მალხაზ მუმლაძე

დისკრეტული მათემატიკა

გამომცემლობა „უნივერსალი"
თბილისი 2011

წიგნი „დისკრეტული მათემატიკა", პირველ რიგში, განკუთვნილია ინფორმაციული ტექნოლოგიების სპეციალობის ბაკალაერიატის სტუდენტთათვის. წიგნი ასევე შეიძლება გამოიყენონ ტექნიკური და ბიზნესის მიმართულების სპეციალობების ბაკალაერიატის სტუდენტებმაც.

რედაქტორი: ზურაბ ზერაკიძე
კორექტორი: მაია მელიქიშვილი

გამომცემლობა „უნივერსალი", 2011

თბილისი, 0179, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 19, ☎: 2 22 36 09, 5(99) 17 22 30
E-mail: universal@internet.ge

ISBN 978-9941-17-470-4

წინასიტყვობა

ტერმინი „დისკრეტული მათემატიკა " წარმოადგენს მათემატიკის იმ დისციპლინების კრებით სახელს, რომელიც შეისწავლის მათემატიკურ სტრუქტურებს მათემატიკის ისეთ ფუნდამენტურ ცნებების გამოყენების გარეშე, როგორებიცაა: მიდამო, ზღვარი.

წიგნი შედგება ორი ნაწილისაგან, 10 თავისაგან. პირველ ნაწილში შედის 5 თავი მეორე ნაწილში-ასევე 5 თავი. წიგნის ნაწილებად ასეთი დაყოფა განპირობებულია როგორც შინაარსიდან გამომდინარე, ასევე ტექნიკური მიზეზებითაც.

პირველი თავი ეხება სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს, აქვე განიხილება მიმართებანი სიმრავლეებზე, სიმრავლეთა ასახვები. მეორე თავში შედის ზოგადი ალგებრის ელემენტები, აქ განიხილება სხვადასხვა ალგებრული სტრუქტურები, მრავალწევრთა თეორიის ელემენტები. მესამე თავი შედგება წრფივი ალგებრის საკითხებისაგან. მეოთხე თავში განიხილება დალაგებული ალგებრული სტრუქტურები და რიცხვთა თეორიის ელემენტები. მეხუთე თავი შეიცავს კომბინატორიკის ელემენტებს. განიხილება ცნობილი კომბინატორული ამოცანები. მეექვსე თავი შეიცავს მათემატიკური ლოგიკის ელემენტებს, აქვე განიხილება აქსიომატიკურ თეორიათა არსი, დამტკიცების თეორიის ელემენტები. მეშვიდე თავი შეიცავს ალგორითმების თეორიის ელემენტებს, განიხილება ალგორითმის ცნების დაზუსტების საკითხები: რეკურსიული ფუნქციები, ტიურინგის მანქანები, მარკოვის ნორმალური ალგორითმები. მერვე თავში განიხილება გრაფთა თეორიის ელემენტები. მეცხრე თავი მოიცავს წრფივი პროგრამირების ელემენტებს. მეათე თავი ეხება თამაშთა თეორიის ელემენტებს, განიხილება თამაშები პოზიციური და ნორმალური ფორმით, ანტაგონისტური თამაშები, თამაშის ამოხსნის კონცეფციები, თამაშის დაყვანა წრფივი პროგრამირების ამოცანამდე.

წიგნში გამოყენებული არ არის რთული მათემატიკური აპარატი, ზოგიერთი თეორემა მოყვანილია დაუმტკიცებლად, განხილულია ბევრი მაგალითი, პარაგრაფების ბოლოს მოცემულია სავარჯიშოები.

ნაწილი პირველი

თავი I

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

§1.სიმრავლის ცნება, ქვესიმრავლე

სიმრავლეთა თეორია ყველა მათემატიკური დისციპლინის საფუძველს წარმოადგენს. სიმრავლეთა თანამედროვე თეორია აგებულია რთულ აქსიომატიკურ საფუძველზე. ჩვენ წინამდებარე კურსში არ განვიხილავთ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომათა სისტემას, რომლის საფუძველზედაც განისაზღვრება სიმრავლის ცნება. იმ ამოცანების გადასაწყვეტად, რასაც კურსი ისახავს მიზნად, სრულიად საკმარისია სიმრავლის ის მარტივი განსაზღვრება, რომელიც ეკუთვნის გერმანელ მათემატიკოს გეორგ კანტორს:

ობიექტთა ერთობლიობას ***სიმრავლე*** ეწოდება.

სიმრავლის შემადგენელ ობიექტებს სიმრავლის ელემენტები ეწოდებათ. ხშირად სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით: $A,B,C,...$, მის ელემენტებს პატარა ლათინური ასოებით: $a,b,c,...$. ის ფაქტი, რომ a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს, ჩაიწერება ასე: $a\in A$. ხოლო ის ფაქტი, რომ a ელემენტი არ ეკუთვნის A სიმრავლეს ჩაიწერება ასე: $a\notin A$. ხშირად სიმრავლე მოიცემა მისი ელემენტების ჩამოთვლით და ფიგურული ფრჩხილების გამოყენებით: $\{a,b,c,...\}$.

სიმრავლეს, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს, ***ცარიელ სიმრავლეს*** უწოდებენ. ცარიელი სიმრავლე აღვნიშნოთ Θ სიმბოლოთი.

B სიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის ***ქვესიმრავლე***, თუ B სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი A სიმრავლის ელემენტიცაა.

ის ფაქტი, რომ B სიმრავლე წარმოადგენს A სიმრავლის ქვესიმრავლეს ჩაიწერება ასე: $B\subset A$. ხოლო ის ფაქტი, რომ B სიმრავლე არ წარმოადგენს A სიმრავლის ქვესიმრავლეს ჩაიწერება ასე: $B\not\subset A$. ცხადია, ცარიელი სიმრავლე ყველა სიმრავლის ქვესიმრავლეა. ასევე, ნებისმიერი სიმრავლე წარმოადგენს თავისი თავის ქვესიმრავლეს. რაიმე A სიმრავლის ქვესიმრავლეებიდან თვითონ A სიმრავლეს და ცარიელ სიმრავლეს ***არასაკუთრივი ქვესიმრავლეები*** ეწოდება, ხოლო ყველა დანარჩენ ქვესიმრავლეს-***საკუთრივი ქვესიმრავლეები***.

A სიმრაელის ქვესიმრაელეთა სიმრაელე აღვნიშნოთ ასე: $M(A)$.

სიმრაელეებზე განისაზღვრება სხვადასხვა ოპერაციები, განვსაზღვროთ რამდენიმე მათგანი:

ორი A და B სიმრავლის ***გაერთიანება*** ეწოდება ისეთ სიმრაელეს, რომლის ელემენტებიც ან A სიმრავლეს ეკუთვნის, ან B სიმრავლეს.

A და B სიმრავლის გაერთიანება აღინიშნება ასე: $A\cup B$.

ორი A და B სიმრავლის ***თანაკვეთა*** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომლის ელემენტებიც ეკუთვნიან A სიმრავლესაც და B სიმრავლესაც ერთდროულად.

A და B სიმრაელის თანაკვეთა აღინიშნება ასე: $A\cap B$.

A ***სიმრავლის დამატება*** B სიმრავლეში ეწოდება B სიმრაელის იმ ელემენტებისაგან შედგენილ ქვესიმრაელეს, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრაელეს.

A სიმრავლის დამატება B სიმრავლეში აღინიშნება ასე: $B\setminus A$.

მაგალითები. ვთქვათ $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e\}$, მაშინ:

$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$, $A \cap B = \{c,d\}$, $A\setminus B=\{a,b\}$, $B\setminus A=\{e\}$.

ცხადია, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$A\cup A=A, A\cup\Theta=A, A\cap A=A, A\cap\Theta=\Theta, A\setminus A=\Theta, A\setminus\Theta=A, \Theta\setminus A=\Theta.$

ცხადია ასევე:

$A\cup B=B\cup A; A\cap B=B\cap A; (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C); (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$

თეორემა 1.1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (1).
დამტკიცება: ვთქვათ, $x\in A\cup(B\cap C)$, მაშინ $x\in A$ ან $x\in B\cap C$. თუ $x\in A$, მაშინ $x\in A\cup B$ და $x\in A\cup C$; აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. მაშასადამე, $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$. ვთქვთ, ახლა $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, მაშინ $x\in A\cup B$ და $x\in A\cup C$. თუ $x\in A$, მაშინ $x\in A\cup(B\cap C)$, თუ$x\notin A$, მაშინ $x\in B\cap C$ და ეს ნიშნავს, რომ $x\in A\cup(B\cap C)$. მაშასადამე, $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$. რადგან ასევე გვაქვს: $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$, ამიტომ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ტოლობაც დამტკიცდება ანალოგიურად.
თეორემა 1.2. თუ B და C რაიმე A სიმრავლის ქვესიმრაველეებია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C), A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C) \quad (2).$$

დამტკიცება: ვთქვათ $x\in A\setminus(B\cap C)$, მაშინ $x\in A$ და $x\notin B\cap C$, ანუ$x\in A$, $x\in B, x\notin C$ ან $x\in C, x\notin B$. აქედან გამომდინარე $x\in A\setminus B$ ან$x\in A\setminus C$, მაშასადამე, $x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$. ამგვარად, მივიღეთ, რომ $A\setminus(B\cap C)\subset(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$. ვთქვათ, ახლა $x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$, მაშინ $x\in A\setminus B$ ან $x\in A\setminus C$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $x\in A, x\notin B$ ან $x\in A, x\notin C$, ეს კი ნიშნავს, რომ $x\in A, x\notin B\cap C$. მასასადამე $x\in A\setminus(B\cap C)$ და $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\subset A\setminus(B\cap C)$. რადგან ასევე გვაქვს, რომ $A\setminus(B\cap C)\subset(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$, ამიტომ $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ ტოლობაც დამტკიცდება ანალოგიურად.
(2) ფორმულებს ***დე მორგანის*** ფორმულებს უწოდებენ.
შეიძლება განესაზღვროთ სიმრაველეთა გაერთიანების ოპერაცია სიმრაველეთა ნებისმიერი$\{A_i\}_{i\in I}$ ერთობლიობისთვის. სიმრაველეთა ერთობლიობის $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ გაერთიანება შედგება ისეთი ელემენტებისაგან, რომლებიც ამ ერთობლობის ერთ რომელიმე A_i სიმრავლეს მაინც ეკუთვნიან.
ასევე შეიძლება განესაზღვროთ სიმრაველეთა თანაკვეთის ოპერაცია სიმრაველეთა ნებისმიერი $\{A_i\}_{i\in I}$ ერთობლიობისთვის. სიმრაველეთა ერთობლიობის $\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ თანაკვეთა შედგება ისეთი ელემენტებისაგან, რომლებიც ერთობლობის თითოეულ $A_i, i\in I$ სიმრავლეს ეკუთვნიან.
ადვილია იმის ჩვენება, რომ რაიმე B სიმრავლის ქვესიმრაველეთა ნებისმიერი $\{A_i\}_{i\in I}$ ერთობლიობისთვის ადგილი ექნება დე მორგანის ფორმულების განზოგადებას: $B\setminus\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\bigcap\limits_{i\in I}(B\setminus A_i)$, $B\setminus\bigcap\limits_{i\in I}A_i=\bigcup\limits_{i\in I}(B\setminus A_i)$. (3).

სავარჯიშოები:
1. ყოველი A და B სიმრაველისთვის:
ა) $x\notin A\cap B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x\notin A$ ან $x\notin B$.
ბ) $x\notin A\cup B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x\notin A$ და $x\notin B$.
გ) $x\notin A\setminus B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x\notin A$ ან $x\in B$.
დ) $A\setminus B=A$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $A\cap B=\Theta$.
ე) $A\subset B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $A\cup B=B$
ვ) $A\subset B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $A\cap B=A$.
ზ) $A\cap B=A\cup B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $A=B$
2. ა) $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$, ბ) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$, გ) $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$, დ) $A\cap B=(A\cup B)\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus A))$.

§2. ორადგილიანი(ბინარული) მიმართებანი

ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლე $\{a,b\}$. განვიხილოთ სიმრავლეები: $\{a,\{a,b\}\},\{b,\{a,b\}\}$. ამ სიმრავლეებიდან პირველს უწოდებენ $\{a,b\}$ სიმრაელის შესაბამის ***დალაგებულ წყვილს***, რომლის პირველი კომპონენტია a ელემენტი, მეორე კომპონენტი-b ელემენტი, იგი აღინიშნება ასე: (a,b); ხოლო მეორე სიმრაელეს უწოდებენ $\{a,b\}$ სიმრავლის შესაბამის დალაგებულ წყვილს, რომლის პირველი კომპონენტია b ელემენტი, მეორე კომპონენტი-a ელემენტი. იგი აღინიშნება ასე: (b,a).

თუ $a=b$, მაშინ $\{a,b\}$ სიმრაელეს შეესაბამება ერთი დალაგებული წყვილი: $\{a,\{a,b\}\}=\{b,\{a,b\}\}$. მისი პირველი და მეორე კომპონენტები ერთი და იგივეა. იგი აღინიშნება ასე: (a,a).

ორი A და B სიმრავლის ***დეკარტის ნამრავლი*** ეწოდება დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეს: $\{(a,b)\,|\,a\in A, b\in B\}$. A და B სიმრავლის დეკარტის ნამრაელი აღინიშნება ასე: $A\times B$.

მაგალითი: ვთქვათ, $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e\}$, მაშინ

$$A\times B=\{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,c),(c,d),(c,e),(d,c),(d,d),(d,e)\}.$$

ორი სიმრავლის დეკარტის ნამრაელის განსაზღვრებიდან პირდაპირ გამომდინარეობს ტოლობები:

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(A\times C),(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C),(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C).$$

A და B სიმრავლეებზე განსაზღვრული ***ორადგილიანი(ბინარული) მიმართება*** ეწოდება $A\times B$ დეკარტის ნამრავლის ნებისმიერ ქვესიმრაელეს.

ვთქვათ, $\rho\subset A\times B$ რაიმე ბინარული მიმართებაა. თუ $(a,b)\in\rho$, მაშინ ამბობენ, რომ ელემენტი $a\in A$ იმყოფება $b\in B$ ელემენტთან ρ მიმართებაში და წერენ: $a\rho b$.

ვთქვათ, $\rho\subset A\times B$ წარმოადგენს მიმართებას A და B სიმრავლეებზე. $\{(b,a)\,|\,(a,b)\in\rho\}\subset B\times A$ სიმრაელეს უწოდებენ ρ ***მიმართების შებრუნებულ*** მიმართებას და აღნიშნავენ ასე: ρ^{-1}

მაგალითი: ვთქვათ, $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e\}$, $\rho=\{(a,c),(a,d),(b,d),(c,e)\}\subset A\times B$, მაშინ $\rho^{-1}=\{(c,a),(d,a),(d,b),(e,c)\}$.

თუ $\rho\subset A\times B,\sigma\subset A\times B$, მაშინ შებრუნებული მიმართების განსაზღვრიდან პირდაპირ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობები:

$$(\rho\cup\sigma)^{-1}=\rho^{-1}\cup\sigma^{-1},(\rho\cap\sigma)^{-1}=\rho^{-1}\cap\sigma^{-1},(\rho\setminus\sigma)^{-1}=\rho^{-1}\setminus\sigma^{-1}.$$

ვთქვათ, $\rho\subset A\times A$, და $B\subset A$ ვიტყვით, მიმართება $\rho_B\in B\times B$ B ქვესიმრავლეზე ***ინდუცირებულია*** ρ მიმართებით, თუ $a,b\in B$ ელემენტებისთვის $(a,b)\in\rho_B$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(a,b)\in\rho$.

ასახვას A სიმრავლიდან B სიმრავლეში უწოდებენ $f\subset A\times B$ მიმართებას, თუ ყოველი $x\in A$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ერთადერთი $y\in B$ ელემენტი, რომ $(x,y)\in f$. y ელემენტს უწოდებენ x ელემენტის სახეს f ასახვის დროს და მას $f(x)$-ით აღნიშნავენ, ხოლო $f\subset A\times B$-ის მაგივრად წერენ: $f:A\to B$. A სიმრაელეს უწოდებენ f ასახვის განსაზღვრის არეს, B სიმრაელეს კი -f ასახვის მნიშვნელობათა არეს. თუ $A'\subset A$, მაშინ სიმრაელეს $f(A')=\{y\in B\,|\,f^{-1}(y)\in A'\}$ უწოდებენ A' სიმრავლის სახეს f ასახვის დროს. თუ $B'\subset B$, მაშინ სიმრაელეს $f^{-1}(B')=\{x\in A\,|\,f(x)\in B'\}$ უწოდებენ B' სიმრაელის წინასახეს f ასახვის დროს.

$f(A)\subset B$ სიმრაელეს უწოდებენ f ასახვის სახეს და აღნიშნავენ ასე: imf

ასახვას, რომლის მნიშვნელობათა არეც რიცხვითი სიმრავლეა, ***ფუნქციას*** უწოდებენ.

მაგალითები: $\varphi=\{(x,y)\mid y=x^2\}\subset R\times R$ ასახვაა; $\varphi=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\subset[-1,1]\times[0,1]$ ასახვაა; $\varphi=\{(x,y)\mid y-x=3\}\subset N\times N$ ასახვაა; $\varphi=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\subset R\times R$ ასახვა არაა; $\varphi=\{(x,y)\mid x-y=3\}\subset N\times N$ ასახვა არაა.

თუ $f:A\to B$ რაიმე ასახვაა და $imf=B$, მაშინ ასეთ ასახვას ***სიურექციას*** უწოდებენ.

თუ $f:A\to B$ რაიმე ასახვაა, $y\in imf$ და $f^{-1}(y)=\{x\}\in A$, მაშინ ასეთ ასახვას ***ინექციას*** უწოდებენ.

ცხადია, თუ $f:A\to B$ ინექციაა და $x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$, მაშინ $f(x_1)\neq f(x_2)$.

სახვას, რომელიც ერთდროულად ინექციაც არის და სიურექციაც, ***ბიექციას(ურთიერთცალსახა ასახვას)*** უწოდებენ.

მტკიცდება შემდეგი თეორემა, რომელსაც კანტორის თეორემა ეწოდება.

თეორემა 2.1. (კანტორის თეორემა): თუ არსებობს ინექცია $f:A\to B$ და ინექცია $g:B\to A$, მაშინ არსებობს ბიექცია $H:A\to B$.

მაგალითები: ასახვა $\varphi=\{(x,y)\mid y=x^2\}\subset R\times R$ არც ინექციაა, არც სიურექციაა; ასახვა $\varphi=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\subset[-1,1]\times[0,1]$ სიურექციაა, მაგრამ ინექცია არ არის; ასახვა $\varphi=\{(x,y)\mid y-x=3\}\subset N\times N$ ინექციაა, მაგრამ სიურექცია არ არის; ასახვა $\varphi=\{(x,y)\mid x-y=3\}\subset R\times R$ ბიექციაა.

თეორემა 2.2. თუ $f:A\to B$ რაიმე ასახვაა და $C,D\in A, E,F\subset B$, მაშინ ასხვის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

1. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$, 2. $f^{-1}(E\cup F)=f^{-1}(E)\cup f^{-1}(F)$, 3. $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$, 4. $f^{-1}(E\cap F)=f^{-1}(E)\cap f^{-1}(F)$, 5. $f^{-1}(E\setminus F)=f^{-1}(E)\setminus f^{-1}(F)$.

დამტკიცება: 1. ვთქვათ $y\in f(A\cup B)$, მაშინ $f^{-1}(y)\cap(A\cup B)=(f^{-1}(y)\cap A)\cup(f^{-1}(y)\cap B)\neq\Theta$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $y\in f(A)\cup f(B)$. ვთქვათ, ახლა $y\in f(A)\cup f(B)$, მაშინ $(f^{-1}(y)\cap A)\cup(f^{-1}(y)\cap B)=f^{-1}(y)\cap(A\cup B)\neq\Theta$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $y\in f(A\cup B)$. მაშასადამე, $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

2. ვთქვათ, $y\in f(A\cap B)$, მაშინ $f^{-1}(y)\cap(A\cap B)\neq\Theta$, ანუ $f^{-1}(y)\cap A\neq\Theta, f^{-1}(y)\cap B\neq\Theta$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $y\in f(A)\cap f(B)$. ვთქვათ, ახლა $y\in f(A)\cap f(B)$, მაშინ $f^{-1}(y)\cap A\neq\Theta, f^{-1}(y)\cap B\neq\Theta$, ანუ $f^{-1}(y)\cap(A\cap B)\neq\Theta$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $y\in f(A\cap B)$. მაშასადამე, $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

დანარჩენი სამი ტოლობის დამტკიცება ელემენტარულია.

$f:A\to B$, $g:B\to C$ ***ასახვათა კომპოზიცია*** ეწოდება $h:A\to C$ ასახვას, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით: $h(x)=g(f(x)), x\in A$.

$f:A\to B$, $g:B\to C$ ასახვების კომპოზიცია აღინიშნება ასე: $g\circ f$.

ეს განსაზღვრება კორექტულია, ვინაიდან $\{(x,g(f(x)), x\in A\}\subset A\times B$ და $f(x)\in B, x\in A$ ელემენტისათვის არსებობს ერთადერთი ისეთი $g(f(x))$ ელემენტი, რომ $(f(x),g(f(x))\in B\times C$.

მაგალითი: ორი $f:A\to B$, $g:B\to C$ ასახვისათვის, რომლებიც განისაზღვრებიან ფორმულებით $f(x)=\frac{1}{1+x^2}, g(x)=1-x$, გვექნება:

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{1+(1-x)^2}=\frac{1}{2-2x+x^2},(g\circ f)(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$$

ცხადია, სიურექციათა კომპოზიცია სიურექციაა, ინექციათა კომპოზიცია-ინექცია, ბიექციათა კომპოზიცია- ბიექცია.

$f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$ ასახვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$, მართლაც:

$$h\circ(g\circ f)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)\circ f.$$

ასახვას $Id_A:A\to A$, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით: $Id_A(x)=x, x\in A$, იგივურ ასახვას უწოდებენ. $f:A\to B$ ასახვისათვის $f\circ Id_A=f, Id_B\circ f=f$. ცხადია, იგივური ასახვა ბიექციას წარმოადგენს.

$f^{-1}:B\to A$ ასახვას ეწოდება $f:A\to B$ ასახვის შებრუნებული ასახვა, თუ სრულდება შემდეგი პირობები: $f^{-1}\circ f=Id_A, f\circ f^{-1}=Id_B$.

ცხადია, იმისათვის, რომ ასახვას გააჩნდეს შებრუნებული, იგი უნდა იყოს ბიექცია. აქედან გამომდინარე, ასახვას მხოლოდ ერთი შებრუნებული შეიძლება გააჩნდეს.

ვთქვათ A რაიმე სიმრავლეა. განვიხილოთ $\rho\subset A\times A$ სახის ბინარული მიმართებანი. ასეთ მიმართებებს უწოდებენ მიმართებებს A სიმრავლეზე.

$\rho\subset A\times A$ მიმართებას A სიმრავლეზე უწოდებენ ***რეფლექსურს,*** თუ ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისათვის $(a,a)\in\rho$.

$\rho\subset A\times A$ მიმართებას A სიმრავლეზე უწოდებენ ***ანტირეფლექსურს,*** თუ ერთი მაინც $a\in A$ ელემენტისათვის $(a,a)\notin\rho$.

$\rho\subset A\times A$ მიმართებას A სიმრავლეზე უწოდებენ ***სიმეტრიულს,*** თუ $(a,b)\in\rho$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $(b,a)\in\rho$.

$\rho\subset A\times A$ მიმართებას A სიმრავლეზე უწოდებენ ***ანტისიმეტრიულს,*** თუ $(a,b)\in\rho$, $(b,a)\in\rho$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $a=b$

$\rho\subset A\times A$ მიმართებას A სიმრავლეზე უწოდებენ ***ტრანზიტულს,*** თუ $(a,b)\in\rho$, $(b,c)\in\rho$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $(a,c)\in\rho$.

სავარჯიშოები:

1. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სიმრავლეზე განსაზღვრული ორი რეფლექსური მიმართების გაერთიანება და თანაკვეთა ასევე რეფლექსურია.
2. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სიმრავლეზე განსაზღვრული ორი სიმეტრიული მიმართების გაერთიანება და თანაკვეთა ასევე სიმეტრიულია.
3. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სიმრავლეზე განსაზღვრული ორი ანტირეფლექსური მიმართების გაერთიანება და თანაკვეთა ასევე ანტირეფლექსურია.
4. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ρ მიმართებისათვის $\rho\cup\rho^{-1}$ და $\rho\cap\rho^{-1}$ სიმეტრიული მიმართებებია.
5. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სიმრავლეზე განსაზღვრული ორი ანტისიმეტრიული მიმართების გაერთიანება შეიძლება არ იყოს ანტისიმეტრიული, მაგრამ თანაკვეთა კი ყოველთვის სიმეტრიულია.
6. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სიმრავლეზე განსაზღვრული ორი ტრანზიტული მიმართების გაერთიანება შეიძლება არ იყოს ტრანზიტული, მაგრამ თანაკვეთა კი ყოველთვის ტრანზიტულია.

§3. ეკვივალენტობის მიმართება

$I \subset A \times A$ რეფლექსურ, სიმეტრიულ და ტრანზიტულ მიმართებას, A სიმრავლეზე ***ეკვივალენტობის მიმართებას*** უწოდებენ.

თუ $(a,b) \in I$, მაშინ წერენ $a = b$ და ამბობენ: a ელემენტი ეკვივალენტურია b ელემენტის.

მაგალითი: ეკვივალენტობის მიმართებაა სკოლის მოსწავლეთა A სიმრავლეზე განსაზღვრული $I \subset A \times A$ მიმართება, რომელიც შედგება ერთ კლასში მყოფი წყვილებისაგან. მართლაც, ყოველი $a \in A$ მოსწავლისათვის $(a,a) \in I$; თუ $a \in A$ მოსწავლე $b \in A$ მოსწავლის კლასშია, ანუ თუ $(a,b) \in I$, მაშინ $b \in A$ მოსწავლე $a \in A$ მოსწავლის კლასშია, ანუ $(b,a) \in I$; თუ $a \in A$
მოსწავლე $b \in A$ მოსწავლის კლასშია, $b \in A$ მოსწავლე $c \in A$ მოსწავლის კლასში, ანუ თუ $(a,b) \in I, (b,c) \in I$, მაშინ $a \in A$
მოსწავლე $b \in A$ მოსწავლის კლასშია, ანუ $(a,c) \in I$.

მაგალითი: განვიხილოთ წილად რიცხვთა სიმრავლე Q და მიმართება $I \subset Q \times Q$, რომელიც შედგება ისეთი $(\frac{p}{q}, \frac{m}{n}) \in I$ წყვილებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $pn = qm$. ვაჩვენოთ, რომ წყვილების ასეთი სიმრავლე წარმოადგენს ეკვივალენტობის მიმართებას. მართლაც, ცხადია, $(\frac{p}{q}, \frac{p}{q}) \in I$; ადგილი აქვს სიმეტრიულობის პირობასაც: თუ $(\frac{p}{q}, \frac{m}{n}) \in I$, მაშინ $(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}) \in I$;

თუ $(\frac{p}{q}, \frac{m}{n}) \in I$ და $(\frac{m}{n}, \frac{e}{f}) \in I$, მაშინ $pn = qm$ და $mf = ne$, აქედან გამომდინარე:

$pnmf = qmne$, ანუ $pf = qe$, ეს კი ნიშნავს, რომ $(\frac{p}{q}, \frac{e}{f}) \in I$, მაშასადამე, ადგილი აქვს ტრანზიტულობის თვისებასაც.

მაგალითი: ეთქვათ $\mathfrak{I}$ ისეთი სიმრავლეა, რომლის ელემენტებსაც ასევე სიმრავლეები წარმოადგენენ. განვიხილოთ მიმართება $I \subset \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$, რომელიც შედგება ისეთი დალაგებული წყვილებისაგან, რომელთა კომპონენტებს შორისაც არსებობს ბიექცია. ეს მიმართებაც იქნება ეკვივალენტობის მიმართება. მართლაც, თუ $A \in \mathfrak{I}$, $(A,A) \in I$, ვინაიდან იგივური ასახვა $Id_A : A \to A$ ბიექციას წარმოადგენს, ეს კი ნიშნავს, რომ სრულდება რეფლექსურობის პირობა;
თუ $(A,B) \in I$, მაშინ არსებობს ბიექცია $f : A \to B$, ამ ბიექციას გააჩნია შებრუნებული $f^{-1} : B \to A$, მაშასადამე, $(B,A) \in I$ და სიმეტრიულობის პირობა სრულდება; თუ $(A,B) \in I$ და $(B,C) \in I$, მაშინ არსებობენ ბიექციები: $f : A \to B, g : B \to C$, ამ ბიექციათა კომპოზიცია $g \circ f : A \to C$ ასევე ბიექციაა, ამიტომ $(A,C) \in I$, მაშასადამე, ადგილი აქვს ტრანზიტულობის პირობასაც.

შენიშვნა: ეს მაგალითი შეიძლება განვაზოგადოთ ისეთ ერთობლიობაზეც, როგორიცაა ყველა სიმრავლის ერთობლიობა, რომელიც სიმრავლეთა თანამედროვე თეორიის გაგებით, სიმრავლეს არ წარმოადგენს. ეკვივალენტობის მიმართებად ჩავთვალოთ სიმრავლეთა დალაგებული წყვილების ის ერთობლიობა, რომელთა კომპონენტებს შორისაც არსებობს ბიექცია.

ყველა სიმრავლეთა ერთობლიობა აღვნიშნოთ Ξ სიმბოლოთი.
თუ ორი სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია, ანუ თუ ამ ორ სიმრავლეს შორის არსებობს ბიექცია, მაშინ სიმრავლეთა თეორია ასეთ სიმრავლეებს არ ასხვავებს, თვლის ერთ და იმავე სიმრავლედ.

სიმრავლეთა ეკვივალენტურობა ცნება საშუალებას გვაძლევს შემოვიტანოთ ***სასრული*** და ***უსასრულო სიმრავლეების*** ცნებები:

სიმრავლეს ეწოდება ***სასრული სიმრავლე***, თუ იგი ეკვივალენტური არ არის არც ერთი თავისი საკუთრივი ქვესიმრავლის. ხოლო სიმრავლეს ეწოდება ***უსასრულო სიმრავლე***, თუ იგი არ წარმოადგენს სასრულ სიმრავლეს.

მაგალითები: სასრული სიმრავლეა სტუდენტთა სიმრავლე აუდიტორიაში, სახლების სიმრავლე ქალაქში, ქვიშის მარცვლების სიმრავლე პლაჟზე, ადამიანთა სიმრავლე დედამიწაზე და სხვა.

უსასრულო სიმრავლეა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე N, ვინაიდან იგი ეკვივალენტურია მისი საკუთრივი ქვესიმრავლის N_2-ის, რომელიც შედგება ლუწი რიცხვებისაგან. ეკვივალენტობა ხორციელდება ბიექციით: $f: N \to N_2$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით $f(n) = 2n$.

უსასრულოა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R, რადგან იგი ეკვივალენტურია $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset R$ ინტერვალის. ეკვივალენტობა ხორციელდება ბიექციით:

$tg: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to R$, $y = tgx$.

უსასრულოა $(0, \frac{\pi}{2})$ ინტერვალში შემავალი ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე, რადგან იგი ეკვივალენტურია $(0,1) \subset (0, \frac{\pi}{2})$ ინტერვალში შემავალი ნამდვილი რიცხვების სიმრავლისა. ეკვივალენტობა ხორციელდება ბიექციით:

$\sin: (0, \frac{\pi}{2}) \to (0,1)$, $y = \sin x$.

ვთქვათ, A სიმრავლეზე განსაზღვრულია ეკვივალენტობის მიმართება: $I \subset A \times A$ და $a \in A$. განვიხილოთ ყველა იმ $b \in A$ ელემენტის სიმრავლე, რომლისთვისაც $(a,b) \in I$, ანუ იმ $b \in A$ ელემენტების სიმრავლე, რომელიც ეკვივალენტურია a ელემენტის. აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე $[a]$ სიმბოლოთი და ვუწოდოთ მას ***a ელემენტის ეკვივალენტობის კლასი***. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ განსხვავებული $a, b \in A, a \neq b$ ელემენტების შესაბამისი ეკვივალენტობის კლასები $[a], [b]$ ან ერთმანეთს ემთხვევიან, ან არ გააჩნიათ საერთო ელემენტები. მართლაც, დავუშვათ, რომ არსებობს $c \in A$ ელემენტი, რომელიც ეკუთვნის $[a]$ კლასსაც და $[b]$ კლასსაც, მაშინ $[a]$ კლასის ნებისმიერი d ელემენტისათვის $(d,c) \in I$ და $[b]$ კლასის ნებისმიერი e ელემენტისათვის $(c,e) \in I$. ეკვივალენტობის მიმართების ტრანზიტულობის თვისების გამო $(d,e) \in I$, მაშასადამე, $[b]$ კლასის ნებისმიერი ელემენტი შედის $[a]$ კლასში და პირიქით. ეს კი ნიშნავს, რომ $[a] = [b]$.

რადგან $[a], [b]$ კლასები ან ერთმანეთს ემთხვევიან, ან არ გააჩნიათ საერთო ელემენტები, ამიტომ $\{[a]\}_{a \in A}$ კლასთა ერთობლიობა(ოჯახი) წარმოადგენს A სიმრავლის დაყოფას არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად. აღვნიშნოთ $\{[a]\}_{a \in A}$ კლასთა ოჯახი A/I სიმბოლოთი და ვუწოდოთ მას A სიმრავლის ***ფაქტორსიმრავლე***, განსაზღვრული I ეკვივალენტობის მიმართებით.

განვიხილოთ ასახვა $\varphi: A \to A/I$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით: $\varphi(a) = [a]$. ამ ასახვას ***კანონიკური ასახვა*** ეწოდება.

ვთქვათ, $f: A \to B$ რაიმე ასხვაა, განვსაზღვროთ ეკვივალენტობის მიმართება A სიმრავლეზე: $(a,b) \in I$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $f(a) = f(b)$. ადვილია

მიხვედრა, რომ ეს მართლაც ეკვივალენტობის მიმართებაა. ამ მიმართებით განსაზღვრული A/I ფაქტორსიმრავლის ელემენტები, ცხადია, წარმოადგენენ B სიმრავლის ელემენტების წინასახეებს.

დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ ეკვივალენტობის მიმართებას სიმრავლეთა მთელ Ξ ერთობლიობაზე.

Ξ ერთობლიობაზე ეკვივალენტობის მიმართებით განსაზღვრულ ფაქტორერთობლიობას Ξ/I ***კარდინალურ რიცხვთა სიმრავლეს*** უწოდებენ, ხოლო მის ელემენტებს- ***კარდინალურ რიცხვებს***.

თუ η რაიმე კარდინალური რიცხვია და $A \in \eta$, მაშინ η კარდინალურ რიცხვს A ***სიმრავლის სიმძლავრე*** ეწოდება.

სასრულ სიმრავლეთა კლასებს ***სასრულ კარდინალურ*** რიცხვებს უწოდებენ. სასრული კარდინალური რიცხვები შეიძლება გავაიგივეოთ იმ ნატურალურ რიცხვთან, რომელიც ტოლია კარდინალური რიცხვის, როგორც ეკვივალენტობის კლასის შემადგენელი თითოეული სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობის.

უსასრულო კარდინალურ რიცხვს წარმოადგენს Ξ/I ერთობლიობის შემადგენელი ის კლასი, რომელიც შეიცავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. ეს კლასი აღინიშნება $\aleph_0$(ალეფ ნული) სიმბოლოთი.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის შესაბამის კლასში შემავალ სიმრავლეებს ***თვლადი სიმრავლეები*** ეწოდებათ.

ცხადია, უსასრულო კარდინალური რიცხვია Ξ/I ერთობლიობის შემადგენელი ის კლასი, რომელიც შეიცავს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. ეს რიცხვი აღინიშნება $\aleph_1$(ალეფ ერთი) სიმბოლოთი.

სიმრავლეთა ერთობლიობაზე განსაზღვრული ეკვივალენტობა საშუალებას გვაძლევს, განვსაზღვროთ ***ორზე მეტი რაოდენობის სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი***. განვიხილოთ სამი სიმრავლე: A,B,C და დეკარტის ნამრავლები: $A\times(B\times C)$, $(A\times B)\times C$. ასახვა $f: A\times(B\times C)\to(A\times B)\times C$, განსაზღვრული ფორმულით: $f((a,(b,c)))=((a,b),c)$, ცხადია ბიექციაა, ამიტომ $A\times(B\times C)$, $(A\times B)\times C$ სიმრავლეები ერთმანეთის ეკვივალენტურია და შეგვიძლია ისინი გავაიგივეოთ. ამ გაიგივების საფუძველზე სამი A,B,C სიმრავლის დეკარტის ნამრავლად შეიძლება ჩავთვალოთ სიმრავლე: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$. აღვნიშნოთ ***სამი A,B,C სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი*** $A\times B\times C$ სიმბოლოთი.

ასევე შეიძლება განისაზღვროს ***ოთხი სიმრავლის დეკარტი ნამრავლი*** : $A\times B\times C\times D=(A\times B\times C)\times D=A\times(B\times C\times D)$, ხუთი სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი და ასე შემდეგ.

$A_1,A_2,\ldots,A_n$ სიმრავლეებზე განსაზღვრული ***n ადგილიანი მიმართება*** ეწოდება $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ დეკარტის ნამრავლის რაიმე $\rho\subset A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ ქვესიმრავლეს.

თუ $n=1$, მაშინ საქმე გვაქვს ერთადგილიან, ანუ ***უნარულ მიმართებასთან***. თუ სიმრავლეზე განსაზღვრულია უნარული მიმართება, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ ამ ქვესიმრავლიდან გამოყოფილია რაიმე ქვესიმრავლე.

თუ $n=2$, მაშინ საქმე გვექნება ორადგილიან ანუ ბინარულ მიმართებასათან.

სამადგილიან მიმართებას ***ტერნარულ მიმართებასაც*** უწოდებენ.

სავარჯიშოები:

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ I ეკვივალენტობის მიმართებაა A სიმრავლეზე, მაშინ I^{-1} ასევე ეკვივალენტობის მიმართებაა ამავე სიმრავლეზე.
2. დაამტკიცეთ, რომ A სიმრავლეზე განსაზღვრულ ეკვივალენტობის მიმართებათა ნებისმიერი ერთობლიობის თანაკვეთა ასევე ეკვივალენტობის მიმართებაა.

§4. დალაგების მიმართება

A სიმრავლეზე განსაზღვრულ რეფლექსურ, ანტისიმეტრიულ, ტრანზიტულ $\Pi \subset A\times A$ მიმართებას ***არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების მიმართება*** ეწოდება.

მაგალითი: ვთქვათ Z მთელ რიცხვთა სიმრავლეა. განვიხილოთ $Z\times Z$ სიმრავლის ისეთი Π ქვესიმრავლე, რომელიც შედგება $(a,a+k)$ სახის დალაგებული წყვილებისაგან, სადაც k ნატურალური რიცხვია ან ნული. ადვილია ჩვენება, რომ $\Pi \subset Z\times Z$ არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების მიმართებაა. მართლაც, $(a,a)=(a,a+0)$ და ამიტომ ადგილი აქვს რეფლექსურობის თვისებას. თუ $(a,b)\in \Pi$ და$(b,a)\in \Pi$, მაშინ $(a,b)=(a,a+k)\in \Pi$ და$(b,a)=(a+k,a)\in \Pi$, ეს კი ნიშნავს, რომ $k=0$ და ადგილი აქვს ანტისიმეტრიულობის თვისებას. თუ $(a,b)\in \Pi$ და $(b,c)\in \Pi$, მაშინ $(a,b)=(a,a+k')$ და $(b,c)=(b,b+k'')=(a+k',a+k'+k'')=(a+k',a+k''')$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $(a,c)=(a,a+k''')$. ცხადია k ან ნატურალური რიცხვია ან ნული, ეს კი ნიშნავს, რომ $(a,c)\in \Pi$. მაშასადამე ადგილი აქვს ტრანზიტულობის თვისებასაც.

მაგალითი: ვთქვათ, A რაიმე სიმრავლეა, $M(A)$ კი A სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. ქვესიმრავლე$\Pi \subset M(A)\times M(A)$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $\Pi=\{(Z_1,Z_2)\mid Z_1,Z_2\in M(A), Z_1\subset Z_2\}$, წარმოადგენს ნაწილობრივი დალაგების მიმართებას. მართლაც, $(Z,Z)\in \Pi$; თუ $Z_1\subset Z_2, Z_2\subset Z_1$, მაშინ $Z_1=Z_2$; თუ $Z_1\subset Z_2, Z_2\subset Z_3$, მაშინ $Z_1\subset Z_3$. მაშასადამე, ადგილი აქვს არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების სამივე თვისებას.

მაგალითი: განვიხილოთ კარდინალურ როცხვთა ერთობლიობა $\Xi/_I$. მიმართება-$\Pi \subset \Xi/_I \times \Xi/_I$, რომელიც შედგება ისეთი წყვილებისაგან$(\eta,\xi),\eta,\xi\in \Xi/_I$, რომ არსებობს ინექცია $A\in\eta$ რაიმე სიმრავლიდან $B\in\xi$ რაიმე სიმრავლეში, წარმოადგენს არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების მიმართებას. მართლაც, რეფლექსურობისა და ტრანზიტულობის თვისებების არსებობა ცხადია. რაც შეეხება ანტისიმეტრიულობის თვისებას, იგი გამომდინარეობს კანტორის თეორემიდან.

როდესაც $(a,b)\in \Pi$, მაშინ წერენ $a\le b$-ს.

განსაზღვრება 4.2. A სიმრავლეზე განსაზღვრულ ანტირეფლექსურ და ტრანზიტულ $C\Pi \subset A\times A$ მიმართებას ***მკაცრი ნაწილობრივი დალაგების მიმართება*** ეწოდება.

თუ $(a,b)\in \Pi$, მაშინ ვწერთ $a\le b$. თუ $(a,b)\in C\Pi$, მაშინ ვწერთ $a<b$-ს.

მაგალითი: თუ ახლა $C\Pi \subset Z\times Z$ ისეთი ქვესიმრავლეა, რომელიც შედგება $(a,a+k)$ სახის დალაგებული წყვილებისაგან, სადაც k ნატურალური რიცხვია, მაშინ ცხადია, $C\Pi$ ქვესიმრავლე მკაცრად დალაგების მიმართებაა. მართლაც, წყვილი$(a,a)\notin C\Pi$, ამიტომ არტირეფლექსურობის პირობა სრულდება. ცხადია სრულდება ტრანზიტულობის პირობაც.

როდესაც $(a,b)\in C\Pi$, მაშინ წერენ $a<b$-ს.

თუ A სიმრაველზე განსაზღვრულია არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების ან მკაცრი ნაწილობრივი დალაგების მიმართება, მაშინ ამ სიმრავლეს ***დალაგებულ სიმრავლეს*** უწოდებენ.

თუ $(a,b)\in \Pi((a,b)\in C\Pi)$ ან $(b,a)\in \Pi((b,a)\in C\Pi)$, მაშინ a და b ელემენტს ***შედარებადი ელემენტები ეწოდება,*** წინააღმდეგ შემთხვევაში- ***შეუდარებადი ელემენტები.***

მაგალითებში განხილულ მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული არამკაცრი და მკაცრი ნაწილობრივი და დალაგებების მიმართებების დროს ყოველი ორი მთელი რიცხვი ერთმანეთთან შედარებადია. ხოლო სხვა მაგალითში განხილული $M(A)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების მიმართების დროს ისეთი ორი ელემენტი $Z_1,Z_2\in M(A)$, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს პირობას: $Z_1 \not\subset Z_2, Z_2 \not\subset Z_2$, შეუდარებადია.

ცხადია, თუ $\Pi\subset A\times A((C\Pi\subset A\times A)$ არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების (მკაცრი ნაწილობრივი დალაგების) მიმართებაა, მაშინ $\Pi^{-1}(C\Pi^{-1})$ ასევე არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების(მკაცრი ნაწილობრივი დალაგების) მიმართებაა. მართლაც, $\Pi^{-1}=\{(b,a)\,|\,(a,b)\in \Pi$ და ამიტომ ადგილი ექნება ნაწილობრივი დალაგების ყველა თვისებას.

ასევე, რადგან $C\Pi^{-1}=\{(b,a)\,|\,(a,b)\in C\Pi$, ამიტომ თუ $(a,a)\notin C\Pi$, მაშინ $(a,a)\notin C\Pi^{-1}$, ეს ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს ანტირეფლექსურობის თვისებას.
ტრანზიტულობის თვისების არსებობა ცხადია.

ვთქვათ, A სიმრავლეზე გვაქვს არამკაცრი ნაწილბრივად დალაგების მიმართება, $B\subset A$ რაიმე ქვესიმრავლეა. $a\in A$ ელემენტს უწოდებენ B სიმრავლის ***ზედა საზღვარს,*** თუ ნებისმიერი $b\in B$ ელემენტისათვის ადილი აქვს $b\le a$ უტოლობას. $b\in B$ ელემენს უწოდებენ B სიმრავლის ***უდიდეს ელემენტს*** , თუ იგი წარმოადგენს ამ სიმრავლის ზედა საზღვარს. $b\in B$ ელემენტს უწოდებენ B სიმრავლის ***მაქსიმალურ ელემენტს,*** თუ ნებისმიერი ელემენტი $c\in B$ შეუდარებადია b ელემენტთან ან $c\le b$.

$a\in A$ ელემენტს უწოდებენ B სიმრავლის***ქვედა საზღვარს,*** თუ ნებისმიერი $b\in B$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს $b\le a$ უტოლობას. ელემენტს $b\in B$ უწოდებენ B სიმრავლის ***უმცირეს ელემენტს*** , თუ იგი წარმოადგენს ამ სიმრავლის ზედა საზღვარს. $b\in B$ ელემენტს უწოდებენ B სიმრავლის ***მინიმალურ ელემენტს,*** თუ ნებისმიერი ელემენტი $c\in B$ შეუდარებადია b ელემენტთან ან $c\le b$.

B სიმრაველის ზედა საზღვრების სიმრაველის უმცირეს ელემენტს, თუ ის არსებობს, ამ ***სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი*** ეწოდება. იგი აღინიშნება ასე: $\sup B$.

B სიმრაველის ქვედა საზღვრების სიმრაველის უდიდეს ელემენტს, თუ ის არსებობს, ამ ***სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი*** ეწოდება. იგი აღინიშნება ასე: $\inf B$.

ვთქვათ, A სიმრავლეზე გვაქვს ისეთი არამკაცრი ნაწილბრივად დალაგების მიმართება $\Pi\subset A\times A$, რომ ყოველი ორი $a,b\in A$ ელემენტი შედარებადია, ანუ $(a,b)\in \Pi$ ან $(b,a)\in \Pi$, მაშინ ასეთ მიმართებას ***წრფივი დალაგების მიმართება*** ეწოდება. A სიმრავლეს წრფივი დალაგების მიმართებით წრფივად დალაგებული სიმრაველე, ანუ ***ჯაჭვი*** ეწოდება.

მაგალითი: $\Pi=\{(a,a+k)\,|\,a\in Z, k\in N\cup\{0\}\}$ ნაწილობრივი დალაგების მიმართების დროს მთელ რიცხვთა Z სიმრავლე წრფივად დალაგებულია.

$B\subset A$ ქვესიმრავლეს უწოდებენ ჯაჭვს Π მიმართებით ნაწილობრივად დალაგებულ A სიმრავლეში, თუ B ჯაჭვია Π მიმართებით ინდუცირებული დალაგების მიმართების დროს.

შემდეგი დებულება წარმოადგენს აქსიომას, რომელიც ცნობილია ცორნის ლემის სახელწოდებით.

ცორნის ლემა: თუ თითოეული B ჯაჭვს ნაწილობრივად დალაგებულ A სიმრავლეში გააჩნია ზედა საზღვარი, მაშინ A სიმრავლეში არსებობს მაქსიმალური ელემენტი.

წრფივად დალაგებულ სიმრავლეს უწოდებენ ***სრულად დალაგებულს,*** თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერ არაცარიელ ქვესიმრავლეს გააჩნია უმცირესი ელემენტი.

მაგალითი: $\Pi = \{(a,a+k) \mid a \in Z, k \in N \cup \{0\}\}$ ნაწილობრივი დალაგების მიმართების დროს Z სიმრავლე წრფივად დალაგებულია, მაგრამ არაა სრულად დალაგებული.

$\Pi = \{(a,a+k) \mid a \in Z, k \in N \cup \{0\}\}$ ნაწილობრივი დალაგების მიმართებით ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე ინდუცირებული ნაწილობრივი დალაგების მიმართება წრფივია და ამ მიმართებით N სიმრავლე სრულად დალაგებულია.

სრულად დალაგებულია ნებისმიერი სასრული, წრფივად დალაგებული სიმრავლე, ან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე.

თეორემა 4.1. ვთქვათ, A სრულად დალაგებული სიმრავლეა, $a \in A$ არ არის უდიდესი ელემენტი A სიმრავლეში, მაშინ არსებობს ერთადერთი ისეთი ელემენტი $a' \in A$, რომ $a \le a', a \ne a'$ და $a' \le x$ ნებისმიერი $x \ge a, x \in A$ ელემენტისათვის.

დამტკიცება: განვიხილოთ ქვესიმრავლე $B_a = \{b \in A \mid a \le b, a \ne b\} \subset A$ ამ სიმრავლეს გააჩნია უმცირესი $a' \in B_a$, $a' \ne a$ ელემენტ. ცხადია, ასეთი a' ელემენტი აკმაყოფილებს ყველა საჭირო მოთხოვნას.

a' ელემენტს, რომელიც წინა თეორემის საფუძველზე არსებობს ყველა სრულად დალაგებულ სიმრავლეში, ***a ელემენტის მომდევნო ელემენტი*** ეწოდება.

ადგილი აქვს ცორნის ლემის ეკვივალენტურ დებულებას, რომელიც ცერმელოს თეორემის სახელით არის ცნობილი.

ცერმელოს თეორემა: ყოველი სიმრავლეზე არსებობს სრულად დალაგების მიმართება.

ვთქვათ A, B ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეებია. ვიტყვით, რომ ასახვა $f : A \to B$ ***ინახავს დალაგებას,*** თუ $a \le b$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(a) \le f(b)$.

ვიტყვით, რომ ორ A, B ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეს გააჩნია ერთი და იგივე ***რიგობრივი ტიპი,*** თუ არსებობს ბიექცია $f : A \to B$, რომელიც ინახავს დალაგებას.

ასეთი ბიექციები ყველა ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეთა $\mathfrak{N}$ ერთობლიობაზე განსაზღვრავენ $I = \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ ეკვივალენტობის მიმართებას, რომელიც შედგება ისეთი წყვილებისაგან, რომელთა შორისაც არსებობს დალაგების შემნახავი ბიექცია. ამ მიმართებით განსაზღვრულ ეკვივალენტობის კლასებს ***რიგობრივ ტიპებს უწოდებენ.***

თუ $\mathfrak{N}$ ერთობლიობიდან გამოვყოფთ ყველა სრულად დალაგებულ სიმრავლეთა $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{N}$ ერთობლიობას, მაშინ ინდუცირებული $I_{\mathfrak{I}} \subset \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ მიმართებაც ცხადია ეკვივალენტობის მიმართებაა. ამ ეკვივალენტობის მიმართებით განსაზღვრულ ეკვივალენტობის კლასების $\mathfrak{I}/I_{\mathfrak{I}}$ სიმრავლის ელემენტებს ***რიგობრივი რიცხვები*** ეწოდება.

რიგობრივ რიცხვს უწოდებენ სასრულს, თუ მისი შესაბამისი ეკვივალენტობის კლასი შედგება სასრული სიმრავლეებისაგან. წინააღმდეგ შემთხვევაში ***რიგობრივ რიცხვს უწოდებენ უსასრულოს.***

იმის გამო, რომ ორ ერთ და იმავე სიმძლავრის სასრულ სიმრავლეში ყოველი სრული დალაგება ერთმანეთის ეკვივალენტურია, სასრული რიგობრივი რიცხვები შეიძლება გავაიგივეოთ ნატურალურ რიცხვებთან.

ვთქვათ, α რაიმე რიგობრივი რიცხვია. $A\in\alpha$ სიმრავლის შესაბამის η კარდინალურ რიცხვს α რიგობრივი რიცხვის სიმძლავრე ეწოდება. $A\in\alpha$ სიმრავლის ელემენტების $A_a\{b\in A\,|\,b\leq a, a\in A\}$ ქვესიმრავლის შესაბამის რიგობრივ რიცხვს α რიგობრივი რიცხვის საწყისი მონაკვეთი ეწოდება.

მტკიცდება თეორემა.

თეორემა.4.1. მიმართება $\Pi\subset\Im\times\Im$, რომელიც შედება რიგობრივ რიცხვთა ისეთი დალაგებული წყვილებისაგან, რომლის პირველი კომპონენტიც წარმოადგენს მეორე კომპონენტის საწყის მონაკვეთს, სრულად დალაგების მიმართებაა.

თავიII

ზოგადი ალგებრის ელემენტები

§5. ალგებრული ოპერაციები, ალგებრული სტრუქტურები, ნახევარჯგუფი

ვთქვათ, A რაიმე სიმრავლეა.

ნებისმიერ $\mu : A\times A \to A$ ასახვას, A ***სიმრავლეზე განსაზღვრულ ალგებრულ ოპერაციას*** უწოდებენ.

ელემენტს $c=\mu((a,b));a,b,c\in A$ აღნიშნავენ ასე: $a\mu b$.

მაგალითი: შეკრების $+:Z\times Z \to Z$, $+((a,b)=a+b$ და გამრავლების$\cdot : Z\times Z \to Z$, $\cdot((a,b)=a\cdot b$ ოპერაციები მთელ რიცხვთა სიმ რაველეზე.

მოვიყვანოთ ალგებრული ოპერაციების მაგალითები.

მაგალითი: გაერთიანების $\cup : \Xi\times\Xi \to \Xi$, $\cup((A,B))=A\cup B$ და თანაკვეთის $\cap : \Xi\times\Xi \to \Xi, \cap((A.B))=A\cap B$ ოპერაციები ყველა სიმრავლეთა ერთობლიობაზე.

მაგალითი: შეკრების$\oplus : {}^{\Xi}/_{I}\times {}^{\Xi}/_{I} \to {}^{\Xi}/_{I}$ ოპერაცია კარდინალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელიც განისაზღერება შემდეგნაირად: თუ $\eta=[A]$, $\xi=[B]$, $A\cap B=\Theta$, მაშინ $\oplus((\eta,\xi))=\zeta=[A\cup B]$.

გამრავლების $\otimes : {}^{\Xi}/_{I}\times {}^{\Xi}/_{I} \to {}^{\Xi}/_{I}$ ოპერაცია კარდინალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: თუ $\eta=[A]$, $\xi=[B]$, მაშინ $\otimes((\eta,\xi))=\zeta=[A\times B]$.

მაგალითი: შეკრების ოპერაცია $\oplus : {}^{\mathfrak{I}}/_{I_{\mathfrak{R}}}\times {}^{\mathfrak{I}}/_{I_{\mathfrak{R}}} \to {}^{\mathfrak{N}}/_{I_{\mathfrak{R}}}$ რიგობრივი რიცხვების სიმრავლეში, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: ვთქვათ, $\alpha=[A],\beta=[B]\in {}^{\mathfrak{I}}/_{I_{\mathfrak{R}}};A\cap B=\Theta$, $\oplus((\alpha,\beta))=\gamma=[A\cup B]$, სადაც $A\cup B$ სრულად დალაგებულია $\prec$ დალაგების მიმართებით ასე: თუ $a,b\in A$, მაშინ $a\prec b$, თუ $a\le b$ A სიმრავლეში არსებული სრული დალააგების $\le$მიმართებით; თუ $c,d\in B$, მაშინ $c\prec d$, თუ $c\le d$ B სიმრავლეში არსებული სრული დალააგების მიმართებით; $a\prec b$,თუ $a\in A,b\in B$.

გამრავლების ოპერაცია$\otimes : {}^{\mathfrak{I}}/_{I_{\mathfrak{R}}}\times {}^{\mathfrak{I}}/_{I_{\mathfrak{R}}} \to {}^{\mathfrak{N}}/_{I_{\mathfrak{R}}}$ რიგობრივ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: ვთქვათ, $\alpha=[A],\beta=[B]\in {}^{\mathfrak{I}}/_{I_{\mathfrak{R}}}$, $\otimes((\alpha,\beta))=\gamma=[A\times B]$, სადაც $A\times B$ სრულად დალაგებულია ასე: $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$, თუ $b_1\le b_2$ ან $a_1\le a_2$, როდესაც $b_1=b_2$.

მაგალითი: რაიმე A სიმრავლის თავისთავზე $F(A)=\{f : A\to A\}$ ასახვების სიმრავლეში გამრავლების ალგებრული ოპერაცია$\cdot : F(A)\times F(A) \to F(A)$ განისაზღვრება $f\cdot g=g\circ f$ ფორმულით.

სიმრაელეს რომელზედაც განსაზღვრულია ერთი ან რამდენიმე ალგებრული ოპერაცია, ***ალგებრული სტრუქტურა*** ეწოდება.

ალგებრეული სტრუქტურა ზოგადად აღინიშნება ასე: $(A,\mu_l,l\in L)$.

ალგებრულ სტრუქტურაში ოპერაციათა რაოდენობას ***ალგებრული სტრუქტურის სიგნატურა*** ეწოდება. სიმრავლეები ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში, შესაბამისი ალგებრული ოპერაციებით, წარმოადგენენ ალგებრულ სტრუქტურებს სიგნატურით ორი.

(A,μ) ალგებრული სტრუქტურის სიგნატურა ერთია, (A,μ_1,μ_2) სტრუქტურის-ორი, (A,μ_1,μ_2,μ_3) სტრუქტურის კი-სამი და ასე შემდეგ.

ვთქვათ, A სიმრავლეა, μ ალგებრული ოპერაცია ამ სიმრავლეზე, $B\subset A$ ქვესიმრავლეა, ასახვას $\mu':B\times B\to B$ ეწოდება μ ოპერაციით ***ინდუცირებული ალგებრული ოპერაცია***, თუ $\mu'=\mu|_{B\times B}$, ანუ $\mu'((a,b))=\mu((a,b))$ ყოველი $a,b\in B$ ელემენტისათვის.

ალგებრულ სტრუქტურას $(B,\mu_l',l\in L)$, $B\subset A$, ინდუცირებული $\mu_l'\in L$ ალგებრული ოპერაციებით, თუ ასეთი ოპერაციები არსებობენ, $(A,\mu_l,l\in L)$ ალგებრული სტრუქტურის ***ქვეალგებრულ სტრუქტურას*** უწოდებენ.

$\mu:A\times A\to A$ ალგებრულ ოპერაციას ეწოდება ***კომუტაციური(გადანაცვლებადი),*** თუ $a\mu b=b\mu a$ ყოველი ორი $a,b\in A$ ელემენტისათვის.

კომუტაციური ალგებრული ოპერაციის მაგალითია ყველა ალგებრული ოპერაცია ზემოთ განხილულ მაგალითებში გარდა ასახვათა კომპოზიციისა.

არაკომუტაციური ალგებრული ოპერაციის მაგალითია ასევე მატრიცათა გამრავლების ოპერაცია n რიგის მატრიცათა სიმრავლეში.

$\mu:A\times A\to A$ ალგებრულ ოპერაციას ეწოდება ***ასოციაციური(ჯუფთებადი),*** თუ $(a\mu b)\mu c=a\mu(b\mu c)$ ყოველი სამი $a,b,c\in A$ ელემენტისთვის.

ყველა ალგებრული ოპერაცია ზემოთ განხილულ მაგალითებში ჯუფთებადია.

ვიტყვით, რომ ალგებრული სტრუქტურა სიგნატურით ერთი ჩაწერილია ***ადიტიურად,*** თუ ალგებრულ ოპერაციას ამ სტრუქტურაში აღვნიშნავთ + სიმბოლოთი და ვუწოდებთ მას **შეკრებას**.

ვიტყვით, რომ ალგებრული სტრუქტურა სიგნატურით ერთი ჩაწერილია ***მულტიპლიკაციურად,*** თუ ალგებრულ ოპერაციას ამ სტრუქტურაში აღვნიშნავთ × სიმბოლოთი და ვუწოდებთ მას **გამრავლებას**.

ელემენტს $e\in A$ (A,μ) ალგებრულ სტრუქტურაში, რომელსაც აქვს თვისება $a\mu e=e\mu a=a$ ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისათვის, უწოდებენ ***ნეიტრალურ ელემენტს*** $\mu:A\times A\to A$ ალგებრული ოპერაციის მიმართ.

თუ ალგებრული სტრუქტურა ჩაწერილია ადიტიურად, მაშინ ნეიტრალურ ელემენტს + ოპერაციის მიმართ უწოდებენ ***ნულს*** და აღნიშნავენ 0 სიმბოლოთი.

თუ ალგებრული სტრუქტურა ჩაწერილია მულტიპლიკაციურად, მაშინ ნეიტრალურ ელემენტს . ოპერაციის მიმართ უწოდებენ ***ერთეულს*** და აღნიშნავენ 1 სიმბოლოთი.

თეორემა 5.1. თუ ალგებრულ (A,μ) სტრუქტურაში არსებობს ნეიტრალური e ელემენტი $\mu:A\times A\to A$ ალგებრული ოპერაციის მიმართ, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება: ვთქვათ, არსებობს მეორე $e'\in A$ ნეიტრალური ელემენტი, მაშინ

$$e=e\mu e'=e'\mu e=e'.$$

მაგალითი: მთელ რიცხვთა $(Z,+)$ ალგებრულ სტრუქტურაში ნეიტრალურ ელემენტს წარმოადგენს რიცხვი ნული-0. ხოლო მთელ რიცხვთა $(Z,\cdot)$ ალგებრულ სტრუქტურაში ერთეულის როლს ასრულებს რიცხვი ერთი-1.

მაგალითი: თუ A სიმრავლის თავის თავში ასახვათა $F(A)$ სიმრავლეში გამრავლების ოპერაციას განვსაზღვრავთ ასე $f\cdot g=g\circ f$, მაშინ მულტიპლიკაციურად ჩაწერილ $(F(A),\cdot)$ ალგებრულ სტრუქტურაში ერთეულის როლს შეასრულებს იგივური $Id_A:A\to A$ ასახვა.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $(A,\mu_l,l\in L),(B,\nu_l,l\in L)$ ალგებრული სტრუქტურა.

ასახვას $f:A\to B$ უწოდებენამ ***ალგებრულ სტრუქტურათა ჰომომორფიზმს,*** თუ $f(A\mu_l b)=f(a)\nu_l f(b)$ ნებისმიერი ორი $a,b\in A$ ელემენტისათვის და ნებისმიერი

$l\in L, j\in G$ ინდექსისათვის. ალგებრულ სტრუქტურათა ჰომომორფიზმი ჩაიწერება ასე: $f:(A,\mu_l,l\in L)\to(B,\nu_l,l\in L)$.

ჰომომორფიზმს: $f:(A,\mu_l,l\in L)\to(B,\nu_l,l\in L)$ ეწოდება ***მონომორფიზმი,*** თუ $f:A\to B$ ინექციაა. ჰომომორფიზმს $f:(A,\mu_l,l\in L)\to(B,\nu_l,l\in L)$ ეწოდება ***ეპიმორფიზმი*** , თუ $f:A\to B$ სიურექციაა. ჰომომორფიზმს, რომელიც . ერდროულად მონომორფიზმიცაა და ეპიმორფიზმიც ***იზომორფიზმს*** უწოდებენ .

ცხადია, $(f(A),\nu_l'\in L)$, სადაც ν_l' წარმოადგენს ν_l ალგებრული ოპერაციით ინდუცირებულ ალგებრულ ოპერაციას, $(B,\nu_l,l\in L)$ ალგებრული სტრუქტურის ქვეალგებრულ სტრუქტურაა.

თუ e_{μ_l} ნეიტრალური ელიმენტია μ_l ოპერაციის მიმართ, მაშინ $f(e_{\mu_l})$ ნეიტრალური ელემენტია ნებისმიერი ν_l' ოპერაციის მიმართ. მართლაც, $f(A)$ ალგებრული სტრუქტურაა, $b\in f(A)$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ელემენტი $a\in A$, რომ $f(a)=b$. ქედან ამომდინარე:

$b\mu_l f(e_{\mu_l})=f(a)\nu_l f(e_{\mu_l})=f(a\mu_l e_{\mu_l})=f(a)=b; f(e_{\mu_l})\nu_l b=f(e_{\mu_l})\nu_l f(a)=f(e\mu_l a)=$

$=f(a)=b$

(A,μ) ალგებრულ სტრუქტურას, ერთი ასოციაციური μ ალგებრული ოპერაციით, ***ნახევარჯგუფი*** ეწოდება.

ნახევარჯგუფში განიმარტება ალგებრული ოპერაცია არა მარტო ორი ელემენტისათვის, არამედ ელემენტთა ნებისმიერი რაოდენობისათვის. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ ალგებრული ოპერაცია უკვე განსაზღვრულია $n-1\in N$ რაოდენობის ელემენტებისათვის, მაშინ $n\in N$ რაოდენობის ელემენტისათვის, ალგებრული ოპერაციის ასოციაციურობის თვისების გამო

$$a_1\mu a_2\mu\ldots\mu a_n=a_1\mu(a_2\mu a_3\mu\ldots\mu a_n)=(a_1\mu a_2\ldots a_{n-1})\mu a_n$$

მაგალითი: $(N,+)$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ჩვეულებრივი შეკრების ალგებრული ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს ნახევარჯგუფის ალგებრულ სტრუქტურას.

$(N,\cdot)$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ჩვეულებრივი გამრავლების ალგებრული ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს ნახევარჯგუფის ალგებრულ სტრუქტურას.

მაგალითი: $(Z,+),(Z,\cdot)$ მთელ რიცხვთა სიმრავლე ჩვეულებრივი შეკრების ალგებრული ოპერაციის მიმართ და მთელ რიცხვთა სიმრავლ ჩვეულებრივი გამრავლების ალგებრული ოპერაციის მიმართ ნახევარჯგუფის ალგებრული სტრუქტურებია.

მაგალითი: ასახვათა $F(A)$ სიმრავლე გამრავლების $f\cdot g=g\circ f$ ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს ნახევარჯგუფს.

(A,μ) ალგებრულ სტრუქტურას ეწოდება ***კომუტაციური(აბელის) ნახევარჯგუფი,*** თუ ალგებრული ოპერაცია μ კომუტაციურია.

მაგალითი: $(N,+),(N,\cdot),(Z,+),(Z,\cdot)$ ნახევარჯგუფები კომუტაციურია. ხოლო$(F(A),\cdot)$ ნახევარჯგუფი არ არის კომუტაციური.

(A,μ)ნახევარჯგუფს ნეიტრალური ელემენტით ***მონოიდი*** ეწოდება.

მაგალითი: მონოიდის მაგალითებია: $(N,\cdot),(Z,+),(Z,\cdot),(F(A),\cdot)\,(N,+)$. ხოლო $(N,+)$ არ არის მონოიდი, ვინაიდან რიცხვი ნული არაა ნატურალური რიცხვი.

ადიტიურად ჩაწერილ $(A,+)$ ნახევარჯგუფში $a\in A$ ელემენტისათვის $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n}$ ჯამი, სადაც $n\in N$, აღინიშნება ასე: na.

მულტიპლიკაციუად ჩაწერილ $(A,\cdot)$ ნახევარჯგუფში $a\in A$ ელემენტისათვის, $\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$ ნამრავლი, სადაც $n\in N$, აღინიშნება ასე: a^n და ეწოდება a ***ელემენტის n-ური ხარისხი.***

ცხადია ადგილი ნებისმიერი $n,m\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის:
$na+ma=(n+m)$ და $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$.

თუ (A,μ) ნახევარჯგუფია, $B\subset A$ ქვესიმრავლეა, და (B,μ') ალგებრულ ტრუქტურაა μ ოპერაციდან ინდუცირებული $\mu'=\mu|_{B\times B}$ ალგებრული ოპერაციით, თუ ასეთი ოპერაცია არსებობს, მაშინ (B,μ') ალგებრულ სტრუქტურას (A,μ) ნახევარჯგუფის ***ქვენახევარჯგუფი*** ეწოდება.

მაგალითი: $(N,+)$ ქვენახევარჯგუფია $(Z,+)$ ნახევარჯგუფში; $(N,\cdot)$ ქვენახევარჯგუფია $(Z,\cdot)$ ნახევარჯგუფში; ალგებრული სტრუქტურა $(SF(A),\cdot)$ $SF(A)\subset F(A)$ ინექციების სიმრავლეზე წარმოადგენს ქვენახევარჯგუფს $F(A)$ ნახევარჯგუფში.

$L\subset A$ ქვესიმრაველეს (A,μ) ნახევარჯგუფში უწოდებენ მის ***მარჯვენა იდეალს***, თუ $L\mu A=\{l\mu a\mid l\in L,a\in A\}\subset L$.

$L\subset A$ ქვესიმრაველეს (A,μ) ნახევარჯგუფში უწოდებენ ***მარცხენა იდეალს***, თუ $A\mu L=\{a\mu l\mid a\in A,l\in L\}\subset L$.

$L\subset A$ ქვესიმრაველეს (A,μ) ნახევარჯგუფში უწოდებენ მის ორმხრივ იდეალს, თუ იგი მარცხენა იდეალიცაა და მარჯვენა იდეალიც ერთდროულად.

ჩხადია, კომუტაციურ ნახევარჯგუფში ყველა იდეალი ორმხრივია.

მაგალითი: ვთქვათ $B\subset A$ ქვესიმრაველეა A სიმრავლეში. განვიხილოთ ისეთი $f:A\to A$ ასახვების ქვესიმრაველე $F_B(A)\subset F(A)$, რომლისთვისაც $f(A)\subset B$.
ცხადია, $g\in F(A),f\in F_B(A)$, მაშინ $f\cdot g=g\circ f\in F_B(A)$ და ამიტომ $F_B(A)$ მარჯვენა იდეალია $(F(A),\cdot)$ ნახევარჯგუფში.

მაგალითი: $f:A\to A, f(a)=c; a\in A, c\in A$, მუდმივი ასახვების სიმრაელე, ცხადია, წარმოადგენს ორმხრივ იდეალს $(F(A),\cdot)$ ნახევარჯგუფში.

ნახევარჯგუფს (A,μ) ეწოდება ***სასრული***, თუ A სასრული სიმრავლეა. წინააღმდეგ შემთხვევაში ნახევარჯგუფს ეწოდება ***უსასრულო***.

მაგალითი: სასრული ნახევარჯგუფია სასრული სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე გაერთიანების ან თანაკვეთის ოპერაციებით.

ვთქვათ, (A,μ) და (B,ν) ნახევარჯგუფებია და $f:(A,\mu)\to(B,\nu)$ ჰომომორფიზმი. განვიხილოთ ქვესიმრავლე $B\subset A$, რომელიც შედგება ისეთი b ელემენტებისაგან, რომლისთვისაც $f(b)=e_\nu$, სადაც e_ν ნეიტრალური ელემენტია (B,ν) ნახევარჯგუფში. ცხადია, ეს სიმრაელე μ ოპერაციით ინდუცირებული ალგებრული ოპერაციით წარმოადგენს ქვენახევარჯგუფს (A,μ) ნახევარჯგუფში. ამ ქვენახევარჯგუფს $f:(A,\mu)\to(B,\nu)$ ჰომომორფიზმის ბირთვი ეწოდება და აღინიშნება ასე: $\ker f$. ცხადია, თუ $f:(A,\mu)\to(B,\nu)$ მონომორფიზმია $\ker f$ შედგება მხოლოდ ერთი e_μ ელემენტისაგან.

ნახევარჯგუფს (A,μ) ეწოდება ***ნახევარჯგუფი შეკვეცით,*** თუ მასში ყოველი $a\mu d=b\mu d$ სახის ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $a=b$.

სავარჯიშოები:

1 დაამტკიცეთ, რომ თუ L_1,L_2 ერთი და იგივე ტიპის იდეალებია (A,μ) ნახევარჯგუფში, მაშინ $L_1\cup L_2$ იგივე ტიპის იდეალია ამავე ნახევარჯგუფში.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ L_1 მარცხენა იდეალია, L_2 მარჯვენა იდეალი(A,μ) ნახევარჯგუფში, მაშინ $L_1L_2=\{a\mu b \mid a\in A, b\in B\}$ ორმხრივი იდეალია ამავე ნახევარჯგუფში.
3. დაამტკიცეთ, რომ თუ L_1, L_2 ორმხრივი იდეალებია (A,μ) ნახევარჯგუფში, მაშინ L_1L_2 ორმხრივი იდეალია ამავე ნახევარჯგუფში და $L_1L_2\subset L_1\cap L_2$.

§6. ჯგუფები

(A,μ)ალგებრულ სტრუქტურას უწოდებენ ***ჯგუფს***, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:
1. $a\mu(b\mu c)=(a\mu b)\mu c$.
2. არსებობს ელემენტი, რომელსაც ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისათვის აქვს თვისება $a\mu e=e\mu a=a$.
3. ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისათვის არსებობს ელემენტი $x\in A$, რომელსაც აქვს თვისება $a\mu x=x\mu a=e$.

თუ (A,μ) ჯგუფშინ ნებისმიერი $a,b\in A$ ელემენტებისათვის $a\mu b=b\mu a$, მაშინ ამ ჯგუფს ***კომუტაციური ანუ აბელის*** ჯგუფი ეწოდება.

როგორც ალგებრული სტრუქტურა, ჯგუფი შეიძლება ჩაეწეროთ ადიტიურად და მულტიპლიკაციურად.

ადიტიური ჩაწერის დროს e ნეიტრალურ ელემენტს აღნიშნავენ 0 სიმბოლოთი და უწოდებენ ***ჯგუფის ნულს***, ხოლო ელემენტს$x\in A$, რომელსაც აქვს თვისება $a+x=x+a=0$, უწოდებენ $a\in A$ ელემენტის ***მოპირდაპირე ელემენტს*** და აღნიშნავენ ასე: $-a$.

მულტიპლიკაციური ჩაწერის დროს e ნეიტრალურ ელემენტს აღნიშნავენ 1 სიმბოლოთი და უწოდებენ ***ჯგუფის ერთეულს***, ხოლო ელემენტს $x\in A$, რომელსაც აქვს თვისება $a\cdot x=x\cdot a=1$, უწოდებენ $a\in A$ ელემენტის ***შებრუნებულ ელემენტს*** და აღნიშნავენ ასე: a^{-1}.

მაგალითი: ალგებრული სტრუქტურები $(Z,+),(Q,+),(Q,\cdot),(R,+),(R,\cdot)$, სადაც Z,Q,R შესაბამისად მთელ, რაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეებია, $+,\cdot$ ამ სიმრავლეთა ელემენტების შეკრების და გამრავლების ალგებრული ოპერაციები, წარმოადგენენ კომუტაციურ ჯგუფებს.

ალგებრული სტრუქტურები $(N,+)$ და $(N,\cdot)$ არ წარმოადგენენ ჯგუფებს.

მაგალითი: ვთქვათ, $CF(A)\subset F(A)$ ბიექციათა ქვესიმრავლეა. ეს ქვესიმრავლე გამრავლების $f\cdot g=g\circ f$ ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს არაკომუტაციურ ჯგუფს. ერთეულის როლს ასრულებს იგიური ასახვა Id_A. ნებისმიერი $f\in CF(A)$ ელემენის შებრუნებულ ელემენტს წარმოადგენს ამ ასახვის შებრუნებული ასახვა $f^{-1}\in CF(A)$.

ჯგუფს (A,μ) ***ეწოდება სასრული*** ,თუ A სასრული სიმრავლეა. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჯგუფს ***ეწოდება უსასრულო***.

მაგალითი: რიცხვითი სიმრავლე $\{-1,1\}$ ჩვეულებრივი გამრავლების ოპერაციით სასრული ჯგუფის მაგალითია.

ცხადია ყოველი ჯგუფი ნახევარჯგუფიცაა.

თეორემა 6.2. თუ (A,μ) ჯგუფში ადგილი აქვს ტოლობას $a\mu c=b\mu c$, მაშინ $a=b$.

დამტკიცება: განვიხილოთ ელემენტი$x\in A$, რომელსაც აქვს თვისება$c\mu x=x\mu c=e$, მაშინ $a\mu c\mu x=b\mu c\mu x$. აქედან გამომდინარეობს $a\mu e=b\mu e$. აქედან კი საბოლოოდ გვექნება$a=b$.

ამ თეორემიდან გამომდინარე, ყოველ მულტიპლიკაციურ ჯგუფში შესაძლებელია *შეკვეცა*. ხოლო ადიტიურ ჯგუფში *გაბათილება*, ანუ თუ $ac = bc(a+c = b+c)$, მაშინ $a = b$.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს ასევე: თუ $x \in A$ ისეთი ელემენტია ჯგუფში, რომ რომელიღაც $a \in A$ ელემეტისათვის ამავე ჯგუფში $a\mu x = x\mu a = e_\mu$, მაშინ არც ერთი სხვა $b \in A, b \neq a$ ელემენტისათვის ადგილი არ ექნება ტოლობას $b\mu x = x\mu b = e_\mu$. მართლაც, მაშინ $a\mu x = b\mu x$, აქედან კი გამოდის, რომ $a = b$, რაც შეუძლებელია.

ადიტიურ ჯგუფში, $a + (-b) = a - b$ ელემენტს a და b ელემენტების სხვაობას უწოდებენ.

მულტიპლიკაციურ ჯგუფში შებრუნებული ელემენტის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

1. $(a^{-1})^{-1} = a$. მართლაც, $(a^{-1})^{-1}a^{-1} = 1 = aa^{-1}$, თუ გამოეიყენებთ შეკვეცის შესაძლებლობას მივიღებთ $(a^{-1})^{-1} = a$.

2. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. მართლაც, $b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = b^{-1}b = e = (ab)^{-1}ab$. აქედან შეკვეცით მივიღებთ $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

3. $(a_1a_2...a_k)^{-1} = a_k^{-1}a_{k-1}^{-1}...a_1^{-1}$. მართლაც, $a_1a_2...a_ka_k^{-1}a_{k-1}^{-1}...a_1^{-1} = e = a_1a_2...a_k(a_1a_2...a_k)^{-1}$ ტოლობის შეკვეცით მივიღებთ $(a_1a_2...a_k)^{-1} = a_k^{-1}a_{k-1}^{-1}...a_1^{-1}$.

4. $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$. მართლაც, $\underbrace{aaa...a}_{k}\underbrace{a^{-1}a^{-1}a^{-1}...a^{-1}}_{k} = e = \underbrace{aaa...a}_{k}(\underbrace{aaa...a}_{k})^{-1}$ ტოლობის შეკვეცით მივიღებთ $\underbrace{a^{-1}a^{-1}a^{-1}...a^{-1}}_{k} = (\underbrace{aaa...a}_{k})^{-1}$ ანუ $(a^{-1})^k = (a^k)^{-1}$.

ანალოგიურად, ადიტიურად ჩაწერილი ჯგუფისათვის მოპირდაპირე ელემენტის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

1. $-(-a) = a$.
2. $-(a+b) = -a + (-b) = -a - b$.
3. $-(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) = -a_1 - a_2 - a_3 - ... - a_k$
4. $-(ka) = k(-a)$

მულტიპლიკაციურ ჯგუფში, შეთანხმეის თანახმად, $a^0 = 1$, $a^{-n} = (a^n)^{-1}$, სადაც $n \in N$, ნატურალური რიცხვია.

ცხადია, ადგილი ექნება ტოლობებს:

1. $a^la^k = a^{l+k}; k,l \in Z$.
2. $(a^k)^l = a^{kl}; k,l \in Z$.

ანალოგიურად, ადიტიურად ჩაწერილი ჯგუფისათვის, შეთანხმების თანახმად, $0a = 0$, $-(na) = n(-a)$, სადაც $n \in N$. პირველ ტოლობაში მარცხნივ რიცხვი ნულია, მარჯვენივ ჯგუფის ნეიტრალური ელემენტი.

ცხადია, ადგილი ექნება ტოლობებს:

1. $ka + la + (k+l), k,l \in Z$.
2 $k(la) = (kl)a; k,l \in Z$.

ვთქვათ, ჯგუფი ჩაწერილია მულტიპლიკაციურად.

$B \subset A$ ქვესიმრავლეს უწოდებენ $(A;\cdot)$ ***ჯგუფის წარმომქმნელთა სიმრავლეს***, თუ ნებისმიერი ელემენტი $a \in A$ წარმოიდგინება ასე: $a = b_1^{\alpha_1}b_2^{\alpha_2}...b_k^{\alpha_k}$, სადაც $\alpha_i = \pm 1, i = 1,2,..,k$.

ვთქვათ ახლა ჯგუფი ჩაწერილია ადიტიურად.

$B \subset A$ ქვესიმრავლეს უწოდებენ $(A,+)$ ***ჯგუფის წარმომქმნელთა სიმრავლეს***, თუ ნებისმიერი ელემენტი $a \in A$ წარმოიდგინება ასე: $a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_k . b_k$, სადაც $\alpha_i = \pm 1, i = 1,2,..,k$.

მაგალითი: $(Z,+)$ ჯგუფში ერთელემენტიანი ქვესიმრაელეები $\{1\}$ ან $\{-1\}$ წარმოადგენენ წარმომქმნელთა სიმრაელეებს.

ცხადია, ჯგუფში წარმომქმნელთა ქვესიმრაველე ყოველთვის არსრბობს. შესაძლებელია ჯგუფში წარმომქმნელთა რამოდენიმე ქვესიმრაველე არსებობდეს.

ვთქვათ, (A,μ) ჯგუფია, $B \subset A$ ქვესიმრალე. თუ არსებობს μ ოპერაციით ინდუცირებული ალგებრული ოპერაცია: $\mu' : B \times B \to B$, მაშინ. (B,μ') ალგებრულ სტრუქტურას (A,μ) ჯგუფის ***ქვეჯგუფი*** ეწოდება.

მაგალითები: $(Z,+)$ ჯგუფი ქვეჯგუფია $(Q,+)$ ჯგუფში; $(Q,+)$ ჯგუფი ქვეჯგუფია $(R,+)$ ჯგუფში, $(Q,\cdot)$ ჯგუფი ქვეჯგუფია $(R,\cdot)$ ჯგუფში.

დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრაელე გამრავლების ოპერაციის მიმართ: $(H,\cdot) = (\{q \in Q \mid q > 0\},\cdot)$ ქვეჯგუფია$(Q,\cdot)$ ჯგუფში.

ცხადია ჯგუფის ქვეჯგუფების თანაკვეთა, თუ ის არაცარიელია, ასევე ქვეჯგუფია.

ვთქვათ, (B,μ') ქვეჯგუფია (A,μ) ჯგუფში.

სიმრავლეს $a\mu B = \{a\mu b \mid b \in B\}$ უწოდებენ $a \in A$ ელემენტის ***მარჯვენა მოსაზღვრე კლასს*** B ქვეჯგუფის მიმართ, $B\mu a = \{b\mu a \mid b \in B\}$ სიმრავლეს კი მარცხენა მოსაზღვრე კლასსB ქვეჯგუფის მიმართ.

(A,μ) ჯგუფის (B,μ') ქვეჯგუფს ეწოდება მოცემული ***ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი(გამყოფი),*** თუ ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $a\mu B = B\mu a$.

თეორემა 63. $a\mu B$ და $c\mu B$ მოსაზღვერე კლასები ან ერთმანეთცს ემთხვევიან, ან ერთმანეთს არ ჰკვეთენ.

დამტკიცება: ვთქვათ $h \in a\mu B$ და $h \in c\mu B$, მაშინ $h = a\mu b_1$ და$h = c\mu b_2$, სადაც $b_1, b_2 \in B$, მაშასადამე, $a\mu b_1 = c\mu b_2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $c = a\mu b_1 \mu b_2^{-1}$. $b_1 \mu b_2^{-1} \in B$. μ ოპერაციის ასოციაციურობის ამო, აქედან გამომდინარეობს, რომ $c \in a\mu B$. მაშასადამე $c\mu B = (a\mu d)\mu B$, სადაც $d = b_1 \mu b_2$. მაშასადამე, $c\mu B \subset a\mu B$. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $a\mu B \subset c\mu B$. საბოლოოდ გვექნება $a\mu B = B\mu a$.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მარჯვენა მოსაზღვრე კლასებიA სიმრავლეს ყოფენ თანაუკვეთ კლასებად.

ანალოგიური თეორემა მტკიცდება მარცხენა მოსაზღვრე კლასებისათვისაც. მარცხენა მოსაზღვრე კლასებიც A სიმრავლეს ყოფენ თანაუკვეთ კლასებად.

(B,μ') ქვეჯგუფის მიმართ მარჯვენა (მარცხენა) მოსაზღვრე კლასების რაოდენობას აღნიშნავენ ასე: $(A:B)$ და უწოდებენ (B,μ') ***ჯგუფის მარჯვენა (მარცხენა) ინდექსს*** (A,μ) ჯგუფში.

$(B,\mu') = (\{e_\mu\},\mu')$ ტრივიალური ქვეჯგუფის ინდექსს უწოდებენ (A,μ) ***ჯგუფის რიგს*** და აღნიშნავენ$(A:1)$ სიმბოლოთი

ვთქვათ ახლა (H,μ') ნორმალური ქვეჯგუფია. A/H-ით აღვნიშნოთ ყველა მოსაზღვრე კლასების სიმრაველე H ნორმალური ქვეჯგუფის მიმართ.

$[a]$ სიმბოლოთი კი აღვიშნოთ a ელემენტის მოსაზღვრე კლასი H ნორმალური ქვეჯგუფის მიმართ. $[a] \in A/H$. განვსაზღვროთ ალგებრული ოპერაცია $\overline{\mu} : A/H \times A/H \to A/H$ ფორმულით: $[a]\overline{\mu}[b] = [a\mu b]$.

ეს ალგებრული ოპერაცია კორექტულად არის განსაზღვრული, მართლაც, თუ $[a]=[a']$ და $[b]=[b']$, მაშინ

$[a\mu b]=[(a'\mu c_1)\mu(b'\mu c_2)]=[a'\mu c_1\mu c_2\mu b']=[a'\mu(c_1\mu c_2)\mu b']=[a'\mu c\mu b')]=[(a'\mu(b'\mu c')]=$
$=[a'\mu b'\mu c']=[a'\mu b']$,

სადაც $c_1,c_2\in H, c=c_1\mu c_2, c'\in H$. მაშასადამე $[a\mu b]=[a'\mu b']$, რაც $\bar{\mu}$ ოპერაციის კორექტულობას ამტკიცებს.

ცხადია A/H-ი $\bar{\mu}$ ალგებრულიოპერაციის მიმართ წარმოადგენს ჯგუფს, მართლაც, ნეიტრალური ელემენტის როლს ასრულებს მოსაზღვრე კლასი, რომელიც ემთხვევა H ნორმალურ ქვეჯგუფს; ნებისმიერი $[a]$ კლასისსათვის, თუ განვიხილავთ $x\in A$ ელემენტს, რომლისთვისაც $a\mu x=x\mu a=e$, მაშინ $[a]\bar{\mu}[x]=[x]\bar{\mu}[a]=H$, ანუ $[x]=[a]^{-1}$

$(A/H,\bar{\mu})$ ჯგუფს უწოდებენ (A,μ) ***ჯგუფის ფაქტორჯგუფს*** H ნორმალური ქვეჯგუფის(გამყოფის) მიმართ.

ჰომომორფიზმს $h:A\to A/H$ განსაზღვრულს $h(a)=[a]$ ფორმულით ***კანონიკური ჰომომორფიზმი*** ეწოდება.

ვთქვათ მოცემულია ჰომომორფიზმი $f:(A,\mu)\to(B,\nu)$ და ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი $\ker f=\{a\in A\mid f(a)=e_\nu\}$, სადაც e_ν ნეიტრალური ელემენტია (B,ν) ჯგუფში. $(\ker f,\mu')$, ინდუცირებული μ' ალგებრული ოპერაციით, ცხადია ქვეჯგუფს წარმოადგენს(A,μ) ჯგუფში. $f(a\mu\ker f)=f(a), f(\ker f\mu a)=f(a)$, ერთი ტიპის მოსაზღვრე კლასები $(\ker f,\mu')$ ქვეჯგუფის მიმართ ქმნიან A სიმრავლის დაყოფას, ეს კი ნიშნავს, რომ, თუ $f(c)=f(a)$, მაშინ $c\in a\mu\ker f, c\in\ker f\mu a$. $a\mu\ker f=\ker f\mu a$. უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $(\ker f,\mu')$ ნორმალური ქვეჯგუფია(A,μ) ჯგუფში.

თეორემა 6.4. $f:(A,\mu)\to(B,\nu)$ ჰომომორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს მონომორფიზმს, როდესაც $\ker f=\{e_\mu\}$.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობა ცხადია.

დავამტკიცოთ საკმარისობა. ვთქვათ, $\ker f=\{e_\mu\}$ და არსებობენ ელემენტები: $a_1,a_2\in A: a_1\neq a_2: f(a_1)=f(a_2)$. ვთქვათ, $x\in A$ და $x\mu a_2=a_2\mu x=e_\mu$, მაშინ $a_1\mu x\neq e_\mu$. $f(a_1\mu x)=f(a_1)\nu f(x)=f(a_2)\nu f(x)=f(a\mu x)=f(e_\mu)=e_\nu$, რაც ნიშნავს იმას, რომ $a_1\mu x\neq e_\mu$ და $a_1\mu x\in\ker f$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, ყოველი ორი განსხვავებული a_1,a_2 ელემენტისთვის $f(a_1)\neq f(a_2)$.

თეორემა 6.5. თუ $f:(A,\mu)\to(B,\nu)$ ეპიმორფიზმია, მაშინ ასახვა $\bar{f}:(A/\ker f,\bar{\mu})\to(B,\nu)$ განსაზღვრული $\bar{f}([a])=f(a)$ ფორმულით, წარმოადგენს იზომორფიზმს.

დამტკიცება: ცხადია, განსაზღვრული ასახვა სიურექციაა. ვაჩვენოთ, რომ იგი ინექციაც არის. მართლაც, თუ$[a]\neq[b]$ ისეთი კლასებია, რომლებისთვისაც $\bar{f}([a])=\bar{f}([b])=e_\nu$, მაშინ $f(a)=f(b)=e_\nu$. მაშასადამე, $a\neq b, a,b\in\ker f$. ეს კი ნიშნავს, რომ a,b ელემენტები ერთ მოსაზღვრე კლასში, კერძოდ $\ker f$-ში მდებარეობენ. რაც არ შეიძლება, რადგან $[a]\neq[b]$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\ker\bar{f}$ შედგება მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან, რომელიც $\ker f$ მოსაზღვრე კლასს წარმოადგენს.

ვთქვათ, ახლა ჯგუფი ჩაწერილია მულტიპლიკაციურად(ადიტიურად) $(A,\cdot)$ $((A,+))$.

$(A,\cdot)((A,+))$ ჯგუფს უწოდებენ ***ციკლურ ჯგუფს***, თუ არსებობს ისეთი ელემენტი $a\in A$, რომ ნებისმიერ $x\in A$ ელემენტს აქვს სახე $x=a^n$ ($x=na$) სადაც $n\in Z$. მაგალითი: $(Z,+)$ ჯგუფი ციკლური ჯგუფია. ამ ჯგუფის წარმომქმნელი შეიძლება იყოს 1 ან -1.

a ელემენტს უწოდებენ მოცემული ***ციკლური ჯგუფის წარმომქმნელს***.

ვთქვათ, $(A,\cdot)$ ჯგუფია $a\in A$ მისი რაიმე ელემენტი, მაშინ $a^n, n\in Z$ სახის ელემენტთა სიმრაველე ცხადია ციკლური ქვეჯგუფია $(A,\cdot)$ ჯგუფში. თუ $m\in Z, m>0$ ისეთი რიცხვია, რომ $a^m=1$, მაშინ ამ $m\in Z, m>0$ რიცხვს $a\in A$ ***ელემენტის მაჩვენებელი*** ეწოდება. $m\in Z, m>0$ ნატურალურ რიცხვს უწოდებენ $(A,\cdot)$ ***ჯგუფის მაჩვენებელს***, თუ იგი ამ ჯგუფის თითოეული ელემენტის მაჩვენებელია.

ვთქვათ, ახლა მოცემულია ჰომომორფიზმი $f:(Z,+)\to(A,\cdot)$ ადიტიურად ჩაწერილ მთელ რიცხვთა ჯგუფიდან რაიმე მულტიპლიკაციურად ჩაწერილ ჯგუფში განსაზღვრული ფორმულით $f(n)=a^n$, სადაც $a\in A$ რაიმე ელემენტია.

ვთქვათ, H ამ ჰომომორფიზმის ბირთვია: $H=\ker f$. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. H ტრივიალურია, ანუ იგი შედგება მხოლოდ ერთი $0\in Z$ ნულოვანი ელემენტისაგან, მაშინ f წარმოადგენს $(Z,+)$ ჯგუფის იზომორფიზმს $(A,\cdot)$ ჯგუფის იმ ციკლურ ქვეჯგუფზე რომლის წარმომქმნელიც არის $a\in A$ ელემენტი. ცხადია, ეს ციკლური ქვეჯგუფი არის უსასრულო. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $a\in A$ ***ელემენტს აქვს უსასრულო პერიოდი***.
2. H არაა ტრივიალური. თუ d უმცირესი დადებითი მთელი რიცხვია H ბირთვში, მაშინ ამ d რიცხვს a ***ელემენტის პერიოდს*** უწოდებენ. თუ m ისეთი მთელი რიცხვია, რომ $a^m=1$, მაშინ $m=dk$, სადაც k რაიმე მთელი რიცხვია.

ვაჩვენოთ, რომ $a^0=1, a^1, a^2, ..., a^{d-1}$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტებია. მართლაც, თუ $a^r=a^s; 0\le r,s\le d-1$, და $r\le s$, მაშინ $a^{s-r}=1$ და რადგან $s-r<d$, ამიტომ $s-r=0$, ანუ $r=s$.

a ელემენტით წარმოქმნილი ციკლური ქვეჯგუფის რიგი ცხადია იქნება d.

თუ $(A,\cdot)$ უსასრულო ციკლური ჯგუფია $a\in A$ წარმომქმნელით, მაშინ ჩვენ მიერ განხილული ჰომომორფიზმი: $f:(Z,+)\to(A,\cdot)$ იქნება ზომორფიზმი. მართლაც, f სიურექციაა, ვინაიდან ყოველი ელემენტს $(A,\cdot)$ ჯგუფიდან აქვს სახე a^n და ამიტომ $f^{-1}(a^n)=n$.

f ინექციაა, ვინაიდან, თუ $n_1\ne n_2, n_1<n_2$ და $f(n_1)=a^{n_1}=a^{n_2}=f(n_2)$, მაშინ $a^{n_2-n_1}=1$ და $(A,\cdot)$ ჯგუფი ვერ იქნება უსასრულო.

მგვარად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ არსებობს მხოლოდ ერთადერთი ციკლური ჯგუფი და ეს ჯგუფია მთელ რიცხვთა ჯგუფი ჩვეულებრივი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ვთქვათ, $I^1=\{a_\alpha^1\}_{\alpha\in A}$, სიმბოლოების რაიმე ერთობლიობაა, სადაც A ინდექსთა რაიმე სიმრაველეა, ვუწოდოთ სიმბოლოთა ამ სიმრაველეს ***ალფაბეტი***.

გავაფართოვოთ ეს სიმრაველე სიმბოლოთა $I^{-1}=\{a_\alpha^{-1}\}_{\alpha\in A}$ სიმრაველესთან გაერთიანებით: $I=I^1\cup I^{-1}$. განვიხილოთ I სიმრაველის ელემენტების სასრული მიმდევრობა $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}, , a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, სადაც $\varepsilon_i=\pm1, i=1,2,...,k$. ვუწოდოთ ამ მიმდევრობას $I^1=\{a_\alpha^1\}_{\alpha\in A}$ ***ალფაბეტისაგან შედგენილი სიტყვა***. მიმდევრობას, რომელიც I სიმრაველის არც ერთი ელემენტს არ შეიცავს ვუწოდოთ ცარიელი სიტყვა და

აღენიშნოთ იგი θ სიმბოლოთი. I^1 ალფაბეტისაგან შედგენილი სიტყვების სიმრაელე აღენიშნოთ CI^1 სიმბოლოთი.

განესაზღეროთ CI^1 სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად: $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}, \dots, a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k} \cdot a_{\alpha'_1}^{\varepsilon'_1}, a_{\alpha'_2}^{\varepsilon'_2}, \dots, a_{\alpha'_l}^{\varepsilon'_l} = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}, \dots, a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}, a_{\alpha'_1}^{\varepsilon'_1}, a_{\alpha'_2}^{\varepsilon'_2}, \dots, a_{\alpha'_l}^{\varepsilon'_l}$. ჩხადია, გამრავლების ასეთი ოპერაცია ასოციაციურია. ჩხადია, ალგებრული სტრუქტურა $(CI^1, \cdot)$ წარმოადგენს ნახევარჯგუფს ერთეულით ანუ მონოიდს, სადაც ერთეულის როლს ასრულებს ცარიელი სიტყვა.

შეეიტანოთ CI^1 სიმრაელეში ეკვიეალენტობის მიმართება$\approx$, ჩაეთვალოთ $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \approx \theta$, თუ $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} = a_{\alpha_2}^{-\varepsilon_2}$. სიტყვები $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}, \dots, a_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} a_{\alpha_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1}}, \dots, a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$ და $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}, \dots, a_{\alpha_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}} a_{\alpha_{i+2}}^{\varepsilon_{i+2}}, \dots, a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$ ეკვივალენტური იქნება, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $a_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = a_{\alpha_{i+1}}^{-\varepsilon_{i+1}}$. ამ ეკვიეალენტობის მიმართებით განსაზღერულ $CI^{-1}/_{\approx}$ ფაქტორ სიმრაელეზე კორექტულად განისაზღერება გამრაელების ოპერაცია.

$$[a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}, \dots, a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}] \cdot [a_{\alpha'_1}^{\varepsilon'_1}, a_{\alpha'_2}^{\varepsilon'_2}, \dots, a_{\alpha'_l}^{\varepsilon'_l}] = [a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}, \dots, a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}, a_{\alpha'_1}^{\varepsilon'_1}, a_{\alpha'_2}^{\varepsilon'_2}, \dots, a_{\alpha'_l}^{\varepsilon'_l}]$$

მრაელების ამ ოპერაციის მიმართ $CI^{-1}/_{\approx}$ სიმრაელე წარმოადგენს ჯგუფის ალგებრულ სტრუქტურას, სადაც ერთეულის როლს ასრულებს $[\theta]$- ცარიელი სიტყვის კლასი.

$[a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}, \dots, a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}]$ ელემენტის შებრუნებული კი იქნება ელემენტი $[a_{\alpha_k}^{-\varepsilon_k}, a_{\alpha_{k-1}}^{-\varepsilon_{k-1}}, \dots, a_{\alpha_1}^{-\varepsilon_1}]$.

$(CI^{-1}/_{\approx}; \cdot)$ ჯგუფს ასეთნაირად განსაზღერული გამრავლების ოპერაციით, უწოდებენ I^1 ალფაბეტით წარმოშობილ ***თავისუფალ ჯგუფს***.

მაგალითი: $(Z,+)$ თაეისუფალი ჯგუფია, რომელიც წარმოქმნილია $I^1 = \{1\}$ ალფაბეტით.

ვთქვათ $(A_i, \mu_i)_{i\in I}$ ჯგუფთა რაიმე ერთობლიობაა, განეიხილოთ, ასახეათა სიმრაელე $\bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i) = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}$, რომელებიც მხოლოდ ინდექსთა სასრულ რაოდენობაზე არ ღებულოენ შესაბამისი ჯგუფების ნეიტრალური ელემენტების მნიშენელობას. $\bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i)$ სიმრაელეში განესაზღეროთ ალგებრული ოპერაცია $\mu : \bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i) \times \bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i) \to \bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i)$ ფორმულით: $(f\mu g)(i) = f(i)\mu_i f(i)$. ადეილია მიხეედრა, რომ $(\bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i), \mu)$ წარმოადგენს ჯგუფის ალგებრულ სტრუქტურას. $(\bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i), \mu)$ ჯგუფს უწოდებენ ჯგუფთა $(A_i, \mu_i)_{i\in I}$ ერთობლიობის ***პირდაპირ ჯამს***.

ვთქვათ $(A_i, \mu_i)_{i\in I}$ ჯგუფთა რაიმე ერთობლიობაა, განეიხილოთ, ასახეათა სიმრაელე $\bigotimes_{i\in I}(A_i, \mu_i) = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}$.

$\bigotimes_{i\in I}(A_i, \mu_i)$ სიმრაელეში განესაზღეროთ ალგებრული ოპერაცია $\mu : \bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i) \times \bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i) \to \bigoplus_{i\in I}(A_i, \mu_i)$ ფორმულით: $(f\mu g)(i) = f(i)\mu_i f(i)$. ადეილია მიხეედრა, რომ $(\bigotimes_{i\in I}(A_i, \mu_i), \mu)$ წარმოადგენს ჯგუფის ალგებრულ სტრუქტურას. $(\bigotimes_{i\in I}(A_i, \mu_i), \mu)$ ჯგუფს უწოდებენ ჯგუფთა $(A_i, \mu_i)_{i\in I}$ ერთობლიობის ***პირდაპირ ნამრაელს***.

ცხადია, თუ I ინდექსთა სიმრაელე სასრულია, მაშინ $(A_i, \mu_i)_{i\in I}$ ერთობლიობის პირდაპირი ჯამი და პირდაპირი ნამრაელი ერთმანეთს ემთხვევა.

მაგალითი: $(A_1,\mu_1)=(Z,+),(A,\mu_2)=(Z,+)$, მაშინ
$(\underset{i\in I}{\oplus}(A_i,\mu_i),\mu)=(Z,+)\oplus(Z,+)=(Z\times Z,\hat{+})$, სადაც $\hat{+}:(Z\times Z)\times(Z\times Z)\to Z\times Z$
განისაზღვრება ფორმულით $\hat{+}((z_1,z_2),(z_3,z_4))=(z_1+z_3,z_2+z_2)$. აქ ასხვა
$f:\{1,2\}\to Z\,|\,f(1)=z_1,f(2)=z_2$ გაიგივებულია წყვილთან (z_1,z_2), ხოლო
$g:\{1,2\}\to Z\,|\,f(1)=z_3,g(2)=z_4$ ასახვა- (z_3,z_4) წყვილთან.

§7. რგოლისა და ველის ალგებრული სტრუქტურები

A სიმრავლეში განსაზღვრულია ***რგოლის ალგებრული სტრუქტურა,*** თუ მასში განსაზღვრულია ორი ალგებრული ოპერაცია:

$$+:A\times A\to A,\ \cdot:A\times A\to A,$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ მოთხოვნებს:

1. $a+b=b+a$.
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. არსებობს ელემენტია $0\in A$, რომელსაც აქვს თვისება $a+0=a$.
4. ყოველი $a\in A$, ელემენტისათვის არსებობს ელემენტი $-a$, რომელსაც აქვს თვისება$a+(-a)=0$.
5. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
6. $a\cdot(b+c)=a\cdot(b+c),(b+c)\cdot a=b\cdot.a+c\cdot a$

ჩამოთვლილი მოთხოვნები ნიშნავს, რომ შეკრების ალგებრული ოპერაციის მიმართ A წარმოადგენს კომუტაციურ ჯგუფს, გამრავლების ალგებრული ოპერაციის მიმართ ნახევარჯგუფს, პირველი და მეორე ოპერაციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია დისტრიბუციულობის(განრიგადობის) კანონებით:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot(b+c),(b+c)\cdot a=b\cdot.a+c\cdot a.$$

თუ გამრავლების ოპერაცია რგოლში კომუტაციურია: $a\cdot b=b\cdot a$, მაშინ რგოლს უწოდებენ ***კომუტაციურს.***

თუ რგოლში არსებობს ნეიტრალური ელემენტი გამრავლების ოპერაციის მიმართ $1\in A,1\cdot a=a\cdot 1$, მაშინ რგოლს უწოდებენ ***ერთეულოვანს*** , ანუ ***უნიტალურს.***

მაგალითი. $(Z,+,\cdot)$ მთელ რიცხვთა სიმრავლე, $(Q,+,\cdot)$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, $(R,+,\cdot)$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ამ რიცხვთა შეკრების და გამრავლების ოპერაციების მიმართ წარმოადგენენ კომუტაციური, უნიტალური რგოლის ალგებრულ სტრუქტურებს.

მაგალითი: $(M_n,+,\cdot)$- n რიგის მატრიცთა სიმრავლე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ წარმოადგენს არაკომუტაციური, უნიტალური რგოლის ალგებრულ სტრუქტურას.

დავამტკიცოთ რამდენიმე მარივი ფაქტი:

$a\cdot(a_1+a_2+a_3)=a\cdot(a_1+(a_2+a_3))=aa_1+a\cdot(a_2+a_3)=a\cdot a_1+a\cdot a_2+a\cdot a_3$.

$a\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4)=a\cdot(a_1+(a_2+a_3+a_4))=aa_1+a\cdot(a_2+a_3+a_4)=$

$=a\cdot a_1+a\cdot a_2+a\cdot a_3+a\cdot a_4$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$a\cdot(a_1+a_2+...+a_n)=a\cdot a_1+a\cdot a_2+...+a\cdot a_n$. თუ $b_1=b_2=...=b_n=b,n\in N$, მაშინ $na\cdot b=a\cdot nb=n(a\cdot b)$.

$a\cdot 0=0\cdot a=0$. მართლაც, $a\cdot 0+a=a\cdot(0+1)=1\cdot a=a,0\cdot a+a=a\cdot(0+1)=a\cdot 1=a$, ეს კი ნიშნავს, რომ $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

წინა ტოლობებიდან გამომდინარეობს: $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)=a\cdot(-b)$. მართლაც, $(-a)\cdot b+a\cdot b=(-a+a)\cdot b=0$. მაშასადამე, $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$;
$a\cdot(-b)+a\cdot b=a\cdot(-b+b)=0$, აქედან $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$; საბოლოოდ გვექნება $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)=a\cdot(-b)$.

როგორც ჯგუფში, რგოლშიც a და b ელემენების სხვაობა $a-b=a+(-b)$.

წინა ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ დისტრიბუციულობის კანონებს ადგილი აქვს სხვაობისა და გამრავლებისათვის:

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c\,,(b-c)\cdot a=b\cdot a-c\cdot a\,.$$

მართლაც, $a\cdot(b-c)=a\cdot(b+(-c))=a\cdot b+a\cdot(-c)=a\cdot b+(-(a\cdot c))=a\cdot b-a\cdot c$.

ანალოგიურად მტკიცდება ტოლობაც $(b-c)\cdot a=b\cdot a-c\cdot a$.

ყოველივე ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ რგოლში ადგილი აქვს ტოლობებს: $na\cdot b=a\cdot nb=n(a\cdot b)$ ნებისმიერი $z\in Z$ მთელი რიცხვისათვის.

განვიხილოთ აღნიშვნა: $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

ცხადია, ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობებს: $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+b_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$,

$$a\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}ab_i\,,\ (\sum_{i=1}^{n}a_i)b=\sum_{i=1}^{n}a_ib\,,\ \sum_{i=1}^{s}a_i\cdot\sum_{k=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}a_ib_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}a_ib_k\,,$$

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}a_{ik}\,.$$

$(B,+,\cdot),B\subset A$ რგოლს $(A,+,\cdot)$ რგოლიდან ინდუცირებული ალგებრული ოპერაციებით, თუ ისინი არსებობენ, $(A,+,\cdot)$ რგოლის ***ქვერგოლი*** ეწოდება.

მაგალითი: $(Z,+,\cdot)$ მეთლ რიცხვთა როლი $(Q,+,\cdot)$ რაციონალურ რიცხვთა რგოლის ქვერგოლია; $(Q,+,\cdot)$ კი $(R,+,\cdot)$ ნამდვილ რიცხვთა რგოლის ქვერგოლია.

ორ $a,b\in A$ ელემენტს უწოდებენ ***ნულის გამყოფებს***$(A,+,\cdot)$ რგოლში, თუ $a\cdot b=0$.

ნიტალურ, კომუტაციურ რგოლს, რომელშიც ნულის გამყოფები არ არსებობენ, ***მთელობის არე ეწოდება.***

მაგალითი: $(Z,+,\cdot)$, $(Q,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ რგოლები მთელობის არეებია.

$(A,+,\cdot)$ რგოლის ***მარცხენა იდეალი*** ეწოდება მის ისეთ$(B,+,\cdot)$ ქვერგოლს, რომელსაც აქვს თვისება: $B\cdot a=\{b\cdot a\,|\,b\in B\}\subset B$ ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისათვის.

$(A,+,\cdot)$ რგოლის ***მარჯვენა იდეალი*** ეწოდება მის ისეთ$(B,+,\cdot)$ ქვერგოლს, რომელსაც აქვს თვისება: $a\cdot B=\{a\cdot b\,|\,b\in B\}\subset B$ ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისათვის.

თუ მარჯვენა და მარცხენა იდეალები ერთმანეთს ემთხვევიან, მაშინ ასეთ იდეალს ***რგოლის ორმხრივი იდეალი*** ეწოდება. ცხადია კომუტაციურ რგოლში ყველა იდეალი ორმხრივია.

მაგალითი: $(A,+,\cdot)$ რგოლში განვიხილოთ ქვესიმრავლე $aA=\{a\cdot b\,|\,b\in b\}\subset A$, სადაც $a\in A$ რაიმე დაფიქსირებული ელემენტია. ეს ქვესიმრავლე წარმოადგენს მარცხენა იდეალს $(A,+,\cdot)$ რგოლში. მართლაც, თუ $ab\in aA,ab'\in aA$, მაშინ $a\cdot b+a\cdot b'=a\cdot(b+b')\in aA$ და ნებისმიერი $c\in A$, $b\in aA$ ელემენტებისათვის $b\cdot c=(a\cdot b')\cdot c=a\cdot(b'\cdot c)\in aA$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ რაიმე დაფიქსირებული $a\in A$ ელემენტისათვის $Aa=\{b\cdot a\,|\,b\in A\}$ მარჯვენა იდეალია, ხოლო $AaA=\{b\cdot a\cdot c\,|\,b,c\in A\}$-ორმხრივი იდეალი $(A,+,\cdot)$ რგოლში.

aA და Aa სახის იდეალებს $(A,+,\cdot)$ რგოლში ***მთავარი მარცხენა*** და ***მთავარი მარჯვენა*** იდეალები ეწოდებათ.

კომუტაციურ რგოლს ეწოდება *მთავარ იდეალთა რგოლი* თუ მისი ყოველი იდეალი მთავარი იდეალია.

მაგალითი: განვიხილოთ მთელ რიცხვთა რგოლი $(Z,+,\cdot)$. ვთქვათ, $B \neq Z$ ნებისმიერი იდეალია ამ რგოლში. თუ $n \in B$ მაშინ $-n \in B$. ვთქვათ d უმცირესი მთელი დადებითი რიცხვია B იდეალში, თუ $q \in Z$ ისეთი რიცხვია, რომ $|n-d\cdot q|<d$ და $r=|n-d\cdot q|$, მაშინ $n=d\cdot q+r$ $0\leq r<d, r\in Z$ და $r=n-d\cdot q$. რადგან B იდეალია, ამიტომ $r\in B$. მაგრამ $0\leq r<d$, ამიტომ $r=0$. მაშასადამე, ყოველ $n\in B$ ელემენტს აქვს სახე $n=d\cdot q$, ეს კი ნიშნავს, რომ $B=dZ$, ანუ B მთავარი იდეალია. რადგან $B\neq Z$ ნებისმიერად აღებული იდეალია, ამიტომ $(Z,+,\cdot)$ მთავარ იდეალთა რგოლია.

B იდეალს კომუტაციურ $(A,+,\cdot)$ რგოლში ეწოდება *მარტივი იდეალი*, თუ $x,y\in A$, $x\cdot y\in B$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $x\in B$ ან $y\in B$.

მაგალითი: თუ $p\in Z$ მარტივი რიცხვია, მაშინ pZ მთავარი იდეალი, მარტივი იდეალია. მართლაც, თუ $x\cdot y\in pZ$, მაშინ $x\cdot y=p\cdot z, z\in Z$. თუ $x\notin pZ$, მაშინ $y=p\cdot z$ და ამიტომ $y\in pZ$. თუ $y\notin pZ$, მაშინ $x=p\cdot z$ და ამიტომ $x\in pZ$.

ვთქვათ ახლა nZ მარტივი იდეალია და ვთქვათ, $n=n'\cdot n'', n'\neq 1, n''\neq 1$, მაშინ $x,y\in Z$, $x\cdot y\in nZ$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს, რომ $x\in nZ$ ან $y\in nZ$. ვთქვათ, $x=n'\cdot z', y=n''\cdot z'', z'\notin n''Z, z''\notin n'Z$, მაშინ $x\cdot y\in nZ$, მაგრამ $x\notin nZ, y\notin nZ$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, $n=n'\cdot n'', n'\neq 1, n''\neq 1$ პირობის დროს nZ მარტივი იდეალი არ ყოფილა, აქედან ამომდინარე n მარტივი რიცხვი უნდა იყოს, ანუ $(Z,+)$ რგოლის მხოლოდ ის იდეალია მარტივი, რომელსაც აქვს სახე: pZ, სადაც p მარტივი რიცხვია.

B იდეალს კომუტაციურ $(A,+,\cdot)$ რგოლში უწოდებენ *მაქსიმალურ იდეალს*, თუ $B\neq A$ და არ არსებობს ისეთი სხვა იდეალი, რომ $B'\neq B$ და $B\subset B'$

თეორემა 7.1. ყოველი მაქსიმალური იდეალი მარტივია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $x,y\in A$, $x\cdot y\in B$ და $x\notin B$, მაშინ $B+Ax=\{b+a\cdot x\mid b\in B, a\in A\}$ იდეალი განსხვავებულია B იდეალისაგან და $B\subset B+Ax$. მაგრამ B მაქსიმალურია, აქედან გამომდინარე, ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $A=B+Ax$. თუ ეს ასეა, მაშინ $(A,+,\cdot)$, რგოლის ერთეული $1=b+a\cdot x$, სადაც $b\in B, a\in A$. თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ y ელემენტზე, მივიღებთ $y=b\cdot y+(a\cdot x)\cdot y$, ეს კი ნიშნავს, რომ $y\in B$.

ვთქვათ, B ორმხრივი იდეალია $(A,+,\cdot)$ რგოლში.

თუ $(A/B,\oplus)$ წარმოადგენს $(A,+)$ კომუტაციური ჯგუფის ფაქტორჯგუფს $(B,+)$ ქვეჯგუფის მიმართ. მაშინ ამ ჯგუფში შეიძლება განისაზღვროს გამრავლების $\otimes : A/B\times A/B\rightarrow A/B$ ოპერაცია შემდეგნაირად: $[a]\otimes[b]=[a\cdot b]$. ეს ოპერაცია კორექტულად არის განსაზღვრული. მართლაც, თუ $[a]=[a'],[b]=[b']$ მაშინ $a'=a+c, b'=b+c', c,c'\in B$, $[a'\cdot b']=[a\cdot b+a\cdot c'+c\cdot b+c\cdot c']=[a\cdot b+c'']=[a\cdot b]$.
ცხადია, სრულდება დისტრიბუციულობის კანონიებიც.

ასახვას $f:A\rightarrow B$ უწოდებენ ***ჰომომორფიზმს*** $(A,+,\cdot)$ რგოლიდან $(B,\oplus,\otimes)$ რგოლში თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

$f(a+b)=f(a)\oplus f(b)$ და $f(a\cdot b)=f(a)\otimes f(b)$. ეს ჰომომორფიზმი აღინიშნება ასე: $f:(A,+,\cdot)\rightarrow(B,\oplus,\otimes)$.

ცხადია, $f(0_+)=0_\oplus$. ისევე, როგორც ჯგუფების შემთხვევაში გვაქვს $f:A\rightarrow B$ ჰომომორფიზმის ბირთვის ცნება: $\ker f$ წარმოადგენს $(A,+,\cdot)$ რგოლის იმ

ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც $(B,\oplus,\otimes)$ რგოლის $0_\oplus$ ნულში გადადიან $f: A \to B$ ჰომომორფიზმის დროს.

ცხადია, ჰომომორფიზმის ბირთვი წარმოადგენს ორმხრივ იდეალს შესაბამის რგოლში.

თუ $f: A \to B$ ინექციაა ან სიურექცია ან ბიექცია, მაშინ რგოლთა ჰომომორფიზმს უწოდებენ მონომორფიზმს ან ეპიმორფიზმს ან იზომორფიზმს, შესაბამისად.

როგორც ჯგუფების შემთხვევაში, აქაც მტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 7.2. თუ $f:(A,+,\cdot) \to (B,\oplus,\otimes)$ ეპიმორფიზმია, მაშინ ასახვა $h:(A/_{\ker f},\hat{+},\hat{\cdot}) \to (B,\oplus,\otimes)$ განსაზღვრული $h([a]=[f(a)]$ ფორმულით იზომორფიზმია.

A სიმრავლეში განსაზღვრულია ***ველის ალგებრული სტრუქტურა,*** თუ მასში განსაზღვრულია ორი ალგებრული ოპერაცია:

$$+: A\times A \to A, \quad \cdot: A\times A \to A,$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ მოთხოვნებს:

1. $a+b=b+a$.
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. არსებობს ელემენტი $0\in A$, რომელსაც აქვს თვისება $a+0=a$.
4. ყოველი $a\in A$, ელემენტისათვის არსებობს ელემენტი $-a$, რომელსაც აქვს თვისება $a+(-a)=0$.
5. $a\cdot b=b\cdot a$.
6. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
7. არსებობს ელემენტია $1\in A, 1\neq 0$, რომელსაც აქვს თვისება: $a\cdot 1=a$.
8. ყოველი $a\in A$, ელემენტისათვის არსებობს ელემენტი a^{-1}, რომელსაც აქვს თვისება: $aa^{-1}=1$.
9. $a\cdot(b+c)=a\cdot(b+c)$.

ჩამოთვლილი მოთხოვნები ნიშნავს, რომ შეკრების ალგებრული ოპერაციის მიმართ A წარმოადგენს კომუტაციურ ჯგუფს, გამრავლების ალგებრული ოპერაციის მიმართაც ასევე კომუტაციურ ჯგუფს; პირველი და მეორე ოპერაციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია დისტრიბუციულობის(განრიგადობის)

$$a\cdot(b+c)=a\cdot(b+c)$$

კანონით.

მაგალითი: $(Q,+,\cdot)$ და $(R,+,\cdot)$ წარმოადგენენ ველის ალგებრულ სტრუქტურებს, $(Z,+,\cdot)$ არ წარმოადგენს ველის ალგებრულ სტრუქტურას.

მაგალითი: $a+b\sqrt{3}$ სახის რიცხვების სიმრავლე, სადაც $a.b\in Q$, ჩვეულებრივი შეკრების და გამრავლების ოპერაციების მიმართ წარმოადგენს ველის ალგებრულ სტრუქტურას.

ველს $(B,+,\cdot), B\subset A$, $(A,+,\cdot)$ ველიდან ინდუცირებული ალგებრული ოპერაციებით, $(A,+,\cdot)$ ***ველის ქვეველი*** ეწოდება. ხოლო $(A,+,\cdot)$ ველს $(B,+,\cdot)$ ველის გაფართოება.

მაგალითი: $(Q,+,\cdot)$ წარმოადგენს $(R,+,\cdot)$ ველის ქვეველს.

მაგალითი: $a+b\sqrt{3}$ სახის რიცხვების სიმრავლე, სადაც $a,b\in Q$, ჩვეულებრივი შეკრების და გამრავლების ოპერაციების მიმართ წარმოადგენს $(R,+,\cdot)$ ველის ქვეველს. ცხადია, ველის ქვეველთა ყოველი თანაკვეთა ქვეველია.

ვთქვათ a,b ელემენტები ეკუთვნიან რაიმე ველს და $a \cdot b = 0$. დავუშვათ $a \neq 0$, მაშინ $a^{-1} \cdot a \cdot b = a \cdot 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $b = 0$. რაც ამტკიცებს იმას, რომ ყოველი ველი წარმოადგენს მთელობის არეს.

ველთა ჰომომორფიზმი $f:(A,+,\cdot) \to (B,\oplus,\otimes)$ ისევე განისაზღვრება, როგორც რგოლთა ჰომომორფიზმი. ცხადია $f(1_{\cdot}) = 1_{\otimes}$

თეორემა: 7.2 . ველთა ჰომომორფიზმი ყოველთვის მონომორფიზმია.

დამტკიცება: ვთქვათ $f:(A,+,\cdot) \to (B,\oplus,\otimes)$ ჰომომორფიზმის ბირთვი არაა ტრივიალური. ავიღოთ $a \in \ker f, a \neq 0_+$ ელემენტი, $a^{-1} \cdot a = 1_{\cdot} \in \ker f$, მაგრამ $f(1_{\cdot}) = 1_{\otimes} \neq 0_{\oplus}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $1_{\cdot} \notin \ker f$, მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, $a = 0_+$ და $\ker f = \{0_+\}$.

განვიხილოთ რგოლთა ჰომომორფიზმი $f:(Z,+,\cdot) \to (A,\oplus,\otimes)$ განსაზღვრული ფორმულით $f(z) = z1_{\otimes}$, სადაც $(A,\oplus,\otimes)$ ველია. თუ f ჰომომორფიზმის ბირთვი ტრივიალურია, ანუ $\ker f = \{0\}$, მაშინ ამბობენ, რომ $(A,\oplus,\otimes)$ ***ველის მახასიათებელი*** $k = 0$. თუ $\ker f$ არაა ტრივიალური, მაშინ იგი, რადგან წარმოადგენს იდეალს $(Z,+,\cdot)$ რგოლში, იქნება nZ სახის, ანუ მთავარი იდეალი. ვთქვათ $z \cdot y \in nZ$, მაშინ $f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y) = 0$, ამიტომ, რადგან $(A,\oplus,\otimes)$ რგოლი მთელობის არეა, $f(x) = 0_{\oplus}$ ან $f(y) = 0_{\oplus}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x \in nZ$ ან $y \in nZ$ და $\ker f = nZ$ წარმოადგენს მარტივ იდეალს, ამიტომ $n = p$ მარტივი რიცხვია.

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $(A,\oplus,\otimes)$ ველის მახასიათებლია $k = p$ მარტივი რიცხვი.

სავარჯიშოები:

1. დაამტკიცეთ, რომ ქვესიმრავლე $B \subset A$ წარმოადგენს $(A,+,\cdot)$ რგოლის ქვერგოლს ინდუცირებული ალგებრული ოპერაციებით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

ა. $B \neq \Theta$.

ბ. თუ $a,b \in B$, მაშინ $a - b \in B$.

გ. თუ $a,b \in B$, მაშინ $a \cdot b \in B$.

2. თუ $a \neq 0$ და იგი არ არის ნულის გამყოფი, მაშინ თუ $a \cdot x = a \cdot y$, მაშინ $x = y$. დაამტკიცეთ, რომ ველში ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტებს:

1. თუ $a \neq 0$ და $b \neq 0$, მაშინ $ab \neq 0$.
2. თუ $c \neq 0$, მაშინ $a \cdot c = b \cdot c$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a = b$.

§8. ერთი ცვლადის მრავალწევრები

ვთქვათ, $(A,+,\cdot)$ რაიმე უნიტალური, კომუტაციური რგოლია. ***ერთი ცვლადის მრავალწევრი(პოლინომი)*** $(A,+,\cdot)$ რგოლს ზემოთ ეწოდება $f: A \to A$ ასახვას, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით: $p(x) = a_0 x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$, სადაც $a_0, a_2, \ldots, a_n$ რაიმე დაფიქსირებული ელემენტებია $(A,+,\cdot)$ რგოლში, x კი ცვლადი სიდიდე, რომელიც მნიშვნელობებს ღებულობს ამ რგოლიდან.

$a_0, a_2, \ldots, a_n$ ელემენტებს $(A,+,\cdot)$ რგოლიდან ***მრავალწევრის კოეფიციენტები*** ეწოდება. a_0 კოეფიციენტს უწოდებენ ***თავისუფალ წევრს***, a_n კოეფიციენტს კი, თუ იგი განსხვავებულია რგოლის ნულისაგან, ***უფროს კოეფიციენტს***. $k \in N$ ნატურალურ რიცხვს უწოდებენ ***მრავალწევრის ხარისხს***, თუ იგი x ცვლადის ის მაქსიმალური ხარისხია, რომელთანაც კოეფიციენტი a_k ნულისაგან

განსხვაევბულია. მრავალწევრის ხარისხს აღნიშნავენ ასე: $\deg p(x)$. მრავალწევრს $p(x)=0\cdot x^0$ უწოდებენ ***ნულოვან მრავალწევრს,*** მას არ მიეწერება არავითარი ხარისხი, ხოლო მრავალწევრს $p(x)=a_0x^0, a_0\neq 0$ უწოდებენ ***ნული ხარისხის მრავალწევრს.***

მრავალწევრს $p(x)=1x^0$, სადაც 1 წარმოადგენს $(A,+,\cdot)$ რგოლის ერთეულს, უწოდებენ ***ერთეულოვან მრავალწევრს.***

ორ მრავალწევრს უწოდებენ ტოლს, თუ მათი კოეფიციენტები ერთი და იმავე ხარისხის ცვლად სიდიდესთან ერთმანეთის ტოლია.

შემდეგში, როდესაც საქმე გვექნება მულტიპლიკაციურად ჩაწერილ ალგებრულ ოპერაციასთან, a და b ელემენტების $a\cdot b$ ნამრავლს ჩაეწერთ ასე: ab.

მაგალითი. ვთქვათ $(A,+,\cdot)=(R,+,\cdot)$ ნამდვილ რიცხვთა რგოლია. მაშინ

$$p_1(x)=3x^0+2xx^1+\sqrt{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+0x^4+x^5,\quad p_2(x)=0x^0+x^1+0x^2+\frac{2}{\sqrt[3]{5}}x^3+2x^4+0x^5+0x^6$$

მრავალწევრებია ნამდვილ რიცხვთა რგოლს ზემოთ. $\deg p_1(x)=5$, $\deg p_2(x)=4$.

მაგალითი: $2x^0+3x^1+0x^2+\sqrt{2}x^3$ და $2x^0+3x^1+0x^2+\sqrt{2}x^3+0x^4$ მრავალწევრები $(R,+,\cdot)$ რგოლს ზემოთ ერთმანეთის ტოლია. ერთმანეთის ტოლია ასევე მრავალწევრები $0x^0$ და $0+0x+0x^2+\ldots+0x^n$, რომლებიც ნულოვან მრავალწევრებს წარმოადგენენ.

$(A,+,\cdot)$ რგოლს ზემოთ ერთი ცვლადის მრავალწევრთა სიმრავლეს, აღნიშნავენ $A[x]$ სიმბოლოთი. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მრავალწევრებს მხოლოდ რიცხვით რგოლებს ზემოთ.

$R[x]$ სიმრავლეში შევიტანოთ შეკრებისა და გამრავლების ალგებრული ოპერაციები:

$p_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ და $p_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ მრავალწევრთა ჯამი ეწოდება მრავალწევრს: $(p_1+p_2)(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_sx^s$,

სადაც $c_i=a_i+b_i, i=0,1,2,\ldots,s; s=\max\{n,m\}$ და თუ $n>m$ ითვლება, რომ $b_{m+1}=b_{m+2}=\ldots=b_n=0$.

$p_1(x)=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ და $p_2(x)=b_0x^0+b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ მრავალწევრთა ნამრავლი ეწოდება მრავალწევრს:

$$(p_1\cdot p_2)(x)=d_0x^0+d_1x^1+d_2x^2+\ldots+d_{n+m}x^{n+m},$$

სადაც $d_k=\sum_{i+j}a_ib_j; k=0,1,2,\ldots,n+m$. ასეთი ჯამების გამოთვლის დროს

ვითვალისწინებთ, რომ, თუ $i>n, j>m$, მაშინ $a_i=0, b_j=0$.

ამ ალგებრული ოპერაციების მიმართ $R[x]$ სიმრავლე წარმოადგენს უნიტალური, კომუტაციური რგოლის ალგებრულ სტრუქტურას. მართლაც, შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებს, ცხადია, აქვთ კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის თვისებები; შეკრების ოპერაციის მიმართ ნეიტრალურ ელემემენტს წარმოადგენს ნულოვანი მრავალწევრი; გამრავლების ოპერაციის მიმართ ნეიტრალურ ელემენტს წარმოადგენს ერთეულოვანი მრავალწევრი; $p(x)$ მრავალწევრის მოპირდაპირეს წარმოადგენს $-p(x)$ მრავალწევრი;

$p_1(x)=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, $p_2(x)=b_0x^0+b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ და $p_3(x)=c_0x^0+c_1x^1+c_2x^2+\ldots+c_lx^l$ მრავალწევრებისათვის $p_1(x)(p_2(x)+p_3(x))$ ტოლია $p_4(x)=d_0x^0+d_1x^1+d_2x^2+\ldots+d_{m+s}x^{n+s}$ მრავალწევრის, სადაც

$$d_k=\sum_{i+j=k}a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}a_ib_j+\sum_{i+j=k}a_ic_j, k=0,1,2,\ldots,n+s, s=\max\{m,l\}.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $p_1(x)(p_2(x)+p_3(x))=p_1(x)p_2(x)+p_1(x)p_3(x)$. მაშასადამე, სრულდება დისტრიბუციულობის ერთ კანონი. დისრიბუციულობის მეორე $(p_1(x)+p_2(x))p_3(x)=p_1(x)p_3(x)+p_2(x)p_3(x)$ კანონიც დამკიცდება ანალოგიურად

თეორემა 8.1. $R[x]$ მთელობის არეა.

დამტკიცება: ავიღოთ ნებისმიერი ორი $p(x)=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+...+a_nx^n\neq 0$, $q(x)=b_0x^0+b_1x^1+b_2x^2+...+b_mx^m\neq 0$ მრავალწევრი. ვთქვათ, $\deg p(x)=n, \deg(q(x)=m$, მაშინ $\deg(p\cdot q)(x)=n+m$, ასეთ შემთხვევაში $d_{n+m}=a_nb_m\neq 0$, რადგან $(R,+,\cdot)$ მთელობის არეა. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $(p\cdot q)(x)\neq 0$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

განვიხილოთ $R[x]$ რგოლის ქვესიმრაველე B, რომელიც შედგება $p(x)=ax^0$ სახის ანუ ნული ხარისხის მრავალწევრებისაგან, ცხადია, ეს სიმრაველე ინდუცირებული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ წარმოადგენს $R[x]$ რგოლის ქვერგოლს. განვიხილოთ ასახვა $f:R\to B$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით: $f(a)=ax^0$. ადვილია დანახვა, რომ ეს ასახვა იზომორფიზმია. აქედან გამომდინარე შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა$(R,+,\cdot)$ რგოლი წარმოადგენს $R[x]$ რგოლის ქვერგოლს.

რადგან $R[x]$ მთელობის არეა, მაშინ $p(x),q(x)\in R[x]$ მრავალწევრებისთვის $(p\cdot q)(x)=p(x)q(x)$ x ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $(R,+,\cdot)$ როლიდან.

ვთქვათ, $p(x),q(x)\in R[x], q(x)\neq 0$. ვიტყვით, რომ $p(x)$ ***მრავალწევრი იყოფა*** $q(x)$ ***მრავალწევრზე***, თუ არსებობს ისეთი მრავალწევრი $s(x)$, რომ ადგილი აქვს ტოლობას: $p(x)=q(x)s(x)$.

$q(x)$ მრავალწევრს $p(x)$ ***მრავალწევრის გამყოფი*** ეწოდება, $s(x)$ მრავალწევრს კი $p(x)$ მრავალწევრის $q(x)$ მრავალწევრზე გაყოფით მიღებული ***განაყოფი***.

$s(x)$ მრავალწევრი ცალსახად განისაზღვრება $p(x)$ და $q(x)$ მრავალწევრების საშუალებით. მართლაც, ვთქვათ არსებობს მეორე $s'(x)$ მრავალწევრი, რომელისთვისაც ასევე სრულდება ტოლობა: $p(x)=q(x)s'(x)$, მაშინ გვექნება: $q(x)s(x)=q(x)s'(z)$, აქედან კი გვექნება: $q(x)(s(x)-s'(x))=0$, აქედან კი იმის გამო, რომ $R[x]$ მთელობის არეა, გამომდინარეობს $s(x)-s'(x)=0$ ანუ $s(x)=s'(x)$.

ელემენტარულია შემდეგი ფაქტების ჩვენება:

თუ $p(x)$ მრავალწევრი იყოფა $q(x)$ მრავალწევრზე და $q(x)$ მრავალწევრი იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ ცხადია, $p(x)$ მრავალწევრი იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე.

თუ $p(x)$ მრავალწევრი იყოფა $q(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ ყოველი $u(x)\in R[x]$ მრავალწევრისათვის $u(x)p(x)$ მრავალწევრი იყოფა $q(x)$ მრავალწევრზე.

თუ მრავალწევრთა $p(x)+q(x)+r(x)$ ჯამი იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე, $p(x)$ და $q(x)$ მრავალწევრები იყოფიან $g(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ $r(x)$ მრავალწევრიც იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე.

თუ $p(x)$ მრავალწევრი იყოფა $q(x)$ მრავალწევრზე, $q(x)$ მრავალწევრი იყოფა $p(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ $p(x)=aq(x)$, სადაც $a\in R$ რაიმე ნამდვილი რიცხვია.

თეორემა 8.2(ბეზუს თეორემა). ყოველი $p(x)\in R[x]$ მრავალწევრისთვის და პირველი ხარისხის $x-c\in R[x], c\in R$ მრავალწევრისათვის არსებობს ერთადერთი ისეთი $g(x)\in R[x]$ მრავალწევრი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას: $p(x)=(x-c)g(x)+p(c)$.

დამტკიცება: პირდაპირი ადამრავლებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$(x^n - c^n) = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + x^{n-3}c^2 + \dots + x^2c^{n-3} + xc^{n-2} + c^{n-1}).$$

აქედან გამომდინარე:

$$p(x) - p(c) = a_0 - a_0 + a_1(x-c) + a_2(x^2 - c^2) + \dots + a_n(x^n - c^n) =$$
$$= (x-c)g(x).$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

დამტკიცებული თეორემიდან ვაქვს:

$$p(x) - p(c) = (x-c)g(x), p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$
$$g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^2 + \dots + b_1x + b_0,$$

აქედან გვექნება:

$$p(x) - p(c) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n - p(c) = (x-c)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}) =$$
$$b_0x + b_1x^2 + \dots + b_{n-1}x^n - cb_0 - cb_1x - \dots - cb_{n-1}x^{n-1} =$$
$$= (b_0 - cb_1)x + (b_1 - cb_2)x^2 + \dots + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + b_{n-1}x^n.$$

აქედან გამომდინარეობს ტოლობები:

$$b_{n-1} = a_n,$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1},$$
$$b_{n-3} = a_{n-2} + cb_{n-2},$$
$$----------$$
$$b_0 = a_1 + cb_1,$$
$$p(c) = a_0 + cb_0,$$

ამგვარად, მივიღეთ $p(x) \in R[x]$ მრავალწევრის $x - c \in R[x]$ მრავალწევრზე გაყოფით მიღებული $g(x) \in R[x]$ მრავალწევრის კოეფიციენტების და $p(c)$ სიდიდის გამოსათვლელი ალგორითმი. აღწერილ ალგორითმს ***ჰორნერის სქემა*** ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^n + \dots + a_1x + a_0$ მრავალწევრი $R[x]$ რგოლიდან. ამ ***მრავალწევრის წარმოებული*** ეწოდება მრავალწევრს

$p'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \dots + 2a_2x + a_1$.

ცხადია, n ხარისხის მრავალწევრის წარმოებული $n-1$ ხარისხის მრავალწევრია.

მრავალწევრის წაემოებულს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x)$.
2. $(p(x)q(x))' = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$.
3. $(p^k(x))' = kp^{k-1}(x)p'(x), k \geq 1$.

პირველი თვისება ცხადია, მესამე თვისება გამომდინარეობს მეორე თვისებიდან. დავამტკიცოთ მეორე თვისება:

$$(p(x)q(x))' = (d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_{n+m}x^{n+m})' = d_1 + 2d_2x + 3d_3x^2 + \dots +$$
$$+ (n+m)d_{n+m}x^{n+m-1} = a_0b_1 + a_1b_0 + 2(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x +$$
$$+ 3(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_0b_3)x^2 + \dots + (n+m)(a_0b_{n+m-1} + \dots + a_{n+m-1}b_0)x^{n+m-1} =$$
$$= a_0(b_1 + 2b_2x + \dots + mb_mx^{m-1}) + a_1x(b_1 + 2b_2x + \dots + mb_mx^{m-1}) + \dots +$$
$$+ a_nx^n(b_1 + 2b_2x + \dots + mb_mx^{m-1}) + b_0(a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}) + b_1x(a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}) +$$
$$+ \dots + b_mx^m(a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

$c \in R$ ელემენტს ეწოდება $p(x)$ ***მრავალწევრის ფესვი,*** თუ $p(c) = 0$.

ბეზუს თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $c\in R$ წარმოადგენს $p(x)$ მრავალწევრის ფესვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $p(x)$ მრავალწევრი იყოფა $(x-c)$ მრავალწევრზე.

$c\in R$ ელემენტს -ეწოდება $p(x)$ მრავალწევრის k ***ჯერადი ფესვი***, თუ $p(x)$ მრავალწევრი იყოფა $(x-c)^k$ მრავალწევრზე და არ იყოფა $(x-c)^{k+1}$ მრავალწევრზე.

თუ $k=1$, მაშინ c-ს ეწოდებ ***მარტივი ფესვი.***

ბეზუს თეორემიდან გამომდინარეობს აგრეთვე:

1. თუ $c_1,c_2,\ldots,c_k\in R$ წარმოადგენენ $p(x)\in R[x]$ მრავალწევრის განსხვავებულ ფესვებს, მაშინ $p(x)=(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_k)g(x)$.

2. თუ n ხარისხის $p(x)$ მრავალწევრს აქვს n განსხვავებული ფესვი $c_1,c_2,\ldots,c_n\in R$, მაშინ $p(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$, სადაც a_n $p(x)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტია.

უკანასკნელი წინადადებიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი დებულება: n ხარისხის $p(x)\in R[x]$ მრავალწევრს შეიძლება გააჩნინდეს არაუმეტეს n ფესვი.

განვიხილოთ იმ მრავალწევრთა $Q[x]$ რგოლი, რომელთა კოეფიციენტებიც რაციონალური რიცხვებია და შევეცადოთ ვიპოვოთ მათი რაციონალური ფესვები. ცხადია, $Q[x]\subset R[x]$. ვთქვათ, $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ მრავალწევრია რაციონალური კოეფიციენტებით, ცხადია, არსებობს რიცხვი c რომელზე გამრავლებითაც მრავალწევრი გადაიქცევა მთელკოეფიციენტიან $cp(x)$ მრავალწევრად, რომელსაც იგივე ფესვები ექნება, რაც თავიდან მოცემულ $p(x)$ მრავალწევრს. აქედან გამომდინარე, საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ მრავალწევრები მთელი კოეფიციენტებით.

თეორემა 8.3 (პირველი თეორემა მრავალწევრის რაციონალურ ფესვებზე). თუ უკვეცი წილადი $\dfrac{k}{l}$ წარმოადგენს $p(x)$ მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვს, მაშინ თავისუფალი წევრი a_0 იყოფა k-ზე, ხოლო უფროსი კოეფიციენტი a_n იყოფა l-ზე.

დამტკიცება: ჩავსვათ $\dfrac{k}{l}$ ცვლადი სიდიდის მაგივრად $p(x)$ მრავალწევრში.

რადგან $\dfrac{k}{l}$ ფესვია გვექნება:

$$a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}l+a_{n-2}k^{n-2}l^2+\ldots+a_1kl^{n-1}+a_0l^n=0.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ a_0 იყოფა k-ზე და a_n იყოფა l-ზე.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $p(x)$ მრავალწევრის რაციონალური ფესვების მოსაძებნად საჭიროა გამოვთვალოთ $p(\dfrac{k}{l})$ სიდიდეები a_0 რიცხვის ყველა k გამყოფისთვის და a_n რიცხვის ყველა l გამყოფისთვის.

მაგალითი: წინა თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $p(x)=2x^3-3x^2+3x-1$ მრავალწევრის რაციონალური ფესვის მრიცხველი შეიძლება ღებულობდეს მნიშვნელობას $\{-1,1\}$ სიმრავლიდან, ხოლო მნიშვნელი-$\{1,2,-1,-2\}$ სიმრავლიდან, მაგრამ რადგან წილადის ნიშანი შეიძლება მივაწეროთ მრიცხველს, ამიტომ

$\{1,2,-1,-2\}$ სიმრავლის ნაცვლად შეგვეიძლია განვიხილოთ $\{1,2\}$ სიმრაელე. აქედან გამომდინარე, მრავალწევრის ფესვები უნდა ვეძებოთ $\{-1,\frac{-1}{2},1,\frac{1}{2}\}$ სიმრაველეში.

$p(-1)=-9$, $p(1)=1, p(\frac{1}{2})=0$, $p(-\frac{1}{2})=-\frac{7}{2}$. მაშასადამე, საძიებელი რაციონალური ფესვი ყოფილა $\frac{1}{2}$. ცხადია მოძებნილი ფესვი იქნება მარტივი წინააღმდეგ შემთხვევაში 2 უნდ იყოფოდეს 2^2-ზე.

თეორემა: 8.4 (მეორე თეორემა მრავალწევრის რაციონალურ ფესვებზე). თუ უკვეცი წილადი $\frac{k}{l}$ წარმოადგენს მთელკოეფიციენტებიანი $p(x)$ მრავალწევრის ფესვს, მაშინ ყოველი $m \neq \frac{k}{l}$ მთელი რიცხვისათვის $p(m)$ უნაშთოდ იყოფა $(k-ml)$-ზე.

დამტკიცება : ბეზუს თეორემიდან გამომდინარეობს

$$p(x)=(x-m)=(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\dots+b_1x+b_0)+f(m),$$

სადაც $b_{n-1},b_{n-2},\dots,b_0$ მთელი რიცხვებია. რადგან $\frac{k}{l}$ ფესვია, ამიტომ გვექნება:

$$p(m)=-(\frac{k}{l}-m)(b_{n-1}(\frac{k}{l})^{n-1}+b_{n-2}(\frac{k}{l})^{n-2}+\dots+b_1\frac{k}{l}+b_0).$$

აქედან კი გამომდინარეობს: $l^n p(m)=(k-lm)(b_{n-1}k^{n-1}+b_{n-2}k^{n-2}+\dots+b_1x+b_0)$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

სავარჯიშოები:

ჰორნერის სქემის გამოყენებით იპოვეთ შემდები მრავალწევრების გაყოფით მიღებული განაყოფი და ნაშთი:

1. x^3-3x^2-x+2, $x-2$.
2. $2x^4-x^3+x^2+x+1$, $x-1$.
3. $2x^3+4x^2-3$, $x-3$

იპოვეთ შემდეგი მრავალწევრების რაციონალური ფესვები:

1. $3x^3+2x^2-x+2$.
2. $4x^4-2x^3+x^2+x-2$.
3. $2x^3+4x^2-3x+2$,

§9. მრავალწევრთა გაყოფადობა

ვთქვათ, $p(x),g(x)\in R[x], g(x)\neq 0$ ორი მრავალწევრია.

$p(x)$ მრავალწევრის ნაშთით გაყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე ეწოდება $p(x)$ მრავალწევრის $p(x)=g(x)s(x)+r(x)$ სახით წარმოდგენას, სადაც $s(x),r(x)\in R[x]$, $\deg(r(x)<\deg g(x)$ ან $r(x)=0$.

$s(x)$ მრავალწევრს უწოდებენ განაყოფს $r(x)$ მრავალწევრს-***ნაშთს.***

შენიშვნა: როდესაც მრავალწევრს ვიხილავთ ნებისმიერ A რგოლს ზემოთ, მაშინ ნაშთით გაყოფა ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. მტკიცდება, რომ, თუ A რგოლი მთელობის არეა და მრავალწევრის უფროს კოეფიციენტს გააჩნია შებრუნებული, მაშინ გაყოფა ნაშთით შესაძლებელია.

თეორემა 9.1. მრავალწევრთა $R[x]$ რგოლში, სადაც R ნამდვილ რიცხვთა ველია, ნაშთით გაყოფა ყოველთვის შესაძლებელია და $p(x)=g(x)s(x)+r(x)$ წარმოდგენა ერთადერთია.

დამტკიცება: მართლაც, ვთქვათ $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}{}^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $g(x)=b_nx^m+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0$. თუ $n<m$, მაშინ $p(x)=g(x)0+p(x)$. თუ $n\geq m$, მაშინ $p_1(x)=p(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$ მრავალწევრის ხარისხი $n_1<n$. თუ $n_1\geq m$, მაშინ $p_2(x)=p_1(x)-\frac{c_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}g(x)$ მრავალწევრის, რომლის უფროსი კოეფიციენტიცაა c_1, ხარისხი $n_2<n_1$. ამ პროცესის გაგრძელებით ვნახავთ, რომ, თუ $n_{i-1}\geq m$, მაშინ

$$p_i(x)=p_{i-1}(x)-\frac{c_{n_{i-1}}}{b_m}x^{n_{i-1}-m}g(x)$$

მრავალწევრის, რომლის უფროსი კოეფიციენტიცაა $c_{n_{i-1}}$, ხარისხი $n_i<n_{i-1}$. აქედან გამომდინარე, რომელიღაც i' ნაბიჯზე შესრულდება უტოლობა $\deg p_{i'}(x)<m$ და გვექნება:

$$p(x)=(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\frac{c_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}+...+\frac{c_{i'-1}}{b_m}x^{n_{i'-1}-m})g(x)+p_{i'}(x).$$

მაშასადამე, $p(x)=g(x)s(x)+r(x)$ წარმოდგენა არსებობს, ვაჩვენოთ, რომ იგი ერთადერთია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, გვაქვს მეორე $p(x)=g(x)s'(x)+r'(x)$ წარმოდგენაც, მაშინ $g(x)s(x)+r(x)=g(x)s'(x)+r'(x)$, ანუ $g(x)(s(x)-s'(x))=r'(x)-r(x)$. ცხადია, $\deg(r'(x)-r(x))<g(x)$, მაგრამ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $r'(x)-r(x)$ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე. ამგვარად, მივიღეთ წინააღმდეგობა, ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სწორი. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემის დამტკიცების გზა აგრეთვე გვიჩვენებს მრავალწევრთა ნაშთით გაყოფის ალგორითმს.

მაგალითი: ვთქვათ, $p(x)=2x^4+x^3+x^2-x-3, g(x)=x^3+2x^2-1$. მაშინ გვექნება

$$\begin{array}{l|l}
2x^4+x^3+x^2-x-3 & x^3+2x^2-1 \\ \cline{2-2}
2x^4+4x^3-x^2-2x & 2x-3 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^3+x^2+x-3 & \\
\quad -3x^3-6x^2\quad +3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 7x^2+x-6 &
\end{array}$$

მაშასადამე, $p(x)=g(x)s(x)+r(x)$, სადაც $s(x)=2x-3$, $r(x)=7x^2+x-6$.

$p(x),g(x)\in R[x]$ ***მრავალწევრთა საერთო გამყოფი*** ეწოდება ისეთ $d(x)$ მრავალწევრს, რომელიც ყოფს თითოეულ მათგანს. მოცემული ***ორი***

მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება ამ მრავალწევრთა ისეთ საერთო გამყოფს, რომელიც იყოფა სხვა დანარჩენ საერთო გამყოფებზე.

თუ $d(x)$ წარმოადგენს $p(x), g(x) \in R[x]$ მრავალწევრთა უდიდეს საერთო გამყოფს და $k \in R, k \neq 0$ რაიმე რიცხვია, მაშინ ცხადია, $kd(x)$ ასევე იქნება ამ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი. აქედან და განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ მუდმივი თანამამრავლით.

ორი მრავალწევრის საერთო გამყოფის მოსაძებნად იყენებენ ალგორითმს, რომელიც ***ევკლიდეს ალგორითმის*** სახელით არის ცნობილი. მოვიყვანოთ ეს ალგორითმი:

$p(x), g(x) \in R[x]$ მრავალწევრებისათვის გვაქვს წარმოდგენა:

$$p(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x), \deg r_1(x) < \deg g(x),$$

$g(x), r_1(x) \in R[x]$ მრავალწევრებისთვისაც გვაქვს წარმოდგენა:

$$g(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x), \deg r_2(x) < \deg r_1(x),$$

$r_1(x), r_2(x) \in R[x]$ მრავალწევრებისთვისაც გვაქვს წარმოდგენა:

$$r_1(x) = r_2(x)s_3(x) + r_3(x), \deg r_3(x) < \deg r_2(x)$$

და ასე შემდეგ: $r_{i-1}(x), r_i(x) \in R[x]$ მრავალწევრებისთვისაც გვაქვს წარმოდგენა:

$$r_{i-1}(x) = r_i(x)s_{i+1}(x) + r_{i+1}(x), \deg r_{i+1}(x) < \deg r_i(x)$$

თუ პროცესს გავაგრძელებთ, იმის გამო, რომ $r_i(x)$ ნაშთთა ხარისხი სულ იკლებს, დადგება დრო, როდესაც $i = m$ და $r_m(x)$ ნაშთი

$$r_{m-2}(x) = r_{m-1}(x)s_m(x) + r_m(x), \deg r_{i+1}(x) < \deg r_i(x)$$

წარმოდგენაში იქნება ნული.

თუ $r_m(x)$ ნულია, მაშინ გვექნება:

$$r_{m-2}(x) = r_{m-1}(x)s_m(x)$$

და $r_{m-1}(x)$, ვინაიდან იგი ყოფს ყველა $r_{m-2}(x), r_{m-2}(x), \ldots, r_1(x), g(x), p(x)$ მრავალწევრს, იქნება $p(x), g(x) \in R[x]$ მრავალწევრების საერთო გამყოფი.

ვაჩვენოთ, რომ $p(x), g(x)$ მრავალწევრების ყველა სხვა საერთო გამყოფი ყოფს $r_{m-1}(x)$ მრავალწევრს. მართლაც, ვთქვათ, $d(x)$ ყოფს $p(x), g(x)$ მრავალწევრებს, მაშინ $p(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $d(x)$ მრავალწევრი ყოფს $r_1(x)$ მრავალწევრს, $r_1(x) = r_2(x)s_3(x) + r_3(x)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $d(x)$ მრავალწევრი ყოფს $r_2(x)$ მრავალწევრს, და ასე შემდეგ, $d(x)$ მრავალწევრი ყოფს $r_{m-1}(x)$ მრავალწევრს. ეს კი ნიშნავს, რომ $r_{m-1}(x)$ მრავალწევრი წარმოადგენს $p(x), g(x)$ მრავალწევრების უდიდეს საერთო გამყოფს. შემდეგ ორი $p(x), g(x)$ მრავალწევრების უდიდეს საერთო გამყოფს აღვნიშნავთ ასე: $(p(x), g(x))$.

მაგალითი: ვიპოვოთ $p(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - x - 3, g(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი. წინა მაგალითიდან გვაქვს:

$$p(x) = g(x)(2x-3) + 7x^2 + x - 6, \quad r_1(x) = 7x^2 + x - 6;$$

$$g(x) = r_1(x)(\frac{1}{7x} + \frac{13}{49}) + \frac{29}{49}x + \frac{29}{49}, \quad r_2(x) = \frac{29}{49}x + \frac{29}{49};$$

$$r_1(x) = r_2(x)(\frac{343}{29}x - \frac{294}{29})$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $(p(x),g(x))=\frac{29}{29}x+\frac{29}{49}$ ასევე ნებისმიერი $k\in R$ რიცხვისათვის $(p(x),g(x))=k(\frac{29}{49}x+\frac{29}{49})$, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობასაც $(p(x),g(x))=x+1$.

თეორემა 9.2. თუ $d(x)$ წარმოადგენს $p(x),g(x)\in R[x]$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფს, მაშინ არსებობენ ისეთი მრავალწევრები $u(x),v(x)\in R[x]$, რომ $d(x)=u(x)p(x)+v(x)g(x)$.

დამტკიცება: ევკლიდეს ალგორითმიდან შეგვიძლია დავწეროთ: $r_{m-3}(x)=r_{m-2}(x)s_{m-1}(x)+r_{m-1}(x)$. $r_{n-1}(x)$ მრავალწევრი ტოლია $d(x)$ მრავალწევრის. თუ ჩავთვლით, რომ $u_1(x)=1, v(x)=-s_{m-1}(x)$, მაშინ გვექნება $d(x)=u_1(x)r_{m-3}(x)+v_1(x)r_{m-2}(x)$, თუ ამ ტოლობაში $r_{m-2}(x)$ გამოვსახავთ $r_{m-4}(x)$ და $r_{m-3}(x)$ მრავალწევრების საშუალებით, მივიღებთ: $d(x)=u_2(x)r_{m-4}(x)+v_2(x)r_{m-3}(x)$, სადაც $u_2(x)=v_1(x), v_2(x)=u_1(x)-v_1(x)s_{m-2}(x)$. თუ ახლა $r_{m-3}(x)$ მრავალწევრს გამოვსახავთ $r_{m-5}(x)$ და $r_{m-4}(x)$ მრავალწევრების საშუალებით და ამ პროცესს გავაგრძელებთ, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$d(x)=u(x)p(x)+v(x)g(x).$$

ორ მრავალწევრს $p(x),g(x)\in R[x]$ უწოდებენ ***ურთიერთმარტივ მრავალწევრებს,*** თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი $(p(x),g(x))$ ტოლია რაიმე $k\in R$ ელემენტის, ასეთ შემთხვევაში ვწერთ $(p(x),g(x))=1$.

შენიშვნა: როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ორი მრავალწევრის, უდიდესი საერთო გამყოფები ერთმანეთისგან განსხვავდებიან მუდმივი თანამამრავლით, ამიტომ $(p(x),g(x))=1$ ჩანაწერი ფაქტობრივად გულისხმობს, რომ $(p(x),g(x))=k$, სადაც $k\in R$ რაიმე ელემენტია.

თეორემა 9.3. იმისათვის, რომ $p(x),g(x)\in R[x]$ მრავალწევრები ურთიერთმარტივი იყვნენ, აუცილებელი და საკმარისია არსებობდნენ ისეთი $u(x),v(x)\in R[x]$ მრავალწევრები, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$1=u(x)p(x)+v(x)g(x).$$

დამტკიცება: თუ $p(x),g(x)$ მრავალწევრები ურთიერთმარტივია, მაშინ $(p(x),g(x))=1$ და, წინა თეორემიდან გამომდინარე, არსებობენ მრავალწევრები ისეთი $u(x),v(x)$, რომ $1=u(x)p(x)+v(x)g(x)$.

ვთქვათ, არსებობენ ისეთი $u(x),v(x)$ მრავალწევრები, რომ $1=u(x)p(x)+v(x)g(x)$. თუ $d(x)=(p(x),g(x))\neq 1$, მაშინ $1=u(x)p_1(x)d(x)+v(x)g_1(x)d(x)$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $d(x)(u(x)p_1(x)+v(x)g_1(x))=1$. რადგან $d(x)$ არ წარმოადგენს ნული ხარისხის მრავალწევრს უკანასკნელი ტოლობა შეუძლებელია. ჩვენი დაშვება არა ყოფილა სწორი. მაშასადამე $d(x)=1$.

თეორემა 9.4. ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებებს:

1. თუ $(g(x),p(x))=1$ და $(g(x),h(x))=1$, მაშინ $(g(x),p(x)h(x))=1$.
2. თუ $(g(x),p(x))=1$ და $p(x)h(x)$ იყოფა $g(x)$-ზე, მაშინ $h(x)$ იყოფა $g(x)$-ზე.
3. თუ $(g(x),p(x))=1$ და $h(x)$ იყოფა $p(x)$-ზე და $g(x)$-ზე, მაშინ $h(x)$ იყოფა $p(x)g(x)$ ნამრავლზე.

დამტკიცება: 1. ადგილი აქვს ტოლობებს $1=u_1(x)g(x)+v_1(x)p(x), 1=u_2(x)g(x)+v_2(x)h(x)$, მეორე ტოლობიდან გვაქვს $p(x)=u_2(x)g(x)p(x)+v_2(x)p(x)h(x)$. თუ გავითვალისწინებთ პირველ ტოლობას, გვექნება:

$$1 = u_1(x)g(x) + v_1(x)(u_2(x)g(x)p(x) + v_2(x)p(x)h(x)) =$$
$$= (u_1(x) + v_1(x)u_2(x)p(x))g(x) + v_1(x)v_2(x)(p(x)h(x)).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $(g(x), p(x)h(x)) = 1$.

2. გვაქვს $1 = u(x)g(x) + v(x)p(x)$, აქედან ვღებულობთ:

$h(x) = u(x)h(x)g(x) + v(x)p(x)h(x) = u(x)h(x)g(x) + v(x)\overline{h}(x)g(x) = g(x)(u(x)h(x) + v(x)\overline{h}(x))$

მაშასადამე, $h(x)$ იყოფა $g(x)$-ზე.

3. გვაქვს $h(x) = u'(x)g(x), h(x) = v'(x)p(x)$, აქედან $2h(x) = u'(x)g(x) + v'(x)p(x)$. უკანასკნელი ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ $h(x) = u''(x)g(x) + v''(x)p(x)$, სადაც $u''(x) = \frac{u'(x)}{2}, v''(x) = \frac{v'(x)}{2}$. ასევე შეგვიძლია დავწეროთ:

$u'(x)g(x) = u''(x)g(x) + v''(x)p(x)$. მაშასადამე, $v''(x)p(x)$ იყოფა $g(x)$-ზე. რადგან $(p(x), g(x)) = 1$, ამიტომ, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, $v''(x)$ იყოფა $g(x)$-ზე.

რაც აქამდე ითქვა მრავალწევრებზე $R[x]$ რგოლიდან, სადაც R ნამდვილ რიცხვთა ველია, ჭეშმარიტია ნებისმიერი მრავალწევრებისთვის $K[x]$ რგოლიდან, სადაც K ნებისმიერი ველია ნულოვანი მახასიათებლით.

მრავალწევრს ეწოდება ***დაუყვანადი მრავალწევრი*** $K[x]$ რგოლში, თუ იგი არ წარმოიდგინება ამავე რგოლის ორი ნულზე მეტი ხარისხის მრავალწევრის ნამრავლის სახით.

ცხადია, თუ მრავალწევრი დაუყვანადია $K[x]$ რგოლში მაშინ იგი დაუყვანადი იქნება ნებისმიერ $F[x]$ რგოლში, სადაც $F \subset K$ რაიმე ქვეველია K ველში.

ცხადია, თუ $p(x)$ დაუყვანადია $K[x]$ რგოლში, მაშინ $cp(x), c \in K$ მრავალწევრიც დაუყვანადი იქნება $K[x]$ რგოლში.

მაგალითი: მრავალწევრი $x - a$ დაუყვანადია $K[x]$ რგოლში, სადაც K ნებისმიერი ველია ნულოვანი მახასიათებლით.

მაგალითი: $x^2 + 1$ მრავალწევრი დაუყვანადია $R[x]$ რგოლში. მართლაც, როგორც მათემატიკის სასკოლო კურსიდან ვიცით, $x^2 + 1$ მრავალწევრს არ გააჩნია ფესვი ნამდვილ რიცხვთა ველში, ამიტომ იგი ვერ წარმოიდგინება ორი ნულზე მეტი ხარისხის მრავალწევრის ნამრავლის სახით.

მრავალწევრს ეწოდება ***უნიტარული***, თუ იგი დაუყვანადია და მისი უფროსი კოეფიციენტი ერთის ტოლია.

$p(x)$ მრავალწევრის ***კანონიკური გაშლა*** ეწოდება ამ მრავალწევრის წარმოდგენას $p(x) = ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)...p_l^{k_l}(x)$, სადაც სადაც თითოეული $p_i(x), i = 1,2,...,l$ უნიტარული მრავალწევრია,ხოლო $k_1, k_2, ..., k_l$-ნატურალური რიცხვები.

თეორემა 9.5. ყოველი მრავალწევრისათვის $K[x]$ რგოლიდან არსებობს ერთადერთი კანონიკური გაშლა.

დამტკიცება: მრავალწევრთა გადამრავლების დროს მიიღება მრავალწევრი, რომლის ხარისხიც თანამამრავლების ხარისხების ჯამის ტოლია. ამიტომ ყოველი $p(x)$ მრავალწევრი წარმოიდგინება ასე: $p(x) = ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)...p_l^{k_l}(x)$, სადაც თითოეული $p_i(x), i = 1,2,...,l$ უნიტარული მრავალწევრია და l ინდექსი შეიძლება ღებულობდეს ყველა ნატურალურ მნიშვნელობას.

როდესაც $l = 1$ და $k_1 = 1$, მაშინ $p(x)$ მრავალწევრი თვითონ არის დაუყვანადი და a არის ამ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი.

თუ არსებობს მრავალწევრის მეორე წარმოდგენაც: $p(x) = bq_1^{k_1}(x)q_2^{k_2}(x)...q_l^{k_l}(x)$, მაშინ რომელიმე $p_{i_1}(x)$ მრავალწევრი ემთხვევა $q_1(x)$ მრავალწევრს, წინააღმდეგ

შემთხვევაში, რადგან $q_1(x)$ მრავალწევრი თანამარტივია ყველა $p_i(x) i=1,2,...,l$ მრავალწევრთან, თანამარტივი იქნება მთელ $p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)...p_l^{k_l}(x)$ ნამრავლთანაც და $q_1(x)$ არ გაყოფს $p(x)$ მრავალწევრს, რაც გამორიცხულია, რადგან

$$p(x)=bq_1^{k_1}(x)q_2^{k_2}(x)...q_l^{k_l}(x).$$

მაშასადამე $p_i(x)$ მრავალწევრი ემთხვევა $q_1(x)$ მრავალწევრს. ამგვარადვე მტკიცდება, რომ ყოველი $q_j(x)$ მრავალწევრი ემთხვევა რომელიღაც $p_{i_j}(x)$ მრავალწევრს. დაუყვანად მრავალწევრთა ასეთ დამთხვევა განაპირობებს $a=b$ ტოლობასაც. თეორემა დამტკიცდა.

მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 9.6 (ალგებრის ძირითადი თეორემა). ყოველ $n \geq 1$ ხარისხის მრავალწევრს $C[x]$ რგოლიდან, სადაც C კომპლექსურ რიცხვთა ველია, გააჩნია ფესვი ამ ველში.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ მრავალწევრს $C[x]$ რგოლიდან გააჩნია n რაოდენობის კომპლექსური ფესვი. მართლაც, რადგან $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ მრავალწევრს აქვს ფესვი $c_1 \in C$, ამიტომ, ბეზუს თეორემის თანახმად, $p(x)=(x-c_1)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0)$.

მრავალწევრი $p_1(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0$ ასევე ეკუთვნის $C[x]$ რგოლს, ამიტომ მას უნდა ჰქონდეს ფესვი $c_2 \in C$; აქედან გამომდინარე

$$p(x)=(x-c_1)(x-c_2)(k_{n-2}x^{n-2}+k_{n-3}x^{n-3}+...+k_1x+k_0).$$

თუ ასე გავაგრძელებთ, მივიღებთ: $p(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_n)$.

მაშასადამე, $p(x)$ მრავალწევრს ჰქონია n რაოდენობის კომპლექსური ფესვი.

თეორემის დამტკიცებისას ვაჩვენეთ, რომ ყოველი $p(x) \in C[x]$ მრავალწევრისთვის არსებობს კანონიკური გაშლა

$$p(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}...(x-c_l)^{k_l},$$

სადაც $k_1+k_2+...+k_l=n$

K ველს უწოდებენ ***ალგებრულად ჩაკეტილ ველს***, თუ ყოველ $n \geq 1$ ხარისხის მრავალწევრს $K[x]$ რგოლიდან გააჩნია ფესვი.

K ველს უწოდებენ F ***ველის ალგებრულ გაფართოებას***, თუ ნებისმიერ $n \geq 1$ ხარისხის მრავალწევრს $F[x]$ რგოლიდან გააჩნია ფესვი ამ ველში და ეს ველი წარმოადგენს ქვეველს ყველა ისეთი ველისა, რომლებსაც ეს თვისება გააჩნიათ.

მაგალითი: C კომპლექსურ რიცხვთა ველი ალგებრულად ჩაკეტილია, იგი წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა R ველის ალგებრულ გაფართოებას.

ცხადია, ყოველი ალგებრულად ჩაკეტილი K ველისათვის ნებისმიერ $p(x) \in K[x]$ n ხარისხის მრავალწევრის კანონიკურ გაშლას აქვს სახე:

$p(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}...(x-c_l)^{k_l}$, სადაც $c_1,c_2,...,c_l \in K$ მრავალწევრის ფესვებია, $k_1+k_2+...+k_l=n$.

ვთქვათ, $c_1,c_2,...,c_n \in K$ ელემენტები წარმოადგენენ $p(x) \in K[x]$ მრავალწევრის ფესვებს, სადაც თითოეული ფესვი ჩაწერილია იმდენჯერ, რამდენიცაა მისი ჯერადობა, მაშინ $p(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_n)$.

თუ შევადარებთ კოეფიციენტებს x ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ მრავალწევრში და $p(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_n)$, ნამრავლში, გვექნება:

თეორემა 9.6 (ვიეტის თეორემა).

$$a_{n-1} = -a_n(c_1 + c_2 + ... + c_n)$$
$$a_{n-2} = a_n(c_1c_2 + c_1c_2 + ... + c_{n-1}c_n)$$
$$a_{n-3} = -a_n(c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + ... + c_{n-1}c_{n-2}c_n)$$

$$a_0 = (-1)^n a_n c_1 c_2 ... c_n.$$

თეორემა 9.7. თუ $c \in C$ კომპლექსური რიცხვი წარმოადგენს $p(x) \in R[x]$ მრავალწევრის ფესვს, მაშინ მისი შეუღლებული $\bar{c} \in C$ კომპლექსური რიცხვი ასევე წარმოადგენს ამ მრავალწევრის ფესვს.

დამტკიცება: თუ $c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \in C$ წარმოადგენს $p(x) \in R[x]$ მრავალწევრის კომპლექსურ ფესვს, მაშინ

$$a_n r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + a_{n-1}r^{n-1}(\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha) + ... + a_1 r(\cos\alpha + i\sin\alpha) + a_0 = 0$$

აქედან გვექნება:

$$a_n r^n \cos n\alpha + a_{n-1}r^{n-1}\cos(n-1)\alpha + ... + a_1 r\cos\alpha + a_0 +$$
$$+ i(a_n r^n \sin n\alpha + a_{n-1}r^{n-1}\sin(n-1)\alpha + ... + a_1 r\sin\alpha) = 0.$$

ეს კი მიშნავს, რომ

$$a_n r^n \cos n\alpha + a_{n-1}r^{n-1}\cos(n-1)\alpha + ... + a_1 r\cos\alpha + a_0 = 0$$

და

$$a_n r^n \sin n\alpha + a_{n-1}r^{n-1}\sin(n-1)\alpha + ... + a_1 r\sin\alpha = 0.$$

თუ $c = r(\cos\alpha - i\sin\alpha) \in C$, მაშინ

$$a_n r^n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha) + a_{n-1}r^{n-1}(\cos(n-1)\alpha - i\sin(n-1)\alpha) + ... + a_1 r(\cos\alpha - i\sin\alpha) + a_0 =$$
$$= a_n r^n \cos n\alpha + a_{n-1}r^{n-1}\cos(n-1)\alpha + ... + a_1 r\cos\alpha + a_0 -$$
$$- i(a_n r^n \sin n\alpha + a_{n-1}r^{n-1}\sin(n-1)\alpha + ... + a_1 r\sin\alpha) = 0.$$

ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 9.8. თუ მრავალწევრი $p(x) \in R[x]$ კენტი $2k+1$ ხარისხისაა, მაშინ მას აუცილებლად ექნება ერთი ნამდვილი ფესვი.

დამტკიცება: მართლაც, წინა თეორემიდან და ვიეტის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $a_0 = (-1)^n c_1\bar{c}_1 c_2\bar{c}_2 ... c_k\bar{c}_k c_{k+1}$, ამიტომ, რადგან a_0 ნამდვილია, c_{k+1}-ც იქნება ნამდვილი.

თეორემა 9.9. დაუყვანად მრავალწევრებს $R[x]$ რგოლში წარმოადგენენ მხოლოდ პირველი და მეორე ხარისხის მრავალწევრები.

დამტკიცება: თუ $p(x) \in R[x]$ მრავალწევრი ლუწი $n = 2k$ ხარისხისაა, მაშინ იგი $C[x]$ რგოლში გაიშლება შემდეგ ნამრავლად:

$$p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)...(x - c_k) = a_n(x^2 - (c_1 + \bar{c}_2)x + c_1\bar{c}_2)...(x^n - (c_n + \bar{c}_n)x + c_n\bar{c}_n) =$$
$$= a_n(x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1}...(x^2 + p_l x + q_l)^{k_l}$$

თუ ლუწი $n = 2k$ ხარისხ $p(x) \in R[x]$ მრავალწევრს არ აქვს ნამდვილი ფესვები, მაშინ იგი $R[x]$ რგოლში კანონიკურად წარმოიდგინება დაუყვანადი მრავალწევრების: $p(x) = a_n(x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1}...(x^2 + p_l x + q_l)^{k_l}, 2k_1 + 2k_2 + ... + 2k_l = n$ ნამრავლის სახით; ხოლო, თუ ლუწი $n = 2k$ ხარისხ $p(x) \in R[x]$ მრავალწევრს აქვს ნამდვილი ფესვებიც იგი $R[x]$ რგოლში კანონიკურად წარმოიდგინება დაუყვანადი მრავალწევრების ნამრავლის სახით:

$$p(x) = a_n(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1} ...(x^2 + p_jx + q_j)^{k_j}(x - c_1)^{k_{l+1}} ...(x - c_m)^{k_m};$$

$$2k_1 + 2k_2 + 2k_l + k_{l+1} + ... + k_m = n$$

თუ კენტი $n = 2k + 1$ ხარისხ $p(x) \in R[x]$ მრავალწევრისათვის $c_1 \in R$ ნამდვილი ფესვია, მაშინ $p(x) = (x - c_1)g(x)$, სადაც $g(x)$ წარმოადგენს ლუწი $n = 2k$ ხარისხის მრავალწევრს. აქედან გამომდინარე, ადგილი ექნება $R[x]$ რგოლში $p(x)$ მრავალწევრის კანონიკურ წარმოდგენას პირველი და მეორე ხარისხის დაუყვანადი მრავალწევრების ნამრავლის სახით:

$$p(x) = a_n(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1} ...(x^2 + p_jx + q_j)^{k_j}(x - c_1)^{k_{l+1}} ...(x - c_m)^{k_m};$$

$$2k_1 + 2k_2 + 2k_l + k_{l+1} + ... + k_m = n$$

თეორემა დამტკიცდა.

სავარჯიშოები:

იპოვეთ მრავალწევრთა შემდეგი წყვილების უდიდესი საერთო გამყოფები:

1. $p(x) = x^3 - x^2 + 3x - 10, q(x) = x^3 + 6x^2 - 9x - 14$.
2. $p(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15, q(x) = x^2 - x - 20$.

იპოვეთ შემდეგი მრავალწევრების კანონიკური გაშლა:

1. $p(x) = x^6 - 27$.
2 $p(x) = x^2 - x - 6$.
3. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

თავი III
წრფივი ალგებრის ელემენტები

§10. წრფივი(ვექტორული) სივრცე

ვთქვათ R ნამდვილ რიცხვთა ველია, V კი სიმრავლე ორი ალგებრული ოპერაციით:

$$+ : V \times V \to V,$$
$$\times : R \times V \to V. \tag{1}$$

ამ ოპერაციებიდან პირველს ვუწოდოთ შეკრების ოპერაცია, ხოლო მეორეს-ნამდვილ რიცხვებზე V სიმრავლის ელემენტების გამრავლების ოპერაცია. $a+b$-თი აღვნიშნოთ $+$ ასახვის დროს $(a,b)\in V\times V$ წყვილის შესაბამისი $+((a,b))\in V$ ელემენტი, ხოლო ka-თი, $\times$ ასახვის დროს $(k,b)\in R\times V$ წყვილის შესაბამისი $\times((k,b))\in V$ ელემენტი.

ვუწოდოთ $(V;+,\times)$ სამეულს ***წრფივი(ვექტორული) სივრცე***, ხოლო V სიმრავლის ელემენტებს კი ვექტორები, თუ (1) ალგებრულ ოპერაციებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

1. ყოველი $a\in V, b\in V$ ორი ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:
$$a+b=b+a.$$
2. ყოველი $a\in V, b\in V, c\in V$ სამი ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$
3. არსებობს ელემენტი $0\in V$, რომელსაც ნულოვანი ვექტორი ეწოდება და ადგილი აქვს ტოლობას:
$$a+0=a,$$
ყოველი $a\in V$ ელემენტისათვის.
4. ყოველი $a\in V$ ელემენტისათვის არსებობს ელემენტი $-a\in V$, რომელსაც a ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი ეწოდება და ადგილი აქვს ტოლობას:
$$a+(-a)=0.$$
5. ყოველი $k\in R, a\in V, b\in V$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:
$$k(a+b)=ka+kb.$$
6. ყოველი $k_1\in R, k_2\in R, a\in V$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:
$$(k_1+k_2)a=k_1a+k_2a.$$
7. ყოველი $k_1\in R, k_2\in R, a\in V$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:
$$(k_1k_2)a=k_1(k_2a).$$
8. ყოველი $a\in V$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:
$$1a=a,$$
სადაც $1\in R$ ნამდვილი რიცხვი ერთია.

მოვიყვანოთ რამდენიმე შედეგი, რომლებიც გამომდინარეობენ (1) ალგებრული ოპერაციების 1-8 თვისებებიდან:

შედეგი 1. წრფივ სივრცეში ერთადერთი ნულოვანი ვექტორია.

დამტკიცება: დავუშვათ წრფივ სივრცეში არსებობს ორი $0_1, 0_2$ ნულოვანი ვექტორი, მაშინ $0_1+0_2=0_1$ და $0_1+0_2=0_2+0_1=0_2$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $0_1=0_2$.

შედეგი 2. წრფივ სივრცეში ყოველ a ვექტორს გააჩნია ერთადერთი მოპირდაპირე ვექტორი $-a$.

დამტკიცება: დავუშვათ წრფივ სივრცეში არსებობს a ვექტორის მოპირდაპირე ორი $(-a)_1, (-a)_2$ ვექტორი, მაშინ

$$(-a)_1 + (a + (-a)_2) = (-a)_1,$$

$$((-a)_1 + a) + (-a)_2 = (-a)_2.$$

მაგრამ, (1) ალგებრული ოპერაციების მე-2 თვისების გამო

$$(-a)_1 + (a + (-a)_2) = ((-a)_1 + a) + (-a)_2,$$

მაშასადამე, $(-a)_1 = (-a)_2$.

V წრფივი სივრცის a და b ***ელემენტების სხვაობა*** ეწოდება მის $a + (-b)$ ელემენტს. იგი აღინიშნება ასე: $a - b$.

შედეგი 3. $b - a = -(a - b)$.

დამტკიცება: $a - b = a + (-b)$, $b - a = b + (-a)$.

(1) ალგებრული ოპერაციების მე-2 თვისებიდან გამომდინარე

$$(a - b) + (b - a) = (a + (-b)) + (b + (-a)) = ((a + (-b)) + b) + (-a) =$$
$$= (a + ((-b) + b)) + (-a) = a + (-a) = 0,$$

თუ გავითვალისწინებთ მე-2 შედეგს გვექნება $b - a = -(a - b)$.

შედეგი 4. ნებისმიერი $k \in R$ ნამდვილი რიცხვისათვის და $0 \in V$ ნულოვანი ვექტორისათვის $k0 = 0$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a \in V$ ნებისმიერი ვექტორია, $k \in R$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, მაშინ (1) ალგებრული ოპერაციების მე-5 თვისების გამო

$$ka = k(a + 0) = ka + k0.$$

მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ $(-ka)$, მივიღებთ

$$ka + (-ka) = k(a + 0) = ka + k0 + (-ka).$$

აქედან გვექნება

$$0 = 0 + k0,$$

ანუ $k0 = 0$.

შედეგი 5. ნებისმიერი $a \in V$ ვექტორისათვის $0a = 0$, სადაც ტოლობის მარცხენა მხარეს თანამამრავლად $0 \in R$ ნამდვილი რიცხვი ნულია, მარჯვენა მხარეს კი-ნულოვანი ვექტორი.

დამტკიცება: ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი $k \in R$ და $a \in V$ ნებისმიერი ვექტორი. მაშინ (1) ალგებრული ოპერაციების მე-6 თვისების გამო

$$ka = (k + 0)a = ka + 0a.$$

მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ $(-ka)$, მივიღებთ

$$ka + (-ka) = (k + 0)a = ka + 0a + (-ka).$$

აქედან გვექნება

$$0 = 0 + 0a,$$

ანუ $k0 = 0$.

შედეგი 6. თუ $ka = 0$, მაშინ $k = 0$ ან $a = 0$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $k \neq 0$, მაშინ არსებობს ნამდვილი რიცხვი $k^{-1} = \frac{1}{k} \neq 0$. წინა შედეგებიდან გამომდინარე, გვექნება

$$a = 1a = (kk^{-1}) = k^{-1}(ka) = 0,$$

მაშასადამე, $a = 0$.

შედეგი 7. $k(-a) = (-k)a = -ka$.

დამტკიცება: $ka + k(-a) = k(a + (-a)) = k0 = 0$, მაშასადამე, $(k(-a)$ წარმოადგენს ka ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორს, ანუ $(k(-a) = -ka$

$$ka + (-k)a = (k + (-k))a = 0a = 0.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $(-k)a$ წარმოადგენს ka ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორს, ანუ $(-k)a=-ka$. მე-2 შედეგიდან საბოლოოდ გვექნება $k(-a)=(-k)a=-ka$.

შედეგი 8. $k(a-b)=ka-kb$.

დამტკიცება: $k(a-b)=k(a+(-b))=ka+k(-b)=ka+(-kb)=ka-kb$

შედეგი 9. $(k_1-k_2)a=k_1a-k_2a$.

დამტკიცება: $(k_1-k_2)a=(k_1+(-k_2))a=k_1a+(-k_2)a=k_1a-k_2a$.

წრფივი(ვექტორული) სივრცის მაგალითები:

მაგალითი: სიბრტყეზე ან სივრცეში არსებული ექტორთა სიმრავლე, სადაც ვექტორთა შეკრების ალგებრული ოპერაცია განისაზღვრება ეგრეთ წოდებული დიაგონალური მეთოდით; ხოლო რაიმე $\bar{a}$ ვექტორის და k ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი ტოლია ისეთი ვექტორის, რომლის სიგრძეცაა $|k||\bar{a}|$, სადაც $|k|$ წარმოადგენს k რიცხვის მოდულს, $|\bar{a}|$ კი $\bar{a}$ ვექტორის სიგრძეა; ხოლო მიმართულება ემთხვევა $\bar{a}$ ვექტორის მიმართულებას, როდესაც $k\geq 0$და საწინააღმდეგოა $\bar{a}$ ვექტორის მიმართულებისა, როდესაც $k<0$.

მაგალითი: სიმრავლე $R^n=\underbrace{R\times R\times\ldots\times R}_{n}$, სადაც R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, რომლის ორი $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,$(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ელემენტის ჯამი განისაზღვრება ფორმულით:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$

ხოლო რაიმე k ნამდვილი რიცხვის და $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ელემენტის ნამრავლი განისაზღვრება ფორმულით:

$$k(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(kx_1,kx_2,\ldots,kx_n).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრულ ალგებრულ ოპერაციებს R^n სიმრავლეში გააჩნიათ ყველა 1-8 თვისება და ამგვარად R^n წარმოადგენს წრფივ სივრცეს.

§11 ვექტორთა სისტემების წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა. ვექტორული სივრცის ბაზისი და განზომილება

V ვექტორული სივრცის ელემენტთა რაიმე $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ ერთობლიობას ***ვექტორთა სისტემას*** უწოდებენ.

თუ ვექტორთა $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ სისტემიდან ამოვირჩევთ $a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_m},\ldots$ ვექტორებისგან შემდგარ ერთობლიობას, მივიღებთ ვექტორთა სისტემას, რომელსაც ***ვექტორთა მოცემული სისტემის ქვესისტემა*** ეწოდება.

ვექტორთა სასრულ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ სისტემას უწოდებენ ***წრფივად დამოკიდებულს***, თუ არსებობენ ნამდვილი რიცხვები $k_1,k_2,\ldots,k_n$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n=0.$$

თუ ვექტორთა სისტემა არ არის წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას ***წრფივად დამოუკიდებელი*** ეწოდება.

თეორემა 11.1. თუ ვექტორთა სასრული $a_1,a_2,\ldots,a_n$ სისტემა მოიცავს წრფივად დამოკიდებულ ქვესისტემას, მაშინ იგი წრფივად დამოკიდებულია.

დამტკიცება: ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ მოცემული სისტემის $a_1, a_2, ..., a_m, m < n$ ქვესისტემაა წრფივად დამოკიდებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვექტორებს სხვაგვარად გადავნომრავთ.

რადგან $a_1, a_2, ..., a_m$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, ამიტომ არსებობენ რიცხვები $k_1, k_2, ..., k_m$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვაედება ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_m a_m = 0 .$$

ვთქვათ, $k'_1 = k_1, k'_2 = k_2, ..., k'_m = k_m, k'_{m+1} = 0, k'_{m+2} = 0, ..., k'_n = 0$, მაშინ

$$k'_1 a_1 + k'_2 a_2 + ... + k'_n a_n = 0$$

და $k'_1, k'_2, ..., k'_n, k'_{m+1}$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვაედება ნულისაგან. ეს კი ნიშნავს, რომ $a_1, a_2, ..., a_n$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

თეორემა 11.2. სასრული, წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემის ყველა ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

დამტკიცება: დავუშვათ, წრფივად დამოუკიდებელი $a_1, a_2, ..., a_n$ სისტემის რაიმე $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}$ ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ, წინა თეორემის თანახმად, წრფივად დამოკიდებულია ვექტორთა $a_1, a_2, ..., a_n$ სისტემაც, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას და ამტკიცებს თეორემას.-

V ვექტორულ სივრცეში ვექტორთა სასრულ, წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ეწოდება ***მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელ სისტემა***, თუ მასზე ერთი ვექტორის დამატებით ვღებულობთ წრფივად დამოკიდებულ სისტემას.

ვექტორულ სივრცეს ეწოდება ***სასრულგანზომილებიანი***, თუ მასში არსებობს მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა და ეწოდება n-განზომილებიანი თუ ეს სისტემა შედგება n ვექტორისაგან.

n-განზომილებიანი ვექტორული სიერცე აღინიშნება ასე: V^n.

თეორემა 11.3. თუ $a_1, a_2, ..., a_n$ მაქსიმალური ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა, მაშინ V^n ვექტორული სიერცის ნებისმიერი a ვექტორი წარმოდგინდება ასე:

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n .$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ვექტორთა $a_1, a_2, ..., a_n, a$ სისტემა. იგი წრფივად დამოკიდებული იქნება, ანუ იარსებებენ ნამდვილი რიცხვები: $k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებული იქნება ნულისაგან და ადგილი ექნება ტოლობას:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n + k_{n+1} a = 0 . \qquad (2)$$

შეიძლება დავუშვათ, რომ k_{n+1} არ უდრის ნულს, ვინაიდან, თუ $k_{n+1} = 0$, მაშინ $k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n = 0$, რაც გამორიცხულია $a_1, a_2, ..., a_n$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის გამო და იმის გამო, რომ $k_1, k_2, ..., k_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. გავყოთ (1) ტოლობის ორივე მხარე k_{n+1}-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{k_1}{k_{n+1}} a_1 + \frac{k_2}{k_{n+1}} a_2 + ... + \frac{k_n}{k_{n+1}} a_{n+1} + a = 0 .$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $x_i = -\frac{k_i}{k_{n+1}}, i = 1, 2, ... n$, გვექნება:

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n .$$

V ვექტორული სივრცის ვექტორების მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას, თუ იგი არსებობს, ამ ***სივრცის ბაზისი*** ეწოდება.

თეორემა 11.4. თუ $a_1, a_2, ..., a_n$ ბაზისია V ვექტორული სივრცეში, მაშინ ნებისმიერი a ვექტორის წარმოდგენა

$$a = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n \tag{3}$$

სახით, ერთადერთია.

დამტკიცება: დაეუშვათ, არსებობს მეორე:

$$a = y_1a_1 + y_2a_2 + ... + y_na_n \tag{4}$$

წარმოდგენაც, გამოვაკლოთ (2) ტოლობას (3) ტოლობა, გვექნება:

$$0 = (x_1 - y_1)a_1 + (x_2 - y_2)a_2 + ... + (x_n - y_n)a_n.$$

რადგან $a_1, a_2, ..., a_n$ წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ

$$0 = x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = ... = x_n - y_n.$$

მაშასადამე $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$. რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

V ვექტორულ სივრცეში შეიძლება არსებობდნენ სხვადასხვა ბაზისები. დავაფიქსიროთ ერთი მათგანი: $e_1, e_2, ..., e_n$, როგორც 11.4. თეორემიდან ვიცით, ყოველი $a \in V$ ვექტორისათვის გვაქვს ცალსახა წარმოდგენა:

$$a = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ რიცხვებს $a = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ წარმოდგენაში უწოდებენ ***a ვექტორის კოორდინატებს*** $e_1, e_2, ..., e_n$ ბაზისში.

თუ $e_1, e_2, ..., e_n$ ბაზისში a ვექტორის კოორდინატებია $x_1, x_2, ..., x_n$, ხოლო b ვექტორის კოორდინატები- $y_1, y_2, ..., y_n$, მაშინ

$$a + b = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n + y_1e_1 + y_2e_2 + .. + y_ne_n = (x_1 + y_2)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + ... + (x_n + y_n).$$

ამგვარად, $a + b$ ვექტორის კოორდინატები, მოცემულ ბაზისში ყოფილა:

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n.$$

ცხადია, ასევე, რომ ka ვექტორის კოორდინატები, სადაც $k \in R$ ნამდვილი რიცხვია, იქნება: $kx_1, kx_2, ..., kx_n$.

ამ ფაქტებიდან გამომდინარეობს, რომ შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა მოცემულ V ვექტორული სივრცის ვექტორების სიმრაველესა და მე-2 მაგალითში განხილულ R^n სივრცის ვექტორებს შორის. ეს შესაბამისობა ასეთია:

$a \in V$ ვექტორს, რომლის კოორდინატებიცაა: $x_1, x_2, ..., x_n$, შეესაბამება ვექტორი $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$.

ცხადია, თუ $a_1, a_2, ..., a_n$ ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა V ვექტორულ სივრცეში, მაშინ ამ სისტემის შესაბამის ვექტორთა:

$$\begin{gathered} (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}), \\ (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}), \\ -------- \\ (x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nn}). \end{gathered} \tag{5}$$

სისტემაც იქნება წრფივად დამოუკიდებელი R^n სივრცეში და პირიქით.

ვექტორთა(4) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა, დეტერმინანტთა თვისებებიდან გამომდინარე, ტოლფასია

$$\begin{vmatrix} x_{11}x_{12}\dots x_{1n} \\ x_{21}x_{22}\dots x_{2n} \\ ------ \\ x_{n1}x_{n2}\dots x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

უტოლობისა.

თეორემა 11.4. V ვექტორულ სიერცის ნებისმიერ ბაზისში ვექტორების რაოდენობა ერთნაირია.

დამტკიცება: ვთქვათ V ვექტორულ სივრცეში დაფიქსირებულია ორი: $e_1, e_2, \dots, e_n$, $e'_1, e'_2, \dots, e'_m, n < m$ ბაზისი. ვექტორთა სისტემა $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, 11.2 თეორემიდან გამომდინარე, წრფივად დამოუკიდებულია.

რადგანაც $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისია:

$$\begin{matrix} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \dots + c_{1n}e_n \\ e'_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{2n}e_n \\ ---------------- \\ e'_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{matrix} . \qquad (6)$$

განვიხილოთ მატრიცი:

$$T = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}\dots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}\dots c_{2n} \\ ----- \\ c_{n1}c_{n2}\dots c_{nn} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის სტრიქონები წარმოადგენენ $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ვექტორების შესაბამის ვექტორებს R^n ვექტორულ სივრცეში, ამიტომ მისი დეტეტმინანტი $|T| \neq 0$. აქედან გამომდინარე, არსებობს შებრუნებული მატრიცი:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11}d_{12}\dots d_{1n} \\ d_{21}d_{22}\dots d_{2n} \\ ------ \\ d_{n1}d_{n2}\dots d_{nn} \end{pmatrix}.$$

(6) ტოლობა მატრიცულად ასე ჩაიწერება:

$e' = Te$, სადაც $e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ . \\ . \\ . \\ e'_n \end{pmatrix}$ და $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{pmatrix}$ ერთსვეტიანი მატრიცებია.

რადგანაც T^{-1} მატრიცი T მატრიცის შებრუნებულია, ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონდეს მატრიცულ ტოლობას $e = T^{-1}e'$, რაც გაშლილად ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} e_1 &= d_{11}e_1' + d_{12}e_2' + \ldots + d_{1n}e_n' \\ e_2 &= d_{21}e_1' + d_{22}e_2' + \ldots + d_{2n}e_n' \\ &\text{-------------------} \\ e_n &= d_{n1}e_1' + d_{n2}e_2' + \ldots + d_{nn}e_n' \end{aligned} \qquad (7)$$

განეიხილოთ ახლა $e_i', i > n$, ცხადია, $e_i' = c_{i1}e_1 + c_{i2}e_2 + \ldots + c_{in}e_n$.
თუ გავითვალისწინებთ (6) ტოლობებს გვექნება:

$$\begin{aligned} e_i' &= c_{i1}(d_{11}e_1' + d_{12}e_2' + \ldots + d_{1n}e_n') + c_{i2}(d_{21}e_1' + d_{22}e_2' + \ldots + d_{2n}e_n') + \ldots + \\ &+ c_{in}(d_{n1}e_1' + d_{n2}e_2' + \ldots + d_{nn}e_n') = (c_{i1}d_{11} + c_{i2}d_{21} + \ldots + c_{in}d_{n1})e_1' + \\ &+ (c_{i1}d_{12} + c_{i2}d_{22} + \ldots + c_{in}d_{n2})e_2' + \ldots + (c_{i1}d_{1n} + c_{i2}d_{2n} + \ldots + c_{in}d_{nn})e_n' \end{aligned} \qquad (8)$$

(8) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ვექტორთა სისტემა

$$e_1', e_2', \ldots, e_n', e_i', i > n$$

წრფივად დამოკიდებულია. 11.1 თეორემიდან გამომდინარე, წრფივად დამოკიდებული იქნება $e_1', e_2', \ldots, e_m', n < m$ სისტემაც, ამიტომ ის ბაზისი ვერ იქნება. მაშასადამე, ვექტორთა ყველა სისტემა V ვექტორულ სივრცეში, რომლის ვექტორთა რიცხვი აღემატება n-ს წრფივად დამოკიდებული იქნება. აქედან კი საბოლოოდ გამომდინარეობს, რომ ვექტორული სივრცის სხვადასხვა ბაზისებში ვექტორთა ერთნაირი რაოდენობაა.

როგორც აღვნიშნეთ, ვექტორული სივრცის განზომილება ეწოდება მის ნებისმიერ ბაზისში ვექტორების რაოდენობას.

ადვილია ჩვენება, რომ ამ პარაგრაფში განხილულ 1-ლ მაგალითში მოყვანილი სიბრტყის ვექტორებისაგან შედგენილი ვექტორული სივრცის განზომილებაა 2; მე-2 მაგალითში მოყვანილი სივრცის ვექტორებისაგან შედგენილი ვექტორული სივრცის განზომილებაა 3; მე-3-ე მაგალითში მოყვანილი R^n ვექტორული სივრცის განზომილებაა n, ვინაიდან ამ სივრცეში ერთერთი ბაზისია ვექტორთა სისტემა:

$$\underbrace{(1,0,0,\ldots,0)}_{n},$$

$$\underbrace{(0,1,0,\ldots,0}_{n},$$

$$-----$$

$$\underbrace{(0,0,\ldots,0,1}_{n}.$$

§12. კავშირი ვექტორული სივრცის ბაზისებსა და ამ ბაზისებში ვექტორთა კოორდინატებს შორის

ვთქვათ, V ვექტორულ სივრცეში დაფიქსირებულია $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ ბაზისები. ვუწოდოთ მათ შესაბამისად I და II ბაზისი. 11.4 თეორემიდან გამომდინარე:

$$\begin{aligned} e_1' &= c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \ldots + c_{1n}e_n \\ e_2' &= c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{2n}e_n \\ &\text{-------------------} \\ e_n' &= c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{aligned} \qquad (6^*)$$

მატრიცს:

$$T_2^1 = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}\ldots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}\ldots c_{2n} \\ ----- \\ c_{n1}c_{n2}\ldots c_{nn} \end{pmatrix}$$

უწოდებენ ***I ბაზისიდან II ბაზისზე გადასვლის მატრიცს.***

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ეს მატრიცი არაგადაგვარებულია, ანუ $|T_2^1| \neq 0$. აქედან გამომდინარე, არსებობს მისი შებრუნებული მატრიცი $T_1^2 = (T_2^1)^{-1}$. როგორც ზემოთ ვნახეთ, (5*) ტოლობები მატრიცულად ასე ჩაიწერება: $e' = T_2^1 e$. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს მარჯვენიდან გავამრავლებთ T_1^2 მატრიცზე, მივიღებთ ტოლობას: $e = T_1^2 e'$, რომელიც გაშლილად ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} e_1 &= d_{11}e_1' + d_{12}e_2' + \ldots + d_{1n}e_n' \\ e_2 &= d_{21}e_1' + d_{22}e_2' + \ldots + d_{2n}e_n' \\ &---------------- , \\ e_n &= d_{n1}e_1' + d_{n2}e_2' + \ldots + d_{nn}e_n' \end{aligned} \qquad (7^*)$$

სადაც მატრიცი

$$\begin{pmatrix} d_{11}d_{12}\ldots d_{1n} \\ d_{21}d_{22}\ldots d_{2n} \\ ------ \\ d_{n1}d_{n2}\ldots d_{nn} \end{pmatrix} = T_1^2 .$$

T_1^2 მატრიცს უწოდებენ ***II ბაზისიდან I ბაზისზე გადასვლის მატრიცს.***

ახლა გავარკვიოთ, რა კავშირშია ერთმანეთთან რაიმე $a \in V$ ვექტორის კოორდინატები I ბაზისში ამავე ვექტორის კოორდინატებთან II ბაზისში.

თეორემა 12.1. თუ $a \in V$ ვექტორის კოორდინატები I ბაზისში წარმოდგენილია ერთსტრიქონიანი მატრიცით $x = (x_2 x_2 \ldots x_n)$, ხოლო II ბაზისში $x' = (x_2' x_2' \ldots x_n')$ მატრიცით მაშინ ადგილი აქვს მატრიცულ ტოლობებს:

$$x' = x T_1^2 , \qquad (9)$$

$$x = x' T_2^1 . \qquad (10)$$

დამტკიცება:

$$\begin{aligned} a &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = x_1(d_{11}e_1' + d_{12}e_2' + \ldots + d_{1n}e_n') + \\ &+ x_2(d_{21}e_1' + d_{22}e_2' + \ldots + d_{2n}e_n') + \ldots + x_n(d_{n1}e_1' + d_{n2}e_2' + \ldots + d_{nn}e_n') = \\ &= (x_1 d_{11} + x_2 d_{21} + \ldots + x_n d_{n1})e_1' + (x_1 d_{12} + x_2 d_{22} + \ldots + x_n d_{n2})e_2' + \ldots + \\ &+ (x_1 d_{1n} + x_2 d_{2n} + \ldots + x_n d_{nn})e_n' = x_1' e_1' + x_2' e_2' + \ldots + x_2' e_n' \end{aligned}$$

რადგანაც ვექტორის წარმოდგენა მოცემულ ბაზისში ერთადერთია, ამიტომ

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 d_{11} + x_2 d_{21} + \ldots + x_n d_{n1} \\ x_2' &= x_1 d_{12} + x_2 d_{22} + \ldots + x_n d_{n2} \\ &---------------- \\ x_n' &= x_1 d_{1n} + x_2 d_{2n} + \ldots + x_n d_{nn} \end{aligned} \qquad (11)$$

მატრიცი

$$(x')' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$$

წარმოადგენს $x' = (x'_2 x'_2 ... x'_n)$ მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცს, ხოლო მატრიცი

$$(x)' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x = (x_2 x_2 ... x_n)$ მატრიცის ტრანსპონირებულს. (11) ტოლობები მატრიცულად ასე ჩაიწერება:

$$(x')' = (T_1^2)'(x)'. \tag{12}$$

თუ გაეიხსენებთ მატრიცთა თეორიაში ცნობილ ფორმულებს: $(A')' = A$, $(AB)' = B'A'$, (12) ტოლობიდან მიეიღებთ:

$$x' = xT_1^2.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება $x = x'T_2^1$ ტოლობაც.

მაგალითი: ეთქვათ, V სამგანზომილებიანი ვექტორული სიერცეა. e_1, e_2, e_3 და e'_1, e'_2, e'_3 ამ სიერცეში დაფიქსირებული ბაზისები. ეთქვათ, პირველი ბაზისიდან მეორეზე გადასვლის მატრიცია

$$T_2^1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ეიპოვოთ $a = e_1 + 4e_2 - e_3$ ვექტორის კოორდინატები x'_1, x'_2, x'_3 მეორე ბაზისში.

ამოხსნა: პირველ ბაზისში a ვექტორის კოორდინატები შეადგენენ ერთსტრიქონიან მატრიცს $(x_1 x_2 x_3) = (1 \;\; 4 - 1)$, მეორე ბაზისიდან პირველზე

გადასვლის მატრიცია

$$T_1^2 = (T_2^1)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

(9) ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$(x_1'x_2'x_3') = (1\ \ 4-1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix} = (-13\ \ 6\ \ 27).$$

§13. წრფივი ასახვები(გარდაქმნები) და წრფივი ოპერატორები

ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიანი V^n და m-განზომილებიანი V^m წრფივი სივრცეები. ასახვას $f: V^n \to V^m$ უწოდებენ ***წრფივ ასახვას(გარდაქმნას),*** თუ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \tag{13}$$

$$f(ka) = kf(a), \tag{14}$$

ყოველი $a \in V^n, b \in V^n$ ვექტორებისთვის და $k \in R$ ნამდვილი რიცხვისთვის.

თეორემა 13.1. თუ $f: V^n \to V^m$ წრფივი ასახვაა, მაშინ

$$f(k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_la_l) = k_1f(a_1) + k_2(a_2) + \ldots + k_lf(a_l)$$

და $f(0_1) = 0_2$, სადაც და $0_1 \in V^n$ და $0_2 \in V^m$ წრფივი სივრცეების ნულოვანი ვექტორებია.

დამტკიცება: (13) და (14) ფორმულებიდან გამომდინარე.

$$f(k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_la_l) = f(k_1a_1) + f(k_2a_2 + \ldots + k_la_l) = k_1f(a_1) + f(k_2a_2 + \ldots + k_la_l) =$$
$$= k_1f(a_1) + f(k_2a_2) + f(k_3a_3 + \ldots + k_la_l) = k_1f(a_1) + k_2f(a_2) + f(k_3a_3 + \ldots + k_la_l) = \ldots =$$
$$= k_1f(a_1) + k_2f(a_2) + \ldots + k_lf(a_l).$$

ასევე: $f(0_1) = f(a + (-a)) = f(a) + f(-a) = 1f(a) + (-1)f(a)) = 0(f(a) = 0_2$.

$n \times m$ რიგის მატრიცს

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2m} \\ ------ \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nm} \end{pmatrix},$$

რომელის ელემენტებიც განისაზღვრებიან ტოლობებით:

$$\begin{array}{l} f(e_1^1) = a_{11}e_1^2 + a_{12}e_2^2 + \ldots + a_{1m}e_m^2 \\ f(e_2^1) = a_{21}e_1^2 + a_{22}e_2^2 + \ldots + a_{2m}e_m^2 \\ ---------------- \\ f(e_n^1) = a_{n1}e_1^2 + a_{n2}e_2^2 + \ldots + a_{nm}e_m^2 \end{array}, \tag{15}$$

სადაც $e_1^1, e_2^1, \ldots, e_n^1$ და $e_1^2, e_2^2, \ldots, e_m^2$ ბაზისებია V^n, V^m წრფივ სივრცეებში, შესაბამისად, ამ ბაზისებში f ***წრფივი ასახვის მატრიცს*** უწოდებენ.

თეორემა 13.2. თუ A_f წრფივი $f: V^n \to V^m$ ასახვის მატრიცია და $x_1, x_2, \ldots, x_n$ წარმოადგენს $a \in V^n$ ვექტორის კოორდინატებს $e_1^1, e_2^1, \ldots, e_n^1$ ბაზისში, მაშინ $f(a) \in V^m$ ვექტორის $y_1, y_2, \ldots, y_m$ კოორდინატები $e_1^2, e_2^2, \ldots, e_m^2$ ბაზისში გამოითვლება ფორმულით:

$$(y_1 y_2 ... y_m) = (x_1 x_2 ... x_n) A_f . \tag{16}$$

დამტკიცება:

$f(a) = f(x_1 e_2^1 + x_2 e_2^1 + ... + x_n e_n^1) = x_1 f(e_1^1) + x_2 f(e_2^1) + ... + x_n f(e_n^1) =$

$= x_1 (a_{11} e_1^2 + a_{22} e_2^2 + ... + a_{1m} e_m^2) + x_2 (a_{21} e_1^2 + a_{22} e_2^2 + .. + a_{2m} e_m^2) + ... +$

$+ x_n (a_{n1} e_1^2 + a_{n2} e_2^2 + ... + a_{nm} e_m^2) = (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + ... + x_n a_{n1}) e_1^2 + (x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + ... + x_n a_{n2}) e_m^2 +$

$+ (x_1 a_{1m} + x_2 a_{2m} + ... + x_n a_{nm}) e_m^2 = y_1 e_1^2 + y_2 e_2^2 + ... + y_m e_m^2 .$

აქედან გამომდინარეობს მატრიცული ტოლობა:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} = (A_f)' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

თუ გადავალთ ტრანსპონირებულ მატრიცებზე, გვექნება:

$$(y_1 y_2 ... y_m) = (x_1 x_2 ... x_n) A_f ,$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

თუ $V^n = V^m$, მაშინ $f : V^n \to V^n$ წრფივ ასახვას ***წრფივ ოპერატორს*** უწოდებენ.

ცხადია წრფივი ოპერატორის შესაბამისი მატრიცი A_f რაიმე ბაზისში წარმოადგენს n რიგის კვადრატულ მატრიცს.

მაგალითი: ვთქვათ V^3 სამგანზომილებიანი ვექტორული სივრცე ბაზისით: e_1, e_2, e_3 და

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

წარმოადგენს $f : V^3 \to V^3$ წრფივი ერატორის მატრიცს მოცემულბაზისში. ვიპოვოთ $f(a)$ ვექტორი, თუ $a = 5e_1 + e_2 - 2e_3$.

ამოხსნა: ვთქვათ $f(a) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$, მაშინ

$$(y_1 y_2 y_3) = (5 \quad 1 - 2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = (-9 \quad 16 \quad 0) .$$

მაშასადამე $f(a) = -9e_1 + 16e_2$.

A და B მატრიცს უწოდებენ ***მსგავს მატრიცებს***, თუ არსებობს ისეთი არაგადაგვარებული C მატრიცი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას: $B = C^{-1} BC$.

თეორემა 13.3. თუ $e_1,e_2,...,e_n$ და $e'_1,e'_2,...,e'_n$ ბაზისებია V^n ვექტორულ სივრცეში, მაშინ $f:V^n \to V^n$ ოპერატორის შესაბამისი მატრიცები ამ ბაზისებში: A_f, B_f მსგავსი მატრიცებია.

დამტკიცება: როგორც ვიცით, თუ რაიმე $a \in V^n$ ვექტორის კოორდინატები პირველ ბაზისში შეადგენენ $(x_1x_2...x_n)$ მატრიცს, მაშინ $f(a)$ ვექტორის $y_1,y_2,...,y_n$ კოორდინატებისთვის იგივე ბაზისში გვაქვს:

$$(y_1y_2...y_n)=(x_1x_2...x_n)A_f.$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან მეორე ბაზისიდან პირველ ბაზისზე გადასვლის მატრიცზე- T_1^2. მივიღებთ:

$$(y_1y_2...y_n)T_1^2=(x_1x_2...x_n)A_fT_1^2,$$

ანუ

$$(y'_1y'_2...y'_n)=(x_1x_2...x_n)A_fT_1^2,$$

სადაც $y'_1,y'_2,....,y'_n$ წარმოადგენენ $f(a)$ ვექტორის კოორდინატებს მეორე ბაზისში. მეორე მხრივ:

$$(y'_1y'_2...y'_n)=(x_1x_2...x_n)T_1^2B_f.$$

ბოლო ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$(x_1x_2...x_n)A_fT_1^2=(x_1x_2...x_n)T_1^2B_f,$$

ანუ

$$A_fT_1^2=T_1^2B_f.$$

თუ გავამრაველებთ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს მარცხნიდან $(T_1^2)^{-1}$ მატრიცზე, მივიღებთ:

$$B_f=(T_1^2)^{-1}A_fT_1^2.$$

როგორც ვიცით, T_1^2 არაგადაგვარებული მატრიცია. თეორემა დამტკიცდა.

წრფივ ოპერატორს ეწოდება ***არაგადაგვარებული***, თუ მისი მატრიცი რომელიმე ბაზისში არაგადაგვარებულია.

წრფივი ოპერატორის მატრიცები სხვადასხვა ბაზისში მსგავსი მატრიცებია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს განსაზღვრების კორექტულობა.

§14. მოქმედებანი წრფივ ოპერატორებზე

$f:V^n \to V^n, \varphi:\to V^n \to V^n$ ***წრფივი ოპერატორების ჯამი*** ეწოდება ოპერატორს $f+\varphi:V^n \to V^n$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$(f+\varphi)(a)=f(a)+\varphi(a).$$

თეორემა 14.1 წრფივი ოპერატორების ჯამი წრფივი ოპერატორია.

დამტკიცება: მართლაც,

$$(f+\varphi)(a+b)=f(a+b)+\varphi(a+b)=f(a)+f(b)+\varphi(a)+\varphi(b)=(f+\varphi)(a)+(f+\varphi)(b).$$

თეორემა 14.2. ფიქსირებულ ბაზისში $A_{f+\varphi}=A_f+A_\varphi$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $x_1,x_2,...,x_n$ რაიმე $a \in V^n$ ვექტორის კოორდინატებია რაიმე ფიქსირებულ ბაზისში, მაშინ

$$(x_1x_2...x_n)A_{f+\varphi}=(x_1x_2...x_n)A_f+(x_1x_2...x_n)A_\varphi=(x_1x_2...x_n)(A_f+A_\varphi).$$

მაშასადამე:

$$A_{f+\varphi}=A_f+A_\varphi.$$

$f:V^n \to V^n, \varphi: \to V^n \to V^n$ წრფივი ოპერატორების ნამრავლი ეწოდება ოპერატორს $f\varphi: V^n \to V^n$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით: $(f\varphi)(a) = \varphi(f(a))$.

თეორემა 14.3. წრფივი ოპერატორების ნამრავლი წრფივი ოპერატორია.

დამტკიცება: მართლაც, $(f\varphi)(a+b) = \varphi(f(a+b)) = \varphi(f(a)+f(b)) = (f\varphi)(a)+(f\varphi)(b)$.

თეორემა 14.4. ფიქსირებულ ბაზისში $A_{f\varphi} = A_f A_\varphi$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $x_1, x_2, ..., x_n$ რაიმე $a \in V^n$ ვექტორის კოორდინატებია რაიმე ფიქსირებულ ბაზისში, მაშინ

$$(x_1 x_2 ... x_n) A_{f\varphi} = ((x_1 x_2 ... x_n) A_f) A_\varphi .$$

მატრიცთა ნამრავლის ასოციაციურობის გამო

$$(x_1 x_2 ... x_n) A_{f\varphi} = (x_1 x_2 ... x_n)(A_f A_\varphi),$$

ანუ $A_{f\varphi} = A_f A_\varphi$.

$f:V^n \to V^n$ წრფივი ოპერატორის და $k \in R$ რიცხვის ნამრავლი ეწოდებაა ოპერატორს $kf: V^n \to V^n$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$(kf)(a) = kf(a).$$

თეორემა 14.5. ფიქსირებულ ბაზისში $A_{kf} = kA_f$

დამტკიცება: ვთქვათ, $x_1, x_2, ..., x_n$ რაიმე $a \in V^n$ ვექტორის კოორდინატებია რაიმე ფიქსირებულ ბაზისში, მაშინ

$$(x_1 x_2 ... x_n) A_{kf} = k(x_1 x_2 ... x_n) A_f = (x_1 x_2 ... x_n) kA_f ,$$

მაშასადამე: $A_{kf} = kA_f$.

$f:V^n \to V^n$ ოპერატორს უწოდებენ ***ნულოვან ოპერატორს*** , თუ ის განისაზღვრება ფორმულით $f(a) = 0$ ყოველი $a \in V^n$ ვექტორისათვის.

$f:V^n \to V^n$ ოპერატორს უწოდებენ ***ერთეულოვან ოპერატორს***, თუ ის განისაზღვრება ფორმულით: $f(a) = a$ ყოველი $a \in V^n$ ვექტორისათვის.

V^n წრფივ სივრცეზე განსაზღვრულ ოპერატორთა სიმრავლე აღინიშნება ასე: $H(V^n)$.

§15. წრფივი სივრცის ქვესივრცე

V ***წრფივი სივრცის ქვესივრცე*** ეწოდება მის ისეთ $L \subset V$ ქვესიმრავლეს, რომელიც ასევე წარმოადგენს წრფივ სივრცეს V სივრცეში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ.

რადგანაც ნულოვანი ვექტორი და რაიმე ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი ერთადერთია V სივრცეში, ამიტომ $0 \in L$ და თუ $a \in L$ მაშინ $-a \in L$.

ვექტორთა $a_1, a_2, ..., a_l$ სისტემის წრფივი კომბინაცია ეწოდება ვექტორს $k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_l a_l$, ხოლო ამ სისტემის ვექტორების წრფივ კომბინაციათა მთელ $\{k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_l a_l\}$ ერთობლიობას ვექტორთა მოცემული სისტემის წრფივი გარსი ეწოდება.

თეორემა 15.1. ვექტორთა $a_1, a_2, ..., a_l \in V$ სისტემის წრფივი გარსი ქვესივრცეა V სივრცეში.

დამტკიცება: მართლაც,

$$(k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_l a_l) + (k'_1 a_1 + k'_2 a_2 + ... + k'_l a_l) = (k_1 + k'_1) a_1 + (k_2 + k'_2) a_2 + ... + (k_l + k'_l) a_l ,$$

$$k(k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_l a_l) = kk_1 a_1 + kk_2 a_2 + ... + kk_l a_l .$$

თეორემა 15.2. n განზომილებიან წრფივ V^n სივრცეში არსებობს ნებისმიერ $k<n$ განზომილებიანი ქვესივრცე.

დამტკიცება: ვთქვათ, $e_1,e_2,...,e_n$ ბაზისია V^n სივრცეში. განვიხილოთ ამ ბაზისის რაიმე ქვესისტემა $e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_k}$. ამ ქვესისტემის წრფივი გარსი ცხადია წარმოადგენს k განზომილებიან ქვესივრცეს V^n სივრცეში. თეორემა დამტკიცდა.

თუ L_1 და L_2 ქვესივრცეებია V^n სივრცეში, მაშინ ცხადია, $L_1 \cap L_2$ ქვესივრცე იქნება ამ სივრცეში.

ვთქვათ, $f:V^n \to V^n$ წრფივი ოპერატორია, სიმრავლეს $\{a\in V^n \mid f(a)=0\}$ უწოდებენ f ოპერატორის ბირთვს და აღნიშნავენ ასე: $\ker f$. ოპერატორის ბირთვი ცხადია, ქვესივრცეა V^n სივრცეში.

სიმრავლეს$\{f(a)\in V^n \mid a\in V^n\}$ უწოდებენ f ოპერატორის მნიშვნელობათა არეს და აღნიშნავენ ასე: $\mathrm{Im}\, f$. ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ცხადია, ქვესივრცეა V^n სივრცეში.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, წრფივი ოპერატორის მატრიცები სხვადასხვა ბაზისში მსგავსი მატრიცებია. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ მსგავს მატრიცებს ერთი და იგივე რანგი აქვთ.

$f:V^n \to V^n$ წრფივი ოპერატორის შესაბამისი მატრიცის რანგს ამ ***ოპერატორის რანგი*** ეწოდება.

$\ker f \subset V^n$ ქვესივრცის განზომილებას f ***ოპერატორის დეფექტი*** ეწოდება.

თეორემა 15.3. $f:V^n \to V^n$ წრფივი ოპერატორის რანგი ტოლია $\mathrm{Im}\, f$ ქვესივრცის განზომილებისა.

დამტკიცება: ვთქვათ, რაიმე $e_1,e_2,...,e_n$ ბაზისში $f:V^n \to V^n$ წრფივი ოპერატორის მატრიცია A_f. ცხადია, $\mathrm{Im}\, f$ ქვესივრცე წარმოადგენს $f(e_1),f(e_2),...,f(e_n)$ ვექტორთა სისტემის წრფივ გარსს. ამ სისტემის მაქსიმალურ რაოდენობის ვექტორების შემცველ წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემას A_f მატრიცში შეესაბამება სტრიქონები, რომლებიც ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ქმნიან R^n ვექტორულ სივრცეში. ასეთი სტრიქონების რაოდენობა კი, როგორც ვიცით, განსაზღვრავს A_f მატრიცის რანგს. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 15.4. $f:V^n \to V^n$წრფივი ოპერატორის რანგის და დეფექტის ჯამი უდრის V^nსივრცის განზომილებას.

დამტკიცება: ვთქვათ, $e_1,e_2,...,e_k$ წარმოადგენს $\ker f$ ქვესივრცის ბაზისს, ხოლო $e_1,e_2,...,e_k,e_{k+1},...e_n$ კი V^nსივრცის ბაზისია. ასეთი ბაზისი არსებობს $f(e_1)=f(e_2)=...=f(e_k)=0$. ვთქვათ ოპერატორის რანგია r, მაშინ ვექტორთა $f(e_{k+1}),f(e_{k+2}),...,f(e_n)$ სისტემაში არსებობს წრფივად დამოუკიდებელი $f(e_{i_1}),f(e_{i_2}),...,f(e_{i_r})$ ქვესისტემა, რომელიც r რაოდენობის ვექტორებისაგან შედგება. ცხადია, $f(e_{i_j})\neq 0, j=1,2,...,r$.

ვთქვათ, $e_{k+l}, l\le n-r$ ისეთია, რომ $f(e_{k+l})$ წარმოადგენს $f(e_{i_1}),f(e_{i_2}),...,f(e_{i_r})$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას. ანუ არსებობენ რიცხვები, $k_1,k_2,...,k_r$, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას: $f(e_{k+l})=k_1f(e_{i_1})+k_2f(e_{i_2})+...+k_rf(e_{i_r})=$
$f(k_1e_{i_1}+k_2e_{i_2}+...+k_re_{i_r})\neq 0$,
მაშასადამე:

$$f(e_{k+l})-f(k_1e_{i_1}+k_2e_{i_2}+...+k_re_{i_r})=f(e_{k+l}-k_1e_{i_1}-k_2e_{i_2}-...-k_re_{i_r})=0,$$

აქედან კი გამომდინარეობს: $e_{k+l}-k_1e_{i_1}-k_2e_{i_2}-...-k_re_{i_r}=p_1e_1+p_2e_2+p_ke_k$, რაც შეუძლებელია, რადგანაც $e_1,e_2,...,e_k,e_{k+1},...e_n$ წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ესე იგი $f(e_{k+l})$ არ წარმოადგენს $f(e_{i_1}),f(e_{i_2}),...,f(e_{i_r})$ ვექტორთა სისტემის წრფივ კომბინაციას, რაც ნიშნავს იმას, რომ $f(e_{k+1}),f(e_{k+2}),...,f(e_n)$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. აქედან გამომდინარე, $r=n-k$, ანუ $n=r+k$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

თეორემა 15.5. თუ $f:V^n\to V^n$ წრფივი ოპერატორის რანგი ტოლია $n-$ის, მაშინ f ურთიერთცალსახა ასახვაა ანუ იზომორფიზმია.

დამტკიცება: წინა თეორემიდან გამომდინარე $\ker f$ ქვესივრცის განზომილება იქნება ნული, ამიტომ f მონომორფიზმია. $\mathrm{Im}\, f$ ქვესივრცის განზომილება ტოლია $n-$ის. ეს კი ნიშნავს, რომ f ეპიმორფიზმია.

ასეთ შემთხვევაში ცხადია არსებობს f^{-1}, რომელიც ასევე წრფივი ოპერატორია და რადგანაც, თეორემის პირობებში, ნებისმიერ ბაზისში A_f არაგადაგვარებული მატრიცია, ამიტომ $A_{f^{-1}}=(A_f)^{-1}$.

§16. მატრიცის მახასიათებელი ფესვები, წრფივი ოპერატორის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები

ვთქვათ, A რაიმე მატრიცაა, λ ცვლადი სიდიდე, E ერთეულოვანი მატრიცი. განვიხილოთ მატრიცი:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}-\lambda & ...a_{2n} \\ ----- & ----- \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn}-\lambda & \end{pmatrix}, \tag{17}$$

სადაც $a_{ij}; i=1,2,....,n; j=1,2,....,n$ A მატრიცის ელემენტებია.

(17) მატრიცს A მატრიცის ***მახასიათებელი მატრიცი*** ეწოდება. (17) მატრიცის დეტერმინანტი: $|A-\lambda E|$, ცხადია, წარმოადგენს n ხარისხის მრავალწევრს, რომლის უფროსი წევრიცაა-$(-1)^n\lambda^n$. ამ მრავალწევრს A მატრიცის ***მახასიათებელი მრავალწევრი*** ეწოდება. ამ მრავალწევრის ფესვებს, რომლებიც როგორც ნამდვილი, ასევე კომპლექსური რიცხვები შეიძლება იყვნენ, A მატრიცის ***მახასიათებელი ფესვები*** ეწოდება.

თეორემა 16.1. მსგავს მატრიცებს ერთიდა იგივე მახასიათებელი მრავალწევრები და მახასიათებელი ფესვები გააჩნიათ.

დამტკიცება: ვთქვათ, $B=C^{-1}AC$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $C\lambda E=\lambda EC$ და $|C^{-1}|=|C|^{-1}$, გვექნება:

$$|B-\lambda E|=|C^{-1}AC-\lambda E|=|C^{-1}(A-\lambda E)C|=|C^{-1}||A-\lambda E||C|=|C|^{-1}|C||A-\lambda E|=|A-\lambda E|$$

თეორემა დამტკიცდა.

ვთქვათ, ახლა $f:V^n\to V^n$ წრფივი ოპერატორია, როგორც ვნახეთ, სხვადასხვა ბაზისში ამ ოპერატორის მარტრიცები მსგავსი მატრიცებია.

წინა თეორემის თანახმად, ამ მატრიცებს ერთნაირი მახასიათებელი ფესვები აქვთ. ამ საერთო მახასიათებელ ფესვებს f ***ოპერატორის მახასიათებელ ფესვებს*** უწოდებენ, მათ ერთობლიობას კი-ამაეე ***ოპერატორის სპექტრს.***

განსაზღვრება 16.1. თუ $b \in V^n$ ისეთი არანულოვანი ვექტორია, რომ $f(b)=\lambda^0 b$, სადაც λ^0 რაღაც ნამდვილი რიცხვია, მაშინ λ^0 რიცხვს f ***ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობა*** ეწოდება, ხოლო b ვექტორს f ოპერატორის λ^0 საკუთარი მეიშენელობის შესაბამისი ***საკუთარი ვექტორი***.

თეორემა 16.2. მხოლოდ f ოპერატორის ნამდვილი მახასიათებელი ფესვები, თუ ისინი არსებობენ, წარმოადგენენ ამ ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობებს.

დამტკიცება: ვთქვათ, f ოპერატორის საკუთარი b ვექტორის კოორდინატები რაიმე დაფიქსირებულ ბაზისში ტოლია: $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, ხოლო f ოპერატორის მატრიცი $A_f=(a_{ij})$. $f(b)=\lambda^0 b$ ტოლობას თუ ჩავწერთ მატრიცულად, გვექნება:

$$(x_1^0 x_2^0, \dots, x_n^0)A_f = \lambda^0 (x_1^0 x_2^0, \dots, x_n^0).$$

თუ მოვახდენთ ტოლობაში შემავალი მარიცების ტრანსპონირებას, მიეიღებთ:

$$A_f' \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \lambda^0 \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

ანუ

$$(A_f' - \lambda^0 E) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^0 \end{pmatrix} = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობა გაშლილად ასე ჩაიწერება

$$\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda^0)x_1^0 + a_{21}x_2^0 + \dots + a_{n1}x_n^0 = 0 \\ a_{12}x_1^0 + (a_{22}-\lambda^0)x_2^0 + \dots + a_{n2}x_n^0 = 0 \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1^0 + a_{2n}x_2^0 + \dots + (a_{nn}-\lambda^0)x_n^0 = 0 \end{array}.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ b ვექტორის კოორდინატები წარმოადგენენ შემდეგი

$$\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda^0)x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22}-\lambda^0)x_2 + \dots + a_{n2}x_n = 0 \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda^0)x_n = 0 \end{array} \qquad (18)$$

წრფივ, ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის არატრივიალურ(არანულოვან) ამონახსნს.

ამ სისტემას არატრივიალური(არანულოვანი) ამონახსნი კი გააჩნია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი

$$|(A'_f - \lambda^0 E)| = 0. \qquad (19)$$

ეს ფაქტი კი გვიჩვენებს, იმას რომ λ^0 ნამდვილი რიცხვი, რომელიც f ოპერატორის საკუთარი რიცხეია, წარმოადგენს f ოპერატორის მახასიათებელ ფესვს.

აქ უნდა აღვნიშნოთ, რომ f ოპერატორის ზოგიერთი მახასიათებელ ფესვი შეიძლება არ წარმოადგენდეს მის საკუთარ მნიშვნელობას. (მაგალითად: კომპლექსური ფესვი). თუ f ოპერატორს არ გააჩნია ნამდვილი ფესვები, მაშინ მას არც საკუთარი რიცხვები და ვექტორები გააჩნია(აქ ვგულისხმობთ, რომ ვიხილავთ მხოლოდ ნამდვილ ვექტორულ სივრცეებს).

ვაჩვენოთ ახლა, რომ, თუ λ^0 ნამდვილი რიცხვი f ოპერატორის მახასიათებელ ფესვია, მაშინ იგი წარმოადგენს ამ ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობას. მართლაც, ასეთ შემთხვევაში ადგილი ექნება (19) ტოლობას, რაც გამოიწვევს (18) განტოლებათა სისტემის არანულოვანი ამონახსნის არსებობას. ეს ამონახსნი კი (როგორც კოორდინატები) თავიდანვე დაფიქსირებულ ბაზისში განსაზღვრავს f ოპერატორის საკუთარი λ^0 მნიშვნელობის შესაბამის საკუთარ ვექტორს. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 16.3. f წრფივი ოპერატორის შესაბამისი მატრიცი $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება დიაგონალური, როდესაც ამ ბაზისის ყველა ვექტორი წარმოადგენს f ოპერატორის საკუთარ ვექტორს.

დამტკიცება: ავიღოთ ბაზისიდან e_i ვექტორი, მისი კოორდინატები მოცემულ ბაზისში იქნება $\underbrace{0,0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots,0$. თუ e_i საკუთარი ვექტორია, ადგილი ექნება ტოლობას $f(e_i) = \lambda_i e_i$. ეს ტოლობა მატრიცულად ასე ჩაიწერება:

$(\underbrace{0\dots0}_{i-1}10\dots0)A_f = \lambda_i(\underbrace{00\dots0}_{i-1}10\dots0)$. თუ მოვახდენთ ტოლობაში შემავალი მატრიცების ტრანსპონირებას, გვექნება:

$$A'_f\begin{pmatrix}0\\0\\.\\.\\.\\0\\1\\0\\.\\.\\.\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\.\\.\\.\\0\\\lambda_i\\0\\.\\.\\.\\0\end{pmatrix} \qquad (20)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ A'_f მატრიცში i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტი, გარდა მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტისა, ნულია, ხოლო მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტი უდრის λ_i-ს. რადგან $i = 1,2,\dots,n$,

ამიტომ A'_f მატრიცი და ასევე მისი ტრანსპონირებული A_f მარიცი იქნება დიაგონალური, და დიაგონალზე განლაგებული ელემენტები ტოლი იქნება, შესაბამისად, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. რიცხვებისა.

ახლა ვთქვათ, A'_f მატრიც დიაგონალური მატრიცია დიაგონალით-$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, მაშინ (20) ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა: $f(e_i) = \lambda_i e_i$. ეს კი ნიშნავს, რომ e_i ვექტორი f ოპერატორის საკუთარ ვექტორს წარმოადგენს. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 16.4. f წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები: $b_1, b_2, ..., b_k$, რომლებიც შეესაბამებიან სხვადასხვა $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ საკუთრივ მნიშვნელობებს, ქმნიან წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას.

დამტკიცება: თეორემა დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდით. როდესაც $k = 1$, სისტემა შედგება ერთი არანულოვანი ვექტორისაგან და ამიტომ იგი წრფივად დამოუკიდებელია. დავუშვათ, სისტემა $b_1, b_2, ..., b_{k-1}$ წრფივად დამოუკიდებელია, ვაჩვენოთ, რომ $b_1, b_2, ..., b_k$ სისტემაც იქნება წრფივად დამოუკიდებელი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, სისტემა $b_1, b_2, ..., b_k$ წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ არსებობენ რიცხვები $l_1, l_2, ..., l_k$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და

$$l_1 b_1 + l_2 b_2 + ... + l_k b_k = 0. \qquad (21)$$

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $l_1 \neq 0$.
ვიმოქმედოთ (21) ტოლობის ორივე მხარეზე f ოპერატორით, მივიღებთ:

$$f\ (l_1 b + k l_2 b_2 + ... + l_k b_k) = l_1 \lambda b_1 + l_2 \lambda_2 b_2 + ... + l_k \lambda_k b_k = 0. \qquad (22)$$

გავამრავლოთ (21) ტოლობას λ_k-ზე და გამოვაკლოთ მიღებული ტოლობა (22) ტოლობას, მივიღებთ:

$$l_1(\lambda_1 - \lambda_k) b_1 + l_2(\lambda_2 - \lambda_k) b_2 + ... + l_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) b_{k-1} = 0 \qquad (23)$$

რადგან $l_1 \neq 0$ და $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ამიტომ (23) ტოლობიდან გამომდინარეობს $b_1, b_2, ..., b_{k-1}$ სისტემის წრფივად დამოკიდებულობა. მივიღეთ წინააღმდეგობა, რადგან ჩვენი დაშვებით ეს სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. აქედან გამომდინარე (21) ტოლობას არ შეიძლება ქონდეს ადგილი, მაშასადამე, $b_1, b_2, ..., b_k$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. თეორემა დამტკიცდა.

თუ $f : V^n \to V^n$ წრფივი ოპერატორის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია და ერთმანეთისაგან განსხვავებული, მაშინ ამბობენ, რომ ოპერატორს აქვს მარტივი სპექტრი. წინა თეორემიდან გამომდინარე, ასეთი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც სხვადასხვა საკუთრივ რიცხვებს შეესაბამებიან ქმნიან, V^n სივრცის ბაზას. ამ ბაზაში f ოპერატორის მატრიცი 16.3. თეორემიდან გამომდინარე, იქნება დიაგონალური.

§17. კვადრატული ფორმები და მსათი დაყვანა კანონიკურ სახემდე

ვთქვათ, V^n რაიმე n განზომილებიანი ვექტორული სივრცეა.
V^n ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული ***ორადწრფივი ფორმა*** ეწოდება ასახვას $f : V^n \times V^n \to R$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$f(k_1 a + k_2 b, l_1 c + l_2 d) = k_1 l_1 f(a,c) + k_1 l_2 f(a,d) + k_2 l_1 f(b,c) + k_2 l_2 f(b,d) \qquad (24)$$

ვთქვათ, $e_1, e_2, ..., e_n$ რაიმე ბაზისია V^n ვექტორულ სივრცეში, ვექტორი $a = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$, ვექტორი $b = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$. (24) ტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$f(a,b) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n, y_1e_1 + y_2e_2 + y_ne_n) = x_1y_1f(e_1,e_2) + x_1y_2f(e_1,e_2) + ... +$$
$$+ x_1y_nf(e_1,e_n) + x_2y_1f(e_2,e_1) + x_2y_2(e_2,e_2) + ... + x_2y_nf(e_2,e_n) + ... + x_ny_1f(e_n,e_1) +$$
$$+ x_ny_2f(e_n,e_2) + ... + x_ny_nf(e_n,e_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(e_i,e_j)x_iy_j.$$

მაშასადამე, დაფიქსირებულ ბაზისში ორადწრფივ ფორმას აქვს სახე:

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j, \tag{25}$$

სადაც $a_{ij} = f(e_i,e_j)$, $x_1, x_2, ..., x_n$ a ვექტორის კოორდინატებია, $y_1, y_2, ..., y_n$ b კი ვექტორის კოორდინატები $e_1, e_2, ..., e_n$ ბაზისში.

ვთქვათ ორად წრფივი ფორმა f ისეთია, რომ $f(a,b) = f(b,a)$ ვექტორთა ნებისმიერი წყვილისათვის. მაშინ $a_{ij} = a_{ji}$ და ორად წრფივ ფორმას ეწოდება სიმეტრიული.

მატრიცს: $A = (a_{ij}); i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,n$, ორადწრფივი ფორმის მატრიცი ეწოდება. ცხადია, სხვადასხვა ბაზისში ორად წრფივი ფორმის მატრიცი სხვადასხვა შეიძლება იყოს.

$\varphi : V^n \to R$ ასახვას, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით:

$$\varphi(a) = f(a,a) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{26}$$

სადაც $f : V^n \times V^n \to R$, სიმეტრიული ორადწრფივი ფორმაა, ***კვადრატული ფორმა*** ეწოდება. მატრიცს $A = (a_{ij}); i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,n$ კვადრატული ფორმის მატრიცი ეწოდება, a_{ij} რიცხვებს კი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები.

ცხადია, კვადრატული ფორმის მატრიცი სიმეტრიულია $a_{ij} = a_{ji}$.

სხვადასხვა ბაზისში კვადრატული ფორმის მატრიციც სხვადასხვა შეიძლება იყოს.

ჩავწეროთ კვადრატული ფორმა მატრიცულად.

დავაფიქსიროთ i ინდექსი და განვიხილოთ ჯამი:

$$\sum_{j}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{i1}x_ix_1 + a_{i2}x_ix_2 + ... + a_{in}x_ix_n$$

ერთსვეტიანი მატრიცი:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ ------------ \\ ------------ \\ ------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \tag{27}$$

ტოლია

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}.....a_{1n} \\ a_{21}a_{22}....a_{2n} \\ ------ \\ ------ \\ ------ \\ a_{n1}a_{n2}....a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

ნამრავლის.

მეორე მხრივ, თუ (27) მატრიცს გავამრავლებთ მარცხნიდან $(x_1x_2....x_n)$ მატრიცზე, მივიღებთ:

$$(x_1x_2....x_n)\times\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+....+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \\ ------------- \\ ------------- \\ ------------- \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ .$$

აქედან გამომდინარე, კვადრატული ფორმა მატრიცულად ჩაიწერება ასე:

$$\varphi(a)=X'AX\ , \tag{28}$$

სადაც

$$X'=(x_1x_2....x_n)\ ,\ \ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ახლა გავარკვიოთ, თუ როგორ იცვლება კვადრატული ფორმის მატრიცი ერთი ბაზისიდან მეორეზე გადასვლისას.

თეორემა 17.1. თუ A წარმოადგენს $e_1,e_2,...,e_n$ ბაზისში φ კვადრატული ფორმის მატრიცს, მაშინ მეორე $e_1',e_2',...,e_n'$ ბაზისში ამ ფორმის მატრიცი $B=(T_2^1A(T_2^1)'$, სადაც T_1^2 მეორე ბაზისიდან პირველზე გადასვლის მატრიცია.

დამტკიცება: $\varphi(a)=X''BX'$, $X''=X'T_1^2$, $X'=(T_1^2)'X$. აქედან გამომდინარეობს

$$\varphi(a)=X'T_1^2B(T_1^2)'X\ .(29)$$

თუ შევადარებთ ერთმანეთს (28) და (29) ფორმულებს, მივიღებთ:

$$A=T_1^2B(T_1^2)'\ .$$

აქედან კი საბოლოოდ გვექნება:

$$B=(T_1^2)^{-1}A((T_1^2)')^{-1}=T_2^1A(T_2^1)'\ .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

T_2^1 არაგადაგვარებული მატრიცია, ამიტომ A მატრიცის რანგი უდრის B მატრიცის რანგს.

φ კვადრატული ფორმის A მატრიცის რანგს კვადრატული ***ფორმის რანგი*** ეწოდება, იგი აღინიშნება ასე: ***rankφ***.

დავუშვათ $\varphi : V^n \to R$ კვადრატული ფორმის მატრიცი რომელიღაც ბაზისში დიაგონალური მატრიცია, მაშინ კვადრატულ ფორმას ამ ბაზისში ექნება სახე:

$$\varphi(a) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

კვადრატული ფორმის ასეთ სახეს *კანონიკური სახე* ეწოდება.

რადგანაც კვადრატული ფორმის ყველა მატრიცს ერთი და იგივე რანგი აქვთ, ამიტომ კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეში არანულოვანი λ_i კოეფიციენტების რაოდენობა ემთხვევა ამ კვადრატული ფორმის რანგს.

თეორემა 17.2. ყოველი კვადრატული ფორმისათვის არსებობს ბაზისი, რომელშიდაც მას ექნება კანონიკური სახე.

დამტკიცება: ვთქვათ დაფიქსირებულ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში კვადრატულ ფორმას აქვს სახე:

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

ზოგადობის დაურღვეველად შეგვიძლია დავუშვათ, კვადრატული ფორმის იმ კოეფიციენტებიდან, რომლებიც ცვლადიების კვადრატებთან დგანან, ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. მართლაც, შემოვიღოთ ახალ ცვლადები:

$$z_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2,$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$z_3 = x_3$$

$$z_n = x_n$$

განვიხილოთ ამ ტოლობებით განსაზღვრულ მატრიცი:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{2}0........0 \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{2}0.......0 \\ 001..........0 \\ ----- \\ 00..........01 \end{pmatrix},$$

ამ მატრიცის დეტერმინანტი ტოლია $\frac{1}{2}$-ის და მაშასადამე იგი არაგადაგვარებულია. ამ მატრიცის შებრუნებული მატრიცი გადაიყვანს $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისს ისეთ ბაზისში, სადაც კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებიდან, რომლებიც ცვლადების კვადრატებთან დგანან, ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. მართლაც, კვადრატული ფორმის შესაკრები $2a_{12}x_1x_2$ ახალ ბაზისში მიიღებს სახეს:

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2,$$

ზოგადობის დაურღვევლად, თუ ვიგულისხმებთ რომ $a_{12} \neq 0$, ახალი z_1 ცვლადის კვადრატთან გვექნება არანულოვანი კოეფიციენიტი.

განვიხილოთ გამოსახულება $a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2$. იგი წარმოადგენს ასეეე კვადრატულ ფორმას და მასში შედის x_1 ცვლადის შემცველი ყველა შესაკრები φ ფორმიდან.

განვიხილოთ სხვაობა:

$$\varphi(a) - a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 = g. \qquad (30)$$

ზემოთ თქმულის გამო და იმის გამო, რომ $a_{1j} = a_{j1}$, ეს სხვაობაც კვადრატული ფორმაა და იგი შეიცავს მხოლოდ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ცვლადებს. ეს კვადრატული ფორმა განსაზღვრულია $n-1$ განზომილებიან V^{n-1} ვექტორულ სივრცეზე. (30) ტოლობიდან გვექნება:

$$\varphi(a) = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + g.$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (30) \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

გვექნება:

$$\varphi = a_{11}^{-1}y_1^2 + g,$$

სადაც g წარმოადგენს $y_2, y_3, \ldots, y_n$ ცვლადების შემცველ კვადრატულ ფორმას.

(30) ტოლობები განსაზღვრავენ a ვექტორის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში $x_2, x_3, \ldots, x_n$ კოორდინატებიდან სხვა მეორე $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ ბაზისში $y_2, y_3, \ldots, y_n$ კოორდინატებზე გადასვლის მატრიცს:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots.a_{1n} \\ 010\ldots\ldots.0 \\ 0010\ldots\ldots0 \\ ----- \\ 00\ldots\ldots.01 \end{pmatrix}.$$

იგი არაგადაგვარებულია, მისი შებრუნებული მატრიცი წარმოადგენს $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისიდან მეორე $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ ბაზისში გადასვლის მატრიცს.

როგორც ზემოთ, ზოგადობის დაურღეევლად შეიძლება ვიგულისხმით, რომ g კვადრატულ ფორმაში ცვლადების კვადრატებთან მდგომი კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვაევებულია ნულისაგან, ამიტომ თუ შემოეიტანთ ახალ ცვლადებს:

$$z_1 = y_1$$
$$z_2 = b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + .. + b_{2n}y_n$$
$$z_3 = y_3$$

(31)

$$z_n = y$$

კვადრატული ფორმა მიიღებს სახეს:

$$\varphi(a) = a_{11}^{-1}z_1^2 + b_{22}^{-1}z_2^2 + g'. \qquad (32)$$

(31) ტოლობებით განსაზღვრული მატრიცის შებრუნებული მატრიცი $e_1', e_2', ..., e_n'$ ბაზისს გადაიყვანს ისეთ ბაზისში, სადაც კვადრათულ ფორმას ექნება (32) სახე.
თუ გავაგრძელებთ პროცესს, საბოლოოდ მივიღებთ მატრიცთა მიმდევრობას, რომელთა შესაბამისი რიგით გადამრავლებით მიღებული მატრიცის შებრუნებული მატრიცი $e_1, e_2, ..., e_n$ ბაზის გადაიყვანს ისეთ ბაზისში, სადაც კვადრატულ ფორმას ექნება კანონიკური სახე.

თეორემა დამტკიცდა.

მაგალითი: დავიყვანოთ კანონიკურ სახემდე შემდეგი კვადრატული ფორმა:

$$\varphi(a) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1 \, (33)$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_1 + y_2, x_3 = y_3$.

მივიღებთ: $\varphi(a) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_3y_1 - 8y_2y_3$. ცვლადთა ამ გარდაქმნის მატრიცია

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ახლა კოეფიციენტი y_1^2-თან ნულისაგან განსხვავებულია და ფორმიდან შეიძლება გამოიყოს ერთი ცვლადის კვადრატი.

დაეუშვათ, $z_1 = 2y_1 - 2y_2, z_2 = y_2, z_3 = y_3$. ახალ ცვლადებში კვადრატულ ფორმას ექნება სახე:

$$\varphi(a) = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_2z_3.$$

გამოყენებული ცვლადთა გარდაქმნის მატრიცის შებრუნენული ტოლია:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის.

ახლა დაეუშვათ,

$$t_1 = z_1, t_2 = -2z_2 - 4z_3, t_3 = z_3.$$

ცვლადთა ამ გარდაქმნიის შედეგად მივიღებთ:

$$\varphi(a)=\frac{1}{2}t_1^2-\frac{1}{2}t_2^2+6t_3^2 \quad (34)$$

ამ გარდაქმნის მატრიცის შებრუნებული მატრიცაა:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

თუ კვადრატულ ფორმას რაიმე ბაზისში (33) სახე აქვს, მაშინ ამ ბაზისიდან იმ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი, სადაც კვადრატულ ფორმას ექნება (34) კანონიკური სახე, იქნება ნამრავლი:

$$ABC=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

§18. ინერციის კანონი კვადრატული ფორმებისთვის, დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმები

წინა მაგლითში განხილული კვადრატული ფორმა ABC მატრიცით განსაზღვრული ცვლადთა

$$(x_1x_2x_3)=(t_1t_2t_3)(ABC)$$

გარდაქმნით დაიყვანება კანონიკურ სახეზე. ახლა განვიხილოთ ცვლადთა გარდაქმნა, რომელიც განისაზღვრება მატრიცით:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

ანუ

$$\begin{aligned}x_1&=t_1+3t_2+2t_3\\ x_2&=t_1-t_2-2t_3\ .\\ x_3&=t_2\end{aligned}$$

ამ გარდაქმნის შედეგად კვადრატული ფორმა მიიღებს კანონიკურ სახეს:

$$\varphi(a)=2t_1^2+6t_2^2-8t_3^2.$$

ეს კანონიკური სახე განსხვავდება მისივე (34) ტოლობით განსაზღვრული ასევე კანონიკური სახისაგან. ეს იმიტომ მოხდა, რომ ის ბაზისი, სადაც კვადრატულ ფორმას ქონდა საწყისი (33), სახე ABC და D მატრიცების შესაბამისი გარდაქმნებით გადაეიდა სხვადასხვა ბაზისებში. ამ ბაზისებში კი კვადრატული ფორმის კანონიკური სახეები განსხვაევებულია.

გავარკვიოთ, თუ რა აქვთ საერთო კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეებს სხვადასხვა ბაზისებში.

ცხადია, კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეებში არანულოვან კოეფიციენტთა რაოდენობა ერთი და იგივე იქნება და ამასთან ტოლი იქნება ფორმის რანგისა.

როდესაც კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეში ცვლადებთან მდგომი კოეფიციენტები მოდულით ერთის ტოლია, მაშინ კვადრატული ფორმის ამ სახეს:

$$\varphi(a)=x_1^2+x_2^2+....+x_k^2-x_{k+1}^2-...-x_r^2 \qquad (35)$$

ნორმალური სახე ეწოდება.

ყოველი კვადრატული ფორმა დაიყვანება ნორმალურ სახემდე, მართლაც, ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ კვადრატული ფორმის კანონიკური სახეა:

$$\varphi(a)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+...+\lambda_kx_k^2-\lambda_{k+1}x_{k+1}^2-...-\lambda_rx_r^2;\lambda_i>0$$

(წინააღმდეგ შემთხვევაში მოვახდენთ ცვლადების გადანაცვლებას)და ცვლადთა არაგადაგვარებული გარდაქმნით:

$$z_i=\sqrt{\lambda_ix_i};i=1,2,...,r;z_{r+l}=x_{r+l};l=1,2,...,n-r. \qquad (36)$$

ანუ გარდაქმნით, რომლის შესაბამისი მატრიციც არაგადაგვარებულია, კვადრატული ფორმა დაიყვანება ნორმალურ სახემდე.

თეორემა 18.1 (კვადრატულ ფორმათა ინერციის კანონი). დადებითი და უარყოფითი კვადრატების რიცხვი კვადრატული ფორმის ნორმალურ სახეში არ არის დამოკიდებული ბაზისზე, რომელშიდაც ფორმას აქვს ნორმალური სახე.

დამტკიცება: ვთქვათ, თავიდან კვადრატული ფორმა მოცემულია $e_1,e_2,...,e_n$ ბაზისში, ხოლო $e_1'',e_2'',...,e_n''$ და $e_1''',e_2''',...,e_n'''$ ბაზისებში მას აქვს

$$\varphi(a)=y_1^2+y_2^2+....+y_k^2-y_{k+1}^2-...-y_r^2 \qquad (37)$$

$$\varphi(a)=z_1^2+z_2^2+....+x_p^2-z_{p+1}^2-...-z_r^2 \qquad 38)$$

ნორმალური სახეები. k და p წარმოადგენენ დადებითი კვადრატების რიცხვს კვადრატული ფორმის პირველ და მეორე ნორმალურ სახეებში.

ვთქვათ,

$$\begin{aligned} y_i&=\sum_{s=1}^{n}a_{is}x_s;i=1,2,...,n,\\ z_j&=\sum_{l=1}^{n}b_{jl}x_l;J=1,2,....,n \end{aligned} \qquad (39)$$

წარმოადგენენ წრფივ გარდაქმნებს, რომელთა საშუალებითაც კვადრატული ფორმა დაიყვანება პირველ და მეორე ნორმალურ სახემდე, შესაბამისად. ამ გარდაქმნების მატრიცთა შებრუნებული მატრიცები წარმოადგენენ $e_1,e_2,...,e_n$ ბაზისიდან $e_1'',e_2'',...,e_n''$ და $e_1''',e_2''',...,e_n'''$ ბაზისებზე გადასვლის მატრიცებს, ასევე შესაბამისად.

ვთქვათ, $k<p$ განვიხილოთ ტოლობები:

$$y_1=0,y_2=0,...,y_k=0,z_{p+1}=0,z_{p+2}=0,...,z_r=0,...,z_n=0 \qquad (40)$$

ეს ტოლობები, თუ გავითვალისწინებთ (37) ტოლობებს, წარმოადგენენ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას $n-l+k$ რაოდენობის განტოლებით და n რაოდენობის $x_1,x_2,...,x_n$ უცნობით. როგორც ვხედავთ, უცნობების რაოდენობა მეტია განტოლებათა რაოდენობაზე, ამიტომ ამ სისტემას აუცილებლად აქვს არანულოვანი ამონახსნი. ვთქვათ, ეს ამონახსნია $x_1^0,x_2^0,...,x_n^0$. თუ ჩავსვამთ (37) და (38) ტოლობებში (39) ტოლობებით განსაზღვრულ მოცემული ამონახსნის შესაბამის

$$y_i^0=\sum_{s=1}^{n}a_{is}x_s^0; i=1,2,...,n,$$

$$z_j^0=\sum_{l=1}^{n}b_{jl}x_l^0; J=1,2,....,n$$

y_i და z_j ცვლადების მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$-y^{0^2}_{k+1}-y^{0^2}_{k+2}-...-y^{0^2}_{r}=z_1^2+z_2^2+....+x_p^2.$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე არადადებითია, მარჯვენა მხარე არაუარყოფითი, ამიტომ ტოლობა შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$y_{k+1}=y_{k+2}=...=y_r=z_1=z_2=...=z_p=0.$$

მეორე მხრივ, (40) ტოლობებიდან გამომდინარე,

$$z^{0^2}_{p+1}=0, z^{0^2}_{p+2}=0,...,z^{0^2}_{r}=0,...,z^{0^2}_{n}=0. \qquad (40)$$

მაშასადამე, $x_1^0, x_2^0,...,x_n^0$ წარმოადგენს

$$z_i=0; i=1,2,...,n \qquad (41)$$

წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის არანულოვან ამონახსნს.

ეს ნიშნავს, რომ განტოლებათა (41) სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშასადამე $e_1.e_2,...,e_n$ ბაზისიდან $e_1''', e_2''',...,e_n'''$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი $(b_{ij})^{-1}$ გადაგვარებულია. მაგრამ ერთი ბაზისიდან მეორეზე გადასვლის მატრიცი არაგადაგვარებული უნდა იყოს, მივიღეთ წინააღმდეგობა. ჩვენი დაშვება, რომ $k<p$, არ ყოფილა სწორი. ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ არც $k>p$ უტოლობა იქნება სწორი. საბოლოოდ გვექნება $k=p$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

კვადრატული ფორმის ნორმალურ სახეში დადებითი კვადრატების რიცხვს ამ ფორმის ***ინერციის დადებითი ინდექსი*** ეწოდება, ხოლო უარყოფითი კვადრატების რიცხვს-**ინერციის უარყოფითი ინდექსი**. სხვაობას დადებით და უარყოფით ინდექსებს შორის ***კვადრატული ფორმის სიგნატურა*** ეწოდება.

ცხადია, კვადრატული ფორმის ინერციის დადებითი ინდექსი ტოლია კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეში დადებითი კოეფიციენტების რაოდენობისა, ხოლო ინერციის უარყოფითი ინდექსი კი კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეში უარყოფითი კოეფიციენტების რაოდენობისა.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ კვადრატული ფორმები ერთმანეთისგან განსხვავდებიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მათ გააჩნიათ განსხვავებული რანგი ან სიგნატურა.

კვადრატულ ფორმას $\varphi: V^n \to R$ ეწოდება ***დადებითად განსაზღვრული***, თუ მისი ნორმალური სახე შეიცავს მხოლოდ დადებით კვადრატებს.

თეორემა 18.2. კვადრატული ფორმა $\varphi: V^n \to R$ დადებითად განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნებისმიერი არანულოვანი $a \in V^n$ ვექტორისათვის: $\varphi(a)>0$.

დამტკიცება: ვთქვათ, კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ მისი ნორმალური სახეა:

$$\varphi(a)=y_1^2+y_2^2+....+y_n^2. \qquad (42)$$

თუ $a \in V^n$ ვექტორი არანულოვანია, მაშინ მისი კოორდინატებიდან ერთი მაინც ნებისმიერ ბაზისში განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ (42) ტოლობის მარჯვენა მხარეს თუ ჩავსვამთ a ვექტორის კოორდინატებს იმ ბაზისში, რომელშიც ფორმას აქვს (42) სახე, მივიღებთ $\varphi(a)>0$.

ახლა დავამტკიცოთ პირიქით, ვთქვათ, ნებისმიერი არანულოვანი $a \in V^n$ ვექტორისათვის $\varphi(a) > 0$ და კვადრატული ფორმის ნორმალური სახეა:

$$\varphi(a) = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2 - y_{k+1}^2 - ... - y_n^2 \qquad (43)$$

თუ a ვექტორის კოორდინატები იმ ბაზისში, რომელშიც ფორმას აქვს (43) სახე, არიან რიცხვები $\underbrace{0,0,...,0}_{k} y_{k+1}^0,...,y_n^0$ და $y_{k+1}^0,...,y_n^0$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ

$$\varphi(a) = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2 - y_{k+1}^2 - ... - y_n^2 < 0 \quad .$$

ეს კი არ შეიძლება, რადგან ჩვენი დაშვებით, $\varphi(a) > 0$. მაშასადამე, კვადრატული ფორმის ნორმალური სახე შეიძლება იყოს მხოლოდ (42), ანუ კვადრატული ფორმა უნდა იყოს დადებითად განსაზღვრული. თეორემა დამტკიცდა.

§19. ევკლიდეს ვექტორული სივრცე

ასახვას $\varphi : V^n \times V^n \to R$, სადაც V^n რაიმე ვექტორული სივრცეა, ეწოდება ***სკალარული ნამრავლი*** ამ სივრცეში, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

$1. \varphi((a,b)) = \varphi((b,a)),$

$2. \varphi((a+b,c)) = \varphi((a,c)) + \varphi((b,c)),$

$3. \varphi((ka,b)) = k\varphi((a,b)),$

$4. \varphi((a,a)) \geq 0$ და $\varphi((a,a)) = 0$, მაშინდა მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a = 0$.

V^n ვექტორულ სივრცეს, მასში განსაზღვრული φ სკალარული ნამრავლით ***ევკლიდეს ვექტორული*** სივრცე ეწოდება.

რიცხვი ,$\varphi((a,b))$ ანუ ორი a დაb ვექტორის სკალარული ნამრავლი, აღვნიშნოთ ასე: $(a.b)$.

ადვილი მისახვედრია, რომ სკალარული ნამრავლი წარმოადგენს სიმეტრიულ ორადწრფივ ფორმას V^n ვექტორული სივრცეზე.

ევკლიდეს n- განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს აღნიშნავენ ასე: E^n

სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს

შედეგი. E^n სივრცის ნულოვანი და ნებისმიერი სხვა ვექტორის სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია.

დამტკიცება: მართლაც, სკალარული ნამრავლის მე-4 თვისებიდან გამომდინარეობს $(0.b) = (0a.b) = 0(a,b) = 0$.

არანულოვან a და b ვექტორებს ევკლიდეს ვექტორულ სივრცეში ეწოდება ***ურთიერთ ორთოგონალური,*** თუ $(a.b) = 0$.

ვექტორთა სისტემას $a_1, a_2, ..., a_l$ ევკლიდეს ვექტორულ სივრცეში ეწოდება ორთოგონალური, თუ $(a_i, a_j) = 0; i \neq j; i = 1,2,...,l; j = 1,2,...,l.$

თეორემა 19.1. ვექტორთა ორთოგონალური სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, ორთოგონალური სისტემა $a_1, a_2, ..., a_l$ წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ არსებობენ რიცხვები $k_1, k_2, ..., k_l$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_l a_l = 0 .$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად a_i; $i = 1,2,...,$ ვექტორზე, მივიღებთ:

$$(k_1a_1 + k_2a_2 + ... + k_la_l, a_i) = (k_ia_i.a_i) = k_i(a_i.a_i) = 0.$$

მეორე მხრივ, რადგან $a_i \neq 0$, ამიტომ $(a_i.a_i) > 0$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $k_i = 0; i = 1,2,...,l$, მაგრამ $k_1, k_2,...,k_l$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშასადამე, მივიღეთ წინააღმდეგობა. ჩვენი დაშვება, რომ $a_1, a_2,...,a_l$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია არ ყოფილა სწორი. თეორემა დამტკიცდა.

ბაზისს $e_1, e_2,...,e_n$ ევკლიდეს სივრცეში ეწოდება ***ორთოგონალური,*** თუ იგი წარმოადგენს ვექტორთა ორთოგონალურ სისტემას.

ბაზისს ევკლიდეს სივრცეში ეწოდება ***ორთონორმირებული,*** თუ იგი ორთოგონალურია და $(e_i.e_i) = 1; i = 1,2,...,n$.

$a \in E^n$ ***ვექტორის სიგრძე*** ეწოდება რიცხვს:

$$|a| = \sqrt{(a.a)}. \tag{44}$$

კუთხე ორ $a,b \in E^n$ ვექტორშ შორის ეწოდება რიცხვს:

$$\arccos\frac{(a.b)}{|a|.|b|}. \tag{45}$$

ცხადია ორთონორმირებულ სისტემაში შემავალი ვექტორების სიგრძე ერთია და განსხვავებულ ვექტორებს შორის კუთხე 90 გრადუსი.

თეორემა 19.2. ყოველ ევკლიდეს სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი.

დამტკიცება: ვთქვათ, ვექტორთა სისტემა $a_1, a_2,...,a_n$ ბაზისია ევკლიდეს E^n სივრცეში. ავაგოთ ორთონორმირებული ბაზისი $b_1, b_2,...,b_n$ შემდეგნაირად: b_1 ტოლი იყოს a_1 ვექტორის. ვთქვათ $b_2 = k_1b_1 + a_2$. ვიპოვოთ k_1 იმ პირობით, რომ

$$0 = (b_1.b_2) = (b_1.(k_1b_1 + a_2)) = k_1|b_1|^2 + (b_1.a_2).$$

აქედან

$$k_1 = -\frac{(b_1.a_2)}{|b_1|^2}.$$

ორი b_1, b_2 ვექტორისაგან შედგენილი სისტემა, როგორც ეხედავთ, წრფივად დამოუკიდებელია. დავუშვათ, ასევე: $b_3 = k_1b_1 + k_2b_2 + a_3$ და ვიპოვოთ k_2, k_2 პირობებიდან:

$$0 = (b_1.b_3) = (b_1.(k_1b_1 + k_2b_2 + a_3)) = k_1|b_1|^2 + k_2(b_1.b_2) + (b_1.a_3) = k_1|b_1|^2 + (b_1.a_3).$$

$$0 = (b_2.b_3) = (b_2.(k_1b_1 + k_2b_2 + a_3)) = k_1(b_2.b_1) + k_2(b_2.b_2) + (b_2.a_3) = k_2|b_2|^2 + (b_2.a_3).$$

გვექნება:

$$k_1 = -\frac{(b_1.a_3)}{|b_1|^2}, k_2 = -\frac{(b_2.a_3)}{|b_2|^2}$$

ცხადია, სისტემა b_1, b_2, b_3 იქნება ორთოგონალური.

ასევე შეგვიძლია ავაგოთ ორთოგონალური სისტემა b_1, b_2, b_3, b_4.

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ ორთოგონალურ სისტემას $b_1, b_2,...,b_n$.

განვიხილოთ ახლა სისტემა $e_1, e_2,...,e_n$, რომელიც მიიღება ასეთნაირად:

$$e_i = \frac{1}{|b_i|}b_i; i = 1,2,...,n$$

ცხადია, $(e_i.e_i) = 1; (e_i.e_j) = 0, i \neq j$. მაშასადამე, $e_1, e_2,...,e_n$ ორთონორმალური ბაზისია.

თეორემა 19.3. თუ a და b ვექტორების კოორდინატებს ორთოგონალურ ბაზისში

წარმოადგენს $x_1, x_2, ..., x_n$ და $y_1, y_2, ..., y_n$ შესაბამისად, მაშინ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ტოლია შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამისა:

$$(a.b) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

დამტკიცება: $a = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $b = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. სკალარული ნამრავლის თვისებებიდან და $e_1, e_2, ..., e_n$ ბაზისის ორთონორმირებულობიდან გამომდინარე,

$$(a.b) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i . \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_j (e_i . e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i (e_i . e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

თეორემა დამტკიცდა.

განსაზღვრება 19.4. ევკლიდეს ვექტორულ სივრცეებს: E, E' ეწოდება ***ურთიერთ იზომორფული***, თუ მათ შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $f : E \to E'$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ეს შესაბამისობა წარმოადგენს წრფივ სივრცეთა იზომორფიზმს.
2. $(a.b) = (f(a).f(b))$.

თეორემა 19.4. იზომორფულ სივრცეებს ერთი და იგივე განზომილება ექნება და პირიქით, ერთი და იმავე განზომილების ევკლიდეს ვექტორული სივრცეები იზომორფულია.

დამტკიცება: მართლაც, თუ $e_1, e_2, ..., e_n$ და $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ ორთონორმირებული ბაზისებია, E, E' სივრცეებში, შესაბამისად, ავაგოთ იზომორფიზმი $f : E \to E'$ შემდეგნაირად: $a = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ვექტორს შევუსაბამოთ ვექტორი $a' = f(a) = \sum_{i=1}^{n} x_i e'_i$. თუ $b = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, მაშინ ამ შესაბამისობის დროს, ცხადია,

$$(a.b) = (a'.b') = (f(a').f(b')) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

თეორემა დამტკიცდა.

მატრიცს

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} a_{22} ... a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1} a_{n2} .... a_{nn} \end{pmatrix}$$

უწოდებენ ***ორთოგონალურს***, თუ ნებისმიერი ორი $i, j = 1,2,...,n$ ინდექსისთვის $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + ... + a_{in}^2 = 1$ და $a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + ... + a_{in} a_{jn} = 0$.

თეორემა 19.5. იმისათვის, რომ A მატრიცი იყოს ორთოგონალური, აუცილებელი და საკმარისია, ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $A^{-1} = A'$.

დამტკიცება: დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მატრიცი ორთოგონალურია, მაშინ:

$$AA' = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} a_{22} ... a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1} a_{n2} .... a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} a_{21} ... a_{n1} \\ a_{12} a_{22} ... a_{n2} \\ ------ \\ a_{1n} a_{2n} .... a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.........0 \\ 01.........0 \\ ----- \\ 00.........1 \end{pmatrix} = E ,$$

ასევე: $A'A = E$, მაშასადამე, $A^{-1} = A'$.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა, ვთქვათ, $A^{-1}=A'$, მაშინ $AA'=E$ და $A'A=E$. მაშასადამე,

$$AA'=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1}a_{n2}....a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}a_{21}...a_{n1} \\ a_{12}a_{22}...a_{n2} \\ ------ \\ a_{1n}a_{2n}....a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10.........0 \\ 01.........0 \\ ----- \\ 00.........1 \end{pmatrix}=E,$$

ეს კინიშნავს, რომ $a_{i1}^2+a_{i2}^2+...+a_{in}^2=1$ და $a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+...+a_{in}a_{jn}=0$. თეორემა დამტკიცდა.

თუ A მატრიცი ორთოგონალურია, მაშინ რადგანაც $|A'|=|A|$, ამიტომ

$$|A|^2=|A||A|=|A||A'|=|AA'|=|E|=1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ორთოგონალური მატრიცის დეტერმინანტი $|A|=\pm1$.

ორთოგონალურ მატრიცთა ნამრავლი ორთოგონალურია. მართლაც,

$$(AB)'=B'A'=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}.$$

თეორემა 19.6. ერთი ორთონორმირებული ბაზისიდან მეორე ორთონორმირებულ ბაზისში გადასვლის მატრიცი ორთოგონალურია.

დამტკიცება: თუ T_2^1 მატრიცი $e_1, e_2, ..., e_n$ ორთონორმირებული ბაზისიდან მეორე $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ ორთონორმირებულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცია, მაშინ

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ . \\ . \\ . \\ e'_n \end{pmatrix}=T_2^1\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{pmatrix}.$$

რადგანაც T_2^1 მატრიცის i-ური სტრიქონი e'_i ვექტორის $e_1, e_2, ..., e_n$ ბაზისში კოორდინატებისაგან შედგება, ამიტომ

$$1=(e'_i.e'_i)=c_{i1}^2+c_{i2}^2+...+c_{in}^2; i=1,2,...,n$$

და

$$0=(e'_i.e'_j)=c_{i1}c_{j1}+c_{i2}c_{j2}+...+c_{in}c_{jn}; i,j=1,2,...,n; i\neq j.$$

თეორემა დამტკიცდა.

წრფივ ოპერატორს $f:E^n\to E^n$ უწოდებენ ***ორთოგონალურ ოპერატორს***, თუ ადგილი აქვს ტოლობას: $(a.a)=(f(a).f(a))$, ანუ, თუ ოპერატორი ინახავს თითოეული ვექტორის სკალარულ კვადრატს.

თეორემა 19.7. ორთოგონალური ოპერატორი ინახავს სკალარულ ნამრავლს, ანუ

$$(a.b)=(f(a).f(b)).$$

დამტკიცება: რადგან ოპერატორი ორთოგონალურია, იგი ინახავს სკალარულ კვადრატს, ამიტომ $(f(a+b).f(a+b))=(a+b.a+b)$. (46)

$(f(a+b).f(a+b))=(f(a)+f(b).f(a)+f(b))=$
$=(f(a).f(a))+(f(a).f(b))+(f(b).f(a))+(f(b).f(b))=(a.a)+2(f(a).f(b))+(b.b)$.

მეორე მხრივ:

$((a+b).(a+b))=(a.a)+(a.b)+(b.a)+(b.b)=(a.a)+2(a.b)+(b.b)$.

(46) ტოლობიდან გამომდინარე

$((a+b).(a+b))=(a.a)+2(a.b)+(b.b)=(f(a+b).f(a+b))=(a.a)+2(f(a).f(b))+(b.b)$.
ამგვარად, $2(a.b)=2(f(a).f(b))$ და $(a.b)=(f(a).f(b))$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

თეორემა 19.8. ორთოგონალურ ოპერატორს ორთონორმირებული ბაზისი ორთონორმირებულ ბაზისში გადაჰყავს და პირიქით, თუ რაიმე ოპერატორს ორთონორმირებული ბაზისი გადაჰყავს ორთონორმირებულ ბაზისში, მაშინ ეს ოპერატორი ორთოგონალურია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $f:E^n \to E^n$ ორთოგონალური ოპერატორია, $e_1,e_2,...,e_n$ ორთონორმირებული ბაზისია ევკლიდეს სივრცეში, განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა $f(e_1),f(e_2),....,f(e_n)$. რადგანაც ორთოგონალური ოპერატორი ინახავს სკალარულ ნამრავლს, ამიტომ

$(f(e_i).f(e_i))=(e_i.e_i)=1; i=1,2,...,n$ და $(f(e_i).f(e_j))=(e_i.e_j)=0; i,j=1,2,...,n$.

მაშასადამე სისტემა $f(e_1),f(e_2),....,f(e_n)$ ორთონორმირებულია, იგი წრფივად დამოუკიდებელიც არის, როგორც ყველა ორთოგონალური სისტემა, ამიტომ წარმოადგენს ბაზისს E^n სივრცეში.

ვთქვათ, ახლა $f(e_1),f(e_2),....,f(e_n)$ ორთონორმირებული ბაზისია, $a=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

მაშინ $f(a)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$. აქედან ამომდინარე, სკალარული კვადრატი

$(a.a)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2=(f(a).f(a))$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 19.9. ორთოგონალური ოპერატორის მატრიცი ორთონორმირებულ ბაზისში ორთოგონალურია და პირიქით, თუ ოპერატორის მატრიცი ორთონორმირებულ ბაზისში ორთოგონალურია, მაშინ ოპერატორიც ორთოგონალურია.

დამტკიცება: რადგანაც ორთოგონალურ ოპერატორს ორთონორმირებული ბაზისი ორთონორმირებულ ბაზისში გადაჰყავს, ამიტომ ასეთი ოპერატორის მატრიცი ერთი ორთონორმირებული ბაზისიდან მეორე ორთონორმირებულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცაა, (30) თეორემიდან კი ვიცით, რომ ასეთი მატრიცი ორთოგონალურია.

ახლა ვთქვათ, $f:E^n \to E^n$ ოპერატორის მატრიცი $A_f=(a_{ij})$ ორთოგონალურია რაიმე $e_1,e_2,...,e_n$ ორთონორმირებულ ბაზისში, რაიმე $a=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ვექტორისათვის

$f(a)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$. მეორე მხრივ, ადგილი აქვს მატრიცულ ტოლობას:

$(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1x_2,...,x_n)A_f=(a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{n1}x_n, a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{n2}x_n,...,$
$,a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{nn}x_n)$,

სადაც $y_1,y_2,...,y_n$ წარმოადგენს $f(a)$ ვექტორის კოორდინატებს $e_1,e_2,...,e_n$ ბაზისში, ხოლო $x_1,x_2,...,x_n$,- a ვექტორის კოორდინატებს იმავე ბაზისში.

რადგან ორთოგონალური მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიციც ორთოგონალურია, ამიტომ

$$(a\cdot .a)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2=(f(a).f(a))=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

მაშასადამე ოპერატორი ინახავს სკალარულ კვადრატს. თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშოები:

1. სამგანზომილებიანი წრფივი სივრცის სივრცის ბაზისიდან, რომლის ვექტორებია: $e_1(3,0,0), e_2(0,2,0), e_3(0,0,1)$, გადადით ახალ ბაზისზე

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ გადასვლის მატრიცის გამოყენებით.

2. იპოვეთ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი.

3. იპოვეთ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ მატრიცის მახასიათებელი ფესვები.

4 იპოვეთ $f: V^2 \to V^2$ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი რიცხვები, თუ მისი მატრიცაა $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4 დაიყვანეთკანონიკურ სახეზე შემდეგი კვადრატული ფორმები:

$f(x) = x_1x_2 + 3x_1^2 + x_2x_3$,
$f(x) = 2x_1x_2 + x_1^2 + x_3^2$,
$f(x) = 4x_1^2 + x_1x_2$.

5. იპოვეთ $a(3,2,2), b(5,2,0)$ ვექტორებს შორის კუთხე.

6. იპოვეთ a ვექტორის მესამე კოორდინატი, თუ $a(3,2,x), b(5,2,0)$ ვექტორებს შორის კუთხეა 30 გრადუსი.

7. იპოვეთ იპოვეთ a ვექტორის მესამე კოორდინატი და b ვექტორის პირველი კოორდინატი თუ $a(1,2,x), b(y,2,0)$ ვექტორებს შორის კუთხეა 45 გრადუსია და ამ ვექტორთა ჯამის სიგრძეა 5.

8. იპოვეთa ვექტორის მეორე კოორდინატი და b ვექტორის პირველი კოორდინატი $a(1,x,5), b(y,2,0)$, თუ ამ ვექტორთა სიგრძეების ჯამია 10. სკალარული ნამრავლი კი 16.

თავი IV

რიცხვთა თეორიის ელემენტები

§20. დალაგებული ალგებრული სტრუქტურები

$(A,+,\prec)$ ალგებრულ სტრუქტურას უწოდებენ ***დალაგებულ ნახევარჯგუფს***, თუ:

1. $(A,+)$ ნახევარჯგუფია.
2. $(A,\prec)$ მკაცრი ან არამკაცრი ნაწილობრივი დალაგების მიმართებაა.
3. $\prec$ მიმართება მონოტონურია $+$ ალგებრული ოპერაციის მიმართ, ანუ ყოველი $a,b,c\in A$ ელემენტისათვის, თუ $a\prec b$, მაშინ $a+c\prec b+c$ და $c+a\prec c+b$.

დალაგებულ $(A,+,\prec)$ ნახევარჯგუფს უწოდებენ დალაგებულ ჯგუფს, თუ $(A,+)$ ჯგუფია.

თუ $\prec$ მიმართება წრფივი დალაგების მიმართებაა, მაშინ საქმე გვაქვს ***არამკაცრად და წრფივად ან მკაცრად და წრფივად დალაგებულ*** $(A,+,\prec)$ ***ნახევარჯგუფთან*** ან ***ჯგუფთან***.

მაგალითი: N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე შეკრების ოპერაციითა და არამკაცრი დალაგების $\prec\subset N\times N$ მიმართებით, რომელიც განისაზღვრება ასე: $(a,b)\in\prec$, როდესაც $b=a+x$ რომელიმე $x\in N$ რიცხვისათვის, ან $a=b$.

მაგალითი: N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე შეკრების ოპერაციითა და მკაცრი დალაგების $\prec\subset N\times N$ მიმართებით, რომელიც განისაზღვრება ასე: $(a,b)\in\prec$, როდესაც $b=a+x$ რომელიმე $x\in N$ რიცხვისათვის.

თეორემა 20.1. ყოველი არამკაცრად და წრფივად დალაგებული ნახევარჯგუფი შეკვეცით შეიძლება მკაცრად და წრფივად დავალაგოთ.

დამტკიცება: თუ ნახევარჯგუფი არამკაცრად წრფივად დალაგებულია, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს: $(A,+)$ ნახევარჯგუფია; $(a,a)\in\prec$; თუ $(a,b)\in\prec,(b,a)\in\prec$, მაშინ $a=b$ და $(a,b)\in\prec,(b,c)\in\prec$, მაშინ $(a,c)\in\prec$; ყოველი $a,b,c\in A$ ელემენტისათვის, თუ $a\prec b$, მაშინ $a+c\prec b+c$ და $c+a\prec c+b$.

თუ $\prec\subset N\times N$ სიმრავლიდან ამოვიღებთ ყველა (a,a) სახის წყვილებს, მაშინ $\prec\subset N\times N$ გადაიქცევა მკაცრად და წრფივად დალაგების მიმართებად, მაგრამ, რადგან $\prec$ მონოტონურია შეკრების ოპერაციის მიმართ, ამიტომ რომელიმე ორი $a,b\in A,a\neq b$ ელემენტისათვის, რომელთათვისაც $(a,b)\in\prec$ ან $(b,a)\in\prec$ ნებისმიერი $c\in A$ ელემენტისათვის $(a+c,b+c)\in\prec,(c+a,c+b)$ ან $(b+c,a+c)\in\prec,(c+b,c+a)\in\prec$. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $a+c=b+c$ ან $c+a=c+b$. ეს კი დაარღვევდა მონოტონურობის პირობის შესრულებას, მაგრამ ეს არ მოხდება ნახევარჯგუფში შეკვეცით, თუ $a+c=b+c$ ან $c+a=c+b$, მაშინ $a=b$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას: $a\neq b$.

თეორემა 20.2. თუ $(A,+,\prec)$ დალაგებული ნახევარჯგუფია, მაშინ $a,b,a',b'\in A$ ელემენტებისათვის, თუ $a\prec b,a'\prec b'$, მაშინ $a+a'\prec b+b'$.

დამტკიცება: დალაგების მონოტონურობის თვისების გამო, $a+a'\prec b+a'\prec b+b'$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

ამ თეორემიდან და მკაცრი და წრფივი დალაგების მიმართების განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 20.3. თუ $(A,+,\prec)$ დალაგებული ნახევარჯგუფია, მაშინ $a,b\in A$ ელემენტებისათვის, თუ $a\prec b$, მაშინ $na\prec nb$. კერძოდ, თუ $(A,+,\prec)$ მკაცრად და წრფივად დალაგებული ნახევარჯგუფია, მაშინ $a,b\in A$ ელემენტებისათვის, თუ $a\prec b$, მაშინ $na\prec nb$ და პირიქით, თუ $na\prec nb$, მაშინ $a\prec b$.

თეორემა 20.4. თუ $(A,+,\prec)$ მკაცრად და წრფივად დალაგებული ნახევარჯგუფია, მაშინ $a,b,c\in A$ ელემენტებისათვის ერთმანეთის ეკვივალენტურია ტოლობები: $a=b$, $a+c=b+c$, $c+a=c+b$ და უტოლობები: $a\prec b$, $a+c\prec b+c$, $c+a\prec c+b$.

დამტკიცება: პირველი ტოლობიდან მეორე და მესამე ტოლობის გამომდინარეობა ცხადია. მეორე ტოლობიდან პირველი გამომდინარეობს იმის გამო, რომ, თუ $a\neq b$, მაშინ $a\prec b$ ან $b\prec a$ და მონოტონურობის თვისების გამო გვექნება: $a+c\prec b+c, c+a\prec c+b$ ან $b+c\prec a+c, c+b\prec c+a$, რაც ეწინააღმდეგება $a+c=b+c$, $c+a=c+b$ ტოლობებს. მაშასადამე, $a=b$.

ასევე, პირველი უტოლობიდან მონოტონურობის თვისების გამო გამომდინარეობს მეორე და მესამე უტოლობები.

ვთქვათ, ადგილი აქვს $a+c\prec b+c$ უტოლობას და $a=b$ ან $b\prec a$. თუ $a=b$, მაშინ $a+c=b+c$, მაგრამ $a+c\prec b+c$. თუ $b\prec a$, მაშინ მონოტონურობის თვისების გამო $b+c\prec a+c$, ამ უტოლობის და $a+c\prec b+c$ უტოლობის ერთდროულად შესრულების გამო $a+c=b+c$. აქედან გამომდინარე $a=b$, მაგრამ $b\prec a$. ამგვარად, ორივე შემთხვევაში მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე $a\prec b$.

თეორემა დამტკიცდა.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მკაცრად და წრფივად დალაგებული ნახევარჯგუფი წარმოადგენს ნახევარჯგუფს შეკვეცით.

თეორემა 20.5. თუ $(A,+,\prec)$ მკაცრად და წრფივად დალაგებული ნახევარჯგუფია, მაშინ $a,b\in A$ ელემენტებისათვის ერთმანეთის ეკვივალენტურია ტოლობები: $a+b=b$, $a+a=a$, $b+a=b$ და უტოლობები: ა) $a+b\prec b$, $a+a\prec a$, $b+a\prec b$; ბ) $b\prec a+b$, $a\prec a+a$, $b\prec b+a$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a+b=b$, მაშინ $a+(a+b)=a+b$, აქედან შეგვიძლია დავწეროთ: $(a+a)+b=a+b$. რადგან მკაცრად და წრფივად დალაგებულ ნახევარჯგუფში შეკვეცა შესაძლებელია, ამიტომ $a+a=a$. ვთქვათ, ახლა, $a+a=a$, მაშინ $(a+a)+b=a+b$, აქედან $a+(a+b)=a+b$. შეკვეცის შედეგად მივიღებთ: $a+b=b$; ასევე $b+(a+a)=b+a=(b+a)+a$ და შეკვეცით ვღებულობთ: $b+a=b$.

თუ გვაქვს $a+b\prec b$, მაშინ $a+(a+b)\prec a+b$, აქედან შეგვიძლია დავწეროთ: $(a+a)+b\prec a+b$, აქედან კი წინა თეორემის საფუძველზე გამომდინარეობს: $a+a\prec a$. პირიქით, თუ ადგილი აქვს უკანასკნელ უტოლობას, მაშინ $(a+a)+b\prec a+b$, აქედან $a+(a+b)\prec a+b$ და წინა თეორემაზე დაყრდნობით მივიღებთ $a+b\prec b$. ასევე დამტკიცდება $a+a\prec a$, $b+a\prec b$ უტოლობების ეკვივალენტურობა და ბ) ჯგუფში შემავალი უტოლობების ეკვივალენტურობა. თეორემა დამტკიცდა.

განსაზღვრება 20.2. $(A,+,\prec)$ დალაგებული ნახევარჯგუფის $a\in A$ ელემენტს უწოდებენ ***დადებით(უარყოფით) ელემენტს***, თუ $a+a\neq a$ და $a\prec a+a$ $(a+a\prec a)$.

თეორემა 20.6. თუ $(A,+,\prec)$ მკაცრად და წრფივად დალაგებული ნახევარჯგუფის $a\in A$ ელემენტისათვის $a+a\neq a$, მაშინ ყველა $na\in A, n\in N$ სახის ელემენტი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

თუ $(A,+,\prec)$ მკაცრად და წრფივად დალაგებული ჯგუფია, მაშინ იმავე პირობებში ელემენტები $na,-na\in A; n\in N$ ასევე ერთმანეთისგან განსხვავებულია.

დამტკიცება: ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a\prec a+a$, მაშინ მონოტონურობის თვისებიდან გამომდინარეობს:

$$a\prec a+a\prec a+a+a\prec a+a+a+a\prec\ldots\prec na\prec(n+1)a\prec\ldots,$$

ნახევარჯგუფის მკაცრი დალაგებულობის გამო კი ცხადია: $na \prec ma$, როდესაც $m \neq n; m,n \in N$.

თეორემის მეორე ნაწილიც ანალოგიურად დამტკიცდება.

თეორემა 20.7. სასრული ნახევარჯგუფი შეკვეცით, რომლის ელემენტების რაოდენობა არანაკლებ ორია, არ შეიძლება არამკაცრად და წრფივად იყოს დალაგებული.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, შესაძლებელია აღნიშნული ნახევარჯგუფების არამკაცრად და წრფივად დალაგება. მაშინ 20.1. თეორემის თანახმად შეიძლება ასეთი ნახევარჯგუფების მკაცრად და წრფივად დალაგება. აქედან გამომდინარე, 20.6. თეორემის თანახმად, ასეთ ნახევარჯგუფში ყველა $na \in A, n \in N$ სახის ელემენტი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ ნახევარჯგუფი ვერ იქნება სასრული. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სწორი, რაც ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 20.8. თუ $(A,+,\prec)$ წრფივად დალაგებული ჯგუფია, მაშინ ნებისმიერი $a,b,c,x \in A$ ელემენტისათვის, თუ $x \leq b < a \leq c$, მაშინ $a-b \leq c-x$, სადაც $<$ მკაცრად დალაგების, ხოლო $\leq$ არამკაცრი დალაგების მიმართებაა.

დამტკიცება: როგორც 20.1 თეორემიდან ვიცით, ჯგუფში არამკაცრად და წრფივად, მკაცრად და წრფივად დალაგებების მიმართებების არსებობა ერთმანეთს განაპირობებენ. აქედან გამომდინარე, შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ჯგუფში ორივე მიმართება ერთდროულად არსებობს, და თუ $a \neq b$, მაშინ $a<b$ ან $b<a$. გვაქვს $x \leq b$, აქედან $x+(-b) \leq b+(-b)$, $-x+(x+(-b)) \leq -x+(b+(-b))$, $(-x+x)+(-b) \leq -x+(b+(-b))$ ანუ $-b \leq -x$. გვაქვს $a \leq c$, აქედან 12.2. თეორემის საფუძველზე $a-b \leq c-x$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 20.9. დალაგებული ნახევარჯგუფის ყოველ სასრულ ქვესიმრავლეს გააჩნია მაქსიმალური და მინიმალური ელემენტები.

დამტკიცება: როგორც ვიცით, დალაგებული A სიმრავლის B ქვესიმრავლის მაქსიმალური ელემენტი ეწოდება B ქვესიმრავლის ისეთ a ელემენტს, რომ ამ ელემენტისაგან განსხვავებული ნებისმიერი $x \in B$ ელემენტისათვის $(a,x) \notin \prec$.

ავიღოთ ნებისმიერი ელემენტი $a \in B$. a ან მაქსიმალურია, ან არსებობს ისეთი $x \in B, x \neq a$ ელემენტი, რომ $(a,x) \in \prec$. x ელემენტი ან მაქსიმალურია, ან არსებობს ისეთი ელემენტი $y \in B, y \neq x$, რომ $(x,y) \in \prec$. y ელემენტი ან მაქსიმალურია, ან არსებობს ისეთი ელემენტი $z \in B, z \neq y$, რომ $(y,z) \in \prec$. თუ ასე გავაგრძელებთ, რომელიღაც ნაბიჯზე შევხვდებით მაქსიმალურ ელემენტს. მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, საქმე გვექნება B ქვესიმრავლის ელემენტთა უსასრულო მიმდევრობასთან: $a \prec x \prec y \prec z \prec \ldots$ რომელშიც, იმის გამო, რომ B სასრულია, წევრები უნდა განმეორდნენ. ასეთ შემთხვევაში დალაგების ტრანზიტულობის და ანტისიმეტრიულობის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ მიმდებრობა, დაწყებული რომელიღაც წევრიდან, მუდმივი უნდა იყოს. ეს კი ნიშნავს, რომ სწორედ მიმდევრობის აღნიშნული წევრი იქნება მაქსიმალური და ეს წევრი მიიღწევა ნაბიჯთა სასრული რაოდენობით.

ანალოგიურად დამტკიცდება მინიმალური ელემენტის არსებობა.

თეორემა დამტკიცდა.

*თეორემა 20.9.** დავამტკიცოთ, რომ დალაგებული ნახევარჯგუფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის წრფივად დალაგებული, როდესაც მის ნებისმიერ სასრულ ქვესიმრავლეს გააჩნია უდიდესი ელემენტი.

დამტკიცება: დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა, ვთქვათ ნახევარჯგუფი წრფივად დალაგებულია. ავიღოთ ნებისმიერი ელემენტი $a \in B$. a უდიდესია ან არსებობს ისეთი $x \in B, x \neq a$ ელემენტი, რომ $(a,x) \in \prec$. x ელემენტი უდიდესია ან არსებობს ისეთი ელემენტი $y \in B, y \neq x$, რომ $(x,y) \in \prec$. y ელემენტი

უდიდესია ან არსებობს ისეთი ელემენტი $z\in B, z\neq y$, რომ $(y,z)\in\prec$. თუ ასე გავაგრძელებთ, რომელიღაც ნაბიჯზე შევხვდებით B სიმრავლის უდიდეს ელემენტს. მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, საქმე გვექნება B ქვესიმრავლის ელემენტთა უსასრულო მიმდევრობასთან: $a\prec x\prec y\prec z\prec\ldots$ რომელშიც, იმის გამო, რომ B სასრულია, წევრები უნდა განმეორდნენ. ასეთ შემთხვევაში დალაგების ტრანზიტულობის და ანტისიმეტრიულობის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ მიმდევრობა, დაწყებული რომელიღაც წევრიდან მუდმივი უნდა იყოს. ეს კი ნიშნავს, რომ სწორედ მიმდევრობის აღნიშნული წევრი იქნება უდიდესი და ეს წევრი მიიღწევა ნაბიჯთა სასრული რაოდენობით.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, დალაგებულ ნახევარჯგუფში ყოველ სასრულ B ქვესიმრავლეს გააჩნია უდიდესი ელემენტი, მაშინ ნებისმიერ ორელემენტიან B ქვესიმრავლესაც გააჩნია უდიდესი ელემენტი. ეს კი ნიშნავს, რომ თუ $a,b\in B$, მაშინ $a\prec b$ ან $b\prec a$. ამგვარად, ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ორი ელემენტი შედარებადია რაც ნიშნავს მის წრფივად დალაგებულობას. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 20.10. დაამტკიცეთ, რომ კომუტაციურ ნახევარჯგუფში შეკვეცით დადებითი ელემენტების ჯამი დადებითია.

დამტკიცება: ვთქვათ, a,b დადებითი ელემენტებია მოცემულ ნახევარჯგუფში, მაშინ $a+a\neq a, b+b\neq b, a\prec a+a, b\prec b+b$. განვიხილოთ ჯამი $a+b$, 20.2. თეორემის ძალით, $a+b\prec(a+a)+(b+b)$. რადგან ნახევარჯგუფი კომუტაციურია, ამიტომ $a+b\prec(a+b)+(a+b)$. დავუშვათ, $a+b=(a+b)+(a+b)$. მაშინ $a+b=(a+a)+(b+b)$ და შეკვეცით მივიღებთ: $b=a+(b+b)=b+(a+b)$, $a=b+(a+a)=a+(a+b)$. მეორე მხრივ, $a+b\prec(a+a)+b=a+(a+b)$ და $a+b\prec a+(b+b)=b+(a+b)$. აქედან წინა ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება: $a+b\prec b$, $a+b\prec a$. მონოტონურობის თვისების გამო $a+(a+b)\prec a+b$ და $b+(a+b)\prec b+a=a+b$. მაშასადამე, $a+b=a+(a+b)$, $b+(a+b)=a+b$. აქედან შეკვეცით მივიღებთ $a+a=a$, $b+b=b$, მაგრამ $a+a\neq a$, $b+b\neq b$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, $a+b\neq(a+b)+(a+b)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $a+b$ დადებითია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 20.11. დადებით ელემენტზე მეტი ელემენტი მკაცრად და წრფივად დალაგებულ ნახევარჯგუფში დადებითია.

დამტკიცება: ვთქვათ a დადებითი ელემენტია, ანუ $a+a\neq a$ და $a\prec a+a$, ამასთან $a\prec b$ რაიმე b ელემენტისათვის მოცემულ ნახევარჯგუფში. დავუშვათ, $b+b=b$, მაშინ $a+(b+b)\prec b+b$, $(a+b)\prec b$. რადგან a დადებითი ელემენტია, $a+(a+b)\prec(a+a)+b$, აქედან შეკვეცით მივიღებთ $b\prec b$, რაც შეუძლებელია, რადგან ნახევარჯგუფი მკაცრად დალაგებულია, ესე იგი, $b+b\neq b$.

ახლა დავუშვათ, $b+b\prec b$, მაშინ $a+(b+b)\prec(a+a)+b$, ანუ $a+(b+b\prec a+(a+b)$, მკაცრად და წრფივად დალაგებული ნახევარჯგუფი კვეცადია, ამიტომ $b+b\prec a+b$ და აქედან, ასევე შეკვეცით, მივიღებთ: $b\prec a$. მაგრამ $a\prec b$, მაშასადამე, ჩვენი დაშვება, რომ $b+b\prec b$ არ ყოფილა სწორი, რადგან დალაგება წრფივია, ამიტომ $b\prec b+b$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 20.12. დაამტკიცეთ, რომ მკაცრად და წრფივად დალაგებულ ნახევარჯგუფში, დადებითი ელემენტების ჯამი დადებითია.

დამტკიცება: a,b დადებითი ელემენტებია მოცემულ ნახევარჯგუფში, მაშინ $a+a\neq a,b+b\neq b,a\prec a+a,b\prec b+b$. განვიხილოთ ჯამი $a+b$. გვაქვს $a+b\prec(a+b)+(a+b)$. დავუშვათ, $a+b=(a+b)+(a+b)$, მაშინ წინა უტოლობას ადგილი ვერ ექნება, რადგან ნახევარჯგუფი მკაცრად და წრფივად დალაგებულია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 120.13. წრფიად დალაგებულ ჯგუფში დადებით ელემენტთა სიმრავლე არაცარიელია.

დამტკიცება: განვიხილოთ ჯგუფის ნეიტრალური ელემენტი 0 და რაიმე a არანულოვანი ელემენტი ამ ჯგუფიდან. ადგილი ექნება ორი უტოლობიდან: $a \prec 0$, $0 \prec a$ ერთ-ერთს. ცხადია, რომ $a+a \neq a$, $-a+(-a) \neq -a$. ვთქვათ, $a \prec 0$, მაშინ $a+(-a) \prec -a$ და $0 \prec -a$, აქედან გამომდინარე $-a \prec -a+(-a)$, ეს ნიშნავს, რომ $-a$ დადებითი ელემენტი იქნება. თუ $0 \prec a$, მაშინ $a \prec a+a$, ეს კი ნიშნავს, რომ a დადებითი ელემენტია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20.14. დაამტკიცეთ, რომ მკაცრად და წრფივად დალაგებულ $(A,+,0,\prec)$ ჯგუფში ელემენტი დადებითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $0 \prec a$.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, $a \in A$ დადებითია, მაშინ $a+a \neq a$, და $a \prec a+a$, 20.5. თეორემაზე დაყრდნობით, უკანასკნელი უტოლობიდან გვექნება: $0 \prec a$.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, $0 \prec a$, მაშინ მონოტონურობის თვისების გამო $a \prec a+a$, ასევე $a+a \neq a$. თეორემა დამტკიცდა.

დალაგებულ $(A,+,\prec)$ ჯგუფში დაადებით ელემენტთა სიმრავლე აღინიშნება ასე: A^{+}

რგოლის ალგებრულ სტრუქტურას უწოდებენ $(A,+,\cdot)$ ***დალაგებულ რგოლს,*** თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $(A,+,)$ დალაგებული ჯგუფია რაიმე $\prec$ დალაგების მიმართებით.
2. $(A,+,\prec)$ დალაგებული ჯგუფში დადებით ელემენტთა A^{+} სიმრავლე არაცარიელია.
3. ყველა $a,b \in A$ ელემენტისათვის და ყველა $c \in A^{+}$ დადებითი ელემენტისათვის თუ $b \prec a$, მაშინ $bc \prec ac$ და $cb \prec ca$.

A^{+} სიმრავლეს, რომელიც წარმოადგენს დადებით ელემენტთა სიმრავლეს $(A,+,\prec)$ დალაგებული ჯგუფში, ასევე დადებით ელემენტთა სიმრავლეს უწოდებენ დალაგებულ $(A,+,\cdot,\prec)$ რგოლში.

დალაგებულ $(A,+,\cdot,\prec)$ რგოლს უწოდებენ ***არქიმედეს რგოლს,*** თუ ნებისმიერი ორი დადებითი $a,b \in A^{+}, a \prec b$ ელემენტისათვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი $n \in N$, რომ $b \prec na = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n}$.

მაგალითი: ნამდვილ რიცხვთა რგოლი მასში არსებული დალაგების ტრადიციული მიმართებით, ცხადია, არქიმედეს რგოლია.

რგოლს $(A,+,\cdot,\prec)$ ეწოდება ***წრფივად დალაგებული რგოლი,*** თუ $(A,+,\prec)$ წრფიად დალაგებული ჯგუფია. რგოლს $(A,+,\cdot,\prec)$ ეწოდება მკაცრად ან არამკაცრად დალაგებული, თუ $(A,+,\prec)$ ჯგუფი მკაცრად ან არამკაცრად დალაგებულია.

თეორემა 20.15. თუ $(A,+,\cdot,\prec)$ წრფიად დალაგებული რგოლია, მაშინ ყოველი $a \in A$ ელემენტისათვის $0 \prec a$, ან $a \prec 0$, ან $a = 0$.

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ $\prec$ აღნიშნავს მკაცრი დალაგების მიმართებას და იგი წრფივია.

ასევე ელემენტარულად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 20.16. დადებით ელემენტთა ჯამი და ნამრავლი წრფივად დალაგებულ რგოლში დადებითია.

თეორემა 20.17. წრფივად დალაგებული $(A,+,\cdot,\prec)$ რგოლი მთელობის არეა.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a,b \in A; a \neq 0, b \neq 0$, მაშინ შესაძლებელია:

1. $0 \prec a, 0 \prec b$.
2. $0 \prec a, 0 \prec -b$.

3. $0 \prec -a, 0 \prec b$.

4. $0 \prec -a, 0 \prec -b$.

აქედან გამომდინარე: $0 \prec ab$ ან $ab \prec 0$.
თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 20.18. წრფივად დალაგებული $(A,+,\cdot,\prec)$ რგოლში ნებისმიერი არანულოვანი ელემენტის კვადრატი დადებითია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $0 \prec a$, მაშინ 20.14. და 20.16. თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ $0 \prec a^2$. თუ $0 \prec -a$, მაშინ $a^2 = (-a)(-a) \succ 0$.

თეორემა 20.19. წრფაივად დალაგებულ $(A,+,\cdot,\prec)$ რგოლში არანულოვან ელემენტთა კვადრატების ჯამი არ უდრის ნულს.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a,b \in A; a \neq 0, b \neq 0$, მაშინ $a^2 + b^2$ დადებითია, და ამიტომ არ უდრის ნულს.

განსაზღვრება 20.6. წრფივად დალაგებულ $(A,+,\cdot,\prec)$ რგოლში $|a| = \max\{a,-a\}$ ელემენტს ***a* ელემენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა** ეწოდება.

თეორემა 20.20. წრფივად დალაგებულ $(A,+,\cdot,\prec)$ რგოლში ამ რგოლის ელემენტებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

1. $|a| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a = 0$.
2. $|a| \succ 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a \neq 0$.
3. $|a| = |-a|$.
4. $a \preccurlyeq |a|$ და $-a \preccurlyeq |a|$.
5. $|a+b| \preccurlyeq |a| + |a|$
6. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
7. $|a| \prec b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $-b \prec a \prec b$.
8. თუ $l \prec a \prec k$ და $l \prec b \prec k$, მაშინ $|a-b| \prec k-l$

დამტკიცება: 1-4 თანაფარდობები პირდაპირ გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან.

5. თანაფარდობის დამტკიცება: ადგილი აქვს უტოლობებს: $a \preccurlyeq |a|$ და $b \preccurlyeq |b|$, აქედან გამომდინარე: $a + b \preccurlyeq |a| + |b|$. ანალოგიურად $-a \preccurlyeq |a|$ და $-b \preccurlyeq |b|$, აქედან გამომდინარე: $-(a+b) \preccurlyeq |a| + |b|$. საბოლოოდ: $|a+b| \preccurlyeq |a| + |b|$.

6. თანაფარდობის დამტკიცება: $|ab| = \max\{ab,-ab\} = \max\{a,-a\}\max\{b,-b\} = |a||b|$

7. თანაფარდობის დამტკიცება: $|a| = \max\{a,-a\} \prec b$. თუ $|a| = a$, მაშინ $a \prec b$, თუ $|a| = -a$, მაშინ $-a \prec b$ $-b \prec a$, საბოლოოდ: $-b \prec a \prec b$. ცხადია პირიქითაც.

8. თანაფარდობის დამტკიცება: $k-b \prec k-l$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $k-b \succ k-l$, აქედან გვაქვს $-b \succ -l$, რაც ნიშნავს, რომ $b \prec l$, მაგრამ პირობიდან გვაქვს, რომ $l \prec b$, მაშასადამე, ჩვენი დაშვება არ არის სწორი. $a-l \prec k-l$, $a-l-(b-l) \prec k-l-(b-l)$, აქედან $a-b \prec k-b \prec k-l$. ანალოგიურად $k-a \prec k-l$. $b-l \prec k-l$, $b-l-(a-l) \prec k-l-(a-l)$, აქედან $b-a \prec k-a \prec k-l$, ანუ $a-b \succ -(k-l)$. საბოლოოდ გვექნება: $|a-b| \prec k-l$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 20.21. $(A,+,\cdot)$ რგოლი მაშინ და მაშინ შეიძლება მკაცრად და წრფივად დავალაგოთ, თუ მასში არსებობს ქვესიმრავლე A^+, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1. თუ $a \in A^+$, მაშინ $a \neq 0$ და $-a \notin A^+$; თუ $a \neq 0$, მაშინ $a \in A^+$ ან $-a \in A^+$.
2. თუ $a,b \in A^+$, მაშინ $a+b \in A^+$ და $ab \in A^+$.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება.
ვთქვათ, $(A,+,\cdot)$ რგოლი რგოლი მკაცრად და წრფივად დალაგებულია, მაშინ მასში არსებობს დადებით ელემენტთა A^+ ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს 1. და 2. პირობებს.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ სრულდება თეორემის პირობა, შევიტანოთ $(A,+,\cdot)$ რგოლში დალაგების $\prec$ მიმართება შემდეგნაირად: $b \prec a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a-b \in A^+$. ადვილია იმის ჩვენება, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული მიმართება ანტირეფლექსურია, ანტისიმეტრიულია, ტრანზიტულია; ასევე, ადგილი აქვს მონოტონურობის თვისებას, როგორც გამრავლების, ასევე შეკრების ოპერაციათა მიმართ. A^+ სიმრავლის 1. თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ: თუ $a-b \notin A^+$, მაშინ $b-a \in A^+$; ეს კი ნიშნავს, რომ აგებული დალაგების მიმართება წრფივია. თეორემა დამტკიცდა.

მაგალითი: ვთქვათ, $Q(x)$ რაციონალურ ფუნქციათა რგოლია. ამ რგოლის ელემენტებს აქვთ სახე:

$$g(x)=\frac{a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1}+\ldots+a_{k+p}x^{k+p}}{b_l x^l + b_{l+1}x^{l+1}+\ldots+b_{l+q}x^{l+q}},$$

სადაც

$$a_i \in Q, i=k,k+1,k+2,\ldots k+p; b_j \in Q, j=l,l+1,l+2,\ldots,l+q;$$

$$k,p,l,q \in N; a_k \neq 0, b_l \neq 0, a_{k+p}\neq 0, b_{l+q}\neq 0.$$

A^+ იყოს ქვესიმრავლე განხილულ რგოლში, რომელიც შედგება ისეთი $g(x)$ ელემენტებისაგან, რომელთათვისაც $a_{k+p}b_{l+q}>0$. ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ A^+ აკმაყოფილებს 20.21 თეორემის პირობებს. აქედან გამომდინარე, $Q(x)$ რაციონალურ ფუნქციათა რგოლში გვაქვს მკაცრი და წრფივი დალაგება, მაგრამ ამ დალაგების მიმართ იგი არ არის არქიმედეს რგოლი. მართლაც, $g_1(x)=1, g_2(x)=x$ რაციონალური ფუნქციებისთვის ადგილი აქვს უტოლობას $g_1(x)\prec g_2(x)$, მაგრამ ნებისმიერი $n\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $ng_1(x)=n\cdot 1 \prec g_2(x)=x$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $Q(x)$ რგოლი არა არქიმედულია.

დალაგებული რგოლების ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ დალაგებული ველებიც.

დალაგებულ $(A,+,\cdot,\prec)$, $(B,\oplus,\otimes,\lhd)$ ***ალგებრულ სტრუქტურათა ჰომომორფიზმი*** ეწოდება ამ ალგებრულ სტრუქტურათა $h:(A,+,\cdot,\prec)\to(B,\oplus,\otimes,\lhd)$ ჰომომორფიზმს, რომელიც ინახავს დალაგებას, ანუ, თუ $a,b\in A, a\prec b$, მაშინ $h(a)\lhd h(b)$.

შესაბამისად იმისა, თუ როგორია h, როგორც ალგებრულ სტრუქტურათა ჰომომორფიზმი, გვაქვს: დალაგებულ ალგებრულ სტრუქტურათა მონომორფიზმი, ეპიმორფიზმი, იზომორფიზმი.

§21. ნატურალური და მთელი რიცხვები

ალგებრული სტრუქტურას ორი ალგებრული ოპერაციით $(N,+,\cdot)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

N_1. N სიმრავლეში არსებობს ელემენტი, რომელიც აღინიშნება 1 სიმბოლოთი და რომელსაც აქვს თვისება: არ არსებობენ ისეთი ელემენტები $a,b\in N$, რომ $1=a+b$.

N_2. ყოველი $a\in N$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ელემენტი $c\in N$, რომ $c=a+1$.

N_3. თუ $a,b\in N$ ელემენტებისათვის $a+1=b+1$, მაშინ $a=b$.

N_4. ყოველი ორი $a,b\in N$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $a+(b+1)=(a+b)+1$ (სუსტი ასოციაციურობის აქსიომა).

N_5. ყოველი $a\in N$ ელემენტისათვის $a\cdot 1=a$.

N_6. ყოველი ორი $a,b\in N$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

N_7. $a\cdot(b+1)=a\cdot b+a$ (სუსტი დისტრიბუციულობის აქსიომა).

თუ $M\subset N$ ისეთი ქვესიმრავლეა, რომ:

ა) $1\in M$;

ბ) ყოველ $a\in M$ ელემენტთან ერთად ელემენტი $a+1\in M$,

მაშინ $M=N$ (ინდუქციის აქსიომა);

ნატურალურ რიცხვთა სისტემა წოდება.

ყოველ $a\in N$ ელემენტს ***ნატურალური რიცხვი*** ეწოდება. $1\in N$ ელემენტს კი ეწოდება ***რიცხვი ერთი.***

ნატურალურ რიცხვთა სისტემა აღინიშნება ასე: $\langle N,+,\cdot,1\rangle$

თეორემა 21.1. ყოველი $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე:

$$M_{a,b}=\{c\in N\,|\,(a+b)+c=a+(b+c).$$

N_4 პირობის ძალით, $1\in M_{a,b}$.

ვთქვათ, $c\in M_{a,b}$. ვაჩვენოთ, რომ $c+1\in M_{a,b}$. მართლაც, N_4 პირობის ძალით:

$(a+b)+(c+1)=((a+b)+c)+1=(a+(b+c))+1=a+((b+c)+1)=a+(b+(c+1))$.

ეს ტოლობა კი ნიშნავს იმას, რომ $c+1\in M_{a,b}$.

N_7 პირობის ძალით, $M_{a,b}=N$. მაშასადამე, ყოველი $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $a+(b+c)=(a+b)+c$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 21.2. ყოველი $a\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $1+a=a+1$

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $M=\{a\in N\,|\,a+1=1+a\}$. ცხადია, $1\in M$, მართლაც, $1+1=1+1$. ვთქვათ, $a\in M$. ვაჩვენოთ, რომ $a+1\in M$. მართლაც, რადგან $a\in M$, ამიტომ $(a+1)+1=(1+a)+1=1+(a+1)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $a+1\in M$. N_7 პირობის ძალით $M=N$. მაშასადამე, ყოველი $a\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $a+1=1+a$. თეორემა დამტკიცდა

თეორემა 21.3. ყოველი $a,b\in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $a+b=b+a$.

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $M_a=\{b\in N\,|\,a+b=b+a\}$. წინა თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $1\in M_a$. ვთქვათ, $b\in M_a$. ვაჩვენოთ, რომ $b+1\in M_a$. მართლაც, $a+(b+1)=(a+b)+1=1+(b+a)=(1+b)+a$. ეს კი ნიშნავს, რომ $b+1\in M$. N_7 პირობის ძალით, $M=N$. მაშასადამე, ყოველი $a,b\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $a+b=b+a$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 21.4. თუ $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $a+c=b+c$, მაშინ $a=b$.

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $M_{a,b}=\{c\in N\,|$ თუ $a+c=b+c$, მაშინ $a=b\}$. მე-3 თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ $1\in N$. ვაჩვენოთ, რომ თუ $c\in M_{a,b}$, მაშინ $c+1\in M_{a,b}$. მართლაც, $a+(c+1)=(a+c)+1, b+(c+1)=(b+c)+1$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $a+c=b+c$ და $a=b$. ეს კი ნიშნავს, რომ $c+1\in M_{a,b}$.

N_7 პირობის ძალით, $M_{a,b} = N$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 21.5. ყოველი $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $(a+b)c = ac+bc$.

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $M_{a,b} = \{c\in N \mid (a+b)c = ac+bc\}$. მე-5 თვისებიდან გამომდინარეობს,რომ $1\in M_{a,b}$. ვთქვათ, $c\in M_{a,b}$. ვაჩვენოთ, რომ $c+1\in M_{a,b}$. მართლაც, N_6 თვისებიდან გამომდინარე,

$(a+b)(c+1) = (a+b)c+(a+b) = ac+bc+a+b = (ac+a)+(bc+b) = a(c+1)+b(c+1)$.

ეს კი ნიშნავს, რომ $c+1\in M_{a,b}$ და $M_{a,b} = N$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 21.6. ყოველი $a\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $1\cdot a = a$.

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $M = \{a\in N \mid 1\cdot a = a\}$. ცხადია, $1\in M$. ვთქვათ, ნატურალური რიცხვი $a\in M$. ვაჩვენოთ, რომ $a+1\in M$, მართლაც, $1\cdot(a+1) = 1\cdot a+1\cdot 1 = a\cdot 1+1\cdot 1 = (a+1)\cdot 1 = a+1$. აქედან გამომდინარე $M = N$. მაშასადამე ყოველი$a\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $1\cdot a = a$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 21.7. ყოველი $a,b\in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $ab = ba$.

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $M_a = \{b\in N \mid ab = ba\}$. წინა თეორემიდან გამომდინარეობს $1\in M_a$. ვთქვათ, ნატურალური რიცხვი $a\in M_a$. ვაჩვენოთ, რომ $a+1\in M_a$. მართლაც, N_5 თვისებიდან და 21.5 თეორემიდან გვექნება:

$$a(b+1) = ab+a = ba+a = (b+1)a.$$

მაშასადამე, $M_a = N$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 21.8. ყოველი $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $a(b+c) = ac+bc$.

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $M_{a,b} = \{c\in N \mid a(b+c) = ab+ac\}$. N_6 პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $1\in M_{a,b}$. ვთქვათ, $c\in M_{a,b}$. ვაჩვენოთ, რომ $c+1\in M_{a,b}$. მართლაც, N_6 თვისებიდან გამომდინარე,

$$a(b+(c+1)) = a((b+c)+1) = a(b+c)+a = ab+ac+a = ab+a(c+1).$$

მაშასადამე, $M_a = N$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 21.9. ყოველი $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $M_{a,b} = \{c\in N \mid a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c\}$.

ცხადია, $1\in M_{a,b}$. ვთქვათ $c\in M_{a,b}$. ვაჩვენოთ, რომ $c+1\in M_{a,b}$. მართლაც, $a\cdot(b\cdot(c+1)) = a\cdot(b\cdot c+b) = a\cdot(\cdot b\cdot c)+a\cdot b = (a\cdot b)\cdot c+a\cdot b = (a\cdot b)(c+1)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $c+1\in M_{a,b}$. მაშასადამე, $M_a = N$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

ყოველივე ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ალგებრული სტრუქტურა $(N,+,\cdot)$ წარმოადგენს კომუტაციურ ნახევარჯგუფს როგორც შეკრების ოპერაციის მიმართ, ისე გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

თეორემა 21.10. ყოველი $a\in N, a\neq 1$ ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $n\in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ $a = 1+n$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $M' = \{1\}$, $M'' = \{a\in N \mid a = 1+n, n\in N\}$. დავამტკიცოთ, რომ $M'\cup M'' = N$, ცხადია, $1\in M'\cup M''$. ვთქვათ, $a\in M'\cup M''$. ვაჩვენოთ, რომ $a+1\in M'\cup M''$. მართლაც, $a+1 = 1+a\in M'\cup M''$.

მაშასადამე, $M' \cup M'' = N$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 21.11. ყოველი $a,b \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის $a \neq a+b$

დამტკიცება: ვთქვათ, $M_b = \{a \in N \mid a \neq a+b\}$. N_1 პირობიდან გამომდინარე, $1 \in M_b$. თუ $a \in M_b$, მაშინ $a+1 \in M_b$. მართლაც, თუ $a+1=(a+1)+b$, მაშინ $a+1=(a+b)+1$, ამ ტოლობიდან და N_3 პირობიდან გამომდინარეობს: $a=a+b$, ესე იგი, $a \notin M_b$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, $a+1 \in M_b$ და $M_b = N$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 21.12. ყოველი $a,b \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის ადგილი აქვს ერთერთს შემდეგი პირობებიდან:

1. $a=b$.
2. არსებობს ისეთი $n \in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ $b=a+n$.
3. არსებობს ისეთი $k \in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ $a=b+k$.

დამტკიცება: წინა თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ არც ერთი ორი პირობა არ არის თავსებადი.

დავაფიქსიროთ რაიმე $a \in N$ ნატურალური რიცხვი და M'_a, M''_a, M'''_a სიმბოლოებით აღვნიშნოთ სიმრავლეები:

$M'_a = \{b \mid a=b\}$;

$M''_a = \{b \mid b=a+n, n \in N\}$;

$M'''_a = \{b \mid a=b+k, k \in N\}$.

ვთქვათ, $M_a = M'_a \cup M''_a \cup M'''_a$. $1 \in M_a$, რადგან $1 \in M'_a$ თუ $a=1$ ან $1 \in M'''_a$ 13.10. თეორემიდან გამომდინარე, როდესაც $a \neq 1$.

ვთქვათ, $b \in M_a$. ვაჩვენოთ, რომ $b+1 \in M_a$. მართლაც, თუ $b \in M'_a$, მაშინ $a=b$, აქედან გვექნება: $b+1=a+1$, ეს კი ნიშნავს, რომ $b+1 \in M''_a$. თუ $b \in M''_a$, მაშინ $b=a+n$, აქედან გვექნება: $b+1=a+(n+1)$, ეს კი ნიშნავს, რომ $b+1 \in M''_a$. თუ $b \in M'''_a$, მაშინ $a=b+k$, რომელიმე $k \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის. $b+1 \in M'_a$, თუ $k=1$, $b+1 \in M'''_a$, თუ $k \neq 1$. მაშასადამე, $M_a = N$. თეორემა დამტკიცდა.

განვსაზღვროთ მკაცრი დალაგების "<" მიმართება ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე. იგი იყოს ქვესიმრაელე "<"$=\{(a,b) \in N \times N \mid a=b+n, n \in N\}$.

თუ $(a,b) \in$"<", მაშინ ვწერთ $a<b$, ან $b>a$ და ვიტყვით a ნაკლებია b-ზე ან b მეტია a-ზე.

"<" მიმართების საშუალებით, ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე შეიძლება განისაზღვროს არამკაცრი დალაგების მიმართება "≤" შემდეგნაირად: $(a,b) \in$"≤" მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(b,a) \notin$"<" ანუ თუ ადგილი არააქვს $b=a+n$ ტოლობას. ასეთ შემთხვევაში შესრულდება 21.12. თეორემის 1. და 2. პირობებიდან ერთერთი.

თუ $(a,b) \in$"≤", მაშიან ვწერთ $a \leq b$, ან $b \geq a$ და ვიტყვით: a ნაკლებია ან ტოლი b-ზე ან b მეტია ან ტოლი a-ზე.

ნატურალური მწკრივის მონაკვეთი ბოლოებით a და b, ყოველი ორი $a,b \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის ეწოდება სიმრავლეს:

$$[a,b] = \{x \in N \mid a \leq x, x \leq b\}.$$

თუ $a=1$, მაშინ $[1,b]$ მონაკვეთს ***ნატურალური მწკრივის საწყისი მონაკვეთი*** ეწოდება.

ნატურალური მწკრივის საწყისი მონაკვეთი $[1,b]$ ასედაც შეიძლება აღინიშნოს: $[b]$

$M \subset N$ ქვესიმრაველეს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ეწოდება *შემოსაზღვრული ქვესიმრავლე*, თუ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $n \in N$, რომ $M \subset [1,n]$.

თეორემა 21.13 (წრფივობის თვისება). ყოველი $a,b \in N, a \neq b$ ნატურალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს შემდეგი $a<b, b<a$ უტოლობებიდან ერთერთს.

დამტკიცება: თეორემის დამტკიცება გამომდინარეობს მკაცრი დალაგების მიმართების განსაზღვრებიდან და 21.12. თეორემიდან.

თეორემა 21.14 (ანტირეფლექსურობის თვისება). ყოველი $a \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $(a,a) \notin "<"$.

დამტკიცება: 13.11. თეორემის თანახმად, არც ერთი ნატურალური $a \in N$ რიცხვისთვის არ არსებობს ისეთი $n \in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ $a = a + n$. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 21.14 (ასიმეტრიულობის თვისება). ყოველი $a,b \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $(a,b) \in "<"$,მაშინ $(b,a) \notin "<"$.

დამტკიცება: 21.12. თეორემიდან ვიცით, რომ ტოლობები $b = a + k$ და $a = b + n$ შეუთავსებადია, ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 21.15(ტრანზიტულობის თვისება). ყოველი $a,b.c \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $a<b$ და $b<c$, მაშინ $a<c$.

დამტკიცება: თუ $b = a + k$ და $c = b + n$, მაშინ $c = a + (k + n)$. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 21.16 (მონოტონურობა შეკრების მიმართ). ყოველი $a,b,c \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $a<b$ მაშინ $a+c<b+c$.

დამტკიცება: რადგან $a<b$, ამიტომ $b = a + k$. $b + c = a + k + c = (a + c) + k$. ეს კი ნიშნავს, რომ $a+c<b+c$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 21.17. ყოველი ნატურალური რიცხვი დადებითია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a \in N$ რაიმე ნატურალური რიცხვია, $a < a + a$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 21.18 (მონოტონურობა გამრავლების მიმართ). ყოველი $a,b,c \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $a<b$, მაშინ $a \cdot c < b \cdot c$.

დამტკიცება:თუ $a<b$, მაშინ $b = a + k$. $b \cdot c = (a + k) \cdot c = a \cdot c + a \cdot k$. ეს კი ნიშნავს, რომ $a \cdot c < b \cdot c$. თეორემა დამტკიცდა.

ასევე ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ჩვენს მიერ განსაზღვრულ არამკაცრი დალაგების მიმართებას ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში აქვს შემდეგი თვისებები:

1. (რეფლექსურობის თვისება) ყოველი $a \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $a \leq a$.
2. (ტრანზიტულობის თვისება) ყოველი $a,b,c \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $a \leq b$ და $b \leq c$, მაშინ $a \leq c$.
3. (ანტისიმეტრიულობის თვისება) ყოველი $a,b \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $a \leq b$ და $b \leq a$, მაშინ $a = b$.
4. (მონოტონურობა შეკრების მიმართ) ყოველი $a,b,c \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $a \leq b$მაშინ $a + c \leq b + c$.
5 (მონოტონურობა გამრავლების მიმართ) ყოველი $a,b,c \in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $a \leq b$, მაშინ $a \cdot c \leq b \cdot c$.

ვიტყვით, რომ $c \in N$ ***ნატურალური რიცხვი მოთავსებულია*** $a \in N$ ***და*** $b \in N$ ***ნატურალურ რიცხვებს შორის***, თუ $a<c$ და $c<b$.

თეორემა 21.19. $n, n+1 \in N$ რიცხვებს შორის არც ერთი ნატურალური რიცხვი არ არის მოთავსებული.

დამტკიცება: $[n,n+1]$ მონაკვეთი მხოლოდ $n,n+1$ წერტილებისაგან შედგება, წინააღმდეგ შემთხვევაში იარსებებს ისეთი $a\in N$ ნატურალური რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $n\le a,\le n+1$. ვთქვათ, ასეთი რიცხვი არსებობს, პირველი უტოლობა ნიშნავს, რომ $a=n+k$ ან $a=n,$; მეორე უტოლობა ნიშნავს, რომ $n+1=a+m$, ან $n+1=a$, ამიტომ გვექნება $n+1=n+k+m$, ან $n+1=n+m$,ან $n+1=n+k$ ან $n+1=n$. ამ ტოლობებიდან პირველი და ბოლო შეუძლებელია, მეორე და მესამე მაშინაა შესაძლებელი, როდესაც $m=1$ და $k=1$. აქედან ვღებულობთ: $n+1=a+1$ან $a=n+1$. აქედან კი $a=n,$ან $a=n+1$. ეს კი ნიშნავს, რომ არ არსებობს $a\in N$ ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $n<a$ და $a<n+1$. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნატურალური მწკრივის ყოველი მომნაკვეთი სასრული სიმრავლეა და ყოველი $n\in N$ ნატურალური რიცხვი ტოლია ჯამის $1+1+...+1$, სადაც იმდენი შესაკრები, რამდენი ელემენტიცაა ნატურალური მწკრივის საწყის $[1,n]$ მონაკვეთში. $1+1+...+1=n$ ჯამი ასე აღენიშნოთ: $\underbrace{1+1++...+1}_{[n]}$.

თეორემა 2120. ყოველ შემოსაზღვრულ $A\subset N$ არაცარიელ ქვესიმრავლეს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში გააჩნია უდიდესი ელემენტი.

დამტკიცება: რადგან A შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი $n\in N$ რიცხვი, რომ $A\subset[1,n+1]$. $[n,n+1]$ მონაკვეთი მხოლოდ $n,n+1$ წერტილისაგან შედგება, წინააღმდეგ შემთხვევაში იარსებებს ისეთი$a\in N$ ნატურალური რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $n\le a,\le n+1$. ვთქვათ, ასეთი რიცხვი არსებობს, პირველი უტოლობა ნიშნავს, რომ $a=n+k$ ან $a=n,$; მეორე უტოლობა ნიშნავს, რომ $n+1=a+m$ ან $n+1=a$, ამტიომ გვექნება $n+1=n+k+m$ ან $n+1=n+m$ ან $n+1=n+k$ ან $n+1=n$. ამ ტოლობრბიდან პირველი და ბოლო შეუძლებელია, მეორე და მესამე მაშინაა შესაძლებელი, როდესაც $m=1$ და $k=1$. აქედან ვღებულობთ: $n+1=a+1$ან $a=n+1$. აქედან კი $a=n$ან $a=n+1$. ამ პირობებში ადგილი ექნება ტოლობას: $[1,n+1]=[1,n]\cup\{n+1\}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $A\subset[1,n]$ ან $n+1\in A$. თუ $n+1\in A$, მაშინ იგი იქნება უდიდესი ელემენტი A სიმრავლეში. თუ $A\subset[1,n]$, მაშინ $A\subset[1,n-1]$ ან $n\in A$, თუ $n\in A$ მაშინ იგი იქნება უდიდესი ელემენტი A სიმრაელეში. ამგვარი გადარჩევის გაგრძელებით ვიპოვით უდიდეს ელემენტს A სიმრავლეში. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2121. ყოველ$A\subset N$ არაცარიელ ქვესიმრაველეს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში გააჩნია უმცირესი ელემენტი.

დამტკიცება: თუ $a\in A$, მაშინ იგი საძიებელი უმცირესი ელემენტია ან მეტია უმცირეს ელემენტზე, თუ ასეთი არსებობს. მეორე შემთხვევისთვის არსებობს ისეთი ნატურალურ $n\in N$ რიცხვი, რომ $n>a$, ერთ-ერთი ასეთი რიცხვცვია $a+1$. ცხადია, თუ A სიმრავლეში უმცირესი რიცხვი არსებობს, მაშინ ეს რიცხვი მოთავსებული უნდა იყოს$[1,a+1]$ მონაკეეთზე. ამ მონაკეეთზე, ცხადია არსებობენ A სიმრაელეში შემავალი რიცხეები. თუ $1\in A$, მაშინ იგი იქნება საძიებელი უმცირესი ელემენტი. თუ $1\notin A$ და $1+1\in A$, მაშინ $1+1$ იქნება საძიებელი უმცირესი ელემენტი. თუ $1+1$ არაასაძიებელი რიცხვია, მაშინ შევამოწმებთ $1+1+1$ რიცხვს და ასე შემდეგ. რადგან k და $k+1$ ნატურალურ რიცხვებს შორის არ არსებობს მესამე ნატურალური რიცხვი, ამიტომ რომელიღაც $n\in N$

რიცხვისათვის $\underbrace{1+1+...+1}_{n}$ იქნება ის პირველი რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის A სიმრავლეს, ცხადია, ეს რიცხვი იქნება საძიებელი რიცხვი. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2.1.22. და ყოველი $a,b\in N$ ნატურალური რიცხვებისათვის $a\le a\cdot b$.

დამტკიცება: N_1 პირობიდან გამომდინარე, ყოველი $b\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $1\le b$. გამრავლების ოპერაციის მიმართ დალაგების მონოტონურობის გამო $a\le ab$. თეორემა დამტკიცდა.

$c\in N$ ნატურალურ რიცხვს ეწოდება $a\in N$ და $b\in N$ ***ნატურებული რიცხვების სხვაობა*** თუ $a=c+b$.

ცხადია, $a\in N$ და $b\in N$ ნატურებული რიცხვების სხვაობა არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a>b$.

$a\in N$ და $b\in N$ ნატურებული რიცხვების სხვაობა აღინიშნება ასე: $a-b$

$c\in N$ ნატურალურ რიცხვს ეწოდება $a\in N$ და $b\in N$ ***ნატურებული რიცხვების განაყოფი*** თუ $a=c\cdot b$.

ცხადია, $a\in N$ და $b\in N$ ნატურებული რიცხვების განაყოფი არსებობს, მაშინ $a\ge b$.

$a\in N$ და $b\in N$ ნატურებული რიცხვების განაყოფი აღინიშნება ასე: $a:b$ ან $\frac{a}{b}$.

ნატურალურ რიცხვებს, რომელიც იყოფა რიცხვ 2-ზე ***ლუწი რიცხვები*** ეწოდება, ხოლო არალუწ ნატურალურ რიცხვებს ***კენტი რიცხვები***.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი ფუნდამენტალური თეორემა:

თეორემა 2.1.23. ნატურალურ რიცხვთა სისტემა ერთადერთია.

ეს თეორემა გვეუბნება, რომ ყოველი ორი ალგებრული სტრუქტურა $(N,+,\cdot)$ და $(N',\oplus,\otimes)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ $N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6,N_7$ პირობებს, იზომორფულია, როგორც დალაგებული ალგებრული სტრუქტურები ზემოთ განხილული დალაგებებით.

ალგებრული სტრუქტურას ორი ალგებრული ოპერაციით $(Z,+,\cdot)$, უწოდებენ ***მთელ რიცხვთა სისტემას***, თუ ეს ოპერაციები აკმაყოფილებენ შემდეგ მოთხოვნებს:

Z_1. ყოველი სამი $a,b,c\in Z$ ელემენტისათვის $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Z_2. ყოველი ორი $a,b\in Z$ ელემენტისათვის $a+b=b+a$.

Z_3. არსებობს ისეთი ელემენტი $0\in Z$, რომ ნებისმიერი $a\in Z$ ელემენტისათვის $a+0=a$.

Z_4. ყოველი $a\in Z$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ელემენტი $-a\in Z$, რომ $a+(-a)=0$.

Z_5. ყოველი სამი $a,b,c\in Z$ ელემენტისათვის $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

Z_6. ყოველი სამი $a,b,c\in Z$ ელემენტისათვის $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

Z_7. ყოველი სამი $a,b,c\in Z$ ელემენტისათვის $a\cdot(b+c)=ab+ac,(a+b)\cdot c=ac+bc$.

Z_8 არსებობსა $N\subset Z$ ქვესიმრაველე, რომელზედაც შეიძლება განისაზღვროს ნატურალურ რიცხვთა სისტემის იზომორფული ალგებრული სტრუქტურა: $(N,\oplus,\otimes)$.

Z_9. ყოველი ორი $a,b\in N$ ელემენტისათვის $a+b=b\oplus a$.

Z_{10}. ყოველი ორი $a,b\in N$ ელემენტისათვის $a\cdot b=b\otimes a$.

Z_{11}. (მინიმალურობიბს აქსიომა) Z სიმრაველის ყოველი $M\subset Z$ ქვესიმრაველე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

ა) $N\subset M$,

ბ) ყოველი ორი $a,b\in M$ ელემენტისათვის $a+(-b)\in M$
ემთხვევა Z სიმრავლეს.

ყოველ $a\in Z$ ელემენტს ***მთელი რიცხვი ეწოდება.*** $0\in Z$ რიცხვს კი ეწოდება ***რიცხვი ნული.*** $-a\in Z$ მთელ რიცხვს ეწოდება $a\in Z$ მთელი რიცხვის ***მოპირდაპირე მთელი რიცხვი.***

ჯამს $a+(-b)$ ეწოდება $a\in Z$ და $b\in Z$ ***მთელი რიცხვების სხვაობა.*** იგი აღინიშნება ასე: $a-b$.

ცხადია მთელ რიცხვთა სისტემა შეკრების და გამრავლების ოპერაციების მიმართ წარმოადგენს რგოლის ალგებრულ სტრუქტურას.

განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ ნატურალური რიცხვები მთელ რიცხვებს წარმოადგენენ. ცხადია, მთელ რიცხვთა სხვაობა იმ შემთხვევაში, როდესაც ეს რიცხვები ნატურალურია, ემთხვევა ნატურალური რიცხვებისათვის ზემოთ განსაზღვრულ სხვაობას.

მთელ რიცხვთა სისტემა აღინიშნება ასე: $\langle Z,+,\cdot,0,N,\oplus,\otimes,1\rangle$.

თეორემა 2.1.24. ყოველი მთელი რიცხვი წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა სხვაობასნ ანუ ყოველი $a\in Z$ რიცხვისათვის არსებობენ ისეთი $k,l\in N\subset Z$ ნატურალური რიცხვები, რომ $a=k-l$, ამასთან ტოლობა $k-l=k'-l'$ ეკვივალენტურია ტოლობის $k+l'=l+k'$

დამტკიცება: ვთქვათ, $M\subset Z$ ყველა იმ მთელ რიცხვთა სიმრავლეა, რომლებიც წარმოადგენენ ნატურალურ რიცხვთა სხვაობებს. მაშინ გვექნება:

ა) $n\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $n=(n+1)-1$, ამიტომ ყოველი ნატურალური რიცხვი $n\in M$.

ბ) ყოველი $a,b\in M$ მთელი რიცხვისათვის არსებობენ ისეთი ნატურალური რიცხვები $n,m,k,l\in N$, რომ $a=n-m, b=k-l$.

აქედან გამომდინარე და იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ $(Z,+,\cdot)$ რგოლია, გვექნება: $a-b=(n-m)-(k-l)=(n+k)-(m+l)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $a-b\in M$. Z_{11} მინიმალურობის აქსიომის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ: $M=Z$. თეორემის მეორე ნაწილი ცხადია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2.1.25. მთელ რიცხვთა რგოლი წარმოადგენს კომუტაციურ რგოლს ერთეულით.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a,b\in Z$ მთელი რიცხვებია. წინა თეორემის თანახმად,

$$a=n-m; b=k-l; n,m,k,l\in N.$$

$$a\cdot b=(n-m)(k-l)=(nk+ml)-(mk+nl)=(kn+lm)-(km+\ln)=(k-l)(n-m)=b\cdot a.$$

მაშასადამე, $a\cdot b=b\cdot a$, ესე იგი, მთელ რიცხვთა რგოლი კომუტაციურია.
განვიხილოთ ნატურალური რიცხვი $1\in N$, იგი მთელი რიცხვიცაა.
განვიხილოთ ნამრავლი $a\cdot 1$, სადაც $a\in Z$ ნებისმიერი მთელი რიცხვია. წინა თეორემის თანახმად, $a=n-m; n,m\in N$, ამიტომ $a\cdot 1=(n-m)\cdot 1=n-m=a$. რადგან მთელ რიცხვთა რგოლი კომუტაციურია, ამიტომ $a\cdot 1=1\cdot a$.
თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2.1.26. მთელ რიცხვთა რგოლი$(Z,+,\cdot)$ არქიმედეს რგოლია ერთადერთი შესაძლებელი მკაცრი და წრფივი დალაგების მიმართ.

დამტკიცება: ნატურალურ რიცხვთა $N\subset Z$ სიმრავლე აღვნიშნოთ Z^+ სიმბოლოთი. მთელ რიცხვთა სიმრავლე შედგება $0\in Z$ რიცხვისაგან, ნატურალური $n\in N\subset Z$ რიცხვებისაგან და ნატურალურ რიცხვთა პირდაპირე რიცხვებისაგან. მართლაც, დავუშვათ a ისეთი მთელი რიცხვია, რომ $a\neq 0, a\neq n,; n\in N$. რადგან a მთელია, ამიტომ $a=p-q; p,q\in N$. განვიხილოთ

მთელი რიცხვი $-a$, $-a=-(p-q)=q-p$. რადგან $p-q$ არ არის ნატურალური, ამიტომ $q>p$. ასეთ შემთხვევაში ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში არსებობს სხვაობა $q-p$. ეს კი ნიშნავს, რომ $-a$ ნატურალური რიცხვია.

ნატურალურ რიცხვთა $N\subset Z$ სიმრავლე აღვნიშნოთ Z' სიმბოლოთი. წინა მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ Z^{+} წარმოადგენს $(Z,+,\cdot)$ რგოლის დადებით ნაწილს. აქედან, როგორც წინა ლექციაში, შეგვიძლია ჩავთვალოთ: $a<b$ თუ $b-a>0$.

დავუშვათ, Z^{++} მეორე დადებითი ნაწილია $(Z,+,\cdot)$ რგოლში. რადგან წრფივად დალაგებულ რგოლში ნებისმიერი ელემენტი დადებითია , ამიტომ $1=1^2\in Z^{++}$, ასევე: თუ $n\in Z^{++}$, მაშინ $n+1\in Z^{++}$. ამგვარად $Z^{+}=N\subset Z^{++}$. დავუშვათ $a\in Z^{++}, a\notin Z^{+}$, ასეთ შემთხვევაში: $a\neq 0$ და $-a\in Z^{+}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $-a\in Z^{++}$, მაგრამ ეს არ შეიძლება, რადგან $a\in Z^{++}$. ამგვარად, მივიღეთ წინააღმდეგობა, ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სწორი. მაშასადამე,$Z^{++}\subset Z$, აქედან გამომდინარე,$Z^{+}=Z^{++}$.

ცხადია აქ განსაზღვრული $(Z,+,\cdot)$ რგოლის დალაგებით განსაზღვრული დალაგება $(N,\oplus,\otimes)$ ალგებრულ სტრუქტურაში ემთხვევა ნატურალურ რიცხვთა სისტემაში განსაზღვრულ დალაგებას.

როგორც დავინახეთ, მთელ რიცხვთა $(Z,+,\cdot)$ რგოლში დადებით ემემენტებს წარმოადგენენ მხოლოდ ნატურალური რიცხვები ანუ Z^{+} სიმრავლის ელემენტები. აქედან გამომდინარე მთელ რიცხვთა რგოლი არქიმედეს რგოლია.

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 21.27 . მთელ რიცხვთა რგოლი მთელობის არეა.

დამტკიცება: როგორც ადრე ვაჩვენეთ, ყოველ რგოლში $0a=a0$ და $(-a)(-b)=ab$. ვთქვათ, $a,b\in Z, a\neq 0, b\neq 0$, თუ $a,b\in N$, მაშინ $ab\neq 0$. თუ $a<0, b>0$, მაშინ $-a,b\in N; ab=-((-a)b)\neq 0$. ანალოგიურად არის საქმე, თუ $a>0, b<0$. თუ $a<0, b<0$, მაშინ $-a,-b\in N; ab=(-a)(-b)\neq 0$. თეორემა დამტკიცდა

მტკიცდება ფუნდამენტალური თეორემა:

თეორემა 21.28. მთელ რიცხვთა სისტემა ეროადერთია.

ეს თეორემა გვეუბნება, რომ ყოველი ორი ალგებრული სტრუქტურა $(Z,+,\cdot)$და $(Z',\oplus,\otimes)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ $Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,Z_6,Z_7,Z_8,Z_9,Z_{10},Z_{11}$ პირობებს, იზომორფხულია, როგორც დალაგებული ალგებრული სტრუქტურები ზემოთ განხილული დალაგებით.

სავარჯიშოები: დაამტკიცეთ შემდეგი დებულებები:

1. თუ $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებია და ადგილი აქვს ტოლობას $a=b$, მაშინ $a+c=b+c$.
2. თუ $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებია და ადგილი აქვს $a<b$ უტოლობას, მაშინ .
3. თუ $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებია და ადგილი აქვს $a=b$ უტოლობას, მაშინ $a+c=b+c$.
4. თუ $a,b,c\in N$ ნატურალური რიცხვებია და ადგილი აქვს $a<b$ უტოლობას, მაშინ $a\cdot c<b\cdot c$.
5. (არქიმედეს თეორემა) ყოველი $a,b\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $c\in N$, რომ $a\cdot c\geq b$.
6. დაამტკიცოთ, რომ $2x=1$ განტოლებას არ აქვს ამონახსნი მთელ რიცხვთა სისტემაში.

7. დავამტკიცოთ, რომ $x^2 = 2y^2$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (0,0) მთელ რიცხვთა სისტემაში.
8. დავამტკიცოთ, რომ Z თვლადი სიმრავლეა.

§22. გაყოფადობა მთელ რიცხვთა რგოლში, მარტივი რიცხვები

ვთქვათ, $a, b \in Z, b \neq 0$ მთელი რიცხვებია. ვტყვით, რომ a რიცხვი იყოფა b რიცხვზე, თუ არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი $c \in Z$, რომ $a = bc$. a რიცხვს ეწოდება b ***რიცხვის ჯერადი***, b რიცხვს-a ***რიცხვის გამყოფი***, c რიცხვს კი-a რიცხვის b ***რიცხვზე განაყოფი***. თუ $b \neq \pm 1, b \neq \pm a$, მაშინ b რიცხვს ეწოდება a რიცხვის ***საკუთრივი გამყოფი***.

თეორემა 22.1. მთელ რიცხვთა $(Z,+,\cdot)$ რგოლში:

1. a რიცხვის $b \neq 0$ რიცხვზე განაყოფი ცალსახად განისაზღვრება a და b რიცხვებით.
2. თუ a რიცხვი იყოფა b რიცხვზე, b რიცხვი იყოფა c რიცხვზე, მაშინ a რიცხვი იყოფა c რიცხვზე.
3. თუ a რიცხვი იყოფა b რიცხვზე, $a \neq 0$, მაშინ $|a| \geq |b|$.

დამტკიცება: 1. ვთქვათ, გვაქვს a რიცხვის b რიცხვზე ორი c, c' სხვადასხვა განაყოფი, მაშინ $a = bc, a = bc'$. აქედან $bc - bc' = 0$, ანუ $b(c - c') = 0$. რადგან $b \neq 0$ და მთელ რიცხვთა რგოლი მთელობის არეა, ამიტომ $c = c'$.

2. თეორემის პირობის თანახმად, $a = bs$ და $b = cd$ აქედან გამომდინარე, $a = c(ds)$. ეს კი ნიშნავს, რომ a რიცხვი იყოფა c რიცხვზე.

3. $|a| = \max\{a, -a\} \geq 0, |b| = \max\{b, -b\} \geq 0; |ab| = |a||b|$, $a = bc$ აქედან გამომდინარე, $|a| = |b||c| \geq |b|$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 22.2 მთელ რიცხვთა $(Z,+,\cdot)$ რგოლში:

1. თუ a რიცხვი იყოფა $b \neq 0$ რიცხვზე, მაშინ ყოველი მთელი c რიცხვისათვის ac იყოფა b რიცხვზე.
2. თუ $p + q + ... s = k + l + ... m$ ტოლობის მარჯვენივ და მარცხნივ მდგომ შესაკრებებისთვის, ერთის გარდა, ცნობილია, რომ ისინი იყოფიან b რიცხვზე, მაშინ ეს ერთი შესაკრებიც იყოფა b რიცხვზე.
3. თუ $a \neq 0$ რიცხვი იყოფა $b \neq 0$ რიცხვზე და $b \neq 0$ რიცხვი იყოფა $a \neq 0$ რიცხვზე, მაშინ $a = b$ ან $a = -b$

დამტკიცება: 1. თეორემის პირობის თანახმად: $a = bk$. აქედან, ნებისმიერი მთელი c რიცხვისათვის გვექნება: $ac = bkc = b(kc)$. ეს ნიშნავს, რომ ac იყოფა b რიცხვზე.

2. ვთქვათ, არ ვიცით, რომ k რიცხვი იყოფა b რიცხვზე. $p + q + ... s = k + l + ... + m$ ტოლობიდან და თეორემის პირობიდან ვღებულობთ:
$k = l + ... + m - q - ... - s = bc + ... + bd - bf - ... - bg = b(c + ... + d - f - ... - g)$, რაც ამტკიცებს თეორემის მეორე ნაწილს.

3. თეორემის პირობის თანახმად, $a = bc$ და $b = ac'$. მაშინ, წინა თეორემიდან გამომდინარე, $|a| \geq |b|$ და $|b| \geq |a|$. მაშასადამე, $|a| = |b|$. ამ ტოლობას კი მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც $a = b$ ან $a = -b$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 22.3. თუ $a, b \in Z$, მაშინ a წარმოდგინდება ასე: $a = bc + r$, სადაც $c \in Z; r \in Z, 0 \leq r < b$ და ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

დამტკიცება: მთელ რიცხვთა რგოლი არქიმედეს რგოლია, ამიტომ ისეთი $n \in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ $nb > a$. ვთქვათ ასეთი ნატურალური რიცხვების

სიმრაელეა $\{n\}$, რადგან ნატურალურ რიცხვთა სიმრაველე სრულად დალაგებულია, ამიტომ ამ სიმრაველეში არსებობს მინიმალური რიცხვი. ვთქვათ, ეს რიცხვია m. $mb > a$, $m-1$ ნატურალური რიცხვისთვის კი უკვე $(m-1)b < a$. $mb-(m-1)b = b$, რადგან $mb > a$, ამიტომ, თუ ჩავთვლით, რომ $r = a-(m-1)b$, $c = m-1$, მივიღებთ სასურველ წარმოდგენას: $a = bc + r$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ, საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს მეორე წარმოდგენაც: $a = bc' + r'$, მაშინ $bc + r = bc' + r'$, აქედან: $b(c-c') = r' - r$. მაშასადამე, $r' - r$ იყოფა b რიცხვზე, მაგრამ თუ $r' - r \neq 0$, ეს შეუძლებელია, რადგან $|r' - r| < |b|$, ამიტომ $r = r'$. აქედან და 22.1. თეორემიდან კი გამომდინარეობს, რომ $c = c'$. თეორემა დამტკიცდა.

$a = bc + r$ წარმოდგენაში c რიცხვს უწოდებენ a რიცხვის b რიცხვზე გაყოფით მიღებულ არასრულ განაყოფს. r რიცხვს ამ გაყოფით მიღებულ ნაშთს, $a = bc + r$ წარმოდგენას კი a რიცხვის b რიცხვზე ნაშთით გაყოფას.

მთელი რიცხვების პრაქტიკული გამოყენებისთვის მნიშვნელოვანია მათი ჩაწერის მოხერხებული მეთოდის არსებობა. განვიხილოთ მთელ რიცხვთა ჩაწერის ეგრეთ წოდებული პოზიციური მეთოდი, რომელიც მთელი რიცხვების ნაშთით გაყოფის ცნებაზეა დაფუძნებული.

ვთქვათ, $a \in Z, b \in N, b \geq 2$ მთელი რიცხვებია, $n \in N$ ის არაუარყოფითი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც $a = b^n c_n + r_n$ წარმოდგენაში ადგილი აქვს უტოლობებს $0 < c_n \leq b-1$, $r_n < b^n$. განვიხილოთ წარმოდგენები: $r_n = b^{n-1}c_{n-1} + r_{n-1}$, $r_{n-1} < b^{n-1}$; $r_{n-1} = b^{n-2}c_{n-2} + r_{n-2}$, $0 \leq c_{n-2} \leq b-1$, $r_{n-2} < b^{n-2}$;...;$r_2 = bc_1 + r_1$, $0 \leq c_1 \leq b-1$, $r_1 < b$. თუ c_0-ით აღვნიშნავთ r_1-ს, მივიღებთ:

$a = c_n b^n + c_{n-1}b^{n-1} + c_{n-2}b^{n-2} + \ldots + c_1 b + c_0$. თუ რიცხვებს $0 \leq c_i \leq b-1; i = 0,1,2,\ldots,n-1; 0 < c_n \leq b-1$ შევუსაბამებთ სიმბოლოებს: $a_i \equiv c_i; i = 0,1,2,\ldots,n-1; a_n \equiv c_n$, ამ სიმბოლოების საშუალებით a რიცხვი ცალსახად წარმოდგინდება ასეთნაირად: $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$, რასაც ***a რიცხვის პოზიციური ჩაწერა*** ეწოდება.

$a_i \equiv c_i; i = 0,1,2,\ldots,n-1; a_n \equiv c_n$ სიმბოლოებს ***ციფრებს*** უწოდებენ. ცხადია, ციფრთა მნიშვნელობა არაუარყოფითია და ნაკლებია b რიცხვზე. b რიცხვს კი მთელ რიცხვთა ***პოზიციური ჩაწერის ფუძე*** ეწოდება.

მთელ რიცხვთა პოზიციური ჩაწერის ფუძე ნებისმიერი $b \in Z, b \geq 2$ შეიძლება იყოს. რაც მეტია პოზიციური ჩაწერის ფუძე, მით მეტი სიმბოლოა საჭირო მთელი რიცხვის ჩასაწერად. ციფრის ნომერს, ანუ ციფრის ადგილს მთელი რიცხვის $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ პოზიციურ ჩაწერაში, ***თანრიგი*** ეწოდება.

თუ $b = 2$, მაშინ მთელ რიცხვთა პოზიციურ ჩაწერას ორობითი ეწოდება; თუ $b = 3$, მაშინ სამობითი; თუ $b = 10$, მაშინ ათობითი და ასე შემდეგ. თუ საქმე გვაქვს მთელ რიცხვთა ათობით ჩაწერასთან, მაშინ a_0-ს ერთეულების გამომსახველი ციფრი, ანუ ერთეულები, ეწოდება a_1-ს ათეულების გამომსახველი ციფრი, ანუ ათეულები ეწოდება და ასე შემდეგ.

$c \in Z$ მთელ რიცხვს ეწოდება $a, b, \ldots c \in Z$ სასრული რაოდენობის ***მთელი რიცხვების საერთო გამყოფი,*** თუ ეს რიცხვები იყოფა c რიცხვზე.

$a, b, \ldots c \in Z$ სასრული რაოდენობის მთელი რიცხვების საერთო გამყოფებიდან ისეთს, რომელიც იყოფა სხვა დანარჩენებზე, ამ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება.

$c \in Z$ იქნება ორი $a,b \in Z$ მთელი რიცხვების საერთო გამყოფი, თუ ორივე ეს რიცხვი იყოფა c რიცხვზე.

$a,b \in Z$ მთელი რიცხვების საერთო გამყოფებიდან ისეთი, რომელიც იყოფა სხვა დანარჩენებზე, იქნება ამ ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი.

$a,b,...c \in Z$ მთელი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი აღინიშნება ასე: $(a,b,...,c)$.

$a,b \in Z$ მთელი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი აღინიშნება ასე: (a,b).

ცხადია, ჭეშმარიტია შემდეგ წინადადებები:

1. თუ $(a,b)=d$, მაშინ $(a,b)=-d$.
2. თუ $a \neq 0$, მაშინ $(a,0)=a$.
3. $(a,b)=(b,a)$.
4. თუ $(a,b)=a$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ b იყოფა a-ზე.
5. $(a,(b,c,...,d))=(a,b,c,...,d)$.

მოვიყვანოთ ალგორითმი, რომელიც ორი მთელი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის საშუალებას იძლევა.

ვთქვათ, მოცემულია მთელი რიცხვები $a,b \in Z; a > b$. 22.3. თეორემის საფუძველზე ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$a = bc_1 + r_1; r_1 < b,$$
$$b = r_1c_2 + r_2; r_2 < r_1,$$
$$r_1 = r_2c_3 + r_3; r_3 < r_2,$$
$$r_2 = r_3c_4 + r_4; r_4 < r_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

რადგან $r_i \in Z, i = 1,2,...; r_i < r_{i-1}$, ამიტომ რომელიღაც ტოლობას აუცილებლად ექნება $r_{k-1} = r_k c_{k+1}; r_{k+1} = 0$ სახე. r_k რიცხვი ყოფს r_{k-1}-ს, r_{k-2}-ს, r_{k-3}-ს და ასე შემდეგ r_1-ს, b-ს და a-ს. მაშასადამე, r_k წარმოადგენს $a,b \in Z$ მთელი რიცხვების საერთო გამყოფს. ვაჩვენოთ, რომ $r_k = (a,b)$. ვთქვათ, d წარმოადგენს $a,b \in Z$ მთელი რიცხვების სხვა საერთო გამყოფს, მაშინ d ყოფს r_1-ს, აქედან გამომდინარე, ყოფს r_2-ს და ასე შემდეგ r_k-ს. ეს კი ნიშნავს, რომ $r_k = (a,b)$.

აქ მოყვანილ ორი მთელი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის ალგორითმს *ევკლიდეს ალგორითმი* ეწოდება.

ცხადია $(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=...=(r_{k-1},r_k)=r_k$ აქედან გამომდინარე, $a,b \in Z$ მთელი რიცხვების საერთო გამყოფები r_k უდიდეს საერთო გამყოფის გამყოფებია.

მაგალითი: ვიპოვოთ $(525,231)$. ევკლიდეს ალგორითმის საშუალებით გვექნება:

$$525 = 231 \cdot 2 + 63,$$
$$231 = 63 \cdot 3 + 42,$$
$$63 = 42 \cdot 1 + 21,$$
$$42 = 21 \cdot 2.$$

მაშასადამე, $(525,231)=21$.

თეორემა: 22.4. ნებისმიერი $m > 0$ დადებითი მთელი რიცხვისათვის და $a,b \in Z$ მთელი რიცხვებისთვის ადგილი აქვს ტოლობას $(am,bm)=(a,b)m$.

დამტკიცება: ცხადია, $(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=...=(r_{k-1},r_k)=r_k$ აქედან გამომდინარე, $a,b \in Z$ მთელი რიცხვების საერთო გამყოფები r_k უდიდეს საერთო გამყოფის გამყოფებია.

თუ ევკლიდეს ალგორითმში თითოეულ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ m რიცხვზე, მივიღებთ: $(am,bm)=(bm,r_1m)=(r_1m,r_2m)=...=(r_{k-1}m,r_km)=r_km$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 22.5. თუ m საერთო გამყოფია $a,b\in Z$ მთელი რიცხვებისთვის, მაშინ $(\frac{a}{m},\frac{b}{m})=\frac{(a,b)}{m}$. კერძოდ, $(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)})=1$.

დამტკიცება:

$$(\frac{a}{m},\frac{b}{m})=(\frac{b}{m},\frac{r_1}{m})=(\frac{r_1}{m},\frac{r_2}{m})=...=(\frac{r_{k-1}}{m},\frac{r_k}{m})=\frac{r_k}{m}=\frac{(a,b)}{m}$$

$$(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)})=(\frac{b}{(a,b)},\frac{r_1}{(a,b)})=(\frac{r_1}{(a,b)},\frac{r_2}{(a.b)})=...=(\frac{r_{k-1}}{(a,b)},\frac{r_k}{(a,b)})=\frac{r_k}{(a,b)}=1$$

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 22.6 $(a,(b,c,...,d))=(a,b,c,...,d)$

დამტკიცება: განსაზღვრებიდან გამომდინარე $(a,b,c,...,d)$ იყოფა $a,b,c,...,d\in Z$ რიხხვების თითოეულ საერთო გამყოფზე, ამიტომ $(a,(b,c,...,d))=(a,b,c,...,d)$. თეორემა დამტკიცდა.

$a,b,c,...,d\in Z$ მთელ რიცხვებს უწოდებენ ***თანამარტივ(ურთიერთმარტივ) რიცხვებს***, თუ $(a,b,c,...,d)=1$. $a,b,c,...,d\in Z$ მთელ რიცხვებს უწოდებენ წყვილ წყვილად თანამარტივს, თუ $(a,c)=1,(a,b)=1,(a,d)=1,(b,c)=1,...,(f,d)=1$.

ცხადია, ორ $a,b\in Z$ მთელ რიცხვს ეწოდება თანამარტივი, თუ $(a,b)=1$.

თეორემა 22.7. თუ $a,b\in Z$ და $(a,b)=1$, მაშინ ნებისმიერი მთელი $c\in Z$ რიცხვისათვის $(ac,b)=(c,b)$.

დამტკიცება: $(ac,bc)=(a,b)c=c$, (ac,b) ყოფს ac-ს და bc-ს; ამიტომ (ac,b) ყოფს c-სა და b-ს, ანუ (c,b)-ს. პირიქით, (c,b) ყოფს ac-ს და b-ს, ანუ (ac,b)-ს. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $(ac,b)=(c.b)$.
თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 22.8. თუ $(a,b)=1$ და ac იყოფა b-ზე, მაშინ c იყოფა b-ზე.

დამტკიცება: წინა თეორემიდან გვაქვს: $(ac,b)=(c,b)$. რადგან ac იყოფა b-ზე, ამიტომ $(ac,b)=b=(c,b)$. ეს კი ნიშნავს, რომ c იყოფა b-ზე.
თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 22.9. თუ თითოეული $a_1,a_2,...,a_m$ მთელი რიცხვი თანამარტივია თითოეულ $b_1,b_2,...,b_n$ რიცხვთან, მაშინ ნამრავლი $a_1a_2...a_m$ თანამარტივია $b_1,b_2,...,b_n$ ნამრავლთან.

დამტკიცება: წინა თეორემიდან $(a_1a_2...a_m,b_k)=(a_2a_3...a_m,b_k)=...=(a_m,b_k)=1$.
მასასადამე, $a_1a_2...a_m$ თანამარტივია თითოეულ $b_1,b_2,...,b_n$ რიცხვთან,
ასევე, წინა თეორემიდან გამომდინარე:

$$(b_1b_2..b_n,a_1a_2...a_m)=(b_2b_3..b_n,a_1a_2....a_m)=...=(b_n,a_1a_2...a_m)=1.$$

თეორემა დამტკიცდა.

ყოველ მთელ რიცხვს, რომელიც იყოფა მოცემულ მთელ რიცხვებზე, ამ რიცხვების ***საერთო ჯერადი*** ეწოდება.

მთელი რიცხვების საერთო ჯერადებიდან ისეთს, რომელიც დადებითია და ყოფს სხვა დანარჩენ საერთო ჯერადებს, უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება.

$a,b,...c\in Z$ მთელი რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი აღინიშნება ასე: $[a,b,...c]$. ორი $a,b\in Z$ მთელი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი აღინიშნება ასე: $[a,b]$.

ვთქვათ, $(a,b)=d$, მაშინ $a=dk_1, b=dk_2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $(k_1,k_2)=1$. ვთქვათ, D $a,b\in Z$ რიცხვების რაიმე საერთო ჯერადია. $D=ak$,

$\frac{D}{b}=\frac{ak}{b}=\frac{dk_1k}{dk_2}=\frac{kk_1}{k_2}$, სადაც $\frac{kk_1}{k_2}$ მთელი რიცხვია. აქედან გამომდინარე, თუ

გავითვალისწინებთ ფაქტს: $(k_1,k_2)=1$, მივიღებთ: $k=k_2t=\frac{b}{d}t$. აქედან კი

გამომდინარეობს, რომ $D=\frac{ab}{d}t$. პირიქით, ყოველი k_3 რიცხვისთვის $\frac{ab}{d}t$ იქნება

$a,b\in Z$ რიცხვების საერთო ჯერადი. ამგვარად $D=\frac{ab}{d}t$ ფორმულა, t ცვლადი სიდიდით, წარმოადგენს $a,b\in Z$ მთელი რიცხვების საერთო ჯერადის ზოგად სახეს. ცხადია ასეთად გამოსახული საერთო ჯერადებიდან უმცირესი იქნება ის, რომელიც შეესაბამება $t=1$ შემთხვევას.

მაშასადამე ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 22.10. $a,b\in Z$ რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი გამოისახება ფორმულით: $[a,b]=\frac{ab}{d}$.

ვთქვათ, ახლა უნდა ვიპოვოთ $a_1,a_2,...,a_n\in Z$ რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი: $[a_1,a_2,...,a_n]$.

თეორემა 22.11. $[a_1,a_2,...,a_n]=m_n$, სადაც $m_n=[m_{n-1},a_n]$, $m_{n-1}=[m_{n-2},a_{n-1}]...m_2=[a_1,a_2]$.

დამტკიცება: a_1,a_2 რიცხვების საერთო ჯერადები წარმოადგენენ $m_2=[a_1,a_2]$ უმცირესი საერთო ჯერადის ჯერადებს, ამიტომ a_1,a_2,a_3 რიცხვების საერთო ჯერადები წარმოადგენენ $[m_3,a_3]$ უმცირესი საერთო ჯერადის ჯერადებს და ასე შემდეგ $a_1,a_2,...,a_n$ რიცხვების საერთო ჯერადები იქნებიან $m_n=[m_{n-1},a_n]$ უმცირესი საერთო ჯერადის ჯერადები. ეს კი ნიშნავს, რომ $a_1,a_2,...,a_n$ რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი იქნება m_n.

თეორემა დამტკიცდა.

ცხადია, რომ წყვილწყვილად ურთიერთმარტივი რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი ამ რიცხვების ნამრავლს წარმოადგენს.

ნატურალურ $p\neq 1$ რიცხვს უწოდებენ ***მარტივს რიცხვს***, თუ მის ნატურალური გამყოფებს წარმოადგენენ მხოლოდ 1 და p.

ნატურალურ რიცხვს უწოდებენ შედგენილს, თუ მისი ნატურალური გამყოფების რიცხვი ორზე მეტია.

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნატურალური რიცხვი 1 არც მარტივია და არც შედგენილი.

თეორემა 22.12. ერთზე მეტი ნატურალური a რიცხვის უმცირესი ერთისაგან განსხვავებული გამყოფი მარტივია.

შედგენილი ნატურალური a რიცხვის ერთისაგან განსხვავებული უმცირესი გამყოფი არ აღემატება $\sqrt{a}$ სიდიდეს

დამტკიცება: ვთქვათ, $a\in N, a>1$ და $q\neq 1$ a რიცხვის უმცირესი ერთისგან განსხვავებული გამყოფია. თუ q შედგენილია, მაშინ მას ექნება გამყოფი q_1, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას: $1<q_1<q$, მაგრამ $q\neq 1$ უმცირესი გამყოფია, ამიტომ მას ერთისაგან და თავისი თავისაგან განსხვავებული გამყიფი არ ექნება. ეს კი ნიშნავს, რომ q მარტივია.

თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცდა.
ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი.
ვთქვათ, $q \neq 1$ წარმოადგენს a რიცხვის უმცირეს, ერთისგან განსხვავებულ გამყოფს, მაშინ $a = qa_1$ და თეორემის პირობიდან გამომდინარე, $a_1 \geq q$.
უკანასკნელი ტოლობიდან და უტოლობიდან გამომდინარეობს $aa_1 \geq q^2 a_1$ უტოლობა, ამ უტოლობიდან კი $a \geq q^2$ უტოლობა. საბოლოოდ გვექნება: $\sqrt{a} \geq q$.
თეორემა საბოლოოდ დამტკიცდა.

თეორემა 22.13. მარტივი რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა.

დამტკიცება: ვთქვათ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია და იგი შედგება $p_1, p_2, \ldots, p_k$ რიცხვებისაგან. განვიხილოთ მთელი რიცხვი: $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$, თუ არ არსებობს ამ რიცხვის მარტივი გამყოფი, რომელიც განსხვავებულია $p_1, p_2, \ldots, p_k$ რიცხვებისაგან, მაშინ $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ რიცხვი უნდა გაიყოს რომელიღაც p_i მარტივ რიცხვზე. ჩვენ 22.2 თეორემიდან ვიცით, რომ თუ $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ იყოფა p_i რიცხვზე, მაშინ $p_1 p_2 \ldots p_k$ ნამრავლის p_i რიცხვზე გაყოფადობიდან უნდა გამომდინარეობდეს რიცხვ 1-ის გაყოფადობა $p_i > 1$ მარტივ რიცხვზე, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, არსებობს $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ რიცხვის $p_1, p_2, \ldots, p_k$ მარტივი რიცხვებისაგან განსხვავებული მარტივი გამყოფი და ჩვენი დაშვება, რომ არსებობენ მხოლოდ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ მარტივი რიცხვები, არ ყოფილა სწორი. ეს კი ნიშნავს, რომ, თუ დავუშვებთ მარტივ რიცხვთა სიმრავლის სასრულობას, ყოველთვის მივიღებთ წინააღმდეგობას. მაშასადამე მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უნდა იყოს უსასრულო. თეორემა დამტკიცდა.

იმ მარტივი რიცხვების ცხრილის შესადგენად, რომლებიც არ აღემატებიან n რიცხვს, გამოიყენება მეთოდი, რომელსაც ***ერასტოფანეს საცერი*** ეწოდება.
განვიხილოთ რიცხვები:

$$1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

ამ რიცხვებში პირველი ერთზე მეტი რიცხვი არის 2. იგი იყოფა 1-ზე და 2-ზე, ამიტომ მარტივია. ამოვიღოთ (1) რიცხვთა მწკრივიდან 2-ის ჯერადები, გარდა თვითონ 2-ისა.

დარჩენილ რიცხვებში 2-ის შემდეგ პირველი რიცხვია 3. იგი, ცხადია, არ იყოფა 2-ზე, ვინაიდან ამ შემთხვევაში იგი ამოღებული იქნებოდა. ამგვარად 3 იყოფ მხოლოდ 1-ზე და 3-ზე, ამიტომ მარტივია. ამოვიღოთ (1) რიცხვით მწკრივში დარჩენილი რიცხვებიდან 3-ის ჯერადები, გარდა თვითიონ 3-ისა.
დარჩენილ რიცხვებში 3-ის შემდეგ პირველი რიცხვია 5 იგი, ცხადია, არ იყოფა 2-ზე და 3-ზე, ვინაიდან ამ შემთხვევაში იგი ამოღებული იქნებოდა. ამგვარად 5 იყოფ მხოლოდ 1-ზე და 5-ზე, ამიტომ მარტივია. ამოვიღოთ (1) რიცხვით მწკრივში დარჩენილი რიცხვებიდან 5-ის ჯერადები, გარდა თვითონ 5-ისა. და ასე შემდეგ გავაგრძელოთ ეს პროცესი, როდესაც ამგვარად ამოღებული იქნება p-ზე ნაკლები ყველა მარტივი რიცხვების ჯერადი რიცხვები, მაშინ დარჩენილი რიცხვები, რომლებიც ნაკლებია p^2-ზე, იქნებიან მარტივი. მართლაც, ყველა შედგენილი p^2-ზე ნაკლები a რიცხვი უკვე ამოღებულია, როგორც ჯერადი მისი უმცირესი მარტივი გამყოფისა, რომელიც ნაკლებია ან ტოლი $\sqrt{a} < p$ სიდიდე'ზე.
ცხადია, როდესაც ვიწყებთ p მარტივი რიცხვების ჯერადი რიცხვების ამოღებას, ეს ამოღება უნდა დავიწყოთ p^2-ით.
n-ზე ნაკლები მარტივი რიცხვების ცხრილის შედგენა დამთავრებულია, თუ ამოღებულია ყველა შედგენილი, $\sqrt{n}$-ზე ნაკლები ან ტოლი მარტივი რიცხვის ჯერადი რიცხვი.

თეორემა 22.14. ყოველი მთელი a რიცხვი თანამარტივია მოცემულ მარტივ p რიცხვთან ან იყოფა მასზე.

დამტკიცება: ვთქვათ, $(a,p)=d\neq 1$, მაშინ p იყოფა d-ზე. ეს კი მაშინ არის შესაძლებელი, როდესაც $p=d$

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 22.15. თუ რამოდენიმე თანამამრავლის ნამრავლი იყოფა p მარტივ რიცხვზე, მაშინ ამ თანამამრავლებიდან ერთი მაინც იყოფა ამ მარტივ რიცხვზე.

დამტკიცება: წინა თეორემის საფუძველზე, თითოეული თანამამრავლი თანამარტივია p მარტივ რიცხვთან ან იყოფა ამ მარტივ რიცხვზე. თუ ყველა თანამამრაელი თანამარტივია p რიცხვთან, მაშინ 22.9 თეორემის ძალით, მათი ნამრაელიც თანამარტივი იქნება ამ რიცხვთან. მაგრამ თეორემის პირობით, ნამრაველი იყოფა p რიცხეზე. ესე იგი, ერთ-ერთი თანამამრაელი მაინც იყოფა p რიცხეზე. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 22.16. ყოველი ერთზე მეტი მთელი რიცხვი წარმოდგინდება მარტივი თანამამრაელების ნამრაელის სახით და ეს წარმოდგენა ერთადერთია, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ თანამამრავლთა თანმიმდეერობას.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a>1$ მთელი რიცხეია, აღვნიშნოთ p_1-ით მისი უმცირესი მარტივი გამყოფი. $a=p_1a_1$. თუ $a_1>1$ და p_2 მისი უმცირესი მარტივი გამყოფია, მაშინ $a_1=p_2a_2$. თუ $a_2>1$ ანალოგიურად მივიღებთ $a_2=p_3a_3$, სადაც p_3 უმცირესი მარტივი გამყოფია $a_2>1$ რიცხვისა და ასე შემდეგ, სანამ არ მიეალთ ისეთ a_n-მდე, რომელიც ერთის ტოლი იქნება. ყველა მიღებული ტოლობის გადამრაელებით და სათანადო შეკვეცით მივიღებთ: $a=p_1p_2...p_n$.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ მიღებული წარმოდგენა ერთადერთია. ვთქვათ არსებობს მეორე წარმოდგენაც: $a=q_1q_2...q_m$, მაშინ $p_1p_2...p_n=q_1q_2...q_m$. ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა q_1 მარტივ რიცხვზე, ამიტომ 22.15 თეორემის ძალით, მარცხენა მხარის თანამამრავლებიდან ერთერთი იყოფა q_1 მარტივ რიცხეზე. ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ p_1 იყოფა q_1-ზე. ეს კი მაშინ მოხერხდება როდესაც $p_1=q_1$. ამ ტოლობიდან გამომდინარე, $p_2...p_n=q_2...q_m$ და ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ $p_2=q_2$. აქედან გვექნება: $p_3...p_n=q_3...q_m$ და მივიღებთ $p_3=q_3$ და ასე შემდეგ, სანამ ან მარჯვენა ან მარცხენა მხარეს ყველა თანამამრავლი არ შეიკვეცება. მაგრამ ერთ მხარეს თანამამრავლების მთლიანი შეკვეცა ვერ მოხერხდება, თუ მეორე მხარესაც თანამამრავლების ასევე მთლიანი შეკვეცა არ მოხდა. ეს კი ნიშნავს, რომ a რიცხვის ორივე წარმოდგენაში ერთ და იმავე მარტივი რიცხვების ნამრაელთან გვაქვს საქმე. თეორემა დამტკიცდა.

a რიცხვის $a=p_1p_2...p_n$ წარმოდგენაში ერთი და იგივე მარტივი თანამამრაელი შეიძლება რამოდენიმეჯერ განმეორდეს. თუ p_1 მეორდება α_1- ჯერ, p_2 მეორდება α_2- ჯერ და ასე შემდეგ; p_n მეორდება α_n- ჯერ, მაშინ შეგვიძლეა დავწეროთ: $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$. უკანასკნელ ტოლობას a რიცხვის ***კანონიკური წარმოდგენა*** *ეწოდება.*

თეორემა 22.16. ვთქვათ, $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ წარმოადგენს a რიცხვის კანონიკურ წარმოდგენას, მაშინ a რიცხვის ნებისმიერ d გამყოფს აქვს სახე: $d=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}$, სადაც $0\leq\beta_1\leq\alpha_1, 0\leq\beta_2\leq\alpha_2, ..., 0\leq\beta_n\leq\alpha_n$.

დამტკიცება: $a=dq$, აქედან გამომდინარე, a რიცხვის ყველა მარტივი გამყოფი

შედის a რიცხვის კანონიკურ წარმოდგენაში ხარისხის მაჩვენებლებით, რომლებიც არანაკლებია იმ ხარისხის მაჩვენებლებზე, რომლითაც ეს გამყოფები შედიან d გამყოფის კანონიკურ წარმოდგენაში. ამიტომ d გამყოფს აქვს სახე: $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$.

პირიქით ყოველი d რიცხვი, რომელსაც აქვს სახე $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$, სადაც $0 \le \beta_1 \le \alpha_1, 0 \le \beta_2 \le \alpha_2, \dots, 0 \le \beta_n \le \alpha_n$, ყოფს a რიცხვს.
თეორემა დამტკიცდა.

სავარჯიშოები:

1. ვთქვათ, $a,b \in Z, b > 0$ და $A = \{a - bx \mid x \in Z, a - bx \ge 0\}$.
მაშინ:
ა) $A \ne \Theta$.
ბ) A შეიცავს უმცირეს r ელემენტს.
გ) $r < b$.
2. დაამტკიცეთ, რომ:
ა) $2^n - 1$ იყოფა 7-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k = 3k + 1, k \in N$.
ბ) $((a+1)^n - a^n - 1)$ იყოფა $a^2 + a + 1$ ნებისმიერი $a \in Z$ რიცხვისათვის, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k = 6k \pm 1, k \in N$.
3. ათობითი პოზიციური ჩაწერით წარმოდგენილი რიცხვი 175 წარმოვადგინოთ შვიდობითი პოზიციური ჩაწერით.
4. ორობითი პოზიციური ჩაწერით წარმოდგენილი რიცხვი 110101000111 წარმოვადგინოთ ათობითი პოზიციური ჩაწერით.
5. სამობითი პოზიციური ჩაწერით წარმოდგენილი რიცხვი 1202100221202 წარმოვადგინოთ ხუთობითი პოზიციური ჩაწერით.
6. ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით ვიპოვოთ:
ა) $(6188, 4709)$,
ბ) $(81719, 52003, 36649)$.
7. ერასტოფანეს საცერის გამოყენებით შეადგინეთ 100-ზე ნაკლებ მარტივ რიცხვთა ცხრილი.
8. იპოვეთ 82798648 ნატურალური რიცხვის კანონიკური წარმოდგენა.

§23. რიცხვთა თეორიის მნიშვნელოვანი ფუნქციები, რიცხვთა შედარებანი

ასახვას $[\,] : R \to Z$ უწოდებენ რიცხვის ***მთელი ნაწილის ფუნქციას,*** თუ $[\,](x)$ წარმოადგენს იმ უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება $x \in R$ რიცხვს.
რიცხვი $[\,](x)$ აღინიშნება ასე: $[x]$.
მაგალითები: $[6] = 6$; $[6{,}2] = 6$; $[-4{,}75] = -5$; $[-7] = -7$.
ასახვას $\{\,\} : R \to Z$ უწოდებენ რიცხვის ***წილადი ნაწილს ფუნქციას,*** თუ იგი განისაზღვრება ფორმულით: $\{\,\}(x) = x - [x]$.
რიცხვი$\{\,\}(x)$ აღინიშნება ასე: $\{x\}$.
მაგალითები: $\{6\} = 0$; $\{6{,}2\} = 0{,}2$; $\{-4{,}75\} = 0{,}25$.

თეორემა 23.1. 1) $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$. 2) $[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$. 3) $[x] - 2[\frac{x}{2}] = 0$ ან $[x] - 2[\frac{x}{2}] = 1$.

დამტკიცება: 1) $[x]\le x;[y]\le y$. აქედან $[x]+[y]\le x+y$. განსაზღვრის თანახმად $[x+y]$ უდიდესი მთელი რიცხვია, რომელიც არ აღემატება $x+y$ რიცხვს, ამიტომ $[x]+[y]\le[x+y]$.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, $x=[x]+\alpha, 1>\alpha\ge 0; y=[y]+\beta, 1>\beta\ge 0$, ამიტომ

$$[x+y]=[[x]+\alpha+[y]+\beta]=[([x]+[y])+(\alpha+\beta)]\le[x]+[y]+1.$$

2) $[x+\frac{1}{2}]=[[x]+\alpha+\frac{1}{2}]=[[x]+(\alpha+\frac{1}{2})];[2x]-[x]=[2([x]+\alpha)]-[x]=[2[x]+2\alpha]-[x]$.

$[[x]+(\alpha+\frac{1}{2})]$ სიდიდე, თუ $\alpha<\frac{1}{2}$ ტოლია $[x]$ სიდიდის, ხოლო $[2[x]+2\alpha]-[x]$ სიდიდე ასევე ტოლია $[x]$ სიდიდის.

$[[x]+(\alpha+\frac{1}{2})]$ სიდიდე თუ $\alpha>\frac{1}{2}$ ტოლია $[x]+1$ სიდიდის, ხოლო $[2[x]+2\alpha]-[x]$ სიდიდე ასევე ტოლია $[x]+1$ სიდიდის.

3) $[x]-2[\frac{x}{2}]=[x]-2[\frac{[x]+\alpha}{2}]=[x]-2[\frac{[x]}{2}+\frac{\alpha}{2}]=[x]-2[[\frac{[x]}{2}]+\beta+\frac{\alpha}{2}]$, სადაც $\beta=0$ ან $\beta=\frac{1}{2}$.

თუ $\beta=0$, მაშინ $[x]-2[\frac{x}{2}]=[x]-2[[\frac{[x]}{2}]]=[x]-[x]=0$.

თუ $\beta=\frac{1}{2}$, მაშინ $[x]-2[\frac{x}{2}]=[x]-2[[\frac{[x]-1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}]]=[x]-([x]-1)=1$.

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.2. ყოველი x ნამდვილი და ყოველი n ნატურალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს:

1. $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$.
2. $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.
3. $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots=n$.

დამტკიცება: 1. $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]+\alpha}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}+\frac{\alpha}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$, $1>\alpha\ge 0$.

2.

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[x]+\left[\frac{nx+1}{n}\right]+\left[\frac{nx+2}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{nx+n-1}{n}\right]=$$

$$=[x]+\left[\frac{[nx]+\alpha+1}{n}\right]+\left[\frac{[nx]+\alpha+2}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{[nx]+\alpha+n-1}{n}\right]=[x]+\left[\frac{[nx]}{n}+\frac{1+\alpha}{n}\right]+$$

$$+\left[\frac{[nx]}{n}+\frac{2+\alpha}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{[nx]}{n}+\frac{(n-1)+\alpha}{n}\right]$$

ცხადია, თუ $\frac{[nx]}{n}$ მთელია, მაშინ ტოლობა სრულდება.

თუ $\frac{[nx]}{n}$ მთელი არ არის, მაშინ $\left[\frac{[nx]-k}{n}\right]$ იქნება მთელი რომელიღაც $k \le n$ ნატურალური რიცხვისათვის, მაშინ რადგან $\frac{l+\alpha}{n}+\frac{k}{n}<1$, როდესაც $l<n-1-k$, გვექნება:

$$[x]+\left[\frac{[nx]}{n}+\frac{1+\alpha}{n}\right]+\left[\frac{[nx]}{n}+\frac{2+\alpha}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{[nx]}{n}+\frac{(n-1)+\alpha}{n}\right]=[x]+\left[\frac{[nx]-k}{n}+\frac{1+\alpha}{n}+\frac{k}{n}\right]+$$

$$+\left[\frac{[nx]-k}{n}+\frac{2+\alpha}{n}+\frac{k}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{[nx]-k}{n}+\frac{(n-1)+\alpha}{n}+\frac{k}{n}\right]=\left[\frac{[nx]-k}{n}+\frac{k}{n}\right]+$$

$$+\left[\frac{[nx]-k}{n}+\frac{1+\alpha}{n}+\frac{k}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{[nx]-k}{n}+\frac{n-1-k+\alpha}{n}+\frac{k}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{[nx]-k}{n}+\frac{(n-1)+\alpha}{n}+\frac{k}{n}\right]=$$

$$\frac{[nx]-k}{n}+(n-1-k)\frac{[nx]-k}{n}+k\left(\frac{[nx]-k}{n}+1\right)=\frac{[nx]k}{n}+(n-1)\frac{[nx]-k}{n}+k=[nx]$$

3. როდესაც $2^k>n$, მაშინ $\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}<1$, ამიტომ ჩვენს მწკრივში არანულოვანი იქნება პირველიდან მე-$(\log_2 n)+1$ წევრი ჩათვლით. აქედან გამომდინარე:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots=\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right]+\ldots+$$

$$+\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]+\ldots=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]+\ldots=[n]=n.$$

თეორემა დამტკიცდა

თეორემა 23.3. $x>0$ ნამდვილი რიცხვისათვის და ნატურალური n რიცხვისათვის იმ ნატურალურ რიცხვთა რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატებიან x რიცხვს და იყოფიან n რიცხვზე, ტოლია $\left[\frac{x}{n}\right]$ რიცხვის.

დამტკიცება: $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{nm}{n}+\frac{k}{n}\right]=m$, რადგან $[x]=nm+k, k<n$ და იმ რიცხვებს, რომლებიც იყოფიან n-ზე, აქვთ სახე nm.

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.4. მქსიმალური ხარისხის მაჩვენებელი, რომელ ხარისხშიც მარტივი რიცხვი p ყოფს $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n$ ნამრავლს, ტოლია:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

დამტკიცება: n რიცხვზე არაუმეტესი რიცხვებიდან p რიცხვზე იყოფა $\left[\frac{n}{p}\right]$ რაოდენობის რიცხვი, p^2 რიცხვზე იყოფა $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ რაოდენობის რIიცხვი, p^3 რიცხვზე იყოფა $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ რაოდენობის რიცხვი. რიცხვი, რომელიც იყოფა p^m-ზე, ასევე იყოფა $p^{m-1}, p^{m-2}, \ldots, p$ რიცხვებზე. აქედან გამომდინარე, $p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\cdot p^{\left[\frac{n}{p^3}\right]}\cdot$

რიცხვი წარმოადგენს იმ მაქსიმალურ ხარისხის მაჩვენებელს, რომელ ხარისხშიდაც p მარტივი რიცხვი ყოფს $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)n$ ნამრავლს. თეორემა დამტკიცდა.

მაგალითი: ეიპოვოთ ხარისხის მაჩვენებელი, რომელ ხარისხშიც მარტივი რიცხვი 3 ყოფს 40!.

თუ გამოვიყენებთ წინა თეორემას, მივიღებთ

$$\left[\frac{40}{3}\right]+\left[\frac{40}{9}\right]+\left[\frac{40}{27}\right]+\left[\frac{40}{81}\right]+\ldots = 13+4+1+0 = 18.$$

განსაზღვრება 23.2. φ ფუნქციას, განსაზღვრულს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე ეწოდება მულტიპლიკაციური, თუ იგი არ ღებულობს ნულოვან მნიშვნელობას თავისი განსაზღვრის არის ერთ ელემენტზე მაინც და თუ $(a,b)=1$, მაშინ ადგილი აქვს $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b), a,b\in N$ ტოლობას.

მაგალითი: ა) ვთქვათ, σ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციაა რომელიც ყოველ ნატურალურ α რიცხვს შეუსაბამებს მისი ნატურალური გამყოფების ჯამს.

ვაჩვენოთ, რომ σ მულტიპლიკაციური ფუნქციაა. ვთქვათ $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$. განვიხილოთ ნამრავლი

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\ldots(1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{\alpha_k}) = \sum_{\substack{0\le\xi_i\le\alpha_i\\ i=1,2,\ldots,k}} p_1^{\xi_1}p_2^{\xi_2}\ldots p_k^{\xi_k},$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა მხარეს იმდენი შესაკრებია, რამდენი ისეთი $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ k წევრიანი მიმდევრობაც არსებობს, რომლის წევრებიც ξ_i ღებულობენ მნიშვნელობას ნატურალურ რიცხვთა $[0,\alpha_i]$ მონაკვეთიდან.

განხილული ნამრაელი ცხადია, ტოლია α რიცხვის ნატურალური გამყოფების ჯამსა. 22.6 თეორემის ძალით, ეს ნამრავლი ტოლია $\sum\limits_{d/a} d$ ჯამის, რომლის თითოეული შესაკრები წარმოადგენს a რიცხვის ნატურალურ გამყოფს, ანუ:

$$\sigma(a)=\sum_{d/a} d = \sum_{\substack{0<\xi_i\le\alpha_i\\ i=1,2,\ldots,k}} p_1^{\xi_1}p_2^{\xi_2}\ldots p_k^{\xi_k}.$$

თუ გაეიხსენებთ, რომ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-2}+ab^{n-1}$, გვექნება:

$$\sigma(a)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\ldots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ადვილია დავასკვნათ, რომ σ მულტიპლიკაციური ფუნქციაა. მართლაც, თუ $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, $b=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots q_l^{\beta_l}$.

$p_i\neq q_j, i=1,2,\ldots,k, j=1,2,\ldots,l$, მაშინ $ab=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots q_l^{\beta_l}$. ამიტომ გვექნება:

$$\sigma(ab)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\ldots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}\frac{q_1^{\beta_1}-1}{q_1-1}\frac{q_2^{\beta_2}-1}{q_{2-1}-1}\ldots\frac{q_l^{\beta_l}-1}{q_l-1}=\sigma(a)\sigma(b).$$

ბ) ვთქვათ, $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, a რიცხვის კანონიკური წარმოდგენაა, მაშინ ფუნქციაτ, განისაზღვრული ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, ფორმულით $\tau(a)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_k)$, რომელიც ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეუსაბამებს ამ რიცხვის ნატურალურ გამყოფთა რაოდენობას, ასევე მულტიპლიკაციური ფუნქციაა.

ნატურალურ რიცხვს უწოდებენ ***სრულყოფილ რიცხვს***, თუ იგი ტოლია თავისი საკუთრივი ნატურალური გამყოფების ჯამის.

მაგალითი: 6, 28 სრულყოფილი რიცხვებია.

თეორემა 23.5. a ნატურალური რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ლუწი სრულყოფილი რიცხვი, როდესაც მას აქვს სახე $a=2^{p-1}(2^p-1)$, სადაც p და $2^{p-1}-1$ მარტივი რიცხვებია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a=2^n p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, მაშინ, რადგან ეს რიცხვი სრულყოფილია,

$$2^n p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = \sum_{\substack{0\le \xi \le n \\ 0\le \xi_i \le \alpha_i \\ i=1,2,\dots,k}} 2^{\xi} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} - 2^n p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

აქედან გამომდინარე:

$$2^{n+1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = (1+2+2^2+\dots+p^n) \sum_{\substack{0\le \xi_i \le \alpha_i \\ i=1,2,\dots,k}} p_1^{\xi_1} p_2^{\xi_2} \dots p_k^{\xi_k} = (2^{n+1}-1) \sum_{\substack{0\le \xi_i \le \alpha_i \\ i=1,2,\dots,k}} p_1^{\xi_1} p_2^{\xi_2} \dots p_k^{\xi_k}.$$

2^{n+1} არ იყოფა $2^{n+1}-1$-ზე, ამიტომ $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ უნდა იყოფოდეს $2^{n+1}-1$-ზე.

ვთქვათ, ახლა $\dfrac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}}{2^{n+1}-1} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, მაშინ, ცხადია:

$$2^{n+1} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

და

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = 2^{n+1} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta} \dots p_k^{\beta_k} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}.$$

მაგალითში განხილული σ ფუნქციის განსაზღვრიდან გამომდინარე, უკანასკნელ ტოლობას ადგილი შეიძლება ჰქონდეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha_i, i=1,2,\dots,k$ რიცხვებიდან მხოლოდ ერთ-ერთი უდრის 1-ს, დანარჩენი-ნულია.

აქედან გამომდინარე, $a=2^n q$, სადაც q მარტივია, მაგრამ q უნდა იყოფოდეს $2^{n+1}-1$-ზე. რადგან q მარტივია, ამიტომ $q=2^{n+1}-1$, აქედან გამომდინარე, $2^{n+1}-1$ უნდა იყოს მარტივი რიცხვი. რადგან $2^{n+1}-1$ მარტივია, $n+1$ ასევე მარტივი უნდა იყოს, წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ $n+1=ab$, მაშინ

$$2^{n+1}-1=(2^a)^b-1=(2^a-1)((2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-1}+\dots+1).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $2^{n+1}-1$ მარტივი არ არის, მაშასადამე, ჩვენი დაშვება არასწორია და $n+1$ მარტივია.

პირიქით, თუ $n+1$ და $2^{n+1}-1$ მარტივი რიცხვებია, ცხადია, რიცხვი $a=2^n(2^{n+1}-1)$ იქნება სრულყოფილი.

თუ ჩავთვლით, რომ $n+1=p$, მაშინ გვექნება: $a=2^{p-1}(2^p-1)$.
თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.6. თუ φ ფუნქცია მულტიპლიკაციურია, მაშინ $\varphi(1)=1$. თუ φ, ϕ ფუნქციები მულტიპლიკაციურია, მაშინ მულტიპლიკაციური იქნება მათი ნამრავლიც: $\varphi\phi$, $(\varphi\phi)(a)=\varphi(a)\phi(a)$.

დამტკიცება: ჯერ დავამტკიცოთ თეორემის პირველი ნაწილი. ვთქვათ, $a\in N$ ისეთია, რომ $\varphi(a)\neq 0$. $\varphi(a)=\varphi(1\cdot a)=\varphi(1)\varphi(a)=\varphi(a)$, ეს კი ნიშნავს, რომ $\varphi(1)=1$.
ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი.

$$(\varphi\phi)(ab)=\varphi(ab)\phi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)\phi(a)\phi(b)=\varphi(a)\phi(a)\varphi(b)\phi(b)=(\varphi\phi)(a)(\varphi\phi)(b).$$

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.7. თუ $a=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ და φ რაიმე მულტიპლიკაციური ფუნქციაა, მაშინ:

$$\sum_{a/x}\varphi(x)=(1+\varphi(p_1)+\varphi(p_1^2)...\varphi(p_1^{\alpha_1})(1+\varphi(p_2)+\varphi(p_2^2)+...+\varphi(p_2^{\alpha_2})...$$
$$...(1+\varphi(p_k)+\varphi(p_k^2)+...+\varphi(p_k^{\alpha_k}).$$

დამტკიცება: $\sum_{a/x}\varphi(x)=\sum_{\substack{0\le\xi_i\le\alpha_i\\ i=1,2,...,k}}\varphi(p_1^{\xi_1}p_2^{\xi_2}...p_k^{\xi_k})=\sum_{\substack{0\le\xi_i\le\alpha_i\\ i=1,2,...,k}}\varphi(p_1^{\xi_1})\varphi(p_2^{\xi_2})...\varphi(p_k^{\xi_k})=$

$$=(1+\varphi(p_1)+\varphi(p_1^2)+...+\varphi(p_1^{\alpha_1}))\times(1+\varphi(p_2)+\varphi(p_2^2)+...+\varphi(p_2^{\alpha_2}))\times...$$
$$...\times(1+\varphi(p_k)+\varphi(p_k^2)+...+\varphi(p_k^{\alpha_k}))$$

თეორემა დამტკიცდა.

ფუნქციას $\mu:N\to Z$, განსაზღვრულს ფორმულით:

$$\mu(a)=\begin{cases}1,.....a=1\\(-1)^k,....a=p_1p_2...p_k\\0,....a=p^2b\end{cases},$$

სადაც b რაიმე მთელი რიცხვია, $p;p_1,p_2,...,p_k,p_i\ne p_j$ მარტივი რიცხვები **მიობიუსის ფუნქციას** უწოდებენ

მაგალითი:

$$\mu(1)=1,\mu(2)=-1,\mu(3)=-1,\mu(4)=0,\mu(5)=-1,\mu(6)=1,\mu(7)=-1,$$
$$\mu(8)=0,\mu(9)=0,\mu(10)=1,\mu(11)=-1,\mu(12)=0.$$

ცხადია μ მულტიპლიკაციური ფუნქციაა.

თეორემა 23.8. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე $\nu(x)=\frac{\mu(x)}{x}$ ფორმულით განსაზღვრული ν ფუნქცია მულტიპლიკაციურია.

დამტკიცება: ცხადია $\nu(1)=1$. $\nu(xy)=\frac{\mu(xy)}{xy}=\frac{\mu(x)}{x}\frac{\mu(y)}{y}$. თეორემა დამტკიცდა.

23.7 თეორემიდან გამომდინარეობს:

თეორემა15.9.

$$\sum_{a/x}\mu(x)=\begin{cases}1,....a=1;\\0,....a>1.\end{cases}.$$

თეორემა 23.10.

თუ a იყოფა b-ზე, მაშინ

$$\sum_{\frac{a}{b}/\frac{a}{x}}\mu(\frac{a}{x})=\begin{cases}1,....a=b;\\0,....a>b.\end{cases}.$$

დამტკიცება: $\frac{a}{b}>\frac{a}{x}$ ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს $x>b$. ეს ნიშნავს, რომ დასამტკიცებელი ტოლობის მარცხენა მხარეს მდგომ ჯამში შედიან ის შესაკრებები, რომლებიც შეესაბამებიან a რიცხვის იმ გამყოფებს, რომლებიც მეტნი არიან b გამყოფზე.

მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა: $\frac{a}{x}=y$ გვექნება:

$$\sum_{\frac{a}{b}/y}\mu(y)=\begin{cases}1,....\frac{a}{b}=1;\\0,....\frac{a}{b}>1.\end{cases}.$$

აქედან $y=\frac{a}{x}$ ჩასმით ვღებულობთ სასურველ ტოლობას.

თეორემა დამტკიცდა.

23.7. თეორემიდან $\varphi(x)=\frac{\mu(x)}{x}$ ფუნქციისათვის და $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}, a\neq 1$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $\sum_{a/x}\frac{\mu(x)}{x}=(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_k})$.

როდესაც $a=1$, მაშინ $\sum_{a/x}\frac{\mu(x)}{x}=1$.

ვთქვათ, ფუნქცია g განსაზღვრულია N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე და ღებულობს მნიშვნელობებს ნებისმიერ Y რიცხვით სიმრავლეში. დავუშვათ,

$$f(a)=\sum_{a/x}g(x);a\in N,$$

მაშინ ცხადია:

1. $f(\frac{a}{x})=\sum_{\frac{a}{x}/y}g(y)$,

2. $\sum_{a/x}\mu(x)f(\frac{a}{x})=\sum_{a/x}\sum_{\frac{a}{x}/y}\mu(x)g(y)$,

მეორე ტოლობიდან იმის გამო, რომ x და y ცვლადებიდან თითოეული ღებულობს a რიცხვის გამყოფებიდან ნებისმიერ მნიშვნელობას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sum_{a/x}\sum_{\frac{a}{x}/y}\mu(x)g(y)=\sum_{a/x}g(x)\sum_{\frac{a}{x}/y}\mu(y)=g(a),$$

ვინაიდან

$$\sum_{\frac{a}{x}/y}\mu(y)=\begin{cases}1,....a=x;\\0,....a>x.\end{cases}.$$

ამგვარად მივიღეთ:

$$g(a)=\sum_{a/x}\mu(x)f(\frac{a}{x}).$$

მიღებულ ფორმულას ***შებრუნების ფორმულას*** უწოდებენ.

ახლა ვთქვათ, ფუნქცია f განსაზღვრულია N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე და ღებულობს მნიშვნელობებს ნებისმიერ Y რიცხვით სიმრავლეში. დავუშვათ,

$$g(a)=\sum_{a/x}\mu(x)f(\frac{a}{x}),$$

მაშინ $g(x)=\sum_{x/y}\mu(y)f\left(\frac{x}{y}\right)$ და

აქედან

$$\sum_{a/x} g(x) = \sum_{a/x}\sum_{x/y}\mu(y)f(\frac{x}{y}) = \sum_{a/x} f(y)\sum_{x/y}\mu(\frac{x}{y}) = f(a).$$

ფუნქციას φ, რომელიც ყოველ ნატურალურ a რიცხვს შეუსაბამებს $\{0,1,2,...,a-1\}$ რიცხვებიდან a რიცხვთან თანამარტივი რიცხვების რაოდენობას ***ეილერის ფუნქციას*** უწოდებენ.

მაგალითი: $\varphi(1)=1, \varphi(2)=1, \varphi(3)=2, \varphi(4)=2, \varphi(5)=4, \varphi(6)=2$.

ცხადია, ყოველი მარტივი p რიცხვისთვის $\varphi(p)=p-1$.

თეორემა 23.11. ვთქვათ, d ნატურალური რიცხვი წარმოადგენს a ნატურალური რიცხვის გამყოფს, მაშინ იმ $x\in\{0,1,2,...,a\}$ რიცხვთა რაოდენობა რომლებისთვისაც $(a,x)=d$,ტოლია $\varphi(\frac{a}{d})$ რიცხვის.

დამტკიცება: თუ $(a,x)=d$, მაშინ $(\frac{a}{d},\frac{x}{d})=1$, $x<a$, ამიტომ $\frac{a}{d}>\frac{x}{d}$. ავიღოთ რიცხვი $x\in\{0,1,2,...,a\}$, რომელისთვისაც $(a,x)=d$, ამ რიცხვს ცალსახად შეესაბამება რიცხვი $0\le\frac{x}{d}\le\frac{a}{d}$. პირიქით, თუ ავიღებთ ისეთ რიცხვს $y\in\{0,1,2,...,\frac{a}{d}-1\}$, რომლისთვისაც $(\frac{a}{d},y)=1$, მაშინ $(a,dy)=d$. ცხადია $dy<a$ და ამგვარად ყოველ $y\in\{0,1,2,...,\frac{a}{d}-1\}$ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს $(\frac{a}{d},y)=1$ პირობას, ცალსახად შეესაბამება $x=dy$ რიცხვი $\{0,1,2,...,a\}$. აგებული შესაბამისობები $\{x\in\{0,1,2,...,a\}\,|\,(a,x)=d\}$ და $\{y\in\{0,1,2...,\frac{a}{d}-1\}\,|\,(\frac{a}{d.},y)=1\}$ სიმრავლეებს შორის ურთიერთშებრუნებული შესაბამისობებია, ამიტომ თითოეული მათგანი ურთიერთცალსახაა, ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 23.12. ვთქვათ, $d_1,d_2,...,d_k$ ნატურალური რიცხვები წარმოადგენენ a ნატურალური რიცხვის ყველა გამყოფს, B_i იმ რიცხვთა ერთობლიობაა, რომლებიც ეკუთვნიან $x\in\{0,1,2,...,a\}$ სიმრავლეს და $(a,x)=d_i$, მაშინ

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \{1,2,...,a\}$$

და

$$\sum_{i=1}^{k}\varphi(\frac{a}{d_i}) = a.$$

დამტკიცება: რადგან $d_1,d_2,...,d_k$ წარმოადგენს a რიცხვის გამყოფების მთლიან სისტემას, მაშინ ამ სისტემის ნებისმიერი რიცხვი ეკუთვნის $\{0,1,2,...,a\}$ სიმრავლეს. ცხადია, ასევე, რომ ნებისმიერ $x\in\{0,1,2,...,a\}$ რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი a რიცხვთან იქნება ამ რიცხვის გამყოფთა მოცემული სრული სისტემის ელემენტი, აქედან გამომდინარე, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \{1,2,...,a\}$.

როგორც წინა თეორემიდან ვიცით, თითოეულ B_i სიმრავლეში $\varphi(\frac{a}{d_i})$ რაოდენობის რიცხვია. ამიტომ, რადგან $\{0,1,2,...,a\}$ სიმრავლის ელემენტების რიცხვი არის a, გვექნება: $\sum_{i=1}^{k}\varphi(\frac{a}{d_i})=a$.

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.13. ეილერის $\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ჯამი, როდესაც არგუმენტი x გაირბენს ყველა მნიშვნელობას a რიცხვის ნატურალური გამყოფებისა, გამოითვლება ფორმულით $\sum_{a/x}\varphi(x)=a$.

დამტკიცება: ვთქვათ $x=d_i$. ისეთი $y\in\{1,2,...,a\}$ რიცხვების d_i რიცხვზე გაყოფით, რომლების თვისაც $(a,y)=d_i$ ვღებულობთ რიცხვებს, რომლებიც თანამარტივნი არიან $\frac{a}{d_i}$ რიცხვთან. $\frac{a}{d_i}$ რიცხვი ასევე წარმოადგენს a რიცხვის გამყოფს, აღვნიშნოთ იგი d_j სიმბოლოთი. ცხადია, $\varphi(d_i)=\varphi(\frac{a}{d_j})$. ამ ტოლობიდან და წინა თეორემიდან საბოლოოდ გამომდინარეობს, რომ $\sum_{a/x}\varphi(x)=a$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.14. თუ $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ კანონიკური წარმოდგენაა, მაშინ

$$\varphi(a)=a(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_k})=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)...p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1).$$

დამტკიცება: $\sum_{a/x}\varphi(x)=a$ ტოლობის მარჯვენა მხარე შეიძლება ჩავთვალოთ $f(a)=a$ მუდმივ ფუნქციად. შებრუნების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\varphi(a)=\sum_{a/x}\mu(x)\frac{a}{x}=a\sum_{a/x}\frac{\mu(x)}{x}=a(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_k}).$$

თუ ახლა ტოლობის მარჯვენა მხარეს a რიცხვის კანონიკურ წარმოდგენას შევიტანთ, მივიღებთ:

$$\varphi(a)=a(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_k})=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)...p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1).$$ თეორემა დამტკიცდა.

მაგალითი: $\varphi(100)=100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=40$, $\varphi(88)=88(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{11})=4$

თეორემა 23.15. ეილერის ფუნქცია მულტიპლიკაციურია.

დამტკიცება: ცხადია $\varphi(1)=1$.

თუ $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $b=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}...q_k^{\beta_k}$, $p_i\neq q_j, i=1,2,...,k, j=1,2,...,l$, მაშინ

$ab=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}...q_k^{\beta_k}$. ამიტომ

$$q_1^{\beta_1-1}(q_1-1)q_2^{\beta_2-1}(q_2-1)...q_k^{\beta_k-1}(q_k-1)==\varphi(a)\varphi(b).$$

ვთქვათ m ნატურალური რიცხვია, ორ $a,b\in Z$ რიცხვს ეწოდება ***შედარებადი მოდულით m***, თუ ეს რიცხვები m რიცხვზე გაყოფით იძლევიან ერთსა და იმავე ნაშთს.

როდესაც რიცხვები $a,b\in Z$ შედარებადია, წერენ $a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

თეორემა 23.16. ორი $a,b\in Z$ რიცხვი შედარებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a-b$ იყოფა m რიცხვზე.

დამტკიცება: ვთქვათ $a = b(\bmod m)$, მაშინ $a = cm + r; b = dm + r, 0 \le r < m$, აქედან გამომდინარე, $a - b = cm - dm = (c-d)m$, მაშასადამე, $a - b$ იყოფა m რიცხვზე. ვთქვათ, $a - b$ იყოფა m რიცხვზე, $a = cm + r_1, 0 \le r_1 < m; b = dm + r_2, 0 \le r_2 < m$. მაშინ $a - b = (c-d)m + r_1 - r_2$. $|r_1 - r_2| < m$, ამიტომ $r_1 - r_2$ მხოლოდ მაშინ გაიყოფა m რიცხვზე, როდესაც $r_1 - r_2 = 0$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.17. რიცხვთა შედარებადობა ეკვივალენტობის მიმართებაა.

დამტკიცება: ცხადია, რეფლექსურობის და სიმეტრიულობის თვისებას ადგილი აქვს. შევამოწმოთ ტრანზიტულობის თვისება. ვთქვათ, $a = b(\bmod m)$, $b = c(\bmod m)$, მაშინ წინა თეორემის საფუძველზე, $a - b = mk; b - c = ml$. თუ პირველ ტოლობას მივუმატებთ მეორე ტოლობას, მივიღებთ: $a - c = mk + ml = m(k + l)$. მაშასადამე, $a - c$ იყოფა m-ზე, რაც წინათეორემის ძალით ნიშნავს, რომ $a = c(\bmod m)$. თეორემა დამტკიცდა.

მაგალითი: $14 = 2(\bmod 6)$. $14 = -10(\bmod 6)$.

თეორემა 23.18. შედარებანი შეიძლება შევკრიბოთ და გადავამრავლოთ.

დამტკიცება: ვთქვათ, $a = b(\bmod m)$, $c = d(\bmod m)$.

$a + c - (b + d) = a + c - b - d = a - b + c - d = mk + ml = m(k + l)$, მაშასადამე $a + c - (b + d)$ იყოფა m-ზე. ესკი ნიშნავს, რომ $a + c = b + d(\bmod m)$.

ასევე,

$$ac - bd = ac - cb + cb - bd = c(a - b) + b(c - d) = cmk + bml = m(ck + bl.$$

მაშასადამე, $ac = bd(\bmod m)$. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან ვღებულობთ შემდეგ შედეგებს:

1. ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისათვის, თუ $a = b(\bmod m)$, მაშინ $a^n = b^n(\bmod m)$.
2. თუ $a = b(\bmod m)$, მაშინ $a = b + mc(\bmod m), c \in Z$.
3. თუ $a_i = b_i(\bmod m)$ $c_i = d_i(\bmod m); i = 1,2;...,k.$, მაშინ $\sum_{i=1}^{k} a_i c_i = \sum_{i=1}^{k} b_i d_i$.
4. ვთქვათ, $(c, m) = 1$, თუ $ac = bc(\bmod m)$, მაშინ $a = b(\bmod m)$.
5. ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისათვის $a = b(\bmod m)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $an = bn(\bmod mn)$.
6. ვთქვათ $n \in N$ რიცხვი m რიცხვის გამყოფია, თუ $a = b(\bmod m)$, მაშინ $a = b(\bmod n)$
7. თუ $a = b(\bmod m)$, $a = b(\bmod n)$, მაშინ $a = b(\bmod k)$, სადაც k წარმოადგენს m და n რიცხვების უმცირეს საერთო ჯერადს ანუ $k = [m, n]$.
8. ვთქვათ, $a = b(\bmod m)$. თუ a იყოფა x-ზე და m იყოფა x-ზე, მაშინ b ასევე იყოფა x-ზე. თუ b იყოფა x-ზე და m იყოფა x-ზე, მაშინ a იყოფა x-ზე. ამასთან $(a, m) = (b, m)$.

შედარების მიმართება Z რგოლში საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ სხვადასხვაგვარი ამოცანები.

მაგალითად:

1. ვიპოვოთ 3^{30}-ის 5-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი.

ამოხსნა: $3^{30} = (3^3)^{10}$, აქედან $3^3 = 27 = 2(\bmod 5)$, $3^{30} = 2^{10}(\bmod 5)$, $3^{30} = 1024(\bmod 5)$, $1024 = 4(\bmod 5)$. აქედან, შედარების მიმართების ტრანზიტულობის გამო გვექნება: $3^{30} = 4(\bmod 5)$. მაშასადამე, 3^{30}-ის 5-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი იქნება 4.

2. თუ a მთელია, $n = 6k + r; r = 0,1,2,3,4,5$, მაშინ:

ა) $(1 + a) = -a^2(\bmod(a^2 + a + 1))$,

ბ) $(1 + a)^n = (-a^2)^n(\bmod(a^2 + a + 1))$,

გ) $a^3 = 1(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$.

დ) $(1+a)^n - a^n - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(-a^2)^r - a^r - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$,

ე) $(-a^2)^r - a^r - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $r=1$ ან $r=5$.

დამტკიცება: ა) $1+a=(a^2+a+1)\cdot 0+1+a$, $-a^2=(a^2+a+1)\cdot(-1)+a+1$, მაშასადამე:

$$(1+a) = -a^2(\mathrm{mod}(a^2+a+1)).$$

ბ) წინა თეორემის პირველი შედეგი პირდაპირ ამტკიცებს მოცემული შედარების ჭეშმარიტებას.

გ) $a^3=(a^2+a+1)(a-1)+1$, $1=(a^2+a+1)\cdot 0+1$. მაშასადამე, $a^3 = 1(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$.

დ) $(1+a)^n = (-a^2)^n(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$ შედარებას თუ გამოვაკლებთ $(1+a)^n - a^n - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$ შედარებას, მივიღებთ $a^n+1=(-a^2)^n(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$. აქედან გვექნება: $(-a^2)^n - a^n - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$. $a^3 = 1(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$ ამიტომ $a^{6k+r} = a^r(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$, $(-1)^{6k+r}a^{12k+2r} = (-1)^r a^{12k+2r} = (-1)^r a^{2r}(\mathrm{mod}(a^2+a+1)$.

რადგან $n=6k+r$, ამიტომ $(1+a)^{6k+r} - a^{6k+r} - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$, ამ შედარებიდან გამომდინარეობს შედარება $(-1)^r a^{12k+2r} - a^{6k+r} - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$ $(-1)^r a^{12k+2r} = (-1)^r a^{2r}(\mathrm{mod}(a^2+a+1)$, $a^{6k+r} = a^r(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$ შედარებების გამოკლებით მივიღებთ $(-1)^r a^{12k+2r} - a^{6k+r} = ((-1)^r a^{2r} - a^r)(\mathrm{mod}(a^2+a+1)$.

ამ შედარებიდან მივიღებთ: $(-1)^r a^{12k+2r} - a^{6k+r} - 1 = ((-1)^r a^{2r} - a^r - 1)(\mathrm{mod}(a^2+a+1)$.

$(-1)^r a^{12k+2r} - a^{6k+r} - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$ შედარებიდან და $(-1)^r a^{12k+2r} - a^{6k+r} - 1 = ((-1)^r a^{2r} - a^r - 1)(\mathrm{mod}(a^2+a+1)$ შედარებიდან გამომდინარეობს $((-1)^r a^{2r} - a^r - 1) = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1)$. აქედან, უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $(-a^2)^r - a^r - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$.

ცხადია, თუ მსჯელობას გავიმეორებთ საწინააღმდეგო მიმართულებითნ ვაწვენებთ, რომ $(1+a)^n - a^n - 1 = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1))$.

ე) შემოწმებით მივიღებთ, რომ $((-1)^r a^{2r} - a^r - 1) = 0(\mathrm{mod}(a^2+a+1)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $r=1$ ან $r=5$. როდესაც r ცვლადის მნიშვნელობები განიხილება მხოლოდ $\{0,1,2,3,4,5\}$ სიმრავლიდან.

3. თუ ყოველი $a\in Z$ მთელი რიცხვისათვის $(1+a)^n - a^n - 1$ რიცხვი იყოფა a^2+a+1 რიცხვზე, მაშინ $n=6k\pm 1$.

ამ წინადადების ჭეშმარიტობა გამომდინარეობს წინა ამოცანიდან.

როგორც 23.17 თეორემით ვაჩვენეთ, შედარება ეკვივალენტობის მიმართებაა.

ამიტომ ამ მიმართებით Z მთელ რიცხვთა სიმრავლე დაიყოფა ეკვივალენტობის კლასებად.

m მოდულით შედარებად მთელ რიცხვთა ეკვივალენტობის კლასებს m ***მოდულით ნაშთთა კლასებს*** უწოდებენ, ხოლო ელემენტს ამ კლასებიდან ნაშთს m მოდულით უწოდებენ.

ცხადია, ერთ და იმავე კლასში შედიან ის რიცხვები, რომლებიც m-ზე გაყოფისას იძლევიან ერთდა იმავე r ნაშთს. ცხადია ასევე, თუ a რიცხვი შედის რომელიღაც ნაშთთა კლასში, მაშინ რიცხვი $mk+a, k\in Z$ შედის იმავე კლასში.

თითოეული ნაშთთა კლასიდან თითო რიცხვის ამოღებით მიღებულ რიცხვთა სიმრავლეს, ***ნაშთთა სრული სისტემა*** ეწოდება.

ნაშთთა თითოეული კლასიდან უმცირესი არაუარყოფითი რიცხვის ამოღებით მიღებ'ულ ნაშთთა სრ'ულ სისტემას ***მინიმალურ ნაშთთა სრული სისტემა*** ეწოდება.

m მოდულით ნაშთთა სრ'ული სისტემიდან იმ რიცხვებით შედგენილ სიმრაელეს, რომლიც თანამარტივი არის m რიცხვთან, ***ნაშთთა დაყვანილი სრული სისტემა*** ეწოდება; ამასთან, თუ ნაშთთა დაყვანილი სისტემის ელემენტები ამოღებულია მინიმალურ ნაშთთა სრული სისტემიდან, მაშინ ნაშთთა სისტემას ***მინიმალურ ნაშთთა დაყვანილი სრული სისტემა*** ეწოდება.

მაგალითი: ვთქვათ, $m=10$:

ა) 0,1,2,3,4,5,-4,-3,-2,-1 m მოდ'ულით ნაშთთა სრული სისტემაა.

ბ) 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 m მოდულით ნაშთთა მინიმალური სრული სისტემაა.

გ) 1,3,7,9 m მოდულით ნაშთთა მინიმალური დაყვანილი სისტემაა.

თეორემა. 23.19. ყოველი m მთელი რიცხვისგან შედგენილი სიმრაელე, რომლის ელემენტები წყვილ წყვილად ურთიერთშე'უდარებადია, წარმოადგენს m მოდულით ნაშთთა სრულ სისტემას.

დამტკიცება: რადგან სიმრაელის ელემენტები წყვილ წყვილად შეუდარებადია, ამიტომ ისინი სხვადასხვა კლასებში იქნებიან მოთავსებ'ული, რადგან ამ ელემენტთა რაოდენობა არის m, ამიტომ, ცხადია, მოცემული სიმრაელის ელემენტები შეადგენენ ნაშთთა სრულ სისტემას.

თეორემა დამტკიცდა.

ცხადია, m მოდ'ულით ნაშთთა მინიმალურ დაყვანილ სისტემაში და, აქედან გამომდინარე, ნებისმიერ m მოდულით ნაშთთა დაყვანილ სისტემაში რიცხვთა რაოდენობა ტოლია $\varphi(m)$-ის, სადაც φ ეილერის ფუნქციაა.

თეორემა 23.20. თუ $(a,m)=1$ და x ღებულობს ყველა მნი'შვნელობას ნაშთთა რაიმე სრული სისტემიდან, მაშინ $\{ax+b\}$ სიმრაელე, სადაც b ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ასევე წარმოადგენს ნაშთთა სრულ სისტემას.

დამტკიცება: ცხადია $\{ax+b\}$ სიმრაელეში იმდენი ელემენტია, რამდენ მნიშვნელობასაც ღებულობს x ცვლადი, ანუ ელემენტთა ეს რაოდენობა ტოლი იქნება m-ის.

ვაჩვენოთ, რომ რიცხვები ax_1+b, ax_2+b, სადაც $x_1 \neq x_2 (\mathrm{mod}\, m)$, შეუდარებადია. დაეუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $ax_1+b=ax_2+b (\mathrm{mod}\, m)$, მაშინ $ax_1=ax_2 (\mathrm{mod}\, m)$ და რადგან $(a,m)=1$, ამიტომ $x_1=x_2 (\mathrm{mod}\, m)$. მაგრამ $x_1 \neq x_2 (\mathrm{mod}\, m)$, მივიღეთ წინააღმდეგობა, ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სწორი, მაშასადამე, $ax_1+b \neq ax_2+b$. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 23.21. თუ $(a,m)=1$ და x ღებულობს ყველა მნიშვნელობას ნაშთთა რაიმე დაყვანილი სისტემიდან, მაშინ $\{ax\}$ სიმრაელე, სადაც b ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ასევე წარმოადგენს ნაშთთა დაყვანილ სისტემას.

დამტკიცება: $\{ax\}$ სიმრაელეში ელემენტების რაოდენობა იმდენია, რამდენ მნი'შვნელობასაც ღებულობს x ცვლადი, ანუ ეს რაოდენობა ტოლია $\varphi(m)$-ის.

ვაჩვენოთ, რომ $ax_1 \neq ax_2$ როდესაც $x_1 \neq x_2$. დაეუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $ax_1=ax_2$, რადგან $(a,m)=1$, ამიტომ $x_1=x_2$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $ax_1 \neq ax_2$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $(ax,m)=1$. მართლაც, $(a,m)=1$ და $(x,m)=1$, ეს კი ნიშნავს, რომ $(ax,m)=1$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.22 (ეილერის თეორემა). თუ $m.>1, m\in N$ და $(a,m)=1, a\in Z$, მაშინ $a^{\varphi(m)}=1(\mathrm{mod}\, m)$.

დამტკიცება: თუ x ღებულობს მნიშვნელობებს მინიმალურ ნაშთთა დაყვანილი სისტემიდან $r_1, r_2, ..., r_{\varphi(m)}$, მაშინ უმცირესი არაუარყოფითი ნაშთთა დაყვანილი სისტემა, რომელიც შედგენილია $[ar_1],[ar_2],...,[ar_{\varphi(m)}]$ კლასებიდან ამორჩეული $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_{\varphi(m)}$ რიცხვებისგან, ემთხვევა $r_1, r_2, ..., r_{\varphi(m)}$ სისტემას. მაგრამ ერთ და იმავე რიცხვებს ამ სისტემებში შეიძლება სხვადასხვა ადგილი ეკავოთ. გადავამრავლოთ შედარებანი:

$$ar_1 = \rho_1 (\mathrm{mod}\, m), ar_2 = \rho_2 (\mathrm{mod}\, m), ..., ar_{\varphi(m)} = \rho_{\varphi(m)} (\mathrm{mod}\, m).$$

მივიღებთ: $a^{\varphi(m)} r_1 r_2 ... r_{\varphi(m)} = \rho_1 \rho_2 ... \rho_{\varphi(m)} (\mathrm{mod}\, m)$, რადგან თითოეული r_i ნაშთისათვის $(r_i, m) = 1$, და $r_1 r_2 ... r_{\varphi(m)} = \rho_1 \rho_2 ... \rho_{\varphi(m)}$, ამიტომ უკანასკნელი შედარების შეკვეცა შესაძლებელია. შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$a^{\varphi(m)} = 1 (\mathrm{mod}\, m).$$

თეორემა დამტკიცდა.

ეილერის თეორემიდან გამომდინარეობს შედეგი, რომელიც ფერმას თეორემის სახელით არის ცნობილი:

თეორემა 23.23 (ფერმას თეორემა). თუ p მარტივი რიცხვია და $a \in Z$ რიცხვი არ იყოფა p რიცხვზე, მაშინ:

$$a^{p-1} = 1 (\mathrm{mod}\, p).$$

დამტკიცება: რადგან p მარტივი რიცხვია, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას: $\varphi(p) = p - 1$. აქედან გამომდინარე, $a^{\varphi(p)} = a^{p-1} = 1 (\mathrm{mod}\, p)$. თეორემა დამტკიცდა.

თუ $a^{p-1} = 1 (\mathrm{mod}\, p)$ შედარების ორივე მხარეს გავამრავლებთ a რიცხვზე მივიღებთ

$$a^p = a (\mathrm{mod}\, p).$$

ფერმას თეორემა გვეუბნება, რომ რიცხვები a^p, a, როდესაც a რიცხვი არ იყოფა p მარტივ რიცხვზე, ამ მარტივ რიცხვზე გაყოფისას იძლევიან ერთსა და იმავე ნაშთს.

Z_m-ით აღვნიშნოთ მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეში ნაშთთა კლასების ოჯახი. ამ ოჯახში $a \in Z$ რიცხვის კლასი აღინიშნება ასე: $[a]$.

შევიტანოთ Z_m სიმრავლეში გამრავლების და შეკრების ოპერაციები:

$$[a] + [b] = [c],$$

სადაც c წარმოადგენს $a + b$ რიცხვის m რიცხვზე გაყოფით მიღებულ ნაშთს;

$$[a] \cdot [b] = [d],$$

სადაც d წარმოადგენს $a \cdot b$ რიცხვის m რიცხვზე გაყოფით მიღებულ ნაშთს.

ვაჩვენოთ, რომ ეს ოპერაციები კორექტულად არიან განსაზღვრული.

ვთქვათ, $a' \in [a], b' \in [b]$, მაშინ

$$a' = mk' + r_1; b' = ml' + r_2; a' + b' = m(k' + l') + r_1 + r_2,$$

მაგრამ ასევე:

$$a = mk + r_1; b = ml + r_2; a + b = m(k + l) + r_1 + r_2.$$

როგორც ვხედავთ, $a + b$ და $a' + b'$ რიცხვები m რიცხვზე გაყოფით ღებულობთ ერთსა იმავე ნაშთს.

$$a \cdot b = m^2 kl + r_1 ml + r_2 mk + r_1 r_2; \; a' \cdot b' = m^2 k'l' + r_1 ml' + r_2 mk' + r_1 r_2;.$$

ამ ტოლობებიდანაც ჩანს, რომ $a \cdot b$ და $a' \cdot b'$ რიცხვები m რიცხვზე გაყოფით ღებულობთ ერთსაა იმავე ნაშთს.

მაშასადამე, განხილული ოპერაციები კორექტულადაა განსაზღვრული.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ Z_m სიმრავლე ამ ოპერაციების მიმართ წარმოადგენს ერთეულიანი, სასრული, კომუტაციური რგოლის $(Z_m,+,\cdot)$ ალგებრულ სტრუქტურას.

თუ $m = a \cdot b$ და $1 < a < m; 1 < b < m$, მაშინ $a = m0 + a; b = m0 + b; a \cdot b = m0 + a \cdot b$.

$[a] \cdot [b] = [0]$. აქედან გამომდინარე $(Z_m,+,\cdot)$, რგოლი ნულგამყოფებიანი შეიძლება იყოს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $m = p$ მარტივი რიცხვია.

განვიხილოთ $[a] \in Z_p$, $a = pk + r$. ვთქვათ, $b = pl + r'$, სადაც r' ისეთია, რომ $r \cdot r'$ რიცხვის p რიცხვზე გაყოფისას ნაშთი ერთის ტოლია. ასეთი b რიცხვი, ცხადია, არსებობს.

ასეთ შემთხვევაში $(Z_p,+,\cdot)$ მთელობის არეა და მის ყოველ ელემენტს გააჩნია შებრუნებული. ასეთი რგოლები კი ველებს წარმოადგენენ.

ამგვარად, $(Z_p,+,\cdot)$ ველი წარმოადგენს სასრული ველის მაგალითს, ადვილია იმის ჩვენებაც, რომ ამ ველის მახასიათებელი ტოლია p რიცხვის.

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ ხარისხის მაჩვენებელი, რომელშიც 5 შედის 5258! კანონიკურ წარმოდგენაში.
2. იპოვეთ 125! რიცხვის კანონიკური წარმოდგენა.
3. იპოვეთ $\tau(116524)$ და $\sigma(116524)$.
4. იპოვეთ $\mu(x), x = 1,2,...,100$. 5. იპოვეთ $\varphi(5040)$ და $\varphi(1294700)$

თავი V

კომბინატორიკის ელემენტები

§24. წყობა, გადანაცვლება

ახლა განვიხილოთ ამოცანა: რამდენი 5 ასოიანი სიტყვა შეიძლება ჩავწეროთ ანბანით, რომელშიც შედის 33 ასო?

თუ ვიგულისხმებთ, რომ სიტყვა წარმოადგენს ასოთა ნებისმიერ სასრულ მიმდევრობას, მაშინ ცხადია, 33 ასოთი ჩაიწერება 33^5 რაოდენობის 5 ასოიანი სიტყვა.

საზოგადოდ, თუ გვაქვს k რაოდენობის ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლე და n რაოდენობის პოზიცია, მაშინ ამ რაოდენობის ელემენტებისაგან შეიძლება მივიღოთ n პოზიციისაგან შედგენილი $A=k^n$ რაოდენობის ისეთი კომბინაცია, რომელშიც ერთი და იგივე ელემენტი შეიძლება გვხდებოდეს რამდენიმეჯერ.

რიცხვს $A=k^n$ უწოდებენ k რაოდენობის ელემენტთა n ***პოზიციურ წყობას განმეორებებით.***

ვთქვათ, გვაქვს n რაოდენობის პოზიცია და თითოეულ $i, i=1,2,...,n$ ნომრის პოზიციაში შეიძლება იყოს $k_i, i=1,2,...,n$ რაოდენობის ელემენტის შემცველ ურთიერთთანაუკვეთ ჯგუფთა შესაბამისი ელემენტი, მაშინ პოზიციებზე ასეთნაირად გადანაწილებული ჯგუფებისაგან შეიძლება შევადგინოთ n პოზიციანი $A=k_1\cdot k_2\cdot...\cdot k_n$ რაოდენობის ელემენტთა კომბინაცია.

მაგალითი: ვთქვათ, 33 ასოიანი ანბანი დაყოფილია სამ ჯგუფად და თითოეულ ჯგუფში ასოთა რაოდენობაა: $k_1=10, k_2=20, k_3=3$, შესაბამისად, განესაზღვროთ რამდენი 3 ასოიანი სიტყვა შეიძლება შევადგინოთ მოცემოლი ანბანის ასოებისაგან, თუ სიტყვაში პირველ პოზიციაში პირველი ჯგუფის, მეორე პოზიციაში მეორე ჯგუფის და მესამე პოზიციაში მესამე ჯგუფის ასოა?

გამოვიყენოთ ფორმულა: $A=k_1\cdot k_2\cdot...\cdot k_n$. ჩვენ შემთხვევაში

$n=3, k_1=10, k_2=20, k_3=3$, აქედან $A=k_1\cdot k_2\cdot k_3=10\cdot 20\cdot 3=600$.

მაგალითი: რამდენი 6 თანრიგიანი სხვადასხვა ნატურალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს 10 ციფრით?

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ნატურალური რივხვი არ შეიძლება იწყებოდეს ნულით, მაშინ ასეთი ნატურალური რიცხვის პირველ თანრიგში შეიძლება ეწეროს 9 სხვადასხვა ციფრი, მეორე და ყველა დანარჩენ თანრიგებში კი 10-10, აქედან გამომდინარე, 10 ციფრით ჩაწერლი 6 თანრიგიანი ნატურალური რიცხვების რაოდენობა იქნება: $9\cdot 10^5$.

ანალოგიურად, თუ ვიყენებთ ნატურალური რიცხვების ჩაწერის ორობით სისტემას, მაშინ 2 ციფრით ჩაიწერება $1\cdot 2^5=2^5$ სხვადასხვა 6 თანრიგიანი ნატურალური რიცხვი.

ზოგადად, თუ ვიყენებთ ნატურალური რიცხვების ჩაწერის სისტემით ფუძით k, მაშინ k რაოდენობის ციფრით ჩაიწერება $(k-1)k^{n-1}$ რაოდენობის n თანრიგიანი რიცხვი.

მაგალითი: რამდენი 5 ასოიანი სიტყვა შეიძლება ჩავწეროთ ანბანით, რომელშიც შედის 33 ასო, თუ სიტყვაში ასოები არ უნდა მეორდებოდეს.

ასეთ სიტყვაში პირველ პოზიციაში შეიძლება აღმოჩნდეს 33 ასოდან ერთი, მეორე პოზიციაში- დარჩენილი 32 ასოდან ერთი, მესამე პოზიციაში- დარჩენილი 31 ასოდან ერთი, მეოთხე პოზიციაში- დარჩენილი 30 ასოდან ერთი, მეხუთე პოზიციაში- დარჩენილი 29 ასოდან ერთი. აქედან გამომდინარე, სულ გვექნება $33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29$ რაოდენობის ისეთი სიტყვა, რომლებშიც ასოები არ მეორდება.

საზოგადოდ, თუ გვაქვს k რაოდენობის ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლე და n რაოდენობის პოზიცია, მაშინ ამ რაოდენობის ელემენტებისგან შეიძლება მივიღოთ n პოზიციისაგან შედგენილი $A_k^n = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-(n-1))$ რაოდენობის ისეთი კომბინაცია, რომელშიც ერთი და იგივე ელემენტი არ მეორდება.

რიცხვს $A_k^n = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-(n-1))$ უწოდებენ k რაოდენობის ელემენტთა ***n* პოზიციურ წყობას განმეორებების გარეშე**.

განვიხილოთ წყობა განმეორებების გარეშე, სადაც პოზიციათა რიცხვი ტოლია საგანთა რაოდენობის, ანუ $n=k$. ასეთ შემთხვევაში $A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$. შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $P_n = A_n^n$.

რიცხვს $P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$ უწოდებენ ***n* პოზიციურ გადანაცვლებას განმეორებების გარეშე**.

მაგალითი: სალაროსთან მივიდა 5 ადამიანი, გამოვიანგარიშოთ, რამდენი ვარიანტი არსებობს მათგან რიგის დაკავებისა.

გამოვიყენოთ უკანასკნელი ფორმულა, როდესაც $n=5$, მივიღებთ $P_5 = 5! = 120.$, მაშასადამე არსებობს რიგის დაკავების 120 სხვადასხვა ვარიანტი.

მაგალითი: ვთქვათ, გვაქვს n რაოდენობის ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლე, რომლიდანაც გამოყოფილია l რაოდენობის ურთიერთთანაუკვეთი ჯგუფი, სადაც თითოეულ $i, i=1,2,\ldots,l$ ნომრის ჯგუფში გვაქვს $k_i, i=1,2,\ldots,l$ რაოდენობის ელემენტი. ცხადია, რომ ელემენტთა აღნიშნული ჯგუფების სიმრავლის l პოზიციური გადანაცვლება $P_l = l!$. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$P_l = l! = \frac{P_n}{k_1!\,k_2!\ldots\cdot k_l!},$$

ანუ ჯგუფების სიმრავლის l პოზიციური გადანაცვლება ტოლია n რაოდენობის ელემენტთა დალაგებების ისეთი რაოდენობის, როდესაც ორი დალაგება გაიგივებულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ინვერსია ხდება ერთი და იმავე ჯგუფის ელემენტებს შორის. სხვანაირად ეს ნიშნავს, რომ საქმე გვაქვს ისეთ n პოზიციურ გადანაცვლებასთან, როდესაც ჯგუფებში ელემენტთა განსხვავება უგულებელყოფილია.

$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_l} = \dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots\cdot k_l!}$ რიცხვს, სადაც $n \ge k_1 + k_2 + \ldots + k_l$, უწოდებენ ***n* პოზიციურ გადანაცვლებას განმეორებებით**.

მაგალითი: რამდენი სიტყვას მივიღებთ ასოების გადანაცვლებით სიტყვაში: "კაკალი".

ამ სიტყვაში გვაქვს ასოთა ოთხი ჯგუფი: აა, კკ, ლ, ი. აქედან გამომდინარე

$$P_6^{2,2,1,1} = \frac{4!}{2!\,2!\,1!\,1!} = \frac{24}{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 6.$$

§25. ჯუფთება

ვთქვათ, გვაქვს k ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლე და გვსურს განვსაზღვროთ ამ სიმრავლის $n \le k$ ელემენტის შემცველ ქვესიმრავლეთა რაოდენობა. წყობა A_k^n გვიჩვენებს მოცემული სიმრავლის n ელემენტიან ქვესიმრავლეთა ყველა შესაძლო დალაგებათა სიმრავლეს. თითოეული n ელემენტიანი ქვესიმრავლის დალაგებათა რიცხვი ტოლია n პოზიციური

გადანაცვლების, ამიტომ k ელემენტიანი სიმრავლის n ელემენტიან ქვესიმრაველთა რიცხვია: $G_k^n = \frac{A_k^n}{P_n} = \frac{k(k-1)(k-2)...(k-(n-1))}{n!} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$.

რიცხვს $G_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$ უწოდებენ k რაოდენობის ელემენტთა n ***ელემენტიან ჯუფთებას განმეორებების გარეშე.***

ვთქვათ, გვაქვს k ელემენტის შემცველი სიმრავლე და გვსურს განვსაზღვროთ ამ სიმრავლის n ელემენტის შემცველი ისეთი კომბინაციათა რაოდენობა, რომლებშიც ელემენტთა მიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს.

შევადგინოთ n ელემენტის შემცველი კომბინაციები ელემენტთა ამორჩევით. ამ ამორჩევის დროს დავწეროთ იმდენი 1-იანი, რამდენჯერაც ამოვირჩიეთ ერთ და იმავე ელემენტი. თითოეული ელემენტის შესაბამის 1-იანთა ჯგუფები ერთმანეთისგან გამოვყოთ ნულებით, მივიღებთ ერთიანებისა და ნულიანებისგან შედგენილ მიმდევრობას: $\underbrace{11...1}_{n_1}0\underbrace{11...1}_{n_2}0...0\underbrace{11...1}_{n_k}$, სადაც $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. ამ მიმდევრობაში ნულების რიცხვია $k-1$. ცხადია, ყველანაირ ასეთ კომბინაციათ რაოდენობა იქნება: $P_{n+k-1}^{n,k-1} = \frac{n+k-1}{n!(k-1)!} = G_{n+k-1}^n$

განსაზღვრება 2.2.: რიცხვს G_{n+k-1}^n უწოდებენ k ელემენტიანი სიმრავლის n-ელემენტიან ჯუფთებას განმეორებებით.

თეორემა 25.1 ჯუფთებას განმეორების გარეშე აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $G_k^n = G_k^{k-n}$.
2. $G_k^n = G_{k-1}^{n-1} + G_{k-1}^n$.
3. $2^k = G_k^0 + G_k^1 + G_k^2 + ... + G_k^{k-1} + G_k^k$.

დამტკიცება: პირველი თვისება პირდაპირ გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან.

მეორე თვისების დასამტკიცებლად გამოვთვალოთ თითოეული შესაკრები:

$$G_k^n = G_{k-1}^{n-1} + G_{k-1}^n = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} + \frac{(k-1)!}{n!(k-1-n)!} = \frac{(k-1)!(n-1)!(k-1-n)!k}{(n-1)!(k-n)!n!(k-1-n)!} = \frac{k!}{(k-n)!n!} =$$

$$= G_k^n.$$

მესამე თვისების დასამტკიცებლად გამოვთვალოთ $(1+1)^k$ ხარისხი. ნიუტონის ბინომის ძალით:

$$2^k = (1+1)^k = 1^k \cdot G_k^0 + 1^{k-1} \cdot 1 \cdot G_k^1 + 1^{k-2} \cdot 1^2 \cdot G_k^{k-2} + ... + 1 \cdot 1^{k-1} \cdot G_k^{k-1} + 1 \cdot 1^k \cdot G_n^n =$$

$$G_k^0 + G_k^1 + G_k^2 + ... + G_k^{k-1} + G_k^k$$

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 25.2 (კომბინატორიკის მთავარი თეორემა) . ვთქვათ, მოცემულია n რაოდენობის ელემენტისაგან შედგენილი A სიმრავლე, რომლის ელემენტებსაც გააჩნიათ ან არ გააჩნიათ რაიმე თვისება თვისებათა m-ელემენტიანი $P = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ სიმრავლიდან. მაშინ იმ ელემენტთა რაოდენობა A სიმრავლიდან, რომლებსაც არც ერთი მოცემული თვისება არ გააჩნია, ტოლია:

$$P(a_1 a_2 ... a_k) = n + (-1)^1 \sum_{i_1 \le k} P(a_{i_1}) + (-1)^2 \sum_{i_1 < i_2 \le k} P(a_i a_{i_2}) + (-1)^3 \sum_{i_1 < i_2 < i_3 \le k} P(a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}) + ... +$$

$$+ (-1)^q \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_q \le k} P(a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_q}) + ... + (-1)^q \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k \le k} P(a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}),$$

სადაც $P(a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k})$ იმ ელემენტთა რაოდენობაა მოცემული სიმრავლიდან, რომლებსაც გააჩნიათ $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$ თვისება ერთდროულად.

დამტკიცება: თეორემა ადვილად მტკიცდება ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით m პარამეტრის მიმართ.

მაგალითი: ვთქვათ, დაწესებულებაში 80 თანამშრომელი მუშაობს. აქედან ინგლისური იცის- 48 თანამშრომელმა, გერმანული- 35-მა, ფრანგული- 20-მა, ინგლისური და გერმანული 27-მა ინგლისური და ფრანგული 12-მა, ფრანგული და გერმანული- 11-მა, ხოლო სამივე ენას ფლობს 5 თანამშრიმელი. ვიპოვეპთ რამდენი თანამშრომელი არ ფლობს არც ერთ ენას.

გამოვიყენოთ წინა თეორემაში მოყვანილი ფორმულა:

$$P(a_1a_2a_3) = 80 - 48 - 35 - 20 + 27 + 12 + 11 + -5 = 22 .$$

მაშასადამე, 22-მა თანამშრომელმა არც ერთი ენა არ იცის.

ზოგიერთ შემთხვევაში იმ ელემენტების რაოდენობა, რომლებსაც გააჩნიათ თვისებათა რაღაც ერთობლიობა, დამოკიდებულია ამ თვისებათა რაოდენობაზე. ასეთ შემთხვევაში მარტივდება ფორმულა, რომელიც გვაძლევს იმ ელემენტთა რაოდენობას რომლებსაც არ გააჩნიათ არც ერთი თვისება თვისებათა მოცემული ერთობლიობიდან.

თეორემა 25.3 (კომბინატორიკის მთავარი თეორემის კერძო შემთხვევა). თუ იმ ელემენტების რაოდენობა n-ელემენტიან სიმრავლეში, რომლებსაც გააჩნიათ თვისებათა რაღაც ერთობლიობა, დამოკიდებულია ამ თვისებათა რაოდენობაზე, მაშინ

$$P(a_1a_2...a_m) = n + (-1)^1 \cdot G_m^1 \cdot N(1) + (-1)^2 \cdot G_m^2 \cdot N(2) + (-1)^{m-1} \cdot G_m^{m-1} \cdot N(m-1) + (-1)^m \cdot N(m),$$

სადაც $N(k)$ იმ ელემენტთა რაოდენობაა, რომლებსაც თვისებათა მოცემული ერთობლიობიდან გააჩნია k რაოდენობის თვისება.

დამტკიცება: ასეთ შემთხვევაში, ყოველი $k \le m$ ნატურალური რიცხვისათვის $\sum\limits_{i_1 \le i_2 \le ... \le i_k \le m} P(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_k}) = G_m^k \cdot N(k)$, რაც ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 25.4. n-ელემენტიანი A სიმრავლის გარდაქმნათა $\{f : A \to A\}$ სიმრავლეში ელემენტთა რაოდენობა, რომლებიც ადგილზე არ ტოვებენ არც ერთ ელემენტს მოცემული სიმრაველიდან, ტოლია რიცხვის:

$$B_n = n! + (-1)^1 \cdot G_n^1 \cdot (n-1)! + (-1)^2 \cdot G_n^2 \cdot (n-2)! + ... + (-1)^n \cdot 0!.$$

დამტკიცება: მოცემული n- ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტთა თვისებების ერთობლიობა $P = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ იყოს შემდეგნაირად განსაზღვრული: a_1 იყოს გარდაქმნის ის თვისება, რომელიც გულისხმობს მოცემული სიმრავლის პირველი ელემენტის ადგილზე დატოვებას, a_2 იყოს გარდაქმნის ის თვისება, რომელიც გულისხმობს მოცემული სიმრაველის მეორე ელემენტის ადგილზე დატოვებას და ასე შემდეგ: a_n იყოს გარდაქმნის ის თვისება, რომელიც გულისხმობს მოცემული სიმრაველის მე-n ელემენტის ადგილზე დატოვებას.

მაშინ იმ გარდაქმნათა ერთობლიობა, რომლებიც ადგილზე ტოვებენ k რაოდენობის ელემენტს ტოლი იქნება $\sum\limits_{i_1 \le i_2 \le ... \le i_k \le n} P(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_k})$ რიცხვის, რომელიც ჩვენ შემთხვეეაში ტოლია $G_n^k \cdot (n-1)!$ რიცხვის. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

B_n რიცხვს სრული უწესრიგობის ზომას(სუბფაქტორიალს) უწოდებენ. მტკიცდება, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$B_n = n![1 + (-1)^1 \frac{1}{2!} + (-1)^2 \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}],$$

სადაც

$$\lim_{n \to \infty}[1 + (-1)^1 \frac{1}{2!} + (-1)^2 \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}] = e^{-1}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ სუბფაქტორიალს გააჩნია ჩვეულებრივი ფაქტორიალის მსგავსი თვისებები, მაგალითად:
$n! = (n-1)[(n+1)! + (n-2)!]$,
ანალოგიურად
$B_n = (n-1)[B_{n-1} + B_{n-2}]$.
სუბფაქტორიალის გამოსათვლელად შეგვიძლია ასევე გამოვიყენოთ ფორმულა:
$$B_n = nB_{n-1} + (-1)^n.$$

§26. კომბინატორიკის ცნობილი ამოცანები

26.1 ამოცანა ლომებსა და ვეფხვებზე. ცნობილია, რომ ორი ვეფხვი ბილიკზე ერთმანეთის მიყოლებით მშვიდად ვერ გადაადგილდება. ამიტომ, როდესაც ბილიკზე ერთდროულად ერთმანეთის მიყოლებით გადაადგილდება n რაოდენობის ლომი და m რაოდენობის ვეფხვი, $m \le n+1$ საჭიროა მათი მწკრივის დალაგება ისე, რომ ვეფხვები არ აღმოჩნდენ ერთმანეთის მიყოლებით. გამოვთვალოთ, რამდენნაირად შეიძლება დავალაგოთ ვეფხვებისა და ლომების მწკრივი ბილიკზე, რომ ინციდენტი გამორიცხული იყოს.
ამოხსნა: ცხადია, მწკრივი ისე უნდა დალაგდეს, რომ თითოეული ვეფხვი მოთავსებული იყოს ლომების ბილიკზე განლაგებისას წარმოქმნილ მონაკვეთებში, წესით: ერთი ვეფხვი ერთ მონაკვეთში. მონაკვეთების რიცხვია $n+1$, ვეფხვების რიცხვი- m, ამიტომ ვეფხვებისა და ლომების მწკრივის სასურველ დალაგებათა რიცხვი იქნება: G_{n+1}^{m}.
26.2. ქარავნის ამოცანა. რამდენნაირად შეიძლება დავალაგოთ n აქლემისაგან შედგენილი ქარავანი ისე, რომ ახალ დალაგებაში არც ერთი აქლემი არ აღმოჩნდეს იმ აქლემის უკან, რომლის უკანაც იყო იგი თავიდან მოცემულ დალაგებაში.
ამოხსნა: აქლემთა ქარავნის დალაგება ხდება თავიდან მოცემული დალაგების გარდაქმნით. სულ გვაქვს ქარავნის $n!$ დალაგება, ანუ გარდაქმნა. 1-დამ n-მდე რიცხვებს შორის არსებობს $n-1$ რაოდენობის $(1,2),(2,3),(3,4),...,(n-1,n)$ სახის წყვილი. განვიხილოთ აქლემთა სიმრავლის გარდაქმნის თვისებათა შემდეგი სიმრავლე $P = \{a_1, a_2, ...a_n\}$, სადაც a_1 გარდაქმნის ის თვისებაა, რომელიც გულისხმობს წყვილების აგებული სიმრავლის პირველი ელემენტის უძრავად დატოვებას, a_2 გარდაქმნის ის თვისებაა, რომელიც გულისხმობს წყვილების აგებული სიმრავლის მეორე ელემენტის უძრავად დატოვებას და ასე შემდეგ, a_{n-1} გარდაქმნის ის თვისებაა, რომელიც გულისხმობს წყვილების აგებული სიმრავლის $n-1$-ე ელემენტის უძრავად დატოვებას.
აქედან გამომდინარე, ისეთ გარდაქმნათა რიცხვი, რომლებიც არ ინახავენ ჩვენ მიერ განხილულ წყვილებს, იქნება:
$$n! + (-1)^1 \cdot G_{n-1}^1 \cdot (n-1)! + (-1)^2 \cdot G_{n-1}^2 \cdot (n-2)! + ... + (-1)^{n-1} \cdot G_{n-1}^{n-1} \cdot 1!.$$
სწორედ ეს რიცხვი იქნება აქლემთა ქარავნის ჩვენთვის სასურველ დალაგებათა რიცხვი.
26.4. საგანთა ყუთებში განაწილების ამოცანები.
1. ვთქვათ, მოცემულია n საგნისაგან შედგენილი სიმრავლე და გვსურს, ეს საგნები გადავანაწილოთ $k, k \le n$ ყუთში ისე, რომ პირველ ყუთში მოთავსდეს n_1 რაოდენობის ელემენტი, მეორე ყუთში- n_2 რაოდენობის, და ასე შემდეგ: k-ურ ყუთში- n_k რაოდენობის ელემენტი. ცხადია, ამ დროს ადგილი უნდა ჰქონდეს

ტოლობას: $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. გამოვთვალოთ, სულ რამდენი ასეთი სახის საგნების ყუთებში გადანაწილება შეიძლება არსებობდეს.

ამოხსნა: სულ n საგნისაგან შედგენილი სიმრავლე შეიძლება დალაგდეს $n!$ რაოდენობის ვარიანტად. ვარიანტთა ამ სიმრავლეში შევიტანოთ ეკვივალენტობის მიმართება ასე: დალაგების ორი ვარიანტი ჩავთვალოთ ერთმანეთიას ეკვივალენტურად, თუ ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან რომელიმე ყუთში აღმოჩენილი ელემენტების რიგით. i-ური ნომრის ყუთის, სადაც $i=1,2,\ldots,k$, ელემენტების დალაგებათა ვარიანტების რაოდენობაა $n_i!$, ამიტომ საგანების ყუთებში გადანაწილებათა რიცხვი ტოლი უნდა იყოს რიცხვის:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

2. ვთქვათ, გვაქვს n რაოდენობის საგანი და ეს საგნები უნდა გადავანაწილოთ k რაოდენობის ყუთში. გამოვთვალოთ გადანაწილების ყველა ვარიანტის რაოდენობა.

ამოხსნა: ავიღოთ n რაოდენობის ერთიანით შედგენილი მიმდევრობა. თუ ამ მიმდევრობაში ნებისმიერად ჩავამატებთ $k-1$ რაოდენობის ნულებს, მივიღებთ ერთიანების მიმდევრობის დაყოფას k ნაწილად.

მაგალითად, თუ $n=4$ და $k=3$, მაშინ 1111 მიმდევრობა სამ ნაწილად ორი ნულის დამატებით დაიყოფა ასე: 011101, ამ შემთხვევაში ერთ დანაყოფში, რომელიც პირველი ნულის მარცხნივაა, არც ერთი ერთიანი არ შევა; ან ასე: 001111, ამ შემთხვევაში პირველი ნულის მარცხნივ მდებარე და ნულებს შორის მდებარე დანაყოფები ცარიელია; ან ასე: 011110, ამ შემთხვევაში პირველი ნულის მარცხნივ და მეორე ნულის მარჯვენივ მდებარე მონაკვეთებია ცარიელი; ან ასე: 101110, ამ შემთხვევაში მეორე ნულის მარჯვენივ მდებარე მონაკვეთია ცარიელი; ან ასე: 111100 ამ შემთხვევაში ნულებს შორის მდებარე და მეორე ნულის მარჯვენივ მდებარე და დანაყოფებია ცარიელი; ან ასე: 100111, ამ შემთხვევაში ნულებს შორის მდებარე მონაკვეთია ცარიელი; დაყოფის დანარჩენი შემთხვევები გასაგებია.

აქედან გამომდინარე, თუ ამ დანაყოფებს ჩავთვლით ყუთებად, მაშინ საგნების ყუთებში გადანაწილების ვარიანტების რაოდენობა $P^{n,k-1}_{(n+(k-1))!}=\dfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}$ სიდიდის ტოლი უნდა იყოს.

3. ვთქვათ, გვაქვს n_1 რაოდენობის 1-ლი ტიპის საგნები, n_2 რაოდენობის მე-2 ტიპის საგნები და ასე შემდეგ, n_k რაოდენობის k ტიპის საგნები.

გამოვთვალოთ ამ საგნების m რაოდენობის ყუთში გადანაწილების ვარიანტების რაოდენობა.

ამოხსნა: წინა შემთხვევიდან ვიცით, რომ $i, i=1,2,\ldots,k$ ტიპის საგნების m რაოდენობის ყუთში გადანაწილების ვარიანტების რაოდენობაა $P^{n_i,m-1}_{n_i+m-1}$. აქედან გამომდინარე, ჩვენი ამოცანის ამონახსნია: $P^{n_1,m-1}_{n_1+m-1}\cdot P^{n_2,m-1}_{n_2+m-1}\cdot\ldots\cdot P^{n_k,m-1}_{n_k+m-1}$.

265. ერასტოფანეს საცერი. ვიპოვოთ 1-დან n-მდე რიცხვებს შორის ისეთი რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც არ იყოფაიან $p_1,p_2,\ldots,p_k$ რიცხვებზე.

ამოხსნა: გავიხსენოთ, რომ 1-დან n-მდე რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც იყოფიან p რიცხვზე, ტოლია $[\frac{n}{p}]$ მთელი რიცხვის და გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$P(a_1a_2...a_k) = n + (-1)^1\sum_{i_1\le k} P(a_{i_1}) + (-1)^2 \sum_{i_1<i_2\le k} P(a_i a_{i_2}) + (-1)^3 \sum_{i_1<i_2<i_3\le k} P(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}) + ... +$$
$$+(-1)^q \sum_{i_1<i_2<...<i_q\le k} P(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_q}) + ... + (-1)^q \sum_{i_1<i_2<...<i_k\le k} P(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_k}),$$

სადაც $a_i, i = 1,2,...,k$ წარმოადგენს $p_i, i = 1,2,...,k$ რიცხვზე გაყოფის თვისებას.

ამ ფორმულით, თუ გაეითვალისწინეთ ტოლობას : $\sum_{i_1<i_2<..<i_t\le k} P(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_t}) = [\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}...p_{i_t}}]$ მიეიღებთ იმ რიცხვთა რაოდენობას, რომლებიც არ იყოფიან $p_1, p_2,..., p_k$ რიცხვებზე.

26.6.წიგნის თაროს ამოცანა. თაროზე არსებული n რაოდენობის წიგნიდან უნდა აეირჩიოთ ისეთი $k<n$ რაოდენობის წიგნი, რომელთაგან არც ერთი წყვილი თაროზე ერთმანეთის მიყოლებით არ იდო. გამოვთვალოთ, არჩევის რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს.

ამოხსნა: ცხადია, რამდენნაირადაც შეგვიძლია დაეალაგოთ თაროზე k რაოდენობის წიგნი, როდესაც თაროზეა $n-k$ წიგნია, ისე რომ ორი წიგნი k რაოდენობის წიგნიდან არ მოხვდეს ერთმანეთის გვერდით; ამდენნაირადვე შეგვიძლია ამოვირჩიოთ n რაოდენობის წიგნიდან k რაოდენობის წიგნი, რომელთაგან არც ერთი წყვილი თაროზე ერთმანეთის მიყოლებით არ იდო.
$n-k$ რაოდენობის წიგნი თაროზე ქმნის $n-k+1$ მონაკვეთს. k რაოდენობის წიგნიიდან თითოეული ჩავდოთ თაროზე შექმნილ მონაკვეთებში, წესით, ერთი წიგნი ერთ მონაკვეთზე. მაშინ გვექნება წიგნების დალაგების G_{n-k+1}^k რაოდენობის ვარიანტი. რაც, როგორც ვთქვით, აღნიშნული წესით წიგნების ამორჩევის ვარიანტების რაოდენობის ტოლია.

26.7. რიცხვის გამყოფთა რაოდენობა. ვთქვათ, მოცემულია ნატურალური რიცხვი $a\in N$, ვიპოვოთ მისი გამყოფთა რაოდენობა.

ამოხსნა: წარმოვადგინოთ რიცხვი კანონიკურად $a = p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$. ეს რიცხვი შეგვიძლია ასედაც წარმოვადგინოთ: $a = p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_k^{m_k}p_1^{n_1-m_1}p_2^{n_2-m_2}...p_k^{n_k-m_k}$, სადაც $m_i \le n_i, i = 1,2,...,k$. ყოველი $n_i, i = 1,2,...,k$ რიცხვი n_i+1 რაოდენობის არაუარყოფითი რიცხვებისგან შედგენილი(m_i, n_i-m_i) დალაგებული წყვილის კომპონენტების ჯამის ტოლია.
აქედან გამომდინარე, a რიცხვის წარმოდგენა მისი ორი გამყოფის ნამრავლად შეიძლება $(n_1+1)(n_2+1)...(n_k+1)$ სხვადასხვა ვარიანტად. მაშასადამე, $a\in N$ რიცხვის გამყოფთა რიცხვი ტოლი იქნება $(n_1+1)(n_2+1)...(n_k+1)$ რიცხვის.

26.8. სიმრავლიდან კონკრეტული ელემენტების არშემცველი ქვესიმრავლეების ამორჩევის ამოცანა.

n- ელემენტიანი სიმრავლიდან ამოვარჩიოთ ისეთი k ელემენტის შემცველი ქვესიმრაველე, რომელიც არ შეიცავს m რაოდენობის კონკრეტულ ელემენტს. გამოვთვალოთ, ამორჩევის რამდენი ვარიანტია სულ.

ამოხსნა: სულ, პირობის გაუთვალისწინებლად, გვაქვს ამორჩევის

$$G_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)}$$

ვარიანტი. ამოვიღოთ სიმრაველიდან m რაოდენობის კონკრეტული ელემენტის შემცველი ქვესიმრაველე და დარჩენილი სიმრავლისთვის გამოვთვალოთ მასში $k-m$ რაოდენობის ელემენტების ამორჩევის ვარიანტების რაოდენობა. ეს რიცხვი

იქნება:

$$G_{n-m}^{k-m}=\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}.$$

ასეთნაირად ამორჩეულ ვარიანტებს თუ დავუმატებთ ჩვენს კონკრეტულ ქვესიმრავლეს, მივიღებთ ჩვენთვის არახელსაყრელი ამორჩევების მთელ ერთობლიობას. აქედან გამომდინარე, კონკრეტული m ელემენტის არშემცველი ქვესიმრაელეების რაოდენობა იქნება:

$$G_n^k-G_{n-k}^{k-m}=\frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}.$$

26.9. სეიფის ამოცანა. ვთქვათ, ბანკის მთავარი სეიფის გახსნა ხდება კომისიის თანდასწრებით, რომელშიდაც შედის ბანკის n თანამშრომელი. რამდენი საკეტია საჭირო სეიფის დასაკეტად, რამდენი გასაღები უნდა ჰქონდეს თითოეულ საკეტს, რამდენი გასაღები უნდა დავურიგოთ თითოეულ კომისიის წევრს ისე, რომ მას მოცემული საკეტის მხოლოდ ერთი გასაღები შეიძლება ჰქონდეს, და რომ სეიფის გაღება იყოს შესაძლებელი, თუ შეიკრიბა კომისიის არანაკლებ k წევრი, ხოლო ნაკლები წაოდენობის წევრების შეკრებისას, სეიფის გაღება არ მოხერხდება.

ამოხსნა: განვიხილოთ მატრიცი:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots\dots a_{2n} \\ ------- \\ a_{l1}a_{l2}\dots\dots a_{1n} \end{pmatrix},$$

რომლის სვეტების რიცხვი კომისიის წევრთა რიცხვია, სტრიქონების რიცხვი კი საკეტების რიცხვი. $a_{ij}=1$, თუ i-ური ნომრის საკეტის გასაღები აქვს j-ური ნომრის კომისიის წევრს, ხოლო $a_{ij}=0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში. მაშასადამე, მატრიცი შედგება ნულებისაგან და ერთიანებისაგან. რადგან ყველა საკეტს ერთი და იმავე რაოდენობის გასაღები აქვს, ამიტომ მატრიცის თითოეულ სტრიქონში ერთი და იგივე რაოდენობის ერთიანია, ასვე, რადგანაც კომისიის ყველა წევრს ერთიდა იმავე რაოდენობის გგასაღები აქვს, მატრიცის თითოეული სვეტი შეიცავს ერთი და იმავე რაოდენობის ერთიანს.

ცხადია, თუ მოცემული მატრიცის ნებისმიერი k რაოდენობის სვეტისაგან შედგენილ მატრიცში, სტრიქონების ნებისმიერ i-ურ ინდექსს მოეძებნება სვეტების ისეთი j_p ინდექსი, რომ $a_{ij_p}=1$ და ასეთი რამ არ ხდება არც ერთი $k-1$ რაოდენობის სვეტებისაგან შედგენილ მატრიცში, მაშინ სეიფის გაღება შესაძლებელი იქნება, თუ შეიკრიბა კომისიის არანაკლებ k წევრი, ხოლო ნაკლები რაოდენობის წევრების შეკრებისას სეიფის გაღება არ მოხერხდება.

რადგან ყველა საკეტის გასაღები უნდა იყოს დარიგებული, და კომისიის ყველა წევრს გასაღებების თანაბარი რაოდენობა უნდა გადაეცეს ისე, რომ მას მოცემული საკეტის მხოლოდ ერთი გასაღები შეიძლება ჰქონდეს, ამიტომ საკეტების რაოდენობა ტოლი უნდა იყოს G_n^m, სადაც m თითოეულ სტრიქონში ერთიანების რიცხვია. $n-m$ წარმოადგენს სტრიქონებში ნულების რაოდენობას.

თუ განვიხილავთ მატრიცს, რომელიც შედგენილია თავიდან მოცემული მატრიცის $n-m$ სვეტისაგან, მაშინ ამ მატრიცში აუცილებლად იქნება, მხოლოდ ერთი, ნულებისაგან შედგენილი სტრიქონი. ასეთ მატრიცზე ნებისმიერი ერთი სვეტის დამატებით მიღებულ მატრიცში წინა მატიცის ნულოვანი სტრიქონის ნომრის სტრიქონში აუცილებლად იქნება ერთიანი. აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი $n-m+1$ სვეტისაგან შედგენილი მატრიცის ნებისმიერ სტრიქონში ერთი ერთიანი მაინც იქნება. ასეთი მსჯელობიდან ვასკვნით, რომ $k=n-m+1$.

უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება $m=n-k+1$. ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ საკეტების საჭირო რაოდენობა უნდა იყოს $G_n^{n-k+1}=l$.

ხოლო თითოეულ კომისიის წევრს უნდა გადაეცეს $\frac{G_n^{n-k+1}\cdot(n-k+1)}{n}$ რაოდენობის გასაღები.

26.10. დროშების და ანძების ამოცანა. ვთქვათ, გვაქვს n რაოდენობის დროშა და m რაოდენობის ანძა, გამოვთვალოთ, რამდენი სახის შეტყობინების გადაცემა შეიძლება ანძებზე აღმართული დროშებით.

ამოხსნა: თუ ყველა დროშა ერთნაირია, მაშინ შეტყობინების სახეთა რიცხვი იქნება $P_{n+m-1}^{n,m-1}=\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!n!}$. თუ ყველა დროშა განსხვავებულია, მაშინ საძიებელი რიცხვი იქნება $n!P_{n+m-1}^{n,m-1}=\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!}$.

გადაცემული შეტყობინებათა რიცხვი შეიძლება გავზარდოთ, თუ აღმართული დროშების რიცხვს ვცვლით. თუ აღვმართავთ s_i რაოდენობის დროშას, მაშინ გადაცემულ შეტყობინებათა რიცხვი იქნება $s_i!P_{s_i+m-1}^{s_i,m-1}=\frac{(s_i+m-1)!}{(m-1)!}$. სულ კი შეგვეძლება გადაეცეთ $\sum_{i=1}^{2^n}s_iP_{s_i+m-1}^{s_i,m-1}$ რაოდენობის შეტყობინება.

სავარჯიშოები:

1. კოდებიან საკეტს 5 უჯრედი აქვს, თითოეული უჯრა შეიძლება იყოს 6 სხვადასხვა პოზიციაში, რამდენი სხვადასხვა კომბინაცია უნდა მოვსინჯოთ, რომ საკეტი გავხსნათ.
2. რამდენი 8 თანრიგიან რიცხვი არსებობს, რომლის პირველ სამ პოზიციაში არ გვხვდება ციფრები: 0, 3, 5.
3. პატარა ბიჭმა ბაღში დაკრიფა 3 ვაშლი, 7 მსხალი და 5 ატამი. მან დაკრეფილი ხილი მაგიდაზე ერთ მწკრივში დაალაგა. ხილის მწკრივში დალაგების რამდენი ვარიანტი არსებობს?
4. იპოვე ყველა რიცხვი 100-დან 200-მდე რომლებიც არ იყოფა 3-ზე, 5-ზე, 7-ზე.
5. გუნდში თამაშობს 4 ევროპელი, 2 აზიელი 5, აფრიკელი ფეხბურთელი. გუნდის მწკრივში დადგომის რამდენი ვარიანტი არსებობს, თუ ერთი და იმავე კონტინენტის წარმომადგენლები მწკრივში ერთმანეთის გვერდით უნდა იდგნენ.
6. ვთქვათ, ცხოველთა რომელიმე პოპულაციაში ყოველი ორი ინდივიდი ერთმანეთისგან განსხვავდება გენური შემადგენლობით. რამდენი შეიძლება იყოს ინდივიდთა მაქსიმალური რაოდენობა პოპულაციაში, თუ თითოეული ინდივიდის გენოტიპში n-დან m-მდე, $n<m$ გენია.
7. ფეხბურთის გუნდის მწკრივში დგომისას ფეხბურთელების ადგილის შეცვლით მწკრივის რამდენი ისეთი ვარიანტი მიიღება, რომლებშიც კაპიტანი და მეკარე თავის ადგილზე რჩებიან, სხვა ფეხბურთელები კი ადგილს იცვლიან.
8. რამდენი გამყოფი აქვს თიოეულ რიცხვს: 15364, 2864, 674842.
9. დავითს 5 მსხალი 7 ატამი და 4 ვაშლი აქვს, რამდენნაირად შეიძლება გაუნაწილოს ხილი მან თავის ამხანაგებს: ნიკოს, ვახტანგსა და ვანოს?
10. გუნდში ირიცხება 19 ფეხბურთელი. რამდენი სხვადასხვა შემადგენლობით შეუძლია მწვრთნელს ჩაატაროს ვარჯიში, თუ ვარჯიშის დროს თითოეულ სპარინგ ჯგუფებში შეიძლება არანაკლებ 5 და არაუმეტეს 8 ფეხბურთელი.

ნაწილი მეორე

თავიVI

მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

§1. გამონათქვამთა ალგებრა

მათემატიკური ლოგიკის შესწავლა იწყება გამონათქვამთა ალგებრის შესწავლით.

გამონათქვამთა შინაარსობრივი თეორიის მიხედვით ***გამონათქვამია*** ნებისმიერი თხრობითი წინადადება, რომელზედაც შეიძლება ითქვას ჭეშმარიტია ის, თუ მცდარი.

მაგალითად შემდეგი სამი თხრობითი წინადადებიდან:

1) მტკვარი შავ ზღვაში ჩაედინება;

2) ათი მეტია ხუთზე;

3) მე ვტყუი;

პირველი ორი გამონათქვამია, მესამე არა, რადგან მისი ჭეშმარიტულობის დადგენა შეუძლებელია. მართლაც, თუ მე ვტყუი და ეს ჭეშმარიტია, მაშინ ჩემი ნათქვამის შინაარსი მცდარია და პირიქით, თუ მე ვამბობ, რომ ვტყუი და ეს მცდარია, მაშინ ნათქვამის შინაარსი ჭეშმარიტია.

გამონათქვამთა ალგებრაში მნიშვნელობა არ აქვს გამონათქვამის შინაგან სტრუქტურას და შინაარსს, მხედველობაში მიიღება მხოლოდ მისი ჭეშმარიტულობის მნიშვნელობა, ანუ გამონათქვამს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ორიდან ერთი მნიშვნელობა: ***"ჭეშმარიტი"*** ან ***"მცდარი"***.

მიღებულია გამონათქვამების აღნიშვნა დიდი ლათინური ასოებით: $A, B, C, D, \ldots$. თუ გამონათქვამი მცდარია, მაშინ ამბობენ, რომ მისი მნიშვნელობაა 0, ხოლო თუ ის ჭეშმარიტია, მაშინ- 1.

ჩვეულებრივი მეტყველებისას რთული გამონათქვამები მარტივი გამინათქვამებისაგან მიიღება ისეთი მაკავშირებელი სიტყვების საშუალებით, როგორებიცაა: და, ან, თუ, მაშინ და სხვა.

ასევეა მათემატიკურ ლოგიკაში, მარტივი გამონათქვამებისაგან უფრო რთული გამონათქვამები მიიღება ეგრეთ წოდებული ***ლოგიკური კავშირების*** საშუალებით.

ლოგიკური კავშირები წარმოადგენენ გამონათქვამთა ალგებრის ოპერაციებს, რომლებიც ასრულებენ იმავე როლს, რასაც მაკავშირებელი სიტყვები სალაპარაკო ენაში. მათი საშუალებით მიღებული რთული გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ცალსახად განისაზღვრება შემადგენელი გამონათქვამების ჭეშმარიტულობის მნიშვნელობებსგან.

ვთქვათ A და B ორი გამონათქვამია, ჩამოვთვალოთ ის ლოგიკური კავშირები, რომელთა გამოყენებითაც ამ გამონათქვამებისგან მიიღება ახალი გამონათქვამები:

1) ***კონიუნქცია***: ამ ლოგიკური კავშირის საშუალებით A და B გამონათქვამებისგან მიიღება ახალი გამონათქვამი $A \wedge B$, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ჭეშმარიტია A გამონათქვამიც და B გამონათქვამიც. $\wedge$ კონიუნქციის აღმნიშნავი სიმბოლოა. კონიუნქციას ჩვეულებრივ სალაპარაკო ენაში შეესაბამება კავშირი "და".

2) ***დიზიუნქცია***: ამ ლოგიკური კავშირის საშუალებით A და B გამონათქვამებისგან მიიღება ახალი გამონათქვამი $A \vee B$, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ჭეშმარიტია A გამონათქვამი ან B გამონათქვამი. $\vee$ დიზიუნქციის აღმნიშნავი სიმბოლოა. დიზიუნქციას ჩვეულებრივ სალაპარაკო ენაში შეესაბამება კავშირი "ან".

3) ***იმპლიკაცია***: ამ ლოგიკური კავშირის საშუალებით A და B გამონათქვამებისგან მიიღება ახალი გამონათქვამი $A \Rightarrow B$, რომელიც მცდარია

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ჭეშმარიტია A გამონათქვამი და მცდარია B გამონათქვამი. $\Rightarrow$ იმპლიკაციის აღმნიშნავი სიმბოლოა. იმპლიკაციას ჩვეულებრივ სალაპარაკო ენაში შეესაბამება კონსტრუქცია: "თუ,...,მაშინ"; მაგრამ არსებითია განსხვავება: ჩვეულებრივ სალაპარაკო ენაში საქმე გვაქვს ორი წინადადების აზრობრივ დამოკიდებულებასთან, იმპლიკაციისთვის კი გამონათქვამთა აზრობრივ დამოკიდებულებას მნიშვნელობა არ აქვს.

4) ***ეკვივალენცია***: ამ ლოგიკური კავშირის საშუალებით A და B გამონათქვამებიდან მიიღება ახალი გამონათქვამი $A \Leftrightarrow B$, რომელიც ჭეშმარიტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A, B გამონათქვამები ორივე ჭეშმარიტი ან ორივე მცდარია. $\Leftrightarrow$ ეკვივალენციის აღმნიშნავი სიმბოლოა. ეკვივალენციას ჩვეულებრივ სალაპარაკო ენაში შეესაბამება კონსტრუქცია: "მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც..."

თუ გვაქვს გამონათქვამი $A \Leftrightarrow B$, მაშინ ვამბობთ, რომ A და B ერთმანეთის ეკვივალენტური გამონათქვამებია.

5) ***უარყოფა***: გამონათქვამთა ალგებრის ოპერაციაა, რომელიც მხოლოდ ერთ გამონათქვამზე მოქმედებს. ამ ოპერაციით A გამონათქვამისგან მიიღება ახალი $\overline{A}$ გამონათქვამი, რომელიც მცდარია, თუ A ჭეშმარიტია და ჭეშმარიტია, თუ A მცდარია.

A გამონათქვამის უარყოფა აღინიშნება ასედაც: $\neg A$.

როგორც აღვნიშნეთ: მოცემული გამონათქვამებისაგან გამონათქვამთა ალგებრის ოპერაციების(ლოგიკური კავშირების) საშუალებით უფრო რთული გამონათქვამები მიიღება. მაგალითად: A,B,C,D გამონათქვამებისაგან შეიძლება მივიღოთ ახალი გამონათქვამები:

$$\overline{(A \Rightarrow B) \wedge C} \Leftrightarrow D\,\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow (C \Rightarrow D)\,,(D \vee A) \Rightarrow (\overline{D} \Leftrightarrow C) \wedge \overline{B}$$

და სხვა.

ვთქვათ $\mathfrak{I}$ გამონათქვამთა სიმრავლეა, შეიძლება განვიხილოთ ცვლადი სიდიდეები: $X, Y, Z, \ldots$, რომლებიც ღებულობენ მნიშვნელობებს აღნიშნული სიმრავლიდან. ასეთ ცვლად სიდიდეებს ***ცვლად გამონათქვამებს*** უწოდებენ.

თუ ცვლად გამონათქვამებზე ვიმოქმედებთ გამონათქვამთა ალგებრის ოპერაციებით(ლოგიკური კავშირებით), მივიღებთ ***გამონათქვამთა ალგებრის ფორმულებს,*** რომელთა ჭეშმარიტულობის მნიშვნელობა დამოკიდებულია ფორმულაში შემავალი ცვლადი სიდიდეების კონკრეტულ მნიშვნელობაზე.

გამონათქვამთა ალგებრის ფორმულაა ერთი ცვლადი გამონათქვამი X-იც.

გამონათქვამთა ალგებრის ფორმულებია, აგალითად:

$$X;Y;Z;\ldots;\ \overline{(X \Rightarrow Y) \wedge Z} \Leftrightarrow Y\,,\overline{(Y \wedge X)} \vee (Y \Rightarrow X)\,,(X \vee Y) \wedge Z \Leftrightarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z),\ldots$$

შეიძლება ვთქვათ, რომ გამონათქვამთა ფორმულა წარმოადგენს ასახვას გამონათქვამთა სიმრავლის თავისთავზე დეკარტული ნამრავლიდან გამონათქვამთა სიმრავლეში.

განვიხილოთ გამონათქვამთა ალგებრის უმარტივესი ფორმულების ***ჭეშმარიტულობის ცხრილი:***

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$	$\overline{X}$
0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	

ამ ცხრილის საშუალებით შეიძლება ავაგოთ ჭეშმარიტულობის ცხრილი უფრო რთული ფორმულებისათვის.

მაგალითი: ავაგოთ $\overline{(Y \wedge X)} \vee (Y \Rightarrow X)$ ფორმულის ჭეშმარიტულობის ცხრილი.
ამოხსნა:

X	Y	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$Y \Rightarrow X$	$(\overline{X \wedge Y}) \vee (Y \Rightarrow X)$
1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1

მაგალითი: ავაგოთ $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\overline{X \wedge Y})$ ფორმულის ჭეშმარიტულობის ცხრილი.

ამოხსნა.

X	Y	$X \Rightarrow Y$	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\overline{X \wedge Y})$
1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1

გამონათქვამთა ალგებრის ორ ფორმულას უწოდებენ ***ტოლძალოვანს,*** თუ მათი ჭეშმარიტულობის მნიშვნელობანი ერთმანეთს ემთხვევა.

მაგალითად ტოლძალოვანია ფორმულები: $\overline{X} \vee \overline{Y}$, $\overline{X \wedge Y}$. მართლაც, თუ ავაგებთ შესაბამის ცხრილს:

X	Y	$X \wedge Y$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$	$\overline{X \wedge Y}$
1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

დავინახავთ, რომ მისი ბოლო ორი სვეტი ერთმანეთს ემთხვევა. ეს კი ნიშნავს ფორმულათა ტოლძალოვნებას.

ფორმულას, რომლის ჭეშმარიტულობის მნიშვნელობა ყოველთვის ტოლია 1-ის, ***იგივურ ფორმულას*** ანუ ***ტავტოლოგიას*** უწოდებენ.

ტავტოლოგიის მაგალითია ფორმულა: $\overline{X} \vee \overline{Y} \Leftrightarrow \overline{X \wedge Y}$. მართლაც, ეს კარგად ჩანს შემდეგი ცხრილიდან:

$\overline{X} \vee \overline{Y}$	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y} \Leftrightarrow \overline{X \wedge Y}$
0	0	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1

ადვილი მისახვედრია, რომ ყოველი ორი ტოლძალოვანი ფორმულა, შეერთებული $\Leftrightarrow$ ეკვივალენციით, ტავტოლოგიას წარმოადგენს. არსებობენ სხვა ტიპის ტავტოლოგიებიც, მაგალითად: $X \vee \overline{X}$.

ტავტოლოგიებს გამონათქვამთა ალგებრის კანონებსაც უწოდებენ, სწორედ ტავტოლოგიების აღმოჩენა და მათი კვლევაა გამონათქვამთა ალგებრის ამოცანა.

ზემოთ ფორმულების ჩაწერისას ვიყენებდით ფრჩხილებს, მაგრამ თუ არითმეტიკული ოპერაციების მსგავსად წინასწარ დავადგენთ გამონათქვამთა ალგებრის ოპერაციათა თანმიმდევრობას, ფორმულაში ფრჩხილები შეიძლება საერთოდ არ გამოვიყენოთ ან მათი რაოდენობა შევამციროთ.

თუ ფორმულაში ფრჩხილები არ გვაქვს, მაშინ გამონათქვამთა ალგებრის ოპერაციები სრულდება შემდეგი თანმიმდევრობით: კონიუნქცია, დიზიუნქცია იმპლიკაცია, ეკვივალენცია.

მაგალითად ჩანაწერი ფრჩხილების გარეშე: $X \wedge Y \vee Z$ იგივეა, რაც $(X \wedge Y) \vee Z$.

სავარჯიშოები:

დაამტკიცეთ შემდეგ ფორმულათა ტოლძალოვნება:

1. $X \wedge Y$ და $Y \wedge X$.
2. $X \vee Y$ და $Y \vee X$.
3. $(X \wedge Y) \wedge Z$ და $X \wedge (Y \wedge Z)$.
4. $(X \vee Y) \vee Z$ და $X \vee (Y \vee Z)$.
5. $(X \vee Y) \wedge Z$ და $(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფორმულები ტავტოლოგიაა:

1. $(X \wedge Y) \wedge Z \Leftrightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$.
2. $(X \vee Y) \wedge Z \Leftrightarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$.
3. $\overline{X \vee Y} \Leftrightarrow \overline{X} \wedge \overline{Y}$.
4. $\overline{X \wedge Y} \Leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$.
5. $x \wedge X \Leftrightarrow X$.

§2. ბულის ფუნქციები

როგორც აღვნიშნეთ, გამონათქვამთა ალგებრის ფორმულა ეს არის ასახვა გამონათქვამთა სიმრავლის თავის თავზე დეკარტის ნამრავლიდან ისევ გამონათქვამთა სიმრავლეში: $\Phi : \underbrace{\Im \times \Im \times \ldots \times \Im}_{n} \to \Im$.

როგორც ვიცით, ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა დამოკიდებულია ფორმულაში შემავალი ცვლადი გამონათქვამების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებზე და არა მათ შინაარსსა და სტრუქტურაზე. აქედან გამომდინარე გამონათქვამთა ალგებრის ყოველ ფორმულას შეიძლება შევუსაბამოთ ფუნქცია

$$f_\Phi : \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n} \to \{0,1\},$$

სადაც $\{0,1\}$ ორელემენტიანი სიმრავლეა, რომელიც შედგება ერთიანისაგან და ნულისაგან. ეს ფუნქცია Φ ფორმულაში შემავალი ცვლადი გამონათქვამების შესაძლო ჭეშმარიტული მნიშვნელობებისაგან შედგენილ n წევრიან მიმდევრობას შეუსაბამებს ამავე ფორმულის შესაბამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, ანუ ნულებისა და ერთიანებისგან შედგენილ n წევრიან მიმდევრობას შეუსაბამებს ნულს ან ერთს: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f_\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i = 1$ ან $x_i = 0$, $f_\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ ან $f_\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

გამოვთვალოთ n წევრიან ნულებისა და ერთიანებისგან შედგენილ მიმდევრობათა რაოდენობა. ამისათვის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მიმდევრობას შევუსაბამოთ რიცხვი $x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \ldots + x_{n-1} 2 + x_n$. ამ შესაბამისობას ექნება შემდეგი კონკრეტული სახე:

$$0 \to (0,0,\ldots,0,0);$$
$$1 \to (0,0,\ldots,0,1);$$
$$2 \to (0,0,\ldots,1,0);$$
$$---------$$
$$2^n - 1 \to (1,1,\ldots,1,1).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ სულ გვექნება 2^n რაოდენობის მიმდევრობა. ამგვარად, ჩვენ გამოვთვალეთ არა მარტო ასეთ მიმდევრობათა რაოდენობა არამედ ასეთ მიმდევრობათა სიმრავლე კიდევაც დავალაგეთ. რაც შეეხება 2^n ელემენტიანი სიმრაველიდან ორელემენტიან სიმრავლეში ყველა შესაძლო ფუნქციების რაოდენობას, იგი ტოლი იქნება 2^n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობის, ანუ 2^{2^n}-ის.

ნებისმიერ

$$f:\underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}_{n}\to\{0,1\}$$

სახის ფუნქციას ***ბულის ფუნქციას*** უწოდებენ.

ბულის ფუნქციების წარმოსადგენად გამოიყენებენ ფუნქციის წარმოდგენის ცხრილურ მეთოდს.

მაგალითისთვის განვიხილოთ ბულის ფუნქციები, რომლებისათვისაც $n=2$. სულ გვექნება 16 ასეთი ფუნქცია. შევადგინოთ ცხრილი:

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

ამ ცხრილის საშუალებით ცხადად არის წარმოდგენილი თითოეული $f_i; i=1,2,\ldots,16$ ფუნქცია.

წარმოდგენილი ფუნქციებიდან f_1 და f_2 წარმოადგენენ მუდმივ ფუნქციებს მნიშვნელობებით 0 და 1, შესაბამისად. ეს ფუნქციები აღინიშნება 0-ით და 1-ით, შესაბამისად.

ფუნქცია f_2 შეესაბამება გამონათქვამთა ალგებრის $X_1 \wedge X_2$ ფორმულას, ამიტომ მას კონიუნქციას უწოდებენ და აღნიშნავენ ასე: $x_1 \wedge x_2$.

ფუნქცია f_8 შეესაბამება გამონათქვამთა ალგებრის $X_1 \vee X_2$ ფორმულას, ამიტომ მას დიზიუნქციას უწოდებენ და აღნიშნავენ ასე: $x_1 \vee x_2$.

ფუნქცია f_{10} შეესაბამება გამონათქვამთა ალგებრის $X_1 \Leftrightarrow X_2$ ფორმულას, ამიტომ მას ეკვივალენციას უწოდებენ და აღნიშნავენ ასე: $x_1 \Leftrightarrow x_2$.

ფუნქციები f_{12}, f_{14} შეესაბამებიან გამონათქვამთა ალგებრის $X_2 \Rightarrow X_1, X_1 \Rightarrow X_2$ ფორმულებს, ამიტომ მათ იმპლიკაციას უწოდებენ და აღნიშნავენ ასე: $x_2 \Rightarrow x_1, x_1 \Rightarrow x_2$.

ფუნქცია f_7-ს უწოდებენ ჯამს მოდულით 2 და აღნიშნავენ ასე: $x_1 + x_1(\mathrm{mod}2)$ ან ასე: $x_1 \oplus x_2$.

ფუნქცია f_{15}-ს უწოდებენ შეფერის შტრიხს და აღნიშნავენ ასე: $x_1 | x_2$.

ფუნქცია f_9-ს უწოდებენ პირსის ისარს და აღნიშნავენ ასე: $x_1 | x_2$.

ფუნქციებს f_2, f_5 უწოდებენ აკრძალვის ფუნქციებს.
ადგილი აქვს აგრეთვე ტოლობებს:

$$f_4(x_1, x_2) = x_1, f_6(x_1, x_2) = x_2, f_{11}(x_1, x_2) = \bar{x}_2, f_{13}(x_1, x_2) = \bar{x}_1,$$

ამ ფუნქციებიდან პირველი და ბოლო არსებითად დამოკიდებულია x_1 ცვლადზე,
ხოლო მეორე და მესამე- x_2 ცვლადზე. აქედან გამომდინარე, ისინი შეიძლება ჩავთვალოთ ერთი ცვლადის ფუნქციებად. პირველი და მეორე ფუნქციას ***იგივურ ფუნქციებს*** უწოდებენ, ხოლო მესამე და მეოთხე ფუნქციას- ***უარყოფის ფუნქციებს.***
წინა ცხრილის საშუალებით წარმოდგენილ ფუნქციებს ელემენტარულ ფუნქციებს უწოდებენ.
ვთქვათ, მოცემულია n ცვლადზე დამოკიდებული ბულის ფუნქცია $f(x_1, x_2, ..., x_n)$
m რაოდენობის ცვლადებზე დამოკიდებული n რაოდენობის
$f_i(x_1, x_2, ..., x_m), i = 1,2,...,n$ ბულის ფუნქციები.
$g(x_1, x_2, ..., x_m) = f(f_1(x_1, x_2, ..., x_m), f_2(x_1, x_2, ..., x_m), ..., f_n(x_1, x_2, ..., x_m))$ ფუნქციას
$f_i(x_1, x_2, ..., x_m), i = 1,2,...,n$ ფუნქციების სუპერპოზიცია ეწოდება. იგი დამოკიდებულია
m რაოდენობის ცვლადზე.
ვიტყვით, რომ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქცია არსებითადაა დამოკიდებული x_i ცვლადზე, თუ

$$f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \neq f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n).$$

$f_i(x_1, x_2, ..., x_m), i = 1,2,...,n$ ფუნქციებიდან თითოეული
m რიცხვზე ნაკლები ან ტოლი რაოდენობის ცვლადებზე შეიძლება იყოს არსებითად დამოკიდებული, თუ თითოეულ მათგანში დავამატებთ არაარსებით ცვლადებს და ამით ყოველ მათგანში ცვლადების რაოდენობას გავათანაბრებთ, ბულის ფუნქციები შეიძლება ავაგოთ სხვადასხვა რაოდენობის ცვლადებზე დამოკიდებული ფუნქციების სუპერპოზიციითაც.
ბულის ფუნქციათა სუპერპოზციის ცნებაზე დაყრდნობით, ელენტარულ ფუნქციათა ცხრილიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ ასეთ ფუნქციათა შემდეგი თვისებები:

1. $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$.
2. $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$.
3. $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$.
4. $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$.
5. $\bar{\bar{x}} = x$.
6. $x \wedge x = x$.
7. $x \vee x = x$.
8. $x \wedge \bar{x} = 0$.
9. $x \vee \bar{x} = 1$.
10. $x \vee 0 = x$.
11. $x \wedge 0 = 0$.
12. $x \wedge 1 = x$.
13. $x \vee 1 = 1$.
14. $x \oplus x = 0$.
15. $x \oplus 0 = x$.
16. $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
17. $(x_1 \oplus x_2) \wedge x_3 = (x_1 \wedge x_3) \oplus (x_2 \wedge x_3)$

ასოციაციურობის პირველი და მეორე თვისება საშუალებას გვაძლევს, განვსაზღვროთ კონიუნქცია $\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} f_i = f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$ და დიზიუნქცია $\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} f_i = f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n$.

თეორემა 2.1. ნებისმიერი ბულის ფუნქცია $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma=(0,0,\ldots,0)}^{\sigma=(1,1,\ldots,1)} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \wedge x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n},$$ სადაც

$\sigma_i \in \{0,1\}, x_i^0 = \bar{x}_i, x_i^1 = x_i, \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ და დიზიუნქცია აიღება ყველა n- წევრიან ნულებისა და ერთიანებისაგან შედგენილ მიმდევრობათა მიმართ.

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, რომ დასამტკიცებელი ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარე ერთმანეთის ტოლია.

თუ დასამტკიცებელ ტოლობაში ჩავსვამთ ნებისმიერ $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ მიმდევრობას, სადაც $\alpha_i \in \{0,1\}$ და გაეითვალისწინებთ, რომ $x^\sigma = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x = \sigma$, მიეიღებთ:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \bigvee_{\sigma=(0,0,\ldots,0)}^{\sigma=(1,1,\ldots,1)} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \wedge \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \partial_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge \alpha_n^{\sigma_n} =$$

$$= f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge \alpha_1^{\alpha_1} \wedge \alpha_2^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_n^{\alpha_n} = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \wedge 1 \wedge 1 \wedge \ldots \wedge 1 = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

თეორემა დამტკიცდა.

თუ ბულის ფუნქცია $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ იგივეურად არ უდრის ნულს, მაშინ, დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია ასეთი ფორმით წარმოვადგინოთ:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma)=1}} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

ამ ფორმას $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციის ***სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა*** ეწოდება.

მაგალითი: ვთქვათ, მოცემულია ბულის $f(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქცია შემდეგი ცხრილის საშუალებით

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ტოლია ერთის შემდეგ შემთხვევებში:

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 1,$$
$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 1;$$

ამიტომ ამ ფუნქციის სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა იქნება:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^0\wedge x_2^0\wedge x_3^0)\vee(x_1^0\wedge x_2^1\wedge x_3^1)\vee(x_1^1\wedge x_2^1\wedge x_3^1)=$$
$$=(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\,\bar{\wedge}_3)\vee(\bar{x}_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3).$$

თეორემა 2.2. ნებისმიერი ბულის ფუნქცია $f(x_1,x_2,...,x_n)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bigvee_{\sigma=(0,0,...,0)}^{\sigma=(1,1,...,1)} f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\vee x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee x_2^{\bar{\sigma}_2}\vee...\vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$$

ფორმით.

დამტკიცება: $f(x_1,x_2,...,x_n)=\bar{\bar{f}}(x_1,x_2,...,x_n)$. წინა თეორემის საფუძველზე,

$$\bar{f}(x_1,x_2,...,x_n)=\bigvee_{\sigma=(0,0,...,0)}^{\sigma=(1,1,...,1)}\bar{f}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\wedge x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge...\wedge x_n^{\sigma_n}$$. აქედან

გამომდინარე:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{\bigvee_{\sigma=(0,0,...,0)}^{\sigma=(1,1,...,1)} f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\wedge x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge...\wedge x_n^{\sigma_n}}$$
$$=\bigwedge_{\sigma=(0,0,...,0)}^{\sigma=(1,1,...,1)} f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\vee\overline{x_1^{\sigma_1}}\vee\overline{x_2^{\sigma_2}}\vee...\vee\overline{x_n^{\sigma_n}}$$
$$=\bigwedge_{\sigma=(0,0,...,0)}^{\sigma=(1,1,...,1)} f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\vee x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee x_2^{\bar{\sigma}_2}\vee...\vee x_n^{\bar{\sigma}_n}.$$

თეორემა დამტკიცდა.

თუ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია იგივურად არ უდრის 1-ს, მაშინ დამტკიცებული ტოლობა შეიძლება გადაეწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bigwedge_{\substack{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\\ f(\sigma)=0}}(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee x_2^{\bar{\sigma}_2}\vee...\vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

ამ ფორმას $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციის ***სრულყოფილად კონიუნქციური ნორმალური ფორმა*** ეწოდება.

მაგალითი: წინა ცხრილით მოცემული ფუნქციის სრულყოფილად კონიუნქციური ნორმალური ფორმა რომ ეიპოეოთ, საჭიროა განესაზღეროთ, თუ სად ღებულობს იგი 0-ის ტოლ მნიშვნელობას. როგორც ცხრილიდან ჩანს, როდესაც

$$\sigma=(0,0,1),\sigma=(0,1,0)$$
$$\sigma=(1,0,0),\sigma=(1,0,1),\sigma=(1,1,0),$$

მაშინ $f(\sigma)=0$.

წინა ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bigwedge_{\substack{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma)\\ f(\sigma)=0}}(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee x_2^{\bar{\sigma}_2}\vee x_3^{\bar{\sigma}_3})=(x_1^1\vee x_2^1\vee x_3^0)\wedge(x_1^1\vee_2^0\vee x_3^1)\wedge(x_1^0\vee x_2^1\vee x_3^1)\wedge$$
$$\wedge(x_1^0\vee x_2^1\vee x_3^0)\wedge(x_1^0\vee x_2^0\vee x_3^1)=(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)\wedge$$
$$\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3).$$

ბულის ფუნქციათა სისტემას $\{f_1(...),f_2(...),f(...),...\}$ ეწოდება ***ბულის ფუნქციათა სრული სისტემა,*** თუ ბულის ნებისმიერი $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია მიიღება მოცემულ სისტემაში შემავალი ბულის ფუნქციებისა და $x_1,x_2,...x_n$ იგივური ფუნქციების სუპერპოზიციით.

დამტკიცებული თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ ბულის ფუნქციათა სისტემა $\{y_1\wedge y_2,y_1\vee y_2,\bar{y}_1\}$ სრულია, მართლაც

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bigvee_{\substack{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\\ f(\sigma)=1}}x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge...\wedge x_n^{\sigma_n}$$

ან

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bigwedge_{\substack{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\\ f(\sigma)=0}}(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee x_2^{\bar{\sigma}_2}\vee...\vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$ ამ ფორმულებიდან

კი ცხადად ჩანს, რომ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია მიიღება $\{y_1\wedge y_2, y_1\vee y_2, \bar{y}_1\}$ და $x_1,x_2,...x_n$ ფუნქციებისაგან სუპერპოზიციით.

სრულია ასევე ბულის ფუნქციათა სისტემა: $\{y_1\wedge y_2, \bar{y}_1\}$, მართლაც, $y_1\vee y_2=\overline{\bar{y}_1\wedge\bar{y}_2}$ და სისტემა$\{y_1\wedge y_2, y_1\vee y_2, \bar{y}_1\}$ კი სრულია. ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ სრულია სისტემა $\{y_1\vee y_2, \bar{y}_1\}$. სრული სისტემის მაგალითია, ასევე, $\{y_1\wedge y_2, y_1\oplus y_2, 1\}$, მართლაც: $\bar{y}_1=y_1\oplus 1$ სისტემა $\{y_1\wedge y_2, \bar{y}_1\}$ კი სრულია.

თეორემა 23 (ჟეგალკინის თეორემა) . ბულის ყოველი ფუნქცია $f(x_1,x_2,...,x_n)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი პოლინომის სახით:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=a_0\oplus a_1\wedge x_1\oplus a_2\wedge x_2\oplus...\oplus a_{2^n-1}\wedge x_1\wedge x_2\wedge...\wedge x_n,$$

სადაც $a_i\in\{0,1\}, i=0,1,2,...,2^n-1$.

დამტკიცება: ფუნქციათა სისტემა $\{y_1\wedge y_2, y_1\oplus y_2, 1, 0\}$ სრულია, თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ მოყანილ ფორმულებს, ადვილად მივიღებთ სასურველ წარმოდგენას.

ბულის $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციას უწოდებენ ***ნულის შემნახავს***, თუ $f(0,0,...,0)=0$.

ნულის შემნახავია, მაგალითად, ფუნქციები: $x_1\vee x_2, x_1\wedge x_2, x, 0$, ხოლო ფუნქციები $\bar{x}, x_1\rightarrow x_2$ - არა.

ბულის $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციას უწოდებენ **ერთის შემნახავს**, თუ $f(1,1,...,1)=1$.

ერთის შემნახავია, მაგალითად, ფუნქციები: $x_1\vee x_2, x_1\wedge x_2, x, 1$, ხოლო ფუნქციები $\bar{x}, x_1\oplus x_2, 0$ - არა.

ბულის $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციას უწოდებენ ***თავისი თავის ორადულს***, თუ

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bar{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n),$$

ასეთი ფუნქციებია $\bar{x}, x$, მაგრამ ასეთი არაა ფუნქციები: $x_1\vee x_2, x_1\wedge x_2$.

განვიხილოთ ორი მიმდევრობა$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n), \sigma'=(\sigma'_1,\sigma'_2,...,\sigma''_n)$. ვიტყვით, რომ $\sigma\le\sigma'$, თუ$\sigma_i\le\sigma'_i; i=1,2,...,n$

ბულის $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციას უწოდებენ ***მონოტონურს***, თუ პირობიდან $\sigma\le\sigma'$, გამომდინარეობს, რომ $f(\sigma)\le f(\sigma')$.

მონოტონურია ფუნქციები: $x_1\vee x_2, x_1\wedge x_2, x$. მონიტონური არაა ფუნქცია: $\bar{x}$.

ბულის $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციას უწოდებენ ***წრფივს***, თუ ეს ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ პოლინომით შემდეგნაირად:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=a_0\oplus a_1\wedge x_1\oplus a_2\wedge x_2\oplus...\oplus a_n\wedge x_n,$$

სადაც $a_i\in\{0,1\}; i=1,2,...,n$.

წრფივია ფუნქციები $x, \bar{x}$. არაწრფივია ფუნქცია: $x_1\wedge x_2$.

თუ ბულის $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია წარმოადგენს ისეთი ფუნქციების სუპერპოზიციას რომლებიც ინახავენ ნულს ან ისეთი ფუნქციების სუპრპოზიციას რომლებიც ინახავენ ერთს, მაშინ ეს ფუნქცია ასევე ინახავს ნულს ან ერთს, შესაბამისად.

აქედან გამომდინარე, ცხადია, ბულის ფუნქციათა სრული სისტემა აუცილებლად უნდა შეიცავდეს ისეთ ფუნქციას, რომელიც არ ინახავს ნულს ან ისეთ ფუნქციას რომელიც, არ ინახავს ერთს.

თავისი თავის ორადულ ფუნქციათა სუპერპოზიციითაც ასევე თავისი თავის ორადული ფუნქცია მიიღება, მართლაც, თუ

$$g(x_1,x_2,...,x_n)=f(f_1(x_1,x_2,...,x_n),f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_n(x_1,x_2,...,x_n)),$$

სადაც $f,f_1,f_2,...,f_n$ თავისი თავის ორადული ფუნქციებია, მაშინ

$$g(x_1,x_2,...,x_n)=f(f_1(x_1,x_2,...,x_n),f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_n(x_1,x_2,...,x_n))=\bar{f}(\bar{f}_1(x_1,x_2,...,x_n),$$
$$\bar{f}_2(x_1,x_2,...,x_n),...,\bar{f}_n(x_1,x_2,...,x_n))=\bar{f}(f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n),f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n),...,f_n(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n))=$$
$$=\bar{g}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n).$$

ეს კი ის არის, რისი ჩვენებაც გვინდოდა.

აქედან გამომდინარე, ფუნქციათა სრული სისტემა აუცილებლად უნდა შეიცავდეს თავისი თავის არაორადულ ფუნქციას.

თეორემა 2.3. თუ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია თავისი თავის ორადული არაა, მაშინ მასში გარკვეული წესით x და $\bar{x}$ ფუნქციების ჩასმით $x_1,x_2,...,x_n$ ცვლადების ადგილზე შეიძლება მივიღოთ.მუდმივ ფუნქცია.

დამტკიცება: თუ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ თავისი თავის ორადული არაა, მაშინ მოიძებნება ისეთი მიმდებრობა $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_2)$, რომ $f(x_1,x_2,...,x_n)=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)$.

განესაძღვროთ ფუნქციები: $\varphi_i, i=1,2,...,n$ შემდეგნაირად:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} x, & a_i=0 \\ \bar{x}, & a_i=1 \end{cases}.$$

$\varphi_i(x)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისებები: $\varphi_i(0)=\sigma_i, \varphi_i(1)=\bar{\sigma}_i$.

ფუნქცია $\varphi(x)=f(\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x))$ მუდმივია, მართლაც

$$\varphi(0)=f(\varphi_1(0),\varphi_2(0),...,\varphi_n(0))=f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=f(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,...,\bar{\sigma}_n)=\varphi(1).$$

თეორემა დამტკიცდა.

მონოტონურ ფუნქციათა სუპერპოზიცია ასევე მონოტონურია, მართლაც სუპერპოზიციისათვის

$$g(x_1,x_2,...,x_n)=f(f_1(x_1,x_2,...,x_n),f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_n(x_1,x_2,...,x_n)),$$

სადაც $f,f_1,f_2,...,f_n$ მონოტონური ფუნქციებია, თუ $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n),\sigma'(\sigma'_1,\sigma'_2,...,\sigma'_n)$ და $\sigma\le\sigma'$, მაშინ: $f_i(\sigma)\le f(\sigma'), i=1,2,...,n$. თუ ამ უტოლობებს გავითვალისწინებთ, გვექნება $g(\sigma)=f(f_1(\sigma),f_2(\sigma),...,f_n(\sigma))\le f(f_1(\sigma'),f_2(\sigma'),...,f_n(\sigma'))=g(\sigma')$. ეს კი ნიშნავს $g(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციის მონოტონურობას.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ბულის ფუნქციათა სრული სისტემა აუცილებლად უნდა შეიცავდეს არამონოტონურ ფუნქციას.

თეორემა 2.4. არამონოტონურ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციაში გარკვეული წესით 0 და 1 მუდმივების და x ფუნქციის ჩასმით $x_1,x_2,...,x_n$ ცვლადების ადგილზე, შეიძლება მივიღოთ $\bar{x}$ ფუნქცია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია არამონოტონურია, მაშინ მისთვის არსებობენ მიმდევრობები: $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n),\sigma'(\sigma'_1,\sigma'_2,...,\sigma'_n)$, სადაც $\sigma\le\sigma'$ და $f(\sigma)>f(\sigma')$.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციაში x_i ცვლადის მაგიერად ჩავსვათ σ_i, თუ $\sigma_i=\sigma'_i$ და x, თუ $\sigma_i\ne\sigma'_i$ მიღებული $\phi(x)$ ფუნქციისათვის:

$$\phi(0) = f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n),$$
$$\phi(1) = f(\sigma'_1, \sigma'_2, ..., \sigma'_n).$$

მაგრამ $f(\sigma) > f(\sigma')$, მაშასადამე, $\phi(0) > \phi(1)$ აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\varphi(x) = \bar{x}$.

თეორემა დამტკიცდა.

წრფივ ფუნქციათა სუპერპოზიციითაც, ცხადია, ისევ წრფივი ფუნქცია მიიღება, ამიტომ ბულის ფუნქციათა სრულ სისტემაში აუცილებლად უნდა შედიოდეს ერთი მაინც არაწრფივი ფუნქცია.

თეორემა 2.5. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ არაწრფივი ფუნქციის, მუდმივების 0 და 1, ფუნქციების: $x, \bar{x}, y$ სუპერპოზიციით შეიძლება მივიღოთ კონიუნქცია $x \wedge y$.

დამტკიცება: რადგან $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ არაწრფივი ფუნქციაა, ჟეგალკინის თეორემიდან გამომდინარე, მისი მოდულით 2 პოლინომის სახით წარმოდგენაში აუცილებლად უნდა შედიოდეს შესაკრები, რომელიც შეიცავს რომელიმე ორი x_i, x_j ცვლადის კონიუნქციას.

თუ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქციის პოლინამად წარმოდგენაში შესაკრებებს გადავაჯგუფებთ, შეგვეიძლია მივაღწიოთ მოცემული ფუნქციის წარმოდგენას შემდეგი სახით:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i \wedge x_j \wedge f_1(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \oplus x_i \wedge$$
$$\wedge f_2(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \oplus x_j \wedge f_3(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \oplus$$
$$\oplus f_4(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n),$$

სადაც $f_1(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)$ ფუნქცია იგივურად ნული არ არის. მაშასადამე, არსებობს მიმდევრობა $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, ..., \sigma_n)$, რომლისთვისაც $f_1(\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, ..., \sigma_n) = 1$. თუ მიმდევრობის წევრებს $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, ..., \sigma_n)$ ჩავსვამთ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქციის შესაბამისი ცვლადების ადგილზე, მივიღებთ ორ x_i, x_j ცვლადებზე დამოკიდებულ $\phi(x_i, x_j)$ ფუნქციას, რომლის პოლინომის სახით წარმოდგენა იქნება შემდეგნაირი:

$$\phi(x_i, x_j) = x_i \wedge x_j \oplus x_i \wedge \alpha \oplus x_j \wedge \beta \oplus \gamma,$$

სადაც

$$\alpha = f_2(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n),$$
$$\beta = f_3(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n),$$
$$\gamma = f_4(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n).$$

განვიხილოთ ფუნქცია $F(x, y) = \phi(x \oplus \beta, y \oplus \alpha) = x \wedge y \oplus \alpha \wedge \beta \oplus \gamma$. იგი მიიღება $\phi(x_i, x_j)$, $x, y, \bar{x} (\bar{x} = x \oplus 1)$ ფუნქციების სუპერპოზიციით. თუ $\alpha \wedge \beta \oplus \gamma = 0$, მაშინ $F(x, y) = x \wedge y$; თუ $\alpha \wedge \beta \oplus \gamma = 1$, მაშინ $\overline{F}(x, y) = x \wedge y$.

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2.6 (პოსტის თეორემა). იმისათვის, რომ ბულის ფუნქციათა სისტემა $\{f_1(...), f_2(...), f(...), ...\}$ იყოს სრული, აუცილებელი და საკმარისია, იგი შეიცავდეს ნულის არშემნახავ, ერთის არშემნახავ, თავისი თავის არაორადულ, არამონოტონურ, არაწრფივ ფუნქციებს.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობა გამომდინარეობს ნულის შემნახავ, ერთის შემნახავ, თავისი თავის ორადულ, მონოტონურ, წრფივ ფუნქციათა იმ თვისებიდან, რომ თითოეული ასეთი კლასის ფუნქციათა სუპერპოზიცია ისევ ამ კლასს მიეკუთვნება.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. გამოვყოთ ბულის ფუნქციათა $\{f_1(\ldots),f_2(\ldots),f(\ldots),\ldots\}$ სისტემიდან თეორემის პირობაში ჩამოთვლილი სახის ფუნქციები. ვთქვათ, ეს ფუნქციებია f_1,f_2,f_3,f_4,f_5, სადაც ფუნქციათა გადანომერა ემთხვევა თეორემის პირობაში ფუნქციათა სახეების ჩამოთვლის თანმიმდევრობას. ვაჩვენოთ, რომ ბულის ყოველი ფუნქცია $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ წარმოადგენს $f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,x_1,x_2,\ldots,x_n$ ფუნქციების სუპერპოზიციას.

გამოყოფილი ფუნქციებიდან სუპერპოზიციით მივიღოთ მუდმივები 0 და 1.

განვიხილოთ ფუნქცია f_1. თუ $f_1(1,1,\ldots,1)=1$, მაშინ ფუნქცია $\varphi(x_1)=f_1(x_1,x_1,\ldots,x_1)$ წარმოადგენს მუდმივ ფუნქციას 1. მართლაც, რადგან f_1 ნულს არ ინახავს $\varphi(0)=f_1(0,0,\ldots,0)=1$, ამასთან $\varphi(1)=f_1(1,1,\ldots,1)=1$, ამიტომ φ წარმოადგენს მუდმივ ფუნქციას 1. ფუნქცია $\phi(x_1)=f_2(\varphi(x_1),\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_1))=f_2(1,1,\ldots,1)=0$, ამგვარად, ასევე გვექნება მუდმივი ფუნქცია 0.

ვთქვათ, ახლა $f_1(1,1,\ldots,1)=0$, მაშინ ფუნქცია $\varphi(x_1)=f_1(x_1,x_1,\ldots,x_1)$ ტოლია $\bar{x}_1$ ფუნქციის. მართლაც, $\varphi(0)=f_1(0,0,\ldots,0)=1$, $\varphi(1)=f_1(1,1,\ldots,1)=0$.

რადგან f_3 თავისი თავის არაორადულია, ამიტომ ამ ფუნქციისაგან და $\bar{x}_1$ ფუნქციისაგან თეორემა 3-ის ძალით მივიღებთ ერთ მუდმივ ფუნქციას, მეორე მუდმივ ფუნქციას კი მივიღებთ $\bar{x}_1$- ის გამოყენებით.

მაშასადამე, ორივე შემთხვევაში: $f_1(1,1,\ldots,1)=1$, $f_1(1,1,\ldots,1)=0$, მივიღეთ მუდმივი ფუნქციები 0 და 1.

მიღებული მუდმივებისა და არამონოტონური f_4 ფუნქციის გამოყენებით თეორემა 4-ის ძალით, მივიღებთ $\bar{x}_1$ ფუნქციას.

საბოლოოდ, 0 და 1 მუდმივი ფუნქციების, $x_1,\bar{x}_1,x_2$ ფუნქციების გამოყენებით თეორემა 5-ის საფუძველზე, მივიღებთ $x_1\wedge x_2$ კონიუნქციას.

მაშასადამე, $f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,x_1,x_2,\ldots,x_n$ ფუნქციების სუპერპოზიციით მივიღეთ $x_1\wedge x_2$ კონიუნქცია და $\bar{x}_1$ ფუნქცია. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ბულის ფუნქციათა $\{x_1\wedge x_2,\bar{x}_1\}$ სისტემა სრულია. აქედან გამომდინარე, სრული იქნება ფუნქციათა f_1,f_2,f_3,f_4,f_5 სისტემაც.

თეორემა დამტკიცდა.

§3. პრედიკატთა ალგებრა

ვთქვათ, P ობიექტთა რაიმე კლასის თვისებაა, ჩანაწერი $P(x)$ აღნიშნავდეს თხრობით წინადადებას, x ობიექტს გააჩნია P თვისება. თუ x ცვლადი სიდიდეა, რომელიც მნიშვნელობას იღებს ობიექტთა სხვადასხვა კლასებიდან, მაშინ განხილული თხრობითი წინადადება გამონათქვამი ვერ იქნება. იგი გამონათქვამად გადაიქცევა იმ შემთხვევაში, როდესაც სიდიდე x მიიღებს კონკრეტულ მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ $P(x)$ წარმოადგენს თხრობით წინადადებას: " x მარტივი რიცხვია", მაშინ იგი არ იქნება გამონათქვამი, რადგან ვერ ვადგენთ, წინადადება ჭეშმარიტია, თუ მცდარი. თუ x ცვლადს მივცემთ მნიშვნელობას, ვთქვათ, $x=3$, მაშინ საქმე გვექნება გამონათქვამთან: "3 მარტივი რიცხვია", რომელიც ჭეშმარიტია. თუ x ცვლადს მივცემთ მნიშვნელობას ობიექტთა რაიმე კლასიდან, რომელიც არ ემთხვევა მარტივი რიცხვების კლასს, მივიღებთ მცდარ გამონათქვამს. მაგალითად, თუ x სიდიდეს მივცემთ მნიშვნელობას ცხოველთა კლასიდან, ვთქვათ, x კატაა, მივიღებთ გამონათქვამს: "კატა მარტივი რიცხვია", რომელიც მცდარია.

როგორც ვხედავთ, რაიმე თვისება P განსაზღვრავს ასახვას ობიექტთა რაიმე ერთობლიობიდან გამონათქვამთა სიმრავლეში. შემდგომ ჩვენ ობიექტთა ერთობლიობებსაც ჩავთვლით სიმრავლეებად და ვუწოდებთ მათ ***საგნობრივ სიმრავლეებს.***

ასახვას $P: M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to \mathfrak{J}$, სადაც $M_1, M_2, ..., M_n$ საგნობრივი სიმრავლეებია, $\mathfrak{J}$ გამონათქვამთა სიმრავლე, ***n-ადგილიანი პრედიკატი ეწოდება.***

ცვლად სიდიდეებს $x_1, x_2, ..., x_n$, რომლებიც ღებულობენ მნიშვნელობებს $M_1, M_2, ..., M_n$ სიმრავლეებიდან, ***საგნობრივი ცვლადები*** ეწოდება. თუ საგნობრივი სიმრავლეები ცარიელია, მაშინ პრედიკატი ითვლება გამონათქვამად.

პრედიკატის განსაზღვრებაში $M_1, M_2, ..., M_n$ სიმრავლეებს პრედიკატის საგნობრივი სიმრავლეები ვუწოდეთ, პრიდიკატის საგნობრივი სიმრავლე ეწოდება, ასევე, დეკარტულ ნამრავლსაც: $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$.

საგნობრივი სიმრავლეების ელემენტებს აღვნიშნავთ პატარა ლათინური ასოებით: $a, b, c, a_1, a_2, ..., a_n, ...$

პრედიკატებს აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით: $A, B, C, P, ...$.

საგნობრივი ცვლადების აღსანიშნავად შეიძლება გამოვიყენოთ პატარა ლათინური ასოები: $x, y, z, x_1, x_2, ..., x_n, ...$.

პრედიკატთა სიმრავლეზე შეგვიძლია გავავრცელოთ ის ლოგიკური ოპერაციები, რომლებიც განსაზღვრული იყო გამონათქვამთა სიმრავლეზე: კონიუნქცია, დიზიუნქცია, იმპლიკაცია, ეკვივალენცია, უარყოფა.

მაგალითად $P_1 : M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to \mathfrak{J}$ და $P_2 : N_1, N_2, ..., N_k \to \mathfrak{J}$ პრედიკატებისთვის $P_1 \wedge P_2$ წარმოადგენს პრედიკატს $P_1 \wedge P_2 : M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \times N_1 \times N_2 \times ... \times N_k \to \mathfrak{J}$, რომელიც $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \times N_1 \times N_2 \times ... \times N_k$ სიმრავლის $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_k$ ელემენტს შეუსაბამებს $P_1(a_1, a_2, ..., a_n) \wedge P_2(b_1, b_2, ..., b_k)$ გამონათქვამს.

თუ P_1, P_2 პრედიკატებს ერთი და იმავე განსაზღვრის არე აქვთ, მაშინ მათზე ლოგიკური ოპერაციით მიღებული პრედიკატის განსაზღვრის არეც იგივე იქნება. ხოლო, თუ განსაზღვრის არეები ერთმანეთს არ ემთხვევა, მაშინ ლოგიკური ოპერაციით მიღებულ პრედიკატის განსაზღვრის არედ ითვლება თითოეული პრედიკატის განსაზღვრის არეთა დეკარტის ნამრავლი.

აღნიშნული ოპერაციების გარდა, პრედიკატთა სიმრავლეში განსაზღვრულია ორიოპერაცია, რომლებიც პრედიკატთა არსთან არიან დაკავშირებული. ეს ოპერაციებია: ***ზოგადობის კვანტორი-*** $\forall$ და ***არსებობის კვანტორი-*** $\exists$.

გავარკვიოთ თითოეული ამ ოპერაციის არსი.

ვთქვათ, $P: M \to \mathfrak{J}$ ერთ ადგილიანი პრედიკატია, მაშინ გამოსახულება $\forall x P(x)$ აღვიშნავს გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $P(x)$ ჭეშმარიტია M საგნობრივი სიმრავლის ყველა ელემენტისათვის. გამოსახულება $\forall x P(x)$ იკითხება ასე: " ყოველი x-ისთვის $P(x)$ ჭეშმარიტია."

გამოსახულება $\exists x P(x)$ აღვიშნავს გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $P(x)$ ჭეშმარიტია M საგნობრივი სიმრავლის ერთი მაინც ელემენტისათვის. გამოსახულება $\exists x P(x)$ იკითხება ასე: "არსებობს ისეთი x, რომლისთვისაც $P(x)$ ჭეშმარიტია".

განვიხილოთ კვანტორთა გამოყენების მაგალითები. ვთქვათ, საგნობრივი სიმრავლე M ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

1. $P: M \to \mathfrak{J}$ პრედიკატი განვსაზღვროთ ასე: $P(x) =$ "x^2 იგივეა რაც xx", მაშინ $\forall x P(x)$ ჭეშმარიტი გამონათქვამია.
2. $P: M \to \mathfrak{J}$ პრედიკატი განვსაზღვროთ ასე: $P(x) =$ "$x + 2$ ტოლია 7-ის", მაშინ

$\forall x P(x)$ მცდარი გამონათქვამია, ხოლო $\exists x P(x)$ ჭეშმარიტი.

ზოგადობისა და არსებობის კვანტორები შეიძლება განეაზოგადოთ n ადგილიანი პრედიკატებისთვისაც. განეიხილოთ პრედიკატი

$$P: M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to \mathfrak{I},$$

$x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ ცვლადების ადგილზე ჩავსვათ კონკრეტული ელემენტები $a_1, a_2, ... a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n$ შესაბამისი საგნობრიეი სიმრავლეებიდან. მიეიღებთ პრედიკატს $G: \{a_1\} \times \{a_2\} \times ... \times \{a_{i-1}\} \times M_i \times \{a_{i+1}\} \times ... \times \{a_n\} \to \mathfrak{I}$, რომელიც ერთადგილიანია. აქედან გამომდინარე:

$$\forall x_i G(\{a_1\} \times \{a_2\} \times ... \times \{a_{i-1}\} \times x_i \times \{a_{i+1}\} \times ... \times \{a_n\})$$

გამოსახულება წარმოადგენს გამონათქვამს. მაშასადამე,

$$\forall x_i P(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n\} = L(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

წარმოადგენს $n-1$- ადგილიან პრედიკატს:

$$L: M_1 \times M_2 \times ... \times M_{i-1} \times M_{i+1} \times ... \times M_n \to \mathfrak{I},$$

რომელიც არ არის დამოკიდებული x_i ცვლადზე. მისი მნიშენელობა $a_1, a_2, ... a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n$ ელემენტების მიმდევრობისათვის ჭეშმარიტია, თუ ჭეშმარიტია გამონათქვამი

$$\forall x_i G(\{a_1\} \times \{a_2\} \times ... \times \{a_{i-1}\} \times x_i \times \{a_{i+1}\} \times ... \times \{a_n\}).$$

ანალოგიურად არის საქმე $\exists$ არსებობის კვანტორის შემთხვევაშიც.

პრედიკატთა რაიმე სასრული ერთობლიობებიდან ლოგიკური ოპერაციების საშუალებით შეიძლება მიეიღოთ უფრო რთული პრედიკატები. ასეთი რთული პრედიკატების საგნობრივი ცვლადები იყოფა ორ კლასად: პირველ კლასში შედიან ის ცვლადები, რომელთა მიმართაც გამოყენებულია ზოგადობის ან არსებობის კვანტორები; მათ ***დაბმულ ცვლადებს*** უწოდებენ. მეორე კლასში შედის ყველა დანარჩენი ცვლადი, მათ ***თავისუფალ ცვლადებს*** უწოდებენ. მაგალითად $\forall x(P(x,y) \wedge \exists z B(z,v))$ პრედიკატში დაბმული ცვლადებია x და z, ხოლო y და v- თავისუფალი ცვლადებია.

როგორც ეხედაეთ, საგნობრიე ცვლადებზე კვანტორების მოქმედებით ხდება ცვლადების დაბმა, თუ n- ადგილიან პრედიკატში მოეახდენთ $k \le n$ ცვლადის დაბმას, მიეიღებთ $(n-k)$- ადგილიან პრედიკატს.

კონკრეტული პრედიკატების გარდა რომლებიც ღებულობენ ჭეშმარიტ ან მცდარ მნიშენელობებს იმისგან დამოკიდებულებით თუ რა კონკრეტულ მნიშენელობას მიიღებენ საგნობრიეი ცვლადები, განიხილებიან ***ცვლადი პრედიკატებიც,*** რომლებისათვის ჭეშმარიტულობის მნიშენელობები არაა განსაზღვრული.

ცვლადი პრედიკატები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით:

$$X, Y, Z, X_1, X_2, ..., X_n, W(x_1, x_2, ..., x_n), U(x, y), ...$$

ცვლადი პრედიკატები და ამ პრედიკატებზე $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, \forall, \exists$ ლოგიკური ოპერაციების გამოეიყენებით მიღებული ცვლადი პრედიკატები წარმოადგენენ პრედიკატთა ალგებრის ფორმულებს.

ცვლადი პრედიკატები ცარიელ საგნობრიე სიმრავლეებზე წარმოადგენენ ცვლად გამონათქეამებს.

ეთქეათ, $X(X_1(x_1, x_2, ..., x_n), X_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., X_k(x_1, x_2, ..., x_n))$ და $Y(Y_1(x_1, x_2, ..., x_n), Y_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., Y_k(x_1, x_2, ..., x_n))$ ერთი და იგიეე $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ საგნობრივ სიმრაელეზე განსაზღერული პრედიკატთა ფორმულებია, მაშინ ამ ფორმულებს ეწოდებათ ***ტოლძალოვანი მოცემულ საგნობრივ სიმრაელეზე,*** თუ ისინი ერთსა და იმავე ჭეშმარიტულ მნიშენელობას ღებულობენ საგნობრიეი ცვლადების კონკრეტული საგნებითა და ცვლადი პრედიკატების კონკრეტული პრედიკატებით შეცვლის დროს.

მაგალითი: განვიხილოთ პრედიკატთა ალგებრის ფორმულები $\forall xW(x)$ და $\exists xW(x)$, რომელთა საგნობრივი ცვლადები ღებულობენ მნიშვნელობებს ერთელემენტიან $M=\{a\}$ საგნობრივ სიმრავლეზე. ასეთ შემთხვევაში ცვლად $W(x)$ პრედიკატს ჭეშმარიტულობის სიზუსტემდე შეუძლია მიიღოს ორი კონკრეტული მნიშვნელობა: $A(x)$ და $B(x)$.

თუ შევადგენთ შესაბამის ცხრილს:

x	$A(x)$	$B(x)$	$W(x)$	$\forall xW(x)$	$\exists xW(x)$
a	0	1	$A(x)$	0	0
			$B(x)$	1	1

დავინახავთ, რომ პრედიკატთა აღნიშნული ფორმულები ტოლძალოვანია.

მაგალითი: განვიხილოთ პრედიკატთა იგივე ფორმულები $\forall xW(x)$ და $\exists xW(x)$, რომელთა საგნობრივი ცვლადები ამ შემთხვევაში ღებულობენ მნიშვნელობებს ორელემენტიან $M=\{a.b\}$ საგნობრივ სიმრავლეზე.

შევადგინოთ შესაბამისი ჭეშმარიტულობების ცხრილი:

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$	$D(x)$	$W(x)$	$\forall xW(x)$	$\exists xW(x)$
a	0	0	1	1	$A(x)$	0	0
b	0	1	0	1	$B(x)$	0	1
					$C(x)$	0	1
					$D(x)$	1	1

ამ ცხრილიდან ჩანს: თუ საგნობრივი სიმრავლე ორელემენტიანია, მაშინ $\forall xW(x)$ და $\exists xW(x)$ ფორმულები ტოლძალოვანი არაა.

განხილული მაგელითები გვიჩვენებენ, რომ პრედიკატთა ფორმულების ტოლძალოვნების საკითხის გარკვევისას არსებითი მნიშვნელობა აქვს საერთო საგნობრივი სიმრავლის თვისებებს.

პრედიკატთა ფორმულებს უწოდებენ ***ტოლძალოვანს,*** თუ ისინი ტოლძალოვანია ნებისმიერ საერთო საგნობრივ სიმრავლეზე.

მაგალითი: შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\overline{\forall xW(x)}$ და $\exists x\overline{W(x)}$ ფორმულები ტოლძალოვანია. მართლაც, დავაფიქსიროთ ნებისმიერი საგნობრივი სიმრავლე M და ნებისმიერი კონკრეტული პრედიკატი $A(x)$ ამ საგნობრივ სიმრავლეზე. ჩავსვათ ეს პრედიკატი მოცემულ ფორმულაში, მივიღებთ $\overline{\forall xA(x)}$. იმის გამო, რომ გვაქვს ზოგადობის კვანტორის მოქმედება ერთადერთ საგნობრივ ცვლადზე, მიღებული გამოსახულება წარმოადგენს გამონათქვამს. თუ ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია, მაშინ გამონათქვამი $\forall xA(x)$ მცდარია.მაშასადამე არსებობს საგნობრივი სიმრავლის ისეთი ელემენტი $a\in M$, რომ გამონათქვამი $A(a)$ მცდარია. აქედან გამომდინარე, $\overline{A(x)}$ ჭეშმარიტია და ჭეშმარიტი იქნება გამონათქვამიც $\exists x\overline{A(x)}$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ, თუ გამონათქვამი $\overline{\forall xA(x)}$ მცდარია, მცდარი იქნება $\exists x\overline{A(x)}$ გამონათქვამიც.

რადგან $A(x)$ ნებისმიერად დაფიქსირებული კონკრეტული პრედიკატია, ამიტომ $\overline{\forall xW(x)}$ და $\exists x\overline{W(x)}$ ფორმულები ტოლძალოვანია.

პრედიკატთა აღრიცხვის ფორმულებიდან შეიძლება გამოვყოთ ფორმულები, რომლებიც ნებისმიერ საგნობრივ სიმრავლეზე ღებულობენ ჭეშმარიტ მნიშვნელობებს. ასეთ ფორმულებს ***იგივურად ჭეშმარიტი ფორმულები*** ეწოდება.
მაგალითად, ფორმულა $\overline{\forall xW(x)} \Leftrightarrow \exists x\overline{W(x)}$, ცხადია, იგივურად ჭეშმარიტი იქნება. იგივურად ჭეშმარიტი იქნება ასევე ფორმულა/; $\forall xW(x) \Rightarrow \exists xW(x)$.

სავარჯიშოები:
აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფორმულები ტოლძალოვნებია:
1. $\forall x\overline{W(x)}$ და $\exists xW(x)$
2. $\overline{\exists xW(x)}$ და $\forall x\overline{W(x)}$.
3. $\overline{\overline{\exists x\overline{W(x)}}}$ და$\forall xW(x)$.

შემდეგი გამონათქვამები ნატურალურ რიცხვებზე ჩაწერეთ სიმბოლურად, პრედიკატების შემოყვანით და კვანტორების გამოყენებით.
1) ყოველი ორი ნატურალური რიცხვისთვის მოიძებნება მესამე, რომელიც ჯამში პირველთან მეტია მეორეზე.
2) ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს მასზე მეტი ნატურალური რიცხვი.
3) არსებობს ყველა დანარჩენ ნატურალურ რიცხვზე მეტი ნატურალური რიცხვი.
4) $x+a=b$ განტოლება ამოხსნადია N სიმრავლეში.
5) $x-a=b$ განტოლება ამოხსნადია N სიმრავლეში.
6) $ax=b$ განტოლება ამოხსნადია N სიმრავლეში.
7) არსებობს ნატურალური რიცხვი, რომელიც არ აღემატება სხვა ნატურალურ რიცხვებს.
8. რამდენი n- ადგილიანი პრედიკატი შეიძლება განისაზღვროს m- ელემენტიან საგნობრივ სიმრავლეზე?

§4 აქსიომატიკური თეორიები

აქსიომატიკური მათემატიკური თეორია შედგება: ამ თეორიის ***ძირითადი ობიექტების*** ჩამონათვალისაგან და ამ ობიექტების აღმნიშვნელი ***პირველადი სიმბოლოების(ტერმინების)*** სიმრავლისაგან, გამონათქვამთა ორი $T,W;T\subset W$ სიმრავლისაგან, სადაც W შედგება ისეთი გამონათქვამებისაგან, რომელთაც აზრი აქვთ მოცემული თეორიის ჩარჩოებში, ხოლო T ისეთი გამონათქვამებისაგან, რომლებიც განიხილებიან როგორც ჭეშმარიტი და დამტკიცებადი. ამასთან, გამონათქვამთა T სიმრავლე მიღებულია შემდეგნაირად: W სიმრავლიდან შეირჩევა გამონათქვამთა რაიმე T_0 სიმრავლე, რომლის ელემენტებიც ითვლებიან ***აქსიომებად-*** უდავოდ ჭეშმარიტ გამონათქვამებად, ამასთან გამონათქვამი $p\in W$ მიეკუთვნება T სიმრაელეს და იწოდება თეორემად, მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს გამონათქვამთა ისეთი სასრული მიმდევრობა:

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, \qquad (1)$$

სადაც $p_i \in W : i=1,2,\ldots,k, k\geq 1$, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. ყოველი p_i გამონათქვამი ამ მიმდევრობაში აქსიომაა ან გამოიყვანება მის წინ მდგომი გამონათქვამებისაგან ***ლოგიკური შედეგის გამოყვანის წესების*** *საშუალებით.*
2. $p_k = p$.

ცხადია, ყოველი აქსიომა ეკუთვნის T სიმრავლეს, ანუ წარმოადგენს თეორემას. გამონათქვამთა (1) მიმდევრობას $p\in W$ ***გამონათქვამის დამტკიცებას*** უწოდებენ.

თუ ლოგიკური შედეგის გამოყვანის წესები იგულისხმება წინასწარ მოცემულად, ანუ არ წარმოადგენენ მოცემული აქსიომატიკური თეორიის ნაწილს, მაშინ თეორიას ***შინაარსობრივი აქსიომატიკური თეორია*** ეწოდება.

თუ ლოგიკური შედეგის გამოყვანის წესები წარმოადგენენ მოცემული აქსიომატიკური თეორიის ნაწილს, მაშინ თეორიას ***ფორმალური აქსიომატიკური თეორია*** ეწოდება.

ლოგიკური შედეგის გამოყვანის წესები ისეთებია, რომ გამოირიცხება მცდარი თეორემის დამტკიცების შესაძლებლობა. ეს კი მიიღწევა იმით, რომ ყოველი ლოგიკური შედეგის გამოყვანის წესი წარმოადგენენ ეგრეთ წოდებულ ***სწორ აზროვნულ განსჯას.***

აზროვნული განსჯა შედგება გამონათქვამებისაგან, რომელთაც ***ჰიპოთეზები*** გამონათქვამისაგან, რომელსაც ***დასკვნა*** ეწოდება.

სწორი აზრობრივი განსჯა ეწოდება ისეთ აზრობრივ განსჯას, რომელის დასკვნა ჭეშმარიტია მაშინ, როდესაც ჭეშმარიტია ამ აზრობრივ განსჯაში შემავალი ჰიპოთეზები.

სქემატურად აზრობრივი განსჯა ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$\begin{array}{l} H_1, \\ H_2, \\ \cdot \qquad * \\ H_k \\ \hline \Diamond\ C. \end{array}$$

სადაც $\Diamond$ სიმბოლო აღნიშნავს ფრაზას: "აქედან გამომდინარე".

ცხადია, * აზრობრივი განსჯა სწორია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ფორმულა $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k \Rightarrow C$ ტავტოლოგიაა.

ცხადია ასევე, რომ ჰიპოთეზათა თანმიმდევრობას აზრობრივი განსჯის დროს მნიშვნელობა არ აქვს.

განვიხილოთ აზრობრივი განსჯა:

$$\begin{array}{l} p, \\ p \Rightarrow q, \\ q \Rightarrow r \\ \hline \Diamond\ \ p \wedge q \wedge r. \end{array}$$

რომ დავადგინოთ მისი სისწორე განვიხილოთ ცხრილი:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \wedge q \wedge r$
1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ აზრობრივი განსჯა სწორია.
ახლა განვიხილოთ აზრობრივი განსჯა:

$$
\begin{array}{l}
p \vee q, \\
p \Rightarrow q, \\
q \Rightarrow r \\
\hline
\Diamond\ r.
\end{array}
$$

ავაგოთ ცხრილი:

p	q	r	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	r
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ აზრობრივი განსჯა სწორია.
განვიხილოთ აზრობრივი განსჯა:

$$
\begin{array}{l}
p \Rightarrow q, \\
q \Rightarrow r, \\
r \\
\hline
\Diamond\ p.
\end{array}
$$

ავაგოთ ცხრილი:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	p
1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ აზრობრივი განსჯა არაა სწორია.
მოვიყვანოთ ლოგიკური შედეგის გამოყვანის ცნობილი წესები:

1. გამოცალკევება(Modus ponens):

$$
\begin{array}{l}
p \Rightarrow q, \\
p \\
\hline
\Diamond\ q.
\end{array}
$$

2. სილოგიზმი:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q, \\ q \Rightarrow r \\ \hline \Diamond \;\; p \Rightarrow r. \end{array}$$

3. Modus tollens:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q, \\ \neg q \\ \hline \Diamond \;\; \neg p. \end{array}$$

4. გაფართოება:

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \Diamond \;\; p \vee q. \end{array}$$

5. სპეციალიზაცია:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \Diamond \;\; p. \end{array}$$

6 კონიუნქცია:

$$\begin{array}{l} p, \\ q \\ \hline \Diamond \;\; p \wedge q. \end{array}$$

7. ამორჩევა:

$$\begin{array}{l} p, \\ p \Rightarrow (r \wedge s), \\ r \Rightarrow q, \\ s \Rightarrow q \\ \hline \Diamond \;\; q. \end{array}$$

8. გამომრიცხავი ამორჩევა:

$$\begin{array}{l} p \vee q, \\ p \Rightarrow (r \wedge \neg r) \\ \hline \Diamond \;\; q. \end{array}$$

9. აბსურდამდე მიყვანა(Reductio ad absurdum):

$$\neg p \Rightarrow (r \wedge \neg r)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\Diamond\ p.$$

ლოგიკური შედეგის გამოყვანის უკანასკნელი წესი გამოიყენება საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით დამტკიცების დროს.

დავუშვათ, მოცემულ აქსიომატიკურ თეორიასთან ერთად გვაქვს სხვა თეორია, ასევე აქსიომატიკური ან კონსტრუქციული, რომელიც ეფუძნება იმავე ლოგიკურ სისტემას, რასაც ეფუძნება თავდაპირველად მოცემული თეორია.

თუ შესაძლებელია, რომ მოცემული თეორიის თითოეულ პირველად სიმბოლოს(ტერმინს)შევუსაბამოთ მეორე თეორიის რაიმე ობიექტი ისე, რომ: 1. ყოველ გამონათქვამს მოცემული თეორიის ობიექტებზე შეესაბამება რაიმე გამონათქვამი მეორე თეორიის ობიექტებზე. 2. მოცემული თეორიის გამონათქვამის უარყოფას შეესაბამება მეორე თეორიის შესაბამისი გამონათქვამის უარყოფა; მაშინ მეორე თეორიის ობიექტთა ასეთ სისტემას მოცემული ***აქსიომატიკური თეორიის ინტერპრეტაცია*** ეწოდება. თუ ინტერპრეტაციაში მოცემული თეორიის აქსიომებს შეესაბამებიან თეორემები, მაშინ ამ ინტერპრეტაციას მოცემული ***აქსიომატიკური თეორიის მოდელი*** ეწოდება.

აქსიომატიკური მათემატიკური თეორიები ხასიათდებიან თვისებებით:

1. ***არაწინააღმდეგობრივობა***. აქსიომატიკურ თეორიას ეწოდება არაწინააღმდეგობრივი, თუ ნებისმიერი მისი ω გამონათქვამისათვის, ორი გამონათქვამიდან: ω და $\neg\omega$ ერთი მაინც არ არის თეორემა.
2. ***სისრულე***. აქსიომატიკურ თეორიას ეწოდება სრული, თუ მისი ნებისმიერი ω გამონათქვამისათვის, ორი გამონათქვამიდან: ω და $\neg\omega$ ერთი მაინც არის თეორემა.
3. ***კატეგორიულობა***. აქსიომატიკურ სისტემას ეწოდება კატეგორიული, თუ მისი ნებისმიერი ორი მოდელი იზომორფულია.
4. ***აქსიომათა სისტემის დამოუკიდებლობა***. ვიტყვით, რომ აქსიომატიკური თეორიის აქსიომათა სისტემა დამოუკიდებელია, თუ არც ერთი აქსიომა ამ სისტემიდან არ გამოიყვანება დანარჩენი აქსიომებიდან.

ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული თეორიები წარმოადგენენ გამონათქვამთა და პრედიკატთა შინაარსობრივ აქსიომატიკურ თეორიებს.

შემდეგ პარაგრაფში ავაგოთ გამონათქვამთა ფორმალური აქსიომატიკური თეორია.

§5. გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორია

სანამ ამ თეორიის აგებას შევუდგებით, უნდა აღვნიშნოთ, რომ ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის აგება იწყება ამ თეორიის ფორმალური სიმბოლური ენის აგებით. ამ ფორმალური ენის აგება იწყება იმ სიმბოლოების გამოყოფით, რომლებიც შეადგენენ თეორიის ***ალფაბეტს***. შემდეგ კი განვსაზღვროთ ოპერაციები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ავაგოთ თეორიის ფორმულები.

სწორედ ფორმულათა სიმრავლე, მისგან გამოყოფილი "ჭეშმარიტი" ფორმულების(აქსიომების) ქვესიმრავლით და ლოგიკური შედეგის გამოყვანის დაფიქსირებული წესები შეადგენენ ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიას.

იმისათვის, რომ ავაგოთ ასეთი ფორმალური თეორია, დაგვჭირდება რაიმე ენა (ჩვენ შემთხვევაში ქართული ენა რამდენიმე დამატებითი სიმბოლოთი). ამ ენას ***მეტა-ენა*** ეწოდება იგი განსხვავებულია იმ ენისაგან, რომელსაც წარმოადგენს ასაგები ფორმალური თეორია და რომელსაც ***ობიექტი-ენა*** ეწოდება. მეტა-ენაზე

დამტკიცებულ დებულებებს ფორმალური თეორიის შესახებ, მიაკუთენებენ ასაგები ფორმალური თეორიის მეტა-თეორიას. უნდა განვასხვაოთ ერთმანეთისაგან სიტყვები: "დამტკიცება" და "თეორემა" გამოყენებული მეტა-ენაში და სიტყვებისაგან: "დამტკიცება" და "თეორემა" გამოყენებული ფორმალური თეორიის ფორმალურ ენაში.

გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის ძირითადი სიმბოლოები, ანუ ალფაბეტი, შედგება უსასრულო რაოდენობის ცვლადი გამონათქვამებისაგან:

$X, Y, Z, \ldots, X_1, X_2, X_3, \ldots$, ლოგიკური ოპერაციების ოთხი სიმბოლოსაგან: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$

თეორიაში ასევე გამოიყენება დამხმარე სიმბოლოები: (,)-ფრჩხილები.

გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის ფორმულები განისაზღვრება ასე: 1. ცვლადი გამონათქვამი ფორმულაა. 2 თუ U, V, სადაც U, V მეტა-ენის სიმბოლოებია, ფორმულებია, მაშინ: $U \wedge V, U \vee V, U \Rightarrow V, \neg U$ ფორმულებია.

3. არ არსებობს სხვა ფორმულა, გარდა 1 და 2 პირობებით განსაზღვრულისა.

ჩამოვთვალოთ თეორიის აქსიომათა სქემები, რომლებიც მეტა-ენის სიმბოლოების მნიშვნელობათა ცვლით გვაძლევენ უსასრულო რაოდენობის აქსიომების შემცველ სისტემას:

1. $(U \Rightarrow (V \Rightarrow U))$,
2. $((U \Rightarrow (V \Rightarrow W)) \Rightarrow ((U \Rightarrow V) \Rightarrow (U \Rightarrow W)))$,
3. $(U \Rightarrow V) \Rightarrow ((U \Rightarrow W) \Rightarrow (U \Rightarrow (V \wedge W)))$,
4. $((U \wedge V) \Rightarrow U)$,
5. $((U \wedge V) \Rightarrow V$,
6. $((U \Rightarrow W) \Rightarrow ((V \Rightarrow W) \Rightarrow ((U \vee V) \Rightarrow W)))$,
7. $(U \Rightarrow (U \Rightarrow V))$,
8. $(V \Rightarrow (U \vee V))$,
9. $((U \Rightarrow V) \Rightarrow (\neg V \Rightarrow \neg U))$,
10. $\neg\neg U \Rightarrow U$,
11. $U \Rightarrow \neg\neg U$.

გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის ლოგიკური შედეგების გამოყვანის წესს წარმოადგენს გამოცალკევების წესი, ანუ Modus ponens-ი:

$$\frac{\begin{array}{l} U \Rightarrow V, \\ U \end{array}}{\Diamond\ V.}$$

განვიხილოთ ამ ფორმალური თეორიის თეორემის მაგალითები:

I ვაჩვენოთ, რომ ფორმულა$(X \Rightarrow X)$ თეორემაა. განვიხილოთ გამონათქვამთა მიმდევრობა:

1. $((X \Rightarrow (\neg\neg X \Rightarrow X)) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg\neg X) \Rightarrow (X \Rightarrow X)))$, 2 სქემით განსაზღვრული აქსიომა.
2. $(X \Rightarrow (\neg\neg X \Rightarrow X))$, 1 სქემით განსაზღვრული აქსიომა.
3. $((X \Rightarrow \neg\neg X) \Rightarrow (X \Rightarrow X))$, 1 და 2 აქსიომები, Modus ponens-ი.
4. $(X \Rightarrow \neg\neg X)$, 11 სქემით განსაზღვრული აქსიომა.
5. $(X \Rightarrow X)$, 3 და 4 აქსიომები, Modus ponens-ი.

II. ვაჩვენოთ, რომ ფორმულა$((X \wedge Y) \Rightarrow (Y \wedge X))$თეორემაა. განვიხილოთ გამონათქვამთა მიმდევრობა:

1. $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (((X \wedge Y) \Rightarrow X) \Rightarrow ((X \wedge Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow X)))$, 3 სქემით განსაზღვრული აქსიომა.
2. $((X \wedge Y) \Rightarrow Y)$, 5 სქემით განსაზღვრული აქსიომა.
3. $((X \wedge Y) \Rightarrow X) \Rightarrow ((X \wedge Y) \Rightarrow (Y \wedge X))$, 1 და 2 აქსიომები და Modus ponens-ი.
4. $((X \wedge Y) \Rightarrow X)$, 4 სქემით განსაზღვრული აქსიომა.
5. $((X \wedge Y) \Rightarrow (Y \wedge X))$, 3 და 4 აქსიომები და Modus ponens-ი.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ აგებულ გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის ინტერპრეტაციას წარმოადგენს გამონათქვამთა ალგებრა. მაშასადამე, გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის ყოველ თეორემას შეესაბამება თეორემა გამონათქვამთა ალგებრაში.

თეორემა 5.1. გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის ყოველი თეორემა ტავტოლოგიაა.

დამტკიცება: თეორემას დავამტკიცებთ ინდუქციით, გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის თეორემის დამტკიცების სიგრძის მიმართ. ვთქვათ, U თეორემაა $U_1, U_2, ..., U_n$ მისი დამტკიცება. თუ $n = 1$, მაშინ $U = U_1$ და აქედან გამომდინარე U ქსიომაა, ვინაიდან ყოველი აქსიომა გამონათქვამთა ალგებრაში, რომელიც ამ ფორმალური თეორიის ინტერპრეტაციას წარმოადგენს, ტავტოლოგიაა. თუ ყოველი თეორემა, რომლის სიგრძეც n-ის ტოლია, ტავტოლოგიაა, მაშინ ასეთი თეორემის შესაბამისი თეორემა გამონათქვამთა ალგებრაში ტავტოლოგია იქნება. მასზე Modus ponens-ით მოქმედებით ისევ ტავტოლოგიას მივიღებთ. ამ ტავტოლოგიას კი შეესაბამება ასევე ტავტოლოგია მოცემულ ფორმალურ თეორიაში.

Modus ponens-ით მოქმედებით დამტკიცების სიგრძე იზრდება ერთით. მაშასადამე, $n+1$ სიგრძის დამტკიცებებით მიღებული თეორემები ტავტოლოგიები იქნებიან. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 5.2. გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორია არაწინააღმდეგობრივია.

დამტკიცება: გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიის ყოველი თეორემა ტავტოლოგიაა, ამიტომ ასეთი თეორემების შესაბამისი თეორემების უარყოფა თეორემების გამონათქვამთა ალგებრაში, რომელიც ამ ფორმალური თეორიის ინტერპრეტაციას წარმოადგენს, იგივურად მცდარი იქნება, ამიტომ მისი შესაბამისი ფორმულა გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიაში არ იქნება თეორემა. ეს კი ნიშნავს, რომ თეორია არაწინააღმდეგობრივია. თეორემა დამტკიცდა.

გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმალური აქსიომატიკური თეორია მიეკუთვნება ეგრეთწოდებულ I რიგის ფორმალურ თეორიათა კლასს. განვსაზღვროთ, თუ რას უწოდებენ I რიგის ფორმალურ თეორიებს

I ***რიგის ფორმალურ თეორია*** შედგება:

1. I ***რიგის ფორმალურ თეორიის ალფაბეტისაგან,*** რომელიც, თვის მხრივ, შედგება სიმბოლოთა შემდეგი ჯგუფებისაგან:

ა) სიმბოლოები $\{x_1, x_2, ...\}$, რომლებიც აღნიშნავენ ***თეორიის საგნობრივ ცვლადებს,*** ანუ ცვლადებს, რომლებიც ღებულობენ მნიშვნელობას საგანთა სიმრავლეებიდან.

ბ) სიმბოლოები $\{a_1, a_2, ...\}$ თეორიის მუდმივი სიდიდეები ანუ ***საგნობრივი მუდმივები.***

გ) $p_i^n, i = 1,2, ...$ ***პრედიკატული ცვლადები.***

დ) $f_i^n, i = 1,2,...$ *ფუნქციონალური ცვლადები.*

ე) $\Rightarrow, \neg, \forall$ ლოგიკური სიმბოლოები.

ვ) (,◊,) *დამატებითი სიმბოლოები.*

თეორიის მუდმივ სიდიდეთა სიმრავლე შეიძლებაიყოს სასრული უფრო მეტიც ცარიელიც. პრედიკატული ცვლადების სიმრავლე შეიძლება იყოს სასრული, მაგრამ არაცარიელი. ფუნქციონალური ცვლადების სიმრავლე შეიძლება იყოს ცარიელიც.

2. I *რიგის ფორმალური თეორიის ტერმებისაგან:*

ა) ყოველი საგნობრივი ცვლადი და თეორიის მუდმივი სიდიდე წარმოადგენს ტერმს.

ბ) თუ $t_1, t_2, ..., t_n$ წარმოადგენენ ტერმებს, მაშინ $f_i^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ ასევე წარმოადგენს ტერმს, სადაც f_i^n თეორიის ფუნქციონალური ცვლადია, რომლის ზედა ინდექსი განსაზღვრავს, თუ რამდენ ადგილიანია ფუნქციონალური ცვლადი, ხოლო ქვედა ინდექსი განასხვავებს ამ ცვლადებს.

დ) სხვა ტერმები არ არსებობენ.

3. I *რიგის ფორმალური თეორიის ფორმულებისაგან:*

ა) თუ P_i^n თეორიის პრედიკატული ცვლადია, $t_1, t_2, ..., t_n$ წარმოადგენენ ტერმებს, მაშინ $P_i^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ წარმოადგენს თეორიის ფორმულას.

ბ) თუ A და B I რიგის ფორმალური თეორიის ფორმულებია, მაშინ ამ თეორიის ფორმულებს წარმოადგენენ გამოსახულებები: $\neg A, (A \Rightarrow B), \forall x_i A$.

გ) სხვა ფორმულები არ არსებობენ.

აღვნიშნოთ, რომ ფრჩხილების სიმბოლოს ხმარება და დაბმული და თავისუფალი ცვლადების ცნება I რიგის თეორიებში იმავე შინაარსისაა, როგორიც პრედიკატთა ალგებრაში.

ტერმს t ეწოდება *თავისუფალი ტერმი* x_i საგნობრივი ცვლადისათვის A ფორმულაში, თუ x_i ცვლადი მისი ყოველი თავისუფალი შესვლისათვის A ფორმულაში არ შედის t ტერმის ჩაწერაში მონაწილე რომელიმე ცვლადზე გამოყენებული კვანტორების მოქმედების არეში.

მაგალითი: ვთქვათ, $A = \forall x_1 \forall x_2 P_1^3(x_1, x_2, x_3); t = f_1^3(x_1, x_2, x_3)$. აქ მოცემულ ფორმულაში ტერმი t არ არის თავისუფალი x_3 ცვლადის მიმართ, ვინაიდან იგი ფორმულაში მდებარეობს t ტერმის ჩაწერაში მონაწილე x_1, x_2 ცვლადებზე გამოყენებული კვანტორების მოქმედების არეში. x_1, x_2 ცვლადების მიმართ კი t ტერმი თავისუფალია, ვინაიდან ამ ცვლადებს არ გააჩნიათ A ფორმულაში თავისუფალი შესვლა.

მაგალითი: ტერმი $t = x_i$ თავისუფალია x_i ცვლადისათვის ნებისმიერ ფორმულაში.

I რიგის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიების აქსიომები იყოფიან ორ ჯგუფად: *ლოგიკური აქსიომები* და *საკუთარი აქსიომები.* I რიგის თეორიას, რომელსაც საკუთარი აქსიომების ჯგუფი არ გააჩნია, პრედიკატთა აღრიცხვას უწოდებენ. იგი წარმოადგენს პრედიკატთა ალგებრის ფორმალიზაციას, პრედიკატთა სიმბოლოებისა და საგნობრივი მუდმივების შესაბამისი ერთობლიობებით.

ლოგიკურ აქსიომათა სქემები ყოველი I რიგის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიისათვის ერთი და იგივეა.

მაგალითად, ფორმალური აქსიომატიკური თეორიების ნებისმიერი სამი A, D, C ფორმულისათვის, შემდეგი ფორმულები აქსიომებია:

1.$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

2.$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

3.$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$;

4.$\forall x_i A(x_i) \Rightarrow A(t)$, სადაც t თავისუფალი ტერმია x_i ცვლადისათვის $A(x_i)$ ფორმულაში.

5.$\forall x_i (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x_i B)$, სადაც A ისეთი ფორმულაა, რომელსაც არ გააჩნია x_i ცვლადის თავისუფალი შესვლა.

რაც შეეხება საკუთარი აქსიომების ჯგუფს, ის სხვადასხვა შეიძლება იყოს სხვადასხვა თეორიისთვის ან აქსიომათა ასეთი ჯგუფი თეორიას არ გააჩნდეს.

ყოველი I რიგის ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიას გააჩნია ლოგიკური შედეგის გამოყვანის ორი წესი:

ა) modus ponebs

$$\frac{A, \quad A \Rightarrow B}{\Diamond B};$$

ბ) Gen(განზოგადება)

$$\frac{A}{\Diamond \forall x_i A}.$$

მაგალითი: არაცარიელ სიმრავლეს ასოციაციური ბინარული ოპერაციით ნახევარგჯუფს უწოდებენ, ავაგოთ ნახევარჯგუფთა ფორმალური აქსიომატიკური თეორია.

1. თეორიის ალფაბეტი არ შეიცავს საგნობრივ მუდმივებს.
2. თეორიის ალფაბეტი შეიცავს მხოლოდ ერთ პრედიკატულ ცვლადს P_1^2. $P_1^2(x_1, x_2)$ ფორმულა ასე აღვნიშნოთ: $x_1 = x_2$.
3. თეორიის ალფაბეტი შეიცავს მხოლოდ ერთ f_1^2 ფუნქციონალურ ცვლადს. ტერმი $f_1^2(x_1, x_2)$ აღინიშნება ასე: $x_1 \cdot x_2$.

ასაგები თეორიის საკუთარი აქსიომების ჯგუფი შედგება შემდეგი აქსიომებისაგან:

1. $\forall x_i (x_i = x_i), i = 1,2.$;
2. $\forall x_i \forall x_j (x_i = x_j \Rightarrow x_j = x_i)$,
3. $\forall x_i \forall x_j \forall_k (x_i = x_j \Rightarrow (x_j = x_k \Rightarrow x_i = x_k)$,
4. $\forall x_i \forall x_j \forall_k (x_i = x_j \Rightarrow (x_k \cdot x_i = x_k \cdot x_j \wedge x_i \cdot x_k = x_j \cdot x_k))$
5. $\forall x_i \forall x_j \forall_k (x_i \cdot (x_j \cdot x_k) = (x_i \cdot x_j) \cdot x_k)$.

ამ აქსიომებიდან პირველი სამი შედის ყველა იმ I რიგის ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიაში, რომელშიდაც შედის ტოლობის პრედიკატი $P_1^2(x_1, x_2) = x_i = x_i$.

$\wedge$ სიმბოლო თეორიის ალფაბეტში არ შედის, იგი აქ გამოყენებულია კავშირის "და" აღსანიშნავად.

აგებულ ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიას ***ნახევარჯგუფთა ფორმალური აქსიომატიკური თეორია*** ეწოდება. ცხადია, იგი I რიგის ფორმალურ

აქსიომატიკურ თეორიას წარმოადგენს. ყველა ნახევარჯგუფი ამ ფორმალური თეორიის მოდელს წარმოადგენს.

ავაგოთ ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი I რიგის ფორმალური აქსიომატიკური თეორიისა, რომელსაც ფორმალური არითმეტიკა ეწოდება. ამ თეორიას S სიმბოლოთი აღნიშნავენ. იგი შედგება:

ა) საგნობრივი ცვლადებისაგან: $x, x' x_1, x_2, \ldots$

ბ) ერთი პრედიკატული სიმბოლოსაგან P_1^2-ტოლობის პრედიკატისაგან, რომელიც აღინიშნება სიმბოლოთი $=$.

გ) a_1 საგნობრივი მუდმისისაგან, რომელიც აღინიშნება სიმბოლოთი 0

დ) სამი ფუნქციონალური სიმბოლოსაგან:რომელთაგან ერთი f_1^1 ერთადგილიანია, დანარჩენი ორი: f_1^2, f_2^2 ორადგილიანი, რომლებსაც, შესაბამისად, აღვნიშნავთ სიმბოლოებით: $t', t+s, t\cdot s$, სადაც t, s S თეორიის ნებისმიერი ტერმია.

ე) S თეორიის საკუთარი აქსიომებისაგან:

1. $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$;
2. $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2'$;
3. $x' \neq_1 0$;
4. $x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2$;
5. $x_1 + 0 = x_1$;
6. $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$;
7. $x_1 \cdot 0 = 0$;
8. $x_1 \cdot x_2' = (x_1 + x_2) + x_1$;
9. $\alpha(0) \Rightarrow (\forall x(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x')) \Rightarrow \forall x \alpha(x))$, სადაც $\alpha(x) \in S$

აქსიომები $1-8$ S თეორიის კონკრეტულ აქსიომებს წარმოადგენენ, ხოლო ბოლო მე-9- აქსიომა აქსიომათა სქემას წარმოადგენს და მას ***ინდუქციის აქსიომა*** ეწოდება. ინდუქციის აქსიომისა და ლოგიკური შედეგის გამოყვანის ცნობილი წესის- Modus ponens-ის კომბინაციით მიიღება ახალი ლოგიკური შედეგის გამოყვანის წესი, რომელსაც ***ინდუქციის წესს*** უწოდებენ:

$$\frac{\alpha(0), \quad \forall x(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x'))}{\Diamond \ \forall x \alpha(x)}.$$

ვაჩვენოთ, რომ ყოველ I რიგის აქსიომატიკურ თეორიაში არსებობს ეგრეთ წოდებული შემდეგი ***ინდივიდუალიზაციის წესი.***

თეორემა 53. თუ t ტერმი I რიგის ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიაში თავისუფალია x ცვლადის მიმართ $\alpha(x)$ ფორმულაში, მაშინ $\Diamond \forall x \alpha(x) \Diamond \alpha(t)$.

დამტკიცება: თუ გამოვიყენებთ, ლოგიკური შედეგის გამოყვანის წესს- Modus ponens-ს, გვექნება:

$$\frac{\forall x \alpha(x), \quad \forall x(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(t))}{\Diamond \ \forall x \alpha(t)}.$$

ფორმულათა ეს მიმდევრობა წარმოადგენს $\alpha(t)$ ფორმულის გამოყვანას $\forall x \alpha(x)$

ჰიპოთეზიდან. თეორემა დამტკიცდა.

თუ ფორმულა რაიმე ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიაში აქსიომაა ან მტკიცდება რომელიმე ამ თეორიაში დაფიქსირებული ლოგიკური შედეგის გამოყვანის წესის გამოყენებით, მაშინ ასეთ ფორმულას ***გამოყვანადი ფორმულა*** ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ფორმულას ეწოდება ***გამოუყვანადი ფორმულა.***

თეორემა 5.4. S თეორიაში $t = r \Rightarrow t' = r'$ ფორმულა, სადაც t, r ამ თეორიის ნებისმიერი ტერმებია, გამოყვანადია.

დამტკიცება: განვიხილოთ მიმდევრობა:

1. $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2'$;
2. $\forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2')$;
3. $\forall x_1 x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2')$;
4. $\forall x_2 (t = x_2 \Rightarrow t' = x_2')$;
5. $t = r \Rightarrow t' = r'$,

სადაც პირველი ფორმულა აქსიომაა S თეორიაში, მე-2 ფორმულიდან მე-3 ფორმულა და მე-3-ე ფორმულიდან მე-4-ე ფორმულა გამოიყვანება ლოგიკური შედეგის გამოყვანის განზოგადოების(Gen) წესით, რომელიც დაფიქსირებულია ნებისმიერ პირველი რიგის ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიაში. მე-4 ფორმულა მიიღება მე-3 ფორმულიდან, მე-5 ფორმულა კი მე-4 ფორმულიდან ინდივიდუალიზაციის წესით. თეორემა დამტკიცდა.

ფორმულას I რიგის ფორმალური აქსიომატიკურ თეორიაში ეწოდება ჩაკეტილი ფორმულა, თუ იგი არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადებს.

თუ ჩაკეტილი ფორმულა α და მისი უარყოფა $\neg\alpha$ I რიგის ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიაში ამ თეორიის გამოუყვანადი ფორმულებია, მაშინ α ფორმულას ***გადაუჭრელი წინადადება*** ეწოდება.

მტკიცდება მნიშვნელოვანი თეორემა:

თეორემა 5.4 (გიოდელის თეორემა). თუ ფორმალური არითმეტიკა S არაწინააღმდეგობრივი, ფორმალური აქსიომატიკური თეორიაა, მაშინ მასში არსებობს ერთი მაინც გადაუჭრელი წინადადება.

გიოდელის თეორემა ამტკიცებს, რომ ფორმალური აქსიომატიკური თეორიების, რომლებიც მოიცავენ ფორმალურ არითმეტიკას, არაწინააღმდეგობრივობის დამტკიცება შეუძლებელია კონსტრუქციული მეთოდებით, რომლებიც ფორმალიზირებულია თვითონ ამ თეორიაში.

აქედან გამომდინარე, არაწინააღმდეგობრივობის ადამტკიცება კლასიკური მათემატიკური თეორიებიებისთვის, რომელთა უმრავლესობისთვის არაწინააღმდეგობრივობის დამტკიცების საკითხი დაიყვანება ნატურალურ რიცხვთა ფორმალური არითმეტიკის დამტკიცებამდე, შეუძლებელია.

თავიVII

ალგორითმთა თეორიის ელემენტები

§6. ალგორითმის ინტუიციური ცნება და მისი დაზუსტების პრობლემები

მათემატიკის განვითარების დროის განმაელობაში წარმოიშვა ბევრი გამოთვლითი პროცესი, რომელთაც სუფთად მექანიკური ხასიათი აქვთ და არ საჭიროებენ რაიმე გონებრივ აქტივობას. ასეთი გამოთვლითი პროცესის საშუალებით საძიებელი სიდიდემიიღება თანმიმდევრული მოქმედებებით საწყისი სიდიდიდან, გარკვეული, დადგენილი, წესების და ინსტრუქციების მიხედვით. ასეთმა გამოთვლითმა პროცესებმა მოგვიანებით მიიღეს სახელწოდება- "*ალგორითმი*".

ალგორითმი XX საუკუნის 30-იან წლებამდე რჩებოდა ინტუიციურ ცნებად, ვერ ხერხდებოდა ამ ცნების ფორმალიზაცია, ანუ მისი წარმოდგენა ლოგიკურ საფუძველზე დამყარებული მათემატიკური ცნებებისა და მიმართებების საშუალებით.

ჩვენ მრავალი სახის ალგორითმს ვიცნობთ მაგალითად: ერთი ნატურალური რიცხვის მეორეზე გაყოფის ალგორითმი, ნატურალური რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღების ალგორითმი, ორი მთელი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის ალგორითმი, რომელსაც ევკლიდეს ალგორითმს უწოდებენ და სხვა.

მოვიყვანოთ ის საერთო თვისებები, რომლებიც გააჩნიათ ჩამოთვლილ ალგორითმებს და რომლებიც დამახასიათებელია ალგორითმის ცნებისათვის საერთოდ.

1. ***ალგორითმის დისკრეტულობა.*** ალგორითმი აღწერს მონაცემთა აგების თანმიმდევრულ პროცესს, რომელიც მიმდინარეობს დისკრეტულ დროში, ანუ გამოთვლითი პროცესისთვის აუცილებელი დრო დაყოფილია მცირე მონაკვეთებად- **ტაქტებად** ისეთნაირად, რომ პირველი ტაქტის დასაწყისში მოიცემა საწყის მონაცემთა სასრული სისტემა, ხოლო ყოველი ტაქტის ბოლოს მონაცემთა სისტემა მიიღება ტაქტის დასაწყისში მოცემულ მონაცემთა სისტემიდან.

2. ***ალგორითმის დეტერმინირებულობა(დადგენილობა).*** ყოველ ტაქტში ამ ტაქტის დასაწყისში მოცემულ მონაცემთა სისტემის გარდაქმნა ხდება ცალსახად დადგენილი კანონით(პროგრამით).

3. ***ალგორითმის ბიჯის ელემენტარულობა.*** ყოველ ტაქტში მონაცემთა გარდაქმნის კანონი უნდა იყოს მარტივი და ლოკალური.

4. ***ალგორითმის ორიენტირებულობა.*** თუ რომელიმე ტაქტში მონაცემთა წინა სისტემიდან მონაცემთა მომდევნო სისტემის მიღების წესი არ იძლევა შედეგს, მაშინ ზუსტად უნდა იყოს მითითებული, თუ რა შეიძლება ჩაითვალოს მოცემული ალგორითმის შედეგად.

5. ***ალგორითმის საყოველთაობა.*** საწყისი მონაცემთა სისტემა შეიძლება აღებულ იქნას რომელიმე პოტენციალურად უსასრულო სიმრავლიდან.

თუ ალგორითმის ცნებას შემოვიტანთ ამ ჩამოთვლილი ოთხი თვისების საფუძველზე, იგი, ცხადია არ იქნება ზუსტი, ვინაიდან ამ თვისებების ფორმულირებისას ჩვენ მიერ გამოყენებული სიტყვების: "მონაცემები", "მარტივი", "ლოკალური", "წესი" ზუსტი აზრი დადგენილი არაა.

შემდგომ, როდესაც ვილაპარაკებთ ალგორითმის ინტუიციურ ცნებაზე, მხედველობაში გვექნება ამ ოთხი თვისების საფუძველზე განსაზღვრული ცნება.

ალგორითმის ინტუიციური ცნება დიდი ხნის მანძილზე აკმაყოფილებდა მათემატიკოსებს. ალგორითმის ინტუიციური ცნება საკმარისია სხვადასხვა გამოთვლითი პროცესებისთვის საჭირო ალგორითმების აგებისათვის ანუ ისეთი

ამოცანების გადასაჭრელად, როდესაც საჭიროა ვაჩვენოთ გამოთვლითი პროცესის შესაბამისი ალგორითმის არსებობა. ამ ამოცანის გადაჭრა კი ხდება ალგორითმის უშუალო აგებით. დიამეტრალურად საპირისპირო მდგომარეობაა, როდესაც გვსურს, ვაჩვენოთ სიდიდეთა გამოთვლის ალგორითმების არარსებობა. ამ შემთხვევაში ალგორითმის ცნების მკაცრი განსაზღვრის აუცილებლობა აშკარაა, ვინაიდან საჭიროა ზუსტი ცოდნა იმისა, რის არარსებობასაც ვამტკიცებთ.

ამგვარად, ალგორითმის ცნების დაზუსტების საჭიროებამ აქტუალურობა შეიძინა და მიიპყრო ბევრი მათემატიკოსის ყურადღება. გამოიკვეთა ალგორითმის ცნების დაზუსტების რამდენიმე მიმართულება. ერთი მიმართულების საფუძველი გახდა რეკურსიულ ფუნქციათა თეორია, მეორის საფუძველი გახდა ***ტიურინგისა*** და ***პოსტის მანქანათა*** ცნება, მესამე მიმართულების საფუძველი კი- ***მარკოვის ნორმალური ალგორითმის*** ცნება.

ალგორითმებთან დაკავშირებული პრობლემების განხილვისას, ჩვეულებრივ, ლაპარაკია რაიმე მთელი არგუმენტის ფუნქციის მთელი მნიშვნელობების გამოთვლის ალგორითმის არსებობაზე. ასეთი ფუნქციებია, მაგალითად: ორი მთელი რიცხვის ჯამი, ორი მთელი რიცხვის ნამრავლი, ორი მთელი რიცხვის განაყოფის მთელი ნაწილი და სხვა. მთელ რიცხვებზე დამოკიდებული მთელი მნიშვნელობის ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოსათვლელი ალგორითმების მნიშვნელობა ჩამოთვლილი მაგალითებით არ ამოიწურება, ასეთი ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლაზე დაიყვანება არა ერთი უფრო ზოგადი პრობლემა. მაგალითად: ისეთი ფუნქციის გამოთვლა, რომელიც განსაზღვრულია ნებისმიერ თვლად რიცხვით სიმრავლეზე და რომელიც მნიშვნელობას ღებულობს ასევე თვლად რიცხვით სიმრავლეში, შეიძლება დაყვანილ იქნას მთელი არგუმენტის ფუნქციის მთელი მნიშვნელობების გამოთვლაზე თვლადი სიმრავლეების მთელი რიცხვებით გადანომვრით. ასეთი გადანომვრით ოპერაციები თვლადი სიმრავლის ელემენტებზე დაიყვანება მთელი რიცხვით წარმოდგენილ შესაბამის ნომრებზე.

მათემატიკაში ასევე განიხილება კონტინუალურ სიმრავლეებზე განსაზღვრული ფუნქციები. ამასთან, პრაქტიკაში ყველა სიდიდე იზომება მხოლოდ მიახლოებით. სიდიდის ნულოვანი ცდომილებით განსაზღვრა შესაძლებელია მხოლოდ უსასრულოდ დიდი ენერგიის დახარჯვით რაც შეუძლებელია. ამგვარად, პრაქტიკაში ყოველთვის არსებობს ეგრეთ წოდებული "განსხვავებულობის ზღურბლი", რის საფუძველზეც გაზომვის შედეგების სიმრავლე შეიძლება ჩავთვალოთ თვლადად. ამ ფაქტის გამო, გადანომვრის მეთოდის გამოყენებით, ყოველი პრაქტიკული მნიშვნელობის ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლის ალგორითმი დაიყვანება მთელი არგუმენტების ფუნქციის მთელი მნიშვნელობების გამოთვლის ალგორითმზე.

ამგვარად, მთელი არგუმენტების ფუნქციის მთელი მნიშვნელობების გამოთვლის ალგორითმები ხასიათდებიან საკმარისი უნივერსალობით.

თუ არსებობს მთელი არგუმენტების ფუნქციის მთელი მნიშვნელობების გამოთვლის ალგორითმი, მაშინ ასეთ ფუნქციას ***გამოთვლადი ფუნქცია*** ეწოდება. რადგან ალგორითმის ცნება ინტუიციურია, გამოთვლადი ფუნქციის ცნებაც ინტუიციური იქნება.

ფუნქციები, რომლებიც განსაზღვრული არ არიან მათი არგუმენტების ყველა მნიშვნელობისათვის ***ნაწილობრივად განსაზღვრულ*** ფუნქციებად იწოდებიან. აღმოჩნდა, რომ ყველა ნაწილობრივად განსაზღვრული, გამოთვლადი ფუნქცია მიეკუთვნება ეგრეთ წოდებულ ***ნაწილობრივად რეკურსიულ*** ფუნქციათა კლასს. ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციები განისაზღვრება მკაცრ მათემატიკურ საფუძველზე. მათემატიკოსმა კლინმა წამოაყენა ჰიპოთეზა, რომ ნაწილობრივად განსაზღვრულ, გამოთვლად ფუნქციათა კლასი ემთხვევა ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასს. უფრო ადრე ანალოგიური ჰიპოთეზა ყველგან

განსაზღვრული გამოთვლადი ფუნქციებისათვის წამოაყენა მათემატიკოსმა ჩერჩმა. ამ ჰიპოთეზებს ჩვეულებრივად აერთიანებენ და მოიხსენიებენ ***ჩერჩის თეზისის*** სახელით. ჩერჩის თეზისი შეიცავს გამოთვლადი ფუნქციის ინტუიციურ ცნებას და ამის გამო მისი დამტკიცება შეუძლებელია. მაგრამ იგი საკმარისია იმისათვის, რომ მივცეთ აუცილებელი სიმკაცრე ალგორითმის ცნებასთან დაკავშირებული პრობლემების ფორმულირებას.

ამის მიზეზი ისაა, რომ ჩერჩის თეზისის ძალით, ფუნქციის გამოთვლადობის საკითხი ტოლძალოვანია მისი ნაწილობრივად რეკურსიულობისა. აქედან გამომდინარე, რადგან ნაწილობრივად რეკურსიულობა მკაცრი მათემატიკური ცნებაა, ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ, თუ ფუნქცია არ არის ნაწილობრივად რეკურსიული მისი გამოსათვლელი ალგორითმი არ არსებობს.

ჩერჩის თეზისი და და ნაწილობრივ რეკურსიულ ფუნქციათა კლასის ზუსტი აღწერა გვაძლევს ალგორითმის ცნების დაზუსტების ამოცანის გადაჭრის ერთ-ერთ შესაძლებლობას. აღნიშნული ამოცანის გადაჭრის მეორე გზა ნაპოვნი იქნა მატემატიკოსების ჩერჩია და ტიურინგის მიერ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამ გზის არსი ის არის, რომ ალგორითმით აღწერილი პროცესები შეიძლება განახორციელოს შესაბამისმა მანქანამ. ტიურინგმა და პოსტმა ზუსტ მათემატიკურ ტერმინებში აღწერეს მანქანათა კლასები, რომლებზედაც შეიძლება განხორციელებული ან იმიტირებული იქნას ყველა ის ალგორითმული პროცესი, რომლებიც ოდესმე აღწერილი იყო მათემატიკოსების მიერ. ასეთ მანქანებს ***ტიურინგის მანქანებს*** უწოდებენ. კვლევებმა აჩვენეს, რომ ამ მანქანების საშუალებით გამოთვლად ფუნქციათა კლასი ზუსტად ემთხვევა ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასს.

ალგორითმის ცნების დაზუსტების ერთ-ერთ გზას ასევე გვაძლევს მარკოვის ნორმალური ალგორითმის ცნება. მარკოვის ალგორითმში გამოთვლითი პროცესის საწყისი მონაცემები ჩაიწერება დაფიქსირებული ალფაბეტისაგან შედგენილი სიტყვების(ალფაბეტის სიმბოლოების სასრული მიმდევრობების) სახით.

გამოთვლითი პროცესი დაიყვანება აღნიშნული სიტყვების გარდაქმნაზე გარკვეული პროგრამის შესაბამისად. აღმოჩნდა, რომ ნორმალური ალგორითმების საშუალებით გამოთვლადი ფუნქციების კლასი ემთხვევა ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასს.

ამგვარად, ალგორითმის ცნების დაზუსტების ყველა გზას მივყავართ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის ცნებასთან.

ეს ხაზს უსვამს ალგორითმის ცნების დაზუსტების გზების ეკვივალენტურობას.

§7 რეკურსიულ ფუნქციათა თეორიის ელემენტები

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $f: X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y$, სადაც X_i და Y რიცხვითი სიმრავლეებია, როგორც ვიცით ასეთ ფუნქციებს მრავალი ცვლადის ფუნქციები ეწოდება. თუ $n=1$, მაშინ საქმე გვაქვს ერთი ცვლადის ფუნქციასთან, თუ $n=2$, მაშინ ფუნქციას ორი ცვლადის ფუნქცია ეწოდება და ასე შემდეგ.

ვთქვათ, $X_i = N, i = 1,2,...,n$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

ნაწილობრივად განსაზღვრულ ფუნქციას $f: \underbrace{N \times N \times .... \times N}_{k} \to N$ ***k- ადგილიანი ნაწილობრივად განსაზღვრული ფუნქცია*** ეწოდება.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციებს:

1. $s(x)=x+1$.
2. $C_a^n(x_1,x_2,...,x_n)=a$.
3. $I_m^n(x_1,x_2,...,x_n)=x_m; 1\le m\le n, n=1,2,...$

უმარტივეს ფუნქციებს უწოდებენ.

ამ ფუნქციებიდან პირველს *მომდევნო ნატურალურ რიცხვზე გადასვლის ფუნქცია* ეწოდება, მეორე ფუნქციას- *მუდმივი ფუნქცია,* მესამე ფუნქციას- *იგივური ფუნქცია.*

განვიხილოთ ფუნქციათა გარდაქმნის სხვადასხვა ხერი, რომლებსაც *ოპერატორებს* უწოდებენ:

ჩასმის(სუპერპოზიციის) ოპერატორი

ვთქვათ, მოცემულია n რაოდენობის m- ადგილიანი ნაწილობრივად განსაზღვრული ფუნქცია: $f_1(x_1,x_2,...,x_m), f_2(x_1,x_2,...,x_m),..., f_n(x_1,x_2,...,x_m)$, რომელთა განსაზღვრის არეა A სიმრავლე, მნიშვნელობათა არე კი B სიმრავლე და n - ადგილიანი ნაწილობრივად განსაზღვრული ფუნქცია f განსაზღვრის არით B და მნიშვნელობათა არით C.

განვსაზღვროთ ნაწილობრივად განსაზღვრული m ადგილიანი ფუნქცია $g:B\to C$ შემდეგი ფორმულით:

$$g(x_1,x_2,...,x_m)=f(f_1(x_1,x_2,...,x_m), f_2(x_1,x_2,...,x_m),..., f_n(x_1,x_2,...,x_m)).$$

გარდაქმნას, რომლითაც $f,f_1,f_2,...,f_n$ ფუნქციებიდან g ფუნქცია მიიღება, ჩასმის ანუ სუპერპოზიციის ოპერატორი ეწოდება. ეს ოპერატორი აღინიშნება ასე: S^{n+1}.

ჩასმის ოპერატორი განისაზღვრება ერთი და იგივე ადგილიანი $f_1,f_2,...,f_n$ ფუნქციებისთვის, როდესაც საჭიროა ჩასმის ოპერატორის გამოყენება სხვადასხვა ადგილიან ნაწილობრივად განსაზღვრულ ფუნქციებზე, ამ დროს წარმოქმნილი სიძნელე შეიძლება გადავლახოთ იგივური ფუნქციის საშუალებით დამატებითი ცვლადების შემოყვანით. მაგალითად: ორადგილიანი(ორი ცვლადის) ფუნქცია $\varphi(x_1,x_2)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ სამი ცვლადის ფუნქციის სახით, სადაც მესამე ცვლადი ფიქტიურია: $\varphi(x_1,x_2)=\phi(x_1,x_2,x_3)=\varphi(I_1^3(x_1,x_2,x_3), I_2^3(x_1,x_2,x_3))$.

თუ F^n-ით აღვნიშნავთ n- ადგილიანი ნაწილობრივად განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლეს, F^m-ით კი m- ადგილიანი ნაწილობრივად განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლეს, მაშინ S^{n+1} ყველგან განსაზღვრული ასახვაა $F^n\times\underbrace{F^m\times F^m\times...\times F^m}_{n}$ სიმრავლიდან F^m სიმრავლეში. თუ F იქნება ნებისმიერ ადგილიან ნაწილობრივად განსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლე, მაშინ S^{n+1} ოპერატორი იქნება ასახვა F^{n+1} სიმრავლიდან F სიმრავლეში.

პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორი

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვითი, ნაწილობრივდ განსაზღვრული n-ადგილიანი და $(n+2)$- ადგილიანი ფუნქციები: $g(x_1,x_2,...,x_n)$, $h(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1},x_{n+2})$. განვსაზღვროთ $n+1$ ადგილიანი $f(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1})$ ფუნქცია, ეგრეთ წოდებული პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორით შემდეგნაირად:

$$f(x_1,x_2,...,x_n,0)=g(x_1,x_2,...,x_n),$$

$$f(x_1,x_2,...,x_n,y+1)=h(x_1,x_2,...,x_n,y,f(x_1,x_2,...,x_n,y))$$

პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორი აღინიშნება ასე: R, გვაქვს $R(g,h)=f$ როგორც ვხედავთ, პრომიტიული რეკურსიის ოპერატორს რეკურენტული ხასიათი აქვს, ვიპოვოთ თანმიმდევრობით f ფუნქციის მნიშვნელობანი:

$$f(x_1,x_2,...,x_n,0)=g(x_1,x_2,...,x_n),$$
$$f(x_1,x_2,...,x_n,1)=h(x_1,x_2,...,x_n,0,g(x_1,x_2,...,x_n)),$$
$$-----------------------------$$
$$f(x_1,x_2,...,x_n,m+1)=h(x_1,x_2,...,x_n,m,f(x_1,x_2,...,x_nm)),$$

პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორით $(n+1)$- ადგილიანი f ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება n- ადგილიანი და $(n+2)$- ადგილიანი ნაწილობრივად განსაზღვრული $g(x_1,x_2,..,x_n)$, $h(x_1,x_2,..,x_n,x_{n+1},x_{n+2})$ ფუნქციებიდან.

თუ რიცხვთა რაიმე კრებულისთვის $x_1,x_2,...,x_n,y$ არ განისაზღვრება $f(x_1,x_2,...,x_n,y)$ მნიშვნელობა, მაშინ რიცხვთა ყოველი $x_1,x_2,...,x_n,y+k,k=1,2,3,...$ კრებულისთვისაც არ განისაზღვრება $f(x_1,x_2,...,x_n,y+k),k=1,2,3,...$ მნისვნელობანი.

თუ g, h ფუნქციები ყველგან განსაზღვრულია, მაშინ ყველგან განსაზღვრული იქნება f ფუნქციაც.

მაგალითი: ვთქვათ, $g=0$, $h(x,y)=2x+y$. პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორის გამოყენებით ავაგოთ ერთადგილიანი ფუნქცია $f(x)\geq 0,x\geq 0$

$$f(0)=g=0,$$
$$f(1)=h(0,0)=0,$$
$$f(2)=h(1,f(1))=2\cdot 1=2,$$
$$f(3)=h(2,f(2))=2\cdot 2+2=6,$$
$$f(4)=h(3,f(3))=3\cdot 2+2\cdot 2+2=12,$$
$$-------------------$$
$$f(x+1)=2x+2(x-1)+2(x-2)+...+2\cdot 2+2=2\frac{x+1}{2}x.$$

მაშასადამე, $f(x+1)=x(x+1)$ ფუნქცია მიიღება $g=0$, $h(x,y)=2x+y$ ფუნქციებისაგან პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორის გამოყენებით.

მაგალითი: ვთქვათ, $g=0$, $h(x,y)=x-2y$. პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორის გამოყენებით ავაგოთ ერთადგილიანი ფუნქცია $f(x)\geq 0,x\geq 0$.

$$f(0)=g=0,$$
$$f(1)=h(0,0)=0,$$
$$f(2)=h(1,f(1))=1-0=1,$$
$$f(3)=h(2,f(2))=2-2=0,$$
$$f(4)=h(3,f(3))=3-2\cdot 0=3,$$
$$f(5)=h(4,f(4))=4-2\cdot 3=-2.$$

როგორც ვხედავთ, $f(5)$ არ განისაზღვრება, აქედან გამომდინარე, აგრეთვე არ განისაზღვრება $f(x),x\geq 5$.

მინიმიზაციის ოპერატორი

განვიხილოთ რაიმე n- ადგილიანი f ფუნქცია, სადა $n\geq 1$. დავუშვათ, არსებობს ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლის ალგორითმი ფუნქციის განსაზღვრის არის ნებისმიერ წერტილში. დავაფიქსიროთ $x_1,x_2,...,x_{n1}$ არგუმენტების მნიშვნელობანი და განვიხილოთ განტოლება:

$$f(x_1,x_2,...,x_{n-1},y)=x_n.$$

რადგან არსებობს ალგორითმი $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},y)$ ცმნიშენელობის გამოთელისა y ცელადის ყოეელი $y=0,1,2,...$ მნიშენელობისათვის, ამიტომ შეიძლება მოეძებნოთ(თუ ის არსებობს) a რიცხეი, რომელისთეისაც ადგილი ექნება ტოლობას: $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},a)=x_n$. ასეთ რიცხეებს შორის უმცირესი აღენიშნოთ ასე:

$$\mu_y(f(x_1,x_2,...,x_{n-1},y)=x_n).$$

a სიდიდის პოენა არ იძლეეა შედეგს, თუ:

1. $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},0)$ მნიშენელობა არ არსებობს.

2. მნიშენელობანი $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},0)$, $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},1)$,..., $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},k)$ განსაზღერულია, მაგრამ განსხეაეებულია x_n რიცხეისაგან, ხოლო მნიშენელობა $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},k+1)$ არ არსებობს.

3. მნიშენელობანი $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},0)$, $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},1)$,..., $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},k)$,... ყოეელი k რიცხეისათეის არსებობენ, მაგრამ განსხეაეებულია x_n რიცხეისაგან.

ყეელა ჩამოთელილ შემთხეევაში $\mu_y(f(x_1,x_2,...,x_{n-1},y)=x_n)$ სიდიდე არ განისაზღერება.

სიდიდე μ_y წარმოადგენს $x_1,x_2,...,x_n$ ცელადების ფუნქციას. ეს ფუნქცია აღინიშნება ასე: Mf. აქ M აღნიშნავს ეგრეთ წოდებულ მინიმიზაციის ოპერატორს, რომელიც f ფუნქციას შეუსაბამებს Mf ფუნქციას.

მაგალითი: ეთქეათ, $f(x)=2^x$, ვიპოეოთ Mf.

$Mf(x)=\mu_y(f(y)=x)=\mu_y(2^y=x)$. თუ $2^y=x$, მაშინ $y=\log_2^x$. თუ $x=1$, მაშინ $y=0$ და $\mu_y(f(y)=1)=0$ ამიტომ $Mf(1)=0$. თუ $x=2$, მაშინ $y=1$ და $\mu_y(f(y)=2)=1$ ამიტომ $Mf(2)=1$. Mf ფუნქციის მნიშენელობანი, როდესაც $x=0$ და $x=3$, განსაზღერულ არაა.

მაგალითი: ეთქეათ, $f(x_1,x_2)=x_2-x_1$. ვიპოეოთ Mf.

$\mu_y(f(x_1,y)=x_2)=\mu_y(y-x_1=x_2)$. თუ $y-x_1=x_2$, მაშინ $y=x_1+x_2$. და თითქოს $Mf(x_1,x_2)=x_1+x_2$, როდესაც $x_2\geq x_1$. მაგრამ $f(x_1,0)$ არც ერთი x_1 მნიშენელობისათეის არ არის განსაზღერული, ამიტომ Mf არ იქნება განსაზღერული.

თუ ფუნქცია $f(x)$ ერთადგილიანია, მაშინ Mf იქნება მოცემულის შებრუნებული ფუნქცია: $Mf(y)=f^{-1}(x)$.

პრიმიტიულ-რეკურსიული ფუნქციები

f ფუნქციას ეწოდება ***პრიმიტიულ-რეკურსიული ფუნქცია***, თუ იგი ან ერთერთი უმარტიეესი s,C_0^1,I_m^n ფუნქციაა, ან მიიღება ამ ფუნქციებიდან ჩასმისა და პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორების სასრული რაოდენობის გამოყენებით.

ჩასმისა და პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორების ყეელგან განსაზღერულ ფუნქციებზე მოქმედებებით ასევე ყეელგან განსაზღერული ფუნქციები მიიღება. უმარტიეესი ფუნქციები ყეელგან განსაზღერულია, ამიტომ პრიმიტიულ-რეკურსიული ფუნქციები ყეელგან განსაზღერულია.

მაგალითი: ვაჩვენოთ, რომ n- ადგილიანი მუდმივი ფუნქცია პრიმიტიულ-რეკურსულია. მართლაც $C_a^n(x_1,x_2,...,x_n)=s(s(...s(C_0^1(I_1^n(x_1,x_2,...,x_n)))...))$, სადაც $s(x)=x+1$. რადგან C_a^n პრიმიტიულ-რეკურსიული ფუნქციების სუპერპოზიციით მიიღება, იგიც პრიმიტიულად რეკურსიული იქნება.

მაგალითი: $f(x,y)=x+y$ პრიმიტიულ-რეკურსიული ფუნქციაა.
მართლაც, $f(x,0)=x=I_1^1(x), f(x,y+1)=s(f(x,y)=h(x,y,f(x,y))$, სადაც
$h(x,y,z)=s(z)$. $f(x,y)=x+y=h(x,y-1,f(x,y-1))=s(f(x,y-1))=s(x+y-1)$.

ნაწილობრივა-რეკურსიული ფუნქციები

f ფუნქციას ეწოდება ***ნაწილობრივ-რეკურსიული ფუნქცია***, თუ იგი მიიღება s, C_0^1, I_m^n ფუნქციებიდან ჩასმის, პრიმიტიული რეკურსიის და მინიმიზაციის ოპერატორების სასრული რაოდენობის გამოყენებით.

ცხადია, ნაწილობრივ-რეკურსიული ფუნქცია ყველგან განსაზღვრული შეიძლება არ იყოს.

ადგილი აქვს ფაქტებს:

ყოველი პრიმიტიულ-რეკურსიული ფუნქცია ნაწილობრივად რეკურსიულია.

ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციათა კლასი ფართოა პრიმიტიულ-რეკურსიულ ფუნქციათა კლასზე.

მაგალითი: ნაწილობრივად განსაზღვრული ფუნქცია $f(x,y)=x-y$ ნაწილობრივ-რეკურსიულია, მართლაც $f(x,y)=\mu_z(y+z=x)$. ეს კინიშნავს, რომ $f(x,y)=x-y$ ფუნქცია მიიღება $f(y,z)=y+z$ ფუნქციისაგან მინიმიზაციის ოპერატორის მოქმედებით. $f(y,z)=y+z$ ფუნქცია კი, როგორც ვნახეთ, პრიმიტიულ-რეკურსიულია.

მაგალითი: $\frac{x}{y}$ ნაწილობრივ-რეკურსიულია. მართლაც, $\frac{x}{y}=\mu_z(yz=x)$ და $f(y,z)=yz$ ფუნქცია მიიღება $g=0, h(y,z,t)=ys(z)$ ფუნქციებიდან პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორით: $f(y,0)=0$, $f(y,1)=h(y,0,0)=ys(0)=y\cdot 1$,
$f(y,2)=h(y,1,y)=ys(1)=y\cdot 2$ $f(y,z)=h(y,z-1,f(y,z-1))=ys(z-1)=y\cdot z$.

ზოგად-რეკურსიული ფუნქციები

სუსტი მინიმიზაციის ოპერატორი ეწოდება ოპერატორს M', რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$M'f=Mf$, თუ ფუნქცია Mf ყველგან განსაზღვრულია და არაა განსაზღვრული, ანუ არ არსებობს, თუ Mf ყველგან არაა განსაზღვრული.

ფუნქციას, რომელიც მიიღება s, C_0^1, I_m^n ფუნქციებისაგან სასრული რაოდენობის სუპერპოზიციის, პრიმიტიული რეკურსიის და სუსტი მინიმიზაციის ოპერატორების მოქმედებით ***ზოგად-რეკურსიული ფუნქცია*** ეწოდება.

ცხადია, ზოგად-რეკურსიული ფუნქცია ყველგანაა განსაზღვრული.

ზოგად-რეკურსიული ფუნქცია ნაწილობრივ-რეკურსიულია. ყველგან განსაზღვრული ნაწილობრივ-რეკურსიული ფუნქცია ზოგად-რეკურსიულია.

სავარჯიშოები:

1. როგორი ფუნქციები შეიძლება მივიღოთ $C_0^n(x)=0, s(x)=x+1$ ფუნქციებიდან სუპერპოზიციის ოპერატორის მრავალჯერადი მოქმედებით.
2. როგორი ფუნქციები შეიძლება მივიღოთ $s(x)=x+1$, $I_m^n(x_1,x_2,...,x_n)=x_m; 1\le m\le n, n=1,2,...,m$ ფუნქციებზე სუპერპოზიციის ოპერატორის მრავალჯერადი მოქმედებით.
3. როგორი ფუნქციები შეიძლება მივიღოთ $C_0^n(x)=0$, $I_m^n(x_1,x_2,...,x_n)=x_m; 1\le m\le n, n=1,2,...,m$ ფუნქციებზე სუპერპოზიციის ოპერატორის მრავალჯერადი მოქმედებით.

4. დაამტკიცეთ, რომ $f(x,y)=xy, f(x,y)=x^y, f(x)=x!$ ფუნქციები პრიმიტიულად რეკურსიულია.

5. დაამტკიცეთ, რომ $x:y=\mu_z(yz=x)$. ნიშნავს თუ არა ეს ფაქტი $f(x,y)=x:y$ ფუნქციის ნაწილობრიეად რეკურსიულობას? პრიმიტიულად რეკურსიულობა

§8 ტიურინგის მანქანები

ალგორითმის არსის ინტუიციური გაგებიდან გამოდინარე, ყოველი ალგორითმის მიერ აღწერილი გამოთელითი პროცესი მიმდინარეობს მექანიკურად, გონების ყოველგვარი ჩარევის გარეშე, ამიტომ შესაძლებელია ასეთი გამოთელების შესრულება ეანდოთ რაიმე მოწყობილობას- მანქანას.

ასეთ მანქანაზე გამოთელითი პროცესი უნდა მიმდინარეობდეს დისკრეტულ დროში, ეს პროცესი მიმართული უნდა იყოს განსაზღვრული შედეგის მიღებაზე.

მანქანის მუშაობა სრულიად დეტეტმინირებული უნდა იყოს და უშეებდეს სხვადასხვა საწყისი მონაცემების შეტანას განხილული კლასის ამოცანებისათვის.

სწორედ ამსეთი ტიურინგის მანქანა, რომელიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შექმნეს მეცნიერებმა პოსტმა და ტურინგმა. პოსტისა და ტიურინგის მიერ შექმნილი მანქანებ არსებითად ერთმანეთისაგან არ განსხვავდებოდა. მოგვიანებით ამ მანქანებს საერთო სახელი- ტიურინგის მანქანები უწოდეს.

ტიურინგის მანქანები აბსტრაქტული მანქანებია, ისინი ზუსტ მათემატიკურ ტერმინებშია აღწერილი. განვიხილოთ ტიურინგის მანქანის ერთი ვარიანტი, რომელიც შედგება შემდეგი ელემენტებისაგან:

1. ***გარე მეხსიერება.*** მანქანის გარე მეხსიერებაა სასრული სიგრძის ლენტი, რომელიც დაყოფილია უჯრედებად, რომლებსაც ერთი და იგივე სიგრძე აქეთ. მუშაობის პროცესში მანქანას შეუძლია არსებულ უჯრედებს მარჯვნიდან მიუშენოს ახალი უჯრედები, ასე რომ, მანქანის ლენტი შეიძლება ჩაითვალოს პოტენციალურად შემოუსაზღერელად მარჯვენა მიმართულებით. ყოველ უჯრედში შეიძლება ჩაწერილი იყოს ერთი სიმბოლო სიმბოლოთა სასრული სიმრაელიდან: $\{a_1,a_2,...,a_n\}$. უჯრედი, რომელშიც არც ერთი სიმბოლო არ არის ჩაწერილი იწოდება, ცარიელ უჯრედად. ყოველი ახალი მიშენებული უჯრედი ითელება ცარიელად. ცარიელი უჯრედის აღსანიშნაეად გამოიყენება სიმბოლო a_0. თუ უჯრედში ჩაწერილია სიმბოლო a_i, მაშინ ამბობენ, რომ უჯრედი იმყოფება a_i მდგომარეობაში. სიმბოლოთა $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ სიმრაელეს ***ტიურინგის მანქანის გარე ალფაბეტი*** ეწოდება.

2 ***დამშერი მოწყობილობა.*** ეს მოწყობილობა დროის მოცემულ მომენტში იმყოფება მანქანის ლენტის რომელიმე უჯრედის თავზე. ასეთ უჯრედს ***დამზერილი*** ან ***აღქმული უჯრედი*** ეწოდება.

მმართველი მოწყობილობიდან მოსული ბრძანების საფუძველზე, დამშერ მოწყობილობას შეუძლია წაშალოს სიმბილო, რომელიც ჩაწერილია დამზერილ უჯრედში და ჩაწეროს ახალი, ასევე გადაადგილდეს ლენტის გასწვრივ მარჯვნივ ან მარცხნივ ერთ უჯრედზე.

3. ***მმართველი მოწყობილობა.*** მმართველი მოწყობილობა გამოიმუშავებს ბრძანებებს, რომლებიც გადაეცემა დამშერ მოწყობილობას. ამავე დროს, მმართველი მოწყობილობის შესავალზე გადაიცემა სიმბილო, რომელიც ჩაწერილია დამზერილ უჯრედში.

მმართველი მოწყობილობა შეიძლება იყოს ერთ რომელიმე მდგომარეობაში მდგომარეობათა სასრული სიმრაელიდან. ეს მდგომარეობები აღინიშნება

სიმბოლოთა რაიმე ერთობლიობით, რომლის ელემენტებიც არ გეხვდება მანქანის გარე ალფაბეტში. ვთქვათ, სიმბოლოთა ეს ერთობლიობაა: $\{q_1, q_2, \ldots q_m\}$.
მას ***ტიურინგის მანქანის შიგა ალფაბეტი*** ეწოდება. მანქანის მმართველი მოწყობილობის მდგომარეობას ***შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობა*** ეწოდება.
შინაგანი მეხსიერების ერთ ერთ მდგომარეობას ***საბოლოო*** ეწოდება. ამ მდგომარეობაში მანქანის შინაგანი მეხსიერება გადადის მანქანის მუშაობის დასრულებისას. სიმბოლოს, რომელიც აღნიშნავს შინაგანი მეხსიერების საბოლოო მდგომარეობას, ***სტოპ-სიმბოლოს*** უწოდებენ. მანქანის შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობებიდან შეიძლება გამოყოფილ იქნას საწყისი მდგომარეობაც. ბუნებრივია, მოცემული ალფაბეტის დროს საწყისი მდგომარეობა აღვნიშნოთ q_1 სიმბოლოთი, საბოლოო მდგომარეობა- q_m-ით.

მმართველი მოწყობილობა მუშაობს დისკრეტულ დროში; ბრძანებები, რიმლებიც გამომუშავდება ამ მოწყობილობის მიერ მუშაობის i-ურ ტაქტში, განისაზღვრებიან დამზერილ უჯრაში ჩაწერილი სიმბოლოთი და შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობით. $(i+1)$-ური ტაქტის დასაწყისში შესრულებული ბრძანებიების შედეგად, შეიძლება შეცვლილ იქნას დამზერილ უჯრედში ჩაწერილი სიმბოლო, დამზერი მოწყობილობა შეიძლება გადაადგილდეს ლენტის გაასწვრივ, მარჯვნივ ან მარცხნივ, შეიძლება შეიცვალოს შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობა.

ტიურინგის მანქანის მდგომარეობა, ანუ ***მისი კონფიგურაცია,*** ეწოდება სიმბოლოთა ერთობლიობას, რომელიც შედგება: მანქანის ლენტის უჯრედებში ჩაწერილი $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}$ სიმბოლოებისაგან, მანქანის შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობის აღმნიშენელი სიმბოლოსაგან q_j და დამზერილი უჯრედის ნომრისაგან k. ყველა ამ მონაცემთა ერთობლიობა ჩაიწერება ეგრეთ წოდებული ***მანქანური სიტყვის*** სახით:

$$a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{k-1}} q_j a_{i_k} \ldots a_{i_s},$$

სადაც მანქანის შინაგანი მეხსიერების აღმნიშვნელი სიმბოლო q_j შედის მხოლოდ ერთჯერ, ეს სიმბოლო იწერება იმ სიმბოლოს მარცხენა მხარეს, რომელიც ჩაწერილია დამზერილ უჯრედში. უჯრედები ლენტზე გადანომრილია თანმიმდევრობით, მარცხნიდან მარჯვნივ.

ტიურინგის მანქანის მუშაობა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას, როგორც მანქანური სიტყვების თანმიმდევრული გარდაქმნა შესაბამისი პროგრამის შესაბამისად. მანქანის მუშაონის მიზანია მის ლენტზე ჩაწერილი სიტყვის გარდაქმნა. იმისათვის, რომ მანქანამ მუშაობა დაიწყოს, მანქანის დამზერი მოწყობილობა უნდა მოვათავსოთ საჭირო უჯრედის თავზე და მოვიყვანოთ შინაგანი მეხსიერება საწყის მდგომარეობაში.

მანქანური სიტყვის გარდაქმნა მოცემული პროგრამის მიხედვით, მუშაობის ყოველი ტაქტის დროს, განისაზღვრება დამზერილ უჯრედში არსებული სიმბოლოთი და შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობით. პროგრამის შესრულების დამთავრებისას მანქანისშინაგანი მეხსიერება გადადის საბოლოო მდგომარეობაში და მანქანა ჩერდება. ყოველივე ამის შედეგად საწყისი მანქანური სიტყვა $a^0_{i_1} a^0_{i_2} \ldots q_j a^0_{i_k} \ldots a^0_{i_s}$ გარდაიქმნება რაიმე საბოლოო მანქანურ სიტყვაში.

ზოგიერთ შემთხვევაში მანქანის შინაგანი მეხსიერება ვერ გადადის საბოლოო მდგომარეობაში; ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემული პროგრამა ან ***მოცემული მანქანა გამოუყენებადია*** $a^0_{i_1} a^0_{i_2} \ldots q_j a^0_{i_k} \ldots a^0_{i_s}$ მანქანური სიტყვის მიმართ.

სანამ ტიურინგის მანქანის მუშაობას უფრო დაწვრილებით შევეხებით, დავაზუსტოთ მათემატიკის ზოგიერთ დარგში გამოყენებული ისეთი ცნებები, როგორებიცაა: ***ალფაბეტი*** და ***სიტყვა***.

ალფაბეტი ეს არის სიმბოლოთა სასრული სიმრავლე, რომლის ელემენტებსაც ***ასოები*** ეწოდება, ასოები განიხილება, როგორც მთლიანი, დაუნაწილებელი ობიექტები. მაგალითად, ალფაბეტში $a_1, a_2, ..., a_n$ ასოს წარმოადგენს a_i და არა a ან i ცალკე აღებული. ***ალფაბეტის ასოების ნებისმიერ სასრულ მიმდევრობას სიტყვა*** ეწოდება.

ვთქვათ, A, B, C, D სიმბოლოები არ შედიან ჩვენ მიერ დაფიქსირებულ ალფაბეტში $a_1, a_2, ..., a_n$. გამოვიყენოთ ეს სიმბოლოები მოცემული ალფაბეტის სიტყვების აღსანიშნავად.

ვთქვათ A, B სიტყვებია მოცემულ ალფაბეტში, A სიტყვას ეწოდება B სიტყვის ***ქვესიტყვა***, თუ B სიტყვა შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე: $B = CAD$, სადაც C და D ასევე მოცემული ალფაბეტის სიტყვებია(C და D შეიძლება ცარიელი სიტყვებიც იყვნენ, ანუ არ შეიცავდნენ არც ერთ ასოს). ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ A სიტყვა შედის B სიტყვაში. მაგალითად: თუ ალფაბეტად ჩავთვლით მანქანის გარე და შინაგანი მეხსიერების სიმბოლოებიის სიმრავლეს, მაშინ სიტყვა $a_{i_{k-1}} q_j a_{i_k}$ შედის მანქანურ $a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_{k-1}} q_j a_{i_k} ... a_{i_r}$ სიტყვაშ, ანუ წარმოადგენს ქვესიტყვას. ვთქვათ, G რაიმე სიტყვაა, მაშინ CGD სიტყვას უწოდებენ ***მიღებულს*** $B = CAD$ ***სიტყვისაგან*** A ***სიტყვის მაგივრად*** G ***სიტყვის ჩასმით.***

ტიურინგის მანქანის მუშაობა ერთი ტაქტის განმავლობაში შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მანქანურ სიტყვაში $a_{i_{k-1}} q_j a_{i_k}$ ქვესიტყვის მაგიერ რაიმე სხვა, მაგალითად $a_{i_{k-1}} a_{i_k} q_j$ სიტყვის ჩასმა, რაც ნიშნავს მანქანის შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობის შეცვლას და დამმზერი მოწყობილობის გადაადგილებას მარჯვნივ. ამგვარად, ტიურინგის მანქანის მუშაობა შეიძლება აღიწეროს შემდეგი სახის ბრძანებათა ერთობლიობით:

$$a_\alpha q_\beta a_\gamma \to q_s a_\alpha a_\eta,$$

ან

$$a_\alpha q_\mu a_\rho \to a_\alpha a_\omega q_\sigma,$$

ან

$$a_\alpha q_j a_\theta \to a_\alpha q_l a_\pi.$$

ამ ბრძანებათა შესრულება ნიშნავს დამზერილ უჯრედში სიმბოლოს შეცვლას, მანქანის შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობის შეცვლას და დამმზერი მოწყობილობის გადაადგილებას მარცხნივ, მარჯვნივ და იმავე მდგომარეობაში დარჩენას. ასეთი ტიპის ბრძანებებს ***ჩასმითი ბრძანებები*** ეწოდება.

ბრძანებათა მთელ ერთობლიობას, რომელიც განსაზღვრავს მანქანის მუშაობას, ***პროგრამა*** ეწოდება.

ბრძანებები ტიურინგის მანქანისათვის შეიძლება ჩაიწეროს სხვანაირადაც, შემდეგი L, R, S სიმბოლოების გამოყენებით, რომლებიც შეესაბამებიან დამმზერი მოწყობილობის მოძრაობას მარცხნივ, მარჯვნივ და ადგილზე დარჩენას შემდეგი ტაქტის დაწყებამდე. მაგალითად: ბრძანება

$$q_s a_i \to q_s a_j$$

ნიშნავს დამზერილ უჯრედში სიმბოლოს შეცვლას, მანქანის შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობის შენახვას;

$$q_s a_i \to q_p a_i$$

ბრძანება ნიშნავს დამზერილ უჯრედში სიმბოლოს შენახვას, მანქანის შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობის შეცვლას;

$$q_s a_l \to q_p a_j$$

ბრძანება ნიშნავს დამზერილ უჯრედში ჩაწერილი სიმბოლოს შეცვლას, მანქანის შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობის შეცვლას,

$$q_1 a_3 \to q_2 R(L)$$

ბრძანება ნიშნავს მანქანის შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობის შეცვლას, დამმზერი მოწყობილების გადაადგილებას მარჯვნივ (მარცხნივ).

მანქანის მუშაობა მოცემულ ტაქტში მთლიანად განისაზღვრება შინაგანი მეხსიერების მდგომარეობით q_j და დამზერილ უჯრედში ჩაწერილი a_i სიმბოლოთი. ამიტომ ყოველი $(q_j, a_i), j = 1,2,...,m; i = 1,2,...,n$ წყვილისთვის მანქანის პროგრამა შეიცავს მხოლოდ ერთ ბრძანებას რომელიც იწყება $q_j a_i$ სიტყვით. პროგრამა არ შეიცავს ბრძანებას, რომელიც იწყება სიტყვით $q_0 a_i$ სადაც q_0 აღნიშნავს მანქანის შინაგანი მეხსიერების საბოლოო მდგომარეობას.

შემდგომ ჩვენ შემოვიფარგლებით ისეთი მანქანების განხილვით, რომელთა გარე მეხსიერების ალფაბეტი შედგება ორი სიმბოლოსაგან: 0 და 1. 0-თ აღვნიშნავთ ცარიელ უჯრედს. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი x ასეთი მანქანის ლენტზე შეიძლება წარმოვადგინოთ უჯრედებში მიმდევრობით ჩაწერილ $k+1$ რაოდენობის ერთიანით:

$$\underbrace{111......11}_{x+1}.$$

ამ მიმდევრობის აღნიშვნა მიღებულია ასე: 1^{x+1}. რიცხვ ნულის ჩაწერა ხდება ერთი ერთიანით. ლენტზე ჩაწერილი რიცხვები ერთმანეთისაგან გამოიყოფა ცარიელი უჯრედებით. რამდენადაც ყოველი ალგორითმი შეიძლება დაყვანილი იქნას მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული, მთელი მნიშვნელობის მქონე ფუნქციის მნიშვნელობის გამოსათვლელ ალგორითმამდე, ამდენად, ორი სიმბოლოს შემცველი გარე მეხსიერების მქონე ტიურინგის მანქანაზე შეიძლება მოვახდინოთ ნებისმიერი ალგორითმის რეალიზება.

მაგალითი 1. მანქანა "+1", რომელიც ახდენს მოცემული რიცხვის გაზრდას რიცხვით 1.

მუშაობის დასაწყისში ამ მანქანის დამმზერი მოწყობილობა აღიქვამს შევსებულ უჯრედს ანუ უჯრედს, რომელშიც წერია სიმბოლო 1; მანქანის შინაგანი მეხსიერება იმყოფება q_1 მდგომარეობაში. მუშაობის პროცესში მანქანის დამმზერი მოწყობილობა მპოულობს პოულობს ცარიელ უჯრედს მარჯვნივ, წერს მასში სიმბოლო 1-ს და მანქანა ჩერდება.

მანქანის მუშაობის შედეგად მანქანური სიტყვა $01^x q_1 1^y 00$ გარდაიქმნება სიტყვად $01^{x+y} q_0 100$.

პროგრამის შესრულების შედეგად მანქანის მიერ განხორციელებული გარდაქმნები აღინიშნება ისრით $\Rightarrow$. მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს:

$$01^x q_1 1^y 00 \Rightarrow 01^{x+y} q_0 100.$$

ჩამოვწეროთ იმ ბრძანებების თანმიმდევრობა, რომლებიც შეადგენენ მოცემულ პროგრამას: $\underbrace{q_1 1 \to q_1 1R, q_1 1 \to q_1 1R, ..., q_1 1 \to q_1 1R}_{y}, q_1 0 \to q_0 1.$

პირველი y რაოდენობის ბრძანება ერთი და იმავე $q_1 1 \to q_1 1R$ ბრძანების გამეორებაა. ერთ და იმავე ბრძანების y-ჯერ განმეორების შემდეგ მანქანური

სიტყვა $01^x q_1 1^y 00$ გარდაიქმნება $01^{x+y} q_1 00$ მანქანურ სიტყვაში. $q_1 0 \to q_0 1$ ბრძანების შესრულების შემდეგ კი მანქანური სიტყვა $01^{x+y} q_1 00$ გარდაიქმნება $01^{x+y} q_0 10$ სიტყვაში და მანქანა ჩერდება.

მაგალითი 2. მანქანა: "–1", რომელიც ახდენს მოცემული რიცხვის შემცირებას რიცხვით 1.

ეს მანქანა ასრულებს მანქანური სიტყვის შემდეგ გარდაქმნას

$$01^x q_1 1^y 00 \Rightarrow 01^{x+y-2} q_0 100.$$

აღიქვამს რა შევსებულ უჯრედს საწყის მდგომარეობაში, მანქანის დამმზერი მოწყობილობა მპოულობს მარჯვენა კიდეს შევსებული უჯრედებისა და დგება ამ უჯრედის თავზე, შლის მასში ჩაწერილ სიმბოლოს და დგება იმ უჯრედის თავზე, რომელიც ყველაზე მარჯვენივაა შევსებულ უჯრედებს შორის. ამის შემდეგ მანქანა ჩერდება.

ბრძანებების მიმდევრობა, რომლებიც პროგრამას შეადგენენ, შემდეგია:

$$\underbrace{q_1 1 \to q_1 R, q_1 1 \to q_1 R, \ldots, q_1 1 \to q_1 R}_{y}, q_1 0 \to q_2 L, q_2 1 \to q_2 0, q_2 0 \to q_0 L..$$

პირველი $q_1 1 \to q_2 1R$ ბრძანების y- ჯერ გამეორების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^x q_2 1^y 00 \Rightarrow 01^{x+y} q_2 0.$$

$q_1 0 \to q_2 L$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+y} q_2 0 \Rightarrow 01^{x+y-1} q_2 10.$$

$q_2 1 \to q_2 0$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+y-1} q_2 10 \Rightarrow 01^{x+y-1} q_2 00.$$

$q_2 0 \to q_0 L$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+y-1} q_2 10 \Rightarrow 01^{x+y-2} q_0 10.$$

რის შედეგადაც მანქანის შინაგანი მეხსიერება გადასულია საბოლოო მდგომარეობაში და მანქანა ჩერდება.

მაგალითი 3. მანქანა "$+C$", რომელიც გადააადგილებს დამმზერ მოწყობილობას მარჯვენივ 1-იანებით შედგენილ მასივამდე.

ამ დროს უნდა განხორციელდეს საწყისი მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^x q_1 1^y 0^z 1^w 0 \Rightarrow 01^{x+y} 0^z 1^{w-1} q_0 10.$$

აქ $0^z = \underbrace{00..0}_{z}$.

აღნიშნული გარდაქმნის შედეგად მანქანის დამმზერი მოწყობილობა პოულობს მარჯვენივ მდგომ 1-იანებით შედგენილ მასივს, დგება ამ მასივის ყველაზე მარჯვენა 1-იანის შემცველი უჯრედის თავზე და მანქანა ჩერდება. პროგრამა შედგება ბრძანებათა შემდეგი მიმდევრობისაგან:

$$\underbrace{q_1 1 \to q_1 R, q_1 1 \to q_1 R, \ldots, q_1 1 \to q_1 R}_{y}, q_1 0 \to q_2 0, \underbrace{q_2 0 \to q_2 R, q_2 0 \to q_2 R, \ldots, q_2 0 \to q_2 R}_{z-1},$$

$$q_2 1 \to q_3 1R, \underbrace{q_3 1 \to q_3 1R, q_3 1 \to q_3 1R, \ldots, q_3 1 \to q_3 1R}_{w-1}, q_3 0 \to q_0 L.$$

$q_1 1 \to q_1 1R$ ბრძანების y-ჯერ განმეორებით ხდება საწყისი მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^x q_1 1^y 0^z 1^w 0 \Rightarrow 01^{x+y} q_1 0^z 1^w 0.$$

$q_1 0 \to q_2 0$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+y}q_1 0^z 1^w 0 \Rightarrow 01^{x+y}q_2 0^z 1^w 0.$$

$q_2 0 \to q_2 R$ ბრძანების z-ჯერ განმეორებით ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+y}q_2 0^z 1^w 0 \Rightarrow 01^{x+y}0^z q_2 1^w 0.$$

$q_2 1 \to q_3 1$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა

$$01^{x+y}0^z q_2 1^w 0 \Rightarrow 01^{x+y}0^z q_3 1^w 0.$$

$q_3 1 \to q_3 R$ ბრძანების w-ჯერ განმეორებით ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+y}0^z q_3 1^w \Rightarrow 01^{x+y}0^z 1^w q_3 0.$$

ბოლო $q_3 0 \to q_0 L$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+y}0^z 1^w q_3 0 \Rightarrow 01^{x+y}0^z 1^{w-1} q_0 10$$

და მანქანა ჩერდება

მაგალითი 4. მანქანა *kont*, რომელიც ამოწმებს ტოლობას $x=1$.

მუშაობის დასაწყისში მანქანა აღიქვამს $x+1$ რაოდენობის 1-იანებით შევსებული მასივის, რომელიც გამოსახავს ნატურალურ x რიცხვს მანქანის ლენტზე, ყველაზე მარჯვენა უჯრედს. თუ ამ უჯრედის მარცხნივ ცარიელი უჯრედია, მაშინ მანქანის შინაგანი მეხსიერება მუშაობის დასრულებისას გადადის q_{01} მდგომარეობაში. თუ უჯრედის მარცხნივ შევსებული უჯრედია, მაშინ მანქანის შინაგანი მეხსიერება მუშაობის დასრულებისას გადადის q_{02} მდგომარეობაში.

$$01^x q_1 1 \Rightarrow \begin{cases} 0q_{01}10, & x=0, \\ 01^x q_{02}10, & x \neq 0. \end{cases}$$

პროგრამა შედგება ბრძანებათა შემდეგი მიმდევრობისაგან:

$$q_1 1 \to q_1 L, q_2 1 \to q_{02} 1R.$$

$q_1 1 \to q_2 L$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^x q_1 1 \Rightarrow \begin{cases} 0q_2 010, & x=0, \\ 01^{x-1} q_2 110, & x \neq 0. \end{cases}$$

ამის შემდეგ სრულდება ან $q_2 0 \to q_{01} R$ ბრძანება, რის შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$0q_2 010 \Rightarrow 0q_{01}10,$$

ან ბრძანება $q_2 1 \to q_{02} R$, რის შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x-1}q_2 110 \Rightarrow 01^x q_{02} 10$$

და მანქანა ჩერდება.

მაგალითი 5. მანქანა "$-C$", რომელიც გადააადგილებს დამზერ მოწყობილობას მარცხნივ 1-იანებით შედგენილ მასივამდე.

ამ დროს უნდა განხორციელდეს საწყისი მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+1}0^y1^z q_1 1^w 0 \Rightarrow 01^x q_0 10^y 1^{w+z} 0.$$

აქ $0^z = \underbrace{00..0}_{z}$.

აღნიშნული გარდაქმნის შედეგად მანქანის დამზერი მოწყობილობა პოულობს მარცხნივ მდგომ 1-იანებით შედგენილ მასივს, დგება ამ მასივის ყველაზე მარჯვენა 1-იანის შემცველი უჯრედის თავზე და მანქანა ჩერდება. პროგრამა შედგება ბრძანებათა შემდეგი მიმდევრობისაგან:

$$\underbrace{q_1 1 \to q_1 L, q_1 1 \to q_1 L, \ldots, q_1 1 \to q_1 L}_{z+1}, q_1 0 \to q_2 0, \underbrace{q_2 0 \to q_2 L, q_2 0 \to q_2 L, \ldots, q_2 0 \to q_2 L}_{y},$$

$$q_2 1 \to q_3 1, q_3 1 \to q_0 1.$$

$q_1 1 \to q_1 1L$ ბრძანების $z+1$-ჯერ განმეორებით ხდება საწყისი მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+1}0^y1^z q_1 1^w 0 \Rightarrow 01^{x+1}0^{y-1} q_1 01^{w+z} 0.$$

$q_1 0 \to q_2 0$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+1}0^{y-1} q_1 01^{w+z} 0 \Rightarrow 01^{x+1}0^{y-1} q_2 01^{w+z} 0.$$

$q_2 0 \to q_2 L$ ბრძანების y-ჯერ განმეორებით ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^{x+1}0^y q_2 1^{w+z} 0 \Rightarrow 01^x q_2 10^y 1^{w+z} 0.$$

$q_2 1 \to q_3 1$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა

$$01^x q_2 10^y 1^{w+z} 0 \Rightarrow 01^x q_3 10^y 1^{w+z} 0.$$

ბოლო $q_3 1 \to q_0 1$ ბრძანების შედეგად ხდება მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^x q_3 01^y 1^{w+z} 0 \Rightarrow 01^x q_0 10^y 11^{w+z} 0$$

და მანქანა ჩერდება.

§9. ტიურინგის მანქანათა კომპოზიცია და იტერაცია, ტიურინგის თეორემა

ისეთი ტიურინგის მანქანის სინთეზის დროს, რომელიც ახორციელებს მანქანური სიტყვების საჭირო გარდაქმნებს მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მანქანათა ***კომპოზიციისა*** და ***იტერაციის*** ცნებები. ვთქვათ, მოცემულია ტიურინგის მანქანები P და Q, რომლებსაც აქვთ საერთო გარე ალფაბეტი $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ და შიგინაგანი ალფაბეტები შესაბამისად:

$$\{q_0, q_1, \ldots, q_m\}, \{q'_0, q'_1, \ldots, q'_w\}.$$

ვთქვა, მანქანა P გარდაქმნის მანქანურ A სიტყვას B სიტყვაში, მანქანა Q კი- B სიტყვას C სიტყვაში. მოვახდინოთ ისეთი R მანქანის კონსტრუირება, რომელიც გარდაქმნის A სიტყვას C სიტყვაში.

საჭირო გარდაქმნები რომ განხორციელდეს, R მანქანამ ჯერ ბოლომდე უნდა შეასრულოს P მანქანის პროგრამით გათვალისწინებული გარდაქმნები შემდეგ კი- Q მანქანის პროგრამით გათვალისწინებული გარდაქმნები. ცხადია, R მანქანის პროგრამა შეგვიძლია მივიღოთ P და Q მანქანების პროგრამების გაერთიანებით, ამასთან, პირველი მანქანის "სტოპ" სიმბოლო q_0 უნდა შევცვალოთ q_{m+1} სიმბოლოთი, ხოლო ამ მანქანის შინაგანი ალფაბეტის დანარჩენი სიმბოლოები კი უცვლელად დავტოვოთ; მეორე მანქანის შინაგანი

ალფაბეტს სიმბოლოები $q'_i, i=1,2,\dots,\omega$ შევცვალოთ შესაბამისი q_{i+m+1} სიმბოლოებით; მეორე მანქანის "სტოპ" სიმბოლო q'_0 აღვნიშნოთ q_0-ით.

როდესაც R მანქანის შინაგანი მეხსიერება P მანქანის პროგრამის შესაბამისი გარდაქმნების შედეგად აღმოჩნდება q_{m+1} მდგომარეობაში, იგი დაიწყებს მოქმედებას Q მანქანის პროგრამით.

R მანქანას $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ გარე ალფაბეტით, $\{q_0,q_1,\dots,q_m,q_{m+1},\dots,q_{\omega+m+1}\}$ შინაგანი ალფაბეტით, ზემოთ განხილული წესით P და Q მანქანების პროგრამებისაგან მიღებული პროგრამით, P და Q მანქანების ***კომპოზიცია(ნამრავლი)*** ეწოდება. ეს კომპოზიცია აღინიშნება ასე: $R=PQ$.

მაგალითი: მანქანა "T", რომელიც დამშერ მოწყობილობას გადაადგილებს მარჯვნივ 1-იანების, შემდეგ მასივზე, რომელიც წარმოადგენს რაიმე ω რიცხვს და ზრდისმას რიცხვით 1 და ჩერდება.

ამ დროს უნდა განხორციელდეს საწყისი მანქანური სიტყვის შემდეგი გარდაქმნა:

$$01^x q_1 1^y 0^z 1^{w+1} 0 \Rightarrow 01^{x+y} 0^z 1^{w+1} q_0 10.$$

ადვილია იმის დანახვა, რომ მანქანა "T"წარმოადგენს "$+C$" მანქანისა და "+1" კომპოზიციას: $T=+C(+1)$.

კომპოზიციის ცნება გვაძლევს მანქანათა სინთეზის ზოგად მეთოდს, რაც ძალიან აიოლებს რთული პროგრამების აგებას. აქ არსებითია ის, რომ მანქანათა ერთობლიობა, რომლებიც თანმიმდევრულად ახორციელებენ თავიანთ პროგრამებს, შეიძლება შევცვალოთ ერთი მანქანით. უშუალო შემოწმებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ტიურინგის მანქანათა კომპოზიცია არაკომუტაციური ოპერაციაა, ზოგად შემთხვევაში $PQ \neq QP$. ტიურინგის ერთი და იმავე P მანქანის ნამრავლს თავისთავზე $P^n = \underbrace{PP\dots P}_{n}$, ამ მანქანის n-ური ხარისხი ეწოდება.

მაგალითად: მანქანა "$+C$"-ის n-ური ხარისხი არის მანქანა $(+C)^n$, რომელიც დამშერ მოწყობილობას გადაადგილებს მარჯვნივ 1-იანების მე-$n+1$ მასივზე რაიმე ასეთი საწყისი მასივიდან. ამ დროს ადგილი აქვს საწყისი მანქანური სიტყვის შემდეგ გარდაქმნას:

$$01^{x_1} q_1 101^{x_2+1}0\dots01^{x_{n+1}+1} \Rightarrow 01^{x_1+1}0\dots1^{x_{n+1}} q_0 10.$$

ტიურინგის ისეთი მანქანათა კომპოზიციის აგებისას, რომელთაგან თითოეულს რამოდენიმე საბოლოო მდგომარეობა გააჩნია, აუცილებელია მივუთითოთ, თუ რომელი საბოლოო მდგომარეობა უნდა გავაიგივეოთ შემდეგი მანქანის საწყის მდგომარეობასთან.

კომპოზიციის ოპერაციასთან ერთად ტიურინგის მანქანათა სინთეზისთვის გამოიყენება იტერაციის ოპერაცია. განვიხილოთ მანქანა P_1, რომელსაც გააჩნია შინაგანი მეხსიერების k რაოდენობის საბოლოო მდგომარეობა: $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0k}$. მანქანის რომელიმე ამ საბოლოო მდგომარეობის გაიგივებას მის საწყის მდგომარეობასთან P_1 მანქანის ***იტერაციის ოპერაცია*** ეწოდება. ტიურინგის მანქანა P, რომელიც მიიღება P_1 მანქანისგან იტერაციის ოპერაციით, აღინიშნება ასე:

$$P = P_1 \begin{cases} (q_{01}) \\ (q_{02}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\dot{q}_{0l}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (q_{0k}) \end{cases},$$

სადაც $\dot{q}_{0l}$ სიმბოლო წერტილით თავზე გვიჩვენებს, რომ ხდება P_1 მანქანის l ნომრის საბოლოო მდგომარეობის გაიგივება ამ მანქანის საწყის მდგომარეობასთან.

იტერაციის ოპერაციის შედეგად ღებულობთ მანქანას, რომელიც თავისი მუშაობისას ახორციელებს ერთ ან რამდენიმე ჩაკეტილ ციკლს.

თუ მუშაობის პროცესში მანქანა გადადის $\dot{q}_{0l}$ მდგომარეობაში, ეს ნიშნავს, რომ მანქანა უბრუნდება საწყის მდგომარეობას და იწყებს თავიდან მუშაობას. მანქანის მუშაობა გრძელდება მანამ, სანამ იგი არ გადავა სხვა რომელიმე დანარჩენ საბოლოო მდგომარეობაში.

თუ P_1 მანქანას შინაგანი მეხსიერების მხოლოდ ერთი საბოლოო მდგომარეობა აქვს, მაშინ მისი იტერაციით მიიღება მანქანა, რომელსაც ფაქტობრივად შინაგანი მეხსიერების საბოლოო მდგომარეობა არ გააჩნია და მისი მუშაობა გაგრძელდება უსასრულოდ ჩაკეტილ ციკლზე ან გაჩერდება თუ მუშაობის პროცესში არ მიიღება მანქანური სიტყვა, რომლისთვისაც მანქანის პროგრამა მიუღებელია.

ტიურინგის მანქანის იტერაცია შეიძლება გაერთიანდეს კომპოზიციასთან, მაგალითად მანქანაში:

$$P = P_1 \begin{cases} (q_{01}) \\ (q_{02}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\dot{q}_{0l}) \; T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (q_{0k}) \end{cases}$$

მას შემდეგ რაც შინაგანი მეხსიერება გადადის q_{0l} მდგომარეობაში მოქმედებას იწყებს T_2 მანქანის პროგრამა, რომლის დასრულებისას შინაგანი მეხსიერება გადადის საწყის მდგომარეობაში და ისევ სრულდება T_1 მანქანის პროგრამა.

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ ხდება ტიურინგის მანქანის გამოყენებით ნატურალური არგუმენტების და ნატურალური მნიშენელობების n-ადგილიანი

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქციის გამოთვლა.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ, თუ რას ნიშნავს ფუნქციის გამოთვლა ტიურინგის მანქანაზე, აუცილებელია განისაზღვროს საწყისი მონაცემების და მიღებული შედეგის ჩაწერის სტანდარტული ფორმა მანქანის ლენტზე. ასევე, უნდა განისაზღვროს დამზერი მოწყობილობის მდგომარეობა გამოთვლის დასაწყისში და გამოთვლის დასასრულისას.

x რიცხვი მანქანის ლენტზე წარმოდგინდება ერთმანეთის მიყოლებულ უჯრედებში ჩაწერილი $x+1$ რაოდენობის 1-იანით. ვიტყვით, რომ ორი რიცხვი ლენტზე განლაგებულია თანმიმდევრულად, თუ ამ რიცხვების ჩანაწერებს შორის მხოლოდ ერთი ცარიელი უჯრედია.

დავტოვოთ ყველაზე მარცხნივ მდგომი უჯრედი ლენტზე ცარიელი და თანმიმდევრობით ჩავწეროთ რიცხვები: $x_1, x_2, ..., x_n$. ვიტყვით, რომ დამზერი მოწყობილობა აღიქვამს რიცხვთა $< x_1, x_2, ..., x_n >$ სისტემას ***სტანდარტულ მდგომარეობაში,*** თუ ეს რიცხვები ლენტზე ჩაწერილია თანმიმდევრობით და დამზერი მოწყობილობა x_n რიცხვის წარმოდგენაში ბოლო 1-იანის თავზეა.

ვთქვათ, მუშაობის დასაწყისში მანქანა სტანდარტულ მდგომარეობაში აღიქვამს რიცხვების $< x_1, x_2, ..., x_n >$ სისტემას. ამბობენ, რომ ტიურინგის მანქანას შეუძლია გამოითვალოს $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ნაწილობრივად განსაზღვრულ ფუნქცია, თუ:

1. რიცხვთა ყველა იმ $< x_1, x_2, ..., x_n >$ სისტემისთვის, რომლებისათვის $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, მუშაობის დამთავრების შემდეგ, მანქანა აღიქვამს სტანდარტულ მდგომარეობაში რიცხვთა

$$< x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n) >$$

სისტემას და მანქანის შინაგანი მეხსიერება იმყოფება საბოლოო მდგომარეობაში, ანუ:

$$01^{x_1+1}...01^{x_n} q_1 10 \Rightarrow 01^{x_1+1}...01^{x_n+1}01^{f(x_1, x_2, ..., x_n)} q_0 10 .$$

2. რიცხვთა ყოველი $< x_1, x_2, ..., x_n >$ ისეთი სისტემისათვის, რომლისთვისაც $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქცია განსაზღვრული არ არის, მანქანა მუშაობის დაწყების შემდეგ არ გადადის საბოლოო მდგომარეობაში.

ფუნქციას ეწოდება ***გამოთვლადი ტიურინგის მანქანაზე,*** თუ არსებობს ტიურინგის ისეთი მანქანა, რომელსაც შეუძლია მოცემული ფუნქციის გამოთვლა.

მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად მნიშვნელოვანი თეორემა:

თეორემა 9. 1. (ტიურინგის თეორემა) ტიურინგის მანქანაზე გამოთვლად ფუნქციათა კლასი ემთხვევა, ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასს.

თეორემა ამტკიცებს ალგორითმის ცნების ორი დაზუსტების ეკვივალენტურობას: დაზუსტებას ტიურინგის მანქანების ცნების საფუძველზე და დაზუსტებას რეკურსიული ფუნქციების ცნების საფუძველზე.

დამტკიცება იმისა, რომ ყოველი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია გამოთვლადია ტიურინგის მანქანაზე, ხდება შემდეგი სქემით: ჯერ აიგება ტიურინგის მანქანები, რომლებიც ითვლიან უმარტივეს $s(x) = x+1, C_0^1(x) = 0, I_m^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$ ფუნქციებს, შემდეგ მანქანები, რომლებიც ითვლიან უმარტივესი ფუნქციებიდან სუპერპოზიციის ოპერატორით, პრიმიტიული რეკურსიის ოპერატორით და მინიმიზაციის ოპერატორით მიღებულ ფუნქციებს. ასეთი მანქანების კომპოზიციით და იტერაციით შეიძლება აიგოს მანქანა კონკრეტული ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის გამოსათვლელად.

სავარჯიშოები:

1. გამოთვალეთ ყველა შესაძლო ბრძანებათა რიცხვი ტიურინგის მანქანისათვის, რომლის გარე მეხსიერების ალფაბეტია $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, შიგა მეხსიერების ალფაბეტი კი $B=\{q_1,q_2,...,q_n\}$.
2. ტიურინგის მანქანის პროგრამა შედგება ერთი $q_1 0 \to q_0 0$ ბრძანებისაგან, შემდეგი ფუნქციებიდან: $f(x), f(x_1,x_2)$, რომელ ფუნქციას გამოთვლის ეს მანქანა.
3. ავაგოთ ისეთი ტიურინგის მანქანა, რომელიც სწორად გამოთვლის შემდეგ ფუნქციებს: $s(x)=x+1, C_0^1(x)=0, I_m^n(x_1,x_2,...,x_n)=x_m$.
4 დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები: $f(x)=x-2, g(x,y)=x-y$ გამოთვლადია ტიურინგის მანქანაზე.

§10. მარკოვის ნორმალური ალგორითმები

ალგორითმის ინტუიციური ცნების დაზუსტების ერთი გზა შეიმუშავა რუსმა მათემატიკოსმა მარკოვმა. რისთვისაც მან შემოიტანა ეგრეთ წოდებული მარკოვის ნორმალური ალგორითმის ცნება.

ვთქვათ, Ω რაიმე ალფაბეტია, $F(\Omega)$ ამ ალფაბეტით წარმოქმნილ სიტყვათა სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ცარიელ Θ სიტყვასაც. ვთქვათ, $A,B\in F(\Omega)$. ვიტყვით, რომ B წარმოადგენს A სიტყვის ქვესიტყვას, თუ არსებობენ ისეთი სიტყვები $B_1,B_2\in F(\Omega)$, რომ $A=B_1BB_2$. (B_1,B,B_2) სამეულს ეწოდება ***ჩართვა B სიტყვისა A სიტყვაში.*** B სიტყვის A სიტყვაში ჩართვა შეიძლება მრავალნაირი იყოს იმის მიხედვით, თუ A სიტყვის მარცხენა კიდიდან მარჯვნივ B სიტყვა როგორ არის დაშორებული გვაქვს B სიტყვის ***პირველი ჩართვა, მეორე ჩართვა*** და ასე შემდეგ. მაგალითად: Ω ქართული დამწერლობის ალფაბეტია სიტყვაში $A=$"აბდაუბდა" სიტყვას $B=$"და" გააჩნია ორი ჩართვა $(B_1,B,B_2),(B_1'B,B_2')$, სადაც $B_1=$"აბ", $B_2=$"უბდა", $B_1'=$აბდაუბ", $B_2'=\Theta$.

ვთქვათ, $A,B,C\in F(\Omega)$. $Sub_B^C(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება სიტყვა, რომელიც მიიღება A სიტყვიდან მასში B სიტყვის პირველი ჩართვაში B სიტყვის C სიტყვით შეცვლით. მაგალითად, თუ $C=$"გა" მაშინ $Sub_B^C(A)=$"აბგაუბდა".
ისეთ შემთხვევაში, როდესაც არ არსებობს B სიტყვის ჩართვა A სიტყვაში, $Sub_B^C(A)$ გამოსახულება ითვლება განუსაზღვრელად. უნდა აღინიშნოს, რომ $Sub_B^C(A)$ წარმოადგენს ნაწილობრივად განსაზღვრულ სამ ადგილიან ოპერაციას $F(\Omega)$ სიმრავლეზე. თუ B,C სიტყვებს დავაფიქსირებთ, მაშინ საქმე გვექნება ერთ ადგილიან ნაწილობრივად განსაზღვრულ ოპერაციასთან $F(\Omega)$ სიმრავლეზე, რომელსაც ***მარკოვის ჩასმა*** ეწოდება. იგი აღინიშნება ფორმულით: $B\to C$, რომელსაც ***ჩასმის ფორმულა*** ეწოდება.

თუ $Sub_B^C(A)$ დაფიქსირებული B,C სიტყვებისთვის განსაზღვრულია რაიმე A სიტყვისთვის, მაშინ $B\to C$ ჩასმას A ***სიტყვის მიმართ გამოყენებად ჩასმას*** უწოდებენ, ხოლო, თუ $Sub_B^C(A)$ დაფიქსირებული B,C სიტყვებისთვის განუსაზღვრელია რაიმე A სიტყვისთვის, მაშინ $B\to C$ ჩასმას A ***სიტყვის მიმართ გამოუყენებად ჩასმას*** უწოდებენ.
ნორმალური ალგორითმის სქემა Ω ალფაბეტზე ეწოდება მიმდევრობას:

$$S=\begin{cases} B_1 \to C_1\alpha_1, \\ B_2 \to C_2\alpha_2, \\ ------ \\ B_i \to C_i\alpha_i, \end{cases}$$

სადაც $\alpha_i \in \{\Theta,*\}$.

ჩართვას $B_i \to C_i *$ უწოდებენ ***საბოლოოს.***

ვთქვათ მოცემულია ,რაიმე ნორმალური ალგორითმის სქემა Ω ალფაბეტზე.
S სქემით განსაზღვრული ***მარკოვის ნორმალური ალგორითმი*** Ω ალფაბეტზე ეწოდება მოცემული $A \in F(\Omega)$ სიტყვიდან სიტყვათა $A_i \in F(\Omega); i=0,1,2,3,....$ მიმდევრობის აგების აღწერად პროცესს, ამასთან:

1 თუ $i=0$, ვთვლით, რომ $A_0 = A$ და მიმდევრობის აგების პროცესი არ დამთავრებულა.

2 ვთქვათ, $i \geq 0$, $A_0 A_1. A_2,...,A_i$ სიტყვები აგებულია, მაგრამ აგების პროცესი არ დამთავრებულა, მაშინ:

ა) თუ S სქემის ყოველი ჩასმა გამოუყენებელია A_i სიტყვის მიმართ, მაშინ ვიღებთ, რომ $A_i = A_{i+1}$ სიტყვათა მიმდევრობის აგების პროცესს ვთვლით დამთავრებულად და A_{i+1} სიტყვას ვთვლით A სიტყვაზე მარკოვის ნორმალური ალგორითმის მოქმედების შედეგად.

ბ) თუ S სქემის ჩასმებს შორის არსებობენ A_i სიტყვის მიმართ გამოყენებადი ჩასმები და A_{i+1} მიღებულია A_i სიტყვისაგან S სქემაში არსებული პირველი A_i სიტყვის მიმართ გამოყენებადი ჩასმით. თუ ეს ჩასმა იყო საბოლოო, სიტყვათა მიმდევრობის აგების პროცესი ჩაითვლება დამთავრებულად და A_{i+1} სიტყვა ჩაითვლება A სიტყვაზე მარკოვის ნორმალური ალგორითმის მოქმედების შედეგად. თუ გამოყენებული ჩასმა არ იყო საბოლოო, მაშინ პროცესი ითვლება დაუმთავრებლად.

თუ მარკოვის ნორმალური ალგორითმის A სიტყვაზე გამოყენებით მიიღება B სიტყვა, მაშინ ამბობენ, რომ მარკოვის ***ნორმალური ალგორითმი გადაამუშავებს A საიტყას B სიტყვაში.***

თუ მარკოვის ნორმალურ ალგორითმს გამოყენებულს A სიტყვაზე, არ აქვს დასასრული, მაშინ ამბობენ, რომ მარკოვის მოცემული ნორმალური ალგორითმი ***გამოუყენებადია*** A სიტყვის მიმართ.

თუ მარკოვის ნორმალური ალგორითმის მიმდინარეობის დროს სიტყვა A_{i+1} მიიღება A_i სიტყვისაგან, მაშინ წერენ: $A_i \Rightarrow A_{i+1}$.

მაგალითი: ვთქვათ $\Omega = \{a_1, a_2,...,a_n\}$ რაიმე ალფაბეტია, განვიხილოთ მარკოვის ნორმალური ალგორითმის სქემები:

$$1. \begin{cases} a_1 \to \Theta \\ \Theta \to \Theta^{\cdot} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \Theta \to \Theta^{\cdot} \\ a_1 \to \Theta \end{cases} \quad 3. \begin{cases} a_1 \to a_2 \\ \Theta \to \Theta^{\cdot} \end{cases} \quad 4. \begin{cases} a_1 \to a_1^{\cdot} \\ \Theta \to \Theta^{\cdot} \end{cases} \quad 5. \begin{cases} a_1 \to a_1 a_1 \\ \Theta \to \Theta^{\cdot} \end{cases}$$

მარკოვის ნორმალური ალგორითმი 1. სქემით გადაამუშავებს ყოველ A სიტყვას, რომელსაც გააჩნია a_1 სიმბოლოს(სიტყვის) ჩართვა A' სიტყვაში, რომელიც მიიღება A სიტყვიდან მასში ჩართული ყველა a_1 სიმბოლოს ამოღებით. თუ A სიტყვას არ გააჩნია a_1 სიმბოლოს ჩართვა, მაშინ A სიტყვა გადამუშავდება თავის თავში.

მარკოვის ნორმალური ალგორითმი 2. სქემით გადაამუშავებს ყოველ A სიტყვას თავისთავში.

მარკოვის ნორმალური ალგორითმი 3. სქემით გადაამუშავებს ყოველ A სიტყვას, რომელსაჩ არ გააჩნია a_1 სიმბოლოს ჩართვა, თავის თავში, ხოლო ყოველ A სიტყვას, რომელსაც გააჩნია a_1 სიმბოლოს ჩართვა- სიტყვაში A', რომელშიდაც სიმბოლო a_1 ყველგან ჩანაცვლებულია a_2 სიმბოლოთი.

მარკოვის ნორმალური ალგორითმი 4. სქემით ყოველ A სიტყვას გადაამუშავებს თავის თავში.

მარკოვის ნორმალური ალგორითმი 5. სქემთ ყოველ A სიტყვას, რომელსაც არ გააჩნია a_1 სიმბოლოს ჩართვა, გადაამუშავებს თავის თავში. ხოლო იმსიტყვების მიმართ, რომლებსაც a_1 სიმბოლოს ჩართვა გააჩნიათ, ასეთი ალგორითმი გამოუყენებადია. მართლაც:

$$a_2a_1a_3a_1 \Rightarrow a_2a_1a_1a_3a_1 \Rightarrow a_2a_1a_1a_1a_3a_1 \Rightarrow a_2a_1a_1a_1a_1a_3a_1 \Rightarrow \ldots .$$

რაიმე Ω ალფაბეტის სიტყვების სიმრავლეზე ნაწილობრივად განსაზრვრულ ფუნქციას f (ლექსიკონურ ფუნქციას) უწოდებენ ***ნორმალურად გამოთვლად ფუნქციას,*** თუ მოიძებნება Ω ***ალფაბეტის გაფართოება*** $\overline{\Omega};\Omega \subset \overline{\Omega}$ და მარკოვის ნორმალური ალგორითმი $\overline{\Omega}$ ალფაბეტზე, რომელიც ყოველ A სიტყვას f ფუნქციის განსაზღვრის არედან გადაამუშავებს სიტყვაში $f(A)$ და რომელიც გამოუყენებადია ყოველი იმ $B \in F(\Omega)$ სიტყვის მიმართ, რომელიც არ შედის f ფუნქციის განსაზღვრის არეში.

ლექსიკონური ფუნქციის გამოთვლადობის ცნებიდან პირდაპირ გამომდინარეობს რიცხვითი ფუნქციების გამოთვლადობის ცნება.

განსაზღვრება 5.4. ნაწილობრივად განსაზღვრულ n- ადგილიან $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ რიცხვითი ფუნქციას უწოდებენ ***ნორმალურად გამოთვლად რიცხვითი ფუნქციას,*** თუ მოიძებნება $\Omega=\{0,1\}$ ალფაბეტის გაფართოება $\overline{\Omega}$ და მარკოვის ნორმალური ალგორითმი $\overline{\Omega}$ ალფაბრტზე, რომელიც:

1) თუ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ განსაზღვრულია $01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_n}0$ სიტყვაზე, გადამუშავდება სიტყვაში $01^{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}0$.

2) თუ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ არაა განსაზრვრული $01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_n}0$ სიტყვაზე, მაშინ მარკოვის ნორმალური ალგორითმი გამოუყენებადია $01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_n}0$ სიტყვის მიმართ.

განსაზღვრების ფორმულირების დროს ჩვენ გამოვიყენეთ რიცხვების წარმოდგენის ის მეთოდი რომლის დროსაც ნატურალური რიცხვი n წარმოდგინდება $1^n=\underbrace{111\ldots1}_{n}$ სიტყვის სახით. სხვადასხვა რიცხვები $n,m,\ldots k$ კი

სიტყვით: $01^n01^m0\ldots01^k0=0\underbrace{111\ldots1}_{n}0\underbrace{111\ldots1}_{m}0\ldots0\underbrace{111\ldots1}_{k}0$

მაგალითი: $\Omega=\{1\}$ ალფაბეტის სიტყვათა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია $f(1^x)=1^{x+1}$ ნორმალურად გამოთვლადია, ვინაიდან $\Theta \to 1\ast$ სქემით განსაზღვრული მარკოვის ნორმალური ალგორითმი $1^x=\underbrace{111\ldots1}_{x}$ სიტყვას

გადაამუშავებს სიტყვაში $1^{x+1}=\underbrace{111\ldots1}_{x+1}$.

მაგალითი. უმარტივესი რიცხვითი ფუნქცია $s(x)=x+1$, რომელიც ცნობილია რეკურსიულ ფუნქციათა თეორიიდან, ნორმალურად გამოთვლადია

$$\begin{cases} 1 \to 1* \\ 0 \to 01* \end{cases}$$

სქემით და $\Omega = \{0,1\}$ ალფაბეტით განსაზღვრული მარკოვის ნორმალური ალგორითმით.

მაგალითი: ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია $f(x,y) = x + y$ ნორმალურად გამოთვლადია. მართლაც, განვიხილოთ მარკოვის ნორმალური ალგორითმი სქემით:

$$\begin{cases} 101 \to 11* \\ 001 \to 01* \\ 100 \to 10* \\ 000 \to 00* \end{cases}.$$

ცხადია, ამ სქემით განსაზღვრული მარკოვის ნორმალური ალგორითმი ახდენს 01^x01^y0 სიტყვის გადამუშავებას $01^{x+y}0$ სიტყვაში.

ეს კი ნიშნავს იმას, რომ მარკოვის ასეთი ნორმალური ალგორითმი ითვლის $f(x,y) = x + y$ ფუნქციას.

მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად მნიშვნელოვანი თეორემა:

თეორემა 10.1 (მარკოვის ნორმალიზაციის პრინციპი). ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასი ემთხვევა ნორმალურად გამოთვლად ფუნქციათა კლასს.

მარკოვის ნორმალიზაციის პრინციპი, ისევე როგორც ტიურინგის თეორემა, გვიჩვენებს, რომ ალგორითმის ინტუიციური ცნების განხილული დაზუსტებანი ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

სავარჯიშოები:

1 ააგეთ სქემები მარკოვის ნორმალური ალგორითმებისათვის, რომლებიც საჭიროა შემდეგი ფუნქციების გამოსათვლელად:

$$o(x) = 0,\ f(x,y) = x,\ f(x,y) = y,\ f(x,y,z) = x,\ f(x,y,z) = z,\ f(x,y,z) = y.$$

2. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ფუნქციების ნორმალურ გამოთვლადია:

$$f(x) = 2x,\ f(x) = x - 1,\ f(x) = x - 2,\ f(x,y) = x - y.$$

3. დაამტკიცეთ, რომ ნორმალურად გამოთვლადი ფუნქციების სუპერპოზიცია ნორმალურად გამოთვლადია.

თავი VIII

გრაფთა თეორიის ელემენტები

§11. ძირითადი ცნებები

სამეულს $(X;G;f:G\to X\times X)$, სადაც X და G რაიმე სიმრავლეებია, $X\times X$ კი X-ის თავის თავზე დეკარტის ნამრავლი, ეწოდება ***ორიენტირებული გრაფი.*** X სიმრავლის ელემენტებს გრაფის წვეროები ეწოდებათ, ხოლო G სიმრავლის ელემენტებს გრაფის რკალები. თუ $f(g)=(x,y)$, სადაც $(x,y)\in X\times X, g\in G$, მაშინ x და y წვეროებს ეწოდებათ g წიბოს, შესაბამისად,საწყისი და ბოლო წვეროები, ანუ მოკლედ: საწყისი და ბოლო.

ვთქვათ, ახლა X რაიმე სიმრავლეა, შევიტანოთ $X\times X$ სიმრავლეში ეკვივალენტობის მიმართება ასეთნაირად: $(x,y)\approx(y,x)$, მაშინ $X\times X$ სიმრავლე დაიყოფა კლასებად. აღვნიშნოთ ამ კლასების სიმრავლე $X\otimes X$-ით და ვუწოდოთ მას X სიმრავლის თავის თავზე სიმეტრიული ნამრავლი.

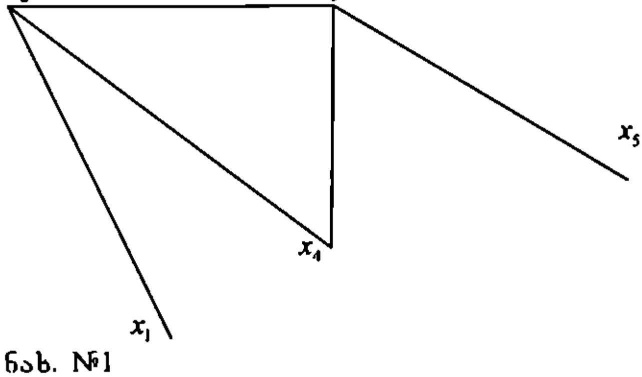
სამეულს $(X;G;f:G\to X\otimes X)$, რომლის პირველი ორი კომპონენტი იგივეა რაც ზემოთ, ეწოდება ***არაორიენტირებული გრაფი.***

არაორიენტირებულ გრაფში G სიმრავლეს წიბოთა სიმრავლე ეწოდება, მის ელემენტებს- წიბოები.

თუ $f(g)=[(x,y)]$, სადაც $g\in G,[(x,y)]\in X\otimes X$, მაშინ არაორიენტირებულ გრაფში x და y წვეროებს ეწოდებათ g ***წიბოს ბოლოები.***

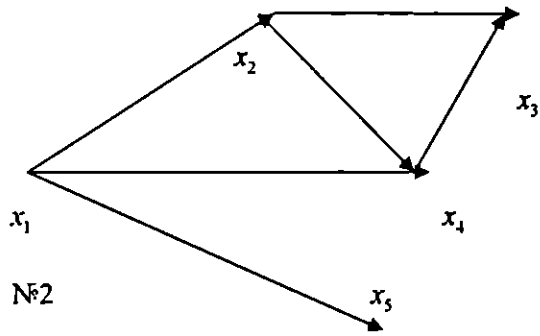
f ასახვას,როგორც ორიენტირებულ გრაფში, ასევე არაორიენტირებულში, ***გრაფის სტრუქტურას*** უწოდებენ. თუ $f(g)=(x,y)$ ან $f(g)=[(x,y)]$, მაშინ ამბობენ, რომ g ***რკალი(წიბო) ინციდენტურია*** x ***და*** y ***წვეროების,*** ასევე, x და y წვეროები ინციდენტურია g რკალის(წიბოსი). წვეროს, რომელიც არც ერთი წიბოს ინციდენტური არ არის, უწოდებენ ***იზოლირებულს.*** გრაფს, რომლის წიბოთა სიმრავლე ცარიელია, უწოდებენ ***ნოლ- გრაფს.***

არაორიენტირებული გრაფი სიბრტყეზე ან სივრცეში გრაფიკულად შეიძლება გამოვსახოთ წერტილებით, რომლებიც ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში არიან გრაფის წვეროების სიმრავლესთან და მათი შემაერთებელი ისეთი წირებით: რომლებიც ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში არიან გრაფის წიბოების სიმრავლესთან, რომელთა საერთო წერტილები მხოლოდ გრაფის წვეროები შეიძლება იყვნენ და თითოეული ეს წირი მხოლოდ ერთხელ გაივლის იმ წვეროებზე რომლებსაც იგი აერთებს. წერტილებისა და წირების ამ ერთობლიობას ***გრაფის გეომეტრიული რეალიზაცია*** ეწოდება. არაორიენტირებული გრაფის გეომეტრიული რეალიზაცია წარმოდგენილია ნახაზზე №1



ნახ. №1

ორიენტირებული გრაფი ასევე შეიძლება გამოვსახოთ სიბრტყეზე ან სივრცეში გრაფიკულად წერტილებით, რომლებიც ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში არიან გრაფის წვეროების სიმრავლესთან და მათი შემაერთებელი მიმართული წირებით, რომლებიც ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში არიან რკალების სიმრავლესთან და რომლებსაც იგივე თვისებები აქვთ, რაც არაორიენტირებულ შემთხვევაში. წერტილებისა და მიმართული წირების ამ ერთობლიობას ორიენტირებული ***გრაფის გეომეტრიული რეალიზაცია*** ეწოდება. ორიენტირებული გრაფის გეომეტრიული რეალიზაცია წარმოდგენილია ნახაზზე №2



ნახ. №2

მტკცდება, რომ არსებობს როგორც არაორიენტირებული, ასევე ორიენტირებული გრაფის გეომეტრიული რეალიზაცია სამგანხომილებიან ევკლიდეს სივრცეში.

არაორიენტირებული გრაფის წეროებს ეწოდება ***მეზობელი წვეროები***, თუ არსებობს ამ წვეროების შემაერთებელი წიბო. გრაფის წიბოებს ეწოდება ***მეზობელი წიბოები***, თუ მათ საერთო წვერო გააჩნიათ.

არაორიენტირებული გრაფის რაიმე წვეროს და წიბოს უწოდებენ ***ურთიერთინციდენტურს***, თუ წვერო წიბოს ბოლოს წარმოადგენს.

არაორიენტირებული ***გრაფის წვეროს ხარისხი*** ეწოდება ამ წვეროს ინციდენტური წიბოების რიცხვს. x_i წვეროსათვის ეს რიცხვი აღვნიშნოთ ასე: $\lambda(x_i)$.

არაორიენტირებული გრაფის წვეროს უწოდებენ ***დაკიდებულს***, თუ მისი ხარისხი ერთის ტოლია. წვეროს ***უწოდებენ ლუწს***, თუ მისი ხარისხი ლუწია. წვეროს ***უწოდებენ კენტს***, თუ მისი ხარისხი კენტია.

ორიენტირებული გრაფის ***წვეროს შესვლის ხარისხი*** ეწოდება გრაფის იმ რკალების რიცხვს რომლების შედიან ამ წვეროში, ***წვეროს გამოსვლის ხარისხი*** ეწოდება გრაფის იმ რკალების რიცხვს რომლების გამოდიან ამ წვეროდან.

ეს ხარისხები აღვნიშნოთ λ_I, λ_F სიმბოლოებით შესაბამისად.

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ ნახ.1-ზე მოცემული არაორიენტირებული გრაფის წვეროთა ხარისხები.
2. იპოვეთ ნახ.2-ზე მოცემული ორიენტირებული გრაფის წვეროთა შესვლისა და გამოსვლის ხარისხები.
3. ამოწერეთ ნახ.1-ზე და ნახ. 2-ზე მოცემული გრაფებიდან მეზობელ წვეროთა და მეზობელ წიბოთა (რკალთა) წყვილები.

§12. გრაფთა ტიპები

არაორიენტირებულ გრაფს ეწოდება ***არაორიენტირებულ სრული გრაფი,*** თუ $f:G\to X\otimes X$ ასახვა ინექციაცაა და სიურექციაც.

ორიენტირებულ გრაფს უწოდებენ ***ორიენტირებულ სრულ გრაფს,*** თუ $f:G\to X\times X$ ასახვა ინექციაცაა და სიურექციაც.

ორიენტირებულ გრაფს $G(X)=(X;G;f:G\to X\times X)$ ეწოდება ***ორიენტირებული ტრანზიტული გრაფი,*** თუ მასში ისეთ რკალებთან ერთად $g_1,g_2\in G$, რომელთათვისაც $f(g_1)=(x,y), f(g_2)=(y,z)$, არსებობს რკალი g_3, რომლისთვისაც $f(g_3)=(x,z)$.

არაორიენტირებულ გრაფს $G(X)=(X;G;f:G\to X\otimes X)$ ეწოდება ***არაორიენტირებული ტრანზიტული გრაფი,*** თუ მასში ისეთ რკალებთან ერთად $g_1,g_2\in G$, რომელთათვისაც $f(g_1)=[(x,y)] f(g_2)=[(x,z)]$ არსებობს რკალი g_3 რომლისთვისაც $f(g_3)=[(x,z)]$.

შემდგომში გრაფს, რომლის წვეროების სიმრაველეა X და წიბოების სიმრავლე G, აღენიშნავთ ასე: $G(X)$.

ორიენტირებული $G(X)$ გრაფის ***შებრუნებული გრაფი*** ეწოდება გრაფს რომლის წიბოებსაც საპირისპირო მიმართულებები აქვთ, ხოლო წვეროთა სიმრაველე იგივეა. იგი აღინიშნება ასე $G^{-1}(X)$.

თუ $G(X)=(X;G;f:G\to X\times X)$, მაშინ $G^{-1}(X)=(X;G;\varphi:G\to X\times X)$, სადაც $\varphi(g)=(y,x)$, თუ $f(g)=(x,y)$.

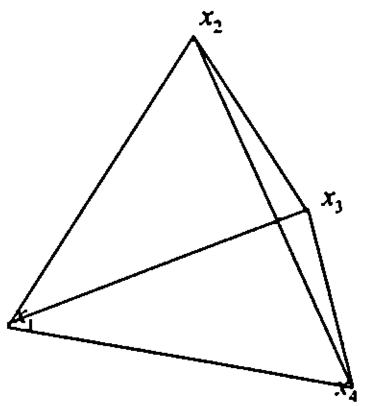
წიბოს არაორიენტირებულ გრაფში ეწოდება ***მარყუჟი,*** თუ მისი ბოლოები ერთმანეთს ემთხვევა.

გრაფს ეწოდება ***ფსევდოგრაფი,*** თუ იგი შეიცავს მარყუჟებს ან მისი სტრუქტურა არ წარმოადგენს ინექციას.

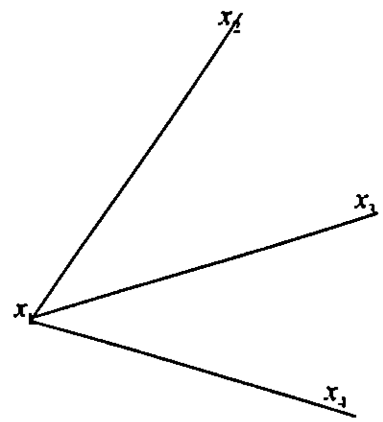
ფსევდოგრაფს ეწოდება ***მულტიგრაფი,*** თუ იგი არ შეიცავს მარყუჟებს.

გრაფს ეწოდება ***ერთგვაროვანი გრაფი,*** თუ მისი ყოველი ორი წვერო შეერთებულია ერთი წიბოთი(რკალით) და არ შეიცავს მარყუჟებს.

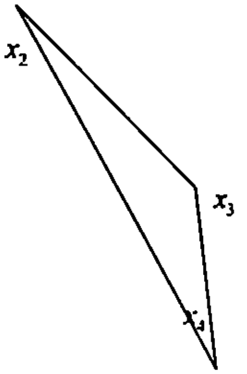
$G(X)$ ***გრაფის დამატება*** ეწოდება გრაფს $G_d(X)$, რომლის წიბოები მოცემული გრაფის წიბოებთან ერთად ქმნიან სრულ გრაფს. გრაფთა აღწერილი ტიპები წარმოდგენილია ნახაზზე №3.



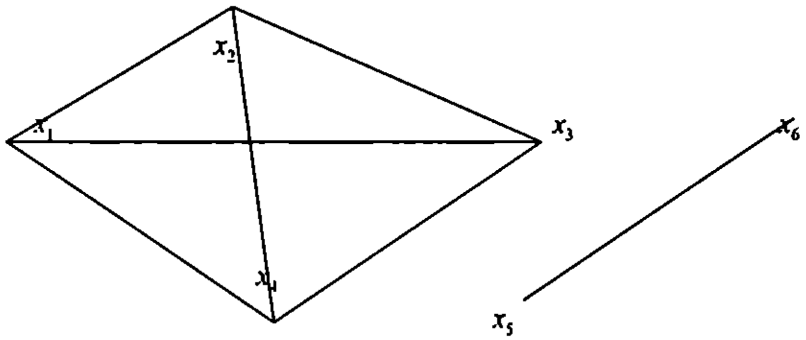
ა) სრული გრაფი



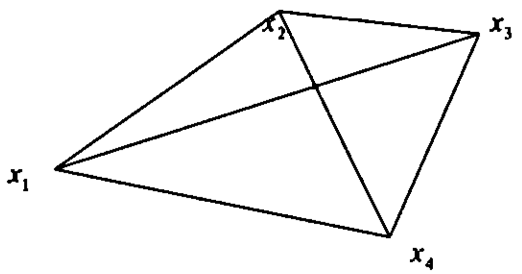
ბ. $G(X)$ გრაფი



გ) $G(X)$ გრაფის დამატება $G_d(X)$ გრაფი.



დ) ტრანზიტული გრაფი.



ე) ერთგვაროვანი გრაფი.

ნახ. №3.

სავარჯიშოები:

1. ააგეთ სრული გრაფების მაგალითები, გამოთვალეთ მათი წვეროების ხარისხები როგორც არაორიენტირებულ, ასევე ორიენტირებულ შემთხვევაში.
2. ააგეთ გრაფი და იპოვეთ მისი დამატება და მისი შებრუნებული გრაფი.

§13. ჯაჭვები და ციკლები გრაფში

ჯაჭვი არაორიენტირებულ გრაფში ეწოდება მისი წიბოების ისეთ მიმდევრობას $S=(,,,g_1,g_2,g_3,\dots)$, რომელშიდაც ყოველ წიბოს g_i ერთი ბოლო წარმოადგენს g_{i-1} წიბოს ბოლოს, მეორე ბოლო კი g_{i+1} წიბოს ბოლოს. ჯაჭვში ერთი და იგივე წვერო და ერთი და იგივე წიბო შეიძლება განმეორდეს მრავალჯერ. თუ ჯაჭვში $S=(\dots g_0,g_1,\dots)$

g_0 წიბოს წინ არ უსწრებს არც ერთი სხვა წიბო, მაშინ მის იმ წვეროს, რომელიც არ არის g_1 წიბოს ბოლო, ეწოდება ჯაჭვის ***საწყისი წვერო***. თუ ჯაჭვში $S=(\dots,g_{i-1},g_i,\dots)$ g_i წიბოს არ მოსდევს არც ერთი სხვა წიბო, მაშინ მის იმ წვეროს, რომელიც არ არის g_{i-1} წიბოს ბოლო ეწოდება ***ჯაჭვის ბოლო*** წვერო. ყველა სხვა წვეროს ჯაჭვში ეწოდება ***შიგა წვერო***. თუ ჯაჭვში g_0 საწყისი წვეროა, g_k ბოლო წვერო, მაშინ k რიცხვს ეწოდება მოცემული ***ჯაჭვის სიგრძე***. იგი აღინიშნება ასე: $l(S)$.

ჯაჭვს ეწოდება ***მარტივი***, თუ მასში ყველა წიბო შედის მხოლოდ ერთხელ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჯაჭვს ეწოდება ***შედგენილი***. ჯაჭვს ეწოდება ***ელემენტარული***, თუ მასში არც ერთი წვერო არ მეორდება ორჯერ. ჯაჭვს ეწოდება ***სასრული***, თუ ის წარმოადგენს სასრულ მიმდევრობას. სასრულ ჯაჭვს ეწოდება ***ციკლი*** თუ მისი საწყისი წვერო ემთხვევა ბოლო წვეროს.

ციკლს ეწოდება ***მარტივი ციკლი***, თუ მასში წიბოები არ მეორდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ციკლს ეწოდება ***შედგენილი ციკლი***.

ციკლს ეწოდება **ელემენტარული** თუ მასში ყოველი მისი წვერო შედის მხოლოდ ერთხელ.

ტრაექტორია ორიენტირებულ გრაფში ეწოდება მისი რკალების ისეთ მიმდევრობას $S=(\dots,g_1,g_2,\dots g_k,\dots)$, რომელშიც ბოლო ყოველი წინა წიბოსი წარმოადგენს საწყისს მომდევნოსას.

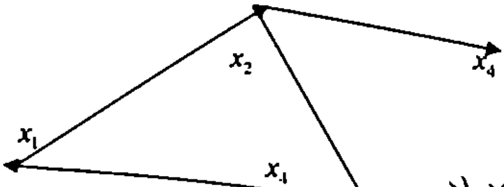
ტრაექტორიას ეწოდება ***მარტივი***, თუ მასში ყოველი რკალი გეხვდება მხოლოდ ერთხელ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ტრაექტორიას უწოდებენ ***შედგენილს***. ტრაექტორიას ეწოდება ***ელემენტარული***, თუ მასში ყოველი მისი წვერო შედის მხოლოდ ერხელ. ტრაექტორიას ეწოდება ***სასრული***, თუი იგი წარმოადგენს სასრულ მიმდევრობას. სასრულ ტრაექტორიას ეწოდება ***კონტური*** თუ მისი საწყისი წვერო ემთხვევა ბოლო წვეროს.

აქაც საწყისი და ბოლო წვეროები ისევე განისაზღვრება, როგორც ჯაჭვში. მარტივი, შედგენილი და ელემენტარული კონტურები ისევე განისაზღვრება, როგორც ციკლის შემთხვევაში.

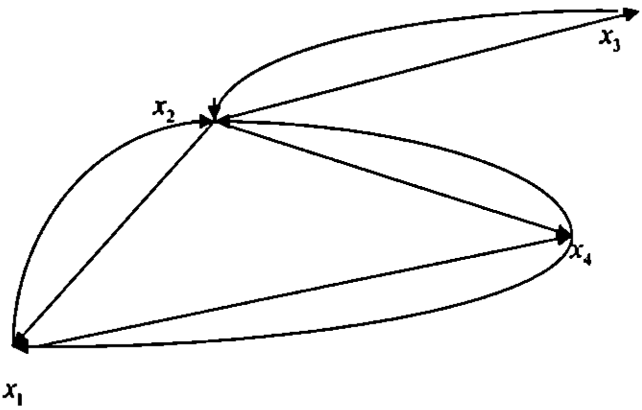
ტრაექტორიის სიგრძე ეწოდება მასში შემავალი რკალების რაოდენობას, იგი აღინიშნება ასე: $l(S)$.

ორიენტირებულ გრაფთა შორის განასხვავებენ ***სიმეტრიულ*** და ***ანტისიმეტრიულ*** გრაფებს. გრაფს ეწოდება სიმეტრიული, თუ მასში ყოველ წიბოსთან ერთად, რომლის საწყისი და ბოლოა, შესაბამისად x და y წვეროებია, შედის წიბო, რომლის საწყისი და ბოლოა, შესაბამისად y და x წვეროები. გრაფს ეწოდება ანტისიმეტრიული, თუ მასში შემავალ წიბოებს შორის არ გეხვდება ერთმანეთის საპირისპიროდ ორიენტირებული წიბოები, ანუ თუ $f(g)=(x,y)$, მაშინ $f(q)\neq(y,x)$ არც ერთი სხვა q წიბოსათვის მოცემულ გრაფში.

სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული გრაფები გრაფიკულად წარმოდგენილია ნახაზზე№4.



ა) არა სიმეტრიული



ბ) სიმეტრიული გრაფი.

ნახ. №4.

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ ნახ.-4-ზე მოყვანილი ორიენტირებული გრაფების წვეროთა როგორც შესვლისნ ასევე გამოსვლის ხარისხები და შეადარეთ წვეროს ხარისხთა ეს ორი ერთობლიობა ერთმანეთს.

.2. ამოწერეთ ნახ.-4-ზე მოყვანილ სიმეტრიულ გრაფში x_1 და x_2 წვეროს შემაერთებელი ყველა ტრაექტორია, განსაზღვრეთ მათი სიგრძეები.

3. ამოწერეთ ნახ.-4-ზე მოყვანილ სიმეტრიულ გრაფში არსებული ყველა კონტური, გამოაცალკევეთ მათგან მარტივი და ელემენტარული კონტურები.

§14. სასრული და უსასრულო გრაფები

გრაფს ***ეწოდება სასრული გრაფი,*** თუ მისი წვეროების რიცხვი სასრულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში გრაფს ეწოდება ***უსასრულო გრაფი.***

შემდგომში X იმ წიბოების სიმრავლის სიმძლავრეს $G(X)$ გრაფში, რომლის საწყის წვეროს ორიენტირებულ შემთხვევაში და ერთერთ ბოლოს არაორიენტირებულ შემთხვევაში, წარმოადგენს $x \in X$ წვერო აღვნიშნავთ ასე: $|G(x)|$, ხოლო ყველა წვეროს რაოდნობა აღინიშნება ასე: $|X|$.

გრაფი $G(X)$ სასრულია, თუ $|X|<\infty$,

გრაფი $G(X)$ $G-$ ***სასრულია,*** თუ $|G(x)|<\infty$ ყოველი $x \in X$ წვეროსათვის,

გრაფი $G(X)$ G^{-1} ***-სასრულია,*** თუ $|G^{-1}(x)|<\infty$ ყოველი $x \in X$ წვეროსათვი

გრაფი $G(X)$ ***ლოკალურად სასრულია,*** თუ იგი $G-$სასრულია და G^{-1}-სასრულია ერთდროულად.

გრაფს $G(X)$ უწოდებენ G***-შემოსაზღვრულს,*** თუ არსებობს რიცხვი m ისეთი, რომ $|G(x)| \le m$ ყოველი $x \in X$ წვეროსათვის.

გრაფს $G(X)$ უწოდებენ **პროგრესულად სასრულს** $x \in X$ ***წვეროში,*** თუ მასში არ არსებობს უსასრულო სიგრძის ჯაჭვი(ტრაექტორია), რომელიც იწყება ამ წვეროში.

გრაფს $G(X)$ უწოდებენ ***პროგრესულად სასრულს,*** თუ იგი პროგრესულად სასრულია ყოველ თავის წვეროში.

გრაფს $G(X)$ უწოდებენ ***პროგრესულად შემოსაზღვრულს*** $x\in X$ ***წვეროში***, თუ არსებობს რიცხვი m, რომ ყოველი ჯაჭვის(ტრაექტორიის) სიგრძე, რომელიც იწყება ამ წვეროში, არ აღემატება m-ს.

გრაფს $G(X)$ უწოდებენ **პროგრესულად შემოსაზღვრულს**,თუ იგი პროგრესულად შემოსაზღვრულია ყოველ თავის წვეროში.

ცხადია, პროგრესულად შემოსაზღვრული გრაფი პროგრესულად სასრულია.

გრაფს $G(X)$ უწოდებენ ***რეგრესულად სასრულს,*** თუ $G^{-1}(X)$ გრაფი პროგრესულად სასრულია.

გრაფს $G(X)$ უწოდებენ ***რეგრესულად შემოსაზღვრულს***, თუ $G^{-1}(X)$ გრაფი პროგრესულად შემოსაზღვრულია.

§15.ნაწილობითი გრაფები, ქვეგრაფები

$H(X)$ გრაფს ეწოდება $G(X)$ გრაფის ***ნაწილობითი გრაფი,*** თუ მისი ყოველიწიბო ეკუთვნის $G(X)$ გრაფსაც, წვეროები კი ერთმანეთს ემთხვევა.

ყოველი გრაფისათვის მისი წვეროებისაგან შედგენილი ნოლგრაფი მისი ნაწილობითი გრაფია. გრაფის ნაწილობითი გრაფი ორიენტირებულია ან არაორიენტირებულია იმისდა მიხედვით,თუ როგორია მოცემული გრაფი.

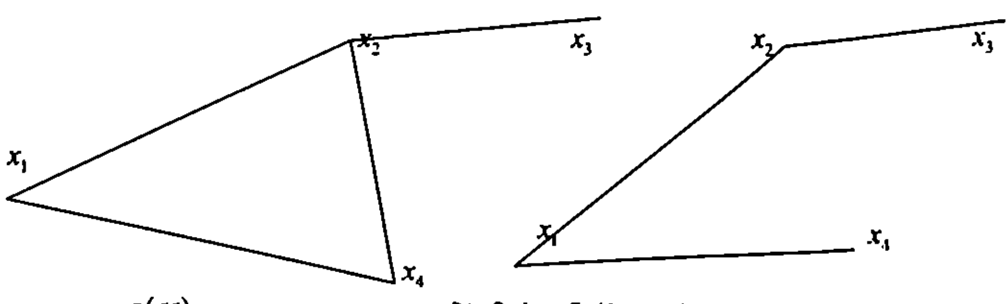
$G_A(A)$ გრაფს ეწოდება $G(X)$ გრაფის ***ქვეგრაფი,*** თუ $A\subset X$, ხოლო $G(X)$ გრაფის ყველა წიბო, რომელთა ბოლოები, არაორიენტირებულ შემთხვევაში ან საწყისი და ბოლო ორიენტირებულ შემთხვევაში მიეკუთვნებიან $A\subset X$ ქვესიმრავლეს.

გრაფის ქვეგრაფი ორიენტირებულია ან არაორიენტირებულია იმისდა მიხედვით, თუ როგორია მოცემული გრაფი.

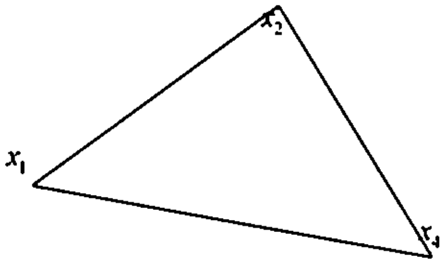
$H_A(A)$ გრაფს, სადაც $A\subset X$, ეწოდება $G(X)$ გრაფის ***ნაწილობითი ქვეგრაფი,*** თუ მისი წიბოები წარმოადგენენ ზოგიერთ იმ წიბოს $G(X)$ გრაფისა, რომელთა საწყისი და ბოლო ან ბოლოები მიეკუთვნებიან $A\subset X$ ქვესიმრავლეს.

დამატებითი ნაწილობითი ქვეგრაფი $G(X)$ გრაფში ეწოდება ერთადერთ გრაფს, რომელიც შედგება იმ წიბობისაგან, რომლებიც არ მიეკუთვნებიან რაიმე ნაწილობით ქვეგრაფს $G(X)$ გრაფში.

გრაფს ეწოდება $x\in X$ წვეროთი განსაზღვრული ***ვარსკვლავური გრაფი,*** თუ იგი შედგება $G(X)$ გრაფის იმ წიბოებისაგან, რომელთა საწყისს ან ბოლოს, ორიენტირებულ შემთხვევაში ან ბოლოს არაორიენტირებულ შემთხვევაში, წარმოადგენს $x\in X$ წვერო. ნაწილობითი გრაფის, ქვეგრაფის მაგალითები გრაფიკულად მიყვანილია ნახაზზე №



ა) $G(X)$ გრაფი ბ) მისი ნაწილობრივი გრაფი



გ) მისი ქვეგრაფი

ნახ. №5.

§16. გრაფთა ბმულობა

განსაზღვრება16.1. არაორიენტირებულ გრაფს $G(X)$ ***ეწოდება ბმული არაორიენტირებულ გრაფი,*** თუ მისი ყოველი ორი x,y წვეროსათვის არსებობს ჯაჭვი, რომლის ბოლოებსაც წარმოადგენენ ეს წერტილები. თუ ეს ჯაჭვი ისეთია, რომ მასში რომელიმე წვერო მეორდება.მაშინ ამ ჯაჭვიდან ისეთი ციკლის ამოკვეთით, რომელიც აღნიშნული წვეროთი იწყება და მთავრდება, მიიღებული ჯაჭვი ასევე აერთებს წვეროებს x,y. თუ ციკლების ამოკვეთას გავაგრძელებთ, საბოლოოდ მივიღებთ მარტივ ჯაჭვს, რომელიც აერთებს x,y წვეროებს. მაშასადამე, ბმულ არაორიენტირებულ გრაფში ყოველი ორი წვერო შეიძლება შევაერთოთ მარტივი ჯაჭვით.

$G(X)$ გრაფის ***ბმულობის კომპონენტი*** ეწოდება მის ისეთ ბმულ ქვეგრაფს $H_A(A)$, რომლის წვეროებიც ინციდენტურნი არიან მხოლოდ ამ ქვეგრაფის წიბოებთან.

არაბმული, არაორიენტირებული, სასრული გრაფი შედგება რამდენიმე ბმული ქვეგრაფისაგან.

ორიენტირებულ $G(X)$ გრაფს ეწოდება ***ძლიერად ბმული ორიენტირებული გრაფი,*** თუ მისი ყოველი ორი x,y წვერო შეიძლება შევაერთოთ ტრაექტორიით, რომელიც იწყება x წვეროში და მთავრდება y წვერო'ში.

ორიენტირებული, ძლიერად ბმული $G(X)$ გრაფის ბმულობის კომპონენტი ეწოდება მის ისეთ ძლიერად ბმულ $H_A(A)$ ქვეგრაფს, რომლის წვეროებიც ინციდენტურნი არიან მხოლოდ ამ გრაფის წიბოებთან.

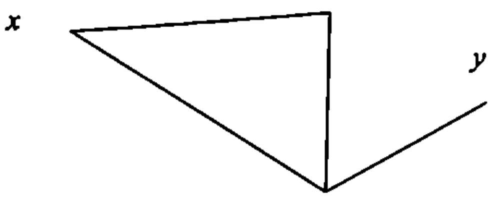
არაორიენტირებული გრაფი ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი შეიცავს მხოლოდ ერთ ბმულობის კომპონენტს.

ასევე, ორიენტირებული გრაფი ძლიერად ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი შეიცავს მხოლოდ ერთ ბმულობის კომპონენტს.

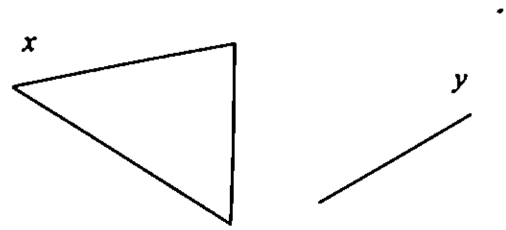
ვთქვათ,$G(X)=(X;G;f:G\to X\times X)$ ორიენტირებული გრაფია, არაორიენტირებულ $G^*(X)=(X;G;\varphi:G\to X\otimes X)$ გრაფს, რომლისთვისაც $\varphi(g)=[f(g)]$, უწოდებენ $G(X)$ გრაფთან მიკავშირებულ არაორიენტირებულ გრაფს, ხოლო ყველა ორიენტირებულ გრაფს, რომელთანაც მიკავშირებულია მოცემული $G(X)$ არაორიენტირებული გრაფი, უწოდებენ $G(X)$ გრაფის ორიენტაციით მიღებულ გრაფს. ასეთი გრაფი მრავალი შეიძლება იყოს, აღვნიშნოთ ის $\overline{G}(X)$-ით.

თუ ორიენტირებული გრაფი ძლიერად ბმულია, მაშინ მისი მიკავშირებული გრაფი ბმულია. მაგრამ ყოველი ბმული არაორიენტირებული გრაფისთვის არსებობს მისი ორიენტაციით მიღებული არაძლიერად ბმული გრაფი. ბმული და

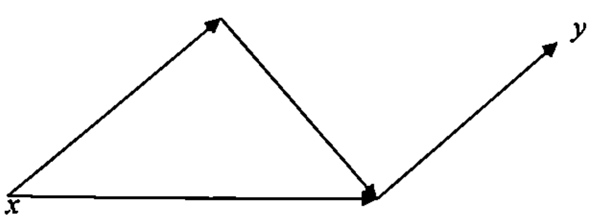
არაბმული არაორიენტირებული გრაფების, ძლიერად ბმულიდა ძლიერად არაბმული გრაფების გრაფიკული გამოსახულებანი მოცემულია ნახაზზე №6:

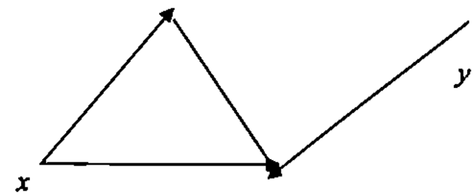


ა) ბმული გრაფი,



ბ) არაბმული გრაფი,





გ) ძლიერად ბმული გრაფი, დ) არაძლიერად ბმული გრაფი.

ნახ. № 6

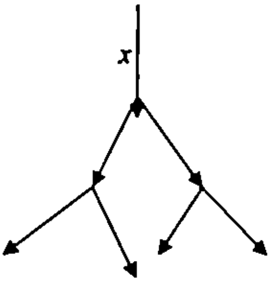
თეორემა 16.1. თუ სასრული ბმული არაორიენტირებული $G(X)$ გრაფის წვეროების რიცხეია p, წიბოების რიცხვი კი q- მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას: $q \geq p-1$.

დამტკიცება: შევაერთოთ გრაფის გეომეტრიული რეალიზაციის დროის წვეროების შესაბამისი წერტილები სიერცეში ერთმანეთის მიმდევრობით. შემაერთებელი წიბოების რიცხვი იქნება $p-1$. რადგან გრაფი სასრულია და ბმული, ამიტომ ნებისმიერი სხვა ჯაჭვი მოცემულ გრაფში, რომელიც აგებული ჯაჭვის ბოლოებს აერთებს, იქნება უფრო გრძელი. ეს კი ამტკიცებს უტოლობას.

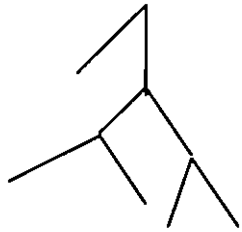
არაორიენტირებულ სასრულ ბმულ გრაფს უწოდებენ ***ხეს,*** თუ ის არ შეიცავს ციკლს და გააჩნია ორი წვერო მაინც. ასეთი გრაფი არ წარმოადგენს მულტიგრაფს, ანუ მისი ორი წიბო არ არის წვეროთა ერთი და იმავე წყვილის ინციდენტური. ასეთი გრაფის წიბოებს ***შტოებს*** უწოდებენ. იმ გრაფის წიბოებს, რომელიც წარმოადგენს ხის, როგორც გრაფის დამატებას, ამ ***ხის ქორდები*** ეწოდებათ. ხეს უწოდებენ ***ლაგრანჟის ხეს,*** თუ მის ყველა შტოს ერთი საერთო წვერო გააჩნია. ***ტყე*** ეწოდება ისეთ არაბმულ გრაფს, რომლის ბმულობის კომპონენტებიც წარმოადგენენ ხეებს.

ვთქვათ, $G(X)$ რაიმე ხის ორიენტაციით მიღებული გრაფია. ვიტყვით, რომ x წვერო წარმოადგენს ამ გრაფის ძირს, თუ ამ გრაფში არ არსებობს რკალი, რომლის ბოლოცაა x წვერო. ცხადია, ხის ორიენტაციით მიღებულ გრაფში კონტურები არ არსებობენ.

ხის ორიენტაციით მიღებულ ძლიერად ბმულ გრაფს, რომელსაც გააჩნია ერთადერთი ძირი წინახე ეწოდება. ხისა და წინახის გრაფიკული გამოსახულებანი მოცემულია ნზხაზზე №7:



ა) წინახე



ბ) ხე

ნახ №7.

თეორემა 16.2. თუ სასრული ბმული არაორიენტირებული $G(X)$ გრაფის წვეროების რიცხვია p, წიბოების რიცხვი კი- q, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას $q \geq p-1$.

დამტკიცება: წიბოების რიცხვი, ცხადია, მინიმალურია ისეთ გრაფებში, რომლებიც ციკლებს არ შეიცავენ. ასეთ გრაფებს კი, რიგორც აღვნიშნეთ ხეებს უწოდებენ. განვიხილოთ ამ ხეთა შტოები, შტოების რაოდენობა იმდენია, რამდენიც იქნება წიბოების რაოდენობა გრაფში, რომელიც მიიღება მოცემული გრაფის წვეროების მიმდევრობით შეერთებით. ეს რაოდენობა კი ტოლია $p-1$. რადგან გრაფი ბმულია, სწორედ $p-1$ იქნება წიბოების მინიმალური რაოდენობა p რაოდენობის წვეროს მქონე გრაფში. თეორემა დამტკიცდა.

ვთქვათ, მოცემულია $G(X)$ არაორიენტირებული ბმული გრაფი, რომელიც შეიცავს ციკლს. თუ ამოვიღებთ ამ ციკლიდან რომელიმე წიბოს, ეს ციკლი დაირღვევა, მაგრამ გრაფის ბმულობა შენარჩუნდება. თუ ასეთი მოქმედებებით დავარღვევთ ყველა ციკლს $G(X)$ გრაფში, მივიღებთ ბმულ გრაფს, რომელიც იქნება ხე. ამ ხეს $G(X)$ ***გრაფის ჩონჩხი*** ეწოდება. $G(X)$ გრაფის ჩონჩხი შეიცავს ამ გრაფის ყველა წვეროს. აღვნიშნოთ $G(X)$ გრაფის ჩონჩხი ასე: $\Im G(X)$. ცხადია, გრაფს სხვადასხვა ჩონჩხი შეიძლება ქონდეს.

უმცირეს l რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენი წიბო უნდა ამოვიღოთ $G(X)$ გრაფიდან, რომ მივიღოთ მისი ჩონჩხი, $G(X)$ გრაფის ***ციკლომატური რიცხვი ეწოდება.*** $G(X)$ გრაფის ციკლომატური რიცხვი აღინიშნება ასე: $CG(x)$. ადვილია ჩვენება, რომ $CG(x) = q - p + k$, სადაც p გრაფის წვეროების რიცხვია, q გრაფის წიბოების რიცხვი, k გრაფის ბმულობის კომპონენტთა რიცხვი.

ვთქვათ, M წარმოდგენს $G(X)$ გრაფის ყოველი ციკლიდან თანმიმდევრობით ამოღებულ თითო წიბოთი შედგენილ სიმრავლეს. ამ წიბოების ამოღებით, როგორც ვნახეთ, მიიღება გრაფის ჩონჩხი $\Im_M G(X)$. თითოეულ ასეთ წიბოს შეესაბამება ციკლი, რომელიც ირღვევა მისი ამოღებით. ეს შესაბამისობა, ცხადია, ურთიერთცალსახაა. აღვნიშნოთ M სიმრავლის ელემენტების შესაბამისი ციკლების სიმრავლე $Q\Im_M G(X)$ სიმბოლოთი. ვუწოდოთ ციკლების აღნიშნულ სიმრავლეს $G(X)$ ***გრაფის*** $\Im_M G(X)$ ***ჩონჩხის მიმართ ფუნდამენტალური ციკლების სიმრავლე.***

ცხადია $Q\Im_M G(X)$ ფუნდამენტალურ ციკლების სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა ტოლია $G(X)$ გრაფის ციკლომატური რიცხვის.

სავარჯიშოები:

1. ააგეთ გრაფი და იპოვეთ მისი ჩონჩხი.
2. ააგეთ გრაფი და იპოვეთ მისი ციკლომატური რიცხვი.

3. ააგეთ გრაფი და იპოვეთ მისი ფუნდამენტური ციკლები რომელიმე ჩონჩხის მიმართ.

4 გრაფის ციკლომატური რიცხეია 5, წიბოების რიცხეი 8, ბმულობის კომპონენტთა რიცხეი 2. იპოეთ გრაფის წვეროთა რაოდენობა.

§17. გრაფთა იზომორფიზმი

არაორიენტირებულ გრაფებს: $G(X) = (X; G; f : G \to X \otimes X)$, $H(Y) = (Y; H; \varphi : H \to Y \otimes Y)$ ეწოდებათ ***იზომორფული გრაფები,*** თუ არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა ასახეაები მათი წვეროების სიმრაელეებს შორის და წიბოთა სიმრაელეებს შორის: $\eta : X \to Y, \theta : G \to H$, რომ დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\theta} & H \\ f\downarrow & & \downarrow\varphi \\ X \times X & \xrightarrow{\eta^*} & Y \times Y \end{array}$$

კომუტაციურია, ეს ნიშნავს იმას, რომ ყოველი $g \in G$ რკალისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$(\eta^*(f(g))) = (\theta(\varphi(g)))$, სადაც $\eta^* : X \otimes X \to Y \otimes Y$ არის ასახეა, რომელიც განისაზღერება ფორმულით: $\eta^*([(x_1, x_2)]) = [(\eta(x_1), \eta(x_2))]$.

ასევე, ორიენტირებულ გრაფებს:

$$G(X) = (X; G; f : G \to X \times X), H(Y) = (Y; H; \varphi : H \to Y \times Y)$$

ეწოდებათ იზომორფული, თუ არსებობენ ურთიერთცალსახა ასახვები მათი წვეროებისა და რკალების სიმრაელეებს შორის: $\eta : X \to Y, \theta : G \to H$, ისეთნი, რომ დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\theta} & H \\ f\downarrow & & \downarrow\varphi \\ X \times X & \xrightarrow{\eta^*} & Y \times Y \end{array},$$

კომუტაციურია, ანუ ყოველი $g \in G$ რკალისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $(\eta^*(f(g))) = (\theta(\varphi(g)))$, სადაც $\eta^* : X \times X \to Y \times Y$ არის ასახეა, რომელიც განისაზღერება ფორმულით: $\eta^*((x_1, x_2)) = (\eta(x_1), \eta(x_2))$. §18.

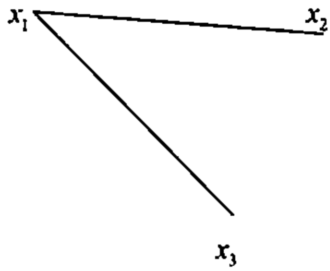
§18. ოპერაციები გრაფებზე

ეთქვათ მოცემულია ორი არაორიენტირებული გრაფი $G_1(X_1) = (X_1; G_1; f_1 : G_1 \to X_1 \otimes X_1)$ და $G_2(X_2) = (X_2; G_2; f_2 : G_2 \to X_2 \otimes X_2)$, ვიგულისხმოთ, რომ $G_1 \cap G_2 = L$, $f_1|_L = f_2|_L$.

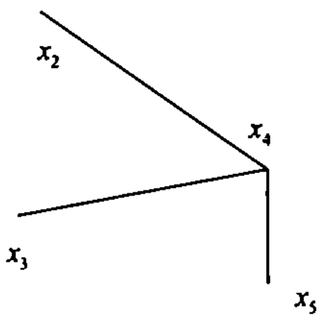
$G_1(X_1) = (X_1; G_1; f_1 : G_1 \to X_1 \otimes X_1)$ და $G_2(X_2) = (X_2; G_2; f_2 : G_2 \to X_2 \otimes X_2)$ ***გრაფების ჯამი*** ეწოდება გრაფს $G(X) = G_1(X_1) \cup G_2(X_2) = (X; G; f : G \to X \otimes X)$, სადაც $X = X_1 \cup X_2, G = G_1 \cup G_2$, $f|_G = f_1, f|_{G_2} = f_2$.

$G_1(X_1)$ და $G_2(X_2)$ გრაფების ჯამი აღინიშნება ასე: $G_1(X_1) + G_2(X_2)$.
ანალოგიურად განისაზღერება გრაფთა ჯამი ორიენტირებულ შემთხვევაში, მხოლოდ ნამრაელი $X_i \otimes X_i$ იცვლება $X_i \times X_i$ ნამრაელით.

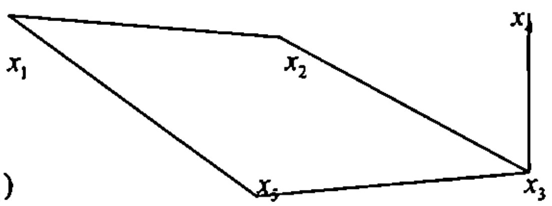
არაორიენტირებული $G_1(X_1)=(X_1;G_1;f_1:G_1 \to X_1 \otimes X_1)$ და $G_2(X_2)=(X_2;G_2;f_2:G_2 \to X_2 \otimes X_2)$ ***გრაფების ნამრავლი (თანაკვეთა)*** ეწოდება გრაფს $G(X)=G_1(X_1) \cap G_2(X_2)=(X;G;f:G \to X \otimes X)$, სადაც $X=X_1 \cap X_2$, $G=G_1 \cap G_2$, $f=f_1|_G=f_2|_G$ გრაფების ნამრავლი აღინიშნება ასე: $G_1(X_1) \times G_2(X_2)$.
ანალოგიურად განისაზღვრება გრაფთა თანაკვეთა ორიენტირებული გრაფებისათვის. გრაფთა ჯამი და თანაკვეთა გრაფიკულად წარმოდგენილია ნახაზზე №8



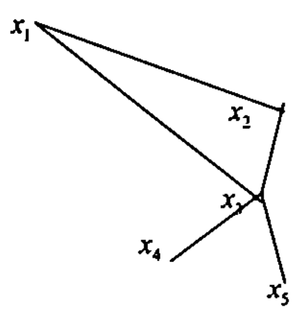
ა) $G(X_1)$



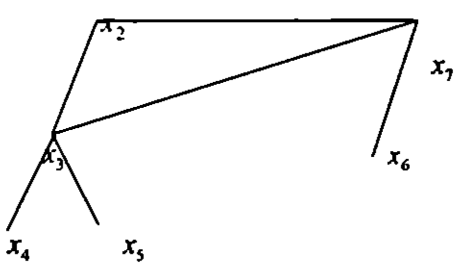
ბ) $G(X_2)$



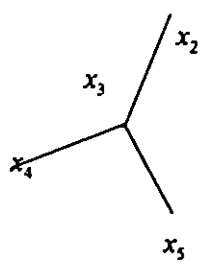
გ) $G(X_1)+G(X_2)$



დ) $G_1(X_1)$



ე) $G_2(X_1)$

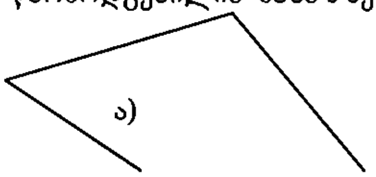


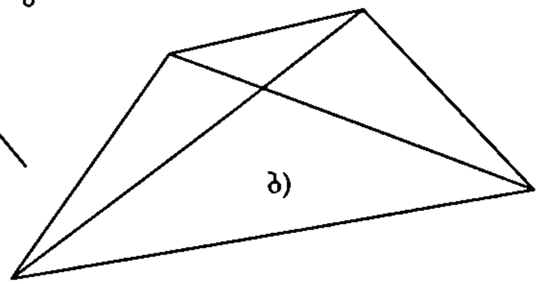
ნახ. №8. ვ) $G_1(X_1) \times G_2(X_2)$.

არაორიენტირებული $G_1(X)=(X;G_1;f_1:G_1\to X\otimes X)$ და $G_2(X)=(X;G_2;f_2:G_2\to X\otimes X)$ ***გრაფიების კომპოზიცია*** ეწოდება გრაფს $G_2(G_1(X))=(X;G;f:G\to X\otimes X)$, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობები: მისი წვეროების სიმრავლე იგივეა, რაც მოცემული გრაფების წვეროების სიმრავლე, წიბოების სიმრავლე $G=\bigcup_{[(x,y)]} f^{-1}([[(x,y)]])$, სადაც $[(x,y)]$ ყველა ელემენტია $X\otimes X$ სიმრავლიდან, რომელთათვისაც არსებობს წვერო $z\in X$, ისეთი, რომ $f_1^{-1}([[(x,z)]])\subset G_1, f^{-1}{}_2([[(z,y)]])\subset G_2$; ამასთან: $\left|f([[(x,y)]])\right|=\left|f^{-1}{}_1([[(x,z)]])\times f^{-1}{}_2([[(z,y)]])\right|$.

ორიენტირებული გრაფებისათვის კომპოზიციის განსაზღვრება იქნება ანალოგიური, მხოლოდ სიმრავლე $X\otimes X$ შეიცვლება სიმრავლით $X\times X$, ელემენტები: $[(x,y)],[(x,z)],[(z,y)]$, შესაბამისად ელემენტებით: $(x,y),(x,z),(z,y)$.

გრაფის ტრანზიტული ჩაკეტვა ეწოდება გრაფს, რომელიც მიიღება მოცემულ გრაფში ისეთი მინიმალური რაოდენობის რკალების დამატებით, რომლებიც მოცემულ გრაფს გადააქცევენ ტრანზიტულ გრაფად. გრაფის ტრანზიტული ჩაკეტვა გრაფიკულად წარმოდგენილია ნახაზზე №9.





ა) $G(X)$ გრაფი.

ბ) $G(X)$ გრაფის ტრანზიტული ჩაკეტვა.
ნახ. №9

სავარჯიშოები:

1. ააგეთ არაორიენტირებულ გრაფთა ჯამი, იპოვეთ ჯამის წვეროთა ხარისხები და შეადარეთ ისინი შესაკრებთა წვეროების ხარისხებს.
2. ააგეთ არაორიენტირებულ გრაფთა ნამრავლი, იპოვეთ ნამრავლის წვეროთა ხარისხები და შეადარეთ ისინი თანამამრავლთა წვეროების ხარისხებს.
3. ააგეთ გრაფი და მისი ტრანზიტული ჩაკეტვა. იპოვეთ ტრანზიტული ჩაკეტვის წვეროთა ხარისხები.

§19. მანძილის ცნება გრაფში

ორიენტირებულ გრაფში $G(X)(X;G;f:G\to X\times X)$ x ***წვეროს გადახრა*** y ***წვეროდან*** ეწოდება რიცხვს $D(x,y)=\min\{l(S_i(x,y))\}$, რომელიც წარმოადგენს იმ ტრაექტორიების სიგრძეთა მინიმუმს, რომლებიც აერთებენ x წვეროს y წვეროსთან. $D(x,y)$ გადახრას ორიენტირებულ გრაფში აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $D(x,y)\geq 0$.
2. $D(x,y)=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც x ემთხვევა y-ს.
3. $D(x,y)+D(y,z)\geq D(x,z)$.

გადახრა არ არის სიმეტრიული სიდიდე $D(x,y)\neq D(y,x)$.

თუ x წვეროს y წვეროსთან შემაერთებელი ტრაექტორია არ არსებობს, მაშინ გადახრა არის უსასრულობის ტოლი.

ორიენტირებულ გრაფში x ***წვეროს გადახრილობა*** ეწოდება რიცხვს:

$$D(x)=\max_{y\in X}\{D(x,y)\}$$

x წვეროს გადახრილობა ორიენტირებულ გრაფში $A\subset X$ სიმრავლის მიმართ ეწოდება რიცხვს:

$$D_A(x)=\max_{y\in A}\{D(x,y)\}.$$

არაორიენტირებულ $G(X)=(X;G:f:G\to X\otimes X)$ გრაფში ***მანძილი x და y წვეროებს შორის*** ეწოდება რიცხვს:

$$d(x,y)=\min_k\{l(S_k(x,y))\}.$$

მანძილის ცნებას არაორიენტირებ'ულ გრაფში აქეს შემდეგი თეისებები:

1.$d(x,x)\geq 0$

2.$d(x,y)=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ x ემთხვევა y-ს.

3.$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$.

4.$d(x,y=d(y,x))$.

x წვეროს დაშორებულობა არაორიენტირებულ გრაფში ეწოდება რიცხვს:

$$d(x)=\max_{y\in X}\{d(x,y)\}$$

x წვეროს დაშორებულობა არაორიენტირებულ გრაფში $A\subset X$ სიმრავლის მიმართ ეწოდება რიცხვს:

$$d_A(x)=\max_{x\in A}\{d(x,y)\}.$$

ცენტრი ორიენტირებულ გრაფში ეწოდება მის წვეროს მინიმალური გადახრილობით, თუ ასეთი არსებობს.

პერიფერიული წვერო ორიენტირებულ გრაფში ეწოდება წვეროს უდიდესი გადახრილობით.

ცენტრი არაორიენტირებულ გრაფში ეწოდება წვეროს უმცირესი დაშორებულობით.

პერიფერიული წვერო არაორიენტირებულ გრაფში ეწოდება წვეროს უდიდესი დაშორებულობით.

ორიენტირებული გრაფის რადიუსი ეწოდება მისი ცენტრის გადახრილობას: $\rho(G)=\min_{x\in X}\{D(x)\}$.

თუ გრაფს არა აქეს ცენტრი, მაშინ გრაფის რადიუსი არის უსასრულობა.

არაორიენტირებულ გრაფის რადიუსი ეწოდება მისი ცენტრის გადახრილობას: $\rho(G)=\min_{x\in X}\{d(x)\}$.

არაორიენტირებ'ული ***გრაფის დიამეტრი*** ეწოდება მაქსიმალური დაშორებულობის მქონე წვეროს დაშორებულობას.

უმოკლეს ელემენტარულ ჯაჭვს, რომელიც აერთებს უდიდესი და'შორებულობის მქონე წვეროებს დიამეტრალური ელემენტარ'ული ჯაჭვი ეწოდება.

სავარჯიშოები:

1. ააგეთ რაიმე სასრ'ული არაორიენტირებული გრაფი და იპოვეთ მისი წვეროთა და'შორებულობები.
2. ააგეთ რაიმე სასრული ორიენტირებული გრაფი და იპოვეთ მისი წვეროთა გადახრილობები.
3. ააგეთ რაიმე სასრული არაორიენტირებ'ული გრაფი და იპოვეთ მისი ცენტრი.
4. ააგეთ რაიმე სასრული ორიენტირებ'ული გრაფი და იპოვეთ მისი ცენტრი.
5. ააგეთ რაიმე სასრული არაორიენტირებული გრაფი და იპოვეთ მისი პერიფერიული წვერო.

6. ააგეთ რაიმე სასრული არაორიენტირებული გრაფი და იპოვეთ მისი რადიუსი.
7. ააგეთ რაიმე სასრული არაორიენტირებული გრაფი და იპოვეთ მისი დიამეტრი.

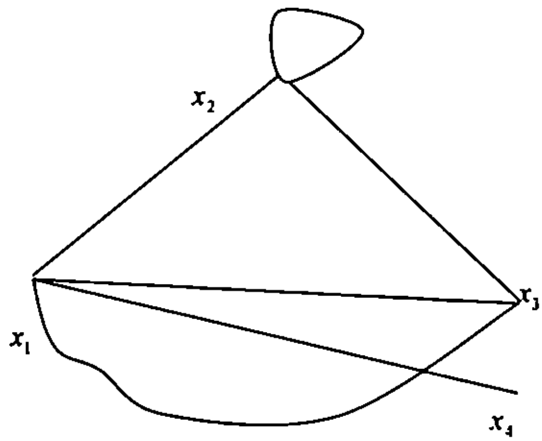
§20. მეზობლობის და ინციდენტურობის მატრიცები გრაფში

ვთქვათ $G(X)$ გრაფში წვეროების სიმრავლე $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ შედგება n ელემენტისაგან.

მატრიცს, რომლის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე იმ წიბოთა(რკალთა) რაოდენობის გამომსახველი რიცხვებია, რომლებიც i-ურ და j-ურ წვეროებს აერთებენ ***მეზობლობის მატრიცი*** ეწოდება.

აღვნიშნოთ $G(X)$ გრაფის მეზობლობის მატრიცი ასე: $A_{G(X)}$. ცხადი, მეზობლობის მატრიცი სიმეტრიულია.

მაგალითი:



ნახ. № 10.

მე-10 ნახაზზე გრაფიკულად გამოსახული გრაფის მეზობლობის მატრიცი იქნება შემდეგი:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცი სრულ წარმოდგენას გვაძლევს მოცემულ გრაფზე. იგი გვიჩვენებს, რომ გრაფი შეიცავს 4 წვეროს. ამ მტრიცის დიაგონალზე განლაგებული რიცხვები გვიჩვენებენ მარყუჟების განლაგებას, მათი ჯამი კი-მარყუჟების რაოდენობას გრაფში. მატრიცის თითოეული სვეტის ან სტრიქონის ჯამი გვიჩვენებს შესაბამისი წვეროს ხარისხს.

თუ შევკრებთ მატრიცის ყველა არადიაგონალურ ელემენტს, მიღებულ ჯამს გავყოფთ ორზე და დავუმატებთ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ჯამს მივიღებთ გრაფის წიბოების რიცხვს. მართლაც: $6=(4+2+3+1):2+1$.

თუ გრაფი არ შეიცავს მარყუჟებს, მაშინ მისი მეზობლობის მატრიცის დიაგონალზე მხოლოდ ნულებია.

თეორემა 20.1. თუ $G(X)$ არაორიენტირებული გრაფი არ შეიცავს მარყუჟებს და ჯერად წიბოებს, $A_{G(X)}$ ამ გრაფის მეზობლობის მატრიცია, ელემენტი ${}^k a_{ij}$

$A^k_{G(X)}$ მატრიციდან ტოლია k სიგრძის იმ ჯაჭვების რაოდენობისა, რომლებიც აერთებენ x_i და x_j წვეროებს.

დამტკიცება: როგორც წრფივი ალგებრიდანაა ცნობილი, $A_{G(X)}$ მატრიცის k-ური ხარისხის $A^k_{G(X)}$-ს ელემენტი ${}^k a_{ij}$ იანგარიშება ჯამით:

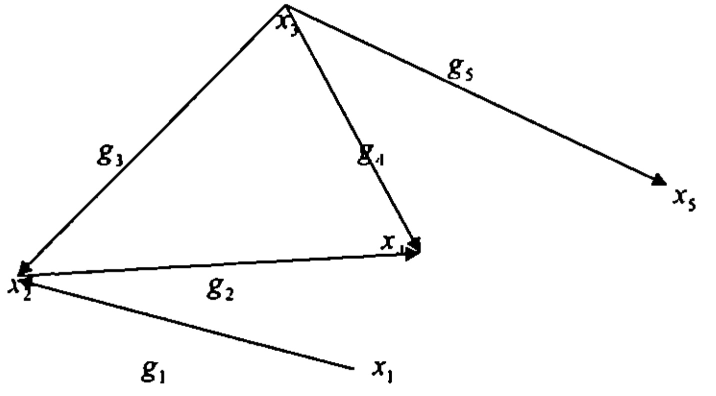
$$ {}^k a_{ij} = \sum a_{il_1} a_{l_1 l_2} ... a_{l_{k-1} j} \text{ ,} $$

სადაც თითოეული შესაკრები შეესაბამება გრაფის წვეროების ინდექსთა ყველა შესაძლო $l_1, l_2, ..., l_{k-1}$ მიმდევრობას. ცხადია, თუ არსებობს ჯაჭვი, რომელიც გადის წვეროთა $i, l_1, l_2, ..., l_{k-1}, j$ მიმდევრობაზე, მაშინ $a_{il_1} a_{l_1 l_2} ... a_{l_{k-1} j}$ ნამრავლი ტოლია ერთის, თუ ასეთი ჯაჭვი არ არსებობს, მაშინ- ნულის. აქედან გამომდინარე, მოცემულ ჯამში იმდენი ერთის ტოლი შესაკრები იქნება, რამდენი ჯაჭვიც აერთებს x_i და x_j წვეროებს. თეორემა დამტკიცდა.

ვთქვათ, $G(X)$ ორიენტირებულ გრაფში წვეროების სიმრავლე $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ შედგება n ელემენტისაგან, რკალების სიმრავლე $G = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$ კი-m ელემენტისაგან.

განვიხილოთ მატრიცი, რომლის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე ზის რიცხვი a_{ij}, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $a_{ij} = 0$, თუ i-ური წვერო არაა ინციდენტური j-ური რკალის; $a_{ij} = 1$, თუ j-ური რკალი გამოდის i-ური წვეროდან. $a_{ij} = -1$, თუ j-ური რკალი შედის i-ური წვეროში.

მაგალითი:



ნახ. №11

მე-11 ნახაზზე მოცემული გრაფის ინციდენციის მატრიცს ექნება სახე:

$$ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. $$

ინციდენციის მატრიცი არაორიენტირებული გრაფისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$a_{ij} = 0$, თუ i-ური წვერო არა j-ური წიბოს ინციდენტური; $a_{ij} = 1$, თუ i-ური წვერო j-ური წიბოს ინციდენტურია.

სავარჯიშოები:

1. ააგეთ არაორიენტირებული სასრული გრაფი, რომელიც არ შეიცავს მარყუჟებს და ჯერად წიბოებს. იპოვეთ მისი მეზობლობის მატრიცი.
2. იპოვეთ აგებულ გრაფში ორი წვერო, თუ ასეთები არსებობენ, რომლებიც ერთმანეთთან შეერთებულია ორი ჯაჭვით, რომელთა სიგრძეა 4.
3. იპოვეთ აგებულ გრაფში იმ წვეროთა წყვილი, რომლებიც ყველაზე მეტი სხვადასხვა სიგრძის ჯაჭვებითაა შეერთებული.
4. ააგეთ არაორიენტირებული სასრული გრაფი და იპოვეთ მისი ინციდენციის მატრიცი.
5. ააგეთ ორიენტირებული სასრული გრაფი და იპოვეთ მისი ინციდენციის მატრიცი.

§21. ეილერის და ჰამილტონის გრაფები

ვთქვათ $G(X)$ არაორიენტირებული გრაფია.

ციკლს არაორიენტირებულ გრაფში ეწოდება ***ეილერის ციკლი*** თუ იგი გადის გრაფის თითოეულ წიბოზე. ხოლო არაორიენტირებულ გრაფს ეწოდება ეილერის გრაფი, თუ იგი შეიცავს ერთ ეილერის ციკლს მაინც.

თეორემა 21.1 (ეილერის თეორემა). სასრული, ბმული გრაფი შეიცავს ეილერის ციკლს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი ყოველი წვერო ლუწია.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება:
ვთქვათ, გრაფში არსებობს ეილერის ციკლი. ამ ციკლის გავლის დროს გრაფიდან ამოვაგდოთ ყველა ის წიბო რომლის გავლითაც შევდივართ მოცემულ წვეროში და რომლის გავლითაც გამოვდივართ მოცემული წვეროდან. რადგან ციკლი ეილერისაა, მთელი ციკლის გავლისას გრაფის ყველა წიბო ამოვარდება. მიღებული გრაფის წვეროების ხარისხი იქნება ნული. ამგვარად თავიდან მოცემული გრაფის წვეროების ხარისხი უნდა იყოს ჯამი: $2+2+...+2$, სადაც ყველა შესაკრები ნულია, ანუ ლუწი რიცხვი.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება:
ვთქვათ, გრაფის ყველა წვერო ლუწია, ნებისმიერად დაფიქსირებული x წვეროდან დაწყებული ავაგოთ ჯაჭვი, რომელიც ორჯერ არ გაივლის ერთ და იმავე წიბოზე. რადგან სასრულ გრაფში წიბოების რაოდენობა სასრულია, ამიტომ ასეთი ჯაჭვის აგება უნდა დამთავრდეს რომელიღაც y წვეროზე.

ვაჩვენოთ, რომ $x = y$. ვთქვათ $x \neq y$, მაშინ აგებული ჯაჭვი რამდენიმეჯერ გაივლის y წვეროზე მეზობელ წიბოთა სხვადასხვა წყვილების გავლით და ბოლო ნაბიჯზე შევა ამ წვეროში ერთი გაუვლელი წიბოს გავლით. ეს კი ნიშნავს, რომ y წვეროს ხარისხი კენტია. ეს ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას და აქედან გამომდინარეობს, რომ ჩვენი დაშვება არ არის სწორი.

ამგვარად, ჩვენი აგებული C_1 ჯაჭვი არის ციკლი. თუ ეს ციკლი ეილერისაა, თეორემა დამტკიცებული იქნება. თუ C_1 არაა ეილერის ციკლი, მაშინ იარსებებს ამ ციკლზე მდებარე წვერო, რომელიც ინციდენტური იქნება ისეთი წიბოსი, რომელიც არ ეკუთვნის C_1 ციკლს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ყველა იმ წიბოს ერთობლიობა, რომლებიც არ ეკუთვნის C_1 ციკლს, ქმნის მოცემული გრაფის

ქვეგრაფს, რომელსაც არ აქვს საერთო წვერო ამ ციკლთან, ეს კი ეწინააღმდეგება გრაფის ბმულობას. C_1 ქვეგრაფია. იგი წარმოადგენდ ეილერის ციკლს ამ ქვეგრაფში, ამიტომ მისი ყოველი წვერო ინციდენტური უნდა იყოს ამ ციკლის ლუწი რაოდენობის წიბოების. აქედან გამომდინარეობს, რომ იმ წიბოების რაოდენობა, რომლებიც ინციდენტ'ურნი არიან C_1 ციკლის წვეროების და არ მიეკ'უთვნებიან ამ ციკლს, ასევე ლუწია. თუ ავიღებთ C_1 ციკლის რომელიმე z წვეროს და იმ წიბოებისგან შედგენილ ქვეგრაფში, რომლის წიბოებიც არ მიეკ'უთვნებიან C_1 ციკლს, ამ ციკლის მსგავსად ავაგებთ C_2 ციკლს, მაშინ $C_1 + C_2 = C_3$ იქნება ასევე ციკლი. თუ ეს ციკლი ეილერის ციკლია, მა'შინ თეორემა დამტკიცებ'ული იქნება. თუ C_3 არ იქნება ეილერის ციკლი, მაშინ ისე, როგორც ავაგეთ C_2, ავაგებთ C_4- და ასე შემდეგ, სანამ რომელიღაც ნაბიჯზე აგებული ციკლი ეილერის ციკლი არ იქნება.

თეორემა დამტკიცდა.

კონტურს ორიენტირებ'ულ გრაფში ეწოდება ***ეილერის კონტური*** თუ იგი გადის გრაფის თითოეულ რკალზე. ხოლო ორიენტირებულ გრაფს ეწოდება ეილერის ორიენტირებული, გრაფი თუ იგი შეიცავს ეილერის ერთ კონტურს მაინც.

მტკიცდება 21.1 თეორემის ანალოგი'ური თეორემა:

თეორემა 21.2. ორიენტირებ'ულ გრაფში ეილერის კონტური არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ იგი ბმულია და მისი წვეროების 'შესვლის და გამოსვლის ხარისხები ერთმანეთის ტოლია.

არაჩაკეტილ ჯაჭვს არაორიენტირებულ გრაფში ეწოდება ***ეილერის ჯაჭვი***, თუ იგი გაივლის გრაფის ყველა წიბოს.

თეორემა 21.3. სასრულ, ბმულ გრაფში არაჩაკეტილი ეილერის ჯაჭვი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ამ გრაფში არსებობს მხოლოდ ორი კენტი წვერო.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება:

ვთქვათ, გრაფ'ში არსებობს არაჩაკეტილი ეილერის ჯაჭვი, რომლის ბოლოებია x და y, მაშინ ამ გრაფში ერთი x და y წვეროების შემაერთებელი წიბოს დამატებით მივიღებთ ეილერის გრაფს. ეილერის გრაფში კი ყველა წვერო ლუწია. x და y წვეროების ხარისხი, აღნიშნ'ული წიბოს დამატებით, ერთით გაიზარდა. აქედან გამომდინარე, თავიდან მოცემულ გრაფში მათი ხარისხი კენტი უნდა ყოფილიყო.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება: ვთქვათ, გრაფში მხოლოდ x და y წვეროების ხარისხია კენტი, მათი შემაერთებელი წიბოს დამატებით მივიღებთ ეილერის გრაფს, რომელშიც იარსებებს ეილერის ციკლი, თუ ამ ციკლიდან ამოვიღებთ x და y წვეროების შემაერთებელ წიბოს, მივიღებთ ეილერის ჯაჭვს თავიდან მოცემულ გრაფში.

თეორემა დამტკიცდა.

არაჩაკეტილ ტრაექტორიას ორიენტირებულ გრაფში ეწოდება ***ეილერის ტრაექტორია***, თუ იგი გაივლის გრაფის ყველა რკალს.

მტკიცდება 21.3. თეორემის ანალოგიური თეორემა:

თეორემა 21.4. ორიენტირებული გრაფი შეიცავს არაჩაკეტილ ეილერის ტრაექტორიას, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. ორიენტირებული გრაფი ბმ'ულია;
2. გრაფ'ში არსებობს ერთი წვერო, რომლის გამოსვლის ხარისხი ერთით მეტია შესვლის ხარისხზე;
3. გრაფში არსებობს ერთი წვერო, რომლის შესვლის ხარისხი ერთით მეტია გამოსვლის ხარისხზე;
4. დანარჩენი წვეროების შესვლისა და გამოსვლის ხარისხები ერთმანეთის ტოლია.

მარტივ ციკლს არაორიენტირებულ გრაფში ეწოდება ***ჰამილტონის ციკლი***, თუ იგი გაივლის გრაფის ყველა წვეროს. არაორიენტირებულ გრაფს ეწოდება ჰამილტონის გრაფი, თუ მასში არსებობს ერთი მაინც ჰამილტონის ციკლი.

თეორემა 21.5(დირაკის თეორემა). ვთქვათ, სასრული, ბმული გრაფის წვეროების რიცხვი $n \ge 3$, მაშინ ამ გრაფში ჰამილტონის ციკლის არსებობისთვის საკმარისია გრაფის ყოველი x წვეროს ხარისხისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას: $\lambda(x) \ge \frac{n}{2}$

დამტკიცება: დავუშვათ, გრაფი აკმაყოფილებს თეორემის პირობას, მაგრამ არ არის ჰამილტონის. ვთქვათ, გრაფის წვეროებია: $x_1, x_2, \dots x_n$, დავამატოთ გრაფს ახალი წვეროები და თითოეული მათგანი შევაერთოთ ყველა დანარჩენთან წიბოებით. ეს წვეროები იყოს $x'_1, x'_2, \dots x'_n$. ჯაჭვი, განსაზღვრული წვეროების მიმდევრობით: x_1 — x'_1 — x'_2 — ... — x_n — x'_n — x_1, ჰამილტონის ციკლია.

ვთქვათ, $k > 0$ ის მინიმალური რიცხვია, რა რაოდენობის წვეროს დამატებითა და მათი შეერთებით გრაფის თითოეულ ძველ წვეროსთან, ვღებულობთ ჰამილტონის გრაფს. განვიხილოთ ჰამილტონის x_{i_1} — x_{i_2} — ... — $x_{i_{n+k}}$ — x_{i_1} ციკლი მიღებულ გრაფში. ზოგადობის დაურღვევლად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ x_{i_p} და $x_{i_{p+2}}$ არამეზობელი ძველი წვეროებია, ხოლო $x_{i_{p+1}}$ - ახალი წვერო.

ვაჩვენოთ, რომ ყოველი x_{i_p} წვეროს მეზობელი x_{i_q} წვეროს მომდევნო $x_{i_{q+1}}$ წვერო ჰამილტონის ციკლში არ არის $x_{i_{p+2}}$ წვეროს მეზობელი.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, ჰამილტონის ციკლში x_{i_q} წვერო მეზობელია x_{i_p} წვეროსათვისდა $x_{i_{q+1}}$ მეზობელია $x_{i_{p+2}}$ წვეროსათვის.

მაშინ არსებობს ჰამილტონის ციკლი:

$$x_{i_1} — x_{i_2} — \dots x_{i_p} — x_{i_{p+1}} — x_{i_{p+2}} — \dots — x_{i_q} — x_{i_{q+1}} — \dots — x_{i_1},$$

რომელიც ისრებითაა აღნიშნული. ასეთი ციკლის არსებობა ნიშნავს, რომ ახალი წვერო $x_{i_{p+1}}$ ზედმეტია, რაც ეწინააღმდეგება $k > 0$ რიცხვის მინიმალურობას. მაშასადამე, $x_{i_{q+1}}$ წვერო არ არის $x_{i_{p+2}}$ წვეროს მეზობელი. აქედან გამომდინარე, x_{i_p} წვეროს მოსაზღვრე წვეროების რიცხვი არანაკლებია $x_{i_{p+2}}$ წვეროს არამოსაზღვრე წვეროების რიცხვზე, ანუ $\frac{n}{2}+k$ რიცხვზე. მეორე მხრივ, რადგან $x_{i_{p+2}}$ ძველი წვეროა, ამიტომ მისი მოსაზღვრე წვეროების რიცხვი არანაკლებია $\frac{n}{2}+k$ რიცხვზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ წვეროების დამატებით მიღებულ გრაფში არანაკლებ $n+2k$ წვეროა, მაშასადამე: $n+k \ge n+2k$. ამ უტოლობას მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც $k = 0$.

ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 21.6. სასრულ, ბმულ გრაფში, რომლის წვეროების რიცხვი $n \ge 3$, ჰამილტონის ციკლის არსებობისთვის საკმარისია მისი ნებისმიერი ორი არამეზობელი x, y წვეროს ხარისხების $\lambda(x)+\lambda(y)$ ჯამი იყოს n რიცხვზე არანაკლები.

დამტკიცება: წინა თეორემიდან და მასში დამტკიცებული წინადადებიდან: ყოველი x_{i_p} წვეროს მეზობელი, x_{i_p} წვეროს მომდევნო $x_{i_{p+1}}$ წვერო გაფართოებულ გრაფში აუცილებლად არსებულ ჰამილტონის ციკლში, არ არის $x_{i_{p-1}}$ წვეროს მეზობელი; გამომდინარეობს, რომ y ძველი წვეროს არამეზობელი წვეროების რიცხვი გაფართოებულ გრაფში არანაკლებია $\lambda(x)+k$ რიცხვზე, სადაც x წვერო y წვეროს არამეზობელი ძველი წვეროა. მაშასადამე, წვეროების რიცხვი გაფართოებულ გრაფში:

$$n+k \geq \lambda(x)+\lambda(y)+2k \geq n+2k .$$

ამ უტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k=0$. ეს კი ნიშნავს, რომ გაფართოებული გრაფი იგივეა, რაც მოცემული გრაფი და მასში აუცილებლად იარსებებს ჰამილტონის ციკლი.
თეორემა დამტკიცდა.

სავარჯიშოები:

1. ააგეთ არაორიენტირებული გრაფი, დადაადგინეთ არის თუ არა მასში ეილერის ციკლი.
2. ააგეთ არაორიენტირებული გრაფი, დადაადგინეთ, არის თუ არა მასში ეილერის არაჩაკეტილი ჯაჭვი.
3 ააგეთ ორიენტირებული გრაფი და დაადგინეთ არის თუ არა მასში ეილერის კონტური ან ეილერის არაჩაკეტილი ტრაექტორია.
4. ააგეთ ორიენტირებული გრაფი და დაადგინეთ, არის თუ არა მასში ეილერის არაჩაკეტილი ტრაექტორია.
5. ააგეთ არაორიენტირებული გრაფი დადაადგინეთ არის თუ არა მასში ჰამილტონის ციკლი.

§22. პლანარული ანუ ბრტყელი გრაფი

პირველ პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ არსებობს ნებისმიერი გრაფის გეომეტრიული რეალიზაცია სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში.
გრაფს, რომლის რეალიზაციაც შესაძლებელია
ორგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეშინ ***პლანარული ანუ ბრტყელი გრაფი*** ეწოდება.

თუ $G(X)$ პლანარული გრაფია და სიბრტყეზე, სადაც მოთავსებულია ამ გრაფის გეომეტრიული რეალიზაცია, გავაკეთებთ ჭრილებს გრაფის წიბოების გასწვრივ, მივიღებთ ამ სიბრტყის დაყოფას, რომლის შემადგენელ ნაწილებსაც მოცემული ***გრაფის წახნაგები*** ეწოდება. ინტუიციურად ცხადია, რომ ამ წახნაგებიდან ერთი იქნება უსასრულო, ***მას გრაფის გარე წახნაგი*** ეწოდება.

თეორემა 22.1. (ეილერის ფორმულა). პლანარული, სასრული, ბმული $G(X)$ გრაფის, რომელსაც p რაოდენობის წვერო და q რაოდენობის წიბო გააჩნია, ნებისმიერი გეომეტრიული რეალიზაციისათვის სიბრტყეზე ადგილი აქვს ტოლობას: $p-q+r=2$, სადაც r გრაფის წახნაგების რიცხვია გრაფის მოცემულ რეალიზაციაში.

დამტკიცება: როგორც ვიცით, $q \geq p-1$. დაეამტკიცოთ თეორემა ინდუქციის მეთოდით q სიდიდის მიმართ.

თუ $q_0 = p-1$ მაშინ გრაფი წარმოადგენს ხეს და მისი წახნაგების რიცხვი ტოლია ერთის, ასეთ შემთხვევაში: $p-q_0+1 = p-(p-1)+1 = 2$.

ვთქვათ, თეორემა სამართლიანია როდესაც $q=q_0+l$. ამ დროს ადგილი ექნება ტოლობას: $p-(q_0+l)+r=-l+1+r=2$. ცხადია, როდესაც $q=q_0+l$, მაშინ გრაფი შეიცავს ციკლებს და $r\geq 2$.

ვნახოთ როგორ იქნება საქმე როდესაც $q=q_0+l+1$. ამ დროს წახნაგების რიცხვი $r'\geq r$ და $p-(q_0+l+1)+r')=p-((p-1)+l+1)+r'=-l+r'\geq 2$.

ვთქვათ, მოცემულ გრაფში, რომლის წვეროების რიცხვია p და წიბოების რიცხვი $q=q_0+l+1$, გვაქვს C ციკლი.

თუ g წიბოა ამ ციკლზე, მაშინ ამ წიბოს ესაზღვრება ერთი მხრიდან ერთი წახნაგი, მეორე მხრიდან- მეორე წახნაგი. თუ ამ წიბოს ამოვიღებთ გრაფიდან, მიღებული გრაფისათვის ადგილი ექნება დასამტკიცებელ ტოლობას. ამასთან, მისი წახნაგების რიცხვი შემცირდება ერთით. ადგილი აქვს მიმართებებს: $-l+1+r=2$, $-l+r'\geq 2$ და $r'-1=r$. აქედან გვექნება $-l+1+r'-1=-l+r'=2$ და $-l+r'\geq 2$. ეს კი ნიშნავს, რომ $-l+r'=p-(p-1)+1)+r'=p-(q_0+l+1)+r'=2$

თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ სასრული, ბმული გრაფის წახნაგების რიცხვი მის ნებისმიერ რეალიზაციაში ერთი და იგივეა.

ცხადია, არსებობს პლანარული გრაფების რეალიზაცია სფეროზე. ამ შემთხვევაში გრაფის ყოველი წახნაგი სასრულია.

თეორემა 22.2. პლანარული, სასრული ბმული გრაფის ნებისმიერი რეალიზაციისათვის სფეროზე, ადგილი აქვს ეილერის ფორმულას.

დამტკიცება: ავიღოთ, რაიმე წერტილი გრაფის რომელიმე წახნაგის შიგნით მოცემულ რეალიზაციაში და განვიხილით ამ წერტილიდან სფეროს ცენტრალური პროექცია იმ სიბრტყეზე რომელიც ეხება სფეროს და ყველაზე შორსაა აღებული წერტილიდან.

ასეთი პროექციით მივიღებთ გრაფის რეალიზაციას სიბრტყეზე. აქედან გამომდინარე, ცხადია, გრაფის რეალიზაციისთვის სფეროზე იგივე ურთიერთ დამოკიდებულება იქნება გრაფის წვეროებს, წიბოებსა და წახნაგებს შორის, სფერული რეალიზაციის დროს, რა დამოკიდებულებაც არის მისი სიბრტყეზე რეალიზაციის დროს.

თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს საინტერესო შედეგი:

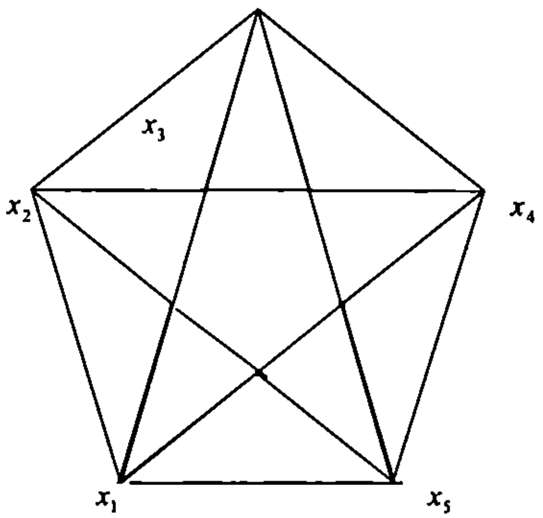
თეორემა 22.3. ყოველი ამოზნექილი მრავალწახნაგისათვის ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში ადგილი აქვს ფორმულას: $p-q+r=2$, სადაც p,q,r მოცემული მრავალწახნაგის წვეროების, წიბოების და წახნაგების რაოდენობებია შესაბამისად.

დამტკიცება: განვიხილოთ გრაფი, რომლის წვეროები მოცემული მრავალწახნაგის წვეროებია, წიბოები- მოცემული მრავალწახნაგის წიბოები.

ამ გრაფის რეალიზაციის დროს სფეროზე, გვექნება იმდენი გრაფის წახნაგი რამდენი წახნაგიც აქვს მოცემულ მრავალწახნაგს. აქედან გამომდინარე, ცხადია ადგილი ექნება ტოლობას: $p-q+r=2$.

თეორემა დამტკიცდა.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი სრული გრაფი გრაფი $G_5(X)$, სადაც $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$. ნახ. №12.



ნახ. №12.

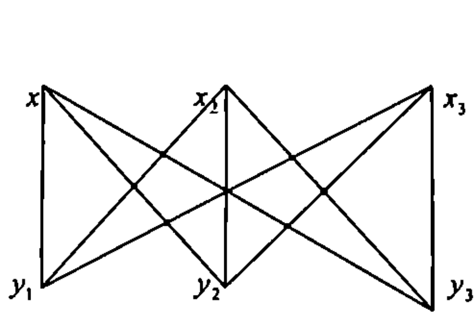
თეორემა 22.4. გრაფი $G_5(X)$ არაა პლანარული.

დამტკიცება: გრაფი რომ იყოს პლანარული, მაშინ მისი ნებისმიერი რეალიზაციისთვის ადგილი უნდა ჰქონდეს ეილერის ფორმულას: $p-q+r=2$.

ამ გრაფში $p=5, q=10$, ამიტომ $r=7$. თითოეული წახნაგი შემოსაზღვრულია ციკლით, რომელიც შეიცავს არანაკლებ სამ წიბოს. გადავნომროთ წახნაგები რიცხვებით $1,2,\dots 6,7$, ვთქვათ ასე გადანომრილ წახნაგების წიბოთა რაოდენობებია შესაბამისად: $q_1, q_2, \dots, q_6, q_7$. აქედან გამომდინარე, $\sum_{i=1}^{7} q_i \geq 3r = 21$ და $\sum_{i=1}^{7} q_i = 2q = 20$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, $G_5(X)$ გრაფის რეალიზაცია სიბრტყეზე არ ხერხდება.

თეორემა დამტკიცდა.

განვიხილოთ არაორიენტირებული გრაფი $G_{3,3}(X)$, რომლის წვეროების სიმრავლეა: $X=[x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3\}$, წიბოების სიმრავლე: $G_{3,3}=\{g_i\}_{i=1-9}$ ხოლო სტრუქტურა: $\varphi: G \to \{[(x_i,y_j)]\}_{i=1,2,3;j=1,2,3.}$ ინექციაა.



ნახ. №13.

თეორემა 22.5. გრაფი $G_{3,3}(X)$ არაა პლანარული.

დამტკიცება: გრაფში $p=6, q=9$. გრაფი რომ იყოს პლანარული, მაშინ ეილერის ფორმულის საშუალებით გამოთვლილი მისი წახნაგების რიცხვი $r=5$.

თითოეული წახნაგი შემოსაზღვრულია ციკლით, რომლის წიბოების რაოდენობა არანაკლებია 4-ზე. თუ გადაენომრავთ წახნაგებს შესაბამის შემომსაზღვრელ ციკლებში, წიბოების რაოდენობებისთვის გვექნება უტოლობები: $q_i \geq 4, i=1,2,...,5$. აქედან გამომდინარეობს $\sum_{i=1}^{5} q_i \geq 4r = 20$ და $\sum_{i=1}^{5} q_i = 2q = 18$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, ჩვენი დაშვება, რომ გრაფი პლანბარულია არ ყოფილა სწორი. თეორემა დამტკიცდა.

განსაზღვრება 22.2. x და y ბოლოებისა მქონე g ***წიბოს დაყოფა*** ეწოდება ოპერაციას არაორიენტირებულ გრაფში, რომელიც შედგება შემდეგი მოქმედებებისაგან:

ა) g წიბოს ამოღება; ბ) z წვეროს დამატება; დ) ისეთი g_1, g_2 წიბოების დამატება, რომელთა ბოლოებია x,z და y,z შესაბამისად.

H გრაფს უწოდებენ არაორიენტირებული G ***გრაფის ქვედანაყოფს***, თუ იგი მიიღება G გრაფისაგან წიბოთა დაყოფის სასრული რაოდენობის ოპერაციით.

გრაფებს G_1 და G_2 უწოდებენ ***ჰომეომორფულს***, თუ არსებობს მათი იზომორფული ქვედანაყოფები.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ, ერთი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 22.6. (პონტრიაგინი-კურატოვსკი). იმისათვის, რომ გრაფი იყოს პლანარული, აუცილებელი და საკმარისია მას არ გააჩნდეს $G_5(X)$ გრაფის ან $G_{3,3}(X)$ გრაფის ჰომეომორფული ქვეგრაფი.

სავარჯიშოები:

1. ააგეთ პლანარული გრაფები.
2. ააგეთ არანაკლებ სამი არაპლანარული გრაფი.

§23. გრაფთა შეღებვა, გრაფის ქრომატული რიცხვი

როგორც დავინახეთ ზემოთ, თეორემების დამტკიცებისას, სასრული, ბმული, პლანარული q რაოდენობის წიბოს მქონე არაორიენტირებული გრაფის ნებისმიერი რეალიზაციისთვის სიბრტყეზე ადგილი აქვს ტოლობას: $\sum_{i=1}^{n} q_i = 2q$, სადაც n გრაფის წახნაგების რიცხვია, q_i i-ური წახნაგის შემომსაზღვრელი ციკლში წიბოების რაოდენობა.

თეორემა 23.1. თუ სასრულ ბმულ პლანარულ გრაფში, რომლის წვეროების რიცხვია p, წიბოების რიცხვი q, გრაფი არ წარმოადგენს ხეს და ყველა ციკლის სიგრძე $k, k \geq 3$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას: $q \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$.

დამტკიცება: თეორემის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $q_i \geq k$ და თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ მოყვანილ ტოლობას, მივიღებთ $2q \geq kr$, $r \leq \frac{2q}{k}$.

ეილერის ფორმულიდან გვაქვს: $r=2-p+q$, აქედან გამომდინარე $2-p+q\le\frac{2q}{k}$

და გვექნება: $2k-kp+kq\le 2q$, $(k-2)q\le k(p-2)$. საბოლოოდ: $q\le\frac{k}{k-2}(p-2)$.

თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა23.2. ყოველ სასრულ, ბმულ, პლანარულ გრაფში, რომელსაც მარყუჟები და ჯერადი წიბოები არგააჩნია, წვეროების რიცხეია $p\ge 3$, წიბოების რიცხვი q, ადგილი აქვს უტოლობას: $q\le 3(p-2)$.

$G(X)$ გრაფში წვეროების სიმრავლის ქვესიმრავლეს$Y\subset X$

უწოდებენ ***დამოუკიდებელ წვეროთა სიმრავლეს***, თუ ამ სიმრავლიდან აღებულ წვეროთა არც ერთი

წყვილი არ წარმოადგენს რომელიმე წიბოს ბოლოებს.

ვთქვათ, მოცემულია $G(X)$ გრაფი და სიმრავლე $C=\{C_1,C_2,...,C_m\}$, რომელსაც ***ფერების სიმრავლეს*** უწოდებენ. ნებისმიერ ასახვას $f:X\to C$ უწოდებენ $G(X)$ გრაფის შეღებვას. შეღებვას უწოდებენ ***სწორად შეღებვას***, თუ ორი მეზობელი წვერო ერთნაირად არაა შეღებილი, ანუ

ამ წვეროებს ერთიდა იგივე C_i ელემენტი არ შეესაბამება $f:X\to C$ ასახვის დროს.

ფერთა მინიმალურ m რიცხვს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია $G(X)$ გრაფის სწორად შეღებვა, ამ ***გრაფის ქრომატული რიცხვი*** ეწოდება, იგი აღინიშნება ასე: $\aleph G(X)$.

ადვილია იმის დამტკიცება, რომ გრაფის ქტომატული რიცხვი ტოლია ამ გრაფის წვეროების სიმრავლის დამოუკიდებელ სიმრავლეებად დაყოფების მინიმალური სიმძლავრის.

თეორემა 23.3. პლანარულ გრაფში, რომელსაც არ გააჩნია მარყუჟები და ჯერადი წიბოები, არსებობს წვერო x, რომლის ხარისხი აკმაყოფილებს უტოლობას: $\lambda(x)\le 5$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $G(X)$ პლანარული გრაფია, რიცხვი p და რიცხვი q კი ამ გრაფის წვეროებისა და წიბოების რაოდენობებს გამოსახავს. წინა თეორემიდან, როდესაც $k=3$, გვექნება: $q\le 3(p-2)<3p$. ვთქვათ, $d_{\min}$ წვეროთა მინიმალური ხარისხია $G(X)$ გრაფში. მაშინ:

$$6p>2q=\sum_{i=1}^{p}\lambda(x)\ge pd_{\min}.$$

აქედან გამომდინარე: $d_{\min}<6$, ანუ $d_{mim}\le 5$. ვთქვათ, x ის წვეროა, რომლისთვისაც $\lambda(x)=d_{\min}$

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 23.4. პლანარული გრაფის ქრომატული რიცხვი არ აღემატება ოთხს.

ეს თეორემა დიდი ხანი არაა რაც დამტკიცდა. დამტკიცება საკმაოდ რთულია. დავამტკიცოთ უფრო მარტივად დასამტკიცებელი თეორემა:

თეორემა 23.5. პლანარული გრაფის ქრომატული რიცხვი არ აღემატება ხუთს.

ეს თეორემა ასევაც შეიძლება იქნეს ფორმულირებული: ყოველი პლანარული გრაფი შეიძლება სწორად შეიღებოს არაუმეტეს ხუთი ფერით.

დამტკიცება: თეორემა დავამტკიცოთ ინდუქციით, წვეროთა p რიცხვის მიმართ.

I. თუ $p=1$ თეორემის დასკვნა სრულდება.

II. ვთქვათ, ყველა პლანარული გრაფისათვის, რომლის წვეროების რიცხვიც აკმაყოფილებს $p < p_0$ უტოლობას, თეორემის დასკვნა სრულდება. განვიხილოთ პლანარული გრაფი $G(X)$, რომლის წვეროთა რიცხვია p_0. დავუშვათ ამ გრაფში არ არიან მარყუჟები და ჯერადი წიბოები. წინა თეორემიდან გამომდინარე, გრაფში იარსებებს x წვერო, რომლის ხარისხი $\lambda(x) \leq 5$. განვიხილოთ მოცემული გრაფის გეომეტრიული რეალიზაცია სიბრტყეზე. ამოვიღოთ გრაფიდან x წვერო და ყველა მასთან ინციდენტური წიბოები. მივიღებთ პლანარულ $G(Y)$ გრაფს $p_0 - 1$ რაოდენობის წვეროთი. ინდუქციური დაშვების გამო, მიღებული გრაფისათვის თეორემის დასკვნა უნდა სრულდებოდეს, ანუ უნდა არსებობდეს ასახვა: $f : Y \to C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, რომელიც მეზობელ წვეროებს სხვადასხვა ფერებს შეუსაბამებს.

ვთქვათ, $G(X)$ გრაფში x წვეროს მეზობელი წვეროებია: $x_1, x_2, \dots x_k$, სადაც $k \leq 5$. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. შეღებილი $G(Y)$ გრაფის $x_1, x_2, \dots x_k$ წვეროების ფერებს შორის არ არსებობს ფერი C_{i_0} $1 \leq i \leq 5$ ინდექსის რომელიმე i_0 მნიშვნელობისთვის. მაშინ x წვეროს შევუსაბამოთ C_{i_0} ფერი, ამგვარად, მივიღებთ $G(X)$ გრაფის სწორად შეღებვას.

2. $\lambda(x) = 5$ და $G(Y)$ გრაფის $x_1, x_2, \dots x_k$ წვეროებს შორის ხუთივე ფერის წვეროებია. ზოგადობის დაურღვევლად შეიძლება დავუშვათ, რომ $G(X)$ გრაფის სიბრტყეზე რეალიზაციისას $x_2, \dots x_k$ წვეროები განლაგებულია სიბრტყეზე x_1 წვეროდან საათის ისრის მიმართულებით და $f(x_i) = C_i; 1 \leq i \leq 5$. ვთქვათ, A იმ წვეროთა სიმრავლეა $G(Y)$ გრაფში, რომლებამდე მისვლაც x_1 წვეროდან შესაძლებელია $G(Y)$ გრაფის იმ წვეროების გავლით, რომლებიც შეღებილია C_1 და C_3 ფერებით. აქაც შესაძლებელია ორი ვარიანტი:

ა) $x_3 \notin A$. გავუცვალოთ ადგილები ფერებს შემდეგნაირად: x_3 წვერო შევღებოთ C_1 ფერით, x_1 წვერო-C_3 ფერით, ანუ x_3 წვეროს შევუსაბამოთ $C_1 \in C$ ელემენტი, x_1 წვეროს-$C_3 \in C$ ელემენტი. რადგანაც წვეროები A სიმრავლიდან არაა მეზობელი სხვა C_1, C_3 ფერის წვეროებთან, ამიტომ ფერების ამ შეცვლით $G(Y)$ გრაფის სწორი შეღებვა არასწორით არ შეიცვლება და $x_1, x_2, \dots x_k$ წვეროებს შორის არ იარსებებს C_1 ფერით შეღებილი წვერო. ამგვარად გვექნება 1-ლი შემთხვევის ანალოგიური შემთხვევა და შესაძლებელი იქნება $G(X)$ გრაფის სწორად შეღებვა.

ბ) $x_3 \notin A$. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ჯაჭვი, რომელიც გადის მხოლოდ A სიმრავლეში შემავალ წვეროებზე, იწყება x_1 წვეროდან და მთავრდება x_3 წვეროში. ჩვენი დაშვებით, ამ წვეროების ფერებია C_1, C_3, შესაბამისად.

ეს ჯაჭვი ორი ისეთი წიბოს დამატებით, რომელთა ბოლოებია $(x, x_1); (x, x_3)$ წყვილები, შესაბამისად, გადაიქცევა ციკლად $G(X)$ გრაფში. ამასთან x_2, x_4 წვეროები განლაგებულნი იქნებიან ამ ციკლის სხვადასხვა მხარეს. ეს ნიშნავს, რომ x_2 წვეროდან ვერ გადავალთ x_4 წვეროში მხოლოდ A სიმრავლეში შემავალი C_2, C_4 ფერის წვეროების გავლით.

ვთქვათ, B ისეთი სიმრავლეა $G(X)$ გრაფის წვეროების, რომლებამდის მისვლა x_2 წვეროდან $G(X)$ გრაფის C_2, C_4 ფერის წვეროების გავლითაა შესაძლებელი,

მაშინ $x_4 \notin B$ და გვექნება ა) ვარიანტის მსგავსი შემთხვევა.

ამგვარად, პლანარული გრაფი სწორად შეიძლება შევღებოთ არაუმეტეს ხუთი ფერის გამოყენებით.

თეორემა დამტკიცდა.

სავარჯიშოები:

1. რას უდრის სრული გრაფის ქრომატული რიცხვი.
2. რას უდრის $G_{3,3}(X)$ გრაფის ქრომატული რიცხვი.
3. რას უდრის $G_5(X)$ გრაფის ქრომატული რიცხვი.
4. შეიძლება თუ არა პლანარული გრაფი რომლის წვეროთა რიცხვია 10, სწორად შეიღებოს 7 ფერით.
5. ააგეთ გრაფი, რომლის ქრომატული რიცხვია ორი

თავიXIX
წრფივი პროგრამირების ელემენტები
§24 წრფივი პროგრამირების ამოცანა, ამოზნექილი ფიგურები

ამოცანას რომელიც გულისხმობს

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \quad (1)$$

უტოლობათა სისტემის ისეთი $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ამონახსნის პოვნას, რომლის კომპონენტებიც აკმაყოფილებენ

$$x_1^0 \ge 0, x_2^0 \ge 0, \ldots, x_n^0 \ge 0 \quad (2)$$

პირობას და

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_j x_j$$

(3)

ფუნქციას, რომელსაც მიზნის ფუნქცია ეწოდება, ანიჭებენ მინიმალურ(მაქსიმალურ) მნიშვნელობას, ***წრფივი პროგრამირების ამოცანა*** ეწოდება.

(1) უტილობათა სისტემის ისეთ ამონახსნს, რიმელიც აკმაყოფილებს (2) პირობას, წრფივი პროგრამირების ამოცანის ***დასაშვებ ამონახსნს*** უწოდებენ.

წრფივი პროგრამირების ამოცანის ისეთ დასაშვებ ამონახსნს, რომელიც მიზნის (3) ფუნქციას ანიჭებს მინიმალურ(მაქსიმალურ) მნიშვნელობას, წრფივი პროგრამირების ამოცანის ***ოპტიმალური ამონახსნი*** ეწოდება.

განეიხილოთ ევკლიდეს n განზომილებიანი სივრცე R^n. $R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n}$ და

მანძილი მის ორ $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ წერტილს შორის გამოისახება ფორმულით:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

R^n სივრცეში მდებარე $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილისათვის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ რიცხვებს ამ წერტილის კოორდინატები ეწოდება.

ევკლიდეს ერთგანზომილებიანი სივრცე $R^1 = R$ წარმოადგენს რიცხვით ღერძს, ევკლიდეს ორგანზომილებიანი სივრცე $R^2 = \underbrace{R \times R}_{2}$ წარმოადგენს სიბრტყეს,

ევკლიდეს სამზომილებიანი სივრცე $R^3 = \underbrace{R \times R \times R}_{3}$ წარმოადგენს იმ სივრცეს,

რომელშიდაც ჩვენ ვცხოვრობთ.

ვთქვათ, $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ორი წერტილია R^n სივრცეში. A და B წერტილების შემაერთებელი ***მონაკვეთი*** R^n სივრცეში ეწოდება ამ სივრცის იმ $C(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ წერტილების ერთობლიობას, რომელთა კოორდინატებიც A და B წერტილების კოორდინატების საშუალებით გამოისახება შემდეგნაირად:

$$z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$$
$$z_2 = (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2 \quad , \qquad (4)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_n = (1-\lambda)x_n + \lambda y_n$$

სადაც პარამეტრი λ აკმაყოფილებს $0 \le \lambda \le 1$ პირობას.

როდესაც $\lambda = 0$, $C(z_1, z_2, ..., z_n)$ წერტილი ემთხვევა $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ წერტილს,- მონაკვეთის ერთ ბოლოს, როდესაც $\lambda = 1$, $C(z_1, z_2, ..., z_n)$ წერტილი ემთხვევა $B(y_1, y_2, ..., y_n)$ წერტილს- მონაკვეთის მეორე ბოლოს. A და B წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის იმ წერტილს, რომელიც შეესაბამება λ პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომელიც აკმაყოფილებს $0 < \lambda < 1$ პირობას ამ ***მონაკვეთის შიგა წერტილი ეწოდება.***

ორგანზომილებიან ევკლიდეს R^2 სივრცეში, ანუ სიბრტყეში, ორი $A(x_1, x_2)$ და $B(y_1, y_2)$ წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი იქნება ისეთი $C(z_1, z_2)$ წერტილების ერთობლიობა, რომლის კოორდინატებიც გამოისახება შემდეგნაირად:

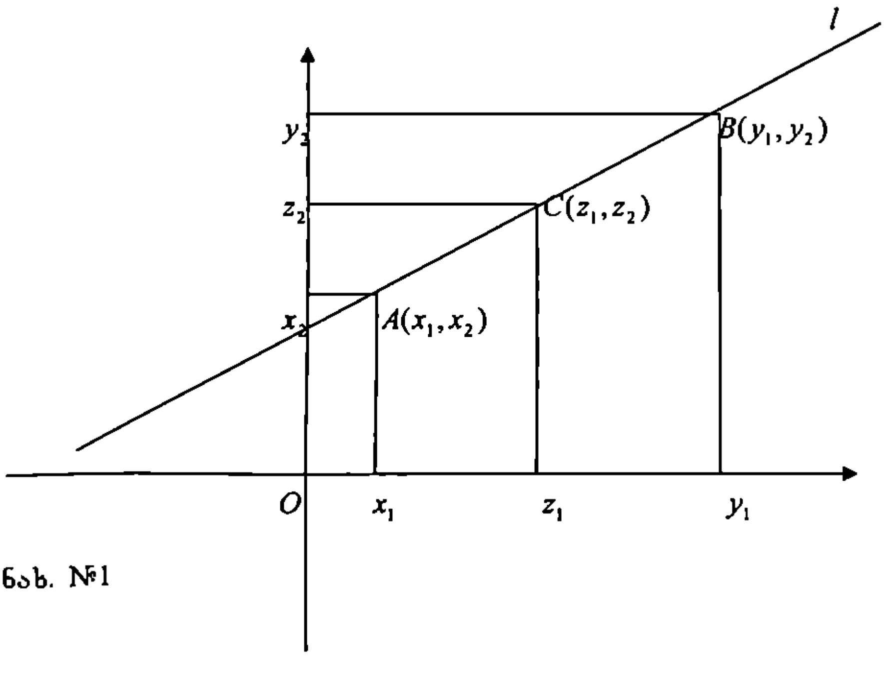
$$z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$$
$$z_2 = (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2 \, , \qquad (5)$$

სადაც პარამეტრი λ აკმაყოფილებს $0 \le \lambda \le 1$ პირობას.

ვაჩვენოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში მონაკვეთის ასეთნაირი განსაზღვრებით ვღებულობთ იმავე გეომეტრიულ ფიგურას რასაც ჩვენ ვუწორებთ მონაკვეთს გეომეტრიის სასკოლო კურსში.

მართლაც, გეომეტრიის სასკოლო კურსში მონაკვეთი ეწოდება რაიმე l წრფის იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომლებიც მოთავსებულნი არიან წრფეზე აღებულ ორ A და B წერტილს შორის.

ავაგოთ სიბრტყეზე დეკარტის კოორდინატთა სისტემ:



ნახ. №1

განვიხილოთ l წრფეზე მდებარე AB მონაკვეთის ნებისმიერი $C(z_1,z_2)$ წერტილი. ვთქვათ, AB მონაკვეთის სიგძეა p, CB მონაკვეთის სიგრძე კი q, მაშინ AC მონაკვეთის სიგრძე იქნება $p-q$.

განვნისილოთ სიდიდე $\lambda=\frac{p-q}{p}$. ცხადია, ეს სიდიდე აკმაყოფილებს პირობას $0\le\lambda\le1$. სიდიდე $\frac{q}{p}=1-\lambda$. $\frac{|AC|}{|AB|}=\lambda, \frac{|CB|}{|AB|}=1-\lambda$. აქედან გამომდინარე $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$. $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{z_1-x_1}{y_1-z_1}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$, აქედან ვღებულობთ $z_1-x_1-\lambda z_1+\lambda x_1=\lambda y_1-\lambda z_1$, ანუ $z_1=(1-\lambda)x_1+\lambda y_1$.

ასევე $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{z_2-x_2}{y_2-z_2}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$. აქედან კი ვღებულობთ $z_2-x_2-\lambda z_2+\lambda x_2=\lambda y_2-\lambda z_2$, ანუ $z_2=(1-\lambda)x_2+\lambda y_2$. როგორც ეხედავთ, AB მონაკვეთის ნებისმიერი C წერტილის კოორდინატები z_1,z_2 გამოისახებიან (5) ფორმულებით.

როდესაც $\lambda=0$, $C(z_1,z_2)$ წერტილი ემთხვევა $A(x_1,x_2)$ წერტილს- მონაკვეთის ერთ ბოლოს, როდესაც $\lambda=1$, $C(z_1,z_2)$ წერტილი ემთხვევა $B(y_1,y_2)$ წერტილს- მონაკვეთის მეორე ბოლოს.

ვაჩვენოთ პირიქითაც, ეთქვათ წერტილთა რაღაც ერობლიობა ისეთია, რომ ამ ერთობლიობის ცვლადი C წერტილის კოორდინატები z_1,z_2 გამოისახებიან ფორმულებით;

$$z_1=(1-\lambda)x_1+\lambda y_1$$
$$z_2=(1-\lambda)x_2+\lambda y_2,$$

სადაც x_1,x_2 სიბრტყის რაიმე A წერტილის კოორდინატებია, y_1,y_2 კი- სიბრტყის რაიმე B წერტილის კოორდინატები, ხოლო პარამეტრი λ აკმაყოფილებს $0\le\lambda\le1$ პირობას. მაშინ, ცხადია, $z_1=(1-\lambda)x_1+\lambda y_1$ ტოლობიდან შეგვიძლია მივიღოთ $z_1-x_1-\lambda z_1+\lambda x_1=\lambda y_1-\lambda z_1$ ტოლობა, ამ ტოლობიდან კი: $\frac{z_1-x_1}{y_1-z_1}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$. ასევე: $z_2=(1-\lambda)x_2+\lambda y_2$ ტოლობიდან შეგვიძლია მივიღოთ: $z_2-x_2-\lambda z_2+\lambda x_2=\lambda y_2-\lambda z_2$ ტოლობა, ამ ტოლობიდან კი: $\frac{z_2-x_2}{y_2-z_2}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$ ტოლობა.

მიღებული ტოლობების მარჯვენა მხარეები ტოლია, აქედან გამომდინარე

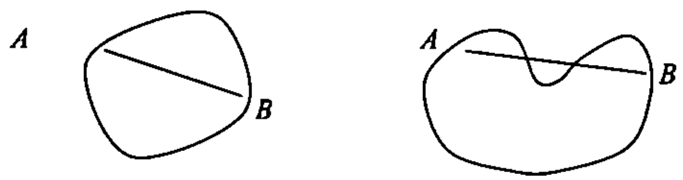
$$\frac{z_1-x_1}{y_1-z_1}=\frac{z_2-x_2}{y_2-z_2}. \qquad (6)$$

მაშასადამე, წერტილთა ჩვენ მიერ განხილული ერთობლიობის ცვლადი წერტილის კოორდინატები აკმაოფილებენ უკანასკნელ ტოლობას. ეს ტოლობა კი მოცემულ ორ $A(x_1,x_2)$ და $B(y_1,y_2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას წარმოადგენს. ეს კი ნიშნავს, რომ წერტილთა ჩვენ მიერ განხილული ერთობლიობის ელემენტები მდებარეობენ ერთ წრფეზე და რადგან პარამეტრი λ აკმაყოფილებს $0\le\lambda\le1$ პირობას, ერთობლიობის წერტილები მოთავსებულნი იქნებიან ამავე წრფეზე მდებარე $A(x_1,x_2)$ და $B(y_1,y_2)$ წერტილებს შორის.

R^n სიერცის ნებისმიერ არაცარიელ ქვესიმრაველეს ამ სიერცეში მდებარე ფიგურას უწოდებენ.

R^n სივრცეში მდებარე რაიმე F ფიგურას უწოდებენ ***ამოზნექილ ფიგურას***, თუ იგი მის ნებისმიერ ორ $A,B\in F$ წერტილთან ერთად შეიცავს ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის ყოველ წერტილსაც.

სიბრტყეზე მდებარე ამოზნექილი და არაამოზნექილი ფიგურები გრაფიკულად შეიძლება გამოისახონ შემდეგნაირად:

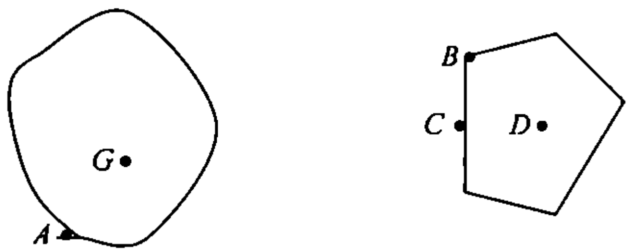


ამოზნექილი ფიგურა. არაამოზნექილი ფიგურა.

ნახ. №2

R^n სივრცის ამოზნექილი F ფიგურის იმ წერტილს, რომელიც ამ ფიგურაში მდებარე ნებისმიერი ორი განსხვავებული $A,B\in F, A\neq B$ წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთის შიგა წერტილს არ წარმოადგენს, ამ ***ფიგურის კიდურა წერტილი*** ეწოდება.

სიბრტყეზე მდებარე ამოზნექილ ფიგურათა კიდურა წერტილები გრაფიკულად შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:



ნახ.3.

A წერტილი მარცხენა ფიგურაზე B და C წერტილები მარჯვენა ფიგურაზე წარმოადგენენ კიდურა წერტილებს, ხოლი G წერტილი მარცხენა ფიგურაზე და D წერტილი მარჯვენა ფიგურაზე არ წარმოადგენენ კიდურა წერტილებს.

თეორემა 24.1. R^n სივრცის ორი ამოზნექილი F_1 და F_2 ფიგურის თანაკვეთა $F_1\cap F_2$, თუ იგი არაცარიელია, წარმოადგენს ასევე ამოზნექილ ფიგურას.

დამტკიცება: განვიხილოთ $F_1\cap F_2$ ნებისმიერი ორი წერტილი და მათი შემაერთებელი მონაკვეთი, რადგან სიმრავლეები ამოზნექილია, მონაკვეთი ეკუთვნის, როგორც F_1 სიმრავლესაც ასევე F_2 სიმრავლესაც და აქედან გამომდინარე ამ სიმრავლეთა თანაკვეთასაც. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 24.2. R^n სივრცის ის ქვესიმრავლე, რომლის წერტილთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას:

$$a_{i1}z_1+a_{i2}z_2+...+a_{in}z_n\le b_i$$

წარმოადგენს ამოზნექილ ფიგურას ამ სივრცეში.

დამტკიცება: ავიღოთ ამ ფიგურის ორი წერტილი $A(x_1,x_2,...,x_n)$ და $B(y_1,y_2,...,y_n)$. ცხადია, მაშინ $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n\le b_i$ და $a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+...+a_{in}y_n\le b_i$.

გავამრავლოთ პირველი უტოლობა $1-\lambda$ რიცხვზე, მეორე უტოლობა-λ რიცხვზე, სადაც $0\le\lambda\le 1$. მიღებული უტოლობები შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$(1-\lambda)a_{i1}x_1+(1-\lambda)a_{i2}x_2+...+(1-\lambda)a_{in}x_n+\lambda a_{i1}y_1+\lambda a_{i2}y_2+...+\lambda a_{in}y_n\le(1-\lambda)b_i+\lambda b_i.$$

ამ უტოლობის გარდაქმნით მივიღებთ:

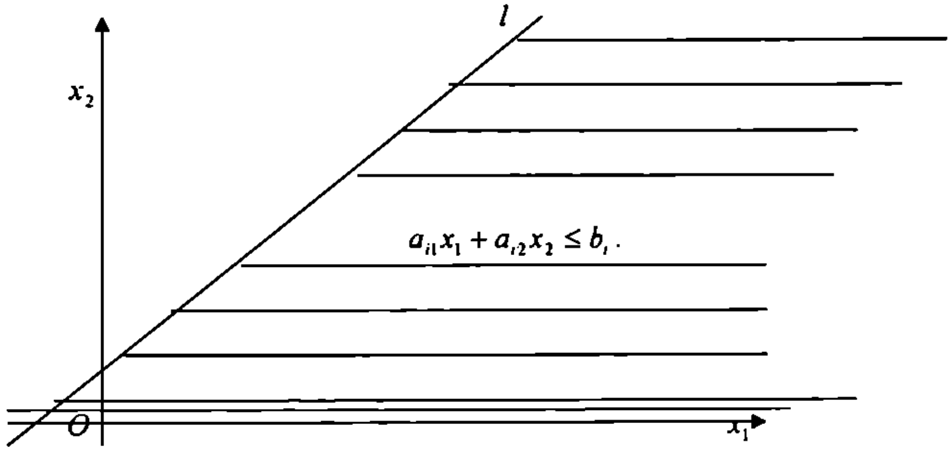
$$a_{i1}((1-\lambda)x_1+\lambda y_1)+a_{i2}((1-\lambda)x_2+\lambda y_2)+...+a_{in}((1-\lambda)x_n+\lambda y_n)\le b_i .$$

ეს კი ნიშნავს, რომ A და B წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთის ყოველი წერტილი კოორდინატებით $z_j=(1-\lambda)x_j+\lambda y_j,\ j=1,2,...,n, 0\le\lambda\le 1$ ეკუთვნის $a_{i1}z_1+a_{i2}z_2+...+a_{in}z_n\le b_i$ უტოლობით განსაზღვრულ ფიგურას. თეორემა დამტკიცდა.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, ვთქვათ, მოცემულია უტოლობა

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\le b_i .$$

ამ უტოლობით განსაზღვრული წერტილების სიმრავლე x_1Ox_2 საკოორდინატო სიბრტყეზე წარმოადგენს ნახევარსიბრტყეს, რომლის წერტილებიც მოთავსებულია $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ ზოგადი განტოლებით განსაზღვრული l წრფეზე ან მის ქვემოთ ქვემოთ:



ნახ. №4.

წერტილთა ეს სიმრავლე, როგორც ვხედავთ, ამოზნექილია.

თუ მიცემულია უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\le b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m1}x_2+...+a_{mn}x_n\le b_m \end{cases},$$

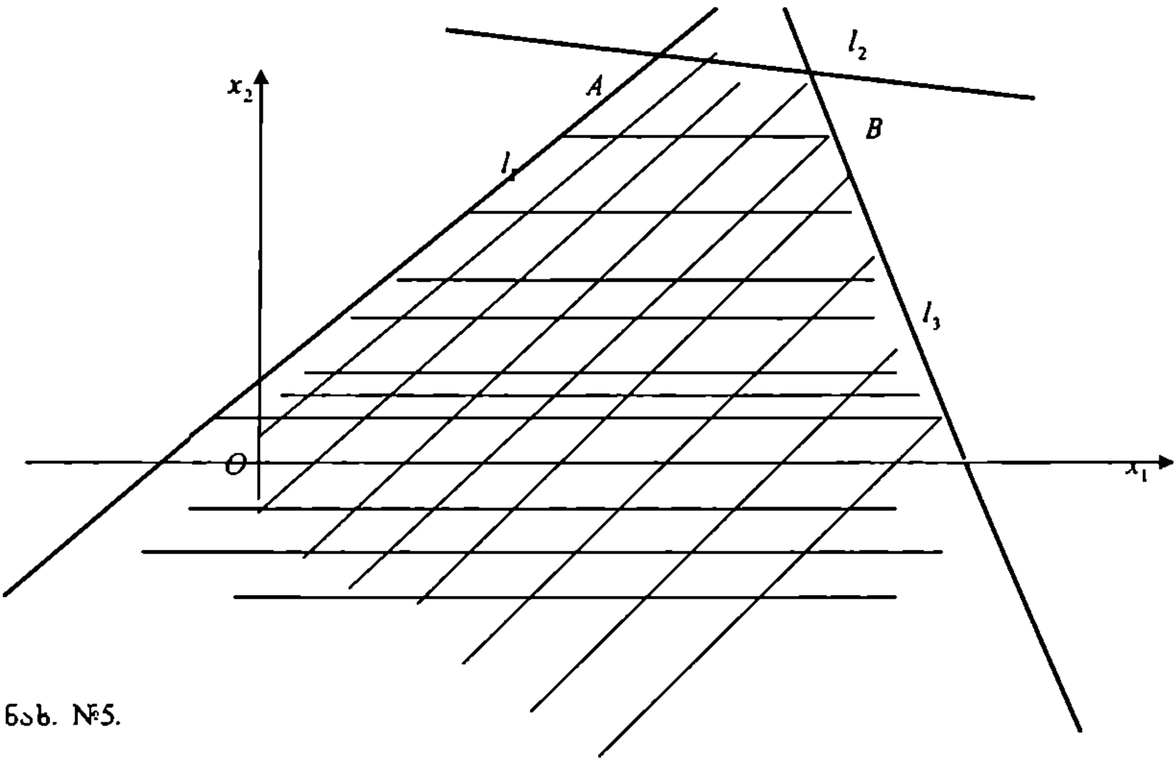
მაშინ ამ სისტემაში შემავალი თითოეული უტოლობით განსაზღვრული ფიგურა ამოზნექილი იქნება. უტოლობათა სისტემით განსაზღვრული ფიგურა წარმოადგენს სისტემის თითოეული უტოლობით განსაზღვრულ ამოზნექილ ფიგურათა თანაკვეთას. ამიტომ იგი იქნება ამოზნექილი.

$n=2, m=3$, განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, გვექნება უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{21}x_2\le b_2 ,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2\le b_3 \end{cases} \qquad (7)$$

მაშინ ფიგურას, რომელიც განისაზღვრება ამ უტოლობათა სისტემით, საკოორდინატო სიბრტყეზე ექნება შემდეგი სახე: ნა. №5, სადაც l_1 $a_{11}x_1+a_{22}x_2=b_1$ განტოლებით განსაზღვრული წრფეა, l_2 $a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$ განტოლებით განსაზღვრული წრფე, l_3 კი $a_{31}x_1+a_{32}x_2=b_3$ განტოლებით განსაზღვრული წრფე.

A და B წერტილები წარმოადგენენ (7) სისტემით განსაზღვრული ფიგურის კიდურა წერტილებს.



ნახ. №5.

ვთქვათ, მიზნის $z = f(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ ფუნქცია განსაზღვრულია (1) უტოლობათა სისტემით განსაზღვრული ფიგურის $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ წერტილთა სიმრავლეზე.

თეორემა24.3. $z = f(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ ფუნქციის მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობები მიიღწევიან მხოლოდ (1) უტოლობათა სისტემით განსაზღვრული ფიგურის კიდურა წერტილებზე.

დამტკიცება: ზოგადობის დაურღვევლად განვიხილოთ მინიმუმის შემთხვევა.

ვთქვათ, მიზნის ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს ფიგურის რაიმე არაკიდურა $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ წერტილზე. მაშინ ეს წერტილი წარმოადგენს ფიგურის რაიმე ორი $A(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ და $B(y_1^0, y_2^0, ... y_n^0)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შიგა წერტილს. ცხადია, მაშინ $f(B) \le f(\overline{X})$ და $f(A) \le f(X)$

$\overline{X}$ წერტილის კოორდინატებისათვის გვაქვს:

$$\overline{x}_i = (1-\lambda)x_i^0 + \lambda y_i^0, i = 1,2,...,n; 0 < \lambda < 1 .$$

მიზნის ფუნქცია ამ წერტილებზე აღწევს მნიშვნელობებს:

$$z = f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} c_i((1-\lambda)x_i^0 + \lambda y_i^0) = (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B) .$$

დავუშვათ, $f(A) \ne f(B)$, მაშინ რადგან $f(B) \le f(\overline{X})$ და $0 < \lambda < 1$, ამიტომ:

$$f(B) \le (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B) .$$

აქედან :

$$(1-\lambda)f(B) \le (1-\lambda)f(A),$$

ანუ: $f(B) \le f(A)$. რადგან $f(A) \le f(\overline{X})$ და $0 < \lambda < 1$, ამიტომ

$$f(A) \le (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B),$$

ანუ $f(A) \le f(B)$. მაშასადამე, ჩვენი დშვება არ ყოფილა სწორი: $f(A) = f(B)$.

აქედან გამომდინარე, თუ განვიხილავთ წრფეს, რომელიც გადის A და B წერტილებზე, ანუ იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომელთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ

$$z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$$
$$z_2 = (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_n = (1-\lambda)x_n + \lambda y_n$$

ტოლობებს, სადაც $-\infty < \lambda < \infty$, მაშინ ადვილია იმის ჩვენება, რომ ამ წრფისა და ჩვენი ფიგურის თანაკვეთით მიღებული სიმრავლის წერტილებზე $f(X)$ ფუნქციის მნიშვნელობა იქნება მუდმივი. ცხადია $f(X)$ ფუნქცია მუდმივი იქნება $\overline{X}$ წერტილზე გამავალი ნებისმიერი სხვა წრფისა და ჩვენი ფიგურის გადაკვეთის წერტილებზე, ეს კი ნიშნავს, რომ $f(X)$ ფუნქცია ფუნქცია მუდმივია ფიგურის ნებისმიერ წერტილზე თუ $\overline{X}$ წარმოადგენს ფიგურის შიგა წერტილს ანუ ისეთ წერტილს, რომლის კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n < b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n < b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \dots + a_{mn}x_n < b_m \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემას.

ასეთ შემთხვევაში ფუნქციის მუდმივი მნიშვნელობა იქნება მაქსიმალური მნიშვნელობა და იგი კიდურა წერტილებზეც იგივე იქნება.

ვთქვათ, არ არის მუდმივი $f(X)$ ფუნქცია და ვთქვათ, $\overline{X}$ არ არის ფიგურის შიგა წერტოლი. განვიხილოთ ჰიპერსიბრტყე, რომელიც განისაზღვრება განტოლებით: $\sum_{i=1}^{n} a_j x_j = f(\overline{X})$. ამ ჰიპერსიბრტყეზე $f(X)$ ფუნქცია მუდმივია, ჰიპერსიბრტყე არ გაივლის ფიგურის არცერთ შიგა წერტილზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში, წინა მსჯელობიდან გამომდინარე, $f(X)$ ფუნქცია იქნებოდა მუდმივი. აქედან გამომდინარე: $\sum_{i=1}^{n} a_j x_j = f(\overline{X})$ ჰიპერსიბრტყე მხოლოდ ეხება ფიგურას და ამიტომ იგი გაივლის ფიგურის ერთ მაინც კიდურა წერტილზე. მაშასადამე, იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $f(X)$ ფუნქცია მუდმივი არ არის, მაქსიმუმი მიიღწევა ფიგურის კიდურა წერტილზე. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ წრფივი პროგრამირების ამოცანა რომ ამოვხსნათ, საჭიროა, მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობანი შევამოწმოთ (1) უტოლობათა სისტემით განსაზღვრული ამოზნექილი ფიგურის კიდურა წერტილებზე და ამოვირჩიოთ მათ შორის ის კიდურა წერტილები, რომლებზედაც მიზნის ფუნქცია მაქსიმალურია.

§25. სიმპლექს-მეთოდი

კიდურა წერტილების თანმიმდევრობითი შერჩევის ერთ-ერთი მეთოდია ეგრეთწოდებული სიმპლექს-მეთოდი.

სანამ სიმპლექს-მეთოდს განვიხილავდეთ, განვიხილოთ(1) უტოლობათა სისტემა (2) პირობებთან ერთად

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (8)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

და განტოლებათა სისტემა, რომელიც მიიღება უტოლობათა ამ სისტემიდან $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ დამატებითი ცვლადების შემოღების საშუალებით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{2n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{mn+1}x_{n+1} + \ldots + a_{mk}x_k = b_m \end{cases}, \qquad (9)$$

სადაც $k = m + n$.

ამ განტოლებათა სისტემის m რაოდენობის $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ ცვლადი დანარჩენი ცვლადების საშუალებით წრფივად შეიძლება გამოვსახოთ. ამგვარად (9) განტოლება შეიძლება გადაიწეროს ასე:

$$\begin{cases} x_{n+1} + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = d_1 \\ x_{n+2} + b_{21}x_1 + b_{22}x_{22} + \ldots + b_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+m} + b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{m}x_n = d_m \end{cases} \qquad (10)$$

იმ m რაოდენობის ცვლადს, რომლებიც დანარჩენი ცვლადების საშუალებით წრფივად შეიძლება გამოვსახოთ, ***საბაზისო ცვლადები ეწოდებათ,*** ხოლო დანარჩენ ცვლადებს- ***თავისუფალი ცვლადები.***

(9) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ადვილად მიიღება თუ (10) განტოლებათა სისტემაში თავისუფალ ცვლადებს მივცემთ რაიმე მნიშვნელობებს.

თუ (10) განტოლებათა სისტემაში თავისუფალ ცვლადებს მივცემთ ნულის ტოლ მნიშვნელობებს, მივიღებთ (9) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0, x_{n+1} = d_1, x_{n+2} = d_2, \ldots, x_{n+m} = d_m.,$$

ასეთ ამონახსნს ***საბაზისო ამონახსნს უწოდებენ.*** თუ ყველა $x_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,n+m$, მაშინ საბაზისო ამონახსნს **დასაშვებ საბაზისო ამონახსნს** უწოდებენ.

თუ რომელიმე d_i ნულის ტოლია მაშინ საბაზისო ამონახსნს გადაგვარებული ეწოდება.

განვიხილოთ შემთხვევა $k = m + 2, n = 2$, როდესაც (10) სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} x_{2+1} + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = d_1 \\ x_{2+2} + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2+m} + b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 = d_m \end{cases} \qquad (11)$$

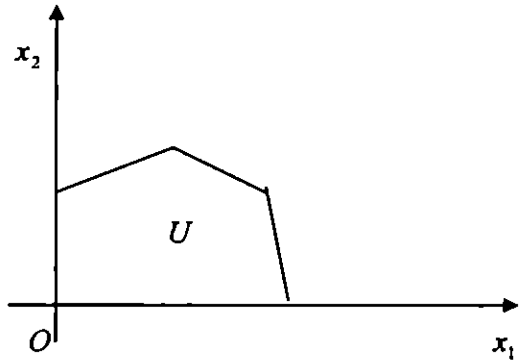
ეს სისტემა განვიხილოთ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_m \ge 0, x_{m+1} \ge 0, x_{m+2} \ge 0$ პირობებთან ერთად.

ამ განტოლებათა სისტემაში თავისუფალი ცვლადებია მხოლოდ x_1 და x_2 ცხადია, ამ ცვლადებისთვის

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \le d_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \le d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 \le d_m \end{cases} . \tag{12}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

(12) უტოლობები x_1Ox_2 საკოორდინატო სიბრტყეზე ქმნიან ამოზნექილ U ფიგურას. ცხადია, (11) სისტემის დასაშვებ საბაზისო ამონახსნს, რომელშიდაც $x_1 = x_2 = 0$, შეესაბამება U ფიგურის O კიდურა წერტილი. იხილე ნახ. №6.



ნახ. №6

ეს ფაქტი გვაფიქრებინებს, რომ (9) სისტემის ბაზისურ ამონახნებსა და (8) უტოლობათა სისტემით განსაზღვრული ამოზნექილი ფიგურის კიდურა წერტილებს შორის რაღაც კავშირი არსებობს.

ადგილი აქვს თეორემას:

თეორემა 25.4. (9) განტოლებათა სისტემის ყოველი დასაშვები საბაზისო ამონახსნი შეესაბამება (8) უტოლობათა სისტემის დასაშვები ამონახსნებისაგან შედგენილი ამოზნექილი ფიგურის კიდურა წერტილს.

დამტკიცება: (8) უტოლობათა სისტემიით განსაზღვრული ამოზნექილი ფიგურის ყოველ წერტილს, რომლის კოორდინატებიცაა $x_1, x_2, ..., x_n$ ცალსახად შეესაბამება (9) განტოლებათა სისტემის ერთადერთი დასაშვები ამონახსნი. ეს ფაქტი გამომდინარეობს იქედან, რომ (9) განტოლებათა სისტემის $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ ბაზისური ცვლადების მნიშვნელობანი ცალსახად განისაზღვრებიან $x_1, x_2, ..., x_n$ თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობებით.

ვთქვათ, X_1, X_2 (8) უტოლობათა სისტემიით განსაზღვრული ამოზნექილი U წერტილებია კოორდინატებით: $x_i^1, i = 1,2,...,n; x_i^2, i = 1,2,...,n$, შესაბამისად.

ამ წერტილებს შეესაბამებიან (9) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1, x_{n+1}^1, ..., x_{n+m}^1$, $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2, x_{n+1}^2, ..., x_{n+m}^2$, სადაც $n + m = k$. განვიხილოთ ნებისმიერი X წერტილი, რომელიც მდებარეობს X_1, X_2 წერტილებს შორის მათ შემაერთებელ მონაკვეთზე. ამ წერტილის კოორდინატები: $x_1, x_2, ..., x_n$ გამოისახებიან თანაფარდობებით: $x_i = \lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2$. ამ წერტილს (9) განტოლებათა სისტემის წრფიეობის გამო შეესაბამება ამ სისტემის დასაშვები ამონახსნი:

$x_1 = \lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2, ..., x_n = \lambda x_n^1 + (1-\lambda)x_n^2, x_{n+1} = \lambda x_{n+1}^1 + (1-\lambda)x_{n+1}^2, ...,$
$x_{n+m} = \lambda x_{n+m}^1 + (1-\lambda)x_{n+m}^2$.

ცხადია, ამ ამონახსნის კომპონენტები წარმოადგენენ იმ მონაკვეთის $\overline{X}$ წერტილის კოორდინატებს, რომელიც ერთმანეთთან აერთებს $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1, x_{n+1}^1, ..., x_{n+m}^1$, $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2, x_{n+1}^2, ..., x_{n+m}^2$ კოორდინატების მქონე $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ წერტილებს R^{n+m} სივრცეში.

რადგან $X \in U$ წერტილი ნებისმიერად არის აღებული, ამიტომ X_1, X_2 წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს ურთიერთცალსახად შეესაბამება $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი, რომლის თითოეული წერტილის კოორდინატები წარმოადგენენ (9) სისტემის დასაშვებ ამონახსნს. აქედან გამომდინარე, U სიმრავლის ყოველ არაკიდურა წერტილს შეესაბამება (9) სისტემის დასაშვებ ამონახსნთა $\overline{U}$ სიმრავლის არაკიდურა წერტილი, ეს კი ნიშნავს, რომ U სიმრავლის ყოველ კიდურა წერტილს აქვს შესაბამისი კიდურა წერტილი $\overline{U}$ სიმრავლეში.

ვთქვათ, $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0, x_{n+1} = d_1, x_{n+2} = d_2, ..., x_{n+m} = d_m$ (9) სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნია. შევეცადოთ ვიპოვოთ ამავე სისტემის ისეთი სხვა ორი დასაშვები ამონახსნი: $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1, x_{n+1}^1, ..., x_{n+m}^1$, $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2, x_{n+1}^2, ..., x_{n+m}^2$,
რომ ყოველი x_i სიდიდის მნიშვნელობა მოცემულ საბაზისო ამონახსნში იყოს
x_i^1, x_i^2

სისიდეების მნიშვნელობათა საშუალო, ანუ: $x_i = \frac{1}{2}(x_i^1 + x_i^2)$. ცხადია, i ინდექსის ყველა მნიშვნელობებისათვის 1-დან $n-$მდე, დასმული მოთხოვნა დაიყვანება მოთხოვნაზე $\frac{1}{2}(x_i^1 + x_i^2) = 0$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $x_i^1 \geq 0, x_i^2 \geq 0, i = 1,2,...,n+m$,

შეიძლება დავასკვნათ: $\frac{1}{2}(x_i^1 + x_i^2) = 0$ მოთხოვნა სრულდება მხოლოდ მაშინ, თუ $x_i^1 = 0, x_i^2 = 0, i = 1,2,...,n$. ამგვარად, სამივე ამონახსნი უნდა შეიცავდეს n რაოდენობის ნულოვან კომპონენტს, რომლებიც ყოველთვის შეიძლება ჩაითვალონ თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობებად. აქედან გამომდინარე, სამივე ამონახსნში არათავისუფალი საბაზისო ცვლადების მნიშვნელობანიც ერთმანეთს უნდა დაემთხვეს,
ეს კი ნიშნავს, რომ სამივე ამონახსნი ერთმანეტის ტოლი უნდა იყოს. ამგვარად, ჩვენი
მცდელობა წარმოვადგინოთ x_i სიდიდე $x_i^1 \neq x_i, x_i^2 \neq x_i$ სიდიდეების წრფივი კომბინაციის სახით,შედეგს არ იძლევა. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $\overline{U}$ სიმრავლის წერტილი კოორდინატებით:
$x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0, x_{n+1} = d_1, x_{n+2} = d_2, ..., x_{n+m} = d_m$ არ შეიძლება მდებარეობდეს მოცემული სიმრავლის ორი სხვა წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთის შიგნით. ეს კი ნიშნაეს, რომ განხილული წერტილი $\overline{U}$ სიმრავლის კიდურა წერტილია.

როგორც ადრე ენახეთ, $\overline{U}$ სიმრავლის კიდურა წერტილს ურთიერთცალსახად შეესაბამება U სიმრავლის კიდურა წერტილი, ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

ამ თეორემიდან გამომდინარე, წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო (8) უტოლობათა სისტემის დასაშვები ამონახსნებისაგან შედგენილი ამოზნექილი ფიგურის კიდურა წერტილების შერჩევის საქმე შეიძლება შევცვალოთ (9) განტოლებათა სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნის შერჩევის საქმით. სიმპლექს-მეთოდი ერთ-ერთი მეთოდია, რომლის საშუალებითაც

ხორციელდება(9) განტოლებათა სისტემის დასაშვები საბაზისო ამონახსნის შერჩევის საქმე.

სიმპლექს- მეთოდი რომ გამოვიყენოთ, წრფივი პროგრამირების ამოცანა უნდა დავიყვანოთ ეგრეთწოდებულ ***კანონიკურ სახეზე,*** რომელშიც ფიგურირებს არა (8) უტოლობათა სისტემა, არამედ (9) განტოლებათა სისტემა, რომელიც მიიღება(8) სისტემიდან დამატებითი ცვლადების შემოღების საშუალებით და მიზნის ფუნქცია $z=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, რომელის მნიშენელობებიც განიხილება თითოეული დასაშვები საბაზისო ამონახსნის შესაბამის კიდურა წერტილებზე და რომლის მინიმუმის წერტილსაც ვეძებთ ამ წერტილებს შორის. (8) უტოლობების დასაშვები ამონახსნებით განსაზღვრული ამოზნექილი ფიგურა იმის მიხედვით, თუ (9) განტოლებათა სისტემის რომელ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნთან გვაქვს საქმე, გამოისახება უტოლობათა სისტემით:

$$\begin{cases} b_{11}x_{l_1}+b_{12}x_{l_2}+\ldots+b_{1k-m}x_{l_{k-m}}\le d_1 \\ b_{21}x2_{l_1}+b_{22}x_{l_2}+\ldots+b_{2k-n}x_{l_{k-m}}\le d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}x_{l_1}+b_{m1}x_{l_2}+\ldots+b_{mk-m}x_{l_{k-m}}\le d_m \end{cases}$$

და პირობით $x_{l_1}\ge 0, x_{l_2}\ge 0,\ldots,x_{l_{k-m}}\ge 0$,

სადაც $x_{l_1},x_{l_2},\ldots,x_{l_{k-m}}$ არასაბაზისო ცვლადებია.

თეორემა 25.5. (8) უტოლობების დასაშვები ამონახსნებით განსაზღვრული ამოზნექილი ფიგურის კიდურა წერტილი, რომელიც (9) სისტემის დასაშვები ბაზისური ამონახსნის შესაბამისია, მაშინ წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანის მიზნის ფუნქციის მინიმუმის წერტილს, თუ მიზნის ფუნქციაში არაბაზისურ ცვლადებთან მდგომი კოეფიციენტები არაუარყოფითია.

დამტკიცება: განვიხილით მიზნის ფუნქცია: $z=c_1x_1+c_2x_2+..+c_nx_n$. z_0 იყოს მიზნის ფუნქციაში იმ შესაკრებთა ჯამი, რომლებშიც თანამამრავლებად შედიან საბაზისო ცვლადები. განვიხილოთ $z-z_0=c_{\alpha_1}x_{\alpha_1}+c_{\alpha_2}x_{\alpha_2}+\ldots+c_{\alpha_p}x_{\alpha_p}$, სადაც $x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_p}$ არასაბაზისო ცვლადებია. თუ $c_{\alpha_1}\ge 0,c_{\alpha_2}\ge 0,\ldots,c_{\alpha_p}\ge 0$, მაშინ როგორი მნიშენელობაც არ უნდა მივცეთ $x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_p}$ არასბაზისო ცვლადებს, $z-z_0$ სხვაობის მინიმუმი იქნება ნული. ამიტომ z არასდროს არ იქნება ნაკლები z_0-ზე. ბაზისური ამონახსნისათვის $x_{\alpha_1}=0, x_{\alpha_2}=0,\ldots,x_{\alpha_p}=0$, ამიტომ $z=z_0$ და შეიძლება დავასკვნათ, რომ $z=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ მიზნის ფუნქციის მინიმუმია z_0. თეორემა დამტკიცდა.

დამტკიცებული თეორემიდან ჩანს, რომ დასაშვები ბაზისური ამონახსნი, რომლის შესაბამისი კიდურა წერტილიც მიზნის ფუნქციას ანიჭებს მინიმალურ მნიშენელობას, ერთადერთია, თუ $c_j>0$ ყველა არაბაზისურ ცვლადთან, ვინაიდან ამ შემთხვევაში $z-z_0=c_{\alpha_1}x_{\alpha_1}+c_{\alpha_2}x_{\alpha_2}+\ldots+c_{\alpha_p}x_{\alpha_p}=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_{\alpha_1}=0, x_{\alpha_2}=0,\ldots,x_{\alpha_p}=0$.

ამგვარად, თეორემა 25.5. გვაძლევს კრიტერიუმს წრფივი პროგრამირების ამოცანის დასაშვები საბაზისო ამონახსნის ოპტიმალურობის შესახებ, მაგრამ პირველივე ცდით ასეთი ამონახსნის მიღება ხშირ შემთხვევაში არ ხერხდება, ხშირად ადვილად დანახული ბაზისური ამონახსნი შუალედურია, ამიტომ აუცილებელია

ბაზისური ამონახსნების გაუმჯობესების(ოპტიმალურთან უფრო ახლო მდგომი ბაზისური ამონახსნის პოვნის) პროცედურების შესრულება.

დავუშვათ, დასაშვები ბაზისური ამონახსნი:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, x_{n+1} = d_1, x_{n+2} = d_2, \dots, x_{n+m} = d_m. \qquad (13)$$

არ არის ოპტიმალური, ანუ მიზნის ფუნქციის იმ c_j კოეფიციენტებს შორის, რომლებიც დგანან არასაბაზისო ცვლადებთან, ყველა არ არის არაუარყოფითი. რომ გადავიდეთ(13) ამონახსნიდან მეორე დასაშვებ ბაზისურ ამონახსნზე, საჭიროა ნულისაგან განსხვავებული გავხადოთ(შევიყვანოთ ბაზისში) რომელიმე არასაბაზისო ცვლადი და გავანულოთ საბაზისო ცვლადი (გამოვიყვანოთ ბაზისიდან). თუ გავითვალისწინებთ შეზღუდვას $x_j \geq 0$, მაშინ შეიძლება ვთქვათ, რომ $z = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ ფუნქციის მნიშვნელობა მცირდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც ბაზისში შემავალ ცვლადთან ამ მიზნის ფუნქციაში დგას უარყოფითი კოეფიციენტი. ცხადია, მიზნის ფუნქციის შემცირება მით უფრო მეტი იქნება, რაც მეტია ამ კოეფიციენტის მოდული.

აღვნიშნოთ s-ით ის j ნომერი, რომელი ნომრითაც დგას ყველაზე დიდი მოდულის მქონე უარყოფითი კოეფიციენტი არასაბაზისო ცვლადებთან.

თუ არასაბაზისო ცვლადს, რომელიც დგას j ინდექსის მქონე კოეფიციენტთან, აღვნიშნავთ x_s-ით და მივცემთ $x_s = 0$ სიდიდეს დადებით ნაზრდს, მაშინ ბაზისურ ცვლადებს და მიზნის ფუნქციას წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:

$$x_{n+1} = d_1 - b_{1s}x_s, x_{n+2} = d_2 - b_{2s}x_s, \dots, x_{n+m} = d_m - b_{ms}x_s, \qquad (14)$$

$$z = z_0 + c_s x_s, \qquad (15)$$

სადაც $c_s < 0, 1 \leq s \leq n$.

რადგანაც $c_s < 0$, საჭიროა, რაც შეიძლება მეტად გავადიდოთ x_s სიდიდე, მაგრამ x_s-ის გაზრდა გაგრძელდება მანამდე, სანამ რომელიმე საბაზისო $x_{n+1}, xn+_2, \dots, x_{n+m}$ ცვლადი არ განულდება. ეს მოხდება, თუ ერთი მაინც კოეფიციენტი $b_{is}, i = 1,2,\dots,m$ (14) ფორმულებში დადებითია. რაც შეეხება d_i სიდიდეებს, საწყისი პირობებით $d_i \geq 0, i = 1,2,\dots,m$. თუ b_{is} დადებითია i ინდექსის რამდენიმე მნიშვნელობისათვის, მაშინ განულდება ის x_i საბაზისო ცვლადი (14) ფორმულებიდან, რომელსაც შეესაბამება $\frac{d_i}{b_{is}}, i = 1,2,\dots,m$ ფარდობათა მინიმალური მნიშვნელობა. ვთქვათ, ფარდობები მინიმალურია $i = r$ ინდექსისათვის, მაშინ ზღვრული სიდიდე $\bar{x}_s$ სადამდეც შეგვიძლია გავზარდოთ x_s სიდიდე, მოიძებნება ასე:

$$\bar{x}_s = \frac{d_r}{b_{rs}}, 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ერთი მაინც თავისუფალი d_i წევრის ნულთან ტოლობა რომელიმე b_{is} კოეფიციენტთან $i = 1,2,\dots,m$, ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს გადაგვარებულ ბაზისურ ამონახსნთან, ნიშნავს x_s ცვლადის ბაზისურ ცვლადებში შესვლის შეუძლებლობას იმ პირობის დაცვით, რომ $x_j \geq 0$.

აღწერილი პროცედურა შეიძლება გავიმეოროთ, თოო ახალი ბაზისური ამონახსნი უშვებს შემდგომ გაუმჯობესებას(ჩვენ შემთხვევაში შემცირებას) მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობისა. სიმპლექს-ალგორითმი გულისხმობს აღწერილის მსგავსი პროცედურების თანმიმდევრულ შესრულებას მანამდე, სანამ არ იქნება ნაპოვნი საწყისი წრფივი პროგრამირების ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი ან ამ

ამოცანის დასაშვებ იმ ამონახსნთა სიმრავლე, რომლებზედაც მიზნის ფუნქციის მოდული: $|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j| \to \infty$.

მაგალითი: ვიპოვოთ შემდეგი წრფივ უტოლობათა სისტემის

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \end{cases},$$

ის არაუარყოფითი ამონახსნი, რომელიც მინიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს $z = -7x_1 - 5x_2$ მიზნის ფუნქციას.

დამატებითი x_3, x_4, x_5, x_6 ცვლადების შემოყვანით დავიყვანოთ ეს ამოცანა სტანდარტულ სახემდე:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ 3x_2 + x_5 = 15 \\ 3x_1 + x_6 = 18 \end{cases},$$

$$z = -7x_1 - 5x_2.$$

ჩავთვალოთ დამატებითი ცვლადები საბაზისო ცვლადებად, გვექნება:

$$\begin{cases} x_3 = 19 - (2x_1 + 3x_2) \\ x_4 = 13 - (2x_1 + x_2) \\ x_5 = 15 - 3x_2 \\ x_6 = 18 - 3x_1 \end{cases},$$

მივცეთ არასაბაზისო x_1 და x_2 ცვლადებს ნულის ტოლი მნიშვნელობანი და განვიხილოთ საბაზისო ამონახსნი:

$$x_6 = 18, x_5 = 15, x_4 = 13, x_3 = 19, x_2 = 0, x_1 = 0.$$

ეს საბაზისო ამონახსნი არაა ოპტიმალური, რადგან მიზნის ფუნქციაში არასაბაზისო x_1 და x_2 ცვლადების წინ უარყოფითი კოეფიციენტებია.

გადავიდეთ სხვა საბაზისო ამონახსნზე.

რადგან x_1 არასაბაზისო ცვლადის წინ უფრო დიდი მოდულის კოეფიციენტია, ამიტომ, სსიმპლექს-ალგორითმის თანახმად, იგი უნდა შევიყვანოთ საბაზისო ცვლადების რიგში. ასევე, სიმპლექს-ალგორითმის თანახმად, განვიხილოთ ტოლობები:

$$x_3 = 19 - 2x_1,$$
$$x_4 = 13 - 2x_1,$$
$$x_5 = 15 - 0x_1,$$
$$x_6 = 18 - 3x_1.$$

და ტილობებისთვის შევამოწმოთ ფარდობები: $\frac{19}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{0}, \frac{18}{3}$. მათ შორის ყველაზე მცირეა $\frac{18}{3} = 6$. ამგვარად, საბაზისო ცვლადი, რომრელიც უნდა გადავიყვანოთ არასაბაზისო ცვლადების რიგში, იქნება x_6.

მაშასადამე, ახალი საბაზისო ცვლადებია: x_3, x_4, x_5, x_1, არასაბაზისო: x_2, x_2.

გამოვსახოთ საბაზისო ცვლადები არასაბაზისო ცვლადებით, გვექნება:

$$x_1 = 6 - \frac{x_6}{3},$$
$$x_5 = 15 - 3x_2,$$
$$x_4 = 13 - (2(6 - \frac{x_6}{3}) + x_2) = 1 + \frac{2x_6}{3} - x_2, \quad *$$
$$x_3 = 19 - (2(6 - \frac{x_6}{3}) + 3x_2) = 7 + \frac{2x_6}{3} - 3x_2.$$

აქედან გამომდინარე, ახალი საბაზისო ამონახსნი იქნება:

$$x_1 = 6, x_5 = 15, x_4 = 1, x_3 = 7, x_6 = 0, x_2 = 0,$$

მიზნის ფუნქცია კი მიიღებს სახეს: $z = -7(6 - \frac{x_6}{3}) - 5x_2 = -42 + \frac{7}{3}x_6 - 5x_2$.

ახალი საბაზისო ამონახსნიც არ იქნება ოპტიმალური, რადგან არასაბაზისო ცვლად x_2-თან კოეფიციენტი უარყოფითია.

ამიტომ, ახლაც უნდა გადაავიდეთ სხვა საბაზისო ამონახსნზე. ამისათვის არასაბაზისო ცვლადი x_2, რომლის წინაც მიზნის ფუნქციის ახალ სახეში უარყოფითი კოეფიციენტია, უნდა გადავიდეს საბაზისო ცვლადებში, ხოლო იმის გასარკვევად, თუ რომელი საბაზისო ცვლადი უნდა გადავიდეს არასაბაზისო ცვლადებში, * ტოლობების საფუძველზე, განვიხილოთ ტოლობები:

$$x_1 = 6 - 0x_2,$$
$$x_5 = 15 - 3x_2,$$
$$x_4 = 1 - x_2,$$
$$x_3 = 7 - 3x_2.$$

და შესაბამისი ფარდობები: $\frac{6}{0}, \frac{15}{3} = 5, \frac{1}{1} = 1, \frac{7}{3}$. მათ შორის ყველაზე მცირეა 1.

აქედან გამომდინარე, სიმპლექს-ალგორითმის თანახმად, არასაბაზისო ცვლადებში უნდა გადავიდეს x_4. ამგვარად, ახალი საბაზისო ცვლადებია: x_3, x_2, x_5, x_1, არასაბაზისო კი x_6, x_4.

გამოვსახოთ საბაზისო ცვლადები არასაბაზისო ცვლადები.
გვექნება:

$$x_1 = 6 - \frac{x_6}{3},$$
$$x_5 = 15 - 3x_2 = 15 - 3(1 + \frac{2x_6}{3} - x_4) = 12 - 2x_6 + 3x_4, \quad **$$
$$x_2 = 1 + \frac{2x_6}{3} - x_4,$$
$$x_3 = 7 + \frac{2x_6}{3} - 3x_2 = 7 + \frac{2}{3}x_6 - 3(1 + \frac{2x_6}{3} - x_4) = 4 - \frac{4}{3}x_6 + 3x_4.$$

შესაბამისი საბაზისო ამონახსნი იქნება: $x_1 = 6, x_5 = 12, x_2 = 1, x_3 = 4, x_6 = 0, x_4 = 0$.
მიზნის ფუნქციას ასეთ შემთხვევაში ექნება სახე:

$$z = -42 + \frac{7}{3}x_6 - 5(1 + \frac{2x_6}{3} - x_4) = -47 - x_6 + 5x_4.$$

ბოლოს მიღებული საბაზისო ამონახსნიც არ იქნება ოპტიმალური, რადგან x_6 არასაბაზისო ცვლადთან მიზნის ფუნქციაში უარყოფითი კოეფიციენტი მივიღეთ.

ვიპოვოთ კიდევ სხვა საბაზისო ამონახსნი, ამისათვის არასაბაზისო ცვლადი x_6 გადავიყვანოთ საბაზისო ცვლადებში, იმის გასარკვევად, თუ რომელი საბაზისო ცვლადი უნდა გადავიდეს არასაბაზისო ცვლადებში, ახლა ** ტოლობების საფუძველზე, განვიხილოთ ტოლობები:

$$x_1 = 6 - \frac{x_6}{3},$$

$$x_5 = 12 - 2x_6,$$

$$x_2 = 1 + \frac{2x_6}{3},$$

$$x_3 = 4 - \frac{4}{3}x_6.$$

და შესაბამისი ფარდობები: $\dfrac{6}{\frac{1}{3}} = 18, \dfrac{12}{2} = 6, \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{-\frac{4}{3}} = -3$. მათ შორის ყველაზე მცირეა 31.

აქედან გამომდინარე, არასაბაზისო ცვლადებში უნდა გადავიდეს საბაზისო ცვლადი x_3. გამოვსახოთ ახალი საბაზისო ცვლადები არასაბაზისო ცვლადებით:

$$x_6 = 3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4,$$

$$x_1 = 6 - 1 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_3,$$

$$x_5 = 6 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4,$$

$$x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_3.$$

აქედან გამომდინარე, საბაზისო ამონახსნი იქნება:

$$x_6 = 3, x_1 = 5, x_5 = 6, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 0,$$

ხოლო მიზნის ფუნქციას ექნება სახე:

$$z = -47 - x_6 + 5x_4 = -47 - 3 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{9}{4}x_4 + 5x_4 = -50 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4.$$

მიზნის ფუნქციიდან ჩანს, რომ უკანასკნელი საბაზისო ამონახსნი ოპტიმალურია, იგი მინიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს მიზნის ფუნქციას, ეს მინიმალური მნიშვნელობაა $z = -50$, რაც შეეხება ჩვენი წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამონახსნს, იგი შემდეგნაირია: $x_1 = 5, x_2 = 3, z = -50$.

სავარჯიშოები:

ამოხსენით შემდები წრფივი პროგრამირების ამოცანები:

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 7 \end{cases}$, $z = 2x_1 - 5x_2$ ____ min.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$, $z = 2x_1 - 3x_2$ ____ max.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - 4x_2 \ge 3 \end{cases}$, $z = -x_1 - 3x_2$ ____ max.

4. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 7 \end{cases}$, $z = -2x_1 + x_2$ ____ min.

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 7 \end{cases}$, $z = -4x_1 - 3x_2$ ____ max.

თავი XX

თამაშთა თეორიის ელემენტები

§26. თამაშთა თეორიის საგანითამაშები პოზიციური ფორმით

თამაშთა თეორია შექმნილია კონფლიქტური ტიპის მოვლენათა შესასწავლად. კონფლიქტური ტიპის მოვლენები ისეთი მოვლენებია, რომლებშიდაც მონაწილეობს რომდენიმე მხარე, რომელთა ინტერესები ერთმანეთს არ ემთხვევა. ასეთი მელენების სპექტრი ძალიან ფართოა, მას შეიძლება მიეაკუთნოთ როგორც აზარტული თამაშები, ასევე ომები, კონკურენცია ბაზარზე, სპორტული შეჯიბრებანი, პოლიტიკა და სხვა.

თამაშთა თეორია ერთი მიმართულებაა მათემატიკური დარგისა, რომელსაც მათემატიკური მოდელირება ეწოდება. მოვლენის მათემატიკური მოდელის შექმნა გულისხმობს ამ მოვლენის არსის აღწერას მათემატიკური ცნებების და მიმართებების საშუალებით. მათემატიკური მოდელი, ერთ მხრივ, საკმარისად სრულად, ადეკვატურად უნდა აღწერდეს მოვლენას, ამავე დროს იგი უნდა იყოს ზოგადი, გამოყენებადი მოვლენათა გარკვეული ფართო კლასის აღსაწერად.

კონფლიქტური ტიპის ყოველი მოვლენის მოდელირების დროს მათემატიკურ ცნებებში და მიმართებებში ასახული უნდა იყოს მოვლენის ყველა არსებითი ფაქტორი, მისი ძირითადი კომპონენტები ასეთებია:

1. კონფლიქტური მოვლენის მონაწილეები, რომლებსაც ***მოთამაშეები*** ეწოდებათ.
3. გადაწყვეტილებანი, რომელთა მიღებაც მოთამაშეებს შეუძლიათ: მოთამაშეთა სტრატეგიები.
3. მოთამაშეთა მიზნები, რომლებიც რაღაც სარგებლის მიღებას წარმოადგენენ.

თამაშის მათემატიკური აღწერა უშვებს მისი სამი ფორმის არსებობას, ესენია: თამაშები პოზიციური ფორმით, თამაშები ნორმალური ფორმით და მახასიათებელი ფუნქციებით წარმოდგენილი თამაშები.

ჩვენ ძირითადად შევისწავლით თამაშებს ნირმალური ფორმით, ასევე შევეხებით პოზიციურ თამაშებსაც.

ასეთი ტიპის თამაშებს მიაკუთვნებენ ეგრეთწოდებულ სალონურ თამაშებს: კამათლით თამაში, ჭადრაკის თამაში, ნარდის თამაში, კარტით თამაში და სხვა. ნებისმიერი სალონური თამაშის დროს თამაშის წესებით დადგენილია მიმდევრობა სრულად განსაზღვრული მოქმედებებისა, რომელთაგან თითოეულს ***სვლა*** ეწოდება. მოთამაშის მიერ გაკეთებული სვლა შეესაბამება ალტერნატივების, ანუ შესაძლებელი სვლების სიმრავლიდან ერთის ამორჩევას. კერძო ალტერნატივას, რომელიც მოთამაშის მიერ არის ამორჩეული, ***არჩევანს*** უწოდებენ. მოთამაშეების მიერ, თამაშის დამთავრებამდე ამორჩეულ სვლათა თანმიმდევრობას ***პარტია*** ეწოდება.

პოზიციური თამაშის დროს თამაში იწყება საწყისი მდგომარეობიდან, ანუ ***საწყისი პოზიციიდან*** და შედგება მოთამაშეთა მიერ თანმიმდევრობით გაკეთებული სვლებისაგან. ეს სვლები ზოგიერთი თამაშის დროს შეიძლება შემთხვევით ხასიათს ატარებდეს გარკვეული ალბათური განაწილებით, იმისაგან დამოკიდებულებით, თუ რა ინფორმაციას ფლობს მოთამაშე თამაშის მსვლელობაზე. მაგალითად, ჭადრაკის მოთამაშემ ყოველთვის იცის, თუ რა სვლები გაკეთდა თამაშის დაწყებიდან და რა მდგომარეობაა დაფაზე, აქედან გამომდინარე, იცის რა სვლას გააკეთებს; ნარდის მოთამაშემ იცის, თუ რა სვლები გაკეთდა თამაშის დაწყებიდან, იცის რა მდგომარეობაა დაფაზე, მაგრამ, თუ როგორი იქნება მისი შემდეგი სვლა, დამოკიდებულია შემთხვევაზე, პოკერის მოთამაშემ საზოგადოდ არ იცის, თუ რა სვლები გაკეთდა თამაშის დაწყებიდან.

ყოველი თამაში უნდა დამთავრდეს რაღაც შედეგით, რომლის დროსაც გარკვეული უნდა იყოს თითოეული მოთამაშის სარგებელი, რომელიც უნდა

გამოისახებოდეს რაოდენობრივად ანუ რიცხვით, რომელიც სხვადასხვა დროს შეიძლება იყოს ქულათა რიცხვი, თანხა ან სხვა.

პოზიციური თამაში მათემატიკურად შეიძლება წარმოვადგინოთ ისეთი ბმული გრაფით, რომელსაც ხეს უწოდებენ.

ამ გრაფში გამოვყოთ ერთი წვერო, რომელსაც შევუსაბამებთ თამაშის საწყის პოზიციას.

დანარჩენი წვეროები კი შევუსაბამოთ თამაშის შუალედურ და საბოლოო დამამთავრებელ პოზიციებს.

შუალედური პოზიციების სიმრავლიდან გამოვყოთ ქვესიმრავლე P_0 პოზიციებისა, რომლებშიც კეთდება შემთხვევითი სვლები.

თითოეულ მოთამაშეს შევუსაბამოთ შუალედური პოზიციების სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომელიც მოიცავს იმ პოზიციებს, რომლებიდანაც მოთამაშე ერთვება თამაშში.

ეს ქვესიმრავლე კიდევ დავყოთ უფრო მცირე ქვესიმრავლეებად, რომლებსაც ***ინფორმაციულ სიმრავლეებს*** უწოდებენ და რომლებშიც შედიან პოზიციები, რომლებსაც გააჩნიათ ერთი და იმავე რაოდენობისა და მოთამაშისთვის განურჩეველი ალტერნატივები და რომლებშიც არ შედის ერთი პარტიის ორი პოზიცია.

წიბოები, ანუ ხის შტოები, შევუსაბამოთ ალტერნატივებს, რომლებიდანაც მოთამაშე თითოეულ პოზიციაში აფიქსირებს არჩევანს.

P_0 ქვესიმრავლეზე ალტერნატივების ალბათური განაწილება წარმოვადგინოთ როგორც ფუნქცია ამ პოზიციებიდან გამომავალი შტოების სიმრავლიდან ერთეულოვან სეგმენტში.

რომელიმე საბოლოო პოზიციის საწყის პოზიციასთან შემაერთებელი შტოების მიმდევრობით წარმოვადგინოთ პარტია.

მოთამაშეთა სარგებლიანობა შეიძლება გამოვსახოთ ფუნქციებით, რომლებიც განსაზღვრულნი არიან საბოლოო პოზიციების სიმრავლეზე.

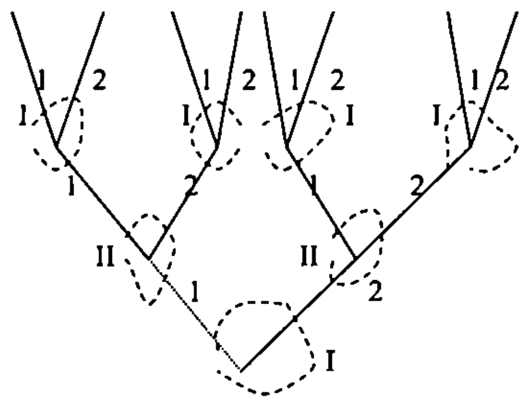
ამ მოსაზრებების საფუძველზე შეიძლება მოვიყვანოთ პოზიციური ფორმის თამაშის ფორმალური განსაზღვრება:

თამაში პოზიციური ფორმით წარმოადგენს

$$<< G(P,Q); p_0; N; P_j = \bigcup_{i=1}^{k_j} P_j^i J = \overline{1-N}; P_0; \varphi_{p_0^i} : Q_{p_0^i} \to [0,1], p_0^i \in P_0; P_f; h_j : P_f \to R, j = \overline{1-N} >>$$

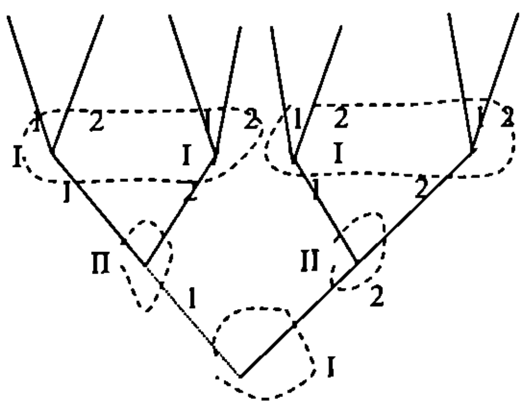
რვა კომპონენტისაგან შედგენილ სისტემას, სადაც პირველი კომპონენტი $G(P.Q)$ წარმოადგენს ხეს, რომლის წვეროების სიმრავლე P წარმოადგენენ პოზიციების სიმრაველეს, ხოლო წიბოების სიმრავლე Q ალტერნატივების სიმრაველეს; მეორე კომპონენტი p_0 წარმოადგენს საწყის პოზიციას; მესამე კომპონენტი N წარმოადგენს მოთამაშეთა რაოდენობას; მეოთხე კომპონენტი $P_j = \bigcup_{i=1}^{k_j} P_j^i, j = \overline{1-N}$ წარმოადგენს პოზიციების იმ ქვესიმრაველეთა ერთობლიობას, რომლებიდანაც თამაშში ერთვება შესაბამისი მოთამაშე და რომელიც წარმოადგენს ამ მოთამაშის ინფორმაციულ ქვესიმრაველეთა გაერთიანებას; მეხუთე კომპონენტი P_0 წარმოადგენს იმ პოზიციათა სიმრაველეს, რომლებშიდაც კეთდება შემთხვევითი სვლები; მეექვსე კომპონენტი $\varphi_{p_0^i} : Q_{p_0^i} \to [0,1], p_0^i \in P_0$ წარმოადგენს ალბათურ განაწილებებს თითოეული $p_0^i \in P_0$ პოზიციიდან გამომავალი ალტერნატივების $Q_{p_0^i}$ სიმრავლეებში; მეშვიდე კომპონენტი P_f წარმოადგენს თამაშის საბოლოო პოზიციების სიმრაველეს, მერვე კომპონენტი $h_j : P_f \to R, j = \overline{1-N}$ წარმოადგენს მოთამაშეთა სარგებლიანობის ფუნქციების ერთობლიობას.

ამ განსაზღვრებაში მნიშვნელოვანია ინფორმაციული სიმრავლის ცნება, ეს ცნება ზემოთ იყო განსაზღვრული, მაგრამ კარგი იქნება, თუ მას კიდევ დავაზუსტებთ სხვა კუთხით და ჩავთვლით, რომ ინფორმაციული სიმრავლე პოზიციათა ის სიმრავლეა, რომლის შესახებაც მოთამაშემ იცის, რომ მასში იმყოფება, მაგრამ არ იცის, რომელ პოზიციაშია.
ინფორმაციული სიმრავლის არსში უფრო კარგად გასარკვევად განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:
მაგალითი: განვიხილოთ თამაში: პირველ სვლას აკეთებს I მოთამაშე და ირჩევს რიცხვს {1,2} სიმრავლიდან, მეორე სვლას აკეთებს II მოთამაშე და ირჩევს რიცხვს {1,2} სიმრავლიდან, მესამე სვლას I სვლას აკეთებს I მოთამაშე და ირჩევს რიცხვს {1,2} სიმრავლიდან, ამის შემდეგ თამაში მთავრდება და იკრიბება სამივე ეტაპზე არჩეული რიცხვები, თუ ჯამი ლუწია, იგებს პირველი მოთამაშე და მეორე მოთამაშე მას უხდის თანხას, რომელიც ტოლია ამ ლუწი რიცხვის, თუ ჯამი კენტია, ყველაფერი პირიქითაა.
იმის მიხედვით, თამაშის წესებიდან გამომდინარე როგორაა სვლების შესახებ ინფორმირებული თითოეული მოთამაშე, გვექნება:
1. თითოეულმა მოთამაშემ იცის ყველა წინა სვლა. ნახ.№1.



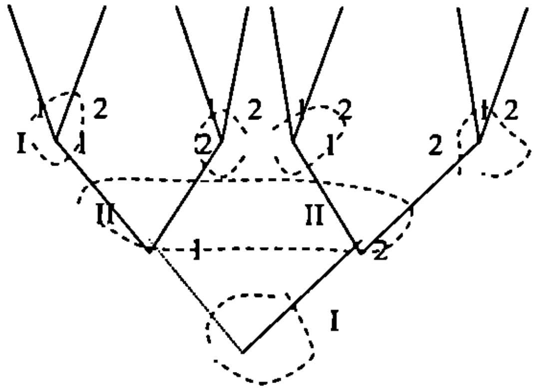
ნახ.№1.

2. II მოთამაშემ იცის პირველი სვლა, ხოლო I მოთამაშემ არ იცის მეორე სვლა. ნახ. №2.



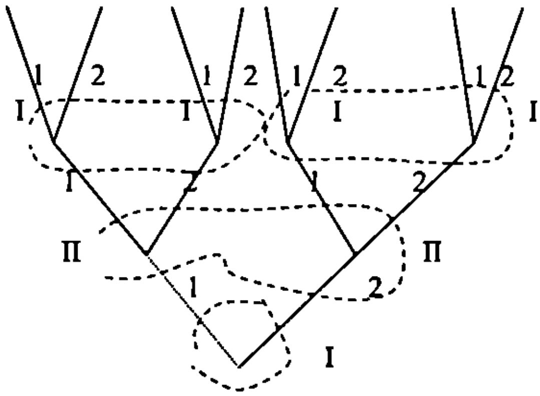
ნახ.№2.

3. II მოთამაშემ არ იცის პირველი სვლა, I მოთამაშემ იცის მეორე სვლა. ნახ.№3.



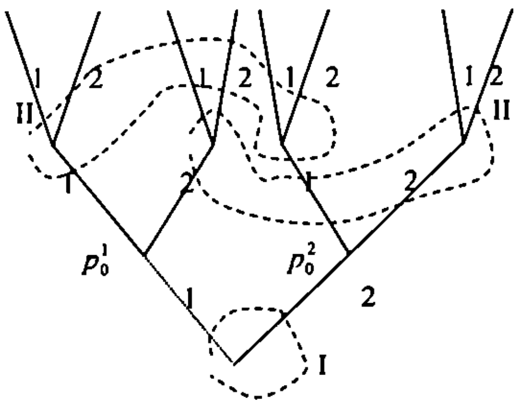
ნახ. №3

4. II მოთამაშემ არ იცის პირველი სვლა, ხოლო I მოთამაშემ არ იცის მეორე სვლა. ნახ.№4.



ნახ.№4.

5. ვთქვათ პირველი სვლის შემდეგ კეთდება მეორე სვლა, რომელიც შემთხვევითია: რიცხვი 1 აირჩევა $\frac{1}{4}$-ის ალბათობით, რიცხვი 2 კი- $\frac{3}{4}$-ის ალბათობით; მესამე სვლას აკეთებს II მოთამაშე, რომელმაც იცის მეორე სვლის შედეგი, მაგრამ არ იცის პირველი სვლა. ნახ.5.



ნახ.№5.

როგორც მაგალითიდან ჩანს, მეტად მოხერხებულია პოზიციური თამაშის წარმოდგენა ხე გრაფის საშუალებით, რომელიც გვიჩვენებს თამაშის განვითარების განშტოებებს სვლათა თანმიმდევრული შესრულების დროს.

ვთქვათ, თამაშის ყოველ მონაწილეს მოვთხოვეთ, რომ მან წინასწარ განსაზღვროს, თუ რას გააკეთებს იგი ნებისმიერ იმ შემთხვევაში, რომელსაც ადგილი შეიძლება ჰქონდეს პარტიის მსვლელობისას. მოთამაშეთა მიერ მიწოდებულ ასეთი ინფორმაცის საფუძველზე, მსაჯს შეუძლია ჩაატაროს თამაშის პარტია მოთამაშეთა მონაწილეობის გარეშე, ამასთან, განსაზღვროს თითეული მოთამაშის სარგებელიც. ყოველი შესაძლო სიტუაციისათვის მოთამაშის მიერ ასეთნაირად წინასწარ განსაზღვრული სვლების ერთობლიობას ამ მოთამაშის *სუფთა სტრატეგია ეწოდება.*

ბევრი თამაშისათვის სუფთა სტრატეგიების შედგენა გადაულახავ სიძნელეს უნდა წარმოადგენდეს, მაგრამ ზოგიერთ მარტივ შემთხვევაში ამის გაკეთება შესაძლებელია. მაგალითად, თუ ყოველ ალტერნატივას, რომელიც გამოდის მოთამაშის ინფორმაციული სიმრავლის რომელიმე პოზიციიდან, გადავნომრავთ $1,2,3,\dots,r$ ნატურალური რიცხვებით, მაშინ ამ მოთამაშის სუფთა სტრატეგია იქნება სვლათა მიმდევრობა, რომელიც განისაზღვრება თითოეულ იმ ინფორმაციულ სიმრაელეში, რომელშიც მოცემული მოთამაშე აღმოჩნდება თამაშის დროს პირველი ნომრის ალტერნატივის ამორჩევით. ამავე მოთამაშის მეორე სუფთა სტრატეგია იქნება, თუ იგი ყოველი ინფორმაციულ სიმრავლეში, რომელშიდაც იგი აღმოჩნდება, ამოირჩევს მაქსიმალური ნომრის ალტერნატივას.

განხილულ მაგალითში თუ j-ური მოთამაშის ინფორმაციული სიმრავლეებია $P_j^i, i=\overline{1-k_j}$, მაშინ სუფთა სტრატეგია იქნება მთელ რიცხეთა მიმდევრობა $s_j^l=(y_j^{l1},y_j^{l2},\dots,y_j^{lk_j})$. იმ შემთხვევაში, როდესაც ხდება პირველი ნომრის ალტერნატივების ამორჩევა, სუფთა სტრატეგია იქნება $(1,1,1,\dots,1)$ მიმდევრობა.

რადგან თითოეული ინფორმაციული სიმრაელიდან გამოდის სასრული რაოდენობის ალტერნატივა, ამიტომ ყოველი $y_j^{li}, i=1,2,\dots,k_j$ ღებულობს მნიშვნელობას მთელ რიცხვთა სასრული სიმრაელიდან. აქედან გამომდინარე, მოთამაშის სუფთა სტრატეგიათა რიცხვი იქნება სასრული. აღვნიშნოთ j-ური მოთამაშის სუფთა სტრატეგიათა სიმრავლე $S_j=\{s_j^1,s_j^2,\dots,s_j^{t_j}\}$, სადაც t_j რაიმე სასრული რიცხვია.

შემდგომ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ მოთამაშეთა სუფთა სტრატეგიათა სიმრავლეები გადანომრილი სიმრავლეებია.

ვთქვათ, $S_1,S_2,\dots,S_N$ ყველა მოთამაშის სუფთა სტრატეგიების სიმრავლეებია. თუ დაეუშვებთ, რომ თამაშში არა გვაქვს შემთხვევითი სვლები და თითოეული მოთამაშე სტრატეგიათა შესაბამისი სიმრავლეებიდან ამოიღებს თითო სუფთა სტრატეგიას, მოხდება რაიმე $\alpha=(s_1^{l_1},s_2^{l_2},\dots,s_N^{l_N})$ პარტიის რეალიზაცია. აქედან გამომდინარე j-ური მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქცია, განსაზღვრული თამაშის საბოლოო პოზიციათა სიმრავლეზე, შეიძლება შევცვალოთ სხვა $\phi_j:S_1\times S_2\times\dots\times S_N\to R$ ფუნქციით, რომელსაც, აგრეთვე შეგვიძლია დავარქვათ j-ური მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქცია. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია მოთამაშეთა სუფთა სტრატეგიების სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლზე.

თუ თამაშში შემთხვევითი სვლებიცაა, მაშინ სტრატეგიათა ამორჩევა ცალსახად ვერ განსაზღვრავს თამაშს, უფრო ზუსტად, მოთამაშეთა სარგებლიანობის ფუნქციებს. ამის მიზეზი ისაა, რომ ასეთ შემთხვევაში პარტია $\alpha\neq(s_1^{l_1},s_2^{l_2},\dots,s_N^{l_N})$. სარგებლიანობის ფუნქციები $h_j:P_f\to R$, იმის გამო, რომ $G(P,Q)$ გრაფი ხეა და

თითოეულ საბოლოო პოზიციას ურთიერთცალსახად შეესაბამება პარტია, შეიძლება ჩავთვალოთ პარტიათა$\{\alpha\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულად.
თუ ჩავთვლით, რომ თამაში შემთხვევითი სვლების არსებობის გამო, α პარტიის რეალიზაციის ალბათობაა $p(\alpha)$, მაშინ ცალსახად შეგვიძლია განვსაზღვროთ სარგებლიანობის ფუნქციების მნიშვნელობანი მოთამაშეთა მიერ ამორჩეულ სტრატეგიათა $(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}, \dots, s_N^{l_N})$ პაკეტისათვის შემდეგნაირად:

$$\phi_j(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}, \dots, s_N^{l_N}) = \sum_{\alpha} p(\alpha) h_j(\alpha).$$

უნდა აღინიშნოს, რომ სტრატეგიის ცნების გამოყენებით, თამაში პოზიციური ფორმით მიყვანილ იქნა ფორმამდე, რომლის დროსაც თითოეულ მოთამაშეს აქვს მხოლოდ ერთი სვლა, რაც წარმოადგენს რომელიმე ერთი სუფთა სტრატეგიის ამორჩევას ამ მოთამაშის სუფთა სტრატეგიების სიმრავლიდან; ეს ამორჩევა ხდება იმისაგან დამოუკიდებლად, თუ რა სტრატეგიები აირჩიეს სხვა მოთამაშეებმა; მოთამაშეთა სარგებლიანობა განისაზღვრება

$$\phi_j : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N \to R$$

ფუნქციებით. თამაშს ასეთი ფორმით, ***თამაში ნორმალური ფორმით*** ეწოდება.
უნდა აღინიშნოს, რომ თამაშის მიყვანა ასეთ მარტივ ფორმამდე ურთულესი ამოცანაა, ეს მხოლოდ მარტივ შემთხვევებში შეიძლება მოხერხდეს. ამ ფორმის პრაქტიკული გამოყენება კონკრეტული თამაშის შესასწავლად თითქმის შეუძლებელია, მაგრამ ყოველი შესაძლებელი თამაშის ნორმალური ფორმის სიმარტივე საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ ყველა ნორმალური ფორმით თამაშის გამოკვლევა, კლასიფიკაცია და გაანალიზება.
შემდეგ პარაგრაფში განვიხილოთ თამაშები ნორმალური ფორმით.

§27. თამაშები ნორმალური ფორმით

წინა პარაგრაფიდან გამომდინარეობს, რომ j-ური მოთამაშის სუფთა სტრატეგია არის ასახვა $s_j^q : \{P_j^i\} \to \bigcup_i Q_j^i$, რომელიც ამ მოთამაშის ყოველ P_j^i ინფორმაციული სიმრავლეს შეუსაბამებს ამ ინფორმაციულ სიმრავლეში შემავალი პოზიციებიდან გამომავალ რომელიღაც $s_j^i(P_j^i) = q_j^i \in Q_j^i$ ალტერნატივას.
N მოთამაშისათვის ***თამაში ნორმალური ფორმით*** არის სისტემა

$$<< S_1, S_2, \dots, S_N, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N >>,$$

რომელიც შედგება მოთამაშეთა სუფთა სტრატეგიების S_j სიმრავლეებისაგან და მოთამაშეთა სარგებლიანობის ϕ_j ფუნქციებისაგან.
როგორც წინა პარაგრაფიდან ვიცით თითოეული მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქციაა: $\phi_j : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N \to R$.
შემოვიტანოთ ცნება, რომელიც არ გვქონდა პოზიციური ფორმის თამაშის შემთხვევაში: $(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}, \dots, s_N^{l_N}) \in S_1 \times S_2 \times \dots S_N$ ელემენტს ნორმალური ფორმის თამაშში ***სიტუაცია*** ეწოდება.
სიმარტივისათვის ამ სახელმძღვანელოში განვიხილოთ ორი მოთამაშის თამაშები ნორმალური ფორმით, ანუ შემთხვევა, როდესაც $N = 2$:

$$<< S_1, S_2, \phi_1, \phi_2 >>.$$

ორი მოთამაშის თამაში ნორმალური ფორმით, როდესაც მოთამაშეთა სტრატეგიების რიცხვი სასრულია, შეიძლება წარმოვადგინოთ ორმაგი მატრიცების საშუალებით. ამისათვის საჭიროა მოთამაშეთა სტრატეგიების ყოველ წყვილს $(s_1^{l_1}, s_2^{l_2})$ შევუსაბამოთ სარგებლიანობის ფუნქციების

მნიშვნელობათა წყვილი: $(\phi_1(s_1^{l_1},s_2^{l_2}),\phi_2(s_1^{l_1},s_2^{l_2}))$ და ავაგოთ ორმაგი მატრიცი, რომლის l_1 ნომრის სტრიქონისა და l_2 ნომრის სვეტის გადაკვეთაზე მოთავსებული იქნება $(\phi_1(s_1^{l_1}),\phi_2(s_1^{l_2}))$ წყვილი. თუ $l_1=\overline{1-r}, l_2=\overline{1-s}$, მაშინ ეს ორმაგი მატრიცი იქნება $r\times s$ რიგის.
თამაშებს ნორმალური ფორმით, რომლებიც ორმაგი მარტიცით შეიძლება წარმოვადგინოთ, ***ბიმატრიცული თამაშები*** ეწოდება.
თუ ბიმატრიცული თამაშები ***ანტაგონისტურია*** ანუ ისეთია, რომ $\phi_1(s_1^{l_1},s_2^{l_2})=-\phi_2(s_1^{l_1},s_2^{l_2})$ ნებისმიერი $(s_1^{l_1},s_2^{l_2})$ სიტუაციისთვის, მაშინ თამაში შეიძლება წარმოვადგინოთ ჩვეულებრივი მატრიცით, რომლის l_1 ნომრის სტრიქონისა და l_2 ნომრის სვეტის გადაკვეთაზე იქნება $\phi_1(s_1^{l_1},s_2^{l_2})$ რიცხვი ან $\phi_2(s_1^{l_1},s_2^{l_2})$ რიცხვი. პირველ შემთხვევაში გვექნება პირველი მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქციის წარმომდგენი მატრიცი, მეორე შემთხვევაში- მეორე მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქციის წარმომდგენი მატრიცი.
როგორც ვხედავთ, ამ დროს პირველი მოთამაშის შესაბამისი მატრიცი მეორე მოთამაშის შესაბამისი მატრიცის მოპირდაპირეა.
თამაშთა თეორიას, ცხადია, ის პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს, რომ ყოველ იმ კონკრეტულ კონფლიქტურ სიტუაციაში, რომლის მათემატიკური მოდელირებაც ხდება თამაშთა თეორიით, მთამაშემ აირჩიოს ის სტრატეგია, რომელიც არის მისთვის ოპტიმალური, ხელსაყრელი იმის გათვალისწინებით, რომ მეორე მოთამაშესაც იგივე სურვილი ამოძრავებს. ასეთი ხელსაყრელი სტრატეგიის მოძებნას და არჩევას თამაშის ამოხსნა შეიძლება დაერქვას, მაგრამ არ არსებობს ცალსახად განსაზღვრული თამაშის ამოხსნის ან თამაშის ამოხსნადობის ცნებების განმსაზღვრელი ცალსახა კრიტერიუმები. სხვადასხვა კონკრეტული შემთხვევის დროს აღნიშნული ცნებების განსაზღვრა ხდება სხვადასხვა კონცეფციების საფუძველზე, ზოგ შემთხვევაში კი საკითხი სიცხადით საერთოდ არ ხასიათდება. გამონაკლისს წარმოადგენს ანტაგონისტური თამაშები, რომლებისთვისაც ეს საკითხები ყველაზე უკეთესადაა შესწავლილი.
ჩამოვაყალიბოთ ორი მოთამაშის ნორმალური ფორმის თამაშის ამოხსნის და ამოხსნადობის კონცეფციები.
ოპტიმისტური ამონახსნი. ესაა საუკეთესო სიტუაცია ორივე მოთამაშისათვის, თუ ასეთი არსებობს. თითოეული მოთამაშე ეძებს თავისი სარგებლიანობის ფუნქციის მაქსიმუმს:

$$V_1=\max_{(s_1^{l},s_2^{l_2})} H_1(s_1^{l_1},s_2^{l_2}),\ V_2=\max_{(s_1^{l},s_2^{l_2})} H_2(s_1^{l_1},s_2^{l_2}).$$

თუ ორივე მაქსიმუმი მიიღწევა ერთსა და იმავე (s_1^*,s_2^*) სიტუაციაზე, მაშინ თამაშიის ამონახსნი იქნება(s_1^*,s_2^*) სიტუაცია და s_1^* და s_2^* იქნებიან ოპტიმალური სტრატეგიები პირველი და მეორე მოთამაშისათვის, შესაბამისად.
ოპტიმისტური ამონახსნი, ცხადია, არსებობს ისეთი თამაშებისთვის, სადაც მოთამაშეებს შორის კონფლიქტი არაა. ანტაგონისტური თამაშებისათვის ოპტიმისტური ამონახსნი არ არსებობს.
პესიმისტური ანუ მაქსიმინური ამონახსნი. მოთამაშე ორიენტაციას იღებს ყველაზე უარეს შედეგზე, ანუ სარგებლიანობის ფუნქციის გარანტირებულ მნიშვნელობაზე და ისე ირჩევს სტრატეგიას, რომ ეს გარანტირებული მნიშვნელობა იყოს მაქსიმალური. სიტუაცია $(s_1^*,s_2^*)\in S_1\times S_2$, რომლის კომპონენტებზეც მიიღწევიან სარგებლიანობის ფუნქციათა ეს მაქსიმინური მნიშვნელობანი:

$$V_1 = \max_{s_1^{i_1}} \min_{s_2^{i_2}} \phi_1(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}), \ \ V_2 = \max_{s_2^{i_2}} \min_{s_1^{i_1}} \phi_2(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}),$$

(s_1^*, s_2^*) სიტუაციასთან ერთად, წარმოადგენს თამაშის მაქსიმინურ ამონახსნს. ადვილი მისახვედრია, რომ ყოველი ანტაგონისტური ორი მოთამაშის თამაშს გააჩნია მაქსიმინური ამონახსნი.

მაქსიმინური მიდგომა უნდა ამართლებდეს ანტაგონისტური თამაშების შემთხვევაში, მაგრამ ყოველთვის არის თუ არა ამ დროს მიღებული ამონახსნი საუკეთესო? ამ საკითხს გავარკვევთ ქვემოთ.

წონასწორული ამონახსნი. ეს ამონახსნი ისეთი $(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ სიტუაციაა, რომლიდანაც გადახრა აუარესებს მოთამაშეთა სარგებლიანობის ფუნქციების მნიშვნელობებს, ანუ $\phi_1(s_1^{i_1}, s_2^*) \le \phi_1(s_1^*, s_2^*)$ ყოველი $s_1^{i_1} \in S_1$ სტრატეგიისათვის და $\phi_2(s_1^*, s_2^{i_2}) \le \phi_2(s_1^*, s_2^*)$ ყოველი $s_2^{i_2} \in S_2$ სტრატეგიისათვის.

(s_1^*, s_2^*) წონასწორულ ამონახსნს ***წონასწორულ სიტუაციასაც*** უწოდებენ.

დასაშვები ანუ პარეტოს ამონახსნი. ეს ისეთი $(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ სიტუაციაა, რომლისთვისაც არ არსებობს ისეთი $(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \in S_1 \times S_2$ სიტუაცია, რომ ერთდროულად ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს: $\phi_1(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \ge \phi_1(s_1^*, s_2^*)$, $\phi_2(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \ge \phi_2(s_1^*, s_2^*)$.

როგორც ვხედავთ, პარეტოს ამონახსნი ისეთი ამონახსნია, რომლის დროსაც მოთამაშეს არ შეუძლია გაზარდოს თავისი სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობა ისე, რომ ამან არ გამოიწვიოს მეორე მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქციის შემცირება.

§28. ანტაგონისტური თამაშები

ამ პარაგრაფში უფრო დაწვრილებით შევეხოთ ანტაგონისტურ თამაშებს ორი მოთამაშის მონაწილეობით. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ორი მოთამაშის თამაშს ეწოდება ანტაგონისტური, თუ $\phi_1(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) = -\phi_2(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})$ ნებისმიერი $(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \in S_1 \times S_2$ სიტუაციისთვის.

ასეთ თამაშებს ***ნულჯამიან თამაშებსაც*** უწოდებენ ვინაიდან

$$\phi_1(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) + \phi_2(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) = 0$$

ნებისმიერი $(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \in S_1 \times S_2$ სიტუაციისათვის.

რადგან ადგილი აქვს $\phi_1(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) = -\phi_2(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})$ ტოლობას, თუ პირველი მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქციას აღვნიშნავთ ϕ სიმბოლოთი, მეორე მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქცია იქნება $-\phi$. აქედან გამომდინარე, ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაში ნორმალური ფორმით ჩაიწერება $<< S_1, S_2, \phi >>$ სამეულის სახით.

ვნახოთ, თუ რა სახე აქვს წონასწორული ამონახსნის განსაზღვრებას ანტაგონისტური თამაშისათვის. ვთქვათ, $(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ ამტაგონისტური თამაშის წონასწორული ამონახსნი ანუ წონასწორული სიტუაციაა. ადგილი ექნება უტოლობებს:

$$\phi(s_1^{i_1}, s_2^*) \le \phi(s_1^*, s_2^*), \quad -\phi(s_1^*, s_2^{i_2}) \le -\phi(s_1^*, s_2^*).$$

თუ მეორე უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ -1-ზე, მივიღებთ:

$$\phi(s_1^*, s_2^*) \le \phi(s_1^*, s_2^{i_2}).$$

ამ უტოლობის პირველ უტოლობასთან გაერთიანებით გვექნება:

$$\phi(s_1^{i_1}, s_2^*) \le \phi(s_1^*, s_2^*) \le \phi(s_1^*, s_2^{i_2}).$$

ϕ ფუნქცია ორი ცვლადის ფუნქციაა, ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის განსაზღვრის არის ისეთ წერტილს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს უკანასკნელი ორმაგი უტოლობის მსგავს უტოლობას, ***უნაგირა წერტილს*** უწოდებენ, ამ წერტილში ფუნქცია პირველი ცვლადის მიმართ აღწევს მაქსიმუმს, მეორე ცვლადის მიმართ კი- მინიმუმს.

ახლა განვიხილოთ მაქსიმინური ამონახსნის ცნება ანტაგონისტური თამაშისთვის. პირველი და მეორე მოთამაშის გარანტირებული მაქსიმალური მოგებები შესაბამისად იქნება:

$$V_1 = \max_{s_1^{i_1}} \min_{s_2^{i_2}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}), \quad V_2 = \max_{s_2^{i_2}} \min_{s_1^{i_1}} (-\phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})).$$

როგორც ვიცით, $\min(-f(x)) = -\max f(x)$ და $\max(-f(x)) = -\min f(x)$. აქედან გამომდინარე,

$$V_2 = \max_{s_2^{i_2}} \min_{s_1^{i_1}} (-\phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})) = \max_{s_2^{i_2}} (-\max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})) = -\min_{s_2^{i_2}} \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}).$$

მაშასადამე, მეორე მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქციის გარანტირებული მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება $V_2 = -\min_{s_2^{i_2}} \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})$.

განვიხილოთ სიდიდე $-V_2 = \min_{s_2^{i_2}} \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})$, იგი გვიჩვენებს თუ რა შეიძლება იყოს ის სიდიდე, რაზე მეტსაც მეორე მოთამაშე აწ წააგებს, რა თქმა უნდა, თუ ამის სურვილი არ ექნება.

თეორემა 28.1. ნებისმიერი ნებისმიერი $(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \in S_1 \times S_2$ სიტუაციისთვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\max_{s_1^{i_1}} \min_{s_2^{i_2}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \le \min_{s_2^{i_2}} \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}).$$

დამტკიცება: ნებისმიერი $s_1^{i_1} \in S_1$ და $s_2^{i_2} \in S_2$ სტრატეგიებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\min_{s_2^{i_2}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \le \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}).$$

აქედან გამომდინარე, რადგან უტოლობას ადგილი აქვს ყოველი $s_1^{i_1} \in S_1$ სტრატეგიისათვის, ადგილი ექნება უტოლობასაც:

$$\max_{s_1^{i_1}} \min_{s_2^{i_2}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \le \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}).$$

უკანასკნელი უტოლობა სრულდება ნებისმიერი $s_2^{i_2} \in S_2$ სტრატეგიისათვის ამიტომ ადგილი ექნება უტოლობასაც:

$$\max_{s_1^{i_1}} \min_{s_2^{i_2}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) \le \min_{s_2^{i_2}} \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}).$$

თეორემა დამტკიცდა.

$V_* = \max_{s_1^{i_1}} \min_{s_2^{i_2}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})$ სიდიდეს უწოდებენ $<< S_1, S_2, \phi >>$ ანტაგონისტური ***თამაშის ქვედა მნიშვნელობას***, ანუ ***ქვედა ფასს***, ხოლო $V^* = \min_{s_2^{i_2}} \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})$ სიდიდეს ამავე ***თამაშის ზედა მნიშვნელობას*** ანუ ***ზედა ფასს***. თუ $V_* = V^* = V$ მაშინ ამ სიდიდეს უწოდებენ თამაშის მნიშვნელობას, ანუ თამაშის ფასს.

თეორემა 28.2. იმისათვის, რომ $<< S_1, S_2, \phi >>$ ანტაგონისტური თამაშისთვის ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $V_* = V^*$, აუცილებელი და საკმარისია ϕ ფუნქციას გააჩნდეს უნაგირა წერტილი.

დამტკიცება: ჯერ დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ϕ ფუნქციას გააჩნია უნაგირა წერტილი $(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$, მაშინ ნებისმიერი

$s_1^{l_1} \in S_1$ და $s_2^{l_2} \in S_2$ სტრატეგიებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2}).$$

აქედან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$\max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{*}) \le \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2}).$$

ამიტომ ადგილი ექნება ამ უტოლობასაც:

$$\phi(s_1^{*}, s_2^{*}) \le \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2}) \le \max_{s_1^{l_1}} \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2})$$

და

$$\min_{s_2^{l_2}} \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}) \le \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le \varphi(s_1^{*}, s_2^{*})$$

ამ უტოლობებიდან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$\min_{s_2^{l_2}} \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}) \le \max_{s_1^{l_1}} \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}),$$

რომელიც წინა თეორემაში დამტკიცებულ უტოლობასთან ერთად ამტკიცებს თეორემის პირობის საკმარისობას.

თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, ადგილი აქვს $V_* = V^*$ ტოლობას, $s_1^{*} \in S_1$ ისეთი სტრატეგიაა, რომ $V_* = \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2})$; $s_2^{*} \in S_2$ ისეთი სტრატეგიაა, რომ $V^* = \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{*})$. ამ სტრატეგიებისათვის:

$$V^* = \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \ge \phi(s_1^{*}, s_2^{*}) \ge \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2}) = V_*.$$

რადგან $V_* = V^*$, ამიტომ:

$$\max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) = \phi(s_1^{*}, s_2^{*}) = \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2}).$$

აქედან კი გამომდინარეობს:

$$\phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2}),$$

რაც ამტკიცებს თეორემის პირობის აუცილებლობას.

თეორემა 28.3. თუ ანტაგონისტურ $<< S_1, S_2, \phi >>$ თამაშში არსებობენ ისეთი სტრატეგიები $s_1^{*} \in S_1$ და $s_2^{*} \in S_2$ და ნამდვილი რიცხვი V, რომლებისათვის ადგილი ექნება უტოლობებს:

$$\phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le V \le \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2})$$

ნებისმიერი $s_1^{l_1} \in S_1$ და $s_2^{l_2} \in S_2$ სტრატეგიებისათვის, მაშინ $(s_1^{*}, s_2^{*}) \in S_1 \times S_2$ წონასწორული სიტუაციაა და ადგილი აქვს ტოლობას: $V = \phi(s_1^{*}, s_2^{*})$.

დამტკიცება: თუ ნებისმიერი $s_1^{l_1} \in S_1$ და $s_2^{l_2} \in S_2$ სტრატეგიებისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$\phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le V \le \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2}),$$

მაშინ ადგილი ექნება უტოლობებსაც:

$$\max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le V \le \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2})$$

და

$$\min_{s_2^{l_2}} \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}) \le V \le \max_{s_1^{l_1}} \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2})$$

უტოლობებსაც.

მაგრამ, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები,

$$\max_{s_1^{l_1}} \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}) \le \min_{s_2^{l_2}} \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}).$$

აქედან გამომდინარე:

$$\min_{s_2^{l_2}} \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}) = V = \max_{s_1^{l_1}} \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}).$$

წინა თეორემის ძალით, ასეთ შემთხვევაში ϕ ფუნქციას გააჩნია უნაგირა წერტილი $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$, რომლისთვისაც ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობებს:

$$\phi(s_1^{l_1}, \bar{s}_2) \le \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \le \phi(\bar{s}_1, s_2^{l_2}).$$

როგორც წინა თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცებისას მივიღეთ, აქაც გვექნება:

$$\max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, \bar{s}_2) = \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \min_{s_2^{l_2}} \phi(\bar{s}_2, s_2^{l_2}).$$

აქედან

$$\min_{s_2^{l_2}} \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}) \le \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \le \max_{s_1^{l_1}} \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}),$$

მაგრამ

$$\min_{s_2^{l_2}} \max_{s_1^{l_1}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2}) = V = \max_{s_1^{l_1}} \min_{s_2^{l_2}} \phi(s_1^{l_1}, s_2^{l_2})$$

და აქედან გამომდინარე, $V = \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$.

თეორემის პირობიდან გამომდინარე, ნებისმიერი $s_1^{l_1} \in S_1$ და $s_2^{l_2} \in S_2$ სტრატეგიებისათვის

$$\phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2}),$$

ამიტომ:

$$\phi(\bar{s}_1, s_2^{*}) \le \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \le \phi(s_1^{*}, \bar{s}_2).$$

$(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ უნაგირა წერტილია, ამიტომ:

$$\phi(s_1^{l_1}, \bar{s}_2) \le \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \le \phi(\bar{s}_1, s_2^{l_2})$$

უტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი $s_1^{l_1} \in S_1$ და $s_2^{l_2} \in S_2$ სტრატეგიებისთვის, ამიტომ:

$$\phi(s_1^{*}, \bar{s}_2) \le \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \le \phi(\bar{s}_1, s_2^{*}).$$

მაშასადამე:

$$\phi(s_1^{*}, \bar{s}_2) = \phi(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \phi(\bar{s}_1, s_2^{*}) = V$$

და ამიტომ:

$$\phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, \bar{s}_2) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2})$$

ნებისმიერი $s_1^{l_1} \in S_1$ და $s_2^{l_2} \in S_2$ სტრატეგიებისთვის. აქედან გამომდინარეობს, რომ:

$$\phi(s_1^{*}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, \bar{s}_2) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{*})$$

და ამგვარად, $\phi(s_1^{*}, s_2^{*}) = \phi(s_1^{*}, \bar{s}_2) = V$. საბოლოოდ გვექნება:

$$\phi(s_1^{l_1}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{*}) \le \phi(s_1^{*}, s_2^{l_2})$$

თეორემა დამტკიცდა.

$<< S_1, S_2, \phi_1, \phi_2 >>$ თამაშში ნორმალური ფორმით $(s_1^{*}, s_2^{*}) \in S_1 \times S_2$ და $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ წონასწორულ სიტუაციებს უწოდებენ ***ეკვივალენტურს***, თუ $\phi_1(s_1^{*}, s_2^{*}) = \phi_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ და $\phi_2(s_1^{*}, s_2^{*}) = \phi_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$.

$<< S_1, S_2, \phi_1, \phi_2 >>$ თამაშში ნორმალური ფორმით $(s_1^{*}, s_2^{*}) \in S_1 \times S_2$ და $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ წონასწორულ სიტუაციებს უწოდებენ ***ურთიერთჩანაცვლებადს***, თუ $(s_1^{*}, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ და $(\bar{s}_1, s_2^{*}) \in S_1 \times S_2$ სიტუაციებიც ასევე წონასწორული სიტუაციებია.

თეორემა 28.4. $<< S_1, S_2, \phi >>$ ანტაგონისტურ თამაშში წონასწორობის სიტუაციები ეკვივალენტური და ურთიერთჩანაცვლებადია.

დამტკიცება: თუ $(s_1^*,s_2^*)\in S_1\times S_2$ წონასწორული სიტუაციაა, მაშინ

$$\phi(s_1^{l_1},s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2^{l_2})$$

ნებისმიერი $s_1^{l_1}\in S_1$ და $s_2^{l_2}\in S_2$ სტრატეგიებისთვის. აქედან გამომდინარე,

$$\phi(\bar{s}_1,s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2).$$

ანალოგიურად:

$$\phi(s_1^*,\bar{s}_2)\le\phi(\bar{s}_1,\bar{s}_2)\le\phi(\bar{s}_1,s_2^*).$$

ამ უტოლობებიდან კი გამომდინარეობს:

$$\phi(s_1^*,\bar{s}_2)=\phi(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=\phi(\bar{s}_1,s_2^*)=\phi(s_1^*,s_2^*),$$

რაც ნიშნავს $(s_1^*,s_2^*)\in S_1\times S_2$ და $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)\in S_1\times S_2$ წონასწორული სიტუაციების ეკვივალენტურობას.

რადგან

$$\phi(s_1^*,\bar{s}_2)=\phi(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=\phi(\bar{s}_1,s_2^*)=\phi(s_1^*,s_2^*).$$

ამიტომ გვექნება:

$$\phi(s_1^{l_1},\bar{s}_2)\le\phi(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=\phi(\bar{s}_1,s_2^*)=\phi(s_1^*,s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2^{l_2}).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $(\bar{s}_1,s_2^*)\in S_1\times S_2$ წონასწორული სიტუაციაა.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $(\bar{s}_1,s_2^*)\in S_1\times S_2$ სიტუაციაც წონასწორულია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 28.5. თუ $<<S_1,S_2,\phi>>$ ანტაგონისტურ თამაშს გააჩნია წონასწორული ამონახსნი $<<V,-V,(s_1^*,s_2^*)>>$, მაშინ ეს ამონახსნი მაქსიმინური ამონახსნია.

დამტკიცება: რადგან $<<V,-V,(s_1^*,s_2^*)>>$, სადაც $V=\phi(s_1^*,s_2^*)$, წონასწორული ამონახსნია, ამიტომ $(s_1^*,s_2^*)\in S_1\times S_2$ ϕ ფუნქციის უნაგირა წერტილია. აქედან, ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად:

$$V_1=V_*=\max_{s_1^{l_1}}\min_{s_2^{l_2}}\phi(s_1^{l_1},s_2^{l_2})=\min_{s_2^{l_2}}\max_{s_1^{l_1}}\phi(s_1^{l_1},s_2^{l_2})=-\max_{s_2^{l_2}}\min_{s_1^{l_1}}(-\phi(s_1^{l_1},s_2^{l_2})=V^*=-V_2,$$

აქედან: $V_1=-V_2$.

$$V_1=\max_{s_1^{l_1}}\min_{s_2^{l_2}}\phi(s_1^{l_1},s_2^{l_2}),\ \ V_2=\max_{s_2^{l_2}}\min_{s_1^{l_1}}(-\phi(s_1^{l_1},s_2^{l_2}))$$

ცხადია, $V_1=\max_{s_1^{l_1}}\min_{s_2^{l_2}}\phi(s_1^{l_1},s_2^{l_2})\ge\phi(s_1^*,s_2^{l_2})$ და $V_2=\max_{s_2^{l_2}}\min_{s_1^{l_1}}(-\phi(s_1^{l_1},s_2^{l_2}))\ge-\phi(s_1^{l_1},s_2^*)$.

აქედან

$$V_1\ge\phi(s_1^*,s_2^{l_2}),\ \ \phi(s_1^{l_1},s_2^*)\ge-V_2.$$

რადგან $(s_1^*,s_2^*)\in S_1\times S_2$ სარგებლიანობის ϕ ფუნქციიის უნაგირა წერტილია, ამიტომ:

$$\phi(s_1^{l_1},s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2^{l_2})$$

ნებისმიერი $s_1^{l_1}\in S_1$ და $s_2^{l_2}\in S_2$ სტრატეგიებისათვის. აქედან გამომდინარე:

$$-V_2\le\phi(s_1^{l_1},s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2^*)\le\phi(s_1^*,s_2^{l_2})\le V_1.$$

$V_1=-V_2$ ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ: $V=\phi(s_1^*,s_2^*)=V_1=-V_2$.

ეს კი ნიშნავს, რომ $<<V,-V,(s_1^*,s_2^*)>>$ მაქსიმინური ამონახსნია.

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის მაქსიმინური ამონახსნი, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & 1 & 3 \\ s_1^2 & 6 & 2 \end{array}.$$

2. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის წონასწორული ამონახსნი, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{cccc} & s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_1^1 & 1 & 3 & 3 \\ s_1^2 & 6 & 2 & 1 \end{array}.$$

3. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის წონასწორული ამონახსნი, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & \frac{1}{4} & 3 \\ s_1^2 & 6 & \frac{1}{3} \end{array}.$$

4. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის ოპტიმისტური ამონახსნი, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & 5 & 3 \\ s_1^2 & 4 & 2 \end{array}.$$

5. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის წონასწორული ამონახსნი, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & 5 & 3 \\ s_1^2 & 4 & 2 \\ s_1^3 & 1 & 0 \end{array}.$$

§29. თამაშები შერეული სტრატეგიებით

როგორც ვნახეთ, ყოველი $<< S_1, S_2, \phi >>$ ანტაგონისტური თამაშის წონასწორული ამონახსნი წარმოადგენს მაქსიმინურ ამონახსნს.

არსებობენ ისეთი ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშებიც, რომლებსაც წონასწორული ამონახსნი არ გააჩნიათ. განვიხილოთ

მაგალითი:

ვთქვათ, ანტაგონისტური თამაში ნორმალური ფორმით წარმოდგენილია მატრიცით:

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	3	1
s_1^2	2	4

ამ თამაშის მაქსიმინური ამონახსნია $<<2,-3,(s_1^2,s_2^1)>>$

s_1^2 სტრატეგიის ამორჩევით პირველი მოთამაშე ღებულობს მაქსიმალურ გარანტირებულ სარგებელს, ხოლო s_2^1 სტრატეგიის არჩევით მეორე მოთამაშე ღებულობს მინიმალურ გარანტირებულ ზარალს.

ამ თამაშს წონასწორული ამონახსნი არ გააჩნია, ვინაიდან ტოლობა

$$\min_{s_2^{i_2}} \max_{s_1^{i_1}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2}) = \max_{s_1^{i_1}} \min_{s_2^{i_2}} \phi(s_1^{i_1}, s_2^{i_2})$$

არ სრულდება, მართლაც, ამ ტოლობის მარჯვენამ მხარე ტოლია 3-ის ხოლო მარცხენა მხარე- 2-ის.

მაქსიმინური ამონახსნი, როგორც აღვნიშნეთ, ყოველთვის არსებობს მაგრამ რამდენად მსაღებია იგი ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში? მაგალითად, მეორე მოთამაშის მიერ s_2^1 სტრატეგიის არჩევა არის ყველაზე უკეთესი პასუხი პირველი მოთამაშისსაგან s_1^2 სტრატეგიის არჩევისას, მაგრამ პირველმა რომ იცოდეს, რომ მეორე აირჩევს s_2^1 სტრატეგიას, მაშინ იგი აირჩევდა s_1^2 სტრატეგიას და გაზრდიდა თავის სარგებელს. ამავე დროს, თუ მეორე მოთამაშე მიხვდებოდა, თუ რას აპირებდა პირველი, იგი აირჩევდა s_2^2 სტრარეგიას და ასე შემდეგ. ეს მსჯელობა კიდევ ერთხელ გვაძლევს საფუძველს, რომ ყველა შემთხვევაში გამართლებულია მაქსიმინური სტრატეგიების არჩევა. მაგრამ ყოველი მოთამაშე დაინტერესებულია თავისი სარგებლის გაზრდით, ამიტომ მან შეიძლება გარისკოს. რისკის შედეგი შეიძლება კატასტროფულიც აღმოჩნდეს და სარგებლის გაზრდის მომტანიც.

ამ თვალსაზრისით ყოველი სტრატეგია ხასიათდება გარკვეული რისკის შემცველობით. რისკის ამ შემცველობის ზომად შეიძლება შემოვიტანოთ ისეთი სიდიდე, როგორიცაა პროცენტი ან რისკის ალბათობა მოცემული სტრატეგიის არჩევისას, ან ალბათობა სარგრბლიანობის მოსალოდნელი გაზრდისა და სხვა.

ასეთ შემთხვევაში შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მოთამაშე სუფთა სტრატეგიას აირჩევს ამ მახასიათებლების შესაბამისად.

თუ პირველი მოთამაშის სტრატეგიათა სიმრავლეა $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^m\}$ და თითოეულ s_1^i სტრატეგიას მივუწერთ რისკის ან სარგებლიანობის შემცველობის x_i ზომებს, კონკრეტულ ალბათობებს, მივიღებთ ფორმალურ ჩანაწერს:

$x = (x_1 s_1^1, x_2 s_1^2, \dots, x_m s_1^m)$, სადაც $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, x_i \geq 0$ ამ ფორმალურ ჩანაწერს პირველი მოთამაშის ***შერეულ სტრატეგიას*** უწოდებენ. ანალოგიურად შეგვეძლია განვსაზღვროთ მეორე მოთამაშის შერეული სტრატეგიაც: $y = (y_1 s_2^1, y_2 s_2^2, \dots, y_m s_2^m)$.

გავაფართოოთ თითოეული მოთამაშის სტრატეგიათა სიმრავლე შესაბამისი შერეული სტრატეგიებით, ცხადია, ყოველი სუფთა სტრატეგია შერეული

სტრატეგიის კერძო შემთხვევაა, რამდენადაც s_1^i სუფთა სტრატეგია შეგვიძლია გავაიგივეოთ $x_{s_1^i} = (0s_1^1, 0s_1^2, \ldots, 0s_1^{i-1}, 1s_1^i, 0s_1^{i+1}, \ldots, 0s_1^m)$ შერეულ სტრატეგიასთან.

დავუშვათ, რომ მოთამაშეს შეუძლია ითამაშოს შერეული სტრატეგიებითაც, ასეთ შემთხვევაში რომ ვილაპარაკოთ თამაშის შედეგზე, საჭიროა გავაგრძელოთ სარგებლიანობის ფუნქციები მთამაშეთა შერეულ სტრატეგიათა სიმრავლეების დეკარტის ნამრაველზე.

ვთქვათ, $<< S_1, S_2, \phi_1, \phi_2 >>$ ორი მოთამაშის თამაშია ნორმალური ფორმით და $\bar{S}_1 = \{x\}, \bar{S}_2 = \{y\}$ პირველი და მეორე მოთამაშის შერეულ სტრატეგიათა სიმრაელეებია, შესაბამისად. განვსაზღვროთ პირველი მოთამაშის ***გაფართოებული სარგებლიანობის ფუნქცია*** შერეული სტრატეგიებით თამაშის შემხხვევაში შემდეგნაირად:

$$\bar{\phi}_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \phi_1(s_1^i, s_2^j) y_j = \sum_{i=1}^{m} x_i (\sum_{j=1}^{n} \phi_1(s_1^i, s_2^j) y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j (\sum_{i=1}^{m} \phi_1(s_1^i, s_2^j) x_i ,$$

სადაც $\phi_1(s_i, s_j)$ პირველი მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობაა სუფთა სტრატეგიათა $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ წყვილზე.

ანალოგიურად განისაზღვრება გაფართოებული სარგრბლიანობის ფუნქცია მეორე მოთამაშისთვის:

$$\bar{\phi}_2(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \phi_2(s_1, s_j) y_j \,.$$

ცხადია, ანტაგონისტური თამაშისთვის $\bar{\phi}_1(x,y) = -\bar{\phi}_2(x,y)$.

$\bar{\phi}_1(s_1^i, y) = \sum_j \phi_1(s_1^i, s_2^j) y_j$ სიდიდე გამოსახავს პირველი მოთამაშის სარგებელს, როდესაც ის იყენებს s_1^i სუფთა სტრატეგიას, ხოლო მეორე მოთამაშე y შერეულ სტრატეგიას.

$\bar{\phi}_1(x, s_2^j) = \sum_i^{m} \phi_1(s_1^i, s_2^j) x_i$ სიდიდე გამოსახავს პირეელი მოთამაშის სარგებელს, როდესაც ის იყენებს y შერეულ სტრატეგიას, ხოლო მეორე მოთამაშე s_1^i სუფთა სტრატეგიას.

ცხადია, $\bar{\phi}_1(s_1^i, s_2^j) = \phi_1(s_1^i, s_2^j)$

ანალოგიური სიდიდეები:

$$\bar{\phi}_2(x, s_2^j) = \sum_i^{m} \phi_2(s_1^i, s_2^j) x_i \,,\ \bar{\phi}_2(s_1^i, y) = \sum_j^{n} \phi_2(s_1^i, s_2^j) y_j$$

გვექნება მეორე მოთამაშისთვისაც.

ქვემოთ, ყველგან, ორი მოთამაშის ანტაგონისტურ თამაშს შერეული სტრატეგიებით აღვნიშნავთ ასე: $<< X_m, Y_n, \bar{\phi}(x,y) >>$.

ანტაგონისტური თამაშის დროს ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\bar{\phi}_2(x, s_2^j) = \sum_i^{m} -\phi(s_1^i, s_2^j) x_i \,,\ \bar{\phi}_2(s_1^i, y) = \sum_j^{n} -\phi(s_1^i, s_2^j) y_j \,,$$

$$\bar{\phi}_1(x, s_2^j) = -\bar{\phi}_2(x, s_2^j) \,,\ \bar{\phi}_1(s_1^i, y) = -\bar{\phi}_2(s_1^i, y) \,.$$

ანტაგონისტურ თამაში შერეული სტრატეგიებით პირველი მოთამაშის მიზანია, ამოირჩიოს ისეთი შერეული სტრატეგია x, რომ მიიღოს მაქსიმალური სარგებელი, ანუ მოახდინოს მეორე მოთამაშის სარგებლის მინიმიზაცია. მაგრამ რეალური თამაშის შედეგი დამოკიდებულია ორივე მოთამაშის მოქმედებაზე.

ყოველი შერეული $x \in X_m$, სტრატეგიისათვის გარანტირებული სარგებელი პირველი მოთამაშისათვის განისაზღვრება ასე:

$$v_1(x) = \min_y \bar{\phi}(x, y).$$

რამდენადაც სიდიდე

$$\bar{\phi}(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \phi(s_1^i, s_2^j) y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j (\sum_{i=1}^{m} \phi(s_1^i, s_2^j) x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{\phi}(x, s_2^j)$$

შეწონილი საშუალოა n რაოდენობის $\bar{\phi}(x, s_2^j), j = 1,2,...,n$ სარგებლის, მას აქვს მინიმუმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მთელი წონა მიეწერება ამ სარგებლებიდან ყველაზე მცირეს, ანუ:

$$v_1(x) = \min_y \bar{\phi}(x, y) = \min[\bar{\phi}(x, s_2^1), \bar{\phi}(x, s_2^2), ..., \bar{\phi}((x, s_2^n)].$$

თუ მოთამაშეს სურს, მაქსიმალურად გაზარდოს თავისი გარანტირებული სარგებელი, მაშინ მან უნდა აირჩიოს ისეთი x^0 შერეული სტრატეგია, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$v_1(x^0) \geq v_1(x)$$

ყველა $x \in X_m$ შერეული სტრატეგიისათვის.

თუ დავუშვებთ, რომ $v_1(x^0) = v_1$, მაშინ

$$v_1 = v_1(x^0) = \max_x v_1(x) = \max_x \min_y \bar{\phi}(x, y).$$

ცხადია, $\bar{\phi}(x^0, y) \geq v_1$ ყოველი $y \in Y_n$ შერეული სტრატეგიისათვის. $x^0 \in X_m$ შერეული სტრატეგია პირველ მოთამაშეს აძლევს არანაკლებ v_1 გარანტირებულ სარგებელს. ამ შერეულ სტრატეგიას პირველი ***მოთამაშის მაქსიმინური შერეული სტრატეგია*** ეწოდება. მაქსიმინური შერეული სტრატეგია ყოველთვის არსებობს, იგი შეიძლება არ იყოს ერთადერთი. აღვნიშნოთ პირველი მოთამაშის მაქსიმინური სტრატეგიების სიმრავლე $\Im_1$ სიმბოლოთი.

რადგან თამაში ანტაგონისტურია, ამიტომ მეორე მოთამაშის მიზანი იქნება პირველი მოთამაშის სარგებლის მინიმიზაცია და არა თავისი სარგებლის გაზრდა. თუ მეორე მოთამაშე ირჩევს $y \in Y_n$ შერეულ სტრატეგიას, მაშინ პირველი მოთამაშის სარგებელი არ შეიძლება აღემატებოდეს სიდიდეს:

$$v_2(y) = \max_x \bar{\phi}(x, y).$$

ვთქვათ, სტრატეგია y^0 ისეთია, რომ:

$$v_2 = v_2(y^0) \leq v_2(y)$$

ყოველი $y \in Y_n$ სერეული სტრატეგიისათვის. მაშინ

$$v_2 = v_2(y^0) = \min_y \max_x \bar{\phi}(x, y)$$

და $\bar{\phi}(x, y^0) \leq v_2$ ყოველი $x \in X_m$ შერეული სტრატეგიისათვის.

შერეულ y^0 სტრატეგიას ეწოდება მეორე მოთამაშის ***მინიმაქსური შერეული სტრატეგია***. აღვნიშნოთ მეორე მოთამაშის მინიმაქსური სტრატეგიების სიმრავლე ასე: $\Im_2$.

მაშასადამე, თუ პირველი მოთამაშე იყენებს მაქსიმინურ სტრატეგიას, მაშინ ის უზრუნველყოფს რომ მისი სარგებელი იყოს არანაკლები, ვიდრე v_1, ხოლო თუ მეორე მოთამაშე იყენებს მინიმაქსურ სტრატეგიას იგი უზრუნველყოფს, რომ პირველი მოთამაშის სარგებელი არ აღემატებოდეს v_2 სიდიდეს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $v_1 \leq v_2$.

შერეულ სტრატეგიათა წყვილს (x^0, y^0) ***უწოდებენ წონასწორულს***, თუ:

$$\overline{\phi}(x, y^0) \le \overline{\phi}(x^0, y^0) \le \overline{\phi}(x^0, y)$$

ყოველი $x \in X_m, y \in Y_n$ შერეული სტრატეგიისთვის.

თეორემა 29.1. თითოეული შემდეგი პირობებიდან გამომდინარეობს დანარჩენი ორისაგან:

1. ანტაგონისტურ თამაშში შერეული სტრატეგიებით წონასწორული წყვილი არსებობს.

2 $v_1 = \max\limits_x \min\limits_y \overline{\phi}(x, y) = \min\limits_y \max\limits_x \overline{\phi}(x, y) = v_2$.

3. არსებობს ნამდვილი რიცხვი v და ისეთი შერეული სტრატეგიები: $x^0 \in X_m, y^0 \in Y_n$, რომ:

ა) $\sum\limits_{i=1}^{m} \phi(s_1^i, s_2^j) x_i^0 \ge v, j = 1,2,...,n$.

ბ) $\sum\limits_{j=1}^{n} \phi(s_1^i, s_2^j) y_j^0 \le v, i = 1,2,...,n$.

დამტკიცება: 1 პირობიდან გამომდინარეობს 2 პირობა. მართლაც, ვთქვათ, (x^0, y^0) წონასწორული წყვილია, მაშინ:

$$v_2 = v_2(y^0) = \min_y \max_x \overline{\phi}(x, y) \le \max_x \overline{\phi}(x, y^0) = \overline{\phi}(x^0, y^0) =$$

$$= \min_y \overline{\phi}(x^0, y) \le \max_x \min_y \overline{\phi}(x, y) = v_1(x^0) = v_1.$$

2 პირობიდან გამომდინარეობს 3 პირობა. მართლაც, ვთქვათ, $v = v_1 = v_2$ და x^0 მაქსიმინური სტერატეგიაა, ხოლო y^0 მინიმაქსური სტრატეგია. მაშინ ყოველი i, j ინდექსებისთვის გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{m} \phi(s_1^i, s_2^j) x_i^0 = \overline{\phi}(x^0, s_2^j) \ge \min_y \overline{\phi}(x^0, y) = \max_x \min_y \overline{\phi}(x, y) =$$

$$= v = \min_y \max_x \overline{\phi}(x.y) = \max_x \overline{\phi}(x, y^0) \ge \overline{\phi}(s_1^i, y^0) = \sum_{j=1}^{n} \phi(s_1^i, s_2^j) y_j^0$$

3 პირობიდან გამომდინარეობს 1 პირობა. მართლაც, 3 პირობის ა) და ბ) პუნქტებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\overline{\phi}(x^0, y) \ge v \ge \overline{\phi}(x, y^0)$$

ყოველი $x \in X_m, y \in Y_n$ შერეულ სტრატეგიისათვის. თუ დავუშვებთ, $x = x^0, y = y^0$, დავინახავთ, რომ $v = \overline{\phi}(x^0, y^0)$. ეს კი ნიშნავს, რომ (x^0, y^0) წონასწორული წყვილია.

თეორემა 29.2 (ნეშის თეორემა). $<< X_m, Y_n, \overline{\phi}(x, y) >>$ ანტაგონისტურ თამაშში შერეული სტრატეგიებით არსებობს წონასწორული წყვილი.

დამტკიცება: $X_m \times Y_n$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ გარდაქმნა:

$$T : X_m \times Y_n \to X_m \times Y_n,$$

რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1. სტრატეგიათა $(x^0, y^0) \in X_m \times Y_n$ წარმოადგენს წონასწორულ წყვილს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $T(x^0, y^0) = (x^0, y^0)$. ანუ როდესაც $(x^0, y^0) \in X_m \times Y_n$ წარმოადგენს T გარდაქმნის უძრავ წერტილს.

2. T გარდაქმნას აქვს ერთი მაინც უძრავი წერტილი.

ასეთი იქნება გარდაქმნა, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: დავუშვათ,

$$c_i = \begin{cases} \bar{\phi}(s_1^i, y) - \bar{\phi}(x, y), & if \;\; \bar{\phi}(s_1^i, x) - \bar{\phi}(x, y) > 0 \\ 0, & if \;\; \bar{\phi}(s_1^i, y) - \bar{\phi}(x, y) \le 0 \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} \bar{\phi}(x, y) - \bar{\phi}(x, s_2^j), & if \;\; \bar{\phi}(x, y) - \bar{\phi}(x, s_2^j) > 0 \\ 0, & if \;\; \bar{\phi}(x, y) - \bar{\phi}(x, s_2^j) \le 0 \end{cases}$$

თუ $T(x,y) = (x', y')$, მაშინ x' და y' იყოს განსაზღვრული ასე:

$$x_i' = \frac{x_i + c_i(x,y)}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k(x,y)},$$

$$y_j' = \frac{y_j + d_j(x,y)}{1 + \sum_{k=1}^{n} d_k(x,y)}.$$

პირდაპირი გამოთვლები გვაჩვენებენ, რომ $x_i' \ge 0, \sum_{i=1}^{m} x_i' = 1$, $y_j' \ge 0, \sum_{j-1}^{n} y_j = 1$.

პირველად ვაჩვენოთ, რომ წყვილი (x,y) წონასწორული ამონახსნია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი T გარდაქმნის უძრავი წერტილია.

ავღნიშნოთ, რომ $c_i(x,y)$ გვიჩვენებს, თუ რამდენად ჯობია s_1^i სუფთა სტრატეგიის არჩევა y სტრატეგიის საპასუხოდ x შერეული სტრატეგიის არჩევას, ხოლო $d_j(x,y)$ გვიჩვენებს, თუ რამდენად ჯობია s_2^j სუფთა სტრატეგიის არჩევა x სტრატეგიის საპასუხოდ y შერეული სტრატეგიის არჩევას. დავუშვათ (x,y) წონასწორული ამონახსნია, რადგან ამ შემთხვევაში x სტრატეგია კარგია y სტრატეგიის წინააღმდეგ, ამიტომ i ყოველი ინდექსისათვის $c_i(x,y) = 0$ და ამგვარად $x_i = x_i'$. ანალოგიურად: $y_j' = y_j$ ყოველი j ინდექსისათვის. მაშასადამე, თუ (x,y) წონასწორული ამონახსნია, მაშინ $T(x,y) = (x,y)$.

რომ დავამტკიცოთ საწინააღმდეგო, უნდა დავუშვათ, რომ $T(x,y) = (x,y)$. თავიდან ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ერთი მაინც i, რომლისთვისაც $x_i > 0$ და $c_i(x,y) = 0$. რადგან განსაზღვრის ძალით:

$$\bar{\phi}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \bar{\phi}(s_1^i, y),$$

დავასკვნით, რომ უტოლობა $\bar{\phi}(x,y) < \bar{\phi}(s_1^i, y)$ არ შესრულდება ყოველი i ინდექსისათვის, მაგალითად, იმ ინდექსებისათვის, რომლებისთვისაც $x_i > 0$. აქედან გამომდინარე i ინდექსის სულ მცირე ერთი მნიშვნელობისათვის $c_i(x,y) = \bar{\phi}(s_1^i, y) - \bar{\phi}(x,y) = 0$. მაგრამ რადგან $T(x,y) = (x,y)$, ანუ (x,y) უძრავი წერტილია T გარდაქმნის მიმართ, ასეთი i ინდექსებისათვის:

$$x_i = \frac{x_i}{1 + \sum_{k-1}^{m} c_k(x,y)}.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k(x,y) = 0 .$$

ამ ჯამის შესაკრებები არაუარყოფითია, ამიტომ თითოეული მათგანი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

ამგვარად, შერეული სტრატეგია x ისეთე კარგია y შერეული სტრატეგიის წინააღმდეგ, როგორც ნებისმიერი s_1^i სტრატეგია. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ y შერეული სტრატეგია კარგია x შერეული სტრატეგიის წინააღმდეგ. ეს კი ნიშნავს, რომ წყვილი (x,y) წონასწორული ამონახსნია.

T გარდაქმნისათვის უძრავი წერტილის არსებობა გამომდინარეობს ცნობილი ტოპოლოგიური თეორემიდან, რომელსაც "ბრაუერის თეორემა უძრავი წერტილის შესახებ" ეწოდება.

ამ თეორემის გაცნობა შეიძლება ტოპოლოგიის ნებისმიერ სახელმძღვანელოში.

ამგვარად, ვაჩვენეთ, რომ ანტაგონისტურ თამაშს შერეული სტრატეგიებით, განსხვავებით სუფთა სტრატეგიების შემთხვევისა, ყოველთვის აქვს წონასწორული ამონახსნი.

§30. თამაშის დაყვანა წრფივი პროგრამირების ამოცანამდე

ვთქვათ მოცემულია ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაში $<<S_1,S_2,\phi>>$, სადაც $S_1=\{s_1^1,s_1^2,...,s_1^m\}, S_2=\{s_2^1,s_2^2,...,s_2^n\}$, ხოლო ϕ ფუნქციის შესაბამისი მატრიცის $a_{ij}=\phi(s_1^i,s_2^j)$ ელემენტები არაუარყოფითია. უკანასკნელი დაშვება ზოგადობას არ ზღუდავს, ვინაიდან თამაშის მატრიცის ელემენტებზე ერთ და იმავე რიცხვის დამატებით თამაშის სტრუქტურა არ იცვლება.

ამ თამაშში პირველი მოთამაშის მიზანია, იპოვოს ის შერეული სტრატეგია, რომელიც აძლევს მას მაქსიმალურ გარანტირებულ მოგებას, ხოლო მეორე მოთამაშის მიზანია, იპოვოს ის შერეული სტრატეგია, რომელიც აძლევს მას საშუალებას, არ წააგოს პირველი მოთამაშის მაქსიმალურ გარანტირებულ მოგებაზე მეტი, ანუ პირველმა მოთამაშემ არ მოიგოს მის მაქსიმალურ გარანტირებულ მოგებაზე მეტი.

წინა პარაგრაფის პირველი თეორემისა და ნეშის თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი $v, v>0$ რიცხვი და შერეული სტრატეგია $x=(x_1,x_2,...,x_m), x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, რომ პირველმა მოთამაშემ ამ შერეული სტრატეგიის გამოყენებით, გარანტირებულად შეიძლება მიიღოს არანაკლებ $v, v>0$ სარგებელი, ანუ $\bar{\phi}_1(x,s_2^j)=\sum_{i}^{m}\phi(s_1^i,s_2^j)x_i \geq v$ ყოველი $j=1,2,....,n$ ინდექსისათვის. უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია

$$\sum_{i}^{m} a_{ij}x_i \geq v \;\; j=1,2,....,n$$

უტოლობის. თუ ამ უტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ v სიდიდეზე და შემოვიტანთ აღნიშვნას: $u_i=\dfrac{x_i}{v}$, შეიძლება ზემოთ თქმული წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით: არსებობს ისეთი v რიცხვი და ვექტორი $u=(u_1,u_2,...,u_m)$, სადაც $u_i \geq 0$ ყოველი $i=1,2,....,m$ ინდექსისთვის, რომ მოთამაშე მიიღებს არანაკლებ v სარგებელს,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \frac{1}{v} \text{ და } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq 1 \qquad **$$

ყოველი $j = 1,2,....,n$ ინდექსისათვის.

** უტოლობა ტოლფასია * უტოლობის. მართლაც, თუ გავამრავლებთ ** განტოლების ორივე მხარეს v სიდიდეზე და $u_i v$ სიდიდეს შევცვლით x_i სიდიდით, მივიღებთ * უტოლობას.

ამგვარად, პირველი მოთამაშის წინაშე მდგარი ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

ვთქვათ, U წარმოადგენს m განზომილებიან ისეთ ვექტორთა $u = (u_1, u_2, ..., u_m) \in U$ სიმრავლეს, რომ $u_i \geq 0$, ყოველი $i = 1,2,....,m$ ინდექსისთვის და $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq 1$ ყოველი $j = 1,2,....,n$ ინდექსისთვის. საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი ვექტორი $u = (u_1, u_2, ..., u_m) \in U$, რომ ჯამი $\sum_{i=1}^{m} u_i$ იყოს მინიმალური.

როგორც ვიცით, $\sum_{i=1}^{m} u_i$ ტიპის ფორმების მინიმუმის პოვნის ამოცანას $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq 1$, $j = 1,2,....,n$; $u_i \geq 0$, $i = 1,2,....,m$ სახის შეზღუდვების პირობებში წრფივი პროგრამირების ამოცანა ეწოდება.

ამგვარად, პირველი მოთამაშისათვის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის პოვნის ამოცანა ჩვენ დავიყვანეთ ისეთი წრფივი პროგრამირების ამოცანამდე, როდესაც საპოვნია $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} u_i$ მიზნის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.

$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} u_i$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილის მოძებნის მოთხოვნა გამომდინარეობს იქედან, რომ $\frac{1}{v}$ სიდიდის შესაძლებელი მინიმალური მნიშვნელობა განაპირობებს v სიდიდის შესაძლებელ მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

პირველი მოთამაშის შემთხვევის ანალოგიურად, არსებობს ისეთი $v, v > 0$ რიცხვი და შერეული სტრატეგია $y = (y_1, y_2, ..., y_n), y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} x_i = 1$, რომ მეორე მოთამაშემ ამ შერეული სტრატეგიის გამოყენებით მიაღწიოს იმას, რომ პირველმა მოთამაშემ არ მიიღოს მის მაქსიმალურ გარანტირებულ v მოგებაზე მეტი სარგებელი, ანუ: $-\bar{\phi}_2(s_1^i, y) = \bar{\phi}_1(s_1^i, y) = \sum_{i}^{m} \phi(s_1^i, s_2^j) y_j \leq v$ ყოველი $i = 1,2,....,m$ ინდექსისათვის. უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_i \leq v \;\; i = 1,2,....,m \qquad ***$$

უტოლობის. თუ ამ უტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ v სიდიდეზე და შემოვიტანთ აღნიშვნას: $w_j = \frac{y_j}{v}$, შეიძლება ზემოთ თქმული წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით: არსებობს ისეთი v რიცხვი და ვექტორი $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$, სადაც $w_j \geq 0$ ყოველი $j = 1,2,....,n$ ინდექსისთვის, რომ

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \frac{1}{v} \text{ და } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_j \geq 1 \qquad ****$$

ყოველი $i=1,2,....,m$ ინდექსისათვის.

**** უტოლობა ტოლფასია *** უტოლობის. მართლაც, თუ გაამრავლებთ **** განტოლების ორივე მხარეს v სიდიდეზე და $w_j v$ სიდიდეს შეცვლით y_j სიდიდით, მიიღებთ *** უტოლობას.

ამგვარად, მეორე მოთამაშის წინაშე მდგარი ამოცანა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

ვთქვათ, W წარმოადგენს n განზომილებიან ისეთ ვექტორთა $w=(w_1,w_2,...,w_n)\in W$ სიმრავლეს, რომ $w_j\geq 0$ ყოველი $j=1,2,....,n$ ინდექსისთვის და $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j\geq 1$ ყოველი $i=1,2,....,m$ ინდექსისთვის. საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი ვექტორი $w=(w_1,w_2,...,w_n)\in W$, რომ ჯამი $\sum_{j=1}^{n}w_j$ იყოს მაქსიმალური.

როგორც ვიცით, $\sum_{i=1}^{m}w_j$ ტიპის წრფივი ფუნქციის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანაც, $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j\leq 1$, $i=1,2,....,m$; $w_j\geq 0$, $j=1,2,....,n$, სახის შეზღუდვების პირობებში, წრფივი პროგრამირების ამოცანას წარმოადგენს.

ამგვარად, მეორე მოთამაშისათვის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის პოვნის ამოცანა ჩვენ დავიყვანეთ ისეთ წრფივი პროგრამირების ამოცანამდე, როდესაც საპოვნია $\frac{1}{v}=\sum_{j=1}^{n}w_j$ მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი. $\frac{1}{v}=\sum_{i=1}^{m}u_i$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილის მოძებნის მოთხოვნა გამომდინარეობს იქედან, რომ $\frac{1}{v}$ სიდიდის შესაძლებელი მაქსიმალური მნიშვნელობა განაპირობებს v სიდიდის შესაძლებელ მინიმალურ მნიშვნელობას.

მაშასადამე, ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის შერეულ სტრატეგიებში წონასწორული ამონახსნის მოძებნის ამოცანა ჩვენ დავიყვანეთ წრფივი პროგრამირების ორ ამოცანამდე: პირველი მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის მოსაძებნად საჭიროა ვიპოვოთ შესაბამისი წრფივი პროგრამირების ამოცანის მიზნის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი, ხოლო მეორე მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის მოსაძებნად საჭიროა ვიპოვოთ შესაბამისი წრფივი პროგრამირების ამოცანის მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.

მაგალითი: როგორც ზემოთ ვნახეთ, ანტაგონისტურ თამაშს ნორმალური ფორმით, რომელიც წარმოდგენილია მატრიცით:

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	3	1
s_1^2	2	4

წონასწორული ამონახსნი არ გააჩნია, ხოლო მისი მაქსიმინური ამონახსნია: $<<2,-3,(s_1^2,s_2^1)>>$

ვიპოვოთ ამ თამაშის წონასწორული ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში.

დავიყვანოთ თამაში პირველი მოთამაშის ამოცანა წრფივი პროგრამირების ამოცანაზე: წონასწორული წყვილის პირველი კომპონენტის მოსაძებნად უნდა

ვიპოვოთ ვექტორი $u=(u_1,u_2)$, რომელის კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ შეზღუდვებს:

$$3u_1+2u_2\ge 1$$
$$u_1+4u_2\ge 1$$
$$u_1\ge 0, u_2\ge 0$$

და მიზნის ფუნქციას $\frac{1}{v}=u_1+u_2$ ანიჭებენ მინიმალურ მნიშვნელობას.

წრფივი პროგრამირების მიღებული ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ სიმპლექს-მეთოდი, რისთვისაც ამოცანა დავიყვანოთ სტანდარტულ სახემდე:

$$-3u_1-2u_2+u_3=-1$$
$$-u_1-4u_2+u_4=-1$$
$$u_1\ge 0, u_2\ge 0, u_3\ge 0, u_4\ge 0$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთი საბაზისო ამონახსნია:

$$u_1=0, u_2=0, u_3=-1, u_4=-1.$$

ეს ამონახსი არ შედის დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეში, რადგან მისი კომპონენტები ნაკლებია ნულზე ან ტოლია ნულის, ამიტომ ვიპოვოთ სხვა საბაზისო ამონახსნი. ამისათვის გამოვსახოთ u_1,u_2 ცვლადები u_3,u_4 ცვლადების საშუალებით:

$$u_1=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}u_3-\frac{1}{5}u_4$$
$$u_2=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}u_3+\frac{3}{10}u_4$$

აქედან გამომდინარე, ახალი საბაზისო ამონახსნი იქნება:

$$u_1=\frac{1}{5}, u_2=\frac{1}{5}, u_3=0, u_4=0$$

მიზნის ფუნქციას u_3,u_4 ცვლადებში ექნება სახე:

$$\frac{1}{v}=\frac{2}{5}+\frac{1}{6}u_3+\frac{1}{10}u_4.$$

რადგან მიზნის ფუნქციის უკანასკნელ სახეში არასაბაზისო u_3,u_4 ცვლადებთან არაუარყოფითი კოეფიციენტებია, ამიტომ უკანასკნელი საბაზისო ამონახსნი გვაძლევს ჩვენი წრფივი პროგრამირების ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს:

$$u_1=\frac{1}{5}, u_2=\frac{1}{5},$$

რომელზედაც $\frac{1}{v}=u_1+u_2$ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა: $\frac{2}{5}$-ის.

ამ წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნით ჩვენ ვიპოვეთ თამაშის წონასწორული ამონახსნის პირველი კომპონენტი:

$x=(u_1vs_1^1,u_2vs_1^2)=(\frac{1}{5}\frac{5}{2}s_1^1,\frac{1}{5}\frac{5}{2}s_1^2)=(\frac{1}{2}s_1^1,\frac{1}{2}s_1^2)$ და თუ პირველი მოთამაშე ითამაშებს $x=(\frac{1}{2}s_1^1,\frac{1}{2}s_1^2)$ შერეული სტრატეგიით, მისი მოგება იქნება არანაკლებ $\frac{5}{2}$-ის.

ახლა დავიყვანოთ მოცემულ თამაშში მეორე მოთამაშის ამოცანა წრფივი პროგრამირების ამოცანაზე: წონასწორული წყვილის მეორე კომპონენტის მოსაძებნად უნდა ვიპოვოთ ვექტორი $w=(w_1,w_2)$, რომლის კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ შეზღუდვებს:

$$3w_1 + w_2 \le 1$$
$$2w_1 + 4w_2 \le 1$$
$$w_1 \ge 0, w_2 \ge 0$$

და მიზნის ფუნქციას $\frac{1}{v} = w_1 + w_2$ ანიჭებენ მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

წრფივი პროგრამირების მიღებული ამოცანის ამოსახსნელად ამოცანა დაეიყვანოთ სტანდარტულ სახემდე:

$$3w_1 + w_2 + w_3 = 1$$
$$2w_1 + 4w_2 + w_4 = 1 \qquad .$$
$$w_1 \ge 0, w_2 \ge 0, w_3 \ge 0, w_4 \ge 0$$

$\frac{1}{v} = w_1 + w_2$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი ემთხვევა $z = -w_1 - w_2$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს, ამიტომ აქაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ სიმპლექს-მეთოდი.

მიღებულ განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთი საბაზისო ამონახსნია-

$$w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 1, w_4 = 1 .$$

ეს საბაზისო ამონახსნი არ გვაძლევს ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს, რადგან მიზნის ფუნქციაში არასაბაზისო ცვლადების კოეფიციენტები უარყოფითია.
ვიპოვოთ სხვა საბაზისო ამონახსნი. ამისათვის არასაბაზისო ცვლად w_1 ცვლადს გავუცვალოთ ადგილი რომელიმე საბაზისო ცვლადთან, ამ საბაზისო ცვლადის მოსაძებნად განვიხილოთ ტოლობები:

$$w_3 = 1 - 3w_1$$
$$w_4 = 1 - 2w_1$$

და ფარდობები:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2} .$$

ეს ფარდობები გვიჩვენებენ, რომ ადგილები ეცვლება არასაბაზისო w_1 ცვლადს და w_3 საბაზისო ცვლადს.

გამოვსახოთ ახალი საბაზისო ცვლადები ახალი არასაბაზისო ცვლადებით:

$$w_4 = \frac{1}{3} - 3\frac{1}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_3,$$

$$w_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}w_2 - \frac{1}{3}w_3.$$

აქედან გამომდინარე, ახალი საბაზისო ამონახსნი იქნება:

$$w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = 0, w_3 = 0, w_4 = \frac{1}{3}$$

მიზნის ფუნქციას u_2, u_3 ცვლადებში ექნება სახე:

$$z = -\frac{1}{v} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_3 - w_2 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_3$$

რადგან მიზნის ფუნქციის უკანასკნელ სახეში არასაბაზისო w_2 ცვლადთან უარყოფითი კოეფიციენტია, ამიტომ უკანასკნელი საბაზისო ამონახსნი არ გვაძლევს ჩვენი წრფივი პროგრამირების ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს. საჭიროა შევამოწმოთ სხვა საბაზისო ამონახსნი.

განვიხილოთ ტოლობები

$$w_4 = \frac{1}{3} - 3\frac{1}{3} w_2$$

$$w_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} w_2$$

და ფარდობები:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{10}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1.$$

უკანასკნელი ფარდობები გვიჩვენებენ,რომ w_2 არასაბაზისო ცვლადს ადგილი უნდა გავუცვალოთ w_4 საბაზისო ცვლადთან.

გამოვსახოთ ახალი საბაზისო ცვლადები დანარჩენი ცვლადებით:

$$w_2 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10} w_4 + \frac{3}{10} w_3,$$

$$w_1 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} w_4 - \frac{13}{30} w_3.$$

ახალი საბაზისო ამონახსნია:

$$w_1 = \frac{3}{10}, w_2 = \frac{1}{10}, w_3 = 0, w_4 = 0.$$

მიზნის ფუნქციის სახეა:

$$z = -\frac{1}{v} = -\frac{12}{30} + \frac{2}{10} w_4 + \frac{1}{30} w_3.$$

მიზნის ფუნქცის მიღებულ სახეში არასაბაზისო ცვლადების წინ უარყოფითი კოეფიციენტები არაა, ამიტომ უკანასკნელი საბაზისო ამონახსნი გვაძლევს ჩვენი წრფივი პროგრამირების ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს: $w = (\frac{3}{10}, \frac{1}{10})$.

მიზნის ფუნქციის

$$z = -\frac{1}{v} = -\frac{12}{30} + \frac{2}{10} w_4 + \frac{1}{30} w_3$$

მინიმალური მნიშვნელობაა: $z = -\frac{1}{v} = -\frac{4}{10}$.

ამ წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნით ჩვენ ვიპოვეთ თამაშის წონასწორული ამონახსნის მეორე კომპონენტი:

$y = (w_1 v s_2^1, w_2 v_2^2) = (\frac{3}{10}\frac{10}{4} s_2^1, \frac{1}{10}\frac{10}{4} s_2^2) = (\frac{3}{4} s_2^1, \frac{1}{4} s_2^2)$. თუ მეორე მოთამაშე ითამაშებს $y = (\frac{3}{4} s_2^1, \frac{1}{4} s_2^2)$ შერეული სტრატეგიით, მაშინ პირველი მოთამაშის მოგება იქნება არა უმეტეს $\frac{5}{2}$-ის.

საბოლოოდ გვაქვს მოცემული თამაშის წონასწორული ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში:

$$<< \frac{5}{2}, ((\frac{1}{2} s_1^1, \frac{1}{2} s_1^2); (\frac{3}{4} s_2^1, \frac{1}{4} s_2^2)) >>.$$

სავარჯიშოები:

1.იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & 3 & 6 \\ s_1^2 & 2 & 5 \end{array}.$$

2.იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & 2 & 3 \\ s_1^2 & 1 & 5 \end{array}.$$

3. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & 7 & 6 \\ s_1^2 & 3 & 1 \end{array}.$$

და მიღებული შედეგის მიხედვით აირჩიეთ სუფთა სტრატეგიები.

4. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & 1 & 3 \\ s_1^2 & 6 & 2 \end{array}$$

და მიღებული შედეგის მიხედვით აირჩიეთ სუფთა სტრატეგიები.

5. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & 1 & 3 \\ s_1^2 & 6 & 2 \end{array}.$$

და მიღებული შედეგის მიხედვით აირჩიეთ სუფთა სტრატეგიები.

6. იპოვეთ ორი მოთამაშის ანტაგონისტური თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში, თუ მისი მატრიცაა:

$$\begin{array}{ccc} & s_2^1 & s_2^2 \\ s_1^1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ s_1^2 & \frac{1}{3} & 2 \end{array}.$$

და მიღებული შედეგის მიხედვით აირჩიეთ სუფთა სტრატეგიები.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ю.А. Альпин, С.И., Илин Дискретная математика, графы и автоматы Казань, 2006 .
2. А. И Белоусов., С. Б. Ткачев Дискретная математика. Серия: Математика в техническом университете. Изд-во: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
3. И.М. Виноградов Оснсвы теориии чиссл. Москва, „Наука„1978 .
4. Н. Я. Виленкин Комбинаторика М., 1969.
5. Д.Гильберт, П.Бернайс Основания Математики, теория доказатедств. Москва, „Наука„1982 .
6. Д.Гильберт, П.Бернайс Основания Математики, логические исчисления и формализация арифметики. Москва, „Наука„1982 .
7. Дж. Данциг Линейное программирование, его обобщения и применения. Москва, „Прогрес „1966 .
8. Я. М. Ерусалимский Дискретная математика М., 2000.
9. Н.Б. Ефимов, Э.Р. Розендорн Линейная алгебра и многомерная геометрия Москва, „Наука„1979 .
10. Л.Ерош Дискретная математика, комбинаторика. Санкт петербург, 2001.
11. Ю. В..Капитонова, С. Л Кривой., А. А. Летичевский, Луцкий Г. М. Лекции по дискретной математике СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
12. В.Г. Карманов Математическое программирование. Москва, „Наука„1975.
13. А.Г. Курош Лекции по общей алгебре. Москва, „Наука„1973 .
14. А.Г. Курош Курс вышейей алгебры. Москва, „Наука„1971 .
15. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин Элементы теории функции и функционального анализа. Москва, „Наука„1972 .
16. С. Ленг Алгебра. Москва, „Мир„1973 .
17. Р.Д. Льюс, Х. Райфа Игры и решения. Москва, „Издательство иностранной литературы „1961 .
18. А.И. Мальцев Алгоритмы и рекурсивные функции. Москва, „Наука„1986 .
19. Э. Мендельсон Введение в математическую логику. Москва, „Мир „1968 .
20. В.И. Нечаев Числовые системы. Москва, „Просвещение „1975 .
21. Дж. Нейман, О. Моргенштерн Теория игр и экономическое поведение Москва, „Мир „1970.
22. Г. Оуэн Теория игр. Москва, „Мир „1970 .
23. О. Оре Теория графов. Москва, „Мир „1968 .
24. К.А. Пупков Основы кибернетики. Москва, „Высшая школа „1974 .
25. Ю.П. Шевелёв Дискретная математика, часть 1, теория множеств, булева алгебра. Томск, 2003 .
26. Ю.П. Шевелёв Дискретная математика, часть 2, теория конечных автоматов, комбинаторика, теория графов. Томск, 2003 .
27. Л.Б. Шнеперман Курс алгебры и теориии чисел в задачах и упражнениях. Минск, „Вышэйшая школа„ 1986.
28. Ф. Харари Теория графов. Москва, „Мир „1973 . М. Холл Комбинаторика. Москва, „Мир „ 1970.
29. ზ. ნაცვლიშვილი, გ. ტაბიძე, რ. დანელია, ჯ. გიორგობიანი, მ. კუბლაშვილი დისკრეტული მათემატიკის საფუძვლები. თბილისი „განათლება„ 1990.
30. Richard Johnsonbaugh, Discrete Mathematics, Prentice Hall, 2008.
31. Weisstein, Eric W., "Discrete mathematics" from MathWorld.
32. Norman L. Biggs, Discrete mathematics, Oxford University Press, 2002.
33. Sjerp Troelstra, Helmut Schwichtenberg, Basic Proof Theory, Cambridge University Press, 2000.

შინაარსი

დაიბეჭდა გამომცემლობა „უნივერსალში"

თბილისი, 0179, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 19, ☎: 2 22 36 09, 5(99) 17 22 30

E-mail: universal@internet.ge