac{1}{16\sin^4 x}+C$; 4) $-\frac{1}{6}\sqrt{\cos^3 2x}+C$. 9.14. 1) $\ln|x-\sin x|+C$; 2) $\ln|\sin x-\cos x|+C$; 3) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{1+\sin 2x}+C$; 4) $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x+3}+C$. 9.15. 1) $\ln(e^x+3)+C$. 2) $\frac{\ln(1+3^x)}{\ln 3}+C$; 3) $\ln(e^x+e^{-x})+C$; 4) $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}+C$.

9.16. 1) $\frac{1}{\ln 2}\cdot\operatorname{arctg} 2^x+C$; 2) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin\frac{3^x}{2}+C$; 3) $\operatorname{arctg} e^x+C$; 4) $x-\ln(e^x+1)+C$. 9.17. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3}+C$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$; 3) $\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\arcsin x}+C$; 4) $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$. 9.18. 1) $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$; 2) $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; 3) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$. 9.19. 1) $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$;

2) $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$; 3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; 4) $\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

9.20. 1) $-\frac{1}{9}(\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3)+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+\frac{1}{4}(\operatorname{arctg}2x)^3+C$;

3) $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg}e^x)^3}+C$.

9.21. 1) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; 2) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

9.22. 1) $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right)+C$;

3) $-\frac{1}{n+2}\ln\left|\frac{x^{n/2}-1}{x^{n/2}+1}\right|+C$; 4) $\frac{2}{n+2}\arcsin\left(x^{\frac{n}{2}+1}\right)+C$.

9.23. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{ch}2x})+C$; 2) $3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}+C$;

3) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}^2 x-\ln(1+\operatorname{ch}^2 x))+C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x+C$.

9.24. 1) $\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+C$; 2) $\ln|x+\sqrt{x^2+3}|+C$;

3) $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+C$; 4) $\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+5})+C$.

9.25. 1) $C-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$; 2) $C-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$;

3) $C-\frac{1}{15}(x^5+2)^{-3}$; 4) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x^3-2)^4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x^3-2)^3}+C$.

9.26. 1) $\frac{2}{5}(x-2)\sqrt{(3+x)^3}+C$; 2) $2(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))+C$;

3) $2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C$; 4) $2\left(\frac{x\sqrt{x}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-\right.$

$\left.-2\ln(1+\sqrt{x})\right)+C$. **9.27.** 1) $\frac{2}{35}\sqrt{x-1}(5x^3+6x^2+8x+6)+C$;

2) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; 3) $\frac{2}{15}(x+4)(3x-23)\sqrt{x+4}+C$;

4) $\frac{2}{15}(x-1)(3x+22)\sqrt{x-1}+C$; 5) $\frac{1}{9}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{x+2}{9}-$ $-\frac{14}{27}\sqrt{x+2}+\frac{28}{81}\ln(3\sqrt{x+2}+2)+C$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3}-$ $-\frac{2}{3}(x-1)+\frac{16}{9}\sqrt{x-1}+\frac{64}{27}\ln\left|\sqrt{x-1}-\frac{4}{3}\right|+C$. **9.28.** 1) $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+$ $+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C$; 3) $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{4/3}+C$; 4) $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C$. **9.29.** 1) $-\frac{2}{15}(32+8x+$ $+3x^2)\sqrt{2-x}+C$; 2) $-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{5/3}+C$; 3) $C-$ $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^3-x^3}(2a^3+x^3)$; 4) $\frac{x^2-4}{2}+\frac{8}{x^2-4}+4\ln|x^2-4|+C$. **9.30.** 1) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$; 2) $x+\frac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{x^5}+$ $+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$; 3) $3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C$; 4) $\frac{6}{5}(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+$ $+2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|)+C$. **9.31.** 1) $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+$ $+2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|+C$; 2) $\ln x-\ln 2\cdot\ln|\ln x+2\ln 2|+C$; 3) $\ln|\ln\ln x|+C$; 4) $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$. **9.32.** 1) $-\frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x|+C$; 2) $\ln^2 \operatorname{tg} x+C$; 3) $-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)+C$; 4) $-\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$. **9.33.** 1) $\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}+C$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|+C$; 3) $\frac{2}{5}(3-2\cos^2 x\sqrt{(1+\cos^2 x)^3})+C$; 4) $e^{\operatorname{tg} x}+\ln|\operatorname{tg} x|+C$. **9.34.** 1) $-2\sqrt{e^{-x}+1}+C$; 2) $-\arcsin(e^{-x})+C$; 3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^{\sin x}-1}+C$; 4) $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C$;

9.35. 1) $-\frac{1}{2}\ln^2 \arccos x+C$; 2) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2+C$; 3) $(\operatorname{arctg} e^x)^2+C$; 4) $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C$. 9.36. 1) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)+C$. 3) $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$; 4) $-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$; 5) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C$. 9.37. 1) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$; 2) $\frac{a^2}{2}\operatorname{crcsin}\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$; 3) $-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}+C$; 4) $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$. 9.38. 1) $\sqrt{x^2-a^2}-$ $-|a|\arccos\left|\frac{a}{x}\right|+C$; 2) $-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|}+C$; 3) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$; 4) $-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$. 9.39. 1) $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$; 2) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C$; 3) $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$; 4) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$.

§ 10

10.1. 1) xe^x-e^x+C; 2) $-(x+1)e^{-x}+C$; 3) $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$; 4) $\frac{e^{2x}}{4}(6x-11)+C$. 10.2. 1) $-x\cos x+\sin x+C$; 2) $x\sin x+\cos x+C$; 3) $C-\frac{1}{5}\left(x\cos 5x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)$; 4) $3x\sin\frac{x}{3}+9\cos\frac{x}{3}+C$. 10.3. 1) $\frac{1}{2}[(2x+5)\sin 2x+\cos 2x]+C$; 2) $\frac{3x-1}{4}\cos 4x-\frac{3}{16}\sin 4x+C$; 3) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$; 4) $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg}x+C$. 10.4. 1) $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$; 2) $x\ln x-x+C$; 3) $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x-\frac{1}{\alpha+1}\right)+C$; თუ $\alpha\neq-1$; $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$, თუ $\alpha=-1$. 4) $\left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\ln x-\frac{3x^2}{4}-2x+C$. 10.5. 1) $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$; 2) $x\ln(x^2+1)-$

$-2x+2\operatorname{arctg}x+C$; 3) $\frac{x^3+1}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$;

4) $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x+\frac{13}{3}\right)\ln(x+1)-\frac{x^3}{9}+\frac{2}{3}x^2-\frac{13}{3}x+C$.

10.6. 1) $\frac{-x+(x^2+1)\operatorname{arctg}x}{2}+C$; 2) $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

3) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 4) $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$.

10.7. 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-$

$-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 3) $x\operatorname{tg}x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$; 4) $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$.

10.8. 1) $(x^2-2x+2)e^x+C$; 2) $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$;

3) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$; 4) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$.

10.9. 1) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$; 2) $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C$;

3) $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$; 4) $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+$

$+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C$. **10.10.** 1) $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$;

2) $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C$; 3) $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$.

4) $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x+C$. **10.11.** 1) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+$

$+\sqrt{1+x^2})+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C$; 3) $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+$

$+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+C$; 4) $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$.

10.12. 1) $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$; 2) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2 x-$

$-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 3) $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1)+C$;

4) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$. **10.13.** 1) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\cos x\times$

$\times\ln\operatorname{tg}x+C$; 2) $-x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$; 3) $\frac{x^3}{3}\arcsin 2x+\frac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2}+C$;

4) $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}+C$. **10.14** 1) $-(x+\operatorname{ctg}x\times$ $\times\ln(e\sin x))+C$; 2) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$; 3) $2(2-x)\cos\sqrt{x}+$ $+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C$; 4) $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C$.

10.15. 1) $-\frac{1}{2}(\operatorname{sign}x)\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}+C$; 2) $2\sqrt{x+1}\times$ $\times(\ln(x^2-4)-4)-4\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}+C$; 3) $\sin x\cdot\ln(1+\sin^2x)-$ $-2\sin x+2\operatorname{arctg}\sin x+C$; 4) $\frac{x-2}{x+2}e^x+C$. **10.16.** 1) $\frac{x}{9}(3-x^2)-$ $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\arcsin x+C$; 2) $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C$. 3) $\sqrt{x^2+1}\cdot\ln\frac{x}{e}-\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}+C$; 4) $2\sqrt{x+1}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-$ $-2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+C$. **10.17.** 1) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)\cdot e^x+C$; 2) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x+C$; 3) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$; 4) $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$. **10.18.** 1) $\frac{1}{2}(\sin x\cdot\operatorname{sh}x-\cos x\cdot\operatorname{ch}x)+C$; 2) $\frac{1}{2}(\cos x\cdot\operatorname{sh}x+\sin x\cdot\operatorname{ch}x)+C$; 3) $\frac{5-\cos 2x-2\sin 2x}{10}e^x+C$. 4) $\frac{1}{8}(\sin 2x-\cos 2x-2)\cdot e^{-2x}+C$.

10.19. 1) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$; 2) $\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$; 3) $\frac{x}{10}(5+\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x))+C$; 4) $\frac{x^3}{10}(3\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.

10.20. 1) $\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arccos x}+C$; 2) $\frac{1}{2}(x\sin x+(1-x)\cos x)e^x+C$

3) $\frac{(x-1)^2\sin x+(x^2-1)\cos x}{2}e^x+C$;

4) $\frac{(4-10x)\sin 2x-(5x+3)\cos 2x+25(x-1)}{50}e^x+C$.

11.1. 1) $\frac{1}{2-x}+C$; 2) $\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)+C$; 4) $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C$. **11.2.** 1) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$; 2) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$. 3) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right|+C$; 4) $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x+5}{1-3x}\right|+C$. **11.3.** 1) $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-11}{\sqrt{11}}+C$; 2) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$; 3) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$; 4) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$.

11.4. 1) $\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$; 2) $\arcsin(x-1)+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$; 4) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$. **11.5.** 1) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$; 2) $\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$; 3) $\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C$; 4) $\ln\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right)+C$. **11.6.** 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+$ $+\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 2) $\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$; 3) $\frac{3}{8}\left[\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$; 4) $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-$ $-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+C$, **11.7.** 1) $\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln(x+1+$ $+\sqrt{x^2+2x+2})+C$; 2) $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$; 3) $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$; 4) $-3\sqrt{6x-x^2-8}+13\arcsin(x-3)+C$. **11.8.** 1) $-\operatorname{sign}x\times$ $\times\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}}+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{sign}x\cdot\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C$; 3) $-\operatorname{sign}x\times$ $\times\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|}\right)+C$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sign}x\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{4}+\right.$ $\left.+\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{\sqrt{2}|x|}\right|+C$. **11.9.** 1) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sign}(x-1)\ln\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\right.$

$+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}\,|x-1|}\Big)+C$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{sign}(2x-3)\ln\left|\frac{1}{2x-3}+\frac{1}{15}+\right.$ $\left.+\frac{2\sqrt{4x-x^2}}{|2x-3|\sqrt{15}}\right|+C$; 3) $2\operatorname{sign}(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{17}}\operatorname{sign}(4x-3)\cdot\arcsin\frac{11-9x}{2(4x-3)}+C$. **11.11.** 1) $\frac{1}{3}\frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{(1-x)^2}+$ $+C$; 2) $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}+C$; 3) $-\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}-$ $-\frac{1}{2}\operatorname{sign}x\ln\left(\frac{2-x}{2x}+\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|}\right)+C$; 4) $\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+$ $+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}+C$. **11.11.** 1) $\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-3}{3^x-1}\right|+C$; 2) $\ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right)+C$; 3) $-\ln(2+\cos x+$ $+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1})+C$; 4) $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{\ln x+2}{\sqrt{5}}+$ $+C$. **11.12.** 1) $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C$; 2) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-1}-\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|+C$; 3) $\frac{2x-1}{4}\times$ $\times\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$; 4) $\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+$ $+\frac{5}{2}\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$.

§ 12

12.1. 1) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$; 3) $\ln|x+1|-$ $-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$; 4) $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$. **12.2.** 1) $\frac{1}{12}\ln\frac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4}+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3(x-2)^2}{(x+1)^5}\right|+C$; 3) $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$; 4) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C$.

12.3. 1) $\ln\frac{(x-2)^2}{|(x+2)^5|}+C$; 2) $\ln\frac{|(x-2)^3|}{(x+3)^2}+C$; 3) $\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|2x+1|+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+4\ln|x-7|+C$.

12.4. 1) $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$; 2) $\ln\frac{|x(x+3)^3|}{(x-3)^2}+C$; 3) $\ln\left|\frac{(x-1)^2(x+2)^3}{(x-3)^4}\right|+C$; 4) $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right|+C$.

12.5. 1) $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$; 2) $x+\ln\frac{(x-2)^4}{|x-1|}+C$; 3) $\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$; 4) $\frac{x^3}{3}-x^2+\ln\left|\frac{x+4}{(x-5)^3}\right|+C$.

12.6. 1) $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$; 2) $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$; 3) $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$; 4) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

12.7. 1) $\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln|(x+1)(x-1)^3|+C$; 2) $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$; 3) $-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 4) $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C$.

12.8. 1) $\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$; 2) $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$; 3) $-\frac{1}{(x-1)^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$; 4) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-3)}{x}\right|+C$.

12.9. 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C$; 2) $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C$; 3) $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C$;

4) $-\frac{1}{2x}-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{36}\ln\left|\frac{(x-2)(x+1)^{44}}{x^{45}}\right|+C$. **12.10.** 1) $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C$; 2) $\frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2}-\frac{3}{625}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C$; 3) $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$; 4) $\frac{1}{4x^4}+\ln|x-1|+C$.

12.11. 1) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$; 2) $3x+5\ln|x+2|-\frac{6}{x+1}+C$; 3) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$; 4) $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{1}{8}\ln|(x-1)^{31}\cdot(x+1)|+C$. **12.12.** 1) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C$; 3) $\frac{1}{4}\ln|(x-1)^3(x+1)|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; 4) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **12.13.** 1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 3) $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$; 4) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-2\ln|x-1|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **12.14.** 1) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$; 2) $-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 3) $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)+C$; 4) $\frac{1}{3(1-x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

12.15. 1) $\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; 3) $\operatorname{arctg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C$; 4) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **12.16.**

1) $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$; 2) $-\frac{1}{6(1+x)}+$ $+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;
3) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}\,x+1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}+$ $+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+C$. **12.17.** 1) $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C$;
2) $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$;
3) $x-\frac{18}{7}\ln|x+3|-\frac{3}{14}\ln(x^2+x+1)+\frac{5\sqrt{3}}{7}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;
4) $x-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\ln|x+1|+3\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

12.18. 1) $\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C$; 2) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+$ $+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 3) $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C$;
4) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$. **12.19.** 1) $\frac{x-1}{4(1+x^2)}+$ $+\frac{1}{8}\ln\frac{1+x^2}{(1+x)^2}+C$; 2) $\ln|x+1|+\frac{x+2}{2(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-$ $-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+C$; 3) $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$;
4) $\frac{3x^2-x}{4(x-1)\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$. **12.20.**
1) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C$;
2) $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C$; 3) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+C$;
4) $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{3}{8}\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+C$.

12.21. 1) $-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg} x+C$; 2) $\frac{2x^6-3x^2}{4(x^4-1)}+\frac{3}{8}\ln\frac{|x^2-1|}{x^2+1}+C$; 3) $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 4) $-\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}(x+2)+C$.

§ 13

13.1. 1) $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]+C$; 2) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$; 3) $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$; **13.2.** 1) $2\sqrt{x}-x-\ln(2\sqrt{x}+1)+C$; 2) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$; 3) $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+C$; 4) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$. **13.3.** 1) $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$; 2) $\frac{4}{45}(x-2)(5x+8)\sqrt[4]{x-2}+C$; 3) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$; 4) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$.

13.4. 1) $\ln|1+3\sqrt[3]{x}|+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2t}{t^3-1}+C$, $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$; 3) $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$; 4) $\frac{x}{2}(\sqrt{x^2-1}-x)-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-1}+x|+C$. **13.5.** 1) $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C$; 2) $\frac{5}{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{4/5}-\frac{5}{9}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{9/5}+C$; 3) $\frac{3}{16}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$; 4) $\frac{3}{4}\Big(t^4-2t^2-\ln|t-1|+\frac{5}{2}\ln(t^2+t+2)-$

$-\frac{9}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\Big)+C$, $t=\sqrt[3]{x+2}$. **13.6.** 1) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$; 2) $\frac{4}{3}(\sqrt[4]{x^2}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1))+C$; 3) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$; 4) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$.

13.7. 1) $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{3/2}-\frac{1}{8}(x+1)^{4/3}+\frac{1}{7}(x+1)^{7/6}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{1}{4}(x+1)^{2/3}\right]+C$. 2) $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$; 3) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$; 4) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. **13.8.** 1) $4t-2t^2-4\ln|t+1|+C$, $t=\sqrt[4]{5-x}$; 2) $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$; 3) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$; 4) $\frac{3t}{t^2+1}+3\operatorname{arctg}t+C$, $t=\sqrt[6]{x}$. **13.9.** 1) $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C$; 2) $\frac{8}{3}t^3+2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+4\operatorname{arctg}t+C$; 3) $4(\sqrt[4]{x+3}+\ln|\sqrt[4]{x+3}-1|)+C$; 4) $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C$.

13.10. 1) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}+C$; 2) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$; 3) $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C$; 4) $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}|+C$. **13.11.** 1) $-4\sqrt{3-2x-x^2}+3\arcsin\frac{x+1}{2}+C$; 2) $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$;

3) $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C$; 4) $-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+$ $+14\arcsin\frac{x+1}{2}+C$. **13.12.** 1) $2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|-$ $-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}|+C$;

2) $\left(\frac{x^3}{4}-\frac{7x^2}{6}+\frac{95x}{24}-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln(x+2+$ $+\sqrt{x^2+4x+5})+C$; 3) $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$;

4) $\ln\frac{x}{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}+C$; **13.13.** 1) $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+$ $+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$; 2) $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+$ $+\sqrt{x^2-2x+5})+C$; 3) $(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln(x+2+$ $+\sqrt{x^2+4x+5})+C$; 4) $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1}+C$.

13·14. 1) $\frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}+C$; 2) $\frac{8(2x+1)}{-9\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{27}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3+C$;

3) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^5+C$; 4) $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$.

13.15. 1) $\ln\left|1-\frac{x}{1+\sqrt{1-2x+x^2}}\right|-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C$;

2) $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}\,x}{x+1}+C$;

3) $\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; 4) $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+$ $+\frac{\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{2}(x-1)}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}+C$. **13.17.**

1) $\frac{1}{2}(x+2\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2}-\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}))+C$; 2) $\sqrt{1+x}-$ $-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+C$; 3) $\ln|x+\sqrt{x^2-x}|+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}+C$;

4) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{2x-3}}{1+\sqrt{2x-3}}}+C$. **13.18.** 1) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+$
$+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$; 2) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}+C$;
3) $\frac{6}{5}x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+\frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}}-21\,\mathrm{arctg}\,x^{1/6}+C$;
4) $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C$. **13.19.** 1) $6x^{1/6}+$
$+3x^{1/3}+2x^{1/2}+6\ln|x^{1/6}-1|+C$; 2) $\frac{6}{5}x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+$
$+3x^{1/6}(1+x^{1/3})^{-1}-21\,\mathrm{arctg}\,x^{1/6}+C$; 3) $-\frac{3}{2}(1+x^{1/3})^{-2}+C$;
4) $\frac{4}{9}(1+x^{1/4})^{-9}-\frac{1}{2}(1+x^{1/4})^{-8}+C$. **13.20.** 1) $\frac{3}{11}(x+1)^{11/3}-$
$-\frac{3}{4}(x+1)^{8/3}+\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}+C$; 2) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+$
$+C$; 3) $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\frac{1}{4}\ln[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1]+$
$+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$; 4) $\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+$
$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}+C$. **13.21.** 1) $\frac{12}{13}(1+x^{1/4})^{13/3}-\frac{18}{5}(1+x^{1/4})^{10/3}+$
$\frac{36}{7}(1+x^{1/4})^{7/3}-3(1+x^{1/4})^{4/3}+C$, 2) $\frac{6}{7}(1+x^{1/3})^{7/2}-\frac{18}{15}(1+x^{1/3})^{5/2}+$
$+6x^{1/3}(1+x^{1/3})^{1/2}+C$; 3) $6u+2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$,
$u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$; 4) $\frac{1}{5}\ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+2u}{\sqrt{3}}+C$,
$u=\sqrt[3]{1+x^5}$. **13.22.** 1) $\frac{12}{7}(1+x^{1/4})^{7/3}-3(1+x^{1/4})^{4/3}+C$;
2) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C$; 3) $\frac{5}{18}z^3-\frac{5}{2}z+C$, $z=$

$=\sqrt{3-2\sqrt[5]{x^3}}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+$ $+\sqrt{1+x})+C$. **13.23.** 1) $-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-$ $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|+C$; 2) $-\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^5}}{2x^5}+C$;

3) $-\frac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}+C$; 4) $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C$. **13.24.**

1) $-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}+C$;

2) $\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}+z+C$, $z=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; 3) $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, $t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$, 4) $\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{12}\ln\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}-$ $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C$, $t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

§ 14

14.1. 1) $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)+C$; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$;

3) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$; 4) $-\frac{1}{8}\cos(4x+1)-\frac{1}{4}\cos(2x+3)+C$.

14.2. 1) $-\frac{1}{50}\sin 25x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$; 2) $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$;

3) $\frac{15}{22}\left(11\sin\frac{x}{15}-\sin\frac{11x}{15}\right)+C$; 4) $\frac{1}{4}\sin(2x+15)-\frac{1}{16}\sin(8x+1)+C$.

14.3. 1) $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C$; 2) $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$;

3) $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+C$; 4) $\frac{1}{4a}\sin 2ax+\frac{x}{2}\cos 2b+C$.

14.4. 1) $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 2) $\frac{1}{36}\sin 9x+$

$+\frac{1}{28}\sin 7x+\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin x+C$; 3) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+$ $+\frac{1}{28}\sin 7x+C$; 4) $\frac{1}{6}\sin(3x+1)-\frac{1}{4}\sin(x+1)-\frac{1}{20}\sin(5x+1)+C$.

14.5. 1) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$; 2) $-\frac{1}{27}\cos^9 3x+C$; 3) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$; 4) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$. **14.6.** 1) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$; 2) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; 3) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; 4) $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)+C$. **14.7.** 1) $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}+C$; 2) $\frac{1}{9}\sin^9 x-\frac{1}{11}\sin^{11}x+C$; 3) $-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$; 4) $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. **14.8.** 1) $-\frac{1}{\sin x}+C$; 2) $\frac{1}{\cos x}+C$; 3) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$; 4) $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$.

14.9. 1) $\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\cos x|-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$; 2) $\cos x+\frac{2}{\cos x}+C$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$; 4) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$.

14.10. 1) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$; 2) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$; 3) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **14.11.** 1) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$; 2) $\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}+C$; 3) $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; 4) $\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+C$. **14.12.** 1) $\frac{3}{8}x-$ $-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 2) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$;

3) $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$; 4) $\frac{15}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+$ $+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$. **14.13.** 1) $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 2) $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$; 3) $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$; 4) $\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}\sin 4x+\frac{1}{1024}\sin 8x+C$. **14.14.** 1) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x+C$; 2) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$; 3) $-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C$; 4) $\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$. **14.15.** 1) $\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+C$; 2) $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$; 3) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$; 4) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$.

14.16. 1) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x+C$; 2) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x-x+C$; 3) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x+C$; 4) $\frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x+\frac{2}{7}\operatorname{tg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$.

14.17. 1) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$; 2) $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{2}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x+C$; 3) $-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x+C$; 4) $-\frac{1}{5\operatorname{tg}^5 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}-\frac{3}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x+C$.

14.18. 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; 2) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; 3) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)+C$; 4) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}\right)+C$.

14.19. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$; 2) $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; 3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$; 4) $-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C$. **14.20.** 1) $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$;

2) $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + C$; 3) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + C$; 4) $\frac{1}{4} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C$. **14.21.** 1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} + C$; 3) $-\frac{1}{5}(2\sin x + \cos x) + \frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + C$; 4) $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right| + C$. **14.22.** 1) $\ln|\cos x - \sin x| + C$; 2) $\ln|\sin x - \cos x| + C$; 3) $\ln(2+\cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right) + C$; 4) $\frac{1}{4}\cos x(\cos x - \sin x) - \frac{1}{4}\ln|\cos x - \sin x| + C$. **14.23.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}\right| + C$; 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}}\right) + C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C$. **14.24.** 1) $-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$; 2) $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + C$; 3) $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x - 1}{2}\right) + C$; 4) $-\frac{1}{4}\ln(1 + 4\cos^2 x) + C$. **14.25.** 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{5 - \sin x}{1 - \sin x} + C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C$; 3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C$; 4) $\sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}(\sin x) + C$. **14.26.** 1) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{7}}\right) + C$; 2) $\frac{1}{2 - \operatorname{tg} x} + C$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}}\right| + C$; 4) $\frac{1}{2}\ln(\operatorname{ctg}^2 x + 2) - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$. **14.27.** 1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(\operatorname{tg} x + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1} +$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+C$;

3) $\frac{1}{2}(\arcsin 2x+\sqrt{1-4x^2})+C$; 4) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{2}\right)+C$.

14.28. 1) $-\frac{3}{80}\sqrt[3]{\cos^4 x}(20-16\cos^2 x+5\cos^4 x)+C$; 2) $\frac{3(5+\cos^2 x)}{5\sqrt[3]{\cos x}}+C$;

3) $\frac{5}{12}(\cos^2 x-6)\sqrt[5]{\cos^2 x}+C$; 4) $\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-$

$-\ln\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C$; **14.29.** 1) $\frac{5}{28}\sqrt[5]{\sin^4 x}\,(7-2\sin^2 x)+C$;

2) $\frac{1}{4}\ln\frac{(1-\sin x)(1+\sqrt[3]{\sin x})^3}{(1+\sin x)(1-\sqrt[3]{\sin x})^3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\sin x}}+C$;

3) $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$; 4) $4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}+C$. **14.30.** 1) $\frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}+C$;

2) $-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}+C$; 3) $\frac{1}{5}\sqrt{2\operatorname{tg}x}\,(5+\operatorname{tg}^2 x)+C$; 4) $\frac{\operatorname{tg}^2 x-3}{3\sqrt{2\operatorname{tg}x}}+C$;

5) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x}|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x-\sin x}+C$;

6) $2\sqrt{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x-\sin x}+C$.

14.31. 1) $e^x-\ln(1+e^x)+C$; 2) $x+\frac{1+e^x}{2}+C$;

3) $\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C$; 4) $x+\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)+C$.

14.32. 1) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x-3}{2}+C$;

3) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$; 4) $x+\frac{8}{1+e^{x/4}}+C$. **14.33.** 1) $\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x-\frac{x}{2}+C$;

2) $\frac{1}{4}\operatorname{ch}2x+\frac{x}{2}+C$; 3) $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch}x+C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+\operatorname{sh}x+C$.

14.34. 1) $x-\operatorname{th}x+C$; 2) $x-\operatorname{cth}x+C$; 3) $\ln|\operatorname{ch}x|+C$; 4) $\ln|\operatorname{sh}x|+C$.

14.35. 1) $\frac{1}{4}\operatorname{sh}^4x+C$; 2) $-\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\operatorname{ch}4x+C$; 3) $x-\operatorname{th}x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3x+C$; 4) $x-\operatorname{cth}x-\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3x+C$.

14.36. 1) $\ln(\operatorname{ch}x)-\frac{1}{2}\operatorname{th}^2x+C$; 2) $\ln|\operatorname{sh}x|-\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2x-\frac{1}{4}\operatorname{cth}^4x+C$; 3) $\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5x+\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3x+C$; 4) $\frac{2}{5}\operatorname{ch}^5x-\operatorname{ch}^3x+\operatorname{ch}x+C$.

14.37. 1) $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C$; 2) $\ln|\operatorname{th}x|+C$; 3) $-2\operatorname{cth}2x+C$; 4) $-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C$.

14.38. 1) $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\operatorname{ch}x}+C$; 2) $-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{\operatorname{ch}x}-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2x}+C$; 3) $\frac{\operatorname{sh}x}{4\operatorname{ch}^4x}+\frac{3\operatorname{sh}x}{8\operatorname{ch}^2x}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}e^x+C$; 4) $\frac{3}{2}\operatorname{sh}x-\frac{\operatorname{sh}^3x}{2\operatorname{ch}^2x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)+C$.

14.39. 1) $\frac{1}{5}\operatorname{th}^5x+C$; 2) $\frac{1}{4}\operatorname{sh}^4x+\operatorname{sh}^2x+\ln|\operatorname{sh}x|+C$; 3) $\operatorname{th}x+2\operatorname{cth}x-\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3x+C$; 4) $-\frac{1}{\operatorname{sh}x}-\frac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)+C$.

14.40. 1) $\operatorname{th}\frac{x}{2}+C$; 2) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2x+C$; 3) $\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\ln(2\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)+C$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

14.41. 1) $-\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}\ln|3\operatorname{sh}x-4\operatorname{ch}x|+C$; 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}\right)+C$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}+C$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}x}{2}\right)+C$.

14.42. 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th}x-2}{\operatorname{th}x+2}\right|+C$; 2) $\frac{1}{\operatorname{th}x+6}+C$; 3) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{th}x-2}{3\operatorname{th}x-1}\right|+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th}x-2}{\sqrt{2}}\right)+C$.

15.1. 1) $\frac{1}{4}\ln(2x^2-x+1)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C$

2) $x+\frac{25}{2}\ln|x+5|-\frac{49}{2}\ln|x+7|+C$; 3) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+$ $+\frac{3}{x+1}+5\ln|x+1|+C$; 4) $\frac{1}{12}\ln\frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$

15.2. 1) $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\ln|x^3+2|+C$; 2) $\frac{1}{21}(8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|)+C$

3) $\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{x^8+1}+\operatorname{arctg}x^4\right)+C$; 4) $-\frac{1}{10}\left(\frac{x^5+2}{x^{10}+2x^5+2}+\operatorname{arctg}(x^5+1)\right)+C$

15.3. 1) $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}+C$

3) $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}+C$; 4) $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}+C$

15.4. 1) $\frac{4}{3}(\sqrt[4]{x^3}-\ln(1+\sqrt[4]{x^3}))+C$; 2) $\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C$;

3) $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{2}\right)+C$; 4) $6\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-$ $-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **15.5.** 1) $\ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}+$ $+C$; 2) $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2-4\ln(1+\sqrt[4]{5-x})+C$;

3) $(1+\sqrt[4]{2x-1})^2+2\ln|1-\sqrt[4]{2x-1}|+C$; 4) $\ln(1+x)-$ $-3\ln(1+\sqrt[3]{1+x})-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{1+x}+C$. **15.6.** 1) $\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-$ $-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C$; 2) $\arccos\frac{1}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;

3) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$; 4) $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$. **15.7.** 1) $2\sqrt{x}+$ $+8\sqrt{1+\sqrt{x}}+8\ln(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)+C$; 2) $3(\ln\sqrt[3]{|x|}-\ln(1+$

$+\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\,)-\arcsin\sqrt[3]{x}\,)+C$; 3) $2(\sqrt[4]{x}-2)\sqrt{\sqrt{x}-1}+$ $+2\ln(\sqrt[4]{x}+\sqrt{\sqrt{x}-1}\,)+C$; 4) $\sqrt{x^2-x}-x-\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\,)+C$.

15.8. 1) $\frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-3x+3}\,)+C$;

2) $\left(\frac{x^5}{6}-\frac{x^3}{6}-x\right)\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}+C$; 3) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{(x-1)^2}+\right.$ $\left.+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{\sqrt{2}}\right)+C$; 4) $\ln(x+\sqrt{x^2+1}\,)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

15.9. 1) $\frac{3t^2-1}{6t^3}+C$, სადაც $t=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$; 2) $\frac{3}{2+4t}+$ $+2\ln t-\frac{3}{2}\ln(1+2t)+C$, სადაც $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$;

3) $-\frac{1}{2}(1+x)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x^2+x}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$;

4) $2\,\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\ln|2\sqrt{1+x+x^2}+1+2x|+C$. **15.10.**

1) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$; 2) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C$;

3) $-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}-\frac{t^5}{10}+C$, სადაც $t=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+$ $+\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t-1|}-t+C$, სადაც $t=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$. **15.11.** 1) $\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^3)-$ $-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

2) $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C$; 3) $(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-$ $-24\ln x+24)x+C$; 4) $\frac{1}{4}x^4\left(\ln^3 x-\frac{3}{4}\ln^2 x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)+C$.

15.12. 1) $2(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,)+C$; 2) $3((2-\sqrt[3]{x^2}\,)\cos\sqrt[3]{x}+$ $+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\,)+C$; 3) $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$; 4) $3e^{\sqrt[3]{x}}\times$ $\times(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120)+C$. **15.13.**

1) $x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x + C$; 2) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - $ $-\frac{1}{x}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x + C$; 3) $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$; 4) $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C$. **15.14.** 1) $\frac{1}{4}(x^4-81)\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + \frac{x^3}{2} + \frac{27x}{2} + C$; 2) $\frac{1}{x}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \frac{1}{2}\ln\frac{|x^2-4|}{x^2} + C$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\ln|x|}{2+2x^2} + C$; 4) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| - \frac{\ln|x|}{x+2} + C$. **15.15.** 1) $(\sin x)\cdot\mathrm{arctg}\sin x - $ $-\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C$; 2) $(e^x)\arcsin e^x + \sqrt{1-e^{2x}} + C$; 3) $(\mathrm{tg}\,x)\times$ $\times\arcsin\mathrm{tg}\,x + \sqrt{1-\mathrm{tg}^2 x} + C$; 4) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} + C$. **15.16.** 1) $x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x}\mathrm{arctg}\,e^x + C$; 2) $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - $ $-\sqrt{x} + \mathrm{arctg}\sqrt{x} + C$; 3) $x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + 2\mathrm{arctg}\sqrt{x} + $ $+4 + C$, როცა $x \leqslant 1$, $x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2\sqrt{x} - 2\mathrm{arctg}\sqrt{x} + \pi + C$, როცა $x \geqslant 1$; 4) $\frac{\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{2(1-x^2)} + C$. **15.17.** 1) $-\frac{(1-x)e^{\mathrm{arctg}\,x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$; 2) $\frac{(1+x)e^{\mathrm{arctg}\,x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$; 3) $-[x + \mathrm{ctg}\,x\ln(e\sin x)] + C$; 4) $x\ln^2(x + $ $+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C$. **15.18.** 1) $-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) + C$; 2) $2\mathrm{arctg}\,x - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + C$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{1-x+x^2}{1+x^2} - $ $-\frac{\ln(1-x+x^2)}{2(1+x^2)} - \mathrm{arctg}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; 4) $2\sqrt{x-1}(\ln x - 2) + $ $+ 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1} + C$. **15.19.** 1) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + $ $+\ln|x| + C$; 2) $(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$;

3) $\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}+C$;

4) $\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$.

15.20. 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\operatorname{arctg} x-\frac{x^2}{6}+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C$;

2) $\frac{(x^2-1)\operatorname{arctg} x-x}{4(x^2+1)}+C$; 3) $-x+\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$;

4) $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C$. **15.21.**

1) $\frac{\arcsin^2 x-x^2}{4}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\arcsin x+C$; 2) $\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+\frac{(x^2+1)^2}{4}\operatorname{arcctg} x+C$;

3) x^x+C; 4) $x-\ln(1+e^x)-\frac{2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}}-\operatorname{arctg}^2\sqrt{e^x}+C$. **15.22.**

1) $\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}+C$;

3) $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}+C$.

15.23. 1) $\frac{1}{2}x|x|+C$; 2) $\frac{1}{3}x^2|x|+C$; 3) $\frac{2}{3}x^2(x+|x|)+C$;

4) $\frac{1}{2}((1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|)+C$. **15.24.** 1) $2-e^{-x}+C$,

როცა $x\geqslant 0$ და e^x+C, როცა $x<0$; 2) $x+C$, როცა $|x|\leqslant 1$

და $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sign} x+C$, როცა $|x|>1$; 3) $x-\frac{x^3}{3}+C$, როცა

$|x|\leqslant 1$ და $x-\frac{1}{2}x|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sign} x+C$, როცა $1<|x|$; 4) $x+C$,

როცა $-\infty<x<0$, $\frac{x^2}{2}+x+C$, როცა $0\leqslant x\leqslant 1$ და $x^2+\frac{1}{2}+C$, როცა

$1<x<+\infty$. **15.25.** 1) $e^{e^x}+C$; 2) $2x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x-$

$-\ln(1+x^2)+C$; 3) $\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x\cdot\ln(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x})+C$;

4) $\frac{1}{3}x^3\arccos 2x - \frac{1}{36}(1+2x^2)\sqrt{1-4x^2}+C$; **15.26.** 1) $\ln\frac{x^2}{1+4x^2} - \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}+C$; 2) $\frac{x+3}{4}\sqrt{2x-x^2}+\frac{2x^2-3}{4}\cdot\arcsin(x-1)+C$;

3) $\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\frac{\arccos x}{x}+C$; 4) $x\arcsin^3\frac{x}{3}+3\sqrt{9-x^2}\times\left(\arcsin^2\frac{x}{3}-2\right)-6x\arcsin\frac{x}{3}+C$. **15.27.** 1) $\frac{x^4}{4}\arccos\frac{1}{x} - \operatorname{sign} x\cdot\frac{x^2+2}{12}\sqrt{x^2-1}+C$; 2) $\frac{2(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}+C$;

3) $x\operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})+\sqrt{x}+\ln(x-2\sqrt{x}+2)+C$; 4) $(x-2)\operatorname{arcctg}\times\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}+C$. **15.28.** 1) $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}-\ln(1+x)+C$; 2) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$;

3) $(x+1)e^{\frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{1+x^2}}}+C$; 4) $\frac{\arccos x\sqrt{x}}{3(1-x^3)}+\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{1-x^3}}+C$.

15.29. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+e^{2x}}+\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}))+C$;

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch} x+\sqrt{\operatorname{ch} 2x})+C$; 3) $\operatorname{ch} x\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x-x+C$;

4) $\operatorname{ch} x\arcsin e^x+\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-x}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C$. **15.30.** 1) $xf'(x)-f(x)+C$; 2) $\frac{1}{2}f(2x)+C$; 3) $x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x)+C$;

4) $\frac{xf'(3x)}{3}-\frac{f(3x)}{9}+C$. **15.31.** 1) $f(x)=2\sqrt{x}+C$; 2) $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+C$; 3) $f(x)=\operatorname{tg}(x+c)$; 4) $f(x)=e^{x+C}$. **15.32.**

1) $I_n=\frac{1}{a}x^ne^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}$; 2) $I_n=x\ln^n x-nI_{n-1}$; 3) $I_n=\frac{x^{\alpha+1}\ln^n x}{\alpha+1}-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}$; 4) $I_n=\frac{x^{n-1}\sqrt{x^2+a}}{n}-\frac{n-1}{n}a\cdot I_{n-2}$;

5) $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; 6) $I_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$;

7) $I_n=\frac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}^{n-1}x}{n}-\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; 8) $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$.

§ 16

16.1. 1) $\frac{21}{2}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $e-1$; 4) $\frac{1}{2}$. **16.2.** 1) e^{-x^2}; 2) $\sin x^2$; 3) $\sqrt{\sin x}$; 4) $\frac{2\sin x^2}{x}$; 5) $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$; 6) $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$. **16.3.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $-\frac{3}{8}$. **16.4.** 1) $\ln 2$; 2) 2; 3) 1; 4) e^3-1. **16.5.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{1}{\ln 2}$; 4) $\frac{45}{4}$. **16.6.** 1) $\frac{\ln 3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; 4) $\frac{3}{2}\pi$. **16.7.** 1) $\frac{19}{15}$; 2) $3\frac{57}{64}$; 3) π; 4) $\frac{\pi}{4}$. **16.8.** 1) $1-\ln 2$; 2) $2-\ln 5$; 3) $\frac{5}{6}-\ln 2$; 4) $\frac{11}{2}+7\ln 2$. **16.9.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) 1; 3) $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{11}{6}$. **16.10.** 1) $\frac{e^4-1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 1. **16.11.** 1) $\frac{1}{2}\ln 2$; 2) $\ln\frac{9}{8}$; 3) $\frac{5\pi^2}{288}$; 4) $\frac{\pi}{6}$. **16.12.** 1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\ln 2$; 3) $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$; 4) $\sin 1$. **16.13.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $4-2\ln 3$; 3) $7+2\ln 2$; 4) $2-\ln 2$. **16.14.** 1) $\ln\frac{9}{8}$; 2) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$; 3) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\pi}{6}$. **16.15.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{12}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\ln 2$. **16.16.** 1) $2(\sqrt{2}-1)$; 2) $\frac{8191}{26}$; 3) $-\frac{468}{7}$; 4) $-\frac{29}{270}$. **16.17.** 1) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) π; 3) $10+\ln 3$; 4) $1+\frac{3}{4}\ln 3$. **16.18.** 1) $2-\frac{\pi}{2}$; 2) $2\operatorname{arctg}e+\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$; 3) $4-\pi$; 4) $\frac{1}{5}\ln 112$.

16.19. 1) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $1-\frac{\pi}{4}$; 4) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **16.20.** 1) 1; 2) $\frac{\pi}{2}-1$; 3) $1-\frac{2}{e}$; 4) $2\ln 2-\frac{3}{4}$. **16.21.** 1) 1; 2) $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$; 3) $\pi\sqrt{2}-4$; 4) $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$. **16.22.** 1) $e-2$; 2) 4π; 3) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. **16.23.** 1) 1; 2) $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}+1$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\pi^3-6\pi$. **16.24.** 1) $\frac{e^{\pi}+1}{2}$; 2) $\frac{e^{\pi/2}-1}{2}$; 3) $\frac{e^{\pi}+1}{2}$; 4) $\frac{1}{27}(5e^3-2)$. **16.25.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{t}{2}$; 3) $\frac{1}{3}-\frac{t}{2}$, როცა $t<0$; $\frac{1}{3}-\frac{t}{2}+\frac{t^3}{3}$, როცა $0\leqslant t\leqslant 1$; $\frac{t}{2}-\frac{1}{3}$, როცა $t>1$; 4) 2; 5) 0; 6) $\frac{8}{\pi}$; 7) 0; 8) $4\sqrt{3}$. **16.31.** 1) 1; 2) $\frac{\pi^2}{4}$; 3) 0; 4) 1. **16.33.** 1) ln2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{2}{\pi}$; 5) $\frac{1}{p+1}$; 6) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; **16.35.** 1) $2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$; 2) $I_n=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{როცა} \quad n=2k,\\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{როცა} \quad n=2k+1.\end{cases}$

§ 17

17.1. 1) 1; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) $\frac{\pi}{4}$. **17.2.** 1) $\frac{1}{3e^3}$; 2) $\frac{1}{k}$, როცა $k>0$; განშლადია როცა $k\leqslant 0$; 3) განშლადია; 4) განშლადია. **17.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) განშლადია, როცა $\alpha\leqslant 1$; $\frac{1}{\alpha-1}$, როცა $\alpha>1$. **17.4.** 1) $\frac{\pi^2}{8}$; 2) $\frac{2}{3}\ln 2$; 3) π; 4) განშლადია. **17.5.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) განშლადია; 4) 2. **17.6.**

1) $1+\ln 2$; 2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **17.7.** 1) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; 3) 0; 4) $\frac{\pi}{2}-1$. **17.8.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. **17.9.** 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. **17.10.** 1) განშლადია; 2) კრებადია; 3) განშლადია; 4) განშლადია. **17.11.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. **17.12.** 1) კრებადია როცა $\alpha>1$, განშლადია როცა $\alpha\leqslant 1$; 2) კრებადია როცა $\alpha>1$, განშლადია, როცა $\alpha\leqslant 1$. 3) კრებადია; 4) კრებადია როცა $n>0$. **17.13.** 1) პირობით კრებადია; 2) პირობით კრებადია; 3) პირობით კრებადია; 4) პირობით კრებადია. **17.14.** 1) პირობით კრებადია; 2) აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha<2$; პირობით კრებადია, როცა $2\leqslant\alpha<3$. 3) პირობით კრებადია; 4) პირობით კრებადია. **17.15.** 1) აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>1$; პირობითი კრებადია, როცა $\alpha\leqslant 1$. 2) აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha<-1$; პირობით კრებადია, როცა $-1\leqslant\alpha\leqslant 0$. 3) აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>1$; პირობით კრებადია, როცა $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$. 4) აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>1$; პირობითი კრებადია, როცა $-1<\alpha\leqslant 1$. **17.16.** 1) 2; 2) განშლადია, 3) 1; 4) $\frac{8}{3}$. **17.17.** 1) განშლადია; 2) $\frac{1}{e}$; 3) განშლადია; 4) π. **17.18.** 1) 2; 2) განშლადია; 3) განშლადია; 4) $\frac{1}{1-\alpha}$, როცა $\alpha<1$; განშლადია, როცა $\alpha\geqslant 1$. **17.19.** 1) განშლადია; 2) განშლადია; 3) $\frac{16}{3}$; 4) π; 5) 0; 6) 0. **17.20.** 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია, როცა $\alpha>-1$; განშლადია, როცა $\alpha\leqslant -1$. 4) განშლადია. **17.21.** 1) განშლადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **17.22.** 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია, როცა $\alpha<3$; განშლადია, როცა $\alpha\geqslant 3$. 4) კრებადია. **17.23.** 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია. **17.24.** 1) კრებადია; 2) განშლადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **17.25.** 1) კრებადია, როცა $\alpha>-1$ და $\beta>-1$; 2) კრებადია, როცა $\alpha<1$ და $\beta<1$. 3) კრებადია, როცა $\alpha>-1$ და $\beta>-1$; 4) კრებადია, როცა $\alpha>-1$ და $\beta>-2$. **17.26.** 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია. **17.27.** 1) განშლადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) კრებადია, როცა $\beta>1$ და $\alpha>\beta-1$. **17.28.** 1) კრებადია; 2) კრებადია, როცა $\alpha>1$, და $\beta<1$; 3) კრებადია, როცა $1<\alpha<2$; 4) კრებადია, როცა $1<\alpha<2$. **17.29.**

1) კრებადია, როცა $\alpha<2$; 2) კრებადია, როცა $\alpha>-1$; 3) კრებადია, როცა $\alpha>-1$ და $\beta-\alpha>1$; 4) კრებადია, როცა $\min(\alpha, \beta)<1$ ან $\max(\alpha, \beta)>1$. **17.30.** 1) პირობით კრებადია; 2) პირობით კრებადია, როცა $0<\alpha\leqslant 1$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>1$. 3) პირობით კრებადია, როცა $-2<\alpha\leqslant-1$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>-1$. 4) პირობითი კრებადია, როცა $-2<\alpha\leqslant-1$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>-1$. **17.31.** 1) პირობითი კრებადია, როცა $1\leqslant\alpha<\frac{3}{2}$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha<1$. 2). პირობით კრებადია, როცა $-3<\alpha\leqslant-1$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>-1$. 3) პირობით კრებადია როცა $-1<\alpha\leqslant0$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>0$. 4) პირობით კრებადია, როცა $1\leqslant\alpha<2$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha<1$. **17.32.** 1) პირობით კრებადია, როცა $-3<\alpha\leqslant-2$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>-2$. 2) პირობით კრებადია, როცა $\alpha<-1$; აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha>1$. 3) აბსოლუტურად კრებადია, როცა $\alpha<1$; განშლადია, როცა $\alpha\leqslant1$. 4) პირობითი კრებადია, როცა $\alpha>-1$; განშლადია, როცა $\alpha\leqslant-1$.

§ 18

18.1. 1) $\frac{128}{3}$; 2) $4\ln 3$; 3) 20; 4) 6,2. **18.2.** 1) 5; 2) 1; 3) $1-\frac{1}{e}$; 4) 6. **18.3.** 1) $\frac{15}{\ln 2}$; 2) 2; 3) 2, 4) 4. **18.4.** 1) $\frac{32}{3}$; 2) 36; 3) $\frac{31}{6}$; 4) $\frac{91}{54}$. **18.5.** 1) 1; 2) $\frac{2(e-1)}{e}$; 3) $\frac{e^2-1}{2e}$; 4) $\ln 2$. **18.6.** 1) 8; 2) $\frac{8}{5}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $20\frac{5}{6}$. **18.7.** 1) 1; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{125}{6}$. **18.8.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 8; 3) 9; 4) 9. **18.9.** 1) $\frac{16}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4) $\frac{32\sqrt{6}}{3}$. **18.10.** 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{9}{4}$; 4) $\frac{5}{12}$. **18.11.** 1) $12-5\ln 5$; 2) $\frac{35-12\ln 6}{2}$; 3) $6\ln 2-2{,}5$; 4) $\frac{1}{2}$. **18.12.** 1) $\frac{9}{4}$; 2) 3; 3) $\frac{20}{9}-\ln 3$; 4) 0,1. **18.13.** 1) $1+\frac{\pi^2}{8}$; 2) $\sqrt{2}-1$; 3) $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **18.14.** 1) $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\ln 4-\frac{2}{e}$;

3) $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{8}$; 4) $\frac{9}{4}$. **18.15.** 1) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}$; 3) 15π; 4) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **18.16.** 1) $\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$; 3) $2\pi+\frac{4}{3}$; 4) $\frac{16}{3}+2\pi$. **18.17.** 1) $\frac{2}{3}(3\pi-2)$; 2) 4, 3) $\frac{56}{15}p^2$; 4) $\frac{\pi-2\ln 2}{4}$. **18.18.** 1) πr^2; 2) 20π; 3) $3\pi a^2$; 4) $\frac{3}{8}\pi ab$. **18.19.** 1) $\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$; 2) $\frac{3\pi}{8ab}(a^2-b^2)^2$; 3) $\frac{3}{8}\pi a^2$; 4) $6\pi a^2$. **18.20.** 1) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$; 2) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$; 3) $\frac{8}{15}$; 4) $\frac{8}{15}$. **18.21.** 1) 8; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4-\pi}{4}$; 4) $\frac{4}{3}$. **18.22.** 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) a^2; 3) a^2; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. **18.23.** 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$; 3) a^2; 4) 11π. **18.24.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{\pi}$; 3) $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$; 4) $\frac{p\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$. **18.25.** 1) $\frac{a^2\pi}{24}$; 2) $\frac{7a^2}{4\pi}$; 3) $\frac{a^2}{2}\operatorname{sh}2\pi$; 4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$. **18.26.** 1) a^2; 2) $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$; 3) $\pi a^2\sqrt{2}$; 4) $\frac{3a^2}{2}$. **18.27.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{(\pi-2)a^2}{16}$; 4) $\pi a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. **18.28.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4}{3}a^2$; 3) $\frac{3}{4}\pi a^2$; 4) $\frac{\pi a^2}{8}$; 5) $\frac{(\pi-2)a^2}{2}$; 6) $\frac{8}{3}$. **18.29.** 1) $4(\pi+\sqrt{3})$; 2) $6(\pi+\sqrt{3})$; 3) $\frac{1}{8}(7\pi-5\sqrt{3})$; 4) $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$. **18.30.** $\frac{9}{2}$. **18.31.** $\frac{9}{4}$. **18.32.** $\frac{9}{4}$. **18.33.** 9; **18.34.** $\frac{ab}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$. **18.35.** $\frac{9}{2}\ln 3$. **18.36.** $\frac{8}{5}$. **18.37.** $\frac{125}{48}$. **18.38.** $\frac{16}{3}$. **18.39.** 1) π; 2) 2; 3) 3π; 4) 4π; 5) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; 6) 5π. **18.40.** π. **18.41.** 1) 74; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **18.42.** 1) $4+\frac{1}{4}\ln 3$;

2) $4\sqrt{2}+\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$; 3) $3+\ln 2$; 4) $2\left(1+\ln\frac{3}{2}\right)$. **18.43.** 1) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$; 2) $\ln 3$; 3) $\frac{1}{2}\ln 3$; 4) $\arcsin\frac{3}{4}$. **18.44.** 1) $\frac{232}{15}$; 2) $\frac{25}{3}$; 3) $\frac{\pi+1}{4}$; 4) 10,8. **18.45.** 1) $\frac{14}{3}$; 2) $\ln(2+\sqrt{3})$; 3) $\frac{e^2+1}{4}$; 4) $4\sqrt{2}+4\ln(\sqrt{2}+1)$. **18.46.** 1) $\ln(2+\sqrt{3})$; 2) $\frac{2+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})}{2}$; 3) $\operatorname{sh} a$; 4) $\operatorname{sh} 2a$. **18.47.** 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{7}{6}$; 3) $\sqrt{15}-\sqrt{3}$; 4) $\ln\operatorname{sh} b-\ln\operatorname{sh} a$. **18.48.** 1) $\frac{134}{27}$; 2) $3\sqrt{3}-1$; 3) $6a$; 4) $4\sqrt{3}$. **18.49.** 1) $6a$; 2) $4\frac{a^3-b^3}{ab}$; 3) $6a$; 4) $8a$. **18.50.** 1) $2\pi^2 a$; 2) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$; 3) $\frac{(\operatorname{ch} 1)^{3/2}-1}{2}$; 4) $\sqrt{2}(e-1)$. **18.51.** 1) $e-1$; 2) $\operatorname{sh}1$; 3) $a\ln 2$; 4) $2a\left[5+\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$. **18.52.** 1) $\frac{1}{4}[2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})]$, 2) $\frac{\pi^3}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 1. **18.53.** 1) πa; 2) $8(2-\sqrt{3})$; 3) $2a$; 4) $(2+\operatorname{th} 1)a$. **18.54.** 1) $\frac{3\pi a}{2}$; 2) $\frac{16}{3}a$; 3) $\frac{15}{8}\pi a$; 4) $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$. **18.55.** 1) $\frac{a}{2}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$; 2) $\frac{8a}{3}(5\sqrt{5}-1)$; 3) $\frac{a}{2}\left(205-\frac{81}{4}\ln 3\right)$; 4) $\frac{1423a}{15}$. **18.56.** 1) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; 2) $4a\sqrt{3}$; 3) 8; 4) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **18.57.** 1) $12\sqrt{3}a$; 2) $a(7\sqrt{2}+$ $+3\ln(\sqrt{2}+1))$; 3) $2a\sqrt{3}$; 4) πa. **18.59.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{e}{4}$; 3) $\frac{t_2^2-t_1^2}{2a}$; 4) $\frac{\pi(b-a)}{2}$. **18.60.** 1) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$; 2) 21; 3) $2a\sqrt{6}$; 4) $e-e^{-1}$. **18.61.** 1) $\sqrt{3}(e^t-1)$; 2) $2a$; 3) $8\sqrt{2}a$; 4) $\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sh} t_0$. **18.62.**

$t=\frac{2\pi}{3}$, $x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=\frac{3a}{2}$. **18.63.** $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. **18.65.** $\frac{16a}{9}$.

18.66. 1) 117π; 2) 63π; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{83}{15}\pi$. **18.67.** 1) $\frac{16}{15}\pi$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) 32π; 4) 75π. **18.68.** 1) $\frac{128}{7}\pi$; 2) $\frac{163}{14}\pi$; 3) 12π; 4) 20π.

18.69. 1) $\frac{e^2-1}{2}\pi$; 2) $\frac{6}{\ln 2}\pi$; 3) $\frac{\pi^2}{2}$; 4) $\frac{\pi^2}{2}$. **18.70.** 1) $pa^2\pi$; 2) $\frac{1}{2}\pi a^3$; 3) π; 4) $\frac{3}{7}\pi ab^2$. **18.71.** 1) $\frac{\pi a^2}{2}\left(b+\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)$; 2) $\frac{\pi}{4}[1-e^{-2a}(1+2a)]$; 3) $\pi\left(2-\frac{5}{e}\right)$; 4) $\frac{\pi^3}{2}$. **18.72.** 1) $\frac{\pi}{2}\ln 3$; 2) $\frac{\pi(\pi+2)}{8a^3}$; 3) $\pi(6-8\ln 2)$; 4) $\frac{\pi^3\operatorname{sh}a}{2a(\pi^2+a^2)}e^a$. **18.73.** 1) $\frac{272}{15}\pi$; 2) $\frac{3}{10}\pi$; 3) $\frac{5}{6}\pi$; 4) $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$. **18.74.** 1) $\frac{11}{4}\pi$; 2) $\frac{138}{5}\pi$; 3) $\frac{3}{20}\pi$; 4) 3π **18.75.** 1) 4π; 2) 8π; 3) $\frac{\pi^2}{12}$; 4) $\frac{\pi^2(4\pi^2-15)}{24}$.

18.76. 1) $\frac{96}{5}\pi$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 2π; 4) $\pi(6-8\ln 2)$. **18.77.** 1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $\frac{\pi R^3(10-3\pi)}{6}$; 3) $\frac{\pi b^2}{3a^2}(H-a)^2(H+2a)$; 4) $\frac{\pi a^3}{3}(24\ln 2-16)$.

18.78. 1) $\frac{\pi a^5}{120P^2}$; 2) 70π; 3) $4\pi^2$; 4) 72π. **18.79.** 1) $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$; 2) $\frac{\pi}{3}(6\ln 2-4)$; 3) $\frac{\pi}{81}(4\ln 4-3)$; 4) $\frac{\pi}{3}(17-24\ln 2)$. **18.80.** 1) $\pi(e-1)$; 2) $\pi\ln 2$; 3) $\frac{8}{3}\pi$; 4) $10\pi^2$. **18.81.** 1) $\frac{8\pi}{3p}$; 2) $\frac{\pi}{4}(\pi^2-8)$; 3) $4\pi^3$; 4) $\frac{128}{15}\pi$. **18.82.** 1) ა) $\frac{\pi}{30}$, ბ) $\frac{\pi}{2}$; 2) ა) $\frac{\pi^2}{2}$, ბ) $2\pi^2$; 3) ა) $\frac{\pi}{4}(\pi^2-8)$. ბ) $\frac{\pi^2}{4}$; 4) ა) $\frac{\pi+2}{8}$, ბ) $\pi\ln 2$; 5) ა) $4\pi(2+9\ln 3)$, ბ) $3\pi(2\ln 3-1)\ln 3$; 6) ა) $\frac{\pi^3}{2}+\frac{3\pi^2}{8}$. ბ) $\frac{\pi^3}{2}$. **18.83.** 1) $\frac{32\pi}{15}$;

2) $\frac{2\pi}{5}(1+5\ln 2)$; 3) $\frac{13}{30}\pi$; 4) $\frac{433}{15}\pi$. **18.84.** 1) $\frac{8}{15}\pi a^3$;
2) $\frac{8\pi a^3}{3}(3\ln 2-2)$; 3) $\frac{32\pi a^3}{105}$; 4) $\frac{\pi a^3}{24}(24\ln 4-1)$. **18.85.**
1) ა) $\frac{8}{15}\pi a^3$, ბ) $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$; 2) ა) $5\pi^2\cdot a^3$, ბ) $6\pi^3 a^3$; 3) ა) $\frac{6}{7}\pi$;
ბ) $\frac{3}{4}\pi$; 4) ა) $\frac{\pi a^3}{2}$, ბ) $\frac{\pi a^3}{4}$. **18.86.** 1) ა) $\frac{64}{35}\pi$; ბ) $\frac{64}{105}\pi$;
2) ა) $\frac{\pi a^3}{3}(6\ln 2-4)$, ბ) $\frac{4}{3}\pi a^3$. **18.87.** 1) $\frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{4}-6\pi^2\right)$;
2) $\frac{2}{3}\pi$; 3) $\frac{\pi a^3}{24}$; 4) $\frac{3}{8}\pi a^3$. **18.88.** 1) $\frac{4}{21}\pi a^3$; 2) $2\pi^2 a^3$; 3) $\frac{\pi a^3}{15}$;
4) $\frac{64}{105}\pi a^3$. **18.89.** 1) $\frac{\pi a^3}{15}(e^{3\pi}+1)$; 2) $\frac{8}{3}\pi a^3$; 3) $\frac{\pi a^3}{4}(51-64\ln 2)$;
4) $\frac{\pi(2+e)}{3(1+e)^2}p^3$; 5) $\frac{\pi a^3}{12}[3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2]$; 6) $\frac{\pi a^3}{4}$.
18.90. 1) $\frac{4}{15}\pi a^3$; 2) $\frac{32\sqrt{2}}{105}\pi a^3$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi a^3$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi a^3$;
5) $\frac{\pi a^3}{4}(16+5\pi)$; 6) $\frac{4}{15}\pi p^3$. **18.91.** 1) $\frac{2}{3}\pi a^3$; 2) $\frac{2}{3}\pi a^3$;
3) $\frac{4}{21}\pi a^3$; 4) $2\pi a^3(3-\ln 4)$. **18.92.** 1) $\frac{1}{16}\pi^2 a^3$; 2) $\frac{4}{3}\pi a^3$; 3) $\frac{8}{15}\pi a^3$;
4) $\frac{8}{105}\pi a^3$. **18.93.** 1) $2\pi abH$; 2) $\frac{1}{3}\pi abH$; 3) πabH^2; 4) $\frac{4}{3}\pi abc$.
18.94. 1) $\frac{2\pi abH}{3c^2}(H^2+3c^2)$; 2) $\frac{\pi ab}{3c^2}(H-c)^2(H+2c)$; 3) $\frac{4}{15}a^3$;
4) $\frac{\pi a^3}{2}$. **18.95.** 1) $\frac{2}{3}abH$; 2) $\frac{4}{3}abc$; 3) $\frac{16}{3}abc$; 4) $\frac{1}{6}\pi abc$. **18.96.**
1) $4\pi R^2$; 2) $\frac{49\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$; 4) 48π. **18.97.** 1) $\frac{56}{3}\pi a^2$;
2) $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$; 3) $\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{4}-\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{2})}\right)\pi$;
4) $\frac{\pi}{8}(\mathrm{sh}\,12+12)$. **18.98.** 1) $\frac{62}{3}\pi$; 2) $\frac{\pi a^2}{8}[3\ln(\sqrt{2}+1)+7\sqrt{2}]$;

3) $4\pi^2 ab$; 4) $\frac{12}{5}\pi a^2$. **18.99.** 1) $\frac{\pi}{8}(\operatorname{sh} 4 - 4e^{-2})$; 2) $\frac{16}{15}\pi a^2(\sqrt{2}+1)$; 3) $\frac{\pi}{144}(185+144\ln 1,5)$; 4) $\frac{\pi}{9}(20+9\ln 3)$. **18.100.** 1) $\frac{\pi}{3}(e^3+3e-4)$; 2) $2\pi a(a-b)$; 3) $2\pi a\left(a+b\operatorname{sh}\frac{b}{a}-a\operatorname{ch}\frac{b}{a}\right)$; 4) $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **18.101.** 1) ა) $18\pi^2a^2$; ბ) $24\pi a^2$; 2) ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$; 3) ა) $\frac{4}{3}\pi a^2$; ბ) $\frac{2}{3}\pi a^2(3\pi-4)$; 4) ა) $8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$; ბ) $2\pi+\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$. **18.102.** 1) ა) 12π; ბ) $\frac{\sqrt{6}}{15}\pi$; 2) ა) $3\pi a^2$; ბ) $\frac{96\sqrt{3}}{5}\pi a^2$; 3) ა) $\frac{64}{3}\pi a^2$; ბ) $16\pi^2a^2$; 4) ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$. **18.103.** 1) $4\pi^2a^2$; 2) $\frac{32}{5}\pi a^2$; 3) $4\pi a^2\left(1+\frac{2}{3}\cos^2\alpha-\frac{1}{15}\cos^4\alpha\right)$, $\alpha=\arccos\frac{b}{a}$; 4) $2\pi(2-\sqrt{2})$; 5) $4\pi a^2$; 6) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. **18.104.** 1) ა) $\frac{56\sqrt{3}}{5}\pi$; ბ) 3π; 2) ა) $3\pi a^2$; ბ) $\frac{56\sqrt{3}}{5}\pi a^2$. **18.105.** $3\pi a^2$.

§ 19

19.1. 0,125 ჯ. **19.2** 0,024 კგ.მ. **19.3.** $mg\frac{Rh}{R+h}$. **19.4.** $\frac{1}{2}\pi R^2h$ კგ.მ. **19.5.** $25\cdot 10^5\,\pi$ კგ.მ. **19.6.** $A=\frac{m}{5}R^2w^2=23\cdot 10^7$ კგმ. **19.7.** $e_0e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$. **19.8.** $A=\int\limits_{v_0}^{v_1}\frac{P_0v_0^k}{v^k}dv=\frac{P_0v_0}{k-1}\left[\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}-1\right]$, სადაც $k\approx 1,4$. **19.9.** $A=\int\limits_{v_0}^{v_1}P\,dv$, $(pv=p_0v_0)$, $A=2066\ln 2$ ჯ. **19.10.** $F=2k\frac{m\mu_0}{a}$, (k არის გრავიტაციული მუდმივა). **19.11.** $F=$

$= 2\pi k m \delta_0 \left(1 - \frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}}\right)$, ($k$ არის გრავიტაციული მუდმივა).
19.12. $t \approx 3$ სთ. **19.13.** $s = 10^4$ მ. **19.14.** $\frac{v_0^2}{2g}$. **19.15.** $A = \frac{\pi}{\omega} u_0 I_0 \cos\varphi$, $\varphi = 0$. **19.16.** ა) $t \approx 33{,}2$ წმ; ბ) 64,6 წმ. **19.17.** $m = 533\frac{1}{3}$ გრ. **19.18.** 1) $x_c = \frac{2a}{\pi}$, $y_c = \frac{2a}{\pi}$; 2) $x_c = 0$, $y_c = \frac{2}{5}a$. 3) $x_c = \pi a$, $y_c = \frac{4}{3}a$; 4) $x_c = 0$; $y_c = \frac{a}{4} \frac{2+\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1}$; 5) $x_c = y_c = \frac{4}{5}a$; 6) $x_c = -\frac{a}{5} \cdot \frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$, $y_c = \frac{a}{5} \frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$. **19.19.** 1) $x_c = y_c = \frac{9}{20}$; 2) $x_c = \frac{5a}{7}$, $y_c = \frac{5a}{16}$; 3) $x_c = \frac{\pi}{2}$, $y_c = \frac{\pi}{8}$; 4) $x_c = \frac{\pi^2+12\pi-12}{3(\pi+4)}$, $y_c = \frac{5}{6}a(\pi+4)$. **19.20.** 1) $x_c = y_c = \frac{a}{5}$; 2) $x_c = \frac{16}{5}$, $y_c = -1$; 3) $x_c = \pi a$; $y_c = \frac{5}{6}a$; 4) $\varphi_c = 0$, $r_c = \frac{5}{6}a$.
19.21. სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს რკალის სიმეტრიის ღერძზე და დაშორებულია ცენტრიდან $2r\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ მანძილით. **19.22.** $x_c = 0$ $y_c = \frac{2}{5}a$.
19.23. $32\pi^2 a^2$.

§ 20

20.1. 1) 1,4627; 2) 0,882; 3) 1,3419; 4) 0,6651. **20.2.** 1) 1,1184; 2) 0,7721; 3) 2,099; 4) 0,461. **20.3.** 1) 0,524; 2) 0,6205; 3) 0,9160; 4) 4,3555. **20.4.** 1) 0,6076; 2) 1,5708; 3) 0,1728; 4) 0,9775. **20.5.** 1) 0,1705; 2) 468,92986; 3) 0,15771; 4) 1,7866. **20.6.** 1) 0,6736; 2) 0,1948; 3) 0,1697; 4) 1,0182. **20.7.** 1) 2,7686; 2) 0,3935; 3) 0,1359; 4) 1,0248. **20.8.** 1) 3,9775; 2) 11,3181; 3) 0,6507; 4) 0,0013. **20.9.** 1) 0,15635; 2) 0,2319; 3) 0,10682; 4) 16,3325. **20.10.** 1) 0,1847; 2) 0,2534; 3) 0,6039; 4) 0,6629. **20.11.** 1) 17,23571; 2) 3,812; 3) 0,08593; 4) 0,5378. **20.12.** 1) 0,4357; 2) 0,0657; 3) 0,1598; 4) 0,6630. **20.13.** 1) 0,0259; 2) 0,2217; 3) 0,6300; 4) 0,0524. **20.14.** 1) 1,27047; 2) 1,33489; 3) 1,66494; 4) 0,338308.

21.1. 1) oxy სიბრტყე; 2) $y \neq 0$; 3) oxy სიბრტყე; 4) $y \neq x$. **21.2.** 1) $\{(x, y);\ -\infty < x < +\infty,\ -1 < y < 1\}$; 2) $y < x$; 3) $y < x^2$; 4) $y \neq \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in z$. **21.4.** 1) $y = x - e^y$; 2) $x^2 + y^2 = 2 + \ln x^2$; 3) $x^2 + 2y + 1 = 0$; 4) $y(1+x) = 1$; 5) $y(\ln|x^2 - 1| + 1) = 1$; 6) $y = 2 - 3\sin 2x$. **21.5.** 1) $y^2 - x^2 = 2xyy'$; 2) $y - 2xy' = 0$; 3) $3y^2 - x^2 = 2xyy'$; 4) $x^2 + y'^2 = 1$. **21.6.** 1) $xy' - xy = yy'$; 2) $y' = y$; 3) $y = xy' \ln \frac{x}{y}$; 4) $xyy'(xy^2 + 1) = 1$. **21.7.** 1) $y^3 + y - x^2 = C$; 2) $x + y = C(1 - xy)$; 3) $x^2(1 + y^2) = C$; 4) $y = C(x+1)e^{-x}$; $x = -1$. **21.8.** 1) $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}$, 2) $y = C\sin x$; 3) $e^x + e^{-y} = C$; 4) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$. **21.9.** 1) $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \pm 1$; 2) $Cy = \sqrt{1+e^{2x}}$; 3) $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = -\frac{1}{x} + C$, $y = 1$; 4) $\sqrt{1+x^2}\ e^{\operatorname{arctg} y} = C$. **21.10.** 1) $y = \sin[C + \ln(1 + x^2)]$; 2) $y\sin y + \cos y - x\cos x + \sin x = C$; 3) $(Ce^{-x^2} - 1)y = 2$, $y = 0$; 4) $x^2 y = Ce^y$. **21.11.** 1) $e^{-s} = 1 + Ce^t$; 2) $x^2 + t^2 - 2t = C$; 3) $\frac{x+t}{xt} + \ln\frac{x}{t} = C$; 4) $r = Ce^{\varphi} + a$. **21.12.** 1) $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$; 2) $\operatorname{tg} y - C(2 - e^x)^3 = 0$; 3) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right| = C - 2\sin\frac{x}{2}$; 4) $e^x - \frac{1}{2}e^{2y} - 2\ln|1 + y| - \frac{(y-1)^2}{2} = C$, $y = -1$. **21.13.** 1) $x + C = \operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $4x + 2y + 1 = Ce^{2y}$; 3) $y = x - \frac{1}{x - C}$; 4) $2x + y - 1 = Ce^x$. **21.14.** 1) $y(\ln|1 - x^2| + 1) = 1$; 2) $y = 2 - 3\cos x$; 3) $y(1 + x) = 1$; 4) $y = \sqrt{1 + 2\ln\frac{1+e^x}{2}}$. **21.15.** 1) $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; 2) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = 1$; 3) $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$;

4) $3\sqrt{2+y^2}+\operatorname{arctg} x=6$. **21.16.** 1) $y=\arccos\frac{1}{x^2}$; 2) $y=2\operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)+\frac{9\pi}{2}$; 3) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{2x}+\frac{9\pi}{4}$; 4) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x\right)+\frac{7}{2}\pi$. **21.17.** 1) $x+2y+2=0$; 2) $\operatorname{arctg}(x+y)=x+1$; 3) $8x+2y+1=2\operatorname{tg}4x$; 4) $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=x-\ln 4$. **21.18.** 1) $y=x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$; 2) $y=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}$; 3) $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$; 4) $\ln|Cx|=-e^{-\frac{y}{x}}$.
21.19. 1) $x+y=Cx^2$, $x=0$; 2) $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$; 3) $\ln(x^2+y^2)=C-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 4) $xe^{y/x}=C$. **21.20.** 1) $y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx+\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$; 2) $y=2x\operatorname{arctg} Cx$; 3) $y^2+2xy-x^2=C$; 4) $y-2x=Cx^2(y+x)$. **21.21.** 1) $x=Ce^{x/y}$, $y=0$; 2) $x(y-x)=Cy$, $y=0$; 3) $(x+y)^2=Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$; 4) $(x^2+y^2)^3(x+y)^2=C$. **21.22.** $y=Ce^{y/x}$; 2) $y^2-x^2=Cy$, $y=0$; 3) $x=\pm y\sqrt{\ln|Cx|}$, $y=0$; 4) $y=x\sqrt[3]{3\ln|Cx|}$. **21.23.** 1) $\sin\frac{y}{x}=Cx$; 2) $\ln|Cx|=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x}\right|\right)$, $y=xe^{2\pi k}$, $k\in Z$; 3) $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$; 4) $\sin\frac{y}{x}=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$. **21.24.** 1) $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C$; 2) $y=\frac{C}{2}x^2-\frac{1}{2C}$; $x=0$; 3) $\arcsin\frac{y}{x}=\ln Cx$, $y=\pm x$; 4) $\arcsin\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}-\ln|x|=C$.
21.25. 1) $y=x^3-x$; 2) $x\ln x=2\sqrt{xy}$; 3) $\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln x=0$; 4) $y^3=y^2-x^2$. **21.26.** 1) $y=xe^{1-x}$; 2) $y=xe^{-\frac{x}{2}}$; 3) $\sqrt{x^2+y^2}=$

$= e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 4) $y = \frac{2x}{1-3x^2}$. **21.27.** 1) $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$;
2) $x+y-1 = C(y+2)^2$; 3) $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$; 4) $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$, $y = x+1$. **21.28.** 1) $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$.
2) $x + 2y + 3\ln|x+y-2| = C$, 3) $y^2 - 2xy - x^2 - 8y + 4x = C$;
4) $y^2 - 2xy - x^2 + 4y = C$. **21.29.** 1) $y + 2 = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$;
2) $3x + y + 2\ln|x+y-1| = C$; 3) $\ln\frac{y+x}{x+3} = 1 + \frac{C}{x+y}$;
4) $\sin\frac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$. **21.30.** 1) $1 + x^2y^2 = Cy$, $y = 0$;
2) $y^2 = x\ln Cy^2$; 3) $x^2 = (x^2 - y)\ln|Cx|$, $y = x^2$; 4) $x = -y^2\ln|Cx|$, $y = 0$.
21.31. 1) $y = Cx + x^2$; 2) $y = Cx^2 + x^4$; 3) $y = e^x(C+x)$;
4) $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$. **21.32.** 1) $y = \sin x + C\cos x$; 2) $y = Ce^{x^2/2} - e^{-x}$;
3) $y = Ce^{x^4} - e^{-4x}$; 4) $y = e^x(C + \ln|x|)$. **21.33.** 1) $y = x^n(C + e^x)$;
2) თუ $m \neq -a$, $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$; თუ $m = -a$, მაშინ $y = (C+x)e^{mx}$. 3) $y = x^2(C + \sin x)$; 4) $y = x^2(Ce^{1/x} + 2)$. **21.34.**
1) $y = 1 + (2x+1)(C + \ln|2x+1|)$; 2) $y = (x+C)(1+x^2)$;
3) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$; 4) $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$. **21.35.**
1) $y = C(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$; 2) $y = (C + x^3)\ln x$; 3) $y = x(C + \sin x)$;
4) $y = (C\ln x - 1)\ln x$. **21.36.** 1) $xy = (C + x^3)e^{-x}$; 2) $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$; 3) $y = (C + x^2)e^{e^x}$; 4) $y = (C + x)e^{(1-x)e^x}$. **21.37.**
1) $x = y^2 + Cy$, $y = 0$; 2) $x = e^y + Ce^{-y}$; 3) $x = Cy^3 + y^2$, $y = 0$;
4) $(y-1)^2x = y - \ln Cy$, $y = 0$, $y = 1$. **21.38.** 1) $x = y\ln y + \frac{C}{y}$;
2) $x = Ce^{-\operatorname{arctg} y} + \operatorname{arctg} y - 1$; 3) $x = (C - \cos y)\sin y$; 4) $x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2$. **21.39.** 1) $y = \frac{x}{\cos x}$; 2) $y = \frac{8}{x^2} + x$; 3) $y = e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; 4) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. **21.40.** 1) $y = \frac{x^2}{\cos x}$;

2) $y=2e^{-\sin x}+\sin x-1$; 3) $s=2t^2+\frac{1}{t}$; 4) $s=-t\,\mathrm{arctg}\,t$.

21.41. 1) $x=\frac{1}{2}y(y^2-1)$; 2) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y}$; 3) $x\sqrt{1+y^2}+\cos y+1=0$; 4) $xy=1-\ln|y|$. **21.42.** 1) $y=e^{-x}$; 2) $y=\frac{\sin x}{x}$; 3) $y=e^x+e^{1/x}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$. **21.43** 1) $y^2=C(x+1)^2-2(x+1)$; 2) $x^2=Ce^{2y}+2y$; 3) $\cos y=(x^2-1)\ln C(x^2-1)$; 4) $e^{-y}=Cx^2+x$. **21.44,** 1) $y(e^x+Ce^{2x})=1$; $y=0$; 2) $y^3=1+Ce^{-x}$; 3) $y=x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2$; 4) $y=x\sqrt{2x+C}$. **21.45.** 1) $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$; 2) $y(x+C)=\frac{1}{\cos x}$; 3) $y^2=x^2-1+C\sqrt{|x^2-1|}$; 4) $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$. **21.46.** 1) $y=e^{-2x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^2\right)^2$; 2) $y=\frac{1}{1+Cx+\ln x}$; 3) $x^4y^2(C+2e^x)=1$, $y=0$; 4) $\sqrt{y}+1=Ce^{e^x}$.

21.47. 1) $x^2=y\ln\frac{C}{y}$; 2) $y=x^2(C-\cos y)$, $y=0$; 3) $x^2=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$; 4) $xy(C-\ln^2 y)=1$. **21.48.** 1) $\frac{1}{\sin y}=Ce^{-x}-\frac{1}{2}e^x$; $y=k\pi$, $k\in Z$; 2) $\ln^3 y=Cx^3-3x^2$; 3) $(x+1)(\ln|x+1|+C)\sin y=1$, $y=\pi k$, $k\in Z$; 4) $\sin^2 y\cdot\ln x=C+\sin x$. **21.49.** 1) $x^2+xy+y^2=C$; 2) $\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C$; 3) $x^3+2xy-3y=C$; 4) $5x^2y-8xy+x+3y=C$.

21.50. 1) $\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$; 2) $x^4+2x^2y^2+y^4=C$; 3) $x^3+3x^2y^2+y^4=C$; 4) $x^2+x^3y-y^3=C$. **21.51.** 1) $x+\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=C$; 2) $x^2+y^2-2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=C$; 3) $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C$; 4) $4x^2+y^2=Cx$. **21.52.** 1) $y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C$; 2) $xe^y-y^2=C$; 3) $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-$

$-\frac{1}{2}y^2=C$. **21.53.** 1) $x^3e^y-y=C$; 2) $y+xe^{-y}=C$; 3) $x^3+x^3\ln y-y^2=C$; 4) $x^2+ye^{x/y}=C$. **21.54.** 1) $\frac{1}{2}x^2\cos 2y+x=C$; 2) $x-y^2\cos^2 x=C$; 3) $x^2\cos^2 y+y^2=C$; 4) $x\sin xy=C$. **21.55.** 1) $x^2+1=2(C-2x)\sin y$; 2) $x^y=C$; 3) $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C$; 4) $\operatorname{tg} xy-\cos x-\cos y=C$. **21.56.** 1) $y=x$; 2) $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=1$; 3) $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=\ln\frac{\pi^2}{2}$; 4) $\frac{x^2}{2}+ye^{x/y}=2$. **21.57.** 1) $\mu=\frac{1}{x^2}$; $x+\frac{y}{x}=C$; 2) $\mu=\frac{1}{y}$, $xy-\ln y=C$; 3) $\mu=e^{-2x}$, $y^2=(C-2x)e^{2x}$; 4) $\mu=\frac{1}{x^2}$, $x=Ce^{y^2/2}$. **21.58.** 1) $\mu=e^{-y}$, $e^{-y}\cos x=C+x$; 2) $\mu=\cos y$, $x^2\sin y+\frac{1}{2}\cos 2y=C$; 3) $\mu=e^x$, $ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=C$; 4) $\mu=\frac{1}{\sin y}$; $\frac{x}{\sin y}+x^3=C$. **21.59.** 1) $\mu=x^2y^2$, $\frac{1}{3}x^3y^6-x^4y^3=C$; 2) $\mu=x+y^2$, $(x+y)(x+y^2)^2=C$; 3) $\mu=\frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$, $1+y^2-x^2=Cx$; 4) $\mu=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$, $y-1=C\sqrt{x^2+y^2}$. **21.60.** 1) $x=2p+6p^2+C$, $y=p^2+4p^3$; $y=0$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 2) $x=e^p+pe^p+C$, $y=p^2e^p$; $y=0$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 3) $x=2p-\frac{2}{p}+C$, $y=p^2+2\ln p$; 4) $x=e^p+C$, $y=(p-1)e^p$; $y=-1$ განსაკუთრებული ამონახსნია **21.61.** 1) $x=p^3+p$, $4y=3p^4+2p^2+C$; 2) $x=p\cos p$, $y=p^2\cos p-p\sin p-\cos p+C$; 3) $x=\sin p+\ln p$, $y=p\sin p+\cos p+p+C$; 4) $x=\frac{2p}{p^2-1}$, $y=\frac{2}{p^2-1}-\ln|p^2-1|+C$. **21.62.** 1) $x=\ln|p|-\arcsin p+C$, $y=p+\sqrt{1-p^2}$; $y=1$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 2) $x=2p-\ln p$,

$y = p^2 - p + C$; 3) $x = p + \sin p, \quad y = \frac{1}{2} p^2 + p \sin p + \cos p + C$

4) $x = \ln |p| + \sin p + p \cos p, \; y = p + p^2 \cos p$. **21.03.** 1) $y = Cx + C$; 2) $y = Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 3) $y = Cx - \frac{1}{C}$; $y^2 = -4x$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 4) $y = Cx + \frac{1}{2C}$; $y^2 = 2x$ განსაკუთრებული ამონახსნია. **21.04.** 1) $y = Cx + \cos C$; $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 2) $y = Cx + \frac{1}{C^2}$; $4y^3 = 27x^2$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 3) $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$, $x^2 + y^2 = 1$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 4) $y = Cx - e^C$; $y = x(\ln x - 1)$ განსაკუთრებული ამონახსნია. **21.05.** 1) $x = \frac{1}{p^2}(\ln |p| + C)$, $y = 2px + \frac{1}{p}$; 2) $x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$, $y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2$; 3) $x = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p}$; $y = \frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p$; $y = 0$; 4) $x = \frac{C}{p^3} - 2e^p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right)$, $y = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p\left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}\right)$. **21.06.** 1) $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{p^3}$, $y = \frac{2C}{p} - \frac{3}{p^2}$; 2) $x = Ce^{-p} - 2p + 2$, $y = C(1+p)e^{-p} - p^2 + 2$; 3) $x = Cp - \ln p - 2$, $y = \frac{1}{2}Cp^2 - p$; 4) $x = -p - \frac{1}{2} + \frac{C}{(1-p)^2}$, $y = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{Cp^2}{(1-p)^2}$; $y = 0$ და $y = x + 1$ განსაკუთრებული ამონახსნებია. **21.07.** 1) $4y = x^2 + p^2$, $\ln |p - x| = C + \frac{x}{p-x}$; 2) $xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1$, $y = xp - x^2p^3$; $y = 0$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 3) $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$, $y = \frac{x^2}{4}$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 4) $y = Cx + \frac{1}{2}(C^2 - x^2)$, $y = -x^2$ განსაკუთრებული ამონახსნია. **21.08.** 1) $x = Cy + C^2$, $x = -\frac{1}{4}y^2$ განსაკუთრებული ამონახსნია 2) $\ln\sqrt{p^2+y^2} +$

$+\operatorname{arctg}\dfrac{p}{y}=C,\ x=\ln\dfrac{y^2+p^2}{2p}$; $y=e^x$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 3) $pxy=y^2+p^3,\ y^2(2p+C)=p^4$; $y=0$ განსაკუთრებული ამონახსნია; 4) $y^2=2Cx-C\ln C$; $2x=1+2\ln|y|$. **21.69.** 1) $y^2=1+C(x+1)^2e^{-2x}$, $x=-1$; 2) $\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=C$; 3) $\dfrac{2x}{x-y}+\ln|x+y|+$ $+3\ln|y-x|=C$; 4) $y\left(C\sqrt{|x^2-1|}-2\right)=1$, $y=0$. **21.70.** 1) $y^3-3xy=C$; 2) $x+y=\operatorname{tg}(y-C)$; 3) $\ln|y|=\dfrac{x}{y}+C,\ y=0$; 4) $x=Ce^y+y^2+2y+2$. **21.71.** 1) $3y^2=2\sin x+\dfrac{C}{\sin^2 x}$; 2) $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$; 3) $y^2+\sqrt{x^4+y^4}=C$; 4) $x(e^y+xy)=C$. **21.72.** 1) $x=y\quad{}^{y+x}$; 2) $x=y^2(C-2\ln|y|),\ y=0$; 3) $xy\left(C-\dfrac{1}{2}\ln^2x\right)=1$; 4) $e^{-y}+\ln C(x-\quad)=0$. **21.73.** 1) $\ln|1+y|-\dfrac{1+y}{x}=C$; 2) $y\ln Cx=-x,\ y=0$; 3) $2\operatorname{arctg}\dfrac{y-1}{2x}=\ln|Cx|$; 4) $x^3y^2+7x=C$. **21.74.** 1) $x^3=Ce^y-y-2$; 2) $xy(\ln^2x+C)=1$; 3) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\ln|x|=C$; 4) $y^2=(x^2+C)e^{2x}$. **21.75.** 1) $x=\quad{}^{y}-\dfrac{1}{2}(\sin y+\cos y)$;

2) $y=\dfrac{2e^x}{C+e^x(\cos x+\sin x)}$; 3) $x=Cy+\ln^2y$; 4) $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$ **21.76.** 1) $(x-1)^2y=x-\ln|x|+C$; 2) $x^4=Ce^{4y}-y^3-\dfrac{3}{4}y^2-$ $-\dfrac{3}{8}y-\dfrac{3}{32}$; 3) $xy\cos x-\quad{}^2=C$; 4) $(xy+C)(x^2y+C)=0$. **21.77.** 1) $x\sqrt{y}=\sin x+C,\ y=0$ 2) $y=xe^{Cx}$; 3) $(x+1)y=x^2+x\ln Cx$; 4) $\ln|x|-\cos\dfrac{y}{x}=C$. **21.78.** 1) $y^2+2x^2\ln Cy=0,\ y=0$; 2) $x\sqrt{1+y^2}-\sin y=C$; 3) $y=\left(\dfrac{C+\ln|\sin x|}{x}-\operatorname{ctg}x\right)^2$; 4) $y^2(Ce^{x^2}+1)=1,\ y=0$. **21.79.** 1) $y=C^2+Cx-\dfrac{x^2}{4},\ y=-$

$-\frac{x^2}{2}$ (განსაკუთრებული ამონახსნია); 2) $px = C\sqrt{p} - 1$, $y = \ln p - C\sqrt{p} + 1$; 3) $2e^x - y^4 = Cy^2$; 4) $4x^2y = (x+2C)^2$, $y=0$. **21.80.** 1) $(x+y^3)^3 = C(y^3 - x)$; 2) $Cy = C^2e^x + 1$, $y = \pm 2e^{x/2}$ (განსაკუთრებული ამონახსნია); 3) $y = \sqrt{1-x^2}$; 4) $y^3 = (C - x^3)\sin^3 x$. **21.81.** 1) $y = C^2 - \frac{C}{x}$, $y = \frac{-1}{4x^2}$; 2) $27(y-2x)^2 = (C-2x)^3$; 3) $x = \frac{p - \ln p + C}{(p-1)^2}$; 4) $y^2 = C\ln^2 x + 2\ln x$. **21.82.** 1) $y^2 = Cx + \frac{C^2}{4}$; 2) $p^2x = p\sin p + \cos p + C$, $py = p\sin p + 2\cos p + 2C$, $y=0$; 3) $x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}$, $y = 2px - p^2$, $y=0$; 4) $x = 2\sqrt{p^2+1} - \ln(1 + \sqrt{p^2+1}) + \ln Cp$, $y = p\sqrt{p^2+1}$, $y=0$. **21.83.** 1) $(y-4x+2)^4 \times (2y+2x-1) = C$; 2) $(y-x)^2 = 2C(x+y) - C^2$, $y^{2/3} - x^{2/3} = C$, $y=0$; 3) $x = 2p - \ln p$; $y = p^2 - p + C$; 4) $x = 4p^3 - \ln Cp$, $y = 3p^4 - p$, $y=0$.

§ 22

22,1. $y = \frac{6}{x}$; **22.2.** $y = \sqrt{4-x^2} + 2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$. **22.3.** $(x-C)^2 + y^2 = a^2$. **22.4.** $x^2+y^2 = a^2(x-C)^2$. **22.5.** $y = Cx^2 + \frac{2a^2}{3x}$. **22.6.** $y^2 = 4(x-1)$ და $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$. **22.7.** $(x-y)^2 - Cy = 0$. **22.8.** $y = \pm\ln|x^2-1|$. **22.9.** $x = Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$. **22.10.** $x = Cy \pm \frac{a^2}{y}$ $\left(\text{დიფერენციალური განტოლებაა } \left|xy - y^2\frac{dx}{dy}\right| = 2a^2\right)$. **22.11.** $x^2+y^2 = Cx$. **22.12.** $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2$. **22.13.** $x^2+y^2 = 2y$. **22.14.** $y^2 = 2x + 1 - e^{2x}$. **22.15.** $y = 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$. **22.16** $\approx 3{,}9$ კგ. **22.17.** $x = Ce^{-\frac{bt}{a}}$, სადაც x არის მარილის რაოდენობა ჭურჭელში t მომენტისათვის.

22.18. $p = e^{-0{,}000167\,h}$. 22.19. $\Delta l = \frac{1}{2}\,klp$, დიფერენციალური განტოლება $dl = kp\frac{l-x}{x}\,dx$. 22.20. $\omega = 100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ ბრ/წთ. 22.21. $v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$, სადაც k წინააღმდეგობის კოეფიციენტია.
22.22. $\approx 2{,}7$ მ/წმ. 22.23. 0,467 კმ/წმ. 22.24. $v = (v_0 + b)\,e^{-at^2} + b\,(at^2 - 1)$, სადაც $a = \frac{k_1}{2m}$, $b = \frac{2km}{k_1^2}$. 22.25. 0,00082 წმ. 22.26.

$$v = v_0\left(1 - \frac{m}{M_0}\,t\right)^{-1} e^{-\frac{3f_0}{mv_0}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{m_0}t}\right)}.$$

22.27. $v = \frac{g}{2m-k}\,(M_0 - mt)\left[\left(1 - \frac{m}{M_0}\,t\right)^{\frac{k}{m}-2} - 1\right]$. 22.28. $I = 1 + (I_0 - 1)\,e^{-t^2}$. 22.29. 9,03 ა. 22.30. $I = \frac{\mathscr{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[\omega L\,e^{-\frac{Rt}{L}} + R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t\right]$.

§ 23

23.1. 1) ყველა x, y, y'-ებისათვის; 2) $y' < x^2$; 3) $y' > 0$; 4) $y > 0$.
23.3. 1) $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$; 2) $y = x\ln|x| + C_1 x + C_2$; 3) $y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$; 4) $y = (C_1 + \operatorname{arctg} x)\,x - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2$.
23.4. 1) $y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$; 2) $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; 3) $y = \frac{x^4}{24} - \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C$; 4) $y = \frac{1}{12}x^4\ln x - \frac{13}{144}x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. 23.5. 1) $y = C_1 x^2 + C_2$, 2) $y = \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x-C_1}{x+C_1}\right| + C_2$, როცა $C_1 > 0$; $y = \frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{x}{C_1} + C_2$

ხოლო $C_1<0$; $y=C-\frac{1}{x}$. 3) $C_1x-C_1^2y=\ln|C_1x+1|+C_2$, $2y=x^2+C$, $y=C$; 4) $y=\ln|e^{2x}+C_1|-x+C_2$; **23.6.** 1) $y=C_1e^{x^2}+C_2$; 2) $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+C_2$, $y=\frac{1}{2}ex^2+C$; 3) $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$; 4) $y=\frac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2$. **23.7.** 1) $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arctg}C_1x-C_1x+C_2$, $2y=k\pi x^2+C$, $k\in Z$; 2) $y=C_1(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)+x^2+C_2$, $y=C_1(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+x^2+C_2$; 3) $y=\frac{1}{x}+C_1\ln|x|+C_2$; 4) $y=-\frac{1}{3}\sin^3x+C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)+C_2$. **23.8.** 1) $y=C_3-(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x$, $y=C_1x+C_2$; 2) $y=C_3+C_2x-\sin(x+C_1)$; 3) $y=C_1x^3+C_2x+C_3$; 4) $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)x^2+C_2x+C_3$; 5) $y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$; 6) $y=\pm\sin(C_1+x)+C_2x+C_3$. **23.9.** 1) $y=C_1e^{C_2x}$; 2) $1+C_1y^2=\left(C_2+\frac{C_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$; 3) $x=\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|+C_2$, $y=C$; 4) $x=\pm\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$. **23.10** 1) $\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2+1}=C_2\pm x$; 2) $y=C_2e^{C_2x}+\frac{1}{C_2}$; 3) $\operatorname{ctg}y=C_2+C_1x$; 4) $y=1+\frac{1}{C_1x+C_2}$. **23.11.** 1) $y=\frac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}$; 2) $y+C_1\ln|y|=x+C_2$, $y=C$; 3) $y=C_1(1\pm\operatorname{ch}(x+C_2))$; 4) $e^y+C_1=(x+C_2)^2$. **23.12.** 1) $(x+C_2)\ln y=x+C_1$; 2) $x=C_1+\cos C_2\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y+C_2}{2}\right|$; 3) $y=C_1+C_2e^{C_1x}$, $y=\frac{4}{C_3-x}$, $y=C$; 4) $x=p(-1+2\ln p)+C_1$, $y=p^2\ln p+C_2$. **23.13.** 1) $x=C_1y^3+C_2y+C_3$; 2) $y=\operatorname{sh}(x+C_1)+C_2x+C_3$; 3) $12(C_1y-x)=C_1^2(x+C_2)^3+C_3$; 4) $x=\ln|p|+2C_1p-C_2$, $y=p+C_1p^2+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **23.14.** 1) $y=3\ln x-2x^2-6x+6$;

$y = 1 - \cos 2x$; 3) $y = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + 1$; 4) $y = (x-2)e^x + x + 3$.

.15. 1) $y = Cx^2$; 2) $y = x^3 + 3x$; 3) $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}$; 4) $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$.

.16. 1) $y = \frac{x^2 - 1}{2(e^2 - 1)} - \frac{e^2 - 1}{4}\ln|x|$; 2) $y = 2\ln|x+1| - x + 1$;

$y = \frac{1}{2}x^2$; 4) $y = \frac{1}{2}x^2$. **23.17.** 1) $y = \frac{4}{(x+4)^2}$; 2) $y = \frac{1}{16}(x+9)^2$;

$y = -\ln|x - 1|$; 4) $y - x = 2\ln|y|$. **23.18.** 1) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 2(x+1)$; 3) $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$; 4) $y = \frac{x+1}{x}$.

.19. 1) $y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$; 2) $y = C_2 e^{C_1 x^2}$; 3) $\ln C_2 y = 4x^{5/2} + C_1 x$;

$y = C_2(x + \sqrt{x^2 + 1})^{C_1}$; **23.20.** 1) $y^2 = C_1 x^3 + C_2$; 2) $y =$

$C_2\left|\frac{x}{x + C_1}\right|^{1/C_1}$; 3) $y = C_2 x(\ln C_1 x)^2$, $y = Cx$; 4) $\ln|y| = \ln|x^2 -$

$2x + C_1| + \int\frac{2dx}{(x-1)^2 + C_1 - 1} + C_2$, $y = C$. **23.21.** 1) წრფივად

მოუკიდებელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად დამო-
ებულია; 4) წრფივად დამოკიდებულია. **23.22.** 1) წრფივად დამო-
იდებელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად დამოკიდე-
ლია; 4) წრფივად დამოკიდებულია. **23.23.** 1) წრფივად დამოუკი-
ბელია; 2) წრფივად დამოუკიდებელია; 3) წრფივად დამოკიდებუ-
ია; 4) წრფივად დამოკიდებულია. **23.24.** 1) $y'' - y'\operatorname{ctg} x = 0$.

$+ y' = 0$; 3) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$; 4) $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$.

.25. 1) $(2x^2 + 6x - 9)y'' - (4x + 6)y' + 4y = 0$; 2) $y''' - y'' = 0$;

$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$; 4) $y''' + y' = 0$.

.26. 1) $y = C_1\left(1 + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right)$;

$y = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}$; 3) $y = C_1 x + C_2\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right)$;

$y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$. **23.27.** 1) $xy = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$;

$y = C_1\operatorname{tg} x + C_2(1 + x\operatorname{tg} x)$; 3) $y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x + 1}$;

4) $y=C_1\sin x+C_2\left(2-\sin x\cdot\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$. **23.28.** 1) $y=C_1x+$ $+\dfrac{C_2}{x}+\dfrac{C_3}{x^2}$; 2) $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$. 3) $y=C_1x+C_2e^x+C_3e^{-x}$; 4) $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x}+C_3(x\ln|x|+1)$. **23.29.** 1) $y=C_1x+C_2e^{-2x}$; 2) $y=e^x(C_1x^2+C_2)$; 3) $y=C_1x+C_2(\ln x+1)$; 4) $y=C_1x+C_2(1+x\ln|x|)$.
23.30. 1) $y=C_1e^{2x}+C_2(3x+1)e^{-x}$; 2) $y=C_1(2x+1)+C_2e^{2x}$; 3) $y=C_1x+C_2(x^2-1)$; 4) $y=C_1(x+1)+\dfrac{C_2}{x}$. **23.31.** 1) $y=$ $=C_1\dfrac{\sin x}{x}+C_2\dfrac{\cos x}{x}+\dfrac{1}{x}$; 2) $y=C_1\dfrac{\sin x}{x}+C_2\dfrac{\cos x}{x}+1$; 3) $y=C_1\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{C_2}{x-1}+x$; 4) $y=C_1\cos x+C_2x\cos x-\sin x\cos x$.
23.32. 1) $y=C_1x^2+C_2x^4+\dfrac{x}{2}$; 2) $y=\dfrac{C_1}{x}+C_2x^3+x^4$; 3) $y=C_1x+\left(C_2-x+\dfrac{x^2}{2}\right)e^x$; 4) $y=C_1x^2+C_2(2x-1)+x^3$.
23.33. 1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$; 3) $y=C_1+C_2e^{-3x}$; 4) $y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{7}{2}x}$. **23.34.** 1) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$; 4) $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}}$.
23.35. 1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; 2) $y=C_1\cos\dfrac{3}{2}x+C_2\sin\dfrac{3}{2}x$; 3) $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 4) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.
23.36. 1) $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{3x}$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$; 3) $y=C_1+(C_2+C_3x)e^x$; 4) $y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)e^{-x}$. **23.37.** 1) $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$; 2) $y=C_1e^x+$ $+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$; 3) $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$; 4) $y=e^x(C_1+C_2x)+$ $+C_3e^{-2x}$. **23.38.** 1) $y=(C_1+C_2x)e^{4x}+(C_3+C_4x)e^{-4x}$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$; 3) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+$ $+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$; 4) $y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{3x}$.
23.39. 1) $y=4e^x+e^{4x}$; 2) $y=1$; 3) $y=\sin 2x$; 4) $y=(7-3x)e^{x-2}$.
23.40. 1) $y=2+e^{-x}$; 2) $y=1+\cos x$; 3) $y=e^x$; 4) $y=e^x+\cos x-2$.

23.41. 1) $y=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2\pi}$; 2) $x=\alpha \sin x$; 3) $y=-e^{x} \sin x$; 4) $y=C \sin \pi x$. **23.42.** 1) $y=0$; 2) $y=e^{\alpha}$; 3) $\lambda=n$, $y=\cos nx$, $n \in N$; 4) $y=(x-1)e^{-x}$. **23.43.** 1) $y=C_1 e^{2x}+C_2 e^{3x}+x+1$; 2) $y=C_1 e^{x}+C_2 e^{-2x}-3(x^2+x+1{,}5)$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}-2$; 4) $y=C_1 e^{-3x}+C_2 e^{4x}-1$. **23.44.** 1) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{27}x+\dfrac{11}{27}$; 2) $y=e^{2x}(C_1 \cos x+C_2 \sin x)+2x^2-1$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{x}+x^3+6x^2+18x+24$; 4) $y=C_1 \cos 2x+C_2 \sin 2x+x^3-2x+1$. **23.45.** 1) $y=C_1+C_2e^{-8x}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{8}$; 2) $y=C_1+C_2 e^{3x}-2x$; 3) $y=C_1+C_2 e^{x/7}-7x^2-98x$; 4) $y=C_1+C_2 e^{2x}+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^3}{6}$. **23.46.** 1) $y=C_1e^{-x}+C_2 e^{3x}+\dfrac{1}{5}e^{4x}$; 2) $y=C_1 e^{x}+\left(C_2-\dfrac{x}{2}\right)e^{-x}$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+e^{3x}$; 4) $y=C_1\cos 3x+C_2 \sin 3x-3e^{2x}$. **23.47.** 1) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\left(\dfrac{x}{16}-\dfrac{1}{32}\right)e^{2x}$; 2) $y=C_1 e^{-x}+C_2 e^{2x}+xe^{x}$; 3) $y=C_1 e^{x}+C_2 e^{4x}-(2x^2-2x+3)e^{2x}$; 4) $y=C_1e^{x}+C_2 e^{2x}+\left(\dfrac{x^2}{2}-x+1\right)e^{3x}$. **23.48.** 1) $y=C_1 e^{-3x}+C_2 e^{-x}-\dfrac{9}{2}xe^{-3x}$; 2) $y=C_1 e^{x}+C_2 e^{-2x}+\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}\right)e^{x}$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+4x^2e^{-2x}$; 4) $y=(C_1+C_2x+x^3)e^{x}$. **23.49.** 1) $y=C_1 e^{x}+C_2 e^{2x}+\dfrac{1}{10}\sin x+\dfrac{3}{10}\cos x$; 2) $y=C_1 \cos 4x+C_2 \sin 4x-\cos x$; 3) $y=C_1+C_2 e^{2x}+\sin 3x-2\cos 3x$; 4) $y=e^{x}(C_1 \cos x+C_2 \sin x)+\sin x-\cos x$. **23.50.** 1) $y=C_1+C_2 e^{-2x}+\left(\dfrac{7}{50}-\dfrac{x}{20}\right)\sin x-\left(\dfrac{x}{10}+\dfrac{1}{50}\right)\cos x$; 2) $y=C_1 e^{x}+C_2 e^{2x}+(0{,}1x-0{,}12)\cos x-(0{,}3x+0{,}34)\sin x$; 3) $y=C_1 e^{2x}+C_2 e^{-2x}+x^2\sin x$; 4) $y=C_1+C_2 e^{x}+x^2 \cos x$. **23.51.** 1) $y=C_1+C_2 e^{x}-\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^{x}$; 2) $y=C_1+C_2 e^{-2x}+\dfrac{1}{5}(6 \sin x-2\cos x)e^{x}$; 3) $y=C_1+C_2 e^{-\frac{5}{2}x}+$

$+e^{-x}[(10x+18)\sin x-(20x+1)\cos x]$; 4) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+$ $+[(6-x^2)\cos x+4x\sin x]e^{-x}$. **23.52.** 1) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+$ $+x\cos x+x^2\sin x$; 2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$; 3) $y=\left(C_1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x^2}{4}\right)\sin x$; 4) $y=C_1\sin 2x+$ $+C_2\cos 2x+x(\sin 2x-\cos 2x)$. **23.53.** 1) $y=(C_1\sin x+C_2\cos x)e^{-2x}+$ $+5xe^{-2x}\sin x$; 2) $y=\left(C_1\sin x+C_2\cos x+x\sin x-\frac{x}{2}\cos x\right)e^{2x}$; 3) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{3x}+x^2e^{3x}\sin x$; 4) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+x^2\cos x)e^{-x}$. **23.54.** 1) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$ 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}-\frac{x}{5}e^{-4x}-\left(\frac{x}{6}+\frac{11}{36}\right)e^{-x}$; 3) $y=(C_1\cos x+$ $+C_2\sin x)e^{-x}+xe^x+e^{-x}$; 4) $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+e^{-x}-$ $-4\cos 2x+\sin 2x$. **23.55.** 1) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}(1+x\sin 2x)$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{169}\left(6\cos 3x-\frac{5}{2}\sin 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$; 3) $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}e^x-\frac{1}{8}e^{-x}$; 4) $y=C_1+C_2e^{-x}+$ $+xe^{-x}+\frac{1}{2}e^x+\frac{x^3}{3}-x^2+2x$. **23.56.** 1) $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{x^3}{6}\right)e^x$; 2) $y=C_1+C_2x+C_3e^{2x}+2x^3-x^2$; 3) $y=C_1e^{3x}+\left(C_2-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+$ $+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$; 4) $y=\left(C_1+\frac{x}{12}\right)e^{-2x}+(C_2\cos\sqrt{3}\,x+$ $+C_3\sin\sqrt{3}\,x)e^x$. **23.57.** 1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+$ $+C_4\sin 2x-\frac{x}{2}\cos x$; 2) $y=C_1+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$; 3) $y=C_1+(C_2+C_3x)e^x+x^2+4x+\frac{x^2}{2}e^x$; 4) $y=C_1+C_2x+$ $+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x+\frac{x^4}{24}-e^{-x}$. **23.58.** 1) $y=2xe^x-\operatorname{sh}x$; 2) $y=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$; 3) $y=\cos 2x+$

$+\frac{1}{3}(\sin x+\sin 2x)$; 4) $y=\frac{4x+1}{8}e^{2x}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$. **23.59.** 1) $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}$; 2) $y=e^x-e^{-x}+x^2$; 3) $y=e^x+x^3$; 4) $y=2xe^x$; **23.60.** 1) $y=\frac{x}{4}+\cos 2x+\frac{7\pi}{16}\sin 2x$; 2) $y=1-\sin x-\cos x$; 3) ამონახსნი არა აქვს. 4) $y=2x-\pi+\pi\cos x+C\sin x$; 5) $y=1+C\cos x$; 6) $y=e^x\left(\frac{e^\pi-1-e^{\pi/2}}{1+e^\pi}\cos x+\frac{1-2e^{\pi/2}}{1+e^\pi}\sin x+1\right)$. **23.61.** 1) $y=(C_1-x)\cos x+(C_2+\ln|\sin x|)\sin x$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln|x|$; 3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{2\cos x}$; 4) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$.

23.62. 1) $y=C_1e^x+C_2+(e^x+1)\ln(1+e^{-x})$; 2) $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$; 3) $y=C_1e^x+C_2-\cos e^x$; 4) $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+x\ln|x|$. **23.63.** 1) $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$; 2) $y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln|x|)$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{23}\ln x}{2}+C_2\sin\frac{\sqrt{23}\ln x}{2}\right)$; 4) $y=C_1+C_2x^2+C_3x^4$. **23.64.** 1) $y=C_1x^3+C_2x^2+\frac{x}{2}$; 2) $y=x^2(C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|+3)$; 3) $y=C_1x+C_2x^2+(x^2+2x)\ln x+1$; 4) $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}+\frac{1}{10}(\cos\ln x-3\sin\ln x)$.

§ 24

24.1. $y=\frac{C}{2}e^x+\frac{1}{2C}e^{-x}+C_1$ (ჯაჭვწირი). **24.2.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ (წრეწირი). **24.3.** $S=\frac{m}{3k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t+C\right)^3}-\sqrt{C^3}\right]$. **24.4.** $S=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(t\sqrt{g\frac{k}{m}}\right)$. **24.5.** $S=S_0\cos\sqrt{\frac{F_0}{S_0m}}\,t$. **24.6.** $t=\sqrt{\frac{am}{f_0}}\ln\frac{F+\sqrt{f_0(2F-f_0)}}{F-f_0}$. **24.7.** $x=e^{-0,245t}[2\cos 156,6t+0,00313\sin 156,6t]$. **24.8** $x=\frac{2h\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}\,t}{g-900}$ სმ, სადაც

$g=981$ სმ/წმ². **24.9.** $k=\frac{100}{3}\frac{გ}{სმ}$, $x=5\,[3+\cos(8{,}16\,t)]$. **24.10.** $y=\frac{h\sin\alpha_0}{m_2-m_1}\ln|m+\sqrt{m^2-\sin^2\alpha_0}|+C$, სადაც $m=\frac{(m_2-m_1)x+m_1h}{h}$.

24.11. $x=\frac{2\,mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$. **24.12.** $x=\frac{1}{5}\,(4\,e^t+e^{-4t})$. **24.13.** $x=-\frac{2}{15}e^{-10\,t}\cos(30\,t+\varphi)$, სადაც $\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$. **24.14.** $y=y_0+100\,t-490{,}5\,t^2$, $t\approx0{,}1$ წმ.

§ 25

25.2. 1) $x=C_1\cos t+C_2\sin t$, $y=-C_1\sin t+C_2\cos t$; 2) $x=2\,C_1\,e^{3t}-4\,C_2\,e^{-3t}$, $y=C_1\,e^{3t}+C_2\,e^{-3t}$; 3) $x=C_1+C_2\,e^t$, $y=C_1$; 4) $x=(C_1+C_2t)\,e^{-2t}$, $y=(C_2-C_1-C_2\,t)\,e^{-2t}$. **25.3.** 1) $x=e^t\,(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$, $y=e^t\,(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t)$; 2) $x=C_1\,e^t+C_2\,e^{5t}$, $y=-C_1\,e^t+3\,C_2\,e^{3t}$; 3) $x=e^{-6t}\,(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{-6t}\,((C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t)$; 4) $x=(C_1+3C_2t)\,e^{2t}$, $y=(C_2-C_1-3C_2t)e^{2t}$. **25.4.** 1) $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $y=C_1e^t-3C_3e^{-t}$, $z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5\,C_3\,e^{-t}$; 2) $x=C_1\,e^{-t}+C_2\,e^{2t}+C_3\,e^{-2t}$, $y=C_1\,e^{-t}+C_2e^{2t}-C_3\,e^{-2t}$, $z=-C_1\,e^{-t}+2\,C_2\,e^{2t}$; 3) $x=-2C_1\,e^t-8\,C_2\,e^{2t}-3\,C_3\,e^{3t}$, $y=C_1e^t+3C_2\,e^{2t}+C_3\,e^{3t}$, $z=2C_1\,e^t+7\,C_2\,e^{2t}+3\,C_3\,e^{3t}$; 4) $x=C_1+3\,C_2\,e^{2t}$, $y=-2C_2\,e^{2t}+C_3\,e^{-t}$, $z=C_1+C_2\,e^{2t}-2\,C_3\,e^{-t}$. **25.5.** 1) $x=C_1\,e^t+C_2\,e^{2t}+C_3\,e^{5t}$, $y=C_1\,e^t-2\,C_2\,e^{2t}+C_3\,e^{5t}$, $z=-C_1\,e^t-3\,C_2\,e^{2t}+3\,C_3\,e^{5t}$; 2) $x=C_1\,e^{2t}+e^{3t}\,(C_2\cos t+C_3\sin t)$, $y=e^{3t}\,[(C_2+C_3)\cos t+(C_3-C_2)\sin t]$, $z=C_1\,e^{2t}+e^{3t}\,[(2\,C_2-C_3)\cos t+(C_2+2\,C_3)\sin t]$; 3) $x=C_1+C_2\,e^t+C_3\,e^{2t}$, $y=\frac{3}{2}\,C_1-2\,C_3\,e^{2t}$, $z=\frac{1}{2}\,C_1+C_2\,e^t+2\,C_3\,e^{2t}$; 4) $x=C_2\,e^{-3t}-C_3\,e^{3t}$, $y=C_1\,e^{-t}-2\,C_2\,e^{-3t}+C_3\,e^{3t}$, $z=-C_1\,e^{-t}-C_2\,e^{-3t}$. **25.6.** 1) $x=e^t-2\,e^{2t}$, $y=-e^t+3\,e^{2t}$; 2) $x=e^{4t}$, $y=e^{4t}$; 3) $x=0$, $y=0$; 4) $x=e^{2t}-e^{3t}$, $y=e^{2t}-2\,e^{3t}$. **25.7.** 1) $x=-5\,e^{2t}\sin t$, $y=e^{2t}\,(\cos t-2\sin t)$, 2) $x=-(t+1)\,e^{3t}$, $y=-(t+2)\,e^{3t}$; 3) $x=e^{2t}-e^{3t}$, $y=2\,e^t+e^{2t}$, $z=2e^t+e^{2t}-e^{3t}$; 4) $x=1-e^{-t}$, $y=1-e^{-t}$, $z=2\,e^{-t}-1$. **25.8.** 1) $x=C_1\cos t+C_2\sin t+1$, $y=-C_1\sin t+C_2\cos t$; 2) $x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+t$, $y=C_1\sin 2t-$

$-C_2\cos 2t+1$; 3) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+(t-1)e^t-2t$; 4) $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-2\sin t-\cos t$, $y=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t+3\cos t$. **25.9.** 1) $x=C_1+2C_2te^t-3$, $y=(C_1+C_2+2C_2t)e^t-2$; 2) $x=-C_1\sin t+(C_2-1)\cos t$, $y=C_1\cos t+C_2\sin t$; 3) $x=C_1+C_2t+2\sin t$, $y=-2C_1-C_2(2t+1)-3\sin t-2\cos t$; 4) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}-\dfrac{t^2}{2}$, $y=-C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t}+t^2+t$. **25.10.** 1) $x=C_1e^{2t}+C_2+e^t$, $y=C_1e^{2t}-C_2-e^t$; 2) $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{3t}-\dfrac{3}{2}e^t+2te^{2t}$, $y=-C_1e^{2t}-C_2e^{3t}+\dfrac{1}{2}e^t-(t+1)e^{2t}$; 3) $x=C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-\cos t+3\sin t$, $y=-C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+2\cos t-\sin t$; 4) $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-(12t+13)e^t$, $y=C_1e^{2t}-2C_2e^{3t}-(8t+6)e^t$. **25.11.** 1) $x=-C_1t+C_2-2e^{-t}-\cos t-\sin t$, $y=C_1-2e^{-t}+\cos t$; 2) $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\dfrac{t^2}{2}$, $y=-C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t}+t^2+t$; 3) $x=C_1e^t+C_2\sin t+C_3\cos t$, $y=-C_1e^t+C_2\cos t-C_3\sin t+t$, $z=C_2\sin t+C_3\cos t+1$; 4) $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $y=C_1e^t+3C_3e^{3t}+t$, $z=C_2e^{2t}-C_3e^{3t}$. **25.12.** 1) $x=e^{-t}-e^{2t}-2\sin t-\cos t$, $y=-e^{-t}-2e^{2t}+\sin t+\cos t$; 2) $x=e^{2t}(\cos t-\sin t)+\left(\dfrac{5}{4}+3t\right)e^{-t}+1$, $y=-e^{2t}(\sin t+\cos t)+\left(\dfrac{3}{4}+t\right)e^{-t}+1$; 3) $x=-t$, $y=0$; 4) $x=e^t$, $y=e^t$. **25.13.** 1) $x=-\sin t+\cos t+t$, $y=\cos t+\sin t+t^2-2$; 2) $x=(1-t)\cos t-\sin t$, $y=(t-2)\cos t+t\sin t$; 3) $x=e^{-t}-4e^{2t}+3e^{-2t}$, $y=e^{-t}-e^{2t}+4e^{-2t}$. 4) $x=e^{-t}$, $y=e^{-t}$, $z=1$. **25.14.** $y_1=\dfrac{C_1x^2-C_2}{2x}$, $y_2=-\dfrac{C_1x^2+C_2}{2x}$. მითითებულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს ჰიპერბოლები $y_1=\dfrac{3-x^2}{2x}$, $y=\dfrac{3+x^2}{2x}$. **25.15.** $y=e^{2x}$. **25.16.** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+(l_1-l_0)\left(1-\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right)\right], \\ y=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+l_0+l_1+(l_1-l_0)\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right]. \end{cases}$

25.17. $x=a\cos\dfrac{k}{\sqrt{m}}t$, $y=\dfrac{v_0\sqrt{m}}{k}\sin\dfrac{k}{\sqrt{m}}t$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$. **25.18.**

$x = \frac{v_0 m \cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, $y = \frac{m}{k^2}(k v_0 \sin\alpha + mg)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mgt}{k}$. **25.19.** $x = \frac{eE}{2m}t^2 + v_0 t\cos\varphi$, $y = v_0 t \sin\varphi$, სადაც e—ელექტრონის მუხტია. **25.20.** $x = \frac{m_0}{4}(1 - 2^{-t})$, $y = \frac{3m_0}{4}(1 - 2^{-t})$.

25.21. p_1 და p_2 განისაზღვრებიან სისტემიდან $\begin{cases} v_1 p_1 + v_2 p_2 = C_1, \\ \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = C_2 e^{2kt}, \end{cases}$

სადაც $C_1 = p_1 v_1 + p_2 v_2$, $C_2 = \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}$.

§ 26

26.1. 1) არამდგრადია; 2 მდგრადია; 3) არამდგრადია; 4) ასიმპტოტურად მდგრადია, თუ $\alpha < -\frac{1}{2}$, მდგრადია, თუ $\alpha = -\frac{1}{2}$ და არამდგრადია, თუ $\alpha > -\frac{1}{2}$. **26.2.** მდგრადია. **26.3.** 1) არამდგრადია; 2) მდგრადია; 3) მდგრადია; 4) არამდგრადია. **26.4.** მდგრადია. **26.5.** 1) არამდგრადია; 2) მდგრადია; 3) მდგრადია; 4) მდგრადია. **26.6.** 1) მდგრადია; 2) არამდგრადია; 3) მდგრადია; 4) არამდგრადია. **26.7.** 1) მდგრადია; 2) არამდგრადია, 3) მდგრადია; 4) მდგრადია.

ლათინური ანბანი

A, *a* — ა
B, *b* — ბე
C, *c* — ცე
D, *d* — დე
E, *e* — ე
F, *f* — ეფ
G, *g* — ჟე
H, *h* — ჰაშ
I, *i* — ი
J, *j* — ჟი
K, *k* — კა
L, *l* — ელ
M, *m* — ემ
N, *n* — ენ
O, *o* — ო
P, *p* — პე
Q, *q* — ქუ
R, *r* — ერ
S, *s* — ეს
T, *t* — ტე
U, *u* — უ
V, *v* — ვე
W, *w* — დუბლ-ვე
X, *x* — იქს
Y, *y* — იგრეკ
Z, *z* — ზეტ

ბერძნული ანბანი

Α, α — ალფა
Β, β — ბეტა
Γ, γ — გამა
Δ, δ — დელტა
Ε, ε — ეფსილონ
Ζ, ζ — ძეტა
Η, η — ეტა
Θ, ϑ — თეტა
Ι, ι — იოტა
Κ, ϰ — კაპა
Λ, λ — ლამბდა
Μ, μ — მიუ
Ν, ν — ნიუ
Ξ, ξ — ქსი
Ο, ο — ომიკრონი
Π, π — პი
Ρ, ρ — რო
Σ, σ — სიგმა
Τ, τ — ტაუ
Φ, φ — ფი
Χ, χ — ხი
Υ, υ — იფსილონ
Ψ, ψ — ფსი
Ω, ω — ომეგა

ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, მ. გაბიძაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი

ლიტერატურა

1. Бараненко Г. С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. Под редакцией Б. П. Демидовича. М., «Наука», 1978. 479 стр.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., «Наука», 1977. 416 стр.
3. ა. ბუაძე და სხვ. მათემატიკა ინჟინრებისათვის, II ნაწილი. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1984. — 501 გვ.
4. Болгов В. А. и др. Сборник задач по математике для ВТУЗ-ов, Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М., «Наука», 1986. 462 стр.
5. Болгов В. А. и др. Сборник задач по математике для ВТУЗ-ов, Специальные разделы математического анализа. Под редакцией А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М., «Наука», 1981. 368 с.
6. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Наука», 1988. 431 стр.
7. Бугров Я. С. Никольский С. М., Дифференциальные уравнения, кратные интегралы, ряды, функции комплесного переменного. М., «Наука», 1989. 464 стр.
8. Гутер Р. С., Янпольский А. Р. Дифференциальные уравнения. М., «Высшая школа», 1976, 304 стр.
9. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., «Наука», 1972. 544 стр.
10. ნ. დურგლიშვილი და სხვ. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწილი 1, თბილისი, განათლება, 1989. — 443 გვ.
11. Ильин В. А., Садовский В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ I. Издательство Московского университета, 1985. 660 стр.
12. Карташев А. П. Рождественский Б. Л. Математический анализ. М., «Наука», 1984. 447 стр.
13. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Высшая школа», 1978. 287 стр.
14. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. I, М., «Высшая школа», 1988. 712 стр.
15. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. II, М., «Высшая школа», 1988. 576 стр.
16. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу (интегралы, ряды). М., «Наука», 1986. 527 стр.
17. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (ТР). М., «Высшая школа», 1983. 174 стр.
18. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Справочное пособие по математическому анализу, Часть первая. Киев «Вища школа», 1978. 696 стр.
19. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. I, М., «Наука», 1978, 456 стр.
20. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. II, М., «Наука», 1985. 560 стр.

21. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа М., «Наука», 1988. 816 стр.
22. Толстов Г. П. Элементы математического анализа, т. I, М., «Наука», 1974. 520 стр.
23. Толстов Г. П. Элементы математического анализа, т. II, М., «Наука», 1974. 471 стр.
24. ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზბეგაშვილი, ვ. ხოჭოლავა. გამოთვლითი მათემატიკა. თბილისი, სპი-ს გამომცემლობა. 1985. — 144 გვ.
25. ს. თოფურია, ი. ჩახტაური. კომპლექსური რიცხვები და ნამდვილცვლადის კომპლექსური ფუნქციები. თბილისი. სპი-ს გამომცემლობა, 1979.—80 გვ.
26. ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზბეგაშვილი, ვ. ხოჭლავა, ზ. მეტრეველი. მათემატიკა, ნაწილი I (ალგებრა და ანალიზის საწყისები). თბილისი, განათლება, 1987. — 567 გვ.
27. Уваров И. М., Меллер М. З. Курс математического анализа, т. II, М., «Просвещения», 1976, 470 стр.
28. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., издательство физико-математической литературы. 1961. 100 стр.
29. Шестаков А. А., Малышева И. А., Полозков Д. П. Курс высшей математики. М., «Высшая школа», 1987. 320 стр.
30. Шипачев В. С. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1985. 471 стр
31. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики, т. I, М., «Высшая школа», 1978. 383 стр.
32. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики, т. II, М., «Высшая школа», 1978. 328 стр.
33. ვლ. ჭელიძე, ე. წითთლანაძე. მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტომი I, თბილისის უნიეერსიტეტის გამომცემლობა. 1989. — 637 გვ.
34. ვლ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე. მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტომი II, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. 1975. — 677 გვ.
35. ვლ. ჭელიძე, ნ. ლომჯარია, გ. ხახუბია. უმაღლესი მათემატიკის კურსი. ტომი II, თბილისი, ცოდნა, 1964. — 418 გვ.
36. ვლ. ჭელიძე, ნ. ლომჯარია, გ. ხახუბია. უმაღლესი მათემატიკის კურსი. ტომი III, თბილისი, განათლება, 1973. — 480 გვ.

სარჩევი

II თავი. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

III თავი. განსაზღვრული ინტეგრალი

IV თავი. განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენება

V თავი. ფუნქციათა ინტერპოლირება და განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

ამოცანათა კრებული

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება

დიფერენციალური განტოლებები

**Топурия Сергей Багратович,
Хочолава Владимир Владимирович,
Габидзашвили Мераб Ахметович,
Мачарашвили Нодар Давидович**

- **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**
- **ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**
- **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

(На грузинском языке)

რედაქტორი რ. დანელია
სამხატვრო რედაქტორი გ. ზაკალაშვილი
ტექნიკური რედაქტორი ზ. მახარაშვილი
უფროსი კორექტორი ნ. დოლბაძე
კორექტორი ი. მანჯავიძე
გამომშვები ლ. დავითური

ასოთამწყობი მ. მამულაშვილი
ლინოტიპისტი ნ. ნებიერიძე

სბ № 4503 учебное издание

გადაეცა ასაწყობად 12.10.90. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 15.05.91. საბეჭდი ქაღალდი № 2, ქაღალდის ზომა 60×90 1/16, გარნიტურა ვენა, ბეჭდვა მაღალი, ნაბეჭდი თაბახი 43,5. საღებავგატარება 43,75. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 37,91.
შეკვ. № 799. ტირაჟი 10.000

ფასი 7 მან. 80 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, გ. ჩუბინაშვილის ქ. № 50.

Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Г. Чубинашвили № 50.

1991

საქართველოს რესპუბლიკის ბეჭდვითი სიტყვის დეპარტამენტის თბილისის ი. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, გრ. რობაქიძის გამზირი № 7.

Тбилисская книжная фабрика им. И. Чавчавадзе департамента по печати Республики Грузия, пр. Гр. Робакидзе № 7.