

მათე მიჩინაშვილი

ზოგადი ფიზიკის კურსი

ნაწილი I

(მექანიკა)

შესამე შესწორებული და გადამუშავებული გამოცემა

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო
სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ
დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ სტუდენტებისათვის



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

თბილისი 1973

წიგნი წარმოადგენს ზოგადი ფიზიკის კურსის პირველ ნაწილს (მექანიკას). მექანიკის გადმოცემის დროს წინა პლანზეა წამოწეული ფარდობითობის კლასიკური პრინციპი და მუდმივობის კანონები, მათზე დაყრდნობით გამოყვანილია მოძრაობის განტოლებები, საკმაო სისრულით არის განხილული ნაწილაკების დაჯახებები, რხევები, მყარი სხეულის მოძრაობა და გრავიტაციული ურთიერთქმედება.

წიგნი ძირითადად განკუთვნილია სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. ამავე დროს იგი გამოადგებათ პედაგოგიური და პოლიტექნიკურა ინსტიტუტების სტუდენტებსაც.

ვ უ ძ ლ ე ნ ი
ძვირფასი მშობლების
ხსოვნას

აკტორი

III გამოცემის წინასიტყვაობა

ზოგადი ფიზიკის კურსის პირველი ნაწილის—მექანიკის მესამე გამოცემა ძირითადად უცვლელად გამოდის, მხოლოდ შესწორებული და შევსებულია ზოგიერთი საკითხის გადმოცემა. მაგალითად, მეორე რიგის მრუდების პოლარულ-მნები განტოლების გამოყვანა შესამჩნევად გამარტივებულია. უფრო სრულად არის წარმოდგენილი ერთეულთა სისტემის საკითხი. კინეტიკური ენერჯიის ცნება შემოტანილია ბუნებრივი გზით, ძირითადად ისე, როგორც ეს ლაიბნიცმა მოგვცა. შესწორებულია ზოგიერთი ადგილი, რომელიც არასაკმარისი სიზუსტით იყო განხილული წინა გამოცემაში.

გულითად მადლობას მოვახსენებ ზოგადი ფიზიკის კათედრის წევრებს, რომელთაც სასარგებლო შენიშვნები მოგვცეს ამ წიგნის გაუმჯობესების მიზნით,

II გამოცემის წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს ზოგადი ფიზიკის კურსის პირველი ნაწილის მეორე გამოცემას (პირველი გამოვიდა 1939 წ.). მიუხედავად იმისა, რომ ძირითადი პრინციპები, რომლებზე დამყარებითაც აგებულია კურსი, უცვლელი დარჩა, მთელი მასალა საგრძნობლად გადაამუშავებული და შეესებოდა, რაც სავსებით გასაგებია, თუ მხედველობაში მივიღებთ პირველი გამოცემის შემდეგ გასულ საკმაოდ დიდ დროს.

თანამედროვე ფიზიკა განსხვავდება „კლასიკური“ ფიზიკისაგან არა მარტო იმით, რომ იგი შეიცავს უკანასკნელ რამდენიმე ათეული წლის მანძილზე შექმნილ ახალ დარგებს, არამედ იმითაც, რომ ამჟამად წინ წამოწეულია ისეთი ცნებები და კანონზომიერებები, რომლებიც წინათ ითვლებოდა მეორეხარისხოვანად და დამხმარედ; მაგალითად, თუ სახელმძღვანელოში გვხვდებოდა პარაგრაფი ფარდობითობის პრინციპის შესახებ, უკანასკნელი განიხილებოდა როგორც საინტერესო, მაგრამ განცალკევებული შედეგი, რომელიც შემდეგში თითქმის არსად არ პოულობდა თავის გამოყენებას. ათვლის სისტემის არჩევის მნიშვნელობა თუმცა კი აღინიშნებოდა, მაგრამ შემდეგში იგი თითქმის მივიწყებული რჩებოდა. იმპულსისა და ენერჯის ცნებები მნიშვნელოვან, მაგრამ მაინც „დამხმარე“ ცნებებად ითვლებოდა და უპირატესობა ეძლეოდა ძალისა და მუშაობის ცნებებს. მუდმივობის კანონები სხვადასხვა საკითხის გადმოცემის დროს არ იყო ისე მნიშვნელოვანი როგორც დღეს თანამედროვე ფიზიკაშია. მოძრაობის ხასიათის შესწავლა პო-

ტენციალურ მრუდებსა და პოტენციალურ ენერჯიასა და ძალას შორის არსებული კავშირის საშუალებით თითქმის არ წარმოებდა; ამიტომაც პოტენციალური ენერჯიის ცნება წმინდა ფორმალურ ხასიათს ღებულობდა.

კურსის გადმოცემის ძველი სქემის შენარჩუნების პირობებში ახალი შედეგები როგორც თეორიული, ისე ექსპერიმენტული, ემატებოდა კურსს ახალი პარაგრაფებისა და თავების სახით, მაგრამ ეს გავლენას არ ახდენდა უკვე არსებულ თავებზე, არ იწვევდა მთელი კურსის მნიშვნელოვან გადამუშავებას.

ავტორი ფიქრობს, რომ ფიზიკის სწრაფი განვითარებისა და მნიშვნელოვანი გარდაქმნის თანამედროვე პირობებში შეუძლებელია ზოგადი კურსის გადმოცემის ძველი სქემის შენარჩუნება. უნდა ვეცადოთ გადავამუშაოთ ზოგადი ფიზიკის კურსი თანამედროვე ფიზიკის მოთხოვნების თანახმად. სწორედ ასეთ ცდას წარმოადგენს წინამდებარე კურსი. მექანიკის გადმოცემის დროს წინ არის წამოწეული ათვლის სისტემის ცნება, ფარდობითობის პრინციპი, მუდმივობის კანონები და კავშირი პოტენციალურ ენერჯიასა და მოძრაობის ხასიათს შორის. მოძრაობის განტოლებები გამოყვანილია ენერჯიის მუდმივობის კანონისა და ფარდობითობის პრინციპის საშუალებით. დაწვრილებითაა განხილული ათვლის არაინერციული სისტემები და სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდის ვარიანტულობა და ინვარიანტულობა. საკმაო სისრულით არის გარჩეული ნაწილაკთა დაჯახების სხვადასხვა შემთხვევა იმპულსური დიაგრამების გამოყენებით. მნიშვნელოვნად გაფართოებულია მყარი სხეულებისადმი, რხევებისა და გრავიტაციული ურთიერთქმედებისადმი მიძღვნილი თავები. სრულიად ამოღებულია და გადატანილია კურსის სათანადო ნაწილებში ელექტროსტატიკისადმი და თერმოდინამიკისა და სტატისტიკის საფუძვლებისადმი მიძღვნილი თავები.

ცხადია, წინამდებარე კურსის გარკვეული თვისებების გამო, მისი გამოყენება ძირითადი სახელმძღვანელოს სახით ერთგვარ სიძნელეებთან იქნება დაკავშირებული, მაგრამ ავტორი იმედოვნებს, რომ წიგნი

სასარგებლო იქნება როგორც სტუდენტების, ისე მას-
წავლებლებისათვის.

ავტორი მადლობელი იქნება ყველა კრიტიკული
შენიშვნისათვის როგორც კურსის საერთო გეგმის,
ისე ცალკეული საკითხების გადმოცემის მიმართ.

ავტორი დიდ მადლობას უხდის დოც. ა. იშნელს
ხელთნაწერის გულდასმით წაკითხვისა და მრავალი
სასარგებლო შენიშვნისათვის.

შენახალი

ფიზიკის ძირითადი ცნებები: გაბრუნება, სივრცე და დრო

საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა შორის ფიზიკას ცენტრალური ადგილი უკავია. მის ამოცანას შეადგენს ბუნების მოვლენების შესწავლა და მათი ძირითადი კანონების ჩამოყალიბება. ფიზიკის მიერ დადგენილი კანონზომიერებანი ბუნების ყველაზე უფრო ზოგადი და ძირეულია და ისინი უნდა იძლეოდნენ იმ კერძო სახის კანონზომიერებათა ახსნის პრინციპულ შესაძლებლობას, რომლებსაც აყალიბებს დანარჩენი საბუნებისმეტყველო მეცნიერებები. ეს, რასაკვირველია, სრულებითაც არ ნიშნავს იმას, რომ ახსნა უკვე შესაძლებელია თანამედროვე ფიზიკის კანონებზე დამყარებით, ვინაიდან თანამედროვე ფიზიკა ჯერ კიდევ შორსაა ამ მიზნისაგან.

ფიზიკა სრულებითაც არ შემოისაზღვრება ობიექტებისა და მოვლენების რაიმე სპეციალური ჯგუფის განხილვით. ჩვეულებრივი განსაზღვრა ფიზიკისა, როგორც მეცნიერების, რომელიც შეისწავლის არაორგანული ბუნების მხოლოდ ისეთ მოვლენებს, რომელთა დროს არ ხდება ნივთიერების სტრუქტურის ცვლილება, სრულებით არ არის სწორი.

დანარჩენი საბუნებისმეტყველო მეცნიერებები—ქიმია, ასტრონომია, გეოლოგია, ბიოლოგია და სხვები შეისწავლიან ობიექტებისა და მოვლენების გარკვეულ ჯგუფებს, აყალიბებენ კერძო სახის ცნებებსა და კანონებს და ამით აწვდიან ფიზიკას უამრავ მასალას ზოგადი ცნებებისა და კანონების დასადგენად. ზოგიერთ შემთხვევაში (ასტრონომია, ქიმია) შესაძლებელი გახდა სპეციალური სახის კანონზომიერებათა დაყვანა ზოგად ფიზიკურ კანონზომიერებებზე. ფიზიკის ძირითად მისწრაფებას შეადგენს კერძო სახის შედეგებისა და თეორიების სწორედ ასეთი განზოგადება.

ყოველივე ზემოთქმული ცხადყოფს, თუ რამდენად დიდი მნიშვნელობა აქვს ფიზიკას ბუნების მოვლენების შესწავლისა და საერთო მსოფლმხედველობის განვითარებისათვის, და სავსებით გასაგებს ხდის

იმ წამყვან როლს, რომელიც მან მოიპოვა ამ უკანასკნელ წლებში. თავისი განვითარების ყოველ საფეხურზე ფიზიკა ეუფლებოდა მოვლენათა სულ უფრო და უფრო ფართო ჩგუფებს, სულ უფრო ღრმად იჭრებოდა ბუნების საიდუმლოებაში და განუწყვეტლივ მდიდრდებოდა ახალი ცნებებითა და კანონებით. როგორც მაგალითი, შეიძლება მოვიყვანოთ ფიზიკის განვითარება მეოცე საუკუნის 20—30-იან წლებში—სახელდობრ კვანტური მექანიკის წარმოშობა და განვითარება, რამაც საშუალება მისცა ფიზიკას (მართალია, ჯერჯერობით მხოლოდ ნაწილობრივი) აეხსნა ჭიმიური კანონზომიერებები და ჭიმიური პროცესების თავისებურებები. ამასთან ერთად მოხდა თვით ფიზიკის ძირფესვიანი შეცვლა და მისი დაყრდნობა უფრო ფართო საფუძველზე. პრინციპულად არ არის შეუძლებელი, რომ ფიზიკის შემდგომმა განვითარებამ ბიოლოგიასთან კავშირში მიგვიყვანოს ბიოლოგიური მოვლენების გაგებად, რისთვისაც, ცხადია, საჭირო იქნება თვით ფიზიკაში სათანადო ცვლილებების შეტანა.

ფიზიკას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს არა მარტო თავისი შინაარსის, არამედ მეთოდის მხრივაც. ექსპერიმენტული და თეორიული მეთოდების გაერთიანება და მათი ერთდროული გამოყენება დამახასიათებელია ფიზიკისათვის, ხოლო მოვლენათა მიმდინარეობის პირობების შეცვლის შესაძლებლობა, ყოველმხრივი შესწავლა ბუნების პროცესებისა და მათ დამახასიათებელ სიდიდეთა შორის რაოდენობრივი კავშირის დამყარება—ფიზიკის ექსპერიმენტული მეთოდისათვის. მეორე მხრივ, თეორიული მსჯელობა, რომელიც აკავშირებს სხვადასხვა მოვლენას ერთმანეთთან და ხსნის ამ კავშირს დასაშვებ ძირითად დებულებებზე დამყარებით, საშუალებას გვაძლევს არა მარტო ჩამოვაყალიბოთ მოვლენათა ცალკეული ჩგუფების თეორია, არამედ ვიწინასწარმეტყველოთ კიდევ ახალი ფაქტები და კავშირები მოვლენათა შორის.

თავისი თეორიების ჩამოყალიბებისას ფიზიკა ფართოდ სარგებლობს ისეთი მძლავრი იარაღით, როგორიც არის მათემატიკური ანალიზი და მით ანიჭებს ამ თეორიებს ლოგიკურ სიმკაცრესა და ასნმულობას. ენათესავენა რა მათემატიკას თავისი თეორიული მეთოდით, ფიზიკა ყველა სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებაზე უფრო მჭიდროდ არის დაკავშირებული მასთან. მათემატიკისა და ფიზიკის ისტორია ნათლად გვიჩვენებს, თუ რამდენად ძლიერ ბიძგებს აძლევდა და აძლევს ფიზიკა მათემატიკას. მეორე მხრივ, მათემატიკა ხშირად წინასწარ ჭერეტს ფიზიკის განვითარების გზებს, აყალიბებს რა მათემატიკურ სქემებს, რომლებიც შემდეგში ფიზიკური კვლევა-ძიების აუცილებელ იარაღად იქცევა.

არანაკლებ არის დაკავშირებული ფიზიკა ადამიანის პრაქტიკულ საქმიანობასა და ტექნიკასთან. შეიძლება ითქვას, რომ ტექნიკა წარმოადგენს იმ ბაზას, რომელზეც აგებულია მთელი ფიზიკა. შეუძლებელია წარმოვიდგინოთ თანამედროვე ექსპერიმენტული ფიზიკის განვითარება ტექნიკის გარეშე, რომელიც ამზადებს ზუსტ საზომ იარაღებსა და ხელ აწყობს, აწვდის მას ექსპერიმენტისათვის საჭირო მასალას და აყენებს მის წინაშე მნიშვნელოვან ტექნიკურ ამოცანებს. ფიზიკის ისტორია გვიჩვენებს, რომ ტექნიკის განვითარება ფიზიკის წინაშე აყენებს სულ ახალ და ახალ პრობლემებს, რაც იწვევს ფიზიკის ახალი დარგებისა და ფრიად მნიშვნელოვანი ფიზიკური თეორიების წარმოშობას (თერმოდინამიკა, ელექტროდინამიკა და სხვ.). მეორე მხრივ, ფიზიკაც ფრიად მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ტექნიკის განვითარების საქმეში. ტექნიკის ისეთი მნიშვნელოვანი დარგების წარმოშობა და განვითარება, როგორიც არის: სითბოტექნიკა, ელექტროტექნიკა, რადიოტექნიკა და სხვ., წარმოებდა ფიზიკის უშუალო მონაწილეობით და ხშირად მთლიანად ფიზიკურ კვლევა-ძიებაზე დამყარებით. ამ მხრივ განსაკუთრებით თვალსაჩინო მაგალითს წარმოადგენს ტექნიკის ახალი დარგის—ბირთვული ენერგეტიკის განვითარება უკანასკნელი ათეული წლის მანძილზე. რასაც საფუძველი ჩაუყარა ბირთვის აგებულების და ბირთვული რეაქციების ფიზიკურმა კვლევა-ძიებამ.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ფიზიკის ძირითად მიზანს წარმოადგენს ბუნების მოვლენების შესწავლა და მათი ძირითადი კანონების ჩამოყალიბება. ვიდრე შეეუდგებოდეთ მოვლენათა ცალკეული ჯგუფების განხილვას, უნდა გავეცნოთ იმ ზოგად ცნებებს, რომლებზეც დამყარებულია ყოველი მეცნიერება ბუნების შესახებ და განსაკუთრებით კი ფიზიკა. ასეთი ზოგადი ცნებებია მატერიის, სივრცისა და დროის ცნებები.

ძირითად დებულებას, რომელსაც ეყრდნობა მთელი მეცნიერული შემეცნება, წარმოადგენს დებულება გარე სამყაროს ობიექტური, ჩვენი ცნობიერებისაგან დამოუკიდებელი არსებობის შესახებ. ამ დებულების გარეშე შეუძლებელი იქნებოდა ყოველგვარი ნამდვილი მეცნიერების არსებობა, რასაც ამტკიცებს მეცნიერებისა და ტექნიკის განვითარების მიეღი ისტორია. მაგრამ იმისათვის, რომ ამ დებულებას ჰქონდეს გარკვეული აზრი, უნდა გაირკვეს, როგორია გარე სამყაროს შინაარსი და მისი არსებობის ფორმები. ფილოსოფიისა და ბუნებისმეტყველების განვითარებამ ცხადყო, რომ გარე სამყაროს შინაარსს შეადგენს მატერია და რომ ცალკეული სხეულები და მოვლენები წარმოადგენენ მატერიის სხვადასხვა სახეს და მისი ცვლილების ფორმებს. ამ ფორმების მრავალსახეობა არ ეწინააღმდეგება სამყაროს ერთიანობას; იგი

არის ამ ერთიანობის აუცილებელი პირობა. მატერია ობიექტური რეალობაა, რომელიც მოქმედებს ჩვენს გრძნობის ორგანოებზე და არსებობს ჩვენი ცნობიერებისაგან დამოუკიდებლად. რასაკვირველია, შეუძლებელია თავიდანვე მატერიის ყველა ძირითადი თვისების განხილვა და ამიტომ ჭერჭერობით დაკმაყოფილებით რამდენიმე ზოგადი შენიშვნით. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, მატერიის მრავალი სახე არსებობს. პირველად შესწავლილი იყო მატერიის ის უმარტივესი სახე, რომელსაც ხშირად ეწოდება მატერია ვიწრო გაგებით, ანუ ნივთიერება. შემდეგში აღმოჩნდა, რომ, გარდა მატერიის ამ სახისა, არსებობს კიდევ სხვა სახეები—ელექტრომაგნიტური და სხვა ბუნების ველები, რომელთა აგებულება და თვისებები მნიშვნელოვნად განსხვავდება ნივთიერების აგებულებისა და თვისებებისაგან, მიუხედავად იმისა, რომ მათაც აქვთ ენერგია, იმპულსი, გავრცელების სიჩქარე და მრავალი სხვა სიდიდე, რომლებიც ჩვეულებრივი მატერიის—ნივთიერების დამახასიათებელ სიდიდეებად ითვლებოდნენ.

კლასიკური ფიზიკა თვლიდა, რომ ნივთიერება ყოველთვის შეიძლება წარმოედგინათ როგორც ნივთიერი წერტილების ერთობლიობა, ე. ი. ისეთი ნაწილაკების ერთობლიობა, რომელთა ხაზოვანი ზომები შეიძლება უგულებელვყოთ მათ შორის მანძილებთან შედარებით. ყოველი ფიზიკური მოვლენა განიხილებოდა როგორც ამ ნაწილაკების ურთიერთქმედებისა და მოძრაობის შედეგი.

სულ სხვა ხასიათის იყო მატერიის მეორე სახე—ველი. შეუძლებელი იყო მისი წარმოდგენა მცირე ზომის ნაწილაკთა ერთობლიობის სახით, ვინაიდან იგი უწყვეტად იყო გავრცელებული მთელ სივრცეში. ყოველი ცვლილება ველში განიხილებოდა როგორც უწყვეტი ტალღების გავრცელება და ამ ცვლილებათა კანონები არ დაიყვანებოდა ნაწილაკების მოძრაობის კანონებზე. ცხადია, რომ ის მკვეთრი განსხვავება (აღნაგობის მხრივ), რომელიც კლასიკური ფიზიკის თანახმად არსებობს ნივთიერებასა და ველს შორის, საკითხისადმი ცალმხრივი მიდგომის შედეგია, თუ ნივთიერება მხოლოდ წყვეტილია, ხოლო ველი—უწყვეტი, მაშინ შეუძლებელია არსებობდეს მათ შორის ის მკიდრო კავშირი, რომლის არსებობა თანამედროვე ფიზიკის თვალსაზრისით წარმოადგენს საბოლოოდ დადგენილ ფაქტს; ამიტომაც ვერ შეძლო კლასიკურმა ფიზიკამ ნივთიერებასა და ველს შორის არსებული კავშირის ახსნა.

ფიზიკის განვითარებამ ამ უკანასკნელი რამდენიმე ათეული წლის მანძილზე ცხადყო, რომ ველი უწყვეტობასთან ერთად ატარებს წყვეტილი აღნაგობის მრავალ ნიშანს და ნივთიერებაც წყვეტილ აღნაგობასთან ერთად უწყვეტობის თვისებათა მატარებელია. ნივთიერებისა

და ველის თვისებების ასეთი დაახლოების შედეგად შესაძლებელი გახდა მნიშვნელოვანი ნაბიჯის გადადგმა მატერიის აღნაგობის საკითხის გარკვევაში. მართალია, კავშირი ნივთიერებასა და ველს შორის საბოლოოდ ჯერ კიდევ არ არის გარკვეული, მაგრამ შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ამ კავშირის გარკვევა მნიშვნელოვნად გაფანტავს იმ სიძნელეებს, რომლებსაც შეხვდა ფიზიკა უკანასკნელ წლებში.

ჩვენ ჯერჯერობით განვიხილავთ ჩვეულებრივი მატერიის, ანუ ნივთიერების, ძირითად თვისებებს, მისი მოძრაობისა და ურთიერთქმედების კანონებს და ნივთიერების ყოველ ნაწილს, ე. ი. სხეულს წარმოვიდგენთ როგორც ნივთიერ წერტილთა ერთობლიობას. ამიტომაც ჩვენი უახლოესი ამოცანა იქნება ნივთიერი წერტილებისაგან შემდგარი სისტემის მოძრაობის შესწავლა. შემდეგ გადავალთ ველის თვისებების განხილვაზე და შევეცდებით გავარკვიოთ კავშირი, რომელიც არსებობს ნივთიერებასა და ველს შორის. ამ განხილვის შედეგად გამოირკვევა, რომ ნივთიერების აღნაგობის ზუსტი თეორიის შექმნა შეუძლებელია ველის გამოყენების გარეშე. მიუხედავად ამისა, ნივთიერი სხეულების მრავალი თვისება შეიძლება გაირჩეს და აიხსნას ველისაგან დამოუკიდებლად, რაც საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ნივთიერებაში მიმდინარე პროცესები ველის კანონების უშუალო გამოყენების გარეშე.

მატერიის არსებობის ფორმებია სივრცე და დრო. ისინი არ არიან მატერიალური ობიექტები, მაგრამ წარმოადგენენ ჩვენი ცნობიერებისაგან დამოუკიდებელ ობიექტურ რეალობებს და აუცილებელნი არიან როგორც ცალკეული სხეულების არსებობისა და ურთიერთქმედებისათვის; ისე მოვლენათა მიმდინარეობისათვის. არ არსებობს სხეული და მოვლენა, რომელიც არ იმყოფებოდეს და არ მიმდინარეობდეს სივრცესა და დროში და არ იარსებებდა სივრცე და დრო, რომ არ არსებობდნენ ცალკეული სხეულები და მოვლენები. ცხადია, სივრცე და დრო არ არიან დამოუკიდებელნი მატერიისაგან და მატერიის, სივრცისა და დროის თვისებებს შორის უნდა არსებობდეს მკიდრო კავშირი. როგორც შემდეგში ვნახავთ, კლასიკური ფიზიკის ძირითად ნაკლს წარმოადგენდა სივრცისა და დროის აბსოლუტიზება და მათი სრული მოწყვეტა მატერიისაგან. რასაკვირველია, ჩვენ ახლაც შორსა ვართ მატერიას, სივრცესა და დროს შორის არსებული კავშირის გაგებისაგან, მაგრამ ფარდობითობის თეორიის საშუალებით შესაძლებელი გახდა ამ კავშირის ნაწილობრივი გარკვევა მაინც.

ყოველივე ზემოთქმული მატერიის, სივრცისა და დროის შესახებ არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რამდენად კარგად არის ჩვენთვის ცნობილი მათი კონკრეტული თვისებები. ფიზიკისა და, საზოგადოდ, მთელი ბუნებისმეტყველების განვითარებასთან ერთად იცვლება ჩვენი

შეხედულებები მატერიის, სივრცისა და დროის სტრუქტურის შესახებ; ჩვენთვის სულ უფრო და უფრო ცნობილი ხდება კავშირი მათ შორის, მაგრამ ამ ცვლილებებს არავითარ შემთხვევაში არ შეუძლია მიგვიყვანონ მატერიის, სივრცისა და დროის ობიექტური არსებობის უარყოფამდე.

შემდეგ თავებში უფრო დაწვრილებით გავარჩევთ სივრცისა და დროის თვისებებს, ნივთიერი წერტილის მდებარეობისა და მოვლენის მოხდენის მომენტის განსაზღვრის საკითხს, მაგრამ, ცხადია, რომ თავიდანვე სივრცისა და დროის ყველა თვისების განხილვა ყოველად შეუძლებელი იქნება, რადგანაც ამისათვის ჯერჯერობით არა გვაქვს საკმარისი ფაქტობრივი მასალა. ჩვენ შევეხებით მხოლოდ ისეთ თვისებებს, რომლებიც შეიძლება ჩაითვალოს საბოლოოდ დადგენილად და რომელთა გამოყენების გარეშე შეუძლებელია ფიზიკის შესწავლის დაწყება.

თ ა ვ ი ჰ ი რ ა ვ ე ლ ი

ათვლის სისტემა. სივრცისა და ღროის გაზომვა

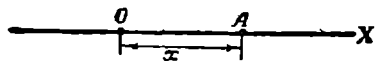
§ 1. ათვლის სისტემა და კოორდინატთა სისტემა

როდესაც ყოველდღიურ ცხოვრებაში ვსვამთ კითხვას იმის შესახებ, თუ სად იმყოფება ესა თუ ის სხეული, ვგულისხმობთ, რომ ამ სხეულის მდებარეობა უნდა განისაზღვროს რაღაც სხვა სხეულის მიმართ. თვით ცნება წერტილისა და სხეულის მდებარეობისა მოითხოვს იმის წინასწარ აღნიშვნას, თუ რომელი სხეულის მიმართ განისაზღვრება ეს მდებარეობა. ამ აღნიშვნის გარეშე კითხვას, თუ სად იმყოფება სხეული, არავითარი აზრი არ აქვს. ირგვლივ მყოფი სხეულების მდებარეობას ჩვეულებრივ ვსაზღვრავთ ოთახის, სახლის, ქუჩების და სხვა ობიექტების მიმართ. გეოგრაფიული პუნქტების მდებარეობა განისაზღვრება დედამიწაზე გავლებული მერიდიანებისა და განედების მიმართ, პლანეტების და სხვა ციური სხეულების მდებარეობა — დედამიწის, მზის და სხვა ციური სხეულების მიმართ და ა. შ. ეს გარემოება იმით არის გამოწვეული, რომ თვით სივრცის წერტილებს ან ნაწილებს არ ახასიათებს რაიმე, ერთმანეთისაგან განმასხვავებელი ნიშნები, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია მათი გარჩევა. განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. დავეშვათ, რაიმე სხეული უძრავად ძეგს მაგიდაზე. შევკვიდრდეთ თუ არა ვთქვათ, რომ ეს სხეული ყოველთვის სივრცის ერთ და იმავე ადგილასაა? პირველი შეხედვით ეს მართლაც ასეა, მაგრამ საკმარისია გავიხსენოთ, რომ დედამიწა ბრუნავს ღერძის ირგვლივ, მოძრაობს მზის მიმართ, რომელიც, თავის მხრივ, მოძრაობს ვარსკვლავების მიმართ და ა. შ., რომ მივხვდეთ, რამდენად უაზროა გამოთქმა — სხეული ყოველთვის სივრცის ერთ და იმავე ადგილასაა, თუ არ იქნა აღნიშნული რომელი სხეულის მიმართ განიხილება მისი მდებარეობა.

იმ სხეულს ან სხეულთა სისტემას, რომლის მიმართაც განიხილება ნივთიერი წერტილის ან სხეულის

მდებარეობა და მოძრაობა, ეწოდება ათვლის სისტემა. იმისდა მიხედვით, თუ რომელი სხეული არჩეული ათვლის სისტემად, სხვადასხვა იქნება განსახილველი სხეულის მდებარეობა და მოძრაობა. ერთი და იგივე სხეული შეიძლება უძრავი იყოს ერთი ათვლის სისტემის მიმართ, მოძრაობდეს თანაბრად და სწორხაზოვნად მეორის მიმართ, წრიულად—მესამის მიმართ და ა. შ. ჯერჯერობით ჩვენ არ შევზღუდავთ ათვლის სისტემის არჩევას რაიმე პირობით; ასე რომ, ათვლის სისტემად შეიძლება ნებისმიერი სხეული აირჩეს. მხოლოდ შემდეგ, ნაწილაკთა ურთიერთქმედების კანონების ჩამოყალიბებისას, საჭირო გახდება ათვლის სისტემის არჩევის შეზღუდვა.

იმის შემდეგ, რაც არჩეულია ათვლის სისტემა, ისმის ნივთიერი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის საკითხი ამ ათვლის სისტემის მიმართ. დავიწყეთ მარტივი შემთხვევის განხილვით. ვთქვათ, საჭიროა A ნივთიერი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრა რაიმე სწორ ხაზზე (ნახ. 1). ვიგულისხმობთ, რომ A წერტილი ყოველთვის ამ სწორ ხაზზე მდებარეობს. ცხადია, სწორი ხაზის აღნიშვნა, რომელზეც მდებარეობს A წერტილი, არ



ნახ. 1

არის საკმარისი მისი მდებარეობის განსაზღვრისათვის ამ სწორ ხაზზე. საჭიროა ამ სწორ ხაზზე ავარჩიოთ რაიმე O წერტილი, ათვლის სისტემის სათავე, და წერტილის მდებარეობა განვსაზღვროთ მისი საშუალებით.

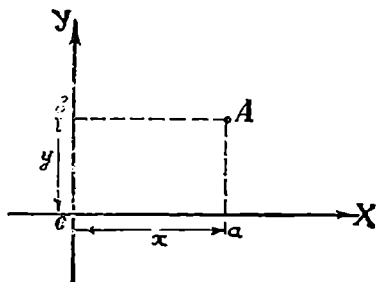
სწორი ხაზი მასზე არჩეული O წერტილით წარმოადგენს ათვლის სისტემას. A წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ვიცოდეთ OA მანძილი და მიმართულება, რომლის გასწვრივაც უნდა გადაიზომოს ეს მანძილი. ვუწოდოთ სწორ ხაზს OX ღერძი, ხოლო OA მანძილს, აღებულს სხვადასხვა ნიშნით იმისდა მიხედვით, თუ რა მიმართულებით არის იგი გადაზომილი O წერტილიდან, x კოორდინატი.

ჩვეულებრივ, იმ მიმართულებას, რომლის გასწვრივაც გადაზომილ მანძილს პლუს ნიშნით იღებენ, ისრით აღნიშნავენ (ნახაზზე O წერტილიდან მარჯვნივ). როგორც ვხედავთ, სწორი ხაზის არჩევის და მასზე სათავეს აღნიშვნის შემდეგ (ათვლის სისტემა) ამ სწორ ხაზზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ერთი რიცხვის ცოდნა— OA მანძილისა სათანადო ნიშნით, ე. ი. x კოორდინატისა. ამიტომაც ამბობენ, რომ სწორი ხაზი ერთგანზომილებიანია.

აეციოთ ახლა შემთხვევა, როდესაც განსახილველი ნაწილაკი სი-

ბრტყეზე მდებარეობს და მოითხოვება მისი მდებარეობის განსაზღვრა (ნახ. 2).

ცხადია, რომ ერთი OX ღერძი მასზე არჩეული O სათავით უკვე აღარ არის საკმარისი A წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის. მართლაც, ჩვენ ისევ შეიძლება გავზომოთ A წერტილის x კოორდინატი—ეს იქნება სათანადო ნიშნით აღებული Oa მანძილი, სადაც a არის A წერტილის OX ღერძზე მართობული პროექცია. მაგრამ ეს x კოორდინატი ვერ განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას, ვინაიდან ასეთივე კოორდინატი ექნება A და a წერტილებზე გავლებული სწორი ხაზის ყველა წერტილს (მაგალითად, თვით a წერტილს). მა-



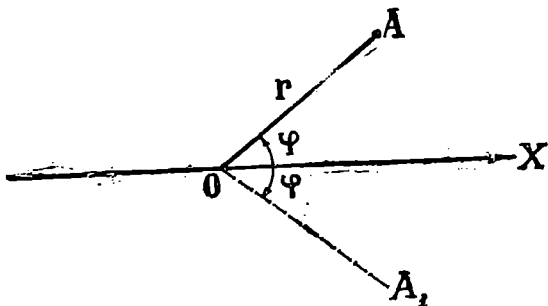
ნახ. 2

შასადამე, გარდა x კოორდინატისა, საჭიროა კიდევ სხვა სიდიდე იმისათვის, რომ ცალსახად განისაზღვროს A წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე; ამისათვის შემდეგნაირად იქცევით. O წერტილზე ავლებენ OX ღერძის მართობ ხაზს და მას OY ღერძს უწოდებენ. A წერტილიდან დაუშვებენ მართობს ამ ღერძზე და მონახავენ b წერტილს—ამ

მართობისა და OY ღერძის გადაკვეთის წერტილს (ცხადია, რომ ეს წერტილი, a წერტილის მსგავსად, არის A წერტილის პროექცია OY ღერძზე). Ob მანძილს, აღებულს სათანადო ნიშნით (ჩვეულებრივ $+$ ნიშნით, თუ იგი გადაზომილია O წერტილიდან ზევით და $-$ ნიშნით, თუ გადაზომილია ქვევით), უწოდებენ y კოორდინატს. ცხადია, რომ, თუ მოცემულია OX და OY ღერძები (O სათავით), რაც წარმოადგენს ათვლის სისტემას, და ცნობილია x და y კოორდინატები, A წერტილის მდებარეობა ცალსახად იქნება განსაზღვრული. OX და OY ღერძების სისტემას დეკარტის მართკუთხა სისტემას უწოდებენ (ღერძები ერთმანეთის მართობია), ხოლო x და y სიდიდეებს—დეკარტის კოორდინატებს.

ასეთი წესი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისა სიბრტყეზე ერთადერთი არ არის. შესაძლებელია აირჩეს ორი სხვა სიდიდე, რომლებიც აგრეთვე განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას. ასეთ სიდიდეებად შეიძლება, მაგალითად, ავიღოთ OA მონაკვეთის სიგრძე, რომელსაც r ასოთი აღვნიშნავთ (ყოველთვის დადებითია), და OA მონაკვეთისა და OX ღერძს შორის მოთავსებული φ კუთხე (ნახ. 3).

ეს ორი სიდიდე სავსებით განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე. მაგრამ აქ ყურადღება უნდა მიექცეს ერთ გარემოებას. შეიძლება მოიძებნოს ისეთი A_1 წერტილი, რომლის დაშორება O წერტილიდან ისეთივეა, როგორც A წერტილისა და რომლის OA_1 მონაკვეთი ისეთივე სიდიდის φ კუთხეს ადგენს OX ღერძთან, როგორც OA მონაკვეთი. მაშინ A და A_1 წერტილებს ერთნაირი r და φ კოორდინატები ექნებათ და შეუძლებელი იქნება მათი გარჩევა ამ კოორდინატების საშუალებით. ამ გაურკვევლობის თავიდან ასაცილებლად შემდეგნაირად იქცევან: თვლიან, რომ φ კუთხე დადებითია, თუ იგი გადაზომილია OX ღერძიდან ზემოთ (შემოწერილია OA მონაკვე-



ნახ. 3

თით OX ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით), და უარყოფითია, თუ გადაზომილია OX ღერძის ქვევით (საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით). გარდა ამისა, მიღებულია, რომ კუთხე მოთავსებული უნდა იყოს $-\pi$ და $+\pi$ შორის. r და φ კოორდინატებს პოლარული კოორდინატები ეწოდებათ და ისინი ხშირად გამოიყენებიან სიბრტყეზე წერტილების მდებარეობის განსაზღვრისათვის. კავშირი დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის აღვიღალ გამოიყვანება ნახაზიდან:

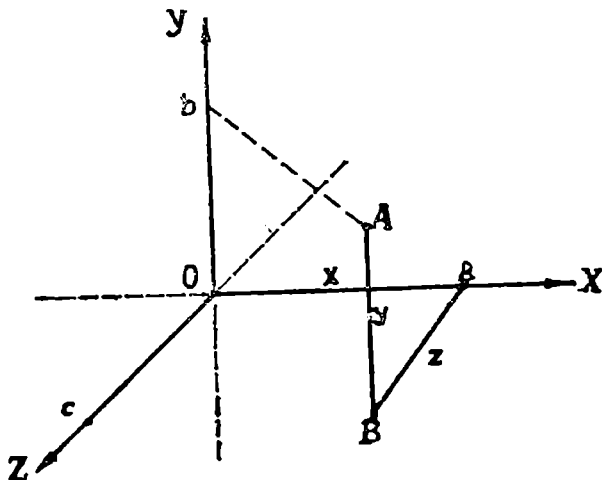
$$x = r \cdot \cos \varphi,$$

$$y = r \cdot \sin \varphi.$$

როგორც კოორდინატებიც უნდა გამოვიყენოთ სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის—დეკარტისა თუ პოლარული ან კიდევ სხვა, ყველა შემთხვევაში საჭიროა ორი კოორდინატი და არა ერთი, როგორც ეს საკმარისი იყო სწორი ხაზის შემთხვევაში. ამიტომაც ამბობენ, რომ სიბრტყე ორგანზომილებიანია.

გადავიდეთ ახლა მდებარეობის განსაზღვრაზე სივრცეში. ამ შემთხვევაში ათვლის სისტემის O სათავიდან ავლებენ სამ ურთიერთმართობ OX , OY და OZ ღერძს და წერტილის მდებარეობას საზღვრავენ სამი კოორდინატით— x , y , z , რომლებიც წარმოადგენენ ამ ღერძებზე A წერტილის პროექციებიდან— a , b და c წერტილებიდან—სათავემდე მანძილებს, აღებულს სათანადო ნიშნით (ნახ. 4).

x , y და z კოორდინატები შემდეგნაირად შეიძლება განისაზღვროს. A წერტილიდან XOZ სიბრტყეზე დაეუშვათ AB მართობი. B წერტილიდან—რომელიც XOZ სიბრტყეზე მდებარეობს, დაეუშვათ



ნახ. 4

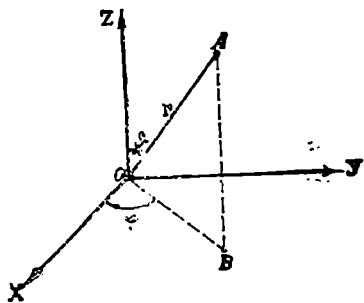
მართობი OX ღერძზე. ნახაზი გვიჩვენებს, რომ Oa არის x კოორდინატი, $AB=Ob$ y კოორდინატი, ხოლო $Ba=Oc$ z კოორდინატი.

ისევე როგორც სიბრტყის შემთხვევაში, აქაც შესაძლებელია სხვა კოორდინატთა სისტემის შემოღება.

განვიხილოთ, მაგალითად, სფერული კოორდინატების სისტემა (ნახ. 5), რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება. ერთ-ერთი კოორდინატი არის r მანძილი კოორდინატთა სათავიდან A წერტილამდე, მეორე კოორდინატი არის φ კუთხე, რომელსაც OA მონაკვეთი ქმნის OZ ღერძთან, ხოლო მესამე არის θ კუთხე, რომელსაც OA მონაკვეთის OB პროექცია XOY სიბრტყეზე ადგენს OX ღერძთან. ეს სამი სიდიდე საკვებით საზღვრავს A წერტილის მდებარეობას სივრცეში. r , φ და θ კოორდინატების ცვლილების საზღვრება შემდეგია:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

გაოდა დეკარტისა და სფერულ კოორდინატთა სისტემებისა, ხშირად გამოიყენება ცილინდრული კოორდინატების სისტემა, რომელშიც კოორდინატებად მიღებულია z კოორდინატი! (AB მონაკვეთი), ρ კოორდინატი— OB მანძილის ტოლი და φ კუთხე (ნახ. 6).



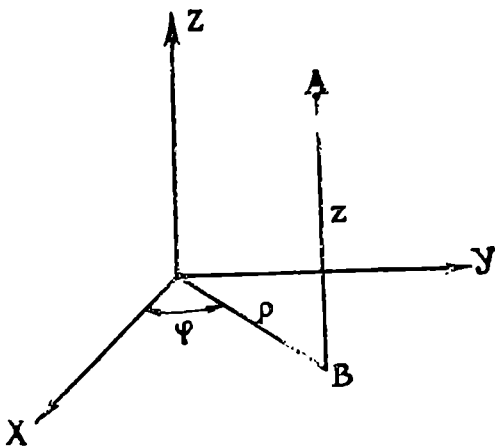
ნახ. 5

კავშირი ამ კოორდინატებს შორის ასეთია:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. & z &= z. \end{aligned}$$

დამოუკიდებლად იმისაგან, თუ რომელი კოორდინატთა სისტემა იქნება არჩეული, სივრცეში მდებარეობის განსაზღვრისათვის საჭიროა სამი კოორდინატი. ამიტომაც ამბობენ, რომ სივრცე სამგანზომილებიანია.

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში შესაძლებელია ღერძების ორნაირი განლაგება—ე. წ.

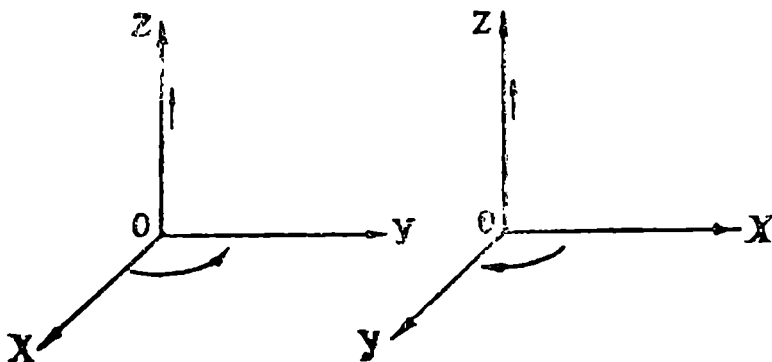


ნახ. 6

მარჯვენა და მარცხენა კოორდინატთა სისტემები. პირველ შემთხვევაში ღერძები ისეა განლაგებული, რომ როდესაც, მაგალითად,

OZ ღერძის დადებითი ბინართულებიდან დაგხედავთ XOY სიბრტყეს, OX ღერძის დამთხვევისათვის OY ღერძზე, უმცირესი კუთხის მიმართულებით, საჭირო იქნება მისი მობრუნება საათის ისრის ნობრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მარცხენა სისტემის შემთხვევაში ასეთი დამთხვევისათვის საჭირო იქნება მობრუნება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, ცხადია, რომ ერთი სისტემა მიიღება მეორიდან ერთ-ერთი ღერძის მიმართულების შეცვლით. ჩვენ თითქმის ყოველთვის გამოვიყენებთ მარჯვენა სისტემას. მარჯვენა სისტემა მას იმიტომ ეწოდება, რომ მარჯვენა ბურღის წვერის გადასანაცვლებლად OZ ღერძის გასწვრივ საჭიროა ბურღის ტარის ბრუნვა OX ღერძიდან OY ღერძისაკენ (ნახ. 7).

გადავიდეთ ახლა დროის განხილვაზე. ცხადია, რომ სხეულების მოძრაობის შესწავლისათვის, გარდა მდებარეობისა, საჭიროა ვიცოდეთ რომელ მომენტში აქვს ნაწილაკს ესა თუ ის მდებარეობა. ისევე როგორც სივრცეში მდებარეობის განსაზღვრის შემთხვევაში, დროის მომენტის განსაზღვრა მოითხოვს დროის რალაც საწყისი მომენტის არჩევას. ვუწო-



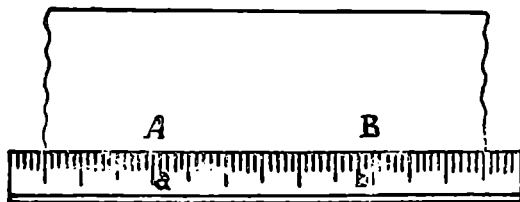
ნახ. 7

დით დროის ამ მომენტს ნულოვანი მომენტი. ყოველდღიურ ცხოვრებაში, დღე-ღამის განმელობაში დროის განსაზღვრისათვის ასეთ მომენტად შუალამეა მიღებული. იმის შემდეგ, რაც არჩეულია დროის საწყისი მომენტი, დროის სხვა მომენტების განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიცოდეთ, რა დრო გავიდა განსახილველ მომენტამდე (ან განსახილველი მომენტიდან) საწყისი მომენტიდან (საწყისი მომენტიდან). საწყისი მომენტიდან განსახილველ მომენტამდე გავიდა დროს აღნიშნავენ t ასოთი და თვლიან მას დადებითად, თუ განსახილველი მომენტი საწყისი მომენტის შემდეგ არის (მომავალი საწყისი მომენტის წინააღმდეგ), და უარყოფითად, თუ იგი

საწყის მომენტამდე (წარაული საწყისი მომენტის მიმართ). ეს ერთი t სიდიდე სავსებით საკმარისია დროის მომენტის განსაზღვრისათვის, თუკი არჩეულია ათვლის სისტემა (სხეული, საიდანაც წარმოებს დროის გაზომვა) და დროის საწყისი მომენტი. ამიტომაც ამბობენ, რომ დრო ერთგანზომილებიანია. გრაფიკულად მას წარმოადგენენ ღერძის სახით, რომელზეც არჩეულია საწყისი მომენტი და მომავლისა და წარსულის მიმართულებები. ისევე როგორც სივრცის წერტილები თავისთავად არაფრით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, არც დროის მომენტებს შორის არის რაიმე შინაგანი განსხვავება. ამიტომაც როგორც კოორდინატთა სათავის, ისე დროის საწყისი მომენტის არჩევა სავსებით ნებისმიერია.

§ 2. სივრცისა და დროის გაზომვა. ერთდროულობა

როგორც ზემოთ ვნახეთ, მას შემდეგ, რაც არჩეულია ათვლის სისტემა და დროის საწყისი მომენტი, ნაწილაკის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საჭიროა გაიზომოს x , y , z სივრცული კოორდინატები, ხოლო მოვლენის მოხდენის მომენტის განსაზღვრისათვის—საწყისი მომენტიდან განსახილველ მომენტამდე გავლილი t დრო. გამოვარკვეოთ. თუ როგორ ხდება ამ სიდიდეების გაზომვა. გაზომვის პრაქტიკულ



ნახ. 8

ხერხებს ჩვენ არ გავარჩევთ. მათი განხილვა და შესწავლა უნდა მოხდეს პრაქტიკული და ლაბორატორიული მუშაობის დროს. ჩვენ განვიხილავთ გაზომვებთან დაკავშირებულ მხოლოდ ზოგიერთ პრინციპულ საკითხს.

გავიხსენოთ როგორ ხდება პრაქტიკულად ორ წერტილს შორის მანძილის ან რაიმე სხეულის სიგრძის გაზომვა. ვთქვათ, საჭიროა გაიზომოს მანძილი სხეულის ორ, A და B წერტილს შორის (ნახ. 5). ამისათვის პირველ ყოვლისა ირჩევენ სიგრძის ეტალონს, ე. ი. ისეთ სხეულს, რომლის გარკვეული a და b წერტილებს შორის მანძილი მიღებულია ერთეულად. ჩვეულებრივ ამ ეტალონს აქვს ბრტყელი ღეროს ფორმა (სახაზავი, მეტრი, საზომი ლენტი და სხვ.). ეტალონს

შეახებენ განსახილველ სხეულს ისე, რომ ეტალონის a წერტილი თანხედეს სხეულის A წერტილს. თუ ეტალონის b წერტილი თანხედა სხეულს B წერტილს, ვიტყვი, რომ AB მანძილი ერთი ერთეულის ტოლია (თუ რა ერთეულია, ამას ჩვენთვის ახლა მნიშვნელობა არ აქვს). მაგრამ საზოგადოდ ეტალონის b წერტილი შეიძლება არ თანხედეს სხეულის B წერტილს. ამ შემთხვევაში ეტალონს რამდენჯერმე გადაზომევენ A და B წერტილებს შორის (იმ შემთხვევაში, როცა AB მანძილი ეტალონის სიგრძეზე მეტია) ან ყოფენ მას წილად ნაწილებად და ამ ნაწილების საშუალებით ახდენენ გაზომვას (მაგალითად, მეტრი იყოფა დეციმეტრებად, სანტიმეტრებად და ა. შ.). ამ გაზომვის შედეგად მიღებული რიცხვი (მთელი ან წილადი), რომელიც გვიჩვენებს რამდენჯერ მეტია გასაზომი მანძილი ეტალონის სიგრძეზე, იქნება სიგრძის რიცხვითი მნიშვნელობა. სიგრძის გაზომვა, ისე როგორც ყოველი გაზომვა, ნიშნავს გასაზომი სიდიდის შედარებას არჩეული ეტალონის სიდიდესთან.

როგორ უნდა შევარჩიოთ სხეულთა სიგრძის გასაზომად გამოსადეგი ეტალონი? ცხადია, ეტალონი ისეთი მასალისაგან უნდა იყოს დამზადებული, რომ იგი არ განიცდიდეს შესამჩნევ ცვლილებებს გარეშე მოქმედების შედეგად; ეს იმას ნიშნავს, რომ ეტალონი მყარ სხეულს უნდა წარმოადგენდეს. პრაქტიკულად მას ამზადებენ ან ფოლადისაგან, ან რაც შეიძლება მაგარი შენადნობისაგან. მაგრამ აქ ასეთი კითხვა იშის—როგორ გავიგოთ, ეტალონის სიგრძე უცვლელია თუ არა? ამისათვის, ცხადია, საჭიროა მისი სიგრძის გაზომვა და დადგენა იმისა, რომ გარეშე მოქმედებანი ვერ ცვლიან მას. მაგრამ არჩეული ეტალონის სიგრძის გაზომვა თვითონ მოითხოვს ახალ ეტალონს, რომლის მიზართაც იაეთივე მოთხოვნა უნდა იქნეს წაყენებული როგორც პირველის მიმართ. ვლებულობთ ლოგიკურ წრეს: სიგრძის გასაზომად საჭიროა ისეთი ეტალონის არჩევა, რომლის სიგრძე უცვლელი იქნება, მაგრამ იმის დასადგენად, რომ ეტალონის სიგრძე უცვლელია. საჭიროა მისი გაზომვა. როგორც ვხედავთ, სიგრძის გაზომვა პრინციპული თვალსაზრისით საკმაოდ რთულ ოპერაციას წარმოადგენს. დასმული საკითხის დეტალური განხილვა ძალიან შორს წაგვიყვანდა. ჩვენ შევეცდებით მხოლოდ ზოგადად გამოვარკვიოთ რა გარემოება იწვევს აღნიშნულ სიძნელეს.

კარგად უნდა იქნეს გაგებული, რომ თვით საკითხის დასმა ამა თუ იმ სიდიდის (ჩვენს შემთხვევაში სიგრძის) ცვლილების ან უცვლელობის შესახებ იმის აღუნიშნავად, თუ რომელი მეორე სიდიდის მიმართ განიხილება ეს ცვლილება, სრულიად უაზროა. როდესაც ვამბობთ, აღებულ სხეულის სიგრძე გაიზარდა, აუცილებლად ვგულისხმობთ, რომ ეს გაზარდა მოხდა რაღაც სხვა სხეულთან შედარებით. არ შეიძლება ლა-

პარაკი ერთ, ცალკე აღებულ სხეულას სიგრძის ცვლილებაზე; ამიტომაც იმისათვის, რომ განსაზღვროთ სიგრძის უცვლელობა, საჭიროა ორი სხეულის განხილვა. თუ ორი ეტალონი ისეთი თვისებისაა, რომ მათი სიგრძეები ტოლია, რომელ მომენტში ან რომელ მდგომარეობაშიც უნდა ვადარებდეთ მათ ერთმანეთს, ვიტყვი, რომ მათი სიგრძე უცვლელია. რასაკვირველია, აბსოლუტურად უცვლელი სიგრძის სხეულები ბუნებაში არ არის, მაგრამ ამა თუ იმ მიახლოებით ყოველთვის შეიძლება ასეთი ეტალონების დამზადება.

ძირითადი ფიზიკური სიდიდეების განსაზღვრების საკითხი კარგაღ აქვს გარჩეულია ცნობილ საბჭოთა ფიზიკოსს, აკად. მანდელშტამს. „ძირითადი ცნების განსაზღვრება იმაში მდგომარეობს, რომ წარმოვიდგინოთ გარკვეულ საგანს, ვიძლევი გაზომვის გარკვეულ პროცესს და ამ საგნით და გაზომვის პროცესით ვსაზღვრავ, თუ რას ვეწოდებ სიგრძეს და როგორ ვაბდენ მის ვაზომვას. მე უნდა მქონდეს ისეთი მყარი სხეული, ისეთი თვისების სხეული, რომ სიგრძის ჩემი განსაზღვრება რაციონალურა და ცალსახა იყოს. მაშასადამე, ბუნება არ გვაძლევს ცალსახად, თუ რა განსაზღვრება უნდა მივიღოთ, მაგრამ იმავე დროს იგი არ ვკაძლევს ნებას შემოვიღოთ ნებისმიერი განსაზღვრება. ვიძლევათ რა ამ განსაზღვრებას, ვხელმძღვანელოთ ცალსახობის მოთხოვნით და კირჩევთ ისეთ სხეულებს და გაზომვის პროცესებს, რომლებიც ცალსახობის ვარანტაის იძლევა, იძლევა თუ არა—ეს უკვე ცდის საკითხია.

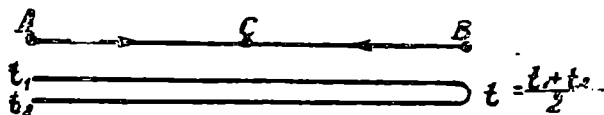
როგორც ვხედავთ, ორი დაშორებულნი მონაკვეთის ტოლობის განსაზღვრება შეიცავს გარკვეულ რეცეპტს, მაგრამ იგი ვამართლებულია, ვინაიდან რეალურა სხეულები, რომელთაანაც მე საქმე მაქვს და რომელთაც მე მყარს ვეწოდებ (მაგ. ფოლადი) საჭირო თვისებისაა. აი რას ვეწოდებს ფიზიკოსი სიგრძეს, აი როგორ პოულობს იგი იმ რიცხვებს, რომელთაც სვამს x , y და z -ის მაგიერ თავის ფორმულაში. თუ ეს რეცეპტები ან გაზომვის განმსაზღვრელი პროცესები მოცემული არ არის, ფორმულები უაზრო იქნება და ფიზიკოსს ისინი არაფერს მისცემენ“.

ყველაფერი, რაც ჩვენ ვთქვით სიგრძის გაზომვასთან დაკავშირებულნი პრინციპული სიძნელეების შესახებ, შეიძლება ითქვას დროის გაზომვის შესახებაც. ჩვენ ვიცით, რომ დრო პრაქტიკულად იზომება საათის საშუალებით. საათის (როგორც დროის საზომი იარაღის) დამახასიათებელი ის არის, რომ მასში მიმდინარეობს კანმეორებადი პროცესი და დროის შუალედი ყოველ მომდევნო კანმეორებათა შორის მიღებულაა ერთეულად. პრინციპულად არ აქვს მნიშვნელობა იმას, თუ რომელ კანმეორებად პროცესს ავარჩევთ დროის ვასაზომად. ასეთ პროცესად

შეიძლება ავარჩიოთ დედამიწის ბრუნვა ღერძის ირგვლივ ან. რაც იგივეა, ვარსკვლავების დღელამური მოძრაობა, საქანის რხევა, სინათლის პერიოდული გავრცელება ორ უძრავ საარკეს შორის, ქვიშის ზამოყრა ქვიშის საათში და სხვ. იმის შემდეგ, რაც არჩეულია დროის ეტალონი, დროის შუალედის გაზომვა ხდება ამ შუალედის საწყისი და ბოლო მომენტების და ეტალონის სათანადო მომენტების თანხვედრის დადგენით; ამ შემთხვევაშიც შეიძლება დაისვას კითხვა, გვიჩვენებს თუ არა საათი დროის ერთ და იმავე შუალედს ყოველ ორ განმეორებას შორის. შუალედების ეს ტოლობა საჭიროა იმისათვის, რომ საათმა შეძლოს თავისი დანიშნულების შესრულება. მაგრამ შემოწმება იმისა, რომ საათის მიერ ნაჩვენები დროის შუალედები ტოლი სიდიდისაა, ისევე მოითხოვს მათ გაზომვას, ე. ი. შედარებას მეორე საათის ჩვენებისთან; ამიტომაც ამ შემთხვევაშიც უაზროა ლაპარაკი საათის ჩვენების სისწორეზე, თუ არ არის მეორე საათი (ე. ი. პერიოდული მოვლენა), რომელთანაც ხდება პირველი საათის შედარება. ჩვენ ვერ დავსვამთ კითხვას იმის შესახებ, მოძრაობს თუ არა საათის ისარი თანაბრად, სანამ არ იქნება აღნიშნული რომელ მეორე საათთან ხდება ამ საათის შედარება.

ისე როგორც სიგრძის შემთხვევაში, აქაც საჭიროა ორი საათის გამოყენება. თუ ორი საათი ერთ და იმავე დროს გვიჩვენებს, როგორ პირობებშიც უნდა ვამყოფოთ ისინი, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მათი ისრები თანაბრად მოძრაობენ ერთმანეთის მიმართ. მაგრამ სიგრძისაგან განსხვავებით აქ წარმოიშობა კიდევ ერთი საკითხი. ის ფაქტი, რომ ორი საათი ერთ და იმავე დროს გვიჩვენებს, ადვილი დასადგენია იმ შემთხვევაში, როდესაც ორივე საათი სივრცის ერთ და იმავე ადგილასაა, მაგრამ, თუ ისინი დაშორებულია ერთმანეთისაგან, მათი ჩვენების ერთდროულობა უკვე მოითხოვს დამატებით განსაზღვრას. მართლაც, რას ვგულისხმობთ, როდესაც ვამბობთ, რომ ერთი მოვლენა დედამიწაზე, ხოლო მეორე მოვლენა მზეზე ერთდროულად მოხდა? მზეზე მომხდარი მოვლენის დანახვა რაიმე მომენტში, რომელიც დედამიწაზე მოთავსებული საათით არის აღნიშნული, სრულებითაც არ ნიშნავს იმას, რომ ეს მოვლენა სწორედ ამ მომენტში მოხდა, ვინაიდან სინათლის სხივს გარკვეული დრო სჭირდება იმისათვის, რომ მზიდან მოაღწიოს დედამიწამდე. მაშასადამე, მზეზე ეს მოვლენა მომხდარა უფრო ადრე, ვიდრე მის შესახებ ცნობა მოვიდა დედამიწაზე. იმის კასაგებად, თუ რამდენად ადრე მოხდა მოვლენა, საჭიროა ვიცოდეთ სინათლის გავრცელების სიჩქარე. მეორე მხრივ, სინათლის გავრცელების სიჩქარის განსაზღვრისათვის უნდა ვიცოდეთ, რას ნიშნავს სხვადასხვა ადგილას მოთავსებული საათების ჩვენებათა ერთდროულობა. სხვადა-

სხვა ადგილას მომხდარი მოვლენების ერთდროულობა ფრიად მნიშვნელოვანი ცნებაა. მისი განსაზღვრის გარეშე არ შეიძლება, მაგალითად, ისეთი ძირითადი ცნების განსაზღვრა როგორც არის სიჩქარე. ვთქვათ, A წერტილიდან რომელიმე B წერტილამდე მოძრაობს სხეული. ჩვეულებრივ, სიჩქარის გასაგებად საჭიროა A და B წერტილებს შორის მანძილის გაყოფა დროზე, რომელიც დასჭირდა სხეულს B წერტილში მისვლისათვის. A -დან გასვლის მომენტი ჩვენთვის ცნობილია A -ში მდებარე საათის საშუალებით. როგორ გავიგოთ, როდის მივიდა სხეული B წერტილში ან, რაც იგივეა, როგორ გავიგოთ, რომ B წერტილში მდებარე საათი გვიჩვენებს იმავე დროს, რასაც A -ში მდებარე საათი? საქმე ისაა, რომ ამის დადგენა შეუძლებელია, სანამ არ იქნება განსაზღვრული რას ნიშნავს სხვადასხვა ადგილას მომხდარი მოვლენების ერთდროულობა. ამ განსაზღვრების გამოყვანა სივრცის და ერთ ადგილას დროის განსაზღვრებებისაგან შეუძლებელია. სწორედ ამაშია მკვეთრი განსხვავება კლასიკურ და თანამედროვე (რელატივისტურ) ფიზიკის შეხედულებათა შორის. საქმე ისაა, რომ კლასიკური ფიზიკის მიხედვით, ერთდროულობის ცნება იმდენად თავისთავად ცხადია და ნათელი, რომ არ მოითხოვება მისი ზუსტი განსაზღვრა, ე. ი. გარკვევა იმისა, თუ რა ფიზიკური ოპერაციების მოხდენა არის საჭირო იმისათვის, რომ განისაზღვროს სხვადასხვა ადგილას მომხდარი ორი მოვლენის ერთდროულობა. კლასიკური ფიზიკა თვლიდა, რომ არსებობს აპრიორული ცნება ერთდროულობისა და როგორი ექსპერიმენტული მეთოდიც უნდა გამოვიყენოთ მისი განსაზღვრისათვის, ყოველთვის უნდა მივიღოთ ერთი და იგივე შედეგი. აინშტაინის დამსახურ-



ნახ. 9

რება სწორედ ისაა, რომ მან დაამტკიცა ამ შეხედულების მცდარობა. მან დაადგინა, რომ ერთადერთი განსაზღვრება ერთდროულობისა, რომელიც შეესაბამება ყველა საჭირო ფიზიკურ მოთხოვნებს, არის განსაზღვრება სინათლის გავრცელების საშუალებით. აინშტაინი იძლევა შემდეგ განსაზღვრებას ერთდროულობისა ან, რაც იგივეა, განსაზღვრას იმისა, რომ A და B ადგილას მოთავსებული საათები ერთ და იმავე დროს გვიჩვენებენ (ნახ. 9): თუ A წერტილიდან t_1 მომენტში (A -ში მყოფი საათის მიხედვით) იგზავნება B -კენ სინათლის მყისიერი

სიგნალი, რომელიც აღწევს B -ს და მყისიერად ირეკლება მისგან t_1 მომენტში (B -ში მყოფი საათის მიხედვით), ხოლო შემდეგ უბრუნდება A -ს t_2 მომენტში, ჩვენ ვიტყვით, რომ საათები ერთ და იმავე დროს გვიჩვენებენ, თუ

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

ასეთნაირად დაყენებულ საათებზე ამბობენ, რომ ისინი სინქრონიზებული არიან. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, თუ B საათი სინქრონიზებულია A საათთან, ხოლო C საათი B -თან, მაშინ C საათი სინქრონიზებული იქნება A საათთანაც. მას შემდეგ, რაც მოხდენილია საათების სინქრონიზაცია, აღებულ ათვლის სისტემაში უკვე შეიძლება სიჩქარის, აჩქარებისა და სხვა კინემატიკური სიდიდეების განსაზღვრა.

კლასიკური ფიზიკის თანახმად, სიგნალის გადაცემის სიჩქარის არაეითარი შეზღუდვა არ არსებობს. პრინციპში შესაძლებელია სიგნალის გადაცემა უსასრულო დიდი სიჩქარით. მაგრამ, როგორც ცდები გვიჩვენებს, ყველაზე სწრაფი სიგნალი—სინათლის ტალღაც, როგორც აინშტაინის მიერ იყო ნაჩვენები, ერთდროულობის მისი განსაზღვრება, რომელიც ემყარება სინათლის სიჩქარეზე, როგორც მაქსიმალურ შესაძლო სიჩქარეზე, რადიკალურად ცვლის ჩვენს შეხედულებებს სივრცისა და დროის ბუნებაზე.

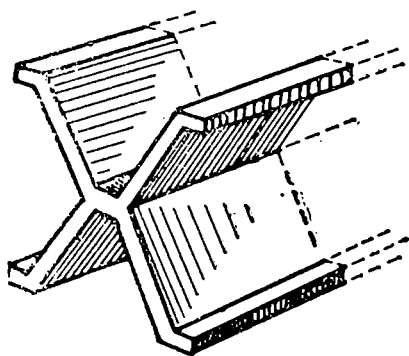
ამ საკითხებს მოკლედ შეეხებით ფარდობითობის პრინციპისადმი მიძღვნილ თავში, ახლა კი (ვინაიდან ვიხილავთ კლასიკურ ფიზიკას) დავუშვებთ, რომ სამართლიანია კლასიკური ფიზიკის დაშვება—სიგნალის უსასრულოდ დიდი სიჩქარის გადაცემის შესაძლებლობის შესახებ. მაშინ დროის სინქრონიზება შესაძლებელი იქნება ამ სიგნალის საშუალებით და ამის გამო t' თანხვდება t_1 და t_2 -ს. როგორც ამბობენ—დრო აბსოლუტურია.

§ 3. სივრცისა და დროის ეტალონები და მართულები

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სივრცისა და დროის გაზომვისათვის საჭიროა გარკვეული ეტალონების არჩევა. ყოველდღიური ცხოვრების საჭიროებისათვის სხვადასხვა ხალხს მრავალი სხვადასხვა ეტალონი ჰქონდა (არშინი, ფუტი, ადლი, მილი და სხვ.); ზოგ მათგანს ახლაც ხშირად იყენებენ, მაგრამ საბოლოოდ როგორც მეცნიერებაში, ისე ყოველდღიურ ცხოვრებაში არჩეულ იქნა სავსებით გარკვეული ეტალონები, რომლებიც საერთაშორისო ეტალონებადაა მიჩნეული.

სივრცის ეტალონად არჩეულია მეტრი. დასაწყისში მეტრი განსაზღვრული იყო როგორც დედამიწის მერიდიანის სიგრძის მეორეობილიონედი ნაწილი. მის დასადგენად საფრანგეთის აკადემიის კომისიამ

(179:—1799 წლებში) წინათ არსებული სივრცის ერთეულით (ტუა-ზით) გაზომა მერიდიანის გარკვეული ნაწილი, გამოთვალა მთელი მერიდიანის სიგრძე და დაამზადა ეტალონი ე. წ. არქივული მეტრი, რომლის ბოლოებს შორის მანძილი წარმოადგენდა (იმდროინდელი სიზუსტით) მერიდიანის სივრცის მეორმოცმილიონედ ნაწილს. მაგრამ შემდგომმა, უფრო ზუსტმა, გაზომვებმა ცხადყო, რომ ასეთნაირად დამზადებული მეტრის სიგრძე არ უდრის ზუსტად მერიდიანის სივრცის მეორმოცმილიონედ ნაწილს. თუ შენარჩუნებული იქნებოდა მეტრის პირვანდელი განსაზღვრა, მაშინ უნდა დამზადებულიყო ახალი, უფრო ზუსტი ეტალონები და მისი ასეთი განუწყვეტელი შეცვლა საჭირო იქნებოდა გაზომვის სიზუსტის ყოველი გადიდების დროს. ასეთი ცვლილების თავიდან ასაცილებლად 1872 წელს მიღებულ იქნა საერთაშორისო შეთანხმება, რომ მეტრი ეწოდოს არა მერიდიანის მეორმოცმილიონედ ნაწილს, არამედ ერთხელ და სამუდამოდ დამზადებული ეტალონის ორ დანაყოფს შორის მანძილს. ამისათვის დამზადდა არქივული მეტრის 31 ასლი (უკვე სხვა ფორმის და სხვა მა-



ნახ. 10

სალისაგან), რომლებიც შედარებულ იქნა ერთმანეთთან და არქივულ მეტრთან. გამოიკვია, რომ ერთ-ერთი მათგანი ტემპერატურის 0°-ზე ზუსტად არქივული მეტრის ტოლი იყო. ზომათა და წონათა პირველი გენერალური კონფერენციის დადგენილებით (1889) იგი მიღებულ იქნა მეტრის საერთაშორისო ეტალონად. მაშასადამე, მეტრი ახლა ასე განისაზღვრება: მეტრი არის მანძილი იმ ეტალონის ორ გარკვეულ დანაყოფს შორის, რომელიც ინახება ზომათა და წონათა საერთაშორისო ბიუროში. ქ. სევრში (პარიზის მახლობლად). საერთაშორისო მეტრი დამზადებულია 90% პლატინისა და 10% ირიდიუმის შემცველი შენადნობისაგან (იხ. ნახ. 10).

ასეთი ფორმის ღეროს ჩაღრმავებული ჰორიზონტალური ზედაპირი განსაკუთრებით ძლიერად ეწინააღმდეგება გაღუნვას. შტრიხები (რომელთა შორის მანძილიც არას მეტრია) გაკეთებულია ჰორიზონტალურ ზედაპირზე, რომელიც ზედა ჩაღრმავების ფსკერს წარმოადგენს.

დარჩენილი 30 ასლიდან ორი დატოვებულ იქნა საერთაშორისო ბიუროში ძირითადი ეტალონის საკონტროლოდ, ხოლო 28 ეტალონი კენჭისყრით განაწილდა სხვადასხვა სახელმწიფოს შორის. რუსეთს ერგო ორი ეტალონი—№ 11 და № 18. უკანასკნელი მიღებულია საბჭოთა კავშირისათვის მეტრის ძირითად ეტალონად. მისი სიგრძე ცელსიუსის 0°-ზე მხოლოდ 0,5 მკით განსხვავდება საერთაშორისო მეტრის სიგრძისაგან (მკ ასოთი აღინიშნება მიკრონი—მილიმეტრის მეათასედი ნაწილი). ხშირად ძალიან მცირე და დიდი სიგრძეების გასაზომად შემოღებულია მეტრის ჯერადი და წილადი ერთეულები: დეციმეტრი—მეტრის მეათედი, სანტიმეტრი—მეტრის მეასედი, კილომეტრი—ათასი მეტრი და ა. შ. 1-ელ ცხრილში მოყვანილია მეტრის ჯერადი და წილადი ერთეულები.

ც ხ რ ი ლ ი 1

სიგრძის ზომა	საერთაშორისო აღნიშვნა	ფარლობა ძირითად ერთეულთან
მეტრი	m	1
კილომეტრი	km	10 ³
დეციმეტრი	dm	10 ⁻¹
სანტიმეტრი	cm	10 ⁻²
მილიმეტრი	mm	10 ⁻³
მიკრონი	μ	10 ⁻⁶
მილიმიკრონი	mμ	10 ⁻⁹
ანგსტრემი	Å	10 ⁻¹⁰

უკანასკნელ წლებში მეცნიერები იმ დასკვნამდე მივიდნენ, რომ საჭიროა ისევ დაეუბრუნდეთ მეტრის განსაზღვრას გარკვეული ბუნებრივი სიგრძის საშუალებით. მეტრის განსაზღვრა საერთაშორისო პლატინა-ირიდიუმი ეტალონის საშუალებით და არა როგორც დედამიწის მერიდიანის მეოთხედის მეომილიონედ ნაწილისა, ნიშნავდა მეტრის როგორც ბუნებიდან აღებულ „ბუნებრივ“ ზომის დაკარგვას. გარდა ამისა, როგორც მიუთითა „ზომათა და წონათა XI გენერალურმა კონფერენციამ“, ვერავითარი გაუმჯობესება პლატინა-ირიდიუმის ეტალონისა ვერ იძლევა საშუალებას გადიდდეს მისი სიზუსტე უკვე მიღწეულთან შედარებით (0,1 მიკრ.), მაშინ როდესაც ბუნებრივი ეტალონის შერჩევა ატომის გამოსხივების ტალღის სიგრძის სახით იძლევა იმის შესაძლებლობას, რომ სიზუსტე გაიზარდოს თითქმის ორი რიგით.

მიღებულ იქნა აგრეთვე მხედველობაში ის გარემოებაც, რომ შესაძლებელია საერთაშორისო ეტალონის სიგრძის შეცვლა (ლითონში მიმდინარე პროცესების ან გარეშე მექანიკური თუ სითბური ზემოქმედების გამო).

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, XI გენერალურმა კონფერენციამ

მიიღო მეტრის ახალი განსაზღვრა: მეტრი არის კრიპტონ 86 ატომის მიერ გამოხივებული 1650763,73-ჯერ აღებულ ტალღის სიგრძე ვაკუუმში, რომელიც შეესაბამება $2p_{10}$ და $5d_5$ დონეებს შორის გადასვლას. ზომათა და წონათა საერთაშორისო ბიუროში და მსხვილ მეტროლოგიურ ლაბორატორიებში შექმნილია დანადგარები, რომლებიც ახორციელებს მეტრის გამოხატულს სინათლის ტალღის სიგრძეებით, კრიპტონით გაფხვნილი ნათურის საშუალებით. მეტრის ახალი განსაზღვრა შემოღებულია საბჭოთა კავშირში 1961 წლის 1 ივლისიდან.

ახლა განვიხილოთ დროის ეტალონი. ძირითად განმეორებად მოვლენას, რომელიც გამოიყენებოდა დროის ეტალონის დასადგენად, წარმოადგენდა დედამიწის ბრუნვა ლერძის ირგვლივ. ვინაიდან დედამიწის ბრუნვის დამზერა შეიძლება მხოლოდ ციურ სხეულებზე დაკვირვებით, დროის ეტალონი განისაზღვრება ან ვარსკვლავების, ან მზის მოძრაობის საშუალებით. ვარსკვლავიერი დღე-ღამე განისაზღვრება როგორც დრო დედამიწის ერთხელ შემობრუნებისა ვარსკვლავების მიმართ. ირჩევა ისეთი ვარსკვლავი, რომელსაც არ აქვს შესამჩნევი საკუთარი მოძრაობა. მაგრამ ტექნიკური მიზეზების გამო ვარსკვლავიერი დრო განისაზღვრება არა დედამიწის ბრუნვით ვარსკვლავების მიმართ, არამედ გაზაფხულის ბუნიობის წერტილის მიმართ (იხ. ასტრონომიის კურსი). ვარსკვლავიერი დღე-ღამე იყოფა 24 საათად, ყოველი საათი იყოფა 60 მინუტად (წუთად), ხოლო მინუტი 60 სეკუნდად (წამად).

ჩვეულებრივი მიზნებისათვის (ყოველდღიური გამოყენებისათვის) ვარსკვლავიერი დრო არ გამოდგება, ვინაიდან იგი არ ეთანხმება მზის ხილულ მოძრაობას, ამიტომაც შემოღებულია ე. წ. საშუალო მზიური დრო. მისი განსაზღვრა შემდგენიარად წარმოებს. ე. წ. ტროპიკული წლის განმავლობაში (გაზაფხულის ბუნიობის წერტილის მიმართ) დედამიწა ასრულებს 366,2422 ბრუნს თავისი ლერძის ირგვლივ. ამ დროის განმავლობაში დედამიწა ერთხელ შემოუვლის მზეს, რის გამოც მისი ბრუნვა რიცხვი მზის მიმართ ერთით ნაკლები იქნება. მაშასადამე, მზის მიმართ იგი შეასრულებს 365,2422 ბრუნს; აქედან ვლბულობთ შემდეგ კავშირს:

$366,2422$ ვარსკვლავიერი დღე-ღამე = $365,2422$ საშუალო მზიურ დღე-ღამეს
ან

24 ვარსკვლავიერი საათი = 23 სთ, 54 მინ, $4,091$ სეკ საშუალო მზიური დროისა.

ფიზიკაში დროის ერთეულად აღებულია საშუალო მზიური დღე-ღამის $1/86400$ ნაწილი. დროის ამ შუალედს ეწოდება სეკუნდი (იგი

კოტათი მეტია, ვიდრე ვარსკვლავიერი სეკუნდი). მისგან შეიძლება მივიღოთ წარმოებულ ერთეულები (ცხრ. 2).

მაგრამ ხანგრძლივმა დაკვირვებებმა ნათელყო, რომ დედამიწის ბრუნვა არარეგულარულ რყევებს განიცდის, რომლებიც არ შეიძლება გათვალისწინებულ იქნენ და ამიტომაც ეს ბრუნვა არ შეიძლება განიხილებოდეს როგორც დროის ბუნებრივი ეტალონი. მიიღო რა ეს გარემოება მხედველობაში XI გენერალურმა კონფერენციამ გადაწყვიტა დაეკავშირებინა სეკუნდი არა დედამიწის ბრუნვასთან ლერძის ირგვლივ, არამედ მის მოძრაობასთან მზის ირგვლივ და მიიღო დროის ეტალონად ტროპიკული წელიწადის ხანგრძლივობა, ე. ი. დროის შუალედი ურთიერთმომდევნო დღელმასწორობის მომენტებს შორის. ამიტომაც სეკუნდის ახალი განსაზღვრა ასეთია:

სეკუნდი არის ტროპიკული წლის $1/31556925,1747$ ნაწილი. 1900 წლის 0

იანვრის 12 საათისათვის ეფემერიდული

დროით. მითითება 1900

წელზე იმით აიხსნება, რომ

ტროპიკული წელი ასი წლის

განმავლობაში მცირდება და-

ახლოებით 0,1 სეკუნდით.

„თარიღი 1900 წლის 0 იანვრის 12 საათი“ შეესაბამება 1899 წლის 31 დეკემბრის შუადღეს, ასტრონომიაში მიღებული დროის ათვლის წესის მიხედვით.*

ცხრილი 2

დრო	საერთაშორისო აღნიშვნა
დღე-ღამე	— 86400 სეკ
საათი	— 3600 „
მიწუტი	— 60 „
სეკუნდი	— 1 „
მილისეკუნდი	— 0,001 „
მიკროსეკუნდი	— 10^{-6} „

* ბოლო წლებში თანდათან მტკიცდებოდა აზრი, რომ არათუ დედამიწის ბრუნვა, არამედ დედამიწის პერიოდული მოძრაობაც ორბიტზე არ გამოდგება დროის ზუსტ ეტალონად. ამიტომაც 1967 წელს XIII გენერალურმა კონფერენციამ დაადგინა ახალი განსაზღვრა სეკუნდის. იგი განისაზღვრება არა რაიმე ასტრონომიულ პერიოდული მოვლენით, არამედ სათანადოდ შერჩეული ატომის გამოსხივებულ სინათლის სიხშირით. ამისათვის შერჩეულია ცეზიუმ 133-ის ატომი და სეკუნდი შემდეგნაირად განისაზღვრება: სეკუნდი არის დროის შუალედი, რომლის განმავლობაშიც სრულდება ≈ 92631770 პერიოდი ცეზიუმ 133 ატომის გამოსხივებისა, რომელსაც ეთანადება $F=4, m_F=0$ და $F=3, m_F=0$ დონეებს შორის, რაიმე შემოთხვევების გარეშე. ამ განსაზღვრის სტაბილურობა შეიძლება შემოწმდეს 10^{-12} სიზუსტით.

§ 4. ფიზიკურ სიდიდეთა განზომილება და ერთეულთა სისტემები

ფიზიკური მოვლენების განხილვის დროს ჩვენ გვჭირდება სხვადასხვაგვარი სიდიდეების შემოღება (სიჩქარე, აჩქარება, მასა, ძალა, ენერჯია და ა. შ.) და მათ შორის კავშირის დამყარება. როგორც ირკვევა, ყოველი ახალი სიდიდე უკავშირდება წინათ შემოღებულ სიდიდეებს ან განმსაზღვრელი ფორმულით, ან ახალი ექსპერიმენტული კანონით. ფიზიკის სასკოლო კურსიდან ცნობილია, მაგალითად, რომ სიჩქარე გამოიხატება მანძილისა და დროის საშუალებით, კინეტიკური ენერჯია — მასისა და სიჩქარის საშუალებით და ა. შ. ასეთი ურთიერთკავშირი ფიზიკურ სიდიდეებს შორის გვიჩვენებს, რომ ყოველი მათგანი შეიძლება გამოვხატოთ რამდენიმე წინასწარ არჩეული სიდიდით. იმ ფიზიკურ სიდიდეებს, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება გამოიხატოს ყოველი ფიზიკური სიდიდე, ძირითადი სიდიდეები ეწოდებათ, დანარჩენები კი წარმოდგენენ ე. წ. წარმოებულ სიდიდეებს. ძირითადი სიდიდეები აღარ შეიძლება გამოვხატოთ სხვა სიდიდეების საშუალებით, მათი განსაზღვრა მხოლოდ ეტალონებით არის შესაძლებელი.

რამდენი ფიზიკური სიდიდე უნდა ავიღოთ როგორც ძირითადი? ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა კავშირი არსებობს სხვადასხვა ფიზიკურ სიდიდეებს შორის. როგორც ფიზიკურ კანონზომიერებათა ანალიზი გვიჩვენებს, ყველაზე უფრო მიზანშეწონილია სამი ძირითადი სიდიდის არჩევა. რასაკვირველია, ამ ძირითადი სიდიდეების არჩევა ნაწილობრივ ნებისმიერია, მაგრამ ისტორიულად ასეთ სიდიდეებად არჩეული იყო — სიგრძე, დრო და მასა. მათი არჩევა ძირითად სიდიდეებად საკმაოდ მიზანშეწონილია, ვინაიდან ისინი წარმოდგენენ მატერიალური სამყაროს შინაარსისა და ფორმების — მატერიის, სივრცისა და დროის დამახასიათებელ ფიზიკურ სიდიდეებს, ერთეულთა სისტემას, რომელშიც ძირითად ერთეულებად აღებულია სიგრძე, დრო და მასა, ერთეულთა აბსოლუტური სისტემა ეწოდება.

გამოსახულებას, რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორაა დამოკიდებული განსახილველი სიდიდის ერთეული ძირითადი სიდიდეების ერთეულებზე, ეწოდება ამ სიდიდის განზომილება და აღნიშნება კვადრატულ ფრჩხილებში ჩასმული სიდიდის სიმბოლოთი; მაგალითად, სიგრძის განზომილება იქნება $[l]$, დროის განზომილება $[t]$, იმპულსის განზომილება $[mv]$ და ა. შ. გამარტივების მიზნით ძირითადი სიდიდეების განზომილებისათვის შემოღებულია აღნიშვნა სათანადო დიდი ასოთი:

$$[l] = L, [t] = T, [m] = M.$$

სხვა სიდიდეების განზომილება შეიძლება გამოისახოს მათი საშუალებით. თუ რაიმე A ფიზიკური სიდიდე ძირითადი სიდიდეების საშუალებით გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$A = k l^{\alpha} t^{\beta} m^{\gamma}, \quad (I, 1)$$

სადაც k ; პროპორციულობის კოეფიციენტი, მისი განზომილებისათვის მივიღებთ:

$$[A] = [k] L^{\alpha} T^{\beta} M^{\gamma}; \quad (I, 2)$$

ამ ფორმულაში შედის k კოეფიციენტის განზომილებაც, ვინაიდან ზოგ შემთხვევაში იგი შეიძლება არ იყოს განყენებული სიდიდე; ასეთია ზოგადი ფორმულა განზომილებისათვის. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი. სიჩქარისა და აჩქარების განზომილებანი ადვილად მიიღებინა ნათი განმსაზღვრელი ფორმულებიდან:

$$[v] = LT^{-1}; \quad [a] = LT^{-2}.$$

ასევე გამოიყვანება კუთხური სიჩქარისა და აჩქარების განზომილებები:

$$[\omega] = T^{-1}, \quad [\varepsilon] = T^{-2}.$$

ადვილად შეიძლება მოიძებნოს იმპულსის განზომილება

$$[mv] = MLT^{-1}$$

და სხვა ფიზიკურ სიდიდეთა განზომილება.

ზნირად ხდება, რომ აღებული ფიზიკური სიდიდე ორი სხვადასხვა ფორმულით არის დაკავშირებული სხვა ფიზიკურ სიდიდეებთან (მ.გ. - ლითად, ძირითად სიდიდეებთან)

$$A = k_1 l^{\alpha} t^{\beta} m^{\gamma}$$

და

$$A = k_2 l^{\alpha_1} t^{\beta_1} m^{\gamma_1};$$

აქედან განზომილებისათვის მივიღებთ:

$$[A] = [k_1] L^{\alpha} T^{\beta} M^{\gamma},$$

$$[A] = [k_2] L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{\gamma_1}.$$

ეს ფორმულები ნათლად გვიჩვენებს, რომ k_1 და k_2 კოეფიციენტებს არ შეიძლება ჰქონდეს ერთი და იგივე განზომილება. თუ, მაგალითად, პირველი ფორმულის k_1 კოეფიციენტი განყენებულ სიდიდედ ჩაჯდება, k_2 კოეფიციენტის განზომილებისათვის მივიღებთ:

$$[k_2] = L^{\alpha - \alpha_1} T^{\beta - \beta_1} M^{\gamma - \gamma_1}.$$

განვიხილოთ მაგალითისათვის ძალის გამომსახველი ორი ფორმულა: ერთი, რომელიც ძალას აკავშირებს მასასა და აჩქარებასთან

$$F = ma \text{ (ნიუტონის მეორე კანონი),}$$

და მეორე, რომელიც გამოხატავს სხეულებს შორის მოქმედ გრავიტაციულ ძალას

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ (ნიუტონის მიზიდულობის კანონი);}$$

პირველ ფორმულაში პროპორციულობის კოეფიციენტი განყენებული სიდიდეა და რიცხობრივად ერთის ტოლია. ამიტომ მეორე ფორმულის γ კოეფიციენტი გარკვეული განზომილების მქონე უნდა იყოს. იგი მიიღება შემდეგი ფორმულიდან:

$$[\gamma] \frac{[m_1][m_2]}{[r]^2} = [m][a],$$

საიდანაც გვექნება:

$$[\gamma] = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

თუ γ კოეფიციენტს განყენებულ სიდიდედ ჩავთვლით, პირველ ფორმულაში საჭირო იქნება კოეფიციენტის შემოღება და მისთვის განზომილების მიწერა.

ფიზიკური სიდიდეების განზომილებათა განხილვის დროს უნდა მივქცეს ყურადღება ერთ მნიშვნელოვან გარემოებას. ვთქვათ, რაიმე A ფიზიკური სიდიდის განზომილება ცნობილია და ჩვენ ვეძებთ ამ სიდიდის დამოკიდებულებას სხვა ფიზიკურ სიდიდეებზე: $B, C, D \dots$ დავუშვათ, რომ ეს დამოკიდებულება შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$A = k B^{\alpha} C^{\beta} D^{\gamma} \dots$$

ამ ფორმულის სისწორისათვის აუცილებელია (მაგრამ საკმარისი არ არის), რომ მის ორივე მხარეს ერთნაირი განზომილება ჰქონდეს

$$[A] = [k][B]^{\alpha}[C]^{\beta}[D]^{\gamma} \dots$$

არ შეიძლება მართებული იყოს ფორმულა, რომლის მარცხენა და მარჯვენა მხარე სხვადასხვა განზომილებისაა. ორი მხარის განზომილებებს შორის განსხვავება იმისი მაჩვენებელი იქნება, რომ ფორმულა არ არის სრული, რომ დავიწყებულია დამოკიდებულება რაღაც სხვა ფიზიკურ სიდიდეზე.

ის გარემოება, რომ ტოლობის ორივე მხარეს ერთი და იგივე განზომილება უნდა ჰქონდეს, ხშირად გამოიყენება ტოლობის სახის დასადგენად, ე. ი. ფიზიკურ სიდიდეებს შორის გარკვეული დამოკიდებუ-

ლების დასამყარებლად. ამისათვის საჭიროა დაშვებულ ან დადგენილ იქნეს, თუ რა სიდიდეებზეა დამოკიდებული განსახილველი სიდიდე. მაგრამ განზომილების ტოლობის პირობა არ გვაძლევს შესაძლებლობას განვსაზღვროთ ფორმულაში შემავალი განზომილების არმქონე სიდიდეები (განყენებული რიცხვები). მაგალითისათვის განვიხილოთ მათემატიკური საქანის ფორმულა. ცნობილია და ჩვენ მიერაც იქნება შემდეგში დადგენილი, რომ l სიგრძის მქონე მათემატიკური საქანის პერიოდი გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

სადაც g არის სიმძიმის ძალის აჩქარება. ვნახოთ, ხომ არ შეიძლება ამ ფორმულის სახის დადგენა განზომილების ტოლობის პირობის საშუალებით. დავუშვათ, რომ პერიოდი დამოკიდებულია სიგრძეზე, აჩქარებაზე და საქანის მასაზე. თუ მასას m -ით აღვნიშნავთ, ეს დამოკიდებულება გამოისახება შემდეგი ზოგადი ფორმულით:

$$T = k l^\alpha m^\beta g^\gamma. \quad (1,3)$$

α , β და γ ხარისხის მაჩვენებლები ისე უნდა შეირჩეს, რომ ორივე მხარეს ერთი და იგივე განზომილება ჰქონდეს. განზომილებათა ჩასმა მოგვცემს

$$T = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma};$$

აქედან შემდეგ პირობებს ვღებულობთ:

$$\beta = 0, \quad \alpha = -\gamma, \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

მხოლოდ ასეთ შემთხვევაში ექნება მარჯვენა მხარეს დროის განზომილება. (1, 3) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$T = k l^{1/2} g^{-1/2}$$

ან

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1,4)$$

სადაც k განზომილების არმქონე სიდიდეა (როდესაც განზომილების ფორმულიდან თვით სიდიდეების დამაკავშირებელ ფორმულაზე გადავდივართ, აუცილებლად შემოვა განზომილების არმქონე სიდიდე). ჩვენ მივიღეთ საქანის პერიოდის ფორმულა. მაგრამ არასრული სახით. განზომილებათა შედარებით k სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობის განსაზღვრა შეუძლებელია. ის ფაქტი. რომ იგი 2π -ს ტოლია, შეიძლება დადგინდეს მხოლოდ მოძრაობის განტოლებების განხილვის შედეგად.

თვით ის გარემოებაც, რომ (I,4) ფორმულას ისეთივე სახე აქვს, როგორც ზუსტ ფორმულას, იმასთანაა დაკავშირებული, რომ პერიოდი ჩვენ ჩავთვალეთ მხოლოდ სიგრძეზე, მასაზე და სიმძიმის ძალის აჩქარებაზე დამოკიდებულად. რომ დაგვეშვა აგრეთვე დამოკიდებულება რხევის x ამპლიტუდაზე, სულ სხვა შედეგს მივიღებდით, მართლაც, ამ შემთხვევაში გვექნებოდა

$$T = l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma} x^{\delta};$$

ხოლო განზომილებისათვის

$$T = L^{\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma} L^{\delta};$$

საიდანაც მივიღებდით:

$$\beta = 0,$$

$$\gamma = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha + \delta = \frac{1}{2}$$

და α და δ ხარისხის მაჩვენებლების შერჩევა ნაწილობრივ ნებისმიერი იქნებოდა. სხვადასხვა არჩევის მიხედვით მივიღებთ სულ სხვადასხვა ფორმულებს:

$$T = k \sqrt{\frac{l^2}{gx}}, \quad T = k \sqrt{\frac{x^2}{gl}} \text{ და ა. შ.}$$

რასაკვირველია, ყველა ამ ფორმულას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}} f\left(\frac{x}{l}\right),$$

სადაც $f\left(\frac{x}{l}\right)$ არის განზომილების არქონე $\left(\frac{x}{l}\right)$ სიდიდის ნებისმიერი ფუნქცია, რომლის სახის განსაზღვრა განზომილებათა შედარებით შეუძლებელია.

ცხრილი 3

სიდიდე	სი (SI) სისტემის ერთეული	სგს (CGS) სისტემის ერთეული
სიგრძე	მეტრი (მ)	სმ (cm) = 10^{-2} მ
მასა	კილოგრამი (კგ)	გ (g) = 10^{-3} კგ
დრო	სეკუნდი (სე)	სეკ (s)

კარგადაა ცნობილი, რომ მეცნიერებასა და ტექნიკაში სხვადასხვა ერთეულთა სისტემები გამოიყენება. პრინციპულად არ აქვს მნიშვნე-

ლობა, რომელი სისტემა იქნება არჩეული, ვინაიდან ასეთი არჩევა სრულად ნებისმიერია. რასაკვირველია, მიზანშეწონილია ერთეულთა ისეთი სისტემის არჩევა, რომ გაზომილ სიდიდეთა მნიშვნელობანი არ გამოიხატებოდეს ძალიან დიდი ან ძალიან მცირე რიცხვებით. ერთეულთა ყოველი სისტემა დამყარებულია იმაზე, რომ იგი გარკვეულ ფიზიკურ სიდიდეებს ირჩევს როგორც ძირითადს, ხოლო დანარჩენებს თვის წამოებულ სიდიდეებად, რომლებიც დაკავშირებულია ძირითად სიდიდეებთან ან განსაზღვრებებით, ან კანონებით.

თანამედროვე მეცნიერებაში ყველაზე სრულყოფილად ითვლება ერთეულთა სისტემა, რომელშიც ძირითად სიდიდეებად მიღებულია: სიგრძე, დრო და მასა ე. წ. *LMT* სისტემა (*L*—სიგრძე, *M*—მასა, ხოლო *T*—დრო).

ძირითადი სიდიდეების არჩევის შემდეგ ისმება საკითხი, რომელი ერთეულები უფრო ხელსაყრელია როგორც სიგრძის, დროის და მასის ერთეულები? პრაქტიკული მიზნებისათვის ყველაზე ხელსაყრელია *LMT* სისტემის ძირითად ერთეულებად მეტრის, კილოგრამის და სეკუნდის არჩევა. ამიტომაც *MKS* სისტემა, რომელიც, როგორც ნაწილი, შედის ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში (*SI* სისტემა), ითვლება მექანიკური სიდიდეების ყველაზე რაციონალურ სისტემად. წმინდა და გამოყენებითი ფიზიკის საერთაშორისო კავშირის მიერ რეკომენდებულია აგრეთვე *CGS* ერთეულთა სისტემა, რომელიც ძირითად სიდიდეებად იღებს სანტიმეტრს, გრამს და სეკუნდს, ვინაიდან ამ ერთეულების ზომები ყველაზე ხელსაყრელია თეორიული და ექსპერიმენტული ფიზიკის თვალსაზრისით. ამიტომაც ჩვენს კურსში ძირითადად გამოყენებული იქნება ერთეულთა ორი სისტემა—*CGS* და *MKS* (ე. ი. საერთაშორისო სისტემა *SI*). *CGS* სისტემა გამოიყენება როგორც ძირითადი, იგი უფრო ხელსაყრელია თეორიულ და ექსპერიმენტულ ფიზიკაში. პარალელურად გამოყენებული იქნება *MKS* სისტემა. მე-3 ცხრილში მოყვანილია ამ სისტემების ძირითადი ერთეულები და მათი აღნიშვნები.

თ ა ვ ი მ ე ო რ ა ი

მოდრაობის ქინემაგიკური ელემენტები: სიჩქარე და აჩქარება

§ 5. უ მ ს ა ვ ა ლ ი

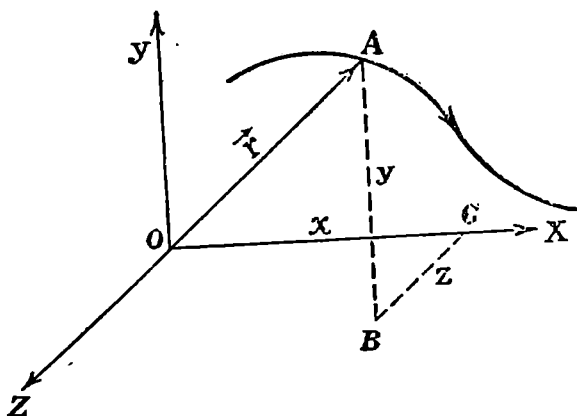
როგორც წინა თავში აღნიშნეთ, კურსს დაეწყო ნივთიერი წერტილების მოძრაობის შესწავლით და ამ მოძრაობის კანონების დადგენით. ფიზიკის იმ დარგს, რომელიც შეისწავლის ნივთიერი წერტილების და მათგან შემდგარი სისტემების მოძრაობას, მექანიკა ეწოდება. უნდა აღინიშნოს, რომ მექანიკა ამყარებს ნივთიერი წერტილების მოძრაობისა და ურთიერთქმედების ზოგად კანონებს; იგი არ არის შეზღუდული ამ ურთიერთქმედების რაიმე კერძო სახით. ამიტომაც არის შესაძლებელი მექანიკის ზოგადი კანონების გამოყენება ფიზიკის დანარჩენ დარგებში, ვინაიდან როგორი ხასიათისაც უნდა იყოს ურთიერთქმედება (გრავეტაციული, ელექტრომაგნიტური, ბირთვული და სხვ.), მისი შედეგი ყოველთვის გამოიხატება ნაწილაკების სივრცულ გადაადგილებაში.

მექანიკის წინაშე ისმის ორი ამოცანა. პირველ ყოვლისა საჭიროა ნივთიერი წერტილის ან სხეულის მოძრაობის აღწერა სივრცეში, მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეების შემოღება, კავშირის დამყარება მათ შორის და კერძო სახის მოძრაობების განხილვა. ამ ამოცანას წყვეტს მექანიკის ის დარგი, რომელსაც კინემატიკა ეწოდება. იგი არ ეწება საკითხს, თუ რა ურთიერთქმედებამ გამოიწვია ესა თუ ის მოძრაობა და არ არკვევს კავშირს მოძრაობასა და ურთიერთქმედებას შორის; ამ უკანასკნელს განიხილავს მექანიკის მეორე დარგი — დინამიკა. მისი ამოცანაა ნაწილაკთა ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდეების შესწავლა, მათი დაკავშირება მოძრაობის დამახასიათებელ სიდიდეებთან (მოძრაობის განტოლების დადგენა) და ამა თუ იმ კერძო სახის ურთიერთქმედებით გამოწვეული მოძრაობის შესწავლა.

ზოგჯერ გამოყოფენ მექანიკის კიდევ ერთ დარგს — სტატიკას, რომელიც შეისწავლის ნივთიერი წერტილებისა და სხეულების წონასწორობის პირობებს, ე. ი. არკვევს საკითხს, თუ როგორი უნდა იყოს ურთიერთქმედება, რომ ნივთიერი წერტილი ან სხეული წონასწორობაში იყოს. ვინაიდან წონასწორობა არის მოძრაობის კერძო შემთხვევა, ცხადია, რომ სტატიკა წარმოადგენს დინამიკის კერძო შემთხვევას და ამიტომ წონასწორობის საკითხს ჩვენ განვიხილავთ დინამიკის განხილვის დროს.

§ 6. მოძრაობის კინემატიკური განხილვები და ტრამეტიკური

ავარჩიოთ გარკვეული აუვლის სისტემა და განვიხილოთ ამ აუვლის სისტემის მიმართ რაიმე ნივთიერი წერტილის მოძრაობა (ნახ. 11). ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ნივთიერი წერტილის მდებარეობა სივრცეში



ნახ. 11

განისაზღვრება ან კოორდინატთა სათავედან გავლებული \vec{r} რადიუს-ვექტორით, ან x , y , z კოორდინატებით. თუ ნაწილაკი მოძრაობს, მაშინ როგორც რადიუს-ვექტორი, ისე კოორდინატები იქნებიან დროის გარკვეული ფუნქციები და მოძრაობა დახასიათდება სრულად, თუ მოცემულია ფუნქციების სახე.

განტოლებებს:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (II, 1)$$

ან

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (II, 2)$$

ეწოდებათ მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები. მათი საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ ნივთიერი წერტილის მდებარეობა დროის ყოველი მომენტისათვის. სამი სკალარული განტოლება ეკვივალენტურია ერთი ვექტორული განტოლებისა, ვინაიდან ისინი მიიღებიან (II,2) განტოლებიდან კოორდინატთა ლერძებზე \bar{r} -ის დადგენილებით. მოძრაობის განტოლებანი საზღვრავენ როგორც მრუდ წირს, რომელსაც შემოწერს ნაწილაკი მოძრაობის დროს, ისე ნაწილაკის მოძრაობას ამ წირზე. წირს, რომელსაც შემოწერს ნივთიერი წერტილი მოძრაობის დროს, ეწოდება ტრაექტორია; მისი განტოლება მიიღება მოძრაობის განტოლებებიდან დროის გამორიცხვით და კოორდინატების დაკავშირებით ერთმანეთთან. შეიძლება, მაგალითად, მოძრაობის მესამე განტოლებიდან ვიპოვოთ t , როგორც x -ის ფუნქცია, და ჩავსვათ პირველ ორ განტოლებაში. მივიღებთ x და y კოორდინატებს როგორც x კოორდინატის ფუნქციებს:

$$x = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad (II,3)$$

ეს განტოლებანი კი გამოსახავენ მრუდ წირს სივრცეში, ე. ი. მოძრაობის ტრაექტორიას.

ხშირად ტრაექტორია ცნობილია და საჭიროა მხოლოდ იმის განსაზღვრა, თუ როგორ მოძრაობს ნაწილაკი ამ ტრაექტორიაზე. ამისათვის შემდეგნაირად იქცევიან. აირჩევენ ტრაექტორიაზე რაიმე O_1 წერტილს და ნაწილაკის მდებარეობას ტრაექტორიაზე საზღვრავენ O_1 წერტილიდან ნაწილაკამდე გაზომილი რკალის სიგრძით. თუ ამ რკალის სიგრძეს s -ით აღვნიშნავთ, მოძრაობა მოცემულ ტრაექტორიაზე გამოიხატება შემდეგი განტოლებით:

$$s = \varphi(t). \quad (II,4)$$

მოძრაობის განტოლების ასეთი სახით წარმოდგენა საშუალებას მოგვცემს გავარჩიოთ და განვზოგადოთ ნაწილაკების მიერ გავლილი გზის ცნება, რაც, თავის შხრივ, გავვიადვილებს სიჩქარის ცნების დაზუსტებას.

§ 7. წრფივი მოძრაობის სიჩქარე

განვიხილოთ მოძრაობის უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც ნივთიერი ნაწილაკი მოძრაობს სწორ ხაზზე. მსჯელობის გასამარტივებლად დავუშვათ, რომ მოძრაობა წარმოებს OX ლერძის გასწვრივ (ნახ. !2). ამ შემთხვევაში მისი მდებარეობა განისაზღვრება x კოორდინატით, რომელიც ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შემთხვევაში იქნება დროის ფუნქცია და შეიძლება გამოისახოს შემდეგი ფორმულით:

$$x = f(t); \quad (II,5)$$

ამ ფუნქციის სახე დამოკიდებულია მოძრაობის ხასიათზე. ჩვენ განვიხილავთ ყველაზე მარტივ შემთხვევას, ე. წ. თანაბარ მოძრაობას. ეს მოძრაობა შემდეგი თვისებით ხასიათდება: როგორი დროის შუალედიც უნდა ავიღოთ, ამ დროის განმავლობაში გავლილი Δx მანძილის შეფარდება დროის Δt შუალედთან ყოველთვის ერთი და იგივეა

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{const} \quad (\text{II}, 6)$$

ამ სიდიდეს, ე. ი. გავლილი მანძილის შეფარდებას სათანადო დროის შუალედთან, თანაბარი მოძრაობის სიჩქარე ეწოდება. ცხადია, იგი მუდმივი სიდიდეა, ე. ი. არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მომენტში ან დროის რა შუალედის საშუალებით ხდება მისი განსაზღვრა. სიჩქარე აღინიშნება v ასოთი და ამიტომ შეიძლება დაიწეროს

$$\underline{O \quad x=f(t) \quad A \Delta x B}$$

ნახ. 12

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{II}, 7)$$

ხშირად, გავლილ მანძილს, მით უმეტეს თუ იგი სასრულია, s -ით აღნიშნავენ, ხოლო მის გასაველელად საჭირო დროს — t -თი და წინა ფორმულას შემდეგნაირად წერენ:

$$v = \frac{s}{t} \quad (\text{II}, 8)$$

v -ს ნიშანი დამოკიდებულია Δx -ის ნიშანზე, ე. ი. იმაზე, თუ რა მიმართულებით ხდება მოძრაობა. თუ $\Delta x > 0$, ე. ი. x კოორდინატი იზრდება, v სიჩქარე დადებითი იქნება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი უარყოფითი.

(II, 7), (II, 8) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ თანაბარი მოძრაობის დროს გავლილი მანძილი, თუ ცნობილია სიჩქარე და დრო:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

ან

$$s = v \cdot t \quad (\text{II}, 9)$$

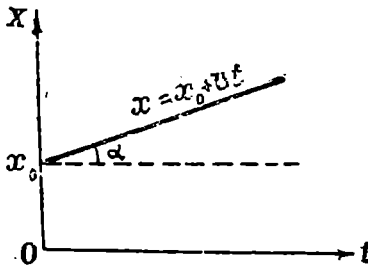
თანაბრად მოძრავი ნაწილაკის მდებარეობის განსაზღვრისათვის, ე. ი. მისი კოორდინატის განსაზღვრისათვის რაიმე t მომენტში, საჭიროა ვიცოდეთ როგორი იყო მისი კოორდინატი დროის საწყის მომენტში.

ვთქვათ, $t=0$ მომენტში ნაწილაკის კოორდინატი იყო x_0 . თუ კოორდინატს t მომენტში x -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ:

$$x = x_0 + vt \quad (\text{II}, 10)$$

ასეთი სახე აქვს x კოორდინატს, როგორც დროის ფუნქციას, თანაბარი მოძრაობის დროს. როგორც ვხედავთ, თანაბარი მოძრაობის დროს კოორდინატი დროის წრფივი ფუნქციაა.

ზოგჯერ მოძრაობის თვალსაჩინოდ წარმოდგენისათვის ხელსაყრელია მისი გამოხატვა გრაფიკის საშუალებით. ჩვეულებრივ გამოიყენება ორი გრაფიკი. პირველი მათგანისათვის აბსცისთა ლერძზე გადაზომივენ დროს, ხოლო ორდინატთა ლერძზე— x კოორდინატს (გავლილ გზას).



ნახ. 13

ამ გრაფიკს ეწოდება გზის გრაფიკი. თანაბრად მოძრავე ნაწილაკისათვის იგი მოცემულია მე-13 ნახაზზე და წარმოადგენს სწორ ხაზს, რომელიც კვეთს ორდინატთა ლერძს x_0 ორდინატის მქონე წერტილში და რომლის აბსცისთა ლერძთან დახრილობის α კუთხის ტან-

გენსი მოძრაობის v სიჩქარის ტოლია.

გამოიყენება აგრეთვე მეორე ე. წ. სიჩქარის გრაფიკი, რომელიც გამოხატავს სიჩქარის დამოკიდებულებას დროზე. ამ შემთხვევაში ორდინატთა ლერძზე გადაზომილია არა x კოორდინატი, არამედ სიჩქარე. თანაბარი მოძრაობისათვის ეს გრაფიკი მოცემულია მე-14 ნახაზზე. ვინაიდან ამ შემთხვევაში სიჩქარე მუდმივია, მისი გრაფიკი წარმოადგენს აბსცისთა ლერძის პარალელურ ხაზს, რომლის ყოველი წერტილის ორდინატი v -ს ტოლია.

გზის გრაფიკის განხილვისას ვნახეთ, რომ მისი ყოველი წერტილის ორდინატი გამოხატავს x კოორდინატს, ხოლო აბსცისთა ლერძისადმი კუთხის ტანგენსი—სიჩქარეს. სიჩქარის გრაფიკის შემთხვევაში კი ორდინატი გამოხატავს სიჩქარეს. ბუნებრივია დაისვას კითხვა, როგორ გამოიხატება გეომეტრიულად სიჩქარის გრაფიკზე x კოორდინატი, ე. ი. გავლილი მანძილი. ვინაიდან (II,10) ფორმულის თანახმად

$$x - x_0 = vt, \quad (\text{II}, 11)$$

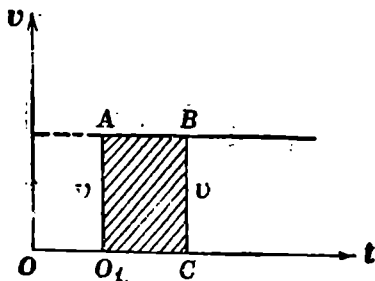
ცხადია, რომ მოცემული მომენტისათვის $x - x_0$ მანძილი გეომეტრიულად გამოიხატება O_1ABC მართკუთხედის ფართობით, რომლის ფუძე არის $O_1C = t$, ხოლო სიმაღლე — $O_1A = v$.

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი ხასიათის სწორხაზოვანი მოძრაობა. პირველ ყოვლისა შემოვიღოთ ე. წ. საშუალო სიჩქარის ცნება. ვთქვათ, დროის რაიმე Δt შუალედში, რომელიც t მომენტიდან იწყება, ნივთიერმა წერტილმა გაიარა Δx მანძილი (ნახ. 12), მაშინ სიდიდეს

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (\text{II}, 12)$$

ე. ი. გავლილი მანძილის შეფარდებას სათანადო დროსთან, ეწოდება საშუალო სიჩქარე გზის Δx მონაკვეთზე. ვინაიდან მოძრაობა არ არის

თანაბარი, საშუალო სიჩქარე დამოკიდებული იქნება არა მარტო დროის შუალედის დაწყების t მომენტზე, არამედ თვით შუალედზეც. გზის Δx მონაკვეთის სხვადასხვა ნაწილში ნაწილაკი შეიძლება სხვადასხვა სიჩქარით მოძრაობდეს; საშუალო სიჩქარე გვიჩვენებს როგორი უნდა იყოს ნაწილაკის სიჩქარე, რომ მან Δt დროში გაიაროს Δx მონაკვეთი.



ნახ. 14

სახელწოდება „საშუალო სიჩქარე“ წარმოშვა იმან, რომ Δx მონაკვეთის სხვადასხვა ნაწილზე წერტილი სულ სხვადასხვანაირად მოძრაობს. შეიძლება დასაწყისში მისი მოძრაობა იყოს სწრაფი, შემდეგ — უფრო ნელი, მაგრამ v_m სიდიდე ამის შესახებ არაფერს გვეუბნება, ვინაიდან იგი განისაზღვრება მხოლოდ გავლილი მანძილით და სათანადო დროით. მაგალითად, ორ სადგურს შორის მატარებლის მოძრაობის საშუალო სიჩქარეს გამოთვლიან მთელი მანძილის გაყოფით დროზე, მიუხედავად იმისა, რომ გზის სხვადასხვა ნაწილზე მატარებელი სხვადასხვა სიჩქარით მოძრაობს.

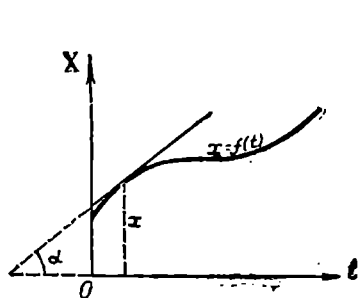
იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ნივთიერი წერტილის სიჩქარე აღებულ t მომენტში, შემდეგნაირად უნდა მოვიქცეთ. თანდათანობით ვამცირებთ Δt შუალედი, ე. ი. ვამცირებთ Δx მონაკვეთიც B წერტილის A წერტილთან მიახლოებით. რაც უფრო მცირე იქნება Δt და Δx

შუალედები, მით უფრო ნაკლებად შეიცვლება სიჩქარე ამ შუალედის განმავლობაში და მით უფრო მეტი სიზუსტით მოგვეცემს v_m სიდიდე წერტილის ნამდვილ სიჩქარეს t მომენტში. სრული სიზუსტისათვის საჭიროა გადასვლა ზღვარზე, როდესაც Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამ ზღვარს ეწოდება ნივთიერი წერტილის ნამდვილი სიჩქარე t მომენტში. თუ მას v ასოთი აღვნიშნავთ, გვექნება

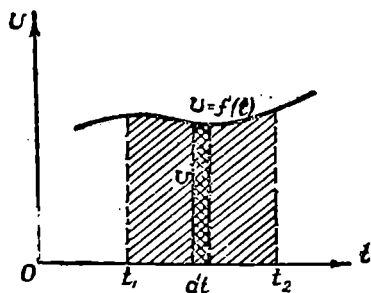
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (II,13)$$

ეს განსაზღვრა გვიჩვენებს, რომ ნამდვილი სიჩქარე არის კოორდინატის წარმოებულ დროით. როგორც ვხედავთ, ნებისმიერი (არათანაბარი) ხასიათის სწორხაზოვანი მოძრაობისათვის ადვილად შეიძლება ნამდვილი სიჩქარის პოვნა, თუ ცნობილია x კოორდინატი როგორც დროის ფუნქცია. ამისათვის საკმარისია გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია დროის მიმართ.

განვიხილოთ ახლა გზისა და სიჩქარის გრაფიკები ნებისმიერი სწორხაზოვანი მოძრაობისათვის. ცხადია, გზის გრაფიკი გამოიხატება არა სწორი ხაზით, როგორც თანაბარი მოძრაობის დროს, არამედ



ნახ. 15



ნახ. 16

მრუდი ხაზით, რომლის განტოლება იქნება $x = f(t)$. ამ მრუდის ორდინატები გვიჩვენებს x კოორდინატის მნიშვნელობებს დროის სხვადასხვა მომენტისათვის. სიჩქარე კი, როგორც კოორდინატის წარმოებულ, გამოიხატება იმ კუთხის ტანგენსით, რომელსაც მრუდის ადგილზე წერტილში გავლებული მხები ადგენს აბსცისთა ღერძთან (ნახ. 15). სიჩქარის გრაფიკის ასაგებად უნდა ვიპოვოთ სიჩქარე როგორც დროის ფუნქცია

$$v = f'(t)$$

და ავავოთ ამ ფუნქციის სათანადო მრუდი (ნახ. 16). ამ მრუდის ორდინატი სიჩქარის გამომსახველი იქნება. გამოვარკვიოთ როგორ

გამოიხატება ამ გრაფიკზე x კოორდინატი ან, უფრო სწორად, t_1 და t_2 მომენტებს შორის გავლილი მანძილი. დროის უსასრულოდ მცირე dt შუალედში გავლილი მანძილი ტოლი იქნება $v \cdot dt$ ნამრავლისა, ხოლო ეს ნამრავლი გეომეტრიულად გამოიხატება dt ფუძის და v სიმაღლის მქონე ვიწრო ფართობის საშუალებით, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით, ორი მახლობელი ორდინატიით და მრუდის მცირე რკალით.

ცხადია, მთელი გზა, გავლილი t_1 და t_2 მომენტებს შორის, გამოიხატება ინტეგრალით

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt, \quad (II, 14)$$

ხოლო გეომეტრიულად — ფართობით, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით, t_1 და t_2 მომენტების სათანადო ორდინატებით და სიჩქარის მრუდით.

§ 8. მრუდწიგული მოძრაობის სიჩქარე

განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა წერტილის მრუდწიგული მოძრაობისა სივრცეში. წერტილის მდებარეობა სივრცეში განვსაზღვროთ \vec{r} რადიუს-ვექტორით (ნახ. 17). ვთქვათ, რომელიმე t მომენტში ნივთიერი წერტილის A მდებარეობა ეკავა და მისი რადიუს-ვექტორი იყო \vec{r} . საკმაოდ მცირე Δt დროის შემდეგ, ე. ი. $t + \Delta t$ მომენტში წერტილი დაიკავებს ახალ B მდებარეობას და მისი რადიუს-ვექტორი იქნება $\vec{r} + \Delta \vec{r}$, სადაც $\Delta \vec{r}$ იქნება A -დან B -მდე გავლებული ვექტორი — რადიუს-ვექტორის ნაზრდი. სიდიდით იგი AB ქორდის ტოლია. რადიუს-ვექტორის ცვლილებას დროის ერთეულში, ე. ი. შეფარდებას

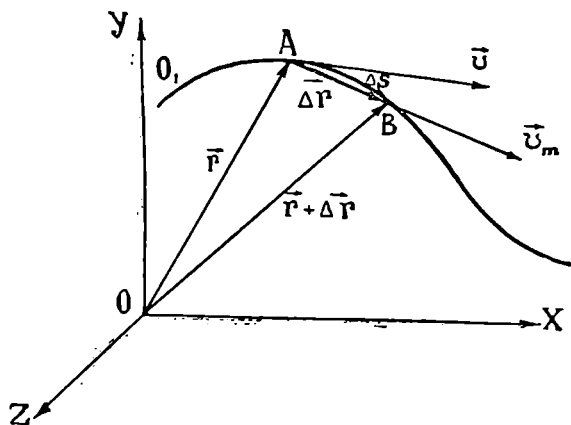
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (II, 15)$$

ეწოდება ნივთიერი წერტილის საშუალო სიჩქარე Δt შუალედში. იგი წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც მიმართულია A -დან B -კენ გავლებული მკვეთის გასწვრივ. რომ ვიპოვოთ ნამდვილი სიჩქარე, ისევე უნდა მოვიქცეთ, როგორც სწორხაზოვანი მოძრაობის განხილვის დროს. სახელდობრ, უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ. მიღებულ ზღვრულ ვექტორს, ე. ი.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (II, 16)$$

რადიუს-ვექტორის წარმოებულს დროის მიმართ ეწოდება წერტილის ნამდვილი სიჩქარე t მომენტში. მისი მიმართულების განსაზღვრისათვის უნდა გამოვარკვიოთ მკვეთის ზღვრული მდებარეობა, როდესაც B წერტილი უსასრულოდ უახლოვდება A წერტილს. ცხადია, რომ ასეთი მიახლოების შედეგად მკვეთის მიმართულება იცვლება და ზღვარში მოგვცემს A წერტილში გავლებული მხების მიმართულებას, საიდანაც დავასკვნით, რომ წერტილის სიჩქარე მიმართულია ტრაექტორიის მხებად.

გავარკვიოთ ახლა კავშირი სიჩქარესა და წერტილის მიერ დროის ერთეულში გავლილ გზას შორის. ვინაიდან წერტილი მრუდ ხაზზე მოძრაობს, მის მიერ გავლილი მანძილი უნდა გაიზომოს ამ მრუდის, ე. ი. ტრაექტორიის გასწვრივ. ავარჩიოთ ტრაექტორიაზე რაიმე საწყისი O_1 წერტილი, საიდანაც ვაწარმოებთ რკალის სიგრძის გაზომვას, და რკალის სიგრძე აღვნიშნოთ s -ით O_1 წერტილიდან A წერ-



ნახ. 17

ტილამდე, ე. ი. ნაწილაკის მდებარეობამდე t მომენტში (ნახ. 17). ცხადია, რომ s არის დროის ფუნქცია. Δt დროის განმავლობაში ნაწილაკი გაივლის ტრაექტორიის Δs მონაკვეთს (Δt დროში გავლილი გზა). შევეუფარდოთ Δs რკალს სათანადო ქორდის სიდიდით, რომელიც გამოიხატება როგორც Δr ვექტორის აბსოლუტური მნიშვნელობა $|\Delta r|$, და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც რკალის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის. როგორც ცნობილია, ეს ზღვარი ერთის ტოლია

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\overline{\Delta r}|}{\Delta s} = 1. \quad (\text{II}, 17)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ რაც უფრო მცირეა რკალი, მით უფრო უახლოვდება იგი თავისი სიდიდით ქორდის სიდიდეს. განვიხილოთ, მეორე მხრივ, საშუალო სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდე

$$|\overline{v}_m| = \frac{|\overline{\Delta r}|}{\Delta t}$$

(Δt ყოველთვის დადებითად ითვლება) და წარმოვადგინოთ იგი შემდეგი სახით:

$$|\overline{v}_m| = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{|\overline{\Delta r}|}{\Delta s}.$$

გადავიღეთ ზღვარზე, როდესაც Δt და, მაშასადამე, Δs -იც ნულისაკენ მიისწრაფვიან. თუ მივიღებთ მხედველობაში (II, 17) ფორმულას, გვექნება

$$|\overline{v}| = \lim |\overline{v}_m| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (\text{II}, 18)$$

აქ $|\overline{v}|$ არის ნამდვილი სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა. როგორც ვხედავთ, სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა, ანუ სიჩქარის სიდიდე, რომელსაც ჩვენ შემდეგში სიმარტივისათვის v -თი აღვნიშნავთ, არის რკალის წარმოებულ დროით. იგივე შეიძლება უფრო თვალსაჩინოდ, მაგრამ არაზუსტად ასე გამოითქვას: სიჩქარის სიდიდე დროის ერთეულში გავლილი მანძილის ტოლია.

ვიპოვოთ სიჩქარის პროექციები კოორდინატთა ღერძებზე. ამისათვის დაუბრუნდეთ ისევ საშუალო სიჩქარეს. მისი პროექცია OX ღერძზე მიიღება Δx ვექტორის პროექციის გაყოფით Δt დროზე

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

ვინაიდან $\overline{\Delta r}$ -ის პროექციები ღერძებზე არის Δx , Δy და Δz . ზღვარზე გადასვლა გვაძლევს

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \quad (\text{II}, 19)$$

ანალოგიურად მივიღებთ პროექციებისათვის OY და OZ ღერძებზე:

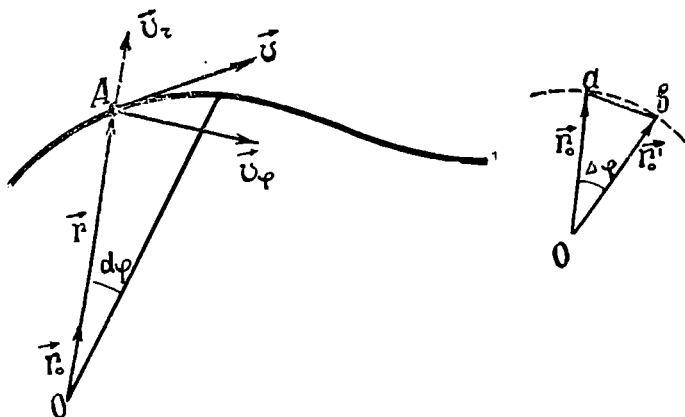
$$v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (\text{II}, 20)$$

მაშასადამე, სიჩქარის პროექციები კოორდინატთა ღერძებზე ტოლია სათანადო კოორდინატების წარმოებულებისა დროის მიმართ. სიჩქარის სიდიდისათვის შეიძლება დავწეროთ შემდეგი ფორმულა:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (\text{II}, 21)$$

§ 9. სიჩქარის რადიალური და გრძობითი მდგენელები.
კუთხური სიჩქარე

ხშირად ხელსაყრელია სიჩქარის დაშლა არა მდგენლებად კოორდინატთა ღერძების მიმართ, არამედ თვით ტრეკტორიის დამახასიათებელი მიმართულების მიმართ. განვიხილოთ შრუდწრიული მოძრაობა (ნახ. 18). A წერტილში \vec{r} რადიუს-ვექტორით სიჩქარე მიმართულია ტრეკტორიისადმი მხებად. იგი გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება \vec{r} რადიუს-ვექტორი დროის განმავლობაში. მაგრამ რადიუს-ვექტორმა შეიძლება შეიცვალოს როგორც სიდიდე, ისე მიმართულება. ამიტომაც, ცხადია, სიჩქარე ორი მდგენელისაგან უნდა შედგებოდეს. ერთი უნდა გვიჩვენებდეს, თუ როგორ იცვლება რადიუს-ვექტორის სიდიდე, მეორე კი — როგორ იცვლება მისი მიმართულება.



ნახ. 18

ამ მდგენელების განსაზღვრისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ. წარმოვიდგინოთ რადიუს-ვექტორი, როგორც მის გასწვრივ მიმართული ერთეულოვანი \vec{r}_0 ვექტორისა და მისი სკალარული სიდიდის ნამრავლი

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0. \quad (II,22)$$

პირველი მამრავლი ახსიათებს რადიუს-ვექტორის სიდიდეს, მეორე კი — მიმართულებას. სიჩქარის მისაღებად გავაწარმოთ \vec{r} დროის მიმართ, გვექნება

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}_0 + r \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (II,23)$$

ამ ფორმულით სიჩქარეები წარმოდგენილია ორი ვექტორის ჯამის სახით. გავერჩიოთ ეს შესაკრებები ცალ-ცალკე. პირველი მათგანი, რომელსაც ჩვენ \vec{v}_r -ით აღვნიშნავთ, მიმართულია თვით რადიუს-ვექტორის გასწვრივ და გვიჩვენებს როგორ იცვლება რადიუს-ვექტორის სიდიდე დროის ერთეულში. თუ \vec{r} არ იცვლის სიდიდეს (ე. ი. თუ ნივთიერი წერტილი უცვლელ მანძილზეა კოორდინატთა სათავედან), \vec{v}_r ნულის ტოლია $\left(\frac{dr}{dt} = 0\right)$; მისი მიმართულების გამო, მას რადიალური სიჩქარე ეწოდება:

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \vec{r}_0. \quad (II, 24)$$

მეორე მდგენელი დაკავშირებულია რადიუს-ვექტორის მიმართულების ცვლილებასთან და მასში მამრავლად არის $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$, ე. ი. \vec{r}_0 ერთეულოვანი ვექტორის ცვლილება დროის ერთეულში; \vec{r}_0 კი მხოლოდ მიმართულებით შეიძლება იცვლებოდეს. მაშასადამე, სიჩქარის ეს მდგენელი ახასიათებს რადიუს-ვექტორის მიმართულების ცვლილებას, ე. ი. მის შემობრუნებას O სათავის ირგვლივ. ამიტომაც ამ მდგენელს, რომელიც \vec{v}_φ -თი აღვნიშნება, ბრუნვითი სიჩქარე ეწოდება

$$\vec{v}_\varphi = r \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (II, 25)$$

გამოვარკვეით როგორია მისი სიდიდე და მიმართულება. ამისათვის განვიხილოთ ვექტორი $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ეს ვექტორი რადიუს-ვექტორის მართობია. მართლაც, ვინაიდან \vec{r}_0 ერთეულოვანი ვექტორია

$$\vec{r}_0^2 = 1,$$

გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{r}_0 \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt} = 0,$$

ე. ი. $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ და \vec{r}_0 ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია; ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ ვექტორი \vec{r}_0 -ის და, მაშასადამე

მე, თვით \vec{r} რადიუს-ვექტორის მართობა; აქედან გამომდინარეობს, რომ ბრუნვითი სიჩქარე რადიუს-ვექტორის მართობაა.

ბრუნვითი სიჩქარის სიდიდის დასადგენად შევწვილოთ კუთხური სიჩქარის ცნება. dt დროის განმავლობაში ნაწილაკი გადაინაცვლებს ტრეკტორიაზე და \vec{r} რადიუს-ვექტორი სათანადოდ მობრუნდება რაღაც $d\varphi$ კუთხით (ნახ. 18).

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (II, 26)$$

სიდიდეს, ე. ი. კუთხის წარმოებულს დროით ან, უფრო მარტივად, დროის ერთეულში მობრუნების კუთხეს კუთხური სიჩქარე ეწოდება.

კუთხური სიჩქარის საშუალებით ადვილად შეიძლება გამოვსახოთ ბრუნვითი სიჩქარის სიდიდე. მართლაც, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ ვექტორის სიდიდე კუთხური სიჩქარის ტოლია. მართლაც, რადიუს-ვექტორის მიერ $\Delta\varphi$ კუთხის შემოწერის დროს \vec{r}_0 ვექტორის ბოლო შემოწერს წრიულ (რადგან $|\vec{r}_0| = \text{const}$) \vec{ab} რკალს, რომელიც $\Delta\varphi$ კუთხის ტოლი იქნება

$$\vec{ab} = \Delta\varphi.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$\frac{|\Delta\vec{r}_0|}{\Delta t} = \frac{|\Delta\vec{r}_0|}{\vec{ab}} \cdot \frac{\vec{ab}}{\Delta t} = \frac{|\Delta\vec{r}_0|}{\vec{ab}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

ზღვარზე გადასვლის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{|\dot{d}\vec{r}_0|}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad (II, 27)$$

ვინაიდან

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}_0|}{\vec{ab}} = 1,$$

\vec{v}_φ ბრუნვითი სიჩქარის სიდიდისათვის ვღებულობთ

$$v_\varphi = r \cdot \omega. \quad (II, 28)$$

საბოლოოდ ვღებულობთ ასეთ შედეგს. მრულწრიული მოძრაობის სიჩქარე ორი მდგენელისაგან შედგება.

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi. \quad (II, 29)$$

პირველი მათგანი, რადიალური სიჩქარე

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{r}_0$$

მიმართული რადიუს-ვექტორის გასწვრივ, ახასიათებს მისი სიდიდის ცვლილებას და სიდიდით უდრის რადიუს-ვექტორის სიდიდის წარმოებულს დროით.

მეორე მდგენელი, ბრუნვითი სიჩქარე

$$\vec{v}_\varphi = r \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

მიმართული რადიუს-ვექტორის მართობულად ახასიათებს მისი მიმართულების ცვლილებას და უდრის რადიუს-ვექტორის სიდიდისა და კუთხური სიჩქარის ნამრავლს

$$v_\varphi = r\omega.$$

ვინაიდან \vec{v}_r და \vec{v}_φ ერთმანეთის მართობია, სიჩქარის სიდიდე შეიძლება ასეთი ფორმულით გამოვსახოთ:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \omega^2}, \quad (II, 30)$$

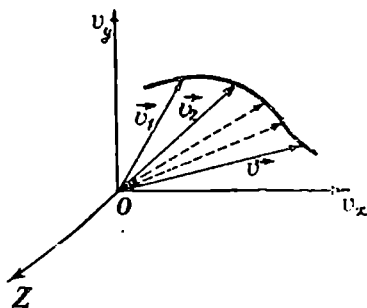
თუ მოძრაობა წრეხაზზე წარმოებს, რადიალური სიჩქარე ნულის ტოლი იქნება და სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$v = r\omega,$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში სიჩქარე ტოლი იქნება რადიუსის ნამრავლისა კუთხურ სიჩქარეზე.

მრულწირული არათანაბარი მოძრაობის დროს სიჩქარე იცვლება როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით. სიჩქარის მიმართულება ტრანსვერსულია ყოველ წერტილში განსაზღვრულია მხების მიმართულებით, რომელიც სხვადასხვაა სხვადასხვა წერტილში. ასევე შეიძლება სხვადასხვა იყოს მისი სიდიდე. სიჩქარის ცვალებადობის თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად შემდეგნაირად იქცევიან. უძრავი O წერტილიდან, როგორც სათავიდან, ატარებენ \vec{O} ვექტორებს, რომლებიც გამოხატავს მოძრავი ნაწილაკის სიჩქარეებს დროის სხვადასხვა მომენტში (ნახ. 19). ამ ვექტორების ბოლო წერტილები

მოგვცემენ მრულ წირს, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიჩქარის ბოლო წერტილის მიერ დროის განმავლობაში შემოწე-



ნახ. 19

რების გამოსათვლელად სხვადასხვა შემთხვევაში.

რილი მრული. ცხადია, ეს მრული ისეთივე კავშირშია სიჩქარის ვექტორთან როგორც ტრაექტორია რადიუს-ვექტორთან; მას ეწოდება სიჩქარის ჰოლოგრაფი¹. მისი საშუალებით ნათლად შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორ იცვლება ნაწილაკის მოძრაობის სიჩქარე სიდიდითა და მიმართულებით. შემდეგში, აჩქარების განხილვის დროს, ჩვენ გამოვიყენებთ ჰოლოგრაფს აჩქარების გამოსათვლელად სხვადასხვა შემთხვევაში.

§ 10. აჩქარება

ბუნებაში არსებულ მოძრაობებზე დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ უმეტეს შემთხვევაში ნივთიერი წერტილების ან სხეულების სიჩქარეები ცვალებადია. ერთ მომენტში წერტილს ერთი გარკვეული სიჩქარე აქვს, მეორეში—სხვა და ა. შ. ასეთი ცვლადი მოძრაობის საუკეთესო მაგალითს წარმოადგენს ვარდნილი ან ზევით ასროლილი სხეულის მოძრაობა. აღსანიშნავია, რომ სწორედ ამ მოძრაობის შესწავლის შედეგად ჩამოაყალიბა პირველად ცნობილმა იტალიელმა ფიზიკოსმა გალილეიმ აჩქარების ზუსტი ცნება და დაადგინა მოძრაობის განტოლება. ასეთივე ცვლადი სიჩქარით წარმოებს საქანის რხევა, მატარებლის, თვითმფრინავის და მრავალი სხვა სხეულის მოძრაობა.

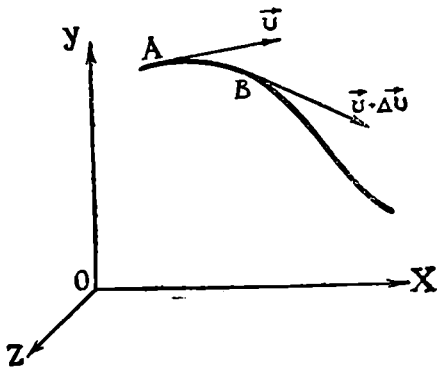
ყველა ასეთი მოძრაობის დასახასიათებლად შემოღებულია ახალი სიდიდე — აჩქარება. მისი განსაზღვრისათვის ჩვენ აღარ დავიწყებთ მარტივი სახის მოძრაობების განხილვას და პირდაპირ ზოგად შემთხვევას გავარჩევთ, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს სივრცეში ნებისმიერ მრულ წირზე (ნახ. 20). მოძრაობის დროს წერტილი შე-

¹ ჰოლოს ბერძნულად ნიშნავს გზას. ჰოლოგრაფი უნდა ნიშნავდეს გზის შემოწერს, რაც, რასაკვირველია, შინაარსით არ გამოხატავს ჩვენი მრუდის ხასიათს.

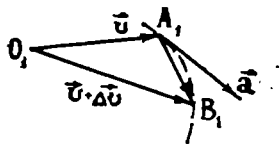
მოწერს გარკვეულ ტრაექტორიას, რომლის ყოველ წერტილში სიჩქარე გამოიხატება მხების გასწვრივ მიმართული \vec{v} ვექტორით. ეტყვათ, გარკვეულ t მომენტში სიჩქარე არის \vec{v} (ტრაექტორიის A წერტილში). საკმაოდ მცირე Δt დროის შემდეგ ნაწილაკი იქნება B წერტილში და მისი სიჩქარე გამოიხატება სხვა სიდიდისა და მიმართულების $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ ვექტორით, სადაც $\Delta\vec{v}$ იქნება სიჩქარის ნაზრდი. \vec{v} და $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ ვექტორების შესადარებლად უფრო ხელსაყრელია გავაგლოთ მათი ტოლი ვექტორები O_1 უძრავი წერტილიდან, ე. ი. ავაგოთ სიჩქარის ჰოდოგრაფი (ნახ. 21), რომელიც გვიჩვენებს როგორ იცვლება სიჩქარე მოძრაობის დროს. ცხადია, ამ ჰოდოგრაფის A_1 და B_1 წერტილებს შორის გაგლებული ვექტორი იქნება სიჩქარის $\Delta\vec{v}$ ნაზრდი. შეფარდებას

$$a_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (II.31)$$

ვუწოდოთ საშუალო აჩქარება დროის Δt შუალედში. ის მიმართული იქნება ჰოდოგრაფის მკვეთის გასწვრივ, ისე როგორც საშუალო სიჩქარე მიმართული იყო ტრაექტორიის მკვეთის გასწვრივ და გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება სიჩქარე დროის ერთეულში. აქაც,



ნახ. 20



ნახ. 21

როგორც სიჩქარის შემთხვევაში, ნამდვილი აჩქარების გასაგებად დავიწყოთ Δt შუალედის უსასრულოდ შემცირება, ე. ი. ტრაექტორიის B წერტილის მიახლოება A წერტილთან (ან, რაც იგივეა, ჰოდოგრაფის B_1 წერტილის მიახლოება A_1 წერტილთან. Δt დროის

ასეთი შემცირებით მიღებული Δv -სა და Δt -ს შეფარდების ზღვარს ეწოდება ნამდვილი აჩქარება t მომენტში და აღინიშნება \bar{a} ასოთი:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (\text{II}, 32)$$

როგორც ვხედავთ, ნამდვილი აჩქარება არის სიჩქარის წარმოებული დროის მიმართ. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, რომ აჩქარება ისეთივე კავშირშია სიჩქარესთან, როგორც სიჩქარე — რადიუს-ვექტორთან. თუ სიჩქარე გვიხსნიათებს რადიუს-ვექტორის ცვლილებას დროის ერთეულში, აჩქარება გვიხსნიათებს სიჩქარის ცვლილებას დროის ერთეულში. ადვილი მისახვედრია, რომ რადიუს-ვექტორს, ტრეკტორიასა და სიჩქარეს შორის, ერთი მხრივ, და სიჩქარეს, ჰოდოგრაფსა და აჩქარებას შორის, მეორე მხრივ, არსებობს მჭიდრო ანალოგია:

<p>რადიუს-ვექტორი \bar{r}</p> <p>ტრეკტორია — რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის მიერ შემოწერილი მრუდი.</p> <p>სიჩქარე \bar{v} — რადიუს-ვექტორის წარმოებული დროის მიმართ, ტრეკტორიის მხებად მიმართული ვექტორი:</p> $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$	<p>სიჩქარე \bar{v}</p> <p>ჰოდოგრაფი — სიჩქარის ბოლო წერტილის მიერ შემოწერილი მრუდი.</p> <p>აჩქარება \bar{a} — სიჩქარის წარმოებული დროის მიმართ, ჰოდოგრაფის მხებად მიმართული ვექტორი:</p> $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}.$
---	---

აჩქარება შეიძლება დავაკავშიროთ უშუალოდ რადიუს-ვექტორთან, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ სიჩქარე არის რადიუს-ვექტორის წარმოებული დროით:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt},$$

ჩასმა (II,32) ფორმულაში მოგვცემს

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \quad (\text{II}, 33)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ აჩქარება შეიძლება განისაზღვროს როგორც რადიუს-ვექტორის მეორე წარმოებული დროის მიმართ.

ვიპოვოთ აჩქარების პროექციები კოორდინატთა ლერქებზე. ამისათვის უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც სიჩქარის პროექციების განსა-

ზღვრის დროს; უნდა განვიხილოთ საშუალო აჩქარება \bar{a}_m და დავაგეგმილოთ იგი კოორდინატთა ღერძებზე

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \quad a_{mz} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

და გადავიღეთ ზღვარზე, როდესაც Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ, მივიღებთ

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (II, 34)$$

ე. ი. აჩქარების პროექციები ღერძებზე ტოლია სიჩქარის სათანადო პროექციების პირველი წარმოებულებისა დროით ან სათანადო კოორდინატების მეორე წარმოებულებისა დროის მიმართ.

აჩქარების სიდიდისათვის მივიღებთ

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (II, 35)$$

თუ ნაწილაკი OX ღერძის გასწვრივ მოძრაობს, აჩქარებისათვის მივიღებთ

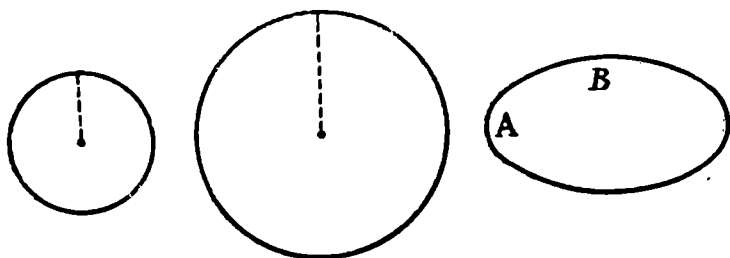
$$a = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

§ 11. წირის სიმრუდე

სანამ უფრო დაწვრილებით განვიხილავდეთ მრუდწირული მოძრაობის აჩქარებას, შევისწავლოთ მრუდი წირის დამახასიათებელი გეომეტრიული თვისება — სიმრუდე. როდესაც ვუყურებთ სხვადასხვა მრუდ წირს ან ერთ და იმავე წირის სხვადასხვა ნაწილს, ნათლად ვამჩნევთ, რომ ერთი მათგანი უფრო მეტადაა გამრუდებული, მეორე კი ნაკლებად. მაგალითად, ცხადია, რომ სხვადასხვა რადიუსის ორ წრეხაზს შორის, პატარარადიუსიანი წრეხაზი მეტად გამრუდებულია, ვიდრე დიდრადიუსიანი. ასევე, ელიფსის B წერტილის მახლობლად რკალი ნაკლებად გამრუდებულია, ვიდრე A წერტილის მახლობლად (ნახ. 22).

თვალსაჩინოდ ამას იმით გამოხატავენ, რომ B წერტილის მახლობლად წირის ნაწილი უფრო ჰგავს წრფეს, ვიდრე A წერტილის მეზობელი ნაწილი. მაგრამ ასეთი თვალსაჩინო წარმოდგენა წირის

სიმრუდეზე არ არის საკმარისი. მისი რაოდენობრივი დახასიათებისათვის საჭიროა შემოვიღოთ სათანადო სიდიდე, რომელიც დაგვიხასიათებს წირის სიმრუდეს.



ნახ. 22

შევადაროთ ამისათვის ერთმანეთს წრეზე და მრუდი წირი (ნახ. 23, 24). წრფის რაიმე A წერტილიდან მის გასწვრივ გავვლოთ ერთეულოვანი სიგრძის \vec{c} ვექტორი. ამ ვექტორის მიმართულება გვიჩვენებს წრფის მიმართულებას A წერტილის მახლობლად. თუ ამ ერთეულოვან ვექტორს (მგეზავს) გაუავიტანთ წრფის სხვა, მაგალითად, B წერტილში, იგი არ შეიცვლას თავის მიმართულებას, ე. ი. წრფის

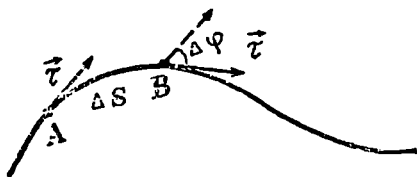


ნახ. 23

გასწვრივ აღებული ერთეულოვანი ვექტორი არ იცვლის მიმართულებას ასეთი გადანაცვლების დროს. სწორედ ეს თვისებაა დამახასიათებელი წრფისათვის, იგი გვიჩვენებს, რომ წრფე არ არის გამრუდებული.

განვიხლოთ მრუდი წირი (ნახ. 24). ავიღოთ მისი რაიმე \vec{AB} რკალი და დაეხასიათოთ მისი გამრუდება. A წერტილიდან მხების მიმართულებით გავატაროთ ერთეულოვანი ვექტორი. ეს ვექტორი, შეიძლება ითქვას, გვიჩვენებს მრუდის მიმართულებას A წერტილის მახლობლად. რკალის მეორე B წერტილში გავვლოთ ასეთივე ერთეულოვანი ვექტორი. ცხადია, წრფისაგან განსხვავებით, მრუდი წირის შემთხვევაში A და B წერტილებში გავლებული მხებები და მათი სათანადო ერთეულოვანი ვექტორები სხვადასხვა მიმართულების იქნე-

ბიან. B წერტილში გავლებული ერთეულოვანი ვექტორი მობრუნებული იქნება რაღაც კუთხით A წერტილში გავლებული ერთეულოვანი ვექტორის მიმართ. მხებისა და, მაშასადამე, ერთეულოვანი ვექტორის ეს მობრუნება წირის გასწვრივ გადანაცვლების დროს არის სწორედ ამ წირის გამრუდების დამახასიათებელი. მაგრამ უნდა მიექცეს ყურადღება იმ გარემოებას, რომ მხები ერთეულოვანი ვექტორის მობრუნების კუთხე დამოკიდებულია არა მარტო გამრუდების სიდიდეზე, არამედ იმაზეც, თუ რა მანძილზე ხდება გადანაცვლება წირის გასწვრივ. ამიტომაც წირის რაიმე ორი ნაწილის სიმრუდის შესადარებლად შემდეგნაირად იქცევიან: განსახილველ ადგილებში იღებენ წირის ტოლ მონაკვეთებს და ადარებენ ერთმანეთს სათანადო მობრუნების კუთხეებს.



ნახ. 24

ვთქვათ, გვსურს წირის Δs სიგრძის AB რკალის სიმრუდის განსაზღვრა; ამ რკალის ბოლო წერტილებში გავატაროთ მხები ერთეულოვანი ვექტორები და გამოვთვალოთ მათ შორის მოთავსებული $\Delta\varphi$ კუთხე (მობრუნების კუთხე). ამ მობრუნების კუთხის შეფარდებას რკალის Δs სიგრძესთან ეწოდება AB რკალის სიმრუდე. თუ სიმრუდეს K ასოთი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$K_{\text{საშ.}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \quad (\text{II}, 36)$$

ეს სიდიდე გვიჩვენებს რა კუთხით მობრუნდება მხები ერთეულოვანი ვექტორი წირის გასწვრივ მანძილის ერთეულზე გადანაცვლების დროს. ცხადია, $K_{\text{საშ.}}$ ახასიათებს მთელი AB რკალის სიმრუდეს და არაფერს გვეუბნება მისი ცალკეული ნაწილების სიმრუდის შესახებ. თუ გვსურს გავიგოთ სიმრუდე წირის ადებულ წერტილში, უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც ვიქცეოდით, როდესაც ვპოულობდით ნამდვილ სიჩქარეს საშუალო სიჩქარის საშუალებით. ამისათვის უნდა დავიწყოთ AB რკალის შემცირება (B წერტილის A წერტილთან მიახლო-

გბა) და, ბოლოს, უნდა მოვხდინოთ ზღვარზე გადასვლა, როდესაც Δs რკალი მისწრაფვის ნულისაკენ; აქედან წირის სიმრუდისათვის, აღებულ წერტილში, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

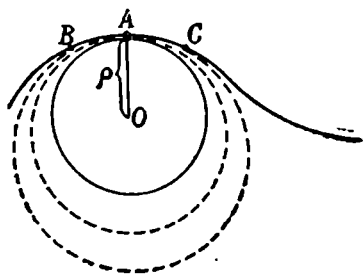
$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (II,37)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები. ცხადია, წრფის შემთხვევაში სიმრუდე ნულის ტოლია. მართლაც, ამ შემთხვევაში მხები ერთეულოვანი ვექტორი არ იცვლის მიმართულებას, ე. ი. $\Delta \varphi = 0$ და სიმრუდეც ნულის ტოლი იქნება. განვიხილოთ ახლა ფრიალ მნიშვნელოვანი შემთხვევა წრეხაზისა. ვინაიდან ამ შემთხვევაში მხები რადიუსის მართობია, A და B წერტილებში გავლებულ მხებ ერთეულოვან ვექტორებს შორის კუთხე სათანადო რადიუსებს შორის მდებარე კუთხის ტოლი იქნება. გარდა ამისა, წრეხაზის რკალისათვის გვაქვს ფორმულა $\Delta s = R \Delta \varphi$, სადაც R არის წრის რადიუსი; აქედან სიმრუდისათვის მივიღებთ

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{1}{R} \frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi} = \frac{1}{R}, \quad (II,38)$$

როგორც ვხედავთ, წრეხაზის სიმრუდე მისი რადიუსის შებრუნებულ სიდიდის ტოლია. რაც უფრო დიდია წრეხაზის რადიუსი, მით უფრო მეტად ჰგავს წრეხაზის ნაწილი წრფის ნაწილს, ე. ი. მით უფრო ნაკლებია მისი სიმრუდე. უნდა აღინიშნოს, რომ წრეხაზის ყველა წერტილში სიმრუდე ერთი და იგივეა და ასეთი მუდმივი სიმრუდის წირი მხოლოდ ორია — წრფე და წრეხაზი (ბრტყელ წირებს შორის).

წრეხაზისათვის მიღებული შედეგი, რომ სიმრუდე რადიუსის შებრუნებული სიდიდეა, შემდეგ საკითხებს სვამს. ხომ არ შეიძლება ნებისმიერი წირისათვის შემოვიღოთ რადიუსის შესაესი სიდიდე, რომელიც დაგვეხმარება წირის სიმრუდის დახასიათებაში? ამისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ. ვთქვათ, გვსურს დავახასიათოთ წირის სიმრუდე A წერტილის მახლობლად



ნახ. 25

(ნახ. 25). გამოვიყოთ A წერტილის [ირველივე BAC რკალი. თუ ეს რკალი საკმაოდ მცირეა, იგი შეიძლება მიახლოებით განვიხილოთ

როგორც A , B და C წერტილებზე გავლებული წრეხაზის რკალი, O იყოს ამ წრეხაზის ცენტრი, ხოლო R —მისი რადიუსი, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ BAC რკალის სიმრუდე მიახლოებით ტოლი იქნება ამ წრეხაზის სიმრუდისა, ე. ი. R -ის შებრუნებული სიდიდისა

$$K_{\text{სა}} \approx \frac{1}{R}.$$

თუ გვსურს გამოვთვალოთ სიმრუდე A წერტილში, უნდა თანდათანობით დავეახლოვოთ B და C წერტილები A წერტილს. ამ დაახლოებასთან ერთად შეიცვლება მათზე გავლებული წრეხაზი, მისი ცენტრი და სათანადო რადიუსი. ზღვარში, როდესაც B და C წერტილები A წერტილს თანხედებიან, მათზე გავლებული წრეხაზი გადავა რაღაც ზღვრულ წრეხაზში. თუ ამ ზღვრული წრეხაზის რადიუსს ρ -თი აღვნიშნავთ, სიმრუდისათვის A წერტილში მივიღებთ

$$K = \frac{1}{\rho}, \quad (\text{II}, 39)$$

ρ -ს ეწოდება სიმრუდის რადიუსი. მაშასადამე, სიმრუდის რადიუსი სიმრუდის შებრუნებული სიდიდეა და ამავე დროს—იმ ზღვრული წრეხაზის რადიუსი, რომელიც მიიღება როგორც ზღვარი ალებულ წერტილზე და მის მახლობელ ორ წერტილზე გავლებული წრეხაზისა, ამ მახლობელი წერტილების ალებულ წერტილთან მიახლოების დროს. თვით ამ ზღვრული წრეხაზის ცენტრს სიმრუდის ცენტრი ეწოდება.

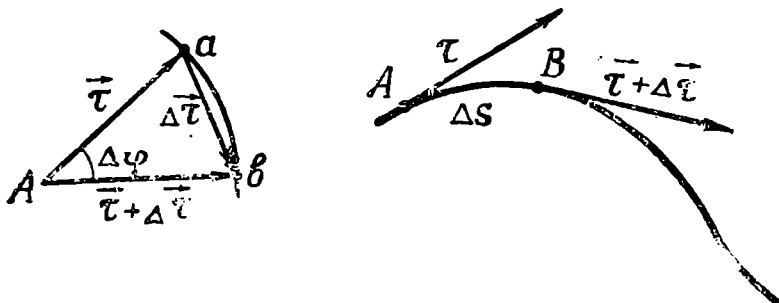
შემდგენისათვის ხელსაყრელი იქნება სიმრუდის გამოსახვა არა კუთხის, არამედ თვით ერთეულოვანი მხები ვექტორის წარმოებულის საშუალებით. როგორც ზემოთ ვთქვით, წირის გასწვრივ Δs რკალით გადანაცვლების შედეგად \vec{r} ვექტორი შეიცვლება (მიმართულებით) და B წერტილში იგი იქნება $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. 26-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ერთ წერტილში თავმოყრილი \vec{r} და $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ ვექტორები. განვიხილოთ \vec{r} -ს წარმოებულ რკალის მიმართ. შევადგინოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}.$$

ეს შეფარდება წარმოადგენს ვექტორს, მიმართულს $\Delta\vec{r}$ -ს გასწვრივ. წარმოებულის მისაღებად უნდა გადავიღეთ ზღვარზე, როდესაც Δs ნულისაკენ მიისწრაფვის

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$$

გამოვარკვიოთ $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის მიმართულება. ცხადია, $\vec{\tau}$ ვექტორის სიდიდის უცვლელობის გამო, $\Delta\vec{\tau}$ ადგენს ორ კუთხეებს $\vec{\tau}$ და $\vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$ ვექტორებთან, ე. ი. aAb სამკუთხედში a და b წვეროებთან კუთხეები ტოლია. ზღვარზე გადასვლისას $\Delta\vec{\tau}$ ნულისაკენ მიისწრაფ-



ნახ. 26

ვის, სამკუთხედი თანდათან ვიწროვდება, $\Delta\varphi$ კუთხე მიისწრაფვის ნულისაკენ და, მაშასადამე, a და b წვეროებთან კუთხეები მართი კუთხისაკენ მიისწრაფვიან (მათი ჯამი პლუს $\Delta\varphi$, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის, π -ს ტოლი უნდა იყოს). მაშასადამე, ზღვარში $\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ ვექტორი $\vec{\tau}$ ვექტორის მართობი ხდება და ამიტომაც ასეთივე

მიმართულების იქნება $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორიც. მხები ერთეულოვანი ვექტორის წარმოებული რკალით მხების მართობია; ეს შედეგი შემდეგნაირადაც შეიძლება მივიღოთ. ვინაიდან $\vec{\tau}$ ერთეულოვანი ვექტორია, მისი სკალარული ნამრავლი თავის თავთან ერთის ტოლი იქნება

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1.$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა რკალის მიმართ, მივიღებთ

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0, \quad (\text{II}, 40)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორი $\vec{\tau}$ ვექტორის მართობია (ვინაიდან მათი სკალარული ნამრაველი ნულია).

გამოვარკვეით ახლა როგორია $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის სიდიდე, ე. ი. გამათვალოთ შემდეგი ზღვარი:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right|.$$

გადავწეროთ ეს გამოსახულება ასე:

$$\lim \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\overline{ab}} \cdot \frac{\overline{ab}}{|\Delta s|},$$

სადაც \overline{ab} არის $\vec{\tau}$ ვექტორის ბოლო წერტილის მიერ შემოწერილი რკალი. ვინაიდან $\vec{\tau}$ ვექტორის სიგრძე უცვლელია, \overline{ab} იქნება წრეხაზის რკალი და ამიტომ მასა და $\Delta \varphi$ ცენტრალურ კუთხეს შორის კავშირი იქნება

$$\overline{ab} = \vec{\tau} \cdot \Delta \varphi.$$

მაგრამ $|\vec{\tau}|=1$ და ამიტომ $\overline{ab}=\Delta \varphi$, აქედან მივიღებთ

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\overline{ab}} \cdot \lim_{|\Delta s|} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|}.$$

პირველი მამრავლი, როგორც ზღვარი ქორდისა და რკალის შეფარდებისა, ერთის ტოლია და ამიტომ გვექნება

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (\text{II}, 41)$$

მაგრამ მხები ვექტორის მობრუნების კუთხის წარმოებული რკალით წირის სიმრუდეა და, მაშასადამე, ვღებულობთ

$$K = \frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|, \quad (\text{II}, 42)$$

ე. ი. სიმრუდე არის მხები ერთეულოვანი ვექტორის რკალის მიმართ წარმოებულის სიდიდე. როგორც ვხედავთ, მხები ერთეულოვანი ვექტორის რკალის მიმართ წარმოებული მიმართულია მხების მართობულად და სიდიდით სიმრუდის ტოლია. მისი მიმართულება გვიჩვენებს წირის ჩაზნეჭილობის მიმართულებას (სიმრუდის ცენტრის მდებარეობის მიმართულებას).

§ 12. აჩქარების მხევი და ნორმალური მდგენელები

უკვე აღვნიშნეთ, რომ აჩქარება ახასიათებს სიჩქარის ცვლილებას. მაგრამ სიჩქარე, როგორც ვექტორული სიდიდე, ხასიათდება სიდიდითა და მიმართულებით. ამიტომაც, თუ წერტილის სიჩქარე ცვალებადია, შეიძლება შეიცვალოს როგორც მისი სიდიდე, ისე მიმართულება. ამის შესაბამისად აჩქარება ორი მდგენელისაგან უნდა შედგებოდეს. ერთი მდგენელი უნდა ახასიათებდეს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას, ხოლო მეორე — მიმართულების ცვლილებას. ამ მდგენელების გამოყოფისა და შესწავლისათვის წარმოვადგინოთ წერტილის სიჩქარის ვექტორი შემდეგი სახით:

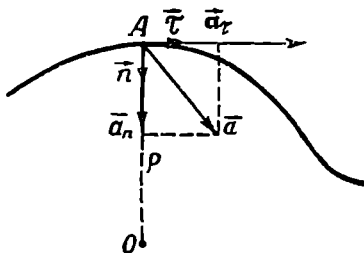
$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}, \quad (II, 43)$$

სადაც v არის სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდე, ხოლო $\vec{\tau}$ — მისი მიმართულების მაჩვენებელი მხევი ერთეულოვანი ვექტორი. აჩქარების გამოსათვლელად \vec{v} უნდა გავაწარმოოთ დროის მიმართ. ვინაიდან \vec{v} არის ორი მამრავლის ნამრავლი, მივიღებთ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (II, 44)$$

განვიხილოთ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი შესაკრებები ცალ-ცალკე. პირველი მათგანი წარმოადგენს $\vec{\tau}$ ერთეულოვანი ვექტორის, ე. ი. მხევის გასწვრივ მიმართულ ვექტორს, ხოლო მისი სიდიდე უდრის სიჩქარის სიდიდის წარმოებულს დროის მიმართ. ცხადია, იგი ახასიათებს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას. აღვნიშნოთ იგი \vec{a}_τ -თი

და ვუწოდოთ მხევი, ანუ ტანგენციალური აჩქარება, ვინაიდან იგი მხევის გასწვრივ არის მიმართული (ნახ. 27).



ნახ. 27

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}. \quad (II, 45)$$

იგი შეიძლება მიმართული იყოს როგორც სიჩქარის გასწვრივ, ისე მის საწინააღმდეგოდ, იმისდა მიხედვით, თუ

როგორია $\frac{dv}{dt}$ -ს ნიშანი, ე. ი. იზრდება თუ კლებულობს სიჩქარის სიდიდე.

განვიხილოთ ახლა მეორე შესაქრები, რომელსაც ჩვენ, \vec{a}_n -ით აღვნიშნავთ:

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

გადავწეროთ ეს გამოსახულება შემდეგი სახით:

$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

და მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\frac{ds}{dt} = v$, მაშინ

$$\vec{a}_n = v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \quad (\text{II,46})$$

გამოვარკვეოთ როგორია აჩქარების ამ მდგენელის სიდიდე და მიმართულება. თუ წინა ტოლობას სკალარულად ჩავწერთ, გვექნება

$$a_n = v^2 \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|.$$

მაგრამ წინა პარაგრაფის შედეგების თანახმად $\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|$ არის ნაწილაკის მიერ შემოწერილი წირის, ე. ი. ტრაექტორიის სიმრუდე, რომელიც სიმრუდის რადიუსის საშუალებით შემდეგნაირად შეიძლება დაიწეროს:

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \frac{1}{\rho};$$

აქედან მივიღებთ

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (\text{II,47})$$

გავარკვეოთ \vec{a}_n -ის მიმართულება. (II,46) ფორმულის თანახმად მისი მიმართულება თანხვედება $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის მიმართულებას. მაგრამ ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ეს ვექტორი ყოველთვის $\vec{\tau}$ ვექტორის, ე. ი. მხების მართობულად არის მიმართული. $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის მიმართულებას ნორმალის მიმართულება ეწოდება და ამიტომ აჩქარების \vec{a}_n მდგენელს ნორმალური აჩქარება ეწოდება. თუ ნორმალის გასწვრივ

გატარებულ ერთეულოვან ვექტორს \vec{n} -ით აღვნიშნავთ, ნორმალური აჩქარებისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \quad (\text{II, 48})$$

მაშასადამე, მივიღებთ, რომ მრუდწირული მოძრაობის დროს სრული აჩქარება შეიძლება ორ მდგენელად დაიშალოს. ერთი მათგანი, მხები აჩქარება, $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$, მიმართულია მხების გასწვრივ და გვიჩვენებს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას. მეორე მდგენელი, ნორმალური აჩქარება $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$, მიმართულია ნორმალის გასწვრივ სიმრუდის ცენტრისაკენ (ყოველთვის წირის ჩაზნექილობისაკენ) და გვიჩვენებს სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას. სრული აჩქარების ფორმულა ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \quad (\text{II, 49})$$

ვინაიდან \vec{a}_τ და \vec{a}_n ურთიერთმართობია, აჩქარების სიდიდისათვის გვექნება

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \quad (\text{II, 50})$$

წრიული მოძრაობის შემთხვევაში $\rho = r$ და ვინაიდან, გარდა ამისა, სრული სიჩქარე $v = r\omega$, ნორმალური აჩქარების ფორმულას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\vec{a}_n = r \omega^2 \vec{n} \quad (\text{II, 51})$$

ნორმალური აჩქარების არსებობა შეიძლება გამოვამჟღავნოთ და მისი ფორმულა ადვილად გამოვიყვანოთ შემდეგი მარტივი მსჯელობიდან. მრუდე ტრაექტორიის მცირე ნაწილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ρ რადიუსის მქონე წრეხაზის რკალი (ნახ. 28). ვინაიდან რკალი საკმარისად მცირეა, მასზე მოძრაობა შეიძლება თანაბარ მოძრაობად ჩავთვალოთ. გავყოთ ეს რკალი რამდენიმე ტოლ ნაწილად (ნახაზზე სამ ნაწილად) და გაყოფის B , C და D წერტილებიდან დაეუშვათ AO რადიუსზე მართობები. როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, როდესაც წერტილი გადაინაცვლებს რკალზე A -დან B წერტილში, მისი პროექცია გაივლის Ab მანძილს რადიუსის გასწვრივ. B -დან C

წერტილში გადანაცვლებისას პროექცია გაივლის bc მანძილს და ა. შ. ნახაზიდან ჩანს, რომ რადიუსზე პროექცია არათანაბრად მოძრაობს, ვინაიდან მის მიერ დროის ტოლ შუალედებში გავლილი მანძილები Ab , bc , cd და ა. შ. თანდათან მატულობენ. დავამტკიცოთ, რომ გარკვეულ მიახლოებაში პროექციის მოძრაობა რადიუსის გასწვრივ (სიმრუდის ცენტრისაკენ) თანაბრად აჩქარებულია. მართლაც, AOB სამკუთხედიდან მივიღებთ

$$2 Ab \cdot AO = AB^2,$$

ან

$$Ab = \frac{1}{2} \frac{AB^2}{AO}.$$

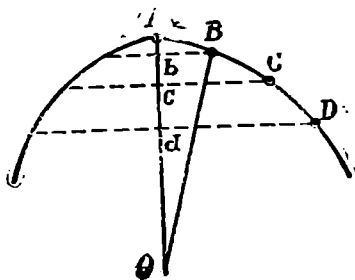
მაგრამ AB ქორდა მიახლოებით AB რკალის ტოლია და წარმოადგენს t დროში v სიჩქარით გავლილ მანძილს

$$AB = v \cdot t,$$

ხოლო AO არის სიმრუდის რადიუსი, ამიტომ მივიღებთ

$$Ab = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\rho} t^2;$$

ეს კი არის თანაბრად აჩქარებული მოძრაობის მანძილის ფორმულა რადიუსის გასწვრივ მიმართული აჩქარებით



ნახ. 28

ნორმალურ აჩქარებას ხშირად უწოდებენ აგრეთვე ცენტრისკენულ აჩქარებას, ვინაიდან იგი მიმართულია ტრაექტორიის სიმრუდის ცენტრისაკენ.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

§ 13. აჩქარების კადიალუზი და ტრანსვერსალუზი მდგენელები

ისევე, როგორც სიჩქარის შემთხვევაში, აჩქარებაც შეიძლება დაიშალოს ორ მდგენელად, რომელთაგან ერთი მიმართული იქნება რადიუს-ვექტორის გასწვრივ, ხოლო მეორე, ე. წ. ტრანსვერსალური მდგენელი, — რადიუს-ვექტორის მართობულად. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ბრტყელი მოძრაობა, ე. ი. ისეთი მოძრაობა, როდესაც

რადიუს-ვექტორი, სიჩქარე და აჩქარება ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ.

დავწეროთ ზოგადი ფორმულა სიჩქარის როგორც რადიუს-ვექტორის წარმოებულისა:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}_0 + r \frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

აჩქარების მისაღებად გავაწარმოთ სიჩქარე დროის მიმართ:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{r}_0 + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{r}_0}{dt} + r \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} \quad (\text{II}, 52)$$

წარმოვადგინოთ $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ შემდეგი სახით:

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}_0}{dt} \right| \vec{n}_{tr},$$

სადაც \vec{n}_{tr} არის ერთეულოვანი ვექტორი, მაჩვენებელი $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ -ის მიმართულებისა.

ვინაიდან $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ მართობია რადიუს-ვექტორის, \vec{n}_{tr} ვექტორიც მისი მართობი იქნება. გარდა ამისა, (II, 27) ფორმულა გვაძლევს, რომ $\left| \frac{d\vec{r}_0}{dt} \right| = \omega$, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ:

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \omega \vec{n}_{tr}. \quad (\text{II}, 53)$$

$\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ -ს გაწარმოებით მივიღებთ,

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\omega \vec{n}_{tr} \right) = \frac{d\omega}{dt} \vec{n}_{tr} + \omega \frac{d\vec{n}_{tr}}{dt}.$$

$\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ -სა და $\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}$ -ს ჩასმა (II, 52) ფორმულაში მოგვცემს:

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{r}_0 + \left(2\omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} \right) \vec{n}_{tr} + r\omega \frac{d\vec{n}_{tr}}{dt}. \quad (\text{II}, 54)$$

ვინაიდან $\frac{d\vec{n}_{tr}}{dt}$ მართობია \vec{n}_{tr} ვექტორის, ხოლო თვით \vec{n}_{tr} მართობია \vec{r}_0 -ს და ყველა ეს ვექტორი ერთ სიბრტყეში მდებარეობს,

$\frac{d\vec{n}_{tr}}{dt}$ შეიძლება მიმართული იყოს ან რადიუს-ვექტორის გასწვრივ, ან მის საწინააღმდეგოდ, ამიტომ

$$\frac{d\vec{n}_{tr}}{dt} = A\vec{r}_0$$

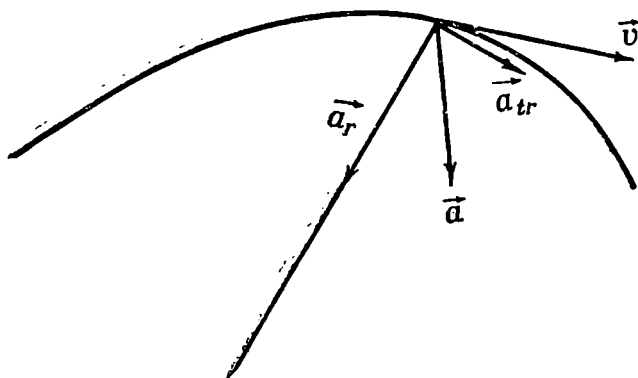
A კოეფიციენტი შეიძლება განისაზღვროს, თუ გამოვიყენებთ $\vec{r}_0 \cdot \vec{n}_{tr} = 0$ პირობას. მისი გაწარმოება გვაძლევს:

$$\vec{r}_0 \frac{d\vec{n}_{tr}}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt} \vec{n}_{tr} = 0$$

ან

$$\vec{r}_0 \frac{d\vec{n}_{tr}}{dt} = -\frac{d\vec{r}_0}{dt} \vec{n}_{tr}$$

და რადგან $\vec{r}_0 \frac{d\vec{n}_{tr}}{dt} = A$, ადვილად მიეხვედებით, რომ



ნახ. 29

$$A = -\omega,$$

მაშასადამე,

$$\frac{d\vec{n}_{tr}}{dt} = -\omega \vec{r}_0.$$

საბოლოოდ ვლებულობთ აჩქარებისათვის შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \vec{r}_0 + \left(2\omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} \right) \vec{n}_{tr}. \quad (II, 55)$$

მივიღეთ აჩქარების დაშლა ორ მდგენელად, ერთი მათგანია რადიალური

$$\vec{a}_r = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \vec{r}_0, \quad (\text{II}, 56)$$

მეორე კი ტრანსვერსალური

$$\vec{a}_{tr} = \left(2\omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} \right) \vec{n}_{tr}. \quad (\text{II}, 57)$$

ასეთი დაშლა ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, როდესაც მოძრაობა წარმოებს ერთი უძრავი წერტილისაკენ მიმართული ძალის გავლენით (ცენტრალური ძალის შემთხვევა), ვინაიდან ამ შემთხვევაში აჩქარებას აქვს მხოლოდ ერთი რადიალური მდგენელი. მეორე — ტრანსვერსალური მდგენელი ნულის ტოლია და აქედან ვლებულობთ კავშირს რადიუს-ვექტორის სიდიდესა და კუთხურ სიჩქარეს შორის:

$$\vec{a}_{tr} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \omega \right) \vec{n}_{tr} = 0$$

ახ

$$r^2 \omega = \text{const} \quad (\text{II}, 58)$$

§ 14. მოძრაობის კერძო სახეები

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ მოძრაობის დამახასიათებელი ელემენტები — სიჩქარე და აჩქარება; გავარჩიეთ მათი განმსაზღვრელი ზოგადი ფორმულები ნებისმიერად მოძრავი ნივთიერი წერტილისათვის. ახლა განვიხილოთ კერძო სახის მოძრაობები, რომელთათვისაც დამოკიდებულება გავილილ გზას, სიჩქარესა და აჩქარებას შორის უფრო მარტივ სახეს ღებულობს.

1. მოძრაობა მუდმივი სიჩქარით. ვინაიდან ვექტორული აჩქარება ნულის ტოლია

$$\vec{a} = 0,$$

ვექტორული სიჩქარე მუდმივი იქნება

$$\vec{v} = \text{const},$$

რაც პირველ ყოვლისა იმას ნიშნავს, რომ ტრაექტორია სწორ ხაზს წარმოადგენს. თუ ამ უკანასკნელს OX ღერძად ავირჩევთ, სიჩქარის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{const}.$$

ამ განტოლების ინტეგრება მოგვცემს

$$x = vt + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია; მისი მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის დავუშვათ, რომ, როცა $t=0$, x კოორდინატი x_0 -ის ტოლია (x_0 იქნება ნაწილაკის საწყისი კოორდინატი). წინა განტოლებაში ჩასმა მოგვცემს $C = x_0$ და მოძრაობის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x = x_0 + vt \quad (II, 59)$$

2. სწორხაზოვანი მოძრაობის ზოგადი შემთხვევა. წინა შემთხვევაში ნულის ტოლი იყო სრული აჩქარება და ამიტომ მოძრაობა იყო თანაბარი და სწორხაზოვანი. გამოვარკვეოთ ახლა როგორია მოძრაობა, როდესაც ნულის ტოლია მხოლოდ ნორმალური აჩქარება. ვინაიდან უკანასკნელი ახასიათებს სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას, ცხადია, განსაზღვრულ შემთხვევაში მოძრაობა სწორხაზოვანი იქნება. როგორი ხასიათი ექნება მოძრაობას ამ სწორ ხაზზე. დამოკიდებულია მხები აჩქარების მნიშვნელობაზე. მართლაც, ვთქვათ, ნორმალური აჩქარება ნულის ტოლია

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

რადგან არც v სიჩქარე და არც \bar{n} ცენტროვანი ვექტორი ნულის ტოლი არ არის, ეს ტოლობა შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ მაშინ, თუ უსასრულოდ დიდია სიძრუდის რადიუსი $\rho \rightarrow \infty$, რაც, როგორც ვიცით, იმის პირობაა, რომ ტრაექტორია სწორი ხაზია. თუ ამ სწორ ხაზს OX დერძედ ავირჩევთ. მოძრაობის განტოლებებისათვის გვექნება

$$x = f(t).$$

ამ ფუნქციის სახე დამოკიდებულ იქნება მხები აჩქარების მნიშვნელობაზე. თუ მხები აჩქარებაც ნული იქნება, მივიღებთ თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობის წინა შემთხვევას. ამ უმარტივესი შემთხვევის შემდეგ ყველაზე მნიშვნელოვანია მოძრაობა, როდესაც მისი მხები აჩქარება მუდმივია, ე. ი. როდესაც

$$\bar{a}_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const.}$$

აქედან მივიღებთ

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{const.}$$

სადაც a აჩქარების სკალარული მნიშვნელობაა. ამ განტოლების ინტეგრება გვაძლევს

$$v = v_0 + at, \quad (\text{II},60)$$

სადაც v_0 იქნება ნაწილაკის სიჩქარე საწყის $t=0$ მომენტში. კოორდინატის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at,$$

რომლის ინტეგრება მოგვცემს

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (\text{II},61)$$

სადაც x_0 იქნება კოორდინატი საწყის მომენტში. მოძრაობას, რომელიც (II,60) და (II,61) ფორმულებით აიწერება, ეწოდება სწორხაზოვანი თანაბრად აჩქარებული მოძრაობა. ასეთი მოძრაობისათვის სიჩქარე არის დროის წრფივი, ხოლო კოორდინატი — კვადრატული ფუნქცია. გამოთქმაში „თანაბრად აჩქარებული“ ჩვენ ვგულისხმობთ როგორც საკუთრივ თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობას, ე. ი. ისეთ მოძრაობას, რომლისთვისაც სიჩქარის სიდიდე ერთი და იმავე სიდიდით მატულობს დროის შუალედებში, ისე თანაბრად შენელებულ მოძრაობასაც, რომლისთვისაც სიჩქარის სიდიდე ერთი და იმავე სიდიდით კლებულობს დროის ტოლ შუალედებში. როგორც ახლა ვნახავთ, მოძრაობის ხასიათი, ე. ი. საკუთრივ აჩქარებულია თუ შენელებულია მოძრაობა, დამოკიდებულია v_0 და a სიდიდეების ნიშანსა და იმ დროის შუალედზე, რომლის განმავლობაშიც განიხილება მოძრაობა. სიმარტივისათვის დავეშვათ, რომ $x_0=0$ და განვიხილოთ დროის შუალედი საწყისი მომენტიდან $t = +\infty$ -მდე, ე. ი. საწყისი მომენტის მიმართ მომავალი ($t \geq 0$) დრო.

ვთქვათ, $v_0 > 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკი იწყებს მოძრაობას OX ღერძის დადებითი მიმართულებით. თუ აჩქარებაც დადებითია ($a > 0$), მაშინ (II,60) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ სიჩქარე ყოველთვის დადებითია და თანაბრად იზრდება დროის პროპორციულად. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოძრაობა არის საკუთრივ თანაბრად აჩქარებული OX ღერძის დადებითი მიმართულებით.

დავეშვათ, რომ v_0 ისევ დადებითია, მაგრამ აჩქარება უარყოფითი ($a < 0$). (II,60) განტოლების მეორე წევრი (at) უარყოფითი იქნება. დროის ზრდასთან ერთად მისი სიდიდე იზრდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ v სიჩქარის სიდიდე თანაბრად კლებულობს. მოძრა-

ობა იქნება თანაბრად შენელებული. მაგრამ ასეთი მოძრაობა გარძელებდა მხოლოდ $t = -\frac{v_0}{a}$ მომენტამდე. ამ მომენტში სიჩქარე

გახდება ნულის ტოლი და ნაწილაკი გაჩერდება. ამის შემდეგ მეორე წევრი სიდიდით გადააქარბებს პირველ წევრს, v სიჩქარე გახდება უარყოფითი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკი იმოდრავებს OX ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით. სიჩქარის სიდიდე თანდათან მატულობს და საწყის მდებარეობას ნაწილაკი გაივლის $t = -\frac{2v_0}{a}$

მომენტში, — v_0 სიჩქარით, ე. ი. იმ სიჩქარის ტოლი და საწინააღმდეგო სიჩქარით, რომლითაც მან დაიწყო მოძრაობა. საწყის მდებარეობაზე გავლის შემდეგ იგი განაგრძობს მოძრაობას OX ღერძის უარყოფით მხარეზე, სულ უფრო მეტად და მეტად ზრდადი სიჩქარით. როგორც ვხედავთ, $t = -\frac{v_0}{a}$ მომენტის შემდეგ მოძრაობა

იქნება საკუთრივ თანაბრად აჩქარებული, მხოლოდ მიმართული იქნება OX ღერძის საწინააღმდეგოდ.

მაშასადამე, მივიღეთ ასეთი შედეგი:

1. $v_0 > 0, a > 0$ — მოძრაობა საკუთრივ თანაბრად აჩქარებულია და მიმართულია OX ღერძის გასწვრივ.

2. $v_0 > 0, a < 0$ — საწყისი მომენტიდან $t = -\frac{v_0}{a}$ მომენტამდე

მოძრაობა საკუთრივ თანაბრად შენელებულია და მიმართულია OX ღერძის გასწვრივ, ხოლო $t = -\frac{v_0}{a}$ მომენტის შემდეგ მოძრაობა

საკუთრივ თანაბრად აჩქარებულია და მიმართულია OX ღერძის საწინააღმდეგოდ.

ანალოგიურად შეიძლება ჩატარდეს განხილვა შემთხვევისა, როდესაც $v_0 < 0$. მისი გარჩევა მივანდოთ მკითხველს ისევე, როგორც გარჩევა მოძრაობისა საწყისი მომენტის წინა დროისათვის ($t < 0$).

როგორც ვხედავთ, მოძრაობის ხასიათის დადგენა არ შეიძლება მხოლოდ აჩქარების ნიშნის მიხედვით. იგი დამოკიდებულია საწყისი სიჩქარის ნიშნისა და განხილული დროის შუალედზე.

ყოველივე ზემოთქმულის გამო, ბუნებრივია დაისვას კითხვა, რატომ ამბობენ, რომ ფორმულა

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

გამოხატავს თანაბრად აჩქარებულ ან თანაბრად შენელებულ მოძრა-

ობას იმისდა მიხედვით, აჩქარება დადებითა თუ უარყოფითი. ამ კითხვის პასუხი შემდეგია. ჯერ ერთი, ამ ფორმულაში s -ით აღნიშნულია არა კოორდინატი, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობა, არამედ ნაწილაკის მიერ საწყისი ($t=0$) მომენტიდან გავლული მანძილი, რომელიც დადებითად ითვლება დამოუკიდებლად მისი მიმართულებისაგან. გარდა ამისა, $v = v_0 + at$ ფორმულის გამოყენების დროს v_0 სიჩქარეს დადებითად თვლიან და განიზილავენ მხოლოდ დროის შუალედს საწყისი მომენტიდან გაჩერებამდე (უარყოფითი a -ს შემთხვევაში). ცხადია, ამ პირობებში დადებითი a ნიშნავს საკუთრად თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობას, ხოლო უარყოფითი a — თანაბრად შენელებულს.

3. თანაბარი მრუდწირული მოძრაობა. ამ შემთხვევაში მოძრაობა იქნება თანაბარი მოძრაობა მრუდ წირზე, რომლის სახე დამოკიდებულია ნორმალურ აჩქარებაზე. მართლაც, პირობის თანახმად

$$-a_n = \frac{dv}{dt} = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ,

$$v = \text{const},$$

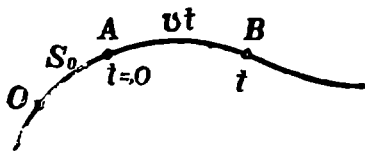
ე. ი. სიჩქარის სიღრმე მუდმივი იქნება. ვინაიდან

$$v = \frac{ds}{dt},$$

სადაც s არის ტრაექტორიის რკალის სიგრძე, ინტეგრება მოგვცემს

$$s = s_0 + vt. \quad (\text{II}, 62)$$

აქ s_0 მუდმივა იქნება საწყისი რკალის სიგრძე, რაიმე ნებისმიერად არჩეული წერტილიდან (ნახ. 30). ჩვენ მივიღეთ ისეთივე განტოლება, როგორც სწორხაზოვანი და თანაბარი მოძრაობისათვის, მხოლოდ არა x



ნახ. 30

კოორდინატისათვის, არამედ რკალის სიგრძისათვის. მოძრაობა წარმოებს მრუდ წირზე (სიჩქარემ შეიძლება შეიცვალოს მიმართულება) და სიჩქარის სიდიდის მიხედვით

იგი არის თანაბარი, ე. ი. წერტილი დროის ნებისმიერ, მაგრამ ტოლ შუალედებში გადის ტოლ მანძილებს ტრაექტორიის გასწვრივ. ტრა-

ექტორიის სახე დამოკიდებულია ნორმალურ აჩქარებაზე. ყველაზე მარტივ შემთხვევას მივიღებთ, თუ დავუშვებთ, რომ ნორმალური აჩქარება მუდმივია სიდიდით

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \text{const}$$

(თუ $\vec{a}_n = 0$, მივიღებთ სწორხაზოვან და თანაბარ მოძრაობას). რადგანაც სიჩქარის სიდიდე მუდმივია, მუდმივი იქნება სიმრუდის რადიუსიც. ტრაექტორიას ექნება ერთი და იგივე სასრულო სიმრუდე ყველა წერტილში. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ასეთი მრუდი არის მხოლოდ წრეხაზი (ბრტყელ მრუდებს შორის). მაშასადამე, წერტილი, რომლის ნორმალური აჩქარება მუდმივია, ხოლო მხები აჩქარება ნულია, თანაბრად მოძრაობს წრეხაზზე. ამ შემთხვევაში შეიძლება დავწეროთ

$$s = r\varphi,$$

სადაც φ არის s რკალის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე; აქედან სიჩქარის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

მაგრამ, როგორც ვიცით, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ სიდიდეს ეწოდება კუთხური სი-

ჩქარე და იგი ახსიათებს რადიუს-ვექტორის მიმართულების ცვლილებას; აქედან მივიღებთ ფორმულას, რომელიც აკავშირებს ერთმეორესთან ხაზოვან და კუთხურ სიჩქარეებს წრიული მოძრაობის დროს

$$v = r\omega. \quad (II,63)$$

ვინაიდან მოძრაობა თანაბარია, კუთხის ცვლაც თანაბარი იქნება და გვექნება

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (II,64)$$

სადაც φ_0 არის კუთხის საწყისი მნიშვნელობა.

4. წრეხაზზე მოძრაობის ზოგადი შემთხვევა. კუთხური აჩქარება. განვიხილოთ წრეხაზზე მოძრაობის ზოგადი შემთხვევა. რადგანაც ტრაექტორია წრეხაზს წარმოადგენს, სიმრუდის რადიუსი (წრეხაზის რადიუსის ტოლი) მუდმივი იქნება (ნახ. 31)

$$\rho = r = \text{const}.$$

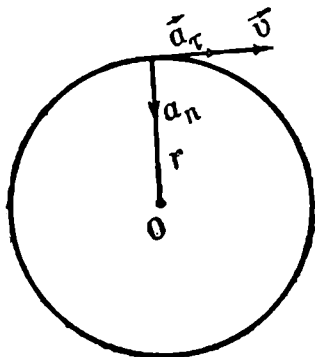
წრეხაზისათვის ყოველთვის მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$s = r \cdot \varphi,$$

საიდანაც სიჩქარის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$v = r\omega.$$

ეს შედეგი ჩვენ უკვე გვექონდა მიღებული ბრუნვითი სიჩქარის განხილვის დროს; აქედან შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ფორმულები ნორმალური და მხები აჩქარებებისათვის:



ნახ. 31

$$a_n = r\omega^2, \quad a_\tau = r \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (\text{II}, 65)$$

მეორე ფორმულაში შემოვიდა $\frac{d\omega}{dt}$

სიდიდე, რომელიც წარმოადგენს კუთხური სიჩქარის წარმოებულს დროით და იგი ახასიათებს კუთხური სიჩქარის ცვლილებას დროში. მას ეწოდება კუთხური აჩქარება

და აღინიშნება ϵ ასოთი, $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$

და, მაშასადამე,

$$a_\tau = r\epsilon. \quad (\text{II}, 66)$$

ცხადია, რომ ϵ არის კუთხის მეორე წარმოებულს დროით, ე. ი.

$$\epsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

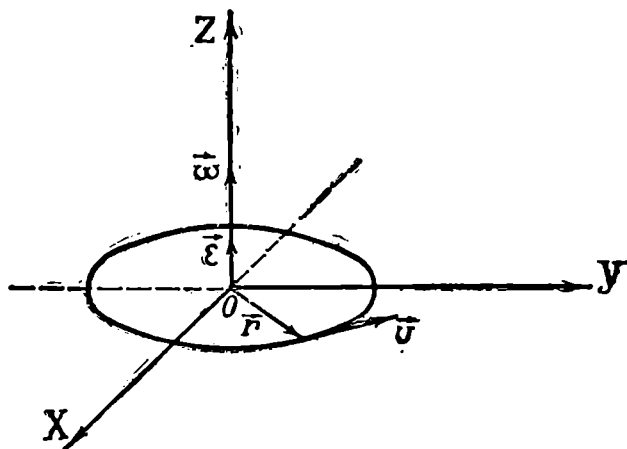
§ 15. კუთხური სიჩქარე და აჩქარება როგორც ვექტორები

ზმირად, განსაკუთრებით მყარი სხეულის ბრუნვის განხილვის დროს, ხელსაყრელია განვიხილოთ კუთხური სიჩქარე და აჩქარება როგორც ვექტორები. განვიხილოთ წრიული მოძრაობა და დავუშვათ, რომ წრეხაზი მდებარეობს XOY სიბრტყეში და მისი ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია (ნახ. 32). \vec{v} სიჩქარე არის ტრანკტორიისადმი მხები ვექტორი, რადიუს-ვექტორი კი მიმართულია კოორდინატთა სათავედან მოძრავი წერტილისაკენ. ამ ვექტორების სიდიდეები დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით:

$$v = r\omega.$$

თუ ჩვენ გვსურს განვიხილოთ ეს ტოლობა როგორც ვექტორული, ე. ი. გვინდა დავაკავშიროთ ერთმანეთთან \vec{v} და \vec{r} ვექტორები, ა კუთხური სიჩქარეც უნდა განვიხილოთ როგორც ვექტორი, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში \vec{v} იქნებოდა \vec{r} -ის პარალელური. ამიტომ

$\vec{\omega}$ ჩვეთვალთ ვექტორად და გამოვარკვიოთ როგორ უნდა იყოს იგი მიმართული, რომ რადიუს-ვექტორის და მისი ვექტორული ნა-
მრავლი გვაძლევდეს \vec{v} ვექტორს. ნახაზი გვიჩვენებს, რომ ამისათვის



ნახ. 32

$\vec{\omega}$ მიმართული უნდა იყოს წრეხაზის სიბრტყის მართობულად OZ ღერძის გასწვრივ, მაშინ მართებული იქნება ტოლობა

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]. \quad (II,67)$$

შეიძლება, რასაკვირველია, $\vec{\omega}$ მიემართოს OZ ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაგრამ მაშინ კავშირი \vec{v} და \vec{r} ვექტორებს შორის და-
იწერება შემდეგნაირად:

$$\vec{v} = -[\vec{r} \cdot \vec{\omega}].$$

ვინაიდან ჩვეულებრივ (II,67) ფორმულას იყენებენ, შეიძლება ვთქვათ, რომ კუთხური სიჩქარე მიმართულია ბრუნვის ღერძის გასწვრივ ისე, რომ მარჯვენა ბურღის ბრუნვა მოძრაობის მიმართულებით ბურღს გადაანაცვლებს $\vec{\omega}$ ვექტორის გასწვრივ.

კუთხური აჩქარებაც შეიძლება განვიხილოთ როგორც ვექტორი, მიმართული ღერძის გასწვრივ. თუ $\frac{d\omega}{dt} > 0$, $\vec{\epsilon}$ მიმართული იქნება ისე,

როგორც $\vec{\omega}$, წინააღმდეგ შემთხვევაში მათ ექნებათ ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულება. კავშირი მხებ და კუთხურ აჩქარებებს შორის შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\epsilon} \cdot \vec{r}]. \quad (II,68)$$

ინერციისა და ფარლობითობის პრინციპები

§ 16. ინერციული სისტემები და ინერციის პრინციპი

წინა თავში უკვე გამოვარკვიეთ, რომ ფიზიკური მოვლენების შესწავლისა და მათი მიმდინარეობის კანონების დადგენისათვის საჭიროა რაიმე გარკვეული ათვლის სისტემის არჩევა. მხოლოდ იმის შემდეგ, რაც არჩეულია ათვლის სისტემა, შეიძლება მსჯელობა ნივთიერი წერტილებისა და სხეულების მდებარეობაზე, მოძრაობაზე და ამ მოძრაობის დამახასიათებელ ელემენტებზე — სიჩქარესა და აჩქარებაზე. კნაღია, რომ მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულია ათვლის სისტემის არჩევაზე, ე. ი. ტრანეკტორია, სიჩქარე და აჩქარება სხვადასხვა იქნება სხვადასხვა ათვლის სისტემის მიმართ. მაგარამ, ცნაღია, აგრეთვე, რომ გარდა ათვლის სისტემისა, ნაწილაკთა მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულია მათ ურთიერთქმედებაზე როგორც ერთმანეთთან, ისე სხვა სხეულებთან; მაგალითად, რაიმე პლანეტის მოძრაობა დამოკიდებულია არა მარტო იმაზე, თუ რომელ სხეულს — მზეს თუ დედამიწას ავარჩევთ ათვლის სისტემად, არამედ მის ურთიერთქმედებაზე მზესთან და სხვა პლანეტებთან. ასევეა ყველა სხვა შემთხვევაშიც. მოძრაობის განმსაზღვრელია ორი რამ — ათვლის სისტემა და სხეულთა ურთიერთქმედება.

დაკვირვებას ბუნებაში მიმდინარე პროცესებზე იმ დასკვნამდე მივყავართ, რომ სხეულთა შორის ურთიერთქმედება მით უფრო სუსტია, რაც უფრო შორს არიან ისინი ერთიმეორისაგან — ურთიერთქმედება კლებულობს მანძილის გადიდების დროს. ამიტომაც, თუ გვსურს ვავიგოთ, როგორ მოძრაობს სხეული ურთიერთქმედების გარეშე, უნდა ვეცადოთ რაც შეიძლება მეტად დავაშოროთ იგი სხვა სხეულებს. ამიტომ განვიხილოთ ნივთიერი წერტილი, რომელიც იმდენად შორს არის სხვა სხეულებისაგან, რომ შესაძლებელია მათთან ურთიერთქმედების უგულებელყოფა. ვუწოდოთ ასეთ წერტილს იზო-

ლირებული, ანუ განპხოლოებული წერტილი. ნივთიერი წერტილი იზო-
ლირებულია, თუ იგი იმდენად შორსაა სხვა სხეულებისაგან, რომ შე-
საძლებელია ურთიერთქმედების უკულებელყოფა.

განვიხილოთ ახლა ასეთი იზოლირებული ნივთიერი წერტილის
მოძრაობა. ცხადია, მისი მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულ იქნება
მხოლოდ ათვლის სისტემის არჩევაზე (ვინაიდან ურთიერთქმედება
უგულებელყოფილია). დავუშვათ, მაგალითად, რომ ასეთ იზოლი-
რებულ წერტილად შეიძლება ჩაითვალოს ცალკეული ვარსკვლავი —
საკმაოდ დაშორებული ყველა სხვა ვარსკვლავისაგან. მისი მოძრა-
ობა გარკვეული სახისაა, როდესაც ათვლის სისტემად მიღებულია
დედამიწის ზედაპირი. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, ვარსკვლავი
ერთი დღე-ღამის განმავლობაში შემოწერს წრესხვს დედამიწის მი-
მართ. სულ სხვა ხასიათი ექნება მის მოძრაობას, თუ ათვლის სის-
ტემის სათავედ ავირჩევთ დედამიწის ან მზის ცენტრს და ღერძებს
„უძრავი“ ვარსკვლავებისაკენ მიემართავთ. მაშასადამე, მიუხედავად
იმისა, რომ ვარსკვლავზე სხვა რაიმე სხეული არ მოქმედებს, მისი
მოძრაობის ხასიათი არ იქნება სავსებით გარკვეული, იგი დამოკი-
დებულ იქნება ათვლის სისტემის არჩევაზე. მრავალი ცდა და და-
კვირება გვიჩვენებს, რომ ათვლის სხვადასხვა სისტემებს შორის
შეიძლება აირჩეს ისეთი ათვლის სისტემა, რომლის მიმართაც იზოლი-
რებული ნივთიერი წერტილი იქნება უძრავი ან იმოძრაეებს თანაბრად
და სწორხაზოვნად, ე. ი. მუდმივი სიჩქარით. ეს ფრიალ მნიშვნელო-
ვანი ფაქტი შეიძლება ჩამოყალიბდეს როგორც მექანიკის ერთ-ერთი
ძირითადი პრინციპი.

ათვლის სხვადასხვა სისტემებს შორის მოიძებ-
ნება ისეთი ათვლის სისტემა, რომლის მიმართაც
სხვა სხეულებისაგან იზოლირებული ნივთიერი წერ-
ტილი იქნება უძრავი ან იმოძრაეებს მუდმივი სი-
ჩქარით.

ამ პრინციპს ეწოდება ინერციის პრინციპი, ხოლო თვით იმ
ათვლის სისტემას, რომლის არსებობასაც გულისხმობს ჩამოყალიბებუ-
ლი პრინციპი, — ინერციული სისტემა.

ჩვენ მიერ მოყვანილი ჩამოყალიბება ინერციის პრინციპისა გან-
სხვავდება იმ ჩამოყალიბებისაგან, რომელიც მოცემული იყო თვით
ნიუტონის მიერ და რომელიც ახლაც ხშირად მიღებულია სახელ-
მწიფანელოებში. მიზეზი ამისა ნათელი გახდება ამ უკანასკნელის
ანალიზის შემდეგ. ნიუტონის მიერ ინერციის პრინციპი შემდგენიარად
იყო ჩამოყალიბებული: ყოველი სხეული ინარჩუნებს თავის უძრაო-
ბის ან თანაბარი და სწორხაზოვანი მოძრაობის მდგომარეობას, სანამ

გარეშე ძალები არ გამოიყვანენ მას ამ მდგომარეობიდან. ამ ფორმულირებაში გამოყენებული პირობა, რომ განსახილველ სხეულზე არ უნდა მოქმედებდეს ძალები, რასაკვირველია, იგივეა, რაც ჩვენს ფორმულირებაში გამოყენებული პირობა, რომ წერტილი იზოლირებული უნდა იყოს. ამ მხრივ განსხვავება ორ ფორმულირებას შორის არ არსებობს. მაგრამ ნიუტონისეულ ფორმულირებაში არ არის მითითებული, რომელი სხეულია აღებული ათვლის სისტემად. იზოლირებული წერტილი არ იქნება უძრავი ან მუდმივი სიჩქარით მოძრავი ნებისმიერი ათვლის სისტემის მიმართ. ამიტომ, თუ არ იქნება აღნიშნული, რომ დებულება მართებულია მხოლოდ გარკვეული ათვლის სისტემისათვის (ინერციული სისტემისათვის), ინერციის პრინციპი გარკვეულობას დაკარგავს. სწორედ ამიტომ შეეცვალეთ ნიუტონისეული ფორმულირება.

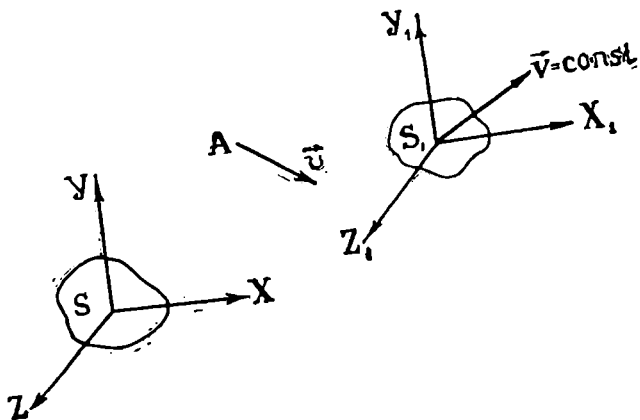
შემდეგში ყოველთვის, სანამ არ იქნება აღნიშნული საწინააღმდეგო, ათვლის სისტემად ინერციული სისტემა გვეჩვენება არჩეული. რასაკვირველია, იმის შემდეგ, რაც განმარტებულია, თუ რომელი ათვლის სისტემაა ინერციული, ისმის კითხვა — როგორ უნდა მოიძებნოს ასეთი სისტემა? ძირითად სისტემას, რომელსაც ადამიანი იყენებს პრაქტიკულად, წარმოადგენს დედამიწის ზედაპირი, ე. ი. სისტემა, რომლის სათავე და ღერძები მკვიდრადაა დაკავშირებული დედამიწის ზედაპირთან. დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ ეს ათვლის სისტემა არ წარმოადგენს ინერციულ სისტემას, ვინაიდან სხეულები, რომლებზეც არ მოქმედებს გარეშე სხეულები, არ მოძრაობს აჰ სისტემის მიმართ ინერციულად. უფრო ახლოსაა ინერციულ სისტემასთან ათვლის სისტემა, რომლის სათავე დედამიწის ცენტრშია მოთავსებული და ღერძები ე. წ. „უძრავი“ ვარსკვლავებისკენაა მიმართული. მაგრამ არც ეს ათვლის სისტემა არის ზუსტად ინერციული. კიდევ უფრო ახლოსაა ინერციულ სისტემასთან ათვლის სისტემა, რომლის სათავე მზის ცენტრშია და ღერძები ისევ „უძრავი“ ვარსკვლავებისკენაა მიმართული (ე. წ. ჰელიოცენტრული სისტემა). რასაკვირველია, არც ეს სისტემაა ზუსტად ინერციული, მაგრამ ძალიან დიდი სიზუსტით იგი შეიძლება ინერციულად ჩაითვალოს. საზოგადოდ საკითხი იმის შესახებ, არის თუ არა აღებული სისტემა ინერციული, დამოკიდებულია ცდების სიზუსტეზე და იმაზე, თუ რომელი სხეულის შესწავლა წარმოებს. თუ, მაგალითად, განიხილება სხეულების მოძრაობა დედამიწის ზედაპირის მახლობლად და არ მოითხოვება დიდი სიზუსტე, დედამიწის ზედაპირიც შეიძლება ჩაითვალოს ინერციულ სისტემად. თუ მოითხოვება მეტი სიზუსტე ან განიხილება ციური სხეულების მოძრაობა,

უკვე ნათლად შეიმჩნევა, რომ დედამიწა (გეოცენტრული სისტემა) ვეღარ ჩაითვლება ინერციულად და საჭირო გახდება სხვა, მაგალითად. პელიოცენტრულ სისტემაზე გადასვლა და ა. შ.

§ 17. მართი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა და გალილეის გარდაქმნის ფორმულები

განვიხილოთ საკითხი ინერციულ სისტემათა რიცხვის შესახებ. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ ინერციული სისტემების მრავალრიცხოვნებაში. ჯერ ერთი, ცხადია, რომ ყოველი სისტემა უძრავი ინერციული სისტემის მიმართ აგრეთვე ინერციული იქნება. შეიძლება იგი პირველი ინერციული სისტემისაგან განსხვავდებოდეს სათავის მდებარეობით ან ღერძების მიმართულებით, მაგრამ თუკი იგი უძრავია მის მიმართ, მისთვისაც მართებული იქნება ინერციის პრინციპი.

მაგრამ ასეთი სისტემებით არ ამოიწურება ინერციული სისტემები. ადვილად მისახვედრია, რომ ინერციული სისტემის მიმართ



ნახ. 33

მულტიპლი სიჩქარით მოძრავი ყოველი ათვლის სისტემა აგრეთვე ინერციული იქნება. მართლაც, ვთქვათ, S არის ინერციული სისტემა (ნახ. 33), რაც იმას ნიშნავს, რომ ურთიერთქმედებისაგან თავისუფალი A ნივთიერი წერტილი მის მიმართ იმოძრაებს მულტიპლი სიჩქარით. ავიღოთ მეორე ათვლის სისტემა S₁, რომელიც S

ათვის სისტემის მიმართ მოძრაობს აგრეთვე მუდმივი სიჩქარით. ცხადია, A ნივთიერი წერტილი ამ სისტემის მიმართაც მუდმივი სიჩქარით იმოძრაებს. რასაკვირველია, A ნაწილაკის სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება S_1 -ის მიმართ არ იქნება ისეთი, როგორც S -ის მიმართ, მაგრამ მთავარი ის არის, რომ მისი მოძრაობა S_1 -ის მიმართაც მუდმივი სიჩქარით იწარმოებს.

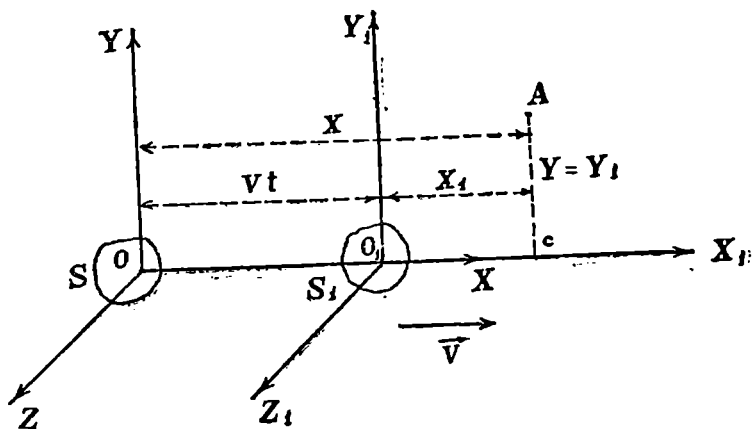
როგორც ვხედავთ, ინერციულ სისტემათა რიცხვი უამრავია. ყოველი ათვის სისტემა უძრავი ან მუდმივი სიჩქარით მოძრავი აღებულა ინერციული სისტემის მიმართ იქნება აგრეთვე ინერციული.

მას შემდეგ, რაც გამოირკვა, რომ ინერციული სისტემები უამრავია, ჰუნებრივად ისმის კითხვა — როგორ არის დაკავშირებული ერთიმეორესთან მათში წარმოებული გაზომვების შედეგები; ამ კითხვის შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, რაიმე ინერციული სისტემიდან წარმოებულია A ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შესწავლა, გაზომილია მისი მდებარეობის განსაზღვრელი რადიუს-ვექტორი. კოორდინატები, დრო, დადგენილია მათ შორის კავშირი, გამოთვლილია სიჩქარე, აჩქარება და ა. შ. ახლა ვთქვათ, იმავე ნაწილაკის მოძრაობა შეისწავლება მეორე ინერციული სისტემის მიმართ, რომელიც მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს პირველი ინერციული სისტემის მიმართ. ამ სისტემის მიმართაც განსაზღვრულია A წერტილის მოძრაობის ელემენტები: რადიუს-ვექტორი, კოორდინატები, დრო, სიჩქარე და ა. შ. ცხადია, ეს სიდიდეები განსხვავდება საზოგადოდ პირველი ინერციული სისტემის მიმართ განსაზღვრული სათანადო სიდიდეებისაგან. ზემოთ დასმული კითხვის შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ გაირკვეს კავშირი მოძრაობის ელემენტებს შორის სხვადასხვა ინერციული სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, ერთი ინერციული სისტემა არის S (ნახ. 34). აღვნიშნოთ x, y და z -ით A წერტილში მომხდარი მოვლენის კოორდინატები ამ ინერციული სისტემის მიმართ. ცხადია, ეს კოორდინატები უნდა გაიზომოს ამ სისტემაში არსებული სიგრძის ეტალონით. t -თი აღვნიშნოთ მოვლენის მოხდენის დრო, გაზომილი ამ სისტემის საათით. ვთქვათ, ამავე მოვლენის კოორდინატები და დრო იზომება მეორე S_1 ინერციული სისტემის მიმართ, რომელიც S -ის მიმართ მუდმივი \vec{V} სიჩქარით მოძრაობს. აღვნიშნოთ სათანადო კოორდინატები და დრო S_1 სისტემის მიმართ x_1, y_1, z_1 და t_1 -ით. ამოცანა, რომელიც ჩვენ უნდა გადავწყვიტოთ, მდგომარეობს x, y, z, t და x_1, y_1, z_1, t_1 სიდიდეების ერთმანეთთან დაკავშირებაში. მსჯელობის გასამარტივებლად დავუ-

შვათ, რომ S_1 სისტემის კოორდინატთა ღერძები შემდეგნაირადაა მიმართული: O_1X_1 ღერძი მიმართულია OX ღერძის გასწვრივ, ხოლო O_1Y_1 და O_1Z_1 ღერძები სათანადოდ OY და OZ ღერძების პარალელურია. გარდა ამისა, მივიღოთ, რომ როდესაც $t=0$, $t_1=0$ ნულის ტოლია, ე. ი. დროის საწყისი მომენტი ორივე სისტემაში ერთი და იგივეა და რომ ამ მომენტში კოორდინატთა სათავეები თანხვედრილია. ჩვენი დაშვების თანახმად სისტემა მოძრაობს OX ღერძის გასწვრივ მუდმივი V სიჩქარით.

ჩვენ ვიცით, რომ ყოველ სისტემაში კოორდინატები და დრო იზომება თავისი სიგრძის ეტალონითა და საათით. ცხადია, ეს ეტალონები და საათები სრულად ერთნაირი უნდა იყოს; ეს იმას ნიშნავს, რომ S_1 სისტემაში მყოფი ეტალონი რომ S სისტემაში გადა-



ნახ. 34

ვიტანოთ, იგი უნდა თანხედეს იქ მყოფ ეტალონს. ასევე, საათები, როდესაც მათ ერთ სისტემაში მოვათავსებთ, ერთ და იმავე დროს უნდა გვიჩვენებდეს.

ფორმულებს, რომლებიც აკავშირებენ ერთმანეთთან კოორდინატებსა და დროს ათელის სხვადასხვა სისტემაში, გარდაქმნის ფორმულები ეწოდება. ჩვენი მიზანია ერთი ინერციული სისტემიდან მეორე ინერციულ სისტემაში გარდაქმნის ფორმულების გამოყვანა. პირველი ძირითადი დაშვება, რომელსაც ემყარება კლასიკური ფიზიკა ამ საკითხის გადაწყვეტის დროს, შემდეგში მდგომარეობს: თუ ორივე სისტემაში მდებარე საათები ერთ და იმავე დროს გვიჩვენებს, რო-

დესაც S_1 უძრავია S -ის მიმართ. ისინი ისევე ერთ და იმავე დროს გვიჩვენებენ როგორც უნდა ამოძრავდნენ სისტემები ერთიმეორის მიმართ; ეს დაშვება იმას ნიშნავს, რომ რაიმე მოვლენის მოხდენის მომენტში ორივე საათი ერთ და იმავე დროს გვიჩვენებს

$$t = t_1. \quad (\text{III}, 1)$$

ამ დაშვებას შემდეგნაირად აყალიბებენ: დროის მიმდინარეობა დამოუკიდებელია ათვლის სისტემის არჩევაზე, ყველა ათვლის სისტემაში დრო ერთნაირად მიმდინარეობს ან, როგორც ხშირად ამბობენ, დრო აბსოლუტურია.

განვიხილოთ ახლა კავშირი A მოვლენის x და x_1 კოორდინატებს შორის. S სისტემის მიმართ A მოვლენის x კოორდინატი არის OC მონაკვეთის სიგრძე, გაზომილი ამ სისტემის ეტალონით. ცხადია, რომ OC მონაკვეთის სიგრძე წარმოადგენს OO_1 და O_1C მონაკვეთების სიგრძეების ჯამს

$$OC = OO_1 + O_1C$$

(სამივე მონაკვეთის სიგრძე გაზომილია S სისტემის ეტალონის საშუალებით). ვინაიდან S_1 სისტემა და მისი O_1 სათავე მოძრაობს S -ის მიმართ OX ღერძის გასწვრივ მიმართული მუდმივი V სიჩქარით, O წერტილის მიერ t დროში გავლილი OO_1 მანძილი (გაზომილი S -ის ეტალონის საშუალებით) იქნება

$$OO_1 = Vt.$$

ამის გამო წინა ტოლობა შემდეგნაირად დაიწერება:

$$x = Vt + O_1C \quad (\text{გაზომილი } S\text{-ის ეტალონის საშუალებით}).$$

მეორე მხრივ, იგივე O_1C მონაკვეთის სიგრძე, მხოლოდ გაზომილი S_1 -ის ეტალონის საშუალებით, არის A მოვლენის x_1 კოორდინატი S_1 -ის მიმართ.

$$x_1 = O_1C \quad (\text{გაზომილი } S_1\text{-ის ეტალონის საშუალებით}).$$

კლასიკური ფიზიკის მეორე ძირითადი დაშვება, რომლის საშუალებითაც იგი აკავშირებს x -სა და x_1 -ს, შემდეგაა: მონაკვეთის სიგრძე არ არის დამოკიდებული ათვლის სისტემაზე, იგი აბსოლუტურია. ამ შემთხვევაში ეს იმას ნიშნავს, რომ O_1C მონაკვეთის სიგრძე ერთნაირია ორივე ათვლის სისტემის მიმართ:

O_1C (გაზომილი S -ის მიმართ) = O_1C (გაზომილი S_1 -ის მიმართ);
აქედან მაშინვე ვღებულობთ კავშირს x -სა და x_1 -ს შორის

$$x = x_1 + Vt$$

მაგრამ ვინაიდან პირველი დაშვების თანახმად $t=t_1$, შეიძლება დავწეროთ

$$x=x_1+Vt_1. \quad (\text{III},2)$$

ჩვენ არ გავვირჩევია y და z კოორდინატების გარდაქმნა. ცხადია, როგორც გვიჩვენებს ნახაზი და სივრცის აბსოლუტურობის დაშვება,

$$y=y_1, \quad z=z_1. \quad (\text{III},3)$$

მაშასადამე, კოორდინატებისა და დროის გარდაქმნის ფორმულები ინერციული სისტემებისათვის ასეთი ყოფილა:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + Vt_1, \\ y &= y_1, \\ z &= z_1, \\ t &= t_1. \end{aligned} \quad (\text{III},4)$$

ამ ფორმულებს გალილეის გარდაქმნის ფორმულები ეწოდება და კლასიკური ფიზიკის თანახმად მათი საშუალებით ხდება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა. იმ შემთხვევაში, როდესაც S_1 ათვლის სისტემა მოძრაობს S სისტემის მიმართ არა OX ღერძის გასწვრივ, არამედ ნებისმიერი მიმართულებით, გარდაქმნის ფორმულები იქნება შემდეგი სახისა:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + V_x t_1, \\ y &= y_1 + V_y t_1, \\ z &= z_1 + V_z t_1, \\ t &= t_1, \end{aligned} \quad (\text{III},4')$$

სადაც V_x , V_y და V_z არის S_1 სისტემის სიჩქარის გეგმილები სათანადო ღერძებზე. მას შემდეგ, რაც გამოყვანილია კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები, უკვე აღვიღია სხვა სიდიდეების, მაგალითად, სიჩქარისა და აჩქარების გარდაქმნის ფორმულების გამოყვანა. (III,4') ფორმულების გაწარმოება დროის მიმართ გვაძლევს:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} + V_x, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_1}{dt} + V_y, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_1}{dt} + V_z. \end{aligned}$$

მაგრამ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ წარმოადგენენ ნაწილაკის სიჩქარის გეგმილებს S სისტემის მიმართ, ხოლო $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt_1}$, $\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt_1}$ და $\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_1}{dt_1}$ სიჩქარის გეგმილებს S_1 სისტემის მიმართ. თუ ნაწილაკის სიჩქარეს S სისტემის მიმართ \vec{v} -თი აღვნიშნავთ, ხოლო S_1 სისტემის მიმართ — \vec{v}_1 -ით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} v_x &= v_{1x} + V_x, \\ v_y &= v_{1y} + V_y, \\ v_z &= v_{1z} + V_z. \end{aligned} \quad (\text{III}, 5)$$

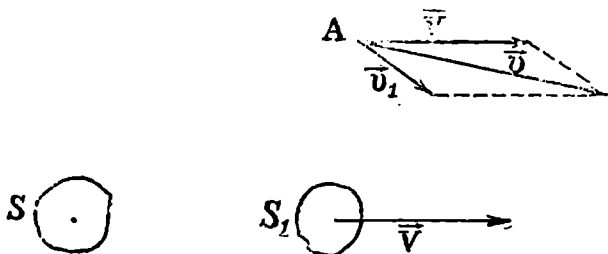
ან ვექტორულად

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{V}. \quad (\text{III}, 5')$$

მიღებულ შედეგს, რომ ნაწილაკის სიჩქარე S სისტემის მიმართ არის ჯამი ნაწილაკის სიჩქარისა S_1 სისტემის მიმართ და S_1 სისტემის სიჩქარისა S სისტემის მიმართ, ეწოდება სიჩქარეთა შეკრების კანონი (ნახ. 35). (III,5) ფორმულების კიდევ ერთხელ გაწარმოება გვაძლევს

$$\vec{a} = \vec{a}_1, \quad (\text{III}, 6)$$

სადაც \vec{a} და \vec{a}_1 წარმოადგენს ნაწილაკის აჩქარებებს S და S_1 სისტემების მიმართ. \vec{V} სიჩქარის წარმოებული ნულის ტოლია, ვინაიდან



ნახ. 35

პირობის თანახმად იგი მუდმივი სიდიდეა. როგორც ვხედავთ, ნაწილაკის აჩქარება ერთი და იგივეა ყველა ინერციული სისტემის მიმართ.

მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეები სხვადასხვანაირად გარდაიქმნება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს; მაგალითად, მონაკვეთის სიგრძე ერთი და იგივეა ყველა ინერციულ სისტემაში. ასევე ერთნაირია მოვლენის ხანგრძლივობა. მაგრამ კოორდინატები და სიჩქარეები იცვლებიან ასეთი გადასვლის დროს: x_1 არ უდრის x -ს, y_1 არ უდრის y -ს. აჩქარება ერთი და იგივეა სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში. მაშასადამე, ზოგი სიდიდე არ იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, ზოგი კი — იცვლება. ვუწოდოთ სიდიდეებს, რომლებიც არ იცვლება ასეთი გადასვლის დროს, ინვარიანტული სიდიდეები, ხოლო სიდიდეებს, რომლებიც იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, — ვარიანტული სიდიდეები. როგორც ზემოთ ვნახეთ, გალილეის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულ სიდიდეებს წარმოადგენენ — მონაკვეთის სიგრძე, მოვლენის ხანგრძლივობა და აჩქარება. ვარიანტული სიდიდეებია კოორდინატები და სიჩქარე. შემდეგში გავარკვევთ რა თვისების მქონეა ამ მხრივ სხვა მექანიკური სიდიდეები: მოძრაობის რაოდენობა, ძალა, ენერგია და სხვა.

§ 18. კლასიკური მემდინარეობის ფარდობითობის პრინციპი

უკვე გალილეის მიერ იყო შენიშნული, რომ მექანიკური მოვლენების მიმდინარეობის თვალსაზრისით ინერციული სისტემები განსაკუთრებულ თავისებურებას იჩენს. ეს თავისებურება იმაში გამოიხატება, რომ მექანიკური მოვლენები სრულიად ერთნაირად მიმდინარეობს სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში. აი როგორ აღწერს გალილეი ინერციული სისტემების ამ თვისებას თავის ნაშრომში „დილოგები სამყაროს ორი უმთავრესი სისტემის შესახებ“ (1638); „თუ გემის მოძრაობა თანაბარია, თქვენ ვერ შეამჩნევთ ვერავითარ ცვლილებებს ირგვლივ მიმდინარე მოვლენებში და არ გეჩვენებათ არავითარი საშუალება გამოარკვიოთ, მოძრაობს გემი თუ ერთ ადგილზე დგას. ამხანაგისათვის რაიმე სხეულის გადაადგილების დროს თქვენ არ გჭირდებათ მისი (სხეულის) შეტი ძალით გასროლა, როდესაც ამხანაგი დგას გემის კიბოსთან, ვიდრე წინააღმდეგ შემთხვევაში...“

ცხადია, დედამიწის მიმართ თანაბრად მოძრაე გემს გალილეი განიხილავს როგორც ათვლის ნეორე ინერციულ სისტემას და აღნიშნავს, რომ ამ სისტემაში მოვლენები ისე მიმდინარეობს როგორც უძრავ გემზე. ინერციული სისტემების ეს განსაკუთრებული თვისება კარგად არის ცნობილი ყოველდღიური ცხოვრებიდან. თანაბრად

მოძრავ მატარებელში ყველა მექანიკური მოვლენა ისე მიმდინარეობს როგორც უძრავ მატარებელში: ვარდნილი სხეული ვარდება იატაკზე თანაბრად აჩქარებული სწორხაზოვანი მოძრაობით, საქანის რხევა და გასროლილი სხეულის მოძრაობა ისეთივეა როგორც უძრავ მატარებელში. თანაბრად მოძრავ მატარებელში ყოფნის დროს ხშირად ისეთი შთაბეჭდილება იქმნება, თითქოს მოძრაობს არა მატარებელი, არამედ მის გარეთ მყოფი ყველა სხეული. ამავე ფაქტის დამამტკიცებელია აგრეთვე ის გარემოება, რომ მიუხედავად დედამიწის სწრაფი მოძრაობისა მზის მიმართ¹, ჩვენ სრულებით ვერ ვამჩნევთ ამ მოძრაობას.

გალილეის მიერ შენიშვნის სახით გამოთქმული ინერციული სისტემების ეს შესანიშნავი თვისება სავსებით გარკვეული დებულების სახით იყო ჩამოყალიბებული ნიუტონის მიერ მის ცნობილ შრომაში „ბუნების ფილოსოფიის მათემატიკური საფუძვლები“ (1686): „რაიმე სივრცეში მყოფი სხეულების ფარდობითი მოძრაობანი ერთნაირია, უძრავია ეს სივრცე თუ მოძრაობს თანაბრად და სწორხაზოვნად ბრუნვის გარეშე (მოძრაობის აქსიომების მეხუთე შედეგი)“. ნიუტონის ფორმულირებაში გამოთქმა „რაიმე სივრცეში“ ჩვენი ტერმინოლოგიის მიხედვით ნიშნავს „რაიმე ათვლის სისტემაში“.

ინერციული სისტემების ეს თვისება მრავალი ცდით არის შემოწმებული. მას თვლიან ფიზიკის ერთ-ერთ ძირითად დებულებად და უწოდებენ კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპს. იგი შემდგომად ყალიბდება:

მექანიკური მოვლენები სავსებით ერთნაირად (იგივეურად) მიმდინარეობს ყველა ინერციულ სისტემაში. სულ სხვა იქნება, თუ ინერციული სისტემიდან არაინერციულ სისტემაზე გადავალთ. კარგად არის ცნობილი, რომ მატარებელში ყოფნის დროს ადვილად შეიძლება შეიმჩნეს მისი აჩქარება ან შენელება. აჩქარებულად მოძრავ ათვლის სისტემაში მექანიკური მოვლენები არ მიმდინარეობს ისე როგორც ინერციულ სისტემაში. ჩვენ შემდეგ ვავარკვევთ როგორ იცვლება მექანიკური მოვლენების მიმდინარეობა არაინერციულ სისტემაში გადასვლის შედეგად.

ფარდობითობის პრინციპი, ე. ი. ის გარემოება, რომ მექანიკური მოვლენები ერთნაირად მიმდინარეობს სხვადასხვა ინერციულ სისტე-

¹ მართალია, დედამიწა არ მოძრაობს მზის მიმართ თანაბრად და სწორხაზოვნად, მაგრამ დროის მცირე შუალედში ეს მოძრაობა მიახლოებით ინერციულად შეიძლება ჩავთვალოთ.

მაში, გარკვეულად ზღუდავს მექანიკის კანონების ჩასიათს. მართლაც, ეთქვათ, გვსურს ჩამოვაყალიბოთ მექანიკის კანონები რაიმე ინერციულ სისტემაში. ვინაიდან მექანიკის კანონების დანიშნულებაა ზუსტად აღწეროს და ახსნას მექანიკური მოვლენების მიმდინარეობა, უკანასკნელნი კი ერთნაირად მიმდინარეობს ყველა ინერციულ სისტემაში, !ცხადია, რომ მექანიკის კანონებიც არ უნდა იცვლებოდეს ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ჩვენ კი ვიცით, რომ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა წარმოებს გალილეის გარდაქმნების საშუალებით. მაშასადამე, მექანიკის კანონები ისეთი სახისა უნდა იყოს, რომ ისინი არ უნდა იცვლებოდნენ გალილეის გარდაქმნების გამოყენების შედეგად.

ცნობილია, რომ მექანიკის ყოველი კანონი შეიძლება მათემატიკურად გამოისახოს გარკვეული ტოლობის სახით:

$$A = B,$$

სიდაც A და B მექანიკური სიდიდეებია და გაზომილია რაიმე ინერციული სისტემის მიმართ. გადავიდეთ ახლა სხვა ინერციულ ათვლის სისტემაზე. ამ ახალ სისტემაში A და B სიდიდეების მნიშვნელობები შეიძლება სხვა იყოს, მაგალითად, A_1 და B_1 , მაგრამ ამ ახალ სისტემაშიც მექანიკის კანონს იგივე სახე უნდა ჰქონდეს. რაც პირველ სისტემაში; ეს იმას ნიშნავს, რომ ტოლობა არ უნდა დაირღვეს, ისევე უნდა გვქონდეს

$$A_1 = B_1.$$

მაგალითად, როგორც შემდეგ ვნახავთ, მექანიკაში არსებობს მოძრაობის რაოდენობის, ანუ იმპულსის მუდმივობის, კანონი, რომლის მიხედვითაც, ეთქვათ, ორი ნაწილაკისაგან შემდგარ იზოლირებულ სისტემაში მოძრაობის რაოდენობათა ჯამი მუდმივი სიდიდეა

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const}.$$

როდესაც ახალ ინერციულ სისტემაში გადავალთ, ნაწილაკების სიჩქარეები შეიცვლება (სიჩქარეთა შეკრების კანონის თანახმად), ე. ი. შეიცვლება მოძრაობის რაოდენობებიც, მაგრამ კანონი ისევე ძალაში უნდა დარჩეს. ახალ ინერციულ სისტემაშიც მოძრაობის რაოდენობათა ჯამი ისევე მუდმივი უნდა იყოს (თვით მუდმივი სიდიდე შეიძლება სხვა იყოს). ასევე უნდა იყოს მექანიკის სხვა კანონების შემთხვევაშიც, მაგალითად, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ინერციული სისტემის მიმართ მართებულია ინერციის პრინციპი: იზოლირებული ნივთიერი წერტილი მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს. ახალ ინერციულ სისტე-

მაშინც ეს კანონი ძალაში უნდა დარჩეს, მიუხედავად იმისა, რომ ნიეთიერი წებრტლის სიჩქარე სხვა იქნება. ყოველვე შემოთქმული შეიძლება გამოვთქვათ შექდეგი დებულების სახით: მექანიკის კანონები არ იცვლება გალილეის გარდაქმნების დროს, ე. ი. ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ცხადია, რომ ეს დებულება არის ფარდობათობის პრინციპის და სივრცისა და დროის აბსოლუტურობის უშუალო შედეგი.

შემოთქმულთან დაკავშირებით უნდა აღინიშნოს შემდეგი. აინშტაინის მიერ შექმნილმა ფარდობათობის თეორიამ საჭირო გახადა მნიშვნელოვანი ცვლილებების შეტანა ჩვენს წარმოდგენებში სივრცისა და დროის შესახებ. სახელდობრ, გამოარკვა (ამ საკითხს ჩვენ დაწვრილებით შექვევ კანვიზილავთ), რომ არ არის ზუსტი კლასიკური ფიზიკის დებულებანი სივრცისა და დროის აბსოლუტურობის, უფრო სწორად, ინვარიანტულობის შესახებ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს; ეს იმას ნიშნავს, რომ მონაკვეთის სიგრძე, გაზომილი ერთ ინერციულ სისტემაში, არ უდრის იმავე მონაკვეთის სიგრძეს, გაზომილს სხვა ინერციულ სისტემაში. ასევე არ არის ტოლი მავლიენის ხანგრძლივებები სხვადასხვა ათვლის სისტემის მიმართ. მაგრამ თუ ეს ასეა, მაშინ არ უნდა იყოს სწორი გალილეის გარდაქმნის ფორმულები, რამელთა გამოყენა სწორედ სივრცისა და დროის ინვარიანტულობისხევა დამყარებული. მაშასადამე, ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა არ წარმოებს გალილეის გარდაქმნების მიხედვით. ფარდობათობის თეორია ამტკიცებს, რომ ეს გადასვლა უნდა წარმოებდეს სხვა გარდაქმნის ფორმულებს. ე. წ. ლორენცის გარდაქმნის ფორმულების მიხედვით, რომლებაც პრინციპულად განსხვავდება გალილეის გარდაქმნის ფორმულებისაგან.

მეორე მხრივ, ცდები გვიჩვენებს, რომ ფარდობათობის პრინციპი არათუ ირღვევა, არამედ კიდევ უფრო ფართოვდება. მტკიცდება, რომ არა მარტო მექანიკური, არამედ საერთოდ ყველა ფიზიკური მოვლენა სავსებით ერთნაირად მიმდინარეობს სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში და ვინაიდან ინერციულ სისტემებს შორის გადასვლა ლორენცის ფორმულების საშუალებით წარმოებს, კლასიკური მექანიკის კანონები ისე უნდა შეიცვალოს, რომ ისინი ინვარიანტული იყვნენ ამ გარდაქმნების მიმართ. სწორედ ეს ცვლილება მოახდინა აინშტაინის ფარდობათობის თეორიამ.

ამასთანავე უნდა აღინიშნოს, რომ მიუხედავად პრინციპულად მნიშვნელოვანი განსხვავებისა ლორენცისა და გალილეის გარდაქმნებს შორის, პრაქტიკულად მათ შორის განსხვავება შესამჩნევია მხოლოდ

დიდი სიჩქარით მოძრავე სხეულებისათვის, სახელდობრ ისეთი სხეულებისათვის, რომელთა სიჩქარე ახლოსაა სინათლის სიჩქარესთან. ამიტომაც მცირე სიჩქარით მოძრავე სხეულებისათვის გალილეის ვარდაქმნის ფორმულები და მათზე დამოკიდებული კლასიკური მექანიკის კანონები პრაქტიკულად საეცებით გამოსაყენებელია მათი მოძრაობის შესასწავლად.

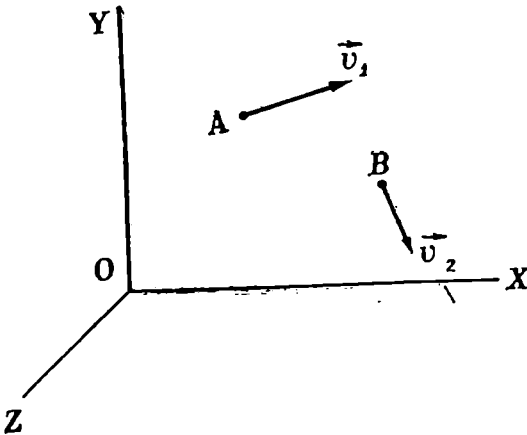
შენიშვნა. ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში მექანიკური მოვლენები ერთნაირად მიმდინარეობს. ცხადია, ეს არ უნდა იქნეს გაგებელი ისე, რომ ერთი და იმავე სხეულის მოძრაობა ერთი და იმავე სახის იქნება სხვადასხვა ინერციულ სისტემის თვალსაზრისით. განვიხილოთ მაგალითი: ჩავთვალოთ დედამიწა ინერციულ სისტემად, რაც გარკვეული მიახლოებით ყოველთვის შეიძლება. მეორე ინერციულ სისტემად ავიღოთ თანაბრად მოძრავე მატარებელი. ვთქვათ, დამკვირვებელმა დედამიწის ზედაპირზე აიღო სხეული, გააჩერა გარკვეულ სიმაღლეზე (საწყის მომენტში სიჩქარე ნულია) და გაუშვა ზელი. დედამიწის მიზიდულობის გავლენით სხეული იწყებს სწორხაზოვან თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობას. მატარებელში მყოფი დამკვირვებლისათვის ეს სხეული იმოძრაეებს პარაბოლასზე და არა სწორ ხაზზე. მაგრამ რაიმე სხეულის მოძრაობის სხვადასხვა სასიათი სხვადასხვა ინერციული სისტემის მიმართ არ ეწინააღმდეგება ფარდობითობის პრინციპს. უკანასკნელი სრულიადაც არ მოითხოვს, რომ მოცემული სხეულის მოძრაობა ერთნაირი იყოს ყველა ინერციულ სისტემაში. მოითხოვება შემდეგი: იგივე ცდა, რომელიც ჩატარა დედამიწაზე მყოფმა დამკვირვებელმა, რომ გაიმეოროს მატარებელში მყოფმა დამკვირვებელმა, იმავე სახის მოძრაობა უნდა მიიღოს. ე. ი. მატარებელში მყოფმა დამკვირვებელმა რომ აიღოს სხეული, გააჩეროს გარკვეულ სიმაღლეზე (საწყის მომენტში მატარებლის მიმართ სიჩქარე ნულია) და გაუშვას ზელი, სხეული იმოძრაეებს სწორხაზოვნად და თანაბრად აჩქარებულად, ე. ი. ისევე როგორც დედამიწაზე ჩატარებული ცდის დროს. როგორც ვხედავთ, მოვლენების მიმდინარეობის იგიურობისათვის საჭიროა, რომ ორივე ინერციულ სისტემაში განხორციელებული იყოს ერთნაირი საწყისი პირობები.

თ ა ზ ი მ ა ო ტ ხ ა

ი მა უ ლ ს ი ს მ ე ლ მ ი ა ო ბ ი ს კ ა ნ ო ნ ი

§ 19. ნ ა წ ი ლ ა კ თ ა უ რ თ ი ე რ თ ქ მ ე ლ ე ბ ი ს ხ ა ს ი ა თ ი და მ ა ს ი ს ც ნ ე ბ ა

წინა პარაგრაფში გამოვარკვეეთ, რომ თუ ნაწილაკზე სხვა სხეულები არ მოქმედებს, ე. ი. თუ იგი იზოლირებულია, იქნება უძრავი ან იმობრავებს მუდმივი სიჩქარით არჩეული ინერციული სისტემის მიმართ. შევისწავლოთ ახლა ნაწილაკის მოძრაობა ურთიერთქმედების არსებობის შემთხვევაში. ჩვენთვის არ არის საჭირო ურთიერთქმედების ხასიათის ცოდნა, ვინაიდან ის კანონები, რომლებიც აკავშირებს ურ-

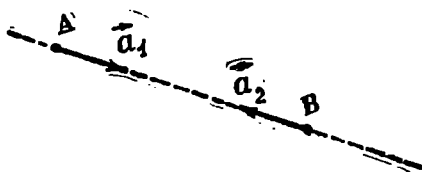


ნახ. 36

თიერთქმედებას ნაწილაკის მოძრაობასთან, არ არის დამოკიდებული ურთიერთქმედების ხასიათზე, ე. ი. მართებულია, როგორც ხასიათისაც უნდა იყოს ურთიერთქმედება.

განვიხილოთ რაიმე ინერციული ათვლის სისტემის მიმართ ორი ურთიერთქმედი წერტილის მოძრაობა (ნახ. 36). ვთქვათ, რომელიმე

მომენტში ერთი ნაწილაკის სიჩქარე არის v_1 , ხოლო მეორისა — v_2 . B ნივთიერი წერტილი რომ არ მოქმედებდეს A ნივთიერ წერტილზე, უკანასკნელი მუდმივი სიჩქარით იმოძრაებდა, ე. ი. v_1 მუდმივი იქნებოდა. ასევე მუდმივი იქნებოდა B ნაწილაკის v_2 სიჩქარე. მაგრამ იმის გამო, რომ ნაწილაკები ურთიერთქმედებს, მათი სიჩქარეები აღარ იქნება მუდმივი; აქედან, ცხადია, რომ ნაწილაკების ურთიერთქმედება იწვევს სიჩქარეების ცვლილებას, ე. ი. აჩქარებას. აღნიშნოთ ურთიერთქმედების შედეგად ნაწილაკების მიერ მიღებული აჩქარებები \bar{a}_{12} -ითა და \bar{a}_{21} -ით. ცდები გვიჩვენებს, რომ ეს აჩქარებანი ან, რაც იგივეა, სიჩქარეების ცვლილება გარკვეული კანონზომიერებითაა დაკავშირებული ერთმანეთთან. ჯერ ერთი, ირკვევა, რომ ურთიერთქმედ



ნახ. 37

ნივთიერ წერტილთა \bar{a}_{12} და \bar{a}_{21} აჩქარებანი ყოველთვის ერთმეორის საწინააღმდეგოდაა მიმართული ურთიერთქმედების ხასიათისაგან დამოუკიდებლად (ნახ. 37). მეორე მნიშვნელოვანი კანონზომიერება, რომელსაც ურთიერთქმედი ნაწილაკები გვიჩვენებს, შეეხება აჩქარებათა სიდიდეს. ცდები გვიჩვენებს, რომ აჩქარებათა სიდიდეების შეფარდება მუდმივი სიდიდეა

$$\frac{a_{21}}{a_{12}} = \text{const.} \quad (IV, 1)$$

ამ კანონზომიერების შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, ურთიერთქმედ ნაწილაკთა აჩქარებების შეფარდება ერთ რომელიღაც მომენტში გარკვეული სიდიდეა. დროის განმავლობაში ეს აჩქარებები შეიცვლება, მაგრამ მათი შეფარდება ისეთივე იქნება როგორც საწყის მომენტში. ეს იმას ნიშნავს, რომ (IV, 1) ფორმულაში შემავალი მუდმივა არ არის დამოკიდებული დროზე. მაგრამ აღნიშნული კანონზომიერება მხოლოდ ამ გარემოებას არ გამოხატავს. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის, რომ აჩქარებათა შეფარდება სრულებით არ არის დამოკიდებული ურთიერთქმედების ხასიათზე. როგორც უნდა ურთიერთქმედებდეს ნაწილაკები — დაჭახებით, გრავიტაციული, ელექტრული ან რაიმე სხვა ველებით, ან კიდევ რაიმე მესამე სხეულის საშუალებით, აჩქა-

რებათა შეფარდება ყოველთვის ერთი და იგივეა. ეს შეფარდება მხოლოდ ამ ნაწილაკებზეა დამოკიდებული. მაშასადამე, ნივთიერი წერტილები ურთიერთქმედების შედეგად საზოგადოდ სხვადასხვა აჩქარებებს ღებულობს, რომლებიც მუდმივ შეფარდებაში არიან ერთმანეთთან. თუ რამდენად დიდია ერთის აჩქარება, ვიდრე მეორისა, დამოკიდებულია მხოლოდ ამ ნაწილაკებზე.

ავარჩიოთ რომელიმე ერთი ნაწილაკი, როგორც ძირითადი, და მოვიყვანოთ მასთან ურთიერთქმედებაში სხვა ნაწილაკები. ცხადია, ეს ნაწილაკები სხვადასხვა აჩქარებებს მიიღებს. რაც უფრო ნაკლებია ნაწილაკის მიერ მიღებული აჩქარება, მით უფრო ძნელია ამ ნაწილაკის გამოყვანა ინერციული მდგომარეობიდან ან, როგორც ამბობენ, მით უფრო მეტია ამ ნაწილაკის ინერცია. სხვადასხვა ნაწილაკს ან სხეულს სხვადასხვა ინერცია აქვს და იმ ნაწილაკს ექნება მეტი ინერცია, რომელიც ნაკლებ აჩქარებას მიიღებს ურთიერთქმედების შედეგად. სხეულებს ეს თვისება მხოლოდ მათზეა დამოკიდებული, იგი არ იცვლება არც დროს განმავლობაში. არც ურთიერთქმედების ხასიათის შეცვლის გამო¹. სხეულების ინერციის საზომად შემოღებულია ახალი სიდიდე, რომელსაც მასა ეწოდება. ორი სხეულის მასის შედარება წარმოებს ურთიერთქმედების შედეგად მიღებული აჩქარებების შედარებით. თუ, მაგალითად, A ნაწილაკის მიერ მიღებული აჩქარება სამჯერ მეტია, ვიდრე B ნაწილაკის აჩქარება, უკანასკნელის მასა სამჯერ მეტი იქნება, ვიდრე A -ს მასა. აღვნიშნოთ მასა m ასოთი, მაშინ ის გარემოება, რომ ნაწილაკების მასები ურთიერთქმედების შედეგად მიღებული აჩქარებების უკუპროპორციულია, შეიძლება შემდეგნაირად გამოისახოს:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_{12}}{a_{21}} \quad (IV, 2)$$

ან

$$m_1 a_{12} = m_2 a_{21}.$$

მივიღოთ მხედველობაში ის გარემოება, რომ აჩქარებები ერთმანეთის საწინააღმდეგოდაა მიმართული. მაშინ წინა ტოლობა ვექტორულად შემდეგნაირად შეიძლება დაიწეროს:

$$m_1 \vec{a}_{12} = -m_2 \vec{a}_{21}, \quad (IV, 3)$$

ე. ი. ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკისათვის მასებისა და აჩქარებების ნამრავლები ტოლია და ერთმანეთის საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

¹ ეს შედეგი მართებულია მხოლოდ კლასიკურ ფიზიკაში: ფარდობითობის თეორიის თანახმად სხეულის მასა დამოკიდებულია მის სიჩქარეზე.

განვიხილოთ ასლა სამი ურთიერთმოქმედი ნაწილაკის შემთხვევა. ამ შემთხვევაში პირველი ნაწილაკის აჩქარება გამოწვეული იქნება დანართ-ჩენი ორი ნაწილაკის მოქმედებით. აღენიშნოთ $\vec{a}_{(12a)}$ -ით პირველი ნაწილაკის აჩქარება, გამოწვეული მეორე და მესამე ნაწილაკის საერთო მოქმედებით, ხოლო \vec{a}_{12} -ით და \vec{a}_{13} -ით—აჩქარებანი, გამოწვეული მხოლოდ მეორე და მხოლოდ მესამე ნაწილაკის მოქმედებით. მაშინ ცდება გვიჩვენებს, რომ

$$\vec{a}_{(12a)} = \vec{a}_{12} + \vec{a}_{13}. \quad (IV, 4)$$

ეს შედეგი იმის მაჩვენებელია, რომ სხვადასხვა ნაწილაკებით გამოწვეული აჩქარებანი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია (აჩქარებების დამოუკიდებლობის კანონი). ცხადია, რომ ეს შედეგი შეიძლება გავრცელდეს მრავალი ნაწილაკისაგან შედგარ სისტემაზეც.

როგორც ვთქვით, აჩქარებათა შედარება გვაძლევს საშუალებას შევადაროთ ნაწილაკების მასები, მაგრამ ამით არ შეიძლება განისაზღვროს ცალკეული ნაწილაკების მასების რიცხვითი მნიშვნელობები. მართლაც. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილ შემთხვევაში აჩქარებების შედარებამ გვიჩვენა, რომ A ნაწილაკის მასა სამჯერ მეტია, ვიდრე B ; ნაწილაკის მასა, მაგრამ ეს არ არის საკმარისი იმის განსაზღვრისათვის, თუ როგორია მათი მასები. ამისათვის საჭიროა მასის ერთეულის შერჩევა, ე. ი. შერჩევა ისეთი სხეულისა, რომლის მასაც ერთეულად იქნება მიღებული. ასეთი სხეულის (მასის ეტალონის) შერჩევის შემდეგ უკვე სავსებით ცალსახად შეიძლება განისაზღვროს ყველა სხვა სხეულის მასა (აჩქარებათა შეფარდების საშუალებით).

მეტრული სისტემის დადგენის დროს მასას ეტალონად მიღებულ იქნა ერთი კუბური დეციმეტრი მოცულობის მქონე გამოხდილი წყალი ცელსიუსის 4° -ზე. მისი მასა მიღებულ იქნა ერთეულად და მას ეწოდა კილოგრამი. დამზადებულ იქნა სპეციალური ლითონის ეტალონი (არქიველუა კილოგრამი), რომლის მასა იმდროინდელი სიზუსტით კილოგრამის ტოლი იყო. მაგრამ შემდეგი უფრო ზუსტი გაზომვებით გამოირკვა, რომ ამ არქიველუ კილოგრამის მასა არ უდრის ერთი კუბურ დეციმეტრი გამოხდილი წყლის მასას. ისევე როგორც მეტრის შემთხვევაში, თუ შენარჩუნებული იქნებოდა კილოგრამის განსაზღვრა, როგორც ერთი კუბური დეციმეტრი გამოხდილი წყლის მასისა, საჭირო გახდებოდა ეტალონის განუწყვეტელი ცვლა (გაზომვის სიზუსტის ზრდათან ერთად). ამის თავიდან ასაცილებლად შეთანხმდნენ, განსაზღვრონ კილოგრამი, როგორც მასა ერთხელ და სამუდამოდ დამზადებული ეტალონისა; ასეთ ეტალონად მიღებულია პლატინისა და ირიდიუმის შენადნობისაგან (90% Pt და 10% Ir) დამზადებული ცილინდ-

რი, რომელიც ინახება წონათა და ზომათა საერთაშორისო ბიუროში (პარიზის მახლობლად); მას ეწოდება მასის საერთაშორისო ეტალონი, ხოლო მის მასას—კილოგრამი.

გარდა ამ საერთაშორისო ეტალონისა, დამზადებულ იქნა მისი 44 ასლი, რომლებიც შედარდა ერთმანეთთან და საერთაშორისო ეტალონთან. კილოგრამის ეს ეტალონები დაურეგლდა სხვადასხვა სახელმწიფოს. რუსეთს წილად ჰვდა ორი ეტალონი, რომელთაგან ერთ-ერთი (№ 12) მიღებულია ძირითად ეტალონად საბჭოთა კავშირისათვის. კილოგრამის ეტალონს აქვს მომრგვალებული კიდეების მქონე ცილინდრის ფორმა. იგი ინახება ფოლადის კარადაში, რომელიც მოთავსებულია ფოლადისავე სარდაფში. დროგამოშვებით წარმოებს ამ ძირითადი ეტალონის შედარება საერთაშორისო ეტალონთან, რათა გაირკვეს, ხომ არ მოხდა რაიმე ცვლილება.

კილოგრამის მეათასედ ნაწილს ეწოდება გრამი და, ჩვეულებრივ, ფიზიკაში ეს ერთეული გამოიყენება როგორც მასის ერთეული. მე-4 ცხრილში მოყვანილია გრამის ჯერადი და წილადი ერთეულები.

ჩვენ გამოვარკვეთ, რომ მასა განსაზღვრული აჩქარებების შეფარ-

ცხრილი 4

სახელწოდება	აღნიშვნა		კავშირი ძირითად ერთეულთან
	ქართული	საერთაშორისო	
ტონა	ტ	t	10 ³
ცენტნერი	ც	q	10 ²
კილოგრამი	კგ	kg	1
დეკაგრამი	დეკგ	dkg	10 ⁻²
გრამი	გ	g	10 ⁻³
დეციგრამი	დეგ	dg	10 ⁻⁴
სანტიგრამი	სგ	cg	10 ⁻⁵
მილიგრამი	მგ	mg	10 ⁻⁶

დების საშუალებით ახასიათებს სხეულების ინერციულობის თვისებას. შემდეგში, გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვის დროს შევხვდებით სიდიდეს, რომელიც ახასიათებს სხეულების ურთიერთმიზიდვის თვისებას (მაგალითად, რაიმე სხეულისა და დედამიწის) და რომელსაც აგრეთვე მასა ეწოდება. იმისათვის, რომ არ მოხდეს ამ ორი

სხვადასხვა მასის ერთმანეთში არევა, ინერციის თვისების დამახასიათებელ მასას ინერტულ მასას უწოდებენ, გრავიტაციულ ურთიერთმიზიდვის დამახასიათებელ მასას კი გრავიტაციულ ან მძიმე მასას.

შემდეგში ჩვენ გავარკვევთ კავშირს ამ მასებს შორის, ანლა კი, სადაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, ინერტულ მასას მოკლედ მასას ვუწოდებთ.

§ 20. იმპულსის მუდმივობის კანონი

დავუბრუნდეთ ისევ ორი ნაწილაკისაგან შემდგარ იზოლირებულ სისტემას. ზემოთ ჩამოყალიბებულ კანონზომიერებას ურთიერთქმედ ნა-

წილაკთა აჩქარების შესახებ შეიძლება სხვა სახე მივცეთ, თუ აჩქარებებს გამოვსახნავთ სიჩქარეების საშუალებით. ვინაიდან აჩქარება წარმოადგენს სიჩქარის წარმოებულს, (IV,3) განტოლება ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0;$$

აქედან ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.} \quad (\text{IV,5})$$

როგორც ვხედავთ, ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემის შემთხვევაში სიჩქარეებისა და სათანადო მასების ნამრავლთა ჯამი მუდმივია. ჩვენ აქ შევხვდით ახალ სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს ნაწილაკის მასისა და სიჩქარის ნამრავლს. ვუწოდოთ ამ სიდიდეს $m \cdot v$ და აღვნიშნოთ \vec{p} ასოთი:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (\text{IV,6})$$

იგი ვექტორული სიდიდეა და მიმართულია სიჩქარის გასწვრივ, რადგანაც მასა დადებითი სიდიდეა.

ვინაიდან ჩვენ მიერ განხილული სისტემა, შემდგარი ორი ნაწილაკისაგან, იზოლირებულია, ე. ი. მასზე სხვა გარეშე სხეულები არ მოქმედებს, (IV,5) ფორმულით გამოხატული კანონი შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს: იზოლირებული სისტემის ნაწილაკთა იმპულსების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

ეს კანონი გავარჩიეთ ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის, მაგრამ როგორც ცდები გვიჩვენებს, იგი მართებულია ნაწილაკთა ნებისმიერი რიცხვისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემისათვისაც. თუ ნაწილაკთა რიცხვი არის n , იმპულსის მუდმივობის კანონი შემდეგნაირად დავწერება:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const.} \quad (\text{IV,7})$$

შემადგენელ ნაწილაკთა იმპულსის ჯამს ეწოდება სისტემის იმპულსი. ასეთია ზოგადი გამოსახვა იმპულსის მუდმივობის კანონისა, რომელიც წარმოადგენს სხეულთა ურთიერთქმედების ერთ-ერთ ძირითად კანონს. იგი შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ინერციის კანონის განზოგად-

დება. მართლაც, ერთი ნაწილაკის შემთხვევაში იმპულსის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\overline{mv} = \text{const.}$$

ან, ვინაიდან მასა მუდმივია,

$$\overline{v} = \text{const.}$$

რაც წარმოადგენს ინერციის კანონს.

იმპულსის მუდმივობის კანონის ერთი მნიშვნელოვანი მხარის გასარკვევად დაუბრუნდეთ ისევ ორი ნაწილაკისაგან შემდგარ იზოლორებულ სისტემას (ფორმულა IV,5). ნაწილაკთა შორის რომ ურთიერთქმედება არ იყოს, მათი სიჩქარეები მუდმივი იქნება (ინერციის კანონის თანახმად), მუდმივი იქნება მათი იმპულსები და, მაშასადამე, იმპულსების ჯამიც. ურთიერთქმედ ნაწილაკთა შემთხვევაში სიჩქარეები და, მაშასადამე, იმპულსებიც ცვალებადია, მაგრამ მნიშვნელოვანი ის არის, რომ მიუხედავად ამისა მათი ჯამი მუდმივია. ურთიერთქმედების შედეგად ერთი ნაწილაკის იმპულსი შეიძლება გაიზარდოს, მაგრამ მაშინ ასეთივე სიდიდით უნდა შემცირდეს მეორე ნაწილაკის იმპულსი

$$\Delta \overline{p}_2 = - \Delta \overline{p}_1.$$

შეიძლება ითქვას, რომ ურთიერთქმედების დროს წარმოებს იმპულსის გადაცემა ერთი ნაწილაკიდან მეორეზე. საერთო იმპულსის მუდმივობის პირობა კი ახდებს ამ გადაცემის რეგულირებას: რამდენ იმპულსსაც კარგავს ერთი ნაწილაკი, იმდენს იძენს მეორე. ცხადია, რომ იმპულსის მუდმივობის კანონის შინაარსი მდგომარეობს როგორც საერთო იმპულსის მუდმივობაში, ისე იმპულსის გადაცემაში ერთი ნაწილაკიდან მეორეზე. იმპულსის გადასვლის გარეშე მუდმივობის კანონი ინერციის კანონზე დაიყვანება და არაფერს ახალს არ იძლევა.

§ 21. იმპულსის მუდმივობის კანონის ჯოგბიძატი გამოყენება

მოდრაობის რაოდენობის ანუ იმპულსის მუდმივობის კანონი მრავალ მოვლენაში პოულობს წითავის გამოყენებას. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ნაწილაკთა დაჯახების მოვლენები, რაკეტის მოძრაობა, უძრავი სხეულების ამოძრავება ურთიერთქმედების გავლენით და სხვ. ნაწილაკთა დაჯახების მოვლენებს ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ საკმაოდ დაწვრილებით, ახლა კი გავარჩევთ რამდენიმე მარტივ მაგალითს.

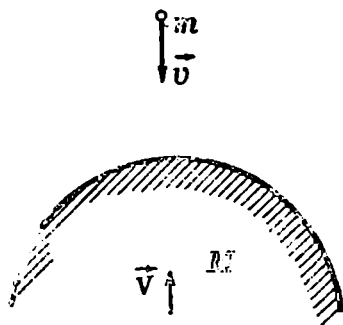
1. უძრავი ნაწილაკების ამოძრავება ურთიერთქმედების გავლენით. ვთქვათ, საწყის მომენტში m_1 და m_2 მასების მქონე ნაწილაკები უძრავია. რომელიღაც გარკვეულ მომენტში მათ შორის იწყება ურთიერთქმედება, რის გამოც ისინი იწყებენ მოძრაობას და გარკვეული დროის შემდეგ იღებენ v_1 და v_2 სიჩქარეებს. ვინაიდან მოძრაობის დაწყებამდე სისტემის იმპულსი ნულის ტოლი იყო და იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად იგი ყოველთვის ნულის ტოლი უნდა დარჩეს (სხვა სხეულები ამ ნაწილაკზე არ მოქმედებს), მივიღებთ, რომ ამოძრავების შემდეგაც

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = 0,$$

აქედან შეიძლება ვიპოვოთ სიჩქარეების აბსოლუტური სიდიდეთა შეფარდება

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

ე. ი. საწყის მომენტში უძრავი ნაწილაკები ურთიერთქმედების შედეგად ამოძრავდებიან ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ მიმართული და მასების უკუპროპორციული სიჩქარეებით. მაშასადამე, ის ნაწილაკი მიიღებს მეტ სიჩქარეს, რომელსაც ნაკლები მასა აქვს. შეუძლებელია, რომ ურთიერთქმედების შედეგად ამოძრავდეს მხოლოდ ერთი სხეული — ერთი სხეულის ამოძრავება აუცილებლად იწვევს მეორე, მასთან ურთიერთქმედი სხეულის ამოძრავებას, მაგალითად, თოფის ან ზარბაზნის გასროლის დროს, ტყვიის ან ყუმბარის ამოძრავებასთან ერთად აუცილებლად უნდა ამოძრავდეს თოფი ან ზარბაზანი (საწინააღმდეგო მიმართულებით) მასის უკუპროპორციული სიჩქარით (უკუცემა). ვთქვათ, დედამიწის ზედაპირზე გარკვეულ სიმაღლეზე ატანილია m მასის სხეული; ამ სხეულისათვის ხელის გაშვების შემდეგ იგი იწყებს ვარდნას და იღებს გარკვეულ სიჩქარეს (ნახ. 38). ეს ამოძრავება გამოწვეულია დედამიწისა და ამ სხეულის



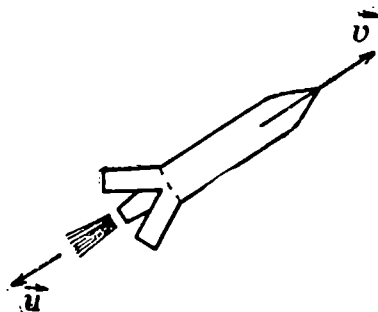
ნახ. 38

ურთიერთქმედებით. ამიტომაც იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად დედამიწაც უნდა ამოძრავდეს საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაგრამ

დედამიწის \vec{V} სიჩქარე იმდენჯერ ნაკლები იქნება სხეულის \vec{v} სიჩქარეზე, რამდენჯერაც მისი მასა მეტია სხეულის მასაზე.

2. რაკეტის მოძრაობა. იმპულსის მუდმივობის კანონის გამოყენების ფრიად მნიშვნელოვან შემთხვევას წარმოადგენს რაკეტის მოძრაობა. ჩვენ არ განვიხილავთ იმ პროცესებს, რომლებიც მიმდინარეობს რაკეტულ ძრავაში, ვინაიდან ეს საკითხები განიხილება მოლეკულურ ფიზიკაში. შევეჩვებით მხოლოდ მექანიკურ საკითხს, რისთვისაც საკმარისია ვიცოდეთ, რომ რაკეტის მოძრაობის დროს ხდება ნივთიერების გამოსროლა რაკეტიდან გარკვეული სიჩქარით. მაშასადამე, რაკეტის მასის ნაწილი იღებს გარკვეული მიმართულების სიჩქარესა და იმპულსს. ამიტომაც რაკეტის დარჩენილი ნაწილი იღებს საწინააღმდეგოდ მიმართულ და იმავე სიდიდის იმპულსს. სწორედ ეს წარმოადგენს რაკეტის მოძრაობის და მისი სიჩქარის ცვლილებათა მიზეზს.

ვთქვათ, რაკეტას, რომლის მასაა m , გარკვეულ მომენტში აქვს \vec{v} სიჩქარე (ნახ. 39). რალაც მცირე dt დროის განმავლობაში რაკეტიდან



ნახ. 39

გამოიტყორცნება საწვავის წვის პროდუქტები (ჩვეულებრივი გაზის სახით), რომელთა მასა არის — dm (ვინაიდან dm არის რაკეტის მასის ნაწილი და გაზების გამოტყორცნისას რაკეტის მასა კლებულობს, გამოტყორცნილი გაზების მასა იქნება — dm). დავეუშვათ, რომ გამოტყორცნა წარმოებს \vec{u} სიჩქარით რაკეტის მიმართ. რაკეტის დარჩენილი მასა მიიღებს რალაც დამატებით $d\vec{v}$

სიჩქარეს, რომელიც მიმართული იქნება \vec{u} სიჩქარის საწინააღმდეგოდ. ჩვენი მიზანია ამ დამატებითი სიჩქარის გამოთვლა. ვინაიდან სიჩქარის ნაწილი არ არის დამოკიდებული ათელის სისტემის არჩევაზე, მთელი პროცესი განვიხილოთ თვით რაკეტასთან დაკავშირებული ათელის სისტემის მიმართ. გამოტყორცნილი პროდუქტების იმპულსი ამ სისტემაში არის — $dm \cdot \vec{u}$, რაკეტა (მასით $m + dm$) იღებს $(m + dm) d\vec{v}$ იმპულსს ან, თუ უგულებელვყოფთ dm -ს, m -თან შედარებით, — $m d\vec{v}$ -ს. იმპულსის საერთო ცვლილება ნულის ტოლი უნდა იყოს (მუდმივობის კანონის თანახმად), ამიტომ მივიღებთ

$$m \overline{dv} - dm \cdot \overline{u} = 0$$

ახ

$$m \frac{\overline{dv}}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$$

(უნდა გვახსოვდეს, რომ dm უარყოფითია). ასე იცვლება რაკეტის სიჩქარე გაზების გამოტყორცნის შედეგად. თუ ამ განტოლებას სკალარულად დავწერთ და მივიღებთ, რომ გაზების გამოტყორცნა წარმოებს მოძრაობის ხაზის გასწვრივ, გვექნება

$$m dv = -dm \cdot u$$

(dm -ის უარყოფითობის გამო, მისი აბსოლუტური მნიშვნელობაა $-dm$). გადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგნაირად:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{1}{u} dv$$

და დაეუშვათ, რომ გაზების გამოტყორცნის სიჩქარე ყოველთვის ერთი და იგივეა ($u = \text{const}$), მაშინ ინტეგრება მოგვცემს

$$\ln m = -\frac{1}{u} v + \text{const}_1$$

მუდმივას განსაზღვრისათვის დაეუშვათ, რომ მოძრაობის დაწყების მომენტში ($v=0$) რაკეტის მასა იყო m_0 . ჩასმა მოგვცემს, რომ $\text{const} = \ln m_0$ და საბოლოოდ გვექნება

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v}{u}, \quad (\text{IV}, 8)$$

ახ

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{v}{u}}. \quad (\text{IV}, 8')$$

ასეთია კავშირი რაკეტის მიერ მიღებულ სიჩქარესა და დარჩენილ მასას შორის. ვთქვათ, მთელი საწვავი დაიწვა და რაკეტამ მიიღო საბოლოო სიჩქარე v_{\max} , აღენიშნოთ m_{\min} -ით ის მასა, რომელიც დარჩება ამ სიჩქარის მიღწევის შემდეგ. ცხადია, რომ მაშინ $m_0 - m_{\min}$ იქნება მთელი საწვავის მასა. ადვილად შეიძლება გამოვითვალოთ საწვავის რა რაოდენობა არის საჭირო, რომ მიღწეულ იქნეს მოცემული სიჩქარე. ამისათვის (IV,8') ფორმულა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{m_0 - m_{\min}}{m_0} = 1 - e^{-\frac{v_{\max}}{u}}. \quad (\text{IV}, 9)$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, გაზების გამოსროლა წარმოებს $3700 \frac{m}{sec}$ სიჩქარით. რაკეტამ რომ მიაღწიოს $11200 \frac{m}{sec}$ სიჩქარეს, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ იგი სავსებით მოსწყდეს დედამიწას, საწვავის მასა უნდა შეადგენდეს რაკეტის საწყისი მასის დაახლოებით $19/20$, ე. ი. რაკეტის ყოველ 20 ტონაზე უნდა მოდიოდეს 19 ტონა საწვავი. (IV,9) ფორმულა გვიჩვენებს, რაც უფრო მეტია გამოტყორცნილი გაზების სიჩქარე, მით უფრო ნაკლებია საჭირო საწვავის რაოდენობა; აქედან ჩანს, თუ რამდენად დიდი მნიშვნელობა აქვს დიდი სიჩქარეების მისაღწევად გამოტყორცნილი გაზების სიჩქარის გადიდებას. რაკეტის მოძრაობას გრავიტაციულ ველში განვიხილავთ შემდეგში.

3. მასების (ინერციის) ცენტრი. იმპულსის მუდმივობის კანონის საფუძველზე შეიძლება შემოვიღოთ ფრიად მნიშვნელოვანი ცნება, რომელსაც მასების ან ინერციის ცენტრი ეწოდება. სიმარტივისათვის ჯერ განვიხილოთ ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემა. იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const},$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \quad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt},$$

წინა განტოლებაში ჩასმა და მასების მუდმივობის მხედველობაში მიღება, გვაძლევს

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \text{const}.$$

გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე მასების ჯამზე, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \text{const}. \quad (\text{IV}, 10)$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება აღვნიშნოთ \vec{r}_c -თი და ვუწოდოთ მას ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორი

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{IV}, 11)$$

წერტილს, რომლის რადიუს-ვექტორი არის \vec{r}_c , ეწოდება სისტემის მასების ან ინერციის ცენტრი. (IV,10) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c = \text{const}. \quad (\text{IV}, 12)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ იზოლირებული სისტემის ინერციის ცენტრი მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს. როგორც უნდა მოძრაობდეს სისტემის ცალკეული ნაწილაკები, მთელი სისტემის ინერციის ცენტრი იმოძრაებს ინერციით, ე. ი. თანაბრად და სწორხაზოვნად. მიღებული შედეგი მართებულია წერტილთა ნებისმიერი რიცხვისაგან შემდგარი სისტემისთვისაც. ამ შემთხვევაში ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორი გამოისახება ფორმულით:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (IV, 13)$$

ხოლო მისი სიჩქარე ფორმულით:

$$\bar{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (IV, 14)$$

უკანასკნელი ფორმულა შემდეგნაირად შეიძლება დაიწეროს:

$$M \bar{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \quad (IV, 14')$$

სადაც

$$M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

ე. ი. სისტემის მოძრაობის რაოდენობა, ანუ იმპულსი ტოლია იმ ენერჯიის წერტილის იმპულსისა, რომელიც მოთავსებულია ინერციის ცენტრში და რომლის მასა მთელი სისტემის მასის ტოლია.

ყოველივე ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ თუ გვინტერესებს არა სისტემის ცალკეული ნაწილაკის მოძრაობა, არამედ მოძრაობა სისტემისა როგორც მთლიანისა, შეიძლება შემოვიზღვროთ მასების (ინერციის) ცენტრში მოთავსებული და სისტემის მთელი მასის მქონე წერტილის მოძრაობით.

ის გარემოება, რომ იზოლარებული სისტემის ინერციის ცენტრი მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ ფრიად ხელსაყრელი ათვლის სისტემა. მართლაც, განვიხილოთ დინამიკური სისტემის მოძრაობა ისეთი ათვლის სისტემის მიმართ, რომლის სათავე მოთავსებულია ინერციის ცენტრში. ვინაიდან ინერციის ცენტრი მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს საწყისი ინერციული სისტემის მიმართ, ახალი ათვლის სისტემაც ინერციული იქნება. ათვლის სისტემას, რომლის სათავეც ინერციის ცენტრში იმყოფება, უწოდებენ c სისტემას. იგი ძალიან ხელსაყრელია მოცემული მექანიკური სისტემის ნაწილაკების მოძრაობის შესასწავლად, თუ, რასაკვირველია, ჩვენ არ გვინტერესებს მოძრაობა მოცემული სისტემისა როგორც მთლიანის. ცხადია, რომ c სისტემაში მექანიკური სისტემის სრული იმპულსი ნულის ტოლია, ვინაიდან ამ სისტემის მიმართ

$$\vec{v}_c = 0$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = 0.$$

შემდეგში ვნახავთ, რომ ეს გარემოება ძალიან ამარტივებს ნაწილაკების მოძრაობის შესწავლას c სისტემაში.

აჩქარებათა დამოუკიდებლობის კანონზე დამყარებით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ ორ ნაწილაკს განვიხილავთ, როგორც ერთს, მასები იკრიბება, ე. ი. მასა ადითიური სიდიდით ყოფილა. მართლაც, (IV,3) დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ:

$$\vec{a}_{12} = -\frac{m_2}{m_1} \vec{a}_{21}$$

$$\vec{a}_{13} = -\frac{m_3}{m_1} \vec{a}_{31}$$

ჩასმა (IV,4) ფორმულაში გვაძლევს

$$\vec{a}_{1(23)} = -\frac{m_2 \vec{a}_{21} + m_3 \vec{a}_{31}}{m_1}$$

მეორე მხრივ, ჩვენ ვიცით, რომ მეორე და მესამე ნაწილისაგან შემდგარა სისტემის ინერციის ცენტრის აჩქარება არის

$$\vec{a}_c = \frac{m_2 \vec{a}_{21} + m_3 \vec{a}_{31}}{m_2 + m_3}$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$m_1 \bar{a}_{1(23)} = -(m_2 + m_3) \bar{a}_c.$$

როგორც ვხედავთ, ორი ნაწილაკისაგან შენდგარი სისტემის ინერციის ცენტრი მასზე მესამე ნაწილაკის მოქმედების შედეგად ლეზულობს ისეთ აჩქარებას თითქოს მისი მასა ტოლი იყოს ორი ნაწილაკის მასების ჯამისა. სწორედ ეს გვიჩვენებს, რომ თუ განიხილება მოძრაობა მექანიკური სისტემის, როგორც მთლიანის, ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ მისი მასა ტოლია ნაწილაკების მასების ჯამისა.

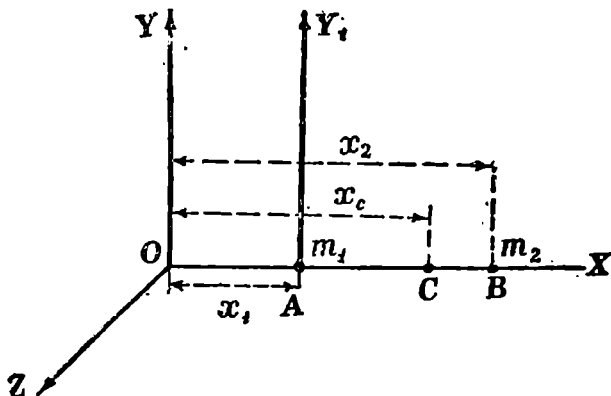
მიღებული შედეგი გარკვეულ გამართლებას აძლევს მასის განსაზღვრას როგორც ნივთიერების რაოდენობისა. მართლაც, თუ მივიღებთ ჰიპოთეზას, რომ ყველა სხეული მსგავსი ნაწილაკებისაგან შედგება, მასა, მართლაც, შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნაწილაკთა რიცხვის პროპორციული სიდიდე და გავაიგივოთ ნივთიერების რაოდენობასთან. მაგრამ თანამედროვე ფიზიკა სრულიად გარკვეულად უარყოფს ჰიპოთეზას, რომ ყველა სხეული შედგება მსგავსი ნაწილაკებისაგან და, გარდა ამისა, როგორც გამოიჩვენა, ნაწილაკის მასა დამოკიდებულია სიჩქარეზე. ყოველივე ამის გამო, ნივთიერების რაოდენობის ცნების შემოღება, როგორც მასის ცნების ეკვივალენტისა, არ არის გამართლებული, ამიტომაც შემდეგში მასას განვიხილავთ როგორც ინერციის ზომას და მათ შედარებას მოვახდენთ აჩქარებათა შედარებით.

ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორის ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ მისი კოორდინატების ფორმულებს:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (IV, 15)$$

გამოვარკვეოთ ახლა სად მდებარეობს ინერციის ცენტრი და როგორ შეიძლება მისი მოძებნა. განვიხილოთ ისევ m_1 და m_2 მასების მქონე ორი ნივთიერი წერტილის შემთხვევა. ასეთი სისტემის მაგალითს წარმოადგენს ყოველი ორატომიანი მოლეკულა (HCl , OH , H_2 , O_2 და სხვ.), თუ მათ შემადგენელ ატომებს ნივთიერ წერტილებად ჩავთვლით. ასეთივე სისტემის მაგალითს წარმოადგენს ორი ციური მნათობის ერთობლიობა, ატომის ბირთვისა და ერთი ელექტრონისაგან შემდგარი სისტემა და ა. შ.

Ox ლერძი მიემართოთ წერტილების შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ (ნახ. 40). ნივთიერი წერტილების კოორდინატები იქნება: $A(x_1, 0, 0)$, $B(x_1+x, 0, 0)$, სადაც x არის მანძილი წერტილებს შორის.



ნახ. 40

ამიტომ ინერციის ცენტრის კოორდინატებისათვის მივიღებთ

$$x_c = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x, \quad y_c = 0, \quad z_c = 0.$$

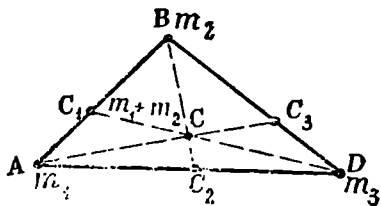
ცხადა, რომ ინერციის ცენტრი მდებარეობს წერტილების შემაერთებელ სწორ ხაზზე. აღენიშნოთ იგი C ასოთი და გამოვარკვიოთ რა მანძილით არის იგი დაშორებული A და B წერტილებიდან. ამისათვის ვიზოვოთ AC და BC მონაკვეთების შეფარდება.

აღვილი გამოსარკვევია, რომ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (IV, 16)$$

როგორც ვხედავთ, ინერციის ცენტრის მანძილები სისტემის წერტილებიდან ამ წერტილთა მასების უკუპროპორციულია; აქედან გამომდინარეობს მარტივი მეთოდი ორი წერტილის მასების ცენტრის მოძებნისა. წერტილებს შორის მანძილი იყოფა $m_1 + m_2$ ნაწილად. ინერციის ცენტრი მოთავსდება m_1 დანაყოფზე m_2 მასის მქონე წერტილიდან ან, რაც იგივეა, m_2 დანაყოფზე m_1 მასის მქონე წერტილიდან. რაც უფრო მეტია წერტილის მასა, მეორე წერტილის მასასთან შედარებით, მით უფრო ახლოს იქნება მასთან ინერციის ცენტრი. მაგალითად, OH მო-

ლეკულის ინერციის ცენტრი 16-ჯერ უფრო ახლოსაა ჟანგბადის ატომთან, ვიდრე წყალბადის ატომთან, რადგანაც ჟანგბადის ატომი 16-ჯერ უფრო მეტი მასის მქონეა, ვიდრე წყალბადის ატომი. დედამიწისა და მთვარის ინერციის ცენტრი 80-ჯერ უფრო ახლოსაა დედამიწისთან, ვიდრე მთვარესთან. მზისა და დედამიწის შემთხვევაში მზის მასა იმდენად დიდია დედამიწის მასასთან შედარებით, რომ მათი ინერციის ცენტრი თვით მზეშია მოთავსებული. ტოლი მასის მქონე ნაწილაკების შემთხვევაში ინერციის ცენტრი მოთავსდება შუა წერტილში. ასე იქნება, მაგალითად, წყალბადის, ჟანგბადის ან საზოგადოდ ტოლი მასის ატომებისაგან შემდგარი მოლეკულის შემთხვევაში.



ნახ. 41

ზემოთ თქმულის შემდეგ ადვილად შეიძლება მოიძებნოს სამი (ნახ. 41), ოთხი ან მეტი წერტილისაგან შემდგარი სისტემის ინერციის ცენტრი. ზემოთ მოყვანილი ხერხით ჯერ ვიპოვოთ ორი — m_1 და m_2 — მასის მქონე წერტილების ინერციის ცენტრს. შემდეგ წარმოვიდგინოთ, რომ m_1 და m_2 მასების ჯამი მოთავსებულია მათ C_1 ინერციის ცენტრში და იმავე წესით ვიპოვოთ C_1 წერტილისა და მესამე D წერტილის ინერციის ცენტრს. მიღებული C წერტილი იქნება სამივე წერტილის ინერციის ცენტრი. მართლაც, C წერტილის კოორდინატისათვის ადვილად მივიღებთ:

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_1 + m_2)x_{c_1} + m_3x_3}{(m_1 + m_2) + m_3},$$

ვინაიდან

$$m_1x_1 + m_2x_2 = (m_1 + m_2)x_{c_1}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ სამი — A , B და D წერტილის ინერციის ცენტრი, მართლაც, წარმოადგენს ორი წერტილის ინერციის ცენტრს, ერთის (C_1) $m_1 + m_2$ მასით და მეორისა (D) m_3 მასით, სადაც C_1 თვითონ არის A და B წერტილების ინერციის ცენტრი. რასაკვირველია, შეიძლება ჯერ ვიპოვოთ B და D წერტილების ინერციის ცენტრი და შემდეგ ამ ინერციის ცენტრის და A წერტილის ინერციის ცენტრი. ცხადია, რომ შედეგი იგივე იქნება. ადვილად დასადაგენია, რომ სამი წერტილისაგან შემდგარი სისტემის ინერციის ცენტრი ისეთი სამი სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილია, რომელიც გავლებულია ABD სამ-

კუთხედის წვეროებიდან და ჰყოფენ პირდაპირმდებარე გვერდებს შემდეგი შეფარდებით:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{AC_2}{C_2D} = \frac{m_3}{m_1}, \quad \frac{BC_3}{C_3D} = \frac{m_3}{m_2},$$

სადაც C_1 არის A და B წერტილების ინერციის ცენტრი, C_2 — A და D წერტილების ინერციის ცენტრი, ხოლო C_3 — B და D წერტილების ინერციის ცენტრი. განესაზღვრავთ რა მოყვანილი წესით სამი წერტილის ინერციის ცენტრის მდებარეობას, დაეუმატებთ შემდეგ m_4 მასის წერტილს და ვიპოვოთ ორი წერტილის მასების ცენტრს, ერთისას m_4 მასით და მეორისას $m_1 + m_2 + m_3$ მასით. იმავე წესს გამოვიყენებთ უფრო მეტი წერტილების შემთხვევაშიც.

სამი წერტილისაგან შემდგარი სისტემის მაგალითს წარმოადგენს ყოველი სამატომიანი მოლეკულა (H_2O , CO_2 , NO_2 და სხვ.), ყოველი ორელექტრონიანი ატომი (ჰელიუმი, ლითიუმის იონი და სხვ.), მზე, დედამიწა და მთვარე და ა. შ. შემთხვევას, როდესაც სისტემაში შემავალ ნაწილაკთა რიცხვი იმდენად დიდია, რომ იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც უწყვეტი სხეული (მაგალითად, მყარი სხეული), შემდეგ განვიხილავთ.

თ ა ვ ი მ ა ხ უ თ ა

ენაჰიის მუღმივობის კანონი

§ 22. კინეტიკური და კოტენციონალური მენაჰიები.

მეძანიკური მენაჰიის მუღმივობის კანონი

გადავიდეთ ახლა მექანიკის მეორე ძირითადი კანონის—ენერჯის მუღმივობის კანონის განხილვაზე. ეს კანონი, ისევე როგორც იმპულსის მუღმივობის კანონი, არ შემოისაზღვრება მხოლოდ მექანიკის ფარგლებით, იგი ფიზიკის სხვა დარგებშიც გამოიყენება, მაგრამ ჩვენ ჯერ განვიხილავთ მის კერძო სახეს, რომელიც მართებულია მხოლოდ მექანიკური მოვლენებისათვის.

როდესაც XVI—XVII საუკუნეებში მექანიკის ძირითადი ცნებები ყალიბდებოდა და დგინდებოდა მატერიალურ სხეულთა ურთიერთქმედების ფუნდამენტური კანონები, დასმულ იქნა ფრიად მნიშვნელოვანი საკითხი—რომელი სიდიდე უნდა იქნეს მიღებული მოძრაობის ზომად? ყველასათვის ცხადი იყო, რომ ეს ზომა მით უფრო მეტი უნდა იყოს, რაც მეტია სხეულის მასა, ვინაიდან მასა (წონა) ადრტიურ სიდიდედ ითვლებოდა. ისიც ცხადი იყო, რომ მოძრაობის ზომა დამოკიდებული უნდა იყოს სხეულის სიჩქარეზე, მაგრამ არ იყო გარკვეული, თუ როგორი უნდა იყოს ეს დამოკიდებულება. მაშინ როდესაც დეკარტე და მისი მიმდევრები საესებით ბუნებრივად თვლიდნენ, რომ მოძრაობის ზომა სხეულის სიჩქარის პირდაპირპროპორციული უნდა იყოს, ე. ი. მოძრაობის ზომად იღებდნენ მასის ნამრავლს სიჩქარეზე— mv , ლაიბნიცი უფრო მართებულად თვლიდა, რომ მოძრაობის ზომა სიჩქარის კვადრატის პროპორციული უნდა იყოს, ე. ი. უნდა გამოისახებოდეს mv^2 სიდიდით, რომელსაც იგი ცოცხალ ძალას უწოდებდა.

რა მოსაზრებებს ემყარებოდნენ დეკარტე და ლაიბნიცი, როდესაც მოძრაობის ზომად ზემოაღნიშნულ ორ სიდიდეს თვლიდნენ. ამ საკით-

ხის გასარკვევად მოვიყვანოთ მათი მოსაზრებანი, მხოლოდ მივცეთ მათ თანამედროვე სახე.

დავუშვათ, რომ ორი მატერიალური წერტილი m_1 და m_2 მასებით ურთიერთქმედების გავლენით იწყებს მოძრაობას. მივიღოთ, რომ საწყის მომენტში ისინი უძრავნი იყვნენ. ურთიერთქმედების გავლენით კი მიიღეს a_1 და a_2 აჩქარებები და საკმაოდ მცირე დროის შემდეგ—სიჩქარეები:

$$v_1 = a_1 t_1, \quad v_2 = a_2 t_2. \quad (V, 1)$$

თუ დროის ინტერვალები მცირეა, აჩქარებები შეიძლება მუდმივებად ჩაითვალოს, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2. \quad (V, 2)$$

განვსაზღვროთ აჩქარებები (V, 1) განტოლებიდან და ჩავსვათ (V, 2)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{m_1 v_1}{t_1} = \frac{m_2 v_2}{t_2},$$

ან

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}.$$

ვხედავთ, რომ თუ ურთიერთქმედების გავლენას (სხეულების მოძრაობაში მოყვანის აზრით) დავახასიათებთ დროთი, რომლის განმავლობაშიც იგი ვლინდება, მაშინ ურთიერთქმედების დროთა შეფარდება ნაწილაკების მიერ მიღებულ იმპულსების პირდაპირპროპორციული იქნება. ამიტომაც იყო, რომ დეკარტე მოძრაობის ზომას სიჩქარის პროპორციულად თვლიდა. დროთა ტოლობის ($t_1 = t_2$) შემთხვევაში, მიღებული იმპულსებიც ტოლი იქნება, როგორც უნდა იყოს იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად.

მაგრამ ურთიერთქმედების გავლენა შეიძლება გაიზომოს არა დროთა, არამედ ნაწილაკთა მიერ გავლილი მანძილების ფარდობით. თუ ისევე ჩავთვლით, რომ აჩქარებანი მუდმივია, გავლილი მანძილებისათვის მივიღებთ:

$$s_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}, \quad s_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2}, \quad (V, 3)$$

ან, თუ დროებს გამოვსახავთ აჩქარებებისა და სიჩქარეების საშუალებით:

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a_1}, \quad s_2 = \frac{v_2^2}{2a_2}.$$

(V, 2) ფორმულიდან მივიღებთ მანძილთა შეფარდებისათვის:

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_2} = \frac{\frac{v_1^2}{2} a_2}{\frac{v_2^2}{2} a_1} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2}, \quad (V.4)$$

როგორც ვხედავთ, თუ ურთიერთქმედების გავლენა დავახასიათებთ ნაწილაკების მიერ გავლილი მანძილებით, მაშინ ამ მანძილების შეფარდება ტოლია $\frac{m_1 v_1^2}{2}$ და $\frac{m_2 v_2^2}{2}$ სიდიდეების შეფარდებისა, რომლებიც სიჩქარეების კვადრატების პროპორციულია. ამიტომაც თვლიდა ლაიბნიცი, რომ მოძრაობის ზომა mv^2 -ის პროპორციულია. შემდგომში კოჩიოლისმა ცოცხალ ძალად მიიღო $\frac{mv^2}{2}$, სიდიდე, რომელსაც ახლა ეწოდება კინეტიკური ენერჯია.

ნათელ წარმოდგენას იმაზე, თუ რატომ შეიძლება ორი სხვადასხვა mv და $\frac{mv^2}{2}$ სიდიდე მივიღოთ როგორც მოძრაობის ზომა, იმას მიხედვით, თუ რით ხასიათდება მოძრაობის შექმნა ან დაკარგვა—დროით თუ მანძილით, გვაძლევს შემდეგი მარტივი მაგალითის განხილვა.

დავუშვათ, რომ v სიჩქარით მოძრავი ნაწილაკი, m მასით, ჩერდება რაღაც მუდმივი წინააღმდეგობის გავლენით. თუ დაყოვნება (ე. ი. უარყოფითი აჩქარება) არის a , ნაწილაკი გაჩერდება $t = \frac{v}{a}$ დროის

და $s = \frac{v^2}{2a}$ მანძილის გავლის შემდეგ. თუ ახლა გავადიდებთ ორჯერ ნაწი-

ლაკის სიჩქარეს, დროის შუალედი გაჩერებამდე გაიზრდება ორჯერ, ხოლო მანძილი—ოთხჯერ. სწორედ აქედან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობის ზომად შეიძლება მივიღოთ ან სიჩქარის პროპორციული სიდიდე (თუ მოძრაობის დაკარგვა დავახასიათებთ ამისათვის საჭირო დროით), ან სიჩქარის კვადრატის პროპორციული სიდიდე (თუ მოძრაობის დაკარგვა დავახასიათებთ გავლილი მანძილით).

მოყვანილ მოსაზრებებს ბუნებრივად მიყვავართ კინეტიკური ენერჯიის ცნებამდე, რომელიც ისევე გამოდგება მოძრაობის ზომად, როგორც იმპულსი. მაშასადამე, მივიღოთ, რომ v სიჩქარით მოძრავი m მასის ნაწილაკი დავახასიათებთ კინეტიკური ენერჯიით:

$$\frac{mv^2}{2}$$

ეგი წარმოადგენს სკალარულ სიდიდეს, რომელიც ყოველთვის დადებით

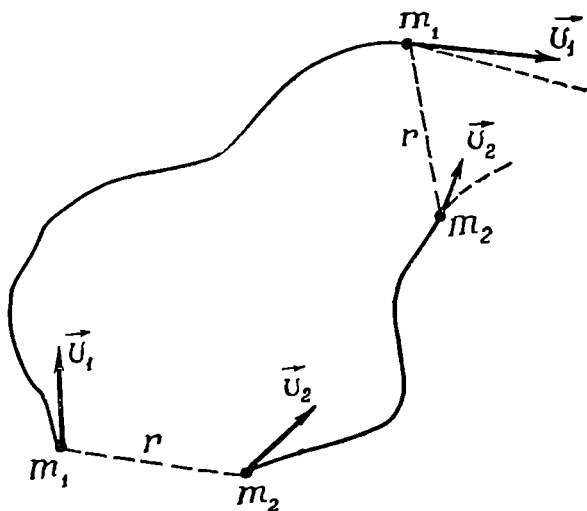
თია ან უკიდურეს შემთხვევაში (როცა $v=0$) ნულია. ცხადია, რომ ერთი იზოლირებული ნივთიერი წერტილის შემთხვევაში კინეტიკური ენერგია მუდმივი სიდიდეა, ვინაიდან მუდმივია როგორც მასა, ისე სიჩქარე.

ვთქვათ, განსახილველი სისტემა შედგება m_1 და m_2 მასების მქონე ორი ნაწილაკისაგან (ნახ. 42). გამოვითვალოთ მათი კინეტიკური ენერგიები და შევადგინოთ ჯამი:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

ცხადია, თუ ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება არ არის, ყოველი მათგანის სიჩქარე მუდმივი იქნება. მუდმივი იქნება აგრეთვე სათანადო კინეტიკური ენერგიები და მათი ჯამი. გასაგებია, რომ ეს დასკვნა არის ინერციის პრინციპის შედეგი და არ წარმოადგენს რაიმე ახალ კანონს.

გამოვარკვიოთ ახლა როგორია ნაწილაკების კინეტიკური ენერგიების ჯამი ურთიერთქმედების არსებობის შემთხვევაში. როგორც ვიცით,



ნახ. 42

ურთიერთქმედ ნაწილაკთა სიჩქარეები ცვლებადია, ე. ი. ცვლებადია მათი კინეტიკური ენერგიებიც, მაგრამ გასარკვევია ცვლებადია თუ არა მათი ჯამი. როგორც ცდები გვიჩვენებს, ურთიერთქმედ ნაწილაკთა კინეტიკური ენერგიების ჯამი საზოგადოდ არ წარმოადგენს მუდმივ სიდი-

დეს. ამას ნათლად გვიჩვენებს შემდეგი მაგალითების გარჩევა. ვთქვათ, ზღბა თოფის გასროლა. საწყის მომენტში, როდესაც თოფიც და ტყვიაც უძრავია, მათი კინეტიკური ენერგიები და, მაშასადამე, მათი ჯამიც ნულია. გასროლის შემდეგ ორივე სხეული იღებს მათი მასების უკუპროპორციულ სიჩქარეებს. მაშასადამე, ყოველ მათგანს ექნება გარკვეული კინეტიკური ენერგია და მათი ჯამიც განსხვავებულ იქნება ნულისაგან, ვინაიდან დადებითი სიდიდეების ჯამი არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. როგორც ვხედავთ, გასროლამდე კინეტიკური ენერგიების ჯამი ნულის ტოლი იყო, გასროლის შემდეგ კი ნულისაგან განსხვავებულია. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში კინეტიკური ენერგიების ჯამი არ ყოფილა მუდმივი სიდიდე. ამავე დასკვნამდე მიგყავართ ყველა სხვა მექანიკური მოვლენის განხილვას. რომ მართებული იყოს კინეტიკური ენერგიების ჯამის მუდმივობის კანონი, შეუძლებელი იქნებოდა უძრავი ნაწილაკების ამოძრავება ან მოძრავი ნაწილაკების შეჩერება. ასეთ მოვლენებს კი ძალიან ხშირად ვხვდებით ბუნებაში.

როგორც ვხედავთ, იზოლირებული სისტემის კინეტიკური ენერგიების ჯამი არ არის მუდმივი. იგი იცვლება დროის განმავლობაში.

დავაკვირდეთ ახლა მისი ცვალებადობის ხასიათს. ვთქვათ, როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილი გარკვეული სიდიდისა იყო, კინეტიკური ენერგიების ჯამს გარკვეული მნიშვნელობა ჰქონდა. მოძრაობისა და ურთიერთქმედების შედეგად ნაწილაკები გადაინაცვლებენ და მათი კინეტიკური ენერგიების ჯამიც შეიცვლება. მაგრამ ცდები გვიჩვენებს, რომ როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილი ისეთივე გახდება, როგორც დასაწყისში იყო, კინეტიკური ენერგიების ჯამიც წინანდელ მნიშვნელობას მიიღებს. ნაწილაკებს შეიძლება სხვა კინეტიკური ენერგიები და სხვა მდებარეობა ჰქონდეს, მაგრამ კინეტიკური ენერგიების ჯამი ისევ წინანდელი სიდიდის იქნება. საჭიროა მხოლოდ, რომ მანძილი მათ შორის ისეთივე იყოს, როგორც დასაწყისში. ურთიერთქმედ ნაწილაკთა კინეტიკური ენერგიების ჯამის ეს ფრიალ მნიშვნელოვანი თვისება, რომ იგი მხოლოდ ნაწილაკთა შორის მანძილის ფუნქციაა, მათემატიკურად შემდეგნაირად შეიძლება გამოვსახოთ:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = f(r), \quad (V, 5)$$

სადაც r არის ნაწილაკთა შორის მანძილი. ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ფუნქცია— $f(r)$ დამოკიდებულია ურთიერთქმედების სახეზე. გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის იგი ერთი გარკვეული სახისაა, ელექტრულისათვის სხვა სახის და ა. შ.

გადავწერთ მიღებული შედეგი ცოტა სხვანაირად, რაც საშუალებას მოგვცემს მივცეთ მას მუდმივობის კანონის სახე. ავიღოთ ახალი ფუნქცია $U(r)$, რომელიც $f(r)$ ფუნქციისაგან რაღაც მუდმივით განსხვავდება და დაკავშირებულია მასთან შემდეგი ტოლობით:

$$U(r) = \text{const} - f(r), \quad (V,6)$$

განვსაზღვროთ ამ ტოლობიდან $f(r)$ ფუნქცია —

$$f(r) = \text{const} - U(r)$$

და ჩავსვათ (V,5) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r) = \text{const}. \quad (V,7)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ თუმცა ურთიერთქმედ ნაწილაკთა შემთხვევაში კინეტიკური ენერგიების ჯამი არ არის მუდმივი სიდიდე, მაგრამ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს მანძილის ისეთი $U(r)$ ფუნქცია, რომ კინეტიკური ენერგიების და ამ ფუნქციის ჯამი მუდმივი იყოს. $U(r)$ სიდიდეს, რომელიც ნაწილაკთა ურთიერთქმედებას ახასიათებს, პოტენციალური ან ურთიერთქმედების ენერგია ეწოდება.

მიღებული შედეგი შემდეგნაირად ყალიბდება: ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემისათვის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი მუდმივია.

განვიხილოთ ახლა სამი ნაწილაკის შემთხვევა, რომელთა მასებია m_1 , m_2 და m_3 , ხოლო სიჩქარეები \vec{v}_1 , \vec{v}_2 და \vec{v}_3 . კინეტიკური ენერგიების ჯამისათვის გვექნება

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2}.$$

პოტენციალური ენერგია წარმოიღვინება სამი წევრის ჯამის სახით, ვინაიდან შესაძლებელი იქნება ნაწილაკთა ყოველი წევრის ურთიერთქმედება:

$$U = U_1(r_{12}) + U_2(r_{13}) + U_3(r_{23}),$$

სადაც, მაგალითად, $U_1(r_{12})$ არის პირველი და მეორე ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია, დამოკიდებული მათ შორის მანძილზე. ენერგიის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} + U_1(r_{12}) + U_2(r_{13}) + U_3(r_{23}) = \text{const}. \quad (V,8)$$

ახლა უკვე ადვილია ზოგადი შემთხვევის განხილვა, როდესაც მოცემულია n ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემა. ამ შემთხვევაში ენერჯიის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^n U_{ik}(r_{ik}) = \text{const}, \quad (V, 9)$$

სადაც მეორე წევრში ჯამი აღებულია i და k ინდექსების ყველა მნიშვნელობისათვის 1-დან n -მდე, გამოკლებით შემთხვევისა, როდესაც $i = k$. ზოგჯერ სიმარტივისათვის პოტენციალურ ენერჯიას მოკლედ აღნიშნავენ U ასოთი და გულისხმობენ, რომ იგი არის სისტემაში შემავალ ნაწილაკთა შორის მანძილების ფუნქცია. კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიების ჯამს სისტემის სრულ ენერჯიას უწოდებენ და აღნიშნავენ E ასოთი, ამიტომაც ენერჯიის მუდმივობის კანონი მოკლედ ასე იწერება:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U = \text{const}. \quad (V, 9')$$

ნაწილაკთა ნებისმიერი რიცხვისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემის სრული ენერჯია — კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიების ჯამი — მუდმივი სიდიდეა.

განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით პოტენციალური ენერჯია. როგორც ზემოთქმული გვიჩვენებს, პოტენციალური ენერჯია წარმოადგენს ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ენერჯიას, რომელიც დამოკიდებულია მათ მდებარეობაზე (ნაწილაკთა შორის მანძილებზე). იგი ჩვენ განვსაზღვრეთ როგორც ნაწილაკთა შორის მანძილების ისეთი ფუნქცია, რომელიც დამატებული კინეტიკური ენერჯიების ჯამისადმი გვაძლევს იზოლირებული სისტემისათვის მუდმივ სიდიდეს. მაგრამ ამ მოთხოვნით პოტენციალური ენერჯია მთლიანად განსაზღვრული არ არის. მართლაც, ვთქვათ, მოვნახეთ მანძილების ისეთი U ფუნქცია, რომ მისი და სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ჯამი მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U = \text{const},$$

მაშინ U შეიძლება განვიხილოთ როგორც პოტენციალური ენერჯია.

მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია U -ს მაგიერ ავიღოთ სხვა სიდიდე— U_1 , რომელიც განსხვავდება U -გან რაიმე A მუდმივით

$$U_1 = U + A,$$

ცხადია, რომ U_1 -ის დამატება კინეტიკური ენერგიისათვის ისევე მუდმივ სიდიდეს მოგვცემს და, მაშასადამე, ისიც შეიძლება პოტენციალური ენერგიად ჩავთვალოთ. მანძილებისაგან დამოკიდებულება U და U_1 ფუნქციებს ერთნაირი ექნებათ, მაგრამ მათი რიცხვითი მნიშვნელობები სხვადასხვა იქნება. განვიხილოთ მაგალითი. როგორც გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვის დროს გამოიკვევა, ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის, თუ კინეტიკური ენერგიების ჯამს დავუმატებთ მანძილის შემდეგ ფუნქციას

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (V, 10)$$

(γ მუდმივი კოეფიციენტი), მივიღებთ მუდმივ სიდიდეს

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const.}$$

მაშასადამე, $U(r)$ არის პოტენციალური ენერგია გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის. მაგრამ ასეთივე უფლებით პოტენციალურ ენერგიად შეიძლება ჩავთვალოთ სიდიდე

$$U_1(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + A,$$

სადაც A მუდმივი სიდიდეა (ნებისმიერი).

როგორც ვხედავთ, იმ პირობით, რომ პოტენციალური და კინეტიკური ენერგიების ჯამი მუდმივი სიდიდე უნდა იყოს, პოტენციალური ენერგია არ ისაზღვრება ცალსახად. მისი საბოლოო განსაზღვრისათვის საჭიროა შემოვიღოთ დამატებითი პირობა, რომ რაღაც გარკვეული მდებარეობისათვის მას სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა ჰქონდეს. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ მნიშვნელობის არჩევა (ე. ი. A მუდმივის შერჩევა) არ ახდენს გავლენას ნაწილაკთა მოძრაობის ხასიათზე.

როგორც შემდეგ ვნახავთ, ნაწილაკთა აჩქარებას საზღვრავს არა პოტენციალური ენერგია, არამედ ძალა, რომლის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებაში შემავალ ნებისმიერ მუდმივაზე.

პოტენციალური ენერჯიის გამოსახულებაში შემავალი ნებისმიერი მუდმივას შერჩევისათვის ყველაზე ხშირად შემდეგ პირობას იყენებენ: თვლიან, რომ პოტენციალური ენერჯია ნულია, როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილები უსასრულოდ დიდია

$$U(r) \rightarrow 0. \quad (V,10')$$

$r \rightarrow \infty$

ეს ყველაზე უფრო ბუნებრივი პირობაა, ვინაიდან ურთიერთქმედება მით უფრო სუსტია, რაც უფრო შორსაა ნაწილაკები ერთმეორისაგან, ხოლო პოტენციალური ენერჯია სწორედ ურთიერთქმედების დამახასიათებელია.

ცხადია, თუ ამ პირობას მივიღებთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯიისათვის, მაშინ გამოვიყენებთ (V,10') ფორმულას. ზოგჯერ სხვა პირობებსაც იყენებენ; მაგალითად, დედამიწის მახლობლად მოძრავი სხეულების შემთხვევაში ხშირად თვლიან, რომ პოტენციალური ენერჯია ნულია არა მაშინ, როდესაც სხეული უსასრულოდ შორსაა დედამიწიდან, არამედ მაშინ, როდესაც იგი დედამიწის ზედაპირზე იმყოფება. უნდა მიექცეს ყურადღება კიდევ ერთ გარემოებას. ვინაიდან პოტენციალური ენერჯია, ურთიერთქმედების ენერჯიაა, იგი ახასიათებს არა ერთ ნაწილაკს, არამედ მთელ სისტემას; მაგალითად, გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

r

არა პოტენციალურ ენერჯიას მიაწერენ ერთ-ერთ რომელიმე ნაწილაკს; მაგალითად, ამბობენ, რომ $U = mgh$ ¹ დედამიწიდან h სიმაღლეზე მოთავსებული სხეულის პოტენციალური ენერჯიაა, თუმცა სინამდვილეში იგი არის სხეულისა და დედამიწისაგან შემდგარი სისტემის ურთიერთქმედების ენერჯია. პოტენციალური ენერჯიის ასეთი მიკუთვნება ერთ-ერთი სხეულისათვის განსაკუთრებით ხელსაყრელია მაშინ, როდესაც საჭიროა ამ სხეულზე მეორე სხეულის მოქმედებით გამოწვეული მოძრაობის შესწავლა, ხოლო თვით ამ მეორე სხეულის მოძრაობა არ გვანტერესებს. ამიტომაც ჩვენ შეგვიძლია ვარდნილ სხეულს მივაწეროთ mgh პოტენციალური ენერჯია დედამიწის მიმართ, ვინაიდან თვით დედამიწის მოძრაობა არ განიხილება. ბევრ შემთხვევაში შესაძლებელია და

¹ აღვნიშნოთ, რომ უორუმულა $U = mgh$ ვერაო შემთხვევაა $U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ ფორმულას, როდესაც სხეულის დაშორება დედამიწის ზედაპირიდან ააღიან მკარავ დედამიწის რადიუსთან შედარებათ.

ხელსაყრელი ენერჯის მუდმივობის კანონს მივყავთ ისეთი სახე, თითქოს საქმე გვაქვს არა ორ, არამედ ერთ ნაწილაკთან. ახლა დავამტკიცებთ, რომ ეს შესაძლებელია, თუ ერთი ნაწილაკის მასა გაცილებით მეტია მეორე ნაწილაკის მასაზე. განვიხილოთ ორი ნაწილაკი M და m ($M \gg m$) მასებით, სათანადო სიჩქარეები იყოს \vec{V} და \vec{v} . თუ პოტენციალური ენერჯია არის $U_{12}(r_{12})$, ენერჯის მუდმივობის კანონი შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + U(r_{12}) = \text{const.}$$

ფარდობითობის პრინციპის თანახმად ეს კანონი ასეთივე სახით უნდა დაიწეროს ყოველ ინერციულ სისტემაში. ავირჩიოთ ასეთ სისტემად c სისტემა. ვინაიდან c სისტემაში სრული იმპულსი ნულის ტოლია, მივიღებთ:

$$M\vec{V} + m\vec{v} = 0,$$

აქედან ვგებულობთ, რომ ნაწილაკთა სიჩქარეების სიდიდეები მასების უკუპროპორციულია

$$\frac{v}{V} = \frac{M}{m}.$$

გამოვსახავთ რა V -ს v -ს საშუალებით, მივიღებთ:

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{m}{M} \frac{mv^2}{2}.$$

ვხედავთ, რომ c სისტემაში დიდი მასის მქონე ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯია $\frac{m}{M}$ -ჯერ ნაკლებია მცირე მასის ნაწილაკის კინეტიკურ ენერჯიაზე. ამიტომაც, გარკვეული მიახლოებით, რომელიც მით უკეთესია, რაც უფრო ნაკლებია $\frac{m}{M}$ შეფარდება, ეს კინეტიკური ენერჯია და, მაშასადამე, მისი ცვლილება შეიძლება უგულებელვყოთ. ამ მიახლოებაში ენერჯის მუდმივობის კანონი მიიღებს სახეს:

$$\frac{mv^2}{2} + U(r_{12}) = \text{const.} \quad (V, 11)$$

რომელშიც შედის მხოლოდ m მასის ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯია. ყველაზე ცნობილ მაგალითს, როდესაც შესაძლებელია ასეთი მიახლოე-

ბის გამოყენება, წარმოადგენს დედამიწისა და ჩვეულებრივი სხეულის ურთიერთქმედება. ამ შემთხვევაში, ჩვეულებრივ, სხეულის მასა იმდენად მცირეა დედამიწის მასასთან შედარებით ($M \sim 6 \cdot 10^{24} \text{ გრ}$), რომ პრაქტიკულად ყოველთვის შეიძლება დედამიწის კინეტიკური ენერჯის უგულებელყოფა და ენერჯის კანონის დაწერა, როგორც სხეულის კინეტიკური ენერჯის და მისი დედამიწის მიმართ პოტენციალური ენერჯის ჯამის მუდმივობის კანონისა:

$$\frac{mv^2}{2} + \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const},$$

სადაც M არის დედამიწის მასა, r —მანძილი სხეულიდან დედამიწის ცენტრამდე, ხოლო γ —გრავეიტაციული მუდმივა.

მზის მიმართ დედამიწის მოძრაობის განხილვისას შესაძლებელია უგულებელყოფა მზის კინეტიკური ენერჯისა (ცინაიდან დედამიწის მასა მზის მასაზე $3 \cdot 10^{-6}$ ნაკლებია) და ჩათვლა, რომ მუდმივია დედამიწის კინეტიკური ენერჯისა და მისი მზის მიმართ პოტენციალური ენერჯის ჯამი.

როგორც კინეტიკური, ისე პოტენციალური ენერჯია წარმოადგენენ მექანიკური ენერჯის სახეებს, ენერჯის მუდმივობის კანონი კი გვიჩვენებს, რომ იზოლირებულ სისტემაში მიმდინარე ყოველი პროცესის დროს ხდება მექანიკური ენერჯის ერთი სახის მეორე სახედ გარდაქმნა. თუ, მაგალითად, მოძრაობის შედეგად კინეტიკური ენერჯია გაიზარდა, სათანადო სიდიდით უნდა შემცირდეს პოტენციალური ენერჯია. ის გარემოება, რომ ერთი სახის ენერჯია ისეთი რაოდენობით იზრდება, რა რაოდენობითაც კლებულობს მეორე სახის ენერჯია, მათემატიკურად შემდეგნაირად გამოისახება:

$$dE_k = -dU,$$

სადაც E_k -თი მოკლედ აღნიშნულია კინეტიკური ენერჯია. dE_k კინეტიკური ენერჯის ნაზრდია, ხოლო dU —პოტენციალური ენერჯის შემცირება.

ენერჯის სახეები არ ამოიწურება კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიებით. ბუნებაში არსებობს ენერჯის სხვა სახეებიც: სითბური, ელექტრომაგნიტური, ქიმიური, ბირთვული და ა. შ. ზოგიერთი მათგანი ერთმანეთზე ან მექანიკურ ენერჯიებზე დაიყვანება, მაგრამ ზოგიერთი სპეციფიკური ბუნებისაა. შემდეგში ჩვენ გავეცნობით ენერჯის ამ სახეებს და მათ ერთიმეორეში გადასვლას. როგორც ენახავთ, იზოლირებულ სისტემაში საზოგადოდ მუდმივია არა მექანიკური ენერჯია (კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიების ჯამი), არამედ ყველა სა-

ხის ენერგიების ჯამი. ჯერჯერობით კი მექანიკური მოვლენების განხილვის დროს ჩვენთვის საკმარისია მხოლოდ მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი და მისი სახეების ერთმანეთში გარდაქმნა.

§ 23. ენერგიის განზომილება და ერთეულები

კინეტიკური ენერგიის ფორმულის საშუალებით ადვილად შეიძლება გამოვიყენოთ ენერგიის განზომილება, ე. ი. გამოვარკვიოთ, როგორ არის დამოკიდებული ენერგიის ერთეული ძირითადი სიდიდეების—სიგრძის, დროისა და მასის ერთეულებზე. (V, 11) ფორმულიდან მივიღებთ

$$[E_k] = [m][v^2] = M L^2 T^{-2}.$$

ცხადია, რომ ასეთივე განზომილება უნდა ჰქონდეს პოტენციურ ენერგიასაც. ენერგიის ერთეულის განსაზღვრისათვის მიემართოთ ისევ კინეტიკური ენერგიის ფორმულას:

$$E_k = \frac{mv^2}{2};$$

დავუშვათ, რომ აღებულაა ორი გრამი მასის სხეული, რომელიც მოძრაობს $v = 1 \frac{cm}{sec}$ სიჩქარით. მაშინ წინა ფორმულიდან მივიღებთ, რომ E_k იქნება რიცხობრივად ეროის ტოლი

$$E_k = 1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}.$$

როგორც ვხედავთ, კინეტიკური ენერგიის ერთეულად უნდა მივიღოთ კინეტიკური ენერგია ორი გრამი მასის სხეულისა, რომელიც $v = 1 \frac{cm}{sec}$ სიჩქარით მოძრაობს.

ენერგიის ამ ერთეულს ერგი ეწოდება. ერგის ეს განსაზღვრა განსხვავდება მისი ჩვეულებრივი განსაზღვრისაგან, რომელიც დამყარებულია მუშაობის ცნებაზე. შემდეგში, როდესაც შემოვიღებთ მუშაობის ცნებას, გამოვარკვევთ, რომ ეს სხვადასხვა განსაზღვრა ერთ და იმავეს გვაძლევს. როგორც მისი განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, ერგი წარმოადგენს ენერგიის ერთეულს აბსოლუტურ თეორიულ სისტემაში, რომელსაც კიდევ CGS სისტემა ეწოდება (დამყარებულია სანტიმეტრზე, გრამსა და სეკუნდზე). მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ, გარდა ამ სისტემისა, ფიზიკასა და, განსაკუთრებით, ტექნიკაში ხშირად გამოიყენება მეორე სისტემა—ე. წ. აბსოლუტური პრაქტიკული სისტემა, რომელიც ძირითად ერთეულებად მიღებულია მეტრი, კილოგრამი და სეკუნდი. ამ სისტემაში ენერგიის ერთეული უკვე სხვა იქნება. მას ეწოდება

ჯოული და იგი შემდეგნაირად განიმარტება: ჯოული არის კინეტიკური ენერგია 2 kg მასის სხეულისა, რომელიც მოძრაობს $1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ სიჩქარით:

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-2};$$

ამგვარად, კავშირი ჯოულსა და ერგს შორის ასეთია:

$$1 \text{ joule} = 10^7 \text{ erg}.$$

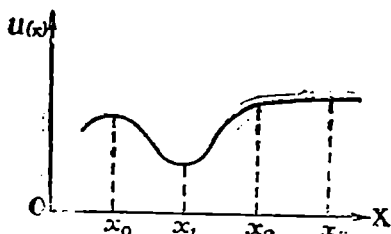
§ 24. პოტენციალური ენერგია და ძალა

ურთიერთქმედების პირველი ძირითადი კანონის განხილვისას გამოვარკვიეთ, რომ ნაწილაკზე სხვა სხეულების მოქმედების დამახასიათებელი ნიშანია ამ ნაწილაკის სიჩქარის ცვლილება, ე. ი. აჩქარება. მეორე მხრივ, ენერგიის მუდმივობის კანონის განხილვისას გამოირკვა, რომ სხეულთა ურთიერთქმედება ხასიათდება პოტენციალური ენერგიით. თავისთავად ცხადია, რომ ურთიერთქმედების ორივე დამახასიათებელი ნიშანი როგორც უნდა იყოს დაკავშირებული ერთმანეთთან, ე. ი. თუ ცნობილია ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია, შესაძლებელი უნდა იყოს მისი აჩქარების გამოთვლა და შებრუნებით, აჩქარების ცოდნა უნდა გვაძლევდეს პოტენციალური ენერგიის პოვნის შესაძლებლობას. ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ ეს კავშირი პოტენციალურ ენერგიასა და აჩქარებას შორის. ამ საკითხის გასარკვევად განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი OX ღერძის გასწვრივ მოძრაობს. ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია იქნება ნაწილაკის OX ღერძზე მდებარეობის, ე. ი. მხოლოდ x კოორდინატის ფუნქცია. გავტაროთ OX ღერძის მართობი ორდინატთა ღერძი და მასზე გადავზომოთ $U(x)$ პოტენციალური ენერგია (ნახ. 43). იგი შეიძლება იცვლებოდეს ნაწილაკის ვალადგილების დროს. მაგალითად, x_0 წერტილიდან x_1 წერტილამდე პოტენციალური ენერგია კლებულობს, x_1 -დან x_2 წერტილში გადასვლის დროს იზარდება, ხოლო x_2 და x_3 წერტილებს შორის უცვლელია. იმის გამოსარკვევად, თუ როგორია კავშირი აჩქარებასა და პოტენციალურ ენერგიას შორის, განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა x_2 და x_3 წერტილებს შორის, ე. ი. იმ არეში, რომელშიც პოტენციალური ენერგია უცვლელია. ვინაიდან ყოველი მოძრაობის დროს სრული ენერგია მუდმივია, გვექნება

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const.} \quad (V, 12)$$

რადგან განსახილველ $x_2 x_3$ მონაკვეთზე $U(x)$ არ იცვლება, არ უნდა

შეიკვალოს კინეტიკური ენერგია, ე. ი. სიჩქარე. როგორც ვხედავთ, მიუხედავად იმისა, რომ ამ არეში ნაწილს აქვს პოტენციალური ენერგია, მისი სიჩქარე მუდმივია, მას არ აქვს აჩქარება და, მაშასადამე,



ნახ. 43

მასზე გარეშე სხეულები არ მოქმედებს. სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ ნაწილს გადაადგილებს პოტენციალური ენერგია იცვლება, როგორც ეს არის x_0x_1 და x_1x_2 არეში; მაგალითად, x_0 წერტილიდან x_1 წერტილში გადასვლისას ნაწილს პოტენციალური ენერგია კლებულობს და, მა-

შასადამე, კინეტიკური ენერგია უნდა გაიზარდოს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილს ექნება დადებითი აჩქარება, მიმართული OX ღერძის გასწვრივ. x_1 -დან x_2 წერტილამდე პოტენციალური ენერგია მატულობს, რაც გამოიწვევს კინეტიკური ენერგიისა და სიჩქარის შემცირებას, ე. ი. უარყოფით აჩქარებას.

როგორც ვხედავთ, ნაწილს გარეშე სხეულების მოქმედება და მისი დამახასიათებელი ნიშანი—აჩქარება—დაკავშირებულია არა თვით პოტენციალურ ენერგიასთან, არამედ მის ცვლილებასთან სივრცული გადაადგილების დროს. ეს ფრიალ მნიშვნელოვანი შედეგი, რომ ნაწილს მოქმედების დამახასიათებელია პოტენციალური ენერგიის ცვლილება სივრცული გადაადგილების დროს, საჭიროდ ხდის პოტენციალური ენერგიის სივრცული ცვლილების შესწავლას. შემოვიღოთ ამიათვის მისი სივრცული ცვლილების დამახასიათებელი სიდიდე. ვთქვათ, A წერტილში x კოორდინატით პოტენციალური ენერგიაა U , ხოლო B წერტილში $x + \Delta x$ კოორდინატით იგი არის $U + \Delta U$, სადაც ΔU არის პოტენციალური ენერგიის ნაზრდი Δx მონაკვეთზე გადასვლების დროს. განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორ იზრდება საშუალოდ პოტენციალური ენერგია ერთეულ მანძილზე გადაადგილების დროს. ჩვენ ვამბობთ საშუალოდ იმიტომ, რომ Δx მონაკვეთის სხვადასხვა ნაწილში პოტენციალური ენერგიის ცვლილების ხასიათი შეიძლება სხვადასხვა იყოს. შემოვიღოთ სიდიდე

$$F_x = - \frac{\Delta U}{\Delta x}, \quad (V,13)$$

რომელსაც ვეწოდებთ AB მონაკვეთზე მოქმედ საშუალო ძალას და რომელიც წარმოადგენს პოტენციალური ენერჯიის სივრცული ცვლილების დამახასიათებელ სიდიდეს. ვინაიდან (V,13) ფორმულის მარჯვენა მხარეს დგას ნიშანი მინუსი, ძალა უნდა განვიხილოთ როგორც სიდიდე, რომელიც იზომება პოტენციალური ენერჯიის შემცირებით მანძილის ერთეულზე გადაადგილების დროს. თუ ჩვენ ვესტრს განვსაზღვროთ არა საშუალო ძალა რაიმე მონაკვეთზე, არამედ ნამდვილი ძალა აღებულ წერტილში, უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც ვიქცეოდით ნამდვილი სიჩქარის განსაზღვრის დროს. უნდა დავიწყოთ AB მონაკვეთის, ე. ი. Δx -ის შემცირება B წერტილის A წერტილთან მიახლოებით და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δx ნულისაკენ მიისწრაფვის. ცხადია, რომ ზღვარზე გადასვლის შემდეგ (V,13) ტოლობის მარჯვენა მხარე მოგვეცემს პოტენციალური ენერჯიის წარმოებულს, კოორდინატის მიმართ უარყოფითი ნიშნით აღებულს, და ძალისათვის გვექნება ფორმულა:

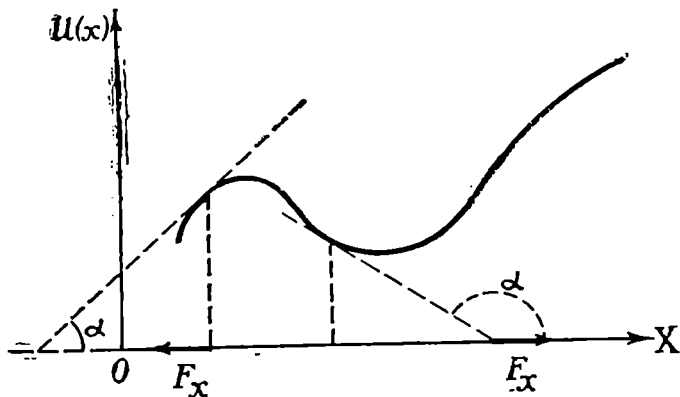
$$F_x = - \frac{dU}{dx}; \quad (V,14)$$

ძალა არის პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი წარმოებულ კოორდინატის მიმართ. ვინაიდან ეს სიდიდე ახასიათებს პოტენციალური ენერჯიის სივრცულ ცვლილებას, ხოლო, როგორც ზემოთ ვნახეთ, ეს უკანასკნელი არის ნაწილაკზე სხვა სხეულების მოქმედების მაჩვენებელი, ცხადია, ძალა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ მოქმედების დამახასიათებელი სიდიდე. ძალა განსაზღვრულია როგორც პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი წარმოებულ იმისათვის, რომ მისი მიმართულება თანხვედნილი იყოს აჩქარების მიმართულებასთან.

განვიხილოთ ძალის განსაზღვრა იმ მარტივი შემთხვევისათვის, როდესაც ნაწილაკი OX ღერძზე მოძრაობს. ამ შემთხვევაში ძალა მიმართულია ან OX ღერძის გასწვრივ, ან მის საწინააღმდეგოდ. იმის გამოსარკვევად, თუ როგორია ძალის მიმართულება (ან ნიშანი), დაკავშირებული პოტენციალური ენერჯიის სივრცულ ცვლილებასთან, დაეუბრუნდეთ პოტენციალური ენერჯიის მრუდს (ნახ. 44). როგორც ანალიზიდან ვიცით, $U(x)$ ფუნქციის წარმოებულა x -ის მიმართ გეომეტრიულად გამოისახება იმ კუთხის ტანგენსით, რომელსაც პოტენციალური მრუდისადმი გავლებულა მხები ადგენს OX ღერძთან. მაშასადამე, F_x ძალისათვის მივიღებთ

$$F_x = - \operatorname{tg} \alpha.$$

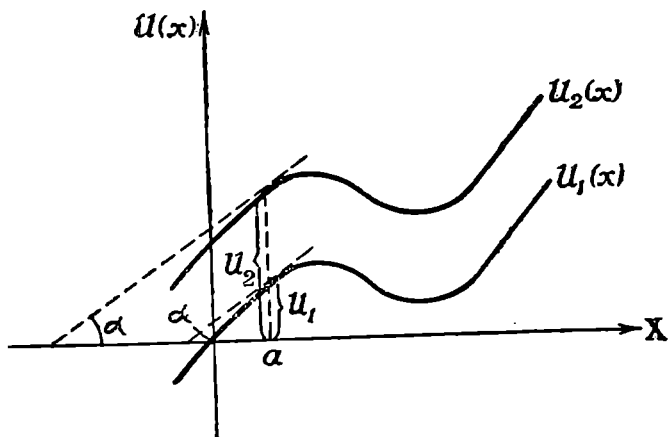
ჩვენ ვხედავთ, რომ, თუ მხები OX ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს, ძალა უარყოფითი იქნება, ე. ი. მიმართული იქნება OX ღერძის საწინააღმდეგოდ. თუ α კუთხე ბლაგვია, ძალა მიმართული იქნება OX ღერძის გასწვრივ. წერტილში, სადაც მხები აბსცისთა ღერძის პარა-



ნახ. 44

ლელურია, ძალა ნულის ტოლია. ყოველივე ეს გვიჩვენებს, რომ პოტენციალური ენერჯიის მრუდი ნათელ წარმოდგენას გვაძლევს იმაზე, თუ როგორია ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ტრაექტორიის სხვადასხვა წერტილში. ვთქვათ ახლა, რომ ცნობილია ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა ამ წერტილის ყოველ მდებარეობაში, რაც იმას ნიშნავს, რომ ცნობილია $F(x)$ ფუნქცია. როგორ მოვეძებნოთ სათანადო პოტენციალური მრუდი? გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ ვეძებთ ისეთი მრუდი, რომლის შესახებ ცნობილია, თუ რა კუთხეს ადგენს მის ყოველ წერტილში გავლებული მხები OX ღერძთან. ცხადია, ეს ცნობები არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ მოვნახოთ საძიებელი მრუდი, ვინაიდან სხვადასხვა მრუდს, მაგრამ ერთმანეთისაგან ყველა წერტილში ერთნაირად გადანაცვლებულთ, ერთნაირად დახრილი მხებები ექნებათ; მაგალითად, 45-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ორი მრუდი, რომელთაც ყოველ წერტილში ერთნაირად დახრილი მხებები და, მაშასადამე, ერთნაირი წარმოებულები აქვთ, მაგრამ სათანადო ორდინატები, ე. ი. პოტენციალური ენერჯიები—სხვადასხვა. პოტენციალური ენერჯიის მრუდად ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ როგორც ერთი, ისე მეორე მრუდი, ვინაიდან ძალა ორივე შემთხვევაში ერთნაირია, თუმცა პოტენციალური ენერჯიები კი განსხვავებულია სათანადო ორდინატების სხვაობით. იმისათვის, რომ ძალის საშუალებით ცალსახად განისაზღვროს პოტენციალური ენერჯია,

საქიროა გარკვეული დამატებითი პირობა. უნდა ვიცოდეთ, მაგალითად, როგორია პოტენციალური ენერგია რომელიმე ერთ წერტილში. ამის შემდეგ იგი ცალსახად იქნება განსაზღვრული. შემდეგში ჩვენ ისევ დავუბრუნდებით ძალის საშუალებით პოტენციალური ენერგიის განსაზღვრის საკითხს.



ნახ. 45

განვიხილოთ ახლა უფრო ზოგადი შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკები მოძრაობს სიბრტყეზე და პოტენციალური ენერგია x და y კოორდინატების ფუნქციაა, როგორც უნდა განვსაზღვროთ ამ შემთხვევაში ძალა? ვინაიდან U არის ორი კოორდინატის ფუნქცია, იგი გეომეტრიულად შეიძლება წარმოვადგინოთ ზედაპირის საშუალებით. გავტაროთ სამი ურთიერთმართობი ღერძი (ნახ. 46). ორ ღერძზე გადავზომოთ x და y კოორდინატები, ხოლო მესამე ღერძზე $U(x, y)$ პოტენციალური ენერგია. ნაწილაკის ყოველ მდებარეობას, ე. ი. XOY სიბრტყის ყოველ წერტილს ეთანადება გარკვეული პოტენციალური ენერგია. ვთქვათ, ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ ნაწილაკზე a მდებარეობაში მოქმედი ძალის გეგმილი OX ღერძზე. ამისათვის გადავინაცვლოთ a წერტილიდან OX ღერძის გასწვრივ Δx მანძილზე. ამ გადაინაცვლების შედეგად ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია შეიცვლება ΔU სიდიდით. ჩვენ განვსაზღვრავთ საშუალო ძალის გეგმილს OX ღერძზე როგორც შეფარებას

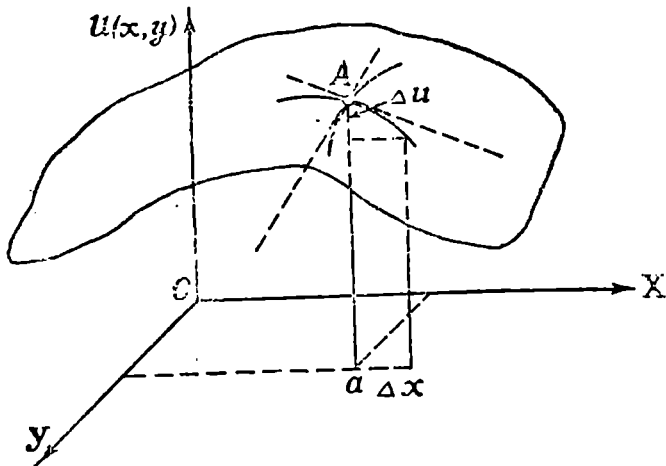
$$F_x = - \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

იმ პირობით, რომ გადაინაცვლება ხდება მხოლოდ OX ღერძის გასწვ-

რივ. ზღვარზე გადასვლის შემდეგ ძალის გეგმილისათვის OX ღერძზე მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} \quad (V, 15)$$

როგორც ვხედავთ, ძალის გეგმილი OX ღერძის გასწვრივ 'განისაზღვრება როგორც პოტენციალური ენერჯიის კერძო წარმოებული x კოორდინატის მიმართ. ასევე განისაზღვრება ძალის გეგმილი OY ღერძის გასწვრივ.



ნახ. 46

სივრცული მოძრაობის შემთხვევაში ძალა წარმოიდგინება ვექტორის სახით, რომლის გეგმილები ღერძებზე მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z} \quad (V, 16)$$

ძალის ვექტორის სიდიდისა და მიმართულების მოძებნა პოტენციალური ენერჯიის საშუალებით შემდეგნაირად ხდება. სივრცის იმ წერტილიდან, რომელშიც გვინდა მოვძებნოთ ძალა, უნდა გადავინაცვლოთ სხვადასხვა მიმართულებით ერთ და იმავე ds მანძილზე. პოტენციალური ენერჯიის ცვლილება სხვადასხვა მიმართულებით გადანაცვლების დროს სხვადასხვა იქნება და ძალა მიმართული იქნება იმ მიმართულებით, რომლის გასწვრივაც გადანაცვლების დროს პოტენციალური ენერჯია

ყველაზე მეტად შემცირდება. თუ ამ მიმართულებით გაღანაცულებას dn -ით აღვნიშნავთ, ძალის სიდიდისათვის გვექნება

$$F = - \frac{\partial U}{\partial n}.$$

ზღირად ძალას, როგორც ვექტორს, გამოსახავენ შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (V,17)$$

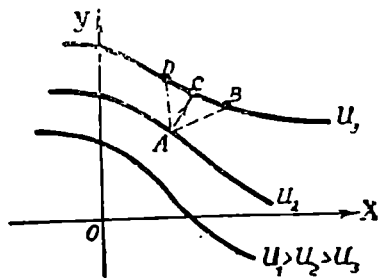
რომელსაც განვიხილავთ როგორც (V,16) სკალარული ფორმულების ვექტორულ განზოგადებას. პოტენციალურ ენერგიასა და ძალას შორის კავშირის უფრო თვალაჩინოდ გამოსახატავად განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს სიბრტყეზე და ამიტომ მისი პოტენციალური ენერგია არის x და y კოორდინატების ფუნქცია. ავარჩიოთ პოტენციალური ენერგიის რაღაც გარკვეული მნიშვნელობა U_1 და მოვძებნოთ XOY სიბრტყეზე ისეთი წერტილები, რომლებშიც მას სწორედ ეს მნიშვნელობა აქვს. მათემატიკურად ეს ნიშნავს ისეთი x და y კოორდინატების მოძებნას, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$U(x, y) = U_1.$$

ასეთი წერტილების გეომეტრიული ადგილი გამოიხატება გარკვეულ მრუდით (ნახ. 47). ამ მრუდას ჯყოველ წერტილს ეთანადება პოტენციალური ენერგიის ერთი და იგივე, სახელდობრ U_1 , მნიშვნელობა. ამიტომაც ამ მრუდს შეიძლება ვუწოდოთ იზოპოტენციალური მრუდა. ასევე შეიძლება მოვძებნოთ პოტენციალური ენერგიის U_2 , U_3 და ა. შ. მნიშვნელობების სათანადო იზოპოტენციალური მრუდები. დავუშვათ, რომ

$$U_3 > U_2 > U_1 > \dots > U_n > \dots$$

ეთქვათ ახლა, რომ ჩვენ გვსურს U_2 იზოპოტენციალური მრუდის რაიმე A წერტილში მოქმედი ძალის მიმართულების მოძებნა. ვიცით, რომ ძალა მიმართულია პოტენციალური ენერგიის უსწრაფესი შემცირების მიმართულებით და ამიტომ, ცხადია, რომ A წერტილში მოქმედი ძალა მიმართული უნდა იყოს U_3 იზოპოტენციალური მრუდისაკენ და



ნახ. 47

არა U_1 მრუდისაკენ. გამოსარკვევია მხოლოდ ის, თუ როგორ არის მიმართული ძალა— AB , AC , $AD\dots$ თუ რაიმე სხვა მიმართულებით. განსაზღვრის თანახმად, A წერტილიდან U_3 იზოპოტენციალური მრუდის რომელ წერტილშიც უნდა გადავინაცვლოთ. პოტენციალური ენერგია ერთი და იმავე $U_2—U_3$ სიდიდით შემცირდება. მაგრამ, ვინაიდან AB მეტია, ვიდრე AC , პოტენციალური ენერგიის დაკემა AC მიმართულებით უფრო სწრაფი იქნება, ვიდრე AB მიმართულებით. ძალის ვექტორის მიმართულების საპოვნელად უნდა მოიძებნოს ისეთი მიმართულება, რომლის გასწვრივ პოტენციალური ენერგიის დაკემა ყველაზე სწრაფი იქნება. თავისთავად ცხადია, და ნახაზიც ამას გვიჩვენებს, რომ ეს მიმართულება არის U_2 და U_3 მრუდებს შორის ნორმალის მიმართულება. ძალის საშუალო მნიშვნელობა A წერტილში გამოითვლება როგორც პოტენციალური ენერგიის $U_2—U_3$ შემცირების შეფარდება განანაცვლების AC სიდიდესთან

$$F_{\text{საშ.}} = \frac{U_2 - U_3}{AC} = - \frac{U_3 - U_2}{AC}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც U_3 იზოპოტენციალური მრუდი U_2 იზოპოტენციალურ მრუდს უახლოვდება, მივიღებთ ძალის ნამდვილ კიდრეს A წერტილში

$$F = - \frac{\partial U}{\partial n}. \quad (V, 18)$$

ვინაიდან $U_2—U_3 = \Delta U$, ხოლო $AC = \Delta n$. ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ პოტენციალური ენერგიის უსწრაფესი შემცირების მიმართულება მართობია U_2 იზოპოტენციალური მრუდისადმი და ამიტომაც გასაგებია, თუ რატომ აღენიშნეთ AC განანაცვლება Δn -ით (განანაცვლება ნორმალის გასწვრივ) და რატომ გამოიხატა ძალის სიდიდე როგორც პოტენციალური ენერგიის უარყოფითი წარმოებული ნორმალის გასწვრივ.

სრულიად ანალოგიურად განიხილება ზოგადი შემთხვევა, როდესაც პოტენციალური ენერგია არის სამი კოორდინატის ფუნქცია. ამ შემთხვევაში იზოპოტენციალური მრუდების მაგიერ მივიღებთ იზოპოტენციალურ ზედაპირებს და ძალა გამოიხატება ამ ზედაპირისადმი მართობი ვექტორით.

მათემატიკიდან ცნობილია, რომ თუ რაიმე სიდიდე (ჩვენს შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია) სხვადასხვა სივრცის სხვადასხვა წერტილში, ვექტორს, რომლის მიმართულება გვიჩვენებს ამ სიდიდის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას, ხოლო რიცხობრივი მნიშვნელობა—ამ

მიმართულებით მანძილის ერთეულზე გადანაცვლების დროს ამ სიდიდის ცვლილებას, ეწოდება განსახილველი სიდიდის გრადიენტი. მაშასადამე, $\frac{\partial U}{\partial r}$ ვექტორი წარმოადგენს პოტენციალური ენერჯიის გრადიენტს, ძალა კი იქნება პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი გრადიენტი.

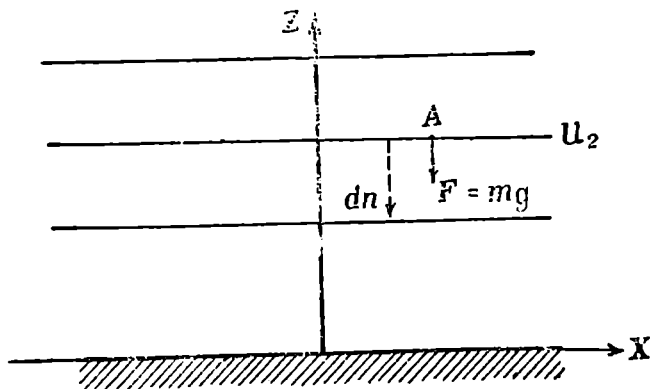
განვიხილოთ მარტივი მაგალითი ძალის განსაზღვრისა პოტენციალური ენერჯიის საშუალებით. ვთქვათ, გვინდა გავიგოთ ძალა, რომელიც მოქმედებს დედამიწის ზედაპირის მახლობლად მყოფ სხეულზე. საშუალო სკოლის კურსიდან ვიცით და გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვის დროსაც იქნება ნაჩვენები, რომ დედამიწის ზედაპირიდან z მანძილით დაშორებული სხეულის პოტენციალური ენერჯია გამოისახება ფორმულით:

$$U = mgz,$$

სადაც m არის სხეულის მასა, ხოლო g —სიმძიმის ძალის აჩქარება. ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ იზოპოტენციალური ზედაპირები XOY სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებია

$$mgz = \text{const}$$

და რომ პოტენციალური ენერჯია მატულობს დედამიწის ზედაპირიდან დაშორებასთან ერთად (ნახ. 48). მოვძებნოთ ძალა A წერტილში, რო-



ნახ. 48

მელიც იმყოფება U_2 -ის სათანადო იზოპოტენციალურ სიბრტყეზე. ცხადია, რომ პოტენციალური ენერჯიის უსწრაფესი შემცირება ხდება დედამიწის ზედაპირისაკენ მიმართული ვერტიკალის გასწვრივ. ძალის

სიდიდე გამოითვლება პოტენციალური ენერჯიის გაწარმოებით ნორმალის მიმართ. ვინაიდან $dn = -dz$, გვექნება

$$I' = -\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial z} = mg.$$

მივიღეთ სიძიმის ძალის ცნობილი გამოსახულება. ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ ძალის გეგმილები სხვადასხვა ღერძზე: მაგალითად, OX ღერძის გასწვრივ გადანაცვლების დროს პოტენციალური ენერჯია არ იცვლება (პორიზონტალურ სიბრტყეში გადანაცვლება არ ცვლის პოტენციალურ ენერჯიას), ამიტომაც ძალის გეგმილი ამ ღერძზე ნულის ტოლია. ასეთივე შედეგს მივიღებთ გეგმილისათვის OY ღერძზე.

განვიხილოთ ახლა საკითხი ძალის განზომილებისა და ერთეულის შესახებ. ძალის განმსაზღვრელი ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$[F] = \frac{[\partial U]}{[\partial n]} = \frac{ML^2T^{-2}}{L} = MLT^{-2}.$$

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ძალის განზომილება მასისა და აჩქარების ნამრავლის განზომილების ტოლია. შემდეგში გამოვიყვანოთ მექანიკის ძირითად კანონს, რომლის თანახმად ძალა უდრის მასისა და აჩქარების ნამრავლს და ისევ დავუბრუნდებით ძალის განზომილების და ერთეულის საკითხს, ახლა კი განვიხილავთ ძალის ერთეულს, გამომდინარეს ძალისა და პოტენციალური ენერჯიის კავშირიდან.

როგორც ვიცით, ძალა წარმოადგენს პოტენციალური ენერჯიის შემცირებას ერთეულ მანძილზე გადანაცვლების დროს. ამიტომაც ბუნებრივია განვსაზღვროთ ძალის ერთეული როგორც ისეთი ძალა, როდესაც ერთეულ მანძილზე გადანაცვლებისას პოტენციალური ენერჯია ერთი ერთეულით იცვლება; აქედან ვღებულობთ ძალის ერთეულის შემდეგ განსაზღვრას:

ძალის ერთეულად მიღებულია ისეთი ძალა, როდესაც პოტენციალური ენერჯია იცვლება ერთი ერთეულით, მისი უსწრაფესი შემცირების მიმართულებით მანძილის ერთეულზე გადანაცვლების დროს.

იპისდა მიხედვით, თუ რა ერთეულებია აღებული მანძილისა და პოტენციალური ენერჯიისათვის, ჩვენ მივიღებთ ძალის სხვადასხვა ერთეულს. ანსოლუტურ თეორიულ სისტემაში (CGS) მანძილის ერთეულად მიღებულია სანტიმეტრი, პოტენციალური ენერჯიის ერთეულად კი—ერგი. ძალის ერთეული ამ სისტემაში—ე. წ. დინი შემდეგნაირად განისაზღვრება:

დინი არის ისეთი ძალა, როდესაც ერთი სანტიმეტრით გადანაცვლების დროს პოტენციალური ენერჯია ერთი ერგით მცირდება

$$1 \text{ dyn} = \frac{1 \text{ erg}}{1 \text{ cm}}$$

აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემაში ძალის ერთეული განისაზღვრება ჯოულისა და მეტრის საშუალებით. ამ ერთეულს ნიუტონი ეწოდება. ნიუტონი არის ისეთი ძალა, როდესაც ერთი მეტრით გადანაცვლების დროს პოტენციალური ენერჯია ერთი ჯოულით მცირდება. კავშირი ნიუტონსა და დინს შორის ადვილად მიიღება

$$1 \text{ newt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ m}} = \frac{10^7 \text{ erg}}{10^2 \text{ cm}} = 10^5 \text{ dyn.}$$

§ 25. ურთიერთქმედების სახეები

ენერჯიის მუდმივობის კანონის განხილვის დროს ჩვენ შემოვიღეთ პოტენციალური ენერჯიის ცნება როგორც სიდიდისა, რომელიც ახასიათებს ურთიერთქმედებას. იქვე იყო აღნიშნული, რომ ურთიერთქმედების ყოველ სახეს ეთანადება გარკვეული სახის პოტენციალური ენერჯია. ახლა ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ, თუ რამდენი და რა სახის ურთიერთქმედება არსებობს ბუნებაში. საშუალო სკოლის კურსიდან ცნობილია, რომ არსებობს გრავიტაციული, ელექტრომაგნიტური, ქიმიური და მექანიკური (დრეკადი, ხახუნის) ურთიერთქმედებანი. ბოლო წლებში მათ დაემატა ბირთვული ურთიერთქმედება, არსებული ბირთვის შემადგენელ ნაწილაკებს (ნუკლონებს) შორის, და ე. წ. სუსტი ურთიერთქმედება, რომელიც პასუხისმგებელია ელემენტარული ნაწილაკების ზოგიერთი გარდაქმნებისათვის. საჭიროა აღინიშნოს, რომ ყველა ეს ურთიერთქმედება არ არის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი. როგორც თანამედროვე ფიზიკამ გვიჩვენა, არსებობს მხოლოდ ოთხი ფუნდამენტური ურთიერთქმედება, რომლებზეც დაიყვანება ყველა ურთიერთქმედება.

1. გრავიტაციული ურთიერთქმედება. უნივერსალური ურთიერთქმედება, მოქმედი ყველა მატერიალურ ნაწილაკს შორის და დახასიათებული პოტენციალური ენერჯიით:

$$U_{gr} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

სადაც m_1 და m_2 ნაწილაკების მასებია, r მანძილი მათ შორის, ხოლო γ გრავიტაციული მუდმივა, ტოლი

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{g \text{ sec}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \text{ sec}^2}.$$

γ -ს სიმცირის გამო ეს ურთიერთქმედება პრაქტიკულად შესამჩნევია მხოლოდ დიდი მასის ნაწილაკებისათვის და ამიტომაც საფუძვლად უძევს ციურ მექანიკას, კოსმონავტიკას და სხეულების მოძრაობის შესწავლას დედამიწის გრავიტაციული ველის გავლენით. ვინაიდან მასები ყოველთვის დადებითია, ურთიერთქმედება მიზიდვის ხასიათისაა.

2. ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება, არსებული მხოლოდ დამუხტულ ნაწილაკებს შორის. ამ ურთიერთქმედების კერძო სახეს წარმოადგენს ელექტროსტატიკური ურთიერთქმედება უძრავ დამუხტულ ნაწილაკებს შორის, რომელთა პოტენციალური ენერგია ტოლია

$$U_c = \frac{e_1 e_2}{r},$$

სადაც e_1 და e_2 ნაწილაკების მუხტებია, r კი მანძილი მათ შორის. ვინაიდან არსებობს დადებითი და უარყოფითი მუხტები, ეს ურთიერთქმედება შეიძლება იყოს როგორც მიზიდვის (როცა $e_1 e_2 < 0$), ისე განზიდვის (როცა $e_1 e_2 > 0$) ხასიათის. მოძრავი ნაწილაკების შემთხვევაში ელექტროსტატიკურ ურთიერთქმედებას ემატება მაგნიტური ურთიერთქმედება, დამოკიდებული ნაწილაკების სიჩქარეებზე, რაც გვაძლევს ზოგად ელექტრომაგნიტურ ურთიერთქმედებას. ეს ძალიან მნიშვნელოვანია, რადგან იგი საფუძვლად უძევს ბირთვის ურთიერთქმედებას ატომურ ელექტრონებთან, ატომების ურთიერთქმედებას ერთმანეთთან და მოლეკულებთან (ქიმიური ურთიერთქმედება) და, აგრეთვე ყველა მიკროსკოპული სხეულის ურთიერთქმედებას მათი შეხების დროს (ხახუნის და დეფორმაცია. დრეკადობა და ა. შ.).

ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება გაცილებით უფრო ძლიერია, ვიდრე გრავიტაციული. მართლაც. შევადაროთ, მაგალითად, ეს ურთიერთქმედებანი ორი პროტონის შემთხვევაში. სათანადო პოტენციალური ენერგიების შეფარდებისათვის მივიღებთ:

$$\frac{U_c}{U_{gr}} = \frac{e_p^2}{\gamma m_p^2} = \frac{(4,8 \cdot 10^{-10})^2}{6,67 \cdot 10^{-8} (1,66 \cdot 10^{-24})^2} \approx 10^{36}.$$

როგორც ვხედავთ, ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება 10^{36} -ჯერ უფრო ძლიერია, ვიდრე გრავიტაციული.

3. ბირთვული ანუ ძლიერი ურთიერთქმედება. ბირთვების აღნაგობის და მათი ურთიერთქმედების შესწავლამ მიიყვანა ფიზიკოსები ახალი ტიპის ურთიერთქმედების აღმოჩენაზე, რომელსაც ეწოდება ბირთვული ანუ ძლიერი ურთიერთქმედება. აღმოჩნდა, რომ პროტონებსა და ნეიტრონებს შორის, რომლებიც წარმოადგენენ ატომის ბირთვის შემადგენელ ნაწილაკებს, მოქმედებს ძალიან ძლიერი ურთიერთქმედება, პასუხისმგებელი ბირთვების მდგრადობისათვის. ელექტრომაგნიტური და გრავიტაციული ურთიერთქმედებისაგან განსხვავებით, იგი შესამჩნევია მხოლოდ 10^{-13} სმ მანძილზე, ხოლო უფრო შორ მანძილებზე ძალიან სწრაფად კლებულობს. ძირითადად ძლიერი ურთიერთქმედება მიზიდვის ხასიათისაა, და არ არის დამოკიდებული ბირთვული ნაწილაკების ელექტრულ მუხტზე. ნუკლონების ძალიან მიახლოებისას კი იგი გადაიქცევა განზიდვად.

ბირთვული ძალების მოქმედების არეში იგი 100-ჯერ უფრო ძლიერია, ვიდრე ელექტრომაგნიტური. ბირთვული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯიის საზე მხოლოდ მიახლოებითაა ცნობილი და სწორედ ამაში მდგომარეობს ბირთვის თანამიმდევრული თეორიის შექმნის ძირითადი სიძნელე.

4. სუსტი ურთიერთქმედება. ეს ურთიერთქმედება განაპირობებს მრავალი ელემენტარული ნაწილაკის გარდაქმნას. იგი მოქმედებს გაცილებით უფრო მოკლე მანძილზე, ვიდრე ბირთვული და მნიშვნელოვნად უფრო სუსტია, ვიდრე ელექტრომაგნიტური (მასზე უფრო სუსტია გრავიტაციული ურთიერთქმედება). როგორც მაგალითი ამ ურთიერთქმედების მოქმედებისა შეიძლება მოვიყვანოთ ნეიტრონის დაშლა პროტონად, ელექტრონად და ნეიტრონად.

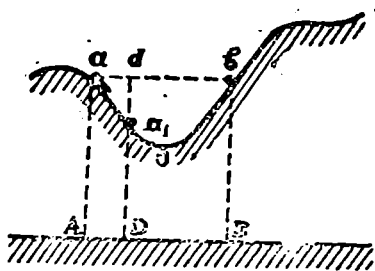
ასეთია თანამედროვე ფიზიკაში ცნობილი ფუნდამენტური ურთიერთქმედებანი. ყველა დანარჩენი დაიყვანება ამ ურთიერთქმედებებზე.

მაკროსკოპულ ფიზიკაში, რომელიც მაკროსხეულების თვისებებს შეისწავლის, ყველაზე მნიშვნელოვანია გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება.

§ 26. პოტენციალური მრუდები

ნაწილაკზე მოქმედი ძალის თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად და სათანადოდ მოძრაობის დასახასიათებლად ხელსაყრელია ე. წ. პოტენციალური მრუდის გამოყენება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მოძრაობა ერთგანზომილებიანია და ამიტომ პოტენციალური ენერჯია შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთი კოორდინატის, მაგა-

ლითად x -ის, ფუნქცია. მაშინ პოტენციალური ენერჯიის გრაფიკი ნათლად გვიჩვენებს, როგორ არის ეს ენერჯია დამოკიდებული ნაწილაკის მდებარეობაზე. ვინაიდან ნაწილაკზე მოქმედა ძალა გამოიხატება პოტენციალური მრუდისადმი გავლებული მხების დახრილობის კუთხით, აღნიშნული მრუდი იმის საშუალებასაც გვაძლევს, რომ გამოვითვალოთ ნაწილაკზე მოქმედი ძალის სიდიდე და მიმართულება. ამისათვის ხელსაყრელია განვიხილოთ არა თვით მოძრავი ნივთიერი წერტილი, რომლის მოძრაობა აბსცისთა ღერძის გასწვრივ წარმოებს, არამედ წარმოსახვითი წერტილი, რომელიც თვით პოტენციალური მრუდზე მოძრაობს. მისი პროექცია აბსცისთა ღერძზე გვაძლევს ნივთიერი წერტილის მდებარეობას, ხოლო სიმაღლე აბსცისთა ღერძიდან (პოტენციალური მრუდის ორდინატი)—პოტენციალურ ენერჯიას. განსაკუთრებით თვალსაჩინოდ წარმოგვიდგება მოძრაობის მთელი პროცესი, ენერჯიის ცვლილებასთან ერთად, თუ დაეუშვებთ, რომ პოტენციალური მრუდი გამოხატავს დედამიწის ზედაპირის რელიეფს გორაკებით, ხეობებით, აღმართებითა და დაღმართებით, ხოლო წარმოსახვითი წერტილი—სხეულს, რომელიც მოძრაობს ამ რელიეფის ზედაპირზე. აბსცისთა ღერძი უნდა განვიხილოთ როგორც დონე, საიდანაც აითვლება



ნახ. 49

და დედამიწის ზედაპირიდან გარკვეულ სიმაღლეზე ატანილი სხეულის პოტენციალური ენერჯია.

პოტენციალური მრუდის ასეთი რელიეფის სახით განხილვა ნათელ წარმოდგენას გვაძლევს ნაწილაკის მოძრაობის ხასიათზე. ვთქვათ, მაგალითად, ნივთიერი წერტილი A წერტილშია მოთავსებული (ნახ. 49). მას ეთანადება გა-

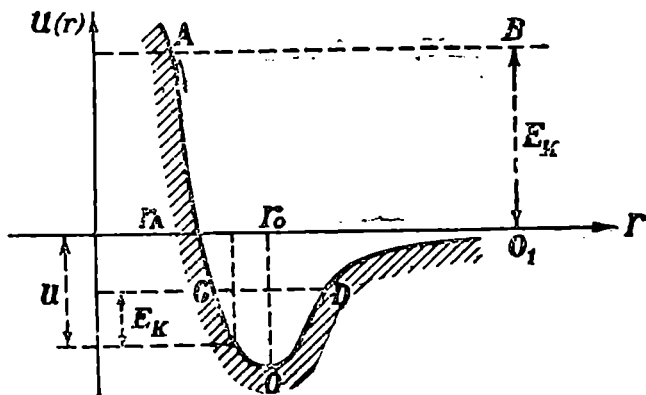
მომსახველი წერტილის მდებარეობა პოტენციალური მრუდის a წერტილში (რელიეფის დახრილ ნაწილზე). ცხადია, თუ a წერტილი განვიხილეთ როგორც მთის ფერდობზე მდებარე სხეული, იგი არ დარჩება ამ მდებარეობაში, მასზე იმოქმედებს ქვევით მიმართული ძალა, რომელიც დააგორებს მას ფერდობზე (თვით ნივთიერი წერტილი A მდებარეობიდან მარჯვნივ იმოძრაავს). მისი პოტენციალური ენერჯია შემცირდება, კინეტიკური ენერჯია გაიზრდება და იგი გარკვეული სიჩქარით გაივლის ყველაზე დაბალ ადგილზე. ინერციით იგი ავორდება O ს ფერდობზე და მიაღწევს იმავე სიმაღლეს, საიდანაც დაგორდა. ამის

შემდეგ იგი დაბრუნდება უკან და შეასრულებს რხევას O წერტილის მახლობლად. ნამდვილი ნივთიერი წერტილი, რომელიც აბსცისთა ღერძზე მოძრაობს, შეასრულებს რხევას A და B მდებარეობებს შორის. გავატაროთ აბსცისთა ღერძის პარალელური ab ხაზი. ცხადია, რომ M -სი ორდინატი გვიჩვენებს ნაწილაკის სრულ ენერჯიას, რომელიც ტოლია საწყისი Aa პოტენციალური ენერჯიისა. ვინაიდან Da_1 არის პოტენციალური ენერჯია, a_1d იქნება კინეტიკური ენერჯია, რომელიც აქვს ნაწილაკს სათანადო მდებარეობის გავლის დროს.

სრული ენერჯიის სწორი ხაზის პოტენციალურ ენერჯიასთან გადაკვეთის წერტილები ეთანადება ნივთიერი წერტილის გაჩერების წერტილებს. ვინაიდან კინეტიკური ენერჯია არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ცხადია, რომ ნაწილაკი ვერ მოხვდება ისეთ ადგილებში, რომლებშიც პოტენციალური ენერჯიის მრუდი სრული ენერჯიის ხაზზე ზევით მდებარეობს; მაგალითად, თუ ნაწილაკის სრული ენერჯია არის Dd_1 და იმყოფება ab არეში, იგი არ შეიძლება ამ არიდან გამოვიდეს—ნაწილაკი ყოველთვის a და b საზღვრებს შორის იმოძრაეობს. ასევე შეიძლება გაირჩეს პოტენციალური მრუდის სხვა ნაწილების სათანადო მოძრაობა.

პოტენციალური მრუდის სახე დამოკიდებულია ურთიერთქმედების ხასიათზე. ზოგ შემთხვევაში მისი სახე ცნობილია, მაგრამ უმეტეს შემთხვევაში, ვინაიდან პოტენციალური ენერჯია ზუსტად ცნობილი არ არის, საჭირო ხდება ნამდვილი პოტენციალური მრუდის შეცვლა მიახლოებითი მოდელური მრუდით. როგორც მაგალითი, განვიხილოთ ორი ატომის პოტენციალური ენერჯიის მრუდი. მისი სახე დამოკიდებულია ურთიერთქმედი ატომების გვარობაზე და ზუსტად ცნობილი არ არის. მაგრამ უმეტეს შემთხვევაში იგი შეიძლება გამოვხატოთ 50-ე ნახაზზე წარმოდგენილი მრუდით. აბსცისთა ღერძზე გადაზომილია ატომებს შორის მანძილი, ორდინატთა ღერძზე კი—სათანადო პოტენციალური ენერჯია. მინიმუმის წერტილიდან მარცხნივ მდებარე ნაწილი გამოხატავს ატომების განზიდვას r_0 -ზე ნაკლები მანძილებსათვის. ეს ნათლად ჩანს, თუ გამომსახველ წერტილს მოვათავსებთ ამ ფერდობზე, იგი ჩამოვარდება, რასაც ეთანადება ატომებს შორის მანძილის გადიდება (განვიღვა), r_0 წერტილის მარჯვნივ ატომებს შორის მოქმედებს მიზიდვის ძალა, რომელიც მანძილის გადიდებასთან ერთად კლებულობს და მიისწრაფვის ნულისაკენ. პოტენციალური ენერჯიის მუდმივა ისეა შეჩვენებული, რომ უსასრულობაში ენერჯია ნულის ტოლი იყოს; ამ მრუდისათვის უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა. პირველი, როდესაც ატომების სრული ენერჯია დადებითია, ე. ი. სრული ენერჯიის გამოხატვული სწორი ხაზი აბსცისთა ღერძის ზემოთ მდებარეობს. თუ ატომები

r_A მანძილზე იმყოფებიან უძრავ მდგომარეობაში (A გამომსახველი წერტილია), განზიდვის ძალის გავლენით ისინი დაშორდებიან ერთმანეთს, გარკვეული სიჩქარით გაივლიან პოტენციალური ენერჯიის მინიმუმის მდებარეობას და განაგრძობენ მოძრაობას, სანამ უსასრულოდ არ დაშორდებიან ერთმანეთს. მათი კინეტიკური ენერჯია უსასრულოდ დაშორებისას გაიზომება O, B მონაკვეთით. სულ სხვა შედეგს მივიღებთ,



ნახ. 50

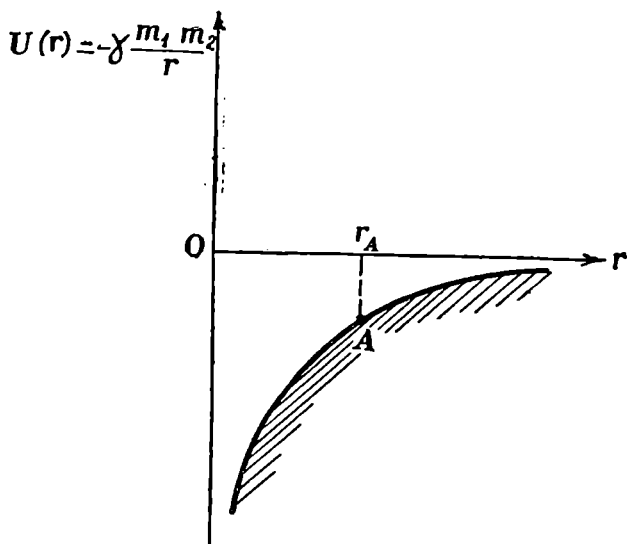
თუ ატომების სრული ენერჯია უარყოფითია (სრული ენერჯიის CD ხაზი). გამომსახველი წერტილი იგორებს C და D საზღვრებს შორის, რაც იმას ნიშნავს, რომ ატომები შეასრულებენ რხევას O წერტილის მახლობლად და ვერ მოსწყდებიან ერთმანეთს. ამ შემთხვევაში ეს ორი ატომი შეადგენს ბმულ სისტემას—მოლეკულას, რომლის შემადგენელი ატომები მხოლოდ ირხევიან ერთიმეორის მიმართ. მეორე, როდესაც ატომების სრული ენერჯია უარყოფითია, კინეტიკური ენერჯია E_k გამოიხატება მანძილით პოტენციალური მრუდიდან სრული ენერჯიის ხაზამდე (გადაზომილია ქვევიდან ზევით), ხოლო პოტენციალური ენერჯია (უარყოფითი)—მანძილით აბსცისთა ღერძიდან პოტენციალურ მრუდამდე (გადაზომილია ზევიდან ქვევით).

მეორე მაგალითად განვიხილოთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების სათანადო პოტენციალური მრუდი (ნახ. 51). m_1 და m_2 მასების მქონე ნაწილაკების გრავიტაციული პოტენციალური ენერჯია შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r},$$

სადაც r არის ნაწილაკებს შორის მანძილი (γ გრავიტაციული მუდმი-

ვა). როგორც ვხედავთ, პოტენციალური ენერგია ყველა მანძილზე უარყოფითია და იზრდება მანძილის გადიდებისას (მიზიდვა). თუ გამომსახველ წერტილს A წერტილში მოვათავსებთ, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკები უძრავია და იმყოფება r_A მანძილზე, ადვილად გამოვარკვევთ, რომ იგი დაგორდება ფერდობზე და იმოძრაეებს სათავისაკენ; ეს



ნახ. 51

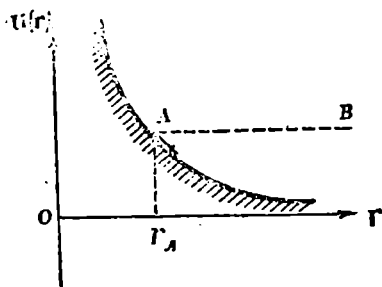
იმას ნიშნავს, რომ მიზიდვის გავლენით ნაწილაკები უახლოვდებიან ერთმანეთს, და რადგან პოტენციალური ენერგია უსასრულოდ კლებულობს, ეს მიახლოება გაგრძელდება მანამდე, სანამ ნაწილაკები არ დაეცემიან ერთმანეთს. 52-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ორი ერთნაირად (მაგალითად, დადებითად) დამუხტული ნაწილაკის პოტენციალური ენერგიის

$$U(r) = \frac{e_1 e_2}{r}$$

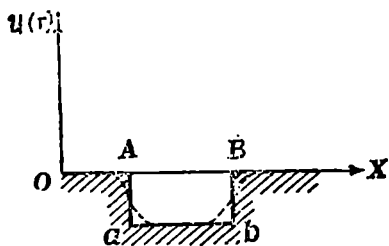
სათანადო პოტენციალური მრუდი. იგი ყველა მანძილზე აბსცისთა ღერძის ზევითაა (ენერგია დადებითია) და უსასრულოდ იზრდება მანძილის შემცირებისას. რელიეფურად იგი წარმოგვიდგება უსასრულოდ მაღალი მთის კალთის სახით, რომელიც მანძილის გადიდებისას თანდათან დაბლდება და უსასრულობაში ნულოვან ღონემდე დადის. თუ გამომსახველი წერტილი ფერდობის A წერტილშია, ცხადია, რომ განზიდვის ძალის გავლენით იგი ჩამოგორდება (ნაწილაკების დაშორება), სანამ უსასრულოდ

არ დაშორდება სათავეს. AB ხაზი გვიჩვენებს სრული ენერჯის მნიშვნელობას, ხოლო მისი დაშორება პოტენციალურა მრუდიდან—კინეტიკური ენერჯის სიდიდეს.

რა პროცესს გამოხატავს გამომსახველი ნაწილაკის მოძრაობა უსასრულობიდან სათავისაკენ? უსასრულობაში ნაწილაკს აქვს მხოლოდ კინეტიკური ენერჯია და მისი სიჩქარე მიმართულია მეორე ნაწილაკისაკენ; ამ მოძრაობის შედეგად გამომსახველი წერტილი აგორდება ფერდობზე და ეს მოძრაობა (თანდათანობით შენელებული) გაგრძელდება მანამდე, სანამ კინეტიკური ენერჯია არ გადავა მთლიანად



ნახ. 52



ნახ. 53

პოტენციალურ ენერჯიაში (A წერტილი). r_A იქნება უმცირესი მანძილი, რომელსაც მიაღწევს მოცემული კინეტიკური ენერჯის მქონე ნაწილაკი; ამ ადგილას ნაწილაკი გაჩერდება და შემდეგ, განზიდვის ძალის ევლენათ ისევ დაშორდება მეორე ნაწილაკს. ცხადია, რომ რაც უფრო დიდია საწყისი კინეტიკური ენერჯია, მით უფრო მეტად დაუახლოვდება ნაწილაკები ერთმანეთს.

ძალიან ხშირად ატომურ ფიზიკაში გამოიყენება 53-ე ნახაზზე ნაჩვენები პოტენციალურა მრუდი. მას გარკვეული ზომის ყუთის ან ორმოს ფორმა აქვს და ამიტომ ასეთ მრუდს პოტენციალურ ყუთს ან ორმოს უწოდებენ. გარდა AB შეაღებისა, პოტენციალური ენერჯია ყველგან ნულის ტოლია. თვით AB შეაღედში იგი მუდმივია, მაგრამ უარყოფითია. შეაღედი გამოყოფილია მრუდის ვერტიკალური ნაწილებით. ცხადია, რომ ეს პოტენციალურა მრუდი ნამდვილი მრუდის იდეალიზაციას წარმოადგენს. განსაკუთრებით ეს შეეხება მის ვერტიკალურ ნაწილებს. მართლაც, პოტენციალური მრუდის ვერტიკალური ნაწილი იმის მაჩვენებელია, რომ სათანადო წერტილებში ძალა უსასრულოდ დიდია (პოტენციალური ენერჯია სასრული ნახტომით იცვლება A და B წერტილებში). რეალურად მრუდი უნდა იყოს პუნქ-

ტირით ნაჩვენები სახის, რათა ძალა იყოს სასრული, მაგრამ სიმარტივისათვის განიხილავენ ვერტიკალურკედლებიან ყუთს. ცხადია, რომ კედლების მანლობლად ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ყუთის შიგნით არის მიმართული და ხელს უშლის მის გამოსვლას ყუთიდან. თუ პოტენციალურ ყუთში მყოფი ნაწილაკის სრული ენერგია უარყოფითია, ნაწილაკი ვერ გამოვა ყუთიდან და იმოდრავებს Aa და Bb კედლებს შორის. თუ სრული ენერგია დადებითია, ნაწილაკს შეუძლია მოძრაობა მთელი OX ღერძის გასწვრივ, მხოლოდ ყუთის შიგნით მოხვედრისას მისი კინეტიკური ენერგია მატულობს, ვინაიდან ყუთის საზღვრების გადალახვის დროს მასზე მოქმედებს ყუთის შიგნით მიმართული ამაჩქარებელი ძალა. ცხადია, რომ ყუთიდან გამოსვლისას ეს ძალა ანელებს მოძრაობას და ამცირებს კინეტიკურ ენერგიას (პოტენციალური ენერგია იზრდება Aa მნიშვნელობიდან ნულამდე). თუ ჩვენ გვსურს არა მარტო ერთგანზომილებიანი, არამედ ორგანზომილებიანი მოძრაობის განხილვა, პოტენციალური მრუდების მაგიერ უნდა ავიღოთ პოტენციალური ზედაპირები, მაგრამ ამ შემთხვევებს, მათი სირთულის გამო, არ განვიხილავთ.

§ 27. ძალეების შეკრების (სუპერპოზიციის) კანონი

ძალების შეკრების კანონი საშუალებას გვაძლევს გამოვარკვიოთ, როგორ გამოითვლება ნაწილაკზე მოქმედი საერთო ძალა, როდესაც ეს ნაწილაკი ურთიერთქმედებს არა ერთ, არამედ რამდენიმე, მაგალითად n , ნაწილაკთან და როდესაც ამ ნაწილაკებთან მოქმედი ცალკეული ძალები ცნობილია (ნახ. 54). ვთქვათ, განსახილველი A ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია \mathcal{E} -ურ ნაწილაკთან ურთიერთქმედების დროს არის U_h . მაშინ პოტენციალური ენერგიის შეკრების კანონის თანახმად, A ნაწილაკის სრული პოტენციალური ენერგიისათვის მივიღებთ



$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_h + \dots + U_n = \sum_{k=1}^n U_k.$$

ნახ. 54

ამ ჯამის ყოველი წევრი დამოკიდებულია მანძილზე A ნაწილაკიდან სათანადო წერტილამდე. საერთო ძალის OX ღერძზე გვემილის გამოსათვლელად U გავაწარმოოთ x -ის მიმართ, სადაც x არის A ნაწილაკის x კოორდინატი, მივიღებთ

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U_k}{\partial x},$$

მაგრამ $-\frac{\partial U_k}{\partial x}$ არის იმ ძალის გეგმილი OX ღერძზე, რომლითაც k -ური ნაწილაკი მოქმედებს A ნაწილაკზე, ხოლო $-\frac{\partial U}{\partial x}$ არის საერთო ძალის გეგმილი, ამიტომ მივიღებთ

$$F_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$$

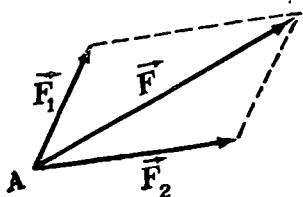
ასევე მივიღებთ გეგმილებისათვის OY და OZ ღერძებზე:

$$F_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad F_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}$$

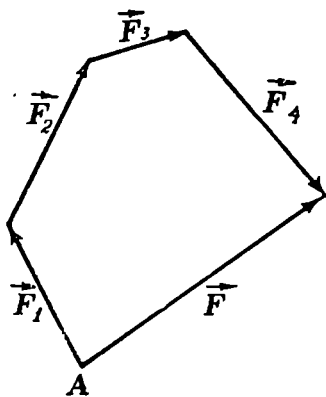
ცხადია, რომ ეს ტოლობები შეიძლება გავაერთიანოთ ერთ ვექტორულ ტოლობად

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (V, 19)$$

რაც გამოხატავს ძალების შეკრების (სუპერპოზიციის) კანონს. თუ ნაწილაკზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, საერთო ძალა არის ცალკეული ძალების ჯამი. ვინაიდან ეს ძალები ერთ წერტილზეა მოდებული, საერთო ძალა მიიღება ცალკეული ძალების გეომეტრიული შეკრებით. ორი ძალის შემთხვევაში ეს გვაძლევს ძალთა პარალელოგრამის წესს (ნახ. 55), ხოლო მრავალი ძალის შემთხვევაში—ძალების მრავალკუთხედის წესს



ნახ. 55



ნახ. 56

(ნახ. 56). ძალების შეკრების განხილული კანონი იმის მაჩვენებელია, რომ ორ ნაწილაკს შორის მოქმედ ძალაზე არ ახდენს გავლენას მესამე

ნაწილაკის არსებობა, ე. ი. ნაწილაკებს შორის მოქმედი ძალა სრულე-
ბით არ არის დამოკიდებული იმაზე, იმყოფება ამ ნაწილაკების მახ-
ლობლად რაიმე სხვა სხეული თუ არა; მაგალითად, ძალა, რომლითაც
დედამიწა მოქმედებს მთვარეზე არ არის დამოკიდებული სხვა ციური
სხეულების არსებობაზე. ამ უკანასკნელთა მოქმედება მხოლოდ ემატე-
ბა უკვე არსებულ ძალას. ძალების შეკრების ერთმანეთისაგან დამოუ-
კიდებლობის ეს თვისება თავისთავად ცხადი არ არის. საესეებით შესაძ-
ლებელი იქნებოდა, რომ მესამე სხეულს შეეცვალა პირველი სხეულის
მოქმედება მეორეზე, მაგრამ ჯერჯერობით ბუნებაში არ არის აღმოჩე-
ნილი ისეთი ძალები, რომლებიც არ ემორჩილებოდეს შეკრების კა-
ნონს, თუმცა არსებობს გარკვეული საბუთი იმისა, რომ ასეთი ხასია-
თისა უნდა იყოს ატომის ბირთვის შიგნით მოქმედი ძალები.

**§ 28. ძველები და უკუძველების ძალთა ბოლოვის კანონი.
ნიუტონის მესამე კანონი**

როდესაც განვიხილეთ ძალა როგორც ურთიერთქმედების დამახა-
სიათებელი სიდიდე, ყურადღება მივაქციეთ მხოლოდ ერთ ნაწილაკს,
მეორე ნაწილაკი კი მხოლოდ იმდენად მივიღეთ მხედველობაში, რამ-
დენადაც იგი იყო მოქმედების გამომწვევი მიზეზი. ამიტომაც პოტენ-
ციალური ენერგია ჩვენ მივაწერეთ ერთ ნაწილაკს და ჩავთვალეთ იგი
მხოლოდ ამ ნაწილაკის კოორდინატების ფუნქციად. სინამდვილეში პო-
ტენციალური ენერგია ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდეა და
იგი უნდა გამოხატავდეს როგორც ერთი ნაწილაკის მოქმედებას მეო-
რეზე, ისე მეორე ნაწილაკის მოქმედებას პირველზე; აქედან, ცხადია,
რომ ძალები უნდა მოქმედებდეს როგორც ერთ, ისე მეორე ნაწილაკ-
ზე. ამ ძალების ურთიერთკავშირის გამოსარკვევად განვიხილოთ მარ-
ტივი შემთხვევა, როდესაც ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკი მოძრაობს
OX ღერძის გასწვრივ (ნახ. 57). თუ ამ ნაწილაკების კოორდინატებს



ნახ. 57

აღვნიშნავთ x_1 -ითა და x_2 -ით,
პოტენციალური ენერგია იქ-
ნება მათი სხვაობის (წერ-
ტილთა შორის მანძილის) ფუნ-
ქცია: $U(x_2 - x_1)$. თუ $x_2 -$
 $-x_1 = x$, მაშინ

$$U(x) = U(x_2 - x_1). \quad (V, 20)$$

ეთქვათ, გვსურს გამოვითვალოთ ძალა, რომლითაც მეორე ნაწი-
ლაკი მოქმედებს პირველზე; ამისათვის საჭიროა დავამაგროთ მეორე
ნაწილაკი და გამოვითვალოთ პოტენციალური ენერგიის ცვლილება, გა-

მოწვეული პირველი ნაწილაკის გადანაცვლებით ერთეულოვან მანძილზე, ე. ი. გამოვითვალოთ $U(x_2-x_1)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული x_1 -ის მიმართ მუდმივი x_2 -ის პირობებში, მივიღებთ

$$F_{x_1}^x = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (V,21)$$

(U გაწარმოებულია როგორც რთული ფუნქცია). სრულიად ანალოგიურად, მეორე ნაწილაკზე მოქმედი ძალის გამოსათვლელად უნდა დავამაგროთ პირველი ნაწილაკი, ე. ი. ჩავთვალოთ x_1 მუდმივ სიდიდედ და გავწარმოოთ პოტენციალური ენერგია x_2 -ის მიმართ, მივიღებთ

$$F_{x_2}^x = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (V,22)$$

ვინაიდან $\frac{\partial x}{\partial x_2} = 1$. (V,21) და (V,22) ფორმულების შედარება გვიჩვენებს, რომ

$$F_{x_1}^x = -F_{x_2}^x. \quad (V,23)$$

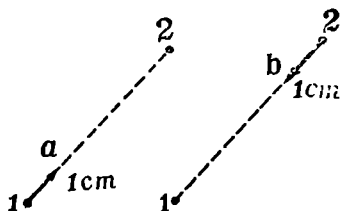
როგორც ვხედავთ, ძალა, რომლითაც მეორე ნაწილაკი მოქმედებს პირველზე, ტოლია და საწინააღმდეგოა ძალისა, რომლითაც პირველი ნაწილაკი მოქმედებს მეორეზე. ურთიერთქმედების ძალების ეს თვისება სასეებით გასაგებია. ვინაიდან პოტენციალური ენერგია არის მხოლოდ ნაწილაკთა შორის მანძილის ფუნქცია, მისი ცვლილება პირველი ნაწილაკის ერთეულ მანძილზე $(1-a)$ გადანაცვლების დროს ისეთივე იქნება, როგორც მისი ცვლილება მეორე ნაწილაკის ასეთივე გადანაცვლების $(2-b)$ დროს საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 58).

იმ შემთხვევაში, როცა ნაწილაკები სივრცეში მოძრაობს, პოტენციალური ენერგია იქნება ფუნქცია არა მარტო (x_2-x_1) -ისა, არამედ აგრეთვე y_2-y_1 და (z_2-z_1) -ისა:

$$U(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

ცხადია, ისევე როგორც ერთგანზომილებიანი მოძრაობის შემთხვევაში, პოტენციალური ენერგიის წარმოებულები y_1 -

ისა და z_1 -ის მიმართ ტოლი იქნება უარყოფითი წარმოებულებისა



ნახ. 58

y_2 -ისა და სათანადოდ x_2 -ის მიმართ, ამიტომ ძალების მდგენელები-ათვის ამ ღერძების მიმართ მივიღებთ

$$F_{21}^y = -F_{12}^y, \quad F_{21}^z = -F_{12}^z.$$

მიღებული შედეგები შეიძლება ვექტორულად დაწვეროთ

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (V,24)$$

ცხადია, რომ ურთიერთქმედების ძალების ეს თვისება მართებული იქნება მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვისაც

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}. \quad (V,25)$$

მიღებული შედეგი შემდეგნაირად ყალიბდება: ძალა, რომლითაც ერთი ნაწილაკი მოქმედებს მეორეზე, ტოლი და საწინააღმდეგოა ძალისა, რომლითაც მეორე ნაწილაკი მოქმედებს პირველზე.

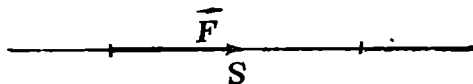
ამ კანონს ეწოდება ქმედებისა და უკუქმედების ძალების ტოლობის ან ნიუტონის მესამე კანონი (პირველ კანონად ითვლება ინერციის პრინციპი, ხოლო მეორე კანონს ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ). ზოგჯერ მას სიმოკლისათვის უწოდებენ ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობის კანონს, მაგრამ ეს სახელწოდება არ შეიძლება მიზანშეწონილად ჩაითვალოს, ვინაიდან ტერმინი ქმედება რაოდენობრივად განსაზღვრული არ არის, გაურკვეველი რჩება, რის ტოლობას გულისხმობს ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობა. შეიძლება გვეფიქრა, რომ ქმედება ნიშნავს ძალით გამოწვეულ შედეგს, მაგალითად, აჩქარებას, მაგრამ მაშინ კანონი სწორი არ იქნებოდა, ვინაიდან ურთიერთქმედების შედეგად მიღებული აჩქარებები ტოლი არ არის.

შემდეგში ჩვენ კიდევ დავებრუნდებით ნიუტონის მესამე კანონის განხილვას. საკმე ისაა, რომ ეს კანონი შემდეგში გამოიყენება როგორც შედეგი მოძრაობის დინამიკური განტოლებებისა, რომლებიც აკავშირებს ძალას აჩქარებასთან. ჩვენ ვნახავთ, რომ ეს კანონი შეიძლება განზოგადდეს ისეთ ძალებზეც, რომლებიც არ მიიღება პოტენციალური ენერჯიიდან (არამექანიკური ხასიათის ძალები). იქვე იქნება განხილული ამ კანონის გამოყენების მაგალითები და მისი შედეგები.

§ 29. მუზაიკა და სიმფლაზმა

განვიხილოთ ფიზიკური და ტექნიკური თვალსაზრისით ფრიად მნიშვნელოვანი ცნება—მუშაობის ცნება, რომელიც მკიდროდ არის დაკავშირებული ენერჯიის ცნებასთან. დავიწყოთ ჯერ მარტივი შემთხვევით, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს სწორხაზოვნად და მასზე მოქმედებს ტრაექტორიის გასწვრივ მიმართული ძალა (ნახ. 59). ვთქვათ, ნაწი-

ლაკმა გადანაცვლა s მანძილით ძალის მოქმედების გასწვრივ, მაშინ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა განისაზღვრება როგორც ძალის



ნახ. 59

ნამრავლი გადანაცვლების მანძილზე და გამოისახება ფორმულით:

$$A = F s. \quad (V, 26)$$

შესაძლებელია, რომ ნაწილაკის გადანაცვლება ხდებოდეს ძალის მოქმედების საწინააღმდეგოდ, მაშინ მუშაობა უარყოფითად ითვლება და გამოისახება ფორმულით:

$$A = -F s. \quad (V, 26')$$

ორივე ეს ფორმულა შეიძლება ერთ ფორმულად გავაერთიანოთ, თუ ძალას განვიხილავთ როგორც ვექტორს და შემოვიღებთ მის F_s გეგმილს გადანაცვლების მიმართულებაზე. ცხადია, თუ ძალა მიმართულია გადანაცვლების გასწვრივ, $F_s = F$, ხოლო, თუ მათი მიმართულებანი საწინააღმდეგოა, $F_s = -F$, ამიტომაც მუშაობის ფორმულა ორივე შემთხვევისათვის ერთად ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$A = F_s \cdot s. \quad (V, 27)$$

ეს ფორმულა გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ძალა დახრილია ტრაექტორიისადმი (ნახ. 60). თუ ძალა გადაადგილების მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს, გვექნება

$$F_s = F \cdot \cos \alpha$$

და (V, 27) ფორმულა ასე დაიწერება:

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \quad (V, 28)$$

(V, 26) და (V, 26') ფორმულები მიიღება (V, 28) შემთხვევაში, თუ α იქნება ან 0, ან π . თუ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ე. ი. ძალა გადანაცვლების მართობია, მუშაობა ნულის ტოლი იქნება. როგორც (V, 27), ისე (V, 28) ფორმულა შეიძლება დაიწეროს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის სახით, თუ ძალის გარდა s გადანაცვლებასაც განვიხილავთ როგორც ვექტორს

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (V, 29)$$

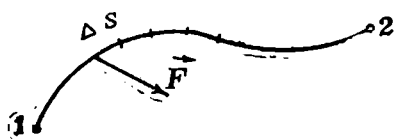
განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, როდესაც ტრაექტორია მრუდი წირია და ძალაც ცვალებადია, ე. ი. სხვადასხვა ტრაექტორიის სხვადასხვა წერტილში (ნახ. 61). ამ შემთხვევაში მუშაობის გამოსათვლელად შემდეგნაირად იქცევიან. გადანაცვლების მთელ მანძილს ყოფენ მცირე Δs_i ელემენტებად და გამოითვლიან მუშაობას ყოველი ცალკეული ელემენტისათვის იმ დაშვებით, რომ ყოველ ელემენტზე მოქმედი ძალა მუდმივია, რაც იმას ნიშნავს, რომ შეიძლება გამოვიყენოთ (V,27) ფორმულა. ცხადია, ეს დაშვება მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა ელემენტი. ელემენტარული მუშაობისათვის მივიღებთ

$$\Delta A = F_s \cdot \Delta s, \quad (V,30)$$

სადაც F_s არის ძალის გეგმილი გადანაცვლებაზე i -ური ელემენტისათვის. მთელი მუშაობის გამოსათვლელად იღებენ ელემენტარული მუშაობების ჯამს

$$A = \sum_{i=1}^n F_{si} \Delta s_i. \quad (V,31)$$

როგორც ვთქვით, ეს ფორმულა მიახლოებითია, ვინაიდან დაშვებულია ყოველ ელემენტზე მოქმედი ძალის მუდმივობა. მუშაობის ზუსტი ფორმულის მისაღებად უნდა გადავიღოთ ზღვარზე, როდესაც ყოველი Δs_i ელემენტი ნულისაქენ მისწრაფვის და მათი რიცხვი კი უსასრულოდ იზრდება. როგორც



ნახ. 61

ანალიზიდანაა ცნობილი, (V,31) ფორმულაში მდგომი ჯამი მოგვცემს ინტეგრალს და ფორმულა მუშაობისათვის შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$A = \int_1^2 F_s ds, \quad (V,32)$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია საწყის და საბოლოო მდებარეობათა შორის და ინტეგრება ხდება ტრაექტორიის ვასწვრივ. ასეთია ზოგადი

ფორმულა ნებისმიერად ცვლადი ძალის მიერ შესრულებული მუშაობისა ნებისმიერ ტრაექტორიაზე მოძრაობის დროს.

გამოვარკვეოთ ახლა როგორაა მუშაობა დაკავშირებული ენერგიასთან. ცხადია, რომ ასეთი კავშირი უნდა არსებობდეს, ვინაიდან ძალის გვემილი რაიმე მიმართულებით ჩვენ განვსაზღვრეთ როგორც პოტენციალური ენერჯიის წარმოებულ ამ მიმართულებით

$$F_s = - \frac{\partial U}{\partial s}.$$

თუ ძალის ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ ელემენტარული მუშაობის ფორმულაში

$$dA = F_s ds,$$

მივიღებთ

$$dA = - \frac{\partial U}{\partial s} ds = -dU. \quad (V,33)$$

როგორც ვხედავთ, მუშაობა უდრის პოტენციალური ენერჯიის შემცირებას. იგივე შედეგი მიიღება სასრულ გზაზე შესრულებული მუშაობისათვისაც:

$$A = \int_1^2 F_s ds = - \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial s} ds = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2. \quad (V,34)$$

მიღებული შედეგი საშუალებას გვძლევს შევანვიკურთ მუშაობის ერთი მნიშვნელოვანი თვისება გავარჩიოთ. (V,34) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა დამოკიდებულია მხოლოდ საწყის და საბოლოო მდებარეობებზე და არ არის დამოკიდებული იმ გზის სახეზე, რომლის საშუალებითაც ხდება გადასვლა ამ მდებარეობათა შორის. რა გზითაც უნდა გადავიდეს ნაწილაკი ერთი მდებარეობიდან მეორეში, შესრულებული მუშაობა ყოველთვის ერთი და იგივე იქნება; აქედან, თავის მხრივ, განომდინარეობს, რომ თუ გადანაცვლების შემდეგ ნაწილაკი საწყის მდებარეობას დაუბრუნდა, ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლი იქნება, ვინაიდან ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერჯიის საბოლოო მნიშვნელობა საწყის მნიშვნელობასთან ხდება; ამ შედეგს მათემატიკურად შემდეგი სახით გამოხატავენ:

$$\oint F_s ds = 0, \quad (V,35)$$

სადაც წრიანი ინტეგრალი იმის მაჩვენებელია, რომ ინტეგრება ჩაკეტილი გზით ხდება (ნახ. 62). ვინაიდან პოტენციალური ენერჯიის ცვლილე-

ბა, ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად, დაკავშირებულია კინეტიკური ენერგიის ცვლილებასთან, უნდა არსებობდეს კავშირი მუშაობასა და კინეტიკური ენერგიის ცვლილებას შორის. მართლაც, ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად

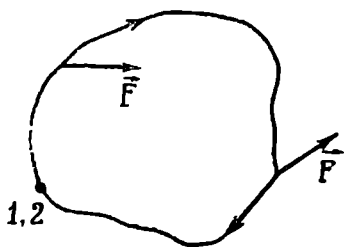
$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + dU = 0,$$

საიდანაც

$$dU = -d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

ამიტომ ელემენტარული მუშაობისათვის გვექნება

$$dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \quad (V,36)$$



ნახ. 62

ე. ი. მუშაობა უდრის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდს. იგივე შეიძლება ითქვას სასრულო გზაზე შესრულებული მუშაობისათვის

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (V,37)$$

სადაც v_1 და v_2 წარმოადგენენ ნაწილაკის სიჩქარეებს საწყის და საბოლოო მდებარეობებში. საბოლოოდ ვღებულობთ ასეთ შედეგს—ნაწილაკის მოძრაობის დროს ხდება პოტენციალური და კინეტიკური ენერგიების ერთმანეთში გარდაქმნა. ერთი მათგანი კლებულობს, მეორე მატულობს. ამავე დროს ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ასრულებს გარკვეულ მუშაობას, რომელიც უდრის პოტენციალური ენერგიის შემცირებას და კინეტიკური ენერგიის ნაზრდს. როგორც ვხედავთ, მუშაობა ახასიათებს ენერგიის გარდაქმნას პროცესს. იგი გეჩვენებს, თუ რა რაოდენობის პოტენციალური ენერგია გადადის კინეტიკურ ენერგიაში. ცხადია, მუშაობაზე ლაპარაკი შეიძლება მხოლოდ პროცესის (მოძრაობის) დროს. პროცესის დაწყების ან დამთავრებას შემდეგ ნაწილაკს აქვს გარკვეული მარტივი პოტენციალური და კინეტიკური ენერგიებისა და, რასაკვირველია, არავითარ მუშაობაზე ამ მდგომარეობაში ლაპარაკი არ შეიძლება. ამიტომაც გასაგებია გამოიქმნას—სრულდება მუშაობა, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ იგულისხმება პროცესი და არა მდგომარეობა.

ახლა უფრო დაწვრილებით გავაჩიოთ ჩვენ მიერ მიღებული შედეგი—ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა არ არის დამოკიდებული გზაზე, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ჩაკეტილ გზაზე შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. დაკვირვება და ცდები გეჩვენებს, რომ პრაქ-

ტიკაში ეს შედეგი მართებული არ არის. ჩვენთვის კარგად არის ცნობილი, რომ მუშაობა დამოკიდებულია გზაზე და რომ საწყის მდებარეობაში დაბრუნებისას შესრულებული მუშაობა ნულისაგან განსხვავებულია (ტვირთის გადატანა დედამიწის ზედაპირზე ან მისი მთაზე ატანა და ა. შ.). მაგრამ, თუ დაუტყვირდებით ყველა ასეთ შემთხვევას, ადვილად აღმოვაჩენთ, რომ აქ დარღვეულია მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი, ვინაიდან ხდება მექანიკური ენერგიის გადასვლა სხვა სახის ენერგიებში. მაშასადამე, ყველა ასეთი მოძრაობა არ წარმოადგენს წმინდა მექანიკურ პროცესს და მათი შესწავლისათვის საჭიროა მოლეკულურ-სითბური პროცესების მხედველობაში მიღება. პრინციპულად რომ ვიმსჯელოთ, ამ მოძრაობათა განხილვა მხოლოდ მექანიკურ კანონებზე დამყარებით შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, მექანიკაში იხილავენ ასეთ მოძრაობებსაც და გარკვეულ დაშვებებზე დამყარებით აზოგადებენ ძალის ცნებას; შემოჰყავთ ე. წ. დისიპაციური ძალები, რომლებიც დაკავშირებულია გარეშე სხეულების არამექანიკურ მოქმედებასთან (ხახუნის ძალები) და რომლებიც არ შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს პოტენციალური ენერგიის საშუალებით; ეს იმას ნიშნავს, რომ შეუძლებელია მათი წარმოდგენა მხოლოდ ნაწილაკთა კონფიგურაციაზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიის გრადიენტის სახით. ხშირად ასეთ ძალებს კიდევ არაპოტენციალურ ძალებს უწოდებენ. არაპოტენციალური, ე. ი. დისიპაციური ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა უკვე დამოკიდებულია მოძრაობის გზაზე, ამიტომ მათი არსებობის შემთხვევაში აღარ არის მართებული პოტენციალური ძალების მიერ შესრულებული მუშაობისათვის მიღებული შედეგი; ამ საკითხს ჩვენ შემდეგ, დისიპაციური ძალების განხილვის დროს, დავუბრუნდებით.

პოტენციალურ და კინეტიკურ ენერგიასთან მუშაობის დამაკავშირებელი ფორმულები საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ მისი (მუშაობის) განზომილება და ერთეული. ვინაიდან მუშაობა უდრის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდს, მუშაობისა და კინეტიკური ენერგიის განზომილება ერთი და იგივე უნდა იყოს

$$[A] = \left[\frac{mv^2}{2} \right] = ML^2T^{-2}.$$

ამავე დროს მუშაობის საზომი ერთეული ისეთივე უნდა იყოს, როგორც კინეტიკური ან პოტენციალური ენერგიისა. აბსოლუტურ ფიზიკურ სისტემაში მუშაობის ერთეული იქნება ერგი, ხოლო აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემაში—ჯოული, რომელიც, როგორც ვიცით, 10^7 -ჯერ მეტია, ვიდრე ერგი.

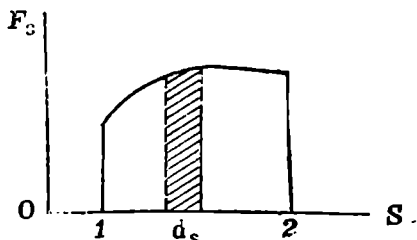
ხშირად ხელსაყრელია მუშაობის ერთეულის განსაზღვრა ძალისა და მანძილის ერთეულების საშუალებით, მაგრამ ჩვენი მეთოდის მიხედვით,

რომლის თანახმად ძალა განისაზღვრება ენერჯიის საშუალებით, ასეთი განსაზღვრა არ იქნება თანმიმდევრული და ამიტომ მას ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ. ამ საკითხს შემდეგ დავუბრუნდებით. ახლა კი აღვნიშნავთ, რომ, გარდა ერჯისა და ჯოულისა, ხშირად გამოიყენება მუშაობის კიდევ ერთი ერთეული ე. წ. კილოგრამმეტრი. კილოგრამმეტრი არის მუშაობა, რომელიც სრულდება ერთი კილოგრამ-მასის სხეულის ატანისას ერთი მეტრის სიმაღლეზე დედამიწის ზედაპირის მახლობლად. ეს ერთეული შეიძლება განიმარტოს პოტენციალური ენერჯიის საშუალებითაც. დედამიწის მახლობლად მყოფ სხეულს გარკვეული პოტენციალური ენერჯია აქვს, ვინაიდან იგი ურთიერთქმედებს დედამიწასთან. თუ ერთი კილოგრამი მასის სხეულს ერთი მეტრის სიმაღლეზე ავწევთ დედამიწის ზედაპირიდან, პოტენციალური ენერჯია შეიცვლება (გაიზრდება) და ეს ცვლილება ენერჯიისა იქნება სწორედ კილოგრამმეტრი. გაზომვები გვიჩვენებს, რომ ენერჯიის ეს ცვლილება სხვადასხვა დედამიწის სხვადასხვა ადგილას. ვინაიდან პოტენციალური ენერჯია იცვლება დედამიწის ზედაპირზე გადანაცვლების დროს, ამიტომაც კილოგრამმეტრის განსაზღვრის დასაზუსტებლად უნდა გაირკვეს, თუ სად და რა პირობებში უნდა ხდებოდეს სხეულის ატანა ერთი მეტრის სიმაღლეზე. შეთანხმებით მიღებულია, რომ ერთი კილოგრამმეტრი შემდეგნაირად არის დაკავშირებული ჯოულთან:

$$1 \text{ k}(\text{g}m) = 9, 80665 \text{ joule} \approx 9,81 \text{ joule}.$$

ხშირად ხელსაყრელია მუშაობის გამოსახვა გრაფიკულად; ამისათვის ასეთ გრაფიკს ავებენ: აბსცისთა ღერძზე გადაზომავენ s განვიღო მანძილს, ხოლო ორდინატთა ღერძზე—ძალის F , გეგმილს s ტრაექტორიის გასწვრივ (ნახ. 63). ვინაიდან F , საზოგადოდ s -ის ფუნქციაა, იგი გამოიხატება მრუდით. ds

ელემენტარული გადაადგილების დროს შესრულებული მუშაობა გამოიხატება მცირე ფართობით, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით, s და $s + ds$ -ის სათანადო ორდინატებით და მრუდის სათანადო რკალით. მთელი მუშაობა 1 მდებარეობიდან 2 მდებარეობაში გადასვლის



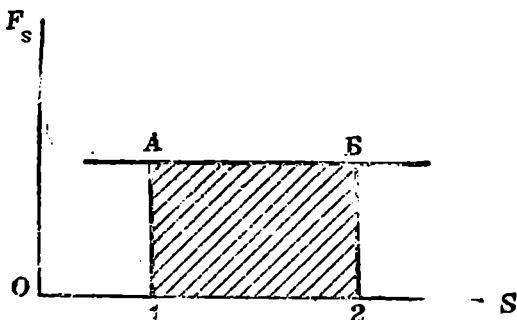
ნახ. 63

დროს გამოიხატება ასეთი ელემენტარული ფართობების ჯამით. იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც F , მუდმივია, მისი გამომსახველი მრუდით

იქნება აბსცისთა ღერძის პარალელური სწორი ხაზი და, მუშაობა გამოიხატება 1 *AB* 2 მარტკუთხედის ფართობით (ნახ. 64), რაც ე.წ. ანბემა ამ შემთხვევისათვის გამოსაყენებელ მარტივ ფორმულას:

$$A = F_s (s_2 - s_1) = F_s \cdot s.$$

განვიხილოთ ახლა სიმძლავრის ცნება, ამ ცნებას ძირითადად ტექნიკური მნიშვნელობა აქვს და იგი შემოღებულია იმის დასახასიათებ-



ნახ. 64

ლად, თუ რამდენად სწრაფად სრულდება მუშაობა. თვით მუშაობის განსაზღვრისას დროს მნიშვნელობა არ ჰქონდა, მნიშვნელოვანი იყო გავლილი გზა და მოქმედი ძალა. მაგრამ ზოგჯერ საჭიროა ვიცოდეთ რამდენად სწრაფად სრულდება ესა თუ ის მუშაობა. თუ იმ მარტივ შემთხვევაში, როდესაც ძალა მუდმივია, მუშაობა t დროში სრულდება, დროის ერთეულში შესრულებული მუშაობა გამოისახება ფართობით:

$$\overline{W} = \frac{A}{t} = \frac{F_s \cdot s}{t} = F_s \cdot \overline{v}. \quad (V,38)$$

ამ სიდიდეს, ე. ი. დროის ერთეულში შესრულებულ მუშაობას ეწოდება საშუალო სიმძლავრე. განხილულ მარტივ შემთხვევაში იგი გამოისახება როგორც ძალის გეგმილის ნამრავლი საშუალო სიჩქარეზე. ზოგად შემთხვევაში ტრაექტორიის სხვადასხვა წერტილში სიმძლავრე სხვადასხვა შეიძლება იყოს და სიმძლავრის ნამრავლი მნიშვნელობა დროის ადებულ მომენტში განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_s \cdot ds}{dt} = F_s \cdot v, \quad (V,39)$$

ე. ი. სიმძლავრე არის ძალის მხეტი გეგმილის ნამრაველი სიჩქარეზე. ამ ფორმულას შეიძლება მივცეთ სკალარული ნამრავლის სახე, თუკი ძალასა და სიჩქარეს განვიხილავთ როგორც ვექტორებს

$$W = (\vec{F} \cdot \vec{v}). \quad (V, 40)$$

სიმძლავრის ცნება ხშირად გამოიყენება ტექნიკაში, განსაკუთრებით მშენ, როდესაც საჭიროა მანქანის მიერ მუშაობის შესრულების სისწრაფის დახასიათება. შეიძლება ორი მანქანა ერთ და იმავე მუშაობას ასრულებდეს, მაგრამ ერთი უფრო მძლავრი იყოს, ვიდრე მეორე, თუ იგი ამ მუშაობას უფრო მცირე დროში ასრულებს, ვიდრე მეორე. ცხადია, რომ სიმძლავრის განზომილება მიიღება მუშაობის ან ენერჯიის განზომილების გაყოფით დროის განზომილებაზე

$$[W] = \frac{[A]}{[t]} = M L^2 T^{-3}.$$

სიმძლავრის ერთეულებიც მიიღება ენერჯიისა და დროის ერთეულების საშუალებით. აბსოლუტურ ფიზიკურ სისტემაში სიმძლავრის ერთეული იქნება ისეთი სიმძლავრე, როდესაც ერთ სეკუნდში სრულდება ერთი ერგი მუშაობა.

სიმძლავრის აბსოლუტური ფიზიკური ერთეული $= \frac{1 \text{ erg}}{1 \text{ sec}}$; ამ ერთეულს სპეციალური სახელწოდება არ აქვს. აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემაში სიმძლავრის ერთეული არის ვტი. ეს არის ისეთი სიმძლავრე, როდესაც ერთ სეკუნდში სრულდება ერთი ჯოული მუშაობა

$$1 W = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ sec}} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}.$$

კილოგრამმეტრთან, როგორც მუშაობის ერთეულთან, დაკავშირებულია სიმძლავრის ერთეული, ე. წ. კილოგრამმეტრი სეკუნდში

$$\frac{1 \text{ kGm}}{1 \text{ sec}} = 9,81 W.$$

მოძრაობის ღინამიკური განმარტებები

**§ 30. მოძრაობის ღინამიკური განმარტებების
გამოყვანა**

როგორც წინათ იყო აღნიშნული, მექანიკის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს მოძრაობის განსაზღვრა ურთიერთქმედების საშუალებით. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ურთიერთქმედება ხასიათდება ორი სიდიდით — პოტენციალური ენერგიითა და ძალით, რომელთა შორის გარკვეული კავშირი არსებობს. სახელდობრ, თუ ცნობილია პოტენციალური ენერგია, როგორც მდებარეობის ფუნქცია, ძალის გვეკმილი რაიმე ღერძზე მოიძებნება მისი გაწარმოებით სათანადო კოორდინატის მიმართ. შებრუნებით, თუ ცნობილია ნაწილაკზე მოქმედი ძალა, პოტენციალური ენერგია განისაზღვრება მისი ინტეგრებით. ინტეგრების მუდმივას განსაზღვრა მოხდება დამატებითი პირობიდან, რომ გარკვეული მდებარეობისათვის (ჩვეულებრივ, უსასრულო დაშორებისათვის) პოტენციალურ ენერგიას გარკვეული (ჩვეულებრივ, ნულის ტოლი) მნიშვნელობა აქვს.

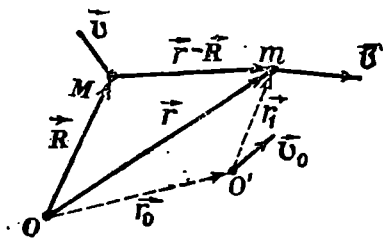
მეორე მხრავ, ნაწილაკს მოძრაობა საესებით გარკვეულია, თუ ცნობილია რადიუს-ვექტორი (ან კოორდინატები) როგორც დროის ფუნქცია

$$\vec{r} = f(t); \begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases} \quad (\text{VI}, 1)$$

თუ ეს დამოკიდებულება ცნობილია, ერთხელ და ორჯერ გაწარმოებით გამოითვლება სათანადოდ სიჩქარე და აჩქარება. შებრუნებით, თუ ცნობილია ნაწილაკის აჩქარება, შეიძლება ორჯერ ინტეგრებით განსაზღვროთ რადიუს-ვექტორი, როგორც დროის ფუნქცია. ინტეგრების ორი მუდმივას განსაზღვრა ხდება დამატებითი პირობებიდან, ე. წ. საწყისი პირობებიდან, რომლებიც საზღვრავს ნაწილაკის მდებარეობასა და სიჩქარეს საწყისი მომენტისათვის.

მაშასადამე, ერთი მხრივ, ჩვენ გვაქვს ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდეები—პოტენციალური ენერგია და ძალა, მეორე მხრივ კი, მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეები—რადიუს-ვექტორი, სიჩქარე და აჩქარება. განტოლებებს, რომლებიც ამყარებს კავშირს ურთიერთქმედებისა და მოძრაობის დამახასიათებელ სიდიდეებს შორის, მოძრაობის დინამიკური განტოლებები ეწოდება.

ჩვენი მიზანია სწორედ ამ მოძრაობის განტოლებების სახის დადგენა. როგორც ახლა ვნახავთ, ამისათვის საკმარისია ენერგიის მუდმივობის კანონისა და ფარდობითობის პრინციპის გამოყენება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ



ნახ. 65

ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკის შემთხვევა (მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის შემთხვევა ანალოგიურად განიხილება). ვთქვათ, მოცემულია ორი ნაწილაკი \$M\$ და \$m\$ მასებით; მათი სათანადო სიჩქარეები რაიმე ინერციული სისტემის მიმართ იყოს \$\vec{v}\$ და \$\vec{v}_0\$, ხოლო ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია — \$U(|\vec{r}-\vec{R}|)\$, სადაც \$\vec{r}\$ და \$\vec{R}\$ ნაწილაკების რადიუს-ვექტორებია (სიდიდე \$|\vec{r}-\vec{R}|\$ წარმოადგენს მანძილს ნაწილაკებს შორის) (ნახ. 65). ენერგიის მუდმივობის კანონი შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + U(|\vec{r}-\vec{R}|) = \text{const.} \quad (\text{VI.2})$$

ვთქვათ, გვსურს \$m\$ მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობის განტოლების დადგენა. ამისათვის დავუშვათ, რომ \$M\$ მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობა ჩვენთვის ცნობილია, ე. ი. ცნობილია მისი \$\vec{R}\$ რადიუს-ვექტორი როგორც დროის ფუნქცია:

$$\vec{R} = \varphi(t).$$

მაშინ მისი სიჩქარეც და, მაშასადამე, კინეტიკური ენერგიაც დროის ცნობილი ფუნქცია იქნება; აქედან დავასკენით, რომ გამოსახულება

$$\frac{MV^2}{2} + U(|\vec{r}-\vec{R}|)$$

იქნება \$\vec{r}\$ რადიუს-ვექტორისა და დროის ცნობილი ფუნქცია. აღვ-

ნიშნით ეს გამოსახლება $U(\vec{r}, t)$ -თი და ვეწოდოთ მას m მასის ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია M მასის ნაწილაკის მიმართ. (VI, 2) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}, t) = \text{const}; \quad (\text{VI, 3})$$

ამ განტოლებას ისეთი სახე აქვს, თათქოს მხოლოდ ერთი ნაწილაკი გვექონდეს ცვალებად (ე. ი. დროზე დამოკიდებულ) პოტენციალურ ველში.

გადავიღეთ ახალ ინერციულ სისტემაზე, რომლის სათავეს რადიუს-ვექტორი და სიჩქარე ძველი სისტემის მიმართ არის \vec{r}_0 და \vec{v}_0 . აღვნიშნოთ m მასის ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი და სიჩქარე ამ ახალი სისტემის მიმართ \vec{r}_1 -ითა და \vec{v}_1 -ით. მათი კავშირი \vec{r} და \vec{v} სიდიდეებთან შემდეგი ფორმულებით იქნება გამოსახელი:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{v}_0 t, \quad (\text{VI, 4})$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_0$$

(დაშვებულია, რომ საწყის მომენტში ახალი სისტემის სათავე ძველი სისტემის სათავესთანა თანხვედნილი). ფარდობითობის პრინციპის თანახმად ამ ახალი სისტემის მიმართ ენერგიის კანონს ისეთივე სახე უნდა ჰქონდეს, როგორაც ძველი სისტემის მიმართ:

$$\frac{mv_1^2}{2} + U(\vec{r}_1, t) = \text{const}. \quad (\text{VI, 5})$$

უნდა გვახსოვდეს მხოლოდ, რომ ამ ფორმულაში შემავალი მუდმივა განსხვავებულ იქნება (VI, 3) ფორმულის მუდმივასაგან. ჩავსვათ ამ განტოლებაში \vec{r}_1 და \vec{v}_1 მნიშვნელობანი (VI, 4) ფორმულიდან, მივიღებთ

$$\frac{mv^2}{2} - m \vec{v} \cdot \vec{v}_0 + \frac{mv_0^2}{2} + U(\vec{r} - \vec{v}_0 t, t) = \text{const}. \quad (\text{VI, 6})$$

გავაღოფერენციალოთ (VI, 3) და (VI, 6) ფორმულები

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0. \quad (\text{VI, 7})$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \vec{v}_0 d(m\vec{v}) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \vec{v}_0 dt + \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0, \quad (\text{VI, 7'})$$

ვინაიდან \vec{v}_0 მუდმივი სიდიდეა. პირველი განტოლებიდან მეორის გამოკლება მოგვცემს

$$\vec{v}_0 d(m\vec{v}) + \frac{\partial U}{\partial r} \vec{v}_0 dt = 0.$$

ანუ

$$\vec{v}_0 \left\{ d(m\vec{v}) + \frac{dU}{\partial r} dt \right\} = 0. \quad (\text{VI}, 8)$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ენერგიის მუდმივობის კანონი მართებული იყოს ყველა ინერციულ სისტემაში, უნდა შესრულდეს (VI, 8) ტოლობა, როგორც უნდა იყოს \vec{v}_0 , ე. ი. როგორც ახალი ინერციული სისტემაც უნდა ამოვირიჩოთ. მაგრამ (VI, 8) ტოლობა მხოლოდ მაშინ იქნება შესრულებული ნებისმიერი \vec{v}_0 -სათვის, როდესაც ნულის ტოლი იქნება ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება; აქედან ვლებულობთ

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (\text{VI}, 9)$$

ვინაიდან $-\frac{\partial U}{\partial r}$ არის ნაწილაკზე მოქმედი \vec{F} ძალა, გვექნება

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (\text{VI}, 9')$$

თუ გავიხსენებთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში მასა მუდმივ სიდიდედ ითვლება, ეს ფორმულა ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$m\vec{a} = \vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (\text{VI}, 10)$$

როგორც (VI, 9'), ისე (VI, 10) ფორმულა წარმოადგენს მოძრაობის დინამიკურ განტოლებებს, ვინაიდან ისინი აკავშირებენ მოძრაობისა და ურთიერთქმედების დამახასიათებელ სიდიდეებს. (VI, 9') ფორმულა უფრო ზოგადია, ვიდრე (VI, 10) ფორმულა, ვინაიდან იგი გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც მასა ცვალებადია. მუდმივი მასის შემთხვევაში ისინი საცესებით ეკვივალენტურია.

კანონს, გამოხატულს (VI, 9') ან (VI, 10) ფორმულით, ეწოდება ნიუტონის მეორე კანონი და იგი წარმოადგენს მექანიკის ძირითად კანონს. მისი შინაარსი ასეთია:

მოძრაობის რაოდენობის (იმპულსის) წარმოებულის დროით მოქმედი ძალის ტოლია: მუდმივი მასის შემთხ-

ვევაში კი გვექნება: მასის ნამრავლი აჩქარებაზე მოქმედი ძალის ტოლია. მოძრაობის დინამიკური განტოლება, ანუ ნიუტონის მეორე კანონი, შეიძლება გამოვხატოთ კოორდინატების საშუალებით. ამისათვის საჭიროა (VI,10) ვექტორული განტოლების დაგვიგვილება ლერძებზე:

$$\begin{aligned} ma_x &= m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \\ ma_y &= m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \\ ma_z &= m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \quad (VI,11)$$

იმის შემდეგ, რაც დადგენილია მოძრაობის განტოლებები, უკვე შეიძლება ავწეროთ, როგორ უნდა მოხდეს მექანიკის ძირითადი ამოცანის ამოხსნა. ვთქვათ, მოცემულია პოტენციალური ენერგია (ურთიერთქმედება) და საძიებელია რადიუს-ვექტორი, როგორც დროის ფუნქცია (მოძრაობა). პოტენციალური ენერგიის გაწარმოებით კოორდინატების მიმართ მივიღებთ ძალას (ან მის გვეგმილებს). მოძრაობის განტოლების საშუალებით ვიპოვით აჩქარებას, ხოლო შემდეგ, აჩქარების ორჯერ ინტეგრებით და საწყისი პირობების გამოყენებით, — კოორდინატებს, როგორც დროის ფუნქციებს.

რასაკვირველია, შეიძლება და ხშირად საჭიროც არის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა. მოცემულია მოძრაობა, ე. ი. \vec{r} , როგორც დროის ფუნქცია, და საჭიროა ურთიერთქმედების, ე. ი. ძალის ან პოტენციალური ენერგიის პოვნა; ამ შემთხვევაში ასე უნდა მოვიქცეთ. \vec{r} -ის გაწარმოებით ეპოულობთ სიჩქარეს და შემდეგ აჩქარებას. მოძრაობის განტოლების თანახმად ძალა მოიძებნება აჩქარების გამრავლებით მასაზე. თუ საჭიროა პოტენციალური ენერგიის განსაზღვრა, საჭირო იქნება ძალის ინტეგრება და ინტეგრების მულდმივას განსაზღვრა დამატებითი პირობით. ამოხსნის სქემა თვალსაჩინოდ ასე წარმოიდგინება:

ურთიერთქმედება	მოძრაობის განტოლება	მოძრაობა
$U = \bar{F}$	$\bar{F} = m\bar{a}$	$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}$

კარგად უნდა გვახსოვდეს, რომ პოტენციალური ენერგია ან ძალა არ საზღვრავს მოძრაობას ცალსახად. ძალა საზღვრავს აჩქარებას

და აჩქარების საშუალებით რომ მოიძებნოს მოძრაობა, აუცილებლად საჭიროა საწყისი პირობების გამოყენება.

ის გარემოება, რომ ძალა საზღვრავს არა უშუალოდ ნაწილაკის მდებარეობასა და სიჩქარეს, არამედ აჩქარებას, შემდეგნაირადაც შეიძლება იქნეს გაგებული. ვთქვათ, მოცემულია ნაწილაკზე მოქმედი გარეშე სხეულების მდებარეობები, ე. ი. მათი კონფიგურაცია. ცხადია, რომ ეს კონფიგურაცია სავსებით ცალსახად საზღვრავს ნაწილაკზე მოქმედ ძალას. მიუხედავად ამისა, განსახილველი ნაწილაკი შეგვიძლია სივრცის ნებისმიერ წერტილში მოვათავსოთ. კიდევ მეტიც, ნებისმიერ წერტილში მოთავსების შემდეგ შეგვიძლია ნაწილაკს ნებისმიერი სიჩქარე მივანიჭოთ. მაგრამ აჩქარებისათვის ნებისმიერი მნიშვნელობის მინიჭება შეუძლებელია. იგი ცალსახად განისაზღვრება გარეშე სხეულების კონფიგურაციითა და ნაწილაკის მდებარეობით.

§ 31. ნიუტონის მესამე კანონის გამოყვანა მოძრაობის დინამიკური განტოლებებიდან

წინა თავში, ძალის ცნების განსაზღვრის დროს, დავადგინეთ, რომ ურთიერთქმედ ნაწილაკებზე მოქმედი ძალები ერთმანეთის ტოლია და საწინააღმდეგოდაა მიმართული. ეს კანონი — ნიუტონის მესამე კანონი — გამოყვანილი იყო ძალისა და პოტენციალური ენერჯიის დამაკავშირებელი ფორმულიდან. ახლა გამოვარკვევთ, რომ ეს კანონი შეიძლება გამოვიყვანოთ მოძრაობის დინამიკური განტოლებებიდან და იმპულსის მუდმივობის კანონიდან.

მართლაც, მოძრაობის დინამიკური განტოლებების თანახმად ყოველი ნაწილაკისათვის ძალა უდრის მასის ნამრავლს აჩქარებაზე:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1, \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2. \quad (\text{VI}, 12)$$

მეორე მხრივ, იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const},$$

საიდანაც გაწარმოებით ვღებულობთ

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2. \quad (\text{VI}, 13)$$

(VI, 12) ფორმულებთან შედარება გვაძლევს, რომ

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad (\text{VI}, 14)$$

ე. ი. ვღებულობთ ნიუტონის მესამე კანონს.

ეს კანონი შეიძლება განზოგადდეს მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარ სისტემაზე. მხოლოდ ამისათვის ხელსაყრელია დავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \quad (\text{VI}, 14')$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ განმხილულ სისტემაში მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია. მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის ნიუტონის მეორე კანონი ასე დაიწერება:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1, \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2, \quad \dots, \quad m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n, \quad (\text{VI}, 15)$$

შეკრებით მივიღებთ

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

მეორე მხრივ, იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \text{const},$$

საიდანაც გაწარმოებით ვღებულობთ

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n = 0.$$

(VI,15) ფორმულასთან შედარება მოგვცემს

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0, \quad (\text{VI}, 16)$$

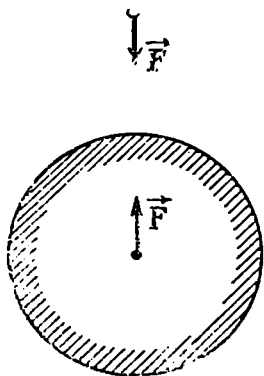
რაც წარმოადგენს (VI,14') ფორმულის განზოგადებას მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის.

განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი მაგალითი. ცნობილია, რომ დედამიწის მახლობლად მყოფი სხეულები მიიზიდება დედამიწის მიერ გარკვეული ძალით, რომელსაც სიმძიმის ძალა ეწოდება. ეს ძალა არის მიზეზი სხეულების ვარდნისა და საყრდენზე დაწოლისა. ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად ეს სხეულიც იზიდავს დედამიწას ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით, რომელიც მოდებულია დედამიწის მასების ცენტრში (ნახ. 66).

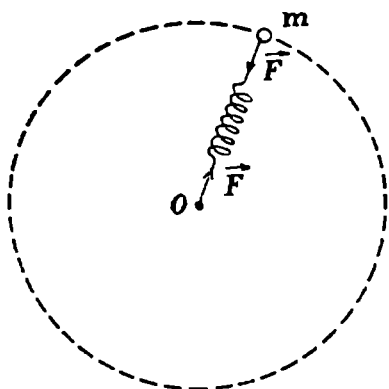
ვთქვათ, რაიმე m მასის სხეული დაკავშირებულია უძრავ ცენტრთან ზამბარით და მასთან ერთად თანაბრად ბრუნავს ამ ცენტრის ირგვლივ (ნახ. 67). ვინაიდან წრიულად მოძრავ სხეულს აქვს ცენტრისაკენ მიმართული აჩქარება $\frac{v^2}{R}$, მასზე უნდა მოქმედებდეს

ცენტრისკენული ძალა $\frac{mv^2}{R}$, გამოწვეული ზამბარის გაჭიმვით. ნიუ-

ტონის მესამე კანონის თანახმად ზამბარაზეც უნდა მოქმედებდეს საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალა. ეს ძალა ზამბარის გაჭიმვის საშუალებით გადაეცემა ცენტრს და ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ, თუ უძრავი ცენტრი $\frac{mv^2}{R}$ ძალით მოქმედებს სხეულზე, ეს უკანასკნელიც ზამბარის საშუალებით იმოქმედებს ცენტრზე ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით.



ნახ. 66



ნახ. 67

როდესაც მალლა ვწევთ რაიმე სხეულს გარკვეული აჩქარებით, ეს იმას ნიშნავს, რომ მასზე ემოქმედებთ ვერტიკალურად ზევით მიმართული ძალით; ასეთივე სიდიდის, მაგრამ საწინააღმდეგოდ ძალით ეს სხეული მოქმედებს ჩვენზე; ასევე ხდება თოფის გასროლის დროს. რა ძალითაც თოფი დენთის გაზების საშუალებით მოქმედებს ტყვიაზე, ისეთივე მხოლოდ საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით წტყვია, ისევე დენთის გაზების საშუალებით, მოქმედებს თოფზე, რაც იწვევს თოფის უკუტყვმას.

ნიუტონის კანონის გამოყენების უფრო რთულ მაგალითს წარმოადგენს საწვერისა და მარხილის მოძრაობა დედამიწის ზედაპირზე. ცხადია, რა ძალითაც საწვეარი სწევს მარხილს, ისეთივე, მხოლოდ საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით მარხილი ეწვევა საწვეარს. მაგრამ ისმის კითხვა, რატომ მოძრაობს ორივე საწვერის წვევის მიმართულებით და არა საწინააღმდეგოდ? საქმე ისაა, რომ ჩვენ გვავიწყლება მესამე სხეული, დედამიწა, რომელიც იღებს მონაწილეობას ურთიერთ-

ქმედებაში ხახუნის ძალის საშუალებით. საწვეარი მოქმედებს დედამიწაზე გარკვეული ხახუნის ძალით, რომელიც მიმართულია საწვეერის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით დედამიწა მოქმედებს საწვეარზე. მარხილიც მოქმედებს დედამიწაზე სხვა სიდიდის ხახუნის ძალით და დედამიწაც შებრუნებით მოქმედებს მარხილზე ტოლი და საწინააღმდეგოდ ძალით. როგორც ვხედავთ, საწვეერისა და მარხილისაგან შემდგარ სისტემაზე მოქმედებს ოთხი ძალა, რომელთა ჯამი არ არის ნულის ტოლი. სწორედ ამ ძალას მოჰყავს მოძრაობაში საწვეარი და ეტლი. საწინააღმდეგოდ მიმართული და ტოლი ძალა მოქმედებს დედამიწაზე, რომელმაც უნდა იმოდროს საწინააღმდეგოდ მიმართულებით შესაფერისი აჩქარებით.

§ 32. მოძრაობის განტოლებები მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის. გეგმი და თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი

განვიხილოთ მრავალი, მაგალითად n , ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემა. ავარჩიოთ მისი რომელიმე k -ური ნაწილაკი და განვსაზღვროთ მასზე მოქმედი \vec{F}_k ძალა. ცხადია, რომ ეს ძალა გამოწვეულ იქნება როგორც თვით განსახილველი სისტემის სხვა ნაწილაკებით. ისე გარეშე სხეულებით, ამიტომაც ყოველ ნაწილაკზე მოქმედი საერთო ძალა შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი ძალის ჯამის სახით:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

სადაც \vec{F}_k^i არის ძალა, რომლითაც სისტემის სხვა ნაწილაკები მოქმედებს k -ურ ნაწილაკზე. მას ეწოდება შიდა ძალა. \vec{F}_k^e არის იმავე ნაწილაკზე მოქმედი ძალა, მაგრამ გამოწვეული გარეშე სხეულებით. მას გარე ძალა ეწოდება. წინა პარაგრაფში გამოყვანილი მოძრაობის განტოლების თანახმად, ნაწილაკის მასისა და აჩქარების ნამრავლი ტოლი უნდა იყოს მოქმედი ძალისა

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (VI,17)$$

ჩვენ მივიღებთ მოძრაობის იმდენ ვექტორულ განტოლებას, რამდენი ნაწილაკისაგანაც შედგება სისტემა (სკალარულ განტოლებათა რიცხვი სამჯერ მეტი იქნება). მათი ამოხსნისა და საწყისი პირობების გამოყენებით ვიპოვიოთ ყოველი ნაწილაკის მოძრაობას. მაგრამ ძალიან ხშირად, განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როდესაც სისტემის შემადგენელ ნაწილაკთა რიცხვი დიდია, საინტერესოა არა ყოველი ცალკეული ნაწილაკის, არამედ სისტემის, როგორც მთლიანის, მოძრაობის გამორ-

კვევა. მაგალითად, როდესაც ვსვამთ საკითხს ავტომანქანის, თვით-მფრინავის, მთვარის ან სხვა ციური მნათობების და სხვა სხეულების მოძრაობის შესახებ, მრავალ შემთხვევაში არ გვაინტერესებს მათი ცალკეული ნაწილაკების მოძრაობა, ჩვენ გვსურს ვიცოდეთ მათი, როგორც მთლიანი სხეულის, მოძრაობა.

იმპულსის მუდმივობის კანონის განხილვისას უკვე შემოვიღეთ ინერციის, ანუ მასების ცენტრის ცნება. ინერციის ცენტრი განვსაზღვრეთ როგორც ისეთი წერტილი, რომლის რადიუს-ვექტორი მიიღება ცალკეული ნაწილაკების რადიუს-ვექტორებიდან შემდეგი ფორმულით:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

იქვე დავადგინეთ, რომ თუ სისტემის მთელ მასას მოვათავსებთ ინერციის ცენტრში, მისი იმპულსი ტოლი იქნება მთელი სისტემის იმპულსისა

$$M \bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \quad (\text{VI}, 18)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ იმპულსის სიდიდის თვალსაზრისით სისტემა შეიძლება შევცვალოთ ინერციის ცენტრში მოთავსებული ერთი ნაწილაკით, რომლის მასა სისტემის მასის ტოლია. აქედან ბუნებრივად გამომდინარეობს, რომ სისტემის, როგორც მთლიანის, მოძრაობის განხილვა ნიშნავს მისი ინერციის ცენტრის მოძრაობის განხილვას, ამიტომაც თავისთავად ისმის საკითხი ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლების შესახებ. გავაწარმოოთ (VI,18) განტოლება დროის მიმართ, მივიღებთ

$$M \bar{a}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k, \quad (\text{VI}, 19)$$

სადაც \bar{a}_c არის ინერციის ცენტრის აჩქარება. (VI, 17) განტოლების გამოყენება მოგვცემს

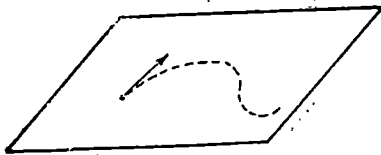
$$M \bar{a}_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i + \sum_{k=1}^n F_k^e,$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ სისტემაში მოქმედი შიდა ძალების ჯამი ნულის ტოლია (განზოგადებული ნიუტონის მესამე კანონი), ამიტომ ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

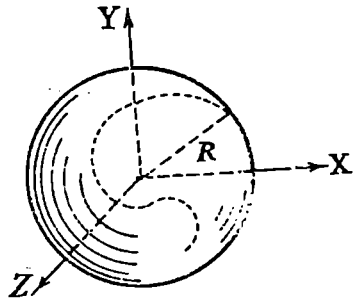
$$\vec{M} \vec{a}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (\text{VI}, 20)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ინერციის ცენტრი მოძრაობს როგორც ნივთიერი წერტილი, რომლის მასა სისტემის მთელი მასის ტოლია და რომელზეც მოდებულია ყველა გარე ძალის ჯამი. შიდა ძალები არავითარ გავლენას არ ახდენს ინერციის ცენტრის მოძრაობაზე. ცხადია, რომ, თუ სისტემა იზოლირებულია, ე. ი. მასზე არავითარი გარე ძალები არ მოქმედებს, ინერციის ცენტრი იმოძრაებს მუდმივი სიჩქარით; ეს შედეგი ჩვენ წინათაც გვქონდა მიღებული.

შემოვიღოთ ასლა ფრიად მნიშვნელოვანი ცნებები თავისუფლების ხარისხთა რიცხვისა და ბმებისა. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ სივრცეში მოძრავი ნაწილაკის მოძრაობის განსაზღვრისათვის საჭიროა სამი კოორდინატის, როგორც დროის ფუნქციების, განსაზღვრა; ეს იმას ნიშნავს, რომ თავისუფალ ნივთიერ წერტილს შეუძლია შეასრულოს სამი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი მოძრაობა. ამიტომაც ამბობენ, რომ თავისუფალ ნივთიერ წერტილს აქვს სამი თავისუფლე-



ნახ. 68



ნახ. 69

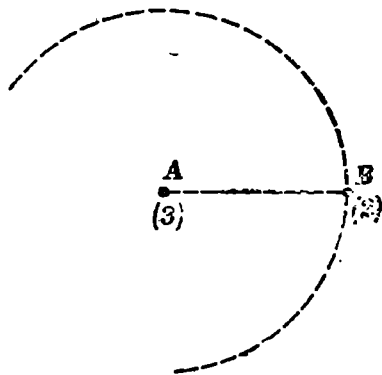
ბის ხარისხი. წარმოვიდგინოთ, რომ ნაწილაკი იძულებულია იმოძრაოს გარკვეული ფორმისა და მდებარეობის ზედაპირზე, მაგალითად, სიბრტყეზე (ნახ. 68) ან სფეროზე. ამ ზედაპირზე მოძრაობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ორი კოორდინატი. თუ, მაგალითად, წერტილი იძულებულია იმოძრაოს R -რადიუსიან სფეროზე (ნახ. 69) ცენ-

ტრით კოორდინატთა სათავეში, მისი სივრცული კოორდინატები და-
კავშირებული უნდა იყოს განტოლებით:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (1)$$

რომელიც საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ერთ-ერთი მათგანი, თუ ცნობილია ორი დანარჩენი; ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია მხოლოდ ორი კოორდინატი. ამიტომაც შეიძლება ვთქვათ, რომ ზედაპირზე მოძრავ ნივთიერ წერტილს აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ცხადია, ნებისმიერ წერტილზე მოძრავ ნივთიერ წერტილს ექნება ერთი თავისუფლების ხარისხი. თუ ნივთიერი წერტილის მოძრაობა შეზღუდულია რაიმე პირობით, რომელიც ამცირებს დამოუკიდებელ მოძრაობათა რაოდენობას, ამბობენ, რომ ნივთიერი წერტილი ემორჩილება ბ მებს, ხოლო თვით განტოლებას ეწოდება ბ მის განტოლება (მაგალითად, (A) განტოლება).

განვიხილოთ რამდენიმე ნივთიერი წერტილის შემთხვევა. თუ სისტემა შედგება ორი ნივთიერი წერტილისაგან და მათ შეუძლიათ თავისუფლად მოძრაობა სივრცეში, ცხადია, რომ სისტემას ექნება 6 თავისუფლების ხარისხი (ყოველ წერტილს სამი ხარისხი). მაგრამ შეიძლება ეს წერტილები ისე იყოს დაკავშირებული ერთმანეთთან, რომ მანძილი მათ შორის არ იცვლებოდეს. გამოვარკვეოთ რამდენი თავისუფლების ხარისხი აქვს ასეთ სისტემას. ერთ ნივთიერ წერტილს აქვს 3 თავისუფლების ხარისხი. დავამაგროთ ახლა ეს წერტილი და ვნახოთ როგორი მოძრაობის შესრულება შეუძლია მეორე წერტილს. ვინაიდან წერტილებს შორის

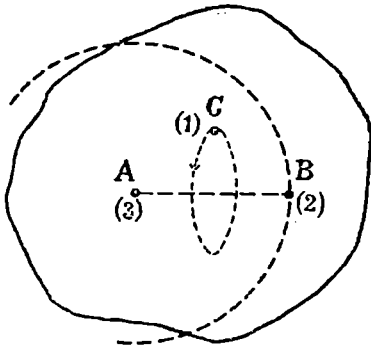


ნახ. 70

მანძილი არ იცვლება, მეორე წერტილს შეუძლია მოძრაობა უცვლელი რადიუსის მქონე სფეროზე, რომელიც შემოწერილია პირველი წერტილის ირგვლივ (ნახ. 70). ამიტომ მას ექნება მხოლოდ ორი თავისუფლების ხარისხი და, მაშასადამე, უცვლელ მანძილზე მდებარე ორი წერტილის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი იქნება 5. ასევე შეიძლება გაირკვეს თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ყველა სხვა შემთხვევაში. ზოგადი წესი ასეთია: თუ სისტემა შედგება n ნაწილაკისა-

გან, მათი სრულიად თავისუფალი მოძრაობის დროს საერთო თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი იქნება $3n$. მაგრამ შეიძლება ამ წერტილებს შორის არსებობდეს ბმები, ე. ი. შეიძლება კოორდინატები დაკავშირებული იყოს ბმების განტოლებებით. ყოველი ბმის განტოლება ამცირებს თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს ერთით და ამიტომ, თუ სისტემა ემორჩილება r ბმას, დამოუკიდებელ მოძრაობათა რიცხვი, რომელიც შეიძლება შეასრულოს სისტემამ, ე. ი. თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი იქნება $3n - r$.

გამოვარკვეით რამდენი თავისუფლების ხარისხი აქვს მყარ სხეულს, ე. ი. ნივთიერი წერტილების ისეთ სისტემას, რომლის წერტილებს შორის მანძილები უცვლელია. ვთქვათ, მყარ სხეულს შეუძლია თავისუფალი მოძრაობა სივრცეში და ავირჩიოთ მისი ერთ-ერთი წერტილი. ცხადია, მას ექნება სამი თავისუფლების ხარისხი. დავამაგროთ ეს წერტილი, მაშინ მყარი სხეულის სხვა რომელიმე წერტილს შეუძლია მოძრაობა მხოლოდ სფეროზე, რომელიც შემოწერილია პირველი წერტილის ირგვლივ, ამიტომ მას ექნება 2 თავისუფლების ხარისხი. დავამაგროთ ახლა ეს მეორე წერტილიც. ცხადია, მყარი სხეულის



ნახ. 71

მესამე წერტილს, რომელიც არ მდებარეობს პირველ ორ წერტილზე გავლებულ წრფეზე, შეუძლია მოძრაობა მხოლოდ წრეხაზზე, რომლის ცენტრი მდებარეობს ამ წრფეზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ მას აქვს 1 თავისუფლების ხარისხი (ნახ. 71). თუ ეს წერტილიც დავამაგრეთ, მყარი სხეულის არც ერთ წერტილს არ შეეძლება მოძრაობა. აქედან, ცხადია, რომ თავისუფალ მყარ სხეულს აქვს 6 თავისუფლების ხარისხი (3

გადატანითი და 3 ბრუნვითი). თუ მყარი სხეული იძულებულია იმოძრაოს ისე, რომ მისი ერთი წერტილი იყოს უძრავი (ბრუნვა წერტილის ირგვლივ), 3 გადატანითი თავისუფლების ხარისხი მოისპობა და მას ექნება მხოლოდ 3 ბრუნვითი ხარისხი. ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის შემთხვევაში დარჩება მხოლოდ ერთი ბრუნვითი თავისუფლების ხარისხი ამ ღერძის ირგვლივ.

ჩვენ მიერ გამოყენილი მოძრაობის განტოლება (VI, 9) გამოსაყენებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ნაწილაკზე ან ნაწილაკთა სისტემაზე არ მოქმედებს ბმები, რომლებიც ზღუდავს მოძრაობას. ახლა ვნახავთ, როდესაც მოძრაობა შეზღუდულია ბმებით, ნიუტონის კანონი უნდა შეიცვალოს—მის მარჯვენა მხარეს დამატება ე. წ. რეაქციის ძალები. თუ, მაგალითად, ნაწილაკის მოძრაობა ისეთი ბმით არის შემოსაზღვრული, რომ იგი იძულებულია გარკვეულ მრუდზე იმოძრაოს, საჭიროა მოქმედ ძალას დამატოს ისეთი რეაქციის ძალა, როგორსაც მოითხოვს ბმა.

გავარკვიოთ ახლა, თუ რით არის გამოწვეული რეაქციის ძალები. ჩვენ ძალა განვსაზღვრეთ როგორც პოტენციალური ენერჯიის წარმოებული გადანაცვლების მიმართ. რა პოტენციალური ენერჯიაა, რომელიც იწვევს ამ რეაქციის ძალას? ფიზიკურად ყოველი ბმა გამოწვეულია რაიმე გარეშე სხეულთან ურთიერთქმედებით. ეს სხეულები ზღუდავს სხვა სხეულის მოძრაობას რაიმე პირობით. ცხადია, რომ ურთიერთქმედება უნდა იყოს შედეგი მოცემული ნაწილაკის ურთიერთქმედებისა იმ სხეულის ატომებსა და მოლეკულებთან, რომელიც ახორციელებს ბმას. ეს ურთიერთქმედება ძირითადად ელექტრომაგნიტური ხასიათისაა, მაგრამ იგი იმდენად რთულია, რომ სათანადო პოტენციალური ენერჯიის დაწერა და მისგან რეაქციის ძალის გამოთვლა პრაქტიკულად შეუძლებელია. განვიხილოთ, მაგალითად, შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი იძულებულია იმოძრაოს რაიმე გაუვალ ზედაპირზე. ამ შემთხვევაში მისი მოძრაობა არ შეიძლება იყოს ნებისმიერი, ვინაიდან ზედაპირის შიგნით შეჭრა შეუძლებელია. ეს შემთხვევა შეიძლება შევუთავსოთ მოძრაობის საერთო სქემას, თუ შემოვიღებთ ზედაპირის მხრივ მოქმედ გარეშე ძალას. შეიძლება, მაგალითად, ჩავთვალოთ, რომ ზედაპირთან დაკავშირებულია დამატებითი პოტენციალური ველი გარკვეული პოტენციალური ენერჯიით, რომელიც უსასრულოდ იზრდება ზედაპირთან მიახლოებისას. ამგვარად, ზედაპირის გაუვლადობა აიწერება ვიწრო არეში მოქმედი პოტენციალური ჯებრით. პრაქტიკულად უფრო ხელსაყრელია წარმოვიდგინოთ, რომ ეს ჯებირი უსასრულოდ თხელია და რომ მისი გადალახვა შეუძლებელია. მაშინ მოძრაობის განტოლების მარჯვენა მხარეში უნდა შემოვიტანოთ, უშუალოდ მოქმედი ძალის გარდა, დამატებითი რეაქციის ძალა ისე, რომ არ ვცადოთ მისი გამოთვლა პოტენციალური ენერჯიის საშუალებით. ვინაიდან უკანასკნელის გამოთვლა ზედაპირის ატომებთან ურთიერთქმედებიდან პრაქტიკულად ძალიან ძნელია.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი იძულებულია იმოძრაოს მოცემულ წირზე, რომელიც განისაზღვრება განტოლებით $\vec{r}(s) = 0$. ამ ბმის გავლენა შეიძლება შეეცვალოს \vec{R} რეაქციის ძალით, რომელიც უნდა დაემატოს მოქმედ ძალას იმისათვის, რომ აიძულოს ნაწილაკი იმოძრაოს მოცემულ წირზე. მაშინ მოძრაობის დინამიკური განტოლება უნდა დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (\text{VI}, 21)$$

მეორე მხრივ, ნაწილაკის აჩქარება ყოველთვის შეიძლება შემდეგი სახით დაიწეროს:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \quad (\text{VI}, 22)$$

(VI, 22) განტოლების გამრავლება ერთეულოვან $\vec{\tau}$ მხებ ვექტორზე გადავლევს:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (\vec{F} \vec{\tau}) = F \tau. \quad (\text{VI}, 23)$$

ეს განტოლება საზღვრავს მოძრაობის ხასიათს მოცემულ წირზე და ეს მოძრაობა განისაზღვრება ძალის მხოლოდ მხები მდგენელით.

ვინაიდან წირის განტოლება მოცემულია, ცნობილი იქნება ერთეულოვანი მხები ვექტორი და. მაშასადამე, ძალის $F \tau$ მხები მდგენელიც. მაშინ (VI, 23) განტოლება განსაზღვრავს \vec{r} -ს როგორც დროის ფუნქციას. რჩება მხოლოდ რეაქციის ძალის განსაზღვრის ამოცანა. იგი შეიძლება გამოვიყვანოთ შემდეგი განტოლებიდან:

$$\vec{R} = m \ddot{\vec{r}} - \vec{F} = m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \right) - \vec{F}. \quad (\text{VI}, 24)$$

მაშასადამე, რეაქციის ძალა განისაზღვრება გარეშე ძალით, წირით $\vec{r}(s)$, მისი დამახასიათებელი ვექტორებით $\vec{\tau}$ და \vec{n} და სიჩქარით.

განვიხილოთ ახლა ნაწილაკის მოძრაობა ზედაპირზე, რომლის განტოლებაა $f(\vec{r}) = 0$. ისევე, როგორც წირზე მოძრაობის შემთხვევაში, აქაც საჭიროა უმუშაოდ მოქმედ ძალას დაემატოს \vec{R} რეაქციის ძალა ისე, რომ მოძრაობის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}.$$

რადგან ნაწილაკს არ აქვს უნარი მოშორდეს ზედაპირს, რეაქციის ძალა მიმართული უნდა იყოს ზედაპირისადმი ნორმალის გასწვრივ

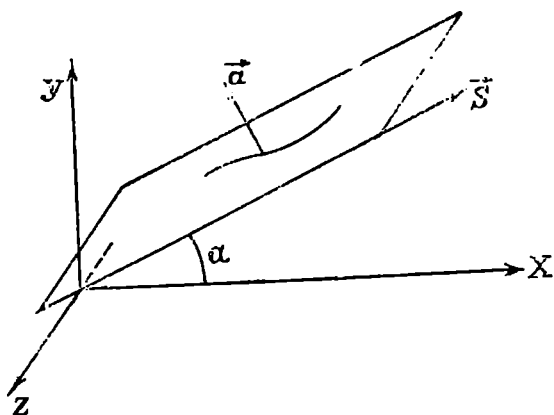
(დაშვებულია, რომ ხახუნს არ აქვს ადგილი). თუ ზედაპირის განტოლება არის $f(\vec{r}) = 0$, ზედაპირისადმი ნორმალური მოცემული იქნება $\frac{\partial f}{\partial r}$ გრადიენტი. მაშასადამე, რეაქციის ძალა ამ გრადიენტის პროპორციული უნდა იყოს: $\vec{R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial r}$, სადაც λ პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელიც უნდა განისაზღვროს მოძრაობისა და ზედაპირის განტოლებებიდან. ჩასაკვირველია, შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი სახის მოძრაობის განტოლება:

$$m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \right) = \vec{F} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r}. \quad (\text{VI, 25})$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ ერთეულოვან მხებ $\vec{\tau}$ ვექტორზე, მივიღებთ:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F \tau, \quad (\text{VI, 26})$$

ვინაიდან $\frac{\partial f}{\partial r}$ გრადიენტი $\vec{\tau}$ ვექტორის მართობია. აქედან შეიძლება განისაზღვროს სიჩქარის სიდიდე, ხოლო (VI, 26) განტოლებიდან λ კოეფიციენტი, რადგან ყველა დანარჩენი სიდიდე ცნობილია.



ნახ. 72

როგორც მაგალითი, განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა დახრილ სიბრტყეზე. რადგან ერთადერთი მოქმედი ძალა არის $m\vec{g}$ სიმძიმის ძალა, მოძრაობის განტოლება იქნება:

$$m \ddot{r} = m \bar{g} + \bar{R}. \quad (\text{VI}, 27)$$

თუ საწყის მომენტში ნაწილაკი უძრავი იყო, შემდგომი მოძრაობა იწარმოებს ვერტიკალურ სიბრტყეზე და ამიტომ კოორდინატთა ერთ-ერთ ღერძად ავირჩიოთ სიბრტყეზე მდებარე OS ღერძი (ნახ. 72). იგი OX ღერძთან ადგენს α კუთხეს (ნახ. 72), მაშინ სიბრტყის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$f(\bar{r}) = \bar{a} \bar{r} = 0.$$

აქ \bar{a} არის ერთეულოვანი ვექტორი, მიმართული სიბრტყისაღმის ნორმალის გასწვრივ. აქედან გრადიენტისათვის მივიღებთ:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = \bar{a}$$

რეაქციის ძალის ზოგადი ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\bar{R} = \lambda \bar{a}, \quad (\text{VI}, 28)$$

სადაც λ ნებისმიერი კოეფიციენტი, რომელიც უნდა განისაზღვროს მოძრაობის და სიბრტყის განტოლებებიდან. გავამრავლოთ (VI, 23) განტოლება \bar{a} ვექტორზე და მივიღოთ მხედველობაში, რომ $\bar{a} \bar{a} = 1$ და, რომ აჩქარება მდებარეობს \bar{a} ვექტორის მართობ სიბრტყეში,

$$\lambda = -m g_n,$$

სადაც g_n არის \bar{g} -ს ნორმალური მდგენელი.

ჩვენ ვხედავთ, რომ რეაქციის ძალა ტოლია და მიმართულებით საწინააღმდეგოა სიმძიმის ძალის ნორმალური მდგენელისა. მოძრაობის განტოლებისათვის გვექნება:

$$m \ddot{r} = m \bar{g} - m g_n \bar{a}.$$

თუ ამ განტოლებას დავაგეგმილებთ OS ღერძზე, მივიღებთ მოძრაობის განტოლებას სიბრტყეზე:

$$m \ddot{s} = -m g \sin \alpha.$$

§ 34. უმნიშვნელო მოძრაობის კანონების უმსახვა

არსებობს მოძრაობის კანონების ჩამოყალიბების სხვადასხვა გზა. რომელი გზაც უნდა ავირჩიოთ, ჩვენ ყოველთვის საქმე გვექნება, ერთი მხრივ, სხვადასხვა მექანიკური სიდიდის განსაზღვრებთან, ხოლო, მეორე მხრივ, ცდებით დადგენილ დამოკიდებულებებთან (კანონებთან). განსაზღვრასა და კანონს შორის არსებული განსხვავების გარჩევა აუცილებლად საჭიროა, მიუხედავად იმისა, რომ ჩვენ ნაწილობრივ

თავისუფალი ვართ მათ არჩევაში. ხშირია შემთხვევა, როდესაც ახალი ფიზიკური სიდიდე განისაზღვრება კანონის დადგენასთან ერთად, მაგრამ ამ შემთხვევაშიც საჭიროა კარგად გავერკვეთ იმაში, თუ საბოლოოდ ჩამოყალიბებული დამოკიდებულების რომელი ნაწილი წარმოადგენს განსაზღვრას და რომელი—კანონს.

მაგალითისათვის განვიხილოთ მოძრაობის რაოდენობის მულტიპლიკაციის კანონი; ამ კანონში შემავალბ ცნება ნაწილაკის სიჩქარისა უკვე ცნობილია ჩვენთვის. იგი განისაზღვრება როგორც რადიუს-ვექტორის წარმოებული დროის მიმართ. ურთიერთქმედ ნაწილაკთა მოძრაობის განხილვის შედეგად იმ დასკვნამდე მივიღვართ, რომ ნაწილაკთა აჩქარებები ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული (ცდის შედეგი). შემდგომი დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ აჩქარებათა შეფარდება მულტიპლიკაციის სიდიდეა, სრულიად დამოუკიდებელი დროისაგან, ურთიერთქმედების ხასიათისა და გარეშე პირობებისაგან (ცდის შედეგი); ამ შედეგზე დამყარებით ჩვენ შემოვიტანეთ მასის ცნება, სახელდობრ, ნაწილაკთა მასები განვსაზღვრეთ როგორც აჩქარებების უკუპროპორციული სიდიდეები (განსაზღვრა).

განვიხილოთ მეორე მაგალითი—ენერგიის მულტიპლიკაციის კანონი. კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება როგორც ნაწილაკის მასისა და სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევარი. ცდები გვიჩვენებს, რომ თუმცა ურთიერთქმედ ნაწილაკთა კინეტიკური ენერგიების ჯამი არ არის მულტიპლიკაციის, მაგრამ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს ნაწილაკთა შორის მანძილების ისეთი ფუნქცია, რომ მისი და კინეტიკური ენერგიების ჯამი მულტიპლიკაციის სიდიდე იყოს (კანონი). მანძილის ამ ფუნქციას ეწოდება პოტენციალური ენერგია (განსაზღვრა).

განვიხილოთ ამ თვალსაზრისით მოძრაობის კანონები, კერძოდ, ნიუტონის მეორე კანონი. კინემატიკური განხილვიდან ვიცით, თუ რა არის აჩქარება. მოძრაობის რაოდენობის კანონის განხილვისას შემოვიღეთ მასის ცნება. საჭიროა ახლა გავარჩიოთ ძალის ცნება. თუ ჩვენ, როგორც ეს ჩვეულებრივ ხდება, ძალას განვსაზღვრავთ როგორც მასის ნამრავლს აჩქარებაზე, მაშინ ეს დამოკიდებულება, გამოსახული ფორმულით

$$\vec{F} = m \vec{a}, \quad (\text{VI}, 29)$$

იქნება ძალის განსაზღვრა და არა კანონი. იმისათვის, რომ ეს ფორმულა გამოხატავდეს კანონს (ნიუტონის მეორე კანონს), საჭიროა მივცეთ ძალას მასისა და აჩქარებისაგან დამოუკიდებელი განსაზღვრა. ჩვენ სწორედ ასე მოვიქვით. სახელდობრ, განვსაზღვრეთ ძალა, როგორც პოტენციალური ენერგიის წარმოებული კოორდინატის მიმართ,

აღებული უარყოფითი ნიშნით, ე. ი. უფრო მარტავად, როგორც პოტენციალური ენერჯიის შემცირება მანძილის ერთეულით გადანაცვლების დროს. მაშასადამე, გვაქვს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად განსაზღვრული სადიდებები: აჩქარება, მასა და ძალა. ამის შემდეგ ან უშუალოდ ცდის საშუალებით, ან, როგორც ჩვენ მოვიქცებით, სხვა კანონებზე დამყარებით გამოიყვანეს ნაუტონის მეორე კანონი.

შეიძლება, რასაკვირველია, მოვიქცეთ სფვანაირადაც. ძალა უნდა განვსაზღვროთ როგორც მასის ნამრავლი აჩქარებაზე, მაგრამ მაშინ (VI, 29) ფორმულა იქნება ძალის განმსაზღვრელი და არა კანონი, და მას არ შეიძლება ეუწოდოთ მოძრაობის კანონი. ამ შემთხვევაში ენერჯიის მუდმივობის კანონის და ფარდობითობის პრინციპის საშუალებით გამოიყვანება კავშირი ძალასა და პოტენციალურ ენერჯიას შორის, სწორედ ეს დამოკიდებულება იქნება მოძრაობის კანონი. მაგრამ, ცხადია, რომ რომელი გზაც უნდა ავირჩიოთ, საბოლოოდ საჭიროა დამყარდეს კავშირი მოძრაობასა და ურთიერთქმედებას შორის. მოძრაობის დამახასიათებელი ელემენტებია: სიჩქარე, აჩქარება, მიაქრობის რაოდენობა და ა. შ., ხოლო ურთიერთქმედება დამოკიდებულია ნაწილაკთა კონფიგურაციაზე და ხასიათდება პოტენციალური ენერჯიით. საკითხი ისმის ძალის ცნების შესახებ. რისი დამახასიათებელია ძალა — მოძრაობისა თუ ურთიერთქმედებისა?

თუ ძალა განვსაზღვრეთ როგორც მასისა და აჩქარების ნამრავლი, ამოკა, რომ იგი არის მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდე და მაშინ მოძრაობის კანონი უნდა გამოხატავდეს მის კავშირს ურთიერთქმედებასთან, ე. ი. პოტენციალურ ენერჯიასთან

$$\underbrace{F_x = ma_x}_{\text{განსაზღვრა}} = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial x}}_{\text{კანონი}}$$

მეორე მხრივ, თუ ძალას მივიღებთ (განსაზღვრის მიხედვით) ურთიერთქმედების დამახასიათებელ ელემენტად, ე. ი. იგი განიმარტა როგორც პოტენციალური ენერჯიის წარმოებული კოორდინატით, მოძრაობის კანონმა უნდა დააკავშიროს იგი მოძრაობის ელემენტთან, ე. ი. აჩქარებასთან

$$\underbrace{ma_x = F_x}_{\text{კანონი}} = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial x}}_{\text{განსაზღვრა}}$$

ასეთივე მდგომარეობაა ნიუტონის მესამე კანონის შემთხვევაში; თუ ძალა განესაზღვრეთ როგორც პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი გრადიენტი, ქმედებისა და უკუქმედების ძალების ტოლობა უშუალოდ მიიღება იმ პირობიდან, რომ პოტენციალური ენერჯია მხოლოდ მანძილის ფუნქციაა

$$\vec{F}_1 = - \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_1} = \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2} = - \vec{F}_2.$$

ამ შემთხვევაში არ არის საჭირო ამ კანონის გამოყვანა იმპულსის მუდმივობის კანონიდან, თუმცა კავშირი მათ შორის მყარდება ნიუტონის მეორე კანონის საშუალებით. მეორე მხრივ, ძალა შეიძლება განისაზღვროს როგორც მასის ნამრაველი აჩქარებაზე და მაშინ ქმედებისა და უკუქმედების ძალთა ტოლობის კანონი იქნება იგივე იმპულსის კანონი, მხოლოდ გამოხატული სხვა ცნებებით.

§ 35. ვარსკლავური და ინვარტანტული სიდიდეები. მძვინკის კანონების ინვარტანტულობა გალილეის გარდაქმნების მიმართ

მესამე თავში ჩვენ უკვე შევეხეთ საკითხს იმის შესახებ, თუ როგორ იცვლება მექანიკური სიდიდეები ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, სიგრძისა და დროის აბსოლუტურობაზე დამყარებით გამოვარკვეით, რომ ზემოაღნიშნული გადასვლა ხდება შემდეგი ფორმულის თანახმად:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t, \quad (VI, 30)$$

$$t' = t,$$

სადაც \vec{r}' არის რადიუს-ვექტორი და t' -- დრო, S' ინერციულ სისტემაში, ხოლო \vec{r} და t -- იგივე სიდიდეები S სისტემაში. \vec{V} არის სიჩქარე, რომლითაც S' სისტემა მოძრაობს S სისტემის მიმართ. ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს სიჩქარეებს შუკრების კანონი

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad (VI, 30')$$

რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორ გარდაიქმნება ნაწილაკის სიჩქარე გალილეის გარდაქმნების დროს. ჩვენ ვხედავთ, რომ ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი და სიჩქარე იცვლება, დრო კი უცვლელი რჩება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მიუხედავად რადიუს-ვექტორის, ე. ი. კოორდინატების სხვადასხვაობისა სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში, ნაწილაკთა შორის მანძილი ერთი და იგივე იქნება. მართლაც, ვთქვათ,

ნაწილაკების რადიუს-ვექტორები S სისტემაში არის \vec{r}_1 და \vec{r}_2 , ხოლო S' სისტემაში— \vec{r}'_1 და \vec{r}'_2 . მაშინ (VI, 30) ფორმულების თანახმად

$$\begin{aligned}\vec{r}'_1 &= \vec{r}_1 - \vec{V}t, \\ \vec{r}'_2 &= \vec{r}_2 - \vec{V}t,\end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (\text{VI, 31})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთი წერტილიდან მეორე წერტილამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი არ იცვლება გალილეის გარდაქმნების დროს. ცხადია, რომ არ შეიცვლება მისი სკალარული მნიშვნელობაც, ე. ი. წერტილებს შორის მანძილი. ჩვენთვის უკვე ცნობილია აგრეთვე, რომ აჩქარებაც არ იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. გამოვარკვით ახლა იმპულსის (მოძრაობის რაოდენობის) და კინეტიკური ენერჯიის გარდაქმნის ხასიათი. თუ ნაწილაკის იმპულსი S სისტემის მიმართ არის $m\vec{v}$, ახალი სისტემის მიმართ იგი შემდეგი ფორმულით იქნება გამოსახული:

$$m\vec{v}' = m\vec{v} - m\vec{V}, \quad (\text{VI, 32})$$

ასევე მივიღებთ კინეტიკური ენერჯიის გარდაქმნის ფორმულას

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - m\vec{v} \cdot \vec{V} + \frac{mV^2}{2}. \quad (\text{VI, 33})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ როგორც იმპულსი, ისე კინეტიკური ენერჯია იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ცხადია, რომ პოტენციალური ენერჯია არ უნდა იცვლებოდეს გალილეის გარდაქმნების დროს (ვინაიდან იგი არის წერტილთა შორის მანძილის ფუნქცია და მანძილი კი, როგორც ვიცით, არ იცვლება აღნიშნული გარდაქმნის დროს)

$$U'(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (\text{VI, 34})$$

ეს შედეგი, თავის მხრივ, გვიჩვენებს, რომ ძალაც არ შეიცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს.

როგორც ვხედავთ, მექანიკური სიდიდეები სხვადასხვანაირად იქცევიან გალილეის გარდაქმნების მიმართ. ზოგი მათგანი იცვლება, ზოგი კი არა. სიდიდეებს, რომლებიც არ იცვლება, ვუწოდოთ ინვარიანტული სიდიდეები. ზოგჯერ მათ აბსოლუტურ სიდიდეებაც უწოდებენ, სიდიდეებს კი, რომლებსაც სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვს სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში,— ვარიანტული ან ფარი-

დობითი სიდიდეები. ინვარიანტული სიდიდეებია დრო, მანძილი, აჩქარება, პოტენციალური ენერგია და ძალა; ვარიანტული სიდიდეებია რადიუს-ვექტორი, სიჩქარე, იმპულსი და კინეტიკური ენერგია.

მესამე თავში ჩამოვყალიბებთ კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი, რომლის თანახმად მექანიკური მოვლენები ერთნაირად მიმდინარეობს სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში და რომ ამ მოვლენების კანონები არ უნდა იცვლებოდეს (ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ვუჩვენოთ ახლა, რომ ჩვენ მიერ ჩამოყალიბებული მექანიკის კანონები (იმპულსის მუდმივობის, ენერგიის მუდმივობის, ნიუტონის მეორე და მესამე კანონები) ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ. განვიხილოთ ჯერ იმპულსის მუდმივობის კანონი. ვთქვათ, S სისტემაში მას აქვს შემდეგი სახე:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const}$$

(განიხილება ორი ნაწილაკის შემთხვევა).

S' ინერციულ სისტემაზე გადასვლისათვის გამოვიყენოთ (VI, 30') ფორმულა, მივიღებთ

$$m_1 (\vec{v}_1' + \vec{V}) + m_2 (\vec{v}_2' + \vec{V}) = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' + (m_1 + m_2) \vec{V} = \text{const.}$$

ვინაიდან როგორც $m_1 + m_2$, ისე \vec{V} მუდმივი სიდიდეებია, დავაკენით, რომ

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = \text{const.} \quad (\text{VI, 35})$$

ვხედავთ, რომ იმპულსის კანონს ისეთივე სახე აქვს ახალ სისტემაში, როგორც ძველში, ე. ი. იგი ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ. ანალოგიურად განვიხილოთ ენერგიის მუდმივობის კანონი. S სისტემაში მას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \text{const.},$$

(VI, 32) და (VI, 33) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + (m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2') \vec{V} - \frac{m_1 V^2}{2} - \frac{m_2 V^2}{2} + \\ + U'(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') = \text{const.} \end{aligned} \quad (\text{VI, 36})$$

რადგანაც იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად $m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$ მუდმივი სიდიდეა, ეს ფორმულა შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + U'(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') = \text{const.}, \quad (\text{VI, 36}')$$

რაც გვიჩვენებს, რომ ენერჯის მუდმივობის კანონიც ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ. მივაქციოთ ყურადღება ერთ გარემოებას. ვთქვათ. დადგენილი გვაქვს ენერჯის მუდმივობის კანონი, იმპულსის მუდმივობის კანონი კი ცნობილი არ არის. თუ ჩვენ მოვიტხოვთ, რომ ენერჯის მუდმივობის კანონი ინვარიანტული იყოს გალილეის გარდაქმნების მიმართ, ე. ი. მოვიტხოვთ, რომ მართებულ იყოს (VI, 36') ფორმულა, მაშინ (VI, 36) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ $m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$ სიდიდეს მუდმივი უნდა იყოს. მაშასადამე, ენერჯის მუდმივობის კანონიდან და ფარდობითობის პრინციპიდან შეგვიძლია თეორიულად გამოვიყვანოთ იმპულსის მუდმივობის კანონი.

განვიხილოთ ახლა მექანიკის ძირითადი განტოლება (ნიუტონის მეორე კანონი)

$$m \vec{a} = \vec{F}'.$$

ვინაიდან არც აჩქარება და არც ძალა არ იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, S' სისტემაში ამ განტოლებას ისეთივე სახე ექნება როგორც S სისტემაში

$$m \vec{a}' = \vec{F}',$$

ე. ი. ნიუტონის მეორე კანონი ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ. ცხადია, რომ ასევე ინვარიანტული იქნება ნიუტონის მესამე კანონი; თუ S სისტემაში

$$\vec{F}'_2 = -\vec{F}'_1,$$

S' სისტემაში გვექნება

$$\vec{F}'_2' = -\vec{F}'_1'.$$

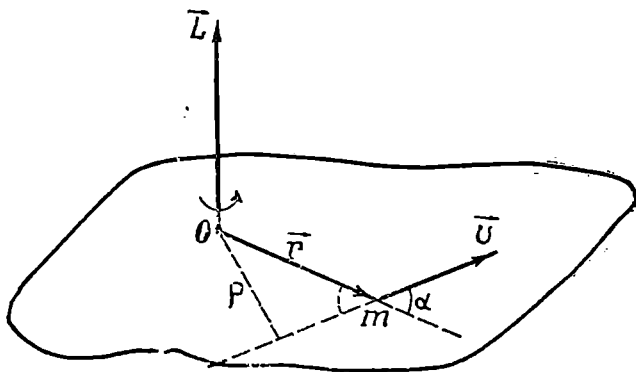
მიღებული შედეგები ნათლად გვიჩვენებენ, რომ მექანიკის კანონები არ იცვლის სახეს ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, მიუხედავად იმისა, რომ მათში შემავალ სიდიდეებს შეიძლება სხვადასხვა მნიშვნელობა ჰქონდეს სხვადასხვა სისტემაში. ეს შედეგი საესებით ეთანხმება გალილეისა და ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპს. ყოველივე ეს მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორე, აგრეთვე ინერციულ სისტემაზე გადავდივართ. სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ ინერციული სისტემიდან არაინერციულ სისტემაზე გადავალთ. ამ შემთხვევაში მექანიკის კანონები ინვარიანტული აღარ იქნება. საკითხს იმის შესახებ, თუ როგორ იცვლება მექანიკის კანონები არაინერციულ სისტემაზე გადასვლისას, ვაპარჩევთ მათე თავში.

თ ა ვ ი მ ე შ ვ ი ლ ა

ი მ პ უ ლ ს ი ს მ ო მ ე ნ ტ ი ს მ უ ღ მ ი ე ვ ბ ი ს კ ა ნ ო ნ ი

§ 26. ი მ პ უ ლ ს ი ს მ ო მ ე ნ ტ ი

გარდა იმპულსისა და ენერჯიის მუდმივობის კანონებისა, ფიზიკაში დიდ როლს ასრულებს ე. წ. იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი. ჯერ განვმარტოთ რა სიდიდეს ეწოდება იმპულსის მომენტი. განვიხილოცა ნივთიერი წერტილი, რომლის მასა არის m და სიჩქარე \vec{v} . ვთქვათ, აღებულ მომენტში მისი მდებარეობა რაიმე ათვლის სისტემის მიმართ განისაზღვრება \vec{r} რადიუს-ვექტორით (ნახ. 73). ამ წერტილის იმპულ-



ნახ. 73

სის მომენტი O სათავეს მიმართ განისაზღვრება როგორც რადიუს-ვექტორის ვექტორული ნამრავლი იმპულსზე. თუ იმპულსის მომენტს \vec{L} -ით აღვნიშნავთ, გვექნება

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot m\vec{v}] = m[\vec{r} \cdot \vec{v}]. \quad (\text{VII}, 1)$$

როგორც ეს ფორმულა გვიჩვენებს, იმპულსის მომენტი წარმოადგენს

ვექტორს, რომელიც \vec{r} და \vec{v} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობია და მოგებულია ისე, რომ \vec{r} , $m\vec{v}$ და \vec{L} ვექტორები შეადგენენ მარჯვენა სისტემას. მეორენაირად \vec{L} ვექტორის მიმართულება ასე შეიძლება განისაზღვროს: \vec{L} ვექტორი ისე უნდა იყოს მიმართული, რომ, თუ მის გასწვრივ გავიწვრივებთ და \vec{r} და \vec{v} ვექტორებზე გამავალ სიბრტყეს დავხედავთ, წერტილის მოძრაობა საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით უნდა წარმოებდეს. იმპულსის მომენტის სიდიდე შემდეგი სკალარული ფორმულით გამოისახება:

$$L = mrv \sin \alpha = mv \rho, \quad (\text{VII}, 2)$$

სადაც α არის კუთხე \vec{r} და \vec{v} ვექტორებს შორის, ხოლო ρ —სიგრძე მართობისა, რომელიც O წერტილიდან სიჩქარის მიმართულებაზეა დაშვებული. იმპულსის მომენტის განსაზღვრა გვიჩვენებს, რომ იგი დამოკიდებულია არა მარტო ნაწილაკის იმპულსზე, არამედ იმ წერტილის (სათავის) არჩევაზეც, რომლის მიმართაც იგი განისაზღვრება.

იმპულსის მომენტის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე ეწოდება აგრეთვე იმპულსის მომენტები სათანადო ღერძების მიმართ; მაგალითად, იმპულსის მომენტი OX ღერძის მიმართ იქნება:

$$L_x = m(yv_z - zv_y), \quad (\text{VII}, 3)$$

ანალოგიურად გამოისახება L_y და L_z .

რამდენიმე ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის იმპულსის მომენტი განისაზღვრება როგორც ჯამი ცალკეული ნაწილაკების იმპულსების მომენტებისა

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i \cdot \vec{v}_i]. \quad (\text{VII}, 4)$$

§ 37. ძალის მომენტი

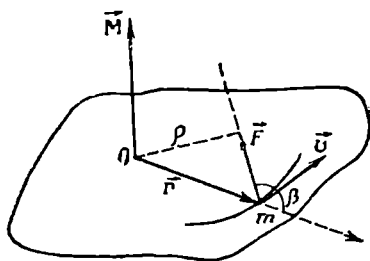
იმპულსის მომენტის ანალოგიურად განისაზღვრება აგრეთვე ძალის მომენტი. ვთქვათ, რაიმე ნაწილაკზე, რომლის რადიუს-ვექტორი O სათავის მიმართ არის \vec{r} , მოქმედებს \vec{F} ძალა (ნახ. 74). მაშინ ძალის მომენტი O სათავის მიმართ განისაზღვრება როგორც \vec{r} რადიუს-ვექტორის ვექტორული ნამრავლი \vec{F} ძალაზე. თუ ძალის მომენტს \vec{M} —ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (\text{VII}, 5)$$

სკალარულად ეს ფორმულა ასე დაიწერება:

$$M = r F \sin \beta = \rho F, \quad (\text{VII}, 6)$$

სადაც ρ არის კუთხე რადიუს-ვექტორსა და ძალას შორის, ხოლო ρ —სიგრძე მართობისა, რომელიც O სათავიდან ძალის მოქმედების მიმართულებაზე დაშვებული. ρ სიდიდეს ძალის მხარი ეწოდება. ისევე როგორც იმპულსის მომენტის შემთხვევაში, ძალის მომენტის გეგმილები ღერძებზე— M_x, M_y, M_z წარმოადგენენ ძალის მომენტებს სათანადო ღერძების მიმართ. ამ შემთხვევაშიც ძალის მომენტი, გარდა ძალისა, დამოკიდებულია იმ წერტილის შერჩევაზე, რომლის მიმართაც გამოითვლება მომენტი. ძალის მომენტი მართობია ძალასა და რადიუს-ვექტორზე გამავალი სიბრტყისა და, ანალოგიურად იმპულსის მომენტისა, მიმართულია მარჯვენა ბურღის წესის მიხედვით.



ნახ. 74

მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის შემთხვევაში მოქმედი ძალების საერთო მომენტი მიიღება ცალკეულ ნაწილაკებზე მოქმედი ძალების მომენტების შეკრებით

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \sum_{i=1}^n [\bar{r}_i \cdot \bar{F}_i], \quad (\text{VII}, 7)$$

სადაც \bar{r}_i და \bar{F}_i არის i -ური ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი და მასზე მოქმედი ძალა.

§ 38. მომენტების განტოლება

დავამტკიცოთ, რომ იმპულსის მომენტსა და ძალის მომენტს შორის გარკვეული კავშირი არსებობს. ასეთი კავშირის არსებობა იქიდანაც ჩანს, რომ მოძრაობის განტოლების თანახმად არსებობს კავშირი იმპულსსა და ძალას შორის. მართლაც, ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად იმპულსის წარმოებული დროის მიმართ ძალის ტოლია:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}. \quad (\text{VII}, 8)$$

გავამრავლოთ ვექტორულად ამ ტოლობის ორივე მხარე ნაწილაკის რადიუს-ვექტორზე, მივიღებთ

$$\left[\vec{r} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \right] = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (\text{VII},9)$$

გარდავქნათ მარცხენა მხარეში მდგომი გამოსახულება. ამისათვის განვიხილოთ იმპულსის მომენტის წარმოებულის

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m\vec{v}].$$

გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m\vec{v}] = [\vec{v} \cdot m\vec{v}] + \left[\vec{r} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \right],$$

ვინაიდან პირველი წევრი ნულის ტოლია (იგი წარმოადგენს პარალელური ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს), ამიტომ ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m\vec{v}] = \left[\vec{r} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \right]. \quad (\text{VII},10)$$

როგორც ვხედავთ, (VII,10) ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს იმპულსის მომენტის წარმოებულს და ამიტომ ეს ტოლობა შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m\vec{v}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (\text{VII},11)$$

მარცხენა მხარე არის იმპულსის მომენტის წარმოებულის, ხოლო მარჯვენა—ძალის მომენტი. მაშასადამე, ვღებულობთ ასეთ შედეგს: ნაწილაკის იმპულსის მომენტის წარმოებულის დროით ძალის მომენტის ტოლია

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (\text{VII},12)$$

ვხედავთ, რომ იმპულსის მომენტსა და ძალის მომენტს შორის ისეთივე კავშირია, როგორიც თვით იმპულსსა და ძალას შორის.

ცხადია, რომ ასეთივე შედეგს მივიღებთ მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის, ვინაიდან მთელი სისტემის იმპულსის მომენტი და ძალის მომენტი ცალკეული ნაწილაკების იმპულსებისა და ძალების მომენტების ჯამის ტოლია

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \bar{L}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\bar{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \bar{M}. \quad (\text{VII},13)$$

განვიხილოთ მიღებული შედეგი უფრო დაწვრილებით, რაც შესაძლებელს გახდის მივცეთ მას შემდეგი გამოყენებისათვის უფრო ხელსაყრელი სახე. სიმარტივისათვის გავარჩიოთ ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემა. (VII,13) ფორმულა გაშლილი სახით ასე დაიწერება:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = |\bar{r}_1 \cdot \bar{F}_1| + |\bar{r}_2 \cdot \bar{F}_2|. \quad (\text{VII},14)$$

სადაც \bar{F}_1 და \bar{F}_2 პირველ და მეორე ნაწილაკებზე მოქმედი ძალებია. თუ სისტემა იზოლირებული არ არის, მაშინ ყოველ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ორ ძალად შეიძლება გავყოთ; მაგალითად, პირველ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ორი ძალისაგან იქნება შემდგარი. პირველი იქნება ძალა, რომლითაც მასზე მოქმედებს ამავე სისტემის მეორე წევრი; აღნიშნოთ იგი \bar{F}'_{12} -ით. მეორე კი იქნება ძალა, რომლითაც ამ ნაწილაკზე მოქმედებს გარეშე სხეულები; აღნიშნოთ ეს ძალა \bar{F}'_{1e} -თი დავუწოდოთ მას გარეშე ძალა. მაშასადამე, გვექნება

$$\bar{F}_1 = \bar{F}'_{12} + \bar{F}'_{1e}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ მეორე ნაწილაკისათვის

$$\bar{F}_2 = \bar{F}'_{21} + \bar{F}'_{2e},$$

სადაც \bar{F}'_{21} არის მეორე ნაწილაკზე მოქმედი შიდა ძალა, გამოწვეული პირველი ნაწილაკით, ხოლო \bar{F}'_{2e} გარეშე ძალა. (VIII,14) ფორმულაში ჩასმა მოგვცემს

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = [\bar{r}_1 \cdot \bar{F}'_{12}] + [\bar{r}_2 \cdot \bar{F}'_{21}] + [\bar{r}_1 \cdot \bar{F}'_{1e}] + [\bar{r}_2 \cdot \bar{F}'_{2e}]. \quad (\text{VII},15)$$

მაგრამ ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად

$$\bar{F}'_{21} = -\bar{F}'_{12}$$

და ორივე ეს ძალა ნაწილაკების შემაერთებული ხაზის გასწვრივ არის მიმართული, ამიტომ (VIII,15) ფორმულა შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = |(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot \bar{F}'_{12}| + [\bar{r}_1 \cdot \bar{F}'_{1e}] + [\bar{r}_2 \cdot \bar{F}'_{2e}].$$

ვინაიდან $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$ არის მეორე წევრიდან პირველი წევრისაკენ

გავლებული \vec{r} რადიუს-ვექტორი და \vec{F}_{12} ძალა მის გასწვრივ არის მიმართული, მათი ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლი იქნება (ნახ. 75)

$$[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{F}_{12}] = 0$$

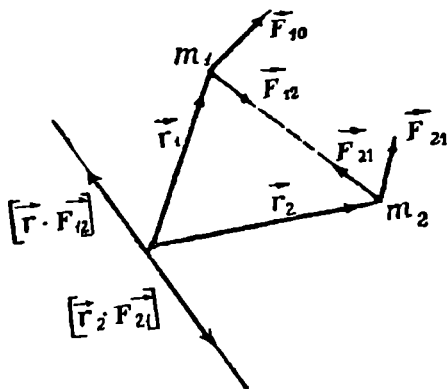
და ამიტომ წინა ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{1e}] + [\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{2e}]. \quad (\text{VII}, 16)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ტოლობის მარჯვენა მხარეში დარჩა მხოლოდ გარეშე ძალების მომენტები, ამიტომაც შეიძლება დაეწეროს

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e, \quad (\text{VII}, 17)$$

სადაც \vec{M}_e არის სისტემაზე მოქმედი გარეშე ძალების მომენტი. ამგვარად, სისტემის იმპულსის მომენტის წარმოებული დროით



ნახ. 75

გარეშე ძალების მომენტების ჯამის ტოლია. შიდა ძალები სრულიად გამოირიცხა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი არაეფექტურად გავლენას არ ახდენენ იმპულსის მომენტის ცვლილებაზე. სრულიად ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს (VIII, 17) კანონის მართებულება მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის. ნაწილაკთა ყოველი წყვილისათვის მათი ურთიერთქმედების ძალთა მომენტების ჯამი ნულის ტოლი იქნება და დარჩება მხოლოდ გარეშე ძალების მომენტები.

§ 39. იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი.
 უპრობიტი სიჩქარე

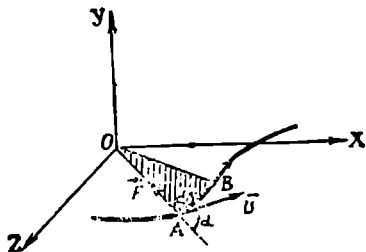
განვიხილოთ ახლა იმპულსის მომენტის ძალის მომენტთან დამაკავშირებელი ფორმულის შედეგები. ვთქვათ, განსახილველი სისტემა იზოლირებულია, მაშინ მასზე მოქმედი ძალები ნულის ტოლი იქნება და მათი მომენტების ჯამიც ნულს გაუტოლდება. (VII,17) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

ან

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (\text{VIII}, 18)$$

როგორც ვხედავთ, იზოლირებულ სისტემის იმპულსის მომენტი მუდმივი სიდიდეა. ამ კანონს ეწოდება იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი; იგი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფიზიკაში. ვინაიდან იმპულსის მომენტის ცვლილება შეიძლება გამოიწვიოს მხოლოდ გარეშე ძალებმა, შიდა ძალების მოქმედება ვერაფერს გავლენას ვერ მოახდენს იმპულსის მომენტზე. შიდა ძალებმა შეიძლება შეცვალოს ცალკეული ნაწილაკების სიჩქარეები, მათი მანძილები ცენტრამდე, რომლის მიმართაც გამოითვლება იმპულსის მომენტი, მაგრამ ეს ცვლილება ისე ხდება, რომ არ იცვლება მთელი სისტემის იმპულსის მომენტი.



ნახ. 76

ადვილი მისახედრია, რომ იმპულსის მომენტი შეიძლება მუდმივი იყოს არაიზოლირებული სისტემის შემთხვევაშიც. ვთქვათ, არაიზოლირებული სისტემის ნაწილაკებზე მოქმედებს გარეშე ძალები, მაგრამ ეს ძალები ისეთი ხასიათისაა, რომ მათი მომენტების ჯამი ნულის ტოლია. ეს იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია ისეთი შემთხვევები, როდესაც სისტემა არაიზოლირებულია, მაგრამ გარეშე ძალების მომენტი ნულის ტოლია. (VII,17) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაშიც იმპულსის მომენტი მუდმივი სიდიდე იქნება. აღნიშნული შემთხვევის განსაკუთრებით მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს მოძრაობა ნაწილაკისა, რომელზე მოქმედი ძალაც ერთი უძრავი წერტილისაკენ არის მიმართული (ნახ. 76). ვინაიდან ამ შე-

მთხვევაში \vec{F} ძალა მიმართულია რადიუს-ვექტორის გასწვრივ, მისი მომენტი ნულის ტოლია და იმპულსის მომენტი მუდმივი იქნება. თუ მოძრაობა XOZ სიბრტყეში წარმოებს, იმპულსის მომენტი მიმართული იქნება OY ღერძის გასწვრივ. ისე როგორც იმპულსის მუდმივობის კანონის შემთხვევაში, შეიძლება უგულებელვყოთ დიდი მასის მქონე იმპულსის მომენტი და დავეწროთ ეს კანონი მხოლოდ ერთი ნაწილაკისათვის. დავეშვათ, რომ ნაწილაკები M და m მასებით მოძრაობენ სათანადოდ \vec{V} და \vec{v} სიჩქარეებით. დავეშვათ აგრეთვე, რომ $M \gg m$. დავეწროთ იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი

$$M[\vec{R}\vec{V}] + m[\vec{r} \cdot \vec{v}] = \text{const.}$$

სადაც \vec{R} და \vec{r} სათანადო ნაწილაკების რადიუს-ვექტორებია. თუ ათვლის სისტემა c სისტემას წარმოადგენს, შეიძლება დაიწეროს შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$\begin{aligned} M\vec{R} + m\vec{r} &= 0 \\ M\vec{V} + m\vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

აქედან მივიღებთ:

$$M[\vec{R}\vec{V}] = -\frac{m}{M} m[\vec{r}\vec{v}].$$

გნებდეთ, რომ C სისტემაში დიდი მასის ნაწილაკის იმპულსის მომენტი $\frac{m}{M}$ -ჯერ ნაკლებია, ვიდრე m მასის ნაწილაკისა. ამიტომაც იგი და მისი ცვლილება შეიძლება უგულებელვყოთ (გარკვეულ მიახლოებაში) და დავეწროთ კანონი ისეთი სახით, ვითომ გვექონდეს არა ორი, არამედ ერთი ნაწილაკი m მასით:

$$m[\vec{r}\vec{v}] = \text{const.}$$

განხილულ შემთხვევაში იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი სხვა სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ. დავეწროთ იმპულსის მომენტი სკალარულად

$$L = mrv \sin \alpha = mrv. \quad (\text{VII}, 19)$$

გადავეწროთ ეს გამოსახულება შემდეგნაირად:

$$L = mr \frac{ds}{dt} \sin \alpha. \quad (\text{VII}, 20)$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ $r ds \cdot \sin \alpha$ გაორკეცებული ფართობია OAB სამკუთხედისა, რომელსაც შემოწერს \vec{r} რადიუს-ვექტორი dt დროის

განმავლობაში. ვინაიდან m მუდმივი სიდიდეა, იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{dS}{dt} = \text{const.} \quad (\text{VII}, 21)$$

$\frac{dS}{dt}$ სიდიდე წარმოადგენს რადიუს-ვექტორის მიერ დროის ერთეულში

შემოწერილ ფართობს. მას უწოდებენ ფართობით სიჩქარეს, ხოლო (VII, 21) ფორმულით გამოსახულ კანონს—ფართობითი სიჩქარის მუდმივობის კანონს. ცხადია, რომ ეს კანონი არის იმპულსის მუდმივობის კანონის კერძო შემთხვევა. ამ კანონის შინაარსი ასე უნდა გავიგოთ. ვინაიდან დროის ერთეულში შემოწერილი ფართობები ტოლი უნდა იყოს, ამიტომ, რაც უფრო შორს იქნება ნაწილაკი ძალის მოქმედების ცენტრიდან, მით უფრო ნელა უნდა მოძრაობდეს იგი. ცენტრთან მიახლოებისას სიჩქარე სათანადოდ უნდა მატულობდეს.

იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი ნათელ გამოხატულებას პოულობს იმ შემთხვევებში, როდესაც მბრუნავი სისტემის ნაწილაკები იცვლის მანძილებს ბრუნვის ღერძამდე. ნაწილაკების მიახლოება ღერძამდე იწვევს (VII, 4) ფორმულაში შემავალი r , სიდიდეების შემცირებას, და ვინაიდან იმპულსის მომენტი უცვლელი უნდა იყოს (იზოლირებული სისტემის შემთხვევაში), ეს გამოიწვევს ნაწილაკების სიჩქარეების გადიდებას, ე. ი. ბრუნვის აჩქარებას; ეს ნათლად ჩანს შემდეგი მარტივი ცდიდან. დამკვირვებელი თავსდება მბრუნავ სკამზე. გაშლილ ხელებში მას უჭირავს მძიმე ბირთვები. თუ ბრუნვის პროცესში იგი მიახლოებს ბირთვებს, ე. ი. შეამცირებს მათ მანძილებს ღერძამდე, ეს გამოიწვევს ბრუნვის სიჩქარის პროპორციულ ზრდას. ამითვე აიხსნება მრავალი სხვა მოვლენა (გადახტომის დროს შემობრუნების შესაძლებლობა, მოცეკვავის ბრუნვის აჩქარება ან შენელება ტანთან ხელების მიკერის ან გაშლის შემთხვევაში და სხვ.). ფიქრობენ, რომ დედამიწის თანდათანობითი გაცივების გამო იგი განუწყვეტლივ იკუმშება, რაც იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად უნდა იწვევდეს მისი ბრუნვის აჩქარებას, ე. ი. დღე-ღამის ხანგრძლივობის შემცირებას.

ღისიპაციური პროცესები ნერგილის მექანიკაში

**§ 40. ღისიპაციური (გააუნის) ქალაგი-
მოძრაობის განტოლებები**

წინა თავში განვიხილეთ მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი და ამ კანონისა და ფარდობითობის პრინციპის საშუალებით გამოვიყვანეთ მოძრაობის განტოლებები. იქვე აღნიშნული იყო, რომ ყოველივე ეს მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც განსახილველ სისტემაში არ ხდება რაიმე არამექანიკური პროცესები. რომლებიც იწვევს მექანიკური ენერგიის გარდაქმნას სხვა სახის ენერგიად. მაგრამ ბუნებაში ასეთი იდეალური შემთხვევა არასოდეს არ გვხვდება. ყოველი მექანიკური მოძრაობის დროს აუცილებელია ისეთი პროცესები (გარემოსთან ხახუნი, სხეულების დეფორმაცია და სხვ.), რომელთა შედეგად მოძრავე სხეულის სრული მექანიკური ენერგია კლებულობს.

განვიხილოთ, მაგალითად, საქანის რხევა წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად. რომ არ იყოს ჰაერის წინააღმდეგობა, ხახუნი დამაგრების ადგილას და ძაფის დეფორმაცია, საქანის სრული ენერგია — კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი — მუდმივი სიდიდე იქნებოდა და საქანი განაგრძობდა რხევას მუდმივი ამპლიტუდით. სინამდვილეში კი საქანი თანდათან ამცირებს რხევის ამპლიტუდას და მისი ენერგია კლებულობს სითბურ ენერგიად გარდაქმნის შედეგად. ასევე კარგავს მექანიკურ ენერგიას რაიმე ზედაპირზე მოძრავე სხეული. ატმოსფეროში მოძრავე ყუმბარა, მანქანის მოძრავე ნაწილები და სხვადასხვა. ბოლოს, მექანიკური ენერგია გარდაიქმნება სითბოდ ან, როგორც ამბობენ, განიცდის დისიპაციას. ისეთ პროცესებს, რომელთა დროს მექანიკური ენერგია გარდაიქმნება სითბოდ, დისიპაციური პროცესები ეწოდებათ.

ცხადია, რომ მექანიკური ენერჯის დისიპაციის პირობებში მოძრაობის პროცესი აღარ არის წმინდა მექანიკური ხასიათისა და ამიტომაც მისი განხილვა მექანიკური მოძრაობის კანონების საშუალებით შეუძლებელია. პროცესის სრული დახასიათებისათვის საჭიროა გამოვარკვეოთ, როგორი მექანიკური და სითბური პროცესები მიმდინარეობს გარემოსა და განსახილველ სხეულში; აქედან გამომდინარეობს, რომ სხეულის ურთიერთქმედება გარემოსთან იქნება დამოკიდებული არა მხოლოდ გარეშე სხეულების კონფიგურაციაზე. არამედ თვით სხეულის სიჩქარეზე და გარემოს შინაგან მდგომარეობაზე.

მიუხედავად ამისა, მექანიკაში მაინც იხილავენ მექანიკურ მოძრაობას, რომელიც წარმოებს ენერჯის დისიპაციის, ე. ი. ხახუნის პირობებში და ამისათვის აკეთებენ დაშვებებს დაკარგული მექანიკური ენერჯის შესახებ. უმეტეს შემთხვევაში თვლიან, რომ მექანიკური ენერჯის შემცირება, გამოწვეული ხახუნით, დამოკიდებულია მხოლოდ მოძრავე სხეულის სიჩქარეზე. ეს დაშვება საკმარისად კარგად დასტურდება ცდებით, რომლებიც ჩატარებული იყო სხვადასხვა გარემოში მოძრავე სხეულზე.

გამოვარკვეოთ ახლა როგორ შეიცვლება მოძრაობის განტოლებები, თუ მხედველობაში მივიღებთ დისიპაციურ პროცესებს. აღვნიშნოთ $\Phi(\vec{r})$ -ით მოძრავე სხეულის მექანიკური ენერჯის შემცირება დროის ერთეულში, გამოწვეული გარემოს ხახუნით. მაშინ შეიძლება დავწეროთ

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}, t) \right) = \Phi(\vec{r}),$$

სადაც $-\frac{dE}{dt}$ არის სხეულის სრული ენერჯის შემცირება დროის ერთეულში. ეს ფორმულა ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$d \left(\frac{mv^2}{2} \right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt = -\Phi(\vec{r}) dt. \quad (\text{VIII}, 1)$$

მისი შედარება (VI,7) ფორმულასთან გვიჩვენებს, რომ მათ შორის განსხვავება (VIII,1) ფორმულის მხოლოდ მარჯვენა მხარეში მდგომი წევრით გამოისახება. ცხადია, რომ ანალოგიურად დაიწერება იმავე პარაგრაფის (VI,7') ფორმულა, რომელიც ეთანადება \vec{v}_0 სიჩქარით მოძრავე ახალ ინერციულ სისტემას

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \bar{v}_0 d(m\bar{v}) + \frac{\partial U}{\partial r} d\bar{r} - \frac{\partial U}{\partial r} \bar{v}_0 dt + \frac{\partial U}{\partial t} dt =$$

$$= -\Phi(\bar{v} - \bar{v}_0) dt \quad (\text{VIII}, 2)$$

(VIII,2) განტოლების გამოკლება (VIII.1) განტოლებიდან მოგვცემს

$$\bar{v}_0 d(m\bar{v}) + \frac{\partial U}{\partial r} \bar{v}_0 dt = \{\Phi(\bar{v} - \bar{v}_0) - \Phi(\bar{v})\} dt. \quad (\text{VIII}, 3)$$

ვინაიდან \bar{v}_0 ნებისმიერია, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ იგი საკმარისად მცირეა და დავწეროთ

$$\Phi(\bar{v} - \bar{v}_0) - \Phi(\bar{v}) = -\frac{d\Phi}{d\bar{v}} \bar{v}_0,$$

რის შემდეგ (VIII,3) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\bar{v}_0 \left\{ d(m\bar{v}) + \frac{dU}{\partial r} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}} dt \right\} = 0. \quad (\text{VIII}, 4)$$

\bar{v}_0 ვექტორის ნებისმიერობის გამო. აქედან მივიღებთ შემდეგ მოძრაობის განტოლებას:

$$\frac{d}{dt} (m\bar{v}) = -\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}}. \quad (\text{VIII}, 5)$$

ასეთია მოძრაობის განტოლება დისიპაციური პროცესის არსებობის შემთხვევაში. ვხედავთ, რომ წმინდა მექანიკური მოძრაობის განტოლებისაგან იგი განსხვავდება მარჯვენა მხარეში მდგომი მეორე წევრით. აღნიშნოთ ეს წევრი \bar{F}_d -თი.

$$\bar{F}_d = -\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}}. \quad (\text{VIII}, 6)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ მარჯვენა მხარის პირველი წევრი $-\frac{\partial U}{\partial r}$ გამო-

ხატავს სხეულზე მოქმედ წმინდა მექანიკურ ძალას, დაკავშირებულს პოტენციალურ ენერგიასთან, საესებით ბუნებრივი იქნება დამატებით წევრს $-\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}}$, რომელიც ენერგიის დისიპაციასთან არის დაკავშირე-

ბული, ვუწოდოთ დისიპაციური, ანუ ხახუნის, ძალა და მიღებული მოძრაობის კანონი

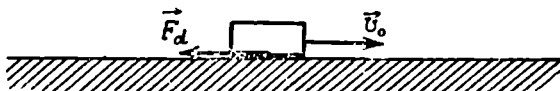
$$\frac{d}{dt} (m\bar{v}) = \bar{F} + \bar{F}_d \quad (\text{VIII}, 7)$$

შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ: დისიპაციური პროცესების არსებობის დროს სხეულის იმპულსის წარმოებული დროის მიმართ ტოლია მექანიკური და დისიპაციური ძალების ჯამისა.

დისიპაციური, ანუ ხახუნის, ძალის დამოკიდებულება სხეულის სიჩქარეზე და გარემოს მდგომარეობაზე სხვადასხვა შემთხვევაში სხვადასხვაა და რაიმე ზოგადი კანონზომიერების დადგენა ამ დამოკიდებულებებისათვის შეუძლებელია. ჩვეულებრივ ამ დამოკიდებულებას არკვევენ ექსპერიმენტების საშუალებით. განვიხილოთ რამდენიმე უმარტივესი შემთხვევა.

§ 41. მუღმივი და სიჩქარის კოოპორაციული ხახუნის ძალა

განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა წრფეწირული მოძრაობისა მუღმივი ხახუნის ძალის არსებობის დროს. ვთქვათ, რომ სხეულს მინიჭებული აქვს საწყისი სიჩქარე v_0 , (ნახ. 77) რის შემდეგ იგი განაგრძობს მოძრაობას სიჩქარის საწინააღმდეგოდ მიმართული ხახუნის ძალის პირობებში. ხახუნის ძალის სიდიდე (იმ შემთხვევაში როდესაც



ნახ. 77

სხეული მოძრაობს რაიმე სხვა სხეულის ზედაპირზე). ჩვეულებრივ, პირდაპირპროპორციულია მოძრავი სხეულის წონის, ე. ი. mg სიდიდის, სადაც m არის მოძრავი სხეულის მასა. ამიტომ ხახუნის ძალისათვის შეიძლება დავწეროთ:

$$F_d = \begin{cases} -\mu mg & \text{თუ } v > 0 \\ 0 & \text{" } v = 0 \\ +\mu mg & \text{" } v < 0. \end{cases}$$

აქ μ არის ხახუნის კოეფიციენტი — ხახუნის ძალის შეფარდება სხეულის წონასთან. მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$m\ddot{x} = \begin{cases} -\mu mg & v > 0 \\ 0 & v = 0 \\ +\mu mg & v < 0. \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\mu g = r$ და მოვახდინოთ ინტეგრება. მივიღებთ:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 - rt \quad v_0 > 0 \\ \dot{x} = 0 \quad v_0 = 0 \\ \dot{x} = v_0 + rt \quad v_0 < 0 \end{array} \right\} x = \pm |v_0| \mp rt \quad v_0 \geq 0$$

სადაც v_0 არის საწყისი სიჩქარე.

მეორე ინტეგრება მოგვცემს:

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{rt^2}{2} \quad v_0 > 0$$

$$x = x_0 \quad v_0 = 0$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{rt^2}{2} \quad v_0 < 0.$$

ცხადია, რომ სხეულის მოძრაობა გაგრძელება მანამდე, სანამ მისი სიჩქარე არ გახდება ნულის ტოლი.

დაკვირვებები ჰაერში მოძრავ სხეულებზე გვიჩვენებს, რომ მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში სრული მექანიკური ენერჯის კარგვა სიჩქარის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\Phi(\bar{v})$ სიდიდეს შემდეგი სახე უნდა ჰქონდეს:

$$\Phi(\bar{v}) = \frac{1}{2} \gamma v^2, \quad (\text{VIII}, 8)$$

სადაც γ პროპორციულობის კოეფიციენტია, რომლის მნიშვნელობა ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში უნდა მოიძებნოს ექსპერიმენტის საშუალებით. ცხადია, რომ γ ყველა შემთხვევაში დადებითი უნდა იყოს, ვინაიდან ხახუნის არსებობისას აუცილებლად უნდა წარმოებდეს მექანიკური ენერჯის კარგვა [$\Phi(\bar{v}) > 0$].

ხახუნის ძალას მივიღებთ (VIII, 8) ფორმულის გაწარმოებით

$$\vec{I}'_d = -\gamma \bar{v}. \quad (\text{VIII}, 9)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ განსახილველ შემთხვევაში, ხახუნის ძალა პირდაპირპროპორციულია სიჩქარისა და მიმართულია მის საწინააღმდეგოდ. γ კოეფიციენტს ეწოდება ხახუნის კოეფიციენტი და მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე, მისი ზედაპირის სიგლუვეზე, გარემოს გვარობასა და მდგომარეობაზე.

როგორც მაგალითი ხახუნის ძალის მოქმედებისა, განვიხილოთ წინააღმდეგობის გამწვევ გარემოში \bar{v}_0 საწყისი სიჩქარით მოძრავი სხეული. დავუშვათ, რომ მოძრაობა წარმოებს OX ღერძის გასწვრივ.

თუ სხეულზე, ხახუნის ძალის გარდა, სხვა გარეშე ძალა არ მოქმედებს.. მისი მოძრაობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = -\gamma v; \quad (\text{VIII}, 10)$$

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\gamma}{m} dt;$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$\ln v = -\frac{\gamma}{m} t + C_1.$$

C_1 მუდმივის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ საწყისი პირობა, რომ როცა $t=0$, $v=v_0$. ჩასმა მოგვცემს

$$\ln v_0 = C_1.$$

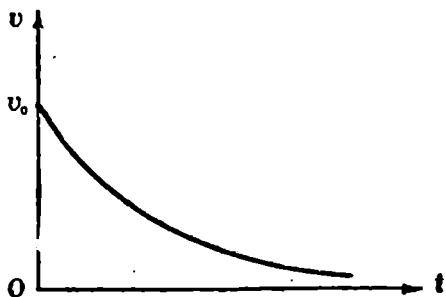
აქედან მივიღებთ

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{\gamma}{m} t,$$

ანუ

$$v = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m} t}. \quad (\text{VIII}, 11)$$

ამ კანონის მიხედვით კლებულობს სიჩქარე დროის განმავლობაში (სათანადო გრაფიკი მოყვანილია 78-ე ნახაზზე). გავლილი მანძილის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ტოლობა



ნახ. 78

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m} t}.$$

ნის ინტეგრება მოგვცემს

$$x = -\frac{mv_0}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m} t} + C_2.$$

C_2 მუდმივა განისაზღვრება მეორე საწყისი პირობით, რომ $t=0$ მომენტში ნაწილაკი იმყოფება კოორდინატთა სათავეში ($x=0$). ჩასმა მოგვცემს

$$0 = -\frac{mv_0}{\gamma} + C_2, \quad C_2 = \frac{mv_0}{\gamma},$$

სიდანაც x -ისათვის მივიღებთ

$$x = \frac{mv_0}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}). \quad (\text{VIII}, 12)$$

ცხადია, რომ x -ის (ე. ი. გველილი მანძილის) უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება უსასრულოდ დიდი დროის შემდეგ ($t \rightarrow \infty$); ამ მნიშვნელობის ჩასმით (VIII,12) განტოლებაში მივიღებთ

$$x_{\max} = \frac{mv_0}{\gamma}. \quad (\text{VIII}, 13)$$

მოძრავი სხეულის მთელი საწყისი კინეტიკური ენერგია გარდაიქმნება სითბოდ, რომელიც გადაეცემა თვით სხეულსა და გარემოს.

გავარჩიოთ მეორე მავალითი. ვთქვათ, ხახუნის ძალა ისევე პროპორციულია სიჩქარისა და, გარდა ამ ძალისა, ნაწილაკზე მოქმედებს ცუდმივი F ძალა. მოძრაობა ისევე სწორხაზოვანი იყოს. მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = F - \gamma v. \quad (\text{VIII}, 14)$$

საწყისი პირობები შემდეგნაირად შევარჩიოთ: $t=0$, $v=0$ და $x=0$. მოძრაობის ხასიათი შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ (VIII,14) განტოლების ანალიზის საშუალებით, ინტეგრების გარეშე. საწყის მომენტში, ვინაიდან $v=0$, ერთადერთი მოქმედი ძალა იქნება F ძალა. მისი გავლენით ნაწილაკის სიჩქარე გაიზრდება, რაც გამოიწვევს ხახუნის ძალის გაჩენას და თანდათანობით ზრდას. მიუხედავად ამისა, სანამ F ძალა მეტი იქნება, ვიდრე ხახუნის γv ძალა, სიჩქარის ზრდა გაგრძელდება

$$F - \gamma v > 0, \quad \frac{dv}{dt} > 0. \quad (\text{VIII}, 15)$$

სიჩქარის ეს ზრდა გავრძელებზე მანამდე, სანამ ხახუნის ძალა არ გაუტოლდება F ძალას; ამ მომენტში (VIII,14) განტოლების მარჯვენა მხარე ნულის ტოლი გახდება და სიჩქარის ზრდა შეწყდება (ნახ. 79). ცხადია, რომ მაქსიმალური სიჩქარე მიიღება პირობიდან

$$F - \gamma v_{max} = 0,$$

საიდანაც

$$v_{max} = \frac{F}{\gamma}. \quad (\text{VIII}, 16)$$

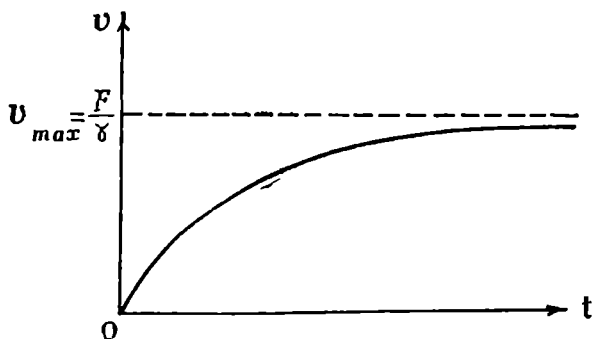
იგივე შედეგი შეიძლება მივიღოთ ინტეგრებით. პირველი ინტეგრება და სათანადო საწყისი პირობის გამოყენება გვაძლევს

$$v = \frac{F}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}), \quad (\text{VIII}, 17)$$

საიდანაც, როცა $t \rightarrow \infty$, მივიღებთ (VIII,16) ფორმულას.

ასეთი სახისაა სხეულის, მაგალითად, წვიმის წვეთის, ვარდნა ჰაერში, თუ ვარდნის სიჩქარე საკმარისად მცირეა.

საერთოდ უნდა აღვნიშნოთ, რომ თუ ხახუნის ძალა განუსაზღვრელად იზრდება სიჩქარის ზრდის დროს, ეს ძალა ბოლოს და ბოლოს გაუტოლდება მოძრაობის გამომწვევ ძალას, რის შემდეგ ნა-



ნახ. 79

წილაკის სიჩქარე აღარ შეიცვლება. ამ სიჩქარეს ეწოდება ზღვრული, ანუ მაქსიმალური სიჩქარე. თუ მოძრაობის გამომწვევი ძალა წინააღმდეგობის ძალაზე მეტი იქნება, ნაწილაკის სიჩქარე თანდათან გაიზრდება და, ბოლოს, გახდება ზღვრული სიჩქარის ტოლი. თუ ნაწილაკმა დაიწყო მოძრაობა ზღვრულ სიჩქარეზე მეტი სიჩქარით, წი-

ნააღმდეგობა მამოძრავებელ ძალაზე მეტი იქნება, რის გამოც სიჩქარე თანდათან შემცირდება, სანამ ისევ არ გახდება ზღვრული სიჩქარის ტოლი.

მყარი სხეულების შეხების დროს წარმოშობილ ხახუნს და მის გავლენას მოძრაობაზე განვიხილავთ შემდეგში, მყარი სხეულების გარჩევის დროს.

§ 42. სიჩქარის კვადრატის პროპორციული ხახუნის ძალა

თუ სხეულის სიჩქარე დიდია, ირკვევა, რომ ხახუნის ძალა აღარ გამოისახება (VIII,9) ფორმულით; ამ შემთხვევაში გამოიყენებენ ემპირიულ დაშვებას, რომ მექანიკური ენერჯის კარგვა პირდაპირ-პროპორციულია სიჩქარის კუბისა, რაც წინა მსჯელობის ანალოგიურად გვაძლევს ხახუნის ძალის შემდეგ დამოკიდებულებას სიჩქარეზე:

$$\vec{F}_d = -\gamma v \cdot \vec{v}. \quad (\text{VIII}, 18)$$

ამ შემთხვევაშიც γ დადებითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ხახუნის ძალა ისევ სიჩქარის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. ეს კვადრატული კანონი ხახუნის ძალისათვის ხშირად გამოიყენება ბალისტიკური გაანგარიშების დროს, თუმცა არც ის არის მართებული ყოველგვარი სიჩქარისათვის და ყოველგვარი პირობებისათვის; მაგალითად, იგი არ შეიძლება გამოვიყენოთ მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში. მოძრაობის დინამიკური განტოლების ამოხსნა (VIII,18) ფორმულით გამოსახული ხახუნის ძალის შემთხვევაში დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს, თუ ნაწილაკზე, გარდა ხახუნის ძალისა, სხვა ძალა არ მოქმედებს. მოძრაობის განტოლება

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma v^2 \quad (\text{VIII}, 19)$$

შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma}{m}. \quad (\text{VIII}, 19')$$

ინტეგრება მოგვცემს

$$\frac{1}{v} = \frac{\gamma}{m} t + C. \quad (\text{VIII}, 20)$$

ინტეგრების მუდმივა განისაზღვრება საწყისი პირობების საშუალებით;

თუ $t=0$ მომენტში ნაწილაკი იმყოფებოდა $x=0$ მდებარეობაში და ჰქონდა v_0 სიჩქარე, მივიღებთ

$$\frac{1}{v} = \frac{\gamma}{m} t + \frac{1}{v_0}. \quad (\text{VIII, 21})$$

მეორე მხრივ, (VIII, 19) განტოლება შეიძლება ასეც წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = - \frac{\gamma}{m}.$$

ინტეგრება და საწყისი პირობების გამოყენება მოგვცემს

$$v = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m} x}. \quad (\text{VIII, 22})$$

(VIII, 21) და (VIII, 22) განტოლებებიდან სიჩქარის გამორიცხვა მოგვცემს მოძრაობის კინემატიკურ განტოლებას

$$x = \frac{m}{\gamma} \lg \left(1 + \frac{\gamma v_0 t}{m} \right). \quad (\text{VIII, 23})$$

მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ ხახუნის ძალისათვის კვადრატული კანონის შემთხვევაში სიჩქარე ნულის ტოლი ხდება უსასრულო დროის და უსასრულო მანძილის გავლის შემდეგ. მაგრამ ეს შედეგი არ შეიძლება გამოვიყენოთ პრაქტიკულად, ვინაიდან, როდესაც სიჩქარე საკმაოდ მცირე გახდება, კვადრატული კანონი ხახუნის ძალისათვის აღარ იქნება მართებული. გამოყვანილი ფორმულები გამოდგება სიჩქარის მნიშვნელობის მხოლოდ გარკვეულ ფარგლებში.

§ 43. მუშაობა ხახუნის ძალის არსებობის დროს

ჩვენ გამოვარკვეით, რომ ნაწილაკის წმინდა მექანიკური მოძრაობის დროს, როდესაც ურთიერთქმედება ხასიათდება მდებარეობაზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიით, ნაწილაკზე მოქმედი ძალის მუშაობა რაიმე მონაკვეთზე ტოლია პოტენციალური ენერგიის შემცირებისა

$$\int_1^2 F_s ds = U_1 - U_2, \quad (\text{VIII, 24})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მუშაობა არ არის დამოკიდებული ტრაექტორიაზე, რომლითაც ხდება გადასვლა პირველი მდებარეობიდან მეორეში.

აქედან იქნა მიღებული აგრეთვე შედეგი, რომ ჩაკეტილი გზის შემოვლის დროს შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია

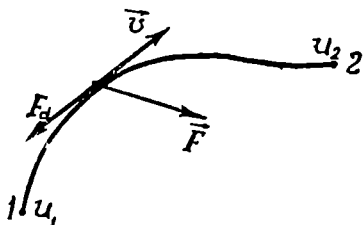
$$\oint E_s ds = 0. \quad (\text{VIII}, 25)$$

ეს შედეგი მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ძალა განისაზღვრება როგორც კონფიგურაციაზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერჯიის კოორდინატით წარმოებული. ცხადია, რომ ეს ასე არ იქნება ხახუნის ძალების არსებობის შემთხვევაში. აღვნიშნოთ \vec{F}_0 -ით ნაწილაკზე მოქმედი საერთო ძალა, რომელიც არის ჯამი პოტენციალური და ხახუნის ძალებისა (ნახ. 80)

$$\vec{F}_0 = \vec{F} + \vec{F}_d. \quad (\text{VIII}, 26)$$

მის მიერ შესრულებული მუშაობა იქნება.

$$\int_1^2 \vec{F}_0 \cdot d\vec{s} = \int_1^2 F_s ds + \int_1^2 F_{d,s} ds = U_1 - U_2 + \int_1^2 F_{d,s} ds. \quad (\text{VIII}, 27)$$



ნახ. 80

ჩაკეტილი გზისათვის მივიღებთ

$$\oint F_{0s} ds = \oint F_{d,s} ds, \quad (\text{VIII}, 28)$$

ე. ი. ჩაკეტილი გზის შემოწერის დროს შესრულებული მუშაობა მხოლოდ ხახუნის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობის ტოლია.

ანალოგიურად მივიღებთ ფორმულას კინეტიკური ენერჯიის ცვლილებისათვის ხახუნის ძალების არსებობის შემთხვევაში

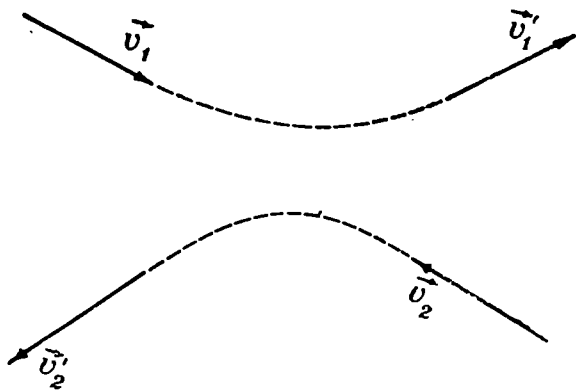
$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U_1 - U_2 + \int_1^2 F_{d,s} ds, \quad (\text{VIII}, 29)$$

ე. ი. კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდი უდრის პოტენციალური ენერჯიის შემცირებისა და ხახუნის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობის ჯამს.

ნ ა წ ი ლ ა კ ე ბ ი ს დ ა ჯ ა ხ ე ბ ა

§ 44. დ ა ჯ ა ხ ე ბ ი ს პ რ ო ტ ხ ე ს ი ს ჴ ო ზ ა ლ ი დ ა ხ ა ნ ი ა თ ე ბ ა

ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი შემთხვევაა დაჯახება. ეს მოვლენა შემდეგში მდგომარეობს. ნაწილაკები, რომლებიც საწყის მომენტში იძენად შორს არიან ერთმანეთისაგან, რომ მათი ურთიერთქმედება შეიძლება უგულვებელვყოთ, მოძრაობის შედეგად უახლოვდებიან ერთმანეთს. საკმაოდ დაახლოებისას მათი ურთიერთქმედება უკვე საგრძნობი ხდება, ნაწილაკები გადასცემენ



ნ ა ხ . 81

ერთმანეთს იმპულსსა და ენერგიას და ისევე შორდებიან ერთმანეთს უკვე სხვა სიდიდისა და მიმართულების სიჩქარეებით (ნახ. 81).

დაჯახების მოვლენის მაგალითები მრავალია. ასეთია, მაგალითად, დრეკადი და არადრეკადი ბირთვების დაჯახება, ელექტრონის დაჯახება ატომთან ან მოლეკულასთან, ატომებისა და მოლეკულების ურთიერთ-

დაჯახება, პროტონების, ნეიტრონების და სხვა ელემენტარული ნაწილაკების დაჯახება ერთიპორესთან და ატომის ბირთვებთან, ციური სხეულების გავლა ერთიმეორის მახლობლად და მრავალი სხე.

დაჯახების მოვლენების შესწავლა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია თანამედროვე ატომურ და ბირთვულ ფიზიკაში, ვინაიდან იმისდა მიხედვით, თუ როგორია გახდა ნაწილაკების სიჩქარეები (მიმართულებითა და სიდიდით) დაჯახების შემდეგ, შეიძლება გარკვეული დასკვნები გავაკეთოთ ნაწილაკთა ბუნებისა და ურთიერთქმედების შესახებ. ატომებთან და ბირთვებთან სხვადასხვაგვარი ნაწილაკების დაჯახების პროცესების შესწავლა საშუალებას გვაძლევს აგრეთვე გამოვიკვლიოთ ატომისა და მისი ბირთვის შინაგანი აგებულება.

ჩვეულებრივ, როდესაც მსჯელობენ დაჯახებაზე, გულასხმობენ, რომ ნაწილაკები რომელიმე მომენტში ეხებიან ერთმანეთს, მაგრამ კარგად უნდა იქნეს გაგებულნი, რომ ნივთიერების აღნაგობის შესახებ თანამედროვე წარმოდგენების მიხედვით ნაწილაკების შეხებაზე ლაპარაკი საერთოდ არ შეიძლება. იმისათვის, რომ გავეცვათ ამ საკითხში, განვიხილოთ როგორ ხდება, მაგალითად, α ნაწილაკის დაჯახება ატომის ბირთვთან (დაეუშვათ, რომ ატომის ბირთვი უქრავია). საწყის მომენტში α -ნაწილაკი მოძრაობს ბირთვისაკენ სწორხაზოვნად. თანდათანობითი მიახლოების გამო მათ შორის განზიდვის ძალები უკვე საგრძნობი გახდება და დაიწყება α -ნაწილაკის სიჩქარის შემცირება. ბოლოს, გარკვეულ მანძილზე (რომელიც საწყის კინეტიკური ენერჯიაზე დამოკიდებულია), α -ნაწილაკი გაჩერდება და შემდეგ ამოძრავდება საწინააღმდეგო მიმართულებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ნაწილაკების დაახლოება წარჩობს მანამდე, სანამ ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერჯია, რომელიც იხარჯება განზიდვის ძალების საწინააღმდეგოდ მუშაობის შესრულებაზე, არ გახდება ნულის ტოლი. არავითარი უშუალო შეხება ნაწილაკებისა არ ხდება. ასეთივე მდგომარეობაა სხვა შემთხვევებშიც, მაგალითად, ჩვეულებრივი ლითონის ბირთვების დაჯახების დროს. პირველი შეხედვით აქ სხეულების ნამდვილი შეხება ხდება, მაგრამ ის, რასაც ჩვენ შეხებას ვუწოდებთ, არა ბირთვების ზედაპირების დაახლოება ძალიან მცირე — დაახლოებით 10^{-7} — 10^{-8} cm-ის ტოლი მანძილით. ამ მანძილზე ატომებს შორის განზიდვის ძალები იმდენად დიდი ხდება, რომ აღარ აძლევს საშუალებას ბირთვებს, კიდევ უფრო მეტად დაუახლოვდნენ ერთმანეთს (ჩვეულებრივი წნევის პირობებში).

ნაწილაკების დაჯახების პროცესი შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვიდგინოთ. საწყის მომენტში (დაჯახებამდე) გვაქვს ორი ნაწილაკი, რომლებიც გარკვეული სიჩქარით უახლოვდებიან ერთმანეთს. რაც

უფრო ახლოს იქნებიან ისინი ერთმანეთთან, მით უფრო შესამჩნევი გახდება მათ შორის ურთიერთქმედება, რომელიც გამოიწვევს მათი სიჩქარეების შეცვლას. გარკვეული უმცირესი მანძილით დაახლოების შემდეგ ნაწილაკები ისევ იწყებენ ერთმანეთისაგან დაშორებას და განაგრძობენ მოძრაობას უკვე სხვა სიჩქარეებით. დაჯახების შესწავლის დროს დასმული ძირითადი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: ცნობილია ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახებამდე, უნდა გავიგოთ მათი სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ. თავისთავად ცხადია, რომ ამ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა ვიცოდეთ, რა ხდება დაჯახების არეში. ე. ი. ვიცოდეთ ურთიერთქმედების ხასიათი. მაგრამ ჩვენი მიზანია არა ამ სრული და საკმაოდ რთული ამოცანის ამოხსნა, არამედ გარკვევა უფრო მარტივი საკითხისა: რა დასკვნების გამოტანა შეიძლება ნაწილაკების დაჯახების შემდეგ სიჩქარეების შესახებ მხოლოდ იმპულსისა და ენერჯის მუდმივობის კანონების მიხედვით და ურთიერთქმედების ხასიათის ცოდნის გარეშე?

§ 45. დაჯახებათა კლასიფიკაცია

განვიხილოთ ორი ნაწილაკის დაჯახება. აღვნიშნოთ მათი მასები m_1 -ითა და m_2 -ით. სიჩქარეები დაჯახებამდე იყოს \vec{v}_1 და \vec{v}_2 , ხოლო დაჯახების შემდეგ \vec{u}_1 და \vec{u}_2 . როგორი ხასიათისაც უნდა იყოს დაჯახება, ყოველთვის უნდა შესრულდეს იმპულსის მუდმივობის კანონი

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (IX, 1)$$

ასეთია ის პირველი ძირითადი განტოლება, რომელიც აკავშირებს ნაწილაკების დაჯახების შემდეგ მიღებულ სიჩქარეებს მათ სიჩქარეებთან დაჯახებამდე.

მეორე კანონი, რომელიც გამოიყენება დაჯახების მოვლენის შესწავლის დროს, არის ენერჯის მუდმივობის კანონი. ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის ენერჯია სამი ნაწილისაგან შედგება. პირველი ნაწილი კინეტიკური ენერჯიების ჯამია

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

მეორე ნაწილი—ამ ნაწილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია U_{12} . თუ ნაწილაკები, რომელთა დაჯახებასაც ჩვენ ვიხილავთ, რთული აგებულებისაა (მაგალითად: ატომები, მოლეკულები, ლითონის ბირთვები და ა. შ.), იქნება მესამე ნაწილიც, რომელიც არის ამ ნაწილაკების შინაგანი ენერჯიების ჯამი. აღვნიშნოთ ეს შინაგანი ენერჯია (ორივე ნაწილაკისა) დაჯახებამდე ϵ -ით, ხოლო დაჯახების შემდეგ ϵ' -ით.

დაჯახებამდე, როდესაც ნაწილაკები საკმაოდ შორს არიან ერთმანეთი-საგან, პოტენციალური ენერგია შეიძლება უგულვებელვყოთ და ნაწი-ლაკების სრული ენერგიისათვის მივიღებთ

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \varepsilon.$$

დაჯახების შემდეგაც შეიძლება უგულვებელვყოთ ურთიერთქმედების ენერგია და ამიტომ დაჯახების შემდეგ სრული ენერგიისათვის მივი-ღებთ

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \varepsilon'.$$

ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად გვექნება

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \varepsilon = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \varepsilon. \quad (\text{IX}, 2)$$

ეს არის მეორე ძირითადი განტოლება, რომელიც საზღვრავს დაჯახე-ბის პროცესს.

იმის მიხედვით, თუ როგორია დაჯახების დროს ნაწილაკების შინა-განი ენერგიის ცვლილება, არჩევენ სხვადასხვა ტიპის დაჯახებებს:

1. დრეკადი დაჯახება ისეთ დაჯახებას ეწოდება, რომლის დროსაც ნაწილაკთა შინაგანი ენერგიები არ იცვლება, ე. ი. როდესაც

$$\varepsilon' = \varepsilon. \quad (\text{IX}, 3)$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში მართებული იქნება მხოლოდ კინეტიკუ-რი ენერგიის მუდმივობის კანონი

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

2. არადრეკადი დაჯახება ისეთ დაჯახებას ეწოდე-ბა, რომლის დროსაც ხდება ნაწილაკთა შინაგანი ენერგიების ცვლილება, ე. ი. როდესაც

$$\varepsilon' \neq \varepsilon. \quad (\text{IX}, 4)$$

არადრეკადი დაჯახებები შეიძლება ორ სახედ გაიყოს იმისდა მიხედვით, დიდდება თუ კლებულობს ნაწილაკების შინაგანი ენერგია. თუ დაჯა-ხების შედეგად შინაგანი ენერგია მატულობს, ე. ი. კინეტიკური ენერ-გიის ნაწილი იხარჯება შინაგანი ენერგიის გაზრდაზე, დაჯახებას ეწო-

დება პირველი გვარის არადრეკადი დაჯახება. თუკი შინაგანი ენერგია კლებულობს, ე. ი. ამ შინაგანი ენერგიის ნაწილი კინეტიკურ ენერგიაში გადადის. გვექნება მეორე გვარის არადრეკადი დაჯახება.

განვიხილოთ მაგალითები. დაჯახების ყველაზე ცნობილი მაგალითია ლითონის, სპილოს ძვლის ან სხვა დრეკადი მასალისაგან დამზადებული ბირთვების დაჯახება. თუ ბირთვები ფოლადის ან სპილოს ძვლისაა, ე. ი. ისეთი მასალისაგანაა დამზადებული, რომ გარეშე ძალის გავლენით გამოწვეული მისი დეფორმაცია თითქმის მთლიანად ისპობა ძალის მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ, მაშინ დაჯახება დრეკადი იქნება, ვინაიდან დაჯახების შემდეგ ბირთვების ფორმა და მოცულობა მთლიანად აღდგება და შინაგანი ენერგიის არავითარი ცვლილება არ მოხდება. პირველი გვარის არადრეკადი დაჯახების მაგალითს წარმოადგენს ტყვიისაგან დამზადებული ბირთვების დაჯახება. ამ შემთხვევაში დაჯახების შედეგად მომხდარი დეფორმაცია მთლიანად არ მოისპობა, კინეტიკური ენერგიის ნაწილი დაიხარჯება ბირთვების შინაგანი ენერგიის გადიდებაზე და ამიტომაც დაჯახება იქნება პირველი გვარის არადრეკადი დაჯახება.

როგორც შემდეგი მაგალითი, განვიხილოთ ელექტრონის ან რაიმე სხვა ელემენტარული ნაწილაკის დაჯახება ატომთან. ელექტრონს შინაგანი ენერგია არ აქვს, ვინაიდან იგი ელემენტარული ნაწილაკია. ატომს კი, როგორც რთულ სისტემას, შემდგარს ბირთვისა და ელექტრონებისაგან, აქვს შინაგანი ენერგია (პოტენციალური ენერგია), რომელიც დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა მანძილზეა ატომური ელექტრონი ბირთვისაგან. რაც უფრო შორეულ ორბიტაზეა ატომური ელექტრონი, მით უფრო მეტია ატომის შინაგანი ენერგია. ვთქვათ, ელექტრონი დაეჯახა ატომს. შესაძლებელია სამი შემთხვევა. პირველი, როდესაც დამჯახებელი ელექტრონი ისე შეიცვლის სიჩქარის სიდიდესა და მიმართულებას, რომ ატომის შინაგანი ენერგია არ შეიცვლება. შეიცვლება მხოლოდ ატომის კინეტიკური ენერგია. ასეთი დაჯახება დრეკადი იქნება, მაგრამ შეიძლება დაჯახების დროს დამჯახებელმა ელექტრონმა გადაიყვანოს ატომური ელექტრონი უფრო შორეულ მანძილზე ბირთვიდან, ე. ი. გაადიდოს ატომის შინაგანი ენერგია თავისი კინეტიკური ენერგიის ხარჯზე. ამ შემთხვევაში კინეტიკური ენერგიების ჯამი შემცირდება, ენერგიის ნაწილი გადაეცემა ატომს შინაგანი ენერგიის სახით. დაჯახება იქნება პირველი გვარის არადრეკადი დაჯახება. შესაძლებელია აგრეთვე მესამე შემთხვევა. დაჯახების დროს ატომური ელექტრონი შეიძლება გადავიდეს უფრო ახლო ორბიტაზე, ე. ი. ატომის შინაგანი ენერგია შეიძლება შემცირდეს და ამ ენერგიის ნაწილი გადავიდეს დამჯახებელი

ვექტორონის კინეტიკურ ენერგიაში. კინეტიკური ენერგია დაჯახების შემდეგ მეტი იქნება, ვიდრე დაჯახებამდე—გვექნება ე. წ. მეორე გვარის არადრეკადი დაჯახება.

§ 46. ღრეკადი დაჯახება

განვიხილოთ ორი ნაწილაკის ღრეკადი დაჯახება. როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, ასეთი დაჯახების შემთხვევაში მუდმივია როგორც იმპულსების, ისე კინეტიკური ენერგიების ჯამი

$$m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 \quad (IX,5)$$

და

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (IX,6)$$

ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს. ცნობილია ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახებამდე, ე. ი. \bar{u}_1 და \bar{u}_2 . საძიებელია სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ, ე. ი. ვექტორები \bar{v}_1 და \bar{v}_2 . ვინაიდან ყოველ საძიებელ სიჩქარეს საში კომპონენტი აქვს, საძიებელია ექვსი სკალარული სიდიდე: u_{1x} , u_{1y} , u_{1z} და u_{2x} , u_{2y} , u_{2z} . სკალარულ განტოლებათა რაოდენობა კი, რომლებსაც გვაძლევენ (IX,5) და (IX,6) განტოლებები, არის ოთხი (სამ სკალარულ განტოლებას გვაძლევს იმპულსის კანონი და ერთ განტოლებას ენერგიის კანონი).

ცხადია, რომ განტოლებათა რაოდენობა არ არის საკმარისი ყველა უცნობი სიდიდის საპოვნელად. ეს გასაგებია, ვინაიდან ამოცანის სრული ამოხსნისათვის უნდა ვიცოდეთ იმ ურთიერთქმედების ხასიათი, რომელმაც გამოიწვია სიჩქარეების ცვლილება. საქმე ისაა, რომ ჩვენ გვსურს გამოვიკვლიოთ დაჯახების შედეგი მხოლოდ ენერგიისა და იმპულსის კანონების საშუალებით და ამიტომაც გამოკვლევა სრული არ შეიძლება იყოს. ჩვენთვის უცნობია ის, რაც ხდება ურთიერთქმედების არეში და ამიტომაც ამოცანა სათანადოდ უნდა შეიზღუდოს.

ჩვენ შემდეგნაირად დავესვამთ საკითხს: მოცემულია ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახებამდე. ცნობილია აგრეთვე, რომ ერთ-ერთი ნაწილაკი, მაგალითად, პირველი, დაჯახების შემდეგ მოძრაობს გარკვეული მიმართულებით. მოვძებნოთ მეორე ნაწილაკის ვექტორული სიჩქარე (სამი სიდიდე) და პირველი ნაწილაკის სიჩქარის სიდიდე (ერთი სკალარული სიდიდე). დასმული ამოცანის ამოხსნისათვის ხელსაყრელია შემდეგნაირად მოვიქცეთ. შემოვიღოთ ახალი ინერციული ათვლის სისტემა, რომლის სათავე მოთავსებულია ნაწილაკთა ინერციის ცენტრში და ამ ინერციის ცენტრთან ერთად მოძრაობს. შევისწავლოთ დაჯახების მოვლენა

ამ ათვის სისტემაში და შემდეგ დაუბრუნდეთ ისევ ძველ სისტემას. აღნიშნოთ ძველი სისტემა L ასოთი და ვუწოდოთ მას ლაბორატორიული სისტემა (მოკლედ L სისტემა). ინერციის ცენტრთან დაკავშირებული ათვის სისტემა აღნიშნოთ C ასოთი და ვუწოდოთ მას ინერციის ცენტრის სისტემა (მოკლედ C სისტემა). ნაწილაკების სიჩქარეები C სისტემაში აღნიშნოთ იმავე ასოებით, რითაც L სისტემაში, მხოლოდ გავუკეთოთ ინდექსი C ; მაგალითად, \vec{v}_{1c} იქნება პირველი ნაწილაკის სიჩქარე დაჯახებამდე C სისტემაში. დავაკავშიროთ ერთმანეთთან ნაწილაკების სიჩქარეები L და C სისტემებში. ამისათვის გამოვთვალოთ C სისტემის ან, რაც იგივეა, ინერციის ცენტრის სიჩქარე J სისტემის მიმართ. ინერციის ცენტრის სიჩქარის ფორმულის თანახმად

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{M},$$

სადაც $M = m_1 + m_2$. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ნაწილაკების სიჩქარეები C სისტემის მიმართ, მათ სიჩქარეებს L სისტემის მიმართ უნდა გამოვაკლოთ C სისტემის სიჩქარე, ე. ი. \vec{v}_c , მივიღებთ

$$\vec{v}_{1c} = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{m_2}{M}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \quad (IX,7)$$

$$\vec{v}_{2c} = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = \frac{m_1}{M}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

ასეთია ნაწილაკების სიჩქარეები C სისტემის მიმართ, დაჯახებამდე.

გამოვთვალოთ ახლა მათი სიჩქარეები ამავე სისტემაში, დაჯახების შემდეგ, ე. ი. ამოვხსნათ დაჯახების ამოცანა C სისტემაში. გამოვიყენოთ იმპულსისა და ენერგიის კანონები

$$m_1 \vec{u}_{1c} + m_2 \vec{u}_{2c} = m_1 \vec{v}_{1c} + m_2 \vec{v}_{2c},$$

$$\frac{m_1 u_{1c}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2c}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1c}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2c}^2}{2}.$$

მაგრამ, ცხადია, რომ ნაწილაკების საერთო იმპულსი C სისტემაში ნულის ტოლია როგორც დაჯახებამდე, ისე დაჯახების შემდეგ, ე. ი.

$$m_1 \vec{v}_{1c} + m_2 \vec{v}_{2c} = 0 \quad (IX,8)$$

და

$$m_1 \vec{u}_{1c} + m_2 \vec{u}_{2c} = 0. \quad (IX,9)$$

სწორედ ეს გარემოება, რომ იმპულსების ჯამი ნულია, ამარტივებს

დაჯახების მოვლენის განხილვას C სისტემაში. (IX,8) და (IX,9) განტოლებებიდან მივიღებთ

$$\bar{v}_{2c} = -\frac{m_1}{m_2} \bar{v}_{1c}, \quad \bar{u}_{2c} = -\frac{m_1}{m_2} \bar{u}_{1c}.$$

ჩასმა ენერჯიის მუდმივობის კანონის ფორმულაში გვაძლევს

$$m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) v_{1c}^2 = m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) u_{1c}^2.$$

ანუ

$$v_{1c}^2 = u_{1c}^2,$$

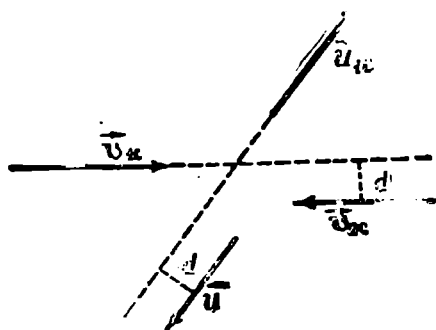
ე. ი.

$$|v_{1c}| = |u_{1c}|.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$|v_{2c}| = |u_{2c}|.$$

აქედან ვასკვნით, რომ C სისტემაში დაჯახების დროს ნაწილაკების სიჩქარეების სიღაღეები უცვლელი რჩება, ყოველი ნაწილაკი ინარჩუნებს იმ სიჩქარის სიდიდეს, რომელიც მას ჰქონდა დაჯახებამდე. ცხადია, რომ ერთადერთი, რაც შეიძლება მოხდეს, არის სიჩქარეების მიმართულებათა შეცვლა. 82-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ნაწილაკების დაჯა-



ნახ. 82

ხებათა პროცესი C სისტემაში. ნაწილაკთა სიჩქარეები ურთიერთანტიპარალელურია როგორც დაჯახებამდე, ისე დაჯახების შემდეგ. რასაკვირველია, არ არის აუცილებელი, რომ სიჩქარეები ერთ სწორ ხაზზე მდებარეობდეს (ეს იქნებოდა ცენტრალური დაჯახების შემთხვევა). საზოგადოდ, სიჩქარეების მიმართულებებს შორის გარკვეული მანძილია, რომელსაც დაჯახების პარამეტრი ეწოდება (მონაკვეთი, რომელიც ნახაზზე ϕ ასოთია აღნიშნული). იმის გარკვევა, თუ რა კუთხით მობრუნ-

დნენ სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ, შეუძლებელია გამოყენებული კანონების საშუალებით. ამისათვის საჭიროა ურთიერთქმედების ხასიათის და დაჯახების პარამეტრის ცოდნა.

ეთქვათ, პირველი ნაწილაკის სიჩქარის მიმართულება დაჯახების შემდეგ განსაზღვრულია ერთეულოვანი \vec{n}_{1c} ვექტორით (C სისტემაში). მაშინ სიჩქარეებისათვის დაჯახების შემდეგ მივიღებთ

$$\vec{u}_{1c} = v_{1c} \vec{n}_{1c} = \frac{m_2}{M} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}_{1c},$$

$$\vec{u}_{2c} = -v_{2c} \vec{n}_{1c} = -\frac{m_1}{M} |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \vec{n}_{1c}.$$

დავუბრუნდეთ ლაბორატორიულ სისტემას, ე. ი. გამოვთვალოთ ნაწილაკთა სიჩქარეები ამ სისტემაში დაჯახების შემდეგ. ამისათვის სიჩქარეებს C სისტემაში უნდა მივუმატოთ C სისტემის სიჩქარე L სისტემის მიმართ, მივიღებთ

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}_2 + \frac{m_2}{M} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}_{1c}, \quad (IX, 10)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}_2 - \frac{m_1}{M} |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \vec{n}_{1c}. \quad (IX, 11)$$

ეს ფორმულები გვაძლევს ამოცანის ამოხსნას. ისინი საზღვრავენ ნაწილაკთა სიჩქარეებს დაჯახების შემდეგ (L სისტემაში), თუ ცნობილია ნაწილაკთა სიჩქარეები დაჯახებამდე (იმავე სისტემაში) და პირველი ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულება (\vec{n}_{1c}) C სისტემაში, დაჯახების შემდეგ. ყველა სიჩქარე ამ ფორმულებში არის სიჩქარეები ლაბორატორიული სისტემის მიმართ, მხოლოდ ვექტორი \vec{n}_{1c} არის აღებული C სისტემის მიმართ.

მიღებული ფორმულები შესამჩნევად მარტივდება იმ შემთხვევაში, როდესაც დაჯახებამდე ერთ-ერთი ნაწილაკი, მაგალითად, მეორე, უძრავია, ე. ი. $\vec{v}_2 = 0$. მაშინ ფორმულები შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} |\vec{v}_1| \vec{n}_{1c}, \quad (IX, 12)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 - \frac{m_1}{M} |\vec{v}_1| \vec{n}_{1c}. \quad (IX, 13)$$

ჩვენ შემდეგში ყოველთვის ამ ფორმულებს გამოვიყენებთ სხვადასხვა

სახის დაჯახებათა გარჩევისათვის, ე. ი. ლაბორატორიულ სისტემად ისეთ ათვლის სისტემას ჩავთვლით, რომლის მიმართ ერთ-ერთი ნაწილაკი დაჯახებამდე უძრავია.

§ 47. ღრეკადი დაჯახების გრაფიკული წარმოდგენა

ღრეკადი დაჯახების პროცესის გასარჩევად ფრიად ხელსაყრელია (IX, 12, 13) ფორმულების გრაფიკული წარმოდგენა; ამისათვის სიჩქარეებიდან გადავიდეთ იმპულსებზე. გავამრავლოთ (IX,12) განტოლება m_1 -ზე, ხოლო (IX,13) განტოლება m_2 -ზე და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: ნაწილაკების იმპულსები დაჯახებამდე აღენიშნოთ \vec{p}_1 -ით და $\vec{p}_2 = 0$ (მეორე ნაწილაკი უძრავია), ხოლო იმპულსები დაჯახების შემდეგ \vec{p}'_1 და \vec{p}'_2 . მივიღებთ

$$\vec{p}'_1 = \frac{m_1}{M} \vec{p}_1 + \frac{m_2}{M} p_1 \cdot \vec{n}_{1c}, \quad (\text{IX}, 14)$$

$$\vec{p}'_2 = \frac{m_2}{M} \vec{p}_1 - \frac{m_2}{M} p_1 \cdot \vec{n}_{1c}. \quad (\text{IX}, 15)$$

გადავზომოთ \vec{AB} ვექტორი, რომელიც გამოხატავს პირველი ნაწილაკის იმპულსს დაჯახებამდე (იმავე დროს ეს არის ორივე ნაწილაკის საერთო იმპულსი) (ნახ. 83).

გავარჩიოთ ცალ-ცალკე სხვადასხვა კერძო შემთხვევა:

1. დავუშვათ, რომ მოძრავი ნაწილაკის (პირველი) მასა ნაკლებია, ვიდრე უძრავისა: $m_1 < m_2$. გავყოთ AB მონაკვეთი O წერტილით ნაწილაკების მასების პროპორციულად ისე,

რომ \vec{AO} იყოს $\frac{m_1}{M} \vec{p}_1$, \vec{OB} კი $\frac{m_2}{M} \vec{p}_1$. გავატაროთ O წერტილი-

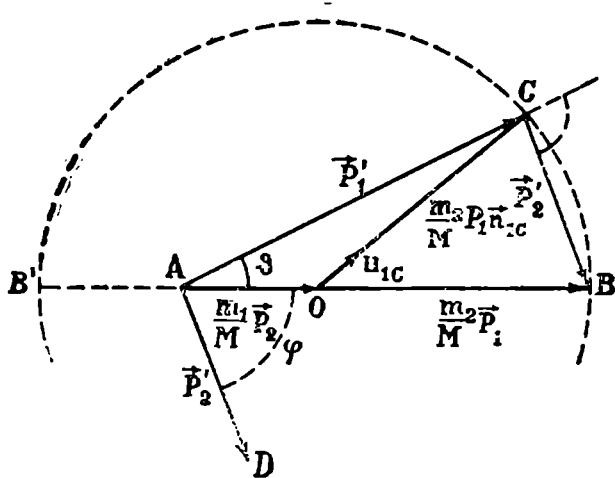
დან ერთეულოვანი \vec{n}_{1c} ვექტორი, რომელიც გვიჩვენებს პირველი ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულებას დაჯახების შემდეგ (C სისტემაში), და გადავზომოთ ამ მიმართულებით OB -ს ტოლი მონაკვეთი OC .

ცხადია, რომ $\vec{OC} = \frac{m_2}{M} p_1 \cdot \vec{n}_{1c}$. მაშინ (IX,14) ფორმულა გვიჩვენებს,

რომ პირველი ნაწილაკის იმპულსი დაჯახების შემდეგ ლაბორატორიულ სისტემაში მოცემული იქნება \vec{AC} ვექტორით.

ვინაიდან \vec{p}'_2 არის $\frac{m_2}{M} \vec{p}_1$ ვექტორისა და $\frac{m_2}{M} p_1 \vec{n}_{1c}$ ვექტორის სხვაობა, იგი გამოიხატება \vec{CB} ვექტორით ან მისი პარალელური და ტოლი \vec{AD} ვექტორით. თუ \vec{n}_{1c} ვექტორის მიმართულებას შევცვლით,

ე. ი. დავუშვებთ, რომ C სისტემაში პირველი ნაწილაკი რაღაც სხვა მიმართულებით ამოძრავდა, \overline{OC} ვექტორი მობრუნდება სიდიდის შეუცვლელად. ეს იმას ნიშნავს, რომ როგორც უნდა იყოს გაფანტვის მიმართულება, C წერტილი ყოველთვის მოთავსდება O წერტილის



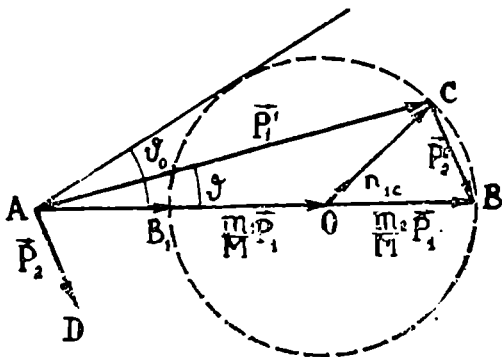
ნახ. 83

ირგვლივ შემოვლელული და $\frac{m_2}{M} p_1$ რადიუსის მქონე წრეხაზზე. \vec{n}_c ვექტორის მობრუნებასთან, ე. ი. წრეხაზზე C წერტილის გადანაცვლებასთან ერთად იცვლება \overline{AC} და \overline{CB} ვექტორების სიდიდე და მიმართულება, მაგრამ ისინი ყოველთვის გვაძლევენ ნაწილაკების იმპულსებს დაჯახების შემდეგ.

ნახაზი გვიჩვენებს, რომ, თუ დაჯახებამდე პირველი ნაწილაკი მოძრაობდა \overline{AB} -ს მიმართულებით, დაჯახების შემდეგ იგი იმოძრავებს \overline{AC} ვექტორის მიმართულებით. მ კუთხეს, რომელსაც დაჯახების შემდეგ იმპულსი შეადგენს დაჯახებამდე იმპულსთან, ეწოდება გაფანტვის (გაბნევის) კუთხე. ხშირად თვით დაჯახების მოვლენასაც გაფანტვის (გაბნევის) მოვლენა ეწოდება. დაჯახების შედეგად უძრავი ნაწილაკი (მეორე) ამოძრავდება \overline{AD} ვექტორის მიმართულებით. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოხდა უკუცემა, ხოლო φ კუთხეს, რომელსაც მეორე ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულება ადგენს დამჯახებელი ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულებასთან, უწოდებენ უკუცემის კუთხეს.

ნახაზიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ განსახილველ შემთხვევაში, როდესაც მცირე მასის ნაწილაკი ეჯახება დიდი მასის უძრავ ნაწილაკს, გაფანტვის კუთხემ შეიძლება მიიღოს ყოველნაირი მნიშვნელობა 0-სა და π -ს შორის, ე. ი. პირველი ნაწილაკი შეიძლება ამოძრავდეს როგორც წინ, ისე უკან. კუთხე გაფანტულ ნაწილაკებს შორის შეიძლება მოთავსებული იყოს $\frac{\pi}{2}$ -სა და π -ს შორის.

2. დიდი მასის ნაწილაკის დაჯახება მცირე მასის უძრავ ნაწილაკთან ($m_1 > m_2$). ამ შემთხვევაში (ნახ. 84) AO



ნახ. 84

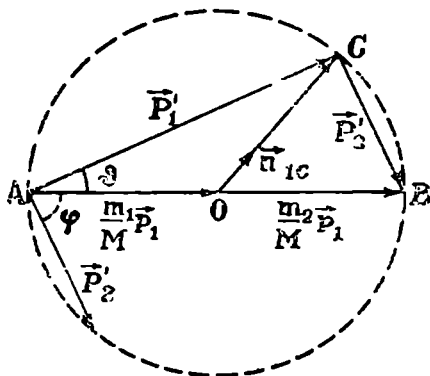
მონაკვეთი მეტი იქნება OB მონაკვეთზე და A წერტილი მოთავსდება C წერტილის მიერ შემოწერილი წრეხაზის გარეთ.

C წერტილის სხვადასხვა მდებარეობას წრეხაზზე ეთანადება დაჯახებათა სხვადასხვა შემთხვევა. ნახაზის განხილვა გვიჩვენებს, რომ როდესაც დიდი მასის ნაწილაკი ეჯახება მცირე მასის უძრავ ნაწილაკს, გაფანტვის კუთხე არ შეიძლება იყოს ყოველნაირი. ამ შემთხვევაში არსებობს გაფანტვის მაქსიმალური ψ_0 კუთხე (როდესაც AC ხაზი ეხება წრეხაზს). წრეხაზზე C წერტილის მოძრაობის დროს (B წერტილიდან B_1 წერტილამდე) გაფანტვის კუთხე ჯერ იზრდება, აღწევს ψ_0 მაქსიმალურ მნიშვნელობას და შემდეგ ისევ მცირდება.

როგორც ვხედავთ, დიდი მასის მქონე ნაწილაკი მცირე მასის უძრავ ნაწილაკთან დაჯახების დროს არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება უკან დაბრუნდეს. მან შეიძლება შეიცვალოს მოძრაობის მიმართულება, მაგრამ გაფანტვის კუთხე ყოველთვის მახვილი იქნება, კუთ-

ზე გაფანტულ ნაწილაკებს შორის შეიძლება მოთავსებული იყოს 0 -სა და $\frac{\pi}{2}$ -ს შორის.

3. ტოლი მასების მქონე ნაწილაკების დაჯახება ($m_1 = m_2$). განსაკუთრებული შემთხვევა იქნება მაშინ, როდესაც $m_1 = m_2$; ამ შემთხვევაში O წერტილი შუაზე ყოფს AB მონაკვეთს და C წერტილის მიერ შემოხაზული წრეხაზი A წერტილზე გადის. როგორც 85-ე ნახაზი გვიჩვენებს, ამ შემთხვევაში გაფანტვის კუთხე მო-



ნახ. 85

თავსებულია $0 \div \frac{\pi}{2}$ ფარგლებში. ვინაიდან A , B და C წერტილები ერთ წრეხაზზე მდებარეობენ, $\angle ACB$ იქნება მართი და, მაშასადამე, ტოლი მასის ნაწილაკები ერთმანეთის მიმართ ყოველთვის $\frac{\pi}{2}$ კუთხით გაიფანტებიან $\left(\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} \right)$.

§ 48. ცენტრალური დიპაღი დაჯახება

განსაკუთრებით მარტივია ცენტრალური დრეკადი დაჯახების შემთხვევა. ასეთი დაჯახების დროს C სისტემაში ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ მიმართულია დაჯახებამდე სიჩქარეების საწინააღმდეგოდ, ე. ი. \vec{n}_{1c} მიმართულია \vec{v}_{1c} -ს საწინააღმდეგოდ; აქედან ვღებულობთ, რომ ცენტრალური დაჯახების შემთხვევაში

$$\vec{u}_{1c} = -\vec{v}_{1c} = -\frac{m_2}{M}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

$$\vec{u}_{2c} = -\vec{v}_{2c} = -\frac{m_1}{M}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

ამიტომ \vec{u}_1 -ისა და \vec{u}_2 -ისათვის მივიღებთ

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{M}, \quad (\text{IX}, 16)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{M}. \quad (\text{IX}, 17)$$

გავარჩიოთ შემთხვევა, როდესაც დაჯახებამდე მეორე ნაწილაკი უძრავია. ამ შემთხვევაში $\vec{v}_2 = 0$ და წინა ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1, \quad (\text{IX}, 18)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1, \quad (\text{IX}, 19)$$

ხოლო იმპულსებისათვის გვექნება

$$\vec{p}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1, \quad (\text{IX}, 20)$$

$$\vec{p}'_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1, \quad (\text{IX}, 21)$$

გავარჩიოთ ეს ფორმულები მასების სხვადასხვა შეფარდებისათვის.

1. $m_1 < m_2$. პირველი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში \vec{u}_1 მიმართულია \vec{v}_1 -ის საწინააღმდეგოდ, ე. ი. დამჯახებელი ნაწილაკი უკან ბრუნდება. იგივე შედეგი მიიღება 83-ე ნახაზიდან. ცენტრალურ დაჯახებას ეთანადება შემთხვევა, როდესაც C წერტილი B' წერტილთან არის თანხვედნილი. მაშინ პირველი ნაწილაკის იმპულსი დაჯახების შემდეგ წარმოდგენილ იქნება $\overline{OB'}$ ვექტორით, რომელიც დაჯახებამდე იმპულსის საწინააღმდეგოა. (IX, 20) ფორმულაც ადვილად გამოიყვანება ნახაზიდან, ვინაიდან, როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, $\overline{AB'} = \overline{AO} + \overline{OB'}$.

2. $m_1 > m_2$. პირველი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ \vec{p}'_1 მიმართულია \vec{p}_1 -ის გასწვრივ, ე. ი. დამჯახებელი ნაწილაკი დაჯახების შემდეგ

განაგრძობს მოძრაობას წინანდელი მიმართულებით, მაგრამ შემცირებული იმპულსით (იმპულსის ნაწილი გადაეცა მეორე ნაწილს). 84-ე ნახაზი იმასვე გვიჩვენებს, ვინაიდან ცენტრალური დაჯახების დროს დამჯახებელი ნაწილს დაჯახების შემდეგ \overline{AB}_1 მონაკვეთით გამოიხატება.

3. $m_1 = m_2$. ამ შემთხვევაში (IX, 20, 21) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ დამჯახებელი ნაწილაკი ჩერდება ($\overline{p}'_1 = 0$), ხოლო მეორე ნაწილაკი, რომელიც დაჯახებამდე უძრავი იყო, იწყებს მოძრაობას ისეთი სიჩქარითა და იმპულსით, როგორც ჰქონდა პირველ ნაწილს დაჯახებამდე ($\overline{p}'_2 = \overline{p}_1$).

განვიხილოთ კიდევ უფრო კერძო შემთხვევები. ვთქვათ, დამჯახებელი ნაწილაკის მასა იმდენად მცირეა უძრავი ნაწილაკის მასასთან შედარებით, რომ იგი შეიძლება უგულებელვყოთ, ე. ი. მივიღოთ, რომ $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$. მაშინ (IX, 20, 21) ფორმულები მოგვცემს $\overline{p}'_1 = -\overline{p}_1$ და $\overline{p}'_2 = m_2$

$= 2\overline{p}_1$. აქედან ვღებულობთ, რომ უსასრულო მასის უძრავ ნაწილაკთან დაჯახებისას (დაჯახება კედელთან) დამჯახებელი ნაწილაკი ბრუნდება უკან უცვლელი სიდიდის იმპულსით, ხოლო უძრავი ნაწილაკი (კედელი) ღებულობს დაჯახების მიმართულების მქონე ორმაგ იმპულსს.

მეორე ზღვრული შემთხვევა გვექნება, როდესაც ძალიან დიდი მასის ნაწილაკი ეჯახება ძალიან მცირე მასის ნაწილს, ე. ი. როდესაც ვიხილავთ ზღვარს $\frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$. ამ შემთხვევაში (IX, 18, 19) ფორმულებში

შეიძლება უგულებელვყოთ m_2 , m_1 -თან შედარებით და მივიღებთ

$$\overline{u}_1 = \overline{v}_1 \quad \overline{p}'_1 = \overline{p}_1, \tag{IX, 22}$$

$$\overline{u}_2 = 2\overline{v}_1, \quad \overline{p}'_2 = m_2 \overline{u}_2 = 0.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში დამჯახებელი ნაწილაკი განაგრძობს მოძრაობას უცვლელი სიჩქარითა და იმპულსით, ხოლო უძრავი ნაწილაკი იწყებს მოძრაობას ორჯერ მეტი სიჩქარით, მაგრამ ნულოვანი იმპულსით (ვინაიდან ჩვენ ვთვლით, რომ $m_2 \rightarrow 0$).

ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ უდიდესი სიჩქარე, რომელიც შეიძლება მიიღოს უძრავმა ნაწილაკმა მასთან რაიმე ნაწილაკის დაჯახების შედეგად, არ აღემატება დამჯახებელი ნაწილაკის ორმაგ სიჩქარეს. სიჩქარის ეს უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც დამჯახებელი ნაწილაკის მასა გაცილებით მეტია უძრავი ნაწილაკის მასაზე. შემდეგში ჩვენ კიდევ დავუბრუნდებით ამ საკითხს.

ვისარგებლოთ (IX. 16, 17) ფორმულებით, რათა გამოვიყვანოთ დრეკადი ცენტრალური დაჯახების ერთი დამახასიათებელი თვისება. გამოვითვალოთ ნაწილაკების ფარდობითი სიჩქარე, ე. ი. სიჩქარეების სხვაობა დაჯახების შემდეგ. ამისათვის გამოვაკლოთ u_1 -ს u_2 , მივიღებთ

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = -(\bar{v}_1 - \bar{v}_2). \quad (\text{IX}, 23)$$

როგორც ვხედავთ, დრეკადი ცენტრალური დაჯახების დროს ფარდობითი სიჩქარის სიდიდე არ იცვლება, იგი იცვლის მხოლოდ მიმართულებას საწინააღმდეგოდ.

§ 49. ენერგიის გადაცემა ღრუბლი დაჯახების დროს

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ რა ენერგიის რაოდენობას გადასცემს დამჯახებელი ნაწილაკი უძრავ ნაწილაკს დრეკადი დაჯახების დროს, საჭიროა გავიგოთ როგორია უძრავი ნაწილაკის სიჩქარე დაჯახების შემდეგ. გამოვიყენოთ ამისათვის (IX, 13) ფორმულა. მისი კვადრატში აყვანა მოგვცემს

$$u_2^2 = \frac{2m_1^2}{M^2} v_1^2 - \frac{2m_1^2}{M^2} v_1^2 \cos \varphi_c,$$

სადაც φ_c არის კუთხე \bar{v}_1 და \bar{v}_{1c} ვექტორებს შორის; აქედან მივიღებთ

$$u_2 = \frac{\sqrt{2m_1}}{M} v_1 (1 - \cos \varphi_c)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{IX}, 24)$$

იმისდა მიხედვით, თუ როგორია φ_c კუთხე, მივიღებთ u_2 -ის სხვადასხვა მნიშვნელობას. გადაცემული კინეტიკური ენერგიისათვის მივიღებთ

$$\frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 v_1^2}{2} (1 - \cos \varphi_c). \quad (\text{IX}, 25)$$

აქ $\frac{m_1 v_1^2}{2}$ არის მოძრავი ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია დაჯახებამდე,

ხოლო $\frac{m_2 u_2^2}{2}$ — უძრავი ნაწილაკისათვის დაჯახების შედეგად გადაცე-

მული კინეტიკური ენერგია. მათი შეფარდება გვიჩვენებს, კინეტიკური ენერგიის რა ნაწილი გადაეცა მეორე ნაწილაკს დაჯახების შედეგად

$$\frac{m_2 u_2^2}{2} / \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \varphi_c). \quad (\text{IX}, 26)$$

მოყვანილი ფორმულები კვირვენებს, რომ მაქსიმალურ სიჩქარეს და, მაშასადამე, მაქსიმალურ კინეტიკურ ენერგიას უძრავი ნაწილაკი მიიღებს ცენტრალური დაჯახების დროს, ე. ი. როდესაც $\psi_c = \pi$ (m_1 ვექტორი მიმართულია v_1 -ის საწინააღმდეგოდ). ასეთი დაჯახების შემთხვევაში გვექნება

$$u_{2max} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1, \tag{IX,27}$$

$$\left(\frac{m_2 u_2^2}{2} \right)_{max} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 v_1^2}{2}. \tag{IX,28}$$

გავარჩიოთ ახლა მასების შეფარდების სხვადასხვა შემთხვევა:

ა) $m_1 < m_2$ — მცირე მასის ნაწილაკი ეჯახება დიდი მასის ნაწილაკს. ამ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \ll 1$$

და

$$u_{2max} \ll v_1.$$

ე. ი. უძრავი ნაწილაკი ვერ მიიღებს v_1 -ზე მეტ სიჩქარეს. რაც უფრო ნაკლებია m_1 შედარებით m_2 -თან, მით უფრო ნაკლებია მეორე ნაწილაკის მიერ მიღებული სიჩქარე და კინეტიკური ენერგია. ზღვარულ შემთხვევაში, როდესაც $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$, ე. ი. როდესაც მოძრავი ნაწილაკის

მასა უმნიშვნელოა უძრავი ნაწილაკის მასასთან შედარებით, მაშინ $u_{2max} \rightarrow 0$. ამ შემთხვევაში უძრავი ნაწილაკი უძრავი რჩება, დამჯახებელი ნაწილაკი კი უკან ბრუნდება უცვლელი სიჩქარით.

ბ) $m_1 > m_2$. ამ შემთხვევაში

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \gg 1$$

და

$$u_{2max} \gg v_1.$$

ე. ი. უძრავი ნაწილაკი მიიღებს დამჯახებელი ნაწილაკის სიჩქარეზე, v_1 -ზე, მეტ სიჩქარეს. თუ m_1 ძალიან დიდია m_2 -თან შედარებით, ე. ი. თუ შესაძლებელია m_2 -ის უგულებელყოფა m_1 -თან შედარებით, მივიღებთ

$$u_{2max} = 2v_1, \quad \left(\frac{m_2 u_2^2}{2} \right)_{max} = 2m_2 v_1^2.$$

მაშასადამე, უძრავი ნაწილაკის სიჩქარე დაჯახების შემდეგ ორჯერ მეტია, ვიდრე დამჯახებელი ნაწილაკის სიჩქარე დაჯახებამდე. ამაზე მეტი სიჩქარის მიღება უძრავი ნაწილაკის მიერ შეუძლებელია. სათანადოდ გამოითვლება გადაცემული კინეტიკური ენერჯიის ნაწილიც.

გ) $m_1 = m_2$. ამ შემთხვევაში $\frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 1$ და $u_2 = v_1$, ე. ი. უძრავი

ნაწილაკი დაჯახების შემდეგ მოძრაობს იმ სიჩქარით, რომელიც ჰქონდა დამჯახებელ ნაწილაკს დაჯახებამდე, ხოლო თვით დამჯახებელი ნაწილაკი კი ჩერდება. დამჯახებელი ნაწილაკის მთელი კინეტიკური ენერჯია გადაეცემა უძრავ ნაწილაკს.

§ 50. აბაღრეკადი ცენტრალური დაჯახება

დრეკადი ცენტრალური დაჯახების განხილვისას გამოვარკვეით, რომ ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ გამოისახება შემდეგი ფორმულებით:

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{M},$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{M},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = -(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფარდობითი სიჩქარე იცვლის მხოლოდ მიმართულებას და არა სიდიდეს. ვინაიდან არადრეკადი დაჯახებისას შინაგანი ენერჯია იცვლება (იზრდება ან მცირდება), ცხადია, ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ არ იქნება ისეთი, როგორც დრეკადი დაჯახების დროს, და, მაშასადამე, არც ფარდობითი სიჩქარე დარჩება უცვლელი სიდიდის. საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ იცვლება ფარდობითი სიჩქარის სიდიდე არადრეკადი დაჯახებისას, ექსპერიმენტულად პირველად შესწავლილი იყო ნიუტონის მიერ. მან გამოარკვია, რომ ცდების შედეგები უმეტეს შემთხვევაში შემდეგი დაშვებით აიწერება. ყოველი არადრეკადი დაჯახების დროს ფარდობითი სიჩქარე კლებულობს e -ჯერ, სადაც e არის განყენებული რიცხვი, დამოკიდებული დამჯახებელი ნაწილაკების ან სხეულების გეარობაზე. ამ სიდიდეს, რომელიც არადრეკადობის ხარისხის მაჩვენებელია, ეწოდება ალდგენის კოეფიციენტი.

ალდგენის კოეფიციენტის შემოღების შემდეგ (IX,23) ფორმულა

მიიღებს შემდეგ სახეს (ვინაიდან დაჯახება ცენტრალურია, ვექტორის ნიშანი შეიძლება მოიხსნას):

$$u_2 - u_1 = -e(v_2 - v_1). \quad (\text{IX}, 29)$$

თუ დაჯახება პირველი გვარისაა, ე. ი. კინეტიკური ენერგია მცირდება, ფარდობითი სიჩქარეც შემცირდება და e იქნება ერთზე ნაკლები $e < 1$. მეორე გვარის არადრეკადი დაჯახების დროს $e > 1$; აქედან ცხადია, რატომ ეწოდება e სიდიდეს აღდგენის კოეფიციენტი. იგი გვიჩვენებს, თუ რამდენად აღდგება ის ფარდობითი სიჩქარე, რომელიც გვექონდა დაჯახებამდე. საბოლოოდ ვღებულობთ:

1. $e = 1$ — დრეკადი დაჯახება;
2. $e < 1$ — პირველი გვარის არადრეკადი დაჯახება;
3. $e > 1$ — მეორე გვარის არადრეკადი დაჯახება.

(IX, 29) ფორმულის და იმპულსის მუდმივობის კანონის საშუალებით შეიძლება გამოვიყვანოთ ფორმულები u_1 და u_2 სიჩქარეებისათვის დაჯახების შემდეგ, ფორმულებიდან:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

$$u_2 - u_1 = -e(v_2 - v_1)$$

მივიღებთ

$$u_1 = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + m_2(1+e)v_2}{M},$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - em_1)v_2 + m_1(1+e)v_1}{M}.$$

კერძო შემთხვევაში. როდესაც ერთ-ერთი ნაწილაკი დაჯახებამდე უძრავია ($v_2 = 0$), გვექნება

$$u_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad (\text{IX}, 30)$$

$$u_2 = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_1. \quad (\text{IX}, 31)$$

მიღებული ფორმულების საშუალებით ადვილად შეიძლება გამოვითვალოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილება არადრეკადი დაჯახების დროს, მივიღებთ

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2. \quad (\text{IX}, 32)$$

სადაც ΔE_k არის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდი. იმისდა მიხედვით,

თუ როგორია ალდგენის კოეფიციენტი, ΔE_h -სათვის მივიღებთ სხვადასხვა მნიშვნელობას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მეორე ნაწილაკი უძრავია ($v_2 = 0$), და გამოვითვალოთ პირველი ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯიის ის ნაწილი, რომელიც იხარჯება შინაგანი ენერჯიის გაზრდაზე. (IX,32) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{\Delta E_h}{E_h} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2). \quad (\text{IX}, 33)$$

თუ დამჯახებელი ნაწილაკის მასა ძალიან დიდია უძრავი ნაწილაკის მასასთან შედარებით ($m_1 \gg m_2$), მაშინ შინაგან ენერჯიად გარდაიქმნება საწყისი კინეტიკური ენერჯიის მცირე ნაწილი. თითქმის მთელი კინეტიკური ენერჯია დაიხარჯება უძრავი ნაწილაკის ასამოძრავებლად. თუ შებრუნებით, მსუბუქი ნაწილაკი ეჯახება დიდი მასის ნაწილაკს ($m_1 \ll m_2$), კინეტიკური ენერჯიის დიდი ნაწილი დაიხარჯება შინაგანი ენერჯიის გაზრდაზე (მაკროსკოპული სხეულების შემთხვევაში—დეფორმაციაზე) და ძალიან მცირე ნაწილი გამოიყენება უძრავი ნაწილაკის ასამოძრავებლად.

არადრეკადი დაჯახების მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ე. წ. აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახება, როდესაც დაჯახების შემდეგ ნაწილაკები შეერთდება და იმოძრავებს როგორც ერთი ნაწილაკი. ცხადია, რომ ამ შემთხვევას ეთანადება ნულის ტოლი ალდგენის კოეფიციენტი, ვინაიდან დაჯახების შემდეგ ფარლობითი სიჩქარე ნულის ტოლი ხდება. წინა ფორმულები შემდეგ საბეს მიიღებს:

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M},$$

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = u_1.$$

შინაგანი ენერჯიის გაზრდაზე დახარჯული კინეტიკური ენერჯიისათვის გვექნება

$$-\Delta E_h = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (\text{IX}, 34)$$

თუ ერთ-ერთი, მაგალითად, მეორე, ნაწილაკი, უძრავია ($v_2 = 0$), წინა ფორმულა შეიძლება დაიწეროს შემდეგნაირად:

$$-\Delta E_h = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2} m_1 v_1^2. \quad (\text{IX}, 35)$$

მამრავლი $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ გვიჩვენებს, საწყისი კინეტიკური ენერჯის რა

ნაწილი იხარჯება შინაგანი ენერჯის გაზრდაზე.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

1. ვთქვათ, ელექტრონი, რომლის მასა არის m , ხოლო სიჩქარე v , ეჯახება უძრავ ატომს M , მასით. დაეშვათ, რომ დაჯახების შედეგად ატომი აიგზნება, ე. ი. გადადის უფრო მაღალ ენერჯეტიკულ დონეზე, ხოლო დამჯახებელი ელექტრონი ეკვრება ატომს (აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახება). თუ აგზნების ენერჯია არის ϵ , როგორი უნდა იყოს ელექტრონის მინიმალური საწყისი სიჩქარე იმისათვის, რომ მოხდეს ატომის აგზნება? პირველი შეხედვით (ენერჯის კანონის თანახმად) ამისათვის საკმარისია, რომ დამჯახებელი ელექტრონის კინეტიკური ენერჯია ϵ -ზე მეტი ან. უკიდურეს შემთხვევაში, მისი ტოლი იყოს, მაგრამ (IX, 35) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ დამჯახებელ ელექტრონს არ შეუძლია გადასცეს ატომს მთელი თავისი კინეტიკური ენერჯია. ჩვენი შემთხვევისათვის $m_1 = m$, $m_2 = M$, $v_1 = v$, ხოლო $-\Delta E_A = \epsilon$. ამიტომ გვექნება

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{m + M}{M}\epsilon$$

ან

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\epsilon. \quad (IX, 36)$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ატომს გადაეცეს აგზნებისათვის საკმარისი ენერჯია ϵ , დამჯახებელ ნაწილაკს უნდა ჰქონდეს (IX, 36) ფორმულით განსაზღვრული ან მასზე მეტი კინეტიკური ენერჯია. თუ დამჯახებელი ნაწილაკი არის ელექტრონი. მასების შეფარდებისათვის მიახლოებით მივიღებთ:

$$\frac{m}{M} \sim \frac{1}{2000},$$

რაც გვიჩვენებს, რომ დამჯახებელი ელექტრონის კინეტიკური ენერჯია უმნიშვნელოდ მეტი უნდა იყოს აგზნების ენერჯიაზე.

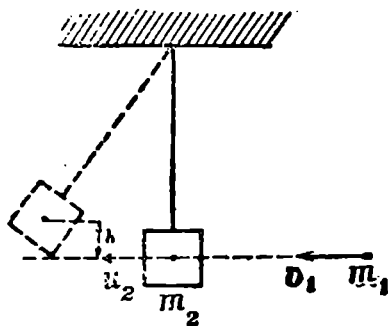
სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ ატომს ეჯახება ისეთივე მასის მქონე ნაწილაკი, როგორიც თვით ატომია. ამ შემთხვევაში

$$\frac{m}{M} \sim 1$$

და (IX, 36) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{1}{2} m v^2 \sim 2\varepsilon.$$

ე. ი. აგზნებისათვის საჭიროა, რომ დამჯახებელი ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია დაახლოებით ორჯერ მეტი იყოს, ვიდრე აგზნების ენერგია. აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახება გამოიყენება ე. წ. ბალისტიკურ საქანში, რომლის დანიშნულებაა მოძრავი სხეულის, მაგალითად, გასროლილი ტყვიის. სიჩქარის გაზომვა. ქვეშით სავსე ყუთი ჩამოკიდებულია თოკზე და იმყოფება წონასწორობაში. მას ესვრიან ტყვიას, რომელიც შედის ყუთში და ქვიმასთან ხახუნის გამო რჩება შიგ (ნახ. 86). საქანი მიიღებს გარკვეულ სიჩქარეს, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:



ნახ. 86

$$u_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

სადაც m_1 არის ტყვიის მასა, ხოლო m_2 — ქვიშიანი ყუთის მასა. მიღებული ბიძგის გამო საქანი აიწევს გარკვეულ სიმაღლეზე. რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$h = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2 g};$$

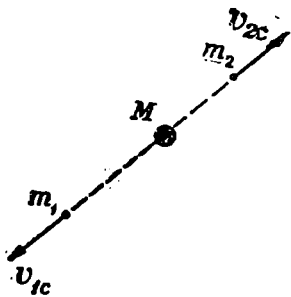
h სიმაღლის გაზომვა მოგვცემს საშუალებას გამოვითვალოთ ტყვიის v_1 სიჩქარე, ვინაიდან ყველა დანარჩენი სიდიდე ცნობილია.

რხევითი მოძრაობის განხილვის დროს ჩვენ კიდევ დაუბრუნდებით ბალისტიკურ საქანს.

§ 51. ნაწილაკის დაზღა

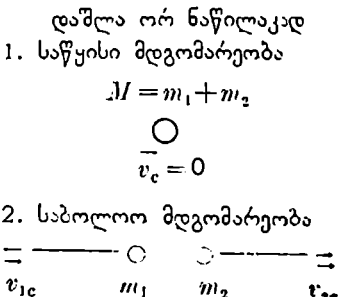
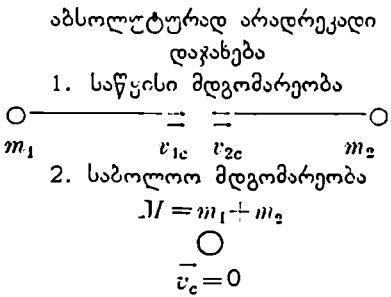
ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ერთ ფრიალ მნიშვნელოვან მოვლენას, რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული ნაწილაკთა დაჯახების მოვლენასთან. ბუნებაში და ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხშირად ვხვდებით შემთხვევას, როდესაც ერთი ნაწილაკი ან სხეული იშლება ორ ან რამ-

დენიმე ნაწილად და წარმოშობილი ნაწილაკები იწყებს მოძრაობას სხვადასხვა სიჩქარით. ასეთი მოვლენაა, მაგალითად, ყუმბარის აფეთქება, როდესაც მისი ნამსხვრევები სხვადასხვა მიმართულებით გაიფანტება. განსაკუთრებით ხშირია ნაწილაკის დაშლის ასეთი მოვლენა ბირთვული და ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში. კარგად არის ცნობილი რადიოაქტიური ბირთვების გარდაქმნა, როდესაც ბირთვიდან გამოიტყორცნება α -ნაწილაკი, პროტონი, ნეიტრონი, ელექტრონი და ა. შ., ბირთვი კი სხვა ბირთვად გარდაიქმნება. მართალია, ამ უკანასკნელ შემთხვევებში ნაწილაკები იმდენად სწრაფად მოძრაობს, რომ მათთვის კლასიკური მექანიკა აღარ გამოიყენება და საჭიროა გამოთვლების წარმოება ფარდობითობის თეორიის მიხედვით, მაგრამ დაშლის მოვლენის ხასიათზე გარკვეული წარმოდგენის შესაქმნელად ჩვენთვის საკმარისია კლასიკური განხილვა.



ნახ. 87

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც M მასის უძრავი ნაწილაკი იშლება ორ ნაწილაკად m_1 და m_2 მასებით და \vec{v}_{1c} და \vec{v}_{2c} სიჩქარეებით (ნახ. 87) (რაკი M ნაწილაკი უძრავია, აღებულია C სისტემა). ეს მოვლენა აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახების შებრუნებული მოვლენაა. მართლაც, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში საწყის მომენტში ჩვენ გვაქვს ორი მოძრავი ნაწილაკი, რომლებიც დაჯახების შედეგად ერთდებან და გვაძლევს ახალ უძრავ ნაწილაკს (თუ დაჯახება განიხილება C სისტემაში). დაშლის შემთხვევაში კი საწყის მომენტში გვაქვს ერთი უძრავი ნაწილაკი, რომელიც რაღაც შინაგანი პროცესის შედეგად იშლება ორ მოძრავ ნაწილაკად:



ალენიშნოთ საწყისი ნაწილაკის შინაგანი ენერგია ε -ით, ხოლო დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკების შინაგანი ენერგიები ε_1 -ითა და ε_2 -ით. მაშინ იმპულსისა და ენერგიის მუდმივობის კანონები მოგვცემენ

$$m_1 \bar{v}_{1c} + m_2 \bar{v}_{2c} = 0,$$

$$\varepsilon_1 + \frac{m_1 v_{1c}^2}{2} + \varepsilon_2 + \frac{m_2 v_{2c}^2}{2} = \varepsilon.$$

თუ სიჩქარეების მავიერ შემოვიღებთ იმპულსებს, გვექნება

$$\bar{p}_{1c} + \bar{p}_{2c} = 0,$$

$$\varepsilon_1 + \frac{p_{1c}^2}{2m_1} + \varepsilon_2 + \frac{p_{2c}^2}{2m_2} = \varepsilon. \quad (\text{IX}, 37)$$

მეორე განტოლებიდან აღვიღებთ მივიღებთ

$$\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{p_{1c}^2}{2m_1} + \frac{p_{2c}^2}{2m_2}. \quad (\text{IX}, 38)$$

ვინაიდან მარჯვენა მხარე (კინეტიკური ენერგიების ჯამი) დადებითია, დაშლა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც საწყისი ნაწილაკის შინაგანი ენერგია მეტია, ვიდრე დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკების შინაგანი ენერგიების ჯამი, ე. ი. როდესაც

$$\varepsilon > \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (\text{IX}, 39)$$

სხეობას

$$\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{დაშლ.}} \quad (\text{IX}, 40)$$

ეწოდება დაშლის ენერგია. ვინაიდან იმპულსის კანონის თანახმად $\bar{p}_{2c} = -\bar{p}_{1c}$ მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\varepsilon_{\text{დაშლ.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_{1c}^2.$$

თუ შემოვიღებთ ე. წ. μ დაყვანილ მასას

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

მივიღებთ

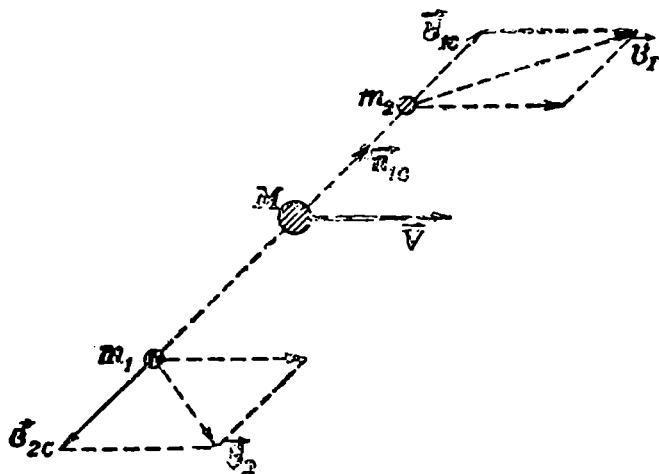
$$\varepsilon = \frac{p_{1c}^2}{2\mu}, \quad (\text{IX}, 41)$$

$$p_{1c} = \sqrt{2\mu \varepsilon_{\text{დაშლ.}}} \quad (\text{IX}, 42)$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკის იმპულსი, თუ ცნობილია დაშლის ენერგია და m_1 და m_2 მასები. ცხადია, რომ დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკები მოძრაობენ ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულებით და მათი მასების უკუპროპორციული სიჩქარეებით. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საწყისი ნაწილაკი მოძრაობს \vec{V} სიჩქარით, ე. ი. გადავიდეთ C სისტემიდან ლაბორატორიულ სისტემაზე (ნახ. 88). დაშლის შედეგად მიღებული პირველი ნაწილაკის v_1 სიჩქარე მიიღება v_{1c} სიჩქარიდან \vec{V} სიჩქარის დამატებით:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1c} + \vec{V} = \sqrt{2\mu\epsilon_{\text{ფაშ}}}\vec{n}_{1c} + \vec{V}, \quad (\text{IX}, 43)$$

სადაც \vec{n}_{1c} არის ერთეულოვანი ვექტორი, მაჩვენებელი პირველი ნაწილაკის სიჩქარის მიმართულებისა C სისტემაში. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ პირველი ნაწილაკის სიჩქარე, თუ ცნობილია და-

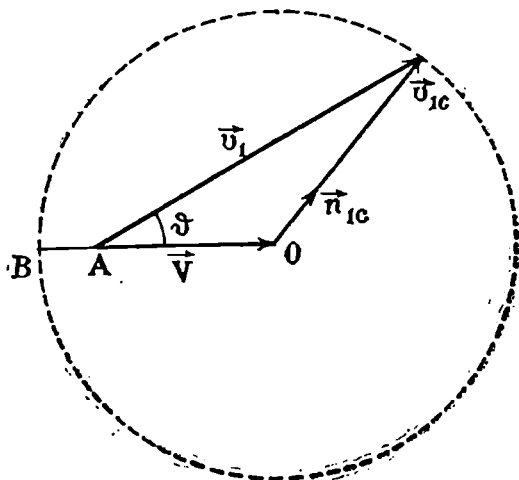


ნახ. 88

შლის ენერგია და ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულება C სისტემაში (\vec{n}_{1c} ვექტორი)¹. \vec{n}_{1c} ვექტორის პოვნა ჩვენი მონაცემების საშუალებით შეუძლებელია, ამისათვის საჭიროა დაშლის მექანიზმის ცოდნა.

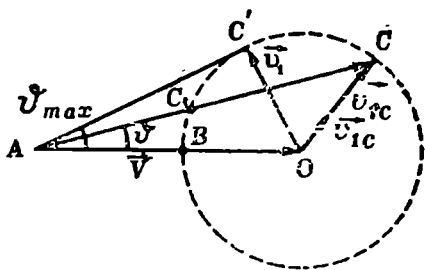
¹ როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, დაშლის შედეგად წარმოშობილი ნაწილაკები ლაბორატორიულ სისტემაში მოძრაობს იმ მხარეს, საითევეა მოძრაობდა M ნაწილაკი დაშლამდე.

გეომეტრიულად (IX,43) ფორმულა გამოიხატება დიაგრამით, რომელიც 89-ე ნახაზზეა განხილული.



ნახ. 89

ეს დიაგრამა ეთანადება შემთხვევას, როდესაც $V < v_{1c}$. დაშლის შედეგად მიღებული პირველი ნაწილაკი გამოიყორცნება მ კუთხით



ნახ. 90

საწყისი სიჩქარის მიმართ. ამ კუთხის ცვლას ეთანადება C წერტილის გადანაცვლება v_{1c} რადიუსის მქონე წრეხაზზე, რომელიც გავლებულია \bar{V} ვექტორის ბოლო წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან. ნახაზიდან ჩანს, რომ ნაწილაკის გამოიყორცნა შესაძლებელია ნებისმიერი კუთხით საწყისი სიჩქარის მიმართ.

მეორე შემთხვევა მიიღება მაშინ, როდესაც $V > v_{1c}$. ამ შემთხვევაში AO მონაკვეთი OC მონაკვეთზე მეტი იქნება, ე. ი. A წერტილი მოთავსებული იქნება წრეხაზის გარეთ და გამოიყორცნის კუთხე ყოველთვის მახვილი იქნება (ნახ. 90). მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღება მაშინ, როდესაც მონაკვეთი იქნება წრეხაზის მხები. ცხადია რომ ამ კუთხისათვის გვექნება

$$\sin \varphi_{max} = \frac{U_{1c}}{V}.$$

ამ შემთხვევისათვის დამახასიათებელია აგრეთვე ის გარემოება, რომ გამოტყორცნილი ნაწილაკის მოძრაობის ერთ მიმართულებას ეთანადება სიჩქარის სიდიდის ორი მნიშვნელობა (მაგალითად, AC მიმართულებას ეთანადება AC და AC' სიჩქარეები).

თუ ცნობილია ერთ-ერთი გამოტყორცნილი ნაწილაკის სიჩქარე, იმპულსის მუდმივობის კანონიდან შეიძლება ვიპოვოთ მეორე ნაწილაკის სიჩქარე.

გაცილებით უფრო რთულია შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი იშლება სამ ან მეტ ნაწილაკად. ამ შემთხვევაში დაშლის ენერგია ცალსახად აღარ საზღვრავს დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკების სიჩქარეთა სიდიდეებს, კიდევაც რომ ცნობილი იყოს მათი მასები.

თ ა ვ ი მ ა თ ე

ათვლის არაინერციული სისხვეპი

§ 52. უ მ ხ ა ვ ა ლ ი

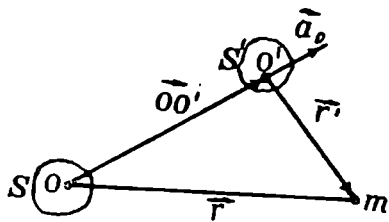
წინა თავებში მიღებული ყველა შედეგი გამოყვანილი იყო იმ დაშვებით, რომ წერტილების მოძრაობა განიხილება ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ. მხოლოდ ასეთი ათვლის სისტემების მიმართ არის მართებული ინერციის პრინციპი, იმპულსისა და ენერჯიის მუდმივობის კანონები, მოძრაობის განტოლებები და მექანიკის სხვა კანონები. მაგრამ ძალიან ხშირად გვინდა დაკვირვებათა წარმოება არაინერციული სისტემებიდან, ე. ი. ისეთი სისტემებიდან, რომლებიც ინერციული სისტემების მიმართ აჩქარებულად მოძრაობენ. ასეთ არაინერციულ სისტემას წარმოადგენს, მაგალითად, აჩქარებულად ან შენელებულად მოძრავე მატარებელი. აჩქარებულად მოძრავე ლიფტი, რაკეტა, დედამიწა (ვინაიდან იგი ბრუნავს თავისი ღერძის ირგვლივ) და სხვ. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი მაგალითი არაინერციული სისტემისა არის დედამიწა, ვინაიდან სწორედ იგი წარმოადგენს ათვლის სისტემას ყოველდღიურ ცხოვრებაში.

ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ, როგორ მიმდინარეობს მექანიკური მოვლენები და როგორა სახე აქვს მექანიკის კანონებს ასეთი არაინერციული სისტემების მიმართ. ვინაიდან ზოგადი არაინერციული სისტემის განხილვა საკმაოდ რთულია, ჩვენ განვიხილავთ ორ უმარტივეს შემთხვევას: 1. როდესაც არაინერციული სისტემა მოძრაობს ინერციული სისტემის მიმართ მუდმივი აჩქარებით: $\vec{a} = \text{const}$ და 2. როდესაც არაინერციული სისტემა ბრუნავს ინერციული სისტემის მიმართ მუდმივი კუთხური სიჩქარით: $\vec{\omega} = \text{const}$. საჭიროა აღინიშნოს, რომ არაინერციული სისტემების განხილვა იმით კი არ არის გამოწვეული, რომ ინერციული სისტემის თვალსაზრისით არ შეგვიძლია რაიმე მექანიკური მოვლენის ახსნა; მაგალითად, დედამიწაზე მიმდინარე ყველა მექანიკური მოვლენა შეიძლება მარტივად აიხსნას ინერციული სისტე-

მის თვალსაზრისით, ე. ი. ისეთი სისტემის თვალსაზრისით, რომლის მიმართაც დედამიწა ბრუნავს; ეს ახსნა დამყარებული იქნება მექანიკის იმ კანონების გამოყენებაზე, რომლებიც ჩამოყალიბებულია ინერციული სისტემისათვის. როგორც ვნახავთ, იმავე მოვლენების ახსნა არაინერციულ სისტემაში მყოფი დამკვირვებლის მიერ შეიძლება მექანიკის კანონებში გარკვეული ცვლილებების შეტანით. მიუხედავად ამისა, ზოგჯერ ძალიან ხელსაყრელია ათვლის სისტემად არაინერციული სისტემის არჩევა, ვინაიდან ეს მნიშვნელოვნად ამარტივებს მოვლენების აღწერასა და ახსნას.

§ 53. სწორხაზოვნად და თანაბრად აჩქარებულად მოძრაში არაინერციული სისტემა

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც S' სისტემა მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად აჩქარებულად S ინერციული სისტემის მიმართ. ასეთი სისტემები ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში. თუ დედამიწას გარკვეული მიახლოებით ინერციულ სისტემად ჩავთვლით, აჩქარებულად ან შენელებულად მოძრაი მატარებელი, ტრამვაის ვაგონი და ყოველი ეტლი იქნება ასეთი არაინერციული სისტემა. ყველასათვის ცნობილია, რომ ასეთ სისტემაში დამკვირვებელი ცხადად გრძნობს ახალი, როგორც ამბობენ, ინერციის ძალის მოქმედებას, რომელიც ამოძრავებს მას, მაგალითად, წინ ან უკან.



ნახ. 91

ვთქვათ, S' სისტემა მოძრაობს S სისტემის მიმართ \vec{OO}' ვექტორის გასწვრივ (ნახ. 91). გარდაქმნის ფორმულებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{OO}',$$

$$t' = t.$$

ეს ფორმულები ისეთივე სახისაა, როგორც გალილეის გარდაქმნის ფორმულები, იმ განსხვავებით, რომ განსახილველ შემთხვევაში \vec{OO}' არ არის ღრობის პროპორციული. ორჯერ გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0. \tag{X, 1}$$

სადაც \vec{a}_0 -ით აღნიშნულია S' სისტემის აჩქარება S სისტემის მიმართ, \vec{a} და \vec{a}' წარმოადგენენ განსახილველი ნაწილაკის აჩქარებებს

ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ. გადამრავლებით ნაწილაკის მასაზე და იმის მხედველობაში მიღებით, რომ ინერციულ სისტემაში

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

სადაც \bar{F} არის ნაწილაკზე მოქმედი ძალა, გამოწვეული გარეშე სხეულების მოქმედებით, მივიღებთ

$$m\bar{a}' = \bar{F}' - m\bar{a}_0. \quad (X, 2)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ არაინერციულ სისტემაში მასის ნამრავლი აჩქარებაზე არ უდრის იმ ძალას, რომელიც მოქმედებდა ნაწილაკზე ინერციულ სისტემაში. განტოლების მარჯვენა მხარეს დამატებულია $-m\bar{a}_0$. სიდიდე — მასის ნამრავლი არაინერციული სისტემის უარყოფით აჩქარებაზე. (X, 2) ფორმულა იმას გვიჩვენებს, რომ მოძრაობის დინამიკური განტოლება (ნიუტონის მეორე კანონი) არ რჩება ინვარიანტული აჩქარებულად მოძრავ ათვლის სისტემაზე გადასვლის დროს. მაგრამ შეგვიძლია შევინარჩუნოთ ნიუტონის მეორე კანონის ფორმა (მასის ნამრავლი აჩქარებაზე უდრის ძალას), თუ განვაზოგადებთ ძალის ცნებას და $-m\bar{a}_0$ სიდიდესაც ვუწოდებთ ძალას მიუხედავად იმისა, რომ იგი არ არის გამოწვეული რაიმე სხეულებთან ურთიერთქმედებით; ამ დამატებით ძალას

$$\bar{F}'_{in} = -m\bar{a}_0, \quad (X, 3)$$

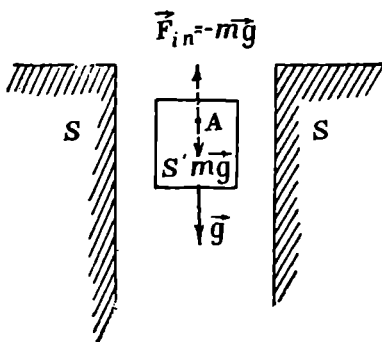
რომელიც გამოწვეულია ათვლის სისტემის არაინერციულობით, ეწოდება ინერციის ძალა. იგი ყოველთვის მიმართულია ათვლის სისტემის აჩქარების საწინააღმდეგოდ.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ერთი და იმავე ნაწილაკის მოძრაობა არ წარმოებს ერთნაირად ინერციული და არაინერციული სისტემების თვალსაზრისით იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც საწყისი პირობები ერთნაირად არის შერჩეული. ის ფაქტი, რომ არაინერციულ სისტემაში ნაწილაკი მოძრაობს ისე, თითქოს მასზე მოქმედებს დამატებითი ძალა — $m\bar{a}_0$, ნათლად ჩანს მრავალი მოვლენიდან. გავხსენოთ თუნდაც ის ყველასათვის ცნობილი ფაქტი, რომ მატარებლის სწრაფად ამოძრავების ან შეჩერების დროს მასში მყოფი დამკვირვებელი განიცდის ინერციის ძალის მოქმედებას; ეს ძალა სწორედ ზემოთ მოყვანილი ფორმულით არის გამოსახული. მატარებელი მისი სწრაფი ამოძრავების დროს წარმოადგენს არაინერციულ სისტემას, რომლის აჩქარება მიმართულია მოძრაობის გასწვრივ, ამიტომ ყოველი სხეული ამ სისტემის მიმართ განიცდის აჩქარების საწინააღმდეგოდ მიმართული ინერციული ძალის მოქმედებას, რის გამოც მატარებლის საკმაო აჩქარე-

ბით ამოძრავების დროს, დამკვირვებელი გრძნობს უკან მიმართული ძალის მოქმედებას, ხოლო მატარებლის სწრაფად დამუხრუჭების დროს იგი განიცდის წინ მიმართული ძალის მოქმედებას.

როგორც ინერციის ძალის მოქმედების მეორე მაგალითი, განვიხილოთ ლიფტის ვარდნა შახტში (ნახ. 92). დავეუშვათ, რომ ლიფტი თავისუფლად ვარდება შახტში. ვინაიდან ვარდნა წარმოადგენს თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობას, ლიფტი იქნება ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული სახის არა-ინერციული სისტემა. ამიტომ მასში მოთავსებული ყველა სხეული განიცდის ინერციის ძალის მოქმედებას. თუ ვარდნის აჩქარებას აღვნიშნავთ \vec{g} -თი, ინერციის ძალისათვის მივიღებთ

$$\vec{F}'_{in} = -m\vec{g}.$$



ნახ. 92

განვიხილოთ ლიფტის შიგნით მოთავსებული რაიმე A ნაწილაკი. ინერციული სისტემის თვალსაზრისით ამ ნაწილაკზე მოქმედებს მხოლოდ ერთი ძალა — დედამიწის მიზიდვის ძალა, რომელიც გამოიხატება ფორმულით

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

ამიტომ ამ სისტემის თვალსაზრისით A ნაწილაკი მოძრაობს ვერტიკალურად ქვევით \vec{g} აჩქარებით (თუ საწყის მომენტში იგი უძრავი იყო). სულ სხვა სახით წარმოგვიდგება იგივე მოვლენა (A ნაწილაკის მოძრაობა) S' არაინერციული სისტემის (ლიფტის) მიმართ. ამ სისტემის მიმართ A ნაწილაკზე, გარდა \vec{F} ძალისა, მოქმედებს კიდევ დამატებითი ინერციის \vec{F}'_{in} ძალა და ამიტომ მისი მოძრაობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}'_{in} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0;$$

აქედან ვღებულობთ

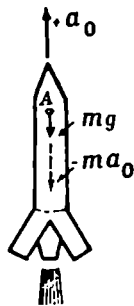
$$\vec{a}' = 0.$$

ვხედავთ, რომ ლიფტის მიმართ ნაწილაკის აჩქარება ნულის ტოლია და, თუ ნაწილაკი საწყის მომენტში უძრავი იყო (ლიფტის მიმართ), იგი უძრავი დარჩება შემდეგშიც. ეს იმას ნიშნავს, რომ ლიფტში

მყოფ დამკვირვებელს შეუძლია აიღოს სხეული, გააჩეროს იგი ნებისმიერ ადგილას, გაუშვას ხელი და სხეული დარჩება უძრავ მდგომარეობაში (ლიფტის მიმართ). ამ დამკვირვებლისათვის, ე. ი. თავისუფალ ვარდნილ ლიფტში, სხეულები „კარგავს“ წონას (მათი წონა ბათილდება ზევით მიმართული ინერციის ძალით). თვით დამკვირვებელიც იქნება „უწონო“. ისევე როგორც მის ირგვლივ ლიფტში მყოფი ყოველი სხეული.

აღნიშნული მოვლენა ადვილად შეიძლება აიხსნას როგორც ინერციული, ისე არაინერციული ათვის სისტემის თვალსაზრისით; მაგალითად, იმ ფაქტს, რომ Δ სხეული უძრავია ლიფტის მიმართ, ინერციული დამკვირვებელი (რომლის მიმართაც ლიფტი თავისუფლად ვარდება) შემდეგნაირად ახსნის: ლიფტში მოთავსებულ სხეულზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $\vec{F} = m\vec{g}$. ამიტომ იგი ვარდება ვერტიკალურად ქვევით \vec{g} აჩქარებით. ასეთივე აჩქარებით ვარდება თვით ლიფტიც, ამიტომ სხეული უძრავი იქნება ლიფტის მიმართ.

არაინერციულ სისტემაში, ე. ი. ლიფტში მყოფი დამკვირვებელი იმავე მოვლენას შემდეგნაირად ახსნის. სხეულზე, გარდა სიმძიმის \vec{F} ძალისა, მოქმედებს კიდევ ინერციის— $m\vec{g}$ ძალა და ამიტომ საერთო



ნახ. 93

ძალა ნულის ტოლია. ცხადია, რომ სხეული უძრავი იქნება ლიფტის მიმართ. როგორც ვხედავთ, ერთი და იგივე მოვლენა (სხეულის უძრავობა ლიფტის მიმართ) შეიძლება აიხსნას ორივე დამკვირვებლის მიერ, მაგრამ მაშინ როდესაც „უძრავი“ დამკვირვებელი ამისათვის იყენებს მართო სიმძიმის ძალას, არაინერციული დამკვირვებელი იძულებულია გამოიყენოს დამატებითი ინერციის ძალა.

საინტერესოა გავარჩიოთ ინერციული ძალის მოქმედება დედამიწის ზედაპირიდან ვერტიკალურად ზევით ატყორცნილი რაკეტის შემთხვევაში. ასროლის საწყის ეტაპზე რაკეტა მოძრაობს დიდი აჩქარებით (ნახ. 93). და, თუ ამ აჩქარებას აღვნიშნავთ $+a_0$ -ით, რაკეტაში მყოფ ყოველ სხეულზე იმოქმედებს

ამ აჩქარების საწინააღმდეგ გოდ, ე. ი. ვერტიკალურად ქვევით მიმართული ინერციის ძალა

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0.$$

ეს ძალა ემატება სიმძიმის ძალას და საერთო ძალა იქნება

$$\vec{F} + \vec{F}_{in} = m\vec{g} - m\vec{a}_0.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ვერტიკალურად ზევით აჩქარებულად მოძრავე რაკეტაში მყოფი სხეულის წონა კი არ „ქრება“, არამედ იზრდება, ყოველი სხეული უფრო მძიმდება და მის ჩვეულებრივ წონაზე უფრო მეტი ძალით აწევება საყრდენს. ცხადია, თვით დამკვირვებელიც მძიმდება, რასაც გარკვეული გავლენა შეუძლია მოახდინოს ფიზიოლოგიურ პროცესებზე. ამიტომაც არის, რომ კოსმოსური მოგზაურობის თვალსაზრისით ფრიალ მნიშვნელოვანი ხდება წონის „დაკარგვის“ ან „გადიდების“ გავლენის შესწავლა ადამიანის ორგანიზმზე.

§ 54. ვიქტორიის ცვლილება ინერციული და აბინერციული სისტემების მიმართ

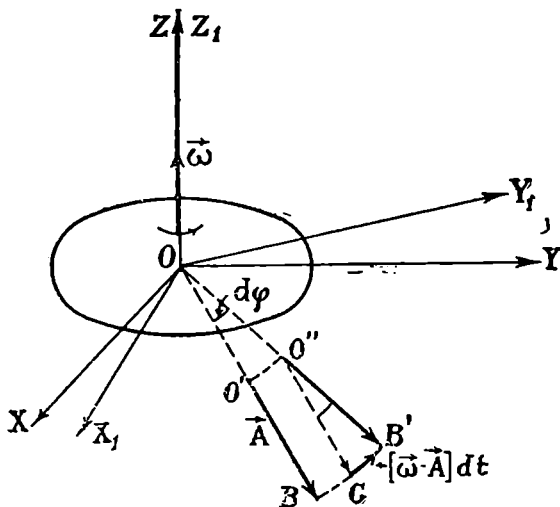
შემდეგში ჩვენ დაგვიკირდება გამოყენება ფორმულისა, რომელიც აკავშირებს რაიმე ვექტორის ცვლილებას არაინერციული სისტემის მიმართ მის ცვლილებასთან ინერციული სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, $OX_1Y_1Z_1$ არაინერციული სისტემა ბრუნავს $OXYZ$ ინერციული სისტემის OZ ღერძის ირგვლივ $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. დაუშვათ, აგრეთვე, რომ საწყის მომენტში OX_1 ღერძი თანხვედრა OX ღერძს, ხოლო OY_1 ღერძი — OY ღერძს (ნახ. 94). მცირე dt დროის შემდეგ არაინერციული სისტემა მობრუნდება $d\varphi = \omega dt$ კუთხეზე და OX_1 და OY_1 ღერძები ახალ მდებარეობას დაიკავენ. ვთქვათ, \vec{A} ვექტორი O' მოდების წერტილით უცვლელია არაინერციული სისტემის მიმართ, ე. ი. ბრუნავს მასთან ერთად ინერციული სისტემის მიმართ. მიუხედავად იმისა, რომ არაინერციული სისტემის მიმართ \vec{A} ვექტორის ცვლილება ნულის ტოლია, მისი ცვლილება ინერციული სისტემის მიმართ არ იქნება ნული. ნახაზზე ნაჩვენებია \vec{A} ვექტორის მდებარეობა სისტემის მობრუნებამდე და მობრუნების შემდეგ ($\vec{O'B}$ და $\vec{O''B'}$ ვექტორები). იმის გამოსარკვევად, თუ რამდენად შეიცვალა ვექტორი, გადავიტანოთ \vec{A} ვექტორი თავის პარალელურად ისე, რომ მისი სათავე მოხვდეს O'' წერტილში ($O''C$ ვექტორი). $O''C$ და $O''B'$ ვექტორების სხვაობა იქნება \vec{A} ვექტორის ცვლილება ინერციული სისტემის მიმართ. სიდიდით იგი $A d\varphi$ -ს ტო-

ლია და მიმართულია $\bar{\omega}$ და \bar{A} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად ისე, რომ $\bar{\omega}$, \bar{A} და \overline{CB} ვექტორები მარჯვენა სისტემას აღგენენ. ამიტომაც შეიძლება დავწეროთ

$$\overline{CB} = [\bar{\omega} \bar{A}] dt \quad (X, 4)$$

ასეთია არაინერციული სისტემის მიმართ უცვლელი ვექტორის ცვლილება ინერციული სისტემის მიმართ, გამოწვეული არაინერციული სისტემის ბრუნვით, თუ, გარდა ამ ცვლილებისა, ხდება \bar{A} ვექტორის



ნახ. 94

ცვლილება თვით არაინერციული სისტემის მიმართ, ეს ცვლილება დაემატება ზემოთ გამოთვლილ ცვლილებას და ვექტორის საერთო ცვლილებისათვის ინერციული სისტემის მიმართ გვექნება

$$d\bar{A} = d'\bar{A} + [\bar{\omega} \bar{A}] dt, \quad (X, 5)$$

სადაც $d'\bar{A}$ -თი აღნიშნულია ვექტორის ცვლილება არაინერციული სისტემის მიმართ, dt -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{d'\bar{A}}{dt} + [\bar{\omega} \bar{A}]. \quad (X, 6)$$

აქ $\frac{d\bar{A}}{dt}$ არის ვექტორის წარმოებული ინერციული სისტემის მიმართ,

$\frac{d'\bar{A}}{dt}$ იმავე ვექტორის წარმოებული არაინერციული სისტემის მიმართ,

ხოლო $[\vec{a}, \vec{A}]$ — ვექტორის ცვლილება დროის ერთეულში, გამოწვეული არაინერციული სისტემის ბრუნვით ინერციული სისტემის მიმართ. ასეთია ზოგადი ფორმულა, რომელიც აკავშირებს ნებისმიერი ვექტორის ცვლილებებს არაინერციული და ინერციული სისტემების მიმართ. იგი მართებულია ყოველი ვექტორისათვის, როგორც ბუნებისა ც უნდა იყოს იგი. ჩვენ გამოვიყვანეთ ის იმ კერძო შემთხვევისათვის, როდესაც \vec{A} ვექტორი XOY სიბრტყეში მდებარეობს (ნახაზის გამარტივების მიზნით), მაგრამ იგი მართებულია ნებისმიერად მიმართული ვექტორისათვის.

მიღებული ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ წერტილის რადიუს-ვექტორისათვის, სიჩქარისათვის, ძალისა და სხვა ვექტორული სიდიდეებისათვის. არ უნდა გვეგონოს, რომ ამ ფორმულის გამოყენება შეიძლება მხოლოდ ისეთი ვექტორული სიდიდეებისათვის, რომლებიც განიხილება ინერციული სისტემის მიმართ. იგი შეიძლება გამოვიყენოთ არაინერციული სისტემის მიმართ განხილული ვექტორისათვისაც. ($X, 6$) ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ, მაგალითად, ნაწილაკის სიჩქარისათვის არაინერციული სისტემის მიმართ. მიუხედავად იმისა, რომ სიჩქარე გამოთვლილია არაინერციული სისტემის მიმართ. მისი ცვლილება შეიძლება გამოვითვალოთ როგორც არაინერციული, ისე ინერციული სისტემის მიმართ.

§ 55. თანაბრად მბრუნავი არაინერციული სისტემა. ცენტრიდანული და კოჰიოლინის აჩქარებები

გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგი არაინერციული სისტემის მეორე შემთხვევის განსახილველად, როდესაც ეს სისტემა მუდმივი $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით ბრუნავს ინერციული სისტემის მიმართ. დავუშვათ, რომ $\vec{\omega}$ მიმართულია OZ ღერძის გასწვრივ (ნახ. 95). განვიხილოთ რაიმე A წერტილის მოძრაობა ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ. აღვნიშნოთ \vec{r} -ით ამ წერტილის რადიუს-ვექტორი O სათავის მიმართ, რომელიც იმავე დროს არის არაინერციული სისტემის სათავე. ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე ინერციული სისტემის მიმართ. ე. ი. $\dot{\vec{r}}$ ვექტორის წარმოებული ინერციული სისტემის მიმართ. ეს წარმოებული, რომელსაც ჩვენ $\frac{d\vec{r}}{dt}$ -თი აღვნიშნავთ, წინა პარაგრაფის თანახმად ორი ნაწილისაგან შედგება. პირველი ნაწილი არის \vec{r} ვექტორის ცვლილება არაინერციული სისტემის

მიმართ. მას ჩვენ $\frac{d'\bar{r}}{dt}$ -თი აღვნიშნავთ. მეორე ნაწილი არის მისი ცვლილება, გამოწვეული არაინერციული სისტემის ბრუნვით ინერციული სისტემის მიმართ; ეს მეორე ნაწილი წინა პარაგრაფის მიხედვით შემდეგნაირად გამოისახება:

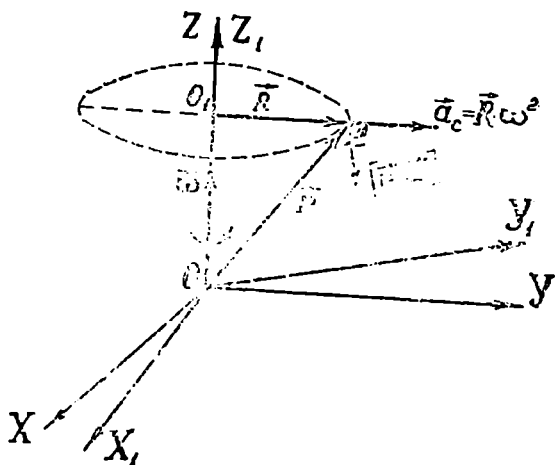
$$[\bar{\omega} \bar{r}].$$

საბოლოოდ \bar{r} -ის წარმოებულისათვის ინერციული სისტემის მიმართ მივიღებთ

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d'\bar{r}}{dt} + [\bar{\omega} \bar{r}]. \quad (X, 7)$$

ცხადია, $\frac{d'\bar{r}}{dt}$ არის ნაწილაკის სიჩქარე ინერციული სისტემის მიმართ,

ხოლო $\frac{d\bar{r}}{dt}$ — იმავე ნაწილაკის სიჩქარე არაინერციული სისტემის მი-



ნაბ. 95

მართ. თუ პირველს აღვნიშნავთ \bar{v} -თი, ხოლო მეორეს \bar{v}_1 -ით, მივიღებთ

$$\frac{d'\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{v}_1 + [\bar{\omega} \bar{r}]. \quad (X, 8)$$

ანეთა ნაწილაკების სიჩქარეთა კავშირი ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ. ვინაიდან მოძრაობის დინამიკურ განტოლე-

ბაში შედის აჩქარება, საკიროა გამოყვანა ფორმულისა, რომელიც და-
 ეკავშირებს აჩქარებებს ინერციული და არაინერციული სისტემების მი-
 წართ. პირველი შეხედვით ამისათვის საკმარისია გავაწარმოოთ (X, 8)
 ფორმულა, ვინაიდან \vec{v} ვექტორის წარმოებული მოგვეცემს აჩქარებას
 ინერციული სისტემის მიმართ, ხოლო \vec{v}_1 ვექტორის წარმოებული —
 აჩქარებას არაინერციული სისტემის მიმართ. მაგრამ უნდა მიექცეს
 უზრაღდება იმ გარემოებას, რომელი სისტემის მიმართ უნდა მოვახ-
 ცინოთ გაწარმოება; თუ გაწარმოებას ვახდენთ ინერციული სისტემის
 მიმართ, \vec{v} სიჩქარის წარმოებული მოგვეცემს ნაწილაკის აჩქარებას
 ინერციული სისტემის მიმართ. მაგრამ \vec{v}_1 -ის წარმოებული ინერცი-
 ული სისტემის მიმართ არ იქნება აჩქარება არაინერციული სისტემის
 მიმართ. მართლაც, აჩქარება არაინერციული სისტემის მიმართ არის
 რადიუს-ვექტორის მეორე წარმოებული არაინერციული სისტემის მი-
 მართ. \vec{v}_1 არის \vec{r} -ის პირველი წარმოებული არაინერციული სისტე-
 მის მიმართ და ის კიდევ ერთხელ უნდა გავაწარმოოთ არაინერ-
 ციული სისტემის მიმართ, რათა მივიღოთ აჩქარება. გავაწარ-
 მოთ \vec{v} ინერციული სისტემის მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \left[\vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right], \quad (X, 9)$$

ვინაიდან $\vec{\omega}$ მუდმივია.

ყველა წარმოებული აღებულია ინერციული სისტემის მიმართ. წი-
 ნა-პარაგრაფში გამოყვანილი ზოგადი ფორმულის თანახმად

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d'\vec{r}_1}{dt} + [\vec{\omega} \vec{r}_1], \quad (X, 10)$$

სადაც $\frac{d'\vec{r}_1}{dt}$ არის \vec{r}_1 -ის წარმოებული არაინერციული სისტემის მი-
 მართ. ვინაიდან \vec{v}_1 არის სიჩქარე არაინერციული სისტემის მიმართ,
 $\frac{d'\vec{v}_1}{dt}$ იქნება აჩქარება არაინერციული სისტემის მიმართ, რომელსაც
 ჩვენ \vec{a}_1 -ით აღვნიშნავთ. შევცვალოთ (X, 9) ფორმულის მარჯვენა
 მხარის პირველი წევრი (X, 10) ემოსახულებით და მეორე წევრში
 $\frac{d'\vec{r}}{dt}$ -ს მაგიერ ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (X, 8) ფორმულიდან. მი-
 ვიღებთ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}_1}{dt} + [\vec{\omega} \vec{v}_1] + [\vec{\omega} \vec{v}_1] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]].$$

ანუ

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + 2[\vec{\omega} \vec{v}_1] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]. \quad (X, 11)$$

ასეთია ფორმულა, რომელიც აკავშირებს ნაწილაკის აჩქარებას ინერციული სისტემის მიმართ მისივე აჩქარებასთან არაინერციული სისტემის მიმართ. ამ ფორმულიდან ადვილად გამოვხატავთ აჩქარებას არაინერციული სისტემის მიმართ აჩქარებით ინერციული სისტემის მიმართ

$$\vec{a}_1 = \vec{a} - 2[\vec{\omega} \vec{v}_1] - [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]$$

ან, თუ გადავსვამთ მამრავლებს მარჯვენა მხარის მეორე და მესამე წევრში, გვექნება:

$$\vec{a}_1 = \vec{a} + 2[\vec{v}_1 \vec{\omega}] + [\vec{\omega} [\vec{r} \vec{\omega}]]. \quad (X, 12)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ აჩქარება არაინერციული სისტემის მიმართ განსხვავდება აჩქარებისაგან ინერციული სისტემის მიმართ ორი დამატებითი წევრით. პირველ მათგანს $2[\vec{v}_1 \vec{\omega}]$, რომელიც დამოკიდებულია ნაწილაკის სიჩქარეზე არაინერციული სისტემის მიმართ, ეწოდება კორიოლისის აჩქარება და აღინიშნება \vec{a}_k -თი

$$\vec{a}_k = 2[\vec{v}_1 \vec{\omega}]. \quad (X, 13)$$

მეორეს კი $[\vec{\omega} [\vec{r} \vec{\omega}]]$, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ნაწილაკის მდებარეობაზე, ეწოდება ცენტრადანული აჩქარება და აღინიშნება \vec{a}_c -თი

$$\vec{a}_c = [\vec{\omega} [\vec{r} \vec{\omega}]]. \quad (X, 14)$$

ცხადია, ორივე ეს დამატებითი აჩქარება გამოწვეულია სისტემის არაინერციულობით და დამოკიდებულია არაინერციული სისტემის $\vec{\omega}$ კუთხურ სიჩქარეზე ინერციული სისტემის მიმართ. გავარჩიოთ უფრო დაწვრილებით ამ დამატებითი აჩქარებების ბუნება. დავიწყოთ ცენტრადანული აჩქარებით, რომელიც უფრო მარტივია თავისი ხასიათით, მიუხედავად უფრო რთული ფორმულისა. გავავლოთ \vec{R} რადიუს-ვექტორი ბრუნვის ღერძიდან განსახალკეელ წერტილამდე (ღერძის მართობულად). ცხადია, რომ R არის რადიუსი იმ წერტილი ტრაექტორიისა, რომელსაც შემოაწერს ნაწილაკი არაინერციული სისტემის ბრუნვის დროს, ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{OO}_1$$

და ამიტომ

$$[\vec{r} \vec{\omega}] = [\vec{R} \vec{\omega}] + [\vec{OO}_1 \vec{\omega}],$$

მაგრამ მეორე ვექტორული ნამრავლი ნულია, ვინაიდან ორივე ვექტორი $\vec{O}O_1$ და \vec{a} ერთ ღერძზე მდებარეობს. ამიტომ მივიღებთ

$$[\vec{r} \vec{a}] = [\vec{R} \vec{a}].$$

ამ ვექტორული ნამრავლის გამოხატველი ვექტორი მართობულია \vec{R} და \vec{a} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა და მოგეზულია მარჯვენა ბურღის წესის მიხედვით. მისი მიმართულება ნაჩვენებია 95-ე ნახაზზე. სიდიდით იგი Ra ნამრავლის ტოლია, ვინაიდან \vec{R} და \vec{a} ერთმანეთის მართობულია. ცენტრიდანული აჩქარების მისაღებად უნდა განვიხილოთ \vec{a} -სი და ამ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ეს ვექტორი მიმართული იქნება \vec{R} რადიუს-ვექტორის გასწვრივ და სიდიდით ტოლი იქნება Ra^2 -ისა, ვინაიდან \vec{a} და $[\vec{R} \vec{a}]$ ვექტორები ერთმანეთის მართობულია. მაშასადამე, მივიღეთ, რომ ცენტრიდანული აჩქარება მიმართულია \vec{R} -ის გასწვრივ (ბრუნვის ცენტრიდან) და სიდიდით Ra^2 -ის ტოლია

$$\vec{a}_c = \vec{R}a^2. \quad (X, 15)$$

იგივე შედეგი შეიძლება მივიღოთ, თუ გამოვიყენებთ ორმაგი ვექტორული ნამრავლის ფორმულას

$$[A [BC]] = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B}).$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$[\vec{a} [\vec{R} \vec{a}]] = \vec{R}(\vec{a}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{a}\vec{R}),$$

მაგრამ მეორე წევრში მდგომი $(\vec{a}\vec{R})$ სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია (ვინაიდან \vec{a} და \vec{R} ვექტორები ერთმანეთის მართობულია) და ამიტომ მივიღებთ

$$\vec{a}_c = [\vec{a} [\vec{R} \vec{a}]] = \vec{R}a^2.$$

სწორედ იმიტომ ეწოდება ამ აჩქარებას ცენტრიდანული აჩქარება, რომ იგი მიმართულია ნაწილაკის მიერ შემოწერილი წრეხაზის ცენტრიდან გარეთ. იგი პარაბოციულია ცენტრამდე მანძილისა და კუთხური სიჩქარის კვადრატისა. ხშირად ცენტრიდანულ აჩქარებას გამოსახავენ არა კუთხური სიჩქარის, არამედ არაინერციული სისტემის იმ წერტილის ხაზოვანი სიჩქარით, რომელშიც მოცემულ პოზიტივში იმყოფება განსახილველი წერტილი. ვინაიდან არაინერციული სისტემის ეს წერტილი ზრუნავს ა კუთხური სიჩქარით და მისი მანძილი ღერძამდე არის R , ამიტომ მისი ხაზოვანი სიჩქარე ინერციული სისტემის მიმართ იქნება

$$v_0 = R\omega.$$

(X, 15) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$\vec{a}_c = \frac{v_0^2}{R} \vec{R}. \quad (X, 16)$$

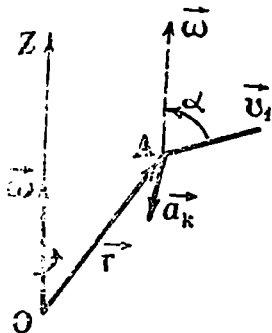
ცენტრიდანული აჩქარების სიდიდისთვის გვქვამება

$$a_c = R\omega^2 = \frac{v_0^2}{R}. \quad (X, 16')$$

განვიხილოთ ახლა კორიოლისის აჩქარება. სიდიდით იგი ტოლია

$$a_k = 2v_1\omega \cos \alpha, \quad (X, 17)$$

სადაც α არის კუთხე \vec{v}_1 და $\vec{\omega}$ ვექტორებს შორის. მიმართულება მოიძებნება მარჯვენა ბურღის წესით. კორიოლისის აჩქარება მიმართულია იმ ბურღის გადანაცვლების გასწვრივ, რომელიც ბრუნავს \vec{v}_1 ვექტორიდან $\vec{\omega}$ ვექტორისაკენ (ნახ. 96). როგორც კორიოლისის აჩქარების ფორმულიდან ჩანს, ეს აჩქარება აქვს მხოლოდ ისეთ ნაწილს, რომელიც მოძრაობს არაინერციული სისტემის მიმართ.



ნახ. 96

**§ 56. მოძრაობის დინამიკური განაწილება ვაკუუმში
არაინერციულ სისტემაში. ცენტრიდანული და
კორიოლისის ძალები**

გამოვარკვეით, როგორ დაიწერება მოძრაობის განტოლება მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში. როგორც ვიცით, ინერციულ სისტემაში მოძრაობის დინამიკურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (X, 18)$$

სადაც \vec{F} არის ინერციულ სისტემაში ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ჯამი; ეს ძალები ყოველთვის გამოწვეულია ვარემ სხეულების მოქმედებით და დამოკიდებულია ნაწილაკის მდებარეობაზე ამ სხეულებას მიმართ.

გადავიდეთ ახლა არაინერციულ სისტემაზე, რისთვისაც გამოვიყენოთ

(X, 11) ფორმულა. ამ ფორმულის გამრავლება მასაზე \bar{r} (X, 18) ფორმულის მხედველობაში მიღება მოგვცემს

$$\begin{aligned} \text{ახ} \quad m\bar{a}_1 &= \bar{F} + 2m[\bar{v}_1\bar{a}] + m[\bar{a}[\bar{r}\bar{a}]], \\ m\bar{a}_1 &= \bar{F} + 2m[\bar{v}_1\bar{a}] + m\bar{a}^2\bar{r}. \end{aligned} \quad (X, 19)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ არაინერციულ სისტემაში მასის ნამრავლი აჩქარებაზე ($m\bar{a}_1$) არ უდრის \bar{F} ძალას, რომელიც მოქმედებდა ნაწილაკზე ინერციულ სისტემაში. განტოლების მარჯვენა მხარეში ამ ძალის გარდა შედის ორი სიდიდე, $2m[\bar{v}_1\bar{a}]$ და $m\bar{a}^2\bar{r}$, რომლებიც წარმოადგენს სათანადოდ კორიოლისისა და ცენტრიდანული აჩქარებების ნამრავლებს მასაზე. მიღებული შედეგი ორნაირად შეიძლება იქნეს გაგებული (ისევე როგორც თანაბრად აჩქარებულად მოძრავი არაინერციული სისტემის შემთხვევაში). შეიძლება დავტოვოთ ძალის განმარტება, როგორც სიდიდისა, რომელიც ახასიათებს სხეულების ურთიერთქმედებას და დამოკიდებულია მათ ურთიერთმდებარეობაზე. მაშინ, ისევე როგორც ინერციულ სისტემაში, არაინერციულ სისტემაშიც ერთადერთ ძალად უნდა ჩავთვალოთ \bar{F} ძალა, ვინაიდან სხეულების კონფიგურაცია არ იცვლება არაინერციულ სისტემაში გადასვლის შედეგად. ასეთი გაგების დროს (X, 19) განტოლება გვიჩვენებს, რომ არაინერციულ სისტემაში აღარ არის მართებული ნიუტონის მეორე კანონი მასისა და აჩქარების ნამრავლის ძალასთან ტოლობის შესახებ. მართლაც, (X, 19) ფორმულის თანახმად $m\bar{a}_1$ არ უდრის \bar{F} , რომელიც ნაწილაკზე მოქმედ ერთადერთ ძალას წარმოადგენს. ძალის საშუალებით აჩქარების გამოსათვლელად ძალას უნდა დავუმატოთ კიდევ ორი სიდიდე $2m[\bar{v}_1\bar{a}]$ და $m\bar{a}^2\bar{r}$. მაგრამ შესაძლებელია (X, 19) განტოლების მეორე ინტერპრეტაცია და სწორედ ეს ინტერპრეტაცია გამოიყენება ყველაზე ხშირად ფიზიკაში. შეიძლება განვაზოგადოთ ძალის ცნება და ეუწოდოთ ძალა მასის ნამრავლს აჩქარებაზე დამოუკიდებლად იმისაგან, გამოწვეულია იგი სხეულების ურთიერთქმედებით თუ რაიმე სხვა მიზეზით. ამ შემთხვევაში (X, 19) ფორმულის მარჯვენა მხარეში სამივე სიდიდე იქნება ძალა და ჩვენ ვიტყვით, რომ არაინერციულ სისტემაშიც მართებულია მასისა და აჩქარების ნამრავლის ტოლობა ძალასთან, მხოლოდ ინერციული სისტემისაგან განსხვავებით, ამ სისტემაში, გარდა \bar{F} ძალისა, რომელიც სხეულების ურთიერთქმედებით იყო გამოწვეული, არსებობს კიდევ ორი ძალა, გამოწვეული სისტემის არაინერციულობით. ეს ძალებია $2m[\bar{v}_1\bar{a}]$ და $m\bar{a}^2\bar{r}$. მათ ეწოდებათ სათანადოდ კორიოლისისა და ცენტრიდანული ძალები და აღინიშნებიან \bar{F}_k -თი და \bar{F}_c -თი

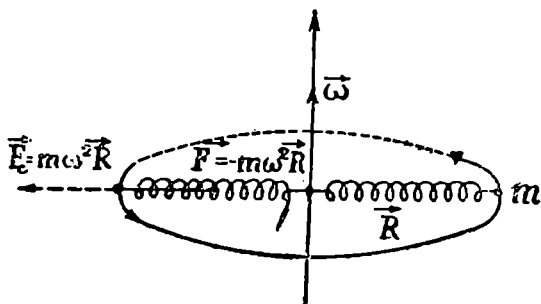
$$\bar{F}_k = 2m[\bar{v}_1\bar{a}] = m\bar{u}_k, \quad (X, 20)$$

$$\vec{F}_c = m\omega^2 \vec{R} = m\vec{a}_c = \frac{mv_0^2}{R^2} \vec{R}. \quad (X, 21)$$

ამ უკანასკნელი ინტერპრეტაციის თანახმად თანაბრად მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში, გარდა გარეშე სხეულებით გამოწვეული ძალისა, რომელიც ინერციულ სისტემაშიც მოქმედებს, ნივთიერ წერტილზე მოქმედებენ კიდევ (X, 20) და (X, 21) ფორმულებით განსაზღვრული კორიოლისისა და ცენტრიდანული ძალები. ყოველივე ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში ნაწილაკის აჩქარების გამოსათვლელად და, მაშასადამე, მოძრაობის საპოვნელად, გარდა უშუალოდ მოდებული ძალისა, ჩვენ იძულებული ვართ შემოვიღოთ დამატებითი ინერციის ძალები—ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები.

§ 57. მბრუნავი არაინერციული სისტემის მარტივი მაგალითები

განვიხილოთ მბრუნავი არაინერციული სისტემის რამდენიმე მარტივი მაგალითი. ყველაზე მარტივია ცენტრთან რაიმე ბმით, მაგალითად, ზამბარით, დაკავშირებული სხეულის მოძრაობა წრეხაზზე (ნახ. 97). ინერციული სისტემის თვალსაზრისით, თუ ამ სისტემის მიმართ სხეული ბრუნავს $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით, ამ სხეულზე მოქმე-



ნახ. 97

დებს ერთადერთი ძალა, გამოწვეული ზამბარის გაჭიმვით. იგი მიმართულია ცენტრისაკენ (ცენტრისკენული ძალა) და, თუ მოძრაობა წარმოებს R -რადიუსიან წრეხაზზე, გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{R};$$

ეს ძალა ამოძრავებს სხეულს წრეხაზზე, თუ მას თავიდანვე ჰქონდა მინიჭებული სათანადო საწყისი სიჩქარე. განვიხილოთ ახლა იგივე

მოვლენა მბრუნავი არაინერციული სისტემის მიმართ, რომელიც სხეულთან ერთად ბრუნავს $\bar{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. ამ სისტემის მიმართ ისევე მოქმედებს ცენტრისკენ მიმართული \bar{F} ძალა, მაგრამ მიუხედავად ამისა სხეული უძრავია. სხეულის ეს უძრავობა არაინერციული სისტემის მიმართ წინა პარაგრაფის მიხედვით შემდეგნაირად უნდა აიხსნას: სისტემის არაინერციულობის გამო სხეულზე, გარდა ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ძალისა, უნდა მოქმედებდნენ ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები. ჩვენს შემთხვევაში კორიოლისის ძალა ნულის ტოლია, ვინაიდან სხეული უძრავია არაინერციული სისტემის მიმართ. რჩება მხოლოდ ცენტრიდანული ძალა, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$\bar{F}_c = m\omega^2 \bar{R},$$

სხეულზე მოქმედი საერთო ძალისათვის მივიღებთ

$$\bar{F} + \bar{F}_c = -m\omega^2 \bar{R} + m\omega^2 \bar{R} = 0$$

და ამიტომაც სხეული უძრავია (არაინერციული სისტემის მიმართ საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია). როგორც ვხედავთ, ერთი და იგივე მოვლენა, სხეულის ბრუნვა ინერციული სისტემის მიმართ და უძრავობა არაინერციული სისტემის მიმართ, შეიძლება აიხსნას ორივე სისტემის თვალსაზრისით, იმ განსხვავებით, რომ ინერციულ სისტემაში სხეულზე იმოქმედებს მხოლოდ ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ცენტრისკენული ძალა, არაინერციულ სისტემაში მას დაემატება ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ცენტრიდანული ძალა.

ინერციულ სისტემაში

სხეულზე მოქმედებს ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ცენტრისკენული ძალა $\bar{F} = -m\omega^2 \bar{R}$, რომლის გავლენით სხეული მოძრაობს R -რადიუსიან წრეხაზზე.

არაინერციულ სისტემაში

სხეულზე, გარდა ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ცენტრისკენული ძალისა $\bar{F} = -m\omega^2 \bar{R}$, მოქმედებს $\bar{F}_c = m\omega^2 \bar{R}$ ცენტრიდანული ძალა. საერთო ძალა ნულის ტოლია და ამიტომ სხეული უძრავია.

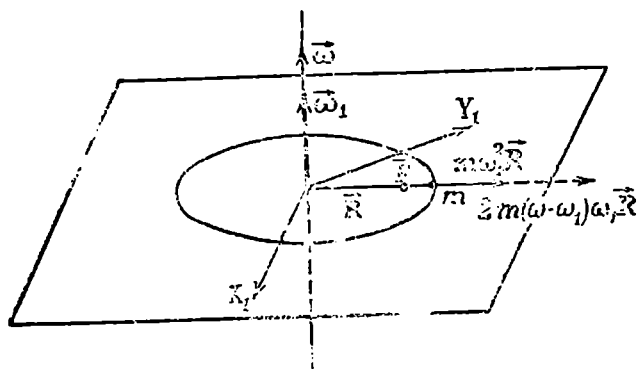
განვიხილოთ იგივე შემთხვევა სხეულის წრიული მოძრაობისა, მხოლოდ არაინერციულ სისტემად ავიჩიოთ სისტემა, რომელიც ბრუნავს არა სხეულთან ერთად, არამედ უფრო ნაკლები ω_1 კუთხური სიჩქარით (ნახ. 98); ამ სისტემის მიმართ განსახილველი სხეული მოძრაობს ($\omega - \omega_1$) კუთხური სიჩქარით, ე. ი. $v_1 = R(\omega - \omega_1)$ ხაზოვანი სიჩქარით. როგორ ახსნის ამ სისტემაში მყოფი დამკვირვებელი სხე-

ულის მოძრაობას მის მიმართ $\omega - \omega_1$ კუთხური სიჩქარით I_i -რადიუსიან წრეხაზზე? როდესაც მის მიმართ სხეული მოძრაობს $v_1 = R(\omega - \omega_1)$ ხაზოვანი სიჩქარით, გარდა ცენტრიდანული ძალისა $m\omega_1^2 \bar{R}$, მოქმედებს კორიოლისის ძალა, რომელიც მიმართული იქნება \bar{R} რადიუს-ვექტორის ვასწვრივ და გამოისახება ფორმულით

$$\bar{F}_k = 2m(\omega - \omega_1)\omega_1 \bar{R}_i$$

სხეულზე მოქმედი საერთო ძალა არაინერციული სისტემის თვალსაზრისით იქნება

$$\bar{F} + \bar{F}_c + \bar{F}_k = -m\omega^2 \bar{R} + m\omega_1^2 \bar{R} + 2m(\omega - \omega_1)\omega_1 \bar{R}_i = -m(\omega - \omega_1)^2 \bar{R}_i$$



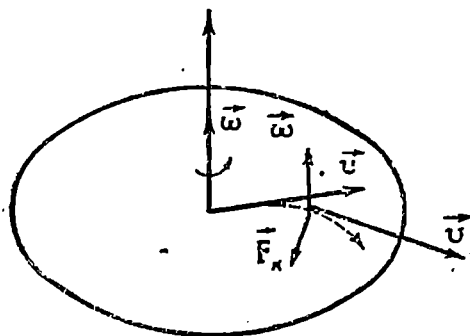
ნახ. 93

ეს სწორედ ის ძალაა, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ სხეული მოძრაობდეს ამ სისტემის მიმართ $\omega - \omega_1$ კუთხური სიჩქარით.

როგორც ვხედავთ, ერთი და იმავე სხეულის მოძრაობის ხასიათის ასახსნელად სხვადასხვა ათვლის სისტემის თვალსაზრისით სხვადასხვა ძალის განხილვაა საჭირო. ინერციული სისტემის თვალსაზრისით სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ძალა, ω კუთხური სიჩქარით მბრუნავ სისტემაში, გარდა ამ ძალისა, მოქმედებს კიდევ ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული $m\omega^2 \bar{R}$ ცენტრიდანული ძალა, ხოლო ω_1 კუთხური სიჩქარით მბრუნავ სისტემაში, $m\omega_1^2 \bar{R}$ ცენტრიდანული ძალის გარდა, ჩნდება კიდევ $2m(\omega - \omega_1)\omega_1 \bar{R}_i$ კორიოლისის ძალა.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, სრულიად გლუვი დისკოს ცენტრიდან რადიუსის მიმართულებით \vec{r} სიჩქარით ამოძრავებულა m მასის სხეული. ვინაიდან ამ სხეულზე არავითარი ძალები არ მოქმე-

დებს, იგი იმოდრავებს სწორხაზოვნად და მუდმივი სიჩქარით (ნახ. 99). დავეუშვათ ახლა, რომ დისკო ბრუნავს $\bar{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. ცხადია, მბრუნავი დისკოს მიმართ სხეულის მოძრაობა არ იქნება სწორხაზოვანი. მისი ტრაექტორია გამრუდდება, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე; ეს გამრუდებული ტრაექტორია ნათლად გამოჩნდება, თუ



ნახ. 99

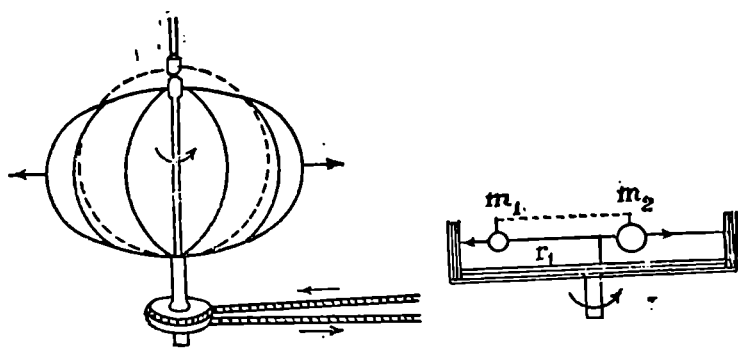
რაიმე საშუალებით (მელნით ან საღებავით) შოვახერხებთ. რომ საეულმა დააჩინოს კვალი დისკოზე თავისი მოძრაობის დროს. როგორ ახსნის ტრაექტორიის გამრუდებას დისკოსთან ერთად მბრუნავი დამკვირვებელი? მართალია, სხეულზე არ მოქმედებს სხვა სხეულების მოქმედებით გამოწვეული ძალა, მაგრამ ვინაიდან მისი სისტემა (მბრუნავი დისკო) არ არის ინერციული, მან უნდა მიიღოს მხედველობაში ამ არაინერციულობით გამოწვეული ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები. რადიალური მოძრაობიდან გადახრას, ე. ი. ტრაექტორიის გამრუდება გამოიწვევს კორიოლისის ძალა, რადგანაც ცენტრიდანული ძალა რადიუსის გასწვრივაა მიმართული. ნახაზზე ნაჩვენებია კორიოლისის ძალის მიმართულება. იგი მიმართულია ტრაექტორიის მხევისადმი, ე. ი. სიჩქარისადმი მართობულად და იწვევს ნორმალურ აჩქარებას. ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი მოიძებნება ფორმულიდან

$$\frac{r^2}{\rho} = 2v\omega, \text{ ე. ი. } \frac{1}{\rho} = \frac{2\omega}{v},$$

ვინაიდან $\bar{\omega}$ და \bar{v} ვექტორები ურთიერთმართობია.

ცენტრიდანული ძალის მოქმედების თვალსაჩინო ცდები მარტივად ხორციელდება ე. წ. ცენტრიდანული მანქანის საშუალებით (ნახ. 100). მანქანის ლერძზე ათავსებენ სხვადასხვა ხელსაწყოს და მოჰყავთ სწრაფ

ბრუნვაში. ნახაზი გვიჩვენებს როგორ ამოიზნიქება ცენტრიდანული ძალის გავლენით ბრუნვამდე წრეხაზის ფორმის მქონე ბრტყელი ლითონის ღეროები, რის გამოც სფერო გადაიქცევა პოლუსებთან შეჭყლექილ ბრუნვის ელიფსოიდად. ეს ცდა თვალსაჩინოდ გვიჩვენებს დედამიწის ეკვატორის გამობერილობის მიზეზს. იმავე ნახაზზე ნაჩვენებია

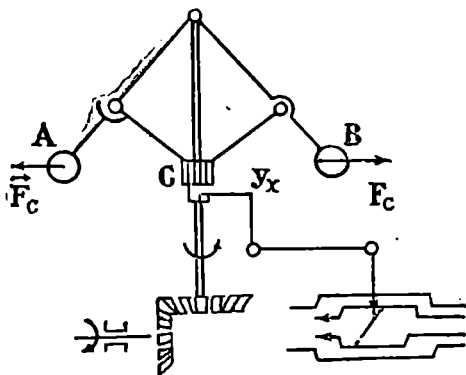


ნ.ხ. 100

ცდა, რომელიც იძლევა სხვადასხვა მასის სხეულზე მოქმედი ცენტრიდანული ძალების შედარების შესაძლებლობას. ჩარჩოში ჩამაგრებულ ღერძზე მოთავსებულია ორი სხვადასხვა მასის ბირთვი, რომელთაც შეუძლიათ თავისუფლად სრიალი ღეროს გასწვრივ. ბირთვები დაკავშირებულია ერთმანეთთან ძაფით. ჩარჩოს ბრუნვაში მოყვანისას მათზე იმოქმედებს ცენტრიდანული ძალები. თუ მათი მანძილები ბრუნვის ღერძიდან მასების უკუპროპორციულია, ეს ძალები ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული იქნება და ბირთვები უძრავი დარჩება. საკმარისია ცოტათი გადავანაცვლოთ ისინი, რომ ერთმა ცენტრიდანულმა ძალამ გადააქარბოს მეორეს და ბირთვების სისტემამ გადაინაცვლოს ან ერთ, ან მეორე მხარეს (ნახ. 100).

ცენტრიდანული ძალის პრაქტიკული გამოყენების მაგალითს წარმოადგენს უატის რეგულატორი (ნახ. 101). *A* და *B* ბირთვები შეერთებულია ღერძთან მოძრავი ქუროს საშუალებით. რეგულატორი შეერთებულია ორთქლის მანქანის მბრუნავ ღერძთან ისე, რომ ბრუნავს მასთან ერთად. თუ ბრუნვის სიჩქარე სასურველზე მეტად გაიზარდა, ბირთვებზე მოქმედი ცენტრიდანული ძალებიც გაიზარდება, ბირთვები უფრო მეტად გაიშლება, რაც გამოიწვევს *C* ქუროს აწევას. უკანასკნელი შეერთებულია ორთქლის მიმწოდებლის სარკველთან ისეთნაირად,

რომ მისი აწვევის დროს ორთქლის მიწოდება კლებულობს; ეს კი იწვევს ბრუნვის სიჩქარის შემცირებას. თუ ბრუნვის სიჩქარე სასურველზე ნაკლები გახდა, ცენტრიდანული ძალა შემცირდება, ბირთვები ჩამოეშვება და C ქურო დაიწვეს. ეს გამოიწვევს სარქვლის გახსნას, ორთქლის მიწოდების გაზრდას და ბრუნვის სიჩქარის გადიდებას. როგორც



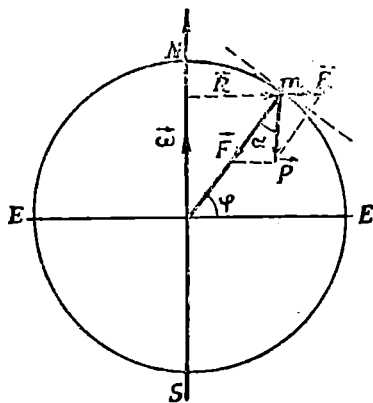
ნახ. 101

უხედავთ, ცენტრიდანული ძალის საშუალებით უატის რეგულატორი ახდენს მანქანის ბრუნვის სიჩქარის რეგულირებას. ცენტრიდანული ძალები გამოიყენება ე. წ. ცენტრიფუგებში, რომელთა დანიშნულებაა სითხეში მყოფი სხვადასხვა სიმკვრივის ნივთიერებათა ერთმანეთისაგან გაყოფა. სითხიანი ქურჩველი მოჰყავთ სწრაფ ბრუნვაში (ზოგ ცენტრიფუგაში ბრუნვათა რიცხვი აღწევს რამდენიმე ათეულ ათასს მინუტში) და ამის გამო წარმოშობილი ცენტრიდანული ძალა იწვევს ნივთიერებათა გაყოფას სიმკვრივის მიხედვით. რაც უფრო მკვრივია ნაწილაკი, მით უფრო შორს თავსდება იგი ღერძიდან და კედლების ხერხელებში გასვლის შემდეგ გროვდება ცალკე.

§ 58. დედამიწა როგორც არაინერციული სისტემა

1. უძრავი სხეულის წონა. საკითხი სხეულის წონის შესახებ არც ისე მარტივია, როგორც შეიძლება მოგვეჩვენოს. საქმე ისაა, რომ წონის ქვეშ ხშირად სულ სხვადასხვა ძალა იგულისხმება. ამბობენ, მაგალითად, რომ წონა არის ძალა, რომლითაც დედამიწა იზიდავს განსახილველ სხეულს. შეიძლება აგრეთვე ვთქვათ, რომ წონა არის ძალა, რომლითაც სხეული აწვება ჰორიზონტალურ საყრდენს და, ბოლოს,

წონა შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც ძალა, რომელიც იწვევს სხეულის ვარდნას დედამიწაზე (ანიჭებს მას ვარდნის აჩქარებას). ბუნებრივია ისმის კითხვა. საზღვრავს თუ არა ეს სამი განმარტება ერთ და იმავე ძალას და თუ ისინი სხვადასხვა ძალებია, რომელ მათგანს ეწოდება სხეულის წონა? ცხადია, ვინაიდან დედამიწა არაინერციული სისტემაა (იგი თანაბრად ბრუნავს ინერციული სისტემის მიმართ), მის ზედაპირზე მოთავსებულ ყოველ სხეულზე, გარდა მიზიდვის ძალისა, იმოქმედებს კიდევ ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები. ამიტომ საერთო ძალა, რომელიც არის სწორედ ვარდნის აჩქარების გამომწვევი ძალა ან, რაც იგივეა, ჰორიზონტალურ საყრდენზე მოქმედი ძალა, განსხვავებული იქნება დედამიწის მიზიდვის ძალისაგან. ამიტომაც ხშირად ასხვავებენ ერთმანეთისაგან ორ წონას: „ნამდვილს“ და „მოჩვენებითს“. „ნამდვილს“ წონას უწოდებენ ძალას, რომლითაც დედამიწა იზიდავს სხეულს, ხოლო „მოჩვენებით“ წონას — ვარდნის აჩქარების გამომწვევ ძალას, რომელიც არის „ნამდვილი“ წონის და ინერციის ძალების ჯამი. რასაკვირველია, თუ წონა ეუწოდეთ სხეულზე მოქმედ საერთო ძალას, მაშინ ვეღარ ვიტყვით, რომ სხეულის წონა დედამიწის მიზიდვის ძალაა. შემდეგში ჩვენ სწორედ ასე მოვიქცევით, ე. ი. წონას ვუწოდებთ საყრდენზე მოქმედ ან ვარდნის აჩქარების გამომწვევ ძალას. გამოვარკვიოთ ახლა რა განსხვავებაა წონასა და დედამიწის მიზიდვის ძალას შორის. დაეუშვათ, რომ დედამიწა არის ერთგვაროვანი სფერო და წარმოვიდგინოთ, რომ მისი ზედაპირის რომელიმე ადგილას, რომლის განედია φ , მოთავსებულია m მასის სხეული (ნახ. 102). აღვნიშნოთ \vec{F} -ით დედამიწის მიზიდვის ძალა, რომელიც მიმართულია დედამიწის ცენტრისაკენ. ვინაიდან სხეული უძრავია დედამიწის მიმართ, მასზე იმოქმედებს მხოლოდ ცენტრიდანული ინერციის ძალა



ნახ. 102

ვის ძალაა. შემდეგში ჩვენ სწორედ ასე მოვიქცევით, ე. ი. წონას ვუწოდებთ საყრდენზე მოქმედ ან ვარდნის აჩქარების გამომწვევ ძალას. გამოვარკვიოთ ახლა რა განსხვავებაა წონასა და დედამიწის მიზიდვის ძალას შორის. დაეუშვათ, რომ დედამიწა არის ერთგვაროვანი სფერო და წარმოვიდგინოთ, რომ მისი ზედაპირის რომელიმე ადგილას, რომლის განედია φ , მოთავსებულია m მასის სხეული (ნახ. 102). აღვნიშნოთ \vec{F} -ით დედამიწის მიზიდვის ძალა, რომელიც მიმართულია დედამიწის ცენტრისაკენ. ვინაიდან სხეული უძრავია დედამიწის მიმართ, მასზე იმოქმედებს მხოლოდ ცენტრიდანული ინერციის ძალა

$$\vec{F}_c = m\omega^2 \vec{R}, \quad (X, 22)$$

მიმართული დერძიდან განსახილველ წერტილამდე გავლებული \vec{R} რადიუს-ვექტორის გასწვრივ. სხეულზე მოქმედი საერთო ძალა იქნება ამ ორი ძალის ჯამი. ნახაზი გვიჩვენებს, რომ ეს ძალა აღარ არის მიმართული დედამიწის ცენტრისაკენ. ამიტომაც სწორედ ეს \vec{P} ძალა, ჯამი \vec{P} და \vec{F}_c ძალებისა, იქნება სხეულის წონა

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_c. \quad (X, 23)$$

მაშასადამე, \vec{P} წონა როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით განსხვავდება მიზიდვის ძალისაგან. წონის გამომხატველი \vec{P} ვექტორის მიმართულება სწორედ ვერტიკალის მიმართულებაა (მის გასწვრივ და არა მიზიდვის ძალის გასწვრივ ჩერდება შევეული და მის გასწვრივ ხდება ნაწილაკის ვარდნა). გამოვთვალოთ კუთხე წონასა და მიზიდვის ძალებს შორის. ნახაზიდან ადვილად მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c \sin \varphi}{F - F_c \cos \varphi}. \quad (X, 24)$$

მარტივი გამოთვლებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ცენტრიდანული ძალა ძალიან მცირეა მიზიდვის ძალასთან შედარებით. მართლაც, $F = m\omega^2 r$, სადაც ω არის მიზიდვის ძალით გამოწვეული აჩქარება, რომელიც ტოლია დაახლოებით $980 \frac{cm}{sec^2}$ -ისა, მეორე მხრივ, F_c ცენტრიდანული ძალა გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$F_c = m\omega^2 r \cos \varphi. \quad (X, 25)$$

მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა ადვილად გამოითვლება, თუ ჩავსვამთ დედამიწის რადიუსისა და კუთხური სიჩქარის მნიშვნელობებს

$$r = 6.4 \cdot 10^8 \text{ cm}, \quad \omega = 0.73 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1};$$

მივიღებთ

$$F_c^{max} = 3,4m < 980m, \quad (X, 26)$$

ამიტომაც (X, 24) ფორმულაში შეიძლება უგულებელვყოთ მნიშვნელში $F_c \cos \varphi$ წევრი F -თან შედარებით. ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{F} \sin \varphi. \quad (X, 27)$$

¹ მიზიდვით გამოწვეული აჩქარება არის ისევე უბრალო აჩქარება $\omega^2 r$ განეუ-
ს, ე. ი. პოლსისა.

α კუთხის სიმცირის გამო $\epsilon \ll \alpha$ შეიძლება შევცვალოთ თვით კუთხით, რის შედეგადაც მივიღებთ მარტივ ფორმულას

$$\alpha = \frac{\omega^2 r}{2 g_{900}} \sin 2\varphi. \quad (X, 28)$$

იმავე სიზუსტით შეიძლება გამოვითვალოთ წონის სიდიდე

$$P = F(1 - \alpha \operatorname{ctg} \varphi). \quad (X, 29)$$

(X, 28) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ მიახლოებით ფორმულას

$$P = F \left(1 - \frac{r\omega^2}{g_{900}} \cos^2 \varphi \right). \quad (X, 30)$$

თუ ჩავსვამთ ზემოთ მოყვანილ რიცხვით მნიშვნელობებს, გვექნება

$$P = F(1 - 0,0034 \cos^2 \varphi). \quad (X, 31)$$

უფრო ხშირად როგორც F , ისე P ძალას გამოსახავენ მასის და სათანადო აჩქარების ნამრავლის სახით

$$P = mg_{\varphi}, \quad F = mg_{900},$$

სადაც g_{φ} იქნება ვარდნის აჩქარება, გამოწვეული წონით, ხოლო g_{900} — აჩქარება, გამოწვეული მიზიდვის ძალით. მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$g_{\varphi} = g_{900} (1 - 0,0034 \cos^2 \varphi) \quad (X, 32)$$

ცხადია, g_{900} იმავე დროს ვარდნის აჩქარებაა პოლუსზე, ვინაიდან ამ ადგილას ცენტრიდანული ძალა ნულის ტოლია.

მიღებული თეორიული ფორმულის დაკვირვების შედეგებთან შედარების დროს უნდა მიექცეს ყურადღება იმ გარემოებას, რომ დედამიწა არ წარმოადგენს ერთგვაროვან სფეროს, როგორც ეს ჩვენ გვექონდა დაშვებული გამოთვლების დროს. ცენტრიდანული ძალის გავლენით დედამიწა გამობერილია ეკვატორზე, რაც კიდევ უფრო აღიდებს განსხვავებას g_{φ} -ს მნიშვნელობებს შორის სხვადასხვა განედზე. ამ საკითხს დაუბრუნდებით დედამიწის გრავიტაციული ველის განხილვის დროს. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ, თუ შემოვიღებთ g_0 აჩქარებას ეკვატორზე, (X, 32) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$g_{\varphi} \approx g_0 (1 + 0,0034 \sin^2 \varphi). \quad (X, 33)$$

წონის, ისევე როგორც ყოველი ძალის, საზომი ერთეული CGS სისტემაში უნდა იყოს დინი, ხოლო MKS სისტემაში — ნიუტონი. მაგრამ პრაქტიკაში წონისათვის იყენებენ ე. წ. ტექნიკურ ერთეულებს — გრამ-წონასა და კილოგრამ-წონას ან, თუ არ არის საშიშროება მასის

ერთეულთან არევისა, გრამსა და კილოგრამს. მართალია, ძალიან უხერხულია, რომ სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდის—მასისა და წონის საზომ ერთეულებს ერთი და იგივე სახელწოდება აქეთ: გრამი და კილოგრამი, მაგრამ ეს სახელწოდებები ისე დამკვიდრდა ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერებაში, რომ მათი შეცვლა სრულიად შეუძლებელია. გრამ-წონა (კილოგრამ-წონა) განიმარტება როგორც წონა გრამი (კილოგრამი) მასის მქონე სხეულისა 45° -ის განედზე და ზღვის დონეზე. ადგილმდებარეობისა და სიმაღლის ასეთი დაზუსტება საჭიროა, ვინაიდან სხეულის წონა ყველგან ერთი და იგივე არ არის. რადგანაც ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად

$$P = mg$$

და g -ს მნიშვნელობა 45° -ის განედზე და ზღვის დონეზე არის $g = 980,62$, გრამ-წონა შემდეგი თანაფარდობით იქნება დაკავშირებული დინთან:

$$1 \text{ Gr} = 980,62 \frac{g \cdot \text{cm}}{\text{sec}^2} 980,62 \text{ dyn}.$$

აქ Gr -ით აღნიშნულია გრამ-წონა იმისათვის, რომ განვსხვავოთ მასის ერთეულის g -ის აღნიშვნისაგან. ასევე, კილოგრამ-წონა აღნიშნება kGr -ით. მიახლოებითი გამოთვლებისას თვლიან, რომ ერთი გრამ-წონა 980 ან 981 დინს უდრის.

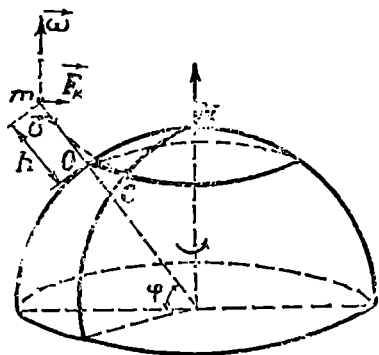
თუ წონა გაიზომება გრამ-წონით, მაშინ წონისა და მასის დამაკავშირებელი ფორმულა იქნება

$$P^* = m,$$

სადაც P^* ნიშნავს, რომ წონა გაზომილია ტექნიკურ ერთეულებში (ზუსტად ეს ფორმულა გამოდგება მხოლოდ 45° -ის განედზე და ზღვის დონეზე, მაგრამ თუ არ მივიღებთ მხედველობაში g -ს ცვალებადობას მდებარეობის მიხედვით, იგი შეიძლება ყოველთვის გამოვიყენოთ).

2. ვარდნილი სხეულის გადახრა აღმოსავლეთისაკენ. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც m მასის სხეული გარკვეული h სიმაღლიდან ვარდება დედამიწის ზედაპირზე ნულოვანი საწყისი სიჩქარით (ვერტიკალური მიმართულებით). დედამიწა რომ არ ბრუნავდეს, სხეული იმოძრაებდა ზუსტად ვერტიკალურად და დაეცემოდა O წერტილში (ნახ. 103). მაგრამ დედამიწის არაინერციულობის გამო ყოველი ვარდნილი სხეული იხრება აღმოსავლეთისაკენ, ე. ი. იგი დაეცემა არა O , არამედ C წერტილში. ამ მოვლენის ახსნა არაინერციული სისტემის თვალსაზრისით ასეთია: ვარდნილი სხეულის \vec{v}_1 სიჩქარე (მბრუნავი

დედამიწის მიმართ) მიმართულია დედამიწის ცენტრისაკენ, ვერტიკალის გასწვრივ. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ \vec{w} კუთხური სიჩქარე მიმართულია ღერძის გასწვრივ სამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ, ადვილად დავასკვნით, რომ კორიოლისის ძალა მიმართული უნდა იყოს აღმოსავლეთისაკენ. ამ ძალის სიდიდისათვის მივიღებთ



ნახ. 103

$$F_k = 2mv_1 w \cos \varphi, \quad (X, 34)$$

სადაც φ არის განედი. სათანადო აჩქარებისათვის მივიღებთ

$$a_k = 2v_1 w \cos \varphi. \quad (X, 35)$$

ენაიდან ვარდნა თანაბრად აჩქარებული მოძრაობაა და ჩვენ დავუშვით, რომ საწყისი სიჩქარე ნულია, სიჩქარისათვის t მომენტში გვექნება

$$v_1 = gt,$$

სადაც g არის ვარდნის აჩქარება. კორიოლისის აჩქარებისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$a_k = 2gw \cos \varphi \cdot t.$$

კორიოლისის ძალის გავლენით მინიჭებულ და აღმოსავლეთისაკენ მიმართულ სიჩქარეს მივიღებთ ინტეგრებით დროის მიმართ

$$v_k = gw \cos \varphi \cdot t^2.$$

კიდევ ერთი ინტეგრება მოგვცემს აღმოსავლეთისაკენ გადახრის სიშორეს

$$s_k = w \cos \varphi \cdot \frac{gt^3}{3}. \quad (X, 36)$$

თუ ვარდნა T დროის განმავლობაში წარმოებს, OC მონაკვეთი გამოითვლება ფორმულით

$$OC = w \cos \varphi \frac{gT^3}{3}. \quad (X, 37)$$

ეს გადახრა შეიძლება გამოვხატოთ ვარდნის სიმაღლის საშუალებით, თუ გავიხსენებთ ფორმულას, რომელიც აკავშირებს h და T სიდიდეებს

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

წინა ფორმულაში ჩასმა მოგვცემს

$$OC = \frac{1}{3} \omega \cos \varphi \sqrt{\frac{8h^3}{g}}. \quad (X, 38)$$

ასეთ მანძილზე უნდა გადაიხაროს აღმოსავლეთისაკენ h სიმალიდან ჩამოვარდნილი სხეული კორიოლისის ძალის გავლენით. როგორც ვხედავთ, იგი უდიდესია ეკვატორზე და ნულის ტოლია პოლუსზე. აღსანიშნავია, რომ გადახრა ყოველთვის აღმოსავლეთისაკენ წარმოებს, მიუხედავად იმისა, თუ რომელ ნახევარსფეროში ხდება ვარდნა.

მიღებული შედეგი შემოწმებული იყო ცდებით. გადახრა აღმოსავლეთისაკენ არსებობს ყოველ ექვს გარეშე, მხოლოდ თეორიასთან რაოდენობითი შედარება ძალიან ძნელია, ვინაიდან გაზომვებს ხელს უშლის ჰაერის წინააღმდეგობა. მიუხედავად ამისა, გაზომილი გადახრები იმავე რიგისაა, როგორც თეორიულად გამოთვლილი. ამას ნათლად გვიმტკიცებს ქვემოთ მოყვანილი ცხრილი, რომელშიც მოცემულია ცდებისა და თეორიის შედეგები.

ცხრილი 5

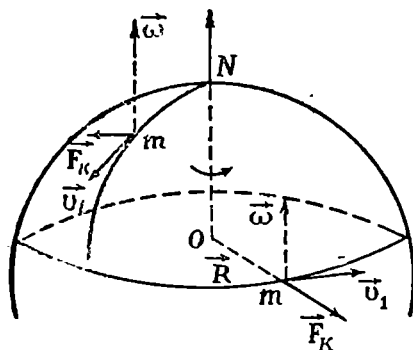
დამკვირვებელი	დაკვირვების წელი	სიმაღლე h მ	გადახრა მმ	
			გამოთვლილი	ცდის
რეიხი	1813	158	27,5	23.3 ± 4
პალი	1902	23	1,77	$1,05 \pm 0,15$
ფლამარიონი	1903	69	8,1	6,3
პაგესი	1912	23	0,899	0,890

3. კორიოლისის ძალის მოქმედება დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ მოძრავე სხეულზე. განვიხილოთ დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ მოძრავე სხეულის შემთხვევა. ვთქვათ, m მასის სხეული მოძრაობს ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში ჩრდილოეთიდან სამხრეთისაკენ, მერიდიანის გასწვრივ (ნახ. 104). ნახაზზე ნაჩვენებია მისი სიჩქარის მიმართულება. როგორც (X, 20) ფორმულიდან გამომდინარეობს, კორიოლისის ძალა მიმართული იქნება დასავლეთისაკენ პარალელის გასწვრივ. სრლიდით იგი იქნება:

$$F_h = 2mv; \omega \sin \varphi. \quad (X, 39)$$

ეს ძალა უდიდესია პოლუსზე და ნულის ტოლია ეკვატორზე. მოძრაობის მიმართ იგი მიმართულია მარჯვნივ. იმავე შედეგს მივიღებთ. თუ დავუშვებთ, რომ სხეული მოძრაობს სამხრეთიდან ჩრდილოეთი-

საკენ. სიჩქარე შეიცვალას მიმართულებას, რაც გამოიწვევს კორიოლისის ძალის მიმართულების შეცვლას; ეს იმას ნიშნავს, რომ ახლა იგი მიმართული იქნება აღმოსავლეთისაკენ, მაგრამ მოძრაობის მიმართ იგი ისევ მარჯვნივ იქნება მიმართული. როგორც ვხედავთ, ყოველ სხეულზე, რომელაც ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში მოძრაობს მერიდიანის



ნახ. 104

გასწვრივ, მოქმედებს მოძრაობისადმი მარჯვნივ მიმართული კორიოლისის ძალა. ვთქვათ ახლა, რომ სხეული მოძრაობს პარალელის გასწვრივ. იმავე ნახაზზე ნაჩვენებია კორიოლისის ძალის მიმართულება იმ შემთხვევაში, როდესაც მოძრაობა წარმოებს დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ. როგორც ვხედავთ, იგი მიმართულია ღერძიდან განსახილველ წერტილამდე გავლებული \vec{R} რადიუს-ვექტორის გასწვრივ და სიდიდით გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$F_h = 2 m v_1 \omega,$$

რადგანაც \vec{v}_1 მიმართულია $\vec{\omega}$ ვექტორის მართობულად. ეს ძალა შეიძლება დაიშალოს ორ მდგენელად. ერთი იქნება მიმართული ვერტიკალურად და შეამცირებს სხეულის წონას, მეორე კი—ზედაპირის გასწვრივ სამხრეთისაკენ, ე. ი. მოძრაობის მიმართ ისევ მარჯვნივ (ნახ. 105), პირველი მდგენელი გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$F_h' = 2m v_1 \omega \cos \varphi.$$

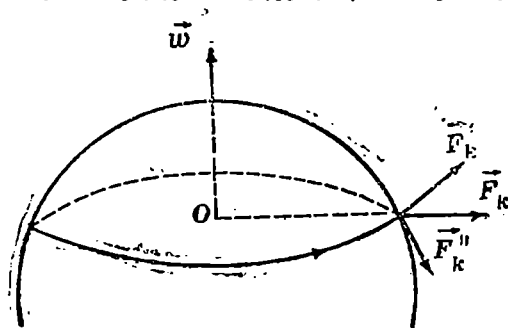
ასეთი სიდიდით მცირდება პარალელის გასწვრივ აღმოსავლეთისაკენ მოძრავე სხეულის წონა. მეორე მდგენელი

$$F_h'' = 2 m v_1 \omega \sin \varphi$$

იწვევს სხეულის გადახრას სამხრეთისაკენ (მოძრაობის მიმართ მარჯვნივ).

თუ სხეული მოძრაობს ისევ პარალელზე, მხოლოდ დასავლეთისაკენ, მივიღებთ იმავე შედეგს, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ სიჩქარის ნიშნის შეცვლის გამო შეიცვლება კორიოლისის ძალისა და მისი მდგენლების მიმართულება. სხეული გადაიხრება არა სამხრეთისაკენ, არამედ ჩრდილოეთისაკენ. მოძრაობის მიმართ ეს იქნება ისევ გადახრა მარჯვნივ.

როგორც ვხედავთ, ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში მოძრავი სხეული კორიოლისის ძალის მოქმედების შედეგად, წონის გაზრდის ან შემცო-



ნახ. 105

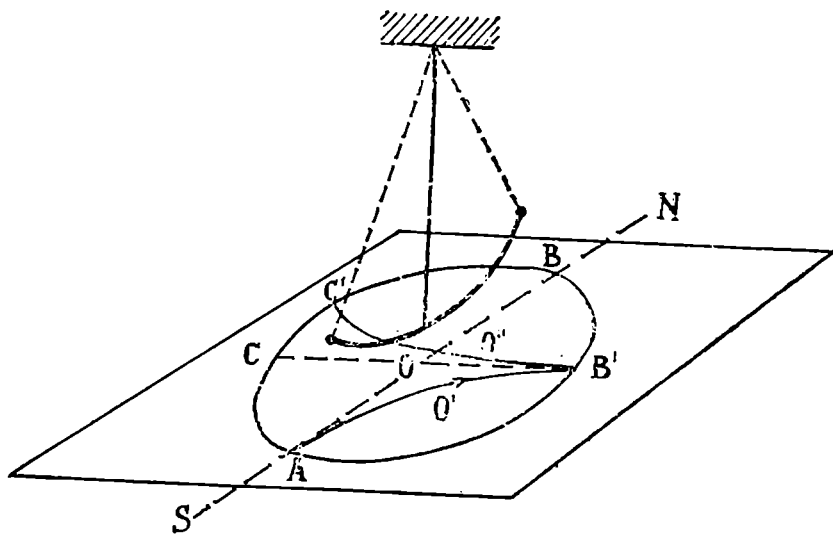
რების გარდა, განიცდის კიდევ გადახრას ყოველთვის მოძრაობის მიმართ მარჯვნივ. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ სამხრეთ ნახევარსფეროში მოძრავი სხეული ყოველთვის მოძრაობის მიმართ მარცხნივ გადაიხრება.

კორიოლისის ძალის მოქმედებით არის გამოწვეული მრავალი, პირველი შეხედვით, უცნაური მოვლენა, რომლებსაც ვხვდებით დედამიწის ზედაპირზე სხეულების მოძრაობის დროს. მაგალითად, მდინარე, რომელიც ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში მოედინება, უფრო მეტად ჩამორეცხავს მარჯვენა ნაპირს, ვიდრე მარცხენას; მატარებელი უფრო მეტად აწეობს მარჯვენა რელსს, ვიდრე მარცხენას და, თუ ლიანდაგზე მოძრაობა ერთი მიმართულებით წარმოებს, იგი (მარჯვენა რელსი) უფრო მეტად გაცედება. კორიოლისის ძალის მოქმედებით არის გამოწვეული აგრეთვე გასროლილი ყუმბარის გადახრა მარჯვნივ.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია კორიოლისის ძალის მოქმედება ჰაერის ნაკადზე, ე. ი. ქარზე. პოლარული არეებიდან ეკვატორისაკენ, ე. ი. სამხრეთისაკენ მიმართული ცივი ქარი, კორიოლისის ძალის გავ-

ლენით გადაიხრება მარჯვნივ, ე. ი. იმოდრავებს არა ჩრდილო-ეთიდან სამხრეთისაკენ, არამედ ჩრდილო-აღმოსავლეთიდან სამხრეთ-დასავლეთისაკენ (ე. წ. ჩრდილო-აღმოსავლეთის პასატი). ასევე, სამხრეთ ნახევარსფეროში წარმოიშობა სამხრეთ-აღმოსავლეთის პასატი; რომელიც უბერავს ანტარქტიკიდან ეკვატორისაკენ. კორიოლისის ძალია მოქმედებით აიხსნება აგრეთვე ჰაერის მოძრაობის ხასიათი ციკლონებსა და ანტიციკლონებში.

4. ფუკოს ცდა. დედამიწის არაინერციულობა გარკვეულ გავლენას ახდენს საქანის მოძრაობაზე, ისევე როგორც ყოველი სხეულის მოძრაობაზე. ვთქვათ, დედამიწა არ ბრუნავს, ე. ი. დავუშვათ, რომ იგი ინერციული სისტემაა, მაშინ მის რომელიმე ადგილას დაკიდებული საქანის რხევა იწარმოებს გარკვეულ ვერტიკალურ სიბრტყეში, ვინაიდან საქანზე მოქმედი ერთადერთი ძალა ვერტიკალურად მიმართული სიმძიმის ძალაა (ნახ. 106). თუ, მაგალითად, საქანი წონასწო-



ნახ. 106

რობის მდებარეობიდან გადახარეთ მერიდიანის სიბრტყეში, იგი ყოველთვის ამ სიბრტყეში უნდა მოძრაობდეს. მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ დედამიწა არაინერციული სისტემაა და ამიტომ საქანის ბირთვზე, გარდა სიმძიმის ძალისა, იმოქმედებს კიდევ კორიოლისის ძალა, მიმართული მოძრაობისადმი მარჯვნივ; ეს ძალა გამოიწვევს ტრაექტორიის გამარუღებას და თუ ამ ძალის გარეშე საქანს უნდა გაევიღო O წერტილ-

ზე და მისულოყო B წერტილში, ახლა იგი იმოძრაეებს $AO'B'$ ტრაექტორიაზე და მიადწევს B' წერტილს. უკან დაბრუნებისას (შემდეგი ნახევარპერიოდი) კორიოლისის ძალის გარეშე იგი გაივლიდა ისევ O წერტილზე და მიადწევდა C წერტილს, მაგრამ ვინაიდან კორიოლისის ძალა განაგრძობს მოქმედებას, ტრაექტორია გამრუდდება და საქანი იმოძრაეებს $B'O'C$ ტრაექტორიაზე და მიადწევს C წერტილს. ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი მომდევნო ნახევარბრუნევა წინა ბრუნვასთან შედარებით ცოტათი მობრუნებულ სიბრტყეში წარმოებს, ხოლო თვით ეს მობრუნება ხდება (ზევინდან დახედვის დროს) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. თუ, მაგალითად, პირველი ნახევარბრუნევა ჩრდილოეთ-სამხრეთ მიმართულებით, ე. ი. მერიდიანის სიბრტყეში მოხდა, შემდეგი ნახევარბრუნევის სიბრტყე იქნება ჩრდილო-აღმოსავლეთ-სამხრეთ-დასავლეთის მიმართულებით. შემდეგი ბრუნვის სიბრტყე კიდევ უფრო მობრუნებული იქნება და ეს მობრუნება განუწყვეტლივ იწარმოებს. ცხადია, რომ მობრუნების კუთხე დამოკიდებული იქნება კორიოლისის ძალის სიდიდეზე, რომელიც გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$F_k = 2 m v_1 \omega \sin \varphi,$$

სადაც φ არის ადგილის განედი. მობრუნების კუთხისათვის მივიღებთ

$$a_{\varphi} = k \cdot 2 m v_1 \omega \sin \varphi, \quad (X, 40)$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტი. ამ ფორმულას უფრო მარტივი სახე შეიძლება მივცეთ, თუ გამოვითვლით მობრუნების კუთხეს პოლუსზე მყოფი საქანისათვის, ე. ი. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ მნიშვნელობისათვის.

$$a_{\frac{\pi}{2}} = k \cdot 2 m v_1 \omega.$$

ჩასმა წინა ფორმულაში მოგვცემს

$$a_{\varphi} = a_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi. \quad (X, 41)$$

მობრუნების გამოთვლა პოლუსზე მყოფი საქანისათვის ადვილია. ცხადია, რომ გარკვეულ t დროში საქანის მობრუნების კუთხე ტოლი და საწინააღმდეგოა კუთხისა, რომელზეც მობრუნდება დედამიწა ამავე დროის განმავლობაში, ვინაიდან ω არის დედამიწის ბრუნვის კუთხურია სიჩქარე, t დროში მობრუნების კუთხისათვის (პოლუსზე) მივიღებთ

$$a_{\frac{\pi}{2}} = \omega t,$$

აქედან რხევის სიბრტყის მობრუნებისათვის φ განელზე გვექნება

$$a_{\varphi} = \omega t \cdot \sin \varphi. \quad (X, 42)$$

თუ ჩავსვამთ ω -ს მნიშვნელობას $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$, მივიღებთ

$$a_{\varphi} = 7,3 \cdot 10^{-5} t \cdot \sin \varphi.$$

ხშირად ხელსაყრელია მობრუნების კუთხის გამოსახვა არა რადიანებით, არამედ გრადუსებით. ამ შემთხვევაში ფორმულას შემდეგი სახე ექნება (თუ დრო გაზომილ იქნება არა სეკუნდებით, არამედ საათებით):

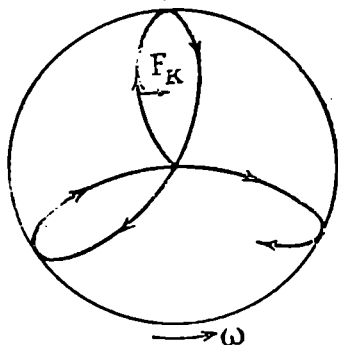
$$a_{\varphi} = 15^{\circ} \cdot t \sin \varphi. \quad (X, 43)$$

მიღებული შედეგის პირველი ექსპერიმენტული შემოწმება მოახდინა 1851 წელს ცნობილმა ფრანგმა ფიზიკოსმა ფუკომ, ამიტომაც ეწოდება განხილულ საქანს ფუკოს საქანი. ცხადია, რაც უფრო დიდია საქანის რხევის პერიოდი, ე. ი. მისი სიგრძე, მით უფრო ადვილად შეიმჩნევა სიბრტყის მობრუნება ერთი ან რამდენიმე რხევის განმავლობაში, რასაკვირველია, ცდის ჩატარების დროს უნდა იქნეს მიღებული ყოველგვარი ზომა, რათა გარეშე მიზეზებმა ხელი არ შეუშალოს მოვლენის დამზერას. საქანს უნდა ჰქონდეს საშუალება აწარმოოს რხევა ყველა მიმართულებით, მისი ტვირთი საკმაოდ მძიმე და სიმეტრიული უნდა იყოს (რათა არ იმოქმედოს ჰაერის ხახუნმა), იგი უნდა დაეცვათ ჰაერის მოძრაობისაგან და ა. შ. საქანს ამაგრებენ ან კარდანის საკიდზე, ან ჰორიზონტალურ ბურთულა-საკისარზე, რომელიც ბრუნავს საქანის სიბრტყესთან ერთად. ფუკოს პირველ ცდაში საქანის სიგრძე იყო 67 მეტრი, ხოლო ტვირთი იწონიდა 28 კილოგრამს. ერთ სრულ რხევას საქანი 16 სეკუნდში ასრულებდა და თავისი მოძრაობის კვალს ტოვებდა იატაკზე დაყრილ ქვიშაზე. ცდამ სავსებით დაადასტურა საქანის სიბრტყის მობრუნების ფაქტი და თვალსაჩინოდ დაამტკიცა დედამიწის ბრუნვა თავისი ღერძის გარშემო. ეს ცდა მრავალჯერ იქნა გამეორებული სხვადასხვა ადგილას და ყველა შემთხვევაში ცდის შედეგი საკმაო სიზუსტით თანხვდებოდა თეორიის შედეგებს. 107-ე ნახაზზე მოყვანილია ფუკოს საქანის ტრაექტორიის სახე იმ შემთხვევაში, როდესაც იგი გამოყვანილია წონასწორობის მდებარეობიდან ბიძკით.

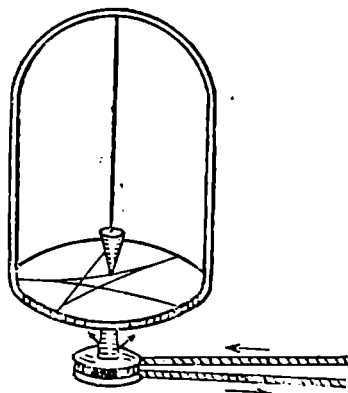
108-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ფუკოს საქანის მოდელი. დისკოს ცენტრში დაკიდებულია საქანი, რომელსაც შეუძლია რხევა ვერტიკალურ სიბრტყეში. საქანის ქვედა ნაწილში მიმაგრებულია ძაბრი, რომლიდანაც ჩამოყრილი ქვიშა ტოვებს მოძრაობის კვალს დისკოზე. დისკოს ნელი ბრუნვის დროს კარგად ჩანს ტრაექტორიის გამრუდება და საქა-

ნის სიბრტყის მობრუნება. ცხადია, რომ ეს მოდელი ეთანადება დედამიწის პოლუსზე მყოფ ფუკოს საჩანს.

5. ეტვეშის ცდა. როგორც ზემოთ ვნახეთ, პარალელის გასწვრივ მოძრაობის დროს სხეულის წონა იცვლება, სახელდობრ, დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ მოძრაობის დროს წონა მცირდება, შებრუნე-



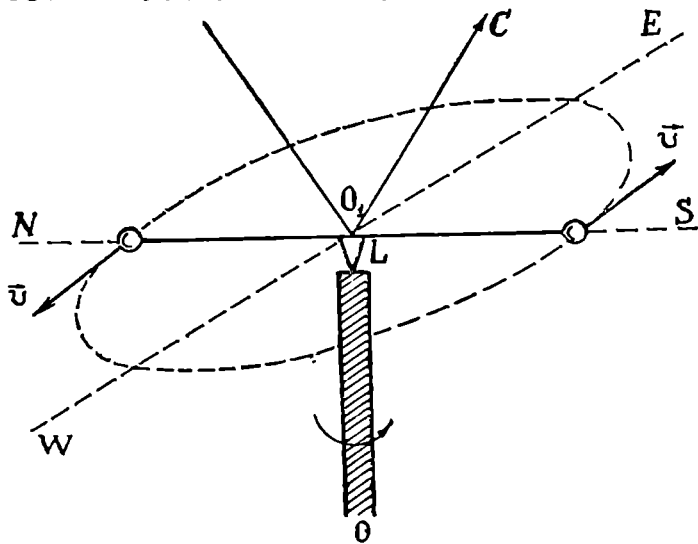
ნახ. 107



ნახ. 108

ბული მიმართულებით მოძრაობისას კი იზრდება. ამ მოვლენის შემოწმების შესაძლებლობას იძლევა ცნობილი უნგრელი ფიზიკოსის—ეტვეშის ცდა. სათანადო ხელსაწყოს ე. წ. გრეზითი სასწორის სქემა მოყვანილია 109-ე ნახაზზე. სასწორის ბერკეტი ეყრდნობა ცილინდრული ღერის ზედა ფუძეს პრიზმის წიბოთი. ბერკეტის ბოლოებზე მოთავსებულია ორი ტოლი მასის მქონე სხეული. პრიზმის ფუძეზე დამაგრებულია ბრტყელი L სარკე. ცილინდრულ ღერს შეუძლია ბრუნვა OO_1 ვერტიკალური ღერძის ირგვლივ. ამ ბრუნვის დროს სხეულები იმოდრავებს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში ისე, რომ როდესაც ერთი მათგანი იმოდრავებს აღმოსავლეთისაკენ, მეორე მათგანი — დასავლეთისაკენ. ეს გამოიწვევს პირველი ბირთვის წონის შემცირებას და მეორე ბირთვის წონის გაზრდას. ბრუნვის დროს თითოეული სხეულის წონის გაზრდა და შემცირება პერიოდულად ხდება და ამიტომაც ბერკეტი დაიწყებს რხევას ვერტიკალურ სიბრტყეში. ცხადია, L სარკიდან არეკვლილი სხივიც დაიწყებს რხევას, რაც შეიძლება შემჩნეულ იქნეს საზომი სკალის საშუალებით. ეფექტის გასაძლიერებლად შემდეგნაირად იქცევინ: ცილინდრულ ღერს და ბერკეტს ისეთი სიჩ-

ქართულ აბრუნებებზე, რომ მათი ბრუნთა რიცხვი თანხვედრს ბერკეტის ვერტიკალურ სიბრტყეში რხევის სიხშირეს. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში წარმოიშობა რეზონანსი და მოხდება იძულებითი რხევის ამპლიტუდის მნიშვნელოვანი ზრდა. თუ ცნობილია სასწორის მგრძნო-



ნახ. 109

ბიარობა, შეიძლება გამოვითვალოთ წონის ცვლილება და შევამოწმოთ თეორია. ეტვეშის მიერ ჩატარებულმა ცდებმა საჯესებით დაადასტურა თეორიის შედეგები.

გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვის დროს ენახავთ როგორ გამოიყენება ეტვეშის გრეხითი სასწორი გრავიტაციული და ინერციული მასების პროპორციულობის შესამოწმებლად

თ ა ვ ი მ ე თ ი რ თ მ ე ტ ა

მყარი სხეულის მექანიკა

§ 59. მყარი სხეულის ცნება

ბუნებაში არსებულ და ხელოვნურად დამზადებულ სხეულებზე დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ გარეშე მოქმედების გავლენით ისინი მეტად თუ ნაკლებად იცვლიან თავის ფორმასა და მოცულობას. არის სხეულები, მაგალითად: ქვები, ლითონები, ხე და სხვა, რომელთა დეფორმაციისათვის, ე. ი. ფორმის ან მოცულობის შეცვლისათვის საჭიროა საკმაოდ დიდი ძალების მოქმედება. ზოგი სხეულის შემთხვევაში (სითხეები, გაზები) ასეთი დეფორმაციის მოხდენა ადვილია. ამბობენ, რომ ის სხეული უფრო მყარია, რომლის დეფორმაცია უფრო ძნელია. ვინაიდან ჩვენ ვთვლით, რომ ყოველი სხეული, როგორი ბუნებისაც უნდა იყოს იგი, არის ნივთიერ წერტილთა ერთობლიობა, ყოველი დეფორმაცია უნდა ნიშნავდეს სხეულის წერტილებს შორის მანძილების შეცვლას. ამიტომაც, ცხადია, რომ, რაც უფრო მცირეა წერტილთა შორის მანძილის ცვლილება, მით უფრო მყარი იქნება სხეული. ცხადია, აგრეთვე, რომ ბუნებაში არ არსებობს ისეთი სხეულები, რომელთა წერტილებს შორის მანძილების შეცვლა სრულიად შეუძლებელი იყოს. ისეთ იდეალურ სხეულს, რომლის წერტილებს შორის მანძილების შეცვლა შეუძლებელია, აბსოლუტურად მყარი სხეული ეწოდება. ყველა სხეული, რომელთაც ყოველდღიურ ცხოვრებაში მყარ სხეულებს უწოდებენ, თავისი მექანიკური თვისებებით ცოტად თუ ბევრად უახლოვდებიან აბსოლუტურად მყარ სხეულებს, მაგრამ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, აბსოლუტურად მყარი სხეული ბუნებაში არ არსებობს. მართლაც, როგორი მყარიც უნდა იყოს სხეული, მაგალითად: ლითონის ნატეხი, ქვა, ალმასი და სხვა, ყოველთვის შეიძლება გარეშე ძალების მოქმედებით დაეაშორათ ან დაუუახლოვოთ მისი ნაწილაკები ერთმანეთს. მაგრამ, თუ ჩვენ შემოვიხილავთ მისი ნაწილაკები ერთმანეთს. მაგრამ, თუ ჩვენ შემოვიხილავთ მისი ნაწილაკები ერთმანეთს, რომელთაც არ შეუძლიათ გაზომვის სიზუს-

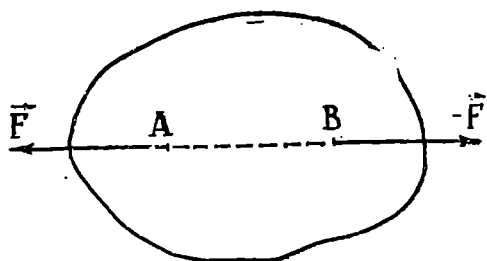
ტის საზღვრებში ასეთი მოქმედების მოხდენა, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ განსახილველი სხეული აბსოლუტურად მყარი სხეულია. ჩვენ შემდეგში, სიმოკლისათვის, აბსოლუტურად მყარ სხეულს ვუწოდებთ მყარ სხეულს.

როგორც შემდეგ ვნახავთ, მყარი სხეულის ის თვისება, რომ მის ნაწილაკებს შორის მანძილის შეცვლა შეუძლებელია, ძალიან ამარტივებს მისი მექანიკური მოძრაობის ხასიათს. მყარი სხეულების მოძრაობის შესწავლა ფრიად მნიშვნელოვანია, ვინაიდან ცხადია, თუ რამდენად ფართო გამოყენება აქვს ასეთ სხეულებს ყოველდღიურ ცხოვრებასა და ტექნიკაში.

§ 60. მყარ სხეულზე მოღებული ძალის ზანკიალმის შესაძლებლობა

ზოგად შემთხვევაში, როდესაც სისტემის წერტილებს შორის მანძილები იცვლება, ძალის მოდების წერტილი სრულიად გარკვეულია და მისი შეცვლა შეუძლებელია ისე, რომ არ შეიცვალოს ამ ძალით გამოწვეული მოქმედება. მაგრამ მყარი სხეულის შემთხვევაში შეიძლება ძალის მოდების წერტილის გარკვეული მიმართულებით გადატანა ისე, რომ ძალის მოქმედება არ შეიცვალოს. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალის ეს თვისება მჭიდროდაა დაკავშირებული მის წერტილებს შორის მანძილების უცვლელობასთან.

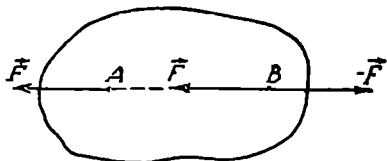
დავამტკიცოთ ჯერ, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ორი ტოლი, ურთიერთსაწინააღმდეგო და ერთ ხაზზე მდებარე ძალა არავითარ მოქმედებას არ ახდენს მყარ სხეულზე (ნახ. 110). გავვლოთ მყარ



ნახ. 110

სხეულში რაიმე სწორი ხაზი და მის ორ A და B წერტილში მოედოთ ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ მიმართული ტოლი ძალები. A წერტილზე მოქმედი \vec{F} ძალა ანიჭებს მას გარკვეულ აჩქარებას თავისი მოქმედების გასწვრივ. B წერტილზე მოღებული $-\vec{F}$ ძალა

აგრეთვე ანიჭებს ამ წერტილს საწინააღმდეგოდ მიმართულ აჩქარებას, მაგრამ ვინაიდან A და B წერტილებს შორის მანძილი არ შეიძლება შეიცვალოს (რადგანაც მათ შორის მყარი ბმა), $+\vec{F}$ ძალის გავლენით B წერტილი იმავე აჩქარებით უნდა ამოძრავდეს, როგორც A წერტილი, ასევე $-\vec{F}$ ძალამ უნდა მიანიჭოს A წერტილს ისეთივე აჩქარება, როგორცაა იგი B წერტილს ანიჭებს; აქედან გამომდინარეობს, რომ \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალების გავლენით როგორც A , ისე B წერტილი ტოლ და საწინააღმდეგოდ მიმართულ აჩქარებებს ღებულობენ. მაშასადამე, ასეთ ორ ძალას არ შეუძლია შეცვალოს A და B წერტილების მოძრაობის ხასიათი. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ტოლი, ერთ ხაზზე მდებარე და საწინააღმდეგოდ მიმართული ორი ძალა არავითარ მოქმედებას არ ახდენს მყარი სხეულის მოძრაობაზე.



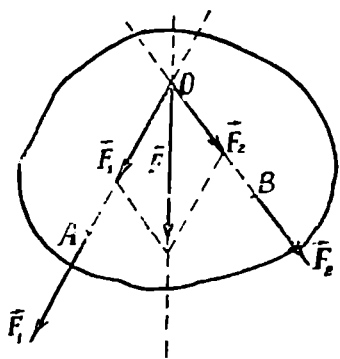
ნახ. 111

მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების ამ თვისებაზე დამყარებით დავამტკიცოთ, რომ შესაძლებელია მყარი სხეულის რაიმე წერტილზე მოქმედი ძალის მოდების წერტილის გადატანა ამ ძალის მოქმედების ხაზის ნებისმიერ წერტილში (ამ გადატანას უწოდებენ ძალის გასრიალებას მოქმედების ხაზის გასწვრივ). მართლაც, ვთქვათ, მყარი სხეულის რაიმე A წერტილზე მოდებულია \vec{F} ძალა (ნახ. 111). ავიღოთ ამ ძალის მოქმედების ხაზზე ნებისმიერი B წერტილი და მოვლოთ მასზე ორი ტოლი, ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ და ამ ხაზის გასწვრივ მდებარე \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალები; ამით, რასაკვირველია, მყარი სხეულის მოძრაობის ხასიათი არ შეიცვლება. ახლა გვაქვს მყარ სხეულზე მოქმედი სამი ძალა, ერთი \vec{F} ძალა, მოდებული A წერტილზე, და ორი \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალა, მოდებული B წერტილზე. მაგრამ ზემოთ დავამტკიცეთ, რომ A და B წერტილებზე მოდებული \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალები არავითარ მოქმედებას არ ახდენენ მყარ სხეულზე, ე. ი. ისინი აბათილებენ ერთმეორეს. გვრჩება B წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალა, რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია მყარ სხეულზე მოდებული ძალის გადატანა მისი მოქმედების ხაზის ნებისმიერ წერტილში.

მყარ სხეულზე მოქმედი ძალის ასეთი „გასრიალების“ შესაძლებლობა მისი მოქმედების ხაზის გასწვრივ ძალიან ამარტივებს მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების შეკრებას.

შესაძლებელია, და უმრავლეს შემთხვევაში სწორედ ასეც არის, რომ მყარ სხეულზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, რომლებიც მოდებულია სხვადასხვა წერტილზე. ისმის საკითხი ამ ძალების შეკრების შესახებ, ე. ი. პასუხის გაცემის შესახებ შემდეგ კითხვაზე: ხომ არ შეიძლება ეს ძალები შეიცვალოს ისეთი ძალების ნაკლები რიცხვით (კერძო შემთხვევაში ერთი ძალით), რომელთა მოქმედება თავიდანვე მოცემული ძალების ეკვივალენტური იქნება? მაგალითად, ხომ არ შეიძლება ორი ძალა შეიცვალოს ერთი ეკვივალენტური ძალით? ყოველთვის არის შესაძლებელი ასეთი შეცვლა თუ არა? ამ კითხვებზე პასუხის გაცემა დავიწყეთ მარტივი შემთხვევების გარჩევით. თავისთავად ცხადია, რომ თუ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები ერთ წერტილზეა მოდებული, მათი შეკრება, ე. ი. ერთი ძალით შეცვლა, უნდა მოხდეს ისე, როგორც ამას ვახდენდით ნივთიერ წერტილზე მოდებული ძალების შემთხვევაში, ე. ი. პარალელოგრამის ან მრავალკუთხედის წესით.

1. ერთ სიბრტყეში მდებარე და გადაკვეთი ძალების შეკრება. ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი



ნახ. 112

ისეთი ძალა, რომ თუმცა ისინი სხვადასხვა წერტილებზეა მოდებული, მათი მოქმედების ხაზები იკვეთებიან (ნახ. 112). აღვნიშნოთ A წერტილზე მოდებული ძალა \vec{F}_1 -ით, ხოლო B წერტილზე მოდებული ძალა \vec{F}_2 -ით. მათი მოქმედების ხაზების გადაკვეთის წერტილი იყოს O წერტილი. გავასრიალოთ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები ამ ხაზების გასწვრივ და თავი მოვუყაროთ მათ O წერტილში. წინა პარაგრაფის მიხედვით ეს გასრიალება არ

შეცვლის სხეულის მოძრაობის ხასიათს. ჩვენ მივიღებთ ერთ წერტილზე მოდებულ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალებს, რომელთა შეკრება მოხდება პარალელოგრამის წესის მიხედვით. შეკრების შემდეგ მივიღებთ ერთ ძალას

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

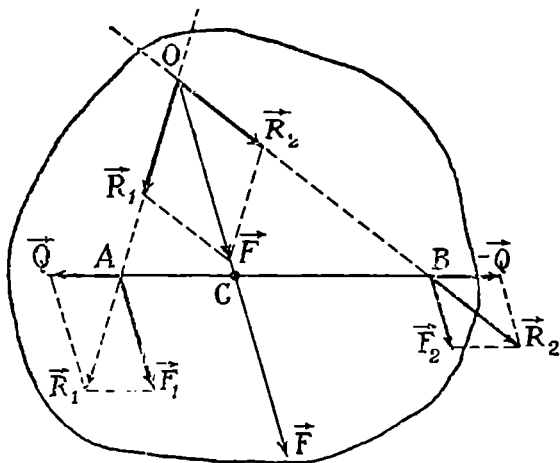
რომელიც O წერტილზე იქნება მოდებული, მაგრამ გასრიალების შე-

საძლებლობის თანახმად შეიძლება მოდებულ იქნეს ჩისი მოქმედების ხაზის ნებისმიერ წერტილში.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მყარი სხეულის სხვადასხვა წერტილში მოქმედებს არა ორი, არამედ რამდენიმე ძალა, შეიძლება ასე მოვიქცეთ: ჯერ შევკრებთ ორ გადამკვეთ ძალას. მიღებულ ერთ ძალას შევკრებთ მესამე ძალასთან (თუ, რასაკვირველია, ისინი გადამკვეთია) და გავაგრძელებთ ამ შეკრებას, სანამ არ მივიღებთ ყველა მოცემული ძალის ეკვივალენტურ ერთ ძალას

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

2. პარალელური ძალების შეკრება. შეიძლება მოხდეს, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები არ იყოს გადამკვეთი, მაშინ შეუძლებელია მათი ერთ წერტილში თავმოყრა და ზემოთ მოყვანილი წესით შეკ-



ნახ. 113

რება. ასეთია, მაგალითად, 113-ე ნახაზზე ნაჩვენები \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები, რომლებიც მოდებულია A და B წერტილებში. მათი მოქმედების ხაზები პარალელურია და, გარდა ამისა, თვით ძალებიც ამ ხაზების გასწვრივ ერთ მხრივია მიმართული; ასეთ ძალებს პარალელური ძალები ეწოდება; ამ ძალების შეკრებისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ: მოვდოთ A და B წერტილებში ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული \vec{Q} და $-\vec{Q}$ ძალები, რომლებიც იმავე სიბრტყეში მდებარეობს

რომელშიც \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები. ეს, რასაკვირველია, არ გამოიწვევს მყარი სხეულის მოძრაობის ცვლილებას. A წერტილზე მოდებული \vec{F}_1 და \vec{Q} ძალების შეკრებით მივიღებთ \vec{R}_1 ძალას. ასევე B წერტილში მოდებული \vec{F}_2 და $-\vec{Q}$ ძალების შეკრება მოგვცემს \vec{R}_2 ძალას. ეს ორი, \vec{R}_1 და \vec{R}_2 , ძალა კი, როგორც ნახაზიდან ჩანს, აღარ იქნება პარალელური—მათი მოქმედების ხაზები უკვე იკვეთება რომელიღაც O წერტილში და, მასასადამე, მათი შეკრება შეიძლება ზემოთ მოყვანილი წესის მიხედვით. მივიღებთ ერთ \vec{F} ძალას, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$\vec{F} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

ეს ტოლქმედი \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების პარალელური იქნება და სიდიდით გაუტოლდება მათ სიდიდეთა ჯამს. იგი მიმართული იქნება ისევე, როგორც \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები. ეს ძალა შეიძლება გავასრიალოთ მისი მოქმედების ხაზის გასწვრივ ისე, რომ მისი მოდების წერტილი მოთავსდეს A და B წერტილების შემაერთებელ ხაზზე, რომელიღაც C წერტილში. მაშინ ნახაზიდან ადვილად ვიპოვით, რომ \vec{F} ტოლქმედის მოდების C წერტილიდან \vec{F}_1 და \vec{F}_2 მოდების A და B წერტილებამდე მანძილები სათანადო ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულია

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}, \quad (\text{XI, I})$$

ე. ი. ტოლქმედის მოდების წერტილი იმდენჯერ ახლოს იქნება ერთ-ერთი ძალის მოდების წერტილთან, რამდენჯერაც ეს ძალა მეტია მეორე ძალაზე.

მიღებული შედეგი ასე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ: პარალელური ძალების შეკრებისათვის ძალების მოდების წერტილებს შორის მდებარე AB მონაკვეთს ვყოფთ C წერტილით ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულ ნაწილებად. გამყოფ C წერტილში მოვდებთ \vec{F} ძალას, რომელიც \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების ჯამის ტოლია; ეს ძალა იქნება \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების ტოლქმედი. რასაკვირველია, ეს ტოლქმედი შეიძლება მოდებულ იქნეს არა C წერტილში, არამედ მისი მოქმედების ხაზის ნებისმიერ წერტილში.

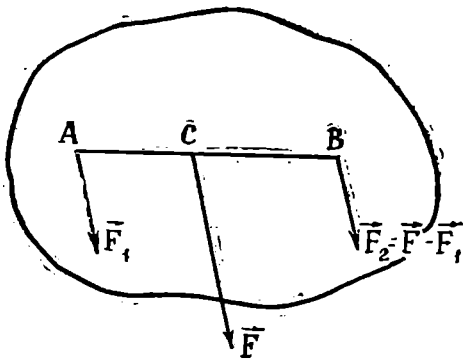
ორი პარალელური ძალის შეკრების შებრუნებული ოპერაცია არის ერთი ძალის დაშლა ორ პარალელურ ძალად. ვთქვათ, ჩვენ გვსურს \vec{F} ძალის დაშლა ისეთ ორ პარალელურ ძალად, რომელთაგან ერთი

(\vec{F}_1) მოდებულია A წერტილში. მოსაძებნია მეორე ძალა და მისი მოდების წერტილი (ნახ. 114). AC ხაზის გაგრძელებაზე უნდა მოიძებნოს ისეთი B წერტილი, რომლის მანძილი C წერტილიდან მოცემული იქნება (XI, 1) ფორმულით; ამ წერტილში უნდა მოვდოთ \vec{F}_2 ძალა, რომელიც იქნება \vec{F} და \vec{F}_1 ძალების სხვაობა

$$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1,$$

მაშასადამე, \vec{F} ძალა დაიშალა ორ პარალელურ ძალად.

თუ მყარ სხეულზე მოქმედებს რამდენიმე პარალელური ძალა, მათი შეკრება უნდა მოვახდინოთ თანდათანობით. ჯერ შევკრებთ



ნახ. 114

ორ ძალას, შემდეგ მათ ტოლქმედს შევკრებთ მესამე ძალასთან და ა. შ.

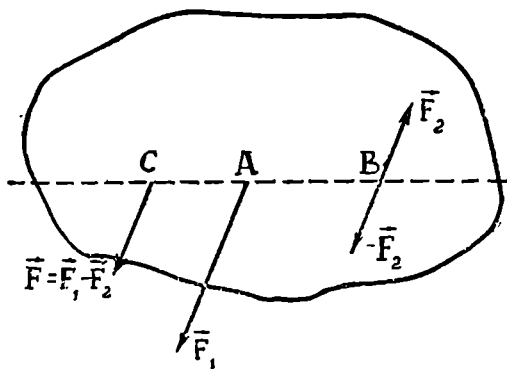
3. არატოლი და ანტიპარალელური ძალების შეკრება. ძალებს ეწოდება ანტიპარალელური, თუ მათი მოქმედების ხაზები პარალელურია. მაგრამ თვით ძალები ერთმანეთის საწინააღმდეგოდაა მოგეზული (ნახ. 115). ისმის ასეთი ძალების შეკრების ამოცანა. ჯერ დავუშვათ, რომ ძალები არაა ტოლი სიდიდის. ვთქვათ, \vec{F}_1 ძალა \vec{F}_2 ძალაზე მეტია. ვისარგებლოთ მე-2 პუნქტში მიღებული შედეგით (რომ შესაძლებელია ძალის დაშლა ორ პარალელურ ძალად). დავშალოთ A წერტილში მოდებული \vec{F}_1 ძალა ისეთ ორ პარალელურ ძალად, რომ ერთი მათგანი მოდებული იყოს B წერტილში (\vec{F}_2 ძალის მოდების წერტილში), სიდიდით \vec{F}_2 ძალის ტოლი და მიმართული იყოს მის საწინააღმდეგოდ. მეორე შესაკრების მოდების C წერტილი მოიძებნება წინათ გამოყვანილი ფორმულით

$$\frac{AC}{BA} = \frac{F_2}{F_1 - F_2}, \quad (\text{XI}, 2)$$

ხოლო თვით მეორე შესაკრები \vec{F} ძალა მოცემული იქნება ფორმულით

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2).$$

B წერტილში მოდებული \vec{F}_2 და $-\vec{F}_2$ ძალები ერთმანეთს მოსპობენ და დაგვრჩება მხოლოდ ერთი \vec{F} ძალა, რომელიც იქნება \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების ტოლქმედი; ამ ტოლქმედის მოდების C წერტილი მოთავსებულია AB მონაკვეთის გარეთ და მისი დაშორება A და B წერტილებიდან \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულია.



ნახ. 115

მაშასადამე, ორი ანტიპარალელური ძალის ტოლქმედი მოდებულია მათი შემაერთებელი მონაკვეთის გარეთ და ამ ძალების სხვაობის ტოლია.

(XI, 2) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ტოლქმედის მოდების წერტილი მით უფრო შორსაა, რაც უფრო მცირეა შესაკრები ძალების სიდიდეთა სხვაობა. მართლაც, როდესაც $\vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_2$, ამ ფორმულის მარჯვენა მხარე უსასრულოდ იზრდება და ვინაიდან AB სასრულია, AC უნდა უსასრულოდ იზრდებოდეს; ეს იმას ნიშნავს, რომ C წერტილი ინაცვლებს უსასრულობისაკენ. თვით ტოლქმედის სიდიდე კი თანდათან მცირდება და მისიწრაფვის ნულისაკენ.

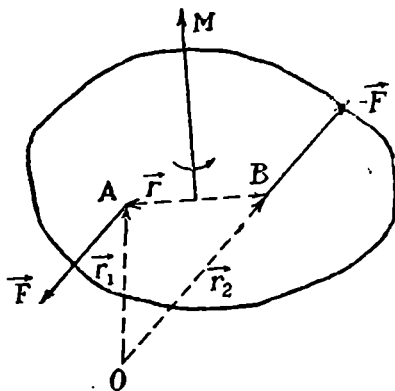
ზღვარში, როდესაც ანტიპარალელური ძალები ტოლი გახდება, მათი ტოლქმედი ნულის ტოლი იქნება და მოდებული იქნება უსასრულობაში; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სინამდვილეში ორ ტოლ ან

ანტიპარალელურ ძალას ტოლქმედი არ აქვს. ე. ი. შეუძლებელია ასეთი ორი ძალის მოქმედება შეიცვალოს ისეთი ერთი ძალის მოქმედებით, რომელიც მოდებული იქნება სასრულ მანძილზე სხეულიდან. ამიტომაც ჩვენ თავიდანვე შევიზღუდეთ პირობით, რომ შესაყრები ძალები ტოლი არ არის.

§ 62. ძალთა წყვილი და მისი თვისებები

ჩვენ გამოვარკვეთ, რომ ორ, სიდიდით ტოლ და ანტიპარალელურ ძალას ტოლქმედი არ აქვს, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი შეცვლა ერთი ძალით შეუძლებელია. ძალების ასეთ სისტემას ძალთა წყვილი ეწოდება. მაშასადამე, ძალთა წყვილი არის ერთობლიობა ორი, სიდიდით ტოლი და ანტიპარალელური ძალისა. ძალთა წყვილს თავისებური და ფრიალ საინტერესო თვისებები ახასიათებს და იგი ფრიალ მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მყარი სხეულის მექანიკაში, რაც საჭიროს ხდის მის დაწვრილებით განხილვას.

შემოვიღოთ ძალთა წყვილის მომენტის ცნება. ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს



ნახ. 116

ძალთა წყვილი, რომლის \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალები მოდებულია A და B წერტილებში (ნახ. 116). ავარჩიოთ რაიმე O წერტილი და გამოვივალოთ \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალების მომენტების ჯამი ამ წერტილის მიმართ. თუ A და B წერტილების რადიუს-ვექტორებს O წერტილის მიმართ \vec{r}_1 -ითა და \vec{r}_2 -ით აღვნიშნავთ, მომენტების ჯამისათვის მივიღებთ:

$$\vec{M} = [\vec{r}_1 \vec{F}] + [\vec{r}_2 \vec{F}] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{F}] = [\vec{r} \vec{F}], \quad (XI, 3)$$

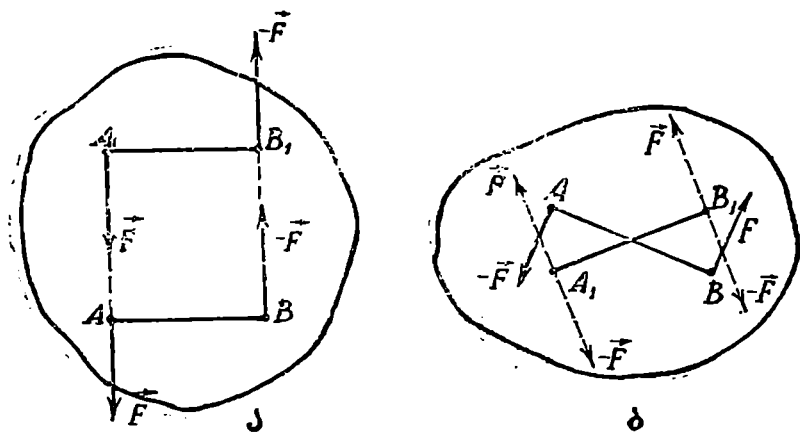
სადაც \vec{r} არის რადიუს-ვექტორი, მიმართული B წერტილიდან A წერტილისაკენ. ცხადია, რომ ძალთა წყვილის მომენტი არაა დამოკიდებული O წერტილის არჩევაზე, ვინაიდან იგი არის ვექტორული ნამრავლი ძალების მოდების წერტილებს შორის გავლებული \vec{r} რადიუს-ვექტორისა ერთ-ერთ ძალაზე (რომელ ძალაზე, ამას მნიშვნე-

ლობა არ აქვს, რადგანაც ძალის შეცვლის დროს დაგვეჭირდება \vec{r} -ის მიმართულებას შეცვლა). შეიძლება მომენტი გამოვითვალოთ ერთ-ერთი ძალის მოდების წერტილის მიმართ, მაგალითად, B წერტილის მიმართ; ამ შემთხვევაში — \vec{r} ძალის მომენტი ნული იქნება და დაგვრჩება მხოლოდ \vec{r} ძალის მომენტი. მოდების წერტილებს შორის გავლებულ რადიუს-ვექტორს ძალთა წყვილის მხარი ეწოდება. ჩვეულებრივ ძალთა წყვილის მდგენელ ძალებს ისე გაასრიალებენ მათი მოქმედების ხაზების გასწვრივ, რომ მხარი მათი მართობული გახდეს. ცხადია, რომ ძალთა წყვილის ასეთი წარმოდგენა აუცილებელი არ არის, მაგრამ სიმარტივისათვის ჩვენ შემდეგში ძალთა წყვილს ყოველთვის ასე წარმოვადგენთ. ცნება ძალთა წყვილის მომენტისა ფრიალ მნიშვნელოვანია. როგორც ვნახავთ, ძალთა წყვილი მთლიანად მომენტით ხასიათდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია ნებისმიერად გვეალოთ ძალთა წყვილის მდგენელი ძალები და მისი მხარი და ეს არ შეცვლის მისი მოქმედების ხასიათს, მხოლოდ ამ ცვლადებების დროს არ უნდა იცვლებოდეს ძალთა წყვილის მომენტი. იგივე შეიძლება ასე გამოვთქვათ: ორი ძალთა წყვილი ეკვივალენტურია, ე. ი. ისინი ერთნაირად მოქმედებენ მყარ სხეულზე, თუ მათი მომენტები ტოლია.

დავამტკიცოთ, რომ ძალთა წყვილი, მართლაც, შეიძლება ნებისმიერად გადავაადგილოთ ძალების მოქმედების სიბრტყეში. ძალების პარალელური გადატანისათვის ეს უშუალოდ ნახაზიდან ჩანს (ნახ. 117ა), ვინაიდან A_1 და B_1 წერტილებზე მოდებული ძალთა წყვილი მიღებულია A , B წერტილებზე მოდებული ძალთა წყვილიდან ძალების გასრიალებით, რაც, როგორც ვიცით, არ ახდენს გავლენას სხეულის მოძრაობაზე.

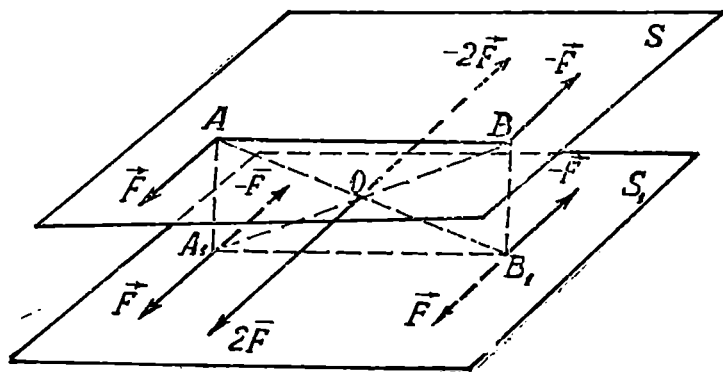
დავამტკიცოთ, რომ შეიძლება ძალთა წყვილის მობრუნება სიბრტყეში (ნახ. 117). წარმოვიდგინოთ, რომ რაღაც კუთხით შემობრუნებული მხარის ბოლოებზე მოდებულია ორ-ორი ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალა. ცხადია, რომ ისინი არ შეცვლიან სხეულის მდგომარეობას. როგორც ნახაზიდან ჩანს, B და B_1 წერტილებში მოდებული \vec{r} და $-\vec{r}$ ძალების ტოლქმედი ტოლი და საწინააღმდეგოა A და A_1 წერტილებში მოდებული $-\vec{r}$ და \vec{r} ძალების ტოლქმედისა. ამიტომ ისინი ჯამში მოგვეცემენ ნულს და დაგვრჩება მხოლოდ A_1 და B_1 წერტილებში მოდებული \vec{r} და $-\vec{r}$ ძალები. მივიღებთ ისეთივე მომენტის მქონე ძალთა წყვილს, მხოლოდ მობრუნებული მხარით.

ასევე დამტკიცდება, რომ შეიძლება ძალთა წყვილის გადატანა მისი მოქმედების სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში ძალების, მათი მხარის სიდიდისა და მიმართულების შეუცვლელად (ცხადია, ასეთი



ნახ. 117

გადატანის დროს მომენტი არ შეიცვლება). ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს ძალთა წყვილი \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალებით და \vec{M} მომენტით



ნახ. 118

გავატაროთ მყარ სხეულში S_1 სიბრტყე, რომელიც პარალელური იქნება \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალებზე გამავალი S სიბრტყისა (ნახ. 118). ამ ძალების პოლების A და B წერტილებიდან დაეწევათ მართობები

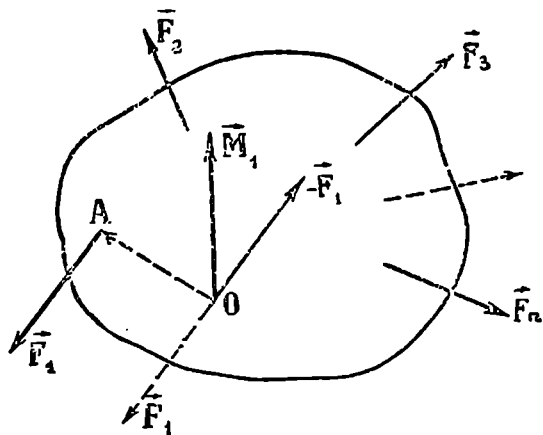
S_1 სიბრტყეზე და აღენიშნოთ სათანადო წერტილები A_1 და B_1 ასობით. მოვლით A_1 და B_1 წერტილებში \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალების პარალელური ძალები, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე. ცხადია, რომ ეს ოთხი ძალა წყვილ-წყვილად სპობს ერთმანეთს და ამიტომ ისინი არაერთარ გავლენას არ მოახდენენ მყარი სხეულის მდგომარეობაზე. შევკრიბოთ ახლა A წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალა B_1 წერტილზე მოდებულ, მის პარალელურ და ტოლ \vec{F} ძალასთან. პარალელური ძალების შეკრების წესის თანახმად მათი ტოლქმედი მიიღება $AB B_1 A_1$ მართკუთხედას დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილში და სიდიდით $2\vec{F}$ -ის ტოლი იქნება. ასევე შეიძლება შეიკრებოს B და A_1 წერტილებზე მოდებული $-\vec{F}$ და $-\vec{F}$ ძალები. მათი ტოლქმედი ისევ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში იქნება მოდებული და სიდიდით $-2\vec{F}$ -ის ტოლი იქნება. ცხადია, რომ O წერტილში მოდებული $2\vec{F}$ და $-2\vec{F}$ ძალები მოსპობენ ერთმანეთს. დავკრჩება A_1 წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალა და B_1 წერტილში მოდებული $-\vec{F}$ ძალა, რომელთა ერთობლიობა წარმოადგენს წინანდელ ძალთა წყვილს, მხოლოდ გადატანის S_1 სიბრტყეში. ამ ძალთა წყვილის მომენტი ისეთივეა, როგორც S სიბრტყეში მდებარე ძალთა წყვილისა. მაშასადამე, დავამტყიცეთ, რომ ძალთა წყვილი შეიძლება გადავიტანოთ მისი მოქმედების სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში ძალებსა და მომენტის შეცვლელად. ამის შემდეგ შეიძლება (როგორც უკვე ვნახეთ ზემოთ) შევცვალოთ მხარი და ძალები როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით, მხოლოდ ისე, რომ არ შეიცვალოს მომენტი.

§ 63. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების დაწყობა ერთ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე

ახლა უკვე შესაძლებელია მყარ სხეულზე მოქმედი ნებისმიერი ძალების შეკრება. ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებენ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალები (ნახ. 119), ავარჩიოთ ნებისმიერი O წერტილი, როგორც ძალების შეკრების წერტილი, და გადავიტანოთ ამ წერტილში ყველა ძალა. მოვიტყუთ ამისათვის შემდეგნაირად. ჯერ გადავიტანოთ O წერტილში \vec{F}_1 ძალა. ამისათვის მოვლით O წერტილში ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო ძალა — ერთი \vec{F}_1 , ხოლო მეორე $-\vec{F}_1$. ცხადია, ეს არაერთარ მოქმედებას არ მოახდენს სხეულის მოძრაობაზე. A წერტილში მოდებული \vec{F}_1 ძალა და O წერტილში მოდებული $-\vec{F}_1$ ძალა შეადგენს ძალთა წყვილს, რომელთა მომენტი გამოთვლება ფორმულით

$$\vec{M}_1 = [OA \vec{F}_1].$$

მაშასადამე. A წერტილში მოდებული ერთი \vec{F}_1 ძალა ეკვივალენტურია O წერტილში მოდებული \vec{F}_1 ძალისა და \vec{M}_1 მომენტის მქონე ძალთა წყვილისა. ასევე შეიძლება გადავიტანოთ O წერტილში \vec{F}_2 ძალა. მივიღებთ O წერტილში მოდებულ \vec{F}_2 ძალას და ძალთა



ნახ. 119

წყვილს, რომლის მომენტი იქნება \vec{F}_2 ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ: $\vec{M}_2 = [\vec{OB} \vec{F}_2]$. ასე შეიძლება გადავიტანოთ O წერტილში ყველა ძალა. მივიღებთ O წერტილში მოდებულ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალებს და n ძალთა წყვილს $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ მომენტებით, რომლებიც წარმოადგენენ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მომენტებს O წერტილის მიმართ. O წერტილში მოდებული ძალები შეიკრიბება და მივიღებთ ერთ \vec{F} ძალას, რომელიც იქნება ამ ძალების გეომეტრიული ჯამი და რომელსაც ეწოდება ნაკრები ძალა:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (\text{XI, 4})$$

ასევე შეიკრიბება ყველა ძალთა წყვილი. მიიღება ერთი ძალთა წყვილი, რომელთა მომენტი იქნება შესაკრებ ძალთა წყვილების მომენტების ჯამი

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i. \quad (\text{XI, 5})$$

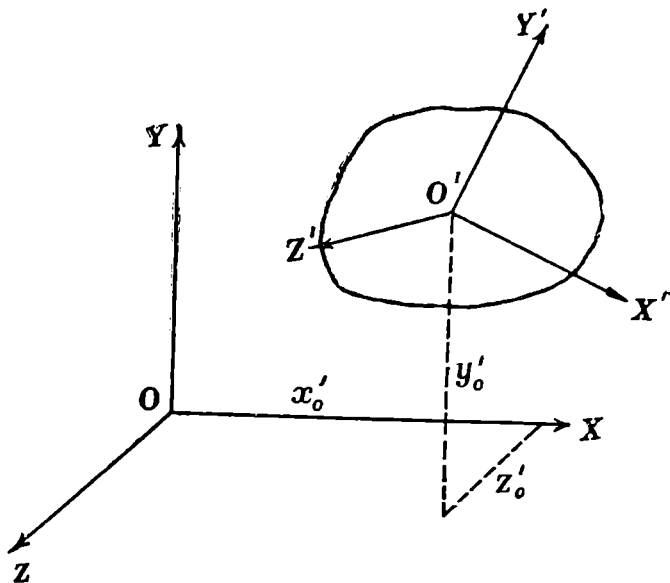
ჩვენ ვხედავთ, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ნებისმიერი ძალების სისტემა შეიძლება დაყვანილ იქნეს ერთ \vec{F} ნაკრებ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე \vec{M} მომენტით.

დაყვანის O წერტილის ამორჩევა სრულიად ნებისმიერია. უნდა აღვნიშნოთ მხოლოდ, რომ მისი შეცვლა აუცილებლად გამოიწვევს ნაკრები მომენტის შეცვლას. ნაკრები ძალა არ არის დამოკიდებული დაყვანის წერტილის არჩევაზე, ვინაიდან იგი მოქმედი ძალების გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

კერძო შემთხვევაში შეიძლება \vec{M} ნაკრები მომენტი ნულის ტოლი აღმოჩნდეს, მაშინ ძალები დაიყვანება ერთ \vec{F} ძალაზე, რომელსაც ამ შემთხვევაში ძალების ტოლქმედი ეწოდება. რასაკვირველია, შესაძლებელია შემთხვევა, როდესაც ნულის ტოლია ნაკრები ძალა და განსხვავდება ნულისაგან მხოლოდ ნაკრები მომენტი. ამ შემთხვევაში ძალები დაიყვანება ერთ ძალთა წყვილზე.

§ 64. მუხარის სხეულის მოძრაობის სახეები

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების თვისებები და დავამტკიცეთ, რომ ეს ძალები ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ ერთ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე. სანამ გადავიდოდეთ იმ საკითხის გარკვევაზე, თუ როგორ მოძრაობას იწვევს მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები, განვიხილოთ მყარი სხეულის მოძრაობის სახეები. ჯერ გამოვარკვიოთ როგორ განსაზღვრება მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში (არჩეული ძირითადი სისტემის მიმართ). ამისათვის ავარჩიოთ მყარ სხეულში ნებისმიერი O' წერტილი და გავტაროთ ამ წერტილიდან მყარ სხეულთან მჭიდროდ დამაგრებული კოორდინატთა ღერძები $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (ნახ. 120). ცხადია, რომ მყარი სხეულის მდებარეობის განსაზღვრა $OXYZ$ სისტემის მიმართ იგივეა, რაც $O'X'Y'Z'$ სისტემის მდებარეობის განსაზღვრა $OXYZ$ სისტემის მიმართ. ამისათვის კი საჭიროა, რომ განსაზღვრული იყოს O' წერტილის მდებარეობა, ე. ი. მისი კოორდინატები x'_0 , y'_0 , z'_0 და $O'X'$, $O'Y'$ და $O'Z'$ ღერძების ორიენტაცია სივრცეში, რისთვისაც საჭიროა სამი კუთხის ცოდნა. როგორც ვხედავთ, მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება 6 სიდიდით, რაც იმას ნიშნავს, რომ მყარ სხეულს აქვს 6 თავისუფლების ხარისხი. ჩვეულებრივ, O წერტილად ირჩევენ მყარი სხეულის ინერციის ცენტრს, მაგრამ შეიძლება სხვა წერტილის არჩევაც.



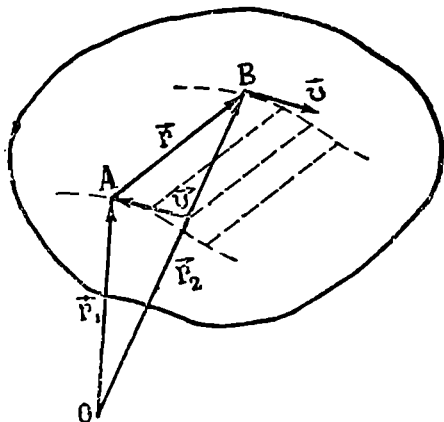
ნახ. 120

1. გადატანითი მოძრაობა. მყარი სხეულის სხვადასხვა მოძრაობათა შორის ყველაზე მარტივია ე. წ. გადატანითი მოძრაობა; ამ მოძრაობისათვის დამახასიათებელი ის არის, რომ მოძრავე ათვლის სისტემის ღერძების ორიენტაცია ძირითადი ათვლის სისტემის მიმართ არ იცვლება. ეს იმას ნიშნავს, რომ მყარი სხეულის მოძრაობის დროს $O'X'$, $O'Y'$, და $O'Z'$ ღერძები თავისი თავის პარალელური რჩება. იცვლება მხოლოდ O' სათავეს კოორდინატები. ვინაიდან მყარ სხეულში გავლებული ყოველი სწორი ხაზის (მონაკვეთის) ორიენტაცია სავსებით განსაზღვრულია მოძრავე სისტემის ღერძების ორიენტაციით, ცხადია, რომ რომელი სწორი ხაზიც უნდა გავავლოთ მყარ სხეულში, გადატანითი მოძრაობის დროს მისი ორიენტაცია არ შეიცვლება, ე. ი. იგი იმოძრაებს თავისი თავის პარალელურად. ამიტომაც გადატანითი მოძრაობა ასე შეიძლება განვსაზღვროთ: მოძრაობა გადატანითია, თუ მყარ სხეულში გავლებული ყოველი მონაკვეთი თავისი თავის პარალელური რჩება; აქედან გამომდინარეობს ფრიად მნიშვნელოვანი შედეგი, რომ გადატანითი მოძრაობის დროს მყარი სხეულის ყველა წერტილი ერთ და იმავე ტრაექტორიას აღწერს. უფრო მეტიც, ერთი და იგივეა არა მარტო ტრაექტორია, არამედ სიჩქარეც და აჩქარებაც.

მართლაც, აღნიშნოთ მყარ სხეულში აღებული ორი ნების-
 შერი წერტილის რადიუს-ვექტორები ძირითადი სისტემის მიმართ
 \vec{r}_1 და \vec{r}_2 -ით (ნახ. 121). გავვლოთ მათი შემაერთებელი \vec{r} რადიუს-
 ვექტორი

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

გადატანითი მოძრაობის განსაზღვრის თანახმად \vec{r} რადიუს-ვექტორი
 მუდმივია, ვინაიდან, სხეულის სიმყარის გამო, მისი სიგრძე არ იცვ-



ნახ. 121

ლება, ხოლო მოძრაობის გადატანითობის გამო არ იცვლება მისი მი-
 მართულება; აქედან ვღებულობთ

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_2}{dt} \quad (\text{XI, 6})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მყარი სხეულის სხვადასხვა წერტილს ერთი
 და იგივე სიჩქარე აქვს. კიდევ ერთხელ გაწარმოება მოგვცემს

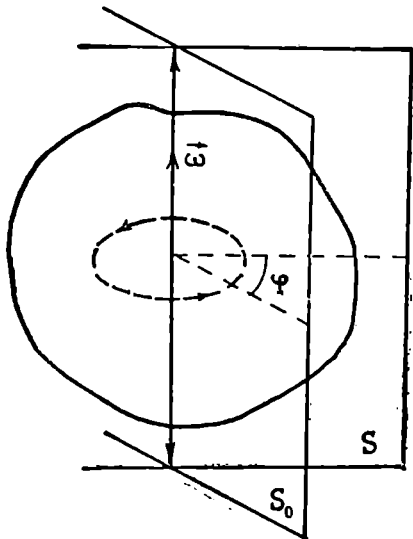
$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \quad (\text{XI, 7})$$

ე. ი. აჩქარებათა ტოლობას.

ყოველივე ეს იმას ნიშნავს, რომ გადატანითი მოძრაობის დროს
 მყარი სხეულის წერტილები სრულიად ერთნაირად მოძრაობს და

ამიტომ ასეთი მოძრაობის დასასიათებისა და შესწავლისათვის საკვებით საკმარისია ერთი რამელიმე წერტილის მოძრაობის განხილვა.

2. ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. მყარი სხეულის მოძრაობის შემდეგ მართე სახეს წარმოადგენს ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. დაეშვათ, რომ მყარი სხეულია ორი წერტილი უძრავია ძირითადი სისტემის მიმართ; ამ შემთხვევაში უძრავი იქნება ამ ორი წერტილის შემაერთებელი სწორი ხაზის ყოველი წერტილიც. ეს ხაზი იქნება სწორედ ის უძრავი ღერძი, რომლის ირგვლივაც ბრუნავს მყარი სხეული (ნახ. 122). ვინაიდან მყარი სხეულების წერტილთა დაშორება ღერძამდე უცვლელია, ერთადერთი მოძრაობა, რომელიც მათ შეუძლიათ შეასრულონ, იქნება წრითული მოძრაობა ღერძისადმი მართობ სიბრტყეში. ბრუნვას დროს მყარი სხეულის ყოველი წერტილი შემოწერს წრეხაზს, რომლის ცენტრი მოთავსებული იქნება ღერძზე.



ნახ. 122

მბრუნავი მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად. გვატაროთ ღერძზე ძირითადი სისტემის მიმართ უძრავი S_0 სიბრტყე და მყარ სხეულთან ერთად მბრუნავი S სიბრტყე. კუთხე, რომელსაც S სიბრტყე ადგენს S_0 სიბრტყესთან და რომელიც იცვლება ბრუნვის დროს, დაგვიხასიათებს მყარი სხეულის მდებარეობას სივრცეში. თუ ამ კუთხეს φ -თი აღვნიშნავთ, ბრუნვა შეიძლება დავახასიათოთ განტოლებით

$$\varphi = f(t).$$

ამ ფუნქციის სახე დამოკიდებული იქნება ბრუნვის ხასიათზე. ცხადია, რომ მყარი სხეულის ყველა წერტილს ერთი და იგივე კუთხური სიჩქარე ექნება; ეს კუთხური სიჩქარე გამოიხატება ω ვექტორით, რომელიც მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე და მიმართულია ისე, რომ ბრუნვა

წარმოებს მარჯვენა ბურღის წესით, ხოლო სიდიდე გამოისახება ფორმულით:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

რადგანაც მბრუნავი მყარი სხეულის ყოველი წერტილი მოძრაობს წრეხაზზე, შეიძლება ვისარგებლოთ II თავის მე-15 პარაგრაფში მიღებული ფორმულებით. ნებისმიერი წერტილის სიჩქარისათვის გვექნება ფორმულა

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}] = [\vec{\omega} \vec{R}], \quad v = \omega R,$$

სადაც \vec{R} არის ლერძიდან აღებულ წერტილამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი. ჩვენ ვხედავთ, რომ მბრუნავ მყარი სხეულის წერტილებს სხვადასხვა სიჩქარე აქვს. რაც უფრო შორსაა წერტილი ლერძიდან, მით უფრო მეტია მისი ხაზოვანი სიჩქარე.

მყარი სხეულის წერტილების აჩქარებისათვის მივიღებთ

$$\vec{a}_n = -\vec{R} \cdot \omega^2;$$

$$\vec{a}_t = [\vec{\varepsilon} \vec{R}],$$

სადაც $\vec{\varepsilon}$ არის კუთხური აჩქარება; იგი, ისევე როგორც $\vec{\omega}$, მიმართულია ლერძის გასწვრივ, მისი გეზი კი დამოკიდებულია $\frac{d\omega}{dt}$ წარმოედების ნიშანზე.

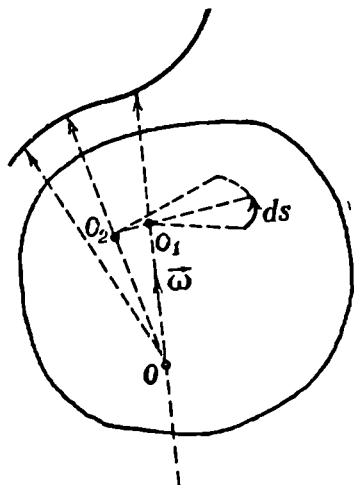
თუ $\frac{d\omega}{dt} > 0$, $\vec{\varepsilon}$ მოგვხვდება იქნება ისევე, როგორც $\vec{\omega}$,

თუ $\frac{d\omega}{dt} < 0$, მისი მიმართულება $\vec{\omega}$ ვექტორის საწინააღმდეგო იქნება.

მ. ბრუნვა წერტილის ირგვლივ. გაცილებით უფრო რთული ხასიათისაა მყარი სხეულის მოძრაობა იმ შემთხვევაში, როდესაც უძრავია მისი ერთი წერტილი. ცხადია, რომ ასეთი მოძრაობის დროს არ არსებობს რაიმე მკვიდრი, უძრავი ლერძი, რომლის ირგვლივაც ხდებოდეს მყარი სხეულის ბრუნვა. ვინაიდან მყარი სხეულის წერტილებს შორის მანძილი უცვლელია, მისი ყოველი წერტილი იმოძრაავებს სფეროს ზედაპირზე, რომლის ცენტრი იქნება უძრავი წერტილი.

ავირჩიოთ მყარი სხეულის რაიმე A წერტილი და გამოვარკვიოთ მისი მოძრაობის ხასიათი. ვთქვათ, dt დროის განმავლობაში ამ წერტილმა შემოწერა მცირე რკალი, რომელიც, მისი სიმციროს გამო, შეიძლება განვიხილოთ როგორც წრეხაზის რკალი ds შემოწერილი რომელიღაც O_1 წერტილის ირგვლივ. მაშინ ამ dt დროის განმავლობაში O_1 წერტილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც უძრავი. რად-

განაც O წერტილი უძრავია, უძრავი იქნება (მხოლოდ აღებული dt დროის განმავლობაში) OO_1 ღერძიც (ნახ. 123). მაშასადამე, მყარი სხეულის ბრუნვა წერტილის ირგვლივ საკმაოდ მცირე დროის განმავლობაში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ბრუნვა ღერძის ირგვლივ. რასაკვირველია, სხვა მომენტში ღერძი სხვა იქნება, ე. ი. უძრავი იქნება არა O_1 წერტილი, არამედ რომელიმე სხვა წერტილი (O წერტილი ყოველთვის უძრავია). ერთ მომენტში სხეული მობრუნდება ერთი ღერძის ირგვლივ, მეორე მომენტში — მეორე (ცხადია, უსასრულოდ ახლომდებარე) ღერძის ირგვლივ და ა. შ. ამიტომ ამ ღერძს ეწოდება მყისი ღერძი. ცხადია, რომ მყისი ღერძი ყოველთვის O წერტილზე გადის.



ნახ. 123

ბრუნვის $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე მიმართულია მყისი ღერძის გასწვრივ და იცვლის თავის მიმართულებას მყისი ღერძის შეცვლასთან ერთად. ხაზოვანი სიჩქარე ყოველ მომენტში გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}],$$

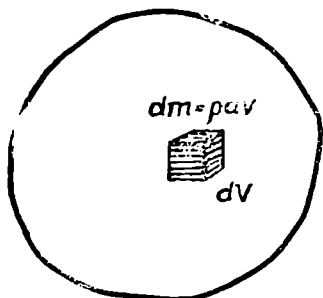
სადაც \vec{r} არის უძრავი O წერტილიდან გავლებული რადიუს-ვექტორი.

§ 65. მყარი სხეულის იმპულსი, ენერგია და იმპულსის მომენტი. ენერჯიის მომენტი

განვიხილოთ მბრუნავი მყარი სხეულის ძირითადი დინამიკური სიდიდეები. როგორც ვთქვით, მყარი სხეული წარმოადგენს ერთმანეთისაგან უცვლელ მანძილზე მყოფი ნივთიერი წერტილების სისტემას. თუ მყარი სხეულის შემადგენელ ნაწილაკთა რიცხვი თვლადია, ე. ი. თუ შეიძლება მათი დანომერა, მაშინ მისი დამახასიათებელი დინამიკური სიდიდე (იმპულსი, ენერგია და იმპულსის მომენტი) გამოითვლება როგორც ცალკეული ნაწილაკების სიდიდეების ჯამი. მაგრამ უმეტეს შემთხვევაში მყარი სხეული განიხილება როგორც უწყვეტი სხეული, რომ-

ლის წარმოდგენა ნივთიერი წერტილების თვლადი სიმრავლის სახით შეუძლებელია. მართალია, ჩვენ ვიცით, რომ ყოველი სხეული შედგება ატომების ან მოლეკულების დიდი სასრული რიცხვისაგან, მაგრამ მათი რიცხვი იმდენად დიდია და ისინი ისე ახლოს არიან ერთმანეთთან, რომ პრაქტიკული თვალსაზრისით გაცილებით უფრო ხელსაყრელია სხეულის განხილვა როგორც უწყვეტისა. ამ შემთხვევაში მყარი სხეულის დინამიკური სიდიდეების გამოთვლა შემდეგნაირად წარმოებს.

სხეულში გამოყოფენ იმდენად მცირე მოცულობის ელემენტს, რომ ჩვეულებრივი ზომების თვალსაზრისით შესაძლებელი იყოს მისი ნივთიერ წერტილად, ე. ი. უსასრულოდ მცირე ელემენტად ჩათვლა.



ნახ. 12;

მეორე მხრივ, იგი იმდენად დიდი უნდა იყოს ატომების ზომასთან შედარებით, რომ ნივთიერების განაწილება მის შიგნით უწყვეტად ჩაითვალოს. აღვნიშნოთ ეს ელემენტარული მოცულობა dV -ით, ხოლო მისი მასა— dm -ით (ნახ. 124). მაშინ მისი სიმკვრივე გამოითვლება ფორმულით

$$\rho = \frac{dm}{dV};$$

აქედან ელემენტის მასისათვის მივიღებთ

$$dm = \rho dV.$$

მთელი მასის გამოსათვლელად უნდა მოვახდინოთ dm -ის ინტეგრება მყარი სხეულის მთელ მოცულობაზე.

$$m = \int dm = \int \rho dV. \quad (XI, 8)$$

თუ მყარი სხეული განხილულია, როგორც თვლადი სიმრავლე ნივთიერი წერტილებისა, რომელთა მასები არის m_1, m_2, \dots , მაშინ მთელი მასა გამოითვლება ფორმულით

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

შემდეგში ყველა ფორმულას დაწერით ან ჯამის, ან ინტეგრალის სახით იმისდა მიხედვით, თუ როგორ არის წარმოდგენილი მყარი სხეული: როგორც ნივთიერი ნაწილაკების თვლადი სიმრავლე თუ როგორც უწყვეტი სხეული. პირველი შემთხვევიდან მეორეზე გადასვლა ფორმუ-

ლებში ადვილია. ამისათვის m_i უნდა შეიცვალოს dm -ით ან ρdV -ით და ჯამი შეიცვალოს ინტეგრალით.

1. მბრუნავი მყარი სხეულის იმპულსი. გამოვითვალოთ მბრუნავი მყარი სხეულის იმპულსი. თუ i -ური ნაწილაკის სიჩქარე არის \vec{v}_i , მისი იმპულსი იქნება $m_i \vec{v}_i$ და მთელი სხეულის იმპულსისათვის მივიღებთ

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (\text{XI, 9})$$

ამ შემთხვევაში, როდესაც მყარი სხეული განიხილება როგორც უწყვეტი, იმპულსის ფორმულა შემდეგ სახეს მიაღებდა:

$$\vec{K} = \int \vec{v} dm. \quad (\text{XI, 9}')$$

ამ ფორმულებს შეიძლება უფრო მარტივი და თვალსაჩინო სახე მივცეთ, თუ შემოვიღებთ ინერციის ცენტრს და მის სიჩქარეს. განსაზღვრის თანახმად

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m} \quad \text{ან} \quad \vec{v}_c = \frac{\int \vec{v} dm}{m}.$$

ამიტომ მყარი სხეულის იმპულსისათვის მივიღებთ

$$\vec{K} = m \vec{v}_c, \quad (\text{XI, 10})$$

ე. ი. იმპულსი უდრის მასის ნამრავს ინერციის ცენტრის სიჩქარეზე. იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც ინერციის ცენტრი ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს, ე. ი. უძრავია, იმპულსი ნულის ტოლი იქნება. თუ ინერციის ცენტრი არ მდებარეობს ღერძზე, მისი იმპულსი ცვალებადი იქნება, ვინაიდან ბრუნვის დროს ინერციის ცენტრი შემოწერს წრეხაზს და მისი სიჩქარე ცვალებადი იქნება.

2. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები. როგორც ვიცით, წერტილთა სისტემისათვის კინეტიკური ენერგია არის ცალკეული ნაწილაკების კინეტიკური ენერგიების ჯამი.

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

სათანადო ფორმულა უწყვეტი სხეულისათვის იქნება

$$E_k = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int v^2 \rho dV. \quad (\text{XI, 11})$$

ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულისათვის ამ ფორმულებს სხვა სახე შეიძლება მივცეთ.

მართლაც, ამ შემთხვევაში \bar{v} სიჩქარე შეიძლება გამოვხატოთ $\bar{\omega}$ კუთხური სიჩქარის საშუალებით. დავწეროთ ეს კავშირი სკალარულად

$$v = R\omega,$$

სადაც R არის აღებული წერტილიდან ღერძზე დაშვებული მართობის სიგრძე (მანძილი ღერძამდე). ჩასმა (XI, 11) ფორმულაში მოგვცემს

$$E_k = \frac{1}{2} \int R^2 \omega^2 dm.$$

მაგრამ მყარი სხეულის ყველა წერტილისათვის ω ერთი და იგივეა, ამიტომ იგი შეიძლება გამოვიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ. მივიღებთ

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \int R^2 dm. \quad (\text{XI, 11}')$$

თუ მყარი სხეული წარმოადგენს ნივთიერი წერტილების ერთობლიობას, სათანადო ფორმულა იქნება

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n R_i^2 m_i; \quad (\text{XI, 12})$$

ამ ფორმულებში შემავალ სიდიდეს $\int R^2 dm$ ან $\sum_{i=1}^n R_i^2 m_i$ ეწოდება

მყარი სხეულის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ და აღინიშნება I ასოთი:

$$I = \int R^2 dm \quad \text{ან} \quad I = \sum_{i=1}^n R_i^2 m_i. \quad (\text{XI, 13})$$

ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი არის წერტილების (მოცულობის ელემენტების) მასების და ღერძამდე მანძილების კვადრატების ნამრავლთა ჯამი (ინტეგრალი). ცხადია, რომ ინერციის მომენტი დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე და მასების განაწილებაზე არჩეული ღერძის მიმართ. ინერციის მომენტის საშუალებით კინეტიკური ენერჯია შემდეგი სახით დაიწერება:

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (\text{XI, 14})$$

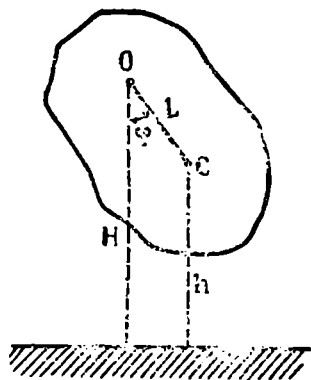
ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია არის ინერციის მომენტისა და კუთხური სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევარი. ჩვენ ვხედავთ, რომ მბრუნავ მყარი სხეულის კინეტიკურ ენერგიას აქვს ისეთი სახე, როგორც ნივთიერი წერტილის კინეტიკურ ენერგიას, განსხვავება ისაა, რომ მასის მაგიერ ფორმულაში შედის ინერციის მომენტი, ხოლო სიჩქარის მაგიერ—კუთხური სიჩქარე. ინერციის მომენტი მყარი სხეულის ერთ-ერთი ძირითადი დამახასიათებელი სიდიდეა. მის დაწვრილებით განხილვას და გამოთვლის წესებს ჩვენ შემდეგ დავუბრუნდებით.

განვიხილოთ ახლა მბრუნავი მყარი სხეულის პოტენციალური ენერგია. ჩვენ ვიცით, რომ ეს უკანასკნელი ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ენერგიაა. ამიტომაც იგი ორი ნაწილისაგან შედგება. პოტენციალური ენერგიის პირველი ნაწილია თვით მყარი სხეულის ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ენერგია და იგი დამოკიდებულია მათ ურთიერთდაშორებაზე. მაგრამ ეს მანძილები უცვლელია, ამიტომ უცვლელი იქნება სათანადო პოტენციალური ენერგია და იგი შეიძლება არ მივიღოთ მხედველობაში. პოტენციალური ენერგიის მეორე ნაწილი დაკავშირებულია მყარი სხეულის და გარეშე სხეულების ურთიერთქმედებასთან და დამოკიდებულია მყარი სხეულის ორიენტაციაზე ბრუნვის დროს. ვინაიდან ეს ორიენტაცია დახასიათებულია მობრუნების φ კუთხით, პოტენციალური ენერგია იქნება ამ კუთხის ფუნქცია.

ზემოთქმულიდან ვღებულობთ, რომ მბრუნავი მყარი სხეულის სრული ენერგია შემდეგი ფორმულით იქნება გამოსახული:

$$E = \frac{I \omega^2}{2} + I'(\varphi).$$

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვთქვათ, ჰორიზონტალური ღერძის ირგვლივ ბრუნავს მყარი სხეული (ნახ. 125). C წერტილი იყოს მისი ინერციის ცენტრი. თუ მყარი სხეული დედამიწის მიზიდულობის ველში იმყოფება, მისი პოტენციალური ენერგია დამოკიდებული იქნება ინერციის ცენტრის (ამ შემთხვევაში სიმძიმის ცენტრის) სიმაღლეზე დედა-



ნახ. 125

მიწის ზედაპირიდან; ეს h სიმაღლე შეიძლება გამოვსახოთ იმ კუთხით, რომელსაც ღერძიდან სიმძიმის ცენტრამდე გავლებული მონაკვეთი ადგენს ვერტიკალურ მიმართულებასთან. ვინაიდან პოტენციალური ენერგია h სიმაღლეზე მყოფი სხეულისა არის mgh , გვექნება

$$U = mgh = mg(H - l \cos \varphi),$$

სადაც H არის ღერძის სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან, ხოლო l — მანძილი სიმძიმის ცენტრიდან ღერძამდე. ორივე ეს სიდიდე მუდმივია ბრუნვის დროს, ცვალებადია მხოლოდ φ კუთხე და მისი ფუნქციაა მყარი სხეულის პოტენციალური ენერგია.

3. იმპულსის მომენტი. გამოვითვალოთ უძრავი ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის მომენტი. ზოგადი ფორმულის თანახმად მატერიალური წერტილებისაგან შემდგარი სისტემის იმპულსის მომენტი

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i]. \quad (\text{XI, 15})$$

ამ შემთხვევაში, როდესაც მყარი სხეული განიხილება როგორც უწყვეტი, გვექნება

$$\vec{L} = \int dm [\vec{r} \vec{v}]; \quad (\text{XI, 15}')$$

ეს გამოსახულება შეიძლება გარდავქმნათ, თუ სიჩქარეს გამოვსახავენ კუთხური სიჩქარის საშუალებით

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}],$$

გვექნება

$$\vec{L} = \int dm [\vec{r} [\vec{\omega} \vec{r}]].$$

ვექტორული ნამრავლის გარდაქმნა მოგვცემს

$$\vec{L} = \int dm \{ \vec{\omega} \cdot r^2 - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \}.$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ იმპულსის მომენტი არ არის მიმართული ღერძის, ე. ი. $\vec{\omega}$ -ს გასწვრივ. ეს კიდევ უფრო ნათელი გახდება, თუ გავამარტივებთ გამოთვლას იმ დაშვებით, რომ ბრუნვის ღერძი თანხვედნილია ერთ-ერთ კოორდინატთა ღერძთან, მაგალითად, OZ ღერძთან. ამ შემთხვევაში

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega, \quad (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \omega z.$$

ჩასმა მოგვცემს:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= -\omega \int dm x \cdot z, \\ L_y &= -\omega \int dm y \cdot z, \\ L_z &= \omega \int dm (r^2 - z^2) = \omega \int (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI, 16})$$

ცხადია, რომ უკანასკნელ ფორმულაში მდგომი გამოსახულება

$$\int dm (x^2 + y^2)$$

წარმოადგენს მყარი სხეულის ინერციის მომენტს OZ ღერძის მიმართ

$$I_z = \int dm (x^2 + y^2), \quad (XI, 17)$$

ვინაიდან $x^2 + y^2$ არის dm ელემენტის ბრუნვის ღერძამდე მანძილის კვადრატი. პირველ ორ ფორმულაში მდგომი სიდიდეები

$$I_{xz} = \int dm \cdot xz \text{ და } \int dm \cdot yz = I_{yz}, \quad (XI, 18)$$

რომლებიც წარმოადგენენ კოორდინატთა ნამრავლებიდან აღებულ ინტეგრალებს, აღინიშნება სათანადოდ I_{xz} და I_{yz} . მათ ეწოდებათ ინერციის ნამრავლები. ამის შემდეგ იმპულსის მომენტის მდგენლები შემდეგი სახით დაიწერება:

$$I_{yx} = -I_{xz}, \quad I_{yz} = -I_{xz}, \quad L_z = I_z \omega. \quad (XI, 19)$$

ეს ფორმულებიც გვიჩვენებს, რომ \bar{L} არ არის მიმართული ბრუნვის ღერძის გასწვრივ, ვინაიდან მას აქვს გეგმილები OX და OY ღერძებზე. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ღერძი ისეთია, რომ ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია, იმპულსის მომენტი მიმართული იქნება ბრუნვის ღერძის გასწვრივ.

4. ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ. შტეინერის თეორემა. მთავარი ღერძები. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის ენერჯისა და იმპულსის მომენტის გამოსათვლელად უნდა ვიცოდეთ მყარი სხეულის ინერციის მომენტი ამ ღერძის მიმართ. შემდეგში ვნახავთ, რომ ინერციის მომენტი ისეთივე როლს ასრულებს ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში, როგორსაც მასა გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში.

ავიღოთ კოორდინატთა სათავედ მყარი სხეულის რომელიმე O წერტილი და გავატაროთ ამ სხეულთან დამაგრებული OX , OY და OZ ღერძები. მაშინ, განსაზღვრის თანახმად, ამ ღერძების მიმართ ინერციის მომენტისათვის მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \\ I_y &= \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \\ I_z &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \right\} \quad (XI, 20)$$

ეს ფორმულები გამოდგება იმ შემთხვევაში, თუ მყარი სხეული წარმოადგენს დისკრეტული ნაწილაკების ერთობლიობას. თუკი მყარი სხეული განიხილება როგორც უწყვეტი, ინერციის მომენტები გამოთვლება ინტეგრების საშუალებით:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int (y^2 + z^2) \rho dV, \\ I_y &= \int (x^2 + z^2) dm = \int (x^2 + z^2) \rho dV, \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dV. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI}, 21)$$

ინერციის მომენტი დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე, მასების განაწილებაზე მის შიგნით და ღერძზე, რომლის მიმართაც იგი აითვლება. საზოგადოდ, ინერციის მომენტის გამოთვლა საკმაოდ რთული ამოცანაა. მხოლოდ ზოგიერთი სიმეტრიული სხეულის შემთხვევაში ხერხდება ინერციის მომენტების მარტივად გამოთვლა. სანამ განვიხილავდეთ ინერციის მომენტების გამოთვლის მაგალითებს, დავამტკიცოთ ეგრეთ წოდებული შტეინერის თეორემა, რომელიც აადვილებს აღნიშნულ გამოთვლებს.

ხშირად საჭიროა სხეულის ინერციის მომენტის გამოთვლა ისეთი ღერძის მიმართ, რომელიც არ გადის ინერციის ცენტრზე. როგორც ახლა ვნახავთ, ამისათვის საკმარისია ვიცოდეთ ინერციის მომენტი ინერციის ცენტრზე გამავალი და განსახილველი ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ და მანძილი ამ ღერძებს შორის.

ვთქვათ, O არის სხეულის ინერციის ცენტრი, ხოლო OZ — მასზე გამავალი ღერძი, რომლის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტი ცნობილია

$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

სადაც r_i არის i -ური წერტილის მანძილი OZ ღერძამდე (ნახ. 126), გავატაროთ OZ ღერძის პარალელური Δ ღერძი, რომელიც დაშორებულია OZ ღერძიდან d მანძილით. გამოთვლების გასამარტივებლად ავარჩიოთ კოორდინატთა ღერძები, ისე როგორც ნახაზზე, ნაჩვენებია (Δ ღერძი მდებარეობს YOZ სიბრტყეში). აღვნიშნოთ i -ური წერტილის მანძილი Δ ღერძიდან $r_{\Delta i}$ -ით, მაშინ ინერციის მომენტი Δ ღერძის მიმართ იქნება

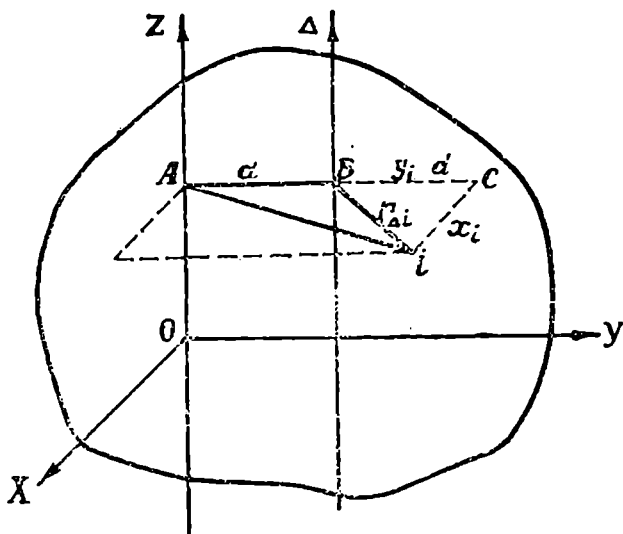
$$I_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i r_{\Delta i}^2. \quad (\text{XI}, 22)$$

მაგრამ ნახაზი გვიჩვენებს, რომ

$$r_{\Delta i}^2 = x_i^2 + (y_i - d)^2 = x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2dy_i = r_i^2 + d^2 - 2y_i d.$$

ჩასმა (XI, 19) განტოლებაში მოგვცემს

$$I_{\Delta} = I_0 + \sum_{i=1}^n m_i d^2 - 2 \sum_{i=1}^n m_i y_i \cdot d.$$



ნახ. 126

მაგრამ ჩვენთვის ცნობილია, რომ $\frac{1}{m} \sum_i m_i y_i$ არის ინერციის ცენტრის y კოორდინატი და ვინაიდან ინერციის ცენტრი OZ ღერძზე მდებარეობს, იგი ნულის ტოლი იქნება

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i = 0.$$

გარდა ამისა, $\sum_{i=1}^n m_i$ არის მთელი მყარი სხეულის მასა, ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$I_{\Delta} = I_0 + m d^2. \quad (\text{XI, 23})$$

ინერციის მომენტი რაიმე Δ ღერძის მიმართ არის ჯამი ინერციის ცენტრზე გამავალი და Δ ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტისა და სხეულის მასის ნამრავლისა ღერძებს შორის მანძილის კვადრატზე; ამ თეორემას ეწოდება შტეინერის თეორემა.

გარდა იმისა, რომ იგი აკავშირებს ერთმანეთთან ინერციის მომენტებს პარალელური ღერძების მიმართ, იგი გვიჩვენებს, რომ ასეთ ღერძებს შორის ყველაზე მცირე ინერციის მომენტი სხეულს აქვს ინერციის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, საზოგადოდ მყარი სხეულის იმპულსის ვექტორი, ე. ი. \vec{L} ვექტორი არ თანხვდება ბრუნვის ღერძის, ე. ი. ω ვექტორის მიმართულებას. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ამ ღერძის მიმართ ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია, \vec{L} მიმართული იქნება ω ვექტორის გასწვრივ. ისეთ ღერძს, რომლის მიმართ ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია, მთავარი ღერძი ეწოდება. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ყოველ მყარ სხეულში არსებობს მინიმუმ სამი მთავარი ღერძი (სიმეტრიათა სხეულის შემთხვევაში მათი რიცხვი შეიძლება მეტიც იყოს), რომლებიც გადის ინერციის ცენტრზე და ერთმანეთის მართობულია.

სიმეტრიული სხეულების შემთხვევაში მთავარი ღერძების მოძებნა ადვილია. ისინი ჩვეულებრივ სიმეტრიის ღერძებს თანხვდებიან. მაგალითად, ერთგვაროვანი სამღერძა ელიფსოიდის შემთხვევაში მთავარ ღერძებს წარმოადგენს ელიფსოიდის სიმეტრიის ღერძები (ნახ. 127). თუ ელიფსოიდის ორი ღერძი, მაგალითად, b და c , გაუტოლდა ერთმანეთს, ე. ი. ელიფსოიდი გადაიქცა ბრუნვის ელიფსოიდად, $CEDF$ სიბრტყეში მდებარე ყოველი ღერძი მთავარი ღერძი გახდება. ერთგვაროვანი სფეროს შემთხვევაში ცენტრზე გამავალი ყოველი ღერძი იქნება მთავარი. ნახაზზე ნაჩვენებია აგრეთვე პარალელებიპედის მთავარი ღერძები. ღერძის ირგვლივ ბრუნვის განხილვისას ჩვენ ისევ დავტრუნდებით მთავარი ღერძების განხილვას და მათი თვისებების შესწავლას.

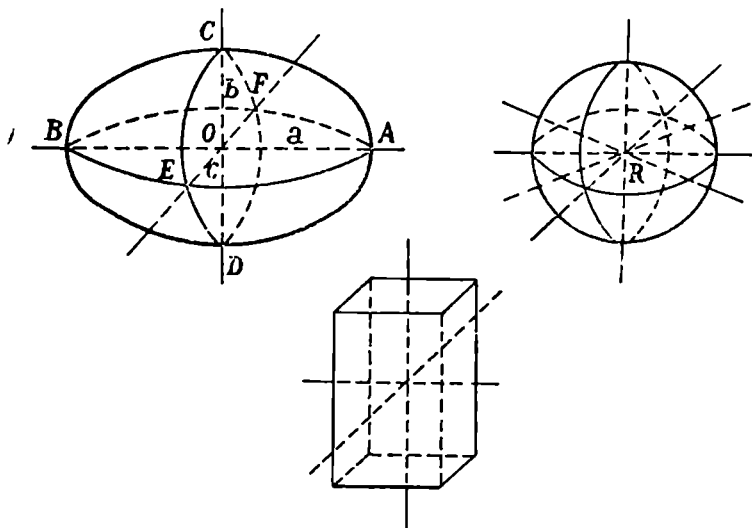
ინერციის მომენტთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული ინერციის რადიუსის ცნება. გამოვითვალოთ მყარი სხეულის წერტილების ღერძამდე მანძილების კვადრატების საშუალო მნიშვნელობა. ამისათვის ყოველი წერტილის ღერძამდე მანძილი ავიყვანოთ კვადრატში, გავამრავლოთ სათანადო მასაზე, შევკრიბოთ და გავყოთ მყარი სხეულის საერთო მასაზე. მივიღებთ გამოსახულებას

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

(XI, 24)

აღვნიშნოთ ეს სიდიდე x^2 -ით და ვუწოდოთ x -ს სხეულის ინერციის რადიუსი

$$x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i^2}{m}; \quad (\text{XI, 25})$$



ნახ. 127

აქედან ადვილად მივიღებთ ინერციის მომენტის გამოსახულებას ინერციის რადიუსის საშუალებით

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = m x^2. \quad (\text{XI, 26})$$

ეს ფორმულა ნათლად წარმოგვიდგენს ინერციის რადიუსის ფიზიკურ აზრს. თუ მყარ სხეულს შევცვლით m მასის მქონე ნივთიერი წერტილით, იგი უნდა მოვათავსოთ x მანძილზე ღერძიდან, რათა მას ჰქონდეს ისეთივე ინერციის მომენტი როგორც მყარ სხეულს.

§ 66. ინერციის მომენტები ზოგადი სივრცითი სხეულისათვის

1. ორატომიანი მოლეკულა. განვიხილოთ ორატომიანი მოლეკულის მარტივი შემთხვევა (ნახ. 128). თუ ჩავთვლით, რომ ატომები

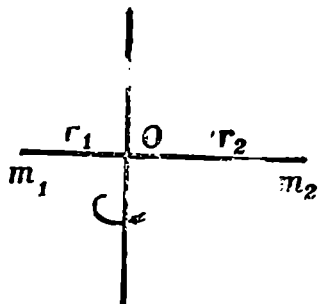
ნივთიერი წერტილებია, ორატომიანი მოლეკულის ინერციის მომენტი, ინერციის ცენტრზე გამავალი და ატომების შემაერთებელი ხაზის მართობი ღერძის მიმართ გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \quad (\text{XI}, 27)$$

სადაც m_1 და m_2 არის ატომების მასები, ხოლო r_1 და r_2 —ატომების მანძილები ღერძამდე. ვინაიდან O წერტილი არის მოლეკულის ინერციის ცენტრი, r_1 და r_2 შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r,$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r.$$



ნახ. 128

სადაც r არის მანძილი ატომებს შორის.

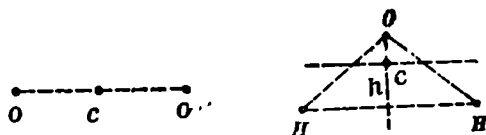
(XI, 27) ფორმულაში ჩასმა გვაძლევს

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2,$$

სადაც μ იქნება მოლეკულის დაყვანილი მასა. ორატომიანი მოლეკულის ინერციის მომენტის რიცხვითი მნიშვნელობის რიგი ადვილად გამოითვლება, თუ გავიხსენებთ, რომ ატომებს შორის მანძილი დაახლოებით 10^{-8} cm-ის რიგისაა, ხოლო ატომის მასა 10^{24} gr რიგისა. მივიღებთ

$$I \simeq 10^{-40} \text{ gr} \cdot \text{cm}^2.$$

2. სამატომიანი მოლეკულა. სამატომიანი მოლეკულის შემთხვევაში უნდა ვიცოდეთ, თუ როგორი ფორმისაა მოლეკულა (ნახ. 129). ზოგი მოლეკულის შემთხვევაში (CO_2) ატომები ერთ სწორ ხაზზეა



ნახ. 129

განლაგებული, ხოლო ზოგ შემთხვევაში მოლეკულას სამკუთხედის ფორმა აქვს (H_2O). მოექებნოთ წყლის მოლეკულის ინერციის მომენტები მთავარი ღერძების მიმართ, ამისათვის ჯერ მოვნახოთ ინერციის

ცენტრი, აღენიშნოთ წყალბადის ატომის მასა m_H -ით, ხოლო ჟანგბადისა — m_O -თი. ცხადია, რომ წყალბადის ატომების ინერციის ცენტრი იქნება მათი შემაერთებული ხაზის შუაში. თუ ამ წერტილში თავს მოვუყრით წყალბადის ორივე ატომს და მოვნახავთ მისი და ჟანგბადის ატომის ინერციის ცენტრს, გამოირკვევა, რომ იგი მდებარეობს სამკუთხედის სიმაღლეზე და დაშორებულია ფუძიდან მანძილთ

$$d = \frac{m_O}{m_O + 2m_H} h,$$

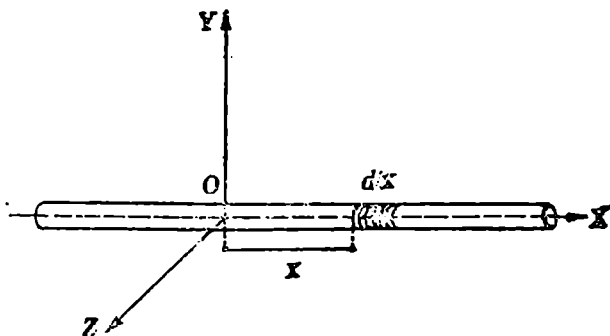
სადაც h არის სამკუთხედის სიმაღლე. ერთი მთავარი ღერძი თანხედენილი იქნება სიმაღლის მიმართულულებასთან და მის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება

$$I_1 = \frac{m_H}{2} a^2,$$

სადაც a არის მანძილი წყალბადის ატომებს შორის. მეორე მთავარი ღერძი გაივლის ამ პირველი ღერძის მართობულად ინერციის ცენტრზე და მის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება $I_2 = \frac{2m_O m_H}{m_O + 2m_H} h^2$.

მესამე მთავარი ღერძი მართობული იქნება სამკუთხედის სიბრტყისა და მის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება I_1 და I_2 ინერციის მომენტების ჯამი.

8. წვრილი ერთგვაროვანი ღერო. განვიხილოთ წვრილი ერთგვაროვანი ღერო (ნებისმიერი კვეთის), რომლის სიგრძეა l , ხოლო მასა—



ნახ. 130

m . ავირჩიოთ კოორდინატთა ღერძები ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენებები: OX ღერძი თვით ღეროს გასწვრივ, ხოლო OY და OZ ღერძები მის მართობულად. კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ ინერციის ცენტრში (ნახ. 130).

ცხადია, რომ OX , OY და OZ ღერძები ღეროს მთავარი ღერძებია. გამოვითვლოთ მთავარი ინერციის მომენტი OY ღერძის მიმართ. ამისათვის განვიხილოთ OX ღერძის მართობი კვეთი, რომლის განივკვეთის ფართობია S , ხოლო სისქე $-dx$. თუ ღეროს მოცულობის ერთეულის მასას, ე. ი. სიმკვრივეს ρ -თი აღვნიშნავთ, dx ელემენტის ინერციის მომენტი OY ღერძის მიმართ იქნება

$$x^2 dm = \rho x^2 S dx ;$$

აქედან ღერძის მარჯვენა ნახევრის ინერციის მომენტისათვის მივიღებთ

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \rho x^2 S dx = \frac{1}{3} \rho S \left(\frac{l}{2} \right)^3 = \frac{1}{24} \rho S l^3.$$

ცხადია, რომ მარცხენა ნახევრის ინერციის მომენტი ასეთივე იქნება და ამიტომ მთელი ღეროს ინერციის მომენტისათვის OY მთავარი ღერძის მიმართ გვექნება

$$I_Y = \frac{1}{12} \rho S l^3. \quad (XI, 28)$$

რადგანაც ღეროს მთელი მასა შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$m = \rho S l,$$

(XI, 28) ფორმულა ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$I_Y = \frac{1}{12} m l^2. \quad (XI, 28')$$

ცხადია, რომ ასეთივე იქნება ინერციის მომენტი OZ მთავარი ღერძის მიმართ. შტეინერის თეორემის საშუალებით ადვილად შეიძლება გამოვითვალოთ ღეროს ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ, რომელიც გადის ღეროს ბოლოზე და პარალელურია, მაგალითად, OY ღერძისა,

$$I_{\Delta} = I_Y + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2. \quad (XI, 29)$$

ადვილია ავრეთვე ინერციის რადიუსის გამოთვლა

$$x_Y^2 = \frac{1}{12} l^2, \quad x_{\Delta}^2 = \frac{1}{3} l^2.$$

ვინაიდან ჩვენ ვთვლით, რომ ღერძი იმდენად ვიწროა, რომ მისი სისქე შეიძლება უგულებელვყოთ. ცხადია, ინერციის მომენტი მესამე მთავარი ღერძის (OX -ის) მიმართ ნულის ტოლი იქნება.

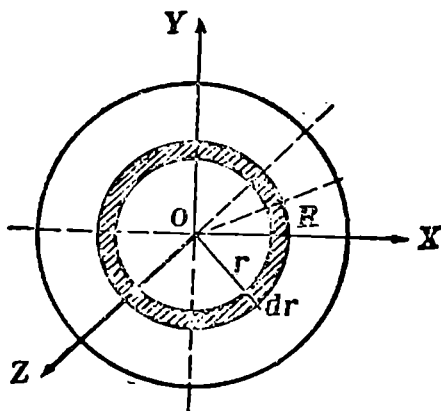
4. ერთგვაროვანი სფერო. ერთგვაროვანი სფეროს შემთხვევაში ცენტრზე გამავალი ყოველი ღერძი მთავარი ღერძი იქნება. ავირჩიოთ ამათგან სამი ურთიერთმართობი ღერძი— OX , OY და OZ (ნახ. 131). ცხადია, რომ, სიმეტრიის გამო, ამ სამი ღერძის მიმართ ინერციის მო-

მენტები ტოლია. როგორც ვიცი, მათი გამოსათვლელი ფორმულები შემდეგია:

$$I_x = \int \rho (y^2 + z^2) dV,$$

$$I_y = \int \rho (x^2 + z^2) dV,$$

$$I_z = \int \rho (x^2 + y^2) dV.$$



ნახ. 131

მათი შეკრება მოგვცემს

$$I_x + I_y + I_z = 2 \int \rho (x^2 + y^2 + z^2) dV = 2 \int \rho r^2 dV.$$

თუ მოცულობის ელემენტად ავირჩევთ r და $r + dr$ რადიუსებს შორის მოთავსებულ შრეს, რომლის მოცულობაა $4\pi r^2 dr$, და მოვახდენთ ინტეგრირებას 0-დან R -მდე, სადაც R არის სფეროს რადიუსი, მივიღებთ

$$I_x + I_y + I_z = 8\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi\rho R^5}{5}.$$

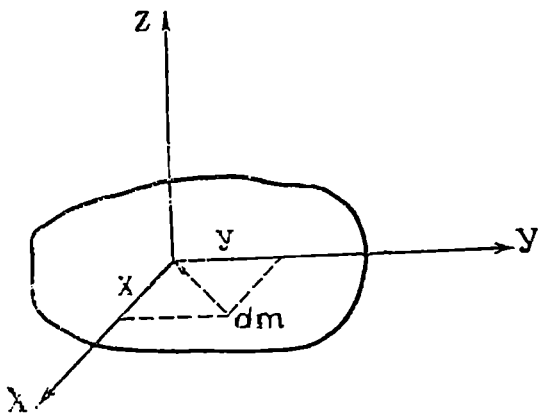
ვინაიდან $I_x = I_y = I_z$, ყოველი მათგანისათვის გვექნება

$$I_x = I_y = I_z = \frac{8\pi\rho R^5}{15}. \quad (\text{XI, 30})$$

თუ შემოვიღებთ სფეროს მასას $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, გვექნება

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m R^2. \quad (\text{XI, 31})$$

5. კავშირი ერთგვაროვანი ბრტყელი ფირფიტის ინერციის მომენტებს შორის. ხშირად, როდესაც სხეულის¹⁾ სისქე საკმარისად მცირეა, იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც უსასრულოდ ბრტყელი ფირფიტა (ნახ. 132). ასეთი სხეულის ერთ-ერთი თავისუფალი ლერძი მიმართულია ფირფიტის სიბრტყის მართობულად. მის სათანადო მომენტს ეწო-



ნახ. 132

დება პოლარული ინერციის მომენტი. ორი დანარჩენი თავისუფალი ლერძი მდებარეობს თვით ფირფიტის სიბრტყეში და მათი განლაგება დამოკიდებულია ფირფიტის ფორმასა და მასის განაწილებაზე. მათ სათანადო ინერციის მომენტებს ეწოდება ეკვატორიალური ინერციის მომენტები. ავარჩიოთ კოორდინატთა ლერძები ისე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. OZ ლერძი მიემართოთ ფირფიტის ნორმალის გასწვრივ, ხოლო OX და OY ლერძები—ფირფიტის სიბრტყეში მდებარე თავისუფალი ლერძების გასწვრივ. ვინაიდან ფირფიტა OXY სიბრტყეში მდებარეობს, სათანადო ინერციის მომენტებისათვის მივიღებთ

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm,$$

$$I_x = \int y^2 dm,$$

$$I_y = \int x^2 dm.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ პოლარული ინერციის მომენტი უდრის ეკვატორული ინერციის მომენტების ჯამს

$$I_z = I_x + I_y. \quad (\text{XI}, 32)$$

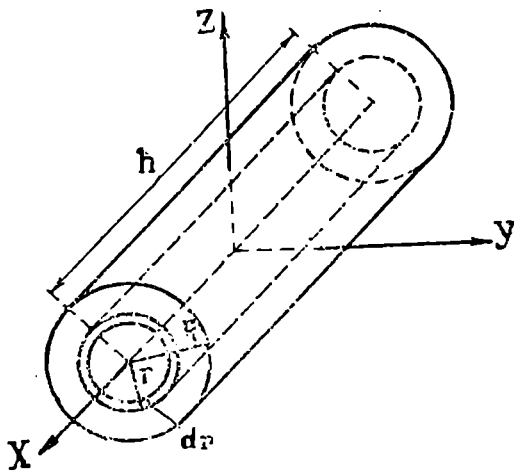
ჩვენ ვხედავთ, რომ ბრტყელი ფირფიტის პოლარული ინერციის მომენტი უდრის ეკვატორული ინერციის მომენტების ჯამს.

6. ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრი. თუ ცილინდრს მოვათავსებთ OX ღერძის გასწვრივ და კოორდინატთა სათავეს ინერციის ცენტრში მოვათავსებთ, კოორდინატთა ღერძები იქნება მთავარი ღერძები (ნახ. 133). ჯერ გამოვითვალოთ ინერციის მომენტი OX მთავარი ღერძის მიმართ, რომელიც თანხვედრა ცილინდრის სიმეტრიის ღერძს. მოცულობის ელემენტად ავირჩიოთ ცილინდრული შრე r შიდა რადიუსით და $r + dr$ გარე რადიუსით. თუ ცილინდრის სიმაღლეა h , ამ ელემენტში მოთავსებული მასა იქნება $2\pi r h \rho \cdot dr$, სადაც ρ არის სიმკვრივე. ინერციის მომენტისათვის მივიღებთ

$$I_x = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi h \rho}{2} R^4.$$

თუ ჩავსვამთ ცილინდრის სრული მასის მნიშვნელობას $m = \pi R^2 h \rho$, გვექნება

$$I_x = \frac{1}{2} m R^2. \tag{XI, 33}$$

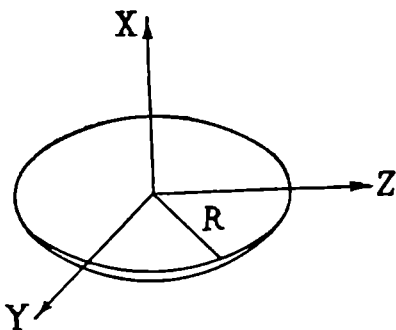


ნახ. 133

OY და OZ ღერძების მიმართ ინერციის მომენტების გამოთვლა უფრო რთულია. გამოთვლები გვაძლევს

$$I_y = I_z = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right). \quad (\text{XI, 34})$$

ცხადია, რომ ამ ფორმულიდან უსასრულოდ წვრილი ღეროს ($R \rightarrow 0$) კერძო შემთხვევაში მიიღება ინერციის მომენტის (XI, 28') ფორმულა. წარ-



ნახ. 134

მოვიდგინოთ, მეორე მხრივ, რომ ცილინდრის სიმაღლე თანდათან მცირდება ($h \rightarrow 0$), მაშინ (XI, 33) და (XI, 34) ფორმულები მოგვცემს უსასრულოდ თხელი წრიული დისკოს ინერციის მომენტებს (ნახ. 134).

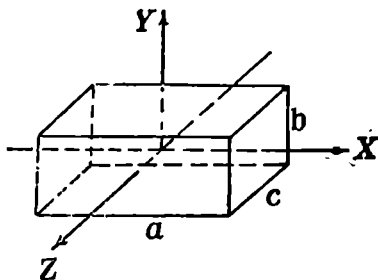
$$I_x = \frac{1}{2} m R^2,$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} m R^2.$$

7. ერთგვაროვანი პარალელებიპედი. ვთქვათ, პარალელებიპედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია a , b და c , მდებარეობს კოორდინატთა ღერძების მიმართ ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 135-ე ნახაზზე. მაშინ მთავარი ინერციის მომენტები OX , OY და OZ ღერძების მიმართ იქნება

$$I_x = \frac{m}{12} (b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{12} (a^2 + c^2), \quad I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2).$$

გამოთვლები ისე წარმოებს, როგორც წრიული ცილინდრის შემთხვევაში. თუ $a > b > c$, მივიღებთ, რომ $I_x < I_y < I_z$. თუ ერთ-ერთი გვერდის, მაგალითად, c -ს სიგრძე თანდათან კლებულობს, ზღვარში მივიღებთ უსასრულოდ თხელ მართკუთხა ფიფიტას. სათანადო ინერციის მომენტები იქნება



ნახ. 135

$$I_x = \frac{m}{12} b^2, \quad I_y = \frac{m}{12} a^2, \quad I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) = I_x + I_y.$$

§ 67. ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. ფიზიკური საბანი.
საბრუნო საბანი

განვიხილოთ მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში სხეულის მდებარეობა განისაზღვრება ერთი სიდიდით, მაგალითად φ კუთხით, რომელსაც მყარ სხეულთან ერთად მბრუნავი სიბრტყე ადგენს უძრავ სიბრტყესთან. მოძრაობის კანონიერი განტოლება შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\varphi = \varphi(t).$$

ჩვენი ამოცანაა მოძრაობის დინამიკური განტოლების დადგენა და მისი გამოყენება ზოგიერთი კერძო შემთხვევისათვის.

ჩვენთვის ცნობილია, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები შეიძლება დავიყვანოთ ერთ ნაკრებ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე \bar{M} მომენტით. მოძრაობის ძირითადი დინამიკური განტოლება, რომელიც საზღვრავს მყარი სხეულის ბრუნვას ღერძის ირგვლივ, შემდეგი სახისაა:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}, \quad (XI, 35)$$

სადაც \bar{L} არის იმპულსის მომენტი. თუ ღერძი არ არის თავისუფალი, \bar{L} ვექტორს, გარდა ბრუნვის ღერძის გასწვრივ მიმართული მდგენლისა, ექნება სხვა მდგენლებიც; ამ უკანასკნელი მდგენლების ცვალებადობას და მასთან დაკავშირებულ ღერძის რეაქციის ძალებს შემდეგ განვიხილავთ, ახლა კი განვიხილოთ ღერძის გასწვრივ მიმართული მდგენელი. ღერძზე (XI, 35) განტოლების დაგეგმილებით მივიღებთ

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta}. \quad (XI, 36)$$

მაგრამ იმპულსის მომენტი ღერძის მიმართ შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$L_{\Delta} = I\omega,$$

სადაც I არის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ, ხოლო ω — კუთხური სიჩქარე, ამიტომ (XI, 36) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d}{dt} (I\omega) = M_{\Delta}. \quad (XI, 37)$$

ვინაიდან სხეული მყარია, ინერციის მომენტი უცვლელი იქნება და ამიტომ შეიძლება დავწეროთ

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta}.$$

რადგანაც $\frac{d\omega}{dt}$ წარმოადგენს კუთხურ აჩქარებას, ეს განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$Iz = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_{\Delta} \quad (\text{XI, 38})$$

ინერციის მომენტის ნამრავლი კუთხურ აჩქარებაზე გარეშე ძალების მიმართ მომენტის ტოლია; ეს განტოლება ანალოგიურია ნიუტონის მეორე კანონის გამოშხატველი განტოლებისა ნივთიერი წერტილისათვის

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ მასა შეცვლილია ინერციის მომენტით, ხაზოვანი აჩქარება—კუთხური აჩქარებით და ძალა—ძალის მომენტით.

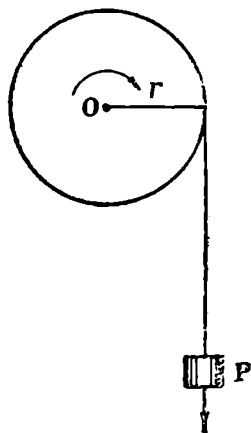
მოძრაობის დინამიკური განტოლება (XI, 38) გვიჩვენებს, რომ თუ ცნობილია გარეშე მომენტი, შეიძლება ამოვხსნათ იგი φ -ს მიმართ და ვიპოვოთ მოძრაობის კინემატიკური განტოლება. ცხადია, მოძრაობის სრულად განსაზღვრისათვის საჭიროა საწყისი პირობების ცოდნა, ე. ი. φ კუთხისა და ω კუთხური სიჩქარის მნიშვნელობათა ცოდნა დროის საწყისი მომენტისათვის.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა. ვთქვათ, გარეშე ძალების მომენტი ნულის ტოლია. მაშინ მოძრაობის განტოლებიდან მივიღებთ, რომ კუთხური აჩქარება ნულია, ხოლო კუთხური სიჩქარე მუდმივია, რაც იმას ნიშნავს, რომ მყარი სხეული თანაბრად ბრუნავს ღერძის ირგვლივ. მოძრაობის კინემატიკური განტოლება იქნება

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \omega = \text{const.}$$

სადაც φ_0 არის კუთხის საწყისი მნიშვნელობა.

ასევე მარტივად შეიძლება ამოიხსნას შემთხვევა, როდესაც გარეშე მომენტი მუდმივია; ამ შემთხვევის მაგალითს წარმოადგენს ცილინდრული სხეული, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა ჰორიზონტალური ღერძის ირგვლივ (ნახ. 136). მასზე დახვეულია თოკი, რომლის ბოლოზე ჩამოკიდებულია P წონის ტვირთი. ცილინდრზე მოქმედებს $M = Pr$ მომენტი, სადაც r



ნახ. 136

არის ცილინდრის რადიუსი. (XI, 38) განტოლების თანახმად კუთხური აჩქარება მუდმივი იქნება

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\dot{M}}{I} = \text{const.}$$

კუთხური სიჩქარე კი იქნება ღროის წრფივი ფუნქცია

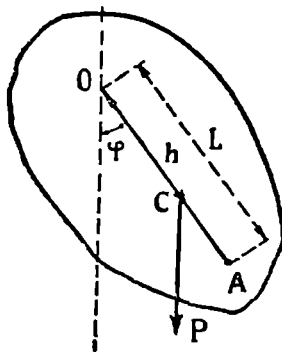
$$\omega = \omega_0 + \frac{\dot{M}}{I} t.$$

კიდევ ერთი ინტეგრებით მივიღებთ მოძრაობის კინემატიკურ განტოლებას

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\dot{M}}{2I} t^2. \quad (\text{XI, 39})$$

φ_0 და ω_0 წარმოადგენენ საწყის კუთხეს და კუთხურ სიჩქარეს. როგორც ვხედავთ, მუდმივი მომენტის მოქმედების შემთხვევაში ბრუნვა იქნება თანაბრად აჩქარებული.

გაცილებით უფრო საინტერესოა, მაგრამ უფრო რთულია შემთხვევა, როდესაც გარეშე მომენტი დამოკიდებულია მობრუნების კუთხეზე. ასეთი შემთხვევის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს მძიმე მყარი სხეულის ბრუნვა ჰორიზონტალური ღერძის ირგვლივ (ნახ. 137), თუ სხეულის ინერციის ცენტრი არ მდებარეობს ღერძზე. O წერტილი წარმოადგენს ჰორიზონტალური ღერძის კვალს ნახაზზე (თვით ღერძი მიმართულია ნახაზის მართობულად). C არის ინერციის ცენტრი, რომელზეც მოდებულია სიმძიმის ძალა. სხეულის ორიენტაცია განვსაზღვროთ φ კუთხით, რომელსაც OC ხაზი ადგენს ვერტიკალთან. ნახაზი გვიჩვენებს, რომ მოქმედი მომენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:



ნახ. 137

$$M = P \cdot h \cdot \sin \varphi,$$

სადაც h არის მანძილი ინერციის ცენტრსა და ღერძს შორის. მოძრაობის დინამიკური განტოლება იქნება

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Ph \sin \varphi. \quad (\text{XI, 40})$$

ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ მოქმედი მომენტი ცდილობს შეამციროს ფ კუთხე; ამ განტოლების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, მაგრამ იმ შემთხვევაში, როდესაც ფ კუთხე მცირეა, იგი შეიძლება საგრძნობლად გავამარტივოთ. მართლაც, ამ შემთხვევაში $\sin \varphi$ შეიძლება შევცვალოთ თვით ფ კუთხით, რის შემდეგ (XI, 40) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Ph \varphi.$$

ეს განტოლება მსგავსია მათემატიკური საქანის განტოლებისა და ამოხსნება ისევე როგორც ეს უკანასკნელი

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{Ph}{I}} t + \alpha_0 \right), \quad (\text{XI, 41})$$

სადაც φ_0 არის რხევის კუთხური ამპლიტუდა (უდიდესი კუთხური გადახრა ვერტიკალური მიმართულებიდან), ხოლო α_0 — საწყისი ფაზა. ჩვენ ვხედავთ, რომ განხილული მყარი სხეული ასრულებს ჰარმონიულ რხევას წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად. რხევის პერიოდი გამოითვლება შემდეგი ფორმულიდან:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Ph}}.$$

თუ შევიტანთ წონის მნიშვნელობას მივიღებთ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}. \quad (\text{XI, 42})$$

განხილულ მყარ სხეულს, რომელსაც შეუძლია რხევა ჰორიზონტალური ღერძის ირგვლივ (ვერტიკალური მიმართულების მახლობლად) ფიზიკური საქანი ეწოდება. ცხადია, ფიზიკური საქანიდან კერძო შემთხვევაში შეიძლება მივიღოთ მათემატიკური საქანი. ამისათვის საჭიროა დავუშვათ, რომ მყარი სხეულის მთელი მასა კონცენტრირებულია მის ინერციის ცენტრში. მაშინ ინერციის მომენტისათვის მივიღებთ (h იქნება საქანის სიგრძე)

$$I = mh^2$$

და პერიოდის ფორმულა დაიყვანება მათემატიკური საქანის პერიოდის ფორმულაზე

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

ხშირად ისმის საკითხი ისეთი მათემატიკური საქანის მოძებნისა, რომლის რხევის პერიოდი უდრის მოცემული ფიზიკური საქანის პერიოდს.

(XI, 42) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ამ მათემატიკური საქანის სიგრძე უნდა იყოს

$$l = \frac{I}{mh} . \quad (\text{XI, 43})$$

გადავზომოთ ეს მანძილი საქანის დაკიდვის O წერტილიდან OC -ს მიმართულეებით. მივიღებთ A წერტილს. თუ ჩვენ წარმოვიდგენთ, რომ სხეულის მთელი მასა ამ წერტილშია კონცენტრირებული, მივიღებთ მათემატიკურ საქანს, რომლის პერიოდი თანხვედბა განხილული ფიზიკური საქანის პერიოდს. l -ს ეწოდება ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძე.

ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ ღერძად ავიღებთ არა O წერტილზე, არამედ A წერტილზე გამავალ ღერძს, ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდი არ შეიცვლება. მართლაც, ამ შემთხვევაში საქანის დაყვანილი სიგრძე იქნება

$$l_1 = \frac{I_1}{m(l-h)} , \quad (\text{XI, 44})$$

სადაც I_1 არის სხეულის ინერციის მომენტი A წერტილზე გამავალი ღერძის მიმართ. დავამტკიცოთ, რომ $l_1 = l$. შტეინერის თეორემის თანხმად

$$I = I_0 + mh^2 ,$$

სადაც I_0 არის ინერციის მომენტი C წერტილზე, ე. ი. ინერციის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ (ყველა განხილული ღერძი ერთმანეთის პარალელურია). ჩასმა (XI, 43) ფორმულაში მოგვცემს

$$l = h + \frac{I_0}{mh} \quad (\text{XI, 45})$$

ან

$$m(l-h)h = I_0 .$$

შტეინერის თეორემის განოყენება C და A წერტილებზე გამავალი ღერძებისათვის მოგვცემს

$$I_1 = I_0 + m(l-h)^2 .$$

I_0 -ის მნიშვნელობის ჩასმა მოგვცემს

$$I_1 = m(l-h)l .$$

ჩასმა (XI, 44) ფორმულაში საბოლოოდ გვაძლევს

$$l_1 = l . \quad (\text{XI, 46})$$

ღერძს, რომელიც დაწოტებულია ბრუნვის ღერძიდან დაყვანილი სიგრძის ტოლი მანძილით ინერციის ცენტრის მიმართულეებით, ფიზიკური

საქანის რხევის ღერძი ეწოდება. (XI, 45) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძე არ იცვლება (და ამიტომაც არ იცვლება რხევის პერიოდიც), როდესაც ადგილებს უნაცვლებენ დაკიდვისა და რხევის წერტილებს.

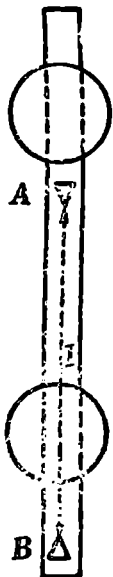
ფიზიკური საქანის პრაქტიკული გამოყენების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს მაგალითს წარმოადგენს ეგრეთ წოდებული საბრუნო საქანი. ცნობილია, რომ სიმძიმის ძალის აჩქარების ექსპერიმენტული განსაზღვრისათვის ყველაზე ხშირად საქანი გამოიყენება. რასაკვირველია, შესაძლებელია რომ იყოს მათემატიკური საქანის განხორციელება, *g*-ს გამოთვლა ადვილი იქნებოდა შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} .$$

ამისათვის საკმარისი იქნება საქანის სიგრძისა და რხევის პერიოდის განსაზღვრა. მაგრამ ვინაიდან ყოველი რეალური საქანი არის არა მათემატიკური, არამედ ფიზიკური საქანი, *g*-ს გამოთვლა რთულდება.

მართლაც, ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდის ფორმულის თანახმად

$$g = 4\pi^2 \frac{I}{mlT^2} .$$



ნახ. 138

g-ს გამოთვლა, გარდა პერიოდის განსაზღვრისა, მოითხოვს ცოდნას ინერციის მომენტისა და ინერციის ცენტრის მანძილისა დაკიდვის ღერძამდე, ეს კი დიდ ექსპერიმენტულ საქნელებს ელოდება (საქანის რთული ფორმა, შესაძლო არაერთგვაროვნება და სხვ.). ამიტომაც *g*-ს განსაზღვრისათვის იყენებენ საბრუნო საქანს, რომელიც დამყარებულია დაკიდვისა და რხევის ღერძების ურთიერთშენაცვლების შესაძლებლობაზე.

საბრუნო საქანი წარმოადგენს ბრტყელ ღერძს, რომელშიც ჩამაგრებულია ორი სამკუთხა პრიზმა ერთმანეთისაკენ წიბოებით მიმართული (ნახ. 138). ყოველი მათგანი შეიძლება გამოვიყენოთ როგორც დაკიდვის ღერძი. საქანის ღერძზე მოთავსებულა ორი მძიმე ლინზისებრი სხეული, რომლებიც შეიძლება გადაუნაცვლოთ ღერძის გასწვრივ; ამ ლინზებს ანაცვლებენ მანამდე, სანამ საქანის რხევის პერიოდი არ იქნება ერთი და იგივე დამოუკიდებლად იმისაგან,

რომელი — *A* თუ *B* ღერძი იქნება აღებული საქანის დაკიდვის ღერძად. დაემატიკოთ, რომ მანძილი ამ პრიზმების წიბოებს შორის არის სწო-

რედ ფიზიკური საჭანის დაყვანილი სიგრძე. აღენიშნოთ h_1 -ითა და h_2 -ით A და B ღერძების დაშორება ინერციის (სიმძიმის) ცენტრიდან. ვინაიდან დაკიდვის ორივე შემთხვევაში დაყვანილი სიგრძე ერთი და იგივეა, (XI, 45) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\frac{I_0}{mh_1} + h_1 = \frac{I_0}{mh_2} + h_2 = l. \quad (\text{XI, 47})$$

აქედან მივიღებთ

$$\left(\frac{I_0}{mh_1 h_2} - 1 \right) (h_1 - h_2) = 0.$$

თუ $h_1 \neq h_2$, გვექნება

$$\frac{I_0}{m} = h_1 h_2.$$

ჩასმა (XI, 47) ფორმულაში მოგვცემს

$$l = h_1 + h_2 \quad (\text{XI, 48})$$

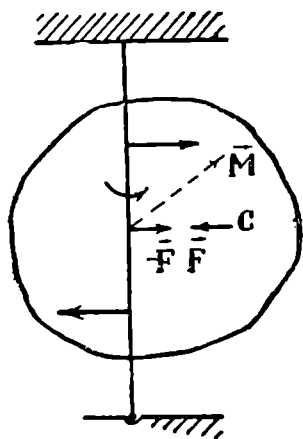
და, მაშასადამე, მანძილი A და B ღერძებს შორის, მართლაც, არის საჭანის დაყვანილი სიგრძე. ამიტომაც საკმარისია გავზომოთ მანძილი ღერძებს შორის, რაც დიდი სიზუსტით შეიძლება განხორციელდეს, რომ მათემატიკური საჭანის ფორმულით გამოთვალეთ g

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

§ 66. ბრუნვის ღირძემ მოძვედი ძალა და მოძენდი. თავისუფალი ღირძე

განვიხილოთ ისევ თავისუფალი მყარი სხეულის შემთხვევა, ე. ი. მივიღოთ, რომ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე მუდმივია; ამ შემთხვევაში კინეტიკური ენერგია მუდმივი სიდიდე იქნება და არ იქნება არავითარი მოქმედება გარეშე სხეულებსა. მაგრამ ეს კიდევ არ ნიშნავს იმას, რომ ასეთი მყარი სხეული იქნება სულ თავისუფალი. მათლაც, ჩვენ დავუშვით, რომ მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის ირგვლივ. ცხადია, რომ ღერძის ან, რაც იგივეა, მისი შემადგენელი წერტილების დამაგრება შესაძლებელია მხოლოდ რაიმე გარეშე სხეულების საშუალებით; ეს კი იქნას ნიშნავს, რომ ღერძი ან მისი დამმაგრებელი სხეულები (საკისარი და საჭუსლე) (ნახ. 139) უნდა მოქმედებდნენ სხეულზე გარკვეული ძალებით და, შებრუნებით, მბრუნავი სხეულიც უნდა მოქმედებდეს ღერძზე ტოლი და საწინააღმდეგო ძალებით.

გამოვითვალოთ თანაბრად მბრუნავი სხეულის შემთხვევაში ლერძზე მოქმედი ძალები. ვინაიდან სხეული თანაბრად ბრუნავს, მის წერტილებს ექნებათ მხოლოდ ღერძისაკენ მიმართული ნორმალური აჩქარება.



ნახ. 139

$$\bar{a}_{n_i} = -\bar{R}_i \omega^2,$$

სადაც \bar{R}_i არის ღერძიდან სხეულის განსახილველ წერტილამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი (ღერძისადმი მართობი); აქედან სათანადო ძალისათვის გვექნება

$$\bar{F}_i = -m_i \bar{R}_i \omega^2.$$

ყველა ეს ძალა მიმართულია ღერძისაკენ. მათი შეკრება მოგვცემს ნაკრებ ძალას

$$\bar{F} = -\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \bar{R}_i. \quad (\text{XI}, 49)$$

ვინაიდან ნაკრები ძალა იმპულსის წარმოებულის ტოლია, გვექნება

$$\bar{F} = -\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \bar{R}_i = \frac{d\bar{K}}{dt} = m \frac{d\bar{v}_c}{dt},$$

სადაც m არის მთელი სხეულის მასა, ხოლო \bar{v}_c —მასების ცენტრის სიჩქარე. თავის მხრივ სხეული იმოქმედებს ლერძზე ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით

$$-\bar{F} = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \bar{R}_i = -m \frac{d\bar{v}_c}{dt}. \quad (\text{XI}, 50)$$

ცხადია, რომ \bar{F} ძალა მოდებულია სხეულის მასების ცენტრში, ხოლო $-\bar{F}$ ღერძის სათანადო წერტილში.

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ, თუ სხეულის ინერციის ცენტრი ლერძზე არ მდებარეობს, უკანასკნელზე იმოქმედებს გამლუნავი ძალა $-\bar{F}$. თუკი ვესურს, რომ ლერძზე არავითარი ძალა არ მოქმედებდეს და, მაშასადამე, არც ღერძი მოქმედებდეს სხეულზე, ინერციის ცენტრი უნდა იყოს მოთავსებული ლერძზე ან, რაც იგივეა, ბრუნვის ღერძი უნდა გადიოდეს ინერციის ცენტრზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ბრუნვის ღერძი ცენტრირებულია.

ზოგ შემთხვევაში, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც ბრუნვა დიდი სიჩქარით წარმოებს, ღერძზე მოქმედი გამლუნავი ძალა იმდენად დიდია, რომ შეიძლება გამოიწვიოს ღერძის გაღუნვა და გატეხა. თანამედროვე მანქანების მბრუნავი ნაწილების სიჩქარე იმდენად დიდია რომ საკმარისია მასების ცენტრი მცირედ გადაიხაროს ღერძიდან, რომ უკანასკნელზე დაიწყოს მეტად დიდი გამლუნავი ძალების მოქმედება. მაგალითად, განვიხილოთ ტურბინა, რომელიც ბრუნავს $\omega = 500 \text{ sec}^{-1}$ კუთხური სიჩქარით. მივიღოთ, რომ მასების ცენტრი დაშორებულია ღერძიდან r მანძილით, მაშინ ღერძზე მოქმედი გამლუნავი ძალის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$F = 25 \cdot 10^4 m r \omega^2 = \frac{25 \cdot 10^4}{g} r P \sim 250 P r,$$

სადაც P არის ტურბინის წონა (g მიახლოებით ჩათვლილია 1000-ის ტოლად). როგორც ვხედავთ, გამლუნავი ძალა დაახლოებით 250 r -ჯერ მეტია, ვიდრე ტურბინის წონა. თუ $r = 1 \text{ mm}$, გამლუნავი ძალა 25-ჯერ მეტი იქნება ტურბინის წონაზე; აქედან ცხადია, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია ამ ძალის მოსპობა, ე. ი. ღერძის ცენტრირება. მაგრამ ღერძის ცენტრირება ჯერ კიდევ არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ ღერძზე არაერთი ძალები არ მოქმედებდეს. მართალია, ნაკრები ძალა ნულის ტოლი იქნება, მაგრამ ღერძზე, ისე როგორც ყოველ მყარ სხეულზე, მოქმედი ძალები არ დაიყვანება მხოლოდ ნაკრებ ძალაზე. გარდა ნაკრები ძალისა იქნება კიდევ ძალთა წყვილი, რომელიც ცდილობს გატეხოს ღერძი (ნახ. 139).

გამოვთვალოთ ღერძზე მოქმედი ძალების მომენტი და გამოვარკვიოთ როგორ უნდა ავირჩიოთ ღერძი იმისათვის, რომ ეს მომენტი იყოს ნულის ტოლი. ღერძზე მოქმედი — \vec{F}_i ძალის მომენტი იქნება

$$\vec{M}_i = -[\vec{r}_i \vec{F}_i] = m \omega^2 [\vec{r}_i \vec{R}_i]. \quad (\text{XI, 51})$$

ღერძებზე დაგეგმილება მოგვცემს

$$M_{xi} = m_i \omega^2 y_i z_i, \quad M_{yi} = 0, \quad M_{zi} = -m \omega^2 x_i y_i.$$

აქედან საერთო მომენტის გეგმილებისათვის მივიღებთ

$$M_x = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad M_y = 0, \quad M_z = -\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i.$$

როგორც ვხედავთ, იმისათვის, რომ ბრუნვის ღერძზე არ მოქმედებდეს ძალთა წყვილი, შემდეგი პირობები უნდა შესრულდეს:

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i = 0; \quad (\text{XI}, 52)$$

ამ შემთხვევაში ძალების მომენტი ნულის ტოლი იქნება.

მიღებული შედეგები შემდგენაირად შეიძლება ჩამოყალიბდეს: თუ ღერძი გადის ინერციის ცენტრზე და, გარდა ამისა, მისთვის შესრულებულია (XI, 52) პირობები, მასზე არ იმოქმედებს არც ნაკრები ძალა, არც ძალთა წყვილი. ცხადია, ასეთი ღერძი შეიძლება სრულებით არ დავამაგროთ, ვინაიდან სხეული მასზე არავითარ მოქმედებას არ ახდენს, არც ღერძი იმოქმედებს სხეულზე რაიმე ძალით და ძალთა წყვილით. ამიტომ ასეთ ღერძს ეწოდება თავისუფალი ღერძი; ეს სახელწოდება კიდევ იმით არის გამართლებული, რომ ღერძის ირგვლივ ბრუნვის დროს იმპულსის მომენტი სწორედ ამ ღერძის გასწვრივ არის მიმართული.

მართლაც, თუ ბრუნვა წარმოებს OY ღერძის გასწვრივ, იმპულსის მომენტს აქვს მდგენლები არა მარტო OY ღერძის გასწვრივ, არამედ OX და OZ ღერძების გასწვრივაც:

$$L_x = -\omega \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad L_z = -\omega \sum_{i=1}^n m_i y_i x_i. \quad (\text{XI}, 53)$$

ამ გამოსახულებაში შემავალი ჯამები სწორედ იმ სიდიდეებს წარმოადგენს, რომელთა ნულთან ტოლობა არის საჭირო იმისათვის, რომ OY ღერძი იყოს თავისუფალი. ამიტომაც, თუ OY ღერძი თავისუფალია, \vec{L} ვექტორი მიმართული იქნება ამ ღერძის გასწვრივ და ტოლი იქნება ინერციის მომენტის ნამრავლისა კუთხურ სიჩქარეზე

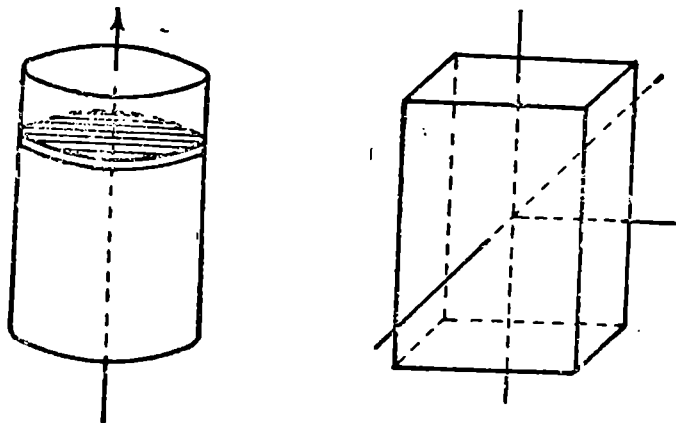
$$\vec{L} = I \vec{\omega}.$$

ვთქვათ, (XI, 52) პირობების გარდა, შესრულებულია კიდევ შემდეგი პირობა:

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i = 0.$$

მაშინ, ცხადია, რომ OX და OZ ღერძებიც თავისუფალი ღერძები იქნებიან. ვინაიდან კოორდინატთა ღერძების სათანადო შერჩევით აღნიშნული სამი პირობის შესრულება ყოველთვის შესაძლებელია, ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ ყოველ მყარ სხეულს აქვს მინიმუმ სამი თავისუფალი ღერძი. რასაკვირველია, თავისუფალ ღერძთა რიცხვი შეიძლება სამზე მეტიც იყოს როგორც, მაგალითად, ერთგვაროვანი ბრუნვითი

ელიფსოიდის ან სფეროს შემთხვევაში. 64-ე პარაგრაფში შემოღებულ მთავარ ღერძებთან შედარება გვიჩვენებს, რომ თავისუფალი ღერძი იგივე მთავარი ღერძია და, მაშასადამე, თავისუფალი ღერძის მოძებნა იგივეა, რაც მთავარი ღერძის მოძებნა.



ნ.ბ. 140

აღებული მყარი სხეულისათვის თავისუფალ ღერძთა მოძებნას ადვილებს ამ ღერძების შემდეგი თვისება. თავისუფალი ღერძის ყოველი წერტილი უნდა იყოს მის მართობულად გავლებული კვეთის მასების ცენტრი; მაკალითად, ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრის ღერძი მისი თავისუფალი ღერძია, ვინაიდან მისი წერტილები წარმოადგენს ღერძის მართობულად გავლებული წრიული კვეთების ინერციის ცენტრებს. ცხადია, რომ ერთგვაროვანი სფეროსათვის ცენტრზე გავლებული ყოველი ღერძი იქნება თავისუფალი ღერძი. გასაგებია აგრეთვე, რომ, თუ სხეული ერთგვაროვანი და სიმეტრიულია, მისი თავისუფალი ღერძები თანხვედნილი იქნება სიმეტრიის ღერძებისა (ნ.ბ. 140).

**§ 69. უძრავი წერტილის ირგვლივ ბრუნვის დინამიკა.
ვილმარის განტოლებები**

უძრავი ღერძის ირგვლივ ბრუნვასთან შედარებით ბრუნვა უძრავი წერტილის ირგვლივ გაცილებით უფრო რთული სასიათის მოძრაობაა; მისი შესწავლა უფრო რთულ მათემატიკურ აპარატს მოითხოვს და ამიტომაც ჩვენ დაკმაყოფილებით უმარტივესი შემთხვევების განხილვით.

როგორც 61-ე პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, სხეულის ბრუნვა წერტილის ირგვლივ საკმაოდ მცირე დროის განმავლობაში შეიძლება გან-

ვიზილოთ როგორც ბრუნვა ღერძის ირგვლივ. რასაკვირველია, სხვა მომენტში ღერძი უკვე სხვა იქნება. ასე რომ, თვითონ ღერძიც იცვლის თავის მდებარეობას. დროის ერთ მცირე შუალედში სხეული მობრუნდება ერთი ღერძის ირგვლივ, მეორე შუალედში — მეორე (მაგრამ, ცხადია, უსასრულოდ ახლომდებარე) ღერძის ირგვლივ და ა. შ. ამიტომაც ასეთ ღერძს ეწოდება მყისი ღერძი. მყისი ღერძი ყოველთვის გადის უძრავ O წერტილზე. კუთხური სიჩქარის ვექტორი მიმართულია მყისი ღერძის გასწვრივ და მოძრაობის დროს იცვლის თავის მდებარეობას როგორც თვით მყარი სხეულის, ისე გარეშე ათვის სისტემის მიმართ.

სანამ გადავიდოდეთ წერტილის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებათა განხილვაზე, შევეცადოთ თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ, თუ რისი განსაზღვრა არის საჭირო მოძრაობის დასახასიათებლად. ცხადია, რომ მყარი სხეულის მდებარეობა (ორიენტაცია) ინერციული ათვის სისტემის მიმართ სავსებით განისაზღვრება ამ სხეულში გავლებული სამი ღერძის ორიენტაციით. ავარჩიოთ ამ ღერძებად მთავარი ინერციის მომენტების ღერძები. ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ერთი კოორდინატთა სისტემის ორიენტაცია მეორე კოორდინატთა სისტემის მიმართ განისაზღვრება სამი კუთხით და რომ ვიცოდეთ ამ სამი კუთხის დამოკიდებულება დროზე, მყარი სხეულის მოძრაობა ცნობილი იქნებოდა. მაგრამ ამ ამოცანის ამოხსნა ძალიან რთულია და ამიტომაც შემოვისაზღვრებთ უფრო მარტივი და არასრული ამოცანის ამოხსნით. მთავარ ყურადღებას მივაქცევთ კუთხური სიჩქარის ვექტორს და მის ცვლილებას მოძრაობის დროს, ე. ი. დავკმაყოფილებით იმისი ცოდნით, თუ როგორ იცვლება მყისი ღერძი და როგორ ბრუნავს სხეული ამ მყისი ღერძის ირგვლივ. ჩვენ უკვე ვთქვით, რომ კუთხური სიჩქარის ვექტორი და მასთან დაკავშირებული მყისი ღერძი იცვლის თავის მდებარეობას როგორც ინერციული სისტემის, ისე თვით სხეულის მიმართ, ამიტომაც შესაძლებელია საკითხის ორნაირად დასმა: ჩვენ გვსურს $\vec{\omega}$ ვექტორის მოძრაობის განსაზღვრა ან ინერციული სისტემის, ან თვით მყარ სხეულთან დაკავშირებული სისტემის მიმართ. როგორც ახლა ვნახავთ, $\vec{\omega}$ ვექტორის მოძრაობის განსაზღვრა თვით მყარ სხეულთან დაკავშირებული სისტემის მიმართ გაცილებით უფრო მარტივია, ვიდრე ინერციული სისტემის მიმართ. მართლაც, განვიხილოთ მყარი სხეულის მოძრაობის ძირითადი განტოლება, რომელიც აკავშირებს იმპულსის მომენტის ცვლილებას გარეშე ძალების მომენტთან

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (\text{XI}, 54)$$

როგორც ვიცით, ეს განტოლება დაწერილია ინერციული სისტემის მიმართ, რაც იმას ნიშნავს, რომ წარმოებული დროის მიმართ აღებულია ინერციული სისტემისათვის. ამ განტოლების ამოხსნის სირთულე ის არის, რომ, როგორც ვიცით, იმპულსის მომენტი გამოისახება კუთხური სიჩქარის, ინერციის მომენტების და ინერციის ნამრავლების საშუალებით. ინერციული სისტემის მიმართ ყველა ეს სიდიდე ცვალებადია. თვით სხეულთან დაკავშირებული კოორდინატა სისტემის მიმართ კი ინერციის მომენტები და ნამრავლები უცვლელ სიდიდეებს წარმოადგენენ; ერთადერთი ცვალებადი სიდიდე იქნება კუთხური სიჩქარე. ამიტომაც არის უფრო მარტივი \vec{w} ვექტორის მოძრაობის განხილვა თვით სხეულთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ.

გადავწეროთ (XI, 54) განტოლება თვით მყარ სხეულთან დაკავშირებული ათვლის სისტემისათვის, რომელიც ბრუნავს ინერციული სისტემის მიმართ \vec{w} კუთხური სიჩქარით. მბრუნავი არაინერციული სისტემის განხილვის დროს ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ ნებისმიერი ვექტორის ცვლილება ინერციული სისტემის მიმართ დაკავშირებულია მის ცვლილებასთან მბრუნავი სისტემის მიმართ შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{w} \vec{A}].$$

ამ ფორმულის გამოყენება \vec{L} ვექტორისათვის გვაძლევს

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + [\vec{w} \vec{L}]. \quad (XI, 55)$$

ჩასმით (XI, 54) ფორმულაში მივიღებთ:

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} + [\vec{w} \vec{L}] = \vec{M}. \quad (XI, 56)$$

აქ $\frac{d'\vec{L}}{dt}$ იმპულსის მომენტის წარმოებულია მყარ სხეულთან ერთად მბრუნავი არაინერციული სისტემის მიმართ. ამ განტოლების კოორდინატული სახით წარმოდგენისათვის ავარჩიოთ მყარ სხეულთან დაკავშირებულ კოორდინატა ლერძებად მთავარი ინერციის ლერძები. მაშინ \vec{L} ვექტორის გეგმილები ამ ლერძების მიმართ შემდეგი ფორმულებით იქნება გამოსახული:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z. \quad (XI, 57)$$

კოორდინატა ლერძებზე დაგეგმილებით და (XI, 56) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d'\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ I_y \frac{d'\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x &= M_y, \\ I_z \frac{d'\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y &= M_z, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI, 58})$$

ამ განტოლებებს ეილერის განტოლებები ეწოდება; ისინი გვიჩვენებენ, თუ როგორ იცვლება ბრუნვის კუთხური სიჩქარე სხეულის მიმართ; მათი ამოხსნა საზოგადოდ საკმაოდ ძნელია, მაგრამ ზოგიერთ მარტივ შემთხვევაში ისინი გვაძლევენ შესაძლებლობას ნათლად წარმოვიდგინოთ ბრუნვის ხასიათი.

§ 70. თავისუფალი მყარი სხეულის ბრუნვა წმინდის ირავლივ. რამულარული პრეცესია

თუ მყარი სხეული, რომლის ბრუნვასაც ჩვენ ვიზილავთ, თავისუფალია, ე. ი. მასზე არავითარი ძალები, გარდა უძრავი წერტილის დამმაგრებელი ძალებისა, არ მოქმედებს, მაშინ მისთვის M ნულის ტოლი იქნება და ეილერის განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებს (შემდეგში აღარ გავუკეთებთ შტრიხს წარმოებულს დროის მიმართ):

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z &= 0, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x &= 0, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI, 59})$$

გავარჩიოთ უმარტივესი შემთხვევები.

1. **სფერული ბზრიალა.** სფერული ბზრიალა ეწოდება ისეთ მყარ სხეულს, რომლის მთავარი ინერციის მომენტები ერთმანეთის ტოლია

$$I_x = I_y = I_z = I. \quad (\text{XI, 60})$$

როგორც ვიცით, ასეთი მყარი სხეულისათვის ინერციის ცენტრზე გამავალი ყოველი ღერძი ინერციის მთავარი ღერძი იქნება; ამ შემთხვევაში ეილერის განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} = 0,$$

$$\bar{\omega} = \text{const.} \quad (\text{XI, 61})$$

როგორც ვხედავთ, მყისი ღერძი არ იცვლის თავის მდებარეობას მყარ სხეულში. მაგრამ ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ იგი უძრავია აგრეთვე ინერციული სისტემის მიმართ. მართლაც, (XI, 57) და (XI, 60) ფორმულები გვიჩვენებენ. რომ \bar{L} ვექტორი მიმართულია $\bar{\omega}$ -ს გასწვრივ

$$\bar{L} = I \bar{\omega} \quad (\text{XI, 62})$$

და ვინაიდან თავისუფალი სხეულისათვის იმპულსის მომენტი უცვლელია ინერციული სისტემის მიმართ, $\bar{\omega}$ ვექტორიც უცვლელი იქნება.

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ ერთ წერტილში დამაგრებული სფერული ბზრიალა თანაბრად უნდა ბრუნავდეს ღერძის ირგვლივ, რომელიც უძრავია როგორც ინერციული სისტემის, ისე თვით სხეულის მიმართ.

2. სიმეტრიული ბზრიალა: ასეთი სხეულის შემთხვევა ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი და საინტერესოა როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული თვალსაზრისით. სიმეტრიული ბზრიალა ეწოდება ისეთ მყარ სხეულს, რომლის ორი მთავარი ინერციის მომენტი ტოლია, მესამე მომენტი კი მათგან განსხვავდება

$$I_x = I_y \neq I_z. \quad (\text{XI, 63})$$

ამ განსაზღვრიდან ნათელია, რომ უმრავლესობა იმ მყარი სხეულებისა, რომლებიც პრაქტიკულ ცხოვრებასა და ტექნიკაში გამოიყენება (ბორბლები, ტურბინები, ელექტრული მანქანების ღუზები და სხვ.), სიმეტრიულ ბზრიალებს წარმოადგენს. ამიტომაც, ცხადია, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის ხასიათის გარკვევა. (XI, 63) პირობის მხედველობაში მიღებით ეილერის მესამე განტოლება მოგვცემს

$$\omega_x = \text{const} = b. \quad (\text{XI, 64})$$

ორი დანარჩენი განტოლება კი შემდეგი სახით დაიწერება:

$$I_x \omega_x - \omega_y \omega_z (I_x - I_z) = 0,$$

$$I_x \omega_y - \omega_z \omega_x (I_z - I_x) = 0.$$

თუ პირველს გადავამრავლებთ ω_x -ზე, ხოლო მეორეს ω_y -ზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\omega_x \dot{\omega}_x + \omega_y \dot{\omega}_y = 0,$$

საიდანაც ინტეგრებით გვექნება.

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{const} = a^2. \quad (\text{XI, 65})$$

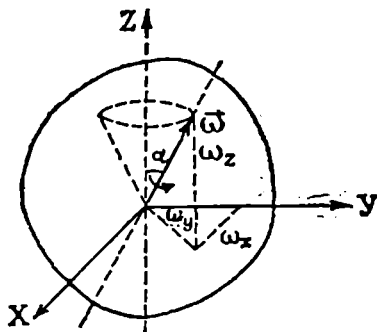
(XI, 64) და (XI, 65) განტოლებები ერთად გვაძლევენ.

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \text{const}, \quad (\text{XI, 66})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ კუთხური სიჩქარის სიდიდე მუდმივია (თვით სხეულის მიმართ). გავარკვეით ახლა საკითხი კუთხური სიჩქარის ან, რაც იგივეა, მყისი ღერძის მიმართულების შესახებ. ვთქვათ, საწყის მომენტში $\vec{\omega}$ ვექტორი დახრილი იყო სიმეტრიის ღერძის, ე. ი. OZ ღერძის მიმართ α კუთხით. რადგანაც (ნახ. 141)

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}, \quad (\text{XI, 67})$$

მივიღებთ, რომ ეს კუთხე და, მაშასადამე, მყისი ღერძის დახრა სიმეტ-



ნახ. 141

რიის ღერძის მიმართ მუდმივი იქნება. ვინაიდან საწყის მომენტში ω_y და ω_z ნულისაგან განსხვავებულია, (XI, 59) ფორმულების თანახმად მათი წარმოებულები დროის მიმართ აგრეთვე განსხვავებული იქნება ნულისაგან. მაშასადამე, ω_x და ω_y იცვლებიან დროის განმავლობაში, მაგრამ ეს ცვლილება ისე წარმოებს, რომ ან-ს დახრა OZ ღერძის მიმართ უცვლელი რჩება; აქედან გამომ-

დინარეობს, რომ $\vec{\omega}$ ვექტორი მოძრაობს მყარი სხეულის შიგნით, სახელდობრ, იგი შემოწერს OZ ღერძის (სიმეტრიის ღერძის) ირგვლივ კონუსს 2α გაშლის კუთხით. (XI, 59) ფორმულების გამოყენებით ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ეს მოძრაობა არის თანაბარი ბრუნვა OZ ღერძის ირგვლივ.

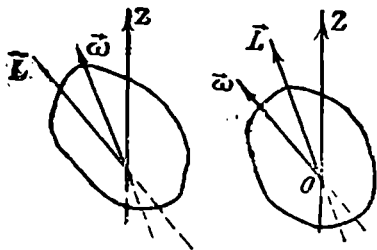
მაშასადამე, მყარი სხეულის მოძრაობა სიმეტრიის ღერძის მიმართ შედგება თანაბარი ბრუნვისაგან მყისი ღერძის ირგვლივ და ამ მყისი ღერძის თანაბარი ბრუნვისაგან სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ.

გამოვარკვეით როგორი სახისაა თავისუფალი სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობა ინერციული სისტემის მიმართ. ვინაიდან სხეული თავისუფალია, იმპულსის მომენტი \vec{L} უცვლელი იქნება აღნიშნული ათვლის სისტემის მიმართ. ამიტომაც გამოსარკვევია როგორ მოძრაობს მყისი ღერძი \vec{L} ვექტორის მიმართ. განვიხილოთ ამისათვის $\vec{\omega}$ ვექტორის პროექცია \vec{L} -ზე. თუ კუთხეს ω -სა და L -ს შორის β -თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$\cos \beta = \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{L})}{\omega L} = \frac{2E_h}{\omega L} = \text{const}, \quad (\text{XI. 6E})$$

ვინაიდან E_h არის მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერჯია და თავისუფალი სხეულის შემთხვევაში მუდმივია, მაშასადამე, ω ვექტორის დახრილობის კუთხე β ვექტორის მიმართ მუდმივია და ვინაიდან თვით ω ვექტორის სიდიდეც მუდმივია, ერთადერთი მოძრაობა, რომელიც შეუძლია შეასრულოს ω ვექტორმა, იქნება ამ ვექტორის თანაბარი ბრუნვა \vec{L} ვექტორის ირგვლივ. ვხედავთ, რომ ინერციული სისტემის მიმართაც (რომლის ერთ ღერძს ახორციელებს \vec{L} ვექტორი), სხეულის მოძრაობა ორი მოძრაობისაგან შედგება: თანაბარი ბრუნვისაგან მყისი ღერძის ირგვლივ ω კუთხური სიჩქარით და თვით მყისი ღერძის თანაბარი ბრუნვისაგან \vec{L} ვექტორის ირგვლივ.

გავაერთიანოთ ახლა ჩვენ მიერ მიღებული შედეგები. სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობა შეიძლება დახასიათდეს სამი ღერძის მოძრაობით ერთმანეთის მიმართ და თვით მყარი სხეულის მოძრაობით ერთ-ერთი მათგანის (მყისი ღერძის) ირგვლივ. ეს ღერძებია: იმპულსის მომენტის \vec{L} ღერძი — უძრავი ინერციული სისტემის მიმართ, სიმეტრიის ღერძი — უძრავი თვით სხეულის მიმართ, და $\vec{\omega}$ მყისი ღერძი, რომლის ირგვლივაც

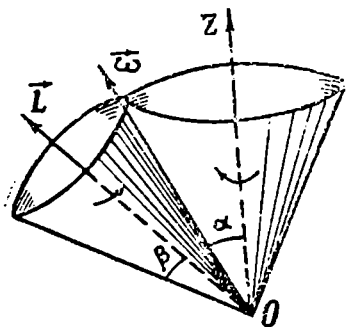


ნახ. 142

ხდება სხეულის ბრუნვა ყოველ მომენტში. თუ ჩვენ გვინდა განვიხილოთ სხეულის მოძრაობა ინერციული სისტემის მიმართ, უნდა უძრავად ჩავთვალოთ იმპულსის მომენტის ღერძი და აღვწეროთ როგორ მოძრაობენ სიმეტრიის ღერძი და მყისი ღერძი (ω ვექტორი) მის მიმართ. უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა: პირველი, როდესაც სიმეტრიის ღერძის სათანადო ინერციის მომენტი ნაკლებია, ვიდრე დანართის მთავარი ინერციის მომენტები ($I_z < I_x = I_y$), და მეორე, როდესაც I_z მეტია, ვიდრე I_x და I_y ($I_z > I_x = I_y$). ამ შემთხვევებს ეთანადება ზემოაღნიშნული სამი ღერძის სხვადასხვა ურთიერთგანლაგება. პირველ შემთხვევაში $\vec{\omega}$ ღერძი მოთავსებულია \vec{L} და OZ ღერძებს შორის, ხოლო მეორე შემთხვევაში — მათ გარეთ (ნახ. 142). ცხადია, ორივე შემთხვევაში \vec{L} , OZ და $\vec{\omega}$ ღერძები ყოველთვის ერთ სიბრტყეში იმყოფებიან. ეს ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს ეილერის განტოლებით.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა ($I_z < I_x = I_y$) და გამოვარკვიოთ

როგორც მოძრაობენ მყისი ღერძი და იმპულსის მომენტის ღერძი უძრავი სიმეტრიის ღერძის მიმართ. ვინაიდან $\bar{\omega}$ ვექტორი თანაბრად ბრუნავს OZ ღერძის ირგვლივ და დახრილია მის მიმართ მუდმივი α კუთხით, ცხადია, $\bar{\omega}$ ვექტორი თანაბრად ბრუნავს OZ ღერძის ირგვლივ მუდმივი α კუთხის დახრილობით. ამ მოძრაობის ნათლად წარმოსადგენად შემოვიწეროთ OZ ღერძის ირგვლივ კონუსი, სათავით O



ნახ. 143

წერტილში და გაშლის 2α კუთხით. შემოვიწეროთ აგრეთვე \bar{L} ღერძის ირგვლივ მეორე კონუსი, სათავით ისევ O წერტილში და გაშლის 2β კუთხით. ამ ორი კონუსის გარე ზედაპირების შეხების ხაზი იქნება $\bar{\omega}$ ღერძი (ნახ. 143).

ვთქვათ ახლა, რომ OZ -ღერძიანი კონუსი უძრავია და მის გარე ზედაპირზე თანაბრად გორავს \bar{L} ღერძის მქონე კონუსი. მაშინ რო-

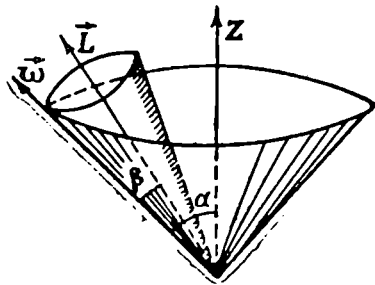
გორც \bar{L} ღერძი, ისე კონუსების შეხების ხაზი, ე. ი. $\bar{\omega}$ ღერძი, თანაბრად იბრუნებს OZ ღერძის ირგვლივ;

თუ ჩვენ გვინდა განვიხილოთ სხეულის მოძრაობა ინერციული სისტემის, ე. ი. \bar{L} ღერძის მიმართ, უძრავად უნდა ჩავთვალოთ \bar{L} -ღერძიანი კონუსი და მასზე ვაგოროთ OZ -ის ირგვლივ შემოწერილი კონუსი. მაშინ ამ კონუსის ღერძის და კონუსების ზედაპირების შეხების ხაზის მოძრაობა წარმოგვიდგენს სხეულის სიმეტრიის ღერძის და მყისი ღერძის მოძრაობას \bar{L} ვექტორის მიმართ.

ასევე გაირჩევა მეორე შემთხვევა, როდესაც $\bar{\omega}$ ვექტორი მოთავსებულია OZ და \bar{L} ღერძების გარეთ, ამ შემთხვევაშიც უნდა ავაგოთ ორი კონუსი: ერთი OZ ღერძით და 2α გაშლის კუთხით და მეორე \bar{L} ღერძით და გაშლის 2β კუთხით. ცხადია, \bar{L} ღერძის მქონე კონუსი მთლიანად მოთავსდება OZ ღერძის მქონე კონუსის შიგნით და მისი გარე ზედაპირის და განიერი კონუსის შიდა ზედაპირის შეხების ხაზი იქნება მყისი ღერძი (ნახ. 144).

OZ ღერძის მიმართ მოძრაობის წარმოსადგენად უნდა ჩავთვალოთ, რომ \bar{L} -ღერძიანი ვიწრო კონუსი გორავს OZ -ღერძიანი განიერი კონუსის შიდა ზედაპირზე. \bar{L} ღერძის მიმართ მოძრაობის წარმოსად-

გენად კი განიერი, OZ -ღერძიანი კონუსი უნდა ვაგოროთ \vec{L} -ღერძიანი კონუსის გარე ზედაპირზე. თავისუფალი სიმეტრიული ბზრიალას აღწერილ მოძრაობას, როდესაც მყისი ღერძი და იმპულსის მომენტი თანაბრად ბრუნავს სხეულის სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ (მოძრაობა თვით სხეულის მიმართ) ან მყისი ღერძი და სიმეტრიის ღერძი თანაბრად ბრუნავს იმპულსის მომენტის ღერძის ირგვლივ (მოძრაობა ინერციული სისტემის მიმართ), ეწოდება რეგულარული პრეცესია. კუთხურ სიჩქარეს ω , რომლითაც $\vec{\omega}$ და \vec{L} ვექტორები ბრუნავენ სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ, ეწოდება პრეცესიის კუთხური სიჩქარე. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ იგი დაკავშირებულია სხეულის ბრუნვის კუთხურ სიჩქარესთან შემდეგი ფორმულით:



ნახ. 144

$$\omega_{\pi} = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega. \quad (\text{XI}, 69)$$

ყოველი სიმეტრიული ბზრიალა, რომელზეც არ მოქმედებს გარეშე ძალები და რომლის მყისი ღერძი არ თანხვდება არც ერთ მთავარ ინერციის ღერძს, ასრულებს რეგულარულ პრეცესიას, რაც გამოიხატება მყისი ღერძის ბრუნვაში სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ. რეგულარული პრეცესია კარგად ჩანს სიმეტრიული ბზრიალას შემთხვევაში, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა თავისი ინერციის ცენტრის ირგვლივ. პრეცესიის მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს, დედამიწის ბრუნვის ღერძის გადანაცვლება დედამიწის შიგნით, რაც, თავის მხრივ, იწვევს კინემატიკური პოლუსის მოძრაობას. დედამიწა, როგორც ცნობილია, წარმოადგენს შექცეულ ელიფსოიდს. ვუწოდოთ მისი სიმეტრიის ღერძის გადაკვეთას ზედაპირთან გეომეტრიული პოლუსი. იგი არ თანხვდება კინემატიკურ პოლუსს, რომელიც არის ბრუნვის მყისი ღერძის გადაკვეთა ზედაპირთან (ნახ. 145). მართალია, კინემატიკური პოლუსის გადახრა გეომეტრიული პოლუსიდან ძალიან მცირეა (სულ რამდენიმე მეტრი), მაგრამ ეს გადახრა უკვე საკმარისია იმისათვის, რომ კინემატიკურმა პოლუსმა შეასრულოს პრეცესიული მოძრაობა გეომეტრიული პოლუსის ირგვლივ. პრეცესიის სიხშირეს ადვილად გამოვითვლით (XI. 69) ფორმულის გამოყენებით. ვინაიდან დედამიწის შექცეულობა არის დაახლოებით

$$\frac{I_z - I_x}{I_x} \sim \frac{1}{300},$$

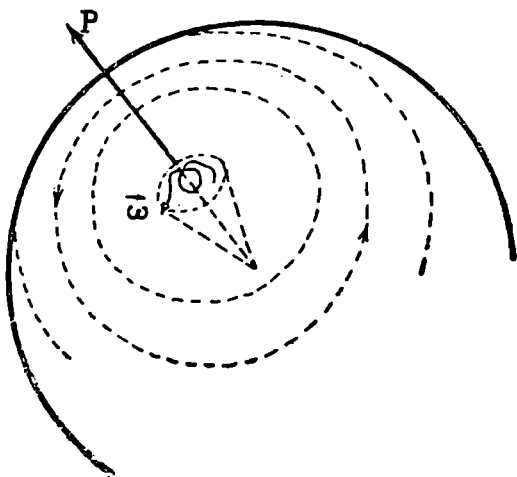
ხოლო დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{ sec}^{-1}$; პრეცესიის სიჩქარე იქნება

$$\omega_{\pi} = \frac{2\pi}{86400 \cdot 300}.$$

აქედან პრეცესიული მოძრაობის პერიოდისათვის მივიღებთ

$$T_{\pi} \sim 10 \text{ თვე}.$$

მიღებული შედეგი იმას ნიშნავს, რომ, თუ დედამიწას ჩავთვლით სიმეტრიულ მყარ ბზრიალად, კინემატიკურმა პოლუსმა უნდა შემოიწე-



ნახ. 145

როს გეომეტრიული პოლუსის ირგვლივ მცირე ზომის წრეხაზი დაახლოებით 10 თვის განმავლობაში.

მრავალწლიანი დაკვირვებები გვიჩვენებს, რომ დედამიწის კინემატიკური პოლუსი, მართლაც, მოძრაობს, ე. ი. იცვლის მდებარეობას გეომეტრიული პოლუსის მახლობლად, მაგრამ, ჯერ ერთი, ამ მოძრაობის ტრაექტორია არ წარმოადგენს წრეხაზს, იგი საკმაოდ დახლართული მრუდია, და, გარდა ამისა, მიახლოებითი პერიოდია არა 10 თვე, არამედ 14 თვე. ეს განსხვავება თეორიულ და დაკვირვებით მიღებულ შედეგებს შორის მრავალი მიზეზით შეიძლება იყოს გამოწვე-

ული. მათ შორის აღსანიშნავია დედამიწის გადახრა სიმეტრიული ბზრიალას ფორმისაგან, ატმოსფეროს ფენების მოძრაობა და მასების გადანაცვლება დედამიწის შიგნით.

3. არასიმეტრიული ბზრიალა. ვინაიდან განსახილველი შემთხვევა გაცილებით უფრო რთულია, ვიდრე სიმეტრიული ბზრიალას შემთხვევა, გავარჩევთ ამ მოძრაობის მხოლოდ ზოგიერთ მარტივ მხარეს. ჯერ ერთი, ცხადია, რომ, თუ საწყის მომენტში სხეული მოძრაობს ერთ-ერთი მთავარი ინერციის ღერძის (თავისუფალი ღერძის) ირგვლივ, იგი განუწყვეტლივ იბრუნებს ამ ღერძის ირგვლივ; ეს ადვილად მტკიცდება ეილერის განტოლებათა საშუალებით.

გამოვარკვეით ახლა როგორია მოძრაობა იმ შემთხვევაში, როდესაც მყისი ღერძი ცოტათი გადახრილია მთავარი ინერციის ღერძიდან; აქ უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა იმისდა მიხედვით, თუ როგორია აღებული ღერძის ინერციის მომენტი.

როგორც დაკვირვება და თეორიული გამოკვლევა გვიჩვენებს, ამ შემთხვევაში, როდესაც არჩეული მთავარი ღერძის სათანადო ინერციის მომენტი ან მაქსიმალურია, ან მინიმალური, მყისი ღერძი ყოველთვის ამ ღერძის მახლობლად დარჩება და შემოწერს მის ირგვლივ მცირე კონუსს, ისე როგორც ეს ხდება სიმეტრიული ბზრიალას პრეცესიის შემთხვევაში. ეს გვიჩვენებს, რომ ბრუნვა მაქსიმალური ან მინიმალური ინერციის მომენტის მქონე თავისუფალი ღერძის ირგვლივ მდგრადია.

სულ სხვა შედეგი მიიღება საშუალო ინერციის მომენტის მქონე ღერძის ირგვლივ ბრუნვის შემთხვევაში. როგორც ირკვევა, თუ დასაწყისში სხეული ბრუნავდა ასეთი ღერძის ირგვლივ და შემდეგ მყისი ღერძი გადაიხარა ამ ღერძიდან, იგი არ დარჩება მის მახლობლობაში, არამედ სულ უფრო და უფრო მეტად გადაიხრება მისგან. ეს გვიჩვენებს, რომ ბრუნვა საშუალო ინერციის მომენტის მქონე ღერძის ირგვლივ არამდგრადია.

ზემოთ მოყვანილი შედეგები ადვილად მიიღება ეილერის განტოლებებიდან. ვთქვათ, ბრუნვა წარმოებს OX მთავარი ღერძის ირგვლივ, რომლის სათანადო ინერციის მომენტი არის I_x . $\bar{\omega}$ ვექტორს არ ექნება მდგენლები OY და OZ ღერძების მიმართ. მცირედ გადავხაროთ ახლა ბრუნვის ღერძი (ე. ი. $\bar{\omega}$ ვექტორი) OX ღერძიდან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ω_y და ω_z მიიღებენ მცირე მნიშვნელობებს. ცხადია, მათი ნამრაველი კიდევ უფრო მცირე იქნება. ასე რომ, მისი შემცველი წევრი ეილერის პირველ განტოლებაში შეიძლება უგულვებელყოთ. მივიღებთ

$\frac{d\omega_x}{dt} = 0$ ან $\omega_x = \text{const.}$ ორი დანარჩენი განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = (I_z - I_x) \omega_z \omega_x, \quad I_z \frac{d\omega_z}{dt} = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y. \quad (\text{XI, } 70)$$

ვთქვათ, $\omega_z > 0$ და, გარდა ამისა, დაეუშვათ, რომ I_x არის მაქსიმალური ინერციის მომენტი. პირველი განტოლება გვიჩვენებს, რომ ω_y კლებულობს დროის განმავლობაში. ვინაიდან $I_z < I_x$ და ω_y განუწყვეტლად კლებულობს, $\frac{d\omega_z}{dt}$ თანდათან შემცირდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ω_z -ის მნიშვნელობა არ შეიძლება გახდეს გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობაზე მეტი. ასევე დამტკიცდება, რომ ω_y -იც ვერ გადააჭარბებს გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობას. აქედან გამომდინარეობს, რომ მყისი ღერძის გადახრა მაქსიმალური ინერციის მომენტის მქონე ღერძიდან ყოველთვის საკმარისად მცირე იქნება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ბრუნვა ასეთი ღერძის ირგვლივ მდგრადია.

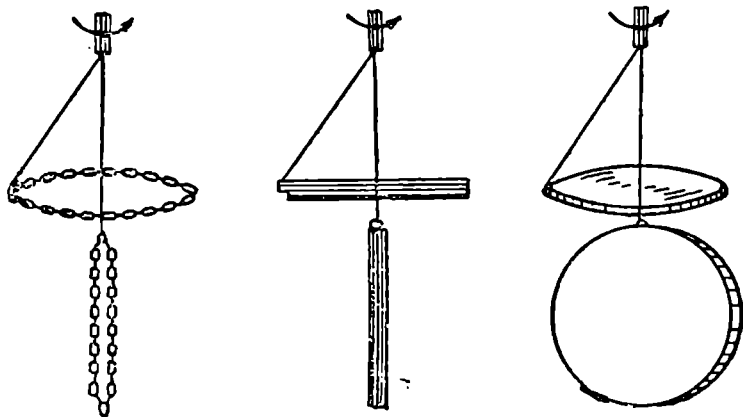
ასეთივე შედეგს მივიღებთ, თუ დაეუშვებთ, რომ I_x არის მინიმალური ინერციის მომენტი. თუ ω_y დადებითია, მეორე განტოლება (XI, 59) გვიჩვენებს, რომ ω_z მცირდება დროის განმავლობაში ($\frac{d\omega_z}{dt} < 0$). ვინაიდან $I_z > I_x$ და ω_z განუწყვეტლად კლებულობს,

$\frac{d\omega_y}{dt}$ თანდათან შემცირდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ω_y -ის მნიშვნელობა არ შეიძლება გახდეს გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობაზე მეტი. ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, მივიღებთ, რომ ბრუნვა მინიმალური ინერციის მომენტის მქონე ღერძის ირგვლივ მდგრადია.

სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ I_x არის საშუალო ინერციის მომენტი (მაგალითად, $I_z > I_x > I_y$). თუ ω_z დადებითია, პირველი განტოლება გვიჩვენებს, რომ ω_y იზრდება დროის განმავლობაში. ვინაიდან $I_x > I_y$ და ω_y განუწყვეტლად იზრდება, მეორე განტოლება ცხადყოფს, რომ $\frac{d\omega_z}{dt}$ თანდათან გაიზრდება, ე. ი. თვით ω_z -იც სულ მოიმატებს და მოიმატებს რაც, თავის მხრივ, გამოიწვევს ω_y -ის ზრდას. ვინაიდან ორივე ეს მდგენელი თანდათან იზრდება და მათი ზრდის სისწრაფეც თანდათან მატულობს, მყისი ღერძი სულ უფრო მეტად გადაიხრება სიმეტრიას ღერძიდან; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ბრუნვა საშუალო ინერციის მომენტის მქონე ღერძის ირგვლივ არ იქნება მდგრადი.

მთავარი ღერძების ირგვლივ ბრუნვის მდგრადობის განხილვისას უნდა მიექცეს ყურადღება შემდეგ გარემოებას.

ის შედეგი, რომ მდგრადია უდიდესი და უმცირესი ინერციის მომენტის მქონე მთავარი ღერძები, მართებულია მხოლოდ იმ პირობით, რომ სხეულზე არ მოქმედებს გარეშე ძალები. მაგრამ, პრაქტიკულად, მბრუნავ სხეულზე ყოველთვის მოქმედებს ხახუნისა და მაბრუნებელი ძალები. როგორც ირკვევა, ასეთ პირობებში მდგრადია მხოლოდ ერთი მთავარი, ანუ თავისუფალი ღერძი, სახელდობრ ის, რომელსაც ეთანადება უდიდესი ინერციის მომენტი. ეს შედეგი ადვილად შეიძლება



ნახ. 146

შემოწმდეს ექსპერიმენტულად. ცენტრიდანული მანქანის საშუალებით მოვიყვანოთ სწრაფ ბრუნვაში ძაფზე დაკიდებული სხვადასხვა ფორმის სხეულები: დისკო, ღერო, ჯაჭვი და სხვ. (ნახ. 146). ჩვენ დავინახავთ, რომ, მაგალითად, დისკო მის სიბრტყეში მდებარე ღერძის ირგვლივ ბრუნვასთან ერთად დაიწყებს ქანობას, შემდეგ აიწევს, მიიღებს ჰორიზონტალურ მდებარეობას და განაგრძობს ბრუნვას მისი სიბრტყის მართობი ღერძის ირგვლივ, რომელსაც ეთანადება უდიდესი ინერციის მომენტი. ასევე იქნება ღეროსა და ჯაჭვის შემთხვევაში.

§ 71. შიშვე სიმეტრიული ბზრიალას ბრუნვა წმკრილის ირგვლივ. უსმვლო-რმგულარული პრმცმსია

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ თავისუფალი სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობა და გამოვარკვეეთ, რომ ეს მოძრაობა წარმოგვიდგება რეგულარული პრეცესიის სახით: სიმეტრიის და მყისი ღერ-

ძები თანაბრად ბრუნავენ იმპულსის მომენტის ღერძის ირგვლივ, რომელიც უძრავია ინერციული სისტემის მიმართ.

გავარჩიოთ ახლა შემთხვევა, როდესაც სიმეტრიულ ბზრიალაზე მოქმედებს გარეშე მომენტი, რომელიც მოძრაობის დინამიკური განტოლებების

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (\text{XI, 71})$$

თანხმად ცვლის იმპულსის მომენტს. ჩვეულებრივ ეს შემთხვევა ხორციელდება მძიმე სიმეტრიული ბზრიალას სახით, რომელიც ერთი წვერით დაყრდნობილია ჰორიზონტალურ ზედაპირზე და რომლის ინერციის ცენტრზე მოქმედებს წამქცევი სიმძიმის ძალა.

მძიმე სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობა საკმაოდ რთული ხასიათისაა და ამიტომ ჩვენ შემოვიისახდვრებით რაც შეიძლება ელემენტარული განხილვით.

ვთქვათ, სიმეტრიული ბზრიალას ღერძი დახრილია ვერტიკალისადმი რაღაც კუთხით და დაეშვათ, რომ სიმძიმის ძალა ჯერ არ მოქმედებს. მაშინ, როგორც უკვე ვიცით, იმპულსის მომენტის ღერძი უძრავი იქნება და, თუ სიმეტრიის OZ_1 ღერძი მას არ თანხვდება, იგი შემოწვრს იმპულსის ღერძის ირგვლივ რეგულარული პრეცესიის კონუსს. დაეშვათ ახლა, რომ ასეთნაირად მოძრავ ბზრიალაზე იმოქმედა ვერტიკალურად ქვევით მიმართულმა სიმძიმის \vec{P} ძალამ, რომელიც მოდებულია სიმეტრიის ღერძზე მდებარე სიმძიმის ცენტრზე (ნახ. 147). (XI, 71) განტოლების თანახმად ამ ძალის მომენტი გამოიწვევს იმპულსის მომენტის ცვლილებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ \vec{L} ღერძი აღარ იქნება უძრავი. ჩვენი მიზანია ამ ღერძის მოძრაობის ხასიათის გამოკვლევა. ამოცანის გასამარტივებლად დაეშვათ შემდეგი: ბზრიალა იმდენად სწრაფად ბრუნავს, რომ \vec{L} ვექტორის მოძრაობის ხასიათის გასარკვევად საკმარისია ჩავთვალოთ, რომ სიმძიმის ძალა მოდებულია თვით \vec{L} ღერძზე (ფაქტიურად ძალა მოდებულია სიმძიმის ცენტრზე, რომელიც სიმეტრიის ღერძზე მდებარეობს; ამ ღერძის ირგვლივ ბრუნვის დროს სიმძიმის ცენტრი შემოწვრს \vec{L} ღერძის ირგვლივ წრეხაზს, რომლის ცენტრი შეიძლება ჩავთვალოთ სიმძიმის ცენტრის საშუალო მდებარეობად). თუ \vec{P} ძალის მოდების წერტილია O , სათანადო მომენტისათვის მივიღებთ

$$\vec{M} = [\vec{l}_1 \cdot \vec{P}], \quad (\text{XI, 72})$$

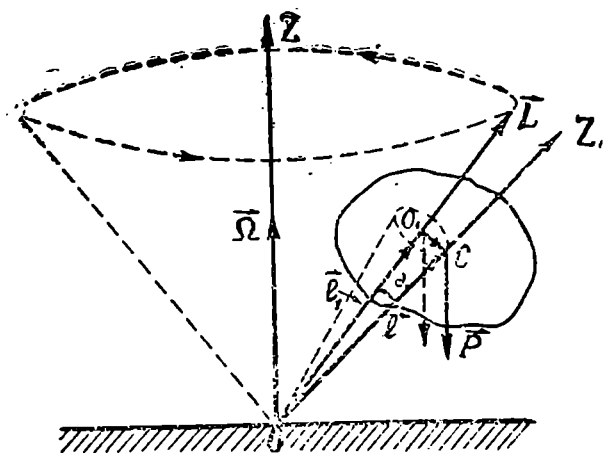
სადაც \vec{l}_1 არის OO_1 ვექტორი (მხარი), მიმართული \vec{L} ვექტორის გასწვრივ. თუ OC მანძილი სიმძიმის ცენტრიდან დაყრდნობის O წერ-

ტილამდე l -ით აღნიშნეთ, ხოლო კუთხე სიმეტრიის ღერძსა და \vec{L} ვექტორს შორის α -თი, შეიძლება დავწეროთ

$$\vec{l}_1 = \frac{\vec{L}}{L} l \cos \alpha, \quad (\text{XI, 73})$$

სადაც $\frac{\vec{L}}{L}$ არის \vec{L} ღერძის გასწვრივ მიმართული ერთეულოვანი ვექტორი. ჩასმა (XI, 72) ფორმულაში მოგვცემს

$$\dot{\vec{M}} = \frac{l \cos \alpha}{L} [\vec{L} \vec{P}].$$



ნახ. 147

აქედან \vec{L} ვექტორის წარმოებულისათვის მივიღებთ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{l \cos \alpha}{L} [\vec{L} \vec{P}]. \quad (\text{XI, 74})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ \vec{L} ვექტორის ცვლილება მიმართულია \vec{L} ვექტორის მართობულად, რაც იმას ნიშნავს, რომ \vec{L} ვექტორის სიდიდე არ იცვლება, იცვლება მხოლოდ მისი მიმართულება. \vec{L} ვექტორის მოძრაობის ხასიათის გამოსარკვევად დავაგვიგმილოთ (XI, 74) განტოლება ვერტიკალურ მიმართულებაზე (OZ ღერძზე). ვინაიდან $[\vec{L} \vec{P}]$ ნამრავლის გვეგმილი OZ ღერძზე ნულის ტოლია (ეს ნამრავლი \vec{P} ვექტორის, ე. ი. OZ -ის მართობია), მივიღებთ

$$\frac{dL_z}{dt} = 0,$$

საიდანაც

$$L_z = \text{const.}$$

ე. ი. იმპულსის მომენტის გეგმილი ვერტიკალზე მუდმივი სიდიდისა. რადგანაც \vec{L} ვექტორის სიდიდე უცვლელია, უცვლელი იქნება აგრეთვე მისი OZ ღერძთან დახრილობის კუთხე; აქედან, ცხადია, რომ ერთადერთი მოძრაობა, რომელიც შეიძლება შეასრულოს \vec{L} ვექტორმა, არის თანაბარი ბრუნვა OZ ღერძის ირგვლივ. მართლაც, ამის დასამტკიცებლად და მისი ბრუნვის კუთხური სიჩქარის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ფორმულა ვექტორის წარმოებულისათვის არაინერციული სისტემის მიმართ. თუ ასეთი სისტემის ღერძად თვით \vec{L} ღერძს ავიღებთ, ხოლო მის ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს აღვნიშნავთ $\vec{\Omega}$ -თი, მივიღებთ

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - [\vec{\Omega} \vec{L}].$$

აქ $\frac{d'\vec{L}}{dt}$ არის \vec{L} ვექტორის წარმოებული არაინერციული სისტემის,

ე. ი. \vec{L} ვექტორთან ერთად მოძრავი სისტემის მიმართ და ამიტომ იგი ნულის ტოლი უნდა იყოს; აქედან მივიღებთ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -[\vec{L} \vec{\Omega}] = \vec{M}.$$

შედარება (XI, 74) ფორმულასთან გვაძლევს \vec{L} ვექტორის ბრუნვის კუთხური სიჩქარისათვის

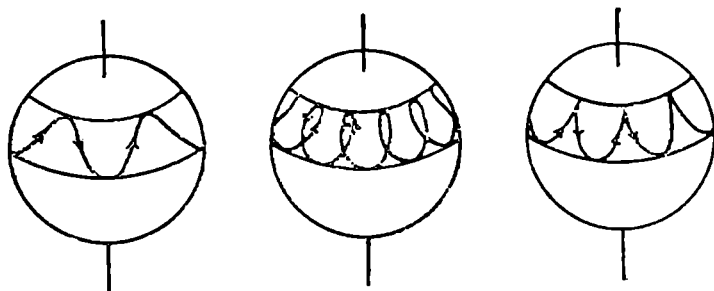
$$\vec{\Omega} = -\frac{l \cos \alpha}{L} \vec{P} \quad \text{ან} \quad \Omega = \frac{M}{L \cos \beta}, \quad (\text{XI, 75})$$

სადაც β არის კუთხე $\vec{\Omega}$ და \vec{L} ვექტორებს შორის.

ასეთი კუთხური სიჩქარით ბრუნავს \vec{L} ვექტორი ვერტიკალური მიმართულების ირგვლივ. მიღებული შედეგი ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: მძიმე სიმეტრიული ბზრიალას იმპულსის მომენტის \vec{L} ვექტორი ბრუნავს ვერტიკალური მიმართულების ირგვლივ (XI, 75) ფორმულით გამოხატული კუთხური სიჩქარით. მეორე მხრივ, ბზრიალას სიმეტრიის ღერძი ბრუნავს \vec{L} ვექტორის ირგვლივ აგრეთვე მუდმივი კუთხური სიჩქარით. სიმეტრიის ღერძის საერთო მოძრაობა იქნება ჯამი ამ ორი ბრუნვისა.

იმპულსის მომენტის ვექტორის თანაბარ ბრუნვას გარეშე ძალების მომენტის გავლენით ეწოდება იძულებითი პრეცესია, ხოლო სიმეტრიის ღერძის ბრუნვას იმპულსის მომენტის ირგვლივ, რომელიც თავისუფალი ბზრიალას შემთხვევაში რეგულარულ პრეცესიას წარმოადგენს, იძულებითი პრეცესიის დროს ეწოდება ნუტაცია. სიმეტრიის ღერძის საერთო მოძრაობას, რომელიც მიიღება იძულებითი პრეცესიისა და ნუტაციის შეკრებით, ეწოდება ფსევდო-რეგულარული პრეცესია.

სწრაფად მბრუნავი ბზრიალას შემთხვევაში ნუტაცია იმდენად მცირეა, რომ იგი თითქმის არ შეიმჩნევა და ისეთი შთაბეჭდილებაა.



ნახ. 148

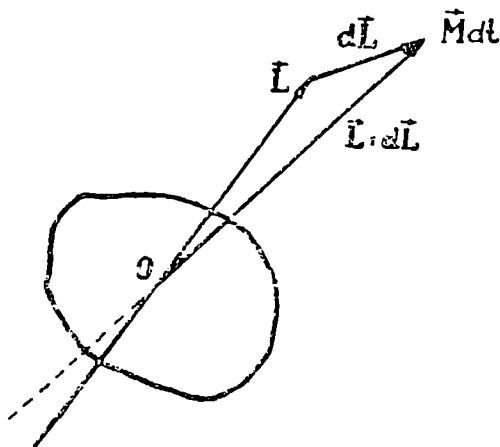
თითქოს იძულებით პრეცესიას ასრულებს თვით სიმეტრიის ღერძი. 148-ე ნახაზზე ნაჩვენებია იმ მრუდების სახე, რომლებსაც შემოწერს სიმეტრიის ღერძის ბოლო წერტილი ფსევდო-რეგულარული პრეცესიის დროს. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია იძულებითი პრეცესიისა და ნუტაციის კუთხური სიჩქარეები, მიიღება სხვადასხვა სახის მრუდი (ნახაზზე მრუდი გვიჩვენებს კვალს, რომელსაც სიმეტრიის ღერძი შემოწერს უძრავი საყრდენი წერტილის ირგვლივ შემოწერილი სფეროს ზედაპირზე), როდესაც ნუტაცია თითქმის შეუმჩნეველია. ბზრიალას სიმეტრიის ღერძის მოძრაობა წარმოებს არა წამქცევი გარეშე ძალის მიმართულებით, არამედ მის მართობულად.

განვიხილოთ ახლა ხანმოკლე ბიძგის მოქმედება სიმეტრიულ ბზრიალაზე. ვთქვათ, რომელიღაც მომენტამდე ბზრიალა თავისუფალი იყო და ბრუნავდა უპრეცესიოდ თავისი ერთ-ერთი თავისუფალი, მაგალითად, OZ ღერძის ირგვლივ. ამ შემთხვევაში სამივე ღერძი—იმპულსის \vec{L} მომენტის, მყისი $\vec{\omega}$ ღერძი და სიმეტრიის OZ ღერძი თანხვედნილი იქნებოდა. ვთქვათ, საკმაოდ მცირე dt დროის განმავლობაში ამ სხეულზე

იმოქმედა გარეშე \bar{M} მომენტმა, ხოლო შემდეგ მისი მოქმედება შეწყდა. გამოვარკვიოთ როგორი იქნება $d\bar{L}$ დროის შემდეგ ბზრიალას მოძრაობა. როგორც ვიცით, ინერციული სისტემის მიმართ $d\bar{L}$ დროის განმავლობაში მოქმედი \bar{M} მომენტი შექმნის დამატებით იმპულსის მომენტს

$$d\bar{L} = \bar{M}dt.$$

ეს დამატებითი იმპულსის მომენტი შეიკრიბება საწყის იმპულსის მომენტთან და მოგვცემს ახალი იმპულსის მომენტს $\bar{L} + d\bar{L}$ (ნახ. 149);



ნახ. :49

ეს იმას ნიშნავს, რომ იმპულსის მომენტი მობრუნდება გარკვეული α_1 კუთხით. იმ შემთხვევაში, როდესაც \bar{M} მომენტი მიმართულია იმპულსის მომენტის, ე. ი. სიმეტრიის ღერძის მართობულად, მობრუნების კუთხისათვის მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dL}{L}.$$

რადგანაც იმპულსის მომენტი შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$L = I_2 \omega,$$

სადაც ω არის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dL}{I_2 \omega}. \quad (\text{XI, } 76)$$

გარეშე ბიძგის მომენტი შეცვლის აგრეთვე კუთხური სიჩქარის, ე. ი. მყისი ლერძის მიმართულებას. მართლაც, \bar{M} მომენტი გამოიწვევს დამატებით ბრუნვას \bar{L} და \bar{M} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობი ლერძის ირგვლივ. ამ ბრუნვის სიჩქარე შემდეგი ფორმულის საშუალებით გამოითვლება:

$$d\bar{\omega} = \frac{d\bar{L}}{I_x},$$

სადაც I_x არის ინერციის მომენტი ამ ლერძის ირგვლივ (იგი თანხვედება OX ლერძს). საბოლოო კუთხური სიჩქარე მიიღება $\bar{\omega}$ და $d\bar{\omega}$ ვექტორების შეკრებით. ცხადია, რომ საბოლოო კუთხური სიჩქარე გადახრილი იქნება საწყისი $\bar{\omega}$ -ს მიმართულებიდან გარკვეული α_2 კუთხით, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{d\omega}{\omega} = \frac{dL}{I_x \omega}. \quad (\text{XI, 77})$$

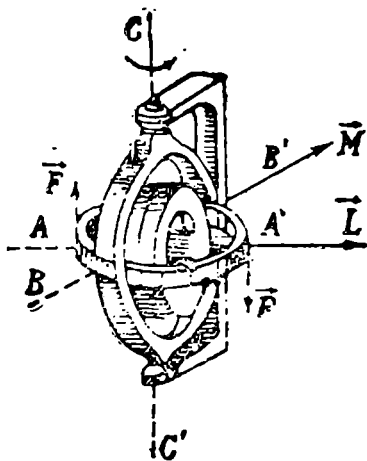
ეს კუთხე საზოგადოდ არ უდრის α_1 კუთხეს.

როგორც ვხედავთ, ხანმოკლე ბიძგის მოქმედება მბრუნავ სიმეტრიულ ბზრიალაზე შემდეგ შედეგს იძლევა: როგორც \bar{L} , ისე $\bar{\omega}$ ვექტორი გადაიხრება საწყისი მიმართულებიდან და ამ გადახრის შემდეგ ისინი უკვე აღარ იქნებიან თანხვედნილნი. ცხადია, რომ სიმეტრიის ლერძიც მობრუნდება. ბიძგის მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ მივიღებთ სიმეტრიულ ბზრიალას, რომლის იმპულსის მომენტის, სიმეტრიის და მყისი ლერძები აღარ თანხვედნიან ერთმანეთს. როგორც ვიცით, ასეთ შემთხვევაში ბზრიალას მოძრაობა წარმოგვიდგება რეგულარული პრეცესიის სახით, რომლის დროს მყისი ლერძი და სიმეტრიის ლერძი თანაბრად ბრუნავენ უძრავი იმპულსის მომენტის ლერძის ირგვლივ. თუ ბზრიალას საწყისი იმპულსის მომენტი საკმაოდ დიდია, ე. ი. თუ ბზრიალა ძალიან დიდი სიჩქარით ბრუნავს, (XI, 76) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ლერძების გადახრა ძალიან მცირეა. განსხვავება α_1 და α_2 კუთხეებს შორის კიდევ უფრო მცირე იქნება და ამიტომ პრაქტიკულად ჩვენ შემდეგს მივიღებთ. საკმაოდ სწრაფად მბრუნავი სიმეტრიული ბზრიალას ლერძზე მოქმედი ხანმოკლე ბიძგი თითქმის არ ცვლის ბრუნვის ლერძის მიმართულებას—ბზრიალა დიდ წინააღმდეგობას უწევს მისი ლერძის მიმართულების ყოველი შეცვლის ცდას და, თუ ცვლილება მაინც მოხდება, იგი იქნება საკმაოდ მცირე და მიმართული არა მოქმედი ძალის მიმართულებით, არამედ მის მართობულად (ბიძგის მომენტის მიმართულებით). ბზრიალას ლერძის ასეთი გადახრა ძალიან უცნაურ შთაბეჭდილებას ქმნის. მიუხედავად იმისა, რომ ბზრიალაზე მოქმედებს

სიმძიმის წამქცევი ძალა, იგი არ ვარდება და მისი ღერძის დახრილობის კუთხე თითქმის არ იცვლება. ისეთი შთაბეჭდილებაა, ვითომ ბზრიალას სწრაფმა ბრუნვამ ღერძის ირგვლივ მინანიჭა მის ღერძს განსაკუთრებული მდგრადობა.

§ 72. გიროსკოპი და მისი გამოყენება

ბზრიალას მოძრაობის თავისებურების საჩვენებლად იყენებენ ხელსაწყოს, რომელსაც გიროსკოპი ეწოდება. მის ძირითად ნაწილს შეადგენს სწრაფად მბრუნავი ბზრიალა (ნახ. 150). ბზრიალას AA' ღერძი დამაგრებულია რგოლში, რომელსაც, თავის მხრივ, შეუძლია ბრუნვა ბზრიალას ღერძის მართობული BB' ღერძის ირგვლივ. ვუწოდოთ ამ რგოლს შიდა რგოლი. თვით შიდა რგოლის ღერძი მიმაგრებულია გარე რგოლთან, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა AA' და BB'



ნახ. 150

ღერძების მართობული CC' ღერძის ირგვლივ. CC' ღერძი უძრავად დამაგრებულია სადგარზე. აღწერილ მოწყობილობას, რომელიც საშუალებას აძლევს ბზრიალას თავისუფლად იბრუნოს სამი ურთიერთმართობი ღერძის ირგვლივ, ეწოდება კარდანის საკიდი.

განვალაგოთ კარდანის საკიდის ღერძები ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე: ბზრიალას AA' ღერძი ჰორიზონტალურად ნახაზის სიბრტყეში, შიდა რგოლის BB' ღერძი ისევე ჰორიზონტალურად, მაგ-

რამ ნახაზის სიბრტყის მართობულად, ხოლო გარე რგოლის CC' ღერძი ვერტიკალურად და ნახაზის სიბრტყეში.

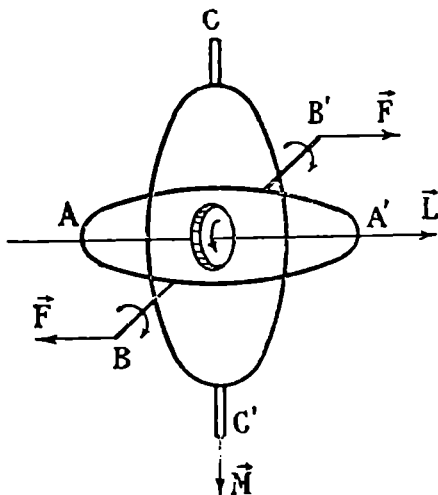
დავეუვათ, რომ ბზრიალა მოყვანილია სწრაფ ბრუნვაში ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით. მისი იმპულსის მომენტი წარმოდგენილია L ვექტორით. აღვწეროთ ახლა ზოგიერთი ცდა, რომელიც თვალსაჩინოდ ადასტურებს წინა პარაგრაფებში მიღებულ შედეგებს ბზრიალას იძულებითი პრეცესიის შესახებ.

1. შინაგანი რგოლის A' წერტილზე ვიმოქმედოთ ქვემოთ მიმარ-

თული ძალით, ე. ი. შევეცადოთ მოვაბრუნოთ ბზრიალას AA' ღერძი ჰორიზონტალურ სიბრტყეში საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. ამ ძალების მომენტი მიმართული იქნება BB' ღერძის გასწვრივ, ნახაზის სიბრტყის მართობულად.

როგორც უკვე ვიცით ამ მომენტის მოქმედებით, AA' -მა, ე. ი. \vec{L} ღერძმა ჰორიზონტალურ სიბრტყეში დახრის მაგიერ უნდა დაიწყოს მოძრაობა მომენტის მიმართულებით, რაც იმას ნიშნავს, რომ გარე რგოლმა უნდა დაიწყოს ბრუნვა CC' ღერძის ირგვლივ ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით. ცდა სავსებით ადასტურებს თეორიის შედეგებს. გარეშე მომენტის მიმართულების შეცვლა გამოიწვევს ბზრიალას ღერძის მოძრაობის მიმართულების შეცვლას.

2. ვიმოქმედოთ ახლა გარე რგოლზე ისე, რომ შევეცადოთ ბზრიალას ღერძი შემოვაბრუნოთ ჰორიზონტალურ სიბრტყეში საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით; ამ ძალების მომენტი მიმართული იქნება



ნახ. 151

ვერტიკალურად ქვემოთ და ამიტომ თეორიული მსჯელობის თანახმად ბზრიალას ღერძი უნდა გადააჩაროს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით (ნახ. 151). ცდა სავსებით ადასტურებს თეორიის შედეგს.

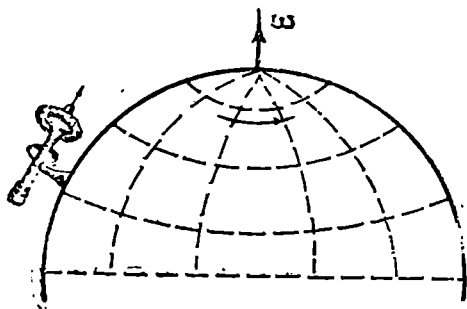
ორივე ცდა ნათლად გვიჩვენებს, რომ ყოველ შემთხვევაში ბზრიალას ღერძი ცდილობს მიიღოს ბრუნვაში მოყვანილი რგოლის ღერძის მიმართულება და ამასთანავე ისე, რომ მისი ბრუნვის მიმართულება

თანხვევებს რგოლის ბრუნვის მიმართულებას. ბზრიალას ღერძის მიმართულება მდგრადია მანამ, სანამ მისი ბრუნვის მიმართულება თანხვედბა რგოლის ბრუნვის მიმართულებას. ამ ორი ბრუნვის ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულების შემთხვევაში ბზრიალას ღერძის მიმართულება არამდგრადია და საკმარისია მცირე გადახრა, რომ ღერძი შემობრუნდეს საწინააღმდეგო მიმართულებით.

3. მოვანდინოთ ხანმოკლე, მაგრამ ძლიერი დარტყმა შიდა რგოლზე. ჩვენ დავინახავთ, რომ ეს დარტყმა თითქმის არავითარ გავლენას არ მოახდენს. წარმოიშობა მხოლოდ ბზრიალას ღერძის კონუსური მოძრაობა მისი საწყისი მიმართულების ირგვლივ. ეს კონუსური მოძრაობა რეგულარული პრეცესიაა, გამოწვეული ბზრიალას სიმეტრიის ღერძის მცირე გადახრით იმპულსის ღერძის მიმართულებიდან.

სამი თავისუფლების ხარისხის მქონე გაწონასწორებული გიროსკოპის შესანიშნავი თვისება, შეინარჩუნოს ბრუნვის ღერძის მიმართულება ინერციული სისტემის მიმართ, მრავალნაირ გამოყენებას პოულობს მეცნიერებასა და ტექნიკაში. სწრაფი ბრუნვის დროს გარეშე ძალების მოქმედება მხოლოდ მცირედ ცვლის ღერძის მიმართულებას და აიძულებს მას შეასრულოს პრეცესიული მოძრაობა მოცემული მიმართულების ირგვლივ.

გიროსკოპის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან გამოყენებას წარმოადგენს გიროკომპასი, რომელიც გამოიყენება გემის სელის კურსის განსაზღვრისა და შენარჩუნებისათვის. გიროკომპასის ძირითად ნაწილს



ნახ. 152

წარმოადგენს ჰორიზონტალური ღერძის ირგვლივ სწრაფად მბრუნავი გიროსკოპი (ბრუნთა რიცხვი 17000—30000 მინუტში). ამ გიროსკოპს აქვს მხოლოდ ორი თავისუფლების ხარისხი და ამიტომ, ჰორიზონტალურად მოთავსებულ, მოაბრუნებს თავის ღერძს დედამიწის ღერძის გასწვრივ ისე, რომ მათ ჰქონდეთ ერთნაირი ბრუნვის მიმართულება. გიროსკოპის ღერძი ჩერდება მერიდიანის სიბრტყეში და ერთი ბოლოთი

გვიჩვენებს ჩრდილოეთის პოლუსის მიმართულებას (ნახ. 152). მაგნიტური კომპასისაგან განსხვავებით იგი გვიჩვენებს არა მაგნიტური, არამედ კინემატიკური პოლუსის მიმართულებას. მისი უპირატესობა მაგნიტურ კომპასთან შედარებით ის არის, რომ მასზე არ მოქმედებენ გემზე არსებული რკინის მასები და მაგნიტური შეშფოთებები.

გიროსკოპი გამოიყენება აგრეთვე ტორპედოს სტაბილიზაციისათვის. ტორპედოს გასროლისას მის შიგნით მოთავსებული გიროსკოპი იწყებს სწრაფ ბრუნვას. თუ ტორპედო გვერდით გადაიხარა, მისი კორპუსი შემობრუნდება გიროსკოპის გარე რგოლის მიმართ, რომელიც ინარჩუნებს თავის საწყის ორიენტაციას. ამ მობრუნებას მოჰყავს მოქმედებაში სათანადო მექანიზმი, რომელიც ხსნის სარკველს და საშუალებას აძლევს შეკუმშულ ჰაერს აამუშაოს გვერდითი საჭე. ეს უკანასკნელი უბრუნებს ტორპედოს საწყის მიმართულებას.

გიროსკოპის სხვა მრავალი გამოყენების გასაცნობად საჭიროა ჩკითხველმა მიმართოს სპეციალურ ლიტერატურას.

§ 73. დედამიწის ლერძის კრძახისა და ნუბაცია

მყარი სხეულის პრეცესიული მოძრაობის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს დედამიწის ლერძის კონუსური მოძრაობა მზისა და მთვარის გავლენით. როგორც ცნობილია, დედამიწის ლერძი დახრილია დედამიწის ორბიტის მართობი მიმართულებიდან დაახლოებით $23^{\circ}5'$ -ით (ნახ. 153). OP არის ორბიტისაღმი მართობული მიმართულება, ხოლო ON დედამიწის ლერძის მიმართულება (ჩრდილოეთის მიმართულებით). ცნობილია აგრეთვე, რომ დედამიწა გამობერილია ეკვატორთან, რაც ნახაზზე აღნიშნულია პუნქტირით. განვიხილოთ ჯერ მზის მოქმედება. დედამიწის სფერულ ნაწილზე მოქმედების გარდა, მზე იმოქმედებს მის A და B გამობერილ ნაწილებზე.

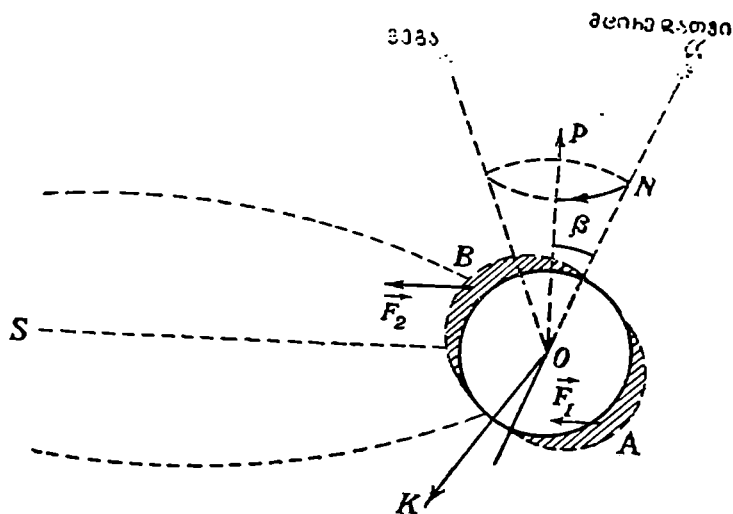
ვინაიდან A ნაწილი უფრო შორსაა მზიდან, ვიდრე B ნაწილი, მასზე მოქმედი \vec{F}_1 ძალა ნაკლები იქნება, ვიდრე B ნაწილზე მოქმედი \vec{F}_2 ძალა; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ დედამიწაზე იმოქმედებს ძალთა წყვილი, რომელიც ცდილობს შემობრუნოს დედამიწა ისეთი მიმართულებით, რომ დაამთხვიოს მისი ლერძი ორბიტის OP ლერძს. ცხადია, ამ ძალთა წყვილის მომენტი მიმართულია OK ლერძის გასწვრივ. ჩვენ ვხედავთ, რომ დედამიწა შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიმეტრიული ბზრიალა, რომელზეც მოქმედებს გარეშე მომენტი. ასეთი ბზრიალას ლერძი (უფრო სწორად, იმპულსის მომენტის ლერძი) შეასრულებს პრეცესიულ მოძრაობას ორბიტის ლერძის მიმართულების ირგვლივ, ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით (თუ დამხვრეა წარმოებს ორბიტის ჩრდი-

ლოეთი მხრიდან, მოძრაობა იწყება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით). ამ ასტრონომიული პრეცესიის კუთხური სიჩქარე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\Omega = \frac{M}{L \sin \beta} \quad (\text{XI, 78})$$

სადაც β არის კუთხე დედამიწის ღერძა და ორბიტისაღმის ნორმალს შორის ($\beta = 23^{\circ} 5'$). კუთხისათვის, რომელზეც მობრუნდება დედამიწის ღერძი ერთი წლის განმავლობაში, მივიღებთ

$$\varphi = T \cdot \Omega \quad (\text{XI, 79})$$



ნახ. 153

სადაც T არის წელიწადის ხანგრძლივობა, გამოხატული სეკუნდებით. რიცხვითი გამოთვლები გვაძლევს

$$\varphi = 15'', 9.$$

ცხადია, რომ ვინაიდან დედამიწის სიმეტრიის და ბრუნვის ღერძები არ თანხვდებიან იმპულსის მომენტის ღერძს, მისი სიმეტრიის ღერძი შეასრულებს ნუტაციურ მოძრაობასაც—კონუსურ მოძრაობას იმპულსის მომენტის ღერძის ირგვლივ. მაგრამ, ვინაიდან დედამიწის სიმეტრიის ღერძი ძალიან მცირედ არის გადახრილი იმპულსის მომენტის ღერძიდან, ეს ნუტაციური მოძრაობა თითქმის შეუმჩნეველია და ჩვენ

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პრეცესიულ მოძრაობას ასრულებს თვით სიმეტრიის ღერძი.

ჩვენ განვიხილეთ მზის მოქმედება დედამიწის ღერძზე, მაგრამ ვიცით, რომ მასზე მოქმედებს აგრეთვე მთვარე, რომლის ორბიტის სიბრტყე თითქმის თანხვედნილია დედამიწის ორბიტის სიბრტყესთან (ასტრონომიულ ნუტაციას, რომელიც გამოწვეულია მთვარის ორბიტის დახრით დედამიწის ორბიტისადმი ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ). მართალია, მთვარის მასა გაცილებით უფრო ნაკლებია, ვიდრე მზის მასა, მაგრამ, სიახლოვის გამო, მისი მოქმედება უფრო ძლიერია. გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ მთვარის მოქმედებით გამოწვეული პრეცესიის კუთხური სიჩქარე 2,18-ჯერ აღემატება მზის მოქმედებით გამოწვეულ პრეცესიის კუთხურ სიჩქარეს.

მზისა და მთვარის საერთო მოქმედებით გამოწვეული პრეცესიისათვის მივიღებთ

$$\varphi = 50'',3.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ პრეცესიის სრულ კონუსს დედამიწის ღერძი შემოწირს დაახლოებით 26000 წლის განმავლობაში ($360^\circ/50'',3 \sim 26000$ წელია). თუ ახლა ღერძი თავისი ჩრდილოეთის პოლუსით მიმართულია მცირე დათვის თანავარსკვლავედის α ვარსკვლავისაკენ, რომელსაც ამიტომ ეწოდება პოლარული ვარსკვლავი, დაახლოებით 11500 წლის შემდეგ იგი მიმართული იქნება ვეგა ვარსკვლავისაკენ (ე. წ. ლირას თანავარსკვლავედის α ვარსკვლავი).

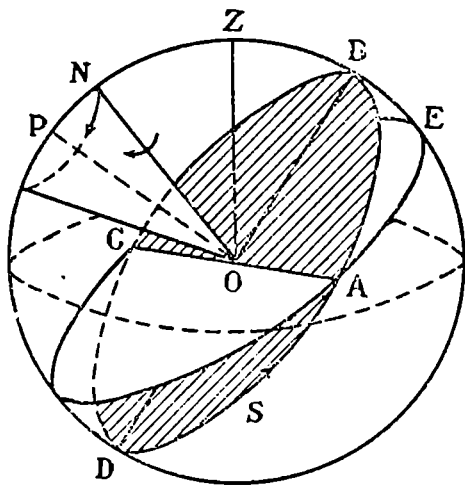
რა ასტრონომიულ მოვლენას იწვევს დედამიწის ღერძის პრეცესიული მოძრაობა?

უძველეს დროში ბერძენმა ასტრონომმა ჰიპარქემ შეამჩნია, რომ დედამსწორობის მომენტი, ე. ი. მომენტი, როდესაც დღე და ღამე ტოლი ხანგრძლივობისაა, ყოველთვის ერთი და იგივე არ არის. ამ მოვლენის ნათლად წარმოსადგენად განვიხილოთ 154-ე ნახაზი, რომელზეც ნაჩვენებია ციური ეკვატორის, ეკლიპტიკისა და სათანადო პოლუსების მდებარეობანი.

აღებულია გეოცენტრული სისტემა, ე. ი. უძრავად ჩათვლილია O წერტილში მოთავსებული დედამიწა. N და Z წერტილები წარმოადგენენ ჩრდილოეთის პოლუსსა და ზენიტს. OZ ღერძის მართობული სიბრტყე არის პორიზონტის სიბრტყე, ხოლო ON ღერძის მართობული სიბრტყე—ციური ეკვატორის სიბრტყე. ციური ეკვატორისადმი $23^\circ,5$ -ით დახრილი $ABCD$ სიბრტყე არის ეკლიპტიკის (ე. ი. მზის ორბიტის) სიბრტყე.

დედამიწის ბრუნვის გამო, მთელი ციური სფერო ბრუნავს დასაე-

ლეთისაკენ, ე. ი. თუ ვუყურებთ ჩრდილოეთის პოლუსიდან საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. ეს არის ციური სფეროს დღელამური მოძრაობა. მეორე მხრივ, დედამიწის წლიური მოძრაობის გამო, მზე მოძრაობს ეკლიპტიკაზე ისრით ნაჩვენები მიმართულებით, ე. ი. საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. იმისდა მიხედვით, თუ სად იმყოფება მზე ეკლიპტიკაზე, დღესა და ღამეს სხვადასხვა ხანგრძლივობა ექნებათ. თუ მზე იმყოფება ეკლიპტიკის ჩრდი-



ნახ. 154

ლოეთ ნაწილში, რომელიც ეკვატორის ზევით არის, დღე უფრო ხანგრძლივია, ვიდრე ღამე, ხოლო, თუ მზე ეკლიპტიკის სამხრეთ ნაწილშია, დღე ღამეზე მოკლე იქნება. დღისა და ღამის ხანგრძლივობა ერთნაირი იქნება, თუ მზე იმყოფება ეკლიპტიკისა და ეკვატორის წრეხაზების გადაკვეთის წერტილებში (A და C წერტილები ნახაზზე). ამიტომაც ეწოდებათ ამ წერტილებს დღელამსწორობის წერტილები.

როგორც ზემოთ ვთქვით, ბერძენმა ასტრონომმა ჰიპარქემ შეამჩნია, რომ ყოველ შემდგომ წელიწადში მზე უფრო ადრე აღწევს დღელამსწორობის წერტილებს, ვიდრე წინა წელში; ეს იმას ნიშნავს, რომ თვით დღელამსწორობის წერტილები მოძრაობს ეკლიპტიკაზე. ისინი მოძრაობენ მზის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ხდება ეგრეთ წოდებული დღელამსწორობის წინსწრება (სწორედ წინსწრებას ეწოდება ლათინურად პრეცესია და აქედან არის წარმოდგარი სახელწოდება პრეცესიული მოძრაობა). ეს მოვლენა ადვილად

ახსენება დედამიწის ღერძის იძულებითი პრეცესიით ეკლიპტიკის ნორმალის ირგვლივ. ვინაიდან დედამიწის ღერძი შემოწვრს კონუსს *OP* ღერძის ირგვლივ, ნახაზზე აღნიშნული მიმართულებით, ეკვატორის სიბრტყეც იბრუნებს, რაც გამოიწვევს დედამწწორობის წერტილების გადანაცვლებას მზის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

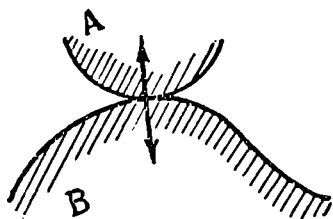
უნდა აღენიშნოთ, რომ ასტრონომიულ პრეცესიას ემატება ეგრეთ წოდებული ასტრონომიული ნუტაცია, რომელიც უნდა განვასხვაოთ მექანიკური ნუტაციისაგან (სიმეტრიის ღერძის ბრუნვისაგან იმპულსის მომენტის ღერძის ირგვლივ). როგორც ზემოთ ვთქვით, ეს უკანასკნელი ნუტაცია იმდენად მცირეა, რომ თითქმის შეუმჩნეველია. სულ სხვა ბუნებისაა ასტრონომიული ნუტაცია, რომელიც გამოწვეულია მთვარის ორბიტის დახრით დედამიწის ორბიტის სიბრტყისადმი. ეს დახრა დაახლოებით 5° -ის ტოლია. მზისა და დედამიწის მოქმედებით ნორმალი მთვარის ორბიტისადმი ასრულებს პრეცესიულ მოძრაობას ეკლიპტიკისადმი ნორმალის ირგვლივ, რაც, თავის მხრივ, იწვევს დედამიწის ღერძის ბრუნვას მომენტის ღერძის ირგვლივ პერიოდით $18\frac{2}{3}$ წელიწადი. სწორედ ამ მოვლენას ეწოდება ასტრონომიული ნუტაცია.

§ 74. მზარდი სხეულების შეხება. კამაქციისა და ხახუნის ძალები

როგორც ყოველდღიურ ცხოვრებაში, ისე ტექნიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები მყარი სხეულების შეხებისა ერთმანეთთან. ცხადია, ასეთი შეხების შედეგად სხეულები მოქმედებს ერთმანეთზე გარკვეული ძალებით და ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ ამ ძალების ხასიათი და მათი როლი მყარი სხეულების მოძრაობაში. უნდა აღინიშნოს, რომ შეხების ძალების წარმოშობის მიზეზია სხეულების ზედაპირული ფენების ატომების ან მოლეკულების ურთიერთქმედება და ამიტომ მათი ხასიათის თეორიული გამოკვლევისათვის საჭიროა მოლეკულების ურთიერთქმედების ცოდნა. ვინაიდან ეს უკანასკნელი საკმაოდ კარგად ცნობილი არ არის, იძულებული ვართ მივმართოთ ექსპერიმენტებს და მათი საშუალებით დავადგინოთ შეხების ძალების ხასიათი.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც შეხები მყარი სხეულები უძრავია ერთმანეთის მიმართ. ასეთი შემთხვევის მაგალითს წარმოადგენს შეხება უძრავი მძიმე სხეულისა საყრდენთან (ნახ. 155). შეხების წერტილებში მოქმედებენ ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალები. ცდები გვიჩვენებს, რომ, თუ სხეულებს შეუძლოა თავისუფლად სრიალი ერთიმეორის მიმართ, შეხებით გამოწვეული

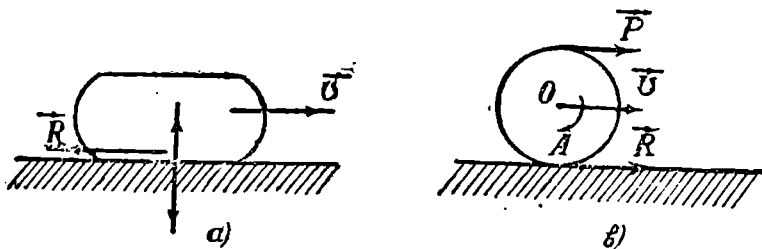
ე. წ. რეაქციის ძალები მიმართულია ზედაპირის მართობულად. ასეთი მიმართულება აქვს რეაქციის ძალებს მხოლოდ სხეულების უძრაობის დროს. თუ სხეულები მოძრაობს, რეაქციის ძალების გარდა ჩნდება ე. წ. ხახუნის ძალები, რომელნიც აღარ წარმოადგენენ წმინდა მექანიკური ხასიათის ძალებს. ეს ძალები, როგორც უკვე ვიცით, დისიპატიური ხასიათის ძალებია, ვინაიდან ისინი იწვევენ მექანიკური ენერჯის გარდაქმნას სითბურ ენერჯიად.



ნახ. 155

შემხები მყარი სხეულების ურთიერთმოძრაობა ორი სახის შეიძლება იყოს. შეიძლება ერთი სხეული სრიალებდეს მეორე სხეულის ზედაპირზე. ამ შემთხვევაში მოძრაობს სხეულის ზედაპირის ყველა წერტილი. სრიალის დროს შეხების წერტილებში მოქმედებს ორი

სახის ძალა: უკვე ცნობილი რეაქციის ძალები, მიმართული შეხების ზედაპირის მართობულად, და ხახუნის ძალები, მიმართული ზედაპირის მხებდალ და მოქმედნი მოძრაობის საწინააღმდეგოდ (ნახ. 156a), სრიალის გარდა არსებობს შემხები სხეულების კიდევ ერთი სახის მოძრაობა—ე. წ. გორვა (ნახ. 156b). ამ შემთხვევაში სხეულების შეხების წერტილები უძრავია და მგორავი სხეული ყოველ მომენტში



ნახ. 156

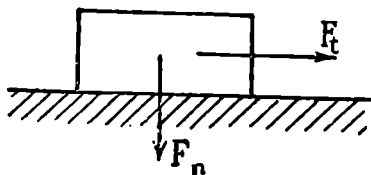
ასრულებს ბრუნვას ამ წერტილებს ირგვლივ (ან ამ წერტილებზე გამავალი ღერძის ირგვლივ). ცხადია, რომ მკირედ მობრუნების შემდეგ შეხების წერტილები უკვე სხვა იქნება და შემდეგი ბრუნვა იწარმოებს უკვე მათ ირგვლივ.

გორვის შემთხვევაში რეაქციის ძალები საზოგადოდ აღარ არის მიმართული ზედაპირების მართობულად და მათი მიმართულების მოძებნა შეიძლება მხოლოდ მოძრაობის განტოლებათა ამოხსნით. გარდა

რეაქციის ძალებისა, გორვის დროს ჩნდება კიდევ ხახუნის ძალები, რომელთა მოქმედება გამოიხატება დამატებითი ბრუნვის მომენტში, რომელიც წინააღმდეგობას უწევს გორვას.

შეიძლება ხახუნის ძალა სრიალის დროს იმდენად მცირე იყოს, რომ შესაძლებელი გახდეს მისი უგულებელყოფა. ამ შემთხვევაში ანბობენ, რომ სხეულთა ზედაპირები აბსოლუტურად გლუვია. მეორე უკიდურესი შემთხვევა გვექნება მაშინ, როდესაც ძლიერი სრიალის ხახუნის გამო, სრიალი საერთოდ შეუძლებელია, ხოლო გორვის ხახუნის შეიძლება უგულებელვყოთ. ეს ნიშნავს, რომ შესაძლებელია მხოლოდ უხახუნო გორვა.

განვიხილოთ ექსპერიმენტის შედეგები ხახუნის ძალების შესახებ. დავიწყოთ უძრაობის ხახუნით. ვთქვათ, რომელიმე მყარი სხეული მოთავსებულია რაიმე ბრტყელ საყრდენზე (ნახ. 157). ვიმოქმედოთ ამ სხეულზე შეხების ზედაპირის გასწვრივ მიმართული F_t ძალით. ცდა გვიჩვენებს, რომ, თუ ეს ძალა საკმარისად მცირეა, სხეული უძრავი დარჩება, რაც იმას ნიშნავს, რომ სხეულზე საყრდენის მხრიდან მოქმედებს უძრაობის ხახუნის ძალა R , რომელიც მიმართულია F_t ძალის საწინააღმდეგოდ. თუ F_t ძალა გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობას გადააჭარბებს, სხეული იწყებს აჩქარებულ მოძრაობას. აღვნიშნოთ R_{max} -ით ის ხახუნის ძალა, რომლის შემდეგ იწყება სხეულის მოძრაობა. ფრანგი ფიზიკოსის, კულონის მიერ დადგენილ იქნა, რომ ეს მაქსიმალური უძრაობის ხახუნის ძალა პირდაპირპროპორციულია იმ ნორმალური F_n დაწოლისა, რომლითაც სხეული აწევა საყრდენს (თუ რაიმე სხვა გარეშე დაწოლა არ არის, F_n სხეულის წონას უდრის). მაშასადამე, შეიძლება დაიწეროს შემდეგი დამოკიდებულება:



ნახ. 157

$$R_{max} = F_t = k_0 F_n,$$

რომელსაც ეწოდება კულონის კანონი. k_0 კოეფიციენტს, რომელიც დამოკიდებულია შემხები სხეულების გვარობაზე და ზედაპირების მდგომარეობაზე, ეწოდება უძრაობის ხახუნის კოეფიციენტი. k_0 -ის რიცხვითი მნიშვნელობები სხვადასხვა სხეულისათვის მოყვანილია ცხრილში.

სხეულების წყვილი	k_0
ფოლადი—ფოლადზე (მშრალი ზედაპირები)	0,15
ფოლადი—ვოლადზე (ზეთიანი ზედაპირები)	0,12
ლითონი—ხეზე (მშრალი)	0,5
ხე—ხეზე (მშრალი)	0,65
ფოლადი—ყინულზე	0,027

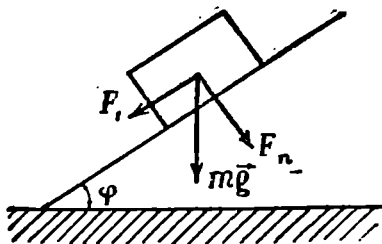
ხშირად კულონის კანონს წერენ შემდეგი სახით:

$$\frac{R_{max}}{S} = k_0 N ,$$

სადაც S არის შეხების ფართობი, ხოლო N —ნორმალური წნევა, ე. ი. ნორმალური ძალის შეფარდება შეხების ფართობთან.

აღსანიშნავია, რომ ხახუნის ძალა არ არის დამოკიდებული შეხების ზედაპირის ფართობზე. ეს ფაქტი იმით გამოიხატება, რომ N არის ნორმალური წნევა, ე. ი. ფართობის ერთეულზე მოქმედი ნორმალური ძალა. კულონის კანონი არ წარმოადგენს ზუსტ კანონს, იგი მით უფრო სწორია, რაც უფრო მეტია ნორმალური წნევა.

ხშირად, ხახუნის კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის იყენებენ დახრილ სიბრტყეს (ნახ. 158). თუ ერთ-ერთი სხეულის ზედაპირს დავხრით და მეორე სხეულს მოვათავსებთ ამ დახრილ სიბრტყეზე, გარკვეული დახრილობის კუთხის დროს დაიწყება სხეულის სრიალი დახრილ სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში მოძრაობაში მომყვანი ძალა არის წონის მდგენელი დახრილი სიბრტყის გასწვრივ, ხოლო ნორმალური ძალა—წონის ნორმალური მდგენელი.



ნახ. 153

$$F_t = mg \sin \varphi_{max} , \quad F_n = mg \cos \varphi_{max} ;$$

აქედან ხახუნის კოეფიციენტისათვის მივიღებთ

$$k_0 = \frac{F_t}{F_n} = \operatorname{tg} \varphi_{max} .$$

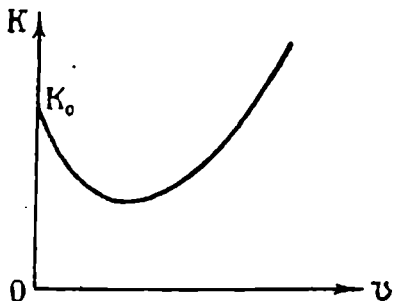
φ_{max} არის დახრილობის კუთხის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლის შემდეგაც იწყება სხეულის სრიალი დახრილ სიბრტყეზე. მას ხშირად ხახუნის კუთხეს უწოდებენ. ცხადია, რომ, თუ დახრილობის კუთხე φ_{max} -ზე ნაკლებია, სხეული უძრავი იქნება.

განვიხილოთ ახლა სრიალის ხახუნი. იმის შემდეგ, რაც შეხების ზედაპირის გასწვრივ მოქმედი ძალა აამოძრავებს სხეულს, იწყება სრიალი. სრიალის დროსაც არსებობს ხახუნის ძალა, რომელიც, ისევე როგორც უძრავობის ხახუნის ძალა, დამოკიდებულია ნორმალურ ძალაზე და მისი პროპორციულია

$$F_t = kF_n.$$

k კოეფიციენტს ეწოდება სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი. ცდები გვიჩვენებს, რომ k კოეფიციენტი, ისევე როგორც k_0 , არ არის დამოკიდებული შეხების ზედაპირის ფართობზე, მაგრამ დამოკიდებულია სხეულების გვარობაზე და ზედაპირების მდგომარეობაზე.

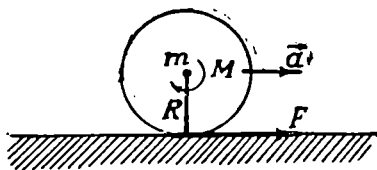
სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი ჩვეულებრივ ნაკლებია, ვიდრე უძრავობის ხახუნის კოეფიციენტი და სიჩქარის ვიწრო ფარგლებში არ არის დამოკიდებული სიჩქარეზე. მაგრამ ზუსტი ცდები გვიჩვენებს, რომ სიჩქარის ფართო ფარგლებში სრიალის ხახუნის კოეფიციენტის დამოკიდებულება სიჩქარეზე შესამჩნევი ხდება. საზოგადოდ იგი თანდათანობით კლებულობს (სიჩქარის ზრდასთან ერთად), აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას და შემდეგ იწყებს ზრდას.



ნახ. 159

159-ე ნახაზზე ნაჩვენებია k -ს დამოკიდებულება სიჩქარეზე.

დასასრულლ განვიხილოთ გორვის ხახუნი. გორვის დროს, როდესაც სრიალი სრულებით არ არის, სხეულების შეხების წერტილი ან ხაზი ყოველ ადებულ მომენტში უძრავია; ეს ნიშნავს,



ნახ. 160

რომ წერტილში უნდა მოქმედებდეს უძრავობის ხახუნის ძალა. მაგრამ ეს ძალა მოქმედებს სხეულის სიჩქარის საწინააღმდეგოდ (ნახ. 160)

და მისი ბრუნვის მომენტი მიმართულია ისევე, როგორც გორვის გამომწვევი ძალის მომენტი. ამიტომაც მას არ შეუძლია შეანელოს გორვის სიჩქარე. მაშასადამე, გარდა ამ ძალის მომენტისა, უნდა არსებობდეს კიდევ რაღაც ძალის მომენტი, რომელიც მოქმედებს გორვის გამომწვევი მომენტის საწინააღმდეგოდ და ანელებს გორვას. სიმარტივისათვის განვიხილოთ წრიული ცილინდრის გორვა ბრტყელ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე. თუ ხახუნის ტანგენციალურ ძალას F -ით აღვნიშნავთ, ხოლო გორვის ხახუნის ძალის მომენტს M -ით, შეიძლება დაიწეროს შემდეგი განტოლებები:

$$ma = F,$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - FR, \quad (\text{XI, } 80)$$

სადაც a არის ცილინდრის ინერციის ცენტრის აჩქარება, m — მისი მასა, ხოლო I — ინერციის მომენტი. ვინაიდან გორვა უსრიალოა, ინერციის ცენტრის აჩქარება დაკავშირებული იქნება კუთხურ აჩქარებასთან $a = R \frac{d\omega}{dt}$ ფორმულით. ჩასმა წინა ფორმულებში და F -ის გამორიცხვა გვაძლევს

$$mR \left(1 + \frac{I}{mR^2} \right) a = M;$$

აქედან შეიძლება ვიპოვოთ გორვის ხახუნის ძალის მომენტი. ხახუნის ძალისათვის გვექნება

$$F = \frac{M}{R \left(1 + \frac{I}{mR^2} \right)}. \quad (\text{XI, } 81)$$

ხახუნის ძალები მნიშვნელოვან როლს ასრულებს სხეულების მოძრაობის დროს. რომ არ ყოფილიყო ხახუნის ძალა შემებ სხეულებს შორის, შეუძლებელი იქნებოდა ადამიანის სიარული, ბორბლების გორვა და, მაშასადამე, ბორბლიანი ეტლების მოძრაობა, ვინაიდან ერთადერთი გარეშე ძალა, რომელიც მოქმედებს მათზე, არის ხახუნის ძალა. შიდა ძალებს კი არ შეუძლია მოიყვანოს სხეულები მოძრაობაში.

§ 75. მუხის ძალის მოქმედება მყარ სხეულზე

წარმოვიდგინოთ, რომ თავისუფალი მყარი სხეულის რაიმე A წერტილში ძალიან მცირე დროის განმავლობაში იმოქმედა საკმაოდ დიდმა ძალამ. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მყარმა სხეულმა განიცადა დარ-

ტყმა. იმის გამოსარკვევად, თუ როგორი იქნება სხეულის მოძრაობა ასეთი დარტყმის შემდეგ, გამოვიყენოთ მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლება

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_c}{dt} &= \vec{F}, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}, \end{aligned} \right\} \quad (XI, 82)$$

სადაც m არის სხეულის მთელი მასა, \vec{v}_c —ინერციის ცენტრის სიჩქარე, \vec{F} სხეულზე მოქმედი ძალა, ხოლო \vec{M} —ამ ძალის მომენტი ინერციის ცენტრის მიმართ. თუ ჩვენ მივიღებთ, რომ დარტყმის მოქმედების Δt დროის განმავლობაში \vec{F} ძალა მუდმივია, ეს განტოლებები ასე შეიძლება დაიწეროს:

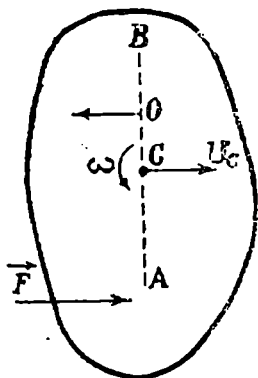
$$\begin{aligned} m\Delta\vec{v}_c &= \vec{F}\Delta t, \\ \Delta\vec{L} &= \vec{M}\Delta t. \end{aligned} \quad (XI, 83)$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ დარტყმის ძალა მდებარეობს ინერციის ცენტრზე გამავალი ერთ-ერთი მთავარი ღერძის მართობ სიბრტყეში (ინერციის მთავარი სიბრტყე) (ნახ. 161). მაშინ ამ ძალის მომენტი მიმართული იქნება მთავარი ღერძის გასწვრივ და ვინაიდან ასეთივე მიმართულება ექნება იმპულსის მომენტს, (XI, 83) განტოლებები შეიძლება სკალარულად დავწეროთ

$$\begin{aligned} m\Delta v_c &= F\Delta t, \\ I\Delta\omega &= M\Delta t, \end{aligned}$$

სადაც I არის ინერციის მომენტი მთავარი ღერძის მიმართ, ხოლო $\Delta\omega$ კუთხური სიჩქარის ცვლილება, გამოწვეული დარტყმით. თუ დარტყმამდე მყარი სხეული უძრავი იყო, მაშინ (XI, 83) განტოლებები გვაძლევს ინერციის ცენტრის სიჩქარეს და ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს დარტყმის შემდეგ

$$\left. \begin{aligned} v_c &= \frac{F\Delta t}{m}, \\ \omega &= \frac{M\Delta t}{I} = \frac{F \cdot CA \cdot \Delta t}{I}, \end{aligned} \right\} \quad (XI, 84)$$



ნახ. 161

სადაც CA არის F ძალის მხარი (დაშვებულია, რომ ძალა მხარის მართობია). ჩვენ ვხედავთ, რომ დარტყმის გავლენით მყარი სხეული იწყებს გადატანით მოძრაობას v_c სიჩქარით და იმავე დროს ბრუნავს მთავარი ღერძის ირგვლივ ω კუთხური სიჩქარით. მოძრაობის ხასიათის უფრო ნათლად წარმოსადგენად გავატაროთ ძალის მოდების A წერტილზე და ინერციის ცენტრზე სწორი ხაზი (CA მხარის გაგრძელება). ნახაზი ნათლად გვიჩვენებს, რომ ამ ხაზის წერტილები გადატანით მოძრაობასთან ერთად ბრუნავს აგრეთვე ω კუთხური სიჩქარით ისე, რომ CA მონაკვეთის წერტილებისათვის ბრუნვის სიჩქარე ემატება გადატანით სიჩქარეს, ხოლო CB მონაკვეთის წერტილებისათვის აკლდება მას. ამის გამო ბუნებრივად ისმის კითხვა, ხომ არ შეიძლება მოიძებნოს ამ ხაზზე ისეთი წერტილი, რომლის სიჩქარე იქნება ნულის ტოლი? ამის გამოსარკვევად ავარჩიოთ CB მონაკვეთზე რაიმე O წერტილი და გამოვითვალოთ მისი სრული სიჩქარე—გადატანითი და ბრუნვითი სიჩქარეების ჯამი. ვინაიდან ამ წერტილების ბრუნვითი სიჩქარე $OC \cdot \omega$ მიმართულია გადატანითი მოძრაობის საწინააღმდეგოდ, სრული სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$v_c - OC \cdot \omega = \frac{F \Delta t}{m} - \frac{F \Delta t \cdot CA \cdot OC}{I}$$

ან

$$v_c - OC \cdot \omega = \frac{F \Delta t}{m} \left(1 - \frac{mCA \cdot OC}{I} \right). \quad (XI, 85)$$

ეს სიჩქარე ნულის ტოლი იქნება იმ შემთხვევაში, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$CA \cdot OC = \frac{I}{m} = x^2, \quad (XI, 86)$$

სადაც x ინერციის რადიუსია მთავარი ღერძის მიმართ.

როგორც ვხედავთ, თუ O წერტილს ისე ავირჩევთ, რომ შესრულებული იქნება (XI, 86) პირობა, იგი დარტყმის შედეგად არ ამოძრავდება. ეს წერტილი არ განიცდის დარტყმის მოქმედებას. ძალის მოდების ყოველი A წერტილისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი O წერტილი, რომელიც უძრავი იქნება დარტყმის შემდეგ. შეიძლება დაისვას შებრუნებული ამოცანა: ამორჩეული გვაქვს O წერტილი და ვეძებთ ისეთ A წერტილს, რომ მასზე მოდებული დარტყმის ძალას არ მოჰყავდეს O წერტილი მოძრაობაში, ე. ი. არ გადასცემდეს ამ წერტილს იმპულსს. ასეთი წერტილი ყოველთვის შეიძლება მოი-

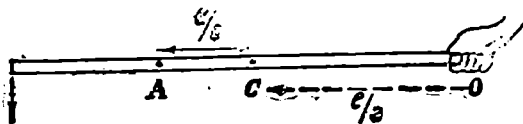
ქებნოს (XI, 86) პირობის გამოყენებით. მისი მანძილი ინერციის ცენტრიდან მოიძებნება შემდეგი ფორმულით:

$$OC = \frac{x^2}{CA} \quad (\text{XI, 87})$$

ამ წერტილის ეწოდება დარტყმის ცენტრი A წერტილის მიმართ.

მყარი სხეულის დარტყმის ცენტრის არსებობა ნათლად ჩანს ჩაქუჩის ან ცულის ხმარების დროს. დარტყმის დროს ადამიანის ხელი გრძნობს უსიამოვნო ბიძგს, თუ მას სახელური არ უჭირავს სათანადოდ შერჩეულ ადგილას. სწორედ ეს ადგილი ეთანადება ჩაქუჩის ან ცულის დარტყმის ცენტრს, რომელიც არ განიცდის არაერთარ ბიძგს დარტყმის დროს.

მაგალითისათვის განვიხილოთ წვრილი ღერი (ნახ. 162). ვთქვათ, გვიჭირავს ეს ღერი ერთი ბოლოთი და გვინდა გამოვარკვიოთ, თუ ღერის რა ადგილით უნდა ვაწარმოთ დარტყმა, რომ ხელმა არ გა-



ნახ. 162

ნიცადოს ბიძგი. ეს ნიშნავს დარტყმის ცენტრის მოძებნას ღერის ბოლო წერტილისათვის. თუ ღერის სიგრძე არის l , CO იქნება $\frac{l}{2}$, რადგანაც C ინერციის ცენტრი ღერის შუა წერტილშია. როგორც ვიცით, ინერციის რადიუსის კვადრეტი ღერის ინერციის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ არის $\frac{1}{12} l^2$; აქედან დარტყმის ცენტრის მანძილისათვის შუა წერტილიდან მივიღებთ

$$AC = \frac{1}{6} l.$$

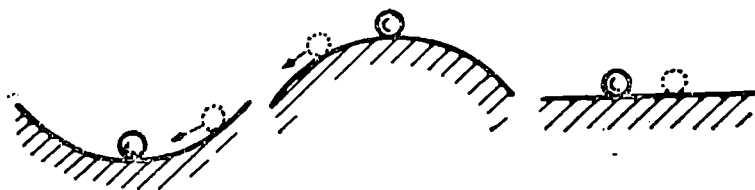
თავი მეთორმეტი

ნივთიერი ნაჩილისა და მყარი სხეულის წონასწორობა

§ 76. ნივთიერი წერტილის წონასწორობის პირობები

წინა თავებში გამოვიყვანეთ მოძრაობის ძირითადი კანონი, რომელიც აკავშირებს მოძრაობას ურთიერთქმედებასთან. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია ურთიერთქმედების ხასიათი და საწყისი პირობები, მივიღებთ სხვადასხვა სახის მოძრაობას. ურთიერთქმედების ზოგიერთი უმნიშვნელოვანესი სახე და მათი სათანადო მოძრაობები შემდეგ თავებში იქნება განხილული, ახლა კი გავარჩევთ მოძრაობის მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას—წონასწორობას.

ხშირად ვხვდებით ბუნებაში ისეთ შემთხვევას, როდესაც ურთიერთქმედების არსებობის მიუხედავად ნივთიერი წერტილი ან სხეული უძრავი



ნახ. 163

რჩება. ასეთა, მაგალითად, ძაფზე დაკიდებული სხეულის შემთხვევა (საქანი), თუკი ძაფს ვერტიკალური მიმართულება აქვს. ასევე უძრავია მცირე ზომის ბირთვი, მოთავსებული ჩაზნექილი (ამოზნექილი) ქურქლის ყველაზე უფრო დაბალ (მაღალ) ადგილას ან ბრტყელ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე (ნახ. 163).

ყველა ამ შემთხვევაში სხეული უძრავია და უძრავი რჩება განუსაზღვრელი დროის განმავლობაში, მიუხედავად იმისა, რომ მასზე მოქმედებს როგორც დედამიწის მიზიდვის ძალა, ისე ძაფის ან ზედაპირის რეაქცია.

შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა: ნივთიერი წერტილი წონასწორობაშია, თუ იგი, მოყვანილი უძრავ მდგომარეობაში, უძრავი რჩება შემდეგშიც.

ის პირობა, რომ ნივთიერი წერტილი უძრავ მდგომარეობაში უნდა იყოს, ადვილად შესასრულებელია, ვინაიდან იგი დაკავშირებულია საწყისი პირობების შერჩევასთან. წონასწორობისათვის მნიშვნელოვანია მეორე პირობა, რომ ნაწილაკმა არ უნდა დაიწყოს მოძრაობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი აჩქარება ნულის ტოლი უნდა იყოს

$$\bar{a} = 0. \quad (\text{XII}, 1)$$

მაშასადამე, იმის გამოსარკვევად, არის თუ არა ესა თუ ის მდებარეობა წონასწორობის მდებარეობა, შემდეგნაირად უნდა მოვიქცეთ. განსახილველი ნივთიერი წერტილი უნდა მოვათავსოთ ამ მდებარეობაში და მოვიყვანოთ იგი უძრავ მდგომარეობაში. თუ ნაწილაკი არ გამოვა უძრავი მდგომარეობიდან, აღებული მდებარეობა იქნება წონასწორობის მდებარეობა.

გავარკვიოთ ახლა როგორი ხასიათისა უნდა იყოს ურთიერთქმედება, ე. ი. როგორი ძალები უნდა მოქმედებდეს ნაწილაკზე ან როგორი უნდა იყოს პოტენციალური ენერჯია იმისათვის, რომ ნაწილაკი წონასწორობაში იყოს. მოძრაობის კანონების თანახმად

$$m\bar{a} = \bar{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

სადაც \bar{F} არის ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ჯამი. ვინაიდან წონასწორობაში $\bar{a} = 0$, მივიღებთ, რომ

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (\text{XII}, 2)$$

როგორც ვხედავთ, წონასწორობისათვის საჭიროა ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ჯამი იყოს ნულის ტოლი. შეიძლება გამოითქვას შემართებული დებულება, რომ, თუ ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია, ნაწილაკი წონასწორობაში იქნება.

(XII, 2) განტოლების ღერძებზე დაგვემიღებთ მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (\text{XII}, 3)$$

ე. ი. წონასწორობისათვის საჭიროა, რომ ნულის ტოლი იყოს ყოველ ღერძზე ძალების გვემილების ჯამი.

ძალთა ტოლქმედის ნულთან ტოლობა გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ ნიწილაკზე მოქმედი ძალები შეკრების შედეგად უნდა გვაძლევდეს ჩაკეტილ მრავალკუთხედს (ნახ. 164).

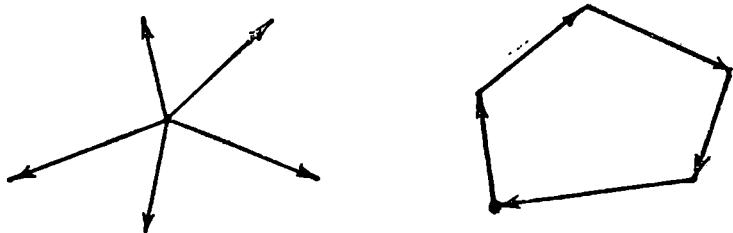
წონასწორობის პირობებს შეიძლება მიეცეთ სხვა სახეც, თუ გამოვიყენებთ პოტენციალურ ენერგიას. ვინაიდან

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

წონასწორობის შემთხვევაში შემდეგი პირობები უნდა შესრულდეს:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (\text{XII, 4})$$

ე. ი. წონასწორობის მდებარეობაში პოტენციალური ენერგიის კერძო წარმოებულები კოორდინატების მიმართ ნულის ტოლი უნდა იყოს.



ნახ. 164

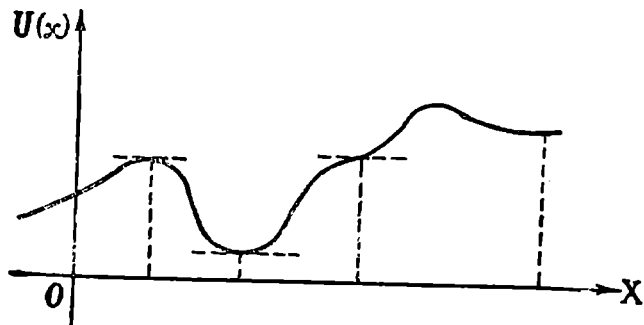
ამ პირობების მნიშვნელობის გამოსარკვევად განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ნიწილაკი მოძრაობს მხოლოდ OX ღერძზე. ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია იქნება მხოლოდ x -ის ფუნქცია და (XII, 4) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{dU}{dx} = 0.$$

როგორც ცნობილია ანალიზიდან, თუ ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია, ფუნქციას ამ წერტილში ექნება ან ექსტრემუმი (მინიმუმი ან მაქსიმუმი), ან გადაღუნვის წერტილი, ან ფუნქცია იქნება მუდმივი ამ წერტილის მახლობლობაში.

დავხაზოთ პოტენციალური ენერგიის, როგორც x -ის ფუნქციის, გრაფიკი—ე. წ. პოტენციალური მრუდი, რომელიც ნათლად წარმოგვიდგენს პოტენციალური ენერგიის მდებარეობაზე დამოკიდებულებას

ხასიათს (ნახ. 165). წერტილის ყოველ მდებარეობას ეთანადება პოტენციალური ენერჯიის გარკვეული მნიშვნელობა, რომელიც ამ მდებარეობის სათანადო ორდინატით გამოიხატება. მაგრამ პოტენციალური მრუდი გვაძლევს არა მარტო პოტენციალურ ენერჯიას, არამედ წერტილზე მოქმედი ძალის მნიშვნელობასაც. ამისათვის საკმარისია მრუდ-



ნახ. 165

ის აღებულ წერტილში გავატაროთ მხები და გავზომოთ ამ მხებით შექმნილი კუთხე OX ღერძთან. ამ კუთხის ტანგენსი, აღებული მინუს ნიშნით, გვაძლევს ნაწილაკზე მოქმედი ძალის მნიშვნელობას. წონასწორობაში

$$\frac{dU}{dx} = \text{tg } \varphi = 0,$$

ე. ი. წონასწორობის სათანადო წერტილში მხები აბსცისთა ღერძის პარალელური უნდა იყოს. როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, ამას ადგილი ექნება მაქსიმუმის, მინიმუმის ან გადაღუნვის წერტილებში, ან ისეთ ნაწილში, სადაც მრუდი აბსცისთა ღერძის პარალელურია.

§ 77. წონასწორობის სახეები

თუ დავაკვირდებით წონასწორობის მდებარეობის ზოგიერთ მოყვანილ მაგალითს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მათ შორის მნიშვნელოვანი განსხვავება არსებობს; ეს განსხვავება დაკავშირებულია წონასწორობის მდებარეობიდან გამოყვანილი ნაწილაკის მოძრაობის ხასიათთან; მაგალითად, ვადავხაროთ საქანი მისი წონასწორობის მდებარეობიდან და მივანებოთ მას თავი. ცდა გვიჩვენებს, რომ საქანი ისევ დაუბრუნდება ამ მდებარეობას. თუმცა იგი არ დარჩება წონასწორობის მდებარეობაში, გაუიხრება მეორე მხარეს და დაიწყებს რხევას წონასწორო-

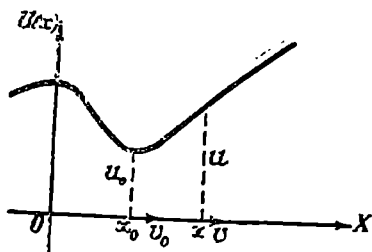
ბის მდებარეობის მახლობლად. ასევე იმოდრავებს ჩაზნექილი ჭურჭლის ყველაზე დაბალ მდებარეობაში მოთავსებული ბირთვი, გამოყვანილი ამ მდებარეობიდან. სულ სხვანაირად იმოდრავებს ბირთვი, რომელიც ამოხნექილი ჭურჭლის ყველაზე მაღალ ადგილას იყო მოთავსებული და გამოყვანილია წონასწორობის მდებარეობიდან; ამ მდებარეობიდან გამოყვანილი ბირთვი კი არ უბრუნდება მას, არამედ განაგრძობს დაშორებას ამ მდებარეობიდან. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ბირთვი წონასწორობაშია ბრტყელ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე. თუ გამოვიყვანთ მას ამ მდებარეობიდან, იგი წონასწორობაში იქნება ახალ მდებარეობაშიც; ეს იმას ნიშნავს, რომ აღებული წონასწორობის მდებარეობის მახლობელი მდებარეობანიც აკრეთვე წონასწორულ მდებარეობას წარმოადგენენ.

ყოველივე ზემოთქმულის გამო, შეიძლება შემოვიღოთ წონასწორობის მდებარეობათა შემდეგი კლასიფიკაცია: წონასწორობა მდგრადია, თუ ამ მდებარეობიდან გამოყვანილი ნივთიერი წერტილი საკმაოდ მცირე ბიძგიით ან გადახრით ისევ ამ მდებარეობას უბრუნდება.

თუ წონასწორობიდან გამოყვანილი ნივთიერი წერტილი განაგრძობს ამ მდებარეობიდან დაშორებას, წონასწორობას ეწოდება არამდგრადი.

მესამე შემთხვევაში, როდესაც წონასწორობის მახლობელი მდებარეობანი ისევ წონასწორულ მდებარეობებს წარმოადგენენ, ამბობენ, რომ წონასწორობა განურჩეველია.

დავაკავშიროთ ახლა წონასწორობის ეს სახეები პოტენციალური მრუდის განხილვით მიღებულ პირობებთან, რომ წონასწორობის მდებარეობაში უნდა გვქონდეს



ნახ. 166

მრუდის მაქსიმუმი, მინიმუმი ან აბსცისთა ღერძის პარალელური სწორხაზოვანი ნაწილი.

დავამტკიცოთ, რომ პოტენციალური ენერჯის მინიმუმს ეთანადება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობა. აღვნიშნოთ x_0 -ით მინიმუმის წერტილის სათანადო

ლო კოორდინატი (ნახ. 166). პოტენციალური ენერჯის სათანადო მნიშვნელობა იყოს U_0 . ამ მდებარეობაში მყოფ ნაწილაკს საკმარისად მცირედ ვუბიძგოთ, ე. ი. მივიანიჭოთ მას გარკვეული s_0 სიჩქა-

რე და $T_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ კინეტიკური ენერგია. ნიწილაკის სრული ენერგია ბიძგის შემდეგ იქნება

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + U_0,$$

ვინაიდან ნაწილაკი ამოძრავებულა, იგი გარკვეული დროის შემდეგ გადავა ახალ მდებარეობაში კოორდინატით x და პოტენციალური ენერჯიით $U(x)$. რადგანაც U_0 არის პოტენციალური ენერჯიის მინიმალური მნიშვნელობა, ცხადია, რომ $U(x) > U_0$. მეორე მხრივ, ენერჯიის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} + U_0 = \frac{mv^2}{2} + U,$$

სადაც v არის სიჩქარე x მდებარეობაში; აქედან მივიღებთ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U_0 - U < 0.$$

ი. ი.

$$\frac{mv^2}{2} < \frac{mv_0^2}{2};$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯია შემცირდა, როდესაც იგი წონასწორობის მდებარეობიდან მეზობელ მდებარეობაში გადავიდა. მინიმალური პოტენციალური მდებარეობიდან გამოსული ნაწილაკი თანდათან ამცირებს თავის სიჩქარეს, ცხადია, რომ დადგება მომენტი, როდესაც ნაწილაკი გაჩერდება და მასზე მოქმედი ძალების გავლენით დაბრუნდება საწყის მდგომარეობაში; ეს კი ნიშნავს, რომ მინიმალური პოტენციალური ენერჯიის მდებარეობას ეთანადება მდგრადი წონასწორობა. ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ პოტენციალური ენერჯიის მაქსიმუმს ეთანადება არამდგრადი წონასწორობა.

მაშასადამე, თუ პოტენციალური ენერჯია მინიმალურია, წონასწორობა იქნება მდგრადი, ხოლო, თუ იგი მაქსიმალურია, წონასწორობა იქნება არამდგრადი.

ისმის კითხვა, როგორია წონასწორობა იმ შემთხვევაში, როდესაც წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად პოტენციალური ენერჯია უცვლელია (პოტენციალური მრუდის პორიზონტალური ნაწილი)? ცხადია, რომ, თუ ნაწილაკს გადავხრით მეზობელ მდებარეობაში, იგი დარჩება ამ მდებარეობაში, ვინაიდან პოტენციალური ენერჯია არ შეცვლილა, ეს იმას ნიშნავს, რომ ყველა მეზობელი მდე-

ბარეობა წონასწორობის მდებარეობა იქნება და წონასწორობა იქნება განურჩეველი.

განსახილველი დარჩა შემთხვევა, როდესაც პოტენციალურ ენერჯის მრუდს აქვს გადაღუნვის წერტილი, რაც იმას ნიშნავს. რომ თვით ამ წერტილში მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია, მაგრამ ამ წერტილის ერთ მხარეს პოტენციალური ენერჯია მატულობს, ხოლო მეორე მხარეს კლებულობს.

ცხადია, რომ, თუ წონასწორობის მდებარეობიდან ნაწილაკს გადავხრით იმ მხარეს, რომლის მიმართულებითაც პოტენციალური ენერჯია კლებულობს, ნაწილაკი სულ უფრო დაშორდება საწყის მდებარეობას. თუ ნაწილაკს გადავხრით პოტენციალური ენერჯის ზრდის მიმართულებით, იგი თანდათან შეაწელებს მოძრაობას. გაჩერდება, და დაუბრუნდება საწყის მდებარეობას, გადასცდება და სულ უფრო და უფრო დაშორდება მას. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაშიც წონასწორობა იქნება არამდგრადი.

§ 78. მუხარის სხეულის წონასწორობის პირობები

განვიხილოთ ახლა მყარი სხეულის შემთხვევა. ვიცით, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები შეიძლება დაეყვანოთ ერთ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე. თუ ნაკრებ ძალას და მომენტს აღვნიშნავთ სათანადოდ \vec{F} -ით და \vec{M} -ით, მოძრაობის განტოლებები შემდეგ სახით შეიძლება დაიწეროს:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (\text{XII, 5})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

სადაც m არის მყარი სხეულის მასა, \vec{v}_c —ინერციის ცენტრის სიჩქარე და \vec{L} —იმპულსის მომენტი. გამოვიყენოთ წონასწორობის იგივე განსაზღვრა, რაც ნივთიერი წერტილის შემთხვევაში. თუ მყარი სხეული მოყვანილია უძრავ მდგომარეობაში და იგი არ გამოდის ამ მდებარეობიდან, ვიტყვით, რომ მყარი სხეული წონასწორობაშია. ვინაიდან მყარ სხეულს შეუძლია შეასრულოს გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობა, წონასწორობის მდებარეობაში არც ერთი მათგანი არ უნდა დაიწყოს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ინერციის ცენტრის აჩქარება ნულის ტოლი უნდა იყოს და არ უნდა იცვლებოდეს იმპულსის მომენტი

$$\vec{a}_c = 0, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

(XII, 5) განტოლებებიდან გამოვძინარგობს, რომ ამისათვის საჭიროა გარეშე ძალების \vec{F} ჯამის და გარეშე მომენტების \vec{M} ჯამის ნულთან ტოლობა

$$\vec{F} = 0, \vec{M} = 0. \quad (\text{XII, 6})$$

ასეთია წონასწორობის პირობები მყარი სხეულის შემთხვევაში. პირველი პირობა ისეთივეა, როგორც წონასწორობის პირობა ნივთიერი წერტილისათვის და ამიტომ მის მიმართ შეიძლება გავიმეოროთ ყველაფერი, რაც წინა პარაგრაფში იყო ნათქვამი. ეს პირობა შეიძლება გამოისახოს პოტენციალური ენერჯიის როგორც ინერციის ცენტრის კოორდინატების ფუნქციის ექსტრემუმის პირობით. უფრო მნიშვნელოვანი და საინტერესოა ჰეორე პირობა, რომელიც კრძალავს უძრავი მყარი სხეულის ბრუნვის დაწყებას.

ერთი ვექტორული განტოლება

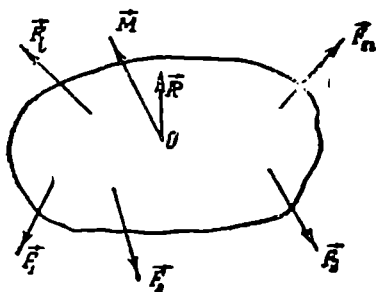
$$\vec{M} = 0$$

შეიძლება დაიშალოს სამ სკალარულ განტოლებად. თუ დავაგეგმილებთ მას კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$M_x = 0; M_y = 0; M_z = 0, \quad (\text{XII, 7})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ საერთო მომენტის გვეგმილები ღერძებზე ნულის ტოლი უნდა იყოს.

განვიხილოთ ზოგადი წონასწორობის პირობების ზოგიერთი კერძო შემთხვევა და მაგალითი. ჩვეულებრივ პრაქტიკაში საჭიროა მყარი სხეულის წონასწორობის პირობების დადგენა იმ შემთხვევაში, როდესაც მყარი სხეული არ არის თავისუფალი, ე. ი. როდესაც მისი მოძრაობა შეზღუდულია გარეშე სხეულებით — ბმებით. ამ შემთხვევაში უშუალოდ მიღებულ ძალებს უნდა დაემატოს რეაქციის ძალები, ე. ი. ძალები, რომლებითაც გარეშე სხეულები მოქმედებს განსახილველ სხეულზე.



ნახ. 167

განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ (ნახ. 167): ასეთ სხეულს ეწოდება ბერკეტი. ვთქვათ, ბერკეტზე მოქმედებს ღერძისადმი მართობულ სიბრტყეში მდებარე $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალები. გარდა ამ ძალებისა, ბერკეტზე მოქმედებს კი-

დევ თვით ღერძი რეაქციის \vec{R} ძალით. წონასწორობის პირობის თანახმად, მოქმედი ძალების ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{R} = 0. \quad (\text{XII, } 8)$$

ეს პირობა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ რეაქციის ძალა.

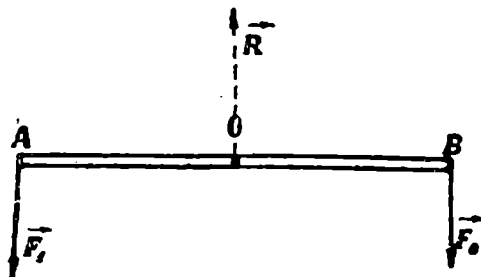
წონასწორობის მეორე პირობა—ძალთა მომენტების ჯამის ნულთან ტოლობა—შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0, \quad (\text{XII, } 9)$$

თუ სათავედ, რომლის მიმართაც გამოითვლება მომენტები, ავარჩევთ რეაქციის ძალის მოდების წერტილს. ვინაიდან ბერკეტზე მოქმედი ძალები მდებარეობს ღერძის მართობ სიბრტყეში, მათი მომენტები მიმართული იქნება ღერძის გასწვრივ და ამიტომ (XII, 9) განტოლება შეიძლება დაიწეროს სკალარულად

$$\sum_{i=1}^n M_{i\Delta} = 0$$

როგორც მაგალითი, განვიხილოთ ჩვეულებრივი ბერკეტი, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა O ღერძის ირგვლივ და რომლის ბოლო წერტი-



ნახ. 168

ლებზე მოდებულია \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები (ნახ. 168). თუ მანძილებს ძალების მოდების წერტილებიდან O წერტილამდე აღვნიშნავთ OA -თი და OB -თი, წონასწორობის პირობა მოგვცემს

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB$$

ღერძის რეაქციის ძალისათვის კი მივიღებთ

$$\vec{R} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2);$$

ეს შედეგი მიღებულია იმ დაშვებით, რომ თვით ბერკეტს არა აქვს წონა და ამიტომ წონასწორობისათვის სულ ერთია როგორ იქნება მობრუნებული სხეული ღერძის ირგვლივ.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა მძიმე ბერკეტისა, რომლის სიმძიმის ცენტრი, ე. ი. წონის ძალის მოდების წერტილი არ მდებარეობს ღერძზე (ნახ. 169). თუ ღერძის O წერტილი და სიმძიმის ცენტრი— C ერთ ვერტიკალზე მდებარეობენ, წონასწორობის პირობები შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\vec{R} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P})$$

და

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB,$$

ვინაიდან როგორც რეაქციის ძალის, ისე წონის მომენტები O ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როდესაც ბერკეტის მხრები ტოლია ($OA = OB$)—ე. წ. ტოლმხრიანი სასწორის შემთხვევა. წონასწორობის პირობა იქნება

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2.$$

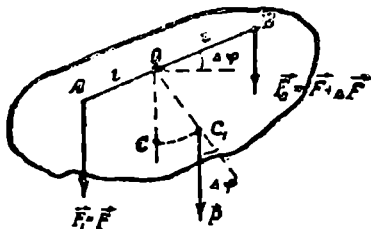
თუ ბერკეტის ერთ-ერთ ბოლოზე მოქმედ ძალას გავადიდებთ (რაც სასწორის შემთხვევაში ნიშნავს ერთ თეფშზე ზედმეტი ტვირთის დადებას), წონასწორობა დაირღვევა, ბერკეტი მობრუნდება და სასწორის სიმძიმის ცენტრი გადაინაცვლებს ვერტიკალიდან (ნახ. 169); ეს თავის მხრივ, გამოიწვევს წონის ძალის მომენტის გაჩენას და წონასწორობის პირობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$F \cdot l \cos \Delta \varphi + P \cdot d \sin \Delta \varphi = (F + \Delta F) l \cos \Delta \varphi,$$

საიდანაც მივიღებთ:

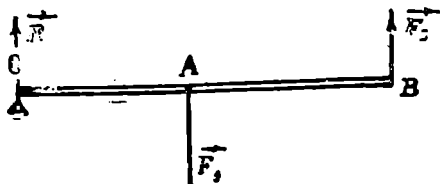
$$\text{t.g. } \Delta \varphi = \frac{\Delta F \cdot l}{P \cdot d};$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვითვალოთ ბერკეტის (სასწორის) მობრუნების კუთხე ზედმეტი ტვირთის მოქმედების შედეგად (სასწორის მგრძნობიარობა).



ნახ. 169

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ წონასწორობა ბერკეტისა, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა ერთ-ერთი ბოლო წერტილის ირგვლივ (ნახ. 170).



ნახ. 170

წონასწორობის პირობები ამ შემთხვევაში შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\vec{R} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2),$$

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB.$$

რხევეითი მოძრაობა

§ 79. შესავალი

სხვადასხვა სახის მოძრაობებს შორის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესია რხევითი მოძრაობა. არ არსებობს ბუნების თითქმის არც ერთი მოვლენა, რომელშიც არ იღებდეს მონაწილეობას მოძრაობის ეს სახე. ყოველდღიურ ცხოვრებასა და ტექნიკაში ვხვდებით რხევით მოძრაობას: საქანის რხევა წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად, საათის ზამბარის მოძრაობა, მანქანების ნაწილების მოძრაობა, დედამიწის ქერქის მოძრაობა მიწისძვრების დროს, ჰაერის ბგერითი მოძრაობა და მრავალი სხვა წარმოადგენენ რხევითი მოძრაობის მაგალითებს. მაგრამ მარტო მექანიკური რხევებით არ ამოიწურება რხევითი მოძრაობის მრავალნაირობა. მთელი ოპტიკა და რადიოტექნიკა დამყარებულია რხევითი პროცესების განხილვაზე.

ძნელია დავასახელოთ ტექნიკის ისეთი დარგი, რომელშიც რხევითი მოძრაობები არ ასრულებდეს მნიშვნელოვან როლს. რხევითი პროცესების როლი იმდენად დიდია, რომ ხშირად მათ გამოყოფენ ცალკე დარგის სახით და განიხილავენ ერთად როგორც მექანიკურ, ისე სხვა სახის (ელექტრულ, ოპტიკურ) რხევებს. ყველა რხევითი პროცესის ერთობლივი განხილვა მიზანშეწონილია იმიტომ, რომ როგორი ბუნებისაც უნდა იყოს რხევადი სიდიდე, რხევას ახასიათებს ზოგადი თვისებები საერთო ყველა სახის რხევებისათვის.

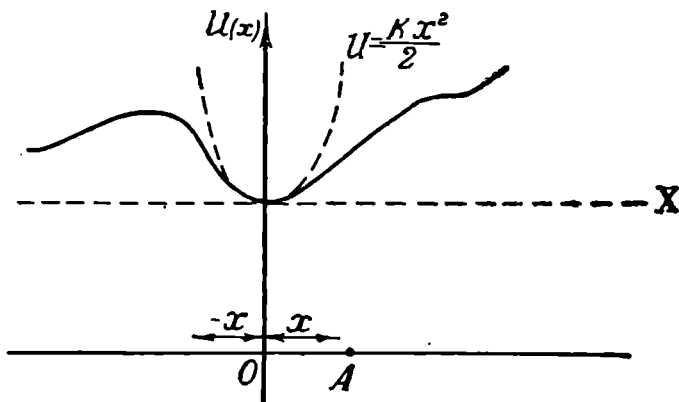
მეორე მიზეზი, რომლის გამოც რხევითი მოძრაობა მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფიზიკაში, ის არის, რომ თითქმის ყოველი სახის მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც მარტივ რხევით მოძრაობათა ჯამი. რხევითი მოძრაობის ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს დავიყვანოთ რთული სახის მოძრაობის განხილვა რხევითი მოძრაობის განხილვაზე და ამით გავამარტივოთ სათანადო მოვლენის გარჩევა.

მექანიკის კურსში განვიხილავთ მხოლოდ მექანიკურ რხევებს, გავარჩევთ მათ დამახასიათებელ თვისებებს, რთული სახის მექანიკური მო-

ძრავის დაშლას შემადგენელ მარტივ რჩევებზე და რჩევების შეკრებას. მიღებული შედეგები, გარდა დიდი თავისთავადი მნიშვნელობისა, შემდეგში გამოიყენება სხვა ბუნების რჩევების განხილვისას.

§ 80. წმინტის ჰარმონიული რჩევა, აპკლიტუდა, ფაზა და სიხშირე

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ნივთიერი წერტილი მოძრაობს სწორ ხაზზე, წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად. ნაწილაკს, რომელიც წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად ირჩევა, ეწოდება ოსცილატორი. ავირჩიოთ წონასწორობის წერტილი კოორდინატთა სათავედ და განვიხილოთ იმ მდებარეობიდან გადახრილი ნივთიერი წერტილის პოტენციალური ენერგია (ნახ. 171) თუ გადახრას წონასწორობის მდებარეობიდან x -ით აღვნიშნავთ, პოტენციალური ენერგია იქნება x -ის ფუნქცია. ვინაიდან O წერტილი ნაწილაკის მდგრადი წონასწორობის წერტილია, პოტენციალურ ენერ-



ნახ. 171

გიას ექნება მინიმუმი ამ წერტილში. ჩვენ დავუშვებთ, რომ ნაწილაკი მოძრაობს წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად და შემოვისაზღვრებით იმ შემთხვევით, როდესაც გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან საკმარისად მცირეა. მაშინ პოტენციალური ენერგია შეიძლება დავშალოთ მწკრივად O წერტილის მახლობლად და ამ დაშლაში შემოვისაზღვროთ პირველი სამი წევრით

$$U(x) = U(0) + U'(0) \cdot x + U''(0) \frac{x^2}{2} + \dots \quad (\text{XIII, 1})$$

(უმაღლესი რიგის წევრი x -ის მიმართ იქნება კვადრატული).

მივიღოთ ახლა მხედველობაში ის გარემოება, რომ $x=0$ წერტილში არის მდგრადი წონასწორობის მდებარეობა, ე. ი. ამ წერტილში პოტენციალური ენერგია მინიმალურია, მაშინ, როგორც უკვე ვიცით,

$$U'(0) = 0 \text{ და } U''(0) > 0.$$

აღვნიშნოთ მეორე წარმოებულის მნიშვნელობა O წერტილში k ასოთი

$$U''(0) = k > 0, \quad (\text{XIII, 2})$$

რის შემდეგ პოტენციალური ენერგიის ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$U(x) = U(0) + \frac{kx^2}{2}. \quad (\text{XIII, 3})$$

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებაში შემავალი მუდმივა (ადიტიური) ნებისმიერად შეიძლება შეიერჩეს, ვინაიდან მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელ მდებარეობაში ითვლება პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლად. დავუშვებთ, რომ პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლია წონასწორობის მდებარეობაში; ე. ი. რომ $U(0) = 0$. მაშინ პოტენციალური ენერგია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (\text{XIII, 4})$$

როგორც ვხედავთ, მცირე რხევის შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია გადახრის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია. მისი ასეთ მარტივ სახემდე დაყვანა გეომეტრიულად შემდეგს ნიშნავს. პოტენციალურ მრუდს აქვს მინიმუმი წონასწორობის მდებარეობაში. ცხადია, რომ მხები, გავლებული მინიმუმის წერტილში, OX ღერძის პარალელური იქნება, რაც გეომეტრიული გამოხატვაა იმ პირობისა, რომ $U'(0) = 0$. გარდა ამისა, მინიმუმის წერტილის მახლობლად მრუდი ამოზნექილია. OX ღერძის მიმართ, რაც გეომეტრიულად ეთანადება $U''(0) > 0$ პირობას. ჩვენ მიერ მიღებული დამატებითი პირობა, რომ $U(0) = 0$, გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ მრუდის მინიმუმის წერტილი კოორდინატთა სათავეშია მოთავსებული. ყოველივე ამის შემდეგ O წერტილის მახლობლობაში პოტენციალური მრუდის განტოლება იღებს (XIII, 4) სახეს. მაგრამ ჩვენთვის ცნობილია, რომ ეს განტოლება არის პარაბოლის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და სიმეტრიულად არის განლაგებული ორდინატთა ღერძის მიმართ (ნახ. 171). მაშასადამე, ის გარემოება, რომ პოტენციალური ენერგია წონა-

სწორობის მდებარეობის მახლობლად (XIII, 4) ფორმულით გამოისახება, გეომეტრიულად იმის მაჩვენებელია, რომ O წერტილის მახლობლად პოტენციალური მრუდი შეეცვალეთ პარაბოლით. რასაკვირველია, ასეთი შეცვლა მრუდისა უფრო მარტივი მრუდით შესაძლებელია იმიტომ, რომ O წერტილი არის მინიმუმის წერტილი და ჩვენ შემოვისახვრეთ მრუდის მცირე ნაწილით.

მას შემდეგ, რაც გამოთვლილია რხევადი ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია, ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ ძალა. ამისათვის საკმარისია გავაწარმოოთ $U(x)$ კოორდინატის მიმართ, მივიღებთ:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx. \quad (\text{XIII, 5})$$

როგორც ვხედავთ, რხევად ნაწილაკზე მოქმედი ძალა გადახრის პირდაპირპროპორციულია და მიმართულია ამ გადახრის საწინააღმდეგოდ, ე. ი. წონასწორობის მდებარეობისაკენ. ოსცილატორს, რომლის პოტენციალური ენერგია გადახრის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია, ეწოდება ჰარმონიული ოსცილატორი. ახლა უკვე ადვილია რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის დინამიკური განტოლების, ე. ი. ნიუტონის მეორე კანონის დაწერა

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (\text{XIII, 6})$$

შევცადოთ ამოვხსნათ იგი, ე. ი. მოვძებნოთ გადახრა როგორც დროის ფუნქცია. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (XIII, 6) განტოლებას შემდეგი ამონახსნი აქვს:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (\text{XIII, 7})$$

სადაც A_0 , ω_0 და φ_0 მუდმივი სიდიდეებია. გამოვარკვიოთ, რა მნიშვნელობები უნდა ჰქონდეს ამ სიდიდეებს, რომ დაკმაყოფილდეს (XIII, 6) განტოლება. (XIII, 7) განტოლების ორჯერ გაწარმოება მოგვცემს

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII, 8})$$

(XIII, 8), გამოსახულების ჩასმა (XIII, 6) ფორმულაში გვაძლევს

$$m A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -k A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

ხედავთ $A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ -ზე მოგვეცემს

$$m \omega_0^2 = k.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ (XIII, 7) გამოსახულება მხოლოდ იმ შემთხვევაში დააკმაყოფილებს მოძრაობის განტოლებას, თუ

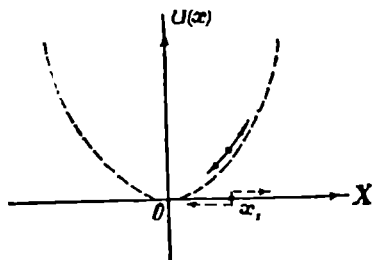
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (\text{XIII, 9})$$

A_0 და φ_0 მუდმივები არ განისაზღვრებიან მოძრაობის განტოლებიდან, ვინაიდან როგორი მნიშვნელობაც უნდა ჰქონდეთ მათ (XIII, 7), გამოსახულება ყოველთვის დააკმაყოფილებს (XIII, 6) განტოლებას. ამ სიდიდეების მოძებნა შესაძლებელი იქნება მხოლოდ საწყისი პირობების გამოყენებით. მაშასადამე, ჰარმონიული ოსცილატორის რხევა აიწერება შემდეგი განტოლებით:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

როგორც ეს ფორმულა გვიჩვენებს, ნაწილაკის მოძრაობა პერიოდულია, ვინაიდან სინუსი არის არგუმენტის პერიოდული ფუნქცია. ვიპოვოთ მოძრაობის ან რხევის პერიოდი, ე. ი. უმცირესი დრო, რომლის შემდეგ ნიწილაკი უბრუნდება წინანდელ მდგომარეობას. ამ განსაზღვრაში ყურადღება უნდა მიექცეს იმ გარემოებას, რომ ნაწილაკი საჭიროა დაუბრუნდეს წინანდელ მდგომარეობას და არა მდებარეობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკმა უნდა მიიღოს როგორც წინანდელი მდებარეობა, ისე სიჩქარე.

172-ე ნახაზზე ნაჩვენებია საწყისი მდგომარეობა (ნაწილაკი გადახრილია მარჯვნივ x_1 მანძილით და მისი სიჩქარე მიმართულია აგრეთვე მარჯვნივ, ე. ი. ნაწილაკი შორდება წონასწორობის მდებარეობას).



ნახ. 172

172-ე ნახაზზე ნაჩვენებია აგრეთვე მდგომარეობა, რომე-

ლიც მიიღება მას შემდეგ, რაც ნაწილაკმა მიაღწია უდიდეს გადახრას და უკან დაბრუნებისას ისევე გაიარა x_1 წერტილზე. ნაწილაკს იგივე მდებარეობა უკავია, რაც საწყის მომენტში, მაგრამ მდგომარეობა იგივე არ არის, ვინაიდან მისი სიჩქარე მიმართულია მარცხნივ, ე. ი.

ნაწილაკი უახლოვდება წონასწორობის მდებარეობას. იმისათვის, რომ მდგომარეობა ისეთივე იყოს, როგორც საწყის მომენტში, საჭიროა, ნაწილაკმა მიიღოს წინანდელი მდებარეობა და სიჩქარე, რისთვისაც \sin -ის არგუმენტი უნდა შეიცვალოს 2π -ს ჯერადით. ვინაიდან ჩვენ ვეძებთ უმცირეს დროს, რომლის შემდეგაც ნაწილაკი უბრუნდება საწყის მდგომარეობას, არგუმენტს ვცვლით 2π სიდიდით. აღვნიშნოთ რხევის პერიოდი T_0 ასოთი. მაშინ პირობის თანახმად მივიღებთ

$$\sin \{\omega_0(t+T_0) + \varphi_0\} = \sin (\omega_0 t + \varphi_0),$$

ე. ი.

$$\omega_0(t+T_0) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi,$$

საიდანაც პერიოდისათვის ვღებულობთ

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (\text{XIII, } 10)$$

T_0 -ის საშუალებით რხევის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x = A_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0 \right).$$

რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის პერიოდულობის დასახასიათებლად იხმარება აგრეთვე მეორე სიდიდე—სიხშირე, ეს სიდიდე გვიჩვენებს, თუ რამდენ სრულ რხევას ასრულებს ნაწილაკი დროის ერთეულის (ჩვეულებრივ, ერთი სექუნდის) განმავლობაში. სრული რხევა ეწოდება მოძრაობას ორ თანამომდევნო ერთნაირ მდგომარეობათა შორის. ვინაიდან ერთი სრული რხევა T_0 დროის განმავლობაში ხდება, რხევათა რიცხვისათვის დროის ერთეულში, ე. ი. სიხშირისათვის მივიღებთ

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (\text{XIII, } 11)$$

ახლა უკვე ადვილია ω_0 სიდიდის ფიზიკური მნიშვნელობის გამორკვევა, ვინაიდან

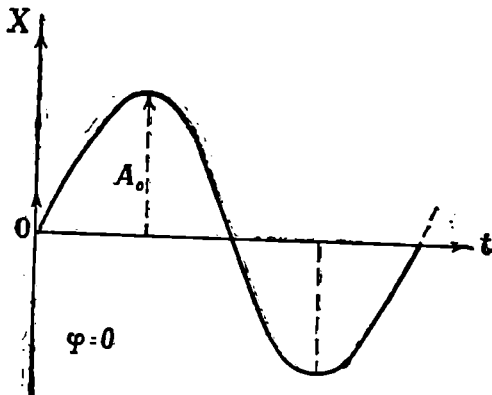
$$\omega_0 = 2\pi\nu_0. \quad (\text{XIII, } 12)$$

ω_0 ყოფილა რხევათა რიცხვი 2π სექუნდში. მას ეწოდება წრიული, ანუ კუთხური სიხშირე. გამოვარკვეით ახლა რა ფიზიკური აზრი აქვთ A_0 და φ_0 სიდიდეებს და როგორ არიან ისინი დაკავშირებული საწყის პირობებთან. ვინაიდან \sin -ის უდიდესი მნიშვნელობა ერთის ტოლია, გაღაზრის, ე. ი. x -ის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება A_0 . მაშასადამე, A_0

ყოფილა რხევადი ნაწილაკის უდიდესი გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან. მას ეწოდება რხევის ამპლიტუდა.

შევადგინოთ ცხრილი და გრაფიკი (ნახ. 173), რომლებიც ნათლად წარმოგვიდგენენ კავშირს დროსა და გადახრას შორის. მივიღოთ სიმარტივისათვის, რომ $\varphi_0 = 0$.

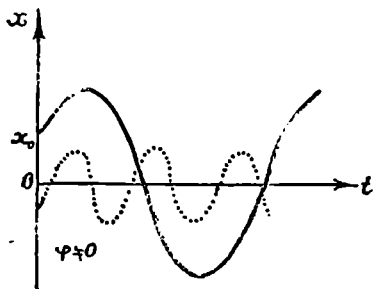
t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	0	A_0	0	$-A_0$	0



ნახ. 173

თუ თვალყურს ვადევნებთ ნაწილაკის მოძრაობას ერთი პერიოდის განმავლობაში (შემდეგ პერიოდებში მოძრაობა მეორდება), შემდეგ სურათს მივიღებთ ($\varphi_0 = 0$). საწყისი მომენტში ნაწილაკი წონასწორობის მდებარეობაში იმყოფება. საწყისი სიჩქარის გამო, იგი გადაიხრება დადებითი x -ისაკენ და პერიოდის მეოთხედის შემდეგ მიაღწევს უდიდეს გადახრას ($x = A_0$). ამის შემდეგ ნაწილაკი იცვლის მოძრაობის მიმართულებას, უახლოვდება წონასწორობის მდებარეობას და $\frac{T_0}{2}$ მომენტში, ე. ი. მოძრაობის დაწყებიდან ნახევარი პერიოდის შემდეგ, ისევ გაივლის ამ მდებარეობაზე, მხოლოდ მისი საჩქარე მიმართული იქნება საწინააღმდეგო მიმართულებით. შემდეგ წერტილი ისევ გადაიხრება წონასწორობიდან (უარყოფითი x -ების მხარეს) და $\frac{3}{2} T_0$ მომენტში მიაღწევს უდიდეს გადახრას მარცხნივ ($x_0 = -A_0$). ამის შემდეგ მოძრაო-

ბის მიპართულება ისევ შეიცვლება, წერტილი დიწყებს მიახლოებას წონასწორობის მდებარეობასთან და T_0 მომენტში, ე. ი. ერთი სრული



ნახ. 174

პერიოდის შემდეგ, ისევ გაივლის საწყის მდებარეობაზე. ამის შემდეგ მოძრაობა გამეორდება ისე, როგორც პირველ პერიოდში და ა. შ.

174-ე ნახაზზე გრაფიკულად წარმოდგენილია გადახრის ცვლილება დროის მიხედვით. აბსცისთა ღერძზე გადაზომილია დრო, ხოლო ორდინატთა ღერძზე — გადახრა. ახლა ადვილად შეიძლება

გამოვარკვიოთ φ_0 -ის მნიშვნელობა, თუ φ_0 ნული არ არის, მაშინ მოძრაობის განტოლებიდან

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

ცხადია, რომ საწყის მომენტში ნაწილაკი არ იმყოფება წონასწორობის მდებარეობაში, იგი გადახრილია ამ მდებარეობიდან შემდეგი მანძილით:

$$x_0 = A_0 \sin \varphi_0$$

როგორც ვხედავთ, φ_0 საზღვრავს რხევადი ნაწილაკის საწყის გადახრას ან საწყის მდებარეობას, ისე როგორც სიდიდე

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \quad (\text{XIII, } 13)$$

საზღვრავს გადახრას t მომენტში. \sin -ის არგუმენტს, ე. ი. (XIII, 13) სიდიდეს, ეწოდება რხევის ფაზა, ხოლო მის მნიშვნელობას საწყისი მომენტისათვის — საწყისი ფაზა. უნდა მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ნაწილაკის გადახრა არ საზღვრავს ცალსახად რხევის ფაზას, ვინაიდან მოცემულ გადახრას ეთანადება ფაზის უამრავი მნიშვნელობა, განსხვავებული ერთმანეთისაგან 2π -ს ჯერადი სიდიდით. ვთქვათ, რომელიღაც t მომენტში ფაზა არის φ . ცხადია, რომ ერთი პერიოდის გავლის შემდეგ ფაზას მოემატება 2π , მაგრამ ნაწილაკის გადახრა იგივე იქნება, რაც პირველ მომენტში, ამიტომაც ჩვენ არ განვასხვავებთ ფაზების მნიშვნელობებს, რომლებიც განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 2π სიდიდით და შემდეგში ჩავთვლით, რომ ამ შემთხვევაში ნაწილაკი ერთსა და იმავე ფაზაში იმყოფება; ეს იმას ნიშნავს, რომ ფაზის მნიშვნელობანი შეზღუდული იქნებიან პირობით

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

თუ ნაწილაკის ორი მდგომარეობის ფაზების სხვაობა არის $n\pi$ (სადაც n კენტი რიცხვია), ამბობენ, რომ ამ მდგომარეობებს საწინააღმდეგო ფაზები ეთანადება. ეს სახელწოდება იმასთან არის დაკავშირებული, რომ ასეთ შემთხვევაში სათანადო გადახრები ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული არიან. თუ ფაზების სხვაობა არის $2\pi n$, სადაც n მთელი რიცხვია, ამბობენ, რომ ფაზები ერთნაირია, ნახაზებზე მოყვანილია სხვადასხვა საწყისი ფაზის, ამპლიტუდისა და სიხშირის მქონე რბევების გრაფიკები.

გამოვარკვიოთ ახლა როგორ არიან ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა დაკავშირებული საწყის პირობებთან. როგორც ვიცით, საწყისი პირობები ჩვეულებრივ განისაზღვრებიან კოორდინატისა და სიჩქარის მნიშვნელობით საწყისი მომენტისათვის. დავუშვათ, რომ $t=0$ მომენტში კოორდინატი (გადახრა) იყო x_0 , ხოლო სიჩქარე v_0 , მაშინ ადვილად მივიღებთ

$$\begin{cases} x_0 = A_0 \sin \varphi_0, \\ v_0 = A_0 \omega_0 \cos \varphi_0; \end{cases} \quad \text{(XIII, 14)}$$

აქედან შეიძლება ვიპოვოთ ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა საწყისი გადახრისა და სიჩქარის საშუალებით

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \omega_0}{v_0} \quad \text{(XIII, 15)}$$

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}. \quad \text{(XIII, 16)}$$

განვიხილოთ მარტივი მაგალითები: თუ ნაწილაკი საწყის მომენტში წონასწორობის მდებარეობაში იყო ($x_0=0$) და მინიკებული ჰქონდა საწყისი სიჩქარე v_0 (ე. ი. ნაწილაკი მოყვანილი იყო რხევაში ბიძგისა), საწყისი ფაზისა და ამპლიტუდისათვის მივიღებთ

$$\varphi_0 = 0,$$

$$A_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

შეიძლება რხევა აღიძრას შემდეგნაირადაც. ნაწილაკს გადახრით x_0 მანძილით წონასწორობის მდებარეობიდან და არაფითარ ბიძგს არ მივცემთ ($v_0=0$): ამ შემთხვევაში მივიღებთ

$$\varphi_0 = \pi.$$

$$A_0 = x_0.$$

ასევე შეიძლება გაიჩნეს ყველა სხვა შემთხვევა.

ზოგ შემთხვევაში ხელსაყრელია რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლების წარმოდგენა ისეთი სახით, რომ ნათლად ჩანდეს მოძრაობის კავშირი საწყის პირობებთან; ამისათვის მოძრაობის განტოლებაში შემავალი სინუსი დაეშალოთ როგორც ორი კუთხის ჯამის სინუსი. მივიღებთ

$$x = A_0 \sin \omega_0 t \cdot \cos \varphi_0 + A_0 \cos \omega_0 t \sin \varphi_0.$$

მაგრამ (XIII, 14) განტოლებების თანახმად $A_0 \cos \varphi_0$ და $A_0 \sin \varphi_0$ შეიძლება გამოვსახოთ საწყისი კოორდინატისა და სიჩქარის საშუალებით

$$A_0 \sin \varphi_0 = x_0,$$

$$A_0 \cos \varphi_0 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

ჩსმა წინა განტოლებაში მოგვცემს

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (\text{XIII, 17})$$

რხევის განტოლების ამ სახის უპირატესობა ის არის, რომ იგი ნათლად გვიჩვენებს მოძრაობის ხასიათს სხვადასხვა საწყისი პირობის შემთხვევაში.

§ 81. ჰარმონიული ოსცილატორის სიჩქარე, აჩქარება და ენერგია

რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლების გაწარმოებით ადვილად ვიპოვიან მის სიჩქარესა და აჩქარებას, როგორც დროის ფუნქციებს. სიჩქარისათვის გვექნება

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0 \omega_0 \cos (\omega_0 t + \varphi_0), \quad (\text{XIII, 18})$$

ხოლო აჩქარებისათვის

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A_0 \omega_0^2 \sin (\omega_0 t + \varphi_0). \quad (\text{XIII, 19})$$

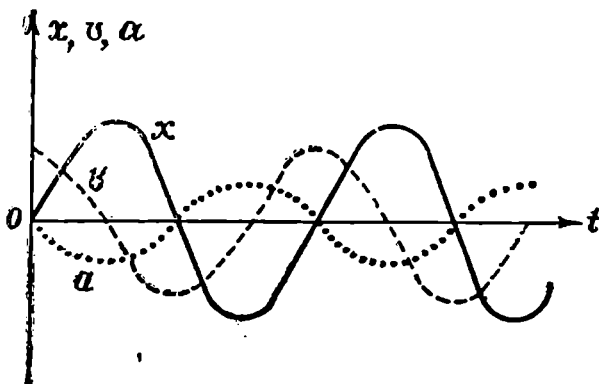
მიღებული ფორმულების ანალიზისათვის და x -ის ფორმულასთან შედარებისათვის ხელსაყრელი იქნება, თუ მათ გადავწერთ ისე, რომ ორივე ფორმულა შეიცავდეს \sin -ს და დადებით ამპლიტუდას; ამისათვის, სათანადოდ უნდა შევცვალოთ \cos -ისა და \sin -ის არგუმენტები, მივიღებთ:

$$v = A_0 \omega_0 \sin \left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{XIII, 18}') \quad (1)$$

$$a = A_0 \omega_0^2 \sin (\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \quad (\text{XIII, 19}') \quad (2)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ სიჩქარე და აჩქარება ისეთივე პერიოდული ფუნქციებია დროისა, როგორც გადახრა. განსხვავება არის მხოლოდ საწყის ფაზებში და \sin -ის წინ მდგომ კოეფიციენტებში. (XIII, 18') ფორმულა გვიჩვენებს, რომ სიჩქარის მაქსიმალური მნიშვნელობა, ე. ი. სიჩქარის ამპლიტუდა არის $A_0 \omega$, ხოლო მისი საწყისი ფაზა განსხვავდება გადახრის საწყისი ფაზისაგან $\frac{\pi}{2}$ სიდიდით. აჩქარების ამპლიტუდა

(უდიდესი მნიშვნელობა) არის $A_0 \omega^2$, ხოლო ფაზა π სიდიდით მეტია, ვიდრე გადახრის საწყისი ფაზა.



ნახ. 175

(175-ე) ნახაზზე მოყვანილია გადახრის, სიჩქარისა და აჩქარების გრაფიკები ($\varphi_0 = 0$) შემთხვევისათვის. როგორც ვხედავთ, სიჩქარე წინ უსწრებს გადახრას პერიოდის მეოთხედით, ხოლო აჩქარება—პერიოდის ნახევრით; მაგალითად, როდესაც გადახრა ნულია, ე. ი. წერტილი გადის წონასწორობის მდებარეობაზე, მაშინ სიჩქარე მაქსიმალურია, ხოლო უდიდესი გადახრის მდებარეობაში სიჩქარე ნულის ტოლია. აჩქარება იცვლება ისე როგორც გადახრა, მხოლოდ მიმართულება აქვს საწინააღმდეგო.

გამოვითვლოთ ახლა რხევადი ნაწილაკის კინეტიკური, პოტენციალური და სრული ენერგიები და გამოვარკვიოთ როგორ იცვლებიან ისინი რხევის დროს. კინეტიკური ენერგიისათვის გვექნება

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA_0^2 \omega^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

ხოლო პოტენციალური ენერჯისათვის

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

სრული ენერჯისათვის მივიღებთ

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} = \frac{k A_0^2}{2}. \quad (\text{XIII, 20})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯები დროის პერიოდული ფუნქციებია, მხოლოდ მათი პერიოდია რხევის პერიოდის ნახევარი $\frac{T_0}{2}$, ვინაიდან

$$\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \{ 1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) \},$$

$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $\varphi_0 = 0$, მაშინ საწყის მომენტში ($t=0$)

ნაწილაკს ექნება მხოლოდ კინეტიკური ენერჯია $E_k = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2}$ (ნაწი-

ლაკი უდიდესი სიჩქარით გადის წონასწორობის მდებარეობაზე). რაც უფრო შორდება ნაწილაკი O წერტილს, მით უფრო მცირდება კინეტიკური ენერჯია და მატულობს პოტენციალური ენერჯია. პერიოდის მეოთხედის შემდეგ (უდიდესი გადახრისას) კინეტიკური ენერჯია ნული გახდება, ხოლო პოტენციალური ენერჯია მიაღწევს მაქსიმუმს $E_k = 0$,

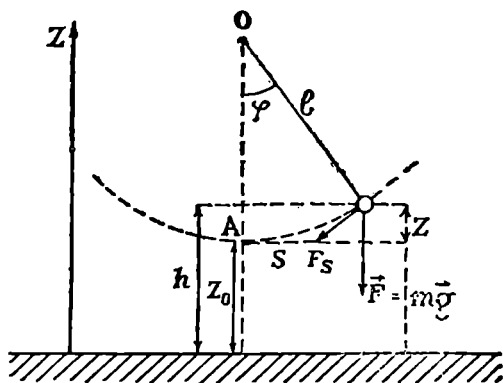
$U = \frac{kA_0^2}{2}$. ცხადია, რომ ეს მაქსიმალური პოტენციალური ენერჯია

საწყისა კინეტიკური ენერჯის ტოლი იქნება. პერიოდის მეორე მეოთხედში წარმართება შებრუნებული პროცესი. პოტენციალური ენერჯია შემცირდება და მის ხარჯზე გაიზრდება კინეტიკური ენერჯია. ვხედავთ, რომ რხევის დროს წარმოებს პოტენციალური და კინეტიკური ენერჯიების ერთმანეთში გადასვლა, რასაკვირველია, იმ შეზღუდვით, რომ სრული ენერჯია მუდმივი რჩება.

§ 82. მათემატიკური საძიებო

როგორც მაგალითი რხევითი მოძრაობისა, განვიხილოთ ე. წ. მათემატიკური საქანი. ვთქვათ, m მასის სხეული დაკიდებულია ძაფის ან წვრილი ღეროს საშუალებით, რომელიც დამაგრებულია O წერტილში (ნახ. 176). ავარჩიოთ იმდენად მცირე ზომის სხეული, რომ შეიძლე-

ბოლეს მისი ნივთიერ წერტილად ჩათვლა. გარდა ამისა, მივიღოთ, რომ ძაფის ან ღეროს გაკვიმვა, ან დეფორმაცია არ ხდება და მათი მასა იმდენად მცირეა, რომ იგი შეიძლება უგულებელვყოთ. ამ პირობებში m მასის ნივთიერ წერტილს, რომელსაც შეუძლია რხევა ვერტიკალური წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად, ეწოდება მათემატიკური საქანი.



ნ.ბ. 176

გადავხაროთ საქანი წონასწორობის მდებარეობიდან φ კუთხით და გავუშვათ ხელი. ცხადია, რომ სიმძიმის ძალის გავლენით იგი დაიწყებს რხევას O წერტილის მახლობლად; ამ რხევის ხასიათის დასადგენად გამოვითვლოთ მისი პოტენციალური ენერგია გადახრილ მდგომარეობაში. ვინაიდან h სიმაღლეზე მყოფი სხეულის პოტენციალური ენერგია არის mgh , φ კუთხით გადახრილი საქანის პოტენციალური ენერგია იქნება

$$U = mg(z_0 + z) = U_0 + mgz,$$

სადაც $U_0 = mgz_0$ არის პოტენციალური ენერგია წონასწორობის მდებარეობაში, ხოლო z — აწევის სიმაღლე. ნახაზიდან ადვილად ვიპოვიოთ, რომ

$$z = l(1 - \cos \varphi),$$

სადაც l არის საქანის სიგრძე. თუ შემოვიღებთ რკალის s სიგრძეს, ეს ფორმულა შევღებავთ სახეს მიიღებს:

$$z = l \left(1 - \cos \frac{s}{l} \right);$$

აქედან პოტენციალური ენერჯისათვის გვექნება

$$U = U_0 + mgl \left(1 - \cos \frac{s}{l} \right).$$

შემოვისაზღვრეთ მცირე რხევებით, ე. ი. დავუშვათ, რომ s გადახრა ძალიან მცირეა საქანის l სიგრძესთან შედარებით $\left(\frac{s}{l} \ll 1 \right)$. \cos -ის დაშლა მწკრივად მოგვცემს

$$U = U_0 + \frac{mgl}{2} \frac{s^2}{l^2} + \dots \approx U_0 + \frac{mg}{2l} s^2 \quad (\text{XIII, 21})$$

(ჩვენ შემოვისაზღვრეთ კვადრატული წვერით); აქედან ძალისათვის მივიღებთ:

$$F_s = - \frac{\partial U}{\partial s} = - m \frac{g}{l} s.$$

მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - m \frac{g}{l} s. \quad (\text{XIII, 22})$$

გხედავთ, რომ საკმაოდ მცირე რხევებისათვის პოტენციალური ენერჯია პროპორციულია გადახრის კვადრატისა, ხოლო ძალა პროპორციულია გადახრისა და მიმართულია მის საწინააღმდეგოდ. უნდა გვახსოვდეს, რომ F_s არის ძალის გეგმილი რკალის გასწვრივ და არა მთელი ძალა, რომელიც მოქმედებს m მასის ნაწილაკზე. ვერტიკალურად ქვევით მიმართული ეს საერთო ძალა — mg შეიძლება დაიშალოს ორ მდგენელად. ერთი მათგანი — F_s მიმართულია რკალის გასწვრივ და იწვევს მოძრაობას, მეორე კი, მიმართულია ძაფის გასწვრივ, ისპობა მისი რეაქციით.

მიღებული ფორმულების შედარება წრფივი რხევითი მოძრაობის ფორმულებთან გვიჩვენებს მათ სრულ მსგავსებას; განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ x -ის მაგიერ დგას რკალის სიგრძე s და k კოეფიციენტის მაგიერ — გამოსახულება $m \frac{g}{l}$. ამიტომაც შეიძლება გამოვიყენოთ წი-

ნათ მიღებული შედეგები. მოძრაობის განტოლება იქნება

$$s = s_0 \sin (\omega_0 t + \varphi_0), \quad k = m \omega_0^2 = m \frac{g}{l},$$

ხოლო სიხშირისათვის მივიღებთ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad (\text{XIII, 23})$$

აქედან რხევის პერიოდისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (\text{XIII, 24})$$

ვხედავთ, რომ მცირე რხევების შემთხვევაში საქანი ასრულებს სინუსოიდურ რხევას, რომლის პერიოდი არ არის დამოკიდებული საქანის მასასა და ამპლიტუდაზე. დამოუკიდებლობა მასისაგან საქანის საერთო ჯიშისაა (m შეიძლება შეიკვეცოს (XIII, 22) განტოლებაში), ხოლო დამოუკიდებლობა ამპლიტუდისაგან მართებულია მხოლოდ მცირე რხევებისათვის. თუ რხევის ამპლიტუდა იმდენად დიდია, რომ აღარ შეიძლება შემოვისაზღვროთ კვადრატული წვერით პოტენციალური ენერჯიის გამოსახულებაში, პერიოდი დამოკიდებული იქნება ამპლიტუდაზე. მათემატიკური საქანის მცირე რხევების პერიოდის დამოუკიდებლობას ამპლიტუდისაგან ეწოდება რხევის იზოქრონიზმი. იგი პირველად შემჩნეული იყო გალილეის მიერ ტაძარში ჩამოკიდებული ჭალის რხევაზე დაკვირვების დროს.

საქანის რხევის განტოლების ამოხსნა სასრული (არამცირე) რხევის შემთხვევაში საკმარისად რთული ამოცანაა. მოვიყვანთ მიახლოებით ფორმულას იმ შემთხვევისათვის, როდესაც პოტენციალური ენერჯიის გამოსახულებაში შენარჩუნებულია მესამე ხარისხის წევრი. პერიოდისათვის ფორმულა ასეთია:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \right). \quad (\text{XIII, 25})$$

სადაც α_0 არის კუთხური ამპლიტუდა, ე. ი. უდიდესი გადახრის სათანადო კუთხე; აქედან ადვილად ვიპოვიან, რომ შემასწორებელი წევრი $\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}$ აღწევს ერთ მეათასედს, როდესაც კუთხური ამპლიტუდა დაახლოებით 7° -ია. მისაღებია თუ არა მხედველობაში ეს შესწორება. დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორი სიზუსტით ვითვლით პერიოდს.

§ 83. მილნვალი რხევა. ლოგარითმული დეკრემენტი

ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ყოველ მექანიკურ მოძრაობას თან სდევს დისიპაციური პროცესი (ხახუნი), რომელიც იწვევს მექანიკური ენერჯიის გარდაქმნას სითბურ ენერჯიად. წონასწორობის მახლობლად რხევის შემთხვევაშიც აუცილებლად იქნება გარემოს წინააღმდეგობით, დეფორმაციით და სხვა მიზეზებით გამოწვეული ხახუნი.

დავუშვათ, რომ ხახუნის ძალა პირდაპირპროპორციულია სიჩქარისა და მიმართულია მის საწინააღმდეგოდ, მაშინ რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება შემდეგი სახით დაიწერება:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}. \quad (\text{XIII, 26})$$

გავყოთ ეს განტოლება m -ზე და შემოვიღოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\gamma}{2m} = \delta, \quad (\text{XIII, 27})$$

სადაც ω_0 არის რხევის სიხშირე ხახუნის არარსებობის შემთხვევაში. δ სიდიდეს ეწოდება მილევის კოეფიციენტი. (XIII, 26) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

ენახოთ ახლა, ხომ არ შეიძლება ისეთი გარდაქმნის მოხდენა, რომ გარდაქმნილ განტოლებაში არ შევიდეს პირველი წარმოებულნი. მოვახდინოთ ამისათვის შემდეგი ჩასმა:

$$x = ye^{\lambda t},$$

სადაც y ახალი ცვლადია, ხოლო λ მუდმივი სიდიდეა. გაწარმოება მოგვცემს

$$\frac{dx}{dt} = e^{\lambda t} \frac{dy}{dt} + \lambda e^{\lambda t} y; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = e^{\lambda t} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda e^{\lambda t} \frac{dy}{dt} + \lambda^2 e^{\lambda t} y.$$

მოძრაობის განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ

$$\left\{ \frac{d^2y}{dt^2} + 2(\lambda + \delta) \frac{dy}{dt} + (\lambda^2 + 2\lambda\delta + \omega_0^2) y \right\} e^{\lambda t} = 0.$$

ეს განტოლება შეიძლება შევკვეცოთ $e^{\lambda t}$ სიდიდეზე, რომელიც არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. გარდა ამისა, ვინაიდან λ ნებისმიერი სიდიდეა, ყოველთვის შეიძლება მისი ისე შერჩევა, რომ პირველი წარმოებულის წინ მდგომი კოეფიციენტი გახდეს ნულის ტოლი; ამისათვის საჭიროა დავუშვათ, რომ

$$\lambda = -\delta. \quad (\text{XIII, 27}')$$

მაშინ y -ისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega_0^2 - \delta^2) y = 0. \quad (\text{XIII, 28})$$

ამ განტოლებას ისეთივე სახე აქვს, როგორც განტოლებას მარტივი რხევისათვის ხახუნის გარეშე. ერთადერთი განსხვავება ისაა, რომ ω_0^2 -ის მაგიერ დგას $\omega_0^2 - \delta^2$ სიდიდე. აქ შესაძლებელია სამი სხვადასხვა შემთხვევა. შეიძლება ω_0 იყოს მეტი, ვიდრე δ . მაშინ $\omega_0^2 - \delta^2$ დადებითი იქნება და ამიტომაც (XIII, 28) განტოლების ამოხსნა შეიძლება ისევე, როგორც მოძრაობის განტოლებისა ხახუნის გარეშე. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამონახსნს ექნება ისეთივე სახე, როგორც ამონახსნს რხევისათვის ხახუნის გარეშე, მხოლოდ ω სიხშირისათვის გვექნება შემდეგი გამო-

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (\text{XIII, 29})$$

მაშასადამე, y -ისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$y = A_0 \sin(\omega t + \varphi), \text{ სადაც } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

ჩასმა (XIII, 28) განტოლებაში და λ სიდიდის მნიშვნელობის გამოყენება გვაძლევს

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi). \quad (\text{XIII, 30})$$

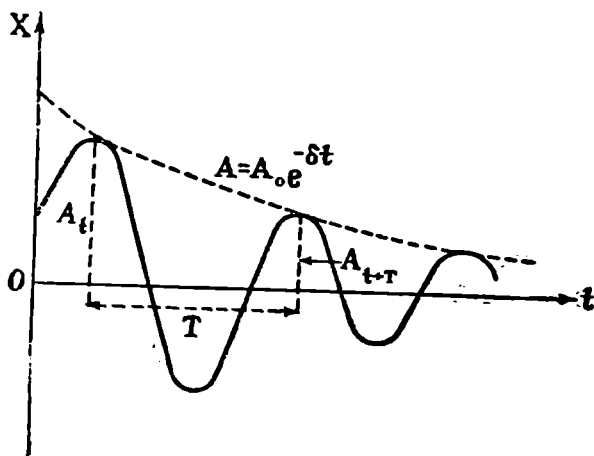
ასეთია რხევის განტოლება ხახუნის არსებობის შემთხვევაში. ზუსტად რომ ვთქვათ, ეს მოძრაობა არ არის პერიოდული, ვინაიდან x -ის მნიშვნელობა არასოდეს არ მეორდება. პერიოდულია მხოლოდ მეორე მამრავლი და მისი განმეორების პერიოდი იქნება

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (\text{XIII, 31})$$

(XIII, 30) ფორმულით გამოხატული მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც მარტივი რხევა, რომლის ამპლიტუდა არის $A_0 e^{-\delta t}$, ხოლო სიხშირე არის ω . რხევის ამპლიტუდა კლებულობს ექსპონენციალურად დროის ზრდასთან ერთად. x -ის მაქსიმალური მნიშვნელობები მიიღება $\sin(\omega t + \varphi) = 1$ პირობიდან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი მეორდებიან T დროის შემდეგ და ამიტომ T შეიძლება განვიხილოთ როგორც რხევის პერიოდი (ნახ. 177).

რხევას, რომელიც (XIII, 30) ფორმულით აიწერება, მიღწევადი რხევა ეწოდება. მისთვის დამახასიათებელია ამპლიტუდის ექსპონენციალური შემცირება დროის განმავლობაში, გამოწვეული ხახუნის არსებობით. ხახუნი იწვევს არა მარტო ამპლიტუდის თანდათანობით შემცირებას, არამედ სიხშირის (პერიოდის) შეცვლასაც. როგორც (XIII, 31) ფორმულა გვიჩვენებს, ხახუნი ამცირებს რხევის სიხშირეს, ე. ი. ადიდებს პერიოდს. ეს თავისთავად გასაგებია, ვინაიდან წინააღმდეგობა ამცირებს მოძრაობის სიჩქარეს. გამოვარკვეოთ δ მიღწევის

კოეფიციენტის აზრი. ამპლიტუდის ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ A_0 არის ამპლიტულა დროის საწყისი მომენტიში. ვთქვათ, დროს მივეცი $\frac{1}{\delta}$ მნიშვნელობა, ე. ი. დავუშვათ, რომ საწყისი მომენტიდან



ნახ. 177

გავიდა $\frac{1}{\delta}$ დრო. მაშინ ამპლიტულა იქნება

$$A_{\frac{1}{\delta}} = A_0 e^{-1},$$

ე. ი.

$$\frac{A_{\frac{1}{\delta}}}{A_0} = e^{-1}. \quad (\text{XIII, 32})$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\frac{1}{\delta}$ დროის განმავლობაში რხევის ამპლიტულა

e -ჯერ კლებულობს. მაშასადამე, δ არის იმ დროის შებრუნებული სიდიდე, რომლის განმავლობაში რხევის ამპლიტულა e -ჯერ კლებულობს. აღვნიშნოთ ეს დრო τ ასოთი:

$$\tau = \frac{1}{\delta}.$$

განვიხილოთ ჭეტი მნიშვნელოვანი სიდიდე, რომელსაც ხშირად იყენებენ რხევის მილვეადობის დასახასიათებლად. ვთქვათ, t მომენტში ამპლიტუდა არის A_t . ერთი პერიოდის გავლის შემდეგ

$$A_{t+T} = A_0 e^{-\delta(t+T)}.$$

გამოვითვალოთ რამდენჯერ შემცირდება ამპლიტუდა ერთი პერიოდის განმავლობაში, მივიღებთ

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = e^{\delta T}.$$

ავილოთ ამ გამოსახულების ნატურალური ლოგარითმი და აღვნიშნოთ იგი d ასოთი

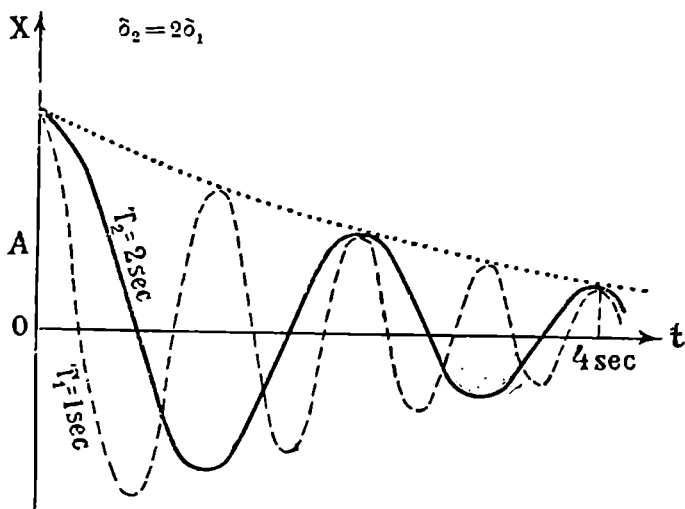
$$d = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \delta T. \quad (\text{XIII, 33})$$

d სიდიდეს ეწოდება ლოგარითმული დეკრემენტი. იგი განისაზღვრება როგორც ამპლიტუდის თანამიმდევრულ მაქსიმალურ მნიშვნელობათა შეფარდების ნატურალური ლოგარითმი. მისი აზრის გამოსარკვევად აღვნიშნოთ N -ით რხევათა რიცხვი, რომლის შემდეგ ამპლიტუდა e -ჯერ კლებულობს. მაგრამ δ სიდიდის განსაზღვრის თანხმად e -ჯერ ამპლიტუდა კლებულობს $\frac{1}{e}$ დროის განმავლობაში, ამიტომაც გვექნება

$$N = \frac{1}{\delta T} = \frac{1}{d}; \quad (\text{XIII, 34})$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ d არის რხევათა იმ რიცხვის შებრუნებული სიდიდე, რომლის შემდეგ ამპლიტუდა კლებულობს e -ჯერ. როგორც δ , ისე d ახასიათებს რხევის მილვეადობას. ორივე უპასუხებს კითხვაზე, თუ რამდენად სწრაფად ხდება რხევის მილვეა. მაგრამ, ცხადია, რომ მილვეადობის უფრო ბუნებრივი მახასიათებელი ლოგარითმული დეკრემენტი. მართლაც, ვთქვათ, ორ ოსცილატორს, რომელთა რხევის პერიოდებია T_1 და T_2 , აქვთ ერთი და იგივე მილვეის კოეფიციენტი, ე. ი. ერთი და იგივე მილვეის τ დრო. ორივე ოსცილატორი τ დროის განმავლობაში ამცირებს ამპლიტუდას e -ჯერ და პირველი შეხედვით ისეთი შთაბეჭდილებაა, რომ ორივე ოსცილატორის მილვეადობა ერთნაირია. მაგრამ, ვინაიდან რხევის პერიოდები სხვადასხვაა, τ დროის განმავლობაში ამ ოსცილატორების მიერ სხვადასხვა რხევათა რაოდენობა იქნება შესრულებ-

ბული. სახელობრ. პირველი ოსცილატორი შეასრულებს $\frac{\tau}{T_1}$ რხევას, მეორე კი — $\frac{\tau}{T_2}$. ვთქვათ, მაგალითად, $\tau = 4 \text{ sec}$, $T_1 = 1 \text{ sec}$ და $T_2 = 2 \text{ sec}$. მაშასადამე, სანამ ამპლიტუდა e -ჯერ შემცირდება, პირველი



ნახ. 178

ოსცილატორი 4 რხევას შეასრულებს, მეორე კი მხოლოდ 2 რხევას; აქედან სავსებით ბუნებრივად გამომდინარეობს, რომ მეორე რხევა უფრო სწრაფად მიიღევა, ვიდრე პირველი, რაც თავის გამოხატულებას იმაში პოულობს, რომ ლოგარითმული დეკრემენტი მეორე ოსცილატორს ორჯერ მეტი აქვს, ვიდრე პირველს (ნახ. 178).

§ 84. აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობა

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ იმდენად მცირე ხახუნის შემთხვევა ($\delta^2 < \omega_0^2$), რომ მიუხედავად მიღვევადობისა, მოძრაობა ინარჩუნებდა პერიოდულ ხასიათს. გავარჩიოთ ახლა შემთხვევა იმდენად დიდი ხახუნისა, როცა მოძრაობა სრულიად კარგავს პერიოდულობის ნიშნებს. დავეუშვათ, რომ ხახუნის ძალა იმდენად დიდია, რომ $\delta^2 = \omega_0^2$. მაშინ (XIII, 28) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

და მისი ამონახსნი იქნება

$$y = A_0 + B_0 t,$$

სადაც A_0 და B_0 მუდმივები განსაზღვრული უნდა იქნენ საწყისი პირობებიდან; აქედან x -ისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$x = (A_0 + B_0 t) e^{-\beta t}. \quad (\text{XIII, 35})$$

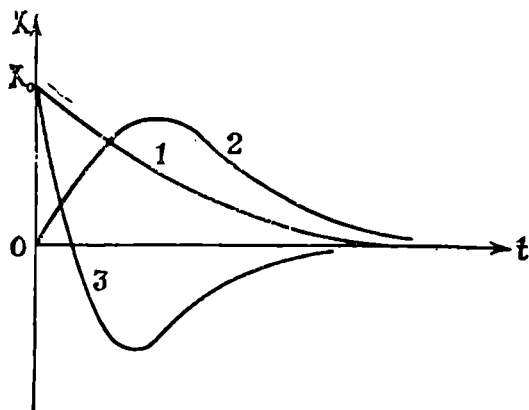
ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ განსახილველ შემთხვევაში მოძრაობა აღარ არის პერიოდული. ამიტომაც მას აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობა ეწოდება. მისი ხასიათის თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად ავიღოთ შემდეგი საწყისი პირობები: $t=0$, $x=x_0$, $v=0$; ამ პირობების გამოყენებით მივიღებთ

$$A_0 = x_0,$$

$$B_0 = x_0 \beta;$$

აქედან x -ისათვის მივიღებთ

$$x = x_0 (1 + \beta t) e^{-\beta t}. \quad (\text{XIII, 36})$$



ნახ. 179

ამ მოძრაობის გრაფიკი წარმოდგენილია 179-ე ნახაზზე (1). საწყისი მდებარეობიდან x_0 მანძილით გადახრილი ნაწილაკი ასიმპტოტურად უახლოვდება ამ მდებარეობას (ექსპონენციალური კანონის თანახმად) და არავითარი გადახრა საწინააღმდეგო მიმართულებით არ ხდება. თუ

ნაწილაკი ბიძგით არის გამოყვანილი წონასწორობის მდებარეობიდან (საწყისი პირობები: $x_0 = 0$ $v_0 \neq 0$), მივიღებთ

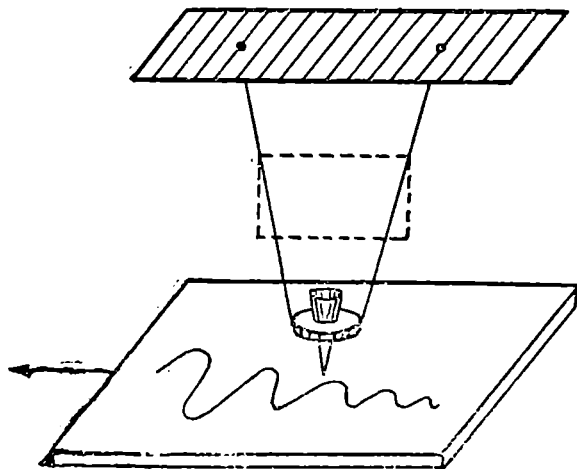
$$x = v_0 t e^{-\beta t}. \quad (\text{XIII, 37})$$

ამ მოძრაობის გრაფიკი იმავე ნახაზზეა ნაჩვენები (2). ნაწილაკი ჯერ შორდება წონასწორობის მდებარეობას. აღწევს უდიდეს გადახრას და შემდეგ, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, ასიმპტოტურად უახლოვდება საწყის მდებარეობას. იმავე ნახაზზე ნაჩვენებია მოძრაობის გრაფიკი იმ შემთხვევაში, როდესაც საწყის მომენტში ნაწილაკი გადახრილია x_0 მანძილით და მას მინიჭებული აქვს წონასწორობის მდებარეობისაკენ მიმართული საწყისი სიჩქარე. ამ შემთხვევაში ნაწილაკი გადასცდება წონასწორობის მდებარეობას, მიღწევს უდიდეს გადახრას და შემდეგ იწყებს ასიმპტოტურ მიახლოებას საწყისი მდებარეობისაკენ (3); ასევე შეიძლება განხილულ იქნეს მესამე შემთხვევა, როდესაც $\delta^2 > \omega_0^2$. ამოხსნას ამ შემთხვევაში შემდეგი სახე ექნება:

$$x = (A_0 e^{at} + B_0 e^{-at}) e^{-\beta t}, \quad (\text{XIII, 38})$$

სადაც

$$a = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{XIII, 39})$$



ნახ. 180

აქაც ჩვენ ვღებულობთ აპერიოდულ მიღვევად მოძრაობას, რომლის კონკრეტული სახე დამოკიდებულია საწყის პირობებზე. 180-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მარტივი ხელსაწყო, რომლის საშუალებითაც შეიძლება მი-

ლევადი რხევის ხასიათის გამოკვევა. რხევად ნაწილაკად განიხილება საქანი, რომელიც წარმოადგენს ორ ძაფზე ჩამოკიდებულ დისკოს. დისკოზე დამაგრებულია ძაბრა, რომელშიც ჩაყრილია ქვიშა. საქანის რხევის დროს ქვიშა იყრება ძაბრიდან და ტოვებს კვალს ჰორიზონტალურად მოძრავ დაფაზე. ჰაერის ხახუნის გასაძლიერებლად ძაფებზე დამაგრებულია თხელი ფირფიტა. ფირფიტის ზომის ცვლით შეგვიძლია ადვილად განვხორციელოთ მიღვევალი მოძრაობის სხვადასხვა შემთხვევა.

§ 85. ჰარმონიული გარეშე ძალით გამოწვეული
იძულებითი რხევა. რხევა. რხევა

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ოსცილატორის ისეთი რხევა, როდესაც ოსცილატორზე, გარდა შიდა ძალისა და ხახუნის ძალისა, მოქმედებს კიდევ გარეშე პერიოდული ძალა. ასეთი, როგორც ამბობენ, იძულებითი რხევები ძალიან ხშირად გვხვდება ბუნებასა და ტექნიკაში და მათი როლი ძალიან დიდია არა მარტო მექანიკურ რხევებში, არამედ აკუსტიკაში, ოპტიკაში, ელექტრობასა და ფიზიკის სხვა დარგებში.

განვიხილოთ ჯერ მარტივი შემთხვევა, როდესაც გარეშე ძალა არის ჰარმონიული, ე. ი. გამოისახება ფორმულით

$$F = F_0 \sin \omega t, \quad (\text{XIII, } 40)$$

სადაც F_0 არის მისი ამპლიტუდა, ხოლო ω —რხევის სიხშირე. ოსცილატორის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t.$$

m -ზე გაყოფით და წინა პარაგრაფის აღნიშვნების შემოღებით მივიღებთ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (\text{XIII, } 41)$$

გამოვარკვეით ახლა, ხომ არ შეიძლება დაეკმაყოფილოთ ეს განტოლება ისეთი რხევით, რომლის სიხშირე ისეთივეა, როგორც მაიძულებელი ძალის სიხშირე. დავწეროთ x შემდეგი სახით:

$$x = B \sin(\omega t + \psi) \quad (\text{XIII, } 42)$$

და მოვძებნოთ B და ψ მუდმივების ისეთი მნიშვნელობები, რომ (XIII, 42) აკმაყოფილებდეს (XIII, 41) განტოლებას. ჩასვა (XIII, 41) განტოლებაში მოგვეცემს

$$B \{-\omega^2 \sin(\omega t + \psi) + 2\delta \omega \cos(\omega t + \psi) + \omega_0^2 \sin(\omega t + \psi)\} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

ეს განტოლება მართებული უნდა იყოს ღრვის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. მარტივი განტოლებების მისაღებად შევარჩიოთ t -სათვის შემდეგი მნიშვნელობები:

1. $\omega t + \psi = 0$; ამ შემთხვევაში მივიღებთ

$$2 B \delta \omega = - \frac{F_0}{m} \sin \psi.$$

2. $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$; ეს პირობა მოგვცემს

$$B (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F}{m} \cos \psi.$$

ამ ორი განტოლების კვადრატში აყვანით და შეკრებით B სიდიდისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$B = \frac{F_0}{m \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad (\text{XIII, 43})$$

ხოლო პირველი განტოლების მეორეზე გაყოფით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას ψ -სათვის:

$$\text{tg } \psi = - \frac{2 \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (\text{XIII, 44})$$

ასეთი მნიშვნელობები უნდა ჰქონდეთ B და ψ სიდიდეებს იმისათვის, რომ (XIII, 42) იყოს (XIII, 41) მოძრაობის განტოლების ამონახსნი.

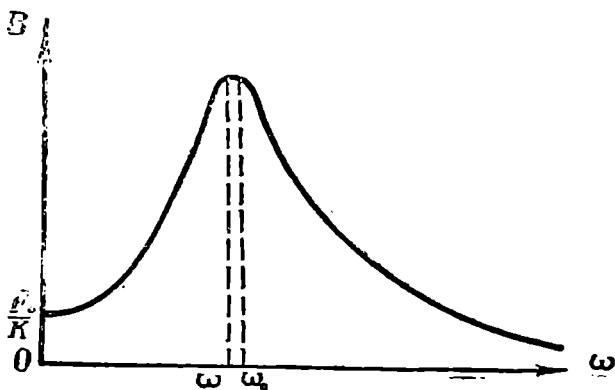
რხევას, გამოსატულს (XIII, 42) ფორმულით და დახასიათებულს იმით, რომ მისი სინშირე ისეთივეა როგორც მაიძულებელი ძალის სინშირე, ეწოდება იძულებითი რხევა. (XIII, 43) და (XIII, 44) ფორმულები გამოსახავენ იძულებითი რხევის ამპლიტუდას და საწყის ფაზას, როგორც მაიძულებელი ძალის სინშირის ფუნქციას. განვიხილოთ ჯერ იძულებითი რხევის ამპლიტუდის დამოკიდებულება სინშირეზე (ნახ. 181). როგორც (XIII, 43) ფორმულა და სათანადო გრაფიკი გვიჩვენებენ, სინშირის ზრდასთან ერთად ამპლიტუდა იზრდება: დაწყებული $\omega=0$ სათანადო ზღვრული მნიშვნელობიდან

$$B_0 = \frac{F_0}{m \omega_0^2} = \frac{F_0}{k},$$

აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას სინშირის გარკვეული მნიშვნელობისათვის, რის შემდეგ მცირდება და მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $\omega \rightarrow \infty$. გამოვარკვიოთ, თუ რა სინშირისათვის ხდება ამპლიტუდა

მაქსიმალური. ცხადია, რომ ამისათვის მინიმალური უნდა იყოს ფესვ-
ქვეშა გამოსახულება. მისი მინიმალური მნიშვნელობის მოსაძებნად გარ-
დავქმნათ იგი შემდეგნაირად:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 = (\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2))^2 + 4\delta^2 (\omega_0^2 - \delta^2).$$



ნახ. 181

მაიძულებელი ძალის სიხშირეზე დამოკიდებულია მხოლოდ პირველი
წევრი. ვინაიდან $\omega_0^2 > \delta^2$ (განიხილება იმდენად სუსტი ხახუნნი, რომ
მოძრაობას ჰქონდეს რხევითი ხასიათი), მთელი გამოსახულება მაშინ
იქნება მინიმალური, როდესაც ნულის ტოლი იქნება პირველი წევრი.
ეს გვაძლევს შემდეგ მნიშვნელობას მაქსიმალური ამპლიტუდის სათა-
ნადო სიხშირისათვის, რომელსაც აღვნიშნავთ ω_r -ით:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (\text{XIII, 45})$$

სიხშირის ამ მნიშვნელობას ეწოდება რეზონანსული სიხშირე,
ხოლო თვით მოვლენას, როდესაც იძულებითი რხევის ამპლიტუდა მაქ-
სიმალურ მნიშვნელობას აღწევს მაიძულებელი ძალის სიხშირის გარკ-
ვეული მნიშვნელობისათვის—რეზონანსი.

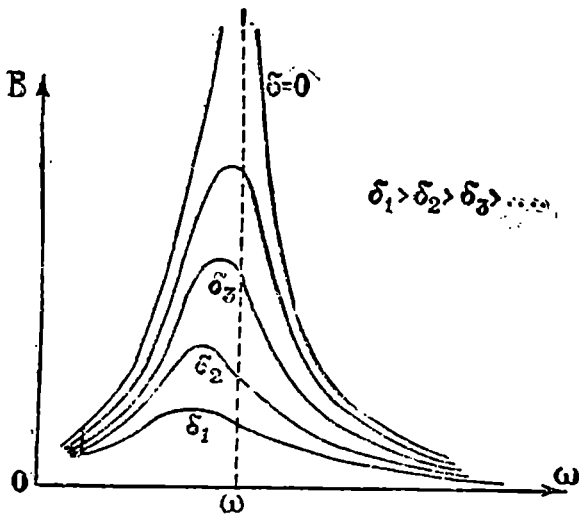
(XIII, 45) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ რეზონანსული სიხშირე არ
თანხვედება არც პარმონიული ოსცილატორის საკუთარ სიხშირეს (ω_0)
და არც მიღვეადი ოსცილატორის სიხშირეს ($\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$). იგი ორივეზე
ნაკლებია. ცხადია, რომ ხახუნის არარსებობის შემთხვევაში $\delta = 0$, რე-
ზონანსული სიხშირე ოსცილატორის საკუთარი სიხშირის ტოლი იქნება
და ამპლიტუდის ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$B = \frac{F_0}{m |\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (\text{XIII, 46})$$

(აღებულა აპლიკატორი მნიშვნელობა, ვინაიდან ამპლიტუდა ყოველ-
თვის დადებითი უნდა იყოს); ეს უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს,
რომ ხახუნის არარსებობის შემთხვევაში იძულებითი რხევის ამპლიტუ-
და უსასრულოდ დიდი ხდება. როდესაც მაიძულებელი ძალის სიხშირე
უახლოვდება საკუთარ სიხშირეს, ე. ი. რეზონანსის დროს

$$B \rightarrow \infty, \text{ როცა } \omega \rightarrow \omega_0$$

სინამდვილეში ამპლიტუდის ასეთი უსასრულო გაზრდა არასოდეს არ
ვკენება, ჯერ ერთი იმიტომ, რომ როგორი მცირეც უნდა იყოს ხახუნი,
იგი ყოველთვის იქნება, და მეორეც იმიტომ, რომ ამპლიტუდის საკმა-
რისად გაზრდის შემდეგ აღარ გამოიყენება ჩვენ მიერ დაშვებული მიახ-
ლოება. რომ რხევა მცირე უნდა იყოს. 182-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ამ-



ნახ. 182

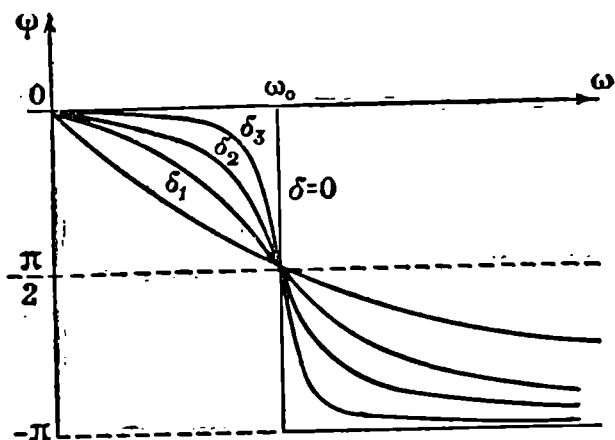
პლიტუდის დამოკიდებულების გრაფიკი სიხშირეზე მიღების კოეფი-
ციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. თვით ამპლიტუდის მაქსიმა-
ლური მნიშვნელობისათვის ადვილად მივიღებთ ფორმულას:

$$B_{max} = \frac{F_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (\text{XIII. 47})$$

პრაქტულ შემთხვევაში, ხახუნის სიმცირის გამო, შეიძლება ჩავთვალოთ,
რომ განსხვავება რეზონანსულ სიხშირესა და საკუთარ სიხშირეს შო-
რის იმდენად მცირეა, რომ რეზონანსულ სიხშირედ შეიძლება თვით ω_0

ჩვეთვალთ. ამიტომაც ხშირად ამბობენ, რომ რეზონანსისათვის საჭიროა, რათა გარეშე ძალის სიხშირე თანხვედეს ოსცილატორის საკუთარი სიხშირეს.

გამოვარკვიოთ ახლა როგორ არის დამოკიდებული იძულებითი რხევის ψ ფაზა მაიძულებელი ძალის სიხშირეზე. როგორც (XIII, 44) ფორმულა და 183-ე ნახაზი გვიჩვენებს, როდესაც სიხშირე იზრდება ნულიდან უსასრულობამდე, იძულებითი რხევის ფაზა იცვლება ნულიდან $-\pi$ მნიშვნელობამდე ისე, რომ საკუთარი სიხშირის ტოლი სიხში-



ნახ. 183

რისათვის იგი არის $\psi = -\frac{\pi}{2}$. რაც უფრო ნაკლებია მიღების კოეფი-

ციენტი, მით უფრო მკვეთრია ფაზის ცვლილება ნულოვანი მნიშვნელობიდან $\psi = -\pi$ მნიშვნელობამდე. საკმარისად მცირე ხახუნის შემთხვევისათვის შეიძლება ჩვეთვალთ, რომ როდესაც $\omega < \omega_0$, $\psi = 0$, ე. ი. გარეშე ძალა და გადანაცვლება ერთ და იმავე ფაზაშია, ხოლო როცა $\omega > \omega_0$, $\psi = -\pi$, ე. ი. ძალა და გადანაცვლება საწინააღმდეგო ფაზაში არიან. საზოგადოდ კი შეიძლება ითქვას, რომ გადანაცვლება ყოველთვის აგვიანებს მაიძულებელ ძალასთან შედარებით. ფაზის საკითხი მჭიდროდ არის დაკავშირებული იძულებითი რხევის დროს დახარჯული ენერჯიის საკითხთან. ცხადია, რომ ვინაიდან რხევა წარმოებს

გარეშე ძალის გავლენით, ეს ძალა ასრულებს მუშაობას და აწვდის ოსცილატორს გარკვეულ ენერგიას. ენერგიის ცვლილება დროის ერთეულში ან, რაც იგივეა, სიმძლავრე შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$W = F \cdot v, \quad (\text{XIII, 48})$$

სადაც v არის იძულებითი რხევის სიჩქარე. ვინაიდან

$$v = B\omega \cos(\omega t + \psi).$$

მივიღებთ

$$W = B \cdot F_0 \omega \sin \omega t \cdot \cos(\omega t + \psi);$$

ეს ფორმულა ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$W = \frac{BF_0\omega}{2} \{ \sin(2\omega t + \psi) - \sin \psi \}. \quad (\text{XIII, 49})$$

გარეშე ძალის სიმძლავრე შედგება ორი წევრისაგან. მეორე წევრი მუდმივი და დადებითია, ვინაიდან $\sin \psi < 0$, პირველი წევრი წარმოადგენს $\frac{T}{2}$ პერიოდის მქონე სინუსოიდურ ფუნქციას, რომელიც იცვლის ნიშანს ყოველი მეოთხედი პერიოდის შემდეგ. მისი საშუალო მნიშვნელობა საკმაოდ დიდი დროისათვის ნულის ტოლია, რის გამოც სიმძლავრის საშუალო მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

$$\overline{W} = \frac{BF_0\omega}{2} \sin \psi.$$

თუ ჩავსვათ B -სა და $\sin \psi$ -ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\overline{W} = \frac{F_0^2 \delta}{4\delta^2 + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega^2 \right)^2}. \quad (\text{XIII, 50})$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მაქსიმალური სიმძლავრე, ე. ი. გარედან გადაცემული ენერგიის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღება მაშინ, როდესაც გარეშე ძალის სიხშირე თანხვედება საკუთარ სიხშირეს ($\omega = \omega_0$); ამ შემთხვევაში სიმძლავრისათვის მივიღებთ

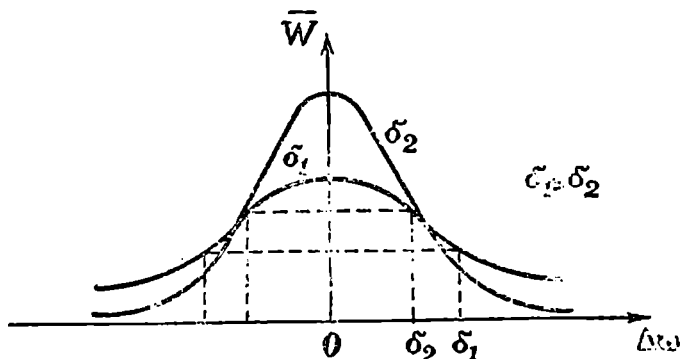
$$W = \frac{F_0^2}{4\delta}. \quad (\text{XIII, 51})$$

მაშასადამე, მაქსიმალური საშუალო სიმძლავრე მიღევის კოეფიციენტის უკუპროპორციულია.

გამოვარკვეით როგორ არის დამოკიდებული სიმძლავრე $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ სიდიდისაგან, ე. ი. როგორ იცვლება \overline{W} რეზონანსის მახლობლად. დაეუშვათ, რომ $\Delta\omega \ll \omega_0$, მაშინ \overline{W} შეიძლება დაწვე-როთ ასე:

$$\overline{W} = \frac{1}{4} \cdot \frac{F_0 \delta}{\delta^2 + (\Delta\omega)^2} \quad (\text{XIII, 52})$$

ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 184-ე ნახაზზე. იგი სიმეტრი-ულადაა განლაგებული ორდინატთა ღერძის მიმართ და აღწევს მაქსი-მუმს $\Delta\omega=0$ მნიშვნელობისათვის. \overline{W} სიდიდის მნიშვნელობა ორჯერ მცირდება (მაქსიმალურ მნიშვნელობასთან შედარებით), როდესაც დავ-შორდებით კოორდინატთა სათავეს მარცხნივ ან მარჯვნივ, $\Delta\omega = \pm$ მან-ძლით. 184-ე ნახაზზე მოყვანილია \overline{W} სიდიდის გრაფიკები მიღევის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ჩვენ ვხედავთ, რომ δ სიდიდის შემცირებასთან ერთად მრუდის მაქსიმუმი იზრდება, ხოლო თვით მრუდი უფრო ციცაბო და ვიწრო ხდება. რაც უფრო დიდია რეზონანსის ინტენსივობა. მით უფრო ვიწროა ის შუალედი, რომელ-შიც ორდინატი დაახლოებით მაქსიმუმის ტოლია. ეს შედეგი ფრიად



ნახ. 184

მნიშვნელოვანია: რაც უფრო ნაკლებია ხახუნი, მით უფრო ძნელია ოსცილატორის მოყვანა რხევაში ძალით, რომლის სიხშირე შესამჩნე-ვად განსხვავდება საკუთარი სიხშირისაგან.

რეზონანსული სიხშირის მახლობლად მდებარე სიხშირის შუალედს ეწოდება რეზონანსული შუალედი ან რეზონანსული მრუდის სიგანე.

ჩვენ განვიხილეთ იძულებითი რხევა, ე. ი. რხევა, რომელიც წარმოებს მიიძულებელი ძალის სინშირით. მაგრამ, ცხადია, რომ ეს რხევა არ არის სრული მოძრაობა, რომელიც შეიძლება შეასრულოს ჩვენმა ოსცილატორმა. რომ არ ყოფილაყო მიიძულებელი ძალა, ოსცილატორი მინც შეასრულებდა შიდა ძალებით გამოწვეულ და საწყის პირობებზე დამოკიდებულ რხევას. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ეს რხევა იქნება მილევადი და გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin (\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0), \quad (\text{XIII, 53})$$

სადაც A_0 და φ_0 მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით, ამიტომაც სრული რხევა, რომელსაც ასრულებს ოსცილატორი შიდა და გარეშე ძალების გავლენით, იქნება ჯამი (XIII, 53) ფორმულით განსაზღვრული საკუთარი მილევადი რხევისა და (XIII, 42) ფორმულით გამოსახული იძულებითი რხევისა

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin (\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \sin (\omega t + \varphi); \quad (\text{XIII, 54})$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ, ვინაიდან საკუთარი რხევა მილევადია და იგი თანდათან სუსტდება, ბოლოს პრაქტიკულად დაგვრჩება მხოლოდ იძულებითი რხევა. თუ ხახუნი არ იქნება ($\delta = 0$), ეს ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x = A_0 \sin (\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m |\omega_0^2 - \omega^2|} \sin \omega t. \quad (\text{XIII, 55})$$

ცხადია, რომ ამ ფორმულის გამოყენება არ შეიძლება რეზონანსის დროს, ვინაიდან მეორე წევრის მნიშვნელი ნულის ტოლი ხდება, როცა $\omega = \omega_0$. იმის გამოსარკვევად, თუ (დაწყებული საწყისი მომენტიდან) როგორ ვითარდება მოძრაობა, განვიხილოთ შემდეგი საწყისი პირობები: $t = 0$, $x = x_0$ და $v = v_0$. ჩავთვალოთ აგრეთვე, რომ $\omega \neq \omega_0$ და მხოლოდ შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\omega \rightarrow \omega_0$. არჩეული საწყისი პირობებისათვის ამონახსნი შემდეგი სახის იქნება:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m |\omega_0^2 - \omega^2|} \left\{ \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right\}. \quad (\text{XIII, 56})$$

უკანასკნელი წვერი შემდეგნაირად შეიძლება გარდაქმნათ:

$$\begin{aligned} & \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left\{ \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right\} = \\ & = \frac{F_0 t}{m|\omega_0 + \omega|} \frac{\sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t}{\frac{|\omega - \omega_0|}{2} t} \cos \frac{\omega + \omega_0}{2} t + \\ & + \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

ადვილად გამოსარკვევია, რომ ზღვარზე $\omega \rightarrow \omega_0$ გადასვლის შემდეგ ამ წვერისათვის მივიღებთ

$$\frac{F_0 t}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t.$$

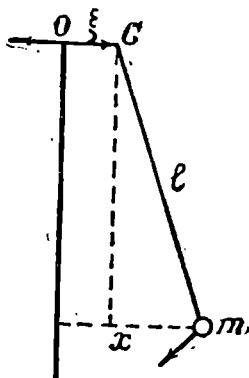
ამიტომაც (XIII, 56) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t. \quad (\text{XIII, 57})$$

პირველი ორი წვერი გამოხატავს ოსცილატორის საკუთარ რხევას, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს ეთანადება. მესამე წვერი კი არის იძულებითი რხევა, რომლის ამპლიტუდა იზრდება დროის პროპორციულად და უსასრულოდ დროის შემდეგ უნდა გახდეს უსასრულოდ დიდი, როგორც უნდა იყოს არამილევადი რხევის რეზონანსის დროს. ცხადია, რომ ეს შედეგი მართებულია მხოლოდ მცირე დროის შუალედისათვის, ვინაიდან დაშვებული მიახლოება მართებულია მხოლოდ მცირე რხევებისათვის.

იძულებითი რხევის თვალსაჩინო მაგალითს იძლევა საქანი, რომლის დაკიდვის წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალურად მოცემული პერიოდული კანონით (ნახ. 185). თუ x არის საქანის ტვირთის გადახრა, ხოლო ξ — დაკიდვის წერტილის გადახრა და ორივე ეს გადახრა ათვლილია უძრავი ვერტიკალური მიმართულებიდან, ტვირთზე მოქმედი ძალისათვის მივიღებთ

$$F = -mg \frac{x - \xi}{l} \quad (\text{XIII, 58})$$



ნახ. 185

(დაშვებულია, რომ საქანის გადახრა მცირეა). მოძრაობის უნაჩქურა განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \frac{x - \xi}{l}.$$

ეს განტოლება ასე შეივლება დაიწეროს:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \xi, \quad (\text{XIII, 59})$$

სადაც $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ არის უძრავი საქანის რბევის სიხშირე. თუ დავეშვებთ, რომ დაკიდვის წერტილის გადახრა იცვლება პერიოდულად შემდეგი კანონის თანახმად:

$$\xi = a \sin \omega t,$$

მივიღებთ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = a \omega_0^2 \sin \omega t.$$

ამ განტოლებას ისეთი სახე აქვს, ვითომ დაკიდვის წერტილი უძრავია, მაგრამ საქანის ტვირთზე მოქმედებს $a \omega_0^2 \sin \omega t$ პერიოდული ძალა $a \omega_0^2$ ამპლიტუდით და ω სიხშირით (დაშვებულია, რომ ხახუნის ძალა არ არის). ამ განტოლების ამოხსნა, ე. ი. იძულებითი რბევის განტოლება იქნება

$$x = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \xi. \quad (\text{XIII, 60})$$

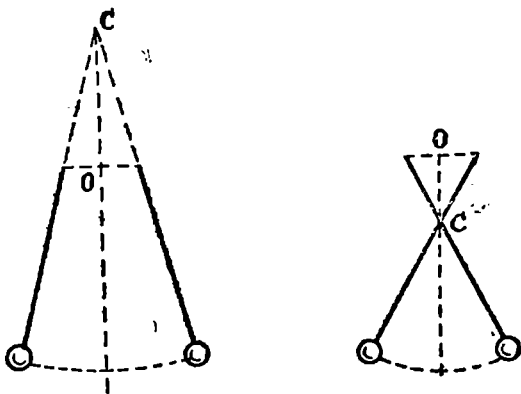
გამოვითვალოთ საქანის ტვირთის გადახრა დაკიდვის წერტილზე გამავალი ვერტიკალის მიმართ (ეს ვერტიკალი პერიოდულად ინაცვლებს); ამისათვის x -ს გამოვაკლოთ ξ , მივიღებთ

$$x - \xi = \frac{\omega^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \xi. \quad (\text{XIII, 61})$$

როგორც (XIII, 60) ფორმულა გვიჩვენებს, ტვირთისა და დაკიდვის წერტილის გადახრა ერთმხრივ არის მიმართული, თუ $\omega_0 > \omega$, და ერთმანეთის საწინააღმდეგაო, თუ $\omega_0 < \omega$. ეს ორი შემთხვევა ნაჩვენებია 186-ე ნახაზზე. ეს ნახაზი გვიჩვენებს, რომ საქანი ირბევა ისე, ვითომ მისი დაკიდვის წერტილი იყოს არა O , არამედ C .

მიღებული შედეგები გამოიყენება სეისმოლოგიაში, ე. ი.

მეცნიერებაში მიწისძვრების შესახებ. მიწისძვრის რეგისტრაციისათვის გამოიყენება სეისმოგრაფი, რომელიც ფაქტიურად საქანს წარმოადგენს. მისი ჩვენება დამყარებულია ფარდობით გადანაცვლებაზე, ვინაიდან მარეგისტრირებელი ხელსაწყო მიმაგრებულია დედამიწის ზედა-



ნახ. 186

პირთან და მასთან ერთად მოძრაობს. თუ საქანის საკუთარი სიხშირე საკმაოდ მცირეა მიწისძვრით გამოწვეული რხევების სიხშირესთან შედარებით, ე. ი. $\omega_0 \ll \omega$, (XIII, 61) განტოლება გვიჩვენებს, რომ

$$x - \xi = -\xi,$$

ე. ი. საქანის ტვირთი თითქმის უძრავი რჩება. მაშასადამე, მოხდება მარეგისტრირებელი აპარატის გადანაცვლება საქანის ტვირთისკენ მიმართ და ამიტომ მიწისძვრით გამოწვეული საკმაოდ მაღალი სიხშირეები რეგისტრირებული იქნება დაახლოებით ერთ და იმავე მასშტაბში. ამიტომაც სეისმოგრაფის თავისუფალი რხევების პერიოდი უნდა იყოს საკმარისად დიდი. ჩვეულებრივ იგი 15—20 სეკუნდის ტოლია.

§ 86. პარამეტრული რეზონანსი

რეზონანსის საინტერესო და თავისებურ შემთხვევას წარმოადგენს ე. წ. პარამეტრული რეზონანსი. ეს რეზონანსი წარმოიშობა არა უშუალოდ გარეშე მაიძულებელი ძალის გავლენით, არამედ რხევითი სისტემის რაიმე დამახასიათებელი პარამეტრის პერიოდული ცვლის გამო. ყველაზე მარტივ მაგალითს ასეთი რეზონანსისა წარმოადგენს საქანელას რხევის თანდათანობითი გაძლიერება მასზე მყოფი ადამიანის

პერიოდული დაწვევისა და აწვევის გამო. ყველასათვის კარგად არის ცნობილი, რომ საქანელაზე ქანაობის დროს თუ პერიოდულად, რხევის ტაქტის შესაბამისად აიწვეთ და დაიწვეთ, ქანაობა თანდათან გაძლიერდება, მიუხედავად იმისა, რომ საქანელაზე არავითარი გარეშე ძალა არ მოქმედებს.

რის ცვლილებას იწვევს ადამიანის პერიოდულად აწვევა და დაწვევა საქანელაზე ქანაობისას? საქანელა წარმოადგენს ფიზიკურ საქანს, რომლის მასების ცენტრის მდებარეობა და, მაშასადამე, დაყვანილი სიგრძე დამოკიდებულია მასზე მყოფი ადამიანის მდებარეობაზე. მისი აწვევის დროს მასების ცენტრი ზევით იწვევს, ე. ი. დაყვანილი სიგრძე კლებულობს, ხოლო დაწვევის დროს—მატულობს. ამგვარად ხდება დაყვანილი სიგრძის პერიოდული ცვლილება. ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ, თუ როგორ მოქმედებს ეს ცვლილება საქანის რხევის ამპლიტუდაზე.

მსჯელობის გასამარტივებლად განვიხილოთ მათემატიკური საქანი, რომლის სიგრძე პერიოდულად იცვლება. საქანის ძაფი გაყრილია ვიწრო ხერხელში ისე, რომ პერიოდული მოძრაობის შედეგად ამ ძაფის ბოლოს საქანის სიგრძე ასევე პერიოდულად იცვლება. ვთქვათ, დაყვანილი სიგრძე იცვლება γ სიხშირით l_0 სიგრძის მახლობლად

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0} (1 - \varepsilon \sin \gamma t).$$

ჩასმა მათემატიკური საქანის მოძრაობის დინამიკურ განტოლებაში მოგვცემს

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} (1 - \varepsilon \sin \gamma t) s = 0,$$

სადაც ε მცირე სიდიდეა ერთთან შედარებით ($\varepsilon \ll 1$), რაც იმას ნიშნავს, რომ სიგრძის ცვლილება მცირეა საწყის სიგრძესთან შედარებით. გადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგნაირად:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} s = \frac{g}{l_0} \varepsilon \sin \gamma t \cdot s \quad (\text{XIII, } 62)$$

ამ განტოლების მიახლოებითი ამოხსნისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ ε ძალიან მცირეა. თუ მარჯვენა მხარეში მყოფ წევრს უგულებელვყოფთ, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} s = 0,$$

რომლის ამონახსნი ჩვენთვის უკვე ცნობილია

$$s = A \sin \omega_0 t, \quad (\text{XIII}, 63)$$

სადაც

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$$

არის საკუთარი რხევის სიხშირე. (XIII, 62) განტოლების მიახლოებით სახეს მივიღებთ, თუ s -ის მნიშვნელობას (XIII, 63) განტოლებიდან ჩავსვამთ (XIII, 62) განტოლების მარჯვენა მხარეში

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} s = \frac{Ag}{l_0} \varepsilon \sin \gamma t \cdot \sin \omega_0 t.$$

სინუსების ნამრავლი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sin \gamma t \sin \omega_0 t = \frac{1}{2} \cos (\gamma - \omega_0) t - \frac{1}{2} \cos (\gamma + \omega_0) t.$$

გვექნება

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} s = \frac{Ag}{2l_0} \varepsilon \cos (\gamma - \omega_0) t - \frac{Ag}{2l_0} \varepsilon \cos (\gamma + \omega_0) t; \quad (\text{XIII}, 64)$$

ამ განტოლებას აქვს იძულებითი რხევის განტოლების სახე. მიიძღვება ბელი ძალა შედგება ორი პერიოდული ძალისაგან $\gamma - \omega_0$ და $\gamma + \omega_0$ სიხშირეებით. მაშასადამე, გვექნება ორი რეზონანსული სიხშირე: პირველი, როდესაც $\gamma - \omega_0$ თანხვდება საკუთარ სიხშირეს

$$\gamma - \omega_0 = \omega_0,$$

ხოლო მეორე, როდესაც $\gamma + \omega_0$ თანხვდება ω_0 -ს. მეორე შემთხვევა ვერ განხორციელდება, თუ $\gamma \neq 0$, ამიტომ რჩება პირველი რეზონანსული სიხშირე

$$\gamma = 2 \omega_0. \quad (\text{XIII}, 65)$$

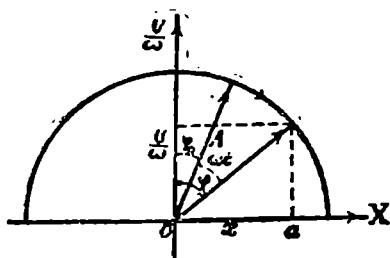
როგორც ვხედავთ, დაყვანილი სიგრძის პერიოდული ცვლილების დროს წარმოიშობა რეზონანსი, როდესაც სიგრძის ცვლის სიხშირე ორჯერ მეტია, ვიდრე საქანის საკუთარი სიხშირე. უფრო ზუსტი გამოთვლები რომ ჩავგვეტარებინა, აღმოჩნდებოდა, რომ პარამეტრული რეზონანსი წარმოიშობა მაშინაც, როდესაც პარამეტრის ცვლილების სიხშირე არის $\frac{2\omega_0}{n}$, სადაც n ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია. მაგრამ ამასთან

ერთად ირკვევა, რომ რაც უფრო მეტია n , მით უფრო ნაკლებია აბლიტუდის გაძლიერება. ამიტომაც ძირითადი პარამეტრული რეზონანსი გვაქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ერთი სრული რხევის განმავლობაში აღამიანი იწვევს ზევით და ქვევით 4-ჯერ. როგორ უნდა ხდებო-

დეს საქანის სიგრძის ცვლილება იმისათვის, რომ წარმოიშვას პარამეტრული რეზონანსი? ცხადია, საქანის სიგრძე უნდა კლებულობდეს წონასწორობის წერტილზე გავლის დროს და მატულობდეს უდიდესი გადახრის წერტილებში. წონასწორობის წერტილში საქანის ტვირთის აწევის დროს გარეშე ძალა ასრულებს მუშაობას და აღიღებს პოტენციალურ ენერგიას. უდაღესი გადახრის წერტილში დაწევის დროს თვით საქანი ასრულებს მუშაობას (პოტენციალური ენერგია კლებულობს). მაგრამ აწევის დროს შესრულებული მუშაობა, ე. ი. საქანი-სადმი გადაცემული ენერგია მეტია, ვიდრე დაწევის დროს წართმეული ენერგია, ვინაიდან საქანის ძაფი წონასწორობის მდებარეობაში მეტად არის დაკიმული, ვიდრე გადახრის წერტილებში. საქანს პერიოდულად გადაეცემა ენერგია, რომელიც იწვევს რხევის ამპლიტუდის გადიდებას.

§ 87. რხევითი მოძრაობის გრაფიკული წარმოდგენა

რხევითი მოძრაობა, ისე როგორც ყოველი მოძრაობა, შეიძლება გრაფიკულად წარმოვადგინოთ. ამისათვის ჩვეულებრივ იღებენ ორ ურთიერთმართობ ღერძს; ერთ-ერთ მათგანზე გადაზომავენ დროს, ხოლო მეორეზე — კოორდინატს, სიჩქარეს ან აჩქარებას. ასე მიიღება გზის, სიჩქარის ან აჩქარების გრაფიკები, რომელთა სახე ჰარმონიული რხევისათვის მოცემულია 175-ე ნახაზზე. ისინი გამოიხატებიან სხვადასხვა ზომის და საწყისი ფაზის მქონე სინუსოიდის საშუალებით. მაგრამ, გარდა ასეთი გრაფიკული წარმოდგენისა, არსებობს კიდევ რხევის



ნახ. 157

სხვა სახის გრაფიკული წარმოდგენა, რომელიც ძალიან ხშირად გამოიყენება რხევითი მოძრაობის განხილვისას, განსაკუთრებით ელექტროტექნიკასა და რადიოტექნიკაში. რხევითი მოძრაობის დამახასიათებელ სიდიდეებად იღებენ ამპლიტუდასა და ფაზას. ჰარმონიულ რხევას წარმოადგენენ შემდეგი სახით:

$$x = A \sin \varphi,$$

სადაც A არის ამპლიტუდა, ხოლო $\varphi = \omega t + \varphi_0$ — ფაზა (φ_0 არის საწყისი ფაზა). მოძრაობის გრაფიკულად წარმოსადგენად განიხილავენ სიბრტყეზე ორ ურთიერთმართობ ღერძს. ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია x კოორდინატი (ნახ. 187). ამპლიტუდა გამოისახება A

სიდიდის მონაკვეთით, რომელიც გავლებულია კოორდინატთა სათავიდან და რომლის დახრილობის კუთხე ორდინატთა ღერძთან არის φ .

ყოველივე ეს იმას ნიშნავს, რომ რხევითი ნაწილაკის მდგომარეობა გამოხატულია a წერტილით, რომლის A და φ პოლარული კოორდინატები წარმოადგენენ რხევის ამპლიტუდასა და ფაზას. დროის ცვალებადობასთან ერთად იცვლება ფაზა და ვინაიდან ჰარმონიული რხევის შემთხვევაში ამპლიტუდა მუდმივია, გამომსახველი წერტილი შემოწერს წრეხაზს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. φ ფაზის მნიშვნელობა $t=0$ მომენტისათვის მოგვცემს საწყის ფაზას. ვინაიდან ω მუდმივი სიდიდეა. გამომსახველი წერტილის ბრუნვა თანაბარი იქნება. რისი გამომსახველი იქნება ორდინატთა ღერძზე გადაზომილი მონაკვეთი? ეს მონაკვეთი გამოსახულია ფორმულით $A \cos \varphi$. მეორე მხრივ, x -ის გაწარმოება t -ს მიმართ მოგვცემს სიჩქარეს

$$v = \omega A \cos \varphi.$$

ამიტომაც ორდინატთა ღერძზე გადაზომილი ყოფილა შემდეგი სიდიდე:

$$y = \frac{v}{\omega} = A \cos \varphi.$$

მაშასადამე, განსახილველ დიაგრამაზე აბსცისთა ღერძზე გადაზომილია კოორდინატი, ხოლო ორდინატთა ღერძზე—სიჩქარის პროპორციული სიდიდე. ტრაექტორიის ¹ განტოლება იქნება

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1, \quad (\text{XIII, } 66)$$

რაც გამოხატავს A -რადიუსიან წრეხაზს. ზოგჯერ ორდინატთა ღერძზე გადაზომავენ არა $\frac{v}{\omega}$ სიდიდეს, არამედ თვით სიჩქარეს, მაშინ (x, v) კოორდინატებში (XIII, 66) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2} = 1.$$

ეს უკვე არის ელიფსის განტოლება, რომლის ნახევარღერძებია A და $A\omega$.

სიბრტყეს, რომელზე გატარებულ კოორდინატთა ღერძებზედაც გადაზომილია კოორდინატი და სიჩქარის პროპორციული სიდიდე. ეწო-

¹ ტრაექტორიაში აქ ვეგლისმობთ არა ნამდვილ ტრაექტორიას, არამედ გამომსახველი წერტილის მიერ შემოწერილ მრუდს.

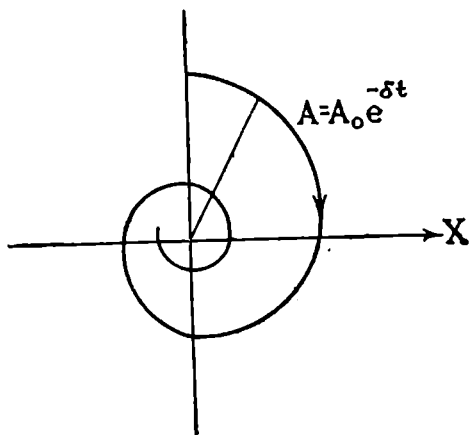
დება ფაზური სიბრტყე¹. მოძრაობის გამომსახველ წერტილს და მრუდს ეწოდებათ სათანადოდ ფაზური წერტილი და ფაზური მრუდი.

როგორც ვხედავთ, ჰარმონიული მოძრაობის ფაზური მრუდი წარმოადგენს ელიფსს, რომლის შემოვლა წარმოებს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

განვიხილოთ ახლა მიღწეადი რხევის გრაფიკული წარმოდგენა. როგორც ვიცით, მიღწეადი რხევის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$x = Ae^{-\delta t} \sin \varphi,$$

სადაც $\varphi = \omega t$, თუ დაეუშვებთ, რომ საწყისი ფაზა ნულის ტოლია. ეს რხევა იმით განსხვავდება ჰარმონიული რხევისაგან, რომ მისი ამპლიტუდა ($Ae^{-\delta t}$) ექსპონენციალურად კლებულობს დროის განმავლობაში.



ნახ. 168

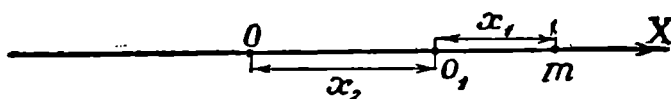
ამის სათანადოდ მისი გამომსახველი წერტილის დაშორება კოორდინატთა სათავიდან ასევე შემცირდება და მოძრაობის გრაფიკი წარმოგვიდგება ზვიის სახით, რომელიც თანდათან უახლოვდება კოორდინატთა სათავეს (ნახ. 188).

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ორდინატთა ღერძზე აღარ იქნება გადაზომილი ნაწილაკის სიჩქარე, ე. ი. ეს გრაფიკი არ იქნება ფაზური მრუდი.

¹ როგორც ვნახავთ შემდეგში, მოლეკულური (სტატისტიკური) ფიზიკის განხილვის დროს, ფაზურ სიბრტყეში კოორდინატთა ღერძებზე გადაზომილ იქნება კოორდინატი და იმპულსი.

როგორც ბუნებაში, ისე ტექნიკაში მრავლად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც აღებული ნივთიერი ნაწილაკი ერთდროულად ასრულებს ორ ან რამდენიმე ჰარმონიულ რხევას. ისმის კითხვა — როგორია ამ რხევათა შეკრების შედეგი. ჩვენ განვიხილავთ ორ მარტივ შემთხვევას — პირველს, როდესაც იკრებება ერთი წრფის გასწვრივ მიმართული ჰარმონიული რხევები და მეორეს, როდესაც ხდება ურთიერთმართობი რხევის შეკრება.

1. ერთმხრივ მიმართული და ტოლი სიხშირის ჰარმონიული რხევების შეკრება. ვთქვათ, ნაწილაკი ერთდროულად ასრულებს OX ღერძის გასწვრივ მიმართულ ორ ჰარმონიულ რხევას (ნახ. 189). წარმოვიდგინოთ, მაგალითად, რომ m ნაწილაკი ირხევა O_1 წერტილის



ნახ. 189

მაზლობლად და იმავე დროს თვით O_1 წერტილი ირხევა O წერტილის მიმართ. თუ ნივთიერი წერტილის გადახრას O_1 წერტილიდან აღვნიშნავთ x_1 -ით, ხოლო O_1 წერტილის გადახრას O წერტილის მიმართ — x_2 -ით, საერთო გადახრა m ნივთიერი წერტილისა O წერტილიდან იქნება ამ გადახრების ჯამი

$$x = x_1 + x_2.$$

დავუშვათ, რომ ორივე რხევას აქვს ერთნაირი სიხშირე, მაგრამ სხვადასხვა ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა, ე. ი. მათი განტოლებებია

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

გამოსარკვევია, თუ როგორია ასეთი რხევების შეკრების შედეგად მიღებულ მოძრაობის ხასიათი. ჩასმა x -ის ფორმულაში გვაძლევს

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (\text{XIII, 67})$$

გამოვარკვეოთ, ხომ არ წარმოადგენს ამ ფორმულით გამოხატული მოძრაობა ისევ ჰარმონიულ რხევას უკვე განსხვავებული ამპლიტუდით და საწყისი ფაზით. ამისათვის დავწეროთ x შემდეგი სახით:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{XIII, 68})$$

და მოექებნოთ A და φ სიდიდეების ის მნიშვნელობები, რომელთა ს-
შუალებით ღროის ყოველი მომენტისათვის დაკმაყოფილდება ტოლობა

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (\text{XIII, 69})$$

რადგანაც ეს ტოლობა მართებული უნდა იყოს ღროის ყოველი მო-
მენტისათვის, t -ს მნიშვნელობა ნებისმიერად შეიძლება ავარჩიოთ.
ვთქვათ, $t=0$, მაშინ (XIII, 69) ტოლობიდან მივიღებთ

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2.$$

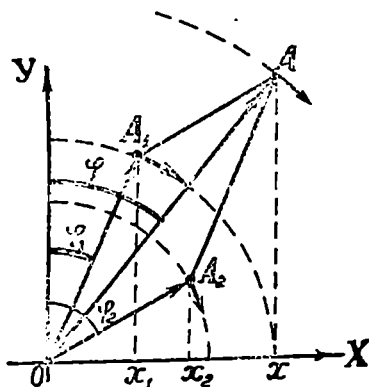
შევარჩიოთ ახლა t ისე, რომ ωt ტოლი იყოს $\frac{\pi}{2}$ -ისა, მაშინ მივიღებთ

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2;$$

ამ ორი ტოლობიდან ადვილად გამოვითვლით A და φ სიდიდეების
მნიშვნელობებს

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (\text{XIII, 70})$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (\text{XIII, 71})$$



ნახ. 1.0

როგორც ვხედავთ, ორი ტო-
ლი სიხშირის, მაგრამ სხვა-
დასხვა ამპლიტუდის და საწყ-
ისი ფაზის მქონე რხევის შე-
კრება გვაძლევს იმავე სიხ-
შირის ჰარმონიულ რხევას
(ფორმ. XIII, 68), რომლის
ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა
მოცემულია (XIII, 70) და
(XIII, 71) ფორმულებით.

(XIII, 70) ფორმულა გვი-
ჩვენებს, რომ საერთო რხევის
ამპლიტუდა დამოკიდებულია
შესაკრები რხევების ამპლი-
ტუდებზე და საწყისი ფაზათა

სხვაობაზე; ამ დამოკიდებულების უფრო თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად
მივმართოთ რხევების გრაფიკულ წარმოდგენას. წინა პარაგრაფში გა-
მოვხატეთ ჰარმონიული რხევა ვექტორით, რომლის სიგრძე ამპლიტუ-
დის ტოლია, ხოლო ორდინატთა ღერძისადმი დახრილობის კუთხე ფა-
ზის ტოლია. ამ ვექტორის პროექცია აბსცისათა ღერძზე გვაძლევს ნა-
წილაკის x გადახრას. გამოვყენოთ ეს გრაფიკული წარმოდგენა რხე-
ვების შეკრებისათვის. 190-ე ნახაზზე წარმოდგენილია ორივე შესაკრები

რხევა $O\vec{A}_1$ და $O\vec{A}_2$ ვექტორებით, რომელთა დახრილობის კუთხეები ორდინატთა ღერძისადმი არის φ_1 და φ_2 (შეკრებას ვაწარმოებთ $t=0$ მომენტში). ავავოთ $O\vec{A}_1$ და $O\vec{A}_2$ ვექტორებზე პარალელოგრამი და გავავლოთ $O\vec{A}$ ვექტორი, რომელიც ამ ვექტორების ჯამია. აღვნიშნოთ ორდინატთა ღერძისადმი მისი დახრილობის კუთხე φ ასოთი. თუ მის გვეგმილს აბსცისთა ღერძზე x -ით აღვნიშნავეთ, ნახაზი გვიჩვენებს, რომ

$$x = x_1 + x_2,$$

საიდანაც მივიღებთ

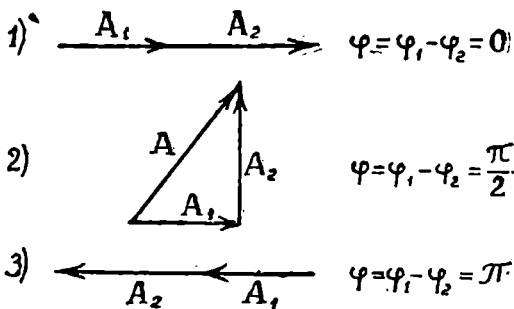
$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2.$$

დაგვეგმილება ორდინატთა ღერძზე მოგვეცემს

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2.$$

ეს სწორედ ის ტოლობებია. რომლებიც საზღვრავს საერთო რხევას ამპლიტუდას და საწყისი ფაზას. როგორც ვხედავთ, ნაკრები რხევის ამპლიტუდა მიიღება შესაყრები რხევების ამპლიტუდების გეომეტრიული შეკრებით, ხოლო საწყისი ფაზა გამოინატება ამ ამპლიტუდის ორდინატთა ღერძისადმი დახრილობის კუთხით.

ახლა უკვე ნათელია, თუ რატომ არის დამოკიდებული ნაკრებ რხევათა ამპლიტუდა შესაყრები რხევების საწყისი ფაზების სხვა-



ნახ. 191

ობაზე. ეს ფაზათა სხვაობა გვიხასიათებს 'ამპლიტუდების' გამონახველი ვექტორების ურთიერთდახრას და, ცხადია, რომ ვექტორების ჯამი დამოკიდებული იქნება ამ ურთიერთდახრაზე. 191-ე ნახაზზე ნახვენებია ნაკრებ რხევათა ამპლიტუდის სიდიდე შესაყრებ რხევათა საწყისი ფაზების სხვაობისაგან დამოკიდებულებით: 1) თუ $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ამპლიტუდების გამომსახველი ვექტორები ერთნაირი მიმართულებისაა და ამიტომ

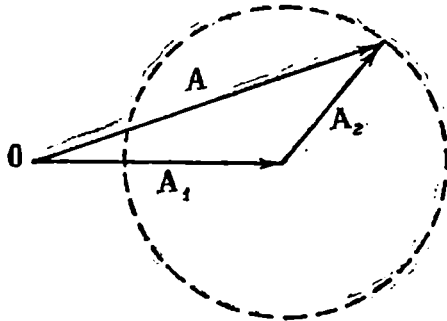
$$A = A_1 \div A_2,$$

რაც უშუალოდ (XIII, 70) ფორმულიდანაც გამომდინარეობს.

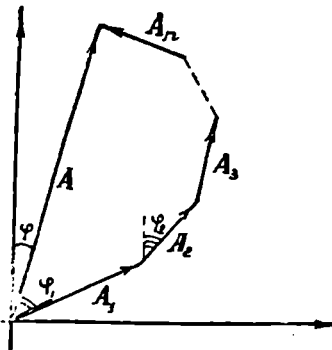
2) თუ საწყისი ფაზათა სხვაობა $\frac{\pi}{2}$ -ის ტოლია, $O\bar{A}_1$ და $O\bar{A}_2$ ვექტორები ურთიერთმართობია და A -სათვის მივიღებთ

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2.$$

იგივე გამომდინარეობს (XIII, 70) ფორმულიდან.



ნახ. 192



ნახ. 193

3) თუ საწყისი ფაზები საწინააღმდეგოა, ე. ი. თუ $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, მივიღებთ

$$A = |A_1 - A_2|.$$

ანალოგიურად შეიძლება განხილულ იქნეს სხვა შემთხვევები. 192-ე ნახაზი გვიჩვენებს, რომ ფაზათა სხვაობის ცვლასთან ერთად ვექტორის ბოლო წერტილი შემოწერს A_2 რადიუსის წრეხაზს $O\bar{A}_1$ ვექტორის ბოლო წერტილის ირგვლივ.

ადვილად მისახვედრია, რა შედეგს მოგვცემს არა ორი, არამედ რამდენ

ნიმე, მაგალითად, n პარმონიული რხევის შეკრება, თუ მათი ამპლიტუდებია A_1, A_2, \dots, A_n , ხოლო საწყისი ფაზები $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. ნაკრები რხევა ისევე პარმონიული და იმავე სიხშირის იქნება როგორც შესა-

კრები რხევები, და მისი ამპლიტუდა მიიღება როგორც გეომეტრიული ჯამი $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ ვექტორებისა (ნახ. 193). (XIII, 70, 71) ფორმულების ანალოგიური ფორმულები იქნება:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + 2A_1A_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \dots + 2A_{n-1}A_n \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n), \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \dots + A_n \sin \varphi_n}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \dots + A_n \cos \varphi_n}$$

2. ორი ერთმხრივ მიმართული და მცირედ განსხვავებული სიხშირეების მქონე რხევის შეკრება. როდესაც შესაყრები რხევების სიხშირეები ტოლი არ არის, ნაკრები რხევა საზოგადოდ უკვე აღარ არის მარტივი ჰარმონიული რხევა. მაგრამ, როდესაც შესაყრები რხევების სიხშირეები მცირედ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, შეიძლება ნაკრები რხევა განვიხილოთ მიახლოებით როგორც ჰარმონიული რხევა ნელა ცვლადი ამპლიტუდით. მართლაც, ვთქვათ, იკრიბება ორი რხევა ω_1 და ω_2 სიხშირეებით:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

მეორე განტოლება შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_2(t)),$$

სადაც

$$\varphi_2(t) = \varphi_2 - \Delta\omega \cdot t.$$

ამ განტოლებას ისეთი სახე აქვს. თითქოს იგი გამოხატავდეს ω_1 სიხშირის ჰარმონიულ რხევას. სინამდვილეში, რასაკვირველია, ეს ასე არ არის, ვინაიდან ამისათვის საჭირო იქნებოდა, რომ მისი საწყისი ფაზა $\varphi_2(t)$ მუდმივი ყოფილიყო. მიუხედავად ამისა შევკრიბოთ რხევები ისე, როგორც ეს ზემოთ გავაკეთეთ. საერთო „ამპლიტუდისათვის“ მივიღებთ

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\{\varphi_2(t) - \varphi_1\}, \quad (\text{XIII, 72})$$

ხოლო „საწყისი ფაზისათვის“

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2(t)}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2(t)}. \quad (\text{XIII, 73})$$

საერთო რხევის განტოლება იქნება

$$x = A \sin(\omega_1 t + \varphi(t)). \quad (\text{XIII, 74})$$

ცხადია, რომ ეს რხევა არ წარმოადგენს მარტივ ჰარმონიულ რხევას, ვინაიდან ცვალებადია, ე. ი. დროზე დამოკიდებულია როგორც „ამპლიტუდა“, ისე „საწყისი ფაზა“.

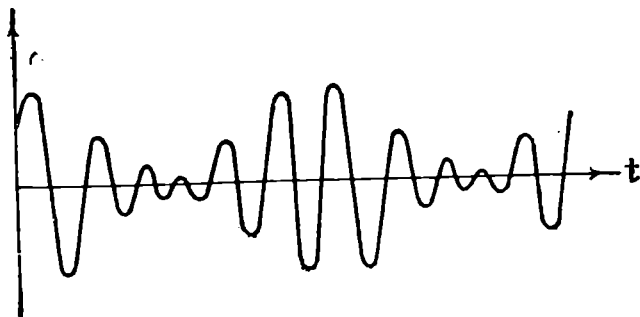
განვიხილოთ ახლა ის კერძო შემთხვევა, როდესაც სიხშირეთა სხვაობა ძალიან მცირეა შესაკრებ სიხშირეებთან შედარებით, ე. ი. დავუშვათ, რომ

$$\Delta\omega \ll \omega_1.$$

განვიხილოთ „ამპლიტუდის“ გამოსახულებაში შემავალი დროზე დამოკიდებული სიდიდე

$$\cos \{ \varphi_2(t) - \varphi_1 \} = \cos (\varphi_2 - \varphi_1 - \Delta\omega t).$$

ვინაიდან $\Delta\omega$ ძალიან მცირეა, ამ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის პერიოდი ძალიან დიდი იქნება შესაკრები რხევების პერიოდთან შედარებით, ე. ი. ის იქნება ძალიან ნელა ცვლადი ფუნქცია; ეს იმას ნიშნავს, რომ სანამ $\cos(\varphi_2(t) - \varphi_1)$ და, მაშასადამე, A -ც შესამჩნევად შეიცვლება, ნაკრები x მრავალ რხევას შეასრულებს. ასევე ნელა ცვლადი ფუნქცია იქნება $\cos \varphi(t)$ და ამიტომ გარკვეული დროის განმავლობაში შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ნაკრები რხევა არის ჰარმონიული რხევა $\omega_1 \approx \omega_2$ სიხშირით. დიდი დროის განმავლობაში „ამპლიტუდისა“ და „საწყისი ფაზის“ ცვალებადობა შესამჩნევი იქნება. როგორც (XIII, 72) ფორმულა გვიჩვენებს, „ამპლიტუდა“ არის პერიოდული ფუნქცია $\Delta\omega$ სიხშირით და $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ პერიოდით. 194-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მცირედ



ნახ. 194

განსხვავებული სიხშირის მქონე ორი რხევის შეკრების შედეგი იმ შემთხვევაში, როდესაც ამპლიტუდები ტოლია. ნაკრები რხევის ამპლიტუდა პერიოდულად იცვლება 0 და $2A_1$ მნიშვნელობათა შორის (ზო-

გად შემთხვევაში ცვლილება წარმოებს $|A_1 - A_2|$ და $A_1 + A_2$ ფარგლებში*

ამპლიტუდის სიდიდის პერიოდულ ცვლილებას, გამოწვეულს მახლობელი სიხშირის რხევების შეკრებით, ეწოდება ძგერა. განსაკუთრებით კარგად ჩანს ასეთი ძგერა ორი კამერტონის ერთდროულად რხევის დროს. თუ მათი სიხშირეები მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, კარგად ისმის ბგერის პერიოდული გაძლიერება და შესუსტება.

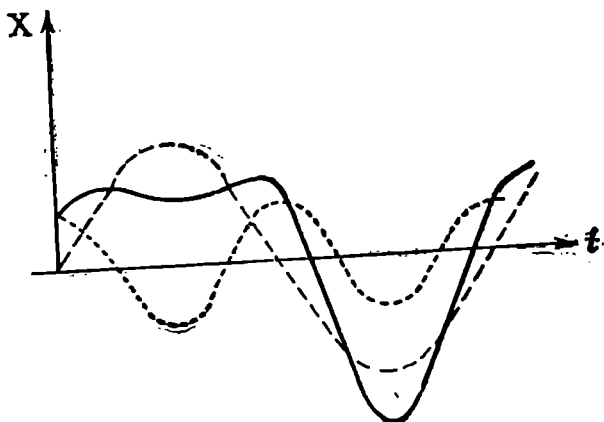
3. ჯერადი სიხშირის მქონე რხევების შეკრება. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც იკრიბება რამდენიმე რხევა ჯერადი სიხშირეებით. ცალკეული რხევების განტოლებები იქნება

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1); \quad x_2 = A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), \quad \dots \\ \dots, \quad x_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

სათანადო პერიოდები იქნება

$$\frac{2\pi}{\omega}, \quad \frac{2\pi}{2\omega}, \quad \dots, \quad \frac{2\pi}{n\omega}.$$

ცხადია, რომ ყველაზე ნაკლები პერიოდი აქვს უკანასკნელ (n -ურ) რხევას, ხოლო ყველაზე დიდი — პირველ რხევას. გასაგებია აგრეთვე,



ნატ. 195

რომ ყოველი რხევა ისევ დაუბრუნდება თავის საწყის მნიშვნელობას $\frac{2\pi}{\omega}$ პერიოდის განმავლობაში (პირველი რხევა — ერთხელ, მეორე — ორჯერ და ა. შ.); აქედან გამომდინარეობს, რომ ნაკრები რხევა

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

იქნება პერიოდული მოძრაობა $\frac{2\pi}{\omega}$ პერიოდით. მაგრამ მისი ხასიათი

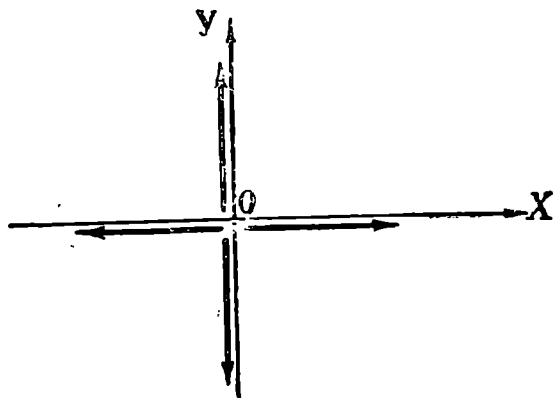
დამოკიდებული იქნება ცალკეული რხევების კამპლიტუდებზე და საწყის ფაზებზე. 195-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ნაკრები რხევა (მთლიანი ხაზი), რომელიც მიღებულია შემდეგი ორი რხევის შეკრებით (პუნქტირია მრუდები)

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) + \frac{A}{2} \sin(2\omega t + \varphi_2)$$

და

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

4. ურთიერთმართობი და ტოლი სიხშირის რხევების შეკრება. ბუნებასა და ტექნიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც აღებული ნივთიერი ნაწილაკი ან სხეული ასრულებს ორ ან რამდენიმე სხვადასხვა მიმართულების რხევას. ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ რო-



ნახ. 196

გორი სახე აქვს ასეთი რხევების შეკრების შედეგად მიღებულ მოძრაობას. სიმარტივისათვის განვიხილავთ მხოლოდ ორი ურთიერთმართობი რხევის შეკრებას.

ვთქვათ, ნივთიერი წერტილი ასრულებს ერთდროულად ორ რხევას OX და OY ღერძების გასწვრივ, O წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად. (ნახ. 196). ვთქვათ აგრეთვე, რომ ამ რხევებს აქვს

ერთნაირი სიხშირე, მაგრამ სხვადასხვა ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა.

ცხადია, რომ ამ ორი რხევის შედეგად ნაწილაკი იმოძრაეებს XOY სიბრტყეში, მაგრამ საზოგადოდ მისი მოძრაობა არ იქნება წრფივი რხევა. დავწეროთ ამ ორი რხევის განტოლება:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (\text{XIII, 75})$$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

ჯერ გამოვარკვეოთ როგორი სახე აქვს ნაკრები მოძრაობის ტრაექტორიას. ამისათვის (XIII, 75) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დრო, რისთვისაც გადავწეროთ ისინი ასეთი სახით:

$$\frac{x}{A_1} = \sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1,$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2$$

გავამრავლოთ პირველი განტოლება $\sin \varphi_2$ -ზე, მეორე $\sin \varphi_1$ -ზე და გამოვაკლოთ პირველს მეორე, მივიღებთ

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \sin \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (\text{XIII, 76})$$

პირველი განტოლების გამრავლებით $\cos \varphi_2$ -ზე, ხოლო მეორისა $\cos \varphi_1$ -ზე, და პირველისათვის მეორის გამოკლებით ასევე მივიღებთ

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \cos \omega t \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (\text{XIII, 77})$$

(XIII, 76) და (XIII, 77) განტოლებათა კვადრატში აყვანით და შეკრებით საბოლოოდ გვექნება

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (\text{XIII, 78})$$

ასეთია ტრაექტორიის განტოლება. ადვილად გამოსარკვევია, რომ ის არის ელიფსის განტოლება, რომლის ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, ე. წ. წონასწორობის მდებარეობაში. მისი სახე და ორიენტაცია დამოკიდებულია საწყისი ფაზათა სხვაობაზე.

განვიხილოთ სხვადასხვა კერძო შემთხვევა.

ა) საწყის ფაზათა სხვაობა 2π -ს ჯერადია: $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n$, სადაც n მთელი რიცხვია, მაშინ (XIII, 78) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} = 0,$$

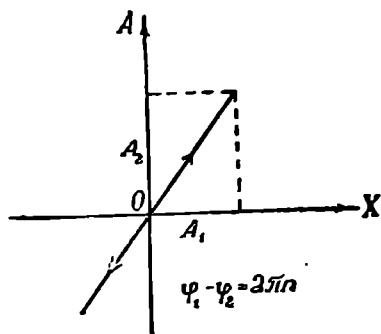
იმის გამოსარკვევად, თუ რას გამოხატავს ეს განტოლება, გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

ეს კი წრფის განტოლებაა, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და რომლის კუთხური კოეფიციენტია $\frac{A_2}{A_1}$. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთ-



ნახ. 197

ხვევაში რხევების შეკრება მოგვცა ისევ წრფივი რხევა, გარკვეული კუთხით დახრილი შესაკრები რხევებისადმი. ამ რხევას ისეთივე ფაზა აქვს, როგორიც შესაკრებ რხევებს, ხოლო მისი ამპლიტუდა არის $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ (ნახ. 197).

ბ) საწყის ფაზათა სხვაობა უდრის π -ს კენტ რიცხვს: $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$, სადაც n მთელი რიცხვია. (XIII, 78) განტოლება ასე დაიწერება:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} = 0$$

ან

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x.$$

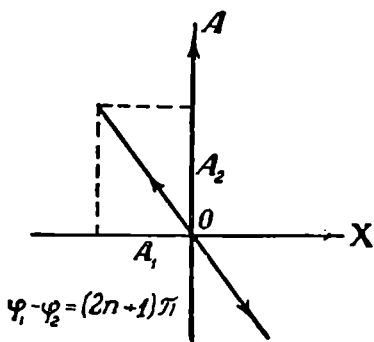
ეს არის ისევ წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით — $\frac{A_2}{A_1}$.

ეს წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე და მდებარეობს მეორე და მეოთხე მესამე მეთხედებში (ნახ. 198).

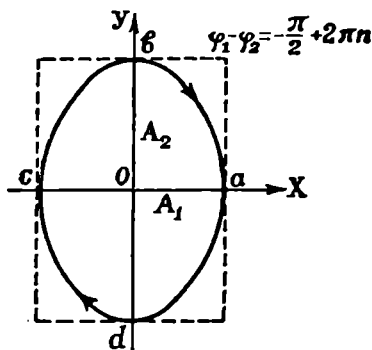
გ) საწყის ფაზათა სხვაობა $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ამ შემთხვევაში განტოლება ლებულობს შემდეგ სახეს:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

ეს არის ელიფსის განტოლება A_1 და A_2 ნახევარღერძებით, რომლებიც მიმართულია OX და OY ღერძების გასწვრივ (ნახ. 199). ნაწილური მოძრაობის ამ ელიფსზე საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო



ნახ. 198



ნახ. 199

მიმართულებით. ასეთი ხასიათის მოძრაობა იმით არის გამოწვეული, რომ რხევა OX ღერძის გასწვრივ წინ უსწრებს რხევას OY ღერძის გასწვრივ პერიოდის მეოთხედით, ე. ი. როდესაც ნაწილური პირველი რხევის გავლენით მიიღწევა a წერტილს, მხოლოდ მაშინ იწყება გადახრა OY ღერძის დადებითი მიმართულებით. ცხადია, შესაკრები რხევების ამპლიტუდების ტოლობის შემთხვევაში ($A_2 = A_1$) ელიფსი გადაიქცევა წრეხაზად.

დ) საწყის ფაზათა სხვაობაა $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ტრაექტორიის განტოლება ისევ იქნება

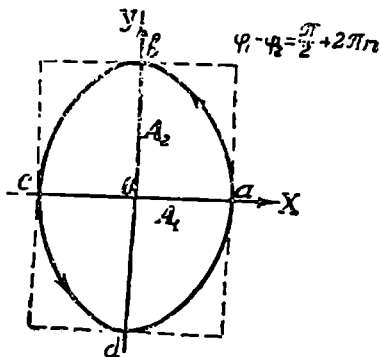
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

ე. ი. მოძრაობა ისევ ელიფსზე იწარმოებს, მაგრამ ვინაიდან ახლა OX ღერძის გასწვრივ რხევა ჩამორჩება რხევას OY ღერძის გასწვრივ, მოძრაობა ელიფსზე იწარმოებს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (ნახ. 200). როდესაც ნაწილაკი OY ღერძის გასწვრივ მიაღწევს b წერტილს, მხოლოდ მაშინ იწყება გადახრა OX ღერძის გასწვრივ.

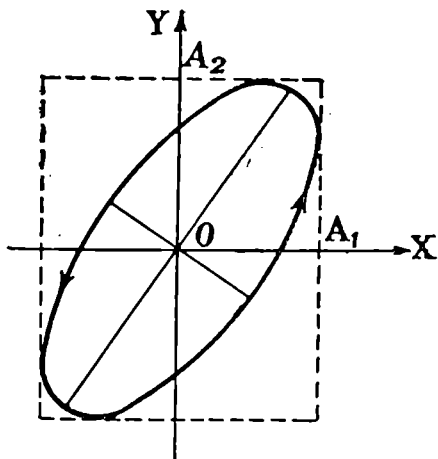
ვ) განვიხილოთ დასასრულ შემთხვევა, როდესაც $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ტრაექტორიის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \sqrt{2} \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} = \frac{1}{2}$$

ეს არის განტოლება ელიფსისა, რომლის მთავარი ღერძები დახრილია კოორდინატთა ღერძების მიმართ გარკვეული კუთხით. 201-ე და 202-ე ნახაზებზე ნაჩვენებია ამ ელიფსების მდებარეობა და მათზე მოძრაობის მიმართულება.



ნახ. 200



ნახ. 201

მოძრაობას ელიფსზე, რომელიც მიიღება ორი ურთიერთმართობი ჰარმონიული რხევის შეკრებით, ეწოდება ელიფსური რხევა. კერძო შემთხვევაში ეს რხევა შეიძლება წრფივ ან წრიულ რხევაზე იქნეს დაყვანილი.

5. ურთიერთმართობი და ჯერადი სიხშირის რხევათა შეკრება. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც შესაკრები რხევების სიხშირეები ჯერადია, ე. ი. შეეფარდებიან ერთმანეთს როგორც მთელი რიცხვები. სათანადო განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

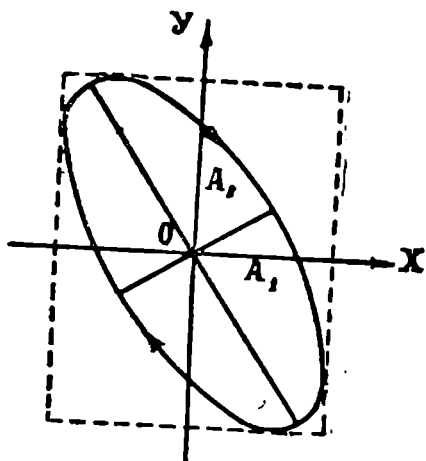
$$x = A_1 \sin(m\omega t + \varphi_1),$$

(XIII, 79)

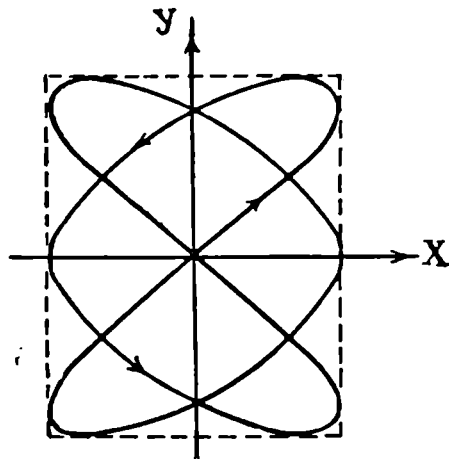
$$y = A_2 \sin(n\omega t + \varphi_2).$$

პირველი რხევის სიხშირეა $\omega_1 = m\omega$, მეორისა — $\omega_2 = n\omega$. მათი შეფარდება არის $\frac{m}{n}$, სადაც m და n მთელი რიცხვებია. ადვილად შეიძლება

დავრწმუნდეთ, რომ ამ რხევების შედეგად მიღებული მოძრაობა პერიოდული მოძრაობაა. მართლაც, როგორც x , ისე y იღებენ $t_0 + T$ მომენტში იმავე მნიშვნელობას, რაც მათ ჰქონდათ t_0 მომენტში, სადაც



ნახ. 202



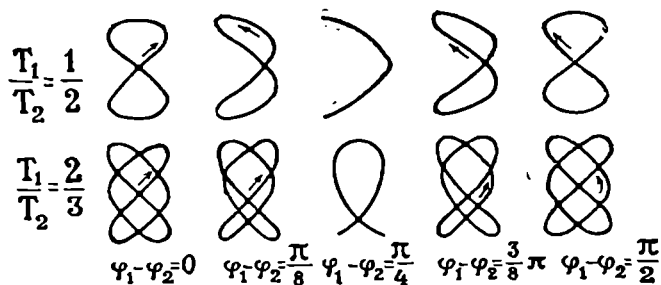
ნახ. 203

$T = \frac{2\pi}{\omega}$. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია m და n რხევების შეფარ-

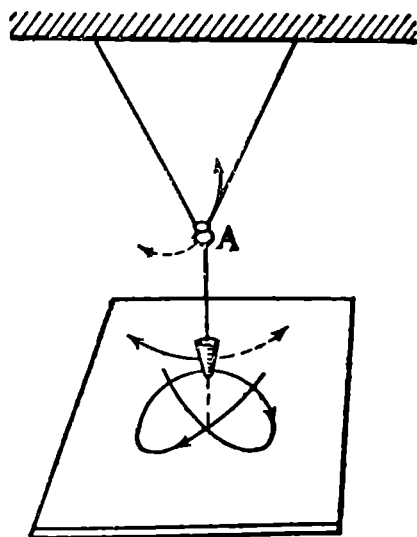
დება, მივიღებთ სხვადასხვა სახის ჩაკეტილ მრუდებს (ნახ. 203); ამ მრუდებს ლისაჟუს ფიგურები ეწოდება. მათი განტოლებების გამოყვანას ჩვენ არ შეუვდგებით, აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ სიხშირეების შეფარდება ადვილად მიიღება შემდეგი წესით: აღებულ უნდა იქნეს ყველაზე სიმეტრიული მრუდი მოცემული საწყისი ფაზათა სხვაობისათვის და უნდა დავითვალოთ რამდენჯერ ეხება მრუდი მის ირგვლივ შემოწერილ მართკუთხედის გვერდებს, რომლებიც კოორდინატთა ღერძების პარალელურია. თუ OX ღერძის პარალელურ გვერდს მრუდი შეეხო n -ჯერ, ხოლო OY ღერძის პარალელურ გვერდს m -ჯერ, OX და OY ღერძე-

ბის გასწვრივი რხევების სიხშირეების შეფარდება იქნება $\frac{m}{n}$. მაგალი-

თად, 204-ე ნახაზზე მრუდი ეხება ვერტიკალურ გვერდს 3-ჯერ, ხოლო ჰორიზონტალურ გვერდს—2-ჯერ. ამიტომ სიხშირეთა შეფარდება იქნება $\frac{3}{2}$. სიხშირეთა მოცემული შეფარდებისათვის, თუ საწყის თაზათა სხვაობა იცვლება, მრუდი იცვლის თავის სახეს, როგორც ეს ნაჩვენებია 204-ე ნახაზზე.

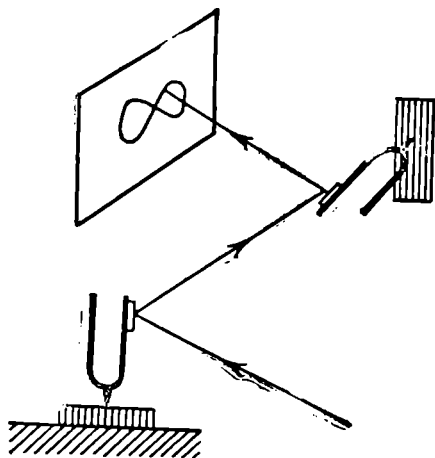


ნახ. 204



ნახ. 205

ლისაყუს ფიგურების განხორციელება მრავალი საშუალებით არის შესაძლებელი. ყველაზე მარტივია ორმაგი საქანი (ნახ. 205), რომელსაც შეუძლია სხვადასხვა სიხშირით რხევა ორი ურთიერთმართობი მიმართულებით. საქანზე ჩამოკიდებული ძაბრიდან იყრება ქვიშა, რომლის კვალიც ჰორიზონტალურ დაფაზე გვაძლევს ლისაყუს ფიგურებს. სიხშირეთა შეფარდების ცვლილება შესაძლებელია საქანის სიგრძის ცვლით A რგოლის საშუალებით.



ნახ. 206

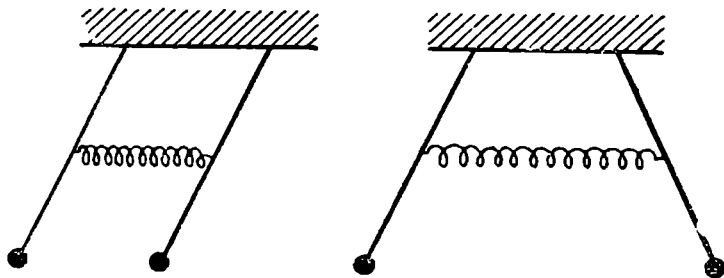
206-ე ნახაზზე მოყვანილია დანადგარის სქემა, რომელიც ლისაყუს ფიგურების ოპტიკური მეთოდით მიღების საშუალებას იძლევა. ორ ურთიერთმართობულად რხევად კამერტონზე დამაგრებული სარკეებიდან არეკლილი სინათლის სხივი ეკრანზე იძლევა ლისაყუს ფიგურას, რომლის სახე დამოკიდებულია კამერტონების რხევათა სიხშირეების შეფარდებაზე.

თუ შესაკრებ რხევათა სიხშირეების შეფარდება რაციონალური არ არის, მაშინ ტრაექტორია აღარ იქნება ჩაკეტილი და ლისაყუს ფიგურების მაგიერ მივიღებთ მრუდს, რომელიც მთლიანად ავსებს სიბრტყის გარკვეულ არეს.

§ 89. ბოული რხევები

განვიხილოთ ახლა რხევები, რომლებიც შეიძლება შეასრულოს რამდენიმე ნაწილისაგან შემდგარმა სისტემამ. თუ ნაწილაკებს შორის არაერთმართო ურთიერთქმედება არ არის, მაშინ ისინი ერთმანეთისაგან

დამოკიდებლად შეასრულებენ რხევებს, რომელთა ხასიათი უკვე გამორკვეული იყო წინა პარაგრაფებში. მაგრამ იმ შემთხვევაში, როდესაც ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედებაა და ეს ურთიერთქმედება დამოკიდებულია ნაწილაკების მდებარეობაზე ან სიჩქარეზე, მათი რხევის ხასიათი შეიცვლება და ერთი ნაწილაკის რხევა დამოკიდებული იქნება მეორე ნაწილაკის რხევაზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ნა-



ნახ. 207

წილაკები ასრულებს ბმულ რხევებს. ბმული რხევების მარტივ მაგალითს წარმოადგენს ორი ისეთი საქანის რხევა, რომლებიც დაკავშირებულია ერთმანეთთან ზამბარით (ნახ. 207).

თუ ორ საქანს შეუძლია რხევა მხოლოდ ნახაზის სიბრტყეში, ყოველ მათგანს ექნება ერთი თავისუფლების ხარისხი, მთელ სისტემას კი — ორი. მათი მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება s_1 და s_2 გადახრებით წონასწორობის მდებარეობიდან. ყოველ მათგანზე, გარდა სიმძიმის ძალისა, მოქმედებს კიდევ ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ძალა, რომელიც მით უფრო მეტია, რაც უფრო მეტადაა გაჭიმული ზამბარა. მეორე მხრივ, ცხადია, რომ ზამბარის გაჭიმვა პროპორციულია გადახრების სხვაობისა და ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ საქანებზე მოქმედი დამატებითი ძალები გამოისახება შემდეგი ფორმულებით:

$$F_1 = -\lambda (s_1 - s_2), \tag{XIII, 80}$$

$$F_2 = -\lambda (s_2 - s_1).$$

ცხადია, ეს ძალები სიდიდით ტოლია და ურთიერთსაწინააღმდეგოა. მოძრაობის განტოლებები შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + \omega_0^2 s_1 = -\lambda (s_1 - s_2),$$

(XIII, 81)

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} + \omega_0^2 s_2 = -\lambda (s_2 - s_1).$$

ω_0 არის ორავე საქანის საკუთარი სიხშირე (აღებულია ერთი და იმავე სიგრძის ორი საქანი). სწორედ ის გარემოება, რომ ყოველი საქანის რხევის განტოლებაში შედის მეორე საქანის გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან არის იმის მაჩვენებელი, რომ მათი რხევები ზმულია. ვთქვათ, მეორე საქანი დავამაგრეთ წონასწორობის მდებარეობაში ($s_2 = 0$). მაშინ პირველი საქანის რხევის განტოლება იქნება

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + \lambda) s_1 = 0.$$

გზედავთ, რომ პირველი საქანი ამ შემთხვევაში ირხევა $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda}$ სიხშირით. ასეთივე სიხშირე ექნება მეორე საქანს. ცალკეული ნაწილაკების რხევებს, როდესაც სხვა ნაწილაკები დამაგრებულია მათი წონასწორობის მდებარეობებში, ეწოდება პარციალური რხევები. ჩვენს შემთხვევაში ორივე პარციალურ რხევას ერთი და იგივე სიხშირე აქვს, საზოგადოდ კი პარციალურ რხევებს შეიძლება სხვადასხვა სიხშირე ჰქონდეს.

როგორი იქნება ნაწილაკების რხევები, თუ არც ერთი მათგანი დამაგრებული არ არის? ცხადია, რომ ამ რხევების ხასიათი დამოკიდებულია ბმაზე და საწყის პირობებზე. ხომ არ შეიძლება ისეთი საწყისი პირობები შევარჩიოთ, რომ ყოველი ნაწილაკი ასრულებდეს მარტივ ჰარმონიულ რხევას? ამისათვის საჭიროა, რომ ყოველ განტოლებაში შედიოდეს მხოლოდ სათანადო ნაწილაკის გადახრა. მაგალითად, პირველ განტოლებაში უნდა შედიოდეს მხოლოდ s_1 ; ამისათვის, ცხადია, რომ s_2 უნდა იყოს s_1 -ის პროპორციული, მართლაც, თუ

$$s_2 = ns, \quad (\text{XIII, 82})$$

პირველი განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + \{\omega_0^2 + \lambda(1 - n)\} s_1 = 0. \quad (\text{XIII, 83})$$

ეს კი არის მარტივი ჰარმონიული რხევის განტოლება, რომლის სიხშირეა

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda(1 - n)}.$$

მეორე ნაწილაკის რხევის განტოლება იქნება

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} + \left\{ \omega_0^2 + \lambda \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\} s_2 = 0. \quad (\text{XIII, } 84)$$

ესეც არის $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda \left(1 - \frac{1}{n} \right)}$ სიხშირის მქონე ჰარმონიუ-

ლი რხევის განტოლება. მაშასადამე, როდესაც ერთი ნაწილაკის გადახრა მეორე ნაწილაკის გადახრის პროპორციულია, ორივე ნაწილაკი შესრულებს ჰარმონიულ რხევას, მაგრამ მათი სიხშირეები განსხვავებული იქნება. სიხშირეების განსხვავება გამოიწვევს იმას, რომ ღრთა განმავლობაში პროპორციულობა s_2 -სა და s_1 -ს შორის დაირღვევა და ნაწილაკების რხევები აღარ იქნება ჰარმონიული; იმისათვის, რომ ორივე ნაწილაკი ასრულებდეს ჰარმონიულ რხევას, აუცილებელია მათი სიხშირეები ტოლი იყოს. გამოვარკვეოთ n რიცხვის რა მნიშვნელობებისათვის იქნება შესრულებული ეს პირობა. ცხადია, ამისათვის უნდა შესრულდეს პირობა

$$\lambda \left(1 - n \right) = \lambda \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

ი. ი.

$$n^2 = 1, \quad n = \pm 1,$$

საიდანაც ვღებულობთ ორ შესაძლებლობას

$$s_2 = s_1 \quad (\text{XIII, } \underline{85})$$

და

$$s_2 = -s_1 \quad (\text{XIII, } 86)$$

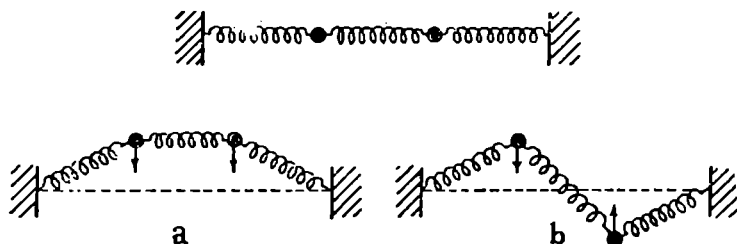
მხოლოდ ამ ორ შემთხვევაში იქნება ორივე ნაწილაკის (საქანის) რხევა სტაციონარული ჰარმონიული რხევა. პირველ შემთხვევაში ორივე ნაწილაკი ყოველთვის ერთი და იმავე სიდიდით და ერთნაირი მიმართულებით არის გადახრილი (ნახ. 207), მეორე შემთხვევაში გადახრა ერთი და იმავე სიდიდისაა, მაგრამ საწინააღმდეგო მიმართულების. პირველ რხევას (როცა $s_2 = s_1$) ეწოდება სიმეტრიული, მეორეს (როცა $s_2 = -s_1$) — ანტისიმეტრიული. რხევებს, როდესაც ყოველი ნაწილაკი ასრულებს სტაციონარულ ჰარმონიულ რხევას, ეწოდება ნორმალური რხევები. ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს ორი ნორმალური რხევა — სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული. სიმეტრიული რხევის სიხშირე უდრის ნაწილაკის საკუთარ სიხშირეს

$$\omega_s = \omega_0 \quad (\text{XIII, } 87)$$

და ნაკლებია, ვიდრე პარციალური სიხშირე. ანტისიმეტრიული რხევის სიხშირეა

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + 2\lambda} \quad (\text{XIII, 88})$$

და მეტია, ვიდრე პარციალური სიხშირე. ეს გასაგებიცაა, რადგან სიმეტრიული რხევის დროს ზამბარა არ არის გაჭიმული, ე. ი. ბმა არ მოქმედებს, ხოლო ანტისიმეტრიული რხევის დროს ზამბარა მაქსიმალურად იჭიმება და იკუმშება, რაც იწვევს წონასწორობის მდებარეობისაკენ დამბარუნებელი ძალის გადიდებას.

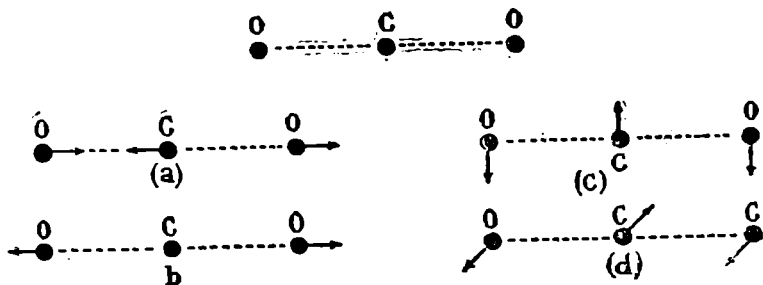


ნახ. 208

ბმული რხევების მაგალითს წარმოადგენს ორი ბურთულას რხევა, როდესაც ისინი დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან ზამბარით (ნახ. 208). შუა ზამბარა წარმოადგენს ბმას, ნახაზზე ნაჩვენებია ნორმალური რხევები. 208 ა ნახაზზე წარმოდგენილია სიმეტრიული რხევა, როდესაც ორივე ბურთულა ყოველთვის ერთი და იმავე სიდიდითა და მიმართულებით არის გადახრილი. ამ შემთხვევაში შუა ზამბარის დაჭიმულობა უცვლელია და ბურთულები ირხევა საკუთარი სიხშირეებით. 208 ბ ნახაზზე გამოსახულია ანტისიმეტრიული რხევა, როდესაც ბურთულები ყოველთვის ერთი სიდიდით, მაგრამ საწინააღმდეგო მიმართულებითაა გადახრილი. ამ შემთხვევაში შუა ზამბარა ყველაზე მეტად იჭიმება და იკუმშება და სათანადო სიხშირეც მეტია.

საზოგადოდ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის შემთხვევაში ყოველთვის არსებობს ნორმალური რხევები და მათი რიცხვი უდრის რხევითი მოძრაობის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს. განსაკუთრებით ინიშვნელოვანია თანამედროვე ატომურ-მოლეკულური ფიზიკისათვის მოლეკულების შემადგენელი ატომების რხევების განხილვა და სათანადო ნორმალური რხევების მოძებნა. ატომები მოლეკულაში დაკავშირებულია ერთმანეთთან მიზიდვი-

სა და განზიდვის ძალებით (ბმები) და ამიტომ მათ არ შეუძლიათ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი რხევების შესრულება—ერთი ატომის რხევა გავლენას ახდენს სხვა ატომების რხევებზე. 209-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სამატომიანი წრფივი მოლეკულის (მაგალითად, CO_2 -ის) ნორმალური რხევები. სამატომიან მოლეკულას სულ აქვს 9 თავისუფლების ხარისხი (ყოველ ატომს, განხილულს როგორც წერტილს, აქვს 3 თავისუფლების ხარისხი). ამ თავისუფლების ხარისხებიდან სამი გადატანითია (ინერციის ცენტრის სამი გადატანითი ხარისხი). გარდა ამისა, მოლეკულას, როგორც მყარ სხეულს, შეუძლია ორი ბრუნვა ატომ-

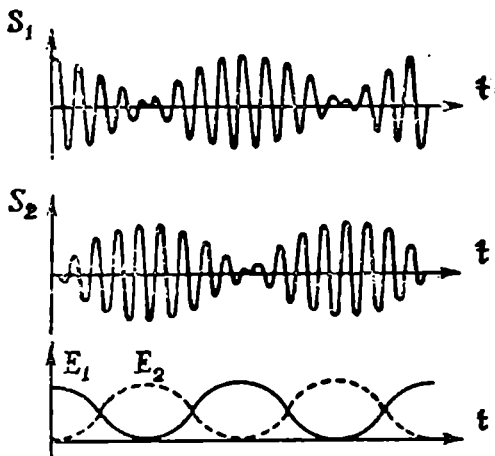


ნახ. 209

ბის განლაგების ხაზის მართობი ღერძების ირგვლივ. რხვეისათვის რჩება 4 თავისუფლების ხარისხი. 209-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ოთხი ნორმალური რხევა: 1. (209 a) ნორმალური რხევა ანტისიმეტრიულია მოლეკულის ცენტრის მიმართ—ერთი უანგბადის ატომი რომ უახლოვდება ცენტრს, მეორე შორდება; 2. (209 b) ნორმალური რხევა სიმეტრიულია; 3. (209 c) და (209 d) ნორმალური რხევები წარმოადგენენ ურთიერთმართობ სიბრტყეში წარმოებულ გამლუნავ რხევებს (ამ რხევების დროს ატომები აღარ მდებარეობს ერთ სწორ ხაზზე). მათი სიხშირეები ტოლია. ანტისიმეტრიულ რხევას უფრო მეტი სიხშირე აქვს, ვიდრე სიმეტრიულს.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როდესაც საწყისი პირობები ისეთია, რომ სისტემა არ ასრულებს ნორმალურ რხევას. ცხადია, ამ შემთხვევაში ნაწილაკების რხევა აღარ იქნება სტაციონარული და არც პარმონიული. თუ, მაგალითად, ერთი საქანი საწყის მომენტში წონასწორობის მდებარეობაშია, ხოლო მეორე მაქსიმალურად გადახრილია, დავინახავთ, რომ მეორე საქანის რხევის განმავლობაში პირველი საქანიც იწყებს თანდათანობით რხევის გაძლიერებას. მეორე საქანის რხევის

ამპლიტუდა თანდათან მცირდება, პირველის ამპლიტუდა კი სათანადოდ იზრდება. ბოლოს, დადგება მომენტი, როდესაც მეორე საქანი გაჩერდება, ხოლო პირველის რხევა მაქსიმალური სიძლიერის იქნება. შემდეგ დაიწყება შებრუნებული პროცესი: შესუსტდება პირველი საქანის რხევა და ისევ გაძლიერდება მეორე საქანის რხევა. ეს გადაცემა მოძრაობას ერთი საქანიდან ან საზოგადოდ ერთი ნაწილაკიდან მეორეზე განუწყვეტლივ იწარმოებს, სანამ ხახუნის ძალების გავლენით მოძრაობა საერთოდ არ შეწყდება. 210-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ნაწილაკთა რხევების გრაფიკები განსახილველი მოძრაობის შემთხვევაში. ნათ-



ნახ. 210

ლად ჩანს ერთი ნაწილაკის რხევის შესუსტება და მეორის რხევის გაძლიერება. ასეთი რხევების დროს წარმოებს ენერჯიის გადაცემა ერთი ნაწილაკიდან მეორეზე და შებრუნებით.

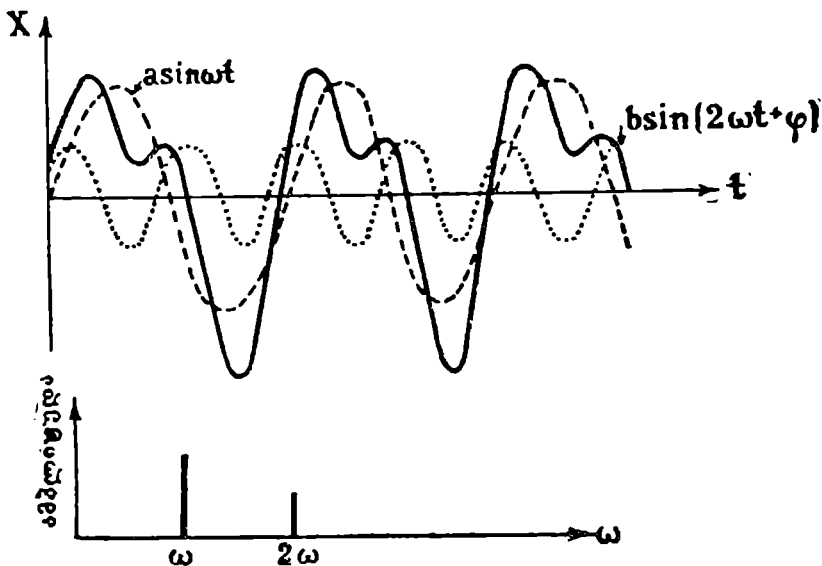
§ 90. ნივთიერის მოძრაობის დაშლა ჰარმონიულ რხევებად

რხევათა შეკრების განხილვის დროს გამოვარკვეეთ, რომ რამდენიმე ჰარმონიული რხევის შეკრება გვაძლევს საკმაოდ რთული ხასიათის პერიოდულ მოძრაობას, რომლის სახე დამოკიდებულია შესაკრები რხევების სიხშირეზე, ამპლიტუდაზე და საწყის ფაზათა სხვაობაზე. ბუნებრივად ისმის კითხვა, ხომ არ შეიძლება ნაწილაკის ნებისმიერი მოძრაობა წარმოვიდგინოთ როგორც რამდენიმე ჰარმონიული რხევის

ჯამი. ვინაიდან ნებისმიერი მოძრაობის განტოლება გამოისახება ფორმულით

$$x = f(t),$$

დასმული საკითხი დაიყვანება შემდეგ მათემატიკურ ამოცანაზე. შეიძლება თუ არა ნებისმიერი ფუნქცია წარმოდგენილ იქნეს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ჯამის სახით. უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მტკიცდება, რომ ყოველი პერიოდული ფუნქცია, ე. ი.



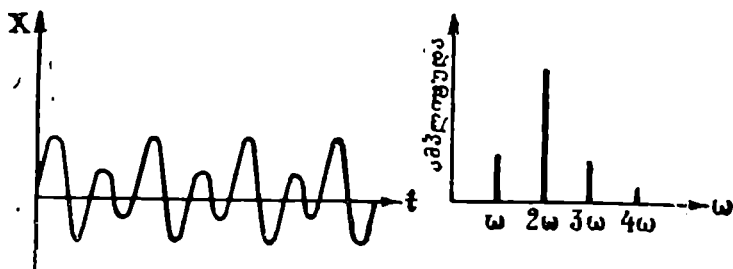
ნახ. 211

ფუნქცია, რომელიც გარკვეული პერიოდის შემდეგ იმეორებს თავის მნიშვნელობას, შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ჯამის სახით (დაშლა ფურიეს მწკრივად); მაგალითად, 211-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ფუნქცია (მთლიანი ხაზი), რომელიც გამოხატავს ნაწილაკის პერიოდულ, მაგრამ არაჰარმონიულ მოძრაობას, შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ორი ჰარმონიული მოძრაობის ჯამის სახით (პუნქტირირანი მრუდები). ერთ-ერთ რხევას ისეთივე სიხშირე აქვს, როგორც დასაშლელ პერიოდულ მოძრაობას, მეორე რხევის სიხშირე კი ორჯერ მეტია. ჰარმონიულ რხევას, რომლის სიხშირე

ტოლი დასაშლელი მოძრაობის სიხშირისა, ძირითადი ტონი ეწოდება. მისი ჯერადი სიხშირის (ჩვენს შემთხვევაში გარკვევებული სიხშირის) მქონე რხევას ეწოდება ჰარმონიული ობერტონი. ნახაზზე მოყვანილია დასაშლელი მოძრაობის სპექტრი, ე. ი. გრაფიკი, რომელიც გვჩვენებს, თუ რა სიხშირისა და ამპლიტუდის ჰარმონიული რხევისაგან შედგება განსახილველი მოძრაობა. ანსისთა ლერძზე გადაზომილია სიხშირე, ხოლო ორდინატა ლერძზე—ამპლიტუდა. როგორც ვხედავთ, განსახილველი მოძრაობის სპექტრი შედგება ორი ხაზისაგან — ერთის სიხშირეა ω , მეორისა— 2ω .

ასევე შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ნებისმიერი პერიოდული მოძრაობა. იგი ყოველთვის დაიშლება ჰარმონიულ რხევებად, რომელთა სიხშირეები არის ძირითადი ტონის სიხშირის ჯერადი: ω , 2ω , 3ω , ... თვით ძირითადი ტონის სიხშირე თანხვდება დასაშლელი მოძრაობის სიხშირეს: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, სადაც T არის მისი პერიოდი. რაც უფრო მეტად

განსხვავდება განსახილველი მოძრაობა ჰარმონიული მოძრაობისაგან, მით უფრო რთულია მისი სპექტრი, ე. ი. ჰარმონიული მოძრაობების მით უფრო მეტ რაოდენობად იშლება იგი. ჰარმონიულ ობერტონებს სხვადასხვა ამპლიტუდა აქვს და შეიძლება რომელიმე მათგანის ამპლიტუდა მეტი იყოს, ვიდრე ძირითადი ტონის ამპლიტუდა; მაგალითად, 212-ე ნახაზზე მოყვანილია პერიოდული მოძრაობა და მისი სპექტრი,

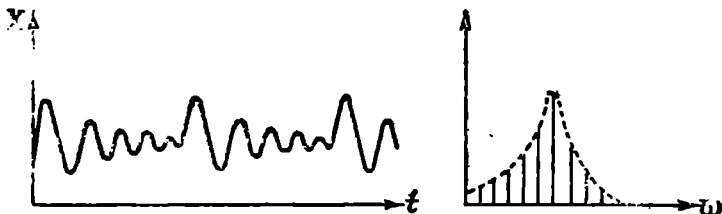


ნახ. 212

რომელიც შედგება ოთხი ხაზისაგან ω , 2ω , 3ω და 4ω სიხშირეებით. კიდევ უფრო რთულია სპექტრი პერიოდული რხევისა, რომელიც მოცემულია 213-ე ნახაზზე. მისი მონაკვეთი, რომელიც მეორდება T პერიოდის შემდეგ, ძალიან წააგავს მიღვევად რხევას; მისი სპექტრი შედგება სხვადასხვა ამპლიტუდის მქონე ჰარმონიული მდგენელებისაგან.

ამპლიტუდების ბოლო წერტილებზე გავლებული პუნქტირიანი ხაზი გვიჩვენებს ამპლიტუდის ცვალებადობას სიხშირის მიხედვით.

როგორც ვხედავთ, ყოველი პერიოდული მოძრაობა შეიძლება დაიშალოს ჰარმონიულ რხევებად, რომელთა სიხშირეები ერთმანეთის ჯერადია, ამპლიტუდების სიდიდე კი დამოკიდებულია მოძრაობის ხასიათზე. შესაძლებელია შემთხვევები, როდესაც ზოგიერთი ჰარმონიული ობერტონის ამპლიტუდა ნულის ტოლია, რაც იმის მიჩვენებელია, რომ ამ სიხშირის ჰარმონიული რხევა არ შედის დაშლაში (არის შემთხვევები, როდესაც ძირითადი ტონიც კი არ შედის დაშლაში).



ნახ. 213

ბუნებრივად ისმის კითხვა, შეიძლება თუ არა ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით წარმოვადგინოთ არაპერიოდული მოძრაობა? განვიხილოთ, მაგალითად, არაპერიოდული მოძრაობა, რომლის განტოლება არის

$$x = A(1 - \sin \Omega t) \sin \omega t. \quad (\text{XIII, 89})$$

ეს მოძრაობა შეიძლება ჩავთვალოთ ω სიხშირის „ჰარმონიულ“ რხევად, რომლის ამპლიტუდა

$$A(1 - \sin \Omega t)$$

თვითონ იცვლება პერიოდული კანონის მიხედვით. ეს რხევა შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$x = A \sin \omega t + \frac{A}{2} \sin(\omega + \Omega) t - \frac{A}{2} \sin(\omega - \Omega) t, \quad (\text{XIII, 90})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ იგი შედგება სამი ჰარმონიული რხევისაგან, სიხშირეებით ω , $\omega + \Omega$, $\omega - \Omega$. რომლებიც არაა ერთმანეთის ჯერადი. ის თვისება, რომ მისი შემადგენელი ჰარმონიული რხევების სიხშირეები არაა ერთმანეთის ჯერადი, დამახასიათებელია ყოველი არაპერიოდული

დული რხვეისათვის. ნებისმიერი არაპერიოდული მოძრაობის ზოგად შემთხვევაში მისი შემადგენელი ჰარმონიული რხვეების რიცხვი შეიძლება უსასრულოდ ღიდი იყოს, ხოლო სათანადო სიხშირეები შეიძლება ნებისმიერად ახლოს იყოს ერთმანეთთან; მაგალითად, მიღებული აპერიოდული რხევა, რომლის განტოლებაა

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi),$$

შეიცავს უსასრულოდ მახლობელი სიხშირეების მქონე ჰარმონიული რხევების უსასრულო რიცხვს. სათანადო სპექტრი იქნება უწყვეტი.

თ ა ვ ი მ ა თ ო თ ხ მ ა ტ ა

გ რ ა ვ ი ტ ა ც ი უ ლ ი უ რ თ ი ე რ თ ქ მ ე დ ე ბ ა

§ 91. გ რ ა ვ ი ტ ა ც ი უ ლ ი უ რ თ ი ე რ თ ქ მ ე დ ე ბ ა ს ხ ა ნ ი ა თ ი და ნ ი უ ტ ო ნ ის კ ა ნ ო ნ ი

ამ თავში განვიხილავთ სხეულთა ურთაერთქმედების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს სახეს ე. წ. გრავიტაციულ ურთაერთქმედებას. მას ხშირად აგრეთვე მსოფლიო მიზიდულობას უწოდებენ. თუმცა ამ ურთაერთქმედებით გამოწვეული მოვლენები (სხეულების ვარდნა დედამიწაზე, გასროლილი სხეულების მოძრაობა, პლანეტების და სხვა ციური სხეულების მოძრაობა, ზღვების მიმოქცევა და მრავალი სხვ.) დიდი ხანია ცნობილი იყო ადამიანისათვის, მხოლოდ XVII საუკუნეში დიდი ინგლისელი ფიზიკოსის ი. ნიუტონის მიერ პირველად იქნა გამოარკვეული მისი უნივერსალური ხასიათი და დადგენილი მისი განმსაზღვრელი კანონი. მას შემდეგ, რაც ნიუტონმა დაადგინა მექანიკის ზოგადი კანონები და გამოარკვია ძალასა და აჩქარებას შორის არსებული კავშირი, მის წინაშე შემდეგი კითხვა დაისვა—ხომ არ არსებობს კავშირი დედამიწაზე სხეულის ვარდნის გამომწვევ ძალასა (სიმძიმის ძალას) და იმ ძალას შორის, რომელიც ამოძრავებს ციურ სხეულებს გარკვეულ ორბიტებზე და, კერძოდ, მთვარეს დედამიწის ირგვლივ? დაკვირვებებისა და გამოთვლების საფუძველზე ნიუტონმა დაამტკიცა, რომ ეს ძალები ერთი და იმავე ბუნებისაა და გამოთქვა მოსაზრება, რომ ეს ურთაერთქმედება ყველა სხეულს შორის არსებობს. ამ ძალას მან მსოფლიო მიზიდულობის, ანუ გრავიტაციული, ძალა უწოდა (გრავიტას ლათინურად სიმძიმეს ნიშნავს). გრავიტაციული ძალის დამოკიდებულება სხეულების დამახასიათებელი სიდიდეებისა (მასის, ფორმის, სხეულის შიგნით მასების განაწილების) და მანძილისაგან ნებისმიერი სახის სხეულებისათვის საკმაოდ რთულია. ყველაზე მარტივ სახეს ეს დამოკიდებულება ღებულობს ნივთიერი წერტილების შემთხვევაში, როდესაც სხეულთა ზომები

იმდენად მცირეა მათ შორის მანძილთან შედარებით, რომ შესაძლებელია მათი უგულვებელყოფა. ამ შემთხვევისათვის ნიუტონმა შემდეგი კანონი ჩამოაყალიბა:

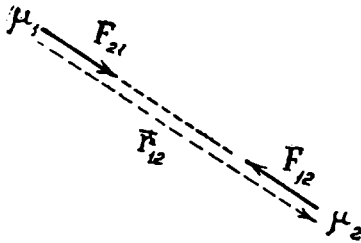
ყოველი ორი ნივთიერი წერტილი მიიზიდება ერთიმეორისაკენ ძალით, რომელიც ამ წერტილების გრავიტაციული მასების პირდაპირპროპორციული და მათ შორის მანძილის უკუპროპორციულია.

ჩვენ მიერ მოყვანილ ჩამოყალიბებაში, ნიუტონის მიერ ჩამოყალიბებისაგან განსხვავებით, გამოყენებულია გრავიტაციული მასის ცნება. ეს ცნება პირველად გვხვდება და ამიტომ საჭიროა მისი შინაარსის გარკვევა. მოძრაობის კანონების განხილვისას შემოვიღეთ ე. წ. ინერტული მასის ცნება, რომელიც ახასიათებს სხეულების ინერციულობას, ე. ი. მათ თვისებას მეტად თუ ნაკლებად შეიცვალონ სიჩქარე მათზე გარეშე სხეულების მოქმედების შედეგად. მაშასადამე, ინერტული მასა სხეულის სრულიად გარკვეული თვისების დამახასიათებელია: სხეულის მასა მით უფრო მეტია, რაც უფრო ნაკლებად იცვლის იგი სიჩქარეს გარეშე ძალის მოქმედების გავლენით. მსოფლიო მიზიდულობა, ანუ გრავიტაციული ურთიერთქმედება, არავითარ კავშირში არ არის ინერციულობასთან. იგი სხეულთა სულ სხვა თვისების გამომხატველია: გვიჩვენებს როგორი ძალით იზიდავს ერთი სხეული მეორეს ან როგორი ძალით მიიზიდება იგი ამ მეორე სხეულის მიერ. ამიტომაც გრავიტაციული ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდე, რომელსაც გრავიტაციული მასა ვუწოდეთ, შეიძლება არ იყოს იგივე, რაც სხეულის ინერტული მასა. იგი უნდა გვინახიათებდეს სხეულის თვისებას— მიიზიდოს სხვა სხეულები ან მიიზიდულ იქნეს სხვა სხეულის მიერ. მაშასადამე, თავისთავად არსაიდან არ გამომდინარეობს, რომ გრავიტაციული და ინერტული მასები ერთი და იგივეა. მხოლოდ ცდების საშუალებით შეიძლება გაირკვეს მათ შორის არსებული კავშირი. ამ კავშირს ჩვენ შემდეგ დავადგენთ. მისი არსებობა კარგად იყო ცნობილი კლასიკური ფიზიკისათვის, მაგრამ ამავე დროს იგი წარმოადგენდა ფრიად უცნაურ ფაქტს, სრულიად გაუგებარს იმდროინდელი მეცნიერების თვალსაზრისით.

ჩამოყალიბებით ახლა ნიუტონის კანონი მათემატიკურად. განსახილველი წერტილების გრავიტაციული მასები იყოს μ_1 და μ_2 , ხოლო მათ შორის მანძილი— r . მაშინ გრავიტაციული ძალის სიდიდისათვის ნიუტონის კანონის თანახმად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$F' = \gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}, \quad (\text{XIV}, 1)$$

სადაც γ არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეების ერთეულების არჩევაზე. მას გრავიტაციული მუდმივა ეწოდება. მოყვანილი ფორმულა არ გამოხატავს სრულად გრავიტაციული ურთიერთქმედების ხასიათს. მართლაც, გრავიტაციული ძალა მიზიდვის ხასიათისაა და იგი მოქმედებს წერტილების შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ. იმისათვის,



ნახ. 214

რომ დავწეროთ ფორმულა, რომელიც განსაზღვრავს გრავიტაციულ ძალას როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით, შემდეგნაირად მოვიქცეთ. გავავლოთ μ_1 მასის მქონე წერტილიდან μ_2 მასის მქონე წერტილისაკენ \vec{r}_{12} რადიუს-ვექტორი (ინდექსები გვიჩვენებს, რომ ეს ვექტორი მიმართულია პირველი წერტილიდან მეორისაკენ). ასევე შეიძლება გა-

მიმართოს \vec{r}_{21} რადიუს-ვექტორი, მიმართული მეორე წერტილიდან პირველი წერტილისაკენ. ცხადია, რომ (ნახ. 214),

$$\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}.$$

ანალოგიური აღნიშვნები შემოვიღოთ გრავიტაციული ძალებისათვის, რომლებიც პირველ და მეორე წერტილებზე მოქმედებს. \vec{F}_{12} იყოს ძალა, რომლითაც პირველი ნაწილაკი მოქმედებს მეორეზე, ხოლო \vec{F}_{21} ძალა, რომლითაც მეორე ნაწილაკი მოქმედებს პირველზე. მაშინ ნიუტონის კანონი შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = -\gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r_{21}^2} \vec{r}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (\text{XIV}, 2)$$

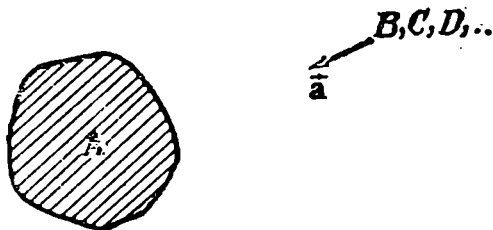
ნიშანი მინუსი იმის მაჩვენებელია, რომ \vec{F}_{12} ძალა \vec{r}_{12} რადიუს-ვექტორის საწინააღმდეგოდაა მიმართული, ე. ი. მეორე ნაწილაკზე მოქმედი ძალა პირველი ნაწილაკისაკენაა მიმართული (მიზიდვა). აგრეთვე \vec{F}_{21} მიმართულია \vec{r}_{21} -ის საწინააღმდეგოდ. თუკი ჩვენ გვაინტერესებს ძალის სიდიდე და არა მიმართულება, საკმარისია დავწეროთ წინა ფორმულები სკალარული სახით. მივიღებთ

$$F_{12} = \gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r_{12}^2} = F_{21},$$

ე. ი. მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულობას; მაშასადამე, (XIV, 2) ფორმულა წარმოადგენს ნიუტონის კანონის სრულ გამოხატულებას — იგი გვიჩვენებს მიზიდვის მიმართულებასა და სიდიდეს. სანამ გამოვარკვევდეთ რა ერთეულებით უნდა გაიზომოს გრავიტაციული მასა და როგორია გრავიტაციული მუდმივა, განვიხილოთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების ერთი მნიშვნელოვანი თვისება, რომელიც მკვეთრად ასხვავებს მას სხვა სახის ურთიერთქმედებებისაგან (ელექტრომაგნიტური, ბირთვული) და რომელიც საშუალებას მოგვცემს დავაკავშიროთ ერთიმეორესთან გრავიტაციული და ინერტული მასები.

§ 92. გრავიტაციული აჩქარების დამოუკიდებლობა სხეულისაგან. გრავიტაციული და ინერტული მასები

უკვე გალილეის მიერ იყო შემჩნეული, რომ თუ არ მივიღებთ მხედველობაში ჰაერის წინააღმდეგობას, ყველა სხეული ერთი და იმავე აჩქარებით ვარდება დედამიწაზე. როგორც შემდეგი ზუსტი ცდებით გამოიკვეა, ვარდნილ სხეულთა აჩქარება (დედამიწის მოცემულ ადგილას) სრულებით არაა დამოკიდებული სხეულთა მასებზე, მათ გვარობასა და შემადგენლობაზე. დამტკიცდა, რომ ეს თვისება დამახასიათებელია ყოველ



ნახ. 215

ელი გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის და არა მხოლოდ დედამიწაზე ვარდნილი სხეულებისათვის. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, რაიმე A სხეულის გავლენით მისგან გარკვეულ მანძილზე მყოფი B ნივთიერი წერტილი ღებულობს \vec{a} აჩქარებას (ნახ. 215). მოვაცილოთ ახლა A სხეულს B წერტილი და მის მაგიერ იმავე ადგილას მოვათავსოთ სხვა C წერტილი. დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ C წერტილის აჩქარება ისეთივე იქნება, როგორიც B წერტილისა. საზოგადოდ რა წერტილიც უნდა მოვათავსოთ მოცემულ ადგილას, აჩქარება ყოველთვის ერთი და იგივე იქნება (უცვლელი A სხეულის შემთხვევაში). გრავიტაციული ურთიერთქმედების ამ შესანიშნავი თვისების დამამტკიცებელ

მარტივ ცდას წარმოადგენს ნიუტონის ცნობილი ცდა სხვადასხვა სხეულის ერთი და იმავე აჩქარებით ვარდნისა ჰაერამოტუმბულ ზანის მილში. შემდეგში აღეწერთ ზოგიერთ ცდას, რომელიც ნათლად და დიდი სიზუსტით ამტკიცებს გრავიტაციული ურთიერთქმედების ამ თვისებას. გამოვარკვით, რა შედეგს იძლევა გრავიტაციული ურთიერთქმედების ეს თვისება. ვთქვათ, A სხეულის გრავიტაციული მასაა μ_A . B , C და ა. შ. სხეულების გრავიტაციული და ინერტული მასები იყოს μ_B და m_B , μ_C და m_C და ა. შ. მაშინ ძალები, რომლებითაც A სხეული მოქმედებს B , C და ა. შ. სხეულებზე იქნება (სკალარულად)

$$F_B = \gamma \frac{\mu_A \mu_B}{r^2}, F_C = \gamma \frac{\mu_A \mu_C}{r^2} \text{ და ა. შ.},$$

სადაც r არის მანძილი B , C და ა. შ. სხეულებიდან A სხეულამდე (ყველასათვის ერთი და იგივე). როგორც ვხედავთ, ძალები დამოკიდებულია B , C და ა. შ. სხეულების გრავიტაციულ მასებზე. მაგრამ თუ ვიცით, რა ძალები მოქმედებს სხეულზე, შეიძლება გამოვთვალოთ სათანადო აჩქარებანი. ამისათვის ძალები უნდა გავყოთ სათანადო ინერტულ მასებზე. მივიღებთ

$$a_B = \frac{F_B}{m_B} = \gamma \frac{\mu_A \mu_B}{m_B r^2}, a_C = \frac{F_C}{m_C} = \gamma \frac{\mu_A \mu_C}{m_C r^2}, \dots \quad (\text{XIV, 3})$$

ზემომოყვანილი თვისების შედეგად ყველა სხეული (B , C , ...) ერთ და იმავე აჩქარებებს ღებულობს, ე. ი.

$$a_B = a_C = \dots, \quad (\text{XIV, 4})$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\gamma \frac{\mu_A \mu_B}{m_B r^2} = \gamma \frac{\mu_A \mu_C}{m_C r^2} = \dots,$$

ე. ი.

$$\frac{\mu_B}{m_B} = \frac{\mu_C}{m_C} = \dots \quad (\text{XIV, 5})$$

მივიღეთ, რომ გრავიტაციული და ინერტული მასების შეფარდება ყველა სხეულისათვის ერთი და იგივეა—გრავიტაციული მასა ინერტული მასის პროპორციულია. შებრუნებულად, თუ გრავიტაციული მასა ინერტული მასის პროპორციულია, ყველა სხეულს ერთი და იგივე აჩქარება ექნება. მართლაც, თუ ერთ სხეულს ორჯერ მეტი გრავიტაციული მასა აქვს, ვიდრე მეორეს, მაშინ მასზე მოქმედი ძალა ორჯერ მეტი იქნება, ვიდრე მეორეზე მოქმედი. მაგრამ გრავიტაციული და ინერტული მასების პროპორციულობის თანახმად პირველ სხეულს

ორჯერვე მეტი ინერტული მასა ექნება. ამიტომ მისი აჩქარება ისეთივე იქნება, როგორც მეორე სხეულისა.

გრავიტაციულ და ინერტულ მასათა შორის პროპორციულობის კოეფიციენტი უნივერსალური მუდმივაა, იგი არ არის დამოკიდებული არც სხეულის მასაზე, არც მის გვარობასა და შემადგენლობაზე. მისი რიცხვითი მნიშვნელობა მხოლოდ გრავიტაციული და ინერტული მასების ერთეულების შერჩევაზე იქნება დამოკიდებული. ინერტული მასის ერთეული უკვე არჩეული გვაქვს—ეს არის გრამი. გრავიტაციული მასის ერთეული ჯერ არ აგვირჩევია. ცხადია, რომ მისი არჩევა ნებისმიერია, ე. ი. შეგვიძლია ნებისმიერი სხეული ავირჩიოთ გრავიტაციული მასის ეტალონად. მაგრამ ყველაზე უფრო ხელსაყრელია ასეთ ეტალონად ავარჩიოთ ინერტული მასის ეტალონი, ე. ი. მივიღოთ, რომ ერთეულოვანი გრავიტაციული მასა აქვს ერთეულოვანი ინერტული მასის მქონე სხეულს. ცხადია, რომ ასეთი არჩევის შემდეგ გრავიტაციული მასა რიცხობრივად ინერტული მასის ტოლი გახდება და შეიძლება ყველა სხეულისათვის მივიღოთ

$$\mu = m. \quad (\text{XIV}, 6)$$

ჩვენ სწორედ ასეც მოვიქცევით, ე. ი. ჩავთვლით, რომ გრავიტაციული მასა ინერტული მასის ტოლია.

ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ სხეულის ორი, პირველი შეხედვით ერთმანეთსაგან განსხვავებული თვისება—ინერცია და გრავიტაცია (სიმძიმე) მჭიდროდა დაკავშირებული ერთიმეორესთან. რამდენადაც უფრო მეტად ინერტულია სხეული, მით უფრო ძლიერად მიიზიდება იგი სხვა სხეულების მიერ ან თვითონ მიიზიდავს მათ.

ჩვენ იმდენად შევეჩვიეთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების ამ თვისებას, რომ სრულებითაც არ გვაკვირს ეს. მაგრამ სხვა სახის ურთიერთქმედებებთან შედარება გვიჩვენებს, რომ ეს თვისება სრულებით არ არის თავისთავად ცხადი. მოვიგონოთ, მაგალითად, როგორი მდგომარეობა ელექტრული ურთიერთქმედების შემთხვევაში. ცნობილია, რომ ორი სხეული m_1 და m_2 ინერტული მასებით შეიძლება მოქმედებდეს ერთმანეთზე ელექტრულად მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მათ აქვთ ელექტრული მუხტები. ვთქვათ, ეს მუხტებია e_1 და e_2 , მაშინ კულონის კანონის თანახმად მათ შორის მოქმედი ძალა შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$F := \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

მსგავსად იმისა როგორც გრავიტაციული ურთიერთქმედების შემთხვევაში, გრავიტაციული მასების როლს ამ შემთხვევაშიც მუხტები ასრულებს. რაც უფრო მეტია ერთი ნიწილაკის მუხტი, მით უფრო მე-

ტი ძალით მიიზიდება (ან განიზიდება) იგი მეორე დამუხტული ნაწილაკის მიერ. მაგრამ, გრავიტაციული ურთიერთქმედებისაგან განსხვავებით ეს დიდი ელექტრული მუხტი სრულებითაც არ ნიშნავს დიდ ინერტულ მასას. არავითარი უშუალო კავშირი ელექტრულ მუხტსა და ინერტულ მასას შორის არ არსებობს. ასეთივე მდგომარეობაა ყველა სხვა ურთიერთქმედების შემთხვევაში. მხოლოდ გრავიტაციული ურთიერთქმედება გამოირჩევა იმ განსაკუთრებული თვისებებით, რომ მისი სიძლიერის დამახასიათებელი სიდიდე (გრავიტაციული მასა) ინერტული მასის პირდაპირპროპორციულია.

ყოველივე ზემოთქმული ცხადყოფს გრავიტაციული ურთიერთქმედების განსაკუთრებულ ხასიათს — მის მკიდრო კავშირს ინერციულობასთან. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, კლასიკური ფიზიკისათვის ეს კავშირი სრულად გაუგებარია. მხოლოდ აინშტაინის ზოგადმა ფარდობითობის თეორიამ გამოარკვია ამ კავშირის ღრმა საფუძველი და დაადგინა, რომ მატერიალური სხეულების ორი თვისება — გრავიტაცია და ინერცია მატერიის ერთი თვისების ორ მხარეს გამოხატავს. ფიზიკის ზოგად კურსში შეუძლებელია ამ საკითხის დაწვრილებით განხილვა, მისი სირთულის გამო, და ამიტომაც ჩვენ მასზე მეტს აღარ შევჩერდებით.

მას შემდეგ, რაც გამორკვეულია, რომ ერთეულების სათანადო შერჩევით გრავიტაციული მასა შეიძლება ინერტულ მასას გავუტოლოთ, ნიუტონის კანონი ჩვეულებრივ სახეს მიიღებს

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (\text{XIV, 7})$$

სადაც m_1 და m_2 უკვე ნაწილაკთა ინერტული მასებია. შემდეგში ჩვენ ყოველთვის ამ ფორმულას გამოვიყენებთ. ახლა უკვე ადვილია γ გრავიტაციული მუდმივას განსაზღვრა. თუ წინა ფორმულას სკალარულად დავწერთ, მივიღებთ

$$F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

ვთქვათ, განხილულია ერთიმეორისაგან ერთი სანტიმეტრის მანძილით დაშორებული თითო გრამ-მასის მქონე ორი ნაწილაკი, ე. ი. მიღებულია, რომ $m_1 = m_2 = 1 \text{ gr}$ და $r_{12} = 1 \text{ cm}$. მაშინ წინა ფორმულა მოგვცემს

$$\gamma = F_{12}.$$

მაშასადამე, გრავიტაციული მუდმივა იზომება იმ ძალით, რომლითაც მიიზიდება ერთმანეთისაკენ ერთი სანტიმეტრით დაშორებული და თითო გრამ-მასის მქონე ორი ნაწილაკი. დაკვირვებები და გაზომვები γ -სათვის შემდეგ რიცხვით მნიშვნელობას იძლევიან:

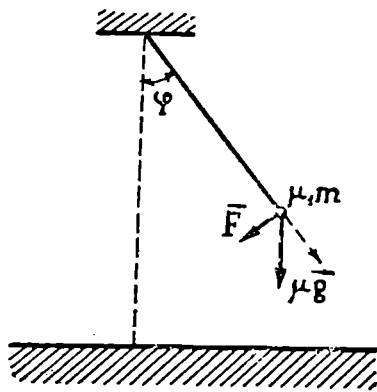
$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \text{gr}^{-2} \approx \frac{1}{15\,000\,000} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \text{gr}^{-2}.$$

გრავიტაციული მუდმივას ასეთი მცირე მნიშვნელობა (CGS სისტემაში) გვიჩვენებს, რომ ყოველდღიური ცხოვრების პირობებში გრავიტაციული ურთიერთქმედება თითქმის შეუმჩნეველია (გარდა დედამიწის მიზიდვისა). მართლაც, ადვილად შეიძლება გამოვითვალოთ, რომ ძალა, რომლითაც ერთიმეორისაკენ მიიზიდება, მაგალითად, თითო კილოგრამი მასის მქონე სხეულები, ერთ სანტიმეტრის მანძილზე იზომება დინის შესადარებლად. ასეთი მცირე ძალის შემჩნევა საკმაოდ ძნელია. მხოლოდ დიდი მასის სხეულების შემთხვევაში (ვარსკვლავები, პლანეტები და სხვ.) ხდება გრავიტაციული ურთიერთქმედება მნიშვნელოვანი და განმსაზღვრელი მათი მოძრაობისა.

ექსპერიმენტებს, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება γ -ს გაზომვა, ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ.

§ 93. გრავიტაციული და ინერტიული მასების პროპორციულობის დამამტკიცებელი ცდები

პირველი ცდა, რომელიც მიზნად ისახავდა გრავიტაციულ და ინერტიულ მასებს შორის კავშირის გამორკვევას, ჩატარებული იყო თვით ნიუტონის მიერ; ამისათვის მან შეარჩია საქანის რხევის პროცესი. განვიხილოთ საქანი, რომლის სიგრძეა l , ხოლო მასა m (ინერტიული მასა). აღვნიშნოთ მისი გრავიტაციული მასა μ -თი. გადავხაროთ საქანის ძატი φ კუთხით და გამოვითვალოთ მასზე მოქმედი სიმძიმის ძალის ის მდგენელი, რომელიც აბრუნებს მას წონასწორობის მდებარეობისაკენ (ნახ. 216), როგორც ნახავენ გვიჩვენებს, ეს ძალა იქნება



ნახ. 216

$$F = - \mu g \sin \varphi.$$

ცხადია, რომ იგი პროპორციულია საქანის ბირთვის გრავიტაციული მასისა. მცირე გადახრებისათვის $\sin \varphi$ შეიძლება შევცვალოთ თვით φ კუთხით და მივიღებთ

$$F = - \mu g \varphi.$$

(XIV, 8)

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად ეს ძალა ტოლი უნდა იყოს საქანის ბირთვის ინერტული მასის ნამრავლისა აჩქარებაზე და ამიტომ მოძრაობის დინამიკური განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\mu g \varphi.$$

რადგან $s = l\varphi$, მივიღებთ

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\mu g \varphi$$

ან

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\mu g}{ml} \varphi = 0. \quad (\text{XIV, 9})$$

რხევითი მოძრაობის განხილვიდან ვიცით, რომ ეს განტოლება არის პარამონიული რხევის განტოლება. რხევის პერიოდისათვის გვექნება

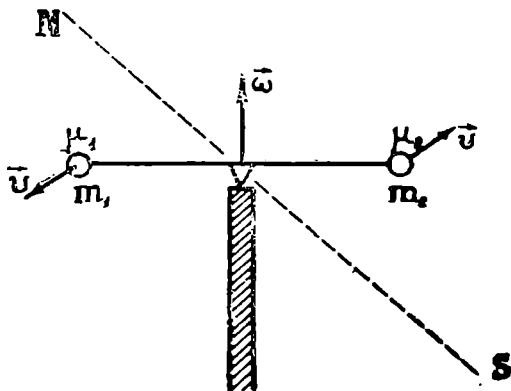
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{\mu g}}. \quad (\text{XIV, 10})$$

ასეთი უნდა იყოს მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდი თუ, რასაკვირველია, თავიდანვე არ არის ჩათვლილი, რომ გრავიტაციული და ინერტული მასები ტოლია. ჩვენ ვხედავთ, რომ საქანის პერიოდი მუდმივი სიგრძის და მუდმივი g -ს შემთხვევაში დამოკიდებული უნდა იყოს ინერტული და გრავიტაციული მასების შეფარდებაზე. სწორედ ამ გარემოებით ისარგებლა ნიუტონმა ინერტულ და გრავიტაციულ მასებს შორის კავშირის გამოსარკვევად. მან დაამზადა სხვადასხვა მასალისა და მასის, მაგრამ ერთი და იმავე სიგრძის საქანები და ექსპერიმენტულად გაზომა მათი რხევის პერიოდები. აღმოჩნდა, რომ იმ სიზუსტით, რომლითაც მას შეეძლო გაზომვათა წარმოება, ყველა საქანის პერიოდი ერთი და იგივეა. აქედან ნათლად გამომდინარეობდა, რომ ინერტული და გრავიტაციული მასების შეფარდება არ არის დამოკიდებული სხეულის გვარობასა და მასაზე.

იგივე ცდები, გაცილებით უფრო დიდი სიზუსტით, გაიმეორა ცნობილმა გერმანელმა ასტრონომმა ბესელმა (XIX საუკუნის პირველი ნახევარი) და მიიღო იგივე შედეგი: ინერტული და გრავიტაციული მასების შეფარდება ყველა სხეულისათვის ერთი და იგივეა.

კიდევ უფრო ზუსტად შეამოწმა ეს შედეგი ცნობილმა უნგრელმა ფიზიკოსმა და გეოფიზიკოსმა ეტვეშმა XIX საუკუნის ბოლოს. ამისათვის მან გამოიყენა თავისი გრეხითი სასწორი. გრეხითი სასწორის ბერკეტის ბოლოებზე მან მოათავსა სხვადასხვა ნივთიერების, მაგრამ ტო-

ლი გრავიტაციული მასის (წონის) სხეულები (ნახ. 217). როგორც ვიცით, ბერკეტის ბრუნვის დროს ამ სხეულებზე იმოქმედებს მათი ინერტული მასის პროპორციული კორიოლისის ძალები. თუ ინერტული მასა გრავიტაციული მასის პროპორციული არ არის და მათი შეფარდება ნივთიერების გვარობაზეა დამოკიდებული, ბირთვებზე მოქმედი კორიოლისის ძალები ტოლი არ იქნება და ეს განსხვავება შეიძლება შეიმჩნეს ცდის ჩატარების დროს. ეტვეშის გრეხითი სასწორის დიდი მგრძობიარობის გამო ინერტული და გრავიტაციული მასების პროპორციულობა შექოწმებულ იქნა ძალიან დიდი სიზუსტით (10^{-8}) და



ნახ. 217

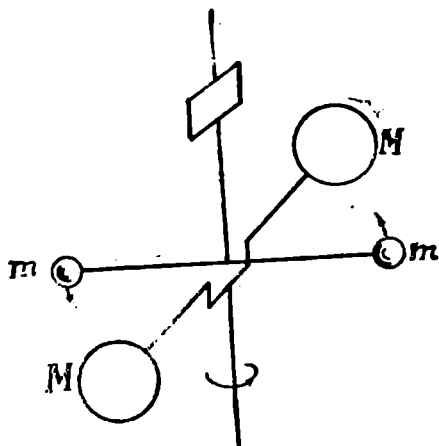
ამიტომ ეტვეშის ცდები ითვლება აღნიშნული პროპორციულობის დამამტკიცებელ ძირითად ცდებად.

ინერტული და გრავიტაციული მასების ტოლობა საშუალებას გვაძლევს გავზომოთ სხეულთა ინერტული მასები აწონის, ე. ი. მათი წონების შედარებით. თუ არ მივიღებთ მხედველობაში დედამიწის ბრუნვით გამოწვეულ ცენტრიდანულ ძალას, წონა, ე. ი. ძალა, რომლითაც სხეული აწევა საყრდენს (ჩვენს შემთხვევაში სასწორის თევშს), დედამიწის მიზიდვის ძალის ტოლი იქნება. თუ გრავიტაციული ველის დაძაბულობას g -თი აღვნიშნავთ, წონისათვის მივიღებთ

$$\vec{P} = \mu \vec{g},$$

სადაც μ არის სხეულის გრავიტაციული მასა. თუ სასწორის თევშებზე ორი სხვადასხვა სხეულის მოთავსების შემდეგ სასწორი წონასწორობაში დარჩა, სხეულთა წონა ტოლი ყოფილა და ამიტომ ტოლი ყოფილა მათი გრავიტაციული მასები. ვინაიდან ინერტული მასები გრავიტაციულის ტოლია, მივიღებთ ინერტული მასების ტოლობას.

გრაეიტაციული მუღმეჲს რიცხვითი მნიშენელობა პირველად ექსპერამენტულად განსაზღვრული იყო ინგლისელი ფიზიკოსის კეენდის მიერ XVII საუკუნის ბოლოს; ამისათვის მან გამოიყენა გრენითი სასწორი, რომელიც ახლა ძალიან ხშირად გამოიყენება სუსტი ძალების გააზომად; ამ სასწორის ძირითად ნაწილს შეადგენს მსუბუქი ბერკეტი, რომლის ბოლოებზე მოთავსებულია ტოლი მასის ლითონის ბირთვები (ნახ. 218). ბერკეტი დაკიდებულია წვრილ ძაფზე, რომელზეც



ნახ. 218

მიმაგრებულია მსუბუქი სარკე სინათლის სხივის არეკელისა და ძაფის გრენის კუთხის გაზომვისათვის. მეორე ბერკეტზე დაკიდებულია გაცილებით უფრო მეტი მასის ბირთვები; ამ ბერკეტის მობრუნება შესაძლებლობას იძლევა დაეუახლოვოთ დიდი მასის ბირთვები მცირე მასის ბირთვებს. საწყის მდებარეობაში დიდი ბირთვების შემაერთებელი ხაზი მართობი იყო მცირე ბირთვების შემაერთებელი ხაზისა და ამიტომ ბირთვების მიზიდვა გავლენას არ ახდენდა ბერკეტის მდებარეობაზე. ბერკეტის შემობრუნებით დიდი მასები უახლოვდება მცირე მასებს, რაც ცხადია, გამოიწვევს mm ბერკეტის მობრუნებას გარკვეული კუთხით. ეს მობრუნების კუთხე განისაზღვრება პირობით, M და m მასების გრაეიტაციული მიზიდვის ძალა ტოლი იყოს ძაფის გრენის დრეკადობის ძალისა. ვთქვათ, კუთხე, რომელზეც მობრუნდა ბერკეტი,

არის φ , თუ მგრეხავი ძალების მომენტს აღვნიშნავთ N -ით, შეიძლება დავწეროთ თანაფარდობა

$$N = k\varphi,$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია (პროპორციულობა გრეხის მომენტსა და გრეხის კუთხეს შორის, მცირე გრეხის შემთხვევაში არის შედეგი ჰუკის კანონისა, რომელსაც ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ სხეულების მექანიკური თვისებების გარჩევის დროს, მეორე ნაწილში). მეორე მხრივ, გრეხის მომენტი გამოითვლება როგორც მომენტი ლერძის მიმართ m მასებზე მოქმედი გრავიტაციული ძალებისა. თუ ამ ძალებს F -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$N = F \cdot l,$$

სადაც l არის ბერკეტის სიგრძე და იმავე დროს ძალთა წყვილის მხარი. აქედან M და m მასებს შორის მოქმედი ძალისათვის მივიღებთ

$$F = \frac{k}{l} \varphi.$$

თვით F ძალა გამოითვლება ნიუტონის კანონიდან, თუ ცნობილია M და m მასები და მათ შორის მანძილი (ბერკეტის მობრუნების შემდეგ):

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

(r არის მანძილი M და m ბირთვების ცენტრებს შორის). შედარება წინა ფორმულასთან გვაძლევს

$$\gamma = \frac{kr^2}{lMm} \varphi. \quad (\text{XIV.1 1})$$

ყველა სიდიდე ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში შეიძლება გაიზომოს ექსპერიმენტულად, გარდა k კოეფიციენტისა, რომლის განსაზღვრისათვის საჭიროა დამატებითი ცდის ჩატარება; ამისათვის მოვაშოროთ m მასებს დიდი მასები და მოვიყვანოთ გრეხით რხევაში ბერკეტი, ე. ი. განვიხილოთ ძაფზე დაკიდებული ბერკეტი როგორც გრეხითი საქანის ადვილად შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ ასეთი საქანის რხევის პერიოდი გამოისახება ფორმულით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}},$$

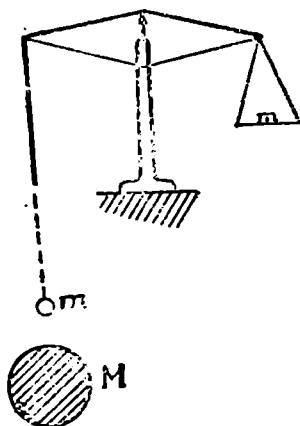
სადაც I არის ინერციის მომენტი. თუ არ მივიღებთ მხედველობაში მსუბუქი ბერკეტის მასას, ინერციის მომენტი ორი m ბირთვისა ბრუნვის ლერძის მიმართ იქნება

$$I = 2ml^2.$$

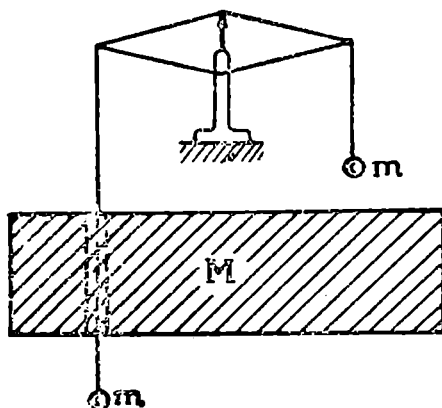
აქედან k -სათვის მივიღებთ

$$k = \frac{8\pi^2 ml^2}{T^2}.$$

რხევის პერიოდი ადვილად შეიძლება მოიძებნოს ექსპერიმენტულად, რაც საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ k ; მისი მნიშვნელობის ჩასმით (XIV, 11) ფორმულაში გამოვითვლით γ გრავიტაციულ მუდმივას. კავენდიშმა თავისი გაზომვების შედეგად მიიღო γ -სათვის შემდეგი მნიშვნელობა: $\gamma = 6,72 \cdot 10^{-8}$. კავენდიშის მეთოდით γ -ს განსაზღვრა მრავალჯერ იყო განმეორებული შემდეგში სხვა მეცნიერთა მიერ. გამოყენებული იყო აგრეთვე სხვა მეთოდები; მაგალითად, უოლის მიერ



ნახ. 219



ნახ. 220

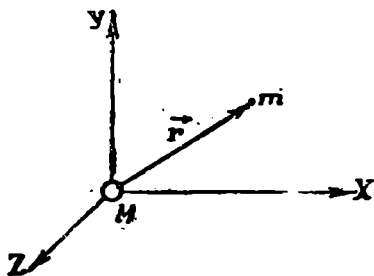
XIX საუკუნის 80-იან წლებში გამოყენებულ იქნა შემდეგი მეთოდი. გრძნობიერი სასწორის ქვეშ მოთავსებული იყო $5\frac{1}{2}$ ტონის ტყვიის ბირთვი, რომელიც იზიდავდა სასწორზე გაწონასწორებულ ტვირტს (ვერცხლისწყლის ბირტეს) (ნახ. 219). დამატებითი მიზიდვა ტყვიის ბირთვით იწვევდა წონასწორობიდან სასწორის გადახრას, რისი გაზომვაც ადვილი შესაძლებელი იყო.

კიდევ უფრო ზუსტი გაზომვები ჩაატარეს რინარცმა და კრიგარმენცელმა 1896 წელს. გრძნობიერი სასწორის ბერკეტზე ჩამოკიდებული იყო 1 kg მასის მქონე ორი ტვირთი. ერთ-ერთი მათგანი მოთავსებული იყო ძალიან დიდი ზომის ტყვიის ნაჭრის ზემოთ, ხოლო მეორე—მის ქვემოთ (ნახ. 220). ტყვიის ეს ნაჭერი აღიღებდა მის ზემოთ მოთავსებუ-

ლი ტვირთის წონას და ამცირებდა მის ქვემოთ მოთავსებული ტვირთის წონას. წონათა სხვაობის გაზომვა გრავიტაციული მუდმივას გამოთვლის საშუალებას იძლეოდა.

§ 95. ზრახვითი ურთიერთქმედების პოტენციური ურთიერთქმედების

როგორც ვიცით, ყოველი ურთიერთქმედება ხასიათდება გარკვეული სახის პოტენციური ენერგიით, რომელიც, ისევე როგორც ძალა, შეიძლება გამოვიყენოთ ამ ურთიერთქმედების დასახასიათებლად. ვინაიდან ჩვენთვის ცნობილია ზოგადი კავშირი ძალასა და პოტენციურ ენერგიას შორის, ძალის გამოხატულებიდან შეიძლება ვიპოვოთ სათანადო პოტენციური ენერგია. გამოთვლების გასამარტივებლად შევცვალოთ აღნიშვნები. ერთ-ერთი ნაწილაკის მასა აღვნიშნოთ M -ით და დავუშვათ, რომ იგი კოორდინატთა სათავეშია მოთავსებული. მეორე ნაწილაკი m მასით მოთავსებული იყოს კოორდინატთა სათავედან გავლებული \vec{r} რადიუს-ვექტორის ბოლოში (ნახ. 221). მაშინ m მასის ნაწილაკზე მოქმედი ძალისათვის მივიღებთ



ნახ. 221

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^3} \vec{r}. \quad (\text{XIV, 12})$$

თუ ამ ძალას დავაგვემიღებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$F_x = -\gamma \frac{Mm}{r^3} x, \quad F_y = -\gamma \frac{Mm}{r^3} y, \quad F_z = -\gamma \frac{Mm}{r^3} z. \quad (\text{XIV, 13})$$

მეორე მხრივ, ჩვენ ვიცით, რომ აღნიშნული ღერძებზე შეღვევი ფორმულით არის დაკავშირებული პოტენციური ენერგიასთან:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (\text{XIV, 14})$$

ე. ი. ძალის გვემილი რაიმე ღერძზე არის პოტენციური ენერგიის წარმოებული ამ ღერძის გასწვრივ, აღებული უარყოფითი ნიშნით. მაშასადამე, უნდა მოვინახოთ m მასის კოორდინატების ისეთი $U(x, y, z)$

ფუნქცია, რომ მისი უარყოფითი წარმოებული, მაგალითად, x კოორდინტის მიმართ, გვაძლევდეს F_x ძალას (ფორმ. XIV, 14). დავამტკიცოთ, რომ ამისათვის პოტენციალური ენერგია შემდეგი სახის უნდა იყოს:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (\text{XIV, 15})$$

მართლაც, გამოვივალოთ U -ს წარმოებული x -ის მიმართ, მხოლოდ მივიღოთ მხედველობაში, რომ U დამოკიდებულია x კოორდინატზე r -ის საშუალებით, რომლისთვისაც გვაქვს ფორმულა

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{XIV, 15'})$$

გაწარმოება მოგვცემს

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}.$$

მეორე მხრივ, (XIV, 15') ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right\} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

აქედან

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \gamma \frac{Mm}{r^3} x,$$

საიდანაც ძალისათვის (XIV, 14) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = - \gamma \frac{Mm}{r^3} x,$$

რაც ეთანხმება (XIV, 13) ფორმულას. ანალოგიურ გამოსახულებებს მივიღებთ F_y -ისა და F_z -ისათვის. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ, თუ პოტენციალური ენერგია გამოსახება $U = -\gamma \frac{Mm}{r}$ ფორმულით. ძალისათვის მივიღებთ ნიუტონის ფორმულას, მაგრამ ჩვენ რომ პოტენციალური ენერგიისათვის აგველო გამოსახულება

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r} + A, \quad (\text{XIV, 16})$$

სადაც A მუდმივი სიდიდეა, იმავე შედეგს მივიღებდით. მაშასადამე, ძალისა და პოტენციალური ენერგიის დამოკიდებულების ფორმულიდან შეგვიძლია დავასკვნათ მხოლოდ ის, რომ პოტენციალურ ენერგიას უნდა ჰქონდეს (XIV, 16) სახე, მაგრამ ვერ გამოვარკვევთ, თუ როგორია A მუდმივა. მისი მნიშვნელობის მოსაძებნად უნდა გამოვიყენოთ

პირობა, რომელიც ჩვენ წინათ უკვე განვიხილეთ პოტენციალური ენერგიის განმარტებასთან დაკავშირებით და რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: პოტენციალური ენერგია უნდა მიისწრაფოდეს ნული-საკენ, როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილი უსასრულოდ იზრდება. მაშასადამე, გვაქვს პირობა, რომ

$$U \rightarrow 0,$$

როდესაც

$$r \rightarrow \infty.$$

(XIV, 16) ფორმულა U -სათვის მხოლოდ მაშინ დააკმაყოფილებს ამ პირობას, თუ $A=0$ და ამიტომ საბოლოოდ პოტენციალური ენერგია-სათვის მივიღებთ

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

როგორც ვხედავთ, ორი ნაწილაკის გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია მასების პირდაპირპროპორციულია და მანძილის უკუპროპორციული.

(XIV, 15) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ გრავიტაციული პოტენციალური ენერგია ყოველთვის უარყოფითია, ვინაიდან ნაწილაკების ინერტული მასები და მათ შორის მანძილი დადებითი სიდიდეებია. გამოვარკვიოთ რა ფიზიკური აზრი აქვს უარყოფით პოტენციალურ ენერგიას. პოტენციალურ ენერგიასა და მუშაობას შორის კავშირის თანახმად პოტენციალური ენერგია იზომება იმ მუშაობით, რომელიც უნდა შესრულდეს გარეშე ძალების მიერ, რათა უსასრულოდ დაშორებული ნაწილაკები დაუახლოვდნენ ერთმანეთს, მანძილით (ე. ი. იმ მდებარეობაში გადავიდნენ, რომლისთვისაც ვსაზღვრავთ პოტენციალურ ენერგიას)

$$U = A'_{\infty}, \quad (\text{XIV, 17})$$

სადაც აღნიშვნა A'_{∞} გვიჩვენებს, რომ მუშაობა სრულდება უსასრულოდ დან r მანძილამდე ნაწილაკების დაახლოებრს დროს. ცხადია, თუ ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედება განზრდვის ხასიათისაა (ყველა მანძილზე), მაშინ გარეშე ძალებმა დადებითი მუშაობა უნდა შეასრულოს ნაწილაკების დაახლოებისათვის. ამიტომაც ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია დადებითია (ყველა მანძილზე). თუ ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება მიზიდვის ხასიათისაა (და სწორედ ასეთია გრავიტაციული ურთიერთქმედება), საწინააღმდეგო შედეგს მივიღებთ. ამ შემთხვევაში ნაწილაკების დაახლოებისათვის გარეშე ძალებმა უარყოფითი მუშაობა უნდა შეასრულოს, ე. ი. მუშაობა უნდა შე-

სრულდეს მათ საწინააღმდეგოდ. ამიტომაც A' უარყოფითია და უარყოფითია აგრეთვე პოტენციალური ენერგია.

პოტენციალური ენერგიის უარყოფითი მნიშვნელობა მეორენაირად ასე შეიძლება გავიგოთ. უსასრულოდ დაშორებისას პოტენციალური ენერგია ნულია. მაგრამ იმისათვის, რომ m მასის ნაწილაკი უსასრულოდ დაეშოროს M მასის ნაწილაკს, საჭიროა შევასრულოთ მუშაობა მიზიდვის ძალას საწინააღმდეგოდ, ე. ი. საჭიროა გავზარდოთ სისტემის პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლ მნიშვნელობამდე, მაშასადამე, საწყის მდებარეობაში (სასრული მანძილისათვის) პოტენციალური ენერგია უარყოფითი უნდა იყოს.

დავებრუნდეთ ახლა წინანდელ აღნიშვნებს, ე. ი. ნაწილაკების მასები იყოს m_1 და m_2 , ხოლო მათ შორის მანძილი r_{12} . მაშინ პოტენციალური ენერგიისათვის გვექნება

$$U_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}. \quad (\text{XIV, 18})$$

ჩვენ შემდეგში გამოვიყენებთ ან (XIV, 15), ან (XIV, 18) ფორმულას იმისდა მიხედვით, თუ რომელი მათგანი უფრო ხელსაყრელი იქნება გამოთვლებისათვის.

მას შემდეგ, რაც მოქმეზილია ორი ნაწილაკის გრავიტაციული პოტენციალური ენერგია, შეიძლება დაიწეროს ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემის სრული ენერგიის გამოსახულება. როგორც ყოველთვის, იგი იქნება კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}. \quad (\text{XIV, 19})$$

§ 96. მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემა

განვიხილოთ ახლა ზოგადი შემთხვევა, როდესაც სისტემა შედგება გრავიტაციულად ურთიერთქმედი n ნაწილაკისაგან m_1, m_2, \dots, m_n მასებით. მანძილები ნაწილაკებს შორის აღვნიშნოთ ისევე, როგორც წინათ. მაგალითად, r_{12} იქნება მანძილი პირველ და მეორე ნაწილაკს შორის, r_{23} —მანძილი მეორე და მესამე ნაწილაკს შორის და ა. შ. საზოგადოდ მანძილი i -ურ და k -ურ ნაწილაკებს შორის იქნება r_{ik} . მაშინ, როგორც ცდა გვიჩვენებს, სისტემის სრული პოტენციალური ენერგია იქნება

$$U = -\sum_{i>k=1}^n \gamma \frac{m_i m_k}{r_{ik}}, \quad (\text{XIV, 20})$$

ე. ი. მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის გრავიტაციული პოტენციალური ენერგია არის ჯამი წყვილ-წყვილად აღებული ნაწილაკების პოტენციალური ენერგიებისა; მაგალითად, სამი ნაწილაკის შემთხვევაში გვექნება

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

(XIV, 20) ფორმულაში i და k ინდექსები იღებენ ყველა მნიშვნელობას 1-დან n -მდე, მხოლოდ იმ პირობით, რომ i უნდა იყოს k -ზე მეტი. მაგალითად, თუ $k=1$, i შეიძლება იყოს 2, 3, ..., თუ $k=2$, i შეიძლება იყოს 3, 4, ... ეს შეზღუდვა შემდეგი გარემოებით არის გამოწვეული. მაგალითად, როდესაც $k=2$, i -ს რომ შეძლებოდა 1-ის მნიშვნელობის მიღება, გვექნებოდა ისეთივე წევრი, რომელსაც მივიღებდით, როდესაც $k=1$ და $i=2$, ე. ი. პირველი და მეორე ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია $-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$ ჯამში შემოვიდოდა მეორედ $-\gamma \frac{m_2 m_1}{r_{21}}$ სახით, რაც ორჯერ გაადიდებს საერთო პოტენციალურ ენერგიას. შეიძლება, რასაკვირველია, მოვხსნათ ის პირობა, რომ i უნდა იყოს k -ზე მეტი, მაგრამ მაშინ ჯამს წინ უნდა დავუწეროთ მამრავლი $\frac{1}{2}$, რათა არ მივიღოთ გაორჯეცებული ენერგია:

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^n \frac{m_i m_k}{r_{ik}}. \quad (\text{XIV, 21})$$

განვიხილოთ ახლა საკითხი ასეთ სისტემაში მოქმედი ძალების შესახებ. განვსაზღვროთ, მაგალითად, ძალა, რომელიც პირველ ნაწილაკზე მოქმედებს. ამისათვის პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებიდან უნდა გამოვყოთ ის წევრები, რომლებიც გამოხატავს პირველი ნაწილაკის პოტენციალურ ენერგიას ყველა დანარჩენი ნაწილაკის მიმართ. ასეთი ნაწილაკების რაოდენობაა $n-1$

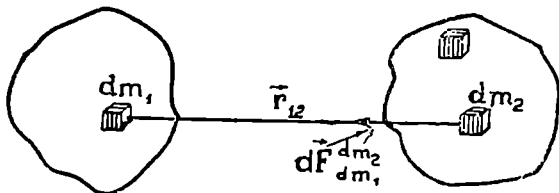
$$U_1 = -\gamma \frac{m_2 m_1}{r_{21}} - \gamma \frac{m_3 m_1}{r_{31}} - \dots - \gamma \frac{m_n m_1}{r_{n1}}.$$

U_1 -ის გაწარმოება პირველი ნაწილაკის კოორდინატების მიმართ მოგვეცემს პირველ ნაწილაკზე მოქმედ საერთო ძალას; იგი იქნება ჯამი იმ $n-1$ ძალისა, რომლითაც მე-2, მე-3, ..., მე- n ნაწილაკები მოქმედებენ ამ ნაწილაკზე. ყოველი მათგანი მიიღება სათანადო პოტენციალური ენერგიის გაწარმოებით

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{n1}. \quad (\text{XIV, 22})$$

მაშასადამე, საერთო ძალა, რომელიც პირველ ნაწილაკზე მოქმედებს, არის დანარჩენი ნაწილაკების მიერ გამოწვეული ძალების ჯამი.

ნაწილაკთა სასრული რიცხვისაგან შემდგარი სისტემიდან გადავიდეთ უწყვეტ სხეულებზე, ე. ი. გამოვარკვიოთ როგორია გრავიტაციული ურთიერთქმედება ნებისმიერი ფორმის და სასრული ზომის სხეულებს შორის. პრაქტიკული თვალსაზრისით სწორედ ეს შემთხვევაა ყველაზე მნიშვნელოვანი, ვინაიდან სწორედ ასეთ სხეულებთან გვაქვს საქმე ბუნებაში. ის გარემოება, რომ გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვა წერტილოვანი მასებით დავიწყეთ, იმით იყო გამოწვე-



ნახ. 222

ული, რომ ჯერ ერთი, ამ შემთხვევაში ფორმულები ძალიან მარტივია და, გარდა ამისა, ნებისმიერი ფორმის სასრული ზომის სხეულების განხილვა სწორედ წერტილოვანი მასების ურთიერთქმედების განხილვაზე დაიყვანება.

განვიხილოთ ორი ნებისმიერი ფორმისა და ზომის სხეულის გრავიტაციული ურთიერთქმედება (ნახ. 222).

ვთქვათ, გვსურს გამოვარკვიოთ, თუ რა ძალებით მოქმედებს პირველი სხეული მეორეზე. გამოვყოთ მეორე სხეულის ნებისმიერად მცირე ნაწილი dm_2 მასით, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნივთიერი წერტილი და ვიპოვოთ ძალა, რომლითაც პირველი სხეული მოქმედებს ამ ნივთიერ წერტილზე. ცხადია, dm_2 -ზე მოქმედებს პირველი სხეულის ყველა ნაწილი და მასზე მოქმედი ძალის გამოსათვლელად საჭიროა ვიცოდეთ ძალა, რომლითაც პირველი სხეულის dm_1 ელემენტი მოქმედებს dm_2 ელემენტზე. თუ dm_1 და dm_2 ელემენტებს განვიხილავთ როგორც ნივთიერ წერტილებს, ხოლო dm_1 -დან dm_2 -მდე გავლებულ რადიუს-ვექტორს აღვნიშნავთ \vec{r}_{12} -ით, ძალისათვის, რომლითაც dm_1 იზიდავს dm_2 -ს, მივიღებთ

$$d\vec{F}_{dm_1}^{dm_2} = -\gamma \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}. \quad (\text{XIV}, 23)$$

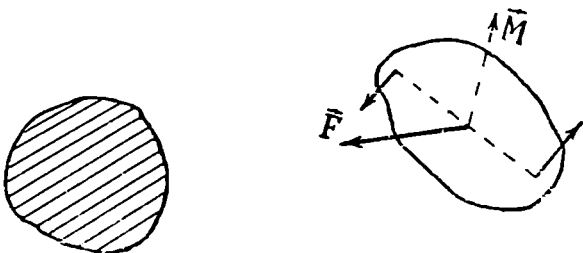
იმისათვის, რომ მივიღოთ ძალა, რომლითაც მთელი პირველი სხეული

მოქმედებს dm_2 ელემენტზე, უნდა შევკრიბოთ (გეომეტრიულად) პირველი სხეულის სხვადასხვა ელემენტით გამოწვეული ძალები, ე. ი. მოვახდინოთ (XIV, 23) ვამოსახულების ინტეგრება dm_1 ელემენტის მიმართ. მივიღებთ

$$d\vec{F}_{1, dm_2} = -\gamma \left| \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} \right. \quad (\text{XIV, 24})$$

ასეთია ძალა, რომლითაც პირველი სხეული მოქმედებს მეორე სხეულის dm_2 ელემენტზე. ასევე შეიძლება მოიძებნოს ამ მეორე სხეულის ყოველ სხვა ელემენტზე მოქმედი ძალა.

მას შემდეგ, რაც გამოჩვენებულია მეორე სხეულის ცალკეულ ელემენტებზე მოქმედი ძალები, ისმის კითხვა იმის შესახებ, თუ რა მოქმედებას ახდენს ეს ძალები ამ სხეულზე. პასუხი ამ კითხვაზე დამოკიდე-



ნაწ. 223

ბულია იმაზე, თუ რა მდგომარეობაშია ეს სხეული. თუ მეორე სხეული მყარია, მაშინ ჩვეულებრივი წესით მოხდება მის ცალკეულ ელემენტებზე მოქმედი ძალების შეკრება და ისინი დაიყვანებიან ერთ ტოლქმედზე და ერთ ძალთა წყვილზე. ტოლქმედი ძალა გამოიწვევს მეორე სხეულის მიზიდვას პირველი სხეულის მიერ, ხოლო ძალთა წყვილი გამოიწვევს მის შემობრუნებას მასების ცენტრის ირგვლივ (ნახ. 223). თუ მეორე სხეული მყარი არ არის, მაშინ, ზემოაღნიშნული მოქმედებების გარდა, აუცილებლად მოხდება მისი დეფორმაცია, ე. ი. მისი სხვადასხვა ნაწილის გადანაცვლება ერთიმეორის მიმართ. ასეთი დეფორმაციის მაგალითს წარმოადგენენ დედამიწის, ზღვისა და ატმოსფეროს მიმოქცევები, გამოწვეული მზისა და მთვარის გრავიტაციული მოქმედებით. არამყარი (თხევადი და გაზისებრი) სხეულების შემთხვევაში გრავიტაციული ურთიერთქმედებით გამოწვეული მოქმედების გამორკვევა ძალიან რთულია და ამიტომ ამ საკითხს ჩვენ არ ვიხილავთ.

უფრო მარტივია, მაგრამ საკმაოდ რთული მყარი სხეულების გრა-ვიტაციული ურთიერთქმედების გამოთვლა. მაგრამ ზოგიერთ შემთხვე-ვაში, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც სხეულები სიმეტრიული ფორ-მისა და მათ შიგნით მასების განაწილებაც სიმეტრიულია, გამოთვლა საგრძნობლად მარტივდება.

ჩვენ მიერ აღწერილი მეთოდის გარდა (რომლის თანახმად გამოითე-ლება ცალკეულ ელემენტებზე მოქმედი ძალები და შემდეგ ხდება მათი შეკრება), არსებობს მეორე მეთოდი, რომელიც განსაკუთრებით ხელ-საყრელია სიმეტრიული სხეულების შემთხვევაში; ეს მეთოდი დამყარე-ბულია ე. წ. გაუსის თეორემაზე, რომელსაც შემდეგ განვიხილავთ.

§ 97. პრაპიტაციული ველი. დამატებითი და პრაპიტაციული მუშაობა პრაპიტაციულ ველში

წინა პარაგრაფებში განვიხილეთ სხეულთა გრავიტაციული ურთიერთ-ქმედება როგორც ერთი სხეულის უშუალო მოქმედება მეორე სხეულ-ზე, ე. ი. ჩვენ ვთვლით, რომ ერთი სხეული მოქმედებს მისგან დაშო-რებულ სხეულზე უშუალოდ, ყოველგვარი საშუალებო ნივთიერი გა-რემოს გარეშე. ასეთ მოქმედებას შორსქმედება ეწოდება. ცნება შორსქმედების შესახებ პირველად წარმოიშვა XVII საუკუნეში, მას შემდეგ რაც ნიუტონმა აღმოაჩინა მსოფლიო მიზიდულობის კანონი. ცხადია, ასეთი სახის ურთიერთქმედების არსებობა ძალიან უცნაური იყო იმდროინდელი მეცნიერებისათვის. სხეულთა ურთიერთქმედება მათი შეხების, დაჯახების, წვეის დროს ან ისეთი ურთიერთქმედება, როდესაც ერთი სხეული მოქმედებს მეორეზე მათ შორის არსებული რაიმე ნივთიერი გარემოს საშუალებით, კარგად იყო ცნობილი. შორს-ქმედება კი, როდესაც სხეულები მოქმედებს ერთმანეთზე შეხების გა-ეშე ან რაიმე სხვა გარემოს გარეშე, სრულიად წარმოუდგენელი იყო. მიტომაც მეცნიერთა უმრავლესობა (კეპლერი, ჰიუგენსი, დეკარტი და სხვები) ვერ ურიგდებოდა შორსქმედების თვალსაზრისს და საჭიროდ თვლიდა იმ გარემოს აღმოჩენას და შესწავლას, რომელიც გადასცემდა გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას. თვით ნიუტონიც არ თვლიდა შესა-ძლებლად სხეულის მოქმედებას იქ, სადაც ეს სხეული არ იმყოფებო-და, მაგრამ ვინაიდან მან ვერ მოახერხა მიეცა დამაკმაყოფილებელი ახ-სნა გრავიტაციული მოქმედებისათვის რაიმე ნივთიერი გარემოს საშუა-ლებით, ხოლო მისი გამოთქმით იგი „პიპოთეზებს არ ქმნიდა“, ამიტომ იგი შეეცადა თავი აერიდებინა ამ საკითხისათვის. ნიუტონის შემდეგ თვალსაზრისი შორსქმედების არსებობის შესახებ თანდათანობით სულ უფრო განმტკიცდა (უმთავრესად მისი მოწაფეების წყალობით) და იგი შეფლობდა ფიზიკაში თითქმის ორი საუკუნის განმავლობაში, განსაკუთ-

რებით მას შემდეგ, რაც კულონმა დამუხტული ნაწილაკებისათვის აღ-
მოაჩინა ისეთივე სახის ურთიერთქმედების კანონი (კულონის კანონი).
მაგრამ დაწყებული მეცხრამეტე საუკუნის შუა წლებიდან, განსაკუთრე-
ბით ფარადისა და მაქსველის წყალობით, ისევ აღორძინდა ახლო-
ქმედების თვალსაზრისი, რომლის მიხედვით დაშორებული სხეულე-
ბის ურთიერთქმედება ხორციელდება მათ ირგვლივ არსებული ნივთიე-
რი გარემოს საშუალებით. მართალია, ეს წარმოდგენა განვითარდა
ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედებისათვის, მაგრამ მან გარკვეული
გავლენა მოახდინა გრავიტაციული ურთიერთქმედების შესახებ წარმო-
დგენებზე.

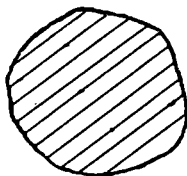
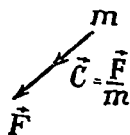
ახლოქმედების თვალსაზრისის მიხედვით სხეულების გრავიტაციუ-
ლი ურთიერთქმედება ხორციელდება ამ სხეულების ირგვლივ არსებუ-
ლი გრავიტაციული ველის საშუალებით. დაშვებულია, რომ ყოველი
სხეულის ირგვლივ არსებობს გრავიტაციული ველი, განფენილი მთელ
სივრცეში და როდესაც ამ ველში მოვითავსებთ მეორე სხეულს, მასზე
სწორედ ეს ველი იმოქმედებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთი სხეული
მოქმედებს მეორეზე არა უშუალოდ, არამედ გრავიტაციული ველის
საშუალებით. ამ თვალსაზრისის მიხედვით ორი სხეულის გრავიტაციუ-
ლი ურთიერთქმედების საკითხი ორ საკითხად იყოფა. პირველი საკი-
თხია მოძებნა ველისა, რომელიც გარს ატყვია, მაგალითად, პირველ
სხეულს. მეორე საკითხია გამოკვლევა ამ ველის მოქმედებისა მეორე
სხეულზე. საბოლოო შედეგში ურთიერთქმედება ისეთივე იქნება, რო-
გორც უშუალო მოქმედებას (შორსქმედების) დროს¹, მაგრამ ახალი
თვალსაზრისი (მოქმედება გრავიტაციული ველის საშუალებით) გაცი-
ლებით უფრო ნაყოფიერია აღმოჩნდა. ეს თვალსაზრისი ახლა საყოველ-
თაოდ მიღებულია არა მარტო გრავიტაციული, არამედ ყველა სხვა
ურთიერთქმედების მიმართაც. ყოველი ურთიერთქმედება განიხილება
როგორც სათანადო ველათ (ელექტრომაგნიტური, გრავიტაციული,
მეზონურით და სხვ.) გამოწვეული.

მაშასადამე, მივიღებთ, რომ ყოველი სხეული გარშემორტყმულია
გრავიტაციული ველით, რომელიც მოქმედებს მასში მოთავსებულ ყო-
ველ სხვა სხეულზე. უნდა აღინიშნოს, რომ ველი აქვს ყველა სხეულს
და ურთიერთქმედება შეიძლება განვიხილოთ როგორც პირველი სხე-
ულის ველის მოქმედება მეორეზე ან როგორც მეორე სხეულის ველის
მოქმედება პირველზე.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გრავიტაციული ურთიერთქმედების
საკითხი ორ საკითხზე დაიყვანება. პირველი საკითხია გამოკვლევა

¹ სწრაფად მოძრაი სხეულების შემთხვევაში ველის თეორია იძლევა შორსქმე-
დების თეორიისაგან განსხვავებულ შედეგებს.

გრავიტაციული ველისა, რომელიც გარს არტყია ერთ-ერთ სხეულს. მეორე საკითხი კი იქნება ამ ველის მოქმედება მასში მოთავსებულ სხეულზე. ვინაიდან უშუალოდ გრავიტაციული ველის დამზერა შეუძლებელია, მისი ბუნებისა და ხასიათის გამოკვლევა შეიძლება მხოლოდ მისი მოქმედების გამოკვლევით. გრავიტაციული ველი უწყვეტად არის განფენილი მთელს სივრცეში და მისი სრული დახასიათება მოითხოვს მის შესწავლას სივრცის ყოველ წერტილში. ამისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ. გრავიტაციული ველის განსახილველ წერტილში მოვათავსოთ რაიმე ნივთიერი წერტილი m მასით. მასზე იმოქმედებს ძალა, რომელსაც ჩვენ მივაწერთ ველის მოქმედებას. აღვნიშნოთ ეს ძალა \vec{F} -ით, ცხადია, ეს ძალა დამოკიდებულია არა მარტო ველზე, რომლის შესწავლაც ჩვენ გვსურს, არამედ შეტანილი წერტილის მასაზე. ჩვენ რომ ველის იმავე წერტილში სხვა m_1 მასის ნივთიერი წერტილი შევიტანოთ, ძალაც შეიცვლება, მიუხედავად იმისა, რომ ველი იგივე დარჩა (ველი გამოწვეული რალაც სხეულით ან სხეულების სისტემით). ვთქვათ, ძალა გახდა \vec{F}_1 . კიდევ სხვა m_2 მასის შეტანისას, სხვა \vec{F}_2 ძალას მივიღებთ და ა. შ. მაგრამ ცდები გვიჩვენებს, რომ როგორი მასაც უნდა შევიტანოთ ველის აღებულ წერტილში, სათანადო ძალის შეფარდება ამ მასასთან ყოველთვის ერთი და იგივეა, ე. ი.



ნახ. 224

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \dots$$

მაშასადამე, ეს სიდიდე (დამოუკიდებელი შეტანილი მასისაგან) უნდა ახასიათებდეს გრავიტაციულ ველს. სიდიდე აღვნიშნოთ \vec{G} -თი და ვუწოდოთ მას გრავიტაციული ველის დაძაბულობა (ნახ. 224).

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (\text{XIV}, 25)$$

ამგვარად, გრავიტაციული ველის დაძაბულობა აღებულ წერტილში არის ამ წერტილში მოთავსებულ წერტილოვან m მასაზე მოქმედი ძალის შეფარდება ამ მასასთან, ე. ი. აჩქარება. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ ველის გამომწვევ სხეულზე, წერტილის მდებარეობა-

ზე და არ არის დამოკიდებული შეტანილ მასაზე. იმავე ფორმულიდან დაძაბულობა შეიძლება კიდევ ასე განიმარტოს. ვთქვათ, შეტანილი მასა ერთის ტოლია $m = 1$, მაშინ (XIV, 25) ფორმულა მოგვეცემს

$$\vec{G} = \vec{F},$$

ე. ი. დაძაბულობა იზომება ძალით, რომელიც მოქმედებს ველში შეტანილ ერთეულოვან წერტილოვან მასაზე. შეტანილი მასა წერტილოვანი იმიტომ უნდა იყოს, რომ გავზომოთ დაძაბულობა ველის ალებულ წერტილში. არაწერტილოვანი მასის შეტანის შემთხვევაში მისი სხვადასხვა წერტილი ველის სხვადასხვა წერტილში იქნება და ამიტომაც ამ შემთხვევაში (XIV, 25) ფორმულა განსაზღვრავს დაძაბულობის საშუალო მნიშვნელობას შეტანილი მასის მიერ დაკავებულ არეში. ველში შეტანილ მასას, რომელიც გამოიყენება დაძაბულობის გასაზომად, ხშირად კიდევ საცდელი მასა ეწოდება.

გრავიტაციული ველის დაძაბულობა ვექტორული სიდიდეა. იგი ყოველთვის მიმართულია საცდელ მასაზე მოქმედი ძალის მიმართულებით (ვინაიდან $m > 0$). მისი ერთეული ადვილად მიიღება (XIV, 25) ფორმულიდან: დაძაბულობის ერთეულად მიღებულია ისეთი დაძაბულობა, როდესაც ერთეულოვან მასაზე ($m = 1$) მოქმედებს ერთეულოვანი ძალა ($F = 1$).

CGS სისტემაში დაძაბულობის ერთეულად მიღებულია დაძაბულობა, როდესაც $1gr$ მასაზე მოქმედებს ერთი დანი ძალა. ამ ერთეულს გალი¹ ეწოდება. ადვილად შეიძლება აგრეთვე გამოვარკვიოთ, რომ დაძაბულობას აქვს აჩქარების განზომილება

$$[G] = \frac{[F]}{[m]} = LT^{-2}.$$

ამიტომაც შეიძლება ვთქვათ, დაძაბულობის ერთეული იგივეა, რაც აჩქარების ერთეული. მაშასადამე, CGS სისტემაში დაძაბულობის ერთეულად უნდა მივიღოთ დაძაბულობა ველის ისეთ წერტილში, რომელიც მოთავსებული წერტილოვანი მასა მიიღებს $1 \frac{cm}{sec^2}$ აჩქარებას.

ანალოგიურად შეიძლება განვსაზღვროთ გრავიტაციული ველის მეტრე დამახასიათებელი სიდიდე—პოტენციალი. ჩვენ ვიცით, რომ გრავიტაციული ურთიერთქმედება ხასიათდება არა მარტო ძალით, არამედ პოტენციალური ენერგიითაც; ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ გრავიტაციულ ველში მოვათავსებთ წერტილოვან მასას, მას გარკვეული პოტენცია-

¹ გალილეის პატივსაცემად.

ლური ენერგია ექნება. აღნიშნით ეს პოტენციალური ენერგია U -ით. ცდები გვიჩვენებს, რომ, ისევე როგორც დაძაბულობის შემთხვევაში, ამ პოტენციალური ენერგიის შეფარდება ველში შეტანილ წერტილოვან მასასთან არ არის დამოკიდებული ამ მასის სიდიდეზე. ამიტომაც ეს შეფარდება გრავიტაციული ველის დამახასიათებელი იქნება; მას ველის პოტენციალი ეწოდება და V ასოთი აღინიშნება

$$V = \frac{U}{m}; \quad (\text{XIV, 26})$$

აქედან გამოძინარეობს პოტენციალის შემდეგი განმარტება: პოტენციალი არის ველში შეტანილი წერტილოვანი მასის პოტენციალური ენერგიის შეფარდება ამ მასასთან, ან მეორენაირად: პოტენციალი იზომება ველში შეტანილი ერთეულოვანი მასის პოტენციალური ენერგიით. მართლაც, თუ $m=1$, მივიღებთ

$$U = V.$$

იმავე ფორმულებით განიმარტება პოტენციალის ერთეული და განზომილება. პოტენციალის ერთეულად მიღებულია ველის ისეთი პოტენციალი, რომელშიც მოთავსებულ ერთეულოვან მასას ექნება ერთეულოვანი პოტენციალური ენერგია. CGS სისტემაში პოტენციალის ერთეული იქნება იმ წერტილის პოტენციალი, რომელშიც 1 გრამ მასას ექნება 1 ერგი ენერგია:

$$V = 1 \frac{erg}{gr}.$$

MKS სისტემაში (მეტრი—კილოგრამ-მასა—სეკუნდი) პოტენციალის ერთეულია $1 \frac{joule}{kgr} = 10^7 \frac{erg}{gr}$. პოტენციალის განზომილებისათვის მივიღებთ

$$[V] = \frac{[U]}{[m]} = L^2 T^{-2},$$

ე. ი. V -ს აქვს სიჩქარის კვადრატის განზომილება.

(XIV, 25) და (XIV, 26) ფორმულები წარმოადგენენ ველის დაბაბულობისა და პოტენციალის განმსაზღვრელ ძირითად ფორმულებს; მათი საშუალებით შეიძლება მოიძებნოს ველში შეტანილ მასაზე მოქმედი ძალა და მისი პოტენციალური ენერგია. თუ ცნობილია დაძაბულობა და პოტენციალი:

$$\vec{F} = m\vec{G}, \quad U = mV. \quad (\text{XIV, 27})$$

ვინაიდან ძალასა და პოტენციალურ ენერგიას შორის გარკვეული დამოკიდებულება არსებობს, ცხადია, ასეთივე დამოკიდებულება უნდა იყოს დაძაბულობასა და პოტენციალს შორის. მართლაც, როგორც ვიცით,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

(XIV, 27) ფორმულების გამოყენება მოგვცემს:

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad G_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad G_z = -\frac{\partial V}{\partial z}; \quad (\text{XIV, 28})$$

მაშასადამე, დაძაბულობის გვემილი რაიმე ღერძზე უდრის პოტენციალის წარმოებულს სათანადო კოორდინატის მიმართ, ალებულს უარყოფითი ნიშნით. როგორც მაგალითი, განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც გრავიტაციული ველი შექმნილია M წერტილოვანი მასის მიერ. გამოვთვალოთ ამ ველის დაძაბულობა და პოტენციალი ნებისმიერ A წერტილში, რომლის რადიუს-ვექტორი \vec{r} მასის მიმართ არის \vec{r} . ამისათვის A წერტილში მოვათავსოთ რაიმე m წერტილოვანი მასა და გავზომოთ მასზე მოქმედი ძალა. ნიუტონის კანონის თანახმად ეს ძალა არის

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{r}.$$

აქედან m მასაზე გაყოფით მივიღებთ დაძაბულობას:

$$\vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{r}, \quad G = \gamma \frac{M}{r^2}. \quad (\text{XIV, 29})$$

როგორც ვხედავთ, წერტილოვანი მასის ველის დაძაბულობა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია და რადიუს-ვექტორის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. პოტენციალის მოსაძებნად ანალოგიურად უნდა მოვიქცეთ. ვინაიდან M და m მასების პოტენციალური ენერგია არის

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r},$$

პოტენციალისათვის მივიღებთ

$$V = -\gamma \frac{M}{r}, \quad (\text{XIV, 30})$$

ე. ი. წერტილოვანი მასის ველის პოტენციალი უარყოფითია და მანძილის უკუპროპორციულია.

თუ მასა, რომელიც იწვევს ველს, არ არის წერტილოვანი, დაძაბულობის გამოსათვლელად ისე უნდა მოვიქცეთ, როგორც ძალის გამომთვლის დროს მოვიქცებით. მთელი სხეული უნდა გავყოთ მცირე ელემენტებად dM მასით, თითოეული ეს ელემენტი განვიხილოთ როგორც წერტილოვანი, გამოვთვალოთ აღებულ წერტილში მათ მიერ გამოწვეული დაძაბულობა და პოტენციალი:

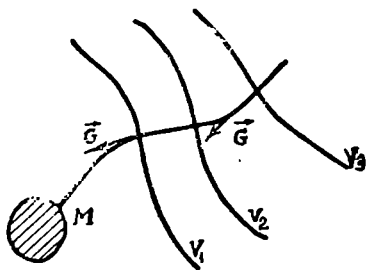
$$d\vec{G} = -\gamma \frac{dM\vec{r}}{r^3}, \quad dV = -\gamma \frac{dM}{r}.$$

მთელი დაძაბულობისა და პოტენციალის მისაღებად მოვახდინოთ ინტეგრება:

$$\vec{G} = -\gamma \int \frac{dM\vec{r}}{r^3}, \quad V = -\gamma \int \frac{dM}{r}. \quad (\text{XIV, 31})$$

თუ სხეულის ფორმა და მასში მასების განაწილება საკმაოდ რთულია, ამ ინტეგრირების გამოთვლა ძნელდება და მრავალ შემთხვევაში თათქმის შეუძლებელიც ხდება; მხოლოდ ზოგიერთი სიმეტრიული სხეულისათვის ხერხდება მათი შედარებით მარტივად გამოთვლა, მაგრამ სიმეტრიული სხეულებისათვის არსებობს უფრო მარტივი მეთოდი დაძაბულობის გამოთვლისა, რომელიც დამყარებულია ფრიალ მნიშვნელოვან დებულებაზე ე. წ. გაუსის თეორემაზე.

სანამ გადავიდოდეთ გაუსის თეორემის განხილვაზე, საჭიროა შემოვიღოთ ძალწირებისა და იზოპოტენციალური ზედაპირების ცნება. იმის



ნახ. 225

თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად, თუ როგორია ველის დაძაბულობა, სხვადასხვა ადგილას სივრცეში ავლებენ ძალწირებს. ძალწირი ეწოდება ისეთ წირს, რომლის ყოველ წერტილში დაძაბულობა მისი მხებია. ვინაიდან ველის ყოველ წერტილში დაძაბულობას მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა აქვს, ცხადია, წერტილზე შეიძლება მხოლოდ ერთი ძალწირის გავ-

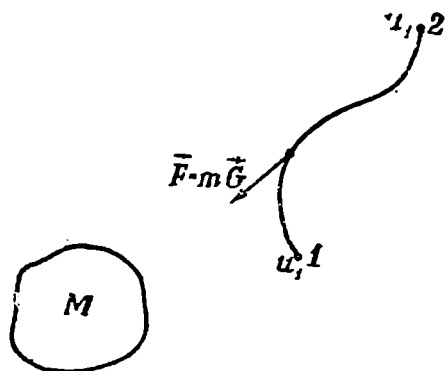
ლება (ნახ. 225). მეორე მნიშვნელოვანი ცნება არის ცნება იზოპოტენციალური ზედაპირისა. ავარჩიოთ პოტენციალის გარკვეული მნიშვნელობა და მოვიძებნოთ ველის წერტილები, რომლებშიც პოტენციალს ეს

მნიშვნელობა აქვს. თუ პოტენციალის არჩეული მნიშვნელობა არის V_1 , ამ წერტილების კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას

$$V(x, y, z) = V_1;$$

ეს განტოლება კი არის ზედაპირის განტოლება. ზედაპირს, რომლის ყოველ წერტილში პოტენციალს ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს, იზოპოტენციალური ზედაპირი ეწოდება. პოტენციალურ ენერგიასა და ძალას შორის კავშირის განხილვისას ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ, რომ ძალა იზოპოტენციალური ზედაპირის მართობია. ცხადია, ველის დაძაბულობაც მართობი უნდა იყოს ამ ზედაპირისა, ვინაიდან მას და ძალას ერთნაირი მიმართულება აქვთ.

დასასრულ გამოვითვალოთ მუშაობა, რომელიც სრულდება, როდესაც რაიმე ნივთიერი წერტილი მოძრაობს გრავიტაციულ ველში. ვთქვათ, m მასის ნაწილაკი გადადის 1-ელი წერტილიდან მე-2 წერტი-



ნახ. 226

ლში გარკვეული გზით (ნახ. 226). განსაზღვრის თანახმად შესრულებული მუშაობა გამოისახება ფორმულით:

$$A = \int_1^2 \vec{F}_s \cdot d\vec{s} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

მეორე მხრივ, ძალისა და პოტენციალური ენერგიის ან პოტენციალის დამაკავშირებელი ფორმულის თანახმად

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -m \frac{\partial V}{\partial x},$$

ჩასმა გვაძლევს

$$A = - \int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) =$$

$$= - m \int_1^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right);$$

აქედან მივიღებთ

$$A = U_1 - U_2 = m(V_1 - V_2). \quad (\text{XIV, 32})$$

როგორც ვხედავთ, შესრულებული მუშაობა უდრის პოტენციალური ენერჯიის შემცირებას ან მასის ნამრავლს პოტენციალთა სხვაობაზე.

თუ გრავიტაციული ველი შექმნილია წერტილოვანი M მასით, პოტენციალი გამოისახება ფორმულით:

$$V = -\gamma \frac{M}{r}.$$

ჩასმა (XIV, 32) ფორმულაში გვაძლევს

$$A = -\gamma M m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (\text{XIV, 33})$$

თუ მე-2 წერტილს უსასრულობაში გადავიტანთ, ე. ი. თუ $r_2 \rightarrow \infty$, მუშაობისათვის მივიღებთ

$$A = -\gamma \frac{Mm}{r_1} = mV_1.$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს კიდევ ერთი განსაზღვრა მივცეთ ველის პოტენციალს. თუ $m = 1gr$, მივიღებთ $V_1 = A$, ე. ი. პოტენციალი განისაზღვრება როგორც მუშაობა, რომელიც სრულდება ერთფუნქციონური მასის უსასრულობაში გადატანის დროს,

§ 98. ვაშის თეორემა. გრავიტაციული ველის მანძილის მანძილით

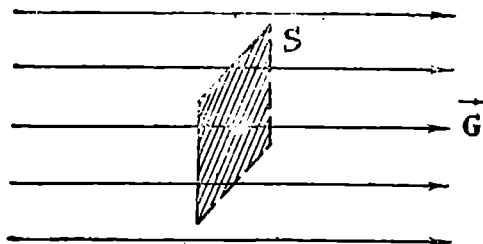
ეს თეორემა კავშირს ამყარებს გრავიტაციული ველის გამომწვევ მასასა და ველის დაძაბულობას შორის. ეს კავშირი ფრიად ზოგადია, იგი გამოსადეგია ნებისმიერად განაწილებული მასებისათვის, მაგრამ სწორედ ამ ზოგადობის გამო არ იძლევა საშუალებას გამოვითვალოთ დაძაბულობა ველის ნებისმიერ წერტილში, თუ ველი არ აკმაყოფილებს გარკვეულ სიმეტრიის პირობებს.

შემოვიღოთ დაძაბულობის ნაკადის ცნება. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ველი ერთგვაროვანია, ე. ი. სივრცის ყოველ წერტილში დაძაბულობა როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით ერთი

და იგივეა (ნახ. 227). ავიღოთ რაიმე ბრტყელი ზედაპირი, რომელიც დაწვრილების მართობია. აღვნიშნოთ მისი ფართობი S -ით. მაშინ დაძაბულობის ნამრავლს ფართობზე ეწოდება დაძაბულობის ნაკადი S ფართობში და აღვნიშნება N -ით

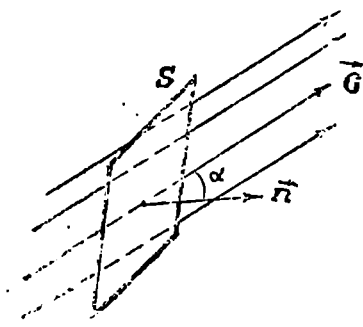
$$N = G \cdot S. \quad (\text{XIV, 34})$$

სახელწოდება ნაკადი აღებულია შემდეგი ანალოგიით. თუ წარმოვიდგინოთ, რომ ველის მაგიერ გვაქვს მოძრავი სითხე, რომლის სიჩქარეა



ნახ. 227

რეა \vec{v} , მაშინ ამ სიჩქარის სიღიღის ნამრავლი ფართობზე $v \cdot S$ მოგვცემს სითხის ნაკადს, ე. ი. სითხის რაოდენობას (მოცულობის მიხედვით), რომელიც გადის S ფართობში ერთ სეკუნდში. ამის შესაბამისად $G \cdot S$ -საც ეწოდება დაძაბულობის ნაკადი, მიუხედავად იმისა, რომ არავითარი რეალური ნაკადი გრავიტაციულ ველში ჩვენ არ გვაქვს. როგორ უნდა გამოვითვალოთ დაძაბულობის ნაკადი იმ შემთხვევაში, როდესაც ფართობი არ არის დაძაბულობის მართობი (ნახ. 228)? \vec{n} ერთეულოვანი ვექტორით აღვნიშნულია ფართობისადმი ნორმალი. ამ შემთხვევაში S ფართობზე ამრავლებენ დაძაბულობის ნორმალურ (G_n გვგმილს, ვინაიდან ფართობისადმი მხები გვგმილი ვერავითარ ნაკადს ვერ მოგვცემს. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ნაკადი გამოითვლება ფორმულით:



ნახ. 228

$$N = G_n \cdot S = G \cdot S \cos \alpha, \quad (\text{XIV, 35})$$

სადაც α არის კუთხე დაძაბულობასა და ფართობისადმი ნორმალს შორის

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ველი არ არის ერთგვაროვანი და არც ფართობია (რომელშიც უნდა გამოვითვალოთ ნაკადი) ბრტყელი (ნახ. 229). ამ შემთხვევაში ნაკადს ითვლიან შემდეგნაირად. განსახილველ ზედაპირზე გამოყოფენ მცირე dS ელემენტს და თვლიან, რომ ამ ელემენტის ყველა წერტილში დაძაბულობა ერთი და იგივეა. მაშინ dS ელემენტში გამავალი დაძაბულობის ნაკადი გამოითვლება ფორმულით:

$$dN = G_n dS.$$

მთელ ფართობში გამავალი ნაკადის გამოსათვლელად უნდა შევკრიბოთ მის ცალკეულ ელემენტებში გამავალი ნაკადები, ე. ი. უნდა მოვახდინოთ dN -ის ინტეგრება განსახილველ ფართობზე, მივიღებთ

$$N = \int_S G_n dS. \quad (\text{XIV, 36})$$

ასეთია ზოგადი ფორმულა ნებისმიერი ფორმის S ფართობში გამავალი დაძაბულობის ნაკადისა. შეიძლება განსახილველი ფართობი იყოს ჩაკეტილი (ნახ. 230), მაშინ ნაკადისათვის მივიღებთ

$$N = \oint G_n dS.$$

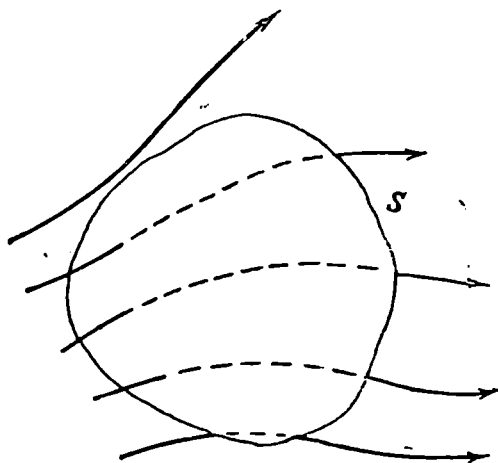
ჩაკეტილი ზედაპირის შემთხვევაში ნორმალად ჩვეულებრივ იღებენ გარე ნორმალს. შეიძლება ზედაპირის ამა თუ იმ ნაწილში ან მთელ ზედაპირში ნაკადი იყოს უარყოფითი. ეს იმ შემთხვევაში იქნება, თუ დაძაბულობა ნორმალთან ბლაგვ კუთხეს ($\cos \alpha < 0$) ადგენს.

გამოვითვალოთ ახლა წერტილოვანი მასის ირგვლივ აღებულ ნებისმიერ ჩაკეტილ ზედაპირში გამავალი ნაკადი (ნახ. 231). გამოვყოთ ზედაპირზე მცირე dS ელემენტი \vec{n} ნორმალით.

დაძაბულობა ამ ელემენტის ნებისმიერ წერტილში იქნება

$$\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r},$$

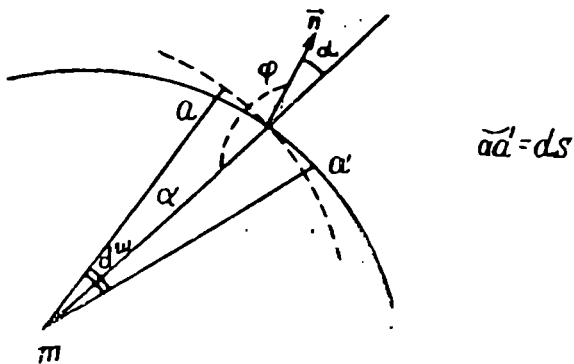
სადაც \vec{r} არის m მასიდან dS ელემენტამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი (დაძაბულობა, მიზიდვის ხასიათის გამო, მიმართულია \vec{r} -ის საწინააღმდეგოდ).



ნახ. 230

dS ელემენტში გამავალი ნაკადისათვის მივიღებთ

$$dN = \gamma \frac{m}{r^2} dS \cos \alpha,$$



ნახ. 231

სადაც α არის კუთხე დაძაბულობასა და ნორმალს შორის. თუ შემოვიღებთ φ კუთხეს, რადიუს-ვექტორსა და ნორმალს შორის, რომელიც α კუთხესთან დაკავშირებულია დამოკიდებულებით

$$\varphi = \pi - \alpha,$$

მაშინ ნაკადისათვის მივიღებთ

$$dN = -\gamma \frac{m}{r^2} dS \cos \varphi.$$

როგორც გეომეტრიიდან ვიცით, $\frac{dS}{r^2} \cos \varphi$ გამოსახულება წარმოადგენს სხეულოვან $d\omega$ კუთხეს, რომლის სათავეა m წერტილი და რომელიც dS ფართობს ეყრდნობა. ამიტომ ნაკადისათვის მივიღებთ

$$dN = -\gamma m d\omega.$$

ჩაკეტილ ზედაპირში გამავალი მთელი ნაკადისათვის კი გვექნება

$$N = -4\pi\gamma m.$$

ეს შედეგი შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$N = \oint G_n dS = -4\pi\gamma m. \quad (\text{XIV, 37})$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც გრავიტაციული ველი გამოწვეულია რამდენიმე წერტილოვანი მასით, საერთო ნაკადი გამოითვლება როგორც ჯამი ცალკეული მასებით გამოწვეული ნაკადებისა (ცინაიდან საერთო დაძაბულობა არის ცალკეულ დაძაბულობათა ჯამი). ცხადია, რომ (XIV, 37) ფორმულა ძალაში დარჩება ნებისმიერად განაწილებული მასებისათვის. რასაკვირველია, იმ პირობით, რომ ისინი მოთავსებული არიან ჩაკეტილი ზედაპირის შიგნით, რომელშიც გამოითვლება დაძაბულობის ნაკადი. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ, თუ მასა მოთავსებულია ჩაკეტილი ზედაპირის გარეთ, დაძაბულობის ნაკადი ამ ზედაპირში ნულს ტოლი იქნება.

მიღებულ შედეგს

$$\oint G_n dS = -4\pi\gamma m,$$

სადაც m არის ჩაკეტილი ზედაპირის შიგნით არსებული მთელი მასა, ეწოდება გაუსის თეორემა. იგი აკავშირებს გრავიტაციული ველის დაძაბულობის ნაკადს ველის გამომწვევ მასასთან.

გამოვიყენოთ გაუსის თეორემა ზოგიერთი მარტივი გრავიტაციული ველის გამოსათვლელად. როგორც პირველი მაგალითი, გამოვითვალოთ წერტილოვანი მასის ველი. ცხადია, სფერული სიმეტრიის გამო, ველის დაძაბულობა დამოკიდებული უნდა იყოს მხოლოდ მანძილზე წერტილოვანი მასიდან და მიმართული უნდა იყოს ამ მასისაკენ. შემოვაგლოთ

მასის ირგვლივ ნებისმიერი r -რადიუსიანი სფერო და გამოვითვალოთ დაძაბულობის ნაკადი მის ზედაპირში

$$N = \oint G_n dS.$$

ვინაიდან \vec{G} მიმართულია შიდა ნორმალის გასწვრივ

$$G_n = -G$$

და რადგანაც G ერთი და იგივეა სფერული ზედაპირის ყველა წერტილში, იგი შეიძლება გამოვიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ; მივიღებთ

$$N = -G \oint dS,$$

მაგრამ ინტეგრალი სფეროს ზედაპირზე მოგვცემს სფეროს ზედაპირის ფართობს და ნაკადისათვის გვექნება

$$N = -4\pi G r^2.$$

მეორე მხრივ, გაუსის თეორემის თანახმად

$$N = -4\pi \gamma M,$$

სადაც M არის ველის გამომწვევი მასა. შედარება გვაძლევს

$$G = \gamma \frac{M}{r^2},$$

ე. ი. უკვე ცნობილ შედეგს.

ცხადია, ანალოგიურად გამოითვლება ერთგვაროვანი სფეროს მიერ შექმნილი ველის დაძაბულობა სფეროს გარეთ. მივიღებთ იმავე შედეგს

$$G = \gamma \frac{M}{r^2},$$

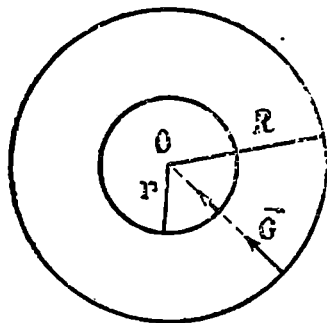
რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთგვაროვანი სფერული სხეული ისეთივე ველს ქმნის, როგორსაც მის ცენტრში მოთავსებული M მასის მქონე წერტილი.

გამოვითვალოთ გრავიტაციული ველი სფეროს შიგნით რაიმე r მანძილზე ცენტრიდან (ნახ. 232). თუ სფეროს შიგნით შემოვწერთ r -რადიუსიან სფეროს, დაძაბულობის ნაკადისათვის მივიღებთ

$$N = -4\pi G r^2,$$

გაუსის თეორემის თანახმად იგივე ნაკადი გამოისახება ასე:

$$N = -4\pi \gamma M(r),$$



ნახ. 232

სადაც $M(r)$ არის r -რადიუსიანი სფეროს შიგნით მოთავსებული მასა. მისთვის ადვილად მივიღებთ ფორმულას

$$M(r) = \frac{r^3}{R^3} M;$$

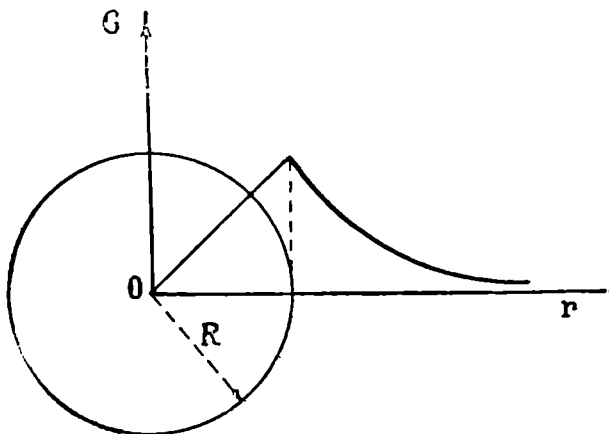
აქედან მივიღებთ

$$4\pi G r^2 = 4\pi \gamma \frac{r^3}{R^3} M,$$

საიდანაც დაძაბულობისათვის გვექნება

$$G = \gamma \frac{M}{R^3} r. \quad (\text{XIV, 38})$$

როგორც ვხედავთ, სფეროს შიგნით დაძაბულობა პროპორციულია ცენტრამდე მანძილისა, ე. ი. ის კლებულობს ცენტრთან მიახლოების დროს, თვით ცენტრში დაძაბულობა ნულის ტოლია.



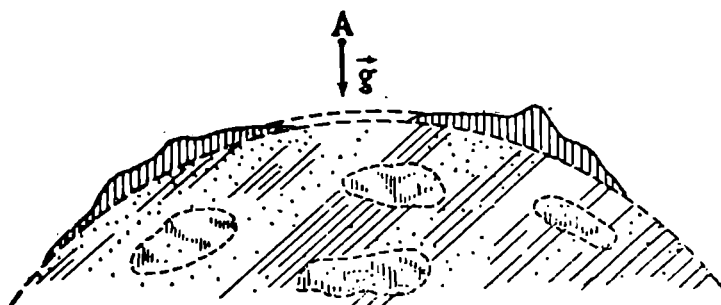
ნახ. 233

233-ე ნახაზზე ნაჩვენებია დაძაბულობის ცვლილება სფეროს შიგნით და გარეთ მანძილის მიხედვით. ასევე შეიძლება გამოვითვალოთ სხვა სიმეტრიულ სხეულთა გრავიტაციული ველების დაძაბულობა.

§ 99. დედამიწის გრავიტაციული ველი

სხვადასხვა სხეულის გრავიტაციულ ველებს შორის ჩვენს პრაქტიკულ ცხოვრებაში ყველაზე მნიშვნელოვან როლს დედამიწის გრავიტაციული ველი ასრულებს. მისი შესწავლა ყოველთვის წარმოადგენდა მეცნიერების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას. ერთი მხრივ, ამ

ველის ხასიათის ცოდნა საკიროა დედამიწის მახლობლად სხეულების მოძრაობის შესასწავლად, ხოლო, მეორე მხრივ, იგი საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ დედამიწის ფორმა და მასების განაწილება მის შიგნით. ცხადია, დედამიწის გრავიტაციული ველი დამოკიდებულია დედამიწის ზომაზე, ფორმაზე, მასების განაწილებაზე მის შიგნით, მთების, ზღვების და სხვა სხეულების განლაგებაზე მის ზედაპირზე. დაძაბულობას დედამიწის მახლობელ რაიმე A წერტილში ქმნის დედაპირის შიგნით და დედამიწის ზედაპირზე არსებული ყველა მასა (ნახ. 234). ზუსტი თეორიული გამოთვლა დედამიწის ველის დაძაბულობისა რაიმე წერტილში შესაძლებელი იქნებოდა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, ²თუ ცნობილი იქნებოდა მისი მასა, ფორმა, მასების განაწილება მის შიგნით, მთებისა და ზღვების განლაგება მის ზედაპირზე და ა. შ. ცხადია, ამ ამო-

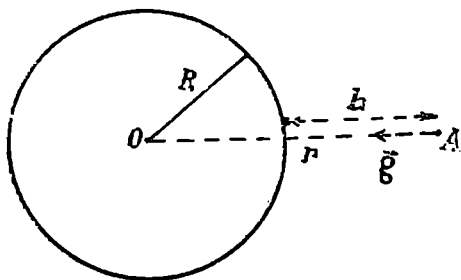


ნახ. 234

ცანის ამოხსნა ჩვენთვის შეუძლებელია. ამიტომაც იქცევიან შემდეგნაირად. ჯერ დაუშვებენ, რომ დედამიწა წარმოადგენს გარკვეული მასის ზუსტ სფეროს, რომელშიც მასები თანაბრად განაწილებული, ე. ი. რომლის სიმკვრივე ყველგან ერთი და იგივეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ არ იღებენ მხედველობაში დედამიწის ფორმის გადახრას სფერული ფორმიდან, უსწორმასწორობას მის ზედაპირზე და მასების არათანაბარ განაწილებას. ასეთი მიახლოებით დედამიწის გრავიტაციული ველის გამოთვლა არ არის ძნელი, მაგრამ, ცხადია, ამ მიახლოებაში გამოთვლილი დაძაბულობა არ დაემთხვევა მის ექსპერიმენტულად გაზომილ მნიშვნელობას. ამის შემდეგ იწყებენ თანდათანობით სხვადასხვა შესწორების შეტანას. ჯერ მიიღებენ მხედველობაში იმ გარემობას, რომ დედამიწა ზუსტად სფერო არ არის—იგი გამობერილია ეკვატორთან და ჩაქსლეტილია პოლუსებთან, შემდეგ გამოიკვლევენ რა გავლენას ახდენს დაძაბულობაზე განსახილველი წერტილის მახლობლად არსებული დე-

დამიწის ზედაპირის უსწორმასწორობა (მთები, ზღვები და სხვ.). კიდევ მეტი სიზუსტისათვის ცდილობენ მიიღონ მხედველობაში ეს გარემოება, რომ დედამიწის სხვადასხვა ფენას სხვადასხვა სიმკვრივე აქვს, რომ სხვადასხვა ადგილას დედამიწაში განლაგებულია სხვადასხვა მადნეული და ა. შ. ხშირად შებრუნებითაც იქცევიან. თეორიულად გამოთვლილ და ექსპერიმენტულად გაზომილ დაძაბულობებს შორის არსებული განსხვავებიდან ასკვნიან მასების განაწილების შესახებ დედამიწის ქერქში, მადნეულის განლაგების, მისი რაოდენობის და სხვათა შესახებ.

ფიზიკის ზოგად კურსში ყოვლად შეუძლებელია ყველა ამ საკითხის განხილვა. ჩვენ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ მიახლოებითი გამოთვლებით. ჯერ დედამიწას განვიხილავთ როგორც თანაბარი სიმკვრივის



ნახ. 235

სფეროს, შემდეგ მოკლედ გავარკვევთ რა გავლენას ახდენს გრავიტაციულ ველზე სფერული ფორმიდან გადახრა.

აღნიშნოთ აგრეთვე, რომ, ვინაიდან გაზომვები წარმოებს დედამიწის ზედაპირის მიმართ და დედამიწა კი არაინერციული სისტემაა, მხედველობაში იქნება მისაღები ამ არაინერციულობით გამოწვეული ინერციის ძალები. ამ საკითხს ჩვენ შემდეგ გავარჩევთ.

ვთქვათ, დედამიწა წარმოადგენს M მასის მქონე თანაბარი სიმკვრივის სფეროს¹, რომლის რადიუსია R (ნახ. 235). მაშინ მე-9 პარაგრაფის მიხედვით მისი ველის დაძაბულობა რაიმე A წერტილში დედამიწის გარეთ, რომელიც r მანძილით არის დაშორებული ცენტრიდან, იქნება

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r}. \quad (\text{XIV}, 39)$$

¹ შედეგი არ შეიცვლება, თუ მივიღებთ, რომ დედამიწის სიმკვრივე ყველგან ერთნაირი არ არის, მაგრამ იგი დამოკიდებულია მხოლოდ მანძილზე ცენტრიდან, ე. ი. რომ დედამიწა სხვადასხვა სიმკვრივის კონკრეტული ფენებისაგან შედგება.

ასევე მივიღებთ პოტენციალისათვის

$$V = -\gamma \frac{M}{r}. \quad (\text{XIV, 40})$$

გავიხსენოთ, რომ გრავიტაციული ველის დაძაბულობა არის იმავე დროს აჩქარება, რომელსაც ლეზულობს სხეული გრავიტაციულ ველში. მაშასადამე, \vec{g} დედამიწაზე ვარდნილი სხეულების აჩქარებაა. როგორც ვხედავთ, დედამიწის ველის დაძაბულობა (აჩქარება) ცენტრიდან მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია და ცენტრისაკენაა მიმართული. მაშასადამე, სიმძიმის ძალის აჩქარება კლებულობს დედამიწის ცენტრიდან (და, მაშასადამე, ზედაპირიდანაც) დაშორების დროს. თვით დედამიწის ზედაპირზე აჩქარება იქნება

$$\vec{g}_0 = -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{R}, \quad (\text{XIV, 41})$$

პოტენციალი კი

$$V_0 = -\gamma \frac{M}{R}. \quad (\text{XIV, 42})$$

\vec{g} -სა და V -სათვის მიღებული ფორმულები მართებელია ნებისმიერი მანძილისათვის დედამიწიდან (ზილებულ მიახლოებაში), მაგრამ დედამიწის მახლობლად მათ შეიძლება უფრო მარტივი სახე მიეცეთ. ვთქვათ, განსახილველი წერტილის სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან არის h , მაშინ, ცხადია, რომ $r = R + h$ და ფორმულები დაძაბულობისა და პოტენციალისათვის შემდეგ სახეს მიიღებენ (დაძაბულობისათვის ფორმულა სკალარულად არის დაწერილი):

$$g = \gamma \frac{M}{(R+h)^2},$$

$$V = -\gamma \frac{M}{R+h}.$$

დავუშვათ ახლა, რომ h ძალიან მცირეა დედამიწის რადიუსთან შედარებით ($h \ll R$), მაშინ შეიძლება $\frac{1}{R+h}$ და $\frac{1}{(R+h)^2}$ გამოსახულებები

გავშალოთ მწკრივებად და შემოვისაზღვროთ მხოლოდ რამდენიმე წევრით. თუ რამდენი წევრით შემოვისაზღვრებთ, ეს დამოკიდებულია სიზუსტეზე, რომლითაც ვაწარმოებთ გამოთვლებსა და გაზომვებს. მივიღებთ:

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h^2}{R^2} \dots \right), \quad (\text{XIV, 43})$$

$$V = -\gamma \frac{M}{R} \left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} \dots \right), \quad (\text{XIV, 44})$$

თუ (XIV, 44) ფორმულაში შემოვიხაზოვრებთ ორი წევრით, მივიღებთ

$$V = -\gamma \frac{M}{R} + \gamma \frac{M}{R^2} h.$$

მაგრამ (XIV, 41) და (XIV, 42) ფორმულების თანახმად პირველი წევრია პოტენციალის მნიშვნელობა დედამიწის ზედაპირზე, ხოლო მეორე წევრში h -ის წინ მდგომი გამოსახულება—დაძაბულობის მნიშვნელობა იმავე ზედაპირზე. ამიტომ აღებული სიზუსტით

$$V = V_0 + g_0 h. \quad (\text{XIV, 45})$$

ამავე სიზუსტით (XIV, 43) ფორმულაში მხოლოდ პირველი წევრით უნდა შემოვიხაზოვროთ, გვექნება

$$g = g_0. \quad (\text{XIV, 46})$$

როგორც ვხედავთ, დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში ($h \ll R$) დაძაბულობა მუდმივია და პოტენციალი h სიმაღლის პროპორციულად იზრდება. გამოვარკვეით რა სიმაღლემდე შეიძლება (XIV, 45) და (XIV, 46) მიახლოებითი ფორმულებით სარგებლობა. ამისათვის უნდა ვიცოდეთ რა სიზუსტით გვინდა გამოთვლების ჩატარება. ვთქვათ, ეს სიზუსტეა 1% (დაძაბულობისათვის); ეს იმას ნიშნავს, რომ მეორე წევრი დაძაბულობის გამოსახულებაში (რომელიც ჩვენ უგულებელვყავით)

$$\gamma \frac{2M}{R^3} h,$$

არ უნდა აღემატებოდეს პირველი წევრის ერთ პროცენტს, უფრო მარტივად, $\frac{2h}{R}$ არ უნდა აღემატებოდეს ერთ მეასედს. მაშასადამე, აღებული მიახლოების გამოყენების პირობა არის

$$\frac{2h}{R} < \frac{1}{100},$$

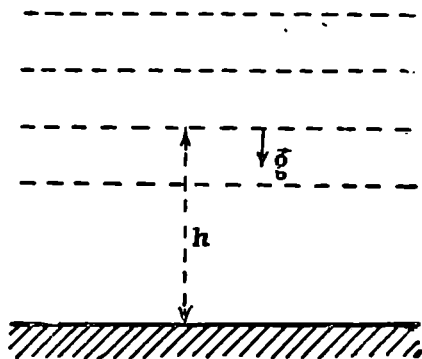
ე. ი.

$$h < \frac{R}{200}.$$

ვინაიდან დედამიწის რადიუსი დაახლოებით 6400 კმ-ია, h -ისათვის მივიღებთ

$$h < 32 \text{ km}.$$

მაშასადამე, $32km$ -ის სიმაღლემდე ჩვენ შეგვიძლია ერთი პროცენტის სიზუსტით დედამიწის ველის დაძაბულობა მუდმივად ჩავთვალოთ. მიახლოება, რომელიც (XIV, 45) ფორმულით არის გამოსახული, იმას ნიშნავს, რომ არ არის მიღებული მხედველობაში დედამიწის ზედაპირის გამრუდება. დედამიწის მცირე ნაწილისათვის ეს დასაშვებია; ეს ნაწილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ბრტყელი, ხოლო ველი მის მახლობლად—როგორც ერთგვაროვანი. იზოპოტენციალური ზედაპირები იქნება დედამიწის ზედაპირის პარალელური სიბრტყეები და დაძაბულობა მართლული იქნება მათ მართობულად დედამიწის ზედაპირისაკენ (ნახ. 236).



ნახ. 236

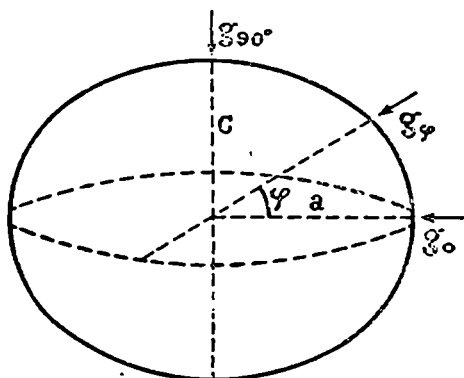
სიმძიმის ძალის აჩქარების, ანუ დაძაბულობის გაზომვის თანამედროვე სიზუსტე აღწევს $1-2 \cdot 10^{-3}$ CGS, ე. ი. ერთ-ორ მილიგალს—პროცენტის მეათედს, ისე რომ g -ს ცვლილება სიმაღლის მიხედვით აღვიღად შეიძლება შეიმჩნეს.

განხილული მიახლოება, რომლის მიხედვითაც სიმძიმის ძალის აჩქარება დედამიწის ზედაპირზე ყველგან ერთნაირი უნდა იყოს (დედამიწვა განიხილება როგორც ერთგვაროვანი სფერო), არ ეთანხმება ცდების შედეგებს. პირველად ფრანგი ასტრონომის რიშეს მიერ იყო შემჩნეული შესანიშნავი მოვლენა (1672), რომელმაც ცხადყო, რომ g სხვადასხვაა სხვადასხვა განედზე. ეკვატორის მახლობლად წარმოებულნი ასტრონომიული გაზომვების დროს მან შეამჩნია, რომ პარიზიდან წამოღებული საქანიანი საათი ყოველდღიურად ორი მინუტით აგვიანებდა. საათის სწორი სვლის მისაღებად საჭირო გახდა საქანის სიგრძის შემცირება. პარიზში დაბრუნებისას გამოიჩვენა, რომ საათი წინ მიდიოდა და საჭირო გახდა საქანის სიგრძის გადიდება საწყის მნიშვნელობამდე. ამ

მოვლენის ერთადერთი ახსნა შემდეგია. საქანის რხევის პერიოდი გამოიხსება ფორმულით:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

თუ პარიზიდან ეკვატორზე გადატანის შედეგად პერიოდი გადიდა, მაშასადამე, სიმძიმის ძალის აჩქარება ეკვატორზე ნაკლები ყოფილა, ვიდრე პარიზში (საქანის სიგრძის შეცვლა ტემპერატურის სხვაობით ვერ ხსნის ამ ეფექტს). ამიტომაც საჭირო გახდა საქანის სიგრძის შემცირება..



ნახ 237

შემდეგმა უფრო ზუსტმა გაზომვებმა საკვებით დაადასტურა g -ს ცვალებადობა განედის მიხედვით. როგორც პირველად ნიუტონმა გამოაჩვენა, ამ ცვალებადობის მიზეზია ორი რამ: პირველი ის, რომ დედამიწა არ წარმოადგენს სფეროს, რომ იგი პოლუსებთან შეკვეთილი ბრუნვის ელიფსოიდის ფორმისაა (ნახ. 237). ამის გამო პოლუსები უფრო ახლოსაა დედამიწის ცენტრთან, ვიდრე ეკვატორი და ცენტრამდე მანძილი თანდათან იზრდება პოლუსიდან ეკვატორისაკენ გადანაცვლების დროს. მეორე მიზეზი კი არის დედამიწის ბრუნვით გამოწვეული ცენტრიდანული ძალა, რომელიც მოქმედებს სიმძიმის ძალის საწინააღმდეგოდ და რომელიც აგრეთვე იზრდება პოლუსიდან ეკვატორისაკენ გადანაცვლების დროს. ცენტრიდანული ძალის მოქმედებას ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ, ახლა კი გამოვარკვევთ, როგორ იცვლება g დედამიწის ზედაპირზე იმის გამო, რომ დედამიწა შეკვეთილი ელიფსოიდია და არა სფერო.

ვთქვათ, დედამიწა პოლუსებთან შეკვეთილი ერთგვაროვანი ბრუნ-

ვის ელიფსოიდა. მისი ეკვატორული რადიუსი იყოს a , ხოლო პოლარული რადიუსი c ($c < a$), მაშინ დაძაბულობისათვის (ე. ი. სიმძიმის ძალის აჩქარებისათვის) φ განედის მქონე წერტილისათვის დედამიწის ზედაპირზე მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$g_{\varphi} = g_0 \left(1 + \frac{a-c}{a} \sin^2 \varphi \right), \quad (\text{XIV, 47})$$

სადაც g_0 არის სიმძიმის ძალის აჩქარების მნიშვნელობა ეკვატორზე. გრადუსული გაზომვების თანახმად დედამიწის ეკვატორული და პოლარული რადიუსებისათვის შემდეგი მნიშვნელობებია მიღებული (100 მეტრის მიახლოებით):

$$a = 6378400 \text{ m}, \quad c = 6356900 \text{ m},$$

ე. ი. პოლარული რადიუსი დაახლოებით 21,5 km -ით მოკლეა, ვიდრე ეკვატორული; აქედან შეჰყვლეტილობისათვის, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$\alpha = \frac{a-c}{a}, \quad (\text{XIV, 48})$$

ვღებულობთ

$$\alpha = \frac{1}{297} \sim 0,00336;$$

მაშასადამე, ფორმულა g -სათვის შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$g_{\varphi} = g_0(1 + 0,00336 \sin^2 \varphi); \quad (\text{XIV, 49})$$

ასე უნდა იცვლებოდეს სიმძიმის ძალის აჩქარება განედის მიხედვით, რომ დედამიწა წარმოადგენდეს ზემოთ მოყვანილი a და c ზომებით განსაზღვრულ ბრუნვის ელიფსოიდს. გაზომვები კვიჩენებს, რომ g მართლაც იზრდება ეკვატორიდან პოლუსისაკენ გადანაცვლებისას, მაგრამ მისი ცვლილება გაცილებით უფრო მეტია, ვიდრე ზემოთ მოყვანილი ფორმულა იძლევა. სახელდობრ, უკანასკნელი გაზომვების მიხედვით g -სათვის ფორმულა ასეთი უნდა იყოს:

$$g_{\varphi} = g_0(1 + 0,00530 \sin^2 \varphi) \quad (\text{XIV, 50})$$

(ჩვენთვის საკმარისი მიახლოებით), ხოლო თვით g_0 -ისათვის, ე. ი. დაძაბულობისათვის ეკვატორზე გაზომვები გვაძლევს მნიშვნელობას:

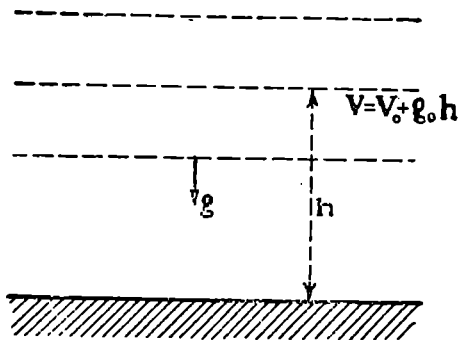
$$g_0 = 978,05 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

აქედან g -სათვის პოლუსზე ვღებულობთ $g_{\theta=0} = 983,22 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ მნიშვნელობას მაშინ, როდესაც თეორიული ფორმულა (XIV, 50) გვაძლევს

$g_{\text{ავ}} = 981,33 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ მნიშვნელობას. ძირითადი მიზეზი ამ განსხვავებისა ის არის, რომ ჩვენ არ მიგვიღია მხედველობაში ცენტრიდანული ძალის გავლენა, რომელიც იწვევს g -ს დამატებით ცვლილებას განედის მიხედვით. სათანადო გამოთვლები მოყვანილი იყო არაინერციული სისტემისადმი მიძღვნილ თავში.

§ 100. სხეულზე მძიმეობის დედამიწის მახლობლად

როგორც ზემოთ ვნახეთ, დედამიწის მახლობლად, დაახლოებით რამდენიმე კილომეტრის სიმაღლემდე, გრავიტაციული ველი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთგვაროვანი. დაძაბულობა ყველა წერტილში



ნახ. 238

ერთნაირი და დედამიწის ზედაპირისაკენ მიმართული იქნება (ნახ. 238). გამოვარკვეოთ, როგორ მოძრაობენ ასეთ ველში სხეულები; ამისათვის ვიპოვოთ m მასის სხეულის პოტენციალური ენერჯია და მასზე მოქმედი ძალა. ვინაიდან პოტენციალი და დაძაბულობა შემდეგი ფორმულებით გამოისახება:

$$V = V_0 + g_0 h,$$

$$\vec{g} = \vec{g}_0,$$

პოტენციალური ენერჯიისათვის და სხეულზე მოქმედი ძალისათვის შემდეგ ფორმულებს მივიღებთ¹:

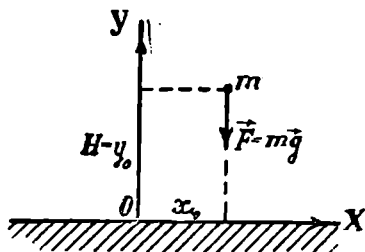
$$U = U_0 + mgh,$$

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

¹ ამ პარაგრაფში დაძაბულობას დედამიწის ზედაპირზე g -თი აღვნიშნავთ.

სადაც U_0 არის სხეულის პოტენციალური ენერგია დედამიწის ზედაპირზე.

სხეულის მოძრაობის ხასიათი დედამიწის ზედაპირის მახლობლად (ჩვენ უგულებელვყოფთ ჰაერის წინააღმდეგობას), დამოკიდებულია მასზე მოქმედ \vec{F} ძალასა და საწყის პირობებზე, ე. ი. იმაზე, თუ სად იმყოფება სხეული საწყის მომენტში და როგორია საწყისი სიჩქარე. დავუშვათ, რომ მოძრაობა წარმოებს ვერტიკალურ სიბრტყეში. ავირჩიოთ კოორდინატთა ღერძები, ისე როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები, ე. ი. სათავე მოვათავსოთ ზედაპირზე, OX ღერძი -- ზედაპირის გასწვრივ და OY ღერძი -- ვერტიკალურადაა ზემოთ (ნახ. 239). ვინაიდან m წერტილზე მოქმედი ძალა ვერტიკალურად ქვემოთ არის მიმართული, ძალების გვეგმილებითათვის OX და OY ღერძებზე მივიღებთ



ნახ. 239

$$F_x = 0, \quad F_y = -mg.$$

მოძრაობის განტოლებებისათვის მივიღებთ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg. \quad (\text{XIV, 51})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ წერტილის მოძრაობა ვერტიკალურ სიბრტყეში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჰამი ორი მოძრაობისა: თანაბარი მოძრაობისა OX ღერძის გასწვრივ, ე. ი. პორიზონტალურად და თანაბრად აჩქარებული მოძრაობისა ვერტიკალური მიმართულებით.

მიღებული განტოლებების ინტეგრება გვაძლევს:

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad v_x = v_{0x},$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = v_{0y} - gt. \quad (\text{XIV, 52})$$

მულტივი სიდიდეები (x_0 , y_0) და (v_{0x} , v_{0y}) წარმოადგენენ საწყისი მდებარეობის და საწყისი სიჩქარის კოორდინატებს. მათი ცოდნა აუცილებელია მოძრაობის ხასიათის გასარკვევად. განვიხილოთ კერძო შემთხვევები.

1. უძრავი სხეულის ვარდნა დედამიწის ზედაპირზე. ვთქვათ, საწყის მომენტში ნაწილაკი იმყოფება დედამიწის ზედაპირიდან H სიმაღლეზე და უძრავია. საწყისი მდებარეობის კოორდინატები იყოს x_0 და y_0 (ნახ. 239). საწყისი სიჩქარის კოორდინატები ნულის ტოლი იქნება ($v_{0x} = v_{0y} = 0$). (XIV, 52) განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$x = x_0, \quad y = H - \frac{gt^2}{2}, \quad v_x = 0, \quad v_y = -gt. \quad (\text{XIV, 53})$$

მოძრაობა ხდება ვერტიკალურად ქვემოთ (თანაბრად აჩქარებული ვარდნა). H სიმაღლიდან ჩამოვარდნის დრო ადვილად გამოითვლება იმ პირობით, რომ დედამიწაზე დაცემის მომენტში $y = 0$. თუ ჩამოვარდნის დროს T -თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

ვარდნილი სხეულის სიჩქარე თანაბრად მატულობს შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$v_y = -gt,$$

სადაც ნიშანი მინუსი მაჩვენებელია, რომ სიჩქარე მიმართულია OY -ის საწინააღმდეგოდ (ქვემოთ). (XIV, 53) ფორმულებიდან შეიძლება გამოვრიცხოთ დრო და დავაკავშიროთ ერთიმეორესთან კოორდინატი და სიჩქარე, მივიღებთ

$$v_y = \sqrt{2g(H - y)}, \quad (\text{XIV, 54})$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვითვალოთ ვარდნის სიჩქარე ყოველი სიმაღლისათვის.

2. ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის მოძრაობა. ვთქვათ, დედამიწის ზედაპირის რაიმე წერტილიდან (x_0 და $y_0 = 0$ კოორდინატებით) ვერტიკალურად ზემოთ ასროლილია m მასის სხეული $\vec{v}(0, v_{0y})$ საწყისი სიჩქარით. ამ საწყისი პირობების ჩასმა (XIV, 52) ფორმულეებში გვაძლევს:

$$x = x_0, \quad v_x = 0, \\ y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = v_{0y} - gt,$$

რაც, გვიჩვენებს, რომ მოძრაობა ისევ ვერტიკალური მიმართულებით წარმოებს. სიჩქარის ფორმულა

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (\text{XIV, 55})$$

გვიჩვენებს, რომ სიჩქარე თანდათან კლებულობს და $T = \frac{v_{0y}}{g}$ მომენტ-

ში ნულის ტოლი ხდება. მაშასადამე, საწყისი მომენტიდან ამ მომენტამდე მოძრაობა თანაბრად შენელებულია. T მომენტში სხეული მიაღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს H , რომელიც გამოითვლება y -ის ფორმულიდან, მასში t -ს მაგიერ T -ს ჩასმით მივიღებთ

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g}. \quad (\text{XIV}, 55')$$

T მომენტის შემდეგ (ე. ი. გაჩერების შემდეგ) სხეული იწყებს ვარდნას თანაბრად აჩქარებული მოძრაობით, რომელიც ზემოთ იყო აღწერილი.

გამოვარკვეით როგორ იცვლება სხეულის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები ასეთი მოძრაობის დროს. ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად მივიღებთ

$$E = \frac{mv^2}{2} + U_0 + mgy = \text{const},$$

სადაც $U_0 + mgy$ არის y სიმაღლეზე მდებარე სხეულის პოტენციალური ენერგია. როგორც წინათ აღვნიშნეთ, ხშირად უშვებენ, რომ პოტენციალური ენერგიის ათვლა უნდა ხდებოდეს დედამიწის ზედაპირიდან და არა უსასრულობიდან, ე. ი. თელიან, რომ პოტენციალური ენერგია ნულია არა უსასრულობაში, არამედ დედამიწის ზედაპირზე. ამ დაშვებით U_0 შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ და ენერგიის ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy = \text{const};$$

ამ ფორმულებიდან ადვილად შეიძლება დავასკვნათ, რომ ზემოთ მოძრაობის დროს კინეტიკური ენერგია პოტენციალურში გადადის, ხოლო ვარდნისას გადასვლა შებრუნებული მიმართულებით ხდება.

მ. დედამიწის ზედაპირისადმი დახრილად გასროლილი სხეულის მოძრაობა. ახლა განვიხილოთ უფრო მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როდესაც სხეული გასროლილია დედამიწის ზედაპირიდან არა ვერტიკალურად, არამედ დახრილად რაღაც α კუთხით ზედაპირისადმი (ნახ. 240). საწყისი პირობები ამ შემთხვევაში იქნება $x_0 = y_0 = 0$ და $\vec{v}_0 (v_{0x} = v_0 \cos \alpha; v_{0y} = v_0 \sin \alpha)$. გამარტივებისათვის დაშვებულია, რომ კოორდინატთა სათავე გასროლის წერტილში არის არჩეული. (XIV, 52) ფორმულებში ჩასმა მოგვცემს:

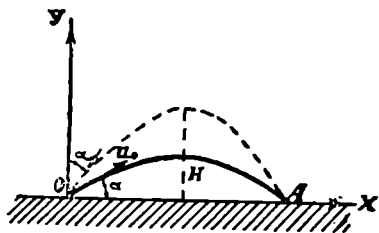
$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_x = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (\text{XIV}, 56)$$

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებს, რომ განსახილველი მოძრაობა არის ჯამი თანაბარი მოძრაობისა ჰორიზონტალური მიმართულებით და თანაბრად აჩქარებული (შენელებული) მოძრაობისა ვერტიკალური მიმართულებით.

ტრაექტორიის მოსაძებნად ისევ გამოვიყენებთ t ამ ორი განტოლებიდან. მივიღებთ

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (\text{XIV}, 57)$$



ნახ. 240

როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან არის ცნობილი, ეს განტოლება წარმოადგენს პარაბოლის განტოლებას; მისი სახე 240-ე ნახაზზეა ნაჩვენები.

ჩვენ ვხედავთ, რომ დედამიწისადმი რაიმე კუთხით გასროლილი სხეული მოძრაობს დახრილად, აღწევს გარკვეულ მაქსიმალურ სიმაღლეს და ისევ ეცემა დედამიწაზე.

მოქებნით მაქსიმალური სიმაღლე H და გასროლის სიშორე $O.A = a$. უკანასკნელი ადვილად მოიძებნება იმ პირობიდან, რომ O და A წერტილებისათვის $y=0$, მაშასადამე, უნდა მოიძებნოს x -ის ის მნიშვნელობები, როდესაც $y=0$. (XIV, 57) განტოლებიდან მივიღებთ

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0.$$

პირველი ფესვი $x=0$ ეთანადება O წერტილს, მეორე ფესვი კი, რომელიც მიიღება ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულების ნულთან გატოლებით, მოგვცემს A წერტილის x კოორდინატს, ე. ი. გასროლის სიშორეს

$$x_A = a = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (\text{XIV}, 58)$$

მაქსიმალური სიმაღლის გამოსათვლელად საკმარისია მოვნახოთ y -ის მაქსიმუმი; ამისათვის y გავაწარმოთ x -ის მიმართ და გავუტოლოთ წარმოებული ნულს, მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x_c = 0,$$

სადაც x_c არის პარაბოლის წვეროს x კოორდინატი; აქედან x_c -სათვის მივიღებთ

$$x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{a}{2}. \quad (\text{XIV, } 59)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ გასროლილი სხეული მაქსიმალურ სიმაღლეს მიღწევს გასროლის მანძილის შუა წერტილში. თვით მაქსიმალური სიმაღლისათვის მივიღებთ (თუ x -ის ნაცვლად (XIV, 57) განტოლებაში ჩავსვამთ x_c -ს)

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha; \quad (\text{XIV, } 60)$$

ეს ფორმულა ადვილად მიიღება (XIV, 55') ფორმულიდან, თუ მასში v_0 -ს მაგიერ ჩავწერთ $v_0 \cdot \sin \alpha$, ე. ი. სიჩქარის ვერტიკალურ მდგენელს. (XIV, 58) და (XIV, 60) ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ გამოვიფალოთ გასროლილი სხეულის მაქსიმალური აწევის სიმაღლე და გასროლის სიშორე, თუ ცნობილია საწყისი სიჩქარის სიდიდე და ჰორიზონტისადმი დახრილობის კუთხე. ეს ფორმულები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს საარტილერიო ყუმბარების გასროლის შესასწავლად (ე. წ. გარე ბალისტიკა). მართალია, ისინი ძალიან მიახლოებითი არიან, ვინაიდან მათი გამოყენების დროს უგულებელყოფილია ატმოსფეროს წინააღმდეგობა და g -ს ცვალებადობა სიმაღლის მიხედვით, მაგრამ პირველი ორიენტაციისათვის მათი გამოყენება საესეებით გამართლებულია. საინტერესოა გამოვარკვიოთ, როგორ არის დამოკიდებული გასროლის მანძილი საწყისი სიჩქარის დახრილობის კუთხეზე. (XIV, 58) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ როდესაც α იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$ -მდე, გასროლის სიშორე

x_A -ჯერ იზრდება (დაწყებული ნულიდან) და მაქსიმუმის მიღწევის შემდეგ ისევ იწყებს შემცირებას (ნახ. 240). ვინაიდან $\sin 2\alpha$ -ს მაქსიმუმი

(ერთის ტოლი) მიიღება $\alpha = \frac{\pi}{4}$ -თვის, გასროლის მაქსიმალური სიშო-

რის მისაღებად (მოცემული სიჩქარის სიდიდისათვის) გასროლა უნდა ხდებოდეს 45° -ით ჰორიზონტისადმი. თვით გასროლის მაქსიმალური სიშორე იქნება

$$a_{max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

რომ დახრილობის კუთხის კიდევ უფრო გაზრდისას გასროლის მანძილი ისევ იწყებს შემცირებას, შემდეგიდან ჩანს: ვინაიდან $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha)$, მივიღებთ

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta.$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

მაშასადამე, გასროლის სიშორე $\frac{\pi}{2} - \alpha$ კუთხისათვის ისეთივეა, როგორც α კუთხისათვის (ნახ. 240).

უნდა აღინიშნოს, რომ შეუძლებელია მიღებული შედეგების უშუალოდ გამოყენება პრაქტიკაში (ბალისტიკაში), ვინაიდან ჰაერის წინააღმდეგობის არსებობა საგრძნობლად ცვლას გასროლილი სხეულების მოძრაობის ხასიათს. განსაკუთრებით თანამედროვე სწრაფი ყუმბარების შემთხვევაში; მაგალითად, ტყვიისათვის, რომლის საწყისი სიჩქარე 625

$\frac{m}{\text{sec}}$, ზემოთ მოყვანილი გამოთვლები იძლევა, რომ უდიდესი გასრო-

ლის სიშორე (45°-ით დახრის დროს) უნდა იყოს 40 km, ხოლო აწევის სიმაღლე 10 km. სინამდვილეში მაქსიმალური გასროლის სიშორე არის 3 km და იგი მიიღება 32°-იანი კუთხით გასროლის დროს, სიმაღლე კი 1 km-ას არ აღემატება.

როგორც ცნობილია, უკანასკნელ წლებში პირველად საბჭოთა კავშირში და შემდეგ სხვა ქვეყნებშიც გაშვებულ იქნა მეტეოროლოგიური და ბალისტიკური რაკეტები და ხელოვნური თანამგზავრები, რომელთა

სიჩქარე და ასროლის სიმაღლე ძალიან დიდია (სიჩქარე აღწევს 8 $\frac{km}{\text{sec}}$

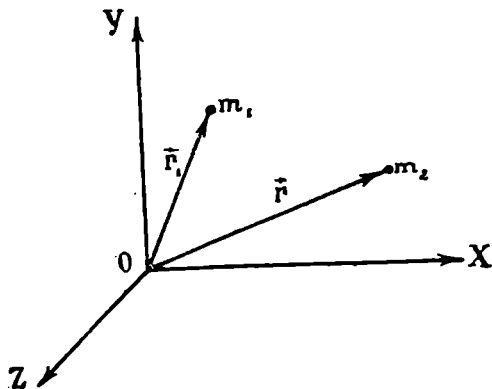
და მეტს, ხოლო ასროლის სიმაღლე 2000km).

მათი მოძრაობის გაანგარიშებისათვის უკვე საჭიროა მხედველობაში მიღება არა მარტო ჰაერის წინააღმდეგობისა, არამედ g -ს ცვლილებისაც, სიმაღლისა და განედის მიხედვით და დედამიწის ბრუნვისა (ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები).

§ 101. ორი წმრტილის მოძრაობა მრავლიტაციული ურთიერთმედიზის გავლენით (ორი წმრტილის კრობლმვა)

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, გრავიტაციული ურთიერთქმედება განსაკუთრებით მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ციური სხეულების მოძრაობაში. პლანეტების მოძრაობა მზის ირგვლივ, თანამგზავრების (როგორც ბუნებრივის, ისე ხელოვნურის) მოძრაობა პლანეტების ირგვლივ, კომეტების, მეტეორებისა და დედამიწის ზედაპირიდან გასროლილი სხეულების მოძრაობა ძირითადად გრავიტაციული ურთიერთქმედ-

დებით არის გამოწვეული. ციური სხეულების მოძრაობას გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით შეისწავლის ასტრონომიის დარგი ციური მექანიკა. გამორკვევა იმისა, თუ როგორ მოძრაობს სხეული გრა-
ვიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით, საკმაოდ რთულია, მაგრამ არის ზოგიერთი შემთხვევა, რომელთა განხილვა მარტივი მეთოდებითაა შესაძლებელი. ასეთი შემთხვევაა, მაგალითად, ორი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით. ვინაიდან ციურ სხეულებს, მაგალითად: მზესა და დედამიწას ან დედამიწასა და მთვარეს შორის მანძილები გაცილებით მეტია მათ ზომებზე, პირველი მიახლოებით ისინი შეიძლება ნივთიერ წერტილებად ჩავთვალოთ და მათი მოძრაობა ზემოთ მოყვანილ შემთხვევას მივაკუთვნოთ. მნიშვნე-
ლოვანია, რომ ორი წერტილის მოძრაობის განხილვის დროს არ მივი-
ღებთ მხედველობაში სხვა სხეულების მოქმედებას, ვინაიდან მრავალ შემთხვევაში ეს მოქმედება ძალიან მცირეა და, გარდა ამისა, მისი მხედვე-
ლობაში მიღება ძალიან გაართულებდა საკითხის განხილვას. ცნობილია, მაგალითად, რომ ე. წ. სამი წერტილის პრობლემა, ე. ი. საკითხი სამი ნივ-
თიერი წერტილის მოძრაობისა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავ-



ნახ. 241

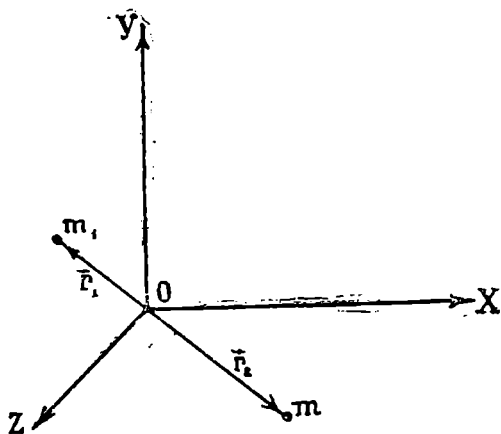
ლენით იმდენად რთულია, რომ მიუხედავად უდიდესი მათემატიკოსებისა და ასტრონომების შრომებისა მისი ამოხსნა მოხერხდა მხოლოდ მე-
ოცე საუკუნეში და ისიც მხოლოდ უსასრულო მწკრივების საშუალებით.

განვიხილოთ ორი ნივთიერი ნაწილაკი m_1 და m_2 მასებით (ნახ. 241) და \vec{r}_1 და \vec{r}_2 რადიუს-ვექტორებით არჩეული ათვლის სისტემის მიმართ. მათ შორის ურთიერთქმედება შემდეგი პოტენციალური ენერგიით გამოისახება:

$$U = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r}, \quad (\text{XIV, 61})$$

სადაც $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ არის ნაწილაკთა შორის მანძილი. ამოცანა მდგომარეობს ნაწილაკთა ტრაექტორიების მოძებნაში და ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობის ხასიათის გარკვევაში.

როგორც ახლა გამოვარკვევთ, ამისათვის საკმარისი იქნება მულდმივობის კანონების გამოყენება. ამოცანის ამოხსნის ვასამარტივებლად გადავიტანოთ კოორდინატთა სათავე ინერციის ცენტრში. ვინაიდან განსახილველი ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემა იზოლირებულია, მისი ინერციის ცენტრი უძრავი იქნება ან იმოძრაებს მულდმივი სიჩქარით. ამიტომაც ახალ ათვლის სისტემაში ნაწილაკების მდებარეობები და რადიუს-ვექტორები ისე იქნებიან განლაგებული სათავის მიმართ (ინერციის ცენტრის მიმართ), როგორც ეს 242-ე ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახ. 242

ვინაიდან სათავე ინერციის ცენტრშია მოთავსებული, ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორი ნულის ტოლი იქნება, ე. ი. ამ ათვლის სისტემაში გვექნება:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0.$$

შემოვიღოთ \vec{r} რადიუს-ვექტორი, რომელიც m_2 ნაწილაკიდან m_1 ნაწილაკისაკენ არის გავლებული, ცხადია, რომ

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}.$$

ამ ორი განტოლების დახმარებით \vec{r}_1 და \vec{r}_2 რადიუს-ვექტორები შეიძლება გამოვხატოთ \vec{r} -ის საშუალებით, მივიღებთ:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad (\text{XIV, 62})$$

სადაც $M = m_1 + m_2$. მაშასადამე, \vec{r}_1 და \vec{r}_2 რადიუს-ვექტორების როგორც დროის ფუნქციების მოძებნა დაყვანილ იქნა \vec{r} რადიუს-ვექტორის მოძებნაზე. გამოვხატოთ ახლა ენერჯიისა და იმპულსის მომენტის კანონები ამ რადიუს-ვექტორის საშუალებით. ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის ენერჯიისა და იმპულსის მომენტის კანონები შემდეგნაირად იწერება:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const}, \quad (\text{XIV, 63})$$

$$\vec{L} = m_1 [\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1] + m_2 [\vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2] = \text{const}.$$

(XIV, 62) ფორმულების გაწარმოება დროის მიმართ საშუალებას მოგვცემს გამოვსახოთ \vec{v}_1 და \vec{v}_2 სიჩქარეები ერთი \vec{v} სიჩქარის საშუალებით, რომელიც არის \vec{r} -ის წარმოებული დროით:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}, \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}. \quad (\text{XIV, 64})$$

(XIV, 62) და (XIV, 64) ფორმულების ჩასმა ენერჯიისა და იმპულსის მომენტის ფორმულებში მოგვცემს

$$E = \frac{m_1 m_2}{2M} v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const}$$

და

$$\vec{L} = \frac{m_1 m_2}{M} [\vec{r} \cdot \vec{v}] = \text{const}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

და ვუწოდოთ ამ სიდიდეს სისტემის დაყვანილი მასა. აქედან

$$m_1 m_2 = \mu M,$$

მაშინ ენერჯიისა და იმპულსის მომენტის გამოსახულებები ასე გადაიწერება:

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \gamma \frac{\mu M}{r} = \text{const}, \quad (\text{XIV, 65})$$

$$\vec{L} = \mu [\vec{r} \cdot \vec{v}] = \text{const}.$$

გხედავთ, რომ ენერჯის გამოსახულებას ისეთი სახე აქვს, თითქოს ერთი მოძრავი ნაწილაკი გვექონდეს. მართლაც, პირველი წევრი წარმოადგენს μ მასის და \bar{v} სიჩქარის მქონე ნაწილაკის კინეტიკურ ენერჯიას, მეორე წევრი $\gamma \frac{\mu M}{r}$ კი არის μ და M მასების მქონე ნაწილაკების

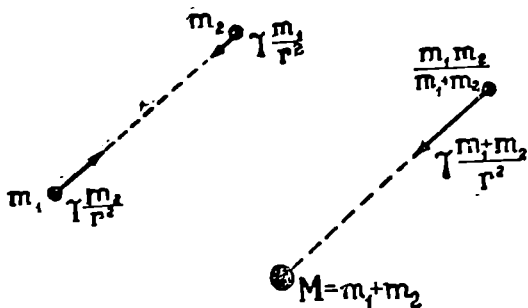
გრავიტაციული ურთიერთქმედების ენერჯია: M მასის ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯია ფორმულაში არ შედის. მაშასადამე, (XIV, 65) ფორმულის აზრი ასე შეიძლება განვმარტოთ. გვაქვს ორი ნაწილაკი — ერთი უძრავი M მასით და მეორე მოძრავი μ მასით, რომლებიც ურთიერთქმედებენ — $\gamma \frac{\mu M}{r}$ პოტენციალური ენერჯიით. ვინაიდან M მა-

სის ნაწილაკი უძრავია, საძიებელია მხოლოდ ერთი, μ მასის ნაწილაკის მოძრაობა. ორი, m_1 და m_2 მასების ნაწილაკების მოძრაობის მოძებნის ამოცანა დაყვანილია ერთი, μ მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობის მოძებნაზე. ამიტომაც ეწოდება μ -ს სისტემის დაყვანილი მასა. ამასვე ადასტურებს იმპულსის მომენტის ფორმულა; მასში შედის მხოლოდ ერთი წევრი $\mu [\bar{r} \cdot \bar{v}]$, რომელიც წარმოადგენს μ მასის და \bar{v} სიჩქარის მქონე ნაწილაკის იმპულსის მომენტს უძრავი ნაწილაკის მიმართ.

ყოველივე ზემოთქმული ნათლად გვიჩვენებს შემდეგს: ვინაიდან \bar{r} არის m_1 მასის ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი, m_2 მასის ნაწილაკის მიმართ მისი მოძებნა ნიშნავს m_1 ნაწილაკის მოძრაობის განსაზღვრას m_2 ნაწილაკის მიმართ, რომელიც თვითონაც მოძრაობს. ზემოთ მოყვანილი დაყვანა ერთი ნაწილაკის მოძრაობაზე გვიჩვენებს, რომ აღნიშნული მოძრაობის განსაზღვრა შეიძლება ასე მოვახდინოთ. მეორე ნაწილაკი წარმოვიდგინოთ უძრავად და მივაწეროთ მას მასა $M = m_1 + m_2$. წარმოვიდგინოთ აგრეთვე, რომ პირველი ნაწილაკის მასა არის არა m_1 , არამედ μ და შევისწავლოთ მისი მოძრაობა M მასის უძრავი ნაწილაკის მიმართ, — $\gamma \frac{\mu M}{r}$ ურთიერთქმედების გავლენით. ეს მოძრაობა

ისეთივე იქნება, როგორც m_1 მასის მოძრაობა მოძრავი m_2 მასის მიმართ. ის გარემოება, რომ როდესაც ჩვენ გვსურს შევისწავლოთ ერთი ნაწილაკის მოძრაობა მეორე, აგრეთვე მოძრავი, ნაწილაკის მიმართ, ეს მეორე ნაწილაკი უძრავად უნდა ჩავთვალოთ და მივაწეროთ მას $m_1 + m_2$ -ის ტოლი მასა, ხოლო პირველს (რომლის მოძრაობასაც ვიზილავთ) დაყვანილი მასა $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, ნათლად ჩანს შემდეგი მარტივი მსჯელობიდან, აჩქარება (ინერციული სისტემის მიმართ), რომელსაც

პირველი ნაწილაკი ღებულობს ურთიერთქმედების გავლენით, მიმართულია მეორე ნაწილაკისაკენ და $\gamma \frac{m_2}{r^2}$ -ის ტოლია. მეორე ნაწილაკიც ღებულობს $\gamma \frac{m_1}{r^2}$ აჩქარებას, მიმართულს პირველი ნაწილაკისაკენ (ნახ. 243); აქედან, ცხადია, თუ აღებული ინერციული სისტემიდან გადავალოთ სისტემაზე, რომელიც მეორე ნაწილაკთან ერთად მოძრაობს



ნახ. 243

(ე. ი. მეორე ნაწილაკს თუ უძრავად ჩავთვლით), პირველი ნაწილაკის აჩქარება ამ სისტემის მიმართ, ე. ი. ფარდობითი აჩქარება მეორე ნაწილაკის მიმართ, იქნება

$$\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^2}.$$

შედარება $\gamma \frac{m_2}{r^2}$ ფორმულასთან გვიჩვენებს, რომ პირველი ნაწილაკის ფარდობითი აჩქარება მეორის მიმართ ისეთია, თითქოს მეორე ნაწილაკის მასა ყოფილიყოს არა m_2 , არამედ $m_1 + m_2$. მეორე მხრივ, პირველ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა არის $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ და იგი იწვევს პირველი

ნაწილაკის ფარდობით აჩქარებას $\frac{m_1 + m_2}{r^2}$ -ის ტოლს (ნახ. 243).

მაშასადამე, მისი ფარდობითი მასა ყოფილა

$$\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} : \gamma \frac{m_1 + m_2}{r^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

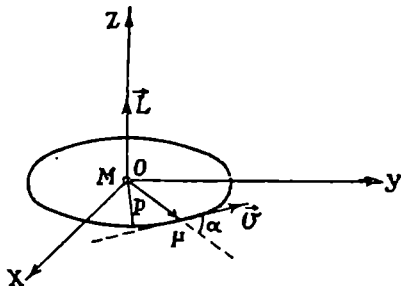
რაც სწორედ დაყვანილ მასას წარმოადგენს.

როგორც ვხედავთ. პირველი ნაწილაკის მოძრაობა მეორე მოძრავე ნაწილაკის მიმართ ისეთია, როგორც დაყვანილი მასის ნაწილაკის მოძრაობა მასების ჯამის ტოლი მასის მქონე მეორე უძრავი ნაწილაკის მიმართ. მაგალითად, თუ გვსურს შევისწავლოთ დედამიწის მოძრაობა მზის მიმართ, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ მზე უძრავია და აქვს მზისა და დედამიწის მასების ჯამის ტოლი მასა, ხოლო დედამიწის მასა დაყვანილი მასის ტოლია. მაშასადამე, ორი ნაწილაკის პრობლემის ამოსახსნელად საკმარისია μ მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობის განხილვა M მასის მქონე უძრავი ნაწილაკის მიმართ.

რადგანაც იმპულსის მომენტი \vec{L} მუდმივი ვექტორია და \vec{r} და \vec{v} ვექტორები მისი მართობია, ცხადია, ორივე ეს ვექტორი ყოველთვის \vec{L} ვექტორის მართობია და, მაშასადამე, უცვლელ სიბრტყეში იქნება მდებარე; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ განსახილველი წერტილი \vec{L} ვექტორის მართობ სიბრტყეში მოძრაობს, ე. ი. მოძრაობა ბრტყელია. ავირჩიოთ OZ ღერძი \vec{L} ვექტორის გასწვრივ (ნახ. 244) და დავეწეროთ იმპულსის მომენტის სიდიდის ფორმულა

$$L = \mu r \cdot v \sin \alpha = \text{const. (XIV, 66)}$$

აქ α არის კუთხე რადიუს-ვექტორსა და სიჩქარეს შორის. კოორდინატთა სათავიდან დავუშვათ მხებზე მართობი და აღვნიშნოთ მისი სიგრძე ρ -თი. როგორც ნახაზი გვიჩვენებს,



ნახ. 244

$$\rho = r \cdot \sin \alpha,$$

რის გამოც იმპულსის მომენტის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$L = \mu \rho v. \quad \text{(XIV, 67)}$$

განვსაზღვროთ ამ ფორმულიდან v და ჩავსვათ ენერჯიის ფორმულაში, მივიღებთ

$$\frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{r} = E,$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნა:

$$\alpha = \gamma m_1 m_2 = \gamma \mu M.$$

მიღებული ტოლობა შემდეგნაირად შეიძლება დაიწეროს:

$$\frac{L^2}{4\mu\rho^2} = \frac{2}{r} + \frac{2E}{\alpha}; \quad (\text{XIV, 68})$$

ამ ტოლობაში ცვალებადი სიდიდეებია r და ρ , დანარჩენი სიდიდეები მუდმივებია. მიღებული განტოლება ახასიათებს ნაწილაკის მიერ შემოწერილ ტრაექტორიას, ვინაიდან იგი აკავშირებს ერთმანეთთან ტრაექტორიის ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორის სიდიდეს, ე. ი. მიზიდვის ცენტრამდე მანძილს, ამ წერტილში გავლებულ მხეზე დაშვებული მართობის სიგრძესთან. მეორე მხრივ, ანალიზური გეომეტრიიდან ვიცით, რომ სწორედ ზემოთ მოყვანილი სახე აქვს მეორე რიგის მრუდების, ე. ი. ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის განტოლებებს¹, სახელდობრ: ელიფსისათვის

$$\frac{l}{\rho^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad (\text{XIV, 69})$$

პარაბოლისათვის

$$\frac{l}{\rho^2} = \frac{2}{r}, \quad (\text{XIV, 70})$$

ჰიპერბოლისათვის

$$\frac{l}{\rho^2} = \frac{2}{r} + \frac{1}{a}, \quad (\text{XIV, 71})$$

აქ ρ და r სიდიდეებს იგივე მნიშვნელობა აქვთ, რაც (XIV, 68) ფორმულაში. l არის პარამეტრის ნახევარი (ნახევარი ქორდისა, რომელიც გავლებულია ფოკუსზე ლერძის მართობულად), ხოლო a არის დიდი ნახევარღერძი (ნახ. 245). კოორდინატთა სათავე მოთავსებულია მეორე რიგის მრუდის ფოკუსში (ჰიპერბოლის შემთხვევაში შიდა ფოკუსში).

(XIV, 69, 70, 71) განტოლებათა შედარება (XIV, 68) განტოლებასთან ვეჩვენებს, რომ ნაწილაკის მოძრაობა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით წარმოებს მეორე რიგის მრუდზე. ეს მრუდი ელიფსია, პარაბოლაა თუ ჰიპერბოლა, დამოკიდებულია (XIV, 68) ფორმულის მარჯვენა მხარის მეორე წევრზე $\frac{2E}{\alpha}$. თუ ეს სიდიდე უარყოფითია, ტრაექტორია იქნება ელიფსი და მისი ნახევარღერძი გამოითვლება ფორმულით

$$a = -\frac{\alpha}{2E}.$$

¹ ეს განტოლებები შემდეგ პარაგრაფებში იქნება გამოყვანილი.

თუ $\frac{2E}{\alpha}$ ნულია, მივიღებთ პარაბოლას უსასრულოდ დიდი ნახევარღერძით, ხოლო თუ იგი დადებითია, გვექნება ჰიპერბოლა ნახევარღერძით

$$a = \frac{\alpha}{2E} \quad (XIV, 72)$$

l პარამეტრი ყველა შემთხვევაში გამოითვლება ფორმულით

$$l = \frac{L^2}{\alpha\mu} \quad (XIV, 73)$$

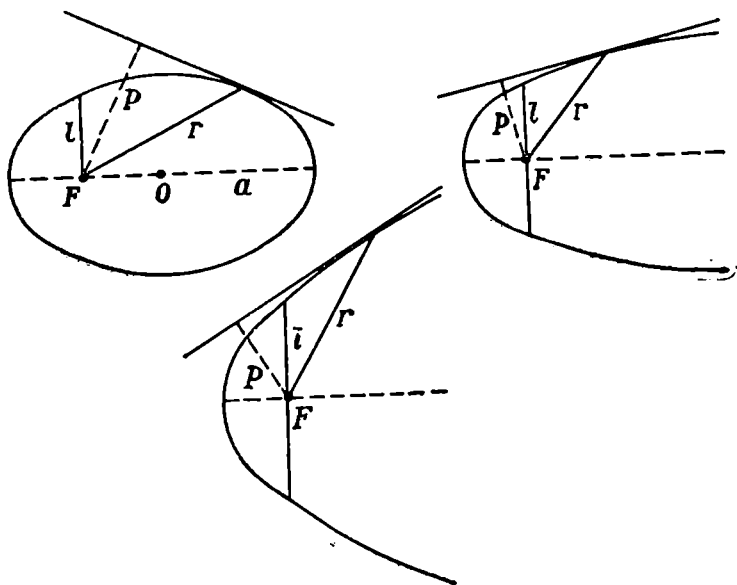
ვინაიდან $\alpha = \gamma m_1 m_2$ დადებითი სიდიდეა, პირობა იმისა, რომ ტრაექტორია იყოს ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$E < 0$ — ელიფსი,

$E = 0$ — პარაბოლა,

$E > 0$ — ჰიპერბოლა.

როგორც ვხედავთ, ტრაექტორიის სახის განმსაზღვრელია სრული ენერგია. იმავე შედეგს მივიღებთ, თუ გამოვითვლით მრუდის ექსცენტრი-



ნახ. 245

სიტეტს. ანალიზური გეომეტრიიდან ვიცით, რომ ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}, \quad (\text{XIV, 74})$$

სადაც b არის მცირე ნახევარღერძი და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$b^2 = la.$$

l -ისა და a -ს მნიშვნელობათა ჩასმა მოგვცემს:

$$b^2 = \mp \frac{L^2}{2\mu E}, \quad (\text{XIV, 75})$$

სადაც ნიშანი მინუსი არის ელიფსისათვის, პლუსი კი ჰიპერბოლისათვის (პარაბოლისათვის $b = \infty$, ვინაიდან $E = 0$).

აქედან ექსცენტრისიტეტისათვის მივიღებთ

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{a^2 \mu}}; \quad (\text{XIV, 76})$$

ამ ფორმულიდან ნათლად ჩანს. რომ, თუ ნაწილაკის სრული ენერგია დადებითია, e იქნება ერთზე მეტი და ტრაექტორია იქნება ჰიპერბოლა, თუ $E < 0$, e იქნება ერთზე ნაკლები და მივიღებთ ელიფსს, ხოლო, თუ $E = 0$, e იქნება ერთის ტოლი და გვექნება პარაბოლა:

$$E < 0, \quad e < 1 - \text{ელიფსი,}$$

$$E = 0, \quad e = 1 - \text{პარაბოლა,}$$

$$E > 0, \quad e > 1 - \text{ჰიპერბოლა.}$$

როგორც (XIV, 72) და (XIV, 73) ფორმულები გვიჩვენებენ, ტრაექტორიის ხასიათი საესებით განისაზღვრება ორი სიდიდით—სრული ენერგიით და იმპულსის მომენტის სიდიდით. პირველი (ენერგია) გვიჩვენებს, თუ როგორი მეორე რიგის მრუდია ტრაექტორია — ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა და საზღვრავს სათანადო დიდ ნახევარღერძს. მეორე კი (იმპულსის მომენტი) საზღვრავს მრუდის პარამეტრს. დიდი ნახევარღერძისა და პარამეტრის საშუალებით კი განისაზღვრება მრუდის სხვა დამახასიათებელი სიდიდეები — მცირე ნახევარღერძი და ექსცენტრისიტეტი,

დაუფრუნდეთ ცალკეული ნაწილაკების მოძრაობის განხილვას ინერციის ცენტრის მიმართ. გამოვიყენოთ ამისათვის (XIV, 62) ფორმულები, მხოლოდ ავიღოთ ისინი სკალარული სახით, გვექნება

$$r_1 = \frac{m_2}{M} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{M} r.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\rho_1 = \frac{m_2}{M} \rho, \quad \rho_2 = \frac{m_1}{M} \rho.$$

აქედან ცალკეული ნაწილაკების ორბიტებისათვის გვექნება

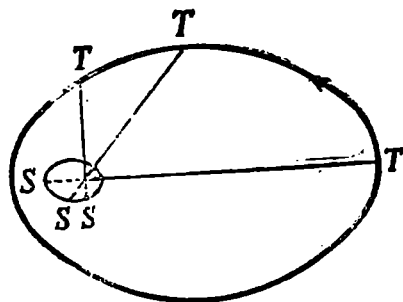
$$\frac{l_1}{\rho_1^2} = \frac{2}{r_1} \pm \frac{1}{a_1}, \quad \frac{l_2}{\rho_2^2} = \frac{2}{r^2} \pm \frac{1}{a_2}, \quad (\text{XIV, 77})$$

სადაც

$$l_1 = \frac{m_2}{M} l, \quad a_1 = \frac{m_2}{M} a,$$

$$l_2 = \frac{m_1}{M} l, \quad a_2 = \frac{m_1}{M} a,$$

(XIV, 77) განტოლებებს ისეთივე სახე აქვს, როგორიც განტოლებას დაყვანილი მასის ნაწილაკისათვის; ეს იმას ნიშნავს, რომ ორივე ნაწილაკი მოძრაობს მეორე რიგის მრუდზე, მაგრამ ამ მრუდების ზომები მათი მასების უკუპროპორციულია. მაგალითად, თუ ორივე ნაწილაკი მოძრაობს ელიფსზე (მზისა და დედამიწის შემთხვევა), ამ ელიფსების ნახევარღერძები მასების უკუპროპორციულია. გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით მზეც და დედამიწაც (უფრო სწორად მათი ცენტრები) ელიფსებზე მოძრაობენ, მაგრამ მზის მიერ შემოწერილი ელიფსი იმდენჯერ ნაკლები ზომისაა დედამიწის მიერ შემოწერილ ელიფსზე, რამდენჯერაც მისი მასა დედამიწის მასაზე მეტია. გარდა ამისა, მოძრაობის დროს მზეც და დედამიწაც ყოველთვის ინერციის ცენტრის საწინააღმდეგო მხარეზე იმყოფებიან (ნახ. 246).



ნახ. 246

როგორც ცნობილია, მზის მასა დაახლოებით 300000-ჯერ მეტია, ვიდრე დედამიწის მასა და, მაშასადამე, მის

მიერ შემოწერილი ელიფსი ამდენჯერვე ნაკლები ზომისა იქნება, ვიდრე დედამიწის ორბიტა. დედამიწის ორბიტის დიდი ნახევარღერძი დაახლოებით 150 მილიონი კილომეტრია და ამიტომაც მზის ორბიტის

ნახევარღერძი დაახლოებით 500 კილომეტრის ტოლი იქნება. ეს მანძილი გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე მზის რადიუსი და ამიტომაც მზის ცენტრის მიერ შემოწერილი ორბიტა მთლიანად მზის შიგნით მდებარეობს. ამიტომაც შეიძლება დავუშვათ, რომ მზე თითქმის უძრავია (ინერციის ცენტრის მიმართ).

§ 102. მსოფლიო რიგის მრუდების პოლარულ-მხაზი განტოლება

მეორე რიგის მრუდის განტოლების კარგად ცნობილი სახეები დეკარტეს და პოლარულ კოორდინატებში, რომლებიც ჩვეულებრივ გამოიყენება მათი თვისებების შესასწავლად, არცთუ ისე ადვილად გამოსაყენებელია ფიზიკის თვალსაზრისით. ეს გამოწვეულია იმით, რომ მათში შემავალი კოორდინატები უშუალოდ არაა დაკავშირებული მნიშვნელოვან ფიზიკურ სიდიდეებთან — იმპულსთან და კინეტიკურ ენერჯიასთან. ამ თვალსაზრისით გაცილებით უფრო ხელსაყრელია ამ მრუდების პოლარულ-მხები განტოლება, რომელშიც კოორდინატებად მიღებულია მანძილი ფოკუსიდან მრუდის განსახილველ წერტილამდე და სიგრძე მართობისა, რომელიც დაშვებულია ფოკუსიდან ამ წერტილში გავლებულ მხებამდე. მაგრამ, ვინაიდან განტოლების ეს სახე თითქმის არ გვხვდება მათემატიკის კურსებში და ნაკლებადაა ცნობილი, ჩვენ მოვიყვანთ მის მარტივ გამოყვანას.

განვიხილოთ ჯერ ელიფსის შემთხვევა (ნახ. 247). კოორდინატებად ავიღოთ r მანძილი F ფოკუსიდან მრუდის განსახილველ P წერტილამდე და სიგრძე ρ მართობისა, რომელიც დაშვებულია ამავე ფოკუსიდან P წერტილში გატარებულ მხებზე. ვთქვათ, ρ_1 არის სიგრძე მართობისა, რომელიც დაშვებულია მეორე ფოკუსიდან F_1 იმავე მხებზე. ხოლო C არის FP და F_1B მონაკვეთების გაგრძელებათა გადაკვეთის წერტილი, აღვნიშნოთ აგრეთვე D და E ასოებით წერტილები, რომელშიც იკვეთებიან მართობები დაშვებულნი C და F_1 წერტილებიდან FA მონაკვეთზე და მის გაგრძელებაზე მხების გარეთ. ელიფსის ძირითადი თვისების გამო გვექნება:

$$r + r_1 = 2a, \quad (\text{XIV, } 78)$$

სადაც a არის ელიფსის დიდი ნახევარღერძი, ხოლო r_1 მანძილი F_1 ფოკუსიდან P წერტილამდე. ვინაიდან $\angle F_1PB$ და $\angle EPA$ კუთხეები ტოლია, მივიღებთ შემდეგ თანათარდობას:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{r_1}{\rho_1}. \quad (\text{XIV, } 79)$$

ნახაზის განხილვა ცხადად გვიჩვენებს შემდეგ თანაფარლობათა სისწორეს:

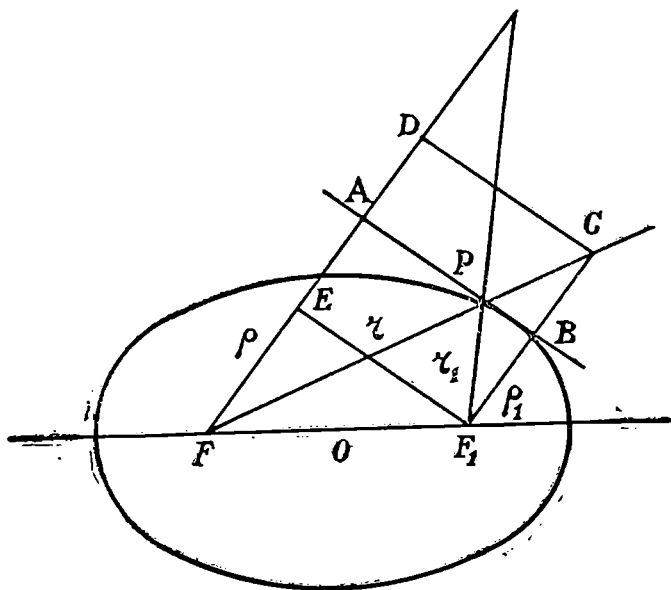
$$FD^2 = (\rho + \rho_1)^2 = (r + r_1)^2 - CD^2 = 4a^2 - CD^2$$

$$F_1E^2 = (\rho - \rho_1)^2 = F_1F^2 - F_1L^2 = 4c^2 - CD^2,$$

მათგან ადვილად მიიღება შემდეგი ტოლობა:

$$\rho \cdot \rho_1 = b^2 = a^2 - c^2. \quad (\text{XIV, 80})$$

თუ ამ ტოლობას გავყოფთ ρ^2 -ზე და მხედველობაში მივიღებთ



ნახ. 247

(XIV, 78, 79) განტოლებებს, მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\frac{l^2}{\rho^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad (\text{XIV, 81})$$

სადაც $l = \frac{b^2}{a}$ არის ელიფსის პარამეტრი, ე. ი. სიგრძე მართობისა,

რომელიც აღმართულია ფოკუსიდან მრუდამდე. სწორედ ეს არის ელიფსის პოლარულ-მხები განტოლება. ამ განტოლებაში შემავალი სიდიდეებიდან ცვალებადია ρ და r , ხოლო a და l წარმოადგენენ ელიფსის ფორმისა და სიდიდის დამახასიათებელ სიდიდეებს.

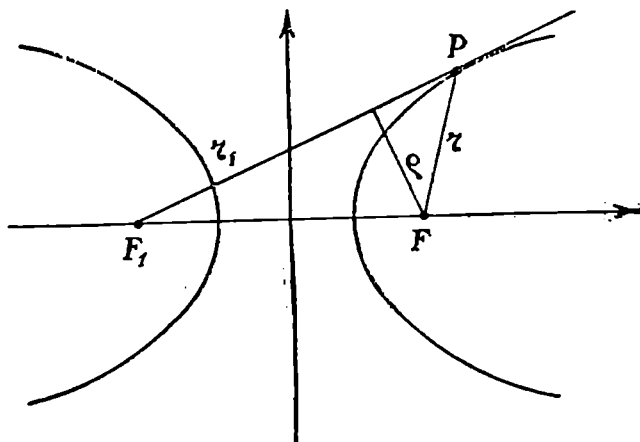
სრულიად ანალოგიურად მიიღება პოლარულ-მხეხვი განტოლება ჰიპერბოლისათვის. კოორდინატებად მივიღოთ r და ρ სიდიდეები, რომლებიც ეთანადებიან ჰიპერბოლის მარჯვენა ტოტის შიდა ფოკუსს (ნახ. 248). მრუდის განლაგების თვალსაზრისით ეს ფოკუსი ეთანადება F ფოკუსს ელიფსისათვის. ჩვენ არ გავიმეორებთ წინათ ჩატარებულ მსჯელობას, მხოლოდ მხედველობაში მივიღებთ იმას, რომ ჰიპერბოლის ძირითადი თვისების გამო:

$$r_1 - r = 2a$$

აქედან ადვილად მიიღება შემდეგი ტოლობები:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{r_1}{\rho_1}$$

$$\rho \cdot \rho_1 = b^2 = c^2 - a^2$$



ნახ. 248

ამ ტოლობათა გამოყენებით, ელიფსის შემთხვევის ანალოგიურად, ადვილად მივიღებთ პოლარულ-მხეხვი განტოლებას ჰიპერბოლისათვის:

$$\frac{l}{\rho^2} = \frac{2}{r} + \frac{1}{a}. \quad (\text{XIV, 81}')$$

სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ პოლარულ-მხეხვი განტოლებას პარაბოლისათვის:

$$\frac{l}{\rho^2} = \frac{2}{r}. \quad (\text{XIV, 81}'')$$

როგორც ვხედავთ, სამივე მრუდის შემთხვევაში პოლარულ-მხები განტოლება შეიძლება დავწეროთ ერთი სახით

$$\frac{l}{\rho^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \quad \begin{array}{l} \text{ელიფსისათვის } a > 0 \\ \text{პარაბოლისათვის } a = \infty \\ \text{ჰიპერბოლისათვის } a < 0, \end{array}$$

თუ დავუშვებთ, რომ a შეიძლება იყოს როგორც დადებითი (ელიფსისათვის), ისე უარყოფითი (ჰიპერბოლისათვის) და უსასრულოდ დიდი (პარაბოლისათვის). მეორე რიგის მრუდების ამ სახის განტოლება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ასეთ მრუდებზე მოძრაობის შესასწავლად. მართლაც, მასში შემავალი ცვალებადი სიდიდეები r და ρ მარტივად არის დაკავშირებული ნაწილაკის პოტენციალურ და კინეტიკურ ენერგიებთან.

პოტენციალური ენერგია არის $\frac{1}{r}$ სიდიდის პროპორციული (გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის), ხოლო კინეტიკური ენერგია $\frac{\mu v^2}{2}$, გამოხატული მოძრაობის რაოდენობის მომენტის საშუალებით ($L = \mu r v$, სადაც L მუდმივია) პროპორციულია $\frac{1}{\rho^2}$ -ისა

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{L^2}{2\mu \rho^2}. \quad (\text{XIV, } 82)$$

§ 103. ტრამბტორიის სახის განსაზღვრა საწყისი პირობების მიხედვით

ზემოთ მოყვანილი ფორმულები შემდეგი საკითხის გადაწყვეტის საშუალებას გვაძლევს. ვიცით, რომ μ მასის მქონე ნაწილაკი იმყოფება r რადიუს-ვექტორის მქონე წერტილში და აქვს v სიჩქარე. გამოვარკვიოთ როგორი იქნება მისი ტრაექტორია უძრავი M ნაწილაკის მიმართ. ამისათვის (XIV, 68) და (XIV, 82) ფორმულების საშუალებით მივიღოთ განტოლება, რომელიც დააკავშირებს ნაწილაკის სიჩქარესა და რადიუს-ვექტორს დიდ ნახევარღერძთან. გვექნება

$$\mu v^2 = \frac{2a}{r} \pm \begin{cases} + \frac{c}{a} \\ 0 \\ - \frac{a}{a} \end{cases}$$

$$v^2 = \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{2}{r} \pm \frac{1}{a} \right), \quad v = \sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r} \pm \frac{\alpha}{\mu a}},$$

$$\frac{\alpha}{a} = \pm \left(\mu v^2 - \frac{2\alpha}{r} \right). \quad (\text{XIV, 83})$$

ნიშანი მინუსი აღებული უნდა იყოს ელიფსისათვის, ხოლო პლუსი — ჰიპერბოლისათვის. პარაბოლისათვის $\frac{\alpha}{a} = 0$. ვინაიდან a

დადებითია, ამიტომ, თუ ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება დადებითია, უნდა ავიღოთ ნიშანი პლუსი, თუ უარყოფითი — ნიშანი მინუსი. თუ r მანძილზე მყოფი ნაწილაკის სიჩქარე (მიმართულებისაგან დამოუკიდებლად) ნაკლებია, ვიდრე $\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r}}$, კვლარატული ფესვის

ქვეშ უნდა ავიღოთ მინუსი ნიშანი, ე. ი. ტრაექტორია იქნება ელიფსი და ნაწილაკი ყოველთვის სასრულ მანძილზე იქნება მეორე ნაწილაკიდან.

თუ v იზრდება და უახლოვდება $\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r}}$, ელიფსის დიდი ნახევარ-

ღერძი თანდათან მატულობს და როდესაც სიჩქარე გახდება $\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r}}$ -ის

ტოლი, a უსასრულოდ გაიზრდება. სათანადო ტრაექტორია იქნება პარაბოლა (წერტილი მიდის უსასრულობაში). სიჩქარის შემდგომი გადიდება ტრაექტორიას ჰიპერბოლად გადააქცევს (ნიშანი მინუსი ფრჩხილის წინ). როგორც ვხედავთ, ყოველი მანძილისათვის არსებობს გარკვეული სიჩქარე

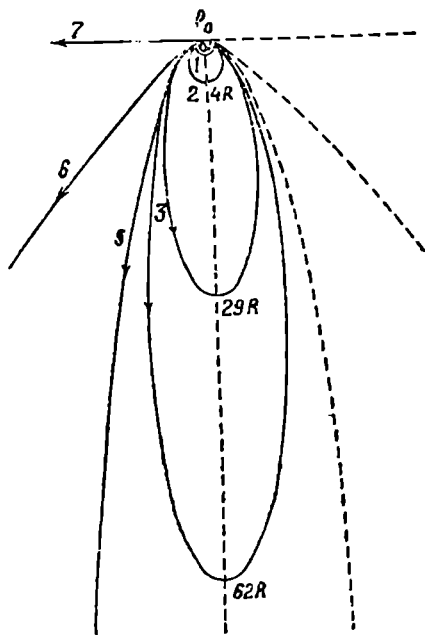
$$v_h = \sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r}}, \quad (\text{XIV, 84})$$

ისეთი, რომ თუ ნაწილაკის სიჩქარე მასზე მეტია, ეს ნაწილაკი მოძრაობის შედეგად უსასრულოდ დაშორდება მიზიდვის ცენტრს (ჰიპერბოლური მოძრაობა). თუ ნაწილაკის საწყისი სიჩქარე v_h -ზე ნაკლებია, ნაწილაკი ყოველთვის სასრულ მანძილზე იქნება მიზიდვის ცენტრიდან (ელიფსური მოძრაობა). იმ შემთხვევაში კი, როდესაც საწყისი სიჩქარე v_h -ს ტოლია, ნაწილაკი ისევ უსასრულოდ შორდება მიზიდვის ცენტრს, მხოლოდ ამ შემთხვევაში მისი სიჩქარე უსასრულობაში ნულის ტოლი იქნება (პარაბოლური მოძრაობა). v_h სიჩქარეს კრიტიკული სიჩქარე ეწოდება მოცემული r -ისათვის. ყოველ მდებარეობას, ე. ი. r -ს ეთანადება გარკვეული კრიტიკული სიჩქარე. როგორც ვხედავთ, თუ ცნობილია მანძილი მიზიდვის ცენტრამდე და საწყისი სიჩქარის

სიდიდე, შეიძლება გამოვარკვიოთ რა პრუდია ტრაექტორია და როგორია მისი დიდი ნახევარღერძები (ნახ. 249). იმის გამოსარკვევად, თუ როგორი ფორმა აქვს ტრაექტორიას (მაგალითად, ელიფსის შემთხვევაში რამდენად გაჭიმულია ან შეკუმშულია იგი), საჭიროა ვიცოდეთ მცირე ნახევარღერძი. (XIV, 75) ფორმულიდან, რომელიც შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს:

$$b^2 = \mp \frac{\mu r^2 v^2 \sin^2 \alpha}{2E},$$

გამომდინარეობს, რომ ამისათვის, გარდა მანძილისა მიზიდვის ცენტრამდე და სიჩქარის სიდიდისა (v), საჭიროა კიდევ მიმართულების ცოდნა, ე. ი. ცოდნა კუთხისა (α), რომელსაც \vec{v} ადგენს \vec{r} -თან.



ნახ. 249

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც $\alpha=0$, ე. ი. სიჩქარე მიმართულია \vec{r} -ის გასწვრივ, $b=0$, ე. ი. მოძრაობა იქნება სწორხაზოვანი (ნაწილაკის დაცემა ცენტრზე ან უსასრულოდ დაშორება სწორი ხაზის გასწვრივ).

დასასრულ გამოვარკვევით როგორი უნდა იყოს სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება იმისათვის, რომ მოძრაობა წრიული იყოს. ვინაიდან წრეხაზი არის ელიფსის კერძო შემთხვევა, საჭიროა, რომ სრული ენერგია იყოს უარყოფითი, ე. ი. საწყისი სიჩქარე იყოს კრიტიკულ სიჩქარეზე ნაკლები. პირველ ყოვლისა, ცხადია, რომ სიჩქარე, რომელიც ტრაექტორიის მხებია, უნდა იყოს მიმართული რადიუს-ვექტორისადმი მართობულად: $\vec{v} \perp \vec{r}$. გარდა ამისა წრეწირისათვის, როგორც ელიფსის კერძო შემთხვევისათვის, დიდი ნახევარღერძი რადიუსის ტოლი უნდა იყოს. ამიტომ ნაწილაკის ენერგიისათვის მივიღებთ:

$$E = -\frac{\alpha}{2r}.$$

მეორე მხრივ, ენერგია ტოლია

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\alpha}{r},$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\alpha}{2r}. \quad (\text{XIV, 85})$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ნაწილაკი წრეწირზე მოძრაობდეს, საჭიროა, საწყისი სიჩქარე მიმართული იყოს რადიუს-ვექტორის მართობულად, ხოლო სიდიდით იყოს

$$v = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu r}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}. \quad (\text{XIV, 86})$$

განვიხილოთ საკითხი ტრაექტორიის გეომეტრიული აგებისა საწყისი პირობების მიხედვით. ვთქვათ, μ მასის მქონე ნაწილაკი მიიზიდება გრავიტაციული ურთიერთქმედებით M მასის მქონე უძრავი ნაწილაკის მიერ. ცნობილია, რომ საწყის მომენტში μ ნაწილაკი იმყოფება r მანძილზე (A წერტილში) M ნაწილაკიდან და აქვს v სიჩქარე (ნახ. 250). საძიებელია μ ნაწილაკის ტრაექტორია, პირველ ყოვლისა, ენერგიის ნიშნის მიხედვით

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \gamma \frac{M\mu}{r}$$

გამოვარკვევით რას წარმოადგენს ორბიტა—ელიფსს, პარაბოლას თუ ჰიპერბოლას. ვთქვათ, გამოირკვეა, რომ ორბიტა ელიფსია (სრული ენერგია უარყოფითია), ამის შემდეგ ფორმულიდან

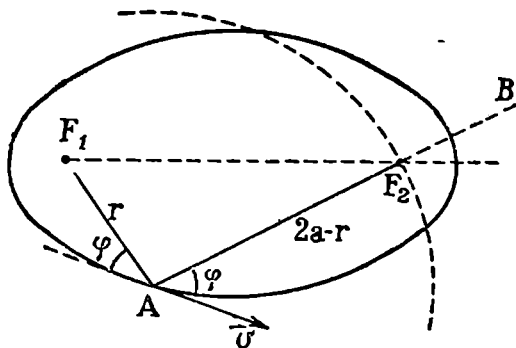
$$a = -\gamma \frac{\mu M}{2E}$$

გამოითვლება ელიფსის დიდი ნახევარღერძი, ხოლო ფორმულიდან

$$l = \frac{r^2 v^2 \sin^2 \alpha}{\gamma \mu^2 M}$$

—ორბიტის პარამეტრი.

ვინაიდან ელიფსის თვისების გამო A წერტილიდან მეორე ფოკუს-სამდე (პირველ ფოკუსში იმყოფება M მასა) მანძილი არის $2a - r$, ამ მეორე ფოკუსის მოძებნა შემდეგნაირად შეიძლება. A წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვწერთ კრებსხაზს $2a - r$ რადიუსით. მეორე

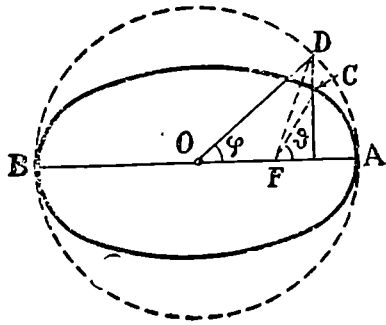


ნახ. 250

ფოკუსი ამ წრესაზე უნდა მდებარეობდეს და მისი მდებარეობის განსაზღვრისათვის უნდა გამოვიყენოთ ელიფსის ის თვისება, რომ ფოკუსებიდან A წერტილში გავლებული რადიუს-ვექტორები ტოლ კუთხეებს ადგენენ მხებთან, ე. ი. სიჩქარის მიმართულებასთან. მაშასადამე, მეორე ფოკუსი უნდა მდებარეობდეს $2a - r$ წრესაზის და A წერტილის სიჩქარისადმი φ კუთხით დახრილ AB სწორი ხაზის გადაკვეთაზე. რაკი ცნობილია ელიფსის დიდი ნახევარღერძი და ორივე ფოკუსის მდებარეობა, ელიფსი მთლიანად განსაზღვრული იქნება. ანალოგიურად განიხილება პარაბოლისა და ჰიპერბოლის შემთხვევები.

ორბიტის პოვნის შემდეგ ბუნებრივად ისმის საკითხი მოძრაობის განსაზღვრისა ორბიტაზე, ე. ი. იმის განსაზღვრისა, თუ სად იმყოფება ნაწილაკი (პლანეტა) დროის მოცემულ მომენტში. ჩვენ მოკლედ განვიხილავთ ამ ამოცანას ელიფსური ორბიტისათვის, შემოვიღოთ ზოგიერთი ცნება, რომელიც ხშირად გამოიყენება ასტრონომიაში. ორბიტის დიდი ნახევარღერძის ბოლო წერტილებს ეწოდებათ „აფსიდები“, ხოლო მათ შემაერთებელ სწორ ხაზს (დიდ ღერძს) — „აფსიდთა ხაზი“. თუ განიხილება ორბიტა მზის მიმართ, შორეულ აფსიდას ეწოდება

აფელიუმში, ხოლო უახლოეს აფსიდას — პერიპელიუმში. თუ განიხილება დედამიწის ირგვლივ მოძრავი სხეულის ორბიტა, ამ წერტილებს სათანადოდ ეწოდება „აპოგეუმი“ და „პერიგეუმი“. აღენიშნოთ φ ასოთი კუთხე (ნახ. 251), რომელსაც პლანეტის რადიუს-ვექტორი (ფოკუსიდან) ადგენს უახლოესი აფსიდისაკენ გავლელულ ხაზთან. ამ კუთხეს ეწოდება „ჰემმარიტი ანომალია“. ამოცანა სწორედ ამ კუთხის განსაზღვრაში მდგომარეობს, თუ მოცემულია უახლოესი აფსიდიდან მოცემულ მდებარეობამდე მისვლისათვის საჭირო დრო. ამისათვის ელიფსის ირგვლივ შემოვწროთ a რადიუსის მქონე „დამხმარე წრეხაზი“, რომლის ცენტრი იქნება ელიფსის ცენტრი. აღმართოთ აფსიდა ხაზიდან n' ნორმალი პლანეტამდე და გავაგრძელოთ ეს ნორმალი დამხმარე წრეხაზის გადაკვეთამდე. აღენიშნოთ ეს წერტილი D ასოთი. ამ წერტილის შეერთებით ელიფსის ცენტრთან მივიღებთ DOA კუთხეს, რომელსაც ეწოდება „ექსცენტრიკული ანომალია“, ამის შემდეგ ნახაზიდან ადვილად მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:



ნახ. 251

$$\frac{l}{r} = 1 + \cos \varphi \quad (\text{XIV, 87})$$

და
$$r = a(1 - \cos \varphi). \quad (\text{XIV, 88})$$

აღენიშნოთ t -თი დრო, რომელიც სჭირდება პლანეტას A წერტილიდან C წერტილში გადასასვლელად. მაშინ კეპლერის კანონის თანახმად (იხ. შემდეგ)

$$\frac{\omega t}{2\pi} = \frac{\text{ფართობი } AFC}{\text{ელიფსის ფართობი}} = \frac{\text{ფართობი } AFD}{\text{წრის ფართობი}} =$$

$$\frac{\text{ფართობი } AOD - \text{ფართობი } FOD}{\text{წრის ფართობი}} = \frac{\frac{1}{2} a^2 \varphi - \frac{1}{2} a^2 e \sin \varphi}{\pi a^2}.$$

აქ ω არის საშუალო კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$\omega t = \varphi - e \sin \varphi. \quad (\text{XIV, 89})$$

მიღებული ფორმულები საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ჩვენი ამოცანა. მოცემული t -სათვის (XIV, 89) ფორმულიდან ვიპოვით φ კუთხეს, შემდეგ (XIV, 88) ფორმულის გამოყენებით განვსაზღვრავთ r -ს, ხოლო (XIV, 87) ფორმულის საშუალებით ვიპოვით $\dot{\varphi}$ კუთხეს. ჩვენ არ შეეჩერდებით იმის განხილვაზე, თუ როგორ წარმოებს ამ გამოთვლების ჩატარება (იხ. ასტრონომიის კურსები),

**§ 104. კეპლერის კანონების გამოყვანა
ნიუტონის კანონიდან**

მსოფლიო მიზიდულობის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს მაგალითს წარმოადგენს ციური სხეულების და, კერძოდ, მზისა და პლანეტების ურთიერთქმედება. ისტორიულად სწორედ პლანეტების მოძრაობის შესწავლის შედეგად იყო დადგენილი მსოფლიო მიზიდულობის კანონი. ნიუტონის მიერ თავისი კანონის აღმოჩენამდე 60 წლით ადრე (მეჩვიდმეტე საუკუნის დასაწყისში) ცნობილმა გერმანელმა ასტრონომმა ი. კეპლერმა ასტრონომ ტიხო ბრაგეს და თავისი მრავალწლიანი დაკვირვებების ანალიზის შედეგად დაადგინა პლანეტათა მოძრაობის სამი კანონი, რომლებიც ცნობილია კეპლერის კანონების სახელწოდებით. ეს კანონები შემდეგია:

1. ყოველი პლანეტა მოძრაობს მზის ირგვლივ ელიფსზე, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება მზე.
2. მზიდან პლანეტაქდე გავლებული რადიუს-ვექტორის მიერ დროის ტოლ შუალედებში შემოწერილი ფართობები ტოლია.
3. სხვადასხვა პლანეტისათვის ორბიტაზე შემოვლის პერიოდების კვადრატები მზემდე საშუალო მანძილების კუბების პროპორციულია. სანამ გადავიღოდეთ ამ კანონების გამოყვანაზე მსოფლიო მიზიდულობის კანონიდან, ვნახოთ როგორ შეიძლება ამ კანონების დადგენა ასტრონომიული დაკვირვებების საშუალებით. კეპლერის პირველი კანონის შემოწმების ყველაზე მარტივი ხერხია მზის ხილული დიამეტრის ცვლილების შესწავლა. მართლაც, თუ პლანეტა, მაგალითად, დედამიწა, მოძრაობს მზის ირგვლივ ელიფსზე, მანძილი მზიდან დედამიწამდე უნდა იცვლებოდეს შემდეგი კანონის მიხედვით:

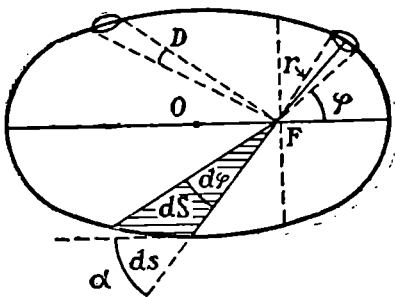
$$r = \frac{l}{1 + e \cos \varphi}, \quad (\text{XIV, 90})$$

სადაც φ არის უმცირესი მანძილის მიმართულებიდან ათვლილი კუთხე (ნახ. 252). მზის ხილული დიამეტრი (მისი კუთხური ზომა) r მან-

ძილის უკუპროპორციულად უნდა იცვლებოდეს, ე. ი. (XIV, 90) ფორმულის თანახმად უნდა იყოს $1 + e \cos \varphi$ სიდიდის პროპორციული

$$D \sim 1 + e \cos \varphi.$$

თუ დაკვირვებით დამტკიცდა, რომ მზის ხილული დიამეტრი ამ კანონის მიხედვით იცვლება, ეს იმის მაჩვენებელი იქნება, რომ დედამიწა მოძრაობს მზის ირგვლივ ელიფსზე. დაკვირვებები, მართლაც, ადასტურებს (XIV, 90) ფორმულით გამოსახულ დამოკიდებულებას და ამით ამტკიცებენ კეპლერის პირველ კანონს. მზის ხილული დიამეტრის გაზომვა ორბიტის ექსცენტრისიტეტის გამოთვლის საშუალებას გვაძლევს. უმცირესი და უდიდესი ხილული დიამეტრები D_{min} და D_{max} ეთანადებიან $\varphi = \pi$ და $\varphi = 0$ მნიშვნელობებს, ამიტომ



ნახ. 252

$$\frac{D_{min}}{D_{max}} = \frac{1 - e}{1 + e}, \text{ ე. ი. } e = \frac{D_{max} - D_{min}}{D_{max} + D_{min}}. \quad (\text{XIV, 91})$$

თვით კეპლერის მიერ მისი პირველი კანონი შემოწმებული იყო მარსზე დაკვირვების საშუალებით. მეორე კანონის შემოწმება მარტივია ისევე დედამიწის შემთხვევაში. dt დროში რადიუს-ვექტორის მიერ შემოწერილი ფართობი იზომება $r^2 d\varphi$ სიდიდით, სადაც $d\varphi$ არის კუთხის ნაზრდი. კეპლერის მეორე კანონის თანახმად ეს სიდიდე ერთი და იგივე უნდა იყოს წელიწადის სხვადასხვა დროს, თუ ყოველთვის არჩეულია ერთი და იგივე dt ; აქედან გამომდინარეობს, რომ $d\varphi$ უნდა იცვლებოდეს მზის ხილული დიამეტრის კვადრატის პროპორციულად, ვინაიდან r და D ერთიმეორის უკუპროპორციულია

$$d\varphi \sim D^2. \quad (\text{XIV, 92})$$

დაკვირვებები, მართლაც, ადასტურებს ამ პროპორციულობას. კეპლერის მესამე კანონი ადვილად შეიძლება შემოწმდეს უშუალო დაკვირვებებით, ვინაიდან როგორც გარსშემოვლის პერიოდები, ისე მზემდე მანძილები ზუსტად შეიძლება გაიზომოს. ვაჩვენოთ ახლა, რომ კეპლერის კანონები აუცილებლად გამომდინარეობს ნიუტონის კანონიდან. კეპლერის პირველი კანონი გამომდინარეობს წინა პარაგრაფში მიღებული

შედგებოდნენ, რომ გრავიტაციული ურთიერთქმედების შემთხვევაში, ერთი ნაწილაკი მოძრაობს მეორის მიმართ მეორე რიგის მრუდზე და ამ მრუდებს შორის სასრულია მხოლოდ ელიფსი (პარაბოლური და ჰიპერბოლური მოძრაობა დასაშვებია მხოლოდ კომეტებისათვის).

კეპლერის მეორე კანონი წარმოადგენს იმპულსის მუდმივობის კანონის უშუალო შედეგს, ამ კანონის თანახმად მზის მიმართ პლანეტის მოძრაობის დროს მუდმივი უნდა იყოს შემდეგი გამოსახულება:

$$L = \mu r v \sin \alpha = \text{const.}$$

ვინაიდან μ მუდმივია და სიჩქარე შეიძლება გამოვსახოთ როგორც რკალის წარმოებული დროის მიმართ $v = \frac{ds}{dt}$, მივიღებთ

$$r \frac{ds}{dt} \sin \alpha = \text{const.}$$

მაგრამ, როგორც ნახაზი გვიჩვენებს (ნახ. 251), $r ds \sin \alpha$ არის რადიუს-ვექტორის მიერ dt დროში შემოწერილი ფართობის გარკვევებული მნიშვნელობა

$$r ds \cdot \sin \alpha = 2dS.$$

ამიტომაც იმპულსის მუდმივობის კანონიდან გამომდინარეობს შემდეგი სიდიდის მუდმივობა;

$$\frac{dS}{dt} = \text{const} = \frac{L}{2\mu}; \quad (\text{XIV, 93})$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომ სიდიდეს ეწოდება ფართობითი სიჩქარე, ვინაიდან იგი წარმოადგენს რადიუს-ვექტორის მიერ დროის ერთეულში შემოწერილ ფართობს. ფართობითი სიჩქარის მუდმივობა სწორედ კეპლერის მეორე კანონის გამომხატველია, ვინაიდან იგი გვეუბნება, რომ დროის ტოლ შუალედებში შემოწერილი ფართობები ტოლია. (XIV, 93) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს

$$S = \text{const} \cdot t = \frac{L}{2\mu} t, \quad (\text{XIV, 94})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ შემოწერილი ფართობი დროის პროპორციულია. კეპლერის მესამე კანონი უშუალოდ გამომდინარეობს (XIV, 94) ფორმულიდან. თუ t -სათვის ავიღებთ ორბიტის შემოვლის T პერიოდს, S ფართობი ელიფსის ფართობის ტოლი იქნება. ვინაიდან ელიფსის ფართობი არის πab , მივიღებთ

$$\pi ab = \frac{L}{2\mu} T. \quad (\text{XIV, 94}')$$

თუ ამ ფორმულიდან განსაზღვრულ L -ს ჩავსვამთ (XIV, 73) ფორმულაში, მივიღებთ

$$l = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu}{\alpha} \frac{1}{T^2}.$$

მეორე მხრივ, ანალიზური გეომეტრიიდან ელიფსის პარამეტრი შემდეგნაირად არის დაკავშირებული ელიფსის ნახევარღერძებთან:

$$l = \frac{b^2}{a}.$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha}{4\pi^2 \mu}. \quad (\text{XIV, 95})$$

თუ გავიხსენებთ μ და α სიდიდეების მნიშვნელობებს

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad \alpha = \gamma Mm,$$

მივიღებთ

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} (M+m). \quad (\text{XIV, 96})$$

კეპლერის შესამე კანონის თანახმად $\frac{a^3}{T^2}$ ერთი და იგივე უნდა იყოს

ყველა პლანეტისათვის, მაგრამ ჩვენ მიერ მიღებული ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ეს ზუსტად ასე არ არის. (XIV, 96) ტოლობის მარჯვენა მხარეში დგას გამოსახულება $M+m$, რომელიც არის მზისა და პლანეტის მასების ჯამი. ცხადია, რომ ეს სიდიდე სხვადასხვაა სხვადასხვა პლანეტისათვის (პლანეტების მასების სხვადასხვაობის გამო). მაშასადამე, ვხედავთ, რომ კეპლერის კანონი ზუსტი არ არის. მუდმივია არა $\frac{a^3}{T^2}$, არამედ სიდიდე

$$\frac{a^3}{(M+m)T^2} = \text{const.} \quad (\text{XIV, 97})$$

მაგრამ კეპლერის კანონის ეს შესწორება იმდენად მცირეა, რომ კეპლერის არაზუსტი დაკვირვებების დროს იგი არ იქნა შემჩნეული. მართლაც, პლანეტების მასები იმდენად მცირეა მზის მასასთან შედარებით, რომ (XIV, 96) ფორმულაში შეიძლება უგულვებლევყოთ m შედარებით მზის M მასასთან და დავწეროთ ეს ფორმულა შემდეგი სახით:

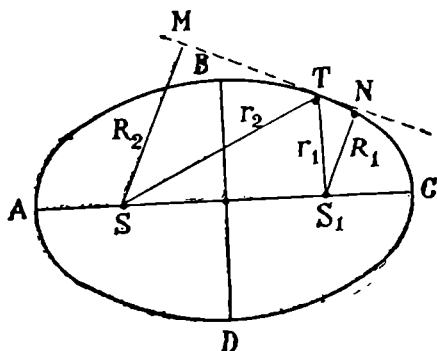
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} M = \text{const.}, \quad (\text{XIV, 98})$$

ამ მიახლოებით კეპლერის მესამე კანონი მართებულია. პლანეტის მასა რომ შეიძლება უგულვებლევყოთ მზის მასასთან შედარებით, იქიდანაც ჩანს, რომ უდიდესი პლანეტის—იუპიტერის—მასა დაახლოებით 1000-ჯერ ნაკლებია მზის მასაზე,

**§ 105. ნიუტონის კანონის გამოყვანა
კეპლერის კანონებიდან**

წინა პარაგრაფში გამოვიყვანეთ კეპლერის კანონები ნიუტონის კანონიდან. ახლა განვიხილავთ შებრუნებულ ამოცანას. ვთქვათ. პლანეტების მოძრაობაზე უშუალო დაკვირვებებით დავდგინეთ კეპლერის კანონები, ე. ი. მოვინახეთ პლანეტის ტრაექტორია და მასზე მოძრაობის ხასიათი. შეიძლება თუ არა აქედან დავასკვნათ, როგორია მზისა და პლანეტების ურთიერთქმედების ხასიათი, ე. ი. მოვძებნოთ პოტენციალური ენერგია ან ძალა. ჩვენ ახლავე ვინახავთ, რომ ამ ამოცანის ამოხსნა სავესებით შესაძლებელია.

ვთქვათ, $ABCD$ არის ელიფსი, რომელზეც პლანეტა მოძრაობს მზის ირგვლივ. S იყოს მზე (მოთავსებული ერთ-ერთ ფოკუსში), ხოლო T —პლანეტა (ნახ. 253). შევეერთოთ პლანეტა ელიფსის ფოკუს-



ნახ. 253

სებთან r და r_1 რადიუს-ვექტორებით. გავატაროთ აგრეთვე T წერტილში მხები და დავუშვათ მასზე მართობები ფოკუსებიდან. აღვნიშნოთ SM და S_1N მონაკვეთები R -ითა და R_1 -ით. ვინაიდან ელიფსისადმი მხები ტოლ კუთხეებს აღგენს რადიუს-ვექტორებთან, SMT და S_1NT სამკუთხედები მსგავსი იქნება და ამიტომ ადგილი ექნება შემდეგ პროპორციას:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{r}{2a-r},$$

ვინაიდან

$$r + r_1 = 2a.$$

გარდა ამისა, ელიფსის გეომეტრიული თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$R \cdot R_1 = b^2.$$

კეპლერის მეორე კანონის თანახმად იმპულსის მომენტი მუდმივი სიდიდეა, ე. ი.

$$\nu R = \frac{L}{\mu} = \text{const.}$$

აქედან ν^2 -ისათვის მივიღებთ

$$\nu^2 = \frac{L^2}{\mu^2} \frac{1}{R^2} = \frac{L^2}{\mu^2} \frac{2a-r}{rb}$$

ან

$$\nu^2 = \frac{2aL^2}{\mu^2 b} \frac{1}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 b}.$$

გამოვითვალოთ პლანეტის კინეტიკური ენერგია მზის მიმართ; ეს ენერგია შემდეგნაირად გამოისახება:

$$E_k = \frac{1}{2} \mu \nu^2,$$

სადაც μ არის პლანეტის დაყვანილი მასა. ν^2 -ის მნიშვნელობის ჩასმა გვაძლევს

$$\frac{1}{2} \mu \nu^2 = \frac{L^2 a}{\mu b^2} \frac{1}{r} - \frac{L^2}{2\mu b^2}. \quad (\text{XIV, 99})$$

მაგრამ, როგორც ვიცით, $\frac{1}{2} \mu \nu^2$ არის იმავე დროს მზისა და პლანეტის კინეტიკური ენერგიების ჯამი

$$\frac{1}{2} \mu \nu^2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

ამიტომ (XIV, 99) ფორმულა ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{L^2 a}{\mu b^2} \frac{1}{r} - \frac{L^2}{2\mu b^2}. \quad (\text{XIV, 100})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მთელი კინეტიკური ენერგია გამოისახება როგორც ფუნქცია მზისა და პლანეტის მანძილისა, როგორც უნდა იყოს ენერ-

ვის მუდმივობის კანონის თანახმად. თუ მარჯვენა მხარეში მდგომ, მანძილზე დამოკიდებულ წვერს გადავიტანთ მარცხნივ, მივიღებთ

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{L^2 a}{\mu b^2} \frac{1}{r} = - \frac{L^2}{2\mu b^2} = \text{const.} \quad (\text{XIV, 101})$$

შეშასადავ, მოძებნილია მანძილის ისეთი ფუნქცია — $\frac{L^2 a}{\mu b^2} \frac{1}{r}$, რომლის დამატებაც კინეტიკური ენერჯის ჯამისადმი მუდმივ სიდიდეს გვაძლევს. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $U(r)$ -ით და ჩავთვალოთ იგი ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერჯიად

$$U(r) = - \frac{L^2 a}{\mu b^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (\text{XIV, 102})$$

ენერჯის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r) = - \frac{L^2}{2\mu b^2} = \text{const.}$$

პოტენციალური ენერჯის გამოსახულებაში შემავალი მუდმივას დამოკიდებულება მასებზე ადვილად მოიძებნება კეპლერის მესამე კანონიდან. მართლაც, (XIV, 94') ფორმულის თანახმად

$$\frac{L^2 a}{\mu b^2} = 4\pi^2 \mu \frac{a^3}{T^2}.$$

კეპლერის მესამე კანონის თანახმად (ზუსტი სახე) $\frac{a^3}{T^2}$ უკუპროპორციულია მზისა და პლანეტის მასების ჯამისა

$$\frac{a^3}{T^2} \sim \frac{1}{M+m}.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}.$$

გვექნება

$$\frac{L^2 a}{\mu b^2} \sim Mm,$$

ამიტომაც პოტენციალური ენერჯისათვის მივიღებთ

$$U(r) \approx - \frac{Mm}{r}. \quad (\text{XIV, 103})$$

მუდმივა (გრავიტაციული მუდმივა) უნდა მოიძებნოს ცდების საშუალებით. როგორც ვხედავთ, პლანეტების მოძრაობის ანალიზის საფუძველზე და კეპლერის კანონების საშუალებით დავადგინეთ, რომ პლანეტისა და მზის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია პირდაპირპროპორციულია მასების ნამრავლისა და უკუპროპორციულია მანძილისა, აქედან ადვილად შეიძლება გაწარმოებით მივიღოთ ნიუტონის ფორმულა გრავიტაციული ძალისათვის

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{r}.$$

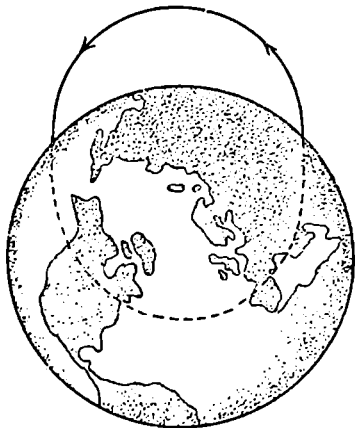
§ 106. ბალისტიკური ჩაქვებისა და ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობა

ცნობილია, რომ ბოლო წლებში ჯერ საბჭოთა კავშირში (1957), ხოლო შემდეგ ამერიკის შეერთებულ შტატებში გაშვებულ იქნა ბალისტიკური რაკეტები და ხელოვნური თანამგზავრები. 1959 წელს კი პირველად ისტორიაში საბჭოთა კავშირში გაშვებულ იქნა კოსმოსური რაკეტა, რომელიც სრულიად მოსწყდა დედამიწას და გადაიქცა მზის სისტემის ხელოვნურ პლანეტად. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ საკითხს, თუ როგორ ხდება რაკეტებისა და თანამგზავრების გაშვება და როგორ შეიძლება მათი მოძრაობის განსაზღვრა გაშვების შემდეგ. ცხადია, ეს განხილვა არ იქნება სრული, ვინაიდან ჩვენ ვერ შევძლებთ ყველა ფაქტორის მხედველობაში მიღებას (ატმოსფეროს წინააღმდეგობა, ცენტრიდანული და კორიოლის ძალების მოქმედება და სხვ). შევეცდებით გავარკვიოთ მოძრაობის ზოგადი ხასიათი მხოლოდ დედამიწის გრავიტაციული მოქმედების მხედველობაში მიღებით.

დავუშვათ, რომ დედამიწა წარმოადგენს ერთგვაროვან სფეროს და ნუ მივიღებთ მხედველობაში ჰაერის წინააღმდეგობას და დედამიწის ბრუნვას ღერძის ირგვლივ. ვთქვათ, დედამიწის ზედაპირიდან რაღაც h სიჩქარით გასროლილია m მასის სხეული. რა მიმართულებით და რა სიდიდის სიჩქარით უნდა მოხდეს გასროლა იმისათვის, რომ სხეული დაეცეს დედამიწის ზედაპირის არჩეულ ადგილას (ნახ. 253) (ბალისტიკური რაკეტის შემთხვევა) ან იქცეს ხელოვნურ თანამგზავრად. გავარჩიოთ ეს შემთხვევები ცალ-ცალკე.

1. ბალისტიკური რაკეტა. ვთქვათ, დედამიწის ზედაპირის A წერტილიდან საჭიროა გასროლა ბალისტიკური რაკეტისა, რომელიც უნდა მოხვდეს ზედაპირის B წერტილში (ნახ. 254). დავუშვათ, რომ რაკეტა ერთსაფეხურიანია, ე. ი. მივიღოთ, რომ მთელი საწვავი იწვის საწყის მომენტში და რაკეტას თავიდანვე ენიჭება გარკვეული სიდიდისა და მიმართულების სიჩქარე, ხოლო მისი შემდგომი მოძრაობის დროს მასზე მხოლოდ გრავიტაციული ძალა მოქმედებს (ფაქტიურად ერთსაფეხურ-

იანი რაკეტის შემთხვევაშიც კი სიჩქარის ცვლილება, გაზების განოტყორცნის გამო, წარმოებს გარკვეული ღრვის განმავლობაში. ასე რომ, ჩვენ მიერ საკითხის განხილვა ამ მხრივაც მიახლოებითია). საკითხი შემდეგნაირად ისმის: რა მიმართულებით უნდა მოხდეს რაკეტის გასროლა, რომ იგი, გარკვეული სიჩქარით გამოტყორცნილი, A წერტილიდან B წერტილში მოხვდეს? ცხადია, რაკეტა უნდა მოძრაობდეს

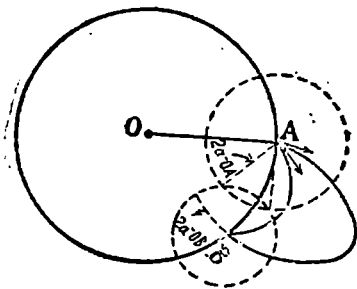


ნახ. 254

ელიფსზე, რომლის ერთ-ერთი ფოკუსი იქნება დედამიწის ცენტრი, მეორე ფოკუსის მოსაძებნად უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც მე-13 პარაგრაფში. მოცემული სიჩქარის საშუალებით და (XIV, 82) ფორმულის გამოყენებით ვიპოვით ელიფსის დიდ ნახევარღერძს. შემდეგ A წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, გავავლებთ $2a$ — OA რადიუსის მქონე წრეხაზს. მეორე ფოკუსი ამ წრეხაზზე უნდა მდებარეობდეს. ვინაიდან რაკეტა B წერტილში უნდა მოხვდეს, ეს წერტილიც

ორბიტაზე უნდა მდებარეობდეს და მეორე ფოკუსის განსაზღვრა შეიძლება B წერტილის საშუალებითაც. ამისათვის B წერტილის ირგვლივ უნდა შემოვწეროთ $2a$

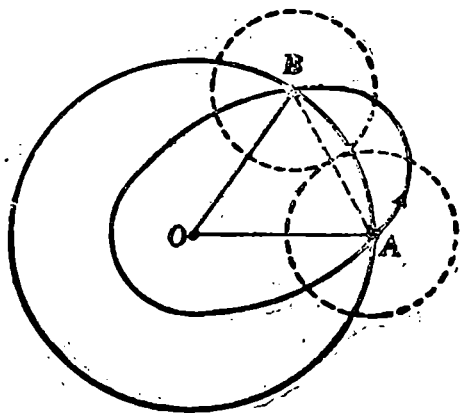
— OB რადიუსის მქონე წრეხაზი, ანალოგიურად იმისა, როგორც მოვიქცეთ A წერტილის შემთხვევაში. ცხადია, ორბიტის მეორე ფოკუსი ამ წრეხაზზეც უნდა მდებარეობდეს. როგორც ვხედავთ, მეორე ფოკუსი უნდა მდებარეობდეს A და B წერტილების ირგვლივ შემოწერილ $2a—OA$ და $2a—OB$ -რადიუსიან წრე-



ნახ. 255

ხაზებზე, ე. ი. მათ გადაკვეთაზე (ნახ. 255). აქ შესაძლებელია სამი სხვადასხვა შემთხვევა. რაკეტისადმი მინიჭებული საწყისი სიჩქარე და

B წერტილის მდებარეობა *A* წერტილის მიმართ შეიძლება ისეთი იყოს, რომ აღნიშნული წრეხაზები არ იკვეთებოდეს. ცხადია, *B* წერტილში არ შეიძლება მიადწიოს *A* წერტილიდან გასროლილმა \bar{u} სიჩქარის მქონე რაკეტამ, როგორი მიმართულებითაც უნდა მოვახდინოთ მისი გასროლა. *B* წერტილში მისაღწევად საჭირო იქნება რაკეტის საწყისი სიჩქარის გადიდება. ვთქვათ, საწყისი სიჩქარე ისეთია, რომ ზემოთ განხილული წრეხაზები ეხებიან ერთმანეთს (ნახ. 256), მაშინ ეს შეხების წერტილი იქნება მეორე ფოკუსის მდებარეობა. თუ *A* წერტილს შევადრებთ ამ ფოკუსთან, ადვილად შეიძლება მოიძენოს ბალისტიკური რაკეტის გასროლის მიმართულება. ამ შემთხვევაში



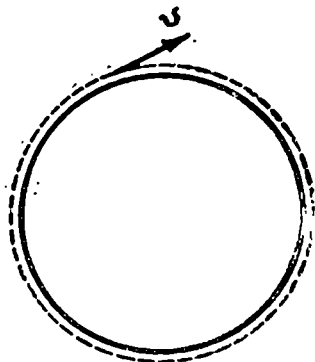
ნახ. 256

არსებობს ერთადერთი მიმართულება, რომლის გასწვრივაც უნდა მოხდეს რაკეტის გაშვება, რომ იგი მოხვდეს *B* წერტილში.

და, ბოლოს, შესაძლებელია მესამე შემთხვევა, როდესაც საწყისი სიჩქარე ისეთია, რომ წრეხაზები იკვეთება. ვინაიდან ასეთი გადაკვეთის წერტილი მხოლოდ ორი შეიძლება იყოს, მიიღება მეორე ფოკუსის ორი შესაძლო მდებარეობა. ყოველ მათგანს ეთანადება თავისი ორბიტა და, მაშასადამე, სათანადო გასროლის მიმართულება (ნახ. 255).

2. ხელოვნური თანამგზავრი. ბალისტიკური რაკეტისაგან განსხვავებით თანამგზავრი საჭიროა მოძრაობდეს დედამიწის ირგვლივ ჩაკეტილ ორბიტაზე (ელლიფსზე), რომელიც მთლიანად დედამიწის ზედაპირის გარეთ იქნება. ვინაიდან ჩაკეტილი ორბიტის შემთხვევაში გასროლილი სხეული პერიოდულად უბრუნდება საწყის მდებარეობას, ცხადია, დედამიწის ზედაპირიდან გასროლილი სხეული მხო-

ლოდ იმ შემთხვევაში გადაიქცევა თანამგზავრად, თუ იგი გასროლილია ზედაპირის გასწვრივ. წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი ისევ დაეცემა დედამიწაზე (დედამიწის შიგნით გამავალი ელიფსები) (ნახ. 254). მაგრამ ეს მოთხოვნა საკმარისი არ არის. საჭიროა გამოვარკვიოთ, როგორა უნდა იყოს გასროლის სიჩქარე იმისათვის, რომ სხეული არ დაეცეს დედამიწაზე ან არ მოსწყდეს მას სავსებით. ცხადია, ყველაზე



ნახ. 257

მცირე ზომის ორბიტა, რომელზეც შეუძლია მოძრაობა თანამგზავრს, არის დედამიწის რადიუსის ტოლი რადიუსის მქონე წრეხაზი (ე. წ. ზედაპირული თანამგზავრი) (ნახ. 257). გამოვითვალოთ სიჩქარე, რომელიც საჭიროა ამ ორბიტის შემოსაწერად. ეს სიჩქარე მარტივად გამოითვლება. თუ დედამიწის მიზიდვის ძალას ცენტრისკენულ ძალას გავუტოლებთ:

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma \frac{Mm}{R^2}.$$

სადაც M არის დედამიწის მასა, m — გასროლილი სხეულის (თანამგზავრის) მასა და R — დედამიწის რადიუსი (ზუსტად რომ ვთქვათ, მარცხენა მხარეში უნდა იდგეს დაყვანილი მასა, მაგრამ ვინაიდან $m \ll M$, იგი შეიძლება თანამგზავრის მასით შეიცვალოს). აქედან სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}. \quad (\text{XIV, 104})$$

ვინაიდან $\frac{\gamma M}{R^2}$ არის სიმძიმის ძალის აჩქარება დედამიწის ზედაპირზე, გვექნება

$$v = \sqrt{gR}.$$

ასეთია უმცირესი სიჩქარე, რომელიც უნდა მიენიჭოს გასროლილ სხეულს, რომ იგი არ დაეცეს დედამიწაზე. ამ სიჩქარეს პირველი კოსმოსური სიჩქარე ეწოდება. g და R სიდიდეების მნიშვნელობათა გამოყენება ამ სიჩქარისათვის გვაძლევს შემდეგ რიცხვით მნიშვნელობას:

$$v = 7912 \frac{m}{\text{sec}} \approx 8 \frac{km}{\text{sec}}.$$

დავიწყეთ ახლა გასროლის სიჩქარის თანდათანობითი ზრდა. წრეხაზი გადაიქცევა სულ უფრო და უფრო გაჭიმულ ელიფსად და, ბოლოს, გარკვეული სიჩქარის მიღწევისას ორბიტა გახდება პარაბოლა, ე. ი. გასროლილი სხეული უსასრულოდ დაშორდება დედამიწას (ნახ. 248). ჩვენ უკვე ვიცით, რომ პარაბოლური მოძრაობის სათანადო კრიტიკული სიჩქარე შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$v_k = \sqrt{\frac{2a}{\mu r}}$$

თუ r -ის მაგიერ ავიღებთ დედამიწის რადიუსს (გასროლა ხდება დედამიწის ზედაპირიდან), μ -ს მაგიერ—თანამგზავრის m მასას, ხოლო a -სათვის გამოვიყენებთ მის მნიშვნელობას $a = \gamma M m$, მივიღებთ

$$v_k = \sqrt{\frac{2M\gamma}{R}} = \sqrt{2gR} \quad (\text{XIV, 105})$$

ასეთია მინიმალური სიჩქარე, რომელიც უნდა მიენიჭოს ზედაპირიდან ასროლილ სხეულს იმისათვის, რომ იგი სავსებით მოსწყდეს დედამიწას. ამ სიჩქარეს მეორე კოსმოსური სიჩქარე ეწოდება. იგი $\sqrt{2}$ -ჯერ მეტია, ვიდრე პირველი კოსმოსური სიჩქარე. რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

$$v_k = 11,18 \frac{km}{sec} \approx 11,2 \frac{km}{sec}$$

ძილებული შედეგებიდან ცხადია, რომ ხელოვნური თანამგზავრის მისაღებად საჭიროა იგი გასროლილ იქნეს ზედაპირის გასწვრივ და მისი სიჩქარე მოთავსებული იყოს შემდეგ ფარგლებში:

$$8 \frac{km}{sec} < v < 11,2 \frac{km}{sec}$$

გამოვითვალთ ზედაპირული თანამგზავრის პერიოდი. ვინაიდან მისი ორბიტის რადიუსი არის R , პერიოდისათვის მივიღებთ

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

v -ს მნიშვნელობის ჩასმა გვაძლევს

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

(პერიოდი უდრის R სიგრძის მათემატიკური საქანის პერიოდს). მეორე მხრივ, დედამიწის მასა შეიძლება გამოვსახოთ სიმკვრივისა და რადიუსის საშუალებით

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

საიუნაც პერიოდისათვის ვლებულობთ

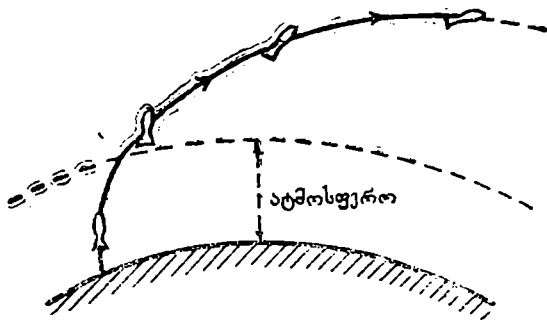
$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}. \quad (\text{XIV, 106})$$

ზედაპირული თანამგზავრის პერიოდი ცენტრალური სხეულის (ამ შემთხვევაში დედამიწის) სიმკვრივეზეა დამოკიდებული. რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვძლევს $T=1$ საათს, 24 მინუტს და 25 სექუნდს. დაახლოებით ასეთივე პერიოდი ექნება მერკურის თანამგზავრს, ვინაიდან ზომებისა და მასების განსხვავების მიუხედავად დედამიწისა და მერკურის სიმკვრივეები დაახლოებით ტოლია. ელიფსურ ორბიტებზე მოძრაი თანამგზავრების პერიოდები გამოითვლება კეპლერის მესამე კანონის მიხედვით, რომელიც პერიოდს აკავშირებს დიდ ნახევარღერძთან.

ყოველივე ზემოთქმული მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა არ არის მიღებული მხედველობაში ატმოსფეროსა და დედამიწის ბრუნვის გავლენა თანამგზავრის მოძრაობაზე. ატმოსფეროს ძლიერი წინააღმდეგობის გამო ვერც ერთი ხელოვნური თანამგზავრი ვერ იმოძრაებს ხანგრძლივად დედამიწის ზედაპირის მახლობლად. ამიტომაც შეუძლებელია ხელოვნური თანამგზავრის გაშვება დედამიწის ზედაპირიდან უბრალო გასროლით, ე. ი. ისე, რომ თანამგზავრს თავიდანვე მიენიჭოს გარკვეული სიჩქარე, რის შემდეგ იგი განაგრძობდა მოძრაობას ინერციისა და დედამიწის მიზიდულობის გავლენით.

პრაქტიკულად თანამგზავრის გაშვების პირველი ეტაპი უნდა იყოს რაკეტის ასროლა ისეთ სიმალლეზე, სადაც ჰერის წინააღმდეგობა უკვე უმნიშვნელოა; ამის შემდეგ რაკეტას ენიჭება ისეთი მიმართულებისა და სიდიდის სიჩქარე, რომელიც საკმარისია მისი გადაქცევისათვის თანამგზავრად. ატმოსფეროს გაიშვიათებულ ფენებში (რამდენიმე ასეულ კილომეტრზე) ასროლის რამდენიმე ხერხი არსებობს. შეიძლება რაკეტა ასროლილ იქნეს ვერტიკალურად და თანამგზავრად გადაქცევისათვის საჭირო ჰორიზონტალური სიჩქარე მიენიჭოს უმაღლესი წერტილის მიღწევის მომენტში. შეიძლება გასროლა მოვანდინოთ ჰორიზონტალურად. ელიფსურ ტრაექტორიაზე და შემდგომი ჰორიზონტალური სიჩქარე მივანიჭოთ ელიფსის ყველაზე დაშორებული წერტილის მიღწევის შემდეგ. ამ ორი უკიდურესი ხერხის გარდა, არსებობს მრავალი საშუალებო ხერხი, როდესაც გასროლა წარმოებს დახრილად დედამიწის ზედაპირისადმი და ჰორიზონტალური სიჩქარე თანამგზავრს ენიჭება რაკეტის მიერ უმაღლესი წერტილის მიღწევის მომენტში (ნახ. 258).

ჩვეულებრივ, თანამგზავრის წამლება რაკეტა რამდენიმე საფეხურისაგან შედგება. პირველ საფეხურზე მოქმედ ძრავებს გაჰყავთ რაკეტა ატმოსფეროს გარეთ. ამ მომენტში პირველი საფეხურის ძრავა და საწვავის ტურბოქლები შორდება რაკეტას იმისათვის, რომ შემცირდეს უსარგებლო ტვირთი და იწყებს მუშაობას მეორე საფეხურის ძრავა. რაკეტის სიჩქარე მატულობს და უახლოვდება თანამგზავრად გადაქცევისათვის საჭირო სიჩქარეს. უკანასკნელ საფეხურს უკვე გაჰყავს თანამგზავრი განგარიშებულ ორბიტაზე.



ნახ. 258

ხელოვნური თანამგზავრის ორბიტის გამოთვლის დროს და გასროლის ყველაზე ხელსაყრელი ხერხის დადგენისათვის მრავალი ფაქტორის გავლენა მხედველობაში მისაღები. ჩვენ არ ვაპირებთ ამ საკითხების განხილვას. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ ამ ფაქტორებს შორის ძირითადია ატმოსფეროს წინააღმდეგობა და დედამიწის ბრუნვა. ატმოსფეროს წინააღმდეგობის გავლენა თვისობრივად სავსებით გასაგებია. იგი იწვევს თანამგზავრის ენერჯის თანდათანობით შემცირებას და მის დაახლოებას დედამიწასთან. მაგრამ რაოდენობითი გამოთვლების ჩატარება ძალიან ძნელია, ვინაიდან არ არის ზუსტად დადგენილი ხანების ძალის ფორმულა და უცნობია ატმოსფეროს სიმკვრივის განაწილება სხვადასხვა ფენაში.

დედამიწის ბრუნვის გავლენა უფრო ადვილად შეიძლება იქნეს გამოკვლეული; ამისათვის საკმარისია მხედველობაში მივიღოთ ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალების მოქმედება. უნდა მიექცეს ყურადღება იმ გარემოებას, რომ დედამიწის ბრუნვის გამო, გასროლის სიჩქარე ინერციული სისტემის მიმართ (უძრავი ვარსკვლავების მიმართ) არის დედამიწის ზედაპირის მიმართ გასროლის სიჩქარისა და დედამიწის ბრუნვის გამოწვეული სიჩქარის ჯამი. კორიოლისის ძალა გამო-

იწვევს თანამგზავრის გადახრას მარჯვნივ და ამიტომ იგი იმოძრავებს დედამიწის ზედაპირის მიმართ არა ელიფსზე, არამედ უფრო რთული სახის მრუდზე.

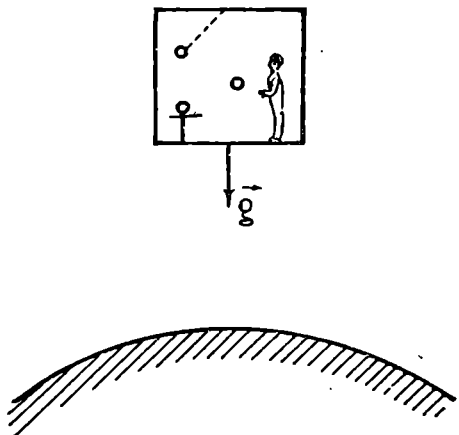
დასასრულ, განვიხილოთ „უწონობის“ საკითხი. რაკეტული ტექნიკის განვითარებასთან და კოსმოსური გაფრენის განხორციელებასთან დაკავშირებით ბუნებრივად დაისვა საკითხი იმ პირობების შესახებ, რომელშიც მოუხდება ყოფნა კოსმონავტს კოსმოსური გაფრენის დროს. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ე. წ. „წონის დაკარგვის“ საკითხს. ცნობილია, რომ ასეთ უწონობის მდგომარეობაში იმყოფებოდნენ გარკვეული დროის განმავლობაში ცნობილი საბჭოთა კოსმონავტები ი. გაგარინი, გ. ტიტოვი და სხვები.

ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ რას გულისხმობენ, როდესაც ლაპარაკობენ „უწონობის“ შესახებ და რით არის გამოწვეული ეს მოვლენა. ამისათვის გავიხსენოთ ის, რაც ნათქვამი იყო X თავში წონის შესახებ. ცხადია, სხეულის წონის არსებობის მიზეზი არის დედამიწის მიერ მისი მიზიდვა. მაგრამ ეს სრულებითაც არ ნიშნავს, რომ სხეულის წონა არის ძალა, რომლითაც დედამიწა იზიდავს ამ სხეულს. წონის ქვეშ ჩვეულებრივ გულისხმობენ ძალას, რომლითაც სხეული აწვება საყრდენს, ვინაიდან იგი არ აძლევს მას დედამიწისაკენ ვარდნის საშუალებას; მაგალითად, წონა არის ძალა, რომლითაც ადამიანი აწვება იატაკს, მაგიდაზე მყოფი სხეული აწვება მაგიდას ან ხელში დაჭერილი სხეული აწვება ხელს. ამგვარად, როდესაც ამბობენ, რომ სხეულმა „დაკარგა“ წონა, გულისხმობენ, რომ მოისპო სწორედ ეს დაწოლის ძალა.

ახლა გამოვარკვიოთ, როგორ შეიძლება მოისპოს სხეულის დაწოლა საყრდენზე. ცხადია, რომ ეს დაწოლის ძალა, ანუ წონა, მოისპობა, თუ სხეულს იმდენად დავაშორებთ დედამიწას ან სხვა ციურ მნათობს, რომ მათი მიზიდვა შეუძენველად მცირე გახდება. მაგრამ ხელოვნური თანამგზავრები იმდენად ახლოსაა დედამიწასთან, რომ ლაპარაკი დედამიწის მიზიდვის ძალის მოსპობაზე ყოველად შეუძლებელია. მაშასადამე, წონის „მოსპობა“ რალაც სხვა მიზეზით არის გამოწვეული. ეს მიზეზია სხეულის თავისუფალი ვარდნა გრავიტაციულ ველში.

ვთქვათ, გარკვეული სიმაღლიდან დედამიწის ზედაპირზე ვარდება კაბინა, რომელშიც იმყოფება ადამიანი და მოთავსებულია სხვადასხვა სხეული (ნახ. 259). ყოველ სხეულზე კაბინის შიგნით და თვით კაბინაზე მოქმედებს დედამიწის მიზიდვის ძალა, რომელიც ანიჭებს მათ ერთნაირ, დედამიწისაკენ მიმართულ g აჩქარებას. ცხადია,

კაბინის უძრაობის შემთხვევაში მასში მოთავსებული ყოველი სხეული დაწვება საყრდენს, რაც ნიშნავს, რომ მათ ექნებათ წონა. მაგრამ თუ კაბინა იმავე აჩქარებით ვარდება, როგორც მის შიგნით მოთავსებული სხეულები, მაშინ სხეულების დაწოლა საყრდენზე შეწყდება. საყრდენზე წნევის შემცირება და, თავისუფალი ვარდნის შემთხვევაში, მთლიანად მოსპობა ნათლად ვლინდება ლიფტის დაშვების დროს. პირველ მომენტებში, როდესაც ლიფტი აჩქარებულად ეშვება,

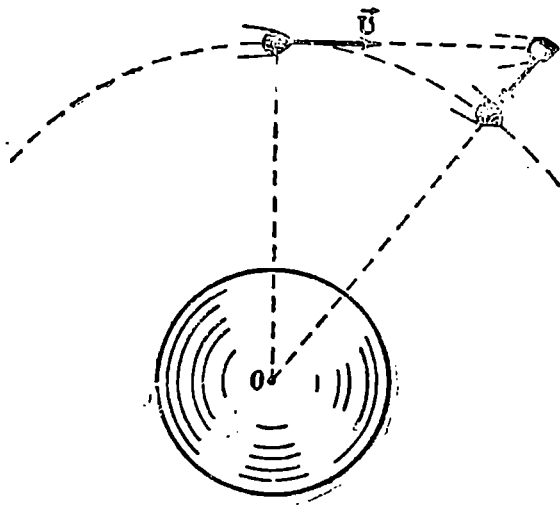


ნახ. 259

მასში მყოფი ადამიანი გრძნობს მის მიერ იატაკზე დაწოლის ძალის შემცირებას. ამ შემთხვევაში წონის სრული მოსპობა არ ხდება, ვინაიდან ლიფტი არ ეშვება თავისუფალი ვარდნის აჩქარებით. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, კაბინის თავისუფალი ვარდნის დროს სხეულების დაწოლა საყრდენზე ისპობა; მაგალითად, კაბინაში მყოფ ადამიანს შეუძლია აილოს ხელში რაიმე სხეული და გაუშვას ხელი. სხეული დარჩება იმ ადგილას (კაბინის მიმართ), სადაც იგი გააჩერა ადამიანმა. თვით ადამიანიც შეიძლება გაჩერდეს კაბინის ნებისმიერ ადგილას ისე, რომ არ დაეყრდნოს იატაკს. სხეულების უძრაობა კაბინის მიმართ (ე. ი. კაბინის მიმართ მათი ვარდნის შეწყვეტა) იმით აიხსნება, რომ მათი ვარდნა წარმოებს დედამიწისაკენ და ვინაიდან თვით კაბინაც ამავე მიმართულებით ვარდება, სხეულებისა და კაბინის ურთიერთგანლაგება ასეთი საერთო ვარდნის დროს არ შეიცვლება.

ახლა გადავიდეთ წონის „დაკარგვის“ საკითხზე თანამგზავრის შიგნით. შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ზემოთ მოყვანილი ახსნა ამ შემთხვევაში არ გამოდგება, ვინაიდან თანამგზავრი მოძრაობს დედამიწის მი-

მართ წრიულ ან ელიფსურ ტრაექტორიაზე და პირველი შეხედვით არავითარი ვარდნა დედამიწისაკენ არ ხდება. მაგრამ საქმე ისაა, რომ მიუხედავად იმისა, თუ როგორი ტრაექტორიით მოძრაობს სხეული გრავიტაციულ ველში (ოღონდ კი მასზე არ მოქმედებდეს სხვა გარეშე ძალა, გარდა გრავიტაციული ძალისა), იგი ყოველთვის ვარდება დედამიწისაკენ. მართლაც, ვთქვათ თანამგზავრი მოძრაობს წრეხაზზე დედამიწის ირგვლივ და რომელიმე მომენტში აქვს \vec{v} სიჩქარე ტრაექტორიის გასწვრივ (ნახ. 260). თანამგზავრზე რომ არ მოქმედებდეს მიზიდვის ძალა, იგი განაგრძობდა მოძრაობას \vec{v} სიჩქარით სწო-



ნახ. 260

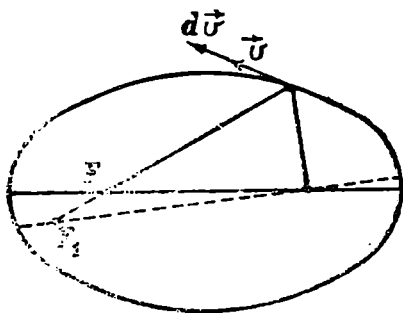
რბაზონად, მხების გასწვრივ და თანდათან დაშორდებოდა დედამიწას. მაგრამ მიზიდვის ძალის გავლენით იგი „ჩამოვარდება“ დედამიწისაკენ, ე. ი. მიუახლოვდება მას იმავე მანძილით, როგორც მას ჰქონდა წინათ. ეს იმას ნიშნავს, რომ თანამგზავრი განუწყვეტლად „ვარდება“ დედამიწისაკენ და ამიტომ მასში მყოფი სხეულები აღარ დააწვება საყრდენს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი დაკარგავენ წონას. თანამგზავრის შიგნით ყველაფერი ხდება ისე, როგორც თავისუფლად ვარდნილ კაბინაში.

§ 107. შუფოტემბის თაორიის ელემენტები

ჩვენ განვიხილეთ მარტივი შემთხვევა ორი ნივთიერი წერტილის მოძრაობისა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით, მაგრამ

ასეთი იდეალური შემთხვევა ბუნებაში მხოლოდ მიახლოებით ხორციელდება, ვინაიდან სხვა სხეულები თავისი მოქმედებით გავლენას ახდენენ მოძრაობის ხასიათზე; მაგალითად, რომელიმე პლანეტაზე მოქმედებს არა მარტო მზე, არამედ სხვა პლანეტებიც, თანამგზავრები და კოსმოსურ სივრცეში გაბნეული ნივთიერება. მთვარის მოძრაობაზე დამიწის ირგვლივ გავლენას ახდენს მზე, გასროლილი სხეულის მოძრაობაზე გავლენას ახდენს ატმოსფეროს წინააღმდეგობა და ა. შ. სხეულის მოძრაობის ხასიათის შეცვლას, გამოწვეულს სხვა სხეულების მოქმედებით, ეწოდება „შეშფოთება“.

რასაკვირველია, ჩვენს მიზანს არ შეადგენს შეშფოთების თეორიის სრული განხილვა, ვინაიდან ეს საკითხი სცილდება ზოგადი ფიზიკის კურსის ფარგლებს. ჩვენ მხოლოდ შევეცდებით რამდენიმე მარტივი შემთხვევის განხილვით გამოვარკვიოთ შეშფოთების ხასიათი. ვთქვათ, პლანეტა მოძრაობს მზის ირგვლივ ელიფსურ ორბიტაზე, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება მზე (ნახ. 261). დაეუშვათ, რომ რომელიღაც მომენტში პლანეტაზე იმოქმედა ტრაექტორიისადმი მხებმა იმპულსმა (მყისმა ბიძგმა) და შეცვალა სიჩქარე dv სიდიდით; ეს ცვლილება შეიძლება იყოს როგორც დადებითი (აჩქარება), ისე უარყოფითი (შენელება). გამოსარკვევია, როგორ შეიცვლება ორბიტის სახე და მოძრაობის ხასიათი ასეთი იმპულსის გავლენით. განტოლება



ნახ. 261

$$v^2 = \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

გვიჩვენებს, რომ სიჩქარის ცვლილებას შეუძლია შეცვალოს მხოლოდ დიდი ნახევარღერძი (რადგან იმპულსი მყისია — r არ იცვლება). ამ განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ

$$da = \frac{2\mu a^2 v dv}{\alpha} \quad (\text{XIV, 107})$$

ვინაიდან მყისი ბიძგი არ ცვლის მოძრაობის მიმართულებას, დიდი ნახევარღერძის სიდიდის ცვლილებამ უნდა გამოიწვიოს მეორე ფოკუსის გადანაცვლება (პირველი ფოკუსი, რომელშიც იმყოფება ცენტრა-

ლური სხეული, არ შეიძლება შეიცვალოს). რა მიმართულებით უნდა მოხდეს ეს გადანაცვლება? ვინაიდან მოძრაობის მიმართულება არ შეცვლილა (ბიძგის მიმართულება ტრაექტორიის მხებია), ფოკუსმა უნდა გადაინაცვლოს მოძრავი სხეულის და ამ ფოკუსის შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ. შეიცვლება აგრეთვე აფსიდთა ხაზის მიმართულება. დიდი ნახევარღერძის სიდიდის ცვლილება გამოიწვევს პერიოდის შეცვლას. ვინაიდან

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}},$$

მივიღებთ

$$dT = 3\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{\frac{1}{2}} da. \quad (\text{XIV, 108})$$

ცხადია, რომ შეიცვლება აგრეთვე კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების საშუალო მნიშვნელობები. საშუალო კინეტიკური ენერგიისათვის ადვილად მიიღება ფორმულა

$$\bar{E}_k = \frac{\alpha}{2a},$$

საიდანაც მისი ცვლილებისათვის გვექნება

$$\delta \bar{E}_k = -\frac{\alpha}{2a^2} da = -\mu \delta v, \quad (\text{XIV, 109})$$

ასევე გამოითვლება სრული ენერგიის ცვლილება

$$\delta E = -\delta \left(\frac{\alpha}{2a} \right) = \frac{\alpha}{2a^2} da = \mu \delta v \quad (\text{XIV, 110})$$

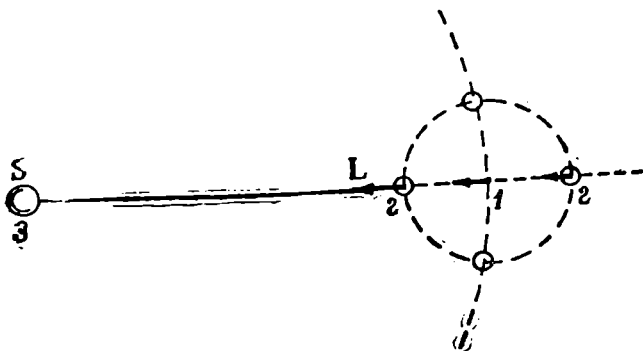
და საშუალო პოტენციალური ენერგიის ცვლილება

$$\delta \bar{u} = 2\mu \delta v = \frac{\alpha}{a^2} da. \quad (\text{XIV, 111})$$

განვიხილოთ მაგალითისათვის ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობის შემოფოტება, გამოწვეული ატმოსფეროს წინააღმდეგობით. ეს წინააღმდეგობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთობლიობა მყისი მხები ბიძგებისა, რომლებიც ამცირებს თანამგზავრის სიჩქარეს. სიჩქარის შემცირება ($dv < 0$) გამოიწვევს ორბიტის ზომის შემცირებას ($da < 0$), პერიოდის შემცირებას და კინეტიკური ენერგიის გაზრდას, ვინაიდან პოტენციალური ენერგია უფრო მეტად კლებულობს, ვიდრე სრული ენერგია.

თუ რაიმე გარეშე მოქმედების შედეგად მოძრავ სხეულს მიენიკა მხები აჩქარება, ორბიტის ზომა გაიზრდება, ხოლო კუთხურა სიჩქარე და კინეტიკური ენერგია შემცირდება. კინეტიკური ენერგიის ეს შემცირება სავსებით იფარება პოტენციალური ენერგიის გაზრდით, რის გამოც სრული ენერგია მატულობს.

განვიხილოთ ახლა მესამე სხეულის მოქმედება ორი სხეულისაგან შემდგარ სისტემაზე. როგორც მაგალითი, გამოვარკვიოთ როგორ მოქმედებას ახდენს მზე დედამიწასა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაზე. ამისათვის ჯერ უნდა გამოვარკვიოთ რას ეწოდება შემაშფოთებელი ძალა ან აჩქარება. ვთქვათ, უკვე შევისწავლეთ მთვარის მოძრაობა დედამიწის ირგვლივ და დავადგინეთ მისი ხასიათი. ცხადია, რომ თუ მზე ერთნაირ აჩქარებას მიანიჭებს დედამიწასა და მთვარეს, მათი



ნახ. 262

ურთიერთგანლაგება და მოძრაობა არ შეიცვლება, შეიცვლება მხოლოდ მათი ინერციის ცენტრის მოძრაობის ხასიათი. აქედან გამომდინარეობს, რომ შეშფოთების დამახასიათებელია არა აბსოლუტური აჩქარებები, რომელთაც მზე ანიჭებს დედამიწასა და მთვარეს, არამედ ამ აჩქარებათა სხვაობა. სწორედ ეს სიდიდე გვიხასიათებს, თუ რამდენად „ერევა“ მზე დედამიწასა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაში.

262-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მზის, დედამიწისა და მთვარის ურთიერთგანლაგება მთვარის მოძრაობის სხვადასხვა მომენტში. მიუხედავად იმისა, რომ მთვარე დაახლოებით 400-ჯერ უფრო შორსაა მზიდან, ვიდრე დედამიწიდან, მზე თავისი დიდი მასის გამო დაახლოებით 21-ჯერ უფრო მეტ აჩქარებას ანიჭებს მთვარეს, ვიდრე დედამიწას. მაგრამ ეს სრულებითაც არ ნიშნავს იმას, რომ მზე შესაძლებლად მოქმედებს დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაზე. ამ გავლენის გამოსარ-

კვლევად უნდა გამოვიყენოთ იმ აჩქარებათა სხვაობა, რომელსაც მზე ანიჭებს დედამიწასა და მთვარეს. სწორედ ეს სხვაობაა „შეშფოთების“ დამახასიათებელი. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: m_1, m_2, m_3 იყოს დედამიწის, მთვარისა და მზის მასები, r_{12}, r_{13}, r_{23} — სათანადო მანძილები, ხოლო a_{12}, a_{13}, a_{23} და იგივე სიდიდეები გადასმული ინდექსებით — აჩქარებები, რომლებსაც ეს სხეულები ანიჭებენ ერთმანეთს, მაგალითად, a_{12} არის აჩქარება, რომელსაც დედამიწა ანიჭებს მთვარეს, ხოლო a_{32} — აჩქარება, რომელსაც მზე ანიჭებს მთვარეს.

ცხადია, ჩვენთვის საჭირო აჩქარებისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$a_{32} = \gamma \frac{m_3}{r_{32}^2}, \quad a_{31} = \gamma \frac{m_3}{r_{31}^2} *$$

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც მთვარე იმყოფება მზესა და დედამიწას შორის („შეერთება“), მანძილებისათვის გვექნება

$$r_{32} = r_{31} - r_{12};$$

აქედან აჩქარებების სხვაობისათვის მივიღებთ¹

$$a_{32} - a_{31} = \gamma \frac{m_3}{(r_{31} - r_{12})^2} - \gamma \frac{m_3}{r_{31}^2} \approx \frac{2\gamma m_3 r_{12}}{r_{31}^3}. \quad (\text{XIV, 112})$$

იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მთვარე და მზე იმყოფებიან პირისპირ ღგომავში, მივიღებთ

$$a_{32} - a_{31} \approx - \frac{2\gamma m_3 r_{12}}{r_{31}^3};$$

ორივე შემთხვევაში შექაშფოთებული აჩქარება ($a_{32} - a_{31}$) მიმართულია ისე, რომ აშორებს მთვარეს დედამიწიდან. იმის გამოსარკვევად, თუ რამდენად ძლიერია შეშფოთება, შევადაროთ იგი აჩქარებას, რომელსაც დედამიწა ანიჭებს მთვარეს და რომელიც საზღვრავს მთვარის მოძრაობას დედამიწის ირგვლივ. ეს აჩქარება გამოისახება ფორმულით

$$a_{12} = \gamma \frac{m_1}{r_{12}^2}.$$

აქედან მივიღებთ

$$\frac{a_{32} - a_{31}}{a_{12}} \approx 2 \left(\frac{m_3}{m_1} \right) \left(\frac{r_{12}}{r_{31}} \right)^3, \quad (\text{XIV, 113})$$

არიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

¹ ვინაიდან r_{12} ძალიან მცირეა r_{31} -თან შედარებით.

$$\frac{a_{32} - a_{31}}{a_{12}} \approx \frac{1}{90}.$$

ჩვენ ვხედავთ, თუ რამდენად მცირეა მზის შემავსოთებელი მოქმედება მთვარის მოძრაობაზე დედამიწის ირგვლივ. ჩატარებულ გამოთვლებში არსად არ შედის მთვარის დამახასიათებელი სიდიდეები, გარდა მანძილისა დედამიწიდან და მზიდან. ამიტომაც ეს გამოთვლები გამოდგება ყოველი სხვა სხეულისათვის, მაგალითად, კოსმოსური ხომალდისათვის, რომელიც მოძრაობს დედამიწისა და მზის მოქმედების გავლენით. ხშირად ამბობენ, რომ კოსმოსური ხომალდი დასაწყისში იმყოფება დედამიწის ქმედების სფეროში, ხოლო საკმარისად დაშორებისას ხვდება მზის, მთვარის ან სხვა ციური მნათობის ქმედების სფეროში. გამოვარკვიოთ, თუ რა იგულისხმება ცნებაში — ქმედების სფერო. დავებრუნდეთ ზემოთ განხილულ მაგალითს, ჩვენ გამოვიტვალეთ, თუ რამდენად ერევა მზე დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაში. ახლა გამოვარკვიოთ რამდენად ერევა დედამიწა მზისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაში, ე. ი. გამოვიტვალოთ სიდიდე

$$\frac{a_{12} - a_{13}}{a_{32}}$$

$$a_{32}$$

ცხადია, რომ

$$a_{32} = \gamma \frac{m_3}{r_2^2},$$

$$a_{12} - a_{13} = \gamma \frac{m_1}{r_{12}^2} - \gamma \frac{m_1}{r_{13}^2}.$$

ვინაიდან r_{12} 400-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე r_{13} , მეორე წევრი 'შეიძლება უგულებელვყოთ, რის გამოც მივიღებთ

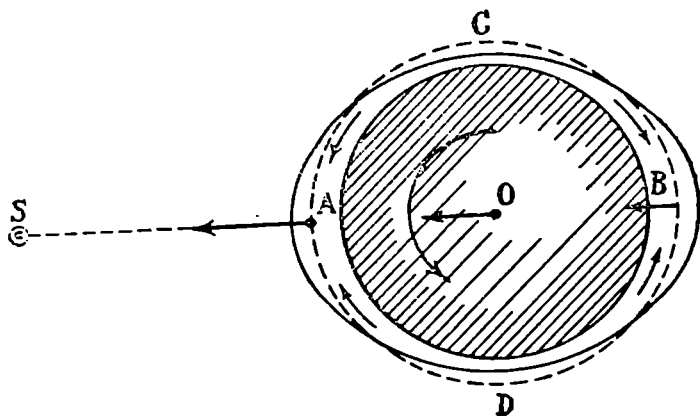
$$\frac{a_{12} - a_{13}}{a_{32}} \approx \frac{m_1}{m_3} \left(\frac{r_{32}}{r_{12}} \right)^2.$$

რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

$$\frac{a_{12} - a_{13}}{a_{32}} \approx \frac{1}{2}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ დედამიწის მიერ მზისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობის შემფოთება გაცილებით უფრო ძლიერია, ვიდრე მზის მიერ დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობის შემფოთება. ამიტომაც აშეიძლება ვთქვათ, რომ მთვარე იმყოფება დედამიწის მოქმედების რეში. იგივე ითქმის ყოველ სხეულზე, რომელიც დაშორებულა დედამიწიდან იმავე მანძილით, რაც მთვარე. ცხადია, რაც უფრო მეტად

შორდება სხეული დედამიწის, მით უფრო ძლიერდება მზის შემაშფოთებული მოქმედება და, ბოლოს, მიღწეულ იქნება ისეთი მანძილი, რომლისთვისაც მზის შემაშფოთებული მოქმედება გაუტოლდება დედამიწის შემაშფოთებელ მოქმედებას. ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ სხეულმა მიაღწია დედამიწის ქმედების სფეროს საზღვარს, რის შემდეგ იწყება მზის ქმედების სფერო. არ უნდა გვეგონოს, რომ დედამიწის ქმედების სფეროდან გამოსვლის შემდეგ სავსებით წყდება დედამიწის მოქმედება ამ სხეულზე (ეს მოქმედება თეორიულად უსასრულო დაშორებამდე არსებობს). დედამიწის მოქმედება გრძელდება, მაგრამ ძირითადი ხდება უკვე მზის მოქმედება.



ნახ. 263

განვიხილოთ შემოფოთების ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი—ოკეანის მიმოქცევა. მიმოქცევა ეწოდება ოკეანის დონის პერიოდულ რხევას საშუალო დონის მიმართ, უკვე ძველ დროში იყო შემჩნეული ოკეანის მიმოქცევის კავშირი მზისა და მთვარის მოძრაობასთან, მაგრამ მხოლოდ მას შემდეგ გახდა შესაძლებელი მიმოქცევის მოვლენების ახსნა, რაც ნიუტონმა აღმოაჩინა სხეულების გრავიტაციული ურთიერთქმედება და დადგინდა მისი კანონი. წარმოვიდგინოთ, რომ დედამიწა თანაბრად არის დაფარული წყლის ფენით და განვიხილოთ გავლენა, რომელსაც ახდენს მასზე მზე ან მთვარე. განვიხილოთ სითხის A ნაწილაკი, რომელიც მდებარეობს მზისა და დედამიწის ცენტრების შემაერთებელ ხაზზე მზის მხარეზე და გამოვითვალოთ მზის მიერ გამოწვეული (შემაშფოთებელი) აჩქარება (ნახ. 263). თუ R არის დედამიწის რადიუსი, r —მანძილი მზესა და დედამიწას შორის, ხოლო

M —მზის მასა, ამ აჩქარებისათვის (XIV, 112) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{2\gamma M R}{r^3} \quad (XIV, 114)$$

ვინაიდან A ნაწილაკი უფრო მეტ აჩქარებას ლეზულობს, ვიდრე დედამიწის ცენტრი. ეს ნაწილაკი დაშორდება დედამიწის ცენტრს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ ადგილას წყლის დონე აიწევეს ზენიტისაკენ. ასევე აიწევეს ზენიტისაკენ B წერტილში არსებული წყლის დონე. მეორე მხრივ, დედამიწის ზედაპირის C და D ადგილებში ოკეანის დონე დაიწევეს. გამოაჯღებები გვიჩვენებს, რომ მზის მოქმედების შემთხვევაში (XIV, 114) აჩქარება შეადგენს ვარდნის აჩქარების $\frac{1}{19300000}$

ნაწილს. გაცილებით უფრო ძლიერია მთვარის მოქმედება, მიუხედავად იმისა, რომ მისი მასა მზის მასაზე გაცილებით ნაკლებია. ეს გამოწვეულია მთვარის სიახლოვით (ფორმულაში შედის მანძილის კუბი). მთვარის მიერ გამოწვეული აჩქარება 2,17-ჯერ მეტია, ვიდრე მზით გამოწვეული აჩქარება. საერთო აჩქარება დამოკიდებულია მთვარისა და მზის განლაგებაზე დედამიწის მიმართ, ვინაიდან მათ მიერ გამოწვეული აჩქარებები შეიძლება შეიკრიბოს, და კიდევ გამოაკლდეს ერთმანეთს. დედამიწის ბრუნვის გამო, მიმოქცევის ტალღა მოძრაობს ოკეანეთა ზედაპირზე გარკვეული პერიოდით (დაახლოებით 24 საათი). ამ დროის განმავლობაში ყოველ ადგილას ხდება ორი მოქცევა და ორი მიქცევა. ასეთი მარტივა სურათა მიმოქცევის მოვლენისა სინამდვილეში არ ხორციელდება, ვინაიდან მიმოქცევის ტალღები განიცდის ხახუნს ოკეანის ფსკერთან. წინააღმდეგობას მატერიკების მხრივ და სხვა. საერთოდ, მიუხედავად იმისა, რომ მიმოქცევის ძიზეზი სავსებით გარკვეულია (მთვარისა და მზის შეშფოთება), მისი ხასიათის გარკვევა ძალიან რთულია, ვინაიდან მიმოქცევის ტალღებზე გავლენას ახდენს გეოგრაფიული პირობები, ნაპირების სახე. ოკეანის სიღრმე და მრავალი სხვა ფაქტორი.

ს ა გ ა ნ თ ა ს ა ძ ი ე ზ ე ლ ი

- აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახება 210
 აბსოლუტურად მყარი სხეული 25
 აბსოლუტური დრო 25
 აბსოლუტურობა დროის 80
 აბსოლუტურობა მონაკვეთის სიგრძის 80
 ათვლის არაინერციული სისტემები 218
 " სისტემა 13, 75
 ამპლიტუდა იძულებითი რხევის 366
 " კუთხური, რხევის 357
 " მიღვეადი რხევის 359
 " რხევის 349
 ანომალია ექსცენტრიკული 473
 " ჰემარიტი 473
 ანტისიმეტრიული რხევები 398
 აპერიოდული მიღვეადი მოძრაობა 363
 აპოგეუმი 473
 არადრეკადი I გვარის დაჯახება 194
 " II გვარის დაჯახება 194
 " ცენტრალური დაჯახება 208
 არაინერციული მბრუნავი სისტემა 230
 არათანაბარი მრუდწირული მოძრაობა 49
 არამდგრადი წონასწორობა 336
 არასიმეტრიული ბზრიალა 307
 ასტრონომიული ნუტაცია 323
 " პრეცესია 320, 323
 აფელიუმი 473
 აფსიდა 472
 აფსიდთა ხაზი 472
 აღდგენის კოეფიციენტი 208
 აჩქარება 50
 " კორიოლისის 228
 " კუთხური 71, 72
 " მხები (ტანგენციალური) 60
 " აჩქარება ნამდვილი 51, 52
 " ნორმალური 61
 " საშუალო 51
 " ცენტრიდანული 228
 " ჰარმონიული ოსცილატორის 352
 აჩქარებათა დამოუკიდებლობის კანონი 91
 აჩქარების რადიალური მდგენელი 63
 " ტრანსვერსალური მდგენელი 63
 ახლოქმედება 421
 ბალისტიკური რაკეტა 481
 ბალისტიკური საქანი 212
 ბერკეტი 339
 ბზრიალა არასიმეტრიული 307
 " სიმეტრიული 301, 309
 " სფერული 300
 ბირთვული (ძლიერი) ურთიერთქმედება 129
 ბმები 158
 ბმის განტოლება 159
 ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ 267
 " წერტილის ირგვლივ 268
 ბრუნვითი სიჩქარე 47
 ბადატანიითი მოძრაობა 265
 გალილეის გარდაქმნის ფორმულები 81
 განზომილება ენერჯიის 116
 " სიდიდის 30
 განტოლება ბმის 159
 " მათემატიკური საქანის ნომ-
 " რაობა 359
 განტოლება მიღვეადი რხევის 359
 " მომენტების 174
 " ჰარმონიული ოსცილატო-
 " რის რხევის 347, 352

განტოლებები ეილერის 300
 „ მოძრაობის, დინამიკური
 149, 151
 განტოლებები მოძრაობის, კინემატიკუ-
 რი 36
 განტოლებები პოლარულ-მხები (II რი-
 გის მრუდის) 466
 განურჩეველი წონასწორობა 336
 გარდაქმნის ფორმულები ლორენცის 86
 გარე ძალა 156
 გაუსის თეორემა 438
 გაფანტვის (გაბნევის) კუთხე 201
 გაფანტვის (გაბნევის) მოვლენა 201
 გეომეტრიული პოლუსი 305
 გიროკომპასი 318
 გიროსკოპი 316
 გორვა 324
 გორვის ხახუნი 327
 გრადიენტი 125
 გრავიტაციული ველი 427
 გრავიტაციული ველი დედამიწის 440
 გრავიტაციული ველის დაძაბულობა 428
 „ ველის დაძაბულობის ერ-
 თეული 429
 გრავიტაციული ველის პოტენციალი 430
 „ ველის პოტენციალის ერ-
 თეულები 430
 გრავიტაციული (მძიმე) მასა 92, 407, 411
 „ მუდმივა 413
 „ ურთიერთქმედება (მსოფ-
 ლიო მიზიდულობა) 127, 406
 გრავიტაციული ურთიერთქმედების პო-
 ტენციალური ენერგია 421
 გრავიტაციული ძალა 406
 გრეხის მომენტი 417
 ღარტყმის ცენტრი 331
 „ ძალა 329
 „ ძალის მომენტი 329
 დაუკვანილი მასა 457
 „ სიგრძე ფიზიკური სქანის
 291
 დაშლა ნაწილაკის 212
 დაშლის ენერგია 214
 დაძაბულობა გრავიტაციული ველის 428
 დაძაბულობის ერთეული გრავიტაციის
 ველის 428

დაძაბულობის ნაკადი 435
 დაჯახება 191
 დაჯახება აბსოლუტურად არადრეკადი
 210
 დაჯახება არადრეკადი I გვარის 194
 „ არადრეკადი II გვარის 194
 „ დრეკადი 194
 „ ცენტრალური არადრეკადი 208
 „ ცენტრალური დრეკადი 203
 დედამიწის გრავიტაციული ველი 440
 „ ღერძის ნუტაცია 319
 „ ღერძის პრეცესია 319
 დეკარტეს მართკუთხა სისტემა 15
 „ მართკუთხა სისტემის კოორ-
 დინატები 15
 დეკარტემენტი ლოგარიტმული 361
 დისიპაცია 180
 დისიპაციური პროცესები 180
 დისიპაციური (ხახუნის) ძალა 182
 დრეკადი დაჯახება 194
 დრეკადი ცენტრალური დაჯახება 203
 დრო 19
 დრო აბსოლუტური 25
 დროის ეტალონი 28
 დროის აბსოლუტურობა 80
 მილერის განტოლებები 300
 ეკვატორიალური ინერციის მომენტები
 284
 ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება
 128
 ელექტროსტატიკური ურთიერთქმედება
 128
 ელიფსური რხევა 392
 ენერგია დაშლის 214
 „ კინეტიკური 107
 „ პოტენციალური 110
 „ სისტემის, სრული 111
 „ პარამიწიული ოსცილატორის 354
 ენერგიის განზომილება 116
 „ ერთეულები 116
 ენერგიის მუდმივობის კანონი 110
 ერთდროულობის ცნება 24
 ერთეულები ძირითადი 35
 „ გრავიტაციული ველის და-
 ბულობის 429
 „ გრავიტაციული ველის პო-

ტენცილის 430
 ერთეულები ენერჯის 116
 „ მუშაობის 144
 „ სიმძლავრის 147
 „ ძალის 126
 „ წონის 240
 ერთეულთა აბსოლუტური სისტემა 30
 ეტალონი დროის 2;
 „ (საერთაშორისო) მასის 91
 „ (საერთაშორისო) მიტრის 26
 „ სიგრძის 20, 21
 ეტვეშის ცდა 249, 414
 ექსცენტრიკული ანომალია 473
 პარიანტული სიდიდეები 83, 168
 კელი გრავიტაციული 427
 კელი გრავიტაციული დედაქანის 440
 ზედაპირი იზოპოტენციალური 433
 შავისფერი (მთავარი) ღერძი 278, 296
 თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი 158
 თანაბარი მოძრაობა 39
 თანაბარი მრუდწირული მოძრაობა 70
 თანაბრად აჩქარებული სწორხაზოვანი
 მოძრაობა 63, 67
 თანამგზავრი ხელოვნური 433
 თეორემა გაუსის 438
 თეორემა შტეინერის 276
 იზოლირებული წერტილი 71
 იზოპოტენციალური ზედაპირი 433
 „ მრუდი 123
 იზოქრონიზმი რხევის 357
 იმპულსების ჯამის მუდმივობის კანონი
 93
 იმპულსი (მოძრაობის რაოდენობა) 93
 იმპულსი. მბრუნავი მყარი სხეულის 271
 იმპულსის მომენტი 171
 „ მყარი სხეულის 274
 „ მომენტის მუდმივობის კანონი
 177
 ინვარიანტული სიდიდეები 83, 168
 ინერტული მასა 92, 407, 411
 ინერცია 90
 ინერციის მომენტები 279—284
 „ მომენტი. მყარი სხეულის
 272, 275, 279—286

ინერციის ნამრავლები 275
 „ პრინციპი (ნიუტონის I კანონი) 75
 ინერციის რადიუსი 279
 „ (მასების), ცენტრი 98
 ინერციის ცენტრის სისტემა 197
 ინერციის ძალა 220
 ინერციული სისტემა 75
 იძულებითი პრეცესია 313
 „ რხევა 366
 „ რხევის ამპლიტუდა 366
 „ რხევის საწყისი ფაზა 366
 ძანონი კეპლერის I, II, III 474
 კანონი აჩქარებათა დამოუკიდებლობის
 91
 „ ენერჯის მუდმივობის 110
 „ იმპულსის მომენტის მუდმივობის
 177
 კანონი იმპულსების ჯამის მუდმივობის
 93
 კანონი კულონის 325
 „ მიზიდულობის (ნიუტონის) 407,
 408, 412
 კანონი ნიუტონის I (ინერციის პრინციპი)
 75
 კანონი ნიუტონის II 151
 კანონი ნიუტონის III 139, 153
 კანონი სიჩქარეთა შეკრების 82
 კანონი ფართობითი სიჩქარის მუდმივობის
 179
 კანონი ძალების შეკრების (სუპერპოზიციის)
 136
 კარდანის საკიდი 316
 კეპლერიშის ცდა 416
 კეპლერის კანონები 474
 კინემატიკური პოლუსი 305
 კინეტიკური ენერჯია 107
 კინეტიკური ენერჯია მყარი სხეულის 271
 კოეფიციენტი აღდგენის 208
 „ მიღების 358, 360
 „ სრიალის ხახუნის 327
 „ უძრავობის ხახუნის 325
 „ ხახუნის 183, 184

კოორდინატები დეკარტის მართკუთხა
სისტემის 15

კოორდინატები პოლარული 16

კოორდინატების აჩქარება 228

„ ძალა 231

კოსმოსური სიჩქარე, პირველი 484

კოსმოსური სიჩქარე, მეორე 485

კუთხე გაფანტვის (გაბნევის) 201

„ უკუცემის 201

„ ხახუნის 327

კუთხური ამპლიტუდა, რხევის 357

„ სიჩქარე 48, 72

კუთხური სიხშირე, რხევის 348

კულონის კანონი 325

ლაბორატორიული სისტემა 197

ლისაქუს ფიგურები 393

ლოგარითმული დეკრემენტი 361

ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები 86

მაგნიტური ურთიერთქმედება 128

მათემატიკური საქანის 290, 354

„ საქანის კუთხური ამპლი-
ტუდა 357

მათემატიკური საქანის მოძრაობის გან-
ტოლება 356

მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდი
357

მათემატიკური საქანის სიხშირე 356

მარჯვენა ბურღის წესი 19

მასა 90, 101

„ გრავიტაციული (მძიმე) 92, 407,
411

მასა ინერტული 407, 411

„ ინერტული 92

„ საცდელი 429

„ სისტემის, დაყვანილი 457

მასების (ინერციის) ცენტრი 98

მასის საერთაშორისო ეტალონი 91

მბრუნავი არაინერციული სისტემა 230

მბრუნავი მყარი სხეულის იმპულსი 271

მდგრადი წონასწორობა 336

მეორე კოსმოსური სიჩქარე 485

მეტრის საერთაშორისო ეტალონი 26

მექანიკური რხევები 343

მთავარი ღერძი (თავისუფალი ღერძი)
278, 296

მიზიდულობის კანონი, ნიუტონის 407,
408, 412

მილევადი აპერიოდული მოძრაობა 363

მილევადი რხევა 359

„ რხევის ამპლიტუდა 359

„ რხევის განტოლება 359

„ რხევის პერიოდი 359

„ რხევის სიხშირე 359

მილევის კოეფიციენტი 358, 360

მოვლენა გაფანტვის (გაბნევის) 201

მომენტების განტოლება 174

მომენტი გრეხის 417

„ დარტყმის ძალის 329

„ იმპულსის 171

„ მყარი სხეულის იმპულსის 274

„ მყარი სხეულის ინერციის 272,
275, 279—286

მომენტი ძალთა წვევილის 259

„ ძალის 172

„ ხახუნის ძალის 329

მონაკვეთის სიგრძის აბსოლუტურობა 80

„ მოჩვენებითი“ წონა 238

მოძრაობა 38

„ აპერიოდული, მილევადი 363

„ გადატანითი 265

„ თანაბარი 39

„ თანაბარი მრუდწირული 70

„ მრუდწირული არათანაბარი 49

„ მუდმივი სიჩქარით 66

„ სწორხაზოვანი, თანაბრად აჩ-
ქარებული 63, 67

მოძრაობა წრეხაზზე 71

მოძრაობის დინამიკური განტოლებები

149, 151

მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები

36

მოძრაობის რაოდენობა (იმპულსი) 93

მრუდები, პოტენციალური 129

მრუდი, იზოპოტენციალური 123

მრუდწირული არათანაბარი მოძრაობა 49

„ თანაბარი მოძრაობა 70

„ მოძრაობის სიჩქარე 43

მსოფლიო მიზიდულობა (გრავიტაციული

ურთიერთქმედება) 406

მსოფლიო მიზიდულობის ძალა 416

მუდმივა გრავიტაციული 413

მუშაობა 139

მუშაობის ერთეულები 144
მყარი სხეულის იმპულსის მომენტი 274
მყარი სხეულის ინერციის მომენტი 272,
275, 279—286
მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია 271
„ სხეულის პოტენციალური ენერ-
გია 273
მყარი სხეულის სრული ენერგია 273
მყისი ღერძი 269, 293
მძიმე (გრავიტაციული) მასა 92
მხარი ძალთა წყვილის 260
ნაკადი დაძაბულობის 435
ნაკრები რხევა 381
„ ძალა 263
ნამდვილი სიჩქარე 42, 43
„ნამდვილი“ წონა 238
ნამრავლები ინერციის 275
ნაწილაკის დაშლა 212
ნიუტონის I კანონი (ინერციის პრინცი-
პი) 75
ნიუტონის II კანონი 151
ნიუტონის III კანონი 139, 153
ნიუტონის მიზიდულობის კანონი 407,
408, 412
ნორმალური რხევები 398
ნუტაცია 313
„ ასტრონომიული 323
„ დედამიწის ღერძის 319
მზებრტონი პარამონიული 403
ორი წერტილის პრობლემა 454
ორმო პოტენციალური 134
ოსცილატორი 344
„ პარამონიული 346
პარამეტრული რეზონანსი 375
პარციალური რხევები 397
პერიოდი 473
პერიოდი მათემატიკური საქანის რხევის
357
პერიოდი მიღვეადი რხევის 359
პერიოდი პარამონიული რხევის 347
პირველი კოსმოსური სიჩქარე 484
პირობები წონასწორობის 333, 338
პოლარული ინერციის მომენტი 284
„ კოორდინატები 16
პოლარულ-მხები განტოლებები (II რი-
ვის მრუდები) 466

პოლუსი გეომეტრიული 305
პოლუსური კინემატიკური 305
პოტენციალი, გრავიტაციული ველის 430
პოტენციალური ენერგია 110
პოტენციალური ენერგია გრავიტაციული
ურთიერთქმედების 421
პოტენციალური ენერგია მყარი სხეუ-
ლის 273
პოტენციალური მრუდები 129
„ ორმო 134
პრეცესია (წინსწრება) ასტრონომიული
320, 323
პრეცესია (წინსწრება) დედამიწის ღერ-
ძის 319
პრეცესია (წინსწრება) იძულებითი 313
„ (წინსწრება) რეგულარული 305
„ (წინსწრება) ფსევდო-რეგულა-
რული 313
პრინციპი ინერციის (ნიუტონის I კანო-
ნი) 75
პრობლემა ორი წერტილის 454
პროცესები დისიპაციური 180

შოლის ცლა 418

რადიალური სიჩქარე 47
რადიუსი ინერციის 279
რაკეტა ბალისტიკური 481
რაოდენობა მოძრაობის (იმპულსი) 93
რეაქციის ძალა 161
რეგულარული პრეცესია 305
რეგულატორი უატის 236
რეზონანსი 367
„ პარამეტრული 375
რეზონანსული სიხშირე 367
„ შუალედი (რეზონანსული
მრუდის სიგანე) 371
რიცხვი თავისუფლების ხარისხთა 152
რიხარცის და კრიგარმენცელის ცლა 418
რხევა ანტისიმეტრიული 398
„ ბმული 396
„ ელიფსური 392
„ იძულებითი 366
„ მექანიკური 343
„ მიღვეადი 359
„ ნაკრები 381
„ ნორმალური 398

- რხევა სიმეტრიული 398
 „ სრული 348
 „ პარციალური 397
 „ ჰარმონიული 344
 რხევის ამპლიტუდა 349
 „ განტოლება, ჰარმონიული ოსცი-
 ლატორის 347, 352
 რხევის იზოქრონიზმი 357
 „ კუთხური ამპლიტუდა 357
 „ პერიოდი, მათემატიკური საქა-
 ნის 357
 რხევის სიხშირე 348
 „ ფაზა 350
 „ ღერძი, ფიზიკური საქანის 291
 საათები სინქრონიზებული 25
 საცილი კარდანის 316
 საქანი ბალისტიკური 212
 საქანი მათემატიკური 290, 354
 „ ფიზიკური 290
 „ ფიზიკური დაყვანილი სიგრძე 291
 „ ფიზიკური რხევის ღერძი 291
 საშუალო სიჩქარე 41
 საცდელი მასა 429
 საწყისი ფაზა 350
 „ ფაზა იძულებითი რხევის 366
 სიგრძე 22
 სიგრძის ეტალონი 20, 21
 „ მონაკვეთის აბსოლუტურობა 80
 სიდიდეები ვარიანტული 83, 168
 სიდიდეები ინვარიანტული 83, 168
 სიდიდის განზომილება 30
 სიმეტრიული ბზრიალა 301, 309
 „ ბზრიალას ბრუნვა წერ-
 ტილის ირგვლივ 309
 სიმეტრიული რხევა 398
 სიმრუდე წირის 53
 სიმძლავრე 146
 სიმძლავრის ერთეულები 147
 სინათლის ტალღა 25
 „ ტალღის სიჩქარე 25
 სინქრონიზირებული საათები 25
 სისტემა ათვლის 13, 75
 „ ათვლის არაინერციული 218
 „ დეკარტის, მართკუთხა 15
 „ ერთეულთა, აბსოლუტური 30
 „ ინერციის ცენტრის (C) 197
 სისტემა ინერციული 75
 „ ლაბორატორიული (L) 197
 „ მბრუნავი, არაინერციული 230
 „ CGS 35
 „ LMT 35
 „ Si (MKS) 34
 სისტემის დაყვანილი მასა 457
 „ სრული ენერგია 111
 სიჩქარე ბრუნვითი 47
 „ კოსმოსური I 484
 „ კოსმოსური II 485
 „ კუთხური 48, 72
 „ მრუდწირული მოძრაობის 43
 „ ნამდვილი 42, 43
 „ რადიალური 47
 „ საშუალო 41
 „ სინათლის ტალღის 25
 „ ფართობითი 179, 476
 „ ჰარმონიული ოსცილატორის 352
 სიჩქარეთა შეკრების კანონი 82
 სიხშირე მათემატიკური საქანის 356
 „ მილევალი რხევის 359
 „ რეზონანსული 366
 სიხშირე რხევის 348
 სრიალი 324
 სრიალის ხაზუნი 327
 სრული ენერგია მყარი სხეულის 273
 „ ენერგია სისტემის 111
 „ რხევა 348
 სუპერპოზიციის (ძალების შეკრების) კა-
 ნონი 136
 სუსტი ურთიერთქმედება 129
 სფერო კმედების 495
 სფერული ბზრიალა 300
 სწორხაზოვანი, თანაბრად აჩქარებული
 მოძრაობა 63, 67
 სხეულის სიგრძის გაზომვა 20
 ტალღა სინათლის 25
 ტოლქმედი ძალების 264
 ტონი ძირითადი 403
 ტრაექტორია 38
 შატის რეგულატორი 236
 უკუცემის კუთხე 201
 ურთიერთქმედება ბირთვული (ძლიერი)
 129

ურთიერთქმედება გრაფიტაციული 127
 „ ელექტრომაგნიტური 128
 „ ელექტროსტატიკური 128
 „ მაგნიტური 128
 „ სუსტი 129
 „ ქიმიური 128
 უძრავი სხეულის წონა 237
 „ ღერძის ირგვლივ ბრუნვა 267
 უძრაობის ხახუნი 325
 უწონობა 488

შაზა რხევის 350
 ფაზა საწყისი 350
 ფაზური სიბრტყე 380
 ფართობითი სიჩქარე 179, 476
 „ სიჩქარის მუდმივობის კანონი 179
 ფიგურები ლისაყუს 393
 ფიზიკური საქანი 290
 „ საქანის დაყვანილი სიგრძე 291
 „ საქანის რხევის ღერძი 291
 ფორმულები გალილეის გარდაქმნის 81
 „ ლორენცის გარდაქმნის 86
 ფსევდო-რეგულარული პრეცესია 313
 ფუკოს ცდა 246

ჭიმული ურთიერთქმედება 128
 კმედების სფერო 495

ღერძი მთავარი (თავისუფალი) 278, 298
 „ მყისი 269, 298

შეკრება ძალების 254
 „ ჰარმონიული რხევების 391
 შემაშფოთებელი ძალა 493
 შეშფოთება 491
 შეშფოთების თეორიის ელემენტები 490
 შიდა ძალა 156
 შორსქმედება 426
 შტეინერის თეორემა 276
 შუალედი რეზონანსული (რეზონანსული მრუდის სივანე) 371

ცდა ეტეშის 249, 414
 „ კეპლერის 416
 „ ეოლის 418
 „ რიხარცის და კრიგარმენცელის 418

ცდა ფუკოს 246
 ცენტრალური დრეკადი დაჭახება 203
 „ არადრეკადი დაჭახება 208
 ცენტრი დარტყმის 331
 „ მასების (ინერციის) 98
 ცენტრიდანული აჩქარება 228
 „ ძალა 231
 ცენტრისკენული ძალა 232
 ცნება ერთდროულობის 24
 „ მყარი სხეულის 25

ძალა 119, 231
 „ გრაფიტაციული (ძალა მსოფლიო მიზიდულობის) 406
 ძალა დისიპაციური (ხახუნის) 182
 „ ინერციის 220
 „ კორიოლისის 231
 „ ნაკრები 263
 „ რეაქციის 161
 „ შემაშფოთებელი 493
 „ ცენტრიდანული 231
 „ ცენტრისკენული 232
 „ ხახუნის 328
 ძალების ტოლქმედი 264
 „ შეკრება 254
 „ შეკრების კანონი 136
 ძალთა წყვილი 259
 „ წყვილის მომენტი 259
 „ წყვილის მხარი 260
 ძალის ერთეულები 126
 „ მომენტი 172

ძალწირი 432
 ბგერა 387
 ძირითადი ერთეულები 35
 „ ტონი 403
 ძლიერი (ბირთვული) ურთიერთქმედება 129

წერტილი იზოლირებული 74
 წერტილის ირგვლივ ბრუნვა 268
 წესი მარჯვენა ბურღის 19
 წინსწრება (პრეცესია) 322
 წირის სიმრუდე 53
 წონა „მოჩვენებითი“ 238
 „ „ნამდვილი“ 237
 „ უძრავი სხეულის 237
 წონასწორობა 322

წონასწორობა არამდგრადი 336
„ განუარჩეველი 336
„ მდგრადი 336
წონასწორობის პირობები 333, 338
წონის დაკარგვა 488
„ ერთეულები 240
წრეხაზზე მოძრაობა 71
წყვეილი ძალთა 259
შეშვარიტი ანომალია 473
ზაზი აფსიდთა 472
ზახუნი გორვის 327
ზახუნი სრიალის 327
ზახუნი უძრაობის 325
ზახუნის კოფიციენტი 183, 184
„ კუთხე 327

ზახუნის (დისიპაციური) ძალა 182
„ ძალის მომენტი 388
ხელოვნური თანამგზავრი 483
ჰარმონიული ობერტონი 403
„ ოსცილატორი 346
„ ოსცილატორის რხევის გან-
ტოლება 347, 352
ჰარმონიული ოსცილატორის აჩქარება
352
ჰარმონიული ოსცილატორის ენერჯია 354
„ ოსცილატორის სიჩქარე 352
„ რხევა 344
„ რხევების შეკრება 381
„ რხევის პერიოდი 347
ჰოლოგრაფი სიჩქარის 50

შ ი ნ ა ა რ ს ი

III გამოცემის წინასიტყვაობა	3
II გამოცემის წინასიტყვაობა	4
შესავალი. ფიზიკის ძირითადი ცნებები: მატერია, სივრცე და დრო	7

თ ა ე ი პ ი რ ვ ე ლ ი. ათვლის სისტემა. სივრცისა და დროის გაზომვა

§ 1. ათვლის სისტემა და კოორდინატთა სისტემები	13
§ 2. სივრცისა და დროის გაზომვა. ერთდროულობა	20
§ 3. სივრცისა და დროის ეტალონები და ერთეულები	25
§ 4. ფიზიკურ სიდიდეთა განზომილება და ერთეულთა სისტემები	30

თ ა ე ი მ ე ო რ ე. მოძრაობის კინემატიკური ელემენტები: სიჩქარე და აჩქარება

§ 5. შესავალი	36
§ 6. მოძრაობის კინეტიკური განტოლებები და ტრაექტორია	37
§ 7. წრფივი მოძრაობის სიჩქარე	38
§ 8. მრუდწირული მოძრაობის სიჩქარე	43
§ 9. სიჩქარის რადიალური და ბრუნვითი მდგენელები. კუთხური სიჩქარე	46
§ 10. აჩქარება	50
§ 11. წირის სიგრძე	53
§ 12. აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენელები	60
§ 13. აჩქარების რადიალური და ტრანსვერსალური მდგენელები	63
§ 14. მოძრაობის კერძო სახეები	66
§ 15. კუთხური სიჩქარე და აჩქარება როგორც ვექტორები	72

თ ა ე ი მ ე ს ა მ ე. ინერციისა და ფარდობითობის პრინციპები

§ 16. ინერციული სისტემები და ინერციის პრინციპი	74
§ 17. ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა და გალილეის გარდაქმნის ფორმულები	77
§ 18. კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი	83

თ ა ე ი მ ე ო თ ხ ე. იმპულსის მუდმივობის კანონი

§ 19. ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ხასიათი და მასის ცნება	88
§ 20. იმპულსის მუდმივობის კანონი	92
§ 21. იმპულსის მუდმივობის კანონის ზოგიერთი გამოყენება	94

თ ა ე ი მ ე ხ უ თ ე. ენერგიის მუდმივობის კანონი

§ 22. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები. მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი	105
---	-----

§ 23. ენერჯის განზომილება და ერთეულები	116
§ 24. პოტენციალური ენერჯია და ძალა	117
§ 25. ურთიერთქმედების სახეები	127
§ 26. პოტენციალური მრუდები	129
§ 27. ძალების შეკრების (სუპერპოზიციის) კანონი	135
§ 28. ქმედებისა და უქუქმედების ძალთა ტოლობის კანონი. ნიუტონის მესამე კანონი	137
§ 29. მუშაობა და სიმძლავრე	139

თ ა ვ ი მ ე ე ქ ვ ს ე . მოძრაობის დინამიკური განტოლებები

§ 30. მოძრაობის დინამიკური განტოლებების გამოყვანა	143
§ 31. ნიუტონის მესამე კანონის გამოყვანა მოძრაობის დინამიკური განტოლებებიდან	153
§ 32. მოძრაობის განტოლებები მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისთვის. ბმები და თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი	156
§ 33. მოძრაობის განტოლებები ბმების შემთხვევაში	161
§ 34. შენიშვნები მოძრაობის კანონების შესახებ	164
§ 35. ვარიანტული და ინვარიანტული სიდიდეები. მექანიკის კანონების ინვარიანტულობა გალილეის გარდაქმნების მიმართ	167

თ ა ვ ი მ ე შ ვ ი დ ე . იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი

§ 36. იმპულსის მომენტი	171
§ 37. ძალის მომენტი	172
§ 38. მომენტების განტოლება	173
§ 39. იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი. ფართობითი სიჩქარე	177

თ ა ვ ი მ ე რ ვ ე . დისიპაციური პროცესები წერტილის მექანიკაში

§ 40. დისიპაციური (ხახუნის) ძალები. მოძრაობის განტოლებები	180
§ 41. მუდმივი და სიჩქარის პროპორციული ხახუნის ძალა	183
§ 42. სიჩქარის კვადრატის პროპორციული ხახუნის ძალა	188
§ 43. მუშაობა ხახუნის ძალის არსებობის დროს	189

თ ა ვ ი მ ე ც ხ რ ე . ნაწილაკების დაჯახება

§ 44. დაჯახების პროცესის ზოგადი დახასიათება	191
§ 45. დაჯახებათა კლასიფიკაცია	193
§ 46. დრეკადი დაჯახება	196
§ 47. დრეკადი დაჯახების გრაფიკული წარმოდგენა	200
§ 48. ცენტრალური დრეკადი დაჯახება	203
§ 49. ენერჯის გადაცემა დრეკადი დაჯახების დროს	206
§ 50. არადრეკადი ცენტრალური დაჯახება	209
§ 51. ნაწილაკის დაშლა	212

თ ა ვ ი მ ე ა თ ე . ა თ ვ ლ ის ა რ ა ი ნ ე რ ც ი უ ლ ი ს ის ტ ე მ ე ბ ი

§ 52. შესავალი	218
§ 53. სწორხაზოვნად და თანაბრად აჩქარებულად მოძრაიე არაინერციუ- ლი სისტემა	219
§ 54. ვექტორის ცვლილება ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ	223
§ 55. თანაბრად მბრუნავი არაინერციული სისტემა. ცენტრიდანული და კორიოლისის აჩქარებები	225
§ 56. მოძრაობის დინამიკური განტოლება მბრუნავ არაინერციულ სისტე- მაში. ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები	230
§ 57. მბრუნავი არაინერციული სისტემის მარტივი მაგალითები	232
§ 58. დედამიწა როგორც არაინერციული სისტემა	237

თ ა ვ ი მ ე თ ე რ თ მ ე ტ ე . მ ყ ა რ ი ს ხ ე უ ლ ის მ ე ქ ა ნ ი კ ა

§ 59. მყარი სხეულის ცნება	251
§ 60. მყარ სხეულზე მოდებული ძალის გასრიალების შესაძლებლობა	252
§ 61. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების შეკრების მარტივი შემთხვევები	254
§ 62. ძალთა წყვილი და მისი თვისებები	259
§ 63. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების დაყვანა ერთ ძალაზე და ერთ ძალ- თა წყვილზე	262
§ 64. მყარი სხეულის მოძრაობის სახეები	264
§ 65. მყარი სხეულის იმპულსი, ენერგია და იმპულსის მომენტი. ინერ- ციის მომენტი	269
§ 66. ინერციის მომენტები ზოგიერთი სიმეტრიული სხეულისათვის	279
§ 67. ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. ფიზიკური საქანი. საბრუნო საქანი	287
§ 68. ბრუნვის ღერძზე მოქმედი ძალა და მომენტი. თავისუფალი ღერძები	293
§ 69. უძრავი წერტილის ირგვლივ ბრუნვის დინამიკა. ეილერის განტო- ლებები	297
§ 70. თავისუფალი მყარი სხეულის ბრუნვა წერტილის ირგვლივ. რეგუ- ლარული პრეცესია	300
§ 71. მძიმე სიმეტრიული ბზრიალას ბრუნვა წერტილის ირგვლივ. ფსევ- დო-რეგულარული პრეცესია	309
§ 72. გიროსკოპი და მისი გამოყენება	316
§ 73. დედამიწის ღერძის პრეცესია და ნუტაცია	319
§ 74. მყარი სხეულების შეხება. რეაქციისა და ხახუნის ძალები	323
§ 75. მყისი ძალის მოქმედება მყარ სხეულზე	328

თ ა ვ ი მ ე თ ო რ მ ე ტ ე . ნ ი ვ თ ი ე რ ი წ ე რ ტ ი ლ ის ა და მ ყ ა რ ი ს ხ ე უ ლ ის
წ ო ნ ა ს წ ო რ ო ბ ა

§ 76. ნივთიერი წერტილის წონასწორობის პირობები	332
§ 77. წონასწორობის სახეები	335
§ 78. მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები	338

თ ა ვ ი მ ე ც ა მ ე ტ ე . რხვეითი მოძრაობა

§ 79. შესავალი	343
§ 80. წერტილის პარამონიული რხევა. ამპლიტუდა, ფაზა და სიხშირე	344
§ 81. პარამონიული ოსცილატორის სიჩქარე, აჩქარება და ენერჯია	352
§ 82. მათემატიკური საქანი	354
§ 83. მილევადი რხევა. ლოგარითმული დეკრემენტი	357
§ 84. აპერიოდული მილევადი მოძრაობა	362
§ 85. პარამონიული გარეშე ძალით გამოწვეული იძულებითი რხევა. რეზონანსი	365
§ 86. პარამეტრული რეზონანსი	375
§ 87. რხვეითი მოძრაობის გრაფიკული წარმოდგენა	378
§ 88. პარამონიულ რხევების შეკრება	381
§ 89. ბმული რხევები	395
§ 90. ნებისმიერი მოძრაობის დაშლა პარამონიულ რხევებად	401

თ ა ვ ი მ ე თ ო თ ხ მ ე ტ ე . გრავიტაციული ურთიერთქმედება

§ 91. გრავიტაციული ურთიერთქმედების ხასიათი და ნიუტონის კანონი	406
§ 92. გრავიტაციული აჩქარების დამოუკიდებლობა სხეულისაგან. გრავიტაციული და ინერტული მასები	409
§ 93. გრავიტაციული და ინერტული მასების პროპორციულობის დამამტკიცებელი ცდები	413
§ 94. გრავიტაციული მუდმივას ექსპერიმენტული განსაზღვრა	416
§ 95. გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია	419
§ 96. მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემა	422
§ 97. გრავიტაციული ველი. დამახულობა და პოტენციალი. მუშაობა გრავიტაციულ ველში	426
§ 98. გაუსის თეორემა. გრავიტაციული ველების მაგალითები	434
§ 99. დედამიწის გრავიტაციული ველი	440
§ 100. სხეულების მოძრაობა დედამიწის მახლობლად	448
§ 101. ორი წერტილის მოძრაობა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით (ორი წერტილის პრობლემა)	454
§ 102. მეორე რიგის მრუდების პოლარულ-მხები განტოლება	465
§ 103. ტრაექტორიის სახის განსაზღვრა საწყისი პირობების მიხედვით	468
§ 104. კეპლერის კანონების გამოყვანა ნიუტონის კანონიდან	474
§ 105. ნიუტონის კანონის გამოყვანა კეპლერის კანონებიდან	478
§ 106. ბალისტიკური რაკეტისა და ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობა	491
§ 107. შეფუთების თეორიის ელემენტები	499
საგანთა საძიებელი	499

რედაქტორი ა. ი შ ხ ნ ე ლ ი
გამომცემლობის რედაქტორი ლ. გ ა მ ც ე მ ლ ი ძ ე
ტექნიკური რედაქტორი ი. ხ უ ც ი შ ვ ი ლ ი
კორექტორი დ. მ ა ნ ჯ გ ა ლ ა ძ ე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 26/IV.73

ქაღალდის ფორმატი 60X90/16

ნაბეჭდი თაბახი 32

სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 28,5

შეკვეთა 1745

უფ 06986

ტირაჟი 5000

ფასი 1 მან. 20 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი. 380028. ი. ჯავჭავაძის პროსპექტი, 14
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028. пр. И. Чавчавадзе, 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი. ჯავჭავაძის პროსპექტი, 1
Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.