

ლ. ლანდau და ე. ლიუბიმი

ველის თეორია

შაკრობითობის პრინციპი

§ 1. შაკრობითობის პრინციპით გამოწვეული სიჩქარე

ბუნების პროცესების აღწერისათვის აუცილებელია გვექონდეს, როგორც ობიექტური, ათვლის სისტემა. ათვლის სისტემის ქვეშ იგულისხმება კოორდინატთა სისტემა, რომელიც იხმარება სივრცეში ნაწილაკთა მდებარეობის განსასაზღვრად, და მასთან დაკავშირებული საათი, რომლის დანიშნულებაც დროს ზეენება.

არსებობს ისეთი ათვლის სისტემები, რომლებშიც სხეული, ისეთივეალი მოძრაობა, ე. ი. გარეშე ძალების მოქმედებისაგან თავისუფალია, ან მოძრაობა, მუდმივი სიჩქარით წარმოებს. ასეთ სისტემებს ინერციული სისტემები ეწოდება.

თუ ორი ათვლის სისტემა ერთმეორის მიმართ ასრულებს თანაბარ დატანითს მოძრაობას და ერთი მათგანი ინერციულია, მაშინ უნდა იქნას, რომ მეორე სისტემაც ინერციული იქნება (იმ სისტემაში ყოველი თავისუფალი მოძრაობა სწორხაზოვანი და თანაბარი იქნება). ამგვარად ჩვენ გვაქვს ერთმეორის მიმართ თანაბრად-გადატანით მოძრავი ინერციულ სისტემათა ნებისმიერი რაოდენობა.

ცდა გვიჩვენებს, რომ ადვილი აქვს ე. წ. ფარდობითობის პრინციპს. ამ პრინციპის თანახმად, ბუნების ყველა კანონი ერთნაირია ყველა ინერციული ათვლის სისტემაში. სხვანაირად რომ ვთქვათ, განტოლებანი, რომელნიც გაამოსახავენ ბუნების კანონებს, ინვარიანტულია ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეში კოორდინატებისა და დროს გარდაქმნის მიმართ. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ბუნების რომელიმე მოვლენის აღმწერ განტოლებას გამოვსახავთ სხვადასხვა ინერციული სისტემის კოორდინატებით და დროთი, იგი შეინარჩუნებს ერთსადაიმავე სახეს.

ჩვეულებრივ მექანიკაში მატერიალურ წერტილთა ურთიერთმოქმედების აღწერისათვის სარგებლობენ ურთიერთმოქმედების პოტენციალური ენერჯიით, რომელიც ურთიერთმოქმედებ ნაწილაკთა კოორდინატების ფუნქციას წარმოადგენს. ადვილი შესაძლებელია, რომ ურთიერთმოქმედების აღწერის ეს წესი შეიცავს დაშვებას, რომ ურთიერთმოქმედების გავრცელება მყისია. მართლაც, ასეთი აღწერის მიხედვით დროს ყოველ მომენტში ყოველ ნაწილაკზე დანარჩენ სხვა ნაწილაკთა მხრიდან მოქმედი ძალები დამოკიდებულია მხოლოდ ნაწილა-

კების მდებარეობაზე დროს იმავე მომენტში. რომელიმე ურთიერთმოქმედ ნაწილაკთაგანის მდებარეობის ცვლილება გავლენას მოახდენს დანარჩენ ნაწილაკებზე იმავე მომენტში.

მაგრამ ცდა გვიჩვენებს, რომ ბუნებაში მყისი ურთიერთმოქმედებანი არ არსებობენ. ამიტომ მექანიკა შეიცავს ერთგვარ არასიზუსტეს იმის გამო, რომ იგი ემყარება ურთიერთმოქმედების წყისი გავრცელების წარმოდგენას. სინამდვილეში თუ ერთ-ერთი ურთიერთმოქმედ სხეულთაგანი განიცდის რაიმე ცვლილებას, მაშინ ეს ცვლილება მეორე სხეულზე გავლენას მოახდენს მხოლოდ დროის გარკვეული შუალედის გავლის შემდეგ. აღნიშნული ცვლილებით გამოწვეული პროცესები მეორე სხეულზე დაიწყება მხოლოდ დროს ამ შუალედის შემდეგ. თუ ორივე სხეულს შორის მანძილს გაეყოფთ დროს ამ შუალედზე, მივიღებთ „ურთიერთმოქმედების სიჩქარეს“.

შევნიშნოთ, რომ ამ სიჩქარისათვის შეიძლება მიგვეცა ურთიერთმოქმედების გავრცელების მაქსიმალური სიჩქარის სახელწოდება. იგი განსაზღვრავს მხოლოდ დროს იმ შუალედს, რომლის განმავლობაში ერთი სხეულის მიმართ მომხდარი ცვლილებანი მეორე სხეულზე იწყებენ გამოვლინებას. ცხადია, რომ ურთიერთმოქმედების გავრცელების მაქსიმალური სიჩქარის არსებობა ნიშნავს იმას, რომ ბუნებაში შეუძლებელია ამ სიჩქარეზე მეტი სიჩქარით სხეულთა მოძრაობა. თუმცა, რომ ასეთი მოძრაობა შესაძლებელი იყოს, მაშინ ამ მოძრაობის დროებით შეიძლება განგვეზოციელებინა ურთიერთმოქმედება, რომლის კარგე მეტი იქნებოდა ურთიერთმოქმედების გავრცელების უდიდეს შესაძლ ჩქარეზე.

ურთიერთმოქმედების შესახებ, რომელიც ვრცელდება ერთი ნაწილაკიდან მეორესაკენ, ხშირად ლაპარაკობენ, როგორც „სიგნალზე“, რომელიც გაიგზავნება პირველი ნაწილაკიდან და „ანიშნებს“ მეორე ნაწილაკს იმ ცვლილებათა შესახებ, რომლებიც განიცადა პირველმა. მაშინ ურთიერთმოქმედების გავრცელების სიჩქარეზე ლაპარაკობენ, როგორც „სიგნალს სიჩქარეზე“.

ფარდობითობის პრინციპიდან კერძოდ ის დასკვნა შეიძლება გამოვიტანოთ, რომ ყველა ათვლის ინერციულ სისტემაში ურთიერთმოქმედებათა გავრცელების სიჩქარე ერთი და იგივეა. ამგვარად, ურთიერთმოქმედებათა გავრცელების სიჩქარე უნივერსალურ მუდმივს წარმოადგენს.

ეს მუდმივი სიჩქარე, როგორც შემდეგში იქნება ნაჩვენები, იმავე დროს წარმოადგენს სიცარიელეში სინათლის გავრცელების სიჩქარეს. ამიტომ მას სინათლის სიჩქარეს უწოდებენ. იგი ჩვეულებრივ c ასოთი აღინიშნება და უკანასკნელი გაზომვებით მიღებული მისი რიცხვითი მნიშვნელობა უდრის

$$c = 2,99796 \cdot 10^{10} \text{ ს/სე.} \quad (1,1)$$

იმის გამო, რომ ეს სიჩქარე ძალიან დიდია, აიხსნება ის ფაქტი, რომ პრაქტიკაში უმრავლეს შემთხვევაში კლასიკური მექანიკა საკმაოდ ზუსტია. სიჩქარეთა უმრავლესობა, რომელთანაც ჩვენ საქმე გვაქვს, იმდენად მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით, რომ უკანასკნელის უსასრულობის შესახებ დაშვება პრაქტიკულად არ ახდენს გავლენას შედეგების სიზუსტეზე.

ფარდობითობის პრინციპის გაერთიანებას ურთიერთმოქმედების გავრცელების სიჩქარის სასრულობასთან, ეწოდება ეინშტეინის ფარდობითობის პრინციპი. გალილეის ფარდობითობის პრინციპი იმით განსხვავდება ეინშტეინის ფარდობითობის პრინციპისაგან, რომ იგი ურთიერთმოქმედების გავრცელების უსასრულო სიჩქარის შესახებ დაშვებას ემყარება.

ეინშტეინის ფარდობითობის პრინციპზე (ამ პრინციპს შემდეგში ჩვენ ეწვოდებით შემოკლებულად ფარდობითობის პრინციპს) დამყარებულ მექანიკას რელატივისტური მექანიკა ეწოდება. იმ ზღვრულ შემთხვევაში, როცა სხეულთა მოძრაობის სიჩქარეები მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით, მოძრაობაზე ურთიერთმოქმედების გავრცელების სიჩქარის სასრულობის გავლენა შეიძლება უგულებელვყოთ. მაშინ რელატივისტური მექანიკა ჩვეულებრივ მექანიკაში გადადის, რომელიც ურთიერთმოქმედების გავრცელების მყისობის დაშვებაზეა დამყარებული. ამ მექანიკას ნიუტონის ან კლასიკურ მექანიკას უწოდებენ. რელატივისტური მექანიკიდან კლასიკურ მექანიკაში ზღვრული გადასვლა ფორმალურად შეიძლება განხორციელდეს რელატივისტური მექანიკის ფორმულებში ზღვარზე გადასვლით, როცა $c \rightarrow \infty$.

სივრცის თვისებები უკვე კლასიკურ მექანიკაში ატარებენ ფარდობით ხასიათს, ე. ი. დამოკიდებულნი არიან იმაზე, თუ რომელი ათვლის სისტემის მიმართ აღიწერებიან ისინი. იმის მტკიცებას, რომ სხვადასხვადროული ორი მოვლენა ხდება სივრცის ერთსადაიმავე ადგილზე ან საერთოდ გარკვეულ მანძილზე ერთიმეორიდან, აზრი ეძლევა მხოლოდ მაშინ, როცა მითითებულია ის ათვლის სისტემა, რომელსაც ეს მტკიცება ეხება.

დრო კი კლასიკურ მექანიკაში, პირიქით, აბსოლუტურია; სხვაგვარად რომ ვთქვათ, დროს თვისებები ითვლებიან ათვლის სისტემაზე დამოუკიდებელ თვისებებად—ყველა ათვლის სისტემას ერთიდაიგივე დრო აქვს. ეს იქას ნიშნავს, რომ თუ რომელიმე დამკვირვებლისათვის ორი რაღაც მოვლენა ერთდროულად ხდება, მაშინ ისინი ერთდროულნი იქნებიან ყველა სხვა დამკვირვებლისათვის. საერთოდ მოცემული ორი მოვლენის გამყოფი დროს შუალედი ერთიდაიგივე უნდა იყოს ყველა ათვლის სისტემაში.

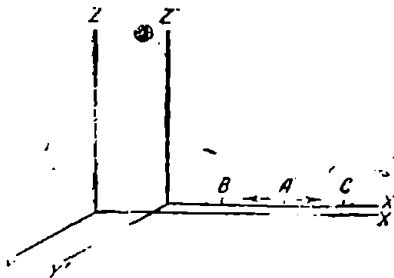
მაგრამ ადვილად შეიძლება დაერწმუნდეთ იმაში, რომ აბსოლუტური დროს ცნება ღრმა წინააღმდეგობაში იმყოფება ეინშტეინის ფარდობითობის პრინციპთან. ამისათვის საკმარისია გავიხსენოთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში, რომელიც აბსოლუტური დროს ცნებას ემყარება, ადგილი აქვს სიჩქარეთა შეკრების საყოველთაოდ ცნობილ კანონს, რომლის თანახმად რთული მოძრაობის სიჩქარე პირდაპირ უდრის მისი შემადგენელ მოძრაობათა სიჩქარეების (ვექტორულ) ჯამს. რაკი ეს კანონი უნივერსალურია, შესაძლებელი უნდა იყოს მისი გამოყენება ურთიერთმოქმედებათა გავრცელების მიმართაც. აქედან მივიღებდით, რომ ურთიერთმოქმედებათა გავრცელების სიჩქარე სხვადასხვა უნდა იყოს სხვადასხვა ინერციულ ათვლის სისტემაში, რაც ეწინააღმდეგება ფარდობითობის პრინციპს. ამ მიმართებით ცლა სავსებით ადასტურებს ფარდობითობის პრინციპს. სახელდობრ, პირველად მაიკელსონის მიერ ჩატარებული ცდებით გამოირკვა სინათლის სიჩქარის სრული დამოუკიდებლობა მისი გავრცელების მიმართულებაზე, მაშინ როდესაც კლასიკური მექანიკის თანახმად, სინათ-

ლის სიჩქარე, დედამიწის მოძრაობის მიმართულებით გაზომილი, ნაკლები უნდა ყოფილიყო შებრუნებული მიმართულებით გაზომილ სიჩქარეზე.

ამგვარად, ფარდობითობის პრინციპს იმ შედეგამდე მივყავართ, რომ დრო არ არის აბსოლუტური. სხვადასხვა ათვლის სისტემაში დრო სხვადასხვაგვარად მიიღინება. ამრიგად, იმის მტკიცება, რომ ორ მოცემულ მოვლენას შორის განვლო დროს გარკვეულმა შუალედმა, მხოლოდ მაშინ ენიჭება აზრი, როცა მითითებული იქნება ათვლის ის სისტემა, რომელსაც ეს მტკიცება ეხება, კერძოდ, რომელიმე სისტემაში მომხდარი ერთდროული მოვლენები არ იქნებიან ერთდროულნი სხვა სისტემაში.

ამ საკითხის გასარკვევად სასარგებლო იქნება შემდეგი მაგალითის განხილვა. წარმოვიდგინოთ ორი ინერციული ათვლის სისტემა K და K' , რომლებსაც შესაბამისად XYZ და $X'Y'Z'$ კოორდინატთა ლერძები აქვთ და რომლებიც ერთიმეორის მიმართ მოძრაობენ მარჯვენა მხრივ X და X' ლერძების გასწვრივ (ნახ. 1).

ვთქვათ X' ლერძის რომელიმე A წერტილიდან ორი მოპირდაპირე მიმართულებით გაიგზავნება სიგნალები. ვინაიდან სიგნალის გავრცელების სიჩქარე K' სისტემაში, აქვე, როგორც ყველა სხვა ინერციულ სისტემაში, c -ს ტოლია (ორივე მიმართულებით), ამიტომ A წერტილიდან თანაბრად დაშორებულ B და C წერტილებს სიგნალები ერთსადაიმთავე მომენტში მიაღწევენ (K' სისტემაში). მაგრამ ადვილად დავინახავთ, რომ იგივე ორი მოვლენა (სიგნალის მისვლა B და C წერტილებში) K სისტემის დაკვირვებლისათვის სრულიადაც არ იქნება ერთდროული. მართლაც, ფარდობითობის პრინციპის თანახმად სიგნალის სიჩქარე K სისტემის მიმართ იმავე c -ს ტოლია, და რადგანაც B წერტილი (K სისტემის მიმართ) მოძრაობს მისკენ გაგზავნილი სიგნალის



ნახ. 1.

შესახვედრად, ხოლო C წერტილი კი A -დან C -კენ გაგზავნილი სიგნალის მიმართულებით, ამიტომ K სისტემაში B წერტილში სიგნალი უფრო ადრე მოვა, ვიდრე C წერტილში.

ამგვარად, ეინშტეინის ფარდობითობის პრინციპს მეტად ღრმა და ფუნდამენტული ცვლილებანი შეაქვს ძირითად ფიზიკურ ცნებებში. ყოველდღიური ცდიდან ჩვენს მიერ მიღებული წარმოდგენები სივრცისა და დროს შესახებ მხოლოდ მიახლოებითია, რაც იმასთან არის დაკავშირებული, რომ ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ საქმე გვაქვს სინათლის სიჩქარესთან შედარებით მეტად მცირე სიჩქარეებთან.

შემდეგში ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ მოვლენის ცნებას. მოვლენა განისაზღვრება ადგილით, სადაც იგი მოხდა, და დროითი, როდესაც იგი მოხდა. ამგვარად მოვლენა, რომელსაც განიცდის რომელიმე ნაწილაკი, განისაზღვრება ამ ნაწილაკის სამი კოორდინატით და დროს მომენტით, როდესაც ეს მოვლენა ხდება.

ხშირად, თვალსაჩინოების მოსაზრებით სასარგებლო იქნება ფიქციური ოთხგანზომილებიანი სივრცის გამოყენება, რომლის ღერძებზე გადაიზომება სამი სივრცითი კოორდინატი და დრო. ამ სივრცეში მოვლენა წერტილით განისახება. ამ წერტილებს მსოფლიო წერტილებს უწოდებენ. ყოველ ნაწილაკს ამ ფიქციურ ოთხგანზომილებიან სივრცეში შეესაბამება რალაც წირი (მსოფლიო წირი). ამ წირის წერტილები განსაზღვრავენ ნაწილაკის კოორდინატებს დროს ყველა მომენტში. ადგილი მისახედრია, რომ სწორხაზოვნად და თანაბრად მოძრავ მატერიალურ ნაწილაკს შეესაბამება მსოფლიო წრფე წირი.

გამოვსახოთ ახლა მათემატიკურად სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობის პრინციპი. ამისათვის განვიხილოთ ერთიმეორის მიმართ მუდმივა სიჩქარით მოძრავი K და K' ათვლის სისტემები. ამასთანავე კოორდინატთა ღერძები ისე ავარჩიოთ, რომ X და X' ღერძები ერთიმეორეს თანხედეს, ხოლო Y და Z ღერძები Y' და Z' ღერძების პარალელური იყვნენ. დრო K და K' სისტემებში შესაბამისად t და t' აღვნიშნოთ.

ვთქვათ პირველი მოვლენა მდგომარეობს იმაში, რომ K სისტემის x_1, y_1, z_1 კოორდინატების მქონე წერტილიდან იმავე სისტემის t_1 მომენტში იგზავნება სიგნალი, რომელიც სინათლის სიჩქარით ვრცელდება. ამ სიგნალის გავრცელებას დავაკვირდეთ K სისტემიდან. ვთქვათ მეორე მოვლენა მდგომარეობს იმაში, რომ დროს t_2 მომენტში სიგნალი მოდის x_2, y_2, z_2 კოორდინატების მქონე წერტილში. სიგნალი c სიჩქარით ვრცელდება; ამიტომ მის მიერ გავლილი მანძილი უდრის $c(t_2 - t_1)$. მეორე მხრით, იგივე მანძილი უდრის $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$. ამგვარად ჩვენ შეგვიძლია K სისტემაში მომხდარ ორავე მოვლენის კოორდინატებს შორის შემდეგი დამოკიდებულება დავწეროთ:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (2,1)$$

იგივე ორი მოვლენა, ე. ი. სიგნალის გავრცელება, შეიძლება დავმზიროთ K' სისტემიდან. ვთქვათ K' სისტემაში პირველი მოვლენის კოორდინატებია x_1', y_1', z_1', t_1' , ხოლო მეორისა: x_2', y_2', z_2', t_2' . სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობის პრინციპის თანახმად, ეს სიჩქარე ერთიდაიგივეა K და K' სისტემებში და ამიტომ, (2,1) ანალოგიურად, მივიღებთ:

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0. \quad (2,2)$$

თუ x_1, y_1, z_1, t_1 და x_2, y_2, z_2, t_2 წარმოადგენენ რომელიღაც ორი მოვლენის კოორდინატებს, მაშინ სიდიდეს

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (2,3)$$

ეწოდება ინტერვალი ზმ ორ მოვლენას შორის.

ამგვარად, სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობის პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ათვლის ერთ სისტემაში ორ მოვლენას შორის ინტერვალის ნული ტოლია, მაშინ იგი ნულის ტოლი იქნება ყველა სხვა სისტემაში.

თუ ორი მოვლენა უსასრულოდ ახლოსაა ერთმანეთთან, მაშინ მათ შორის ინტერვალს ds უდრის

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2,4)$$

მათემატიკური მოხერხებულობის მიზნით, სახელდობრ იმისათვის, რომ ფორმულებს უფრო სიმეტრიული სახე მიეცეთ, ჩვენ შემდეგში c -ს ნაცვლად ხშირად ვისარგებლებთ მეორე ცვლადით τ , რომელიც შემდეგნაირადაა დაკავშირებული t -თან:

$$\tau = ict. \quad (2,5)$$

მაშინ

$$s_{12}^2 = -[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (\tau_2 - \tau_1)^2] \quad (2,6)$$

$$ds^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2). \quad (2,7)$$

ამის შესაბამისად ჩვენს ფიქტიური ოთხგანზომილებიან სივრცის კოორდინატთა ლერძებზე გადავზომავთ არა x , y , z , t , არამედ x , y , z , τ . მაშინ ადვილად დავინახავთ, რომ s_{12}^2 შეიძლება გავიგოთ, როგორც x_1 , y_1 , z_1 , τ_1 და x_2 , y_2 , z_2 , τ_2 წერტილებს შორის მანძილის კვადრატია ამ სივრცეში, ხოლო ds^2 — როგორც სიგრძის ელემენტის კვადრატია.

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, თუ რომელიმე ინერციულ ათვლის სისტემაში $ds = 0$, მაშინ მეორე სისტემაშიაც $ds' = 0$. მეორეს მხრით, ds და ds' ერთიდაიმავე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია. ამ ორი გარემოებიდან გამომდინარეობს, რომ ds და ds' ერთიმეორის პროპორციული უნდა იყვნენ:

$$ds = a ds',$$

ამასთანავე a შეიძლება დამოკიდებული იყოს მხოლოდ ორივე ინერციულ სისტემის ფარდობითი სიჩქარის აბსოლუტურ სიდიდეზე. იგი არ შეიძლება დამოკიდებული იყოს კოორდინატებზე და დროზე, ვინაიდან მაშინ სივრცის სხვადასხვა წერტილები და დროს სხვადასხვა მომენტები ტოლფასი არ იქნებოდნენ, რაც ეწინააღმდეგება სივრცისა და დროის ერთგვაროვნობას. იგი არ შეიძლება იყოს დამოკიდებული აგრეთვე ფარდობითი სიჩქარის მიმართულებაზე და, ვინაიდან ეს სივრცის იზოტროპულობას ეწინააღმდეგება. ამიტომ იმავე უფლებით, როგორითაც ჩვენ ვწერდა $ds = a ds'$, შეიძლება დაწვეროთ აგრეთვე

$$ds' = a ds,$$

ვინაიდან პირველი სისტემის მეორის მიმართ მოძრაობის სიჩქარე იგივეა, რაც მეორე სისტემის მოძრაობისა პირველის მიმართ. თუ $ds = a ds'$ ჩავსვამთ $ds' = a ds$ -ში, ვიპოვიან, რომ $a^2 = 1$, ანუ $a = \pm 1$. იმისათვის, რომ ავარჩიოთ ერთი ამ მნიშვნელობათაგანი, შევნიშნათ, რომ a ყოველთვის ან მალოდ $+1$ ტოლი უნდა იყოს ან -1 . მართლაც, რომ $a(v)$ ზოგიერთი სიჩქარი-

სათვის $+1$ იყოს და ზოგისათვის -1 , მაშინ უნდა არსებობდნენ ისეთი სიჩქარეებიც, რომელთათვისაც a ექნებოდა $+1$ და -1 შორის შუალედური მნიშვნელობანი, რაც შეუძლებელია. მაგრამ ეს თუ ასეა, მაშინ a ყოველთვის $+1$ ტოლი უნდა იყოს, ვინაიდან $ds' = a ds$ გარდაქმნის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს იგივეობა $ds' = ds$, სადაც $a = +1$. ტოლობიდან $ds' = ds$ უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სასრულო ინტერვალებისათვისაც $s' = s$.

ამგვარად ჩვენ მივდივართ მეტად მნიშვნელოვან შედეგამდე: ორ მოვლენას შორის ინტერვალის ერთიდაიგივეა ყველა ინერციულ ათვლის სისტემაში, ე. ი. წარმოადგენს ინვარიანტს ერთი ინერციული ათვლის სისტემიდან ნებისმიერი სხვა ინერციულ სისტემაში გარდაქმნის მიმართ. ეს ინვარიანტობა წარმოადგენს სწორედ სინათლის სიჩქარის მუდმივობის მათემატიკურ გამოხატვას.

ვთქვათ ისევ x_1, y_1, z_1, t_1 და x_2, y_2, z_2, t_2 წარმოადგენენ რომელიმე K ინერციულ სისტემაში ორი მოვლენის კოორდინატებს. გამოვარკვიოთ, არსებობს თუ არა ათვლის ისეთი K' სისტემა, რომელშიაც ორივე ეს მოვლენა სივრცის ერთსადაიმავე ადგილას ხდება.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

მაშინ K' სისტემაში მოვლენებს შორის ინტერვალის იქნება:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

ხოლო K' სისტემაში:

$$s_{12}^{\prime 2} = c^2 t_{12}^{\prime 2} - l_{12}^{\prime 2}$$

ამასთანავე, ინტერვალის ინვარიანტობიდან გამო

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}^{\prime 2} - l_{12}^{\prime 2}$$

ჩვენ გვსურს, რომ K' სისტემაში ორივე მოვლენა ერთსადაიმავე წერტილში მოხდეს, ე. ი. $l_{12}^{\prime} = 0$. მაშინ

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}^{\prime 2} > 0.$$

მაშასადამე, მოთხოვნილი თვისებები შექნება ათვლის სისტემა არსებობს, თუ $s_{12}^2 > 0$, ე. ი. თუ ორივე მოვლენას შორის ინტერვალის ნამდვილი სიდიდეა.

ნამდვილ ინტერვალებს დროით ინტერვალებს უწოდებენ.

ამგვარად, თუ ორ მოვლენას შორის დროითი ინტერვალის გვაქვს, მაშინ არსებობს ისეთი ათვლის სისტემა, რომელშიაც ორივე მოვლენა ერთსადაიმავე ადგილზე ხდება. დრო, რომელიც ამ სისტემაში ამ ორ მოვლენას შორის გაივლის, იქნება

$$t_{12}^{\prime} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \quad (2,8)$$

თუ რალაც ორ მოვლენას განიცდის ერთიდაიგივე სხეული, მაშინ მათ შორის ინტერვალი ყოველთვის დროითია. მართლაც, მანძილი, რომელსაც ამ ორ მოვლენას შორის სხეული გაივლის, ან შეიძლება იყოს მეტი, ვიდრე ct_{12} , ვინაიდან შეუძლებელია, რომ სხეულის სიჩქარე c -ზე მეტი იყოს. ამიტომ ყოველთვის

$$l_{12} < ct_{12}$$

დაესვათ ახლა კითხვა, ხომ არ შეიძლება ისეთი ათვის სისტემის არჩევა, რომელშიაც ორი მოვლენა ერთსადამავე დროს მოხდებოდა. წინანდებურად

K და K' სისტემებში ჩვენ გვაქვს $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2$. ჩვენ გვსურს, რომ

$$l_{12}' = 0; \text{ აქედან}$$

$$s_{12}^2 = -l_{12}^2 < 0.$$

ამგვარად საძებნი ათვის სისტემა მხოლოდ მაშინ შეიძლება მოინახოს, როდესაც ორ მოვლენას შორის ინტერვალი წარმოსახვითია. წარმოსახვით ინტერვალებს სივრცით ინტერვალებს უწოდებენ.

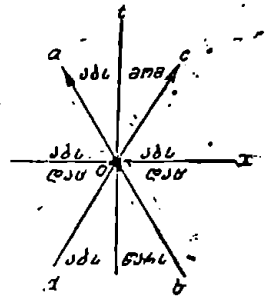
ამგვარად, თუ ორ მოვლენას შორის ინტერვალი სივრცითია; მაშინ არსებობს ისეთი ათვის სისტემა, რომელშიაც ორივე მოვლენა ერთდროულად ხდება. იმ ადგილებს შორის მანძილი, რომლებშიაც განსახილავ სისტემაში ეს მოვლენები მოხდა, უდრის

$$l_{12}' = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}. \quad (2,9)$$

ინტერვალების დაყოფა დროით და სივრცით ინტერვალებად, მათი ინვარიანტობის გამო, აბსოლუტურ ცნებას წარმოადგენს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ინტერვალის დროითობის ან სივრცითობის თვისება არ არის დამოკიდებული ათვის სისტემაზე.

ავილოთ რომელიმე მოვლენა სივრცითი კოორდინატებისა და დროს ათვის საწყისად და ვუწოდოთ მას O მოვლენა. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ოთხგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში, რომლის ლერძებზე x, y, z და t გადინზომებიან, O მსოფლიო წერტილი იქნება კოორდინატთა საწყისად. ვნახოთ ახლა, თუ რა ურთიერთობაში იმყოფება O მოვლენასთან ყველა დანარჩენი მოვლენა. თვალსაჩინოების მიზნით ჩვენ მხოლოდ ერთ სივრცით კოორდინატს და დროს განვიხილავთ და მათ ორ ლერძზე გადაჭზომავთ (ნახ. 2). ნაწილაკის სწორხაზოვანი და თანაბარი მოძრაობა, რომელიც გაივლის $x = 0$, როცა $t = 0$, სწორი ხაზით გამოისახება, რომელიც გადის O -ში და t ლერძისაღმდმი დახრილია კუთხით, რომლის ტანგენთი ნაწილაკის სიჩქარის ტოლია. რამდენადაც უდიდესი შესაძლო სიჩქარე c -ს ტოლია, ამიტომ არსებობს უდიდესი კუთხე, რომელსაც ეს სწორი ხაზი t ლერძთან შეაღვენს. მე-2 ნახაზზე მოცემუ-

ლია ორი წრფე, რომლებიც გამოსახევენ მოპირდაპირე მიმართულებით გაგზავნილი ორი სიგნალის გავრცელებას (სინათლის სიჩქარით). ეს ორი მიმართულება გადის O მოვლენაში (ე. ი. გადის $x=0, t=0$). ყველა წრფე წირებს, რომლებიც ნაწილაკთა მოძრაობებს გამოსახევენ, შეუძლიათ მხოლოდ aOe და dOb არეებში მოთავსდნენ. ab და cd წრფეებზე ცხადია $x = \pm ct$. ჯერ განვიხილოთ მოვლენები, რომელთა მსოფლიო წერტილები aOe არეს შეიგნით იმყოფებიან. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ არეს ყველა წერტილში $c^2t^2 - x^2 > 0$. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, O მოვლენასა და ამ არეს ნებისმიერ მოვლენას შორის ინტერვალები დროითია. ამ არეში $t > 0$, ე. ი. ამ არეს ყოველი მოვლენა O მოვლენის „შემდეგ“ ხდება. მაგრამ დროითი ინტერვალით გაყოფილი ორი მოვლენა არც ერთ ათვლის სისტემაში არ შეიძლება ერთდროული იყოს. მაშასადამე შეუძლებელია ისეთი ათვლის სისტემის მონახევა, რომელშიაც aOe არეს რომელიმე მოვლენათაგანი (i) მოვლენაზე „ადრე“ მოხდება, ე. ი. სამართლიანი იყოს უტოლობა $t < 0$. ამგვარად aOe არის ყველა მოვლენა O მოვლენის მიმართ, ყველა ათვლის სისტემაში, მომავალი მოვლენებია. ამიტომ ამ არეს O მოვლენის მიმართ შეიძლება „აბსოლუტურად მომავალი“ ვუწოდოთ.



ნახ. 2.

სავსებით ანალოგიურად bOd არეს ყველა მოვლენა „აბსოლუტურ წარსულს“ წარმოადგენს O მოვლენის მიმართ, ე. ი. ყველა ათვლის სისტემაში ამ არის ყველა მოვლენა O მოვლენაზე ადრე ხდება.

დასასრულს განვიხილოთ კიდევ dOa და eOb არეები. ამ არის ნებისმიერ მოვლენასა და O მოვლენას შორის ინტერვალის სივრცითია. ნებისმიერ ათვლის სისტემაში ეს მოვლენები სივრცის სხვადასხვა ადგილას ხდება. ამიტომ ამ არეებს O -ს მიმართ „აბსოლუტურად დაკლებული“ შეიძლება ვუწოდოთ. მაგრამ ამ მოვლენებისათვის ცნებები „ერთდროული“, „ადრე“, „გვიან“ ფარდობითი ცნებებია. ამ არის ყოველი მოვლენისათვის მოიძებნება ათვლის სისტემები, რომლებშიაც იგი O მოვლენაზე გვიან ხდება, სისტემები, რომლებშიაც იგი O -ზე ადრე ხდება, და ბოლოს — ერთი სისტემა, რომელშიაც იგი ხდება O -თან ერთდროულად.

შევნიშნოთ, რომ თუ ერთის ნაცვლად განვიხილავთ სამივე სივრცით კოორდინატს, მაშინ ნახაზზე 2 ურთიერთგადაამკვეთი ორი წრფე წირის ნაცვლად ორგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში გვექნება „კონუსი“, $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, რომლის ლერძი t ლერძს თანხვედბა (ამ კონუსის სინათლის კონუსს უწოდებენ). მაშინ „აბსოლუტური მომავლის“ და „აბსოლუტურა წარსულის“ არეები შესაბამისად გამოისახებიან ამ კონუსის ორი შინაგანი სივრცით.

ორი მოვლენა ერთიმეორესთან მხოლოდ მაშინ შეიძლება მიზეზობრივ კავშირში იმყოფებოდეს, თუ მათ შორის ინტერვალის დროითია, რაც უშუალოდ იქიდან გამომდინარეობს, რომ არავითარი ურთიერთმოქმედება არ შეიძლება სინათლის სიჩქარეზე მეტი სიჩქარით ვრცელდებოდეს. როგორც ახლანა

დავინახეთ, სწორედ ასეთი მოვლენებისათვის აქვს აბსოლუტური აზრი ცნებებს „ადრე“, „გვიან“, რაც აუცილებელ პირობას წარმოადგენს იმისათვის, რომ აზრი ქონდეს მიზეზისა და შედეგის ცნებებს.

§ 3. საკუთარი დრო

ვუქვით რაღაც ინერციული სისტემიდან ჩვენ ვაკვირდებით ჩვენს მიმართ ნებისმიერად მოძრავ საათს. დროს ყოველ ცალკე მომენტში ეს მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც თანაბარი. ამიტომ შეიძლება შემოვიღოთ დროს ყოველ მომენტში მოძრავ საათთან უძრავად დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემა, რომელიც (საათთან ერთად) აგრეთვე იქნება ინერციული ათვლის სისტემა.

დროს უსასრულოდ მცირე dt შუალედში (უძრავი, ე. ი. ჩვენთან დაკავშირებული, საათის მიხედვით) მოძრავი საათი გაივლის მანძილს $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. ისმება კითხვა, თუ დროს რა dt' შუალედს გვიჩვენებს მაშინ მოძრავი საათი. მოძრავ საათთან დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემაში ეს საათი უძრავია, ე. ი. $dx' = dy' = dz' = 0$. ინტერვალის ინვარიანტობის გამო

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2,$$

საიდანაც

$$dt' = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2},$$

ან სხვაგვარად

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}.$$

მაგრამ

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2;$$

სადაც v მოძრავი საათის სიჩქარეა; ამიტომ

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3,1)$$

თუ უძრავი საათის მიხედვით გადის $t_2 - t_1$. დრო, მაშინ უკანასკნელი გამოსახულების ინტეგრებით შეიძლება მოენახოთ დროს შუალედი $t'_2 - t'_1$, რომელსაც მოძრავი საათი გვიჩვენებს:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3,2)$$

დროს, რომელიც ათვლილია მოცემულ ობიექტთან ერთად მოძრავი საათის მიხედვით, ამ ობიექტის საკუთარ დროს უწოდებენ. (3,1) და (3,2) ფორმულები საკუთარ დროს გამოსახავენ იმ სისტემის დროით, რომლის მიმართაც განიხილება მოძრაობა.

როგორც (3,1) და (3,2) ფორმულებიდან ჩანს, მოძრავი ობიექტის საკუთარი დრო ყოველთვის ნაკლებია შესაბამ დროს შუალედზე უძრავ სისტემაში. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, მოძრავი საათი უძრავ საათზე ნელა მიდის.

დაუშვათ, რომ K ინერციული ათვლის სისტემის მიმართ სწორხაზოვნად და თანაბრად მოძრაობს სხვა საათი. ამ უკანასკნელთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა აგრეთვე ინერციულია. მაშინ K' სისტემის საათი K სისტემის დამკვირვებლის თვალსაზრისით მის საათს ჩამორჩება, და, პირიქით, K' სისტემის თვალსაზრისით K სისტემის საათი ჩამორჩება. ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ აქ ადგილი არა აქვს რაიმე წინააღმდეგობას, თუ შემდეგ გარემოებას მივაქცევთ ყურადღებას. იმისათვის, რომ დავადგინოთ K' სისტემის საათის ჩამორჩენა K სისტემის საათთან შედარებით, შემდეგნაირად უნდა მოვიქცეთ. ვთქვათ დროს რაღაც მომენტში K' სისტემის საათი გაივლის K სისტემის საათის წინ, და ამ მომენტში ისინი ერთსადაიმთხვე ჩვენებებს იძლევიან. K და K' საათების სვლის შედარებისათვის ჩვენ კვლავ უნდა შევადაროთ იმავე მოძრავი K' საათის ჩვენება K საათის ჩვენებას. მაგრამ ახლა ამ საათის ჩვენება უნდა შევადაროთ სხვა საათს K -ში, სახელდობრ იმას, რომლის წინაც ეს საათი გაივლის დროს რაღაც სხვა მომენტში. მაშინ ჩვენ აღმოვაჩინებთ, რომ K' სისტემის საათი ჩამორჩება K სისტემის საათთან შედარებით, რომელთანაც მისი შედარება ხდება. ამგვარად ჩვენ ვხედავთ, რომ ორი ათვლის სისტემის საათების სვლის შესადარებლად აუცილებელია ერთ სისტემაში რამდენიმე საათი, ხოლო მეორე სისტემაში ერთი საათი. ამიტომ ეს პროცესი არ არის სიმეტრიული ორივე სისტემის მიმართ. ჩამორჩენილი აღმოჩნდება ყოველთვის ის საათი, რომელიც შეედარება სხვადასხვა საათს მეორე ათვლის სისტემაში.

თუ ორი საათი გვექნება, რომელთაგან ერთი აღწერს ჩაკეტილ ტრაექტორიას და ბრუნდება გამოსავალ ადგილზე (უძრავ საათთან), მაშინ ჩამორჩენილი აღმოჩნდება სწორედ მოძრავი საათი (უძრავთან შედარებით). შებრუნებული მსჯელობა, რომელშიაც მოძრავი საათი განხილული იქნება როგორც უძრავი (და შებრუნებით), ახლა შეუძლებელია, ვინაიდან ის საათი, რომელიც ჩაკეტილ ტრაექტორიას აღწერს არ მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად, და ამიტომ მასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა არ იქნება ინერციული. რადვანაც ბუნების კანონები ერთიდაიგივე არიან მხოლოდ ინერციულ ათვლის სისტემებში, ამიტომ უძრავ საათთან დაკავშირებული ათვლის სისტემას (ინერციულ სისტემას) და მოძრავ საათთან დაკავშირებულ (არაინერციულ) სისტემას სხვადასხვა თვისებები აქვთ, და მსჯელობა, რომელმაც მიგვიყვანა იმ შედეგამდე, რომ უძრავი საათი ჩამორჩენილი უნდა აღმოჩნდეს, სწორი არ იქნება.

დროს შუალედი, რომელსაც საათი გვიჩვენებს, უდრის ინტეგრალს

$$\frac{1}{c} \int_a^b ds, \text{ ადგებულს ამ საათის მსოფლიო წირის გასწვრივ. თუ საათი უძრავია,}$$

მაშინ, ცხადია, მისი მსოფლიო წირი დროის ღერძის პარალელურ წრფე წირს წარმოადგენს. თუ საათი არათანაბარ მოძრაობას ასრულებს ჩაკეტილ ტრაექტორიაზე და გამოსავალ ადგილს უბრუნდება, მაშინ მისი მსოფლიო წირი იქ-

ნება მრუდი, რომელიც უძრავი საათის მსოფლიო წრფე წირის იმ ორ წერტილზე გადის, რომელნიც მოძრაობის საწყისს და ბოლოს შეესაბამებოდა. მეორეს მხრით, ჩვენ ვნახეთ, რომ უძრავი საათი ყოველთვის უფრო მეტ დროს შუალედს გვიჩვენებს, ვიდრე მოძრავი. ამგვარად ჩვენ იმ დასკვნამდე მივღივართ, რომ ორ მოცემულ მსოფლიო წერტილს შორის აღებულ ინტეგრალს

$$\int_a^b ds \text{ მაქსიმალური მნიშვნელობა აქვს, თუ იგი აღებულია ამ წერტილთა შე-}$$

მაერთებელი სწორი მსოფლიო წრფე წირის გასწვრივ¹ (რა თქმა უნდა, a და b მსოფლიო წერტილები ისეთნი უნდა იყვნენ, რომ მათ შორის ინტეგრალი დროითი იყოს; წინააღმდეგ შემთხვევაში ინტეგრალი წარმოსახვითი იქნებოდა).

§ 4. ლორენცის გარდაქმნა

ახლა ჩვენი მიზანი იქნება ერთი ინერციული ათვლის სისტემიდან მეორეში გარდაქმნის ფორმულების მონახვა, ე. ი. ისეთი ფორმულებისა, რომელთა საშუალებით, თუ გვეცოდინება რომელიმე K ათვლის სისტემაში მოვლენის x, y, z, t კოორდინატები, შესაძლებელი იყოს მეორე K' ინერციულ სისტემაში იმავე მოვლენის x', y', z', t' კოორდინატების მონახვა.

კლასიკურ მექანიკაში ეს საკითხი მეტად მარტივად წყდება. დროს აბსოლუტურობისა გამო იქ ჩვენ გვაქვს $t=t'$; შემდეგ, თუ კოორდინატთა ღერძებს ისე შევარჩევთ, როგორც ამას ჩვენ ჩვეულებრივ ვაკეთებთ (ე. ი. X და X' ღერძები თანხვედრიან, Y და Z ღერძები Y' და Z' ღერძების პარალელურია, მოძრაობა X და X' ღერძების გასწვრივ), მაშინ ცხადია y და z კოორდინატები y' და z' კოორდინატების ტოლი იქნებიან, ხოლო x და x' განსხვავდებიან მანძილით, რომელსაც ერთი სისტემა მეორის მიმართ გაივლის. თუ დროის თვლის საწყისად არჩეულია მომენტი, როცა ორივე კოორდინატთა სისტემა თანხვედროდნენ, ხოლო K' -ის სიჩქარე K -ს მიმართ არის V , მაშინ ეს მანძილი იქნება Vt . ამგვარად

$$x' = x + Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (4,1)$$

ამ ფორმულებს გალილეის გარდაქმნა ეწოდებათ. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს გარდაქმნა, როგორც მოსალოდნელე იყო, არ აკმაყოფილებს ფარდობითობის თეორიის მოთხოვნილებას, — იგი არ ტოვებს ინვარიანტულს მოვლენებს შორის ინტერვალებს.

¹ ინტეგრალის $\int_a^b ds$ ეს თვისება დაკავშირებულია იმასთან, რომ ერთი კოორდინატთაგანი წარმოსახვითია ($\tau = ict$). ყველა კოორდინატი ნამდვილი რომ ყოფილიყო, მაშინ

წრფე წირის გასწვრივ $\int ds$, რა თქმა უნდა, მინიმალური იქნებოდა.

რელატივისტური გარდაქმნების ფორმულებს ჩვენ ვეძებთ სწორედ იმ მოთხოვნებიდან გამომდინარე, რომ ისინი ინტერვალებს ინვარიანტულს ტოვებდნენ.

თუ ვისარგებლებთ შემდეგი განხილვისათვის მოხერხებული სილიდით $\tau = ict$, მაშინ, როგორც § 2 ვნახეთ, ორ მოვლენას შორის ინტერვალის შეიძლება განხილულ იქნეს ოთხგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში როგორც არ შესაბამისო მსოფლიო წერტილს შორის მანძილი. მაშასადამე ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ საძებნი გარდაქმნა უცვლელს უნდა ტოვებდეს ყველა სიგრძეს ოთხგანზომილებიან x, y, z, t სივრცეში. მაგრამ ასეთ გარდაქმნებს წარმოადგენენ მხოლოდ კოორდინატთა სისტემის გადატანა და ბრუნვა. მათ შორის კოორდინატთა სისტემის თავისი თავის პარალელურად გადატანა ინტერესს მოკლებულია, რადგანაც იგი უბრალოდ სივრცული კოორდინატთა საწყისის გადატანაზე და დროს ათვლის საწყისის შეცვლაზე დაიყვანება. ამგვარად საძებნი გარდაქმნა მათემატიკურად უნდა გამოისახოს როგორც x, y, z, t ოთხგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემის ბრუნვა.

ოთხგანზომილებიან სივრცეში ყოველი ბრუნვა შეიძლება დავშალოთ ექვს ბრუნვად, სახელდობრ $xy, xz, x\bar{t}, t\bar{x}, ty, tz$ სიბრტყეებში (ისევე როგორც ჩვეულებრივ სივრცეში ყოველი ბრუნვა შეიძლება დავშალოთ სამ ბრუნვად xy, xz და $x\bar{t}$ სიბრტყეებში). პირველი სამი ამ ბრუნვათაგანი გარდაქმნის მხოლოდ სივრცით კოორდინატებს; ისინი ჩვეულებრივი სივრცით მობრუნებას შეესაბამებიან.

განვიხილოთ $x\bar{t}$ სიბრტყეში მობრუნება; მაშინ y და z კოორდინატები არ იცვლებიან. თუ მობრუნების კუთხე არის ψ , მაშინ ძველ და ახალ კოორდინატებს შორის კავშირი შემდეგი ფორმულებით გამოისახება:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \psi - \tau' \sin \psi, \\ \tau &= x' \sin \psi + \tau' \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

ჩვენ ვეძებთ გარდაქმნის ფორმულებს K ინერციული ათვლის სისტემიდან K' სისტემაში, რომელიც K -ს მიმართ მოძრაობს x ღერძის პარალელურად V სიჩქარით. ამასთანავე ცხადია, რომ გარდაქმნებს განიცდიან მხოლოდ x და τ კოორდინატები. ამიტომ ამ გარდაქმნებს (4,2) სახე უნდა ჰქონდეთ. ახლა დაგვრჩა ψ კუთხის განსაზღვრა, რომელიც შეიძლება დამოკიდებული იყოს მხოლოდ ფარდობითი V სიჩქარეზე.¹

განვიხილოთ K' ათვლის სისტემის კოორდინატთა სათბურის მოძრაობა K სისტემაში. მაშინ $x' = 0$ და (4,2) ფორმულები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$x = -\tau' \sin \psi, \quad \tau = \tau' \cos \psi,$$

ხოლო, თუ მათ ერთიმეორეზე გავყოფთ,

$$\frac{x}{\tau} = -tg \psi.$$

¹ დაბნეულობის თავიდან ასაცილებლად შევნიშნოთ, რომ V -თი ჩვენ ყველგან აღვნიშნავთ ორი ინერციული ათვლის სისტემის მუდმივ ფარდობით სიჩქარეს, ხოლო v ასეთი — მოძრაი ნაწილაკის სიჩქარეს, რომელიც სრულებით არ არის სავალდებულო მუდმივი იყო.

მაგრამ $\tau = icl$ და x/t , ცხადია, K' სისტემის V სიჩქარეა K -ს მიმართ. ამგვარად,

$$tg\psi = i \frac{V}{c}.$$

აქედან

$$\sin\psi = \frac{i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

თუ ამათ (4,2)-ში ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$x = \frac{x' - i \frac{V}{c} \tau'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad \tau = \frac{\tau' + i \frac{V}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

ჩავსვათ კიდევ $\tau = icl$, $\tau' = icl'$. საბოლოოდ გვაქვს

$$x = \frac{x' + V l'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad l = \frac{l' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4,3)$$

ეს არის საძებნი გარდაქმნის ფორმულები. ისინი ლორენცის გარდაქმნის ფორმულების სახელწოდებას ატარებენ და ფუნდამენტული მნიშვნელობა აქვთ შემდეგისათვის.

შებრუნებული ფორმულები, რომლებიც x' , y' , z' , l' კოორდინატებს x , y , z , l კოორდინატებით გამოსახავენ, უმარტივესი გზით მიიღება, თუ V -ს შევცვლით $-V$ -თი (ჩადგანაც K სისტემა K' -ის მიმართ $-V$ სიჩქარით მოძრაობს). იმავე ფორმულათა მიღება შეიძლება (4,3) უშუალოთაც, თუ (4,3) განტოლებებს ამოვხსნით x' , y' , z' , l' სიდიდეთა მიმართ.

(4,3)-დან ადვილად ჩანს, რომ კლასიკურ მექანიკაში ზღვრული გადასვლისას $c \rightarrow \infty$ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები მართლაც გადადიან გალილის გარდაქმნაში.

თუ $V > c$, მაშინ (4,3) ფორმულებში x' და l წარმოსახვითი ხდება; ეს იმ ფაქტს შეესაბამება, რომ შეუძლებელია სინათლის სიჩქარეზე მეტი სიჩქარით მოძრაობა. სინათლის სიჩქარით მოძრავი ათვლის სისტემით სარგებლობაც კი შეუძლებელია, — ამ შემთხვევაში (4,3) ფორმულების მნიშვნელობები ნულის ტოლი გახდება.

სინათლის სიჩქარესთან შედარებით მცირე V სიჩქარეებისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ მიახლოებითი ფორმულებით:

$$x = x' + V l', \quad y = y', \quad z = z', \quad l = l' + \frac{V}{c^2} x'. \quad (4,4)$$

ვთქვათ K სისტემაში უძრავია X ღერძის პარალელური სახაზავი. ამ სისტემაში გაზომილი მისი სიგრძე ვთქვათ არის $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_2 და x_1 სახაზავის ორივე ბოლოს კოორდინატებია K სისტემაში). მოვნახოთ ახლა K' სისტემაში გაზომილი ამ სახაზავის სიგრძე. ამისათვის ამ სისტემაში უნდა მოვნახოთ ღერძის ორივე ბოლოს კოორდინატები (x'_2 და x'_1) დროს ერთიდაიგივე t' მომენტში. (4,2)-დან ვპოულობთ:

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

ღერძის სიგრძე K' სისტემაში არის $\Delta x' = x'_2 - x'_1$; x'_2 -დან x'_1 -ს გამოკლებით ვპოულობთ:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

ღერძის „საკუთარი სიგრძე“ ეწოდება მის სიგრძეს იმ ათვლის სისტემაში, რომელშიაც იგი უძრავია. აღვნიშნოთ იგი $l_0 = \Delta x'$, ხოლო იმავე ღერძის სიგრძე, რომელიც K' ათვლის სისტემაში l -ით. მაშინ

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (4,5)$$

ამგვარად, ღერძის უდიდესი სიგრძე იმ ათვლის სისტემაში აქვს, რომელშიაც იგი უძრავია. მისი სიგრძე იმ სისტემაში, რომელშიაც იგი V სიჩქარით

მოძრაობს, $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ -ჯერ ნაკლებია. ფარდობითობის ამ შედეგს ლორენცის

შეკვეცა ეწოდება.

ვინაიდან სხეულის განივი ზომა მისი მოძრაობისას უცვლელია, ამიტომ სხეულის მოცულობაც შეიკვეცება ანალოგიური ფორმულით

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (4,6)$$

სადაც Ω_0 სხეულის „საკუთარი მოცულობაა“.

ლორენცის გარდაქმნიდან შეიძლება მივიღოთ ის შედეგები, რომლებიც ჩვენთვის უკვე ცნობილია საკუთარ დროს შესახებ (§ 3). ვთქვათ საათი უძრავია K' სისტემაში. ორ მოვლენად ავიღოთ ის ორი მოვლენა, რომლებიც მოხდა K' სისტემაში სიგრძის ერთსადიმავე ადგილზე x' , y' , z' . K' სისტემაში ამ 2. ველის თეორია

მოვლენებს შორის დრო იქნება $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. მოენახოთ ახლა დრო Δt , რომელმაც ამ ორ მოვლენას შორის განვლო K ათვლის სისტემაში. (4,3)-დან გვაქვს

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

ან, ერთის მეორისაგან გამოკლებით,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

რაც სრულ თანხმობაში იმყოფება (3,1)-თან.

§ 5. სიჩქარის ვარდობა

წინა პარაგრაფში ჩვენ მოენახეთ ფორმულები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ერთ ათვლის სისტემაში მოვლენის კოორდინატების დახმარებით მოენახოთ იმავე მოვლენის კოორდინატები მეორე ათვლის სისტემაში. ახლა ჩვენ მოენახავთ ფორმულებს, რომლებიც ერთ სისტემაში მოძრავ მატერიალურ ნაწილაკის სიჩქარეს აკავშირებს იმავე ნაწილაკის სიჩქარესთან მეორე სისტემაში ვთქვათ ისევე K' სისტემა K სისტემის მიმართ მოძრაობს x ღერძის გა-

სწვრივ V სიჩქარით. ვთქვათ $v_x = \frac{dx}{dt}$ არის ნაწილაკის სიჩქარის კომპონენტი

K სისტემაში, ხოლო $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ — იმავე ნაწილაკის სიჩქარე K' სისტემაში.

(4,3)-დან გვაქვს

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

პირველი სამი ტოლობის მეოთხეზე გაყოფით ვპოულობთ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}$$

თუ ამ ტოლობების მარჯვენა მხარეების მრიცხველსა და მნიშვნელს dt' -ზე გაყოფთ,

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad (5.1)$$

ეს ფორმულები სწორედ განსაზღვრავენ სიჩქარეთა გარდაქმნას. ისინი წარმოადგენენ სიჩქარეთა შეკრების კანონს ფარდობითობის თეორიაში. ზღვრულ შემთხვევაში $V \ll c$ ეს ფორმულები გადადიან კლასიკური მექანიკის ფორმულებში $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა ნაწილაკი მოძრაობს X ღერძის პარალელურად $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. მაშინ $v'_y = v'_z = 0$, ხოლო $v'_x = v$, ამასთანავე

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}}. \quad (5.2)$$

აღვილად დაერწმუნდებით იმაში, რომ სინათლის სიჩქარეზე ნაკლები ან მისი ტოლი ორი სიჩქარის ჯამში, ამ ფორმულის თანახმად, არის ისევე სიჩქარე, რომელიც არ აღემატება სინათლის სიჩქარეს.

სინათლის სიჩქარეზე გაცილებით ნაკლები V სიჩქარეთათვის (v სიჩქარე შეიძლება ნებისმიერი იყოს) მიახლოვებით V/c რიგის წევრებამდე სიზუსტით გვაქვს:

$$v_x = v'_x + V \left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2} \right), \quad v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}.$$

კოორდინატთა სისტემა ისე ავარჩიოთ, რომ ნაწილაკის სიჩქარე მოცემულ მომენტში XY სიბრტყეში მდებარეობდეს. მაშინ K სისტემაში ნაწილაკის სიჩქარეს ექნება კომპონენტები $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$, ხოლო K' სისტემაში — $v'_x = v' \cos \theta'$, $v'_y = v' \sin \theta'$ (v , v' სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდეებია, ხოლო θ , θ' კუთხეებია, რომლებსაც შესაბამისად K და K' სისტემებში X და X' ღერძებთან შეადგენს სიჩქარე).

განხილულ შემთხვევაში (5.1) ფორმულის დახმარებით ვპოულობთ $V_x = v \alpha$

$$\begin{aligned} \text{შედეგ} \quad \frac{v \sin \theta}{\cos \theta' \cdot v' + V} &= \frac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{\cos \theta' \cdot v' + V} \\ V_y = V \beta & \quad (5.3) \end{aligned}$$

ეს ფორმულა განსაზღვრავს სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას ერთი ათვლის სისტემიდან მეორეში გადასვლის დროს.

უფრო დაწვრილებით ვანვიხილოთ ამ ფორმულის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, სახელდობრ სინათლის გადახრა მეორე ათვლის სისტემაში გადასე-

ლისას — მოვლენა, რომელსაც სინათლის აბერაციას უწოდებენ. ამ შემთხვევაში $v = v' = c$ და წინა ფორმულა გადადის

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos \theta'} \sin \theta'. \quad (5,4)$$

იმავე (5,1) გარდაქმნის ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ $\sin \theta$ და $\cos \theta$ -ვის ანალოგიურ ფორმულებს

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'} \sin \theta', \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'} \quad (5,5)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $V \ll c$, ამ ფორმულებიდან V/c რიგის წევრებამდე სიზუსტით ვპოულობთ:

$$\sin \theta - \sin \theta' = -\frac{V}{c} \sin \theta' \cos \theta'$$

თუ შემოვიღებთ კუთხეს $\Delta \theta = \theta' - \theta$ (აბერაციის კუთხე), იმავე სიზუსტით ვპოვიით

$$\Delta \theta = \frac{V}{c} \sin \theta', \quad (5,6)$$

ე. ი. სინათლის აბერაციის ცნობილ ელემენტარულ ფორმულას.

§ 6. ოთხგანზომილებიანი ვექტორები

ჩთუ მოვლენის კოორდინატებად ვისარგებლებთ x, y, z, t სიდიდეებით, მაშინ x, y, z, t ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ოთხგანზომილებიანი სივრცეში როგორც ვექტორის კომპონენტები. ამ კომპონენტთა კვადრატების ჯამი, ე. ი. ვექტორის „სიგრძის“ კვადრატი $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ არ იცვლება ოთხგანზომილებიანი კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას, რომელსაც კერძოდ წარმოადგენენ ლორენცის გარდაქმნები.

x, y, z, t კომპონენტებიანი ვექტორის უწოდებენ „ოთხგანზომილებიანი რადიუს — ვექტორს“. მის კომპონენტებს ჩვენ x_i აღვნიშნავთ, სადაც $i = 1, 2, 3, 4$, ამასთანავე

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t = icl.$$

ერთი ინერციული სისტემაიდან მეორეში გარდაქმნისას, ე. ი. ლორენცის გარდაქმნის დროს, ოთხგანზომილებიანი ვექტორის (ან, როგორც სი-

მოკლის მიზნით შემდეგში დაეწეროთ, 4-რადიუს-ვექტორის) კომპონენტები (4,3)-ის თანახმად გარდაიქმნებიან ფორმულებით

$$x_1 = \frac{x'_1 - i \frac{V}{c} x'_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \frac{x'_4 + i \frac{V}{c} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6,1)$$

Xოთხგანზომილებიანი ვექტორი A_i ეწოდება ოთხი A_1, A_2, A_3, A_4 სიდიდის ერთობლიობას, რომლებიც ოთხგანზომილებიანი კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნისას გარდაიქმნებიან როგორც x_i კომპონენტები. ლორენცის გარდაქმნისას

$$A_1 = \frac{A'_1 - i \frac{V}{c} A'_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_4 = \frac{A'_4 + i \frac{V}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6,2)$$

ოთხგანზომილებიან ვექტორებს უმრავლესად ჩვეულებრივი ვექტორების თვისებების ანალოგიური თვისებები აქვთ. ასე მაგალითად, აღვიღოთ შეიძლება დავინახოთ, რომ ვექტორთა ჩვეულებრივი სკალარული ნამრავლის მსგავსად ორი 4-ვექტორის კომპონენტების ნამრავლთა ჯამი $A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4$ სკალარს წარმოადგენს. შემდეგში ვექტორთა ასეთ სკალარულ ნამრავლს აღვნიშნავთ $A_i B_i$ და საზოგადოდ მივიღებთ, რომ თუ ერთიდაიგივე ლათინური ინდექსი ორჯერ მეორდება, მაშინ იგულისხმება შეჯამება ამ ინდექსის 1, 2, 3, 4 მნიშვნელობათა მიხედვით. ასე მაგალითად, 4-ვექტორის „აბსოლუტური სიდიდის“ კვადრატი ჩაიწერება როგორც $A_i A_i$ ან A_i^2 . შეჯამების აღნიშვნის ასეთი წესი (როცა ჯამის ნიშანი გამოტოვებულია) პეტად მოხერხებულია და ფორმულებს შესამჩნევად ამარტივებს.

სამკომპონენტიან ვექტორთა კომპონენტებს ჩვენ ბერძნული ინდექსებით აღვნიშნავთ. ორჯერ ვანმეორებული ბერძნული ინდექსის ქვეშ ვიგულისხმებთ შეჯამებას 1-დან 3-მდე (მაგალითად, $AB = A_\alpha B_\alpha$).

4-ვექტორის პირველ სამ კომპონენტს 4-რადიუს-ვექტორის ანალოგიურად სივრცითი კომპონენტები ეწოდება, ხოლო მეოთხეს — დროითი. ყველა 4-ვექტორის დროითი კომპონენტი, რომელთანაც ჩვენ საქმე გვქვინება, წარმოსახვითია. შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან A_i კომპონენტებს შორის წარმოსახვითიც არის, კვადრატი A_i^2 შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი (ან ნულის ტოლი).

მე-2 რიგის ოთხგანზომილებიანი თენზორი (4-თენზორი) ეწოდება თექვსმეტი A_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) სიდიდის ერთობლიობას, რომლებიც კოორდინატთა გარდაქმნისას

$$x_i = a_{ik} x'_k \quad (6,3)$$

გარდაიქმნებიან როგორც კოორდინატთა ნამრავლები, ე. ი. ფორმულებით

$$A_{ik} = a_{im} a_{kl} A'_{ml} \quad (6,4)$$

ლორენცის გარდაქმნების შემთხვევაში

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{+1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \quad (6,5)$$

ერთეულოვანი 4-ტენზორი δ_{ik} ეწოდება ისეთ ტენზორს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას, რომ ყოველი A_i ვექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\delta_{ik} A_k = A_i \quad (6,6)$$

ადგილი დასანახია, რომ ამ ტენზორის კომპონენტები

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } i \neq k, \\ 1, & \text{თუ } i = k. \end{cases} \quad (6,7)$$

ყოველი A_{ik} ტენზორიდან შეიძლება შევქმნათ სკალარი $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$, რომელსაც ტენზორის „კვალი“ ეწოდება; ცხადია, რომ

$$\delta_{ii} = 4. \quad (6,8)$$

ტენზორს ეწოდება სიმეტრიული, თუ $A_{ki} = A_{ik}$, და ანტისიმეტრიული, თუ $A_{ik} = -A_{ki}$. ანტისიმეტრიულ ტენზორის ყველა დიაგონალური კომპონენტი, ე. ი. A_{11} , A_{22} , A_{33} , A_{44} კომპონენტები, ნულის ტოლია, ვინაიდან, მაგალითად, უნდა იყოს $A_{11} = -A_{11}$.

2-ე რიგის 4-ტენზორის ანალოგიურად შეიძლება განისაზღვროს მალალი რანგის ტენზორები.

საესებით ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი 4-ტენზორი 4-ე რიგისა უწოდოთ ისეთ ϵ_{iklm} ტენზორს, რომლის კომპონენტები იცვლიან ნიშანს ორ ნებისმიერ ინდექსის გადანაცვლებისას, ამასთანავე ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტები ± 1 ტოლია. ანტისიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს, რომ ამ ტენზორის ყველა კომპონენტი, რომლის ორი მაინც ინდექსი თანხვედნილია, ნულის ტოლია, ასე რომ ნულისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ის კომპონენტები, რომელთა ყველა ინდექსები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ვთქვათ

$\epsilon_{i,234} = 1$; მაშინ, ცხადია, რომ ნულისაგან განსხვავებული ϵ_{iklm} კომპონენტები $+1$ ან -1 ტოლია იმისდა მიხედვით, ლუწი თუ კენტი გადანაცვლებათა (ტრანსპოზიცია) რიცხვით შეიძლება i, k, l, m რიცხვები მივიყვანოთ 1, 2, 3, 4 მიმდევრობამდე. შევნიშნოთ, რაც ადვილად შესამოწმებელია, რომ $\epsilon^2_{iklm} = 4!$

კოორდინატთა სისტემის მობრუნებათა მიმართ ϵ_{iklm} სიდიდეები ისევე იქცევიან, როგორც ტენზორის კომპონენტები, მაგრამ ϵ_{iklm} კომპონენტები არ იცვლებიან ერთი ან სამი კოორდინატის ნიშნის შეცვლით, ვინაიდან ისინი ერთნაირად არიან განსაზღვრული ყველა კოორდინატთა სისტემისათვის, მაშინ როდესაც ტენზორის კომპონენტებს უნდა შეეცვალოს ნიშანი. ამიტომ ϵ_{iklm} ტენზორი კი არ არის, არამედ, როგორც იტყვიან, ფსევდო-ტენზორია. ნებისმიერი რანგის ფსევდოტენზორები, კერძოდ ფსევდოსკალარები, ისევე იქცევიან, როგორც ტენზორები კოორდინატთა ყველა გარდაქმნისათვის, იმათი გამოკლებით, რომლებიც არ დაიყვანებიან მობრუნებაზე. ე. ი. არეკვლების — კოორდინატთა ნიშნის შეცვლის გამოკლებით, რომელიც არ დაიყვანება ბრუნებებზე.

თუ A_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორია, მაშინ A_{ik} ტენზორს და $\frac{1}{2} \epsilon_{iklm} A_{lm}$ ფსევდოტენზორს ერთიმეორის დუალურს უწოდებენ. ანალოგიურად $\epsilon_{iklm} A_{lm}$ არის 3-ე რანგის ანტისიმეტრიული ფსევდოტენზორი, რომელიც A_i ვექტორის დუალურია. 2-ე რანგის ტენზორის ნამრავლი მის დუალურზე $\frac{1}{2} \epsilon_{iklm} A_{ik} A_{lm}$ ცხადია, ფსევდოსკალარს წარმოადგენს.

ზემოთქმულთან დაკავშირებით მოვიყვანოთ სამგანზომილებიანი ვექტორებისა და ტენზორების ზოგიერთი ანალოგიური თვისებები.

3-ე რანგის სავსებით ანტისიმეტრიული ერთფელოვანი ფსევდოტენზორი ეწოდება $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ სიდიდეთა ერთობლიობას, რომლებიც იცვლიან ნიშანს ნებისმიერი ორი ინდექსის გადანაცვლებისას. როგორც ϵ_{iklm} -ის შემთხვევაში, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ -ის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია იმათი გამოკლებით, რომელთათვისაც $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. რაც შეეხება ამ კომპონენტებს, $\epsilon_{123} = 1$; დანარჩენები კი, ცხადია, უდრის 1 ან -1 , იმისდა მიხედვით, თუ ტრანსპოზიციათა როგორი რიცხვით შეიძლება დავიყვანოთ α, β, γ რიცხვთა მიმდევრობა 1, 2, 3-ზე ლუწით თუ კენტით.

კოორდინატთა სისტემის არეკვლისას, ე. ი. სამივე კოორდინატის ნიშნის შეცვლის დროს, ჩვეულებრივი ვექტორის კომპონენტებიც იცვლიან ნიშანს. ასეთ ვექტორებს პოლარულს უწოდებენ. იმ ვექტორის კომპონენტები, რომელიც ორი პოლარული ვექტორის ვექტორული ნამრავლის ტოლია, არეკვლისას არ იცვლიან ნიშანს. ასეთ ვექტორებს აქსიალურს უწოდებენ. პოლარული ვექტორისა და აქსიალური ვექტორის სკალარული ნამრავლი არ წარმოადგენს ქვეშარიტ სკალარს, არამედ იგი ფსევდოსკალარია. კოორდინატთა სისტემის არეკვლისას იგი იცვლის ნიშანს. აქსიალური ტენზორი ფსევდოვექტორია, რომელიც დუალურია რაღაც ანტისიმეტრიული ტენზორისა. ასე, მაგალითად, თუ

$$C = [AB], \text{ მაშინ } C_{\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}, \text{ სადაც } C_{\beta\gamma} = A_{\beta} B_{\gamma} - A_{\gamma} B_{\beta}.$$

სამგანზომილებიან სივრცეში ინტეგრება შეიძლება წარმოებდეს მოცულობითი, ზედაპირზე და მრუდის გასწვრივ. ოთხგანზომილებიან სივრცეში, შესაბამისად, შესაძლებელია ოთხი გვარის ინტეგრება.

1. ინტეგრალი მრუდის გასწვრივ 4-სივრცეში. ინტეგრების ელემენტი წარმოადგენს რკალის ელემენტი, ე. ი. 4-ვექტორი dx_i .

2. ინტეგრალი ზედაპირის (ორგანზომილებიანი) გასწვრივ 4-სივრცეში სამგანზომილებიან სივრცეში, როგორც ცნობილია, ორ A და B ვექტორზე აგებული პარალელოგრამის ფართის პროექციები x_1x_2 კოორდინატთა სიბრტყეებზე შესაბამისად ტოლია $A_1B_2 - A_2B_1$; ანალოგიურად 4-სივრცეში, ორ A_i და B_i 4-ვექტორზე აგებული პარალელოგრამის ფართის პროექციები 6 კოორდინატთა x_1x_2 სიბრტყეებზე განისაზღვრება ანტისიმეტრიული თენზორით $A_iB_k - A_kB_i$. კერძოდ, ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტი განისაზღვრება 2-ე რანგის df_{ik} ანტისიმეტრიული თენზორით, რომლის კომპონენტები ტოლია ფართის ელემენტის პროექციებისა კოორდინატთა სიბრტყეებზე. სამგანზომილებიან სივრცეში, როგორც ცნობილია, ზედაპირის ელემენტად df_{ik} თენზორის ნაცვლად იყენებენ df_x ვექტორს, რომელიც df_{ik} თენზორის დუალურია, ე. ი. $df_x = \frac{1}{2} \epsilon_{ik\gamma} df_{ik}$. გეომეტრიულად ეს არის ვექტორი, რომელიც ზედაპირის ელემენტის მართობია და აბსოლუტური სიდიდით ამ ელემენტის ფართობის ტოლია. ოთხგანზომილებიან სივრცეში ასეთი ვექტორის აგება შეუძლებელია, მაგრამ შეიძლება df_{ik} თენზორის დუალური df_{ik}^* თენზორის აგება, ე. ი.

$$df_{ik}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{iklm} df_{lm} \quad (6.9)$$

გეომეტრიულად იგი ზედაპირის ელემენტს გამოსახავს, რომელიც df_{ik} ელემენტის ტოლია და მისი „მართობია“ — ყველა მასზე მდებარე სწორი მართობია df_{ik} ელემენტზე მდებარე ყველა სწორისა.

3. ინტეგრალი ჰიპერზედაპირზე. ე. ი. სამგანზომილებიან მრავალსახეობაზე (სამგანზომილებიან მოცულობაზე). სამგანზომილებიან სივრცეში სამ A , B და C ვექტორზე აგებულ „პარალელეპიპედის“ მოცულობა, როგორც ცნობილია, ტოლია მესამე რანგის დეტერმინანტისა, რომელიც შედგენილია ამ ვექტორთა კომპონენტებიდან. 4-სივრცეში „პარალელეპიპედის“ მოცულობის პროექცია (ე. ი. ჰიპერზედაპირთა ფართობები), რომელიც აგებულია სამი A_i , B_i , C_i 4-ვექტორებიდან, განისაზღვრება დეტერმინანტებით:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

რომლებიც შეადგენენ სამივე ინდექსის მიხედვით ანტისიმეტრიულ მესამე რანგის თენზორს. კერძოდ, ჰიპერზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტი განისაზღვრება dS_{ik} ანტისიმეტრიული თენზორითა, უფრო მოხერხებულია ჰიპერ-

ზედაპირის გასწვრივ ინტეგრირების ელემენტად ვისარგებლოთ dS_i 4-ვექტორით, რომელიც dS_{ik} თენზორის დუალურია:

$$dS_i = \frac{1}{6} \epsilon_{iklm} dS_{klm} \quad dS_{ikl} = \epsilon_{klmi} dS_m. \quad (6,10)$$

(ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ კოორდინატები dS_i : $dS_1 = dS_{23}$, $dS_2 = dS_{13}$ და ა. შ.). გეომეტრიულად ეს 4-ვექტორია, რომლის აბსოლუტური სიდიდე ტოლია ჰიპერზედაპირის ელემენტის „ფართობისა“ და მიმართულებით ამ ელემენტის ნორმალურია (ე. ი. პერპენდიკულარულია ყველ^ა წწორისა, რომელიც ჰიპერზედაპირის ელემენტზეა გავლებული). ცხადია, რომ $dS_i = dx dy dz$ ტოლია სამგანზომილებიანი მოცულობის dV ელემენტისა, რომელიც ჰიპერზედაპირის პროექციის წარმოადგენს ჰიპერსიბრტყეზე $x_i = const$.

4. ინტეგრალი ოთხგანზომილებიან მოცულობაში; ინტეგრირების ელემენტი წარმოადგენს 4-მოცულობის $d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ ელემენტს.

არსებობენ სამგანზომილებიანი ინტეგრალებისათვის გაუსის და სტოქსის ანალოგიური თეორემები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ გარდავქმნათ ერთიიმეორეში ოთხგანზომილებიანი ინტეგრალები. ამ თეორემებიდან შემდეგში ჩვენ დაგვეკვირება ორი. ჩაკეტილ ჰიპერზედაპირის გასწვრივ აღებული ინტეგრალი შეიძლება გარდავქმნათ მასში მოთავსებულ 4 მოცულობაში გავრცელებულ ინტეგრალად ინტეგრების dS_i ელემენტის შექმნის ოპერატორით

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (6,11)$$

შეცვლის გზ. \int , მაგალითად, A_i ვექტორულ ადებულ ინტეგრალისათვის გვაქვს:

$$\int A_i dS_i = \int \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\Omega.$$

ეს თეორემა, ცხადია, გაუსის თეორემის განზოგადობას წარმოადგენს.

ჩვეულებრივ ზედაპირზე აღებული ინტეგრალი გარდაიქმნება ამ ზედაპირით მოვლებულ ჰიპერზედაპირზე აღებულ ინტეგრალად ინტეგრების dS^*_{ik} ელემენტის შემდეგი ოპერატორით

$$dS^*_{ik} \rightarrow \frac{1}{2} \left(dS_i \frac{\partial}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (6,12)$$

შეცვლის საშუალებით, მაგალითად, A_{ik} ანტისიმეტრიული თენზორიდან აღებული ინტეგრალისათვის გვექნება:

$$\int A_{ik} dS^*_{ik} = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k}.$$

სისრულისათვის მოვიყვანოთ კიდევ ოთხგანზომილებიან ჩაკეტილ ხაზზე აღებულ ინტეგრალის გარდაქმნის წესი იმ ზედაპირზე აღებულ ინტეგრალად,

რომლისთვისაც ეს ხაზი მომველელს წარმოადგენს. ეს გარდაქმნა განხორციელდება შენაცვლებით:

$$dx_i \rightarrow df_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (6,13)$$

მაგალითად, ვექტორიდან აღებული ინტეგრალისათვის გვექნება:

$$\oint A_i dx_i = \int df_{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \int df_{ik} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right), \quad (6,14)$$

რაც სტოქსის თეორემის განზოგადობას წარმოადგენს.

✓ § 7. ოთხგანზომილებიანი სიჩქარე და აჩქარება

ჩვეულებრივი სიჩქარის ვექტორიდან შეიძლება შევქმნათ ოთხგანზომილებიანი ვექტორი. ნაწილაკის ასეთ ოთხგანზომილებიან სიჩქარეს (4-სიჩქარეს) წარმოადგენს ვექტორი

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}. \quad (7,1)$$

მისი კომპონენტთა მოსაძებნად შევნიშნოთ, რომ (3,1)-ს თანახმად

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

სადაც v ნაწილაკის ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი სიჩქარეა. ამგვარად,

$$u_1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_1}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

ანალოგიურად ვიპოვით u_2 , u_3 , u_4 , და საბოლოოდ გვექნება:

$$u_a = \frac{v_a}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7,2)$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ 4-სიჩქარე წარმოადგენს სიდიდეს, რომელსაც განზომილება არა აქვს.

4-სიჩქარის კომპონენტები არ აჩიან დამოუკიდებელნი. მივიღებთ რა მხედველობაში, რომ $dx_i^2 = -ds^2$, გვექნება:

$$u_i^2 = -1. \quad (7,3)$$

ნაწილაკის 4-აჩქარება ეწოდება ვექტორს

$$w_i = \frac{du_i}{ds}. \quad (7,4)$$

(7,2) და (7,3) დახმარებით მისი კომპონენტებისათვის ვპოულობთ:

$$w_a = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{v_a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad w_i = \frac{f_i}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7,5)$$

(7,3)-ს გადიფერენციალება გვაძლევს:

$$u_i \frac{du_i}{ds} = 0,$$

ან

$$u_i w_i = 0. \quad (7,6)$$

ა მ რ ე ტ ა ნ ა

ნაწილაკი მოძრაობს $\mathbf{v}(t)$ სიჩქარით; განესაზღვროთ \mathbf{w} აჩქარება იმ ათელის სისტემაში, რომელშიაც იგი უძრავია მოცემულ მომენტში, იმ შემთხვევაში, თუ: (ა) \mathbf{v} სიჩქარე იცვლება მხოლოდ მიმართულებით, (ბ) \mathbf{v} იცვლება მხოლოდ სიდიდით.

ამ ო ბ ს ნ ა აღნიშნულ ათელის სისტემაში w_i სივრცული კომპონენტები ეტოლებაინ

$$\frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{w}_0}{c^2}, \text{ ხოლო დროული უდრის ნულს. ამიტომ } \frac{1}{c^3} w_0^2 = w_i^2; \text{ ვინაიდან } w_i^2 \text{ სკა-}$$

ლარია, ამიტომ იგი ტოლია $\frac{1}{c^4} w_0^2$ სხვა ათელის სისტემაშიაც. თუ ვისარგებლებთ ამით და გამოვთვლით w_i , ვიპოვით (ა) შემთხვევაში:

$$\mathbf{w}_0 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

(ბ) შემთხვევაში კი:

$$\mathbf{w}_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

ჩელოვიჩის მუხარამოვი

§ 8. ელემენტარული ნაწილაკები უაბსოლუტოების თეორიაში

კლასიკურ მექანიკაში შეიძლება შემოტანილ იქნეს აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნება, ე. ი. ისეთი სხეულისა, რომლის დეფორმირება არ შეიძლება არავითარ პირობებში. ფართობითობის თეორიაში მყარ სხეულთა ქვეშ, შესაბამისად, უნდა გვევალისხმნა სხეულები, რომელთა ყველა ზომები უცვლელი რჩება იმ ათვის სისტემაში, რომელშიაც ისინი უძრავნი არიან. ადვილად შეიძლება ვნახოთ, რომ ფარდობითობის თეორია საერთოდ შეუძლებელს ხდის აბსოლუტურად მყარ სხეულთა არსებობას.

განვიხილოთ, მაგალითად, წრიული დისკი, რომელიც თავის ღერძის გარშემო ბრუნავს, და დაუშვათ, რომ იგი აბსოლუტურად მყარია. ცხადია, რომ ამ დისკთან დაკავშირებული ათვის სისტემა არ არის ინერციული. მაგრამ დისკის ყოველი მცირე ელემენტისათვის შეიძლება შემოვიღოთ ინერციული ათვის სისტემა, რომელშიაც ეს ელემენტი მოცემულ მომენტში უძრავი იქნება. სხვადასხვა ელემენტისათვის, რომლებსაც სხვადასხვა სიჩქარე აქვთ, ცხადია, ეს სისტემებიც იქნებიან სხვადასხვა. განვიხილოთ დისკის რომელიმე რადიუსის გასწვრივ განლაგებულ სიგრძის ელემენტთა რიგი. იმის გამო, რომ დისკი აბსოლუტურად მყარია, ყოველი ამ მონაკვეთთაგანის სიგრძე ათვის შესაბამ ინერციულ სისტემაში დარჩება იგივე, რაც იმ შემთხვევაში, როცა დისკი უძრავია. ანაევ სიგრძეებს მიიღებს მათი მზომავი უძრავი დამკვირვებელი, რომლის წინ მოცემულ მომენტში გაივლის დისკის განსახილავი რადიუსი, ვინაიდან ყოველი მონაკვეთი მისი სიჩქარის პერპენდიკულარულია, რის გამოც ლორენცის შეკვეცა ამ შემთხვევაში არ ხდება. ამიტომ უძრავი დამკვირვებლის მიერ გაზომილი მთელი რადიუსი, როგორც მისი შემადგენელი მონაკვეთების ჯამი, ისეთივე იქნება, როგორც იგი არის უძრავი დისკისათვის. მეორე მხრით, დისკის წრეხაზის ყოველი ელემენტის სიგრძე, რომელიც მოცემულ მომენტში გაივლის უძრავი დამკვირვებლის წინ, განიცდის ლორენცის შეკვეცას, ასე რომ მთელი წრეხაზის სიგრძეც უძრავი დამკვირვებლის მიერ გაზომილი როგორც მისი ცალკე მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი აღმოჩნდება უფრო ნაკლები, ვიდრე უძრავი დისკის წრეხაზის სიგრძე. ამავეადაც ჩვენ ვღებულობთ შედეგს, რომლის მიხედვით დისკის ბრუნვის დროს მისი წრეხაზის სიგრძის შეფარდება რადიუსთან (უძრავი დამკვირვებლის მიერ გაზომილი) უნდა შეცვლილიყო,

ნაცლად იმისა, რომ დარჩენილიყო 2π-ს ტოლი. ამ შედეგის აბსურდობა გვიჩვენებს, რომ სინამდვილეში დისკი არ შეიძლება აბსოლუტურად მყარი იყოს და ბრუნვისას აუცილებლად განიცდის რაღაც რთულ დეფორმაციებს, რომლებიც დამოკიდებულია დისკის მასალის დრეკად თვისებებზე.

აბსოლუტურად მყარ სხეულთა არსებობის შეუძლებლობაში შეიძლება დაიჭიმუნდეთ აგრეთვე სხვა გზითაც. ვთქვათ რომელიმე მყარი სხეული მის რომელიმე ერთ წერტილზე გარეშე ზემომოქმედებით იწყებს მოძრაობას. სხეული აბსოლუტურად მყარი რომ ყოფილიყო, ყველა სხვა წერტილს უნდა დაეწყო მოძრაობა იმ წერტილთან ერთდროულად, რომელიც განიცდის გარეშე ზემოქმედებას; წინააღმდეგ შემთხვევაში მოხდებოდა სხეულის დეფორმაცია. მაგრამ ფარდობითობის თეორია ამას შეუძლებელს ხდის, ვინაიდან ზემოქმედება მოცემული წერტილიდან დანარჩენებს სასრული სიჩქარით გადაეცემა, ანიტომ სხეულის ყველა წერტილებს არ შეუძლიათ ერთდროულად ამოძრავება.

თქმულიდან გამომდინარეობს ზოგიერთი დასკვნა, რომლებიც ე. წ. ელემენტარულ ნაწილაკებს ეხება. ელემენტარულ ნაწილაკების ქვეშ იგულისხმება ნაწილაკები, რომლებიც ყველა ფიზიკურ მოვლენაში მონაწილეობენ როგორც მთელი, ე. ი. არა აქვს აზრი წათ ნაწილებზე ლაპარაკს. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ელემენტარული ნაწილაკის მდგომარეობა მთლიანად განისაზღვრება მისი მდებარეობისა და სიჩქარის როგორც მთელისა მოცემით. ცხადია, ელემენტარულ ნაწილაკს სასრულო ზომა რომ ქონოდა, იგი დეფორმირდებოდა უნდა ყოფილიყო, ვინაიდან დეფორმაციის ცნება დაკავშირებულია სხეულის ცალკე ნაწილების ერთიმეორეზე დამოუკიდებელ მოძრაობის შესაძლებლობასთან. მაგრამ, როგორც ჩვენ ახლახან ენახეთ, ფარდობითობის თეორიაში აბსოლუტურად მყარი სხეული შეუძლებელია. ამიტომ ფარდობითობის თეორიაში ელემენტარული ნაწილაკები როგორც წერტილები უნდა განიხილებოდნენ.

§ 9. უმცირესი მოძველების პრინციპი

მატერიალური ნაწილაკების მოძრაობის განოკვლევისას ჩვენ გამოვალთ უმცირესი მოქმედების პრინციპიდან. როგორც ცნობილია, უმცირესი მოქმედების პრინციპი იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველი მექანიკური სისტემისა და მისი არსებობს ისეთი ინტეგრალი J , მოქმედებდალ წოდებული, რომელსაც სინამდვილი მოძრაობისათვის მინიმუმი იქვს და, რომლის ვარაიაცია δJ , მათასა-ცავე, ნულის ტოლია.

განვსაზღვროთ მოქმედების ინტეგრალი თავისუფალ მატერიალურ ნაწილაკისათვის, ე. ი. ისეთი ნაწილაკისათვის, რომელიც არ იმყოფება რაიმე გარე ძალის მოქმედების ქვეშ. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ეს ინტეგრალი არ უნდა იყოს დამოკიდებული ანა თუ იმ ათვლის ინერციული სისტემის არჩევანზე, ე. ი. ლორენცის გარდაქმნების მიმართ იგი ინვარიანტული უნდა იყოს. აქედან გამომდინარეობს, რომ იგი უნდა იყოს აღებული სკალარიდან. შემდეგ, ცხადია, რომ ინტეგრალს ქვეშ უნდა იდგნენ დიფერენციალები პირველ ხარისხში. მაგრამ ერთადერთი ასეთი სკალარი, რომელიც შეიძლება აიგოს თავისუფალი მატერიალური წერტილისათვის, არის ინტეგრალი ds ან αds , სა-

დაც α რაღაც მუდმივია. ამგვარად, თავისუფალი ნაწილაკისათვის მოქმედებებს შემდეგი სახე უნდა ჰქონდეს:

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

სადაც \int_a^b აღნიშნავს ორ მოცემულ მოვლენის შორის მსოფლიო წირის გასწვრივ

რივ აღებულ ინტეგრალს — ნაწილაკის ყოფნის საწყის და ბოლო ადგილის შორის დროს გარკვეულ t_1 და t_2 მომენტებში; ე. ი. მოცემულ მსოფლიო წერტილებს შორის. α წარმოადგენს რაღაც მუდმივს, რომელიც მოცემულ ნაწილაკს ახასიათებს. ადვილი შესამჩნევია, რომ ყველა ნაწილაკისათვის α დადებითი სიდიდე უნდა იყოს. მართლაც, § 3 ჩვენ ვნახეთ, რომ მსოფლიო წრფეწირის

გასწვრივ $\int_a^b ds$ მაქსიმალური მნიშვნელობა აქვს. თუ ინტეგრალს მოვახდენთ

მსოფლიო მრუდი წირის გასწვრივ, იგი ნებისმიერად მცირე შეიძლება გავხადოთ.

ამგვარად, დადებითი ნიშნით აღებულ $\int_a^b ds$ ინტეგრალს არ შეუძლია

ჰქონდეს მინიმუმი; შებრუნებული ნიშნით აღებულს მას, ცხადია, მინიმუმი აქვს — მსოფლიო სწორი წირის გასწვრივ.

მოქმედების ეს ინტეგრალი შეიძლება გარდავქმნათ დროით ინტეგრალად

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. dt\text{-ს წინ მდგომ } L \text{ კოეფიციენტს, როგორც ცნობილია, მოცემული}$$

მექანიკური სისტემისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია ეწოდება. (3, 1)-ის დახმარებით ჩვენ ვპოულობთ:

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} mc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt,$$

სადაც v — მატერიალური ნაწილაკის სიჩქარეა. მაშასადამე, ნაწილაკისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია არის

$$L = -mc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, α სიდიდე ახასიათებს მოცემულ ნაწილაკს კლასიკურ მექანიკაში ყოველი ნაწილაკი ხასიათდება მისი m მასით. განვსაზღვ-

ოთ α და m სიდიდეთა კავშირი. იგი განისაზღვრება იმ პირობიდან, რომ ზღვარულ გადასვლისას, როცა $c \rightarrow \infty$, L -ის აღნიშნული გამოსახულება უნდა

გადავიდეს მის კლასიკურ გამოსახულებაში $L = \frac{mv^2}{2}$, სადაც m — ნაწილაკის კლასიკური მასაა. ამ გადასვლის განსახორციელებლად დავშალოთ $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ მწკრივად v/c ხარისხების მიხედვით. მაშინ, მაღალი რიგის წევრების გამოტოვებით ვღებულობთ

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

როგორც ცნობილია, ლაგრანჟის ფუნქციაში არ არიან არსებითი ის წევრები, რომლებიც წარმოადგენენ სრულ წარმოებულებს დროით, ამიტომ შეიძლება ამ ფუნქციიდან მათი ამოშლა.¹ ყოველი მუდმივი წარმოადგენს იმავე მუდმივის სრულ წარმოებულს, გამრავლებულს დროზე; ამიტომ L -დან იგი შეიძლება აღმოვაგდოთ. αc მუდმივის ამოგდების შემდეგ ვღებულობთ $L = \frac{\alpha v^2}{2c}$, კლასიკურ მექანიკაში კი $L = \frac{mv^2}{2}$. მაშასადამე უნდა იყოს $\alpha = mc$.

ამგვარად, თავისუფალ მატერიალურ წერტილისათვის მოქმედება უდრის

$$S = -mc \int_a^b ds, \quad (9,1)$$

ხოლო ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (9,2)$$

§ 10. ენერგია და იმპულსი

როგორც ცნობილია, ნაწილაკის იმპულსი ეწოდება ვექტორს $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$.

$\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)$ იმ ვექტორის სიმბოლური აღნიშვნაა, რომლის კომპონენტები შესაბამისად

¹ მოქმედების ინტერვალში ინტეგრების დროს $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ სრულ წარმოებულს დროით

ღ. ლევს ინტეგრების გზაზე დამოუკიდებელ სიდიდეს, როგელიც ისაობა მოქმედების ვარიაციის დროს.

მისად \mathbf{v} ვექტორის კომპონენტების მიმართ აღებული L -ის წარმოებულებების ტოლია). (9,2) საშუალებით ვპოულობთ:

$$\vec{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10,1)$$

მცირე სიჩქარეებისას ($v \ll c$) ან საზღვარზე, როცა $c \rightarrow \infty$ ეს გამოსახულება გადადის კლასიკურ გამოსახულებაში $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. როცა $v = c$ უსასრულო ხდება.

იმპულსის წარმოებულნი, დროთი $\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ არის ძალა, რომელიც

ნაწილაკზე მოქმედებს. ვთქვათ ნაწილაკის სიჩქარე იცვლება მხოლოდ მიმართულებით, ე. ი. ძალა მიმართულია სიჩქარის პერპენდიკულარულად. მაშინ

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (10,2)$$

თუ სიჩქარე იცვლება მხოლოდ სიდიდით, ე. ი. ძალა მიმართულია სიჩქარის გასწვრივ, მაშინ

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (10,3)$$

ამგვარად, ორივე შემთხვევაში ძალის შეფარდება აჩქარებასთან სხვადასხვა

გამოდის. პირველში იგი ტოლია $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, ხოლო მეორეში $\frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$.

როგორც ცნობილია, ნაწილაკის ენერგია ეწოდება სიდიდეს

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L.$$

თუ ჩავსვათ L და \mathbf{p} (9,2) და (10,1) გამოსახულებებს, გვეჩვენება

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10,4)$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ რელატივისტურ მექანიკაში ნაწილაკის ენერგია ნულს არ უტოლდება მაშინაც კი, როცა მისი სიჩქარე, ნულის ტოლია. ეს „უძრავობის ენერგია“, ე. ი. ენერგია, როცა $v = 0$, ტოლია $\mathcal{E} = mc^2$.

თუ (10,4) დავშლით $\frac{v}{c}$ ხარისხების მწკრივად, მცირე სიჩქარისათვის ($v/c \ll 1$) გვექნება

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

ე. ი. უძრავობის ენერჯიის გამოკლებით კლასიკური გამოსახულება თავისუფალი მატერიალური ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯიისა.)

(10,1) და (10,4)-დან გამომდინარეობს თავისუფალი მატერიალური ნაწილაკის ენერჯიისა და იმპულს შორის შემდეგი დამოკიდებულება

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2}. \quad (10,5)$$

როცა $v = c$ ნაწილაკის იმპულსი და ენერჯია უსასრულო ხდება. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნულისაგან განსხვავებული m მასის მქონე ნაწილაკს არ შეუძლია სინათლის სიჩქარით მოძრაობა. მაგრამ რელატიურ მექანიკაში შეიძლება არსებობდეს ნაწილაკი ნულის ტოლი მასით, რომელიც სინათლის სიჩქარით მოძრაობს. ასეთი ნაწილაკათვის (10,5)-დან ჩვენ გვაქვს

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (10,6)$$

შემდეგში ჩვენ ენახავთ, რომ სინათლე შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ასეთი ნაწილაკები ნულის ტოლი მასით.

მიღებული თანათარღობანი გამოვიყენოთ ახლა ოთხგანზომილებიანი სახით. უმცირესი მოქმედების პრინციპის თანახმად

$$\delta S = -mc \int_a^b ds = 0.$$

გავხსნათ δS გამოსახულება. ამისათვის ვამჩნევთ, რომ $ds = \sqrt{-dx_i^2}$ და იმიტომ

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int_a^b \sqrt{-dx_i^2} = -mc \int_a^b \delta \sqrt{-dx_i^2} = \\ &= -mc \int_a^b \frac{-dx_i \delta dx_i}{\sqrt{-dx_i^2}} = mc \int_a^b u_i \delta x_i, \end{aligned}$$

არღვან $\frac{dx_i}{ds}$ 4-სიჩქარის კომპონენტი. ნაწილობითი ინტეგრებით ვპოულობთ

$$\delta S = mc \int_a^b u_i dx_i = mc u_i dx_i \Big|_a^b - mc \int_a^b dx_i du_i = mc u_i dx_i \Big|_a^b - mc \int_a^b dx_i \omega_i ds, \quad (10,7)$$

სადაც $\omega_i = \frac{du_i}{ds}$ არის 4-აჩქარება.

როგორც ცნობილია, მოძრაობის განტოლებათა მოსაძებნად ერთიმეორეს შეედარებენ ორ მოცემულ მდებარეობაზე, ე. ი. $(dx_i)_a = (dx_i)_b = 0$ საზღვრებზე, გამავალ სხვადასხვა ტრაექტორიებს. მაშინ კეშმარიტი ტრაექტორია განისაზღვრება პირობიდან $\delta S = 0$. (10,7)-დან ჩვენ მივიღებდით მაშინ განტოლებას $\omega_i = 0$, ე. ი. თავისუფალი ნაწილაკის სიჩქარის მუდმივობას ოთხგანზომილებიანი სახით.

იმისათვის კი, რომ მოვნახოთ მოქმედების ვარიაცია როგორც კოორდინატების ფუნქცია, როგორც ცნობილია, a წერტილი უნდა ჩავთვალოთ მოცემულად, ასე რომ $(dx_i)_a = 0$. მეორე კი უნდა ჩავთვალოთ ცვალებად და ამასთანავე განვიხილოთ მხოლოდ კეშმარიტი ტრაექტორიები, ე. ი. ისეთები, რომლებიც მოძრაობის განტოლებებს აკმაყოფილებენ. ამიტომ (10,7) გამოსახულებაში ინტეგრალი δS -თვის ნულის ტოლია. $(dx_i)_b$ ნაცვლად ჩვენ დავწერთ პირდაპირ dx_i და აპგვარად მივიღებთ:

$$\delta S = mc u_i dx_i. \quad (10,8)$$

4-ვექტორს, რომლის მდგენელებია $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ იმპულსის 4-ვექტორი ეწოდება.

მას ჩვენ p_i -თ აღვნიშნავთ. (10,8)-დან ჩანს, რომ თავისუფალი მატერიალური ნაწილაკისათვის 4-იმპულსის კომპონენტები ტოლია

$$p_i = mc u_i. \quad (10,9)$$

როგორც შექანიკიდან არის ცნობილი, წარმოებულები $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$ ნაწილაკის იმპულსის სამი კომპონენტი, ხოლო წარმოებული — $\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial \tau}$ არის

წილაკის ენერგია. თუ 4-სიჩქარის კომპონენტთათვის (7,2) გამოსახულებას გმოვიყენებთ, ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ სივრცითი კომპონენტები p_i მართლაც თანხედება p იმპულსს ხოლო დროითი უდრის $i\mathcal{E}/c$:

$$p_x = p_x, \quad p_t = i \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (10,10)$$

ამგვარად, რელატიურ მექანიკაში იმპულსი და ენერგია ერთი 4-ვექტორის კომპონენტებს წარმოადგენს. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს იმპულსის და ენერგიის გარდაქმნის ფორმულები ერთი ათვის ინერციული სისტე

მიდან შეორეში გადასვლის დროს. სახელდობრ, 4-ვექტორის გარდაქმნის (6,2) ზოგად ფორმულებში 4-იმპულსის კომპონენტათვის (10,10) გამოსახულებების ჩასმით ვპოულობთ

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} \mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + V p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (10,11)$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ 4-სიჩქარის კვადრეტი $u_i^2 = -1$ (7,3), გვექნება

$$p_i^2 = -m^2 c^2. \quad (10,12)$$

p_i კომპონენტთა (10,10) გამოსახულების ჩასმით ვპოულობთ

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2. \quad (10,13)$$

იმპულსის საშუალებით გამოსახულ ენერჯიას, როგორც ცნობილია, ჰამილტონის \mathcal{H} ფუნქცია ეწოდება. (10,13)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\mathcal{H} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (10,14)$$

მცირე (c -თან შედარებით) სიჩქარეთა შემთხვევაში $p \ll mc$. მაშინ (10,14) დან მიახლოებით ვღებულობთ

$$\mathcal{H} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} = mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

ე. ი. უძრაობის ენერჯიის გამოკლებით ცნობილ ფორმულას

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}$$

დაბოლოს, (10,12)-ში p_i -ს ნაცვლად $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ ჩასმით ვპოულობთ

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 = -m^2 c^2, \quad (10,15)$$

ან, თუ ჯამს ცხადი სახით დავწერთ:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (10,16)$$

ეს არის ჰამილტონ-იაკობის განტოლება რელატიურ მექანიკაში.

კლასიკური მექანიკის ზღერულ შემთხვევაზე გადასვლა (10,16) განტოლებაში შექმედგანაირად წარმოებს. პირველ ყოვლისა საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ, როგორც (10,14)-ში შესაბამი გადასვლის დროს, რომ რელატიურ მექანიკაში ნაწილაკის ენერჯია შეიცავს mc^2 წევრს, რომელიც კლასიკურ მექა-

ნიკაში არ არის. რამდენადაც მოქმედება S ენერჯისთან დაკავშირებულია $\mathcal{L} = - \frac{\partial S}{\partial t}$ ტოლობის საშუალებით, ამიტომ კლასიკურ მექანიკაში გადასვლისას S -ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ ახალი მოქმედება S' შენდევნი თანაფარდობის თანახმად:

$$S = S' - mc^2 t.$$

ამის ჩასმით (10,16)-ში, ვპოულობთ:

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 + 2m \frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

როცა $c \rightarrow \infty$ ეს განტოლება გადადის ჰამილტონ-იაკობის კლასიკურ განტოლებაში:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

§ 11. მასის დეფინიცი

წინა პარაგრაფში გამოყვანილ ფორმულების გამოყენება შეიძლება აგრეთვე მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი რთული სხეულის, როგორც მთელის, მოძრაობის მიმართაც. ამ შემთხვევაში მასის ქვეშ ყველგან უნდა ვიგულისხმობთ მთელი სხეულის მასა, ხოლო სიჩქარის ქვეშ — მისი, როგორც მთელის, მოძრაობის სიჩქარე.

განვიხილოთ უძრავი (როგორც მთელი) სხეული. მაშინ მისი ენერჯია, რომელსაც ჩვენ შეიძლება შინაგანი ენერჯიად, პირდაპირ Mc^2 ტოლია, სადაც M მისი მასაა. მასის დადებითობის გამო, ცხადია, ეს სიდიდე მუდამ დადებითია; დადებითი იქნება აგრეთვე მოძრავი სხეულის სრული ენერჯია

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(v —მისი, როგორც მთელის, მოძრაობის სიჩქარე). ამგვარად, ჩვენ იმ დასკვნამდე მივდივართ, რომ რელატიურ მექანიკაში ჩაკეტილი სისტემის ენერჯია ყოველთვის დადებითია, საწინააღმდეგოდ იმისა, რასაც ადგილი აქვს კლასიკურ მექანიკაში, სადაც იგი შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი.

სხეულის შინაგანი ენერჯია Mc^2 , გარდა სხეულის შემადგენლობაში შემავალ ნაწილაკთა უძრავობის ენერჯიისა, შეიცავს კიდევ ამ ნაწილაკების კინეტიკურ ენერჯიას და მათი ერთმეორესთან ურთიერთმოქმედების ენერჯიას. სხვა სიტყვებით, Mc^2 არ უდრის $\sum m_A c^2$, სადაც m_A სხეულის შემადგენლობაში

შემავალ ნაწილაკთა მასებია, და ამიტომ M -იც არ უდრის $\sum m_A$ ჯამს. ამგვარად, რელატიურ მექანიკაში მასების შენახვის კანონს ადგილი არა აქვს; რთული სხეულის მასა არ ეტოვება მისი შემადგენელ ნაწილების მასების ჯამს.

ნაცვლად ამისა ადგილი აქვს მხოლოდ ენერგიის შენახვის კანონს, რომელშიაც შედის აგრეთვე ნაწილაკთა უძრაობის ენერგია.

სხვაობას $\Delta M = M - \sum_{\text{ჩ}} m_{\text{ჩ}}$ რთული სხეულის მასასა და მისი შემადგენელი ნაწილების მასათა ჯამს შორის მასის დეფექტი ეწოდება. $\Delta M c^2$ სიდიდეს სხეულის შებმულობის ენერგიას უწოდებენ.

განვიხილოთ სხეული, რომელიც ორი ნაწილისაგან შედგება (M_1 და M_2 მასებით), იმ ათელის სისტემაში, რომელშიაც იგი უძრავია, და დაუშვათ, რომ ეს სხეული თავისთავად იშლება ორ ნაწილად, რომელთა სიჩქარეები v_1 და v_2 აღვნიშნოთ. მაშინ ენერგიის შენახვის კანონი გვაძლევს

$$M c^2 = \frac{M_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{M_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

ამ განტოლებას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ მაშინ, როცა $M > M_1 + M_2$, ე. ი. როცა მასის დეფექტი $\Delta M = M - M_1 - M_2$ დადებითია. ამგვარად სხეულს თავისთავად დაშლა მხოლოდ იმ შემთხვევაში შეუძლია, თუ მისი მასის დეფექტი (იმ ნაწილებთან შედარებით, რომლებზედაც სხეული იშლება) დადებითია. თუ მასის დეფექტი უარყოფითია, მაშინ, პირიქით, სხეული მდგრადია და თავისთავად არ დაიშლება. ადგილი მისახვედრია, რომ დაშლის განხორციელებისათვის სხეულს გარედან უნდა მიეწოდოს ენერგია, რომელიც ყოველ შემთხვევაში მისი შებმულობის ენერგიის $|\Delta M| c^2$ ტოლი უნდა იყოს.

ა მ ო ც ა ნ ე ბ ი

1. ნაწილაკი m_1 მასით და v სიჩქარით ეჯახება უძრავ ნაწილაკს m_2 მასით. ამასთანავე ორივე ერთდება ერთ რთულ ნაწილაკად. განვსაზღვროთ ამ რთული ნაწილაკის M მასა და V სიჩქარე.

ამ ობსნა: საძებნი მასა $M = \frac{1}{c^2} \sqrt{\mathcal{E}^2 - p^2 c^2}$, სადაც \mathcal{E} და p არის შედგენილი ნაწილაკის ენერგია და იმპულსი, რომლებიც ტოლია შეჯახებულ ნაწილაკთა ენერგიების და იმპულსების ჯამისა. სიჩქარე კი $V = pc^2/\mathcal{E}$. ამის შედეგად ვაოულობთ:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad V = \frac{m_1 v}{\left(m_1 + m_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}$$

2. უძრავი სხეული M მასით იშლება ორ ნაწილად M_1 და M_2 მასით. განვსაზღვროთ ამ ნაწილების \mathcal{E}_1 და \mathcal{E}_2 ენერგია.

ამ ობსნა. ენერგიის და იმპულსის შენახვის კანონი გვაძლევს $M c^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ და $p_1 + p_2 = 0$ ან სხვაგვარად, $p_1^2 = p_2^2$, ე. ი. $\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2 = M_1^2 c^4 - M_2^2 c^4$. ამ ორი განტოლებიდან ვაოულობთ

$$\mathcal{E}_1 = c^2 \frac{M^2 + M_1^2 - M_2^2}{2M}, \quad \mathcal{E}_2 = c^2 \frac{M^2 - M_1^2 + M_2^2}{2M}$$

§ 12. შ ე ჯ ა ხ ე მ ა ნ ი

განვიხილოთ ორი ნაწილაკის დრეკადი შეჯახება, ე. ი. ისეთი, როდესაც მათი შინაგანი მდგომარეობა უცვლელი რჩება. ნაწილაკის ენერგია და იმპულსი K ათვლის სისტემაში შეჯახებამდე იყოს შესაბამისად p_{10} , \mathcal{E}_{10} და p_{20} , \mathcal{E}_{20} ; ამასთანავე K სისტემის X ღერძი არჩეულია ნაწილაკთა სრული იმპულსის ვექტორის $p_{10} + p_{20}$ -ის მიმართულუბით.

შეჯახების გამოკვლევისათვის უფრო მოხერხებულია მეორე K' ათვლის სისტემაზე გადასვლა, რომელშიაც ორივე ნაწილაკის იმპულსების ჯამი ნულის ტოლია. (10,5) თანახმად K -ს მიმართ K' სისტემის V სიჩქარე იქნება¹

$$V = \frac{(p_{10} + p_{20})c^2}{\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20}}. \quad (12,1)$$

(10,11) ზოგადი გარდაქმნების ფორმულებიდან და (12,1) ფორმულიდან ადვილად გამოითვლება ორივე ნაწილაკის ენერგია და იმპულსი K' სისტემაში; მათ ჩვენ აღვნიშნავთ \mathcal{E}'_1 , \mathcal{E}'_2 , და $p'_1 = -p'_2$.

ნაწილაკთა შეჯახებისას მათი ენერგიების ჯამი და იმპულსების ჯამი უცვლელი რჩება. K' სისტემაში $p'_1 + p'_2 = 0$, ე. ი. იმპულსები სიდიდით ტოლი და მიმართულებით მოწინააღმდეგენი არიან. შეჯახებისას p'_1 და p'_2 იმპულსები მხოლოდ შებრუნდებიან, ხოლო ერთიმეორის ტოლი და მოწინააღმდეგე მიმართულებისა რჩებიან. ენერგიის შენახვის კანონის შედეგად იმპულსების აბსოლუტური სიდიდეც აგრეთვე უცვლელი რჩება.

ეთქვათ p' არის ერთერთი ნაწილაკის იმპულსი შეჯახების შემდეგ, ხოლო \mathcal{E}' — იმავე ნაწილაკის ენერგია (K' სისტემაში). განვსაზღვროთ ნაწილაკის p იმპულსი (შეჯახების შემდეგ) გამოსავალ K სისტემაში. რამდენადაც K სისტემის

¹ ამასთანავე ჩვენ განვიხილავთ ორ შესაჯახებელ ნაწილაკთა სისტემას, როგორც ერთ სხეულს. (12,1) ფორმულა შეიძლება უშუალოდ მივიღოთ აგრეთვე (10,11) გარდაქმნის ფორმულებიდან. ამ ფორმულების თანახმად და თანახმად იმისა, რომ საერთო იმპულსი K' სისტემაში ნულის ტოლია, გვაქვს

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{01} + \mathcal{E}'_{02} &= \frac{\mathcal{E}'_{01} + \mathcal{E}'_{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ p_{01x} + p_{02x} &= \frac{\frac{V}{c^2}(\mathcal{E}'_{01} + \mathcal{E}'_{02})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2}(\mathcal{E}'_{01} + \mathcal{E}'_{02}), \end{aligned}$$

ე. ი. (12,1) ფორმულა, თუ დავწერთ ვექტორული სახით (დაშტრიხული სიდიდეები K' სისტემაში შეესაბამებინ).

სიჩქარე K' -ს მიმართ — V -ს ტოლია, ხოლო V პარალელურია X და X' ღერძებისა, ამიტომ (10,11) გარდაქმნის ფორმულების თანახმად:

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{\xi' V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z$$

ან სხვაგვარად

$$p'_x = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(p_x - \frac{\xi' V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z$$

რამდენადაც $p_x'^2 + p_y'^2 = p^2$. შეჯახებისას არ იცვლება (p' მხოლოდ შემობრუნდება), ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(p_x - \frac{\xi' V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2 = p^2, \quad (12,2)$$

სადაც ξ' და p' — მოცემული სიდიდეებია.

თუ p_x , p_y და p_z როგორც ცვლად კოორდინატებს განვიხილავთ, მაშინ (12,2) წარმოადგენს გაკვირებული ბრუნვის ელიპსოიდის განტოლებას. ნახევარღერძებით p' და $\frac{p'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, ფოკალური მანძილით $\frac{p' V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, ექსცენტრი-

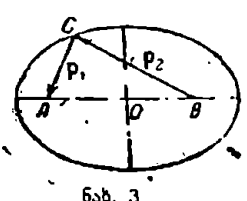
სიტეტით V/c და ცენტრით, რომელიც კოორდინატა სათავეიდან p_x ღერძის გასწვრივ მარცხნივ გადაწეულია მანძილით $\frac{\xi' V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, აქედან გამომდინა-

რეობს შეჯახების შემდეგ ორივე ნაწილაკის იმპულსების შემდეგი გრაფიკული გამოსახვის წესი. აიგება ელიპსი ნახევარღერძებით $\frac{p'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ და p' ; მის

დიდ ღერძზე ცენტრიდან ორივე მხარეს გადაიზომება ორი OA და OB მონაკვეთი, რომლებიც შესაბამისად ტოლია

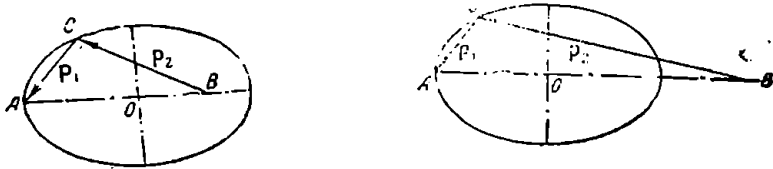
$$\frac{\xi'_1 V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{და} \quad \frac{\xi'_2 V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

მაშინ CA და BC ვექტორები, გველბული A და B წერტილებიდან ელიპსის ნებისმიერი წერტილში გამოსახვენ შესაბამისად პირველი და მეორე ნაწილაკის იმპულსს შეჯახების შემდეგ. მათი მიმართულება 3 ნახაზზე ისრით არის ნაჩვენები.



ნახ. 3.

თუ ორივე ნაწილს ერთიდაიგივე მასა აქვს, მაშინ $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'_2$ და AO და OB მონაკვეთები ერთიმეორის ტოლია. იმ შემთხვევაში, როცა, ვთქვათ, პირველი ნაწილაკი შეჯახებამდე უძრავი იყო, მაშინ K' სისტემაში მას (შეჯახებამდე) ჰქონდა — V სიჩქარე, და მისი p' იმპულსი დაკავშირებულია მის \mathcal{E}'_1 ენერგიასთან ტოლობით $\mathcal{E}'_1 = p'c/V$. აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში OA მონაკვეთი ელიპსის დიდი ნახევარღერძის ტოლია, ე. ი. A წერტილი თვით ელიპსზე მდებარეობს (ნახ. 4). ეს, სხვათა შორის, უშუალოდ იქიდანაც ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში შესაძლებელია BC და CA ვექტორების ისეთი განლაგება, როცა ერთი მათგანი ნულის ტოლია. რაც შეეხება B წერტილს, იგი



ნახ. 4.

ელიპსის შიგნით ან გარეთ მდებარეობს, იმისდა მიხედვით, ნაკლებია თუ მეტი მეორე ნაწილაკის მასა პირველის მასაზე (მართლაც K' სისტემაში, ორივე ნაწილაკის იმპულსი სიდიდით ერთიდაიგივეა, და ამიტომ $\mathcal{E}'_1 = c \sqrt{c^2 m_1^2 + p'^2}$ და $\mathcal{E}'_2 = c \sqrt{c^2 m_2^2 + p'^2}$ ენერგიებიდან, და მაშასადამე, OA და OB მონაკვეთებიდან, ის არის უფრო მეტი, რომელიც უფრო დიდი მასის მქონე ნაწილს შეე-

საბამება). AB ვექტორი ამ შემთხვევაშია \vec{AB} წარმოადგენს (შეჯახებამდე) თავდაპირველად მოძრავი ნაწილაკის იმპულსს. ამიტომ CBO და CAO კუთხეები პირველადი მოძრაობის მიმართულებებიდან ორივე ნაწილაკის გაბნევის კუთხეებია.

თუ ერთი ნაწილაკთაგანი, ვთქვათ, პირველი, წარმოადგენს ნულის ტოლი მასის მქონე ნაწილს, და მისი სიჩქარე სინათლის სიჩქარის ტოლია, მაშინ (10,6) თანახმად K' სისტემაში მისი ენერგია $\mathcal{E}'_1 = pc$, და ჩვენ ვხედავთ, რომ მისი შესაბამისი OA მონაკვეთი ფოკუსურ მანძილს უდრის, ე. ი. A წერტილი ელიპსის ფოკუსში მდებარეობს. თუ მეორე ნაწილაკსაც ასეთივე მასა და სიჩქარე აქვს, მაშინ B წერტილიც ფოკუსში მდებარეობს. ამ შემთხვევაში p'_1 და p'_2 ვექტორების აბსოლუტური სიდიდეთა (ე. ი. AC და BC სიგრძეთა) ჯამი, ელიპსის ცნობილი თვისების თანახმად, მუდმივია. ეს იმასთან არის დაკავშირებული, რომ ამ შემთხვევაში იმპულსების აბსოლუტური მნიშვნელობანი ნაწილაკთა ენერგიის პროპორციულია, ხოლო ენერგიების ჯამი შეჯახებისას უცვლელი რჩება.

ორივე შესაჯახებელ ნაწილაკის მცირე სიჩქარეთა ზღვრულ შემთხვევაში ექსცენტრისიტეტი ნულს უახლოვდება და ელიპსი წრეხაზში გადადის.

როგორც 4 ნახაზიდან ჩანს, შეჯახებამდე უძრავ ნაწილაკს შეჯახების შედეგად არ შეუძლია მიიღოს იმპულსი, რომელიც გადააქარბებს ელიპსის დიდი ღერძით გამოსახულ მნიშვნელობას (ამ შემთხვევაში C წერტილი მდებარეობს

ამ ღერძის მეორე ბოლოზე). გამოთვალეთ ეს უდიდესი იმპულსი, რომელიც შეჯახებისას ერთი ნაწილაკიდან მეორეს გადაეცემა. როგორც ენახეთ, ელიფსის დიდი ღერძის სიგრძე არის

$$2 \frac{p'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

ინერციის ცენტრთან ერთად მოძრაე ათვის სისტემაში p' იმპულსი არის

$$p' = \frac{m_1 V'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(m_1 — პირენდელი უძრავი ნაწილაკის მასა). (12,1) თანახმად V სიჩქარე ტოლია

$$V = \frac{p_{20} c^2}{\mathcal{E}_{20} + m_1 c^2}$$

(შეჯახებამდე $p_{10} = 0$, $\mathcal{E}_{10} = m_1 c^2$). ამ გამოსახულებათა დახმარებით ელიფსის დიდი ღერძის სიგრძისათვის, ე. ი. შეჯახების შემდეგ პირველი ნაწილაკის მაქსიმალური p_{1max} იმპულსისათვის, ვპოულობთ

$$p_{1max} = \frac{2m_1 p_{20} (\mathcal{E}_{20} + m_1 c^2)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_1 \mathcal{E}_{20}} \quad (12,3)$$

აქედან ადვილად მოინახება აგრეთვე პირველი ნაწილაკის უდიდესი შესაძლო ენერჯია

$$\mathcal{E}_{1max} = c \sqrt{p_{1max}^2 + m_1^2 c^2}$$

ა მ ო ც ა ნ ა

$m_1 = 0$ მასის და c სიჩქარის მქონე ნაწილაკი ეჯახება უძრავ ნაწილაკს m_2 მასით. განესახლებოთ ორივე ნაწილაკის ენერჯია, m_1 ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულება შეჯახების შემდეგ და გამოვსახოთ ეს სიდიდეები m_1 ნაწილაკის გადახრის კუთხის საშუალებით.

ამ ო ხ ს ნ ა. A წერტილი (ნახ. 3) ფოკუსში იმყოფება, ხოლო B — ელიფსზე. ფოკუსზე დაყვანილი ელიფსის პოლარული განტოლების გამოყენებით ადვილად ვიპოვით

$$\mathcal{E}_1 = \frac{m_2 c^2 \mathcal{E}_{01}}{m_2 c^2 + \mathcal{E}_{01} (1 - \cos \varphi_1)}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{m_2^2 c^4 + \mathcal{E}_{01} (m_2 c^2 + \mathcal{E}_{01}) (1 - \cos \varphi_1)}{m_2 c^2 + \mathcal{E}_{01} (1 - \cos \varphi_1)}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{E}_{01}}{m_2 c^2}}$$

სადაც \mathcal{E}_{01} არის m_1 ნაწილაკის ენერჯია შეჯახებამდე, \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 — ორივე ნაწილაკის ენერჯია შეჯახების შემდეგ, φ_1 , φ_2 — მათი გადახრის კუთხეები.

§ 13. იმპულსის მომენტი

როგორც ცნობილია, კლასიკურ მექანიკას იმ შედეგამდე მივყევართ, რომ ჩაკეტილ სისტემაში ენერჯიასა და იმპულს გარდა შეინახება აგრეთვე იმპულსის მომენტი, ე. ი. ვექტორი

$$M = \sum [rp]$$

(r და p ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი და იმპულსია; შეჯამება წარმოებს სისტემის შემადგენლობაში შემავალ ყველა ნაწილაკის მიმართ). მომენტის შენახვა იმის შედეგია, რომ ჩაკეტილი სისტემისათვის ლაშჩანის ფუნქცია, სივრცის იზოტროპულობის გამო, არ იცვლება სისტემის როგორც მთელის მობრუნების დროს.

თუ ახლა ოთხგანზომილებიანი სახით ჩავატარებთ ანალოგიურ გამოყვანას, ჩვენ მივიღებთ მომენტისათვის რელატიურ გამოსახულებას. ვთქვათ x_i სისტემის ერთ-ერთი ნაწილაკის კოორდინატებია. ოთხგანზომილებიან სივრცეში მოვახდინოთ უსასრულოდ მცირე მობრუნება. მაშინ ყოველი ნაწილაკის x_i კოორდინატები წრფივი გარდაქმნით გადავლენ x'_i -ში,

$$x'_i = x_i + x_k \delta\Omega_{ik} \tag{13,1}$$

სადაც $\delta\Omega_{ik}$ უსასრულოდ მცირე 4-თენზორია, რომელიც მობრუნებას განსაზღვრავს. მობრუნებისას რადიუს-ვექტორის x_i სივრცე უცვლელი უნდა დარჩეს, ე. ი. $x_i^2 = x'^2$. თუ აქ ჩავსვამთ (13,1) და $\delta\Omega_{ik}$ მიმართ კვადრატულ წევრებს როგორც მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეებს გადავაგდებთ, გვექნება

$$x_i x_k \delta\Omega_{ik} = 0.$$

ეს ტოლობა დაკული უნდა იყოს ნებისმიერი x_i -სათვის. იმის გამო, რომ $x_i x_k$ სიმეტრული თენზორია, $\delta\Omega_{ik}$ ამ შემთხვევაში ანტისიმეტრული თენზორი უნდა იყოს (სიმეტრული თენზორის ნამრავლი ანტისიმეტრულზე, ცხადია, ყოველთვის იგივეურად ნულის ტოლია). ამგვარად, ეპოულობთ, რომ

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik} \tag{13,2}$$

კოორდინატთა უსასრულოდ მცირე ცვლილებების დროს S მოქმედების δS ცვლილებას აქვს სახე [იხ. (10,7)]:

$$\delta S = \sum p_i \delta x_i$$

(აჯამება წარმოებს სისტემის ყველა ნაწილაკის მიმართ). ახლა ჩვენს მიერ განხილული მობრუნების შემთხვევაში $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x_k$, და ამიტომ

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \sum p_i x_k$$

თუ $\sum p_i x_k$ თენზორს დავშლით სიმეტრულ და ანტისიმეტრულ ნაწილებად, მაშინ პირველი მათგანი ანტისიმეტრულ თენზორზე გომრავლების დროს იგივეურად ნულს გვაძლევს. ამიტომ $\sum p_i x_k$ -დან ანტისიმეტრული ნაწილის გამოყოფით წინა განტოლება შემდეგი სახით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i) \tag{13,3}$$

სივრცის და დროს იზოტროპულობის გამო ჩაკეტილი სისტემისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია 4-სივრცეში მობრუნების დროს არ იცვლება, ე. ი. ამ მობრუნების $\partial \Omega_{ik}$ პარამეტრები ციკლურ კოორდინატებს წარმოადგენენ. ამიტომ შეინახება შესაბამი განზოგადოებული იმპულსები. ამ იმპულსებს წარმოადგენენ $-\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}}$ - სილიდები. (13,3-დან) გვაქვს

$$\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}} = \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i).$$

მაშასადამე, ჩვენ ვხედავთ, რომ ჩაკეტილ სისტემას შეენახება თენზორი

$$M_{ik} = \sum (x_i p_k - x_k p_i). \quad (13,4)$$

ამ ანტისიმეტრულ თენზორს მომენტის 4-თენზორი ეწოდება.

ადვილად დაერწმუნდებით იმაში, რომ ამ თენზორის სივრცული კომპონენტები ($i, k = 1, 2, 3$) მომენტის

$$M = \sum [r p] \quad (13,5)$$

კომპონენტებს წარმოადგენენ

$$M_{xx} = -M_{xx} = M_y, \quad M_{xy} = -M_{yx} = M_y, \quad M_{yz} = -M_{zy} = M_z.$$

რაც შეეხება $M_{\alpha\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) კომპონენტებს, ადვილად დაერწმუნდებით, რომ

$$M_{\alpha\alpha} = ic \sum \left(t p_\alpha - \frac{\mathcal{E} x_\alpha}{c^2} \right). \quad (13,6)$$

მაშასადამე, ეს სამი კომპონენტი შეადგენს ვექტორს

$$ic \sum \left(t p - \frac{\mathcal{E} r}{c^2} \right).$$

ჩაკეტილ სისტემაში M_{ik} შენახვის-გამო ჩვენ გვექნება, კერძოდ,

$$\sum \left(t p - \frac{\mathcal{E} r}{c^2} \right) = \text{const.}$$

ვინაიდან, მეორე მხრით, ინახება აგრეთვე სრული ენერჯია $\sum \mathcal{E}$, ეს ტოლობა შეიძლება დაეწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{\sum \mathcal{E} r}{\sum \mathcal{E}} - \frac{c^2 \sum p}{\sum \mathcal{E}} = \text{const.} \quad (13,7)$$

აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ წერტილი რადიუს-ვექტორით

$$R = \frac{\sum \mathcal{E} r}{\sum \mathcal{E}} \quad (13,8)$$

თანაბრად მოძრაობს სიჩქარით

$$V = \frac{c^2 \sum p}{\sum \mathcal{E}} \quad (13,9)$$

რომელიც წარმოადგენს სისტემის, როგორც მთელის, მოძრაობის სიჩქარეს. როგორც ცნობილია, ასეთ წერტილს ინერციის ცენტრი ეწოდება; (13,9) ფორმულა ინერციის ცენტრის კოორდინატებს განსაზღვრავს რელატიურ მექანიკაში. უნდა შევნიშნოთ, რომ რამდენადაც (13,9) ფორმულით განსაზღვრული R კომპონენტები არ წარმოადგენენ რაიმე 4-ვექტორის კომპონენტებს, ამიტომ სხვა ათვლის სისტემაში გადასვლისას ინერციის ცენტრის კოორდინატები არ გარდაიქმნებიან კოორდინატთა გარდაქმნის ჩვეულებრივი ფორმულებით. თუ ყველა ნაწილაკის სიჩქარე c -ზე გაცილებით ნაკლებია, მაშინ დაახლოვებით შეიძლება დაუშვათ, რომ $\mathcal{E} = mc^2$, და (13,8) გადადის ინერციის ცენტრისათვის ცნობილ გამოსახულებაში.

მ უ ხ ზ ი ვ ე ლ შ ი

§ 14. ველის ოთხგანსწორებისათვის პოტენციალი

ნაწილაკთა ერთიმეორესთან ურთიერთმოქმედება შეიძლება აღწეროს ველის ცნების საშუალებით. სახელდობრ, ნაცვლად იმისა, რომ ვილაპარაკოთ ერთი ნაწილაკის მეორეზე მოქმედების შესახებ, შეიძლება ვთქვათ, რომ ნაწილაკი თავის გარშემო ქმნის ველს; ყოველ სხვა ნაწილაკზე, რომელიც ამ ველში იმყოფება, მოქმედობს რაღაც ძალაქ კლასიკურ მექანიკაში ველი მხოლოდ ფიზიკური მოვლენის—ნაწილაკთა ურთიერთმოქმედების აღწერის ერთგვარ საშუალებას წარმოადგენს. ფარდობითობის თეორიაში კი, ურთიერთმოქმედების გავრცელების სიჩქარის სასრულობის გამო, საქმე არსებითად იცვლება. მოცემულ მომენტში ნაწილაკებზე მოქმედი ძალები არ განისაზღვრებიან მათი მდებარეობით ამ მომენტში. ერთი რომელიმე ნაწილაკის მდებარეობის შეცვლა მხოლოდ დროს გარკვეული შუალედის შემდეგ მოახდენს გავლენას სხვა ნაწილაკებზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ ველი თავისთავად ფიზიკური რეალობად ხდება. ჩვენ არ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ ერთიმეორიდან რაღაც მანძილზე ნაწილაკთა უშუალო ურთიერთმოქმედებაზე. ყოველ მომენტში ურთიერთმოქმედება შეიძლება წარმოებდეს მხოლოდ სივრცის მეზობელ წერტილებს შორის (ახლომოქმედება). ამიტომ ჩვენ უნდა ვილაპარაკოთ ერთი ნაწილაკის ურთიერთმოქმედებაზე ველთან და ველის შემდგომ ურთიერთმოქმედებაზე მეორე ნაწილაკთან.

ცნობილია, რომ არსებობს ველის ორი სახე: გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური. გრავიტაციულ ველთა შესწავლას დათმობილი აქვს IX — X თავები. დანარჩენ თავებში ჩვენ მხოლოდ ელექტრომაგნიტურ ველებს განვიხილავთ.

მოცემული ელექტრომაგნიტური ველის ურთიერთმოქმედება რაღაც ნაწილაკთან განისაზღვრება ამ ნაწილაკის დამახასიათებელი ერთი სიდიდით. ამ სიდიდეს ნაწილაკის მუხტი ეწოდება. ველის ურთიერთმოქმედება ნაწილაკთან მისი მუხტის პროპორციულია. მუხტი შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. კერძოდ იგი შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს. ამ შემთხვევაში დამუხტული ნაწილაკებისაგან განსხვავებით იტყვიან, რომ ნაწილაკი დაუმუხტავია: შევნიშნოთ, რომ სანამ ჩვენ არ გვაქვს უკვე ცნობილ სიდიდეებთან

მუხტის დამაკავშირებელი არავითარი ფორმულები, მუხტის გასაზომად ერთეული ნებისმიერად შეიძლება ავარჩიოთ.

როგორც § 9-ე ვნახეთ, თავისუფალი მატერიალური ნაწილაკისათვის მოქ-

მედება $S = -mc \int_a^b ds$. თუ ველში იმყოფება დამუხტული ნაწილაკი (ქვემოთ

ჩვენ მას ნარტივად მუხტს ვუწოდებთ), მაშინ ამ ინტეგრალს უნდა მიემატოს წევრი, რომელიც ნაწილაკის და ველის ურთიერთმოქმედებას აღწერს. ეს წევრი უნდა შეიცავდეს როგორც ნაწილაკის (კერძოდ მისი e მუხტის), ისე ველის დამახასიათებელ სიდიდეებს. აღმოჩნდა, რომ ელექტრომაგნიტური ველის დახასიათება შეიძლება რაღაც ოთხგანზომილებიანი A_i ვექტორით. რამდენადაც ერთადერთი სკალარი, რომელიც შეიძლება შევადგინოთ A_i და dx_i დიფერენციალურებისაგან არის მათი სკალარული ნამრავლი $A_i dx_i$, ამიტომ დამატებით წევრს უნდა ჰქონდეს სახე

$$- \frac{e}{c} \int_a^b A_i dx_i.$$

სინათლის სიჩქარე აქ ჩვენ შემოვიტანეთ მოხერხებულობის მიზნით; ინტეგრალის წინ ჩვენ შეგვიძლია არავითარი სხვა მუდმივი არ დავწეროთ, რამდენადაც მუხტის გასაზომი ერთეული ჯერ კიდევ დადგენილი არა გვაქვს. როგორც ახლახან იყო ნათქვამი, A_i ვექტორი ველს ახასიათებს; მისი კომპონენტები საზოგადოდ კოორდინატებისა და დროს ფუნქციებს წარმოადგენენ. A_i ვექტორი ველის 4-პოტენციალის სახელწოდებას ატარებს. ამგვარად ელექტრომაგნიტურ ველში ჰყოფ მუხტისათვის მოქმედებას აქვს სახე

$$S = \int_a^b \left(-mc ds + \frac{e}{c} A_i dx_i \right). \quad (14,1)$$

შევნიშნათ, რომ სანამ მუხტის ერთეულების შერჩევა ნებაყოფლობითია, A_i -ს გასაზომი ერთეულებიც ნებისმიერი რჩება.

A_i ვექტორის სამი სივრცული კომპონენტი ქმნის სამგანზომილებიან A ვექტორს, რომელსაც ველის ვექტორული პოტენციალი ეწოდება. A_i ვექტორის დროული კომპონენტი წარმოსახვითია, ე. ი. აქვს სახე $A_4 = i\phi$. ϕ არის სიდიდეს ველის სკალარული პოტენციალი ეწოდება. ამგვარად,

$$A_{1,2,3} = A_x, y, z, \quad A_4 = i\phi. \quad (14,2)$$

ამიტომ მოქმედების ინტეგრალი შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს

$$S = \int_a^b \left(-mc ds + \frac{e}{c} A dr - e\phi dt \right).$$

შემდეგ, $\frac{dr}{dt} = v$, სადაც v —ნაწილაკის სიჩქარის ვექტორია. ამიტომ მოქმედება მიიღებს სახეს

$$S = \int_{r_1}^{r_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\phi \right) dt. \quad (14,3)$$

ინტეგრალს ქვეშ მყოფი გამოსახულება წარმოადგენს ლაგრანჟის ფუნქციას ელექტრომაგნიტურ ველში მყოფ მუხტისათვის:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\phi. \quad (14,4)$$

ეს ფუნქცია თავისუფალი ნაწილაკისათვის (9,2) ლაგრანჟის ფუნქციისაგან განსხვავდება $\frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\phi$ წევრებით, რომლებიც აღწერენ მუხტის ურთიერთმოქმედებას ველთან.

§ 15. ველში მუხტის მოძრაობის განტოლებანი

ველში მყოფი მუხტი არა მხოლოდ ველის მხრიდან განიცდის ზემოქმედებას, არამედ თვითონაც ახდენს გავლენას ველზე და ცვლის მას. ამიტომ გარეშე ველში მოთავსებული მუხტი განიცდის, ზუსტად რომ ვთქვათ, მის მიერ უკვე შეცვლილი ველის ზემოქმედებას. მაგრამ თუ მუხტი ძალიან დიდი არ არის, მუხტის მოქმედება ველზე, ე. ი. მუხტით გამოწვეული ველის ცვლილება, შეიძლება უგულველყოთ. ამ შემთხვევაში, თუ განვიხილავთ მუხტის მოძრაობას მოცემულ ველში, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ თვით ველი არ არის დამოკიდებული მუხტის არც კოორდინატებზე და არც მის სიჩქარეზე. შემდეგში გამოჩვენებული იქნება ის ზუსტი პირობები (იხ. § 72), რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს მუხტი იმისათვის, რომ იგი აღნიშნული თვალსაზრისით მკირეღ ჩაითვალოს. ქვემოთ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ეს პირობები დაცულია.

ამგვარად, ჩვენ უნდა მოვნახოთ მოცემულ ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტის მოძრაობის განტოლებანი. ეს განტოლებები მოქმედების ინტეგრალთა ვარირებით მიიღება. მაშასადამე, მოძრაობის განტოლებანი ჩვეულებრივი ლაგრანჟის განტოლებები იქნებიან

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial r}, \quad (15,1)$$

სადაც L (14,4) ფორმულით განისაზღვრება.

$\frac{\partial L}{\partial v}$ წარმოებული არის ნაწილაკის განზოგადოებული იმპულსი. აღნიშნოთ იგი P . (14,4)-ის დახმარებით ვპოულობთ

$$P = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} A = p + \frac{e}{c} A. \quad (15,2)$$

აქ p -თი აღნიშნულია ნაწილაკის ჩვეულებრივი იმპულსი, რომელსაც ჩვენ უბრალოდ იმპულს ვუწოდებთ.

ლაგრანჟის განტოლებანი რომ დაეწეროს, ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ აგრეთვე $\frac{\partial L}{\partial r}$ წარმოებული. (14,4)-ს დახმარებით ვპოულობთ,

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \Delta L = \frac{e}{c} \text{grad } Av - e \text{grad } \varphi.$$

მაგრამ, ვექტორული ანალიზის ცნობილი ფორმულის თანახმად

$$\text{grad } ab = (a \nabla) b + (b \nabla) a + [b \text{ rot } a] + [a \text{ rot } b],$$

სადაც a და b — ნებისმიერი ორი ვექტორია. თუ ამ ფორმულას Av შიშართ გამოვიყენებთ და გავიხსენებთ, რომ r -ით დიფერენცირების დროს v რჩება მუდმივი, ვიპოვიტ

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{e}{c} (v \nabla) A + \frac{e}{c} [v \text{ rot } A] - e \text{grad } \varphi.$$

მაშასადამე, ლაგრანჟის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\frac{d}{dt} \left(p + \frac{e}{c} A \right) = \frac{e}{c} (v \nabla) A + \frac{e}{c} [v \text{ rot } A] - e \text{grad } \varphi.$$

მაგრამ $\frac{dA}{dt}$ სრული დიფერენციალი ორი ნაწილისაგან შედგება: დროს მი-

ხედვით ვექტორული პოტენციალის $\frac{\partial A}{\partial t}$ ცვლილებიდან სივრცის მოცემულ წერტილში და სივრცის ერთი წერტილიდან dr მანძილზე მეორე წერტილში გადასვლით გამოწვეული ცვლილებიდან. როგორც ვექტორული აღრიცხვიდან არის ცნობილი, ეს მეორე ნაწილი არის $(dr \nabla) A$. ამგვარად $\frac{dA}{dt}$ წარმოებულს აქვს სახე

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v \nabla) A.$$

თუ ამას წინა განტოლებაში ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - e \text{grad } \varphi + \frac{e}{c} [v \text{ rot } A]. \quad (15,3)$$

ეს არის ელექტრომაგნიტურ ველში ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება. მარცხნივ დგას ნაწილაკის იმპულსის წარმოებული დროთი. მაშასადამე (15,3) მარჯვენა ნაწილში მდგომი გამოსახულება არის ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტზე მოქმედი ძალა. ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს ძალა ორი ნაწილისაგან შედგება. პირველი ნაწილი [(15,3) მარჯვენა ნაწილის პირველი და მეორე წევრი] არ არის დამოკიდებული ნაწილაკის სიჩქარეზე. მეორე ნაწილი (მესამე წევრი) დამოკიდებულია ამ სიჩქარეზე, სახელდობრ, იგი სიჩქარის პროპორციულია და მის პერპენდიკულარული მიმართულება აქვს.

პირველი გვარის ძალას, ერთეულოვან მუხტთან შეფარდებულს, ელექტრული ველის დაძაბულობას უწოდებენ; იგი E -თი აღვნიშნოთ. ამრიგად, განმარტების თანახმად

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (15,4)$$

ერთეულოვან მუხტზე მოქმედი მეორე გვარის ძალაში, სიჩქარესთან, ან უფრო ზუსტად, v/c შეფარდებასთან მდგომ მამრავლს მაგნიტური ველის დაძაბულობა ეწოდება; აღვნიშნოთ იგი H -ით. ამრიგად, განმარტების თანახმად

$$H = \text{rot } A. \quad (15,5)$$

თუ ელექტრომაგნიტურ ველში $E \neq 0$, ხოლო $H = 0$, მაშინ ლაპარაკობენ ელექტრულ ველზე; თუ $E = 0$, ხოლო $H \neq 0$, მაშინ ველს მაგნიტურს უწოდებენ. ზოგად შემთხვევაში ელექტრომაგნიტური ველი წარმოადგენს ელექტრული და მაგნიტური ველების ზედღებას.

ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტის მოძრაობის განტოლება შეიძლება ახლა შემდგენიარად დაიწეროს

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{e}{c} [vH]. \quad (15,6)$$

მარჯვნივ მდგომ გამოსახულებას ლორენცის ძალა ეწოდება. მისი პირველი ნაწილი წარმოადგენს ძალას, რომლითაც ელექტრული ველი მოქმედობს მუხტზე; იგი დამოუკიდებელია მუხტის სიჩქარეზე და E ველის დაძაბულობის გასწვრივ არის მიმართული. მეორე ნაწილი არის ძალა, რომლითაც მაგნიტური ველი მოქმედებს მუხტზე; იგი მუხტის სიჩქარის პროპორციულია და მიმართულია ამ სიჩქარისა და H მაგნიტური ველის მიმართულების პერპენდიკულარულად.

სინათლის სიჩქარესთან შედარებით მცირე სიჩქარეთათვის (14,4) ლაგრანჯის ფუნქცია შემდეგ სახეს ღებულობს

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} Av - e\varphi. \quad (15,7)$$

ამ შემთხვევაში p იმპულსი მიახლოებით თავის კლასიკურ გამოსახულებას mv უდრის, და (15,6) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$m \frac{dv}{dt} = eE + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]. \quad (15,8)$$

ამგვარად, ჩვენ ველში შეგვიძლია განვიხილოთ ისეთ ნაწილაკთა მოძრაობაც, რომლებიც კლასიკურ მექანიკას ემორჩილებიან (ე. ი. რომელთა კინეტიკურის ენერგია არის $mv^2/2$, იმპულსი კი mv).

გამოვიყენოთ აგრეთვე განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს ნაწილაკის კინეტიკური ენერგიის ცვლილებას დროში, ე. ი. წარმოებულს

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$d\mathcal{E} = \mathbf{v} dp,$$

საიდანაც

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{v} \frac{dp}{dt};$$

თუ $\frac{dp}{dt}$ -ს ჩავსვამთ (15,6) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = eE\mathbf{v} \quad (15,9)$$

(თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $[\mathbf{vH}]\mathbf{v} = [\mathbf{v}\mathbf{v}]\mathbf{H} = 0$).

კინეტიკური ენერგიის ცვლილება დროში წარმოადგენს მუშაობას, რომელსაც ველი ასრულებს ნაწილაკზე (ერთეულ დროში). (15,9)-ან ჩანს, რომ ეს მუშაობა მუხტის სიჩქარისა და იმ ძალის ნამრავლის ტოლია, რომლითაც მასზე ელექტრული ველი მოქმედებს. ველის მუშაობა dt დროში, ე. ი. მუხტის $d\mathbf{r}$ მანძილზე გადანაცვლებისას, ცხადია, უდრის $eE d\mathbf{r}$.

ხაზი გავუსვამთ იმ გარემოებას, რომ მუხტზე მუშაობას მხოლოდ ელექტრული ველი ასრულებს. მაგნიტური ველი მასში მოძრავ მუხტზე მუშაობას არ ასრულებს. უკანასკნელი იმასთან არის დაკავშირებული, რომ ძალა, რომლითაც მაგნიტური ველი მოქმედებს მუხტზე, მუდამ პერპენდიკულარულია მუხტის სიჩქარისა.



§ 16. ზრადინეტული ინვარიანტობა

განვიხილოთ ახლა საკითხი, იმის შესახებ, თუ რამდენად ცალსახად არის განსაზღვრული ველის პოტენციალები. უწინარეს ყოვლისა, მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ველი იმ მოქმედებით ხასიათდება, რომელსაც იგი

მასში მოთავსებულ მუხტზე, უფრო ზუსტად, ამ მუხტების მოძრაობაზე ახდენს. მაგრამ (15,6) მოძრაობის განტოლებებში შედის არა პოტენციალები, არამედ E და H ველის, დაძაბულობანი. ამიტომ ორი ველი ფიზიკურად იგივეურია, თუ ისინი ერთიდაიგივე E და H ვექტორებით ხასიათდებიან.

თუ მოცემულია A ფ პოტენციალები, მაშინ (15,4) და (15,5) თანახმად E და H და, მაშასადამე, ველიც საესებით ცალსახად არის განსაზღვრული. მაგრამ ერთი და იგივე ველს შეიძლება სხვადასხვა პოტენციალი შეესაბამებოდეს. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, პოტენციალის A_k კომპონენტებს დავუმატოთ $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ სიდიდეები, სადაც f კოორდინატებისა და დროს ნებისმიერი ფუნქციაა. მაშინ A_k პოტენციალი გახდება

$$A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (16,1)$$

ასეთი შეცვლის შედეგად (14,1) მოქმედების ინტეგრალში გაჩნდება დამატებითი წევრი

$$\frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = \frac{e}{c} df.$$

მაგრამ, როგორც ცნობილია¹, თუ მოქმედების ინტეგრალს ქვეშა გამოსახულებას დაემატება სრული დიფერენციალი, ეს ვერ მოახდენს გავლენას მოძრაობის განტოლებებზე.

თუ ოთხგანზომილებიანი პოტენციალის ნაცვლად ვექტორულ და სკალარულ პოტენციალებს შემოვიღებთ, ხოლო x_i კოორდინატების ნაცვლად — x, y, z, t , მაშინ ოთხი (16,1) ტოლობა შეიძლება შემდეგი სახით დავწეროთ

$$A' = A + grad f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (16,2)$$

ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ (15,4) და (15,5) ტოლობებით განსაზღვრული ელექტრული და მაგნიტური ველები მართლაც არ შეიცვლებიან, თუ A და φ პოტენციალთა ნაცვლად (16,2)-ის თანახმად განსაზღვრულ A' და φ' პოტენციალებს ჩაესვათ. ამგვარად პოტენციალთა (16,1) გარდაქმნა ევლს არ ცვლის. ამიტომ პოტენციალები ცალსახად განსაზღვრული არ არიან — ვექტორული პოტენციალი განსაზღვრულია ნებისმიერი ფუნქციის გრადიენტის სიზუსტით და სკალარული — იმავე ფუნქციის დროთი წარმოებულამდე სიზუსტით.

კერძოდ, ცხადია, რომ ვექტორულ პოტენციალს შეიძლება მიემატოს ნებისმიერად მუდმივი ვექტორი, ხოლო სკალარულ პოტენციალს — ნებისმიერი მუდმივი. ეს უშუალოდაც იქიდან ჩანს, რომ E და H განსაზღვრაში A და φ სიდიდეთა მხოლოდ წარმოებულები შედის, ამიტომ თუ სიდიდეებს მუდმივებს მივუმატებთ, ეს ველის დაძაბულობაზე გავლენას ვერ მოახდენს.

¹ რაღაც ფუნქციის სრული დიფერენციალის ინტეგრაციისას მიიღება ინტეგრაციის საზღვრებზე ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა მუდმივი სხვაობა. ინტეგრალის ვარიაციის დროს ეს მუდმივი ისპობა.

ფიზიკური აზრი მხოლოდ იმ სიდიდეებს აქვს, რომლებიც პოტენციალთა (16,2) გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტულია; კერძოდ, ყველა განტოლება ინვარიანტული უნდა იყოს ამ გარდაქმნის მიმართ. ამ ინვარიანტობას ჩვენ გრადიენტულს ვუწოდებთ¹ (გერმანულად მას უწოდებენ *Eichinvarianz*, ინგლისურად — *gauge invariance*).

პოტენციალთა აღწერილი არააცალსახობა ყოველთვის გვძლევს მათი ისე შერჩევის საშუალებას, რომ მათ დააკმაყოფილონ ერთი ჩვენს მიერ არჩეული დამატებითი პირობა (მათ შორის დამოკიდებულება). ხაზს ვუსვამთ, რომ სწორედ ერთი პირობა, ვინაიდან ჩვენ (16,2)-ში ნებისმიერად მხოლოდ ერთი ფუნქციის არჩევა შეგვიძლია. კერძოდ, ველის პოტენციალი ყოველთვის შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ φ სკალარული პოტენციალი ნულის ტოლი იყოს. ვექტორული პოტენციალის ნულის ტოლად გარდაქცევა, თუ იგი ნულის ტოლი არ არის, ზოგადად რომ ვთქვათ, შეუძლებელია, ვინაიდან პირობა $A = 0$ წარმოადგენს სამ დამატებით პირობას (A -ს სამი კომპონენტისათვის).

1

§ 17. მუდმივი ელემტარმაგნიტური ველი

მუდმივ ელექტრომაგნიტურ ველს ჩვენ ისეთ ველს ვუწოდებთ, რომელიც დროზე არ არის დამოკიდებული. ცხადია, მუდმივი ველების პოტენციალები ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ ისინი მხოლოდ კოორდინატებზე იყვნენ დამოკიდებული და არა დროზე. (15,5)-ის თანახმად მუდმივი მაგნიტური ველი წინანდებურად უდრის $H = \text{rot } A$. (15,4)-ის თანახმად მუდმივი ელექტრული ველი უდრის

$$E = -\text{grad } \varphi. \quad (17,1)$$

ამგვარად, მუდმივი ელექტრული ველი მხოლოდ სკალარული პოტენციალით განისაზღვრება, ხოლო მაგნიტური კი — ვექტორული პოტენციალით.

წინა პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, რომ ველის პოტენციალები არააცალსახად არის განსაზღვრული. მაგრამ ადვილად შეიძლება დავარწმუნდეთ იმაში, რომ თუ მუდმივ ელექტრულ ველს დროზე დამოუკიდებელი პოტენციალების საშუალებით აღვწერთ, მაშინ სკალარულ პოტენციალს შეიძლება დაემატოს ველის შეუსვლელად მხოლოდ ნებისმიერი მუდმივი (კოორდინატებზე და დროზე დამოუკიდებელი). ჩვეულებრივ φ -ს შეზღუდავენ კიდევ იმ დამატებითი მოთხოვნით, რომ მას სივრცის გარკვეულ წერტილში გარკვეული მნიშვნელობა ჰქონდეს. უფრო ხშირად φ -ს ისე შეარჩევენ, რომ იგი უსასრულობაში ნულის ტოლი იყოს. მაშინ ხსენებული ნებისმიერი მუდმივიც განსაზღვრული ხდება, და მუდმივი ველის სკალარული პოტენციალი, ამგვარად, სავსებით ცალსახა იქნება.

ვექტორული პოტენციალი, პირიქით, მუდმივი ელექტრული ველის შემთხვევაშიც კი წინანდებურად არააცალსახა რჩება. სახელდობრ, მას შეიძლება დაემატოს კოორდინატთა ნებისმიერი ფუნქციის გრადიენტი.

¹ ეს სახელწოდება შემოტანილი იყო ვ. ა. ფოკის მიერ.

განესაზღვროთ, თუ რას უდრის მუხტის ენერგია მუდმივ ელექტრომაგნიტურ ველში. თუ ველი მუდმივია, მაშინ ლაგრანჟის ფუნქციაც მუხტისათვის ცხადად დროზე არ არის დამოკიდებული. როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევაში ენერგია შეინახება. მუხტის ენერგია მოიპოება ცნობილი ფორმულით

$$\mathcal{E} = v \frac{\partial L}{\partial v} - L,$$

სადაც L -თვის ჩვენ შეიძლება ავიღოთ (14,4) გამოსახულება. ამ გამოსახულები) დახმარებით ველში მუხტის სრული \mathcal{E} ენერგიისათვის ვპოულობთ

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \quad (17,2)$$

ამგვარად, ველის არსებობის გამო ნაწილაკის ენერგიის ემატება წევრი $e\phi$ — ველში მუხტის პოტენციალური ენერგია. აღენიშნოთ ის არსებითი გარემოება, რომ ენერგია მხოლოდ სკალარულ პოტენციალზეა დამოკიდებული და არა ვექტორულზე. $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ ფორმულასთან და (17,1)-თან დაკავშირებით ეს იმას ნიშნავს, რომ მაგნიტური ველი არ ახდენს გავლენას მუხტის ენერგიაზე. ნაწილაკის ენერგია მხოლოდ ელექტრულ ველს შეუძლია შეცვალოს. ეს იმასთან არის დაკავშირებული, რომ, როგორც § 15 ბოლოს იყო აღნიშნული, მაგნიტური ველი, ელექტრულის საწინააღმდეგოდ, მუხტზე არ აწარმოებს მუშაობას.

თუ სივრცის ყოველ წერტილში ველის დაძაბულობა ერთიდაიგივეა, მაშინ ველს ერთგვაროვანს უწოდებენ. ერთგვაროვანი ელექტრული ველის სკალარული პოტენციალი გამოვსახოთ E ველის დაძაბულობით. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ერთგვაროვანი ველისთვის

$$\phi = -Er, \quad (17,3)$$

ვინაიდან, რამდენადაც $E = \text{const.}$, $-\text{grad } \phi = \text{grad } (Er) = (E\nabla)r + [E \text{ rot } r] = E$ (გავიხსენოთ, რომ $\text{rot } r = 0$).

გამოვსახოთ ახლა მუდმივი მაგნიტური ველის ვექტორული პოტენციალი ამ ველის \mathbf{H} დაძაბულობით. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ \mathbf{A} პოტენციალი შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}r]. \quad (17,4)$$

მართლაც, თუ გავიხსენებთ, რომ $\mathbf{H} = \text{const.}$ ვექტორული აღრიცხვის ცნობილი ფორმულების დახმარებით ვიპოვიოთ

$$\text{rot } [\mathbf{H}r] = \mathbf{H} \text{ div } r - (\mathbf{H}\nabla)r = 2\mathbf{H}$$

(გავიხსენოთ, რომ $\text{div } r = 3$).

ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის ვექტორული პოტენციალი სხვაგვარადაც შეიძლება შევარჩიოთ, მაგალითად

$$A_z = -Hy, \quad A_x = A_r = 0 \quad (17,5)$$

(Z ღერძი H დაძაბულობის გასწვრივ არის არჩეული). ადვილად დავრწმუნდებით, რომ A -ს ასე არჩევის შემთხვევაშიაც ადგილი ექნება ტოლობას $H = rot A$.

თუ მუხტის მოძრაობის სიჩქარე c -თან შედარებით მცირეა, მაშინ მისი ლაგრანჟის ფუნქცია არის

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} Av - e\varphi$$

[იხ. (15,7)]. დაუშვათ, რომ მუხტი ერთგვაროვან მუდმივ მაგნიტურ ველშია მოთავსებული. მაშინ $\varphi = 0$, ხოლო A (17,4) ტოლობით განისაზღვრება. ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c} [Hr]v. \quad (17,6)$$

თუ უძრავ კოორდინატა სისტემიდან გადავალთ თანაბრად მბრუნავ სისტემაზე, მაშინ ნაწილაკის v' სიჩქარე ახალ სისტემაში დაკავშირებულია მის v სიჩქარესთან ძველ სისტემაში შემდეგი ტოლობის საშუალებით

$$v = v' + [\Omega r],$$

სადაც r — ნაწილაკის რადიუს ვექტორია, ხოლო Ω — მბრუნავი სისტემის კუთხური სიჩქარე. კოორდინატა ასეთ სისტემაში ლაგრანჟის ფუნქცია ნაწილაკისათვის არის

$$L = \frac{mv'^2}{2} = \frac{m}{2} (v - [\Omega r])^2.$$

თუ აქ მივიღებთ, რომ

$$\Omega = -\frac{e}{2mc} H, \quad (17,7)$$

მაშინ საკმაოდ სუსტი მაგნიტური ველისათვის (როცა H^2 შეიძლება უგულველვყოთ) ეს ლაგრანჟის ფუნქცია თანხვედბა (17,6)-ს. ამგვარად ჩვენ იმ დასკვნამდე მივდივართ, რომ ნაწილაკის ყოფაქცევა სუსტ მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში იგივეურია მისი ყოფაქცევისა მბრუნავ კოორტინატა სისტემაში შევნიშნოთ, რომ ამ სისტემის $\Omega = eH/2mc$ კუთხურ სიჩქარეს ლარმორის სიხშირე ეწოდება.

§ 18. მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან ელემტარულ ველში

განვიხილოთ e მუხტის მოძრაობა E მუდმივ ერთგვაროვან ელექტრულ ველში. ველის მიმართულება ავირჩიოთ X ღერძად. თუ საწყისი სიჩქარე (სიჩქარე დროს $t = 0$ მომენტში) არის v_0 , მაშინ ცხადია, მუხტი ყოველთვის იმოძრაეებს სიბრტყეში, რომელიც E და v_0 ვექტორებზე ვადის. ეს სიბრტყე ავარჩიოთ XY სიბრტყედ. მაშინ (15,6) მოძრაობის განტოლებანი, ე. ი.

$$p = eE,$$

(p -ს თავზე წერტილი t დროთი განწარმოებას ნიშნავს) შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\frac{dp_x}{dt} = cE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0;$$

აქედან

$$p_x = cEt, \quad p_y = p_0. \quad (18,1)$$

დროს ათელის საწყისად (ე. ი. $t = 0$ მომენტად) ჩვენ ავარჩიეთ ის მომენტი, როცა $p_x = 0$; p_0 ნაწილაკის იმპულსია ამ მომენტში.

ნაწილაკის \mathcal{E} კინეტიკური ენერგია (ენერგია ველში პოტენციალური ენერგიის გამოკლებით) (10,13) თანახმად, იქნება $\mathcal{E} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$. თუ აქ (18,1) ჩავსვამთ, ვიპოვით ჩვენ შემთხვევაში

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (cEt)^2}.$$

(10,5)-ს თანახმად ნაწილაკის სიჩქარე $v = \frac{pc^2}{\mathcal{E}}$. მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში

$v_x = \dot{x}$ სიჩქარისათვის გვაქვს

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2cEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cEt)^2}},$$

სადაც $\mathcal{E}_0 = c\sqrt{m^2c^2 + p_0^2}$ არის ენერგია $t = 0$ მომენტში. ინტეგრირებით ვპოულობთ

$$x = \frac{1}{cE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cEt)^2}. \quad (18,2)$$

ინტეგრირების მუდმივს ნულის ტოლს ვთვლით.

y -ის განსაზღვრისათვის გვაქვს

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_0c^2}{\mathcal{E}} = \frac{p_0c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cEt)^2}},$$

საიდანაც

$$y = \frac{p_0c}{cE} \operatorname{arcsinh} \frac{cEt}{\mathcal{E}_0}. \quad (18,3)$$

ტრანექტორის განტოლების მოსახაზავად (18,3)-დან t გამოვსახოთ y -ით და ჩავსვათ (18,2)-ში. ეს ნოვეცემს:

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{cE} \operatorname{ch} \frac{cEy}{p_0c}. \quad (18,4)$$

ამგვარად, ერთგვაროვან ელექტრულ ველში მუხტი ჯაქე-ხაზის გასწვრივ მოძრაობს.

თუ ნაწილაკის სიჩქარე $v \ll c$, მაშინ შეიძლება დაეშვათ, რომ $p_0 = mv_0$, $\mathcal{E}_0 = mc^2$ და (18,4)-ში $ch \frac{eEy}{p_0 c}$ შეიძლება დაეშალოს $\frac{1}{c}$ ხარისხების მწკრივად. მაშინ მაღალი რიგის წევრებამდე სიზუსტით ვღებულობთ:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2, \quad (18,5)$$

ე. ი. მუხტი პარაბოლზე მოძრაობს. ეს შედეგი კარგად არის ცნობილი კლასიკური მექანიკიდან.

1 § 19. მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში

განვიხილოთ ეხლა e მუხტის მოძრაობა H ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში. ველის მიმართულება Z ღერძად ავირჩიოთ. მოძრაობის განტოლებას

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}H]$$

ჩვენ გადავწერთ სხვა სახით, თუ იმპულსის ნაცვლად (10,6) თანახმად ჩავსვათ

$$\mathbf{p} = -\frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

სადაც \mathcal{E} — ნაწილაკის ენერჯიაა, რომელიც, როგორც § 17-დან ვიცით, მუდმივია მაგნიტურ ველში. მაშინ მოძრაობის განტოლებანი ღებულობენ სახეს

$$\mathcal{E} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}H], \quad (19,1)$$

ან, კომპონენტებში,

$$\dot{v}_x = wv_y, \quad \dot{v}_y = -wv_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad (19,2)$$

სადაც ჩვენ შემოვიღეთ აღნიშვნა

$$w = \frac{eH}{\mathcal{E}}. \quad (19,3)$$

(19,2) მეორე განტოლება გავამრავლოთ i -ზე და შევკრიბოთ პირველთან. ჩვენ ვპოულობთ

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -iw(v_x + iv_y),$$

საიდანაც

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

სადაც a — კომპლექსური მუდმივია. იგი შემდეგი სახით შეიძლება ჩავწეროთ $a = v_0 e^{-i\alpha}$, სადაც v_0 და α ნამდვილია. მაშინ

$$v_x + iv_y = v_0 e^{-i(\omega t + \alpha)}$$

და თუ განვაცალკავებთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, ვიპოვით

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (19,4)$$

v_{0z} და α მუდმივები საწყისი პირობებით განისაზღვრება, α საწყისი ფაზა; რაც შეეხება v_{0z} , (19,4)-დან ჩანს, რომ

$$v_{0z} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

ე. ი. v_{0z} არის ნაწილაკის სიჩქარე XY სიბრტყეში, რომელიც მუდმივი რჩება მოძრაობის დროს.

თუ კიდევ ერთხელ მოვახდენთ ინტეგრებას, (19,4)-დან მივიღებთ

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha), \quad (19,5)$$

სადაც

$$r = \frac{v_{0z}}{\omega} = \frac{v_{0z} \hbar}{e c H} = \frac{e \hbar}{e H} \quad (19,6)$$

p_z — იმპულსის პროექცია XY სიბრტყეზე). შესაბამე (19,2) განტოლებიდან ეპო ულობით $v_x = v_{0x}$ და

$$z = z_0 + v_{0z} t; \quad (19,7)$$

x_0 , y_0 და z_0 ნაწილაკის საწყისი კოორდინატებია.

(19,5) და (19,7)-დან ჩანს, რომ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში ნაწილაკი ხრახნულ ხაზზე მოძრაობს, რომლის ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივაა მიმართული და r რადიუსი (19,6)-ით განისაზღვრება. ამასთანავე ნაწილაკის სიჩქარე მუდმივია. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $v_{0z} = 0$, ე. ი. როცა ნაწილაკს ველის გასწვრივი სიჩქარე არა აქვს, იგი წრეხაზზე მოძრაობს ველისადმი მართობულ სიბრტყეში.

როგორც ფორმულებიდან ჩანს, ა სიდიდე ველის მართობულ სიბრტყეში ელექტრონის ბრუნვის ციკლური სიხშირეა.

თუ ნაწილაკის სიჩქარე მცირეა, შიახლოვებით ჩვენ შეიძლება დავუშვათ, რომ $\hbar = mc^2$. მაშინ ა სიხშირე ხდება

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \quad (19,8)$$

იგი გაორკეცებულ (17,7) ლარმორის სიხშირეს უდრის.

ა მ ო ც ა ნ ა

განესაზღვროთ იმ დამუხტული სიერცული ოსცილატორის რხევის სიხშირე, რომელიც მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში იმყოფება; ოსცილატორის რხევის საკუთარი სიხშირე (სიხშირე ველის არარსებობისას) არის ω_0 .

ამოხსნა. Z ღერძის გასწვრივ მიმართულ მაგნიტურ ველში ოსცილატორის იძულებითი რხევის განტოლებები იქნება:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc} \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

თუ მეორე განტოლებას 1-ზე გავამრავლებთ და პირველთან შევკრებთ, ვიპოვიო

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2 \zeta = -i \frac{eH}{mc} \dot{\zeta},$$

სადაც $\zeta = x + iy$. აქედან ვპოულობთ, რომ ველისადმი მართობულ სიბრტყეში ოსცილაციონის რხევის სიხშირები უდრის

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{eH}{me} \right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}.$$

• თუ ველი H სუსტია, მაშინ ეს ფორმულა შემდეგ სახეში გადადის

$$\omega_0 \pm \frac{eH}{2mc}.$$

ველის გასწვრივი რხევები უცვლელი რჩება.

§ 20. მუხტის მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან ელექტრულ და მაგნიტურ ველაგში

დასასრულს, განვიხილოთ მუხტის მოძრაობა ერთგვაროვანი და მუდმივი ელექტრული და მაგნიტური ველების ერთდროული არსებობის შემთხვევაში. ჩვენ იმ შემთხვევით: შემოვიხილავთ, როცა ნაწილაკის სიჩქარე $v \ll c$, და ამიტომ მისი იმპულსი $p = mv$.

H-ის მიმართულება ავირჩიოთ Z ღერძად, ხოლო H და E ვექტორებზე გამავალი სიბრტყე — YZ სიბრტყედ. მაშინ მოძრაობის განტოლებანი

$$m \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

შემდეგი სახით დაიწერება

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= \frac{e}{c} \dot{y}H, \\ m \ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c} \dot{x}H, \\ m \ddot{z} &= eE_z. \end{aligned} \right\} (20,1)$$

ამ განტოლებათაგან მესამე გვიჩვენებს, რომ მუხტი Z ღერძის გასწვრივ მოძრაობს თანაბრად-აჩქარებულად, ე. ი.

$$z = \frac{eE_z}{2m} t^2 + v_0 t. \quad (20,2)$$

თუ (20,1) განტოლებებიდან მეორეს გავამრავლებთ i -ზე და შევეკრებთ პირველთან, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} + iy) + i\omega(\dot{x} + iy) = i \frac{c}{m} E_y$$

($\omega = \frac{cH}{mc}$). ამ განტოლების ინტეგრალი, რომელშიაც $(\dot{x} + iy)$ განიხილება როგორც უცნობი, უღრის უმარჯვენაწევროდ ამ განტოლების ინტეგრალი-სა და მარჯვენა წევრით იმავე განტოლების კერძო ინტეგრალის ჯამს. პირველი მათგანი არის $ae^{-i\omega t}$, მეორე უღრის $\frac{cE_y}{m\omega} = \frac{cE_y}{H}$. ამგვარად,

$$\dot{x} + iy = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}$$

a მუდმივი საზოგადოდ კომპლექსურია. თუ მას დაეწერთ $a = be^{i\alpha}$ სახით ნამდვილი b -თი და α -თი, მაშინ ჩვენ დავინახავთ, რომ რამდენადაც a მრავლდება $e^{-i\omega t}$ -ზე, დროს ათელის საწყისის შესაბამის შერჩევით α ფაზას შეიძლება ნებისმიერი მნიშვნელობა მივაკუთვნოთ. ავარჩიოთ იგი ისე, რომ a იყოს ნამდვილი. მაშინ, თუ $\dot{x} + iy$ გამოსახულებაში ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს განვაცალკავებთ, მივიღებთ

$$\dot{x} = a \cos \omega t + c \frac{E_y}{H}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t$$

დროს $t = 0$ მომენტში სიჩქარე მიმართულია X ღერძის გასწვრივ; მისი მნიშვნელობა ამ მომენტში v_0 -ით აღვნიშნოთ. მაშინ გვაქვს

$$a = v_0 - \frac{cE_y}{H}$$

ასე რომ

$$\dot{x} = \left(v_0 - \frac{cE_y}{H} \right) \cos \omega t + \frac{cE_y}{H}, \quad \dot{y} = - \left(v_0 - \frac{cE_y}{H} \right) \sin \omega t. \quad (20,3)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ნაწილაკის სიჩქარე დროს პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს. სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობას ადვილად მოვნახავთ, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ საშუალო მნიშვნელობანი $\overline{\cos \omega t} = \overline{\sin \omega t} = 0$:

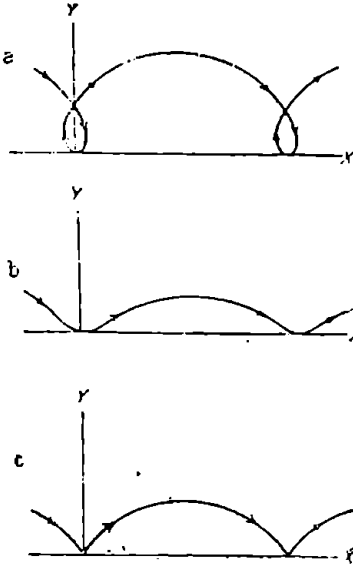
$$\overline{\dot{x}} = \frac{cE_y}{H}, \quad \overline{\dot{y}} = 0. \quad (20,4)$$

ამგვარად, Y ღერძის მიმართულებით საშუალო სიჩქარე ნულის ტოლია, ხოლო საშუალო სიჩქარე X ღერძის გასწვრივ, ე. ი. ელექტრული და მაგნიტური ველების პერპენდიკულური მიმართულებით, ნულისაგან განსხვავდება. ამ პარაგრაფის ყველა ფორმულის გამოყენება შეიძლება, თუ ნაწილაკის სიჩქარე მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით; ჩვენ ვხედავთ [(20,3)-დან და (20,4)-

დან], რომ ამისათვის საჭიროა, კერძოდ, რომ ელექტრული და მაგნიტური ველები აკმაყოფილებდნენ პირობას

$$\frac{E_y}{H} \ll 1, \quad (20,5)$$

E_y და H აბსოლუტური მნიშვნელობა ან კი შეიძლება ნებისმიერი იყოს.



ნახ. 5

თუ სიჩქარე $v_0 = 0$; მაშინ (20,6) გადადის

$$x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \sin \omega t), \quad y = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos \omega t), \quad (20,7)$$

ე. ი. ტრაექტორიის პროექცია XY სიბრტყეზე ციკლოიდი იქნება (სურ. 5, c).

§ 21. ალამბრომაგნიტური ველის თანხორი

სამგანზომილებიანი სახით დაწერილ ლაგრანჯის (14,4) ფუნქციის საშუალებით § 15-ში ჩვენ გამოვიყვანეთ ველში მუხტის მოძრაობის განტოლებანი. გამოვიყვანოთ ახლა იგივე განტოლებანი უშუალოდ ოთხგანზომილებიან აღნიშვნებში დაწერილ (14,1) მოქმედებიდან.

უმცირესი მოქმედების პრინციპის თანახმად

$$\delta S = \delta \int \left(-mc \, ds + \frac{e}{c} A_i dx_i \right) = 0. \quad (21,1)$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $ds = \sqrt{-dx_i^2}$, ვიპოვიტ (შემდეგში სიმოკლისათვის ინტეგრების საზღვრებს გამოვტოვებთ):

$$\delta S = \int \left[-mc \delta ds + \frac{c}{c} \delta(A_i dx_i) \right] = \int \left(mc \frac{dx_i \delta dx_i}{ds} + \frac{c}{c} A_i \delta dx_i + \frac{c}{c} \delta A_i dx_i \right) = \int \left(mc \frac{dx_i \delta dx_i}{ds} + \frac{c}{c} A_i \delta dx_i + \frac{c}{c} \delta A_i dx_i \right) = 0.$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში პირველი ორი წევრის ნაწილობითი ინტეგრება მოვახდინოთ. გარდა ამისა პირველ წევრში ჩავსვათ $\frac{dx_i}{ds} = u_i$, სადა u_i 4-სიჩქარის კომპონენტებია. მაშინ

$$\int \left(-mcd u_i \delta x_i - \frac{c}{c} \delta x_i d A_i + \frac{c}{c} \delta A_i dx_i \right) + \left| \left(mc u_i + \frac{c}{c} A_i \right) \delta x_i \right| = 0.$$

ამ ტოლობის მეორე წევრი ნულის ტოლია, ვინაიდან ინტეგრალის ვარიირება მოცემულ საზღვრებში ხდება, ე. ი. საზღვრებზე $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$. შემდეგ:

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k, \quad d A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k,$$

და ამიტომ:

$$\int \left(-mcd u_i \delta x_i - \frac{c}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k dx_k + \frac{c}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k \delta x_k \right) = 0.$$

პირველ წევრში დავწეროთ $du_i = \frac{du_i}{ds} ds$; ხოლო მეორეში და მესამეში $dx_k = u_k ds$. გარდა ამისა, მესამე წევრში i და k ინდექსებს ადგილები შეუცვალეთ (ეს არათერს შეცვლის, ვინაიდან i და k ინდექსების მიხედვით ხდება შეჯამება). მაშინ

$$\int \left[-mc \frac{du_i}{ds} + \frac{c}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) u_k \right] \delta x_i ds = 0.$$

δx_i ნებისმიერობის გამო აქედან გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლია, ე. ი.

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{c}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) u_k \quad (21,2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad (21,3)$$

F_{ik} თენზორს ელექტრომაგნიტური ველის თენზორი ეწოდება. მაშინ (21,2) მოძრაობის განტოლებანი მიიღებენ სახეს

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k. \quad (21,4)$$

ეს ოთხი განტოლება ($i = 1, 2, 3, 4$ მნიშვნელობათათვის) სწორედ წარმოადგენს ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტის მოძრაობის განტოლებებს ოთხგანზომილებიანი სახით.

F_{ik} თენზორის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$F_{ik} = -F_{ki}, \quad (21,5)$$

ე. ი. ელექტრომაგნიტური ველის თენზორი ანტისიმეტრიულია. ამიტომ $F_{ik} = 0$, როცა $i = k$.

თუ (21,3)-ში ჩავსვამთ $A_{1,2,3} = A_{x,y,z}$, $A_4 = i\varphi$, ადვილად მოენახავთ F_{ik} თენზორის ცალკეულ კომპონენტების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\begin{aligned} F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0, \\ F_{12} = -F_{21} = H_x, \quad F_{14} = -F_{41} = -iE_x, \\ F_{13} = -F_{31} = -H_y, \quad F_{24} = -F_{42} = -iE_y, \\ F_{23} = -F_{32} = H_z, \quad F_{34} = -F_{43} = -iE_z. \end{aligned}$$

ეს შეიძლება დავწეროთ ცხრილის სახით:

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & H_x & -H_y & -iE_x \\ -H_x & 0 & H_z & -iE_y \\ H_y & -H_z & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (21,6)$$

ამგვარად, ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობათა კომპონენტები წარმოადგენენ ელექტრომაგნიტური ველის ერთი 4-თენზორის კომპონენტებს.

(21,6)-დან ჩანს, რომ F_{ik} თენზორის სივრცული კომპონენტები (ე. ი. კომპონენტები $i, k = 1, 2, 3$) დაკავშირებულია მაგნიტურ ველთან. სახელდობრ, H მაგნიტური ველის კომპონენტები ქმნიან 2-რე რანგის სამგანზომილებიან ანტისიმეტრიულ თენზორს. როგორც ცნობილია, ეს იმას ნიშნავს, რომ H ვექტორი არის აქსიალური ვექტორი.

რაც შეეხება E ელექტრული ველის კომპონენტებს, ისინი F_{ik} -ის დროულ კომპონენტებს წარმოადგენენ (ერთერთ i ან k 4-ის ტოლია). ცხადია, E ვექტორი არის ჩვეულებრივი, ე. ი. პოლარული ვექტორი.

(21,6) და (7,2) დახმარებით ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ პირველი სამი (21,4) განტოლება იგივეურია (15,6) მოძრაობის განტოლებებისა, მეოთხე კი — (15,9) განტოლებისა. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ამის შესაბამისად მხოლოდ სამი მათგანია დამოუკიდებელი, თუ (21,4)-ის ორივე მხარეს u_i -ზე უშუალოდ გავამრავლებთ. მაშინ (7,6) და (21,5)-ის გამო განტოლების ორივე მხარე იგივეურად ნელის ტოლი გახდება.

1. განვსაზღვროთ პარალელურ ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში ისეთი მუხტის მოძრაობა, რომელიც სინათლის სიჩქარის შესადარი სიჩქარით მოძრაობს.

ამოხსნა. თუ Z ღერძს ველების მიმართულებით ავარჩევთ, (21,4) მოძრაობის განტოლებებს შემდეგი სახით მოენახავთ (შემოგვაქვს მუდმივი $\lambda = e/mc^2$):

$$\ddot{x} = \lambda H \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\lambda H \dot{x}, \quad \ddot{z} = c E \lambda t, \quad c \dot{t} = E \lambda z$$

(x, y, z და t ხეშთ აქ დასმული წერტილები s -ის მიმართ ვადიფერენციალებას აღნიშნავენ) იმ დამატებითი პირობით, რომ $u_i^2 = \dot{x}_i^2 = -1$. ეს სისტემა დაიშლება დამოუკიდებელ განტოლებათა ორ წყვილად. მათი ინტეგრირებით და ნებისმიერი მუდმივების შესაბამისად შერჩევით (s -ის ათელის საწყისი, X და Y ღერძების საწყისი და მიმართულება) ეპოულობთ ტრანსფორმაციას პარამეტრული სახით:

$$x = \frac{a}{\lambda H} \sin \lambda H s, \quad y = \frac{a}{\lambda H} \cos \lambda H s, \quad z = \sqrt{\frac{1+a^2}{\lambda E}} c h \lambda E s, \quad c t = \sqrt{\frac{1+a^2}{\lambda E}} s h \lambda E s$$

(a —ნებისმიერი მუდმივია).

2. იგივე ურთიერთმართობულ და აბსოლუტური მნიშვნელობით ერთმეორის ტოლ ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში.

ამოხსნა. თუ Z ღერძს ავარჩევთ H -ის მიმართულებით, ხოლო Y ღერძს E -ს მიმართულებით, მოენახავთ მოძრაობის განტოლებებს (შემოგვაქვს მუდმივი $\mu = \frac{eH}{mc^2} = \frac{eH}{mc^2}$):

$$\ddot{x} = \mu \dot{y}, \quad \ddot{y} = \mu (c \dot{t} - \dot{x}), \quad \ddot{z} = 0, \quad c \dot{t} = \mu \dot{y}$$

ამ განტოლებათა ინტეგრირებით (იმ პირობით, რომ $u_i^2 = -1$) და s -ის ათელის საწყისის და კოორდინატა საწყისის შესაბამი შერჩევით, ეპოულობთ:

$$x = -\frac{\mu^2 a s^3}{6} + b s, \quad y = -\frac{\mu a s^2}{2}, \quad z = s \sqrt{a^2 - 2ab - 1},$$

$$c t = -\frac{\mu^2 a s^3}{6} + (b - a) s$$

(b და a — ნებისმიერი მუდმივებია).



§ 22. ლორენცის გარდაქმნები ველისათვის \mathbf{f}

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოენახავთ გარდაქმნის ფორმულებს ველისათვის, ე. ი. ფორმულებს, რომელთა საშუალებით შეიძლება განვსაზღვროთ ველი ერთი ათელის ინერციულ სისტემაში, იუ იგივე ველი ცნობილია სხვა სისტემაში.

პოტენციალებისათვის გარდაქმნის ფორმულები უშუალოდ მოიძებნებოდა (6,2) 4-ვექტორის გარდაქმნის ზოვადი ფორმულებიდან. თუ გავიხსენებთ, რომ A_i ვექტორის კომპონენტებია A_x, A_y, A_z და $i\varphi$, ადვილად ეპოულობთ, რომ

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad 22,1$$

F_{ik} თენზორის კომპონენტების გარდაქმნის ფორმულები შეიძლება 4-თენზორის ზოგადი (6,4) გარდაქმნის ფორმულიდან მოგვეწახა. მაგრამ უფრო მარტივი იქნება, თუ შემდეგნაირად მოვიქცევით. გავიხსენოთ, რომ K ათელის სისტემიდან K' სისტემაში გადასვლა, რომელიც K -ს მიმართ X ლერძის გასწვრივ მოძრაობს, x, y, z, τ ოთხგანზომილებიან სივრცეში X -ს სიბრტყეში მობრუნების ექვივალენტურია (იხ. § 4). თენზორის კომპონენტები კი გარდაიქმნებიან როგორც ორი შესაბამისი კოორდინატის ნამრავლი. კოორდინატები $x_2 = y$ და $x_3 = z$ ამ გარდაქმნისას არ იცვლებიან. იმავე მიზეზის გამო არ შეიცვლება აგრეთვე F_{23} :

$$F_{23} = F'_{23}. \quad (22,2)$$

შემდეგ, რამდენადაც y და z კოორდინატები არ იცვლებიან, F_{12}, F_{13} და F_{42}, F_{43} კომპონენტები მარტივად გარდაიქმნებიან, შესაბამისად, როგორც $x_1 = x$ და $x_4 = \tau$ კოორდინატები. (6,4) ფორმულების თანახმად ადვილად ვპოულობთ:

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= \frac{F'_{12} - i \frac{V}{c} F'_{42}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & F_{42} &= \frac{F'_{42} + i \frac{V}{c} F'_{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ F_{13} &= \frac{F'_{13} - i \frac{V}{c} F'_{43}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & F_{43} &= \frac{F'_{43} + i \frac{V}{c} F'_{13}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (22,3)$$

იმისათვის, რომ F_{14} კომპონენტის გარდაქმნა განვსაზღვროთ, შევნიშნოთ შემდეგი: როგორც ცნობილია, ანტისიმეტრიული თენზორი, რომლის რანგი სივრცის განზომილებათა რიცხვის ტოლია (შეად. e_{iklm} და e_{234} თენზორების შესახებ § 6-ში) ამ სივრცეში კოორდინატთა სისტემის ბრუნვისას ინვარიანტული რჩება. x, y, z, τ კოორდინატთა სისტემის ბრუნვა X -ს სიბრტყეში, ცხადია, შეიძლება განვიხილოთ როგორც x, τ კოორდინატთა ორგანზომილებიანი სისტემის ბრუნვა იმავე ორგანზომილებიან სივრცეში. თენზორი კომპონენტებით $F_{11} = F_{44} = 0$, $F_{14} = -F_{41}$ წარმოადგენს ისეთ თენზორს, რომლის რანგი სწორედ ამ სისტემაში განზომილებათა რიცხვის ტოლია. ამიტომ X -ს სიბრტყეში ბრუნვის დროს

$$F_{14} = F'_{14}. \quad (22,4)$$

ჩავსვათ ახლა (22,2-4)-ში F_{ik} -ის კომპონენტთა ნაცვლად მათი გამოსახულებანი E და H ველების კომპონენტებით (21,6)-ს თანახმად. მაშინ ჩვენ ვპოულობთ ელექტრული ველის გარდაქმნის ფორმულებს:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (22,5)$$

და მაგნიტური ველისათვის:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (22,6)$$

ამგვარად, როგორც ფიზიკური სიდიდეთა უმრავლესობა, ელექტრული და მაგნიტური ველიც ფარდობითია, ე. ი. მათ სხვადასხვა ათვლის სისტემაში სხვადასხვა თვისებები აქვთ. კერძოდ ელექტრული ან მაგნიტური ველი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს ერთ სისტემაში და ამასთანავე არსებობდეს მეორე სისტემაში.

(22,5) და (22,6) გარდაქმნის ფორმულები მნიშვნელოვნად მარტივდებიან იმ შემთხვევაში, როცა $V \ll c$. მაშინ V/c -ს რიგის წევრებამდე სიზუსტით (22,5) და (22,6)-დან ჩვენ გვაქვს:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z, \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y;$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z, \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y.$$

ეს ფორმულები შეიძლება ვექტორული სახით იქნენ დაწერილი

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} [\mathbf{E}'\mathbf{V}]. \quad (22,7)$$

K' სისტემიდან K -ში შებრუნებული გარდაქმნის ფორმულები შეიძლება უშუალოდ (22,6) და (22,7)-დან მივიღოთ, თუ V -ს ნიშანს შეუცვლით.

თუ K' სისტემაში მაგნიტური ველი $\mathbf{H}' = 0$, მაშინ, როგორც ადვილად დავრწმუნდებით (22,5) და (22,6) საფუძველზე, K სისტემაში ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს შორის შემდეგი თანაფარდობა არსებობს

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}]. \quad (22,8)$$

თუ K' სისტემაში $\mathbf{E}' = 0$, მაშინ K სისტემაში

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{H}]. \quad (22,9)$$

§ 21. ჰამილტონ-ნაპოლის განბოლვა ველში მოთავსებული მუხტისათვის

§ 21-ში მოძრაობის განტოლების ოთხგანზომილებიანი ფორმით მოძებნისას მოქმედების ვარიაციისათვის ჩვენ შემდეგი გამოსახულები ვიპოვეთ [იხ. (21,1)]:

$$\delta S = \left(mc\mu_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x_i + \int \left(-mc du_i \delta x_i - \frac{e}{c} \delta x_i dA_i + \frac{e}{c} \delta A_i dx_i \right).$$

5. ველის თეორია

თუ ჩვენ კვშმარტ ტრაექტორიებს განვიხილავთ, მაშინ მეორე წვერი იგივე-რად ნულის ტოლია. მაშინ პირველი წვერი, სადაც ერთი ზღვართაგან განი-ხილება როგორც ცვალებადი, გვაძლევს მოქმედების დიფერენციალს როგორც კოორდინატთა ფუნქციას. ამგვარად

$$\delta S = \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x_i. \quad (23,1)$$

აქედან

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m c u_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \quad (23,2)$$

4-ვექტორი $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ მდგენელებით არის ნაწილაკის განზოგადოებული იმპულსის 4-ვექტორი. აღნიშნოთ იგი P_i . თუ 4-სიჩქარისა და 4-პოტენციალის მდგენე-ლების გამოსახულებებს გამოვიყენებთ, P_i -ს კომპონენტათვის შემდეგ გამოსა-ხულებებს ვპოულობთ:

$$P_x = p_x + \frac{e}{c} A_x, \quad P_4 = i \frac{\mathcal{E} - c\varphi}{c}; \quad (23,3)$$

$\mathcal{E}, \varphi = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. P_i ვექტორის სივრცული კომპონენტები (15,2) განზოგადოე-

ბული იმპულსის სამგანზომილებიან ვექტორს შეადგენენ. დროითი კომპონენტი კი, როგორც § 10-ში, ცხადია არის $i\mathcal{E}/c$, სადაც \mathcal{E} — ველში მოთავსებული მუხ-ტის სრული ენერგიაა.

იმის გამო, რომ (7,3)-ის თანახმად $u_i^2 = -1$, ჩვენ გვაქვს

$$m^2 c^2 u_i^2 = \left(P_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 = -m^2 c^2. \quad (23,4)$$

სამგანზომილებიან აღნიშვნებში.

$$\left(\frac{\mathcal{E} - c\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + \left(P - \frac{e}{c} A \right)^2. \quad (23,5)$$

განზოგადოებულ იმპულსებში გიმოსახული ენერგია არის ჰამილტონის ფუნქცია მუხტისათვის ველში

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(P - \frac{e}{c} A \right)^2} + e\varphi. \quad (23,6)$$

ეს ფორმულები ადვილად მიიღება უშუალოდ (14,4) ლაგრანჟის ფუნქციიდან ზოგადი ფორმულის მიხედვით

$$\mathcal{H} = v \cdot \frac{\partial L}{\partial v} - L,$$

სადაც შედეგი იმპულსით უნდა იყოს გამოსახული.

მცირე სიჩქარეთათვის, ე. ი. კლასიკურ მექანიკაში, ლაგრანჯის ფუნქცია არის

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$$

[იხ. (15,7)]. ამ მიახლოებით $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, და ჰამილტონის ფუნქციონალის ჩვენ შემდეგ გამოსახულებას ვპოულობთ:

$$\mathcal{H} = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}{2m} + e\varphi. \quad (23,7)$$

როგორც ცნობილია, ჰამილტონ-იაკობის განტოლება მიიღება ჰამილტონის ფუნქციაში P_i განზოგადოებული იმპულსის კომპონენტების შეყვლით $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ წარმოებულებით. ამგვარად, (23,7)-დან ჩვენ გვაქვს

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i \right)^2 = -m^2 c^2, \quad (23,8)$$

ან სამგანზომილებიან აღნიშვნებში

$$\left(\text{grad } S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - e\varphi \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (23,9)$$

ა მ ო ც ა ნ ე ბ ი

1. დავწერთ ვარიაციული პრინციპი (ჰოპერტუის პრინციპი) ნაწილაკის ტრაექტორიისათვის ელექტრომაგნიტურ ველში რელატიურ მექანიკაში.

ამოხსნა. როგორც მექანიკიდან არის ცნობილი, ჰოპერტუის პრინციპი იმაში მდგომარეობს, რომ თუ ნაწილაკის სრული ენერჯია მუდმივი რჩება (მუდმივ ველში მოქრობა), მაშინ მისი ტრაექტორია შემდეგი ვარიაციული განტოლებიდან შეიძლება ვანისახდეს

$$\delta \int \mathbf{P} d\mathbf{r} = 0,$$

სადაც \mathbf{P} ნაწილაკის განზოგადოებული იმპულსია, რომელიც ენერჯითა და კოორდინატთა დიფერენციალებით არის გამოსახული, ხოლო ინტეგრალი აღებულია ნაწილაკის ტრაექტორიის გასწვრივ. თუ ჩავსვათ $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$ და მივიღებთ მხედველობაში, რომ \mathbf{p} და $d\mathbf{r}$ მიმართულებანი თანხვედრიან, გვექნება

$$\delta \int \left(p dl + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} \right) = 0,$$

სადაც $dl = \sqrt{dr^2}$ არის რკალის ელემენტი. თუ p -ს განვსაზღვრავთ $p^2 + m^2c^2 =$
 $= \left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c} \right)^2$ განტოლებიდან, საბოლოოდ ვიპოვით

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c} \right)^2 - m^2c^2} dl + \frac{e}{c} A dr \right\} = 0.$$

2. მოიძებნოს მაგნიტურ ველში მყოფი ნაწილაკის მოძრაობის ცვლილება, როცა ეს ველი ნელა იცვლება.

ამოხსნა. როგორც ცნობილია მოძრაობის პირობათა ნელი ცვლის დროს მოძრაობის ევრეთწოდებული ადიაბატური ინვარიანტები უცვლელი რჩება. რამდენადაც მაგნიტური ველის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მოძრაობა პერიოდულია, ამიტომ ადიაბატურ ინვარიანტს წარმოადგენს ინტეგრალი $I = \oint P_t dr$, რომელიც აღებულია მოძრაობის სრული პერიოდით — ჩვენს შემთხვევაში წრეხაზით (P_t —განზოგადოებული იმპულსის პროექციაა აღნიშნულ სიბრტყეზე). თუ ჩავსვამთ $P_t = p_t + \frac{e}{c} A$ გვექნება

$$I = \oint P_t dr = \oint p_t dr + \frac{e}{c} \oint A dr.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ პირველ წევრში P_t აბსოლუტური სიდიდით მუდმივია და მიმართულია dr -ის გასწვრივ. მეორის მიმართ ვიყენებთ სტოქსის თეორემას:

$$I = 2\pi r p_t + \frac{e}{c} H \pi r^2,$$

სადაც r —ორბიტის რადიუსია. თუ ჩავსვამთ $r = \frac{cp_t}{eH}$ [იხ. (19,6)], მივიღებთ

$$I = \frac{3\pi c p_t^2}{eH}.$$

აქედან ჩანს, რომ H -ის ცვლილებისას p_t ტანგენციური იმპულსი \sqrt{H} -ის პროპორციულად იცვლება. რაც შეეხება H მიმართულების გასწვრივ p_x იმპულსს იგი, ცხადია, უცვლელი რჩება, თუ ველის ცვლილებისას არ აღიძვრება H -ის პარალელური ელექტრული ველი (მაგალითად, სოლენოიდი მაგნიტური ველის ცვლილებისას).

§ 24. დროს იზოტროპულობა

მექანიკის განტოლებები ინვარიანტულია დროს ნიშნის შეცვლის მიმართ, ე. ი. მომავლის წარსულით შეცვლის მიმართ. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მექანიკაში დროს ორივე მიმართულება ეკვივალენტურია, ე. ი. დრო იზოტროპულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ მექანიკის განტოლებათა თანახმად შესაძლებელია რომელიმე მოძრაობა, მაშინ შესაძლებელია აგრეთვე მოწინააღმდეგე მოძრაობაც, რომლის დროსაც სისტემა გაივლის იგივე მდგომარეობებს შებრუნებულ თანმიმდევრობით.

ადვილად დავინახავთ, რომ იგივეს ექნება ადგილი ელექტრომაგნიტურ ველშიაც ფარდობითობის თეორიაში, ხოლო ამასთანავე t -ს — t -თი, შეცვლას-

თან ერთად საჭიროა შეიცვალოს მაგნეტური ველის ნიშანი. მართლაც, ადვილად ჩანს, რომ (15,6) მოძრაობის განტოლებები არ იცვლებიან, თუ მოვახდენთ შეცვლას.

$$t \rightarrow -t, E \rightarrow E, H \rightarrow -H. \quad (24,1)$$

ამასთანავე (15,4) და (15,5) თანახმად სკალარული პოტენციალი არ შეიცვლება, ვექტორული კი იცვლის ნიშანს

$$\varphi \rightarrow \varphi, A \rightarrow -A. \quad (24,2)$$

ამგვარად, თუ ელექტრომაგნიტურ ველში შესაძლებელია რომელიმე მოძრაობა, მაშინ შესაძლებელი იქნება აგრეთვე მისი მოწინააღმდეგე მოძრაობაც მოპირდაპირედ მიმართულ H ველში.

24

§ 25. ველის ინვარიანტები †

ელექტრომაგნიტური ველის თენზორის კომპონენტებიდან შეიძლება შევადგინოთ ინვარიანტული სიდიდეები, რომლებიც არ შეიცვლებიან ერთი ათვლის ინერციული სისტემიდან მეორეში გადასვლისას. ყველა ასეთი ინვარიანტის მოსაძებნად მოვიქცეთ ისევე, როგორც მეორე რანგის სიმეტრიული თენზორის ინვარიანტთა განსაზღვრისას იქცევით. თუ A_{ik} ასეთ თენზორს წარმოადგენს, მაშინ, როგორც ცნობილია, ნულს უნდა გაუტოლოთ დეტერმინანტი

$$|A_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0.$$

ამ განტოლების ფესვები წარმოადგენენ A_{ik} სიმეტრიული თენზორის მთავარ მნიშვნელობებს და მისი ინვარიანტები არიან. ცხადია, იგივე შეიძლება ითქვას აგრეთვე იმ განტოლების სხვადასხვა ხარისხთან მდგომ კოეფიციენტების მიმართაც, რომლებსაც ჩვეულებრივ ძირითად ინვარიანტებად აირჩევენ ხოლმე.

ანტისიმეტრიული თენზორისათვის, როგორცაა F_{ik} თენზორი, დიაგონალურ სახეზე მიყვანის ოპერაციას, ცხადია, აზრი არა აქვს. მაგრამ აღწერილი წესით შეიძლება ვისარგებლოთ ასეთი თენზორის ინვარიანტების მოსაძებნად, ამასთანავე, ცხადია, რომ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ და λ_4 ფესვებს არ ექნებათ თენზორის მთავარი მნიშვნელობათა აზრი.

ნათქვამის შესაბამისად დაწეროთ განტოლება

$$|F_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0.$$

ადვილად დავინახავთ, რომ ამ განტოლებაში გვექნება მხოლოდ λ -ს ლუწი ხარისხიანი წევრები. მართლაც დეტერმინანტი არ შეიცვლება მწკრივებისა და სვეტების გადასმისას. გარდა ამისა ლუწი რანგის დეტერმინანტი არ შეიცვლება ყველა სიდიდის ნიშნის შეცვლისას. ამიტომ F_{ik} ანტისიმეტრიულობის გამო

$$|F_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = |F_{ki} - \lambda \delta_{ki}| = | -F_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = |F_{ik} + \lambda \delta_{ik}|.$$

ამის შესაბამისად λ თვის მიღებულ განტოლებაში ნულისაგან განსხვავებული მხოლოდ ორი კოეფიციენტები გვექნება — λ^2 -თან და λ^4 -თან, ე. ი. მე-2 რანგის ანტისიმეტრიული თენზორი მხოლოდ ორი ინვარიანტით ხასიათდება.

თუ F_{ik} თენზორის კომპონენტების (21,6) გამოსახულებებს ჩავსვამთ, მაშინ ადვილად გავხსნით დეტერმინანტს და ვიპოვით

$$\lambda^3 + \lambda^2(H^2 - E^2) - (EH)^2 = 0$$

(დეტერმინანტის გახსნისას მოხერხებული იქნება კოორდინატთა ლერძები ისე შევარჩიოთ, რომ ერთ-ერთი მათგანი, ვთქვათ Z ლერძი, მიმართული იყოს H -ის გასწვრივ, ხოლო E ვექტორი YZ სიბრტყეში მდებარეობდეს). ამგვარად, ინვარიანტები არიან სიდიდეები:

$$H^2 - E^2 = \text{invar}, \quad (25,1)$$

$$EH = \text{invar}. \quad (25,2)$$

მოცემული გამოყვანა გვიჩვენებს, რომ ეს ინვარიანტები არიან ერთადერთი დამოუკიდებელი. ყოველი სხვა ინვარიანტი შეიძლება დაიწეროს როგორც ამ ორის ფუნქცია.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ოთხგანზომილებიანი ფორმით დაწერილ (25,1) და (25,2) ინვარიანტებს აქვთ სახე:

$$F_{ik}^2 \quad (25,3)$$

$$\epsilon_{iklm} F_{ik} F_{lm} \quad (25,4)$$

სადაც ϵ_{iklm} მე-4 რანგის სავსებით ანტისიმეტრიულ ერთეულოვან თენზორს წარმოადგენს (იხ. § 6).

აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ $\epsilon_{iklm} F_{ik} F_{lm}$ სიდიდე (ან, სხვაგვარად, EH) ზუსტად რომ ვთქვათ, წარმოადგენს სკალარს კი არა, არამედ პსევდოსკალარს. ეს ჩანს როგორც მისი ოთხგანზომილებიანი დაწერილობიდან (F_{ik} თენზორის ნამრავლი მის დუალურზე. იხ. § 6), ისე სამგანზომილებიანი დაწერილობიდან (H აქსიალური ვექტორის ნამრავლი E პოლარულ ვექტორზე). ქვშმარიტ სკალარს $(EH)^2$ წარმოადგენს.

ორი მოყვანილი გამოსახულების ინვარიანტობიდან შემდეგი დასკვნები გამოდინარეობს. თუ რაიმე ათვლის სისტემაში ელექტრული და მაგნიტური ველები ურთიერთ პერპენდიკულარულია, ე. ი. $EH = 0$, მაშინ ისინი პერპენდიკულარული იქნებიან ყველა სხვა ინერციულ ათვლის სისტემაში [(25,2) ძალით]. თუ რაიმე ათვლის სისტემაში E და H აბსოლუტური სიდიდეები ერთმეორის ტოლია, მაშინ ისინი ერთნაირი იქნებიან სხვა ნებისმიერ სისტემაშიაც [(25,1) ძალით].

ლორენცის გარდაქმნის დახმარებით ყოველთვის შეიძლება მივალწიოთ იმას, რომ E და H მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობანი, რომლებიც იმ პირობას დააკმაყოფილებენ, რომ $E^2 - H^2$ და EH ქონდეთ მოცემული გარკვეული მნიშვნელობანი. კერძოდ, ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი ინერციული ათვლის სისტემა, რომელშიაც ელექტრული და მაგნიტური ველები ურთიერთ პარალელური იქნებიან. ამ სისტემაში $EH = EH$ და ორი განტოლებიდან

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = E_0 H_0$$

შეიძლება მოენახოთ E და H მნიშვნელობანი ამ ათვლის სისტემაში (E_0 და H_0 — ელექტრული და მაგნიტური ველებია გამოსავალ ათვლის სისტემაში).

გამონაკლისის ის შემთხვევა წარმოადგენს, როდესაც ორივე ინვარიანტი ნულის ტოლი. ამ შემთხვევაში E და H ყველა ათვლის სისტემაში ერთიმეორის ტოლია და ურთიერთპერპენდიკულარული.

თუ $EH = 0$, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი ათვლის სისტემა, რომელშიაც $E = 0$ ან $H = 0$ (იმისდა მიხედვით, თუ $E^2 - H^2 < 0$ ან > 0). ე. ი. ველი ან წმინდა ელექტრულია, ან წმინდა მაგნიტური. პირიქით, თუ რომელიმე ათვლის სისტემაში $E = 0$ ან $H = 0$, მაშინ ყოველ სხვა სისტემაში ისინი ურთიერთ პერპენდიკულარული იქნებიან.

ჰეილის განტოლებანი

§ 26. მაქსველის განტოლებათა პირველი წყვილი

$$H = \text{rot } A, \quad E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad [(15,5) \text{ და } (15,4)] \text{ განოსახულებ-}$$

ზიდან E და H-თვის ადვილად მივიღებთ განტოლებებს ამ ველებისათვის, ე. ი. ისეთ თანაფარდობებს, რომლებიც მხოლოდ E და H შეიცავენ. ამასთანავე ჩვენ E და H განოსახულებებიდან უნდა გამოვირიცხოთ A და φ პოტენციალები. ამისათვის განვსაზღვროთ $\text{rot } E$.

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } A - \text{rot grad } \varphi.$$

მაგრამ ყოველი გრადიენტის როტორი ნულის ტოლია, ხოლო $\text{rot } A = H$. მაშასადამე,

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (26,1)$$

თუ $\text{rot } A = H$ განტოლების ორივე მხარიდან ავიღებთ დივერგენცს და გავიხსენებთ, რომ ყოველი როტორის დივერგენცი ნულის ტოლია, მივიღებთ

$$\text{div } H = 0. \quad (26,2)$$

(26,1) და (26,2) განტოლებებს მაქსველის განტოლებათა პირველ წყვილს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ ეს ორი განტოლება ჯერ კიდევ სავსებით არ განსაზღვრავენ ველის თვისებებს. ეს იქიდან ჩანს, რომ ისინი განსაზღვრავენ მაგნი-

ტური ველის ცვლილებას დროით $\left(\frac{\partial H}{\partial t} \text{ წარმოებულს} \right)$, მაგრამ არ განსა-

ზღვრავენ $\frac{\partial E}{\partial t}$ წარმოებულს.

(26,1) და (26,2) განტოლებები შეიძლება დაიწეროს ინტეგრალური ფორმით გაუსის თეორემის თანახმად

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H} dV = \oint \mathbf{H} d\mathbf{f},$$

სადაც მარჯვენა ინტეგრალი აღებულია მთელ ჩაკეტილ ზედაპირზე, რომელიც შემოსაზღვრავს მოცულობას, რომელშიაც აღებულია მარცხენა ინტეგრალი. (26,2) საფუძველზე ჩვენ გვაქვს

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{f} = 0. \quad (26,3)$$

ვექტორიდან აღებულ ინტეგრალს რაიმე ზედაპირის გასწვრივ ამ ზედაპირში ვექტორის ნაკადს უწოდებენ. ამგვარად მაგნიტური ველის ნაკადი ყოველ ჩაკეტილ ზედაპირში ნულის ტოლია.

სტოქსის თეორემის თანახმად

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

სადაც მარჯვენა ინტეგრალი აღებულია ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ, რომელიც იმ ზედაპირის მომღვებია, რომელზედაც მარცხენა ინტეგრალია აღებული. (26,1)-დან ორივე ნაწილის რაიმე ზედაპირზე ინტეგრირებით ჩვენ ვპოულობთ:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} d\mathbf{f}. \quad (26,4)$$

ჩაკეტილ კონტურზე აღებულ ვექტორის ინტეგრალს ამ ვექტორის ცირკულაცია ეწოდება კონტურის გასწვრივ. ელექტრული ველის ცირკულაციას აგრეთვე ელექტრომაგნიტურ ველზე დასაყრდენ მოცემულ კონტურში. ამგვარად რომელიმე კონტურში ელექტრომაგნიტურ ველზე დასაყრდენი კონტურით შემოსაზღვრულ ზედაპირში მაგნიტური ველის ნაკადის შებრუნებული ნიშნით აღებულ წარმოებულს დროთი.

(26,1) და (26,2) მაქსველის განტოლებანი შეიძლება ოთხგანზომილებიანი აღნიშვნებშიაც დაიწეროს. ელექტრომაგნიტური ველის თენზორის განმარტების თანახმად

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \quad (26,5)$$

როცა $i = k = l$ ეს განტოლება იგივეურად არის დაცული (რადგანაც $F_{ik} = 0$, როცა $i = k$). თუ სამ ინდექსიდან i, k, l ორი ტოლია, მაშინ F_{ik} ანტისიმეტრიულობის გამო ეს განტოლება ტრივიალურია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ დანარჩენი ოთხი განტოლება (როცა $i \neq k \neq l$) თუ F_{ik} -თვის (21,6) გამოსახულებას ჩავსვამთ, წარმოადგენენ იმავე $(2^2, 1)$ და $(26, 2)$ განტოლებებს. ამგვარად, $(26, 5)$ არის ოთხგანზომილებიან აღნიშვნებში დაწერილი მაქსველის განტოლებათა პირველი წყვილი.

§. 27. მოქმედება ელექტრომაგნიტური ველისათვის

ელექტრომაგნიტური ველისაგან და მაში მყოფი ნაწილაკებისაგან შემდგარი მთელი სისტემისათვის S მოქმედება სამი ნაწილისაგან უნდა შედგებოდეს:

$$S = S_f + S_m + S_{mf} \quad (27,1)$$

S_m მოქმედების ის ნაწილია, რომელიც მხოლოდ ნაწილაკთა თვისებებზეა დამოკიდებული. ცხადია, ეს ნაწილი წარმოადგენს მოქმედებას სწორედ თავისუფალ ნაწილაკთათვის, ე. ი. ნაწილაკთათვის ველის არ არსებობისას. როგორც

ვიცით, თავისუფალი ნაწილაკისათვის მოქმედება არის $-mc \int ds$ [იხ. (9,1)], თუ რამდენიმე ნაწილაკი გვაქვს, მაშინ მათი საერთო მოქმედება უდრის ყოველი ნაწილაკის ცალკეულად მოქმედებათა ჯამს. ამგვარად

$$S_m = - \sum mc \int ds. \quad (27,2)$$

S_{mf} არის მოქმედების ის ნაწილი, რომელიც ნაწილაკებსა და ველს შორის ურთიერთმოქმედებით განისაზღვრება. როგორც § 14 ვნახეთ, მას აქვს სახე

$\frac{e}{c} \int A_k dx_k$ ან, რამდენიმე ნაწილაკის შემთხვევაში,

$$S_{mf} = \sum \frac{e}{c} \int A_k dx_k. \quad (27,3)$$

ამ ჯამის ყოველ წევრში A_k არის ველის პოტენციალი სივრცისა და დროს იმ წერტილში, რომელშიაც შესაბამის ნაწილაკი იმყოფება. $S_m + S_{mf}$ ჯამი წარმოადგენს ჩვენთვის უკვე ცნობილ (14,1) მოქმედებას ველში მყოფი მუხტისათვის, რომელიც ჩვენ წინათ უბრალოდ S -ით აღვნიშნავდით.

დაბოლოს, S_f არის მოქმედების ის ნაწილი, რომელიც მხოლოდ თვით ველის თვისებებზეა დამოკიდებული. ე. ი. S_f წარმოადგენს მოქმედებას ველისათვის მუხტების არარსებობის დროს. მანამდე, სანამ ჩვენ მხოლოდ მუხტების მოძრაობა გვაინტერესებდა მოცემულ ელექტრულ ველში, S_f , როგორც ნაწილა-

კეზზე დამოუკიდებელი, ჩვენ არ გვანტერესებდა, რადგანაც ამ წევრს არ შეეძლო ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებებზე გავლენა მოახდინა. მაგრამ იგი აუცილებელი ხდება, როდესაც ჩვენ გვსურს იმ განტოლებების მონახვა, რომელნიც თვით ველს განსაზღვრავენ. ამას ის გარემოება შეესაბამება, რომ მოქმედების $S_m + S_m'$ ნაწილიდან ჩვენ მოვნახეთ ველის მხოლოდ ორი (27,1) და (27,2) განტოლება, რომლებიც ჯერ კიდევ საკმარისი არაა ველის სრული განსაზღვრისათვის.

ველის S_r მოქმედების სახის დასადგენად ჩვენ გამოვალთ ელექტრომაგნიტური ველების შემდეგი მეტად მნიშვნელოვანი თვისებიდან. როგორც ცდა გვიჩვენებს, ელექტრომაგნიტური ველი ემორჩილება ეგრეთწოდებულ სუპერპოზიციის პრინციპს. ეს პრინციპი იმაში მდგომარეობს, რომ თუ ერთი მუხტი ერთ ველს ქმნის, ხოლო მეორე — მეორეს, მაშინ ორივე ფაქტორის მიერ ერთად შექმნილი ველი წარმოადგენს ყოველი მუხტის მიერ ცალკედ შექმნილი ველების უბრალო შეკრების შემდეგს. ეს იმას ნიშნავს, რომ საერთო ველის დაძაბულობა ყოველ წერტილში უდრის ამ წერტილში ყოველი ცალკე ველის დაძაბულობათა ჯამს.

ველის განტოლების ყოველი ამოხსნა ველს გამოსახავს, რომელიც შეიძლება განხორციელებულ იქნეს ბუნებაში. სუპერპოზიციის პრინციპის თანახმად ნებისმიერი ასეთი ველების ჯამი უნდა წარმოადგენდეს ველს, რომლის განხორციელებაც აგრეთვე შესაძლებელი უნდა იყოს ბუნებაში, ე. ი. იგი ველის განტოლებებს უნდა აკმაყოფილებდეს.

როგორც ცნობილია, წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი იმ თვისებით განირჩევიან, რომ მისი ყოველი ამოხსნათა ჯამი აგრეთვე ამოხსნას წარმოადგენს. მაშასადამე ველისათვის განტოლებანი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებებს უნდა წარმოადგენდნენ.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ S_r მოქმედებაში ინტეგრალს ქვეშ უნდა იდგეს ველის მიმართ კვადრატული გამოსახულება. მხოლოდ ამ შემთხვევაში ველის განტოლებანი წრფივი იქნებიან — ველის განტოლებანი მოქმედების ვარირებით მიიღებიან, ხოლო ვარირების დროს ინტეგრალქვეშ გამოსახულების ხარისხი ერთით დაიწვევა.

S_r მოქმედების გამოსახულებაში არ შეიძლება შედიოდეს ველის პოტენციალები, ვინაიდან ისინი ცალსახად არ არიან განსაზღვრული (S_m -ში ეს არა-ცალსახობა არსებითი არ იყო). ამიტომ S_r უნდა იყოს F_{ik} ელექტრომაგნიტური ველის თენზორის რაღაც ფუნქციის ინტეგრალი.¹ მაგრამ მოქმედება სკალარი უნდა იყოს, ამიტომ იგი რაღაც სკალარის ინტეგრალს უნდა წარმოადგენდეს. ამასთანავე, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მდგომი ეს სკალარი F_{ik} -ს მიმართ კვადრატული უნდა იყოს.

¹ S_r -ში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ უნდა შეიცავდეს F_{ik} -ს წარმოებულებს, ვინაიდან ლაგრანჟის ფუნქციაში სისტემის კოორდინატების გარდა შეიძლება შედიოდეს მათი მხოლოდ პირველი წარმოებულები დროთი, ხოლო კოორდინატების როლს (ე. ი. იმჟელადების როლს, რომელთა მიხედვით წარმოებს ვარირება უმცირესი მოქმედების პრინციპში) ამ შემთხვევაში ველის A_k პოტენციალები თამაშობენ; ეს იმის ანალოგიურია, რომ მექანიკაში მექანიკური სისტემისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია შეიცავს მხოლოდ ნაწილაკთა კოორდინატებს და მათ პირველ წარმოებულებს დროთი.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ მხოლოდ ერთი მეორე ხარისხის სკალარი არსებობს, რომელიც შეიძლება შედგეს F_{ik} -საგან. (§ 25). იგი არის F^2_{ik} ($eiklm F_{ik} F_{lm}$ სიდიდე პსევდოსკალარია) ამგვარად S_f უნდა ქონდეს სახე:

$$S_f = a \iiint F^2_{ik} dV dt, \quad dV = dx dy dz,$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია კოორდინატების მიმართ მთელ სივრცეში, ხოლო დროს მიმართ ორ მოცემულ მომენტს შორის. a არის რალაცა მუდმივი. ინ-

ტეგრალს ქვეშ დგას $F^2_{ik} = 2(H^2 - E^2)$; E ველი $\frac{\partial A}{\partial t}$ წარმოებულს შეიცავს.

მაგრამ ადვილი შესამჩნევია, რომ მოქმედებაში $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$ დადებითი ნიშნით

უნდა შედიოდეს (და ამიტომ E^2 -იც დადებითი ნიშნით უნდა შედიოდეს). მართ-

ლაც, S_f -ში $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$ უარყოფითი ნიშნით რომ შედიოდეს, მაშინ დროს მიხედ-

ვით (დროს განსახილავ ინტერვალში) პოტენციალს საკმაოდ ჩქარი ცვლილე-

ბით ყოველთვის შეიძლება $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$ რაგინდ დიდი გავხადოთ, ხოლო S_f კი

გავხადოთ უარყოფით სიდიდით რაგინდ დიდი აბსოლუტური მნიშვნელობით. მაშასადამე S_f -ს არ შეეძლო მინიმუმი ქონოდა, როგორც ამას უმცირესი მოქმედების პრინციპი მოითხოვს. ამგვარად a უარყოფითი უნდა იყოს.

a -ს რიცხვითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია ველის გასაზომი ერთეულების შერჩევაზე. შევნიშნოთ, რომ a -ს განსაზღვრული მნიშვნელობისა და მასთან ერთად ველის გასაზომ ერთეულთა შერჩევის შემდეგ აგრეთვე განისაზღვრებიან ყველა დანარჩენი ელექტრომაგნიტური სიდიდეთა გასაზომი ერთეულებიც.

შემდეგში ჩვენ ეგრეთწოდებულ გაუსის ერთეულთა სისტემით ვისარგებლებთ. ამ სისტემაში a განყენებული რიცხვი და $\frac{1}{16\pi}$ უდრის.

გაუსის სისტემასთან ერთად სარგებლობენ ეგრეთწოდებულ ჰეისაიდის

სისტემით, რომელშიაც $a = -\frac{1}{4}$. ერთეულთა ამ სისტემაში ველის განტოლე-

ბებს უფრო მოხერხებელი სახე აქვთ (მაშინ ამ განტოლებებში არ შედის π), მაგრამ საპრაქტიკოდ კულონის კანონში შედის π რიცხვი. ერთეულთა გაუსის სისტემაში კი, პირიქით, ველის განტოლებები π -ს შეიცავენ, ხოლო კულონის კანონს მარტივი სახე აქვს.

ამგვარად, ველისათვის მოქმედებას აქვს სახე

$$S_f = \frac{i}{16\pi c} \int F_{ik}^2 d\Omega, \quad d\Omega = dx dy dz dt. \quad (27,4)$$

ამასთანავე $d\Omega$ ჩვენ დავწერთ $dV dt$ ნაცვლად და ამიტომ მთელი გამოსახულება გავეყავით კიდევ ic -ზე. სამგანზომილებიანი სახით

$$S_f = \frac{1}{8\pi} \iint (E^2 - H^2) dV dt. \quad (27,5)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ველისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია არის

$$L_f = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV. \quad (27,6)$$

ველისათვის-მასში მყოფ მუხტებიანად ერთად მოქმედება იქნება

$$S = - \sum \int mc ds + \sum \int \frac{e}{c} A_k dx_k + \frac{i}{16\pi c} \int F_{ik}^2 d\Omega. \quad (27,7)$$

შევნიშნოთ, რომ ახლა მუხტები სრულიადაც მცირე სიდიდეებად არ ითვლებიან, როგორც ეს მოცემულ ველში მუხტის მოძრაობის განტოლებების გამოყვანის დროს იყო. ამიტომ A_k და F_{ik} ქეშმარიტ ველს შეესაბამებიან, ე. ი. გარეშე ველს თვით მუხტების მიერ შექმნილ ველთან ერთად. ახლა A_k და F_{ik} დამოკიდებულია მუხტების მდებარეობაზე და სიჩქარეზე.

✱ § 28. დენის ოთხგანზომილებიანი ვეპტორი

აქამდე ჩვენ ყოველთვის მხოლოდ წერტილოვან მუხტებს განვიხილავდით. ბუნებაში არსებული ყველა მუხტი სინამდვილეში წერტილოვანია, ვინაიდან, როგორც § 8 ვნახეთ, ყოველი ელემენტარული ნაწილაკი განხილულ უნდა იქნეს როგორც წერტილი, ხოლო ყოველი რთული ნაწილაკი შედგება ცალკეულ ელემენტარულ ნაწილაკებიდან.

მაგრამ, ხშირად, მათემატიკური მოხერხებულობის მიზნით მუხტს განვიხილავდით როგორც მთელ სივრცეში უწყვეტად განაწილებულს. მაშინ შეიძლება შემოვიღოთ „მუხტის სიმკვრივე“ ρ ისე, რომ ρdV იქნება dV მოცულობაში მყოფი მუხტი. საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ρ კოორდინატებისა და დროს ფუნქციაა. რაიმე

მოცულობაში აღებული ინტეგრალი $\int \rho dV$ არის ამ მოცულობაში მყოფი მუხტი.

ამასთანავე უნდა გვახსოვდეს, რომ სინამდვილეში მუხტები წერტილოვანია, ასე რომ ρ სიმკვრივე ნულის ტოლია ყველგან, გარდა იმ წერტილებისა,

რომლებშიაც წერტილოვანი მუხტებია მოთავსებული, ხოლო $\int \rho dV$ ინტეგრა-

ლი უნდა უდრიდეს იმ მუხტების ჯამს, რომელნიც მოთავსებულია ამ მოცულობაში. ამიტომ ρ δ -ფუნქციის¹ დახმარებით შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს:

$$\rho = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad (28,1)$$

სადაც \mathbf{r}_A ადებულია ყველა არსებული მუხტის მიმართ, ხოლო e_A \mathbf{r}_A მუხტის რადიუს-ვექტორია. ეს ფუნქცია, δ -ფუნქციის თვისებების თანახმად, მართლაც ნულის ტოლია ყველგან, გარდა $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A$ წერტილისა, ხოლო ინტეგრალი

$$\int \rho dV = \sum_A e_A,$$

სადაც მარჯვნივ დგას მოცემულ მოცულობაში მყოფი ყველა მუხტების ჯამი.

ნაწილაკის მუხტი, თვით მისი განმარტების თანახმად, ინვარიანტული სიდიდეა, ე. ი. დამოუკიდებელია ათვლის სისტემის არჩევაზე. პირიქით, ρ სიდი-

¹ δ — ფუნქცია $\delta(x)$ შემდეგნაირად განისაზღვრება: $\delta(x) = 0$ x -სის ყველა ნულისაგან განსხვავებული მნიშვნელობათათვის. როცა $x = 0$ $\delta(0) = \infty$, მაგრამ ისე, რომ ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

ამ გამოხატულებიდან შემდეგი თვისებები გამოიძინარეობს: თუ $f(x)$ ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a);$$

კერძოდ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

(ცხადია აუცილებელი არ არის, რომ ინტეგრაციის საზღვრები $\pm \infty$ იყოს: ინტეგრაციის არედ შეიძლება იყოს ყოველი არე, რომელიც იმ წერტილს შეიცავს, რომელშიც δ — ფუნქცია არ ისარბა).

მოვიყვანოთ კიდევ ორი ტოლება δ -ფუნქციებით. ამ ტოლობათა აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ მათი მარცხენა და მარჯვენა მხარეები იძლევიან ერთი და იგივე შედეგს, თუ მათ გამოვიყენებთ როგორც ინტეგრალ-ქვეშა მამრავლებს

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

შეიძლება შემოვიღოთ სამკანზონილებიანი δ -ფუნქცია $\delta(\mathbf{r})$, რომელიც განისაზღვრება ერთი ცვლადის $\delta(x)$ ფუნქციის მსგავსად. იგი ნულის ტოლია ყველგან, გარდა სამკანზონილებიანი კოორდინატთა სისტემის სათავისა და მისგან მთელ სივრცეში ადებული ინტეგრალი 1 ტოლია. ასეთ ფუნქციად, ცხადია, შეიძლება ავიღოთ $\delta(x) \delta(y) \delta(z)$ ნამრავლი.

დე, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ინვარიანტი არ არის — ინვარიანტია მხოლოდ ρdV ნამრავლი. $de = \rho dV$ ტოლობის ორივე მხარე dx_i -ზე გაფაზრავლოთ:

$$de dx_i = \rho dV dx_i = \rho dV dt \frac{dx_i}{dt}$$

მარცხნივ 4 — ვექტორი ღვას (ვინაიდან de სკალარია, ხოლო dx_i — 4-ვექტორი). მაშინ მარჯვნივაც 4 — ვექტორი უნდა ზღვავს. მაგრამ dV/dt უნდა განვიხილოთ როგორც სკალარი (იხ. § 6), და ამიტომ $\rho \frac{dx_i}{dt}$ არის 4-ვექტორი.

ამ ვექტორს (აღვნიშნოთ იგი j_i) დენის 4-ვექტორი ეწოდება:

$$j_i = \rho \frac{dx_i}{dt} \quad (28,2)$$

ამ ვექტორის პირველი სამი კომპონენტი ჩვეულებრივ სივრცულ ვექტორს შეადგენს $\rho \frac{dx}{dt}$, $\rho \frac{dy}{dt}$, $\rho \frac{dz}{dt}$ მდგენელებით, ე. ი. ვექტორს

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \quad (28,3)$$

\mathbf{v} აქ მუხტის სიჩქარეა მოცემულ წერტილში. \mathbf{j} ვექტორს დენის სიმკვრივის ვექტორი ეწოდება. 4-ვექტორის მეოთხე მდგენელი არის $ic\rho$. ამგვარად,

$$j_4 = ic\rho, \quad j_1 = \rho v_1, \quad j_2 = \rho v_2, \quad j_3 = \rho v_3 \quad (28,4)$$

როგორც უკვე იყო მიითითებული, მთელ სივრცეში მყოფი საერთო მუხტი ტოლია მთელ სივრცეში აღებულ ინტეგრალისა $\int \rho dV$ ეს ინტეგრალი ჩვენ ოთხგანზომილებიანი სახით შეიძლება დაწეროთ:

$$\int \rho dV = \frac{1}{ic} \int j_4 dV = \frac{1}{ic} \int j_i dS_i, \quad (28,5)$$

სადაც ინტეგრაცია წარმოებს x_4 ღერძის პერპენდიკულარულ მთელ ოთხგანზომილებიან ჰიპერსიბრტყეზე (ცხადო, რომ ასეთი ინტეგრაცია სწორედ ნიშნავს მთელ სამგანზომილებიან სივრცეში ინტეგრაციას).

საზოგადოდ, ყოველ ჰიპერზედაპირზე აღებული ინტეგრალი $\frac{1}{ic} \int j_i dS_i$ ცხადია, არის იმ მუხტების ჯამი, რომელთა მსოფლიო ხაზები ჰიპერზედაპირს გადაკვეთენ.

შევიტანოთ დენის 4-ვექტორი მოკმედეების (27,7) გამოსახულებაში. სახელდობრ, გარდაეკმნათ ამ გამოსახულების მეორე წევრი. ამ პარაგრაფში ნა-

თქვამის თანახმად, ჩვენ ϵ წერტილოვანი მუხტების ნაცვლად შეიძლება შემოვიღოთ მუხტების უწყვეტი განაწილება ρ სიმკვრივით. მაშინ, ცხადია, მოყვანილი გამოსახულების ნაცვლად ჩვენ უნდა დაეწეროთ $\frac{1}{c} \int \rho A_i dx_i dV$, თუ მუხტების მიმართ აღებულ ჯამს შევცვლით მთელ სივრცეზე აღებულ ინტეგრალით. თუ მას $\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx_i}{dt} A_i dV dt$ სახით გადაეწეროთ, დაინახავთ, რომ ეს წევრი ტოლია

$$-\frac{i}{c^2} \int A_{ij} d\Omega.$$

ამგვარად, S მოქმედება ლებულობს სახეს

$$S = - \sum \int mc ds - \frac{i}{c^2} \int A_{ij} d\Omega + \frac{i}{16\pi c} \int F^2_{ik} d\Omega. \quad (28,6)$$

§ 29. უწყვეტობის განტოლება

რომელიმე მოცულობაში მყოფი სრული მუხტი ამ მოცულობით აღებული ინტეგრალის $\int \rho dV$ ტოლია. ამ მუხტის ცვლილება დროში განისაზღვრება წარმოებულით $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$.

მეორე მხრით, ეს ცვლილება, მაგალითად, დროს ერთეულში განისაზღვრება იმ მუხტების რაოდენობით, რომლებიც დროს ერთეულში მოცემული მოცულობიდან გარედ გამოდიან ან, პირიქით, შედიან ამ მოცულობაში. იმ მუხტების რაოდენობა, რომლებიც დროს ერთეულში გადიან აღნიშნული მოცულობის შემომფარგვლელ ზედაპირის $d\mathcal{F}$ ელემენტში ტოლია $\rho V d\mathcal{F}$, სადაც V არის მუხტის სიჩქარე სივრცის იმ წერტილში, სადაც $d\mathcal{F}$ ელემენტია მოთავსებული. როგორც ყოველთვის მიღებულია, $d\mathcal{F}$ ვექტორი ზედაპირის გარე ნორმალის გასწვრივ არის მიმართული, ე. ი. იმ ნორმალისა, რომელიც განსახილავი მოცულობიდან გარეთ არის მიმართული. ამიტომ $\rho V d\mathcal{F}$ დადებითია, თუ მუხტი განსახილავი მოცულობიდან გამოდის, და უარყოფითია, თუ მუხტი ამ მოცულობაში შედის. მაშასადამე, განსახილავი მოცულობიდან დროს ერთეულში გამომავალი მუხტის ერთეული რაოდენობა იქნება $\int \rho V d\mathcal{F}$, სადაც ინტეგრაცია ამ მოცულობის შემომფარგვლელი მთელ ჩაკეტილ ზედაპირზე გაერცელებული.

ორივე მიღებულ გამოსახულებათა შედარებით ვპოულობთ:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho v \, d\mathbf{f}. \quad (29,1)$$

მარჯვენა მხარეში უარყოფითი ნიშანი დგას, ვინაიდან მარცხენა მხარე დადებითია, თუ მოცემულ მოცულობაში მუხტი იზრდება. (29,1) განტოლება ეგრეთ-წოდებულ უწყვეტობის განტოლებას წარმოადგენს, რომელიც ინტეგრალური თორმით დაწერილ მუხტების შენახვის კანონს გამოსახავს. თუ მივიღებთ მედელობაში რომ ρv — დენის სიმკვრივეა [იხ. (28,3)], მაშინ (29,1) შემდეგი სახით შეიძლება გადაიწეროს:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = - \oint \mathbf{j} \, d\mathbf{f}. \quad (29,2)$$

იგივე განტოლება დიფერენციალური სახით დავწეროთ. ამისათვის (29,2) მარჯვენა მხარის მიმართ გაუსის თეორემა გამოვიყენოთ:

$$\oint \mathbf{j} \, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV.$$

თუ ამას (29,2)-ში ჩავსვამთ, ვიპოვიან $\int \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$. რამდენადაც ამ ტოლობას ადგილი უნდა ჰქონდეს ნებისმიერ მოცულობაში ინტეგრაციისას, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლი უნდა იყოს:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (29,3)$$

ეს არის უწყვეტობის განტოლება დიფერენციალური სახით.

ადვილად დაერწმუნდებით ხმაში, რომ ρ -ს (28,1) გამოსახულება მ-ფუნქციის სახით ავტომატურად აკმაყოფილებს (29,3) განტოლებას. სიმარტივისათვის დავეშვათ, რომ გვაქვს სულ მხოლოდ ერთი მუხტი, ასე რომ

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

მაშინ \mathbf{j} დენი არის

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

სადაც \mathbf{v} — მუხტის საჩქარეა. მოენახოთ $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ წარმოებულნი. მუხტის მოძრაობისას იცვლება მისი კოორდინატები, ე. ი. იცვლება \mathbf{r}_0 . ამიტომ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$$

მაგრამ $\frac{d\tau_0}{dt}$ არის მუხტის v სიჩქარე. შემდეგ, რამდენადაც ρ არის $r - r^0$ -ის ფუნქცია,

$$\frac{\partial \rho}{\partial r_0} = - \frac{\partial \rho}{\partial r}$$

მაშასადამე,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \operatorname{grad} \rho = -\operatorname{div} \rho v.$$

(მუხტის v სიჩქარე, ცხადია, r -ზე არ არის დამოკიდებული). ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ (29,3) განტოლებას.

როგორც ადვილი შესამოწმებელია, ოთხგანზომილებიანი სახით უწყვეტობის (29,3) განტოლება დაიწერება:

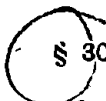
$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0. \quad (29,4)$$

წინა პარაგრაფში ჩვენ დავინახეთ, რომ მთელ სივრცეში არსებული სრული მუხტი შეიძლება დაიწეროს სახით $\frac{1}{ic} \int j_i dS_i$, სადაც ინტეგრირება წარმოებს $x_i = \text{const}$ ჰიპერსიბრტყეში. დროს მეორე მომენტში სრული მუხტი ასეთივე ინტეგრალით გამოისახება, რომელიც აღებულია x_i ღერძის პერპენდიკულარულ სხვა ჰიპერსიბრტყეზე. ადვილი შესამოწმებელია, რომ (29,4) განტოლებას მართლაც მიყვება მუხტის შენახვის კანონამდე, რაც იმაში გამოისახება, რომ $\int j_i dS_i$ ინტეგრალი ერთდაიგივეა, რომელ $x_i = \text{const}$. ჰიპერსიბრტყეზედაც უნდა მოვახდინოთ ინტეგრირება. ორი ასეთი ჰიპერსიბრტყეზე აღებულ $\int j_i dS_i$ ინტეგრალთა სხვაობა შეიძლება დაიწეროს სახით $\oint j_i dS_i$, სადაც ინტეგრალი აღებულია მთელ ჩაკეტილ ჰიპერსიბრტყეზე, რომელიც ორ განსახილავ ჰიპერსიბრტყეს შორის არსებულ 4 მოცულობას შემოსაზღვრავს (ეს ინტეგრალი სძებნის სხვაობისაგან განსხვავდება უსასრულოდ დაშორებულ „გვერდით“ ჰიპერსიბრტყეზე აღებული ინტეგრალით, რომელიც ცხადია, ისობა, ვინაიდან უსასრულობაში მუხტები არ არის). გაუსის (6,11) თეორემის დაამარებით ეს ინტეგრალი შეიძლება გარდაექმნათ ორი ჰიპერსიბრტყეს შორის არსებული 4 მოცულობითი ინტეგრალით და (29,4)-ს გამოყენებით გვაქვს:

$$\oint j_i dS_i = \int \frac{\partial j_i}{\partial x_i} d\Omega = 0, \quad (29,5)$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

მოყვანილი დამტკიცება, ცხადია, ძალაში რჩება ორი ინტეგრალისათვისაც $\int j_i dS_i$, რომლებშიაც ინტეგრაცია ყოველი ორი უსასრულო ჰიპერზედაპირებზე წარმოებს (და არა მხოლოდ $x_k = \text{const}$ ჰიპერსიბრტყეზე), რომლებიც შეიცავენ მთელ (სამგანზომილებიან) სივრცეს. აქედან ჩანს, რომ $\int j_i dS_i$ ინტეგრალს მართლაც ერთიდაიგივე მნიშვნელობა აქვს (რომელიც ტოლია სრული მუხტის სივრცეში), რომელ ასეთი ჰიპერზედაპირებდაც არ უნდა წარმოებდეს ინტეგრაცია.



§ 30. მათხველის განტოლებათა მეორე წყვილი

უმცირესი მოქმედების პრინციპის დახმარებით ველის განტოლების მონახვისას მუხტების მოძრაობა ჩვენ მოცემულად უნდა ჩავთვალოთ და მხოლოდ ველის, ე. ი. პოტენციალების ვარირება უნდა მოვახდინოთ, მოძრაობის განტოლების მონახვისას კი, პირიქით, მოცემულად ველს ვთვლიდით და ნაწილაკის ტრაექტორიის ვარირებას ვახდენდით.

ამიტომ (28,6)-ში პირველი წევრის ვარააცია ნულის ტოლია, ხოლო მეორეში j_i დენის ვარირება არ უნდა მოხდეს. ამგვარად,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\frac{1}{ic^2} j_i \delta A_i - \frac{1}{16\pi ic} \delta (F^2_{ik}) \right) d\Omega = \\ &= \int \frac{1}{ic} \left\{ \frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \delta F_{ik} \right\} d\Omega = 0. \end{aligned}$$

თუ ჩავსვამთ $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, გვექნება

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \frac{1}{ic} \left\{ \frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \delta \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \right\} d\Omega = \\ &= \int \frac{1}{ic} \left\{ \frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} E_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k + \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right\} d\Omega. \end{aligned}$$

მეორე წევრში ადგილები შეუცვალათ i და k ინდექსებს, რომელთა მიხედვითაც შეჯამება წარმოებს და ამის გარდა, F_{ik} შევცვალეთ $-F_{ik}$ -ით. მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$\delta S = \int \frac{1}{ic} \left\{ \frac{1}{c} j_i \delta A_i + \frac{1}{4\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right\} d\Omega.$$

მეორე ამ ინტეგრალთაგანს ნაწილობით ვიღებთ, ე. ი., სხვაგვარად რომ ვაქვავთ, ვიყენებთ გაუსის თეორემას:

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left\{ \frac{1}{c} j_i - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \right\} \delta A_i d\Omega + \frac{1}{4\pi ic} \int F_{ik} \delta A_i dS_k. \quad (30,1)$$

მეორე წევრში მისი მნიშვნელობანი ჩვენ უნდა ავიღოთ ინტეგრაციის საზღვრებზე. კოორდინატების მიხედვით ინტეგრაციის საზღვრებს უსასრულობა წარმოადგენს (რადგანაც ინტეგრაცია მთელ ველზე ვრცელდება), სადაც ველი ნულის ტოლია. დროითი ინტეგრაციის საზღვრებზე, ე. ი. დროს მოცემულ საწყის და ბოლო მომენტში, პოტენციალთა ვარიაცია ნულის ტოლია, ვინაიდან უმცირესი მოქმედების პრინციპის აზრის მიხედვით ველი ამ მომენტებში მოცემულია. ამგვარად, (30,1)-ში მეორე წევრი ნულის ტოლია და ჩვენ ვპოულობთ

$$\frac{1}{ic} \int \left(\frac{1}{c} j_i - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \right) \delta A_i d\Omega = 0.$$

ვინაიდან უმცირესი მოქმედების პრინციპის აზრის მიხედვით ყველა δA_i ვარიაცია ნებისმიერია, ამიტომ δA_i -ს წინმდგომი კოეფიციენტი ნულის ტოლი უნდა იყოს, ე. ი.

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i. \quad (30,2)$$

ეს ოთხი განტოლება ($i = 1, 2, 3, 4$) სწორედ არის ოთხგანზომილებიანი ფორმაში დაწერილი მაქსველის განტოლებათა მეორე წყვილი. დაეწერათ ეს განტოლებანი სარგანზომილებიანი ფორმაში. პირველი მათგანი ($i=1$) არის

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x} + \frac{\partial F_{12}}{\partial y} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z} + \frac{1}{ic} \frac{\partial F_{14}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_1.$$

თუ (21,6)-დან F_{ik} თენზორის მდგენელებს ჩავსვამთ, გიპოვიოთ

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x.$$

ორ შემდეგ განტოლებებთან ერთად ($i = 2, 3$) ეს განტოლებანი შეიძლება დაწერილ იქნენ როგორც ერთი ვექტორული განტოლება

$$\text{rot H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (30,3)$$

დასასრულს, მეოთხე განტოლება ($i=4$) გვაძლევს

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} \rho, \quad (30,4)$$

ან

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

(30,3) და (30,4) განტოლებანი წარმოადგენენ ვექტორულ აღნიშვნებში დაწერილ მაქსველის განტოლებათა მეორე წყვილს. პირველ წყვილთან ერთად ისინი სავესებით განააზღვრავენ ელექტრომაგნიტურ ველს, და ამ ველების თეორიის, ან, როგორც ამბობენ, ელექტროდინამიკის, ძირითად განტოლებებს წარმოადგენენ.

ეს განტოლებანი ინტეგრალური ფორმით დაწვეროთ. თუ (30,4)-ს გავაინტეგრალებთ რაიმე მოცულობით და გაუსის თეორემას გამოვიყენებთ

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \oint \mathbf{E} d\mathbf{f},$$

ვიპოვით

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho dV. \quad (30,5)$$

ამგვარად, ჩაკეტილ ზედაპირში ელექტრული ველის ნაკადი ტოლია 4π -ზე გამრავლებული ამ ზედაპირით შემოსაზღვრულ მოცულობაში მყოფ სრული მუხტისა.

თუ გავაინტეგრალებთ (30,3) რომელიმე არაჩაკეტილ ზედაპირზე და გამოვიყენებთ სტოქსის თეორემას

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l},$$

ვიპოვით

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{f}. \quad (30,6)$$

სიდიდეს

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (30,7)$$

„წანაცვლების დენს“ უწოდებენ. (30,6)-დან, თუ მას დავსწეროთ სახით

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{f}, \quad (30,8)$$

ჩანს, რომ რომელიმე კონტურზე მაგნიტური ველის ცირკულაცია ტოლია $4\pi/c$ -ზე გამრავლებული, ამ კონტურით შემოსაზღვრულ ზედაპირში გამავალ ქვეშარით და წანაცვლების დენების ჯამისა.

მაქსველის გა ტოლებებიდან შეიძლება მივიღოთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი (29,3) უწყვეტობის განტოლება. თუ (30,3)-ის ორივე მხარედან დივერგენცს ავიღებთ, ვიპოვიოთ

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} E + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} j.$$

მაგრამ $\operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0$ და, (30,4) თანახმად, $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$. ამგვარად, ჩვენ კვლავ (29,3) განტოლებამდე მივდივართ. (30,2) დან ოთხგანზომილებიანი სახით გვაქვს

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_i}{\partial x_i}.$$

მაგრამ F_{ik} თენზორის ანტისიმეტრიულობის გამო გვაქვს, თუ ჩავსვამთ $F_{ik} = -F_{ki}$ და შევცვლით შემდეგ ინდექსების აღნიშვნებს,

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_k \partial x_i},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$, და ჩვენ მივდივართ ოთხგანზომილებიანი ფორმით დაწერილ (29,4) უწყვეტობის განტოლებამდე.

მიღებული ფორმით დაწერილ (29,4) უწყვეტობის განტოლებამდე.

9. § 31 ნენარგის სიმკვრივე და პოინტინგის ვექტორი

გავამრავლოთ (30,3) განტოლების ორივე მხარე E -ზე და (26,1) განტოლებებისა H -ზე და შემდეგ მიღებული განტოლებანი წიგრობრივად შევკრიბოთ. მაშინ გვექნება

$$\frac{1}{c} E \frac{dE}{dt} + \frac{1}{c} H \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} jE - (H \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} H).$$

ვექტორული ანალიზის ცნობილი ფორმულის საშუალებით:

$$\operatorname{div} [ab] = b \operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b,$$

ეს განტოლება შემდეგი სახით შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c} jE - \operatorname{div} [EH].$$

ან

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -jE - \operatorname{div} S. \quad (31,1)$$

ვექტორი

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH] \quad (31,2)$$

პოინტინგის ვექტორის სახელწოდებას ატარებს.

გავინტეგრალთ (31,1) რაიმე მოცულობით და მარჯვენა მხარეში მეორე წევრის მიმართ გაუსის თეორემა გამოვიყენოთ. მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}. \quad (31,3)$$

თუ ინტეგრაცია მთელ სივრცეზე წარმოებებს, მაშინ ზედაპირზე აღებული ინტეგრალი ისპობა (უსასრულობაში ველი ნულის ტოლია). შემდეგ, ინტეგრალი $\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$ შეიძლება ველში მყოფი ყველა მუხტის მიმართ აღებული ჯამის სახით დავწეროთ. $\sum e v E$ და ჩავსვათ მასში, თანახმად (15,9)-სა,

$$e v E = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{\text{კინ}}$$

(სადაც $\mathcal{E}_{\text{კინ}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$). მაშინ (31,3) ღებულობა სახეს

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{კინ}} \right\} = 0. \quad (31,4)$$

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ველისა და მასში მყოფი ნაწილაკებისაგან შემდგარი ჩაკეტილი სისტემისათვის შეინახება სიდიდე, რომელიც დაწერილი განტოლების ფრჩხილებში დგას. ამ გამოსახულების მეორე წევრი არის ყველა ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია (უძრავობის ენერგიასთან ერთად). მაშასადამე, პირველი წევრი არის თვით ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია. სიდიდეს

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (31,5)$$

ჩვენ შეგვიძლია, ამიტომ, ელექტრომაგნიტური ველის „ენერგიის სიმკვრივე“ ვუწოდოთ. ეს არის ველის ერთეული მოცულობის ენერგია.

რაიმე სასრულო მოცულობაში ინტეგრაციისას, ზედაპირული ინტეგრალი (31,3)-ში, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, არ ისპობა, ასე რომ, ეს განტოლება ჩვენ შეგვიძლია შემდეგი სახით დავწეროთ:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{კინ}} \right\} = - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}. \quad (31,6)$$

სადაც ეხლა მეორე წევრში შეჯამება წარმოებს მხოლოდ განსახილავ მოცულობაში მყოფი ნაწილაკების მიმართ. მარცხნივ დგას ველისა და ნაწილაკების სრული ენერგიის ცვლილება დროს ერთეულში. ამიტომ ინტეგრალი $\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}$ უნდა განვიხილოთ, როგორც ენერგიის ნაკადი იმ ზედაპირში, რომელიც მოცემულ მოცულობას შემოსაზღვრავს, ასე რომ \mathbf{S} პოინტინგის ვექტორი არის ამ ნაკადის სიმკვრივე, — ენერგიის რაოდენობა, რომელიც დროს ერთეულში ზედაპირის ერთეულში გაედინება.

წინა პარაგრაფში ჩვენ გამოვიყვანეთ ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის გამოსახულება. გამოვიყვანეთ ეს გამოსახულება იმპულსის გამოსახულებასთან ერთად ოთხგანზომილებიანი ფორმით. ამასთანავე, სიმარტივისათვის, ჩვენ ჯერ ელექტრომაგნიტურ ველს უმუხტებად განვიხილავთ. ამასთანავე, შემდგომი გამოყენებისა (გრაფიტაციული ველების მიმართ) და აგრეთვე დასკვნების გამართივების მიზნით, ჩვენ გამოყვანას ზოგადი სახით შევასრულებთ და კონკრეტული გვარის სისტემების სპეციალიზაციას არ მოვახდენთ. სახელდობრ, განვიხილოთ რალაც სისტემა, რომლის მოქმედების ინტეგრალს აქვს სახე:

$$S = \int \Delta \left(q, \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) dV dt = \frac{1}{ic} \int \Lambda d\Omega, \quad (32,1)$$

სადაც Λ —სისტემის განმსაზღვრელ q სიდიდეთა და მათი კოორდინატებითა და დროთი წარმოებულების რალაც ფუნქციის წარმოდგენს (ელექტრომაგნიტური ველისათვის q სიდიდეებს 4-პოტენციალის კომპონენტები წარმოადგენენ). სიმარტივისათვის ჩვენ აქ მხოლოდ ერთ ასეთ q სიდიდეს ვწვწრთ. შევნიშნოთ, რომ სივრცითი ინტეგრალი $\int \Lambda dV$ არის სისტემის ლაგრანჯის

ფუნქცია, ასე რომ Λ შეიძლება იყოს განხილული როგორც ლაგრანჯის ფუნქციის სიმკვრივე. სისტემის ჩაკეტილობის მათემატიკურ გამოსახულებას წარმოადგენს ის, რომ Λ x_i ზე ცხადად არ არის დამოკიდებული, ისევე, როგორც ჩაკეტილი მექანიკური სისტემისათვის ლაგრანჯის ფუნქცია ცხადად დროზე არ არის დამოკიდებული.

„მოძრაობის განტოლებანი“ (ან, თუ რომელიმე ველზეა ლაპარაკი, ველის განტოლება), უმცირესი მოქმედების პრინციპის თანახმად, S -ის ვარირებით მიიღება. გვაქვს (სიმოკლისათვის აღვნიშნოთ $q_{,i} \equiv \frac{\partial q}{\partial x_i}$):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q_{,i} \right) d\Omega = \\ &= \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \delta q_{,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right] d\Omega = 0. \end{aligned}$$

ინტეგრალ-ქვეშა მეორე წევრი, თუ მას გარდავქმნით გაუსის თეორემის თანახმად, მთელ სივრცეზე ინტეგრაციის დროს ისპობა, და მაშინ ჩვენ შემდეგ „მოძრაობის განტოლებებს“ ვპოულობთ:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \quad (32,2)$$

(ყველგან, რა თქმა უნდა, იგულისხმება i ინდექსით შეჯამება).

შემდგომი გამოყვანა ანალოგიურია იმისი, რომელიც კეთდება მექანიკაში ენერჯის შენახვის კანონის გამოყვანის დროს. სახელდობრ, ვწერთ:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}$$

თუ აქ (32,2) ჩავსვამთ და მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k}, \text{ ეპოვით}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right)$$

მეორე მხრით, შეიძლება დაიწეროს $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}$, ასე რომ

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} \delta_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,i} \right)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$T_{ik} = q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_{ik} \Lambda, \quad (32,3)$$

მიღებული თანაფარდობა შეიძლება დაიწეროს სახით:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (32,4)$$

შეენიშნოთ, რომ თუ ჩვენ არა ერთი, არამედ რამდენიმე $q^{(l)}$ სიდიდე ვვაქვს, მაშინ (32,3) ნაცვლად, ცხადია, უნდა დაწეროთ

$$T_{ik} = \sum_l q_{,i}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_{ik} \Lambda. \quad (32,5)$$

მაგრამ § 29-ში ჩვენ დაინახეთ, რომ $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} = 0$ სახის განტოლება, ე. ი. ვექტორის 4-დივერგენციის ნულთან ტოლობა, იმ მტკიცების ექვივალენტურია, რომ შეინახება ამ ვექტორის ინტეგრალი $\int A_k dS_k$, აღებული ჰიპერზედაპირზე, რომელიც მთელ სამგანზომილებიან სივრცეს შეიცავს. ცხადია, რომ ანალოგიურ მდგომარეობას ადგილი აქვს თენზორის დივერგენციისთვისაც. $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$ განტოლება იმ მტკიცების ტოლფასია, რომ შეინახება ვექტორი P_i , რომლის კომპონენტები ჰიპერზედაპირზე აღებული T_{ik} -ის ინტეგრალების ტოლია:

$$P_i = \text{const} \int T_{ik} dS_k$$

სწორედ ეს ვექტორი უნდა იყოს გაიგივებული სისტემის იმპულსის 4-ვექტორთან. ინტეგრალის წინ მუდმივ მანძილს ჩვენ ისე შევარჩევთ, რომ წინა განმარტების შესაბამისად P_i ვექტორის მეოთხე კომპონენტი ტოლი იყოს i/c -ზე გამრავლებული სისტემის ენერჯიისა. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ P_i შეიძლება დაიწეროს ამ სახით:

$$L_4 = \text{const.} \int T_{4k} dS_k = \text{const.} \int T_{44} dV,$$

თუ ინტეგრობა $x_4 = \text{const.}$ ჰიპერზედაპირზე წარმოვებს. მეორე მხრით, (32,3)-ის თანახმად გვაქვს:

$$T_{44} = \dot{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \Lambda \left(\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} \right).$$

ეს სიდიდე, ენერჯიის ლაგრანჟის ფუნქციასთან დამაკავშირებელი ჩვეულებრივი ფორმულის შესაბამისად, განხილულ უნდა იქნეს როგორც სისტემის ენერჯიის სიძვერივე, და ამიტომ $\int T_{44} dV$ არის სისტემის სრული ენერჯია. ამგვარად, ჩვენ უნდა დავუშვათ, რომ $\text{const.} = i/c$, და სისტემის 4-იმპულსისათვის საბოლოოდ, ვღებულობთ გამოსახულებას

$$P_i = \frac{i}{c} \int T_{ik} dS_k. \quad (32, 6)$$

T_{ik} თენზორის სისტემის ენერჯია—იმპულსის თენზორი ეწოდება.

უნდა აღინიშნოს, რომ T_{ik} თენზორის განსაზღვრა არსებითად არა ცალსახაა. მართლაც, (32,3) ტოლობით განსაზღვრულ T_{ik} თენზორს შეიძლება დაუმატოთ $\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{ik}$ სახის სიდიდე, სადაც ψ_{ik} —ნებისმიერი ანტისიმეტრიული თენზორია k და l ინდექსების მიმართ. ასეთი შეცვლის შემდეგ ახალი T'_{ik} თენზორი აგრეთვე დააკმაყოფილებს (32,4) განტოლებას, რადგანაც ჩვენ გვაქვს იგივეურად $-\frac{\partial^2 \psi_{ik}}{\partial x_i \partial x_l} = 0$. ამასთანავე სისტემის სრული 4-იმპულსი P_i საზოგადოდ არ შეიცვლება, ვინაიდან (6,12) თანახმად, ჩვენ შეიძლება დავწეროთ

$$\int \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_i} dS_k = \frac{1}{2} \int \left(dS_k \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_i} - dS_l \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_k} \right) = \int \psi_{ik} d f_{ik},$$

სადაც მარჯვენა მხარეში ინტეგრობა წარმოვებს იმ ჰიპერზედაპირის „მომვლებ“ (ჩვეულებრივ) ზედაპირზე, რომელზედაც წარმოვებს ინტეგრობა ტოლობის მარცხენა მხარეში. ეს ზედაპირი ცხადია სამგანზომილებიანი სივრცის უსასრულობაში იმყოფება, და ვინაიდან ველი და მატერია უსასრულობაში არ არსებობს, ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია. ამგვარად სისტემის 4-იმპულსი, როგორც უნდა ყოფილიყო, ცალსახად განსაზღვრულ სიდიდეს წარმოადგენს. T_{ik}

თენზორის ცალსახად განსაზღვრავად შეიძლება ვისაჩვენებოთ იმ მოთხოვნით, რომ იმპულსის მომენტის 4-თენზორი შემდეგნაირად გამოისახებოდეს 4-იმპულსის საშუალებით

$$M_{ik} = \int (x_i dP_k - x_k dP_i) = \int (x_i T_{ik} - x_k T_{ii}) dS_i, \quad (32,7)$$

ე. ი. ისე, რომ არა მხოლოდ სისტემის სრული მომენტი, არამედ მისი „სიმკვრივე“ ჩვეულებრივი ფორმულით გამოისახებოდეს იმპულსის „სიმკვრივის“ საშუალებით.

ადვილად შეიძლება განისაზღვროს, თუ რა პირობა უნდა დააკმაყოფილოს ამისათვის ენერგია—იმპულსის თენზორმა. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ მომენტის შენახვის კანონი, როგორც ჩვენ უკვე ვიცით, შეიძლება გამოისახოს M_{ik} -ში ინტეგრალქვეშა გამოსახულების დიფერენციალის ნულთან გატოლებით. ამგვარად

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (x_i T_{ik} - x_k T_{ii}) = 0.$$

მივიღებთ რა მხედველობაში, რომ $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii}$ და რომ $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = 0$, ვპოულობთ აქედან

$$\delta_{ii} T_{ik} - \delta_{ik} T_{ii} = T_{ik} - T_{ik} = 0,$$

ან

$$T_{ik} = T_{ki} \quad (32,8)$$

ე. ი. ენერგია-იმპულსის თენზორი სიმეტრიული უნდა იყოს.

შევნიშნოთ, რომ (32,4) ფორმულით განსაზღვრული T_{ik} , საზოგადოდ, არ არის სიმეტრიული, მაგრამ იგი შეიძლება გავხადოთ სიმეტრიული $\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{ik}$

სახის გამოსახულების დამატებით სათანადო ψ_{ik} -ით.

შემდეგში (§ 90) ჩვენ დაეინახავთ, რომ არსებობს T_{ik} სიმეტრიული თენზორის უშუალოდ მიღების მარტივი ხერხი. როგორც ზემოდ იყო თქმული, თუ (32,6)-ში ინტეგრებას შევასრულებთ $x_i = const.$ პიპერზედაპირზე, მაშინ P_i ლებულობს სახეს:

$$P'_i = \frac{i}{c} \int T_{ik} dV, \quad (32,9)$$

სადაც ინტეგრება მთელ (სამგანზომილებიან) სივრცეზე წარმოებს. ვინაიდან P_i -ს სივრცითი კომპონენტები სისტემის იმპულსის სამგანზომილებიან ვექტორს შეადგენენ, ხოლო დროითი კომპონენტი არის i/c -ზე გამრავლებული სისტემის ენერგია, ამიტომ $\frac{i}{c} T_{ik}$ კომპონენტებს „იმპულსის სიმკვრივე“, ხოლო T_{ik}

„ენერგიის სიმკვრივე“ შეიძლება ვუწოდოთ (ე. ი. ერთეული მოცულობის იმპულსი და ენერგია სათანადოდ).

T_{ik} -ს დანარჩენ კომპონენტთა აზრის გამოსარკვევად (32,4) შენახვის განტოლება სამგანზომილებიანი სახით დავწეროთ

$$\frac{1}{ic} \frac{\partial T_{44}}{\partial t} + \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{1}{ic} \frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (32,10)$$

გავაინტეგრავთ ეს განტოლებანი სივრცის რომელიმე V მოცულობით. პირველიდან გვაქვს

$$\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \int T_{44} dV + \int \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} dV = 0,$$

ან, თუ მეორე ინტეგრალს გაუსის თეორემის მიხედვით გარდავქმნით,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T_{44} dV = -ic \oint T_{4\alpha} df_\alpha, \quad (32,11)$$

სადაც მარჯვენა ინტეგრალი ადებულია იმ ზედაპირზე, რომელიც შემოსალხვრავს V მოცულობას. მარცხნივ დგას V მოცულობაში მოთავსებული ენერგიის ცვლილების სიჩქარე. აქედან ჩანს, რომ მარჯვნივ მდგომი გამოსახულება არის ენერგიის რაოდენობა, რომელიც V მოცულობის საზღვარში გადის, ხოლო $ic T_{4\alpha}$ ამ ნაკადის სიმკვრივეა — ენერგიის რაოდენობა, რომელიც დროს ერთეულის განმავლობაში ზედაპირის ერთეულში გადის. ამგვარად, ენერგიის ნაკადის სიმკვრივე c^2 -ზე გამრავლებული იმპულსის ნაკადის სიმკვრივის ტოლია. ანალოგიურად, მეორე განტოლებიდან ვპოულობთ

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{i}{c} T_{\alpha 4} dV = \oint T_{\alpha\beta} df_\beta. \quad (32,12)$$

მარცხნივ დგას სისტემის იმპულსის ცვლილება V მოცულობაში დროს ერთეულში. ამიტომ. — $\oint T_{\alpha\beta} df_\beta$ წარმოადგენს იმპულსის იმ რაოდენობას, რომელიც ერთეულ დროში V მოცულობიდან გამოდინდება. ამგვარად, $T_{\alpha\beta}$ არის იმპულსის ნაკადის სიმკვრივე. ენერგიის ნაკადის სიმკვრივე არის ვექტორი, ვექტორია აგრეთვე იმპულსის ნაკადი, ხოლო იმპულსის ნაკადის სიმკვრივე კი, ცხადია, თენზორი უნდა იყოს (ამ თენზორის $T_{\alpha\beta}$ კომპონენტი იმპულსის α -კომპონენტის რაოდენობაა, რომელიც x_β ღერძის პერპენდიკულარულ ერთეულ ზედაპირში გაედინება დროს ერთეულში).

§ 33. ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის თენზორი

წინა პარაგრაფში მიღებული ზოგადი თანადარდობანი გამოვიყენოთ ელექტრომაგნიტური ველის მიმართ. (32,1) ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მდგომი სიდიდე ელექტრომაგნიტური ველისათვის (27,4)-ის თანახმად უდრის

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F^2_{ik} = -\frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right)^2.$$

4 სიდიდეებს ველის A_k 4-პოტენცილის კომპონენტები წარმოადგენენ. თუ ამას ჩავსვამთ T_{ik} თენზორის (32,5) განმარტებაში, გექნება

$$T_{ik} = \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)} - \delta_{ik} \Lambda.$$

აქ მდგომარეობს Λ -ს წარმოებულის გამოსათვლელად დავწეროთ $\delta \Lambda$ ვარიაცია. გვაქვს

$$\delta \Lambda = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) \delta \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) = -\frac{1}{8\pi} F_{kl} \left(\delta \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \delta \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right).$$

ან, თუ ინდექსებს გადავსვამთ და ვისარგებლებით იმით, რომ $F_{kl} = F_{lk}$:

$$\delta \Lambda = -\frac{1}{4\pi} F_{kl} \delta \frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)} = -\frac{1}{4\pi} F_{kl},$$

და ამიტომ

$$T_{ik} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_l}{\partial x_i} F_{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_{ik} F^2_{lm}.$$

იმისათვის, რომ ეს გამოსახულება i და k ინდექსების მიმართ სიმეტრიული გავხადოთ დაუმატოთ მას $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_i}{\partial x_l} F_{kl}$ წევრი; ამ წევრს $\frac{\partial}{\partial x_l} \psi_{ik}$ წარმოებულის სახე აქვს, ვინაიდან

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_l} F_{kl} = \frac{\partial (A_i F_{kl})}{\partial x_l} - A_i \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l}$$

[მაქსველის (30,2) განტოლებების თანახმად იმ ადგილებში, სადაც მუხტი არ არის, $\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = 0$], და ამიტომ, როგორც წინა პარაგრაფში გამოვარკვეეთ,

მართლაც შეიძლება დავმატოს ენერგია-იმპულსის თენზორს. ვინაიდან $\frac{\partial A_i}{\partial x_l} =$

$\frac{\partial A_i}{\partial x_l} = F_{il}$, ამიტომ ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია იმპულსის თენზორის

სათვის საბოლოოდ შემდეგ გამოსახულებას ვპოულობთ:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} F^2_{lm} \delta_{ik} - F_{il} F_{kl} \right). \quad (33,1)$$

ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ელექტრომაგნიტური ველის T_{ik} თენზორი აკმაყოფილებს მოთხოვნილებას $T_{ik} = T_{ki}$. გარდა ამისა, მას ის თვისება აქვს, რომ მისი დიაგონალური წევრების ჯამი ნულის ტოლია:

$$T_{ii} = 0. \quad (33,2)$$

გამოვსახოთ T_{ik} თენზორის კომპონენტები ელექტრული და მაგნიტური ველების საშუალებით. F_{ik} კომპონენტების (21,6) გამოსახულების დახმარებით ადვილად მოიძებნება T_{ik} -ს გამოსახულება:

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi} \left(E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \delta_{\alpha\beta} \right), \\ T_{i4} &= -\frac{i}{c} S_i, \quad T_{44} = W, \end{aligned} \right\} \quad (33,3)$$

სადაც $W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$ არის ველის ენერჯიის სიმკვრივე, ხოლო $S = \frac{c}{4\pi} [EH]$ — პოინტინგის ვექტორი. $T_{\alpha\beta}$ სამგანზომილებიან თენზორს მაქსველის დაკვიმელობათა თენზორი ეწოდება.

აქამდე ველს ჩვენ განვიხილავდით უმუხტებოდ. ნაწილაკთა არსებობისას ველისა და ნაწილაკთა საერთო ენერჯია და იმპულსი ერთისა და მეორის ენერჯიისა და იმპულსის ჯამის ტოლია, ე. ი. სრული 4-იმპულსი უდრის

$$P_i = \frac{i}{c} \int T_{ik} dS_k + \sum p_i \quad (33,4)$$

სადაც $P_i = mcu_i$, ნაწილაკის 4-იმპულსია, ხოლო ჯამი აღებულია ველში მყოფი ყველა ნაწილაკის მიმართ. ველისა და მუხტების იმპულსისათვის სამგანზომილებიანი სახით შეიძლება დავწეროთ

$$\int \frac{S}{c^2} dV + \sum p$$

და ენერჯიისათვის

$$\int W dV + \sum \mathcal{E}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (33,4)-ის თანახმად განსაზღვრული P_i მართლაც შეინახება. გამოვთვალოთ P_i ვექტორის dP_i ცვლილება dt დროში. ეს შეიძლება გაკეთდეს იმის ანალოგიურად, როგორც § 29-ში მუხტის ცვლილება გამოვთვალეთ. დროს რაღაც t მომენტში P_i (33,4) ფორმულით განისაზღვრება, სადაც ინტეგრირება წარმოებს $t = \text{const}$ ჰიპერსიბრტყეზე. $t + dt$ მომენტში P_i იმავე ფორმულით განისაზღვრება, სადაც ინტეგრირება $t + dt = \text{const}$. ჰიპერსიბრტყეზე წარმოებს, ხოლო ნაწილაკთა იმპულსები დროს $t + dt$ მომენტში იღებინ. ამ ჰიპერსიბრტყეებზე აღებული $\int T_{ik} dS_k$ ინტეგრალის მნიშვნელობათა სხვაობა შეიძლება დავწეროთ $\oint T_{ik} dS_k$ ინტეგრალის სახით, რომე-

ლაც ამ ჰიპერსიბრტყეებს შორის არსებული ოთხგანზომილებიანი მოცულობის შემომსაზღვრელ ჰიპერზედაპირზეა აღებული (უსასრულობაში ველი ნულის ტოლია, ამიტომ „გვერდით ჰიპერზედაპირზე“ გავრცელებული ინტეგრალი ისპობა). ამგვარად

$$dP_i = \frac{i}{c} \oint T_{ik} dS_k + \sum dp_i,$$

ან, გაუსის თეორემის თანახმად,

$$dP_i = \frac{i}{c} \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\Omega + \sum dp_i, \quad (33,5)$$

სადაც ინტეგრალი ორი უსასრულოდ მახლობელ ჰიპერსიბრტყეს შორის 4-მოცულობაზეა აღებული.

(33,5)-ის მეორე წევრი შეიძლება გარდაექმნათ (21,4) ველში მუხტის მოძრაობის განტოლებათა გამოყენებით:

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k,$$

საიდანაც ds -ზე გამრავლებით:

$$dp_i = \frac{e}{c} F_{ik} dx_k = \frac{e}{c} F_{ik} \frac{dx_k}{dt} dt.$$

თუ მუხტის ρ სიმკვრივეს შემოვიტანთ, გექნება

$$\sum dp_i = \frac{dt}{c} \int \rho F_{ik} \frac{dx_k}{dt} dV = \frac{dt}{c} \int F_{ik} j_k dV,$$

სადაც j_k დენის 4-ვექტორია. მაგრამ მიღებული გამოსახულება შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს

$$\sum dp_i = \frac{1}{ic^2} \int F_{ik} j_k d\Omega,$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია იმავე 4-მოცულობაში, როგორც (34,35)-ის პირველ წევრში. ამგვარად,

$$dP_i = \frac{i}{c} \int \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{c} F_{ik} j_k \right) d\Omega.$$

მეორე მხრით, მაქსველის განტოლებათა დახმარებით შეიძლება იქნეს ნაჩვენები, რომ აქ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ისპობა, ასე რომ dP_i ნულის ტოლია, ე. ი. P_i მართლაც შეინახება. ამრსათვის (33,1)-ის გამოყენებით ვწერთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial F_{lm}^2}{\partial x_k} \delta_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} F_{il} F_{ki} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i} F_{lm} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{ki} - \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_k} F_{il} \right). \end{aligned}$$

თუ აქ მაქსველის (26,5) და (30,2) განტოლებათა თანახმად ჩავსვათ n

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i, \quad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_l} = -\frac{\partial F_{ml}}{\partial x_l} - \frac{\partial F_{nl}}{\partial x_m}$$

და გავიხსენებთ, რომ F_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორია, გვექნება

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l} F_{lm} - \frac{1}{2} \frac{\partial F_{nl}}{\partial x_m} F_{lm} - \frac{\partial F_{nl}}{\partial x_k} F_{kl} + \frac{4\pi}{c} F_{il} j_l \right).$$

ინდექსთა გადასმით ადვილად შეიძლება იქნას ნაჩვენები, რომ პირველ საბი წევრი მარჯვნივ ურთიერთ შეიკვეცება, და ჩვენ მივიღებთ საძიებელ შედეგამდე:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{c} F_{ik} j_k. \quad (33,6)$$

ეს განტოლება, რომელიც არის (32,4) განტოლების განზოგადოება, წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის მასში მყოფი ნაწილაკებთან ერთად ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის კანონის მათემატიკურ გამოსახულებას. როგორც ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, ამ განტოლების მეოთხე კომპონენტი თანხველება განტოლებას (31,1).

ა მ ო ც ა ნ ა

ვაჩვენოთ, რომ T_{ik} ტენზორის მთავარი მნიშვნელობანი უდრიან:

$$-W, -W, +W, +W.$$

§ 34. მიკროსკოპულ სხეულთა ენერჯია-იმპულსის ტენზორი

განვიხილოთ ნაწილაკთა სისტემა, რომლებიც ერთიმეორესთან არ ურთიერთმოქმედებენ. მათი 4-იმპულსი ინტეგრალური სახით შეიძლება დაიწეროს, თუ შესაბამისად განსაზღვრულ ენერჯია-იმპულსის ტენზორს შემოვიტანთ, ამისათვის სივრცეში მასების განაწილება აღვწეროთ მათი „მასის სიმკვრივის“ დახმარებით, ანალოგიურად იმისა, როგორც წერტილოვანი მუხბების განაწილება აღვწერეთ მათი სიმკვრივის დახმარებით. მუხბების სიმკვრივის (28,1) ფორმულის ანალოგიურად მასების სიმკვრივე შეიძლება დაიწეროს ამ სახით

$$\mu = \sum_A m_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad (34,1)$$

სადაც \mathbf{r}_A — ნაწილაკთა რადიუს-ვექტორებია, ხოლო შეჯამება სისტემის ყველა ნაწილაკების მიმართ წარმოებს.

ნაწილაკთა „4-იმპულსის სიმკვრივე“ დაიწერება $\mu c u_i$ სახით. როგორც ვიცით, ეს სიმკვრივე ენერგია-იმპულსის $\frac{i}{c} T_{4\alpha}$ თენზორის კომპონენტებს წარმოადგენს, ე. ი. $T_{4\alpha} = -i\mu c^2 u_i$. მაგრამ μ მასის სიმკვრივე $-\frac{1}{ic} \frac{dx_k}{dt}$ 4-ვექტორის დროით კომპონენტს წარმოადგენს (მუხტების სიმკვრივის ანალოგიურად, იხ. § 78). ამიტომ არა ურთიერთმომქმედ ნაწილაკთა სისტემის ენერგია-იმპულსის თენზორი არის

$$T_{ik} = -\mu c \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{dt} = -\mu c u_i u_k \frac{ds}{dt} \quad (34,2)$$

ეს თენზორი, როგორც უნდა ყოფილიყო, სიმეტრიულია.

გამოვთვალოთ (34,2) ენერგია-იმპულსის თენზორის დიაგონალურ წევრთა ჯამი, ე. ი. T_{ii} სიდიდე. გვაქვს

$$T_{ii} = -\mu c u_i u_i \frac{ds}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt}$$

თუ აქ ჩავსვამთ $ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ და μ -ს ნაცვლად (34,1) ჯამს, ვიპოვიით

$$T_{ii} = \sum_A m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \delta(r - r_A) \quad (34,3)$$

ჩვენ ვხედავთ, კერძოდ, რომ $T_{ii} > 0$.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ T_{ii} -ს (34,3) გამოსახულებას ადგილი აქვს ერთმანეთთან ურთიერთმომქმედ დამუხტულ ნაწილაკთა ყოველი სისტემისათვის. მართლაც, ასეთი სისტემის ენერგია-იმპულსის თენზორი შეიძლება დაგვეწერა, როგორც (34,2) თენზორისა და ელექტრომაგნიტური ველის ნაწილაკთა მიერ შექმნილი ენერგია-იმპულსის თენზორის ჯამი. მაგრამ ელექტრომაგნიტური ველისათვის ყოველთვის $T_{ii} = 0$ (§ 33). ამიტომ, ჩვენ შეიძლება გამოვთქვათ დებულება, რომ ყოველი ფიზიკური სისტემისათვის

$$T_{ii} \geq 0, \quad (34,4)$$

ამასთანავე ტოლობის ნიშანს ადგილი აქვს მხოლოდ უმუხტო ელექტრომაგნიტური ველისათვის.

განვიხილოთ ვხლა რომელიმე მკროსკოპული სხეული და განვსაზღვროთ მისი ენერგია-იმპულსის ვექტორი. (32.12) განტოლებიდან

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{i}{c} \int T_{4\alpha} dV = \oint T_{\alpha\beta} dS_\beta$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მარჯვენა მხარეზე მდგომი განოსახულება შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც იმ ძალის მე-4 კომპონენტი, რომლითაც სხეული ახ-
7. ველის თეორია

დენს მას შემოჰსახლებრელ ზედაპირზე (რამდენადაც მარცხენა მხარეზე დგას სხეულის იმპულსის მე- α კომპონენტის შემცირება დროს ერთეულში). სხვაგვარად რომ ვთქვათ, — $T_{\alpha\beta}df_{\beta}$ წარმოადგენს იმ ძალის მე- α კომპონენტს, რომლითაც სხეული მოქმედებს ამ ზედაპირის ელემენტზე. გამოვიყენოთ ახლა ისეთი ათვლის სისტემა, რომელშიაც სხეულის მოცულობის მოცემული ელემენტი უძრავია. ასეთ ათვლის სისტემაში ადგილი აქვს პასკალის კანონს, ე. ი. წნევა, რომელსაც სხეულის მოცემული უბანი აწარმოებს, ერთიდაიგივეა ყველა მიმართულებით და პერპენდიკულარულია იმ ფართობისა, რომელზედაც იგი წარმოებს.¹ ამიტომ შეიძლება დაწეროთ — $T_{\alpha\beta}df_{\beta} = p df_{\alpha}$, საიდანაც

$$T_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}p$$

სადაც p — სხეულის წნევაა. რაც შეეხება T_{ik} კომპონენტებს, რომელნიც გამოხატავენ იმპულსის სიმკვრივეს, ისინი სხეულის მოცულობის მოცემული ელემენტისათვის განსახილავ ათვლის სისტემაში ნულის ტოლია. როგორც ყოველთვის, T_{ik} კომპონენტს კი სხეულის ენერჯიის სიმკვრივის ტოლია, რომელსაც აქ ჩვენ ρc^2 -ით აღვნიშნავთ; ცხადია ამისათვის, რომ p არის სხეულის მასის სიმკვრივე, ე. ი. მისი მოცულობის ერთეულის მასა². ამგვარად, განსახილავ ათვლის სისტემაში T_{ik} თენზორს (სხეულის მოცემული უბნისათვის) აქვს სახე

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 \end{pmatrix}. \quad (34,5)$$

ახლა ადვილად შეიძლება მოვინახოთ მიკროსკოპული სხეულის ენერჯია-იმპულსის თენზორს გამოსახულება ყოველ ათვლის სისტემაში. ამისათვის შემოვიტანოთ სხეულის მოცულობის ელემენტის მიკროსკოპული მოძრაობის u_i 4-სიჩქარე. ამ ათვლის სისტემაში, რომელშიაც მოცემული ელემენტი უძრავია, მისი 4-სიჩქარის კომპონენტები ტოლია $u_{\alpha} = 0$, $u_4 = i$. T_{ik} გამოსახულება ისევ უნდა იქნეს შერჩეული, რომ ამ სისტემაში იგი ღებულობდეს (34,5) სახეს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი იქნება

$$T_{ik} = -(p + \rho c^2)u_i u_k - p \delta_{ik}. \quad (34,6)$$

ეს გამოსახულება სწორედ განსაზღვრავს მიკროსკოპული სხეულის ენერჯია-იმპულსის თენზორს.

იმ შეთხვევაში, როცა მიკროსკოპულ შემადგენლობაში შემავალ ნაწი-

¹ მკაცრად რომ ვიმჯგელოთ, პასკალის კანონს ადგილი აქვს მხოლოდ სითხეებისა და გაზებისათვის. მაგრამ მყარ სხეულებში სხვადასხვა მიმართულებით შესაძლოა წნევათა მაქსიმალური სხვაობანი უმნიშვნელო სიდიდისა იმ წნევებთან შედარებით, რომელთაც შეუძლიათ როლი ითამაშონ ფარდობიანობის თეორიაში. ასე რომ, მათი მხედველობაში მიიღება ინტერესს მოკლებულია.

² მასის სიმკვრივისა და მუხტის სიმკვრივის ერთიდაიგივე დასოთი აღნიშვნას არ შეუძლია გამოიწვიოს გაუგებრობა, ვინაიდან ჩვენ მათ ერთდროულად არსად არ ვიყენებთ.

ლაკთა სიჩქარე სინათლის სიჩქარესთან შედარებით მცირეა (მიკროსკოპული მოძრაობის სიჩქარე კი ნებისმიერი შეიძლება იყოს), მაშინ T_{ik} გამოსახულება მარტივდება. :

სახელდობრ, ამ შემთხვევაში ენერჯიის სიმკვრივის ρc^2 გამოსახულებაში შეიძლება უგულველყოთ ყველა ის წევრი, რომლებიც უძრაობის ენერჯიასთან შედარებით მცირეა, ე. ი. ρc^2 ნაცვლად შეიძლება μc^2 დაწვროთ, სადაც μ — სხეულის ერთეულ მოცულობაში მყოფ ნაწილაკთა მასების ჯამია (სხეულის მასის ρ სიმკვრივის ზუსტი მნიშვნელობისაგან განსხვავებით, რომელიც შეიცავს აგრეთვე სხეულში ნაწილაკთა მიკროსკოპული მოძრაობის ენერჯიით და მათი ურთიერთმოქმედების ენერჯიით გამოწვეულ მასებსაც). რაც შეეხება სხეულის მოლეკულების მიკროსკოპიული მოძრაობის ენერჯიით განსაზღვრულ წნევას, იგი განსახილავ შემთხვევაში ცხადია, აგრეთვე მცირეა უძრაობის ენერჯიის μc^2 სიმკვრივისთან შედარებით. ამგვარად. T_{ik} -თვის ჩვენ ვპოულობთ განოსახულებას

$$T_{ik} = -\mu c^2 u_i u_k. \quad (34,7)$$

(34,6) გამოსახულებიდან ვპოულობთ $T_{ii} = \rho c^2 - 3p$. ყოველი სისტემის ენერჯია-იმპულსის (34,4) თენზორის ზოგადი თვისება გვიჩვენებს ახლა რომ მიკროსკოპიული სხეულის წნევისა და სიმკვრივისათვის ყოველთვის აქვს ადგილი უტოლობას

$$p < \frac{\rho c^2}{3}. \quad (34,8)$$

შევიდაროთ $T_{ii} = \rho c^2 - 3p$ თანაფარდობა ზოგად (34,3) ფორმულას, რომელსაც, როგორც დავინახეთ, ადგილი აქვს ყოველი სისტემისათვის. რამდენადაც ჩვენ ახლა მიკროსკოპიულ სხეულს განვიხილავთ, (34,3) გამოხატულება უნდა გავასაშუალოთ r -ის ყველა მნიშვნელობათათვის ერთეულ მოცულობაში. ამის შედეგად ვპოულობთ

$$\rho c^2 - 3p = \sum m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \quad (34,9)$$

(შეჯამება წარმოებს ერთეულ მოცულობაში მყოფ ნაწილაკთა მიმართ).¹

მიღებული ფორმულები გამოვიყენოთ იდეალური გაზის მიმართ, რომელიც, დაუშვათ, შედგება ერთნაირ ნაწილაკებისაგან. რამდენადაც იდეალური გაზის ნაწილაკები ერთმანეთთან არ ურთიერთმოქმედებენ, შეიძლება ვისარგებლოთ (34,2) ფორმულით, თუ მას წინასწარ გავასაშუალებდით. ამგვარად იდეალური გაზისათვის

$$T_{ik} = -nmc \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{ds},$$

¹ მცირე სიჩქარეთა შემთხვევაში ამ ფორმულის დაშლას მივყევართ თანაფარდობასთან $3p = \bar{u} + 2 \sum \frac{1}{2} m_A v_A^2$, ე. ი. წნევა ტოლია ერთეულ მოცულობაში ნაწილაკთა ურთიერთმოქმედების საშუალო პოტენციური ენერჯიისა (\bar{u}) და მათი გაორკეცებული კინეტიკური ენერჯიის ჯამის მესამედს. იგივე თანაფარდობა შეიძლება მივიღოთ უშუალოდ კულონის კანონიდან ეკრეთწოდებული ვიზიალის თეორემის დახმარებით.

სადაც n ნაწილაკთა რიცხვია ერთეულ მოცულობაში, ხოლო ზევითა ხაზი ყველა ნაწილაკების მიმართ გასაშუალებას აღნიშნავს. თუ გახში არაერთი მიკროსკოპიული მოძრაობა არ არის, მაშინ მეორე მხრით T_{ik} -თვის გვაქვს (34,5) გამოსახულება. ორივე ფორმულის შედარებას მიეყვართ განტოლებებამდე:

$$\rho = nm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{nm}{3} \frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (34,10)$$

ეს განტოლებანი განსაზღვრავენ რელატიკური გაზის სიმკვრივესა და წნევის ნაწილაკთა სიჩქარეების საშუალებით. მეორე მათგანი არარელატიკური გაზების კინეტიკური თეორიის ცნობილ ფორმულის მაგიერია.

როგორც თერმოდინამიკიდან არის ცნობილი, წნევა ტოლია შებრუნებული ნიშნით აღებულ სხეულის ენერჯიის წარმოებულისა მისი V მოცულობით

$$(\text{ენტროპიის მუდმივობისას } \sigma): p = - \left(\frac{\partial(\rho c^2 V)}{\partial V} \right)_{\sigma} \quad (\rho c^2 - \text{ერთეული მოცულობის ენერჯია}).$$

თუ ამას (34,8)-ში ჩავსვამთ, მივიღებთ უტოლობას

$$\left[\frac{\partial i}{\partial V} (\rho V^{1/3}) \right]_{\sigma} \geq 0. \quad (34,11)$$

ტოლობის ნიშანს აქ ადგილი აქვს c -ს ტოლი სიჩქარეთათვის. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, $\rho V^{1/3}$ მისწრაფის მუდმივი ზღვრისაკენ, როცა $v \rightarrow c$:

$$\rho V^{1/3} = \text{const}. \quad (34,12)$$

რამდენადაც n ნაწილაკთა რიცხვი ერთეულ მოცულობაში $1/V$ -ს პროპორციულია, ზღვრული შემთხვევისათვის ჩვენ სხვაგვარად შეიძლება დავწეროთ

$$\rho = \text{const} \cdot n^{3/2}. \quad (34,13)$$

ასეთივე ფორმულა გვექნება წნევისათვისაც, რადგანაც ამ ზღვრულ შემთხვევაში $p = \rho c^2/3$, დაბოლოს ζ ქიმიური პოტენციალისათვის, რომელიც ენერჯიის წარმოებულს წარმოადგენს, ნაწილაკთა რიცხვით გვაქვს

$$\zeta = \text{const} \cdot n^{1/2}. \quad (34,14)$$

§ 35. მაკროსკოპული მოძრაობა

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \text{ განტოლებანი, გამოსახავენ რა ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის}$$

კანონებს, შეიცავენ იმ ფიზიკური სისტემის მოძრაობის განტოლებებს, რომელსაც ეთანადება ენერჯია-იმპულსის განსახილავი თენზორი. მაკროსკოპიულ სხეულთა მიმართ მათი გამოყენებისას ისინი ჰიდროდინამიკის განტოლებებს გვაძ-

ლევენ. მაგრამ იმისათვის, რომ $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$ განტოლებიდან მოძრაობის ეს გან-

ტოლებანი სრულად მივიღოთ, აუცილებელია დამატებით გავითვალისწინოთ ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონი, რომელსაც ეს განტოლებანი არ შეიცავენ.

გამოვიყვანოთ ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონის გამომსახველი განტოლება (უწყვეტობის განტოლება) მაკროსკოპული სხეულებისათვის, ამისათვის შემოვიღოთ (მუხტების დენის 4-ვექტორის ანალოგიურად) „ნაწილაკთა დენის“ 4-ვექტორი n_i . მისი დროული კომპონენტი არის ნაწილაკთა რიცხვი ერთეულ მოცულობაში (i -ზე გამრავლებული). ხოლო სამი სივრცული კომპონენტი ნაწილაკთა დენის სამგანზომილებიან თენზორს შეადგენენ. n_i 4-ვექტორი შეიძლება დაიწეროს სახით

$$n_i = \frac{n_4}{ic} \frac{dx_i}{dt}$$

i -სათვის (28,2) გამოსახულების ანალოგიურად. თუ ამ გამოსახულებას შევდევ სახით გადაწერთ

$$n_i = \frac{n_4}{ic} \frac{ds}{dt} \frac{dx_i}{ds}$$

ჩვენ დავინახავთ, რომ $\frac{n_4}{ic} \frac{ds}{dt}$ არის სკალარი, რომელიც გამოსახავს ნაწილაკთა

რიცხვის სიმკვრივეს იმ ათელის სისტემაში, რომელშიაც სხეულის მოცულობის მოცემული ელემენტი უძრავია. თუ მას n -ით აღვნიშნავთ, გვექნება. მაშასადამე,

$$n_i = n u_i, \quad (35,1)$$

სადაც u_i —მაკროსკოპული მოძრაობის 4-სიჩქარეა.

უწყვეტობის განტოლება, რომელიც ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონს გამოსახავს, შეიძლება უშუალოდ (29,4)-ის ანალოგიურად დაიწეროს, ხელახლა მთელი გამოყვანის ჩაუტარებლად:

$$\frac{\partial (n u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (35,2)$$

გადავიდეთ ახლა მოძრაობის განტოლებების მოძებნაზე $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$ განტოლებიდან, სადაც T_{ik} -სთვის ჩვენ უნდა ვისარგებლოთ (34,6) გამოსახულებით. თუ გავადიფერენციალებთ $T_{ik} = -(\rho c^2 + p) u_i u_k - \delta_{ik} p$, ვიპოვით

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -u_i \frac{\partial (\rho + \rho c^2) u_k}{\partial x_k} - (\rho + \rho c^2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k - \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0.$$

მაგრამ $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{ds} = \frac{du_i}{ds}$, სადაც წარმოებული აღებულია სხეულის მოცულობის მოცემული ელემენტის მოძრაობის მსოფლიო ხაზის გასწვრივ. ამგვარად,

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -u_i \frac{\partial (\rho + \rho c^2) u_k}{\partial x_k} - (\rho + \rho c^2) \frac{du_i}{ds} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (35,3)$$

გავამრავლოთ ეს განტოლება u_i -ზე, ე. ი. „დავაგეგმილოთ“ იგი 4-სიჩქარის მიმართულებაზე. თუ გავიხსენებთ, რომ $u_i^2 = -1$, ხოლო $u_i \frac{du_i}{ds} = 0$:

$$(იხ. § 7), გვექნება $\frac{\partial(p+pc^2)u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_k} u_k = 0.$$$

გადავწერთ ამას ამ სახით

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{p+pc^2}{n} nu_k \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x_k} nu_k = 0$$

და (35,2)-ის ძალით ვღებულობთ აქედან

$$nu_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{p+pc^2}{n} \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x_k} \right] = 0.$$

ერთეულ მოცულობაში ნაწილაკთა n რიცხვის ნაცვლად შემოვიღოთ მოლეკულური მოცულობა $V = \frac{1}{n}$ (ე. ი. მოცულობა, რომელიც ერთ მოლეკულაზე მოდის), ხოლო ენერჯიის pc^2 სიმკვრივის ნაცვლად ერთ მოლეკულაზე გაანგარიშებული $\varepsilon = Vpc^2$ ენერჯია. მაშინ

$$nu_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (pV + \varepsilon) - V \frac{\partial p}{\partial x_k} \right] = nu_k \left[p \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] = 0.$$

მაგრამ, როგორც თერმოდინამიკიდან არის ცნობილი, $p dV + d\varepsilon = T ds$, სადაც T ტემპერატურაა, ხოლო σ -სხეულის ენტროპია (ერთ მოლეკულაზე გაანგარიშებული). ამგვარად, ვპოულობთ

$$nT \frac{dx_k}{ds} \frac{d\sigma}{\partial x_k} = 0,$$

ან

$$\frac{d\sigma}{ds} = 0. \quad (35,4)$$

ეს განტოლება გამოსახავს სხეულის მოცემული ელემენტის ენტროპიის უცვლელობას მისი მოძრაობის დროს, ე. ი. პროცესის ადიაბატურობას. ეს შედეგი ბუნებრივია, რამდენადაც ენერჯია-იმპულსის თენზორის ჩვენი გამოსახულება არსებითად იდეალურ სითხეს ეხებოდა, ვინაიდან ჩვენ არ ვითვალისწინებდით იმ არაშექცევად პროცესებს, რომლებიც თან სდევნენ მოძრაობას — სითბოგამტარობას და სიბლანტეს. მოვლენების გათვალისწინება იმ შედეგამდე მიგვიყვანდა, რომ ათვლის სისტემაში, სადაც სხეულის მოცემული ელემენტი უძრავია, T_{ik} კომპონენტები ნულისაგან განსხვავებული იქნებოდნენ და გამოსახავდნენ სითბოს ნაკადს, ხოლო $T_{\alpha\beta}$ -სათვის დამატებითი იმპულსის ნაკადის დამატება მოგვიხდებოდა, რომელიც შინაგან ხახუნთან არის დაკავშირებული. მაგრამ ჩვენ მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ის გარემოება, რომ რელატიკურ მექანიკაში ეს ეფექტები ყოველთვის მცირე როლს თამაშობენ, ვინაიდან სით-

ბოგამტარობას და სიბლანტესთან დაკავშირებული ენერჯისა და იმპულსის ნაკადი ყოველთვის მცირეა, ვიდრე თვით სინათლის სიჩქარის რიგის სიჩქარით მოძრაი მატერიასთან დაკავშირებული ენერჯის და იმპულსის ნაკადი.

„დაევაგემილოთ“ ახლა (35,5) განტოლება u_i -ს „პერპენდიკულარულ“ მიმართულებაზე. $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ ვექტორის ასეთი პროექცია, ცხადია, უდრის $-\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_i}$; იგი ნულს გვაძლევს u_i -ზე სკალარულად გამრავლებისას. მართვი გაზოთვლა გვაძლევს

$$(p + \rho c^2) \frac{du_i}{ds} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} \quad (35,5)$$

(35,5) განტოლება (35,2) და (35,4) განტოლებებთან ერთად წარმოადგენს რელატივისტურ მექანიკაში ჰიდროდინამიკურ განტოლებათა სრულ სისტემას.

დაბოლოს, გამოვიყვანოთ თანათარდობა, რომელიც რელატივისტურ თერმოდინამიკაში ენტროპიის ზრდის კანონს გამოსახავს. ამისათვის უნდა შემოვიტანოთ „ენტროპიის დენის“ 4-ვექტორი σ_i , რომელიც u_i და j_i 4-ვექტორების ანალოგიურად განისაზღვრება.

სხეულის სრული ენტროპია ოთხგანზომილებიანი სახით შეიძლება დაიწეროს როგორც ინტეგრალი

$$\int \sigma_i dS_i,$$

რომელიც აღებულია მთელი სამგანზომილებიანი სივრცის შემცველ ჰიპერხედაპირის გასწვრივ (იხ. § 28). § 29 ჩვენ ვნახეთ, რომ ასეთი ინტეგრალის შენახვის პირობა იქნებოდა $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0$ განტოლება. § 29-ში ჩატარებული გამოყვანიდან ჩანს, რომ მისი მონოტონური ზრდის პირობას წარმოადგენს განტოლება

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \geq 0. \quad (35,6)$$

ეს განტოლება სწორედ გამოსახავს ენტროპიის ზრდის კანონს. რომელიმე ჰიპერხედაპირზე აღებული $\int \sigma_i dS_i$ ინტეგრალი ნაკლებია (ან ტოლია) იმავე ინტეგრალისა, აღებულს ყოველი ჰიპერხედაპირზე, რომელიც არ გადაკვეთს მოცემულს და მისგან დროს ღერძის დადებითი მიმართულებით მდებარეობს.

იდეალური სითხისათვის (35,6)-ში ტოლობის ნიშანი დგას. ამის შესაბამისად, ენტროპიის ზრდის განხილვისას არ შეიძლება უბრალოდ დავწეროთ $\sigma_i = n \sigma u_i$ (სადაც σ —ერთ ნაწილაკზე გაანგარიშებული ენტროპიაა), არამედ აუცილებელია მხედველობაში მივიღოთ აგრეთვე სითხოს ნაკადის არსებობაც. სახელდობრ, იმ ათვლის სისტემაში, რომელშიაც მოცემული ნაკადის ელემენტი უძრავია, საჭიროა ენტროპიის ნაკადი გაუტოლოთ ტემპერატურაზე გაყოფილ სითხოს ნაკადს.

მ უ რ მ ი ვ ი ვ ე ლ ი

§ 36. კულონის კანონი

შედმივი ელექტრული ან, როგორც იტყვიან, ელექტროსტატიკური ველისათვის მაქსველის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad (36,1)$$

$$\operatorname{rot} E = 0. \quad (36,2)$$

E ელექტრული ველი მხოლოდ სკალარული პოტენციალით გამოისახება და მათ შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა

$$E = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (36,3)$$

თუ (36,3)-ს (36,1)-ში ჩავსვამთ, ჩვენ ვიპოვით განტოლებას, რომელსაც მუდმივი ელექტრული ველის პოტენციალი აკმაყოფილებს;

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho. \quad (36,4)$$

ეს განტოლება პუასონის განტოლების სახელწოდებას ატარებს. კერძოდ, სივარცულში, ე. ი. იქ, სადაც $\rho=0$, პოტენციალი ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებს

$$\Delta\varphi = 0. \quad (36,5)$$

უქანასკნელი განტოლებიდან გაზომდინარეობს, რომ ელექტრული ველის პოტენციალს არ შეუძლია სადმე ჰქონდეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი. მართლაც, იმისათვის, რომ φ -ს ექსტრემალური მნიშვნელობა ჰქონდეს, აუცილებელია მისი პირველი წარმოებულები კოორდინატებით ნულის ტოლი იყოს, ხოლო მეორე

წარმოებულებს $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ ერთიდაიგივე ნიშანი ჰქონდეს. მაგრამ უქანას-

კნელი შეუძლებელია, ვინაიდან მაშინ შეუძლებელია შესრულდეს (36,5).

განესახებოთ ესლა წერტილოვანი მუხტის მიერ შექმნილი ველი. სიმეტრიის მოსახრება ნათელყოფს, რომ იგი ყოველ წერტილში მიმართული იქნება რადიუს-ვექტორის გასწვრივ, რომელიც გავლებულია იმ წერტილიდან, სადაც მოთავსებულია მუხტი e . იმავე მოსახრებიდან ჩანს, რომ ველის E აბსოლუტური მნიშვნელობა დამოკიდებული იქნება მხოლოდ მუხტამდე R მანძილზე. ამ აბსოლუტური სიდიდის მოსაძებნად გამოვიყენოთ (36,1) განტოლება ინტეგრალურ ფორმაში (30,5). e მუხტის გარშემო გავლებულ R რადიუს-

სიან სფერულ ზედაპირში გამავალი ელექტრული ველის ნაკადი $4\pi R^2 E$ ს ტოლია. ეს ნაკადი ტოლი უნდა იყოს $4\pi e$. აქედან ჩვენ ვპოულობთ

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

ვექტორულად ველი E შეიძლება დაიწეროს ამ სახით

$$E = \frac{eR}{R^3}. \quad (36,6)$$

ამგვარად, წერტილოვანი მუხტის მიერ შექმნილი ველი ამ მუხტიდან მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია. ეს ვგრეთწოდებული კულონის კანონია. ცხადია, ამ ველის პოტენციალი არის

$$\varphi = -\frac{e}{R}. \quad (36,7)$$

თუ ჩვენ მუხტების სისტემა გვაქვს, მაშინ, ცხადია, სუპერპოზიციის პრინციპის თანახმად, ამ სისტემის მიერ შექმნილი ველი ყოველი მუხტის მიერ ცალკეულად შექმნილი ველების ჯამის ტოლია. კერძოდ ასეთი ველის პოტენციალი უდრის

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{R_A},$$

სადაც R_A არის მანძილი e_A მუხტიდან იმ წერტილამდე, რომელშიაც ჩვენ ვეძებთ პოტენციალს. თუ ჩვენ მუხტის ρ სიმკვრივეს შემოვიტანთ, მაშინ ეს ფორმულა ღებულობს სახეს

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad (36,8)$$

სადაც R —მოცულობის dV ელემენტიდან მოცემულ წერტილამდე მანძილია. აღენიშნოთ აქ ის მათემატიკური თანაფარდობა, რომელიც მიღება, თუ (36,4) ში ჩავსვამთ წერტილოვანი მუხტისათვის ρ და φ -ს მნიშვნელობებს, ე. ი. $\rho = e\delta(\mathbf{R})$ და $\varphi = e/R$. მაშინ ჩვენ ვპოულობთ:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \quad (36,9)$$

§ 37. მუხტების ელექტროსტატიკური ენერჯია

განვიხილოთ მუხტთა სისტემა და განვსაზღვროთ მისი ენერჯია. ამასთანავე გამოვიდეთ ველის ენერჯიაზე წარმოდგენიდან, ე. ი. ენერჯიის სიმკვრივისათვის (31,5) გამოსახულებიდან. სახელდობრ, მუხტთა სისტემის ენერჯია ტოლი უნდა იყოს

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

სადაც E ამ მუხტების მიერ შექმნილი ველია, ხოლო ინტეგრალი იღება მთელ სივრცეზე. თუ აქ $E = -grad\varphi$ ჩავსვამთ, მაშინ U შემდეგი სახით შეიძლება გარდაიქმნას:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int E grad\varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int div(E\varphi) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi div E dV.$$

გაუსის თეორემის თანახმად პირველი ამ ინტეგრალთაგანი უდრის $E\varphi$ -ს ინტეგრალს იმ ზედაპირზე, რომელიც ინტეგრაციის მოცულობას შემოფარგლავს. მაგრამ რამდენადაც ინტეგრაცია მთელ სივრცეზე წარმოებს, ხოლო უსასრულობაში კი ველი ნულის ტოლია, ამიტომ ეს ინტეგრალი ისპობა. თუ მეორე ინტეგრალში ჩავსვამთ (36,1) $div E = 4\pi\rho$, მუხტთა სისტემის ენერგიისათვის შემდეგ გამოსახულებას ვპოულობთ:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV. \quad (37,1)$$

ჩვენ ვერტიკალური მუხტთა სისტემისათვის ინტეგრალის ნაცვლად შეიძლება მუხტების შივართ წაში დაიწეროს

$$U = \frac{1}{2} \sum_A e_A \varphi_A, \quad (37,2)$$

სადაც φ_A იმ ველის პოტენციალია, რომელსაც ქმნის ყველა მუხტი იქ, სადაც e_A მუხტია მოთავსებული.

თუ მიღებულ ფორმულას გამოვიყენებთ ერთი დამუხტული ნაწილაკისადმი (ვთქვათ ელექტრონისადმი) და მის მიერ შექმნილი ველისადმი, მაშინ კულონის კანონის თანახმად ჩვენ იმ დასკვნამდე მივდივართ, რომ მუხტს უნდა გააჩნდეს გარკვეული „საკუთარი“ პოტენციური ენერგია, რომელიც უნდა უდრიდეს $e\varphi/2$, სადაც e — მუხტის მიერ შექმნილი ველის პოტენციალია იმ წერტილში, სადაც თვით მუხტია მოთავსებული. მაგრამ ჩვენ ვიცით (იხ. § 8), რომ ფარდობითობის თეორიაში ყოველი ელემენტური ნაწილაკი, როგორც წერტილოვანი ნაწილაკი უნდა იქნეს განხილული. მისი ველის $\varphi = e/R$ პოტენციალი კი $R=0$ წერტილში უსასრულო ხდება. ამგვარად, ელექტროდინამიკის თანახმად, ელექტრონს უნდა ჰქონოდა უსასრულო „საკუთარი“ ენერგია, და მაშასადამე, უსასრულო მასაც (რომელიც უდრის ენერგიას, გაყოფილს c^2 -ზე). ამ დებულების ფიზიკური უაზრობა იმაზე მიგვიჩვენებს, რომ უკვე თვით ელექტროდინამიკის ძირითადი პრინციპებს იქამდე მივეყვართ, რომ მისი გამოყენება გარკვეული საზღვრებით უნდა იყოს შეზღუდული.

შევნიშნოთ, რომ ელექტროდინამიკიდან მიღებული ელექტრონის „საკუთარი“ ენერგიის და მასის უსასრულობის გამო, არ შეიძლება საკითხი დაისვას იმის შესახებ, თუ ელექტრომაგნიტურია ელექტრონის მთელი მასა (ე. ი. დაკავშირებულია ნაწილაკის საკუთარ ელექტრომაგნიტურ ენერგიასთან).

ვინაიდან ელემენტარული ნაწილაკის ფიზიკურად უაზრო უსასრულო საკუთარი ენერგიის წარმოშობა დაკავშირებულია იმასთან, რომ ასეთი ნაწილაკი როგორც წერტილოვანი უნდა იყოს განხილული, ჩვენ შეიძლება დავასკვ-

ნათ, რომ მეტად მცირე ზომებზე გადასვლისას ელექტროდინამიკა კარგავს თავის გამოყენებულობას. ამიტომ შეიძლება დაისვას საკითხი იმის შესახებ, თუ რა რიგის სიდიდის მანძილებამდეა გამოსადენი ელექტროდინამიკა. ამ კითხვაზე შეიძლება ვუპასუხოთ, თუ შევნიშნავთ, რომ ელექტრონის საკუთარი ელექტრომაგნიტური ენერგიისათვის უნდა მიგველო მისი უძრავობის ენერგიის mc^2 რიგის სიდიდის მნიშვნელობა.

მეორე მხრით, თუ მივიღებთ, რომ ელექტრონს გარკვეული R_0 ზომები გააჩნია, მაშინ მისი საკუთარი პოტენციალური ენერგია e^2/R_0 რიგისა უნდა იყოს. იმ მოთხოვნიდან, რომ ორივე ეს სიდიდე ერთიანობაზე რიგისა უნდა იყოს $e^2/R_0 \sim mc^2$, ვპოულობთ

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \quad (37,3)$$

ეს ზომები (მათ ელექტრონის „რადიუსს“ უწოდებენ) განსაზღვრავენ ელექტრონისადმი ელექტროდინამიკის გამოყენების საზღვრებს, რომლებიც უკვე მისი საკუთარი ძირითადი პრინციპებიდან გამომდინარეობენ. სხვათა შორის, მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ აქ გადმოცემულ ელექტროდინამიკას ჩვეულებრივ „კლასიკურს“ უწოდებენ, გამოყენების საზღვრები კვანტური მოვლენების გამო, კიდევ უფრო მაღლა მდებარეობენ.

დავუბრუნდეთ ისევ (37,2) ფორმულას. კულონის კანონის თანახმად, მასში მდგომი φ_A პოტენციალები უდრის

$$\varphi_A = \sum \frac{e_B}{R_{AB}}, \quad (37,4)$$

სადაც R_{AB} e_A და e_B მუხტებს შორის მანძილია. ენერგიისათვის (37,2) გაბო-სახლება ორი ნაწილისაგან შედგება. ჯერ ერთი, იგი შეიცავს უსასრულო მუდმივს — მუხტის საკუთარ ენერგიას, რომელიც მათ ურთიერთგანლაგებაზე დამოკიდებული არ არის, მეორე ნაწილი მუხტთა ურთიერთმოქმედების ენერ-გიას წარმოადგენს, რომელიც მათი ურთიერთგანლაგებაზეა დამოკიდებული. აშკარაა, რომ მხოლოდ ეს ნაწილი არის ფიზიკურად საინტერესო. იგი ტოლია

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_A \varphi'_A, \quad (37,5)$$

სადაც

$$\varphi'_A = \sum_{A \neq B} \frac{e_B}{R_{AB}} \quad (37,6)$$

e_A -ს მდებარეობის წერტილზე პოტენციალია, რომელსაც ყველა მუხტები ჰქმნის, გარდა e_A მუხტისა. სხვაგვარად შეიძლება დაწვეროთ

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}. \quad (37,7)$$

კერძოდ, ორი მუხტის ურთიერთმოქმედების ენერგია

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \quad (37,8)$$

§ 38. თანაბრად მოძრავი მუხტის ველი

განვსაზღვროთ ველი, რომელსაც V სიჩქარით თანაბრად მოძრავი e მუხტი ქმნის. უძრავი ათვლის სისტემას K სისტემა ვუწოდოთ. მუხტთან ერთად მოძრავ სისტემას — K' სისტემა. ვთქვათ მუხტი K' სისტემის კოორდინატთა სათავეში იმყოფება; K' სისტემა K -ს მიმართ მოძრაობს X ღერძის პარალელურად. Y და Z ღერძები Y' და Z' ღერძების პარალელურია. $t=0$ მომენტში ორივე სისტემის სათავე თანხვედნილია. ძაშასადამე, მუხტის კოორდინატები K სისტემაში იქნება $x=Vt$, $y=z=0$. K' სისტემაში ჩვენ გვაქვს მუდმივი ელექტრული ველი A' ვექტორული პოტენციალით და $\varphi'=e/R'$ სკალარული პოტენციალით, სადაც $R'^2=x'^2+y'^2+z'^2$. K სისტემაში (22,1) თანახმად, როცა $A'=0$.

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (38,1)$$

ახლა ჩვენ R' უნდა გამოვსახოთ x, y, z კოორდინატებით K სისტემაში. ლორენცის გარდაქმნის ფორმულების თანახმად

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

და აქედან

$$R'^2 = \frac{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (38,2)$$

თუ ამას (38,1) ჩავსვამთ, ვიპოვით

$$\varphi = \frac{l}{R'^2}, \quad (38,3)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა

$$R'^2 = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2). \quad (38,4)$$

K სისტემაში ვექტორული პოტენციალი ტოლია [იხ. (22,1)]

$$A = \frac{cV}{cR'^2}. \quad (38,5)$$

K' სისტემაში H' მაგნიტური ველი არ არსებობს, ხოლო ელექტრული ველი

$$E = \frac{eR'}{R'^3}.$$

(22,5) ფორმულიდან ვპოულობთ

$$E_x = E'_x = \frac{e x'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e y'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{e z'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

თუ აქ ჩავსვამთ x, y, z -ით გამოსახულ R', x', y', z' , ვიპოვიტ

$$E = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{eR}{R'^3}, \quad (38,6)$$

სადაც R --რადიუს-ვექტორია e მუხტიდან იმ x, y, z კოორდინატების მქონე წერტილამდე, სასადაც ჩვენ ველს ვეძებთ (მისი კომპონენტები ტოლია $x-Vt, y, z$).

E -თვის ეს გამოსახულება სხვაგვარად შეიძლება დაიწეროს, თუ შემოვიტანთ მოძრაობის მიმართულებასა და R რადიუს ვექტორს შორის θ კუთხეს. ცხადია, რომ $y^2+z^2 = R^2 \sin^2\theta$, და ამიტომ (38,4) R'^3 შეიძლება დაიწეროს სახით

$$R'^3 = R^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2\theta\right). \quad (38,7)$$

მაშინ E -თვის გვაქვს

$$E = \frac{eR}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}}. \quad (38,8)$$

K სისტემაში მაგნიტური ველი უდრის $H = \frac{1}{c} [VE]$ [იხ. (22,8)]. $V \ll c$ სიჩ.

ქარებისათვის (38,6)-დან გვაქვს მიახლოებით $E = \frac{eR}{R^3}$, და ამიტომ

$$H = \frac{e}{c} \frac{[VR]}{R^3}. \quad (38,9)$$

§ 39. მოძრაობა კულონის ველში

განვიხილოთ. m მასისა და e მუხტის მქონე ნაწილაკის მოძრაობა მეორე e' მუხტის მიერ შექმნილ ველში. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ამ მეორე მუხტის მასა იმდენად მცირეა m -ზე, რომ იგი შეიძლება უძრავად ჩავთვალოთ. მაშინ ამოცანა დაიყვანება e მუხტის მოძრაობის გამოკვლევაზე ცენტრალურ სინეტრიულ ელიპტრულ ველში $\varphi = e'/r$ პოტენციალით.

ნაწილაკის \mathcal{E} (სრული) ენერგია ტოლია [იხ. (27,5)]

$$\mathcal{E} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \frac{ee'}{r}.$$

თუ ნაწილაკის მოძრაობის სიბრტყეში პოლარულ კოორდინატებს გამოვიყენებთ, მაშინ, როგორც მექანიკიდანაა ცნობილი, იმპულსისათვის შეიძლება

დავწეროთ $p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2$, სადაც p_r — იმპულსის რადიალური კომპონენტი, ხოლო M — ნაწილაკის იმპულსის ნუდმივი მომენტი. მაშინ

$$E = c \sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2 c^2} + \frac{ee'}{r} \quad (39,1)$$

განვიხილოთ ახლა საკითხი, შეუძლია თუ არა ნაწილაკს თავისი მოძრაობის დროს რაგინდ ახლოს მივიდეს ცენტრთან. უპირველესყოვლისა ცხადია, რომ ეს ყოველ შემთხვევაში შეუძლებელია, თუ e და e' მუხტები განიზიდებიან, ე. ი. თუ e და e' ერთი ნიშნისაა. შემდეგ, მიზიდვის შემთხვევაში (e და e' სხვადასხვა ნიშნისაა) ცენტრთან განუსაზღვრელი მიახლოება შეუძლებელია, თუ $Mc > |ee'|$; მართლაც, ამ შემთხვევაში (39,1) პირველი წევრი ყოველთვის პეტია მეორეზე და როცა $r \rightarrow 0$ ამ განტოლების მარჯვენა მხარე უსასრულო გახდებოდა. პირიქით, თუ $Mc < |ee'|$, მაშინ როცა $r \rightarrow 0$ ეს გამოსახულება შეიძლება სასრულო დარჩეს (ამ შემთხვევაში, ცხადია, p_r მიისწრაფის უსასრულობისაკენ). ამგვარად, თუ

$$cM < |ee'|, \quad (39,2)$$

ნაწილაკი თავისი მოძრაობისას მიწვდის მუხტზე „ვარდება“, მაშინ როდესაც არარელატიურ შექანიკაში ასეთი ვარდნა საზოგადოდ შეუძლებელია (მხოლოდ იმ შემთხვევის გამოკლებით, როცა $M = 0$, ე. ი. როცა ნაწილაკი e პირდაპირ e' ნაწილაკზე მოძრაობს).

ა მ თ ც ა ნ ე ბ ა

1. განესაზღვროთ e მუხტის ტრაექტორია, რომელიც მოძრაობს კულონის ველში $-\frac{e'}{r}$ პოტენციალით.

ამოხსნა. r და φ პოლარული კოორდინატები მოძრაობის სიბრტყეში ავარჩიოროთ (23,9) ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას აქვს სახე

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{ee'}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

S ფუნქციას ვეძებთ სახით

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + f(r),$$

სადაც \mathcal{E} და M მოძრაი ნაწილაკის მუდმივი ენერგიაა და იმპულსის მომენტი. ამის შედეგად ვკოულობთ

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - \frac{a}{r}}{c} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2} dr,$$

სადაც $a = ce'$. ტრანსფორმაცია განისაზღვრება $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const.}$ განტოლებით. ინტეგრება შეიძლება

დამატებით გავაძლიეროთ:

ა) თუ $Mc > |a|$:

$$(c^2 M^2 - a^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M'c)^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - a^2)} \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2 M^2}} - \xi a;$$

ბ) თუ $Mc < |a|$:

$$(a^2 - c^2 M^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M'c)^2 + m^2 c^2 (a^2 - M^2 c^2)} \cos \varphi \sqrt{\frac{a^2}{c^2 M^2} - 1} + \xi a;$$

გ) თუ $Mc = |a|$:

$$\frac{2\xi a}{r} = \xi^2 - m^2 c^2 - \varphi^2 \left(\frac{\xi a}{cM}\right)^2.$$

2. განსაზღვროთ მცირე კუთხეზე განბნევის ეფექტური განივკვეთი ნაწილაკთა კულონის ველში განბნევისას.

ამოხსნა: დავიხატოთ ეფექტური განივკვეთი არის იმ ნაწილაკთა რიცხვის შეფარდება, რომლებიც (ერთ სეკუნდში) სხეულოვანი კუთხის მოცემულ θ ელემენტში, დაცემულ ნაწილაკთა ნაკადის სიმკვრივესთან (ე. ი. იმ ნაწილაკთა რიცხვთან, რომლებიც ნაწილაკთა კანის განივკვეთის 1 სმ² ფართობში გაივლიან დროს ერთეულში).

რამდენადაც ველში გავლისას ნაწილაკის გადაბრის χ კუთხე ρ „დამბნევის მანძილით“ განისაზღვრება (ე. ი. ცენტრიდან იმ სწორ ხაზამდე მანძილით, რომლითაც იმობრავებდა ნაწილაკი ველის აო არსებობისას), ამიტომ

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = \rho \frac{d\rho}{d\chi} \frac{d\theta}{\sin\chi}.$$

სადაც $d\theta = 2\pi \sin\chi d\chi$. გადაბრის კუთხე (თუ იგი მცირეა) შეიძლება იმპულსის ნაზრდისა და მისი პირკანდელი მნიშვნელობის შეფარდების ტოლად ჩავთვალოთ. იმპულსის ნაზრდი მუდამ მომკმედი ძალის დროთა აღებულში ინტეგრალის ტოლია. ამ ძალის მოძრაობის მიმართულებისადმი პერპენდიკულარული კომპონენტი დაახლოებით ტოლია $\frac{a}{r^2} \frac{\rho}{r}$. ამგვარად, გვაქვს

$$\chi = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ap dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{a}{p v}$$

(v —ნაწილაკის სიჩქარე). აქედან მცირე χ -ითვის ვიპოვოთ ელექტურ განივკვეთს

$$d\sigma = 4 \left(\frac{a}{p v}\right)^2 \frac{d\theta}{\chi^4}.$$

§ 40. დიპოლური მოძრაობა

განვიხილოთ მუხტთა სისტემის მიერ შექმნილი ველი ამ სისტემიდან შორს მანძილებზე, ე. ი. ისეთ მანძილებზე, რომლებიც შეტია სისტემის ტოლკენ მუხტებს შორის მანძილებზე.

შემოვიღოთ კოორდინატთა სისტემა, რომლის სათავე სადმე მუხტთა სისტემის შიგნით მდებარეობს. ცალკე მუხტების რადიუს-ვექტორები, ვთქვათ, r_A -ს უდრიან. განვსაზღვროთ ყველა მუხტის მიერ შექმნილი ველის პოტენციალი R_0 რადიუს-ვექტორის მქონე წერტილში. § 36 შედეგთა საფუძველზე ამ ველის პოტენციალი ტოლია

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{|R_0 - r_A|} \quad (40,1)$$

(შეჯამება ყველა მუხტების მიმართ წარმოებს); აქ $(R_0 - r_A)$ წარმოადგენენ e_A მუხტებიდან იმ წერტილამდე გავლებულ რადიუს-ვექტორებს, რომელშიაც ჩვენ პოტენციალს ვეძებთ.

ჩვენ ეს გამოსახულება უნდა გამოვიყვილიოთ დიდი R_0 -თვის $R_0 \gg r_A$). ამისათვის (40,1) გამოსახულება დავშალოთ მწკრივად r_A/R_0 ხარისხების მიხედვით. ამისათვის გამოვიყენოთ ფორმულა

$$f(R_0 - r) = f(R_0) - r \cdot \text{grad} f(R_0)$$

(grad)-ში დიფერენციალები აღებულია R_0 ვექტორის (ბოლო წერტილის კოორდინატებით). პირველი რიგის წევრებამდე სიზუსტით

$$\varphi = \frac{\sum e_A}{R_0} - \sum e_A r_A \cdot \text{grad} \frac{1}{R_0} \quad (40,2)$$

ჯამს

$$d = \sum e_A r_A \quad (40,3)$$

მუხტთა სისტემის დიპოლურ მომენტს უწოდებენ. არსებითია აღვნიშნოთ, რომ თუ ყველა მუხტას $\sum e_A$ ჯამი ნულის ტოლია, მაშინ d დიპოლური მომენტი არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სათავეს შერჩევაზე. მართლაც, ორ სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაში ერთიდაიმავე $\sum e_A$ მუხტის r_A და r'_A რადიუს ვექტორები ერთმანეთთან დაკავშირებულია თანაფარდობით

$$r'_A = r_A + a,$$

სადაც a —რაღაც მუდმივი ვექტორია. ამიტომ, თუ $\sum e_A = 0$, მაშინ ორივე სისტემაში დიპოლური მომენტი

$$d' = \sum e_A r'_A = \sum e_A r_A + a \sum e_A = d.$$

თუ დადებით და უარყოფით მუხტებსა და მათ რადიუს-ვექტორებს სათანადოდ აღვნიშნავთ, $e^+{}_A$, $r^+{}_A$ და $-e^-{}_A$, $r^-{}_A$, მაშინ დიპოლური მომენტი შეიძლება დაიწეროს სახით:

$$d = \sum e^+{}_A r^+{}_A - \sum e^-{}_A r^-{}_A = R^+ \sum e^+{}_A - R^- \sum e^-{}_A, \quad (40,4)$$

სადაც

$$R^+ = \frac{\sum e^+{}_A r^+{}_A}{\sum e^+{}_A}, \quad R^- = \frac{\sum e^-{}_A r^-{}_A}{\sum e^-{}_A} \quad (40,5)$$

დადებით და უარყოფით მუხტთა ცენტრების“ რადიუს-ვექტორებია. თუ $\Sigma^+e_A = \Sigma^-e_B$ მაშინ,

$$d = eR_+ \quad (40,6)$$

სადაც $R_+ = R^+ - R^-$ — უარყოფითი მუხტების ცენტრიდან დადებითი მუხტების ცენტრამდე გავლებული რადიუს-ვექტორია. კერძოდ, თუ ყოველთვის ორი მუხტი გვაქვს, მაშინ R_+ მათ შორის გავლებული რადიუს-ვექტორია.

თუ ჯამი $\Sigma e_A = 0$, მაშინ დიდ მანძილებზე ასეთი სისტემის ველის პოტენციალი გამოიყურება, როგორც

$$\varphi = \frac{dR_0}{R_0^3} \quad (40,7)$$

(აქ ჩვენ ვსვამთ $\text{grad} \frac{1}{R_0} = -\frac{R_0}{R_0^3}$). თუ პოტენციალი ვიცით, მაშინ შეიძლება E ველი მოიძებნოს:

$$E = -\text{grad}\varphi = -\text{grad}\frac{dR_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3}\text{grad}(dR_0) - (dR_0)\text{grad}\frac{1}{R_0^3}$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\text{grad} \frac{1}{R_0^3} = -\frac{3R_0}{R_0^5}$, მაშინ, თანახმად $\text{grad}(dR_0) = d$ ფორმულისა, E -თვის ვიპოვით გამოსახულებას

$$E = \frac{3(R_0 d)R_0 - R_0^3 d}{R_0^5} \quad (40,8)$$

ამგვარად, მუხტთა ისეთი სისტემით შექმნილი ველის პოტენციალი, რომლისათვისაც $\Sigma e_A = 0$, სისტემიდან მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია, ველის დაძაბულობა კი — მანძილის კუბის უკუპროპორციულია.

§ 41 მულტიპოლური მომენტი

$1/R_0$ ხარისხების მიხედვით პოტენციალის დაშლაში

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)} + \dots$$

$\varphi^{(1)}$ წევრი $\frac{1}{R_0}$ -ის პროპორციულია. ჩვენ დავინახეთ, რომ $\varphi^{(1)}$ პირველი წევრი

ყველა მუხტის ჯამით განისაზღვრება; მეორე წევრი $\varphi^{(2)}$, რომელსაც ხშირად სისტემის დიპოლურ პოტენციალს უწოდებენ, სისტემის დიპოლური მომენტი განისაზღვრება.

დაშლის მესამე წევრი $\varphi^{(3)}$, ცხადია, ტოლია

$$\varphi^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e_A x_A \beta \frac{\partial^2}{\partial \chi_A \partial \chi_\beta} \frac{1}{R_0} \quad (41,1)$$

სადა, χ ჯამი ყველა მუხტის მიხედვითაა აღებული. მუხტის ნომრის მაჩვენებელი ინდექსი ჩვენ აქ გამოვტოვეთ. x_α r ვექტორის კომპონენტებია, X_α კი — R_0 ვექტორის კომპონენტები.

პოტენციალის ამ ნაწილს ჩვეულებრივ კვადრუპოლურ პოტენციალს უწოდებენ. თუ მუხტების ჯამი და სისტემის დიპოლური მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ დაშლა $\varphi^{(3)}$ -ით იწეება.

(41,1) გამოსახულებაში ექვსი $\sum e_\alpha x_\alpha$ სიდიდე შედის. მაგრამ, ადვილი შესამჩნევია, რომ ველი დამოკიდებულია არა ექვსი, არამედ ხუთ დამოუკიდებელ სიდიდეზე. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ $1/R_0$ ფუნქცია ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებს, ე. ი.

$$\Delta \frac{1}{R_0} = \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha^2} \frac{1}{R_0} = 0.$$

ეს ტოლობა შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს:

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R_0} = 0.$$

ჩვენ შეგვიძლია, ამიტომ, $\varphi^{(3)}$ -თვის დავწეროთ

$$\varphi^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e (x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}.$$

ტენზორს

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum e (x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (41,2)$$

სისტემის კვადრუპოლური მომენტი ეწოდება.

$D_{\alpha\beta}$ -ს განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მისი დიაგონალური კომპონენტების ჯამი

$$D_{\alpha\alpha} = 0. \quad (41,3)$$

ამიტომ $D_{\alpha\beta}$ სიმეტრიულ ტენზორს სულ ხუთი დამოუკიდებელი კომპონენტი აქვს. $D_{\alpha\beta}$ -ს დახმარებით შეიძლება დავწეროთ

$$\varphi^{(3)} = D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}. \quad (41,4)$$

საცხებით ანალოგიურად შეგვეძლო φ დაშლის შემდეგი წევრებიც დავვეწერა. n -ური წევრი n -ური რიგის ტენზორით განისაზღვრება, რომელიც შედგება მუხტებისა და მათი რაღაუს ვექტორთა კომპონენტებისაგან. ამ ტენზორებს სისტემის მულტიპოლური მომენტები ეწოდება.

ჩვენ ახლა განვიხილავთ მუხტთა სისტემას e_1, e_2, \dots , რომელიც იმყოფება გარეშე ელექტრულ ველში. φ_A -თი ჩვენ ახლა აღვნიშნავთ ამ გარეშე ველის იმ წერტილის პოტენციალს, რომელშიაც e_A მუხტია მოთავსებული. ყოველი მუხტთაგანის პოტენციური ენერჯია არის $e_A \varphi_A$; სისტემის სრული პოტენციური ენერჯია

$$U = \sum e_A \varphi_A.$$

შევარჩიოთ ისევ კოორდინატთა სისტემა, რომლის სათავე სადმე სისტემის შიგნით მდებარეობს. r_A იყოს e_A მუხტის რადიუს-ვექტორი ამ კოორდინატებში.

ვიგულისხმობთ, რომ მუხტთა სისტემის ფარგლებში გარეშე ველი მცირედ იცვლება. მაშინ ჩვენ U შეიძლება r_A ხარისხების მიხედვით დავწალოთ. ამ დაშლაში

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$$

პირველი წევრი არის

$$U^{(1)} = \varphi_0 \sum e_A, \quad (42,1)$$

სადაც φ_0 არის პოტენციალის მნიშვნელობა კოორდინატთა სათავეში. ამ მიახლოებაში სისტემის ენერჯია ისეთია, თითქოს ყველა მუხტი ერთ წერტილში (კოორდინატთა სათავეში) იყოს თავმოყრილი.

დაშლის მეორე წევრი

$$U^{(2)} = \text{grad } \varphi_0 \sum e_A r_A.$$

$\text{grad } \varphi_0$ არის პოტენციალის გრადიენტის მნიშვნელობა კოორდინატთა სათავეში. ვინაიდან $\text{grad } \varphi = -E$, ეს იგივეა, რაც ველის E_0 დაძაბულობა კოორდინატთა სათავეში. თუ შემოვიღებთ სისტემის d დიპოლურ მომენტს, გვექნება

$$U^{(2)} = -dE_0. \quad (42,2)$$

ერთგვაროვანი ველისათვის $U^{(2)}$ გამოსახულება გამომდინარეობს აგრეთვე უშუალოდ პოტენციალის (17,3) გამოსახულებიდან.

დაშლის შემდეგი წევრი $U^{(3)}$ უდრის

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e_{\alpha} e_{\beta} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}.$$

აქ, ისევე როგორც § 41, ჩვენ გამოვტოვეთ მუხტის ნომრის მაჩვენებელი ინდექსი. $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}$ არის პოტენციალის მეორე წარმოებულითა მნიშვნელობანი კოორდინატთა სათავეში. მაგრამ φ პოტენციალი აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha}^2} = \Delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} = 0.$$

ამიტომ $U^{(3)}$ შეგვიძლია დავწეროთ სახით

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sum e(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2),$$

ა6

$$U^{(3)} = D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (42,3)$$

სადაც $D_{\alpha\beta}$ —კვადრუპოლური მომენტის კომპონენტებია (იხ. § 41).

ვიგულისხმობთ, რომ ჩვენ გვაქვს მუხტთა ორი სისტემა ნულის ტოლი მუხტების ჯამებით თითოეულ მათგანში და d_1 და d_2 დიპოლური მომენტებით, ამასთანავე მათი ურთიერთშორის მანძილი დიდია მათ საკუთარი ზომებთან შედარებით. განვსაზღვროთ მათი ურთიერთმოქმედების U პოტენციალური ენერჯია. ამისათვის ერთი ამ სისტემათაგანი შეიძლება განვიხილოთ როგორც მეორე სისტემის ველში მყოფი. მაშინ

$$U = - d_1 E_1,$$

სადაც E_1 პირველი სისტემის ველია. თუ E_1 -თვის (40,8) გამოსახლებას ჩავსვამთ, ვიპოვიოთ

$$U = \frac{(d_1 d_2) R^2 - 3(d_1 R)(d_2 R)}{R^3}, \quad (42,4)$$

სადაც R —ორივე სისტემის შორის მანძილის ვექტორია.

იმ შემთხვევაში, როცა ერთი ამ სისტემათაგანის მუხტების ჯამი ნული-საგან განსხვავდება (და უდრის e), ანალოგიურად ვღებულობთ

$$U = e \frac{dR}{R^2}, \quad (42,5)$$

სადაც R ვექტორია, რომელიც მიმართულია დიპოლიდან (სისტემის, რომლის მუხტთა ჯამი ნულის ტოლია) მუხტისაკენ (სისტემისაკენ e -ს ტოლი მუხტთა ჯამით). ჩვენ არ გამოვიყვანთ ანალოგიურ გამოსახულებებს ურთიერთმოქმედებისათვის კვადრუპოლისა (სისტემის, რომლის მუხტთა ჯამი და დიპოლური მომენტი ნულის ტოლია) მუხტთან, დიპოლთან და კვადრუპოლთან; მიუთითებთ მხოლოდ, რომ შესაბამის პოტენციალური ენერჯიები R მანძილის 3-მე, 4-ზე და 5-ზე ხარისხების უკუპროპორციულია.

§ 43 მაგნიტი მაგნიტური ველი

განვიხილოთ მაგნიტური ველი, შექმნილი იმ მუხტების მიერ, რომელნიც სტაციონარულ მოძრაობას ასრულებენ. ამით ის იგულისხმება, რომ მუხტები თავის მოძრაობისას არ მოდიან უსასრულობიდან და არ მიდიან უსასრულობაში, არამედ მუდამ სივრცის გარკვეულ სასრულო არეში მოძრაობენ. გარდა ამისა ვიგულისხმობთ, რომ ყველა მუხტის იმპულსი აგრეთვე ყოველთვის რჩება სასრულო. მაშინ ყველა სიდიდე იცვლება თავის მნიშვნელობათა სასრულო

ინტერვალში, და გარკვეულ ინტერესს წარმოადგენს მათი საშუალო მნიშვნელობათა (დროთი) განხილვა. კერძოდ, ჩვენ შეიძლება განვიხილოთ მუხტების მიერ შექმნილი საშუალო მაგნიტური ველი \bar{H} , რომელიც ახლა უკვე იქნება მხოლოდ კოორდინატებისა და არა დროს ფუნქცია, ე. ი. ის მუდმივი იქნება.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ განტოლებანი, რომელნიც განსაზღვრავენ საშუალო ველს \bar{H} , გავასაშუალოთ დროთი მაქსველის განტოლებანი $\text{div } \mathbf{H} = 0$

და $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$. პირველი მათგანი გვაძლევს უბრალოდ

$$\text{div } \bar{\mathbf{H}} = 0. \quad (43,1)$$

მეორე განტოლებაში $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$ წარმოებულის საშუალო მნიშვნელობა, რო-

გორც საზოგადოდ ყოველი სიდიდის წარმოებულისა, რომელიც სასრულო ინტერვალში იცვლება, ნულის ტოლია.¹ ამიტომ მაქსველს მეორე განტოლება დებულობს სახეს

$$\text{rot } \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}. \quad (43,2)$$

ეს ორი განტოლება სწორედ განსაზღვრავს მუდმივ $\bar{\mathbf{H}}$ ველს.

შემოვიღოთ საშუალო ვექტორული პოტენციალი $\bar{\mathbf{A}}$

$$\text{rot } \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{H}}$$

ჩავსვათ იგი (43,2) განტოლებაში. რამდენადაც $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$, ჩვენ ვპოულობთ

$$\text{grad div } \bar{\mathbf{A}} - \Delta \bar{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}.$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ ველის ვექტორული პოტენციალი არაა კალსახა-დაა განსაზღვრული და ამიტომ მას შეიძლება დავადვით ნებისმიერი დამატე-ბითი პირობა. ამ საფუძველზე $\bar{\mathbf{A}}$ პოტენციალი ისე შევარჩიოთ, რომ

$$\text{div } \bar{\mathbf{A}} = 0 \quad (43,3)$$

¹ დაეუფვით f ასეთი სიდიდეა. მაშინ დროს გარკვეულ T ინტერვალში $\frac{df}{dt}$ წარმოებუ-ლის საშუალო მნიშვნელობა არის

$$\frac{\overline{df}}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

რამდენადაც $f(t)$ სასრულო საზღვრებში იცვლება, T -ს უსასრულოდ გადიდებისას $\frac{df}{dt}$ -ს საშუა-ლო მნიშვნელობა მართლაც ნულისაკენ მიისწრაფვის.

მაშინ განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს მუდმივი მაგნიტური ველის ვექტორულ პოტენციალს, ლებულობს სახეს

$$\Delta \bar{A} = - \frac{4\pi}{c} \bar{j}. \quad (43,4)$$

ადვილად შეიძლება მოვნახოთ ამ განტოლების ამოხსნა, თუ შევნიშნავთ, რომ (43,4) საფუძვლად ანალოგიურია (36,4) პუასონის განტოლებისა მუდმივი ელექტრული ველის სკალარული პოტენციალისათვის, მხოლოდ აქ ρ მუხტების სიმკვრივის ნაცვლად დგას დენის სიმკვრივე \bar{j}/c . პუასონის განტოლების (36,4) ამოხსნის ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია უშუალოდ დავწეროთ

$$\bar{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{j}}{R} dV, \quad (43,5)$$

სადაც R არის მანძილი იმ წერტილიდან, რომელშიაც ჩვენ \bar{A} -ს ვეძებთ, მოცულობის dV ელემენტამდე.

(43,5) ფორმულაში ინტეგრალიდან შეიძლება გადავიდეთ მუხტების მიმართ აღებულ ჯამზე, თუ \bar{j} -ს ნაცვლად ჩავსვამთ ρV ნამრავს და გავითვალისწინებთ, რომ ყველა მუხტი წერტილოვანია. ამასთანავე აუცილებელია იმის მხედველობაში მიღება, რომ (43,5) ინტეგრალში R უბრალოდ ინტეგრირების ცვლადია და ამიტომ, რა თქმა უნდა, არ გასაშუალებია. მხოლოდ თუ $\int \frac{\bar{j}}{R} dV$

ინტეგრალის ნაცვლად დავწერთ ჯამს $\sum \frac{\epsilon_A V_A}{R_A}$, მაშინ აქ R_A წარმოადგენს ცალკეულ ხაწილაკთა რადიუს-ვექტორებს, რომლებიც მუხტთა მოძრაობისას იცვლებიან. ამიტომ უნდა დაიწეროს

$$\bar{A} = \frac{1}{c} \sum \frac{\epsilon_A V_A}{R_A}, \quad (43,6)$$

სადაც გასაშუალებია ხაზს ქვეშ მდგომი მოელი გამოსახულება.

თუ A გვეცოდინება, მაშინ შეიძლება მოვნახოთ მაგნიტური ველიც

$$\bar{H} = \text{rot} \bar{A} = \text{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\bar{j}}{R} dV.$$

ოპერაცია rot იმ წერტილის კოორდინატებით წარმოებს, რომელშიაც ჩვენ ველს ვეძებთ. ამიტომ rot შეიძლება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შევიტანოთ და განწარმოებისას \bar{j} ჩავთვალოთ მუდმივად. თუ გამოვიყენებთ ცნობილ ფორმულას

$$\text{rot} f \mathbf{a} = f \text{rot} \mathbf{a} + [\text{grad} f, \mathbf{a}],$$

სადაც f და \mathbf{a} ნებისმიერი სკალარი და ვექტორია, $\bar{j} \cdot \frac{1}{R}$ ნამრავლის მიმართ, ვიპოვიტ

$$\text{rot} \frac{\bar{j}}{R} = \left[\text{grad} \frac{1}{R}, \bar{j} \right] = \frac{[\bar{j}, R]}{R^2},$$

და, მაშასადამე,

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{jR}]}{R^3} dV \quad (43,7)$$

(\mathbf{R} რადიუს-ვექტორი მიმართულია dV -დან იმ წერტილში, რომელშიაც ველი განისაზღვრება). ეს ვგრეთწოდებული ბიო და საეარის კანონია.

§ 41 მაგნიტური მომენტი

განვიხილოთ სტაციონარულად მოძრავ მუხტების მიერ შექმნილი საშუალო მაგნიტური ველი ამ სისტემიდან დიდ მანძილზე ე. ი. ისეთ მანძილზე, რომელიც დიდია შედარებით სისტემის ზომასთან.

შემოვიღოთ კოორდინატთა სისტემა, რომლის სათავე მუხტთა სისტემის შიგნითაა მოთავსებული ანალოგიურად იმისა, როგორც ეს § 39 გავაქეთეთ. ცალკეული მუხტების რადიუს-ვექტორები ისევ \mathbf{r}_A -თი აღვნიშნოთ, ხოლო იმ წერტილის რადიუს-ვექტორი, რომელშიაც ჩვენ ველს ვეძებთ, აღვნიშნოთ \mathbf{R}_0 . მაშინ $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ წარმოადგენს რადიუს-ვექტორს, გავლებულს e_A მუხტიდან იმ წერტილისაკენ, რომელშიაც ველი განისაზღვრება. (43,6)-ის თანახმად, ვექტორული პოტენციალისათვის გვაქვს.

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{e_A \mathbf{v}_A}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A|} \quad (44,1)$$

ისევ, როგორც § 40, ეს გამოსახულება \mathbf{r}_A ხარისხების მიხედვით დავშალოთ. პირველი რიგის წევრებამდე სიზუსტით (თუ \mathbf{A} ინდექსს გამოვტოვებთ) გვექნება

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0} \sum e\bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum e\mathbf{v} \left(\mathbf{r} \nabla \frac{1}{R_0} \right)$$

პირველ წევრში შეიძლება დაიწეროს

$$\sum e\bar{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r}$$

შაგრამ სასრულო ინტერვალში ცვალებად $\sum e\mathbf{r}$ სიდიდის წარმოებულის საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლია (იხ. § 43). ამგვარად $\bar{\mathbf{A}}$ -თვის რჩება გამოსახულება

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0^3} \sum e\mathbf{v}(\mathbf{rR}_0)$$

(აქ ჩვენ ჩავსვით $\nabla \frac{1}{R_0} = -\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}$).

გარდავქმნათ ეს გამოსახულება შემდეგნაირად. ვინაიდან $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, შეიძლება დავწეროთ (გავიხსენოთ, რომ \mathbf{R}_0 მუდმივი ვექტორია)

$$\sum e(\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r}(\mathbf{rR}_0) + \frac{1}{2} \sum e[\mathbf{v}(\mathbf{rR}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{vR}_0)]$$

ამ გამოსახულების \bar{A} -ში ჩასმისას პირველი წევრის (დროთი წარმოებულთ) საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლი გახდება, და ჩვენ მივიღებთ:

$$\bar{A} = \frac{1}{2cR_0^3} \sum e [\overline{v(rR_0)} - \overline{r(vR_0)}].$$

შემოვიღოთ ვექტორი

$$m = \frac{1}{2c} \sum e [rv], \quad (44,2)$$

რომელსაც სისტემის მაგნიტური მომენტი ეწოდება. მაშინ \bar{A} -თვის ჩვენ მივიღებთ გამოსახულებას

$$\bar{A} = \frac{[\overline{mR_0}]}{R_0^3}. \quad (44,3)$$

თუ ცნობილია ვექტორული პოტენციალი, მაშინ ადვილად მოიძებნება მაგნიტური ველი.

$$\text{rot } [ab] = (b \nabla) a - (a \nabla) b + a \text{ div } b - b \text{ div } a$$

ფორმულის დახმარებით ვპოულობთ

$$H = \text{rot } \bar{A} = \text{rot} \left[\frac{\overline{m R_0}}{R_0^3} \right] = \overline{m} \text{ div } \frac{R_0}{R_0^3} - (\overline{m} \nabla) \frac{R_0}{R_0^3}.$$

შემდეგ

$$\text{div } \frac{R_0}{R_0^3} = R_0 \text{ grad } \frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3} \text{ div } R_0 = 0$$

და

$$(\overline{m} \nabla) \frac{R_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3} (\overline{m} \nabla) R_0 + R_0 \left(\overline{m} \nabla \frac{1}{R_0^3} \right) = \frac{\overline{m}}{R_0^3} - \frac{3R_0(\overline{m} R_0)}{R_0^6}.$$

ამგვირავდ,

$$\bar{H} = \frac{3R_0(\overline{m} R_0) - \overline{m} R_0^3}{R_0^6}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მაგნიტური ველი მაგნიტური მომენტის საშუალებით ისეთივე ფორმულით გამოისახება, როგორც ელექტრული ველი ელექტრული დიპოლის საშუალებით [იხ. (40,8)].

თუ სისტემის ყველა მუხტს ერთი და იგივე მუხტისა და მასის შეფარდება აქვს, მაშინ შეიძლება დაეწეროს

$$m = \frac{1}{2c} \sum e [rv] = \frac{e}{2mc} \sum m [rv].$$

თუ ყველა მუხტის სიჩქარე $v \ll c$, მაშინ mv იქნება მუხტის იმპულსი p , და ჩვენ ვღებულობთ

$$m = \frac{e}{2mc} \sum [rp] = \frac{e}{2mc} M, \quad (44,5)$$

სადაც $M = \sum [rp]$ სისტემის იმპულსის მექანიკურ მომენტს წარმოადგენს. ამგვარად, ამ შემთხვევაში მაგნიტური და მექანიკური მომენტების შეფარდება მუდმივია და ტოლია $e/2mc$.

§ 17 ჩვენ ვნახეთ, რომ მუდმივ მაგნიტურ ველში მოთავსებული მუხტისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია არის

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c} [Hr]v = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{2c} [rv]H$$

[იხ. (17,6)] ამრიგად ლაგრანჟის ფუნქციაში დამატებითი წევრი L_H , რომელიც მუდმივი მაგნიტური ველით არის გამოწვეული, არის

$$L_H = mH, \quad (44,6)$$

სადაც m — მუხტის მაგნიტური მომენტია. მას იგივე სახე ექნება, ცხადია, მუხტთა სისტემისთვისაც, სადაც მაშინ m მთელი სისტემის მაგნიტური მომენტი იქნება. ყურადღება მივაქციოთ ელექტრულ ველთან ანალოგიას — ერთგვაროვან ელექტრულ ველში ლაგრანჟის ფუნქცია ისეთი მუხტთა სისტემისათვის, რომელშიაც მუხტთა საერთო ჯამი ნულის ტოლია, შეიცავს წევრს

$$L_E = d E$$

(d — დიპოლური მომენტია), რომელაც ამ შემთხვევაში წარმოადგენს შებრუნებული ნიშნით აღებულ მუხტთა სისტემის პოტენციალურ ენერგიას (იხ. § 42).

ელექტრომაგნიტური ველები

§ 45 დალახების განტოლება

სივარულიეში ელექტრომაგნიტური ველი მაქსველის განტოლებებით განი-
საზღვრება, რომლებშიაც უნდა ჩავსვათ $\rho=0$ და $j=0$. ამოვწეროთ კიდევ ეს
განტოლებანი:

$$\operatorname{rot} E = \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \operatorname{div} H = 0, \quad (45,1)$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \operatorname{div} E = 0. \quad (45,2)$$

ამ განტოლებებს შეიძლება ჰქონდეთ ნულისაგან განსხვავებული ამოხსნა. ეს
იმას ნიშნავს, რომ ელექტრომაგნიტური ველი შეიძლება არსებობდეს მაშინაც
კი, როცა არაფიფთარი მუხტები არა გვაქვს.

ელექტრომაგნიტურ ველებს, რომლებიც სივარულიეში მუხტების გარეშე
არსებობენ, ელექტრომაგნიტურ ტალღებს უწოდებენ.

ჩვენ ახლა ასეთი ველების თვისებათა გამოკვლევას შევუდგებით.

უპირველეს ყოვლისა აღვნიშნოთ, რომ ასეთი ელექტრომაგნიტური ველები
მუხტების არ არსებობისას აუცილებლად ცვალებადი უნდა იყვნენ. მართლაც,

წინააღმდეგ შემთხვევაში $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = 0$ და (45,1—2) განტოლებანი გადადიან

(36,1—2) და (43,1—2) მუდმივი ველის განტოლებებში, რომლებშიაც ახლა $\rho=0$,
 $j=0$. მაგრამ, (36,8) და (43,5) ფორმულებით განსაზღვრული ამ განტოლებათა
ამოხსნები ნული ხდება, როცა $\rho=0$, $j=0$.

გამოვიყვანოთ განტოლებანი, რომელნიც განსაზღვრავენ ელექტრომაგნი-
ტურ ტალღათა პოტენციალებს.

როგორც ჩვენ უკვე ვიცით, პოტენციალთა არა ცალსახეობის გამო მათ
ყოველთვის შეიძლება დავადვით გარკვეული დამატებითი პირობა. ამის საფუ-
ძველზე ისე ავარჩიოთ ელექტრომაგნიტურ ტალღათა პოტენციალები, რომ სკა-
ლარული პოტენციალისათვის ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\varphi = 0. \quad (45,3)$$

მაშინ $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ და $H = \text{rot } A$. თუ ამ გამოსახულებებს პირველ (45,2) განტოლებაში ჩავსვამთ, ვიპოვიო

$$\text{rot rot } A = -\Delta A + \text{grad div } A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (45,4)$$

იმის მიუხედავად, რომ პოტენციალებს ჩვენ უკვე დავადევით ერთი დამატებითი პირობა, A პოტენციალი ჯერ კიდევ სავსებით ცალსახა არ არის. სახელდობრ, მას შეიძლება დაემატოს ნებისმიერი დროზე დამოუკიდებელი ფუნქციის გრადიენტი (ამასთანავე φ უცვლელი უნდა დარჩეს). კერძოდ, ელექტრომაგნიტური ტალღის პოტენციალი ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ

$$\text{div } A = 0. \quad (45,5)$$

მართლაც, თუ განტოლებაში $\text{div } E = 0$ ჩავსვათ $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$, გვექნება

$\text{div } \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } A = 0$, ე. ი. $\text{div } A = \text{const.}$ ეს მუდმივი ყოველთვის შეიძლება ნულის ტოლი გავხადოთ, თუ A -ს დაეუმატებთ დროზე დამოუკიდებელ შესაბამის ფუნქციის გრადიენტს.

(45,4) განტოლება ლებულობს ახლა სახეს:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (45,6)$$

ეს არის სწორედ ელექტრომაგნიტურ პოტენციალების განმსაზღვრელი განტოლება. მას დ'ალამბერის ან ტალღურ განტოლებას უწოდებენ.

თუ ამ განტოლების მიმართ გამოვიყენებთ rot და $\frac{\partial}{\partial t}$ ოპერაციებს, შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ E ელექტრული და H მაგნიტური ველები ასეთივე განტოლებებს აკმაყოფილებენ:

ოპერატორს $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ დ'ალამბერის ოპერატორს უწოდებენ და \square ნიშ-

ნის საშუალებით აღნიშნავენ:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (45,7)$$

ასე რომ ტალღური განტოლება შეიძლება დაიწეროს სახით:

$$\square f = 0, \quad (45,8)$$

სადაც f არის A, E ან H ვექტორების ნებისმიერი კომპონენტთაგანი. დ'ალამბერის ოპერატორი ოთხგანზომილებიანი სახით შეიძლება დაიწეროს; ცხადია, რომ

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (45,9)$$

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ტალღების კერძო შემთხვევა, რომლის დროსაც ველი დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ კოორდინატზე, ვთქვათ x -ზე (და დროზე). ასეთ ტალღებს ბრტყელი ტალღები ეწოდება. ამ შემთხვევაში ველის განტოლებანი ლებულობენ სახეს

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (46,1)$$

სადაც f -ს ქვეშ იგულისხმება E ან H ვექტორების ნებისმიერი კომპონენტი. ამ განტოლების ამოსახსნელად გადავწეროთ იგი სახით

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0$$

და შემოვიღოთ ახალი ცვლადები

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

აღვიღად შევიძლება დაერწმუნდეთ, რომ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

ასე რომ f -თვის განტოლება ლებულობს სახეს

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

თუ ამ განტოლებას ξ -ით გავაინტეგრალებთ, ვიპოვით

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta),$$

სადაც $F(\eta)$ — ნებისმიერი ფუნქციაა. კიდევ ერთხელ გაინტეგრალებით ვპოულობთ $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, სადაც f_1 და f_2 — ნებისმიერი ფუნქციებია. ამრგვარად

$$f = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (46,2)$$

დაეუშვათ, მაგალითად, $f_2 = 0$, ასე რომ $f = f_1(x - ct)$. გამოვარკვიოთ ამ ამოხსნის აზრი. ყოველ $x = \text{const}$ სიბრტყეში ველი იცვლება დროს მიხედვით; ყოველ მოცემულ მომენტში ველი სხვადასხვაა სხვადასხვა x -თვის. ცხადია, რომ ველს ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს იმ x კოორდინატებისა და დროს t მომენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $x - ct = \text{const}$, ე. ი.

$$x = \text{const} + ct.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ რომელიმე t მომენტში სივრცის რომელიმე x წერტილზე ველს გარკვეული მნიშვნელობა ჰქონდა, მაშინ t დროს შემდეგ ველის იგივე მნიშვნელობა ექნება x ღერძის გასწვრივ პირვანდელი ადგილიდან ct მანძილზე. ჩვენ შევიძლება ვთქვათ, რომ ელექტრომაგნიტური ველის ყველა მნიშვნე-

ნელობა x ღერძის გასწვრივ ვრცელდება სიჩქარით, რომელიც c სინათლის სიჩქარის ტოლია.

ამგვარად, $f_1(x-ct)$ წარმოადგენს ბრტყელ ტალღას, რომელიც x ღერძის დადებითი მიმართულების გასწვრივ ვრცელდება. ადვილად მივხედებით, რომ $f_2(x+ct)$ წარმოადგენს ტალღას, რომელიც საწინააღმდეგოდ, ე. ი. x -ის უარყოფითი მიმართულების გასწვრივ, ვრცელდება.

§ 45 ნაჩვენები იყო, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის პოტენციალები ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ $\varphi=0$, ამასთანავე $\text{div} A=0$. სწორედ ასე შევარჩიოთ ახლა განსახილავი ბრტყელი ტალღის პოტენციალები. ამ შემთხვევაში პირობა $\text{div} A=0$ გვაძლევს

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0,$$

რამდენადაც ყველა სიდიდე დამოუკიდებელია y და z . თუ აგრეთვე შევადგინოთ გვექნება, რომ A_x შეიცავს t დროს x კოორდინატთან $x+ct$ კომბინაციაში, მაშინ ჩვენ დავინახავთ, რომ $A_x = \text{const}$, ამასთანავე ეს მუდმივი ყოველთვის შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ იგი ნულის ტოლი იყოს, ვინაიდან პოტენციალებისათვის ადიტურ მუდმივს საზოგადოდ არა აქვს მნიშვნელობა (იხ. § 16).

ამნაირად, ბრტყელი ტალღის ვექტორული პოტენციალი ყოველთვის შეიძლება x ღერძის, ე. ი. ტალღის გავრცელების მიმართულების, პერპენდიკულარულად ავარჩიოთ.

განვიხილოთ ბრტყელი ტალღა, რომელიც x ღერძის დადებითი მიმართულებით ვრცელდება. ასეთ ტალღაში ყველა სიდიდე, კერძოდ A -ც, $x-ct$ ფუნქციას წარმოადგენს. ამიტომ

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad H = \text{rot} A$$

ფორმულებიდან ვპოულობთ

$$E = A', \quad H = [\nabla A(x-ct)] = [v(x-ct) A'] = [nA'], \quad (46,3)$$

სადაც შტრიხი აღნიშნავს $x-ct$ -თი განწარმოებას, ხოლო n —ტალღის გავრცელების მიმართულების გასწვრივ აღებული ერთეულოვანი ვექტორია. თუ პირველ ტოლობას მეორეში ჩავსვამთ, ვიპოვიოთ

$$H = [nE]. \quad (46,4)$$

ჩვენ ვხედავთ $[E=A'$ ტოლობიდან და (46,4)], რომ ბრტყელი ტალღის E და H ელექტრული და მაგნიტური ველები ტალღის გავრცელების მიმართულების პერპენდიკულარულია. ამ საფუძველზე ელექტრომაგნიტურ ტალღებს განივ ტალღებს უწოდებენ. შემდეგ, (46,4) ჩანს, რომ ბრტყელი ტალღის ელექტრული და მაგნიტური ველები ერთმანეთის დმი პერპენდიკულარულია. გარდა ამისა იმავე (46,4) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ ბრტყელი ტალღის ელექტრული და მაგნიტური ველები აბსოლუტური სიდიდით ერთიმეორის ტოლია.

მოენახოთ აგრეთვე ბრტყელ ტალღაში ენერჯის ნაკადი, ე. ი. მისი პოინტინგის ვექტორი. გვაქვს

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH] = \frac{c}{4\pi} [E[nE]],$$

და რამდენადაც $E_n = 0$,

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2 n = \frac{c}{4\pi} H^2 n.$$

ამგვარად, ენერჯის ნაკადი მიმართულია ტალღის გავრცელების გასწვრივ. რამდენადაც $W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$ ტალღის ენერჯის სიკვრივეა, ამიტომ შეიძლება დაიწეროს

$$S = cWn, \quad (46,5)$$

იმის თანახმად, რომ ველი სინათლის სიჩქარით ვრცელდება.

§ 47 მონოქრომატული ბრტყელი ტალღა

ელექტრომაგნიტური ტალღის მეტად მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ტალღა, რომელშიაც ველი დროს მარტივ პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს. ასეთ ტალღას მონოქრომატული ეწოდება.

ბრტყელ ტალღაში (რომელიც X ღერძის გასწვრივ ვრცელდება) ველი მხოლოდ $x-ct$ სიდიდის ფუნქციას წარმოადგენს. ამიტომ თუ ბრტყელი ტალღა მონოქრომატულია, მაშინ მისი ველი $x-ct$ სიდიდის მარტივ პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს.

ასეთი ტალღის ვექტორული პოტენციალი ყვილაზე უფრო მარტივად შემდეგი კომპლექსური გამოსახულების ნამდვილი ნაწილის სახით შეიძლება დაიწეროს

$$A = \operatorname{Re} \left\{ A_0 e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\} \quad (47,1)$$

(Re ნამდვილ ნაწილს აღნიშნავს). აქ A_0 რაღაც მუდმივი კომპლექსური ვექტორია, ω —რაღაც მუდმივი. ცხადია, რომ ასეთი ტალღის E და H ველებს ანალოგიური სახე ექნებათ:

$$E = \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\}, \quad H = \operatorname{Re} \left\{ H_0 e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\}$$

იმავე ω მუდმივით.

ω სიდიდეს ტალღის ციკლური სიხშირე ეწოდება. ტალღის სიხშირეს უწოდებენ სიდიდეს

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (47,2)$$

ცხადია, რომ ν იმას განსაზღვრავს, თუ სივრცის მოცემულ წერტილში ველი დროს ერთეულში რამდენჯერ მიიღებს ერთსა და იმავე მნიშვნელობას. სიდიდეს

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (47,3)$$

ტალღის სიგრძე ეწოდება. იგი ტოლია X ღერძის გასწვრივ ორი ისეთი უახლოვეს წერტილთა შორის მანძილისა, რომლებშიაც დროს ერთ და იმავე მომენტში ველს ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს. A_0 -ს ვექტორ-პოტენციალის კომპლექსური ამპლიტუდა ეწოდება.

მაქსველის განტოლებათა წრუვიობისა გამო კომპლექსურ გამოსახულებებით სარგებლობა მეტად მოხერხებულია. სწორედ წრფივობის გამო შესაძლებელია ყველა ოპერაციათა წარმოება არა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებზე, არაჩედ უფრო მარტივ ექსპონენტიულ ფუნქციებზე და ამის შემდეგ მათ ნამდვილ ნაწილზე გადასვლა. შემდეგში ჩვენ ხშირად კომპლექსური ფორმით ვისარგებლებთ. ამასთანავე ჩვენ ყოველთვის ვივარაუდებთ შესაბამის კომპლექსური სიდიდის ნამდვილ ნაწილს.

თუ შემოვიღებთ ტალღის გავრცელების მიმართულების ერთეულოვან n ვექტორს, მაშინ (47,1) შეიძლება დაიწეროს სახით:

$$A = \operatorname{Re} \left\{ A_0 e^{-i \left(\omega t - \frac{\omega}{c} n r \right)} \right\}.$$

ვექტორს

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{2\pi}{\lambda} n \quad (47,4)$$

ტალღური ვექტორი ეწოდება. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს

$$A = \operatorname{Re} \{ A_0 e^{i(kr - \omega t)} \} \quad (47,5)$$

და ანალოგიური გამოსახულებანი E და H -თვის.

(46,3) თანახმად E და H ველები შეიძლება A -ს საშუალებით გამოვსახოთ. ამ ფორმულებიდან მონოქრომატული ტალღისათვის ვღებულობთ:

$$E = ikA, \quad H = i[kA]. \quad (47,6)$$

k_i ვექტორს

$$k_{1,2,3} = k_{xyz}, \quad k_4 = \frac{i\omega}{c} \quad (47,7)$$

კომპონენტებით ოთხგანზომილებიანი ტალღური ვექტორი ეწოდება.

თუ ამ ვექტორს შემოვიღებთ, ჩვენ შეგვიძლია (4,5) დავწეროთ სახით

$$A = \operatorname{Re} [A_0 e^{i k_\mu x_\mu}]. \quad (47,8)$$

ტალღური 4-ვექტორის კვადრატ

$$k_\mu^2 = 0. \quad (47,9)$$

ეს თანაფარდობა უშუალოდ (47,4) და (47,7) განმარტებებიდან გამომდინარეობს, და აგრეთვე, თუ (47,8) ჩავსვამთ დ'ალამბერის განტოლებაში:

$$\square A = 0.$$

თუ ტალღურ 4-ვექტორით ვისარგებლებთ, მაშინ ადვილად შეიძლება გამოვიყვანოთ ω და k სიდიდეთათვის გარდაქმნის ფორმულები ერთი სისტემიდან მეორეში. 4-ვექტორის გარდაქმნის ზოგადი (6,2) ფორმულები გვაძლევს

$$k_4 = \frac{k'_4 + i \frac{V}{c} k'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

ან, თუ k_i კომპონენტთა მნიშვნელობებს ჩავსვამთ,

$$\omega = \frac{\omega' + \frac{V k'_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

ზაგრამ $k_x = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$, სადა α არის k მიმართულებასა და X ღერძს შორის მოთავსებული კუთხე. ამგვარად ჩვენ ვპოულობთ

$$\omega = \omega' \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (47,10)$$

ეს არის სწორედ ზუსტი ფორმულა დობლერის ეფექტისათვის. როცა $V \ll c$ იგი გადადის

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha\right).$$

როცა $k_1 = k_x$, გვაქვს

$$k_x = \frac{k'_x + \frac{V}{c^2} \omega'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

ან, თუ ჩავსვამთ $k_x = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'}$$

ეს ფორმულა თანხედება აბერაციისათვის წინათ § 5-ში გამოყვანილ ფორმულას.

ა მ ო ც ა ნ ა

განვსაზღვროთ მუხტის მოძრაობა $A = A_0 \cos \omega (x - ct)$ ბრტყელ მონოქრომატულ ტალღის ველში.

ამოხსნა Y ღერძი A -ს მიმართულებით ავარჩიოთ. ჰამილტონ იაკობის განტოლება იქნება:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{e}{c} c A_0 \cos \omega (x - ct)\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

ვედებით S სახით

$$S = ay + \beta z + \gamma(x + ct) + f(x - ct),$$

სადაც a , β და γ მუდმივებია, ხოლო $f(x - ct)$ — უცნობი ფუნქცია. ამის შედეგად ვპოულობთ

$$S = ay + \beta z + \gamma(x + ct) - \frac{1}{4\gamma} \left(a^2 + \beta^2 + m^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2} \right) (x - ct) + \frac{aeA_0}{2\gamma\omega} \sin \omega(x - ct) - \frac{e^2 A_0^2}{16\gamma\omega c} \sin \omega(x - ct).$$

მოდრობის განსასაზღვრავად საჭიროა $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial \beta}$, $\frac{\partial S}{\partial \gamma}$ წარმოებლები რაღაც მუდმივებს გაუტოლოთ, რომლებიც შეიძლება ნულის ტოლი გავხადოთ კოორდინატთა სათავეისა და დროს თელის საწყისის სათანადო შერჩევით. თუ შემოვიღებთ $\eta = \omega(x - ct)$ სიდიდეს, მაშინ ვიპოვით განტოლებებს, რომლებიც განსაზღვრავენ მოძრაობას პარამეტრული სახით.

$$x = -\frac{1}{8\gamma^2\omega} \left(a^2 + \beta^2 + m^2 c^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2c^2} \right) \eta + \frac{\eta}{2\omega} + \frac{aeA_0}{4\gamma^2\omega c} \sin \eta - \frac{e^2 A_0^2}{32\gamma^2\omega c^2} \sin 2\eta,$$

$$y = \frac{a}{2\gamma\omega} \eta - \frac{eA_0}{2\gamma\omega c} \sin \eta, \quad z = \frac{b}{2\gamma\omega} \eta,$$

$$ct = -\frac{1}{8\gamma^2\omega} \left(a^2 + \beta^2 + m^2 c^2 + \frac{e^2 A_0^2}{2c^2} \right) \eta - \frac{\eta}{2\omega} + \frac{aeA_0}{4\gamma^2\omega c} \sin \eta - \frac{e^2 A_0^2}{32\gamma^2\omega c^2} \sin 2\eta.$$

§ 48. პოლარიზაცია

განვიხილოთ ბრტყელი მონოქრომატული ტალღის ელექტრული ველი

$$E = \operatorname{Re} \{ E_0 e^{i(kr - \omega t)} \}$$

(ყველაფერი, რასაც ჩვენ აქ ვიჩვენებთ, მაგნიტურ ველსაც ეხება). E_0 რაღაც კომპლექსური ვექტორია; მისი კვადრატი E_0^2 , საზოგადოდ რომ ვიქვით, აგრეთვე კომპლექსური რიცხვია. ცხადია, რომ E_0 ურველთვის შეიძლება წარმოვიდგინოთ სახით:

$$E_0 = b e^{i\alpha},$$

და, ამასთანავე, α ისე შევარჩიოთ, რომ b ვექტორს (რომელიც საზოგადოდ აგრეთვე კომპლექსურია) ხამდელი კვადრატი ჯონდეს. მაშინ ელექტრული ველი ლებულობს სახეს

$$E = \operatorname{Re} \{ b \exp [i(kr - \omega t + \alpha)] \} \quad (48,1)$$

დავწეროთ ვექტორი b სახით $b_1 - i b_2$, სადაც b_1 და b_2 ორი ნამდვილი ვექტორია. ამდენად $b^2 = b_1^2 - b_2^2 - 2i b_1 b_2$ ნამდვილი უნდა იყოს, მაშინ $b_1 b_2 = 0$ ე. ი. ვექტორები b_1 და b_2 უთიერთ პერპენდიკულარულია. ავარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა Y და Z ღერძებზე პარალელური b_1 და b_2 -ს (X ღერძი — ტალღის გავრცელების დიპარალელური). მაშინ ჩვენ (48,1) დან ვიპოვიით

$$\left. \begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(kr - \omega t + \alpha), \\ E_z &= b_2 \sin(kr - \omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (48,2)$$

აღვ. იშნოთ, რომ b_1 და b_2 კოეფიციენტებს ტალღის ამპლიტუდა ეწოდება. \cos და \sin -თან არგუმენტად მდგომ გამოსახულებას ტალღის ფაზა ეწოდება. (43,2) დან უქუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (48,3)$$

ამ ფორმულებიდან ჩვენ ვხედავთ, რომ ასეთი ტალღის ელექტრული ველის ვექტორი სივრცის ყოველ წერტილში ბრუნავს YZ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში, ამასთანავე მისი ბოლო (48,3) ელიფსს აღწერს. ასეთ ტალღას ელიფსურად დაპოლარებული ეწოდება. თუ $b_1 = b_2$, მაშინ (48,3) ელიფსი წრეაზათ გარდაქცევა, ე. ი. ვექტორი ბრუნავს, ხოლო მისი აბსოლუტურა სიდიდე-კი მუდმივი რჩება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ჯალა წრიულად დაპოლარებულია.

დაბოლოს, თუ b_1 ან b_2 ნულის ტოლია, მაშინ ტალღის ველი ყველგან და ყოველთაღის ერთსადა იმავე მიმართულების პარალელურია (ან ანტიპარალელური). ამ შემთხვევაში ტალღას წრფივად დაპოლარებულს ან სიბრტყეში დაპოლარებულს უწოდებენ. ცხადია, რომ ელიფსურად დაპოლარებული ტალღა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი ბრტყლად დაპოლარებულ ტალღათა შეკრების შედეგი.

§ 49 სპეციალური დაშლა

ყოველი ტალღა შეიძლება განხილულ იქნას როგორც მთელ რიგ სხვადასხვა სიხშირის მონოქრომატულ ტალღათა შეკრების შედეგი. ეს მათემატიკურად ნიშნავს ტალღის ცვალეზადი ველის დაშლას ფურიეს ნწკრივად ან ინტეგრალურად. ასეთ დაშლას კიდევ სპეკტრულ დაშლას უწოდებენ.

მაგრამ, იმისათვის, რომ შესაძლო იყოს ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად, იგი პერიოდული უნდა იყოს, ხოლო იმისათვის, რომ ფუნქცია ფურიეს ინტეგრალად დაიშალოს, იგი ნული უნდა ხდებოდეს უსასრულობაში. ამიტომ, მაგალითად, ფურიეს ინტეგრალად დროს მიხედვით (ე. ი. სიხშირეთა მიხედვით) მხოლოდ ისეთი ტალღა შეიძლება დაიშალოს, რომლის ველი ნული ხდება, როცა $t = \pm\infty$. ანალოგიურად ფურიეს ინტეგრალად კოორდინანტთა მიხედვით (ე. ი. ტალღური ვექტორების მიხედვით) მხოლოდ ის ტალღა შეიძლება დაიშალოს, რომელსაც სასრულო ზომა აქვს სივრცეში (უფრო ზუსტად, რომელიც ნული ხდება უსასრულობაში).

ხშირად ჩვენ საქმე გვაქვს სტაციონარულ ველებთან, რომლებიც დროს განმავლობაში თავიანთ ხასიათს არსებობითად არ იცვლიან (კერძოდ არ ისპობიან, როცა $t = \infty$) და ამავე დროს ზუსტად პერიოდული არ არიან. f -თ აღვნიშნოთ ველის აღწერი რომელიმე სიდიდეთაგანი, $-A, E, H$ ვექტორების რომელიმე კომპონენტთაგანი.

f -ის დროს მიხედვით ფურიეს ინტეგრალად ჩვეულებრივი დაშლა ახლა

შეუძლებელია, ვინაიდან ინტეგრალები $\int_{-\infty}^{+\infty} f e^{i\omega t} dt$ განშლადია. მაგრამ ასეთი ვე-

ლიც შეიძლება დაეშალოთ მონოქრომატულ ტალღებად შემდეგი სახით.

f სიდიდე განვიხილოთ დროს რაღაც დიდ შუალედში $t = -T$ -დან $t = +T$ -მდე. ამ შუალედში იგი შეიძლება დაეშალოს ფურიეს მწკრივად შემდეგი სახით:

$$f(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-i \frac{\pi n t}{T}} \right\}. \quad (49,1)$$

ჩვენ რომ ფურიეს მწკრივი, როგორც ეს ჩვეულებრივად კეთდება, დაგვეწერა

სახით $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{-i \frac{\pi n t}{T}}$, მაშინ კი კოეფიციენტები f_n , როგორც ცნობილია, ტოლი

იქნებოდა $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f e^{i \frac{\pi n t}{T}} dt$. რამდენადაც ჩვენ ამის ნაცვლად n -ის მიხედვით შე-

ჯამებას მხოლოდ 0-დან ∞ -მდე ვახდენთ და ვიღებთ შემდეგ ნამდვილ ნაწილს, როგორც ადვილად მივხვდებით, f კოეფიციენტები ორჯერ მეტი უნდა დავწეროთ ე. ი.

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f e^{i \frac{\pi n t}{T}} dt \quad (49,2)$$

(გამონაკლისს შეადგენს f_0 , რომელშიაც წინანდებურად $1/2 T$ უნდა დაიწეროს და არა $\frac{1}{T}$. მაგრამ, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ეს გარემოება როლს არ თამაშობს).

განვსაზღვროთ ახლა ტალღის საშუალო ინტენსივობა (ტალღის ინტენსივობის ქვეშ ესპით სიდიდე, რომელიც. მასში ენერჯიის ნაკადის სიმკვრივის პროპორციულია; ცხადია, რომ ინტენსივობა ველის კვადრატით განისაზღვრება) ე. ი. სიდიდე

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f^2 dt$$

თუ აქ (49,1) ჩავსვამთ (* აღნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებულ სიდიდეს), ვიპოვით:

$$\begin{aligned} \bar{f}^2 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{4} \sum_{n, m} \operatorname{Re} \left\{ f_n e^{-i \frac{\pi n t}{T}} \right\} \operatorname{Re} \left\{ f_m e^{-i \frac{\pi m t}{T}} \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{4} \sum_{n, m} \left(f_n e^{-i \frac{\pi n t}{T}} + f_n^* e^{i \frac{\pi n t}{T}} \right) \left(f_m e^{-i \frac{\pi m t}{T}} + f_m^* e^{i \frac{\pi m t}{T}} \right) dt. \end{aligned}$$

მაგრამ ყოველი ინტეგრალთაგანი $\int_{-T}^{+T} e^{2\pi \frac{t}{T} i n} dt = \frac{T}{2\pi n i} (e^{2\pi i n} - e^{-2\pi i n}) = 0$,

თუ $n \neq 0$, და უდრის $2T$ -ს, თუ $n = 0$. ამიტომ ჩვენ ვღებულობთ

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{2} \sum_n |f_n|^2 \quad (49,3)$$

მკაცრად რომ ვივსჯელოთ ამ ჯამში $|f_0|^2$ წევრს კოეფიციენტად $1/2$ არ უნდა ქონდეს, მაგრამ (49,3)-ში $\frac{1}{2} |f_0|^2$ სიდიდე დანარჩენ წევრების ჯამთან შედარებით შეიძლება უგულვებელყოთ].

n ის ნაცვლად შემოვიღოთ ცვლადი $\omega = n\pi/T$. იმის გამო, რომ T ძალიან დიდია (49,3) ში, n -ით შეჯამება ω მიხედვით ინტეგრაციით შეიძლება შევცვალოთ:

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |f|^2 \frac{T}{\pi} d\left(\frac{n\pi}{T}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |f|^2 \frac{T}{\pi} d\omega.$$

დასასრულს, თუ შემოვიტანთ

$$f_{\omega} = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-T}^{+T} f e^{i\omega t} dt, \quad (49,4)$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

$$f^2 = \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega \quad (49,5)$$

ამრიგად, საშუალო ინტენსივობა განსაზღვრულია როგორც მონოქრომატულ კომპონენტების ინტენსივობათა ჯამი (ინტეგრალი). (49,4) ფორმულა გვაძლევს ინტენსივობის გამოთვლის საშუალებას სიხშირეთა ნებისმიერ უსასრულოდ მცირე $d\omega$ ინტერვალში.

როდესაც $T \rightarrow \infty$, მაშინ \bar{f}^2 , ცხადია, რაღაც სასრულო საზღვრისაკენ მიისწრაფის; ამიტომ f_{ω} -ც სასრულო საზღვრისაკენ მიისწრაფის. f_{ω} -ს (49,4) გამოსახულებიდანაც ჩანს, რომ ინტეგრალი $\int_{-T}^{+T} f e^{i\omega t} dt$ იზრდება როგორც \sqrt{T} , როცა T მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

§ 50 ნაწილობრივ დაპოლარიზებული სინათლე

ყოველი მონოქრომატული ტალღა, თვით მისი განპარტების მიხედვით, აუცილებლად დაპოლარიზებულია. მაგრამ ბუნებაში ახსებულ ტალღები, რასაკვირველია, მკაცრად მონოქრომატული არ არიან, — მათი სპექტრული დაშლა ყოველთვის შეიცავს სიხშირეებს რაღაც სასრულო ინტერვალში. უკეთეს შემთხვევაში ტალღა თითქმის მონოქრომატული შეიძლება იყოს, თუ იგი შეიცავს სიხშირეება რაღაც მცირე $\Delta\omega$ ინტერვალში. განვივილოთ ასეთი ტალღა და ვთქვათ ω მის რაღაც საშუალო სიხშირეს წარმოადგენს. მაშინ მისი ველი (სივრცის მოცემულ წერტილში) შეიძლება დავწეროთ სახით $Re\{A_0(t) e^{-i\omega t}\}$. სადაც კომპლექსური აპლიტუდა $A_0(t)$ დროს რაღაც ფუნქციას წარმოადგენს (მკაცრად მონოქრომატული ტალღისათვის იქნებოდა $A_0 = c \sin \omega t$). რამდენადაც A_0 ტალღის პოლარიზაციას განსაზღვრავს (იხ. § 48), ეს ნიშნავს, რომ ტალღის ყოველ წერტილში მისი პოლარიზაცია დროს განმავლობაში იცვლება. ასეთ ტალღას ნაწილობრივ დაპოლარიზებულს უწოდებენ. სხვათა შორის, კერძო შემ-

თხვევებში $A_0(i)$ სიდიდის დროზე დამოკიდებულება ისეთი შეიძლება იყოს, რომ ტალღა მაინც სავსებით დაპოლარებულია. ამისათვის აუცილებელია, რომ A_0 ვექტორის ორივე კომპონენტის შეფარდება უცვლელი რჩებოდეს დროს მიმართ, ე. ი. უცვლელი რჩებოდეს ტალღის ველის ორ ურთიერთ პერპენდიკულარულ კომპონენტის (ნაძღვილ) აპლიტუდების შეფარდება და მათი ფაზათა სხვაობა.

ელექტრომაგნიტური ტალღის, კერძოდ სინათლის, პოლარიზაციის თვისება ექსპერიმენტულად დიამბირება სხვადასხვა მატერიალურ სხეულებში¹ გამოსაკვლევი სინათლის გატარების საშუალებით, რის შემდეგაც გაიზომება სხეულში გასული სინათლის ინტენსივობა. როგორც ჩვენ ვიკითხავთ, სინათლის ინტენსივობა მოცემულ ადგილას მისი ველის კვადრატის პროპორციულია. მეორე მხრივ, სხეულში გასული სინათლის ველი, მაქსიმალური განტოლებათა წრფივობა გამო, სხეულზე დაცემულ გამოსაკვლევ სინათლის ველის წრფივ ფუნქციას წარმოადგენს. ამგვარად, სინათლის პოლარიზაციის გამოკვლევისას ყოველთვის გაიზომება რაღაც კვადრატული ფორმა $\alpha_{ik}A_iA_k^*$, სადაც α_{ik} რაღაც ტენზორია, რომელიც ახასიათებს იმ ოპტიკურ სისტემას, რომლის საშუალებითაც ისწავლება პოლარიზაცია, ხოლო A_i — ველის, მაგალითად, ვექტორული პოტენციალის, კომპონენტია (* კომპლექსურად შეუღლებულს აღნიშნავს). როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნაწილობრივად დაპოლარებულ სინათლის შემთხვევაში A_0 კომპლექსური აპლიტუდა დროზე დამოკიდებული: ცხადია, დაკვირვებისათვის საინტერესოა დასამზერი ეფექტის მხოლოდ (დროს მიხედვით აღებული) საშუალო მნიშვნელობანი, ე. ი. $\alpha_{ik}A_{0i}A_{0k}^*$. აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ ნაწილობრივად დაპოლარებულ სინათლის თვისებები სავსებით ხასიათდება ტენზორით

$$J_{ik} = A_{0i}A_{0k}^* \quad (50,1)$$

რამდენადაც A_0 ვექტორი ყოველთვის ტალღის მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მდებარეობს, J_{ik} ტენზორს სულ ოთხი კომპონენტი აქვს ($i, k=1,2$). J_{ik} განმარტებიდან ჩანს, რომ მის კომპონენტთა შორის შემდეგი თანაფარდობა არსებობს:

$$J_{ik} = J_{ki}^* \quad (50,2)$$

J_{ik} ტენზორი უმარტივეს სახემდე მოვიყვანოთ. ვთქვათ, n_i იერთეულოვანი^{*} კომპლექსური ვექტორია, ისე განორმალებული, რომ $n_i n_i^* = 1$. n_i ისე განვსაზღვროთ, რომ

$$J_{ik} n_k = \lambda n_i \quad (50,3)$$

იმის ანალოგიურად, როგორც ეს კეთდება სიმეტრიული ტენზორის მთავარ ღერძებამდე დაყვანის შემთხვევაში. (50,3) განტოლება შეიძლება დავწეროთ სახით

$$(J_{ik} - \lambda \delta_{ik}) n_k = 0.$$

¹ მაგალითად, ნიკოლის პრიზმებში (ნიკოლებში).

იმისათვის, რომ ამ პირველი ხარისხის (n_k მიხედვით) ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სის უემას ნულისაგან განსხვავებული ამოხსნები ჰქონდეს, როგორც ცნობილია, აუცილებელია, რომ დეტერმინანტი

$$|J_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0, \quad (50,4)$$

საიდანაც განისაზღვრება λ -ს ორი მნიშვნელობა, რომლებიც ჩვენ λ_1 და λ_2 აღვნიშნოთ. თუ ამ მნიშვნელობებს რიგრ-გობით (50,3)-ში ჩავსვამთ, ჩვენ მათი საშუალებით ორ $n_i^{(1)}$ და $n_i^{(2)}$ ვექტორს განსაზღვრავთ.

აღვილად შეიძლება ვაჩვენოთ,¹ რომ λ_1 და λ_2 სიდიდეები ნამდვილია. ხოლო $n_i^{(1)}$ და $n_i^{(2)}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, ე. ი. აკმაყოფილებენ პირობას

$$n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0. \quad (50,5)$$

ებლა J_{ik} ტენზორი ჩვენ შეიძლება დაეწეროთ სახით

$$J_{ik} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(1)*} + \lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)*} \quad (50,6)$$

უშუალო ჩასმით ადვილად შევამოწმებთ, რომ ეს გამოსახულება მართლაც აკმაყოფილებს (50,3) განტოლებას.

თუ სინათლე სავსებით დაპოლარებულია, მაშინ $A_0 = \text{const}$ და J_{ik} უბრალოდ A_0 , A_0^* — ტოლია (გაუსაშუალებად). მაგრამ (50,6) ყოველ ორ წევრ-

¹ თუ (50,3) ორივე მხარეს n_i^* -ზე გავამრავლებთ, გვექნება

$$\lambda n_i n_i^* = \lambda = J_{ik} n_i n_k^*$$

მაგრამ $\lambda_{ik} n_i n_k$, და მაშასადამე, λ -ც, (50,2) ძალით, ნამდვილ სიდიდეს წარმოადგენს, ვინაიდან

$$(J_{ik} n_i n_k)^* = J_{ik}^* n_i^* n_k^* = J_{ik} n_i n_k^* = J_{ik} n_i n_k^*$$

(50,5) დასამტკიცებლად დაეწეროთ განტოლება

$$J_{ik} n_k^{(1)} = \lambda_1 n_i^{(1)}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} = \lambda_2 n_i^{(2)}$$

და პირველი მათგანი $n_i^{(2)*}$ -ზე, ხოლო მეორე $n_i^{(1)*}$ -ზე გავამრავლოთ:

$$J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_i^{(2)*}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} n_i^{(1)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)*}.$$

ფისარგებლოთ იმით, რომ $J_{ik}^* = J_{ki}$ და ავიღოთ მეორე განტოლების კომპლექსურად შეუღლებული:

$$J_{ik}^* n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ki} n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)},$$

რის შემდეგაც იგი წვერწვერად გამოვაკლოთ პირველ განტოლებას; მაშინ ჩვენ ვპოულობთ.

$$(\lambda_1 - \lambda_2) n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0,$$

საიდანაც (50,5) გამომდინარეობს.

თავანს სწორედ ასეთი სახე აქვს—მუდმივი ვექტორის და მისი კომპლექსურად შეუღლებელის ორი კომპონენტის ნამრავლისა (შესაბამისად $\sqrt{\lambda_1} n_i^{(1)}$ და $\sqrt{\lambda_1} n_i^{(2)}$). სხვანაირად რომ ვთქვათ, ყოველი ამ წევრთაგანი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სავსებით დაპოლარებული (საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ელიფსურად) ტალღა. შემდეგ ჩვენ ვხედავთ, რომ (50.6) ში არ არის წევრი, რომელიც ამ ორი ტალღის კომპონენტთა ნამრავლებს შეიცავს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ორივე ტალღა შეიძლება როგორც ფიზიკურად ერთიმეორისაგან დამოუკიდებელი განვიხილოთ, ან, როგორც ამბობენ, ისინი არაკოჰერენტული ტალღებია. მართლაც, თუ ორი ტალღა ერთიმეორეზე დამოუკიდებელია, მაშინ $\overline{A_i^{(1)} A_k^{(2)}}$ ნამრავლის საშუალო მნიშვნელობა უდრის $\overline{A_i^{(1)}} \overline{A_k^{(2)}}$ ს ე. ი. $\overline{A_i^{(1)}}$ და $\overline{A_k^{(2)}}$ საშუალო მნიშვნელობათა ნამრავლის ტოლია, და რამდენადაც ყოველი მათგანი ნულის ტოლია, ამიტომ $\overline{A_i^{(1)} A_k^{(2)}} = 0$.

§ 48 ჩვენ ვნახეთ, რომ კომპლექსური ამპლიტუდა ყოველთვის ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ ორი ურთიერთპერპენდიკულარულ კომპონენტთან ერთი წმინდად ნამდვილი იყოს, ხოლო მეორე — წმინდად წარმოსახვითი; მაშინ მათი აბსოლუტური სიდიდეები შესაბამ რხევათა ამპლიტუდებს განსაზღვრავენ.

ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$n_x^{(1)} = b_1, \quad n_y^{(1)} = ib_2, \quad (50,7)$$

სადაც b_1 და b_2 ნამდვილია და განორმალების პირობის თანახმად $n_i^{(1)} n_i^{(1)*} = 1$ დაკავშირებულნი არიან თანათარღობით $b_1^2 + b_2^2 = 1$. მაშინ $n_i^{(2)}$ დაიწერება სახით

$$n_x^{(2)} = ib_2, \quad n_y^{(2)} = b_1 \quad (50,8)$$

(ისე, რომ დაცული იყოს პირობა $n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0$). ეს გამოსახულებანი გვიჩვენებენ, რომ ორივე ელიფსურად დაპოლარებულ რხევათა ელიფსები ერთიმეორის მსგავსია (ღერძების ერთიდაიგივე შეუარაღება აქვთ), ამასთანავე ყოველი მათგანი მეორის მიმართ სწორი კუთხით არის მობოუნებული.

ამგვარად, ჩვენ იმ შედეგამდე მივდივართ, რომ ყოველი ნაწილობრივად დაპოლარებული ტალღა შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ორი არაკოჰერენტული ელიფსურად დაპოლარებული ტალღის შეკრების შედეგი, რომელთა პოლარიზაციის ელიფსები მსგავსია და ურთიერთპერპენდიკულარული.

სინათლის სრული J ინტენსივობა უბრალოდ ველის კვადრატის პროპორციულია ე. ი. პროპორციულია J_{ix} ტენზორის დიაგონალური კომპონენტთა ჯამისა:

$$J = J_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (50,9)$$

ხოლო შეფარდებას

$$\rho = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (50,10)$$

ნაკლები λ სიდადესი უფრო მკტთან სინათლის დეპოლარიზაციის ხარისხი ეწოდება. თუ სანათლე მთლიანად დაპოლარებულია, მაშინ ერთერთი λ_1, λ_2 სიდადე იაგანი ნულს ტოლია; მაშინ ცნობა, რომ $\rho = 1$. საწინააღმდეგო შემთხვევას წარმოადგენს სინათლე, რომლისთვისაც $\lambda_1 = \lambda_2$, ასე რომ $\rho = 1$. ასეთ სინათლეს არად პოლარებული ან ბუნებრივი სინათლე ეწოდება. ის ფაქტი, რომ (503) განტოლებას ამ შემთხვევაში λ თვის მხოლოდ ერთი ფესვი აქვს, იმას აღნიშნავს, რომ J_{ik} ტენზორს აქვს სახე

$$J_{ik} = \lambda_0 \delta_{ik} \quad (50,11)$$

სადაც λ_0 არის λ_1 და λ_2 საერთო მნიშვნელობა. n_i ვექტორისათვის ეს განტოლებანი ეხლა გვაძლევენ მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლეს. სხვა სიტუაციებში რომ ვთქვათ, ბუნებრივი სინათლე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი ერთიდაიმავე ინტენსივობის დაპოლარებული ტალღის შეკრების შედეგი, რომელთა პოლარიზაციის ღერძები ნებისმიერადაა განლაგებული (სინათლის მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში).

§ 51. ელექტრომაგნიტური ველის დაშლა

მუხტების მიერ შექმნილი ველი აგრეთვე შეიძლება ფორმალურად დაეშალოთ ბრტყელ ტალღებად (ფორიეს ინტეგრალად). მაგრამ ეს დაშლა არსებითად განსხვავდება სივარცელში ელექტრომაგნიტური ტალღების დაშლისაგან. მართლაც, მუხტების ველი არ აკმაყოფილებს დალაშქერის (45,7) ერთგვაროვან განტოლებას და, მაშასადამე, ამ ველის დაშლის ყოველი წევრიც ამ განტოლებას არ აკმაყოფილებს. აქედან გამომდინარეობს, რომ იმ ბრტყელი ტალღებისათვის, რომელთა მიხედვით მუხტების ველის დაშლაა შესაძლებელი, არ სრულდება ფანთარდობა $k^2 = \omega^2 c^2$, რომელსაც ადგილი აქვს ბრტყელ მონოქრომატულ ელექტრომაგნიტური ტალღებისათვის.

კერძოდ, ელექტრომაგნიტური ველი ფორმალურად შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ბრტყელი ტალღების შეკრების შედეგი. მაგრამ ამ ტალღების „სიხშირე“, ცხადია, ნულის ტოლი იქნება, ვინაიდან განსახილავი ველი დროზე არ არის დამოკიდებული. ტალღური ვექტორები- k_i ; არასაკვირველია, ნულისაგან განსხვავდებიან.

განვიხილოთ ველი, რომელსაც კოორდინატთა სათავეში მდებარე მუხტი ქნის. ამ ველის ფ პოტენციალი განისაზღვრება განტოლებით (იხ. § 36):

$$\Delta \varphi = -4\pi e \delta(r). \quad (51,1)$$

დაეშალოთ φ ფორიეს ინტეგრალად ე. ი. $4\pi e \delta(r)$ წარმოვიდგინოთ იგი როგორც $\varphi_k \exp(i k r)$ ბრტყელი ტალღების შეკრების შედეგი:

$$\varphi = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i k r) \varphi_k dk_x dk_y dk_z. \quad (51,2)$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარის მიმართ ლაპლასის ოპერატორს გამოვიყენებთ, ვიპოვიტ

$$\Delta\varphi = - \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}) \varphi_k dk_x dk_y dk_z,$$

ასე რომ $\Delta\varphi$ გამოსახულებაში ფურიეს კომპონენტი $(\Delta\varphi)_k$ იქნება

$$(\Delta\varphi)_k = -k^2 \varphi_k.$$

მეორე მხრით $(\Delta\varphi)_k$ შეიძლება მოენახოთ, თუ ფურიეს კომპონენტს ავიღებთ (51,1) განტოლების ორივე მხარედან,

$$(\Delta\varphi)_k = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi e\delta(r) \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}) dx dy dz = - \frac{e}{2\pi^2}$$

თუ $(\Delta\varphi)_k$ -თვის მიღებულ ორივე გამოსახულებებს შევადარებთ, ვიპოვიტ:

$$\varphi_k = \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2}. \quad (51,3)$$

ეს ფორმულა წყვეტს დასმულ ამოცანას.

φ პოტენციალის ანალოგიურად შეიძლება ველის დაშლაც

$$\mathbf{E} = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_k \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}) dk_x dk_y dk_z. \quad (51,4)$$

(51,2) დახმარებით გვაქვს

$$\mathbf{E} = - \text{grad} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}) dk_x dk_y dk_z = - \int \int \int ik \varphi_k \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}) dk_x dk_y dk_z.$$

(51,4)-თან შეუარებით ეპოულობთ

$$\mathbf{E}_k = ik \varphi_k = - \frac{ik}{k^2} \frac{e}{2\pi^2}. \quad (51,5)$$

აქედან ჩანს, რომ იმ ტალღების ველი, რომელთა მიხედვით ჩვენ დავშალეთ კულონის ველი, მიმართულია ტალღური ვექტორის გასწვრივ. ამიტომ ამ ტალღებს სივრცეში ტალღები შეიძლება ვუწოდოთ.

§ 52 ველის საკუთარი რხევები

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ველი, რომელიც სივრცის სასრულო მოცულობაში იმყოფება. შემდგომი გამოთვლების გასამარტივებლად დაუშვათ, რომ ამ მოცულობას სწორკუთხოვანი პარალელოპიპედის ფორმა აქვს შესაბამისად A , B და C ტოლი გვერდებით. მაშინ ჩვენ შევკვიდით ამ პარალელოპიპე-

დში არსებული. ველის დამახასიათებელი ყველა სიდიდე დავშალოთ ფურიეს სამმაგ მწკრივად (სამი კოორდინატის მიხედვით). მაგალითად, ველის ვექტორულ პი ტენციას ახლა შემდეგი სახე ექნება

$$A = \sum_k a_k \exp(i k r) \quad (52,1)$$

შეჯამება წარმოებს k ვექტორის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა მიხედვით, როპლის კომპონენტები, როგორც ცნობილია, გაირბენენ მნიშვნელობებს

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \quad (52,2)$$

სადაც n_x, n_y, n_z დადებითი და უარყოფითი მთელი რიცხვებია. a_k კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდნენ თანფარდობას

$$a_{-k} = a_k^*, \quad (52,3)$$

რამდენადაც A უნდა იყოს ნამდვილი. a_k ვექტორები, რა თქმა უნდა, დროს ფუნქციებს წარმოადგენენ. ყოველი მათგანი k -სადმი შესაბამის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მდებარეობს.

(52,1)-ში შემავალ ცალკე ტალღებს უწოდებენ ველის საკუთარ რხევებს მოცემულ მოცულობაში. თუ ამ მოცულობის A, B და C ზომები საკმაოდ დიდია, მაშინ k_x, k_y, k_z -ის შეზობელი მნიშვნელობანი (რომელთათვისაც n_x, n_y, n_z ერთით განსხვავდებიან) თითქმის ერთიმეორის ტოლია. ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ ველის საკუთარ რხევათა რიცხვზე k_x, k_y, k_z ტალღური ვექტორის მნიშვნელობათა მცირე $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ ინტერვალში.

რამდენადაც, მაგალითად, k_x -ის შეზობელი მნიშვნელობანი შეესაბამებიან n_x -ის ერთით განსხვავებულ მნიშვნელობებს, ამიტომ საკუთარ რხევათა რიცხვი Δk_x ინტერვალში (ე. ი. k_x შესაძლო მნიშვნელობათა რიცხვი ამ ინტერვალში) პირდაპირ n_x მნიშვნელობათა შესაბამ Δn_x ინტერვალის ტოლია. ამგვარად ჩვენ ვპოულობთ

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z. \quad (52,4)$$

$\Delta n_x, \Delta n_y, \Delta n_z$ ინტერვალებში საკუთარ რხევათა საერთო რიცხვი Δn ტოლია ამ ინტერვალებში ტალღური ვექტორის კომპონენტების მნიშვნელობათა რხევის რიცხვისა. ამიტომ იგი $\Delta n_x, \Delta n_y, \Delta n_z$ ნამრავლის ტოლია ე. ი.

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \quad (52,5)$$

სადაც $V = ABC$ არის ველის მოცულობა.

აქედან ადვილად განვსაზღვრავთ ველის საკუთარ რხევათა რიცხვს, რომელთა ტალღური ვექტორები აბსოლუტური სიდიდით Δk ინტერვალშია მოთავსებული, ხოლო მიმართულებით სხეულოვანი კუთხის $\Delta \Omega$ ელემენტში. ამისა-

თვის საჭიროა მხოლოდ k_x, k_y, k_z „სიერცეში“ სფერულ კოორდინატებზე გადავიდეთ და $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ -ის ნაცვლად დაეწეროთ მოცულობის ელემენტი ამ სიერცეში. ამგვარად,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta \Omega. \quad (52,6)$$

დაბოლოს, საკუთარ რხევათა საერთო რიცხვი Δk ინტერვალში მოთავსებული k აბსოლუტური მნიშვნელობებით და k ყოველგვარი მიმართულებით ($\Delta \Omega$ -ს ნაცვლად ვწერთ 4π) იქნება

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \Delta k. \quad (52,7)$$

გამოესახოთ ლაგრანჟის ფუნქცია განსახილავი ველისათვის V მოცულობაში a_k სიდიდეების საშუალებით. ველის პოტენციალებს ჩვენ ისევ შევარჩევთ ისე, რომ სკალარული პოტენციალი ნულის ტოლი იყოს (ბრტყელი ტალღებისათვის ყოველთვის შესაძლებელია). თუ $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$, $H = \text{rot} A$ ჩავ-

სვამთ (27,6) ლაგრანჟის ფუნქციაში $L = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV$, გვექნება

$$L = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{A}^2 - (\text{rot} A)^2 \right\} dV.$$

აქ A -ს ნაცვლად უნდა ჩავსვათ (52,1) დაშლა. გვაქვს

$$\dot{A} = \sum_k \dot{a}_k \exp(i k r), \quad \text{rot} A = \sum_k i [k a_k] \exp(i k r).$$

ამ ჯამების კვადრატების მონახვისას მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ ყველა იმ წევრების ნამრავლები, რომლებსაც განსხვავებული k და k' ტალღური ვექტორები აქვთ ($k \neq k'$), ნულს მოგვცემენ მთელ სიერცეში ინტეგრირებისას. ეს იქიდან ჩანს, რომ ეს ნამრავლები $\exp[i(k+k')r]$ გამრავლებას შეიცავენ, ხოლო ინტეგრალი, მაგალითად,

$$\int e^{i \frac{2\pi}{d} n_x x} dx$$

ნულისაგან განსხვავებული მთელი n_x -ით ნულის ტოლია. ის ნამრავლები კი, რომელთათვისაც $k = k'$, r ზე არ არიან დამოკიდებული. dV მიხედვით ინტეგრირება ამ შემთხვევაში უბრალოდ V მოცულობას გვაძლევს. ამგვარად, ჩვენ ვპოულობთ (თუ a_k, a_k^* -თი შევცვლით)

$$L = \frac{V}{8\pi} \sum_k \left(\frac{1}{c^2} \dot{a}_k \dot{a}_k^* [k a_k] [k a_k^*] \right)$$

ვინაიდან მხოლოდ ნიშნით განსხვავებული k -ს მნიშვნელობანი ჯამში იძლევიან ერთნაირ წევრებს, შეიძლება დავეწეროთ

$$L = -\frac{V}{4\pi} \sum_k' \left(\frac{1}{c^2} \dot{a}_k \dot{a}_k^* - [ka_k] [ka_k^*] \right) \quad (52,8)$$

სადაც \sum_k' ნიშნავს შეჯამებას k ყველა მნიშვნელობათა მიხედვით, იმათი გამოკლებით, რომლებიც მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან

დასასრულს a_k კომპლექსურ ვექტორთა ნაცვლად შემოვიღოთ ნამდვილი α_k და β_k ვექტორები შემდეგი თანაფარდობის თანახმად

$$a_k = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{V}} (\alpha_k + i\beta_k). \quad (52,9)$$

ყოველი α_k და β_k ვექტორთაგანი k ტალღური ვექტორის პერპენდიკულარულია, ე. ი. ყოველ მათგანს ორი დამოუკიდებელი კომპონენტი აქვს. თუ ამას (51,8) ჩავსვამთ, ჩვენ ვიპოვით ლაგრანჯის საძებნ ფუნქციას სახით:

$$L = \frac{1}{2} \sum_k' \{ (\dot{\alpha}_k^2 - c^2 k^2 \alpha_k^2) + (\dot{\beta}_k^2 - c^2 k^2 \beta_k^2) \}. \quad (52,10)$$

α_k და β_k ვექტორების მიმართულეებანი განსაზღვრავენ შესაბამი ტალღების პოლარიზაციის მიმართულებებს. თუ α_k ვექტორის ორ კომპონენტს α_{k1} და α_{k2} -ით

აღვნიშნავთ, გვექნება $\alpha_k^2 = \sum_{j=1}^2 \alpha_{kj}^2$ და ანალოგიურად β_k -თვის.

$$L = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k' \{ (\dot{\alpha}_{kj}^2 - c^2 k^2 \alpha_{kj}^2) + (\dot{\beta}_{kj}^2 - c^2 k^2 \beta_{kj}^2) \}. \quad (52,11)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ლაგრანჯის ფუნქცია იყოფა ერთიდა იმავე სახის დამოუკიდებელი წევრების ჯამად, რომელთაგან ყოველი შეიცავს მხოლოდ თითო

α_{kj} ან β_{kj} სიდიდეთაგანს. ყოველი ასეთი წევრთაგანი $\frac{1}{2} (\dot{\alpha}_{kj}^2 - c^2 k^2 \alpha_{kj}^2)$ ან

$\frac{1}{2} (\dot{\beta}_{kj}^2 - c^2 k^2 \beta_{kj}^2)$, როგორც მექანიკიდან არის ცნობილი, შეესაბამება ერთგვაროვან ჰარმონიულ რხევას, ან, როგორც ამბობენ, ოსცილატორს.

ლაგრანჯის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\ddot{\alpha}_{kj} + c^2 k^2 \alpha_{kj} = 0, \quad \ddot{\beta}_{kj} + c^2 k^2 \beta_{kj} = 0$$

და α_{kj} და β_{kj} -სთვის, როგორც მოსალოდნელი იყო, გვაძლევენ $\cos \omega t$ და $\sin \omega t$ ტიპის პერიოდულ ამოხსნებს $\omega = ck$ სიხშირით.

§ 53. შავი გამოსხივება

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური გამოსხივება, რომელიც სტატისტიკურ (სითბურ) წონასწორობის მდგომარეობაშია; ასეთ განოსხივებას შავი გამოსხივება ეწოდება. აუცილებელია აღინიშნოს, რომ სიციარიელეში ელექტრომაგნიტურ გამოსხივებას თავისთ. ვად არ შეუძლია მივიღეს სითბურ წონასწორობის მდგომარეობამდე. მართლაც, წონასწორობის დამყარებისათვის საჭიროა სისტემის ცალკე ნაწილებს შორის რაღაც ურთიერთმოქმედების არსებობა, — მოცემულ შემთხვევაში, ველის ცალკეულ საკუთარ რხევებს შორის. მაგრამ ეს რხევები ურთიერთ არ მოქმედებენ. ამიტომ სითბურ წონასწორობის დამყარებისათვის აუცილებელია ისეთი მუხტების არსებობა, რომლებთანაც ველს შეუძლია ურთიერთმოქმედება. მაშინ ამ ურთიერთმოქმედების დახმარებით სხვადასხვა საკუთარ რხევებს შეუძლია ერთიმეორესთან ენერჯიის გაცვლა-გამოცვლა.

წინა პარაგრაფში ჩვენ დავინახეთ, რომ სასრულო მოცულობაში არსებული ელექტრომაგნიტური ველი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჰარმონიულ ოსცილატორების ერთობლივობა. მეორე მხრით, სტატისტიკიდან არის ცნობილი, რომ ჰარმონიულ რხევაში მყოფ სისტემის ყოველ თავისუფლების ხარისხზე, ჩვენ შემთხვევაში ველის ყოველ რესცილატორზე, მოდის χT ტოლი ენერჯია, სადაც χ ბოლცმანის მუდმივია, ხოლო T — სისტემის ტემპერატურა (თანაბრად განაწილების კანონი). შეზღვევ, ყოველ ორ, k და k ტალღური ვექტორების მქონე ველის საკუთარ რხევებს (52,10) ჯამში ორი წევრი შეესაბამება (α_k -თი და β_k -თი), ე. ი., თუ გავითვალისწინებთ ორ შესაძლო დამოუკიდებელ პოლარიზაციას, (52,11) ჯამში მათ ოთხი ოსცილატორი შეესაბამება.

ამგვარად ოსცილატორების რიცხვი ორჯერ მეტია ველის საკუთარ რხევების რიცხვზე. თუ (52,5) ფორმულით ვისარგებლებთ, ჩვენ ახლა ვიპოვიოთ, რომ ველის $\Delta \mathcal{E}$ ენერჯია, რომელიც მოდის $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ ინტერვალში მოთავსებულ საკუთარ რხევებზე, უდრის

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\chi T V}{4\pi^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (53,1)$$

ამ ფორმულას რელიევიჯინის ფორმულა ეწოდება. დავწეროთ კიდევ ენერჯიის გამოსახულება, რომელიც მოდის k ს აბსოლუტურ მნიშვნელობათა Δk ინტერვალში არსებულ საკუთარ რხევებზე. (52,7) დახმარებით გვაქვს

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\chi T V}{\pi^2} k^2 \Delta k = \frac{\chi T V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta \omega, \quad (53,2)$$

სადაც $\omega = ck$ ტალღების სიხშირეა.

ჩვენ რომ აქედან ველის სრული ენერჯია გამოვთვალოთ, უსასრულობას მივიღებთ, რადგანაც ინტეგრალი $\int_0^\infty \omega^2 d\omega$ განშლადია. რამდენადაც ველის სრული

ენერჯია სასრულო მოცულობაში სინამდვილეში სასრულო უნდა იყოს, ეს ნიშნავს, რომ ველის სითბური წონასწორობა საერთოდ არ შეიძლება დამყარ-

დეს, — ადგილი ექნებოდა ენერჯის განუწყვეტელ გადასვლას მაღალი სიხშირის საკუთარ რხევებზე და ტემპერატურის განუწყვეტელ ვარდნას და ნულთან მიახლოებას.

ცდა კი გვიჩვენებს, რომ გამოსხივება სინამდვილეში სრულიადაც არ ამჟღავნებს ამგვარ თვისებებს და შეუძლია სითბურ წონასწორობაში იყოს სასრულო ტემპერატურის პირობებში. ეს უთანხმოება თეორიასა და ცდას შორის დაკავშირებულია კვანტურ მოვლენებთან. ამასთანავე გამოიკვია, რომ კლასიკური ელექტროდინამიკის გადახრები იზრდება გამოსხივების სიხშირესთან ერთად. ამიტომ რელეი-ჯინსის ფორმულა გამოსადეგია შავი გამოსხივების იმ ნაწილისათვის, რომელიც საკმაოდ მცირე სიხშირეებს შეიცავს. ამასთანავე რელეი-ჯინსის ფორმულის გამოყენების ინტერვალი ტემპერატურის შემცირებისას ვიწროვდება.

სინათლის გავრცელება

§ 54. გეომეტრიული ოპტიკა

ბრტყელი ტალღა იმით გამოირჩევა, რომ გავრცელების მიმართულება და ამპლიტუდა ყუელჯან ერთი და იგივეა. ნებისმიერი ელექტრომაგნიტური ტალღები, რა თქმა უნდა, ამ თვისებით აღჭურვილი არ არიან.

მაგრამ, უმრავლეს შემთხვევაში ელექტრომაგნიტური ტალღები, რომლებიც არ წარმოადგენენ ბრტყელ ტალღებს, იმ თვისებით განირჩევიან, რომ სივრცის ყოველ მცირე უბანში შეიძლება მათი როგორც ბრტყელი ტალღების განხილვა. ამისათვის, ცხადია, აუცილებელია, რომ ამპლიტუდა და ტალღის გავრცელების მიმართულება არ იცვლებოდეს ტალღის სივრცის რიგის მანძილის ფარგლებში.

თუ ეს პირობა დატულია, მაშინ შეიძლება შემოვიღოთ ეგრედწოდებული ტალღური ზედაპირები ე. ი. ისეთი ზედაპირები, რომელთა ყოველ წერტილში (დროს მოცემულ მომენტში) ტალღის ფაზა ერთი და იგივეა. ბრტყელი ტალღის ტალღური ზედაპირები, ცხადია, სიბრტყეებს წარმოადგენს, რომლებიც ტალღის გავრცელების მიმართულების პერპენდიკულარულია. სივრცის ყოველ მცირე უბანში შეიძლება ვილაპარაკოთ ტალღის გავრცელების მიმართულებაზე, რომელიც ტალღური ზედაპირის ნორმალურია. ამასთანავე შეიძლება შემოვიღოთ სხივის ცნება ე. ი. ისეთი ხაზისა, რომლის მხები უოველ წერტილში ტალღის გავრცელების მიმართულებას თანხვევდა.

ამ შემთხვევაში ტალღის გავრცელების კანონების შესწავლა გეომეტრიული ოპტიკის საგანს შეადგენს. მაშასადამე, გეომეტრიული ოპტიკა განიხილავს ელექტრომაგნიტური ტალღების, კერძოდ სინათლის, გავრცელებას როგორც სხივების გავრცელებას და სრულიად არ ითვალისწინებს მათ ტალღურ ბუნებას. სხვანაირად რომ ვთქვათ, გეომეტრიული ოპტიკა შეესაბამება მცირე ტალღების ზღვრულ შემთხვევას $\lambda \rightarrow 0$.

ახლა შეუდგეთ გეომეტრიული ოპტიკის ძირითადი განტოლების გამოყენას, რომელიც სხივების მიმართულებას განსაზღვრავს. ვთქვათ, f ნებისმიერი სიდიდეა, რომელიც ტალღის ველს აღწერს (E და H ვექტორების ნებისმიერი კომპონენტთაგანი). ბრტყელ მონოქრომატულ ტალღაში f -ს აქვს სახე

$$f = a \exp [i (kr - \omega t + \alpha)] = a \exp [i (k_1 x_1 + \alpha)] \quad (54, 1)$$

(ჩვენ Re ნიშანს გამოვტოვებთ; ყველგან იგულისხმება ნამდვილი ნაწილი) დავწეროთ გამოსახულება ველისათვის სახით

$$f = ae^{i\psi}. \quad (54,2)$$

იმ შემთხვევაში, როცა ტალღა ბრტყელი არ არის, მაგრამ გეომეტრიული ოპტიკის გამოყენება შესაძლებელია, a ამპლიტუდა, საზოგადოდ, კოორდინატებისა და დროს ფუნქციის წარმოადგენს, ხოლო ψ ფაზას, რომელსაც აგრეთვე ეიკონალი ეწოდება, არა აქვს ისეთი მარტივი სახე, როგორც (54,1)-ში. მაგრამ არსებითია ის, რომ ψ ეიკონალი დიდია. ეს უშუალოდ იქიდან ჩანს, რომ იგი ტალღის სიგრძის მანძილზე იცვლება 2π სიდიდებზე, ხოლო გეომეტრიული ოპტიკა შეესაბამება ზღვარს $\lambda \rightarrow 0$.

სივრცის მცირე უბნებში და დროს მცირე ინტერვალებში ψ ეიკონალი შეიძლება მწკრივად დავშალოთ. პირველი რიგის წევრებამდე სიზუსტით გვაქვს

$$\psi = \psi_0 + r \frac{\partial \psi}{\partial r} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(კოორდინატთა სათავე და დროს ათვლის საწყისი არჩეულია სივრცის განსახილავ უბანში და დროს განსახილავ ინტერვალში; წარმოებულთა მნიშვნელობანი აღებულია კოორდინატთა სათავეში). თუ ამ გამოსახულებას (54,1) ს შევადარებთ, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad } \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (54,3)$$

რაც სწორედ იმას შეესაბამება, რომ სივრცის ყოველ მცირე უბანში (და დროს მცირე ინტერვალებში) ტალღა როგორც ბრტყელი შეიძლება განვიხილოთ. (54,3) თანაფარდობანი ოთხგანზომილებიანი სახით დაიწერებიან როგორც

$$k_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad (54,4)$$

სადაც k_i — ტალღური 4-ვექტორია.

§ 47-ში ჩვენ ვნახეთ, რომ 4-ვექტორის k_i კომპონენტებს შორის არსებობს თანაფარდობა $k_i^2 = 0$. თუ აქ (54,4) ჩავსვაძთ, ვიპოვით განტოლებას

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 = 0. \quad (54,5)$$

ეს განტოლება, რომელსაც ეიკონალის განტოლება ეწოდება, გეომეტრიული ოპტიკის ძირითად განტოლებას წარმოადგენს.

ეიკონალის განტოლება აგრეთვე შეიძლება მივიღოთ ტალღურ განტოლებაში უშუალოდ ზღვარზე გადასვლით, როცა $\lambda \rightarrow 0$. f ველი აქაყოკილებს ტალღურ განტოლებას

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

თუ აქ ჩაესვამთ $f = ae^{i\psi}$, ვიპოვიტ

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2} e^{i\psi} + 2i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} e^{i\psi} + if \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 f = 0. \quad (54,6)$$

მაგრამ, როგორც ზემოდ აღვნიშნეთ, ψ ეიკონალი დიდი სიდიდეა; ამიტომ აქ სამი პირველი წევრი შეიძლება უგულვებელვყოთ მეოთხესთან შედარებით, და ჩვენ ისევ (54,5) განტოლებას ვღებულობთ.

ჩვენ მოვიყვანთ აქ კადეე მთელ რიგ თანათარღობებს, რომლებიც სიკარგილეში სინათლის გავრცელების მიმართ გამოყენებისას გვაძლევენ მხოლოდ სავსებით ცხად შედეგებს. ჩვენ მათ აქ მაინც მოვიყვანთ, ვინაიდან თავის ზოგად ფორმაში აქ დასკვნების გამოყენება შეიძლება აგრეთვე მატერიალურ გარემოში სინათლის გავრცელების მიმართ.

ეიკონალის განტოლების უორმიდან გამომდინარეობს უსასანიშნაეი ანალოგია გეოპეტრიულ ოპტიკასა და მატერიალურ წერტილთა მექანიკას შორის. მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობა განისაზღვრება ჰამილტონ-იაკობის (23,8) განტოლებით:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

ეს განტოლება, ისევე როგორც ეიკონალის განტოლება, წარმოადგენს მეორე ხარისხის პირველი რიგის კერძო წარმომებულებიან განტოლებას. როგორც ცნობილია, S მოქმედება ნაწილაკის იმპულსთან და \mathcal{H} ჰამილტონის ფუნქციასთან დაკავშირებულია თანათარღობებით

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

თუ ამ ფორმულებს შევადარებთ (54,3) ფორმულებს, ვნახავთ, რომ ტალღური ვექტორი გეოპეტრიულ ოპტიკაში თამაშობს მექანიკაში ნაწილაკის იმპულსის როლს, ხოლო სიხშირე — ჰამილტონის ფუნქციას ე. ი. ნაწილაკის ენერჯიის როლს. ტალღური ვექტორის k აბსოლუტური სიდიდე სიხშირესთან დაკავშირებულია $k = \omega/c$. ფორმულით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს თანათარღობა ანალოგიურია ისეთი ნაწილაკის ენერჯიისა და იმპულს შორის არსებული თანათარღობისა $p = \mathcal{H}/c$, რომლის მასა ტოლია ნულისა, ხოლო სიჩქარე — სინათლის სიჩქარისა.

ნაწილაკებისათვის ადგილი აქვთ ჰამილტონის განტოლებებს

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

აღნიშნული ანალოგიის თანახმად ჩვენ სხივებისათვის შეგვიძლია უწუალოდ ანალოგიური განტოლებანი დავწყოთ

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (54,7)$$

სიციარელებში $\omega = ck$, ასე რომ $\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$ (\mathbf{n} გავრცელების მიმართულებით აღებული ერთეულოვანი ვექტორია). ე. ი. სიციარელებში, როგორც უნდა იყოს, სხივები სწორ ხაზებს წარმოადგენენ, რომელთა გასწვრივ სინათლე c სიჩქარით ვრცელდება.

თუ ანალოგიას განვაგრძობთ, შეიძლება გეომეტრიულ ოპტიკაში დავადგინოთ პრინციპი, რომელიც მექანიკაში უმცირესი მოქმედების პრინციპის ანალოგურია. მაგრამ, ახლა მისი ჰამილტონის ფორმაში $\delta \int L dt = 0$ დაწერა არ იქნება შესაძლებელი, ვინაიდან შეუძლებელი აღმოჩნდა სხივებისათვის ისეთი ფუნქციის შემოღება, რომელიც ანალოგიურია ნაწილაკათათვის ლაგრანჟის ფუნქციისა. მართლაც, ნაწილაკის L ლაგრანჟის ფუნქცია ჰამილტონის \mathcal{H}

ფუნქციასთან დაკავშირებულია $L = p \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \mathcal{H}$. თუ ჰამილტონის ფუნქციას ω სიხშირით შევცვლით, ხოლო იმპულსს \mathbf{k} ტალღური ვექტორით, მაშინ ლაგრანჟის ფუნქციისათვის ოპტიკაში უნდა დაგვეწერა $\mathbf{k} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} - \omega$. მაგრამ ეს გა-

მოსახულება ნულის ტოლია, რამდენადაც $\omega = ck$. სხივებისათვის ლაგრანჟის ფუნქციის შემოღების შეუძლებლობა, სხვათა შორის, უშუალოდ ჩანს ზემოაღნიშნული გარემოებიდანაც, რომ სხივების გავრცელება ანალოგიურია ნაწილაკების მოძრაობისა, რომელთა მასა ნულის ტოლია.

თუ ტალღას გარკვეული მუდმივი ω სიხშირე აქვს, მაშინ მისი ველის დროზე დამოკიდებულება განისაზღვრება $e^{-i\omega t}$ სახის მამრავლით. ამიტომ ასეთი ტალღის ეიკონალისათვის ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\psi = -\omega t + \psi'(x, y, z), \quad (54,8)$$

სადაც ψ' მხოლოდ კოორდინატების ფუნქციაა. ახლა ეიკონალის (54,5) განტოლება დებულობს სახეს:

$$(\text{grad } \psi')^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (54,9)$$

როგორც ცნობილია, იმ შემთხვევაში, როცა ენერგია მუდმივია, ნაწილაკისათვის უმცირესი მოქმედების პრინციპი შეიძლება დაიწეროს ეგრედ წოდებული შოპერტის პრინციპის სახით:

$$\delta S = \delta \int p dl = 0,$$

სადაც ინტეგრირება წარმოებს ნაწილაკის ტრაექტორიაზე მის მოცემულ ორ მდებარეობას შორის. აქ ნაგულისხმევაა, რომ იმპულსი გამოსახულია როგორც ენერგიის და ნაწილაკის კოორდინატთა დიფერენციალების ფუნქცია. სხივებისათვის ანალოგიურ პრინციპს ფერმას პრინციპი ეწოდება. ამ შემთხვევაში ჩვენ ანალოგიით შეიძლება დავწეროთ

$$\delta \psi = \delta \int \mathbf{k} dl = 0. \quad (54,10)$$

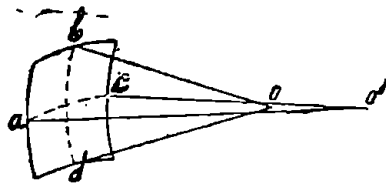
ზიტარიელეში $k = \frac{\omega}{c} n$ და ჩვენ ვღებულობთ ($dl \cdot n = dl$):

$$\delta \int dl = 0, \quad (54, 11)$$

რაც სხივების სწორხაზოვან გავრცელებას შეესაბამება.

§ 55. ინტენსივობა

ამგვარად, გეომეტრიულ ოპტიკაში სინათლის ტალღა შეიძლება განვიხილოთ როგორც სხივების კონა. განვიხილოთ საკითხი სინათლის ინტენსივობის განაწილების შესახებ ასეთ კონაში. გამრეყოთ განსახილავ კონის რომელიმე ტალღურ ზედაპირზე (ე. ი. რომელიმე $\psi = \text{const}$ ზედაპირზე) უსასრულოდ მცირე ელემენტი. დიფერენციალური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერ ზედაპირს მის ყოველ წერტილში აქვს ორი, საზოგადოთ რომ ვთქვათ განსხვავებული, სიმრუდის მთავარი რადიუსი. ვთქვათ ac და bd სიმრუდის მთავარი წრეხაზების ელემენტებია (იხ. ნახ. 6), რომლებიც ტალღური ზედაპირის მოცემულ ელემენტზეა გავლებული. მაშინ სხივები, რომლებიც ტალღური ზედაპირის ნორმალურია და a და c წერტილებზეა გატარებული, გადაიკეფებიან ერთიმეორით შესაბამ სიმრუდის O' ცენტრში, ხოლო b და d წერტილებზე გავლებული სხივები გადაიკეფებიან მეორე O სიმრუდის ცენტრში.



ნახ. 6.

O და O' -დან გავლებულ სხივთა გაშლის მოცემული კუთხისათვის ac და bd მონაკვეთების სიგრძე, ცხადია, შესაბამ სიმრუდის R_1 და R_2 რადიუსების (ე. ი. $O'a$ და $O'b$ სიგრძის) პროპორციულია. ზედაპირის ელემენტის ფართობი ac და bd სიგრძეთა ნამრავლის პროპორციულია, ე. ი. $R_1 R_2$ -ის პროპორციულია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ განვიხილავთ ტალღური ზედაპირის ელემენტს, რომელიც სხივთა განსაზღვრული მწკრივით არის შემოსაზღვრული, მაშინ მათ გასწვრივ მოძრაობისას ამ ელემენტის ფართობი $R_1 R_2$ -ის პროპორციულად იცვლება.

მეორე მხრით ინტენსივობა, ე. ი. ენერგიის ნაკადი ერთეულ ზედაპირში იმ ზედაპირის ფართობის უკუპროპორციულია, რომელშიც გაივლის სინათლის ენერგიის მოცემული რაოდენობა. ამგვარად, ჩვენ იმ დასკვნამდე მივდივართ, რომ ინტენსივობა

$$J = \frac{\text{const}}{R_1 R_2}. \quad (55, 1)$$

ეს ფორმლა განსაზღვრავს სინათლის ინტენსივობის ცვლილებას სხივთა მიმართულების გასწვრივ. ამასთანავე R_1 და R_2 წარმოადგენენ იმ ტალღური ზედაპირის სიმრუდის რადიუსებს, რომელსაც მოცემული სხივი გადაიკეფებს განსახილავ წერტილში. ხაზს უსვამთ იმ გარემოებას, რომ ეს ფორმლა გამოუ-

სადეგარია ინტენსივობათა შედარებისათვის ერთსადიმავე ტალღური ზედაპირის სხვადასხვა წერტილში.

რამდენადაც ინტენსივობა ველის მოძღლის კვადრატით განისაზღვრება, თვით ველის ცვლილებისათვის სხივის გაწვრივ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$f = \frac{\text{const}}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR}, \quad (55,2)$$

სადაც e^{ikR} ფაზურ მამრავლში R -ის ქვეშ შეიძლება ვიგულისხმოთ როგორც R_1 , ისე R_2 ; e^{ikR_1} და e^{ikR_2} სიდიდეები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან (მოცემული სხივისათვის) მხოლოდ მუდმივი მამრავლით, რამდენადაც $R_1 - R_2$ სხვაობა — ორივე სიმრუდის ცენტრს შორის მანძილი — მუდმივია.

თუ ტალღური ზედაპირის ორივე სიმრუდის რადიუსი ერთიმეორეს თანხვდება, მაშინ (55,1) და (55,2) აქვთ სახე:

$$J = \frac{\text{const.}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{const.}}{R} e^{ikR}. \quad (55,3)$$

ამას ადგილი აქვს, კერძოდ, ყოველთვის იმ შემთხვევაში, როდესაც სინათლეს გამოასხივებს წერტილოვანი წყარო (მაშინ ტალღური ზედაპირები კონცენტრიულ სფეროებს წარმოადგენენ, ხოლო R — სინათლის წყარომდე მანძილი).

(55,1)-დან ჩვენ ვხედავთ, რომ $R_1 = 0$ და $R_2 = 0$ წერტილებში, ე. ი. ტალღური ზედაპირის სიმრუდის ცენტრებში, ინტენსივობა უსასრულობა ხდება. თუ ამას კონის ყველა სხივის მიმართ გამოვიყენებთ, ვიპოვით, რომ მოცემულ კონაში სინათლის ინტენსივობა უსასრულო ხდება, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ორ ზედაპირზე — ტალღური ზედაპირის სიმრუდის ცენტრთა გეომეტრიულ ადგილზე. შევნიშნოთ, რომ ამ ზედაპირებს კაუსტიკა ეწოდება.

სფერული ტალღური ზედაპირის კერძო შემთხვევაში ორივე კაუსტიკა გალაგვარდება ერთ წერტილში — სინათლის წყაროში (ან ფოკუსში).

§ 56. კუთხური ეიკონალი

თუ სივარცხელში მოძრავი სხივი შედის რომელიმე გამჭვირვალე მატერიალურ სხეულში, მაშინ მისი მიმართულება ამ სხეულიდან გამოსვლის შემდეგ, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, განსხვავდება პირვანდელი მიმართულებიდან. მიმართულების ცვლილება, ცხადია, დამოკიდებულია სხეულის კონკრეტულ თვისებებზე და ფორმაზე. მაგრამ, შესაძლებელი აღმოჩნდა ზოგიერთი ზოგადი კანონების გამოყენება, რომლებიც ნებისმიერ მატერიალურ სხეულში სხივის გავლისას მისი მიმართულების ცვლილებას შეეხება. ანასთანავე ნაგულსხმევი მხოლოდ, რომ იმ სხივებისათვის, რომლებიც განსახილავი სხეულის შიგნით ვრცელდებიან, ადგილი აქვს გეომეტრიულ ოპტიკას.

ასეთ გამჭვირვალე სხეულებს, რომლებშიაც სინათლის სხივებს ატარებენ, როგორც მიღებულია, ჩვენ ოპტიკურ სისტემებს უწოდებთ.

სხივების გავრცელებასა და ნაწილაკის მოძრაობას შორის § 54 აღნიშნული ანალოგიის ძალით, იგივე ზოგადი კანონები სამართლიანია აგრეთვე ნაწილაკების მოძრაობის ცვლილებისთვისაც, რომლებიც ჯერ სიცარიელეში მოძრაობენ სწორხაზობრივად, შემდეგ გაივლიან რომელიმე ელექტრომაგნიტურ ველს და შემდეგ ამ ველიდან ისევ სიცარიელეში გამოდიან. გარკვეულობისათვის, ჩვენ ქვემოთ ყოველთვის მხოლოდ სინათლის სხივების გავრცელებაზე ვილაპარაკებთ.

წინა პარაგრაფში ჩვენ დავინახეთ, რომ ეიკონალის განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს სხივების გავრცელებას, შეიძლება დაიწეროს სახით (54, γ): $(\Delta \psi)^2 = a^2/c^2$ (განსაზღვრული სიხშირის სინათლისათვის). ქვემოთ, მოზერებულობის მიხედვით, ψ -ით ჩვენ აღვნიშნავთ ეიკონალს, გაყოფილს a/c მუდმივ სიდიდებზე. მაშინ გეომეტრიული ოპტიკის ძირითად განტოლებას ექნება სახე:

$$(\nabla \psi)^2 = 1. \quad (56,1)$$

ამ განტოლების ყოველი ამოხსნა სხივთა განსაზღვრულ კონას აღწერს, ამასთანავე სივრცის მოცემულ წერტილში გამავალი სხივის მიმართულება ამ წერტილში ψ -ს გრადიენტით განისაზღვრება. მაგრამ, ჩვენი მიზნებისათვის ასეთი აღწერა არ იქნება საკმარისი, ვინაიდან ჩვენ ვეძებთ იმ ზოგად თანაფარდობებს, რომლებიც განსაზღვრავენ ოპტიკურ სისტემებში სხივების არაერთი განსაზღვრული კონის გავლას, არამედ ნებისმიერი სხივების გავლას. ამიტომ ჩვენ უნდა ვისარგებლოთ ისეთი სახით აღებული ეიკონალით, რომელიც აღწერს საერთოდ ყველა შესაძლო სინათლის სხივს, ე. ი. სივრცის ნებისმიერ ორ წერტილზე გამავალ სხივს. თავის ჩვეულებრივ ფორმაში ეიკონალი $\psi(r)$ წარმოადგენს რაღაც კონის სხივის ფაზას, რომელიც r წერტილში გაივლის. ახლა კი ჩვენ უნდა შემოვიღოთ $\psi(r, r')$ ეიკონალი როგორც ორი წერტილის ფუნქცია (r და r' სხივის სწყისი და ბოლო წერტილების რადიუს-ვექტორები). წერტილთა ყოველ წყვილზე r და r' შეიძლება სხივი გავატაროთ, და $\psi(r, r')$ წარმოადგენს ამ სხივის ფაზათა სხვაობას (ან, როგორც ამბობენ, გზის ოპტიკურ სიგრძეს) r და r' წერტილებს შორის. ქვემოთ r და r' -ის ქვეშ ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ იმ წერტილთა რადიუს-ვექტორებს, რომლებიც სხივზე მდებარეობენ შესაბამისად მისი ოპტიკურ სისტემაში შესვლისას და იქიდან გამოსვლისას.

თუ $\psi(r, r')$ -ში ერთ რადიუს-ვექტორთაგანს, ვთქვათ r' -ს, მოცემულად ჩავთვლით, მაშინ ψ როგორც r -ის ფუნქცია აღწერს სხივთა განსაზღვრულ კონას, სახელდობრ r' წერტილში გამავალ სხივთა კონას. მაშინ ψ (56,1) განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდეს, რომელშიაც გადიფერენციალება r -ის კომპონენტების მიხედვით უნდა მოხდეს. ანალოგიურად, თუ r -ს ჩავთვლით მოცემულად, მაშინ $\psi(r, r')$ -სათვის კადევ ერთ განტოლებას ვიპოვით, ასე რომ

$$(\nabla_r \psi)^2 = 1, \quad (\nabla_{r'} \psi)^2 = 1. \quad (56,2)$$

სხივის მიმართულება, როგორც წინა პარაგრაფიდან ვიცით, მისი ფაზის გრადიენტით განისაზღვრება. რამდენადაც $\psi(r, r')$ r და r' წერტილებში ფაზათა

სხვაობას წარმოადგენს, ამიტომ სხივის მიმართულება r' წერტილში $n' = \frac{\partial \psi}{\partial r'}$ ვექტორით განისაზღვრება, ხოლო r წერტილში $n = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ ვექტორით. (56,2)-დან ჩანს, რომ n' და n ერთეულოვანი ვექტორებია:

$$n^2 = n'^2 = 1. \quad (56,3)$$

ოთხი ვექტორი r , r' , n და n' ერთიმეორესთან რაღაც, თანაფარდობითაა დაკავშირებული, ვინაიდან ორი მათგანი (n , n') წარმოადგენს რომელიღაც ψ ფუნქციის წარმოებულს დანარჩენი ორის (r , r') მიხედვით. რაც შეეხება თვით ψ ფუნქციას, იგი აკმაყოფილებს დამატებით პირობებს — (56,2) განტოლებებს.

n , n' , r და r' ვექტორებს შორის არსებული თანაფარდობის მოსაძებნად ψ -ს ნაცვლად მოხერხებული იქნება შემოვიღოთ სხვა სიდიდე, რომელიც არ იქნება შეზღუდული არავითარი დამატებითი პირობით (ე. ი. რომელიც არ უნდა აკმაყოფილებდეს რომელიმე დიფერენციალურ განტოლებებს). ეს შემდეგი გზით შეიძლება გაკეთდეს. ψ ფუნქციაში დამოუკიდებელ ცვლებადებს წარმოადგენს r და r' , ასე რომ $d\psi$ დიფერენციალისათვის გვაქვს

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial r'} dr' = -n dr + n' dr'.$$

გამოვიყენოთ ახლა ლეჟანდრის გარდაქმნები r და r' ნაცვლად n და n' დამოუკიდებელი ცვლადების მიმართ, ე. ი. დავწეროთ

$$d\psi = -d(nr) + rdn + d(n'r') - r'dn',$$

საიდანაც, თუ შემოვიტანთ ფუნქციას

$$\chi = n'r' - nr - \psi, \quad (56,4)$$

გვექნება

$$d\chi = rdn - r'dn'. \quad (56,5)$$

χ ფუნქციას კუთხური ეიკონალი ეწოდება; როგორც (56,5)-დან ჩანს, მასში დამოუკიდებელ ცვლადებს n და n' წარმოადგენს. χ უკვე არ არის შეზღუდული არავითარი დამატებითი პირობით. მართლაც, ახლა (56,3) განტოლება გამოსახავს მხოლოდ, რომ $n^2 = n'^2 = 1$, ხოლო ეს პირობები კი მხოლოდ დამოუკიდებელ ცვლადებს შეესაბამება. ამ პირობებიდან ჩანს, რომ n ვექტორის სამი n_x , n_y , n_z კომპონენტიდან (და ანალოგიურად n' -სათვის) მხოლოდ ორია დამოუკიდებელი; ქვემოთ დამოუკიდებელ კომპონენტებად ჩვენ გამოვიყენებთ n_y , n_x და n'_y და n'_x და მაშინ

$$n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}, \quad n'_x = \sqrt{1 - n_y'^2 - n_z'^2}.$$

თუ ამ გამოთქმებს ჩავსვით $d\chi$ გამოსახულებაში

$$d\chi = -x dn_x - y dn_y - z dn_z + x' dn'_x + y' dn'_y + z' dn'_z,$$

მაშინ $d\chi$ დიფერენციალისათვის ვიპოვით:

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x} x\right) dn_y - \left(x - \frac{n_x}{n_y} y\right) dn_x + \\ + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x} x'\right) dn'_y + \left(x' - \frac{n'_x}{n'_y} y'\right) dn'_x.$$

აქედან საბოლოოდ შემდეგ განტოლებებს ვპოულობთ:

$$\left. \begin{aligned} y - \frac{n_y}{n_x} x &= -\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, & y' - \frac{n'_y}{n'_x} x' &= \frac{\partial\chi}{\partial n'_y} \\ x - \frac{n_x}{n_y} y &= -\frac{\partial\chi}{\partial n_x}, & x' - \frac{n'_x}{n'_y} y' &= \frac{\partial\chi}{\partial n'_x} \end{aligned} \right\} (56,6)$$

რომლებიც საძებნ ზოგად თანაფარდობას განსაზღვრავენ n , n' , r და r' ვექტორებს შორის. χ ფუნქცია იმ სხეულის კონკრეტულ თვისებებს ახასიათებს, რომელშიაც სხივები გადიან (ან ველის თვისებებს დამუხტული ნ.წალაქების მოძრაობის შემთხვევაში).

§ 57. სხივთა მიწრო კონები

ოპტიკურ სისხეებში სხივთა კონის გაელის განხილვისას განსაკუთრებულ ინტერესს ისეთი კონები წარმოადგენენ, რომელთა სხივები ერთ წერტილში გადაიკვეთებიან (ეგრედწოდებული ჰომოცენტრიული კონები).

სხივთა ჰომოცენტრიული კონა, ოპტიკურ სისხეში გაელის შემდეგ, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, არა ჰომოცენტრიული ხდება ე. ი. სხეულში გაელის შემდეგ კვლავ ერთ წერტილში არ იკონიბება. მხოლოდ განსაკუთრებულ შემთხვევებში, მნათი წერტილიდან გამოშვალნი სხივები ოპტიკურ სისხეში გაელის შემდეგ ხელახლა გადაიკვეთებიან ყველა ერთ წერტილში — მნათი წერტილის გამოსახულებაში¹.

შეიძლება ვაჩვენოთ (იხ. § 5A), რომ ერთადერთ შემთხვევას, როცა ყველა ჰომოცენტრიული კონა ოპტიკურ სისხეში გაელის შემდეგ ისევ ჰომოცენტრიული რჩება, იგივერი ასახვის შემთხვევა წარმოადგენს, ე. ი. ისეთი ოპტიკური სისხემის შემთხვევა, რომელიც ნებისმიერი საგნისათვის მის, როგორც ფორმით, ისე ზომით, სავსებით იგივერ გამოსახულებას იძლევა (სხვა სიტყვებით რომ ეთქვათ, სავსისაგან მისი გამოსახულება განსხვავდება გადატანით, მობრუნებით ან სარკული არეკვლით როგორც მთელის).

ამგვარად, არცერთ ოპტიკურ სისხემას არ შეუძლია მოგვეცეს საგნის სავსებით მკაფიო გამოსახულება (რომელსაც სასრულო ზომა ექნება), გარდა იგივერი გამოსახულების ტრივიალური შემთხვევისა².

¹ გადაკვეთის წერტილი შეიძლება თვით სხივებზე მდებარეობდეს ან მათი გაგრძელების ზაზხე იყოს. ამის მიხედვით გამოსახულებებს შესაბამისად ნამდვილი და წარმოსახვითი გამოსახულება ეწოდება.

² ასეთი გამოსახულება შეიძლება ბრტყელი რხევათა დახმარებით განხიზორციელოთ.

განუწილ საგანათავის შესაძლებელია მხოლოდ მიახლოებითი, არა სავსებით მკ. ფიოდ განაორკილებული არაიგიფური გამოსახულებანი.

ჰოპოცენტრიული კონების ისეჲ ჰოპოცენტრიულ კონებში გადასვლის ყველაზე მნიშვნელოვან შემთხვევას წარმოადგენს საკმაოდ ვიწრო კონები (ე. ი. კონები მცირე გაშლის კუთხი), რომლებიც (მოცემელი ოპტიკური სისტემისათვის) განსაზღვრული მიმართულების მახლობლად ვრცელდებიან. ამ მიმართულებას ოპტიკური სისტემის ოპტიკური ღერძი ეწოდება.

ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ ზოგად შემთხვევაში სხივების უსასრულოდ ვიწრო კონაც (სამგანზომილებიან სივრცეში) ჰოპოცენტრიული არ არის. § 55-ში ჩვენ ვნახეთ, რომ ასეთ კონშიაკ ს'ვდასხვა სხივი სხვადასხვა წერტილში გადაიკვეთება (ამ მოვლენას ასტიგმატიზმი ეწოდება). გამონაკლისს წარმოადგენს ტალღური წყდაპირის ის წერტილები, რომლებშიაც სიმრუდის ორივე მთავარი რადიუსი ერთიმეორის ტოლია. — ასეთი წერტილის მახლობლად ზედაპირის მცირე უბანი შეიძლება როგორც სფერული განვიხილოთ, და შესაბამის სხივთა ვიწრო კონა ჰოპოცენტრიულია.

განვიხილოთ ისეთი ოპტიკური სისტემები, რომლებსაც აქსიალური სიმეტრია აქვთ. ასეთ სისხემას სიმეტრიის ღერძი ამავე დროს მის ოპტიკურ ღერძს წარმოადგენს. მართლაც, ასეთ სისტემაში გამავალ სხივთა კონის ტალღურ ზედაპირსაც, ცხადია, აქსიალური სიმეტრია ექნება. ბრუნვით ზედაპირებს კი, როგორც ცნობილია, სიმეტრიის ღერძთან ვადაკვეთის წერტილებში ორი ერთიმეორის ტოლი სიმრუდის რადიუსი აქვთ. ამიტომ ამ მიმართულებით მოძრავი ვიწრო კონა ჰოპოცენტრიული რჩება. იგივე შეიძლება ითქვას იმ საკმაოდ ვიწრო კონების მიმართაც, რომელთა მოძრაობის მიმართულება საკმაოდ მცირე კუთხეებს შეადგენს ოპტიკურ ღერძთან.

ისეთი ვიწრო კონების დახმარებით მიღებული ასახვების განმსაზღვრელი რაოდენობითი თანაფარდობების მოსაძებნად, რომელნიც აქსიალურ-სიმეტრიულ ოპტიკურ სისტემებში ვადიან, ვისარგებლოთ ზოგადი (56,6) განტოლებებით და წინასწარ განვსაზღვროთ χ ფუნქციის სხე განსახილავ შემთხვევაში.

რამდენადაც სხივთა კონა ვიწროა და ოპტიკური ღერძის მახლობლად ვრცელდება, ამიტომ Π და Π' ვექტორები ყოველი კონისათვის თითქმის ამ ღერძის გასწვრივ არის მიმართული. თუ ოპტიკურ ღერძს X ღერძად ავიჩვენოთ, მაშინ n_y, n_x და n'_y, n'_x კომპონენტები მცირე იქნება ერთთან შედარებით. რაც შეეხება n_x და n'_x კომპონენტებს, $n_x \approx 1, n'_x$ კი ან $+1$ ან -1 შეიძლება იყოს. პირველ შემთხვევაში სხივები თითქმის პირვანდელ მიმართულებას გაყვებიან და მოხვდებიან ოპტიკური სისტემის მეორე მხარეს სივრცეში. ოპტიკურ სისტემას ამ შემთხვევაში ლინზას უწოდებენ. მეორე შემთხვევაში სხივები იცვლიან მიმართულებას თითქმის პირდაპირ საწინააღმდეგოზე; ასეთ ოპტიკურ სისტემას სარკე ეწოდება.

ვისარგებლოთ n_y, n_x, n'_y, n'_x სიდიდეთა სიმცირით და დაეშალოთ კუთხური ეიკონალი χ (n_y, n_x, n'_y, n'_x) მწკრივად; ამასთანავე დაეკმაყოფილდეთ დაშლის პირველი წევრებით. მთელი სისტემის აქსიალური სიმეტრიის გამო χ ინვარიანტული უნდა იყოს კოორდინატთა სისტემის ოპტიკური ღერძის გარშემო შემობრუნებათა მიმართ. აქედან ჩანს, რომ χ ფუნქციის დაშლაში არ

შეიძლება გვექონდეს n და n' ვექტორების y და z კომპონენტა პირველი ხარისხის-ს პროპორციული პირველი რიგის წევრები. ამ წევრებს არ ექნებოდათ მოთხოვნილი ინვარიანტობა. მეორე რიგის წევრებს შორის მოთხოვნილი თვისებით აღკურვლილია n^2 , n'^2 და nn' სკალარული ნამრავლი. ამგვარად, მეორე რიგის წევრებამდე სიზუსტით აქსიალური სიმეტრიის ოპტიკური სისტემისათვის კუთხურ ეიკონალს აქვს სახე:

$$\chi = \text{const.} + \frac{g}{2} (n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n_y' + n_z n_z') + \frac{h}{2} (n_y'^2 + n_z'^2), \quad (57,1)$$

სადაც f , g , h მუდმივებია.

განსაზღვრულობისათვის ჩვენ ახლა მხოლოდ ლინზის შემთხვევას განვიხილავთ. ამასთან დაკავშირებით დაუშვებთ, რომ $n'_x \approx 1$; საჩქებებისათვის, როგორც ქვევით იქნება მითითებული, ყველა ფორმულას ანალოგიური სახე აქვს.

თუ ახლა (57,1) გამოსახულებას ზოგად (55,6) განტოლებებში ჩავსვამთ, გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} n_y(x-g) - f n_y' &= y, & f n_y + n_y'(x+h) &= y', \\ n_z(x-g) - f n_z' &= z, & f n_z + n_z'(x+h) &= z'. \end{aligned} \right\} \quad (57,2)$$

განვიხილოთ x , y , z წერტილიდან გამოსული პომოცენტრიული კონა x' , y' , z' ის წერტილი იყოს, რომელშიაც გადაივითება ყველა სხივი ლინზაში გავლის შემდეგ. (57,2) განტოლებათა პირველი და მეორე წყვილი დამოკიდებული რომ ყოფილიყო, მაშინ ეს ოთხი განტოლება მოცემული x , y , z , x' , y' და z' -სათვის განსაზღვრავდა n_y , n_z , n_y' და n_z' სიდიდეთა ერთ სისტემას, ე. ი. x , y , z წერტილიდან გამოსულ სხივებს შორის მხოლოდ ერთი გაივლიდა x' , y' , z' წერტილში. მაშინადაც, იმისათვის, რომ x , y , z წერტილიდან გამოსული ყველა x' , y' , z' წერტილში გავიდეს, აუცილებელია (57,2) განტოლებათა დამოკიდებულობა ე. ი. — რომ ამ განტოლებათა ერთი წყვილი მეორე წყვილის შედეგი იყოს. ასეთი დამოკიდებულობის აუცილებელ პირობას, ცხადია, წარმოადგენს განტოლებათა ერთი წყვილის კოეფიციენტების პროპორციულობა მეორე წყვილის კოეფიციენტებთან, (მაშინ ერთი წყვილი მეორედან მიიღება უბრალოდ უკანასკნელის წევრობრივ მუდმივზე გამრავლებით). ამგვარად, უნდა იყოს

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}; \quad (57,3)$$

კერძოდ

$$(x-g)(x'+h) = -f^2. \quad (57,4)$$

მიღებული განტოლებანი განსაზღვრავენ გამოსახულების წერტილის კოორდინატთა დამოკიდებულებას საგნის წერტილის კოორდინატებზე ვიწრო კონების საშუალებით ასახვის დროს.

წერტილებს $x=g$ და $x=-h$, რომელნიც ოპტიკურ ღერძზე მდებარეობენ, სისტემის მთავარი ფოკუსები ეწოდება. განვიხილოთ ოპტიკური ღერძის პარალელური სხივთა კონა. ასეთი სხივების გამომშვები წერტილი, ცხა-

დია, ოპტიკურ ღერძზე უსასრულობაში მდებარებს, ე. ი, $x = \infty$. (57,3)-დან ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში $x' = -h$. ამგვარად, ოპტიკურ სისტემაში გაელის შემდეგ პარალელური სხივთა კონა მთავარ ფოკუსში გაიდაიკვეთება. პირიქით, მთავარი ფოკუსიდან გამოსული სხივთა კონა სისტემაში გაელის შემდეგ პარალელური ხდება.

(57,3) განტოლებაში x და x' კოორდინატები აითვლებიან ერთი და იგივე კოორდინატთა სათავიდან, რომელაც ოპტიკურ ღერძზე მდებარეობს. მაგრამ, უფრო მოხერხებული იქნება, თუ საგნის და გამოსახულების კოორდინატებს სხვადასხვა კოორდინატთა სათავიდან ავითვლით, სახელდობრ მთავარ ფოკუსებიდან სათანადოთ. კოორდინატთა ათვლის დადებით მიმართულებად ავირჩიოთ მიმართულება შესაბამის ფოკუსიდან სხივის გავრცელების მხრით. თუ საგნის და გამოსახულების ახალ კოორდინატებს დიდი ასოებით აღვნიშნავთ, გვექნება

$$X = x - g, X' = x' + h, Y = y, Y' = y', Z = z, Z' = z'.$$

ახალ აღნიშვნებში (57,3) და (57,4) ასახვის განტოლებანი ღებულობენ სახეს

$$XX' = -f^2, \quad (57,5)$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f}. \quad (57,6)$$

f სიდიდეს სისტემის მთავარ ფოკუსურ მანძილს უწოდებენ.

შეფარდებას Y'/Y ეწოდება გვერდითი გადიდება. რაც შეეხება გამოსახულებას, რამდენადაც კოორდინატები უბრალოდ ერთიმეორის პროპორციული არ არის, იგი დიფერენციული სახით უნდა დაიწეროს ისე, რომ სხეულის სიგრძის ელემენტი (ღერძის მიმართულებით) გამოსახულების სიგრძის ელემენტს უნდა შეეძაროს. (57,5)-ან „სიგრძივი გადიდებისათვის“ ვწერთ

$$\left| \frac{dY'}{dX} \right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y} \right)^2. \quad (57,7)$$

აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ უსასრულოდ მცირე საგნებისთვისაც შეუძლებელია გეომეტრიულად მზგავსი გამოსახულების მიღება. სიგრძივი გადიდება არასდროს არ არის განივი გადიდების ტოლი (გარდა იგივეური ასახვის ტრივიალური შემთხვევისა).

ოპტიკური ღერძის $X=f$ წერტილიდან გამოსული კონა ხელახლა გადაიკვეთება იმავე ღერძის $X'=-f$ წერტილში. ამ ორ წერტილს მთავარი წერტილები ეწოდება. (57,2) განტოლებიდან ($n_y X - f n'_y = Y$, $n_z Y - f n'_z = Z$) ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში ($X=f$, $Y=Z=0$) ადგილი აქვთ ტოლობებს $n_y = n'_y$, $n_z = n'_z$. ამგვარად, მთავარი წერტილიდან გამოსული ყოველი სხივი ოპტიკურ ღერძს მეორე მთავარ წერტილში გადაკვეთს პირვანდელის პარალელური მიმართულებით.

თუ საგნის და მისი გამოსახულების კოორდინატები აითვლებიან მთავარი წერტილებიდან (და არა მთავარი ფოკუსებიდან), მაშინ ამ ξ და ξ' კოორდინატებისათვის ჩვენ გვაქვს

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f.$$

თუ ამას (57,5)-ში ჩავსვამ, ჩვენ იდვილად მივიღებთ ასახვის განტოლებას სახით:

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \quad (57,8)$$

იდვილი საჩვენებელია, რომ მცირე სიგანის ოპტიკურ სისტემებს (მაგალითად სარკის, ვიწრო ლინზის) ორივე მთავარი წერტილი თითქმის თანხვედნილია. ამ შემთხვევაში განსაკუთრებით მოხერხებულია (57,8) განტოლება, ვინაიდან მაშინ ამ განტოლებაში ξ და ξ' პრაქტიკულად ერთიდაიგივე წერტილიდან აითვლება.

თუ ფოკუსური მანძილი დადებითია, მაშინ ფოკუსის წინ (სხივის სვლის მიმართულებით) მდებარე სხეულები ($X > 0$) აისახებიან პირდაპირ ($Y/Y' > 0$); ასეთ გამოსახულებებს შეკრებითი ეწოდება. სოლო თუ $f < 0$, მაშინ, როცა $X > 0$, გვექნება $Y/Y' < 0$, ე. ი. სხეული შებრუნებული სახით აისახება. ასეთ გამოსახულებებს განბნევალი ეწოდება.

არსებობს ასახვის ერთი ზღვრული შემთხვევა, რომელსაც (57,8) ფორმულები არ შეიცავენ. ეს ის შემთხვევაა, როცა ყველა სამი f , g , h (57.1) კოეფიციენტი უსასრულო ხდება (ე. ი. ოპტიკურ სისტემას უსასრულო ფოკუსური მანძილი აქვს და მისი მთავარი ფოკუსები უსასრულობაშია). თუ (57,4) განტოლებაში ფრჩხილებს გავხსნით, ყველა წევრს g ზე გავყოფთ და გადავალთ ზღვარზე, როცა f , g და h უსასრულო ხდება, მაშინ ვიპოვით

$$x' = \frac{h}{g} x + \frac{f^2 - gh}{g}.$$

რამდენადაც საინტერესო მხოლოდ ის შემთხვევა არის, როცა საგანი და მისი გამოსახულება ოპტიკური სისტემიდან სასრულო მანძილზეა, ამიტომ f , g და h ისე უნდა მიისწრაფოდნენ უსასრულობისაკენ, რომ შეუარღებანი $\frac{h}{g}$ და $\frac{f^2 - gh}{g}$ სასრულო რჩებოდეს. აღენიშნოთ ისინი, შესაბამისად, α და β . გვაქვს

$$x' = \alpha x + \beta.$$

ორი სხვა კოორდინატისათვის ზოგადი (57,7) განტოლებიდან ახლა ჩვენ გვაქვს $\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \sqrt{\alpha}$. დაბოლოს, თუ x და x' კოორდინატებს ისევ სხვადასხვა კოორდინატთა საწყისიდან ავითვლით, სახელდობრ, ოპტიკურ ღერძზე აღებულ ნებისმიერი წერტილიდან და ამ წერტილის გამოსახულებიდან, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ ასახვის განტოლებებს მარტივი სახით

$$X' = \alpha X, \quad Y = \pm \sqrt{\alpha} Y', \quad Z' = \pm \sqrt{\alpha} Z. \quad (57,9)$$

ამკვარად, სივრცითი და განივი გადიდება მუდმივია (მაგრამ გამოსახულება არ არის მაინც საგნის გეომეტრიულად მზგაესი, რადგანაც ეს ორი გადიდება ერთიმეორის ტოლი არ არის). ასახვის განხილულ შემთხვევას ტელესკოპური ეწოდება.

ლინზებისათვის ყველა ჩვენს მიერ გამოყვანილი (57, 5—9) ფორმულები აძლენაღვე გამოყენებადია სარკეებისა და ისეთი ოპტიკური სისტემების მიმართაც, რომლებსაც აქსიალური სიმეტრია არა აქვთ, თუ ასახვა ისეთი ვიწრო კონებით სრულდება, რომლებიც ოპტიკური ღერძის მახლობლად გადიან. ამასთანავე, გამოსახულების და საგნის x კოორდინატების ათვლა უნდა წარმოებდეს წესაბამი წერტილებიდან ოპტიკური ღერძის გასწვრივ (მთავარი ფოკუსებიდან ან მთავარი წერტილებიდან) სხივის გავრცელების მიმართულებით. ამასთანავე მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ ისეთ ოპტიკურ სისტემებს, რომლებსაც აქსიალური სიმეტრია არა აქვს, ოპტიკური ღერძების მიმართულება სისტემის წინ და უკან ერთსადაიმთავე სწორს არ თანხვდება.

ა მ ო ც ა ნ ა

განვსახდროთ ორი აქსიალურ სიმეტრიული ოპტიკური სისტემის დახმარებით ასახვის ფოკუსური მანძილი, როცა სიატეების ოპტიკური ღერძები თანხვდენილია.

ამოხსნა, ვთქვათ l_1 და l_2 ორივე სიატეის ფოკუსური მანძილებია. ორივე სისტემისათვის ცალცალკე გვაქვს

$$X_1 X'_1 = -f_1^2, \quad X_2 X'_2 = -f_2^2.$$

რამდენადაც პირველ სიატეაში მზლუბული გამოსახულება მეორისათვის საგანს წარმოადგენს, ამიტომ, თუ l -ით აღვნიშნავთ მანძილს პირველი სისტემის უკანა მთავარ ფოკუსსა და მეორე სისტემის წინა ფოკუსს შორის, გვექნება $X_2 = X'_1 - l$. თუ X'_2 გამოვსახავთ X_1 -ით, ვიპოვიით:

$$X'_2 = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + l X_1},$$

ან

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l} \right) \left(X'_2 - \frac{f_2^2}{l} \right) = - \left(\frac{f_1 f_2}{l} \right)^2,$$

საიდანაც ჩანს, რომ შედგენილი სისტემის მთავარი ფოკუსები მდებარეობენ წერტილებში

$$X_1 = -\frac{f_1^2}{l}, \quad X'_2 = \frac{f_2^2}{l},$$

ხოლო ფოკუსური მანძილი ტოლია

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(ამ გამოსახულებაში ნიშნის ასარჩევად საჭიროა დავწეროთ სათანადო განტოლება განივად გადიდებისათვის).

იმ შემთხვევაში, როცა $l = 0$, ფოკუსური მანძილი $f = \infty$, ე. ი. შედგენილი სისტემა იძლევა ტელესკოპურ ასახვას. ამ შემთხვევაში გვაქვს $X'_2 = X_1 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^2$, ე. ი. (57,9) ხო-

გად ფორმულაში პარამეტრი a ტოლია: $a = \frac{f_2^2}{f_1^2}$.

წინა პარაგრაფში განხილული საგანთა ვიწრო კონების საშუალებით ასახვა მიხლოვებითაა. იგი მით უფრო ზუსტია (ე. ი. მკვეთრი), რაც უფრო ვიწროა ეს კონები. ახლა გადავიდეთ საკითხზე იმის შესახებ, თუ რამდენად შეიძლება საგანთა ზუსტი ასახვის მიღწევა, ე. ი. ნებისმიერი საგანის კონებით ასახვის მიღწევა.

საგანთა ვიწრო კონებით ასახვის საწინააღმდეგოდ, რომელიც შეიძლება ყოველგვარი (აქიალური სიმეტრიის მქონე) ოპტიკური სისტემით განხორციელდეს, განიერი კონებით ასახვა შესაძლებელია მხოლოდ განსაზღვრული სახით აგებულ ოპტიკურ სისტემების საშუალებით. როგორც § 57-ში იყო აღნიშნული, ამ შეზღუდვითაც კი არ არის შესაძლებელი სივრცის ყველა წერტილის ასახვა.

ჩვენ აქ განვიხილავთ განიერი კონებით ასახვის ორ ძირითად შემთხვევას, სახელდობრ, თვით ოპტიკური ღერძისა და მის პერპენდიკულარული სიბრტყის ასახვას და მოენახეთ იმ პირობებს, რომლებსაც ოპტიკურ სისტემაში სხივთა სელა უნდა აკმაყოფილებდეს იმისათვის, რომ იგი იძლეოდეს საშუალებას ასეთი ასახვისა.

სიმეტრიულობის მოსაზრებიდან ჩანს, რომ ოპტიკური ღერძის ასახვისას მისი გამოსახულება თვით მის გასწვრივ განლაგდება. ამის შესაბამისად (56,5) ზოგად განტოლებებში უნდა დაუშვათ $y = y' = z = z' = 0$, ასე რომ

$$x = \frac{n_z}{n_y} \frac{\partial \chi}{\partial n_y}, \quad x' = - \frac{n'_z}{n'_y} \frac{\partial \chi}{\partial n'_y}.$$

(56,6) განტოლებათა მეორე წყვილი შეიძლება არ განვიხილოთ. აქსიალური სიმეტრიულობის გამო, თუ ამ განტოლებათა პირველი წყვილი შესრულებულია, მეორე წყვილი ავტომატურად შესრულდება. ამის შესაბამისად საკმარისია მხოლოდ XY სიბრტყეში მიმავალი სხივები განვიხილოთ, ე. ი. დაუშვათ, რომ $n_z = n'_z = 0$. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ მაშინ $n_x = \sqrt{1 - n_y^2}$, $n'_x = \sqrt{1 - n'_y^2}$, მიღებული განტოლებანი შეიძლება გადავწეროთ სახით

$$x = - \frac{\partial \chi}{\partial n_x}, \quad x' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_x}.$$

აბ

$$d\chi = -x dn_x + n' dn'_x \quad (58,1)$$

ოპტიკური ღერძის ნებისმიერი წერტილიდან გამოსული სხივები ოპტიკურ სისტემაში გავლის შემდეგ ხელახლა ამ ღერძის ერთიდაიგივე წერტილში უნდა გადაიკვეთონ. ეს იმას ნიშნავს, რომ x წერტილიდან გამოსული და სისტემაში გასული სხივის ოპტიკურ ღერძთან გადაკვეთის x' კოორდინატი მხოლოდ x -ის ფუნქცია უნდა იყოს. ამასთანავე შევნიშნით, რომ x' განსაზღვრება x -ის საშუალებით უწინდელი (57,5) ფორმულით $XX' = -f^2$. მართლაც, განიერი კონის სხივებს შორის არიან სხივები, რომლებიც ოპტიკური ღერძის მახლობლად გამავალ ვიწრო კონას ქცნიან. აღნიშნულ დორწულას ადგილი აქვს ამ

სხივათვის და რადგანაც X და X' საზოგადოდ ყველა სხივისათვის ერთიად-იგივე უნდა იყოს, ამიტომ მას ადგილი აქვს მთელი განიერი კონისათვისაც.

იმისათვის, რომ n_x და n'_x შორის დამოკიდებულება მოენახოთ განსახილავი ასახვის დროს, მოვუქმეთ შემდეგნაირად. (58,1)-ის დახმარებით დიფერენციალისათვის ვპოულობთ

$$d(\chi + xn_x - x'n'_x) = n_x dx - n'_x dx' = \left(n_x - n'_x \frac{dx'}{dx} \right) dx.$$

მარცხნივ აქ სრული დიფერენციალი დგას, ამიტომ ასეთივე იქნება მარჯვნივ მდგომი გამოსახულებაც. ეს ნიშნავს, რომ dx -ის წინ კოეფიციენტი მხოლოდ x -ის ფუნქცია უნდა იყოს:

$$n_x - n'_x \frac{dx'}{dx} = f(x)$$

$f(x)$ -ის განსაზღვრისათვის შეენიშნოთ, რომ ოპტიკური ღერძის გასწვრივ მიმავალი სხივი ($n_x = 1$) სისტემის აქსიალური სიმეტრიის გამო არ იცვლის მიმართულებას მასში გავლის შედეგად, ე. ი. $n'_x = 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$f(x) = 1 - \frac{dx'}{dx}$ და, მაშასადამე,

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \frac{dx'}{dx}. \quad (58,2)$$

Θ და Θ' -ით აღვნიშნოთ კუთხეები, რომლებსაც სხივი ოპტიკურ ღერძთან და x' წერტილებში შეადგენს, მაშინ

$$1 - n_x = 1 - \cos \Theta = 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}, \quad 1 - n'_x = 2 \sin^2 \frac{\Theta'}{2}.$$

შემდეგ, რაკი x' მხოლოდ x -ის ფუნქციაა, ამიტომ $\frac{dx'}{dx}$ -იც მხოლოდ x -ზეა და-მოკიდებული, ე. ი. მოცემული x -თვის იგი მუდმივია. ამგვარად, გაშოსასახავი ღერძის მოცემული წერტილიდან გამოსულ ყველა სხივისათვის ერთიადიგივე უნდა იყოს შეფარდება

$$\frac{\sin \frac{\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta'}{2}} = \text{const.} \quad (58,3)$$

(58,2) ან (58,3) ტოლობა წარმოადგენს საძიებელ პირობას, რომელიც უნდა-აკმაყოფილოს სხივების სვლამ ოპტიკურ სისტემაში ოპტიკური ღერძის განიერო კოანებით ასახვის დროს.

ახლა გამოვიყვანოთ ანალოგიური პირობები ოპტიკური ღერძისადმი პერპენდიკულარული სიბრტყის განიერი კონებით ასახვისათვის. ამასთანავე, ჩვენ დაექმყოფილდებით იმ შემთხვევის განხილვით, როცა გამოსახულებაც აგრეთვე სიბრტყეს წარმოადგენს. კოორდინატთა ასათელელად სათავეები საგნისათვის (საბრყისათვის) და მისი გამოსახულებისათვის შეაბაპიანდ ძათი ოპტიკურ

ლერძთან გადაკვეთის წერტილებში ავარჩიოთ. მაშინ $x = x' = 0$ და (56,6) ზოგადი განტოლებანი ლებულობენ სახეს:

$$y = -\frac{\partial \chi}{\partial n_y}, \quad y' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_y}.$$

(იმავე მიზეზისა გამო, რაც ზემოდ იყო აღნიშნული, ჩვენ აქ ამ განტოლებათა მხოლოდ ერთ წყვილს ვწერა).

თუ ზუსტად ისევე მოვიქცევით, როგორც ზემოდ, ჩვენ ვიპოვით, რომ

$$n_y - n'_y \frac{dy'}{dy} = f(y). \quad (58,4)$$

თუ ისევე Θ და Θ' კუთხეებს შემოვიტანთ (ასე რომ $n_y = \sin \Theta$, $n'_y = \sin \Theta'$), გამოსასახავი სიბრტყის მოცემული წერტილიდან გამოსული სხივებისათვის (58,4) პირობა შეგვიძლია დაწვეროთ სახით

$$\sin \Theta' = \text{const.} \sin \Theta + \text{const}' . \quad (59,5)$$

კერძოდ, სიბრტყის ოპტიკურ ლერძთან გადაკვეთის წერტილიდან გამოსულ სხივებისათვის ($y = 0$) (58,5) ფორმულაში $\text{const}' = 0$, ე. ი.

$$\frac{\sin \Theta'}{\sin \Theta} = \text{const.} \quad (59,6)$$

(ვინაიდან, სისტემის სიმეტრიულობისა გამო, ასეთი სხივებისათვის $\Theta' = 0$, თუ $\Theta = 0$).

მიღებული თანაფარდობანი სწორედ განსაზღვრავენ პირობებს, რომლებიც უნდა შესრულდნენ სიბრტყის განიერი კონეებით-ასახვის დროს. ჩვენ ვხედავთ, კერძოდ, რომ ეს პირობები სიბრტყისა და მისი პერპენდიკულარული სწორის ასახვისათვის ერთიმეორეს არ თანხვდებიან. აქედან ეშუალოდ გამომდინარებს სამგანზომილებიან სხეულთა განიერი კონეებით ასახვის შეუძლებლობა, მაშინაც კი, როცა ისინი უსასრულოდ მცირე მოცულობისა არიან.

§ 59. ინტერფერენცია

ვთქვათ, სინათლის წერტილოვანი წყაროდან გამოსული ერთსადაიმევე სიბრტყეში დაპოლარებული ორი სხივი რაიმე ოპტიკური სისტემის (ვთქვათ, სარკეთა სისტემის) დახმარებით სივრცის ერთსადაიმევე ადგილზე იყრის თავს. თუ f_1 და f_2 პირველი და მეორე სხივის ველის რომელიღაც კომპონენტებია, მაშინ მათი შეხვედრის ადგილზე ველი ტოლია ჯამისა $f = f_1 + f_2$. ამ ადგილზე სინათლის ინტენსივობა (პროპორციულობის მუდმივ კოეფიციენტამდე სიზუსტით) უდრის

$$J = |f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 + f_2^* f_1 = |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2 \text{Re}(f_1 f_2^*).$$

მაგრამ $|f_1|^2$ და $|f_2|^2$ შესაბამისად პირველი და მეორე სხივის J_1 და J_2 ინტენსივობებია, ასე რომ

$$J = J_1 + J_2 + 2 \text{Re}(f_1 f_2^*). \quad (59,1)$$

ამგვარად, ორი სხივის შეკრებისას მიღებული საერთო ინტენსივობა არ უდრის ცალკე სხივების ინტენსივობათა ჯამს. ამ მოვლენას ინტერფერენცია ეწოდება.

თუ შემოვიტანთ სხივის f_0 ამპლიტუდას და ψ ფაზას, მაშინ f_1 და f_2 გელები შეიძლება დაიწეროს სახით:

$$f_1 = f_0 e^{i\psi_1} = \sqrt{J_1} e^{i\psi_1}, \quad f_2 = \sqrt{J_2} e^{i\psi_2}.$$

მაშინ J საერთო ინტენსივობა ლებულობს სახეს:

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \Delta\psi, \quad (59,2)$$

სადაც $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ ფაზათა სხვაობაა, ე. ი. ორივე სხივის ოპტიკური სვლათა სხვაობა. სხივების სვლათა სხვაობა შეიძლება ვცვალოთ ოპტიკური სისტემის საშუალებით, რომელსაც ორივე სხივი ერთ ადგილზე მიჰყავს. სვლათა სხვაობის ცვლილებასთან ერთად საერთო ინტენსივობა იცვლება საზღვრებში $(\sqrt{J_1} + \sqrt{J_2})^2$ -დან $(\sqrt{J_1} - \sqrt{J_2})^2$ მდე.

ორი არამონოქრომატული სხივის ინტერფერენციის დროს ხდება მათი ერთსადიმავე სიხშირის და პოლარიზაციის მონოქრომატული კომპონენტების ინტერფერენცია. საერთო ინტერფერენციული სურათი წარმოადგენს ყველა შესაბამე მონოქრომატულ კომპონენტთა წყვილების ინტერფერენციული სურათების ჯამს.

თუ ორი სხივი სხვადასხვა სინათლის წყაროდან გამოდის, მაშინ ისინი არაკოპერენტულია, ე. ი. მათი ველები ერთიმეორეზე დამოუკიდებელია, და ამიტომ მათ ნამრავლთა საშუალო მნიშვნელობა $\overline{f_1 f_2^*} = \overline{f_1} \overline{f_2^*} = 0$, რადგანაც ყოველი $\overline{f_1}$ და $\overline{f_2^*}$ თავანი ნულის ტოლია. ამგვარად, სხვადასხვა სინათლის წყაროთა სხივები ინტერფერენციას არ იძლევიან.

განვიხილოთ ახლა ასარელო ზოპის მქონე წყაროს მიერ გამოსხივებულ სინათლის ინტერფერენცია. ასეთი სინათლიდან მიღებული ინტერფერენციული სურათი წარმოადგენს იმ ინტერფერენციული სურათების დაფეხას, რომლებსაც სინათლის წყაროს ზედაპირის სხვადასხვა წერტილიდან გამოსული სხივები იძლევიან. ვთქვათ K_1 და K_2 ისეთი ორი სხივის ტალღური ვექტორებია, რომლებიც წყაროს ერთი წერტილიდან გამოდიან და შეზღვეში ინტერფერენციას გვაძლევენ. თუ ინტერფერენცია სინათლის წყაროდან საქმოდ შორ მანძილზე დაიხილება, მაშინ წყაროს რომელიმე სხვა წერტილიდან გამომავალი ორი სხივის ტალღური ვექტორები, რომლებც ინტერფერენციას იქვე გვაძლევენ, სადა χ პირველი წველი, შეიძლება იმავე K_1 და K_2 ის ტოლად ჩავთვალოთ. ორივე K_1 სხივის ოპტიკური სვლათა სხვაობა, ცხადია, ტოლია $K_1 a$, სადაც a —სხივთა ორივე წველის გამოსვლის წერტილებს შორის ვექტორია. K_2 სხივებისათვის ანალოგიური სხვაობა უდრის $K_2 a$. სხივთა მეორე წველის ინტერფერენციის აღმწერი ინტერფერენციული წყვილი პირველი წველისათვის ასეთივე წყურისაგან განსხვავდება მამრავლით $\exp[i(K_1 - K_2)a]$.

იმისათვის, რომ სრული ინტერფერენციული სურათი მივიღოთ, საქმითა შევკრიბოთ ინტერფერენციული სურათები, რომლებსაც იძლევიან სინათლის წყაროს ყველა წერტილები, ე. ი. უნდა გავასაშუალოთ $\exp[i(K_1 - K_2)a]$ სიდიდე a ვექტორის ყველა მნიშვნელობათა მიხედვით. ამ გასაშუალების დროს a

გაირბენს მნიშვნელობებს წყაროს ზომის რიგის სიდიდის ინტერვალში, რომლებსაც d -თი აღენიშნავენ. თუ $|k_1 - k_2| \ll 1/d$, მაშინ ამ ინტერვალში $\exp [i(k_1 - k_2) a]$ სწრაფად ცვალებად პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს, და მისი საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლი ხდება, ე. ი. ინტერფერენცია არ მოხდება. მეორე მხრით, $(k_1 - k_2) \sim \xi \Theta \sim \Theta/\lambda$, სადაც Θ საინტერფერენციო სხივებს შორის კუთხეს წარმოადგენს მათი წყაროდან გამოსხივების წერტილში. ამგვარად, ინტერფერენცია შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, თუ დაკულია პირობა:

$$\Theta \lesssim \frac{\lambda}{d}. \quad (59,3)$$

ეს პირობა ზღუდავს ერთსადამიამვე წყაროდან გამოსული სხივების ინტერფერენციის შესაძლებლობას.

§ 60. გეომეტრიული ოპტიკის საზღვარები 2) აუქი - 1

ბრტყელი მონოქრომატული ტალღის განმარტებიდან უშუალოდ ჩანს, რომ ასეთ ტალღაში ამპლიტუდა ყოველთვის და ყველგან ერთიდა იგივეა. ასეთი ტალღა უსასრულოა სივრცეში ყველა მიმართულებით და იგი არსებობს მთელი დროს მანძილზე $+$ ∞ -დან $- \infty$ -მდე. ყოველი ტალღა, რომელსაც ყველგან და ყოველთვის მუდმივი ამპლიტუდა არა აქვს, შეიძლება იყოს მხოლოდ მეტად თუ ნაკლებად მონოქრომატული. ჩვენ ახლა შეუდგებით ტალღების „მონოქრომატულობის ხარისხის“ საკითხის გამოკვლევას.

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ტალღა, რომლის ამპლიტუდა დროს ფუნქციაა. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, სივრცის ყოველ წერტილში, რომელზედაც ტალღა გაივლის, მისი ამპლიტუდა იცვლება დროს განმავლობაში.

ვთქვათ ω_0 ტალღის რალაც საშუალო სიხშირეა. მაშინ ტალღის ველს, მაგალითად ელექტრულს, მოცემულ წერტილში აქვს სახე: $E_0(t)e^{i\omega_0 t}$. ეს ველი, რომელიც, რა თქმა უნდა, თვითონ მონოქრომატული არ არის, შეიძლება მონოქრომატული ტალღების მიხედვით დავშალოთ, ე. ი. ფურიეს ინტეგრალად. ამ დაშლის ω სიხშირის შესაბამი კომპონენტის ამპლიტუდა პროპორციულია

შემდეგი სახის ინტეგრალისა $\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t)e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$. მამრაველი $e^{i(\omega - \omega_0)t}$ პერიოდულ

ფუნქციას წარმოადგენს, რომლის საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლია. E_0 რომ საზოგადოთ მუდმივი ყოფილიყო, მაშინ ინტეგრალი ზუსტად ნულის ტოლი იქნებოდა ყველა სიხშირისათვის $\omega \neq \omega_0$. თუ $E_0(t)$ ცვალებადია, მაგრამ

$\frac{1}{\omega - \omega_0}$ რიგის დროის შუალედში თითქმის უცვლელი რჩება, მაშინ ინტეგრალი

თითქმის ნულის ტოლია და მით უფრო ზუსტად, რაც უფრო ნელია E_0 -ის ცვალებადობა. იმისათვის, რომ ინტეგრალი შესამჩნევად განსხვავდებოდეს ნუ-

ლისაგან, აუცილებელია, რომ E_0 შესამჩნევად იცვლებოდეს $\frac{1}{\omega - \omega_0}$ პერიოდის

რიგის დროის შუალედში.

Δt -თი აღვნიშნოთ იმ დროის შეადლის რიგი, რომლის განმავლობაში სივრცის მოცემულ წერტილში ტალღის ამპლიტუდა შესამჩნევად იცვლება. აღნიშნული მოსაზრებებიდან ახლა გამომდინარეობს, რომ ერთი ტალღის სპექტრულ დაშლაში შემავალი ω_0 -საგან ყველაზე უფრო განსხვავებული სიხშირეები განისაზღვრებიან პირობით $\frac{1}{\omega - \omega_0} \sim \Delta t$. თუ $\Delta\omega$ -თი აღვნიშნავთ ტალღის სპექტრულ დაშლაში შემავალ (საშუალო ω_0 სიხშირის გარშემო) სიხშირეთა ინტერვალს, მაშინ ადგილი ექნება თანაფარდობას:

$$\Delta\omega \Delta t \sim 1. \quad (60,1)$$

რაც უფრო მცირეა $\Delta\omega$, მით უფრო სიხშირეთა ნაკლები ინტერვალის შედის მოცემული ტალღის სპექტრულ დაშლაში, ე. ი. მით უფრო მონოქრომატულია ეს ტალღა. ჩვენ ვხედავთ, მაშასადამე, რომ ტალღა მართლაც მით უფრო მონოქრომატულია, რაც მეტია Δt , ე. ი. რაც უფრო ნელა იცვლება სივრცის ყოველ წერტილში მისი ამპლიტუდა.

(60,1)-ის ანალოგიური თანაფარდობანი ადვილად გამოიყვანება აგრეთვე ტალღური ვექტორისთვისაც. ვთქვათ Δx , Δy , Δz , Δx , Δy და Δz ლერბების გასწვრივ იმ მანძილების სიდიდეთა რიგია, რომლებზედაც ტალღის ამპლიტუდა შესამჩნევად იცვლება. დროს მოცემულ მომენტში ტალღის ველს როგორც x კოორდინატის ფუნქციას (მოცემული y და z -თვის) აქვს სახე: $E_0(x)e^{ik_0x}$, სადაც k_0 ტალღური ვექტორის რომელიღაც საშუალო კომპონენტი. (60,1) გამოყვანის საფუძველზე ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ Δk_x მნიშვნელობათა ინტერვალის, რომელსაც შეიცავს ტალღის ფურიეს ინტეგრალად დაშლა (იგავე k_x და k_x -ისათვის). ამასთან ჩვენ ვპოულობთ:

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1, \Delta k_y \Delta y \sim 1, \Delta k_z \Delta z \sim 1. \quad (60,2)$$

კერძოდ, განვიხილოთ ტალღა, რომელიც დროს სასრულო ინტერვალშია გამოსხივებული. Δt თი აღვნიშნოთ ამ ინტერვალის სიდიდის რიგი. სივრცის მოცემულ წერტილში ამპლიტუდა ყოველ შემთხვევაში შესამჩნევად იცვლება Δt დროში, რომლის განმავლობაშიაც ტალღა მთლიანად მოასწრებს გავლას ამ წერტილზე. (60,1) თანაფარდობათა საფუძველზე ჩვენ ახლა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ასეთი ტალღის „მონოქრომატულობის ხარისხი“ $\Delta\omega$ ყოველ შემთხვევაში არ შეიძლება ნაკლები იყოს $1/\Delta t$ -ზე (მაგრამ, რასაკვირველია, მეტი შეიძლება იყოს):

$$\Delta\omega \geq \frac{1}{\Delta t}. \quad (60,3)$$

ანალოგიურად, თუ Δx , Δy და Δz ტალღის ზომის სიდიდის რიგია სივრცეში, მაშინ ტალღის დაშლაში შემავალი ტალღური ვექტორის კომპონენტთა ინტერვალისათვის ვპოულობთ

$$\Delta k_x \geq \frac{1}{\Delta x}, \Delta k_y \geq \frac{1}{\Delta y}, \Delta k_z \geq \frac{1}{\Delta z}. \quad (60,4)$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩვენ სასრულო განის სინათლის კონა გვაქვს, მაშინ ასეთ კონაში სინათლის გავრცელების მიმართულება არ შეიძლება მკაცრად მუდმივი იყოს. თუ X ღერძს კონაში სინათლის (საშუალო) მიმართულებით გავატარებთ, მივიღებთ

$$\Theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \quad (60,5)$$

სადაც Θ_y საშუალო მიმართულებიდან კონის გადახრის სიდიდის რიგია XY სიბრტყეში (შეად. ავრეთვე § 63).

შეორე მხრით (70,5) ფორმულა პასუხს გვაძლევს კითხვაზე ოპტიკურ გამოსახულებათა უაღრესი სიმკვეთრის შესახებ. სინათლის კონა, რომელშიაც გეომეტრიული ოპტიკის თანახმად ყველა სხივი ერთ წერტილში უნდა გადაკვეთილიყო, სინამდვილეში გამოსახულებას გვაძლევს არა წერტილის სახით, არამედ რაღაც ლაქას სახით. (60,5)-ის თანახმად ამ ლაქის Δ განისათვის გვაქვს

$$\Delta \sim \frac{1}{k\Theta} \sim \frac{\lambda}{\Theta}, \quad (60,6)$$

სადაც Θ კონის გაშლის კუთხეა. ეს ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ არა მარტო გამოსახულების, არამედ საგნის მიმართაც. სახელდობრ, შეიძლება ვთქვათ, რომ მნათი წერტილიდან გამოსული სინათლის სხივთა კონის დამზერისას ეს წერტილი შეუძლებელია განვასხვავოთ λ/Θ ზომის სხეულისაგან. შესაბამისად ეს (60,6) ფორმულა განსაზღვრავს მიკროსკოპის ზღვრულ გარჩევის ძალას. Δ -ს მინიმალური მნიშვნელობა, რომელსაც იგი აღწევს, როცა $\Theta \sim 1$, არის λ , რაც სავსებით ეთანხმება იმას, რომ გეომეტრიული ოპტიკის საზღვარო სინათლის ტალღის სიგრძით განისაზღვრება.

ა მ ო ც ა ნ ა

მოვინახოთ სინათლის პარალელური კონიდან მიღებული კონის უმცირესი ზომა დიფრაქციიდან l მანძილზე.

ამ ობსენსა: თუ დიფრაქციის ხერხელის ზომას d -თი აღვნიშნავთ, მაშინ (60,5)-დან დიფრაქციის კუთხისათვის გვაქვს λ/d , საიდანაც კონის განი $d + \frac{\lambda}{d} l$ რიგისაა. ამ სიდიდის უმცირესი მნიშვნელობა არის $\sqrt{\lambda l}$.

§ 61. დიფრაქცია

გეომეტრიული ოპტიკის კანონები სავსებით ზუსტია მხოლოდ იმ იდეალურ შემთხვევაში, როცა ტალღის სიგრძე როგორც უსასრულოდ მცირე სიდიდე შეიძლება განვიხილოთ. რაც უფრო ცუდადაა ეს პირობა შესრულებული, მით უფრო მეტად იჩენს თავს გეომეტრიული ოპტიკიდან გადახრა. იმ მოვლენებს, რომლებიც ასეთი გადახრის შედეგად დაიმზირება, დიფრაქციის მოვლენები ეწოდება.

დიფრაქციის მოვლენათა დამზერა შეიძლება, თუ სინათლის გავრცელების გზაზე გვაქვს რაიმე წინააღმდეგობა—ნებისმიერი ფორმის არაგამკვირვალე

სხეულები (მათ ეკრანი უწოდათ) ან, მაგალითად, თუ სინათლე გადის არა-გამჭვირვალე ეკრანის ხერხელში. გეომეტრიული ოპტიკის კანონები ზუსტად რომ სრულდებოდეს, ეკრანს უკან გვექნებოდა „ჩრდილის“ არე მკვეთრად შემოსაზღვრული იმ არედან, რომელშიაც სინათლე ხედება. დიფრაქციის გამოკი ჩრდილსა და სინათლეს შორის მკვეთრი საზღვრის ნაცვლად მიიღება სინათლის ინტენსივობის განაწილების საკმაოდ რთული სურათი. დიფრაქციის ეს მოვლენა მით უფრო ძლიერადაა გამოსახული, რაც უფრო მცირეა ეკრანებისა და მათში ხერხელების ზომა ან რაც მეტია ტალღის სიგრძე.

დიფრაქციის თეორიის ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ეკრანებისა და ხერხელების მოცემული განლაგების და ფორმის (სინათლის წყაროთა განლაგების) შემთხვევაში, განესაზღვროთ სინათლის განაწილება, ე. ი. ელექტრომაგნიტური ველი მთელ სივრცეში. ამ ამოცანის ზუსტი გადაწყვეტა შესაძლებელია მხოლოდ ტალღური განტოლების ამოხსნით შესაბამის სასაზღვრო პირობებით ეკრანთა ზედაპირზე, რომლებიც დამოკიდებულია აგრეთვე თვით ამ ეკრანთა თვისებებზედაც (მათი მასალის ოპტიკურ თვისებებზე). ასეთი ამოხსნა ჩვეულებრივ დიდ მათემატიკურ სიძნელეს წარმოადგენს.

მაგრამ, უმრავლეს შემთხვევაში საკმარისი აღმოჩნდა სინათლისა და ჩრდილის საზღვრის მახლობლად სინათლის გავრცელების ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი. ეს მეთოდი გამოსადეგია გეომეტრიული ოპტიკიდან მცირე გადახრების შემთხვევაში, ე. ი. როცა ყველა სხეულის ზომა მინც დიდია ტალღის სიგრძესთან შედარებით.

განვიხილოთ რაიმე ეკრანი ხერხელით, რომელშიაც მოცემული წყაროებიდან გამოსული სინათლე გადის. ნახ. 7. ამ ეკრანს გამოსახავს კვეთაში (სქელი



ნახ. 7.

ხაზი). სინათლე მარცხნიდან მარჯვნივ მიდის. α -თი აღენიშნოთ E და H-ის ნებისმიერი კომპონენტთა ვანი. ამასთანავე α -ს ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ ველს როგორც მხოლოდ კოორდინატების ფუნქციის, ე. ი. $e^{-i\omega t}$ მამრავლის გარეშე, რომელიც დროზე დამოკიდებულებას განსაზღვრავს. ჩვენი ამოცანაა განესაზღვროთ სინათლის ინტენსივობის განაწილება ე. ი. α ველის განაწილება ნებისმიერ P წერტილში ეკრანს უკან. ამ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისას იმ შემთხვევებში, როცა გეომეტრიული ოპტიკიდან გადახრა მცირეა, შეიძლება დაუშვათ,

რომ ხერხელის წერტილებში ველი ისეთია, როგორიც იქნებოდა იგი საზოგადოდ ყოველგვარი ეკრანის გარეშე. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, აქ ველს ექნება ის მნიშვნელობანი, რომლებიც უშუალოდ გეომეტრიული ოპტიკიდან გამომდინარეებს. ყველა უშუალოდ ეკრანს უკან მდებარე წერტილში-კი ველი ნულის ტოლად შეიძლება ჩავთვალოთ. ამასთანავე ცხადია, რომ თვით ეკრანის თვისებებს (ეკრანის მასალას) საზოგადოდ მნიშვნელობა არა აქვს. ცხადია აგრეთვე, რომ განსახილავ შემთხვევებში დიფრაქციისათვის არსებითია მხოლოდ

¹ ქვეშ, დიფრაქციის განხილვისას ჩვენ განსაზღვრულობისათვის ყოველთვის სინათლეზე ვილაპარაკებთ; ყოველივე ქვეშ-მოყვანილი, რასაკვირველია, შეეხება ნებისმიერ ელექტრომაგნიტურ ტალღებს.

ხერელის კიდის ფორმა და არ არის არსებითი არაგამქვირვალე ეკრანის ფორმა.

გავატაროთ რომელიმე ზედაპირი, რომელიც ეკრანის ხერელს ხურავს და შემოსაზღვრულია ხერელის კიდეებით (ნახ. 7-ზე ამ ზედაპირის კვეთა პუნქტი-რითაა აღნიშნული). ეს ზედაპირი დაეყოთ მცირე უბნებად df ფართობით, რომელთა ზომა დიდია სინათლის ტალღის სიგრძესთან შედარებით. მაშინ ყოველი ამ უბანთაგანი, რომლებზეც აღწევს სინათლის ტალღა, ჩვენ შეიძლება განვიხილოთ ისე, თითქოს იგი თვითონ ხდება სინათლის ტალღის წყარო, ასე რომ სინათლის ტალღა მისგან ყოველი მიმართულებით ვრცელდება. P წერტილში ველს ჩვენ განვიხილათ როგორც ხერელის დამზუარავი ზედაპირის ყველა df უბნებიდან გამოსული ველების შეკრების შედეგს.

P წერტილებში df უბნის მიერ შექმნილი ველი, ცხადია, პროპორციულია u ველის მნიშვნელობისა თვით df უბანზე (გაეხსენოთ, რომ df -ში, ჩვენი დაშვებით, ველი ისეთივეა, როგორც იქნებოდა უეკრანოთ). გარდა ამისა იგი პროპორციულია სინათლის წყაროდან df -ში მოსული სხივის Π მიმართულების პერპენდიკულარული სიბრტყეზე df ფართობის df_n პროექციისა. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ როგორც არ უნდა იყოს df ელემენტის ფორმა, მასში ერთნაირი სხივები გავლენ, თუ მისი df_n პროექცია უცვლელი იქნება, და ამიტომ მისი მოქმედება ველზე P წერტილში აგრეთვე ერთნაირი იქნება.

ამგვარად df უბნის მიერ P წერტილში შექმნილი ველი პროპორციული იქნება $u df_n$. გარდა ამისა, მხედველობაში უნდა მივიღოთ აგრეთვე ტალღის ფაზის ცვლილება df -დან P წერტილისაკენ გავრცელების დროს. ეს ცვლილება, ცხადია, df -დან P -მდე R მანძილით განისაზღვრება და kR -ის ტოლია (k სინათლის ტალღური ვექტორის აბსოლუტური სიდიდეა). ამიტომ $u df_n$ კიდევ უნდა გავამრავლოთ e^{ikR} -ზე, და ჩვენ ვპოულობთ, რომ საძებნი ველი $u df_n e^{ikR}$ -ის პროპორციულია, ე. ი. ტოლია $a(R) u df_n e^{ikR}$ -ის, სადაც $a(R) = df$ და P წერტილს შორის R მანძილის ჯერჯერობით უცნობი ფუნქცია. მაშასადამე, ველი P წერტილში, რომელიც ყველა df -ის მიერ შექმნილი ველების ჯამს წარმოადგენს, უდრის

$$u_p = \int a(R) u e^{ikR} df_n \quad (61,1)$$

სადაც ინტეგრალი გავრცელებულია ხერელის კიდით შემოსაზღვრულ მთელ ზედაპირზე. განხილული მიახლოებაში ეს ინტეგრალი, რა თქმა უნდა, არ შეიძლება იყოს ზედაპირის ფორმაზე დამოკიდებული. (61,1) ფორმულა, ცხადია, გამოსადეგია დიფრაქციისათვის ეკრანში ხერელიდან კი არა მხოლოდ, არამედ ეკრანიდანაც, რომლის გარშემო სინათლეს შეუძლია თავისუფალი გავრცელება. ამ შემთხვევაში (61,1)-ში საინტეგრაციო ზედაპირი განფენილია ეკრანის კიდიდან ყოველი მიმართულებით.

$a(R)$ -ის განსაზღვრისათვის განვიხილოთ ბრტყელი ტალღა, რომელიც X ღერძის გასწვრივ ვრცელდება. ტალღური ზედაპირები YZ სიბრტყის პარალელურია. ვთქვათ u არის ველის მნიშვნელობა YZ სიბრტყეში. მაშინ P წერტილში, რომელსაც ჩვენ X ღერძზე ავარჩევთ, ველი ტოლია $u_p = u e^{ikx}$. მეორე მხრით, (61,1) ფორმულის საშუალებით შეიძლება P წერტილში ველი განვსაზ-

ღვროთ, თუ ინტეგრაციის ზედაპირად, მაგალითად, YZ სიბრტყეს ავიღებთ. ამასთანავე დიფრაქციის კუბის სიმცირისა გამო, ე. ი. გეომეტრიული ოპტიკიდან გადახრის სიმცირისა გამო, ინტეგრალში არსებითია YZ სიბრტყის მწვერტილები, რომლებიც კოორდინატა სათავეებთან ახლოსაა, ე. ი. ის წვერტილები, რომელთათვისაც $y, z \ll x$ (x P წვერტილის კოორდინატია). მაშინ

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

და (61,1) გვაძლევს

$$u_p = \iint_{-\infty}^{+\infty} aue^{ik(x + \frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{2x})} du dz.$$

აქ u მუდმივია (ველი YZ სიბრტყეში). ინტეგრაციისას a -ც შეიძლება მუდმივად ჩავთვალოთ, ვინაიდან y და z -ს სიმცირისა გამო $R \approx x = \text{const.}$ ამგვარად

$$u_p = aue^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}} dz.$$

ცხადია, რომ ორივე ეს ინტეგრალი ერთი და იგივეა; $y = \xi \sqrt{\frac{2x}{k}}$ ჩასმით ყოველი მათგანი დაიყვანება ინტეგრალამდე

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i),$$

და ჩვენ ვღებულობთ

$$u_p = aue^{ikx} \frac{2i\pi x}{k}.$$

მეორე მხრით, $u_p = ue^{ikx}$ და, მაშასადამე,

$$a = \frac{k}{2\pi ix} \approx \frac{k}{2\pi iR}.$$

თუ ამას (61,1)-ში ჩავსვამთ, საბოლოოდ ვიპოვიით დასმული ამოცანის ამოხსნას სახით:

$$u_p = \int \frac{ku}{2\pi iR} e^{ikR} df_n. \quad (61,2)$$

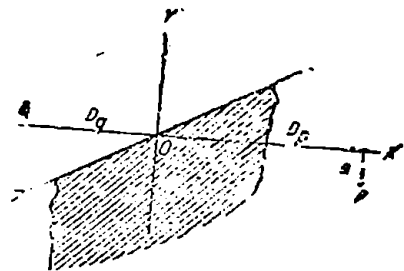
§ 62. შრენელის დიფრაქცია

თუ სინათლის წყარო და P წვერტილი, რომელშიაც ჩვენ სინათლის ინტენსივობას ვეძებთ, ეკრანიდან სასრულო მანძილზე იმყოფებიან, მაშინ P წვერტილში ინტენსივობის განსაზღვრისათვის მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ ტალღური ზედაპირის იმ მცირე უბანს, რომელზედაც წარმოებს (61,2) ინტეგრაცია — უბანს, რომელიც წყაროსა და P წვერტილის შემაერთებელ სწორი ხაზის მახ-

ლობლად მდებარეობს. მართლაც, რაძდებხადაც გეოფეოიული ოატიკიდას გა-
დახ-ა მკირეა, ამიტომ ტალღური ზედაპირის სხვადასხვა წერტილიდან P
წერტილში მომავალი სინათლის ინტენსივობა ძალიან სწრაფად მკირდება აღ-
ნიშნული სწორიდან დაშორებისას. იმ დიფრაქციულ მოვლენებს, რომლებშიაც
მნიშვნელობა აქვს ტალღურა ზედაპირის მხოლოდ მკირე უბნებს, ფრენელის
დიფრაქციულ მოვლენებს უწოდებენ.

განვიხილოთ ფრენელის დიფრაქცია რომელიმე ეკრანიდან. ასეთი დიფ-
რაქციის აღნიშნული თვისებისა გამო მნიშვნელობა აქვს ეკრანის კიდის მხო-
ლოდ მკირე უბანს. მაგრამ საქმაოდ მკირე უბანზე ეკრანის კიდე ყოველთვის
სწორხაზოვნად შეიძლება ჩაითვალოს. ქვემოდ ეკრანის კიდის ქვეშ ჩვენ სწო-
რედ ასეთ მკირე სწორხაზოვნად უბანს ვიგულისხმებთ.

Z ღერძად ეკრანის კიდე ავირჩიოთ (ნახ. 8), ხოლო X ღერძი QO პერ-
პენდიკულიარის გასწვრივ გაველოთ, რომელიც სინათლის Q წყაროდან დაშვე
ბულია ეკრანის კიდის ხაზზე. D_q ამ პერპენდიკულიარის სიგრძეა, ე. ი. მანძილი
სინათლის წყაროდან ეკრანის კიდემდე.
გეომეტრიული ოპტიკის თანახმად სი-
ნათლე მხოლოდ იმ წერტილებში შეიძ-
ლება მოხვედროდა, რომლებიც XZ
სიბრტყის ზევით მდებარეობენ. XZ
სიბრტყის ქვემო არეში გეომეტრიული
ოპტიკის თანახმად ჩრდილი უნდა გვექო-
ნოდა (გეომეტრიული ჩრდილის არე).



ნახ. 8.

ჩვენ განვსაზღვრავთ ახლა სინათ-
ლის ინტენსივობის განაწილებას ეკრა-
ნის უკან გეომეტრიული ჩრდილის საზ-
ღერის მახლობლად. ამასთანავე, ჯერჯერობით შემოვისაზღვრებით მხოლოდ
 XY სიბრტყეზე მდებარე წერტილებით, ე. ი. სიბრტყეზე, რომელიც წყაროზეა
გავლებული ეკრანის კიდის პერპენდიკულარულად. ასეთი P წერტილის x
კოორდინატი D_p -თი აღვნიშნოთ, y კოორდინატი, ე. ი. XZ სიბრტყემდე მან-
ძილა, d -თი აღვნიშნოთ. ამასთანავე უარყოფითი d იმას ნიშნავს, რომ P წერ-
ტილი გეომეტრიულა ჩრდილის არეში იმყოფება. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ d -
მკირეა D_p და D_q -თან შედარებით.

(61,2)-ში საინტეგრაციაო ზედაპირად ზედა ნახევარსიბრტყე ავირჩიოთ.
მისი წერტილების კოორდინატებია $0, y, z$. Q წყაროდან გამოსული ტალღის
ველი მისგან R_q მანძილზე e^{ikR_q} მამრავლის პროპორციულია

$$u \sim \exp(ik \sqrt{D_q^2 + y^2 + z^2}).$$

(61,2) ინტეგრალში R -თვის ახლა უნდა ჩავსვათ

$$R = \sqrt{D_p^2 + z^2 + (y - d)^2}.$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში ნელა ცვლადი მამრავლები არ არიან არსე-
ბითი ექსპონენციალურთან შედარებით. ამიტომ $1/R$ შეიძლება მუდმივ სიდი-

დეთ ჩავთვალოთ, ხოლო df_n -ის ნაცვლად $dy dz$ დავწეროთ. მაშინ ჩვენ ეპოვობთ, რომ P წერტილში ველი

$$u_p \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \exp \left\{ ik \left(\sqrt{D_q^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{D_p^2 + (y-d)^2 + z^2} \right) \right\} dy dz. \quad (62,1)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, P წერტილში სინათლე ხვდება უმთავრესად ინტეგრაციის სიბრტყის იმ წერტილებიდან, რომლებიც O -ს მახლობლად მდებარეობენ. ამიტომ (62,1) ინტეგრალისათვის მნიშვნელობა აქვთ მცირე y და z -ს (D_p -თან და D_p -თან შედარებით). ამის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sqrt{D_q^2 + y^2 + z^2} \approx D_q + \frac{y^2 + z^2}{2D_q},$$

$$\sqrt{D_p^2 + (y-d)^2 + z^2} \approx D_p + \frac{(y-d)^2 + z^2}{2D_p}.$$

ჩავსვათ ეს (62,1)-ში. რამდენადაც ჩვენ ველი გვინტერესებს როგორც d -ს ფუნქცია, ამიტომ მუდმივ $\exp \{ ik(D_p + D_q) \}$ მამრავლს გამოვტოვებთ; dz -ით აღებული ინტეგრალიც, იძლევა გამოსახულებას, რომელიც d -ს არ შეიცავს და რომელსაც ჩვენ აგრეთვე გამოვტოვებთ. მაშინ ჩვენ ვიპოვით

$$u_p \sim \int_0^{\infty} \exp \left\{ ik \left(\frac{1}{2D_q} y^2 + \frac{1}{2D_p} (y-d)^2 \right) \right\} dy.$$

ეს გამოსახულება ამ სახითაც შეიძლება დავწეროთ:

$$u_p \sim \exp \left\{ -ik \frac{d^2}{2D_p^2} \frac{1}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} \right\} \int_0^{\infty} \exp \left\{ ik \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) y - \frac{d}{D_p} \right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} \right\} dy.$$

სინათლის ინტენსივობა ველის კვადრატით განისაზღვრება, ე. ი. $|u_p|^2$ მოდულის კვადრატით. ამიტომ ინტენსივობის მოძებნისათვის ინტეგრალს წინ მდგომი მამრავლი არსებითი არ არის, ვინაიდან შეუღლებულზე გამრავლებით იგი ერთს იძლევა. ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა

$$\frac{k}{2} \frac{\left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) y - \frac{d}{D_p} \right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} = \eta^2.$$

მაშინ ვლებულობთ

$$u_p \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta, \quad (62,2)$$

სადაც

$$w = d \sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q + D_p)}} \quad (62,3)$$

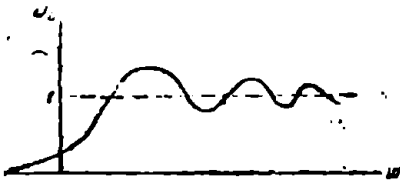
ამგვარად P წერტილში J ინტენსივობა არის

$$J = \frac{J_0}{2} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \right|^2 = \frac{J_0}{2} \left\{ \left(C(w) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(w) + \frac{1}{2} \right)^2 \right\}, \quad (62,4)$$

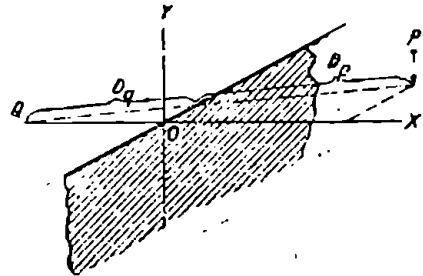
სადაც

$$C(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos \eta^2 d\eta, \quad S(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin \eta^2 d\eta$$

ეგრედ წოდებულ ფრენელის ინტეგრალებს წარმოადგენენ. (62,4) ფძლევა დას-
მული ამოცანის ამოხსნას და სინათლის ინტენსივობას როგორც d -ს ფუნქციას
განსაზღვრავს. J_0 , როგორც ადვილად ჩანს, წარმოადგენს ინტენსივობას განა-
თებული არის იმ წერტილებში, რომლებიც ძალიან ახლოს არ არიან ჩრდილის
კიდესთან, უფრო ზუსტად, რომელთათვისაც $w \gg 1$ ($C(\infty) = S(\infty) = 1/2$). როცა
 $w \rightarrow \infty$, როგორც უნდა ყოფილიყო, J ნულისკენ მიისწრაფის. ნახ. 9-ზე ნაჩვენ-
ებია J/J_0 შეფარდების როგორც w -ს ფუნქციის გრაფიკი. დადებითა w -თვის,



ნახ. 9.



ნახ. 10.

ე. ი. XZ სიბრტყის ზემოდ, ინტენსივობას აქვს რიგრიგობითი მაქსიმუმები და
მინიმუმები, ასე რომ J/J_0 სილიდე ირხევა ერთიდან ორივე მხარეს. ამ რხევათა
„ამპლიტუდა“ w -ს გადიდებით სწრაფად მცირდება, ხოლო მაქსიმუმებისა და
მინიმუმების ადგილები თანდათან ერთმანეთს უახლოვდებიან. პირველი მაქსი-
მუმი გეომეტრიული ჩრდილის საზღვრადან რამდენიმე ზევით არის წაწეული.
თვით ამ საზღვარზე $I = J_0/4$. გეომეტრიული ჩრდილის არეში ინტენსივობა
სწრაფად მონოტონურად ვარდება მისი საზღვრიდან დასორებისას.

თუ P წერტილი XY სიბრტყის გარედ არის (ნახ. 10), მაშინ სრულიად ანალოგიური გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ ინტენსივობა იმავე (62,4) ფორმულით განისაზღვრება, სადაც ახლა D_p და D_r ნახ. 10-ზე ნაჩვენები მონაკვეთების სიგრძეა.

§ 63. ფრაუნჰოფერის დიფრაქცია

არსებობს მთელი რიგი დიფრაქციის შემთხვევებისა, როცა დაკვირვების წერტილში სინათლის ინტენსივობა მთელი ტალღური ზედაპირით განასაზღვრება. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, μ -ს განმსაზღვრელ (61,2) ინტეგრალში არსებითად მთელი ტალღური ზედაპირი, რომელზედაც ინტეგრირება წარმოებს. მეორე მხრით, ჩვენ წინანდებურად ვიგულისხმებთ, რომ გეომეტრიული ოპტიკიდან გადახრა მცირეა, ე. ი. P წერტილამდე მხოლოდ ის სხივები მივლენ, რომლებსაც მცირედ გადახრა სჭირდებათ იმ გზიდან, რომელსაც ისინი გაივლიდნენ გეომეტრიული ოპტიკის თანახმად. ამიტომ მთელ ტალღურ ზედაპირს მნიშვნელობა აქვს შემდეგ ორ შემთხვევაში.

პირველი შემთხვევა ის არის, როცა დამზერის წერტილი ფოკუსთან ახლოს მდებარეობს, ე. ი. იმ წერტილთან, რომელშიაც თავს იყრიან სინათლის ყველა სხივის გეომეტრიული გზები.

მეორე, ყველაზე უფრო მნიშვნელოვან შემთხვევას ეგრედ წოდებული ფრაუნჰოფერის დიფრაქცია წარმოადგენს. ფრაუნჰოფერის დიფრაქციის დროს, როგორც სინათლის წყარო ისე დაკვირვების P წერტილი, ეკრანიდან¹ ძალიან დიდ (უსასრულო) მანძილზე იმყოფება. ახლა სხივები წყაროდან ეკრანებისაკენ პარალელურ კონად მიდიან. იგივე ეხება ეკრანიდან დაკვირვების წერტილისკენ მიმავალ სხივებსაც. ამიტომ, ფრაუნჰოფერის დიფრაქციის დროს ჩვენ გვინტერესებს მხოლოდ სინათლის კონის მიმართულების ცვლილება, ე. ი. ინტენსივობას ვეძებთ როგორც სინათლის მისი პირვანდელი მიმართულებიდან გადახრის კუთხის (დიფრაქციის კუთხის) ფუნქციას. რამდენადაც ჩვენ გეომეტრიული ოპტიკიდან მცირე გადახრებს განვიხილავთ, ეს კუთხეც მცირე უნდა იყოს.

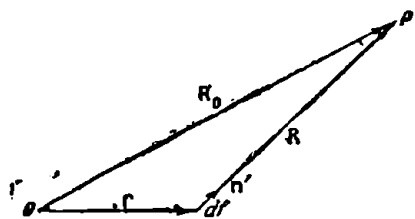
გამოვიყვანოთ ზოგადი ფორმულა, რომელიც ფრაუნჰოფერის დიფრაქციას განსაზღვრავს ნებისმიერი ფორმის ეკრანებიდან და ხერხელებიდან. ვთქვათ, სინათლე მიდის მარცხნიდან მარჯვნივ. ამოვარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ მისი სათავე სადმე ეკრანის მარცხნით მდებარეობდეს. 11- სურ. 0 არის კოორდინატთა სათავე, P —დაკვირვების წერტილი და df —ტალღური

¹ ექსპერიმენტულად ფრაუნჰოფერის დიფრაქცია, ცხადია, დაიზიარება არა უსასრულო მანძილზე, არამედ ეკრანს უკან მოთავსებული ლინზის საშუალებით; მაშინ დიფრაქციულ სურათი ფოკუსურ სიბრტყეში მიიღება. მაგრამ შესაძლებელია ვაჩვენოთ, რომ ეს გარემოება არაფერს შეცვლის შემდგომ ფორმულებში (თუ კი ლინზა მეტისმეტად მცირე არ არის, ასე რომ მასში არ წარმოიშობა ის დიფრაქციული მოვლენები, რომელნიც მისითვე განისაზღვრება).

ზედაპირის რიდაც ელემენტი, რომელზედაც წარმოებს ინტეგრება (61,2) ფორ-
მულაში:

$$u_p = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n.$$

ფრაუნგოფერის დიფრაქციის განსახილავ შემთხვევაში დაცემულ სინათ-
ლეში ყველა სხივს ერთიდა იგივე მიმართულება აქვს, ე. ი. — ერთიდაიგივე



ნახ. 11.

კუთხე არის დიფრაქციის კუთხე (k და k' , ცხადია, მხოლოდ მიმართულებით
განსხვავდებიან და არა სიდიდით).

u_p -ს გამოსახულებაში ინტეგრების ზედაპირზე ველი ტოლია $u = u^0 \exp(i kr)$
(r რადიუსვექტორია O -დან df -საკენ). ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში $1/R$
სიდიდე $1/R_0$ -ის მუდმივი სიდიდის ტოლი შეიძლება ჩავთვალოთ. მაშასადამე
ჩვენ ვპოულობთ

$$u_p = \frac{u_0}{2\pi i R_0} \int \exp(i kr) e^{ikR} df_n.$$

ნახ. 11-დან ჩანს, რომ $R = R_0 - r$. ამ ტოლობის ორივე მხარე n' -ზე
გავამრავლოთ. უსასრულოდ დაშორებულ P წერტილის შემთხვევაში R და R_0
ვექტორები პარალელურია, და ამიტომ $R_0 n' = R_0$. ამგვარად

$$R = R_0 - r n'$$

ასე რომ

$$e^{ikR} = e^{ikR_0} \exp(i k' r)$$

(რადგანაც $k n' = k'$). მამრავლი e^{ikR_0} მუდმივია. მაშასადამე ჩვენ საბოლოოდ
ვღებულობთ:

$$u_p = \frac{u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int \exp[i(k - k') r] df_n. \quad (63,1)$$

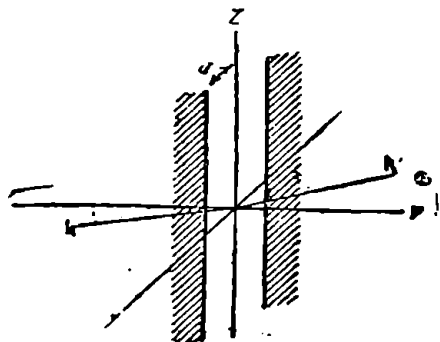
ეს ფორმულა სწორედ განსაზღვრავს ინტენსივობას $|u_p|^2$ როგორც დიფრაქ-
ციის კუთხის ფუნქციას.

განვიხილოთ ფრაუნგოფერის დიფრაქცია პარალელურ კიდეებიან უსას-
რულო კილიდან, რომელიც ამოკრილია არაგამქვირვალე ეკრანზე (ნახ. 12).
 Z ლერძი კრილის კიდის პარალელურად ავარჩიოთ, Y ლერძი—სიბრტყის (XZ
სიბრტყის) პერპენდიკულიარულად.

(63,1)-ში ინტეგრების ზედაპირად ავირჩიოთ კრილის სიბრტყე ორივე მის კიდეს შორის. მაშინ ინტეგრაციის ელემენტი df_x ტოლია ამ სიბრტყის $dx dz$ ელემენტის პროექციისა k მიმართულულებაზე. მაგრამ ვინაიდან ყველა დაცემული სხივი ურთიერთ პარალელურია, k -სა და $dx dz$ ელემენტს შორის კუთხე მუდმივი იქნება კრილის მთელი სიბრტყის გასწვრივ. ამიტომ (63,1)-ში df_x -ის ნაცვლად მუდმივი მამრავლამდე სიზუსტით ჩვენ შეგვიძლია პირდაპირ $dx dz$ დავწეროთ, ასე რომ

$$u_p \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} e^{i(k_x - k'_x)x} e^{i(k_z - k'_z)z} dx dz$$

(2ა—ნაპრაღის სიგანეა) ნიშანცვლადი პერიოდული ფუნქციის $e^{i(k_x - k'_x)x}$ ინტეგრალი x -ით ყოველთვის ნულის ტოლია, როცა $k_x \neq k'_x$. ამიტომ უნდა იყოს $k_x = k'_x$, ე. ი. სინათლე მხოლოდ XY სიბრტყეში გადაიხრება, რაც, სხვათა შორის, მოსალოდნელი იყო სიმეტრიის მოსაზრებიდან. ამგვარად u_p -ს გამოსახულება დაიყვანება:



ნახ. 12.

$$u_p \sim \int_{-a}^{+a} e^{i k_x x} dx,$$

სადაც $x = k_x - k'_x$. ინტეგრება გვაძლევს

$$u_p \sim \frac{\sin \pi a}{\pi a}.$$

აქედან იმ სინათლის ინტენსივობისათვის dJ , რომელმაც დიფრაქცია განიცადა α მნიშვნელობათა dx შუალედში, ეპოულობთ:

$$dJ = J_0 \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \pi a}{\pi a} \right)^2 dx, \quad (63,2)$$

სადაც მუდმივი მამრავლი ჩვენ ისე შევარჩიეთ, რომ J_0 კრილში გამავალი სინათლის სრული ინტენსივობაა (ე. ი. dJ -ის ინტეგრალი α -ას ყველა მნიშვნელობათა მიხედვით).

$\frac{dJ}{dx}$ -ს როგორც დიფრაქციის კუთხის ფუნქციას ნახ. 13-ზე მოცემული

სახე აქვს. $\alpha = 0$ -დან ორივე მხარეს α -ს გადიდებისას, ინტენსივობა რიგრიგობით მთელ რიგ მაქსიმუმებს და მინიმუმებს გაიარებს. α -ს გადიდებით მაქსიმუმ-

¹ α შეიძლება დიფრაქციის α კუთხითაც გამოვსახოთ, ე. ი. k და k' შორის კუთხით. მართლაც, (მცირე α და a -თვის) ადვილად მივიღებთ ფორმულას

$$a = \frac{x \sin(k, Z)}{\pi \cos(k, Y)},$$

სადაც (k, Y) და (k, Z) k -სა და Y და Z ღერძებს შორის კუთხეებია.

მების სიმაღლე სწრაფად მცირდება. ყველაზე დიდი მაქსიმუმი J -ს $x = 0$ -სათვის აქვს. მინიმუმებში $J = 0$. ამ მინიმუმებს ადგილი აქვთ მაშინ, როცა

$$x_n = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (63,3)$$

როგორც 170 გვერდის შენიშვნაში იყო აღნიშნული, ფრაუნგოფერის დიფრაქციის დამზერა ჩვეულებრივ ლინზების სისტემის დახმარებით ხდება. ლინზაში გავლის შემდეგ პარალელური სხივთა კონა მის მთავარ ფოკუსში იკრიბება. ამ ფოკუსზე გამავალი ოპტიკური ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში u_p ველი ყველგან ნულის ტოლია, გარდა თვით ფოკუსისა. თუ ლინზის წინ რაიმე ეკრანია მოთავსებული, მაშინ სხივთა კონა დიფრაქციას განიცდის; ამის შესაბამისად, ლინზის ფოკალურ სიბრტყეში ახლა მიიღება სინათლის წყაროს წერტილოვანი გამოსახულება კი არა, არამედ რაღაც განფენილი დიფრაქციული სურათი.

შევცვალოთ ახლა ეკრანი „დამატებითი“ ეკრანით, ე. ი. ისეთით, რომელსაც ხვრელი აქვს იქ, სადაც პირველი ეკრანი არაგამჭვირვალეა და პირიქით. ლინზის ფოკალურ სიბრტყეში ორივე შემთხვევაში ველი აღვნიშნოთ, შესაბამისად, $u_p^{(1)}$ -ით და $u_p^{(2)}$ -ით. რამდენადაც $u_p^{(1)}$ და $u_p^{(2)}$ გამოისახება ინტეგრალებით, რომლებიც ეკრანთა ხვრელებზეა აღებული, ხოლო ორივე ეკრანის ხვრელები-კი ერთიმეორეს მთელ სიბრტყემდე ავსებენ, ამიტომ $u_p^{(1)} + u_p^{(2)} = u_p$, სადაც u_p არის ველი, რომელიც ეკრანების არარსებობის დროს მიიღება. როგორც იყო აღნიშნული, $x_p = 0$ ყველგან გარდა ფოკუსისა, საიდანაც $u_p^{(1)} + u_p^{(2)} = 0$ ან შესაბამისი ინტენსივობებისათვის

$$|u_p^{(1)}|^2 = |u_p^{(2)}|^2.$$

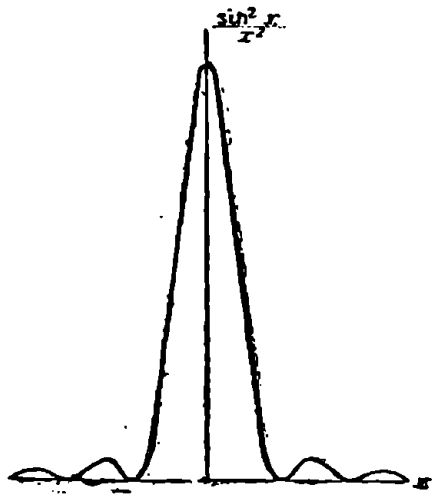
ამგვარად დამატებითი ეკრანები ლინზის მთელ ფოკალურ სიბრტყეში ერთნაირ დიფრაქციულ სურათს გვაძლევენ თვით ფოკუსის გამოკლებით (ეგრედ წოდებული ბაზინეს პრინციპი).

ა მ ო ც ა ნ ე ბ ი

1. განვსახლვართ ფრაუნგოფერის დიფრაქცია სწორკუთხოვანი ხვრელიდან (2a და 2b კვერდებით).

ამ ობსნა ანალოგიურია ნაპრალიდან დიფრაქციის ამოხსნისა. თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს

$$k_a - k_x = x_p, \quad k_s - k_x = x_p$$



ნახ. 13.

(თუ X და Z ლერძები სწორკუთხოვანი ხეარლის გვერდების პარალელურია) ინტენსივობისათვის ვაბოვიო

$$dJ = J_0 \frac{ab}{\pi^2} \left(\frac{\sin \alpha_a}{\alpha_a} \right)^2 \left(\frac{\sin \alpha_b}{\alpha_b} \right)^2 d\alpha_a d\alpha_b.$$

2. განვსახდეროთ ფრაუნჰოფერის დიფრაქცია დიფრაქციული მესერიდან — ბრტყელ ვკრანინდან, რომელშიაც ამოკრილია ერთნაირი პარალელური კრილების რიგი (კრილის განა $2a$ -ს ტოლია, მეზობელ კრილებს შორის არაგამჭვირვალე შუალედის განი ტოლია $2b$ -სი, კრილების რიცხვი უდრის N -ს).

ამოხსნა: მესერის სიბრტყე ავირჩიოთ XZ სიბრტყედ და Z ლერძი კრილების პარალელურად მივმართოთ. (63,1)-ში ინტეგრება იძლევა

$$u_p = u'_p \sum_{n=0}^{N-1} e^{2in\alpha d} = u'_p \frac{1 - e^{2iN\alpha d}}{1 - e^{2i\alpha d}},$$

სადაც $\alpha = k_{\theta} - k_{\theta_0}$, $d = a + b$, და u'_p არის ერთ კრილზე ინტეგრების შედეგი. თუ (63,2)-ს გამოვიყენებთ, $|u_p|^2$ ინტენსივობისათვის გვექნება;

$$dJ = \frac{J_0}{N} \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin N\alpha d}{\sin \alpha d} \right)^2 \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \right)^2 d\alpha$$

(J_0 ყველა კრილში გამავალი სინათლის სრული ინტენსივობაა).

კრილების დიდი რიცხვის შემთხვევაში, ე. ი. $N \rightarrow \infty$, ეს ფორმულა სხვა სახით შეიძლება დაიწეროს. α -ს მნიშვნელობათათვის $\alpha = \frac{\pi n}{d}$ (n მთელი რიცხვია) $\frac{dJ}{d\alpha}$ -ს მაქსიმუმები აქვს. ასეთი მაქსიმუმის მახლობლად (ე. ი. როცა $\alpha d = \pi n + \epsilon$ ϵ მცირეა):

$$dJ = \frac{J_0}{N} \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \right)^2 \frac{\sin^2 N\epsilon}{\epsilon^2} d\alpha,$$

მაგრამ როცა $N \rightarrow \infty$ ადგილი აქვს ფორმულას¹.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} \right) = \delta(x),$$

¹ ფურიეს მჭკრივთა თეორიიდან ცნობილი ფორმულების თანახმად

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} f(x) \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} dx \right\} = f(0).$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} dx \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = 1.$$

აქედან ჩანს, რომ $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} \right)$ ფუნქციის თვისებები მართლაც თანხედება δ ფუნქციის თვისებებს (იხ. 70 გვერდის შენიშვნა).

ვ. ა. წიგნელი მაქსიმუმის მახლობლად J -ს აქვს სახე

$$J_0 a \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \right)^2 \delta(\alpha d - \pi n).$$

მაშასადამე

$$dJ = d\alpha J_0 a \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha d - \pi n) = J_0 a \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \right)^2 \delta(\sin \alpha d) d\alpha.$$

3. განვსახდევროთ ფრაუნჰოფერის დიფრაქცია წრიული ზერელიდან (a რადიუსით): სინათლე ზერელის სიბრტყის პერპენდიკულარულად ეცემა.

ამოხსნა: შემოვიღოთ z , r და φ ცილინდრული კოორდინატები Z ღერძით, რომელიც ზერელის სიბრტყის პერპენდიკულარულია და მის ცენტრში გადის. x -თი აღვნიშნოთ ამ სიბრტყეზე k' -ის პროექცია ($x = ka$, სადაც a დიფრაქციის კუთხეა). სიმეტრიის მოსახრებიდან გამოდის, რომ დიფრაქცია მხოლოდ x -ზე იქნება დამოკიდებული. ამიტომ შეიძლება მხოლოდ $\varphi = 0$ სიბრტყეში მიმავალი სხივების განხილვით შემოვისახდევროთ. მაშინ (63,1 ფორმულა იძლევა

$$\mu_p = \frac{k u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha r} \cos \varphi r d\varphi dr = \frac{e^{ikR_0} k u_0}{i R_0} \int_0^a J_0(\alpha r) r dr,$$

სადაც $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi$ ნულოვანი რანგის ბესელის ფუნქციაა, u_0 კი ველის

თვით ზერელში. ბესელის ფუნქციითა თეორიიდან ცნობილია, რომ

$$\int_0^a J_0(\alpha r) r dr = \frac{a J_1(\alpha a)}{\alpha}.$$

დიფრაქციის ინტენსივობა dO სხეულთან კუთხეში მიიღება $|\mu_p|^2$ -ის გამრავლებით $R^2 dO$ -ზე ამის შედეგად ამ სინათლის dJ ინტენსივობისათვის, რომელმაც დიფრაქცია განიცადა, ვსაძლობთ:

$$dJ = J_0 \frac{J_1^2(\alpha k a)}{\pi \alpha^2} dO$$

სადაც J_0 —დაცემული სინათლის სრული ინტენსივობაა.

მოძრაობის მუხავების პედი

§ 64. ლაგრაჟიანი პოტენციალები

V თავში ჩვენ შევისწავლიდით უძრავი მუხტებით შექმნილ მუდმივ ველს, ხოლო VI თავში — ცვალებად ველს, მხოლოდ მუხტების არარსებობის დროს. ახლა ჩვენ დავიწყებთ ცვალებადი ველების შესწავლას ნებისმიერად მოძრავ მუხტების არსებობის პირობებში.

გამოვიყვანოთ განტოლებანი, რომელნიც ნებისმიერი ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალებს განმსაზღვრავენ. ეს გამოყვანა უფრო მოხერხებულაო ოთხგანზომილებიანი სახით გავაკეთოთ. ამისათვის მაქსველის განტოლებათა მეორე წყვილი დავწეროთ (30,2) სახით

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i.$$

ჩავსვათ აქ, პოტენციალებში გამოსახული, F_{ik} ე. ი.

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

შაშინ ჩვენ ეპოულობთ

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = \frac{4\pi}{c} j_i. \quad (64,1)$$

დავადვით ახლა A_i პოტენციალებზე დამატებითი პირობა

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0; \quad (64,2)$$

სამგანზომილებიანი ფორმით იგი დაიწერება:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (64,3)$$

ეს წარმოადგენს იმ პირობათა განზოგადოებას, რომლებსაც ჩვენ წინა დანხილულ შემთხვევებში მოვითხოვდით პოტენციალთა მიმართ. ასე მაგალითად, მუდმივი ველისათვის (64,3) გარდაიქცევა $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, რომელიც (42,3)-ს თანხვედება. სივარდიელში ელექტრომაგნიტური ველისათვის (§ 44)

ჩვენ პოტენციალებს ისე ვირჩევდით, რომ $\varphi = 0$ და $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; ასეთი პოტენციალები, ცხადია, (64,3) პირობასაც აკმაყოფილებენ¹.

(64,1) განტოლება გარდიქცევა ახლა

$$-\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{c} j_i. \quad (64,4)$$

სწორედ ეს არის განტოლება, რომელიც ნებისმიერი ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალს განსაზღვრავს. სამგანზომილებიანი ფორმით იგი ორი განტოლების სახით დაიწერება — \mathbf{A} -თვის და φ -თვის:

$$\Delta A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (64,5)$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (64,6)$$

მუდმივი ველისათვის ისინი გვაძლევენ ჩვენთვის უკვე ცნობილ (36,4) და (43,4) განტოლებებს, ხოლო ცვალებადი უმუხტო ველისათვის (45,6) განტოლებას. (64,5)-ში და (64,6)-ში ρ და \mathbf{j} , საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ყველა კოორდინატისა და დროს ფუნქციებს წარმოადგენენ.

(64,5—6) არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლებათა ამოხსნა, როგორც ცნობილია, შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც უმარჯვენა წევროდ აღებული ამ განტოლებათა ამოხსნისა და მარჯვენა წევრით მათი კერძო ინტეგრალის ჯამი. ამ კერძო ინტეგრალის მოსაძებნად მთელი სივრცე უსასრულო მცირე ელემენტებად დავეყოთ და განვსაზღვროთ ველი, რომელსაც მოცულობის ერთ-ერთ ამ ელემენტში მყოფი მუხტი ქმნის. ველის განტოლებათა წრფივობის გამო ქვეშარიტი ველი იქნება ყველა ასეთი ელემენტების მიერ შექმნილი ველების ჯამი.

მოცულობის მოცემულ ელემენტში de მუხტი, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, დროს ფუნქციას წარმოადგენს. თუ კოორდინატთა სათავეს მოცულობის განსახილავ ელემენტში ავირჩევთ, მაშინ მუხტის სიმკვრივე იქნება $\rho = de(t) \delta(\mathbf{R})$, სადაც \mathbf{R} კოორდინატთა სათავემდე მანძილია (ჩვენ მხოლოდ ერთ ამ ელემენტს განვიხილავთ).

იმგვარად ჩვენ უნდა ამოვხსნათ განტოლებათა

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t) \delta(\mathbf{R}). \quad (64,7)$$

¹ უნდა აღინიშნოს, რომ მიუხედავად დამატებითი (64,3) პირობისა φ და \mathbf{A} პოტენციალები მაინც არასაკუთარი ცალსახა რჩებიან. სახელდობრ \mathbf{A} -ს შეიძლება $\operatorname{grad} f$ დაუმატოთ და ამასთანავე φ -ს გამოვაკლოთ $\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$, მაგრამ ახლა f უკვე ნებისმიერი კი არაა, არამედ, როგორც ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

კოორდინატთა სათავეს გარდა, ყველგან $\delta(R) = 0$, და ჩვენ გვაქვს განტოლება

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (64,8)$$

ცხადია, რომ განსახილავ შემთხვევაში φ -ს ცენტრალური სიმეტრია ახასიათებს, ე. ი. რომ φ მხოლოდ R -ის ფუნქციაა. ამიტომ თუ ლაპლასის ოპერატორს სფერულ კოორდინატებში დავწერთ, მაშინ (64,8) მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

ამ განტოლების ამოხსნისათვის მოვახდინოთ ჩასმა $\varphi = \frac{\chi(R, t)}{R}$. მაშინ χ -თვის მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

მაგრამ ეს ბრტყელი ტალღის განტოლებაა, რომლის ამოხსნას აქვს სახე (იხ. § 46).

$$\chi = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{c} \right).$$

რამდენადაც ჩვენ მხოლოდ განტოლების კერძო ინტეგრალს ვეძებთ, საკმარისია ავიღოთ ერთი f_1 და f_2 ფუნქციათაგანი. ჩვეულებრივ მოხერხებულა მივიღოთ $f_2 = 0$ (ამის შესახებ იხილეთ ქვემოთ), მაშინ φ პოტენციალს, კოორდინატთა სათავეს გარდა, ყველგან ექნება სახე

$$\varphi = \frac{\chi \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \quad (64,9)$$

ამ ტოლობაში χ ფუნქცია ჯერჯერობით ნებისმიერია; იგი ახლა ისე შევარჩიოთ, რომ კოორდინატთა სათავეზედაც პოტენციალის სწორი მნიშვნელობა მივიღოთ. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, χ ჩვენ ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ კოორდინატთა სათავეზე დაკმაყოფილდეს (64,7) განტოლება. ეს ადვილად გაკეთდება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ როცა $R \rightarrow 0$ თვით პოტენციალი მიისწრაფის უსასრულობისაკენ და ამიტომ მათი წარმოებულები კოორდინატებით უფრო სწრაფად იზრდებიან, ვიდრე წარმოებულები ჭროთი. მაშასადამე, როცა $R \rightarrow 0$, (64,7) განტოლებაში $\Delta\varphi$ -სთან შედარებით შეიძლება $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

წევრი უგულებელვყოთ. მაშინ (64,7) განტოლება გადადის ჩვენთვის უკვე ცნობილ (36,9) განტოლებაში, რომელსაც მივყევართ კულონის კანონამდე. ამგვა-

რად, კოორდინატთა სათავის მახლობლად (64,9) კულონის კანონში უნდა გადავიღეს, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\chi(t) = de(t)$, ე. ი.

$$\varphi = \frac{de \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \quad (64,10)$$

აქედან ადვილად გადავალთ (64,6) განტოლების ამოხსნაზე ნებისმიერად განაწილებული $\rho(x, y, z, t)$ ელემენტისათვის. ამისათვის საკმარისია (64,10)-ში დავწეროთ $de = \rho dV$ (dV მოცულობის ელემენტი) და ინტეგრება მოვახდინოთ მთელ სივრცეზე. ამგვარად მიღებულ არაერთგვაროვანი (64,6) განტოლების ამოხსნას შეიძლება დაუმატოთ კიდევ უმარჯვენანაწილოთ ამავე განტოლების ამოხსნა φ_0 . ამგვარად (64,6)-ის ზოგად ამოხსნას აქვს სახე:

$$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{1}{R} \rho \left(x', y', z', t - \frac{R}{c} \right) dV' + \varphi_0,$$

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2; \quad dV' = dx' dy' dz'$$

R არის dV მოცულობის ელემენტიდან იმ წირტილამდე მანძილი, რომელშიაც ჩვენ ვეძებთ პოტენციალის მნიშვნელობას). ჩვენ ამ გამოთხლებას მოკლედ დავწეროთ სახით

$$\varphi = \int \frac{\rho \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} dV + \varphi_0, \quad (64,11)$$

სადაც ინდექსი $t - \frac{R}{c}$ გვიჩვენებს, რომ ρ -ს მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ $t - \frac{R}{c}$ დროს მომენტში.

სავსებით ანალოგიურად ამოიხსნება (64,5) განტოლებაც. ცხადია,

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{j \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} dV + A_0, \quad A = \int \frac{j}{R} dV \quad (64,12)$$

სადაც A_0 არის (64,5) განტოლების ამოხსნა უმარჯვენა ნაწილოთ.

(64,11—12) პოტენციალებს φ_0 და A_0 -ს გამოკლებით, დაგვიანებული პოტენციალები ეწოდება.

უძრავი მუხტების შემთხვევაში (ე. ი. დროზე დამოუკიდებელი ρ სიმკვრივისათვის) (64,11) ფორმულა გადადის ელექტროსტატიკურ ველისათვის ჩვენთვის უკვე ცნობილ (36,8) ფორმულაში $\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV$, ხოლო (64,12) გადადის მაგნიტური ველისათვის (გასაშუალების შემდეგ) (43,5) ფორმულაში. $\vec{A} =$

A_0 და φ_0 (64,11—12)-ში ისე განისაზღვრებიან, რომ დაკმაყოფილდეს ამოცანის პირობები. ამისათვის, ცხადია, საკმარისია საწყისი პირობების მოცემა ე. ი. ველის მოცემა დროს საწყის მომენტში. მაგრამ ასეთ საწყის პირობებთან ჩვეუ-

ლებრივ საკმე არა გვაქვს ხოლმე. ამის ნაცვლად, ჩვეულებრივ მოიცემა პირობები მუხტთა სისტემიდან დიდ მანძილზე მთელი დროს განმავლობაში. სახელდობრ, მოიცემა სისტემაზე დაცემული გარეშე გამოსხივება. ამის შესაბამისად, ამ გამოსხივებასა და სისტემას შორის ურთიერთმოქმედების შედეგად წარმოშობილი ველი გარეშე ველისაგან შეიძლება განსხვავდებოდეს მხოლოდ სისტემიდან გამომავალი გამოსხივებით. სისტემიდან გამომავალ ასეთ გამოსხივებას საკმაოდ შორ მანძილზე ბრტყელი ტალღის სახე უნდა ქონდეს, რომელიც სისტემიდან ე. ი. მზარდი R -ის მიმართულებით ვრცელდება. მაგრამ ამ პირობას სწორედ (64,11—12) სახის ამოხსნა აკმაყოფალებს, ე. ი. დავვიანებული პოტენციალების სახისა, როგორც ეს იქიდან ჩანს, რომ ჩვენ დაუშვით $f_3 = 0$. ამგვარად, ამ ამოხსნაში პირველი წევრები გამოსახვენ სისტემიდან გამომავალ ველს, ხოლო φ_0 და A_0 სისტემაზე მომქმედი გარეშე ველის ტოლად უნდა ჩაეთვალოთ.

ამ პარაგრაფის დასასრულს (64,11—12) ფორმულები გამოვიყენოთ ერთ, ნებისმიერად მოძრავი, წერტილოვანი მუხტის მიმართ. ამასთანავე შევდელოებაში უნდა ვიქონიოთ, რომ ამ ფორმულებში წერტილოვან მუხტზე გადასვლა არ შეიძლება მოეხდინოთ უშუალოდ, 'ვინაიდან ინტეგრების არის სხვადასხვა წერტილებს დროს სხვადასხვა $t - R/c$ მომენტი შეესაბამება. ამიტომ ჯერ (64,11—12) ინტეგრალები მუხტის de ელემენტების მიხედვით აღებულ-ინტეგრალებად უნდა გარდაექმნათ.

განვიხილოთ P წერტილიდან R მანძილზე მოთავსებული dR სისქის სფერული ფენის მოცულობის ელემენტი, რომელშიაც ჩვენ ველის მნიშვნელობას ვეძებთ. ასეთი ელემენტის მოცულობა უდრის $dV = dR df$, სადაც df განსახილავი მოცულობის ელემენტის მიერ ამოჭრილი სფერული ზედაპირის ელემენტი. dR მანძილზე $t - \frac{R}{c}$ დრო $\frac{dR}{c}$ -ით იცვლება. ამიტომ მოცულობის მოცემულ ელემენტში მოთავსებული ველის შემქნელი de მუხტი უნდა დაიწეროს ρdV მუხტისა და $\frac{dR}{c}$ დროში dV მოცულობაში შემოსული მუხტის ჯამის სახით.

სფეროს ზედაპირის ერთეულში დროს ერთეულში $\rho \frac{vR}{R}$ მუხტი გაივლის (R რადიუს-ვექტორია P -დან dV -საკენ). ამიტომ $dV = dR df$ მოცულობაში dR/c დროს განმავლობაში შემოვა მუხტის რაოდენობა $\rho \frac{vR}{R} \frac{dR}{c} df$. ამგვარად

$$de = \rho \left(1 + \frac{vR}{Rc} \right) dV,$$

ასე რომ

$$\rho dV = \frac{de}{1 + \frac{vR}{cR}}.$$

თუ ამას (64,11—12)-ში ჩავსვამთ და წერტილოვან მუხტზე გადავალთ, მაშინ ნებისმიერად მოძრავი მუხტის ველის პოტენციალებს ვიპოვიტ სახით

$$\varphi = \frac{e}{R + \frac{vR}{c}} \left| t - \frac{R}{c} \right|, \quad A = \frac{1}{c} \frac{e\mathbf{v}}{R + \frac{vR}{c}} \left| t - \frac{R}{c} \right|. \quad (64,13)$$

ყველა სიდიდე (და მათ შორის R-იც) აქ იღება დროს $t - \frac{R}{c}$ მომენტში. (64,13) სახის პოტენციალებს ლიენარდი-ვიხერტის პოტენციალები ეწოდებათ.

ა მ ო ც ა ნ ა

დავშალოთ თანაბრად და სწორხაზოვნად მოძრავი მუხტის ველი ბრტყელ ტალღებად. ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვიქცეთ ანალოგიურად იმისა, რაც გავაკეთეთ § 51-ში. მუხტის სიმკვრივეს ვწერთ სახით $\rho = e\delta(r - vt)$, სადაც v — ნაწილაკის სიჩქარეა. თუ

$$\square \varphi = -4\pi e\delta(r - vt)$$

ჯანტოლებიდან ფურიეს კომპონენტს ავიღებთ, ვიპოვიტ

$$(\square \varphi)_k = -\frac{e}{2\pi^2} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t]$$

შეორე მხრით ფორმულიდან

$$\varphi = \int \int \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \varphi_k dk_x dk_y dk_z$$

ჩაქვებ

$$(\square \varphi)_k = -k^2 \varphi_k - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2}.$$

ამგვარად

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} + k^2 \varphi_k = \frac{e}{2\pi^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$$

საიდანაც საბოლოოდ

$$\varphi_k = \frac{e}{2\pi^2} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ იმ ტალღის სიხშირე, რომელსაც აქვს \mathbf{k} ტალღური ვექტორი, უდრის $\omega = (\mathbf{k}\mathbf{v})$. ვექტორული პოტენციალისათვის ანალოგიურად ეპოულობთ

$$A_k = \frac{e}{2\pi^2 c} \frac{\mathbf{v} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2}.$$

$$E_k = -ik\varphi_k + \frac{i(kv)}{c} A_k = -\frac{e}{2\pi^2} i \frac{-k + \frac{(kv)v}{c^2}}{k^2 - \left(\frac{kv}{c}\right)^2} \exp[-i(kv)t]$$

$$H_k = i[kA_k] = \frac{e}{2\pi^2} \frac{[kv]}{k^2 - \left(\frac{kv}{c}\right)^2} \exp[-i(kv)t]$$

§ 65. ლაგრანჟის ფუნქცია მძორე ჩივის წმკებაჲმ სიზუსტით

ჩვეულებრივ კლასიკურ მექანიკაში ურთიერთმოქმედ ნაწილაკთა სისტემის აღწერა შესაძლებელია ლაგრანჟის ფუნქციის საშუალებით, რომელიც მხოლოდ ნაწილაკთა კოორდინატებზე და სიჩქარეებზეა დამოკიდებული (დროს ერთსადა იმავე მომენტში). ეს შესაძლებლობა ბოლოს და ბოლოს იმით განისაზღვრება, რომ მექანიკაში ურთიერთმოქმედების გავრცელების სიჩქარე უსასრულო იგულისხმება.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ურთიერთმოქმედების გავრცელების სასრულო სიჩქარისა გამო ველი განხილული უნდა იყოს როგორც დამოუკიდებელი სისტემა, რომელსაც საკუთარი „თავისუფლების ხარისხები“ აქვს. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩვენ ურთიერთმოქმედ ნაწილაკთა (მუხტთა) სისტემა გვაქვს, მაშინ მისი აღწერისათვის ჩვენ უნდა განვიხილოთ სისტემა, რომელიც ამ ნაწილაკებისა და ველისაგან შედგება. ამიტომ, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, თუ ჩვენ გავითვალისწინებთ ურთიერთმოქმედების გავრცელების სასრულო სიჩქარეს, ურთიერთმოქმედ ნაწილაკთა სისტემის აღწერა შეუძლებელია ლაგრანჟის ფუნქციის საშუალებით, რომელიც მხოლოდ ნაწილაკთა კოორდინატებზე და სიჩქარეებზეა დამოკიდებული და რომელიც არ შეიცავს ველის საკუთარ „თავისუფლების“ ხარისხებთან“ დაკავშირებულ სიდიდეებს. მაგრამ, თუ ყველა ამ ნაწილაკის v სიჩქარეები სინათლის სიჩქარეზე გაცილებით ნაკლებია, მაშინ მუხტთა სისტემა შეიძლება აღვწეროთ ლაგრანჟის ერთგვარ მიახლოებით ფუნქციით. ამასთანავე შესაძლებელი აღმოჩნდა ლაგრანჟის ისეთი ფუნქციის შემოტანა, რომელიც აღწერს სისტემას არა მხოლოდ მაშინ, როცა უგულბელყოფილია v/c -ს ყველა ხარისხები (ლაგრანჟის კლასიკური ფუნქცია), არამედ v^2/c^2 -ს ჩივის სიდიდეებამდე სიზუსტითაც.

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ნულოვან მიახლოებაში, ე. ი. პოტენციალთა დაგვიანების სრული უგულბელყოფისას, მუხტთა სისტემისათვის ლაგრანჟის ფუნქციას აქვს სახე.

$$L = \sum_A \frac{m_A v^2_A}{2} - \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}. \quad (65,1)$$

(შეჯამება წარმოებს სისტემაში შემავალ მუხტების მიხედვით). მეორე წევრი ურთიერთმოქმედების ისეთივე პოტენციალურ ენერჯიას წარმოადგენს, როგორც იქნებოდა იგი უძრავი მუხტებისათვის [იხ. (36,10)].

ლაგრანჟის ფუნქციაში შემდგომი მიახლოების მისაღებად მოვიქცეთ შემდგენიარად. გარეშე ველში მოთავსებული მუხტისათვის ლაგრანჟის ფუნქცია არის [იხ. (14,3)]

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{c}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

თუ სისტემის რომელიმე მუხტათაგანს ავირჩევთ, მაშინ ჩვენ განვსაზღვრავთ ყველა დანარჩენის მიერ იმ წერტილში შექმნილ ველის პოტენციალებს, რომელშიაც ეს მუხტია მოთავსებული და გამოვსახავთ მათ ამ ველის შემქნელი მუხტების კოორდინატებით და სიჩქარეებით (სწორედ ეს შეიძლება მხოლოდ მიახლოებით გაკეთდეს: $\varphi = v^2/c^2$ -ს რიგის წევრებამდე სიზუსტით, ხოლო $\mathbf{A} = v/c$ -ს რიგის წევრებამდე სიზუსტით). პოტენციალებისათვის ამგვარად მიღებულ გამოსახულებებს თუ L -თვის ზევით მოყვანილ გამოსახულებაში ჩავსვამთ, მაშინ ჩვენ მივიღებთ სისტემის ერთერთი მუხტისათვის ლაგრანჟის ფუნქციას (დანარჩენთა მიცემული მოძრაობისას). აქედან უკვე ჩვენ ადვილად მოვნახავთ L -ს მთელი სისტემისთვის.

გამოვიღეთ გამოსახულებებიდან დაგვიანებული პოტენციალებისათვის (64,10—12):

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV.$$

თუ ყველა მუხტის სიჩქარე მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით, მაშინ მუხტების განაწილება, ე. ი. ρ და \mathbf{j} ვერ მოასწრებენ შესაწინააღმდეგებელ შეცვლას R/c დროს განმავლობაში. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია $\rho = R/c$ და $\mathbf{j} = R/c$ დავშალოთ მწკრივად R/c -ს ხარისხების მიხედვით. ამგვარად, სკალარული პოტენციალისათვის მეორე რიგის წევრებამდე სიზუსტით ჩვენ ვპოულობთ:

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV$$

(უინდექსო ρ წარმოადგენს ρ -ს t მომენტში; $\frac{\partial}{\partial t}$ და $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ცხადია, შეიძლება ინტეგრალის ნიშნის გარეთ გამოვიტანოთ). მაგრამ $\int \rho dV$ სრული მუხტია, რომელიც დროზე დამოუკიდებელ მუდმივს წარმოადგენს. ამიტომ მიღებული გამოსახულების მეორე წევრი ნულის ტოლია, ასე რომ

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV. \quad (65,2)$$

ანალოგიურად შეიძლება მოვიქცეთ \mathbf{A} -ს მიმართ. მაგრამ ვექტორული პოტენციალის დენის სიმკვრივით გამოსახულება უკვე თავისთავად შეიცავს $1/c$ -ს, ხოლო ლაგრანჟის ფუნქციაში ჩასმისას იგი კიდევ გამრავლდება $1/c$ -ზე. ვინაიდან ჩვენ ლაგრანჟის ფუნქციას მხოლოდ მეორე რიგის წევრებამდე სიზუსტით

ვეძებთ, ამიტომ A -ს დაშლაში საკმარისია პირველი რიგის წევრებით დავეკმაყოფილდეთ, ე. ი.

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{\rho \mathbf{v}}{R} dV \quad (65,3)$$

(ჩვენ ჩავსვით $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$).

დაუშვათ, რომ გვაქვს მხოლოდ ერთი წერტილოვანი e მუხტი (რამდენიმე მუხტისათვის კი მიღებული გამოსახულებათა ჯამი უნდა ავიღოთ). მაშინ მის მიერ შექმნილი ველის პოტენციალებისათვის (65,2—3)-დან ვღებულობთ

$$\varphi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR}, \quad (65,4)$$

სადაც R — მუხტიდან მანძილია.

φ -ს და \mathbf{A} -ს ნაცვლად ავირჩიოთ სხვა პოტენციალები φ' და \mathbf{A}' შემდეგი გარდაქმნების მიხედვით

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f,$$

სადაც f ფუნქციით ავირჩიოთ

$$f = \frac{e}{2c} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c} \nabla \frac{\partial R}{\partial t}.$$

\mathbf{A}' -ის გამოსათვლელად შევნიშნოთ უპირველესყოვლისა, რომ $\nabla \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla R$.

ოპერაცია ∇ აქ აღნიშნავს გადიფერენციალებას იმ დაკვირვების წერტილის კოორდინატების მიხედვით, რომელშიაც \mathbf{A}' -ის მნიშვნელობას ვეძებთ. ამიტომ ∇R უდრის e მუხტიდან დაკვირვების წერტილისაკენ მიმართული \mathbf{n} ერთეულოვან ვექტორს, ასე რომ

$$\mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c} \mathbf{n} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

\mathbf{n} -ის გამოსათვლელად დავწერთ

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

მაგრამ $\dot{\mathbf{R}}$ წარმოებული დაკვირვების მოცემული წერტილისათვის წარმოადგენს მუხტის \mathbf{v} სიჩქარეს, ხოლო წარმოებული \dot{R} ადვილად განისაზღვრება $R^2 = \mathbf{R}^2$ ტოლობის გადიფერენციალებით. ე. ი. თუ დავწერთ

$$\dot{R}\dot{R} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}} = -\dot{R}\mathbf{v}.$$

¹ φ' და \mathbf{A}' პოტენციალები უკვე არ დააკმაყოფილებენ დალამბერის პირობებს, ვინაიდან ისინი არ აკმაყოფილებენ (64,3) პირობას. იმავე დროს ცხადია, φ' და \mathbf{A}' სწორ შედეგს მოგვცემენ ველისათვის, თუ φ და \mathbf{A} გვაძლევენ ამ შედეგს.

ამგვარად

$$\dot{n} = \frac{-v + n(nv)}{R}$$

თუ ყველაფერ ამას A' -ის გამოსახულებაში ჩავსვამთ, საბოლოოდ ვიპოვიot:

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad A' = \frac{e[v + (vn)n]}{2eR}. \quad (65,5)$$

თუ რამდენიმე მუხტი გვაქვს, მაშინ, ცხადია, საჭირო იქნება შეჯამება ყველა მუხტის მიხედვით.

თუ პოტენციალების ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ ლაგრანჟის ფუნქციაში გარეშე ველში მოთავსებულ მუხტისათვის, მაშინ ჩვენ ვიპოვიot ლაგრანჟის L_A ფუნქციას e_A მუხტისათვის (როცა მოცემულია ყველა დანარჩენი მუხტის მოძრაობა). ამასთანავე საჭირო იქნება $m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}$ კინეტიკური ენერჯის აგრეთვე v_A/c -ის ხარისხების მიხედვით დამლა და მეორე რიგამდე წევრების დატოვება. ამგვარად L_A -თვის ჩვენ შემდეგ გამოსახულებას ვპოულობთ:

$$L_A = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{1}{8} \frac{m_A v_A^4}{c^2} - e_A \sum_B \frac{e_B}{R_{AB}} + \frac{e_1}{2c^2} \sum_B \frac{e_B}{R_{AB}} [v_A v_B + (v_A n)(v_B n)]$$

(შეჯამება ყველა მუხტის მიხედვით წარმოებს e_A -ს გამოკლებით; n არის e_B და e_A -ს შორის მიმართულების ერთეულოვანი ვექტორი).

აქედან უკვე სიძნელეს არ წარმოადგენს L -ის მონახვა მთელი სისტემისათვის ადვილად მოვისაზრებთ, რომ ეს ფუნქცია L_A -ს ჯამის ტოლი კი არ არის, არამედ აქვს სახე

$$L = \sum_A \frac{m_A v_A^2}{2} + \sum_A \frac{m_A v_A^4}{8c^2} - \sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}} + \sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{2e^2 R_{AB}} [v_A v_B + (v_A n)(v_B n)]. \quad (65,6)$$

მართლაც, ყოველი მუხტისათვის, როცა ყველა დანარჩენის მოძრაობა მოცემულია, ეს L ფუნქცია გადადის ზემოდმოყვანილ L_A -ში. სწორედ (65,6) გამოსახულება განსაზღვრავს მუხტთა სისტემისათვის ლაგრანჟის ფუნქციას მეორე რიგის წევრებამდე სიზუსტით.

დასასრულს განვსაზღვროთ კიდევ მუხტთა სისტემის ჰამილტონის ფუნქცია იმავე მიახლოებით. ეს შეიძლებოდა გავგეგმეთებინა \mathcal{H} -ის L -ის საშუალებით მოძებნის ზოგადი წესების მიხედვით. მაგრამ უფრო მარტივი იქნება, თუ შემდეგნაირად მოვიქცევით. (65,6)-ის მეორე და მეოთხე წევრები მცირე შესწორებას წარმოადგენენ $L_0 = \sum_A \frac{m_A v_A^2}{2} - \sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$ -ს მიმართ. მეორე მხრით,

მექანიკიდან ცნობილია, რომ L და \mathcal{H} -ის მცირე ცვლილებებისას მათ მცირე დამატებებს ტოლი სიდიდე და მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ (ამასთანავე, L -ის

ცვლილება განიხილება მუდმივი კოორდინატებისა და სიჩქარეების შემთხვევაში, ხოლო \mathcal{H} -ის ცვლილებანი კი მუდმივი კოორდინატებისა და იმპულსების შემთხვევაში¹.

ამიტომ ჩვენ \mathcal{H} პირდაპირ შეიძლება დავწეროთ, თუ გამოხატულებას.

$\mathcal{H}_0 = \sum_A \frac{p_A^2}{2m_A} + \sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$ იმავე (59,6)-ის მეორე და მეოთხე წევრებს გამოვკლებთ და მათში სიჩქარეებს იმპულსებით შევცვლით ($v_A = p_A/m_A$). ამგვარად

$$\mathcal{H} = \sum_A \frac{p_A^2}{m_A^2} - \sum_A \frac{p_A^4}{8c^2 m_A^3} + \sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}} - \sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{2c^2 m_A m_B} [p_A p_B + (p_A n)(p_B n)]. \quad (65,7)$$

ა მ ო ც ა ნ ა

დავწეროთ ლაგრანჯის ფუნქცია მეორე მიახლოებით ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის, მისგან სისტემის როგორც მთლიანის მოძრაობის გამორიცხვით.

ამოხსნა: ავარჩიოთ ათელის სისტემა, რომელშიაც ორივე ნაწილაკის იმპულსების

ჯამი ნულის ტოლია, ე. ი. $p_1 + p_2 = \frac{\partial L}{\partial v_1} + \frac{\partial L}{\partial v_2} = 0$, სადაც L (65,6)-დან განისაზღვრება.

¹ თუ ლაგრანჯის ფუნქცია კოორდინატებისა და სიჩქარის გარდა კიდევ რაღაც λ პარამეტრზე დამოკიდებული, მაშინ

$$dL = F dq + p dq + \left(\frac{dL}{d\lambda} \right)_{q, q} \cdot d\lambda.$$

($F = \frac{\partial L}{\partial q}$ და $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ — განზოგადოებული ძალა და იმპულსია). აქედან $\mathcal{H} = p\dot{q} - L$ სათვის გვაქვს

$$d\mathcal{H} = -F dq + \dot{q} dp - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{q, \dot{q}} \cdot d\lambda.$$

ასე რომ

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right)_{q, p} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{q, \dot{q}}.$$

λ პარამეტრის მცირე ცვლილებებისას \mathcal{H} და L-იც მცირედ იცვლებიან. მიღებული ტოლობიდან ჩანს, რომ $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}$ და $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ ცვლილებებისათვის დაცულია ტოლობა ($\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \Big|_{q, p} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{q, \dot{q}}$ (ფრჩხილებს ქვემოთ მდგომი ინდექსები გვიჩვენებენ, თუ რომელი სიდიდეები უნდა განვიხილოთ როგორც მუდმივები).

თუ შემოვიტანთ ფარდობით სიჩქარეს $v = v_2 - v_1$, აქედან v_1 და v_2 -ს, v -ს საშუალებით გამოვსახავთ (ყველა გამოთვლას ვაწარმოებთ $1/c^2$ რიგის წევრებამდე სიზუსტით).

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v + \frac{m_1 m_2 (m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2)^2 c^2} v^2 + \frac{e_1 e_2}{2Rc^2} \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)^2} [v + n(vn)],$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v + \frac{m_1 m_2 (m_3 - m_1)}{2(m_1 + m_2)^2 c^2} v^2 + \frac{e_1 e_2}{2Rc^2} \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)^2} [v + n(vn)].$$

თუ ამას L -ში ჩავსვამთ იმავე სიზუსტით ვიპოვით

$$L = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v^2 + \frac{m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2)}{8(m_1 + m_2)^2 c^2} v^4 - \frac{e_1 e_2}{R} \frac{e_1 e_2}{2Rc^2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} [v^2 + (nv)^2].$$

§ 66. მუხტთა სისტემის ვალი შორ მანძილზე

განვიხილოთ მოძრავი მუხტთა სისტემის ველი ამ სისტემიდან შორ მანძილზე (ე. ი. ისეთ მანძილზე, რომელიც დიდია სისტემის ზომასთან შედარებით). ამასთანავე ჩვენ ისევ დავვიანებულები პოტენციალთა გამოსახულებიდან გამოვალთ:

$$\varphi = \int \frac{1}{R} \rho_t - \frac{R}{c} dV, \quad A = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R} j_t - \frac{R}{c} dV.$$

კოორდინატთა O სათავე სადმე მუხტთა სისტემის შიგნით ავარჩიოთ. რადიუს-ვექტორი Q -დან იმ P წერტილისაკენ, რომელშიც ჩვენ ველის მნიშვნელობას ვეძებთ, R_0 -ით აღვნიშნოთ, ხოლო ამ მიმართულების ერთეულოვანი ვექტორი n -ით. $de = \rho dV$ მუხტის რადიუს-ვექტორი იყოს r , ხოლო de -დან P -მდე რადიუს-ვექტორი R . ცხადია, რომ $R = R_0 - r$ და $R = |R_0 - r|$. φ -ში და A -ში ინტეგრების დროს R_0 მუდმივად ითვლება.

მუხტთა სისტემიდან დიდ მანძილზე $R_0 \gg r$. ამიტომ P წერტილებში R_0 და R ვექტორების მიერ შექმნილი კუთხე მეტად მცირეა. თუ $R = R_0 - r$ ტოლობას n -ზე გავამრავლებთ და შევნიშნავთ, რომ $R_0 n = R_0$, მიახლოებით გვექნება $R = R_0 - rn$ (Rn -ის ნაცვლად შეიძლება უბრალოდ R დავწეროთ, ვინაიდან შათ შორის განსხვავება მეორე რიგის სიმცირისაა) ჩავსვათ ეს დავვიანებულ პოტენციალთა გამოსახულებებში. ინტეგრალქვეშა გამოსახულებათა მნიშვნელებში შეიძლება rn უკულებელყოთ R_0 -თან შედარებით. $t - R/c$ -ში, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ასეთი უკულებელყოფა შეუძლებელია. მაგრამ აქ ასეთი უკულებელყოფის შესაძლებლობა R_0/c -ს და rn -ს ფარდობითი სიდიდით კი არ განისაზღვრება, არამედ იმით, თუ რამდენად იცვლებიან ρ და j სიდიდეები rn/c დროს განმავლობაში. ამგვარად, სისტემიდან საკმაოდ შორ მანძილზე ველის პოტენციალებისათვის ვპოულობთ გამოსახულებებს:

$$\varphi = \frac{1}{R_0} \int \rho_t - \frac{R_0}{c} + \frac{rn}{c} dV, \quad (66,1)$$

$$A = \frac{1}{cR_0} \int j_t - \frac{R_0}{c} + \frac{rn}{c} dV. \quad (66,2)$$

მუხტთა სისტემიდან შორ მანძილზე სივრცის მცირე უბანში ველი შეიძლება ზანვიხილოთ როგორც ბრტყელი ტალღა. ამიტომ ამ ველის E და H დაბულობანი დაკავშირებულია თანაფარდობით $H = [nE]$ [იხ. 46,4]. მაშასადამე, ველის განსასაზღვრავად საკმარისია მხოლოდ A ვექტორული პოტენციალის გამოთვლა, რომლის საშუალებითაც შეიძლება ვიპოვოთ ველი $H = \text{rot } A$. შევნიშნოთ, რომ ველის ბრტყელი ტალღის სახით განხილვა შესაძლებელია არა მხოლოდ ისეთ მანძილზე, რომელიც სისტემის ზომასთან შედარებით დიდია, არამედ ისეთზედაც, რომელიც დიდია სისტემის მიერ შექმნილი ან, როგორც იტყვიან, გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის სიგრძესთან შედარებით.

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ტალღა, რომელსაც გარკვეული სიხშირე აქვს. იგი შეიძლება წარზოდგენდეს რომელიმე არამონოქრომატული ტალღის ფურიეს მწკრივად ან ინტეგრალად დაშლის ერთერთ კომპონენტს. ასეთი ტალღის ვექტორულ პოტენციალს აქვს $A_0 e^{-i\omega t}$ სახე, სადაც ω მისი სიხშირეა. ცხადია, ტალღის ველის განმსაზღვრებელ სხვა სიდიდეებსაც ანალოგიური სახე ექნებათ. გამომსხივებელი სისტემის დენის სიმკვრივეც (და მუხტების სიმკვრივეც) შეიძლება დაეშალოთ ფურიეს მწკრივად ან ინტეგრალად, ასე რომ გარკვეული მონოქრომატული კომპონენტის გამოსხივებაზე პასუხისმგებელი იქნება დენის შესაბამისი კომპონენტი $j\omega e^{-i\omega t}$. ცხადია, რომ ტალღა $A_0 e^{-i\omega t}$ (66,2) ფორმულით განისაზღვრება, სადაც j -ს ნაცვლად უნდა ჩაისვას შესაბამისი $j\omega e^{-i\omega t}$ კომპონენტი. მაშინ ჩვენ ვპოულობთ:

$$A_0 e^{-i\omega t} = \frac{1}{cR_0} \int j\omega e^{-i\omega \left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{rn}{c} \right)} dV. \quad (66,3)$$

თუ ამას $e^{-i\omega t}$ -ზე შევკვეცავთ და $k = \frac{\omega}{c} n$ ტალღურ ვექტორს შემოვიღებთ, გვექნება¹

$$A_0 = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int j\omega \exp(i kr) dV. \quad (66,4)$$

§ 67. დიპოლური გამოსხივება

დაგვიანებული პოტენციალების (66,1—2) გამოსახულებების ინტეგრალ ქვეშა ფუნქციებში rn/c დრო ყოველთვის შეიძლება უგულვებლედ ყოთ იმ შემთხვევებში, თუ ამ დროს განმავლობაში მუხტების განაწილება მცირედ იცვლება. აღვიღად მოიძებნება ამ მოთხოვნების განსახორციელებლად საჭირო პირობები. დაუშვათ, რომ განსახილავ სისტემაში მუხტების მოძრაობა საზოგადოდ სტაციონარულია და ვთქვათ T იმ დროს სიდიდის რიგია, რომლის განმავლობაშიაც მუხტების განაწილება სივრცეში შესამჩნევად იცვლება. ცხადია, რომ მაშინ ამ სისტემის გამოსხივებას რიგე T რიგის პერიოდი ექნება (ე. ი. $1/T$

¹ ჩვენ A_0 -ას გამოსახულებას კომპლექსური სახით ვწერთ. უნდა გვახსოვდეს, რომ ასეთ შემთხვევებში ყოველთვის $A_0 e^{-i\omega t}$ -ს ნამდვილი ნაწილი უნდა იქნეს ადებული.

სიხშირე ექნება). შემდეგ, a -თი აღენიშნოთ სისტემის ზომის რაღი. მაშინ დრო r/c იქნება a/c -ს რიგისა. იმისათვის, რომ ამ დროს განმავლობაში სისტემაში მუხტების განაწილებამ ვერ მოასწოროს მნიშვნელოვნად შეცვლა, აუცილებელია, რომ $a/c \ll T$, მაგრამ cT არის გამოსხივების ტალღის სიგრძე. ამგვარად პირობა $a \ll cT$ შეიძლება დაიწეროს სახით

$$a \ll \lambda, \quad (67,1)$$

ე. ი. სისტემის ზომა მცირე უნდა იყოს გამოსხივებული ტალღის სიგრძესთან შედარებით.

შეენიშნოთ, რომ ეს (67,1) პირობა შეიძლება მივიღოთ აგრეთვე (66,4)-დანაც. ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში r გაირბენს მნიშვნელობებს სისტემის ზომის რიგის არეში, ვინაიდან სისტემის გარედ j ნულის ტოლია. ამიტომ მაჩვენებელი $i kr$ მცირეა, და იგი შეიძლება უგულებელვყოთ იმ ტალღებისათვის, რომელთათვისაც $ka \ll 1$, რაც (67,1)-ის ექვივალენტურია.

ეს შეიძლება კიდევ სხვა სახითაც დავწეროთ, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $T \sim a/v$, ასე რომ $\lambda \sim ca/v$, თუ v არის მუხტთა სიჩქარის სიდიდის რიგი. მაშინ $a \ll \lambda$ -დან ეპოულობთ

$$v \ll c, \quad (67,2)$$

გ. ი. მუხტების სიჩქარე მცირე უნდა იყოს სინათლის სიჩქარესთან შედარებით.

დაუშვათ, რომ ეს პირობა შესრულებულია, და შეუდგეთ გამოსხივების შესწავლას გამომსხივებელი სისტემიდან ისეთ მანძილზე, რომელიც დიდია ტალღის სიგრძესთან შედარებით (და მაშასადამე, ყოველ შემთხვევაში, დიდია სისტემის ზომასთან შედარებით). როგორც § 66-ში იყო მითითებული, ასეთ მანძილზე ველი ბრტყელი ტალღის სახით შეიძლება განვიხილოთ, და ამიტომ ველის განსაზღვრისათვის საკმარისია მხოლოდ ვექტორული პოტენციალის გამოთვლა.

ველის (66,2) ვექტორულ პოტენციალს შორ მანძილზე აქვს ახლა სახე

$$A = \frac{1}{cR_0} \int j_t dV, \quad (67,3)$$

სადაც $r' = r - R_0/c$. ახლა j' უკვე არ არის ინტეგრირების ცვლადებზე დამოკიდებული. ჩავსვათ $j = \rho v$ და (67,3) გადავწეროთ სახით

$$A = \frac{1}{cR_0} \left(\sum e v \right)$$

(შეჯამება წარმოებს სისტემის ყველა მუხტის მიხედვით. სიმოკლისათვის r' ნიშნაკს გამოვტოვებთ. ყველა სიდიდე აღებულია დროს t' მომენტში). მაგრამ

$$\sum e v = \frac{d}{dt} \sum e r = \dot{d},$$

სადაც \mathbf{d} სისტემის დიპოლური მომენტია. ამგვარად,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \mathbf{d}. \quad (67,4)$$

ახლა უკვე ადვილად განისაზღვრება \mathbf{E} და \mathbf{H} ველებიც. \mathbf{H} -თვის გვაქვს

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}$$

$\frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}$ ნამრავლის გადიფერენციალებისას $1/R_0$ მამრავლი შეიძლება მუდმივად ჩავთვალოთ (ვინაიდან $1/R_0$ -ის გადიფერენციალებით მიიღება $1/R_0^2$ -ის პროპორციული წევრი, რომელიც შეიძლება უგულებელვყოთ $1/R_0$ -თან შედარებით) და გადიფერენციალება ვაწარმოოთ R_0 -ის მიხედვით, რომელიც r' -ს შეიცავს. მაშინ ჩვენ ვპოულობთ

$$\mathbf{H} = \frac{1}{cR_0} \text{rot } \dot{\mathbf{d}}.$$

ყოველი $\mathbf{a}(r')$ ვექტორისათვის, რომელიც r' -ის ფუნქციას წარმოადგენს, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\text{rot } \mathbf{a}(r') = \left[\text{grad } r' \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dr'} \right].$$

მაგრამ $\nabla r' = -\frac{1}{c} \nabla R_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c}$, სადაც \mathbf{n} ერთეულოვანი ვექტორია R_0 -ის მიმართულებით და ამიტომ

$$\text{rot } \mathbf{a}(r') = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{a}}\mathbf{n}]. \quad (67,5)$$

ამგვარად მაგნიტური ველი ტოლია

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\dot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \quad (67,6)$$

ხოლო ელექტრული ველი

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\dot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]. \quad (67,7)$$

აეღნიშნოთ, რომ გამოსხივებული ტალღის ველი გამომსხივებელი სისტემიდან მანძილის უკუპროპორციულია. შემდეგ, განსახილავი მიახლოებაში გამოსხივება სისტემის დიპოლური მომენტის მეორე წარმოებულთ განისაზღვრება. ასეთ გამოსხივებას დიპოლური ეწოდება.

რამდენადაც $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, ამიტომ $\dot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. ამგვარად, მუხტებს გამოსხივება მხოლოდ მაშინ შეუძლიათ, როცა ისინი აჩქარებულად მოძრაობენ. თანაბრად მოძრავე მუხტები არ გამოასხივებენ. ეს, სხვათა შორის, უშუალოდ ფარდობითობის პრინციპიდან გამომდინარეობს, რადგან თანაბრად მოძრავე მუხტი

შეიძლება ისეთ ინერციულ სისტემაში განვიხილოთ, რომელშიაც იგი უძრავია, ხოლო უძრავი მუხტები კი, ცხადია, არ გამოასხივებენ.

ელექტრომაგნიტური ტალღების გამოსხივებას, ცხადია, თანსდევს ენერჯის გამოსხივება. ენერჯის ნაკადი პოინტინგის ვექტორით განისაზღვრება [იხ. (31,2)]:

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH].$$

რამდენადაც ჩვენს შემთხვევაში $E = [Hn]$, ხოლო $H \perp n$, ამიტომ

$$S = \frac{c}{4\pi} H^2 n.$$

თუ აქ (67,6)-ს ჩაავსვამთ, ვიპოვით

$$S = \frac{1}{4\pi c^2 R_0^2} [\ddot{d}n]^2 n. \quad (67,8)$$

პოინტინგის ვექტორს, ე. ი. ენერჯის ნაკადს, აქვს ტალღის გავრცელების მიმართულება.

ვიპოვოთ dJ ენერჯის რაოდენობა, რომელიც გადინდება დროს ერთეულში იმ სფერული ზედაპირის df ელემენტში, რომლის რადიუსი R_0 -ია, ხოლო ცენტრი კოორდინატთა სათავეში აქვს. ეს რაოდენობა, ცხადია, ტოლია df -ზე გამრავლებული S ნაჭადისა, ე. ი.

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^2 R_0^2} [\ddot{d}n]^2 df.$$

მაგრამ ზედაპირის ელემენტი $df = R_0^2 d\Omega$, სადაც $d\Omega$ სხეულოვანი კუთხეა, რომელშიაც df ელემენტი მოჩანს კოორდინატთა სათავიდან. მაშასადამე

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^2} [\ddot{d}n]^2 d\Omega. \quad (67,9)$$

ეს არის სწორედ იმ ენერჯის რაოდენობა, რომელსაც სისტემა $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში ერთეულ დროში გამოასხივებს. ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს რაოდენობა ერთიდაიგივეა ყველა მანძილისათვის (მათთვის ერთიდაიგივე r მონენტში). ეს, რა თქმა უნდა, ასეც უნდა ყოფილიყო, ვინაიდან სისტემის მიერ გამოსხივებული ენერჯია გარე სივრცეში ისე ვრცელდება, რომ იგი არსად არ გროვდება და არსად არ ისპობა.

(67,9)-ან გამომდინარე შეიძლება გამოვთვალოთ J ენერჯის სრული რაოდენობა, რომელსაც სისტემა ერთეულ დროში გამოასხივებს ყველა მიმართულებით. ამისთვის შემოვიღოთ სფერული კოორდინატები μ ვექტორის გასწვრივ მიმართული პოლარული დერძით. θ ვექტორის პოლარული კუთხე და აზიმუტი ამ კოორდინატებში ვთქვათ არის Θ და Φ . მაშასადამე Θ არის μ და θ -ს შორის კუთხე. მაშინ $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi$ და (67,9) გადადის

$$dJ = \frac{d^2}{4\pi c^2} \sin^2 \Theta d\Theta d\Phi.$$

თუ მოვახდენთ ინტეგრირებას $d\varphi$ -თი 0-დან 2π -მდე და $d\theta$ -თი 0 დახ π -მდე, ვიპოვიტ

$$J = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2. \quad (67,10)$$

თუ სულ მხოლოდ ერთი მუხტი გვაქვს, მაშინ $d = cr$ და $\ddot{d} = \varepsilon w$, სადაც w მუხტის აჩქარებაა. ამგვარად, მოძრავი მუხტის სრული გამოსხივება J იქნება

$$J = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \quad (67,11)$$

აქვნიშნოთ, რომ ისეთ ნაწილაკებისაგან შემდგარ სისტემას, რომლებსაც მუხტისა და მასის შეფარდება ერთნაირი აქვთ, არ შეუძლია გამოსხივება (დიპოლური). მართლაც, ასეთი სისტემისათვის დიპოლური მომენტი

$$d = \sum er = \sum \frac{e}{m} m r = \text{const.} \sum m r,$$

სადაც const. ყველა მუხტისათვის ერთიდაიგივე მუხტისა და მასის შეფარდებას წარმოადგენს. მაგრამ $\sum m r = R \sum m$, სადაც R სისტემის ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორია (გავიხსენოთ, რომ ყველა სიჩქარე $v \ll c$, ასე რომ შეიძლება არარელატივისტური მექანიკის გამოყენება). ამიტომ \ddot{d} ინერციის ცენტრის აჩქარების პროპორციულია, ე. ი. ნულის ტოლია, ვინაიდან ინერციის ცენტრი მოძრაობს თანაბრად.

ა მ ლ ც ა ნ ე ბ ა

1. განვსაზღვროთ ორი ურთიერთმიზიდავი მუხტის ელიფსური მოძრაობისას სრული გამოსხივება ერთი შემობრუნების დროის განმავლობაში.

ამოხსნა: კოორდინატთა სათავე ორივე ნაწილაკის ინერციის ცენტრში მოვათავსოთ. მაშინ (67,10) გვაძლევს

$$J = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{em' - e'm}{m + m'} \right)^2 \ddot{r}^2,$$

სადაც e , m , e' და m' ნაწილაკთა მუხტები და მასებია, ხოლო r მათ შორის რადიუს-ვექტორია. მოძრაობის განტოლებათა თანახმად $\mu \ddot{r} = \frac{a}{r^2}$ (μ დაყვანილი მასაა, $a = |ee'|$), ასე რომ

$$J = \frac{2a^2}{3c^3 \mu^2} \left(\frac{em' - e'm}{m + m'} \right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

ჩვენთვის ცნობილია ორბიტის განტოლება არის $p/r = 1 + \varepsilon \cos \varphi$, სადაც $p = M^2/a\mu$ და $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{\mu a^2}}$ ორბიტის პარამეტრს და ექსცენტრისიტეტს წარმოადგენენ — ($M = \mu r^2 \dot{\varphi}$ იმპულსის მომენტი, \mathcal{E} კი ნაწილაკის ენერჯიაა, ამისთანავე ელიფსური მოძრაობისათვის $\mathcal{E} < 0$). $dt = \frac{\mu r^3}{M} d\varphi$ ტოლობის დახმარებით დროთი ინტეგრება შეიძლება

$d\rho$ კუთხით ინტეგრებით შევკვალათ (0-დან 2π -მდე). ამის შედეგად ვპოულობთ სრულ გა მოსხივებას $\Delta \mathcal{E} = \int J dt$ ერთი შემობრუნების განმავლობაში

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2\pi}{3c^3} \sqrt{\frac{a^3 \mu}{\rho^3}} \left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'} \right)^2 (2 + \epsilon^2).$$

2 განესახლვროთ სრული გამოსხივება იმ დროს განმავლობაში, როცა ერთი მუხტი მეორეს ჩაუვლის.

ამოხსნა: მუხტების მიზიდვის შემთხვევაში ტრავექტორია არის ჰიპერბოლა $p/r = 1 - \epsilon \cos \varphi$, ხოლო განზიდვისას კი $p/r = -1 + \epsilon \cos \varphi$. მისი ასიმტოტები ღერძთან φ_0 კუთხეს შეადგენენ, რომელიც განისაზღვრება ტოლობიდან $\cos \varphi_0 = 1/\epsilon$, ხოლო ნაწილაკის ჩაუვლის დროს გადახრის კუთხე $\chi = \pi - 2\varphi_0$. ამოხსნა ისეთივეა, როგორც 1 ამოცანაში, მაგრამ $d\rho$ -ს მიხედვით ინტეგრება წარმოება $-\varphi_0$ -სა და $+\varphi_0$ -ს შორის. ამის შედეგად ვპოულობთ:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2\mu^3 v_0^5}{3c^3 a} \left[\frac{\chi}{2} \left\{ (\pi - \chi) \left(1 + \frac{1}{2\epsilon \sin^2 \frac{\chi}{2}} \right) - 3 \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} \right\} \left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'} \right)^2 \right]$$

(გადახრის კუთხე χ განისაზღვრება თანაფარდობიდან $\operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = -\frac{v_0^2 \rho}{a}$, v_0 სიჩქარეა ნაწილაკთა შორის უსასრულო მანძილის დროს, ρ — დამიზნების მანძილია, აქ ϵ $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}$, $M = \mu v_0 \epsilon$).

მუხტების განზიდვის შემთხვევაში პირდაპირი დაჯახებისას ($\rho = 0$) გადახრის კუთხე $\chi = \pi$, და დაწერილი ფორმულა გადადის

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2\mu^3 v_0^5}{45c^3 a} \left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'} \right)^2$$

3. ნაწილაკთა პარალელური ნაკადი (ϵ მუხტით და m მასით) e' მუხტებით გაიფანტება (m' მასით; e და e' ერთი ნიშანი აქვთ) განესახლვროთ ნაკადის სიმკვრივის ერთეულის შესახებში სრული გამოსხივება.

ამოხსნა: თუ სიმკვრივე ერთის ტოლია (ე. ი. ნაწილაკთა კონის ჩაიკვეთის ფართობის ერთეულში დროს ერთეულის განმავლობაში ერთი ნაწილაკი გაივლის) მაშინ კონაში იმ ნაწილაკთა რიცხვი, რომელთა „დამიზნების მანძილი“ d -სა და $d + dd$ -ს შორისაა, უდრის $2\pi d |d\rho$. ამიტომ საძებნი სრული გამოსხივების მისაღებად ერთი ნაწილაკის სრული გამოსხივება უნდა გავამრავლოთ $2\pi d |d\rho$ -ზე და იგი ρ -ს მიხედვით გავინტეგრალათ 0-დან a -მდე.

2-ე ამოცანის $\Delta \mathcal{E}$ გამოსახულების დახმარებით და $\operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = \frac{|\mathbf{v}|^2 \rho}{a}$ თანაფარდობის გამოყენებით ვიპოვით

$$\int_0^a 2\pi \rho \Delta \mathcal{E} d\rho = \frac{14\pi \mu v_0 a}{9c^3} \left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'} \right)^2.$$

4. განესახლვროთ სრული გამოსხივების განაწილება მიმართულებათა მიხედვით ერთი მუხტის მეორის მახლობლად გაულისას, როდესაც მუხტის სიჩქარე იმდენად დიდია (თუშეცვა მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით), რომ შესაძლებელია სწორხაზოვანი მოძრაობიდან გადახრა მცირედ ჩაითვალოს.

ამოხსნა: გადახრის კუთხე მცირე იქნება, თუ $\mu v^2/2$ კინეტიკური ენერჯია დიდია პოტენციალურ ენერჯიასთან შედარებით, რომლის სიღრმის რიგი არის a/ρ ($\mu v^2 > a/\rho$). მოძრაო-

ბის მიმართულება X ღერძად ავირჩიოთ, ხოლო კოორდინატთა სათავე ისევ ინერციის ცენტრში მოვათავსოთ. პირველ მიახლოებაში ტრაექტორია განისაზღვრება როგორც $x = vt$, $y = 0$. შემდეგ მიახლოებაში მოძრაობის განტოლებანი გვაძლევენ

$$\mu \ddot{x} = \frac{a}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{avt}{r^3}, \quad \mu \ddot{y} = \frac{a}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{ay}{r^3},$$

სადაც r -თვის შეიძლება დავწეროთ $r = \sqrt{v^2 t^2 + v_0^2}$. თუ ამ ფორმულების დახმარებით (67,2) ფორმულას დროს მიხედვით გავაინტეგრალებთ $- \infty$ -დან $+\infty$ -მდე, ∞ სხეულოვან კუთხეში სრული გამოსხივებისათვის ვიპოვით:

$$\Delta \mathcal{E}_n d\Omega = \frac{a^2}{32 \pi c^3 \rho^3} \left(\frac{c}{m} - \frac{c'}{m'} \right)^2 (4 - 3n^2 - n^2) d\Omega$$

(n_x და n_y წარმოადგენენ n ვექტორის კომპონენტებს $d\Omega$ -ს მიმართულებით).

§ 68. კვადრატული და მახვილური დიპოლური გამოსხივება

განვიხილოთ ახლა (66,2) ვექტორული პოტენციალის დაშლის შემდგომი წევრებით გამოწვეული გამოსხივება. თუ სისტემის ზომა მცირეა ტალღის სიგრძესთან შედარებით, მაშინ ეს წევრები, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, გაცილებით ნაკლები არიან პირველ წევრზე, რომელიც დიპოლურ გამოსხივებას იძლევა. მაგრამ, მათი მნიშვნელობა არსებითია იმ შემთხვევაში, როცა მუხტთა სისტემის დიპოლური მომენტი ნულის ტოლია და ამიტომ დიპოლური გამოსხივება არ არსებობს.

თუ (66,2) გამოსახულებას:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}' + \frac{r\mathbf{n}}{c} dV$$

დავშლით $\mathbf{n}r/c$ -ს ხარისხების მიხედვით, მაშინ პირველი რიგის წევრებამდე სიზუსტით ვიპოვით

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}' dV + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \int (r\mathbf{n}) \mathbf{j}' dV.$$

თუ ამაში ჩავსვამ $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, იგი შემდეგი სახით შეიძლება გადავწეროთ

$$\mathbf{A} = \frac{\sum \epsilon \mathbf{v}'}{cR_0} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \sum \epsilon \mathbf{v}' (r\mathbf{n}) \quad (68,1)$$

(ქვემოთ, ისევე როგორც § 67-ში, სიმოკლისათვის t' ინდექსს გამოვტოვებთ).

\mathbf{A} -ს გამოსახულება შემდეგნაირად გარდავქმნათ. მეორე წევრში შეიძლება დავწეროთ

$$\mathbf{v}(r\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{n}r) + \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{n}r) - \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{n}v) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{n}r) + \frac{1}{2} [(\mathbf{r}v)\mathbf{n}].$$

მაშინ ჩვენ A -თვის ვპოულობთ გამოსახულებას

$$A = \frac{\dot{d}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e r(nr) + \frac{1}{cR_0} [\dot{m}n],$$

სადაც d სისტემის დიპოლური მომენტი, ხოლო $m = \frac{1}{2c} \sum e [rv]$ არის მისი მაგნიტური მომენტი. შემდგომი გარდაქმნისათვის შევნიშნოთ, რომ ველის შეუცვლელად A -ს შეიძლება დაუმატოთ ნებისმიერი n -ის პროპორციული ვექტორი. მართლაც, თუ A -ს დავმატებთ fn სახის ვექტორს, მაშინ მაგნიტური ველი უცვლელი დარჩება, რა ფგან (67,5)-ის თანახმად

$$\text{rot } fn = \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} [n] = 0$$

(ველექტრული ველი $E = [Hn]$, ე. ი. მაღლიანად მაგნიტური ველით განისაზღვრება, და, მაშასადამე, აღნიშნული გარდაქმნის დროს აგრეთვე არ იცვლება).

ამის საფუძველზე A -სათვის მიღებულ გამოსახულებას დაუმატოთ ვექტორი — $\frac{n}{6c^2R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e r^2$. მაშინ პოტენციალისათვის ჩვენ მივიღებთ:

$$A = \frac{\dot{d}}{cR_0} + \frac{1}{c^2R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{2} \sum e \left[r(nr) - \frac{1}{3} nr^2 \right] + \frac{1}{cR_0} [\dot{m}n].$$

მაგრამ $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ნიშნის ქვეშ მდგომი გამოსახულება $n_{\alpha} D_{\alpha\beta}$ ნამრავლს, ე. ი. n

ვექტორისა და $D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_{\alpha}x_{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right)$ (იხ. § 41) კვადრუპოლური მომენტის ტენზორის ნამრავლს წარმოადგენს. თუ შემოვიტანთ D ვექტორს $D_{\alpha} = D_{\alpha\beta} n_{\beta}$ კომპონენტებით, ვექტორული პოტენციალისათვის ვიპოვით საბოლოო გამოსახულებას:

$$A = \frac{\dot{d}}{cR_0} + \frac{1}{c^2R_0} \ddot{D} + \frac{1}{cR_0} [\dot{m}n]. \quad (68,2)$$

თუ A გვეცოდინება, ჩვენ შეგვიძლია გამოსხივების E და H ვექტორები განვსაზღვროთ. ზოგადი (67,5) ფორმულის დახმარებით შემდეგ გამოსახულებებს ვპოულობთ:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{c^2R_0} \left\{ [\ddot{m}n] + \frac{1}{c} [\dot{D}n] + [(\dot{m}n)n] \right\}, \\ E &= \frac{1}{c^2R_0} \left\{ [(\dot{d}n)n] + \frac{1}{c} [(\dot{D}n)n] + [n\dot{m}] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (68,3)$$

თუ გვეცოდინება მაგნიტური ველი, მაშინ ადვილად განვსაზღვრავთ გამოსხივების dJ ინტენსივობას dO სხეულოვან კუთხეში, საესებით იმის ანალოგიურად, როგორც ეს გაეაკეთეთ § 67-ში დიპოლური გამოსხივებისათვის, ე. ი.

$dJ = \frac{c}{4\pi} H^2 R_0^2 d\Omega$ ფორმულის მიხედვით. ჩვენ აქ განესაზღვრავთ სრულ გა-

მოსხივებას, ე. ი. სისტემის მიერ ყოველი მიმართულებით დროს ერთეულში გამოსხივებულ ენერგიას. ამისათვის გავსაშუალოდ dJ ყველა Ω მიმართულებით. ცხადია, რომ სრული გამოსხივება ტოლი იქნება 4π -ზე გამრავლებული ამ საშუალოსი. მაგნიტური ველის კვადრატის გასაშუალების დროს H -ში პირველი, მეორე და მესამე წევრის ყველა ერთიმეორეზე ნაწარველი ისპობა, რჩება მხოლოდ ყოველი მათგანის საშუალო კვადრატი. ამის შედეგად არართული გამოთვლები¹ J -სათვის შემდეგ გამოსახულებას გვაძლევს:

$$J = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 + \frac{1}{5c^5} \ddot{D}^2_{\alpha\beta} + \frac{2}{3c^5} \ddot{m}^2. \quad (63,4)$$

ამგვარად, სრული გამოსხივება სამი დამოუკიდებელი ნაწილისაგან შედგება. მათ შესაბამისად დიპოლური, კვადრუპოლური და მაგნიტური დიპოლური განსხივება ეწოდებათ.

ა მ ო ც ა ნ ა

განესაზღვროთ ერთი და იგივე e მუხტისა და m მასის მქონე ორი ნაწილაკის სრული გამოსხივება მათი პირდაპირი დაჯახების დროს.

ამ ობსნა: ამ შემთხვევაში დიპოლური გამოსხივევა არა გვაქვს! კოორდინატთა სათავე; ინერციის ცენტრში ავირჩიოთ, ხოლო X ღერძი მოძრაობის გააწვივოვ მიემართოთ. კვადრუპოლური მომენტისათვის გვაქვს

$$D_{xx} = -\frac{1}{6} ex^2, \quad D_{yy} = D_{zz} = -\frac{1}{12} ex.$$

(68,4)-დან ვაოულობთ

$$J = \frac{e^2}{30c^3} (x \ddot{x} + 3 \dot{x} \dot{x})^2.$$

მოძრაობის განტოლება გვაძლევს $\frac{m}{2} \ddot{x} = \frac{e^2}{x^2}$. უფრო მოხერხებულია დროთი ინტეგრება.

შეეცვალოთ dx -ით ინტეგრებით $x = \sqrt{\frac{4\mathcal{E}}{m} - \frac{4e^2}{mx}}$ -ის დახმარებით, სადაც $\mathcal{E} = \frac{mv_0^2}{4}$

¹ მოვიყვანოთ ერთეულოვანი ვექტორების კომპონენტთა ნაწარველების გასაშუალების. მოხერხებული მეთოდი. რამდენადაც Ω ერთეულოვანი ვექტორია, ამიტომ რაკი $\Omega_{\alpha\beta}$ სიმეტრიული თენზორია, იგი მხოლოდ $\delta_{\alpha\beta}$ ერთეულოვანი ტენზორით შეიძლება გამოისახოს, ე. ი. $\Omega_{\alpha\beta} = a\delta_{\alpha\beta}$. თუ მოვახდენთ შეკვეცას α, β წყვილი ინდექსების მიხედვით და გვეხსომება, რომ $\Omega_{\alpha\alpha} = 1$, ვიპოვიოთ, რომ $a = 1/3$.

ოთხი კომპონენტის ნაწარველის საშუალო მნიშვნელობისათვის ანალოგიურად ეწვიოთ

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta} = a(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

(თუ გვაქნება მხედველობაში $\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ -ს სიმეტრიულობა ყველა თთხი ინდექსის მიხედვით)- შეკვეცა ინდექსების α, β და γ, δ წყვილების მიხედვით გვაძლევს $a = 1/15$.

ფარდობითი მოძრაობის ენერჯია, v_0 კი სიჩქარე უსასრულობაში. ამის შედეგად ვპოულობთ

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{1575} \frac{mv^7_0}{c^6}$$



§ 69. გამოსხივება მახლოვებულ მანძილზე

დიპოლური გამოსხივების ფორმულები ველისათვის გამოყვანილი იყო იქეთი მანძილისათვის, რომელიც დიდია ტალღის სიგრძესთან შედარებით (და გაცილებით მეტია გამოსხივებული სისტემის ზომაზე). ჩვენ ამ პარაგრაფში, როგორც წინადა, ვიგულისხმებთ, რომ ტალღის სიგრძე დიდია სისტემის ზომასთან შედარებით, მაგრამ ველს ისეთ მანძილზე განვიხილავთ, რომელიც თუმცა სისტემის ზომაზე დიდია, მაგრამ ტალღის სიგრძის რიგისაა. ამასთანავე ჩვენ წინანდებურად § 68 ფორმულებით შეიძლება ვისარგებლოთ, რომლებიც გამოყვანილი იყო მხოლოდ სისტემის ზომასთან შედარებით დიდი მანძილებისათვის, მაგრამ ახლა ველს მცირე უბნებისთვისაც კი ბრტყელ ტალღად ვერ ჩავევლით. ამიტომ ველის განსაზღვრისათვის აუცილებელია როგორც A-ს, ისე ფ-ს გამოთვლა.

ჩვენ განვიხილავთ საძებნი ველის ფურიეს კომპონენტებს. ყოველი ასეთი მონოქრომატული კომპონენტისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგადი (66,4) ფორმულა

$$A_{\omega} = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_{\omega} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) dV$$

რამდენადაც სისტემის ზომა ტალღის სიგრძესთან შედარებით მცირეა, ამიტომ $\mathbf{k}\mathbf{r} \ll 1$ და ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ შეიძლება $\mathbf{k}\mathbf{r}$ -ის ხარისხების მიხედვით დავშალოთ. თუ ვექტორულ პოტენციალში ნულოვანი რიგის წევრით შემოვივსაზღვრებით, გვექნება:

$$A_{\omega} = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_{\omega} dV \tag{69,1}$$

ეს გამოსახულება სხვა სახითაც დაიწერება, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\int \mathbf{j}_{\omega} dV = \left(\int \mathbf{j} dV \right)_{\omega} = \left(\sum \mathbf{e} \mathbf{v} \right)_{\omega} = \mathbf{d}_{\omega}$$

ხოლო \mathbf{d} წარმოებულის ფურიეს კომპონენტთა \mathbf{d}_{ω} შესაბამ კომპონენტასთან დაკავშირებულია თანათარღობით

$$\mathbf{d}_{\omega} e^{-i\omega t} = \frac{d}{dt} (\mathbf{d}_{\omega} e^{-i\omega t}) = -i\omega \mathbf{d}_{\omega} e^{-i\omega t},$$

ე. ი.

$$\mathbf{d}_{\omega} = -i\omega \mathbf{d}_{\omega}$$

თუ ამ თახხთარდობებს (69,1)-ში ჩავსვამთ, ველის ვექტორული პოტენციალისათვის ვიპოვიან

$$A_{\omega} = -ik \frac{e^{ikR_0}}{R_0} d_{\omega}. \quad (69,2)$$

ფა სკალარული პოტენციალი უშუალოდ შეიძლება A_{ω} -დან მივიღოთ ზოგადი (64,3) პირობის $\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ გამოყენებით, რომელიც პოტენციალებმა უნდა დააკმაყოფილონ.

ფურიეს კომპონენტებისათვის ეს პირობა გეძლევის

$$ik\varphi_{\omega} = \operatorname{div} A_{\omega}, \quad (69,3)$$

და, თუ (69,2)-ს ჩავსვამთ და გავიხსენებთ, რომ d_{ω} მუდმივია, ვიპოვიან

$$\varphi_{\omega} = -d_{\omega} \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \quad (69,4)$$

აღვილად განისაზღვრება აგრეთვე E_{ω} და H_{ω} ველები. თუ ფორმულებში $H = \operatorname{rot} A$ და $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$ ყველა ამ სიდიდეთა ფურიეს კომპონენტებს ჩავსვამ, ვიპოვიან:

$$H_{\omega} = \operatorname{rot} A_{\omega}, \quad E_{\omega} = ik A_{\omega} - \operatorname{grad} \varphi_{\omega}, \quad (69,5)$$

და (69,2), (69,4)-ის დახმარებით ვღებულობთ:

$$H_{\omega} = ik \left[d_{\omega} \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right], \quad (69,6)$$

$$E_{\omega} = k^2 \frac{e^{ikR_0}}{R_0} d_{\omega} + (d_{\omega} \nabla) \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \quad (69,7)$$

(69,6) და (69,7) ფორმულები განსაზღვრავენ ველს ტალღის სიგრძის რიგის მანძილზე. ამ ფორმულებში ახლა, რასაკვირველია, ვერ უგულველყოფთ $1/R_0^2$ -ის შემცველ წევრებს, ვინაიდან მათი შეფარდება $1/R_0$ -იან წევრებთან $1/kR_0$ -ის რიგისაა, ხოლო $kR_0 \approx 1$.

ჩვენ მიერ აქ ჩატარებული დაშლა შეიძლებოდა უფრო მაღალი რიგის წევრებამდე დაგვეყვანა, რომლებიც განისაზღვრებიან სისტემის შესაბამის ეულტიპოლური მომენტებით.

§ 70. სწრაფად მოძრავი მუხტის გამოსხივება

განვიხილოთ ახლა დამუხტული ნაწილაკი, რომლის მოძრაობის სიჩქარე არ არის მცირე სინათლის სიჩქარესთან შედარებით. ამ შემთხვევაში უშუალოდ ვერ გამოვიყენებთ § 67-ის ფორმულებს, რომლებიც გამკაცვანილი იყვნენ იმ დაშვებით, რომ $v \ll c$. მაგრამ, ნაწილაკი ჩვენ იმ ათელის სისტემაში შეიძლება

განვიხილოთ, რომელშიაც იგი უძრავია ნოცემულ მომენტში. ცხადია, რომ ასეთ სისტემაში აღნიშნული ფორმულები გამოსადეგია (მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ეს შეიძლება გაკეთდეს მხოლოდ ერთი მოძრავი ნაწილაკის შემთხვევაში; მუხტთა სისტემისათვის, ცხადია, არ არსებობს ისეთი სისტემა, რომელშიაც ყველა ნაწილაკი ერთდროულად უძრავი იყოს).

ამგვარად, აღნიშნულ სისტემაში dt დროს განმავლობაში ნაწილაკი გამოასხივებს ენერგიას

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} \omega_0^2 dt \quad (70,1)$$

[(67,11) ფორმულის თანახმად], სადაც ω_0 — ნაწილაკის აჩქარებაა იმავე ათვლის სისტემაში. გადავწეროთ ახლა ეს ფორმულა ოთხგანზომილებიანი სახით, რომელშიაც იგი გამოსადეგი იქნება ნებისმიერი ათვლის სისტემაში. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ $\omega_0^2 = c^2 \omega_k^2$, სადაც ω_k ნაწილაკის 4 — აჩქარებაა ყოველი ათვლის სისტემაში (იხ. ამოცანა 1 § 7-ში). შემდეგ $d\mathcal{E}$ გამოსხივებული ენერგიის ნაცვლად ჩვენ ახლა უნდა ვწეროთ „4—იმპულსის გამოსხივება“ $-\frac{c}{i} dP_i$,

რამდენადაც (i/c -ზე გამრავლებული) ენერგია წარმოადგენს 4—იმპულსის დროულ კომპონენტს. ანალოგიური ზიზებისა გაპო di -ს ნაცვლად უნდა ვწეროთ dx_i/c . ამგვარად, ჩვენ ვპოულობთ,

$$dP_i = \frac{2e^2}{3c} \left(\frac{du_k}{ds} \right)^2 dx_i = \frac{2c^2}{3c} \left(\frac{du_k}{ds} \right)^2 u_i ds, \quad (70,2)$$

სადაც u_k ნაწილაკის 4 — სიჩქარეა. ადვილად შევამოწმებთ იმას, რომ ამ განტოლების დროული კომპონენტი ათვლის სისტემაში, რომელშიაც $v = 0$, მართლაც იძლევა (70,1)-ს. სივრცული კომპონენტები კი დროს ერთეულში გამოსხივებული იმპულსისათვის გვაძლევენ $\frac{dP_i}{dt} = 0$ (როცა $v = 0$, u_k -ს სივრცული კომპონენტებიც ნულის ტოლია).

უკანასკნელი შედეგი შეიძლება მივიღოთ უშუალოდაც, თუ იმპულსს განვსაზღვრავთ როგორც $T_{\alpha\beta}$ იმპულსის ნაკადის ინტეგრალს (იხ. §§ 32 და 33), ალებულს ნაწილაკის შემომფარგველელ ჩაკეტილ ზედაპირზე. ათვლის სისტემაში, რომელშიაც $v = 0$, ველი (67,6—7) ფორმულებით განისაზღვრება, და ადვილი შესამოწმებელია, რომ აღნიშნული ინტეგრალი მართლაც ნულის ტოლია.

ჩვეულებრივ საინტერესოა სრული გამოსხივება ნაწილაკის მოცენულ ელექტროდებში გავლის მთელი დროს განმავლობაში (გავისხენოთ, რომ თანაბრად მოძრავი მუხტი საერთოდ არ გამოასხივებს). იგი ტოლია (70,2)-დან ალებული ინტეგრალისა, ე. ი.

$$\Delta P_i = \frac{2e^2}{3c} \int \left(\frac{du_k}{ds} \right)^2 dx_i. \quad (70,3)$$

ეს ფორმულა სხვა სახითაც დაიწერება, თუ $\frac{du_x}{ds}$ 4—აჩქარების ელექტრო-
მაგნიტური ველის ტენზორით გამოვსახავთ (21,4) მოძრაობის განტოლების
ღახმარებით:

$$mc \frac{du_x}{ds} = \frac{e}{c} F_{x1} u_1.$$

ამის შედეგად ჩვენ ვპოულობთ

$$\Delta P_x = \frac{2r^4}{3m^2 c^3} \int (F_{x1} u_1)^2 dx_1. \quad (70,4)$$

ამ განტოლების დროული კოპონენტი გვაძლევს $\Delta \mathcal{E}$ ენერჯიის სრულ გა-
მოსხივებას. თუ ყველა ოთხგანზომილებიან სიდიდეთა მაგივრად ჩავსვამთ მათ
გამოსახულებებს შესაბამისი სამგანზომილებიანი სიდიდეთა საშუალებით, ვიპოვით

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2r^4}{3m^2 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left\{ E + \frac{1}{c} [vH] \right\}^2 - \frac{1}{c^2} (Ev)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (70,5)$$

ΔP იმპულსის სრული გამოსხივების შესაბამისად გამოსახულებაში ინტეგრალს ქვეშ
დგას კიდევ v მანრავლი.

ა მ ო ც ა ნ ა

განვსახლოვროთ სრული გამოსხივება e მუხტისა, რომელიც სინათლის სიჩქარის მახლო-
ბელი სიჩქარით გაივლის კულონის ველში ($\varphi = e'/r$ პოტენციალით).

ამ ო ს ნ ა: ველში გავლისას მუხტი თითქმის არ გადაიხრება. ამიტომ (70,5)-ში v შეიძ-
ლება მუდმივად ჩავთვალოთ, ასე რომ $E_1 = \frac{e'}{r^2} = \frac{e'}{r^2 + v^2 t^2}$ (იხ. § 67-ის 4 ამოცანა). ამის
შედეგად ვპოულობთ

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi r^4 e'^2}{12 m^2 c^3 v r^3} \frac{1 - \frac{3v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

§ 71. დაჯახების დროს მცირე სიხშირითა გამოსხივება

დაეუბრუნდეთ ისევ იმ შემთხვევის განხილვას, როცა ნაწილაკის სიჩქარე
მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით და განვიხილოთ გამოსხივება და-
მუხტულ ნაწილაკთა დაჯახებისას. რამდენადაც დაჯახება სასრულო დროს გან-
მავლობაში წარმოებს, ამიტომ გამოსხივება ისპობა, როცა $t = \pm \infty$, ასე რომ
ჩვენ შეგვიძლია გამოსხივების ველი ფურიეს ინტეგრალად დავშალოთ. თუ f -ით
ველის ერთერთ კომპონენტთაგანს აღენიშნავთ, გვექნება

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (71,1)$$

ველის f_{ω} ფურიეს კომპონენტებისათვის ჩვენ ამასთანავე გვაქვს

$$f_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{i\omega t} dt.$$

შენიშნოთ, რომ რამდენადაც f ნამდვილია, $f_{-\omega} = f^*_{\omega}$.

დაჯახების დროის განმავლობაში სრული გამოსხივება ველის კვადრატთან ალბებულ ინტეგრალით განისაზღვრება $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt$. გამოვსახოთ იგი ცალკეული მონოქრომატული კომპონენტების ინტენსივობით. (71,1) და (71,2)-ის გამოყენებით ვპოულობთ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{-i\omega t} dt = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega} f_{-\omega} d\omega, \end{aligned} \quad (71,3)$$

ან, თუ გავიხსენებთ, რომ $f_{-\omega} = f^*_{\omega}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt = 4\pi \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega. \quad (71,4)$$

რადგანაც ყველა სიჩქარეს სინათლის c სიჩქარესთან შედარებით მცირეს ვგულისხმობთ, ამიტომ ერთეული დროში გამოსხივებისათვის შეიძლება (67,10) ფორმულა გამოვიყენოთ. მაშინ ენერგიის სრული გამოსხივება $\Delta \mathcal{E}$ დაჯახების მთელ დროში უდრის:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2}{3c^3} \int \ddot{d}^2 dt,$$

სადაც d ყველა დაჯახებულ ნაწილაკთა სისტემის დიპოლური მომენტი. (71,4)-ის თანახმად სიხშირის მოცემულ $d\omega$ ინტერვალში სრული გამოსხივებისათვის $(\Delta \mathcal{E})_{\omega} d\omega$ ჩვენ შეგვიძლია დაწვეროთ გამოსახულება

$$(\Delta \mathcal{E})_{\omega} = \frac{8\pi}{3c^3} \ddot{d}^2_{\omega}, \quad (71,5)$$

სადაც

$$d_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{d} e^{i\omega t} dt \quad (71,6)$$

არის \ddot{d} ვექტორიდან ფურიეს შესაბამისი კომპონენტი.

დაწვერალი ფორმულები განსაკუთრებით მარტივდებათ მცირე სიხშირეთათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\omega a \ll 1, \quad (71,7)$$

სადაც τ დაჯახების ხანგრძლივობის სიდიდის რიგია. (71,6)-ში ინტეგრალ-
ქვეშა გამოსახულებაში \dot{d} ნულისაგან განსხვავდება მხოლოდ დაჯახების დროს
განმავლობაში; ამიტომ თუ (71,7) პირობა დაცულია, მაშინ შეიძლება დაუშვათ,
რომ ინტეგრალს ქვეშ $\omega \ll 1$, ასე რომ $e^{i\omega t}$ შეიძლება ერთით შევცვალოთ.
მაშინ

$$\ddot{d}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{d} dt = \frac{1}{2\pi} (\dot{d}_2 - \dot{d}_1),$$

სადაც \dot{d}_1 და \dot{d}_2 წარმოადგენენ \dot{d} ვექტორის მნიშვნელობებს დაჯახებამდე და
დაჯახების შემდეგ. მეორე ნხრით $d = \sum e r$ და ამიტომ $\dot{d} = \sum e v$. მაშასადამე:

$$\ddot{d}_\omega = \frac{1}{2\pi} \sum e (v_2 - v_1),$$

სადაც v_1 და v_2 ნაწილაკის სიჩქარეებია დაჯახებამდე და დაჯახების შემდეგ.
(ნაწილაკის ნუმრის მაჩვენებელ ინდექსს სიმოკლისათვის ვტოვებთ). თუ
ამ გამოსახულებას (71,5)-ში ჩავსვამთ, დაჯახებისას მცირე სიხშირეთა გამოსხი-
ვებისათვის საბოლოოდ ვპოულობთ

$$(\Delta \mathcal{E})_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} \left(\sum e (v_2 - v_1) \right)^2. \quad (71,8)$$

კერძოდ, თუ მხოლოდ ერთი გამომსხივებელი ნაწილაკი გვაქვს (რომელიც
სხვა ნაწილაკთა ველში გაივლის, რომლებიც დაჯახებისას უძრავად შეიძლება
ჩავთვალოთ) მაშინ

$$(\Delta \mathcal{E})_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} (v_2 - v_1)^2. \quad (71,9)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მცირე სიხშირეთა შემთხვევაში გამოსხივება სიხში-
რეზე არ არის დამოკიდებული. სხვაგვარად შეიძლება ვთქვათ, რომ როცა ω
ნულისაკენ მიისწრაფვის, $(\Delta \mathcal{E})_\omega$ გამოსხივება წიისწრაფვის სასრულო საზღვრი-
საკენ.

ანალოგიური ფორმულების მიღება შეიძლებოდა სინათლის სიჩქარესთან
თანაზომადი სიჩქარეთა შემთხვევისთვისაც. ამისათვის მოხერხებულია ვისარ-
გებლოდ ველის პოტენციალების (64,13) ფორმით. მაგრამ, ჩვენ ამაზე არ
შეგჩერდებით.

ა მ ო ც ა ნ ა

განესაზღვროთ მცირე სიხშირეთა გამოსხივება ორი დამუხტული ნაწილაკის დაჯა-
ხებისას.

ა მ ო ც ა ნ ა: თუ შემოვიტანთ ორივე ნაწილაკის ფარდობით სიჩქარეს და მათი ინერ-
ციის ცენტრის სიჩქარეს, (71,8)-დან ვიპოვით:

$$(\Delta \mathcal{E})_\omega = \frac{2\mu^2}{3\pi c^3} \left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'} \right)^2 (v_1 - v_2)^2,$$

სადაც m , m' და e , e' ორივე ნაწილაკის მასები და მუხტებია, μ — დაყვანილი მასაა, ხოლო v_1 და v_2 ნაწილაკთა ფარდობითი სიჩქარეა დაჯახებადღე და დაჯახების შემდეგ ენაოდან დაჯახების შემდეგად ფარდობითი სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდე არ იცვლება, ამიტომ $(v_2 - v_1)^2 = 2v_0^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}$, სადაც v_0 ფარდობითი სიჩქარეა ნაწილაკთა შორის უსახურულო მანძილის დროს, ხოლო χ არის გადახრის კუთხე იმ ათვლის სისტემაში, რომელშიც ინერციის ცენტრი უძრავია. χ -სათვის ჩვენ გვაქვს ციგ $-\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2 \rho}{|ee'|}$, სადაც ρ „დამიხნების მანძილა“ (იხ. ანოტანა 2 § 67). აზის შედეგად ვეულობთ

$$(\Delta \mathcal{E})_{\omega} = -\frac{4\mu^2 v_0^2}{3\pi c^3} \left(\frac{e}{m} - \frac{e'}{m'} \right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu v_0^2 \rho}{ee'} \right)^2}$$

რამდენადაც „დაჯახების დრო“ $\tau \sim \rho/v_0$, ეს ფორმულა გამოსადეგია როცა $\rho\omega/v_0 < 1$.

§ 72. გამოსხივებით დამუხრუჭება

§ 65-ში ნაჩვენები იყო, რომ მუხტთა სისტემის ველის პოტენციალებში მწყრივად დაშლა v/c -ს ხარისხების მიხედვით გვაძლევს მეორე მიახლოებაში ლაგრანჟის ფუნქციას, რომელიც (ამ მიახლოებაში) საესებით განსაზღვრავს მუხტთა მოძრაობას. მოვახდინოთ ახლა ველის დაშლა უფრო მაღალი რიგის წევრებამდე და გამოვარკვიოთ, თუ რა ეფექტს გვაძლევს ეს წევრები.

სკალარული პოტენციალის დაშლაში

$$\varphi = \int \frac{1}{R} \rho, \quad R = \frac{r}{c}$$

$1/c$ -ის მიხედვით მესამე რიგის წევრი ტოლია

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2 \rho \, dV; \quad (72,1)$$

დაშლის პირველ წევრებს (იხ. § 65) სიმოკლისათვის ჩვენ აქ არ დავწეროთ. იმავე მიზეზისა გამო, რაც (65,3)-ის გამოყვანის დროს, ვექტორული პოტენციალის დაშლაში ჩვენ უნდა ავიღოთ იხლოდ მეორე რიგის წევრი $1/c$ -ს მბმარი, ე. ი.

$$A^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int j \, dV. \quad (72,2)$$

მოვახდინოთ პოტენციალების გაუდაქმნა

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad A' = A + \text{grad } f,$$

და f ფუნქცია ისე შევარჩიოთ, რომ სკალარული პოტენციალი φ' ნულის ტოლი გახდეს. ამისათვის, ცხადია, საკმარისია, რომ

$$f = -\frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R^2 \rho \, dV.$$

მაშინ ახალი ვექტორული პოტენციალი ექნება ტოლი

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int j dV - \frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \int R \rho dV = \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int j dV - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV. \end{aligned}$$

თუ აქ ინტეგრალებიდან ცალკე მუხტების მიხედვით აღებულ ჯამებზე გადავალთ, მაშინ პირველი წევრისათვის გვექნება $-\frac{1}{c^2} \sum e \dot{v}$. მეორე წევრში კი ვწერთ $R = R_0 - r$, სადაც R_0 -ს და r -ს ჩვეულებრივი აზრი აქვთ (იხ. § 66); მაშინ $R = -r = -v$ და მეორე წევრი გახდება $\frac{1}{3c^2} \sum e \dot{v}$. ამგვარად

$$A^{(2)} = -\frac{2}{3c^2} \sum e \dot{v}. \quad (72,3)$$

ამ პოტენციალის შესაბამის მაგნიტური ველი $H = \text{rot } A^{(2)} = 0$, რადგანაც $A^{(2)}$ ცხადი სახით კოორდინატებს არ შეიცავს. ელექტრული ველი კი $E = -\frac{1}{c} \dot{A}^{(2)}$ უდრის

$$E = \frac{2}{3c^2} \ddot{d}, \quad (72,4)$$

სადა d — სისტემის დიპოლური მომენტი.

ამგვარად, ველის დაშლაში მესამე რიგის წევრებს მივყევართ მუხტებზე მოქმედ ერთეულარ დამატებით ძალებამდე, რომლებსაც (65,6) ლაგრანჟის ფუნქცია არ შეიცავს. ეს ძალები დამოკიდებულია მუხტთა აჩქარებების დროთი აღებულ წარმოებულებზე.

განვიხილოთ სტაციონარულად მოძრავი მუხტთა სისტემა და გამოვთვალოთ (72,4) ველის მიერ დროს ერთეულში შესრულებული საშუალო მუშაობა. ყოველ e მუხტზე მოქმედობს ძალა $f = eE$, ე. ი.

$$f = \frac{2e}{3c^2} \ddot{d}. \quad (72,5)$$

დროს ერთეულში იგი ასრულებს $f v$ -ს ტოლ მუშაობას, ასე რომ ყველა მუხტზე შესრულებული სრული მუშაობა ტოლია ცალკე მუხტების მიხედვით აღებულ ჯამისა:

$$\sum f v = \frac{2}{3c^2} \ddot{d} \sum e v = \frac{2}{3c^2} \ddot{d} \dot{d} = \frac{2}{3c^2} \frac{d}{dt} (\dot{d} \ddot{d}) - \frac{2}{3c^2} \dot{d}^2.$$

დროთი გასაშუალების შეიძლება პირველი წევრი ისობა (შეად. § 43-ს), ასე რომ საშუალო მუშაობა უდრის

$$\sum f v = -\frac{2}{3c^2} \dot{d}^2. \quad (72,6)$$

მაგრამ მარჯვნივ მდგომი ვამოსახულება წარმოადგენს (შებრუნებული ნიშნით ალებული) გამოსხივების შედეგად სისტემის ენერჯის დანაკარგს დროს ერთეულში [იხ. (57,10)]. ანალოგიურად, (72,5) ძალები, რომელნიც მესამე ნიახლოვებაში გამოივლინებიან, აღწერენ განოსხივების უკუშოკმედებას ზის გამოსხივებულ მუხტებზე. ამ ძალებს ეწოდებად დანუხრუქება გამოსხივებით ან ლორენცის ხახუნის ძალები.

გამოსხივებით დამუხრუქებას ადგილი აქვს მაშინაც კი, როცა სულ მხოლოდ ერთი მუხტი გვაქვს. იგი უდრის მაშინ

$$f = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}, \quad (72,7)$$

ერთი მუხტისათვის ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ისეთი ათვლის სისტემა შევარჩიოთ, რომელშიაც იგი დროს ნოცემულ მომენტში უძრავად იქნება კოორდინატთა სათავეში. ადვილად დავინახავთ, რომ ასეთ ათვლის სისტემაში იმ ძალის დაშლის ყველა შემდგომი წევრი, რომლითაც მუხტი განოსხივების შედეგათ თავისთავზე მოქმედებს, ნულის ტოლი გახდება. მართლაც, ადვილად მივიღებთ, რომ მუხტის ველის დაშლის ყველა უფრო მაღალი რიგის წევრი R რადიუს-ვექტორის მაღალი რიგის წარმოებულებს გარდა შეიცავს აუცილებლად თვითონ მას ან მის პირველ წარმოებულს \dot{R} -ს, ე. ი. მუხტის v სიჩქარეს. მაგრამ განსახილავ ათვლის სისტემაში $v=0$, ხოლო f ძალის გამოსათვლელად ჩვენ უნდა ავიღოთ ველის ნნიშვნელობა იქ, სადაც თვით მუხტია მოთავსებული, ე. ი. მივიღოთ $R=0$, ასე რომ f -ის დაშლის მაღალი რიგის წევრები მართლაც ისპობან. მაშასადანე, ერთი მუხტის შემთხვევაში (72,3) ფორმულა თითქოს ზუსტ ფორმულას წარმოადგენს გამოსხივების უკუშოკმედების ძალისათვის იმ ათვლის სისტემაში, რომელშიაც სიჩქარე ისპობა.

მაგრამ, მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ მუხტის „თავისთავზე“ მოქმედების აღწერა დამუხრუქების ძალის დახმარებათ საზოგადოდ სავსებით დამაკმაყოფილებელი არ არის და შეიცავს წინააღმდეგობებს. გარეშე ველის არარსებობისას მუხტის მოძრაობის განტოლება, რომელზედაც მხოლოდ (72,7) ძალა მოქმედობს, არის

$$m\dot{v} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}.$$

ამ განტოლებას ტრივიალური ამოხსნის გარდა $v = \text{const.}$ აქვს კიდევ ამოხსნა, რომელშიაც აჩქარება \dot{v} პროპორციულია $e \frac{2e^2}{3c^3} t$, ე. ი. დროს ნიხედვით უსაზღვროდ იზრდება. ეს, მაგალითად, იმას ნიშნავს, რომ მუხტი, რომელმაც რაიმე ველი განვლო, მისგან გამოსვლის შემდეგ უნდა უსაზღვროთ „თვითაჩქარებულყო“. ამ შედეგის აბსურდულობა სწორედ მოწმობს (72,7) ფორმულის გამოყენების შეზღუდულობას.

შეიძლება წამოიკრას საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ ხდება ეს, რომ ელექტროდინამიკა, რომელიც ენერჯის შენახვის კანონს აკმაყოფილებს, ისეთ აბსურდულ შედეგს გვაძლევს, რომლის ნიხედვითაც თავისუფალი ნაწილაკ

განუსაზღვრელად იდიდებას თავის ენერგიას. ამ სიძნელის ფესვები სინამდვილეში ელემენტარულ ნაწილაკთა უსასრულო ელექტრომაგნიტურ „საკუთარ მასაში“ უნდა ვეძიოთ, რომლის შესახებ აღნიშნული იყო ზემოდ (§ 37). როცა ჩვენ მოძრაობის განტოლებაში მუხტის სასრულო მასას ვწერთ, მაშინ ამათ ჩვენ მას მივაწერთ ფორმალურად უსასრულო უარყოფით „საკუთარ მასას“, რომელიც არაელექტრომაგნიტური წარმოშობისაა და ელექტრომაგნიტურ მასასთან ერთად ნაწილაკის სასრულო მასას გვაძლევს. მაგრამ, ვინაიდან ორი უსასრულობის ერთიმეორიდან გამოკლების ოპერაცია არ წარმოადგენს სავეტ. ბით ცალსახა მათემატიკურ ოპერაციას, ამიტომ იგი მთელ რიგ შემდგომ სიძნელეს წამოჭრის, მათ შორის იმასაც, რომელიც ჩვენ აქ განვიხილეთ.

მუხტის გარე ველში მოძრაობის დროს, თუ გავითვალისწინებთ გამოსხივებით დამუხრუჭებას, მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$m\dot{v} = eE + \frac{e}{c} [vH] + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}. \quad (72,8)$$

ზემოდ აღნიშნული მოსაზრებათა მიხედვით, ამ განტოლების გამოყენება მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, თუ დამუხრუჭების ძალა მცირეა გარე ველზე გამოწვეულ ძალასთან შედარებით. ვთქვათ, მუხტზე ეცემა ω სიხშირის ელექტრომაგნიტური ტალღა. მუხტზე მომქმედი ძალა არის eE ძალა ($\frac{e}{c} [vH]$

შეიძლება უგულველვყოთ v/c -ს სიმცირის გამო). ამ ძალის გავლენით იგი მიიღებს აჩქარებას $\frac{e}{m} E$, და ამიტომ გამოსხივებით დამუხრუჭება იქნება $\frac{2}{3} \frac{e^3}{mc^2} \ddot{v}$.

მაგრამ \ddot{v} პროპორციულია ωE -ს. ამიტომ eE -სთან შედარებით $\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}$ -ს სიმცირის პირობა ვეძიებთ

$$\frac{e^2}{mc^3} \omega \ll 1,$$

ან, თუ $\lambda \sim c/\omega$ ტალღის სიგრძეს შემოვიტანთ,

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2} \quad (72,9)$$

ამგვარად, გამოსხივებით დამუხრუჭების (72,7) ფორმულა იმ შემთხვევაშია გამოსადეგი, როცა მუხტზე დაცემული ტალღის სიგრძე დიდია მუხტის $\frac{e^2}{mc^2}$ „რადიუსთან“ შედარებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ $\frac{e^2}{mc^2}$ -ს რიგის მანძილი ისევ იმ საზღვარს წარმოადგენს, რომლის იქით კლასიკური ელექტროდინამიკის გამოყენება შეუძლებელია (იხ. § 37).

გამოვიყვანოთ გამოსხივებით დამუხრუჭების რელატივისტური გამოსახულება (ერსტ მუხტისათვის), რომელიც გამოდგება სინათლის სიჩქარის რიგის სიჩქარით მოძრაობის დროსაც. ახლა ეს ძალები იქნებიან f ; 4-ვექტორი, რომლის

საშუალებით უნდა შევესოთ ოთხგანზომილებიანი სახით დაწერილი მუხტის მოძრაობის განტოლება

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k + f_i. \quad (72,10)$$

f_i -ს განსაზღვრისათვის შევნიშნოთ, რომ როცა $v \ll c$ მისი სამი სივრცული კოორდინატი უნდა გადავიდეს f/c ვექტორის კომპონენტებში (72,7). ადვილად დავინახავთ, რომ ამ თვისებისაა 4-ვექტორი $\frac{2e^2}{3c} \frac{d^2 u_i}{ds^2}$. მაგრამ იგი არ აკმაყოფილებს (72,10)-დან გამომდინარე თანაფარდობას $f_i u_i = 0$, რომელიც იქიდან გამომდინარეობს, რომ $u_i \frac{du_i}{ds} = 0$ (7,6) და რომ $u_i u_k F_{ik} = 0$, რამდენადაც F_{ik} ტენზორი ანტისიმეტრიულია. რადგანაც f_i 4-ძალის დროული კომპონენტი ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $v=0$, ნულის ტოლი უნდა გახდეს, (ეს კომპონენტი, როგორც ვიცით, f ძალის $f\mathbf{v}$ მუშაობის ტოლია, რომელიც ნული ხდება, როცა $\mathbf{v}=0$), ამიტომ ძალების დაწერილ გამოსახულებას ჩვენ შეიძლება დაუმატოთ მხოლოდ αu_i სახის 4-ვექტორი. α სკალარი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ დაკმაყოფილდეს პირობა $f_i u_i = 0$. ამის შედეგად ვპოულობთ:

$$f_i = \frac{2e^2}{3c} \left(\frac{d^2 u_i}{ds^2} + u_i u_k \frac{d^2 u_k}{ds^2} \right). \quad (72,11)$$

§ 73. თაშისუფალი მუხტებით გაზნება

თუ მუხტთა სისტემაზე ელექტრომაგნიტური ტალღა ეცემა, მაშინ მისი მოქმედებით მუხტები მოძრაობას დაიწყებენ. ამ მოძრაობას თავის მხრივ თანსდევს ყოველმხრივ გამოსხივება. როგორც იტყვიან, წარმოებს პირვანდელი ტალღის გაბნევა.

ყველაზე მოხერხებულია გაბნევის დახასიათება შეფარდებით ენერჯიის იმ რაოდენობის, რომელსაც გამაბნევი სისტემა გამოასხივებს მოცემულ მიმართულებით დროს ერთეულში გამოსხივების ენერჯიის ნაკადის სიმკვრივესთან, რომელიც სისტემაზე ეცემა. ამ შეფარდებას, ცხადია, ფართის განზომილება აქვს და მას ეფექტიურ განივკვეთს უწოდებენ.

ეთქვათ dJ არის ენერჯია, რომელსაც სისტემა dO სხეულოვან კუთხეში გამოასხივებს (1 სექუნდში), როცა მას ეცემა ტალღა S პოინტინგის ვექტორით. მაშინ (dO სხეულოვან კუთხეში) ეფექტური განივკვეთი იქნება

$$d\sigma = \frac{dJ}{S} \quad (73,1)$$

(ასოებს ზემოდ ხაზი დროს მიხედვით საშუალოს აღნიშნავს) $d\sigma$ -დან ყოველი მიმართულებით აღებული σ ინტეგრალი წარმოადგენს გაბნევის სრულ ეფექტურ განივკვეთს.

განვიხილოთ ერთი თავისუფალი მუხტით გამოწვეული გაბნევა. ვთქვათ, ამ მუხტს ეცემა ბრტყელი წრფივად დაპოლარებული მონოქრომატული ტალღა. მისი ელექტრული ველი შეიძლება დავწეროთ სახით

$$E = E_0 \cos(kr - \omega t + \alpha).$$

ჩვენ დაუშვებთ, რომ დაცემული ტალღის მოქმედებით ნაწილაკის მიერ მიღებული სიჩქარე მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით, რაც პრაქტიკულად ყოველთვის არის შესრულებული. მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მუხტზე მოქმედი ძალა არის eE , ხოლო მაგნიტური ველით გამოწვეული ძალა-

$-\frac{c}{v} [vH]$ უგულვებელყოთ. ამ შემთხვევაში შეიძლება უგულვებელყოთ აკრეთვე:

ველით გამოწვეული რხევის დროს მუხტის წანაცვლების გავლენა.

თუ მუხტი კოორდინატთა სათავეს გარშემო ირხევა, მაშინ შეიძლება მივიღოთ, რომ მასზე ყოველთვის ის ველი მოქმედობს, რომელსაც ადგილი აქვს კოორდინატთა სათავეში, ე. ი.

$$E = E_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

ვინაიდან მუხტის მოძრაობის განტოლება არის

$$m\ddot{r} = eE,$$

ხოლო მისი დიპოლური მომენტი უდრის $d = er$, ამიტომ

$$\ddot{d} = \frac{e^2}{m} E. \quad (73,2)$$

გაბნეული გამოსხივების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (67,9) ფორმულა დიპოლური გამოსხივებისათვის (ჩვენ ამის უფლება გვაქვს, ვინაიდან დაცემული ტალღის გავლენით მუხტის მიერ მიღებული სიჩქარე მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით). შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ მუხტის მიერ გამოსხივებული (მის მიერ გაბნეული) ტალღის სიხშირე, ცხადია, უდრის დაცემული ტალღის სიხშირეს.

თუ (73,2)-ს (67,9)-ში ჩავსვამთ, ვიპოვით

$$dJ = -\frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [En]^2 d\Omega.$$

მეორე მხრივ, დაცემული ტალღის პოინტინგის ვექტორი

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2.$$

აქედან ჩვენ ვპოულობთ $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეში გაბნევის ეფექტურ განივკვეთს:

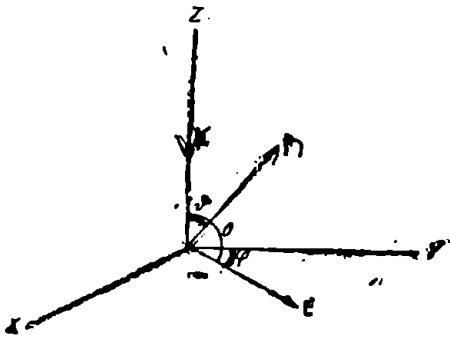
$$d\sigma = \left(\frac{c^3}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (73,3)$$

სადაც θ არის გაბნევის მიმართულებასა (n ვექტორსა) და დაცემული ტალღის E ელექტრული ვექტორის მიმართულებას შორის კუთხე. ჩვენ ვხედავთ, რომ თავისუფალი მუხტით გაბნევის განივკვეთი სიხშირეზე არ არის დამოკიდებული.

განვსაზღვროთ სრული ეფექტური განივკვეთი σ . ამისათვის შემოვიღოთ სფერული კოორდინატები, რომლის სათავე მოთავსებულია იქ, სადაც მუხტი მდებარეობს, და პოლარული ღერძი E -ს გასწვრივ მივმართოთ. მაშინ $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. თუ ამას ჩავსვამთ და ავიღებთ ინტეგრალს $d\theta$ -თი 0 -დან π -მდე და $d\varphi$ -თი 0 -დან 2π -მდე, ვიპოვიოთ

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad (\text{კოს ენოფის ცომსონის ვოკიბი}) \quad (73,4)$$

დასასრულს, განვსაზღვროთ $d\sigma$ ეფექტური განივკვეთი იმ შემთხვევაში, როცა დაცემული ტალღა არ არის დაპოლარებული (ბუნებრივი სინათლე). ამისათვის ჩვენ უნდა გავასაშუალოთ (73,3) E ვექტორის ყველა მიმართულების მიხედვით დაცემული ტალღის გავრცელების მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა Z ღერძით, რომელიც დაცემული ტალღის გავრცელების (მისი k ვექტორის) მიმართულების გასწვრივია მიმართული, და YZ სიბრტყით, რომელშიაც მდებარეობენ k და გაბნეული ტალღის n მიმართულება. მაშინ E ვექტორი XY სიბრტყეში იმყოფება (იხ. ნახ. 14) θ დაცემული და გაბნეული ტალღის მიმართულებათა შორის კუთხეა. $\cos \theta$ კი, ცხადია, n ერთეულოვანი ვექტორის პროექციაა E მიმართულებაზე. მეორე მხრით, ეს პროექცია შეიძლება მივიღოთ, თუ ჯერ n -ს დავაგვემიღებთ Y ღერძზე, ხოლო შემდეგ ამ პროექციას — E მიმართულებაზე. ამგვარად ჩვენ ვპოულობთ რომ $\cos \theta = \sin \varphi \cos \psi$, და ამიტომ



ნახ. 14.

$$\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$$

(θ და φ კუთხეები ნაჩვენებია ნახ. 14-ზე). თუ $\sin^2 \theta$ -ს გავასაშუალოებთ XY სიბრტყეში E -ს ყველა მიმართულების მიხედვით, ე. ი. ყველა φ -ს მიხედვით, გვექნება

$$\overline{\sin^2 \theta} = 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2} = \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2}$$

თუ ამას (73,3)-ში ჩავსვამთ, თავისუფალი მუხტით არადაპოლარებული ტალღის გაბნევისათვის გვექნება

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \varphi) \quad (73,5)$$

1. განვსახლვროთ ელიფსურად დაპოლარებული ტალღის თავისუფალი მუხტით გაბნევის ეფექტური განიკვეთი.

ამოხსნა: ტალღის ველი იქნება $E = A \cos(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \alpha)$, სადაც A და B ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორებია (იხ. § 48). ტექსტში გაკეთებული გამოყვანის ანალოგიურად ვიპოვიტ

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} \frac{[An]^2 + [Bn]^2}{A^2 + B^2} d\Omega.$$

2. განვსახლვროთ პრტყლად დაპოლარებული ტალღის ეფექტური გაბნევა ისეთი მუხტით, რომელიც (რალაც დრეკადი ძალის გაელენით) მკირე რხევას ასრულებს.

ამოხსნა: მუხტზე დაცემული ტალღის ველში $E = E_0 \cos(\omega t + \alpha)$ მისი მოძრაობის განტოლება არის

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

სადაც ω_0 ამ შერტილის საკუთარი რხევის სიხშირეა. აქედან იძულე ითი რხევისათვის გვაქვს

$$r = \frac{eE_0 \cos(\omega t + \alpha)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

თუ აქედან \ddot{m} -ს განვსახლვრავთ, ვიპოვიტ

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \theta d\Omega$$

(θ E და π -ს შორის კუთხეა).

3. განვსახლვროთ დეპოლარიზაციის ხარისხი არადაპოლარებული ტალღის თავისუფალი მუხტით გაბნევის დროს.

ამოხსნა: სიმეტრიულობის მოსახრებიდან ცხადია, რომ გაბნეული სინათლის ორივე შოავარი მდგენელი ბრტყლად დაპოლარებული უნდა იყოს — ერთი დაცემულ და გაბნეულ სხივზე გამავალ სიბრტყეში, მეორე კი მის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში. Y ლერძი აღნიშნულ სიბრტყეში ავირჩიოთ. მაშინ პირველი პოლარიზაციისთვის ვიპოვიტ $E = \cos \theta$. $E_y \cos \theta$ ხოლო მეორისათვის $E = \cos \theta$. E_x კვადრატში აყვანით და გასაშუალებით ვიპოვიტ (რამდეც ნადაც არადაპოლარებული სინათლისათვის $E_y^2 = \overline{E_x^2}$)

$$\rho = \cos^2 \theta$$

(სადაც θ მოცემული და გაბნეული სინათლის მიმართულებათა შორის კუთხეა).

4. განვსახლვროთ მოძრავ მუხტზე განბნეული სინათლის სიხშირე.

ამოხსნა. კორდინატთა იმ სისტემაში, რომელშიაც მუხტი უძრავია, გაბნევის დროს სინათლის სიხშირე უცვლელი რჩება ($\omega = \omega'$). ინვარიანტულ ფორმაში ეს გამოსახულება შემდეგნაირად შეიძლება დაიწეროს

$$k'_\mu u_\mu = k_\mu u_\mu,$$

სადაც u_μ მუხტის 4 — სიჩქარეა. აქედან ადვილად ვიპოვიტ

$$\omega' \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right).$$

სადაც θ და θ' დაცემული და გაბნეული ტალღის მიერ მოძრაობის მიმართულებასთან შედგენილი კუთხეებია (v — მუხტების სიჩქარეა).

§ 74. ღიღი სიხშირის ტალღათა გაბნევა

თუ მუხტთა სისტემას ეცემა ელექტრომაგნიტური ტალღა, რომლის ველს ჩვენ სუსტ ველად ჩავთვლით, მაშინ სისტემის დენის სიმკვრივე შემდეგი სახით წარმოგვიდგება: $j = j_0 + j'$, სადაც j_0 დენის სიმკვრივეა ველის არ არსებობისას, j' დენის ცვლილებაა ტალღის ველის გავლენით. ამის შესაბამისად სისტემის ველის ვექტორულ პოტენციალს აგრეთვე ექნება სახე $A = A_0 + A'$, სადაც A_0 და A' განისაზღვრებიან j_0 და j' დენებით შესაბამისად. ცხადია, რომ A' აღწერს მუხტთა სისტემის მიერ გაბნეულ ტალღის ველს.

განვიხილოთ ელექტრომაგნიტური ტალღის გაბნევა, რომლის ω' სიხშირე დიდია თვით მუხტთა სისტემის მიერ გამოსხივებულ ω_0 სიხშირესთან შედარებით. როგორც § 67-ში ვნახეთ, $\omega_0 \sim v/a$, ასე რომ ω' უნდა დააკმაყოფილოს პირობა

$$\omega' \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \quad (74,1)$$

გარდა ამისა ჩვენ დაუშვებთ, რომ სისტემაში მუხტების სიჩქარე მცირეა ($v \ll c$).

(74,1) პირობის თანახმად სისტემაში მუხტების მოძრაობის პერიოდი დიდია ტალღის პერიოდთან შედარებით. ამიტომ ტალღის პერიოდის რიგის დროს შუალედის განმავლობაში მუხტების მოძრაობა სისტემაში შეიძლება თანაბრად ჩავთვალოთ. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოკლე ტალღათა განზნევის განხილვისას არ იქნება არსებითი სისტემის შიგნით მუხტთა ურთიერთმოქმედების მხედველობაში მიღება, ე. ი. ისინი შეიძლება თავისუფალ მუხტებად ჩავთვალოთ.

ამგვარად, მუხტის მიერ დაცემული ტალღის ველში მიღებული v' სიჩქარის გამოთვლის დროს სისტემის ყოველი მუხტი ცალცალკე შეიძლება განვიხილოთ და მისთვის მოძრაობის განტოლება დავწეროთ სახით

$$m \frac{dv'}{dt} = eE = eE_0 \exp[-i(\omega' t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})]$$

სადაც $\mathbf{k}' = \frac{\omega'}{c} \mathbf{n}_1$ დაცემული ტალღის ტალღური ვექტორია. მუხტის რადიუს-

ვექტორი, ცხადია, დროს ფუნქციას წარმოადგენს. ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში ექსპონენციალური მამრავლის მაჩვენებელში პირველი წევრის ცვლილების სიჩქარე დროს მიხედვით დიდია მეორის ცვლილების სიჩქარესთან შედარებით (პირველი ტოლია ω' -ის, მეორე კი იმავე რიგისაა, რაც $kv = v/\lambda \sim v\omega'/c \ll \omega'$). ამიტომ მოძრაობის განტოლების ინტეგრებისას მარჯვენა ნაწილში \mathbf{r} მუდმივად შეიძლება ჩავთვალოთ. მაშინ

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega' m} E_0 \exp[-i(\omega' t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})] \quad (74,2)$$

განბნეული ტალღის ვექტორული პოტენციალისათვის (სისტემიდან შორ მან-
ძილზე) ზოგადი (66,2) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$A' = \frac{1}{cR_0} \int_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{rn_2}{c}}^{j'} dV = \frac{1}{cR_0} \sum (eV')_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{rn_2}{c}}$$

სადაც უკამი აღებულია სისტემის ყველა მუხტის მიხედვით; n_2 — განბნევის მი-
მართულების ერთეულოვანი ვექტორია. თუ ამაში (74,3)-ს ჩავსვამთ, ვიპოვით

$$A' = -\frac{1}{icR_0 a'} e^{-i\omega' \left(t - \frac{R_0}{c} \right)} E_0 \sum \frac{e^2}{m} \exp(iqr) \quad (74,3)$$

სადაც $q = k_1 - k_2$ დაცემული ტალღის k_1 ტალღური ვექტორისა და გან-
ბნეული ტალღის $k_2 = \frac{\omega'}{c} n_2$ ტალღური ვექტორის სხვაობაა. ამასთანავე აუცი-
ლებელია აღვნიშნოთ, რომ განბნეული გამოსხივების სიხშირე, სისტემაში მუხ-
ტების საკუთარი მოძრაობის არსებობის გამო, შეიძლება განსხვავდებოდეს და-
ცემული ტალღის ω' სიხშირისაგან. სიხშირის ეს ცვლილება ω_0 -ის რიგისაა,
ე. ი. მცირეა თვით ω' სიხშირესთან შედარებით. ამიტომ k_2 -ში ამ ცვლილების
უგულვებელყოფა შეიძლება.

გაბ'ეული ტალღის ველისათვის $H' = \text{rot } A'$ (74,3)-დან, $1/R_0$ -ის მიმართ
მაღალი რიგის წევრთა უქუგდების შემდეგ, გვაქვს

$$H' = \frac{[n_2 E_0]}{c^2 R_0} e^{-i\omega' \left(t - \frac{R_0}{c} \right)} \sum \frac{e^2}{m} \exp(iqr) \quad (74,4)$$

(ვინაიდან $\nabla R_0 = n_2$). n_2 -ის მიმართულებით სხეულოვანი კუთხის ელემენტუმი
ენერჯიის ნაკადი უდრის

$$\frac{c}{4\pi} |H'|^2 R_0^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^2} [n_2 E_0]^2 \left| \sum \frac{e^2}{m} e^{iqr} \exp(iqr) \right|^2.$$

თუ ამას დაცემული ტალღის ენერჯიის ნაკადზე ($\frac{c}{4\pi} E^2$ -ზე) გაჯყოფთ, და შემო-
ვიტანთ θ კუთხეს დაცემული ტალღის E -ს მიმართულებასა და განბნევის მი-
მართულებას შორის, მაშინ საბოლოოდ ვიპოვით განბნევის ეფექტურ განივ-
კვეთს სახით:

$$d\sigma = \left| \sum \frac{e^2}{mc^2} \exp(iqr) \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (74,5)$$

ხაზი დროს მიხედვით გასაშუალებას აღნიშნავს ე. ი. სისტემაში მუხტე-
ბის მოძრაობის მიხედვით გასაშუალებას. იგი იმიტომ წარმოებს, რომ განბნე-
ვის დამზერა ხდება დროს შუალედებში, როსლებიც დიდა სისტემაში მუხტე-
ბის მოძრაობის პერიოდთან შედარებით. დაცემული გამოსხივების ტალღის

სიგრძისათვის (74,1) პირობიდან გამომდინარებს უტოლობა $\lambda' \ll \frac{c}{v} a$. რაც

შეეხება λ' -ს და a -ს ფარდობით სიდიდეებს, შესაძლებელია ორივე კიდური შემთხვევა $\lambda' \gg a$ და $\lambda' \ll a$. ორივე ამ შემთხვევაში (74,5) ფორმულა მნიშვნელოვნად მარტივდება.

იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda' \gg a$ (74,5) გამოსახულებაში $qr \ll 1$, ვინაიდან q უკუპროპორციულია λ' -ის, ხოლო r a სიდიდის რიგისაა. თუ ამის შესაბამისად $\exp(iqr)$ -ს ერთით შევცვლით, გვექნება

$$d\sigma = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (74,6)$$

კერძოდ Z ელექტრონიანი ატომზე გაბნევისას

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (74,7)$$

ე. ი. გაბნევა ატომური ნუმრის კვადრატის პროპორციულია (ატომგულის შესაბამისად წვერი (74,6) გამოსახულებაში შეიძლება უგულებელყოთ, ვინაიდან გულის მასა გაცილებით მეტია ელექტრონების მასაზე).

გადავიღეთ ახლა იმ შემთხვევაზე, როცა $\lambda' \ll a$. (74,5)-ში მდგომი ჯამის კვადრატში ყოველი წვერის მოდულის $(e^2/m^2c^2)^2$ კვადრატების გარდა გვაქვს აგრეთვე შემდეგი სახის ნამრავლები

$$\frac{e^2}{mc^2} \frac{e'^2}{m'c^2} e^{-iq(r-r')}.$$

მუხტების მოძრაობის მიხედვით გასაშუალების დროს, ე. ი. მათი ურთიერთ განლაგების მიხედვით, $r-r'$ გაიზარდეს მნიშვნელობებს a რიგის ინტერვალში. რამდენადაც $q \sim 1/\lambda'$, $\lambda' \ll a$, ამიტომ ექსპონენციალური წვერი $e^{-iq(r-r')}$ ამ ინტერვალში სწრაფად ცვალებად პერიოდულ ფუნქციას წარმოადგენს, და მისი საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლი ხდება. ამგვარად როცა $\lambda' \ll a$, გაბნევის ეფექტური განიკვეთი უდის

$$d\sigma = \sum \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (74,8)$$

კერძოდ, ატომით გაბნევისას გვაქვს ამ შემთხვევაში

$$d\sigma = Z \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (74,9)$$

ე. ი. განხვევა ატომური ნუმრის პირველი ხარისხის პროპორციულია. შევნიშნოთ, რომ გაბნევის მცირე კუთხისათვის (74,8) და (74,9) ფორმულების გამოყენება არ შეიძლება (თუ კუთხე λ'/a -ს რიგისაა), ვინაიდან ამ შემთხვევაში q უკვე არ არის დიდი და qr მაჩვენებელიც არ არის დიდი ერთთან შედარებით.

როგორც უკვე იყო აღნიშნული, გაბნეული გამოსხივების სიხშირე შეიძლება განსხვავდებოდეს დაცემული ტალღის სიხშირისაგან. გაბნევის ამ ნაწილს

არაკოჰერენტული გაბნევა ეწოდება, კოჰერენტული გაბნევისაგან განსხვავებით რომლის დროსაც სიხშირე უცვლელი რჩება. კოჰერენტული გაბნევის ეფექტური განიკვეთის განსასაზღვრავად ჩვენ უნდა გამოვყოთ გაბნეული ტალღის ველის ის ნაწილი, რომელსაც ω' სიხშირე აქვს. ველისათვის (74,4) გამოსახულება დროზე დამოკიდებულია $e^{-i\omega't}$ მამრავლის საშუალებით და, ამას გარდა, დროზე არის დამოკიდებული აგრეთვე ჯამიც $\sum_{\text{III}} \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(t)}$. ეს უკანასკნელი დამოკიდე-

ბულება გვაძლევს სწორედ იმას, რომ გაბნეული ტალღის ველში ω' სიხშირესთან ერთად კიდევ სხვა სიხშირეებიც არსებობენ. ველის ის ნაწილი, რომელსაც ω' სიხშირე აქვს (ე. ი. დროზე დამოკიდებულია მხოლოდ $e^{-i\omega't}$ მამრავლის საშუალებით), ცხადია შეიძლება მივიღოთ $\sum_{\text{III}} \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ ჯამის გასაშუალებით დროს

მიხედვით (ე. ი. მუხტების მოძრაობის მიხედვით). ამის შესაბამისად კოჰერენტული გაბნევის ეფექტური განიკვეთი $d\sigma_{\text{კოჰ.}}$ იმით განსხვავდება $d\sigma$ სრული კვეთიდან, რომ ჯამის მოდულის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობის ნაცვლად მასში დგას ჯამის საშუალო მნიშვნელობის მოდულის კვადრატი—

$$d\sigma_{\text{კოჰ.}} = \left| \sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (74,10)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda' \gg a$, ჩვენ ისევ შეგვიძლია $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ ერთით შევცვალოთ, ასე რომ

$$d\sigma_{\text{კოჰ.}} = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

ამის (74,6) სრულ ეფექტურ განიკვეთთან შედარება გვიჩვენებს, რომ $d\sigma_{\text{კოჰ.}} = d\sigma$ ე. ი. მთელი გაბნევა კოჰერენტულია.

თუ კი $\lambda' \ll a$, მაშინ გასაშუალებების დროს (74,10)-ში ჯამის ყველა წევრი ისპობა, ასე რომ $d\sigma_{\text{კოჰ.}} = 0$. ამგვარად, ამ შემთხვევაში მთელი გაბნევა არაკოჰერენტულია.

§ 75. მცირე სიხშირის ტალღათა გაბნევა

განვიხილოთ ახლა წინა პარაგრაფში გამოკვლეული გაბნევის საწინააღმდეგო შემთხვევა, სახელდობრ, მცირე სიხშირის ტალღათა გაბნევა. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, დაუშვათ, რომ დაცემული სინათლის ω' სიხშირე აკმაყოფილებს უტოლობას [შეად. (74,1)-ს]

$$\omega' \ll \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \quad (75,1)$$

გაბნევა ისევ შედგება როგორც კოჰერენტული, ისე არაკოჰერენტული ნაწილებისაგან. ჩვენ აქ მხოლოდ კოჰერენტულ გაბნევას განვიხილავთ, ე. ი. გაბნევას სიხშირის შეუცვლელად.

გაბნეული ტალღის ველის გამოსათვლელად შეიძლება უშუალოდ (68,3) ფორმულებით ვისარგებლოთ, რომლებიც დიპოლური, კვადრუპოლური და მაგნიტურ დიპოლური გამოსხივების ველებს განსაზღვრავენ. ამ ფორმულებში, როგორც § 74, ყველა სიდიდე შტრიხებით უნდა დაიწეროს, მაგალითად

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ [\dot{\mathbf{d}}' \mathbf{n}] + \frac{1}{c} [\ddot{\mathbf{D}}' \mathbf{n}] + [[\ddot{\mathbf{m}}' \mathbf{n}] \mathbf{n}] \right\},$$

სადაც \mathbf{d}' , \mathbf{D}' და \mathbf{m}' მუხტთა სისტემის დიპოლური, კვადრუპოლური და მაგნიტური მომენტის ის ნაწილებია, რომლებსაც სისტემაზე დაცემული გასაბნევი გამოსხივება ქნის.

გაბნეული ტალღის ველის სპექტრული დაშლის $\mathbf{H}'_{\omega'}$ კომპონენტი, რომლის სიხშირე დაცემული გამოსხივების სიხშირის ტოლია, ამავე ფორმულით განისაზღვრება, რომელშიაც ყველა სიდიდის ნაცვლად მათი ფურიეს კომპონენტები უნდა ჩავსვათ. დიპოლური და ა. შ. მომენტების დროთი აღებული წარმოებულებისათვის გვაქვს (შეად. § 69)

$$\dot{\mathbf{d}}'_{\omega'} = -\omega'^2 \mathbf{d}_{\omega'}, \quad \ddot{\mathbf{m}}'_{\omega'} = \omega'^2 \mathbf{m}'_{\omega'}, \quad \ddot{\mathbf{D}}'_{\omega'} = i\omega' \mathbf{D}'_{\omega'}.$$

რამდენადაც ω' მცირედ იგულისხმება, ჩვენ დავტოვებთ წევრებს მხოლოდ ω' უდაბლესი ხარისხებით, ე. ი.

$$\mathbf{H}'_{\omega'} = \frac{1}{c^2 R_0} \omega'^2 \left\{ [\mathbf{n} \mathbf{d}'_{\omega'}] + [\mathbf{n} [\mathbf{m}'_{\omega'} \mathbf{n}]] \right\}. \quad (75,2)$$

ველის დაშლის შემდეგი წევრები (რომლებიც მაღალი რიგის მულტიპლეტურ მომენტებს შეიცავენ) მოგვცემდნენ სიხშირის უფრო მაღალი ხარისხის პროპორციულ წევრებს. თუ სისტემის ყველა მუხტის სიჩქარე მცირეა ($v \ll c$), მაშინ (75,2)-ში მეორე წევრი შეიძლება უგულვებელვყოთ პირველთან შედარებით, რამდენადაც მაგნიტური მომენტი v/c შეფარდებას შეიცავს. მაშინ

$$\mathbf{H}'_{\omega'} \approx \frac{1}{c^2 R_0} \omega'^2 [\mathbf{n} \mathbf{d}'_{\omega'}]. \quad (75,3)$$

თუ სისტემის მუხტების ჯამი ნულის ტოლია, მაშინ როცა $\omega' \rightarrow 0$ მუდმივი საზღვრისაკენ მიისწრაფის (რომ მუხტების ჯამი ნულიდან განსხვავებული ყოფილიყო, მაშინ $\omega' = 0$ შემთხვევაში, ე. ი. მუდმივ ველში, სისტემა დაიწყებდა მძძარობას როგორც მთელი)¹. ამიტომ, როცა ω' მცირეა $\mathbf{d}'_{\omega'}$ სიხშირეზე

¹ სხვათა შორის იგივე შეიძლება ითქვას სინათლის გაბნევაზე არა მარტო ნეიტრალური ატომებით, არამედ იონებითაც. იმის გამო, რომ გულის მასა დიდია, იონის როგორც მთელის მოძრაობით გამოწვეული გაბნევა შეიძლება უზულებელვყოთ.

დამოუკიდებლად შეიძლება ჩავთვალოთ. აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ გაბნეული ტალღის ველი სიხშირის კვადრატის პროპორციულია. მისი ინტენსივობა კი პროპორციული იქნება ω^4 -სა. მცირე სიხშირის ტალღათა (გაბნევის დროს (კოჰერენტული) გაბნევის ეფექტური განივკვეთი დაცემული გამოსხივების სიხშირის მეოთხე ხარისხის პროპორციულია.

წ ა ნ ი ლ ა კ ი გ რ ა ვ ი ზ ა ს ი უ ლ ვ ე ლ უ ი

§ 76 ზ რ ა ვ ი ტ ა ც ი უ ლ ი ვ ი ლ ე ბ ი ა რ ა რ ა ლ ა ტ ი ვ უ რ მ ი ჯ ა ნ ი ა ზ ი

ელექტრომაგნიტურ ველებს გარდა ბუნებაში არსებობენ კიდევ სხვაგვარის ველები — ეგრედ წოდებული გრავეიტაციული ველები ან მიზიდულობის ველები. ამ ველებს შემდეგი ძირითადი თვისება ახასიათებთ: ყველა სხეული, მისი მასისა და მუხტის მიუხედავად, ამ ველებში ერთნაირად მოძრაობს (თუ, რასაკვირველია, საწყისი პირობები ერთნაირია)¹.

გრავეიტაციული ველის ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს გავატაროთ არსებითი ანალოგია გრავეიტაციულ ველში მყოფი სხეულების მოძრაობასა და ისეთ სხეულთა მოძრაობას შორის, რომლებიც არაერთარ გარეშე ველში არ იმყოფებიან, მაგრამ განიხილებიან არაინერციული ათვისის სისტემის თვალსაზრისით. მართლაც, ინერციულ სისტემაში ყველა სხეულის თავისუფალი მოძრაობა სწორხაზობრივი და თანაბარია, და თუ დროს საწყის მომენტში მათ ერთნაირი სიჩქარე ქონოდათ, ეს სიჩქარე ექნებათ მათ ყოველთვის. ამიტომ, ცხადია, რომ თუ ამ თავისუფალ მოძრაობას მოცემულ არაინერციულ სისტემაში განვიხილავთ, მაშინ მის მიმართაც ყველა სხეულის მოძრაობა ერთნაირი იქნება.

ამგვარად, მოძრაობას არაინერციულ სისტემაში ისეთივე თვისებები აქვს, როგორც ინერციულ სისტემაში გრავეიტაციული ველის არსებობის პირობებში. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ათვისის არაინერციული სისტემა რაღაც გრავეიტაციული ველის ექვივალენტურია. ამ გარემოებას ექვივალენტობის პრინციპს უწოდებენ.

მაგალითად, განვიხილოთ მოძრაობა თანაბრადჩქარებულ ათვისის სისტემაში. ასეთ ათვისის სისტემაში თავისუფლად მოძრავ ნებისმიერი მასის სხეულებს ამ სისტემის მიმართ, ცხადია, ერთნაირი და მუდმივი აჩქარება ექნებათ, რომელიც ტოლია და საწინააღმდეგოა თვით ათვისის სისტემის აჩქარებისა. ასეთივეა მოძრაობა ერთგვაროვან მუდმივ გრავეიტაციულ ველშიაც, მაგალითად დედამიწის მიზიდულობის ველში (მის მცირე უბანში, რომელშიაც ველი ერთ-

¹ მაგალითად, დედამიწის მიზიდულობის ველში თავისუფალი ვარდნის კანონები ერთიდაიგივეა ყველა სხეულისათვის, როგორი მასაც არ უნდა ქონდეთ მათ — ყველა სხეული ერთი და იგივე აჩქარებას ღებულობს.

გვაროვნად შეიძლება ჩაითვალოს). ამგვარად, თანაბრად აჩქარებული ათვლის სისტემა მუდმივი და ერთგვაროვანი გარეშე ველის ექვივალენტურია. რამდენადმე უფრო ზოგად შემთხვევას წარმოადგენს არათანაბრად აჩქარებული, გადატანით და სწორხაზოვნად მოძრავი ათვლის სისტემა. იგი, ცხადია, ექვივალენტური იქნება ერთგვაროვანი, მაგრამ ცვალებადი გრავიტაციული ველისა.

მაგრამ, აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ არაინერციული ათვლის სისტემის ექვივალენტური ველები სავსებით იგივე რნი მინც არ არიან იმ „რეალური“ გრავიტაციული ველებისა, რომლებიც ინერციულ სისტემებში არსებობენ. სახელდობრ, ჩათვორის მეტად არსებითი განსხვავებაა მათი თვისებათა მიხედვით უსასრულობაში. „ქეშმარიტი“ გრავიტაციული ველის შემქმნელი სხეულებიდან უსასრულოდ დიდ მანძილზე ეს ველი ყოველთვის ნულისაკენ მიისწრაფვის. ის ველები კი, რომელთა ექვივალენტური ათვლის არაინერციული სისტემებია, პირიქით, უსასრულობაში განუსაზღვრელად იზრდებიან, ან, უკიდურეს შემთხვევაში, სიდიდით უსასრულო რჩებიან. ასე, მაგალითად, მბრუნავ ათვლის სისტემაში აღძვრული ცენტრიდან ძალები უსაზღვროდ იზრდება ბრუნვის ღერძიდან დაშორებისას. ის ველი კი, რომლის ექვივალენტურიც თანაბრად — აჩქარებულად მოძრავი ათვლის სისტემაა, მუდმივი რჩება მთელ სივრცეში და მასთან ერთად უსასრულობაშიაც.

ის ველები, რომლებიც არაინერციული ათვლის სისტემის ექვივალენტურია, მაშინათვე ისპობიან, როგორც კი ინერციულ სისტემაში გადავალთ. ამის საწინააღმდეგოდ, შეუძლებელია „ქეშმარიტი“ გრავიტაციული ველის (რომელიც ინერციული ათვლის სისტემაში არსებობს) გამორიცხვა ათვლის სისტემის არჩევით. ეს უკვე უშუალოდ ჩანს ზემოდაღნიშნული უსასრულობაში არსებული განსხვავებიდან „ქეშმარიტი“ გრავიტაციული ველსა და იმ ველს შორის, რომელიც არაინერციული სისტემის ექვივალენტურია. რამდენადაც უკანასკნელი ნულისაკენ არ მიისწრაფის, ამიტომ ნათელია, რომ ათვლის სისტემის ვერაერთარი შერჩევით ვერ გამოვრიცხავთ ჩვენ „ქეშმარიტ“ გრავიტაციულ ველს, რომელიც უსასრულობაში ნულისაკენ მიისწრაფვის.

ათვლის სისტემის სათანადო შერჩევით შეიძლება მხოლოდ იმას მივაღწიოთ, რომ შევძლოთ გრავიტაციული ველის გამორიცხვა სივრცის იმდენად მცირე უბანში, რომ მასში ველი ერთგვაროვანი შეიძლებოდეს ჩავთვალოთ. ეს შეიძლება გაკეთდეს ისეთი აჩქარებულად მოძრავი სისტემის არჩევით, რომლის აჩქარება სიდიდით ტოლია და ნიშნით მოპირდაპირეა იმ აჩქარებისა, რომელსაც მიიღებდა ველის განსახილავ უბანში მოთავსებული ნაწილაკი.

არარელატივისტურ მექანიკაში ნაწილაკის მოძრაობა გრავიტაციულ ველში ლაგრანჟის ფუნქციით განისაზღვრება, რომელსაც (ინერციულ ათვლის სისტემაში) შემდეგი სახე აქვს:

$$L = \frac{mv^2}{2} - \pi\phi, \quad (76,1)$$

სადაც ϕ ველს ახასიათებს და კოორდინატებისა და დროს რაღაც ფუნქციას

წარმოადგენს. მას გრავიტაციული პოტენციალი¹ ეწოდება. ამის შესაბამისად ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$\dot{\mathbf{v}} = -\text{grad } \varphi. \quad (76,2)$$

ისინი არ შეიცავენ მასას ან ნაწილაკის თვისებათა დამახასიათებელ რაიმე სხვა მუდმივს, რაც წარმოადგენს პარაგრაფის თავში აღნიშნული გრავიტაციული ველის ძირითადი თვისების გამოვლინებას.

§ 77. გრავიტაციული ველი კალაბრიუმის მქანისაში

წინა პარაგრაფში აღნიშნული გრავიტაციული ველის ძირითადი თვისება, რომ ამ ველში ყველა სხეული ერთნაირად მოძრაობს, ძალაში რჩება რელატიურ მექანიკაშია. მაშასადამე ძალაში დარჩება აგრეთვე ანალოგია გრავიტაციულ ველებსა და არაინერციულ სისტემებს შორის. ამიტომ რელატიურ მექანიკაში გრავიტაციული ველების თვისებათა შესწავლის დროს, ბუნებრივია, აგრეთვე ამ ანალოგიიდან გამოვიდეთ.

ათვლის ინერციულ სისტემაში და დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში ds ინტერვალი განისაზღვრება თანფარდობით:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

ნებისმიერი სხვა ათვლის ინერციულ სისტემაზე გადასვლის დროს (ე. ი. ლორენცის გარდაქმნების დროს), როგორც ვიცით, ds ინტერვალი იმავე სახეს შეინარჩუნებს. მაგრამ თუ ჩვენ ათვლის არაინერციულ სისტემაზე გადავალთ, მაშინ ds^2 უკვე აღარ იქნება ოთხი კოორდინატის დიფერენციალთა კვადრატების ჯამი.

ასე, მაგალითად, თანაბრად მზრუნავ კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის დროს

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \quad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \quad z = z'$$

(Ω — Z ღერძის გასწვრივ მიმართული ბრუნვის კუთხური სიჩქარე) ინტერვალის მიიღებს სახეს

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2c\Omega y' dx' dt - 2c\Omega x' dy' dt.$$

რა კანონითაც არ უნდა გარდაიქმნებოდეს დრო, შეუძლებელია ამ გამოსახულების დაყვანა ოთხი კოორდინატის დიფერენციალთა კვადრატების ჯამზე.

ამგვარად, ათვლის არაინერციულ სისტემაში ინტერვალის კვადრატი წარმოადგენს კოორდინატთა დიფერენციალებისაგან შედგენილ რალაც ზოგადი სახის კვადრატულ ფორმას ე. ი.:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (77,1)$$

¹ ქვემოთ ჩვენ არ მოგვიწევს φ ელექტრომაგნიტური პოტენციალით სარგებლობა, ამიტომ გრავიტაციული პოტენციალს იმავე ასოთი აღნიშნება გაუგებრობას არ გამოიწვევს.

სადაც g_{ik} სიდიდეები კოორდინატთა რაღაც ფუნქციებია, ე. ი. x_1, x_2 და x_3 სივრცული კოორდინატებისა და x_0 დროული კოორდინატის¹⁾. ამგვარად ათვლის არაინერციული სისტემით სარგებლობის დროს x_0, x_1, x_2 და x_3 კოორდინატთა სისტემა მრუდხაზოვან სისტემას წარმოადგენს. g_{ik} სიდიდეები, რომელნიც ყოველ მოცემულ მრუდხაზოვან კოორდინატთა სისტემაში გეომეტრიის ყველა თვისებას განსაზღვრავენ, როგორც იტყვიან, სივრცისა და დროს მეტრიკას ამყარებენ

ცხადია, რომ g_{ik} სიდიდეები ყოველთვის შეიძლება სიმეტრიული ჩავთვალოთ i და k ინდექსების მიმართ ($g_{ik} = g_{ki}$), ვინაიდან ისინი (77,1) სიმეტრიული ფორმიდან განისაზღვრებიან, რომელშიაც g_{ik} და g_{ki} შედიან ერთი და იგივე dx_i, dx_k მამრავლებზე გამრავლებული. ათვლის ინერციულ სისტემაში დეკარტის სივრცული კოორდინატებით $x_1, x_2, x_3 = x, y, z$ და $x_0 = t$ დროთი სარგებლობის დროს g_{ik} სიდიდეები ტოლია:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{00} = c^2, \quad g_{ik} = 0 \text{ თუ } i \neq k. \quad (77,2)$$

ოთხგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემას g_{ik} -ს ასეთი მნიშვნელობებით ჩვენ გალილეის სისტემას უწოდებთ.

წინა პარაგრაფში ნაჩვენები იყო, რომ ათვლის არაინერციული სისტემები რაღაც ძალთა ველების ექვივალენტურია. ჩვენ ახლა ვხედავთ, რომ რელატივისტურ მექანიკაში ეს ველები g_{ik} სიდიდეებით განისაზღვრებიან.

იგივე შეიძლება ითქვას აგრეთვე „ქეშმარიტი“ გრავიტაციული ველების მიმართ. ყოველგვარი გრავიტაციული ველი მხოლოდ სივრცისა და დროს მეტრიკის ცვლილებას წარმოადგენს, რის შესაბამისადაც იგი g_{ik} სიდიდეებით განისაზღვრება. ეს უმნიშვნელოვანესი გარემოება იმაზე მიგვიბრუნებს, რომ სივრცისა და დროს გეომეტრიული თვისებები (მისი მეტრიკა) ფიზიკური მოვლენებით განისაზღვრება და არ წარმოადგენს მათ უცვლელ თვისებებს.

ფარდობითობის თეორიის საფუძველზე აგებულ გრავიტაციული ველის თეორიას, ჩვენ მიერ წინად განხილული სპეციალური ფარდობითობის თეორიისაგან განსხვავებით, ზოგად ფარდობითობის თეორიას უწოდებენ. იგი აგრეთვე ეინშტეინის მიერ იყო შექმნილი (და საბოლოოდ 1916 წელს ჩამოყალიბებული).

ისევე, როგორც არარელატივისტურ მექანიკაში, აქაც „ქეშმარიტ“ გრავიტაციულ ველებსა და იმ ველებს შორის, რომელთა ექვივალენტური არაინერციული სისტემებია, არსებითი განსხვავება არსებობს. ათვლის ინერციულ სისტემაზე გადასვლის დროს (77,1) კვადრატული ფორმის, ე. ი. g_{ik} სიდიდეების, განსაზღვრა შეიძლება მათი გალილეისეული მნიშვნელობებიდან კოორდინატთა მარტივი გარდაქმნით. ამის შესაბამისად, ათვლის ინერციულ სისტემებში g_{ik} -ს

¹ ვინაიდან, სულერთია dx^0 ახლა კვადრატების ჯამს არ წარმოადგენს, ამიტომ ახრია არა აქვს $x_4 = icl$ წარმოსახვითი კოორდინატით სარგებლობას. ნამდვილ დროულ კოორდინატს ჩვენ x^0 -ით აღვნიშნავთ (ან t -თი), ამის შესაბამისად, შემდეგში, ორჯერ განმეორებული ლათინური ინდექსების მიხედვით ჩვენ ვიგულისხმებთ შეჯამებას 0-დან — 3-მდე, ბერძნული ინდექსების მიხედვით კი — წინანდებურად შეჯამებას 1-დან 3-მდე.

მეტად სპეციალური სახე აქვთ, სახელდობრ ისეთი, რომელიც მთელ სივრცეში კოორდინატთა გარდაქმნის საშუალებით შეიძლება დაყვანილ იქნან (77,2) გალილეისეულ მნიშვნელობებზე. ეს სახე რომ მართლაც მეტად სპეციალურია, იქიდან ჩანს, რომ ზოგად შემთხვევაში სულ მხოლოდ ოთხი კოორდინატის გარდაქმნით შეუძლებელია ათი g_{ik} სიდიდის წინასწარ მოცემულ სახეზე დაყვანა.

„ქეშმარიტი“ გრავიტაციული ველის გამორიცხვა არავითარი კოორდინატთა გარდაქმნით არ შეიძლება. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, გრავიტაციული ველის არსებობის დროს სივრცე—დრო ისეთია, რომ შეუძლებელია მთელ სივრცეში კოორდინატთა რაიმე გარდაქმნით მათი მეტრიკის განმსაზღვრელი g_{ik} სიდიდეთა დაყვანა გალილეისეულ სახეზე. ასეთ სივრცე—დროს არაეკლიდური ან გამრუდებული ეწოდება, ევკლიდური ან ბრტყელიდან განსხვავებით, რომელშიაც dx^2 ყოველთვის დაიყვანება ოთხი დიფერენციალის კვადრატთა ჯამზე. არაეკლიდურ სივრცეში ჩვეულებრივი ევკლიდური გეომეტრიის კანონებს ადგილი არა აქვთ¹.

ერთად ერთი, რასაც ჩვენ შეიძლება მივადწიოთ არაეკლიდურ სივრცეში კოორდინატთა გარდაქმნით, ეს არის g_{ik} სიდიდეთა დაყვანა (77,2) მნიშვნელობებზე (ე. ი. გრავიტაციული ველის გამორიცხვა) სივრცე—დროს მოცემულ „მოცულობის“ უსასრულოდ მცირე ელემენტში, მაშინ როდესაც სივრცე—დროს დანარჩენ ნაწილში g_{ik} სიდიდეები არაგალილეისეული რჩება. მართლაც, უსასრულოდ მცირე არეში g_{ik} მუდმივებად შეიძლება ჩავთვალოთ, ხოლო ყოველი მუდმივ კოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმა დაიყვანება კვადრატების ჯამზე. ასეთ კოორდინატთა სისტემას ჩვენ უწოდებთ გალილეისებურ კოორდინატთა სისტემას მოცემული წერტილებისათვის.

შევნიშნოთ, რომ მოცემულ წერტილში დიაგონალურ სახეზე მიყვანილ g_{ik} სიდიდეებს, ამგვარად, სამი უარყოფითი და ერთი დადებითი მთაკარი მნიშვნელობა აქვთ. აქედან გამოპდინარეობს, რომ g_{ik} სიდიდეებიდან შედგენილ \mathcal{L} დეტერმინანტი რეალურ სივრცე—დროში ყოველთვის უარყოფითია.

აქამდე ჩვენ ვლაპარაკობდით სივრცულ და დროულ კოორდინატებზე და არ შეხებებართ საკითხს იმის შესახებ, თუ როგორ შეიძლება მათი არჩევა. მაგრამ ზოგად ფარდობითობის თეორიაში თვით ათვლის სისტემის ცნება ღებულობს აზრს, განსხვავებულს იმ აზრისაგან, რომელიც მას ჰქონდა სპეციალურ თეორიაში. სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში ათვლის სისტემის სახით ჩვენ ვსარგებლობდით ერთიმეორიდან უცვლელ მანძილზე მყოფი, ე. ი. ერთ-

¹ ზუსტად რომ ვიმსჯელოთ, იმისათვის, რომ საპარტილიანი იყოს ევკლიდური გეომეტრია, აუცილებელია dx^2 -ის სწორედ კოორდინატთა დიფერენციალების კვადრატთა ჯამზე დაყვანის შესაძლებლობა, მაშინ როდესაც რეალური ევკლიდური სივრცე—დროსათვის dx^2 სამი კოორდინატის დიფერენციალი ერთი ნიშნით შედის. dx^2 კი შეპოუფებული ნიშნით (თუ წარპოსახვით კოორდინატებს არ შემოვიღებთ) ოთხნახობილებიან გეომეტრიას, რომელიც განისაზღვრება $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ კვადრატული ფორმით, ხშირად ფსევდო ევკლიდურს უწოდებენ. მაგრამ ჩვენ აქ ამ ტერმინს არ გამოვიყენებთ (მევიწიშით აგრეთვე, რომ ფსევდო-ევკლიდური სივრცე—დროსათვის წმინდა სივრცული, ე. ი. სამგანხობილებიანი გეომეტრია, რასაკვირველია, უბრალოდ ევკლიდურს წარმოადგენს).

მეორის მიმართ უძრავ სხეულთა ერთობლივობით. მაგრამ, ზოგად ფარდობითობის თეორიაში ეს შეუძლებელი ხდება. მართლაც, რაიმე გრავიტაციული ველის არსებობა, როგორც ვნახეთ, ნიშნავს, სივრცე-დროს მეტრიკის ცვლილებას, რომლის დროს იცვლება, კერძოდ, თვით სივრცის მეტრიკაც, რომელიც ამასთანავე დროზე დამოკიდებული. ამას იქამდე მივყევართ, რომ არ არსებობს არცერთი სისტემა, რომლის შემადგენელი სხეულები ერთმეორის მიმართ უძრავი იყოს¹. ამის შედეგია, ცხადია, ის, რომ არ შეიძლება სხეულთა არცერთ სისტემაში მათი ურთიერთგანლაგება უცვლელად ჩავთვალოთ.

ამგვარად ზოგადი ფარდობითობის თეორიაში სხეულთა ერთმეორის მიმართ უძრაობის ცნება აზრს კარგავს. უფრო მეტიც, აზრს კარგავს საერთოდ სხეულთა ფარდობითი მოძრაობის რაიმე გარკვეული სიჩქარის ცნებაც.

ამის შესაბამისად, გრავიტაციული ველის არსებობის პირობებში, სივრცეში სხეულთა მდებარეობის ზუსტი განსაზღვრისათვის, მკაცრად რომ ვიმსჯელოთ, აუცილებელია გვქონდეს სხეულთა უსასრულოდ დიდი რიცხვისაგან შემდგარი სისტემა, რომელიც მთელ სივრცეს ავსებს. სხეულთა ასეთი სისტემა და ყოველმათგანთან დაკავშირებული ნებისმიერად მომუშავე საათი შეადგენენ ათვლის სისტემას ზოგად ფარდობითობის თეორიაში.

§ 78. მკუდხაზოვანი კოორდინატები

როგორც ვნახეთ, გრავიტაციული ველების შესწავლის დროს ჩვენ ვხდებით მოვლენათა მრუდხაზოვან კოორდინატებში განხილვის აუცილებლობას ამასთან დაკავშირებით ჩვენ მოგვიხდება ნებისმიერ მრუდხაზოვან კოორდინატებში ოთხგანზომილებიანი გეომეტრიის დამუშავება. ამას ეთმობა 78 — 81 პარაგრაფები.

განვიხილოთ ერთი x^0, x^1, x^2, x^3 კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა მეორე x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 კოორდინატთა სისტემაში:

$$x_i = f_i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

სადაც f^i რაღაც ფუნქციებია. კოორდინატთა გარდაქმნის დროს მათი დიფერენციალები შემდეგი თანაფარდობის თანახმად გარდაიქმნებიან

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \quad (78,1)$$

ოთხი A^i სიდიდის ($i = 0, 1, 2, 3$) ყოველ ერთობლივობას, რომლებიც კოორდინატთა გარდაქმნისას როგორც მათი დიფერენციალები გარდაიქმნებიან,

¹ ასეთი დეფორმაციის აუცილებლობა, მაგალითად, იქიდან ჩანს, რომ არაეკვილიდურ სივრცეში წრეხაზის სიგრძის შეფარდება მის რადიუსთან 2π -ს არ უდრის და, საზოგადოდ, დროს მიხედვით იცვლება. ამიტომ, თუ სხეულთა მანძილები წრეხაზის რადიუსის გასწვრივ არ იცვლება, უნდა შეიცვალოს მანძილები თვით წრეხაზის გასწვრივ და პირიქით.

კონტრავარიანტული 4-ვექტორი ეწოდება. ამგვარად, კოორდინატა გარდაქმნის დროს

$$A^i = \frac{\partial X^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (78,2)$$

კონტრავარიანტული ვექტორის კომპონენტებს ჩვენ ალენიშნავთ ინდექსებით ზემოდან¹.

ვთქვათ φ რაღაც სკალარია. კოორდინატა გარდაქმნის დროს ოთხი $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ სიდიდე შემდეგი ფორმულების თანახმად გარდაიქმნება

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \quad (78,3)$$

რომლებიც (78,2) ფორმულებისაგან განსხვავდებიან. ოთხი A_i სიდიდის ყოველ ერთობლივობას, რომლებიც კოორდინატა გარდაქმნის დროს როგორც სკალარის წარმოებულები გარდაიქმნებიან, კოვარიანტული 4-ვექტორი ეწოდება. ამგვარად კოორდინატა გარდაქმნის დროს

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \quad (78,4)$$

კოვარიანტული ვექტორის კომპონენტებს ჩვენ ინდექსს ქვემოდან გაუკეთებთ.

აღვილად მივხვდებით, რომ დეკარტის კოორდინატა სისტემაში კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ ვექტორებს შორის განსხვავება არ არსებობს, რადგანაც (78,2) და (78,3) გარდაქმნის წესები ამ შემთხვევაში ექვივალენტური ხდებიან².

მრუდხაზოვან კოორდინატებში ორი სახის ვექტორების არსებობასთან დაკავშირებით ჩვენ გვაქვს 2-რე რანგის ტენზორების სამი სახე. მეორე რანგის A^{ik} კონტრავარიანტული ტენზორი ეწოდება 16 სიდიდის ერთობლივობას, რომლებიც ისევე გარდაიქმნებიან, როგორც ორი კონტრავარიანტული ვექტორის კომპონენტთა ნამრავლები, ე. ი. გარდაიქმნებიან კახონით

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}. \quad (78,5)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება კოვარიანტული ტენზორი, რომელიც გარდაიქმნება ფორმულებით

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}, \quad (78,6)$$

¹ რამდენადაც x^i კოორდინატების დიფერენციალები თვითონ კონტრავარიანტულ ვექტორს შეადგენენ, ჩვენ აქ და შემდეგში კოორდინატებს ინდექსს ზემოდან გაუკეთებთ. მხოლოდ ხანდისხან ცალკეულ კოორდინატებს ინდექსს ქვემოდ გაუკეთებთ — იქ, სადაც მათი ზემოდ მიწერა უხერხულია (მაგალითად x_1^2 (x^1)²-ის ნაცვლად).

² ამისათვის, სხვათა შორის, საკმარისია გაიხსენოთ, რომ დეკარტის კოორდინატებში ვარიანტის ისეთივე ვექტორული თვისებები აქვს, როგორც ყველა სხვა ვექტორებს.

და შერეული ტენზორი, რომელიც გარდაიქმნება თანახმად ფორმულებისა

$$A'_{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^k} A''_{ik}, \quad (78,7)$$

სრულიად ანალოგიურად განისაზღვრება უმაღლესი რიგის ტენზორები. მაგალითად, A_{iiii} ტენზორი, რომელიც კოვარიანტულია სამი ინდექსის მიმართ და კონტრავარიანტულია ერთი ინდექსის მიმართ, გარდაიქმნება ფორმულით

$$A'_{iiii} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} A''_{iiii}.$$

თუ (ერთი და იგივე კოვარიანტულობის ან კონტრავარიანტულობის) ინდექსთა რომელიმე წყვილის მიმართ ტენზორი სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიულია, მაშინ ამას ადგილი ექნება კოორდინატთა ყოველ სისტემაში. შერეული ტენზორისათვის, მაგალითად A'_{ik} -თვის, სიმეტრიულობის ან ანტისიმეტრიულობის ცნებას აზრა არა აქვს, რადგანაც სხვადასხვა ინდექსს გარდაქმნის სხვადასხვა კანონი შეესაბამება, და ამიტომ კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეში გადასვლის დროს, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, სიმეტრიულობის თვისებები იცვლება.

თუ ტენზორი (ე. ი. ყველა მისი კომპონენტი) ერთ რომელიმე კოორდინატთა სისტემაში ნულის ტოლია, მაშინ იგი ნულს უდრის ყოველ სხვა სისტემაშიც, ორი ერთნაირი კო—ან კონტრავარიანტული ხასიათის ტენზორის ჯამი იმავე ხასიათის ტენზორია.

ცხადია, რომ A_i და B_k ვექტორთა კომპონენტების ნამრავლი A_{ik} სახის ტენზორია, A_i და B^k ვექტორებისა კი — A^k სახის ტენზორი. A_i ვექტორის ნამრავლი A^{ik} ტენზორზე არის A^i სახის ტენზორი და ასე შემდეგ.

დეკარტის კოორდინატებში ყოველი ორი ვექტორიდან შეიძლება შევადგინოთ სკალარი—ამ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი. მრუდხაზოვან კოორდინატებში კი ყოველი ორი ვექტორისაგან არ შეიძლება სკალარის შედგენა. მართლაც, მაგალითად, შეუძლებელია სკალარის შედგენა ორი კონტრავარიანტული ან კოვარიანტული ვექტორიდან. მაგრამ კონტრავარიანტული A^i ვექტორიდან და კოვარიანტულ B_k ვექტორიდან კი, პირიქით, შეიძლება შევადგინოთ სკალარი. ამ სკალარს წარმოადგენს $A^i B_i$ სიდიდე, რომელსაც A^i და B_i ვექტორთა სკალარული ნამრავლი ეწოდება. (78,2) და (78,4) გარდაქმნის ფორმულების საშუალებით ადვილად დაერწმუნე უბედით იმაში, რომ $A^i B_i$ მართლაც სკალარს წარმოადგენს.

ორი ვექტორისაგან სკალარული ნამრავლის შექმნა წარმოადგენს ტენზორთა „შეკუმშვის“ შემდეგი წესის კერძო შემთხვევას. თუ ჩვენ გვაქვს $A^i \dots^i \dots^i$ ტენზორი, მაშინ $A^i \dots^i \dots^i$ (შეჯამება i -ს მიხედვით) გამოსახულება წარმოადგენს ტენზორს, რომლის რანგი ორი ერთეულით ნაკლებია. ვიდრე $A^i \dots^i \dots^i$ ტენზო-

რის რანგი. ასე, მაგალითად, A_i^k ტენზორისაგან შეიძლება შევქმნათ A' ; სკალარი. მართლაც (78,7)-ს თანახმად

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'{}^m{}_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'{}^m{}_m = A'{}^i{}_i,$$

ე. ი. A' ; მართლაც ინვარიანტი¹ ყოფილა. ამის მზგავსად სკალარებს წარმოადგენენ $A'{}^i{}_i$, $A_i^k B^i_k$ და ა. შ. გამოსახულებანი. $A'{}^i{}_i$ გამოსახულება მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს წარმოადგენს, $A_i^k B^i_k$ გამოსახულება კი კონტრაგარიანტული ვექტორია და ა. შ.

შევნიშნოთ, რომ ორი ზემო ან ორი ქვემო ინდექსის მიხედვით შეჯამების დროს მიღებული გამოსახულებანი (მაგალითად $A'{}^i{}_i$) ტენზორებს არ წარმოადგენენ. შემდეგში ჩვენ ასეთ სიდიდეებს არ გამოვიყენებთ.

მრუდხაზოვან კოორდინატებში δ_i^k შერეული ტენზორი ერთეულოვან ტენზორს წარმოადგენს, რომლის კომპონენტები $\delta_i^k = 0$, თუ $i \neq k$; და 1-ის ტოლია, როცა $i = k$. თუ A^k ვექტორია, მაშინ δ_i^k -ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$A^k \delta_i^k = A^i,$$

ე. ი. ისევ ვექტორს. სწორედ ეს ამტკიცებს იმას, რომ δ_i^k ტენზორია.

სივრცის dx^2 ელემენტის კვადრატი წარმოადგენს dx^i დიფერენციალების კვადრატულ ფუნქციას ე. ი.

$$dx^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (78,8)$$

სადაც g_{ik} კოორდინატთა ფუნქციებია. g_{ik} სიმეტრიულია i და k ინდექსების მიმართ ე. ი.

$$g_{ik} = g_{ki}. \quad (78,9)$$

რადგანაც g_{ik} -ს შეკუმშული ნამრავლი $dx^i dx^k$ კონტრაგარიანტულ ტენზორზე სკალარს წარმოადგენს, ამიტომ g_{ik} კოვარიანტული ტენზორია. g_{ik} ტენზორი მეტრიკული ტენზორის სახელწოდებას ატარებს.

როგორც უკვე § 77-ში იყო აღნიშნული, რეალურ ევკლიდურ სივრცედროში კოორდინატთა სისტემის შესაბამის არჩევით g_{ik} ტენზორი შეიძლება გარდაექმნათ გალილეისეულ ფორმებში

$$g_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}. \quad (78,10)$$

ორ A_{ik} და B^{ik} ტენზორს ერთიმეორის შებრუნებულს უწოდებენ, თუ

$$A_{ik} B^{ki} = \delta_i^i.$$

კერძოდ, g^{ik} კონტრაგარიანტული მეტრიკული ტენზორი ისეთ ტენზორს ეწოდება, რომელიც g_{ik} ტენზორის შებრუნებულია, ე. ი.

$$g_{ik} g^{ki} = \delta_i^i. \quad (78,11)$$

¹ სკალარი და ინვარიანტი — სინო. იმებია.

დეკარტის (ოთხგანზომილებიან) კოორდინატთა სისტემაში, როგორც აღნიშნული იყო, კოორდინატული ვექტორები არ განსხვავდებიან. მაგრამ განსხვავება წარმოიშობა მრუდხაზოვან კოორდინატებში გადასვლის დროს. ამიტომ, თუ რომელიმე ფიზიკური სიდიდე დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში ვექტორს წარმოადგენს, მრუდხაზოვან კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის შემდეგ იგი ორ ფორმაში შეიძლება წარმოგვიდგეს: კოვარიანტული ან კონტრავარიანტული ვექტორის სახით. ერთი და იგივე ვექტორის ორ ფორმას ჩვენ ერთი ასოთი აღვნიშნავთ, ხოლო ინდექსებს ზემოდ ან ქვემოდ გაუკეთებთ (A_i და A^i).

ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ კოვარიანტული ფორმიდან კონტრავარიანტულ ფორმაში ან პირიქით გადასვლა უნდა მოხდეს g_{ik} ტენზორის დახმარებით შემდეგი ფორმულების მიხედვით

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad (78,12)$$

ან, სხვაგვარად,

$$A_i = g_{ik} A^k. \quad (78,13)$$

მართლაც, დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში $g_{ik} = \delta_{ik}$ და ეს ფორმულები, როგორც უნდა ყოფილიყო, გვაძლევენ $A_i = A^i$.

ყველაფერი აქ თქმული ტენზორებსაც შეეხება. დეკარტის კოორდინატთა სისტემიდან მრუდხაზოვან კოორდინატებში გადასვლის დროს ყოველი ტენზორი შეიძლება რამდენიმე ფორმაში წარმოგვიდგეს სხვადასხვა კოორდინატული ხასიათით. ერთი და იგივე ტენზორის სხვადასხვა სახეს ჩვენ აგრეთვე ერთი ასოთი აღვნიშნავთ, მხოლოდ ინდექსებს სხვადასხვა მიმდევრობით

¹ აქ და სხვა ანალოგიურ ადგილებში, სადაც დამტკიცებისათვის ჩვენ დეკარტის კოორდინატთა სისტემას ვიყენებთ, ყოველთვის მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემის არჩევა მხოლოდ იმ შემთხვევაში შეიძლება, როცა სივრცე ევკლიდური. არაევკლიდური სივრცის შემთხვევაში კი დამტკიცებისათვის უნდა ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა, რომელიც დეკარტისეულია სივრცის მოცემულ უსასრულოდ მცირე მოცულობის ელემენტში, რაც ყოველთვის შეიძლება გაკეთდეს (იხ. § 77). მაშინ ყველა დასკვნა არაევკლიდური სივრცისათვისაც უტყველი დარჩება. ქვემოდ მზავას შემთხვევებში სიმოკლისათვის ჩვენ ყოველთვის დეკარტის კოორდინატთა სისტემაზე ვილაპარაკებთ. მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ ყველა შედეგი ერთნაირად გამოსადგება არაევკლიდური სივრცისათვისაც.

აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ თუ ნამდვილი x^i კოორდინატებით ვისარგებლებთ, მაშინ რეალურ სივრცე-დროში მოცემულ უსასრულოდ მცირე ელემენტში ds^2 შეძლება მხოლოდ გალილეისეულ სახემდე მივიყვანოთ, რომელშიც დიფერენციალის ერთი კვადრატი დადებითი ნიშნით შედის, ხოლო სამი-შარყოფითი ნიშნით. მაგრამ ეს გარემოება არაფერს ცვლის ამ და შემდეგი პარაგრაფის დასკვნებში, ვინაიდან გალილეისეული კოორდინატებიდან დეკარტისეულ ოთხგანზომილებიანში გადასვლისათვის უნდა შევიტანოთ მხოლოდ x^4 სამი კოორდინატის ნაცვლად ესენივე i -ზე გამრავლებული.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ გალილეის კოორდინატებში ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტები ზუსტად ერთი და იგივე არ არიან. სახელდობრ $A_\alpha = -A^\alpha, = c^2 A^0$.

დავალაგებთ. ტენზორთა სხვადასხვა ფორმებს შორის გადასვლა იმის ანალოგიურად ხდება, როგორც ეს ვექტორებში გვაქვს. ასე, მაგალითად,

$$A^i_k = g_{lm} A^l_m, \quad A^i_k = g^{lm} A_{lm} \text{ და ა. შ.}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ 2-რე რანგის ტენზორი არასიმეტრიულია, მაშინ A^i_k და A^k_i ერთმანეთისაგან უნდა განვასხვავოთ ე. ი. უნდა განვასხვავოთ ადგილი, საიდანაც ინდექსია აწეული.

დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში ვექტორის აბსოლუტური სიდიდის კვადრატი მისი კომპონენტთა კვადრატების ჯამის ტოლია. ცხადია, რომ მრუდხაზოვან კოორდინატებში ვექტორის აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატი იქნება სკალარი

$$A_i A^i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \quad (78,14)$$

სასარგებლო იქნება შევნიშნოთ, რომ ინდექსებს, რომელთა მიხედვით ტენზორთა ნამრავლში შეგამება წარმოებს, აქვთ გარკვეული გადაადგილების თავისუფლება. ასე, მაგალითად,

$$A_{ik} B^{ik} = A^{ik} B_{ik}, \quad A_{ik} B^{ik} = A^k B^i \text{ და ა. შ.}$$

ერთი რომელიმე ნამრავლის ინდექსი შეიძლება ავწიოთ იმ პირობით, რომ ასეთივე ინდექსი ჩამოშვებული იქნება მეორეში (ეს ადვილი შესამოწმებელია, თუ იმ კავშირს გამოვიყენებთ, რომელიც ტენზორთა კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კომპონენტებს შორის არსებობს და რომელიც g_{ik} ტენზორით ხორციელდება).

§ 6-ში განსაზღვრული იყო (დეკარტის კოორდინატებში) სავსებით ანტი-სიმეტრიული ერთეულოვანი ფსევდოვექტორი ϵ_{iklm} . გარდაქმნათ ახლა იგი ნებისმიერ მრუდხაზოვან კოორდინატთა სისტემაში. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ϵ_{iklm} -ის განმარტების ძალით ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\epsilon_{nrst} \epsilon_{ikrlkiklm} = \epsilon_{iklm} \quad (78,15)$$

სადაც $k - k_{ik}$ სიდიდეებისაგან შედგენილი დეტერმინანტია. მართლაც დეტერმინანტის ცალკეულ წევრებს ლებულობენ ისე, რომ აირჩევენ ოთხ ელემენტს თითოეს ყოველი სტრიქონიდან (ასე რომ $n \neq r \neq s \neq t$) და ყოველი სვეტიდან (ასე რომ $i \neq k \neq l \neq m$) და მათ ნამრავლებს უსვამენ + ან - ნიშანს იმის მიხედვით, თუ ტრანსპოზიციის რა რიცხვით შეიძლება სვეტების ნუმერთა მიმდევრობა გადავიყვანოთ მწკრივთა ნუმერების მიმდევრობაში, ლუწით თუ კენტით.

ტენზორთა გარდაქმნის ზოგადი წესების თანახმად და (78,15)-ის დახმარებით მრუდხაზოვან კოორდინატებში გადასვლის დროს გვაქვს

$$\epsilon_{iklm} = \epsilon'_{nrst} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x'^t}{\partial x^m} = \epsilon'_{nrst} J, \quad (78,16)$$

სადაც

$$J = \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

არის x' კოორდინატებიდან x' კოორდინატებში გარდაქმნის იაკობიანი. ეს იაკობიანი შეიძლება g'_{ik} თენზორის კომპონენტებისაგან შედგენილი g დეტერმინანტით გამოვსახოთ. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ რადგანაც დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში $g_{ik} = \delta_{ik}$, ამიტომ გარდაქმნის ფორმულების თანახმად

$$\delta_{ik} = g'_{im} \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეზე მდგომ სიდიდეებისაგან შედგენილ დეტერმინანტებს ერთიმეორეს გაუტოლებთ, მივიღებთ $1 = g'J^2$. ე. ი. $\sqrt{g'} = 1/J$. შემდეგში ჩვენ დავსვს ქვეშ ყოველთვის — g -ს დავწერთ, ვინაიდან რეალური სივრცე-დროს შესაბამე ყველა კოორდინატებში g დეტერმინანტი უარყოფითია (იხ. § 77). ახლა (78,16)-დან ვპოულობთ, რომ

$$e'_{iklm} = \sqrt{-g'} e_{iklm}.$$

ამგვარად, მრუდხაზოვან კოორდინატებში 4-ე რანგის ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი ტენზორი განისაზღვრება როგორც $\sqrt{-g} e_{iklm}$. თუ $\sqrt{-g}$ ფესვის ნიშანს განუსაზღვრელს დავტოვებთ, მაშინ $\sqrt{-g} e_{iklm}$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ქვეშარიტი და არა ფსევდოტენზორი. კოორდინატთა ისეთი გარდაქმნისას, რომელიც არეკვლას შეიცავს, შესაბამისად უნდა ვცვალოთ $\sqrt{-g}$ ფესვის ნიშანი.

$\sqrt{-g} e_{iklm}$ ტენზორის ინდექსების აწვევის გზით ადვილად ვიპოვით, რომ ტენზორი $\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}$ წარმოადგენს 4-ე რანგის ანტისიმეტრიულ კონტრავარიანტულ ერთეულოვან ტენზორს.

თუ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში სკალარიდან $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ -თი ინტეგრალს ავიღებთ, ჩვენ ისევ სკალარს მივიღებთ, ე. ი. ინტეგრირების დროს $d\Omega$ იქცევა როგორც ინვარიანტი (§ 6). მრუდხაზოვან x' კოორდინატებზე გადასვლის დროს ინტეგრირების $d\Omega$ ელემენტი გადადის $\frac{1}{J} d\Omega' = \sqrt{-g'} d\Omega'$ -ში.

ამგვარად, მრუდხაზოვან კოორდინატებში 4-სივრცის რაიმე არეში ინტეგრირების დროს $\sqrt{-g} d\Omega$ -ც იქცევა როგორც ინვარიანტი¹.

ყველაფერი რაც § 6 იყო თქმული ჰიპერხედაპირზე, ზედაპირზე და ხაზის გასწვრივ ინტეგრირების ელემენტების შესახებ, ძალაში რჩება აგრეთვე მრუდხაზოვან კოორდინატებში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ რამდენიმეთ იცვლება

¹ თუ φ სკალარია, მაშინ $\sqrt{-g} \varphi$ — სიდიდეს, რომელიც $d\Omega$ -თი ინტეგრირების დროს ინვარიანტს იძლევა, ხანდისხან სკალარულ სიმკვრივეს უწოდებენ. ანალოგიურად ამბობენ ვექტორული $\sqrt{-g} A^i$ და ტენზორულ $\sqrt{-g} A^{ik}$ და ა. შ. სიმკვრივეზე ეს სიდიდეები ვექტორის ან ტენზორის გვაძლევს უსასრულოდ მცირე 4 — მოცულობაში ინტეგრირების დროს (სასრულო მოცულობაში აღებული $\int A^i \sqrt{-g} d\Omega$ ინტეგრალი, საზოგადოდ, არ შეიძლება ვექტორი იყოს, ვინაიდან A^i ვექტორის გარდაქმნის კანონი სხვადასხვაა სხვადასხვა წერტილში)

დუალური ტენზორების განმარტება. სამ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებაზე აგებული ჰიპერზედაპირის „ფართის“ ელემენტი არის კონტრავარიანტული ანტისიმეტრიული dS^{ik} ტენზორი. მისი დუალური ვექტორის მისაღებად იგი $\sqrt{-g} \epsilon_{iklm}$ თენზორზე უნდა გამრავლდეს, ე. ი.

$$\sqrt{-g} dS_i = \frac{1}{6} \epsilon_{iklm} dS^{klm} \sqrt{-g}. \quad (78,17)$$

ანალოგიურად, თუ df^{ik} ორ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებაზე აგებულ (ორგანზომილებიანი) ზედაპირის ელემენტს წარმოადგენს, მაშინ მისი დუალური ტენზორი განისაზღვრება როგორც

$$\sqrt{-g} df_{ik}^* = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon_{iklm} df^{lm}. \quad (78,18)$$

აქ ჩვენ ვტოვებთ dS_i და df_{ik}^* აღნიშვნებს შესაბამისად $\frac{1}{6} \epsilon_{iklm} dS^{klm}$ და $\frac{1}{2} \epsilon_{iklm} df^{lm}$ -სათვის (და არა მათი ნამრავლებისათვის $\sqrt{-g}$ -ზე). სხვადასხვა ინტეგრალის ერთიმეორეში გარდაქმნის (6, 11 — 13) წესები აქაც იგივე რჩებიან, ვინაიდან მათ გამოყენას ფორმალური ხასიათი აქვს, რომელიც არ არის დაკავშირებული შესაბამ სიდიდეთა ტენზორულ თვისებებთან. მათ შორის განსაკუთრებით დაგვეპირდება ჩვენ ჰიპერზედაპირზე აღებული ინტეგრალის მოცულობაში აღებულ ინტეგრალად გარდაქმნის წესი (გაუსის თეორემა), რომელიც შემდეგი ჩასმით განხორციელდება:

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (78,19)$$

§ 79. მანძილავი და დროს შუალედები

ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ზოგად ფარდობითობის თეორიაში ათვლის სისტემის არჩევა არაფრით შეზღუდული არ არის. სამ $x^1 x^2 x^3$ სივრცულ კოორდინატად ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი სიდიდეები ავიღოთ, რომლებიც განსაზღვრავენ სხეულთა განლაგებას სივრცეში, ხოლო დროული x_0 კოორდინატი ნებისმიერად მომუშავე საათით შეიძლება განისაზღვროს. ისმება საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ შეიძლება x^1, x^2, x^3 და x^0 სიღონეთა მნიშვნელობებით განესაზღვროთ ჭეშმარიტი მანძილები და დროს შუალედები.

განესაზღვროთ ჯერ, თუ როგორი კავშირშია ჭეშმარიტი დრო, რომელსაც შემდეგში τ -თი აღვნიშნავთ, x^0 კოორდინატთან. ამისათვის განვიხილოთ ორი უსასრულოდ მახლობელი მოვლენა, რომელიც სივრცის ერთსადაიმევე წერტილში ხდება. მაშინ ამ ორ მოვლენის შორის ინტერვალი dS , როგორც ვიცით, არის $c d\tau$, სადაც $d\tau$ ორივე მოვლენის შორის (ჭეშმარიტი) დროს შუალედი. თუ ზოგად გამოსახულებაში $dx^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ დაუშვებთ, რომ $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, მაშინ ეპოვით

$$dx^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} dx_0^2,$$

$$\underline{d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0}, \quad (79,1)$$

ან, სხვაგვარად, სივრცის ერთი და იმავე ადგილას მომხდარ ყოველ ორ მოვლენას შორის განვლილი დროსათვის გვექნება

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (79,2)$$

ეს დამოკიდებულებანი სწორედ განსაზღვრავენ ქეშმარიტ დროს შუალედებს (ან, როგორც ამბობენ, საკუთარ დროს სივრცის მოცემული წერტილისათვის) x^0 კოორდინატის ინტერვალების საშუალებით. შევნიშნოთ, სხვათა შორის, რომ g_{00} სიდიდე, როგორც ეს მოყვანილი ფორმულებიდან ჩანს, დადებითია:

$$g_{00} > 0. \quad (79,3)$$

განვსაზღვროთ ახლა სივრცული მანძილის dl ელემენტი. სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში (§ 2) dl შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც ორ უსასრულოდ მახლობელ მოვლენას შორის ინტერვალი, თუ ეს ორი მოვლენა დროს ერთი და იმავე მომენტში ხდება. ზოგად ფარდობითობის თეორიაში, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ამის გაკეთება უკვე აღარ შეიძლება, ე. ი. dl -ის განსაზღვრა არ შეიძლება dx -ში dx^0 -ის უბრალოდ ნულთან გატოლებით. ეს იმასთან არის დაკავშირებული, რომ გრავიტაციულ ველში სხვადასხვა წერტილში საკუთარი დროს კავშირი x^0 კოორდინატთან სხვადასხვა გვარისაა.

ახლა dl -ის განსასაზღვრავად შევმდეგნაირად მოვიქცეთ. წარმოვიდგინოთ, რომ სივრცის მოცემული წერტილიდან მის უსასრულოდ მახლობელ წერტილში იგზავნება სინათლის სიგნალი და შემდეგ იმავე გზით ისევ უკან ბრუნდება. ამისათვის აუცილებელი (სივრცის ერთი და იმავე წერტილში ათვლილი) დრო გამრავლებული c -ზე, ცხადია, მოგვცემს ამ ორ წერტილს შორის გაორკეცებულ მანძილს. დავწეროთ ინტერვალი სივრცული და დროული კოორდინატების გამოყოფით:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00} dx_0^2, \quad (79,4)$$

სადაც ორჯერ განმეორებული ბერძნული ინდექსების ქვეშ იგულისხმება 1, 2 და 3 მნიშვნელობათა მიხედვით შეჯამება. ორი მოვლენისათვის, რომლებიც ერთი წერტილიდან მეორეში სიგნალის წასვლას და მოსვლას წარმოადგენენ, როგორც ვიცით, ინტერვალი ნულის ტოლია. თუ დაუშვებთ, რომ $ds^2 = 0$, მაშინ ერთი წერტილიდან მეორეში სიგნალის გავრცელების „დროსათვის“ ვიპოვიტ

$$dx_0^{(1)} = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right).$$

მეორე წერტილიდან პირველისაკენ სიგნალის შებრუნებული მოძრაობისათვის

საჭირო „დრო“ $dx_0^{(2)}$ ასეთივე ფორმულით განისაზღვრება, რომელშიაც ახლა ყველა dx^α -ს ნიშანი უნდა შეუცვალოთ, ე. ი.

$$dx_0^{(2)} = \frac{1}{g_{00}} [g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}].$$

ამგვარად „დროს“ შუალედი, რომელმაც განვლო სივრცის გაგზავნიდან მისი იმავე წერტილში მობრუნებამდე, უდრის

$$dx_0^{(1)} + dx_0^{(2)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}.$$

(79,1)-ის თანახმად, ქეშმარიტი დროს შესაბამი შუალედი აქედან მიღება $\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}$ -ზე გამრავლებით, ხოლო ორივე წერტილს შორის dl მანძილი კიდევ $c/2$ -ზე გამრავლებით. ამის შედეგად ვპოულობთ

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta. \quad (79,5)$$

ეს არის სწორედ საძებნი გამოსახულება, რომელიც მანძილს სივრცული კოორდინატების ელემენტებში განსაზღვრავს. იგი განსაზღვრავს მეტრიკას, ე. ი. სივრცის გეომეტრიულ თვისებებს. ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ფრჩხილებში მდგომი ტენზორი $g^{\alpha\beta}$ კონტრაგარიანტული ტენზორის შებრუნებული სწარმოადგენს.

მაგრამ, აუცილებელია გვახსოვდეს, რომ $g_{\alpha\beta}$ საზოგადოდ რომ ვთქვათ, x^0 -ზეა დამოკიდებული, ასე რომ (79,5) სივრცული მეტრიკაც დროს მიხედვით იცვლება. ამ მიზეზისა გამო dl -ის ინტეგრებას აზრი არა აქვს. ასეთი ინტეგრალი იმაზე იქნებოდა დამოკიდებული, თუ ორ მოცემულ სივრცულ წერტილს შორის რომელი მსოფლიო ხაზის გასწვრივ იქნებოდა აღებული. ამგვარად ზოგად ფარდობითობის თეორიაში, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, აზრს კარგავს სხეულთა შორის გარკვეული მანძილის ცნება, რომელიც ძალაში რჩება მხოლოდ უსასრულოდ მცირე მანძილისათვის. ერთადერთი შემთხვევა, როცა შესაძლებელია მანძილის განსაზღვრა სივრცის სასრულო უზნებშიაც, ეს ისეთი ათვლის სისტემებია, რომლებშიაც $g_{\alpha\beta}$ დროზე არ არის დამოკიდებული და ამიტომ სივრცული მრუდის გასწვრივ აღებულ dl ინტეგრალს გარკვეული აზრი აქვს.

გადავიდეთ ახლა ზოგადი ფარდობითობის თეორიაში ერთდროულობის ცნების განსაზღვრაზე. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, გამოვარკვიოთ საკითხი სივრცის სხვადასხვა წერტილში მოთავსებული საათების სინქრონიზაციის შესაძლებლობის შესახებ, ე. ი. ამ საათების ჩვენების ერთიმეორესთან შესაბამისობაში მიყვანის შესახებ.

ვთქვათ, რომელიმე B წერტილიდან მის უსასრულოდ მახლობელ A წერტილში იგზავნება სიგნალი, რომელიც მაშინათვე უკან ბრუნდება A -დან B -ში. B -დან A -ში და A -დან B -ში სიგნალის გაერკელების „დრო“ შესაბამისად ტოლია ზემოდ განსაზღვრული $dx_0^{(2)}$ -სა და $dx_0^{(1)}$ -ისა, სადაც მანძილი ითვლება

A-დან B-კენ. A-ში სივანლის მოსვლის ერთდროულად უნდა ჩათვალოთ B-ში საათის ის ჩვენება, რომელიც სივანლის გაგზავნისა და უკან დაბრუნების მომენტებს შორის შუაში მდებარებს. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, A წერილში რომელიმე x^0 მომენტის ერთდროულია B წერტილში $x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{dx_0^{(1)} - dx_0^{(2)}}{2}$

მომენტი. მაშასადამე $dx_0^{(1)}$ და $dx_0^{(2)}$ -თვის ზემოდმოყვანილი გამოსახულებათა დახმარებით, უსასრულოდ მახლობელ წერტილში მომხდარ ორი ერთდროულ მოვლენებისათვის x^0 „დროს“ მნიშვნელობათა სხვაობა შემდეგი სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\Delta x^0 = - \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} . \quad (79,6)$$

ეს თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს სივრცის ნებისმიერ უსასრულოდ მცირე მოცულობაში საათების სინქრონიზაცია განვახორციელოთ. თუ მზგავს სინქრონიზაციას B წერტილიდან შემდეგ გავეგრძელებთ, მაშინ შეიძლება საათების სინქრონიზება, ე. ი. მოვლენათა ერთდროულობის განსაზღვრა ყოველი არაჩაკეტილი ხაზის გასწვრივ.

მაგრამ თუ ჩვენ საათების სინქრონიზებას მოვიწოდებთ რომელიმე ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ, მაშინ ეს შეიძლება შეუძლებელი აღმოჩნდეს. მართლაც, კონტურის შემოვლისა და გამოსავალ წერტილში დაბრუნების შემდეგ ჩვენ მივიღებდით Δx^0 მნიშვნელობას, რომელიც, საზოგადოდ, ნულისაგან განსხვავდება. მითუმეტეს შეუძლებელი იქნება მაშინ საათების სინქრონიზაცია მთელ სივრცეში. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ზოგადი ფარდობითობის თეორიაში მოვლენათა ერთდროულობას არამცთუ სხვადასხვა აზრი აქვს სხვადასხვა სისტემაში, როგორც ეს სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში იყო, არამედ საზოგადოდ არ შეიძლება დადგენილ იქნეს ერთი და იგივე ათვლის სისტემის შიგნითაც კი. ერთადერთი შემთხვევა, როცა საათების სინქრონიზაცია შესაძლო აღმოჩნდება, ეს ისეთი ათვლის სისტემებია, რომლებშიაც ყველა $g_{0\alpha}$ სიდიდეები ნულის ტოლია (ან შეიძლება ნულის ტოლი გავხადოთ x^0 კოორდინატის შესაბამისი შერჩევით).

დაბოლოს, თუ ჩვენ განვიხილავთ სივრცის რომელიმე წერტილში მომხდარ ორ მოვლენის შორის საკუთარი დროს ინტერვალს, და სივრცის სხვა ადგილას ერთდროულ მოვლენებს შორის დროს ინტერვალს, მაშინ საზოგადოდ ეს ინტერვალები არ აღმოჩნდებიან ერთიმეორის ტოლი. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, სივრცის სხვადასხვა წერტილში ქეშმარიტი დრო სხვადასხვაგვარად მიიღინება. იმ დროს როდესაც გრავიტაციული ველის არ არსებობისას საათის სვლა დამოკიდებულია მხოლოდ ათვლის სისტემის არჩევაზე, ზოგად ფარდობითობის თეორიაში იგი სხვადასხვაა სივრცის სხვადასხვა წერტილში ერთსადიამვე ათვლის სისტემაშიაც კი.

§ 80. კოვარიანტული გალივარიანტიკა

დეკარტის კოორდინატებში¹ A_i ვექტორის დიფერენციალები dA_i ვექტორს ქმნიან, ხოლო ვექტორის კომპონენტების წარმოებულები კი კოორდინატებით $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ ქმნიან ტენზორს. მრუდხაზოვან კოორდინატებში კი ამას ადგილი არა აქვს; dA_i არ წარმოადგენს ვექტორს, და $\frac{dA_i}{dx^k}$ არ წარმოადგენს ტენ-

ზორს. ეს იმასთანაა დაკავშირებული, რომ dA_i არის სივრცის ორი სხვადასხვა (უსასრულოდ მახლობელი) წერტილში მყოფი ვექტორების სხვაობა. ხოლო სივრცის სხვადასხვა წერტილში ვექტორები სხვადასხვა გვარად გარდაიქმნებიან, ეინაიდან (78,2) და (78,4) გარდაქმნის ფორმულებში კოეფიციენტები კოორდინატთა ფუნქციებს წარმოადგენენ.

ნათქვამში უშუალოდაც ადვილად დაერწმუნდებით. ამისათვის განვსაზღვროთ dA_i დიფერენციალთა გარდაქმნის ფორმულები მრუდხაზოვან კოორდინატებში. კოვარიანტული ვექტორი შემდეგი ფორმულების თანახმად გარდაიქმნება

$$A_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A'_k;$$

ამიტომ

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k d \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} dx'^l.$$

ამგვარად, dA_i არ გარდაიქმნება როგორც ვექტორი (იგივე ითქმება, რასაკვირველია, კონტრავარიანტული ვექტორთა დიფერენციალებას მიმართაც). მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მეორე წარმოებულები $\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} = 0$, ე. ი. როცა x^k წარმოადგენენ x'^k -ს წრფივ ფუნქციებს, გარდაქმნის ფორმულებს აქვთ სახე

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k,$$

ე. ი. dA_i გარდაიქმნება როგორც ვექტორი.

ახლა ჩვენ განვსაზღვროთ ტენზორი, რომელიც მრუდხაზოვან კოორდინატებში ისეთივე როლს თამაშობს, როგორსაც $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ ტენზორი დეკარტის კოორდინატებში. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ჩვენ ახლა $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ დეკარტის კოორდინატებიდან მრუდხაზოვან კოორდინატებში უნდა გარდავქნათ.

¹ და აგრეთვე სწორხაზოვან ირიბკუთხიან კოორდინატებში; საზოგადოდ ყოველთვის როცა g_{ik} მუდმივი სიდიდეებია.

ამისათვის, რომ მრუდხაზოვან კოორდინატებში მივიღოთ ვექტორის დიფერენციალი, რომელიც თვითონ ვექტორს წარმოადგენს, საჭიროია, რომ ორივე ერთიმეორისაგან გამოსაკლები ვექტორი სივრცის ერთი და იგივე წერტილში იმყოფებოდეს. დეკარტის კოორდინატებში ამას სულ უბრალოდ მივაღწევთ. ამისათვის ორი უსასრულოდ მახლობელი ვექტორიდან ერთი თავისთავის პარალელურად უნდა გადავიტანოთ იმ წერტილში, სადაც მეორე იმყოფება, ვ. ი. ისე, რომ ამით მისი კომპონენტები არ შეიცვალოს. თუ მრუდხაზოვან კოორდინატებს გამოვიყენებთ, მაშინ ასეთი გადატანით, საზოგადოდ, ვექტორის კომპონენტები შეიცვლება. ვექტორის გადატანას, რომლის დროს მისი კომპონენტები არ იცვლება დეკარტის კოორდინატებში, პარალელური გადატანა¹ ეწოდება.

ამგვარად, ორი უსასრულოდ მახლობელ ვექტორთა შედარებისათვის ერთი მათგანი პარალელური გადატანით უნდა მოვათავსოთ იმ წერტილში, რომელშიაც მეორეა მოთავსებული. განვიხილოთ რომელიმე კონტრავარიანტული ვექტორი; თუ მისი მნიშვნელობა x^i კოორდინატებიდან წერტილში არის A^i , მაშინ მეზობელ $x^i + dx^i$ წერტილში იგი ტოლია $A^i + dA^i$. მოვახდინოთ A^i , ვექტორის უსასრულოდ მცირე პარალელური გადატა $x^i + dx^i$ წერტილში. ამით გამოწვეული მისი ცვლილება აღვნიშნოთ δA^i -თ. მაშინ, ორივე ვექტორის DA^i სხვაობა, რომლებიც ახლა ერთი და იგივე წერტილშია მოთავსებული, უდრის

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \quad (80,1)$$

ვექტორის უსასრულოდ მცირე პარალელური გადატანის დროს მისი კომპონენტების δA^i ცვლილება დამოკიდებულია თვით კომპონენტების სიდიდებზე. და ეს დამოკიდებულება წრფივი უნდა იყოს. ეს უშუალოდ იქიდან გამომდინარეობს, რომ ორი ვექტორის ჯამი ისეთივე კანონით უნდა გარდაიქმნას, როგორც თითოეული მათგანი. ამგვარად δA^i -ს შემდეგი სახე უნდა ქონდეს

$$\delta A^i = -\Gamma_{jk}^i A^k dx^j, \quad (80,2)$$

სადაც Γ_{jk}^i კოორდინატთა რაღაც ფუნქციებია. ცხადია, Γ_{jk}^i დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემაზე. დეკარტის² კოორდინატთა სისტემაში $\Gamma_{jk}^i = 0$.

უკვე აქედან ჩანს, რომ Γ_{jk}^i სიდიდეები ტენზორს არ შეადგენენ, ვინაიდან თუ ტენზორი კოორდინატთა ერთ სისტემაში ნულის ტოლია, იგი ნულის ტოლია ყოველ სხვა სისტემაშიაც. არაეკვილიბრ სივრცეში არ შეიძლება ისეთი კოორდინატები შევარჩიოთ, რომ ყველა Γ_{jk}^i ნულის ტოლი გახდეს მთელ სივრცეში. შეიძლება მხოლოდ ისეთი კოორდინატთა სისტემის არჩევა — დეკარტისეული მოცემული წერტილისათვის, — რომელშიაც Γ_{jk}^i მოცემული უსასრუ-

¹ გაეხსენოთ, რომ არაეკვილიბრ სივრცის შემთხვევაში ყველა დამტკიცებისა და განმარტებისათვის დეკარტის კოორდინატების ნაცვლად უნდა ვისარგებლოთ ისეთი კოორდინატთა სისტემით, რომელიც დეკარტისეულია (უფრო სწორად, გალილეისეულია) მოცემული უსასრულოდ მცირე უბნისათვის.

² და აგრეთვე ყოველ სწორხაზოვან ირიბკუთხიან სისტემაშიაც.

ლოდ მცირე უბანში¹ ნულის ტოლი გახდებიან. Γ^i_k სიდიდეებს კრისტოფელის სიმბოლოებს უწოდებენ. Γ^i_k სიდიდეებს გარდა ჩვენ ქვემოთ ვისარგებლებთ Γ^i_{kk} სიდიდეებითაც, რომლებიც შემდეგნაირად განისაზღვრებიან:

$$\Gamma^i_{kk} = g_{im} \Gamma^m_{kk} . \quad (80,3)$$

ცხადია, რომ, პირიქით,

$$\Gamma^i_k = g^{im} \Gamma_{mkk} . \quad (80,4)$$

პარალელური გადატანის დროს კოვარიანტული ვექტორის კომპონენტთა ცვლილებაც ადვილად შეიძლება დაუკავშიროთ კრისტოფელის სიმბოლოებს. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ პარალელური გადატანის დროს სკალარები, ცხადია, არ იცვლებიან. კერძოდ, პარალელური გადატანის დროს არ შეიცვლება ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი.

ვთქვათ A_i რაღაც კოვარიანტული და B^i — კონტრავარიანტული ვექტორია. მაშინ ტოლობიდან $\delta(A_i B^i) = 0$ გვაქვს

$$B^i \delta A_i = - A_i \delta B^i = \Gamma^k_{ik} B^i A_k dx^i,$$

ან, თუ ინდექსების აღნიშვნას შევცვლით,

$$B^i \delta A_i = \Gamma^k_{ik} A_k B^i dx^i.$$

აქედან, B^i -ს ნებისმიერობისა გამო, გვაქვს,

$$\delta A_i = \Gamma^k_{ik} A_k dx^i, \quad (80,5)$$

რაც კოვარიანტული ვექტორის ცვლილებას განსაზღვრავს პარალელური გადატანის დროს.

თუ (80,2)-ს და $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} dx^j$ -ს (80,1)-ში ჩავსვამთ, გვექნება

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} A^k \right) dx^j. \quad (80,6)$$

ანალოგიურად ვპოულობთ კოვარიანტული ვექტორისათვის

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} A_k \right) dx^j. \quad (80,7)$$

(80,6—7) განტოლებებში ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულებანი ტენზორებს წარმოადგენენ, ვინაიდან dx^i ვექტორზე გამრავლებით ისინი ისევ ვექტორს

¹ ჩვენ ქვემოთ დავინახავთ (§ 81), რომ Γ^i_k გამოისახებიან g_{ik} მეტრიკული ტენზორის პირველი წარმოებულებით. შეიძლება დამტკიცდეს ისეთი კოორდინატთა სისტემის არჩევის შესაძლებლობა, რომელშიაც მოცემულ წერტილში g_{ik} -ს პირველი წარმოებულები, და მაშასადამე Γ^i_{kk} -იც, ნული ხდება (ამასთანავე g_{ik} -ს მეორე წარმოებულები ნულისაგან განსხვავდებიან).

გეაძლევენ. ცხადია, რომ ისინი წარმოადგენენ იმ ტენზორებს, რომლებიც მრუდ-სახოვან კოორდინატებში თამაშობენ $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ ტენზორის როლს დეკარტის კოორდინატებში. ამ ტენზორებს შესაბამისად A^i და A_i ვექტორების კოვარიანტულ წარმოებულებს უწოდებენ. მათ ჩვენ $A^i{}_{;k}$ და $A_{i;k}$ სახით აღვნიშნავთ. ამგვარად,

$$DA^i = A^i{}_{;k} dx^k, \quad DA_i = A_{i;k} dx^k, \quad (80,8)$$

ხოლო თვით კოვარიანტული წარმოებულები:

$$A^i{}_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{kl} A^k, \quad (80,9)$$

$$A_{i;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^i} - \Gamma^k{}_{il} A_k. \quad (80,10)$$

დეკარტის კოორდინატებში $\Gamma^i{}_{kl} = 0$ და კოვარიანტული წარმოებულები ჩვეულებრივში გადადიან.

ადვილად განისაზღვრება აგრეთვე ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულები. ამისათვის უნდა განვსაზღვროთ ტენზორის ცვლილება უსასრულოდ მცირე პარალელური გადატანის დროს. განვიხილოთ, მაგალითად, რომელიმე კონტრავარიანტული ტენზორი, რომელიც ორი კონტრავარიანტული ვექტორის $A^i B^k$ ნამრავლს წარმოადგენს. პარალელური გადატანის დროს (80,5)-ის თანახმად

$$\delta(A^i B^k) = A^i \delta B^k + B^k \delta A^i = -A^i \Gamma^k{}_{lm} B^l dx^m - B^k \Gamma^i{}_{lm} A^l dx^m.$$

ამ გარდაქმნის წრფივობისა გამო იგი სამართლიანი უნდა იყოს ყოველი სხვა A^{ik} ტენზორისათვის:

$$\delta A^{ik} = - (A^{im} \Gamma^k{}_{ml} + A^{mk} \Gamma^i{}_{ml}) dx^l. \quad (80,11)$$

თუ ამას ჩავსვამთ

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A_{i;k} dx^k,$$

გამოსახულებაში, A^{ik} ტენზორის $A_{i;k}$ კოვარიანტული წარმოებულისათვის ვიპოვიით

$$A_{i;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i{}_{ml} A^{mk} + \Gamma^k{}_{ml} A^{im}. \quad (80,12)$$

სავსებით ანალოგიურად შერეული $A^i{}_k$ ტენზორის და კოვარიანტული $A_{i;k}$ ტენზორის კოვარიანტულ წარმოებულებს ვიპოვიით სახით

$$A^i{}_{k;i} = \frac{\partial A^i{}_k}{\partial x^i} - \Gamma^m{}_{ki} A^i{}_m + \Gamma^i{}_{ml} A^m{}_k, \quad (80,13)$$

$$A_{i;k;i} = \frac{\partial A_{i;k}}{\partial x^i} - \Gamma^m{}_{il} A_{m;k} - \Gamma^m{}_{ki} A_{im}. \quad (80,14)$$

ანალოგიურად შეიძლება ნებისმიერი რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულის პოვნა. ამასთანავე ჩვენ კოვარიანტული გადიფერენციალების

შემდეგ წესს ვღებულობთ. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $A_{i:k}^{\dots}$ ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულნი x^l -ით, $\frac{\partial A_{i:k}^{\dots}}{\partial x^l}$ ჩვეულებრივ წარმოებულს ყოველ $i(A_{i:k}^{\dots})$

კოვარიანტულ ინდექსზე უნდა მიუმატოთ -- $\Gamma_{ik}^l A_{i:k}^{\dots}$ წევრი, ხოლო ყოველ $i(A_{i:k}^{\dots})$ კონტრავარიანტულ ინდექსზე მიუმატოთ $+\Gamma_{ik}^l A_{i:k}^{\dots}$ წევრი.

აღვიღად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ნამრავლის კოვარიანტული წარმოებულნი იმავე წესით მოიძებნება, რაც ჩვეულებრივი ნამრავლის წარმოებულნი. მაშინ φ სკალარიდან კოვარიანტული წარმოებულნი უნდა გავიგოთ როგორც ჩვეულებრივი წარმოებულნი, ე. ი. როგორც კოვარიანტული ვექტორი $\varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$, იმასთან თანხმობით, რომ სკალარებისათვის $\delta\varphi = 0$ და ამიტომ

$D\varphi = d\varphi$. მაგალითად, $A_i B_k$ ნამრავლის კოვარიანტული წარმოებულნი ტოლია

$$(A_i B_k)_{;i} = A_{i;i} B_k + A_i B_{k;i}.$$

თუ კოვარიანტულ წარმოებულს გადიფერენციალების მაჩვენებელ ინდექსს აუწევთ, ჩვენ ვგრძელ წოდებულ კონტრავარიანტულ წარმოებულს მივიღებთ. ასე, მაგალითად,

$$A_{i;k} = g^{kl} A_{i;l}, \quad A^{i;k} = g^{kl} A^i_{;l}.$$

დავამტკიცოთ, რომ Γ_{ik}^l კრისტოფელის სიმბოლო სიმეტრიულია ქვედა ინდექსების მიმართ. რამდენადაც $A_{i;k}$ ვექტორის კოვარიანტული წარმოებულნი ტენზორს წარმოადგენს, ამიტომ $A_{i;k} = A_{k;i}$ სხვაობაც ტენზორი იქნება. ვთქვათ, A_i ვექტორი სკალარის გრადიენტია, ე. ი. $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$. მაშინ (80,10) გამოსახულების დახმარებით $A_{i;k}$ -თვის გვექნება

$$A_{i;k} - A_{k;i} = (\Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ki}^l) \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}$$

(რადგან $\frac{\partial A^i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$). დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში კოვარიანტული წარმოებულნი ჩვეულებრივ წარმოებულებად იქცევიან და ამიტომ $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ვექტორისათვის დაწერილი ტოლობის მარცხენა ნაწილი ნულის ტოლი გახდება. მაგრამ რადგანაც $A_{i;k} = A_{k;i}$ ტენზორია, თუ იგი ერთ სისტემაში ნულის ტოლია, იგი ნულის ტოლი უნდა იყოს ყველა სხვა სისტემაშიაც. აქედან ვპოულობთ, რომ

$$\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l. \quad (80,15)$$

ცხადია აგრეთვე, რომ

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \quad (80,16)$$

ამ პარაგრაფის დასასრულს მოვიყვანოთ კიდევ კრისტოფელის სიმბოლოების გარდაქმნის ფორმულები კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეში. ამ ფორმულებს მივიღებთ, თუ შევადარებთ ნებისმიერი კოვარიანტული წარ-

მოებულთაგანის განმსაზღვრელი ტოლობის ორივე მხრიდან გარდაქმნის კანონებს, იმის მოთხოვნით, რომ ეს კანონები ერთი და იგივე იყოს ორივე მხარისათვის. ამგვარად, მარტივი გამოთვლა მოგვცემს

$$\Gamma_{ki} = \Gamma_{mnp} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \quad (80,17)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ Γ_{ki} სიდიდეები ტენზორის ყოფაქცევისა არიან წრფივი გარდაქმნების მიმართ [როდესაც (80,17)-ში მეორე წევრი ისპობა].

§ 81. კრიხტოფელის სიმბოლთა კავშირი მატრიკულ ტანზორთან

დავამტკიცოთ, რომ g_{ik} მეტრიკული ტენზორის კოვარიანტული წარმობები ნულის ტოლია. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ DA_i ვექტორისათვის, როგორც ყოველი ვექტორისათვის, სამართლიანია თანათარღობა

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

მეორე მხრით, $A_i = g_{ik} A^k$, და ამიტომ

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

თუ ამას $DA_i = g_{ik} DA^k$ -ს შევადარებთ, A^k ვექტორის ნებისმიერობისა გამო, გვქვია

$$Dg_{ik} = 0.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ კოვარიანტული წარმობები

$$g_{ik;i} = 0. \quad (81,1)$$

ამგვარად კოვარიანტული გადიფერენციალების დროს g_{ik} უნდა განვიხილოთ როგორც მუდმივები.

$g_{ik;i} = 0$ ტოლობით შეიძლება ვისარგებლოთ იმისათვის, რომ კრისტოფელის Γ_{ki} სიმბოლოები g_{ik} მეტრიკული ტენზორით გამოვსახოთ. ამისათვის ტენზორის კოვარიანტული წარმობების ზოგადი (80,14) განმარტების თანახმად დავწეროთ:

$$g_{ik;i} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} - g_{mk} \Gamma_{im}^i - g_{im} \Gamma_{im}^k = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} - \Gamma_{k,im} - \Gamma_{i,ki} = 0.$$

აქედან ადვილად შეიძლება განვსაზღვროთ $\Gamma_{i,ki}$, მაგალითად, შემდეგი წესით. დავწეროთ g_{ik} -ს წარმობებულებების მნიშვნელობანი, რომელნიც მიიღებიან i, k, l ინდექსების გადასმით:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} &= \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}, \\ \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} &= \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ki}, \\ -\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} &= -\Gamma_{i,kl} - \Gamma_{k,il}. \end{aligned}$$

თუ ამ ტოლობათა ნახევარჯამს ავიღებთ, ვიპოვიტ (თუ გავიხსენებთ, რომ $\Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}$):

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right). \quad (81,2)$$

აქედან $\Gamma^i_{ik} = g^{im} \Gamma_{mik}$ სიმბოლოებისათვის გვაქვს;

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (81,3)$$

ეს ფორმულები გვაძლევენ სწორედ კრისტოფელის სიმბოლოთა გამოსახვას მეტრიკული ტენზორის საშუალებით.

გამოვიყვანოთ ახლა შემდეგისათვის სასარგებლო Γ^i_{ik} კრისტოფელის შეკუმშული სიმბოლოს გამოსახულება. ამისათვის განვსაზღვროთ g_{ik} ტენზორის კომპონენტებისაგან შედგენილი g დეტერმინანტის dg დიფერენციალი. dg -ს მისაღებად უნდა ავიღოთ g_{ik} ტენზორის ყოველი კომპონენტის დიფერენციალი და გავამრავლოთ იგი მის კოეფიციენტზე დეტერმინანტში ე. ი. შესაბამ მინორზე. მეორე მხრით, როგორც ცნობილია, g_{ik} ტენზორის შებრუნებული g^{ik} ტენზორის კომპონენტები ტოლია g_{ik} სილიდეებისაგან შედგენილი დეტერმინანტის მინორებისა გაყოფილი ამ დეტერმინანტზე. ამიტომ g დეტერმინანტის მინორები ტოლია $g g^{ik}$ -ს. ამგვარად,

$$dg = g g^{ik} dg_{ik} = -g g_{ik} dg^{ik} \quad (81,4)$$

(რამდენადაც $g_{ik} g^{ik} = \delta^i_i = 4$, ამიტომ $g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik}$).

(81,3)-დან გვაქვს

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

თუ ფრჩხილებში პირველ და მესამე წევრში m და i ინდექსებს ადგილებს შეუცვლით, მაშინ დავინახავთ, რომ ორივე ეს წევრი ერთიმეორეს შეკვეცავს, ასე რომ

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

ან, (81,4)-ის თანახმად

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \quad (81,5)$$

სასარგებლო იქნება მოვიყვანოთ აგრეთვე გამოსახულება $g^{kl} \Gamma^i_{kl}$ სილიდისათვის; ჩვენ გვაქვს

$$g^{kl} \Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

(81,4)-ის დახმარებით იგი შემდეგ სახემდე შეიძლება გარდავქმნათ:

$$g^{kl} \Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{ik})}{\partial x^k}. \quad (81,6)$$

დაბოლოს ძნელი არ არის კიდევ შემდეგი ფორმულის გამოყენება:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{ik})}{\partial x^i} = \Gamma^m_{im} g^{ik} - \Gamma^k_{im} g^{mi} - \Gamma^i_{im} g^{mk}. \quad (81,7)$$

მიღებული ფორმულების დახმარებით შეიძლება მოხერხებული სახე მიეცეთ $A^i_{;i}$ გამოსახულებას, რომელიც ვექტორის დივერგენცის განზოგადოებას წარმოადგენს მრუდხაზოვან კოორდინატებში. რადგანაც $A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ik} A^k$ [იხ. (80,9)], ამიტომ

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ii} A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i},$$

ან საბოლოოდ

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}. \quad (81,8)$$

გამოვიყენოთ ანალოგიური გამოსახულება $A^{ik}_{;k}$ -სა და ანტისიმეტრიული A^k ტენზორისათვის. (80,12)-დან გვაქვს

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}.$$

მაგრამ, ვინაიდან $A^{mk} = -A^{km}$, ამიტომ

$$\Gamma^i_{mk} A^{mk} = -\Gamma^i_{km} A^{km} = 0.$$

(81,5)-დან Γ^k_{mk} -ს გამოსახულების ჩასმით, ამგვარად, ვპოულობთ

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^{ik})}{\partial x^k}. \quad (81,9)$$

ეთქვათ ახლა A_{ik} სიმეტრიული ტენზორია. განვსაზღვროთ $A^k_{;ik}$ გამოსახულება მისი შერეული კომპონენტებისათვის. ჩვენ გვაქვს

$$A^k_{;ik} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{ik} A^i - \Gamma^i_{ik} A^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(A^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^i_{ik} A^k.$$

აქ უკანასკნელი წევრი ტოლია

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} \right) A^{ki}.$$

A^k ტენზორის სიმეტრიულობის გამო ფრჩხილებში ორი წევრი ერთიმეორეს შეკვეცავს და დარჩება

$$A^k_{;ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} A^{ki}. \quad (81,10)$$

დეკარტის კოორდინატებში $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ ანტისიმეტრიული ტენზორია. მრუდხა-

ზოვად კოორდინატებში ეს ტენზორი არის $A_{i;k} - A_{k;i}$. $A_{i;k}$ -ს გამოსახულების დახმარებით და იმის გამო, რომ $\Gamma_{ik}^i = \Gamma_{ik}^k$, გვექნება

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \quad (81,11)$$

დასასრულს, გარდავექმნათ მრუდხაზოვან კოორდინატებში რალაც φ სკალარის მეორე წარმომებულების ჯამი $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{i^2}}$. ცხადია, რომ მრუდხაზოვან კოორდინატებში ეს ჯამი გადავა $\varphi_{;i}^{;i}$ -ში. მაგრამ $\varphi_{;i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, ვინაიდან სკალარის კოვარიანტული გადიფერენციალება ჩვეულებრივ გადიფერენციალებაზე დაიყვანება. i ინდექსის აწევით მივიღებთ

$$\varphi_{;i} = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

და (81,8) ფორმულის დახმარებით ვპოულობთ

$$\varphi_{;i}^{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right). \quad (81,12)$$

სასარგებლო იქნება შევნიშნოთ, რომ გაუსის თეორემა, რომლითაც ჰიპერზედაპირზე აღებული ვექტორის ინტეგრალი 4-მოცულობაში აღებულ ინტეგრალად გარდიქანება, (81,8)-ის გამო, შეიძლება დაიწეროს სახით:

$$\oint A^i \sqrt{-g} dS_i = \int A_{;i}^i \sqrt{-g} d\Omega. \quad (81,13)$$

§ 82. ნაწილაკის მოძრაობა გრავიტაციულ ველში

სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში თავისუფალი მატერიალური ნაწილაკის მოძრაობა უმცირესი მოქმედების პრინციპით განისაზღვრება:

$$\delta S = -mc \int ds, \quad (82,1)$$

რომლის თანახმად ნაწილაკი ისე მოძრაობს, რომ ორ მსოფლიო წერტილს შორის მისი მსოფლიო ხაზი ექსტრემალურია, ე. ი. მოცემულ შემთხვევაში სწორი ხაზია ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში ამას შეესაბამება სწორხაზოვანი და თანაბარი მოძრაობა).

ცხადია, რომ გრავიტაციულ ველში ნაწილაკის მოძრაობა იმავე (82,1) ფორმის უმცირესი მოქმედების პრინციპით განისაზღვრება, ვინაიდან გრავიტაციული ველი მხოლოდ 4-სივრცის მეტრიკის კვლილებას წარმოადგენს, რაც იმაში გამოვლინდება მხოლოდ, რომ ds -ის გამოსახულება dx^i -ით შეცვლილია. ამგვარად, გრავიტაციულ ველში ნაწილაკი ისე მოძრაობს, რომ მისი მსოფლიო წერტილი აღწერს ექსტრემალურ, ან, როგორც აცობენ, x^0, x^1, x^2, x^3 4-სივრცის გეოდეზიურ ხაზს. მაგრამ, ვინაიდან გრავიტაციული ველის არსებობისას სივრცე-დრო არაევკლიდურია, ამიტომ ეს ხაზი უკვე სრულებითაც არ წარმოადგენს სწორს.

ჩვენ ვნახეთ (§ 10), რომ სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში, ე. ი. გალილეის კოორდინატა 4 — სისტემაში, თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებები არის $\frac{du^i}{ds} = 0$, ან სხვაგვარად $du^i = 0$, სადაც $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ არის 4 — სიჩქარე. ცხადია, რომ მრუდხაზოვან კოორდინატებში ეს განტოლება განზოგადოვდება

$$Du^i = 0. \quad (82,2)$$

განტოლების სახით. ვექტორის კოვარიანტული დიფერენციალის (80,6) გამო-სახულებიდან გვაქვს

$$du^i + \Gamma_{ik}^i u^k dx^i = 0.$$

თუ ამ განტოლებას ds -ზე გავყოფთ, პირველ წევრში გვექნება $\frac{du^i}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2}$ და, იმგვარად, ვიპოვიot:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{ik}^i \frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial x^i}{\partial s} = 0. \quad (82,3)$$

სწორედ ეს არის საძებნი მოძრაობის განტოლებანი. ჩვენ ვხედავთ, რომ გრავიტაციულ ველში ნაწილაკის მოძრაობა Γ_{ik}^i სიდიდეებით განისაზღვრება, ე. ი. სიდიდეებით, რომლებსაც ტენზორული ხასიათი არა აქვთ. როცა $\Gamma_{ik}^i = 0$ (82,3) გადადის ჩვეულებრივ მოძრაობის განტოლებებში $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0$.

წარმოებული $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\frac{du^i}{ds}$ ნაწილაკის 4 — აჩქარებაა. ამიტომ $\Gamma_{ik}^i u^k u^i$ სიდიდეს შეიძლება უწოდოთ „4 — ძალა“, რომელიც ნაწილაკზე მოქმედობს გრავიტაციულ ველში. ამ შემთხვევაში g_{ik} ტენზორი გრავიტაციული ველის პოტენციალების როლს თამაშობს, მისი წარმოებულები კი განსაზღვრავენ ველის „დაძაბულობას“ Γ_{ik}^i .

(82,3) განტოლებანი შეიძლება უშუალოდ გამოვიყვანოთ უმცირესი მოქმედების პრინციპიდან $\delta \int ds = 0$. ჩვენ გვაქვს¹.

$$\begin{aligned} \delta ds &= 2ds\delta ds = \delta(g_{ik} dx^i dx^k) = dx^i dx^k \delta g_{ik} + 2g_{ik} dx^i \delta dx^k = \\ &= dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + 2g_{ik} dx^i d\delta x^k. \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int \delta ds = -mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} \right\} ds = \\ &= -mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l - \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \delta x^k \right\} ds - mc g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \delta x^k \quad (82,4) \end{aligned}$$

¹ კ ვარიაცია არ უნდა აურითოთ δ ცვლილებას პარალელური გადატანის დროს.

მეორე წვერი მოისპობა, ვინაიდან საზღვრებზე $\delta x^k = 0$. მეორე წვერში ინტეგრალქვეშ k ინდექსი l -ით შევცვალოთ. მაშინ, თუ ნებისმიერი δx^l ვარიაციის კოეფიციენტს ნულს გაუტოლებთ, ვიპოვიot:

$$\frac{1}{2} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds} \left(g_{il} \frac{dx^l}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il} \frac{d^2 x^l}{ds^2} - \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ მესამე წვერი შეიძლება დაიწეროს სახით

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds},$$

და თუ (81,2)-ის თანახმად $\Gamma_{i,ik}$ კრისტოფელის სიმბოლოებს შემოვიღებთ, გვექნება

$$g_{il} \frac{d^2 x^l}{ds^2} + \Gamma_{i,ik} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0.$$

თუ g^{mi} -ზე გავამრავლებთ და შევნიშნავთ, რომ $g^{mi} g_{il} = \delta_i^m$, ხოლო $g^{mi} \Gamma_{i,ik} = \Gamma^{m,i}_k$, მივიღებთ (82,3) განტოლებას.

თუ, როგორც ჩვეულებრივ, ნამდვილ ტრაექტორიებს განვიხილავთ და ერთერთ საზღვართაგანს ცვალებადად ვიგულებთ, მაშინ (82,4)-დან δS ვარიაციისათვის გვექნება გამოსახულება $\delta S = -m c u_i \delta x^i$. ამიტომ თუ ნაწილაკის

4—იმპულსს გრაეიტაციულ ველში წინანდებურად $\frac{\partial S}{\partial x^i}$ წარმოებულის სახით განვსაზღვრავდით, მაშინ g_{ik} -ს განმარტების თანახმად მივიღებდით გამოსახულებას $p_i = -m c u_i$, ასე რომ ქვემოლ 4—იმპულსს ჩვენ განვსაზღვრავთ როგორც

$$p_i = - \frac{\partial S}{\partial x^i} = m c u_i^1. \quad (82,5)$$

ჩვენს მიერ g_{ik} -თვის მიღებული განმარტების თანახმად 4—სიჩქარის კვადრატი ახლა იქნება

$$u_i u^i = \frac{dx_i dx^i}{ds^2} = 1,$$

და არა — 1, როგორც ეს ჩვენ წინაღ გვექონდა. ამიტომ 4—იმპულსის კვადრატი ახლა ტოლია

$$p_i p^i = m^2 c^2. \quad (82,6)$$

თუ აქ p_i -ს ნაცვლად — $\frac{\partial S}{\partial x^i}$ -ს ჩავსვამთ, მაშინ ვიპოვიot ნაწილაკის ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას გრაეიტაციულ ველში

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0. \quad (82,7)$$

¹ იმის გამო, რომ ჩვენ ახლა x^k კოორდინატების ნაცვლად x^0 ით ვსარგებლობთ p_i -ს კომპონენტების კავშირი სამგანზომილებიან იმპულსთან და ენერჯიასთან, გალილეის კოორდინატებში, განსხვავებული იქნება იმისაგან, რომელიც ჩვენ წინაღ გვექონდა. სახელდობრ p^i -ს სივრცული და დროული კომპონენტები ტოლია p -სი და \mathcal{E}/c^2 -ს, ხოლო კოვარიანტული p_i -ს კომპონენტები ტოლია შესაბამისად — p -სი და \mathcal{E} -სი.

სინათლის სიგნალის გავრცელებისათვის გეოდეზიური ხაზის (82,3) ფორმა არ გამოდგება, ვინაიდან სინათლის სიგნალის გავრცელების მსოფლიო ხაზის გასწვრივ ds ინტერვალი, როგორც ვიცით, ნულის ტოლია, ასე რომ (82,3) განტოლების ყველა წევრი უსასრულო ხდება. ცნობილია, რომ გეომეტრიულ ობიექტში სინათლის სხივის გავრცელების მიმართობა სხივის მხები ტალღური ვექტორით განისაზღვრება. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ოთხგანზომილებიანი ტალღური ვექტორი შემდეგი სახით დავწეროთ: $k_i = \frac{dx^i}{d\lambda}$, სადაც λ რაღაც პარამეტრია.

სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში, ე. ი. ევკლიდის სივრცეში, სინათლის სივრცეში გავრცელების დროს ტალღური ვექტორი სხივის გასწვრივ არ იცვლება, ე. ი. $dk^i = 0$ (იხ. § 54). გრავიტაციულ ველში ეს განტოლება, ცხადია, ღებულობს სახეს $Dk^i = 0$, ან

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{jk} k^j k^k = 0. \quad (82,8)$$

(λ პარამეტრიც ამ განტოლებებიდან განისაზღვრება).

ტალღური 4-ვექტორის აბსოლუტური ნიშნენლობა, როგორც ვიცით (იხ. § 47) ნულის ტოლია, ე. ი.

$$k_i k^i = 0. \quad (82,9)$$

თუ ამაში k^i -ს ნაცვლად $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ -ს ჩავსვამთ (ψ ეიკონალია), მაშინ გრავიტაციულ ველში ეიკონალის განტოლებას ვიპოვით სახით

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0. \quad (82,10)$$

§ 83. ზღვრული გადასვლა

მცირე სიჩქარეთა ზღვრულ შემთხვევაში გრავიტაციულ ველში ნაწილაკის მოძრაობის რელატიურ განტოლებანი შესაბამ არარელატიურ განტოლებებში უნდა გადავიღებინ. ამასთანავე მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ სიჩქარის სიმცირის დაშვებიდან აგრეთვე ის პირობა გამომდინარეობს, რომ თვით გრავიტაციული ველიც სუსტი უნდა იყოს. წინააღმდეგ შემთხვევაში მაში მყოფი ნაწილაკი დიდ სიჩქარეს მიიღებდა.

გამოვარკვიოთ, თუ როგორია კავშირი ამ ზღვრულ შემთხვევაში ველის განმსაზღვრელ g_{ik} მეტრიკულ ტენზორსა და გრავიტაციული ველის φ არარელატიურ პოტენციალს შორის.

არარელატიურ მექანიკაში ნაწილაკის მოძრაობა გრავიტაციულ ველში განისაზღვრება (76,1) ლაგრანჟის ფუნქციით. ჩვენ მას ახლა შემდეგი სახით დავწეროთ:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi,$$

ჩვენ აქ დაუმატეთ მუდმივი წევრი— mc^2 (მუდმივი წევრები არ არის არსებითი ლაგრანჟის ფუნქციისათვის). ეს იმიტომ უნდა გავაკეთოთ, რომ ლაგრანჟის არარელატივისტური ფუნქცია ველის არარსებობის დროს $L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$ ზუსტად ის ფუნქცია იყოს, რომელშიაც გადადის შესაბამის რელატივისტური ფუნქცია $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ზღვარში, როცა $v/c \rightarrow 0$.

მაშასადამე, გრავიტაციულ ველში ნაწილაკისათვის S არარელატივისტური მოქმედება იქნება

$$S = \int L dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt,$$

ან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $v dt = dr$,

$$S = -mc \int \left(c dt - \frac{1}{2} \frac{v}{c} dr + \frac{1}{c} \varphi dt \right).$$

თუ ამას შევადარებთ $S = -mc \int ds$ რელატივისტურ მოქმედებას, ჩვენ დაინახავთ, რომ განსახილავ ზღვრულ შემთხვევაში ds უდრის:

$$ds = c dt - \frac{1}{2} \frac{v}{c} dr + \frac{1}{c} \varphi dt.$$

თუ ავამალღებთ კვადრატში და v^2/c^2 -ის რიგის წევრებს გამოვტოვებთ, ვიპოვიოთ

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi) dt^2 - dr^2. \quad (83,1)$$

ამგვარად, ზღვრულ შემთხვევაში მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებო ტოლია:

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad g_{00} = c^2 + 2\varphi. \quad (83,2)$$

რაც შეეხება Γ_{ik}^j სიდიდეებს, g_{ik} -თვის მიღებულ გამოსახულებათა დახმარებით ადვილად დავადგენთ, რომ ზღვრულ შემთხვევაში ნულისაგან მხოლოდ შემდეგი კომპონენტები განსხვავდებიან:

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}}. \quad (83,3)$$

§ 84. ელემტარული ნაწილის განტოლვაანი გრავიტაციული ველის აკსხეზობის დროს

სპეციალური ფარდობითობის თეორიის ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებანი ადვილად განზოგადოვდებიან ისეთნაირად, რომ მათი გამოყენება შეიძლებოდეს ნებისმიერ ოთხგანზომილებიან მრუდხაზოვან კოორდინატთა სისტემაში, ე. ი. გრავიტაციული ველის არსებობის შემთხვევაში.

სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში ელექტრომაგნიტური ველის ტენ-

ზორი განისაზღვრება როგორც $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. ცხადია, რომ ახლა იგი შე-
საბამისად უნდა განისაზღვროს როგორც $F_{ik} = A_{ki} - A_{ik}$ ¹. მაგრამ (81,11)-ის
ძალით

$$F_{ik} = A_{ki} - A_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (84,1)$$

და ამიტომ F_{ik} -ს კავშირი A_k პოტენციალთან არ იცვლება. ამის შედეგად მაქს-
ველის (26,5) განტოლებათა პირველი წყვილი

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ii}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^i} = 0 \quad (84,2)$$

აგრეთვე შეინარჩუნებს თავის სახეს.

მაქსველის განტოლებათა მეორე წყვილის დასაწერად, ჯერ უნდა განი-
საზღვროს დენის 4—ვექტორი მრუდხაზოვან კოორდინატებში. ამას ჩვენ გავა-
კეთებთ ზუსტად ანალოგიურად იმისა, როგორც ჩვენ მოვიქცით § 28-ში.
 $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ მოცულობის ელემენტში მოთავსებული de მუხტი ასე დაიწე-
რება: $de = \rho dV$, სადაც სიმკვრივე $\rho = \sum_R e_R \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_R)$ [იხ. (28,1)]. თუ $de = \rho dV$
ტოლობის ორივე მხარეს dx^i -ზე გავამრავლებთ, გვექნება

$$de dx^i = \rho dV dx^i = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0} \sqrt{-g} dV dx^0.$$

ინვარიანტული 4 — მოცულობის ელემენტი არის $\sqrt{-g} dV dx^0 = \sqrt{-g} dQ$
(§ 78), ასე რომ დენის 4—ვექტორი იქნება

$$j^i = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0}. \quad (84,3)$$

$\frac{dx^i}{dx^0}$ არის x^0 „დროს“ დახმარებით გაზომილი სიჩქარე $\left(\frac{dx^i}{dx^0}$ ვექტორი არ არის)
დენის 4—ვექტორის j^0 კომპონენტი, გამრავლებული $\sqrt{-g}$ -ზე, არის მუხტის
სივრცული სიმკვრივე.

სპეციალურ ფართობითობის თეორიაში მაქსველის განტოლებათა მეორე
წყვილს (30,2) აქვს სახე

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

¹ გალილეის კოორდინატებში A_i -ს კომპონენტები ახლა სკალარულ და ვექტორულ
პოტენციალებთან შემდეგნაირადაა დაკავშირებული: $A_{1,2,3} = -A^1, 2, 3 = A_{x,y,z}$, $A_0 = c^2 A^0 = -c\phi$
(იხე რომ მოქმედების გამოსახულებაში მდგომ $A_i dx^i$ წევრს წინანდელი მნიშვნელობა ქონ-
დეთ). ამის შესაბამისად იცვლება F_{ik} კომპონენტების კავშირი E და H ველებთან.

გრავიტაციულ ველში მათ შესაბამისად ლებულობენ სახეს

$$F_{ik}^{ik} = \frac{4\pi}{c} j^i,$$

ან, (81,9)-ის თანახმად,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^{ik}) = \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (84,4)$$

უწყვეტობის განტოლება $\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$ (29,4) ლებულობს ახლა სახეს

$$j^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} j^i) = 0 \quad (84,5)$$

[(81,8)-ის თანახმად].

დაბოლოს, ადვილად დაეწერთ დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური ველების ერთდროული არსებობის დროს. ამისათვის უნდა მოვახდინოთ (მოცეზული ველისათვის) მოქმედების იმ ნაწილის ვარაიაცია, რომელიც დამოკიდებულია ნაწილაკის ურთიერ-მოქმედებაზე ორივე ველთან, ე. ი.

$$- mc \int ds + \frac{e}{c} \int A_k dx^k,$$

უფრო მარტივი იქნება საძებნი განტოლების დაწერა პირდაპირ (21,4) განტოლების უბრალო განზოგადოების გზით მრუდხაზოვან კოორდინატებში, ე. ი. მათში du^i -ს ნაცვლად Du^i დაწერა. ამგვარად ჩვენ ვპოულობთ

$$mc \frac{Du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^i_{\mu} u^\mu. \quad (84,6)$$

§ 85. მუდმივი ზრავითაბიული ველი

გრავიტაციული ველის მეტად მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას წარმოადგენს მუდმივი გრავიტაციული ველი. მუდმივ გრავიტაციულ ველში ისეთი ათვლის სისტემის არჩევა შეიძლება, რომელშიაც ყველა სიდიდე, მათ შორის g_{ik} მეტრიკული ტენზორიც, x^0 დროულ კოორდინატზე დამოკიდებული არ იქნება.

გრავიტაციული ველი, კერძოდ, იმ შემთხვევაშია მუდმივი, როცა ყველა სხეული უძრავია (იმ ათვლის სისტემაში, რომელშიაც g_{ik} არ არიან x^0 -ზე დამოკიდებული). ცხადია, მაშინ დროს ორივე მიმართულება ტოლფასია (ე. ი. არსებითი განტოლება არ უნდა შეიცვალოს x^0 -ის ნიშნის შეცვლით). აქედან გამომდინარეობს, რომ ამ შემთხვევაში g_{ik} მეტრიკული ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, — წინააღმდეგ შემთხვევაში x^0 -ის — x^0 -ით შეცვლით ds ინტერვალის შეიცვლებოდა. ასეთ გრავიტაციულ ველს ჩვენ სტატიკურს უწოდებთ.

გრავიტაციული ველი მუდმივია აგრეთვე იმ შემთხვევაში, როცა სხეულები სტაციონალური მოძრაობას ასრულებენ. სტაციონალურის ქვეშ ჩვენ აქ ისეთი მოძრაობა გვესმის, როცა სივრცის ყოველ ელემენტში მატერიის სამკვრივე და

სიჩქარე მუდმივია. ასეთი მოძრაობის მაგალითს წარმოადგენს სიმეტრიული ფორმის ერთგვაროვანი სხეულის თანაბარი ბრუნვა სიმეტრიის ღერძის გარშემო. ამ შემთხვევაში უკვე დროს ორივე მიმართულება ტოლფასი აღარ არის. მაგალითად დროს ნიშნის შეცვლით ბრუნვის კუთხური სიჩქარის ნიშანი იცვლება. ამგვარ გრავიტაციულ ველში, ცხადია, მეტრიკული ტენზორის $g_{\alpha\beta}$ კომპონენტები, ზოგადად რომ ვთქვათ, ნულის ტოლი არ არის. ასეთ მუდმივ ველს ჩვენ უწოდებთ სტაციონალურს.

ისეთნაირად არჩეულ x^0 დროულ კოორდინატს, რომ ტენზორი $g_{\alpha\beta}$ არ იყოს x^0 -ზე დამოკიდებული, მსოფლიო დროს უწოდებენ. აქვე აუცილებელია ავღნიშნოთ, რომ მსოფლიო დროს არჩევა სავსებით ცალსახა არ არის. სახელდობრ, მსოფლიო დრო განსაზღვრულია მხოლოდ სიერცული კოორდინატების ნებისმიერ ფუნქციამდე სიზუსტით. ცხადია, რომ ასეთი ფუნქციის მიმდგრების შემდეგ ყველა $g_{\alpha\beta}$ წინანდებურად x^0 -ს არ შეიცავს. გარდა ამისა x^0 შეიძლება ნებისმიერ მუდმივზე გამრავლდეს.

თუ ჩვენ სტატიკურ გრავიტაციულ ველთან გვაქვს საქმე, სადაც შესაძლებელია ისეთი ათვლის სისტემით სარგებლობა, რომელშიაც $g_{0\alpha} = 0$, მაშინ x^0 იმდენად განისაზღვრება, რომ რჩება მხოლოდ მისი ნებისმიერ მუდმივზე გამრავლების შესაძლებლობა. თუ ამასთანავე უსასრულობაში ველი ისპობა, მაშინ უფრო მოხერხებულია ისეთი სისტემის არჩევა, რომ უსასრულობაში dg^2 ინტერვალმა გალილეისეული ფორმა მიიღოს, კერძოდ, რომ უსასრულობაში გეკონდეს $g_{00} = c^2$. ამ მოთხოვნებით განისაზღვრება მაშინ აღნიშნული მუდმივი და მსოფლიო დროს არჩევა ცალსახა ხდება. თუ ისეთი ათვლის სისტემით ვისარგებლებთ, რომელშიაც დროულ კოორდინატად მსოფლიო დროა აღებული, მაშინ რამდენადაც, კერძოდ, სიერცის მეტრიკა არ არის x^0 -ზე დამოკიდებული, ასეთ სისტემაში აზრი ექნება სხელთა შორის მანძილის განმარტებას (იხ. § 79).

მსოფლიო დროს აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ სიერცის რომელიმე წერტილში ორ რაიზე მოვლენის შორის მისი შუალედი ტოლი იქნება ნებისმიერ სხვა ორ მოვლენას შორის შუალედისა, რომლებიც შესაბამისად ერთდროულია მოვლენის (ნათა პირველი წყვილისა და რომლებიც სიერცის ნებისმიერ სხვა წერტილში ხდებიან. რაც შეეხება მსოფლიო დროსა და ქვეშეშეშეშე დროს შორის კავშირს, 79,1) ფორმულა შეიძლება დაიწეროს ახლა შემდეგი სახით

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} x^0, \quad (85,1)$$

რომელიც გამოსადეგია დროს ყოველ სასრულო შუალედისათვის. სიერცის სხვადასხვა წერტილში მსოფლიო დროს ერთ და იგივე შუალედებს საკუთარი დროს სხვადასხვა შუალედები შეესაბამება.

თუ ყველა სხეულის სიჩქარე მცირეა, ხოლო გრავიტაციული ველი სუსტი, მაშინ შეიძლება (83,2) მიახლოებითი გამოსახულებით სარგებლობა და (85,1) იძლევა

$$\tau = x^0 \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}},$$

და რადგანაც $\frac{\varphi}{c^2} \ll 1$, მიახლოებით

$$\tau = x^0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right). \quad (85,2)$$

ამგვარად საკუთარი დრო მით უფრო ნელა მიიძინება, რაც უფრო მცირე გრავიტაციული პოტენციალი სივრცის მოცემულ წერტილში, ე. ი. რაც უფრო მეტია მისი აბსოლუტური სიდიდე (ქვემოდ დამტკიცებული იქნება, რომ φ პოტენციალი უარყოფითია). თუ ორი ერთნაირი საათიდან ერთი მათგანი რაიმე დროს განმავლობაში გრავიტაციულ ველში იმყოფებოდა, მაშინ ამის შემდეგ ველში ნამყოფი საათი ჩამორჩენილი აღმოჩნდება.

როგორც ზემოდ აღვნიშნეთ, სტატიკურ გრავიტაციულ ველში მეტრიკული ტენზორის $g_{\alpha\beta}$ კომპონენტები ნულის ტოლია. § 79-ის შედეგების თანახმად ეს ნიშნავს, რომ ასეთ ველში საათების სინქრონიზაცია შესაძლებელია მთელ სივრცეში. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ სივრცული მანძილის ელემენტი dl (79,5) სტატიკურ ველში უბრალოდ ტოლია

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (85,3)$$

სტაციონალურ ველში $g_{0\alpha}$ ნულისაგან განსხვავდება და საათების სინქრონიზაცია შეუძლებელია. ვინაიდან $g_{\alpha\beta}$ x^0 -ზე დამოკიდებული არ არის, ამიტომ სივრცის სხვადასხვა წერტილში მომხდარ ერთდროული მოვლენებისათვის მსოფლიო დროს მნიშვნელობათა სხვაობისათვის (79,6) ფორმულა შეიძლება დაიწეროს სახით

$$\Delta x^0 = - \int \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}, \quad (85,4)$$

რომელიც გამოსადეგია იმ ხაზის ნებისმიერი ორი წერტილისათვის, რომლის გასწვრივ წარმოებს საათების სინქრონიზაცია. ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ სინქრონიზაციის დროს, მსოფლიო დროს მნიშვნელობათა სხვაობა, რომელსაც ჩვენ მივიღებდით გამოსავალ წერტილში დაბრუნებისას, ტოლი იქნება ინტეგრალისა

$$\Delta x^0 = - \oint \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}, \quad (85,5)$$

რომელიც ამ ჩაკეტილ კონტურზე აღებული.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $\frac{1}{g_{00}} g_{0\alpha} dx^\alpha$ ჯამი კოორდინატთა (სივრცული)

რალაც ფუნქციის სრული დიფერენციალი იყოს, ასე რომ ჩაკეტილ კონტურზე აღებული ინტეგრალი ნულის ტოლი იქნება და საათების სინქრონიზაცია შესაძლებელი აღმოჩნდება. ამ შემთხვევაში $g_{0\alpha}$ კომპონენტთა მოვლინება გამოწვეულია არა თვით ათვლის სისტემის თვისებებით, არამედ უბრალოდ x^0 კოორდინატის შეუსაბამო არჩევით. ამ კოორდინატის სათანადო შერჩევით ყოველთვის შეიძლება $g_{0\alpha}$ ნულის ტოლი გავხადოთ.

განვიხილოთ სინათლის სხივის გავრცელება მუდმივ გრაფიტაციულ ველში. § 54-ში ჩვენ ვნახეთ, რომ სინათლის სიხშირე ტოლია ψ ეიკონალის წარმოებულისა დროთი (შებრუნებული ნიშნით). ამიტომ მსოფლიო დროთი გაზომილი სიხშირე იქნება $\omega_0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_0}$. ვინაიდან ეიკონალის (82,10) განტოლება

მუდმივ ველში x^0 -ს არ შეიცავს, ამიტომ ω_0 სიხშირე მუდმივი რჩება სინათლის სხივის გავრცელების დროს. საკუთარი დროთი გაზომილი სიხშირე კი იქნება $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$; ეს სიხშირე სხვადასხვაა სივრცის სხვადასხვა წერტილში.

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

თანფარდობის ძალით ჩვენ გვაქვს

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \omega_0. \quad (85,6)$$

აქედან, სუსტი გრაფიტაციული ველისათვის მიახლოვებით ვღებულობთ

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2} \right), \quad (85,7)$$

ე. ი. სიხშირე იზრდება იმ ადგილებში, სადაც გრაფიტაციული პოტენციალის აბსოლუტური სიდიდე მეტია.

თუ გრაფიტაციული ველის φ_1 პოტენციალის მქონე წერტილიდან გამოსულ სინათლის სხივს ω სიხშირე აქვს, მაშინ თუ იგი φ_2 პოტენციალის მქონე წერტილში მოვა, მას ექნება სიხშირე (ამ წერტილის საკუთარი დროთი გაზომილი), რომელიც ტოლია $\frac{\omega}{1 - \frac{\varphi_1}{c^2}} \left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2} \right) = \omega \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \right)$.

თუ მზეზე მყოფი რაღაც ატომები ხაზოვან სპექტრს გამოასხივებენ, მაშინ მზეზე ამ სპექტრს იგივე სახე ექნება, რაც დედამიწაზე იმავე ატომების მიერ გამოსხივებულ სპექტრს. თუ დედამიწაზე ჩვენ ვაკვირდებით მზეზე მყოფი ატომებით გამოსხივებულ სპექტრს, მაშინ, როგორც ზემოდაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, მისი ხაზები წანაცვლებული იქნება დედამიწაზე გამოსხივებულ იმავე სპექტრის ხაზებთან შედარებით. სახელდობრ, ყოველი ω სიხშირის ხაზი წანაცვლებული იქნება $\Delta\omega$ ინტერვალით, რომელიც განისაზღვრება ფორმულიდან

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \omega, \quad (85,8)$$

სადაც φ_1 და φ_2 გრაფიტაციულ ველში სხივის გამოშვების და სხივის დამზერის სათანადო ადგილთა პოტენციალებია. თუ დედამიწაზე ჩვენ ვაკვირდებით მზიდან ან რომელიმე ვარსკვლავიდან გამოსხივებულ სპექტრს, მაშინ $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ და (85,8)-დან გამომდინარეობს, რომ $\Delta\omega < 0$, ე. ი. წანაცვლება ხდება ნაკლები სიხშირის მხრით. აქ აღწერილ მოვლენას „წითელი წანაცვლება“ ეწოდება.

სტატიკურ გრავიტაციულ ველში სხივის ტრაექტორია ფერმას პრინციპით განისაზღვრება (54,10): $\delta \int k dl = 0$. ვინაიდან სივრცეში $k = mc$, სადაც w მოცემულ ადგილზე გაზომილი სიხშირეა, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ $\delta \int w dl = 0$, ან (85,6)-ის დახმარებით,

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{g_{00}}} = 0. \quad (85,9)$$

აქედან უშუალოდ ჩანს, რომ გრავიტაციულ ველში სხივი უმოკლესი მანძილით არ ვრცელდება, რადგანაც უქანასკნელი განისაზღვრება განტოლებით $\delta \int dl = 0$.

მუდმივ ველში მოძრაობის დროს ნაწილაკის ენერგია შეინახება. ენერგია 4-იმპულსის $p_k = mc u_k = mc g_{k0} u^0$ დროული კომპონენტი. სტატიკურ ველში $ds^2 = g_{00} dx_0^2 - dl^2$, და ჩვენ გვაქვს ენერგიისათვის, რომელსაც ჩვენ \mathcal{E}_0 -ით ავღნიშნავთ,

$$\mathcal{E}_0 = mc g_{00} \frac{dx^0}{ds} = mc g_{00} \frac{dx^0}{\sqrt{g_{00} dx_0^2 - dl^2}}.$$

შემოვიტანოთ ნაწილაკის სიჩქარე $v = \frac{dl}{\sqrt{g_{00} dx_0^2}}$, რომელიც საკუთარი დროთაა გაზომილი, ე. ი. მოცემულ ადგილზე მყოფი დამკვირვებლის მიერ. მაშინ ენერგიისათვის ჩვენ მივიღებთ

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (85,10)$$

ეს ის სიდიდეა, რომელიც მუდმივი რჩება ნაწილაკის მოძრაობის დროს.

$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ სიდიდე კი, რომელსაც შეიძლება წინანდებურად ნაწილაკის

კინეტიკური ენერგია უწოდოთ, ამ შემთხვევაში სრულებითაც არ არის მუდმივი. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (85,10) ენერგიის გამოსახულება ძალაში რჩება სტაციონალურ ველშიაც, თუ კი \mathcal{E} სიჩქარეს იმ საკუთარი დროთი გავზომავთ, რომელიც ნაწილაკის ტრაექტორიის გასწვრივ სინქრონიზებული საათით არის განსაზღვრული.

მცირე სიჩქარეებისა და სუსტ გრავიტაციულ ველების ზღვრულ შემთხვევაში (85,10)-დან ტოლობის დახმარებით $g_{00} = c^2 + 2\varphi$ მიახლოებით ვპოულობთ:

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi, \quad (85,11)$$

სადაც $m\varphi$, (76,1) ლაგრანჟის ფუნქციასთან თანხმობით, ნაწილაკის არარელატივისტური პოტენციალური ენერგიაა გრავიტაციულ ველში.

დაბოლოს გამოვიყენოთ გრავიტაციულ ველში მოთავსებული მაკროსკოპიული სხეულისათვის თერმოდინამიკური წონასწორობის პირობა. ამ პირობას

წარმოადგენს ტემპერატურისა და ქიმიური პოტენციალის მუდმივობას მთელი სხეულის გასწვრივ. მაგრამ გრავიტაციულ ველში ჩვენ უნდა განვასხვავოთ T_0 ტემპერატურა, რომელიც ერთი და იგივეა წონასწორობაში მყოფი სხეულის ყველა წერტილში, იმ T ტემპერატურისაგან, რომელსაც ზომავს მოცემულ ადგილზე მყოფი დამკვირვებელი. როგორც ცნობილია, ტემპერატურას განსაზღვრავს სხეულის ენერჯის წარმოებული ენტროპიით (ერთიც და მეორეც გაანგარიშებულია, მაგალითად, ერთეულ მოცულობაზე). ცხადია, რომ T_0 არის სხეულის იმ \mathcal{E}_0 ენერჯის წარმოებული, რომელიც შეინახება, ხოლო T — იმ \mathcal{E} ენერჯისა, რომელსაც მოცემულ ადგილზე მყოფი დამკვირვებელი ზომავს. ვინაიდან სხეულის ენტროპია ინვარიანტული სიდიდეა (იხ. § 35), ამიტომ T და T_0 -ს შორის კავშირი ისეთივე იქნება, როგორც \mathcal{E} და \mathcal{E}_0 -ს შორის. მაგრამ \mathcal{E}_0 ტოლია S მოქმედების — $\frac{\partial S}{\partial x^0}$ წარმოებულისა, ხოლო \mathcal{E} ენერჯია — იმავე მოქმედების — $\frac{\partial S}{\partial \tau}$ წარმოებულისა, რომელიც აღებულია მოცემული წერტილის საკუთარი დროს მიხედვით. ვინაიდან $\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial x^0} \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$, ამიტომ

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (85,12)$$

და, მაშასადამე, ტემპერატურა

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (85,13)$$

ამგვარად თერმოდინამიკური წონასწორობის დროს სხეულის გასწვრივ მუდმივი რჩება $T\sqrt{g_{00}}$.

იგივე შეეხება სხეულის ქიმიურ პოტენციალსაც, რომელიც, როგორც ცნობილია, განისაზღვრება ენერჯის წარმოებულით ნაწილაკთა რიცხვით მუდმივი ენტროპიის დროს. ვინაიდან სხეულის შემადგენელ ნაწილაკთა რიცხვი უცვლელი რჩება, ამიტომ მოცემულ წერტილში გაზომილი ζ ქიმიური პოტენციალისათვის ისევე, როგორც ტემპერატურისათვის, გვაქვს თანაფარდობა

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (85,14)$$

სადაც ζ_0 მუდმივი რჩება თერმოდინამიკურ წონასწორობაში მყოფი მთელი სხეულის გასწვრივ. მცირე სიჩქარეთა ზღვრულ შემთხვევაში ζ გადადის $mc^2 + \zeta'$ -ში, სადაც ζ' ქიმიური პოტენციალის არარელატივურ გამოსახულებას წარმოადგენს (mc^2 იმიტომ დაემატა, რომ მცირე სიჩქარეთა შემთხვევაში ყოველი ნაწილაკის ენერჯის რელატივური გამოსახულება არარელატივურისაგან განსხვავდება mc^2 „უძრავობის ენერჯიით“; m ცალკეული ნაწილაკის მასაა). თუ, ამას გარდა, გრავიტაციული ველიც სუსტია, მაშინ $g_{00} = c^2 + 2\varphi$, და ჩვენ გვექნება

$$\zeta \sqrt{g_{00}} \approx \zeta' + mc^2 + m\varphi.$$

ამგვარად, განსახილავ შემთხვევაში, თერმოდინამიკურ წონასწორობაში მყოფი სხეულის გასწვრივ მუდმივი რჩება სიდიდე

$$\zeta + m\varphi = \text{const.} \quad (85,15)$$

ეს შედეგი ცნობილია არარელატიურ სტატისტიკიდან.

§ 86. ბრუნვა

სტაციონალური გრავიტაციული ველის მაგალითის სახით განვიხილოთ თანაბრად მბრუნავი ათვლის სისტემა და შევისწავლოთ სივრცე-დროს მეტრიკული თვისებები ასეთ სისტემაში.

განვსაზღვროთ ds ინტერვალი განსახილავ ათვლის სისტემაში. ამისათვის მოვახდინოთ გარდაქმნა უძრავი სისტემიდან თანაბრად მბრუნავ სისტემაში. კოორდინატთა უძრავ r, φ, z, t სისტემაში (ჩვენ ვიყენებთ r, φ, z ცილინდრულ კოორდინატებს) ინტერვალი

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2.$$

მბრუნავ სისტემაში ცილინდრული კოორდინატები იყოს r, φ და z . თუ ბრუნვის ღერძი Z და Z' ღერძებს თანხვედბა, მაშინ $r' = r, z' = z, \varphi' = \varphi + \Omega t$, სადაც Ω ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა. თუ ამას ჩავსვამთ, ჩვენ ვიპოვიან ds'^2 -ის საძებნ გამოსახულებას მბრუნავ ათვლის სისტემაში:

$$ds'^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt'^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt' - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2. \quad (86,1)$$

მეტრიკული ტენზორის g_{00} კომპონენტი ტოლია

$$g_{00} = c^2 - \Omega^2 r^2. \quad (86,2)$$

ამიტომ სივრცის მოცემულ ადგილზე მყოფი საათით გაზომილი კეშმარტი დრო t „დროსთან“ დაკავშირებულია თანაფარდობით (იხ. § 79):

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} t. \quad (86,3)$$

შემდეგ განვსაზღვროთ სივრცული მანძილის dl ჭლებენტი მბრუნავ ათვლის სისტემაში. ამისათვის (86.1)-დან g_{ik} -ს მნიშვნელობები უნდა ჩავსვათ ზოგად (79,5) ფორმულაში. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ ერთადერთი ნულისაგან განსხვავებული g_{0z} სახის კომპონენტი არის $g_{0r} = \Omega r^2$, ადვილად ვიპოვიან:

$$dl'^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}. \quad (86,4)$$

ეს გამოსახულება განსაზღვრავს სივრცითი გეომეტრიას მბრუნავ ათვლის სისტემაში. განვსაზღვროთ, მაგალითად, წრეხაზას სიგრძე (რომლის ცენტრი ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს). ამისათვის უნდა დაუშვათ $dz = dr = 0$ და

გავაინტეგრალთ $d\varphi$ -თი 0-დან 2π -მდე. ეს გვაძლევს $\frac{2\pi r}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$. მეორე

მხრით, რადიუსის სიგრძე (რომელსაც მივიღებთ dl -ის გაინტეგრალებით, როცა $d\varphi = 0$ და $d\chi = 0$) პირდაპირ r -ის ტოლია. ამგვარად მბრუნავ სხეულზე გეომეტრია ისეთია, რომ წრეხაზის სიგრძის შეფარდება რადიუსთან 2π -ზე მეტია.

აუცილებელია ავღნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ ამ პარაგრაფში განხილული მბრუნავი ათვლის სისტემის გამოყენება შეიძლება მხოლოდ c/Ω -ს ტოლ მანძილამდე. მართლაც (86,2)-დან ჩანს, რომ თუ $r > c/\Omega$ -ზე, მაშინ g_{00} უარყოფითი ხდება, რაც დაუშვებელია [იხ. (79,3)]. მბრუნავი სისტემის შორ მანძილებზე გამოყენების შეუძლებლობა იმასთან არის დაკავშირებული, რომ ამ მანძილებზე ბრუნვის სიჩქარე სინათლის სიჩქარეზე მეტი გახდებოდა, და ამიტომ რეალური სხეულებით ასეთი სისტემის განხორციელება შეუძლებელია.

როგორც ყოველ სტაციონალურ ველში, მბრუნავ სხეულზედაც შეუძლია საათები ცალსახად სინქრონიზირებული იქნან ყველა წერტილში. მართლაც, თუ სინქრონიზაციას ვახდენთ რაიმე ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ, გამოსავალ წერტილში დაბრუნებისას ჩვენ მივიღებთ დროს პირვეანდელი მნიშვნელობისაგან განსხვავებულ სიდიდეს. განსხვავება იქნება $-\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$, სადაც ინტეგრალი აღებულია განსახილავ კონტურზე. ჩასმის შემდეგ ვღებულობთ

$$\Delta t = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}. \quad (86,5)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\Omega r/c \ll 1$, ე. ი. როცა ბრუნვის სიჩქარე მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით, ეს ფორმულა შემდეგ ფორმულაში გადადის

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S. \quad (86,6)$$

სადაც S კონტურის პროექციის ფართობია ბრუნვის ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე (+ ან — ნიშანს ადგილი აქვს მაშინ, როცა კონტურს შემოუვლით ბრუნვის ან მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით სათანადოთ). დაუშვათ, რომ რომელიმე ჩაკეტილ კონტურზე ვრცელდება სინათლის სხივი. გამოვთვალოთ x/c რიგის წევრებამდე სიზუსტის ის დრო, რომელიც გავა სხივის გაგზავნის მომენტიდან გამოსავალ წერტილში დაბრუნებამდე. განმარტების თანახმად სინათლის სიჩქარე ყოველთვის c -ს ტოლია, თუ დროს სინქრონიზაცია მოცემული ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ ხდება. ამიტომ საძიებელი დრო ტოლია

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

სადაც L — კონტურის სიგრძეა. ამის შესაბამისად, სინათლის სიჩქარე, გაზომილი როგორც შეფარდება L/c , აღმოჩნდება ტოლი

$$c \mp 2\Omega \frac{S}{L}.$$

ეს ფორმულა და აგრეთვე ფორმულა დობლერის ეფექტის პირველი მიახლოებისათვის ადვილად მიიღება წმინდა კლასიკური გზითაც.



გარავითაცოული ველის ბანტოლუბანი

§ 87. ხიმრუდის ტენზორი

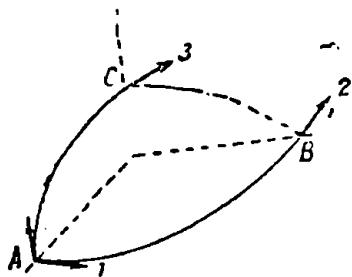
დაუბრუნდეთ ისევ ვექტორის პარალელური გადატანის ცნებას. როგორც § 80-ში იყო აღნიშნული, არაეკვილიდური სივრცის ზოგად შემთხვევაში ვექტორის უსასრულო მცირე პარალელური გადატანა განისაზღვრება როგორც ისეთი გადაჯანა, რომლის დროსაც ვექტორის კომპონენტები უცვლელი რჩება კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც დეკარტისეულია სივრცის მოცემულ უსასრულოდ მცირე მოცულობის ელემენტში.

თუ $x' = x'(s)$ რომელიმე მრუდის პარამეტრული განტოლებაა (s რაღაც წერტილიდან ათვლილი რკალის სიგრძეა), მაშინ $u' = \frac{dx'}{ds}$ ვექტორი მრუდისადმი მხები ერთეულოვანი ვექტორია. თუ განსახილავი მრუდი გეოდეზიურია, მაშინ, როგორც § 74-ში ვნახეთ, მის გასწვრივ $Du' = 0$ [იხ. (82, 2)]. ეს იმის ნიშნავს, რომ თუ ასეთ ვექტორს პარალელურად გადავიტანთ გეოდეზიურ ხაზზე მისი x' წერტილიდან $x' + dx'$ წერტილში, მაშინ ეს ვექტორი $u' + du'$ ვექტორს თანხვედება, რომელიც მრუდისადმი მხებია $x + dx$ წერტილში. ამგვარად, გეოდეზიური ხაზისადმი მხების ამავე ხაზის გასწვრივ გადაადგილების დროს იგი თავის თავის პარალელური რჩება.

გეოდეზიური ხაზის ამ თვისებისა გამო ჩვენ შეიძლება ვთქვათ, რომ ყოველი ვექტორას პარალელური გადატანის დროს მისი მდგენელები გეოდეზიური ხაზების მიმართულებით გზის ყოველ წერტილში უცვლელი უნდა დარჩეს. სხვაგვარად თუ ვიტყვით, პარალელური გადატანის დროს ვექტორმა ყოველთვის ერთიდა იგივე კუთხე უნდა შეინარჩუნოს გეოდეზიურ ხაზებთან.

მეტად არსებითია ის გარემოება, რომ არაეკვილიდურ სივრცეში ვექტორის მოცემული წერტილიდან მეორეში პარალელური გადატანა სხვადასხვა შედეგს იძლევა, თუ გადატანა სხვადასხვა გზით წარმოებს. კერძოდ აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ვექტორს თავისთავის პარალელურად გადავიტანთ რომელიმე ჩაკეტილ კონტურზე, მაშინ იგი გამოსავალ წერტილში დაბრუნებისას თავისთავის არ თანხვედება. ამის ნათესაყოფად განვიხილოთ არაეკვილიდური ორგანოზომილებიანი სივრცე, ე. ი. რომელიმე მოუღი ზედაპირი, ნახ. 15 ზე გამოსახულია ასეთი ზედაპირის ნაჭერი, რომელიც სამი გეოდეზიური ხაზით არის შე-

მოსაზღვრული. გადაიტანოთ პარალელურად ვექტორი 1 ამ ხაზებით შედგენილი ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ. AB ხაზის გასწვრივ გადაადგილების დროს ვექტორი 1 ყოველთვის შეინარჩუნებს ამ ხაზთან მუდმივ კუთხეს და გადავა ვექტორში 2. BC ს გასწვრივ გადაადგილების დროს იგი, ამკვარადვე გადავა ვექტორში 3. დაბოლოს, C -დან A წერტილისაკენ CA მრუდით მოძრაობის დროს განსახილავი ვექტორი ამ მრუდთან შეინარჩუნებს მუდმივ კუთხეს და გადავა ვექტორში 1', რომელიც c ვექტორს არ თანხვედბა.



ნახ. 15.

გამოვიყვანოთ ზოგადი ფორმულა, რომელიც ვექტორის ცვლილებას განსაზღვრავს მისი პარალელური გადატანის დროს რომელიმე უსასრულოდ მცირე ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ. ეს ΔA_k ცვლილება, ცხადია, შეიძლება დაიწეროს სახით $\oint \delta A_k$, სადაც ინტეგრალი მოცემულ კონტურზეა აღებული. თუ

δA_k -ს ნაცვლად $(\delta O, 5)$ გამოსახულებას ჩავსვით, გვექება

$$\Delta A_k = \oint \Gamma_{km}^i A_i dx^m$$

(ინტეგრალის ქვეშ მდგომი ვექტორი იცვლება კონტურის გასწვრივ გადატანასთან ერთად). ეს მრუდხაზოვანი ინტეგრალი სტოქსის (6,14) თეორემის დახმარებით შეიძლება გარდაქმნათ მოცემული კონტურით შემოფარგლულ ზედაპირზე აღებულ ინტეგრალად. მაშინ

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \iint \left[\frac{\partial (\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial (\Gamma_{lm}^i A_i)}{\partial x^k} \right] df^{lm} \\ &= \frac{1}{2} \iint \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{lm}^i}{\partial x^k} A_i + \Gamma_{km}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{lm}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right] df^{lm}. \end{aligned}$$

მაგრამ A_i ვექტორის ცვლილება კონტურის გასწვრივ წარმოადგენს მის ცვლილებას პარალელური გადატანის გამო. ამიტომ A_i -ს წარმოებულები ჩვენ პირდაპირ $\delta A_i = \Gamma_{ni}^m A_n dx^m$ -დან შეიძლება განვსაზღვროთ, ე. ი. $\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma_{ni}^m A_n$. თუ ამას

ჩავსვით და ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ორ უკანასკნელ წევრში ინდექსებს შევცვლით, ვიპოვიოთ:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{lm}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ni}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{ni}^m \Gamma_{lm}^i \right\} A_i df^{lm}.$$

იმის გამო, რომ აღებული გვაქვს უსასრულო მცირე კონტური, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება შეიძლება შევცვალოთ მისი მნიშვნელობით კონტურის შიგნით მდებარე რაიმე წერტილში და ინტეგრალს გარეთ განვიტანოთ.

დარჩენილი ინტეგრალი მაშინ უბრალოდ იმ Δf^{lm} ზედაპირის ფართობს იძლევა, რომელიც კონტურითაა შემოფარგლული, და ჩვენ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \quad (87,1)$$

სადაც $R^i{}_{klm}$ 4-ხე რანგის ტენზორია:

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i{}_{nl} \Gamma^n{}_{km} - \Gamma^i{}_{nm} \Gamma^n{}_{kl}. \quad (87,2)$$

ის, რომ $R^i{}_{klm}$ მართლაც ტენზორია, იქიდან ჩანს, რომ (87,1)-ში მარცხნით ვექტორი დგას—ვექტორის მნიშვნელობათა სხვაობა ΔA_k ერთიდა იმავე წერტილში. $R^i{}_{klm}$ ტენზორს სიმრუდის ტენზორს ან რიმან-კრივატოფელის ტენზორს უწოდებენ.

ადვილად მივიღებთ ანალოგიურ გამოსახულებას A^k კონტრავარიანტული ვექტორისათვის. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ყინაიდან პარალელური გადატანის დროს სკალარები არ იცლებიან, ამიტომ $\Delta(A^k B_k) = 0$, სადაც B_k რალაც კოვარიანტული ვექტორია. აქედან (87,1)-ის დახმარებით გვექნება

$$\begin{aligned} \Delta(A^k B_k) &= A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2} A^k B_i R^i{}_{klm} \Delta f^{lm} + E_k \Delta A^k = \\ &= B_k (\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k{}_{ilm} \Delta f^{im}) = 0 \end{aligned}$$

ან, B_k ვექტორის ნებისმიერობისა გამო:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k{}_{ilm} A^i \Delta f^{im}. \quad (87,3)$$

თუ A_i ვექტორს ორჯერ კოვარიანტულად გავაწარმოებთ x^k -თი და x^l ით, მაშინ ჩვეულებრივი წარმოებულებისაგან განსხვავებით შედეგი, საზოგადოდ, დამოკიდებული იქნება გადიფერენციალების რიგზე. აღმოჩნდა, რომ A_i ; k l — A_i ; l ; k სხვაობა აგრეთვე იმავე სიმრუდის ტენზორით განისაზღვრება, რომელიც ჩვენ ზემოდ შემოვიჭანეთ. სახელდობრ, ადგილი აქვს ფორმულას

$$A_i{}_{;k;l} - A_i{}_{;l;k} = A_m R^n{}_{ikl}, \quad (87,4)$$

რომელიც უშუალო გამოთვლითაც ადვილად შემოწმდება (ამ გამოთვლას სიმოკლისათვის ჩვენ აქ გამოვტოვებთ). ანალოგიურად კონტრავარიანტული ვექტორისათვის

$$A^i{}_{;k;l} - A^i{}_{;l;k} = -A^m R^i{}_{mkl} \quad (87,5)$$

დაბოლოს ადვილად მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულებს ტენზორის მეორე წარმოებულებისათვის [ეს მარტივად გაკეთდება, თუ A_{ik} ტენზორის ნაცვლად ავიღებთ ტენზორის კერძო შემთხვევას $A_i B_k$ და (87, 4) და (87,5) ფორმულებს გამოვიყენებთ. ამგვარად მიღებული ფორმულები მათი წრფივობისა გამო ნებისმიერი ტენზორისათვის გამოდგება]

ცხადია, რომ ვეკლიდეს სივრცეში სიმრუდის ტენზორი ნულის ტოლია. მართლაც, ვეკლიდეს სივრცეში შეიძლება ისეთი კოორდინატების არჩევა, რომლებშიც მთელ სივრცეში ყველა $\Gamma^i_{kl} = 0$ და ამიტომ $R^i_{klm} = 0$. R^i_{klm} ის ტენზორული ხასიათისა გამო, მაშინ იგი ნულის ტოლი იქნება ყველა კოორდინატთა სისტემაშიც. ეს იმასთან არის დაკავშირებული, რომ ვეკლიდეს სივრცეში ვექტორის პარალელური გადატანა ერთი წერტილიდან მეორეში ცალსახა ოპერაციაა, ხოლო ჩაკეტილი კონტურის შემოვლის დროს ვექტორი უცვლელია. ვეკლიდეს სივრცეში, ცხადია, კოვარიანტული გადიფერენციალების რიგის შეცვლა შეიძლება.

ადგილი აქვს შებრუნებულ თეორემასაც: თუ $R^i_{klm} = 0$, მაშინ სივრცე ვეკლიდურია. მართლაც ყოველ სივრცეში შეიძლება კოორდინატთა ისეთი სისტემის არჩევა, რომელიც დეკარტისეულია მოცემულ უსასრულოდ მცირე უბანში. თუ $R^i_{klm} = 0$, მაშინ პარალელური გადატანა ცალსახა ოპერაციას წარმოადგენს და მოცემული უსასრულოდ მცირე უბნიდან ყველა სხვა უბანში დეკარტის სისტემის პარალელური გადატანით შეიძლება აყავოთ დეკარტისეული სისტემა მთელ სივრცეში, ე. ი. სივრცე ვეკლიდურია.

ამგვარად, სიმრუდის ტენზორის ნულთან ტოლობა ან არტოლობა წარმოადგენს კრიტერიუმს, რომელიც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ვეკლიდურია თუ არა სივრცე.

შევნიშნოთ, რომ თუმცა არავეკლიდურ სივრცეში შეიძლება კოორდინატთა სისტემის არჩევა, რომელიც ვეკლიდური იქნებოდა მოცემულ წერტილში, ე. ი. ისეთისა, რომ მოცემულ წერტილში ყველა Γ^i_{kl} ნულის ტოლი გახდეს, მაგრამ ამასთანავე სიმრუდის ტენზორი ამ წერტილში ნულისაგან განსხვავდება. (ვინაიდან Γ^i_{kl} -თან ერთად მისი წარმოებულებები ნულს არ უტოლდება).

§ 88. სიმრუდის ტენზორის თვისებები

R^i_{klm} ტენზორის (87,2) გამოსახულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სიმრუდის ტენზორი ანტისიმეტრიულია l და m ინდექსების მიმართ:

$$R^i_{klm} = -R^i_{kml} \quad (88,1)$$

შემდეგ, ადვილად შესამოწმებელია, რომ ადგილი აქვს შემდეგ იგივობას:

$$R^i_{klm} + R^i_{mlk} + R^i_{lkm} = 0. \quad (88,2)$$

R^i_{klm} სიმრუდის შერეულ ტენზორთან ერთად სარგებლობენ აგრეთვე სიმრუდის კოვარიანტული ტენზორით

$$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm}. \quad (88,3)$$

მარტივი გარდაქმნებით ადვილად მივიღებთ R_{ikim} -თვის შემდეგ გამოსახულებას:

$$R_{ikim} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p). \quad (88,4)$$

ამ გამოსახულებადან უშუალოდ გამომდინარეობს სიმეტრიის შემდეგი თვისებები:

$$R_{iklm} = -R_{klim}, \quad (88,5)$$

$$R_{ikim} = -R_{ikmi}, \quad (88,6)$$

$$R_{iklm} = -R_{lmik}. \quad (88,7)$$

ამ ფორმულებიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ R_{iklm} ყველა კომპონენტი, რომლებსაც ერთი ან ორივე წვეილი i , k და l , m ინდექსებისა ერთიდა იგივე აქვთ, ნულის ტოლია.

დაბოლოს, R_{ikim} -თვის, ისევე როგორც R'_{ikim} -თვის, ადგილი აქვს (89,2), იგივობას:

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0 \quad (88,8)$$

უურო მეტიც. (88,5—7) თანაფარდობათა ძალით, აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ R_{iklm} -ში მოვახდენთ ერთსადა იმავე ციკლიურ გადასმას ნებისმიერ სამ ინდექსზე და მიღებულ სამ კომპონენტს შევკრებთ, შედეგი ნულის ტოლი იქნება.

დაბოლოს დავამტკიცოთ კიდევ შემდეგი იგივობა:

$$R'_{kilim} + R'_{imkil} + R'_{ilmki} = 0 \quad (88,9)$$

ამის შემოწმება მოხერხებული იქნება მოცემულ წერტილში დეკარტისეული კოორდინატთა სისტემის გამოყენებით. ტენზორული ხასიათის გამო თანაფარდობას (89,9) მაშინ ადგილი ექნება ყოველ კოორდინატთა სისტემაში. (89,2) გამოსახულების დიფერენცირებით და იმ დაშვებით, რომ მაშინ $\Gamma'_{ki} = 0$, განსახილავ წერტილში ჩვენ ვიპოვიით

$$R''_{ikilm} = \frac{\partial R'_{ikil}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma''_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma''_{ik}}{\partial x^m \partial x^l}$$

ამ გამოსახულების დახმარებით ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ (88,9)-ს მართლაც აქვს ადგილი.

სიმრუდის ტენზორიდან შეკუმშვის გზით შეიძლება 2-რე რანგის ტენზორის აგება. ასეთი შეკუმშვა მხოლოდ ერთი წესით შეიძლება მოხდეს. მართლაც, თუ ჩვენ R^{m}_{ikl} -ს m და l ინდექსის მიხედვით შევკვეცავთ მაშინ ნულს მივიღებთ:

$$R^{m}_{mkl} = g^{im} R_{imkl} = 0,$$

ვინაიდან R_{imkl} ანტისიმეტრიულია i და m ინდექსების მიმართ. m -სა და l ს მიხედვით შეკვეცა (m სა და k ს მიხედვით შეკვეცა, ცხადია, იმავე შედეგს მოგვცემს შებრუნებული ნიშნით) გვაძლევს 2-რე რანგის ტენზორს

$$R_{ik} = R'_{ikl} = \frac{\partial \Gamma'_{ik}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma'_{ik}}{\partial x^i} + \Gamma'_{ik} \Gamma'_{km} - \Gamma'_{ik} \Gamma'_{lm}. \quad (88,10)$$

ეს ტენზორი, ცხადია, სიპეტრიულია:

$$R_{ik} = R_{ki} \quad (88,11)$$

დაბოლოს თუ R_{ik} -ს შევკუმშავთ მივიღებთ ინვარიანტს

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{im} g^{kl} R_{iklm}, \quad (88,12)$$

რომელსაც სივრცის სკალარული სიმრუდე ეწოდება.

(88,5—8) თანაფარდობათა გამო სიმრუდის ტენზორის ყველა კომპონენტი დამოუკიდებელი არ არის. განვსაზღვროთ R_{iklm} ტენზორის დამოუკიდებელ კომპონენტთა რიცხვი. განვიხილოთ ჯერ ორგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევა, ე. ი. ჩვეულებრივი ზედაპირი. ამ შემთხვევაში i, k, l, m ინდექსებს შეიძლება ქონდეს მნიშვნელობა 1 და 2. ის კომპონენტი, რომლისთვისაც ერთდროულად i და k ან l და m ერთდროულად 1-თის ან 2-რის ტოლია, ტოლი იქნება ნულის. ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტები ან ერთიმეორის ტოლია, ან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან. ამგვარად, ამ შემთხვევაში სიმრუდის ტენზორს მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი კომპონენტი აქვს, მაგალითად, R_{1212} . ადვილად ვიპოვით, რომ ამ შემთხვევაში სკალარული სიმრუდე $R = g^{im} g^{kl} R_{iklm}$ ტოლი იქნება $R = 2 R_{1212} / g^2$ (g არის g_{ik} სიდიდეებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი). მაშინ R ზედაპირის ცნობილი გაუსის სიმრუდის ტოლი აღმოჩნდება, ე. ი. აღმოჩნდება ტოლი ერთისა გაყოფილი სიმრუდის მთავარი რადიუსების ნამრავლზე.

განვსაზღვროთ ახლა სიმრუდის ტენზორის დამოუკიდებელ კომპონენტთა რიცხვი სამგანზომილებიან სივრცეში. განვიხილოთ მხოლოდ ის კომპონენტები, რომლებსაც მხოლოდ ორი განსხვავებული ინდექსი აქვთ, ე. ი. R_{abab} სახის კომპონენტები. a და b მნიშვნელობათა წყვილი 1, 2, 3 მნიშვნელობებიდან სამი საშუალებით შეიძლება შეეარჩიოთ. a და b მნიშვნელობათა ყოველი წყვილი (83,5—7) თანაფარდობათა ძალით მხოლოდ ერთ დამოუკიდებელ კომპონენტს იძლევა. ამგვარად, ასეთი ტიპის კომპონენტი სულ სამი იქნება. სამივე სხვადასხვა ინდექსის მქონე კომპონენტი ე. ი. R_{abac} სახის

კომპონენტი აგრეთვე მხოლოდ სამი იქნება: $R_{1213}, R_{2123}, R_{3231}$; ყველა დანარჩენი ამათი ტოლია ან ამათგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება. ამგვარად, სამ-ჯანზომილებიან სივრცეში სიმრუდის ტენზორს ექვსი დამოუკიდებელი კომპონენტი აქვს. ამდენივე კომპონენტი აქვს R_{ik} სიმეტრიულ ტენზორს. ამიტომ წრფივი თანაფარდობიდან $R_{ik} = g^{ml} R_{likm}$ ყველა კომპონენტი R_{iklm} ტენზორისა შეიძლება R_{ik} ტენზორით და g_{ik} მეტრიკული ტენზორით გამოვსახოთ. კოორდინატთა სისტემის შესაბამის შერჩევით უწყველთვის შეიძლება მივალწიოთ იმას, რომ მოცემულ წერტილში ტენზორის სამი კომპონენტი ნულის ტოლი გახდეს. კერძოდ R_{ik} ტენზორი შეიძლება მთავარ ღერძებზე დავიყვანოთ. ამგვარად, სამ-ჯანზომილებიანი სივრცის სიმრუდე უოველ წერტილში სამი სიდიდით განისაზღვრება.

დასასრულს გადავიდეთ ოთხჯანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაზე. სიმრუდის ტენზორის კომპონენტები ორი განსხვავებული ინდექსით (ე. ი. R_{abcd} ტიპისა) სულ ექვსია. ოთხი 1, 2, 3, 4 მნიშვნელობიდან a და b ინდექსი ექვსი წესით შეიძლება შევარჩიოთ, ხოლო მნიშვნელობათა უოველი წყვილი ერთ დამოუკიდებელ კომპონენტს იძლევა. სამი განსხვავებული ინდექსის მქონე კომპონენტი სულ 12-ტია. ოთხი 1, 2, 3, 4 მნიშვნელობიდან სამი სხვადასხვა ინდექსის არჩევა ოთხი წესით შეიძლება, ხოლო მნიშვნელობათა უოველი სამეული სამ დამოუკიდებელ კომპონენტს გვაძლევს (მაგალითად, $R_{1213}, R_{2123}, R_{3231}$). დაბოლოს, ისეთ კომპონენტთა რიცხვი, რომლებსაც ყველა ოთხი განსხვავებული ინდექსი აქვს, სულ სამია: $R_{1234}, R_{1123}, R_{1124}$. ყველა დანარჩენი ამათი ტოლია ან ამათგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება. მაგრამ ამ სამი კომპონენტიდან მხოლოდ ორია დამოუკიდებელი, ვინაიდან უოველი ამ სამთაგანი ერთიმეორესთან დაკავშირებულია (88,2) იგივობით $R_{1234} + R_{1123} + R_{1124} = 0$. ამგვარად, ოთხჯანზომილებიან სივრცეში სიმრუდის ტენზორს სულ 20 დამოუკიდებელი კომპონენტი აქვს.¹ კოორდინატთა სისტემის შესაფერი შერჩევით შეიძლება იმას მივალწიოთ, რომ სიმრუდის ტენზორის ექვსი კომპონენტი ნულის ტოლი გახდეს (ექვსი არის ოთხჯანზომილებიანი კოორდინატთა სისტემის შესაძლო დამოუკიდებელი ნობრუნებათა რიცხვი). ამგვარად, ოთხჯანზომილებიანი სივრცის სიმრუდე უოველ წერტილში 14 სიდიდით განისაზღვრება.

§ 89. მოქმედება ზედაპირული ველინათვის

გრაეიტაციული ველის განმსაზღვრელი განტოლებათა მოსანახეად საჭიროა წინასწარ ამ ველის N , მოქმედება განვსაზღვროთ. მაშინ საძებნ განტოლებებს მივიღებთ ველის და მატერიალურ ნაწილაკთა მოქმედებების ჯამის ვარიაციის გზით.

¹ ამოწმობთ i, k, l, m ინდექსის ის კომბინაციები, რომლებიც დამოუკიდებელ კომპონენტს იძლევა:

1212	1223	1313	1324	1423	2323	2424
1213	1224	1314	1334	1424	2324	2434
1214	1234	1323	1414	1434	2334	3434

ამასთანავე $R_{1234} - R_{1223} + R_{1123} = 0$.

ისევე, როგორც მოქმედება ელექტრომაგნიტური ველისათვის, S_r -ც უნდა გამოისახოს მთელ ველზე აღებული ინტეგრალით, ე. ი. მთელ სივრცეზე და α° დროული კოორდინატის მიხედვით მის ორ მოცემულ მნიშვნელობათა შორის. ვინაიდან S_r ინვარიანტი უნდა იყოს, მას ასეთი სახე უნდა ჰქონდეს

$$\int G \sqrt{-g} d\Omega,$$

სადაც G რაღაც სკალარია. ამ სკალარის განსაზღვრის დროს ჩვენ იქიდან გამოვალთ, რომ გრავიტაციული ველის განტოლებები უნდა შეიცავდნენ ველის „პოტენციალების“ წარმოებულებს, რომელთა რიგი 2-ს არ უნდა აღმატებოდეს (ისევე, როგორც ეს ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებებისათვის გვაქვს). ვინაიდან ველის განტოლებები მოქმედების ვარიაციით მიიღება, ამიტომ G სკალარი უნდა შეიცავდეს g_{ik} -ს წარმოებულებს, რომელთა რიგი ერთს არ უნდა აღმატებოდენ. ამგვარად, G უნდა შეიცავდეს g_{ik} ტენზორს და Γ_{ik}^j სიდიდეებს.

მაგრამ, მხოლოდ g_{ik} და Γ_{ik}^j სიდიდეებისაგან შეუძლებელია ინვარიანტის აგება. ეს უშუალოდ იმ გარემოებიდან ჩანს, რომ კოორდინატთა სისტემის შესაფერის არჩევით ყოველთვის შეიძლება ყველა Γ_{ik}^j სიდიდე მოცემულ წერტილში ნულის ტოლი გახადოთ. მაგრამ არსებობს R სკალარი—4-სივრცის სიმრუდე, —რომელიც g_{ik} ტენზორთან ერთად შეიცავს მის პირველ და მეორე წარმოებულებს, ამასთანავე უკანასკნელნი მხოლოდ წრფივად შედიან. ამ წრფივობის შედეგად ინვარიანტული ინტეგრალი $\int R \sqrt{-g} d\Omega$ გაუსის თეორემის თანახმად შეიძლება გარდაქმნათ ასეთი გამოსახულების ინტეგრალად, რომელიც მეორე წარმოებულებს არ შეიცავს. სახელდობრ $\int R \sqrt{-g} d\Omega$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ სახით

$$\int R \sqrt{-g} d\Omega = \int G \sqrt{-g} d\Omega + \int \frac{\partial (V \sqrt{-g} \xi^i)}{\partial x^i} d\Omega,$$

სადაც G მხოლოდ g_{ik} ტენზორსა და მის პირველ წარმოებულებს შეიცავს, ხოლო მეორე ინტეგრალში ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას რაღაც ξ^i სიდიდის დიფერენციალის სახე აქვს (დაწერილებითი გამოანგარიშება ამ პარაგრაფის ბოლოს არის მოცემული). გაუსის თეორემით თანახმად ეს მეორე ინტეგრალი შეიძლება გარდაქმნათ 4 სივრცის შემომფარგვლელ ჰიპერზედაპირზე აღებულ ინტეგრალად, რომელზედაც წარმოებს ინტეგრება ორ დანარჩენ ინტეგრალში. თუ მოქმედებიდან ვარიაციას ავიღებთ, მაშინ მარჯვენა მხარეში მეოთხე წევრის ვარიაცია ისპობა, ვინაიდან უმცირესი ჰოქმედების პრინციპის აზრის მიხედვით ინტეგრირების საზღვარზე ველის ვარიაცია ნულის ტოლია. მაშასადამე, შეიძლება დავწეროთ

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = \delta \int G \sqrt{-g} d\Omega.$$

მარცხნივ სკალარი დგას, ამიტომ სკალარი იქნება მარჯვნივ მდგომი გამოსახულებაც (თვით $\int G \sqrt{-g} d\Omega$ ინტეგრალი კი, რასაკვირველია, სკალარი არ არის).

☞ სიდიდე აკმაყოფილებს ზემოდ წამოყენებულ მოთხოვნილებას, ვინაიდან იგი მხოლოდ g_{ik} -ს და მის პირველ წარმოებულებს შეიცავს. ვინაიდან, როგორც

ზემოდ აღნიშნულიდან ჩანს, $\delta \int G \sqrt{-g} d\Omega$ ერთადერთ ასეთ ინვარიანტს წარმოადგენს, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa c} \delta \int G \sqrt{-g} d\Omega = \frac{1}{2\kappa c} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega. \quad (89,1)$$

სადაც κ ახალი უნივერსალური მუდმივია. იმის ანალოგიურად, როგორც § 27-ში იყო გაიეთებული ელექტრომაგნიტური ველისათვის (მაგრამ უფრო რთული გამოთვლების გზით, რომელსაც ჩვენ აქ არ მოვიყენებთ), შეიძლება ენახოთ, რომ მუდმივი κ დადებითი უნდა იყოს, — წინააღმდეგ შემთხვევაში κ -ს შეუძლია უსასრულოდ შემცირება (ე. ი. აბსოლუტური სიდიდით რაგინდ დიდი უარყოფითი მნიშვნელობის მიღება) ე. ი. მას მინიმუმი არ ექნებოდა.

κ ზღვრივი გარკვეული სახით დაკავშირებულია იგრედწოდებულ გრავიტაციულ მუდმივთან. ეს კავშირი § 92-ში იქნება გაძორკვეული. κ -ს განზომილება უშუალოდ (89,1)-დან გამომდინარეობს. მოკმედების განზომილება არის გრ. სმ² სექ.⁻¹; უველა კოორდინატს შეიძლება მივაწეროთ განზომილება სმ. ხოლო g_{ik} -ს ნულოვანი განზომილება. და, მაშასადამე, R -ს აქვს სმ.² განზომილება. ანის შედეგად ეპოულობთ, რომ κ -ს განზომილება არის სმ.⁻¹, გრ.⁻¹, სექ.². იგი რიცხვითი მნიშვნელობით ტოლია

$$\kappa = 2,073 \cdot 10^{-48} \text{ სმ.}^{-1} \cdot \text{გრ.}^{-1} \cdot \text{სექ.}^2 \quad (89,2)$$

შეენიშნოთ, რომ ჩვენ შეგვეძლო κ ჩავგეთვალა 1-თის ტოლად (ან სხვა რომელიმე უგანზომილებო რიცხვის ტოლად). მაგრამ, მაშინ განსაზღვრული ვახდებოდა მასის ერთეულის არჩევა, რომელიც ამ შემთხვევაში სიგრძის ერთეულს თანხვდებოდა.¹

დაბოლოს, გამოეთვალოთ (89,1)-ში შემავალი G სრდიდე. R_{ik} -თვის (88,10) გამოსახულებიდან გვაქვს:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} R &= \sqrt{-g} g^{ik} R_{ik} = \\ &= \sqrt{-g} \left\{ g^{ik} \frac{\partial \Gamma^i_{ii}}{\partial x^k} - g^{ik} \frac{\partial \Gamma^i_{ik}}{\partial x^i} + g^{ik} \Gamma^m_{ii} \Gamma^i_{km} - g^{ik} \Gamma^i_{ik} \Gamma^m_{im} \right\} \end{aligned}$$

მარჯვენა პირველ ორ წევრში გვაქვს

$$\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \Gamma^i_{ik}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ik} \Gamma^i_{ik}) - \Gamma^i_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ik}),$$

$$\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \Gamma^i_{ii}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} g^{ik} \Gamma^i_{ii}) - \Gamma^i_{ii} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} g^{ik}).$$

თუ სრულ წარმოებულებს გამოეტოვებთ, ვიპოვიოთ

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} G &= \Gamma^i_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ik}) - \Gamma^m_{im} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} g^{ik}) + \\ &+ (\Gamma^m_{ii} \Gamma^i_{km} - \Gamma^i_{ik} \Gamma^m_{im}) g^{ik} \sqrt{-g}. \end{aligned}$$

¹ ზოგჯერ უწებენ, რომ $\kappa c = 8\pi$; მაშინ მასა სმ-ში იზომება და 1 სმ = 1,35 10^{48} გრ. ამ ერთეულით გაზომილ მასას სხელის გრავიტაციული რადიუსს უწოდებენ.

§ 81,6) და (81,7) ფორმულების დახმარებით ვიპოვიტ, რომ ზარჯენიდან პირველი
 ორა წვერი ტოლია $\sqrt{-g}$ -სი გამრავლებული შემდეგ გამოსახულებაზე:

$$\Gamma_{im}^m \Gamma_{ik}^i g^{ik} - 2\Gamma_{ik}^i \Gamma_{im}^m g^{mk} + \Gamma_{ik}^i \Gamma_{im}^m g^{ik} = g^{ik} (\Gamma_{im}^m \Gamma_{ik}^i - 2\Gamma_{im}^i \Gamma_{ik}^m + \\ + \Gamma_{ik}^i \Gamma_{im}^m) = 2g^{ik} (\Gamma_{ik}^i \Gamma_{im}^m - \Gamma_{im}^i \Gamma_{ik}^m).$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$G = g^{ik} (\Gamma_{ik}^i \Gamma_{im}^m - \Gamma_{im}^i \Gamma_{ik}^m). \quad (89,3)$$

§ 90 მნარგია-იმპულსის ტენზორი

§ 37-ში ჩვენ მივიღეთ ენერგია-იმპულსის ტენზორის გამოსახვის ზოგადი
 წესი ყოველი ფიზიკური სისტემისათვის, ონონის მოქმედება 4-სივრცეში აღე-
 ბული (32,1) ინტეგრალით წაომოიდგინება. ნრუდხაზოვან კოორდინატებში ეს
 ინტეგრალი უნდა დაწვეროთ საიით:

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega \quad (90,1)$$

(გალილეისეულ კოორდინატებში— $g = c^2$ და S გადადის $\int \Lambda dV dt$ ში). ინტეგრე-
 ბა წარმოებს მთელ (სამგანზომილებიან) სივრცეზე და დროს ორ მოცემულ მო-
 მენტს შორის, ე. ი. 4-სივრცის უსასრულო აუეში, რომელიც ორ ჰიანეოიდ-
 პიოს შორის არის მოქცეული.

როგორც § 32-ში აღენიშნეთ, (32,5) ფორმულით განსაზღვრული ენერგია-
 იმპულსის ტენზორი საზოგადოდ სიმეტრიული აო აოის, როგორიც იგი უნდა
 ყოფალიყო. იმისათვის, ომდ იგი სიმეტრიული გაუხადოთ (32,5) გამოსახულებას

უნდა მიუმატოთ სათანადოდ შერჩეული $\frac{\partial}{\partial x^i} \psi_{im}$ სახის წვერი, სადაც ψ_{im} ან-

ტისიმეტრიულია k და l ინდექსების მიმართ. ჩვენ ახლა მოვიყვანთ ენერგია-
 იმპულსის გამოთვლის სხვა წესს, რომელსაც ის უპირატესობა აქვს, რომ იგი
 ეოთბაშად სწორ გამოსახულებას გვაძლევს.

(90,1) ში მოგახდინოთ გარდაქმნა x^i კოორდინატებიდან $x'^i = x^i + \xi^i$ ში,
 სადაც ξ^i მცირე სიდიდეებია. ამ გაოდაქმნის დროს g^{ik} კომპონენტები ზოგადი
 ფორმულების თანახმად გარდაიქმნებიან როგორც

$$g'^{ik}(x') = g'^{im}(x') \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = g'^{im} (\delta^i_j - \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^j}) (\delta^k_m - \frac{\partial \xi^k}{\partial x'^m}) = \\ \approx g'^{ik}(x') - g'^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x'^m} - g'^{ki} \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^m}.$$

g^{ik} ტენზორი აქ x' -ის ფუნქციას წარმოადგენს, ხოლო g^{ik} ტენზორი უწინ-
 დელ x^i კოორდინატთა ფუნქციაა. იმისათვის, რომ ყველა წვერი ერთი და იმავე
 ცვლადების ფუნქცია გაუხადოთ, g^{ik} -ში ჩავსვათ $x'^i = x^i + \xi^i$ და $g'^{ik}(x' + \xi)$

დავშალოთ ζ' ხარისხების მიხედვით. შემდეგ, თუ ζ' -ის მიხედვით მაღალი რიგის წევრებს უგულვებელყოფთ, ჩვენ ყოველ წევრში, რომელიც ζ' -ს შეიცავს, g'^{ik} -ს ნაცულად შეგვიძლია g^{ik} დავწეროთ. ამგვარად, ვპოულობთ:

$$g'^{ik}(\lambda') = g^{ik}(\lambda') + \xi^i \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i} - g^{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} - \xi^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

უშუალო შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ უკანასკნელი სამი წევრი შეიძლება დავწეროთ ζ' -ს კონტრაგარიანტული წარმოებულებით — $\xi^i, \xi^k, \xi^i \xi^k$ ჯამის სახით. ამგვარად საბოლოოდ ვპოულობთ g'^{ik} გარდაქმნას შემდეგი სახით

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^i \xi^k + \xi^k \xi^i. \quad (90,2)$$

ვინაიდან S მოქმედება სკალარია, ამიტომ კოორდინატთა გარდაქმნისას იგი არ იცვლება. მეორე მხრით, მოქმედების δS ცვლილება კოორდინატთა გარდაქმნისას შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს. ვთქვათ, ისევე როგორც § 32 ში, q აღნიშნავენ სიდიდეებს, რომლებიც იმ ფიზიკურ სისტემას განსაზღვრავენ, რომელსაც S მოქმედება შეესაბამება. კოორდინატთა გარდაქმნის დროს g სიდიდეები δq -თი იცვლებიან. მაგრამ δS -ის გამოთვლის დროს q -ს ცვლილებასთან დაკავშირებული წევრები შეიძლება არ დავწეროთ. ყველა ეს წევრი სულერთია ერთიმეორეს შეკვეცავს, ვინაიდან ფიზიკური სისტემის „მოდრაობის განტოლებები“ სწორედ მიიღება g -ს მიხედვით S -ის ვარიაციის ნულთან გატოლებით. ამიტომ საკმარისია მხოლოდ g -ს ცვლილებასთან დაკავშირებული წევრები დავწეროთ. თუ, როგორც ჩვეულებრივ, გაუსის თეორემით ვისარგებლებთ და ინტეგრების საზღვრებზე დაუშვებთ, რომ $\delta g^{ik} = 0$, δS -თვის ვიპოვით

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g\Lambda}}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g\Lambda}}{\partial x^i} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i} \right\} d\Omega = \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g\Lambda}}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \sqrt{-g\Lambda}}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}} \right\} \delta g^{ik} d\Omega. \end{aligned}$$

შემოვიღოთ ახლა აღნიშვნა

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial \sqrt{-g\Lambda}}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \sqrt{-g\Lambda}}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}}, \quad (90,3)$$

მაშინ δS მიიღებს სახეს ¹

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = -\frac{1}{2c} \int T^{ik} \delta g_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (90,4)$$

¹ ყურადღება მივაქვიოთ იმას, რომ განსახილავ შემთხვევაში δg_{ik} სიდიდეები დამოუკიდებელი არ არის, ვინაიდან ისინი სულ ოთხი კოორდინატის ჩარდაქმნის შედეგს წარმოადგენენ. ამიტომ იქიდან, რომ $\delta S = 0$, სრულიადაც არ გამოდინარეობს, რომ $T_{ik} = 0$. აგრეთვე შევნიშნოთ, δS -ის (90,4) გამოსახულება სამართლიანია g_{ik} -ს ყოველგვარ ვარიაციის დროს.

(შევიწინათ, რომ $g^{ik} = -g_{ik}$ და ამიტომ $T^{ik} = -T_{ik}$). თუ აქ T^{ik} -თვის (90,2) გამოსახულებას ჩავსვამთ და T_{ik} თენზორის სიმეტრიით ვისარგებლობთ, გვექნება

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} (\xi^{i;k} + \xi^{k;i}) \sqrt{-g} d\Omega = \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^{i;k} \sqrt{-g} d\Omega.$$

ეს გამოსახულება შემდეგი სახით გარდაექმნათ:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int (T_{ik} \xi^{i;k}) \sqrt{-g} d\Omega - \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^i \sqrt{-g} \xi^k d\Omega \quad (90,5)$$

(81,8)-ის თანახმად პირველი ინტეგრალი ასე შეიძლება დაწეროს

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_{ik} \xi^i) d\Omega$$

და შემდეგ გარდაექმნათ ჰიპერზედაპირზე აღებული ინტეგრალად. ვინაიდან ინტეგრაციის საზღვარზე ξ^i ნული ხდება, ამიტომ ეს ინტეგრალი ისპობა. ამგვარად, δS -ის ნულთან გატოლებით ვპოულობთ:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^i \sqrt{-g} d\Omega = 0.$$

ξ^i -ს ნებისმიერობისა გამო უნდა დაეასკვნათ, რომ

$$T_{ik} = 0. \quad (90,6)$$

თუ ამ განტოლებას (32,4) $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0$ განტოლებას შევადარებთ, რომელ-

საც ადვილი აქვს გალილეისეულ კოორდინატებში, ჩვენ დაფიქსირებულ, რომ (90,3)-ით განსაზღვრული ტენზორი უნდა გაუიგივოთ ენერგია-იმპულსის ტენზორს, — ყოველ შემთხვევაში ზედმიერ მაშინვე აღვნიშნავთ სიზუსტით.

დავამტკიცოთ, რომ ეს მაშინველი ერთი ტოლია, ე. ი. რომ (90,3)-ში T_{ik} ზუსტად ენერგია-იმპულსის ტენზორია. ამისათვის გამოვთვალოთ მოქმედების δS ვარიაცია, როცა დროთი ინტეგრაციის ერთერთი საზღვარი გადაწეულია, ე. ი. ერთერთი ჰიპერზედაპირის $x^0 = \text{const}$ უსასრულოდ მცირე წანაცვლების დროს.

ეს წანაცვლება ეკვივალენტურია $x^i = x^i - \xi^i$ კოორდინატთა გარდაქმნისა. ისეთი ξ^i სიდიდეებით, რომლებიც ინტეგრაციის საზღვარზე (ე. ი. $x^0 = \text{const}$ ჰიპერზედაპირზე) არ ისპობიან. δS -ის (90,5) გამოსახულებაში ახლა მეორე წევრი ისპობა (90,6) განტოლების ძალით. პირველი წევრი კი, თუ მას გულისხმობთ, გვაძლევს

$$\delta S = \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^i \sqrt{-g} dS_k. \quad (90,7)$$

მეორე მხრით მოქმედების წარმოებულები 4 — იმპულსთან P_i დაკავშირებულია თანაფარდობით (იხ. § 82)

$$\delta S = -P_i \delta x^i$$

(90,7)-ში F სიდიდეები კოორდინატთა ვარიაციის როლს თამაშობენ. მაშასადამე, (90,7) დან ჩვენ ვხედავთ, რომ $\frac{1}{c} T_i^k \sqrt{-g} - g_{44}$ —იმპულსის სიმკვრივის როლს თამაშობს, რომელიც „ჰიპერხედაპირის ფართის“ ერთეულზე მოდის. მაგრამ, ეს სწორედ ის თანაფარდობაა, რომელმაც 4—იმპულსი უნდა დააკავშიროს ენერგია იმპულსის ტენზორთან (იხ. § 32).¹

ამგვარად (90,3), ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვიანგარიშოთ ენერგია-იმპულსის ტენზორი Λ -ს დიფერენცირების გზით მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების (და მათი წარმოებულობის) მიხედვით. ამასთანავე (90,3)-ის მიხედვით განსაზღვრული ტენზორი T_{ik} , (იხ. აქვე, სიმეტრიული უნდა იყოს. (90,3) ფორმულა მოხერხებულია ენერგია-იმპულსის ტენზორის გამოსათვლელად არა მხოლოდ გრავიტაციული ველის არსებობის შემთხვევაში, არამედ მისი არ არსებობის დროსაც, ოდესაც მეტრიკულ ტენზორს დამოუკიდებელი ახრი არა აქვს და შრუდნახოვან კოორდინატებში გადასვლა ფორმალურად ხდება როგორც საშუალებდო ეტაპი T_{ik} -ს გამოთვლის დროს. ასე მაგალითად (90,3)-დან აღვიღად ვიპოვით ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორის (93,1) გამოსახულებას.

§ 91 გრავიტაციული ველის განტოლებანი

ახლა შეიძლება გადავიდეთ გრავიტაციული ველის განტოლების გამოყვანაზე. ამ განტოლებათა მიღება შეიძლება $\delta(S_m + S_g) = 0$ სადაც S_g და S_m მოქმედებებია შესაბამისად გრავიტაციული ველისა და მატერიისათვის. აქ ახლა ხდება გრავიტაციული ველის ვარიაცია, ე. ი. ვარიაცია g_{ik} სიდიდეებისა.

გამოვთვალოთ δS_g ვარიაცია. ჩვენ გვაქვს:

$$\begin{aligned} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega &= \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \\ &= \int \left\{ R_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g} \delta R_{ik} \right\} d\Omega. \end{aligned}$$

(91,1) ფორმულიდან გვაქვს

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik};$$

აუ ზაყნჯამთ, ვიპოვით

$$\begin{aligned} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega &= \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \\ &+ \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \end{aligned} \quad (91,1)$$

¹ შრუდნახოვან კოორდინატებში, ე. ი. გრავიტაციულ ველში, არ არსებობს მატერიის 4—იმპულსის სრული ვექტორი, ვინაიდან $\int T_i^k \sqrt{-g} dS_k$ სრულებითაც არ არის ვექტორი. რადგანაც ვექტორის გარდაქმნის კანონი სხვადასხვა სხვადასხვა წერტილში. ასე რომ სხვადასხვა წერტილში აღებული ვექტორების ჯამი ვექტორი არ იქნება (იხ. § 78). გრავიტაციულ ველში მატერიის 4—ვექტორის შესახებ უფრო დავწერილებით იხ. § 97.

δR_{ik} ს გამოთვლის მიზნით შევნიშნოთ, რომ თუმცა Γ_{ik}^l სიდიდეები ტენზორს არ შეადგენენ, მაგრამ მათი ვაოიაცია $\delta \Gamma_{ik}^l$ ტენზორს წარმოადგენს. მართლაც, $\Gamma_{ik}^l A_k dx^k$ არის ვექტორის ცვლილება პარალელური გადატანის დროს. [იხ. (80,5)] რაღაც P წერტილიდან მასთან უსასრულოდ მახლობელ P' წერტილში. ამიტომ $\delta \Gamma_{ik}^l A_k dx^k$ არის ორი ვექტორის სხვაობა, რომლებიც, შესაბამისად, ორი პარალელური გადატანით მიღება (არაფარირებული და ფარირებული Γ_{ik}^l -ით) P წერტილიდან ერთსადამიამე P' წერტილში. ერთი და იმავე წერტილში აღებული ორი ვექტორის სხვაობა კი ვექტორია, და ამიტომ $\delta \Gamma_{ik}^l$ არის ტენზორი.

ვისარგებლოთ კოორდინატთა სიითემით, რომელიც გალილეისეულია მოცემულ წერტილში. მაშინ ამ წერტილში ყველა $\Gamma_{ik}^l = 0$. (89,10) გამოსახულების დახმარებით R_{ik} -თვის გვექნება (თუ გავიხსენებთ, რომ ახლა g^{ik} -ს პარალელი წარმოებულები ნულის ტოლია):

$$\begin{aligned} g^{ik} \delta R_{ik} &= g^{ik} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^k \right\} = \\ &= g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^k - g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{ik}^l = \frac{\partial w^l}{\partial x^l}, \end{aligned}$$

სადაც

$$w^l = g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^k - g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l.$$

ვინაიდან w^l ვექტორია, ამიტომ მიღებული თანათარღობა ჩვენ შეგვიძლია დაეწეროთ ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში სახით:

$$g^{ik} \delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g} w^l)$$

[თუ $\frac{\partial w^l}{\partial x^l}$ -ს $w_{;l}^l$ -ით შევცვლით და (81,8)-ს გამოვიყენებთ]. მაშა.აღ.პე (91,1)-ში მარჯვნიდან მეორე ინტეგრალი ტოლია

$$\int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \partial \frac{\sqrt{-g} w^l}{\partial x^l} d\Omega$$

და გაუსის თეორემი; თანახმად იგი შეიძლება გარდაქნილ იქნეს d -მოცულობის შემოკფარგვლელ ჰიპერფედაპირზე აღებულ w^l -ის ინტეგრალად. ნაკრამ, ვინაიდან ინტეგრაციის საზღვარზე ველის ვარიაცია ნულის ტოლია, ამიტომ ვსწავრი ისპოთა. ამგვარად, δS_g ვაჩიავთ ტოლია

$$\delta S_g = \frac{1}{2c\kappa} \int (R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (91,2)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ჩვენ ველის მოქმედებისათვის გამოვიდოდით გამო-
სახულებიდან

$$S_g = -\frac{1}{2c^2} \int G \sqrt{-g} d\Omega$$

მაშინ, როგორც აღვიღად შეიძლება დავრწმუნდეთ, მივიღებთ

$$\delta S_g = \frac{1}{2c^2} \int \left\{ \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}} \right\} \delta g^{ik} d\Omega$$

თუ ამას (91,2)-ს შევადარებთ, შევღებ თანათარლობას ვიპოვიოთ:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}} \right\} \quad (91,3)$$

მატერიის მოქმედების ვარიაციისათვის (90,4)-ის საფუძველზე ჩვენ უშუალოდ
შეგვიძლია დავწეროთ

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (91,4)$$

სადაც T_{ik} მატერიის ენერგია-იმპულსის ტენზორია (ელექტრომაგნიტური
ველის წათვლით). გრავიტაციული ურთიერთმოქმედება როლს თამაშობს მხო-
ლოდ საკმაოდ დიდი მასის სხეულისათვის (გრავიტაციული მუდმივის სიმ-
ციონისა გამო). ამიტომ გრავიტაციული ველის გამოკვლევის დროს ჩვეულებრივ
ჩვენ საქმე გვაქვს მაკროსკოპიულ სხეულებთან. ამის შესაბამისად T_{ik} -თვის ჩვე-
ულებრივ უნდა ვწეროთ (34,6) გამოსახულება. იმის გამო, რომ x^0 კოორდი-
ნატის ნაცვლად ჩვენ ახლა x^0 -ით ვსარგებლობთ და გარდა ამისა, ჩვენ მიერ
მიღებული g_{ik} -ს განმარტების თანახმად კვადრატის $u_{ik} = 1$ და არა -1 -ს, ამი-
ტომ ეს გამოხატულება ახლა ასე უნდა დავწეროთ:

$$T_i^k = (p + \rho c^2) u_i u^k - \delta_i^k p. \quad (91,5)$$

თუ გრავიტაციულ ველს ელექტრომაგნიტური გამოსხივება ქმნის სიციარიელ-
ში, მაშინ T_i^k -თვის უნდა გვესარგებლა (33,1) გამოსახულებით: $T_i^k =$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} F_{im} \delta_i^k - F_{im} F^{ki} \right). \text{ მაგრამ, უნდა იქნას მხედველობაში მიღებული, რომ}$$

თავისუფალი გამოსხივების ენერჯიის სიმკვრივე მეტად მცირეა მატერიალურ
სხეულთა ენერჯიის სიმკვრივისთან შედარებით, რომელიც აგრეთვე მათ უძოა-
ვობის ენერჯიასაც შეიცავს. ამიტომ მასების არ არსებობის პირობებში ელექ-
ტრომაგნიტური ველის მიერ შექმნილი გრავიტაციული ველის განხილვა ინტერესს
მოკლებულია.

ამგვარად, უმცირესი მოქმედების პრინციპიდან $\delta S_m + \delta S_g = 0$, (91,2) და
(91,4) თანათარლობათა დახმარებით ჩვენ ვპოულობთ:

$$\frac{1}{2c^2} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \kappa T_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega,$$

საიდანაც, δ_{ik}^k -ს ნებისმიერობისა გამო;

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\chi T_{ik}, \quad (91,6)$$

ან შერეულ კოორდინა ჯებში

$$R^k_i - \frac{1}{2} \delta^k_i R = -\chi T^k_i. \quad (91,7)$$

ეს წარმოადგენს სწორედ გრავიტაციული ველის საძებნ განტოლებებს—ზოგად ფარდობითობის თეორიის ძირითად განტოლებებს. *Эта формула является основой теории (91,7) i და k ინდექსების მიხედვით შევკვეცავთ, ვიპოვიტ $R = \chi T$ ($T = T^i_i$). ამიტომ ველის განტოლებანი კიდევ ასე შეიძლება დავწეროთ*

$$R_{ik} = -\chi \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right). \quad (91,8)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ გრავიტაციული ველის განტოლებები არაწრფივია. ამიტომ ელექტრომაგნიტური ველისაგან განსხვავებით (§ 27) გრავიტაციული ველებისათვის სუპერპოზიციის პრინციპს აღგილი არა აქვს. ცარიელ სივრცეში $T_{ik} = 0$, და გრავიტაციული ველის განტოლებები შემდეგ განტოლებებზე დაიყვანებიან

$$R_{ik} = 0. \quad (91,9)$$

გავიხსენოთ, რომ ეს სრულებითაც არ ნიშნავს იმას, რომ ცარიელი 4—სივრცე ბრტყელი იყოს,—ამისათვის საჭირო იქნებოდა ტოლობა $R^i_{ikm} = 0$.

ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორს ის თვისება აქვს, რომ $T^i_i = 0$ [იხ. (33,2)]. ვინაიდან, მეორე მხრით $R = \chi T$, ამიტომ მხოლოდ ცალკე ელექტრომაგნიტური ველის არსებობის დროს, თუ არავითარი მასები არა გვაქვს, სივრცე—დროს სკალარული სიმრუდე ნულის ტოლია ($R = 0$).

როგორც ვიცით T^k_i თენზორის T^k_{ik} დივერგენცია ნულის ტოლია (§ 90). ამიტომ ნულის ტოლი უნდა იყოს აგრეთვე (91,7) განტოლების მარცხენა მხარის დივერგენცია. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ მართლაც ადგილი აქვს იგივობას

$$R^k_{ik} - \frac{1}{2} \left(\delta^k_i R \right)_{;k} = R^k_{ik} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^i} = 0. \quad (91,10)$$

ეს უშუალოდ (88,9) იგივობიდან გამომდინარეობს, თუ მას $g^{ik} \delta^i_n$ -ზე გავამრავლებთ და შემდეგ შევკვეცავთ.

ამგვარად (91,7) ველის განტოლებანი არსებითად შეიცავენ $T^k_{ik} = 0$ განტოლებებს. მეორე მხრით $T^k_{ik} = 0$ განტოლებიდან გამომდინარეობს (იხ. §§ 33, 35) მატერიალურ ნაწილაკთა მოძრაობის განტოლებანი და მაქსველის განტო-

ლებათა მეორე წყვილი. ამგვარად, გრაფიტაციული ველის განტოლებები შეიცავენ აგრეთვე განტოლებებს თვით მატერიისათვის (მატერიალური ნაწილაკებისა და ელექტრომაგნიტური ველისათვის), რომელიც ამ ველს ქმნის. ამის საწინააღმდეგოდ, ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებანი (მაქსველის განტოლებანი) შეიცავენ მხოლოდ სრული მუხტის შენახვის განტოლებას (უწყვეტობის განტოლებას) და არა ველის შემქნელი ამ მუხტების მოძრაობის განტოლებებს.

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ველის შემთხვევაში მუხტების განაწილება და მოძრაობა შეიძლება ნებისმიერად იქნას მოცემული ოდონდ სრული მუხტი. მუხტების ამ განაწილების მოცემით განისაზღვრება მაშინ. მათ მიერ შექმნილი ველი მაქსველის განტოლებათა საშუალებით. გრაფიტაციულ ველში კი მისი შექმნილი მატერიის განაწილება და მოძრაობა სრულებითავე არ შეიძლება ნებისმიერად იქნას მოცემული, — პირიქით, ისინი უნდა განისაზღვრონ მათ მიერ შექმნილ ველთან ერთად (მოცემულ საწყის პირობებში ველის განტოლებათა ამოხსნის საშუალებით).

საკიროა აღინიშნოს, რომ გრაფიტაციული ველის განტოლებები ვერ განსაზღვრავენ მატერიის განაწილებას და მოძრაობას მთლიანად. სახელდობრ, ეს განტოლებები არ შეიცავენ ნივთიერების მდგომარეობის განტოლებას, ე. ი. განტოლებას, რომელიც წნევას და სიმკვრივეს აკავშირებს ერთიმეორესთან. ეს განტოლება მოცემული უნდა იყოს ველის განტოლებებთან ერთად.

შესაძლებელია ოთხი x^i კოორდინატის ნებისმიერი გარდაქმნა. ამ გარდაქმნის საშუალებით შესაძლებელია g_{ik} ტენზორის ათი კომპონენტიდან ოთხის ნებისმიერად შერჩევა, ამიტომ მხოლოდ ექვსი g_{ik} სიდიდეა დამოუკიდებელი. შექედგ, მატერიის ენერგია-იმპულსის ტენზორში შემავალი 4—სიჩქარის ოთხი კომპონენტი დაკავშირებულია ერთიმეორესთან თანაფარდობით $u^i u_i = 1$. ასე რომ მხოლოდ სამი მათგანია დამოუკიდებელი. ამგვარად, ველის ათი განტოლება (91,6) მართლაც განსაზღვრავს ათ უცნობ სიდიდეს, სახელდობრ: g^i_k ს ექვს კომპონენტს, u^i -ს სამ კომპონენტს და მატერიის ρ სიმკვრივეს (ან მის P წნევას).

თუ (91,6) განტოლებიდან ოთხ უცნობ სიჩქარეს და სიმკვრივეს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ ექვს განტოლებას, რომლებიც ექვს g_{ik} სიდიდეებს განსაზღვრავენ. რომ g_{ik} -თვის სულ ექვსი განტოლება გვაქვს, ეს უშუალოდ იქიდან ჩანს, რომ ათი (91,6) განტოლებანი ერთიმეორესთან დაკავშირებულია ოთხივივობით $T^i_k = 0$.

§ 92 ნიუტონის კანონი

ჩვენ მიერ მიღებული გრაფიტაციული ველის განტოლებებში მოვახდინოთ ზღვრული გადასვლა არარელატივო მექანიკაში, ე. ი. როცა $c \rightarrow \infty$. როგორც § 83-ში იყო მიათთებული, ყელა ნაწილაკის სიჩქარის სიმკერის დაშვება ერთდროულად მოითხოვს, რომ თვით გრაფიტაციული ველი სუსტი იყოს.

განსახილავ ზღვრულ შემთხვევაში მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებისათვის გამოსახულებანი ნაპოვნი იყო § 83-ში:

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{00} = c^2 + 2\varphi.$$

შემდეგ, ენერგია — იმპულსის ტენზორის კომპონენტებისათვის ჩვენ შეიძლება ვისარგებლოთ (34,7) გამოსახულებით $T_i^k = \mu c^2 u_i u^k$ (ჩვენ მაში ვცვლით ნიშანს იმ მიზეზებისა გამო, რომელთა შესახებაც აღნიშნული იყო 91-ში), სადაც μ სხეულის მასის სიმკვრივეა (ერთეულ მოცულობაში მყოფ ნაწილაკთა მასების ჯამი). რაც შეეხება u^i 4 — სიჩქარეს, ვინაიდან მაკროსკოპიული მოძრაობა, რასაკვირველია, ნელ მოძრაობად ჩაითვლება, ამიტომ ჩვენ უნდა უგულვებელვყოთ ყველა მისი სივრცული კოორდინატი და დავტოვოთ მხოლოდ დროული, ე. ი. უნდა დაუშვათ, რომ $u^x = 0$, $u^0 = \frac{u_0}{c} = \frac{1}{c}$. ამგვარად T_i^k -ს ყველა კომპონენტიდან დარჩება მხოლოდ

$$T_0^0 = \mu c^2. \quad (92,1)$$

$T = T_i^i$ სკალარი იგივე μc^2 -ის ტოლი იქნება. ველის განტოლებებს ჩვენ (91,8) ფორმით დავწერთ:

$$R_i^k = -\kappa \left(T_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k T \right);$$

როცა $i = k = 0$

$$R_0^0 = -\frac{\kappa}{2} \mu c^2.$$

ადვილად დაერწმუნდებით, რომ ყველა დანარჩენი განტოლება, განსახილავ მიახლოვებაში, იგივეურად ნულის ტოლი გახდება.

R_0^0 -ის გამოთვლისათვის შევნიშნოთ, რომ ყველა Γ_{ik}^i კომპონენტებიდან ნულისაგან განსხვავდება მხოლოდ $\Gamma_{00}^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0}$ (83,3). თუ ამას ზოგად (88,10) გამოსახულებაში ჩავსვამთ, R_{ik} -თვის მივიღებთ:

$$R_{00} = c^2 R_0^0 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} \equiv -\Delta \varphi.$$

ამგვარად ველის განტოლებები გადადის

$$\Delta \varphi = 4\pi k \mu, \quad (92,2)$$

სადაც

$$k = \frac{\kappa c^4}{8\pi} = 6,664 \cdot 10^{-8} \text{ სმ}^2 \text{ გრ}^{-1} \text{ სეკ}^{-2} \quad (92,3)$$

სიდიდეს ნიუტონის გრავიტაციული მუდმივი ეწოდება.

(92,2) განტოლება წარმოადგენს გრავიტაციული ველის განტოლებას არარელატიურ მექანიკაში. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ იგი სავსებით ანალოგიურია (36,4) პუასონის განტოლებისა — ელექტრული პოტენციალისათვის, რომელშიაც ახლა მუხტის სიმკვრივის ნაცვლად დგას k -ზე გამრავლებული მასის სიმკვრივე. ამიტომ ჩვენ შეიძლება პირდაპირ დავწეროთ (92,2) განტოლების ზოგადი ამოხსნა (36,8)-ის ანალოგიურად

$$\varphi = -k \int \frac{\mu dV}{R}. \quad (92,4)$$

ეს ფორმულა განსაზღვრავს მასების ნებისმიერი განაწილების გრავიტაციული ველის პოტენციალს.

კერძოდ, m მასის მქონე ერთი ნაწილაკის ველის პოტენციალისათვის გვაქვს

$$\phi = -\frac{km}{R} \quad (92,5)$$

და, მაშასადამე, ძალა $F = -m' \frac{\partial \phi}{\partial R}$, რომელიც ამ ველში m' მასის მქონე მეორე ნაწილაკზე მოქმედობს ტოლია

$$F = -\frac{km m'}{R^2}. \quad (92,6)$$

ეს არის ნიუტონის ცნობილი მიზიდულობის კანონი¹.

გრავიტაციულ ველში ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია მისი მასისა და ველის პოტენციალის ნამრავლის ტოლია (§ 85), იმის ანალოგიურად, რომ ელექტრულ ველში პოტენციალური ენერგია ტოლია მუხტის ნამრავლისა ამ ველის პოტენციალზე. ამიტომ (37,1)-ის ანალოგიურად შეიძლება დავწეროთ მასების ნებისმიერი განაწილების პოტენციალური ენერჯისათვის გამოსახულება

$$U = -\frac{k}{2} \int \rho \phi dV. \quad (92,7)$$

დასასრულს, დავწეროთ უმცირესი მოქმედების პრინციპი გრავიტაციული ველისათვის არარელატივისტურ მექანიკაში. გრავიტაციულ ველში ნაწილაკის მოქმედების ინტეგრალისათვის (76,1)-ის დახმარებით ახლა გვაქვს

$$S_m = \int \left(\frac{mv^2}{2} - m\phi \right) dt.$$

სივრცეში μ სიმკვრივით განაწილებული მასებისათვის მოქმედება შეიძლება დავწეროთ სახით

$$S_m = \int \left(\frac{\mu v^2}{2} - \mu\phi \right) dV dt.$$

რაც შეეხება ველის S_g მოქმედებას, მისი გამოთვლა შეიძლება G -ს (89,3) ზოგადი გამოსახულებიდან. მაგრამ ამ შემთხვევაში g_{ik} -ს ის ზღვრული მნიშვნელობანი, რომლებითაც ჩვენ აქამდე ვსარგებლობდით, არასაკმარისი აღმოჩნდება — მათი ჩასმით G იგივეურად ნულის ტოლი ხდება.

¹ (92,6)-დან ჩანს, რომ ელემენტარული ნაწილაკებისათვის გრავიტაციული და ელექტრული ძალების შეფარდება მეტად მცირეა. ასე მაგალითად, ორი ელექტრონისათვის

$\frac{km^2}{e^2} = 2.10^{-43}$, ხოლო ორი პროტონისათვის 7.10^{-37} .

ამიტომ G -ს გამოსახვარისშეზღუდულად საჭიროა წინასწარ გამოვთვალოთ G -ს შემდეგი რიგის სიმცირის წევრებამდე სიზუსტით. ჩვენ ამ გამოთვლებს აქ არ მოვიყვანთ და დავეწერთ მხოლოდ მათ საბოლოო შედეგს:

$$S_g = -\frac{1}{4\pi k} \int (\nabla\varphi)^2 dV dt.$$

ამგვარად, გრავიტაციული ველისათვის და მატერიისათვის სრულ მოქმედებას აქვს სახე:

$$S = \int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{4\pi k} (\nabla\varphi)^2 \right] dV dt. \quad (92,8)$$

ადვილად დაერწმუნდებით იმაში, რომ φ -ს მიხედვით ვარიირება მართლაც გვაძლევს (92,2) პუასონის განტოლებას.

§ 93. ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციული ველი

განვიხილოთ ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციული ველი. ასეთი ველი შეიძლება შეიქმნას ნივთიერების ნებისმიერი ცენტრალური სიმეტრიის განაწილებით. ამასთანავე, ცენტრალური სიმეტრიისა უნდა იყოს არა მხოლოდ ნივთიერების განაწილება, არამედ მისი მოძრაობაც, ე. ი. სიჩქარე ყოველ წერტილში მიმართული უნდა იყოს რადიუსის გასწვრივ.

ველის ცენტრალური სიმეტრია იმას ნიშნავს, რომ სივრცის მეტრიკა, ე. ი. ds ინტერვალის გამოსახულება ერთი და იგივე უნდა იყოს ცენტრიდან ერთსადამიამვე მანძილით დაშორებულ წერტილებში. ევკლიდეს სივრცეში ეს მანძილი რადიუს-ვექტორის ტოლია; არაევკლიდურ სივრცეში კი, რომელიც გრავიტაციული ველის არსებობის დროს გვაქვს, არ არსებობს სიდიდე, რომელსაც ევკლიდური რადიუს-ვექტორის ყველა თვისება აქვს (მაგალითად, რომელიც ერთდროულად ტოლია ცენტრიდან მანძილისა და 2π -ზე გაყოფილი წრეხაზის სიგრძისა). ამიტომ „რადიუს-ვექტორის“ არჩევა ახლა ნებისმიერია.

თუ „სფერული“ სივრცული r , θ , φ კოორდინატებით ვისარგებლებთ, მაშინ ყველაზე უფრო ზოგადი ცენტრალური-სიმეტრიული გამოსახულება ds^2 -თვის იქნება

$$ds^2 = h(r, t) dr^2 + k(r, t) (\sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + l(r, t) dt^2 + a(r, t) dr dt,$$

სადაც a , h , k , l , r „რადიუს-ვექტორისა“ და t დროს რაღაც ფუნქციებია. მაგრამ ზოგად ფარდობითობის თეორიაში ათვლის სისტემის არჩევის ნებისმიერობისა გამო ჩვენ კიდევ შეგვიძლია კოორდინატებზე ყოველგვარი გარდაქმნა მოვახდინოთ, რომელიც არ არღვევს ds^2 -ის ცენტრალურ სიმეტრიას. ეს ნიშნავს, რომ r და t კოორდინატები ჩვენ შემდეგი ფორმულებით შეგვიძლია გარდავაქმნათ: $r = f_1(r', t')$, $t = f_2(r', t')$, სადაც f_1 და f_2 ახალი r' და t' კოორდინატების ნებისმიერი ფუნქციებია. კერძოდ, დროული კოორდინატი ყოველთვის შეგვიძლია ისე შევიარჩიოთ, რომ ds^2 -ის გამოსახულებაში $dr dt$ -ს წინ

მდგომი კოეფიციენტი ნულის ტოლი გავხადოთ¹. მეორე შესაძლო გარდაქმნით ჯერ ჩვენ არ ვისარგებლებთ, ვინაიდან ჩვენ გესურს მივიღოთ ველის ზოგადი განტოლებები, რომელშიაც შემდეგ უკვე შესაძლო იქნება r კოორდინატის სხვადასხვა საშუალებით შერჩევა. ქვემოლ უფრო მოხერხებული იქნება h, k , და l სიდიდეების ექსპონენციალური სახით დაწერა, შესაბამისად, როგორც— e^{λ} , — e^{μ} და — e^{ν} , სადაც λ, μ და ν წარმოადგენენ r და t -ს რაღაც ფუნქციებს. ამგვარად, ds^2 -თვის ჩვენ ვისარგებლებთ შემდეგი სახის გამოსახულებით

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\mu} (\sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) - e^{\lambda} dr^2. \quad (93,1)$$

თუ x^1, x^2, x^3, x^0 -ს ქვეშ შესაბამისად r, θ, φ, t კოორდინატებს ვიჯულისხმებთ, მაშინ ნულისაგან განსხვავებული მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებისათვის გვექნება

$$g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = e^{\mu}, \quad g_{33} = -\sin^2 \theta \cdot e^{\mu}, \quad g_{00} = e^{\nu}. \quad (93,2)$$

ამ სიდიდეთა დანმარებით ზოგადი (81,3) ფორმულიდან ადვილად განვსაზღვრავთ Γ^i_{jk} სიდიდეებს. გამოთვლებს შემდეგ გამოსახულებებამდე მივყევართ (შტრიხი აღნიშნავს r -ის მიმართ დიფერენცირებას, ასოს ზემოლ წერტილი კი— დიფერენცირებას t -ს მიმართ):

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} \lambda', & \Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2} e^{\mu-\lambda} \mu', & \Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{2} e^{\mu-\lambda} \sin^2 \theta \cdot \mu', \\ \Gamma^0_{11} &= -\frac{1}{2} e^{\lambda-\nu} \lambda, & \Gamma^0_{22} &= \Gamma^0_{33} = -\frac{1}{2} e^{\mu-\nu} \mu, & \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} \mu', & \Gamma^3_{23} &= \operatorname{ctg} \theta, & \Gamma^1_{00} &= -\frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu', \\ \Gamma^1_{10} &= \frac{1}{2} \lambda, & \Gamma^2_{02} &= \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2} \mu, & \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} \nu'. \end{aligned} \right\} \quad (93,3)$$

Γ^i_{jk} -ის დანარჩენი კომპონენტები (იმათ გარდა, რომლებიც აქ დაწერილისაგან განსხვავდებიან k და l ინდექსის გადასმით) ნულის ტოლია.

შემდეგ, ჩვენ გამოვთვლით $T_{ik} = (p + \rho c^2) u_i u_k - \delta_{ik} p$ ტენზორის კომპონენტებს. ვინაიდან ნივთიერების სიჩქარე ყველგან რადიუს-ვექტორის გასწვრივ არის მიმართული, ამიტომ $u_i = \frac{dx^i}{ds}$ 4 — სიჩქარის კომპონენტებისათვის

¹ უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს პირობა დროული კოორდინატის არჩევას ცალსახად არ განსაზღვრავს. სახელდობრ მასზე კიდევ შეიძლება მოვახდინოთ ნებისმიერი $t = f(t')$ სახის გარდაქმნა, რომელიც r -ს არ შეიცავს.

გვაქვს (თუ შევნიშნავთ, რომ $ds = dt \sqrt{e^\nu - e^{\lambda} r^2}$

$$\left. \begin{aligned} u^1 &= -e^{-\lambda} u_1 = \frac{\dot{r}}{\sqrt{e^\nu - e^{\lambda} r^2}}, \quad u^2 = u^3 = 0, \\ u^0 &= e^{-\nu} u_0 = \frac{1}{\sqrt{e^\nu - e^{\lambda} r^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (93,4)$$

T_i^k ტენზორის კომპონენტებისათვის ახლა ვპოულობთ

$$\left. \begin{aligned} T_1^1 &= -\frac{\rho c^2 \dot{r}^2 e^\lambda + de^\nu}{e^\nu - e^{\lambda} r^2}, \quad T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad T_0^0 = \frac{\rho c^2 e^\nu + p \dot{r}^2 e^\lambda}{e^\nu - e^{\lambda} r^2} \\ T_0^1 &= -T_1^0 e^{-\nu} = (p + \rho c^2) \frac{\dot{r} e^\nu}{e^\nu - e^{\lambda} r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (93,5)$$

T_i^k -ს დანარჩენი კომპონენტები ნულის ტოლია.

Γ_{ik}^j -ის (93,3) გამოსახულების დახმარებით ახლა ზოგადი (88,10) ფორმულიდან შეიძლება გამოვთვალოთ R_{ik} ტენზორი და შემდეგ დაეწეროთ გრავიტაციული ველის (91,7) განტოლებანი $R^k_i - \frac{1}{2} \delta^k_i R = -\kappa T_i^k$. მარტივ, მაგრამ საკმაოდ გრძელ გამოთვლებს შემდეგ განტოლებებამდე მივყვართ:

$$\begin{aligned} -\kappa T_1^1 &= \kappa \frac{\rho c^2 \dot{r}^2 e^\lambda + p e^\nu}{e^\nu - e^{\lambda} r^2} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - \\ &- e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\nu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) - e^{-\mu}, \end{aligned} \quad (93,6)$$

$$\begin{aligned} -\kappa T_2^2 &= \kappa p = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu' \lambda' - \nu' \lambda' + \mu' \nu') + \\ &+ \frac{1}{4} e^{-\nu} (\dot{\lambda} \dot{\nu} + \dot{\mu} \dot{\nu} - \dot{\lambda} \dot{\mu} - 2\dot{\lambda} \dot{\nu} - \dot{\lambda}^2 - 2\dot{\mu} \dot{\nu} - \dot{\mu}^2), \end{aligned} \quad (93,7)$$

$$\begin{aligned} -\kappa T_0^0 &= -\kappa \frac{\rho c^2 e^\nu + p \dot{r}^2 e^\lambda}{e^\nu - e^{\lambda} r^2} = e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu' \lambda'}{2} \right) - \\ &- \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} \dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) - e^{-\mu}, \end{aligned} \quad (93,8)$$

$$-\kappa T_0^1 = -\kappa \frac{(p + \rho c^2) \dot{r} e^\nu}{e^\nu - e^{\lambda} r^2} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (-2\dot{\mu}' - \dot{\mu} \mu' + \dot{\lambda} \mu' + \nu' \dot{\mu}). \quad (93,9)$$

ვისარგებლოთ ახლა r „რადიუს-ვექტორის“ შერჩევის დარჩენილი შესაძლებლობით. ხშირად მოხერხებული იქნება r ისე შევარჩიოთ, რომ წრეხაზის

სივრცე (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში) $2\pi r$ -ის ტოლი იყოს. ამისათვის აუცილებელია $e^\mu = r^2$ (მაშინ წრეხაზის რკალის ელემენტი $\Theta = \pi/2$ სიბრტყეში იქნება $dl = r d\varphi$, ხოლო მთელი წრეხაზის სივრცე $\int dl = 2\pi r$) ინტეგრალი ds^2 (93,1) მაშინ მიიღებს სახეს:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (\sin^2 \Theta d\varphi^2 + d\Theta^2), \quad (93,10)$$

ხოლო გრავიტაციული ველის განტოლებანი [თუ (93,6 — 9)-ში $\mu = 2 \ln r$ -ს ჩავსვამთ]:

$$\kappa \frac{\rho c^2 r^2 e^\lambda + p e^\nu}{e^\nu - e^\lambda r^2} = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \quad (93,11)$$

$$\kappa p = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right), \quad (93,12)$$

$$-\kappa \frac{\rho c^2 e^\nu + p e^\lambda r^2}{e^\nu - e^\lambda r^2} = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}, \quad (93,13)$$

$$-\kappa \frac{(p + \rho c^2) r e^\nu}{e^\nu - e^\lambda r^2} = e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}. \quad (93,14)$$

ამ განტოლებებიდან მათ ამოუხსნელად შეიძლება ზოგიერთი უტოლობათა გამოყენება, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ λ და ν [როცა ds^2 (93,10) სახით არის აღებული]. (93,13)-დან ჩანს, რომ როცა $r \rightarrow 0$, λ -ც უნდა გახდეს ნული, ყოველ შემთხვევაში ისე მაინც, როგორც r^2 . წინააღმდეგ შემთხვევაში (93,13)-ის მარჯვენა მხარე უსასრულო გახდებოდა, როცა $r = 0$. ე. ი. T_0^0 -საც $r = 0$ -ში განსაკუთრებული წერტილი ექნებოდა. მეორე მხრით, თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ $\lambda_{r=0} = 0$, (93,13) შემდეგი სახით შეიძლება გავაინტეგრალოთ

$$\lambda = - \ln \left\{ 1 - \frac{\kappa}{r} \int_0^r T_0^0 r^2 dr \right\}. \quad (93,15)$$

ვინაიდან, როგორც (93,5)-დან ჩანს, ყოველთვის $T_0^0 \geq 0$ (გაეხსენოთ, რომ r არ შეიძლება მეტი იყოს $e^{-\lambda}$ -ზე, ვინაიდან მაშინ შესაბამის სიჩქარე სინათლის სიჩქარეზე მეტი უნდა ყოფილიყო), ამიტომ (93,15)-დან ჩანს, რომ $\lambda \geq 0$, ე. ი.

$$e^\lambda \geq 1. \quad (93,16)$$

შემდეგ, ვინაიდან $T_1^1 \geq 0$ [როგორც ეს (93,5)-დან ჩანს], ამიტომ (93,11) განტოლებიდან (93,16) განტოლებასთან ერთად გამომდინარეობს, რომ $\nu' \geq 0$. მეორე მხრით, ვინაიდან ველის შემქმნელი მასებიდან უსასრულო მანძილზე ჰეტრიკა ევკლიდურში უნდა გადადიოდეს (ე. ი. გ. ი. გალილეისეული უნდა გახდნენ), ამიტომ როცა $r \rightarrow \infty$ უნდა იყოს $e^\nu = e^2$ (ამასთანავე უსასრულობაში t ქვეშარტ დროს თანხვედბა), ამ ზღვრული პირობებიდან და $\nu' \geq 0$ უტოლობიდან ჩვენ ვპოულობთ, რომ

$$e^\nu \leq c^2 \quad (93,17)$$

რომელიმე წერტილიდა ცენტრამდე მანძილი ტოლი იქნება

$$\int \sqrt{V - g'_{11}} dr = \int e^{\lambda/2} dr \geq r,$$

ხოლო შესაბამის წრეხაზის სიგრძე უდრის $2\pi r$. ამგვარად (93,16) უტოლობა გვიჩვენებს, რომ ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციულ ველში სივრცული გეომეტრია ასეთია, რომ წრეხაზის სიგრძის შეფარდება მის რადიუსთან 2π -ზე ნაკლებია.

(93,17) უტოლობა $g_{00} \leq c^2$ (79,1) ფორმულასთან დაკავშირებით:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dt,$$

რომელიც ქვეშარიტ დროს განსაზღვრავს, გვიჩვენებს, რომ გრავიტაციულ ველში ხდება დროს „დანეღება“ იმ დროსთან შედარებით, რომელიც გვაქვს მასებიდან დიდ მანძილზე, სადაც ველი ისპობა (უსასრულობაში t ქვეშარიტი დროა). სხვაგვარად რომ ვთქვათ, გრავიტაციულ ველში სპექტრალური ხაზების წანაცვლება (§ 85) ყოველთვის წითელ მხარეს ხდება¹.

§ 94. ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციული ველი სიცარიელეში

განვიხილოთ ცენტრალური სიმეტრიის ველი სიცარიელეში, ე. ი. იმ მასების გარეშე, რომლებიც ამ ველს ქმნიან. ds^2 ინტერვალის ავარჩიოთ (93,10) სახით. სიცარიელეში $\rho = 0$, $p = 0$ და (93,11), (93,13) და (93,14) ველის განტოლებები მიიღებენ სახეს

$$e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (94,1)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (94,2)$$

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (94,3)$$

მეოთხე განტოლებას [(93,12) განტოლებას] ჩვენ არ ვწერთ, რადგან იგი აქ დაწერილ განტოლებათა შედეგს წარმოადგენს.

(94,3)-დან ჩვენ პირდაპირ ვხედავთ, რომ λ დროზე არ არის დამოკიდებული. შემდეგ, თუ (94,1) და (94,2) განტოლებებს შევკრებთ, ვიპოვიოთ $\lambda' + v' = 0$, ე. ი. $\lambda + v = \text{const}$, ვინაიდან როცა $r \rightarrow \infty$ უნდა იყოს $e^{\lambda} = 1$, $e^v = c^2$, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ $e^v = c^2 e^{-\lambda}$. ამგვარად v აგრეთვე არ არის დროზე დამოკიდებული.

¹ ორივე ეს შედეგი მხოლოდ იმ პირობით არის სამართლიანი, რომ უსასრულობაში მეტრიკა გალილეისეული ხდება.

(94,1) და (94,2) განტოლებათა ინტეგრება ადვილია, რომლის შედეგად λ -თვის ვლებულობთ გამოსახულებას

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{c^2} e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const.}}{r}.$$

აქ შემავალი მუდმივი ადვილად განისაზღვრება იმ პირობიდან, რომ მასებიდან საკმაოდ შორ მანძილზე, სადაც ველი სუსტია, ადგილი აქვს ნიუტონის კანონს და g_{00} -ს აქვს (83,2) სახე: $g_{00} = c^2 + 2\varphi$, სადაც φ პოტენციალი მისი ნიუტონისეული გამოსახულების ტოლია: $\varphi = -\frac{\gamma c^4}{8\pi} \frac{m}{r} = -\frac{km}{r}$ (m ველის შემქმნელი

სხეულის სრული მასაა). აქედან ჩანს, რომ $\text{const.} = \frac{2km}{c^2}$.

ამგვარად ინტერვალისათვის ჩვენ საბოლოოდ ვპოულობთ

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2km}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2km}{c^2 r}} dr^2 + r^2 (\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (94,4)$$

ეს გამოსახულება სავსებით განსაზღვრავს გრავიტაციულ ველს სიციარიელში, რომელსაც კმნის ნებისმიერი ცენტრალური სიმეტრიით განაწილებული მასები. ველის განტოლებათა ამოხსნის ეს სახე პირველად შეარცხილდმა მიიღო. ხაზს უსვამთ იმას, რომ ეს ამოხსნა სამართლიანია არა მარტო უძრავი მასებისათვის, არამედ აგრეთვე მოძრავი მასებისათვისაც, თუ კი ამ მოძრაობასაც ცენტრალური სიმეტრია ახასიათებს (მაგალითად, ცენტრალური სიმეტრიის პულსაცია). ამგვარად, გრავიტაციული ველი ამ შემთხვევაშიაც დროზე დამოკიდებული არ არის.

g_{00} კომპონენტა, როგორც ვიცით, ყოველთვის დადებითია. ამიტომ (94,4)-დან ჩვენ ვხედავთ, რომ r „რადიუს-ვექტორს“ არ შეუძლია მიიღოს $2km/c^2$ -ზე ნაკლები მნიშვნელობა. წრეხაზის შესაბამის მინიმალური სიგრძე იქნება $2\pi \cdot 2km/c^2 = 4\pi km/c^2$. ეს ნიშნავს, რომ მატერიალურ სხეულს არ შეუძლია ქონდეს ზომა, რომელიც გარკვეულ ქვედა საზღვარზე ნაკლებია. სახელდობრ m მასის სხეულს წრიული ზომა არ შეიძლება ქონდეს $4\pi km/c^2$ -ზე ნაკლები სიგრძისა¹.

დაბოლოს მოვიყვანოთ კიდევ ds^2 -ტის მიახლოებითი გამოსახულება კოორდინატთა სათავიდან დიდ მანძილზე:

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2km}{c^2} (dr^2 - c^2 dt^2). \quad (94,5)$$

¹ მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ამ შედეგს ვლემენტარულ ნაწილაკების მიმართ აზრი არა აქვს. ამ ნაწილაკთა მიმართ მთელი აქ გადმოცემული თეორია, ქვანტური მოვლენების გამო, გამოუსადეგო ხდება უკვე იმ ზომისათვის, რომელიც მეტად დიდ რიცხვჯერ აღემატება (10^{10} რიგისა) km/c^2 -ს.

მეორე წვერი წარმოადგენს გალილეისეული ds^2_0 მეტრიკის მცირე შესწორებას. ველის შემქნელი მასებიდან საკმაოდ შორ მანძილზე ყოველი ველი ცენტრალური სიმეტრიისაა. ამიტომ (94,5) განსაზღვრავს მეტრიკას სხეულთა ნებისმიერი სისტემისაგან დიდ მანძილზე.

§ 95. მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციულ ველში

განვიხილოთ მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციულ ველში. როგორც ყოველი ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობა იწარმოებს ერთ „სიბრტყეში“, რომელიც კოორდინატთა სათავეზე გადის. ეს ფართი ავარჩიოთ $\theta = \pi/2$ სიბრტყედ.

m მასის სხეულის ტრაექტორიის განსაზღვრავად ვისარგებლოდ ჰამილტონი—იაკობის განტოლებით:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2.$$

(94,4) ინტერვალის გამოსახულებით განსაზღვრულ g^{ik} -ს დახმარებით შემდეგ განტოლებას ეპოულობთ:

$$e^{-\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{e^\nu}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = m^2 c^2, \quad (95,1)$$

სადაც $e^\nu = c^2 - 2km'/r$ (m' ველის შემქნელი სხეულის მასაა). ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნის ზოგადი წესის მიხედვით S -ს შემდეგი სახით ეძებთ

$$S = \mathcal{E}_0 t - M\varphi + f(r)$$

მუდმივი \mathcal{E}_0 ენერგიით და იმპულსის მომენტი M . თუ ამას (95,1)-ში ჩავსვამთ, ვიპოვიან განტოლებას

$$e^{-\nu} \mathcal{E}_0^2 - \frac{M^2}{r^2} - \frac{c^\nu}{c^2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 = m^2 c^2,$$

საიდანაც

$$\frac{df}{dr} = ce^{-\frac{\nu}{2}} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 e^{-\nu} - m^2 c^2 - \frac{M^2}{r^2}}.$$

ამგვარად, მოქმედება ტოლია

$$S = \mathcal{E}_0 t - M\varphi + \int ce^{-\frac{\nu}{2}} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 e^{-\nu} - m^2 c^2 - \frac{M^2}{r^2}} dr. \quad (95,2)$$

როგორც ცნობილია, ტრაექტორია განისაზღვრება განტოლებით

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const}, \text{ საიდანაც}$$

$$\varphi = - \int \frac{\frac{cM}{r^2} dr}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - m^2 c^2 \epsilon^\nu - \frac{M^2}{r^2} \epsilon^\nu}} \quad (95,3)$$

ეს ინტეგრალი ელიპსურ ინტეგრალზე დაიყვანება.

ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციულ ველში მოძრაობის მაგალითს წარმოადგენს პლანეტების მოძრაობა მზის მიზიდულობის ველში. ვინაიდან პლანეტების მოძრაობის სიჩქარე სინათლის სიჩქარესთან შედარებით მცირეა, ამიტომ მიზიდულობის რელატიურული თეორია პლანეტა ორბიტებისათვის უმნიშვნელო შესწორებას გვაძლევს ნიუტონის თეორიასთან შედარებით. ორბიტის (95,3) განტოლების მიახლოებითი გამოკვლევისათვის, უფრო მოხერხებული იქნება, თუ მას დიფერენციალური განტოლების სახით დავწერთ:

$$\left(\frac{Mc}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \mathcal{E}_0^2 - m^2 c^2 \epsilon^\nu - \frac{M^2}{r^2} \epsilon^\nu$$

ან, თუ ახალ $\sigma = 1/r$ ცვლადს შემოვიტანთ და ϵ^ν -თვის ჩავსვამთ მის გამოსახულებას,

$$M^2 \epsilon^2 \left(\frac{d\sigma}{d\varphi} \right)^2 = \mathcal{E}_0^2 - m^2 c^4 + 2km'm^2 c^2 \sigma - M^2 c^2 \sigma^2 + 2km'M^2 \sigma^3.$$

თუ ამ განტოლების φ -ს მიხედვით დიფერენცირებას მოვახდენთ, მივიღებთ

$$\frac{d^2 \sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma + \alpha \sigma^2, \quad (95,4)$$

სადაც შემოტანილია მუდმივები $p = \frac{M^2}{km'm^2}$, $\alpha = \frac{3km'}{c^2}$.

ეს განტოლება განსხვავდება იმისაგან, რომელსაც ჩვენ მივიღებდით ნიუტონის თეორიიდან, მცირე $\alpha \sigma^2$ წევრით. ამოვხსნათ იგი მიმდევრობითი მიახლოებების მეთოდით. ნულოვან მიახლოებაში $\alpha \sigma^2$ წევრს გამოვტოვებთ. დარჩენილ განტოლების ამოხსნა, როგორც ცნობილია, ნიუტონისეულ ორბიტს წარმოადგენს

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi)$$

სადაც p ორბიტის პარამეტრა, e კი — მისი ექსცენტრისიტეტი. დიდი ნახევარ-ღერძი ტოლია $a = p/(1-e^2)$, ხოლო ორბიტის პერიოდი შეესაბამება φ კუთხის მნიშვნელობას $\varphi = \pi$.

შემდეგ მიახლოებაში σ -ს ვეძებთ $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ სახით, სადაც σ_0 ნულოვანი მიახლოებაა. თუ $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ (95,4)-ში ჩავსვამთ, σ_1 -თვის ვიპოვით განტოლებას

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \alpha\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{p^2}(1 + e \cos \varphi)^2 = \frac{\alpha}{p^2} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e \cos \varphi + \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi \right].$$

მარჯვენა მხარეში ფრჩხილებში მდგომი ყველა წევრიდან ორბიტის დასამზერ ცვლილებას იძლევა მხოლოდ მეორე წევრი, — რეზონანსის გამო ($\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = 0$ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნასთან) იგი გვაძლევს განუწყვეტელი მზარდ ეფექტს. თუ მხოლოდ ამ წევრს დავტოვებთ, ჩვენ ვიპოვით σ_1 -თვის არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამოხსნას

$$\sigma_1 = \frac{\alpha e}{p^2} \varphi \sin \varphi.$$

ამგვარად, საძებნ მიახლოებაში

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \left(1 + e \cos \varphi + \frac{\alpha e}{p} \varphi \sin \varphi \right) \approx \frac{1}{p} \left[1 + e \cos \varphi \left(1 - \frac{\alpha}{p} \right) \right]. \quad (95,5)$$

აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ ნიუტონის ელიფსი ბრუნავს. პლანეტის ერთი შემობრუნების დროს განმავლობაში, მისი ორბიტის პერიოდული წაინაცვლებს სიდიდეზე¹

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\alpha}{p} = \frac{6\pi km'}{c^2 a (1 - e^2)}. \quad (95,6)$$

შემდეგ, განვიხილოთ სინათლის სხივის გზა ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციულ ველში. ეს გზა განისაზღვრება (82,10) ეიკონალის განტოლებით

$$g_{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0,$$

რომელიც ჰამილტონ-იაკობის განტოლებიდან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ უკანასკნელში უნდა დაუშვათ $m = 0$. ამიტომ სხივის ტრაექტორიისათვის ჩვენ პირდაპირ დავწერთ, თუ დაუშვებთ, რომ (95,3)-ში $m = 0$.

$$\varphi = - \int_{r^2} \frac{\tilde{a}r}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2 M^2} - \frac{r^2}{c^2 r^2}}}. \quad (95,7)$$

(ნაწილაკის $\mathcal{E}_0 = \frac{dS}{dt}$ ენერგიის ნაცვლად ჩვენ ახლა ვწერთ სინათლის სიხშირეს

$$\omega_0 = \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

¹ ამ წანაცვლების რიცხვითი მნიშვნელობა ყველაზე დიდია მერკურისათვის, რომლისთვისაც იგი ტოლია 42,9' .ას წელიწადში.

ამ ტრაექტორიის გამოკვლევის მიზნით, როგორც წინა შემთხვევაში, დაეწეროს (95,7) დიფერენციული განტოლების სახით:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2 M^2} - \sigma^2 + \frac{2km'}{c^2} \sigma^3,$$

ან, თუ φ -ს მიხედვით დიფერენცირებას მოვახდენთ, და ხელახლა $\alpha = 3km'/c^2$ მუდმივს შემოვიტანთ:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma + \alpha c^2. \quad (95,8)$$

თუ მცირე αc^2 წევრს უგულებელვყოფთ, ნულოვან მიახლოებაში მივიღებთ

$$\sigma = \frac{\cos \varphi}{R}$$

(ჩვენ აღენიშნეთ $R = \omega_0/cM$) ე. ი. სწორ ხაზს $r = \frac{R}{\cos \varphi}$, რომელიც კოორდინატთა სათაეიდან R მანძილზე გადის. შემდეგი მიახლოებების განსასაზღვრავად (95,8)-ში ჩავსვათ $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$. მაშინ σ_1 -სათვის ჩვენ ეპოულობთ განტოლებას:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \alpha \sigma_0^2 = \frac{\alpha}{R^2} \cos^2 \varphi.$$

ამ განტოლების კერძო ინტეგრალი არის $\sigma_1 = \frac{\alpha}{3R^2} (1 + \sin^2 \varphi)$ და მასადავსახეობის ტრაექტორიისათვის ჩვენ ვღებულობთ განტოლებას:

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{\alpha}{3R^2} (1 + \sin^2 \varphi). \quad (95,9)$$

განსაზღვრით ამ მრუდის მიმართულება ცენტრიდან შორ მანძილზე. ამისათვის დაუშვათ $r = \infty$ ან $\sigma = 0$, და ამგვარად მიღებული განტოლებიდან ვეძიოთ φ ასეთი სახით $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \Delta\varphi$, სადაც $\Delta\varphi$ მცირეა [თუ მხედველობაში გვექნება, რომ (95,9)-ში მარჯვნიდან მეორე წევრი მცირეა]. მაღალი რიგის სიდიდეებამდე სიზუსტით ეს გვაძლევს

$$\frac{1}{2} \Delta\varphi = \pm \frac{\alpha}{3R}.$$

ამგვარად, სხივის ტრაექტორია წარმოადგენს ასიმპტოტებიან მრუდს, რომლის ასიმპტოტებს შორის კუთხე უდრის

$$\Delta\varphi = \frac{2\alpha}{3R} = \frac{2km'}{c^2 R}. \quad (95,10)$$

მაშასადამე ცენტრალურ გრავიტაციულ ველში ცენტრიდან R მანძილზე გამავალი სინათლის სხივი განიცდის გადახრას, რომელიც ამ ფორმულით განისაზღვრება¹

§ 96. ველის განტოლებანი „საკუთარი“ ათვლის სისტემაში

ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციული ველის ზოგადი (93,6—9) განტოლებანი შესამჩნევად მარტივდებიან, თუ ისეთი ათვლის სისტემით ვისარგებლებთ, რომელიც ყოველ წერტილში მოძრაობს ამ წერტილში მყოფ ნივთიერებასთან ერთად. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ათვლის სისტემას თვით ველის შემქნელი ნივთიერება წარმოადგენს. ასეთ ათვლის სისტემას შეიძლება „საკუთარი“ უწოდოთ. ვინაიდან ამ სისტემაში ნივთიერება უძრავია, ამიტომ ჩვენ ახლა გვაქვს $\dot{r} = 0$. (სინქარის სხვა კომპონენტი საზოგადოდ არ არსებობს ცენტრალური სიმეტრიის გამო). შევნიშნოთ, რომ „რადიუს-ვექტორის“ არჩევა ამ პირობით სავსებით ცალსახად არ განისაზღვრება. r -ზე შეიძლება მოვახდინოთ კიდევ ნებისმიერი $r = f(r')$ სახის გარდაქმნა, რომელიც t -ს არ შეიცავს.

ვისარგებლოთ (90,6) თანაფარდობებით, რომლებსაც ველის განტოლებები შეიცავს (იხ. § 91):

$$T^k_{;ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} T^k_i - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0.$$

თუ (93,5)-ში დაუშვებთ, რომ $\dot{r} = 0$, მაშინ T^k_i -ს ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტებისათვის ვიპოვიით:

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p, \quad T^0_0 = \rho c^2. \quad (96,1)$$

თუ ამ გამოსახულებებს და g_{ik} -ს მნიშვნელობებს (93,2)-დან ჩავსვამთ $T^k_{;ik} = 0$ განტოლებებში, მარტივი გამოთვლით შემდეგ ორ განტოლებას ვიპოვიით:

$$\lambda + 2\mu = -2 \frac{\rho c^2}{p + \rho c^2}, \quad \nu' = -2 \frac{p'}{p + \rho c^2}. \quad (96,2)$$

თუ p და ρ -ს შორის დამოკიდებულება ცნობილია, მაშინ ეს ორი განტოლება უშუალოდ გაინტეგრალდება შემდეგი სახით:

$$\lambda + 2\mu = -2 \int \frac{c^2 d\rho}{p + \rho c^2} + f_1(r), \quad (96,3)$$

$$\nu = -2 \int \frac{dp}{p + \rho c^2} + f_2(t), \quad (96,4)$$

სადაც $f_1(r)$ და $f_2(t)$ რადიუს-ვექტორისა და დროს ფუნქციებია, რომლებიც ნებისმიერად შეიძლება ავირჩიოთ, ვინაიდან, როგორც ზევით იყო აღნიშნული, ჩვენ გვაქვს შესაძლებლობა მოვახდინოთ ნებისმიერი გარდაქმნა შემდეგი სახის $r = r(r')$ და $t = t(t')$.

¹ მზის კიდის მახლობლად გამავალი სხივისათვის $\Delta\varphi = 1,75''$.

ველის ზოგადი (93,6-9) განტოლებები „საკუთარ“ ათვლის სისტემაში მიიღებენ სახეს:

$$\chi p = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\nu} + \frac{3}{4} \mu'^2 \right) - e^{-\mu}, \quad (96,5)$$

$$\begin{aligned} \chi p = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') + \\ + \frac{1}{4} e^{-\nu} (\lambda \dot{\nu} + \dot{\mu} \dot{\nu} - \lambda \dot{\mu} - 2\dot{\lambda} - \lambda^2 - 2\dot{\mu} - \dot{\mu}^2), \end{aligned} \quad (96,6)$$

$$-\chi \rho c^2 = e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\lambda \dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) - e^{-\mu}, \quad (96,7)$$

$$0 = \nu' \dot{\mu} + \lambda \dot{\mu}' - \dot{\mu} \mu' - 2 \dot{\mu}'. \quad (96,8)$$

§ 94-ში ჩვენ ვნახეთ, რომ ცენტრალური სიმეტრიის გრავიტაციული ველი სიცარიელეში ყოველთვის მუდმივი ყოფილა. თუ ნივთიერება უძრავია, მაშინ ველი მუდმივი იქნება მისი შემქნელი სხეულის შიგნითაც. მუდმივ გრავიტაციულ ველში ყოველი სტატიკური ათვლის სისტემა, რასაკვირველია, „საკუთარი“ იქნება, ვინაიდან ნივთიერება ამ ათვლის სისტემაში უძრავია. ვინაიდან ახლა ყველა λ , μ , ν სიდიდე მხოლოდ r -ის ფუნქციას წარმოადგენს, ამიტომ r -ის სათანადო შერჩევით ჩვენ შეგვიძლია λ და μ ნებისმიერი წინასწარ მოცემული ფუნქცია გავხადოთ. ჩვენ r -ს ისე შევარჩევთ, რომ $e^\mu = r^2$, ე. ი. რომ $d\mu = 2r dr$ (93,10) სახე ქონდეს; ე. ი.

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (96,9)$$

(96,3) განტოლებას ახლა ადვილი არა აქვს, ვინაიდან იგი წარმოადგენს პირველი (96,2) განტოლებათაგანის ინტეგრების შედეგს, რომელიც ახლა იგივეურად ნულის ტოლი ხდება. დანარჩენი (96,4) განტოლებებიდან მუდმივი ველის განტოლებათა სრულ სისტემად ჩვენ ავირჩევთ (96,3), (96,5) და (96,7) განტოლებებს. თუ ამ განტოლებებში ყველა დროს მიმართ აღებულ წარმოებულებს გამოვტოვებთ და დაუშვებთ, რომ $e^\mu = r^2$, ვიპოვით

$$\chi p = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \quad (96,10)$$

$$\chi \rho c^2 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (96,11)$$

$$\nu = -2 \int \frac{dp}{p + \rho c^2} + f(r) \quad (96,12)$$

¹ ამ განტოლებათა სრული ინტეგრება შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა წნევის უგულვებელყოფა შეიძლება, ე. ი. შეიძლება მივიღოთ $p = 0$. (96,4)-დან ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში შეიძლება დაუშვათ $\nu = 0$. მაშინ (96,8) განტოლება ღეროს მიხედვით უშუალოდ გაინტეგრალდება $e^\lambda = e^\mu \frac{\mu'^2}{f(r)}$ სახით, სადაც $f(r)$ ნებისმიერი დადებითი ფუნქციაა. თუ ამას (96,5)-ში ჩავსვამთ, μ -თვის ადვილად გასაინტეგრალებელ განტოლებას მივიღებთ, ხოლო ამგვარად ნაპოვნი λ და μ -ს ჩასმა (96,7)-ში განსაზღვრავს ρ სიმკვრივეს.

(ნებისმიერი $f(r)$) ფუნქციის ყველაზე მარტივი შერჩევა იქნება, თუ მას მუდმივად ჩავთვლით).

თუ სხეული სტატისტიკური წონასწორობის მდგომარეობაში იმყოფება, მაშინ (96,12) განტოლება ამ წონასწორობის პირობიდან გამომდინარებს. მართლაც, § 85-ში ნაჩვენებია იყო, რომ გრავიტაციულ ველში სტატისტიკური წონასწორობის პირობებს წარმოადგენენ

$$\zeta \sqrt{-g} = \zeta e^{\frac{r}{2}} = \text{const.}, \quad T \sqrt{-g_{00}} = T e^{\frac{r}{2}} = \text{const.},$$

სადაც T სხეულის ტემპერატურაა, ζ — კი მისი ქიმიური პოტენციალი. თუ ამ თანაფარდობების დიფერენცირებას მოვახდინებთ, ვიპოვიან

$$d\zeta + \frac{1}{2} \zeta dr = 0, \quad dT + \frac{1}{2} T dr = 0. \quad (96,13)$$

როგორც ცნობილია, ქიმიური პოტენციალი ტოლია $\zeta = \epsilon - T\sigma + pV$, სადაც V , σ , $\epsilon = \rho c^2 V$ წარმოადგენენ სხეულის ერთ მოლეკულაზე გაანგარიშებულ მოცულობას, ენტროპიას და ენერგიას. $d\zeta$ დიფერენციალი კი, როგორც ცნობილია, ტოლია $d\zeta = V dp - \sigma dT$. თუ ζ და $d\zeta$ -ის ამ გამოსახულებებს პირველ (96,13) განტოლებათაგანში ჩავსვამთ, ხოლო dT -ს ჩავსვამთ მეორე განტოლებიდან, მივიღებთ თანაფარდობას $dp + \frac{1}{2} (p + \rho c^2) dV = 0$, რომელიც (96,12)-ის ექვივალენტურია.

§ 97. ენერგია-იმპულსის უსაზღვრობა

იმ შემთხვევაში, როცა გრავიტაციული ველი არა გვაქვს, ენერგიის შენახვის კანონი და მატერიის (ელექტრომაგნიტურ ველთან ერთად) შენახვის კანონი გამოსახება (32,4) განტოლებით $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0$. გრავიტაციული ველის არსებობის შემთხვევაში ამ განტოლების განზოგადობას წარმოადგენს (90,6) განტოლება

$$T_{;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (T^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} T^{ki} = 0. \quad (97,1)$$

ამ სახით ეს განტოლება არ გამოსახავს რაიმე სიდიდის შენახვის კანონს¹. ეს გარემოება იმასთან არის დაკავშირებული, რომ გრავიტაციულ ველ-

მართლაც ინტეგრალის $\int T^k_i \sqrt{-g} d\zeta$, ე. ი. 4 — იმპულსი, შეინახება მხოლოდ იმ პირობის დაცვისას, რომ $\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} T^{ik} = 0$, და არა მაშინ, როცა დაცულია (97,1). ამაში

ადვილად დავრწმუნდებით, თუ მრუდხაზოვან კოორდინატებში ისეთივე გამოთვლებს ჩავატარებთ, როგორც § 29-ში ჩავატარეთ დეკარტის კოორდინატებში. საკმარისია თუმცა შევინიშნოთ, რომ ამ გამოთვლებს წმინდა ფორმულური ხასიათი აქვს, რომელიც არ არის დაკავშირებული შესაბამისი სიდიდეების ტენზორულ ხასიათთან, — როგორც გაუსის თეორემის დამტკიცებას, რომელსაც მრუდხაზოვან კოორდინატებში იგივე (78,19) სახე აქვს, როგორც დეკარტის კოორდინატებში.

ში უნდა ინახებოდეს 4 — იმპულსი მარტო მატერიისა კი არა, არამედ მატერიისა გრავიტაციულ ველთან ერთად. უკანასკნელი არ არის გათვალისწინებული T_i^k — გამოსახულებაში.

გრავიტაციული ველის მასში მოთავსებული მატერიისთან ერთად სრული 4—იმპულსის განსასაზღვრავად, რომელიც სინამდვილეში შეინახება, ჩვენ, მაშასადამე, უნდა გამოვთვალოდ გრავიტაციული ველის ენერგია—იმპულსის ტენზორი. ამისათვის ვისარგებლოთ (32,5) ზოგადი ფორმულით, რომელიც მრუდხაზოვან კოორდინატებში ლებულობს სახეს

$$T_i^k = \sum_1 \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{-g} \frac{\Lambda}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} - \delta_i^k \Lambda, \quad (97,2)$$

სადაც Λ — სკალარია, რომელიც შედის მოქმედებაში $S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega$, ხოლო $q^{(l)}$ სიდიდეები მოცემულ ფიზიკურ სისტემას განსაზღვრავენ. გრავიტაციულ ველში $g^{(l)}$ სიდიდეები g_{ik} მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებს წარმოადგენს, ხოლო Λ -ს როლს $\frac{1}{2\kappa} G$ სიდიდე თამაშობს (იხ. § 99). თუ გრავიტაციული ველისათვის T_i^k -ს აღვნიშნავთ I_i^k -თი მაშინ ვიპოვიოთ

$$\sqrt{-g} I_i^k = \frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{\partial G \sqrt{-g}}{\partial \frac{\partial g^{im}}{\partial x^k}} \frac{\partial g^{im}}{\partial x^i} - \delta_i^k G \sqrt{-g} \right\}. \quad (97,3)$$

თუ G -თვის (89,3) გამოსახულებით ვისარგებლებთ, I_i^k უშუალოდ g_{ik} და Γ_{ik}^m სიდიდეებით შეიძლება გამოვსახოთ. გამოთვლებს შემდეგ შედეგამდე მივყავართ

$$\sqrt{-g} I_i^k = \frac{1}{2\kappa} \left\{ \Gamma_{i,m}^k \frac{\partial (g^{im} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma_{m,i}^k \frac{\partial (g^{mk} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - G \sqrt{-g} \delta_i^k \right\}. \quad (97,4)$$

I_i^k სიდიდეების არსებითი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი ტენზორს არ შეადგენენ, — ეს უშუალოდ იქიდან ჩანს, რომ G არ წარმოადგენს სკალარს. მაგრამ G მაინც ინვარიანტს წარმოადგენს კოორდინატთა წრფივი გარდაქმნის მიმართ, — ვინაიდან G (89,3) განტოლების თანახმად Γ_{ik}^m -ით გამოიხატება, ხოლო Γ_{ik}^m სიდიდეები ტენზორის ყოფაქცევისა არიან წრფივი გარდაქმნის მიმართ (იხ. § 80). მაშასადამე I_i^k სიდიდეებიც ტენზორის თვისებებს გამოიჩენენ კოორდინატთა წრფივი გარდაქმნის დროს.

I_i^k სიდიდეთა ერთობლივობას გრავიტაციული ველის ენერგია-იმპულსის ფსევდოტენზორს უწოდებენ. აღვნიშნოთ, რომ ვინაიდან $T_i^k + I_i^k$ ჯამის კომპონენტები i და k ინდექსების მიმართ სიმეტრიული არ არის (ეს ეხება ერთ T_i^k -საც, ვინაიდან აქ ლაპარაკია შერეული კომპონენტების სიმეტრიულობის შესახებ), ამიტომ გრავიტაციულ ველში არ არსებობს ველისა და მატერიის იმპულსის სრული მომენტის შენახვის კანონი (იხ. § 32).

$T_i^k + I_i^k$; ჯამისათვის ადგილი აქვს განტოლებას

$$\frac{\partial (T_i^k + I_i^k) \sqrt{-g}}{\partial x^k} = 0, \quad (97,5)$$

რომელიც გამოსახავს ველისა და მატერიის სრული 4 — იმპულსის შენახვის კანონს

$$P_i = \frac{1}{c} \int (T_i^k + I_i^k) \sqrt{-g} dS_k. \quad (97,6)$$

როგორც თავის დროზე მითითებული იყო (იხ. §§ 29, 32) ამ ინტეგრება შეიძლება ვაწარმოოთ ნებისმიერი უსასრულო ჰიპერზედაპირზე, რომელიც მთელ სამგანზომილებიან სივრცეს შეიცავს. თუ ამ ჰიპერზედაპირად $x^0 = \text{const}$. ჰიპერზედაპირს ავირჩევთ, მაშინ P_i შეიძლება სამგანზომილებიანი სივრცული ინტეგრალის სახით დავწეროთ:

$$P_i = \frac{1}{c} \int (T_i^0 + I_i^0) \sqrt{-g} dV. \quad (97,7)$$

როგორც ჩვეულებრივ (იხ. § 32) $\frac{1}{c} (T_i^0 + I_i^0) \sqrt{-g}$ კომპონენტს ველისა და მატერიის სრული ენერჯიის „სიმკვრივე“ შეიძლება უწოდოთ, ხოლო — $\frac{1}{c} (T_i^\alpha + I_i^\alpha) \sqrt{-g}$ კომპონენტებს კი „იმპულსის სიმკვრივე“. შემდეგ „ენერჯიის ნაკადის სიმკვრივე“ ტოლია $\frac{1}{c} (T_i^\alpha + I_i^\alpha) \sqrt{-g}$, ხოლო „იმპულსის ნაკადის სიმკვრივე“ არის $\frac{1}{c} (T_i^\beta + I_i^\beta) \sqrt{-g}$. ვინაიდან I_{ik} ფსევდოტენზორი სიმეტრიული არ არის, ამიტომ გრავიტაციული ველის არსებობის დროს ენერჯიის ნაკადის სიმკვრივე უკვე აღარ უდრის (c^2 -ზე გამრავლებულ) იმპულსის სიმკვრივეს.

§ 91-ში მითითებული იყო, რომ მატერიის მოძრაობა და განაწილება, და ამიტომ T_{ik} თენზორიც თვით (91,6) მიზიდულობის განტოლებებიდან განისაზღვრება როგორც — $\frac{1}{x} (R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R)$. მაგრამ ამ გამოსახულების ჩასმის დროს.

$T_{ik} + I_{ik}$ ჯამი მხოლოდ g_{ik} მეტრიკული ტენზორით გამოსახული აღმოჩნდება, და (97,5) იგივეურად დაკმაყოფილდება [ამაში ადვილად დავრწმუნდებით (91,5) და (97,3) განტოლებათა დახმარებით]. ამგვარად, მაშინ როდესაც გრავიტაციული ველის არარსებობის დროს ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის კანონი შეზღუდავს სისტემის დამაჯასიათებელ სიდიდეთა ცვლილებას, გრავიტაციული ველის არსებობის დროს (97,5) განტოლება არსებითად იგივებას წარმოადგენს, და ამიტომ თავის მნიშვნელოვან ნაწილში ფიზიკურ შინაარსს მოკლებულია.

თუ კოორდინატთა სისტემას სივრცის მოცემულ ელემენტში გალილეის სისტემის სახით ავარჩევთ, მაშინ სივრცე-დროს ნებისმიერ წერტილში ყველა χ_i . შეიძლება ნულის ტოლი გავხადოთ [ვინაიდან მაშინ ნულის ტოლი ხდება ყველა Γ'_{ik}]. მეორე მხრით. ნულისაგან განსხვავებული χ_i შეიძლება ევკლიდის სივრცეში მივიღოთ, ე. ი. გრავიტაციული ველის არარსებობის დროს, თუ დეკარტის კოორდინატების ნაცვლად უბრალოდ მრუდხაზოვან კოორდინატებს გამოვიყენებთ. ამგვარად, ყოველ შემთხვევაში უაზრობა იქნებოდა ლაპარაკი გრავიტაციული ველის ენერჯიის ლოკალიზაციაზე სივრცეში. თუ რომელიღაც მსოფლიო წერტილში ტენზორი $T_{ik} = 0$, მაშინ ამას ადგილი ექნება ყოველ სხვა ათვლის სისტემაშიაც, ასე რომ ჩვენ შეიძლება ვთქვათ, რომ ამ წერტილში არ არის მატერია ან ელექტრომაგნიტური ველი. პირიქით, ერთი ათვლის სისტემის რომელიმე წერტილში ფსევდოტენზორის ნულთან ტოლობა სრულებითაც არ ნიშნავს იმავეს სხვა ათვლის სისტემისთვისაც, და ანიტომ აზრი არა აქვს ვილაპარაკოთ იმაზე, გვაქვს მოცემულ ადგილში გრავიტაციული ენერჯია თუ არა. ეს საკვებით შეესაბამება იმას, რომ კოორდინატთა სათანადო შერჩევით შეიძლება „მოვსპოთ“ გრავიტაციული ველი სივრცის მოცემულ ელემენტში; ამასთანავე, ზემოდთქმულის თანახმად, ამ ელემენტში ერთდროულად ისპობა χ_i ფსევდოტენზორიც.

P_i სიდიდეებს კი — ველისა და მატერიის 4 — იმპულსს — საკვებით გარკვეული აზრი აქვთ. თურმე მათი ათვლის სისტემაზე დამოუკიდებლობის ხარისხი ისეთია, როგორც ფიზიკური მოსაზრებათა მიხედვით არის აუცილებელი. გამოვეყოთ განსახილავი მასების გარშემო იმდენად დიდი სივრცის არე, რომ მის გარედ შესაძლო იყოს გრავიტაციული ველის არარსებობის დაშვება. ოთხგანზომილებიან სივრცე-დროში, დროს განმავლობაში ეს არე ამოქრის „არხს“. ამ „არხის“ გარედ ველი არ არსებობს, ასე რომ 4—სივრცე—ბრტყელია. ამასთან დაკავშირებით ველის ენერჯიისა და იმპულსის გამოანგარიშების დროს, ცხადია, ოთხგანზომილებიანი კოორდინატთა სისტემა ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ „არხს“ გარედ იგი გალილეისეულ სისტემაში გადადიოდეს და ყველა χ_i ისპობოდეს. ამ მოთხოვნით, ცხადია, ათვლის სისტემა სრულებითაც არ განისაზღვრება ცალსახად, — არხს შიგნით მისი არჩევა ჯერ კიდევ ნებისმიერად შეიძლება, P_i სიდიდეთა ფიზიკურ აზრთან სრული თანხმობით. თურმე ეს სიდიდეები არ არიან სრულიად დამოკიდებული არხის შიგნით კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე. მართლაც, განვიხილოთ ორი სისტემა, რომლებიც არხის შიგნით ერთმეორისაგან განსხვავდებიან, ხოლო არხს გარედ ერთსა და იმავე გალილეის სისტემაში გადადიან, და შევადაროთ P_i და P'_i ; 4 — იმპულსთა მნიშვნელობანი ამ ორ სისტემაში „დროს“ გარკვეულ მომენტებში x^0 და x'^0 . შემოვიღოთ კოორდინატთა მესამე სისტემა, რომელიც არხს შიგნით x^0 მომენტში პირველ სისტემას თანხვდება და x'^0 მომენტში — მეორეს, ხოლო არხს გარედ — იმავე გალილეის სისტემას. მაგრამ ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის კანონის ძალით P_i სიდიდეები მუდმივია — $\left(\frac{dP_i}{dx^0} = 0\right)$. ამას ადგილი აქვს მესამე კოორდინატთა სისტემაშიც, ისევე, როგორც პირველ ორში. აქედან გამოდის, რომ $P_i = P'_i$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ჩვენ ზემოდ აღენიშნეთ, რომ i, k სიდიდეები ტენზორს წარმოადგენენ კოორდინატთა წრფივი გარდაქმნის მიმართ. ამიტომ ასეთი გარდაქმნის მიმართ, კერძოდ ლორენცის გარდაქმნის მიმართ, P_i სიდიდეები ვექტორს შეადგენენ.

$(T^i_k + I^i_k) \sqrt{-g}$ ჯამი ისეთი ფორმით შეიძლება დაწერილი, რომლიდანაც უშუალოდ ჩანს, რომ იგივეურად აღვილი აქვს (97,5) განტოლებას. სახელდობრ

$$(T^i_k + I^i_k) \sqrt{-g} = \frac{\partial h_i^{kl}}{\partial x^l}, \quad (97,8)$$

სადაც h_i^{kl} სიდიდეები ასიმეტრიულია k და l ინდექსების მიმართ. გამოთვლა, რომელსაც ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ, h_i^{kl} -სათვის შემდეგ გამოსახულებას გვაძლევს:

$$2h_i^{kl} = \delta_i^l \frac{\partial \sqrt{-g} g^{km}}{\partial x^m} - \delta_i^k \frac{\partial \sqrt{-g} g^{lm}}{\partial x^m} + g^{km} g_{in} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{nl}}{\partial x^m} g - g^{lm} g_{in} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{nk}}{\partial x^m}. \quad (97,9)$$

თუ (97,8)-ს (97,6)-ში ჩასვამთ, ვიპოვიტ

$$P_i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial h_i^{kl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2c} \int \left(dS_k \frac{\partial}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial}{\partial x^k} \right) h_i^{kl}.$$

ეს ინტეგრალი შეიძლება გარდავქმნათ ჩვეულებრივ ზედაპირზე აღებულ ინტეგრალად (6,12)-ის დახმარებით

$$P_i = \frac{1}{c} \oint h_i^{kl} df^{*kl}. \quad (97,10)$$

თუ (97,6)-ში საინტეგრაციო ზედაპირად $x^0 = \text{const}$. ჰიპერზედაპირს ავიღებთ, მაშინ (97,10)-ში ინტეგრების ზედაპირი წმინდა სივრცითი ჩვეულებრივი ზედაპირი იქნება¹. ამგვარად ჩვენ ვპოულობთ მატერიის და გრავიტაციული ველის 4-იმპულსის გამოსახულებას სამგანზომილებიანი სივრცის რაღაც არეში ინტეგრალის სახით, რომელიც ამ არის შემომფარგვლელ ზედაპირზეა აღებული

$$P_i = \frac{1}{c} \oint h_i^{0\alpha} df_{\alpha}. \quad (97,11)$$

თუ ამ ფორმულას გამოვიყენებთ რაიმე იზოლირებული სისტემის მიმართ, რომელიც განუწყვეტლივ კოორდინატთა სათავეში იმყოფება, მაშინ ჩვენ შეგვიძ-

¹ df^{*kl} ზედაპირის „ნორმალური“ ელემენტი, რომელიც „ტანგენციალურ“ df^{ik} ელემენტთან დაკავშირებულია (6,9)-ის საშუალებით: $df^{*ik} = \frac{1}{2} \epsilon_{iklm} df^{lm}$. x^0 ლერძის პერპენდი-

კულიარული ჰიპერზედაპირის შემომფარგვლელ ზედაპირზე df^{lm} -ის მხოლოდ ის კომპონენტები განსხვავდება ნულისაგან, რომლებსათვისაც $l, m = 1, 2, 3$ და მაშასადამე df^{*ik} -ს აქვს კომპონენტები, რომელთათვისაც ერთერთი i ან k ნულის ტოლია. $df^{*0\alpha}$ -ს კომპონენტები წარმოადგენენ ჩვეულებრივი ზედაპირის სამგანზომილებიანი ელემენტის კომპონენტებს,

ლია ავარჩიოთ (97,11)-ში ინტეგრების საკმაოდ დაშორებული ზედაპირი და ამ ზედაპირზე ველისათვის (94,6) გამოსახულებით ვისარგებლოთ. როგორც მოსალოდნელი იყო, გამოთვლა გვაძლევს $P_x = 0$, $P_0 = mc^2$, სადაც m სისტემის სრული მასაა.

მუდმივი გრავიტაციული ველის შემთხვევაში შესაძლებელი აღმოჩნდა მატერიისა და ველის სრული ენერჯიის მარტივი გამოსახულების გამოყენება, რომელიც წარმოადგენს მხოლოდ მატერიის მიერ დაკავებულ სივრცეზე აღებულ ინტეგრალს. §. 89-ში ჩვენ ვნახეთ, რომ გრავიტაციული ველის მოქმედების ვარიირების დროს სულ ერთია ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში დავწერთ G სიდიდეს თუ R სკალარს. ჩვენ რომ შენახვის კანონის გამოყენების დროსაც S , მოქმედებაში G -ს ნაცვლად R სკალარი დაგვეწერა, მაშინ შემდეგი სიდიდის შენახვის კანონს მივიღებდით: $\frac{1}{c} \int (T_i^k + t_i^k) \sqrt{-g} dS_k$, სადაც t_i^k განსაზღვრუ-

ლი იქნებოდა (97,2) ფორმულით, რომელშიაც უნდა დავვეშვა $\Lambda = R/2x$, ხოლო $g^{(0)}$ -ის ქვეშ ნაგულისხმევი უნდა გვექონოდა g_{ik} -ს და Γ_{ik}^j -ს კომპონენტები (უკანასკნელი იმიტომ არის აუცილებელი, რომ R შეიცავს g_{ik} -ს მეორე წარმოებულებსაც, რომლებიც Γ_{ik}^j -ის პირველი წარმოებულებით გამოისახებიან). მაგრამ, ვინაიდან ასეთი სახით დაწერილი მოქმედების ვარიირება ველის სწორ განტოლებებს გვაძლევს, ამიტომ ასეთი 4—ვექტორი სწორი 4—იმპულსისაგან მხოლოდ მუდმივი მამრავლით შეიძლება განსხვავდებოდეს. შემდეგ, მუდმივ ველში ყველა სიდიდე დროზე დამოუკიდებელია. ამიტომ i^0 კომპონენტში (97,2)-ის პირველი წევრი, რომელიც x^0 -ით აღებულ g_{ik} -ს და Γ_{ik}^j -ის წარმოებულებს შეიცავს, ნულის ტოლი ვახდება. თუ მეორე წევრში Λ -ს ნაცვლად $R/2x$ -ს დავწერთ, მაშინ i^0 -თვის მივიღებთ გამოსახულებას $-R/2x$.

ამვეარად უნდა შეინახებოდეს სიდიდე

$$-\frac{1}{c} \int \left(T_0^0 - \frac{1}{2x} R \right) \sqrt{-g} dV.$$

(91,7) ველის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $R/x = T$; თუ ამას ჩავსვამთ, ვიპოვით

$$\frac{1}{2c} \int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) \sqrt{-g} dV.$$

მცირე სიჩქარეებისა და სუსტი ველის ზღვრულ შემთხვევაში ენერჯია პირველ მიახლოებაში ტოლი უნდა იყოს $\int \rho c^2 dV$. მაგრამ, თუ მიღებულ გამოსახულებაში T_i^k ტენზორის ზღვრულ (92,1) გამოსახულებას ჩავსვამთ, ჩვენ მივიღებთ მხოლოდ $\frac{1}{2} \int \rho c^2 dV$ -ს. ამიტომ P_0 სრული ენერჯიის სწორი მნიშვნელობის მიხედვით ეს გამოსახულება უნდა გავაორკეცოთ, ე. ი.

$$P_0 = \frac{1}{c} \int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) \sqrt{-g} dV. \quad (97,12)$$

ეს ფორმულა განსაზღვრავს სწორედ მატერიისა და მუდმივი გრავიტაციული ველის სრულ ენერგიას მხოლოდ მატერიის ენერგია იმპულსის ტენზორის საშუალებით¹.

(97,12)-ში ჩაესათ (91,5) გამოსახულება $T^k_i = (\rho^2 + \rho^2 c^2) \delta^k_i - \delta^k_i p$, რომელიც მაკროსკოპიულ სხეულთა ენერგია — იმპულსის ტენზორია და ვისარგებლოთ ათვლის „საკუთარი“ სისტემით (იხ. § 96), რომელშიაც მთელი მატერია უძრავია, ე. ი. 4-სიჩქარის სივრცული კომპონენტები $u^\alpha = 0$, ხოლო დროული $u^0 = 1$. მაშინ სრულ ენერგიას ჩვენ მივიღებთ სახით

$$P_0 = \int (\rho c^2 + 3p) \sqrt{-g} dV. \quad (97,13)$$

§ 98. გრავიტაციული ტალღები

განვიხილოთ სუსტი გრავიტაციული ველი სივრცეში (ასეთია იგი თითქმის ყოველთვის). სუსტ ველში სივრცე-დროს მეტრიკა „თითქმის ევკლიდისეულია“, ე. ი. შესაძლებელია ისეთი ათვლის სისტემის არჩევა, რომელშიაც g_{ik} მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები თითქმის მათი გალილეისეული მნიშვნელობების ტოლია, რომლებსაც ჩვენ აღვნიშნავთ:

$$g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha 0}^{(0)} = 0, \quad g_{00} = c^2. \quad (98,1)$$

მაშასადამე g_{ik} შემდეგ სახით შეიძლება დაეწეროს:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \quad (98,2)$$

სადაც h_{ik} — მცირე შესწორებაა, რომელიც განსაზღვრავს გრავიტაციულ ველს. თუ h_{ik} მცირეა, მაშინ გრავიტაციული ველის Γ^k_{ik} კომპონენტები, რომლებიც g_{ik} -ს წარმოებულებით გამოისახება, აგრეთვე მცირე იქნება. თუ h_{ik} -ს ერთზე მეტ ხარისხებს უგულებლვყოფთ, მაშინ R_{iklm} ტენზორში (88,4) შეიძლება დაეტოვოს მხოლოდ პირველ ფრჩხილებში მდგომი წევრები:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} \right). \quad (98,3)$$

შემოკლებული R_{ik} ტენზორისათვის იმავე სიზუსტით გვაქვს

$$R_{ik} = g^{lm} R_{iklm} \approx g^{(0)lm} R_{iklm},$$

ან

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} \left(g^{(0)lm} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 h^k_l}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} \right), \quad (98,4)$$

სადაც $h^k_l = g^{(0)ik} h_{il}$, $h = h^i_i$.

¹ (97,12) ფორმულა ჩვენ ავიღეთ R. Tolman-ის შრომიდან Phys. Rev., 35, 875, 1930.

ჩვენ ათელის სისტემა ისე შევარჩიეთ, რომ g_{ik} მცირედ განსხვავდებოდეს $g_{ik}^{(0)}$ -საგან. მაგრამ, ეს პირობა დაცული იქნება კოორდინატთა ნებისმიერი უსასრულოდ მცირე გარკვევის დროსაც, ასე რომ h_{ik} -ს მიმართ ჩვენ კიდევ ოთხი პირობის დადება შეგვიძლია (კოორდინატთა რიცხვის მიხედვით) მათი სიმცირის პირობის დაურღვევლად.

ამ დამატებითი პირობების სახით ავირჩიოთ განტოლებები¹:

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h. \quad (98,5)$$

მაშინ R_{ik} -ში სამი უკანასკნელი წევრი ურთიერთ შეიკვეცება, და ჩვენ ვიპოვით

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{(0)lm} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

ამგვარად, სიცარიელეში გრავიტაციული ველის (91,9) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\square h_i^k = 0, \quad (98,6)$$

სადაც \square დალამბერის ოპერატორია:

$$\square = -g^{(0)lm} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

ეს ჩვეულებრივი ტალღური განტოლებაა. ამგვარად, გრავიტაციული ველები, ისევე, როგორც ელექტრომაგნიტური ველები, სიცარიელეში სინათლის სიჩქარით ვრცელდებიან.

განვიხილოთ ბრტყელი გრავიტაციული ტალღა. ასეთ ტალღაში ველი სივრცეში მხოლოდ ერთი მიმართულების გასწვრივ იცვლება. ამ მიმართულებით ავირჩიოთ ღერძი $x^1 = x$. მაშინ (98,6) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_i^k = 0, \quad (98,7)$$

რომელთა ამოხსნა $x \pm ct$ -ს ნებისმიერი ფუნქცია იქნება (§ 46).

¹ თუ ვეძებთ გარდაქმნებს, რომელთა საშუალებით განსაზღვრული h_i^k დააკმაყოფილებენ ამ პირობებს $x'^i = x^i + \xi^i$ სახით (ξ^i იმავე რიგის მცირეა, რაც თვით h_i^k), მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ამ გარდაქმნის ξ^i ფუნქციებმა უნდა დააკმაყოფილონ განტოლებები:

$$\square \xi_i = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h \right),$$

სადაც $\xi_i = g^{(0)jk} \xi^k$. კერძოდ, აქედან ჩანს, რომ კოორდინატთა სისტემაზე, რომელიც (98,5) პირობას აკმაყოფილებს, შეიძლება მოვახდინოთ კიდევ ნებისმიერი მცირე $x'^i = x^i + \xi^i$ სახის გარდაქმნა, სადაც ξ^i -თვის ადგილი აქვს განტოლებას — $\square \xi_i = 0$. ამას გარდა, ცხადია კოორდინატთა სისტემაზე ნებისმიერი ლორენცის გარდაქმნა შეიძლება მოვახდინოთ.

განვიხილოთ ტალღა, რომელიც X ღერძის დადებითი მიმართულებით ვრცელდება. ამ ტალღაში ყველა h_i^k სიდიდეები $x - ct$ -ს ფუნქციები იქნებიან. დამატებითი (98,5) პირობები ამ შემთხვევაში გვაძლევენ $\psi_1^1 - c\psi_1^0 = 0$, სადაც ასოს ზემოდ წერტილი დროს მიხედვით დიფერენცირებას აღნიშნავს. ამ ტოლობათა ინტეგრება შეიძლება უბრალოდ დიფერენციალის ნიშნის ამოშლით, — ინტეგრების მუდმივი შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ, ვინაიდან ჩვენ აქ (ისევე, როგორც ელექტრომაგნიტური ველის შემთხვევაში) ველის მხოლოდ ცვალებადი ნაწილი გვინტერესებს. ამგვარად, ცალკე ψ_1^k კომპონენტებს შორის არსებობს თანათარლობა:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi = \psi_0. \quad (98,8)$$

როგორც 255 გვერდის შენიშვნაში აღვნიშნეთ, (98,5) პირობები კიდევ არ განსაზღვრავენ ათვლის სისტემას ცალსახად. სახელდობრ, ჩვენ კიდევ შეგვიძლია კოორდინატებზე $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$ სახის გარდაქმნა მოვახდინოთ. ასეთი გარდაქმნა არ არღვევს (98,5) პირობებს, ვინაიდან ξ^i აკმაყოფილებენ განტოლებას $\square \xi^i = 0$ (იხ. იგივე შენიშვნა). ამ გარდაქმნებით შეიძლება ვისარგებლოთ იმისათვის, რომ ნულის ტოლი გავხადოთ ოთხი სიდიდე: $\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0$ და $\psi_2^1 + \psi_3^1$. (98,8) ტოლობებიდან გამოდის, რომ ამასთანვე ნულის ტოლი გახდება იან აგრეთვე კომპონენტები: $\psi_1^1, \psi_2^1, \psi_3^1$ და ψ_0 . რაც შეეხება დანარჩენ $\psi_2^0, \psi_3^0, \psi_2^1 - \psi_3^1$ სიდიდეებს, სისტემის არავითარი შერჩევით არ შეიძლება მათი ნულთან გატოლება, ვინაიდან, ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$ სახის გარდაქმნით ეს კომპონენტები საზოგადოდ არ იცვლებიან. შევნიშნოთ, რომ ამგვარადვე ნულის ტოლი ხდება $\psi = \psi_1^1 - c$, და ამიტომ $\psi_1^1 = h_1^1$.

ამგვარად ბრტყელი გრავიტაციული ტალღა ორი სიდიდით განისაზღვრება, h_{22} -ით და $h_{33} - h_{22}$ -ით. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, გრავიტაციული ტალღები განივ ტალღებს წარმოადგენენ, რომელთა პოლარიზაცია YZ სიბრტყეში 2-რე რანგის ტენზორით განისაზღვრება, რომლის დიაგონალური წევრების ჯამი $h_{22} + h_{33}$ ნულის ტოლია.

გრავიტაციულ ტალღებს გარკვეული ენერგია აქვთ, რომლის „სიმკვრივე“ ტოლია $\rho_0 \sqrt{-g}$. როგორც ყველა სხვა სახის ენერგია, ისიც თავის მხრით ქმნის რაღაც გრავიტაციულ ველს. ამგვარად გრავიტაციული ტალღა თავის გარშემო თვითონ ქმნის რაღაც დამატებით გრავიტაციულ ველს. ეს ველი უფრო მაღალი (სახელდობრ მეორე) რიგის სიმცირისაა თვით ტალღის ველთან შედარებით, ვინაიდან მისი შემქმნელი ენერგია მეორე რიგისაა $\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right]$ წარმოებულები პირველი რიგისაა h_{ik} -ს მიხედვით, და ამიტომ (97,2)-ის თანახმად μ — მეორე რიგისაა].

გამოთვალათ ენერგიის ნაკადი ბრტყელ გრავიტაციულ ტალღაში. ჩვენ წინა პარაგრაფში ვნახეთ, რომ გრავიტაციული ველის ენერგიის ნაკადი განისაზღვრება ენერგია—იმპულსის ფსევდოტენზორის კომპონენტებით $\frac{1}{c} \cdot \rho_0 \sqrt{-g}$.

იმ ტალღაში, რომელიც x^1 ღერძის გასწვრივ ვრცელდება, ცხადია, ნულისაგან მხოლოდ i^1_0 კომპონენტი განსხვავდება.

როგორც მიუთითეთ, h^i_k ფსევდოტენზორი მეორე რიგის სიმეტრიისაა. i^1_0 სიდიდე ჩვენ სწორედ ამ სიზუსტით უნდა გამოეთვალათ. $g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h_{ik}$ -ს კომპონენტებისაგან შედგენილი g დეტერმინანტი პირველი რიგის სიდიდეებამდე სიზუსტით ტოლია $g = -c^2 - h_{11} - h_{22} - h_{33} - h_{00}$. ვინაიდან, როგორც ვნახეთ, ბრტყელ გრავიტაციულ ტალღაში $h_{11} = h_{00} = 0$, $h_{22} + h_{33} = 0$, ამიტომ $g = -c^2$. თუ შევნიშნავთ, რომ ამის გამო აგრეთვე $\Gamma^i_{mi} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m} = 0$, i^1_0 -თვის ზოგადი (97.2) გამოსახულების თანახმად უბრალოდ გვექნება

$$2\kappa i^1_0 = \Gamma^i_{mi} \frac{\partial g^{mi}}{\partial t}.$$

თუ გავიხსენებთ, რომ ნულისაგან მხოლოდ h_{23} , h_{22} , h_{33} კომპონენტები განსხვავდებიან, ჩვენ საკმაო სიზუსტით ვპოულობთ

$$\Gamma^i_{mi} = \frac{1}{2} g^{(0) 11} \left(\frac{\partial h_{1m}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_{1i}}{\partial x^m} - \frac{\partial h_{im}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{im}}{\partial x^1}.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $g^{ik} = g^{(0)ik} - h^{ik}$, გვექნება

$$4\kappa i^1_0 = \frac{\partial h_{im}}{\partial x^1} \frac{\partial h^{im}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \dot{h}_{im} \dot{h}^{im} = \frac{1}{c} \dot{h}^2_{im},$$

ან საბოლოოდ:

$$i^1_0 = \frac{1}{2\kappa c} \left[\left(\frac{\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33}}{2} \right)^2 + \dot{h}^2_{23} \right]. \quad (98,9)$$

§ 99. გრავიტაციული ტალღების გამოსხივება

მოძრავ სხეულთა სისტემა გრავიტაციულ ტალღებს გამოასხივებს. გამოეთვალათ ენერჯია, რომელიც ამ ტალღებს მიაქვთ, ე. ი. ენერჯია, რომელსაც სისტემა გამოსხივების გზით კარგავს. სისტემის სხეულთა სიჩქარეებს სინათლის სიჩქარესთან შედარებით მცირედ ჩავთვლით.

მატერიის არსებობის გამო გამოსხივებულ ტალღათა განტოლებებს უკვე არ ექნება (98,6) მარტივი სახე: $\square h^i_k = 0$. მათ ეს სახე ექნებათ მხოლოდ დიდ მანძილზე სხეულთა სისტემიდან. მის მახლობლობაში კი ველის განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$\frac{1}{2} \square \psi^k = \kappa \tau^k, \quad (99,1)$$

სადაც h^i_k -ს ნაცვლად აქ ჩვენთვის უფრო მოხერხებული სიდიდეები შემოვიღეთ $\psi^k = h^k - \frac{1}{2} \delta^k_h$, ხოლო τ^k დამატებით გამოსახულებას აღნიშნავს, რომელსაც მივიღებთ მაშინ, როცა ზუსტ განტოლებებში $R_{ik} - \frac{1}{2} \delta^k_i R = -\kappa T^k$ გადავ-

დივართ განსახილავ მიახლოებაში სუსტი ველების შემთხვევაზე. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ τ^0 და $\tau^{\alpha\beta}$ კომპონენტები უშუალოდ T_i^k -ს კომპონენტებიდან მიიღება, თუ მათგან ჩვენთვის საინტერესო სიმციროს რიგის სიდიდეებს გამოვყოფთ. რაც შეეხება $\tau^{\alpha\beta}$ კომპონენტებს, ისინი $T^{\alpha\beta}$ -დან მიღებულ წევრებს გარდა შეიცავენ კიდევ $R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R$ -დან მიღებულ მეორე რიგის სიმციროს წევრებს.

ψ_i^k სიდიდეები აკმაყოფილებენ (98,5) პირობას $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0$. (99,1)-დან გამომდინარეობს, რომ ასეთივე განტოლებას ადგილი აქვს აგრეთვე τ_i^k -თვის:

$$\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (99,2)$$

ეს განტოლება აქ ცვლის ზოგად თანაფარდობას $T_{ii}^k = 0$.

(99,1) განტოლება თავისი ფორმით დაგვიანებული პოტენციალების განტოლებას თანხედება (§ 64). ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია მათი ამოხსნა პირდაპირ დავეწეროთ სახით

$$\psi_i^k = -\frac{x}{2\pi} \int \frac{(\tau_i^k) R}{R - \frac{c}{c}} dV.$$

ვრნიდან სისტემაში ყველა სხეულის სიჩქარე მცირეა, ამიტომ ველისათვის სისტემიდან დიდ მანძილზე შეიძლება დაიწეროს (იხ. §§ 66, 67)

$$\psi_i^k = -\frac{x}{2\pi R} \int (\tau_i^k) \frac{R}{c} dV, \quad (99,3)$$

სადაც R_0 მანძილია კოორდინატა სათავიდან, რომელიც სადმე სისტემის შიგნით მდებარებს. შემდეგში, ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში $t - \frac{R_0}{c}$ ინდექსს,

სიმოკლის მიზნით, ჩვენ ქვევით გამოვტოვებთ.

ამ ინტეგრალების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (99,2) განტოლებებით. თუ τ_i^k -ს ინდექსებს გამოუტოვებთ და სივრცულ და დროულ კომპონენტებს გამოვიყენებთ, მაშინ (99,2) დაიწერება სახით

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tau_{00}}{\partial t} = 0. \quad (99,4)$$

გავამრავლოთ პირველი განტოლება x^β -ზე და გავაინტეგრავთ მთელ სივრცეზე

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \tau_{\alpha 0} x^\beta dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV = \int \frac{\partial (\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta} dV.$$

ვინაიდან უსასრულობაში $\tau_{ik} = 0$, ამიტომ მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი, თუ მას გაუსის თეორემის მიხედვით გარდავქმნით, მოისპობა. დარჩენილი ტოლობისა და გადასმული ინდექსებით იმავე ტოლობის ნახევარჯამს თუ ავიღებთ, ვიპოვით

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\tau_{z_0} x^2 + \tau_{\beta_0} x^2) dV.$$

შემდეგ, მეორე (99,4) განტოლებათაგანი გავემრავლოთ $x^2 x^2$ -ზე და აგრეთვე გავაინტეგრავთ მთელ სივრცეზე. ანალოგიური გარდაქმნა გვაძლევს

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \tau_{00} x^2 x^2 dV = - \int (\tau_{z_0} x^2 + \tau_{\beta_0} x^2) dV.$$

თუ ორივე მიღებულ შედეგს შევადარებთ, ვიპოვით

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = \frac{1}{2c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \tau_{00} x^2 x^2 dV. \quad (99,5)$$

ამგვარად ყველა $\tau_{\alpha\beta}$ სიდიდეთა ინტეგრალები გამოსახულია მხოლოდ τ_{00} კომპონენტის შემცველი ინტეგრალებით. მაგრამ, მოცემულ მიახლოებაში ეს კომპონენტი (როგორც ზევით მითითებული იყო) T_{ik} ტენზორის შესაბამის T'_{00} კომპონენტის ტოლია. თუ მისთვის (92,1) გამოსახულებით ვისარგებლებთ, გვექნება

$$\tau_{00} = c^2 \tau'_0 = \mu c^4. \quad (99,6)$$

თუ ამას (99,5)-ში ჩავსვამთ და x -ს ნაცვლად k გრავიტაციულ მუდმივს შემოვიტანთ, (99,3) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\varphi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mu x^2 x^2 dV. \quad (99,7)$$

მუხტების სისტემიდან დიდ მანძილზე (სივრცის მცირე უბანში) ტალღა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ბრტყელი. ამიტომ შეიძლება გამოვთვალოთ ენერგიის ნაკადი, რომელსაც სისტემა გამოასხივებს, ვთქვათ, x^1 ღერძის მიმართულებით, თუ გამოვიყენებთ (98,9) ფორმულას.

(98,9) ფორმულაში შედიან კომპონენტები $h_{12} = \varphi_{21}$ და $h_{22} - h_{33} = \varphi_{22} - \varphi_{33}$. მათთვის (99,7)-დან ვპოულობთ გამოსახულებებს

$$h_{12} = -\frac{2k}{c^4 R_0} \ddot{J}_{21}, \quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{c^4 R_0} (\ddot{J}_{22} - \ddot{J}_{33})$$

(წერტილები აღნიშნავენ დროს მიხედვით დიფერენცირებას), სადაც ჩვენ შემოვიღეთ ტენზორი

$$J_{\alpha\beta} = \int \mu \left(x^2 x^2 - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} x^2 \gamma \right) dV, \quad (99,8)$$

რომელიც ახასიათებს მასების განაწილებას სისტემაში¹. ამის შედეგად ენერჯის ნაკადს x^1 ლერძის გასწვრივ ვპოულობთ სახით

$$t' = \frac{k}{4\pi c^5 R_0^3} \left[\left(\frac{\ddot{J}_{22} - \ddot{J}_{33}}{2} \right)^2 + \ddot{J}_{23}^2 \right]. \quad (99,9)$$

თუ x^1 ლერძის მიმართულებით გამოსხივება ცნობილია, მაშინ ადვილად განვსაზღვრავთ გამოსხივებას ნებისმიერი მიმართულებით, რომლის ერთეულვანი ვექტორი \mathbf{n} -ით აღვნიშნოთ. ამისათვის $\ddot{J}_{\alpha\beta}$ ტენზორის კომპონენტებისაგან და n^α ვექტორიდან უნდა შევადგინოთ სკალარი, რომელიც კვადრატულია

$\ddot{J}_{\alpha\beta}$ -ს მიმართ და რომელიც გადადის $\ddot{J}_{23}^2 + \left(\frac{\ddot{J}_{22} - \ddot{J}_{33}}{2} \right)^2$ გამოსახულებაში, როცა $n_1 = 1$ და $n_2 = n_3 = 0$.

ამგვარად მოცემული მიმართულებით ენერჯიის გამოსხივება (ერთეულ სხეულოვან კუთხეში) ტოლი იქნება

$$\frac{k}{4\pi c^5 R_0} \left[\frac{1}{4} (\ddot{J}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2} \ddot{J}_{23}^2 - \ddot{J}_{23} \ddot{J}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma \right]. \quad (99,10)$$

ყველა მიმართულებით სრულ გამოსხივებას, ე. ი. სისტემის ენერჯიის დანაკარგის დროს ერთეულში $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)$ ვიპოვიტ, თუ ამ ნაკადს გავასაშუალებთ მიმართულებების მიხედვით და მიღებულ საშუალოს $4\pi R_0^2$ -ზე გავამრავლებთ. გასაშუალებას ადვილად მოვახდენთ 171 გვერდის მითითებაში მოყვანილი ფორმულების დახმარებით, და მას ენერჯიის დანაკარგისათვის შემდეგ გამოსახულებამდე მივყვართ:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{k}{5c^5} \ddot{J}_{\alpha\beta}^2. \quad (99,11)$$

აუცილებელია აღინიშნოს, რომ ენერჯიის ამ დანაკარგის რიცხვითი მნიშვნელობა, ასტრონომიული ობიექტებისთვისაც კი, იმდენად მცირეა, რომ დროს კოსმოსური შუალიდების განმავლობაშიაც იგი სრულიად უმნიშვნელოა (ასე, მაგალითად, ორმაგი ვარსკვლავებისათვის ენერჯიის დანაკარგი წელიწადში შეადგენს მათი სრული ენერჯიის 10^{-13} ნაწილს).

$\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ -ს გამოსახულებაში შედის $\frac{1}{c^5}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ენერჯიის კარგვა იზოლირებული სისტემის მიერ $1/c$ -ს მიხედვით მხოლოდ მეხუთე მიახლოებაში გამოვლინდება. პირველ ოთხ მიახლოებაში—კი სისტემის ენერჯია მულ-

¹ ეს ტენზორი სისტემის ინერჯიის $K_{\alpha\beta}$ თენზორთან დაკავშირებულია თანაფარდობით

$$J_{\alpha\beta} = -K_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} K_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}.$$

მივი რჩება. აქედან გამომდინარეობს, რომ გრავიტაციულ ველში სხეულთა სისტემა ლაგრანჟის ფუნქციით შეიძლება აღვწეროთ ψ/c^4 რიგის წევრებამდე სიზუსტით, ელექტრომაგნიტური ველისაგან განსხვავებით, რომელშიაც ლაგრანჟის ფუნქცია არსებობს მხოლოდ მეორე რიგის წევრებამდე სიზუსტით (ეს უკანასკნელი იმასთან არის დაკავშირებული, რომ ელექტრომაგნიტური გამოსხივების გზით ენერჯის დანაკარგი $1/c^2$ -ს შეიცავს). ლაგრანჟის ფუნქციის ამ დამატებითი წევრებით გამოწვეული ეფექტი სავსებით უმნიშვნელოა; ამიტომ შათი გამოთვლა ინტერესს მოკლებულია და ამ საკითხს უფრო დაწვრილებით ჩვენ აქ არ შევხებით¹.

§ 100. მათემატიკური ხელშეწყობისათვის კოორდინატების შერჩევა

გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური ველების განტოლებათა ფორმულები ერთიანი სახით შეიძლება ამის მიღწევა შეიძლება ეგრედწოდებული ერთგვაროვანი კოორდინატთა მათემატიკური აპარატის საშუალებით, რომელიც პროექციულ გეომეტრიაში გამოიყენება².

4—სივრცეში ჩვენ წერტილს ხუთი X^v კოორდინატით განესაზღვრავთ ($v = 1, 2, 3, 4, 5$), ამასთანავე კოორდინატთა ყველა მნიშვნელობანი, რომლებიც მხოლოდ საერთო მამრავლით განსხვავდებიან, ერთსა და იმავე წერტილს შეესაბამებიან. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, 4—სივრცეში წერტილი განისაზღვრება ხუთი X^v სიდიდის ოთხი დამოუკიდებელი შეფარდებით, რომლებსაც ერთგვაროვანი კოორდინატები ეწოდება. შევთანხმდეთ, რომ ამ პარაგრაფში და შემდეგში ბერძნული ასოებით აღვნიშნოთ ინდექსები, რომლებიც ხუთ მნიშვნელობას გაირბენენ 1; 2, 3, 4. 5, ხოლო ლათინური ასოებით, როგორც წინააღმდეგ, ის ინდექსები აღვნიშნოთ, რომლებიც ოთხ მნიშვნელობას ღებულბენ: 0, 1, 2, 3.

ცხადია, რომ 4—სივრცის ხუთი ერთგვაროვანი კოორდინატით აღწერის დროს ამ უკანასკნელთა მხოლოდ ისეთი გარდაქმნებია დასაშვები, როცა ახა-

¹ გამოყენების გარეშე მოგვყავს მხოლოდ გრავიტაციული სახით ურთიერთმოქმედი ნაწილაკებისათვის ლაგრანჟის ფუნქციის გამოსახულება მეორე მიახლოებაში:

$$L = \sum_A \frac{m_A v_A^2}{2} \left(1 - 3 \sum_{B \neq A} \frac{k m_B}{c^2 R_{AB}} \right) + \sum_A \frac{m_A v_A^2}{8c^2} + \sum_{A \neq B} \frac{k m_A m_B}{2 R_{AB}} +$$

$$+ \sum_{A \neq B \neq C} \frac{k^2 m_A m_B m_C}{2c^2 R_{AB} R_{AC}} + \sum_{A \neq B} \frac{k m_A m_B}{2c^2 R_{AB}} (7v_A v_B + v_A \Pi_{AB} \cdot v_B \Pi_{AB}),$$

სადაც Π_{AB} ერთეულოვანი ვექტორია m_A და m_B ნაწილაკებს შორის R_{AB} რადიუს-ვექტორის მიმართულებით.

² ამ პარაგრაფის გადმოცემა დამყარებულია W. Pauli-ს სტატიებზე. Ann. d. Physik, 18, 305, 1933.

ლი X^{ν} კოორდინატები ძველი X^{ν} კოორდინატების პირველი A რიგის ერთგვაროვან ფუნქციებს წარმოადგენენ. ეილერის თეორემის თანახმად ეს ნიშნავს, რომ

$$X^{\mu} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X^{\mu}} = X^{\nu}. \quad (100,1)$$

როგორც ჩვეულებრივ კოორდინატებში ერთგვაროვან კოორდინატებშიაც კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორები და ტენზორები განისაზღვრებიან, როგორც ისეთი სიდიდეები, რომლებიც შემდეგი კანონებით გარდაიქმნებიან:

$$A^{\nu} = \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X^{\mu}} A^{\mu}, \quad A'_{\nu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial X^{\nu}} A_{\mu}, \text{ და ა. შ.} \quad (100,2)$$

მაგრამ ვექტორებზე და ტენზორებზე ერთგვაროვან კოორდინატებში კიდევ ერთი პირობა დაიდება, სახელდობრ, ჩვენ მოვითხოვთ, რომ მათი კომპონენტები კოორდინატების ერთგვაროვან ფუნქციებს წარმოადგენენ. ამასთანავე კონტრავარიანტული ვექტორის კომპონენტები უნდა იყოს პირველი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, კოვარიანტული ვექტორის კომპონენტები — 1 რიგისა, ხოლო სკალარი-ნულოვანი რიგისა. საზოგადოდ, იმ ტენზორია კომპონენტები, რომელიც r_1 ინდექსების მიხედვით კონტრავარიანტულია, ხოლო r_2 ინდექსების მიხედვით კოვარიანტული, $r_1 - r_2$ რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. ეს წესი, ცხადია, თანხმობაშია ტენზორის გამრავლების და შეკუმშვის წესთან. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ კოორდინატთა დასაშვები გარდაქმნის (100,1) პირობის შედეგად ტენზორის კომპონენტების ერთგვაროვნობის რიგი ამ გარდაქმნების დროს უცვლელი რჩება. ერთგვაროვან ვექტორებს და ტენზორებს ხუთგანზომილებიან X^{ν} სივრცეში ჩვენ მოკლედ უწოდებთ 5 — ვექტორს და 5 — ტენზორს¹.

ამგვარად, ეილერის თეორემის თანახმად შეიძლება დავწეროთ

$$X^{\mu} \frac{\partial A^{\nu}}{\partial X^{\mu}} = A^{\nu}, \quad X^{\mu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial X^{\mu}} = -A_{\nu}, \quad X^{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial X^{\mu}} = 0 \quad (100,3)$$

(φ სკალარია).

ერთგვაროვანი კოორდინატებისათვის დამახასიათებელია ის, რომ თვით ამ კოორდინატებში X^{ν} კოორდინატები კონტრავარიანტულ ვექტორს შეადგენენ, ვინაიდან (100,1) პირობის თანახმად ისინი (100,3) მოთხოვნას აკმაყოფილებენ [(100,2) კი ამ შემთხვევაში იგიურად დაკმაყოფილებულია]. პირიქით, dX^{ν} დიფერენციალები ახლა ვექტორს არ შეადგენენ, ვინაიდან ისინი ერთგვაროვნობის პირობას არ აკმაყოფილებენ.

ხუთგანზომილებიან $g_{\mu\nu}$ „მეტრიკულ ტენზორს“ ჩვენ ახლა დაუმორჩილებთ პირობას

$$g_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} = 1. \quad (100,4)$$

¹ იმ ტენზორებს და ვექტორებს, რომლებიც ერთგვაროვნობის პირობას აკმაყოფილებენ, კიდევ „პროექტებს“ უწოდებენ.

$\xi^{\mu\nu}$ -ს შებრუნებული $\xi^{\mu\alpha}$ ტენზორი, როგორც ჩვეულებრივ, იმით განისაზღვრება, რომ $\xi^{\mu\alpha}\xi^{\alpha\nu} = \delta^{\mu\nu}$ ($\delta^{\mu\nu}$ ერთეულოვანი 5—ტენზორია). როგორც წინანდ, $\xi_{\mu\nu}$ და $\xi^{\mu\nu}$ ტენზორებით განისაზღვრება ინდექსების აწვევის და ჩამოწვევის ოპერაცია.

აუცილებელია კიდევ შემოვიღოთ წესი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს X^{ν} სივრცეში 5—ტენზორს შეუსაბამოთ ჩვეულებრივი 4—ტენზორი x^{λ} 4—სივრცეში. ეს შემდეგი გზით კეთდება.

ერთგვაროვანი კოორდინატების განმარტების მიხედვით, x^{λ} კოორდინატები წარმოადგენენ X^{ν} ხუთი კოორდინატის ნულოვანი რიგის ერთგვაროვან ფუნქციას. ამიტომ ჩვენ გვაქვს

$$\gamma^{\lambda}_{\nu} X^{\nu} = 0, \quad (100,5)$$

სადაც γ^{λ}_{ν} სიმბოლოები წარმოებულებს აღნიშნავენ

$$\gamma^{\lambda}_{\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial X^{\nu}}. \quad (100,6)$$

x^{λ} კოორდინატების ნებისმიერი გარდაქმნის დროს γ^{λ}_{ν} სიდიდე გარდაიქმნება როგორც ჩვეულებრივი კონტრავარიანტული 4 — ვექტორი, ხოლო X^{ν} -ს ერთგვაროვანი გარდაქმნის დროს — როგორც კოვარიანტული 5 — ვექტორი. γ^{λ}_{ν} სიდიდეებთან ერთად შემოვიღოთ შებრუნებული γ^{ν}_{λ} სიდიდე თანახმად ტოლობისა

$$\gamma^{\lambda}_{\nu} \gamma^{\nu}_{\lambda} = \delta^{\lambda}_{\lambda}. \quad (100,7)$$

($\delta^{\lambda}_{\lambda}$ ერთეულოვანი 4 — ტენზორია). მაგრამ ამით γ^{λ}_{ν} სიდიდეები განსაზღვრულია მხოლოდ ნებისმიერი ρX^{ν} სახის ვექტორამდე სიზუსტით, სადაც ρ ნებისმერი ფუნქციაა. [(100,5) პირობის გამო, ასეთი ვექტორის მიმატებით (100,7) ტოლობა არ დაირღვევა]. γ^{λ}_{ν} -ს ცალსახად განსაზღვრისათვის დაუმორჩილოთ ისინი (100,5)-ის ანალოგიურ პირობებს.

$$\gamma^{\nu}_{\nu} X^{\nu} \equiv \gamma^{\nu}_{\nu} g_{\mu\nu} X^{\mu} = 0. \quad (100,8)$$

გამოვთვალოთ ნამრავლი $\gamma^{\lambda}_{\nu} \gamma^{\mu}_{\lambda}$, რომელშიაც შეჯამება წარმოებს ოთხგანზომილებიანი k ინდექსების მიხედვით. ამისათვის (100,7) ტოლობა $\gamma^{\mu}_{\lambda} \gamma^{\lambda}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu} = 0$ გავამრავლოთ γ^{ν}_{λ} -ზე.

$$\gamma^{\mu}_{\lambda} \gamma^{\lambda}_{\nu} \gamma^{\nu}_{\lambda} - \delta^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}_{\lambda} = \gamma^{\mu}_{\lambda} \gamma^{\lambda}_{\nu} \gamma^{\nu}_{\lambda} - \gamma^{\nu}_{\lambda} = \gamma^{\mu}_{\lambda} (\gamma^{\lambda}_{\nu} \gamma^{\nu}_{\lambda} - \delta^{\lambda}_{\lambda}) = 0.$$

თუ ამას (100,5)-ს შევადარებთ, დავინახავთ რომ

$$\gamma^{\mu}_{\lambda} \gamma^{\lambda}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu} = X^{\lambda} A_{\nu},$$

სადაც A_{ν} — რალაც ვექტორია. ამ ვექტორს ადვილად განვსაზღვრავთ, თუ ორივე მხარეს X_{μ} -ზე გავამრავლებთ. (100,4)-ის და (100,8)-ის ძალით ეს გვადლევს $A_{\nu} = -X_{\nu}$. ამგვარად,

$$\gamma^{\mu}_{\lambda} \gamma^{\lambda}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - X_{\nu} X^{\mu}. \quad (100,9)$$

ყოველ A^{ν} (ან A_{ν}) 5 — ვექტორს ჩვენ შეუსაბამებთ მასთან „შეუღლებულ“ 4—ვექტორს

$$A^k = \gamma^k_{\nu} A^{\nu}, \quad A_k = \gamma^{\nu}_k A_{\nu} \quad (100,10)$$

და სკალარს

$$A = A^{\nu} X_{\nu}. \quad (100,11)$$

(100,9)-ის დახმარებით ადვილად შევამოწმებთ, რომ

$$A_{\nu} = \bar{A}_{\nu} + A X_{\nu}, \quad A^{\nu} = \bar{A}^{\nu} + A X^{\nu}, \quad (100,12)$$

სადაც

$$\bar{A}_{\nu} = \gamma^{\nu}_k A_k, \quad \bar{A}^{\nu} = \gamma^{\nu}_k A^k. \quad (100,13)$$

ეს ვექტორები (100,5) და (100,8)-ის გამო X^{ν} ვექტორის „პერპენდიკულარულია“, ე. ი.

$$\bar{A}_{\nu} X^{\nu} = 0 \quad \bar{A}^{\nu} X_{\nu} = 0. \quad (100,14)$$

ეს ფორმულები სავსებით ცალსახა შესაბამისობას ამყარებენ X^{ν} სივრცეში 5 ვექტორსა და ჩვეულებრივ 4—ვექტორს შორის.

ანალოგიურად, ყოველი $A_{\mu\nu}$ 5 — ტენზორი ოთხი ოთხგანზომილებიანი სიდიდით ხასიათდება: 4 — ტენზორით $A_{ik} = \gamma^{\mu}_i \gamma^{\nu}_k A_{\mu\nu}$, [4 — ვექტორებით $A_{i(0)} = \gamma^{\mu}_i X^{\nu} A_{\mu\nu}$ და $A_{(0)j} = \gamma^{\nu}_j X^{\mu} A_{\mu\nu}$, და სკალარით $A_{(0)(0)} = X^{\mu} X^{\nu} A_{\mu\nu}$. კერძოდ, თუ $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$, მაშინ $A_{(0)i} = A_{i(0)}$; თუ $A_{\nu\mu} = -A_{\mu\nu}$, მაშინ $A_{(0)(0)} = 0$.

კერძოდ, $g_{\mu\nu}$ მეტრიკული ტენზორისათვის ინვარიანტი $g_{(0)(0)} = 1$. ხოლო $g_{(0)i}$ ვექტორი (100,8)-ს გამო ნულის ტოლი იქნება. ამიტომ $g_{\mu\nu}$ -ს ოთხგანზომილებიანი g_{ik} მეტრიკული ტენზორთან კავშირისათვის ჩვენ ვღებულობთ ფორმულებს

$$g_{ik} = \gamma^{\mu}_i \gamma^{\nu}_k g_{\mu\nu}, \quad \bar{g}_{\mu\nu} = g_{ik} \gamma^i_{\mu} \gamma^k_{\nu}, \quad g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + X_{\mu} X_{\nu}. \quad (100,15)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამასთანავე $g_{\mu\nu} A^{\nu} = A_{\mu}$ თანაფარდობიდან ასეთივე თანაფარდობა გამომდინარებს შეუღლებული 4 — ვექტორისათვის — $g_{ik} A^k = A_i$.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, dX^{ν} დიფერენციალები ვექტორს არ შეადგენენ. მაგრამ, შეიძლება შემოვიტანოთ dX^{ν} ვექტორი, რომელიც dX^k ვექტორის შეუღლებული იქნება:

$$\bar{d}X^{\nu} = \gamma^{\nu}_k dx^k. \quad (100,16)$$

$\bar{d}X^{\nu}$ -ს საშუალებით შეიძლება განვმარტოთ უსასრულოდ მცირე პარალელური გადატანა ისეთი ფორმულებით, რომლებიც სავსებით ანალოგიურია A^k არაერთგვაროვანი კოორდინატებისათვის მიღებული ფორმულებისა. სახელდობრ, კოვარიანტული დიფერენციალები

$$DA^{\nu} = \bar{d}X^{\mu} A^{\nu}_{;\mu}, \quad DA_{\nu} = \bar{d}X^{\mu} A_{\nu;\mu}, \quad (100,17)$$

სადაც $A^{\nu}{}_{;\mu}$ და $A_{\nu}{}_{;\mu}$ კოვარიანტული წარმოებულები $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ სიდიდეებით განისაზღვრებიან წინანდებული სახის ფორმულებით:

$$A^{\nu}{}_{;\mu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial X^{\mu}} + \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} A^{\lambda}, \quad A_{\nu}{}_{;\mu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial X^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} A_{\lambda}. \quad (100,18)$$

ამასთანავე φ სკალარის კოვარიანტული წარმოებული ისევე უბრალო წარმოებულზე დაიყვანება $\left(\varphi_{;\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial X^{\nu}}\right)$ და, ერთგვაროვნობის პირობის თანახმად,

$$X^{\nu}\varphi_{;\nu} = 0. \quad (100,19)$$

თვით $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ სიდიდეები გამოისახებიან $g_{\mu\nu}$ სიდიდეებით ისევე, როგორც $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ —სიდიდეები გამოისახებოდნენ $g_{\mu\nu}$ -თი.

აღვილი შესამოწმებელია (თუ გამოვიყენებთ $g_{\mu\nu}$ -თი გამოსახულ $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ სიდიდეებს და X^{ν} ვექტორისა და $g_{\mu\nu}$ ტენზორის ერთგვაროვნობის თვისებებს), რომ X_{μ} -ს კოვარიანტული წარმოებული:

$$X_{\mu}{}_{;\nu} = \frac{\partial X_{\mu}}{\partial X^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} X_{\lambda}$$

ანტისიმეტრიულია μ და ν ინდექსების მიმართ ($X_{\mu}{}_{;\nu} + X_{\nu}{}_{;\mu} = 0$). $X_{\mu}{}_{;\nu}$ ტენზორი, რომელსაც ჩვენ პირდაპირ $X_{\mu\nu}$ -თი აღვნიშნავთ, ძირითად როლს თამაშობს ფიზიკური გამოყენებისათვის. დაეწეროთ იგი ცხადად ანტისიმეტრიული სახით:

$$X_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (X_{\mu}{}_{;\nu} - X_{\nu}{}_{;\mu}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_{\mu}}{\partial X^{\nu}} - \frac{\partial X_{\nu}}{\partial X^{\mu}} \right), \quad (100,20)$$

აღვნიშნოთ $X_{\mu\nu}$ -ს ზოგიერთი თვისება. $X_{\mu}X^{\mu} = 1$ -დან გვაქვს

$$X_{\mu\nu}X^{\mu} = 0. \quad (100,21)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ x^{λ} სივრცის ოთხი სიდიდიდან, რომლითაც 2-რე რანგის ტენზორი ხასიათდება (იხ. ზემოდ), $X_{\mu\nu}$ ტენზორისათვის რჩება მხოლოდ ტენზორი X_{ik} , ასე რომ

$$X_{ik} = -X_{ki} = \gamma^{\mu}{}_{i}\gamma^{\nu}{}_{k}X_{\mu\nu}, \quad X_{\mu\nu} = \gamma^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\lambda}{}_{\mu}X_{ik}. \quad (100,22)$$

თუ (100,18) ას X^{μ} -ზე გავამრავლებთ, გვექნება

$$X^{\mu}A^{\nu}{}_{;\mu} = X^{\mu} \left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial X^{\mu}} + \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} A^{\lambda} \right) = A^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} X^{\mu} A^{\lambda},$$

და, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ X^{ν} -დან კოვარიანტული წარმოებული ტოლია

$$X^{\nu}{}_{;\mu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} X^{\lambda},$$

ვიპოვით

$$X^{\mu}A^{\nu}{}_{;\mu} = A^{\mu}X^{\nu}{}_{;\mu}, \quad X^{\mu}A_{\nu}{}_{;\mu} = -A_{\mu}X^{\mu}{}_{;\nu}. \quad (100,23)$$

(100,20)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial X^\rho} + \frac{\partial X_{\rho\mu}}{\partial X^\nu} + \frac{\partial X^{\nu\rho}}{\partial X^\mu} = 0. \quad (100,24)$$

(100,22)-ის დახმარებით აქედან ანალოგიური თანაფარდობები მიიღება X_{ik} -სათვის:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial X^i} + \frac{\partial X_{ik}}{\partial X^k} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial X^i} = 0. \quad (100,25)$$

შემდეგ, შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ 5—განზომილებიანი და 4—განზომილებიანი კოვარიანტული წარმოებულებს შორის, ზოგადი წესების შესაბამისად, არსებობს კავშირი

$$\gamma_i{}^\mu \gamma_k{}^\nu \bar{A}^\nu{}_{;\mu} = A^k{}_{;i}. \quad (100,26)$$

ამ თანაფარდობისა და (100,12), (100,21) და (100,23) ფორმულების დახმარებით შეიძლება მივიღოთ

$$A^\nu{}_{;\mu} = \gamma_i{}^\nu \gamma_k{}^\mu A^k{}_{;i} + X_\mu \gamma_i{}^\nu X^i{}_{;k} A^k + X^\nu \left(\frac{\partial A}{\partial X^\mu} - \gamma_i{}^\mu X_{ik} A^k \right) + A X^\nu{}_{;\mu} \quad (100,27)$$

და ანალოგიური თანაფარდობა კოვარიანტული ვექტორისათვის. დაბოლოს, (100,17) კოვარიანტული დიფერენციალისათვის აქედან შეიძლება მივიღოთ

$$\left. \begin{aligned} DA^\nu &= \gamma_i{}^\nu (DA^i + AX^i{}_{;k} dx^k) + X^\nu dA, \\ DA_\nu &= \gamma_i{}^\nu (DA_i + AX_{ik} dx^k) + X_\nu dA, \end{aligned} \right\} \quad (100,28)$$

სადაც $DA^i = A^i{}_{;k} dx^k$ ოთგანზომილებიანი კოვარიანტული დიფერენციალია.

$P^\nu{}_{\mu\rho\sigma}$ „სიმრუდის“ 5—ტენზორს ჩვენ განვსაზღვრავთ $\Gamma^\mu{}_\alpha$ სიდიდეთა საშუალებით ისევე, როგორც $R^i{}_{klm}$ 4—ტენზორი განისაზღვრება $\Gamma^i{}_{kl}$ -ის საშუალებით. $P^\nu{}_{\mu\rho\sigma}$ ტენზორი შეიძლება $R^i{}_{klm}$ და $X_{\mu\nu}$ ტენზორებით გამოვსახოთ. მოვიყვანოთ სიმრუდის შემოკლებული ტენზორის გამოთვლის შედეგი

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} = P^\sigma{}_{\mu\nu\sigma} &= \gamma_i{}^\mu \gamma_k{}^\nu R_{ik} + 2X^\sigma{}_\mu X_{\sigma\nu} - (X_\mu X^\sigma{}_{;\nu} + \\ &+ X_\nu X^\sigma{}_{;\mu}) + X_\mu X_\nu X_{\sigma\rho} X^{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (100,29)$$

სკალარული სიმრუდე

$$P = g^{\mu\nu} P_{\mu\nu} = R + X_{\rho\sigma} X^{\rho\sigma} = R + X_{ik} X^{ik}, \quad (100,30)$$

ხოლო $P_{\mu\nu}$ -ს შეუღლებული 4—ტენზორი, 4—ვექტორი და სკალარი:

$$\left. \begin{aligned} P_{ik} &= \gamma_i{}^\mu \gamma_k{}^\nu P_{\mu\nu} = R_{ik} + 2X_i{}^\nu X_{\nu k}, \\ P_{(i)k} &= \gamma_i{}^\mu X^\nu P_{\mu\nu} = -X_i{}^k{}_{;k}, \\ P_{(i)(j)} &= X^\mu X^\nu P_{\mu\nu} = -X_{ik} X^{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (100,31)$$

აქ მოყვანილი თანაფარდობები გვიჩვენებენ, რომ X^ν სივრცის მეტრიკა (მოცემული γ_{ik} -ს შემთხვევაში) g_{ik} და X_{ik} 4-ტენზორებით განისაზღვრება. თუ X_{ik} ტენზორს ელექტრომაგნიტური ველის F_{ik} ტენზორს გაუიგივებთ (g_{ik} ტენზორი წინანდებურად გრავიტაციულ ველს განსაზღვრავს), მაშინ შეიძლება ერთიანი სახით გამოვიყვანოთ და ჩამოვაყალიბოთ გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური ველების განტოლებანი, რომლებიც ამ შემთხვევაში გაერთიანდებიან ერთგვაროვან კოორდინატებში აღებული ტენზორებისა და ვექტორების საშუალებით გაშლასახულ განტოლებებში. იგივე შეეხება დამუხტულ ნაწილაკთა მოძრაობის განტოლებებსაც¹.

დაუშვათ

$$X_{ik} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} F_{ik}. \quad (100,32)$$

უპირველეს ყოვლისა ავღნიშნოთ, რომ მაქსველის (76,2) განტოლებათა პირველი წყვილი ავტომატურად შესრულებული აღმოჩნდება [ვინაიდან თვით X^ν , სივრცის მეტრიკული თვისებებისა გამო, (100,25)-ს თანხვდება].

იმის ანალოგიურად, რომ გრავიტაციულ ველში ნაწილაკის ტრაექტორია x^μ 4-სივრცის გეოდეზიურ ხაზს წარმოადგენს, განვსაზღვროთ დამუხტული ნაწილაკის ტრაექტორია გრავიტაციულ და ელექტრომაგნიტურ ველში ერთად როგორც ხუთგანზომილებიანი X^ν სივრცის გეოდეზიური ხაზი.

ვთქვათ $x^\mu = x^\mu(s)$ წარმოადგენს 4-სივრცეში მრუდის პარამეტრულ განტოლებას, ასე რომ $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ ამ მრუდზე მოძრავი ნაწილაკის სიჩქარის 4-

ვექტორია. შემოვიღოთ სიჩქარის u^ν 5-ვექტორი ისე, რომ წინა პარაგრაფში გადმოცემული ზოგადი წესების შესაბამისად $u^\mu = \gamma^\mu_\nu u^\nu$. (100,12)-ის თანხმად მაშინ გვექნება

$$u^\nu = \gamma^\nu_\mu u^\mu + u X^\nu.$$

4-სივრცეში გეოდეზიური მრუდის განტოლების ანალოგიურად $\left(\frac{Du^\mu}{ds} = 0, \text{ იხ.}$

§ 82) ხუთგანზომილებიანი გეოდეზიური მრუდი განვსაზღვროთ განტოლებით

$$\frac{Du^\nu}{ds} = \frac{dX^\mu}{ds} u^\nu; \mu = 0. \quad (100,33)$$

¹ ხაზი უნდა გაუსვიათ იმ გარემოებას, რომ ამ შემთხვევაში საკითხი ელექტრომაგნიტური ველის სივრცე-დროს მეტრიკულ თვისებებზე რაიმე დაყვანის შესაძლებლობას კი არ შეეხება, როგორც აშას ადგილი აქვს გრავიტაციული ველისათვის. რეალური სივრცისა და დროს მეტრიკა (x^μ 4-სივრცისა) ისეთივე რჩება, როგორც წინადა იყო.

(100,22)-ის თანახმად ოთხგანზომილებიან სიდიდეებზე გადასვლის დროს ეს განტოლება ორ განტოლებად გაიყოფა:

$$\frac{du}{ds} = 0, \quad u = \text{const.},$$

$$\frac{Du^i}{ds} + 2uX^i_k \frac{dx^k}{ds} = 0$$

ან

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{ik} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^k}{ds} = -\frac{e}{mc} \cdot F^i_k \frac{dx^k}{ds}.$$

ამასთანავე ჩვენ ჩავსვით ოთხგანზომილებიანი კოვარიანტული წარმოებულის გამოსახულება, ხოლო $u = u^\nu X_\nu$ ინტეგრების მუდმივისათვის ავირჩიეთ მნიშვნელობა

$$u^\nu X_\nu = -\frac{e}{mc^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}, \quad (100,34)$$

ასე რომ ნაწილაკის 5—სიჩქარე არის

$$u^\nu = \frac{dX^\nu}{ds} - \frac{e}{mc^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} X^\nu. \quad (100,35)$$

მიღებული განტოლება თანხვედბა გრავიტაციულ და ელექტრომაგნიტურ ველებში ნაწილაკის მოძრაობის (84,6) განტოლებას, ასე რომ ხუთგანზომილებიანი (100,33) განტოლება მართლაც მოძრაობის განტოლებას წარმოადგენს.

გადავიდეთ ახლა ველის განტოლებებზე. გამოვიდეთ იქიდან, რომ სიცარიელეში გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური ველების განტოლებები უნდა წარმოადგენენ ხუთგანზომილებიან სივრცეში „უმცირესი ქმედების პრინციპის“ შედეგს, იმის ანალოგიურად, რომელიც § 89-ში იყო დაწერილი:

$$\delta \int P \sqrt{|g_{\mu\nu}|} dX^1 \dots dX^5 = 0, \quad (100,36)$$

სადაც $P = g^{\mu\nu} P_{\mu\nu}$ —სკალარული „სიმრუდეა“, ხოლო $|g_{\mu\nu}|$ დეტერმინანტია, შედგენილი $g_{\mu\nu}$ სიდიდეებისაგან. ვარიირება წარმოებს $g_{\mu\nu}$ -ს მიხედვით დამატებითი პირობით

$$\delta(g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = X^\mu X^\nu \delta g_{\mu\nu} = 0, \quad (100,37)$$

რომელიც იმის შედეგია, რომ ყოველთვის უნდა იყოს $g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 1$.

თუ (100,32)-ს P -ს (100,30) გამოსახულებაში ჩავსვამთ, ვიპოვით

$$P = R + \frac{\alpha}{8\pi} F_{ik} F^{ik}. \quad (100,38)$$

ეს სწორედ ის გამოსახულებაა, რომელიც გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური ველების მოქმედებათა ჯამში ინტეგრალს ქვეშ დგას.

(100,36) ინტეგრალის ვარიირება ისევე წარმოებს, როგორც § 91-ში გრავიტაციული ველის განტოლებათა გამოყენების დროს, და გვაძლევს

$$\int \left(P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} P \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g_{\rho\sigma}|} dX^1 \dots dX^5.$$

იმისათვის, რომ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლი იყოს (100,37) პირობის დაცვით, ცხადია, აუცილებელია, რომ

$$P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} P = F X_{\mu} X_{\nu}, \quad (100,39)$$

სადაც F — სკალარია, რომლის განსაზღვრა შეიძლება, თუ (100,39) განტოლების ორივე ნაწილს $X^{\mu} X^{\nu}$ -ზე გაავარაულებთ.

თუ (100,39) განტოლების ორივე ნაწილისათვის შეუღლებულ 4 — ტენზორს და 4 — ვექტორს ავიღებთ, მივიღებთ ორ ოთხგანზომილებიან განტოლებას:

$$P_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} P = 0, \quad P_{(i)j} = 0$$

[(100,37)-ის მარჯვენა ნაწილი (100,8)-ის გამო ნულს გვაძლევს]. თუ აქ (100,31)-ს და (100,32)-ს ჩავსვამთ, ჩვენ მართლაც მივიღებთ გრავიტაციული ველის სწორ (91,6) განტოლებებს ელექტრომაგნიტური ველის არსებობის დროს და მაქსველის (84,4) განტოლებათა მეორე წყვილს, რომლებიც, ამგვარად, გაერთიანებული აღმოჩნდნენ ერთ ხუთგანზომილებიან (100,39) განტოლებაში.

იმისათვის, რომ ველის განტოლება მივიღოთ მასებისა და მუხტების არსებობის პირობებში, უნდა შემოვიტანოთ მატერიალურ ნაწილაკთა „ენერგია იმპულსის 5—ტენზორი“

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 a_{\mu\nu}, \quad (100,40)$$

სადაც ρ § 34-ში განსაზღვრული მასის სიმკვრივეა [(34,1) ფორმულით]. (100,35)-ის დახმარებით ადვილად დაერწმუნდებით იმაში, რომ $T_{\mu\nu}$ -ს შეუღლებული T_{ik} 4—ტენზორი მატერიის ენერგია-იმპულსის 4—ტენზორს წარმოადგენს, ხოლო $T_{[ij]}$ 4—ვექტორი დენის 4—ვექტორს იძლევა. ველის განტოლებები ახლა შემდეგი სახით დაიწერება:

$$P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} P = - \kappa T_{\mu\nu} + F X_{\mu} X_{\nu} \quad (100,41)$$

(F -ის განსაზღვრისათვის ორივე მხარე ისევ $X^{\mu} X^{\nu}$ -ზე უნდა გაავარაულოთ) და ოთხგანზომილებიან სიდიდეებზე გადასვლით მართლაც მოგვეცემენ გრავიტაციული ველის სრულ განტოლებებს და მაქსველის განტოლებებს.

§ 101 მიზიდულობის თეორიის თეორიის სიმკვრივეები

საკითხი მსოფლიოს, როგორც მთლიანის თვისებების შესახებ, კერძოდ მასში მატერიის განაწილების შესახებ, ნიუტონის მექანიკაში მეტად არსებით წინააღმდეგობებს ხვდება, რომელთა თავიდან აცილება შეუძლებელი იქნება, თუ არარელატივისტური მექანიკის ფარგლებში დავრჩებით.

ნიუტონის მიზიდულობის თეორიაში გრავიტაციული ველის პოტენციალი (იხ. § 92) არის $\varphi = -k \int \frac{\mu dv}{R}$, სადაც μ — მასის სიმკვრივეა.¹ გამოვიყენებთ

რა ამ ფორმულას მსოფლიოს როგორც მთლიანის მიმართ ჩვენ დავინახავთ, რომ თუ ნივთიერება მთელ მსოფლიოს სივრცეშია განაწილებული და ამიტომ მისი საშუალო μ სიმკვრივე ყველგან სასრულოა, მაშინ გრავიტაციული პოტენციალი უსასრულო ხდება. ეს მიგვიყვანდა მატერიაზე მოქმედ უსასრულო ძალებამდე, რაც აბსურდია.

იმისათვის, რომ გრავიტაციული პოტენციალი სასრულო რჩებოდეს, საჭიროა, რომ მატერია მხოლოდ სივრცის რაღაც სასრულო არეში ყოფილიყო განაწილებული. უფრო სწორად, უსასრულობაში μ საშუალო სიმკვრივე ნულისაქენ უნდა მისწრაფოდეს და ეს მისწრაფება $\frac{1}{R^2}$ -ზე უფრო სწრაფად უნდა ხდებოდეს (შენიშნოთ, რომ საერთო მასა, ე. ი. $\int \mu dv$ შესაძლებელია მანც უსასრულობა გახდეს). მატერიის ასეთი განაწილების პირობებში პოტენციალი ყველგან სასრულო იქნებოდა, ხოლო უსასრულოში იგი ნული გახდებოდა.

მაგრამ სტატისტიკა ისეთ შედეგს გვაძლევს, რომ ასეთი მსოფლიოც ვერ იარსებებდა. მართლაც მსოფლიო თავის არსებობის უსასრულოდ დიდი დროის განმავლობაში სტატისტიკური წონასწორობის მდგომარეობაში უნდა ყოფილიყო. ველში სხეულთა წონასწორული განაწილება, როგორც ცნობილია, ბოლცმანის ფორმულით განისაზღვრება $\mu = \mu_0 \exp(-U/kT)$, სადაც k ბოლცმანის მუდმივია, T — ტემპერატურა და U — პოტენციალური ენერჯიაა, რომელიც გრავიტაციულ ველში მყოფი m მასის სხეულისათვის ტოლია $U = m\varphi$. ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ თუ უსასრულოში $\varphi = 0$, მაშინ მატერიის სიმკვრივე სასრულო რჩება და μ_0 -ს ტოლია. ამგვარად, ის დაშვება, რომ უსასრულობაში მატერიის სიმკვრივე ნულის ტოლია იძლევა ტოლობას $\rho_0 = 0$, ე. ი. სიმკვრივის ნულთან ტოლობას მთელ სივრცეში.

§ 102. იზოტროპული სივრცე

მსოფლიოს, როგორც მთლიანის პრობლემა ზოგად ფარდობითობის თეორიაში დაიყვანება საკითხზე სივრცულ-დროულ მეტრიკის შესახებ საშუალოში, რო-

¹ მსოფლიოს როგორც მთლიანის განხილვის დროს მატერიის საშუალო სიმკვრივე, ცხადია, სივრცის იმ არეებში განისაზღვრება, რომელიც დიდია მეზობელ ვარსკვლავთა სისტემებს (გალაქტიკებს) შორის მანძილთან შედარებით.

მელიც დიდ მასტაბში განიხილება. ასეთი განხილვის დროს შეიძლება უგულვებელყოთ გრავიტაციული ველის, ე. ი. მეტრიკის, ადგილობრივი არაერთგვაროვნებანი, რომელიც გამოწვეულია მატერიის დაგროვებით ვარსკვლავებში და ვარსკვლავთა სია უმებში.

შენ შემდეგში დაუშვებთ, რომ სივრცის მეტრიკა საესებით ერთგვაროვანი და იზოტროპულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია ისეთი „მსოფლიო“ დროის არჩევა, რომ მის ყოველ მოცემულ მომენტში სივრცის მეტრიკა ყველა წერტილში და ყოველი მიმართულებით ერთიდა იგივე იყოს. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, სივრცეს სრული სიმეტრიულობა ახასიათებს. ამასთანავე, რასაკვირველია, ავტომატურად უნდა დაუშვათ, რომ მატერიის ρ სიმკვრივე („მსოფლიო“ დროის ერთსადაიმევე მომენტებში) მუდმივია მთელი სივრცის გასწვრივ.

უნდა აღინიშნოს, რომ, ამჟამად ჩვენ არ გავაჩნია არც თეორიული და არც ასტრონომიული საფუძვლები ამ დაშვებისათვის, და შეიძლება, რომ იგი არც შეესაბამებოდეს სინამდვილეს. მაგრამ, ამასთანავე სრული უაზრობა იქნებოდა არ არსებული სამყაროთა კერძო შემთხვევების განხილვა. და თუ ჩვენ მაინც ზემოაღნიშნული მარტივი დაშვებიდან გამოვიდევართ, ეს მხოლოდ იმით, რომ მისი საშუალებით შესაძლებელი გახდეს ჩვენ წინაშე მდგომი პრობლემაზე ზოგადი წარმოდგენის შექმნა, თუმცა ძნელია იმის თქმა, თუ როგორი იქნება ამგვარად მიღებული ამოხსნის არსებითი თვისებების თანხედენა სინამდვილესთან.

უპირველეს ყოვლისა ავაგოთ იზოტროპული სივრცის სივრცული მეტრიკა „მსოფლიო“ დროის გარკვეულ მომენტში. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ dl სივრცული მანძილის ელემენტის გამოსახულება კოორდინატთა დიფერენციალების საშუალებით, ე. ი. განვსაზღვროთ $\gamma_{\alpha\beta}$ ტენზორის კომპონენტები ზოგად გამოსახულებაში.

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (102,1)$$

სამგანზომილებიან მეტრიკულ ტენზორს, ოთხგანზომილებიანი g_{ik} ტენზორისაგან განსხვავებით, ჩვენ $\gamma_{\alpha\beta}$ -თი აღვნიშნავთ.

სივრცის სიმრუდე საესებით განისაზღვრება მისი სიმრუდის სამგანზომილებიანი ტენზორით, რომელსაც ჩვენ, ოთხგანზომილებიანი R^i_{klm} ტენზორისაგან განსხვავებით, $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ -თი აღვნიშნავთ ($P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ ტენზორის თვისებები, რასაკვირველია, ზუსტად ანალოგიურია R^i_{klm} ტენზორის თვისებებისა). სრული იზოტროპულობის შემთხვევაში $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ ტენზორი, ცხადია, მხოლოდ $\gamma_{\alpha\beta}$ მეტრიკული ტენზორით უნდა გამოისახებოდეს. ადვილად დავინახავთ, რომ $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ -ს სიმეტრიულობის თვისებათა გამო (იხ. § 88) მას უნდა ქონდეს სახე

$$P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\lambda}{6} (\delta^{\alpha}_{\beta} \gamma_{\gamma\delta} - \delta^{\alpha}_{\gamma} \gamma_{\beta\delta}), \quad (102,2)$$

სადაც λ რაღაც მუდმივია. 2-ზე რანგის $P_{\alpha\beta} = P\gamma_{\alpha\beta}$ ტენზორი ტოლია, სათანადოთ,

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{3} \gamma_{\alpha\beta}, \quad (102,3)$$

ხოლო სკალარული სიმრუდე

$$P = \lambda. \quad (102,4)$$

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ იზოტროპული სივრცის სიმრუდის თვისება მხოლოდ ერთი λ მუდმივით განისაზღვრება. ამის შესაბამისად შესაძლებელია ერთ-მანეთისაგან არსებითად განსხვავებული სივრცული მეტრიკის სულ სამი შემთხვევა: 1) ევრედწოდებული მუდმივი დადებითი სიმრუდის სივრცე (რომელიც λ -ს უარყოფითი მნიშვნელობებს შეესაბამება), 2) მუდმივი უარყოფითი სიმრუდის სივრცე ($\lambda > 0$ მნიშვნელობათა შესაბამისი) და 3) ნულის ტოლი სიმრუდის სივრცე ($\lambda = 0$). მათ შორის უკანასკნელი წარმოადგენს ბრტყელს, ე. ი. ევკლიდურ სივრცეს.

მეტრიკის შესწავლის დროს მოხერხებულია გეომეტრიული ანალოგიიდან გამოვიდეთ. სამგანზომილებიანი იზოტროპული სივრცის გეომეტრია განვიხილოთ როგორც გეომეტრია იზოტროპულ ჰიპერზედაპირზე (რომელდაც ფიქტიურ ოთხგანზომილებიან სივრცეში). ასეთ ზედაპირს ჰიპერსფერო წარმოადგენს. მისი შესაბამი სამგანზომილებიანი სივრცე არის სწორედ მუდმივი დადებითი სიმრუდის სივრცე. ოთხგანზომილებიან x_1, x_2, x_3, x_4 სივრცეში α რადიუსიანი ჰიპერსფეროს განტოლება იქნება

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \alpha^2,$$

ხოლო მასზე სიგრძის ელემენტო

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

თუ x^1, x^2, x^3 კოორდინატებს განვიხილავთ როგორც სამ სივრცულ კოორდინატებს და dl^2 -დან პირველი განტოლების დახმარებით x^4 ფიქტიურ კოორდინატს გამოვრიცხავთ, მაშინ სივრცული მანძილის ელემენტს ვიპოვიით სახით

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{\alpha^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \quad (102,5)$$

ამ გამოსახულებიდან ადვილად გამოითვლება (102,2)-ში შემავალი λ მუდმივი. ვინაიდან ჩვენ წინასწარ ვიცით, რომ $P_{\alpha\beta}$ -ს მთელ სივრცეში (102,3) სახე აქვს, ამიტომ საკმარისია მის გამოთვლა მხოლოდ კოორდინატთა სათავეის მახლობელი წერტილებისათვის, სადაც $\gamma_{\alpha\beta}$ ტოლია:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{\alpha^2}.$$

ვინაიდან $\gamma_{\alpha\beta}$ -ს პირველი წარმოებულები, და მაშასადამე $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ სიდიდეები კოორდინატთა სათავეში ნულის ტოლია, ამიტომ ზოგადი (88,10) ფორმული

დან მარტივი გამოთვლით ვღებულობთ:

$$\lambda = -\frac{2}{a^2}. \quad (102,6)$$

a სიდიდეს შეიძლება სივრცის „სიმრუდის რადიუსი“ უწოდოთ. x^1, x^2, x^3 კოორდინატების ნაცვლად შემოვიღოთ მათი შესაბამისი r, θ, φ „სფერული“ კოორდინატები. მაშინ სივრცის ელემენტი მიიღებს სახეს

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (102,7)$$

კოორდინატთა სათავე, რასაკვირველია, სივრცის ყოველ წერტილში შეიძლება ავირჩიოთ. ამ კოორდინატებში წრეხაზის სიგრძე $2\pi r$ -ის ტოლია, ხოლო სფეროს ზედაპირის ფართობი— $4\pi r^2$. ხოლო წრეხაზის (ან სფეროს) „რადიუსის“ სიგრძე იქნება $\int_0^r \sqrt{\frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}}}$, ე. ი. r -ზე მეტია. ამგვარად, წრეხაზის სი-

გრძის შეფარდება მის რადიუსთან ასეთ სივრცეში 2π -ზე ნაკლებია.

dl^2 -თვის მეორე მოხერხებულ ფორმას ის წარმოადგენს, რომელსაც მივიღებთ, თუ r კოორდინატის ნაცვლად χ კოორდინატს ჩავსვამთ, თანახმად $r = a \sin \chi$. მაშინ

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)]. \quad (102,8)$$

კოორდინატი ზომავს კოორდინატთა სათავიდან მანძილს, რომელიც $a\chi$ -ს ტოლია. ამ კოორდინატებში სფეროს ზედაპირის ფართობი უდრის $4\pi a^2 \sin^2 \chi$. ჩვენ ვხედავთ, რომ კოორდინატთა სათავიდან დაშორებასთან ერთად სფეროს ზედაპირის სიდიდე მატულობს, სანამ $\frac{\pi a}{2}$ მანძილზე მაქსიმუმს არ მიაღწევს, რომელიც $4\pi a^2$ -ის ტოლია. ამის შემდეგ იგი შემცირებას იწყებს, სანამ πa მანძილზე (რომელიც მაქსიმალურად შესაძლო მანძილია ამ სივრცეში) სივრცის „მოპირდაპირე პოლიუსზე“ წერტილად არ გარდაიქცევა. [ყველაფერი ეს, რასაკვილია, ჩანს (102,7)-დანაც, თუ შევნიშნავთ, რომ r კოორდინატს არ შეუძლია a -ზე მეტი მნიშვნელობის მიღება].

დადებითი სიმრუდის სივრცის მოცულობა (102,8)-ის თანახმად ტოლია:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi,$$

საიდანაც

$$V = 2\pi^3 a^3. \quad (102,9)$$

ამგვარად, დადებითი სიმრუდის სივრცე სასრულო ყოფილა (მაგრამ, რა-საკვირველია, მას საზღვარი არა აქვს). საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ჩაკე-ტილ სივრცეში სრული ელექტრული მუხტი ნულის ტოლია. მართლაც სასრუ-ლო სივრცეში ყოველი ჩაკეტილი ზედაპირი თავისი ორივე გვერდით აგრეთვე სივრცის სასრულო არეებს შემოფარგლავს. ამიტომ ამ ზედაპირში გამავალი ელექტრული ველის ნაკადი ერთი მხრით ამ ზედაპირში მყოფი სრული მუხტის ტოლია, ხოლო მეორე მხრით იგი ზედაპირს გარედ მყოფი შებრუნებული ნიშნით აღებული მუხტის ტოლია. მაშასადამე, ზედაპირის ორივე მხარეს მყოფი მუხტე-ბის ჯამი ნულის ტოლია.

გადავიდეთ ახლა მუდმივი უარყოფითი სიმრუდის სივრცის გეომეტრიის განხილვაზე. (102,7) დან ჩვენ ვხედავთ, რომ λ მუდმივი დადებითი ხდება თუ α^2 უარყოფითია, ე. ი. α წარმოსახვითია. ამიტომ უარყოფითი სიმრუდის სივრ-ცისათვის ყველა ფორმულას უშუალოდ წინა ფორმულებიდან მივიღებთ თუ α -ს შევცვლით $i\alpha$ თი. სხვაგვარად რომ ვთქვაფ, უარყოფითი სიმრუდის სივრცის გეომეტრია მათემატიკურად მიიღება როგორც გეომეტრია წარმოსახვითი რა-დიუსის მქონე ოთხგანზომილებიან ფსევდოსფეროზე.

ამგვარად λ მუდმივი ახლა ტოლია

$$\lambda = \frac{2}{\alpha^2}, \quad (102,10)$$

ხოლო სივრცის ელემენტი უარყოფითი სიმრუდის სივრცეში r , θ , φ კო-ორდინატებში არის

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\alpha^2}} + r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (102,11)$$

სადაც r კოორდინატს შეუძლია გაიზარდოს ყველა მნიშვნელობა 0-დან ∞ -მდე. წრეხაზის სივრცის შეფარდება რადიუსთან ახლა 2π -ზე მეტია. (102,8)-ის შესა-ბამი dl^2 -ის გამოსახულების მისაღებად უნდა შევიტანოთ χ კოორდინატი თა-ნახმად $r = \alpha \operatorname{sh} \chi$. მაშინ

$$dl^2 = \alpha^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)). \quad (102,12)$$

სფეროს ზედაპირის ფართობი ახლა უფროს $4\pi\alpha^2 \operatorname{sh}^2 \chi$ და კოორდინატთა სათავედან დაშორებისას (χ გადიდებით) უსაზღვროდ იზრდება. უარყოფითი სიმრუდის სივრცის მოცულობა, ცხადია, უსასრულოა

§ 103 იზოტროპული სამყაროს სივრცულ-დროული მეტრიკა

გადავიდეთ ახლა იზოტროპულ სამყაროში ds ინტეგრალის ზოგადი სახის მოძებნაზე. ცხადია, რომ მიზანშეწონილად არჩეული ათვლის სისტემა აუცილებ-ლად „საკუთარი“ (იხ. § 96) უნდა იყოს სივრცეში მყოფი მთელი მატერიისა-თვის, ე. ი. ამ სისტემაში მატერია უძრავი იქნება. წინააღმდეგ შემთხვევაში მატერიის სიჩქარეთა მოგეზულობა შექმნიდა სივრცეში სხვადასხვა მიმართულე-

ბის არაექვივალენტობას. ასეთ ათვლის სისტემაში დროული კოორდინატი უნდა აეარჩიოთ წინა პარაგრაფში მითითებული წესის მიხედვით, ე. ი. ისე, რომ დროის ყოველ მოცემულ მომენტში მთელ სივრცეში მეტრიკა ერთიდაიგივე იყოს.

ყველა მიმართულების სრული ექვივალენტობისა გამო მეტრიკული $g_{\alpha\beta}$ ტენზორის კომპონენტები ჩვენ მიერ არჩეულ ათვლის სისტემაში ნულის ტოლია. მართლაც $g_{\alpha\beta}$ -ს სამი კომპონენტი შეიძლება განვიხილოთ როგორც სამგანზომილებიანი ვექტორის კომპონენტები, რომელიც, თუ იგი ნულისაგან განსხვავებული იქნება, არატოლფასს გახდის სხვადასხვა მიმართულებას. ამგვარად, ds^2 -ს უნდა ქონდეს სახე $ds^2 = g_{00}dx_0^2 - dl^2$. g_{00} კომპონენტი აქ მხოლოდ x^0 -ის ფუნქციას წარმოადგენს. ამიტომ დროული კოორდინატი ყოველთვის ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ g_{00} გადავიდოდეს c^2 -ში. თუ მას τ -თი აღვნიშნავთ, მაშინ გვექნება

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2. \quad (103,1)$$

ასეთი τ დრო, ცხადია, სივრცის ყოველ წერტილში საკუთარ დროს წარმოადგენს.

დავიწყოთ დადებითი სიმრუდის სივრცის განხილვით. dl^2 -თვის (102,8) გამოსახულებით ვიყარებლოთ, რომელშიაც α მსოფლიოს „სიმრუდის რადიუსი“, საზოგადოთ რომ ვთქვათ, დროის ფუნქციას წარმოადგენს. ამგვარად, ds^2 თვის დაიწერება:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \alpha(\tau)^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2)]. \quad (103,2)$$

$\alpha(\tau)$ ფუნქცია გრავიტაციული ველის განტოლებებიდან განისაზღვრება. ამ განტოლებათა ამოხსნის დროს უფრო მოხერხებული იქნება დროის ნაცვლად ვისარგებლოთ η სიდიდით, რომელიც განსაზღვრულია თანაფარდობით

$$c d\tau = \alpha d\eta. \quad (103,3)$$

მაშინ ds^2 დაიწერება სახით

$$ds^2 = \alpha(\eta)^2 [d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (\sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2)]. \quad (103,4)$$

ამ გამოსახულებას ისეთივე სახე აქვს, როგორც ds^2 -ს (93,1), რომელშიაც r და t -ს როლს ახლა შესაბამისად χ და η კოორდინატები თამაშობენ, ხოლო λ , μ და ν სიდიდეები ტოლია

$$\lambda = 2 \ln \alpha, \quad \mu = 2 \ln \alpha + 2 \ln \sin \chi, \quad \nu = 2 \ln \alpha.$$

ამიტომ ჩვენ შევიძლია ველის განტოლება დაეწეროთ, თუ ზოგად (96,4—8) განტოლებებში λ , μ , ν სიდიდეების ნაცვლად ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ.

მარტივი გამოთვლით (96,7)-დან ვპოულობთ

$$\kappa \rho c^2 = \frac{3}{a^3} (a^2 + \alpha^2) \quad (103,5)$$

(წერტილი აღნიშნავს η -ს მიხედვით დიფერენცირებას). მეორე განტოლებად აეარჩიოთ (96,3). აღვიღად მივხედებით იმას, რომ ჩვენ მიერ არჩეულ ათვლის

იზოტროპულ სისტემაში $f_2(\chi)$ ფუნქცია ზუსტად უნდა აბათილებდეს ამ განტოლების მარცხენა ნაწილში $\lambda + 2\mu$ -ში შემავალი χ -ზე დამოკიდებულ წევრებს. ამგვარად, ვპოულობთ

$$3 \ln \alpha = - \int \frac{c^2 dp}{p + \rho c^2} + \text{const.} \quad (103,6)$$

(ამ ინტეგრალის ქვედა საზღვარი მუდმივია). თუ p -სა და ρ -ს შორის კავშირი ცნობილია, მაშინ ეს განტოლება ρ -ს როგორც α -ს ფუნქციას განსაზღვრავს. მაშინ (103,5)-დან ჩვენ შეგვიძლია η განსაზღვროთ სახით

$$\eta = \pm \int \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{\frac{\rho c^2 \alpha^2}{3} - 1}}. \quad (103,7)$$

(103,6) და (103,7) განტოლებანი ზოგადი სახით წყვეტენ დადებითი სიმრუდის იზოტროპულ სივრცეში მეტრიკის და მატერიის განაწილების ამოცანას.

რეალურ სივრცეში p წნევა მცირეა შედარებით ენერჯიის ρc^2 სიმკვრივესთან. სახელდობრ, გამოსხივების წნევა მცირეა იმის გამო, რომ მისი რაოდენობა, ე. ი. ენერჯიის სიმკვრივე სივრცეში, შედარებით მცირეა, ხოლო მატერიის წნევა მცირეა ვარსკვლავების სრქპარის შედარებითი სიმკვრივისა გამო. თუ ამის შესაბამისად დაუშვებთ, რომ $p=0$, მაშინ (103,6)-დან ვიპოვიით:

$$\rho \alpha^2 = \text{const.}^1 \quad (103,8)$$

და, თუ ამას (103,7)-ში ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$\alpha = \alpha_0 (1 - \cos \eta), \quad (103,9)$$

სადაც α_0 —რაღაც მუდმივია. დასასრულს, τ და η -ს კავშირისათვის (103,3)-დან ვიპოვიით

$$\tau = \frac{\alpha_0}{c} (\eta - \sin \eta). \quad (103,10)$$

აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ როცა $\eta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ α ნულის ტოლი ხდება, ხოლო ρ —უსასრულობის. მაგრამ, როცა $\rho \rightarrow \infty$, წნევაც დიდი ხდება და ამიტომ მეტრიკის გამოკვლევისათვის იმ შემთხვევაში, როცა η ახლოსაა აღნიშნულ მნიშვნელობებთან, უნდა განვიხილოთ (მოცემული სიმკვრივისათვის) მოწინააღმდეგე უდიდესი შესაძლო წნევათა ზღვარული შემთხვევა. § 34¹ში ჩვენ

(103,8) განტოლების დაწერა შეიძლება უშუალოდ ნაწილაკთა რიცხვის შენახვის კანონის საფუძველზე, ვინაიდან როცა $p=0$, ρ უშუალოდ ერთეულ მოცულობაში ნაწილაკთა რიცხვის პარამორციულია, ხოლო სივრცის მოცულობა არაპარამორციულია α^3 -სა.

უნახეთ, რომ ეს მაქსიმალური წნევა ტოლია $p = \rho c^2/3$. მაშინ (103,6), (103,7) და (103,3) ფორმულები გვაძლევენ

$$\rho \alpha^4 = \text{const}^1, \quad \alpha = \alpha'_0 \sin \eta, \quad \tau = \frac{\alpha'_0}{c} (1 - \cos \eta), \quad (103,11)$$

სადაც α'_0 სხვა მუდმივია. ეს ამოხსნაც გვაძლევს $\alpha = 0$, $\rho = \infty$, როცა $\eta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ამგვარად, η -ს ამ მნიშვნელობებისათვის მეტრიკას მართლაც განსაკუთრებული წერტილი აქვს, ხოლო სიმკვრივე უსასრულობა ხდება. ამიტომ η -ს მნიშვნელობები მხოლოდ 0-ან 2π მდე ინტერვალში უნდა განვიხილოთ (ან, რაც იგივეა, 2π -დან 4π -მდე ინტერვალში და ა. შ.), და ფიზიკური აზრი არა აქვს მეტრიკის ანალიზურ გაგრძელებას აღნიშნული ინტერვალის საზღვრებს გარეთ.

გადავიდეთ ახლა უარყოფითი სიმრუდის სივრცის შესწავლაზე. (102,12)-ის თანახმად (103,4)-ის ნაცვლად ახლა გვაქვს:

$$ds^2 = [\alpha(\eta)]^2 (d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sh}^2 \chi (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)) \quad (103,12)$$

ეს გამოსახულება ფორმალურად (103,4)-დან შეიძლება მივიღოთ, თუ η , χ , α სიდიდეებს შესაბამისად $i\eta$, $i\chi$ და $i\alpha$ სიდიდეებით შევცვლით. ამიტომ ველის განტოლებები შეიძლება ამავე ჩანმის გზით მივიღოთ (103,5) და (103,6) განტოლებებიდან

$$\rho c^2 = \frac{3}{\alpha^4} (\alpha'^2 - \alpha^2), \quad 3 \ln \alpha = - \int \frac{c^2 d\rho}{\rho c^2 + p} + \text{const.}, \quad (103,13)$$

ხოლო (103,7)-ის ნაცვლად ახლა გვაქვს

$$\eta = \pm \int \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{\frac{\rho c^2 \alpha^2}{3} - 1}}. \quad (103,14)$$

შცირე წნევებისათვის, თუ დაუშვებთ რომ $\rho = 0$, აქედან ვიპოვით:

$$\rho \alpha^3 = \text{const.}, \quad \alpha = \alpha_0 (ch\eta - 1), \quad \tau = \frac{\alpha_0}{c} (sh\eta - \eta). \quad (103,15)$$

(103,8—10) ამოხსნისაგან განსხვავებით, α ნული ხდება (ხოლო ρ უსასრულობა) η -ს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისათვის, სახელდობრ, როცა $\eta = 0$. $\eta = 0$ მახლობლად ეს ამოხსნა არ გამოდგება, და ამ არეში მეტრიკის გამოკვლევისათვის ისევ დაუშვებთ $p = \frac{1}{3} \rho c^2$. ამის შედეგად ჩვენ ვპოულობთ

$$\rho \alpha^4 = \text{const}, \quad \alpha = \alpha'_0 \text{ sh } \eta, \quad \tau = \frac{\alpha'_0}{c} (ch\eta - 1); \quad (103,16)$$

¹ როგორც (103,8), ეს თანაფარდობაც უშუალოდ მიიღება ρ -სა და ერთეულ მოცულობაში ნაწილაკთა რიცხვს შორის კავშირიდან, რომელიც, როცა $\rho = \frac{1}{3} \rho c^2$, (34,13) ფორმულით განისაზღვრება.

ეს ამოხსნაც გვაძლევს $\alpha=0$, $\rho=\infty$, როცა $\eta=0$. ამგვარად, უარყოფითი სიმრუდის სივრცის შემთხვევაში ყველა ფუნქცია უნდა განვიხილოთ ან $\eta>0$ მნიშვნელობებისათვის, ან მხოლოდ $\eta<0$ მნიშვნელობებისათვის.

დაბოლოს, განვიხილოთ ბრტყელი სივრცე. შესაბამ სივრცე-დროში ds -ინტერვალი შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - b(\tau)^2 (dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2).$$

სივრცული მანძილის ელემენტის წინ მდგომი დროზე დამოკიდებული მამრავლი, ცხადია, არ ცვლის სივრცული მეტრიკის ევკლიდურ ხასიათს, ვინაიდან მოცემული τ -თვის ეს მამრავლი მუდმივია და კოორდინატთა მარტივი გარდაქმნით ერთის ტოლი შეიძლება გაგხადოთ. თუ τ -ს ნაცვლად, $cd\tau = b d\eta$ თანაფარდობის თანახმად, ისევ η სიდიდეს შემოვიტანთ, გვექნება

$$ds^2 = b(\eta)^2 (d\eta^2 - dr^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - r^2 d\theta^2); \quad (103,17)$$

ველის (96,3) და (96,7) ზოგადი განტოლებანი გვაძლევს

$$\kappa \rho c^2 = \frac{3b^2}{b^1}, \quad 3 \ln b = - \int \frac{c^2 d\rho}{\rho + \rho c^2} + \text{const}, \quad (103,18)$$

საიდანაც

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{\kappa}} \int \frac{d\rho}{b^2 \sqrt{\rho c^2}}. \quad (103,19)$$

იმ შემთხვევისათვის, როცა $p=0$, ვპოულობთ

$$\rho b^3 = \text{const}, \quad b = b_0 \eta^2, \quad \tau = \frac{b_0}{c} \frac{\eta^3}{3}, \quad (103,20)$$

ხოლო, როცა $p = \frac{1}{3} \rho c^2$:

$$\rho b^4 = \text{const.}, \quad b = b'_0 \eta, \quad \tau = \frac{b'_0}{c} \frac{\eta^2}{2}. \quad (103,21)$$

ამგვარად, ამ შემთხვევაშიაც მეტრიკას განსაკუთრებული წერტილი აქვს, როცა $\eta=0$.

მაგრამ მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ მხოლოდ ველის განტოლებათა უფრო სრულ გამოკვლევას არაიზოტროპული სივრცის ზოგად შემთხვევაში შეუძლია გასცეს პასუხი კითხვაზე იმის შესახებ, თუ რამდენად შეესაბამება რეალურ სინამდვილეს ზემოაღნიშნულ ამოხსნათა აღნიშნული ზოგადი თვისება, და რომ იგი არ წარმოადგენს იზოტროპული მოდელის სპეციალურ თვისებას, რომელსაც ადგილი არა აქვს უფრო ზოგადი დაშვებითა შემთხვევაში.

მანძილი რაიმე წერტილიდან, რომელიც კოორდინატთა სათავედ არის აჩვენებული, რომელიც მეორე წერტილამდე $\alpha\chi$ -ს ტოლია (ხოლო ბრტყელ სივრცეში—შესაბამისად br -ის).

ეს მანძილი დროის განმავლობაში იცვლება. ამ ცვლილების სიჩქარე ტოლია

$$V = \frac{d\alpha\chi}{d\tau} = \chi \dot{\alpha} \frac{d\eta}{d\tau} = \chi \frac{c\dot{\alpha}}{\alpha},$$

ე. ი. პროპორციულია დამკვირვებლიდან დაკვირვების წერტილამდე მანძილისა. სიჩქარის შეფარდება მანძილთან, რომელსაც ჩვენ δ -თი აღვნიშნავთ, ტოლია

$$\delta = \frac{V}{\alpha\chi} = c \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}. \quad (103,22)$$

შესამჩნევ მნიშვნელობას V სიჩქარე მხოლოდ მეტად დიდი მანძილისათვის მიიღწევს. ასტრონომიულად ეს ეფექტი იმას იძლევა, რომ გალაქტიკის გარეთ მყოფ ნისლეებს დედამიწის მიმართ უნდა ჰქონდეთ დიდი რადიალური სიჩქარე, რომელიც, მართლაც, მათი დედამიწიდან დაშორების პროპორციულია. ამჟამად α -თვის გაზომვები გვაძლევს მიახლოებითს მნიშვნელობას $\delta = 1.810 \cdot 10^{-17}$ სექ⁻¹. ყველა ნისლეთის სიჩქარე V დადებითია, ე. ი. ისინი ერთიმეორეს შორდებიან. V -ს დადებითობიდან გამომდინარეობს, რომ $\dot{\alpha} > 0$. ეს ნიშნავს, რომ ამჟამად η -ს მნიშვნელობა 0-სა და π -ს შორის იმყოფება, თუ სივრცეს დადებითი სიმრუდე აქვს და $\eta > 0$, თუ სიმრუდე უარყოფითია.

დაეწეროთ ფორმულები, რომლებიც η -ს და α -ს აკავშირებენ δ და ρ გასაზომ ასტრონომიულ სიდიდეებთან. დადებითი სიმრუდის სივრცისათვის (103,5)-დან გვაქვს

$$\frac{\chi\rho c^2}{3} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\delta^2}{c^2}, \quad (103,23)$$

ხოლო (103,9) და (103,10)-დან

$$\delta = \frac{c \cdot \sin \eta}{\alpha_0(1 - \cos \eta)^2} = \frac{c}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}.$$

ამ ორი განტოლების კომბინაციით ვპოულობთ

$$\cos \frac{\eta}{2} = \frac{\delta}{c} \sqrt{\frac{3}{\chi\rho c^2}}. \quad (103,24)$$

უარყოფითი სიმრუდის სივრცისათვის ანალოგიურად ვპოულობთ

$$\frac{\chi\rho}{3} = \frac{\delta^2}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2}, \quad (103,25)$$

$$\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} = \frac{\delta}{c} \sqrt{\frac{3}{\chi\rho c^2}}. \quad (103,26)$$

(103,23) და (103,25) ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ დავადგინოთ სივრცის სიმრუდის ნიშანი, თუ ρ -ს და θ -ს მნიშვნელობებიც ცნობილია. სახელ-
 ლობრ, სიმრუდე დადებითი ან უარყოფითი იმის მიხედვით, დადებითია თუ
 უარყოფითი სხვაობა $\frac{\chi \rho c^2}{3} - \frac{\theta^2}{c^2}$. იგი ნულის ტოლი ხდება, როცა

$$\rho = \frac{\theta^2}{\chi c^4} = 0.10^{-18} \text{ გრ/სმ}^2. \text{ ამჟამად არსებული } \rho\text{-ს გაზომვები მცირე სიზუს-}$$

ტისაა. ისინი ρ -თვის გვაძლევენ 10^{-30} გრ/სმ². რიგის მნიშვნელობას. θ -ს ზემო-
 მოყვანილ მნიშვნელობასთან ერთად ეს გვაძლევს $\frac{\chi \rho c^2}{3} - \frac{\theta^2}{c^2} > 0$, ამასთანავე

$\alpha = 17 \cdot 10^{27} \text{ სმ.} = 1,8 \cdot 10^9$ სინათლის წელს. ამგვარად, ამჟამად არსებული მონა-
 ცემები საფუძველს გვაძლევენ ვიფიქროთ, რომ სივრცე უსასრულოა და მას-
 უარყოფითი სიმრუდე აქვს.

§ 104. სინათლის გავრცელება

განვიხილოთ სინათლის სხივთა გავრცელება იზოტროპულ სივრცეში. ამი-
 სათვის დავწეროთ (92,10) ეიკონალის განტოლება:

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0.$$

ის წერტილი, რომლიდანაც სინათლის სხივი გამოდის, χ , θ , φ კოორდი-
 ნატთა სათავედ ავირჩიოთ. სიმეტრიის მოსაზრებებიდან, ცხადია, რომ სინათ-
 ლის სხივები გავრცელდებიან $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ ხაზების გასწვრივ, ე. ი.
 სხივის გასწვრივ მხოლოდ X კოორდინატი იცვლება. ამიტომ ψ ეიკონალი მხო-
 ლოდ სივრცული χ კოორდინატის და დროული η კოორდინატის ფუნქციას წარ-
 მოადგენს. (103,4)-დან ან (103,2)-დან g^{ik} -ს დახმარებით, ეიკონალისათვის ახლა
 ეპოულობთ მარტივი სახის განტოლებას

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \chi}\right)^2, \quad (104,1)$$

რომელსაც ადგილი აქვს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი სიმრუდის
 სივრცეში.

ამ განტოლების სრული ინტეგრალი არის

$$\psi = \beta(\chi \pm \eta) + \text{const}, \quad (104,2)$$

სადაც β მუდმივია. ჩვენ აქ (—) ნიშანს ავირჩევთ, რაც სხივის კოორდი-
 ნატთა სათავიდან გავრცელებას შეესაბამება. ისევე როგორც ჰამილტონ-იაკო-
 ბის განტოლების ამოხსნას, ამ განტოლების ამოხსნასაც ჩვენ მივიღებთ ψ -ს β
 პარამეტრით წარმოებულის მუდმივთან გატოლებით. ეს გვაძლევს

$$\chi = \eta + \text{const}, \quad (104,3)$$

რითაც სინათლის სხივთა გავრცელება განისაზღვრება. აქედან და წინა პარაგრაფის ფორმულების დახმარებით, სხივების მიერ გავლილი მანძილი $\alpha\chi$ შეიძლება τ დროს ფუნქციის სახით გამოვსახოთ.

დადებითი სიმოულის სივრცეში სხივის „სივრცის გარშემო“ შემოვლას და გამოსავალ წერტილში დაბრუნებას უნდა შეესაბამებოდეს χ -ს ცვლილება 0-დან 2π -მდე (იხ. § 102) · (104,3)-დან ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში η -ც უნდა შეცვლილიყო 2π სიდიდით, რაც შეუძლებელია (მხოლოდ ერთი შემთხვევის გამოკლებით, როცა სხივი გამოდის $\eta = 0$ მომენტში). ამგვარად, „სივრცის გარშემო“ შემოვლის შემდეგ სხივს ვერ შესძლებოდა გამოსავალ წერტილში დაბრუნება.

სინათლის ω სიხშირეს ვიპოვიით ეიკონალის დიფერენცირებით დროთი

$$\omega = - \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = - \frac{c \psi}{\alpha},$$

ან, თუ ψ -თვის (104,2) გამოსახულებას ჩავსვამთ:

$$\omega = \frac{\beta c}{\alpha}.$$

ამგვარად, სინათლის სხივის გავრცელების დროს მის გასწვრივ მუდმივია ნამრავლი

$$\omega \alpha = \text{const.} \quad (104,4)$$

ვთქვათ, η მომენტში ჩვენ ვაკვირდებით ნისლეთვის მიერ გამოშვებულ სხივს. ვთქვათ, ეს ნისლეტი იმყოფება მანძილზე, რომელიც χ კოორდინატის გარკვეულ მნიშვნელობას შეესაბამება. ნისლეთვის მიერ ამ სხივის გამოშვების მომენტს, (104,2)-ის თანახმად, η კოორდინატის $\eta - \chi$ მნიშვნელობა შეესაბამება. თუ ω , სინათლის სიხშირეა მისი გამოშვების მომენტში, მაშინ ჩვენ მიერ დამზერილი ω სიხშირე (104,4)-ის თანახმად ტოლია:

$$\omega = \omega_0 \frac{\alpha(\eta - \chi)}{\alpha(\eta)}, \quad (104,5)$$

ვინაიდან, როგორც წინა პარაგრაფში მიეთითეთ, $\alpha(\eta)$ η -ს ზრდად ფუნქციას წარმოადგენს, ამიტომ $\omega < \omega_0$, ე. ი. ხდება სინათლის სიხშირის წანაცვლება სპექტრის წითელ მხარეზე.

ეს მოვლენა არსებითად დოპლერის ეფექტს წარმოადგენს, რომელიც ნისლეთთა ურთიერთ დაშორებით არის გამოწვეული. უარყოფითი სიძრულის სივრცეში (104,5) და (103,15)-დან, მიახლოებით, როცა $\eta \gg 1$, გვაქვს

$$\omega = \omega_0 \exp(-\chi). \quad (104,6)$$

შემდეგ, განვსაზღვროთ სინათლის J ინტენსივობა, რომელიც χ მანძილზე მყოფი ნისლეთიდან ჩვენამდე მოდის. სინათლის ენერგიის ნაკადი დროის ერთეულში, სინათლის წყაროდან $\alpha\chi$ მანძილზე მყოფი ზედაპირის ერთეულში უქუპროპორციულია $\alpha\chi$ რადუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობისა, რომელიც

(უარყოფითი სიმრუდის სივრცეში) ტოლია $4\pi\alpha^2\text{sh}^2\chi$ (იხ. § 102). შემდეგ, დამკვირვებელი სინათლის ინტენსივობას განსაზღვრავს როგორც ენერჯიის ნაკადს საკუთარი დროის ერთეულში, რომლის ინტერვალი $d\tau = \frac{\alpha(\eta)}{c} d\eta$ იც-

ვლება η -თან ერთად. ვინაიდან ინტენსივობა ამ ინტერვალის ხანგრძლივობის უკუპროპორციულია, ხოლო წყაროდან დამკვირვებლამდე სინათლის გავრცელების დროს განმავლობაში α იცვლება $\alpha(\eta-\chi)$ -დან $\alpha(\eta)$ -მდე, ამიტომ J -ში გვექნება მამრავლი $\frac{\alpha(\eta-x)}{\alpha(\eta)}$. დაბოლოს, მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ

დამკვირვებლის მიერ მოცემულ ადგილზე გაზომილი ენერჯია არის მოქმედების წარმოებული საკუთარი დროის მიხედვით. მაგრამ დროზე დამოუკიდებელია არა $\frac{\partial S}{\partial \tau}$ წარმოებული, არამედ წარმოებული $\frac{\partial S}{\partial \eta}$, რაც უშუალოდ იქიდან გამომდინ-

ნარეობს, რომ ჰამილტონ-იაკობის განტოლება, რომელსაც (104,1)-ის ანალოგიური სახე აქვს, η -ს არ შეიცავს. ვინაიდან $\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{c}{\alpha} \frac{\partial S}{\partial \eta}$, ამიტომ ენერჯია $\alpha(\eta)$ -ის უკუპროპორციულია. ეს J -ში გამოიწვევს კიდევ ერთ მამრავლს $\frac{\alpha(\eta-x)}{\alpha(\eta)}$. ამის შედეგად ინტენსივობას საბოლოოდ ვლბებულობთ სახით:

$$J = \text{const.} \frac{\alpha^2(\eta-\chi)}{\alpha^4(\eta)\text{sh}^2\chi} \quad (104,7)$$

ასტრონომიულად ნისლეთამდე მანძილი ხშირად სწორედ მათი ხილული სიკაშკაშის მიხედვით იზომება (ამასთანავე გულისხმობენ, რომ გალაქტიკის გარეთ მყოფი ნისლეთათვის აბსოლუტური სიკაშკაშე ერთიდაიგივეა). ეს „ასტრონომიული მანძილი“ R დაკავშირებულია J -თან თანაფარდობით $J = \text{const}/R^2$ და, მაშასადამე, R -თვის (104,7)-დან ჩვენ გვაქვს

$$R = \frac{\alpha^2(\eta)\text{sh}\chi}{\alpha(\eta-\chi)} \quad (104,8)$$

(შედარებით მცირე χ -ს შემთხვევაში R ტოლია $\alpha\chi$ -სი, ე. ი. კეშმარიტი მანძილისა). უარყოფითი სიმრუდის სივრცეში, როცა $\eta \gg 1$, ეს, დაახლოებით გვაძლევს

$$R = \frac{\alpha}{2} (e^2\chi - 1). \quad (104,9)$$

დასასრულს, განკაზღვროთ ნისლეთთა dN რიცხვი, რომლებიც R და $R+dR$ „მანძილებს“ შორის იმყოფებიან. ვინაიდან მიღებულია, რომ სივრცეში ნისლეთთა განაწილება თანაბარია, ამიტომ მათი რიცხვი მოცულობის მოცემულ ელემენტში ამ ელემენტის სიდიდის პროპორციულია; ამასთანავე, რამ-

დენდაც ჩვენ „საკუთარი“ ათვის სისტემით ვსარგებლობთ, იგი უ-ზე არის დაპოკიდებული. ამგვარად,

$$dN = \text{const. } sh^2 \chi d\chi. \quad (104,10)$$

თუ χ -ს R-ით გამოვსახავთ, ჩვენ აქედან შეიძლება მივიღოთ ნისლეტთა განაწილება მათი სიკაშკაშის მიხედვით.

§ 105 ზოგადი ფართობითობის თეორიის თერმოდინამიკა

ზოგადი ფართობითობის თეორია ძირფესვიანად ცვლის თერმოდინამიკის მსოფლიოსაღმე როგორც მთლიანის მიმართ გამოყენების შედეგებს.

მე-19-ე პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, რომ სრული 4—იმპულსის შენახვის კანონით, ზოგად ფართობითობის თეორიაში იგივობის ხასიათს ღებულობს. კერძოდ, სრული 4—იმპულსი P_i მთელ სივრცეში ნულის ტოლია. ეს უშუალოდ გამოდის 4—იმპულსის (97,11) გამოსახულებიდან, რომელსაც ზედაპირული ინტეგრალის სახე აქვს: $P_i = \frac{1}{c} \int h^0_{, \alpha} d^3 f_{\alpha}$. მართლაც, სასრულო სივრცეში (ე. ი. და-

დგბითი სიმრუდის სივრცეში) ყოველი ჩაკეტილი ზედაპირი ორივე თავისი გვერდით მოცულობის სასრულო არეს შემოფარგლავს. ამიტომ აღნიშნული ინტეგრალი ტოლია სრული 4—იმპულსისა, რომელიც იმყოფება ზედაპირის ე-თ მხარეს მოთავსებულ სივრცეში, და იმავე დროს იგი ტოლია შებრუნებული ნიშნით აღებული 4—იმპულსისა ზედაპირის მეორე მხარეზე მყოფ სივრცეში. ამგვარად, სრული იმპულსი მთელ სივრცეში ნულის ტოლია.

უსასრულო სივრცის შემთხვევაში (უარყოფითი სიმრუდით), ცხადია, აზრი არა აქვს მთელ სივრცეში სრულ 4—იმპულსზე ლაპარაკს, და ამის ნაცვლად უნდა განვიხილოთ, მაგალითად, ერთეული მოცულობის 4—იმპულსი, ე. ი. სივრცის რაიმე უბნის 4—იმპულსის ამ უბნის მოცულობასთან შეფარდების ზღვარი, როცა ეს უბანი უსასრულოდ იზრდება. მაგრამ გრაეიტაციული ველი, ე. ი. $g_{\alpha\beta}$ და $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, და მაშასადამე, h^{α}_{β} -იც მთელ სივრცეში სასრულოა. ამიტომ, სივრცის არეს ვადილებისას ინტეგრალი $\frac{1}{c} \int h^0_{, \alpha} d^3 f_{\alpha}$, საზოგადოდ, ისევე იზრდება, როგორც ამ არის შემომფარგვლელი ზედაპირი, ე. ი. მის მოცულობაზე უფრო ნელა. მათი შეფარდება, ე. ი. ერთეული მოცულობის შესაბამის 4—იმპულსი, მაშასადამე, მიისწრაფის ნულისკენ.

ამგვარად, მთელ სივრცეში სრული 4—იმპულსის შენახვის კანონი შესრულებულია იგივეურად და დაკვანილია იმაზე, რომ ნული ყოველთვის ნულის ტოლია.

არა რელატიურ თერმოდინამიკაში ყოველი ჩაკეტილი სისტემის ენტროპია მონოტონურად იზრდება და საკმაოდ დროს შეუალედის შემდეგ თავის მაქსიმუმს აღწევს, რომელიც თერმოდინამიკური წონასწორობის მდგომარეობას შეესაბამება. ეს მნიშვნელობა მაქსიმალურია იმათ შორის, რომელიც ენტრო-

პიას შეიძლება ჰქონდეს სისტემის იმპულსის და ენერჯის მოცემული მუდმივი მნიშვნელობების დროს.

მსოფლიოს, როგორც მთლიანის, მიმართ გამოყენების დროს ეს კანონი არა რელატიურ მექანიკაში ცნობილ სიძნელეებს ქმნის; იგი მსოფლიოს ეგრედწოდებულ „სითბურ სიკვდილს“ იძლევა.

რელატიურ თერმოდინამიკაში ჩაკეტილი სისტემის ენტროპიის მონოტონური ზრდის კანონს წინანდებურად აქვს ადგილი, მაგრამ იმის მტკიცება, რომ ამ ზრდის დროს ენტროპია ბოლოს და ბოლოს მიიღებს მოცემული იმპულსისა და ენერჯის პირობებში შესაძლო უდიდეს მნიშვნელობას, ახლა აზრს კარგავს, როდესაც ჩვენ მას ვიყენებთ მსოფლიოს, როგორც მთლიანის მიმართ. ამგვარად, მსოფლიოს ენტროპია სისტემატურად იზრდება, მაგრამ უიმიოდ, რომ მსოფლიო გადადიოდეს რომელიმე ისეთ წონასწორობის მდგომარეობაში, რომელსაც მაქსიმალური ენტროპია შეესაბამება.



ს ს რ ჩ ე მ ი

83

თავი I. ფარდობითობის პრინციპი 3

§ 1. ურთიერთმოქმედებათა გავრცელების სიჩქარე (3). § 2. ინტერვალ (5).
§ 3. საკუთარი დრო (12). § 4. ლორენცის გარდაქმნა (14). § 5. სიჩქარის გარდა-
ქმნა (15). § 6. ოთხგანზომილებიანი ვექტორები (20). § 7. ოთხგანზომილებიანი
სიჩქარე და აჩქარება (26). 319.

თავი II. რელატივისტური მექანიკა 28

§ 8. ელემენტარული ნაწილაკები ფარდობითობის თეორიაში (28). § 9. უმცირესი
რესი მოქმედების პრინციპი (29). § 10. ენერგია და იმპულსი (31). § 11. მასის დე-
ფექტი (36). § 12. შეჯახებანი (38). § 13. იმპულსის მომენტი (42).

თავი III. მუხტი ველში 45

§ 14. ველის ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი (45). § 15. ველში მუხტის
მოძრაობის განტოლებანი (47). § 16. გრადიენტულ ენერჯიანტობა (50). § 17. უდ-
მივი ელექტრომაგნიტური ველი (52). § 18. მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან ელექ-
ტრულ ველში (54). § 19. მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში (56).
§ 20. მუხტის მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან ელექტრულ და მაგნიტურ ვე-
ლში (58). § 21. ელექტრომაგნიტური ველის თენზორი (60). § 22. ლორენცის
გარდაქმნები ველისათვის (63). § 23. აბელიტონ-იაკობის განმარტება ველში მოთაგ-
სებული მუხტისათვის (65). § 24. დროს იზოტროპულობა (68). § 25. ველის ინვა-
რიანტები (69).

თავი IV. ველის განტოლებანი 72

§ 26. მაქსველის განტოლებათა პირველი წყვილი (72). § 27. მოქმედება
ელექტრომაგნიტური ველისათვის (74). § 28. დენის ოთხგანზომილებიანი ვექ-
ტორი (77). § 29. უწყვეტობის განტოლება (80). § 30. მაქსველის განტოლებათა
მეორე წყვილი (83). § 31. ენერჯიის სიმკვრივე და პოინტინგის ვექტორი (86).
§ 32. ენერგია-იმპულსის თენზორი (88). § 33. ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯია-
იმპულსის თენზორი (92). § 34. მიკროსკოპულ სხეულთა ენერგია-იმპულსის თენ-
ზორი (96). § 35. მაკროსკოპული მოძრაობა (100).

თავი V. მუდმივი ველს 104

§ 36. კულონის კანონი (104). § 37. მუხტების ელექტრო-სტატიკური ენერგია (105). § 38. თანაბრად შიდა მუხტის ველი (108). § 39. მოძრაობა კულონის ველში (109). § 40. დიპოლური მომენტი (111). § 41. მულტიპლეტური მომენტი (113). § 42. მუხტების სისტემა გარეშე ველში (115). § 43. მუდმივი მაგნიტური ველი (116). § 44. მაგნიტური მომენტი (119)

თავი VI. ელექტრო-მაგნიტური ტალღები 122

§ 45. დალამბერის განტოლება (122). § 46. ბრტყელი ტალღები (124). § 47. მონოკრომატული ბრტყელი ტალღა (126). § 48. პოლარიზაცია (129). § 49. სპერსული დაშლა (130). § 50. ნაწილობრივ დაპოლარებული სინათლე (132). § 51. ელექტრო სტატიკური ველის დაშლა (136). § 52. ველის სკუთარი რხევები (137). § 53. შავი გამოსხივება (141).

თავი VII. სინათლის გავრცელება 143

§ 54. გეომეტრიული ოპტიკა (143). § 55. ინტენსივობა (147). § 56. კუთხური ეიკონალი (148). § 57. სხივთა ვიწრო კონები (151). § 58. ასახვები სხივების განიერი კონებით (157). § 59. ინტერფერენცია (159). § 60. გეომეტრიული ოპტიკის საზღვრები (161). § 61. დიფრაქცია (163). § 62. ფრენელის დიფრაქცია (166). § 63. ფრაუნჰოფერის დიფრაქცია (170).

თავი VIII. მოძრავი მუხტების ველი 176

§ 64. დავიანებული პოტენციალები (176). § 65. ლაგრანჟის ფუნქცია მეორე რიგის წევრებამდე სიზუსტით (182). § 66. მუხტთა სისტემის ველი შორ მანძილზე (187). § 67. დიპოლური გამოსხივება (188). § 68. კვადრუპოლური და მაგნიტური დიპოლური გამოსხივება (194). § 69. გამოსხივება მახლობელ მანძილზე (197). § 70. სწრაფად მოძრავი მუხტის გამოსხივება (198). § 71. დაჯახებების დროს მცირე სიხშირეთა გამოსხივება (200). § 72. გამოსხივებით დამუხრუჭება (203). § 73. თავისუფალი მუხტებით გაბნევა (207). § 74. დიდი სიხშირის ტალღათა გაბნევა (211). § 75. მცირე სიხშირის ტალღათა გაბნევა (214).

თავი IX. ნაწილაკი გრავიტაციულ ველში 217

§ 76. გრავიტაციული ველები არარელატიურ მექანიკაში (217). § 77. გრავიტაციული ველი რელატიურ მექანიკაში (219). § 78. მრუდხაზოვანი კოორდინატები (222). § 79. მანძილები და დროს შუალედები (229). § 80. კოვარიანტული გადიფერენციალება (233). § 81. კრისტოფელის სიმბოლოთა კავშირი მეტრიკულ ტენზორთან (238). § 82. ნაწილაკის მოძრაობა გრავიტაციულ ველში (241). § 83. ზღერული გადასვლა (244). § 84. ელექტროდინამიკის განტოლებანი გრავიტაციული ველის არსებობის დროს (245). § 85. მუდმივი გრავიტაციული ველი (247). § 86. ბრუნვა (253).

თავი X. გრაფიტაციული ველის განტოლებანი 256

§ 87. სიმრუდის ტენზორი (256). § 88. სიმრუდის ტენზორის თვისებები (259).
 § 89. მოკმეულება გრაფიტაციული ველისათვის (262). § 90. ენერგია-იმპულსის ტენ-
 ზორი (265). § 91. გრაფიტაციული ველის განტოლებანი (268). § 92. ნიუტონის
 კანონი (272). § 93. ცენტრალური სიმეტრიის გრაფიტაციული ველი (275). § 94. ცენტ-
 რალური სიმეტრიის გრაფიტაციული ველი სიყარველში (279). § 95. მოძრაობა
 ცენტრალური სიმეტრიის გრაფიტაციულ ველში (281). § 96. ველის განტოლებანი
 „საკუთარ“ ათვლის სისტემაში (285). § 97. ენერგია-იმპულსის ფსევდოტენ-
 ზორი (287). § 98. გრაფიტაციული ტალღები (293). § 99. გრაფიტაციული ტალ-
 ლების გამოსხივება (296). § 100. ერთგვაროვან ხუთგანზომილებიან კოორდინა-
 ტებში ველის განტოლებათა ფორმულება (300). § 101. მიზიდულობის ნიუტონის
 თეორიის სიძნელეები (309). § 102. იზოტროპული სივრცე (309). § 103. იზოტრო-
 პული სამყაროს სივრცულ-დროული მეტრიკა (313). § 104. სინათლის გავრცელება
 (319). § 105. ზოგადი ფართობითობის თეორიის თერმოდინამიკა (322).