ნ. დურგლიშვილი, ა. ბუაძე, მ. იოხავა, ო. მელაძე, ლ. ხიზვა

უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

I ნაწილი

საქართველოს სსრ სახალხო განათლების
სამინისტრომ დაამტკიცა დამხმარე
სახელმძღვანელოდ უმაღლესი
სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1989

22.11
510 (022)
დ 921

წიგნი განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი მოიცავს ვექტორული ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტებს, ერთ ცვლადის, მრავალი ცვლადისა და სკალარული არგუმენტის ვექტორულ ფუნქციებს, მეორე რიგის ზედაპირებს, დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვას, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს.

რეცენზენტები: პროფესორი ს. შათაშვილი,
დოცენტი ვ. ბალაბანოვი,
დოცენტი ა. ბენდუქიძე

1602010000—257
Д————————208—89
M—602(08)—89
ISBN—5—505—00179—3.

წინასიტყვაობა

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო („უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, I ნაწილი“) შედგენილია უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით.

კრებული შეიცავს წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტებს, ხოლო მათემატიკური ანალიზიდან მასში შევიდა ერთი და მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა, ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვა და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები.

პროგრამით გათვალისწინებული ყველა სხვა საკითხი აისახება წიგნის მეორე ნაწილში.

ყოველ პარაგრაფს უძღვის მოკლე საცნობარო მასალა და ტიპური ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები. წიგნში წინა პლანზეა წამოწეული რიცხვითი მეთოდები და მათი დაპროგრამება ალგორითმულ ენა „ფორტრანზე“, რაც მასწავლებელს საშუალებას აძლევს ბევრი მეცადინეობა ჩაატაროს ეგმ-ის გამოყენებით. ამით ამაღლდება მასალის ათვისების ხარისხი და გაღრმავდება ინტერესი მათემატიკისადმი.

კრებული დაზღვეული ვერ იქნება ხარვეზებისაგან. ავტორთა კოლექტივი სიამოვნებით მიიღებს ყველა საქმიან შენიშვნას.

I თავი

მატრიცები და დეტერმინანტები

§ 1. მატრიცების შეკრება და გამრავლება

რიცხვთა ერთობლიობას, მოთავსებულს n სტრიქონისა და m სვეტის მართკუთხა ცხრილში, მართკუთხა მატრიცა ეწოდება. იგი ასე აღინიშნება.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nm} \end{pmatrix}$$

ან მოკლედ $A = (a_{ij})$, $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$. a_{ij} რიცხვებს მატრიცის ელემენტები ეწოდება. როცა $m = n$, მაშინ მატრიცა კვადრატულია; ამ შემთხვევაში n არის მატრიცის რიგი.

კვადრატული მატრიცებიდან აღსანიშნავია:

1. დიაგონალური მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. ერთეულოვანი მატრიცა (აღინიშნება E ასოთი):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. სამკუთხა მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A მატრიცის ნამრავლი k სკალარზე განმარტებულია შემდეგი ტოლობით:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ha_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

ერთი და იგივე განზომილების A და B მატრიცების $A+B$ ჯამი არის ისეთი მესამე მატრიცა, რომლის ელემენტები უდრის მოცემული მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს.

თუ მოცემულია ორი მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

სადაც A მატრიცის სვეტების რაოდენობა უდრის B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას, მაშინ ამ მატრიცების AB ნამრავლი არის ისეთი C მატრიცა, რომლის c_{ij} ელემენტი წარმოადგენს A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის j-ური სვეტის ელემენტების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. თუ $AB=C$ და

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, p).$$

თუ A კვადრატული მატრიცაა, ხოლო E იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა, მაშინ

$$AE=EA=A.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოთვალეთ

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \overset{a_{11}}{1} & \overset{a_{12}}{1} & \overset{a_{13}}{1} \\ \overset{a_{21}}{2} & \overset{a_{22}}{0} & \overset{a_{23}}{-1} \\ \overset{a_{31}}{0} & \overset{a_{32}}{1} & \overset{a_{33}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \overset{b_{11}}{0} & \overset{b_{12}}{5} & \overset{b_{13}}{3} \\ \overset{b_{21}}{2} & \overset{b_{22}}{4} & \overset{b_{23}}{1} \\ \overset{b_{31}}{3} & \overset{b_{32}}{2} & \overset{b_{33}}{6} \end{pmatrix}$$

მატრიცათა ნამრავლი. გვაქვს

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 1.0+1.2+1.3 & 1.5+1.4+1.2 & 1.3+1.1+1.6 \\ 2.0+0.2+(-1).3 & 2.5+0.4+(-1).2 & 2.3+0.1+(-1)\,6 \\ 0.0+1.2+2.3 & 0.5+1.4+2.2 & 0.3+1.1+2.6 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ -3 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

ორი მატრიცის ნამრავლი, როგორც წესი, არაკომუტატიურია. **AB** და **BA** ნამრავლები ყოველთვის არაა ერთმანეთის ტოლი; შეიძლება ისიც მოხდეს, რომ ერთ-ერთ ნამრავლს აზრი არ ჰქონდეს, იმ დროს როდესაც მეორეს აზრი აქვს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, გვაქვს

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.2+0.1 & 1.3+0.2\\ 2.2+1.1 & 2.3+1.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

მაშინ, როდესაც

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.1+3.2 & 2.0+3.1\\ 1.1+2.2 & 1.0+2.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

მაშასადამე, $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. თუ

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\quad \text{და}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

მაშინ

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}19 & 13 & 7\\ 46 & 31 & 19\end{pmatrix};$$

იმ დროს, როდესაც **BA** ნამრავლი განსაზღვრული არ არის, რადგან **B** მატრიცის სვეტების რიცხვი არ უდრის **A** მატრიცის სტრიქონების რიცხვს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია მრავალწევრი $p(x)=x^2-5x+6$ და მატრიცა

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ $p(A)$.

▷. ჯერ ვიპოვოთ $\mathbf{A}^2$:

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix},$$

ე. ი.

$$p(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2-5\mathbf{A}+6\mathbf{E}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -9\\ -6 & -8\end{pmatrix}.$$

სავარჯიშოები:

1. $k=4, \quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, იპოვეთ kA.

2. $k=-2, \; A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, იპოვეთ kA.

იპოვეთ $A+B$, თუ:

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **4.** $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

იპოვეთ $A-B$, თუ:

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 4 & -5 & 6\end{pmatrix}$.

იპოვეთ AB ნამრავლი, თუ:

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$. **10.** $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}$. **12.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

იპოვეთ AB და BA ნამრავლები, თუ:

13. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix}$. **14.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad B=(3 \quad 4 \quad 1 \quad 5)$.

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}, \quad AB=?$

17. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 4\\ 1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$, $AB=?$

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 5 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & 4 & -1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $AB=?$

19. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $AB=?$

20. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $AE=?$ $EA=?$

21. $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$, $AB=?$, $BA=?$

22. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $AB=?$ $BA=?$

23. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 9 & -10\\ -3 & 3 & 6\\ 7 & -21 & 28\end{pmatrix}$, $AB=?$, $BA=?$

24. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$, $AB=?$, $BA=?$

25. $A=(1\ \ 2)$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $(AB)C=?$ $A(BC)=?$

26. $A=(1\ \ 2)$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 7\end{pmatrix}$, $A(B+C)=?$ $AB+AC=?$

დაამტკიცეთ, რომ:

27. $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$;

28. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\rho)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$

29. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} d_1 & a_{12} d_2 & \cdots & a_{1n} d_n \\ a_{21} d_1 & a_{22} d_2 & \cdots & a_{2n} d_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} d_1 & a_{m2} d_2 & \cdots & a_{mn} d_n \end{pmatrix}.$$

30. $$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \cdots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \cdots & d_2 a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_m a_{m1} & d_m a_{m2} & \cdots & d_m a_{mn} \end{pmatrix};$$

31. $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

32. $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix};$$

33. $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \wedge \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} - \mathbf{BA} =$$
$$= \begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix};$$

34. $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \wedge \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA};$$

§ 2. დეტერმინანტები

მეორე რიგის $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ მატრიცის შესაბამისი მეორე რიგის დეტერმინანტი აღინიშნება სიმბოლოთი $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ან $\det A$ და განისაზღვრება ტოლობით;

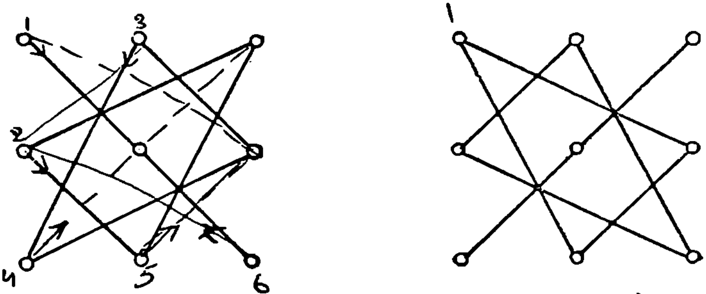
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

მესამე რიგის $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ მატრიცის შესაბამისი მესამე რიგის დეტერმინანტი აღინიშნება სიმბოლოთი $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ და განისაზღვრება ტოლობით;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

ეს გამოსახულება ამავეე დროს მიუთითებს მე-3 რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის წესზე, რომლის შინაარსი გადმოცემულია ა) და ბ) სქემებზე (ნახ. 1).



ა (+) (–) ბ

ნახ. 1

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

სქემების გამოყენებით მივიღებთ:

$$1\cdot(-1)\cdot(-2) = 2 \qquad 6\cdot(-1)\cdot 3 = -18$$
$$2\cdot 5\cdot 6 = 60 \qquad 5\cdot(-7)\cdot 1 = -35$$
$$4\cdot(-7)\cdot 3 = -84 \qquad 2\cdot 4\cdot(-2) = -16$$
$$\Delta = 2 + 60 - 84 + 18 + 35 + 16 = 47$$

ინდუქციით შეიძლება განისაზღვროს n-ური რიგის დეტერმინანტი. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

თუ ამ მატრიცაში i-ურ სტრიქონს და j-ურ სვეტს ამოვშლით, მივიღებთ $n-1$ რიგის კვადრატულ მატრიცას. აღვნიშნოთ ის M_{ij}-ით. $\det M_{ij}$-ს ეწოდება A მატრიცის a_{ij} ელემენტის მინორი, ხოლო $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$-ს კი A მატრიცის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება.

განსაზღვრება. A მატრიცის დეტერმინანტი (n-ური რიგის დეტერმინანტი) ეწოდება რიცხვს

$$\det A = a_{11} A_{11} + \cdots + a_{1n} A_{1n}.$$

შენიშვნა. A კვადრატული მატრიცის a_{ij} ელემენტის მინორს (ალგებრულ დამატებას) უწოდებენ აგრეთვე $\det A$-ს a_{ij} ელემენტის მინორს (ალგებრულ დამატებას).

A მატრიცის დეტერმინანტი ასევე აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\Delta \quad \text{ან} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მაგალითი; გამოვთვალოთ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-(-2) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -220.$$

დეტერმინანტის თვისებები:

I. თვისება. დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტების მათ შესაბამ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი უდრის მოცემულ დეტერმინანტს.

II თვისება. დეტერმინანტი არ იცვლება მისი ტრანსპონირების შედეგად.

III თვისება. დეტერმინანტში ორი სტრიქონის (სვეტის) გადანაცვლება ამ დეტერმინანტის -1-ზე გამრავლების ტოლფასია.

IV თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან რომელიმე სვეტის ელემენტები ყველა ნულის ტოლია, მაშინ დეტერმინანტიც ნულია.

V თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტები შეიცავენ საერთო თანამამრავლს, ის შეიძლება გამოვიტანოთ დეტერმინანტის სიმბოლოს გარეთ.

VI თვისება. დეტერმინანტი, რომლის ორი სტრიქონი (ან სვეტი) ერთმანეთის ტოლია, უდრის ნულს.

VII თვისება. დეტერმინანტი, რომელიც შეიცავს ორ პროპორციულ სტრიქონს (სვეტს), ნულის ტოლია.

VIII თ ვ ი ს ე ბ ა. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი წარმოადგენს ორი შესაკრების ჯამს, მაშინ ეს დეტერმინანტი ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

შ ე დ ე გ ი. დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მისი რომელიმე სტრიქონის ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულთ ერთსა და იმავე რიცხვზე.

IX თ ვ ი ს ე ბ ა. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს გავამრავლებთ შესაბამისად სხვა სტრიქონის ან სვეტის ალგებრულ დამატებებზე და ამ ნამრავლებს შევკრებთ, მიღებული ჯამი ნულის ტოლი იქნება.

X თ ვ ი ს ე ბ ა. თუ **A** და **B** ერთიდაიგივე რიგის კვადრატული მატრიცებია, მაშინ

$$\det(\mathbf{A}\cdot B) = (\det \mathbf{A})\cdot(\det \mathbf{B}),$$

ე. ი. მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის თანამამრავლი მატრიცების დეტერმინანტთა ნამრავლს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავამტკიცოთ, რომ თუ დეტერმინანტის ყველა ელემენტი, რომელიც მთავარი დიაგონალიდან ერთ მხარეს მდებარეობს, ნულის ტოლია, მაშინ ეს დეტერმინანტი მთავარ დიაგონალზე მდებარე ელემენტების ნამრავლის ტოლია (ასეთ დეტერმინანტს სამკუთხა ეწოდება).

მეორე რიგის დეტერმინანტისათვის ეს დებულება ცხადია, ამიტომ მას დავამტკიცებთ ინდუქციით, ე. ი. დავუშვებთ, რომ $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტისათვის ის უკვე დამტკიცებულია და განვიხილავთ n-ური რიგის დეტერმინანტს

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ დავშლით პირველი სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ:

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ 0 & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მაგრამ მინორისათვის, რომელიც მარჯვენა ნაწილში დგას, ინდუქციური დაშვება გამოიყენება. ე. ი. ის $a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}$ ნამრავლის ტოლია, და ამიტომ

$$\Delta = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ვანდერმონდის[1] დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

VII თვისებიდან გამომდინარე შედეგის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y).$$

გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

35. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

36. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$

37. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

38. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$

39. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

40. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$

41. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

42. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

43. $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}.$

44. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}.$

45. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$

46. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$

---

[1] ა. ვანდერმონდი (1735—1796) — ფრანგი მათემატიკოსი.

47. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.

48. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

49. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

50. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 i & a_1 i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 i & a_2 i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 i & a_3 i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

51. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$.

52. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$.

53. $\begin{vmatrix} 1 & 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha \\ 1 & 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

54. $\begin{vmatrix} 1 & \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ 1 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

55. $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

56. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & \sin\beta \\ \cos^2(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$.

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

57. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

58. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

59. $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

60. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

61. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

62. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$.

63. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

64. $\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0.$

65. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

66. $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$

67. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

68. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

69. $\begin{vmatrix} 3 & z & 1 \\ z & 1-z & 1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5z & 1 \\ 3 & 2-z \end{vmatrix}$

70. $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 7 \\ \cos x & -\sin x & 9 \\ 0 & 0 & 2\cos x \end{vmatrix} = 1.$

ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

71. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$

72. $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

73. დაამტკიცეთ, რომ მეათე რიგის კვადრატული A მატრიცისათვის

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & O & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ 10^{-10} & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^{10} - 10^{-10}.$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა.

74. თუ n-ური რიგის ($n \geqslant 3$) დეტერმინანტის ელემენტებია 1 ან -1, მაშინ დაამტკიცეთ, რომ $|\Delta| \leqslant (n-1)\cdot(n-1)!$.

◁. როცა $n=3$. მაშინ აღნიშნული ტიპის ყოველი დეტერმინანტი მისი აბსოლუტური სიდიდის შეუცვლელად (როცა ის ნულის ტოლი არ არის) სტრიქონების (სვეტების) ადგილების გადანაცვლებითა და -1-ზე გამრავლებით მივიყვანოთ შემდეგ სახემდე

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \text{ ან } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

მაშასადამე, $|\Delta| \leqslant 4 = (3-1)(3-1)!$ და როცა $n=3$ დასამტკიცებელი უტოლობა ჭეშმარიტია.

ვთქვათ, ახლა დასამტკიცებელი წინადადება ჭეშმარიტია ყოველი $n-1$ რიგის დეტერმინანტისათვის და ვთქვათ Δ არის n-ური რიგის დეტერმინანტი, რომლის ელემენტებია ± 1. თუ გავშლით Δ დეტერმინანტს რომელიმე სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ;

$$|\Delta| = |\pm M_{i1} + M_{i2} \pm \cdots \pm M_{in}| \leqslant |M_{i1}| + |M_{i2}| + \cdots + |M_{in}| \leqslant$$
$$\leqslant n(n-2)(n-2)! < (n-1)(n-1)!, \text{ ვინაიდან } n(n-2) < (n-1)^2 \ ◁$$

75. იპოვეთ მესამე რიგის დეტერმინანტის უდიდესი მნიშვნელობა, რომლის ორი ელემენტი უდრის 4-ს, ხოლო დანარჩენები 1 და -1-ს.

▷ $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 25$, ვაჩვენოთ, რომ აღნიშნული თვისების მესამე რიგის დეტერმინანტი 25-ზე მეტი არ შეიძლება იყოს. მართლაც, თუ 4-იანები ერთ სტრიქონში (სვეტში) მდებარეობენ, მაშინ გავშლით რა იმ სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ, რომ აღნიშნული დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ აღემატება $4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 = 18$-ს. თუ 4-იანები მდებარეობენ განსხვავებულ სტრიქონში და სვეტში, მაშინ დეტერმინანტი უდრის წევრების ჯამს, რომელთაგან ერთის აბსოლუტური მნიშვნელობაა 6, ორის — 4, სამის — 1. თუ ერთი წევრი უდრის -16 ან -4-ს, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა ნაკლებია 25-ზე. ამიტომ წევრების გადასმით მაქსიმალური მნიშვნელობის მქონე დეტერმინანტი ღებულობს სახეს

$$\begin{vmatrix} 4 & \varepsilon & \gamma \\ -\varepsilon & 1 & \delta \\ \nu & -\delta & 4 \end{vmatrix}$$

სადაც $\varepsilon, \delta, \gamma, \nu \in \{1, +1\}$, უდიდესი მნიშვნელობა ასეთი დეტერმინანტისა ცხადია უდრის 25-ს.

76. ვთქვათ $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$.

დაამტკიცეთ, რომ $\exists c \in [0, 1] : f'(c) = 0$.

77. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{a \to 0} \left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x} (A^n - I) \right)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\triangleright \cdot A = a \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

სადაც

$$a = \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{\sqrt{n^2 + x^2}}.$$

გვაქვს:

$$A^n = a^n \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}. \quad (n \to \infty) \Rightarrow a^n \to 1, \ \sin\varphi =$$

$$= \sin\left(\frac{nx}{\sqrt{n^2 + x^2}} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sin x + 0(1), \ \cos n\varphi = \cos x + 0(1),$$

ჩსე, რომ

$$\lim_{n \to \infty} (A^n - I^n) = \begin{pmatrix} \cos x - 1 & \sin x \\ -\sin x & \cos x - 1 \end{pmatrix},$$

აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x} (A^n - I) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \ \triangleleft$$

78. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს მესამე რიგის კვადრატული A მატრიცა, რომლისთვისაც

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

79. **A** და **B** მატრიცები აკმაყოფილებენ პირობებს: $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. დაამტკიცეთ, რომ $\det(A - B)$-ს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ -1; 0; $+1$ მნიშვნელობები.

80. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $p(x)$ მრავალწევრისათვის სრულდება

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Δ. დამტკიცება ჩავატაროთ იმ შემთხვევაში, როცა $n=3$.

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{D}^2=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^2\end{pmatrix}\wedge\cdots\mathbf{D}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^k & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}.$$

ამიტომ

$$p(x)=\alpha_0+\alpha_2 x+\cdots+\alpha_k x^k\Rightarrow p(D)=\alpha_0\mathrm{E}+\alpha_1 D+\cdots+\alpha_k D^k=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_1\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_1\lambda_3\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\alpha_k\lambda_1^k & 0 & 0\\ 0 & \alpha_k\lambda_2^k & 0\\ 0 & 0 & \alpha_k\lambda_3^k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\cdots+\alpha_k\lambda_1^k & 0 & 0\\ 0 & \alpha_0+\alpha_1\lambda_2+\cdots+\alpha_k\lambda_2^k & 0\\ 0 & 0 & \alpha_0+\alpha_1\lambda_3+\cdots+\alpha_k\lambda_3^k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}p(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & p(\lambda_2) & 0\\ 0 & 0 & p(\lambda_3)\end{pmatrix}.\ \triangleleft$$

81. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ არის $p(x)=x^2-2x+2$ მრავალწევრის ფესვი.

82. $p(x)=x^3-3x$. იპოვეთ $p(\mathbf{A})$ და $p(\mathbf{B})$, თუ

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

83. დაამტკიცეთ, რომ მატრიცა

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

არის

$$p(x)=x^3-6x^2+8x-9$$

მრავალწევრის ფესვი.

§ 8. მატრიცის რანგი. შებრუნებული მატრიცა

თუ A მატრიცაში სტრიქონებს შესაბამისი სვეტებით შევცვლით, მიღებულ მატრიცს A მატრიცის ტრანსპონირებულს უწოდებენ და აღნიშნავენ სიმბოლოთი A^T.

r რიცხვს ეწოდება A მატრიცის რანგი, თუ ამ მატრიცის r-ზე მაღალი რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია, ხოლო r რიგის მინორებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. A მატრიცის რანგს აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\operatorname{rang} A$. ნულოვანი მატრიცის რანგად მიღებულია ნული. მატრიცის რანგი არ შეიცვლება, თუ მოვახდენთ შემდეგ გარდაქმნებს:

1) მატრიცის ტრანსპონირებას, ე. ი. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^{\mathrm{T}}$;

2) სტრიქონების (სვეტების) გადანაცვლებას;

3) იმ სვეტის (სტრიქონის) ამოშლას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია;

4) სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის ნულისგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლებას;

5) თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\operatorname{rang} A$.
განვიხილოთ მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ერთადერთი მეოთხე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ხოლო მესამე რიგის მინორებს შორის ერთ-ერთი:

0
+7

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

ამიტომ

$$\operatorname{rang} A = 3.$$

კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება არაგანსაკუთრებული, თუ მისი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. თუ A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, მაშინ B მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს

$$AB = BA = E$$

პირობას, ეწოდება A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა და აღინიშნება A^{-1}-ით, ე. ი.

$$A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E.$$

თუ $A = (a_{ij})$ კვადრატული მატრიცაა, ხოლო A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება, მაშინ

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა. როცა A არაგანსაკუთრებული მატრიცაა, გვაქვს:

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{|A|}.$$

მაგალითი. ვაჩვენოთ, რომ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა არის

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

მართლაც, გვაქვს

$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

მაგალითი. ვთქვათ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

შევადგინოთ შებრუნებული მატრიცა. ვინაიდან

$$|\mathbf{A}| = -1 \neq 0. \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = A_{13} = 0, \; A_{21} = A_{23} = -1, \; A_{22} = 1;$$

$$A_{31} = 1, \; A_{32} = -1, \; A_{33} = 0,$$

ამიტომ A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცაა

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

მაშასადამე A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა იქნება

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

გამოთვალეთ შემდეგი მატრიცების რანგი:

(6+16 − 9 + 6

84. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & \boxed{3} \end{pmatrix}.$

85. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

86. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$

87. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix},$

88. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

89. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

90. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$

91. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

92. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$

93. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$

94. $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$

95. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

96. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$

97. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

98. $\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ \lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}.$

99. იპოვეთ A^{-1}, თუ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

8;42;

100. იპოვეთ $\mathbf{A}^{-1}$, თუ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

101. იპოვეთ $\mathbf{A}^{-1}$, თუ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

102. იპოვეთ $\mathbf{A}^{-1}$, თუ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

§ 4. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

1. კრამერის წესი

ვთქვათ, მოცემულია n უცნობიანი n წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

რომლის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც გამოითვლება ფორმულებით

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \dots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1}$$

სადაც Δ_k ($k=1,\dots,n$) დეტერმინანტი მიიღება Δ დეტერმინანტისაგან, თუ მასში k-ურ სვეტს შევცვლით თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტით.

(1) ფორმულებს უწოდებენ კ რ ა მ ე რ ი ს ფორმულებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=5,\\ x_1+x_2-x_3=-2,\\ 3x_1+2x_2-x_3=-1. \end{cases}$$

▷. გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=3.$$

ვინაიდან სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, ამიტომ განტოლებათა სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ამ ამონახსნის საპოვნელად გამოვთვალოთ Δ_1, Δ_2 და Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_3 = 6.$$

კრამერის ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2. \lhd.$$

ამოხსენით შემდეგი სისტემები (კრამერის წესის გამოყენებით):

103. $\begin{cases} x + y + 3z = 6, \\ 5x + 4y + 3z = 22, \\ 10x + 5y + z = 23. \end{cases}$

104. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x + y - z = -2. \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

106. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$

107. $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$

108. $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 3z - 16 = 0, \\ 5y - z - 10 = 0. \end{cases}$

109. $\begin{cases} x + y - 2z = -8, \\ 3x + 2y = -6, \\ y + z = 3 \end{cases}$

110. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$

111. $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

112. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$

113. $\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9. \end{cases}$

114. $\begin{cases} 7x - 5y = 31, \\ 4x + 11z = -43, \\ 2x + 3y + 4z = -20. \end{cases}$

115. $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

116. $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$

117. $\begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 6y + z = 0. \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$

118. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$

119. $\begin{cases} ax + by + cz = a - b, \\ bx + cy + az = b - c, \\ cx + ay + bz = c - a, \end{cases}$

ერთგვაროვანი სისტემა. თუ ერთგვაროვანი

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, მაშინ სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, თუკი $\Delta = 0$, მაშინ ერთგვაროვან სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

ამოხსენით ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემები:

120. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0, \\ 5x - 7y + 8z = 0. \end{cases}$ **121.** $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$

122. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$ **123.** $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$

124. $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x - 2y + 2z = 0, \\ 3x - 3y + 3z = 0. \end{cases}$ **125.** $\begin{cases} 3x - 3y + 12z = 0, \\ 2x - 2y + 8z = 0, \\ x - y + 4z = 0. \end{cases}$

სამი ორუცნობიანი განტოლებისაგან შედგენილი

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = c_3. \end{cases}$$

სისტემა თავსებადია, თუ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

და სისტემა არ შეიცავს წყვილ-წყვილად საწინააღმდეგო განტოლებებს.

ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

126. $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 3x + y = 9, \\ x + 4y = 3. \end{cases}$ **127.** $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 2x + y = 3, \\ x - 3y = 1. \end{cases}$

128. განსაზღვრეთ, a-ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება არანულოვანი ამონახსნი შემდეგ ერთგვაროვან სისტემას:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ ax - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

129. განსაზღვრეთ, a-სა და b-ს რა მნიშვნელობებისათვის: 1) ექნება ერთადერთი ამონახსნი, 2) არ ექნება ამონახსნი, 3) ექნება უამრავი ამონახსნი განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1. \end{cases}$$

ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

130. $\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ x + 3y - z = 1, \\ 3x + 4y - z = 5. \end{cases}$

131. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ x + 3y - 2z = 2, \\ 3x + 2y + z = 5. \end{cases}$

132. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 2x - 8y + 5z = 5. \end{cases}$

133. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + 5z = 9. \end{cases}$

134. $\begin{cases} 5x + 5y + 3z = 2, \\ x - 3y + z = -1, \\ 4x - y + z = 7. \end{cases}$

გ. გაუსის მეთოდი

მოცემულია სისტემა:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

გარდავქმნათ იგი ტოლფას სისტემად ისე, რომ პირველ განტოლებაში x-ის კოეფიციენტი იყოს 1, ხოლო მეორე და მესამე განტოლებებში ეს ცვლადი სრულიად არ შედიოდეს. ამისათვის სისტემის პირველი განტოლება წევრ-წევრად გავყოთ x-ის კოეფიციენტზე, ე. ი. 2-ზე. მივიღებთ ახალი სისტემის პირველ განტოლებას:

$$x - 2y + 2z = 5.$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ 3-ზე და წევრ-წევრად მივუმატებთ ამოსავალი სისტემის მეორე განტოლებას, ხოლო შემდეგ ამავე ($x-2y+2z=5$) განტოლებას გავამრავლებთ -4-ზე და წევრ-წევრად მივუმატებთ სისტემის მესამე განტოლებას, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას, რომელშიც x ცვლადი გამორიცხული იქნება მეორე და მესამე განტოლებებიდან.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ \phantom{x - {}} 2y - 4z = -10, \\ \phantom{x - {}} 5y - 7z = -19 \end{cases}$$

ამ სისტემის მეორე და მესამე განტოლებები შეიცავს მხოლოდ y და z ცვლადებს. მეორე განტოლება წევრ-წევრად გავყოთ 2-ზე, მივიღებთ

$$y - 2z = -5$$

განტოლებას, სადაც y-ის კოეფიციენტია 1; —5-ზე გამრავლებული ეს განტოლება წევრ-წევრად მივუმატოთ წინა სისტემის მესამე განტოლებას, მივიღებთ:

$$3z = 6.$$

შემდეგ მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

უკანასკნელი განტოლების 3-ზე გაყოფა მიგვიყვანს სისტემამდე

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ z = 2 \end{cases}$$

რომელშიც დიაგონალზე დაწერილი კოეფიციენტები 1-ის ტოლია, ხოლო დიაგონალის მარცხნივ დაწერილი კოეფიციენტები — ნულის. ასეთი სისტემა ადვილად ამოიხსნება:

$$z = 2, \quad y = 2z - 5 = -1, \quad x = 2y - 2z + 5 = -1,$$

პასუხი: $(-1;\ -1;\ 2)$.

მაგალითი. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} x + y - z - 2t = 1 \\ 2x + 2y - z - 2t = 4 \\ -x - y + 2z + 3t = 3 \\ 3x + 3y + z = 15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z - 2t = 1 \\ z + 2t = 2 \\ z + t = 4 \\ 4z + 6t = 12 \end{cases}$$

მეორე ადგილზე დავწეროთ z და გავაგრძელოთ გამოთვლები:

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - z - 2t + y = 1 \\ z + 2t = 2 \\ z + t = 4 \\ 4z + 6t = 12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - z - 2t + y = 1 \\ z + 2t = 2 \\ -t = 2 \\ -2t = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - z - 2t + y = 1 \\ z + 2t = 2 \\ t = -2 \end{cases}.$$

მეოთხე, $0=0$ სახის განტოლება არ არის ჩაწერილი. ჩავთვლით რა y-ს ნებისმიერად, მივიღებთ სისტემის ზოგად ამონახსნს:

$$t=-2,\quad z=2-2t=6,\quad x=1+z+2t-y=3-y.$$

პასუხი: $\{(3-y;\ y;\ 6;\ -2)\mid y\in R\}$.

მაგალითი. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} x-y+z=0\\ 2x+y-3z=-7\\ 3x+3y-7z=2.\end{cases}$$

x ცვლადი გამოვრიცხოთ სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებიდან:

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{aligned} x-y+z&=0\\ 3y-5z&=-7\\ 6y-10z&=2\end{aligned}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{aligned} x-y+z&=0\\ 3y-5z&=-7\\ 0\cdot z&=16\end{aligned}\right\}.$$

უკანასკნელი განტოლება ტოლფასია $0=16$ განტოლებისა, მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამიტომ ამოსავალ სისტემას არა აქვს ამონახსნი.

გაუსის მეთოდით ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

185. $\begin{cases} 3x+2y+z=5,\\ x+y-z=0,\\ 4x-y+5z=3,\end{cases}$

186. $\begin{cases} 2x+y-z=5,\\ x-2y+2z=-5\\ 7x+y-z=10\end{cases}$

187. $\begin{cases} x+y-z+t=4\\ x-z+2t=6,\\ 3x-y+z-t=0,\\ 2x-y+3z-2t=1.\end{cases}$

188. $\begin{cases} 3x-y+z+2u=18,\\ 2x-5y+t+u=-7,\\ x-t+5u=8,\\ 2y+z+t-u=10,\\ x+y-3z+t=1.\end{cases}$

189. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=-2\\ 2x_1+8x_2-x_3=8,\\ 9x_1+x_2+8x_3=0.\end{cases}$

მაგალითი. ამოხსენით სისტემა

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9,\\ x+2y-3z=14,\\ 3x+4y+z=16.\end{cases}$$

▷. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&-3\\3&4&1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9\\14\\16\end{pmatrix},$$

მაშინ სისტემა ასე ჩაიწერება: $AX=B$. ამ სისტემის ამონახსნია

$$X=A^{-1}B.$$

ვიპოვოთ A^{-1}. გვაქვს:

$$\det A=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&2&-3\\3&4&1\end{vmatrix}=-6.$$

ვიპოვოთ ამ დეტერმინანტის ალგებრული დამატებები:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&-3\\4&1\end{vmatrix}=14,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}3&2\\4&1\end{vmatrix}=5,\ A_{31}=-13,\ A_{12}=-10.$$

$$A_{22}=-4,\quad A_{32}=8,\quad A_{13}=-2,\quad A_{23}=1,\quad A_{33}=1.$$

ამიტომ

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}14&5&-13\\-10&-4&8\\-2&1&1\end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14&5&-13\\-10&-4&8\\-2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\14\\16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}126+70-208\\-90-56-120\\18+14+16\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-12\\-28\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

მაშასადამე $x=2,\ y=3,\ z=-2$. ◁

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოხსენით მატრიცული განტოლებანი;

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}\ (1)\ \text{სადაც}\ X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}.$$

▷. ვიპოვოთ $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა;

$$A_{11}=4,\ A_{12}=-3,\ A_{21}=-2;\ A_{22}=1;\ \Delta=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2;$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{\Delta}&\frac{A_{21}}{\Delta}\\[4pt]\frac{A_{12}}{\Delta}&\frac{A_{22}}{\Delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1{,}5&-0{,}5\end{pmatrix}.$$

(1) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ A^{-1}-ზე, მივიღებთ:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ამოხსენით:

140. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$

141. $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

142. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

143. $X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

144. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

145. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

146. იპოვეთ $XA = O$ განტოლების ყველა ამონახსნი, სადაც A მეორე რიგის მოცემული მატრიცაა, X მეორე რიგის საძიებელი მატრიცაა, ხოლო O მეორე რიგის ნულოვანი მატრიცა.

147. იპოვეთ $X(t)$ მატრიცა, თუ $X(t) = AX(t) - X(t)A$,

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

148. ვთქვათ $f_1(x), \dots, f_n(x)$ ნამდვილი ფუნქციებია და $[a, b]$ სეგმენტზე არიან წრფივად დამოუკიდებელი. დაამტკიცეთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს წერტილები $a_1, a_2, \dots, a_n$, რომელთათვისაც

$$\det (f_i(a_j))_1^n \neq 0.$$

მითითება! ისარგებლეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

149. გამოიკვლიეთ სისტემის თავსებადობა და იპოვეთ სისტემის ამონახსნი

$$\begin{cases} (3 - 2\lambda) x_1 + (2 - \lambda) x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2 - \lambda) x_1 + (2 - \lambda) x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2 - \lambda) x_3 = 1. \end{cases}$$

150. დაამტკიცეთ, რომ

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x_1 = a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{1}{2} x_n = a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n, \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემას, სადაც a_{ij} მთელი რიცხვებია, აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი.

II თავი

ვექტორული ალგებრის ელემენტები

§ 1. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

ვ ე ქ ტ ო რ ი ეწოდება მიმართულ მონაკვეთს ან, რაც იგივეა, წერტილთა დალაგებულ წყვილს, მასთან, პირველ წერტილს ვექტორის სათავე ეწოდება, ხოლო მეორეს — მისი ბოლო. ვექტორი, რომლის სათავეა A წერტილი, ხოლო ბოლო B წერტილი, აღნიშნავენ $\overrightarrow{AB}$ სიმბოლოთი. ვექტორი აღინიშნება აგრეთვე ერთი ასოთი, რომელსაც ზემოთ ისარი აქვს დასმული, მაგალითად $\vec{a}$.

ისეთ ვექტორებს, რომლებიც პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ, კოლინეარული ვექტორები ეწოდებათ, ხოლო პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარე ვექტორებს — კომპლანარული. ვექტორის სათავესა და ბოლო წერტილებს შორის მანძილს ეწოდება ვექტორის სიგრძე. $\overrightarrow{AB}$ ან $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძისათვის იხმარება აღნიშვნა $|\overrightarrow{AB}|$ ან $|\vec{a}|$.

რაიმე $\vec{e}$ ვექტორს, რომლის სიგრძეც ერთის ტოლია ($|\vec{e}| = 1$), ეწოდება ერთეულ-ვექტორი, თუ $\vec{e}$ ვექტორს მოცემული $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება აქვს, მაშინ მას $\vec{a}$ ვექტორის მგეზავი, ანუ ორტი ეწოდება.

$\vec{a}$ ვექტორის ნამრავლი m სკალარზე ეწოდება ვექტორს, რომლის სიგრძეც არის $|m| \cdot |\vec{a}|$ და აქვს $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება, როცა $m>0$, ხოლო საწინააღმდეგო, როცა $m<0$.

თუ $\vec{a}$ ვექტორი რაიმე Δ ღერძთან ადგენს φ კუთხეს, მაშინ ამ ვექტორის გეგმილი ღერძზე, როგორც რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით:

$$გეგ_{\Delta}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi.$$

ორი არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს[1].

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\cdot\vec{b}$ სიმბოლოთი, ან კიდევ $(\vec{a},\ \vec{b})$ სიმბოლოთი. განსაზღვრის ძალით გვაქვს:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,$$

სადაც φ არის კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის. თუ შევნიშნავთ, რომ

$$|\vec{a}|\cos\varphi = გეგ_{\vec{b}}\,\vec{a} \quad და \quad |\vec{b}|\cos\varphi = გეგ_{\vec{a}}\,\vec{b},$$

მაშინ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,გეგ_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\,გეგ_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$

ერთეულოვან ვექტორთა $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ სამეულს, რომლებიც შესაბამისად თანამიმართულია Ox, Oy და Oz ღერძების, ორთონორმირებულ ბაზისს უწოდებენ. მაშინ $X = (\vec{a},\vec{i})$, $Y = (\vec{a},\vec{j})$, $Z = (\vec{a},\vec{k})$ რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებს უწოდებენ და ჩაწერენ ასე: $\vec{a}(X,\ Y,\ Z)$. ცხადია, რომ $X = გეგ_{Ox}\,\vec{a}$, $Y = გეგ_{Oy}\,\vec{a}$, $z = გეგ_{Oz}\,\vec{a}$, ამასთან, $\vec{a}$ ვექტორი წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

და ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

$\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე მისი კოორდინატების საშუალებით გამოითვლება ფორმულით:

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.$$

---

[1] როცა $\vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0$ მაშინ ამ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მიღებულია 0-ის ტოლად.

$\vec{a}(X_1, Y_1\ Z_1)$ და $\vec{b}(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2,$$

ხოლო მათ შორის კუთხე კი:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}\,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$, $(\vec{a}\neq 0 \wedge \vec{b}\neq 0)$.

▷. ვინაიდან, $|\vec{a}+\vec{b}|$ და $|\vec{a}-\vec{b}|$ წარმოადგენენ იმ პარალელოგრამის დიაგონალებს, რომლის გვერდებია $\vec{a}$ და $\vec{b}$, ამიტომ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ ტოლობა შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს პარალელოგრამი მართკუთხედია. მაშასადამე, $\vec{a}\perp\vec{b}$. ◁.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ცნობილია $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილების კოორდინატები. $M\in(M_1, M_2)$ და $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\,\overrightarrow{MM_2}$. ვიპოვოთ M წერტილის კოორდინატები.

▷. აღვნიშნოთ M წერტილის კოორდინატები x, y და z-ით. მაშინ გვექნება:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1),\ \lambda\,\overrightarrow{MM_2} = (\lambda(x_2 - x),\ \lambda(y_2 - y),\ \lambda(z_2 - z)).$$

პირობის ძალით გვაქვს:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

აქედან

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},\quad \lambda\neq -1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავამტკიცოთ, რომ თუ AB მონაკვეთი C წერტილით გაყოფილია $m:n$ შეფარდებით, მაშინ ნებისმიერი O წერტილისათვის

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\,. \qquad (1)$$

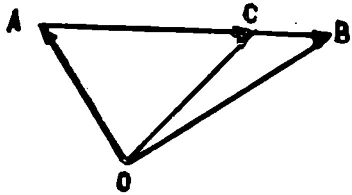
თუ ნებისმიერი O წერტილისათვის (1) ტოლობა გვაქვს, მაშინ AB მონაკვეთი C წერტილით $m:n$ შეფარდებით იყოფა.

$\triangleright$. ვთქვათ, AB მოცემული მონაკვეთია და C წერტილი მას $m:n$ შეფარდებით ყოფს (ნახ. 2.). მაშინ

$$\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{m}{n}$$

და მაშასადამე,

$$\vec{AC}=\frac{m}{n}\vec{CB}.$$



ნახ. 2

მაგრამ

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA},\ \vec{CB}=\vec{OB}-\vec{OC}$$

და ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ;

$$\vec{OC}-\vec{OA}=\frac{m}{n}(\vec{OB}-\vec{OC}).$$

აქედან უკვე სულ მარტივად მიიღება (1).

ახლა, ვთქვათ, ნებისმიერი O წერტილისათვის მართებულია (1). გადავწეროთ ეს ტოლობა ასე:

$$m(\vec{OC}-\vec{OB})=n(\vec{OA}-\vec{OC}).$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\vec{OC}-\vec{OB}=\vec{BC},\ \vec{OA}-\vec{OC}=\vec{CA},$$

მაშინ გვექნება $n\vec{AC}=m\vec{CB}$ ან, რაც იგივეა,

$$\vec{AC}=\frac{m}{n}\vec{CB}.$$

რადგან m და n ნატურალური რიცხვებია. უკანასკნელი ტოლობიდან გვაქვს:

$$C\in[AB],\ |AC|:|CB|=m:n\ \triangleleft.$$

შ ე დ ე გ ი. **აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ AB მონაკვეთი C წერტილით შუაზე იყოფოდეს, შემდეგში მდგომარეობს: ნებისმიერი O წერტილისათვის**

$$\vec{OC}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB}) \tag{2}$$

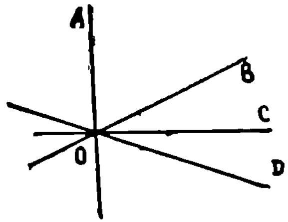
ტოლობა ჭეშმარიტი უნდა იყოს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. წრფეზე აღებულ წერტილზე გავლებულია სამი წრფე. თითოეული გავლებული წრფე პერპენდიკულარულია მოცემუ-

ლი წრფისა. დაამტკიცეთ, რომ გავლებული წრფეები ერთ სიბრტყეს ეკუთვნიან.

◁. ვთქვათ, (O, A) წრფის მიმართ გავლებულია წრფეები (ნახ. 3):

$$(OB)\perp(OA),\ \ (OC)\perp(OA),\ \ (OD)\perp(OA).$$



ნახ. 3

გავშალოთ $\vec{OD}$ ვექტორი $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ და $\vec{OC}$ ვექტორების მიხედვით.

$\vec{OD}=x\cdot\vec{OA}+y\cdot\vec{OB}+z\cdot\vec{OC}$. მიღებული ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ სკალარულად $\vec{OA}$-ზე; გვექნება, $O= = x\cdot\vec{OA}^2$. აქედან $x=0$, მაშინ

$$\vec{OD}=y\cdot\vec{OB}+z\cdot\vec{OC}.$$

ე. ი. $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ ვექტორები კომპლანარულია. მაშასადამე, O, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეს ეკუთვნიან ◁.

ამოხსენით ამოცანები:

151. A და B წერტილებით განსაზღვრული მონაკვეთი C წერტილით იყოფა $\lambda=5:2$ ფარდობით. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები, თუ A და C წერტილების კოორდინატებია $A\,(3;\ 7;\ 4)$, $C\,(8;\ 2;\ 3)$.

152. იპოვეთ მონაკვეთის საწყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატები, თუ ის $C(2;\ 0;\ 2)$ და $D(5;\ -2;\ 0)$ წერტილებით გაყოფილია 3 ტოლ ნაწილად.

153. იპოვეთ სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი, თუ მისი წვეროებია: 1) $A\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$., $C\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$; 2) $A\,(2;\ 5;\ 0)$; $B\,(11,\ 3;\ 8)$, $C\,(5;\ 1;\ 12)$.

154. იპოვეთ ტეტრაედრის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ მისი წვეროებია: $A\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$, $D\,(x_4,\ y_4,\ z_4)$.

155. განსაზღვრეთ $\vec{P}\,(2;\ -3;\ -1)$ ვექტორის საწყისი A წერტილი, თუ მისი ბოლო წერტილია $B(1;\ -1;\ 2)$.

156. მოცემულია $A(2;\ 2;\ 0)$ და $B(0;\ -2;\ 5)$ წერტილები. ააგეთ $\vec{AB}=\vec{P}$ ვექტორი და იპოვეთ მისი სიგრძე და მიმართულების კოსინუსები.

157. იპოვეთ $\vec{P}$ ვექტორი, თუ ის Ox და Oy ღერძებთან ადგენს $\alpha=60°$, $\beta=120°$ კუთხეებს და მისი სიგრძეა 2.

158. ვექტორი Ox და Oz ღერძებთან ადგენს $\alpha=120°$ და $\gamma=45°$ კუთხეებს. რა კუთხეს ადგენს ის Oy ღერძთან?

159. M წერტილის რადიუს-ვექტორი საკოორდინატო ღერძებთან ტოლ კუთხეებს ადგენს, იპოვეთ M წერტილის კოორდინატები, თუ მისი რადიუს-ვექტორის სიგრძეა 3.

160. განსაზღვრეთ $\vec{P}\,(6;\ -2;\ -3)$ და $\vec{Q}\,(3;\ 4;\ -12)$ ვექტორების მგეზავები.

161. $\vec{Q}$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა 75, $\vec{P}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$ ვექტორის პარალელურია. იპოვეთ $\vec{Q}$ ვექტორი.

162. პარალელოგრამის სამი მიმდევრობითი წვეროა: $A\,(1;\ 1)$, $B(2;\ -1)$ და $C(6;\ 8)$. იპოვეთ მეოთხე წვერო.

163. $A\,(2;\ 1;\ -1)$ წერტილზე მოდებულია $|\vec{R}|=7$ ძალა. განსაზღვრეთ ძალის გამომსახველი ვექტორის მიმართულება და ბოლო წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია მისი ორი კოორდინატი $X=2$ და $Y=-3$.

164. $\vec{R}\,(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა $3\sqrt{42}$, ემთხვევა $P(2;\ -3;\ 6)$ და $\vec{Q}(-1;\ 2;\ -2)$ ვექტორების კუთხის ბისექტრისას. იპოვეთ $\vec{R}(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორი.

165. მოცემულია $\vec{AB}=3\vec{i}-4\vec{j}$ და $\vec{BC}=5\vec{i}+10\vec{j}$ ვექტორები. იპოვეთ ABC სამკუთხედის $\vec{AD}$ ბისექტრისის მგეზავი.

166. დაამტკიცეთ, რომ თუ M ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია და O სივრცის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ შესრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\vec{OM}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}).$$

167. M_1 და M_2 წერტილები A_1B_1 და A_2B_2 მონაკვეთების შუა წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}\,(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}).$$

168. M_1 და M_2 $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედების მედიანების გადაკვეთის წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{3}\,(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2})$$

169. ABC სამკუთხედში A_1, B_1, C_1 წერტილები BC, AC, AB გვერდების შუაწერტილებია და O — სივრცის ნებისმიერი წერტილი; დაამტკიცეთ, რომ შესრულდება ტოლობა

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\,.$$

170. $ABCD$ ტეტრაედრში M_1 და M_2 შესაბამისად ADB და BDC წახნაგების მედიანების გადაკვეთის წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ $\overrightarrow{M_1M_2}\parallel\overrightarrow{AC}$. იპოვეთ ამ ვექტორების სიგრძეების შეფარდება.

171. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფს, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

172. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფუძეების შუაწერტილები და ფერდების გადაკვეთის წერტილი ერთ და იმავე წრფეს ეკუთვნიან.

173. მოცემულია: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=15$, $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. გამოთვალეთ $|\vec{a}--\vec{b}|$.

174. ABC სამკუთხედში AM მონაკვეთი A კუთხის ბისექტრისაა. იპოვეთ $\overrightarrow{AM}$, თუ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

175. იპოვეთ $\vec{p}$ ვექტორის გეგმილები ox და oy ღერძებზე, თუ $|\vec{p}|=2$ და $\vec{p}$ ვექტორი ox ღერძთან შეადგენს $30°$-იან კუთხეს.

176. მოცემულია ერთეული სიგრძის a, b და c კომპლანარული ვექტორები. მასთან $(\widehat{a,b})=30°$ და $(\widehat{b,c})=60°$.

გამოთვალეთ $|\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}|$.

177. ABC სამკუთხედი $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის პარალელური გეგმილია სიბრტყეზე. ცნობილია:

$$|AA_1|=a,\ |BB_1|=b,\ |CC_1|=c.$$

იპოვეთ ამ სამკუთხედების მედიანების გადაკვეთის წერტილებს შორის მანძილი.

178. მოცემულია ნებისმიერი ხუთკუთხედი. არსებობს თუ არა ხუთკუთხედი, რომლის გვერდები მისი დიაგონალების პარალელური და ტოლია.

179. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=2$,

გამოთვალეთ:

1) $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ 2) $(2\vec{a}-5\vec{b})^2$.

180. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი,

თუ 1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; 2) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

181. მოცემულია სამი $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ერთეულოვანი ვექტორი, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. გამოთვალეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

182. განსაზღვრეთ α-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნებიან $8\vec{a}+\alpha\vec{b}$ და $\vec{a}-2\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ

$$|\vec{a}|=7\sqrt{2},\ |\vec{b}|=4 \text{ და } (\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\frac{\pi}{4}.$$

183. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(1;\ 2;\ 1)$, $B(3;\ -1;\ 7)$, $C(7;\ 4;\ -2)$. გამოთვალეთ მისი შიგა კუთხეები.

184. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი ორი გვერდი ემთხვევა $\vec{AB}(2;\ 1;\ -2)$ და $\vec{BC}(3;\ 2;\ 6)$ ვექტორებს.

185. იპოვეთ $\vec{R}(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორი, თუ მისი სიგრძეა 16 და Ox და Oz ღერძებთან ადგენს ტოლ კუთხეებს $\alpha=\gamma=45°$.

186. იპოვეთ $\vec{P}(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორი, თუ ის მოთავსებულია xOy სიბრტყეზე; ამასთან $|\vec{P}|=|\vec{Q}|$, სადაც $\vec{Q}(5;\ -3;\ 4)$ და $\vec{P}\perp\vec{Q}$.

187. იპოვეთ ერთეული სიგრძის ვექტორი, თუ ის ერთდროულად მართობულია $\vec{P}(3;\ 6;\ 8)$ ვექტორისა და Ox ღერძისა.

188. იპოვეთ ერთეული სიგრძის ვექტორი, რომელიც პარალელურია $\vec{P}(6;\ 7;\ -6)$ ვექტორისა.

189. $\vec{R}(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა 26, მართობულია $\vec{P}(4;\ -2;\ -3)$ და $\vec{Q}(0;\ 1;\ 3)$ ვექტორებისა და Oy ღერძთან ადგენს ბლაგვ კუთხეს. იპოვეთ $\vec{R}(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორი.

190. $\vec{P}(X,\ Y)$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა 2, $\vec{Q}(3;\ 4)$ ვექტორთან ადგენს $60°$-იან კუთხეს; იპოვეთ $\vec{P}(X,\ Y)$ ვექტორი.

191. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედის $\vec{CD}$ სიმაღლის სიგრძე, თუ მისი ორი გვერდი ემთხვევა $\vec{AB}=3\vec{i}-4\vec{j}$ და $\vec{BC}=\vec{i}+5\vec{j}$ ვექტორებს.

192. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(2;\ -4;\ 3)$, $B(1;\ -7;\ 2)$ და $C(2;\ -2;\ 1)$. იპოვეთ $\vec{CD}$ სიმაღლის სიგრძე.

193. 1) იპოვეთ $\vec{P}(5;\ 2;\ 5)$ ვექტორის გეგმილი $\vec{Q}(2;\ -1;\ 2)$ ვექტორის მიმართულებაზე;

2) მოცემულია $A(3;\ 3;\ -2)$, $B(0;\ -3;\ 4)$, $C(0;\ -3;\ 0)$ და $D(0;\ 2;\ -4)$ წერტილები. გამოთვალეთ გეგ$_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD}$.

194. მოცემულია სამი ვექტორი: $\vec{a}(1;\ -3;\ 4)$, $\vec{b}(3;\ -4;\ 2)$ და $\vec{c}(-1;\ 1;\ 4)$. გამოთვალეთ გეგ$_{\vec{b}+\vec{c}}\,2\vec{a}$.

195. მოცემულია $A(1;\ 1;\ 1)$ და $B(4;\ 5;\ -3)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე, რომელიც საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს ტოლ მახვილ კუთხეებს.

196. მოცემულია $A(3;\ -4;\ -2)$ და $B(2;\ 5;\ -2)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე, რომელიც Ox და Oy ღერძებთან ადგენს $\alpha=60°$ და $\beta=120°$ კუთხეებს, ხოლო Oz ღერძთან — ბლაგვ კუთხეს.

197. იპოვეთ $\vec{P}(\sqrt{2};\ -3;\ -5)$ ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე, რომელიც Ox და Oz ღერძებთან ადგენს $\alpha=45°$ და $\gamma=60°$ კუთხეებს, ხოლო Oy ღერძთან — მახვილ კუთხეს.

198. $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ერთეული სიგრძის ვექტორებს შორის კუთხე $120°$-ია. იპოვეთ $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ და $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$ ვექტორებს შორის კუთხე.

199. $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ერთეული სიგრძის ვექტორებს შორის კუთხე $60°$-ია. იპოვეთ $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ და $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები.

200. იპოვეთ $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ და $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები, თუ $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$ და $(\widehat{\vec{p},\ \vec{q}})=\dfrac{\pi}{4}$.

§ 2. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი და სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

$\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$ ვექტორზე ($\vec{a}\times\vec{b}$) ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სამი პირობით:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, სადაც $\varphi=(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$,

2) $\vec{c}\perp\vec{a}\ \wedge\ \vec{c}\perp\vec{b}$,

3) $\vec{c}$ ვექტორი მიმართულია ისე, რომ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ არის მარჯვენა.

თუ $\vec{a} \| \vec{b}$, მაშინ $\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$ ვექტორზე მიღებულია ნულოვან ვექტორად. $\vec{a}$ ვექტორის $\vec{b}$ ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a} \times \vec{b}$ ან $[\vec{a}, \vec{b}]$ სიმბოლოთი.

თუ $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, მაშინ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორული $\vec{a} \times \vec{b}$ ნამრავლის $\vec{c}$ ვექტორზე სკალარულ ნამრავლს ეწოდება $\vec{a}$, $\vec{b}$, და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი და იგი $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, $\vec{c} = (X_3, Y_3, Z_3)$, მაშინ

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

მაგალითი. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \sqrt{3}\,\vec{k}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$, ვიპოვოთ $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

$\triangleright$. $|\vec{a}| = \sqrt{4+9+3} = 4$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \triangleleft$.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\vec{a} + 3\vec{b}$ და $3\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ერთეულოვანი ვექტორებია და მათ შორის კუთხე უდრის $\frac{\pi}{6}$.

$$\triangleright.\ (3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = 8(\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$S = |(3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b})| = 8\,|\vec{a} \times \vec{b}| =$$

$$= 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\frac{\pi}{6} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \triangleleft.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დაამტკიცეთ რომ ოთხი წერტილი $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$ და $D(2;\ 1;\ 3)$ მოთავსებულია ერთ სიბრტყეში.

▷. დამტკიცებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ და $\vec{AD}$ ვექტორების კომპლანარობა, რადგანაც

$$(\vec{AB},\ \vec{AC},\ \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

ამიტომ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ და $\vec{AD}$ ვექტორები კომპლანარულია, რის გამოც A, B, C და D წერტილები ძევს ერთ სიბრტყეში. ◁.

ამოხსენით ამოცანები:

201. მოცემულია $|\vec{P}|=8$, $|\vec{Q}|=4$ და $\vec{P}\cdot\vec{Q}=16$. გამოთვალეთ $|\vec{P}\times\vec{Q}|$.

202. მოცემულია $|\vec{P}|=6$, $|\vec{Q}|=10$ და $|\vec{P}\times\vec{Q}|=48$. გამოთვალეთ $\vec{P}\cdot\vec{Q}$.

203. k კოეფიციენტის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $\vec{P}=k\vec{a}+5\vec{b}$ და $\vec{Q}=3\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები პარალელური, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები არ არის პარალელური?

204. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები იყოს პარალელური?

205. აჩვენეთ, რომ $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$ და გამოარკვიეთ ამ ტოლობის გეომეტრიული მნიშვნელობა, თუ $\vec{a}-\vec{b}$ და $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორები გამოსახავს პარალელოგრამის დიაგონალებს.

206. გამოთვალეთ $\vec{P}(1;\ -2;\ 4)$ და $\vec{Q}(3;\ 1;\ -2)$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი.

207. გამოთვალეთ $\vec{P}=-\vec{j}+\vec{k}$ და $\vec{Q}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი და დიაგონალების სიგრძეები.

208. გამოთვალეთ $\vec{P}=2\vec{a}+3\vec{b}$ და $\vec{Q}=\vec{a}-4\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, სადაც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ურთიერთმართობული მგეზავებია.

209. ააგეთ პარალელოგრამი $\vec{P}=2\vec{j}+\vec{k}$ და $\vec{Q}=\vec{i}+2\vec{k}$ ვექტორებზე და გამოთვალეთ მისი ფართობი და სიმაღლე.

210. გამოთვალეთ $\vec{P}=\vec{a}+2\vec{b}$ და $\vec{Q}=\vec{a}-3\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი. თუ $|\vec{a}|=5;\ |\vec{b}|=3,\ (\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\frac{\pi}{6}$.

211. $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ერთეული სიგრძის ვექტორებს შორის კუთხე 45°-ია. გამოთვალეთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომლის დიაგონალებია $2\vec{m}-\vec{n}$ და $4\vec{m}-5\vec{n}$ ვექტორები.

212. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0-3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$. გამოთვალეთ მისი ფართობი და $\vec{BD}$ სიმაღლის სიგრძე.

213. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -6;\ 2)$ და $C(1;\ 3;\ -1)$. გამოთვლეთ მისი ფართობი და $\vec{BD}$ სიმაღლის სიგრძე.

214. მოცემულია $\vec{a}\,(3;\ 0;\ -1)$, $\vec{b}\,(2;\ 4;\ 3)$, $\vec{c}\,(-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{d}\,(2;\ 0;\ 1)$ ვექტორები. გამოთვალეთ: 1) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$; 2) $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})$.

215. მოცემულია $\vec{a}\,(2;\ -3;\ 1)$, $\vec{b}\,(-3;\ 1;\ 2)$, $\vec{c}\,(1;\ 2;\ 3)$ ვექტორები. გამოთვალეთ $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

იპოვეთ შემდეგ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა:

216. $\vec{P}_1\,(1;\ -1;\ 3)$, $\vec{P}_2\,(2;\ -2;\ 1)$, $\vec{P}_3\,(3;\ -2;\ 5)$.

217. $\vec{P}_1\,(5;\ -3;\ 2)$, $\vec{P}_2\,(-6;\ 3;\ 4)$, $\vec{P}_3\,(-8;\ 6;\ -5)$.

კომპლანარულია თუ არა შემდეგი ვექტორები:

218. $\vec{P}_1\,(-2;\ -1;\ -3)$, $\vec{P}_2\,(-1;\ 4;\ 6)$, $\vec{P}_3\,(1;\ 5;\ 9)$.

219. $\vec{P}_1\,(2;\ 1;\ 3)$, $\vec{P}_2\,(3;\ -2;\ 1)$, $\vec{P}_3\,(1;\ 1;\ 2)$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი წერტილები მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე:

220. $A\,(1;\ 2;\ -1)$, $B\,(0;\ 1;\ 5)$, $C\,(-1;\ 2;\ 1)$, $D\,(2;\ 1;\ 3)$.

221. $A\,(1;\ 2;\ 1)$, $B\,(1;\ 1;\ 2)$, $C\,(2;\ 1;\ 1)$, $D\,(-3;\ 0;\ 7)$.

222. მოცემულია პირამიდის წვეროები: $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$, $D(-5;\ -4;\ 8)$. იპოვეთ მისი მოცულობა და D წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

223. მოცემულია პირამიდის წვეროები: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;\ 4;\ -1)$, $C(2;\ 3;\ 5)$, $D(6;\ 0;\ -3)$. იპოვეთ მისი მოცულობა და A წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

224. $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ და $\vec{OC}$ ვექტორები მოთავსებულია საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებზე. იპოვეთ ამ ვექტორებზე აგებული პირამიდის მოცულობა, თუ თითოეული მათგანის სიგრძე უდრის 2-ს.

225. გამოთვალეთ $OABCO_1A_1B_1C_1$ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მოცემულია ქვედა ფუძის სამი წვერო $O(0;0;0)$, $A(2;-3;0)$, $C(3;2;0)$ და ზედა ფუძის ერთი წვერო $B_1(3;0;4)$.

226. პირამიდის წვეროებია $A(-1;-3;4)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;1)$ და $D(4;-1;3)$. იპოვეთ 1) BD წიბოს სიგრძე; 2) ABC წახნაგის ფართობი; 3) BD და BC წიბოებს შორის კუთხე; 4) D წვეროდან დაშვებული პირამიდის სიმაღლე.

227. ერთ წერტილზე მოდებულია სამი არაკომპლანარული $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორი. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყე, რომელიც ამ სამი ვექტორის ბოლოზე გადის, $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ ვექტორის მართობულია.

მითითება. საკმარისია აჩვენოთ, რომ $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ პერპენდიკულარულია $\vec{b}-\vec{a}$ და $\vec{c}-\vec{a}$ ვექტორების. გვაქვს

$$(\vec{b}-\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{b})+(\vec{b},\ \vec{b},\ \vec{c})+(\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a})=$$
$$=(\vec{a},\ \vec{a},\ \vec{b})-(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})-(\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{a})=0.$$

ანალოგიურად $(\vec{c}-\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=0.$

228. დავამტკიცოთ, რომ

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})\cdot(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})=\begin{vmatrix}(\vec{a},\ \vec{x}) & (\vec{a},\ \vec{y}) & (\vec{a},\ \vec{z})\\ (\vec{b},\ \vec{x}) & (\vec{b},\ \vec{y}) & (\vec{b},\ \vec{z})\\ (\vec{c},\ \vec{x}) & (\vec{c},\ \vec{y}) & (\vec{c},\ \vec{z})\end{vmatrix}$$

229. $SABC$ ტეტრაედრის ყოველ წიბოსა და მის მოპირდაპირე წიბოს შუა წერტილზე გავლებულია სიბრტყეები. დაამტკიცეთ, რომ ყველა ამ სიბრტყეს აქვს საერთო წერტილი; აღვნიშნოთ ეს წერტილი K-თი. $\vec{SK}$ ვექტორი გამოსახეთ $\vec{SA}=\vec{a}$, $\vec{SB}=\vec{b}$ და $\vec{SC}=\vec{c}$ ვექტორების საშუალებით.

მითითება. SA, SB და SC წიბოებზე გამავალ სიბრტყეზე მდებარე წერტილების რადიუს-ვექტორებს აქვს სახე $\lambda_1\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\lambda_2\vec{a}$.

$$\lambda_1\cdot\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+\lambda_2\vec{b},\ \lambda_1\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\lambda_2\vec{c}.$$

ასე რომ, ეს სიბრტყეები იკვეთება $\lambda(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ წრფეზე. ანალოგიურად, სიბრტყეები, რომლებიც გადიან SA, AB, AC და BS, BA, BC წიბოებზე, იკვეთებიან წრფეზე $\vec{a}+\mu(\vec{b}+\vec{c}-3\vec{a})$ და $\vec{b}+\gamma(\vec{a}+\vec{c}-3\vec{b})$. ამ სამი წრფის გადაკვეთის წერტილია k, რომლის რადიუს-ვექტორია

$$\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

230. აჩვენეთ, რომ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

III თავი

ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

§ 1. სიბრტყე

სიბრტყის განტოლებათა სახეებია:

1) სიბრტყის ზოგადი განტოლება:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

$\vec{P}(A, B, C)$ ვექტორი სიბრტყის ნორმალური ვექტორია. თუ $D=0$, მაშინ სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე; თუ $C=0$, მაშინ სიბრტყე პარალელურია Oz ღერძისა; თუ $C=D=0$, მაშინ სიბრტყე გადის Oz ღერძზე, თუკი $B=C=0$, მაშინ სიბრტყე yOz სიბრტყის პარალელურია. საკოორდინატო სიბრტყეების განტოლებებია: $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2) სიბრტყის განტოლება მონაკვეთებში:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{e}=1,$$

სადაც a, b და c აღნიშნავს იმ მონაკვეთების სიდიდეებს, რომლებსაც სიბრტყე ჩამოჭრის საკოორდინატო ღერძებზე.

3) სიბრტყის ნორმალური განტოლება:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

სადაც p კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძეა, ხოლო α, β და γ — ამ მართობის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

სიბრტყის ზოგადი განტოლება რომ დავიყვანოთ ნორმალურ სახე-ზე, საჭიროა ის გავამრავლოთ

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

მანორმებელ მამრავლზე, სადაც λ-ს ნიშანი D თავისუფალი წევრის ნიშნის მოპირდაპირეა.

კუთხე $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ სიბრტყეებს შორის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,.$$

ამ სიბრტყეთა პარალელობის პირობაა:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\,,$$

ხოლო მართობულობის პირობა არის:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ძნეულის განტოლებაა:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლებაა:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

მანძილი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილიდან $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ სიბრტყემდე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$h = |\,x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\,|.$$

თუ სიბრტყის განტოლება ზოგადი სახითაა მოცემული, მაშინ

$$h = \frac{|A x_0 + B y_0 + C z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,.$$

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ და $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა კონის განტოლებაა:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

სადაც λ პარამეტრია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. იპოვეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $A(2; -1; 4)$ და $B(3; 2; -1)$ წერტილებზე გადის და $x+y+2z-3=0$ სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

▷. საძიებელი სიბრტყის $\vec{Q}$ ნორმალ-ვექტორი მართობული უნდა იყოს $\overrightarrow{AB}(1; 3; -5)$ და $\vec{n}=(1; 1; 2)$ ვექტორების. ამიტომაც $\vec{Q}$ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ;

$$\vec{Q}=\overrightarrow{AB}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=11\vec{i}-7\vec{j}-2\vec{k}.$$

$A(2; -1; 4)$ წერტილზე გამავალი და $\vec{Q}$ ვექტორის მართობული სიბრტყის განტოლებაა

$$11(x-2)-7(y+1)-2(z-4)=0 \text{ ან } 11x-7y-2z-21=0. \ \triangleleft$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $M(3; -1; -5)$ წერტილზე გადის და პერპენდიკულარულია $3x-2y+2z+7=0$ და $5x-4y+3z+1=0$ სიბრტყეების.

▷. ადვილი შესამჩნევია, რომ საძიებელი სიბრტყის $\vec{n}$ ნორმალ-ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ $\vec{n}_1=(3; -2; 2)$ და $\vec{n}_2=(5; -4; 3)$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი, ე. ი.

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}.$$

$M(3; -1; -5)$ წერტილზე გამავალი და $\vec{n}=(2; 1; -2)$ ვექტორის მართობული სიბრტყის განტოლებაა:

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0, \text{ ან } 2x+y-2z-15=0. \ \triangleleft$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $M(2; -1 -2)$ წერტილი წარმოადგენს სათავიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეს. იპოვეთ ამ სიბრტყის განტოლება.

▷ პირობით $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორი სიბრტყის მართობული ვექტორია, რომლის კოორდინატები იგივეა, რაც M წერტილის კოორდინატები, ე. ი. $\vec{r}=(2; -1; -2)$. პირობით $\vec{r}$ პერპენდიკულარულია საძიებელი სიბრტყის და M წერტილი ძევს მასზე; ამიტომ გვექნება:

$$2(x-2)-1(y+1)+2(z-2)=0 \text{ ან } 2x-y+2z-9=0. \ \triangleleft$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(2; -3; -7)$ წერტილზე და პარალელურია $2x-6y-3z+5=0$ სიბრტყის.

▷. ვექტორი $\vec{N}(2; -6; -8)$ პერპენდიკულარულია მოცემული სიბრტყის ნებისმიერი პარალელური სიბრტყისა. $\vec{N}$ ვექტორი საძიებელი სიბრტყის მართობულია, რომელიც გადის $M_0(2; -3; -7)$ წერტილზე, ე. ი. გვექნება

$$2(x-2)-6(y+3)-3(z+7)=0. \ \triangleleft.$$

ამოხსენით ამოცანები:

231. შეამოწმეთ, გადის თუ არა $4x-y+3z+1=0$ სიბრტყე შემდეგ წერტილებზე: $A(-1; 6; 3)$, $B(2; 0; 5)$, $C(3; -2; -5)$.

ააგეთ შემდეგი სიბრტყეები:

232. 1) $x-2y-z+1=0$; 2) $y+2z-4=0$; 3) $2x-3y+12=0$; 4) $x+z=1$; 5) $2x-5=0$.

233. 1) $2x+y-z-6=0$; 2) $x-y+2z=0$; 3) $x-y=0$; 4) $2z-7=0$.

234. დაწერეთ შემდეგი სიბრტყეთა განტოლებები მონაკვეთებში: 1) $2x-3y-z+12=0$; 2) $x-4z+6=0$; 3) $5x-2y=7$; 4) $x-7=0$.

235. დაწერეთ შემდეგი სიბრტყეთა განტოლებები ნორმალური სახით:

1) $2x-9y+6z-22=0$; 2) $5y-12z+26=0$; 3) $y+2=0$; 4) $2z-1=0$.

236. იპოვეთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $2x+3y-6z-42=0$ სიბრტყემდე.

იპოვეთ მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის:

237. $4x+3y-5z-8=0$ და $8x+6y-10z+9=0$.

238. $11x-2y-10z+15=0$ და $11x-2y-10z-45=0$

239. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(1; 2; 1)$ წერტილზე $3x+y-z+2=0$ სიბრტყის პარალელურად.

240. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-2; 7; 3)$ წერტილზე $x-4y+5z-1=0$ სიბრტყის პარალელურად.

241. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(5; -7; 4)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოჭრის ტოლ მონაკვეთებს.

242. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-4; 0; 4)$ წერტილზე და Ox და Oy ღერძებზე შესაბამისად ჩამოჭრის $a=4$ და $b=3$ მონაკვეთებს.

243. მოცემულია $M_1(-7; 2; -1)$ და $M_2(3; 4; 10)$ წერტილები. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_2 წერტილზე M_1M_2 მონაკვეთის მართობულად.

244. მოცემულია $M_1(8; -7; 5)$ და $M_2(2; -1; -2)$ წერტილები. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე M_1M_2 მონაკვეთის მართობულად.

შეადგინეთ შემდეგ სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება:

245. $M_1(7; 6; 7)$, $M_2(5; 10; 5)$, $M_3(-1; 8; 9)$.

246. $M_1(2; 0; 4)$, $M_2(3; 1; -2)$, $M_3(0; -3; -1)$.

247. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც: 1) პარალელურია xOz სიბრტყისა და გადის $(2; -5; 3)$ წერტილზე; 2) გადის Oz ღერძზე და $(-3; 1; -2)$ წერტილზე; 3) პარალელურია Ox ღერძისა და გადის $(4; 0; -2)$ და $(5; 1; 7)$ წერტილებზე.

248. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც: 1) პარალელურია xOz სიბრტყისა და გადის $(3; 2; -7)$ წერტილზე; 2) გადის Ox ღერძზე და $(4; -3; -1)$ წერტილზე; 3) პარალელურია Oy ღერძისა და გადის $(1; -5; 1)$ და $(3; 2; -2)$ წერტილებზე.

გამოთვალეთ კუთხე შემდეგ სიბრტყეებს შორის:

249. 1) $x-2y+2z-8=0$ და $x+z-6=0$; 2) $2x-3y+6z-12=0$ და $x+2y+2z-7=0$; 3) $3x-y+2z+15=0$ და $5x+9y-3z-1=0$.

250. 1) $y-\sqrt{3}x-7=0$ და $y=0$; 2) $x+2z-6=0$ და $x+2y-4=0$; 3) $6x+2y-4z+17=0$ და $9x+3y-6z-4=0$.

251. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც პარალელურია $2x+2y+z-8=0$ სიბრტყისა და მისგან დაშორებულია $h=4$ მანძილით.

252. იპოვეთ იმ მართობის სიგრძე და მიმართულება, რომელიც დაშვებულია კოორდინატთა სათავიდან $2x+3y+6z-35=0$ სიბრტყეზე.

253. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც პარალელურია $3x+y-2z-5=0$ და $6x+2y-4z+1=0$ პარალელური სიბრტყეებისა და თანაბრადაა დაშორებული თითოეული მათგანიდან.

254. იპოვეთ კუბის მოცულობა, თუ მისი ორი წახნაგი მოთავსებულია $2x-2y+z-1=0$ და $2x-2y+z+5=0$ პარალელურ სიბრტყეებზე.

255. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრადაა დაშორებული $A(1; 2; 3)$ და $B(2; -1; 4)$ წერტილებიდან.

256. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრადაა დაშორებული $A\left(a; -\frac{a}{2}; a\right)$ და $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$ წერტილებიდან.

257. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება, თუ M (3; —6; 2) წერტილი კოორდინატთა სათავიდან ამ სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეა.

258. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის Ox ღერძზე და M (5; 4; 13) წერტილიდან დაშორებულია $h=8$ ერთეულით.

259. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 (8; —3; 1) და M_2 (4; 7; 2) წერტილებზე $3x+5y-7z-21=0$ სიბრტყის მართობულად.

260. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 (1; 2; 3) და M_2 (2; 1; 1) წერტილებზე $3x+4y+z-6=0$ სიბრტყის მართობულად.

261. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M(—1; —1; 2) წერტილზე $x-2y+z-4=0$ და $x+2y-2z+4=0$ სიბრტყეების მართობულად.

262. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M (1; 3; 2) წერტილზე $x+2y+z-4=0$ და $2x+y+3z+5=0$ სიბრტყეების მართობულად.

იპოვეთ შემდეგი სიბრტყეების გადაკვეთის წერტილები:

263. 1) $\begin{cases} 2x-y+3z-9=0, \\ x+2y+2z-3=0, \\ 3x+y-4z+6=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-3y+z-6=0, \\ 14x-6y+2z-5=0, \\ x+y-5z=0. \end{cases}$

264. 1) $\begin{cases} 5x+8y-z-7=0, \\ x+2y+3z-1=0, \\ 2x-3y+2z-9=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-2y-3z=5, \\ 2x-y-2z=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-2y-3z=5, \\ 2x-y-2z=6; \end{cases}$

265. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $2x-y+3z-6=0$, $x+2y-z+3=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე და M (1 2; 4) წერტილზე.

266. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $4x-y+3z-1=0$ და $x+5y-z+2=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე $2x-y+5z-3=0$ სიბრტყის მართობულად.

267. $x+3y-5+\lambda(x-y-2z+4)=0$ სიბრტყეთა კონაში იპოვეთ ის სიბრტყე, რომელიც Ox და Oy ღერძებზე ტოლ მონაკვეთებს ჩამოჭრის.

268. $x+5y+z=0$ და $x-z+4=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე გაავლეთ სიბრტყე, რომელიც $x-4y-8z+12=0$ სიბრტყესთან ადგენს $\frac{\pi}{4}$ კუთხეს.

269. გამოთვალეთ პირამიდის h_s სიმაღლის სიგრძე, თუ მისი წვეროებია: $S(0;\ 6;\ 4)$, $A(3;\ 5;\ 3)$, $B(-2;\ 11;\ -5)$, $C(1;\ -1;\ 4)$.

270. დაწერეთ იმ სიბრტყეთა განტოლებები, რომლებიც შუაზე ყოფს $3x-y+7z-4=0$ და $5x+3y-5z+2=0$ სიბრტყეებს შორის მდებარე ორწახნაგა კუთხეებს.

271. $4x-7y+5z-20=0$ სიბრტყეზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ OM მონაკვეთმა საკოორდინატო ღერძებთან შეადგინოს ტოლი კუთხეები.

272. $y+z-2=0$ სიბრტყეზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ OM მონაკვეთმა Oy და Oz ღერძებთან შეადგინოს 60°-იანი კუთხეები.

273. სიბრტყე გადის Ox ღერძზე და $y=x$ სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს. დაწერეთ ამ სიბრტყის განტოლება.

274. Oy ღერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $2x+3y+6z-6=0$ და $8x+9y-72z+73=0$ სიბრტყეებიდან.

275. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $x-y=0$, $x+y-2z+1=0$, $2x+z-4=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წერტილზე და $O(0;\ 0;\ 0)$ და $M(2;\ 1;\ 7)$ წერტილებზე.

276. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $2x+y-z-2=0$, $x-3y+z+1=0$ და $x+y+z-3=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წერტილზე $x+y+2z=0$ სიბრტყის პარალელურად.

§ 2. წრფე

წრფის განტოლებათა სახეებია:

1) წრფის ზოგადი განტოლებები:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

2) ვექტორული განტოლება

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{p}.$$

3) პარამეტრული სახის განტოლებები R^3-ში

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

თუ წრფე ძევს oxy სიბრტყეზე, მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$$

4) კანონიკური სახის განტოლებები R^3-ში

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

სადაც $\vec{Q}(m, n, p)$ წრფის მიმმართველი ვექტორია, ხოლო $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — — წრფის ფიქსირებული წერტილი.

კანონიკური განტოლება R^2 მიიღებს სახეს

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

აქედან, როცა $m \neq 0$, ვღებულობთ:

$$y = kx + b,$$

სადაც k არის იმ კუთხის ტანგენსი, რომელსაც წრფე ადგენს ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. k-ს უწოდებენ წრფის კუთხურ კოეფიციენტს, ხოლო განტოლებას — წრფის განტოლებას კუთხური კოეფიციენტით. თუ (l_1) წრფის განტოლებაა $y = k_1x + b_1$, (l_2) წრფის კი $y = k_2x + b_2$, მაშინ ამ ორ წრფეს შორის φ კუთხე შეიძლება ასე გამოითვალოს:

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

R^2-ში ორი წრფის პარალელობის პირობაა $k_1 = k_2$, მართობულობისა კი — $k_1k_2 = -1$.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_1(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებებია:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

კუთხე ორ

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - x_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}.$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

კუთხე ორ წრფეს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ორი წრფის პარალელობის პირობაა $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, მართობულობის კი $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. R^2-ში მოცემულია წრფე $2x+3y+6=0$. ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(2;\ 1)$ წერტილზე და: 1) პარალელურია მოცემული წრფის, 2) პერპენდიკულარულია მოცემული წრფის.

▷. ვიპოვოთ მოცემული წრფის კუთხური კოეფიციენტი. ამისათვის მოცემული წრფის განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით: $y = -\frac{2}{3}x - 2$, ე. ი. $k_1 = -\frac{2}{3}$. საძიებელი წრფის განტოლება ვეძებოთ შემდეგი სახით: $y = kx + b$, 1) შემთხვევაში $k = k_1 = -\frac{2}{3}$, ამიტომ $y = -\frac{2}{3}x + b$. b-ს საპოვნელად ვისარგებლოთ პირობით, რომ საძიებელი წრფე გადის $M_0(2;\ 1)$ წერტილზე, ე. ი.

$$1 = -\frac{2}{3}\cdot 2 + b, \quad b = \frac{7}{3}.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \quad \text{ანუ} \quad 2x + 3y - 7 = 0.$$

2) შემთხვევაში $k = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{2}$. საბოლოოდ, $3x - 2y - 4 = 0$. ◁.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შეადგინეთ $M_0(-1;\ 0;\ 5)$ წერტილზე გამავალი წრფის კანონიკური და პარამეტრული სახის განტოლებები, რომელიც საკოორდინატო ღერძებთან ადგენენ $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ და $\gamma = \frac{2}{3}\pi$ კუთხეებს.

▷. წრფის მიმმართველ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ

$$\vec{Q} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\right),$$

ამიტომ წრფის საძიებელი კანონიკური სახის განტოლება იქნება

$$\frac{x+1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-0}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-5}{\frac{-1}{2}}, \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{-1}.$$

თუ ამ ტოლობის თითოეულ წევრს გავუტოლებთ t-ს, მივიღებთ წრფის საძიებელ პარამეტრული სახის განტოლებას.

$$x=-1+t, \quad y=\sqrt{2}\,t, \quad z=5-t. \ \triangleleft.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შეადგინეთ $M_0(2; -3; 4)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია წრფის

$$\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$$

$\triangleright$. ცხადია, რომ მოცემული წრფის მიმართველი ვექტორი იქნება

$$\vec{Q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}, \text{ ე. ი. } \vec{Q}=(1, -3, -2).$$

პირობის თანახმად ეს ვექტორი იქნება აგრეთვე საძიებელი წრფის მიმართველი ვექტორი. ამიტომ საძიებელი წრფის კანონიკურ განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+4}{-2}. \quad \triangleleft.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2} \quad \text{და} \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y+11}{2}=\frac{z+6}{1}$$

წრფეები იკვეთებიან. იპოვეთ მათი გადაკვეთის წერტილი.

$\triangleleft$. წერტილი $M_1(1; -2; 0)$ ძევს პირველ წრფეზე, ხოლო წერტილი $M_2(-1. -11; -6)$ მეორეზე. გამოვთვალოთ $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2, -9, -6)$, $\vec{Q}_1=(2, -1, -2)$ და $\vec{Q}_2=(1, 2, 1)$ ვექტორების შერეული ნამრავლი

$$\begin{vmatrix} -2 & -9 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

ე. ი. ეს ვექტორები კომპლანარულია და მაშასადამე, მოცემული წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ. ვინაიდან $\vec{Q}_1$ და $\vec{Q}_2$ ვექტორები არაკოლინეარულია, ამიტომ ეს წრფეები იკვეთებიან.

გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად პირველი წრფის განტოლება დავწეროთ პარამეტრული სახით:

$$x = 1 + 2t, \quad y = -2 - t, \quad z = -2t.$$

თუ x, y და z-ის ნაცვლად ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ მეორე წრფის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{2+2t}{1} = \frac{9-t}{2} = \frac{6-2t}{1}, \quad \text{საიდანაც} \quad t = 1.$$

მაშასადამე, მოცემულ წრფეთა გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია

$$x = 1 + 2\cdot 1 = 3, \quad y = -2 - 1 = -3, \quad z = -2\cdot 1 = -2. \quad \lhd.$$

ამოხსენით ამოცანები:

277. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A\ (3,\ 2)$ წერტილზე: 1) $B\ (-2;\ 4)$ და $C\ (5;\ 7)$ წერტილებზე გამავალი წრფის პარალელურად; 2) იმავე წერტილებზე გამავალი წრფის მართობულად.

278. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გავლებულია $x+2y+1=0$ და $x-y+1=0$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე $2x-y+5=0$ წრფის მართობულად.

279. დაწერეთ იმ წრფეთა განტოლებები, რომლებიც გავლებულია $2x-5y-10=0$ წრფის მართობულად მის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებში.

280. იპოვეთ სამკუთხედის წვეროები, თუ მისი გვერდების განტოლებებია:

$$4x + 3y - 21 = 0, \quad 3x + y - 7 = 0, \quad x + 2y - 4 = 0.$$

281. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ მისი წვეროებია:

$$A\,(3;\ -1), \quad B\left(-\frac{9}{5};\ \frac{3}{5}\right), \quad C\,(3;\ 3).$$

282. იპოვეთ მანძილი: 1) $M(4; -2)$ წერტილიდან $8x-15y-11=0$ წრფემდე; 2) $N(8; 5)$ წერტილიდან $3x-4y-15=0$ წრფემდე.

283. იპოვეთ მანძილი: 1) $M(2; 7)$ წერტილიდან $12x+5y-7=0$ წრფემდე; 2) $N(-3; 5)$ წერტილიდან $9x-12y+2=0$ წრფემდე.

284. იპოვეთ მანძილი შემდეგ წრფეებს შორის:

$$1)\ 3x+4y-6=0 \quad \text{და} \quad 6x+8y-7=0.$$

$$2)\ 2x-3y-6=0 \quad \text{და} \quad 4x-6y-25=0.$$

მიეცით ნორმალური სახე წრფეთა შემდეგ განტოლებებს:

285. 1) $8x+6y+15=0$; 2) $x+y-3=0$; 3) $3x-4y=0$.

286. 1) $5x+12y-39=0$; 2) $2x+3y+2=0$; 3) $\sqrt{3}\,x-y+1=0$.

287. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია $5x-3y-15=0$, $10x-6y+21=0$ წრფეებისა და მათ შორის მანძილს ყოფს $2:3$ ფარდობით.

288. იპოვეთ წრფე, რომელიც პარალელურია $12x+5y-52=0$ წრფისა და მისგან დაშორებულია $d=2$ მანძილით.

289. რომბის დიაგონალები, რომელთა სიგრძეებია 10 და 6, მიღებულია საკოორდინატო ღერძებად. მონახეთ რომბის გვერდების განტოლებები, თუ დიდი დიაგონალი ემთხვევა Ox ღერძს, ხოლო მცირე დიაგონალი — Oy ღერძს.

290. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის გვერდების განტოლებები, თუ მისი ფუძეები შესაბამისად ტოლია 8-ისა და 2-ის; ფერდები ფუძესთან ადგენს $\alpha=45°$-იან კუთხეს, მასთან Ox ღერძი ემთხვევა ტრაპეციის დიდ ფუძეს, ხოლო Oy ღერძი — ტრაპეციის სიმეტრიის ღერძს.

291. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია საკოორდინატო ღერძებსა და მოცემულ წრფეს შორის:

$$1)\ 3x+2y-6=0; \quad 2)\ 5x-3y-8=0.$$

292. იპოვეთ იმ მართობის სიგრძე, რომელიც დაშვებულია კოორდინატთა სათავიდან $3x+4y-25=0$ წრფეზე. მოძებნეთ აგრეთვე ამ მართობის ფუძის კოორდინატები.

293. იპოვეთ წრფე, რომელიც სათავიდან დაშორებულია 5 ერთეულით, ხოლო კუთხე Ox ღერძსა და სათავიდან ამ წრფეზე დაშვებულ მართობს შორის არის 60°.

294. იპოვეთ წრფე, რომელიც სათავიდან დაშორებულია 7 ერთეულით, ხოლო კუთხე Ox ღერძსა და სათავიდან ამ წრფეზე დაშვებულ მართობს შორის არის 120°.

გამოთვალეთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

295. 1) $\begin{cases} y = 3x, \\ y = -2x + 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 5x - 3, \\ y = 5x + 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ 6x - 2y + 7 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ \sqrt{3}\,x - y + 1 = 0; \end{cases}$

296. 1) $\begin{cases} y = 4x - 7, \\ y = -\dfrac{x}{4} + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 7x - 2, \\ y = x - \sqrt{2}\,; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{3}\,x - y - 5 = 0, \\ \sqrt{3}\,x + y - 1 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - 1 = 0. \end{cases}$

297. $A\,(2;\ 3)$ წერტილზე გაავლეთ წრფეთა კონა. ამ კონიდან გამოყავით ის წრფეები, რომლებიც Ox ღერძთან ადგენენ კუთხეებს: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°;

298. $A(3;\ -5)$ წერტილზე გაავლეთ წრფე, რომელიც $3x-2y+7=0$ წრფესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს.

299. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A\,(-3;\ 0)$, $B\,(2;\ 5)$, $C\,(3;\ 2)$. იპოვეთ BD სიმაღლის სიგრძე.

300. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A\,(2;\ 1)$, $B\,(4;\ -5)$, $C\,(1;\ -1)$. გამოთვალეთ A წერტილზე გავლებულ მედიანზე B წვეროდან დაშვებული მართობის სიგრძე.

301. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A\,(0;\ -4)$, $B\,(3;\ 0)$ $C\,(0;\ 6)$. იპოვეთ მანძილი C წერტილიდან A კუთხის ბისექტრისამდე.

302. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A\,(-2;\ 0)$, $B\,(2;\ 4)$, $C\,(4;\ 0)$. იპოვეთ AE მედიანისა და AD სიმაღლის განტოლებები.

303. წრფე პარალელურია $x+4y-11=0$ წრფისა და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს სამკუთხედს, რომლის ფართობი 2 კვ. ერთეულის ტოლია. იპოვეთ ეს წრფე.

304. იპოვეთ წრფე, რომელიც მართობულია $5x+12y-1=0$ წრფის და $M\,(3;\ 1)$ წერტილიდან დაშორებულია 2 ერთეულით.

305. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $5x-y+10=0$ და $8x+4y+9=0$ წრფეთა გადაკვეთის M წერტილზე $x+3y=0$ წრფის პარალელურად (M წერტილის მოძებნის გარეშე).

306. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $2x-3y+5=0$ და $3x+y-7=0$ წრფეთა გადაკვეთის M წერტილზე $y=2x$ წრფის მართობულად (M წერტილის მოძებნის გარეშე).

307. იპოვეთ $A\,(-2;\ -9)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $2x+5y-38=0$ წრფის მიმართ.

308. იპოვეთ $A(-5;\ 13)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $2x-3y-3=0$ წრფის მიმართ.

309. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $3x-2y+1=0$ წრფისა $M(5;\ 1)$ წერტილის მიმართ.

310. მოცემულია ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების $3x+y=0$, $x-3y=0$ განტოლებები და $(5;\ 0)$ წერტილი მის ფუძეზე. იპოვეთ მესამე გვერდის განტოლება.

311. ორდინატთა ღერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან და $3x-4y+12=0$ წრფიდან.

312. $2x+y-3=0$ წრფეზე აღებულია $A(1;\ 1)$ წერტილი. ამავე წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც A წერტილიდან დაშორებულია $d=\sqrt{5}$ მანძილით.

313. $A(5;\ 2)$ წერტილიდან რა კუთხით უნდა დაეცეს სხივი Ox ღერძს, რომ არეკვლილმა სხივმა გაიაროს $B(-1;\ 4)$ წერტილზე?

314. $M(-2;\ 3)$ წერტილიდან სინათლის სხივი ეცემა Ox ღერძს α კუთხით და აირეკლება. იპოვეთ დაცემული და არეკვლილი სხივების განტოლებები, თუ $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

315. $A(2;\ 3)$ წერტილიდან სინათლის სხივი ეცემა $x-2y+8=0$ წრფეს 45°-იანი კუთხით და აირეკლება. იპოვეთ დაცემული და არეკვლილი სხივების განტოლებები.

316. სინათლის სხივი, რომელიც გადის $A(2;\ 3)$ წერტილზე, აირეკლება $x+y+1=0$ წრფიდან და გადის $B(1;\ 1)$ წერტილზე. იპოვეთ დაცემული და არეკვლილი სხივების განტოლებები.

317. მოცემულია პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებანი: $x-3y-2=0$, $2x-y+5=0$ და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი $M(1;\ 2)$. იპოვეთ დანარჩენი ორი გვერდის განტოლება.

318. მოცემულია ოთხკუთხედის წვეროები: $A(0;\ 7)$, $B(6;\ 3)$, $C(6;\ -5)$, $D(-9;\ 5)$. აჩვენეთ, რომ ოთხკუთხედი ტრაპეციაა და გამოთვალეთ მისი სიმაღლე.

319. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(2;\ 3;\ -1)$, $B(1;\ -2;\ 0)$ და $C(-3;\ 2;\ 2)$. დაწერეთ AP მედიანის კანონიკური განტოლება.

320. დაწერეთ იმ წრფის კანონიკური და პარამეტრული სახის განტოლებები, რომელიც გადის $M_0(-1;\ 1;\ -3)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{s}=(1;\ -3;\ 4)$ ვექტორის.

321. შეადგინეთ იმ პარალელოგრამის დიაგონალების კანონიკური განტოლებები, რომლის სამი წვეროა $A(2;\ 4;\ 6)$, $B(-3;\ 5;\ 4)$ და $C(8;\ -6;\ 2)$.

322. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(-5;\ 7;\ 1)$, $B(2;\ 4;\ -1)$, $C(-1;\ 3;\ 5)$. დაწერეთ B წერტილიდან AC გვერდზე დაშვებული მედიანის განტოლება.

323. მოცემულია წრფის განტოლებები ზოგადი სახით:

$$x + 2y + 3z - 13 = 0, \qquad 3x + y + 4z - 14 = 0.$$

ჩაწერეთ ისინი უმარტივესი, კანონიკური და პარამეტრული სახით.

324. მოცემულია წრფის განტოლებები ზოგადი სახით:

$$2x - 3y - 3z - 9 = 0, \quad x - 2y + z + 3 = 0.$$

ჩაწერეთ ისინი კანონიკური სახით და იპოვეთ წრფის მიმართულების კოსინუსები.

325. დაწერეთ $M_1(-1;\ 2;\ 3)$ და $M_2(2;\ 6;\ -2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებები და იპოვეთ მისი მიმართულების კოსინუსები.

326. დაწერეთ შემდეგ წრფეთა განტოლებები კანონიკური სახით:

1) $x = 2z - 5,\quad y = 6z + 7;$ 2) $y = 4,\ z = 3x + 12.$

იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

327. 1) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$ და $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z}{-1}$;

2) $x = 5z + 1,\ y = 2$ და $x = z + 3,\ y = 4z - 3.$

328. 1) $y = \dfrac{3}{2}x + 8,\quad z = 3x$ და $y = 6,\ z = \dfrac{15}{8}x + 6;$

2) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$ და $x + 2y - z = 0,\ x - 2y + 3z - 3 = 0.$

329. $A(2;\ -3;\ -8)$ წერტილზე გაავლეთ წრფე: 1) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z+3}{5}$ წრფის პარალელურად; 2) Oz ღერძის პარალელურად.

330. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(5;\ 4;\ 0)$ წერტილზე $y=9x-1,\ z=2x+5$ წრფის პარალელურად.

331. შეამოწმეთ, მდებარეობს თუ არა შემდეგი სამი წერტილი ერთ წრფეზე: 1) $A(3;\ 0;\ 1)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C\left(1;\ \dfrac{4}{3};\ 3\right)$; 2) $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(4;\ 2;\ -3)$, $C(1;\ 2;\ 5)$.

332. იპოვეთ მახვილი γ კუთხე, რომელსაც ადგენს $x=z+2$, $y=-2z+3$ წრფე Oz ღერძთან.

333. დაწერეთ იმ წრფის პარამეტრული განტოლებები, რომელიც გადის $A(-2;\ 1;\ -1)$ წერტილზე $\vec{P}(1;\ -2;\ 3)$ ვექტორის პარალელურად.

334. დაწერეთ $M(x,\ y,\ z)$ წერტილის ტრაექტორიის განტოლებები, თუ ის გამოვიდა საწყისი $A(4;\ -3;\ 1)$ წერტილიდან და მოძრაობს $\vec{v}(2;\ 3;\ 1)$ სიჩქარით.

335. წრფე გადის $A(2;\ -3;\ 4)$ წერტილზე Oz ღერძის მართობულად და კვეთს თვით ამ ღერძს. დაწერეთ ამ წრფის განტოლებები.

336. დაწერეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის $A(a,\ b,\ c)$ წერტილზე Oz ღერძის მართობულად.

337. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ და $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$ წრფეების მართობულად.

338. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გადის $A(2;\ -1;\ 3)$ წერტილზე $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ და $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{1}$ წრფეების მართობულად.

339. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც მოთავსებულია xOy სიბრტყეზე და გადის $A(-2;\ 1;\ 0)$ წერტილზე $\frac{x-4}{-3}=\frac{y+6}{2}=\frac{z}{1}$ წრფის მართობულად.

340. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც მოთავსებულია xOz სიბრტყეზე და გადის კოორდინატთა სათავეზე $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$ წრფის მართობულად.

341. წრფე გადის $A(1;\ -5;\ 3)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma=120°$ კუთხეებს; დაწერეთ ამ წრფის განტოლებები.

342. წრფე გადის $A(3;\ 1;\ -1)$ წერტილზე და Ox და Oy ღერძებთან ადგენს შესაბამისად 45° და 60° კუთხეებს. დაწერეთ ამ წრფის განტოლებები.

343. დაამტკიცეთ, რომ

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0; \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

აცდენილი წრფეებია.

344. დაამტკიცეთ, რომ:

$$\begin{cases} x + y - z + 4 = 0; \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{და} \quad \frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$$

წრფეები იკვეთებიან და იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი.

§ 8. სიბრტყე და წრფე

φ კუთხე $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ წრფესა და $Ax + By + Cz +$ $+ D = 0$ სიბრტყეს შორის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

წრფისა და სიბრტყის პარალელობის პირობაა:

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

ხოლო მართობულობისა:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

თუ წრფე სიბრტყეზე ძევს, მაშინ

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad \text{და} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

ორი

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{და} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

წრფის ერთ სიბრტყეზე მდებარეობის (ან მათი გადაკვეთის) პირობაა:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

მოცემულ $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ წრფეზე გამავალი სიბრტყეთა კონის განტოლებაა:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0,$$

სადაც λ პარამეტრია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც oy ღერძის პარალელურია და გადის $x+3y+5z—4=0$ და $x—y—2z+7=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე.

▷. სიბრტყეთა კონის განტოლებაა:

$$x+3y+5z-4+\lambda(x-y-2z+7)=0;$$
$$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z+(7\lambda-4)=0.$$

ვინაიდან საძიებელი სიბრტყე oy ღერძის პარალელურია, ამიტომ y-ის კოეფიციენტი უნდა იყოს ნულის ტოლი: $3—\lambda=0$, ე. ი. $\lambda=3$. λ-ს ამ მნიშვნელობას თუ შევიტანთ სიბრტყის განტოლებაში, მივიღებთ: $4x-z+17=0$. ◁

მ ა გ ა ლ ი თ ი. იპოვეთ კუთხე $A(—1;\ 0;\ —5)$ და $B(1;\ 2;\ 0)$ წერტილებზე გამავალ წრფესა და $x—3y+z+5=0$ სიბრტყეს შორის.

▷. წრფის მიმმართველ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ $\vec{Q}=\vec{AB}=(2;\ 2;\ 5)$. რადგან სიბრტყის ნორმალური ვექტორია $\vec{N}(1;\ —3;\ 1)$ ამიტომ

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{N}\cdot\vec{Q}|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{Q}|}=\frac{|1\cdot2-3\cdot2+1\cdot5|}{\sqrt{1+9+1}\cdot\sqrt{4+4+25}}=\frac{1}{11\sqrt{3}}$$ ◁

მ ა გ ა ლ ი თ ი. იპოვეთ $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ წრფისა და $3x+5y-z-2=0$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

◁. მოცემული წრფის განტოლება დავწეროთ პარამეტრული სახით: $x=12+4t$. $y=9+3t$, $z=1+t$. ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ სიბრტყის განტოლებაში

$$3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0$$

საიდანაც $t=—3$. მაშასადამე, გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია:

$$x=12+4(-3)=0,\ y=9+3(-3)=0,\ z=1-3=-2.$$ ◁

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დაწერეთ იმ პერპენდიკულარის კანონიკური სახის განტოლება, რომელიც დაშვებულია კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყეზე

$$4x-y+2z-3=0.$$

▷. $\vec{N}=(4;\ —1;\ 2)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია მოცემული სიბრტყის, პარალელურია საძიებელი წრფის; ამიტომ იგი შეგვიძლია ჩავთვალოთ საძიებელ წრფის მიმმართველ ვექტორად; გვექნება:

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}.$$ ◁

345. იპოვეთ კუთხე: 1) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-4}{3}$ წრფესა და $2x+y+$ $+z+5=0$ სიბრტყეს შორის; 2) $3x-2y=24$, $3x-z=-4$ წრფესა და $6x+15y-10z+31=0$ სიბრტყეს შორის.

346. იპოვეთ კუთხე $y=3x-1$, $2z=-3x+2$ წრფესა და $2x+y+$ $+z-4=0$ სიბრტყეს შორის.

347. აჩვენეთ, რომ $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ წრფე $4x-$ $-3y-6z-5=0$ სიბრტყის პარალელურია.

348. k-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x=kz+2$, $y=2kz+4$ წრფე $x+y+z=0$ სიბრტყის პარალელური?

349. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{2}$ წრფის მართობულად.

350. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $(-1;$ $-5;\ 8)$ წერტილზე $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5}$ წრფის მართობულად.

351. იპოვეთ წრფე, რომელიც გადის $(1;\ 1;\ 1)$ წერტილზე $x+2y+$ $+3z-1=0$ სიბრტყის მართობულად.

352. A და B კოეფიციენტების რა მნიშვნელობისათვის იქნება $Ax+By+6z-7=0$ სიბრტყე $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$ წრფის მართობული?

იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი:

353. 1) $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ წრფისა $2x+5y-z-2=0$ სიბრტყესთან;

2) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{-1}$ წრფისა $x+3y-5z+2=0$ სიბრტყესთან.

354. 1) $y=-2x+9$, $z=9x-43$ წრფისა $3x-4y+7z-33=0$ სიბრტყესთან;

2) $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}$ წრფისა $3x+y-4z=0$ სიბრტყესთან.

355. იპოვეთ $A\ (5;\ 2;\ -1)$ წერტილის გეგმილი $2x-y+3z+23=0$ სიბრტყეზე.

856. იპოვეთ კუთხე $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ წრფესა და $6x-3y+2z=0$ სიბრტყეს შორის.

857. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(3;-2;4)$ წერტილზე და პერპენდიკულარულია $5x+3y-7z+1=0$ სიბრტყის.

858. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $4x-3z+20=0$, $4y-z-8=0$ წრფეზე $x+y-z+15=0$ სიბრტყის მართობულად.

859. იპოვეთ $3x+2y-4z-5=0$, $6x-y-2z+4=0$ წრფის გეგმილები საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

860. იპოვეთ $2x-3y=0$, $x+y-4=0$ წრფის გეგმილები საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

861. იპოვეთ $3x-2y-z+4=0$, $x-4y-3z-2=0$ წრფის გეგმილი $5x+2y+2z-7=0$ სიბრტყეზე.

862. იპოვეთ $2x+3y+4z+5=0$, $x-6y+3z-7=0$ წრფის გეგმილი $2x+2y+z-15=0$ სიბრტყეზე.

863. იპოვეთ $A(4;-3;1)$ წერტილის გეგმილი $x+2y-z-3=0$ სიბრტყეზე.

864. იპოვეთ $A(2;-1;3)$ წერტილის გეგმილი $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$ წრფეზე.

865. $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{3}$ წრფეზე იპოვეთ $A(0;4;1)$ წერტილის უახლოესი წერტილი.

866. განსაზღვრეთ λ ისე, რომ $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$ და $4x-y-2z+\lambda=0$ სიბრტყეები გადაიკვეთოს ერთ წრფეზე.

867. აჩვენეთ, რომ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$, $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ წრფეები ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს; იპოვეთ მათი გადაკვეთის წერტილი.

868. განსაზღვრეთ, L-ის რა მნიშვნელობისათვის იკვეთება შემდეგი წრფეები:

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4},\quad \frac{x-3}{L}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

869. წრფე გადის $M(1;\ 1;\ 1)$ წერტილზე და კვეთს ორ $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ წრფეს. დაწერეთ ამ წრფის განტოლებები.

870. წრფე გადის $M(1;\ 2;\ 3)$ წერტილზე, კვეთს Oz ღერძს და მართობულია $x=y=z$ წრფისა. დაწერეთ ამ წრფის განტოლებები.

§ 4. მეორე რიგის ალგებრული წირები

მეორე რიგის ალგებრული წირის განტოლებას ზოგადად აქვს სახე:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

სადაც A, B და C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. საზოგადოდ შეიძლება (1) განტოლებით განისაზღვროს ე. წ. გადაგვარებული წირი (ცარიელი სიმრავლე, წერტილი, წრფე ან წრფეთა წყვილი).

თუ L წირი არაგადაგვარებულია, მაშინ დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის სათანადო შერჩევით (1) დაიყვანება ერთ-ერთ შემდეგი სახის უმარტივეს (კანონიკურ) განტოლებამდე:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\ b>0 \text{ ელიფსი}, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\quad b>0 \text{ ჰიპერბოლა}, \tag{3}$$

$$y^2=2px,\quad \text{პარაბოლა}. \tag{4}$$

თუ (2) განტოლებაში $a=b=R$, მაშინ მიიღება წრეწირის განტოლება ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R:

$$x^2+y^2=R^2$$

თუ წრეწირის ცენტრი მოთავსებულია წერტილში $(x_0,\ y_0)$, მაშინ მის განტოლებას ექნება სახე:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

ელიფსს, რომლის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$$

აქვს მე-4 ნახაზზე მოცემული ფორმა.

a და b მონაკვეთები ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძებია. ფოკუსების კოორდინატებია: $F_1\,(c;\ 0)$, $F_2\,(-c;\ 0)$. ამ შემთხვევაში $a>b$. a, b და c პარამეტრებს შორის არსებობს ასეთი დამოკიდებულება: $b^2=a^2-c^2$.

ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $e=\dfrac{c}{a}$ $(e<1)$, რადგან $c=\sqrt{a^2-b^2}$,

$$\text{ამიტომ } e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \text{ და } \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}.$$

ელიფსის ნებისმიერი $M\,(x,\ y)$ წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილებია:

$$r_1=a-ex, \quad r_2=a+ex.$$

ელიფსის დირექტრისების განტოლებებია: $x=\pm\dfrac{a}{e}$.

თუ $b>a$, მაშინ ელიფსის ფოკუსები მოთავსებული იქნება Oy ღერძზე. ამ შემთხვევაში:

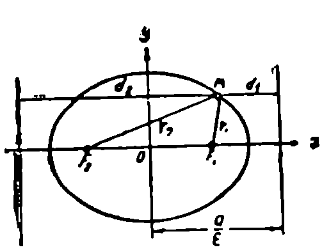
$$a^2=b^2-c^2, \quad e=\frac{c}{b}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}, \quad \frac{a}{b}=\sqrt{1-e^2}, \quad r_1=b-ey,$$

$r_2=b+ey$, ხოლო დირექტრისების განტოლებები იქნება: $y=\pm\dfrac{b}{e}$.

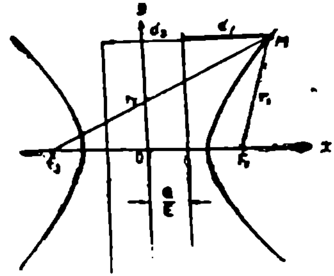
ჰიპერბოლას, რომლის კანონიკური სახის განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>0,\ b>0$$

აქვს მე-5 ნახაზზე მოცემული ფორმა



ნახ. 4



ნახ. 5

a და b მონაკვეთები ჰიპერბოლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძებია. ფოკუსების კოორდინატებია: $F_1(c;\ 0)$, $F_2(-c;\ 0)$. a, b და c პარამეტრებს შორის არსებული დამოკიდებულება გამოისახება ტოლობით: $b^2=c^2-a^2$.

თუ ჰიპერბოლის წარმოსახვითი ღერძი $2a$ მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ, ხოლო ნამდვილი ღერძი $2b$ ემთხვევა Oy ღერძს, მაშინ ჰიპერბოლის განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \quad \text{ანუ} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$ (შეუღლებული ჰიპერბოლა). თუ $a=b$, მაშინ გვაქვს ტოლფერდა ჰიპერბოლა:

$$x^2-y^2=a^2 \quad \text{ან} \quad y^2-x^2=a^2.$$

ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e=\dfrac{c}{a}$ $(e>1)$, რადგან $c=\sqrt{a^2+b^2}$, ამიტომ $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$ და $\dfrac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$. შეუღლებული ჰიპერბოლისათვის

$$e=\frac{c}{b}=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}, \quad \frac{a}{b}=\sqrt{e^2-1}.$$

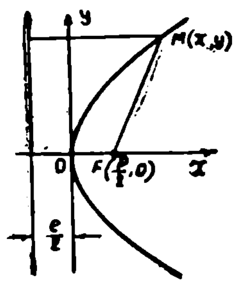
ჰიპერბოლის დირექტრისების განტოლებებია: $x=\pm\dfrac{a}{e}$ ან $y=\pm\dfrac{b}{c}$, ხოლო ასიმპტოტებისა: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. ჰიპერბოლის ფოკალური რადიუს-ვექტორები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$r_1=|ex-a|, \quad r_2=|ex+a|.$$

პარაბოლა, რომლის კანონიკური სახის განტოლებაა:

$$y^2=2px, \quad p>0$$

აქვს მე-6 ნახაზზე მოცემული ფორმა.



ნახ. 6

სადაც p პარამეტრი გამოსახავს მანძილს ფოკუსიდან დირექტრისამდე. პარაბოლის დირექტრისის განტოლება არის $x=-\dfrac{p}{2}$, ხოლო ფოკუსის

კოორდინატები — $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$. პარაბოლის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის ფოკალური რადიუს-ვექტორი $r = x + \frac{p}{2}$.

$x^2 = 2py$ განტოლება გამოსახავს აგრეთვე პარაბოლას, რომლის სიმეტრიის ღერძია Oy. ამ პარაბოლის ფოკუსია $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, ხოლო დირექტრისის განტოლება $y = -\frac{p}{2}$; $M(x, y)$ წერტილის ფოკალური რადიუს-ვექტორია $r = y + \frac{p}{2}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $x+y=0$ წრფის პარალელური წრფეებიდან გამოყავით ისეთები, რომლებიც ეხებიან $x^2+y^2=1$ წრეწირს.

◁. მოცემული წრფის ყოველი პარალელური წრფის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს ამ სახით: $x+y+c=0$. მხებ წრფეს წრეწირთან გააჩნია მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი; ამიტომ წრფისა და წრეწირის განტოლებებისაგან შედგენილ სისტემას უნდა ჰქონდეს ერთი ამონახსნი. წრფის განტოლებიდან განსაზღვრული y-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ წრეწირის განტოლებაში

$$x^2 + (-x-c)^2 = 1,$$

ე. ი.

$$2x^2 + 2cx + c^2 - 1 = 0$$

ზემოთ მოთხოვნილი პირობის გამო, მიღებული კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი ნულის ტოლი უნდა იყოს

$$(2c)^2 - 4\cdot 2(c^2-1) = 0. \text{ ან } -c^2 + 2 = 0,\ c = \pm\sqrt{2}.$$

მაშასადამე, საძიებელი მხებების განტოლებებია:

$$x + y + \sqrt{2} = 0 \text{ და } x + y - \sqrt{2} = 0.\ \triangleleft.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოიკვლიეთ განტოლება $x^2+y^2=2ax$.

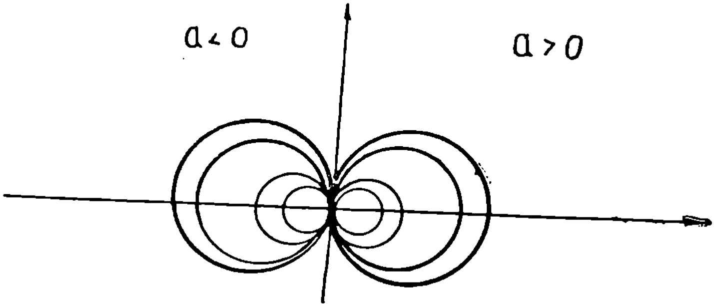
▷. a-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ეს განტოლება განსაზღვრავს წრეწირს, რადგან ცვლადების კვადრატებთან მდგომი კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია, ცვლადების ნამრავლიანი წევრი არ შედის. რადგან განტოლება თავისუფალ წევრს არ შეიცავს, წრეწირი გადის კოორდინატთა სათავეზე.

დავიყვანოთ მოცემული განტოლება კანონიკურ სახეზე:

$$x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + y^2 = 0,$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

მაშასადამე, გამოსაკვლევი წრეწირის ცენტრია Ox ღერძის $C(a;\ 0)$ წერტილი, $R = |a|$, ე. ი. ეხება Oy ღერძს კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 7).



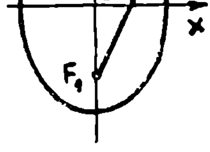
ნახ. 7

სხვადასხვა a-თვის მოცემული განტოლება განსაზღვრავს იმ წრეწირთა სიმრავლეს, რომელთა ცენტრი Ox ღერძზეა და ეხებიან Oy ღერძს. როცა $a > 0$, შესაბამისი წრეწირი მარჯვენა ნახევარსიბრტყეშია, ხოლო როცა $a < 0$ — მარცხენაში. როცა $a = 0$ წრეწირი გადაგვარდება (0, 0) წერტილად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. იპოვეთ ნახევარღერძები, ფოკუსების კოორდინატები და ექსცენტრისიტეტი $16x^2 + 4y^2 = 64$ ელიფსისა.

▷ დავიყვანოთ მოცემული განტოლება კანონიკურ სახეზე:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1,$$



ნახ. 8

ე. ი. ელიფსის დიდი ნახევარღერძი $a = 2$, მცირე $b = 4$. ამასთან ელიფსის დიდი ღერძი და ფოკუსები მოთავსებულია Oy ღერძზე (ნახ. 8).

$c = \sqrt{b^2 - a^2} = 2\sqrt{3}$. მაშასადამე, ფოკუსების კოორდინატებია $(0;\ -2\sqrt{3})$ და $(0;\ 2\sqrt{3})$, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e = \frac{c}{a} =$ $= \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. $\lhd$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ჰიპერბოლის ასიმპტოტების განტოლებებია $4x \pm \pm 3y = 0$, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი ტოლია 20-ის. დაწერეთ მისი კანონიკური განტოლება.

$\rhd$. ამოვხსნათ y-ის მიმართ ასიმპტოტების განტოლებები, მივიღებთ:

$$y = \pm\frac{3}{4}x, \quad \text{ე. ი.} \quad \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$

ამასთან, $F_1F_2 = 2c = 20$, $c = 10$. რადგან ჰიპერბოლისათვის $c^2 = a^2 + b^2$, ამიტომ a და b-ს საპოვნელად მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

საიდანაც $a = 8$, $b = 6$. მაშასადამე, ჰიპერბოლის საძიებელ კანონიკურ განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1. \quad \lhd.$$

ამოხსენით ამოცანები:

371. დაწერეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია $A\ (4;\ 5)$ და $B\ (-2;\ 1)$.

372. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება $5x - 12y - 24 = 0$ წრფეს და რომლის ცენტრია $C\ (6;\ 7)$ წერტილი.

373. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც Oy ღერძს ეხება კოორდინატთა სათავეში, ხოლო Ox ღერძს კვეთს $A\ (-6;\ 0)$ წერტილში.

იპოვეთ რადიუსები და ცენტრის კოორდინატები შემდეგი წრეწირებისა:

374. 1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2y^2 + 5x - 3y - 2 = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 3y = 0$.

375. 1) $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + x = 0$; 3) $3x^2 + 3y^2 + 5x - 3y - 2 = 0$.

376. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის Oy ღერძს ეხება $A\ (0;\ -3)$ წერტილში და რადიუსი უდრის 2-ს.

377. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის Ox ღერძს ეხება კოორდინატთა სათავეში და გადის $A\ (0;\ -4)$ წერტილზე. იპოვეთ წრეწირის გადაკვეთის წერტილები საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებთან.

378. მოცემულია $(x-1)^2+y^2=4$ წრეწირი. $A\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$ წერტილზე გაავლეთ ქორდა, რომელიც ამ წერტილით შუაზე იყოფა.

379. შეადგინეთ $(x+2)^2+(y-3)^2=30$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც მართობულია $5x+2y-13=0$ წრფისა.

380. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება საკოორდინატო ღერძებს და გადის $A\ (1;\ 2)$ წერტილზე.

381. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის $A\ (3;\ 0)$, $B\ (-1;\ 2)$ წერტილებზე და რომლის ცენტრი მდებარეობს $x-y+2=0$ წრფეზე.

შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის მოცემულ სამ წერტილზე.

382. $A\ (9;\ 3)$, $B\ (-3;\ 3)$, $C\ (11;\ 1)$.

383. $A\ (-1;\ 3)$, $B\ (0;\ 2)$, $C\ (1;\ -1)$.

384. როგორ არის განლაგებული $M_1\ (3;\ 4)$, $M_2\ (-1;\ 2)$ და $M_3\ (-5;\ 4)$ წერტილები $(x-3)^2+(y+2)^2=36$ წრეწირის მიმართ?

385. დაამტკიცეთ, რომ $y=2x+5$ წრფე და $x^2+y^2=1$ წრეწირი არ იკვეთებიან.

386. როგორ არის განლაგებული $(x-5)^2+(y+2)^2=25$ წრეწირის მიმართ შემდეგი წრფეები: 1) $4x-3y-1=0$; 2) $3x-y-5=0$; 3) $3x-4y+12=0$.

387. რა მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ განტოლების კოეფიციენტებს, რომ ის განსაზღვრავდეს წრეწირს ცენტრით $C\ (3;\ 2)$ წერტილში და $R=5$ რადიუსით?

388. იპოვეთ $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ წრეწირისა და შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილები: 1) $x-y-4=0$; 2) $3x-4y+36=0$; 3) $x-y-5=0$.

389. შეადგინეთ $x^2+y^2+3x-y=0$ და $3x^2+3y^2+2x+y=0$ წრეწირების საერთო ქორდის განტოლება.

390. შეადგინეთ $x^2+y^2-6x+8y=0$ და $x^2+y^2+2x-12y+1=0$ წრეწირების საერთო ქორდისა და მათ ცენტრებზე გამავალი წრფის განტოლებები.

391. წრეწირი ეხება $2x+y-5=0$ და $2x+y+15=0$ პარალელურ წრფეებს, მასთან ერთ-ერთ მათგანს — $A\ (2;\ 1)$ წერტილში. შეადგინეთ ამ წრეწირის განტოლება.

392. წრეწირი, რომლის ცენტრიც მდებარეობს $2x+y=0$ წრფეზე, ეხება $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$ წრფეებს. შეადგინეთ ამ წრეწირის განტოლება.

393. იპოვეთ მანძილი $A\ (6;\ -8)$ წერტილიდან $x^2+y^2=9$ წრეწირამდე.

394. იპოვეთ მანძილი $A\ (-7;\ 2)$ წერტილიდან $(x-5)^2+(y-7)^2=225$ წრეწირამდე.

395. 1) იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილი $A\ (-4;\ 4)$ წერტილამდე ორჯერ აღემატება $B\ (-1;\ 1)$ წერტილამდე მანძილს;

2) იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებამდე მანძილთა კვადრატების ჯამი უდრის a^2-ს.

396. მოცემულია $x^2+y^2=a^2$ წრეწირი. იპოვეთ მისი $A\ (a;\ 0)$ წერტილიდან გავლებული ქორდების შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

397. მოცემულია $A\ (-6;\ 0)$ და $B\ (2;\ 0)$ წერტილები. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიდანაც OA და OB მონაკვეთები მოჩანს ტოლი კუთხეებით.

398. მოცემულია $x^2+y^2=2ax$ წრეწირი. კოორდინატთა სათავიდან გავლებული ყოველი ON ქორდა გაგრძელებულია და მასზე გადაზომილია $NM=ON$ მონაკვეთი. იპოვეთ M წერტილების გეომეტრიული ადგილი.

399. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ: 1) ფოკუსებს შორის მანძილი უდრის 6-ს, ხოლო დიდი ნახევარღერძია 5; 2) დიდი ნახევარღერძია 10, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e=0{,}8$.

400. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ: 1) მცირე ნახევარღერძია 3, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) ნახევარღერძების ჯამია 10, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი — $4\sqrt{5}$.

იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ელიფსებისა:

401. 1) $9x^2+25y^2=225$; 2) $16x^2+y^2=16$.

402. 1) $25x^2+169y^2=4225$; 2) $9x^2+y^2=36$.

403. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი ფოკუსიდან ელიფსის დიდი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 7 და 1.

404. იპოვეთ შემდეგი წრფეებისა და ელიფსების გადაკვეთის წერტილები: 1) $2x - y - 9 = 0$, $x^2 + 3y^2 = 36$; 2) $3x + 10y - 25 = 0$, $4x^2 + 25y^2 = 100$; 3) $3x - 4y - 40 = 0$, $9x^2 + 16y^2 = 144$.

405. განსაზღვრეთ $A(6; -3)$ $B(-2; 5)$ და $C(3; -6)$ წერტილების მდებარეობა $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ ელიფსის მიმართ.

406. ააგეთ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ელიფსის ფოკუსები ისე, რომ არ გამოთვალოთ მათი კოორდინატები.

407. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ: 1) მისი მცირე ღერძი ფოკუსიდან მოჩანს მართი კუთხით; 2) ფოკუსებს შორის მანძილი უდრის დიდი და მცირე ღერძების ბოლოებს შორის მანძილს.

408. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ: 1) მისი დიდი ღერძი 3-ჯერ აღემატება მცირე ღერძს; 2) ღერძების ფარდობაა 5 : 3.

409. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ ის გადის შემდეგ ორ წერტილზე: $A(\sqrt{3}; -2)$ და $B(-2\sqrt{3}; 1)$.

410. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ ის გადის შემდეგ ორ წერტილზე: $A(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ და $B(6; 0)$. იპოვეთ ექსცენტრისიტეტი და A წერტილის რადიუს-ვექტორები.

411. იპოვეთ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ ელიფსის იმ დიამეტრის სიგრძე, რომელიც ემთხვევა მეორე საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისას.

412. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც გავლებულია $F_1(c; 0)$ ფოკუსზე დიდი ღერძის მართობულად.

413. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 5 ერთეულითაა დაშორებული მცირე ღერძიდან.

414. $x = -5$ წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $x^2 + 5y^2 = 20$ ელიფსის მარცხენა ფოკუსიდან და ზედა წვეროდან.

415. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 3-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარჯვენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარცხენადან.

416. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც

4-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარჯვენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარცხენადან.

417. $x^2+4y^2=4$ ელიფსში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი, რომლის ერთი წვერო დიდი ღერძის მარჯვენა ბოლოა. იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი ორი წვეროს კოორდინატები.

418. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვერო $9x^2+5y^2=1$ ელიფსის ფოკუსებია, ხოლო დანარჩენი ორი წვერო ემთხვევა მცირე ღერძის ბოლოებს.

419. დაწერეთ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ ელიფსის დირექტრისების განტოლებები.

420. დაწერეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის ფოკუსებს შორის მანძილია 2, დირექტრისებს შორის კი — 10.

421. დაწერეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის მცირე ნახევარღერძია $2\sqrt{6}$, ხოლო დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm 10$.

422. დაწერეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის დირექტრისებს შორის მანძილია 36, ხოლო რომელიმე წერტილის ფოკალური რადიუსვექტორებია 9 და 15.

423. იპოვეთ $x^2+4y^2=4$ ელიფსისა და იმ წრეწირის გადაკვეთის წერტილები, რომელიც გადის ელიფსის ფოკუსებზე; წრეწირის ცენტრი ელიფსის ზედა წვეროა.

424. $x^2+5y^2=20$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორები ურთიერთმართობულია.

425. $y=-x+m$ წრფე m-ის რა მნიშვნელობისათვის: 1) კვეთს $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსს; 2) ეხება მას; 3) გადის მის გარეთ.

426. გამოიყვანეთ პირობა იმისა, რომ $y=kx+m$ წრფე ეხებოდეს $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსს.

427. P და Q სიბრტყეებს შორის კუთხე $\varphi=30°$. განსაზღვრეთ იმ ელიფსის ნახევარღერძები, რომელიც მიიღება P სიბრტყეზე მდებარე $R=10$ რადიუსიანი წრეწირის Q სიბრტყეზე დაგეგმილებით.

428. ელიფსი, რომლის მცირე ნახევარღერძია 6, $R=12$ რადიუსიანი წრეწირის გეგმილია. განსაზღვრეთ კუთხე იმ სიბრტყეებს შორის, რომელზედაც წრეწირი და ელიფსია მოთავსებული.

429. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა $F_1(2;\ 0)$ და $F_2(-2;\ 0)$ წერტილებამდე მანძილების ჯამია $2\sqrt{5}$.

430. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც 3-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული $x=9$ წრფიდან, ვიდრე $A\ (1;\ 0)$ წერტილიდან.

431. მუდმივი სიგრძის AB მონაკვეთი თავისი ბოლოებით სრიალებს მართი კუთხის გვერდების გასწვრივ. განსაზღვრეთ წირი, რომელსაც აღწერს AB მონაკვეთის ნებისმიერი M წერტილი.

432. იპოვეთ იმ მართობთა შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც დაშვებულია $x^2+y^2=R^2$ წრეწირის წერტილებიდან Ox ღერძზე.

433. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1) ფოკუსებს შორის მანძილია 10 და წარმოსახვითი ნახევარღერძი $b=4$; 2) ნამდვილი ნახევარღერძი $a=2\sqrt{5}$ და ექსცენტრისიტეტი $e=\sqrt{1,2}$.

434. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1) ფოკუსებს შორის მანძილია 16 და ექსცენტრისიტეტი $e=\dfrac{4}{3}$; 2) წარმოსახვითი ნახევარღერძი $b=5$ და ექსცენტრისიტეტი $e=\dfrac{3}{2}$.

435. იპოვეთ ღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ჰიპერბოლებისა: 1) $4x^2-9y^2=25$; 2) $9y^2-16x^2=114$.

436. იპოვეთ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი; 2) შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები მოთავსებულია Oy ღერძზე სათავის სიმეტრიულად, ხოლო ნახევარღერძებია $a=6$ და $b=12$.

437. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ ის გადის $M\ (-5;\ 3)$ წერტილზე და მისი ექსცენტრისიტეტი $e=\sqrt{2}$.

438. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ ის გადის შემდეგ ორ წერტილზე: $M_1\ (6;\ -1)$ და $M_2\,(-8;\ 2\sqrt{2})$.

439. მოცემულია $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{25}=1$ ჰიპერბოლა. ააგეთ მისი ფოკუსები და ასიმპტოტები.

440. მოცემულია $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლა. დაწერეთ მისი ასიმპტოტების განტოლებები და იპოვეთ შეუღლებული ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი.

441. $\dfrac{x^2}{80}-\dfrac{y^2}{20}=1$ ჰიპერბოლაზე მოცემულია $M(10;\ -\sqrt{5})$ წერტი-

ლი. იპოვეთ იმ წრფეთა განტოლებები, რომლებზეც მოთავსებულია M წერტილის ფოკალური რადიუსები.

442. შეამოწმეთ, რომ $M\left(-5;\ \frac{9}{4}\right)$ წერტილი ძევს $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ჰიპერბოლაზე და იპოვეთ M წერტილის ფოკალური რადიუსები.

443. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან მის ასიმპტოტამდე და კუთხე ასიმპტოტებს შორის.

444. იპოვეთ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი, თუ მისი ასიმპტოტი ნამდვილ ღერძთან ადგენს: 1) 60°-იან კუთხეს; 2) α კუთხეს.

445. $A(2;\ -5)$ წერტილზე გაავლეთ წრფეები $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების პარალელურად.

446. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ასიმპტოტებამდე მანძილების ნამრავლი არის მუდმივი სიდიდე.

447. $x^2-y^2=4$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორები ურთიერთმართობულია.

448. იპოვეთ $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$ ჰიპერბოლისა და შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილები: 1) $x-5y=0$; 2) $2x+y-18=0$; 3) $x-y+$ $+5=0$.

449. დაწერეთ იმ ჰიპერბოლას განტოლება, რომლის წვეროები ემთხვევა $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის ფოკუსებს, ხოლო ფოკუსები — ელიფსის წვეროებს.

450. ჰიპერბოლას, რომლის ექსცენტრისიტეტია 1,25, $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ ელიფსთან აქვს საერთო ფოკუსები. იპოვეთ მისი განტოლება.

451. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1) იგი გადის $M\ (12;\ 3\sqrt{3})$ წერტილზე, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{x}{2}$; 2) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{8}{3}$ და ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{3}{2}$.

452. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1) ასიმპტოტების

განტოლებებია $y=\pm\frac{4}{3}x$, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი $2c=20$; 2) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{32}{5}$ და $b=3$.

453. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც მარჯვენა ფოკუსიდან დაშორებულია 4,5 ერთეულით.

454. $9x^2-16y^2=144$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც მარცხენა ფოკუსიდან დაშორებულია 2-ჯერ მეტი მანძილით, ვიდრე მარჯვენადან.

455. ჰიპერბოლა გადის $M\left(6;\ \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ წერტილზე საკოორდინატო ღერძების სიმეტრიულად. იპოვეთ მარცხენა ფოკუსიდან ასიმპტოტებზე დაშვებული მართობების განტოლებები, თუ ჰიპერბოლის ნამდვილი ნახევარღერძია 4.

456. იპოვეთ $x^2-3y^2=12$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების გადაკვეთის წერტილები იმ წრეწირთან, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე; წრეწირის ცენტრი მოთავსებულია ჰიპერბოლის მარჯვენა ფოკუსში.

457. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც 2-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული F (—8; 0) წერტილიდან, ვიდრე $x=-2$ წრფიდან.

458. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც 2-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული F (4; 0) წერტილიდან, ვიდრე $x=1$ წრფიდან.

459. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც: 1) სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და M (1; —4) წერტილზე; 2) სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, ფოკუსი მოთავსებულია F (0; 2) წერტილში, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

460. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც: 1) სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და M (6; —2) წერტილზე; 2) სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ, ფოკუსი მოთავსებულია F (3; 0) წერტილში, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

461. იპოვეთ $y^2=24x$ პარაბოლის ფოკუსი და დირექტრისის განტოლება.

462. დაწერეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსია F (—7, 0) წერტილი, ხოლო დირექტრისის განტოლებაა $x-7=0$.

463. $y^2=6x$ პარაბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორია 4,5.

464. $y^2=16x$ პარაბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორია 13.

465. იპოვეთ $y^2=20x$ პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის აბსცისა $x=7$.

466. იპოვეთ $y^2=12x$ პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის ორდინატი $y=6$.

467. $y^2=4,5x$ პარაბოლაზე აღებულია $M(x, y)$ წერტილი; M წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილი $d=9,125$. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.

468. იპოვეთ $y^2=2px$ პარაბოლის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც გავლებულია ფოკუსზე Ox ღერძის მართობულად.

469. იპოვეთ შემდეგი წრფეებისა და პარაბოლების გადაკვეთის წერტილები:

1) $x+y-3=0$, $y^2=4y$; 2) $3x+4y-12=0$, $y^2=-9x$; 3) $3x-2y+6=0$, $y^2=-6x$.

470. $y=kx+2$ წრფე k-ს რა მნიშვნელობისათვის: 1) კვეთს $y^2=4x$ პარაბოლას; 2) ეხება მას; 3) გადის მის გარეთ.

471. გამოიყვანეთ პირობა იმისა, რომ $y=kx+b$ წრფე ეხებოდეს $y^2=2px$ პარაბოლას.

472. იპოვეთ $y^2=18x$ პარაბოლისა და $(x+6)^2+y^2=100$ წრეწირის საერთო ქორდის განტოლება.

473. პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძისა და გადის $y=x$ წრფისა და $x^2+y^2+6x=0$ წრეწირის გადაკვეთის წერტილებზე; შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

474. პარაბოლა სიმეტრიულია Oy ღერძისა და გადის $x+y=0$ წრფისა და $x^2+y^2+4y=0$ წრეწირის გადაკვეთის წერტილზე; შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

475. იპოვეთ $y^2=2px$ პარაბოლაში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდის სიგრძე.

476. იპოვეთ $y^2=2x$ პარაბოლაში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის წვეროები.

477. პარაბოლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, სიმეტრიის ღერძი ემთხვევა Ox ღერძის უარყოფით მიმართულებას, ხოლო p პარამეტრი უდრის მანძილს $4x^2-9y^2-36=0$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან მის ასიმპტოტამდე; შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

478. პარაბოლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, სიმეტრიის ღერძი ემთხვევა Oy ღერძის უარყოფით მიმართულებას,

ხოლო p პარამეტრი უდრის მანძილს $3x^2+4y^2-48=0$ ელიფსის დირექტრისებს შორის. შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

479. $y^2=-4x$ პარაბოლის ფოკუსზე გავლებულია წრფე, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს 120°-იან კუთხეს. იპოვეთ წრფის განტოლება და მიღებული ქორდის სიგრძე.

480. მოცემულია $y^2=4x$ პარაბოლა. A (2; 1) წერტილზე გაავლეთ ისეთი ქორდა, რომელიც ამ წერტილით შუაზე იყოფა.

481. 1) იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული Oy ღერძიდან და F (4; 0) წერტილიდან;

2) იპოვეთ $y^2=2px$ პარაბოლის ორდინატების შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

482. 1) იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული $y=4$ წრფიდან და F (0; 2) წერტილიდან.

2) იპოვეთ $y^2=2px$ პარაბოლის წვეროდან გავლებული ქორდების შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

§ 5. წრფივი სივრცე, ევკლიდეს სივრცე

ნებისმიერ ობიექტთა X სიმრავლეს ეწოდება წრფივი ნამდვილი სივრცე[1], თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

1. მოცემულია წესი, რომლის მიხედვით X სიმრავლის ყოველი x და y ელემენტს შეესაბამება ამ სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი, რომელსაც x და y ელემენტების ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $x+y$ სიმბოლოთი.

2. მოცემულია წესი, რომლის მიხედვით X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს და ყოველ $\alpha\in R$ რიცხვს შეესაბამება X სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი, რომელსაც α რიცხვის x ელემენტზე ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება αx სიმბოლოთი.

3. ეს ოპერაციები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ აქსიომებს:

1) $\forall x,\ y\in X: x+y=y+x$,
2) $\forall x,\ y,\ z\in X: (x+y)+z=x+(y+z)$,
3) $\exists\theta\in X,\ \forall x\in X: O\cdot x=\theta$,
4) $\forall x\in X:\ 1\cdot x=x$,
5) $\forall\alpha,\ \beta\in R,\ \ \forall x\in X: (\alpha+\beta)\,x=\alpha x+\beta x$,
6) $\forall\alpha\in R,\ \forall x,\ y\in X: \alpha\,(x+y)=\alpha x+\alpha y$,
7) $\forall\alpha,\ \beta\in R,\ \forall x\in X: (\alpha\beta)\,x=\alpha\,(\beta x)$.

[1] შემდგომში წრფივი ნამდვილი სივრცის ნაცვლად გამოვიყენებთ ტერმინს წრფივი სივრცე, რადგან ჩვენ მხოლოდ ასეთ სივრცეებს განვიხილავთ.

წრფივ E სივრცეს ეწოდება ევკლიდური ნამდვილი სივრცე, თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვით E სივრცის ყოველ x და y ელემენტს შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ამ ელემენტის სკალარული ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება (x, y) სიმბოლოთი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $\forall\, x, y \in E : (x, y) = (y, x)$,
2. $\forall\, x, y \in E, \quad \forall \alpha \in R\,;\, (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$,
3. $\forall\, x, y, z \in E : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
4. $\forall\, x \in E : (x, x) \geqslant 0 \wedge (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

წრფივი სივრცის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ელემენტთა სასრულ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 \partial_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ელემენტთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

n რიცხვს ეწოდება წრფივი სივრცის განზომილება, თუ მასში წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა მაქსიმალური რიცხვია n.

n განზომილებიანი წრფივი სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა დალაგებულ სისტემას

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

ეწოდება ამ სივრცის ბაზისი და ამ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ასე:

$$X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_h e_h$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვებს ეწოდება ელემენტის კოორდინატები მოცემულ ბაზისში.

ამოხსენით ამოცანები:

483. მოცემული სიმრავლე, რომლის ყოველი a და b ელემენტის ჯამი და აგრეთვე a ელემენტის α რიცხვზე ნამრავლი განსაზღვრულია მითითებული წესით, ადგენს თუ არა წრფივ სივრცეს?

1. სამგანზომილებიანი სივრცის ყველა ვექტორთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატები მთელი რიცხვია; ჯამი $a+b$, ნამდვილი αa.

2. ერთ წრფეზე მდებარე ყველა ვექტორთა სიმრავლე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი αa.

3. სიბრტყის ყველა ვექტორთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული ძევს რომელიმე საკოორდინატო ღერძზე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი ab.

4. სამგანზომილებიანი სივრცის ყველა ვექტორთა სიმრავლე; ჯამი $[a, b]$, ნამრავლი αa.

5. ერთ ღერძზე მდებარე ყველა ვექტორთა სიმრავლე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი $\alpha\,|a|$.

6. ყველა ვექტორთა სიმრავლე, რომლებიც x, y, z ვექტორების წრფივი კომბინაციაა; ჯამი $a+b$, ნამრავლი αa.

7. ყველა ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც ღებულობენ დადებით მნიშვნელობებს. $(a=f(t),\ b=g(t))$; ჯამი $f(t)\,g(t)$, ნამრავლი $f^{\alpha}(t)$.

8. $[0, 1]$ სეგმენტზე უწყვეტი ყველა ფუნქციათა სიმრავლე, $(a=f(t),\ b=g(t))$; ჯამი $f(t)+g(t)$, ნამრავლი $\alpha f(t)$.

9. $[-1, 1]$ სეგმენტზე მოცემული ყველა ლუწ ფუნქციათა სიმრავლე $(a=f(t),\ b=g(t))$; ჯამი $t(t)+g(t)$, ნამრავლი $\alpha f(t)$.

10. $[-1; 1]$ სეგმენტზე მოცემული ყველა კენტ ფუნქციათა სიმრავლე $(a=f(t),\ b=g(t))$, ჯამი $t(t)+g(t)$, ნამრავლი $\alpha f(t)$.

11. მესამე რიგის (x ცვლადის მიმართ) ყველა პოლინომთა სიმრავლე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი αa.

12. ყველა დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა n-ეულების სიმრავლე, $(a=(x_1, \ldots, x_n),\ b=(y_1, \ldots, y_n))$; ჯამი $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$, ნამრავლი $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

13. ყველა დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა n-ეულების სიმრავლე; $(\mathbf{a}=(x_1, \ldots, x_n),\quad \mathbf{b}=(y_1, \ldots, y_n))$; ჯამი: $(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$, ნამრავლი $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

14. ყველა კრებადი მიმდევრობების სიმრავლე $(\mathbf{a}=(u_n),\quad \mathbf{b}=(v_n))$; ჯამი (u_n+x_n), ნამრავლი (αu_n).

15. ერთი ცვლადის ყველა პოლინომთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს; ჯამი $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, ნამრავლი $\alpha\mathbf{a}$.

16. n-ხარისხის ერთი ცვლადის ყველა პოლინომთა სიმრავლე; ჯამი $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. ნამრავლი $\alpha\mathbf{a}$.

17. ყველა დიაგონალურ მატრიცთა სიმრავლე $(\mathbf{a}=(a_{ik})_1^n,\ \mathbf{b}=(b_{ik})_1^n)$; ჯამი $(a_{ik}+b_{ik})_1^n$, ნამრავლი $(\alpha a_{ik})_1^n$.

18. ყველა გადაუგვარებელ მატრიცთა სიმრავლე $(\mathbf{a}=(a_{ik})_1^n,\ \mathbf{b}=(b_{ik})_1^n)$; ჯამი $(a_{ik})\cdot(b_{ik})$. ნამრავლი $(\alpha a_{ik})_1^n$.

19. ყველა კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე $(\mathbf{a}=(a_{ik})_1^n,\ \mathbf{b}=(b_{ik})_1^n)$; ჯამი $(a_{ik}+b_{ik})_1^n$, ნამრავლი $(\alpha a_{ik})_1^n$.

20. ყველა n-ური რიგის დიაგონალურ მატრიცთა სიმრავლე $(\mathbf{a}=(a_{ik})_1^n,\ \mathbf{b}=(b_{ik})_1^n)$; ჯამი $(a_{ik})_1^n\cdot(b_{ik})_1^n$, ნამრავლი $(\alpha a_{ik})_1^n$.

21. ყველა ერთი და იგივე განზომილების მატრიცთა სიმრავლე ($\mathbf{a} = (a_{ik})$, $\mathbf{b} = (b_{ik})$; $i = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$); ჯამი $(a_{ik} + b_{ik})$, ნამრავლი $(\alpha\, a_{ik})$.

22. ყველა სიმეტრიულ მატრიცთა სიმრავლე ($\mathbf{a} = (a_{ik})_1^n$, $\mathbf{b} = (b_{ik})_1^n$); ჯამი $(a_{ik} + b_{ik})$, ნამრავლი $(\alpha\, a_{ik})$.

23. ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ნამრავლი $[\alpha \mathbf{a}]$.

24. ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ნამრავლი $\alpha \mathbf{a}$.

25. ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $a \cdot b$, ნამრავლი a^{α}.

26. ყველა უარყოფით რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $-|a| \cdot |b|$, ნამრავლი $-|a|^{\alpha}$.

27. ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $a\, b$, ნამრავლი αa.

28. ყველა დიფერენცირებადი ფუნქციათა სიმრავლე ($a = f(t)$, $b = g(t)$); ჯამი $f(t) + g(t)$, ნამრავლი $\alpha f(t)$.

29. ყველა დიფერენცირებადი ფუნქციათა სიმრავლე ($a = f(t)$, $\mathbf{b} = g(t)$); ჯამი $f(t) \cdot g(t)$, ნამრავლი $\alpha f(t)$.

484. გამოიკვლიეთ არის თუ არა წრფივად დამოკიდებული ელემენტთა სისტემა:

1. $\mathbf{a} = (1, 4, 6)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 3)$.
2. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ $]-\pi/2, \pi/2[$-ზე.
3. $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (3, -1, 5)$, $\mathbf{c} = (1, -4, 3)$.
4. 2, $\sin x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ $(-\infty, +\infty)$-ზე.
5. $\mathbf{a} = (5, 4, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 3, 2)$, $\mathbf{c} = (8, 1, 3)$.
6. 1, x, $\sin x$ $]-\infty, +\infty[$-ზე.
7. $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$.
8. e^x, e^{2x}, e^{3x} $]-\infty, +\infty[$-ზე.
9. $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -1)$, $\mathbf{c} = (2, -1, 1)$.
10. x, x^2, $(1 + x)^2$, $]-\infty, +\infty[$-ზე.
11. $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 6'($ $\mathbf{c} = (7, 8, 9)$.
12. 1, x, x^2, $(1 + x)^2$ $]-\infty, +\infty[$-ზე.
13. $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (1, 3, 6)$.
14. $\cos x$, $\sin x$, $\sin 2x$, $]-\pi/2, \pi/2[$-ზე.
15. $\mathbf{a} = (3, 4, -5)$, $\mathbf{b} = (8, 7, -2)$, $\mathbf{c} = (2; -1, 8)$.
16. e^x, e^{-x}, e^{2x} $]-\infty, +\infty[$-ზე.
17. $\mathbf{a} = (3, 2, -4)$, $\mathbf{b} = (4, 1, -2)$, $\mathbf{c} = (5, 2, -3)$.
18. $1 + x + x^2$, $1 + 2x + x^2$, $1 + 3x + x^2$ $]-\infty, +\infty[$-ზე.
19. $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 0)$.

20. $1,\ e^x,\ \operatorname{sh} a$ $]-\infty,\ +\infty[$-ზე.

21. $\mathbf{a} = (5,\ -6,\ 1),\ \mathbf{b} = (3,\ -5,\ -2),\ \mathbf{c} = (2,\ -1,\ 3)$.

22. $1/x,\ x,\ 1$ $]0,\ 1[$-ზე.

23. $\mathbf{a} = (7,\ 1,\ -3),\ \mathbf{b} = (2,\ 2,\ -4),\ \mathbf{c} = (3,\ -3,\ 5)$.

24. $1,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x$ $]0,\ \pi/2[$-ზე.

25. $\mathbf{a} = (1,\ 2,\ 3),\ \mathbf{b} = (6,\ 5,\ 9),\ \mathbf{c} = (7,\ 8,\ 9)$.

26. $x,\ 1+x,\ (1+x)^2$ $]-\infty,\ +\infty[$-ზე.

27. $\mathbf{a} = (2,\ 1,\ 0),\ \mathbf{b} = (-5,\ 0,\ 3),\ \mathbf{c} = (3,\ 4,\ 3)$.

28. $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$ $]-\infty,\ +\infty[$-ზე.

29. $\mathbf{a} = (2,\ 0,\ 2),\ \mathbf{b} = (1,\ -1,\ 0),\ \mathbf{c} = (0,\ -1,\ -2)$.

30. $e^x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x$ $]-\infty,\ +\infty[$-ზე.

31. $\mathbf{a} = (-2,\ 1,\ 5),\ \mathbf{b} = (4,\ -3,\ 0),\ \mathbf{c} = (0,\ -1,\ 10)$.

იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის სივრცის რომელიმე ბაზისი და განზომილება:

485. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

486. $$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

487. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

488. $$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

489. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

490. $$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

491. $$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 23x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

492. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

493. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

494. $$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + x_4 = 0, \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{21}x_3 + \frac{2}{15}x_4 = 0. \end{cases}$$

495. $$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

496. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

497. $$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

498. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

499. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

500. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

501. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

502. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

503. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

504. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

505. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

506. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

507. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

508. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

509. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

510. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

511. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

512. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

513 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

514. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

515. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

იპოვეთ $\mathbf{x}$ ვექტორის კოორდინატები $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ ბაზისში, თუ ის ცნობილია $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ბაზისში.

516. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (6, -1, 3). \end{cases}$

517. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/2)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (1, 2, 4). \end{cases}$

518. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (4/3)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (1, 3, 6). \end{cases}$

519. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (3/2)\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (2, 4, 1). \end{cases}$

520. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (4/3)\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (6, 3, 1). \end{cases}$

521. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (5/4)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (1, 4, 8). \end{cases}$

522. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (5/4)\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (8, 4, 1). \end{cases}$

523. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (6/5)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (2, 5, 10). \end{cases}$

524. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (6/5)\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (10, 5, 1). \end{cases}$

525. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2' = (7/6)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ x = (1, 6, 12). \end{cases}$

526. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (7/6)\, e_3, \\ e_2' = 7e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (-12,\ 6,\ 1). \end{cases}$

527. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3, \\ e_2' = (8/7)\, e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (-1,\ 7,\ 14). \end{cases}$

528. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3, \\ e_2' = (1/2)\, e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (-3,\ 2,\ 4). \end{cases}$

529. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (1/2)\, e_3, \\ e_2' = -e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (2,\ 4,\ 3). \end{cases}$

530. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e_2' = (2/3)\, e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (2,\ 6,\ -3). \end{cases}$

531. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (2/3)\, e_3, \\ e_2' = -2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (12,\ 3,\ -1). \end{cases}$

532. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2' = (3/4)\, e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1,\ -4,\ 8). \end{cases}$

533. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2' = (3/4)\, e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1,\ 4,\ -8). \end{cases}$

534. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 4e_3, \\ e_2' = (4/5)\, e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (7,\ -5,\ 10). \end{cases}$

535. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (4/5)\, e_3, \\ e_2' = -4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (5,\ -5,\ -4). \end{cases}$

535. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 5e_3, \\ e_2' = (5/6)\, e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1,\ -6,\ 6). \end{cases}$

537. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (5/6)\, e_3, \\ e_2' = -5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (6,\ 6,\ 2). \end{cases}$

538. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (6/7)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (1,\ 7,\ -7). \end{cases}$

539. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (6/7)\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (7,\ 7,\ 2). \end{cases}$

540. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (7/8)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (3,\ -8,\ 8). \end{cases}$

541. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (8/9)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (1,\ -9,\ 9). \end{cases}$

542. $\begin{cases} \mathbf{e}' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (8/9)\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (9,\ 9,\ 2). \end{cases}$

543. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (9/10)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (3,\ -10,\ 10). \end{cases}$

544. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (9/10)\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -9\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (10,\ 10,\ 7). \end{cases}$

545. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (10/9)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (1,\ 9,\ 18). \end{cases}$

546. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2 = (11/10)\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad x = (1,\ 10,\ 10). \end{cases}$

ვთქვათ $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$. არის თუ არა წრფივი შემდეგი გარდაქმნა:

547. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ -3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3)$,
$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2)$,
$Cx = (x_3^4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3)$.

548. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2 + 2)$,
$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 0,\ x_2^4 + 2x_3)$,
$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2 + 2x_3)$.

549. $Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2^4 + 3x_3)$,
$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$.

550 $Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 1,\ 2x_1 - 3x_2 - 4)$,
$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$.

551. $Ax = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6)$,
$Bx = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3)$,
$Cx = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$.

552. $Ax = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3)$,
$Bx = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$,
$Cx = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$.

553. $Ax = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$.
$Bx = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6)$,
$Cx = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3)$.

554. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$,
$Bx = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ x_1^3 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

555. $Ax = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3^4)$,
$Bx = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (2x_1 - x_2,\ 1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$.

556. $Ax = (x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$,
$Bx = (x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7)$.
$Cx = (x_3,\ 0,\ 5x_1^4 + 6x_2 + 7x_3)$.

557. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0)$,
$Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0)$,
$Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3^2,\ 0)$.

558. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3,\ 2x_1 - x_2,\ x_3^2)$,
$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ 1)$,
$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_3)$.

559. $Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1^2,\ x_2 + 2x_3)$,
$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_2 + 2x_3)$,
$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2,\ x_1,\ x_2 + 2)$.

560. $Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 0,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3)$,
$Bx = (3x_1 + 2x_2 + 1,\ 0,\ x_1 - 2x_2 - 3)$,
$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 0,\ x_1^2 - 2x_2 - 3x_3)$.

561. $Ax = (x_1,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$,
$Bx = (x_1,\ x_2^2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$,
$Cx = (x_1,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$.

562. $Ax = (2x_1 + x_2,\ x_3^2,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$Bx = (2x_1 + x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$Cx = (2x_1 + x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4)$.

563. $Ax = (x_1,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
$Bx = (x_2,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5),$
$Cx = (x_1,\ x_2^2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3).$

564. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - 1,\ 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$Bx = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ 0),$
$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3).$

565. $Ax = (2x_1^2 - x_2,\ x_3,\ 2x_2 + 3x_3),$
$Bx = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ 2x_2 + 3x_3),$
$Cx = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ 2x_2 + 3).$

566. $Ax = (0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$
$Bx = (0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6),$
$Cx = (0,\ x_1^2 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$

567. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2),$
$Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2),$
$Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0).$

568. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3,\ 2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3^3,\ 2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3).$

569. $Ax = (4x_1 - 3x_2^3 - 2x_3,\ x_1 + x_3,\ 0),$
$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3),$
$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2,\ x_1 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3).$

570. $Ax = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3,\ 9x_2 + x_3),$
$Bx = (3x_1 + 4x_2 + 5,\ 6x_1 + 7x_2 + 8,\ 9x_1 + x_3),$
$Cx = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^3,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3,\ 0).$

571. $Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7,\ 8x_1 + x_3),$
$Bx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3,\ 0),$
$Cx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3,\ 8x_1 + x_3).$

572. $Ax = (x_1^3 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 0),$
$Bx = (x_1 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$
$Cx = (x_1 + 1,\ 2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3).$

573. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 3x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
$Bx = (3x_1 - 2x_2 - 1,\ x_2 + 2,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3^3,\ x_2 + 2x_3,\ 0).$

574. $Ax = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$
$Bx = (2x_1 - x_2^3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 0).$
$Cx = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$

575. $Ax = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ 7x_1 + 8x_2),$
$Bx = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ 7x_1 + 8x_2),$
$Cx = (x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6,\ 7x_1 + 8x_2).$

576. ვთქვათ $\mathbf{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, $A\mathbf{X} = (x_2 - x_3,\ x_1,\ x_1 + x_3)$ $B\mathbf{X} = (x_2,\ 2x_3,\ x_1)$. იპოვეთ:

1. ABx.
2. A^2x.
3. $(A^2 - B)\,x$.
4. B^4x.
5. B^2x.
6. $(2A + 3B^2)\,x$.
7. $(A^2 + B^2)\,x$.
8. $(B^2 + A)\,x$.
9. BAx.
10. $B\,(2A - B)\,x$.
11. $A\,(2B - A)\,x$.
12. $2\,(AB + 2A)\,x$.
13. $(A - B)^2\,x$.
14. $(B - 2A^2)\,x$.
15. BA^2x.
16. $(3A^2 + B)\,x$.
17. $(A^2 + B)\,x$.
18. $(A^2 - B^2)\,x$.
19. $(2B - A^2)\,x$.
20. B^3x.
21. $(B^2 - 2Ax)$.
22. $(A\,(B + A))\,x$.
23. $(AB^2)\,x$.
24. $(A\,(B - A))\,x$.
25. $2\,(B + 2A^2 + B^2)\,x$
26. $(B\,(A - B))\,x$.
27. $(B - A + B^2)\,x$.
28. $(B\,(A + B))\,x$.
29. $(A + BA - B)\,x$.
30. $(3B + 2A^2)\,x$.
31. $(B\,(2A + B))\,x$.

577. იპოვეთ მატრიცა $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$ ბაზისში, სადაც $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, თუ ის ცნობილია $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$ ბაზისში.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
19. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & C & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

578. დაამტკიცეთ ოპერატორის წრფივობა, იპოვეთ მისი მატრიცა, მნიშვნელობათა სიმრავლე და ბირთვი:

1. ox ღერძზე დაგეგმილების;
2. $z=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
3. oz ღერძზე დაგეგმილების;
4. oyz სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
5. oy ღერძზე დაგეგმილების;
6. $y=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
7. $x-y=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
8. $y+z=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
9. $y-z=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
10. $y=\sqrt{3}\,x$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
11. oyz სიბრტყეზე დაგეგმილების;
12. $x-z=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
13. oxy სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
14. ox ღერძის მიმართ დადებითი მიმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების;
15. $x-y=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
16. $y+z=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
17. $x+y=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
18. $y-z=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
19. $x+y=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
20. $x=z$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
21. $x+z=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;

22. Oz ღერძის მიმართ დადებითი მიმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების;
23. $z=-\sqrt{3}\,y$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
24. Oxz სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
25. Oy ღერძის მიმართ დადებითი მიმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების;
26. $x+z=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
27. $y+\sqrt{3}\,z=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების;
28. $\sqrt{3}\,x+z=0$ სიბრტყეზე დაგეგმილების.
29. $A(\mathbf{x})=[\mathbf{x}, \mathbf{a}]$ (სადაც $\mathbf{a}$ არანულოვანი ფიქსირებული ვექტორია, ხოლო $[\mathbf{x}, \mathbf{a}]$ აღნიშნავს $\mathbf{x}$ და $\mathbf{a}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს) ოპერატორის.

579. იპოვეთ მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორები

$$1.\ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2.\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 3.\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.\ \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \quad 5.\ \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad 6.\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7.\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 8.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad 9.\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$10.\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}. \quad 11.\ \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad 12.\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13.\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 14.\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 15.\ \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$16.\ \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \quad 17.\ \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 18.\ \begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

19. $\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$. 22. $\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 24 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. 31. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

580. კვადრატული ფორმები მიიყვანეთ კანონიკურ სახემდე.

1. $4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.
2. $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}\,x_2x_3$.
3. $2x_1^2 + 2x_2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.
4. $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
5. $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.
6. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}\,x_2x_3$.
7. $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
8. $3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}\,x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}\,x_2x_3$.
9. $-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

10. $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

11. $\frac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

12. $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

13. $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}\,x_1x_3 + \sqrt{2}\,x_2x_3$.

14. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

15. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}\,x_2x_3 + \sqrt{2}\,x_2x_3$.

16. $(-(1/2)\,x_1^2 + 5x_2^2 - (1/2)\,x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$.

17. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

18. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

19. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - \sqrt{2}\,x_1x_3 + 2\sqrt{2}\,x_2x_3$.

20. $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

21. $10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}\,x_1x_3 - 5\sqrt{2}\,x_2x_3$.

22. $(3/2)\,x_1^2 - 5x_2^2 + (3/2)\,x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$.

23. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}\,x_1x_3 - 2\sqrt{2}\,x_2x_3$.

24. $2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}\,x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}\,x_2x_3$.

25. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

26. $x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}\,x_1x_3 - 2\sqrt{2}\,x_2x_3$.

27. $5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.

28. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

29. $5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}\,x_1x_3 + 4\sqrt{2}\,x_2x_3$.

30. $-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

31. $-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

581. გამოიკვლიეთ მეორე რიგის წირი და ააგეთ მისი გრაფიკი.

1. $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$.
2. $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
3. $4xy + 4x - 4y = 0$.
4. $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$.
5. $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$.
6. $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.

7. $-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0.$

8. $-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0.$

9. $4xy + 4x - 4y - 2 = 0.$

10. $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0.$

11. $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0.$

12. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0.$

13. $2xy + 2x + 2y - 3 = 0.$

14. $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0.$

15. $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0.$

16. $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0.$

17. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0.$

18. $4xy + 4x + 4y + 1 = 0.$

19. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0.$

20. $-4xy - 4x + 4y + 6 = 0.$

21. $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0.$

22. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0.$

23. $-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0.$

24. $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0.$

25. $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0.$

26. $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0.$

27. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0.$

28. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0.$

29. $4xy + 4x - 4y + 4 = 0.$

30. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0.$

31. $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0.$

§ 6. წრფივი ალგებრის გამოთვლითი მეთოდების დაპროგრამება

1. ოპერაციები მატრიცებზე.

582. შეადგინეთ ფორტრანზე $M \times N$ განზომილების ორი მატრიცის შეკრების ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: A, B, C, M, N, სადაც A და B მოცემული მატრიცებია, C კი $M \times N$ — განზომილების მატრიცაა შედეგისათვის.

583. შეადგინეთ ფორტრანზე მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: B, M, N, $BETA$, სადაც B არის $M \times N$ განზომილების მატრიცა, რომელშიც იგზავნება გამრავლების შედეგად

მიღებული მატრიცა, $BETA=\beta$ რიცხვია, რომელზედაც ვამრავლებთ მატრიცას.

584. შეადგინეთ ფორტრანზე კვადრატული მატრიცის ტრანსპონირების ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: B, M, სადაც B არის $M\times M$ განზომილების საწყისი მატრიცა, აქვე მიიღება ტრანსპონირების შედეგად მიღებული მატრიცა.

585. შეადგინეთ ფორტრანზე ორი მატრიცის გამრავლების ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: A, B, C, M, N, K, სადაც A, B, C არის შესაბამისად $M\times N$, $N\times K$ და $M\times K$ განზომილების მატრიცები, რომლებიც შეიცავენ საწყის მონაცემებს და შედეგს.

586. მიღებული ქვეპროგრამების გამოყენებით შევადგინოთ ფორტრანზე შემდეგი მაგალითების ამოხსნის პროგრამა:

$$\text{ა)}\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 1{,}2 & 1{,}6 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0{,}725 & 2{,}71 \\ -1{,}5 & 0 \\ -3{,}2 & 1{,}25 \\ 2{,}4 & 5 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ $5A$, AB, BA.

$$\text{ბ)}\quad A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

იპოვეთ $A+B$, $A+C$, A^T, A^T, B^T.

2. მატრიცის შებრუნება

ელემენტარული გარდაქმნის შედეგად მატრიცის შებრუნება შეიძლება აღვწეროთ შემდეგნაირად:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) \to \cdots \to$$

$$\to \left|\begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1k+1}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} & & b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \cdots & b_{1n}^{(k)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2k+1}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} & & b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \cdots & b_{2n}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nk+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & & b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \cdots & b_{nn}^{(k)} \end{array}\right| \to \cdots \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & \cdots & b_{1n}^{(n)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} & \cdots & b_{2n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1}^{(n)} & b_{n2}^{(n)} & \cdots & b_{nn}^{(n)} \end{array}\right),$$

სადაც b_{ij} არის ერთეულოვანი მატრიცა და $a_{ij}^{(k)}$ და $b_{ij}^{(k)}$ მატრიცის ელემენტები ასეა დაკავშირებული

$$a_{kj}^{(k)}=\frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\quad k=1,\ 2,\dots,n,\quad j=k+1,\dots,n;$$

$$b_{kj}^{(k)}=\frac{b_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\quad k=1,\ 2,\dots,n,\quad j=1,\ 2,\dots,n;$$

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-\frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{ik}^{(k-1)},\quad i=1,\ 2,\dots,k-1,\ \ k+1,\dots,n,$$

$$a_{ik}^{(0)}=a_{ik};\qquad\qquad j=k+1,\dots,n,$$

$$b_{ij}^{(k)}=b_{ij}^{(k-1)}-\frac{b_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{ik}^{(k-1)},\quad i=1,\ 2,\dots,k-1,\ \ k+1,\dots,n,$$

$$b_{ij}^{(0)}=b_{ij},\qquad\qquad j=1,\ 2,\dots,n,$$

ამოხსენით ამოცანები:

587. შეადგინეთ ფორტრანზე მატრიცის შებრუნების ქვეპროგრამა აღწერილი მეთოდის გამოყენებით. პარამეტრებია: A, B, M, სადაც A არის $M\times M$ განზომილების მატრიცა, B — კი $M\times M$ განზომილების შებრუნების შედეგად მიღებული მატრიცა.

588. მიღებული ქვეპროგრამის გამოყენებით შეადგინეთ მატრიცის შებრუნების პროგრამა ფორტრანზე

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ -2 & 4 & 0 & -3\end{pmatrix},\quad \text{იპოვეთ}\quad A^{-1}.$$

589. 585 და 587 ამოცანაში მიღებული ქვეპროგრამების გამოყენებით შეადგინეთ ფორტრანზე მატრიცული განტოლების ამოხსნის პროგრამა:

ა) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$,

გ) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

590. A_k (k მატრიცის ნომერია, $k=1,2\dots$) მატრიცათა ელემენტები განისაზღვრება (1) ან (2) ფორმულით:

$$a_{ij}^{(k)}=(-1)^{[J_i+J_j+K]}\sqrt[3]{\frac{K^2+J_i^2}{J_j K(J_i+J_j)}\sin\frac{J_iJ_j}{K}},\qquad(1)$$

$$a_{ij}^{(k)}=(-1)^{[J_i+J_j+K]}\sqrt[3]{\frac{K^2+J_i^2}{J_j K(J_i+J_j)}\cos\frac{J_iJ_j}{K}},\qquad(2)$$

სადაც $[a]$ აღნიშნავს a რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო $J_i = K + i$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $J_j = \dfrac{J_i + 1}{K} + j$ $j = 0, 1, \dots, n$.

სიმარტივისათვის ქვემოთ მოყვანილ დავალებებში $n=6$.

591. 1) შეადგინეთ პროგრამა, რომელიც მოახდენს $A_k^{(n)}$ $(k = 1, 2)$ მატრიცების ფორმირებას (1) ფორმულების მიხედვით. დაბეჭდეთ A_1, A_2, A_1+A_2 მატრიცები.

2) შეასრულეთ წინა დავალება (2) ფორმულის შემთხვევაში.

3) მოცემულია $m \times n$ განზომილების მატრიცა. იპოვეთ მისი უდიდესი ელემენტი და დაბეჭდეთ. პროგრამას, როცა $m=7$, $n=12$ აქვს სახე

1…5	6	7
		DIMENSION T (7, 12)
		A = T (1, 1)
		DO 1 I = 1, 7
1		DO 1 J = 1, 12
		IF (T (I, J)·GT·A) A = T (I, J)
1		PRINT 2, A
		FORMAT (11 E 15·7)
		STOP
		END

ამ პროგრამის ანალოგიურად შეადგინეთ მატრიცის უდიდესი (უმცირესი) ელემენტის პოვნის ქვეპროგრამა.

3. დეტერმინანტის გამოთვლა

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{სადაც} \quad a_{11} \neq 0,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}^{(1)} \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2}^{(1)} \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = a_{11} \Delta_{n-1},$$

$\Delta_n, \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$ დეტერმინანტის ელემენტები ასეა დაკავშირებული

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, \dots, n, \quad j = k+1, \dots, n.$$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $\Delta_1 = a_{nn}^{(n-1)}$, $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ ყველა k-სათვის, ამიტომ $\Delta_n = a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdots a_{nn}^{(n-1)}$. თუ $a_{kk}^{(k-1)} = 0$, მაშინ დეტერმინანტში სტრიქონებს ადგილები უნდა შევუცვალოთ ისე, რომ მარცხენა ზედა ელემენტი არ იყოს ნულის ტოლი. ამ ელემენტს უწოდებენ მთავარ ელემენტს. მაღალი სიზუსტის მისაღებად მიზანშეწონილია მთავარ ელემენტად ავიღოთ აბსოლუტური სიდიდით უდიდესი. ყველა დეტერმინანტში სტრიქონების ადგილების შეცვლის დროს უნდა გავითვალისწინოთ ნიშანი.

მაგალითად, გამოვთვალოთ დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 1 & -14 \end{vmatrix}.$$

$\triangleright$.

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & -3 \\ -3 & 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 4 & -5 & -5 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & -5 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2{,}5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 8 & -4{,}4 \\ -0{,}6 & -3 & 4{,}4 \end{vmatrix} = -2{,}5 \begin{vmatrix} 8 & -4{,}4 \\ -3 & 4{,}4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2{,}5 \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}375 & 2{,}75 \end{vmatrix} = -2{,}5 \cdot 8 \cdot 2{,}75 = -55. \ \triangleleft.$$

ამოხსენით ამოცანები:

592. შეადგინეთ ფორტრანზე დეტერმინანტის გამოთვლის ქვეპროგრამა ფუნქცია. პარამეტრებია: A, M, სადაც A არის m-ური რიგის დეტერმინანტი.

593. მიღებული ქვეპროგრამა — ფუნქციის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

$$
\text{ა)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{ბ)}\ \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 3{,}1 & 5 \\ -2 & 4{,}5 & 3{,}7 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ -2{,}3 & 7{,}2 & 0 & -4 \end{vmatrix}.
$$

4. განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჟორდანი-გაუსის მეთოდით

მოცემულია განტოლებათა სისტემა:

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
$$

უცნობთა თანდათანობით გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ:

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \cdot x_j = b_i^{(k)}, \quad i = k, k+1, \dots, n,
$$

სადაც

$$
a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}\, b_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,
$$

$$
a_{ij}^{(0)} = a_{ij};
$$

$$
b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}\, b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad b_i^{(0)} = b_i.
$$

როცა $k=n$, მიიღება ერთი განტოლება და გამოითვლება x_n. ამით დამთავრდა პირდაპირი სვლა მეთოდისა. უკუსვლის შედეგად ხდება $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ უცნობების გამოთვლა.

594. შეადგინეთ ფორტრანზე განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: A, B, M, სადაც A არის სისტემის მატრიცის ელემენტები, რომლის განზომილებაა $M \times M$, B — კი თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი ერთგანზომილებიანი მატრიცა, რომელშიც მიიღება სისტემის ამონახსნი. M კი სისტემის რიგი.

595. მიღებული ქვეპროგრამის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

№	A					B
	13,5192	2,1714	— 1,5213	3,1493	— 5,8871	79,6402
	1,2219	—17,2372	4,5319	—2,9760	1,1714	15,5794
1	4,9261	2.1917	—15,8025	—1,4412	— 3,5128	— 5,2636
	2,1945	3,7736	0,3581	—9,4826	0,1282	—53,8744
	4,1953	— 5,9660	3,5858	—1,4933	—10.2872	46,4854
	4,5123	— 0,1591	— 0,0017	2,1937	— 1,0251	— 8,0620
	2,9327	6,9901	— 3,6424	— 1,1285	0,1279	42,6558
2	4,3790	—12,1021	25,0019	— 1,2311	2,0357	— 1,4706
	3,1214	2,4919	1,1021	—14,2513	2,8880	15,8482
	0,2375	1,5533	— 1,2446	— 5,8877	— 8,5781	25,1934
	7,7623	— 0,4971	1,0023	— 0,1021	1,1891	— 12,2150
	1,5213	17,5380	— 3,2121	5,0762	1,2573	120,9205
3	2,5346	0,2116	9,2542	— 1,0151	3,5781	— 29,0227
	3,5464	2,1731	— 1,6585	— 8,2573	— 2,0159	— 15,2327
	1,9606	2.5323	— 5,7606	4,1317	—15,2517	62,2397
	4,4110	— 0,2519	1,0134	2,0003	— 1,2503	34,6505
	1,2342	6,9872	— 1,2305	0,4669	1,8120	— 40,4833
4	4,5857	— 1,3726	—14.4096	0,2931	— 5,2635	2,6276
	1.1397	— 2,6469	— 4,7012	13,2641	2,6951	6,3186
	1,8112	4,9102	— 6.0351	— 2,3105	22,3597	— 87,6727
	14,3565	5,6237	— 2,4671	— 1,2635	1,9922	— 11,2531
	5,4612	26,3296	— 2,6317	6,6441	— 4,7819	—178,7776
5	1,4210	4,3454	— 33,2642	—17,9214	3,2632	— 85,4599
	2,6035	—12,3296	— 6,9707	32,1525	— 2,9324	318,9663
	4,2688	— 2,5006	8,6607	— 1,6993	20,8644	59,9434
	3,9440	8,7460	— 6,1489	1,5237	— 4,0523	87,3082
	15,9708	6,1021	— 3,4486	2,5411	1,3391	159,6527
6	1,5142	3,7621	— 2,5220	— 1,3881	— 6,4672	16,5282
	12,5316	1,6125	— 1,5314	6,4892	— 1,5807	111,5178
	3,9327	7,2957	2,7942	— 3,2532	9,7209	102,6294
	1,6452	4,6913	8,2431	— 7,9273	6,0972	— 40,6705
	4,4514	— 1,6480	— 4,9425	— 8,4523	11,8165	— 62,5388
7	6,0606	— 4,2276	— 7,8074	— 6,1162	— 8,6658	— 66,1834
	16,9135	2,8594	— 9,3780	5,8823	— 0,3840	14,6459
	2,7889	— 9,8017	— 1,7889	8,0441	9,7227	— 6,7936

№	A					B
8	8,7752	2,2626	— 1,0514	— 3,0019	1,2257	— 24,7092
	2,3561	—11,3960	3,5907	— 1,2959	1,1392	49,4743
	3,9471	2,8782	12,6174	— 2,4314	— 2,2156	— 74,4141
	6,3544	— 3,7813	21,1524	—87,6315	— 8,7951	—700,8516
	11,2093	6,2549	8,7861	3,4112	—53,9543	77,4683
9	20,8008	— 7,8924	4,8288	— 1,3214	1,0285	59,6691
	8,5824	46,4279	— 9,7134	5,4641	— 7,3934	—234,0058
	17,4329	— 6,5063	54,6408	— 7,4005	9,7285	619,5332
	9,4526	— 7,4992	— 4,3470	34,1008	10,2901	298,4693
	1,0240	— 5,8292	— 7,0473	— 6,4042	—43,4708	217,2679
10	34,1030	9,1831	— 1,5878	— 4,6914	3,9623	363,8320
	5,9928	15,9000	— 3,2843	— 2,4849	— 1,9595	4,3095
	15,8982	24,9452	66,9148	4,5447	3,9192	—337,4977
	6,2851	— 2,4850	4,3978	—36,1539	1,5929	—130,9675
	9,5762	— 3,8529	— 5,9171	—33,9281	— 5,9737	91,4876
11	28,7302	4,1372	— 9,3249	5,8270	2,3470	—162,0875
	9,1134	59,2718	— 4,9042	— 2,3105	8,0049	—322,2199
	10,5899	9,1138	60,0932	— 5,8997	—30,2271	206,7599
	17,4123	—19,2051	— 5,8878	59,3471	— 9,4217	869,4626
	4,8956	21,8928	34,1905	8,9962	—88,7844	—106,9569
12	39,9231	— 5,8997	3,4673	— 4,9042	— 9,2671	313,6460
	8,9492	—29,9207	4,5885	— 6,0060	— 3,5844	— 28,8464
	9,5324	15,9031	—38,9971	—11,0023	7,1153	839,6039
	7,7562	—21,6243	— 8,0151	—53,7835	—13,2324	820,4039
	16,9399	—35,8423	7,7506	—21,4849	77,7842	—548,4084
13	26,4208	5,9121	—14,0031	— 4,1235	2,6316	— 638,0542
	10,6441	—61,4226	15,9669	—21,0025	11,2296	1829,7026
	6,0498	26,3159	—54,9778	2,6428	— 4,8332	—1440,1079
	9,8061	6,3529	24,2959	48,7249	— 3,6047	— 337,7144
	15,4908	—26,3643	5,8884	—12,5706	—68,6186	—1186,2867
14	47,2732	16,2215	— 3,9056	— 0,5567	10,2537	— 0,5905
	2,3917	—34,2517	15,0014	16,5789	— 5,1935	—280,5809
	14,1727	5,1057	26,1391	— 4,9228	3,1973	—362,9100
	12,9817	—16,2213	— 3,1777	—42,9817	11,2531	—808,4014
	13,4951	— 7,2935	— 3,4463	29,0527	7,2931	—484,3552

506. შეადგინეთ ქვედა სამკუთხოვანი სისტემის

$$
\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 & = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
$$

ამოხსნის ქვეპროგრამა. მიღებული ქვეპროგრამა გამოიყენეთ

$$
\begin{array}{ll}
5x_1 & = 100, \\
4x_1 + 8x_2 & = 200, \\
-2x_1 - x_2 + 6x_3 & = 300, \\
10x_1 + 9x_2 + x_3 + 2x_4 & = 400, \\
8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 & = 500,
\end{array}
$$

სისტემის ამოსახსნელად. ამობეჭდეთ სისტემის მატრიცა, თავისუფალი სვეტი და პასუხები.

▷. ამოხსნა

```
C     ПОДПРОГРАММА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ
      SUBROUTINE SIST (A, B, X, N)
      DIMENSION A (N, N), B (N), X (N)
      X (1) = B (1) / A (1, 1)
      DO 1 I = 2, N
      K = I - 1
      C = 0
      DO 2 J = 1, K
2     C = C + A (I, J) * X (J)
1     X (I) = (B (I) - C) / A (I, J)
      RETURN
      END
C     ОСНОВНАЯ ПРОГРАММА
      DINENSION A (5,5), B (5), X (5)
      READ 10, ((A (I, J), J = 1,5), I = 1, 5)
10    FORMAT (5 F 3.0
      DATA B / 100., 200., 300., 400., 500./
      CALL SIST (A, B, X, 5)
      PRINT 20 ((A (I, J), J = 1,5), I=1,5), B, X
20    FORMAT (7 (1X, 5F 15.4), / I5)
      STOP
      END
```

პროგრამის მუშაობის შემდეგ დაიბეჭდება:

5.0000	0.0	0.0	0.0	0.0
4.0000	8.0000	0.0	0.0	0.0
—2.0000	—1.0000	6.0000	0.0	0.0
10.0000	9.0000	1.0000	2.0000	0.0
8.0000	7.0000	2.0000	5.0000	—1.0000
100.0000	200.0000	300.0000	400.0000	500.0000
20.0000	15.0000	59.1667	2.9167	—102.083

597. წინა დავალების მსგავსად ამოხსენით სამკუთხოვანი სისტემა.

$$\begin{aligned}
3{,}20\,x_1 - 52{,}71\,x_2 + 3{,}00\,x_3 - x_4 &= 9{,}25,\\
5{,}23\,x_1 + 7{,}62\,x_2 + 2{,}00\,x_3 &= 9{,}43,\\
-2{,}57\,x_1 + 2{,}03\,x_2 &= -2{,}57,\\
1{,}05\,x_1 &= 1{,}05.
\end{aligned}$$

5. იტერაციის მეთოდი

მოცემულია განტოლებათა სისტემა,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = b_i, \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

თუ შესრულებულია უტოლობა

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1,\ 2, \cdots,\ n,$$

მაშინ სისტემის ამონახსენი

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ აკმაყოფილებს პირობას $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X$, ე. ი. $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$,

$i = 1,\ 2, \ldots,\ n$. აქ სვეტ-ვექტორის ელემენტები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$x_i^{(0)} = \beta_i,$$

$$x_k^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\,x_j^{(k)},\ \alpha_{ii} = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

სადაც

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}.$$

598. შეადგინეთ ფორტრანზე განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ქვეპროგრამა იტერაციის მეთოდის გამოყენებით. პარამეტრებია: A, B X, M, EPS, სადაც A — არის ორგანზომილებიანი სისტემის მატრიცა, B — ერთგანზომილებიანი თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი მატრიცა, X — ერთგანზომილებიანი მასივი ამონახსნებისათვის, M — სისტემის რიგი, EPS — აბსოლუტური ზღვრული ცდომილება.

599. მიღებული ქვეპროგრამის გამოყენებით ამოვხსნათ სისტემა:

$$\text{ა)} \quad \begin{cases} 5x_1 + 0,12\,x_2 + 0,08\,x_3 = 15, \\ 0,02\,x_1 + 4\,x_2 - 0,25\,x_3 = 20, \\ 0,24\,x_1 - 0,12x_2 + 3x_3 = -3,9. \end{cases}$$

$$\text{ბ)} \quad \begin{cases} 4,5\,x_1 - 0,1\,x_2 + 0,3\,x_3 - 0,4\,x_4 = 23,2, \\ 0,12\,x_1 + 5,4\,x_2 - 0,16\,x_3 + 0,2\,x_4 = -14,3, \\ 0,24\,x_1 - 0,1\,x_2 + 6,4\,x_3 - 0,2\,x_4 = 12, \\ 0,1\,x_1 + 0,1\,x_2 + 0,2\,x_3 - 5\,x_4 = 8. \end{cases}$$

6. ალგებრული განტოლების ნამდვილი ფესვების მოძებნა

n-ური რიგის ნამდვილკოეფიციენტებიან ალგებრულ განტოლებას ზოგადად აქვს სახე:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0, \; a_0 \neq 1.$$

ადგილი აქვს თეორემას: ყოველი n-ური რიგის ალგებრულ განტოლებას აქვს n ფესვი (ამონახსენი), ნამდვილი ერთმანეთისაგან განსხვავებული, ნამდვილი ჯერადი და წყვილწყვილად შეუღლებული კომპლექსური.

ჩვენ შემოვიფარგლებით განტოლების ნამდვილი ფესვების მოძებნით.

განტოლებას ეწოდება სრული, თუ მისი ყველა კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან.

ალგებრული განტოლებების დადებითი და უარყოფითი ფესვების რაოდენობის დასადგენად არსებობს დეკარტეს შემდეგი წესი:

განტოლების დადებით ფესვთა რაოდენობა ტოლია კოეფიციენტთა მიმდევრობაში $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ნიშანთა ცვლის რაოდენობისა ან ლუწი რიცხვით ნაკლებია მასზე, ამასთან ნულოვანი კოეფიციენტები მხედველობაში არ მიიღება.

უარყოფით ფესვთა რაოდენობა ტოლია $f(-x)=0$ განტოლებაში კოეფიციენტთა ნიშნის ცვლილებათა რაოდენობისა ან მასზე ნაკლებია ლუწი რიცხვით. ხოლო თუ განტოლება სრულია, მაშინ უარყოფით ფესვთა რაოდენობა უდრის მის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანმუდმივობის რაოდენობას ან ნაკლებია მასზე ლუწი რიცხვით.

მაგალითად, ა) $f(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^2 + 5 = 0$, გვაქვს ერთი ნიშნის ცვლილება $+ + - -$, ხოლო $f(-x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 + 5 = 0$, გვაქვს ორი ნიშნის ცვლილება $- + - -$, ამიტომ მოცემულ განტოლებას აქვს ერთი დადებითი და უარყოფითი ფესვი ორი ან არც ერთი.

ბ) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ სრული განტოლებაა. $+ - - + +$ გვაქვს ორი ნიშნის ცვლილება და ორი ნიშანმუდმივობა. ამიტომ ორი ფესვი დადებითია და ორი უარყოფითი, ან არც ერთი ნამდვილი ფესვი განტოლებას არა აქვს.

ფესვების განცალება შეიძლება ჩავატაროთ გრაფიკულად. ამასთან თუ Ox ღერძი ფუნქციის გრაფიკის მხები აღმოჩნდა, მაშინ შეხების წერტილის აბსცისა განტოლების ორჯერადი ფესვია, ხოლო თუ გრაფიკის Ox ღერძთან თანაკვეთის წერტილი გადაღუნვის წერტილია, მაშინ ამ წერტილის აბსცისა განტოლების სამჯერადი ფესვია.

ვთქვათ, განცალებული ნამდვილი ფესვი x^* მოთავსებულია $[a, b]$ შუალედში. ავაგოთ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობათა ორი მიმდევრობა

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)}, \quad \text{(ნიუტონის ფორმულა)}$$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - f(\underline{x}_n)\frac{\underline{x}_n - c}{f(\underline{x}_n) - f(c)}, \quad \text{(ქორდათა ფორმულა)}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

$\overline{x}_0$-ად უნდა ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის ის ბოლო, რომელზეც ფუნქციის ნიშანი ემთხვევა მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანს, ხოლო $\underline{x}_0$ — საწინააღმდეგო ბოლო. ქორდათა ფორმულაში $c = \overline{x}_0$.

ამ ორი ფორმულის ერთდროულად გამოყენების შემთხვევაში $\forall n$-სათვის $\overline{x}_{n+1} < x^* < \underline{x}_{n+1}$ (ან $\underline{x}_{n+1} < x^* < \overline{x}_{n+1}$) და ცხადია გამოყენებას შევწყვეტთ, როგორც კი $|\overline{x}_{n+1} - \underline{x}_{n+1}| < \varepsilon$, სადაც ε წინასწარ დასახელებული სიზუსტეა. $x^* = \dfrac{\overline{x}_{n+1} + \underline{x}_{n+1}}{2}$, ε სიზუსტით.

შეადგინეთ პროგრამა, რომელიც მოძებნის $f(x)=0$ განტოლების ნამდვილ ფესვს მოთავსებულს $[a, b]$ სეგმენტზე, ε სიზუსტით. წინას-

წარ დარწმუნდით, რომ მითითებულ შუალედში ასეთი ფესვი ერთადერთია.

600. $0{,}125\,x^4 - 7{,}351\,x^3 - 2{,}001\,x^2 + 0{,}0125 = 0$; $[-1{,}0]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

601. $3{,}2576x^5 - 2{,}701x^2 - 0{,}5678x + 1{,}005 = 0$; $[-4;\ -3[$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

602. $1{,}206\,x^3 - 2{,}125\,x^2 - 3{,}5678\,x - 5{,}134 = 0$; $[2;\ 4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

603. $x^3 - 4x^2 - 1 = 0$; $[4;\ 5]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.

604. $x^5 - 5\,x^3 - 6\,x - 10 = 0$; $[2;\ 3]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

605. $x^3 - 1{,}3\,x^2 - 7x + 91 = 0$; $[-5;\ -4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

606. $x^3 + 3{,}112\,x^2 + 2{,}0003\,x + 6{,}1598 = 0$; $[-4;\ -3]$; $\varepsilon = 10^{-3}$.

607. $x^3 + 0{,}7\,x^2 - 0{,}9\,x - 13{,}8 = 0$; $[2;\ 3]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.

608. $x^5 + 13{,}12\,x^4 - 15{,}6\,x - 18{,}72 = 0$; $[1;\ 2]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

609. $x^5 + 3{,}0912\,x^4 + 0{,}9978\,x^2 + 5{,}0956\,x + 6{,}3012 = 0$;
$[-4;\ -3]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

610. $x^3 - 3{,}5\,x^2 - 0{,}34\,x + 3{,}72 = 0$; $[3;\ 4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

611. $x^3 - 2{,}9978\,x^2 + 1{,}4524\,x - 3{,}2345 = 0$; $[3;\ 4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

612. $0{,}34\,x^4 + 0{,}11\,x^3 - 0{,}45\,x^2 - 0{,}22\,x - 0{,}46 = 0$; $[1;\ 2]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

613. $x^4 - 6{,}4\,x^3 + 10{,}4\,x^2 - 6{,}4\,x + 9{,}43 = 0$; $[2;\ 3]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

614. $x^3 + 4{,}1005\,x^2 + 3{,}0124\,x + 12{,}3056 = 0$; $[-5;\ -4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

615. $1{,}2536\,x^3 + 0{,}6939\,x^2 - 0{,}8799\,x - 13{,}6489 = 0$; $[2;\ 3]$ $\varepsilon = 10^{-4}$

616. $1{,}2145\,x^5 + 13{,}1204\,x^4 - 15{,}5991\,x - 18{,}72 = 0$; $[-11;\ -9]$;
$\varepsilon = 10^{-4}$.

617. $x^4 - 1{,}668\,x^3 - 0{,}8577\,x^2 - 3{,}336\,x - 5{,}7154 = 0$; $[-2;\ -1]$;
$\varepsilon = 10^{-4}$.

618. $x^3 + 2{,}605\,x^2 - 7{,}975\,x - 9{,}580 = 0$; $[2{,}3]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.

619. $0{,}9786\,x^5 - 19{,}9465\,x^2 - 0{,}2097\,x + 0{,}6369 = 0$; $[0;\ 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

620. $0{,}9687\,x^3 - 26{,}9916x^2 - 10{,}1435x + 19{,}1698 = 0$. $[0;\ 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

621. $1{,}0143\,x^4 - 2{,}9781\,x^2 + 4{,}0032\,x - 0{,}9978 = 0$; $[0;\ 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

622. $1{,}0025\,x^3 - 4.9897\,x^2 + 6{,}0132\,x - 0{,}0991 = 0$; $[0;\ 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

623. $0{,}9657\,x^4 - 2{,}0021\,x^2 + 4{,}9967\,x - 0{,}9897 = 0$; $[0;\ 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

624—633 ამოცანებისათვის შეადგინეთ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლის პროგრამა ფორტრანზე. პროგრამა გააფორმეთ, როგორც ქვეპროგრამა ფუნქცია. მაგალითად, $\varphi(x) = 2x^3 \sin^2 x + \lg x - 5\sqrt{x} + 7$.

```
1…5 | 6 | 7
    |   | FUNCTION FI (X)
    |   | A = 2. * * ↑ 3 * SIN (X) ↑ 2
    |   | FI = A + ALOG (X) — 5. * SQRT (X) + 7
    |   | RETURN
    |   | END
```

624. $y = x \sin^2 \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - x \right) + 1.$

625. $f(x) = 2 \sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}.$

626. $F(x) = \arccos \frac{2x + 3}{5} + \mathrm{tg}^3 x.$

627. $\varepsilon(x) = x^3 \ln^3 (e^x + 1).$

628. $\xi(x) = x \sqrt[3]{x^3 + 1} - \log_2 (1 + x)$

629. $\tau(x) = |x| \arcsin \frac{x + 3}{5} + \frac{1}{\ln (x + 1)}.$

630. $z = \begin{cases} x^2, & \text{თუ} \quad x < 1; \\ \sqrt{x} & \text{თუ} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$

631. $f(x) = \begin{cases} \arcsin^2 x, & \text{თუ} \quad |x| \leqslant 1, \\ x^2, & \text{თუ} \quad |x| > 1. \end{cases}$

632. $\psi(x) = \pi \sin \sqrt{1 + x^2} - 10x.$

633. $\varphi(x) = e^x - \cos \frac{\pi x}{8} - 1.$

დაატაბულეთ 634—644 ფუნქციები მითითებულ შუალედში, მითითებული ბიჯით. ძირითად პროგრამაში გამოიყენეთ ქვეპროგრამა—ფუნქციის მოდულზე მიმართვის ოპერატორი. მაგალითად, $\eta(x) = 2{,}3\, x^3 e^{5x} + \sin x,\ 0{,}6 \leqslant x \leqslant 1{,}7,\ h = 0{,}1.$

```
1…5 | 6 | 7
----------------------------------------------
    | C | ТАБУЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ
    |   | X = 0·6
    |   | S = ETA (X)
2   |   | WRITE (3,1) X, S
    |   | FORMAT ('ETA ('F·2') = ' F6·4)
1   | C | ПРИ X=0·6 БУДЕТ НАПЕЧАТАНА
    | C | ВЫРАЖЕНИЕ ETA (0·6) =
    |   | X = X + 0·1
    |   | IF (X·LI·1·8) GOTO 2
    |   | STOP
    |   | END
    |   | FUNCTION ETA (X)
    |   | ETA = 2·3 * X ↑ 3 * EXP (5· * X)+sin (X)
    |   | RETURN
    |   | END
```

634. $y = 5(x^2+1)\ln(x^2+1) - 1,\ -0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}75,\ h = 0{,}5.$

635. $y = \sin 2x + 3x^2 + 11,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ h = 0{,}05.$

636. $y = (x-1)\ln^3 x + 1,\ 1 \leqslant x \leqslant 2;\ h = 0{,}1.$

637. $z = \sin x + 2x^2 - 3,\ -2 \leqslant x \leqslant -1;\ h = 0{,}1.$

638. $f(x) = \dfrac{6x^3 - 13x + 13}{6(x-1)^2},\ 1{,}1 \leqslant x < 2;\quad h = 0{,}1.$

639. $\varphi(x) = \dfrac{(\sin x + \cos^2 x)^3}{x^4 + \ln x + 1},\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3};\quad h = \dfrac{\pi}{12}.$

640. $F(x) = \sqrt[3]{x}\cos^2 x + \dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{x},\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\quad h = 0{,}05.$

641. $\psi(x) = \sqrt{\sin x}\cdot\sin^3\dfrac{x}{2} + x;\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2};\ h = \dfrac{\pi}{24}.$

642. $\tau(x) = e^{\sqrt{\sin x}}\ln(5+4\cos x);\ \dfrac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi;\quad h = \dfrac{\pi}{20}.$

643. $\xi(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{როცა}\quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2-1, & \text{როცა}\quad 1 < x \leqslant 2,\ h = 0 \cdot 1. \end{cases}$

644. $f(x) = \begin{cases} \cos x + \sin(\sqrt{3}\,x), & \text{როცა}\ -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \ln x + 1, & \text{როცა}\ 0 < x \leqslant 1,\ h = 0 \cdot 1. \end{cases}$

645. მოცემულია $f(x) = 3\ln^2(x^5+1)\sin^8 x + x.$

გამოთვალეთ $F(x) = 4\cdot f(x+\sin x) + 3f(x - \sin x),\quad 2 \leqslant x \leqslant 3,$ $h = 0{,}05.$

IV თავი

მეორე რიგის ზედაპირები

მეორე რიგის ზედაპირებს შორის შეიძლება შეგვხვდეს ისეთი ზედაპირები, რომლებსაც აქვთ სიმეტრიის ცენტრი და ამ ცენტრზე გამავალი სამი ურთიერთმართობული სიმეტრიის სიბრტყე. ასეთებია:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდი; ნახ. 9.

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი; ნახ. 10.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდი; ნახ. 11.

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ მეორე რიგის კონუსი; ნახ. 12.

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსური ცილინდრი; ნახ. 13.

6. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ჰიპერბოლური ცილინდრი. ნახ. 14.

მეორე რიგის დანარჩენ ზედაპირებს არა აქვთ არც ცენტრი და არც სიმეტრიის სამი სიბრტყე, მაგრამ მათ აქვთ სიმეტრიის ორი ურთიერთმართობული სიბრტყე. ესენია:

7. $y^2 = 2px$ პარაბოლური ცილინდრი; ნახ. 15.

8. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ ელიფსური პარაბოლოიდი; ნახ. 16.

9. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი; ნახ. 17.

როცა მეორე რიგის ზედაპირის განტოლების მარცხენა მხარე იშლება პირველი ხარისხის ორ ნამდვილ მამრავლად, მაშინ ასეთ განტოლებას შეესაბამება ორი სიბრტყის ერთობლიობა. შესაძლებელია მეორე რიგის განტოლება იძლეოდეს ორ თანამთხვეულ სიბრტყეს, წერტილს, ან წარმოსახვით გეომეტრიულ ადგილს. ასეთ შემთხვევებს უწოდებენ მეორე რიგის ზედაპირის გადაგვარებას; ასეთი ზედაპირებია:

10. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ ურთიერთგადამკვეთი სიბრტყეების წყვილი;

11. $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$ პარალელური სიბრტყეების წყვილი;

12. $x^2 = 0$ თანამთხვეული სიბრტყეების წყვილი;

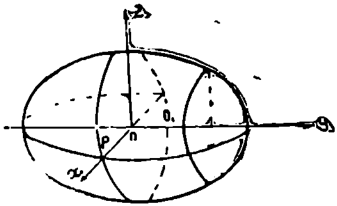
13. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ წარმოსახვითი ელიფსოიდი;

14. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ წარმოსახვითი კონუსი;

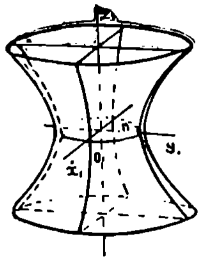
15. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ წარმოსახვითი ცილინდრი;

16. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ ურთიერთგადამკვეთი წარმოსახვითი სიბრტყეების წყვილი;

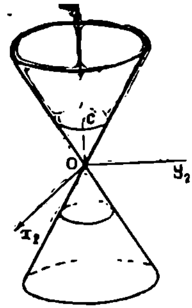
17. $\dfrac{x^2}{a^2} = -1$ წარმოსახვითი პარალელური სიბრტყეების წყვილი.



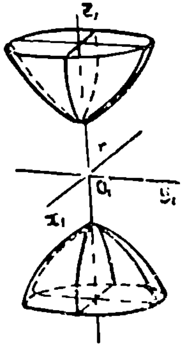
ნახ. 9



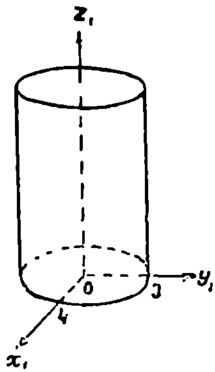
ნახ. 10



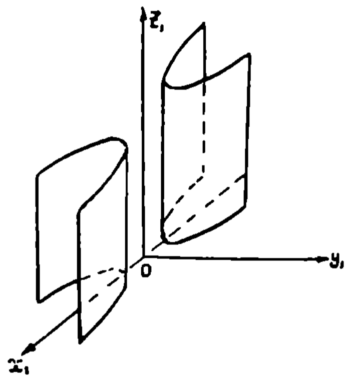
ნახ. 11



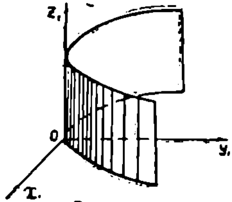
ნახ. 12



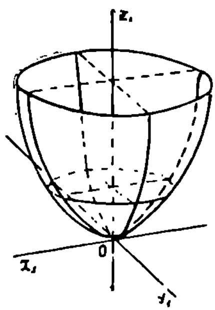
ნახ. 13



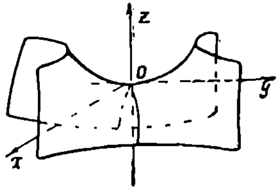
ნახ. 14



ნახ. 15



ნახ. 16



ნახ. 17

§ 1. სფერული ზედაპირი

სფერული ზედაპირის განტოლებაა:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

სადაც a, b და c სფერული ზედაპირის ცენტრის კოორდინატებია, ხოლო R — რადიუსი. თუ ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, მაშინ სფერული ზედაპირის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

646. შეადგინეთ სფერული ზედაპირის განტოლება, თუ: 1) ცენტრი მოთავსებულია $C\,(2;\ -1;\ 3)$ წერტილში, ხოლო რადიუსია 4; 2) ცენტრი მოთავსებულია $C\,(1;\ 4;\ -7)$ წერტილში და ეხება $6x+6y-7z+42=0$ სიბრტყეს.

647. შეადგინეთ სფერული ზედაპირის განტოლება, თუ: 1) $A\,(2;\ -3;\ 5)$ და $B\,(4;\ 1;\ -3)$ წერტილები სფეროს ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია;
2) ცენტრი მოთავსებულია $C\,(6;\ -8;\ 3)$ წერტილში და ეხება Oz ღერძს.

648. იპოვეთ შემდეგი სფეროების რადიუსები და ცენტრის კოორდინატები: 1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$; 2) $2x^2+2y^2+2z^2-5y-8=0$; 3) $x^2+y^2+z^2=2az$.

649. იპოვეთ იმ სფერული ზედაპირის რადიუსი, რომელიც ეხება შემდეგ პარალელურ სიბრტყეებს: $3x+2y-6z-15=0$, $3x+2y-6z+55=0$.

650. გამოარკვიეთ $A\,(4;\ -3;\ 1)$, $B\,(4;\ 6;\ 2\sqrt{3})$ და $C\,(5;\ 6;\ 3)$ წერტილების მდებარეობა $x^2+y^2+z^2=64$ სფეროს მიმართ.

651. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $Ax+By+Cz+D$ სიბრტყის კოეფიციენტები, რომ ის ეხებოდეს $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს?

652. a-ს რა მნიშვნელობისათვის ეხება $x+y+z-a=0$ სიბრტყე $x^2+y^2+z^2=12$ სფეროს?

653. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $x^2+y^2+z^2-2x+y-3z=0$ სფეროს C ცენტრზე OC წრფის მართობულად.

654. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის შემდეგ ოთხ წერტილზე: $O\,(0;\ 0;\ 0)$, $M_1\,(2;\ 0;\ 0)$, $M_2\,(1;\ 1;\ 0)$, $M_3\,(1;\ 0;\ -1)$.

655. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის $M_1\,(3;\ 1;\ -3)$, $M_2\,(-2;\ 4;\ 1)$, $M_3\,(-5;\ 0;\ 0)$ წერტილებზე, ხოლო ცენტრი ძევს $2x+y-z+3=0$ სიბრტყეზე.

656. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=z$ წრეწირის გეგმილები xOy და xOz სიბრტყეებზე.

657. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $(x+3a)^2+(y-a)^2+z^2=4a^2$ წრეწირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე.

658. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილები A (2; 0; 0) წერტილამდე 2-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე B (—4; 0; 0) წერტილამდე.

659. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილები A (3; —1; 0) წერტილამდე 3-ჯერ მეტია, ვიდრე B (0; 1; 0) წერტილამდე.

იპოვეთ შემდეგი წრეწირების რადიუსები და ცენტრის კოორდინატები:

660. $(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36, \quad 3x+y-z-9=0.$

661. $(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25, \quad 2x+2y+z+1=0.$

662. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=a$ წრეწირზე და (a; a; a) წერტილზე.

663. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის $x^2+y^2+z^2-6x-8y-11=0$. $4x+y-z-9=0$ წრეწირზე და (7; —3; 1) წერტილზე.

664. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის შემდეგ ორ წრეწირზე: $x^2+z^2=25$, $y=2$ და $x^2+z^2=16$, $y=3$.

665. სფერული ზედაპირი გადის (0; —3; 1) წერტილზე და xOy სიბრტყესთან კვეთაში გვაძლევს $x^2+y^2=16$, $z=0$ წრეწირს. დაწერეთ ამ ზედაპირის განტოლება.

§ 2. ცილინდრული ზედაპირი

თუ

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0 \tag{1}$$

ცილინდრული ზედაპირის მიმმართველი წირის განტოლებებია, ხოლო

$$\frac{X-x}{L}=\frac{Y-y}{M}=\frac{Z-z}{N} \tag{2}$$

— მსახველის განტოლებები, მაშინ (1) და (2) განტოლებებიდან x, y, z სიდიდეების გამორიცხვა მოგვცემს ცილინდრული ზედაპირის განტოლებას.

666. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მსახველები პარალელურია $x=y=z$ წრფისა, ხოლო მიმმართველი წირია $x^2+y^2=4$, $z=0$ წრეწირი.

667. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მიმმართველი წირია $x^2+y^2=25$, $z=0$ წრეწირი, ხოლო მსახველის მიმართულების კოეფიციენტები აკმაყოფილებს პირობას: $L:M:N=5:3:2$.

668. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მსახველები პარალელურია $P(2;\ -3;\ 4)$ ვექტორისა, ხოლო მიმმართველი წირია $x^2+y^2=9$, $z=1$ წრეწირი.

669. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მსახველები პარალელურია $x=y=z$ წრფისა, ხოლო მიმმართველი წირია $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$ წრეწირი.

670. დაწერეთ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, თუ მისი მიმმართველი წირია $x=y^2+z^2$, $x=2z$, ხოლო მსახველი მიმმართველი წირის სიბრტყის მართობულია.

671. 1) იპოვეთ $x^2+z^2+3yz-2x+3z-3=0$, $y-z+1=0$ წირის გეგმილი xOz სიბრტყეზე;

2) იპოვეთ იმ ცილინდრული ზედაპირების განტოლებები, რომლებიც $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$, $x^2+y^2+z^2=16$ წრეწირს აგეგმილებენ საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

§ 3. კონუსური ზედაპირი

თუ

$$F(x,\ y,\ z)=0, \qquad F_1(x,\ y,\ z)=0 \tag{1}$$

კონუსური ზედაპირის მიმმართველი წირის განტოლებებია, $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — წვეროს კოორდინატები, ხოლო

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0} \tag{2}$$

— ზედაპირის მსახველის განტოლებები, მაშინ (1) და (2) განტოლებებიდან x, y, z სიდიდეების გამორიცხვა მოგვცემს კონუსური ზედაპირის განტოლებას.

672. შეადგინეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვეროა კოორდინატთა სათავე, ხოლო მიმმართველი წირია $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$ ელიფსი.

673. 1) შეადგინეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვეროა კოორდინატთა სათავე, ხოლო მიმმართველი წირია $x^2-2z+1=0$, $y-z+1=0$;

2) შეადგინეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავე, ხოლო მიმმართველი წირია $x^2+y^2+(z-5)^2=9$, $z=4$.

674. დაწერეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვერო (—3; 0; 0) წერტილი, ხოლო მიმმართველი წირია $3x^2+6y^2-z=0$, $x+y+z=0$.

675. დაწერეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვერო (0; —a; 0) წერტილი, ხოლო მიმმართველი წირია $x^2=2py$, $z=h$.

676. Ox ღერძი იმ წრიული კონუსის ღერძია, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია. შეადგინეთ კონუსის განტოლება, თუ მისი მსახველები Ox ღერძისადმი დახრილია 45°-ით.

677. Oy ღერძი იმ წრიული კონუსის ღერძია, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია. შეადგინეთ კონუსის განტოლება, თუ მისი მსახველები Oy ღერძისადმი დახრილია 60°-ით.

678. Oz ღერძი იმ წრიული კონუსის ღერძია, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია. შეადგინეთ კონუსის განტოლება, თუ M (3; —4; 7) წერტილი ძევს კონუსურ ზედაპირზე.

679. Ox ღერძი იმ წრიული კონუსის ღერძია, რომლის წვერო A (2; 0; 0) წერტილშია. შეადგინეთ კონუსის განტოლება, თუ M (5; 2; 6) წერტილი ძევს კონუსურ ზედაპირზე.

§ 4. ბრუნვის ზედაპირი

თუ $F(x, y)=0$, $z=0$ იმ წირის განტოლებაა, რომელიც ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო, მაშინ ბრუნვის ზედაპირის განტოლება იქნება:

$$F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0.$$

ასევე გვექნება სხვა შემთხვევებშიც, რაც ჩანს შემდეგი ცხრილიდან:

წირის განტოლებები	ბრუნვის ღერძი	ბრუნვის ზედაპირის განტოლება
$\begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$	Ox Oy	$F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0$ $F(\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$
$\begin{cases} F(x, z)=0 \\ y=0 \end{cases}$	Ox Oz	$F(x, \sqrt{y^2+z^2}=0$ $F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$
$\begin{cases} F(y, z)=0 \\ x=0 \end{cases}$	Oy Oz	$F(y, \sqrt{x^2+z^2})=0$ $F(\sqrt{x^2+y^3}, z)=0$

680. დაწერეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $z=y$, $x=0$ წრფის ბრუნვით: 1) Oy ღერძის გარშემო; 2) Oz ღერძის გარშემო.

681. დაწერეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $z=x^2$, $y=0$ წირის ბრუნვით: 1) Ox ღერძის გარშემო; 2) Oz ღერძის გარშემო.

682. დაწერეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ ელიფსის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

683. დაწერეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$ ელიფსის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

684. შეადგინეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ ჰიპერბოლის ბრუნვით: 1) Oz ღერძის გარშემო; 2) Ox ღერძის გარშემო:

685. შეადგინეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $x^2=2pz$ პარაბოლის ბრუნვით Oz ღერძის გარშემო.

§ 5. ელიფსოიდი, ჰიპერბოლოიდები და პარაბოლოიდები

ელიფსოიდის კანონიკური სახის განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

ცალკალთა და ორკალთა ჰიპერბოლოიდების განტოლებებია:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{და} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი არის წრფოვანი ზედაპირი. მას აქვს წრფოვანი მსახველების ორი წყვილი:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

და

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l\left(1-\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

სადაც k და l პარამეტრებია.

ელიფსური და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდების განტოლებებია:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \text{და} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი წრფოვანი ზედაპირია. მას აქვს წრფოვანი მსახველების ორი წყვილი:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2kz, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{k}$$

და

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{l}, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2lz.$$

686. იპოვეთ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ ელიფსოიდის მთავარი კვეთები, წვეროები და ღერძები.

687. აჩვენეთ, რომ $x-2=0$ სიბრტყე $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ ელიფსოიდს კვეთს ელიფსზე. იპოვეთ კვეთის ნახევარღერძები და წვეროები.

688. ააგეთ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ ზედაპირი და იპოვეთ მისი კვეთის ფართობი: 1) $z=3$ სიბრტყესთან; 2) $y=1$ სიბრტყესთან.

689. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ ელიფსოიდისა და $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+6}{3}=\frac{z+2}{2}$ წრფის გადაკვეთის წერტილები.

690. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილების ფარდობა $x=2a$ სიბრტყემდე და $F\ (a;\ 0;\ 0)$ წერტილამდე არის $\sqrt{2}$.

691. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ ელიფსოიდისა და $x+4z-4=0$ სიბრტყის გადაკვეთის წირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე.

692. იპოვეთ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის გადაკვეთის წირები საკოორდინატო სიბრტყეებთან.

693. იპოვეთ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის გადაკვეთის წირები საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელურ სიბრტყეებთან,

რომლებიც საკოორდინატო სიბრტყეების ორივე მხრიდან დაშორებულია $h=2$ მანძილით.

694. შეამოწმეთ, რომ $z+1=0$ სიბრტყე $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს კვეთს ჰიპერბოლაზე. იპოვეთ ამ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები და წვეროები.

695. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილების ფარდობა $F(0;\ 0;\ 2a)$ წერტილამდე და $z=a$ სიბრტყემდე არის $\sqrt{2}$.

696. იპოვეთ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{9}=-1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდისა და $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$ წრფის გადაკვეთის წერტილები.

697. განსაზღვრეთ შემდეგი ზედაპირების სახე: 1) $x^2-4y^2-4z^2+16a^2=0$; 2) $4x^2-5y^2+2z^2+30a^2=0$; 3) $x^2+2y^2+20y-z^2+35=0$; 4) $4x^2-9y^2-9z^2-16x+18y-18z+34=0$; 5) $4x^2+z^2+8x+16y+6z-3=0$.

698. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$ ჰიპერბოლოიდის მსახველები, რომლებიც გადის $M(4;\ 1;\ -3)$ წერტილზე.

699. იპოვეთ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ ჰიპერბოლოიდის მსახველები, რომლებიც გადის $M(6;\ 2;\ 8)$ წერტილზე.

700. იპოვეთ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=z$ ელიფსური პარაბოლოიდის საკოორდინატო სიბრტყეებთან გადაკვეთის წირები.

701. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრადაა დაშორებული $F\left(0,\ 0;\ \frac{a}{2}\right)$ წერტილიდან და $z=-\frac{a}{2}$ სიბრტყიდან.

702. იპოვეთ $y^2+z^2=x$ ელიფსური პარაბოლოიდისა და $x+2y-z=0$ სიბრტყის გადაკვეთის წირის გეგმილები საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

703. აჩვენეთ, რომ $y+6=0$ სიბრტყე $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს კვეთს პარაბოლაზე. იპოვეთ ამ პარაბოლის პარამეტრი და წვერო.

704. დაწერეთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის იმ მსახველების განტოლებები, რომლებიც გადის M (4; 3; 0) წერტილზე.

705. დაწერეთ $4x^2-z^2=y$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის იმ მსახველების განტოლებები, რომლებიც გადის M (1; 3; —1) წერტილზე.

განსაზღვრეთ, რომელ წირებსა და ზედაპირებს გამოსახავს შემდეგი განტოლებები:

706. 1) $y^2+z^2=25,\ x=0$; 2) $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,\ x-2=0$; 3) $x^2+y^2=1$; 4) $x^2=1$; 5) $x^2-y^2=0$; 6) $x^2+y^2+z^2=0$; 7) $x^2+y^2-2x=0$; 8) $xyz=0$; 9) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 10) $x^2-xy=0$; 11) $y^2+z^2=0$; 12) $x^2+4y^2+4=0$.

707. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=c$; 2) $x=0,\ y=0$; 3) $x^2=y^2+z^2$; 4) $x^2+y^2+4z^2-1=0$; 5) $x^2+y^2+z^2=2az$; 6) $x^2+y^2=2az$; 7) $x^2-y^2=2az$; 8) $x^2+y^2-z^2-1=0$; 9) $x^2-y^2-z^2-4=0$; 10) $z=2+x^2+y^2$; 11) $x^2=2yz$; 12) $x^2+z^2=2z$.

V თავი

ფუნქციები

§ 1. ფუნქციები და მათი გრაფიკები

ორ A და B სიმრავლეს შორის ისეთ f შესაბამისობას, როცა A სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი y ელემენტი, ფუნქცია ეწოდება. ამ ელემენტს $f(x)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ და უწოდებენ ფუნქციის მნიშვნელობას x-ზე.

თუ A და B სიმრავლეს შორის f შესაბამისობა არის ფუნქცია, მაშინ წერენ: $f: A\rightarrow B$ ან $A \xrightarrow{f} B$. A სიმრავლეს უწოდებენ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ხოლო $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ სიმრავლეს უწოდებენ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს. ფუნქციის ნაცვლად ასევე ხმარობენ ტერმინს „ასახვა“.

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებია:

1) ხარისხოვანი ფუნქცია: $y=x^{\alpha},\quad \alpha\in R$.

2) მაჩვენებლიანი ფუნქცია: $y=a^x,\quad a>0,\ a\neq 1$.

3) ლოგარითმული ფუნქცია: $y=\log_a x,\ a>0,\quad a\neq 1.$

4) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: $y=\sin x,\quad y'=\cos x,\quad y=\operatorname{tg} x,$ $y=\operatorname{ctg} x.$

5) შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: $y=\arcsin x,\quad y=$ $=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg} x,\quad y=\operatorname{arcctg} x.$

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია, თუ იგი წარმოიდგინება ერთი ფორმულით, რომელიც შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით.

$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება სიმრავლეს $F=\{(x,y)\in R^2\,|\,x\in A,$ $y=f(x)\}$, სადაც R^2 სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეა.

დეკარტეს კოორდინატთა xOy სისტემაში $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოიდგინება ისეთ $M(x,\ y)$ წერტილთა სიმრავლით, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y=f(x)$ ტოლობას.

ამოხსენით ამოცანები:

708. შეადგინეთ დამოკიდებულება, რომელიც წრის r რადიუსს გამოსახავს, როგორც მისი S ფართობის ფუნქციას.

709. მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის c ჰიპოტენუზა მუდმივი სიდიდეა. გამოსახეთ მისი b კათეტი მეორე a კათეტის საშუალებით.

710. მოცემულია ტოლფერდა ტრაპეციის a და b ფუძეები. იპოვეთ ფუნქციონალური დამოკიდებულება ამ ტრაპეციის S ფართობსა და a ფუძესთან მდებარე α კუთხეს შორის.

711. მოცემულია ცილინდრის V მოცულობა. შეადგინეთ დამოკიდებულება, რომელიც ცილინდრის ფუძის r რადიუსს გამოსახავს, როგორც მისი h სიმაღლის ფუნქციას.

712. 1) $f(x)=3x^2-2x+12$. გამოთვალეთ: $f(0)$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$;

2) $\varphi(x)=\dfrac{7x+4}{2x^2+3}$. გამოთვალეთ: $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

713. 1) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. გამოთვალეთ: $f(0)$. $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

2) $\varphi(x)=4^x+3x-1$. გამოთვალეთ: $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

714. იპოვეთ წრფივი $f(x)$ ფუნქცია, თუ $f(-1)=2$, $f(2)=-3$.

715. იპოვეთ მეორე ხარისხის $f(x)$ ფუნქცია, თუ $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(3)=5$.

716. $f(x)=x^2-2x+3$. იპოვეთ: 1) $f(x)=f(0)$ და 2) $f(x)=f(-1)$ განტოლების ფესვები.

717. $f(x)=x^3-7x+6$. იპოვეთ $f(x)=f(1)$ განტოლების ყველა ფესვი.

718. მოცემულია $F(x)=a^x$. აჩვენეთ, რომ $F(y)\cdot F(z)=F(y+z)$.

719. დაწერეთ გამოსახულებები: 1) $f[\varphi(2)]$; 2) $f[\varphi(a)]$; 3) $\varphi[f(a)]$, თუ $f(x)=\lg x$, $\varphi(x)=x^3$.

720. იპოვეთ $f[\varphi(x)]$ და $\varphi[f(x)]$, თუ $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=2^x$.

721. $y=z^2$, $z=\sqrt[3]{x+1}$, $x=a^t$. გამოსახეთ y, როგორც t-ს ფუნქცია.

722. იპოვეთ $f(x+1)$, თუ $f(x-1)=x^2$.

წარმოიდგინეთ არაცხადი სახით შემდეგი რთული ფუნქციები:

723. 1) $y=\sin^3 x$; 2) $y=5^{(3x+1)^2}$ 3) $y=\lg\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

724. 1) $y=2^{\cos x}$; 2) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$; 3) $y=\arcsin(3^{-x^2})$.

შემდეგ მაგალითში y ფუნქცია ჩაწერეთ ცხადი სახით:

725. 1) $x^2+y^2=3$; 2) $2^{xy}=5$; 3) $x^2-\arccos y=\pi$; 4) $10^x+10^y=10$.

726. 1) $2^{x+y}(x^2-2)=x^3+7$; 2) $\lg x+\lg(y+1)=4$; 3) $x+|y|=2y$.

— იპოვეთ მოცემული y ფუნქციების შექცეული ფუნქციები.

727. 1) $y=2x+3$; 2) $y=\operatorname{arc\,tg} 3x$; 3) $y=x^2-2x$; 4) $y=10^{x+1}$; 5) $y=\log_x 2$.

728. 1) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; 2) $y=1-2^{-x}$; 3) $y=1+\lg(x+2)$; 4) $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$.

შემდეგ ფუნქციებიდან რომელია ლუწი, რომელი კენტი და რომელია არც ლუწი და არც კენტი.

729. 1) $f(x)=x^4-2x^2$; 2) $f(x)=x+\dfrac{x^3}{2}$; 3) $f(x)=2^x$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$; 5) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$.

730. 1) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$; 2) $f(x)=\sin x-\cos x$; 3) $f(x)=2^{-x^2}$; 4) $f(x)=\dfrac{\sin x+\operatorname{tg} x}{\cos x}$.

იპოვეთ უმცირესი დადებითი პერიოდი შემდეგი ფუნქციებისა:

731. 1) $\sin 3x$; 2) $\cos 2x$; 3) $\sin\dfrac{2x+3}{6\pi}$; 4) $\sin\dfrac{5x}{8}$.

732. 1) $\cos 2\pi x$; 2) $\sin\dfrac{3\pi x}{4}$; 3) $-\cos\dfrac{x-1}{2}$; 4) $\sin^2 x$.

გამორიცხეთ t პარამეტრი შემდეგი განტოლებებიდან:

733. 1) $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = R\sin 2t, \\ y = 2R\sin^2 t. \end{cases}$

734. 1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{t}{t+1}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = a\sec t, \\ y = b\,\mathrm{tg}\, t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2p\,\mathrm{ctg}^2 t, \\ y = 2p\,\mathrm{ctg}\, t. \end{cases}$

735. 1) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 6t - t^2. \end{cases}$ იპოვეთ $x(0)$, $y(0)$; $x(1)$, $y(1)$;

2) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$ იპოვეთ $x(0)$, $y(0)$; $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

736. 1) $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 - 1. \end{cases}$ იპოვეთ $x(3)$, $y(3)$; $x\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $y\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;

2) $\begin{cases} x = 1 + \sin t, \\ y = t + \cos 2t. \end{cases}$ იპოვეთ $x\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$;

$x\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

იპოვეთ t პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება x-ისა და y-ის მოცემულ მნიშვნელობებს:

737. 1) $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t^2 + 3t - 1, \end{cases}$ (3; 9); 2) $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{tg}\, t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t. \end{cases}$ (2; 2)

738. 1) $\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = 3t - 2t^2. \end{cases}$ (1; -5); 2) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$ ($\pi - 2$; 2).

იპოვეთ განსაზღვრის არე შემდეგი ფუნქციებისა:

739. 1) $y = \sqrt{x+1}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2+3}$; 3) $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

740. 1) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 4}$; 3) $y = \sqrt{\cos x}$.

741. 1) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$; 2) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x - 4}$.

742. 1) $y = \dfrac{2}{x^3 - x}$; 2) $y = \dfrac{x-4}{x^2 + 2x - 3}$.

743. 1) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^4 - 16}}$.

744. 1) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$, 2) $y = \sqrt{x-1} - \dfrac{3}{\sqrt{5-x}}$.

745. 1) $y=\sqrt{4x-x^2}$; 2) $x=\sqrt{x^2-4x-12}$.

746. 1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$; 2) $y=\sqrt{5x^2-4x-1}$.

747. 1) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}$; 2) $y=\lg(x^2-1)$.

748. 1) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$; 2) $y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$.

749. $y=\lg\dfrac{x^2-4x}{2x-7}$. **750.** $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

751. $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$. **752.** $y=\arcsin\dfrac{x^2+1}{5}$.

753. $y=\arccos\dfrac{3-2x}{5}+\sqrt{3-x}$. **754.** $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$.

755. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$. **756.** $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$.

757. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$. **758.** $y=\arccos\dfrac{x-2}{2x}$.

759. $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2+2}$.

760. $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$.

761. $y=\lg[2-\lg(x^2-8x+115)]$. **762.** $y=\lg(\sqrt{x-8}+\sqrt{10-x})$.

763. $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

764. $y=\lg\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$.

ააგეთ გრაფიკები შემდეგი ფუნქციებისა:

765. 1) $y=2x-3$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+2x-1$; 4) $y=2+x-x^2$.

766. 1) $y=-3x+4$; 2) $y=3-2x^2$; 3) $y=x^2+2x+3$;

4) $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{5}{2}$.

767. 1) $y=x^3$, 2) $y=\dfrac{x^3}{3}+1$; 3) $y=x^3-3x+2$;

4) $y=\dfrac{4}{x}$; 5) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$.

768. 1) $y = 2 + (x-1)^3$; 2) $y = x^3 - x - 1$; 3) $y = \dfrac{1}{x^2}$.

4) $y = \dfrac{2}{x^2+1}$; 5) $y = \dfrac{2x-3}{3x+2}$.

769. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = -x\sqrt{x}$; 3) $y = -\sqrt{25-x^2}$.

770. 1) $y = \sqrt[3]{x}$; 2) $y = \sqrt{x^2}$; 3) $y = -\sqrt{x^2-1}$.

771. 1) $y = 2^x$; 2) $y = \log_2 x$; 3) $y = 1 - 2^x$;

4) $y = \log_3(1+x) + 2$; 5) $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$.

772. 1) $y = 3^x$; 2) $y = 3^{x+3}$; 3) $y = 2^{-x^2}$; 4) $y = \lg(-x)$;
5) $y = x^2 + 2^x$.

773. 1) $y = \sin x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sin kx$, როცა $k = 2$, $k = \dfrac{1}{2}$; 4) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 5) $y = 2\sin(2x+2)$.

774. 1) $y = \cos x$; 2) $y = \operatorname{ctg} x$; 3) $y = \cos 2x$; 4) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

5) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

775. 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \arcsin x$; 3) $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

776. 1) $y = \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

777. 1) $y = |x|$; 2) $y = \sin x + |\sin x|$; 3) $y = \lg x^2$; 4) $y = |-x^2+4|$;

5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{როცა } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & \text{როცა } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

ააგეთ შემდეგი წირები პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში და დაწერეთ მათი განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში:

778. 1) $r = 1$; 2) $r = \dfrac{1}{2}\varphi$; 3) $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$.

779. 1) $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$; 2) $r = c^{\varphi}$; 3) $r = \dfrac{1}{\cos\varphi}$.

780. 1) $r = a\sin\varphi$; 2) $r = a\sin 2\varphi$; 3) $r = a\sin 3\varphi$. $(a > 0)$.

781. 1) $r = a\cos\varphi$; 2) $r = a\cos 2\varphi$; 3) $r = a\cos 3\varphi$. $(a > 0)$.

782. 1) $r = a(1+\cos\varphi)$; 2) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. $(a > 0)$.

783. 1) $r = a(1-\cos\varphi)$; 2) $r^2 = a^2\sin 2\varphi$. $(a > 0)$.

დაწერეთ პოლარულ კოორდინატებში შემდეგი წირების განტოლებები:

784. 1) $(x^2+y^2)^2=xy$; 2) $x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$.

785. 1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$; 2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

დაწერეთ პარამეტრული სახით შემდეგი წირების განტოლებები (პარამეტრად მიიღეთ φ კუთხე);

786. 1) $r=2a\cos\varphi$; 2) $r=\frac{a}{\varphi}$.

787. 1) $r=2a\sin\varphi$; 2) $r=2p\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

ააგეთ გრაფიკები პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციებისა:

788. 1) $x=t^3,\ y=t^2$; 2) $x=a\cos t,\ y=a\sin t$; 3) $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$.

789. 1) $x=3\cos t,\quad y=4\sin t$; 2) $x=\frac{2+t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{t^3}{1+t^2}$;

3) $x=2\cos^2 t,\ y=2\sin^2 t$.

§ 2. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა და მისი ზღვარი

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას რიცხვთა მიმდევრობას უწოდებენ და ჩაწერენ ასე:

$$x_1,\ x_2, \dots,\ x_n, \dots$$

მიმდევრობა მოკლედ (x_n) სიმბოლოთი აღინიშნება. x_n-ს მიმდევრობის ზოგადი წევრი ეწოდება.

a რიცხვს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $n_0(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n>n_0(\varepsilon)$ ადგილი აქვს უტოლობას: $|x_n-a|<\varepsilon$. ამას ასე ჩაწერენ: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ ან $x_n\to a$, როცა $n\to\infty$ ან $x_n-a\to 0$, როცა $n\to\infty$.

დაწერეთ მიმდევრობები მათი ზოგადი წევრების მიხედვით:

790. 1) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 2) $x_n=(-1)^n(2n+1)$; 3) $x_n=\cos n\pi$.

791. 1) $x_n=n+(-1)^n$; 2) $x_n=\frac{3+(-1)^n}{n}$; 3) $x_n=\frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$.

დაწერეთ ზოგადი წევრები შემდეგი მიმდევრობებისა:

792. 1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \ldots;$ 2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots;$

3) $\frac{7}{3}, \frac{11}{5}, \frac{15}{7}, \frac{19}{9}, \ldots$

793. 1) $\frac{5}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{4}, \ldots;$ 2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots;$ 3) $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}, \frac{8}{9}, \frac{11}{11}, \frac{14}{13}, \ldots$

794. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 2. იპოვეთ N, თუ $\varepsilon = 0,1$.

795. აჩვენეთ, რომ $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 1. იპოვეთ N, თუ $\varepsilon = 0,01$.

796. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{1}{n^2}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 0. როგორი n-ისათვის შესრულდება $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ უტოლობა, თუ: 1) $\varepsilon = 0,01$; 2) $\varepsilon = 0,001$.

797. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{n}{n+1}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 1. იპოვეთ N, თუ: 1) $\varepsilon = 0,1$; 2) $\varepsilon = 0,01$.

იპოვეთ ზღვრები შემდეგი მიმდევრობებისა:

798. $x_n = \frac{3n-1}{n}$.

799. $x_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

800. $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$.

801. $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

802. $x_n = \frac{n}{2n+1}$.

803. $x_n = \frac{2n+1}{3n-4}$.

804. $x_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$.

805. $x_n = \frac{n^2+3}{3n^2+5}$.

806. ავიღოთ წესიერი წილადი $\frac{3}{4}$. თუ მრიცხველსა და მნიშვნელს

მივუმატებთ ერთსა და იმავე n რიცხვს, მივიღებთ $x_n = \frac{3+n}{4+n}$ წილადს, იპოვეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

807. ავიღოთ არაწესიერი წილადი $\frac{6}{5}$. თუ მრიცხველსა და მნიშვნელს მივუმატებთ ერთსა და იმავე n რიცხვს. მივიღებთ $x_n = \frac{6+n}{5+n}$ წილადს. იპოვეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

808. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+5}{1+2+3+\cdots+n}$. 809. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+3} - \frac{n}{2}\right)$.

810. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

811. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

812. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+4)!+(n+2)!}{(n+5)!}$. 813. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+3)!+(n+1)!}$.

814. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4^{n+1}+5^{n+1}}{4^n+5^n}$. 815. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$.

816. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{1+5+9+\cdots+(4n-3)}$.

817. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

818. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)}{n^3}$.

819. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}$.

§ 3. ფუნქციის ზღვარი

A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ როცა $0<|x-x_0|<\eta$, შესრულდება უტოლობა:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

თუ f ფუნქცია განსაზღვრულია $]a, +\infty[$ შუალედში, მაშინ b რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to+\infty$, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ ყველა იმ x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $x>M$ უტოლობას, სრულდება $|f(x)-b|<\varepsilon$ უტოლობა. ასეთ შემთხვევაში წერენ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, ან $f(x)\to b$, როცა $x\to+\infty$. თუ f ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, a[$ შუალედში, მაშინ b რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის ზღვარი როცა $x\to-\infty$, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $M<0$ რიცხვი, რომ ყველა იმ x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $x<M$ უტოლობას, სრულდება $|f(x)-b|<\varepsilon$ უტოლობა. ასეთ შემთხვევაში წერენ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, ან $f(x)\to b$, როცა $x\to-\infty$.

ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება დადებითი უსასრულოდ დიდი a წერტილში, თუ ნებისმიერი $M>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>$ რიცხვი, რომ როცა $0<|x-a|<\delta$, სრულდება $f(x)>M$. ასეთ შემთხვევაში წერენ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

ფუნქციას ეწოდება უარყოფითი უსასრულოდ დიდი a წერტილში, თუ $(-f)$ ფუნქცია არის დადებითი უსასრულოდ დიდი a წერტილში. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ დიდი a წერტილში თუ $|f(x)|$ არის დადებითი უსასრულოდ დიდი a წერტილში. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

ვთქვათ, $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, როცა $x\to a$, ე. ი.

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} \beta(x) = 0.$$

1. თუ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta}=0$, მაშინ α-ს ეწოდება მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე β-ს მიმართ.

2. თუ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$, მაშინ α დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა β-ს მიმართ.

3. თუ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\,(A\neq 0)$, მაშინ α და β ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია.

4. β უსასრულოდ მცირეს ეწოდება n-ური რიგის უსასრულოდ მცირე α უსასრულოდ მცირის მიმართ, თუ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha^n}=A\,(A\neq 0)$.

5. თუ α და β უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია და $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, მაშინ α-სა და β-ს უწოდებენ ტოლფას უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს და აღნიშნავენ $\alpha\sim\beta$.

6. ორი უსასრულოდ მცირე სიდიდის ფარდობის ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ამ სიდიდეებს შევცვლით მათი ტოლფასი უსასრულოდ მცირეებით.

თუ $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, როცა $x\to a$, მაშინ:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)\ \operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),\ \ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x),\ a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a.$$

განვიხილოთ a წერტილის რაიმე მიდამოში (გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა) განსაზღვრული f და g ფუნქციები (a წერტილი შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულობა). ვიგულისხმებთ, რომ ამ მიდამოში $g(x)\neq 0$.

თუ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

მაშინ ამ ფაქტს აღნიშნავენ ასე:

$$f(x)=o\,(g(x)),\quad x\to a.$$

ამბობენ, რომ f E სიმრავლეზე არის O — დიდი φ-დან და აღნიშნავენ $f(x)=O(\varphi(x))$ E-ზე თუ არსებობს ისეთი დადებითი მუდმივი რიცხვი C, რომ E სიმრავლის ყოველ წერტილზე ადგილი აქვს პირობას

$$|f(x)|\leqslant C\cdot|\varphi(x)|$$

ე. ი.

$$(f(x)=O(\varphi(x))\ \ E\text{-ზე})\Longleftrightarrow(|f(x)|\leqslant C\cdot|\varphi(x)|,\ \forall x\in E),$$

კერძოდ, $f(x)=O(1)$-ზე, ნიშნავს რომ f შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე.

თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\lim_{x\to x_0} Cf(x) = C\lim_{x\to x_0} f(x) \quad (C \text{ მუდმივი სიდიდეა}).$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} \varphi(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}, \quad \text{თუ } \lim_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0.$$

თუ $f(x)$ ელემენტარული ფუნქციაა და $f(x)$ x_0 წერტილში განსაზღვრულია, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ მნიშვნელობები $x = x_0$ წერტილზე ერთდროულად ნული არ არის, მაშინ ზღვარი $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ უშუალოდ მოიძებნება.

თუ არსებობს სასრული ზღვრები $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ და $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = A^B.$$

თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 1$ და $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \pm\infty$, მაშინ ზღვარი უშუალოდ მოიძებნება.

თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ და $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, მაშინ დავუშვებთ, რომ $f(x) = 1 + \alpha(x)$, სადაც $\alpha(x) \to 0$, როცა $x \to x_0$, ამიტომ $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} =$

$$= \lim_{x\to x_0} \left\{[1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\cdot\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)-1]\varphi(x)},$$ სადაც

$e = 2{,}718\cdots$ ნეპერის რიცხვია.

თუ არსებობს და დადებითია ზღვარი $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0} [\ln f(x)] = \ln [\lim_{x\to x_0} f(x)].$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad (a>0).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{k}.$$

820. აჩვენეთ, რომ $f(x)=2x+3$ ფუნქციის ზღვარი $x=1$ წერტილზე არის 5.

821. აჩვენეთ, რომ $f(x)=4x-1$ ფუნქციის ზღვარი $x=3$ წერტილზე არის 11.

822. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+3)=2$. იპოვეთ η, თუ $\varepsilon=0{,}01$.

823. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{x\to -1}(3-2x-x^2)=4$. იპოვეთ η, თუ $\varepsilon=0{,}0001$.

824. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to 5}x^2=25$.

825. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x)=6$.

826. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=8$.

827. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}=2$.

828. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$.

829. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+3}=1$.

830. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$. როგორი უნდა იყოს N, რომ $|x|>N$ უტოლობიდან გამომდინარეობდეს $\dfrac{1}{x^2+1}<\varepsilon$ უტოლობა?

831. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{2+4x^2}=-\dfrac{1}{2}$. იპოვეთ x-ის მნიშვნელობები, თუ $\varepsilon=0{,}01$.

832. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

833. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$. იპოვეთ η, თუ $\varepsilon=10$; $\varepsilon=100$.

შეისწავლეთ x ცვლადის მიმართ შემდეგი უსასრულოდ მცირე სიდიდეები, როცა $x \to 0$:

834. 1) x^2; 2) $\sin 3x$; 3) $2x \cos x \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$; 4) $x e^{2x}$.

835. 1) $x - 3x^2$; 2) $x^3 + 3x^4$; 3) $5\sqrt[3]{x^2}$; 3) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$.

განსაზღვრეთ x უსასრულოდ მცირის მიმართ შემდეგი სიდიდეების რიგი:

836. 1) $1 - \cos x$; 2) $x - 3x^2 + 4x^3$; 3) $\frac{2x^3}{1+x}$; 4) $e^x - \cos x$.

837. 1) $e^{\sin x} - 1$; 2) $\operatorname{tg}^3 x + \sin^3 x$; 3) $\operatorname{tg}^2 x (1 - \cos x)$.

მიიღეთ x პირველი რიგის უსასრულოდ დიდ სიდიდედ და განსაზღვრეთ შემდეგი სიდიდეების რიგი:

838. 1) $x^2 - 10x + 100$; 2) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$.

839. 1) $\frac{x^5}{x+2}$; 2) $\sqrt[3]{x - 2x^2}$.

840. x უსასრულოდ მცირეა, აჩვენეთ, რომელია უსასრულოდ მცირე, სასრული სიდიდე და უსასრულოდ დიდი შემდეგი ფუნქციებიდან: $2x^2$; $3 - x$; $\frac{2}{x}$; $\sqrt{9-x}$; $1 - \cos x$; e^x; $\ln x$; $\sin x$; $\operatorname{ctg} x$.

841. x უსასრულოდ დიდია; აჩვენეთ, რომელია უსასრულოდ მცირე, სასრული სიდიდე და უსასრულოდ დიდი შემდეგი ფუნქციებიდან:

$\sqrt[3]{x}$; $3 - \frac{1}{x}$; $\sin \frac{3}{x}$; $\sqrt{4 + \frac{1}{x}}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$; $e^{\frac{1}{x}}$; e^{x^2}; $\frac{\sin x}{x}$;

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

842. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$. **843.** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 5}$.

844. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$. **845.** $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$.

846. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$. **847.** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x + 3}{x^2 - 9}$.

848. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$. **849.** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

850. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$. **851.** $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + x - 12}$.

852. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

853. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4-4x^3+1}{x^3-x^2-x+1}$.

854. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-2x^2-5x}{3x^2+2x}$.

855. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3-3x^2+2x}{4x^2-3x}$.

856. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

857. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x-h)^4-x^4}{h}$.

858. 1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^5-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m და n მთელი რიცხვებია).

859. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$; ($n$ მთელი რიცხვია).

860. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

861. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{4}{x^4-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

862. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-5}{6x^2+2x+1}$.

863. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$.

864. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

865. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$.

866. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+8}$.

867. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2-4}{x^4+7x-1}$.

868. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5x-1)(3x+7)(2x+3)}{2x^3+x^2-9}$.

869. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x+2)^4(2x-5)^3}{27x^7+4x+3}$.

870. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

871. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{4x+1}-\dfrac{2x^3}{8x^2-1}\right)$.

872. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+\sqrt{3x+8}}{\sqrt{6x-5}-7x^2}$.

873. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+11}{\sqrt{x^4-2}}$.

874. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

875. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

876. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3+4x+5x^2}}{2x+9}$.

877. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

878. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

879. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x-3}$.

880. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$.

881. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.

882. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$.

883. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

884. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

885. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{18+x^2}-3\sqrt{2x+9}}{x+3}$.

886. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$.

887. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x})$.

888. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

889. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt[3]{1-x^3}+x)$.

890. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

891. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 7x}$.

892. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{3}}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x$.

893. 1) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$.

894. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$;

895. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2x \operatorname{tg} 3x}$.

896. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$.

897. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{\sin 7x}$.

898. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x \sin 2x}$.

899. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

900. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-\sin 4x}{2x+\sin 5x}$.

901. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} 3x}{x+\arcsin 6x}$.

902. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

903. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2 \dfrac{x}{2}}\right)$.

904. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

905. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x-3}$.

906. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

907. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin \pi x}{4-x^2}$.

908. $\lim\limits_{z\to 1} (1-z) \operatorname{tg} \dfrac{\pi z}{2}$.

909. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{x \operatorname{tg} x}$.

910. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$.

911. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

912. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - x^2 + x^4}{6x + x^3}$.

913. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{tg} x + x^3 - x^2}{\operatorname{arc\,tg} 7x + x^2}$.

914. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}-1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

915. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1-2x}-1}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$.

916. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-3}{\arcsin \dfrac{x}{9}}$.

917. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16-x^2}-2}{1-\cos x}$.

918. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+2\operatorname{tg}^2 x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\sin^2 x}$.

919. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{3+x}-\sqrt[5]{3-x}}{x}$.

920. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\operatorname{tg} 3x)}{\arcsin 4x}$

921. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x^4}}{\ln(1+\sin 5x)}$.

922. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

923. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+3x)}{\operatorname{tg} 2x}$.

924. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

925. $\lim\limits_{x\to +\infty} [\ln(3x+5)-\ln(x+4)]$.

926. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x-3)[\ln(x-2)-\ln(x+1)]$.

927. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)]$.

928. $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln \dfrac{2a+x}{a+x}$.

929. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos mx)}{\ln(\cos nx)}$.

930. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{\sin x}-b^{\operatorname{tg} x}}{x}$ $(a>0,\ b>0)$.

931. $\lim\limits_{x\to \infty} x(\sqrt[x]{a}-1)$ $(a>0)$.

932. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

933. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$.

934. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-1}{\ln(1+x)}$.

935. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

936. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

937. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin \alpha x-\sin \beta x}$.

938. 1) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{3x}{2}\right)^{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{5-x}{7+x}\right)^{x}$.

939. 1) $\lim\limits_{x\to 10}\left(\frac{1}{5}x^2\right)^{\lg x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-3}{3x+1}\right)^{x+2}$.

940. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-1}{5x+6}\right)^{x}$.

941. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^{x}$.

942. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}$.

943. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$.

944. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$.

945. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

946. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{x}$.

947. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

948. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$.

949. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)^{\sqrt{x}}$.

950. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-2}{x^2+4x-3}\right)^{x}$.

951. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^5+8x^4+3}{x^5+5x^4-2}\right)^{x}$.

952. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

953. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\,\mathrm{tg}^2 x)^{3\,\mathrm{ctg}^2 x}$.

954. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$.

955. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

956. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^{x}$.

957. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

§ 4. სხვადასხვა ზღვარი

958. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax+x^2}{\mathrm{tg}\,bx}$.

959. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}$.

960. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2 x+x^4)}{\mathrm{tg}\,(x^2+x^3)}$.

961. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+x)}{2x-\ln(1+x)}$.

962. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\mathrm{arctg}\,x-1)}{\mathrm{arctg}\,x(\mathrm{arc\,tg}\,x+1)}$.

963. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$.

964. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

965. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\mathrm{tg}^2 x\right)$.

966. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}+2^{-\frac{1}{(x-2)^3}}\right]$.

967. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.

968. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$,

969. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

970. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$.

971. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

972. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

973. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}$.

974. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

975. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

976. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{\ln^2(1-2x^3)}-1}{\operatorname{tg}^2 x^2}$.

977. $\lim\limits_{x\to +\infty} n[\ln n-\ln(n+2)]$.

978. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\ln\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$.

979. $\lim\limits_{x\to -1}\cos\frac{\pi(x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

980. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)}{\operatorname{tg}(\alpha+x)-\operatorname{tg}(\alpha-x)}$.

981. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{mx}-e^{nx}}{a^{mx}-a^{nx}}$, $(a>0)$.

982. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

983. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{a^x+b^x-1}$. $(a>0,\ b>0)$.

984. $\lim\limits_{n\to +\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$, $(a>0)$.

985. $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$. $(a>0,\ b>0)$.

986. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-\ln(1-x+x^2)}{1-\cos x}$.

987. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

988. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$.

989. $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$, $(a>0)$.

990. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$, $(a>0)$.

991. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. მართებულია თუ არა შებრუნებული მტკიცება?

992. დაამტკიცეთ, რომ (n^3) მიმდევრობა განშლადია.

993. „ε—δ“ ენაზე ჩამოაყალიბეთ მტკიცება: „x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არ არის A რიცხვი“.

994. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ უწყვეტია, მაშინ $|f(x)|$-იც უწყვეტია. სამართლიანია თუ არა შებრუნებული მტკიცება?

995. „ε—δ“ ენაზე ჩამოაყალიბეთ მტკიცება: „x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია არაა უწყვეტი ამავე წერტილში“.

996. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, ხოლო $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ არ არსებობს. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,g(x)$.

997. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ზღვარი, ხოლო $g(x)$ ფუნქციას კი ამ წერტილში არა აქვს ზღვარი. იარსებებს თუ არა ზღვრები:

$$1)\ \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x));\quad 2)\ \lim_{x\to x_0} f(x)\ g(x)?$$

განიხილეთ მაგალითი:

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}.$$

998. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი, ხოლო $g(x)$ უსასრულოდ დიდია x_0 წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)\ g(x)$ უსასრულოდ დიდი ფუნქციაა x_0 წერტილში.

999. არის თუ არა უსასრულოდ დიდი $x=0$ წერტილში $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია?

1000. ვთქვათ $\alpha_1(x) \overset{x_0}{\sim} \alpha(x)$, $\beta_1(x) \overset{x_0}{\sim} \beta(x)$. დაამტკიცეთ, რომ თუ არ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, მაშინ არ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ზღვარიც.

§ 5. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები, უწყვეტი და წყვეტილი ფუნქციები

A_1 რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან x_0 წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x)-A_1|<\varepsilon$, ყოველი x-სათვის, რომე-

ლიც აკმაყოფილებს $x_0<x<x_0+\eta$ უტოლობებს. ამ შემთხვევაში წერენ:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = A_1 = f(x_0+).$$

A_2 რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან x_0 წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x)-A_2|<\varepsilon$, ყოველი x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $x_0-\eta<x<x_0$ უტოლობებს. ამ შემთხვევაში წერენ:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = A_2 = f(x_0-).$$

აღნიშნულ ზღვრებს უწოდებენ აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივ ზღვრებს x_0 წერტილზე.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილზე, თუ ამ წერტილზე ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის მნიშვნელობა თანატოლია:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

ან ასე: $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე, თუ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე $\Delta x=x-x_0$ ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ ნაზრდი, რასაც ასე ჩავწერთ:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **პირველი გვარის წყვეტის** წერტილი, როცა არსებობს x_0 წერტილზე ცალმხრივი ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$, მაგრამ $f(x_0+)\neq f(x_0-)$; ამ შემთხვევაში $\omega=|f(x_0+)-f(x_0-)|$ სხვაობას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილზე.

f ფუნქციის წყვეტის x_0 წერტილს, რომელიც არ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, ეწოდება ამ ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **აცილებადი წყვეტის წერტილი**, თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, მაგრამ ის არ უდრის $f(x_0)$-ს, ან ეს უკანასკნელი არაა განსაზღვრული.

1001. იპოვეთ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x=0$ წერტილზე.

1002. იპოვეთ $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x=0$ წერტილზე.

იპოვეთ ცალმხრივი ზღვრები შემდეგი ფუნქციებისა:

1003. $\lim\limits_{x\to 2\pm}\dfrac{3}{x-2}$.

1004. $\lim\limits_{x\to -3\pm}\dfrac{x+3}{|x+3|}x$.

1005 $\lim\limits_{x\to 1\pm} 2^{\frac{1}{x-1}}$.

1006. $\lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1007. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm}\dfrac{2}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$.

1008. $\lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

1009. $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

1010. $\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

აჩვენეთ შემდეგი ფუნქციების უწყვეტობა x არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის:

1011. 1) $y=x^2$; 2) $y=\sin x$. 1012. 1) $y=x^3$; 2) $y=\cos x$

1013. 1) $y=\sqrt{x}$, $(x\geqslant 0)$; 2) $y=e^x$. 1014. 1) $y=\sqrt[3]{x}$; 2) $y=|x|$.

ააგეთ გრაფიკები, გამოარკვიეთ წყვეტის წერტილები და იპოვეთ ნახტომი (სადაც არსებობს) ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციებისა:

1015. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$; 2) $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$. 3) $f(x)=\operatorname{tg}x$.

1016. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$; 3) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$.

1017. 1) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; 2) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}$.

1018. 1) $f(x)=\operatorname{ctg}x$; 2) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{2|x|}$.

იპოვეთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

1019. 1) $y=\dfrac{x+3}{x(x^2-4)}$; 2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; 3) $y=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$;

4) $y=\sin\dfrac{\pi}{x}$; 5) $y=\dfrac{1}{\lg x}$; 6) $y=\ln|\sin x|$.

1020. 1) $y=\dfrac{x-1}{x(x+1)(x^2-2)}$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2+3}$; 3) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$;

4) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$; 5) $y=\ln\ln(1+x^2)$; 6) $y=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

$f(x)$ ფუნქცია არ არის განსაზღვრული ნაჩვენებ წერტილზე. ამ წერტილზე ფუნქცია განსაზღვრეთ ისე, რომ იგი იყოს უწყვეტი:

1021. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$, $x=-1$. **1022.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$, $x=5$.

1023. $f(x)=\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$, $x=0$. **1024.** $f(x)=\dfrac{\ln(2+x)-\ln(2-x)}{x}$, $x=0$.

1025. აჩვენეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა } x\neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{როცა } x=1 \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტას განიცდის $x=1$ წერტილზე.

1026. აჩვენეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{როცა } x\neq 0, \\ 2, & \text{როცა } x=0. \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტას განიცდის $x=0$ წერტილზე.

1027. აჩვენეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x<-1; \\ x+2, & \text{როცა } x\geqslant -1. \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტას განიცდის $x=-1$ წერტილზე.

1028. აჩვენეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{როცა} \quad x\leqslant 3, \\ 2x+1, & \text{როცა} \quad x>3 \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტას განიცდის $x=3$ წერტილზე.

1029. მოცემულია ფუნქცია:

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{როცა} \quad x<0, \\ a+x, & \text{როცა} \quad x\geqslant 0. \end{cases}$$

a-ს როგორი მნიშვნელობისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

1030. მოცემულია

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{როცა} \quad x\neq 2 \\ a, & \text{როცა} \quad x=2 \end{cases}$$

ფუნქცია. a-ს როგორი მნიშვნელობისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

იპოვეთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

1031. $$f)x)=\begin{cases} x+2, & \text{როცა} \quad x\leqslant -1, \\ x^2+1, & \text{როცა} \quad -1<x\leqslant 1, \\ -x+3, & \text{როცა} \quad x>1. \end{cases}$$

1032. $$f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{როცა} \quad x\leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{როცა} \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{როცა} \quad x\geqslant \pi. \end{cases}$$

1033. 1) აჩვენეთ, რომ დირიხლეს ფუნქცია:

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია}, \\ 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია}, \end{cases}$$

წყვეტას განიცდის x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

2) აჩვენეთ, რომ $f(x)=xD(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მხოლოდ $x=0$ წერტილზე.

1034. გამოიკვლიეთ $f(x)=\operatorname{sign} x$ ფუნქციის უწყვეტობა, სადაც $\operatorname{sign} x$ (სიგნუმ x) შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad x>0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=0, \\ -1, & \text{როცა} \quad x<0. \end{cases}$$

1035. გამოიკვლიეთ $f(x)=x \operatorname{sign} x$ ფუნქციის უწყვეტობა.

1036. $E(x)$ არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x-ს. გამოიკვლიეთ $f(x) = E(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა.

VI თავი

დიფერენციალური აღრიცხვა

§ 1. ფუნქციის წარმოებული

$y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილზე ეწოდება ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვარს, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი ნულისაკენ მიისწრაფის, იგი ასე აღინიშნება:

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

ფუნქციის წარმოებული გეომეტრიულად წარმოადგენს ამ ფუნქციის გრაფიკის $M(x, f(x))$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

მექანიკურად $x=f(t)$ ფუნქციის წარმოებული იმ წერტილის სიჩქარეა t მომენტში, რომლის მოძრაობის განტოლებაა $x=f(t)$; ეს ასე გამოითქმის: სიჩქარე მანძილის წარმოებულია დროით.

წარმოებულის მოძებნის ძირითადი წესები. თუ C მუდმივი სიდიდეა, ხოლო $u=u(x)$ და $v=v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ:

1) $C'=0,$

2) $x'=1,$

3) $(u\pm v)'=u'\pm v',$

4) $(Cu)'=Cu',$

5) $(uv)'=u'v+v'u$

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2},\quad (v\neq 0),$

7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-\dfrac{Cv'}{v^2},\quad (v\neq 0).$

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების ცხრილი:

1) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},$ 2) $(a^x)'=a^x\ln a,$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.\quad (e^x)'=e^x;$$

3) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ (x>0.\ \ a>0);$ 4) $(\sin x)'=\cos x;$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

5) $(\cos x)' = -\sin x$; 6) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

11) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$; 12) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; 14) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

15. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

თუ $y=f(u)$, ხოლო $u=\varphi(x)$, მაშინ $y=f[\varphi(x)]$ არის x-ის რთული ფუნქცია. თუ y და u წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{ანუ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $y'_x \neq 0$, მაშინ შექცეული $x=\varphi(y)$ ფუნქციის წარმოებული იქნება;

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad \text{ანუ} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

$y=f(x)$ ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებული ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

ფუნქციის წინასწარი გალოგარითმება ბევრ შემთხვევაში ამარტივებს მისი წარმოებულის მოძებნას.

თუ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} \text{ და ა. შ.}$$

მეორე რიგის წარმოებული ასეც გამოითვლება:

$$y''_x = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

თუ $F(x, y)=0$ განტოლება განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის არაცხად ფუნქციას, მაშინ y'-ის მოსაძებნად საკმარისია მოცემული განტოლების x-ით გაწარმოება (y უნდა ჩავთვალოთ x-ის ფუნქციად) და მიღებული ტოლობიდან y'-ის პოვნა. y''-ის მისაღებად საჭიროა მოცემული განტოლების x-ით ორჯერ გაწარმოება და ა. შ.

$y=f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება მეორე რიგის წარმოებული და მას ასე აღნიშნავენ:

$$y'' \quad \text{ან} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ან} \quad f''(x).$$

საზოგადოდ, $f(x)$ ფუნქციის $(n-1)$ რიგის წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება n-ური რიგის წარმოებული, რასაც ასე ჩაწერენ:

$$y^{(n)} \quad \text{ან} \quad \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{ან} \quad f^{(n)}(x).$$

წარმოებულის განსაზღვრის საფუძველზე მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

1037. 1) $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sin x$; 4) $y=\operatorname{tg} x$; 5) $y=\sqrt{1+2x}$.

1038. 1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=2x^2-x$; 3) $y=\sin^2 x$; 4) $y=e^x$; 5) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1039. $y=x^2-5x+6$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ Δx და Δy, თუ x იცვლება: 1) 1-დან 1,1-მდე; 2) 2-დან 1-მდე.

1040. $y=x^2+3x+1$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ Δx და Δy, თუ x იცვლება 3-დან 8-მდე.

1041. $y=\sqrt[3]{x}$ ფუნქციისათვის იპოვეთ Δy, თუ; 1) $x=0$, $\Delta x=0{,}001$; 2) $x=8$, $\Delta x=-9$.

1042. იპოვეთ Δy ნაზრდი და $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა შემდეგი ფუნქციებისათვის; 1) $y=\sqrt{x}$, როცა $x=0$ და $\Delta x=0{,}01$; 2) $y=\lg x$, როცა $x=100$ და $\Delta x=-90$.

1043. იპოვეთ $y=\frac{1}{x}$ ჰიპერბოლის მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი, თუ გადაკვეთის წერტილებია $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$ და $N\left(4; \frac{1}{4}\right)$.

1044. იპოვეთ $y=2x-x^2$ პარაბოლის მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი, თუ გადაკვეთის წერტილების აბსცისებია $x_1=1$ და $x_2=2$.

1045. იპოვეთ $y=x^3$ წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი, თუ $x=\pm 1$.

1046. იპოვეთ $y=\frac{1}{x}$ წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი, თუ: 1) $x=\frac{1}{2}$; 2) $x=1$.

1047. იპოვეთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა, თუ $y=x^2+3x+2$ და $1\leqslant x\leqslant 3$.

1048. იპოვეთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა, თუ $y=3^x-2x$ და $0\leqslant x\leqslant 2$.

1049. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლება $s=t^2+2t+4$. იპოვეთ მოძრაობის საშუალო სიჩქარე $t=2$ წამიდან $t=6$ წამამდე.

1050. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლება $s=3t^2$. როგორია მისი მოძრაობის სიჩქარე $t=4$ მნიშვნელობისათვის?

1051. წერტილის მოძრაობის განტოლება Ox ღერძის გასწვრივ არის $x=3t-t^3$. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე $t=0$; $t=1$; $t=2$ მომენტებისათვის.

1052. წერტილი მოძრაობს წრფის გასწვრივ ისე, რომ t წამის შემდეგ მისი დაშორება საწყისი წერტილიდან არის:

$$s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2.$$

განსაზღვრეთ, როდის იქნება მისი სიჩქარე ნულის ტოლი.

იპოვეთ წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

1053. $y=x^4+3x^2-6$.

1054. $y=x^6+2x^4-5x+2$.

1055. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$.

1056. $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-3x$.

1057. $y=x^3+2\sqrt{x}$.

1058. $y=\frac{7}{a}x^2+3\sqrt[3]{x}$.

1059. $y=ax^n+bx^m$.

1060. $y=\frac{x^5}{a+b}-\frac{x^2}{a-b}$.

1061. $y=3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{4}{5}}+x^{-\frac{1}{2}}$.

1062. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{3}{2}}+2x$.

1063. $y=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5x^5}$.

1064. $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{x\sqrt{x}}$.

1065. $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$.

1066. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$.

1067. 1) $y = x^2 \cos x$; 2) $y = 3^x \arcsin x$.

1068. 1) $y = x^3 \operatorname{ctg} x$; 2) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

1069. $f(x) = \dfrac{3}{x} + \ln x$.

1070. $f(x) = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$.

1071. $y = \dfrac{3x - 2}{x^2 + 4x - 7}$.

1072. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$.

1073. $f(t) = \dfrac{t^3}{1 + t^2}$.

1074. $f(t) = \dfrac{1 + e^t}{1 - e^t}$.

1075. $s = 2t \sin t - (t^2 - 2)\cos t$.

1076. $s = (1 + t^2)\operatorname{arctg} t - t$.

1077. $y = \arcsin x + \arccos x$.

1078. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} x}{1 + x^2}$.

1079. $y = x^4 \ln x - \dfrac{x^4}{4}$.

1080. $y = 3\ln x - \dfrac{1 + \ln x}{x}$.

1081. $y = e^x \operatorname{arctg} x$.

1082. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

1083. $y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x$.

1084. $y = 3^x \cdot x^5$.

1085. $y = x^2 e^x \sin x$.

1086. $y = x^3 a^x \ln x$.

1087. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$. იპოვეთ $f'(1)$ და $f'(-1)$.

1088. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$. იპოვეთ $f'(0)$.

1089. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$. იპოვეთ $f'(3)$.

1090. $f(x) = x(1 + \sqrt{x})$. იპოვეთ $f'(4)$.

1091. $y = \sin 6x$.

1092. $y = \cos^3 x$.

1093. $y = (x^4 - 2x^2 + 3)^4$.

1094. $y = (5x^2 - 2x + 4)^2$.

1095. $y = \sin^2 2x$.

1096. $y = \operatorname{tg}^2 3x$.

1097. $y = \sin 2x \cdot \cos 3x$.

1098. $y = 2x + 5\sin^3 x$.

1099. $y = \sqrt{1 + \arcsin x}$.

1100. $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$.

1101. $y = \left(\dfrac{1}{6}x^{12} + 4\sqrt[3]{x^5} - 3\right)^3$.

1102. $y = \sqrt[4]{x^2 + 3x} - \sqrt[5]{(6x - 1)^3}$.

1103. $y = a \sin^3 \dfrac{x}{3}$.

1104. $y = \arcsin(e^{x^2})$.

1105. $y = \sin(\ln x)$.

1106. $y = \ln(\ln \operatorname{tg} x)$.

1107. $y = e^{\cos x}\cdot \sin x$.

1108. $y=e^x \ln \sin x$.

1109. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

1110. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

1111. $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

1112. $y = \ln \frac{e^x}{e^x+1}$.

1113. $y = \ln \operatorname{tg} x - \frac{1}{2\sin^2 x}$.

1114. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$.

1115. 1) $y = e^{\sqrt{x}}$; 2) $y = \sqrt{e^x}$.

1116. 1) $y = x^3 \cdot 7^{5x}$; 2) $y = x^2 \cdot \sin 3^{2x}$.

1117. $y = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$.

1118. $y = \ln \sin \frac{2x+3}{x+1}$.

1119. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$.

1120. $y = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2}$.

1121. $y = 5^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}$.

1122. $y = e^{\arcsin \frac{1}{x}}$.

1123. $y = 3^{\operatorname{arctg}^2 (4x+1)}$.

1124. $y = 7^{x \cos^3 x}$.

1125. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

1126. $y = \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\sin^2 x}$.

1127. $y = (1 + \operatorname{ctg}^2 3x)\, e^{-x}$.

1128. $y = 3^{\sqrt{x}} - x^2 \cos 2x$.

1129. $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\cos^2 4x\right)$.

1130. $y = x \arcsin 2x + \operatorname{arc\,tg}^3 3x$.

1131. $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg} 3x$.

1132. $y = (1+\operatorname{tg}^2 x)\, e^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

1133. $y = e^{-x^2} \cos^3 (2x+3)$.

1134. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1135. $y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

1136. $y = \sqrt{1-9x^2} + \arcsin 3x$.

1137. $y=\sqrt{4x-x^2} + 4\arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}$.

1138. $y = 3\sin x \cos^2 x + \sin^3 x$.

1139. $y = x\ln (x^2+1) - 2x + \operatorname{arc\,tg} x$.

1140. $y = (2x^2-1) \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$.

1141. $y = \sin^3 5x \cdot \cos^5 3x$.

1142. $y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} + 2^{\sqrt{x}}$.

1143. $y=\arccos 2x-\sqrt{1-4x^2}$. 1144. $y=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$.

1145. $y=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1146. $y=\frac{1}{13}e^{2x}(3\sin 3x+2\cos 3x)$.

1147. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

1148. $y=2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$.

1149. $y=\operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x^3$.

1150. $y=\sqrt{1+x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

1151. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$.

1152. $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1153. $y=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{2}{2(x+1)}$.

1154. $y=\frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

1155. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$. იპოვეთ $f'(0)$ და $f'(-3)$.

1156. $f(x)=\frac{2+x^2}{\sqrt{2-x^2}}$. იპოვეთ $f'(0)$ და $f'(1)$.

1157. $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{x}$. იპოვეთ $f'(5)$.

1158. $f(x)=\ln(1+2^x)$. იპოვეთ $f'(2)$.

1159. $f(x)=\ln\sin x$. იპოვეთ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

1160. $f(x)=\operatorname{tg}^3\frac{\pi x}{6}$. იპოვეთ $f'(2)$.

1161. $f(t)=e^{-t}$. იპოვეთ $f(0)+tf'(0)$.

1162. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-9}$. იპოვეთ $f(3)+4xf'(3)$.

1163. $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. აჩვენეთ, რომ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$

1164. $f(x) = 1 - x^3$, $\varphi(x) = 1 - \sin\frac{\pi x}{2}$. იპოვეთ $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$.

1165. $y = x^x$.

1166. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1167. $y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$.

1168. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

1169. $y = x^{\operatorname{arc\,tg} x}$

1170. $y = (\ln x)^x$.

1171. $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

1172. $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin 3x}$.

1173. $y = (x^3 + 3)^{\sqrt{x}}$.

1174. $y = (1 - x^2)^{\operatorname{arc\,cos} x}$.

1175. $y = x^{x^x}$.

1176. $y = e^{x^x}$.

1177. $y = \log_x \cos x$.

1178. $y = \log_{\sin x} \operatorname{tg} x$.

1179. $y = x^5 (a + 3x)^3 (a - 2x)^2$.

1180. $y = x^6 (x^2 + 1)^{10} (x^3 + 1)^5$.

1181. $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3 (x+3)^4}$.

1182. $y = \frac{x^3 (x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$.

1183. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

1184. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x-1)}{\sin^2 x}}$.

1185. $y = sh\, x$

1186. $y = ch\, x$.

1187. $y = th\, x$.

1188. $y = cthx$.

1189. $y = \frac{x^2}{chx}$.

1190. $y = \frac{3cthx}{\ln x}$.

1191. $y = sh^3 2x$.

1192. $y = thx + cthx$.

1193. $y = \ln sh\, 2x$.

1194. $y = \sqrt{1 + sh^2 4x}$.

1195. $y = e^{ch^2 x}$.

1196. $y = \ln(th\, x)$.

იპოვეთ x'_y, თუ:

1197. $y = \frac{2x+3}{5x-2}$.

1198. $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$.

1199. $y = \sin x + \ln\cos x$.

1200. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2e^{\frac{x}{2}}$.

1201. $y = \arcsin 2^x$.

1202. $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{1 + x^2}$.

1203. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, $y''' = ?$

1024. $y = x^5 - 5x^3 + 6x^2 + 11$, $y^{IV} = ?$

1205. $y = \sin^2 3x, \quad y''' = ?$

1206. $y = e^{x^2}, \; y'' = ?$

1207. $y = x \ln x, \quad y''' = ?$

1208. $y = \operatorname{tg} x, \; y''' = ?$

1209. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y'' = ?$

1210. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad y'' = ?$

1211. $y = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x, \quad y'' = ?$

1212. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{1 - x^2}, \quad y'' = ?$

1213. $y = x^2 \sin 2x, \; y''' = ?$

1214. $y = x^4 \ln x, \; y^{\mathrm{IV}} = ?$

1215. $f(x) = (2x - 3)^5, \; f'''(2) = ?$

1216. $f(x) = e^{2x^2 - 1}, \; f''(0) = ?$

1217. $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f'''(1) = ?$

1218. $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x}, \quad f''(2) = ?$

იპოვეთ $y^{(n)}$, თუ:

1219. $y = \cos ax.$

1220. $y = \sin ax.$

1221. $y = \cos^2 ax.$

1222. $y = \sin^2 ax.$

1223. $y = a^{kx}$

1224. $y = x^n.$

1225. $y = \dfrac{1}{1 - x}.$

1226. $y = \dfrac{1}{1 + x}.$

1227. $y = \ln(ax + b).$

1228. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}.$

იპოვეთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

1229. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

1230. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

1231. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t + t^3. \end{cases}$

1232. $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$

1233. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

1234. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

1235. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = 2\ln \operatorname{ctg} t. \end{cases}$

1236. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

1237. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^2}. \end{cases}$ იპოვეთ y'_x.

1238. $\begin{cases} x = \dfrac{2 - t}{2 + t^2}, \\ y = \dfrac{t^2}{2 + t^2}. \end{cases}$ იპოვეთ y'_x.

1239. $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$ იპოვეთ y'_x, როცა $t = 1$.

1240. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$ იპოვეთ y''_x, როცა $t = 2$.

1241. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$ იპოვეთ y'''_x.

1242. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$ იპოვეთ y'''_x.

იპოვეთ პირველი რიგის წარმოებულები შემდეგი არაცხადი ფუნქციებისა:

1243. $3x - 2y + 6 = 0$.

1244. $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$.

1245. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1246. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

1247. $e^y - e^{-x} + xy = 0$.

1248. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = C$.

1249. $y = \cos(x+y)$.

1250. $x^y = y^x$.

1251. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$. იპოვეთ y', როცა $x = 0$.

1252. $ye^y = e^{x+1}$. იპოვეთ y', როცა $x = 0$, $y = 1$.

იპოვეთ მეორე რიგის წარმოებულები შემდეგი არაცხადი ფუნქციებისა:

1253. $y^2 = 4ax$.

1254. $y = x + \ln y$.

1255. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

1256. $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

1257. $x^4 - xy + y^4 = 0$. იპოვეთ y'', როცა $x = 1$, $y = 0$.

1258. $x^2 + y^2 = a^2$. იპოვეთ y'''.

§ 2. პირველი და მაღალი რიგის დიფერენციალები

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი x წერტილში, თუ x წერტილში მისი ნაზრდი Δy შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$\Delta y = A\,\Delta x + 0(\Delta x),$$

სადაც A არ არის დამოკიდებული Δx-ზე. ფუნქციის ნაზრდის მთავარ ნაწილს $A\Delta x$-ს ეწოდება ამ ფუნქციის დიფერენციალი და აღინიშნება სიმბოლოთი dy. $y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისათვის x

წერტილში აუცილებელია და საკმარისი ამ ფუნქციის წარმოებულის არსებობა x წერტილში. ამასთან, $A=f'(x)$.

$y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი უდრის ამ ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლს, რასაც ასე ჩავწერთ:

$$dy=f'(x)\,dx;$$

თუ x არგუმენტის Δx ნაზრდი მცირე სიდიდეა, მაშინ $\Delta y\approx dy$. ე. ი. $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$; აქედან $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$.

$f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს მეორე რიგის დიფერენციალი ეწოდება, რასაც ასე აღვნიშნავთ:

$$d^2y=d(dy).$$

ასევე განიმარტება მესამე რიგის დიფერენციალი და ა. შ.

თუ $y=f(x)$ და x დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ:

$$d^2y=y''\,dx^2,\quad d^3y=y'''\,dx^3,\dots,d^ny=y^{(n)}\,dx^n.$$

დიფერენცირების ძირითადი წესებია:

1) $dC=0,\ C=\text{const}$;

2) $dx=\Delta x$, x დამოუკიდებელი ცვლადია;

3) $d(Cu)=Cdu$;

4) $d(u\pm v)=du\pm dv$;

5) $d(uv)=udv+vdu$;

6) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2},(v\neq0)$;

7) $df(u)=f'(u)\,du$.

იპოვეთ დიფერენციალები:

1259. $y=(a^2-x^2)^5$.

1260. $(y=(1+\operatorname{tg}x)^4$.

1261. $y=x\ln x-x$.

1262. $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\operatorname{tg}x$.

1263. $r=2\varphi-\sin2\varphi$.

1264. $s=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

1265. $d(\sin^2t)$.

1266. $d\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

1267. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

1268. $y=\ln\operatorname{arctg}(\sin x)$.

1169. $y=3^{\operatorname{ctg}^2x}$.

1270. $y=\dfrac{\operatorname{arc\,tg}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1271. $x^2+2xy-y^2=a^2$.

1272. $x^3y^2+5xy+3=0$.

1273. $y=e^{-\frac{x}{y}}$.

1274. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

1275. $y = \ln(\ln^n mx)$

1276. $y = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

1277. $y = \log_2 \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1278. $y = \operatorname{arc\,tg}^2 x$.

1279. $y = \log_x c$.

1280. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

1281. $y = \sqrt{x}^{\sin^2 x}$.

1282. $y = \sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}$.

1283. $y = \ln(\operatorname{sh} x) + \frac{1}{2\operatorname{sh} x}$.

1284. $y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th} x)$.

1285. $y = e^{-x}\operatorname{sh} ax$.

1286. $y = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

1287. $y = \ln|x|$.

1288. $y = \ln(ax+b)$.

1289. $y = \lg_3(4x-2)$.

1290. $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1291. $y = \ln(3x^2-5x+6)$.

1292. $y = \ln\sin x$.

1293. $y = \ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

1294. $y = \ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})$.

1295. $y = \ln(\ln x)$.

1296. $y = x^2\lg_3 x$.

1297. $y = \frac{2x+1}{\operatorname{tg}_2 x}$.

1298. $y = x^3\ln x - \cos^3 x$.

1299. $y = x^{\cos x}$.

1300. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

1301. $y = x(1+x)\sqrt{1-x}$.

1302. $y = x^{\operatorname{ctg} x}$.

1303. $y = \left(1+\frac{1}{x^x}\right)^x$.

1304. $y = c^{\sin x}$.

1305. $y = xe^{-x^3}$.

1306. $y = \ln\frac{e^x}{1+e^x}$.

1307. $y = e^{\frac{x}{a}}\cos\frac{x}{a}$.

1308. $y = e^{-x^2}(\cos x + \sin x)$.

1309. $y = \ln(e^{-x}+xe^{-x})$.

1310. $y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$.

1311. $y = e^{x2+3}$.

1312. $y = (e^{ax}-e^{ax})^3$

1313. $y = \cos 5x$, $d^2y = ?$

1314. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $d^2y = ?$

1315 $y = \sin 3x$, $d^n y = ?$ **1316.** $y = x \ln \sin x$, $d^2 y = ?$

1317. $y = 2^{x^2}$, $d^2 y = ?$ **1318.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $d^2 y = ?$

1319. $y = \cos^2 2x$, $d^3 y = ?$ **1320.** $y = x^2 e^x$, $d^3 y = ?$

1321. 1) $y = x^2 + x + 1$. იპოვეთ dy, როცა $x = 2$ და $\Delta y = 0{,}1$; 2) $y = x^3$. იპოვეთ dy, როცა $x = 4$.

1322. 1) $y = \sqrt{x}$. იპოვეთ dy, როცა $\Delta x = 0{,}01$; 2) $y = 8x^2$. იპოვეთ dy.

1323. იპოვეთ $y = 3x^2 - x$ ფუნქციის ნაზრდი და დიფერენციალი, როცა $x = 1$ და $\Delta x = 0{,}1$.

1324. იპოვეთ $y = 5x + x^2$ ფუნქციის ნაზრდი და დიფერენციალი, როცა $x = 2$ და $\Delta x = 0{,}1$.

1325. 1) $y = \sin x$. იპოვეთ dy, თუ $x = \dfrac{\pi}{3}$ და $\Delta x = \dfrac{\pi}{18}$; 2) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. იპოვეთ dy, თუ $x = 9$ და $\Delta x = -0{,}01$,

1326. $y = \operatorname{tg} x$. იპოვეთ dy, როცა $x = \dfrac{\pi}{3}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$.

დიფერენციალის საშუალებით იპოვეთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა x-ის მითითებული მნიშვნელობისათვის.

1327. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 7{,}76$. **1328.** $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$, $x = 1{,}012$.

1329. $y = (x + \sqrt{5 - x^2})/2$, $x = 0{,}88$. **1330.** $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 27{,}54$.

1331. $y = \arcsin x$, $x = 0{,}08$. **1332,** $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$, $x = 0{,}97$.

1333. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 26{,}46$. **1334.** $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$, $x = 1{,}97$.

1335. $y = x^{11}$, $x = 1{,}021$. **1336.** $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1{,}21$.

1337. $y = x^{21}$, $x = 0{,}998$. **1338.** $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x = 1{,}03$.

1339. $y = x^6$, $x = 2{,}01$. **1340.** $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8{,}24$.

1341. $y = x^7$, $x = 1{,}996$. **1342.** $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 7{,}64$.

1343. $y = \sqrt{4x - 1}$, $x = 2{,}56$. **1344.** $y = 1/\sqrt{2y^2 + x + 1}$, $x = 1{,}016$.

1345. $y = \sqrt[3]{x}$. $x = 8{,}36$. **1346.** $y = 1/\sqrt{x}$, $x = 4{,}16$.

1347. $y = x^7$, $x = 2{,}002$. **1348.** $y = \sqrt{4x - 3}$, $x = 1{,}78$.

1349. $y = \sqrt{x^3}$, $x = 0{,}98$. **1350.** $y = x^5$, $x = 2{,}997$.

1351. $y = \sqrt[5]{x^2}$, $x = 1{,}03$. **1352.** $y = x^4$, $x = 3{,}998$.

1353. წარმოებულის განსაზღვრის საფუძველზე დაამტკიცეთ, რომ:
ა) წარმოებადი პერიოდული ფუნქციის წარმოებული პერიოდული ფუნქციაა.
ბ) წარმოებადი კენტი ფუნქციის წარმოებული ლუწი ფუნქციაა;
გ) წარმოებადი ლუწი ფუნქციის წარმოებული კენტი ფუნქციაა.

1354. დაამტკიცეთ, რომ $f'(0)$ არ არსებობს, თუ

$$f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

1355. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x^2), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

ფუნქციის წარმოებული წყვეტილია $x=0$ წერტილში.

1356. დაამტკიცეთ მიახლოებითი ფორმულა

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a},\quad x>,\quad |x|\ll a.$$

1357. რა შეიძლება ითქვას $f(x)+g(x)$ ჯამის x_0 წერტილში დიფერენცირებადობის შესახებ, თუ ამ წერტილში:
ა) $f(x)$ დიფერენცირებადია, ხოლო $g(x)$ არაა დიფერენცირებადი;
ბ) $f(x)$ და $g(x)$ არადიფერენცირებადი ფუნქციებია.

1358. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, $f(x_0)=0$ და $g(x)$ არაა დიფერენცირებადი x_0 წერტილში, მაშინ $f(x)\,g(x)$ ნამრავლი არაა დიფერენცირებადი ამ წერტილში.

1359. იპოვეთ $f'(0)$, თუ $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$.

1360. რთული $y=y(u(x))$ ფუნქციის d^3y დიფერენციალი გამოსახეთ $y(u)$ ფუნქციის წარმოებულებისა და $u(x)$ ფუნქციის დიფერენციალების საშუალებით.

1361. ვთქვათ $y(x)$ და $x(y)$ ორჯერ წარმოებადი ურთიერთშექცეული ფუნქციებია. x'' გამოსახეთ y' და y''-ის საშუალებით.

1362. 1357 ამოცანის პირობებში რა შეიძლება ითქვას $f(x)\,g(x)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის შესახებ?

განიხილეთ მაგალითები:

ა) $f(x)=x,\ \ g(x)=|x|,\ \ x_0=0;$

ბ) $f(x)=x,\ \ g(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\ x_0=0;\end{cases}$

გ) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x|,\ x_0=0;$

დ) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x|+1.\ x_0=0.$

1363. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=2x-\sin x$ მონოტონურად ზრდადია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

1364. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ და $g(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია $[a;\ b]$ სეგმენტზე. $f'(x)>g'(x)$ ყოველი $x\in\ ]a;\ b[$ და $f(a)=g(a)$, მაშინ $f(x)>g(x)$ ყოველი $x\in]a,\ b]$-სათვის.

1365. დაამტკიცეთ, რომ $x\in\left]0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\dfrac{2x}{\pi}\leqslant\sin x.$

1366. ფუნქციის მინიმუმისა და მაქსიმუმის განსაზღვრის საფუძველზე დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/x^2), & \text{როცა}\quad x\neq 0,\\ 0, & \quad\text{"}\quad\ \ x=0.\end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მინიმუმი, ხოლო

$$g(x)=\begin{cases}x\exp(-1/x^2), & \text{როცა}\quad x\neq 0,\\ 0, & \quad\text{"—"}\quad x=0.\end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.

1367. გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე x_0 წერტილში $f(x)=(x-x_0)\times\times\varphi(x)$ ფუნქცია, თუ ცნობილია რომ $\varphi'(x_0)$ არ არსებობს, $\varphi(x)$ x_0 წერტილში უწყვეტია, $\varphi(x_0)\neq 0$ და n ნატურალური რიცხვია.

1368. გამოიკვლიეთ $y=x^3-3x+q$ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის ნიშანი და დაადგინეთ პირობა, რომლის დროსაც $x^3-3x+q=0$ განტოლებას აქვს: ა) სამი ნამდვილი განსხვავებული ფესვი; ბ) ერთი ნამდვილი ფესვი.

1369. $[0;\ 3]$ სეგმენტზე იპოვეთ $f(x)=|6x^3-27x^2+36x-14|$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა.

1370. დაადგინეთ რაციონალური ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტის არსებობის პირობა.

წარმოებულის გამოყენება ფუნქციათა გამოკვლევაში

§ 1. საშუალო მნიშვნელობის თეორემები

როლის თეორემა. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში და $f(a)=f(b)$, მაშინ არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $f'(\xi)=0$, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის AB რკალზე მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი შიგა წერტილი, რომელზეც გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია. როცა $f(b)=f(a)=0$, მაშინ როლის თეორემას ასეც გამოთქვამენ: $f(x)$ ფუნქციის ორ a და b ფესვს შორის მოთავსებულია მისი წარმოებულის ერთი ფესვი მაინც.

ლაგრანჟის თეორემა. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია (a, b) ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

კოშის თეორემა. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში აქვთ სასრული წარმოებულები, ამასთან, $\varphi'(x)$ წარმოებული სეგმენტის შიგნით ნულის ტოლი არ ხდება, მაშინ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

1371. შეამოწმეთ, რომ $f(x)=x^2-4x+3$ ფუნქციის ფესვებს შორის მოთავსებულია მისი წარმოებულის ფესვი.

1372. როლის თეორემის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $x^4+4x+3=0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი ნამდვილი ფესვი.

1373. აჩვენეთ, რომ $x^3-3x^2+6x+1=0$ განტოლებას აქვს ერთადერთი, ამასთან, ნამდვილი და მარტივი ფესვი.

1374. მოცემულია $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ფუნქცია. წარმოებულის მოძებნის გარეშე გამოარკვიეთ, რამდენი ნამდვილი ფესვი აქვს $f'(x)=0$ განტოლებას; აჩვენეთ, რომელ შუალედშია ეს ფესვები მოთავსებული.

1375. შეამოწმეთ როლის თეორემა $f(x)=x^2-5x+6$ ფუნქციისათვის. მოძებნეთ ξ-ს სათანადო მნიშვნელობა.

1376. აჩვენეთ, რომ $f(x)=x-x^3$ ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს $[-1; 0]$ და $[0; 1]$ სეგმენტებზე. იპოვეთ ξ-ს სათანადო მნიშვნელობები.

1377. $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ ფუნქცია $[0;\ 4]$ სეგმენტის ბოლო წერტილებზე ღებულობს ტოლ მნიშვნელობებს; $f(0)=f(4)=\sqrt[3]{4}$. მართებულია თუ არა ამ ფუნქციისათვის როლის თეორემა მოცემულ სეგმენტზე?

1378. $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ ფუნქცია $[-1;\ 1]$ სეგმენტის ბოლო წერტილებზე ღებულობს ტოლ მნიშვნელობებს: $f(-1)=f(1)=0$. მართებულია თუ არა ამ ფუნქციისათვის როლის თეორემა მოცემულ სეგმენტზე?

შეამოწმეთ ლაგრანჟის თეორემის მართებულობა ნაჩვენებ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ შემდეგი ფუნქციებისათვის:

1379. $f(x)=\sqrt{x}$, $[1;\ 4]$ სეგმენტზე.

1380. $f(x)=\ln x$, $[1;\ 2]$ სეგმენტზე.

1381. $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$ სეგმენტზე.

1382. $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $[0;\ 1]$ სეგმენტზე.

1383. $y=x^2$ პარაბოლის რომელ წერტილზე უნდა გავავლოთ მხები $A(1;\ 1)$ და $B(3;\ 9)$ წერტილებზე გამავალი ქორდის პარალელურად?

1384. $y=4-x^2$ პარაბოლის რომელ წერტილზე უნდა გავავლოთ მხები $A(-2;\ 0)$ და $B(1;\ 3)$ წერტილებზე გამავალი ქორდის პარალელურად?

1385. დაწერეთ კოშის ფორმულა $f(x)=x^2+2$ და $\varphi(x)=x^3-1$ ფუნქციებისათვის $[1;\ 2]$ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ.

1386. დაწერეთ კოშის ფორმულა $f(x)=\sin x$ და $\varphi(x)=\cos x$ ფუნქციებისათვის $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ.

1387. მართებულია თუ არა კოშის თეორემა $f(x)=\cos x$ და $f(x)=x^3$ ფუნქციებისათვის $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე?

1388. დაწერეთ კოშის ფორმულა $f(x)=x^3$ და $\varphi(x)=x^2$ ფუნქციებისათვის $[0;\ 2]$ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ.

§ 2. განუსაზღვრელობათა გახსნის ლოპიტალის წესი

თუ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=0$, ან $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=\infty$,

მაშინ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ფარდობა $x=a$ წერტილზე მოგვცემს $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ სახის

განუსაზღვრელობებს. განუსაზღვრელობათა გახსნის ლოპიტალის წესის თანახმად მართებულია

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

ტოლობა, თუ წარმოებულთა ფარდობის ზღვარი არსებობს. ეს წესი მაშინაც გამოდგება, როცა $a\to\infty$. თუ $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ფარდობა კვლავ იძლევა განუსაზღვრელობას $x=a$ წერტილზე, მაშინ შეიძლება გადავიდეთ მეორე რიგის წარმოებულების ფარდობის ზღვარზე და ა. შ.

$0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0 სახის განუსაზღვრელობები დაიყვანება $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობებზე ალგებრული გარდაქმნების საშუალებით.

იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

1°. $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა.

1389. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$.

1390. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

1391. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\sqrt{2}}-1}{x-1}$.

1392. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$.

1393. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

1394. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

1395. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4+4x+3}{3x^4+4x^3+1}$.

1396. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

1397. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

1398. $\lim\limits_{x\to\varphi}\frac{\sin x-\sin\varphi}{x-\varphi}$.

1399. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y+\sin y-2}{\ln(1+y)}$.

1400. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}$.

1401. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\cos x}$.

1402. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x-\sin x}$.

1403. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg}(ax^{-1})}{x^{-1}}$.

2°. $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა.

1405. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

1406. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

1407. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-6}{2x^2-5x+7}$.

1408. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+x+2}{3x-8x^2}$.

1409. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

1410. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

1411. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$.

1412. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}}{\dfrac{1}{x-2}}$.

1413. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

1414. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1415. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

1416. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(e^x-e^a)}{\ln(x-a)}$, $(x>a)$.

3. $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობა

1417. $\lim\limits_{x\to0+} x^4\ln x$.

1418. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$.

1419. $\lim\limits_{x\to1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

1420. $\lim\limits_{x\to0} x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

1421. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{a}{x}$.

1422. $\lim\limits_{x\to0} (1-e^{2x})\operatorname{ctg} x$.

1423. $\lim\limits_{x\to0} \arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x$.

1424. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

1425. $\lim\limits_{x\to1-} \ln x\cdot\ln(1-x)$.

1426. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\cdot(2\operatorname{arctg} x-\pi)$.

4°. $\infty-\infty$ სახის განუსაზღვრელობა

1427. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)$.

1428. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

1429. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

1430. $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-x-2}\right)$.

1431. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

1432. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$.

1433. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

1434. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

1435. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right]$.

1436. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right]$.

5°. 1^∞, 0^0, ∞^0 სახის განუსაზღვრელობები

1437. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

1438. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.

1439. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

1440. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x-1}}$.

1441. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

1442. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

1443. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

1444. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

1445. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

1446. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$.

1447. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{5}{3-\ln x}}$.

1448. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi-2x}{2}}$.

1449. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[x]{x^2}$.

1450. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

1451. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

1452. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1453. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-a^2)^{\frac{1}{\ln x}}$.

1454. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{x-2}$.

იმ შემთხვევაში, როცა წარმოებულთა ფარდობას არა აქვს ზღვარი, ფუნქციათა ფარდობის ზღვარი უშუალოდ უნდა მოიძებნოს.

1455. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

1456. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$.

1457. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

1458. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

§ 3. ტეილორისა და მაკლორენის ფორმულები

თუ a წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებულები $(n+1)$ რიგამდე (ჩათვლით), მაშინ ამ მიდამოში მართებულია ტეილორის ფორმულა:

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

არის ტეილორის ფორმულის ნაშთი ლაგრანჟის სახით.

აქ $\xi=a+\theta(x-a)$, სადაც $0<\theta<1$. კერძოდ, როცა $a=0$, მივიღებთ მაკლორენის ფორმულას:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\ 0<\theta<1.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია n-ური ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ ტეილორისა და მაკლორენის ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

1459. დაშალეთ $(x+1)$-ის ხარისხებად $f(x)=x^3+5x^2+3x-9$ მრავალწევრი.

1460. დაშალეთ $(x-2)$-ის ხარისხებად $f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ მრავალწევრი.

1461. დაშალეთ $(x-1)$-ის ხარისხებად $f(x)=x^4-2x^3+7x-4$ მრავალწევრი.

1462. დაშალეთ $(x-4)$-ის ხარისხებად $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ მრავალწევრი.

გამოიყენეთ მაკლორენის ფორმულა შემდეგი ფუნქციების დასაშლელად:

1463. $f(x)=e^x$.

1464. $f(x)=\ln(1+x)$.

1465. $f(x)=\sin x$.

1466. $f(x)=\cos x$.

1467. $f(x)=(1+x)^m$ (m ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია)

1468. $f(x)=\sqrt{1+x}$ (x-ის მესამე ხარისხამდე).

1469. $f(x)=e^{2x-x^2}$ (x-ის მეორე ხარისხამდე).

1470. $f(x)=\arcsin x$ (x-ის მესამე ხარისხამდე).

1471. $f(x)=\ln\cos x$ (x-ის მეოთხე ხარისხამდე).

1472. $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ (x-ის მეორე ხარისხამდე).

1473. შეაფასეთ $e\approx 2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}$ მიახლოებითი ტოლობის ცდომილება.

1474. $\ln(1+x)\approx x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}$ მიახლოებითი ტოლობის საშუალებით იპოვეთ $\ln 1{,}5$ და შეაფასეთ ცდომილება;

§ 4. ფუნქციათა ინტერპოლება

ვთქვათ, სხვადასხვა $x_0, x_1, \ldots, x_n$ წერტილებში მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები $y_0, y_1, \ldots, y_n$. ინტერპოლირების უმარტივესი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: შევადგინოთ გამოთვლებისათვის ისეთი მარტივი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულ წერტილებში მიიღებს მოცემულ მნიშვნელობებს. კერძოდ, თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია პოლინომია, ინტერპოლირებას პარაბოლურს უწოდებენ, ხოლო თვით $\varphi(x)$ ფუნქციას საინტერპოლაციო პოლინომს.

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ წერტილებს საინტერპოლაციო კვანძები ეწოდება. საინტერპოლაციო პოლინომით ფართოდ სარგებლობენ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოსათვლელად x-ის იმ მნიშვნელობათათვის, რომლებიც $[x_0, x_n]$ შუალედის როგორც შიგნით, ისე გარეთ მდებარეო-

ბენ. პირველ შემთხვევაში საქმე გვექნება ინტერპოლირებასთან, ხოლო მეორე შემთხვევაში—ექსტრაპოლირებასთან. აღვნიშნოთ

$$R(x) = f(x) - \varphi(x).$$

ცხადია,

$$R(x_0) = R(x_1) = \dots = R(x_n) = 0.$$

ხოლო დანარჩენ წერტილში $R(x)$ ფუნქცია ახასიათებს $\varphi(x)$-ის $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობისაგან გადახრას: $R(x)$ ფუნქციას ნაშთითი წევრი ეწოდება.

ვთქვათ, საინტერპოლაციო კვანძები $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, თანასწორადაა ერთმანეთისაგან დაშორებული. $f(x_i) = y_i$. სხვაობას $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_i - \Delta^{k-1} y_{i-1}$ ეწოდება k-ური რიგის სასრული სხვაობა, $k = 1, 2, \dots, n$. ფუნქციის სხვაობათა ცხრილს ასე ჩასწერენ:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\dots$
x_0	y_0						
x_1	y_1	Δy_0					
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$				
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$			
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$		
x_5	y_5	Δy_4	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	Δy_{n-2}	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\Delta^4 y_{n-4}$	$\Delta^5 y_{n-5}$	
x_n	y_n						

თვით სხვაობის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი სვეტში მოთავსებულ რიცხვთა ჯამი უნდა უდრიდეს წინა სვეტის ბოლო და პირველი რიცხვების სხვაობას. სხვაობათა ეს თვისება შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სხვაობათა ცხრილის კონტროლისათვის. ფორმულებს

$$f(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0 + R_1(x), \tag{1}$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}, \quad R_1(x) = \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi);$$

$$f(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{-3} +$$

$$+\cdots+\frac{t(t+1)(t+2)\cdots(t+(n-1))}{n!}\Delta^n y_{-n}+R_{II}(x), \qquad (2)$$

$$t=\frac{x-x_0}{h}, \quad R_{II}(x)=\frac{t(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

სადაც $x=\xi$ წერტილი ეკუთვნის $x_1 x_0 \cdots x_n$ წერტილების შემცველ $[a, b]$ შუალედს, ეწოდება ნიუტონის პირველი და მეორე საინტერპოლაციო ფორმულები თანაბრად დაშორებული კვანძებისათვის.

პირველ ფორმულას იყენებენ ინტერპოლირებისათვის ცხრილის დასაწყისში, ხოლო მეორეს — ცხრილის ბოლოში.

ნიუტონის პირველ ფორმულაში საწყის x_0 წერტილად სასურველია მივიჩნიოთ საინტერპოლაციო x წერტილის უახლოესი წინა კვანძი. ხოლო მეორე ფორმულაში x_n-ის როლი უნდა შეასრულოს x-ის მომდევნო კვანძმა.

თუ $f(x)$ ფუნქცია ანალიზურად არის მოცემული და

$$M_{n+1}=\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|,$$

გვექნება

$$|R_I(x)|\leqslant\frac{|t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)|}{(n+1)!}M_{n+1},$$

$$|R_{II}(x)|\leqslant\frac{|t(t+1(t+2)\cdots(t+n)|}{(n+1)!}M_{n+1}.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია ცხრილის სახითაა მოცემული, ნაშთითი წევრების ზემოთ მოყვანილი შეფასებით სარგებლობა შეუძლებელია.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ h საკმაოდ მცირე სიდიდეა და $f^{(n+1)}(x)$ ფუნქცია მცირედ იცვლება, განსახილავ შუალედში შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი მიახლოებითი ტოლობები:

$$R_I(x)\approx\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0,$$

$$R_{II}(x)\approx\frac{t(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_{-n}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით:

x	1.0	1.1	1.2	1.3
y	2.7894	2.8330	2.8761	2.9151

გამოთვალეთ f (1, 05). სხვაობათა ცხრილს აქვს სახე:

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	1.1	2.7854	0.0476	—0.0045	0.0004
1	1.1	2.8330	0.0431	—0.0041	
2	1.2	2.8761	0.0390		
3	1.3	2.9151			

რადგან წერტილი $x=1.05 \in]1,0;\ 1.1[$ ე .ი. ცხრილის საწყის წერტილთანაა ახლოს, ამიტომ გამოვიყენებთ პირველ ფორმულას. $x_0=1.$ $h=0{,}1,\ n=3,\ y_0=2,\ 7854,\ t=0{,}5.$

$$f(1{,}05)=f(1+0{,}5\cdot 0{,}1)=2{,}7854+0{,}5\cdot 0{,}0476+$$
$$+\frac{0{,}5\,(0{,}5-1)}{2}(-0{,}0045)+\frac{0{,}5\,(0{,}5-1)\,(0{,}5-2)}{6}\cdot 0{,}0004=$$
$$=2{,}7854+0{,}0238+0{,}0006+0{,}000=2{,}8008,$$

ცდომილება $R<0{,}0004.$

თუ საინტერპოლაციო კვანძები არათანაბრადაა ერთმანეთისაგან დაშორებული, მაშინ შეგვიძლია მივმართოთ ლანგრაჟის საინტერპოლაციო პოლინომს, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\cdot y_i,$$

ხოლო ნაშთითი წევრისათვის გვაქვს

$$R(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

სადაც ξ წერტილი ეკუთვნის კვანძების შემცველ უმცირეს შუალედს. ამ უკანასკნელი ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$|R(x)|\leqslant\frac{|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!}M_{n+1}.$$

აქ

$$M_{n+1}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|.$$

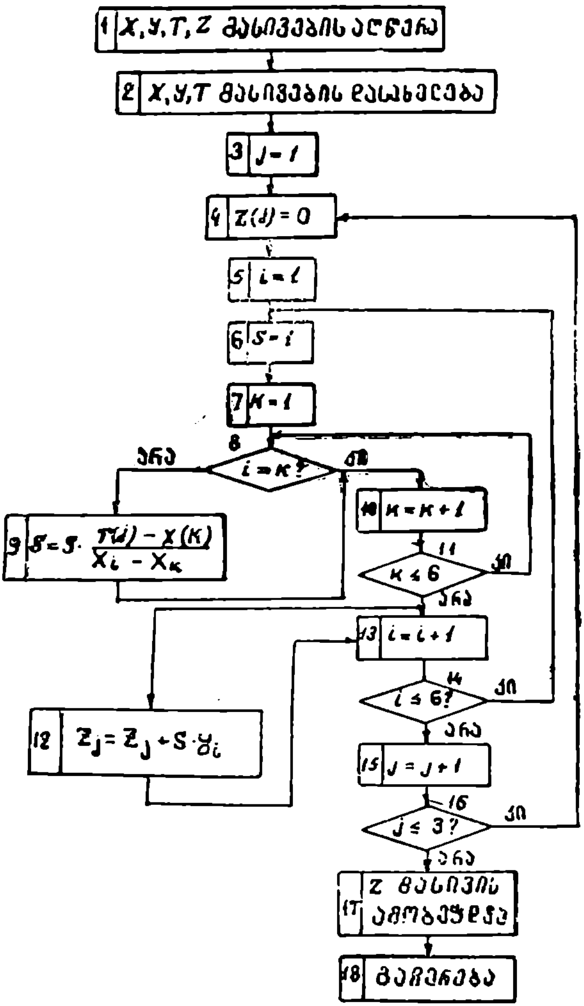
ამგვარად

$$f(x)=L_n(x)+R(x).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	0,1	0,15	0,23	0,3	0,31	0,38
y	0.0998	0,1494	0,228	0,2965	0,3051	0,9287

ვიპოვოთ ამავე ფუნქციის მნიშვნელობები 0,24; 0,29; 0,33 წერტილებზე. არგუმენტის მნიშვნელობათა ახალი მასივი აღვნიშნოთ T-თი, ხოლო ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობების მასივი z-ით. გამოვიყენოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი. ალგორითმის შესაბამის ბლოკ-სქემას შემდეგი სახე ექნება:



ფორტრან-პროგრამა კი შემდეგნაირად დაიწერება:

```
DIMENSION X(6), Y(6), T(3), Z(3),
```

სადაც X, Y, T წარმოადგენს მოცემულ მასივებს, Z-საძიებელი მასივია.

```
   READ (1,1) X, Y, T
1. FORMAT (F5·4/F3.2)
```

X, Y, T მასივების დაბეჭდვა იწყება ახალი ბარათებიდან, ყოველ X-ს დათმობილი აქვს სამი პოზიცია, აქედან, ორი ათწილად ნაწილს. ყოველ Y-ს დათმობილი აქვს ხუთი პოზიცია, რომელთაგან ოთხი ათწილადი ნაწილია, ხოლო T-ს სამ მნიშვნელობას დათმობილი აქვს ცხრა პოზიცია

```
  DO 2J = 1,3
  z(J)=0
  DO 3 I = 1,6
  S = 1
  DO 4 K = 1,6
  IF (I—K) 4, 5, 4
5 S = S * (T (J)— X (K)) / (X (I) — X (K))
3 CONTINUE
4 Z (J) = Z (T) + S * Y (I)
2 CONTINUE
  WRITE (3,6) Z
6 FORMAT (1X, F 10. 5)
  STOP
  END
  01015023030031038 X მასივი
  009980149402280029550305109287 Y მასივი
  024029033                       T მასივი
```

პასუხი

$Z_1 = 0{,}24314$

$Z_2 = 0{,}29928$

$Z_3 = 0{,}34985$

1475. მოცემულია ფუნქციის დისკრეტული მნიშვნელობები თანაბრად დაცილებულ $n+1$ წერტილში (იხ. ცხრილები).

1. შეადგინეთ ქვეპროგრამა — ოპერატორი მოცემულ წერტილებში ფუნქციის პირველი რიგის სხვაობების გამოსათვლელად. შედეგების მიღება გაითვალისწინეთ n-განზომილებიან მასივის სახით.

მიღებული პროგრამით შეადგინეთ სხვაობათა ცხრილები ფუნქციებისათვის, რომლებიც მოცემულია მე-2 და მე-3 ცხრილებით, ჩაატარეთ მიღებული შედეგების კონტროლი ზემოთ მოცემული წესის მიხედვით.

2. შეადგინეთ ქვეპროგრამა ოპერატორი, რომელიც გამოთვლის თანაბრად დაცილებულ $n+1$ წერტილში მოცემული ფუნქციის i-ური რიგის სასრულო სხვაობებს ($i \leqslant n$). შედეგების მიღება გაითვალისწინეთ $n-i+1$ — განზომილებიანი მასივის სახით.

მიღებული პროგრამით შეადგინეთ სასრულ სხვაობათა ცხრილი, როცა $i=3$, $n=11$, სადაც ფუნქცია მოცემულია მე-4, მე-5, მე-6, მე-7 ცხრილებით.

3. შეადგინეთ ქვეპროგრამა ოპერატორი, რომელიც გამოთვლის ცხრილით მოცემული ფუნქციის ყველა შესაძლო რიგის სასრულ სხვაობებს თანაბრად დაცილებული $n+1$ წერტილში მოცემული ფუნქციისათვის. სასრული სხვაობების მიღება გაითვალისწინეთ ერთიანი მასივის სახით. ამ მასივის პირველი n ელემენტი უნდა უდრიდეს პირველი რიგის სასრულ სხვაობებს, მომდევნო ($n-1$) ელემენტი — მეორე რიგის სასრულ სხვაობებს, და ა. შ., ხოლო მასივის უკანასკნელი ელემენტი უნდა შეესაბამებოდეს n-ური რიგის სხვაობას.

მიღებული პროგრამით ამოხსენით კონკრეტული ამოცანა მე-8 ცხრილისათვის.

4. შეადგინეთ ქვეპროგრამა—ოპერატორი, რომელიც გამოთვლის დასახელებულ x მნიშვნელობიდან დაღმავალ სხვაობებს. გაითვალისწინეთ შედეგის მიღება მასივის სახით.

ქვეპროგრამის პირველ ინსტრუქციად მიეცით სახე

SUBROUTINE დაღმ. სხვაობები (X, Y, N, X1, DELTA, M),

სადაც x, y ცხრილით მოცემული მასივებია, N — მათი განზომილება; x_1 წერტილი, საიდაც სათავეს იღებს დაღმავალი სხვაობები, DELTA პასუხების მასივია, M — ამ მასივის განზომილება. ისარგებლეთ პირველი ცხრილის მონაცემებით და მიღებული ქვეპროგრამით, ამოხსენით კონკრეტული ამოცანა, როცა: ა) $x1=0{,}18$, ბ) $x1=0{,}211$, გ) $x1=$ $=0{,}245$.

5. შეადგინეთ ქვეპროგრამა მე-4 დავალების ანალოგიურად x დასახელებული მნიშვნელობიდან გამოსული აღმავალ სხვაობათა ცხრილის მისაღებად.

6. შეადგინეთ პროგრამა ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულის მიხედვით.

მოცემული პროგრამით გამოთვალეთ მე-8 ცხრილით მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობები წერტილებში $x=0{,}725$; $x=0{,}745$; $x=763$.

7. მე-6 დავალებაში ინტერპოლირება ჩაატარეთ ნიუტონის მეორე ფორმულით. სხვაობების გამოთვლის პროგრამა შეცვალეთ მე-5 დავალების ქვეპროგრამით.

გამოთვლები ჩაატარეთ პირველი და მეორე ცხრილებით მოცემული ფუნქციებისათვის წერტილებში $x=0{,}271$; $x=0{,}279$; $x=0.261$; $x=0{,}265$.

8. შეადგინეთ პროგრამა, რომელიც მოახდენს ინტერპოლირებას ნიუტონის პირველი და მეორე საინტერპოლაციო ფორმულებით, იმისდა მიხედვით საინტერპოლაციო წერტილები ეკუთვნის მოცემულ შუალედის პირველ ნახევარს თუ მეორეს. გაითვალისწინეთ სხვაობების გამოთვლის სტანდარტული ქვეპროგრამების გამოყენება.

გამოთვლები ჩაატარეთ მე-4, მე-6, მე-8 ცხრილებით მოცემული ფუნქციისათვის წერტილებში: $x=0{,}506$; $x=0{,}705$; $x=0{,}805$.

9. შეადგინეთ ქვეპროგრამა ფუნქცია, რომელიც მოახდენს ინტერპოლირებას ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით. ქვეპროგრამის ფორმალურ პარამეტრებად აიღეთ x, n, სადაც x საინტერპოლაციო კვანძია n ინტერპოლირების რიგი. ქვეპროგრამის მასივების სახით მიაწოდეთ არგუმენტებისა და ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობების მიმდევრობები.

10. შეასრულეთ მე-9 დავალება ცხრილებისათვის სადაც მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები არგუმენტის არათანაბრად დაშორებული მნიშვნელობებისათვის. ინტერპოლირება ჩაატარეთ ცხრილში მითითებული x^* წერტილებში. ($9\div14$ ცხრილებისათვის).

ცხრილი № 1—8

№	1	2		3	4		5	6		7	8
x	$y(x)$	$y(x)$	x	$y(x)$	$y(x)$	x	$y(x)$	$y(x)$	x	$y(x)$	$y(x)$
0,20	0,2013	1,0201	0,50	0,5211	1,1276	0,61	0,6485	1,1919	0,72	0,7838	1,2705
0,21	0,2115	1,0221	0,51	0,5324	1,1329	0,62	0,6698	1,1964	0,73	0,7966	1,2785
0,22	0,2218	1,0243	0,52	0,05437	1,1383	0,63	0,6725	1,2051	0.74	0,8094	1,2865
0,23	0,2329	1,0266	0,53	0,5552	1,1438	0,64	0,6846	1,2119	0,75	018223	1,2947
0,24	0,2423	1,0289	0,54	0,5666	1,1494	0,65	0,06967	1,2188	0,76	0,8353	1,3030
0,25	0,2526	1,0314	0,55	0,5782	1,1551	0.66	0,7090	1,2258	0,77	0,8484	1,3114
0,26	0,2629	1,0340	0,56	0,5897	1,1609	0,67	0,7213	1,2330	0,78	0.8615	1,3199
0,27	0,2733	1.0367	0,57	0,6014	1,1669	0,68	0,7336	1,2402	0,75	0,8748	1,3286
0,28	0,2837	1,0395	0,58	0,6131	1,1730	0,69	0,7461	1,2476	0,80	0 8881	1,3374
0,29	0,2941	1,0423	0,59	0,6248	1,1792	0,70	017586	1,5252	0'81	0,8015	1,3464
0,30	0,3045	1,0453	0.60	0,6367	1,1855	0,71	0,7712	1,2628	0,82	0,9150	1,3555

ცხრილი № 9

x	$y(x)$	x^*
0,759	0,47237	0,752
0,759	0,46813	0,760
0,775	0,46070	0,777
0,800	0,44933	
0,850	0,41741	
0,865	0,42106	

ცხრილი № 10

x	$y(x)$	x^*
0,854	0,3490	0,856
0,870	2,3869	01875
0,879	2,4085	
0,900	2,4596	
0,909	2,4818	
0,955	2,5987	0,910

ცხრილი № 11

x	$y(x)$	x^*
0,980	1,4910	0.983
0,990	1,5237	
2,020	1,6281	1,023
1,080	1,8712	
1,095	1,9407	
1,200	2,5722	
1,215	2,6910	

ცხრილი № 12

x	$y(x)$	x^*
1,350	1,7091	1,355
1,400	1,9043	1,405
1,410	1,9259	
1,445	2,0031	
1,460	2,0369	1,465
1,495	2,1175	

ცხრილი № 13

x	$y(x)$	x^*
1,460	2,2691	1,466
1,475	2,2999	1,476
1,515	2,3846	1,516
1,546	2,4506	
1,635	2,6622	
1,660	2,7247	
1,715	2,8683	

ცხრილი № 14

x	$y(x)$	x^*
1,800	0,94681	1,801
1,815	0,94834	
1,850	0,95175	1,851
1,860	0,95268	
1,905	0,95666	1,900
1,960	0,96032	

§ 5. რიცხვითი გაწარმოება

თუ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილის საშუალებით, წარმოებულის მოძებნა ჩვეულებრივი წესის მიხედვით შეუძლებელია, ფორმულებს, რომელთა საშუალებით ცხრილის სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება, რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი. არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობები განვიხილოთ როგორც საინტერპოლაციო კვანძები და დავწეროთ ლაგრანჟის ან ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულები. ამ ფორმულების გაწარმოებით მივიღებთ ფორმულებს, რომელთა საშუალებით შეგვიძლია $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული გამოვთვალოთ როგორც კვანძებს შორის ნებისმიერ წერტილში, ისე თვით კვანძებში.

თუ საინტერპოლაციო კვანძები დაშორებულია თანასწორად, შეგვიძლია მივმართოთ სასრული სხვაობების შემცველ საინტერპოლაციო ფორმულებს. მაგალითისათვის განვიხილოთ ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულა

$$y(x) = y(x_0 + th) = y(x_0) + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots,$$

სადაც $t = \frac{x - x_0}{h}$.

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x-ით; გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\,\frac{dy}{dt},$$

მივიღებთ

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!}\Delta^3 y_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{4t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots\right].$$

1476. იპოვეთ ქვემოთ მოყვანილ ცხრილებში მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობები კვანძით წერტილებში, შესაბამისი საინტერპოლაციო ფორმულის არჩევით.

x	$y_2(x)$	$y_3(x)$	$y_3(x)$	$y_4(x)$	$y_6(x)$
0,455	0,43946	0,89826	0,48924	0,63445	1,5762
0,457	0,44126	0,89738	0,49172	0,63318	1,5793
0,460	0,44395	0,89605	0,49545	0,63128	1,5841
0,464	0,44753	0,99427	0,50044	0,62876	1,5904
9,469	0,45199	0,89202	0,50671	0,62563	1,5984
0,472	0,45467	0,89066	0,51048	0,62375	1,6032
0,475	0,45734	0,88929	0151427	0,62189	1,6080
0,477	0,45912	0,88838	0,51680	0,62064	0,6128
0,481	0,46267	0,88653	0,52188	0,61816	1,6177

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ამ სეგმენტის ორი ნებისმიერი x_1 და x_2 წერტილისათვის, სადაც $x_1<x_2$, ადგილი აქვს $f(x_1)<f(x_2)$ უტოლობას; თუკი $x_1<x_2$, ხოლო $f(x_1)>$ $>f(x_2)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია კლებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f'(x)>0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია ამავე სეგმენტზე, ხოლო თუ $f'(x)<0$, მაშინ ფუნქცია კლებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

$y=f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ნებისმიერი x-ისათვის ამ მიდამოდან შესრულებულია

$$f)x) \leqslant f(x_0) \qquad (f(x) \geqslant f(x_0))$$

უტოლობა. x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მ ა ქ ს ი მ უ მ ი ს (მ ი ნ ი მ უ მ ი ს) წ ე რ ტ ი ლ ი, ხოლო $f(x_0)$ რიცხვს — ფუნქციის მ ა ქ ს ი მ უ მ ი (მ ი ნ ი მ უ მ ი). მაქსიმუმსა და მინიმუმს ფუნქციის ე ქ ს ტ რ ე მ უ მ ი ეწოდება.

თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ ამ წერტილზე ფუნქციის $f'(x_0)$ წარმოებული ან ნულის ტოლია, ან უსასრულოდ დიდი, ან არ არსებობს (ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა).

x_0 წერტილს, რომელზეც $f'(x_0)=0$, ფუნქციის ს ტ ა ც ი ო ნ ა რ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ეწოდება. წერტილებს, რომლებზეც უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, კ რ ი ტ ი კ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი ეწოდება.

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები:

1°. ა) თუ $f'(x_0-\varepsilon)>0$, $f'(x_0+\varepsilon)<0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მაქსიმუმი;

ბ) თუ $f'(x_0-\varepsilon)<0$, $f' x_0+\varepsilon)>0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მინიმუმი;

გ) თუკი $f'(x_0-\varepsilon)$ და $f'(x_0+\varepsilon)$ ერთნაირი ნიშნისაა, მაშინ x_0 წერტილზე ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი.

აქ ε ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია.

2°. ა) თუ $f'(x_0)=0$ და $f''(x_0)<0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მაქსიმუმი;

ბ) თუ $f'(x_0)=0$, და $f''(x_0)>0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მინიმუმი;

გ) თუ $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(k-1)}(x_0)=0$, ხოლო $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, მაშინ: 1) როცა k ლუწი რიცხვია და $f^{(k)}(x_0)<0$, $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და მინიმუმი, თუ $f^{(k)}(x_0)>0$; 2) როცა k კენტი რიცხვია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი.

$y = f(x)$ ფუნქცია თავის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს $[a, b]$ სეგმენტზე მიაღწევს ან კრიტიკულ წერტილებზე, ან $[a, b]$ სეგმენტის ბოლო წერტილებზე.

განსაზღვრეთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები შემდეგი ფუნქციებისა:

1477. $y = x^2 - 2x + 5.$ **1478.** $y = x - \frac{1}{2} x^2.$

1479. $y = x^3.$ **1480.** $y = \ln x, \ (x > 0).$

1481. $y = \frac{1}{x + 2}.$ **1482.** $y = x + \sin x.$

1483. $y = x \ln x.$ **1484.** $y = \frac{e^x}{x}.$

1485. $y = x^2 (x - 3).$ **1486.** $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}.$

1487. $y = e^{x^2 - 4x}.$ **1488.** $y = (x - 3)\sqrt{x}, \ (x > 0).$

პირველი რიგის წარმოებულის გამოყენებით იპოვეთ ექსტრემუმი შემდეგი ფუნქციებისა:

1489. $y = x^2 - 2x + 3.$ **1490.** $y = 2 + x - x^2.$

1491. $y = 1 - \sqrt[3]{(x - 4)^2}.$ **1492.** $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}.$

1493. $y = x\sqrt{1 - x}.$ **1494.** $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}.$

1495. $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}.$ **1496.** $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}.$

1497. $y = \sqrt[3]{x}.$ **1498.** $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7.$

მაღალი რიგის წარმოებულის გამოყენებით იპოვეთ ექსტრემუმი შემდეგი ფუნქციებისა:

1499. $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1.$ **1500.** $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}.$

1501. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1.$ **1502.** $y = x^3 - 12x^2 + 36x + 1.$

1503. $y = x^2 - 9x^2 + 15x - 3.$ **1504.** $y = (x - 1)(x + 1)^2.$

1505. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$ **1506.** $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}.$

1507. $y = x^6 + 1.$ **1508.** $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$

1509. $y = e^x + 2.$ **1510.** $y = (x - 2)^3 + 1.$

1511. $y = x + \cos 2x$, $(0;\ \pi)$ ინტერვალში.

1512. $y = 2x + \operatorname{ctg} x$, $(0;\ \pi)$ ინტერვალში.

1513. $y = x - \operatorname{arctg} 2x$.

1514. $y = x \ln^2 x$.

1515. $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.

1516. $y = x - \ln(1 + x)$.

1517. $y = 2e^x + e^{-x}$.

1518. $y = x^2 e^{-x}$.

1519. $y = \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$.

1520. $y = x(\ln^2 x - 3\ln x + 3)$.

ნაჩვენებ შუალედში იპოვეთ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები შემდეგი ფუნქციებისა:

1521. $y = x^3 - 3x + 3$. $\left[-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right]$.

1522. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, $[-1;\ 5]$.

1523. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ $[-2;\ 2]$.

1524. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1;\ 2]$.

1525. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[-1;\ 1]$.

1526. $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0;\ 4]$.

1527. $y = x - \sin x$, $[0;\ 2\pi]$.

1528. $y = 2\sin x - \sin 2x$, $\left[0;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

1529. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$. $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1530. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0;\ 1]$.

1531. $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^2+1}$, $[0;\ 2]$.

1532. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $[0;\ 1]$.

§ 7. ამოცანები ფუნქციათა ექსტრემუმის მოძებნაზე

1533. მოცემული დადებითი a რიცხვი დაშალეთ ორ შესაკრებად ისე, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

1534. რიცხვი 36 დაშალეთ ორ ისეთ დადებით მამრავლად, რომ მათი კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი.

1535. 40 მეტრი სიგრძის მავთული უნდა შემოავლონ ყვავილნარს, რომელსაც წრის სექტორის ფორმა უნდა ჰქონდეს. როგორი რადიუსისათვის ექნება ყვავილნარს უდიდესი ფართობი?

1536. მდინარის გასწვრივ უნდა შემოიღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი. როგორი ზომები უნდა ჰქონდეს ამ მართკუთხედს, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი, თუ ღობის სიგრძე 200 მეტრია, ხოლო მიწის ნაკვეთი სამი მხრიდანაა შემოღობილი?

1537. მოცემულია კვადრატული ფორმის მუყაოს ფურცელი, რომლის გვერდის სიგრძეა 36 სმ. ოთხივე კუთხიდან ჩამოაჭერით მას ისეთი ზომის ტოლი კვადრატები, რომ დარჩენილი მუყაოდან უდიდესი მოცულობის ყუთი გაკეთდეს.

1538. თუნუქის ფირფიტიდან უნდა დაამზადონ კვადრატული პარალელეპიპედის ფორმის ყუთი, რომლის ზედა ფუძე ახდილია, ხოლო მოცულობა 32 კუბ. ერთეულის ტოლია. რა ზომისა უნდა იყოს პარალელეპიპედის ფუძის გვერდი და სიმაღლე, რომ მასალის ხარჯი იყოს უმცირესი?

1539. კვადრატის ფუძის მქონე ღია აუზის მოცულობაა V. რა დამოკიდებულება უნდა იყოს აუზის ფუძის გვერდსა და სიმაღლეს შორის, რომ აუზის კედლებისა და ფუძის მოსაპირკეთებლად დაიხარჯოს მასალის უმცირესი რაოდენობა?

1540. უნდა დამზადდეს 72 სმ^3 მოცულობის სახურავიანი ყუთი, რომლის ფუძის (მართკუთხედის) გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1:2$. რა ზომების უნდა იყოს ყუთი, რომ მის დამზადებაზე დაიხარჯოს მასალის უმცირესი რაოდენობა?

1541. გვირაბის კვეთი წარმოადგენს მართკუთხედს, რომელიც ბოლოვდება ნახევარწრით; კვეთის პერიმეტრი 18 მ-ია. რას უნდა უდრიდეს ნახევარწრის რადიუსი, რომ კვეთის ფართობი იყოს უდიდესი?

1542. ტრაპეციის მცირე ფუძე და ფერდები თანატოლია და უდრის 10 სმ-ს. რას უნდა უდრიდეს ტრაპეციის დიდი ფუძე, რომ ტრაპეციის ფართობი იყოს უდიდესი?

1543. 1) $y=x^2$ პარაბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც უმოკლესი მანძილითაა დაშორებული $y=2x-4$ წრფიდან.

2) $3x-y+5=0$ წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც $A\,(2;\ 5)$ და $B\,(3;\ 5)$ წერტილებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი უმცირესია.

1544. მოცემულია $A\,(0;\ 3)$ და $B\,(4;\ 5)$ წერტილები. Ox ღერძზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ $S=AM+MB$ მანძილი იყოს უმცირესი.

1545. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზაა h.

1546. R-რადიუსიან წრეში ჩახაზეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი.

1547. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა უდრის 8 სმ-ს, ხოლო კუთხე 60°-ს; მასში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ფუძე ძევს ჰიპოტენუზაზე. რას უნდა უდრიდეს მართკუთხედის გვერდები, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი?

1548. ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის პარამეტრია $2p$, ბრუნავს სიმაღლის გარშემო. რას უნდა უდრიდეს სამკუთხედის გვერდები, რომ ბრუნვით მიღებული კონუსის მოცულობა იყოს უდიდესი?

1549. ნახევარწრეში ჩახაზულია ტრაპეცია, რომლის ფუძე ემთხვევა ნახევარწრის დიამეტრს. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხე ისე, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი.

1550. იპოვეთ იმ ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი, რომელსაც მოცემული S ფართობის შემთხვევაში ექნება უმცირესი პერიმეტრი, თუ კუთხე ტრაპეციის ფუძესთან უდრის α-ს.

1551. წრიული ფორმის თუნუქის ფურცლიდან ამოჭერით ისეთი სექტორი, რომლისაგან გაკეთებული ძაბრი უდიდესი მოცულობისა იქნება.

1552. მოცემული $2p$ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებიდან იპოვეთ ისეთი, რომელსაც უმცირესი დიაგონალი აქვს.

1553. R-რადიუსიან სფეროში: 1) ჩახაზეთ უდიდესი მოცულობის ცილინდრი; 2) იპოვეთ უდიდესი გვერდითი ზედაპირის მქონე ჩახაზული ცილინდრის სიმაღლე.

1554. იპოვეთ: 1) R-რადიუსიან სფეროში ჩახაზული უდიდესი მოცულობის კონუსი; 2) R-რადიუსიან სფეროზე შემოხაზული უმცირესი მოცულობის კონუსი.

1555. იპოვეთ კონუსში ჩახაზული უდიდესი მოცულობის ცილინდრი, თუ კონუსის ფუძის რადიუსია R, ხოლო სიმაღლე — H. გამოთვალეთ მოცულობა, როცა $R=4$, $H=6$.

1556. r-რადიუსიან ცილინდრზე შემოხაზეთ უმცირესი მოცულობის მქონე კონუსი.

1557. R-რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია უდიდესი მოცულობის წესიერი სამკუთხა პრიზმა. იპოვეთ მისი ზომები.

1558. კუბის გვერდია a; მასში ჩახაზულია წრიული ცილინდრი ისე, რომ ცილინდრის ღერძი ემთხვევა კუბის დიაგონალს, ფუძეების წრეწირები კი ეხება კუბის წახნაგებს. განსაზღვრეთ ცილინდრის სიმაღლე ისე, რომ მას ჰქონდეს უდიდესი მოცულობა.

1559. ძელის გამძლეობა გასწვრივი კუმშვის მიმართ ძელის განივი კვეთის ფართობის პროპორციულია. რას უნდა უდრიდეს უდიდესი

გამძლეობის იმ ძელის კვეთის ზომები, რომელიც შეიძლება გამოიხერხოს D დიამეტრის მქონე მორისაგან?

1560. ძელის გამძლეობა პირდაპირპროპორციულია სიგანისა და სიმაღლის კუბისა. რა სიგანისაა უდიდესი გამძლეობის ძელი, რომელიც შეიძლება გამოიხერხოს 20-სანტიმეტრიანი დიამეტრის მორისაგან.

1561. იატაკიდან რა მანძილზე უნდა ჩამოვკიდოთ ნათურა, რომ იატაკის მოცემული A წერტილი მაქსიმალურად განათდეს?

1562. 1 და 125 სანთლიანი ნათურების შემაერთებელ წრფეზე რომელი წერტილია ყველაზე ნაკლებად განათებული, თუ ნათურები ერთმანეთისაგან დაშორებულია 7 მეტრით (განათება მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია)?

§ 8. წირის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილები

$y=f(x)$ წირი ამოზნექილია (ჩაზნექილია) (a, b) შუალედში, თუ წირის ის მონაკვეთი, რომელიც (a, b) შუალედს შეესაბამება, მოთავსებულია ამ მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხების ქვემოთ (ზემოთ).

თუ (a, b) შუალედში $f''(x)>0$, წირი ჩაზნექილია.

იმ წერტილს, რომელშიც წირის ამოზნექილობა გადადის ჩაზნექილობაში, ან პირიქით, ეწოდება **გადაღუნვის წერტილი.** გადაღუნვის წერტილის x_0 აბსცისისათვის ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $f''(x_0)$ ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს, ან უსასრულოდ დიდია; ასეთ წერტილს ეწოდება **მეორე გვარის კრიტიკული წერტილი.**

x_0 არის **გადაღუნვის წერტილის აბსცისა,** თუ $f''(x)$ ინარჩუნებს მუდმივ ნიშნებს $x_0-\delta>x>x_0$ და $x_0>x>x_0+\delta$ შუალედებში (δ ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია) და, მასთან, ეს ნიშნები მოპირდაპირეა; x_0 არ არის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა, თუ $f''(x)$-ის ნიშნები აღნიშნულ შუალედში ერთნაირია.

იპოვეთ ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები შემდეგი წირებისა:

1563. $y=1-x^2$.

1564. $y=x^3$.

1565. $y=e^x$.

1566. $y=\ln x, \quad (x>0)$.

1567. $y=\sin x, \quad (-\pi; \pi)$ შუალედში.

1568. $y=\operatorname{tg} x, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში.

1569. $y=x^4+3$.

1570. $y=x+2x^4$.

1571. $y=\frac{1}{x+3}$. **1572.** $y=e^{-x^2}$.

1573. $y=-\sqrt[3]{x}$. **1574.** $y=\sqrt[3]{x+2}$.

1575. $y=x^3-6x^2+12x+4$. **1576.** $y=3x^5-5x^4+3x-2$.

1577. $y=e^{\operatorname{arctg} x}$. **1578.** $y=\ln(1+x^2)$.

§ 9. ასიმპტოტები

თუ მანძილი $y=f(x)$ წირის $M(x, y)$ წერტილიდან რაიმე წრფემდე ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც M წერტილი უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს, მაშინ ამ წრფეს მოცემული წირის ასიმპტოტი ეწოდება.

თუ არსებობს ისეთი a რიცხვი, რომ

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty,$$

მაშინ $x=a$ წრფე წირის ვერტიკალური ასიმპტოტია.

თუ არსებობს ზღვრები

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{და} \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b,$$

მაშინ $y=kx+b$ წრფე წირის დახრილი ასიმპტოტია (როცა $k=0$, გვექნება ჰორიზონტალური ასიმპტოტი).

თუ k და b სიდიდეებიდან ერთ-ერთი უსასრულოდ დიდია, მაშინ წირს ასიმპტოტი არა აქვს.

იპოვეთ ასიმპტოტები შემდეგი წირებისა:

1579. $y=\frac{1}{x-1}$. **1580.** $y=\frac{1}{(x+2)^2}$.

1581. $y=1+e^x$. **1582.** $y=\ln x$.

1583. $y=x+\frac{1}{x-1}$. **1584.** $y=\frac{2x}{x^2-1}$.

1585. $y=\operatorname{arctg} x$. **1586.** $y=e^{\frac{1}{x}}$.

1587. $y=e^{-x^2}+2$. **1588.** $y=\frac{1}{1-e^x}$.

1589. $y=\sqrt{2px}$. **1590.** $y=\frac{x^2}{2-2x}$.

1591. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$. **1592.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

1593. $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{t}{t+1}$. **1594.** $x = t$, $x = t + 2\,\mathrm{arctg}\, t$

§ 10. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

ფუნქციის გამოკვლევა და მისი გრაფიკის აგება შეიძლება შემდეგი სქემის მიხედვით შევასრულოთ:

1) განისაზღვროს ფუნქციის არსებობის შუალედები და გაირკვეს აქვს თუ არა ფუნქციას წყვეტის წერტილები;

2) გაირკვეს არის თუ არა ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიული ან პერიოდული;

3) განისაზღვროს გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და ის შუალედები, სადაც ფუნქცია დადებითია ან უარყოფითი;

4) განისაზღვროს ექსტრემუმის წერტილები, ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი და ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;

5) განისაზღვროს გადაღუნვის წერტილები და ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები;

6) განისაზღვროს წირის ასიმპტოტები და წირის მდებარეობა მათ მიმართ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი გამოვიკვლიოთ $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$ ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

▷. 1) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $R \,/\, \{0\}$. 0 წერტილი არის ამ ფუნქციის წყვეტის წერტილი.

2) ox ღერძთან ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი (1; 0) (მართლაც, $f(x)=0$. განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი $x=1$). რადგან $x=0$ წერტილში ფუნქცია არაა განსაზღვრული, ამიტომ Oy ღერძს ამ ფუნქციის გრაფიკი არ კვეთს:

3) ფუნქციის ექსტრემუმის საპოვნელად ვიპოვოთ წარმოებული

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3}, & \text{როცა} \quad x \in]-\infty;\ 0[\, \cup\,]\,0;\ 1[, \\ \dfrac{2-x}{x^3}, & \text{როცა} \quad x \in]\,1;\ +\infty[. \end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=2$. თუ გავითვალისწინებთ რომ $x=1$ წერტილში ფუნქციას არა აქვს წარმოებული, $x_1=0$ წერტილში ფუნქცია არაა განსაზღვრული, ამიტომ $x_2=1$ და $x_3=2$ იქნება ამ ფუნქციის კრიტიკული

წერტილები. ამ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა 0 (მას იგი ღებულობს $x=1$ წერტილში). მას არა აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, რადგან $f(x)\to+\infty$, როცა $x\to0$.

4) $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$ წერტილები f ფუნქციის განსაზღვრის არეს ყოფს ოთხ ნაწილად, $]-\infty;\ 0[$, $]0;\ 1[$, $[1,2]$ და $]2;\ +\infty[$. ვინაიდან $f'(x)>0$, როცა $x\in]-\infty;\ 0[\cup]1;\ 2[$ და $f'(x)<0$, როცა $x\in]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty]$, ამიტომ f ზრდადია $]-\infty;0[$ და $[1;\ 2[$ შუალედებში, კლებადია $]0,\ 1[$ და $[1;\ +\infty[$ შუალედში. $x_3=2$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი ($f(2)=0{,}25$), ხოლო $x_2=1$ წერტილში მინიმუმი ($f(1)=0$).

5) ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის უბნები, გადაღუნვის წერტილები.

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2(3-x)}{x^4}, & \text{როცა } x\in]-\infty;\ 0[\cup]0;\ 1[;\\[2ex] \dfrac{2(x-3)}{x^4}, & \text{როცა } x\in]1;\ +\infty[.\end{cases}$$

ე. ი. $f''(x)>0$, როცა $x\in]-\infty;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]3;\ +\infty[$. და $f''(x)<0$, როცა $x\in]1;\ 3]$.

მაშასადამე, $]-\infty;\ 0[$; $]0;\ 1[$ და $]3;\ +\infty[$ შუალედებში ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, ხოლო $]1;\ 3[$-ში კი ამოზნექილი.

ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ $x=1$ და $x=4$ წერტილები არის ამ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

6. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

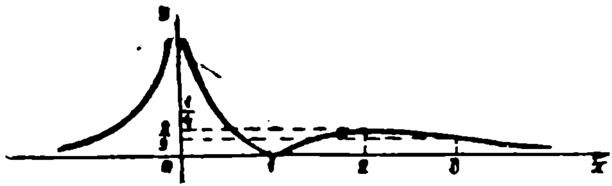
ვინაიდან f ფუნქცია უწყვეტია ყველგან, გარდა $x=0$ წერტილისა, ამიტომ ვერტიკალური ასიმპტოტი შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ $x=0$ წერტილში.

ვინაიდან ეს ფუნქცია დადებითი უსასრულოდ დიდია 0 წერტილში, ამიტომ $x=0$ წრფე არის ამ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი. გარდა ამისა, ვინაიდან

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{|x-1|}{x^2}}{x}=0=k;\qquad \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{|x-1|}{x^2}-0\cdot x\right|=0=b$$

ამიტომ $y=0\cdot x+0=0$ წრფე არის ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტი, როცა $x\to+\infty$. სრულიად ასევე დავამტკიცებთ, რომ იგივე $y=0$ წრფე არის მოცემული ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტი, როცა $x\to-\infty$.

შევადგინოთ ცხრილი. ფუნქციის გრაფიკის აგება მოსახერხებელია ამ ცხრილში მითითებული შუალედების მიხედვით შესრულდეს. ეს



ნახ. 18

საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. მას აქვს სახე (იხ. ნახ. 18).

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; 1[$	1	$]1; 2[$	2	$]2; 3[$	3	$]3; +\infty[$
$f'(x)$	$+$	არ არსებობს	$-$	არ არსებობს	$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$	არ არსებოას	$+$	არ არსებობს	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'''(x)$		არ არსებობს		არ არსებობს					
$f(x)$	↗		↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{2}{9}$	
	ჩაზნექილია		ჩაზნექილია		ამოზნექილია		ამოზნექილია		ჩაზნექილია

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

1595. $y = \frac{1}{1 + x^2}$. **1596.** $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

1597. $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. **1598.** $y = \frac{x}{1 + x^2}$.

1599. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$ 1600. $y=x^3+9x^2+15x-25.$

1601. $y=\frac{x^2}{x^2-4}.$ 1602. $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}.$

1603. $y=\frac{x}{(x-1)^2}.$ 1604. $y=x^3+\frac{x^4}{4}.$

1605. $y=\frac{x^3}{3-x^2}.$ 1606. $y=\frac{x^2}{1+x}.$

1607. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$ 1608. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$

1609. $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}.$ 1610. $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}.$

1611. $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}.$ 1612. $y=\frac{x^2+2x-1}{x}.$

1613. $y=x\ln x.$ 1614. $y=\frac{\ln x}{x}.$

1615. $y=\ln(x^2-1).$ 1616. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}.$

1617. $y=\sin x+\cos x.$ 1618. $y=2\sin x+\cos x.$

1619. $x=\frac{2+t^2}{1+t^2},\ y=\frac{t^3}{1+t^2}.$ 1620. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t.$

1621. $x=\frac{3t}{1+t^3},\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}.$ 1622. $x=\frac{t^2+1}{4(1-t)},\ y=\frac{1}{t+1}.$

§ 11. ბრტყელი წირის მხები და ნორმალი

$y=f(x)$ ან $F(x, y)=C$ წირის მხების განტოლებას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში აქვს შემდეგი სახე:

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),$$

სადაც y_0' აღნიშნავს ფუნქციის წარმოებულს M_0 წერტილში. აქ იგულისხმება, რომ ფუნქციის y_0' წარმოებული სასრული სიდიდეა ყველგან. თუკი $y_0'=\infty$, მაშინ მხების განტოლება იქნება:

$$x-x_0=0.$$

წრფეს, რომელიც გადის შეხების წერტილში მხების მართობულად, ეწოდება *ნორმალი*. ნორმალის განტოლებაა:

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x_0-x_0) \quad \text{ანუ} \quad x-x_0=-y_0'(y-y_0),$$

როცა $y_0'=0$, მაშინ ნორმალი Ox ღერძის მართობული იქნება და მისი განტოლება ასე დაიწერება:

$$x-x_0=0.$$

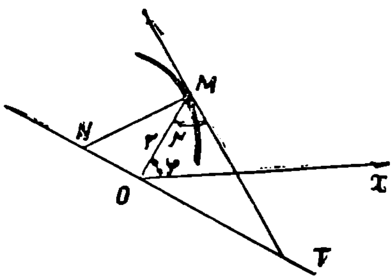
კუთხე ω მოცემულ ორ $y=f_1(x)$ და $y=f_2(x)$ წირს შორის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}.$$

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ μ კუთხე MT მხებისა და $r=OM$ პორალურ რადიუსს შორის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით (ნახ. 19).

$$\operatorname{tg}\mu=r\frac{d\varphi}{dr}=\frac{r}{r'},\quad\left(r\frac{d\varphi}{dr}=r\frac{1}{\frac{dr}{d\varphi}}=\frac{r}{r'}\right).$$

მხები და ნორმალი განსაზღვრავს შემდეგ მონაკვეთებს (ნახ. 20).



ნახ. 20

მხების მონაკვეთი $TM=$ $=\left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1+y_0'^2}\right|$,

ნორმალის მონაკვეთი $MN=|y_0\sqrt{1+y_0'^2}|$,

მხებქვეშა $TK=\left|\frac{y_0}{y_0'}\right|$,

ნორმალქვეშა $KN=|y_0 y_0'|$.

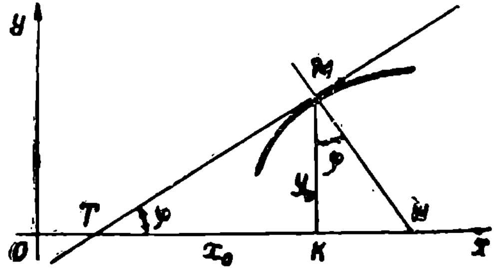
პოლარული მხების მონაკვეთი $TM=\frac{r|}{|r'|}\sqrt{r^2+r'^2}$,

პოლარული ნორმალის მონაკვეთი $MN=\sqrt{r^2+r'^2}$,

პოლარული მხებქვეშა $OT=$ $=\frac{r^2}{|r'|}$,

პოლარული ნორმალქვეშა

$ON=|r'|$.



ნახ. 19

ამოხსენით ამოცანები:

1623. იპოვეთ $y=x^2-3x+2$ პარაბოლის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(0; 2)$ წერტილისათვის.

1624. იპოვეთ $y=4-x^2$ პარაბოლის მხებისა და ნორმალის განტოლებები იმ წერტილისათვის, სადაც პარაბოლა კვეთს Ox ღერძს $(x>0)$.

1625. იპოვეთ $y=2x^3+3x^2-1$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(-1; 0)$ წერტილისათვის.

1626. იპოვეთ $y=x^3-3x^2-x+5$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(3; 2)$ წერტილისათვის.

შეადგინეთ მხებისა და ნორმალის განტოლებები შემდეგი წირებისა:

1627. 1) $y=\operatorname{tg} 2x$, $M(0; 0)$ წერტილისათვის; 2) $y=\ln x$, Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილისათვის.

1628. $y=e^{1-x^2}$, $y=1$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილებისათვის.

1629. 1) $x^2+y^2=R^2$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ნებისმიერი $M(x_0, y_0)$ წერტილისათვის.

1630. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 2) $y^2=2px$ ნებისმიერი $M(x_0, y_0)$ წერტილისათვის

1631. იპოვეთ $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ჯაჭვწირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(0; a)$ წერტილისათვის $(a>0)$.

1632. იპოვეთ $y^2=x^3$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(0; 0)$ წერტილისათვის.

1633. იპოვეთ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ წრეწირის მხების განტოლება მისი ნებისმიერი $M(x_0, y_0)$ წერტილისათვის.

1634. იპოვეთ $(x+1)^2+(y-3)^2=25$ წრეწირის მხების განტოლება $M(3; 6)$ წერტილისათვის.

1635. იპოვეთ $x=5\sqrt{2}\cos t$, $y=3\sqrt{2}\sin t$ ელიფსის მხების განტოლება $M(-5; 3)$ წერტილისათვის.

1636. იპოვეთ $x=3\cos t$, $y=4\sin t$ ელიფსის მხების განტოლება $M\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}\right)$ წერტილისათვის.

1637. იპოვეთ $x=t\cos t$, $y=t\sin t$ წირის მხები, რომელიც გადის: 1) კოორდინატთა სათავეზე; 2) $t=\frac{\pi}{4}$ წერტილზე.

1638. იპოვეთ $x=2e^t$. $y=e^{-t}$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები, როცა $t=0$.

1639. იპოვეთ $x=\sin t$, $y=\cos 2t$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები, როცა $t=\frac{\pi}{6}$.

1640. იპოვეთ $x=\sin t$, $y=a^t$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები, როცა $t=0$.

1641. იპოვეთ $x^2+y^2=52$ წრეწირის იმ მხებთა განტოლებები, რომლებიც $2x+3y=6$ წრფის პარალელურია.

1642. იპოვეთ $y^2=20x$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს $45°$-იან კუთხეს.

1643. შეადგინეთ $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ ჰიპერბოლის იმ მხებთა განტოლებები, რომლებიც $2x+4y-3=0$ წრფის მართობულია.

1644. $y=x^2-2x+5$ პარაბოლის რომელ წერტილზე უნდა გავავლოთ მხები, რომ ის პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის მართობული იყოს?

იპოვეთ კუთხე შემდეგ წირებს შორის:

1645. $y=0$ და $y=\sin x$ (კოორდინატთა სათავეში).

1646. $y=\cos x$ და $y=\sin x$, $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

1647. $y=x^2$ და $y=x^3$.

1548. $2y=x^2$ და $2y=8-x^2$.

1649. $y=a^x$ და $y=b^x$.

1650. $y=x^2$ და $x=\frac{5}{3}\cos t$, $y=\frac{5}{4}\sin t$.

1651. $x^2+y^2=8$ და $y^2=2x$.

1652. $x^2-y^2=5$ და $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

1653. გამოთვალეთ $y^2=4x$ პარაბოლის მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები $M(1;\ 2)$ წერტილში.

1654. გამოთვალეთ მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები $y=\frac{2}{1+x^2}$ წირისათვის, როცა $x=1$.

1655. გამოთვალეთ $y=2^x$ წირის მხებქვეშა მონაკვეთის სიგრძე მის ნებისმიერ წერტილში.

1656. აჩვენეთ, რომ $x^2-y^2=a^2$ ჰიპერბოლის ნორმალქვეშა მონაკვეთის სიგრძე მის ნებისმიერ წერტილში უდრის ამ წერტილის აბსცისას.

1657. იპოვეთ $M(a;\ a)$ წერტილში $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ ცისოიდის მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები, აგრეთვე მხებისა და ნორმალის განტოლებები.

1658. იპოვეთ $x=a\ (t-\sin t)$, $y=a\ (1-\cos t)$ ციკლოიდის მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები $t=\dfrac{\pi}{2}$ წერტილში.

1659. აჩვენეთ, რომ: 1) $xy=a^2$ ჰიპერბოლის მხების მონაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია საკოორდინატო ღერძებს შორის, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა;

2) $x^2-y^2=a^2$ ჰიპერბოლის ნებისმიერ $M(x_0,\ y_0)$ წერტილში გავლებული ნორმალის სიგრძე უდრის ამ წერტილის პოლარულ რადიუსს.

1660. იპოვეთ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის იმ მხების განტოლება, რომლის საკოორდინატო ღერძებს შორის მოთავსებული მონაკვეთი შეხების წერტილით შუაზე იყოფა.

1661. აჩვენეთ, რომ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ასტროიდის მხების იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია საკოორდინატო ღერძებს შორის, არის a.

1662. აჩვენეთ, რომ $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ პარაბოლის მხების მიერ საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოჭრილი მონაკვეთების ჯამი უდრის a-ს.

1663. იპოვეთ კუთხე $r=ae^{k\varphi}$ ლოგარითმული ხვიის მხებსა და პოლარულ რადიუსს შორის.

1664. იპოვეთ კუთხე $r^2=a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატის მხებსა და პოლარულ რადიუსს შორის.

1665. იპოვეთ $r=\dfrac{a}{\varphi}$ ჰიპერბოლური ხვიის მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები, აგრეთვე კუ-

თხე მხებსა და პოლარულ რადიუსს შორის მის ნებისმიერ $M(r_0; \varphi_0)$ წერტილში.

1666. იპოვეთ $r=a\varphi$ არქიმედეს ხვიის მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები, აგრეთვე კუთხე მხებსა და პოლარულ რადიუსს შორის $\varphi=2\pi$ წერტილში.

§ 12. ბრტყელი წირის რკალის დიფერენციალი

თუ ბრტყელი წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში, მაშინ s რკალის დიფერენციალი გამოითვლება ფორმულით: $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

თუ წირის განტოლებას აქვს სახე:

1) $y=f(x)$, მაშინ $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$;

2) $x=f_1(y)$, მაშინ $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$;

3) $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, მაშინ $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$.

როცა წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi.$$

თუ α აღნიშნავს მხების მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილ კუთხეს (მხები მიმართულია წირის s რკალის ზრდის მხარეს), მაშინ

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds}.$$

თუ β აღნიშნავს წირის პოლარულ რადიუსსა და წირის მხებს შორის კუთხეს, მაშინ

$$\cos\beta=\frac{dr}{ds},\quad \sin\beta=r\frac{d\varphi}{ds}.$$

შემდეგ მაგალითებში იპოვეთ რკალის დიფერენციალი, აგრეთვე იმ კუთხის კოსინუსი და სინუსი, რომელსაც წირის მხები ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან:

1667. $x^2+y^2=a^2$. **1668.** $y^2=2py$.

1669. $y=ax^3$. **1670.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

1671. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. **1672.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

იპოვეთ რკალის დიფერენციალი, აგრეთვე იმ კუთხის კოსინუსი და სინუსი, რომელსაც წირის მხები ადგენს პოლარულ რადიუსთან:

1673. $r=a\varphi$. **1674.** $r=\dfrac{a}{\varphi}$.

1675 $r=a^{\varphi}$. **1676.** 1) $r=a\sin\varphi$; 2) $r=a(1-\cos\varphi)$.

§ 18. ბრტყელი წირის სიმრუდე, სიმრუდის რადიუსი, სიმრუდის წრე და ცენტრი. წირის ევოლუტი

1°. წირის სიმრუდე და სიმრუდის რადიუსი. თუ წირი მოცემულია $y=f(x)$ განტოლებით, მაშინ მისი სიმრუდე გამოითვლება ფორმულით:

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

თუ წირი მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$K=\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

როცა წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ

$$K=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \text{სადაც } r'=\frac{dr}{d\varphi},\quad r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

წირის სიმრუდის რადიუსი $R=\dfrac{1}{|K|}$.

იპოვეთ სიმრუდე და სიმრუდის რადიუსი შემდეგი წირებისა:

1677. $xy=12$, $M(3;4)$ წერტილში.

1678. $y=4x-x^2$ პარაბოლისა მის წვეროში.

1679. 1) $y=3x+4$; 2) $x^2+y^2=25$ წირებისა მათ ნებისმიერ წერტილში.

1680. $x^2+4y^2=4$ ელიფსისა მის წვეროებში.

1681. 1) $y=x^3$; 2) $x^2=4ay$ წირებისა მათ ნებისმიერ წერტილში.

1682. $y^2=x^3$ წირისა $M(4;8)$ წერტილში.

1683. 1) $y=\ln x$ წირისა $M(1;0)$ წერტილში; 2) $y=\sin x$ წირისა $M\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$ წერტილში.

1684. $y=\ln\sec x$ წირისა მის ნებისმიერ წერტილში.

1685. $x=t^2$, $y=t^3$ წირისა $M(1;\ 1)$ წერტილში.

1686. $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ წირისა, როცა $t=1$.

1687. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდისა $M(\pi a;\ 2a)$ წერტილში.

1688. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ასტროიდისა მის ნებისმიერ წერტილში.

1689. $r=e^{\varphi}$ წირისა $r=1$, $\varphi=0$ წერტილში.

1690. $r=a\varphi$ წირისა მის ნებისმიერ წერტილში.

1691. $r=a\sin\varphi$ წირისა მის ნებისმიერ წერტილში.

1692. $r=a(1+\cos\varphi)$ წირისა მის ნებისმიერ წერტილში.

შემდეგ ორ მაგალითში იპოვეთ წირების იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებშიც სიმრუდის რადიუსს უმცირესი მნიშვნელობა აქვს:

1693. $y=\ln x$, $(x>0)$. **1694.** $y=e^x$.

9°. სიმრუდის წრე და ცენტრი. წირის ევოლუტა. თუ წირი მოცემულია $y=f(x)$ განტოლებით, მაშინ სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$X=x-y'\frac{1+y'^2}{y''},\quad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''},$$

თუ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$X=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''},\ Y=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}.$$

განსაზღვრეთ სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები. დაწერეთ სიმრუდის წრეწირის განტოლება, ააგეთ წირი და მისი სიმრუდის წრეწირი:

1695. $xy=4$, $M(2;\ 2)$ წერტილში.

1696. $y=x^2-6x+10$, $M(3;\ 1)$ წერტილში.

1697. $y=e^x$, $M(0;\ 1)$ წერტილში.

1698. $y=\ln x$, $M(1;\ 0)$ წერტილში.

იპოვეთ ევოლუტის განტოლება შემდეგი წირებისათვის:

1699. $y^2=2px$. **1700.** $x^2+y^2=a^2$.

1701. $xy=a^2$. **1702.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1703. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1704. $x=a(\cos t+t\sin t), \quad y=a(\sin t-t\cos t)$.

1705. $x=a\cos t, \ y=b\sin t$. 1706. $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t$.

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ:

$$X=r\frac{r''r-r'^2}{r''r-r^2-2r'^2}, \quad Y=r'\frac{r^2+r'^2}{r^2+2r'^2-r''r}.$$

1707. იპოვეთ $r=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის ევოლუტა.

1708. იპოვეთ: 1) $r=a\varphi$ არქიმედეს ხვიის ევოლუტი;

2) $r=e^{a\varphi}$ ლოგარითმული ხვიის ევოლუტი.

VIII თავი

კომპლექსური რიცხვები. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე

x და y ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ $z=(x, y)$ წყვილს ეწოდება კომპლექსური რიცხვი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $(x, 0)$ წყვილი არის x ნამდვილი რიცხვი, ე. ი. $(x, 0)=x$.

2. ორი $z_1=(x_1, y_1)$ და $z_2=(x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_1=x_2$ და $y_1=y_2$.

3. ორი $z_1=(x_1, y_1)$ და $z_2=(x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვის ჯამია (x_1+x_2, y_1+y_2) წყვილი, ე. ი.

$$z_1+z_2=(x_1+x_2, \quad y_1+y_2).$$

4. ორი $z_1=(x_1, y_1)$ და $z_2=(x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვი ნამრავლია $(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$ წყვილი, ე. ი.

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2, \ x_1y_2+x_1y_1).$$

პირველი პირობიდან ჩანს, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ნაწილს.

$i=(0, 1)$ კომპლექსურ რიცხვს წარმოსახვითი ერთეული ეწოდება. მტკიცდება, რომ $z=(x, y)=x+iy$. ამ უკანასკნელს კომპლექსური რიცხვის ალგებრული სახე ეწოდება.

ცხადია, რომ $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

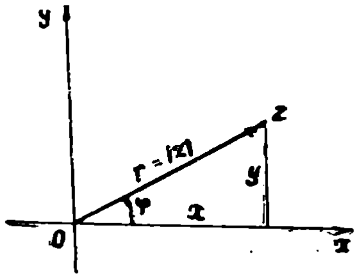
3. თუ $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_3$, მაშინ

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_3y_1-y_2x_1}{x_2^2+y_2^2} \quad (z_2\neq 0).$$

$\bar{z}=x-iy$ ეწოდება $z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული რიცხვი.

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2.$$

$z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვი xOy სიბრტყეზე გამოისახება წერტილით, რომლის კოორდინატებია (x, y). z რიცხვს შეიძლება შევუსაბამოთ ვექტორი, რომელიც მიმართულია O წერტილიდან z წერტილისაკენ (ნახ. 21). ამ ვექტორის r სიგრძეს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მოდული და აღინიშნება $r=|z|$ სიმბოლოთი. φ კუთხეს, რომელსაც $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან, ეწოდება z რიცხვის არგუმენტი და აღინიშნება ასე;



ნახ. 21

$\varphi=\operatorname{Arg} z$. არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა $\arg z$ განისაზღვრება $-\pi\leqslant\arg z\leqslant\pi$ უტოლობებით და მაშინ

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

ამასთან

$$\arg z=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{თუ} \quad x>0, \\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{თუ} \quad x<0, \quad y\geqslant 0, \\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{თუ} \quad x<0, \quad y<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{თუ} \quad x=0, \quad y>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{თუ} \quad x=0, \quad y<0. \end{cases}$$

ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}, \qquad \sin\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმაა

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (z \neq 0)$$

სადაც

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

თუ კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით, მაშინ

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

ნებისმიერი $z \neq 0$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს ე. წ. მაჩვენებლიანი ფორმით; $z = |z|e^{i\varphi}$, სადაც $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. თუ n ნატურალური რიცხვია, მაშინ $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, საიდანაც მიიღება მუავრის ფორმულა

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

ვთქვათ, n ნატურალური რიცხვია. n-ური ხარისხის ფესვი z კომპლექსური რიცხვიდან ეწოდება W კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც დააკმაყოფილებს ტოლობას

$$W^n = z.$$

მტკიცდება, რომ n-ური ხარისხის ფესვი ნულისაგან განსხვავებული z კომპლექსური რიცხვიდან გვაძლევს n სხვადასხვა მნიშვნელობას. ეს მნიშვნელობები მიიღება ფორმულიდან:

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

სადაც $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. შევასრულოთ მოქმედებანი:

$$(1 - 2i)(2 + i) + 5i$$

▷. თუ ვისარგებლებთ კომპლექსურ რიცხვებზე მოქმედების წესებით, მივიღებთ:

$$(1 - 2i)(2 + i) + 5i = 2 + i - 4i + 2 + 5i = 4 + 2i \ \triangleright.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ განტოლების ნამდვილი ამონახსნები:

$$(1 + i)x + (2 - 3i)y = 3 + 2i.$$

◁. გამოვყოთ განტოლების მარცხენა მხარეში ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები:

$$(x + 2y) + (x - 3y)\, i = 3 + 2i$$

ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობის პირობის თანახმად, გვაქვს

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x - 3y = 2. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $x = 2{,}6$; $y = 0{,}2$. ▷

მ ა გ ა ლ ი თ ი. წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვი:

$z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

▷. გვაქვს $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$.

$$\cos\varphi = -0{,}5; \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ამიტომ არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა $\arg z = \dfrac{2\pi}{3}$ და, მაშასადამე, $z = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. ◁

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოთვალეთ:

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{45}.$$

▷. წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით კომპლექსური რიცხვი

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

მუავრის ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$z = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{45} = \cos 30\pi + i\sin 30\pi = 1. \ ◁$$

შეასრულეთ მოქმედებანი:

1709. $(2 + i)(3 - 2i)$ **1710.** $\dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{i(1 - i)(3 - i)}{3 + i}$.

1711. $(1 + 5i)^2 - (3 - i)^2$ **1712.** $\left(\dfrac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2$

1713. $\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^2$

იპოვეთ განტოლებების ნამდვილი ამონახსნები:

1714. $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$;

1715. $12((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i))=17+6i$;

1716. $(3+2i)x+(5+i)y=-2+3i$;

1717. $(x-iy)(a-ib)=i$.

ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი წრფივი სისტემები:

1718. $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7.\end{cases}$

1719. $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$

წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

1720. $1+i$.

1721. $-1-i$.

1722. $-1+\sqrt{3}\,i$.

1723. $\dfrac{1-i}{1+i}$.

გამოთვალეთ:

1724. $(1+i)^{20}$;

1725. $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n$;

1726. $(1-i)^{40}$;

გამოთვალეთ:

1727. კუბური ფესვი 1-დან;

1728. მეოთხე ხარისხის ფესვი -1-დან.

1729. კვადრატული ფესვი i-დან;

1730. კვადრატული ფესვი $1+i$-დან.

1731. ვთქვათ, φ ნამდვილი რიცხვია ($\varphi\neq 0$). დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}.$$

▷. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ორი მიმდევრობა

$$r_n=\left|\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n\right|=\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\varphi_n=\arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n=n\arg\left(2+\frac{i\varphi}{n}\right)=n\operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi}{n}.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}}\right)^{\frac{\varphi^2}{2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi^2}{2n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n} = \varphi\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}} = \varphi.$$

აქედან მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

IX თავი

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§ 1. უშუალო ინტეგრების ხერხი

თუ $F(x)$ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა ($F'(x)=f(x)$), მაშინ $F(x)+C$ გამოსახულებას, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და აღინიშნება ასე:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები:

1) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx,$ სადაც A მუდმივია ($A\neq 0$);

2) $\int[f(x)\pm\varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int\varphi(x)\,dx;$

3) $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x);$

4) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx;$

5) $\int df(x) = f(x)+C.$

ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი:

1) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,$ $(\alpha\neq -1);$ 2) $\int\frac{dx}{x} = \ln|x|+C;$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ (a > 0,\ a \neq 1)$; 4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$; 6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$;

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$.

11) $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x+a}{x-a} \right| + C$;

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln | x + \sqrt{x^2+a} | + C$;

13) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right| + C$;

14) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right| + C$;

15) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$; 16) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

17) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$; 18) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნას ძირითადი ინტეგრების ცხრილის მეშვეობითა და იგივური გარდაქმნების გამოყენებით უწოდებენ უშუალო ინტეგრების ხერხს. მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$\int \frac{\sqrt{3}\, x^2}{x^2+1} dx = \sqrt{3} \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \sqrt{3} \left(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \right) =$$
$$= \sqrt{3}\, x - \sqrt{3} \operatorname{arctg} x + C.$$

იპოვეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1732. $\int 2x^5 dx$. **1733.** $\int 5a^2 x^4 dx$.

1734. $\int (x^2 + 2x + 3) dx$. **1735.** $\int \left(6x^2 + 4x + \dfrac{1}{x} \right) dx$.

1736. $\int \dfrac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$. **2737.** $\int \dfrac{2 - x + x^2}{x} dx$.

1738. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx.$

1739. $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

1740. $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx.$

1741. $\int\frac{2\sqrt[3]{x}+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

1742. $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx.$

1743. $\int\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

1744. $\int a^x e^x\,dx.$

1745. $\int\frac{xe^x-x}{x}\,dx.$

1746. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{x^4}\right)dx.$

1747. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx.$

1748. $\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx.$

1749. $\int \mathrm{ctg}^2\,x\,dx.$

1750. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}.$

1751. $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

1752. $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx.$

1753. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

1754. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx.$

1755. $\int 2\cos^2\frac{x}{2}\,dx.$

1756. $\int\frac{\cos 2t\,dt}{\sin^2 t\cos^2 t}.$

1757. $\int\frac{dt}{\sin^2 t\cos^2 t}.$

1758. $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx.$

1759. $\int\frac{3-2\,\mathrm{ctg}^2\,x}{\cos^2 x}\,dx.$

1760. $\int\frac{3x+5}{3x+1}\,dx.$

1761. $\int\frac{4x\,dx}{x-7}.$

§ 2. დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანა

თუ $F'(x)=f(x)$ მაშინ $f(x)\,dx=dF(x)$. ამ ტოლობაში მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანა. ამიტომ

$$\int f(x)\,dx=\int dF(x).$$

მაგალითი. $\int\sqrt{2x-1}\,dx$. ამოხსნა: $\int\sqrt{2x-1}\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}\,d(2x-1)=\frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+C.$$

მაგალითი. $\int \frac{dx}{6x-7}$. ამოხსნა: $\int \frac{dx}{6x-7} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x-7)}{6x-7} =$

$$= \frac{1}{6}\ln|6x-7| + c.$$

იპოვეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1762. $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}$.

1763. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.

1764. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

1765. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$.

1766. $\int e^{5x}\,dx$.

1767. $\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$.

1768. $\int 2^{5x+3}\,dx$.

1769. $\int \cos\frac{x+1}{3}\,dx$.

1770. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

1771. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

1772. $\int (e^x + e^{-x})\,dx$.

1773. $\int 3^{\sin x}\cos x\,dx$.

1774. $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\,dx$.

1775. $\int \sqrt{1+4\sin x}\cos x\,dx$.

1776. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

1777. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$.

1778. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

1779. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$.

1780. $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$.

1781. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}$.

1782. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

1783. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{(1+\cos 2x)^2}$.

1784. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$.

1785. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

1786. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}$.

1787. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

1788. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$.

1789. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1790. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$.

1791. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$.

1792. $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx.$ **1793.** $\int \frac{3^x\,dx}{1+3^{2x}}.$

1794. $\int x^2 \sin(1+x^3)\,dx.$ **1795.** $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx.$

1796. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}.$ **1797.** $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}.$

1798. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}.$ **1799.** $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$

1800. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin x \cos x}.$ **1801.** $\int \frac{\sin x\,dx}{1+3\cos x}.$

1802. $\int \frac{dx}{x \ln x}.$ **1803.** $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1804. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$ **1805.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx.$

1806. $\int e^{x^3} x^2\,dx.$ **1807.** $\int x(4x^2-1)^5\,dx.$

1808. $\int \cos(x^2+3)\,x\,dx.$ **1809.** $\int \cos^2 x \sin 2xd.$

1810. $\int x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx.$ **1811.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{7+x^4}}.$

1812. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}.$ **1813.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

1814. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+5}.$ **1815.** $\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{1-x^8}}.$

1816. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ **1817.** $\int 2^{-x^3} x^2\,dx.$

1818. $\int \cos(\ln x)\,\frac{dx}{x}.$ **1819.** $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x\,dx.$

§ 3. ჩასმის ხერხი

თუ $\int f(x)\,dx$ ინტეგრალში დავუშვებთ, რომ $x=\varphi(t)$, სადაც t არის ახალი ცვლადი, ხოლო $\varphi(t)$ — უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\int f(x)\,dx = \int [f\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt.$$

ინტეგრალის ასეთ გარდაქმნას ეწოდება ინტეგრება ჩასმის ხერხით.

მოძებნეთ ჩასმის ხერხით შემდეგი ინტეგრალები:

1820. $\int e^{ax+b}\,dx.$

1821. $\int \cos(ax+b)\,dx.$

1822. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

1823. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$

1824. $\int (\operatorname{ctg} e^x)\, e^x\,dx.$

1825. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx.$

1826. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

1827. $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx.$

1828. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}.$

1829. $\int a^{\sin x}\cos x\,dx.$

1830. $\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2}.$

1831. $\int \frac{dx}{9x^2+4}.$

1832. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}.$

1833. $\int \frac{dx}{25-36x^2}.$

1834. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}.$

1835. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}.$

1836. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$

1837. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}.$

1838. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

1839. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}.$

1840. $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4}.$

1841. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

1842. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

1843. $\int x\sqrt{a+x}\,dx.$

1844. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x\cos x}\,dx.$

1845. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\,\frac{dx}{x}.$

თუ ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{a^2-x^2}$ რადიკალს, მაშინ გამოდგება $x = a\sin t$ (ან $x = a\cos t$) ჩასმა;

თუ ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{x^2-a^2}$ რადიკალს, მაშინ გამოდგება $x=\frac{a}{\cos t}$ $\left(\text{ან } x=\frac{a}{\sin t}\right)$ ჩასმა;

თუკი ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{x^2+a^2}$ რადიკალს, მაშინ გამოდგება $x = a\operatorname{tg} t$ (ან $x = a\operatorname{ctg} t$) ჩასმა.

1846. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

1847. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1848. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}.$

1849. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$

1850. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx.$

1851. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx.$

1852. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$

1853. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$

§ 4. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი

თუ $u(x)$ და $v(x)$ x-ის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

ამ ფორმულას ძირითადად მაშინ იყენებენ, როცა ინტეგრალქვეშ აღებულია ალგებრული და ტრანსცენდენტური (ან მხოლოდ ტრანსცენდენტური) ფუნქციების ნამრავლი. მაგალითად, $\int x^2 e^x\,dx$, $\int x^2 \sin x\,dx$ ინტეგრალებში u-თი აღინიშნება x^2, ხოლო dv-თი — დანარჩენი ნაწილი, რომლიდანაც ინტეგრალი ადვილად მოიძებნება.

თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქციაში მონაწილეობს $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, მაშინ ეს ფუნქციები აღინიშნება u-თი.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1854. $\int x e^x\,dx.$

1855. $\int x\,2^x\,dx.$

1856. $\int \ln x\,dx.$

1857. $\int x \ln x\,dx.$

1858. $\int x\cos 3x\,dx.$

1859. $\int x \sin 2x\,dx.$

1860. $\int \arcsin x\,dx.$

1861. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

1862. $\int x^n \ln x\,dx,$

1863. $\int \ln(x^2+1)\,dx.$

1864. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

1865. $\int x \arcsin x dx.$

1866. $\int x^2 e^{3x} dx.$

1867. $\int x^3 e^x dx.$

1868. $\int \ln^2 x dx.$

1869. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx.$

1870. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

1871. $\int \ln (x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

1872. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

1873. $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1874. $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}.$

1875. $\int \frac{x dx}{\cos^2 3x}.$

1876. $\int \sin \sqrt{x} dx$

1877. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

1878. $\int \frac{\ln (\ln x) dx}{x}.$

1879. $\int \cos (\ln x) dx.$

1880. $\int e^{2x} \cos 3x dx.$

1881. $\int e^{ax} \sin bx dx.$

1882. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx.$

1883. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx.$

§ 6. კვადრატული სამწევრის შემცველი უმარტივესი ინტეგრალები

შემდეგი სახის ინტეგრალებისათვის

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx, \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$$

საჭიროა კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, რის შემდეგაც მარტივი გარდაქმნებით ისინი დაიყვანება ცხრილის ინტეგრალამდე, ხოლო $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ინტეგრალისათვის უნდა ვისარგებლოთ $mx+n = \frac{1}{t}$ ჩასმით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1884. $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$. **1885.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

1886. $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$. **1887.** $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$.

1888. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$. **1889.** $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$.

1890. $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx$. **1891.** $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx$.

1892. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. **1893.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

1894. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. **1895.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

1896. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$. **1897.** $\int \frac{4x+7}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

1898. $\int \sqrt{x^2+4x-3}\,dx$. **1899.** $\int \sqrt{x-x^2}\,dx$.

1900. $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$. **1901.** $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$.

1902. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$. **1903.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1904. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$. **1905.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

§ 6. რაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება ნიშნავს $\int \frac{f(x)}{F(x)}dx$ სახის ინტეგრალის მოძებნას, სადაც $f(x)$ და $F(x)$ მრავალწევრებია.

იგულისხმება, რომ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

1) $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი არის უკვეცი;

2) მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე;

3) მნიშვნელის უდიდესი ხარისხის კოეფიციენტი არის ერთი.

თუ ინტეგრალქვეშა წილადი არაწესიერია, მაშინ მისგან უნდა გამოვყოთ მთელი ნაწილი; ადგილი აქვს შემდეგ ოთხ შემთხვევას:

რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს ნამდვილი და მარტივი ფესვები: $a, b, c, \ldots, l$. ამ შემთხვევაში $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი დაიშლება შემდეგი სახის უმარტივეს წილადებად:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{L}{x-l},$$

სადაც $A, B, C, \ldots, L$ კოეფიციენტები მოიძებნება კოეფიციენტთა შედარების ან განუსაზღვრელობათა გახსნის ხერხით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1906. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx.$ **1907.** $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx.$

1908. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}.$ **1909.** $\int \frac{3x-2}{x(x+1)(x-2)}\,dx.$

1910. $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx.$ **1911.** $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}.$

1912. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx.$ **1913.** $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

2. რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს ნამდვილი და ჯერადი $a, b, \ldots, l$ ფესვები შესაბამისად $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ჯერადობისა. მაშინ რაციონალური წილადი დაიშლება შემდეგ უმარტივეს წილადებად:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} +$$

$$+ \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \cdots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \cdots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda},$$

სადაც $A_1, A_2, \ldots, L_\lambda$ უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება კოეფიციენტთა შედარების ხერხით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1914. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}.$ **1915.** $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$

1916. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx.$ **1917.** $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+1}\,dx.$

1918. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$. **1919.** $\int \frac{3x+2}{x^4+3x^3+3x^2+x}\,dx$.

1920. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$. **1921.** $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

1922. $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$. **1923.** $\int \frac{3x^3+5x^2-25x-1}{x^3-3x+2}\,dx$.

3. რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს მარტივი კომპლექსური ფესვები: $a_1 \pm b_1 i,\ a_2 \pm b_2 i, \ldots,\ a_k \pm b_k i$, მაშინ რაციონალური წილადი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x-a_1)^2+b_1^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x-a_2)^2+b_2^2} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{(x-a_k)^2+b_k^2};$$

$M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ მუდმივები მოიძებნება კოეფიციენტების შედარების მეთოდით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1924. $\int \frac{dx}{x^3+x}$. **1925.** $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$.

1926. $\int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)}$. **1927.** $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

1928. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$. **1929.** $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$.

1930. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. **1931.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1932. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. **1933.** $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.

4. რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს k ჯერადობის კომპლექსური ფესვი $a \pm bi$, მაშინ რაციონალური წილადი დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{M_2x+N_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{[(x-a)^2+b^2]^k},$$

სადაც $M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება შედარების მეთოდით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1934. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

1935. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

1936. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$.

1937. $\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx$.

1938. $\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}\,dx$.

1939. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$.

1940. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$.

1941. $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx$.

1942. $\int \frac{3x+5}{x^5+2x^3+x}\,dx$.

1943. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

1944. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$.

1945. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$.

1946. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+1)}$.

1947. $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$.

§ 7. ირაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

1. წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება. თუ მოცემულია შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx,$$

სადაც R არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, $m, n, \dots, r, s$ — მთელი რიცხვები, ხოლო $ad-bc \neq 0$, მაშინ მისი მოძებნა დაიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის მოძებნამდე $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ ჩასმის საშუალებით, სადაც k არის $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ წილადების საერთო მნიშვნელი.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1948. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

1949. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

1950. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+2}$.

1951. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1952. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

1953. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{1+x}}$.

1954. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$.

1955. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$.

1956. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$.

1957. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$.

1958. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^2}$.

1959. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{x^5}-\sqrt[8]{x}}$.

2. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ ინტეგრალის მოძებნა, სადაც R არის x-ისა და $\sqrt{ax^2+bx+c}$ რადიკალის რაციონალური ფუნქცია, ეილერის ჩასმების საშუალებით დაიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის მოძებნამდე (აქ ყველგან $ax^2+bx+c>0$).

1) თუ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ რადიკალში $a>0$, მაშინ გამოდგება ეილერის პირველი ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\,x.$$

1960. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.

1961. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$.

1962. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}$.

1963. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

2) თუ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ რადიკალში $c>0$, მაშინ გამოდგება ეილერის მეორე ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}.$$

1964. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x-4x^2}}$.

1965. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$.

1966. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

1967. $\int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}$.

3) თუ ax^2+bx+c კვადრატულ სამწევრს აქვს ნამდვილი ფესვები α და β, მაშინ გამოდგება ეილერის მესამე ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t \quad \text{ან} \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\beta)t.$$

1968. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$. **1969.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$.

1970. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}}$. **1971.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+7x-12}}$.

$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ სახის ინტეგრალისაგან, სადაც $P_n(x)$ არის n-ური ხარისხის მრავალწევრი, შეგვიძლია გამოვყოთ ალგებრული ნაწილი შემდეგი ფორმულით:

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad (A)$$

აქ $Q_{n-1}(x)$ არის $n-1$ ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, ხოლო λ — უცნობი მამრავლი. $Q_{n-1}(x)$ მრავალწევრი და λ უცნობი განისაზღვრება (A) იგივეობის გაწარმოებით.

თუ მოცემულია $\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ინტეგრალი, მაშინ გამოდგება $x-a=\frac{1}{t}$ ჩასმა, ხოლო $\int \frac{xdx}{(ax^2+b)\sqrt{Ax^2+B}}$ და $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{Ax^2+B}}$ სახის ინტეგრალებისათვის გამოიყენება შესაბამისად შემდეგი ჩასმები:

$$t=\sqrt{Ax^2+B}, \qquad x^2=\frac{Bt^2}{1-At^2}.$$

1972. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx$. **1973.** $\int \frac{x^4+2x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$.

1974. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}$. **1975.** $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

1976. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$. **1977.** $\int \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

1978. $\int \frac{xdx}{(8x^2+1)\sqrt{5x^2-2}}$. **1979.** $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3}}$.

3. ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება. $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ ინ-

ტეგრალი, სადაც m, n და p რაციონალური რიცხვებია, ხოლო a და b — ნულისაგან განსხვავებული მუდმივები, ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით გამოისახება შემდეგ სამ შემთხვევაში: 1) როცა p მთელი რიცხვია; 2) როცა $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია; 3) როცა $\frac{m+1}{n}+p$ მთელი რიცხვია.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1) როცა p მთელი რიცხვია, გამოდგება $x=z^s$ ჩასმა, სადაც s არის m-ისა და n-ის საერთო მნიშვნელი.

1980. $\int \sqrt[3]{x}\,(1+3\sqrt{x})^2\,dx.$ **1981.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x}+1)^2}.$

2) როცა $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია, გამოდგება $a+bx^n=z^s$ ჩასმა, სადაც s არის p-ს მნიშვნელი.

1982. $\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{x^2-1}}.$ **1983.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}.$

1984. $\int x^5\,\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$ **1985.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}.$

1986. $\int x^{\frac{1}{5}}\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$ **1987.** $\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$

3) როცა $\frac{m+1}{n}+p$ მთელი რიცხვია, გამოდგება $a+bx^n=x^n z^s$ ჩასმა, სადაც s არის p-ს მნიშვნელი.

1988. $\int x^{-6}\left(1+2x^3\right)^{\frac{2}{3}}dx.$ **1989.** $\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}.$

1990. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$ **1991.** $\int x^2\,(2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\,dx.$

§ 8. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრება

1. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ ინტეგრალის მოძებნა, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია. როცა m კენტი რიცხვია, მაშინ გამოდგება

$\cos x = t$ ჩასმა, ხოლო როცა n არის კენტი რიცხვი, მაშინ $\sin x = t$ ჩასმა; როცა m და n ლუწი რიცხვებია, მაშინ ვისარგებლებთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

1992. $\int \cos^3 x dx.$

1993. $\int \sin^3 x dx.$

1994. $\int \sin^5 x dx.$

1995. $\int \cos^7 x dx.$

1996. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$

1997. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

1998. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$

1999. $\int \sin^5 x \cos^6 x dx.$

2000. $\int \cos^2 3x dx.$

2001. $\int \cos^4 x dx.$

2002. $\int \sin^4 x dx.$

2003. $\int \sin^6 x dx.$

2004. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

2005. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

2006. $\int \cos^4 x \sin^2 x dx.$

2007. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx.$

2. $\int \frac{\cos^n x d x}{\sin^m x}$, $\int \frac{\sin^n x dx}{\cos^m x}$ **ინტეგრალების მოძებნა, სადაც** m **და** n **არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია.** როცა n კენტია, ხოლო m — ნებისმიერი რიცხვი, მაშინ პირველი ინტეგრალისათვის გამოდგება $\sin x = t$ ჩასმა, ხოლო მეორე ინტეგრალისათვის $\cos x = t$ ჩასმა. იმ შემთხვევაში, როცა n ლუწია, ხოლო m — ნებისმიერი რიცხვი, შეიძლება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენება.

2008. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$

2009. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$

2010. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}.$

2011. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x}.$

2012. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}.$

2013. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}.$

2014. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}.$

2015. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}.$

3. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$ ინტეგრალის მოძებნა, სადაც m და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია. როცა $m+n$ ლუწი რიცხვია, მაშინ გამოდგება $tg\, x=t$ ჩასმა, ხოლო როცა — კენტი, მაშინ მრიცხველში 1 შეიცვლება $\sin^2 x+\cos^2 x$-ით.

2016. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$. **2017.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$.

2018. 1) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **2019.** $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$. **2021.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

2022. 1) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. **2023.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$.

4. $\int \mathrm{tg}^n x\, dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x\, dx$, $\int \sec^n x\, dx$, $\int \mathrm{cosec}^n x\, dx$ ინტეგრალების მოძებნა. ამ ინტეგრალების მოსაძებნად უფრო მოხერხებულია გამოვყოთ შესაბამისად $\mathrm{tg}^2 x$, $\mathrm{ctg}^2 x$, $\sec^2 x$, $\mathrm{cosec}^2 x$ მამრავლები და ვისარგებლოთ $1+\mathrm{tg}^2 x=\sec^2 x$, $1+\mathrm{ctg}^2 x=\mathrm{cosec}^2 x$ ფორმულებით.

2024. $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx$. **2025.** $\int \mathrm{ctg}^4 x\, dx$.

2026. $\int \mathrm{tg}^4 x \sec^4 x\, dx$. **2027.** $\int \mathrm{ctg}^5 x\, \mathrm{cosec}^4 x\, dx$.

2028. $\int \mathrm{cosec}^6 x\, dx$. **2029.** $\int \mathrm{tg}^{-\frac{5}{2}} x \sec^4 x\, dx$.

5. $\int \cos\alpha x \cos\beta x\, dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x\, dx$, $\int \sin\alpha x \cos\beta x\, dx$ ინტეგრალების მოძებნა. ამ ინტეგრალებისათვის ვისარგებლებთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],\ \sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-$$

$$-\cos(\alpha+\beta)],\ \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

2030. $\int \cos 4x \cos 7x dx.$ 2031. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$

2032. $\int \sin x \sin 3x dx.$ 2033. $\int \sin (5x+8) \cdot \sin(3x-7)\, dx.$

2034. $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x dx.$ 2035. $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx.$

2036. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$ 2037. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$

6. $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ ინტეგრალისათვის, [სადაც R არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, უნივერსალური $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ჩასმა გვაძლევს:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

2038. $\int \frac{dx}{\sin x}.$ 2039. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

2040. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}.$ 2041. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$

2042. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}.$ 2043. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$

2044. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}.$ 2045. $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}.$

2046. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x} dx.$ 2047. $\int \frac{\sin x dx}{1-\sin x}.$

თუ ადგილი აქვს $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ იგივეობას, მაშინ შეიძლება ვისარგებლოთ $\operatorname{tg} x = t$ ჩასმით.

2048. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$ 2049. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}.$

2050. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$ 2051. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

იმავე $\operatorname{tg} x = t$ ჩასმით მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

2052. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$ 2053. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$

2054. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. **2055.** $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2}$.

2056. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$. **2057.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$.

2058. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$. **2059.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

2060. $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}}\, dx$. **2061.** $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

2062. $\int sh^2 x dx$. **2063.** $\int \frac{dx}{sh\, x}$.

2064. $\int th\, x dx$. **2065.** $\int ch^3 x dx$.

2066. $\int sh^3 x ch\, x dx$. **2067.** $\int \frac{dx}{sh\, x\, ch\, x}$.

2068. $\int (1 + sh\, 2x)^2 dx$. **2069.** $\int th^3 x dx$.

2070. $\int \frac{dx}{ch\, x + 1}$. **2071.** $\int \sqrt{ch\, x + 1}\, dx$.

2072. $\int sh^2 x\, ch^2 x dx$ **2073.** $\int \frac{1 + 2\, sh\, x}{ch^2 x} dx$.

§ 9. სხვადასხვა ინტეგრალი

2074. $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$. **2075.** $\int \frac{1 - 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$.

2076. $\int \sqrt{1 + \sin x}\, dx$. **2077.** $\int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} dx$.

2078. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$. **2079.** $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$.

2080. $\int \frac{dx}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 2}}$. **2081.** $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx$.

2082. $\int \frac{1 + x - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx$. **2083.** $\int (x + 1) \sqrt{x^2 + 2x}\, dx$.

2084. $\int \frac{x\,dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

2085. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-2}}$.

2086. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

2087. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$.

2088. $\int e^{e^x+x}\,dx.$

2089. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx.$

2090. $\int \frac{2^x dx}{1-4^x}$.

2091. $\int a^{3x} b^{2x}\,dx.$

2092. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$.

2093. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$.

2094. $\int \frac{dx}{(e^x-e^{-x})^2}$.

2095. $\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\ln \sin x}$.

2096. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^x-1}$.

2097. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-6\sin x+12}$.

2098. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}$.

2099. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx.$

2100. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

2101. $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[4]{x^4+1}}$.

2102. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$.

2103. $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}$.

2104. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx.$

2105. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

2106. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-4)^5}}$.

2107. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

2108. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

2109. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$.

2110. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

2111. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

2112. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$

2113. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,\frac{dx}{x}$.

2114. $\int \frac{\ln \cos x\,dx}{\cos^2 x}$.

2115. $\int x^3 e^{x^2}\,dx.$

2116. $\int \frac{x e^x\,dx}{(x+1)^2}$.

2117. $\int \frac{x\ln x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

2118. $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx.$

2119. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1-x}}.$

2120. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$

2121. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx.$

2122. $\int \frac{x^7 dx}{(1 + x^4)^2}.$

2123. $\int \frac{x dx}{x^4 - x^2 - 2}.$

2124. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$

2125. $\int \frac{dx}{x(x^8 + 1)}.$

2126. $\int \frac{dx}{x^4 (x^3 + 1)^2}.$

2127. $\int \frac{dx}{(x-1)^4 (x+1)^4}.$

2128. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^3 - 1}}.$

2129. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

2130. $\int \frac{dx}{\sqrt{3} \cos x + \sin x}.$

2131. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$

2132. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} dx.$

2133. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^4 x}.$

2134. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin 4x}.$

2135. $\int \frac{\cos 3x\, dx}{\sin^5 x}.$

2136. $\int \frac{\cos x dx}{\cos 3x}.$

2137. $\int \frac{\sin x dx}{\sin 3x}.$

2138. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}.$

2139. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$

2140. $\int \frac{3 \cos x + 7 \sin x}{5 \cos x + 2 \sin x} dx.$

2141. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$

X თავი

განსაზღვრული ინტეგრალი

§ 1. განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოთვლა

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. დავყოთ ეს სეგმენტი ნებისმიერად $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ წერტილებით n ნაწილად; ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ დანაყოფში ავიღოთ ნებისმიერი ξ_i წერტი-

ლი და შევადგინოთ $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ჯამი, სადაც $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. ამ ჯამს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს ამ ჯამის ზღვარი, როდესაც დანაყოფებს შორის უდიდესის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული არც $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის წესზე და არც ξ_i წერტილების არჩევაზე. ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი a-დან b-მდე და ასე აღინიშნება:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \text{ სადაც } \lambda = \max|\Delta x_i|.$$

განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები:

1) $$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \quad (A = \text{const});$$

2) $$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx;$$

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$$ 4) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0;$$

5) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

თუ $F(x)$ ფუნცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა ($F'(x) = f(x)$), მაშინ მართებულია ტოლობა:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

რომელსაც ნ ი უ ტ ო ნ—ლ ა ი ბ ნ ი ც ი ს ფორმულა ეწოდება.

გამოვთვალოთ $\int_1^2 xdx$, როგორც ინტეგრალური ჯამის ზღვარი.

პირველი ხერხი. დავყოთ $[1, 2]$ სეგმენტი n ტოლ ნაწილად, $\Delta x = \frac{1}{n}$. დაყოფის წერტილებია: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \ldots, x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n}$, $x_n = 2$, ξ_i წერტილებად შევარჩიოთ, მაგალითად, თითოეული ქვესეგმენტის მარჯვენა ბოლო, მაშინ

$$f(x_1) = 1 + \frac{1}{n},\ f(x_2) = 1 + \frac{2}{n}, \ldots, f(x_{n-1}) = 1 + \frac{n-1}{n},\ f(x_n) = 2.$$

ამრიგად,

$$S_n = 1 + \frac{1}{n} + 1 + \frac{2}{n} + \cdots + 1 + \frac{n-1}{n} + 2 = n +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} + 1\right) = n + \frac{n+1}{2} = \frac{3n+1}{2}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \frac{3n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}.$$

$$\int_1^2 xdx = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2}.$$

მეორე ხერხი დავყოთ $[1, 2]$ სეგმენტი n ნაწილად ისე, რომ დაყოფის წერტილების აბსცისებმა შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია:

$$x_0 = 1,\ x_1 = q,\ x_2 = q^2, \ldots, x_{n-1} = q^{n-1},\ x_n = q^n = 2, \text{ სადაც } q = 2^{\frac{1}{n}}.$$

ξ_i წერტილებად შევარჩიოთ ისევ თითოეული ქვესეგმენტის მარჯვენა ბოლო, მაშინ:

$$f(x_1) = q,\ f(x_2) = q^2, \ldots, f(x_n) = q^n;$$

$$\Delta x_1 = q - 1,\ \Delta x_2 = q^2 - q = q(q-1), \ldots, \Delta x_n = q^{n-1}(q-1).$$

$$S_n = q(q-1) + q^2\cdot q(q-1) + \cdots + q^n q^{n-1}(q-1) =$$

$$= q(q-1)(1+q^2+q^4+\dots+q^{2n}) = q^3\frac{q^{2n}-1}{q+1}.$$

$$\int_2^1 x dx = \lim_{n\to\infty} q^3\frac{q^{2n}-1}{q+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{3/n}(2^2-1)}{2^{1/n}+1} = \frac{3}{2}.$$

ინტეგრალური ჯამის შედგენით და ზღვარზე გადასვლით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

2142. $\int_1^{10} 2x dx.$

2143. $\int_0^a x^2 dx.$

2144. $\int_0^1 e^x dx.$

2145. $\int_0^{10} 2^x dx.$

ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

2146. $\int_0^1 x^4 dx.$

2147. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx.$

2148. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx.$

2149. $\int_1^2 (x^2-2x+3)\, dx.$

2150. $\int_{-2}^3 3x^2 dx.$

2151. $\int_3^5 \frac{dx}{(x-2)^2}.$

2152. $\int_0^\pi \sin x dx.$

2153. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

2154. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2155. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx.$

2156. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx.$

2157. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx.$

2158. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}.$

2159. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

2160. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

2161. $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx.$

2162. $\displaystyle\int\limits_{4}^{9} \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy.$

2163. $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

2164. $\displaystyle\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$

2165. $\displaystyle\int\limits_{0}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}.$

§ 2. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით

თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $x=\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, რომლის მნიშვნელობები არ გამოდის $[a, b]$ სეგმენტიდან, ამასთან $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, მაშინ

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[(\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

2166. $\displaystyle\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$

2167. $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}.$

2168. $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}.$

2169. $\displaystyle\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx.$

2170. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2171. $\int\limits_0^a y^2\sqrt{a^2-y^2}\,dy$.

2172. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

2173. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

2174. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

2175. $\int\limits_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{x^6+4}}$.

2176. $\int\limits_0^1 \frac{z^3dz}{z^8+1}$.

2177. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

2178. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

2179. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

2180. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

2181. $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.

2182. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin 2x\,dx$.

2183. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

2184. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

2185. $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}\,dx$.

2186. $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$.

2187. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

§ 3. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი

თუ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

2188. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$

2189. $\int_0^1 x e^x\,dx.$

2190. $\int_1^e \ln x\,dx.$

2191. $\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx.$

2192. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x\,dx}{\cos^3 x}.$

2193. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$

2194. $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx.$

2195. $\int_1^2 x\log_2 x\,dx.$

2196. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

2197. $\int_0^1 \sqrt{2x + x^2}\,dx.$

§ 4. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

1. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi).$$

$\mu=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე.

განსაზღვრეთ საშუალო მნიშვნელობები შემდეგი ფუნქციებისა:

2198. $y=\sin x$, $[0; \pi]$ სეგმენტზე. **2199.** $y=\sin^2 x$, $[0; \pi]$ სეგმენტზე.

2200. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $[-1; 1]$ სეგმენტზე.

2201. $y=(x-2)^2$, $[1; 4]$ სეგმენტზე.

2202. $y=\ln x$, $[1; e]$ სეგმენტზე. **2203.** $y=\frac{1}{e^x+1}$, $[0; 2]$ სეგმენტზე.

2. ინტეგრალის შეფასება. თუ m და M $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$m(b-a)\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

შეაფასეთ ინტეგრალები:

2204. $\int\limits_4^6 2x\,dx.$ **2205.** $\int\limits_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx.$

2206. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx.$ **2207.** $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)\,dx.$

2208. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}.$ **2209.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}.$

3. თუ $f(x)\leqslant F(x)$, როცა $a\leqslant x\leqslant b$, მაშინ

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^b F(x)\,dx.$$

გამოთვლის გარეშე გამოარკვიეთ, რომელი ინტეგრალია მეტი:

2210. $\int_0^1 x^2 dx$ თუ $\int_0^1 x^3 dx$.

2211. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$ თუ $\int_0^1 x dx$.

2212. $\int_1^2 2^{x^2} dx$ თუ $\int_1^2 2^{x^3} dx$.

2213. $\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ თუ $\int_0^1 x \sin^2 x dx$.

§ 5. ინტეგრალის გაწარმოება ზედა საზღვრით

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო x სეგმენტის შიგა წერტილია, მაშინ $\int_a^x f(t)\, dt$ ინტეგრალი ზედა x საზღვრის ფუნქციაა და მართებულია ტოლობა:

$$\left[\int_a^x f(t)\, dt\right]' = f(x).$$

იპოვეთ წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

2214. $F(x) = \int_1^x \ln t dt$.

2215. $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}\, dt$.

2216. $F(x) = \int_2^{e^x} \frac{\ln t}{t}\, dt$.

2217. $F(x) = \int_x^{2x} \ln^2 t dt$.

2218. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$.

2219. $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2\, dt$.

2220. $y = \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\, dt$. იპოვეთ y', როცა $x = 1$.

2221. $y=\int\limits_{x}^{5}\sqrt{1+t^2}\,dt.$ იპოვეთ y', როცა $x=\frac{3}{4}$.

2222. იპოვეთ $y=\int\limits_{0}^{x^2}\frac{dt}{1+t^2}$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული x-ით, როცა $x=1$.

2223. იპოვეთ $y=\int\limits_{0}^{x} t\,e^{-t^2}\,dt$, ფუნქციის ექსტრემუმი.

§ 6. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

თუ $y=f(x)$ უწყვეტი წირის განტოლებაა ($f(x)>0$), მაშინ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ წირის რკალით, Ox ღერძის ab მონაკვეთითა და $x=a$, $x=b$ წრფეებით, გამოითვლება

$$S=\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$$

ფორმულით. თუ $f(x)$ უარყოფითია, ან ნიშანს იცვლის $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$S=\int\limits_{a}^{b}|f(x)|\,dx.$$

ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ წირებსა და $x=a$, $x=b$ წრფეებს შორის, იმ შემთხვევაში, როცა, $f(x)\geqslant\varphi(x)$, გამოითვლება

$$S=\int\limits_{a}^{b}[f(x)-\varphi(x)]\,dx$$

ფორმულით.

თუ ფართობი შემოსაზღვრულია $x=f(y)$ წირის რკალით, $y=c$, $y=d$ წრფეებითა და Oy ღერძის cd მონაკვეთით, მაშინ

$$S=\int_c^d f(y)\,dy.$$

როცა წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ წირით, $x=a$, $x=b$ წრფეებითა და Ox ღერძის ab მონაკვეთით, გამოითვლება

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt$$

ფორმულით, სადაც t_1 და t_2 განისაზღვრება $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ განტოლებებიდან.

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში: $r=f(\varphi)$, მაშინ იმ სექტორის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $r=f(\varphi)$ წირითა და $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ სხივებით, გამოითვლება

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi$$

ფორმულით.

2224. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2x^2$ პარაბოლით, $x=4$ წრფითა და Ox ღერძით.

2225. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=4-x^2$ პარაბოლითა და $y=0$ წრფით.

2226. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $xy=4$, $x=1$, $x=3$ და $y=0$ წირებით.

2227. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\ln x$ წირით, Ox ღერძითა და $x=e$ წრფით.

2228. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\sin x$ წირითა და $y=0$ წრფით $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

2229. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=\operatorname{tg} x$ წირსა, Ox ღერძსა და $x=\frac{\pi}{3}$ წრფეს შორის.

2230 იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2231. იპოვეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ჯაჭვწირსა, $x=a$ წრფესა და Ox და Oy ღერძებს შორის.

2232. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ და $y=2-x^2$ პარაბოლებით.

2233. იპოვეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y^2=2px$ და $x^2=2py$ პარაბოლებს შორის.

2234. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=e^x$, $y=e^{-x}$ წირებითა და $x=1$ წრფით.

2235. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^3=x$ წირითა და $y=1$, $x=8$ წრფეებით.

2236. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^3$ კუბური პარაბოლით, $y=8$ წრფითა და Oy ღერძით.

2237. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $ay^2=x^3$ ნახევრად კუბური პარაბოლით, Oy ღერძითა და $y=a$, $y=2a$ წრფეებით.

2238. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=\frac{1}{1+x^2}$ და $y=\frac{x^2}{2}$ წირებს შორის.

2239. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=2-x^2$ და $y^3=x^2$ წირებს შორის.

2240. $x^2+y^2=8$ წრეწირით შემოსაზღვრული არე $y=\frac{x^2}{2}$ პარაბოლით გაყოფილია ორ ნაწილად. იპოვეთ ორივე ნაწილის ფართობი.

2241. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=2-y-y^2$ წირითა და Oy ღერძით.

2242. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=x^2$ $y=\frac{x^2}{2}$ პარაბოლებსა და $y=2x$ წრფეს შორის.

2243. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2+4x$ პარაბოლითა და $y=x+4$ წრფით.

2244. იპოვეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=\frac{1}{1+x^2}$ წირსა და მის ასიმპტოტს შორის.

2245. იპოვეთ ფართობი $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ ცისოიდასა და მის $x=2a$ ასიმპტოტებს შორის ($a>0$).

2246. იპოვეთ $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2247. იპოვეთ $x=5\cos t$, $y=3\sin t$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2248. იპოვეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია Ox ღერძსა და $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალს შორის ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

2249. იპოვეთ $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ასტროიდით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2250. იპოვეთ $r=a(1-\cos\varphi)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2251. იპოვეთ $r^2=a^2\cos 2\varphi$ ლემნისკატით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფართობები:

2252. 1) $r=a\cos\varphi$; 2) $r=a\cos 2\varphi$; 3) $r=a\cos 3\varphi$.

2253. 1) $r=a\sin\varphi$; 2) $r=a\sin 2\varphi$; 3) $r=a\sin 3\varphi$.

2254. 1) იპოვეთ $r=\frac{a}{\varphi}$ ჰიპერბოლური ხვიით შემოსაზღვრული ფართობი, სადაც $\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$;

2) იპოვეთ $r=ae^{\varphi}$ ლოგარითმული ხვიით შემოსაზღვრული ფართობი, სადაც $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

2255. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $r=a\varphi$ არქიმედეს ხვიის პირველსა და მეორე ხვეულებს შორის.

2256. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^4+y^4=x^2+y^2$ წირით.

2257. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^3+y^3-3axy=0$ წირით (დეკარტის ფოთოლი).

§ 7. წირის რკალის სიგრძე

$y=f(x)$ განტოლებით მოცემული წირის AB რკალის სიგრძე გამოითვლება

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

ფორმულით, სადაც a და b არის A და B წერტილების აბსცისები.

როცა წირის განტოლებანი მოცემულია პარამეტრული სახით $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

სადაც t_1 და t_2 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება წირის A და B წერტილებს

თუკი წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ

$$s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi,$$

სადაც φ_1 და φ_2 A და B წერტილების შესაბამისი პოლარული კოორდინატებია.

2258. იპოვეთ $y^2=x^3$ ნახევრად კუბური პარაბოლის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მოკვეთს $x=\frac{4}{3}$ წრფე.

2259. იპოვეთ $x^2+y^2=25$ წრეწირის სიგრძე.

2260. იპოვეთ $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ჯაჭვწირის რკალის სიგრძე, როცა $0\leqslant x\leqslant a$.

2261. იპოვეთ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ასტროიდის რკალის სიგრძე.

2262. იპოვეთ $y=\frac{x^2}{2}-1$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მოკვეთს Ox ღერძი.

2263. იპოვეთ $y=\ln x$ წირის რკალის სიგრძე, როცა $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$

2264. იპოვეთ $y=2\sqrt{x}$ პარაბოლის რკალის სიგრძე, როცა $0\leqslant x\leqslant 1$.

2265. იპოვეთ $y=e^x$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია $A(0;\ 1)$ და $B(1;\ e)$ წერტილებს შორის.

2266. იპოვეთ $9y^2=x(x-3)^2$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს შორის (მარყუჟიანი პარაბოლა).

2267. იპოვეთ: 1) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}$ წირის რკალის სიგრძე, როცა $1\leqslant y\leqslant e$;

2) $x=\ln\cos y$ წირის რკალის სიგრძე, როცა $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{3}$.

2268. გამოთვალეთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალის სიგრძე $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

2269. გამოთვალეთ $x=R(\cos t+t\sin t)$, $y=R(\sin t-t\cos t)$ წრეწირის ევოლუტის რკალის სიგრძე $t=0$-დან $t=\pi$-მდე.

2270. გამოთვალეთ $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$ ელიფსის ევოლუტის რკალის სიგრძე.

2271. გამოთვალეთ $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$ კარდიოიდის რკალის სიგრძე $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

2272. იპოვეთ $r=a(1-\cos\varphi)$ კარდიოიდის რკალის სიგრძე.

2273. იპოვეთ $r=2a\sin\varphi$ წირის რკალის სიგრძე.

2274. იპოვეთ $r=a\varphi$ არქიმედეს ხვიის ერთი ხვეულის სიგრძე.

2275. იპოვეთ $r=e^{a\varphi}$ ლოგარითმული ხვიის რკალის სიგრძე პოლუსიდან $M(r,\varphi)$ წერტილამდე.

თუ სივრცის წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, მაშინ წირის AB რკალის სიგრძე გამოითვლება

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

ფორმულით, სადაც t_1 და t_2 წარმოადგენს t პარამეტრის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც შეესაბამება წირის A და B წერტილებს.

2276. იპოვეთ $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ ხრახნწირის რკალის სიგრძე $t=0$-დან $t=2\pi$-მდე.

2277. იპოვეთ $x=t$, $y=t^2$, $z=\frac{2}{3}t^3$ წირის რკალის სიგრძე $t=0$-დან $t=3$-მდე.

2278. იპოვეთ $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$ წირის რკალის სიგრძე, თუ $0\leqslant t\leqslant 1$.

2279. იპოვეთ $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ წირის რკალის სიგრძე $t=0$-დან ნებისმიერ t-მდე.

2280. გამოთვალეთ $x^2=3y$, $2xy=9z$ წირის რკალის სიგრძე $O(0;0;0)$ წერტილიდან $M(3;3;2)$ წერტილამდე.

2281. გამოთვალეთ $y = \frac{\ln x}{2}$, $z = \frac{x^2}{2}$ წირის რკალის სიგრძე $x = 1$-დან $x = 2$-მდე.

§ 8. ბრუნვის სხეულის მოცულობა

თუ მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = f(x)$ წირით, Ox ღერძითა და $x = a$, $x = b$ წრფეებით, ბრუნავს Ox და Oy ღერძების გარშემო, მაშინ ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობები შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx, \qquad V_y = 2\pi \int_a^b xy dx.$$

თუ მრუდწირული ტრაპეცია შემოსაზღვრულია $x = g(y)$ წირით, Oy ღერძითა და $y = c$ და $y = d$ წრფეებით, მაშინ Oy ღერძის გარშემო მისი ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

ფორმულით.

როცა წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით ან პოლარულ კოორდინატებში, მაშინ საჭიროა ინტეგრების ცვლადის სათანადო გარდაქმნა.

თუ $r = f(\varphi)$ წირის რკალითა და $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ პოლარული რადიუსებით შემოსაზღვრული სექტორი ბრუნავს პოლარული ღერძის გარშემო, მაშინ მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება

$$V_\rho = \frac{2}{3} \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin\varphi\, d\varphi$$

ფორმულით.

2282. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y^2 = 4x$, $x = 4$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2283. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2284. იპოვეთ ელიფსოიდის მოცულობა, რომელიც მიიღება $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2285. იპოვეთ $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $y=0$, $x=0$, $x=a$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2286. იპოვეთ $y^2=x^3$, $y=0$, $x=1$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox და Oy ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობები.

2287. იპოვეთ $y=\sin x$ და $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox და Oy ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობები ($0\leqslant x\leqslant\pi$).

2288. გამოთვალეთ $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=-1$, $x=1$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2289. წრფის მონაკვეთი, რომელიც კოორდინატთა სათავეს აერთებს $M(a;\ b)$ წერტილთან, ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული კონუსის მოცულობა.

2290. გამოთვალეთ $y=x^3$, $x=0$, $y=8$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2291. გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ და $y=\pm b$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2292. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y=x^2$ და $y^2=x$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2293. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y^2=$ $=4ax$ და $x=a$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

2294. იპოვეთ იმ ბრუნვის პარაბოლოიდის მოცულობა, რომლის სიმაღლეა H, ხოლო ფუძის რადიუსი — R.

2295. იპოვეთ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2296. იპოვეთ $y=\frac{a}{x}$ წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ $1\leqslant x<+\infty$, $(a>0)$.

2297. იპოვეთ $y=e^x$, $x=0$, $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა $(-\infty<x\leqslant 0)$.

2298. იპოვეთ $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ასტროიდის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2299. იპოვეთ $x=a\,(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალითა და Ox ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურის საკოორდინატო ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობები $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

2300. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=a\,(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო.

2301. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r=a\sin 2\varphi$ წირით შემოსაზღვრული არის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო.

2302. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $x^2+(y-b)^2=a^2$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო $(b\geqslant a)$.

2303. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $x^2+y^2=a^2$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ბრუნვით $x=b>a$ წრფის გარშემო.

2304. იპოვეთ $y=x^2$ და $y=4$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის $x=2$ წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2305. იპოვეთ $y^2=4ax$ და $x=a$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის $x=a$ წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

§ 9. მოცულობის გამოთვლა ურთიერთპარალელური კვეთების ფართობების საშუალებით

თუ ცნობილია სხეულის Ox ღერძის პერპენდიკულარული კვეთის ფართობი ყოველ წერტილში, მაშინ ამ სხეულის მოცულობა გამოითვლება

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

ფორმულით, სადაც $S(x)$ კვეთის ფართობია, ხოლო a და b — სხეულის Ox ღერძის მიმართულებაზე მოთავსებული კიდური წერტილების აბსცისები.

2306. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ელიფსოიდის მოცულობა.

2307. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელსაც $x=a$ სიბრტყე მოკვეთს $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$ ელიფსური პარაბოლოიდიდან.

2308. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდითა და $z=-1$, $z=2$ სიბრტყეებით.

2309. ორი ტოლი ცილინდრი $x^2+y^2=a^2$ და $y^2+z^2=a^2$ იკვეთება მართი კუთხით. იპოვეთ ორივე ცილინდრის საერთო ნაწილის მოცულობა.

2310. R-რადიუსიანი ცილინდრი გადაკვეთილია მისი ფუძის დიამეტრზე გამავალი სიბრტყით, რომელიც ფუძესთან α კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მოკვეთილი ნაწილის მოცულობა.

2311. წრე გადაადგილდება ისე, რომ მისი ცენტრი აღწერს $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის დიდ ღერძს, ამასთან, წრის სიბრტყე იმავე ღერძის მართობულია, ხოლო წრის რადიუსი — ყოველ მომენტში ელიფსის გადაკვეთის წერტილის ორდინატის ტოლი. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება წრის გადაადგილებით ელიფსის ერთი წვეროდან მეორემდე.

§ 10. ბრუნვის ზედაპირის ფართობის გამოთვლა

$y=f(x)$ წირის AB რკალის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

ფორმულით, სადაც a და b შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებია.

როცა წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

სადაც t_1 და t_2t პარამეტრის ის მნიშვნელობებია, რომლებიც შეესაბამება A და B წერტილებს.

2312. იპოვეთ $x^2+y^2=R^2$ წრეწირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

2313. იპოვეთ $y=x^3$ წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, თუ $0\leqslant x\leqslant 1$.

2314. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y=\sin x$ წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო, თუ $0\leqslant x\leqslant\pi$.

2315. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ჯაჭვწირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო, თუ $0\leqslant x\leqslant a$.

2316. იპოვეთ $y=\frac{x^2}{2}$ პარაბოლის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, თუ $0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$.

2317. იპოვეთ $4x^2+y^2=4$ ელიფსის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

2318. გამოთვალეთ იმ ზედაპირების ფართობები, რომლებიც მიიღება $y=2x$ წრფის ბრუნვით Ox და Oy ღერძების გარშემო, თუ $0\leqslant x\leqslant 2$.

2319. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $9y^2=x(x-3)^2$ წირის მარყუჟის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2320. იპოვეთ ტორის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $x^2+(y-b)^2=a^2$ წრეწირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო ($b>a$).

2321. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ასტროიდის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2322. გამოთვალეთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალის Ox და Oy ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირების ფართობები ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

2323. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $x = a\,(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a\,(2\sin t - \sin 2t)$ კარდიოიდის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2324. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y = \sin x$ წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო, თუ $0 \leqslant x \leqslant \frac{x}{4}$.

2325. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y = e^{-x}$ წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო, თუ $0 \leqslant x < +\infty$

2326. გამოთვალეთ $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ლემნისკატის პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

2327. გამოთვალეთ $r = 2a \sin \varphi$ წრეწირის პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

§ 11. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში

1. სტატიკური მომენტები. სიმძიმის ცენტრი. $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ წირის AB რკალის M_x და M_y სტატიკური მომენტები Ox და Oy ღერძების მიმართ გამოითვლება

$$M_x = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad \text{და} \quad M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

ფორმულებით, ხოლო იმავე რკალის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c = \frac{M_y}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx}, \quad y_c = \frac{M_x}{s} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx}.$$

თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $y = f(x)$ წირით, Ox ღერძითა და $x = a$, $x = b$ წრფეებით, მაშინ მისი M_x და M_y სტატიკური მომენტები Ox და Oy ღერძების მიმართ გამოითვლება

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx \quad \text{და} \quad M_y = \int_a^b xy\,dx$$

ფორმულებით; იმავე ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\int\limits_a^b xydx}{\int\limits_a^b ydx}, \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2 dx}{\int\limits_a^b y\,dx},$$

თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $x=a$, $x=b$ წირებით, მაშინ

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x[f(x) - \varphi(x)]dx}{\int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)[dx}, \quad y_c = \frac{1}{2}\,\frac{\int\limits_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,[f(x)-\varphi(x)]\,dx}{\int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)\,]\,dx}.$$

2. **წერტილის მიერ გავლილი მანძილი.** თუ წერტილი მოძრაობს რომელიმე წირის გასწვრივ და მისი სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობაა $v=f(t)$, სადაც $f(t)$ არის t ცვლადის მოცემული ფუნქცია, მაშინ $[t_1, t_2]$ დროის განმავლობაში წერტილის მიერ გავლილი მანძილი გამოითვლება

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

ფორმულით.

3. **ძალის მუშაობა.** თუ ცვლადი $X=f(x)$ ძალა მოქმედებს Ox ღერძის გასწვრივ, მაშინ ამ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა $[x_1, x_2]$ მონაკვეთზე გამოითვლება

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

ფორმულით.

2328. იპოვეთ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ წრფის საკოორდინატო ღერძებს შორის მოთავსებული მონაკვეთის სტატიკური მომენტები Ox და Oy ღერძების მიმართ ($a>0$, $b>0$).

2329. იპოვეთ $x^2+y^2=a^2$ წრეწირის ზედა ნახევრის სტატიკური მომენტები საკოორდინატო ღერძების მიმართ ($y \geqslant 0$).

2330. გამოთვალეთ მართკუთხედის სტატიკური მომენტი მისი ფუძის მიმართ, თუ ფუძე უდრის a-ს, ხოლო სიმაღლე — h-ს.

2331. გამოთვალეთ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$ წრფეებით შემოსაზღვრული სამკუთხედის სტატიკური მომენტები Ox და Oy ღერძების მიმართ.

2332. იპოვეთ $x^2+y^2=a^2$ წრეწირის პირველ კვადრანტში მოთავსებული ნაწილის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

2333. იპოვეთ $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ჯაჭვწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $-a \leqslant x \leqslant a$.

2334. იპოვეთ $x=a\,(t-t\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალის სიმძიმის ცენტრი ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$).

2335. იპოვეთ $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ასტროიდის პირველ კვადრანტში მოთავსებული ნაწილის სიმძიმის ცენტრი.

2336. იპოვეთ იმ ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\sin x$ წირითა და Ox ღერძით ($0 \leqslant x \leqslant \pi$).

2337. იპოვეთ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის ფართობის იმ ნაწილის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც პირველ კვადრანტშია მოთავსებული ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

2338. იპოვეთ იმ ფიგურის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^2=x$, $y=0$ წირებითა და $M\,(1;\ 1)$ წერტილის ორდინატით.

2339. იპოვეთ საკოორდინატო ღერძებითა და $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ პარაბოლით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრი.

2340. გამოთვალეთ $y^2=ax$ პარაბოლითა და $x=a$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

2341. გამოთვალეთ $y^2=20x$ და $x^2=20y$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში: $r=f\,(\varphi)$, მაშინ მისი რკალის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_c = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\cos\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi}, \quad y_c = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi}.$$

თუ სექტორი შემოსაზღვრულია $r=f(\varphi)$ წირითა და $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ პოლარული რადიუსებით, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები გამოითვლება

$$x_c = \frac{2}{3}\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3\cos\varphi d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi}, \quad y_c = \frac{2}{3}\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3\sin\varphi\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi}$$

ფორმულებით.

2342. გამოთვალეთ $r=e^{\varphi}$ ლოგარითმული ხვიის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები, თუ $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2=\pi$.

2343. გამოთვალეთ $r=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის რკალის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები, თუ $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$.

2344. გამოთვალეთ R-რადიუსიანი წრის სექტორის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები, თუ მისი ცენტრალური კუთხეა 2α.

2345. გამოთვალეთ $r=a\varphi$ არქიმედეს ხვიითა და $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$ პოლარული რადიუსებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები.

2346. მოძრავი წერტილის სიჩქარე $v=0{,}1t^2\frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$. იპოვეთ მის მიერ გავლილი s მანძილი პირველი 10 წამის განმავლობაში და განსაზღვრეთ ამ შუალედში მოძრაობის საშუალო სიჩქარე.

2347. მატერიალური წერტილის სიჩქარე იზრდება დროის პროპორციულად $v=mt$ კანონის მიხედვით. იპოვეთ მანძილი, რომელსაც წერტილი გაივლის საწყისი დროიდან T დრომდე.

2348. v_0 საწყისი სიჩქარით ვერტიკალურად ზემოთ ასროლილი

სხეულის მოძრაობა (ჰაერის წინააღმდეგობა მხედველობაში არ მიიღება) განისაზღვრება ფორმულით:

$$v = v_0 - gt,$$

სადაც t მოძრაობის დროა, ხოლო g — სიმძიმის ძალის აჩქარება. საწყისი მდებარეობიდან რა სიმაღლეზე იქნება სხეული ასროლის მომენტიდან T წამის შემდეგ?

2349. წერტილის მოძრაობის სიჩქარე $v = te^{-0,01t} \frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$. იპოვეთ მის მიერ გავლილი მანძილი მოძრაობის დაწყებიდან სრულ გაჩერებამდე.

2350. რა მუშაობა უნდა დაიხარჯოს ზამბარის გასაჭიმად 6 სმ-ით, თუ 1 კგ ძალა მას ჭიმავს 1 სმ-ით?

2351. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს სპილენძის მავთულის გასაჭიმად 0,001 მ-ით, თუ მისი სიგრძეა 1 მ, ხოლო განივი კვეთის რადიუსი 2 მმ.

2352. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ვერტიკალური ცილინდრული კასრიდან წყლის ამოსატუმბავად, თუ კასრის ფუძის რადიუსია R, ხოლო სიმაღლე — H.

2353. რა მუშაობა უნდა დაიხარჯოს წყლის ამოსატუმბავად ნახევარსფერული ჭურჭლიდან, რომლის რადიუსი $R = 10$ მ?

§ 12. განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლისათვის მიზანშეწონილია ქვემომოყვანილი ფორმულების გამოყენება.

1. მართკუთხედების ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}),$$

ან

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n),$$

სადაც n არის $[a, b]$ სეგმენტის დანაყოფთა რიცხვი, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ სიდიდეები კი $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) წერტილებში; $h = \frac{b-a}{n}$. თუ $f'(x)$ წარმოებული არსებობს და

შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფორმულების ნაშთითი წევრისათვის მართებულია შეფასება:

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} M_1, \text{ სადაც } M_1 = \max|f'(x)| \; [a, b] \text{ სეგმენტზე.}$$

2. **ტრაპეციების ფორმულა:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right),$$

სადაც $y_0, y_1, \ldots, y_n$ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებია $x_i = a + ih$ წერტილებში $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$; $h = \dfrac{b-a}{n}$. თუ $f''(x)$ წარმოებული არსებობს და შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფორმულის ცდომილება განისაზღვრება $|R| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$ უტოლობით, სადაც $M_2 = \max|f''(x)|$ $[a, b]$ სეგმენტზე.

3. **სიმპსონის ფორმულა:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\,[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + y_{2n}].$$

აქ ინტეგრების $[a, b]$ შუალედი დაყოფილია $2n$ ტოლ ნაწილად. $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებია დაყოფის წერტილებში. ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილის ბიჯი $h = \dfrac{b-a}{2n}$. თუ $f^{\mathrm{IV}}(x)$ არსებობს და შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფორმულის ცდომილება განისაზღვრება უტოლობით:

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4, \text{ სადაც } M_4 = \max|f^{\mathrm{IV}}(x)| \; [a, b] \text{ სეგმენტზე.}$$

ცხადია, ტრაპეციების ფორმულის ნაშთითი წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება წინასწარ აღებულ დადებით ε-ს, თუ

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leqslant \varepsilon,$$

$$n \geqslant \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}.$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ინტეგრების შუალედის დანაყოფთა n რიცხვი ისე, რომ $|R| \leqslant \varepsilon$. როგორც ვხედავთ, ცდომილების შეფასებისათვის საჭიროა $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ცოდნა, მაგრამ ზოგჯერ $f(x)$ ფუნქცია არ არის მოცემული ანალიზური სახით ან $f''(x)$-ის გამოთვლა საკმაოდ რთულია. ასეთ შემთხვევაში ტრაპეციების ფორმულის ცდომილება შეიძლება გამოსახულ იქნეს ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილის საშუალებით.

ანალოგიურად შეგვიძლია დავადგინოთ დასახელებული ε-ის შესაბამისი n მართკუთხედებისა და სიმპსონის ფორმულებისათვის.

გამოთვალეთ მიახლოებით შემდეგი ინტეგრალები:

1) მართკუთხედების ფორმულით:

2354. $\int\limits_0^4 x^2\,dx, \quad (n=10).$ **2355.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}, \quad (n=10).$

2) ტრაპეციების ფორმულით:

2356. $\int\limits_{-1}^1 (3x^2-x-2)\,dx, \quad (n=10).$ **2357.** $\int\limits_0^1 (3x^2-4x)\,dx, \quad (n=10).$

2358. $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx, \quad (n=6).$ **2359.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx, \quad (n=6).$

3) სიმპსონის ფორმულით:

2360. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx, \quad (2n=2).$ **2361.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad (2n=10).$

2362. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad (2n=10).$ **2363.** $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x+1}, \quad (2n=10).$

ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$I = \int_0^1 \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) \right] dx, \text{ სიზუსტით } \varepsilon = 0{,}005.$$

ტრაპეციების ფორმულით.

$$f''(x) = \operatorname{arctg} x;$$

$$m_2 = \max |f''(x)| = \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \text{ ამიტომ}$$

ზემოთ მოყვანილი უტოლობების თანახმად მივიღებთ

$$n \geqslant 3{,}618.$$

ჩავთვალოთ $n=4$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ტრაპეციების ფორმულით გამოთვლების ჩატარებისას $\varepsilon=0{,}005$ სიზუსტის უზრუნველსაყოფად საკმარისია საინტეგრო შუალედის ოთხ თანაბარ ნაწილად დაყოფა. თუ გამოთვლებს ჩავატარებთ დავრწმუნდებით, რომ $I \approx 0{,}1573$.

ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში დაადგინეთ რამდენ ნაწილად უნდა დაიყოს ინტეგრების შუალედი, რომ ინტეგრალის მნიშვნელობა მივიღოთ $\varepsilon=0{,}005$ სიზუსტით, ტრაპეციების ფორმულით.

2364. $\int_0^1 5(x+1)\ln(x+1)\,dx.$

2365. $\int_0^1 \frac{1}{3} e^{x^2}\,dx.$

2366. $\int_0^1 x e^x\,dx.$

2367. $\int_0^1 \frac{dx}{2(1+x)^3}.$

2368. $\int_0^1 \left[\frac{2}{(1+x)^2} - 3x^2 - 5\right] dx.$

2369. $\int_0^1 \left[\frac{1}{6(x+1)^3} + 2x^2 - 6x\right] dx.$

2370. $\int_{2,2}^3 \frac{(x-3)^2}{x-1}\,dx.$

2371. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2x^2 - 3)\,dx.$

2372. $\int_2^{3,5} \frac{6x^3 - 18x + 13}{6(x-1)^2}\,dx.$

2373. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x + 3x^2 + 11)\,dx.$

2374. $\int\limits_0^1 [(x+1)\ln(x+1)+x^2+3x]\,dx.$

2375. $\int\limits_2^3 [(x-1)\ln(x-1)+2x^2-7[\,dx.$

2376. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+x^2+x-1)dx.$

2377. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x+x^2-x+1)\,dx.$

2378. $\int\limits_0^1 \left[x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]dx.$

2379. $\int\limits_2^3 5(x-1)\ln(x-1)\,dx.$

2380. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 2x\,dx.$

2381. $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3(x+1)^3}+x^2+1\right)dx.$

2382. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x+x^2+x-1)dx.$

2383. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x+2x^2-x)\,dx.$

2384. $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx.$

2385. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4(1+x)^4}.$

გამოთვალეთ ქვემოთ მოყვანილი ინტეგრალები სიმპსონის ფორმულით მითითებული ε სიზუსტით:

2386. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\sqrt[3]{1+x^5}}{1+x^4}\,dx, \quad \varepsilon=10^{-5}.$

2387. $\int\limits_0^2 x^3(1+x^6)^{2/3}\,dx, \quad \varepsilon=10^{-5}.$

2388. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2+1}{\sqrt[4]{x^4+2}}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-4}$. **2389.** $\int\limits_{1}^{2,6} \frac{3x^2+x+4}{x^3+3,26}\,dx, \quad \varepsilon=10^{-3}$.

2390. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^3 x - 3\sin^4 x}{1+\sin^2 x}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}$.

2391. $\int\limits_{4,2}^{6,4} \frac{x^2+\sqrt{3^x}}{\sqrt{4+\ln^2(x^2+1)}}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}$.

2392. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^4 e^x}{\sqrt{5+2^x}}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}$. **2393.** $\int\limits_{2}^{4,12} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x^3 \sin x}\,dx, \quad \varepsilon=10^{-4}$.

2394. $\int\limits_{1}^{3} \frac{e^{\sqrt{x}}+1,2}{x\cdot 10^{x^2}}\,dx, \quad \varepsilon=10^{-5}$. **2395.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\, e^{4-2,6\cos x}}{e^{x\sin x}}\,dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

ქვემოთ მოყვანილია ინტეგრალის გამოთვლის ფორტრან-პროგრამა გაფორმებული, როგორც ქვეპროგრამა—ფუნქცია, ტრაპეციების მეთოდით:

```
1...5 | 6 | 7
--------------------------------------------------------------
      |   | FUNCTION INTEGR (A, B, N, FONC)
      | C | A, B ინტეგრების საზღვრებია, N დაყოფის რიცხვი, FONC
      | • | ინტეგრალქვეშა ფუნქციის გამოსათვლელი ქვეპროგრამა —
      | • | ფუნქცია
      |   | H = (B — A) / X
      |   | M = N — 1
      |   | X = A
      |   | S = (FONC (A) + FONC (B) ) / 2
      | C | ციკლის დაწყებამდე გამოვთვალეთ შესაკრები (y0 + yn) / 2
      |   | DO 1 I = 1, M
      |   | X = X + H
  1   |   | S = S + FONC (X)
      |   | INTEGR = S * H
      |   | RETURN
      |   | END
```

2396. ამ პროგრამის საშუალებით გამოთვალეთ ეგმ-ზე 2364—2395 ნომრებში მოყვანილი ინტეგრალები. გაითვალისწინეთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის გამოსათვლელი ქვეპროგრამა — ფუნქციის აღწერა ძირითად პროგრამაში და შედეგის ამობეჭდვა. ნიმუშად აქ მოგვყავს $I=\int\limits_0^{10}\sqrt{100-x^2}\,dx$ ინტეგრალის გამოთვლა მნიშვნელობებისათვის $n=100$, 150, 200, 250, 300, 350, 400.

```
1…5 | 6 |                 7
-----------------------------------------------------
          EXTERNAL FONC
          DO 1  I = 100, 400, 50
          RESULT=INTEGR (0, 10., I, FONC) * 4.
          PRINT 2; I; RESULT
 2        FORMAT (I5, E 15.7)
 1        CONTINUE
          STOP
          END
          FUNCTION FONC (X)
          FONC=SQRT (100. — X * X)
          RETURN
          END
```

შედეგად მანქანა დაბეჭდავს ცხრილს

```
100   0.3140396E 03
150   0.3140913E 03
200   0.3141169E 03
250   0.3141257E 03
300   0.3141360E 03
350   0.3141394E 03
400   0.3141430E 03
```

2397. 2396 დავალების მსგავსად შეადგინეთ ინტეგრალის გამოთვლის ქვეპროგრამა — ფუნქცია მართკუთხედების ფორმულით და ამოხსენით 2364—2395 ნომრებით მოცემული ინტეგრალები.

2398. 2397 ნომრით მოცემული დავალება შეადგინეთ სიმპსონის ფორმულისათვის.

ინტეგრალებს, რომელთა საზღვრები უსასრულოა ან რომელთა ინტეგრალქვეშა ფუნქციები შემოუსაზღვრელია, ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალები.

1. უსასრულოსაზღვრებიანი ინტეგრალი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $a \leqslant x < +\infty$ შუალედში და არსებობს

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

ზღვარი, მაშინ მას უწოდებენ არასაკუთრივი ინტეგრალის მნიშვნელობას და ასე აღნიშნავენ:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

როცა აღნიშნული ზღვარი სასრულია, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — განშლადი.

ანალოგიურად განიმარტება ინტეგრალები:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dx.$$

არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა შეიძლება დავადგინოთ აგრეთვე შედარების მეთოდით: თუ $x > a$-სათვის $|f(x)| \leqslant F(x)$ და $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ ინტეგრალი კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ინტეგრალიც.

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

2399. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

2400. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$.

2401. $\int_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx$.

2402. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

2403. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

2404. $\int\limits_{0}^{+\infty} x \sin x dx$.

2405. 1) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; 2) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

2406. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^2}$.

2407. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}$.

2408. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$.

2409. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

2410. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი ინტეგრალებისა:

2411. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

2412. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$.

2413. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$.

2414. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

2415. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}$.

2416. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$.

2417. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$.

2418. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$.

2419. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

2420. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

შემოუსაზღვრელი ფუნქციის ინტეგრალი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $a \leqslant x < b$ შუალედში, ხოლო $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \infty$, მაშინ ინტეგრალი

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

ასევე, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $a<x\leqslant b$ შუალედში, ხოლო $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=\infty$, მაშინ ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

ბოლოს, თუ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty, (a<c<b)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0_+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0_+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx.$$

როცა აღნიშნული ზღვრები არსებობს და სასრულია, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება კ რ ე ბ ა დ ი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — გ ა ნ შ ლ ა დ ი.

თუ $|f(x)|\leqslant F(x)$, როცა $a\leqslant x\leqslant b$ და $\int\limits_a^b F(x)\,dx$ ინტეგრალი კრებადია, მაშინ კრებადია $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალიც.

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

2421. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2422. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2423. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} xdx$.

2424. $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

2425. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2426. $\int\limits_0^1 \ln xdx$.

2427. $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

2428. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

2429. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.   **2430.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{3\,xdx}{2\sqrt[4]{x^2-4}}$.

2431. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.   **2432.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

2433. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$.   **2434.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

2435. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.   **2436.** $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}}$.

გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი ინტეგრალებისა:

2437. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$.   **2438.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x^4}$.

2439. 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$.

2440. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt[3]{1-x^3}}$.

XI თავი

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

§ 1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება, ზღვარი და უწყვეტობა

R^n სივრცის $x=(x_1,\dots,x_n)$ და $y=(y_1,\dots,y_n)$ წერტილებს შორის მანძილი განისაზღვრება ფორმულით

$$\rho(x,\ y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}\,.$$

როცა $n=2$, ე. ი. R^2 სიბრტყის შემთხვევაში

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, $x \in R^n$ და $\delta > 0$. სიმრავლეს $U(x, \delta) = \{y \mid y \in R^n \wedge \rho(x, y) < \delta\}$ ეწოდება n — განზომილებიანი სფერო ცენტრით $x \in R^n$, წერტილში და $\delta > 0$ რადიუსით ან x წერტილის δ — მიდამო. ($x \in R^n$ წერტილის ნებისმიერ $\delta > 0$ მიდამოს უწოდებენ უბრალოდ x წერტილის მიდამოს და აღნიშნავენ აგრეთვე $u(x)$-ით). როცა $n = 2$, ე. ი. სიბრტყის შემთხვევაში $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2$ და $U(x, \delta)=\{y \mid y \in R^2 \wedge (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < \delta^2\}$.

განსაზღვრება. ვთქვათ, $E \subset R^n \cdot f: E \to R$ ასახვას ეწოდება n ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია. თუ $x = (x_1 \, x_2, \ldots, x_n)$ E ნებისმიერი წერტილია, მაშინ ამ ფუნქციას აღნიშნავენ აგრეთვე $f(x)$-ით ან $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ან კიდევ $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ით. E სიმრავლეს f ფუნქციის განსაზღვრის არეს უწოდებენ.

განსაზღვრება. ვთქვათ, $z = f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის რაიმე $U(M)$ მიდამოში, გარდა შესაძლოა, თვით M_0 წერტილისა. A რიცხვს უწოდებენ $f(x, y)$ ფუნქციის ზღვარს $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x, y) \ (0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon).$$

ასეთ შემთხვევაში წერენ:

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

მაგალითი. განვიხილოთ $f(x, y) = x^2 + y^2$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია მთელ რიცხვით სიბრტყეზე და $M = (1; 2)$ წერტილი. წერტილთა ნებისმიერი (x_k, y_k), $k=1, 2, \ldots$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია (1; 2) წერტილისაკენ გვაქვს

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \to \infty} (x_k^2 + y_k^2) = 1^2 + 2^2 = 5.$$

ამგვარად,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x, y) = 5,$$

მაგალითი. გამოთვალეთ $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{2(x^2 + y^2)}$ ფუნქციის ზღვარი (0, 0) წერტილში

$\triangleright$. ვინაიდან $|x|^3 \leqslant (x^2+y^2)^{3/2}$, $|y^3| \leqslant (x^2+y^2)^{3/2}$, ამიტომ

$$|f(x, y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{2(x^2+y^2)}\right| \leqslant \frac{|x|^3+|y|^3}{2(x^2+y^2)} \leqslant (x^2+x)^{\frac{1}{2}}.$$

თუ ახლა $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის დავუშვებთ $\delta = \varepsilon$, მაშინ ყოველი (x, y)-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, შესრულდება უტოლობა $|f(x, y)| < \varepsilon$. ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0. \triangleleft$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, $z = f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე U მიდამოში. f ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი (x_0, y_0) წერტილში, თუ:

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

მაგალითი. გამოარკვიეთ უწყვეტია თუ არა (0, 0) წერტილში ფუნქცია

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{როცა } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = y = 0. \end{cases}$$

$\triangleright$. ვინაიდან $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$ (იხ. წინა მაგალითი) და $f(0, 0) = 0$, ამიტომ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია (0, 0) წერტილში. $\triangleleft$.

2441. მოცემულია სამკუთხედის პერიმეტრი $2p$. გამოსახეთ სამკუთხედის S ფართობი, როგორც მისი ორი x და y გვერდის ფუნქცია.

2442. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და y სიმაღლის ფუნქცია.

2443. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და ფუძის y რადიუსის ფუნქცია.

2444. გამოსახეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის V მოცულობა, როგორც მისი x სიმაღლისა და y გვერდითი წიბოს ფუნქცია.

2445. 1) $f(x, y) = xy + \dfrac{x}{y}$. იპოვეთ $f\left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$, $f(1; -1)$;

2) $F(x, y) = \dfrac{x-2y}{2x-y}$. იპოვეთ $F(3; 1)$, $F(5; 3)$;

3) $f(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$. იპოვეთ $f(2; -3)$, $f\left(1; \dfrac{y}{x}\right)$;

4) $z = e^{\sin(x+y)}$. იპოვეთ z, თუ $x = y = \dfrac{\pi}{2}$.

2446. 1) $z=y^{x^2-1}+x^{y^2-1}$. იპოვეთ z, თუ $x=2, y=2$; $x=1, y=2$;

2) $F(x, y)=\dfrac{x}{x-y}$. აჩვენეთ, რომ $F(a, b)+F(b, a)=1$;

3) $f(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$. იპოვეთ $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{1}{f(x, y)}$.

იპოვეთ განსაზღვრის არეები შემდეგი ფუნქციებისა:

2447. $z=x^2+y^2$,

2448. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

2449. $z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

2450. $z=\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-y}$.

2451. $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

2452. $z=\dfrac{xy}{y-x}$.

2453. $z=\ln(x+y)$.

2454. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

2455. $z=\sqrt{xy}$.

2456. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$.

2457. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}$.

2458. $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-4}$.

2459. $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$.

2460. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$.

2461. 1) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$; 2) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

2462. $u=\ln(x^2+y^2+z^2-1)$.

2463. $z=\sqrt{y-|x-1|}$.

2464. $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

2465. $z=\arccos\dfrac{y-1}{x-1}$.

2466. $z=\sqrt{x-y}+\ln(9-x^2-y^2)$.

2467. $z=\ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}\right)$.

$z=f(x, y)$ ფუნქციის *დონის წირი* ეწოდება ისეთ $f(x, y)=c$ წირს xOy სიბრტყეზე, რომლის წერტილებზეც ფუნქცია ღებულობს ერთსა და იმავე $z=c$ მნიშვნელობას.

იპოვეთ დონის წირები შემდეგი ფუნქციებისა:

2468. 1) $z=x+y$; 2) $z=x^2-y^2$; 3) $z=\ln(x^2+y)$; 4) $z=\sqrt{xy}$.

2469. 1) $z=x^2+y^2$; 2) $z=x^2y$; 3) $z=\dfrac{x}{y^2}$; 4) $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

$u=f(x, y, z)$ ფუნქციის *დონის ზედაპირი* ეწოდება ისეთ $f(x, y, z)=c$ ზედაპირს, რომლის წერტილებზეც ფუნქცია ღებულობს ერთსა და იმავე $u=c$ მნიშვნელობას.

იპოვეთ დონის ზედაპირები შემდეგი ფუნქციებისა:

2470. 1) $u=x+y+z$; 2) $u=\dfrac{x^2+y^2}{z}$; 3) $u=\sqrt{x^2+y^2}$;

4) $u=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}$.

2471. 1) $u=5^{2x+3y-z}$; 2) $u=x^2+y^2+z^2$; 3) $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

2472. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

2473. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

2474. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to k}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

2475. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2476. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

2477. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

2478. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{xy}$.

2479. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

2480. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2(y-2)^2}$.

2481. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

იპოვეთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

2482. 1) $z=\dfrac{1}{9-x^2-y^2}$; 2) $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$;

3) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 4) $u=\dfrac{1}{z^2-x^2-y^2}$.

2483. 1) $z=\frac{1}{x-y}$; 2) $z=\frac{3}{x^2+y^2}$;

3) $z=\frac{x^2+2y+4}{y-x^2}$; 4) $z=\cos\frac{1}{xy}$.

§ 2. ფუნქციის კერძო ნაზრდები და წარმოებულები. სრული დიფერენციალი

$z=f(x, y)$ ფუნქციის კ ე რ ძ ო ნ ა ზ რ დ ე ბ ი x-ითა და y-ით (x, y) წერტილში ეწოდება შესაბამისად შემდეგ სხვაობებს:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y), \quad \Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

თუ $z=f(x, y)$ და მივიღებთ, რომ y მუდმივი სიდიდეა, მაშინ z ფუნქციის კ ე რ ძ ო წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი x-ით (x, y) წერტილში ეწოდება

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=f'_x(x, y)$$

ზღვარს, როცა ეს ზღვარი არსებობს; ანალოგიურად, თუ მივიღებთ, რომ x მუდმივი სიდიდეა, მაშინ კერძო წარმოებული y-ით (x, y) წერტილში იქნება:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=f'_y(x, y),$$

როცა ეს ზღვარი არსებობს.

ასევე განიმარტება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები.

ვთქვათ, $z=f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M=(x, y)$ წერტილის რაიმე $U(M, \delta)$ მიდამოში. ავიღოთ ამ მიდამოს $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ წერტილი. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

Δz-ს უწოდებენ $z=f(x, y)$ ფუნქციის სრულ ნაზრდს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. f ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (x, y) წერტილში, თუ მისი Δz სრული ნაზრდი ამ წერტილში შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

სადაც A და B არაა დამოკიდებული Δx და Δy-ზე და

$$\lim_{\rho\to 0} \alpha = \lim_{\rho\to 0} \beta = 0, \ (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

განსაზღვრა. (x, y) წერტილში დიფერენცირებადი f ფუნქციის სრული დიფერენციალი ამ წერტილში ეწოდება Δx და Δy ცვლადების წრფივ ფუნქციას $A\Delta x + B\Delta y$ და აღინიშნება dz-ით ან $df(x, y)$-ით.

ამგვარად,

$$dz = A\,\Delta x + B\,\Delta y.$$

Δx და Δy-ს, რომლებიც წარმოადგენენ შესაბამისად x და y ცვლადების ნაზრდებს, უწოდებენ აგრეთვე ამ ცვლადების დიფერენციალებს და აღნიშნავენ შესაბამისად dx-ით და dy-ით. ამგვარად, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. ამ აღნიშვნებში dz სრული დიფერენციალი მიიღებს სახეს

$$dx = A\,dx + B\,dy.$$

ამასთან, მტკიცდება, რომ

$$A = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

ე. ი.

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy.$$

როცა Δx და Δy საკმარისად მცირეა, მაშასადამე, როცა $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ საკმარისად მცირეა, დიფერენცირებადი $z = f(x, y)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს შემდეგ მიახლოებით ტოლობას:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta z + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y.$$

ანალოგიურად განიმარტება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალი. თუ $u = f(x, y, z)$, მაშინ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

მაგალითი. იპოვეთ $z = \ln\cos\dfrac{x}{y}$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები.

$\triangleright$. ჩავთვლით რა y-ს მუდმივად, მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\cos\frac{x}{y}}\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=-\frac{1}{y}\operatorname{tg}\frac{x}{y};$$

ახლა ჩავთვლით რა x-ს მუდმივად, მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos\frac{x}{y}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{x}{y^2}\operatorname{tg}\frac{x}{y}. \quad \triangleleft$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. იპოვეთ $f(x, y)=x^2+xy+y^2$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი.

$\triangleright$. $f(x+\Delta x, y+\Delta y)=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2$,

$$\Delta f(x, y)=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2]-(x^2+xy+y^2)=$$
$$=(2x+y)\Delta x+(x+2y)\Delta y+\Delta x^2+\Delta x\Delta y+\Delta y^2.$$

გამოსახულება $(2x+y)\Delta x+(x+2y)\Delta y$ არის სრული დიფერენციალი, ხოლო $\Delta x^2+\Delta x\Delta y+\Delta y^2=0(\rho)$, როცა $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$. $\triangleleft$

მაგალითი. იპოვეთ $z=\ln(1+x^2+y^2)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$\triangleleft.\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

$$dz=\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy. \quad \triangleleft$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოთვალეთ მიახლოებით $1{,}02^{3{,}01}$.

$\triangleright$. განვიხილოთ $f(x, y)=x^y$ ფუნქცია. მისი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}=y\,x^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$ უწყვეტია $(1;\ 3)$ წერტილში, ამიტომ ამ წერტილში f ფუნქცია დიფერენცირებადია. თუ დავუშვებთ $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$, გვექნება

$$\Delta f(x, y)=df(x, y)=\frac{\partial f(1;\ 3)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(1;\ 3)}{\partial y}\Delta y=$$
$$=3\cdot 1\cdot 0{,}02+1\cdot\ln 1\cdot 0.01=0.06.$$

მაშასადამე, $1{,}02^{3{,}01}\approx 1+0{,}06=1{,}06.$ $\triangleleft$

იპოვეთ კერძო წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

2484. $z=x^4+y^2+3x^3y-2xy^2+3.$

2485. $z=\dfrac{y}{x}.$

2486. $z=x^2\sin^2 y.$

2487. $z=\dfrac{5}{x+2y}.$

2488. $z=\dfrac{x-y}{x+y}.$

2489. $z=\sqrt{x^2-y^2}.$

3490. $z=\ln(x^2+y^2).$

2491. $z=\ln\sin(x-2y).$

2492. $z=(5x^2y-y^3+7)^3.$

2493. $z=x^3+3x^2y-y^3.$

2494. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

2495. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}).$

2496. $z=x^y.$

2497. $z=e^{-\frac{x}{y}}.$

2498. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.$

2499. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}.$

2500. $z=\sqrt[3]{x^2-y^2}.$

2501. $z=\sin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

2502. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1}.$

2503. $z=e^{\arcsin\frac{y}{x^2}}.$

2504. $z=\ln\operatorname{tg}(x+\sqrt{x^2+y^2}).$

2505. $z=\left(xy+\dfrac{y}{x}\right)^7.$

2506. $z=2^{\operatorname{arctg}^3\sqrt{xy}}.$

2507. $z=(x^2+1)^{\sin y}.$

2508. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

2509 $u=xy+yz+zx.$

2510. $u=x^3y^2z+2x-3y+z+5.$

2511. $u=e^{x^2+y^2+z^2}.$

2512. $u=(xy)z.$

2513. $u=z^{xy}.$

2514. $u=\arccos^2\dfrac{x+y}{z}.$

2515. $u=\operatorname{ctg}\dfrac{z+\sqrt{y}}{z-\sqrt{y}}.$

2516. $u=\ln^3\left(\sqrt{xyz}+\dfrac{1}{x+z}\right).$

2517. $u=\cos^2\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

2518. $f(x,y)=x^2+y^3.$ იპოვეთ $f'_x(2;3)$, $f'_y(2;3)$.

2519. $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}.$ იპოვეთ $f'_x(2;1)$, $f'_y(2;1)$.

2520. $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$. იპოვეთ $f'_x(1; 2; 0)$, $f'_y(1; 2; 0)$. $f'_z(1; 2; 0)$.

2521. $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz$,
იპოვეთ $f'_x(0; 0; 1)$, $f'_y(0; 0; 1)$, $f'_z(0; 0; 1)$.

იპოვეთ სრული დიფერენციალები შემდეგი ფუნქციებისა:

2522. $z = x^2 y^3$.

2523. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

2524. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$.

2525. $z = \ln xy$.

2526. $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

2527. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$.

2528. $z = \sin(x^2 + y^2)$.

2529. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

2530. $z = \ln\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$.

2531. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

2532. $z = \frac{y^2 + x^2}{x^3}$.

2533. $z = \left(x^2 y + \frac{y}{x}\right)^3$.

2534. $z = x \cdot y^x$.

2535. $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 3xy}$.

2536. $z = 2^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

2537. $z = tg\left(\frac{y}{x} + 1\right)$.

2538. $z = \operatorname{ctg}\frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

2539. $z = \ln\cos\frac{x}{y}$.

2540. $u = xyz$.

2541. $u = x^{yz}$.

2542. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2543. $u = 3^{xy} \cdot \operatorname{tg} z$.

2544. $u = z^{\cos x + \cos y}$.

2545. $u = (\cos x + \cos y)^z$.

2546. გამოთვალეთ $f(x, y) = x^2 y$ ფუნქციის სრული ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = 0{,}5$.

2547. გამოთვალეთ $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ფუნქციის სრული ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

2548. გამოთვალეთ $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ ფუნქციის ნაზრდი, რომელსაც იგი მიიღებს $x = 1$, $y = 2$ მნიშვნელობებიდან $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 2 + k$ მნიშვნელობებზე გადასვლისას.

2549. გამოთვალეთ $f(x, y) = x^2 y$ ფუნქციის ნაზრდი, რომელსაც იგი მიიღებს $x = 1$, $y = 1$ მნიშვნელობებიდან $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 1 + k$ მნიშვნელობებზე გადასვლისას.

გამოთვალეთ მიახლოებით:

2550. $(1,02)^{3,01}$. **2551.** $\sqrt{(4,05)^2+(2,93)^2}$.

2552. $(1,02)^3\cdot(0,97)^2$. **2553.** $\operatorname{arctg}\dfrac{5,01}{4,98}$.

2554. მართკუთხედის ერთი გვერდი $a=10$ სმ, ხოლო მეორე — $b=24$ სმ. როგორ შეიცვლება მართკუთხედის l დიაგონალი, თუ a გვერდს გავადიდებთ 4 მმ-ით, ხოლო b გვერდს შევამცირებთ 1 მმ-ით?

2555. კონუსის სიმაღლე $H=30$ სმ, ფუძის რადიუსი $R=10$ სმ. როგორ შეიცვლება კონუსის მოცულობა, თუ H-ს გავადიდებთ 3 მმ-ით, ხოლო R-ს შევამცირებთ 1 მმ-ით?

§ 3. რთული ფუნქციის გაწარმოება. სრული წარმოებული

1. თუ $z=F(x, y)$, სადაც $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, მაშინ z ფუნქციის წარმოებული t-თი (სრული წარმოებული) გამოითვლება

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}$$

ფორმულით. კერძოდ, თუ t ემთხვევა ერთ-ერთ არგუმენტს, მაგალითად, x-ს, მაშინ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}.$$

აქ F, f და φ წარმოებადი ფუნქციებია.

2. თუ $z=F(x, y)$, სადაც $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$ და თუ F, f და φ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}.$$

აქ u და v დამოუკიდებელი ცვლადებია.

მაგალითი. იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$, თუ $z=\dfrac{x}{y}$, სადაც $x=e^t$, $y=\ln t$.

$$\triangleright.\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},\quad \frac{dx}{dt}=e^t,\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{y}\,e^t-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{e^t}{\ln t}-\frac{e^t}{t\cdot\ln^2 t}=\frac{e^2(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}.\quad \triangleleft$$

მაგალითი. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z=\frac{x^2}{y}$, $x=u-2v$, $y=2v+v$.

$$\triangleright.\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\cdot 2=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2x}{y}(-2)-\frac{x^2}{y^2}=-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right).\ \triangleleft$$

2556. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ

1) $z=\frac{x}{y}$, $x=e^t$, $y=\ln t$. 2) $z=\arcsin(x-y)$, $x=3t, y=4t^3$.

3) $z=e^{2x^2-2y^2}$, $x=\cos t$, $y=\sin t$. 4) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$.

5) $z=\operatorname{arctg}(x+y)$, $x=t^3$, $y=\cos 2t$. 6) $z=\ln(x^3+y^3)$, $x=2^{t^2}$, $y=t^4$.

7) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x=\operatorname{tg}\sqrt{t}$, $y=\sqrt{t}$.

8) $z=3^{4x^2+y^2}$, $x=\cos\frac{4}{t}$, $y=\ln t$.

9) $z=\cos\frac{x+2y}{\sqrt{xy}}$, $x=\operatorname{sh}2t$, $y=2t$.

10) $z=(1+x^2)^y$, $x=\operatorname{tg}t$ $y=\sin t$.

11) $z=\operatorname{tg}(x^2-y^2)$, $x=2^{1-\cos t}$, $y=\ln t$.

12) $z=\frac{x+y-1}{\ln(x+y)}$, $x=4\sin^2 t$, $y=\sin^2 2t$.

13) $z=\frac{y+\cos 3x}{xy}$, $x=t^3$, $y=(t^2+1)^5$.

14) $z=\left(1-\operatorname{tg}\frac{y}{x}\right)^3$, $x=e^{2t}$, $y=e^{t-1}$.

15) $z=\ln(1+xy)$, $x=\ln^3 t$, $y=1+\sqrt[4]{t}$

16) $z=\ln\frac{x}{\sqrt{y}}$, $x=3^{t^2}$, $y=\sqrt{t^2+1}$.

17) $z=\operatorname{arctg}\frac{xy}{x^2+y^2}$, $x=\operatorname{tg}^2 t$, $y=t^2$.

18) $z=\left(xy+\frac{y}{x}\right)^{1/3}$, $x=\sin^2 t$, $y=t^2$.

19) $z = e^{\arcsin (x-y)}, \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{2}{t^2}.$

20) $z = \frac{x+y}{x-y}, \quad x = t\sin^3 t, \quad y = \cos t$

2557. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ

1) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad y = x^2.$ 2) $z = x^2 + \sqrt{y} = \sin x.$

2558. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ

1) $u = xyz, \quad x = t^3 + 1, \quad y = \ln t, \quad z = \operatorname{tg} t.$

2) $u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = H.$

2559. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ

1) $z = \frac{x^2}{y}, \quad x = u - 2v, \quad y = v + 2u,$

2) $z = x + y^2, \quad x = u^2 + \sin v, \quad y = \ln(u+v).$

3) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad x = u\sin v, \quad y = u\cos v.$

4) $z = e^{x-2y}, \quad x = \sin u, \quad y = u^3 + v^2.$

5) $z = e^{x^2-3y^2}, \quad x = \ln(u^2+v) \quad y = \frac{u}{v}.$

6) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad x = \frac{\sin v}{u}, \quad y = \frac{u^2}{v-1}.$

7) $z = x^2 + y^3, \quad x = u^2\sin v, \quad y = \ln(u+v).$

8) $z = x^2 + \sqrt{2y}, \quad x = \frac{u}{v}, \quad y = \sin\frac{u}{v}.$

9) $z = x\operatorname{arctg} y, \quad x = \frac{u^3}{1+v^2}, \quad y = \frac{v^3}{1+u^2}.$

10. $z = x^{y^2}, \quad x = u + \frac{v}{u}, \quad y = v + \frac{u}{v}.$

11) $z = \ln\sin\frac{x+y}{2}, \quad x = e^{uv}, \quad y = \frac{u}{v}.$

12) $z = (x+y)^y, \quad x = 2^{uv}, \quad y = uv.$

13) $z = \sqrt{x^3 + y^3 - 3xy}\,,\ x = \cos\frac{u}{v}\,,\quad y = u^2.$

14) $z = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^3,\ x = \ln\frac{u}{v}\,,\quad y = \frac{u}{v}\,.$

15) $z = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}\,,\quad x = \frac{u}{\cos v}\,,\quad y = \frac{v}{\sin u}\,.$

16) $z = \cos\ln(x + y),\quad x = u^2 + v,\quad y = \frac{u}{v - 2}\,.$

17) $z = y^{\ln x},\ x = u^2 + v^2,\quad y = 1 + u + v.$

18) $z = \frac{x^2 + xy}{y^2 - xy}\,,\quad x = \operatorname{tg}\frac{u}{v}\,,\quad y = \frac{\ln u}{v}\,.$

§ 4. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალები

განსაზღვრება: $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულებს x-ით (x, y) წერტილში, თუ ისინი არსებობენ, უწოდებენ $z = f\,(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს (x, y) წერტილში და აღნიშნავენ შესაბამისად

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,\ y) = z''_{x^2}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{yx}(x, y) = z''_{yx}.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციების კერძო წარმოებულები y-ით (x, y) წერტილში (თუ ისინი არსებობენ)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f''_{xy}(x,\ y) = z''_{x\cdot y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y) = z''_{y^2}\,.$$

თუ f ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები (ყველა ან ერთი რომელიმე) არსებობს რაიმე არეზე, მაშინ შეიძლება დაისვას სა-

კითხი მესამე რიგის კერძო წარმოებულების არსებობის შესახებ და ა. შ.

საზოგადოდ, $f(x, y)$ ფუნქციის $m-1$ $(m=1, 2, \ldots)$ რიგის კერძო წარმოებულის კერძო წარმოებულს (დამოუკიდებელი ცვლადებიდან ნებისმიერით) ეწოდება ამ ფუნქციის m რიგის კერძო წარმოებული.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ფუნქციის ნულოვანი რიგის კერძო წარმოებულის ქვეშ ვგულისხმობთ თვით ფუნქციას.

ფუნქციის კერძო წარმოებულს, რომლის რიგი მეტია ერთზე, ეწოდება მაღალი რიგის კერძო წარმოებული.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა: $z=f(x, y)$ ფუნქციის მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს ს რ უ ლ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი ეწოდება მისი პირველი რიგის სრული დიფერენციალის დიფერენციალს და ასე აღინიშნება: $d^2z=d(dz)$. ანალოგიურად, $d^3z=d(d^2z)$ და, საზოგადოდ $d^nz=d(d^{n-1}z)$. თუ x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, მაშინ z ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი მოიძებნება

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

ფორმულით, რომელიც სიმბოლურად ასე ჩაიწერება: $d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$.

ანალოგიურად, $d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z$ და ა. შ.

თუ $z=f(x, y)$, სადაც x და y ერთი ან რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებია, მაშინ

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $f(x, y)=xy+\cos(x-y)$ ფუნქციის მეორე რიგის ყველა წარმოებული და მეორე რიგის დიფერენციალი.

გვაქვს:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y-\sin(x-y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x+\sin(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\cos(x-y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1+\cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\cos(x-y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1+\cos(x-y).$$

$$d^2z=-\cos(x-y)\,dx^2+2(1+\cos(x-y))\,dx\,dy-\cos(x-y)dy^2.$$

იპოვეთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

2560. $z = \ln(x^2 + y)$.

2561. $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$.

2562. $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy$.

2563. $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$.

2564. $z = e^x \ln y + \sin y \cdot \ln x$.

2565. $z = \cos xy$.

2566. $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}}$.

2567. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

2568. $z = \dfrac{y^2}{2x+y}$.

2569. $z = y^x$.

2570. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x-2y}{x+2y}$.

2571. $z = 2^{\sin(xy)}$.

2572. $z = \ln(x^3 + y^2)$.

2573. $z = x \ln \dfrac{y}{x}$.

2574. $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

2575. $z = (x-2)^{y+1}$.

2576. $z = e^{x^2+y^2}$.

2577. $z = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^2$.

2578. $z = (x^2 + xy)\cos\dfrac{x}{y}$.

2579. $z = \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{y}$.

2580. $u = xy + yz + zx$.

2581. იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, თუ $z = \sin xy$.

2582. იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, თუ $z = e^{xy^2}$.

2583. იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. თუ $u = x^a y^b z^c$.

2584. იპოვეთ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, თუ $u = e^{xy}\sin z$.

2585. იპოვეთ $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$, თუ $u = z^2 e^{x+y^2}$.

2586. $z = x^y$. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2587. $z = e^x(\cos y + x \sin y)$. აჩვენეთ, რომ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2588. იპოვეთ $f''_{xx}(0;0)$, $f''_{xy}(0;0)$, $f''_{yy}(0;0)$, თუ $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n$.

2589. $r = \sqrt{x^2 + y^2 \quad z^2}$. იპოვეთ $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$.

1. თუ $f(x, y)=0$ განტოლება, სადაც $f(x, y)$ არის x-ითა და y-ით წარმოებადი ფუნქცია, განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის ფუნქციას და $f'_y(x, y) \neq 0$, მაშინ ამ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \tag{1}$$

ფორმულით. მაღალი რიგის წარმოებულები მოიძებნება (1) ტოლობის მიმდევრობითი გაწარმოებით. ამასთან, მხედველობაში მიიღება, რომ y არის x-ის ფუნქცია.

2. ანალოგიურად, თუ $f(x, y, z)=0$ განტოლება, სადაც $f(x, y, z)$ არის x, y, z ცვლადების მიმართ წარმოებადი ფუნქცია, განსაზღვრავს z-ს, როგორც x და y დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქციას და $f'_z(x, y, z) \neq 0$, მაშინ ამ არაცხადი ფუნქციის კერძო წარმოებულები მოიძებნება

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)} \tag{2}$$

ფორმულებით.

თუ ორი განტოლების სისტემა

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0, \\ F_2(x, y, u, v) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

განსაზღვრავს u-სა და v-ს, როგორც x და y ცვლადების ფუნქციებს და დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ ამ ფუნქციების სრული დიფერენციალების მოსაძებნად საჭიროა გავადიფერენციროთ (3) განტოლებები და მიღებული სისტემა ამოვხსნათ du-სა და dv-ს მიმართ; ამით ვიპოვოთ u და v ფუნქციების სრულ დიფერენციალებს, ხოლო dx-ისა და dy-ის კოეფიციენტები მოგვცემს შესაბამის კერძო წარმოებულებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. იპოვეთ $\dfrac{dy}{dx}$, თუ $x^2 + y^3 + e^{xy} = 0$.

◁ მოცემული განტოლების მარცხენა ნაწილი აღვნიშნოთ $F(x, y)$-ით. ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები: $F'_x(x, y) = 2x + ye^{xy}$, $F'_y(x, y) = 3y^2 + xe^{xy}$. აქედან (1) ფორმულით ვღებულობთ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x + ye^{xy}}{3y^2 + xe^{xy}}. \ \triangleright$$

მაგალითი. იპოვეთ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, თუ $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

◁. მოცემული განტოლების მარცხენა ნაწილი აღვნიშნოთ $F(x, y, z)$-ით. ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები:

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1, \quad F'_z(x, y, z) = 6z - y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{2x}{y - 6z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{1 - 4y - z}{y - 6z}. \ \triangleleft$$

2690. იპოვეთ $\dfrac{dy}{dx}$, თუ

1) $x^2 - 2xy + y^2x + x + y - 2 = 0$
2) $x^2 + 3xy - y^2x - 2x + 3y + 5 = 0$.
3) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
4) $x^2 - 2xy^2 + x + 2y - 2 = 0$.
5) $y^2x^3 + \sqrt{x^2 + 3y} - 5 = 0$.
6) $y^3x^2 - \sqrt[3]{x + 2y} - 7 = 0$.
7) $yx^4 + \sqrt[4]{x + 5y} - 6 = 0$.
8) $xe^y - 2xy^2 + y - 10 = 0$.
9) $e^y - e^x + xy = 0$.
10) $e^{y-1} - e^{x^2} + xy^2 = 0$.
11) $e^{2y} - e^{x-3} + (x - 3)y = 0$.
12) $(x + 1)e^{y-1} + (x - 1)^3y^2 - 2 = 0$.
13) $x\ln y + y - x^3y^2 - 2 = 0$.
14) $x^2\ln(y - 1) + y - x^3y - 4 = 0$.
15) $x^3\cos y^2 - x^2\sin(y - 1) + 3y - 5x + 3 = 0$.
16) $e^{4y} - e^{x-2} + (x - 2)y^3 = 0$.
17) $x^5\,\mathrm{tg}3y - x^3y^2 - (1 - x)e^y + 1 = 0$.
18) $y^3\ln(1 + x) - e^{xy} - y + 5 = 0$.
19) $y^2\ln(2 - e^{xy}) - xy - e^4 + 1 = 0$.
20) $y^3x^5 + \sqrt{x^2 + 4y} - 32 = 0$.
21) $x^2\ln y + y - xy^3 - 2 = 0$
22) $(x - 1)y^3 - x^5\ln y + 1 = 0$.
23) $(x + 1)^2y^5 - x^4e^y + e^2 = 0$.
24) $x^2\cos^2 y - x\ln y + 3y - 5x - 9 = 0$.
25) $(x - 2)e^{y^2} - (x - 2)^2y^3 + 2y - 6 = 0$.
26) $x^2e^{2y} - 2xy^2 + y - 10 = 0$.
27) $e^{2y} - e^{2x} + 4xy = 0$.
28) $e^{2y-1} - e^{4x^2} + 8xy^2 = 0$.
29) $xe^{2y} - 8xy^2 + 2y - 10 = 0$.
30) $(x + 1)e^{2y-1} + (x - 3)^3y^2 - 4 = 0$.

2591. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ

1) $x^2+y^2+z^2-6x=0$. 2) $x^2-2y^2+3xz^3-yz+y=0$.

3) $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$. 4) $e^{-xy}-2z+e^z=0$.

5) $e^z-x^3y^2z=0$. 6) $\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

§ 6. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი

თუ ზედაპირის განტოლება მოცემულია $F(x, y, z)=0$ სახით, სადაც $F(x, y, z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $M(x, y, z)$ წერტილში, მაშინ ზედაპირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებებია:

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0, \quad \frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{F'_z},$$

სადაც X, Y, Z მხები სიბრტყის ან ნორმალის მიმდინარე კოორდინატებია.

თუ ზედაპირის რომელიმე წერტილზე $F'_x=F'_y=F'_z=0$, მაშინ ამ წერტილზე (განსაკუთრებული წერტილი) ზედაპირს არ ექნება არც მხები სიბრტყე და არც ნორმალი.

2592. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=14$ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1;\ 2;\ 3)$ წერტილში.

2593. იპოვეთ $z=x^2+y^2$ ელიფსური პარაბოლოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1;\ 1;\ 3)$ წერტილში.

2594. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ კონუსის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(4;\ 3;\ 4)$ წერტილში.

2595. იპოვეთ $4x^2+9y^2+36z^2=36$ ელიფსოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები იმ წერტილში, სადაც $x=2$, $y=1$, $z>0$.

2596. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(x_1, y_1, z_1)$ წერტილში.

2597. იპოვეთ $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1;\ 2;\ -1)$ წერტილში.

2598. იპოვეთ $x^2+2y^2+3z^2=21$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $x+4y+6z=0$ სიბრტყის პარალელურია.

2599. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=36$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $x+y-z=0$ სიბრტყის პარალელურია.

2600. დაწერეთ $x^2+y^2=z^2$ ზედაპირის ნორმალის განტოლება M (3; 4; 5) წერტილში. ზედაპირის რომელ წერტილში არ არის ნორმალი განსაზღვრული?

2601. იპოვეთ $2z=x^2-y^2$ ზედაპირის M (2; 2; 0) წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

2602. იპოვეთ $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$ ზედაპირის მხები სიბრტყე M (2; 2; 2) წერტილში.

2603. იპოვეთ $z=xy$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ წრფის მართობულია.

2604. დაამტკიცეთ, რომ $xyz=a^3$ ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყის მიერ საკოორდინატო სიბრტყეებთან შედგენილი ტეტრაედრის მოცულობა მუდმივი სიდიდეა. იპოვეთ ეს მოცულობა.

2605. დაამტკიცეთ, რომ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ ზედაპირის ყოველ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყის მიერ საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთების ჯამი არის მუდმივი a სიდიდე.

2606. რა კუთხით იკვეთება $x^2+y^2=R^2$ ცილინდრი და $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ სფერო $M\left(\frac{R}{2};\ \frac{R\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$ წერტილში?

2607. აჩვენეთ, რომ $xy=az^2$, $x^2+y^2+z^2=b$, $z^2+2x^2=c\,(z^2+2y^2)$ ზედაპირები ორთოგონალურია.

§ 7. ტეილორის ფორმულა ორი ცვლადის ფუნქციისათვის

თუ $z=f(x, y)$ ფუნქციას $a, b)$ წერტილის მიდამოში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $(n+1)$ რიგამდე (უკანასკნელის ჩათვლით), მაშინ ამ წერტილის მიდამოში მართებულია ტეილორის შემდეგი ფორმულა:

$$f(x, y)=f(a, b)+\frac{1}{1!}\left[f'_x(a, b)(x-a)+f'_y(a, b)(y-b)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a, b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]+$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+R_n(x, y), \qquad (1)$$

სადაც

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f[a + \\ + \Theta(x-a),\ b + \Theta(y-b)],\ (0 < \Theta < 1).$$

სხვა აღნიშვნებით:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}[h f'_x(x, y) + k f'_y(x, y)] + \frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x, y) + \\ + 2hk f''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{yy}(x, y)] + \cdots + \frac{1}{n!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x, y) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x+\Theta h,\ y+\Theta k). \qquad (2)$$

(1) ფორმულის კერძო შემთხვევას, როცა $a=b=0$, ეწოდება მაკლორენის ფორმულა.

2608. დაშალეთ $f(x+h,\ y+k)$ ფუნქცია h-ისა და k-ს მთელ და დადებით ხარისხებად, თუ $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$.

2609. დაშალეთ $f(x+h,\ y+k)$ ფუნქცია h-ისა და k-ს მთელ და დადებით ხარისხებად, თუ $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

2610. დაშალეთ $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით (—2; 1) წერტილის მიდამოში.

2611. დაშალეთ $f(x, y) = e^{x+y}$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით (1; —1) წერტილის მიდამოში მე-3 ხარისხის წევრებამდე (უკანასკნელის ჩათვლით).

2612. დაშალეთ $f(x, y) = e^x \sin y$ ფუნქცია მე-3 ხარისხის წევრებამდე მაკლორენის ფორმულით.

2613. დაშალეთ $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$ ფუნქცია მე-3 ხარისხის წევრებამდე მაკლორენის ფორმულით.

§ 8. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

$f(x, y)$ ფუნქციას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ M_0 წერტილის საკმაოდ მცირე მიდამოს ყოველი $(x, y) \neq \neq (x_0, y_0)$ წერტილისათვის შესრულებულია $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ უტოლობა (ან შესაბამისად $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$).

$f(x, y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობებია:

$$f'_x(x, y) = 0,\ f'_y(x, y) = 0. \qquad (1)$$

იმ (x_0, y_0) წერტილს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებს (1) განტოლებათა სისტემას, **სტაციონარული წერტილი** ეწოდება. ზოგად შემთხვევაში $f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის (x_0, y_0) წერტილში კერძო წარმოებულები ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს.

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები ასეთია:

აღვნიშნოთ $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$, სადაც (x_0, y_0) სტაციონარული წერტილია; თუ:

1) $\Delta > 0$, მაშინ $\begin{cases} f(x_0, y_0) = z_{\max}, & \text{როცა } A < 0, \\ f(x_0, y_0) = z_{\min}, & \text{როცა } A > 0. \end{cases}$

2) $\Delta < 0$, არა გვაქვს ექსტრემუმი;

3) $\Delta = 0$, მაშინ გვაქვს საეჭვო შემთხვევა, რომელიც დამატებით შესწავლას მოითხოვს.

მაგალითი. იპოვეთ ექსტრემუმი ფუნქციისა: $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$.

$\triangleright$, ვიპოვოთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} 2(x-1) = 0, \\ 2(y-2) = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (1; 2). მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის სტაციონარული წერტილია (1; 2). ვიპოვოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$. $D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4 > 0$ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ M წერტილში ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, ვინაიდან $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1;\,2)} = 2 > 0$, ამიტომ $M(1; 2)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია. $z_{\min} = -1$. $\triangleleft$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები:

2614. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

2615. $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$.

2616. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

2617. $z = x^2 - xy + y^2 - 3x - 2y + 2$.

2618. $z = x^3 + y^3 + 3xy$.

2619. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

2620. $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

2621. $z = x^2 + y^2 - 3xy - 27$.

2622. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2623. $z = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1$.

2624. $z=(x-1)^2+y^2$.

2625. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

2626. $z=(x-2)^2+4y^2$.

2627. $z=xy^2(1-x-y), (x>0,\ y>0)$

2628. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

2629. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

2630. $z=x^3y^2(b-x-y), (x>0,\ y>0$.

2631. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

2632. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

2633. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

2634. $z=x^3+y^3+3xy$.

2635. $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$

2636. $z=x^2+3xy-17x-12y$.

2637. $z=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

2638. $z=x^2-xy+y^2-3x-2y+2$.

2639. $z=2-\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

2640. $z=x^3+y^3-3xy+10$.

2641. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

2642. $z=x^2+y^2-3xy-27$.

2643. $z=(x-2)^2+8(y-3)^2$.

2644. $z=e^{x/2}(x+y^2)$.

2645. $z=x^4+y^2-2x$.

2646. $z=e^x(2x+y^2)$.

2647. $z=x^3+y^3+9xy+27$.

2648. $z=4x^2+2xy+y^2-4x+y$.

2649. $z=x^2-y^2+2e^{-x^2}$.

2650. $z=4x^3y^2(6-x-2y)$.

2651. $z=x^3-3x+y^2$.

2652. $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

2653. $z=3xy-x^3-y^3$.

2654. $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

2655. $z=e^{x/2}(x+y^2)$.

2656. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

2657. $z=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$, $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$.

2658. $z=x^2-2xy^2+y^4-y^5$.

2659. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

პირობითი ექსტრემუმი. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $z=f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი იმ პირობით, რომ $\varphi(x, y)=0$, საჭიროა შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y)-\lambda\varphi(x,\ y),$$

სადაც λ უცნობი მამრავლია, და მოვძებნოთ ამ ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმი. ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა დაიყვანება სამი განტოლების სისტემამდე:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}\equiv\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial F}{\partial y}\equiv\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\&\varphi(x,\ y)=0,\end{aligned}\right. \qquad (1)$$

საიდანაც განისაზღვრება x, y და λ, ხოლო საკმარისი პირობაა

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & F''_{x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

ამასთან, როცა $\Delta > 0$, მაშინ M_0 არის პირობითი მინიმუმის წერტილი, ხოლო, თუ $\Delta < 0$, მაშინ M_0 პირობითი მაქსიმუმის წერტილია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. იპოვეთ $z = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები $x^2 + y^2 \leqslant 1$ წრეში.

თავდაპირველად ვიპოვოთ z ფუნქციის სტაციონარული წერტილები წრის შიგნით. $z'_x = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $z'_y = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$.

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0,\ 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0,\quad x = y = \frac{1}{2}.$$

ამგვარად, z ფუნქციას აქვს ერთი სტაციონარული წერტილი $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

$z''_{x^2} = 2,\ z''_{xy} = 0,\ z''_{y^2} = 2.\ D(x, y) = z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - (z''_{xy})^2 = 2 \cdot 2 = 4.$

მაშასადამე,

$$D\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) > 0,\ z''_{x^2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) > 0,$$

ამიტომ M_0 არის z ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. რადგანაც z ფუნქციას არ აქვს სხვა სტაციონარული წერტილი, ამიტომ

$$\min_{x^2+y^2 \leqslant 1} z = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 0.$$

უდიდესი მნიშვნელობის მოსაძებნად ვიპოვოთ z ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმი L წრეწირზე, რომლის განტოლებაა $x^2 + y^2 - 1 = 0$. ამისათვის შევადგინოთ და ამოვხსნათ (1) სისტემა

$$F(x, y, \lambda) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

$$F'_x = 2(1 - \lambda)x - 1,\quad F'_y = 2(1 + \lambda)y - 1,\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1,$$

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x = \frac{1}{2}, \\ (1 + \lambda)y = \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

ამოვხსნით რა მოცემულ სისტემას, მივიღებთ $x_0 = y_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. მაშასადამე, z ფუნქციას L წრეწირზე აქვს ორი სტაციონარული წერტილი $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ და $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. A წერტილი შეესაბამება $\lambda = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ მნიშვნელობას, ხოლო B წერტილი შეესაბამება $\lambda = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ მნიშვნელობას. გამოვიკვლიოთ ეს წერტილები.

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 1, \quad \varphi'_x\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

$$\varphi'_y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2};$$

$$F(x, y, \lambda) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 1),$$

$$F''_{x^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

$$F''_{xy}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

$$F''_{y^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -4\sqrt{2} < 0.$$

მაშასადამე, A არის z ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმის წერტილი წრის L საზღვარზე (წრეწირზე):

$$z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

B წერტილში z ფუნქციას აქვს პირობითი მინიმუმი, რომელიც ტოლია $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$, რადგან $\Delta_B = 4\sqrt{2} > 0$. ამგვარად, z ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს A წერტილში, რომელიც ტოლია$\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$-ის.

იპოვეთ პირობითი ექსტრემუმი შემდეგი ფუნქციებისა:

2660. $z=xy,\ x+y=1.$ **2661.** $z=x^2+y^2,\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4.$

2662. $z=\cos^2 x+\cos^2 y,\ y-x=\dfrac{\pi}{4}.$ **2663.** $z=x+2y,\ x^2+y^2=5.$

2664. $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\ x+y=2.$ **2665.** $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4}.$

2666. $z=\exp\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right),\ x+y=2.$ **2667.** $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}.$

2668. $z=6-4x-3y,\ x^2+y^2=1.$ **2669.** $z=x^2+y^2,\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1.$

2670. იპოვეთ $z=1+x+2y$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1$ არეში.

2671. იპოვეთ $z=x^2+2xy-4x+8y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=2$ წრფეებით შემოსაზღვრულ მართკუთხედში.

2672. იპოვეთ $z=x^2y\,(2-x-y)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x=0,\ y=0,\ x+y=6$ წრფეებით შემოსაზღვრულ სამკუთხედში.

2673. იპოვეთ $z=x^2+y^2-xy+x+y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x\leqslant 0,\ y\leqslant 0,\ x+y\geqslant -3$ არეში.

2674. იპოვეთ $z=x^2-y^2$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x^2+y^2\leqslant 4$ წრეში.

2675. იპოვეთ $z=x+y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x^2+y^2\leqslant 1$ წრეში.

2676. დადებითი a რიცხვი დაშალეთ სამ ისეთ დადებით შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

XII თავი

დიფერენციული განტოლებები

§ 1. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა:

$$F(x,\ y,\ y')=0. \qquad (1)$$

თუ ეს განტოლება შეიძლება ამოიხსნას y'-ის მიმართ, მაშინ

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

სადაც $f(x, y)$ მოცემული ფუნქციაა. (2) სახის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ფორმით:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{3}$$

სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ მოცემული ფუნქციებია.

$y' = f(x, y)$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ეწოდება $y = \varphi(x, c)$ ფუნქციას, რომელიც ერთ ნებისმიერ c მუდმივს შეიცავს და c-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. როცა დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაწერილია არაცხადი $\Phi(x, y, c) = 0$ სახით, მაშინ მას ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი ეწოდება $y = \varphi(x, c_0)$ ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი $y = \varphi(x, c)$ ამონახსნიდან ნებისმიერი c მუდმივის კერძო $c = c_0$ მნიშვნელობისათვის; $\Phi(x, y, c_0) = 0$ დამოკიდებულებას კერძო ინტეგრალი ეწოდება.

$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$ მიმართულებათა ერთობლიობას ეწოდება (2) განტოლების მიმართულებათა ველი. $f(x, y) = k$ წირებს, რომელთა წერტილებშიც ველის დახრილობას აქვს მუდმივი k-ს ტოლი მნიშვნელობა, ეწოდება იზოკლინები.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $y = Cx^3$ ფუნქცია წარმოადგენს $xy' - 3y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს.

◁. $y = Cx^3$ ფუნქციის გაწარმოებით ვღებულობთ $y' = 3Cx^2$. შევიტანოთ y-ისა და y'-ის მნიშვნელობები $xy' - 3y = 0$ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$3Cx^3 - 3Cx^3 = 0.$$

მაშასადამე, $y = Cx^3$ წარმოადგენს $xy' - 3y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს. მიღებული ზოგადი ამონახსნისაგან გამოყოთ ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(1) = 1$ საწყის პირობას. გვექნება: $1 = C$. მაშასადამე, საძიებელი კერძო ამონახსნი იქნება: $y = x^3$.

მაგალითი 2. შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება $x^2 + y^2 = 2ax$ წირთა ოჯახისათვის.

გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax, \\ 2x + 2yy' = 2a. \end{cases}$$

სისტემის მეორე განტოლებიდან ვღებულობთ $a=x+yy'$. თუ a-ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ სისტემის პირველ განტოლებაში, გვექნება:

$$x^2+y^2=2x(x+yy') \text{ ანუ } y^2-x^2=2xyy'.$$

ეს არის საძიებელი დიფერენციალური განტოლება.

აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებას:

2677. $y=\sin x-1+ce^{-\sin x}$, $\quad y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$

2678. $y=\frac{c^2-x^2}{2x}$. $\quad x+y+x\frac{dy}{dx}=0.$

2679. $x^2-xy+y^2=c^2$, $\quad (x-2y)y'=2x-y.$

2680. $y=x+ce^y$, $\quad (x-y+1)y'=1.$

2681. $y=c_1x+c_2x^2$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x^2}=0.$

2682. $y=c_1x+\frac{c_2}{x}+c_3$, $\quad y'''+\frac{3}{x}y''=0.$

შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლებები წირთა მოცემული ოჯახებისათვის:

2683. $y=ax$.

2684. $x^2+y^2=a^2$.

2685. $y^2=2px$.

2686. $y=ax+a^2$.

2687. $y=ae^{x/a}$.

2688. $\ln\frac{x}{y}=1+ay$.

2689. $y=c_1(x-c_2)^2$.

2690. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$.

§ 2. განცალებადცვლადიანი დიფერენციალური განტოლება

$$M(x)\,dx+N(y)dy=0$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება განცალებულ ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ინტეგრალია:

$$\int M(x)\,dx+\int N(y)\,dy=C,$$

ხოლო

$$M_1(x)N_1(y)\,dx+M_2(x)N_2(y)\,dy=0$$

განტოლებას ეწოდება განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ინტეგრალია

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = \int \frac{N_2(x)}{N_1(y)}dy = c.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $yy'+x=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და ის კერძო ინტეგრალი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(1)=\sqrt{3}$ საწყის პირობას.

▷. $ydy + xdy = 0,$

$$\int ydy + \int xdx = C,$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C,$$

$x^2 + y^2 = c^2$, C-ს ნებისმიერობის გამო $2c$ შევცვალეთ c^2-ით. მივიღეთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. ეს არის კონცენტრირებულ წრეწირთა ოჯახი, რომელთა ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. თუ გავითვალისწინებთ საწყის პირობას, მივიღებთ: $1+3=C^2$, $C^2=4$. მაშასადამე, საძიებელი კერძო ინტეგრალია $x^2+y^2=4$.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და სადაც მითითებულია იპოვეთ ის კერძო ინტეგრალები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს:

2691. $y' = 3x^2 - 2x + 1;\quad x = 1,\quad y = 2.$

2692. $xy' - y = 0;\quad x = \frac{1}{2},\quad y = 2.$

2693. $y' = y;\ x = -2,\ y = 4.$

2694. $(1 + y)\,dx - (1 - x)\,dy = 0.$

2695. $(1 + y^2)\,dx + xydy = 0.$

2696. $xyy' = 1 - x^2.$

2697. $y' \operatorname{tg} x = y.$

2698. $\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$

2699. $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0.$

2700. $y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0.$

2701. $(1+y^2)\,xdx + (1+x^2)\,dy = 0.$

2702. $xydx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$

2703. $ye^{2x}\,dx + (1 + e^{2x})\,dy = 0.$

2704. $y' = \cos(x + y).$

2705. $y' = \frac{1}{2x + y}.$

2706. $y' = 10^{x+y}$.

2707. $y' = e^{x+y}$.

2708. $xy' + 2y = xyy'$.

2709. $y' = (x-y)^2 + 1$.

2710. $y' = \sin(x - y)$.

2711. $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

2712. $(t^2 - x t^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 + x^2 t = 0$.

2713. $z dt - (t^2 - a^2)\, dz = 0$.

2714. $\varphi^2 dr + (r - a)\, d\varphi = 0$.

2715. $\sec^2\Theta \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi + \sec^2\varphi \operatorname{tg}\Theta\, d\Theta = 0$.

2716. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x)\sec^2 y dy = 0$.

2717. $\mathrm{soc}^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dx = 0$

2718. $y' \sin x = y \ln y;\ x = \dfrac{\pi}{2},\quad y = 1$.

2719. $(1 + e^x)\, yy' = e^x;\quad x = 1,\quad y = 1$.

2720. $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x;\quad x = \dfrac{\pi}{4},\quad y = \dfrac{1}{2}$.

§ 8 ერთგვაროვანი განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი მიყვანა შეიძლება $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ან $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ სახემდე, სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ერთიდაიგივე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია, ე. ი. არსებობს ისეთი $k \in Z$, რომ $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ და $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ ყოველი $t \neq 0$-თვის. $\dfrac{y}{x} = u$ ჩასმით პირველი რიგის ერთგვაროვანი განტოლება დაიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებამდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლება

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$$

▷. დავუშვათ $\dfrac{y}{x} = u$ ანუ $y = ux$, მაშინ $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. თუ მოცემულ განტოლებაში გავითვალისწინებთ აღნიშნულად ჩასმას, მივიღებთ:

$$u + x\frac{du}{dx} = u \ln u.$$

თუ მოვახდენთ ცვლადთა-განცალებას, მივიღებთ განცალებულ ცვლადებიან შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$\ln|\ln u - 1| = \ln x + \ln C,$$
$$\ln u - 1 = Cx.$$

თუ დავუბრუნდებით y ფუნქციას, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$\ln \frac{y}{x} = 1 + Cx,$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2721. $(y - x)\, y dx + x^2 dy = 0.$ **2722.** $(x - y)\, dx + x dy = 0.$

2723. $y dx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy = 0.$ **2724.** $y^2 dx + (x^2 - xy)\, dy = 0.$

2725. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx.$ **2726.** $xy^2 dy = (x^3 + y^3)\, dx.$

2727. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right) dx + x\cos\frac{y}{x}\, dy = 0.$ **2728.** $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}.$

2729. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$ **2730.** $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$

2731. $y' = \frac{x - y}{x + y}.$ **2732.** $yy' = 2y - x.$

2733. $(x^2 - 3y^2)\, dx + 2xy dy = 0;$ $y(2) = 1.$

2734. $xy dy - (x^2 + y^2)\, dx = 0;$ $y(-1) = 0.$

2735. $(x - y)\, dx + (x + y)\, dy = 0;$ $y(1) = 0.$

2736. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x};$ $y(-1) = 1.$

2737. $(\sqrt{xy} - x)\, dy + y dx = 0;$ $y(1) = 1.$

2738. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\, dx - x dy = 0;$ $y(1) = 0.$

§ 4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

დიფერენციალურ

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

განტოლებას, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ წარმოადგენს x-ის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს, ეწოდება პ ი რ ვ ე ლ ი რ ი გ ი ს წ რ ფ ი ვ ი

დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = e^{-\int P dx}\left(c + \int Q e^{\int P dx} dx\right)$$

ფორმულით.

მაგალითი. ამოვხსნათ $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$ განტოლება,

$$y = e^{\int \operatorname{tg} x dx}\left(C + \int \cos x e^{-\int \operatorname{tg} x dx} dx\right) =$$

$$= e^{-\ln|\cos x|}\left(C + \int \cos^2 x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left(C + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right).$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2739. $y' - \frac{y}{x} = x.$

2740. $y' + y = e^{-x}.$

2741. $(1 + x^2)\, y' - xy = x + x^3.$

2742. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3.$

2743. $y' - \frac{ny}{x} = e^x x^n.$

2744. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}.$

2745. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

2746. $y' + 2y = e^{3x}.$

2747. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x + 1)^3.$

2748. $(1 + y^2)\, dx = (\operatorname{arc\,tg} y - x)\, dy.$

2749. $xy' + y = x + 1;\ y(2) = 3.$

2750. $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1;\ y(1) = 0.$

2751. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};\ y(0) = 0.$

2752. $y' + y \cos x = \sin x \cos x;\ y(0) = 1.$

2753. $xy' + 2y = 3x;\ y(-2) = 0.$

2754. $(1 - x^2)y' + xy = 1;\ y(0) = 1.$

§ 5. ბერნულის განტოლება

ბერნულის განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n.$$

სადაც $n\neq 0$ და $n\neq 1$; $z=y^{1-n}$ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებამდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ $y'-y\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\sin x}y^3$ განტოლება. $y'y^{-3}-y^{-2}\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\sin x}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $y^{-2}=z$, მაშინ $-2y^{-3}y'=z'$. გვექნება:

$$z'+2z\operatorname{ctg}x=-\frac{2}{\sin x}$$

$$z=e^{-2\int\operatorname{ctg}x dx}\left(C-2\int\frac{1}{\sin x}e^{2\int\operatorname{ctg}x dx}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x}\left(C-2\int\sin x dx\right)=\frac{C+2\cos x}{\sin^2 x}.$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ y ფუნქციას, მივიღებთ:

$$y=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{C+2\cos x}}.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2755. $\frac{dy}{dx}+xy=xy^3$.

2756. $\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=-x^3y^2$.

2757. $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$.

2758. $ny^{n-1}\frac{dy}{dx}+y^n=x$.

2759. $\frac{dy}{dx}-\frac{\sin x}{3}y=-y^4\sin x$.

2760. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\ln x}{x}y^2$.

2761. $(1-x^2)y'-xy=xy^2$; $y(0)=0{,}5$.

2762. $\frac{dy}{dx}-\frac{x}{2(x^2-1)}y=\frac{x}{2y}$; $y(0)=1$.

2763. $3y'=(1-3y^3)y\sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

§ 6. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

პირველი რიგის

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

განტოლებას ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში, თუ

მისი მარცხენა ნაწილი რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალია:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du.$$

ე. ი.

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1}$$

ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

ამ შემთხვევაში $u(x, y) = c$ არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. $u(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება მოიძებნოს (1) განტოლებათა სისტემიდან.

$u(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება მოიძებნოს შემდეგი გზით: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ტოლობა ვაინტეგროთ x ცვლადით ფიქსირებული y-თვის. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი მუდმივი შეიძლება დამოკიდებული იყოს y-ზე. გვექნება:

$$u(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \varphi(y), \tag{3}$$

შემდეგ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\,dx + \varphi'(y) = N(x, y), \tag{4}$$

ტოლობიდან ნაპოვნ $\varphi(y)$ ფუნქციას შევიტანთ რა (3)-ში, მივიღებთ $u(x, y)$ ფუნქციას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$ განტოლება. შევამოწმოთ (2) პირობა, გვექნება:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2y) = 1.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლება არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში.

ვაინტეგროთ x-ით ტოლობა

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = 2x + y,$$

გვექნება:

$$u(x, y) = \int (2x + y)\, dx + \varphi(y) = x^2 + yx + \varphi(y), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y).$$

მე-(4) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$x + \varphi'(y) = x + 2y,$$

ე. ი.

$$\varphi'(y) = 2y, \ \varphi(y) = y^2 + C_1.$$

მაშასადამე,

$$u(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

სადაც C_1 ნულის ტოლადაა მიღებული. მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება სახე:

$$x^2 + xy + y^2 = C \quad \Delta$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2764. $(7x + 3y)\, dx + (3x - 5y)\, dy = 0.$

2765. $(3x^2y - 4xy^2)\, dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)\, dy = 0.$

2766. $3x^2 e^y\, dx + (x^3 e^y - 1)\, dy = 0.$

2767. $e^y\, dx + (x e^y - 2y)\, dy = 0.$

2768. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)\, dy = 0.$

2769. $(x \cos 2y + 1)\, dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$

2770. $y x^{y-1}\, dx + x^y \ln x dy = 0.$

2771. $\dfrac{x}{(x + y)^2} dx + \dfrac{2x + y}{(x + y)^2} dy = 0.$

2772. $\left(1 - \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) dy = 0; \quad x = 1, \quad y = 1.$

2773. $(x + e^{x/y})\, ex + e^{x/y} \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0; \ x = 0, \ y = 2.$

იპოვეთ $u(x, y)$ ფუნქცია, თუ:

2774. $du = 4(x^3 - xy^2)\, dx + 4(y^3 - x^2 y)\, dy.$

2775. $du = (3x^2 - 2xy + y^2)\, dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)\, dy.$

2776. $du = (x + \ln y)\, dx + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right) dy.$

2777. $du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

§ 7. მაინტეგრებელი მამრავლი

თუ $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ განტოლებაში $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ და არსებობს ისეთი $\mu(x, y)$ ფუნქცია, რომ

$$\mu M\, dx + \mu N dy = 0$$

არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ $\mu(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება მაინტეგრებელი მამრავლი.

მაინტეგრებელი მამრავლი ადვილად მოიძებნება შემდეგ შემთხვევებში:

1) როცა $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \Phi(x)$, მაშინ $\mu = e^{\int \Phi(x)\, dx}$;

2) როცა $-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \Phi_1(y)$, მაშინ $\mu = e^{\int \Phi_1(y)\, dy}$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2778. $(2 + 2x - y^2)\, dx - 2ydy = 0.$ 2779. $(\sin x + e^y)\, dx + \cos x dy = 0.$

2780. $(x^2 - y)\, dx + (x^2y^2 + x) dy = 0.$

2781. $(x \sin y + y)\, dx + (x^2 \cos y + x \ln x)\, dy = 0.$

2782. $2xy^3\, dx + (x^2y^2 - 1)\, dx = 0.$ 2783. $(1 + 3x^2 \sin y) dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0.$

2784. $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x)\, dy = 0.$ 2785. $(y \operatorname{tg} x + \cos x) dx - dy = 0.$

§ 8. პირველი რიგის არაწრფივი განტოლებები

თუ $F(x, y, y') = 0$ დიფერენციალური განტოლება არ არის პირველი ხარისხის y' წარმოებულის მიმართ, მაშინ ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია ასეთი განტოლების ინტეგრება.

1. განტოლება ცხადად არ შეიცავს y ფუნქციას, ე. ი. $F(x, y') = 0$.

ა) თუ ეს განტოლება ამოიხსნება y'-ის მიმართ, მივიღებთ $y' = \varphi(x)$, საიდანაც $y = \int \varphi(x) dx + C$;

ბ) თუ განტოლება ამოიხსნება x-ის მიმართ, მაშინ $x=f(y')$ და $x=f(p)$, $y=\int pf'(p)\,dp+C$ განტოლებათა სისტემა, სადაც $p=y'$, წარმოადგენს მოცემული განტოლების პარამეტრული სახის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2786. $xy'=\sqrt{1+y^2}$.

2787. $x^3+y'^2=x^2$.

2788. $x=2y'-\frac{1}{y'^2}$.

2789. $x=\sin y'+\ln y'$.

2790. $x=ay'+by'^2$.

2791. $e^{y'}+y'=x$.

2. მოცემული განტოლება ცხადად არ შეიცავს x ცვლადს

$$F(y,\,y')=0.$$

ა) თუ ეს განტოლება ამოიხსნება y'-ის მიმართ, ე. ი. $y'=\varphi(y)$, მაშინ $x=\int\frac{dy}{\varphi(y)}+c$ იქნება ზოგადი ამონახსნი;

ბ) თუ განტოლება ამოიხსნება y-ის მიმართ, მაშინ $y=f(y')$ და $x=\int\frac{f'(p)\,dp}{p}+C$, $y=f(p)$ განტოლებათა სისტემა, სადაც $p=y'$, წარმოადგენს მოცემული განტოლების პარამეტრული სახის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2792. $e^y(y'+1)=1$.

2793. $y'^2=\frac{1-y^2}{y^4}$.

2794. $y=y'^2+y'^3$.

2795. $y=y'^2+2\ln y'$.

2796. $y=y'\ln y'$.

2797. $y=e^{y'}\cdot y'^2$.

განსაზღვრეთ y' და ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2798. $yy'+y'^2=x^2+xy$.

2799. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$.

2800. $y'^2-\frac{xy}{a^2}=0$.

2801. $y'^2+2yy'\operatorname{ctg}x-y^2=0$.

§ 9. განსაკუთრებული წერტილები და ამონახსნები

1. **განსაკუთრებული წერტილები.** $y'=f(x,\,y)$ დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილები უნდა ვეძებოთ $f(x,\,y)$

ფუნქციის წყვეტის წერტილებსა და იმ წერტილებს შორის, სადაც არ არსებობს $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებული.

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების განსაკუთრებული წერტილები:

2802. 1) $y' = \frac{2y}{x}$; 2) $y' = \frac{y}{x}$. **2803.** $y' = -\frac{x}{y}$.

2804. $y' = -\frac{y}{x}$. **2805.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2. **განსაკუთრებული ამონახსნები.** $F(x, y, y') = 0$ განტოლებას, ზოგადი $\Phi(x, y, C) = 0$ ინტეგრალისა და კერძო ინტეგრალის გარდა, შეიძლება ჰქონდეს განსაკუთრებული ინტეგრალი, რომელიც არ მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან მუდმივის არავითარი კერძო მნიშვნელობისათვის.

განსაკუთრებული ამონახსნი გეომეტრიულად $\Phi(x, y, C) = 0$ წირთა ოჯახის მომვლებია. ის მიიღება C-ს გამორიცხვით

$$\Phi(x, y, C) = 0, \ \Phi'_c(x, y, C) = 0$$

განტოლებათა სისტემიდან, ან კიდევ $p = y'$-ის გამორიცხვით

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0$$

განტოლებათა სისტემიდან.

იპოვეთ ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნები:

2806. $y'^2 = 4(y-1)$. **2807.** $9yy'^2 - 4 = 0$.

2808. $y^2(1 + y'^2) = a^2$. **2809.** $y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0$.

2810. იპოვეთ $y'^2 + y^2 = 1$ განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$ წერტილზე

2811. იპოვეთ $y'^2 + y = 1$ განტოლების ორი ინტეგრალური წირი, რომლებიც გადიან $M\left(1; \frac{3}{4}\right)$ წერტილზე.

§ 10. ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები

1. **ლაგრანჟის განტოლება.** ლაგრანჟის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

სადაც $\varphi(y')$ და $\psi(y')$ წარმოადგენს y' წარმოებულის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს, რომელთაგან $\varphi(y') \neq y' \cdot y' = p$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება წრფივ განტოლებამდე.

2. **კლეროს განტოლება.** ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = xy' + \psi(y').$$

$y = Cx + \psi(C)$ წარმოადგენს კლეროს განტოლების ზოგად ამონახსნს;

$$\begin{cases} x + \psi'(p) = 0 \\ y = px + \psi(p) \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემიდან p-ს გამორიცხვა გვაძლევს კლეროს განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

ამოხსენით ლაგრანჟის განტოლებები:

2812. $y = 2xy' - y'^2$.

2813. $y = 2xy' + \dfrac{1}{y'}$.

2814. $y = x(1 + y') + y'^2$.

2815. $y = 2xy' + \sin y'$.

2816. $y = xy'^2 + y'^2$.

2817. $2y(y' + 2) = xy'^2$.

იპოვეთ კლეროს განტოლების ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნები:

2818. $y = xy' + y'^2$.

2819. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$.

2820. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

2821. $y = xy' + \dfrac{1}{2y'^2}$.

2822. $y = xy' + y' - y'^2$.

2823. $y = xy' + y' + e^{y'}$.

§ 11. იზოგონალური და ორთოგონალური ტრაექტორიები. ევოლვენტები

თუ მოცემულია წირთა ოჯახი

$$F(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

სადაც a პარამეტრია, მაშინ ისეთ წირთა ოჯახს, რომლის ყოველი წირი მოცემული ოჯახის წირებს გადაკვეთს ერთი და იმავე α კუთხით, ეწოდება მოცემული ოჯახის *იზოგონალური ტრაექტორიები*. კერძოდ, როცა $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, მივიღებთ *ორთოგონალურ ტრაექტორიებს*.

თუ $\Phi(x, y, y')=0$ არის (1) ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ ორთოგონალური და იზოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალური განტოლებები შესაბამისად არის:

$$\Phi\left(x, y, -\frac{1}{y}\right)=0, \ \Phi\left(x, y, \frac{y'-k}{1+ky'}\right)=0, \quad (k=\operatorname{tg}\alpha).$$

ვთქვათ, მოცემულია რომელიმე წირის ევოლუტის განტოლება

$$y_c=f(x_c)$$

და საძიებელია თვით წირი, ე. ი. ევოლვენტა. თუ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f(x_c)}, \quad \frac{y-f(x_c)}{x-x_c}=f'(x_c)$$

განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხავთ x_c პარამეტრს, მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას. მისი ზოგადი ამონახსნი მოგვცემს ევოლვენტების ოჯახს.

იპოვეთ ორთოგონალური ტრაექტორიები შემდეგ წირთა ოჯახისა:

2824. $y^2=ax$.

2825. $xy=a$,

2826. $x^2+y^2=a^2$.

2827. $ay^2=x^3$.

2828. $x^2+2y^2=a^2$.

2829. $x^2+y^2+2ay=0$.

2830. იპოვეთ $\dfrac{x^2}{1+a}+\dfrac{y^2}{a}=1$ კონფოკალური ელიფსების ორთოგონალური ტრაექტორიები ($a>0$, ფოკუსები მოთავსებულია $F(\pm 1;\ 0)$ წერტილებში).

2831. იპოვეთ ისეთი ელიფსების ორთოგონალური ტრაექტორიები, რომლებსაც საერთო აქვთ დიდი ღერძი ($2a$-ს ტოლი).

2832. იპოვეთ $r=2a\sin\varphi$ ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.

2833. იპოვეთ $r=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოდების ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.

2834. იპოვეთ $y=Cx$ წრფეთა ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიები, რომლებიც მოცემული ოჯახის წირებს გადაკვეთს α კუთხით, სადაც $\operatorname{tg}\alpha=k$.

2835. იპოვეთ წირები, რომლებიც $r=ae^{\varphi}$ ლოგარითმული ხვიების ოჯახის წირებს კვეთს $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ კუთხით.

2836. იპოვეთ $4y_c^3 - 27x_c^2 = 0$ წირის ევოლვენტა.

2837. იპოვეთ $y_c = \frac{x_c^2}{2h}$ წირის ევოლვენტა, სადაც h მუდმივია.

2838. იპოვეთ $x_c^2 + y_c^2 = a^2$ წრეწირის ევოლვენტა.

2839. იპოვეთ $8(x_c - 1)^3 - 28y_c^2 = 0$, წირის ევოლვენტა.

§ 12. ამოცანები პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა შედგენაზე

2840. იპოვეთ წირი, რომლის მხების სიგრძე შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორის ტოლია.

2841. იპოვეთ წირი, რომლის მხებქვეშა უდრის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის ჯამს.

2842. იპოვეთ წირი, რომლის მხებქვეშა არის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის საშუალო არითმეტიკული.

2843. იპოვეთ წირი, რომლის ნორმალი აბსცისათა ღერძზე ჩამოჭრის $\frac{y^2}{x}$ სიდიდის მონაკვეთს.

2844. იპოვეთ წირი, რომლის ნორმალის მიერ Ox ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a-ს ტოლია.

2845. იპოვეთ წირი, რომლის მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a-ს ტოლია.

2846. იპოვეთ წირი, რომლის მხების მონაკვეთი, მოთავსებული საკოორდინატო ღერძებს შორის, მუდმივი a სიდიდეა.

2847. იპოვეთ წირი, რომლის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთი უდრის ამ წერტილის რადიუს-ვექტორს.

2848. იპოვეთ წირი, თუ მხებქვეშას და ნორმალქვეშას ნახევარსხვაობა უდრის შეხების წერტილის აბსცისას.

2849. იპოვეთ წირი, რომელიც გადის $M_0(3;\ 2)$ წერტილზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: 1) მისი მხების მონაკვეთი, მოთავსებული საკოორდინატო ღერძებს შორის, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა; 2) მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის სიგრძე ორჯერ აღემატება შეხების წერტილის ორდინატს.

2850. იპოვეთ წირი, თუ მისი მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთია $a \sec \varphi$, სადაც φ არის კუთხე რადიუს-ვექტორსა და Ox ღერძს შორის.

2851. იპოვეთ წირი, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე, თუ მისი ნორმალის მონაკვეთის შუაწერტილი მოთავსებულია $y^2=ax$ პარაბოლაზე.

2852. იპოვეთ წირი, თუ ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო ღერძებით, საძიებელი წირის მხებითა და შეხების წერტილის ორდინატით, უდრის a^2-ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0\,(a;\ a)$ წერტილზე.

2853. იპოვეთ წირი, თუ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირის ნებისმიერი $M\,(x,\ y)$ წერტილის OM რადიუსით, ამ წერტილზე გავლებული მხებითა და Ox ღერძით, უდრის 2-ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0\,(2;\ -2)$ წერტილზე.

2854. იპოვეთ წირი, რომელიც შემდეგი თვისებით ხასიათდება: თუ წირის ნებისმიერ $M\,(x,\ y)$ წერტილზე გავავლებთ კოორდინატთა ღერძების პარალელურ წრფეებს ამ ღერძების გადაკვეთამდე, მაშინ მიღებული მართკუთხედი გაიყოფა ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთის ფართობი (Ox ღერძთან მიმდებარე ნაწილის) ორჯერ მეტი იქნება მეორეზე. გამოყავით ის წირი, რომელიც გადის $M_0\,(2;\ 4)$ წერტილზე.

2855. იპოვეთ წირი, რომელიც შემდეგი თვისებით ხასიათდება: მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირის ნებისმიერი რკალით, ორი ორდინატითა და Ox ღერძით, ამ რკალის სიგრძის პროპორციულია. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0\,(O;\ a)$ წერტილზე.

2856. რეზერვუარში მოთავსებულია 100 ლ მარილხსნარი, რომელიც შეიცავს 10 კგ გახსნილ მარილს. ყოველ წუთში რეზერვუარიდან გამოდის 2 ლ მარილხსნარი და ჩადის 3 ლ სუფთა წყალი, ამასთან, არევის საშუალებით კონცენტრაცია თანაბარი რჩება მთელ რეზერვუარში. რამდენი მარილი დარჩება რეზერვუარში 1 საათის შემდეგ?

2857. ჭურჭელი, რომლის მოცულობა a ლიტრია, ავსებულია მარილხსნარით. დროის ყოველ მომენტში ჭურჭელში ჩადის b ლიტრი წყალი და გამოდის ამდენივე ხსნარი. განსაზღვრეთ, რა კანონის მიხედვით იცვლება მარილის რაოდენობა ჭურჭელში.

2858. განსაზღვრეთ, რა დროის განმავლობაში დაიცლება წყლით სავსე კონუსური ჭურჭელი, რომლის სიმაღლე 10 სმ-ია, ხოლო კუთხე წვეროსთან $\alpha=60°$. კონუსის ძირში გაკეთებულია ხვრელი, რომლის ფართობიც უდრის 0,5 სმ^2-ს.

2859. D დიამეტრისა და H სიმაღლის მქონე წრიული ცილინდრული ჭურჭელი ავსებულია წყლით. გაიგეთ, რა დროის შემდეგ დაიცლება ჭურჭელი მის ძირში გაკეთებული ხვრელის საშუალებით, თუ ხვრეტილის დიამეტრია a ($D=1$ მ; $H=1{,}5$ მ, $a=0{,}05$ მ).

1. $F(x, y^{(n)})=0$ **სახის განტოლება.** ეს განტოლება ცხადად არ შეიცავს უცნობ y ფუნქციასა და მის წარმოებულებს $(n-1)$ რიგამდე. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

ა) როცა განტოლება ამოიხსნება $y^{(n)}$-ის მიმართ, მაშინ $y^{(n)} = f(x)$. მისი ზოგადი ამონახსნია

$$y = \overbrace{\int dx \cdots \int}^{n\text{-ჯერ}} f(x)\, dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_n.$$

ბ) როცა განტოლება ამოიხსნება x-ის მიმართ, გვექნება $x = \varphi(y^{(n)})$. აღვნიშნოთ $y^{(n)} = p$, მაშინ $x = \varphi(p)$, ხოლო $y^{(n-1)} = \int p\varphi'(p)\, dp + C_1$. აქედან $(n-1)$-ჯერ მიმდევრობითი ინტეგრება მოგვცემს $y = f(p, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით იქნება:

$$x = \varphi(p), \quad y = f(p, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $y'' = \sin x + x$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი და ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ საწყის პირობებს.

◁. ერთხელ ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1, \tag{1}$$

განმეორებითი ინტეგრება გვაძლევს ზოგად ამონახსნს:

$$y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2. \tag{2}$$

საძიებელი კერძო ამონახსნის საპოვნელად (1) და (2) გამოსახულებებში შევიტანოთ $x=0$, $y=0$ და $y'=0$ მნიშვნელობები. მივიღებთ:

$$\begin{cases} 0 = -1 + C_1 \\ 1 = C_2 \end{cases} \quad \text{ე. ი. } C_1 = 1, \; C_2 = 1.$$

მაშასადამე, საძიებელი კერძო ამონახსნს ექნება სახე:

$$y = \frac{x^3}{6} - \sin x + x + 1. \quad \triangleleft$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2860. $y'' - x = 0;\quad y(1) = 1,\ \ y'(1) = 2.$

2861. $y'' - 4\cos 2x = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2862. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x};\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{2},\ \ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

2863. $y''' = \dfrac{6}{x^3};\quad y(1) = 2,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 1.$

2864. $y''' = e^{-x};\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\quad y''(0) = 0.$

2865. $y''' = e^{2x+1}.$

2866. $y''' = \sin x - \cos x.$

2867. $y''' \sin^4 x = \sin 2x.$

2868. $y''' = \ln x.$

2869. $y''^2 - 3y'' + 2 = 0.$

2870. $x = y''^3 + 1.$

2871. $x = e^{y''} + y''.$

2. $F(x,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n)}) = 0$ სახის განტოლება. ეს განტოლება ცხადად არ შეიცავს y ფუნქციას. ამ შემთხვევაში $y' = p$ ჩასმით განტოლების რიგი ერთი ერთეულით დაიწევს:

$$F(x,\ p,\ p',\dots,\ p^{(n-1)}) = 0.$$

ასევე $F(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\dots,\ y^{(n)}) = 0$ განტოლებაში $y^{(k)} = p$ ჩასმით განტოლების რიგი k ერთეულით დაიწევს:

$$F(x,\ p,\ p',\dots,\ p^{(n-k)}) = 0.$$

ბოლოს, თუ მოცემულია $F(x,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}) = 0$ განტოლება, მაშინ $y^{(n-1)} = p$ ჩასმით მიიღება პირველი რიგის განტოლება

$$F(x,\ p,\ p') = 0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$ განტოლების ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y''(1) = -1.$

◁. დავუშვათ $y'' = p$, მაშინ $y''' = \dfrac{dp}{dx}$ და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x^4 \frac{dp}{dx} + 2x^3 p = 1 \quad \text{ანუ} \quad \frac{dp}{dx} + \frac{2}{x} p = \frac{1}{x^4}.$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი განტოლება, რომლის ზოგადი ამონახსნია $p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}$. თუ გამოვიყენებთ საწყის პირობას $y''(1) = p(1) = -1$, მივიღებთ $C_1 = 0$, მაშასადამე, $y'' = -\frac{1}{x^3}$, საიდანაც $y' = \frac{1}{2x^2} + C_2$. $y'(1) = \frac{1}{2}$ საწყისი პირობის ძალით მივიღებთ $C_2 = 0$. ამიტომ $y' = \frac{1}{2x^2}$. კიდევ ერთხელ ინტეგრება მოგვცემს: $y = -\frac{1}{2x} + C_3$, ხოლო $y(1) = \frac{1}{2}$ საწყისი პირობის ძალით მივიღებთ $C_3 = 1$, მაშასადამე, საძიებელი კერძო ამონახსნია $y = 1 - \frac{1}{2x}$. ◁

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2872. $xy'' + y' = x^2$.

2873. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

2874. $x^2 y'' + xy' = 1$.

2875. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

2876. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

2877. $xy'' + xy'^2 - y' = 0$; $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$.

2878. $xy''' + y'' = 3x + 1$.

2879. $x^2 y''' = y''^2$.

3. $F(y, y', y'') = 0$ სახის განტოლება. $y' = p$ ჩასმით ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლება $yy'' + y + y'^2 = 0$.

▷. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y' = p$, მაშინ $y'' = p\frac{dp}{dy}$. მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$yp\frac{dp}{dy} + y - p^2 = 0, \quad \text{ანუ} \quad p\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p^2 = -1.$$

მივიღეთ ბერნულის განტოლება p-ს მიმართ. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$p^2 = z, \; 2p\frac{dp}{dy} = z'.$$

$$\frac{z'}{2} - \frac{1}{y}z = -1,$$

$$z' - \frac{2}{y}z = -2,$$

$$z = e^{\int \frac{2dy}{y}} \left(C_1 + \int \left(-2e^{-2\int \frac{dp}{dy}} dy \right) = y^2 \left(C_1 + \frac{2}{y} \right) \right), \text{ ე. ი.}$$

$$p^2 = C_1 y^2 + 2y; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y^2 + 2y}.$$

ცვლადთა განცალების შემდეგ ინტეგრება მოგვცემს:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 2y}} + C_2.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება სახე:

$$x = \ln \left| \sqrt{C_1}\, y + \frac{1}{\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1 y^2 + 2y} \right| + C_2. \quad \triangleright.$$

იპოვეთ ზოგადი და კერძო ამონახსნები (იქ, სადაც მოცემულია საწყისი პირობები) შემდეგი განტოლებებისა:

2880. $yy'' + y'^2 = 0.$ **2881.** $yy'' - y^2 y' - y'^2 = 0.$

2882. $(y - 1) y'' - 2y'^2 = 0.$ **2883.** $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$

2884. $2yy'' - y'^2 = 0; \quad y(-1) = 4, \quad y'(-1) = 1.$

2885. $yy'' + y'^2 = 1; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1$

§ 14. მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

1. ერთგვაროვანი განტოლება. n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წ რ ფ ი ვ ი, თუ ის პირველი ხარისხისაა უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ. ამ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x)\, y = f(x), \qquad (1)$$

სადაც $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$; $f(x)$ არის x-ის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები რაიმე შუალედში, ხოლო y უცნობი ფუნქცია.

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x) = 0$, განტოლებას ეწოდება ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი, თუკი $f(x) \neq 0$, მაშინ განტოლება არაერთგვაროვანია.

$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ფუნქციათა სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი (ვრონსკიანი) ეწოდება დეტერმინანტს:

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \cdots y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \cdots y_n'(x) \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) \cdots y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$y_1, y_2, \dots, y_n$ ფუნქციებს ეწოდება **წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი** რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ყოველი x-ისათვის აღნიშნულ შუალედში მართებულია ტოლობა:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \equiv 0;$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

თუ $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია $]a, b[$ შუალედში, მაშინ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი ნულის ტოლია ამ შუალედის ყოველ წერტილში. თუ რომელიმე ერთ $x_0 \in]a, b[$ წერტილში მაინც $W(x_0) \neq 0$, მაშინ მოცემული ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია ამ შუალედში.

წრფივი ერთგვაროვანი

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0 \tag{2}$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \tag{3}$$

სადაც $y_1, y_2, \dots, y_n$ (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენია (ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა), ხოლო $C_1, C_2, \dots, C_n$,— ნებისმიერი მუდმივები.

კერძოდ, მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0. \tag{4}$$

დიფერენციალური განტოლების ორ y_1 და y_2 ამონახსნი იქნება წრფივად დამოკიდებული რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი λ რიცხვი, რომ

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda \quad \text{ანუ} \quad y_1 = \lambda y_2.$$

თუკი ფარდობა $\dfrac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$, მაშინ აღნიშნული ფუნქციები **წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა.**

თუ ცნობილია (4) განტოლების კერძო ამონახსნი y_1, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

სადაც

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} \cdot dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვიკვლიოთ წრფივად დამოკიდებულია თუ არა შემდეგ ფუნქციათა სისტემა:

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2, \dots, y_{n+1} = x^n.$$

$\triangleright$. $C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_{n+1} x^n = 0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს n-ზე მეტი ფესვი. თუ $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ე. ი. განხილულ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია ნებისმიერ შუალედში. $\triangleleft$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციათა სისტემა x, $\cos x$, $\sin x$ წრფივად დამოკიდებულია.

$\triangleleft$.

$$w(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = x.$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$(x^2+1)\,y'' - 2xy' + 2y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

$\triangleleft$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $y_1 = x$ და $y_2 = x^2 - 1$. ამიტომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსენია

$$y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1) \quad \triangleright.$$

გამოიკვლიეთ წრფივად დამოკიდებულია თუ არა შემდეგ ფუნქციათა სისტემები:

2886. $y_1 = x,\ y_2 = x + 1.$

2887. $y_1 = e^{ax}\sin bx,\ y_2 = e^{ax}\cos bx.$

2888. $y_1 = x,\ y_2 = x+1,\ y_3 = x+2.$

2889. $y_1 = \sin^2 x,\ y_2 = \cos^2 x,\ y_3 = 1.$

2890. $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3.$

2891. $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{3x}.$

2892. $y_1 = x,\ y_2 = \ln x,$

2893. $y_1 = \sin 2x,\ y_2 = \sin x \cos x.$

2894. $y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^{-x},$

2895. $y_1 = x,\ y_2 = 2x,\ y_3 = x^2.$

2896. $y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = x^2 e^x.$

2897. $y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin 2x.$

2898. $y_1 = \operatorname{ch} x,\ y_2 = \operatorname{sh} x.$

2899. $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{x+1},$

2900. $y_1 = x,\ y_2 = 0,\ y_3 = e^x.$

2901. $y_1 = 1,\ y_2 = \sin x,\ y_3 = \cos 2x.$

შეადგინეთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, თუ ცნობილია მისი ფუნდამენტური ამონახსნი:

2902. $y_1 = x,\ y_2 = x^2$. **2903.** $y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos x$.

2904. $y_1 = 1,\ y_2 = \cos 2x$. **2905.** $y_1 = e^x,\ y_2 = x e^x$.

2906. $y_1 = x^2$ და $y_2 = x^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. იპოვეთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=1$, მაშინ $y=1$, $y'=0$.

2907. $y_1=x$, $y_2=x^2$, $y_3=x^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მესამე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. იპოვეთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=1$, მაშინ $y=0$, $y'=-1$, $y''=2$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $x^2y''+xy'-y=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსენი, თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსენი $y_1=x$.

Δ დავუშვათ, $y=zx$. ვიპოვოთ $y'=z'x+z$, $y''=z''x+2z'$ და შევიტანოთ მოცემულ განტოლებაში, გვექნება:

$$z''x + 3z' = 0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $z'=u$, $z''=u'$, მივიღებთ:

$$u'x + 3u = 0.$$

საიდანაც

$$u = \frac{C_2}{x^3},$$

ამრიგად,

$$z = -\frac{C_2}{2x^2} + C_1,$$

მაშასადამე,

$$y = x\left(-\frac{C_2}{2x^2} + C_1\right) = -\frac{C_2}{2x} + C_1 x.$$

როგორც ზოგადი ამონახსნიდან ჩანს, მეორე კერძო ამონახსნი ყოფილა

$$y_2 = -\frac{1}{2x}.$$

ამოხსენით განტოლებები, თუ ცნობილია მათი თითო კერძო ამონახსნი:

2908. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0; \quad y_1 = \frac{\sin x}{x}.$

2909. $y'' + \frac{4}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0; \quad y_1 = x.$

2910. $x^2 (\ln x - 1) y'' - xy' + y = 0; \; y_1 = x.$

2911. $y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x) y' + 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0; \; y_1 = \sin x.$

2912. $y'' \sin^2 x - 2y = 0; \quad y_1 = \operatorname{ctg} x.$

2913. $x(1 - x^2) y'' = 2y; \quad y_1 = \frac{x}{1 - x}.$

2. **არაერთგვაროვანი განტოლება.** წრფივი არაერთგვაროვანი

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = f(x)$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = \overline{y} + y_0$$

ფორმულით, სადაც $\overline{y}$ არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y_0 — მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

თუ ცნობილია ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა $y_1, y_2, \dots, y_n$, მაშინ შესაბამისი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n$$

ფორმულით, სადაც $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან (ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის ანუ ლაგრანჟის მეთოდი):

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \cdots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \cdots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$x^2 y'' + xy' - y = 1. \tag{1}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსენი, თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსენი $y_1=x$.

◁. წინა მაგალითში მივიღებთ, რომ (1)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი

$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \tag{2}$$

განტოლების მეორე კერძო ამონახსენია $y_2 = -\dfrac{1}{2x}$,

$y_1(x) = x,\ y_2(x) = -\dfrac{1}{2x}$ მე-(2) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტალური სისტემაა. მე-(2) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$\overline{y} = C_1 x + C_2\left(-\frac{1}{2x}\right).$$

(1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$y = C_1(x)\cdot x + C_2(x)\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right).$$

$C_1(x)$ და $C_2(x)$-ის მოსაძებნად შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x + C_2'(x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right) = 0, \\ C_1'(x)\cdot(x)' + C_2'(x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}, \end{cases}$$

საიდანაც

$$C_1'(x) = \frac{1}{2x^2},\quad C_2'(x) = 1.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$C_1(x) = -\frac{1}{2x} + C_1,$$

$$C_2(x) = x + C_2.$$

მაშასადამე,

$$y = \left(-\frac{1}{2x} + C_1\right)x + (x + C_2)\left(-\frac{1}{2x}\right),$$

ე. ი.

$$y = C_1 x + C_2\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right) - 1. \quad \Delta$$

§ 15. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

1. ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{1}$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია.

თუ y_1 და y_2 ფუნქციები (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ არის ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. კერძო ამონახსნების მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოვხსნათ მახასიათებელი განტოლება:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{2}$$

ადგილი აქვს შემდეგ სამ შემთხვევას:

I. მახასიათებელი განტოლების ფესვები ნამდვილი და განსხვავებულია, ე. ი. $k_1 \neq k_2$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები: $k_1 = k_2$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) e^{ax}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლება $y'' - 7y' + 12y = 0$.

△. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^2 - 7k + 12 = 0, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 4.$$

მაშასადამე, ზოგად ამონახსენს ექნება სახე:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}. \quad \triangleleft$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' + 4y = 0,$$

△. მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$k^2 + 4 = 0, \quad k = \pm 2i.$$

ზოგად ამონახსენს ექნება სახე:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

ამოხსენით განტოლებები:

2914. $y'' - y' - 2y = 0.$

2915. $y'' - 4y' + 3y = 0.$

2916. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

2917. $y'' - 9y = 0.$

2918. $y'' - y' = 0.$

2919. $y'' + 3y' = 0.$

2920. $3y'' - 2y' - 8y = 0.$

2921. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - 4x = 0.$

2922. $y'' - 5y' + 4y = 0;$ $y(0) = 5,\ y'(0) = 8.$

2923. $8y'' + 2y' - 3y = 0;$ $y(0) = -6,\ y'(0) = 7.$

2924. $y'' + 2y' + y = 0.$

2925. $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

2926. $16y'' - 24y' + 9y = 0.$

2927. $16y'' + 8y' + y = 0.$

2928. $y'' + 4y' + 4y = 0;$ $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2},\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4.$

2929. $y'' - 6y' + 9y = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

2930. $y'' + 2y' + 5y = 0.$

2931. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

2932. $y'' + y' + y = 0.$

2933. $y'' + 4y' + 8y = 0.$

2934. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$

2935. $y'' + y = 0.$

2936. $y'' + 4y = 0;$ $y(0) = 0,\quad y'(0) = 2.$

2937. $y'' + 2y' + 2y = 0;$ $y(0) = 1,\quad y'(0) = 1.$

2. არაერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება $y = \overline{y} + y_0$ ფორმულით, სადაც $\overline{y}$ არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y_0 — მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

კერძო ამონახსნი მოიძებნება მუდმივების ვარიაციის მეთოდით. ზოგ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი მოიძებნება განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით.

ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

I. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილი m-ური ხარისხის მრავალწევრია: $f(x) = P_m(x)$. აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ნულოვანი ფესვები. ამ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $y_0 = Q_m(x)$ მრავალწევრის სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m-ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა შედარების ხერხით;

2) მახასიათებელ განტოლებას აქვს l ჯერადობის ნულოვანი ფესვი ($l=1$ ან $l=2$), მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $y_0 = x^l Q_m(x)$ სახით, სადაც $Q_m(x)$ აგრეთვე m-ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' - 3y' + 2y = x - 2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \triangle.\quad & y = \overline{y} + y_0, \\ & y'' - 3y' + 2y = 0, \\ & k^2 - 3k + 2 = 0, \\ & k_1 = 1;\ k_2 = 2, \\ & \overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

(1)-ის კერძო ამონახსენი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$y_0 = Ax + B,$$
$$y_0' = A, \quad y_0'' = 0.$$

A და B-ს საპოვნელად შევიტანოთ (1)-ში y_0, y_0' და y_0'' შესაბამისად y, y'-სა და y''-ის ნაცვლად. მივიღებთ:

$$-3A + 2Ax + 2B = x - 2,$$
$$2Ax + (2B - 3A) = x - 2.$$

კოეფიციენტთა გატოლების წესის თანახმად გვექნება:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 3A = -2. \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2};\ B = -\frac{1}{4},$$

მაშასადამე,

$$y_0=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$$

ამრიგად, (1) განტოლების ზოგადი ამონახსენი იქნება:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.\ \triangleleft$$

ამოხსენით განტოლებები:

2938. $y''-4y'+4y=x^2$. **2939.** $y''-y=x^2-x+1$.

2940. $3y''-2y'-y=x^2+1$. **2941.** $y''+y'+y=3x-2$.

2942. $y''+y'=3$. **2943.** $y''-3y'=2-6x$.

2944. $y''-2y'=x^2-1$. **2945.** $2y''+5y'=5x^2-2x-1$.

II. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=P_m(x)e^{ax},$$

სადაც $P_m(x)$ არის m-ური ხარისხის მოცემული მრავალწევრი, ხოლო a მუდმივია. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

1) a არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V=Q_m(x)e^{ax}$ სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m-ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, მისი უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა შედარების ხერხით;

2) a არის მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვი ($l=1$ ან $l=2$), მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V=x^lQ_m(x)e^{ax}$ სახით.

ამოხსენით განტოლებები:

2946. $y''+2y'+y=e^{2x}$. **2947.** $y''+y=4e^x$.

2948. $y''-2y'-y=6xe^x$. **2949.** $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$.

2950. $y''-2y'+y=e^x$. **2951.** $y''+y'-6y=xe^{2x}$.

III. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=e^{bx}[P_p(x)\cos bx+Q_q(x)\sin bx],$$

სადაც $P_p(x)$ და $Q_q(x)$ შესაბამისად p და q ხარისხების მოცემუ-

ლი მრავალწევრებია, ხოლო a და b — ნამდვილი რიცხვები. მივიღოთ, რომ $p \geqslant q$. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

1) $a \pm ib$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ კერძო ამონახსენი უნდა ვეძებოთ

$$y_0 = e^{ax}\left[M_p(x)\cos bx + N_p(x)\sin bx\right]$$

სახით, სადაც $M_p(x)$ და $N_p(x)$ უცნობკოეფიციენტებიანი p ხარისხის მრავალწევრებია;

2) $a \pm ib$ არის მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვი (მეორე რიგის განტოლებისათვის $l = 1$), მაშინ

$$y_0 = x^l e^{ax}\left[M_p(x)\cos bx + N_p(x)\sin bx\right].$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'' + 9y = \cos 3x.$$

$$\triangleleft.\quad y = \overline{y} + y_0,$$

$$y'' + 9y = 0,$$

$$k^2 + 9 = 0,$$

$$k = \pm 3i,$$

$$\overline{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x,$$

ვინაიდან, $\pm 3i$ მახასიათებელი განტოლების ფესვებია, ამიტომ y_0 უნდა ვეძებოთ სახით:

$$y_0 = (A\cos 3x + B\sin 3x)\,x.$$

$$y_0' = A\cos 3x + B\sin 3x - 3Ax\sin 3x + 3Bx\cos 3x,$$

$$y_0'' = 6B\cos 3x - 6A\sin 3x - 9Ax\cos 3x - 9B\sin 3x,$$

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x - 9Ax\cos 3x - 9Bx\sin 3x + $$
$$+ 9Ax\cos 3x + 9Bx\sin 3x = \cos 3x;$$

$$\begin{cases} -6A = 0 \\ 6B = 1 \end{cases}, \quad A = 0, \quad B = \frac{1}{6}.$$

მაშასადამე,

$$y_0 = \frac{1}{6}\,x\sin 3x.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{x}{6}\sin 3x. \quad \triangleleft$$

ამოხსენით განტოლებები:

2952. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. **2953.** $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

2954. $y'' + y = 10e^{x}\sin 2x$. **2955.** $y'' + 4y = 5\sin 3x - 10\cos 3x$.

2956. $y'' + y = \cos x$. **2957.** $y'' + 4y = \sin 2x$.

თუ მოცემულია

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

განტოლება და $V_1, V_2, \ldots, V_n$ კერძო ამონახსნებია

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_n(x)$$

განტოლებებისა, მაშინ $y_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ ჯამი იქნება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2958. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^{x}$. **2959.** $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.

2960. $y'' - y = \cos x \cos 3x$. **2961.** $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.

იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

2962. $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$;

2963. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

2964. $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^{x}$. $y(0) = 2,\ y'(0) = 2$;

2965. $y'' + y = -\sin 2x$; $y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1$;

როდესაც $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ერთ-ერთი ზემოთ აღნიშნული სახე, საჭიროა მივმართოთ ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის მეთოდს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2966. $y'' + y = \operatorname{tg} x$. **2967.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x}$.

2968. $y'' - y' = \frac{e^{x}}{e^{x} + 1}$. **2969.** $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

2970. იპოვეთ $y'' - y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y = x$ წრფეს $(0;\ 0)$ წერტილში.

2971. იპოვეთ $y''+2y'+2y=0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y=x+1$ წრფეს (0; 1) წერტილში.

2972. იპოვეთ $y''-4y'+3y=0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y=x+2$ წრფეს (0; 2) წერტილში.

2973. მოცემულია წრფივი მოძრაობა $w=-\frac{5}{4}s-v$.' როცა $t=0$, მაშინ $s=0$ და $v=2$. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

2974. მოცემულია წრფივი მოძრაობა $w=-4s+2\cos 2t$. როცა $t=0$, მაშინ $s=0$ და $v=2$. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

2975. მატერიალური m წერტილი თავისუფლად ვარდება სიმძიმის ძალის გავლენით. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება, თუ ჰაერის წინააღმდეგობას მხედველობაში არ მივიღებთ. საწყის $t=0$ მომენტში წერტილის სიჩქარეა v_0, ათვლის ადგილიდან მისი დაშორება კი y_0.

2976. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ვარდება 10 მ სიმაღლიდან $v_0=0$ საწყისი სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ დავარდება სხეული მიწაზე?

2977. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ასროლილია ზემოთ $v_0=1$ მ/წმ სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ მიაწევს სხეული უმაღლეს მდებარეობას?

§ 10. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

1. ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1} y'+a_n y=0, \tag{1}$$

სადაც $a_1, a_2, \dots, a_n$ მუდმივებია.

თუ $y_1, y_2, \dots, y_n$ (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_n y_n, \tag{2}$$

სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია. კერძო ამონახსნების მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოიხსნას მახასიათებელი განტოლება:

$$k^n+a_1 k^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{3}$$

ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

I. მახასიათებელი განტოლების $k_1, k_2, \cdots, k_n$ ფესვები ნამდვილი და მარტივია, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ნამდვილი ჯერადი ფესვები; ვთქვათ, k_1 არის p ჯერადობის ფესვი ($p < n$, ე. ი. $k_1 = k_2 = \cdots = k_p$), ხოლო დანარჩენი ფესვები მარტივია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_p x^{p \; 1}) e^{k_1 x} + C_{p+1} e^{k_{p+1} x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს მარტივი კომპლექსური ფესვები; ვთქვათ, $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, ხოლო დანარჩენი ფესვები მარტივი და ნამდვილია, მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) e^{ax} + C_3 e^{k_3 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

IV. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი კომპლექსური ფესვები; ვთქვათ $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$ არის მახასიათებელი განტოლების p ჯერადობის ფესვები ($2p < n$), ხოლო დანარჩენი ფესვები ნამდვილი და მარტივია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = e^{ax} (A_1 + A_2 x + \cdots + A_p x^{p-1}) \cos bx + e^{ax} (B_1 + B_2 x +$$

$$+ \cdots + B_p x^{p-1}) \sin bx + C_{2p+1} e^{k_{2p+1} x} + C_n e^{k_n x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი.

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0$$

$$k^3 - 5k^2 + 6k = 0$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3.$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2978. $y''' - 5y'' + 6y' = 0.$

2979. $y''' - 13y'' + 12y' = 0.$

2980. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

2981. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

2982. $y''' - 13y' - 12y = 0.$

2983. $y''' - y' = 0.$

2984. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$

2985. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0.$

2986. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$

2987. $y''' - 3y'' + 4y = 0.$

2988. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$ **2989** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

2990. $y^{IV} + 3y''' + y'' = 0.$ **2991.** $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0.$

2992. $y''' - 8y = 0$ **2993.** $y''' + y = 0.$

2994. $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0.$ **2995.** $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$

2996. $y^{IV} - 16y = 0.$ **2997.** $y^{IV} + y' = 0.$

2998. $y^{IV} + 4y = 0.$ **2999.** $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$

3000. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0.$ **3001.** $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$

3002. $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$ **3003.** $y^{IV} + 6y'' + 9y = 0.$

3004. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0.$ **3005.** $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

3006. $y''' + y' = 0;\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = -1.$

3007. $y''' - y' = 0;\quad y(2) = 1;\quad y'(2) = 0;\quad y''(2) = 0.$

3008. $y^{IV} - y = 0;\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 1.$

3009. $y^{V} - y' = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1,\ y^{IV}(0) = 2.$

2. **არაერთგვაროვანი განტოლება.** ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = \bar{y} + y_0$$

ფორმულით, სადაც $\bar{y}$ არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y_0 — მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

3010. $y''' - y = x^3 - 1.$ **3011.** $y''' - y'' = -3x + 1.$

3012. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$ **3013** $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^2.$

3014. $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$ **3015.** $y''' - 3y' + 2y = (4x^2 + 4x - 10)e^{-x}.$

3016. $y''' - 2y'' + y' = e^x.$ **3017.** $y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}.$

3018. $y^{IV} + 4y = \sin 2x.$ **3019.** $y^{IV} + y''' = \cos 4x.$

3020. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$. 3021. $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$.

3022. $y''' + y' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$.
3023. $y''' + y'' = x^2$.
} ლაგრანჟის მეთოდით.

3024. $y''' - y' = 3(2 - x^2)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

3025. $y''' + 2y'' + 2y' + y = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

§ 17. დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით

თუ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში შეუძლებელია ან დიდ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული, მაშინ მისი ამონახსნი ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება ვეძებოთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n. \tag{1}$$

განუსაზღვრელი C_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ კოეფიციენტების მოსაძებნად საჭიროა (1) მწკრივი შევიტანოთ სათანადო დიფერენციალურ განტოლებაში და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილში ერთმანეთს გავუტოლოთ $(x - x_0)$ ორწევრის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები.

ამოხსენით განტოლებები:

3026. $y' = x + y$; $y(0) = 1$.

3027. $y' = y + x^2$; $y(0) = -2$.

3028. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 1$ (პირველი ოთხი წევრი)

3029. $y'' = 2xy' + 4y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3030. $y'' - xy = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3031. $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ აგრეთვე ტეილორის ან მაკლორენის მწკრივის საშუალებით:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \text{ ან } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

ამოხსენით განტოლებები:

3032. $y' = y^3 - x; \quad y(0) = 1.$

3033. $y' = x^2 y^2 - 1; \; y(0) = 1.$

3034. $y' = e^y + xy; \; y(0) = 0.$

3035. $y' = x^2 - y^2; \; y(0) = 1$ (პირველი ორი წევრი)

3036. $y'' = yy' - x^2; \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$

3037. $y'' = e^y + x; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$

§ 18. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

ვთქვათ, მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, \; y_1, \; y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, \; y_1, \; y_2, \dots, y_n), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, \; y_1, \; y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{1}$$

სადაც x არგუმენტია, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — უცნობი ფუნქციები, $f_1, f_2, \dots, f_n$ ძ $x, y_1, y_2, \dots, y_n$-ის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები რაიმე არეში. n-ს ეწოდება მოცემული **სისტემის რიგი**.

(1) სისტემას, რომლის განტოლებათა მარცხენა ნაწილებში მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებია, ხოლო მარჯვენა ნაწილები წარმოებულებს არ შეიცავენ, ეწოდება **ნორმალური სისტემა**.

(1) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ სიმეტრიული ფორმით:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}. \tag{2}$$

ზოგიერთი ნორმალური სისტემის ინტეგრება ადვილად ხერხდება მოცემული n განტოლებისაგან შემდგარი სისტემის ერთი n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებამდე დაყვანით. ამისათვის საჭიროა სისტემის ერთი განტოლება მიმდევრობით გავაწარმოოთ და გამოვრიცხოთ ყველა უცნობი ფუნქცია, გარდა ერთისა. მიღებული განტოლების ინტეგრებით ღებულობენ მოცემული სისტემის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

3038. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y, \end{cases}$

3039. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + a^2 z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + b^2 y = 0. \end{cases}$

3040. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z - y, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases}$

3041. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 7y - z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0. \end{cases}$

3042. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{3}{2} t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y + 4t + 1. \end{cases}$

3043. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \\ 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t. \end{cases}$

3044. $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z}, \\ z' = \dfrac{1}{y - x}; \end{cases}$ $\quad y(0) = -1, \; z(0) = 1.$

3045. $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z}, \\ z' = y; \end{cases}$ $\quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$

3046. $\begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0; \end{cases}$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z''(0) = 0.$

3047. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x. \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases}$

3048. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$

3049. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

3050. $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = y - x + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$

3051. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + z, \\ z' = x + z - 4t. \end{cases}$

ზოგ შემთხვევაში საჭიროა მოცემული სისტემა ჩავწეროთ სიმეტრიული ფორმით და ინტეგრება შევასრულოთ ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით.

ამოხსენით სისტემები:

3052. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$.

3053. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{zdz}{xy}$.

3054. 1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \dfrac{dz}{\frac{1}{2}}$; 2) $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{z}$.

3055. $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}$.

3056. $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x+y}$,

3057. $\dfrac{dx}{(z-y)^2} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y}$.

დაიყვანეთ ნორმალურ სისტემამდე მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები:

3058. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$.

3059. $y'' = -\dfrac{y'}{x} - y$.

3060. $y''' = y$.

3061. $y^{\mathrm{IV}} = -x^2y$.

ამოხსენით მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემები:

3062. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -6y - 3z. \end{cases}$

3063. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 10y - 4z. \end{cases}$

3064. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z; \end{cases}$ $y(0) = -1, \quad z(0) = 2.$

3065. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z; \end{cases}$ $y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$

3066. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

3067. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x}. \end{cases}$

3068. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z. \end{cases}$ 3069. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

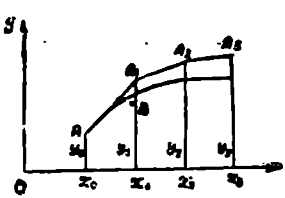
3070. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z. \end{cases}$ 3071. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y + 3z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y - 4z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - y - 2z. \end{cases}$

§ 19. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ინტეგრება

1. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ეილერის მეთოდით

ვთქვათ, საძიებელია $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ დიფერენციალურ განტოლების ამონახსნი $y(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობას: როცა $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია $R[|x - x_0| < a, |y - y_0| < b]$ მართკუთხედში და y ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას

$$|f(x, y) - f(x, \overline{y})| \leqslant N|y - \overline{y}|. \quad (1)$$



ნახ. 22

საჭიროა $[x_0, X]$ სეგმენტზე შევადგინოთ $y(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი.

დავყოთ $[x_0, X]$ სეგმენტი n თანატოლ ნაწილად წერტილებით

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = X;$$

$$X_{i+1} - X_i = h \quad (i = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

შევცვალოთ $[x_0, x_i]$ სეგმენტზე ინტეგრალური წირის AB რკალი A წერტილზე გავლებული მხების AA_1 მონაკვეთით (ნახ. 22). მხების

$$y - y_0 = (x - x_0) f(x_0, y_0)$$

განტოლებაში x-ის ნაცვლად თუ ჩავსვამთ $x_1 = x_0 + h$, მივიღებთ $y(x)$ ფუნქციის მიახლოებით მნიშვნელობას

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

$[x_1, x_2]$ სეგმენტზე ინტეგრალური წირი შევცვალოთ წრფით, რომელიც გადის $A_1(x_1, y_1)$ წერტილზე და რომლის კუთხური კოეფიციენტია $f(x_1, y_1)$. ამ წრფის განტოლებაა

$$y - y_1 = (x - x_1) f(x_1, y_1).$$

თუ ამ განტოლებაში x-ის ნაცვლად ჩავწერთ $x_2 = x_1 + h$, მივიღებთ $y(x)$ ფუნქციის მიახლოებით მნიშვნელობას

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

საერთოდ $y(x)$ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა x_{i+1} წერტილზე იქნება

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილის აგების ამ მეთოდს ეილერის მეთოდი ეწოდება.

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (1) უტოლობას და ამავე დროს

$$\left| \frac{\partial f}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right| \leqslant M$$

აღებულ მართკუთხედში, მაშინ მეთოდის ცდომილება შეიძლება შეფასებულ იქნეს უტოლობით

$$| y(x_k) - y_k | \leqslant \frac{hM}{2N} [(1 + hN)^k - 1]; \tag{2}$$

სადაც $y(x_k)$ აღნიშნავს საძიებელი ამონახსნის ზუსტ მნიშვნელობას $x_k = x_0 + kh$ წერტილზე, ხოლო y_k მიახლოებითი მნიშვნელობაა ამავე წერტილზე

ეილერის მეთოდი, გამოთვლების ჩატარების თვალსაზრისით მარტივია, მაგრამ როგორც (2) უტოლობიდან ჩანს მისი ნაშთითი წევრი h-ის მიმართ პირველი რიგისაა, ამის გამო კარგი სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა მცირე h-ის შერჩევა, რაც თავის მხრივ იწვევს გამოთვლებისათვის საჭირო დროის გაზრდას.

2. ეილერ-კოშის გაუმჯობესებული მეთოდი

ცდომილების დაგროვების შემცირების მიზნით იყენებენ $y_1, y_2, \dots, y_n$ მნიშვნელობათა გადათვლის შემდეგ წესს. x_1, წერტილზე, ეილერის მეთოდით პოულობენ y_1 მნიშვნელობას. ამავე წერტილზე $y(x)$ ფუნქციის უკეთეს მიახლოებით მნიშვნელობად ღებულობენ გამოსახულებას

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_0 y_1)}{2} h.$$

$y_1^{(1)}$ მნიშვნელობა შეიძლება კიდევ უფრო დავაზუსტოთ შემდეგი გამოსახულებით:

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2} h$$

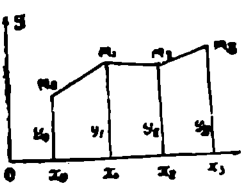
და საერთოდ

$$y_1^{(i)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(i-1)})}{2} h.$$

ანალოგიურად მიიღება $x_2, x_3, \dots, x_n$ წერტილებზე $y(x)$ ფუნქციის დაზუსტებული მნიშვნელობები.

y_i-ის ყოველი დაზუსტებული მნიშვნელობების მისაღებად გადათვლის ეს პროცესი მაშინ უნდა შევწყვიტოთ, როცა ორ მომდევნო მიახლოებაში მძიმის შემდეგ ერთმანეთს დაემთხვევა ათწილად ნიშანთა საჭირო რაოდენობა.

თუ y_i-ს მნიშვნელობაში სამი-ოთხი გადათვლის შემდეგ ერთმანეთს არ დაემთხვა ათწილადი ნიშანთა საჭირო რაოდენობა, უნდა შევამციროთ ცხრილის h ბიჯი.



ნახ. 23

ამგვარად მიიღება მოცემულ დიფერენციალური განტოლების იმ ამონახსნის მნიშვნელობათა ცხრილი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობას აკმაყოფილებს.

ამ მეთოდს ეილერ-კოშის გაუმჯობესებული მეთოდი ეწოდება. $[x_0, x]$ სეგმენტის დაყოფის $x_0, x_1, \dots, x_n = X$ წერტილებზე ავაგოთ $y_0, y_1 \dots y_n$ ორდინატები და მიღებული $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1 y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$ წერტილები შევაერთოთ ტეხილი (ნახ. 23). ამ ტეხილს ეილერის ტეხილი ეწოდება.

იგი მიახლოებით იძლევა დიფერენციალური განტოლების იმ ინტეგრალურ წირს, რომელიც მოცემულ წერტილზე გადის.

თუ

$$|f(x, y)| \leqslant M_1, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant M_2, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M_3, \quad \left|\frac{d^2 f}{\partial x^2}\right| \leqslant M_4,$$

მაშინ მეთოდის ცდომილების შეფასებისათვის
გვაქვს შემდეგი უტოლობა:

$$|y_n - y(x_n)| \leqslant \frac{h^2}{12}\left[\frac{M_4}{L} + 3(M_2 + M_1 M_3)\right]\left[\left(\frac{1+\frac{1}{2}hL}{1-\frac{1}{2}hL}\right)^n - 1\right],$$

სადაც L ლიფშიცის მუდმივაა.

როგორც ვხედავთ, ამ მეთოდის ნაშთითი წევრი მეორე რიგისაა h-ის მიმართ.

3. რუნგე-კუტას მეთოდი

პირველ პარაგრაფში დასმული კოშის ამოცანის ამონახსნის რიცხვითი მნიშვნელობები წერტილებში $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n$ შეიძლება გამოთვლილ იქნეს, რუნგე-კუტას შემდეგი ფორმულის მიხედვით;

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

სადაც $\Delta y_i = \dfrac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$. ამ ფორმულის ნაშთითი წევრი მეოთხე რიგისაა h-ის მიმართ.

აქ

$$K_1 = hf(x_i, y_i),$$

$$K_2 = hf\left(x_i + h/2, \ y_i + \frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = hf\left(x_i + h/2, \ y_i + \frac{K_2}{2}\right),$$

$$K_4 = hf(x_i + h, \ y + K_3), \ (i = 0, 1, 2, \dots),$$

ხოლო

$$h = \frac{x - x_0}{n}.$$

რუნგე-კუტას მეთოდის ცდომილების შეფასება დიდ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული, ამიტომ პრაქტიკული გამოთვლების დროს ყოველ x_i წერტილზე y_i მნიშვნელობას ითვლიან h და $h/2$ ბიჯით. თუ მიღებული მნიშვნელობები თანხვდებიან ერთმანეთს ციფრთა სასურველი რაოდენობით, მაშინ $h/2$ ბიჯი სწორადაა შერჩეული აღებული ეტაპზე.

ასევე შეირჩევა ბიჯი, დიფერენციალური განტოლების სხვა მეთოდით ამოხსნის დროსაც.

4. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნა რუნგე-კუტას მეთოდით

სიმარტივისათვის განვიხილოთ სამი განტოლებისაგან შემდგარი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, y_3); \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, y_3); \\ y_3' &= f_3(x, y_1, y_2, y_3), \end{aligned} \tag{4}$$

საწყისი პირობებით $y_1(x_0) = y_{1,0}$, $y_2(x_0) = y_{2,0}$, $y_3(x_0) = y_{3,0}$.

აღვნიშნოთ $y_i(x_k) = y_{i,k}$, $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, 3$. საძიებელი ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს რუნგე-კუტას შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} y_{1k} &= y_{1,k-1} + \Delta y_{1,k-1}; \\ y_{2k} &= y_{2,k-1} + \Delta y_{2,k-1}; \\ y_{3k} &= y_{3,k-1} + \Delta y_{3,k-1}, \end{aligned}$$

სადაც

$$\Delta y_{1,k-1} = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4);$$

$$\Delta y_{2,k-1} = \frac{1}{6}(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4);$$

$$\Delta y_{3,k-1} = \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4);$$

აქ

$$l_1 = hf_1(x_{k-1}, y_{1,k-1});$$

$$l_2 = hf_1(x_{k-1} + h/2, y_{1,k-1} + l_1/2);$$

$$l_3 = h f_1 (x_{k-1} + h/2,\ y_{1,\,k-1} + l_2/2);$$
$$l_4 = h f_3 (x_{k-1}+h,\ y_{1,\,k-1} + l_3);$$
$$P_1 = h f_2 (x_{k-1},\ y_{2,\,k-1});$$
$$P_2 = h f_2(x_{k-1} + h/2,\ y_{2,\,k-1} + P_1/2);$$
$$P_3 = h f_2 (x_{k-1} + h/2,\ y_{2,\,k-1} + P_2/2);$$
$$P_4 = h f_2 (x_{k-1} + h,\ y_{2,\,k-1} + P_3);$$
$$q_1 = h f_3 (x_{k-1},\ y_{3,\,k-1});$$
$$q_2 = h f_3 (x_{k-1} + h/2,\ y_{3,\,k-1} + q_1/2);$$
$$q_3 = h f_3 (x_{k-1} + h/2,\ y_{3,\,k-1} + q_2/2);$$
$$q_4 = h f_3 (x_{k-1} + h\ \ y_{3,\,k-1} + q_3).$$

ანალოგიური ფორმულები არსებობს n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციელური განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის რუნგე-კუტას მეთოდით.

რუნგე-კუტას მეთოდით აგრეთვე შეიძლება ამოვხსნათ კოშის ამოცანა n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის მისი სისტემაზე დაყვანით, თუ იგი ამოხსნადია უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ.

ვთქვათ, გვაქვს კოშის ამოცანა

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'', \dots, y^{(n-1)}),\ y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)},\ \ (k=0,\ 1, \dots, n-1).$$

შემოვიღოთ ახალი ფუნქციები

$$y' = y_1,\ y'' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1},\quad \text{მაშინ}$$

ჩვენი ამოცანა დაიყვანება

$$\frac{dy}{dx} = y_1,$$
$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$
$$\cdot\quad \cdot\quad \cdot$$
$$\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$
$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x,\ y,\ y_1,\ y_2, \dots, y_{n-1}),$$

სისტემის ამოხსნაზე, შემდეგი საწყისი პირობებით

$$y_1(x_0) = y_0',\ y_2(x_0) = y_0'', \dots, y_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

3072. შეადგინეთ რუნგე-კუტას მეთოდით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ქვეპროგრამა. ფორმალური პარამეტრებია: (*XO*, *YO*, *F*, *H*, *Y* *N*, *EPS*), სადაც *EPS* — მოცემული სიზუსტეა, *H* — ინტეგრების ბიჯი, *XO*, *YO* — საწყისი მნიშვნელობები, *F* — ქვეპროგრამა — ფუნქციის სახელი, რომელიც გამოითვლის $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობას, *N*—$y(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა რაოდენობა, *Y* კი *N* — განზომილებიანი მასივი.

3073. შეადგინეთ ეილერის მეთოდით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ქვეპროგრამა ფორმალური პარამეტრებით (*XO*, *YO*, *F*, *H*, *N*, *Y*), რომლებსაც იგივე მნიშვნელობები აქვთ, რაც წინა ამოცანაში.

3074. შეასრულეთ წინა დავალება, ეილერის მეთოდი შეცვალეთ ეილერ-კოშის გაუმჯობესებული მეთოდით.

3075. შეადგინეთ მილნის მეთოდით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ქვეპროგრამა ფორმალური პარამეტრებით (*F*, *XO*, *N*, *H*, *Y*, *EPS*), სადაც *EPS* არის აბსოლუტური ზღვრული ცდომილება, *Y* საძებნი ფუნქციის მნიშვნელობათა რაოდენობა საწყისი მნიშვნელობის ჩათვლით. საძებნი ფუნქციის პირველი ოთხი მნიშვნელობა წინასწარ უნდა იქნეს გამოთვლილი ქვეპროგრამის მიმართვამდე. დანარჩენი პარამეტრებს იგივე მნიშვნელობა აქვთ რაც წინა ამოცანებში.

შეადგინეთ პროგრამა, რომელიც ამოხსნის 3076—3097 მოყვანილ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის სათანადო ამოცანას რუნგე-კუტას, ან ეილერის, ან ეილერის გაუმჯობესებული, ან მილნის მეთოდით.

3076. $y' = \dfrac{xy}{3+\cos^2 x}$, $y(0)=1$, $[0;\ 1,5]$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

3077. $y' = \sqrt{x^2+y^2} \Big/ \left(4,563 + \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{y}\right)$, $y(1)=3$, $[1;\ 2]$, $\varepsilon=10^{-5}$.

3078. $y' = 0,(3)\, e^{x^2+y} \,/\, (2\sin^2 x + y^2 x^4)$, $y(-1) = -4,652$, $[-1;\ -0,9]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3079. $y' = \dfrac{0,(3)\, e^{x^2+y}}{2\sin^2 x + y^2 x^4}$, $y(1) = 0,5$, $[1;\ 2]$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

3080. $y' = \dfrac{(\mathrm{tg}\, x^2)\, y^3}{4 + y \ln^2 x}$, $y(1) = 0,5$, $[1;\ 2,66]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3081. $y' = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $y(2) = 3,058$, $[2;\ 3]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3082. $y' = \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{y^2 + \ln^2 x}$, $y(1,23) = 2,34$, $[1,23;\ 2,56]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3083. $y' = \dfrac{(x + 2y)^3}{\sqrt[4]{x} + y^2}$, $y(2,125) = 1,152$, $[2,125;\ 3,17]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3084. $y' = e^{y\sqrt{x}} \sin(x^2 + y)$, $y(0) = 3$, $[0;\ 1)$, $\varepsilon = 10^{-7}$.

3085. $y' = e^{-y\sqrt{x}} \sin(x^2 + y)$, $y(0) = 3$, $[0;\ 1]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3086. $y' = \sin^3(x + \cos^2 y)^3$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$, $\left[\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3087. $y' = \dfrac{(x^2 + xy + y^2)^3}{\cos x + x^3 + y^3}$, $y(0) = \sqrt{3}$, $[0;\ 0,166]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3088. $y' = \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt{x} + 2\sqrt{y}}}{(x^2 + y)^3}$, $y(\sqrt{\pi}) = 2$, $[\sqrt{\pi};\ \sqrt{2\pi}]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3089. $y' = \left(\dfrac{3x^2 + 0,4\,xy + y^2}{2x^2 - 0,7\,xy + 3y^2}\right)^2$, $y(1,12) = 4,56$, $[1,12;\ 2,15]$,
$\varepsilon = 10^{-5}$.

3090. $y' = \dfrac{\ln^2 x + \sqrt{y^2 + 1}}{x^3(y^4 + 1)}$, $y(2) = -3$, $[2;\ 4]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3091. $y' = \dfrac{\sin y + 2\cos^2 x}{\sqrt{0,4 + \cos^2 y \sin^2 x}}$, $y(0) = 1$, $[0,\ \pi]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3092. $y' = \dfrac{3^{\sin x} + y}{\sqrt{\mathrm{oos}^2 2x + y^2}}$, $y(1) = 0,5$, $[1,3]$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

3093. $y' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^3} \cos \dfrac{x}{1 + y^2}$, $y(0) = \sqrt{3}$, $[0;\ 2]$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

3094. $y' = \dfrac{\sin^2 x + \ln(1 + y^2)}{1 + e^x}$, $y(1) = 1$, $[1;\ 3]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3095. $y' = \dfrac{(3x^2 - 4y^3 + 1)^2}{x^4 y^2 + 3e^x \cos^2 y}$, $y(0) = 0,5$, $[0;\ 0,33]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3096. $y' = \dfrac{e^{x^2 y} + \sqrt{2}\,y^3}{(1 + xy^2)^3}$, $y(1) = 0,3157$, $[1;\ 2]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3097. $y' = \sin y - \ln\left(\dfrac{x}{y^2 + 1} + \sqrt{2}\right)$, $y(2) = 0,2$, $[2;\ 3]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3098. შეადგინეთ ორ უცნობიანი ორი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის

$$y' = f(x, y, z)$$
$$z' = \varphi(x, y, z) \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0,$$

ამოხსნის ქვეპროგრამა ფორტრანზე რუნგე-კუტას მეთოდით. ფორმალური პარამეტრებია ($F1$, $F2$, $X\varnothing$, $Y\varnothing$, $Z\varnothing$, N, H, Y, Z, EPS), $F1$, $F2$ არის ქვეპროგრამა — ფუნქცია, რომელიც გამოითვლის $f(x, y, z)$ და $\varphi(x, y, z)$ ფუნქციებს, $X\varnothing$, $Y\varnothing$, $Z\varnothing$ საწყისი მნიშვნელობებია, H ინტეგრების ბიჯი, N საძებნი $y(t)$, $z(t)$ ფუნქციების რაოდენობა, Y, Z, N — განზომილებიანი მასივი, რომელშიც მიიღება $y(x)$ და $z(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობები, EPS აბსოლუტური ზღვრული ცდომილება.

3099. შეადგინეთ სამ უცნობიანი დ სამი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ქვეპროგრამა ფორტრანზე რუნგე-კუტას მეთოდით.

3098, 3099 მიღებული ქვეპროგრამების გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემები:

3100. $$\begin{cases} y' = \dfrac{z}{x} + 1, & y(1) = 0; \\ z' = \dfrac{3z^2}{x(y-1)} + \dfrac{x}{z}. & z(1) = 1. \end{cases} \quad [1, 2]. \quad \varepsilon = 10^{-4}..$$

3101. $$\begin{cases} y' = \sin(x + 2z) + 3, & y(0) = 0; \\ z' = \dfrac{2}{x + 2y^2} + x + y. & z(0) = 1. \end{cases} \quad [0;\ 1], \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

3102. $$\begin{cases} y' = e^{-(x^2 + y^2)} + 1, & y(0) = 1; \\ z' = 3y^2 + z. & z(0) = 2. \end{cases} \quad [0;\ 0{,}5]; \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

ქვემოთ მოყვანილი მაღალი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები დაიყვანეთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე და ამოხსენით რუნგე-კუტას მეთოდით.

3103. $2y''' - xy'' + (x^2 - 6)(y' - y) = 0;\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1;$
$y''(0) = 0;\ \ [0;\ 1];\ \ \varepsilon = 10^{-3}.$

3104. $(1 - x^2)(1 - x^2 - 6x)\, y''' + (7x^2 - 4)\, y'' + xy' - 64y = 0;$
$y(0) = 1;\ \ y'(0) = 6;\ \ y''(0) = -16;\ \ y'''(0) = 0;$
$[0;\ 0{,}5];\ \ \varepsilon = 10^{-4}.$

3105. $(9-x^2)^2 y'' + 4x(9-x^2)y' + (2(9-x^2)+(9-x^2)^3-8x^2)y = 0$,
$y(0)=0;\ \ y'(0)=9;\ \ [0;\ 1],\ \ \varepsilon=10^{-4}$.

3106. $y''(1+x^2)+y'^2+1=0;\ y(0)=0;\ y'(0)=1;\ [0;\ 1];\ \varepsilon=10^{-6}$.

3107. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x};\ \ y(1)=0;\ \ y'(1)=1;\ [1;\ 2];\ \ \varepsilon=10^{-6}$.

3108. $4y'+y''^2=4xy'';\ y(0)=0;\ \ y'(0)=-1;\ \ [0;\ 1],\ \ \varepsilon=10^{-3}$.

3109. $2y'^2=(y-1)y'';\ y(0)=2;\ \ y'(0)=1;\ [0;\ \ 0{,}75];\ \ \varepsilon=10^{-3}$.

3110. $y'^2+2yy'=0;\ \ y(1)=y'(1)=1;\ \ [1;\ 2];\ \ \varepsilon=10^{-5}$.

3111. $y''=2\sin x+4x\cos x-y;\ y(0)=y'(0)=0;\ [0;\ 2];\ \varepsilon=10^{-6}$.

3112. $y''=\dfrac{20y}{(x+1)^2};\ \ y(0)=0;\ y'(0)=5;\ [0;2];\ \ \varepsilon=10^{-4}$.

3113. $y''=y'+\dfrac{2}{\cos^2 x}y+\dfrac{e^x}{\cos^2 x};\ y(0)=0;\ \ y'(0)=1;\ \ [0;2];\ \ \varepsilon=10^{-5}$.

3114. $y''=\dfrac{y-2xy}{(1+x^2)^2};\ y(0)=y'(0)=1;\ [0;\ 2];\ \varepsilon=10^{-4}$,

3115. $y''=y'+\dfrac{2y}{x^2+1}+2xe^x;\ y(0)=0;\ y'(0)=1;\ [0;2];\ \varepsilon=10^{-5}$.

XIII თავი

სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია

§ 1. ვექტორული ფუნქციის წარმოებული

ვექტორული $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, თუ ცნობილია მისი $r_x(t)$, $r_y(t)$, $r_z(t)$ გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე;

$$\vec{r}=r_x(t)\vec{i}+r_y(t)\vec{j}+r_z(t)\vec{k}.$$

სადაც $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ კოორდინატთა ღერძების მგეზავებია.

ვექტორული ფუნქციის წარმოებული t სკალარული არგუმენტით ასე გამოითვლება:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{dr_x(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dr_y(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dr_z(t)}{dt}\vec{k}.$$

ვექტორული ფუნქციის წარმოებულის მოდული

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dr_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_z}{dt}\right)^2}.$$

$\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ ცვლადი ვექტორის ბოლო წერტილი სივრცეში აღწერს წირს, რომელსაც $\vec{r}$ ვექტორის ჰოდოგრაფი ეწოდება.

თუ t აღნიშნავს დროს, მაშინ $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$ არის $\vec{r}$ ვექტორის ბოლო წერტილის სიჩქარე, ხოლო $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{w}$ — ბოლო წერტილის აჩქარება.

სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქციის გაწარმოების ძირითადი წესებია:

1) $\frac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\,)=\frac{d\vec{a}}{dt}+\frac{d\vec{b}}{dt}-\frac{d\vec{c}}{dt}$;

2) $\frac{d}{dt}(m\vec{a})=m\frac{d\vec{a}}{dt}$, სადაც m მუდმივი სკალარია;

3) $\frac{d}{dt}[\varphi(t)\vec{a}\,]=\frac{d\varphi}{dt}\vec{a}+\varphi\frac{d\vec{a}}{dt}$, სადაც $\varphi(t)$ არის t-ს სკალარული ფუნქცია;

4) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)=\frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b}+\vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}$;

5) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}\,)=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$;

6) $\frac{d}{dt}\vec{a}\,[\varphi(t)\,]=\frac{d\vec{a}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}$; 7) $\vec{a}\,\frac{d\vec{a}}{dt}=0$, თუ $|\vec{a}\,|=\text{const}$.

3116. იპოვეთ წარმოებულები შემდეგი ვექტორებისა:

1) $\vec{r}=\operatorname{ctg} t\cdot\vec{i}+\operatorname{arctg} t\cdot\vec{j}$; 2) $\vec{r}=e^{-t}\cdot\vec{i}+2t\vec{j}+\ln t\cdot\vec{k}$;

3) $\vec{r}=t^2\vec{i}-\frac{1}{t}\vec{j}+\frac{1}{t^2}\vec{k}$.

3117. მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი ნებისმიერ t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r}=4t\,\vec{i}-3t\,\vec{j}$ განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

3118. მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი დროის ნებისმიერ t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r}=\vec{i}-4t^2\vec{j}+3t^2\vec{k}$ განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

3119. მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r}=a\,(t-\sin t)\;\vec{i}+a\,(1-\cos t)\vec{j}$. განსაზღვრეთ სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, როცა $t=\frac{\pi}{2}$; $t=\pi$.

3120. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r}=3t\vec{i}+(4t-t^2)\,\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია და სიჩქარე. ააგეთ ტრაექტორია და სიჩქარის ვექტორები, როცა $t=0$; 1; 2; 3.

3121. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r}=3\cos t\cdot\vec{i}+4\sin t\cdot\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება. ააგეთ ტრაექტორია და სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, როცა $t=0$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$.

3122. განსაზღვრეთ, რომელი წირებია შემდეგი ვექტორული ფუნქციების ჰოდოგრაფები; 1) $\vec{r}=\vec{a}t+\vec{c}$; 2) $\vec{r}=\vec{a}\cos t+b\sin t$; 3) $\vec{r}=\vec{a}t^2+\vec{b}t$, სადაც $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მუდმივი ვექტორებია, ამასთან $\vec{a}\perp\vec{b}$.

3123. მოცემულია $\vec{r}=\vec{a}\cos\omega t+\vec{b}\sin\omega t$, სადაც ω, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მუდმივებია. აჩვენეთ, რომ:

$$1)\ \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\omega\,(\vec{a}\times\vec{b});\quad 2)\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\omega^2\vec{r}=0.$$

3124. აჩვენეთ, რომ თუ $\vec{r}=\vec{a}e^{\omega t}+\vec{b}e^{-\omega t}$, სადაც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მუდმივი ვექტორებია, მაშინ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}-\omega^2\vec{r}=0.$$

3125. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{e}$ არის $\vec{E}$ ვექტორის მგეზავი, მაშინ

$$\vec{e}\times d\vec{e}=\frac{\vec{E}\times d\vec{E}}{\vec{E}^2}.$$

§ 2. სივრცის წირის ელემენტები

სივრცის წირის განტოლებები პარამეტრული სახით ასეთია:

$$x=f(t),\quad x=\varphi(t).\ z=\psi(t),$$

სადაც $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ წარმოადგენს t პარამეტრის მოცემულ

ფუნქციებს. სივრცის წირის განტოლებები ვექტორულად ასე ჩაიწერება:

$$\vec{r} = f(t)\,\vec{i} + \varphi(t)\,\vec{j} + \psi(t)\,\vec{k}\,.$$

სივრცის წირის რკალის დიფერენციალი გამოითვლება

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ფორმულით.

1. **სივრცის წირის მხები წრფე და ნორმალური სიბრტყე.** სივრცის წირის მხები წრფე $M(x, y, z)$ წერტილში ეწოდება წირის MM_1 მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას, როდესაც M_1 წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ მოცემული წირის გასწვრივ. სივრცის წირის M წერტილში მხები წრფის მართობულად გავლებულ სიბრტყეს ეწოდება ნორმალური სიბრტყე.

თუ სივრცის წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ წირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გავლებული მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებებია:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}, \quad x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0,$$

სადაც X, Y, და Z მხების წრფის ან ნორმალური სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია.

მხები წრფის მიმართულების კოსინუსები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

იპოვეთ რკალის დიფერენციალი შემდეგი წირებისა:

3126. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\frac{t}{2}$.

3227. $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \ln\cos t$.

3128. $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}$.

3129. $x = e^t\cos t, \quad y = e^t\sin t, \quad z = e^t$.

შეადგინეთ შემდეგი წირების მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები ნაჩვენებ წერტილებში და იპოვეთ მხების მიმართულების კოსინუსები:

3130. $y=t,\ x=t^2,\ z=t^3$, როცა $t=1$.

3131. $x=R\cos^2 t,\ y=R\sin t\cos t,\ z=R\sin t$, როცა $t=\dfrac{\pi}{4}$.

3132. იპოვეთ $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$ ხრახნწირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები, როცა $t=\dfrac{\pi}{2}$.

3133. იპოვეთ $x=2t,\ y=\ln t,\ z=t^2$ წირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები, როცა $t=1$.

3134. იპოვეთ $x^2+y^2=10,\ y^2+z^2=25$ წირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები $M\,(1;\ 3;\ 4)$ წერტილებში.

3135. იგივე $z=x^2+y^2,\ x=y$ წირისათვის $M\,(1;\ 1;\ 2)$ წერტილში.

2. სივრცის წირის მიმხები სიბრტყე, ბინორმალი, მთავარი ნორმალი, გამწრფევი სიბრტყე. ბუნებრივი სამწახნაგა.

ავიღოთ სივრცის წირის განტოლება ვექტორული სახით

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+\varphi(t)\vec{j}+\psi(t)\vec{k}.$$

1) წირის $M\,(x,\ y,\ z)$ წერტილზე და წირზე მდებარე მის ორ მახლობელ წერტილზე გამავალი სიბრტყის ზღვრულ მდებარეობას, როცა მახლობელი წერტილები M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, ეწოდება წირის მიმხები სიბრტყე M წერტილში. მიმხები სიბრტყე შეიცავს $\vec{T}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ და $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ვექტორებს.

2) წირის M წერტილზე გამავალი მიმხები სიბრტყის მართობ წრფეს ეწოდება წირის ბინორმალი M წერტილში. ბინორმალის ვექტორია $\vec{B}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

3) წირის M წერტილზე გამავალი მხები წრფის მართობულ წრფეს, რომელიც მოთავსებულია მიმხებ სიბრტყეში, ეწოდება წირის მთავარი ნორმალი M წერტილში. მთავარი ნორმალის ვექტორია $\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$.

4) წირის M წერტილზე გამავალი მთავარი ნორმალის მართებულ სიბრტყეს ეწოდება წირის გამწრფევი სიბრტყე M წერტილში.

ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებებია:

$$\frac{X-x}{B_x}=\frac{Y-y}{B_y}=\frac{Z-z}{B_z},\quad B_x(X-x)+B_y(Y-y)+B_z(Z-z)=0,$$

ხოლო მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის განტოლებები —

$$\frac{X-x}{N_x}=\frac{Y-y}{N_y}=\frac{Z-z}{N_z}, \quad N_x(X-x)+N_y(Y-y)+N_z(Z-z)=0,$$

სადაც X, Y, Z ბინორმალის, მიმხები სიბრტყის, მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია.

სამი ურთიერთმართობული სიბრტყე (ნორმალური, მიმხები და გამწრფევი) ქმნის ე. წ. *ბუნებრივ სამწახნაგას*. სამ ურთიერთმართობულ წრფეს (მხები, ბინორმალი და მთავარი ნორმალი), რომლებიც სამწახნაგას წიბოებია, ხშირად ღებულობენ კოორდინატთა ღერძებად. მათ ერთობლიობას უწოდებენ *ბუნებრივ კოორდინატთა სისტემას*.

3136. იპოვეთ $x=t^2$, $y=1-t$, $z=t^3$ წირის ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებები $M(1;\ 0;\ 1)$ წერტილში.

3137. იპოვეთ $y^2=x$, $x^2=z$ წირის ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებები $M(1;\ 1;\ 1)$ წერტილში.

3138. იპოვეთ $x=t$, $y=-t$, $z=\frac{t^2}{2}$ წირის მთავარი ნორმალი და გამწრფევი სიბრტყე $t=2$ წერტილში.

3139. იპოვეთ $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t$ წირის მთავარი ნორმალი და გამწრფევი სიბრტყე $t=0$ წერტილში.

3140. იპოვეთ $\vec{r}=\frac{t^4}{4}\vec{i}+\frac{t^3}{3}\vec{j}+\frac{t^2}{2}\vec{k}$ წირის მხები წრფე, რომელიც $x+3y+2z=0$ სიბრტყის პარალელურია.

3141. შეადგინეთ $\vec{r}=\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{j}+\ln\sin t\cdot\vec{k}$ წირის ბუნებრივი სამწახნაგას წახნაგების განტოლებები $t=\frac{\pi}{2}$ წერტილში.

§ 8. სივრცის წირის სიმრუდე და გრეხა

თუ სივრცის წირის განტოლება მოცემულია ვექტორული სახით:

$$\vec{r}=r(t)=f(t)\,\vec{i}+\varphi(t)\,\vec{j}+\psi(t)\,\vec{k},$$

მაშინ წირის სიმრუდე და გრეხა. შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$K=\frac{1}{R}\frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3},$$

$$T=\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2},$$

სადაც R სიმრუდის რადიუსია, ხოლო ρ — გრეხის რადიუსი.

იპოვეთ სიმრუდე და გრეხა შემდეგი წირებისა:

3142. $x=t,\ \ y=t^2,\ \ z=t^3$ ნებისმიერ t წერტილში და $t=0$ წერტილში.

3143. $x=2t,\ \ y=\ln t,\ z=t^2$ ნებისმიერ t წერტილში და $t=1$ წერტილში.

3144. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ მის ნებისმიერ წერტილში.

3145. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ z=e^t,\ t=0$ წერტილში.

3146. იპოვეთ $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t\sqrt{2}$ წირის სიმრუდე.

3147. იპოვეთ $x^2=2az,\ y^2=2bz$ წირის სიმრუდე და გრეხა.

3148. იპოვეთ $y=\frac{x^2}{2},\ \ z=\frac{x^3}{3}$ წირის სიმრუდე და გრეხა, როცა $x=1$.

3149. იპოვეთ $y=\frac{x^2}{2a},\ \ z=\frac{x^3}{6a^2}$ წირის სიმრუდე და გრეხა.

ფორტრან-IV შემოკლებული აღწერა

სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად ყველაზე უფრო მეტად გამოიყენება ფორტრანი, რომელიც წარმოადგენს ორი ინგლისური სიტყვის „*FOR* mula *TRAN* slator-ის საწყისი მარცვლების გაერთიანებას, რაც ნიშნავს „ფორმულის მთარგმნელი“.

პროგრამები, რომლებიც დაწერილია ფორტრანის ენაზე, ჩაიწერება სპეციალურ ბლანკებზე. პროგრამა შესდგება ოპერატორების თანამიმდევრობებისაგან. ოპერატორი — ესაა გარკვეული სიტყვების მიმდევრობა. ფორტრანის ოპერატორების ჩასაწერად ენის ალფავიტის გარდა კიდევ გამოიყენება შემდეგი სიტყვები:

IF — თუ, DO — კეთება, STOP —'გაჩერება, END — ბოლო, DIMENSION — განზომილება, FUNCTION — ფუნქცია, WRITE — წერა, ბეჭდვა, READ —კითხვა, FOPMAT — ფორმატი, GOTO— გადასვლა, RETURN— — დაბრუნება, SUBROUTINE — განმეორებადი, CONTINUE — გაგრძელება და ა. შ.

ბლანკის თითოეულ სტრიქონში ჩაიწერება ერთი ოპერატორი. სტრიქონი შესდგება 80 პოზიციისაგან. 7—72 პოზიციაში იწერება ოპერატორი, ხოლო 1—5 პოზიცია კი გამოყოფილია ჭდისათვის. ჭდე არის ოპერატორის სახელი. ის არის უნიშნოდ აღებული მთელი რიცხვი და ჩაიწერება ნებისმიერად 1—5 პოზიციაში. ჭდის აღმნიშვნელ რიცხვებს შორის ინტერვალი უგულებელყოფილი იქნება. მე-6 პოზიციას აქვს გარკვეული დანიშნულება. თუ ოპერატორი არ ეტევა ერთ სტრიქონში, მაშინ მისი გადატანა შეიძლება მეორე სტრიქონში, ოღონდ გადატანის დროს არითმეტიკული ოპერაციები არ მეორდება. ასეთ შემთხვევაში მე-6 პოზიციაში ჩაიწერება ნებისმიერი სიმბოლო ნულისა და [_] (ინტერვალის) ნიშნის გარდა. ხშირად სტრიქონის გაგრძელების ნიშნად წერენ სტრიქონის ნომერს ან * სიმბოლოს. ოპერატორის გაგრძელება შეიძლება 19 სტრიქონში.

73—80 პოზიცია გამოიყენება დამატებითი ინფორმაციისათვის. კერძოდ: ოპერატორის დასანომრად, შენიშვნის გასაკეთებლად, და ა. შ.

კ ო მ ე ნ ტ ა რ ე ბ ი ს ჩ ა წ ე რ ა. პროგრამა შეიძლება შეიცავდეს სხვადასხვა სახის ახსნა-განმარტებებს, რომლებიც განსხვავდებიან ოპერატორული წინადადებებისაგან. კომენტარები გვიადვილებს პროგრამის წაკითხვას და მის გაგებას. იმისათვის, რომ მანქანამ გაარჩიოს კომენტარი ოპერატორისაგან, მისი სტრიქონის პირველი პოზიცია უნდა იწყებოდეს „C" სიმბოლოთი. კომენტარების ჩასაწერად გამოიყენება ფორტრანის ნებისმიერი სიმბოლო და რუსული ბეჭდური ასოებიც.

ფორტრანის ძირითადი კონსტრუქციაა ოპერატორები, რომლებიც იყოფა ორ კლასად: შემსრულებელი და აღწერითი (არა შემსრულებელი) ოპერატორები. შემსრულებელი ოპერატორები მიუთითებენ მოქმედებებს და მათი შესრულების რიგს. აღწერითი ოპერატორები კი გამოიყენება სიდიდეების აღწერისათვის, მიუთითებენ მათ ტიპს, სტრუქტურას და ა. შ.

ძ ი რ ი თ ა დ ი ს ი მ ბ ო ლ ო ე ბ ი. ძირითადი სიმბოლოებია ყველა ლათინური ასოები:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. ციფრები: Ø, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ციფრი Ø გადაიხაზება, რომ

განვასხვავოთ O სიმბოლოსაგან. გარდა ამისა გვაქვს სპეციალური სიმბოლოები:

+ — შეკრების ნიშანი,	, — მძიმე,
— — გამოკლების ნიშანი,	(— გახსნილი ფრჩხილი,
* — გამრავლების ნიშანი,	) — დახურული ფრჩხილი,
** — ახარისხების ნიშანი,	| | — პრობელი, ინტერვალი,
/ — გაყოფის ნიშანი,	= — მინიჭების (ტოლობის) ნიშანი,
. — ათობით წერტილი,	$ — დოლარის ნიშანი.

მ უ დ მ ი ვ ე ბ ი დ ა ც ვ ლ ა დ ე ბ ი. არჩევენ 5 ტიპის მუდმივებს: მთელი, ნამდვილი, კომპლექსური, სიმბოლური, თექვსმეტობითი.

მთელი მუდმივი (ფორმა I*W*) — ესაა ნებისმიერი რიცხვი, ჩაწერილი ათობითი წერტილის გარეშე. მაგ. —1, —15, 125, 0, 2, —224 და ა. შ. მთელი მუდმივის სიდიდე არ აღემატება $2^{31}-1 \approx 2 \cdot 10^{9}$ რიცხვს (რომელიც დამოკიდებულია მანქანის ტიპზე).

ნამდვილი ტიპის მუდმივი (ფორმა *F*)—ესაა ათწილადები, რომელშიც თანრიგების მაქსიმალური რაოდენობა დამოკიდებულია მანქანის ტიპზე. მაგ. 10. 5, —2.2, 0.005, 245.068, 56.0 და ა. შ.

ნამდვილი ტიპის ჩაწერა შეიძლება ექსპონენციალური ფორმით (ფორმა E), ასეთი სახით: ZEn, სადაც E გამოიყენება როგორც 10 ფუძე. *Z* შეიძლება იყოს მთელი ან ათწილადი რიცხვები, *n* კი მთელი რიცხვი. *Z* არ უნდა შეიცავდეს *E* სიმბოლოს. მაგ. 1.0*E*25—ესაა რიცხვი 10^{25}; 10^{-3} ასე ჩაიწერება. 1*E*—2; 225 ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ: 2.25E02 ან .225E03 და ა. შ. *n* არ აღემატება ორნიშნა მთელ რიცხვს, რომელიც შეიძლება აღებულ იქნას ნიშნით ან უნიშნოდ. ამ შემთხვევაშიც თანრიგების რაოდენობა დამოკიდებულია მანქანის ტიპზე. ES ტიპის მანქანებზე *F* და *E* ფორმაში თანრიგების რაოდენობაა 8.

უფრო მაღალი სიზუსტის მისაღებად გამოიყენება ფორმა *D*—მუდმივი ორმაგი სიზუსტით. თუ რიცხვი ჩაწერილია ათწილადის სახით, მაშინ თანრიგების რაოდენობა შესდგება 16-მდე ნიშნადი ციფრისაგან, ხოლო თუ რიცხვი ჩაწერილია ექსპონენციალური ფორმით, მაშინ მისი მანტისა შესდგება 16 ციფრისაგან; ოღონდ ჩაწერის დროს გამოიყენება *D* სიმბოლო *E* მაგივრად. აღწერისას უნდა ვიხმაროთ DOUBLE PRESION (ორმაგი სიზუსტე) და ასე ჩაიწერება ZDn. მაგ. 0D0 ესაა ნული, 1.0D0 ესაა 1. რიცხვი 31,2 ასე შეიძლება ჩავწეროთ 3.12D1 ან .312D2. რიცხვი π 11 ნიშნის სიზუსტით ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ 3,14159263358D0 და ა. შ.

ც ვ ლ ა დ ე ბ ი. ესაა სიმბოლური სახელწოდებით აღებული სიდიდეები. სიმბოლური სახელი — ესაა ასოების ან ასოებისა და ციფრების ერთობლიობა, რომელთა რაოდენობა სახელში უნდა იყოს 1-დან 6-მდე. სიმბოლური სახელი ყოველთვის იწყება ასოთი. ცვლადების სახელწოდებად არ შეიძლება გამოვიყენოთ სპეციალური სიმბოლოები, როგორიცაა SIN, COS, ATAN, ⊔! და ა. შ. მაგ ALPHA; A121.; 2A არ არის სწორი, რადგანაც იწყება ციფრი 2-ით. A⊔B2 — არც ესაა სწორი, რადგანაც შეიცავს ⊔ სიმბოლოს, PROGRAMMA — არც ესაა სწორი, რადგანაც შესდგება 6-ზე მეტი სიმბოლოსაგან.

ც ვ ლ ა დ ე ბ ი ს ტ ი პ ი. ცვლადების ტიპი შეესაბამება იმ მონაცემებს, რომლებსაც ისინი აღწერენ. მთელი ტიპის ცვლადები აღწერენ მთელ რიცხვებს, ნამდვილი ტიპის ცვლადები კი — ნამდვილ რიცხვებს და ა. შ. ცვლადის ტიპის აღსაწერად გამოიყენება ოპერატორი TUП $a_1, a_2, \ldots, a_n$, სადაც TUП — შეიძლება იყოს ერთ-ერთი ამ სიტყვებიდან: INTEGER (მთელი), REAL (ნამდვილი), DOUBLE PRESION (ორმაგი სიზუსტე), LOGIGAL (ლოგიკური); ხოლო $a_1, a_2, \ldots, a_n$ —ესაა ცვლადების სახელები. თუ პროგრამაში წინასწარ არ არის აღწერილი ცვლადების ტიპი, მაშინ იგულისხმება, რომ ცვლადები, რომელთა სახელები იწყება *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N*-ით არის მთელი (INTEGER) ტიპის, დანარჩენი კი ნამდვილი (REAL) ტიპის.

ი ნ დ ე ქ ს ი ა ნ ი ც ვ ლ ა დ ე ბ ი. მასივი — ესაა სიდიდეების მოწესრიგებული ერთობლიობა, რომლებსაც მასივის ელემენტები ეწოდებათ. მასივი აღინიშნება ერთი სიმბოლური სახელით, რომელსაც გააჩნია განზომილება და სიგრძე. ფორტრანში დასაშვებია 1, 2, 3 განზომილებიანი მასივები. ერთგანზომილებიანი მასივი წარმოგვიდგება ვექტორის სახით, 2—განზომილებიანი კი — როგორც მატრიცა, 3—განზომილებიანი — მატრიცათა ერთობლიობა.

მასივის ყოველი ელემენტი განისაზღვრება მასივის სახელით და მისი ადგილით მასივში, ე. ი. განისაზღვრება ინდექსების მნიშვნელობით. ინდექსები ჩაისმება მრგვალ ფრჩხილებში. მაგ. SUM (I, J). ინდექსების რაოდენობა განსაზღვრავს მასივის განზომილებას. მაგ. SUM (I, J) არის ორგანზომილებიანი მასივი. ინდექსებად შეიძლება გამოყენებულ იქნას არითმეტიკული გამოსახულება, ცვლადები (მთელი ან ნამდვილი ტიპის). თუ ინდექსად გვაქვს ნამდვილი ტიპის გამოსახულება, მაშინ ინდექსად აიღება მისი მთელი ნაწილი, ე. ი. წილა-

დური ნაწილი გადაგდებულ იქნება. მასივში ინდექსების რაოდენობა $\geqslant$ 1. მაგ. $A(I)$, $C(I, J)$, $B(I+5, J+1)$ და ა. შ.

მ ა ს ი ვ ე ბ ი ს ა ღ წ ე რ ა. პროგრამაში გამოყენებული მასივების აღწერა აუცილებელია. მათი აღწერა მოიცემა პროგრამის დასაწყისში და მოთავსდება პირველი შემსრულებელი ოპერატორამდე. მასივის აღსაწერად გამოიყენება აღწერითი ოპერატორი და ასეთი სახე აქვს DIMENSION $a_1(n_1, n_2, \ldots, n_2), \ldots, a_n(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, სადაც $a_1, \ldots, a_n$ მასივების სახელწოდებაა. ინდექსების ცვლილების საზღვრები ზოგადად ასეთია: $1 \leqslant i \leqslant 7$, $1 \leqslant j \leqslant 7$. ფორტრანში 3 განზომილებიანი მასივებზე მეტი არ გვაქვს.

ინდექსების ზედა საზღვრების ნამრავლი განსაზღვრავს მასივის სიგრძეს ან მასში ელემენტების რაოდენობას. მრავალ განზომილებიანი მასივის ელემენტები ჩაიწერება ერთმანეთის მიმდევრობით ისე, რომ უფრო სწრაფად იცვლება პირველი ინდექსი და უფრო ნელა შემდეგი ინდექსები. მაგ. DIMENSION $A(4)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2, 2)$. A სიგრძეა 4, B-ს $2 \times 3 = 6$, C-ს კი $3 \times 2 \times 3 = 12$. თითოეული ელემენტი ასე შეიძლება ჩავწეროთ: $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$; $B(1,1)$, $B(2, 1)$, $B(1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(1, 1, 1)$, $C(2, 1, 1)$, $C(3, 1, 1)$, $C(1, 2, 1)$ და ა. შ. ორგანზომილებიანი მასივის ელემენტები ფორტრან—IV-ში ჩაიწერება სვეტებისმიხედვით. სამგანზომილებიანი მასივში ჯერ იცვლება მარცხენა ინდექსი, შემდეგ საშუალო, ბოლოს კი მარჯვენა. თვით მასივი და მისი ელემენტები განსაზღვრული ტიპის სიდიდეებია: მთელი, ნამდვილი, ლოგიკური, ორმაგი სიზუსტით. თუ მასივის სახელწოდების აღწერა არ არის ტიპის აღწერის ოპერატორში, მაშინ მისი ტიპი განისაზღვრება მისი სახელწოდების პირველი ასოთი, წინააღმდეგ შემთხვევაში მასივის სახელწოდება უნდა იქნეს აღწერილი. მაგ. INTEGER A, REAL K, COMPLEX U; DIMENSION A (3), K (7,9), U (15), R (3). აქ A მთელი ტიპისაა, K, R ნამდვილი ტიპისაა, U კომპლექსური.

ა რ ი თ მ ე ტ ი კ უ ლ ი გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ა. ფორტრანში არითმეტიკული გამოსახულება მსგავსია ჩვეულებრივი ალგებრული გამოსახულების. არითმეტიკული გამოსახულება შესდგება რიცხვების, ცვლადების (მარტივი ან ინდექსიანი), ფუნქციების ერთობლიობისაგან, რომლებიც შეერთებულია არითმეტიკული ოპერაციებით. თუ არითმეტიკულ გამოსახულებაში ფრჩხილები არ გვაქვს, მაშინ გამოთვლები სწარმოებს შემდეგნაირად: ჯერ სრულდება ** (ახარისხება), შემდეგ * ან / (გამრავლება ან გაყოფა), შემდეგ კი შეკრება ან გამოკლება. თუ გამოსახულება შეიცავს ფრჩხილებს, მაშინ ჯერ სრულდება ფრჩხილში მოთავსებული მოქმედება. თუ გამოსახულება შეიცავს სპე-

ციალურ ფუნქციებს (sin, cos, tg, ln, ...), მაშინ ჯერ ხდება მათი არგუმენტისა და შემდეგ კი მნიშვნელობის გამოთვლა. არითმეტიკულ გამოსახულებაში შეიძლება შედიოდეს სხვადასხვა ტიპის მუდმივები, ცვლადები და სპეციალური ფუნქციები. ასეთ შემთხვევაში ჯერ მოხდება ყველა სიდიდეების ერთი და იგივე ტიპზე დაყვანა და შემდეგ შესრულდება არითმეტიკული ოპერაცია, რისთვისაც საჭიროა უფრო მეტი დრო. დროის ეკონომიის მიზნით უკეთესია გვქონდეს ერთი და იგივე ტიპის სიდიდეები ერთ გამოსახულებაში. მაგ. უკეთესია $y+5.$ ვიდრე $y+5.$ $(2*x+1)*(3\cdot5+1\cdot02*y**2)$; $x*y/z$; $x/y*z$, $x/(y*z)$, არითმეტიკული გამოსახულების მაგალითებია.

ძ ი რ ი თ ა დ ი   ა ღ წ ე რ ი თ ი   ო პ ე რ ა ტ ო რ ე ბ ი. ზოგი მათგანი უკვე განვიხილეთ ზემოთ: INTEGER, REAL, LOGICAL, DIMENSION. ახლა განვიხილოთ სხვა ოპერატორები: ოპერატორი EQUIVALENCE (ექვივალენტური), რომელსაც აქვს სახე: EQUIVALENCE $(a, b, c, ...)$, ..., $(d, l, f, ...)$, სადაც $a, b, c, ...$, $d, l, f, ...$, ცვლადებია (მარტივი ან ინდექსიანი). ამ ოპერატორის არსი ისაა, რომ $a, b, c, ...$, ცვლადების მნიშვნელობებს მოათავსებს ერთ უჯრაში. ასევე $d, l, f...$ ცვლადების მნიშვნელობებს ერთ უჯრაში მოათავსებს. ცვლადებს, რომლებსაც ერთ უჯრაში ვწერთ უნდა ჰქონდეს ერთი და იგივე სიგრძე. ამავე დროს მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ როცა მასივის ზოგიერთ ელემენტებს თუ ვუთანადებთ ერთმანეთს, მაშინ სხვა ელემენტებიც მოდიან თანადობაში.

EQUIVALENCE ოპერატორი გამოიყენება 2 შემთხვევაში: 1. როცა ორ ცვლადს აქვთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა, მაგრამ მათთვის გამოყენებულია სხვადასხვა სახელი. ამ ოპერატორით მათი ჩაწერა შეგვიძლია ერთ უჯრაში. 2. როცა ორი ცვლადი პროგრამის სხვადასხვა ადგილასაა გამოყენებული. თუ ერთი პროგრამის დასაწყისშია და მერე არ გვხვდება ან მეორე დასაწყისში არ გვაქვს, მაგრამ ბოლოშია გამოყენებული, მაშინ EQUIVALENCE ოპერატორით შესაძლებელია ერთი უჯრედის გამოყოფა, რაც ხელს უწყობს მეხსიერების ეკონომიურად გამოყენებას. ეს უფრო თვალსაჩინოა მასივების შემთხვევაში. მაგ. I. EQUIVALENCE (A1, C1), (X, Y). II. DIMENSION C(100, 100), A(50, 50), B(100) EQUIVALENCE (C(1), A(1)), (C2501), B(1)) I შემთხვევაში $A1$ და $C1$ ჩაწერს ერთ უჯრაში, X და Y კიდევ ერთ უჯრაში. II შემთხვევაში A-ს ჩაწერს C-ს ადგილას 1-დან 2500-მდე, ხოლო შემდეგ 2501 უჯრიდან დაიწყებს B-ს ჩაწერას. ამით მოხდება მანქანის მეხსიერების ეკონომია.

ოპერატორი COMMON-ს (ზოგადი) აქვს შემდეგი სახე:

COMMON A, B, C...

სადაც A, B, C... ცვლადების სახელებია (მარტივი ან ინდექსიანი). ქვეპროგრამაში გამოყენებული ცვლადები დამოკიდებულია ძირითადი პროგრამის ცვლადების დასახელებისაგან. ძირითად პროგრამასა და ქვეპროგრამაში გამოყენებული ცვლადები საზოგადოდ არ არის აუცილებელი გამოსახავდეს ერთსა და იმავე სიდიდეს. თუ ეს აუცილებელია, მაშინ გამოვიყენებთ COMMON ოპერატორს. მაგ. ძირითადი პროგრამა COMMON X, Y, I ქვეპროგრამა COMMON A, B, J.

აქ X და A ჩაიწერება ერთი და იგივე უჯრაში, ასევე Y და B, I და J. ამ დროს ადგილი აქვს არა მარტო უჯრედების ეკონომიას, არამედ შესაბამისობის დამყარებას ძირითადი პროგრამისა და ქვეპროგრამის ცვლადებს შორის.

COMMON-ის არე ისეთი არეა, რომელშიც ინახება ორი ან მეტი ქვეპროგრამების საერთო მონაცემები ან ქვეპროგრამისა და ძირითადი პროგრამის საერთო — მონაცემები. ფორტრან — IV-ში COMMON არე შეიძლება დავყოთ ბლოკებად. ასეთ შემთხვევაში ოპერატირი COMMON-ის სტრუქტურა ასეთია:

COMMON (ბლოკის სახელი) a_1, a_2, ...

მაგ. COMMON |AM| A (25 20), B, C (15)//K, L, M.

აქ მოცემულია ორი ბლოკი: დაჭდევებული AM ბლოკი შეიცავს A მასივს, B ცვლადს, C მასივს, რომელთა სიგრძეა 516 უჯრა. მეორე ბლოკი დაჭდევებული არაა, ამიტომაა // (ორი დახრილი ხაზი). თუ სხვა პროგრამაში გვხვდება ასეთი ოპერატორი

COMMON//S(5)/AM/F(10), D (485), E (6), Q (2,7).

ასე უნდა გავიგოთ: S მასივი ისე განაწილდება მეხსიერებაში, რომ მისი პირველი სამი ელემენტი ჩაიწერება K, L, M-ის უჯრაში. F მასივის 10 ელემენტი ჩაიწერება A მასივის პირველ ათ უჯრაში, შემდეგ A-ში ჩაიწერება D მასივი, რომლის ჩაწერა დაიწყება მეთერთმეტე უჯრიდან. B-ში ჩაიწერება E მასივის მეექვსე ელემენტი, ხოლო Q და C ჩაწერა მოხდა ერთი და იგივე უჯრაში.

ოპერატორი FUNCTION (ფუნქცია) აქვს შემდეგი სახე: FUNCTION სახელი (არგუმენტი$_1$, ... , არგუმენტი$_n$).

მოცემული ოპერატორი არის ქვეპროგრამის სათაური. ოპერატორში შემავალი არგუმენტები ფიქტიურია, რომლებიც გამოიყენება ფუნქციის გამოთვლების აღსაწერად. არგუმენტი შეიძლება იყოს მარტივი ან ინდექსიანი ცვლადი, მასივი ან ფუნქციის სახელი. ქვეპროგრამაში ერთხელ მაინც უნდა შეგვხვდეს ქვეპროგრამა — ფუნქციის სახელი მარჯვენივ მინიჭების ოპერატორით. ქვეპროგრამა ფუნქციის ბოლოს წინა ოპერატორი უნდა იყოს RETURN (დაბრუნება) ოპერატო-

რი, რომელიც უზრუნველყოფს მართვის გადაცემას ძირითად პროგრამაში. უკანასკნელი ოპერატორი კი უნდა იყოს END (ბოლო).

ქვეპროგრამა-ფუნქციაზე მიმართვის დროს უნდა იყოს დაცული ფიქტიური და ფაქტიური პარამეტრების შესაბამისობა. მაგალითად. ქვეპროგრამა—ფუნქცია: EUNCTION ADD (X, Y) ძირითადი RES= =ADD (A, B). ოპერატორი SUBROUTINE (განმეორებადი) აქვს შემდეგი სახე: SUBROUTINE სახელი (არგუმენტი$_1$, ... , არგუმენტი$_n$).

ეს ოპერატორიც არის ქვეპროგრამის სათაური, რომელიც გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა გვინდა მივიღოთ რამდენიმე შედეგი. ცვლადები, რომელთა მნიშვნელობის მიღება ხდება, ჩაწერილ იქნება არგუმენტთა სიაში. SUBROUTINE არის დამოუკიდებელი პროგრამა თავისი ლოკალიზებული ცვლადებით.

მასზე ძირითადი პროგრამიდან მიმართვა ხდება ასე:

CALL სახელი (არგუმენტი$_1$, ... , არგუმენტი$_n$), სადაც არგუმენტი$_1$, ... , არგუმენტი არის ფაქტიური შემავალი და გამოსავალი პარამეტრები. არგუმენტად შეიძლება გამოყენებულ იქნას ნებისმიერი ქვეპროგრამის სახელი, ასეთ შემთხვევაში ძირითად პროგრამაში უნდა გვქონდეს ასეთი ოპერატორი:

EXTERNAL სახელი$_1$, სახელი$_2$, ... , რომელიც მიუთითებს, რომ ფუნქციის ან ქვეპროგრამის სახელი შეიძლება გადაეცეს როგორც ფაქტიური პარამეტრი.

თუ FUNCTION-ისა და SUBROUTINE-ს ქვეპროგრამებში გამოყენებულია მასივები, მაშინ ისინი უნდა აღიწეროს DIMENSION ოპერატორით.

SUBROUTINE ოპერატორი უნდა შეიცავდეს ერთს მაინც RETURN ოპერატორს და ბოლოში კი END-ს.

მანქანაში ინფორმაციის შესატანად და გამოსატანად გამოიყენება FORMAT ოპერატორი; შეტანის დროს ეს ოპერატორი მიუთითებს თუ რომელი პოზიციიდან უნდა იქნეს წაკითხული ცვლადები, რომელიც ჩამოთვლილია შემყვან-გამომყვან ოპერატორების სიაში და როგორი ფორმით. როცა ინფორმაცია გამოგვყავს მანქანის მეხსიერებიდან, მაშინ FORMAT ოპერატორი მიუთითებს რომელი პოზიციიდან და როგორი ფორმით ხდება მისი გამოყვანა. წასაკითხი ან დასაბეჭდი ცვლადის ან რიცხვის ფორმა განისაზღვრება FORMAT ოპერატორის სპეციფიკაციით. ყველაზე მარტივი შემთხვევის დროს FORMAT ოპერატორში სპეციფიკაციების რაოდენობა უნდა ემთხვეოდეს შემყვან-გამომყვან ოპერატორების სიაში ცვლადების რაოდენობას. FORMAT ოპერატორი ასე ჩაიწერება:

$$\text{FORMAT } (S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

სადაც ჰდე მთელი რიცხვია უნიშნოდ, $S_1, S_2 \dots, S_n$ სპეციფიკაციაა. სპეციფიკაციის სახეებია: IW, FW·d, EW·d, WX, WH, '..., ,, IW—გამოიყენება მთელი ტიპის მუდმივებისათვის, სადაც W არის პოზიციების რაოდენობას + 1 პოზიცია ნიშნისათვის. მაგალითად, 215-თვის გვექნება I4, 12-თვის I2. FW·d სპეციფიკაციაში W გვიჩვენებს იმ პოზიციების რაოდენობას, რომელიც დათმობილი აქვს ერთ რიცხვს, რიცხვის ნიშანს და ათობით წერტილს. d კი გვიჩვენებს ათწილად ნაწილში პოზიცეების რაოდენობას. მაგ. გვაქვს ასეთი რიცხვი 225.35. ბარათზე კი ასეა, დაბეჭდილი b 22535, წასაკითხად უნდა მივუთითოდ: $F6.2$ და ასე წაიკითხავს 225.35; იმავე რიცხვის დასაბეჭდად უნდა მივუთითოთ: $F\,7.2$, რადგან ერთი პოზიცია წერტილისთვისაა საჭირო. თუ ბარათზე დაბეჭდილია წერტილი, მაშინ $FW.d$-ში წაკითხვისას d ყურადღება არ მიექცევა. მაგ. ვთქვათ, დაბეჭდილია — 325.543. თუ მივუთითებთ F 8.1 წაკითხულ იქნება — 322. 543. თუ ამოსაბეჭდი რიცხვის მთელი ნაწილი შეიცავს K რაოდენობის მთელ ციფრს, მაშინ $W>k+d+2$, რადგანაც რიცხვის ნიშანს და ათობით წერტილს სჭირდება პოზიცია. მაგ. —121,25 რიცხვის ამოსაბეჭდად $W\geqslant 3+2+2=7$, ამიტომ ასეთი სპეციფიკაციით უნდა ამოვბეჭდოთ $F\,7.2$. თუ მითითებულ პოზიციაში არ დაეტევა რიცხვი, მაშინ დაიბეჭდება * სიმბოლო. $FW.d$ სპეციფიკაციის გამოყენების დროს უნდა ვიცოდეთ დაახლოებით მთელ ნაწილში ციფრების რაოდენობა.

თუ რიცხვი ჩაწერილია ექსპონენციალური ფორმით, მაშინ გვაქვს $EW.d$ სპეციფიკაცია. წაკითხვის დროს უნდა გავითვალისწინოთ რიცხვის ნიშანი, E ასო, 2 პოზიცია რიგისათვის, ერთი პოზიცია მისი ნიშნისათვის, ე. ი. $W\geqslant d+5$. მაგ. —225E—02 შეგვიძლია წავიკითხოთ ასეთი სპეციფიკაციით F 8.3 და მანქანაში ჩაიწერება —2.25. დაბეჭდვის დროს ერთი პოზიცია უნდა გავითვალისწინოთ წერტილისათვის. იგივე რიცხვი E 8.3 სპეციფიკაციით ასეთი სახით ამოიბეჭდება —.225 E 01.

თუ რომელიმე სპეციფიკაცია მეორდება, მაშინ მის წინ შეგვიძლია დავწეროთ რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს გამეორებათა რაოდენობას. მაგ. nFW·d ან nEW·d, $n\in N$, 3FW·d ან 2F·W·d.

შეგვიძლია გავიმეოროთ სპეციფიკაციათა ჯგუფებიც. ამისათვის ისინი უნდა ჩავსვათ ფრჩხილებში და წინ დავსვათ რიცხვი, რომელიც იქნება გამეორებათა რაოდენობის ტოლი. მაგ. $n\,(FW.d,\ EW.d)$, 2 (I2, F10·3, E10·3, E12·5), $n\in N$.

კომენტარებისა და ტექსტური ინფორმაციების დასაბეჭდად გამოიყენება WH სპეციფიკაცია ან ლიტერალი. აქ W გვიჩვენებს იმ სიმბო-

ლოების რაოდენობას, რომელიც უშუალოდ წერია *H*-ს შემდეგ. მაგ. 5H SUMMA.', ლიტერალის დროს იბეჭდება ასოითი ციფრული ინფორმაცია და მას *WH* სპეციფიკაციასთან ის უპირატესობა აქვს, რომ არაა საჭირო სიმბოლოების რაოდენობის მითითება. მაგ.'SUMMA'=, =E10.5.

შედეგების ერთმანეთისაგან კარგად გარჩევის მიზნით გამოიყენება *WX* სპეციფიკაცია, რომელიც *W* რაოდენობის ინტეგრალს გააკეთებს.

მაგ, 2X, ' C = ' , E 1 0·3, 3X, F15·2

FORMAT ოპერატორის მოთავსება შეიძლება ნებისმიერ ადგილას. FORMAT ოპერატორი გამოიყენება READ (კითხვა) და WRITE (წაკითხვა) ოპერატორებთან ერთად. FORMAT ოპერატორი ყოველთვის დაჭდევებულია.

$$\text{READ } (i,\ n_1)\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n$$

$$\text{WRITE } (i,\ n_2)\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n$$

სადაც i აღნიშნავს იმ მოწყობილობის ნომერს, თუ საიდან ხდება წაკითხვა ან სად ვახდენთ ამობეჭდვას. კერძოდ: *ES* ტიპის მანქანებში $i=1$ READ ოპერატორში, როცა წაკითხვა ხდება პერფობარათებით, $i=3$, როცა დაბეჭდვა ხდება АЦПУ-ზე. n_1, n_2 კი შესაბამისად FORMAT ოპერატორის ჭდეა, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ შეიძლება იყოს მარტივი ან ინდექსიანი ცვლადები, მასივის სახელები, *DO*-ს არაცხადი ფორმა, რომელიც გამოიყენება მაშინ, როცა საჭიროა წაკითხვა ან ამობეჭდვა მასივის ნაწილისა, ან როცა საჭიროა მასივის გამოყვანა სტრიქონებად.

1…5	6	7	
		WRITE (3, 1) (A (I, J), J=1, 3), I=1, 3)	
1		FORMAT (1X, 3F6·1)	
. . .	. .	. . . .	
		DO 7 I = 1, N	
		WRITE (3,5) (C (I, J), J = 1, N)	I
5		FORMAT (1X, 7 F 15·3)	
		PRINT 6	II
6		FORMAT (1 H ␣	
7		CONTINUE	

აქ გამოყენებულია DO-ს არაცხადი ფორმა ორი სახით: I-ში ხდება მატრიცის ამობეჭდვა სტრიქონებად, II კი ახდენს ერთი სტრიქონის გამოტოვებას.

· ინფორმაციის პერფორაციის დროს გამოიყენება პერფობარათის ყველა 80-ვე პოზიცია. ინფორმაციის გამოტანის დროს ჩანაწერი არ უნდა აღემატებოდეს 120 სიმბოლოს. ერთ სტრიქონში დასაბეჭდად შეიძლება გამოვიყენოთ PRINT n_1 ოპერატორიც.

ძირითადი შემსრულებელი ოპერატორები

მინიჭების არითმეტიკულ ოპერატორს აქვს სახე: **ცვლადი=გამოსახულება.** აქ ტოლობის ნიშანი განსხვავდება ჩვეულებრივი ტოლობის ნიშნისაგან. ამას აქვს შემდეგი მნიშვნელობა: „შევცვალოთ...“. ე. ი. ჯერ გამოითვლება მარჯვენა მხარეში მდგომი გამოსახულების მნიშვნელობა, შემდეგ ხდება მისი მარცხნივ მდგომი ცვლადისათვის მინიჭება, როგორც მიმდინარე მნიშვნელობა. ამიტომ ფორტრანში დასაშვებია ასეთი ჩანაწერი: $I=I+1$, ე. ი. ხდება I ცვლადის მნიშვნელობის გაზრდა ერთი ერთეულით.

ფორტრანზე დაწერილი პროგრამის შესრულება ხდება თანმიმდევრობით, თუ მათ შორის არ არის ისეთი ოპერატორი, რომელიც დაარღვევს მათი შესრულების მიმდევრობას. მიმდევრობის რიგს არღვევს ოპერატორები:

GOTO (გადასვლა) და არითმეტიკული IF (თუ) ოპერატორი. GOTO n ოპერატორი არის უპირობო გადასვლის ოპერატორი, რომელიც უზრუნველყოფს გადასვლას n ჭდიან ოპერატორზე. პროგრამაში არ უნდა გვხვდებოდეს ორი ერთნაირ ჭდიანი ოპერატორი. GOTO ოპერატორის მოთავსება შეიძლება ყველგან, ოღონდ მისი მომდევნო ოპერატორი ყოველთვის უნდა იყოს ჭდიანი. GOTO ოპერატორს მეორე სახეც აქვს: GOTO $(n_1, n_2, \dots, n_m)\, i$, სადაც $n_1, n_2, \dots, n_m$ შემსრულებელი ოპერატორების ჭდეებია, i არის მთელი მარტივი ცვლადი. თუ $1 \leqslant i \leqslant m$ და $i=j$, მაშინ გადასვლა მოხდება n_j ჭდიან ოპერატორზე. თუ i მოცემული დიაპაზონის გარეთაა, მაშინ სრულდება GOTO ოპერატორის შემდეგ მდგომი ოპერატორი. მაგ.

1…5	6	7
		GOTO (4, 13, 14) i
14		B(K) = A1
4		A=0·25 * X
		. . . .
13		. . . .

თუ $i=1$, მაშინ შესრულდება 4 ჭდის მქონე ოპერატორი. თუ $i=2$, მაშინ შესრულდება 13 ჭდიანი ოპერატორი. თუ $i=3$, მაშინ კი 14 ჭდიანი ოპერატორი. თუ $i>4$, მაშინ შესრულდება GOTO-ს შემდეგ მდგომი ოპერატორი.

არითმეტიკული ***IF*** **ოპერატორს** აქვს სახე: $IF\ (a)\ m_1,\ m_2,\ m_3$, ეს პირობითი გადასვლის ოპერატორია, რომელიც დამოკიდებულია a გამოსახულების მნიშვნელობაზე. ა) თუ $a>0$, მაშინ შესრულდება m_1 ჭდიანი ოპერატორი.

ბ) თუ $a=0$, მაშინ შესრულდება m_2 ჭდიანი ოპერატორი.

გ) თუ $a>0$, მაშინ შესრულდება m_3 ჭდიანი ოპერატორი.

აქაც *IF* ოპერატორის შემდეგი მდგომი ოპერატორი უნდა იყოს ჭდიანი.

ციკლის ოპერატორია *DO* (გაკეთდეს), რომელსაც აქვს სახე:

$$\mathrm{DO}\ n\ i=m_1,\ m_2,\ m_3$$

სადაც $n\in N$ არის უკანასკნელი ოპერატორის ჭდე, რომელიც უნდა შესრულდეს ციკლში. i მთელი ცვლადია, ანუ ციკლის მთვლელია, რომელიც მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს. m_1 მთვლელის საწყისი მნიშვნელობაა, m_2 ბოლო, m_3 — კი მთვლელის ცვლადების ბიჯი. თუ $m_3=1$, მაშინ მისი გამოტოვება შეიძლება. ციკლში ოპერატორები მეორდებიან მანამ, სანამ $i\leqslant m_2$. თუ $m_1>m_2$, მაშინ ციკლის ოპერატორები მხოლოდ ერთხელ შესრულდება. იმ ოპერატორების ერთობლიობას, რომლებიც უნდა განმეორდნენ, ეწოდება *DO* ოპერატორის მოქმედების არე და ქმნიან ციკლს.

ახლა განვიხილოთ **ლოგიკური** ***IF*** **ოპერატორი.** ოპერაციის ნიშნებია: $<$ ·LT· — ნაკლებია, $\leqslant$ ·LE· — ნაკლებია ან ტოლი, $=$, EQ — — ტოლია, $\neq$ ·NE· — არატოლი, $>$ ·GT· — მეტია, $\geqslant$ ·GE· — მეტია ან ტოლი, $\vee$ ·OR· — დიზიუნქცია, $\wedge$, ·AND· — კონიუქცია, $\neg$, — ·NOT· — ინვერსია. ლოგიკური გამოსახულება ღებულობს ორი მნიშვნელობიდან ერთ — ერთს: „მცდარი“ (0) ან „ჭეშმარიტი“ (1).

შედარების დროს თუ პირობა შესრულებულია, მაშინ გამოსახულებას მიენიჭება მნიშვნელობა „ჭეშმარიტი“, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი „მცდარი“. ლოგიკურ *IF* ოპერატორს აქვს სახე: $IF\ (a)\ S$ სადაც a ლოგიკური გამოსახულებაა, S ნებისმიერი ოპერატორი, გარდა ციკლისა და ლოგიკური *IF* ოპერატორისა. თუ a ჭეშმარიტია, მაშინ შესრულდება S ოპერატორი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი მოხდება S გამოტოვება და შესრულდება შემდეგი ოპერატორი. მაგალითად,

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{როცა}\quad x<0\\ -x+1, & \text{როცა}\quad x\geqslant 0.\end{cases}$$

1…5	6	7
		IF (X·LT·0·0) GOTO 10
		Y = — X + 1·0
		GOTO 11
10		Y = X + 1·0
11		. . . .

საწყისი მონაცემების მოცემა ფორტრანში

ზოგჯერ უკეთესია ზოგიერთ ცვლადებს მივანიჭოთ განსაზღვრული მნიშვნელობანი თავიდან მანქანაში პროგრამის შეტანის დროს, რომლისთვისაც გამოვიყენებთ ოპერატორ DATA-ს. მას აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathrm{DATA}\ v_1,\ v_2, \dots, v_n/r_1 * X_1,\ r_2 * X_2, \dots, r_m * X_m/.$$

სადაც $v_1, v_2, \dots, v_n$ ცვლადები მიიღებენ X_1 მნიშვნელობას r_1-ჯერ, X_2 მნიშვნელობას r_2-ჯერ და ა. შ. ამ შემთხვევაში ცვლადების და რიცხვების რაოდენობა უნდა იყოს ერთი და იგივე, ე. ი. $r_1+r_2+\dots+r_m=n$

ცვლადებად შეგვიძლია ავიღოთ მარტივი ან მუდმივ ინდექსიანი ცვლადები, ან მასივის სახელები. DATA ოპერატორის შესრულების დროს არ ხდება რიცხვითი მონაცემების გარდაქმნა იმ ტიპამდე, როგორიცაა v. ამიტომ ამაზე უნდა იზრუნოს პროგრამისტმა.

მაგ. * |DATA *F* (1), *F* (2), *F*(3) |3 * 1,25|, *U* (1), *U* (2)| 12, 15 |, |*L*1, *L*2| . TRUE. , .FALSE. |*z*| 1·0, 2, 1|

აქ *F* (1), *F* (2), *F* (3) მიენიჭება 1.25 მნიშვნელობა, *U* (1) = 12, *U* (2) = = 15, *L*1 მიენიჭება TRUE, *L*2 კი FALSE, *z* კომპლექსური ცვლადია და ის ჩაიწერება ორ უჯრაში და ასეთი რიცხვი იქნება $L+2{,}1\,i$.

პროგრამის მოდული და ოპერატორების მიმდევრობების რიგი

პროგრამის მოდული შესდგება ძირითადი და პროგრამული ერთეულისაგან (ქვეპროგრამა). პროგრამული ერთეულის (ქვეპროგრამის) პირველი ოპერატორია FUNCTION ან SUBROUTINE ოპერატორები, რომლებიც განსაზღვრავენ ქვეპროგრამას. ამ ოპერატორების შემდეგ დგას ტიპისა და მასივის აღწერითი ოპერატორები, შემდეგ

DATA, EXSTERNAL, COMMON, შემდეგ მოდის ოპერატორული ფუნქციები. ამათ შემდეგ იწერება შემსრულებელი ოპერატორები. ქვეპროგრამა მთავრდება END-ით, ძირითადი პროგრამა უნდა მთავრდებოდეს ოპერატორი STOP-ით, რომელიც უნდა იყოს END წინ, რომლითაც ბოლოვდება ნებისმიერი პროგრამა.

ყველა პორგრამაში შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სპეციალური ფუნქციები, რომლებიც მანქანის მეხსიერებაში მუდმივად არის შენახული. სპეციალური ფუნქციები პროგრამის შიგნით არ საჭიროებენ აღწერას.

პასუხები

1. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -2 & 8 & -10 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 22 \\ 29 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 13. $AB = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 10 & 23 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$. 14. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
15. $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $BA = (16)$. 16. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 21 & -1 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$.
18. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}$. 19. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 19 \\ 9 & 0 & 16 \\ 13 & -2 & 20 \end{pmatrix}$. 20. $AE = EA = A$.
21. $AB = BA = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. 22. $AB = BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 23. $AB = BA = 42 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 24. $AB = BA = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 25. $(AB)C = A(BC) = (51 \;\; 6 \;\; 14)$. 26. $A(B+C) = AB + AC = (9 \;\; 30)$. 35. -48. 36. 8. 37. 29. 38. -12. 39. 0. 40. 4. 41. 2. 42. 4. 43. $2a^3$. 44. $-2X$. 45. $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. 46. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 47. $2x^3-(a+b+c)x^2+abc$. 48. $(ab+bc+ca)x+abc$. 49. $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. 50. 0. 51. $-4a^3$. 52. ab. 53. 1. 54. $4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 55. $\sin(\beta-\alpha)$. 56. $\sin(\alpha+\beta)$. 64. 2. 65. -3.

66. -9; 2. **67.** 2; 3. **68.** $-4\pm\sqrt{22}$. **69.** $z=0$. **70.** $x=\pm$ $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in N$, **71.** $x>7/2$. **72.** $-6<X<-4$. **82.** $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}15 & 23 & 7\\ 0 & 18 & 0\\ -5 & -3 & -21\end{pmatrix}$. **84.** 3. **85.** 2. **86.** 3. **87.** 2. **88.** 2. **89.** 2. **90.** 3. **91.** 2. **92.** 2. **93.** 3. **94.** 2. **95.**3. **96.** 2. **97.** 3. **98.** 0, როცა $\lambda=0$ და 2, როცა $\lambda\neq0$ **99.** $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$. **100.** $\begin{pmatrix}-1/8 & 5/8\\ 1/4 & -1/4\end{pmatrix}$. **101.** $1/5\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. **102.** $\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$. **103.** 1; 2; 3. **104.** 53/22; $-41/44$; 9/4. **105.** 1; 3; 6. **106.** 5; 6; 10. **107.** 1; 1; 1. **108.** 1; 3; 5. **109.** -2; 0; 3. **110.** სისტემა არათავსებადია. **111.** სისტემა არათავსებადია. **112.** 8; 4; 2; **113.** 3; -1; 0. **114.** 3; -2; -5. **115.** 1; 2; 3. **116.** 0; 0; -2. **117.** 0; 0; 0; **118.** $x=t$; $y=2t$; $z=3t$, t ღებულობს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას. **119.** $x=1$; $y=-1$; $z=0$, თუ $a+b+c\neq0$. **120.** 0; 0; 0; **121.** 0; 0; 0. **122.** $x=5t$; $y=-11t$; $z=-7t$, სადაც t ღებულობს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას. **123.** $x=2t$; $y=-3t$; $z=5t$, სადაც t ღებულობს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას. **124.** $y=x+z$, სადაც x და z ნებისმიერია. **125.** $x=y-4z$, სადაც y და z ნებისმიერია. **126.** 3; 0. **127.** სისტემა არათავსებადია. **128.** 5. **129.** 1) აქვს ერთადერთი ამონახსენი, როცა $a\neq-3$; 2) არა აქვს ამონახსენი, როცა $a==3$; $b\neq\dfrac{1}{3}$, 3) აქვს უამრავი ამონახსენი, როცა $a=-3$, $b=\dfrac{1}{3}$. **130.** $x=\dfrac{11-z}{5}$, $y=\dfrac{2(z-1)}{5}$, სადაც z ნებისმიერია. **131.** $x=\dfrac{11-7z}{7}$, $y=\dfrac{7z+1}{7}$, სადაც z ნებისმიერია. **132.** $x=\dfrac{57-z}{26}$, $y=\dfrac{8z-1}{13}$, სადაც z ნებისმიერია. **133.** $x=\dfrac{4+10z}{11}$, $y=\dfrac{19-13z}{11}$, სადაც z ნებისმიერია. **134.** არათავსებადია. **135.** -1; 3; 2. **136.** 1; 5; 2. **137.** 1; 2; 3; 4. **138.** 5; 4; 3; 2. **139.** სისტემა არათავსებადია. **140.** $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. **141.** $X=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 3 & 5\end{pmatrix}$. **142.** $X=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$. **143.** $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

144. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **145.** $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **146.** თუ A ნულოვანი მატრიცაა, მაშინ X ნებისმიერი მეორე რიგის მატრიცაა; თუ $\det A \neq 0$, მაშინ X არის მეორე რიგის ნულოვანი მატრიცა, ხოლო თუ $\det A = 0$, მაგრამ A არ არის ნულოვანი მატრიცა, მაშინ მისი სვეტები პროპორციულია; დავუშვათ $\alpha : \beta$ არის A მატრიცის პირველი და მეორე სვეტის შესაბამისი ელემენტების შეფარდება, მაშინ; $X = \begin{pmatrix} -\beta p & \alpha p \\ -\alpha q & \alpha q \end{pmatrix}$, სადაც p და q ღებულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან. **151.** (10; 0; 13/5). **152.** (— 1; 2; 4). **153.** 1) $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_2 + y_2 + y_3}{3}$; $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$. 2) (6; 3; 20/3). **154.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$; $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ტეტრაედრის სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია მონაკვეთზე, რომელიც აერთებს მის ნებისმიერ წვეროს მოპირდაპირე წახნაგის სიმძიმის ცენტრთან და ამ მონაკვეთს ყოფს $\lambda = 3 : 1$ ფარდობით. **155.** $A(-1; 2; 3)$. **156.** $|\vec{p}| = 3\sqrt{5}$; $\cos\alpha = -2/3\sqrt{5}$; $\cos\beta = -4/3\sqrt{5}$; $\cos\gamma = 5/3$. **157.** $\vec{p}\,(1; -1; \pm\sqrt{2})$. **158.** 60° ან 120°. **159.** $M\,(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{5}; \pm\sqrt{3})$. **160.** $\vec{e}\,(6/7; -2/7; -3/7)$ და $\vec{e}\,(3/13; 4/13; -12/13)$. $\vec{p}$ ვექტორის $\vec{e}$ მგეზავი განისაზღვრება ფორმულით $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. **161.** $\vec{Q}\,(\pm 48; \mp 45; \pm 36)$. **162.** (5; 10). **163.** (4; —2; 5). **164.** $\vec{R}\,(-3; 15; 12)$. **165.** $\frac{7}{5\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{j}$. **173.** $5\sqrt{10}$. **174.** $\overrightarrow{AM} = \frac{|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$.

175. $\sqrt{3}$ და 1. **176.** $\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$. **177.** თუ A_1, B_1, C_1 წერტილები მდებარეობენ გეგმილთა სიბრტყის ერთ მხარეზე, მაშინ $\frac{1}{2}(a + b + c)$; თუ გეგმილთა სიბრტყე გამოყოფს C_1 წერტილს A_1 და B_1 წერტილებიდან, მაშინ $\frac{1}{3}|a + b - c|$ და ა. შ. **178.** არსებობს. **179.** 1) 428; 2) 804. **180.** 1) 18; 2) —3. **181.** —1,5. **182.** $\alpha = 31{,}5$. **183.** $\cos A = -12/49$;

$\cos B = \cos C = \sqrt{122}/14$. **184.** $\cos A = \sqrt{2}/6$; $\cos B = 4/21$; $\cos C = 9\sqrt{2}/14$. **185.** $\vec{R}(8\sqrt{2};\ 0;\ 8\sqrt{2})$. **186.** $\vec{P}\left(\pm\frac{15}{\sqrt{17}}; \pm\frac{25}{\sqrt{17}}; 0\right)$.
187. $\vec{e}\left(0;\ \mp\frac{4}{5};\ \pm\frac{3}{5}\right)$. **188.** $\vec{e}\left(\frac{6}{11};\ \frac{7}{11};\ -\frac{6}{11}\right)$. **189.** $\vec{R}(-6; -24; 8)$. **190.** $\vec{p}\left(\frac{3\mp4\sqrt{3}}{5};\ \frac{4\pm3\sqrt{3}}{5}\right)$. **191.** $\frac{19}{5}$. **192.** $6\sqrt{\frac{2}{11}}$. **193.** 1) 6; 2) -6. **194.** 10. **195.** $\sqrt{3}$. **196.** -5.
197. -3. **198.** -120°. **199.** $\sqrt{7}$ და $\sqrt{13}$. **200.** 15 და $\sqrt{593}$.
201. $16\sqrt{3}$. **202.** ± 36. **203.** -15. **204.** $\vec{a} \parallel \vec{b}$. **205.** $\vec{a}-\vec{b}$ და $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორები გამოსახავს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალებს. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის გაორკეცებული ფართობი უდრის $\vec{a}-\vec{b}$ და $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს.
206. $7\sqrt{5}$. **207.** $S=\sqrt{6}$; $|\vec{P}+\vec{Q}| = |\vec{P}-\vec{Q}| = 5$. **208.** 11.
209. $S=\sqrt{21}$; $h=\sqrt{4{,}2}$. **210.** 37,5. **211.** $1{,}5\sqrt{2}$. **212.** $S = 14$. $|\overline{BD}| = 14/\sqrt{13}$. **213.** $S = 12.5$ $|\overline{BD}| = 5$. **214.** 1) $(-58; -20; 1)$; 2) -80. **215.** $(-7; 14; -7)$. **216.** 5. **217.** 33. **218.** კი.
219. კი. **222.** 154/3; 11. **223.** 22,5; $45/\sqrt{109}$. **224.** $2\sqrt{2}/3$.
225. 52. **226.** 1) $\sqrt{69}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{1397}$ კვ. ერთ. 3) $\approx \arccos 0{,}5406 \approx 57^\circ 61'$. 4) $\frac{96}{\sqrt{1397}} \approx 2{,}57$. **231.** გადის A და C წერტილებზე.
234. 1) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{12}=1$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{z}{\frac{3}{2}}=1$; 3) $\frac{x}{\frac{7}{5}}+\frac{y}{\frac{-7}{2}}=1$;
4) $\frac{x}{7}=1$. **235.** 1) $\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z-2=0$; 2) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$; 3) $-y-2=0$; 4) $z-\frac{1}{2}=0$. **236.** 6.
237. $\frac{5}{2\sqrt{2}}$. **238.** 4. **239.** $3x+y-z-4=0$. **240.** $x-4y+5z+15=0$. **241.** $x+y+z-2=0$. **242.** $3x+4y+6z-12=0$.
243. $10x+2y+11z-148=0$. **244.** $6x-6y+7z-125=0$.

245. $3x+5y+7z-100=0$. **246.** $23x-17y+z-50=0$. **247.** 1) $y+5=0$; 2) $x+3y=0$; 3) $9y-z-2=0$. **248.** 1) $y-2=0$; 2) $y-3z=0$. 3) $3x+2z-5=0$. **249.** 1) $45°$; 2) $\arccos\frac{8}{21}$; 3) $90°$. **250.** 1) $60°$; 2) $\arccos\frac{1}{5}$; 3) $0°$. **251.** $2x+2y+z+4=0$ და $2x+2y+z-20=0$. **252.** $p=5$; $\cos\alpha=\frac{2}{7}$; $\cos\beta=\frac{3}{7}$; $\cos\gamma=\frac{6}{7}$. **253.** $11x+4y-5z-9=0$. **254.** 8. **255.** $2x-6y+2z-7=0$. **256.** $x-y+z-a=0$. **257.** $3x-5y+2z-49=0$. **258.** $35y+12z=0$ და $3y-4z=0$. **259.** $3x+y+2z-23=0$. **260.** $x-y+z-2=0$. **261.** $2x+3y+4z-3=0$ **262.** $5x-y-3z+4=0$. **263.** 1) $(1;\ -1;\ 2)$; 2) არა აქვს. **264.** 1) $(3;\ -1;\ 0)$; 2) არა აქვს; 3) აქვს უამრავი ამონახსნი. **265.** $x-8y+9z-21=0$. **266.** $7x+14y+5=0$; **267.** $2x+2y-2z-1=0$. **268.** $x+20y+7z-12=0$ და $x-z+4=0$. **269.** 3. **270.** $4x+y+z-1=0$ და $x+2y-6z+3=0$; **271.** $M\,(10;\ 10;\ 10)$. **272.** $M\,(\pm\sqrt{2};\ 1;\ 1)$. **273.** $y=\pm z$. **274.** $\left(0;\ \frac{73}{12};\ 0\right)$ და $\left(0;\ -\frac{73}{282};\ 0\right)$. **275.** $39x-29y-7z=0$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. სამი მოცემული $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა სხეულის განტოლება არის $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\,(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\beta\,(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0$, სადაც λ და β პარამეტრებია. **276.** $x+y+2z-4=0$. **277.** 1) $3x-7y+5=0$; 2) $7x+3y-27=0$. **278.** $x+2y+1=0$. **279.** $5x+2y-25=0$; $5x+2y+4=0$. **280.** $(0;\ 7)$; $(6;\ -1)$; $(2;\ 1)$. **281.** $x+3y=0\ (AB)$; $x-3=0\ (AC)$; $x-2y+3=0\ (BC)$. **282.** 1) 3; 2) 2,2. **283.** 1) 4; 2) $5\frac{2}{3}$. **284.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **285.** 1) $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{3}{2}=0$; 2) $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=0$; 3) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=0$ ან $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=0$. **286.** 1] $\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-3=0$; 2) $-\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{2}{\sqrt{13}}=0$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}=0$. **287.** $25x-15y-24=0$. **288.** $12x+5y-26=0$, $12x+5y-78=0$.

289. $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$; $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$; $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-3}=1$; $\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1$.

290. $y=0$; $y=3$; $y=-x+4$; $y=x+4$. **291.** 1) 3; 2) $2\frac{2}{15}$.

292. 5; (3; 4). მ ი თ ი თ ე ბ ა. თუ მოცემულ განტოლებას დავიყვანთ ნორმალურ სახეზე, მაშინ მართობის ფუძის კოორდინატები იქნება $x=p\cos\alpha$, $y=p\sin\alpha$. **293.** $x+\sqrt{3}y-10=0$. **294.** $x-\sqrt{3}y+14=0$.

295. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. **296.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$, 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$. **297.** 1) $x-y+1=0$; 2) $\sqrt{3}x-y+3-2\sqrt{3}=0$; 3) $x+y-5=0$. **298.** $5x+y-10=0$; $x-5y-28=0$.

299. $\sqrt{10}$. **300.** $\frac{10}{\sqrt{65}}$. **301.** $\sqrt{10}$. **302.** $2x-5y+4=0$; $x-2y+2=0$. **303.** $x+4y\pm4=0$. **304.** $12x-5y-31\pm26=0$. **305.** $x+3y-2=0$. **306.** $11x+22y-74=0$. **307.** (10; 21). **308.** (11; − 11)

309. $3x-2y-27=0$. **310.** $2x-y-10=0$. **311.** (0; − 12); $\left(0;\ \frac{4}{3}\right)$. **312.** (2; − 1); (0; 3). **313.** $\frac{\pi}{4}$. **314.** $3x-y+9=0$; $3x+y+9=0$. **315.** $3x-y-3=0$; $x+3y-19=0$. **316.** $5x-4y+2=0$; $4x-5y+1=0$. **317.** $2x-y-5=0$; $x-3y+12=0$. **318** $\frac{24}{\sqrt{13}}$.

319. $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{2}$. **320.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{4}$. $x=-1+t$, $y=1-3t$, $z=-3+4t$. **321.** $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-6}{-2}$, $\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-4}{0}$. **322.** $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{4}$. **323.** $x=-z+3$, $y=-z+5$; $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{-1}$; $x=t+3$, $y=t+5$, $z=-t$. **324.** $\frac{x-27}{9}=\frac{y-14}{5}=\frac{z}{1}$; $\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{107}}$; $\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{107}}$; $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{107}}$. **325.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$; $\cos\alpha=0{,}3\sqrt{2}$; $\cos\beta=0{,}4\sqrt{2}$; $\cos\gamma=-0{,}5\sqrt{2}$; **326.** 1) $\frac{x+5}{2}=$

$= \frac{y-7}{6} = \frac{z}{1}$; 2) $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-12}{3}$. **327.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{13}}$. **328.** 1) $\cos\varphi = \frac{106}{119}$; 2) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **329.** 1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+5}{5}$; 2) $\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+8}{1}$. **330.** $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{9} = \frac{z}{2}$. **331.** 1) კი; 2) არა. **332.** $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **333.** $x = t-2$, $y = -2t+1$, $z = 3t-1$. **334.** $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{1}$.

335. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{0}$. **336.** $\frac{x-a}{L} = \frac{y-b}{M} = \frac{z-c}{0}$.

337. $\frac{x}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$. **338.** $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. **339.** $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{0}$. **340.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$. **341.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$.

342. $\frac{x-3}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{\pm 1}$. **344.** (1; 2; 3). **345.** 1) $\sin\varphi = \frac{13}{7\sqrt{6}}$; 2) $\sin\varphi = \frac{3}{133}$. **346.** $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **348.** $k = -\frac{1}{3}$.

349. $x + 3y + 2z = 0$. **350.** $2y + 5z - 30 = 0$. **351.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. **352.** $A = 4$; $B = -8$. **353.** 1) (0; 0; —2); 2) წრფე პარალელურია სიბრტყისა. **354.** 1) (5; — 1; 2) წრფე ძევს სიბრტყეზე. **355.** (1; 4; —7). **356.** $\sin\varphi = \frac{18}{91}$. **357.** $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-7}$. **358.** $5x - 7y - 2z + 39 = 0$. **359.** $9x - 4y + 13 = 0$, $z=0$; $15x - 8z + 3 = 0$, $y=0$; $5y - 6z - 1 = 0$, $x = 0$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. სიბრტყე, რომელიც მოცემულ წრფეს აგეგმილებს, მაგალითად, xOy სიბრტყეზე, უნდა აკმაყოფილებდეს ორ პირობას; 1) ის უნდა გადიოდეს მოცემულ წრფეზე და 2) მართობი უნდა იყოს xOy სიბრტყისა, ანუ Oz ღერძის პარალელური; ამიტომ მოცემული წრფის განტოლებებიდან უნდა გამოვრიცხოთ z. **360.** $\left(\frac{2}{5};\ \frac{8}{5};\ 0\right)$ წერტილი xOy სიბრტყეზე; $y = \frac{8}{5}$

წრფე yOz სიბრტყეზე; $x=\frac{12}{5}$ წრფე xOz სიბრტყეზე. **361.** $2x-3y-2z+1=0$, $5x+2y+2z-7=0$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. იპოვეთ სიბრტყე, რომელიც გადის მოცემულ წრფეზე მოცემული სიბრტყის მართობულად, მაშინ საძიებელი გეგმილი განისაზღვრება, როგორც ამ სიბრტყისა და მოცემული სიბრტყის გადაკვეთის წრფე. **362.** $4x-9y+10z-9=0$, $2x+2y+z-15=0$. **363.** $(5;-1;0)$. **364.** $(3;-2;4)$. **365.** $(1;3;3)$. **366.** $\lambda=3$. **367.** $(-3;5;-3)$. **368.** $L=3$. **369.** $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$. **370.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$. **371.** $(x-1)^2+(y-4)^2=13$. **372.** $(x-6)^2+(y-7)^2=36$. **373.** $(x+3)^2+y^2=9$. **374.** 1) 2; $(2;-1)$; 2) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$; $\left(-\frac{5}{4};\ \frac{3}{4}\right)$; 3) $\frac{3}{2}$; $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$. **375.** 1) 4; $(3;0)$; 2) $\frac{1}{2}$; $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$; 3) $\frac{\sqrt{58}}{6}$; $\left(-\frac{5}{6};\ \frac{1}{2}\right)$. **376.** $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ და $(x+2)^2+(y+3)^2=4$. **377.** $x^2+(y+2)^2=4$; $(0;0)$; $(2;-2)$; $(-2;-2)$ **378.** $4x-2y-9=0$. **379.** $2x-5y+19=0$. **380.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ და $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **381.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. **382.** $(x-3)^2+(x+5)^2=100$. **383.** $(x+4)^2+(y+1)^2=25$. **384.** M_1 წერტილი ძევს წრეწირზე, M_2 წერტილი მოთავსებულია მის შიგნით, ხოლო M_3 წერტილი — მის გარეთ. **386.** 1) ეხება წრეწირს; 2) კვეთს; 2) გადის მის გარეთ. **387.** $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=-6$, $E=-4$, $F=-12$. **388.** 1) $(3;-1)$ და $(2;-2)$; 2) $(-4;6)$; 3) არ იკვეთება. **389.** $7x-4y=0$. **390.** $8x-20y+1=0$; $5x-2y-7=0$. **391.** $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. **392.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$. **393.** 7. **394.** 2. **395.** 1) $x^2+y^2=8$; 2) $x^2+y^2=a^2$ **396.** $x^2+y^2=ax$. **397.** $(x-3)^2+y^2=9$. **398.** $(x-2a)^2+y^2=4a^2$. **399.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **400.** 1) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. **401.** 1) $2a=10$; $2b=6$; $F_1(4;0)$; $F_2(-4;0)$; $e=\frac{4}{5}$; 2) $2a=2$; $2b=8$; $F_1(0;\sqrt{15})$; $F_2(0;-\sqrt{15})$; $e=\frac{\sqrt{15}}{4}$. **402.** 1) $2a=26$; $2b=10$; $F_1(12;0)$; $F_2(-12;0)$; $e=\frac{12}{13}$; 2) $2a=4$; $2b=12$; $F_1(0;\ 4\sqrt{2})$;

$F_2(0; -4\sqrt{2})$; $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **403**. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. **404**. 1) $(3; -3)$; $\left(\frac{69}{13}; \frac{21}{13}\right)$; 2) $\left(3; \frac{8}{5}\right)$; 3) არ იკვეთება. **405**. A წერტილი ძევს ელიფსზე. B — მის შიგნით, C — მის გარეთ. **406**. მითითება. $c^2 = a^2 - b^2$ დამოკიდებულებიდან ჩანს, რომ c არის იმ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი, რომლის ჰიპოტენუზა და მეორე კათეტი შესაბამისად არის a და b. **407**. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **408**. 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) 0, 8; **409**. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$. **410**, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $r_1 = 3$; $r_2 = 9$. **411**. $\frac{48}{5}\sqrt{2}$. **412**. $\frac{2b^2}{a}$. **413**. $(\pm 5; \pm 2)$. **414**. $(-5; 7)$. **415**. $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. **416**. $\left(-\frac{15}{4}; \pm\frac{8\sqrt{7}}{4}\right)$. **417**. $\left(\frac{2}{7}; \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; **418**. $\frac{4\sqrt{5}}{45}$; **419**. $x = \pm 9$. **420**. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. **421**. $\frac{x^2}{60} + \frac{y^2}{24} = 1$ ან $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$. **422**. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$. **423**. $\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$ და $(0; -1)$. **424**. $(\pm\sqrt{15}; \pm 1)$. **425**. 1) კვეთს, როცა $|m| < 5$; 2) ეხება, როცა $m = \pm 5$; 3) გადის მის გარეთ, როცა $|m| > 5$. **426**. $a^2k^2 + b^2 = m^2$. **427**. 10 და $5\sqrt{3}$. **428**. 60°. **429**. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. **430**. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. **431**. ელიფსი. **432**. $X^2 + 4Y^2 = R^2$. **433**. 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$. **434**. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{25} = 1$. **435**. 1) $2a = 5$; $2b = \frac{10}{3}$; $F_1\left(\frac{5}{6}\sqrt{13}; 0\right)$; $F_2\left(-\frac{5}{6}\sqrt{13}; 0\right)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; 2) $2a = 6$; $2b = 8$; $F_1(0; 5)$; $F_2(0; -5)$; $e = \frac{5}{4}$. **436**. 1) $a = 3$; $b = 4$; $F_1(5; 0)$; $F_2(-5; 0)$; $e = \frac{5}{3}$; 2) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{36} = 1$. **437**. $x^2 - y^2 = 16$.

438. $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$. 439. მითითება. $c^2 = a^2 + b^2$ დამოკიდებულებიდან ჩანს, რომ c არის იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა, რომლის კათეტებია a და b. აქედან აგება გასაგებია; ასიმპტოტებია $y = \pm \frac{5}{7} x$ წრფეები. 440. $y = \pm \frac{4}{3} x$; $e = \frac{5}{4}$. 441. $x - 10 = 0$; $x + 4\sqrt{5}\,y + 10 = 0$. 442. $10\frac{1}{4}$ და $2\frac{1}{4}$. 443. b; $2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. 444. 1) 2; 2) $\sec \alpha$. 445. $x - 2y - 12 = 0$; $x + 2y + 8 = 0$. 446. $d_1 d_2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$. 447. $(\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{2})$. 448. 1) (10; 2); (— 10; — 2); 2) (10; — 2); 3) არ იკვეთება.
449. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 450. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 451. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. 452. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 453. $\left(10; \pm\frac{9}{2}\right)$. 454. $\left(\frac{48}{5}; \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}\right)$. 455. $y = \pm\frac{4}{3}(x+5)$. 456. (0; 0); $(6; \pm 2\sqrt{3})$. 457. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. 458. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. 459. 1) $y^2 = 16x$; 2) $x^2 = 8y$. 460. 1) $x^2 = -18y$; 2) $y^2 = 12x$. 461. $F(6; 0)$; $x + 6 = 0$. 462. $y^2 = -28x$. 463. $(3; \pm 3\sqrt{2})$. 464. (9; ± 12). 465. 12. 466. 6. 467. 10. 468. $2p$. 469. 1) (— 6; 9); (2; 1); 2) (— 4; 6); 3) არ იკვეთება. 470. 1) კვეთს, როცა $k < \frac{1}{2}$. 2) ეხება, როცა $k = \frac{1}{2}$; 3) გადის მის გარეთ, როცა $k > \frac{1}{2}$. 471. $p = 2kb$. 472. $x - 2 = 0$. 473. $y^2 = -3x$. 474. $x^2 = -2y$. 475. $4p\sqrt{3}$. 476. (0; 0); $(6; \pm 2\sqrt{3})$. 477. $y^2 = -4x$. 478. $x^2 = -32y$. 479. $y = -\sqrt{3}(x + 1)$; $\frac{16}{3}$. 480. $2x - y - 3 = 0$. 481. 1) $y^2 = 8(x - 2)$; 2) $Y^2 = \frac{p}{2}X$. 482. 1) $x^2 = -4(y - 3)$; 2) $Y^2 = pX$.

582.
```
      SUBROUTINE SUMMA (A, B, C, M, N)
      DIMENSION A (M, N), B (M, N), C (M, N)
      DO 4 I = 1, M
      DO 4 J = 1, N
    4 C (I, J) = A (I, J) + B (I, J)
      RETURN
      ENO
```
588.
```
      SUBROUTINE RNAMR (B, M, N, BETA)
      DIMENSION B (M, N)
      DO 3 I = 1, M
      DO 3 J = 1, N
    3 B (I, J) = BETA * A (I, J)
      RETURN
      END
```
584.
```
      SUBROUTINE, TRANS (B, M)
      DIMENSION B (M, N)
      N = M — 1
      DO 2 I = 1, N
      K = I + 1
      DO 2 J = K, M
      C = B (I, J)
      B (I, J) = B (J, I)
    2 B (J, I) = C
      RETURN
      END
```
585.
```
      SUBROUTINE MΓAMR (A, B, C, M, N, K)
      DIMENSION A (M, N), B (N, K), C (M, K)
      DO 3 I = 1, M
      DO 3 J = 1, K
      C (I, J) = 0
    2 C (I, J) = C (I, J) + A (I, L) * B (L, J)
    3 CONTINUE
      RETURN
      END
```
586. ა)
```
      DIMENSION A (2, 4), B (4, 2), AB (2, 2), BA (4, 4), C (2, 4)
      READ (1, 4) A, B, BETA
    4 FORMAT (8F4, 1, 8F 6·3, F2·1)
      CALL RNAMR (A, 2, 4, BETA)
      CALL MΓAMR (A, B, AB, 2, 4, 2)
      CALL MΓAMR (B, A, BA, 4, 2, 4)
```

```
  1 FORMAT (3X, ' AB = ' , 4 F 10 3)
  2 FORMAT (3X, ' BA= ' , 4 F 61·3/3X, ' A = ', 4F10·3)
    WRITE (3, 1) ( (AB (I, J), J = 1, 2), I = 1, 2)
    WRITE (3, 2) BA, A
    STOP
    END
```

б)

```
    DIMENSION A (3, 3), B (3, 3), C (3, 3), D (3, 3), D1(3, 3),
  • ATBT (3, 3)
    READ (1, 3) A, B, C
  3 FORMAT (9 F 3·1, 9F3·1, 9F3·1)
    CALL SUMMA (A, B, D, 3, 3)
    CALL SUMMA (A, C, D1, 3, 3)
    WRITE (3, 1) D, D1
  1 FORMAT (4X, ' A+B=' , 3 (3F10·4/)/4X, ' A + C = ' ,
  • 3 (3 F 10·4/ )
    CALL TRANS (A, 3)
    CALL TRANS (B, 3)
    CALL (A, B, ATBT, 3, 3, 3)
    WRITE (3, 2) A, B, ATBT
  2 FORMAT (3X, 'AT=' , 3 (3F3, 1/)/3X, ' BT=3(F3·1/)/3X,
    ·ATBT = ' , 3 (3F / 10·4 / )
    STOP
    END
```

587.

```
    SUBROUTINE OBRMAT (A, B, M)
    DIMENSION A (M, M), B (M, M)
    DO 1 I = 1, M
    DO 1 J = 1, M
    B (I, J) = 0
    IF (I — J) 1, 2, 1
  2 B (I, J) = 0
  1 CONTINUE
    K = 1
  3 N = K
    A 1 = ABS (A (N, K)
  4 N = N + 1
    A2 = ABS (A (N, K)
    IF (A1, GE. A2) GOTO 5
    A1 = A2
```

```
  5 I F (A1 ·NE·0( GOTO 6
    GOTO 20
  6 DO 8 J = 1, M
    IF (J·LE·K) GOTO 9
    AKJ = A (K, J) / A (K, K)
  9 BKJ = B (K, J) / A (K, K)
    DO 10 I = 1, M
    IF (I·EQ·K) GOTO 10
    IF (I·LE·K) GOTO 11
    A (I, J) = A (I, J) — AKJ * A (I, K)
 11 B (I, J) = B (I, J) — BKJ * A (I, K)
 10 CONTINUE
    IF (J, LE. K) GOTO 31
    A (K, J) = AKJ
 31 B (K, J) = BKJ
  8 CONTINUE
    K = K + 1
    IF (K. LE. M) GOTO 3
    GOTO 41
 20 WRITE (3, 7)
  7 FORMAT (5X, ' DET = 0 ' )
 41 CONTINUE
    RETURN
    END
```

588.

```
    DIMENSION A (4, 4), B (4, 4)
    READ (1, 3) A
  3 FORMAT (4 F2. 0)
    CALL OBRMAT (A, B, 4)
    WRITE (3, 2) B
  2 FORMAT (3X, 4F / 0. 4 / )
    STOP
    END
```

589.

```
    DIMENSION A (2, 2), C (2, 2), X (2, 2), B (2, 2),
  * A1 (3, 3), C1 (3, 3), B1 (3, 3), Y (3,3)
    READ (1, 3) A, C
  3 FORMAT (2 F 2·0)
    CALL OBRMA (A, B, 2)
    CALL MΓAMR (B, C, X, 2, 2, 2)
    WRITE (3, 4) X
```

```
 4 FORMAT (3X, 2F4·1/)
   READ (1, 2) A1, C1
 2 FORMAT (3F2·0)
   CALL OBRMAT (A1, B1, 3)
   CALL MГAMR (B1, C1, Y, 3)
   WRITE (3,5) Y
 5. FORMAT (3X, 3F4·1/)
   READ (1, 3) A, C
   CALL OBRMAT (A, B, 2)
   CALL MГAMR (C, B, X, 2)
   WRITE (3, 4) X
   STOP
   END
```

592.

```
   FUNCTION DET (A, M)
   DIMENSION A (M, M)
   K = 1
   DET = 1
 1 L = K
   AMA = ABS (A (L, K))
   LR = K
 2 L = L + 1
   AMB = ABS (A (L, K))
   IF (AMA·GE·AMB) GOTO 3
   LR = L
   AMA = AMB
 3 IF (L. LT. N) GOTO 2
   IF (LR. NE. K) GOTO 4
   SIGN = 1
   GOTO 6
 4 SIGN = — 1
   DO 5 J = K, M
   S = A (K, J)
   A (K, J) = A (LR, J)
 5 A (LR, J) = S
   IF (A (K, K). NE. 0) GOTO 6
   DET = 0
   RETURN
 6 DET = SIGN * A (K, K) * DET
   K1 = K + 1
   DO 7 I = K1, M
```

```
      DO 7 J = K1, M
    7 A(I, J) = A(I, J) — A(I, K) * A(K, J) / A(K, K)
      K = K1
      IF (K. LT. N) GOTO 1
      DET = DET * A(M, M)
      RETURN
      END
```

593.

```
      DIMENSION A (4, 4), B (4, 4)
      READ (1, 2) A, B
    2 FORMAT (16. F 3. 0, 16 F 3. 1)
      C = DET (A, 4)
      E = DET (B, 4)
      WRITE (3, 4) C, E
    4 FORMAT (3X, 'DETA = ' , F 10. 4, ' DETB= ', F 10. 4)
      STOP
      END
```

594.

```
      SOBROUTINE RESIS (A, B, M)
      DIMENSION A (M, M), B (M)
      K = 1
    1 L = K
      AMA = ABS (A (L, K))
      LR = L
    2 L = L + 1
      AMB = ABS (A (L, K))
      IF (AMA. GE.AMB GOTO 3
      LR = L
      AMA = AMB
    3 IF (L. LT. N) GOTO 2
      IF (LR. NE. K) GOTO 4
      GOTO 6
    4 DO 5 J = K. M
      S = A (K, J)
      A (K, J) = A (LR, J)
    5 A (LR, J) = S
    6 IF (A (K, K). NE. 0 ) GOTO 7
      WRITE (3, 30)
   30 FORMAT (' DET = 0')
      RETURN
```

```
  7 K1 = K + 1
    DO 8 I = K1, M
    C = A (I, K) / A (K, K)
    B (I) = B (I) — B (K) * C
    DO 8 J = K1, M
  8 A (I, J) = A (I, J) — A (K, J) * C
    K = K1
    IF (K. LT. M) GOTO 1
    B (M) = B (M) / A (M, M)
    N1 = M — 1
    DO 10 I = 1, N1
    S = 0
    N1 = M — I + 1
    DO 9 J = N1, M
  9 S = A (M — 1, J) * B (J) + S
 10 B (M — 1) = B (M — 1) — S
    RETURN
    END
```

595.

```
    DIMENSION A (5, 5), B (5)
    READ (1, 3) A, B
  3 FORMAT (25 F 8. 4 / 5 F8. 4)
    GALL RESIS (A, B, 5)
    WRITE (3, 5) B
  5 FORMAT (3X, ' X = ' , 5F8. 4)
    STOP
    END
```

1. 3,7986; — 1,4748; 1,3855; 5,9921; — 2,5013.
2. — 1,9950; 9,6424; 5,1280; 0,0531; — 2; 1421.
3. — 0,6769; 5,5707; — 2,1141; 3, 1908; — 1, 4175.
4. 4,6721; — 5,9120; 2,6386; 3,7501; — 1,9016.
5. 2,5210; — 8,6077; — 1,5960; 6,2991; 2,5011.
6. 6,1295; 8,7423; 1,5807; 4,1623; 2,4552.
7. 2,8900; 4,9130; — 1,4608; 6,0975; 0,2319.
8. 1,1292; — 6,3308; — 3,7813; 7,2299; — 2,0938.
9. — 0,7576; — 2,1734; 10,5502; — 7,0809; — 1,9709.
10. 13,0051; — 5,8820, — 5,9031; 3,4991; — 4,6994.
11. — 5,8853; — 3,8129, 9,3279; 16,7301; 5,2273.
12. 6,5533; 3, 6893; — 16, 7972; — 11,2201; — 8,2452,
13. — 16,2349; — 24, 0152; 10, 5692; — 3,9921; 24.4738.
14. — 2, 3561; 4, 1977; — 10,2672; 17, 3025; 1, 1927.

```
598.      SOBROUTINE ITER (A, B, X, M, EPS)
          DIMENSION A (M, M), B (M), X (M)
          DO 10 I = 1, M
          B (I) = B (I) / A (I, I)
     10.  X (I) = B (I)
          DO 1. J = 1, M
      1   A (I, J) = —A (I, J) / A (I, I)
      9   DO 3  I = 1, M
          S = 0
          DO 2  J = 1, M
          IF (J·EQ·I) GOTO 2
          S = S + A (I, J) * X (J)
      2   CONTINUE
      3   A (I, I) = B (I) + S
          K1 = 0
          DO 4  I = 1, M
          S = X (I)
          X (I) = A (I, I)
          A (I, I) = S
          S = ABS (A (I, I) — X (I))
          IF (S. GT. EPS) K1 = 1
      4   CONTINUE
          IF (K1. EQ. 1) GOTO 5
          RETURN
          END
599.      DIMENSION A (3,3), B (3), X (3), A1 (4,4),
      *   B1 (4), X1 (4)
          READ (1.1), A, B, B1
      1   FORMA T (9F7·2, 3F7·2, 4 F 7. 2)
          READ (1, 2) A1
      2   FORMAT (F 7. 2)
          CALL ITER (A, B, X, 3, 0. 0 0 0 1)
          CALL ITER (A1, B1, X1, 4, 0. 0 0 0 1)
          WRITE (3, 3) X, X1
      3   FORMAT (3X, ' X = 3 F 8. 2 / 3X, 'X = ' , 4F8. 2)
          STOP
          END
```

600. —0,0992. **601.** —3,13106. **602.** 3,1374. **603.** 4,06065.

604. 2,5557. **605.** —4,5759. **606.** —3,1067 **607.** 2,30000.

608. 1,2803. **609.** —3,0921. **610.** 3,2529. **611.** 2,8832.
612. 1,4142, **613.** 2,2999. **614.** — 4,0981. **615.** 2,1435.
616. —10,8122. **617.** —1,0510. **618** 2,3950. **619.** 0,1735.
620. 0,6821. **621.** 0,3250. **622.** 0,4971. **623.** 0,2164.

646. 1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$; 2) $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121$. **647,** 1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; 2) $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2=100$, **648.** 1) $(1;\ -2;\ 2)$; 4; 2) $\left(0;\ \frac{5}{4};\ 0\right)$; $\frac{1}{4}\sqrt{89}$; 3) $(0;\ 0;\ a)$; a. **649.** 5. **650.** A წერტილი ძევს სფეროს შიგნით, B წერტილი — სფეროს ზედაპირზე, C წერტილი — სფეროს გარეთ. **651.** $A^2+B^2+C^2=\frac{D^2}{R^2}$. **652.** ± 6.
653. $2x-y+3z-7=0$. **654.** $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. **655.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$. **656.** $x^2+2y^2=a^2$ და $x^2+2z^2=a^2$ (ელიფსები). **657.** გეგმილი xOy სიბრტყეზე $3x-y+5a=0$ წრფის მონაკვეთია. **658.** $x^2+y^2+z^2-8x=0$. **659.** $8x^2+8y^2+8z^2+6x-20y-1=0$, **660.** $(1;\ 6;\ 0)$; 5. **661.** $\left(\frac{10}{3};\ -\frac{14}{3};\ \frac{5}{3}\right)$; 3. **662.** $x^2+y^2+z^2-a(x+y+z)=0$. მითითება. სფერული ზედაპირი ეკუთვნის $x^2+y^2+z^2-a^2+\lambda(x+y+z-a)=0$ კონას; λ-ს გავიგებთ იმ პირობით, რომ ზედაპირმა უნდა გაიაროს $(a;\ a;\ a)$ წერტილზე, **663.** $x^2+y^2+z^2-14x-10y+2z+7=0$. **664.** $x^2+(y+2)^2+z^2=41$. **665.** $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **666.** $(X-Z)^2+(Y-Z)^2=4$. **667.** $\left(X-\frac{5}{2}Z\right)^2+\left(Y-\frac{3}{2}Z\right)^2=25$. **668.** $4(2X-Z+1)^2+(4Y+3Z-3)^2=144$. **669.** $X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX-\frac{3}{2}=0$. **670.** $(2X+Z)^2-10(2X+Z)+25Y^2=0$. **671.** 1) $(x-1)^2+4z^2=4$, $y=0$ (ელიფსი); 2) $x^2+5y^2-8y-12=0$ (xOy-ზე); $2y-z-2=0$ (yOZ-ზე); $4x^2+5z^2+4z-60=0$ (xOz-ზე). **672.** $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$. **673.** 1) $X^2+Y^2-Z^2=0$; 2) $2X^2+2Y^2-Z^2=0$.
674. $27Y^2+8Z^2-XZ+17YZ-3Z=0$. **675.** $h^2X^2=2pZ\,[h(Y+a)-aZ]$
676. $Y^2+Z^2-X^2=0$. **677.** $X^2-3Y^2+Z^2=0$. **678.** $\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{25}-\frac{Z^2}{49}=0$. **679.** $40(X-2)^2-9Y^2-9Z^2=0$. **680.** 1) x^2-y^2+

$+ z^2 = 0$; 2) $x^2 + x^2 - z^2 = 0$. **681.** 1) $x^2 - \sqrt{y^2 + z^2} = 0$; 2) $x^2 + y^2 = z$. **682.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$. **683.** $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$. **684.** 1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$. **685.** $x^2 + y^2 = 2pz$. **686.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$; $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$. ელიფსები; წვეროები; $(\pm 6;\ 0;\ 0)$; $(0;\ \pm 4;\ 0)$; $(0;\ 0;\ \pm 3)$; ღერძები; $2a = 12$; $2b = 8$; $2c = 6$. **687.** $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} = 1$, $x = 2$ ელიფსი; ნახევარღერძები: 3 და $\sqrt{3}$; წვეროები; $(2;\ \pm 3;\ 0)$; $(2;\ 0;\ \pm\sqrt{3})$. **688.** 1) $\frac{96}{25}\pi$; 2) $\frac{45}{4}\pi$. **689.** $(0;\ 0;\ 2)$; $(2;\ -3;\ 0)$. **690.** $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2} = 1$ (ბრუნვის ელიფსოიდი) **691.** $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, $z = 0$ (ელიფსი). **692.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$; $\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{4} = 1$, $y = 0$; $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, $x = 0$. **693.** $\frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{32} = 1$, $z = \pm 2$; $\frac{x^2}{27} - \frac{z^2}{3} = 1$, $y = \pm 2$; $\frac{y^2}{\frac{128}{9}} - \frac{z^2}{\frac{32}{9}} = 1$, $x = \pm 2$. **694.** 4; 3. $(\pm 4;\ 0;\ -1)$. **695.** $x^2 + y^2 - z^2 = 2a^2$ (ორკალთა ჰიპერბოლოიდი). **696.** $(4;\ 2;\ 9)$. **697.** 1) ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი ბრუნვის Ox ღერძით; 2) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი გრძივი Oy ღერძით; 3) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი ცენტრით $(0;\ -5;\ 0)$ წერტილში; 4) $-\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{4} = 1$ — ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი ცენტრით $(2;\ 1;\ -1)$ წერტილში, ბრუნვის ღერძი Ox ღერძის პარალელურია; 5) $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(z+3)^2}{8} = -2(y-1)$ — ელიფსური პარაბოლოიდი წვეროთი $(-1;\ 1;\ -3)$ წერტილში; პარაბოლოიდის ღერძი Oy ღერძის პარალელურია. **698.** $\frac{x}{4} + \frac{z}{6} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{y}{2}\right)$, $\frac{x}{4} - \frac{z}{6} = 3\left(1 - \frac{y}{2}\right)$ და

$\frac{x}{4}+\frac{z}{6}=1-\frac{y}{2}$, $\frac{x}{4}-\frac{z}{6}=1+\frac{y}{2}$. **699.** $4x-3z=0$, $y=2$ და $4x-12y+3z-24=0$, $4x+3y-3z--6=0$. **700.** $z=0$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=0$, კოორდინატთა სათავე; $y=0$, $\frac{x^2}{4}=z$, პარაბოლა; $x=0$, $\frac{y^2}{2}=z$, პარაბოლა **701.** $x^2+y^2=2az$. **702.** x^2+5y^2+ $+4xy-x=0$, $z=0$; $x^2+5z^2-2xz-4x=0$, $y=0$; y^2+z^2+ $+2y-z=0$, $x=0$. **703.** 15; $\left(0;\ -6;\ -\frac{3}{2}\right)$. **704.** $z=0$, $3x-$ $-4y=0$ და $3x+4y-24=0$, $3x-4y-12z=0$. **705.** $6x-y+$ $+3z=0$, $2x-z-3=0$ და $2x+z-1=0$, $2x-y-z=0$. **706.** 1) წრეწირი, რომელიც ძევს yOz სიბრტყეზე; 2) ჰიპერბოლა, რომელიც ძევს $x=2$ სიბრტყეზე; 3) წრიული ცილინდრი, რომლის ღერძიც ემთხვევა Oz ღერძს; 4) $x=\pm 1$; yOz სიბრტყის მიმართ ორი პარალელური სიბრტყე; 5) $(x+y)(x-y)=0$, $x+y=0$, $x-y=0$ — ორი სიბრტყის ერთობლიობა; 6) ზედაპირი, რომელსაც მხოლოდ ერთი ნამდვილი წერტილი აქვს — კოორდინატთა სათავე; 7) $(x-y)^2+y^2=1$— ცილინდრი, რომლის მსახველიც Oz ღერძის პარალელურია, მიმმართველი წირია $(x-1)^2+y^2=1$, $z=0$ წრეწირი; 8) $xyz=0$, სამი საკოორდინატო სიბრტყის ერთობლიობა; $x=0$, $y=0$, $z=0$; 9) ჰიპერბოლური ცილინდრი; 10) $x(x-y)=0$, $x=0$, $x-y=0$ — ცილინდრული ზედაპირი, რომლის მსახველებიც Oz ღერძის პარალელურია, მიმმართველი წირია $x=0$ და $x-y=0$ წრფეების ერთობლიობა; 11) $y^2+z^2=0$, აქედან $y=0$, $z=0$ — Ox ღერძი; 12) ნებისმიერი x-ისა და y-სათვის $x^2+4y^2+4>0$, ამიტომ ეს განტოლება არავითარ გეომეტრიულ სახეს არ წარმოადგენს. **707.** 1) ელიფსი, რომელიც ძევს $z=c$ სიბრტყეზე; 2) Oz ღერძი; 3) კონუსი, რომელიც მიიღება $y=x$ წრფის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო; 4) $\frac{x^2+y^2}{1}+\frac{z^2}{\frac{1}{4}}=1$ — ბრუნვის ელიფსოიდი ბრუნვის Oz ღერძით; 5) $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ — სფერო; 6) ბრუნვის პარაბოლოიდი; 7) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი; 8) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი; 9) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=-1$ — ორკალთა ჰიპერბოლოიდი; 10) ბრუნვის პარაბოლოიდი; 11) კონუსი; 12) $x^2+(z-1)^2=1$ — ცილინდრული ზედაპირი Oy ღერძის პარალელური მსახველებით. **708.** $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

709. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. 710. $S = \frac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$. 711. $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$.

712. 1) 12; 13; 17; 20; 2) $\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{5}$; $\frac{29}{15}$; $\frac{7x + 4x^2}{2 + 3x^2}$. 713. 1) 1; $\frac{5}{4}$; $\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$; 2) 0; $-\frac{15}{4}$; $\frac{5}{2}$. 714. $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.

715. $f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$; 716. 1) 0 და 2; 2) -1 და 3. 717. 1; -3; 2. 719. 1) $3 \lg 2$; 2) $3 \lg a$; 3) $(\lg a)^3$. 720. 2^{2x} და 2^{x^2}. 721. $y = \sqrt[3]{(a^t + 1)^2}$. 722. $(x + 2)^2$. 723. 1) $y = u^3$, $u = \sin x$; 2) $y = 5^u$, $u = v^2$, $v = 3x + 1$; 3) $y = \lg u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = \frac{x}{2}$. 724. 1) $y = 2^u$, $u = \cos x$; 2) $y = \sqrt[3]{u}$, $u = v^2$, $v = 1 + x$; 3) $y = \arcsin u$, $u = 3^v$, $v = -x^2$. 725. 1) $y = \pm\sqrt{3 - x^2}$; 2) $y = \frac{1}{x}\log_2 5$; 3) $y = -\cos x^2$; 4) $y = \lg(10 - 10^x)$. 726. 1) $y = \log_2 \frac{x^3 + 7}{x^2 - 2} - x$; 2) $y = 10^{4 - \lg x} - 1$; 3) $y = x$ და $y = \frac{x}{3}$. 727. 1) $y = \frac{x - 3}{2}$; 2) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x$; 3) $y = 1 \pm \sqrt{1 + x}$; 4] $y = \lg x - 1$; 5) $y = 2^{\frac{1}{x}}$. 728. 1) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$. 2) $y = -\log_2(1 - x)$; 3) $y = 10^{x-1} - 2$; 4) $y = \log_2 \frac{x}{1 - x}$. 729. 1) და 4) ლუწია; 2) და 5) კენტია; 3) არც ლუწია, არც კენტი. 730. 1) და 4) კენტია; 3) ლუწია; 2) არც ლუწია, არც კენტი. 731. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) π; 3) $6\pi^2$; 4) $\frac{16}{5}\pi$. მითითება. $y = \sin kx$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი განისაზღვრება $l = \frac{2\pi}{k}$ ფორმულით. 732. 1) 1; 2) $\frac{8}{3}$; 3) 4π; 4) π. 733. 1) $x - y^2 = 0$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$. 734. 1) $y = \frac{1}{1 + x}$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $y^2 = 2px$.

735. 1) 0 და 0; 3 და 5; 2) 1 და 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ და 1. 736. 1) 15 და

26; $-\frac{3}{4}$ და $-\frac{9}{8}$; 2) $\frac{5}{4}$ და $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$; $\frac{7}{4}$ და $\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}$.

737. 1) 2; 2) $\frac{\pi}{4}+k\pi$. **738.** 1) -1; 2) $\frac{\pi}{2}$. **739.** 1) $[-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. **740.** 1) $[-3; 3]$; 2) $(-\infty; -2]$; $[2; +\infty)$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{\pi}{2}+2n\pi\right]$. **741.** 1) $(-\infty; -2)$; $(-2; 2)$; $(2, +\infty)$; 2) $(-\infty, -1)$; $(-1; 4)$; $(4, +\infty)$. **742.** 1) $(-\infty, -1)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$; $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty, -3)$; $(-3; 1)$; $(1, +\infty)$. **743.** 1) $(-2; 0]$; 2) $(-\infty, -2)$; $(2, +\infty)$. **744.** 1) $[-4; 0]$; 2) $[1; 5)$. **745.** 1) $[0; 4]$; 2) $(-\infty, -2]$; $[6, +\infty)$. **746.** 1) $[-1; 2]$; 2) $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$; $[1, +\infty)$. **747.** 1) $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$; 2) $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$. **748.** 1) $(0; 1]$; 2) $(-2; 2)$. **749.** $\left(0; \frac{7}{2}\right)$; $(4, +\infty)$. **750.** $[1; 4]$. **751.** $[-1; 3]$. **752.** $[-2; 2]$. **753.** $[-1; 3]$. **754.** $[1; 4)$. **755.** $[1; 100]$. **756.** $[-3; 0)$; $(0; 1)$ **757.** $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. **758.** $(-\infty, -2]$; $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. **759.** $x=2$. **760.** $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ $\cdot$ $(2, +\infty)$. **761.** $(3; 5)$. **762.** $[8; 10]$. **763.** $(-1; 1]$; $[2; 3)$. **764.** $(4; 5)$; $(6, +\infty)$.

778. 1) $x^2+y^2=1$; 2) $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 3) $y=1$.

779. 1) $\sqrt{x^2+y^2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\pi$; 2) $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; 3) $x=1$.

780. 1) $x^2+y^2=ay$; 2) $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$; 3) $(x^2+y^2)^2=ay(3x^2-y^2)$.
781. 1) $x^2+y^2=ax$; 2) $(x^2+y^2)^3=a^2(x^2-y^2)^2$; 3) $(x^2+y^2)^2=ax(x^2-3y^2)$.
782. 1) $x^2+y^2-ax=a\sqrt{x^2+y^2}$; 2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. **783.** 1) $x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$; 2) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$. **784.** 1) $r^2=\frac{1}{2}\sin 2\varphi$; 2) $r=a(1-\cos\varphi)$ **785.** 1) $r=a\cos\varphi$; 2) $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

786. 1) $x=2a\cos^2\varphi$, $y=a\sin 2\varphi$; 2) $x=\frac{a}{\varphi}\cos\varphi$, $y=\frac{a}{\varphi}\sin\varphi$.
787. 1) $x=a\sin 2\varphi$, $y=2a\sin^2\varphi$; 2) $x=2p\operatorname{ctg}^2\varphi$, $y=2p\operatorname{ctg}\varphi$.

790. 1) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots$; 2) $-3, 5, -7, 9, \dots, (-1)^n(2n+1), \dots$; 3) $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$.
791. 1) $0, 3, 2, 5, 4, 7, \dots, n+(-1)^n, \dots$; 2) $2, 2, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{5}, \dots, \frac{3+(-1)^n}{n}, \dots$; 3) $1, 0, -\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{3}, 0, -\frac{7}{4}, \dots, \frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}, \dots$.
792. 1) $x_n = \frac{2n+1}{2n}$; 2) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; 3) $x_n = \frac{4n+3}{2n+1}$.
793. 1) $x_n = \frac{4n+1}{n}$; 2) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; 3) $x_n = \frac{3n-1}{2n+3}$.
794. 9. 795. 100. 796. 1) $n > 10$; 2) $n \geqslant 32$. 797 1) 9; 2) 99. 798. 3. 799. 1. 800. 0. 801. 2. 802. 1/2. 803. 2/3. 804. 4/3. 805. 1. 806. 1. 808. 2. 809. — 1/2. 810. — 1. 811. 4/3. 812. 0. 813. 1. 814. 5. 815. 1. 816. 3/4. 817. 1/3. მითითება. $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. 818. 1/3. 819. 1. 822. 0,1. 823. 0,01.

830. როცა $\varepsilon \leqslant 1$, მაშინ $N \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$, ხოლო როცა $\varepsilon < 1$, მაშინ $N=0$. 831. $|x| > 7$. 833. 0,1; 0,01. 834. x^2 და $2x\cos x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, ვიდრე x; $\sin 3x$ და x ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია: xe^{2x} და x ტოლფასი უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია. 835. $x-3x^2$ და $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$ ტოლფასია x-ის მიმართ; x^3+3x^4 x-ის მიმართ უფრო მაღალი რიგისაა; $5\sqrt[3]{x^2}$ x-ის მიმართ უფრო დაბალი რიგისაა. 836. 1) მეორე რიგის; 2) პირველი რიგის; 3) მესამე რიგის; 4) პირველი რიგის. 837. 1) პირველი რიგის; 2) მესამე რიგის; 3) მეოთხე რიგის. 838. 1) მეორე რიგის; 2) $\frac{1}{2}$ რიგის; აქ $x \to +\infty$. 839. 1) მეოთხე რიგის; 2) $\frac{2}{3}$ რიგის. 840. უსასრულოდ მცირეა: $2x^2$; $1-\cos x$; $\sin x$; სასრულია: $3-x$; $\sqrt{9-x}$; e^x; უსასრულოდ დიდია: $\frac{2}{x}$; $\ln x$; $\operatorname{ctg} x$. 841. უსასრულოდ მცირეა:

$\sin\frac{3}{x}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$; $\frac{\sin x}{x}$; სასრულია: $3-\frac{1}{x}$; $\sqrt{4+\frac{1}{x}}$; $e^{\frac{1}{x}}$; უსასრულოდ დიდია; $\sqrt[3]{x^2}$; e^{x^2}. **842.** 5. **843.** 11/7. **844.** 0. **845.** 0. **846.** ∞. **847.** ∞. **848.** 7. **849.** —2. **850.** 7/9. **851.** —16/7. **852.** 1/2. **853.** 3. **854.** —2,5. **855.** — 2/3. **856** $3x^2$. **857.** $-4x^3$. **858.** 1) 3/5; 2) m/n. **859.** na^{n-1} **860.** — 1/2. **861.** — 3/4. **862.** 1/2. **863.** 2. **864.** ∞. **865.** ∞. **866.** 0. **867.** 0. **868.** 15. **869.** 24. **870.** 0. **871.** — 1/16. **872.** — 2/7. **873.** 3. **874.** 2. **875.** 1. **876.** 0. **877.** 1, როცა $x\to+\infty$; — 1, როცა $x\to-\infty$. **878.** $64\sqrt{2}$. **879.** 2/3. **880.** 3/2. **881.** — 6/5. **882.** $3\sqrt{5}$. **883.** 2,5. **884.** 12. **885.** $-4/\sqrt{3}$. **886.** 0. **887.** 3. **888.** 1/2, როცა $x\to+\infty$; $-\infty$, როცა $x\to-\infty$. **889.** 0. **890.** 1) 4; 2) $\frac{m}{n}$. **891.** 1) 1; 2) 6/7. **892.** 1) 1/9; 2) 1. **893.** 1) 0; 2) 1. **894.** 10. **895.** 4/3. **896.** 1) 1; 2) 2,5. **897.** 1) 1; 2) 4/7. **898.** 0,5. **899.** 1/8. **900.** —1/7. **901.** —2/7. **902.** 0. **903.** 1/4. **904.** $\cos a$. **905.** π. **906.** — 2/3. **907.** — $\pi/4$. **908.** $2/\pi$. **909.** $1/4\sqrt{3}$. **910.** 1. **911.** —1. **912.** 1/5. **913.** 3/7. **914.** 1/12. **915.** — 0,5. **916.** 1/3. **917.** — 1/16. **918.** 1/6. **919.** $2\sqrt[5]{3}/15$. **920.** 3/4. **921.** 1/5. **922.** $1/\ln a$. **923.** 3/2 ln 10. **924.** $1/a$. **925.** ln 3. **926.** — 6. **927.** 1. **928.** a. **929.** m^2/n^2. **930.** $\ln\frac{a}{b}$. **931.** $\ln a$. **932.** $1/e$. **933.** e. **934.** ln 8. **935.** 1. **936.** 1, 5. **937.** 1. **938.** 1) 81; 2) 1. **939.** 1) 20; 2) — 1/64. **940.** 0. **941.** $+\infty$. **942.** e^k. **943.** $1/e$. **944.** e^2. **945.** e^{12}. **946.** e^2. **947.** e. **948.** 0. **949.** e^{-2}. **950.** e^{-1}. **951.** e^3. **952.** e^2. **953.** e^6. **954.** $\sqrt{e}$. **955.** 1. **956.** 1. **957.** $e^{3/2}$. **958.** a/b. **959.** 1,5. **960.** — 2. **961.** 2. **962.** — 1. **963.** — 0,5. **964.** 1/8. **965.** 0,5. **966.** 1/4. **967.** — 2. **968.** π. **969.** 0. **970.** $\sqrt{3}$. **971.** 2. **972.** $-1/\sqrt{3}$. **973.** $\sin 2a/2a$. **974.** 4/9. **975.** 1,5. **976.** $4\ln a$. **977.** — 2. **978.** $-\pi^2/2$, **979.** — 1. **980.** $\cos^3\alpha$. **981.** $1/\ln a$. **982.** e. **983.** ab. **984.** $\ln^2 a$. **985.** $\sqrt{ab}$. **986.** ∞. **987.** $1/e$. **988.** $1/\sqrt{e}$. **989** 1, როცა $a>1$; 0, როცა $a<1$; 1/2, როცა $a=1$. **990.** 1, როცა $a>1$; — 1, როცა $a<1$; 0, როცა $a=1$. **1001.** 1 და — 1. **1002** $\pi/2$ და $-\pi/2$. **1003.** $+\infty$ და $-\infty$. **1004.** — 3 და 3. **1005.** $+\infty$ და 0. **1006.** 0 და 1. **1007.** 2 და 0. **1008.** 1 და — 1. **1009.** $-\sqrt{2}$. **1010.** $-1/\sqrt{2}$. **1015.** მეორე გვარის წყვეტის წერტილებია: 1) $x=5$;

2) $x = 3$. 3) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. **1016.** 1) $x = -3$ — მეორე გვარის წყვეტის წერტილი; 2) $x = 2$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|w| = 1$; 3) $x = 1$ — მეორე გვარის წყვეტის წერტილი. **1017.** 1) $x = 0$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|w| = 1$; 2) $x = 0$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|w| = \pi$; 3) $x_1 = -1$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|w| = 2$. **1018.** 1) $x = k\pi$ — მეორე გვარის წყვეტის წერტილები $(k = 0, \pm 2, \ldots)$; 2) $x = 0$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|w| = \pi$; 3) $x = 0$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|w| = 1$; **1019.** 1) 0; ± 2; 2) უწყვეტი ყველგან; 3) $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; 4) 0; 5) 1; 6) $k\pi$. **1020.** 1) 0; -1; $\pm\sqrt{2}$; 2) უწყვეტია ყველგან; 3) $\frac{1}{k\pi}$; 4) 0; 5) 0; 6) $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots)$.
1021. $f(-1) = 3$. **1022.** $f(5) = -0{,}5$. **1023.** $f(0) = 4{,}5$. **1024.** $f(0) = 1$.
1029. 1. **1030.** 4. **1031.** -1. **1032.** π. **1034.** $x = 0$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. **1035.** უწყვეტია ყველგან. **1036.** ფუნქცია განიცდის პირველი გვარის წყვეტას ყოველ $x = n$ წერტილზე (n მთელი რიცხვია). **1037.** 1) $3x^2$; 2) $-1/x^2$; 3) $\cos x$; 4) $1/\cos^2 x$; 5) $1/\sqrt{1+2x}$.
1038. 1) $1/2\sqrt{x}$; 2) $4x - 1$; 3) $\sin 2x$; 4) e^x; 5) $-1/2x\sqrt{x}$. **1039.** 1) 0,1; $-0{,}20$; 2) -1; 2. **1040.** 5; 70. **1041.** 1) 0, 1; 2) -3.
1042. 1) 0,1; 10; 2) -1; 1/90. **1043.** $-1/8$. **1044.** -1. **1045.** 3.
1046. 1) -4; 2) -1. **1047.** 7. **1048.** 2. **1049** 10. **1050.** 24.
1051. 3; 0; -9. **1052.** 4 და 8 წამის შემდეგ. **1053.** $4x^3 + 6x$.
1054. $6x^5 + 8x^3 - 5$. **1055.** $x^2 - x + 1$. **1056.** $x^4 - 2x^2 - 3$,
1057. $3x^2 + 1/\sqrt{x}$. **1058.** $14x/a + 1/\sqrt[3]{x^2}$. **1059.** $anx^{n-1} + bmx^{m-1}$. **1060.** $5x^4/(a+b) - 2x/(a-b)$. **1061.** $2/\sqrt[3]{x} + 4/\sqrt[5]{x} - 2/2x\sqrt{x}$. **1062.** $21x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + 2$. **1063.** $1 - 2/x^3 + 1/x^6$. **1064.** $5/x^2\sqrt[4]{x} - 2/x\sqrt[3]{x^2}$. **1065.** $4x(1 + 3x + 10x^3)$. **1066.** $4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$. **1067.** 1) $x(2\cos x - x\sin x)$; 2) $3^x(\ln 3 \cdot \arcsin x + 1/\sqrt{1-x^2})$. **1068.** 1) $3x^2 \operatorname{ctg} x - x^3/\sin^2 x$; 2) $x^2 e^x$. **1069.** $\frac{1}{x}\left(1 - \frac{3}{x}\right)$. **1070.** $-\pi/x^2$. **1071.** $\frac{-3x^2 + 4x - 13}{(x^2 + 4x - 7)^2}$.
1072. $\frac{1}{1 - \sin x}$. **1073.** $\frac{t^2(3 + t^2)}{(1 + t^2)^2}$. **1074.** $\frac{2e^t}{(1 - e^t)^2}$. **1075.** $t^2 \sin t$.
1076. $2t \operatorname{arctg} t$. **1077.** 0. **1078.** $-\frac{1 + 2x \operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^2}$. **1079.** $4x^3 \ln x$.

1080. $3/x + \ln x \,/\, x^2$. **1081.** $e^x\,(\operatorname{arctg} x + 1 \,/\, (1 + x^2))$. **1082.** $\dfrac{4x - \sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}$. **1083.** $\dfrac{2\ln x}{x \ln 10} - \dfrac{1}{x}$. **1084.** $3^x x^4\,(5 + x\ln 3)$.
1085. $x e^x\,(2\sin x + x\sin x + x\cos x)$. **1086.** $x^2 a^x\,(3\ln x + x\ln a \cdot \ln x + 1)$.
1087. 3 [illegible] —3 **1088.** —1. **1089.** $-1/8$. **1090.** 4. **1091.** $6\cos 6x$.
1092. $-3\cos^2 x \sin x$. **1093.** $20x\,(x^2-1)\,(x^4-2x^2+3)^4$. **1094.** $4(5x^2-2x+4)\,(5x-1)$. **1095.** $2\sin 4x$. **1096.** $\dfrac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$. **1097.** $2\cos 2x\cos 3x - 3\sin 3x\cdot\sin 2x$. **1098.** $2+15\sin^2 x\cos x$. **1099.** $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x}}$.
1100. $\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. **1101.** $3\,(x^{12}/6 + 4\sqrt[8]{x^5} - 3)^2 \cdot (2x^{11} + 5 \,/\, 2\sqrt[8]{x^3})$. **1102.** $\dfrac{2x+3}{4\sqrt[4]{(x^2+3x)^3}} - \dfrac{12}{5\sqrt[5]{(6x-1)^3}}$. **1101.** $a\sin^2\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$. **1104.** $\dfrac{2x e^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$. **1105.** $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$. **1106.** $\dfrac{1}{\ln \operatorname{tg} x \cdot \sin x \cos x}$. **1107.** $e^{\cos x}\,(\cos x - \sin^2 x)$. **1108.** $e^x(\ln\sin x + \operatorname{ctg} x)$.
1109. $\operatorname{tg}^4 x$. **1110.** $1 \,/\, \cos x$. **1111.** $4x \,/\, (1 - x^4)$. **1112.** $1 \,/\, (e^x + 1)$.
1113. $1 \,/\, \sin^3 x\cos x$. **1114.** $\operatorname{tg}^3 x$. **1115.** 1) $e^{\sqrt{x}} \,/\, 2\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{e^x} \,/\, 2$.
1116. 1) $x^2\, 7^{5x}\,(3 + 5x\ln 7)$; 2) $2x\,(\sin 3^{2x} + x\cos 3^{2x}\cdot 3^{2x}\ln 3)$.
1117. $2e^{-x} \,/\, (e^{-x} - 1)^2$. **1118.** $-\dfrac{1}{(x+1)^2}\operatorname{ctg}\dfrac{2x+3}{x+1}$. **1119.** $\dfrac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. **1120.** $\dfrac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$. **1121.** $\dfrac{5^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}\ln 5}{x\sqrt{x^2-1}}$. **1122.** $-\dfrac{e^{\arcsin\frac{1}{x}}}{x\sqrt{x^2-1}}$. **1123.** $4.3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}\,\dfrac{\operatorname{arctg}(4x+1)}{8x^2+4x+1}\ln 3$. **1124.** $7^{x\cos^3 x}\ln 7\cos^2 x\,(\cos x - 3x\sin x)$. **1125.** $-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$. **1126.** $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$. **1127.** $-\dfrac{1+6\operatorname{ctg} 3x}{\sin^2 3x}$. **1128.** $\dfrac{3^{\sqrt{x}}\ln 3}{2\sqrt{x}} + 2x(x\sin 2x - \cos 2x)$. **1129.** $\left(\dfrac{2}{\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+\cos^2 4x\right)(x^2+4)} - 4\sin 8x\right)$.

1130. $\arcsin 2x + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{9\,\mathrm{arctg}^2\, 3x}{1+9x^2}$. **1131.** $3\,\mathrm{tg}^2 x\left(\frac{\mathrm{tg}\, 3x}{\cos^2 x} + \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 3x}\right)$. **1132.** $\frac{2e^{\mathrm{arctg}^2 x}}{\cos^2 x}\left(\mathrm{tg}\, x + \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}\right)$. **1133.** $-2e^{-x^2}\cos^2(2x+3)\,(x\cos(2x+3)+3\sin(2x+3))$. **1134.** $1/\sqrt{x^2-1}$.
1135. $1/\sin^3 x$. **1136.** $3\sqrt{\frac{1-3x}{1+3x}}$. **1137.** $\sqrt{4/x-1}$. **1138.** $3\cos x\cos 2x$. **1139.** $\ln(x^2+1)$. **1140.** $4x\arcsin x$. **1141.** $15\sin^2 5x \times \cos^4 3x\cos 8x$. **1142.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}$. **1143.** $-2\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$.
1144. $\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$. **1145.** $\frac{x\,\mathrm{arc\,tg}\, x}{\sqrt{1+x^2}}$. **1146.** $e^{2x}\cos 3x$. **1147.** $\sqrt{x^2-a^2}$.
1148. $\frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$. **1149.** $\frac{x^4+1}{x^6+1}$. **1150.** $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. **1151.** $\frac{1}{5+4\sin x}$.
1152. $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$. **1153.** $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$. **1154.** $\frac{1}{x^3\sqrt{x-1}}$.
1155. $1/3$; $1/6\sqrt{2}$. **1156.** 0 და 5. **1157.** $1/15$. **1158.** $\frac{4}{5}\ln 2$.
1159. 1. **1160.** 6π. **1161.** $1-t$. **1162.** $3(2x+1)$. **1164.** 0.
1165. $x^x(\ln x+1)$. **1166.** $-x^{\frac{1}{x}-2}(\ln x-1)$. **1167.** $n\left(\frac{x}{\pi}\right)^{n^x} \times \left(\ln\frac{x}{n}+1\right)$. **1168.** $(\sin x)^{\mathrm{tg}\, x}\left(1+\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\right)$. **1169.** $x^{\mathrm{arctg}\, x}\left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}\right)$. **1170.** $(\ln x)^x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)$. **1171.** $(\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{ctg}\, x} \times \frac{1}{\sin^2 x}(1-\ln\mathrm{tg}\, x)$. **1172.** $(\mathrm{arctg}\, 2x)^{\sin 3x}\left(3\cos 3x\cdot\ln\mathrm{arctg}\, 2x + \frac{2\sin 3x}{(1+4x^2)\,\mathrm{arctg}\, 2x}\right)$. **1173.** $(x^2+3)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x^2+3)}{2\sqrt{x}} + \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3}\right)$.
1174. $-(1-x^2)^{\arccos x}\left(\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x\arccos x}{1-x^2}\right)$. **1875.** $x^{x^x} \times x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$. **1176.** $e^{x^x}\cdot x^x(1+\ln x)$. **1177.** $-\frac{1}{\ln^2 x}\Big(\mathrm{tg}x \times$

$\times \ln x + \frac{1}{x} \ln\cos x\Big)$. **1178.** $\frac{1}{\ln^2 \sin x}\left(\frac{2\ln\sin x}{\sin 2x} - \operatorname{ctg} x \cdot \ln \operatorname{tg} x\right)$.

1179. $x^5(a+3x)^3(a-2x)^2\left(\frac{5}{x}+\frac{9}{a+3x}-\frac{4}{a-2x}\right)$. **1180.** $x^6(x^2+$

$+1)^{10}\cdot(x^3+1)^5\left(\frac{6}{x}+\frac{20x}{x^2+1}+\frac{15x^2}{x^2+1}\right)$. **1181.** $\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}\times$

$\times\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+3}\right)$. **1182.** $\frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}\left(\frac{5}{2x}+\frac{8x}{x^2+1}-\right.$

$\left.-\frac{1}{2(x-1)}\right)$. **1183.** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2-1}\right)$.

1184. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2(x-1)}{\sin^2 x}}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}-2\operatorname{ctg} x\right)$. **1185.** $\operatorname{ch} x$.

1186. $\operatorname{sh} x$. **1187.** $1/\operatorname{ch}^2 x$. **1188.** $-1/\operatorname{sh}^2 x$. **1189.** $\frac{2x\operatorname{ch} x - x^2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$.

1190. $-\frac{3(x\ln x + \operatorname{sh} x\operatorname{ch} x)}{x\ln^2 x\operatorname{sh}^2 x}$. **1191.** $6\operatorname{sh}^2 2x\operatorname{ch} 2x$. **1192.** $-\frac{4}{\operatorname{sh}^3 2x}$.

1193. $2\operatorname{cth} 2x$. **1194.** $4\operatorname{sh} 4x$. **1195.** $\operatorname{sh} 2x\, e^{\operatorname{ch}^2 x}$. **1196.** $\frac{2}{\operatorname{sh} 2x}$.

1197. $-\frac{(5x-2)^2}{19}$. **1198.** $-\frac{(1+x^4)^2}{8x^3}$. **1199.** $\frac{1}{\cos x - \operatorname{tg} x}$.

1200. $1\Big/\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)$. **1201.** $\frac{\sqrt{1-2^{2x}}}{2^x\ln 2}$. **1202.** $\frac{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}{x}$.

1203. 18. **1204.** $120x$. **1205.** $-108\sin 6x$. **1206.** $2e^{x^2}(1+2x^2)$.

1207. $-1/x^2$. **1208.** $\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$. **1209.** $-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. **1210.**

$-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **1211.** $-3\cos x\sin^2 x$. **1212.** $-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$.

1213. $4(3\cos 2x - 6x\sin 2x - 2x^2\cos 2x)$. **1214.** $24\ln x + 50$. **1215.** 480.

1216. $4/e$. **1217.** 0,5. **1218.** $7\sqrt{3}/36$. **2219.** $a^n\cos\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)$.

1220. $a^n\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)$. **1221.** $2^{n-1}a^n\cos\left(2ax+n\frac{\pi}{2}\right)$.

1222. $-2^{n-1}a^n\cos\left(2ax+n\frac{\pi}{2}\right)$. **1223.** $(k\ln a)^n a^{kx}$. **1224.** $n!$.

1225. $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. 1226. $\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. 1227. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$.

1228. $\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. 1229. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$. 1230. $-\operatorname{tg} t$; $\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$. 1231. $\frac{3t^2+1}{2t}$; $\frac{3t^2-1}{4t^3}$. 1232. $y'_x = y''_x = e^{t^2}$.

1233. $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$; $-\frac{1}{4\sin^4\frac{t}{2}}$. 1234. $-2\operatorname{tg}^3 t$; $6\operatorname{tg}^4 t$. 1235. $\operatorname{tg} 2t$; $-\frac{\operatorname{tg}^2 2t}{2\cos 2t}$. 1236. $\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}$; $\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$. 1237. $\frac{2t}{1-t^2}$.

1238. $\frac{4t}{t^2-4t-2}$. 1239. 1. 1240. 5. 1241. $-6e^{3t}(t^2+3t+1)$.

1242. $-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$. 1243. 1, 5. 1244. $-\frac{2x+y}{x+2y}$. 1245. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

1246. $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$. 1247. $-\frac{e^{-x}+y}{e^y+x}$. 1248. $e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$. 1249. $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. 1250. $\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$. 1251. $\frac{1}{3}$. 1252. 0,5.

1253. $-4a^2/y^3$. 1254. $y/(1-y)^3$. 1255. $-2(1+y^2)/y^5$.

1256. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$. 1257. 4. 1258. $3a^2x/y^5$. 1259. $-10x(a^2-x^2)^4\,dx$.

1260. $\frac{4(1+\operatorname{tg} x)^3}{\cos^2 x}\,dx$. 1261. $\ln x\,dx$. 1262. $\frac{dx}{\cos^4 x}$. 1263. $4\sin^2\varphi\,d\varphi$.

1264. $\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$. 1265 $\sin 2t\,dt$. 1266. $-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$. 1267. $\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$.

1268. $\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin^2 x)\operatorname{arctg}(\sin x)}$. 1269. $-2\cdot 3^{\operatorname{ctg}^2 x}\ln 3\cdot\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}\,dx$.

1270. $\frac{1-x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$. 1271. $\frac{y+x}{y-x}\,dx$. 1272. $\frac{y(3x^2y+5)}{x(2x^2y+5)}\,dx$.

1273. $\frac{y\,dx}{x-y}$. 1274. $\frac{x+y}{x-y}\,dx$. 1275. $\frac{mn}{\ln mx}\,dx$. 1276. $\frac{dx}{3x^2-2}$.

1277. $-\frac{2\pi\operatorname{tg} 2\pi x}{\ln 2}\,dx$. 1278. $\frac{2\operatorname{tg} x\,dx}{(1+\operatorname{tg}^4 x)\cos^2 x}$. 1279. $-\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1280. $(\sin x)^{\cos x}(\cos x\cdot\operatorname{ctg} x-\sin x\ln\sin x)\,dx$. 1281. $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}^{\,\sin^2 x}\times$

$\times\left(\sin 2x\ln x+\frac{\sin^2 x}{x}\right)dx$. **1282.** $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\,a^{\sqrt{\cos x}}(1+$ $+\sqrt{\cos x}\cdot\ln a)\,dx$. **1283.** $\operatorname{cth} x\left(1-\frac{1}{2\operatorname{sh} x}\right)dx$. **1284.** $\frac{dx}{\operatorname{ch} 2x}$.
1285. $e^{-x}(a\operatorname{ch} ax-\operatorname{sh} ax)\,dx$. **1286.** $-\frac{dx}{\operatorname{ch} x}$. **1287.** $\frac{dx}{x}$. **1288.** $\frac{a\,dx}{ax+b}$.
1289. $\frac{4dx}{(4x-2)\ln 3}$. **1290.** $\frac{dx}{\sin x}$. **1291.** $\frac{6x-5}{3x^2-5x+6}dx$. **1292.** $\operatorname{ctg} x\,dx$.
1293. $\frac{dx}{\cos x}$. **1294.** $\frac{dx}{2\sqrt{x(x+a)}}$. **1295.** $\frac{dx}{x\ln x}$. **1296.** $\frac{x(2\ln x+1)}{\ln 3}dx$.
1297. $\frac{(2x\ln x-2x-1)\ln 2}{x\ln^2 x}dx$. **1298.** $(x^2(3\ln x+1)+\sin 2x)\,dx$.
1299. $\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right)\cdot x^{\cos x}\,dx$. **1300.** $\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\right.$ $\left.+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx$. **1301.** $x(1+x)\sqrt{1-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}\;\frac{1}{2(1-x)}\right)dx$.
1302. $x^{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{x}-\frac{\ln x}{\sin^2 x}\right)dx$. **1304.** $\cos x\,e^{\sin x}\,dx$. **1305.** $e^{-x^2}(1-$ $-2x^2)\,dx$. **1306.** $\frac{dx}{1+e^x}$. **1307.** $\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\left(\cos\frac{x}{a}-\sin\frac{x}{a}\right)dx$. **1308.** $e^{-x^2}((1-2x)\cos x-(1+2x)\sin x)\,dx$. **1309.** $-\frac{x\,dx}{1+x}$. **1310.** $-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}dx$. **1311.** $2xe^{x^2+3}dx$. **1312.** $2\alpha(e^{2\alpha x}-e^{-2\alpha x})\,dx$.
1313. $-25\cos 5x\,dx^2$. **1314.** $-\frac{2\,dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}$ **1315.** $3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)dx^n$.
1316. $\left(2\operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x}\right)dx^2$. **1317.** $2\ln 2\cdot 2^{x^2}(1+2x^2\ln 2)\,dx^2$.
1318. $\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^3$. **1319.** $32\sin^4 x\,dx^3$ **1320.** $e^x(x^2+6x+6)\,dx^3$.
1321. 1) 0,5; 2) $48\,\Delta x$. **1322.** 1) $\frac{0,005}{\sqrt{x}}$; 2) $16x\,\Delta x$. **1323.** $\Delta y=$ $=0,53$; $dy=0,5$. **1324.** $\Delta y=0,91$; $dy=0,9$. **1325.** 1) $\pi/36$; 2) $1/2700$. **1326.** $\pi/45$. **1327.** $\approx 1,96$. **1328.** $\approx 2,01$. **1329.** $\approx 1,495$. **1330.** $\approx 3,02$. **1331.** $\approx 0,08$. **1332.** $\approx 1,99$. **1333.** $\approx 2,98$. **1334.** $\approx 2,975$. **1335.** $\approx 1,231$. **1336.** $\approx 1,07$. **1337.** $\approx 0,958$.

1338. $\approx 1{,}02$, 1339. $\approx 65{,}92$. 1349. $\approx 2{,}02$. 1359. $n!$ 1374. სამი ნამდვილი ფესვი, მოთავსებული (1; 2), (2; 3), (3; 4) შუალედებში. 1375. 2,5. 1376. $\pm 1/\sqrt{3}$. 1377. არა 1378. არა 1379. $9/4$. 1380. $1/\ln 2$. 1381. 1. 1382. $\sqrt{\frac{\pi}{4}-1}$. 1383. $]2;\ 4[$. 1384. $]-0{,}5;\ 15/4[$. 1385. $14/9$. 1386. $\pi/4$. 1387. არა 1388. $4/3$. 8189. 1. 1390. $2/3$. 1301. $\sqrt{2}$. 1392. 1. 1393. $1/3$. 1394. $-1/3$. 1395. 1. 1396. 1.5. 1397. $\frac{m}{n}a^{m-n}$. 1398. $\cos\varphi$. 1399. 2. 1400. $1/3$. 1401. 0. 1402. ∞. 1403. $-1/8$. 1404. a. 1405. 0. 1400. $+\infty$ 1407. 1,5. 1408. $-5/8$. 1409. 0. 1410. 1. 1411. $\pi^2/2$. 1412. $-4/\pi$. 1418. 3. 1414. 0. 1415. 1. 1416. 1. 1417. 0. 1418. 0. 1419. $2/\pi$. 1420. 2. 1421. a. 1422. -2. 1423. 1. 1424. 1 1425. 0. 1426. 0. 1427. 0. 1428. $1/2$. 1429. $-1/2$. 1430. $1/3$. 1431. $1/3$. 1432. 0. 1433. $-1/3$. 1434. -1. 1435. $1/2$. 1436. $-1/2$. 1437. 1. 1438. 1. 1439. e^{-6}. 1440. e. 1441. e^{-1}. 1442. $e^{2/\pi}$. 1443 1. 1444. $1/\sqrt{e}$. 1445. 1. 1446. 1 1447. e^{-5}. 1448. 1. 1449. 1. 1450. 1. 1451. 1. 1452. 1. 1453. e^2. 1454. 1. 1455. 1. 1456. 1. 1457. 0. 1458. 1) 1; 2) 0. 1459. $(x+1)^2+2(x+1)^2-4(x+1)-8$. 1460. $(x-2)^3+4(x-2)^2+7(x-2)+11$. 1461. $(x-1)^4+2(x-1)^3+5(x-1)+2$. 1462. $(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$. 1463. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$. 1464. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$. 1465. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{x^n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$; თუ $n=2k+1$, მაშინ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\sin\theta x$; თუკი $n=2k$, მაშინ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x$, $0<\theta<1$. 1466. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos n\frac{\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$; თუ $n=2k+1$, მაშინ $\cos x=$

$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos\theta x;$ თუკი $n = 2k$, მაშინ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \times \times \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin\theta x, \quad 0 < \theta < 1.$ **1467.** $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!} \times x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}$. **1468.** $1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3$. **1469.** $1 + 2x + x^2$. **1470.** $x + \frac{x^3}{3!}$. **1471.** $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$. **1472.** $1 + 2x + 2x^2$.

1473. ცდომილება ნაკლებია $\frac{1}{40}$-ზე. **1474.** $\ln 1{,}5 \approx 0{,}4010$; ცდომილება ნაკლებია 0,01-ზე. **1477.** ზრდადია $]1, +\infty[$ შუალედში, კლებადია $]-\infty, 1[$ შუალედში. **1478.** ზრდადია $]-\infty, 1[$ შუალედში, კლებადია $]1, +\infty[$ შუალედში. **1479.** ზრდადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. **1480.** ზრდადია $]0, +\infty[$ შუალედში. **1481.** კლებადია $]-\infty, -2[$ და $]2, +\infty[$ შუალედებში. **1482.** ზრდადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. **1483.** ზრდადია $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ შუალედში, კლებადია $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ შუალედში. **1484.** ზრდადია $]1, +\infty[$ შუალედში, კლებადია $]-\infty, 0[$ და $0; 1[$ შუალედებში. **1485.** ზრდადია $]-\infty, 0[$ და $]2, +\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]0; 2[$ შუალედში. **1486.** ზრდადია $]-\infty, -1[$ და $]1, +\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]-1; 1[$ შუალედში. **1487.** ზრდადია $]2, +\infty[$ შუალედში, კლებადია $]-\infty, 2[$ შუალედში. **1488.** ზრდადია $]1, +\infty[$ შუალედში, კლებადია $]0; 1[$ შუალედში. **1489.** $y(1) = 2$ მინიმუმი. **1490.** $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$ მაქსიმუმი. **1491.** $y(4) = 1$ მაქსიმუმი.

1492. $y(0) = -1$ მინიმუმი. **1493.** $y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ მაქსიმუმი.

1494. $y(\pm 1) = 0$ მინიმუმი; $y(0) = 1$ მაქსიმუმი. **1495.** $y(-1) = 1$ მაქსიმუმი; $y(0) = 0$ მინიმუმი. **1496.** $y(0) = 0$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ მინიმუმი. **1497.** არა აქვს ექსტრემუმი. **1498.** არა აქვს

ექსტრემუმის წერტილები. **1499.** $y(0)=1$ მაქსიმუმი; $y(\pm 1)=\frac{1}{2}$ მინიმუმი. **1500.** $y(0)=1$ მინიმუმი; $y(\pm 2)=5$ მაქსიმუმი. **1501.** $y(0)=1$ მაქსიმუმი; $y(1)=0$. **1502.** $y(2)=33$ მაქსიმუმი; $y(6)=1$ მინიმუმი. **1503.** $y(1)=4$ მაქსიმუმი; $y(5)=-28$ მინიმუმი. **1504.** $y(-1)=0$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{32}{27}$ მინიმუმი. **1505.** $y(0)=-2$ მაქსიმუმი; $y(2)=2$ მინიმუმი **1506.** $y(1)=-4$ მაქსიმუმი; $y(5)=4$ მინიმუმი. **1507.** $y(0)=1$ მინიმუმი. **1508.** $y(1)=0$ მინიმუმი. **1509.** არა აქვს ექსტრემუმი. **1510.** არა აქვს ექსტრემუმი. **1511.** $y\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ მინიმუმი. **1512.** $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+1$ მინიმუმი; $y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}-1$ მაქსიმუმი. **1513.** $y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ მინიმუმი. **1514.** $y(1)=0$ მინიმუმი; $y(e^{-2})=4e^{-2}$ მაქსიმუმი. **1515.** $y(1)=1$ მაქსიმუმი. **1516.** $y(0)=0$ მინიმუმი. **1517.** $y(-\ln\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ მინიმუმი. **1518.** $y(0)=0$ მინიმუმი; $y(2)=\frac{4}{e^2}$ მაქსიმუმი. **1519.** $y(-1)=\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$ მინიმუმი. **1520.** $y(1)=3$ მაქსიმუმი; $y(e)=e$ მინიმუმი. **1521.** $y(1)=1$ უმცირესი მნიშვნელობა; $y(-1)=5$ უდიდესი მნიშვნელობა **1522.** $y(-1)=-\frac{13}{3}$ უმც.; $y(5)=\frac{23}{3}$ უდიდ. **1523.** $y(\pm 2)=-25$ უმც.; $y(\pm 1)=2$ უდიდ. **1524.** $y(-1)=-10$ უმც.; $y(1)=2$ უდიდ. **1525.** $y(1)=23$ უდიდ.; $y(-1)=-53$ უმც. **1526.** $y(0)=0$ უმც.; $y(4)=8$ უდიდ. **1527.** $y(0)=0$ უმც.; $y(2\pi)=2\pi$ უდიდ. **1528.** $y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ უდიდ.; $y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$ უმც. **1529** $y(0)=0$ უმც.: $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ უდიდ. **1530.** $y(0)=\frac{\pi}{4}$ უდიდ.; $y(1)=0$ უმც. **1531.** $y(2)=0{,}2$ უდიდ.; $y(0)=-1$ უმც. **1532.** $y(0)=y(1)=1$ უდიდ.; $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}$ უმც. **1533.** $a/2$ და $a/2$. **1534.** 6 და 6. **1535.** 10 მ. **1536.** 50 მ და 100 მ. **1537.** ჩამოჭრილი კვადრატის გვერდია 6 სმ. **1538.** 4 და 2. **1539.** ფუძის

გვერდი უნდა უდრიდეს გაორკეცებულ სიმაღლეს. **1540.** 3 სმ, 4 სმ, 6 სმ. **1541.** $\frac{18}{\pi+4}$ მ$\approx 2{,}5$ მ. **1542.** 20 სმ. **1543.** 1) (1; 1); 2) $\left(\frac{1}{4}; \frac{23}{4}\right)$. **1544.** $M\,(1{,}5;\ 0)$. **1545.** კათეტებია $\frac{h}{\sqrt{2}}$ და $\frac{h}{\sqrt{2}}$. **1546.** კვადრატი, რომლის გვერდია $R\sqrt{2}$. **1547.** 4 სმ და $\sqrt{3}$ სმ. **1548.** $\frac{3}{5}p, \frac{3}{5}p$ და $\frac{4}{5}p$. **1549.** 60°. **1550.** ტრაპეციის ფერდია $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$. **1551.** $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ ცენტრალური კუთხე. **1552.** კვადრატი, რომლის გვერდია $\frac{p}{2}$. **1553.** 1) ცილინდრის ფუძის რადიუსი $r=R\sqrt{\frac{2}{3}}$, ხოლო ცილინდრის სიმაღლე $h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$; 2) $R\sqrt{2}$. **1554.** 1) $h=\frac{4}{3}R$ (კონუსის სიმაღლე), $V=\frac{8}{27}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$; 2) $h=4R$ (კონუსის სიმაღლე), $V=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$. **1555.** $h=\frac{H}{3}$ (ცილინდრის სიმაღლე), $V=\frac{4}{27}\pi R^2H$; $h=2,\ V=\frac{128}{9}\pi$. **1556.** $R=\frac{3}{2}r$ (კონუსის ფუძის რადიუსი). **1557.** $R\sqrt{2}$ (ფუძის გვერდი) და $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ (სიმაღლე). **1558.** $a/\sqrt{3}$. **1559.** კვადრატი, რომლის გვერდია $\frac{D}{\sqrt{2}}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. თუ ძელის კვეთის ზომებია x და y, მაშინ მისი გამძლეობა არის $I=Cxy$, სადაც C პროპორციულობის კოეფიციენტია. **1560.** 10 სმ. **1561.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$, სადაც a არის მანძილი იატაკზე ნათურის გეგმილიდან A წერტილამდე მ ი თ ი თ ე ბ ა. განათება $I=c\frac{\sin\varphi}{r^2}$, სადაც φ არის კუთხე, რომელსაც სხივი ადგენს სიბრტყესთან A წერტილში, ხოლო r მანძილია ნათურიდან A წერტილამდე (c დადებითი მუდმივია). **1562.** 1-სანთლიანი ნათურიდან 1 მ-ით დაშორებული წერტილი. **1563.** წირი ამოზნექილია ყველგან. **1564.** $]-\infty, 0[$ შუალედში ამოზნექილია, $]0, +\infty[$ შუალედში ჩაზნექილია, $O\,(0;\ 0)$ გადაღუნვის წერტილია. **1565.** წირი ჩაზნექილია ყველგან. **1566.** წირი ამოზნექილია $]0, +\infty[$ შუალედში. **1567.** $]-\pi;\ 0[$-ში ჩაზნექილია,

]0; π[-ში ამოზნექილია, $O\,(0;\,0)$ გადაღუნვის წერტილია. **1568.** $\left]-\frac{\pi}{0};\,0\right[$-ში ამოზნექილია, $\left]0;\,\frac{\pi}{2}\right[$-ში ჩაზნექილია, $O\,(0;\,0)$ გადაღუნვის წერტილია. **1569.** $]-\infty,\,+\infty[$-ში ჩაზნექილია. **1570.** $]-\infty,\,+\infty[$-ში ჩაზნექილია. **1571.** $]-\infty,\,-3[$-ში ამოზნექილია, $]-3,\,+\infty[$-ში ჩაზნექილია, გადაღუნვის წერტილი არა აქვს. **1572.** $\left]-\infty,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ და $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},\,+\infty\right[$ შუალედებში ჩაზნექილია, $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}};\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ შუალედში ამოზნექილია, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ გადაღუნვის წერტილებია. **1573.** $]-\infty,\,0[$-ში ამოზნექილია, $]0,\,+\infty[$-ში ჩაზნექილია, $O\,(0;\,0)$ გაღუნვის წერტილია. **1574.** $]-\infty,\,-2[$-ში ჩაზნექილია, $]-2,\,+\infty[$-ში ამოზნექილია, $(-2;\,0)$ გადაღუნვის წერტილია. **1575.** $]-\infty,\,2[$-ში ამოზნექილია, $]2,\,+\infty[$-ში ჩაზნექილია, $(2;\,12)$ გადაღუნვის წერტილია. **1576.** $]-\infty,\,1[$-ში ამოზნექილია, $]1,\,+\infty[$-ში ჩაზნექილია. $(1;\,-1)$ გადაღუნვის წერტილია. **1577.** $\left]-\infty,\,\frac{1}{2}\right[$-ში ჩაზნექილია, $\left]\frac{1}{2},\,+\infty\right[$-ში ამოზნექილია, $\left(\frac{1}{2};\,e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$ გადაღუნვის წერტილია. **1578.** $]-\infty,\,-1[$ და $]1,\,+\infty[$ შუალედებში ამოზნექილია, $]-1;\,1[$-ში ჩაზნექილია, $(\pm 1;\,\ln 2)$ გადაღუნვის წერტილებია. **1579.** $x=1$. **1580.** $x=-2$; $y=0$. **1581.** $y=1$. **1582.** $x=0$. **1583.** $x=1$, $y=x$. **1584.** $x=\pm 1$, $y=0$. **1585.** $y=\pm\frac{\pi}{2}$. **1586.** $x=0$, $y=1$. **1587.** $y=2$. **1588.** $x=0$; $y=0$ — მარჯვენა ჰორიზონტალური, $y=1$ — მარცხენა ჰორიზონტალური. **1589.** არა აქვს ასიმპტოტი. **1590.** $x=1$, $y=-\frac{x+1}{2}$. **1591.** $x=-1$, $y=\frac{1}{2}x-1$. **1592.** $y=0$. **1593.** $x=-1$, $y=0$. მითითება. როცა წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, მაშინ; თუ $f(t_0)=\infty$, ხოლო $\varphi(t_0)=c$, წირს აქვს $y=c$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტი; თუ $\varphi(t_0)=\infty$, ხოლო $f(t_0)=c$, — წირს აქვს $x=c$ ვერტიკალური ასიმპტოტი; თუკი $f(t_0)=\varphi(t_0)=\infty$ და მასთან $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{f(t)}=k$,

$\lim\limits_{t\to t_0}[\varphi(t)-kf(t)]=b$, წირს აქვს დახრილი ასიმპტოტი $y=kx+b$, როცა წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ ის უნდა ჩავწეროთ პარამეტრული სახით შემდეგნაირად: $x=r\cos\varphi=f(\varphi)\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi=f(\varphi)\sin\varphi$. **1594.** $y=x\pm\pi$. **1595.** $y(0)=1$ მაქსიმუმი; $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{3}{4}\right)$ გადაღუნვის წერტილებია; $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ და $\left]\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$ შუალედებში ჩაზნექილია; $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ შუალედში ამოზნექილია; $y=0$ — ასიმპტოტი **1596.** $y(0)=1$ მინიმუმი; $]-\infty,-1[$ და $]1,+\infty[$ შუალედებში ამოზნექილია; $]-1;1[$ შუალედში ჩაზნექილია; $x=\pm1$, $y=0$ — ასიმპტოტები. **1597.** $]0;\ 0[$ გადაღუნვის წერტილია; $]-1;0[$-ში ამოზნექილია, $]0;1[$-ში ჩაზნექილია; $x=\pm1$ — ასიმპტოტები. **1598.** $y(1)=\frac{1}{2}$ მაქსიმუმი; $\left]\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right[$, $(0;\ 0)$ გადაღუნვის წერტილებია; $]0;\sqrt{3}[$-ში ამოზნექილია; $]\sqrt{3};+\infty[$-ში ჩაზნექილია; $y=0$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ. **1599.** $y(1)=\frac{7}{3}$ მაქსიმუმი; $y(3)=1$ მინიმუმი; $\left(2;\ \frac{5}{3}\right)$ გადაღუნვის წერტილია; $]-\infty,2[$-ში ამოზნექილია; $]2,+\infty[$-ში ჩაზნექილია; **1600.** $y(-5)=0$ მაქსიმუმი; $y(-1)=-32$ მინიმუმი; $]-3;\ -16[$ [გადაღუნვის წერტილია; $]-\infty,-3[$-ში ამოზნექილია; $]-3,+\infty[$-ში ჩაზნექილია. **1601.** $y(0)=0$ მაქსიმუმი; $]0;2[$-ში ამოზნექილია, $]2,+\infty[$-ში ჩაზნექილია; $x=2$, $y=1$ — ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. **1602.** $y(0)=2$ მინიმუმი; $\left]0,\frac{1}{2}\right[$-ში ჩაზნექილია; $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$-ში ამოზნექილია; $x=\frac{1}{2}$; $y=1$ — ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. **1603.** $y(-1)=-\frac{1}{4}$ მინიმუმი; $\left(-2;\ -\frac{2}{9}\right)$ გადაღუნვის წერტილია; $]-\infty,-2[$-ში ამოზნექილია; $]-2;\ 1[$-ში და $]1,+\infty[$-ში ჩაზნექილია; $x=1$, $y=0$ — ასიმპტოტები. **1604.** $y(-3)=-\frac{27}{4}$ მინიმუმი; $(-2;\ 4)$, $(0;\ 0)$ გადაღუნვის წერტილებია; $]-\infty,-2[$ და $]0,+\infty[$ შუალედებში ჩაზნექილია; $]-2;\ 0[$-ში ამოზნექილია. **1605.** $y(3)=-4{,}5)$ მაქსიმუმი; $(0;\ 0)$ გადაღუნვის წერტილია; $]0;\sqrt{3}[$-ში ჩაზნექილია; $[\sqrt{3},+\infty[$-ში ამოზნექილია; $x=\sqrt{3}$,

$y = -x$ — ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ. **1606.** $y(-2) = -4$ მაქსიმუმი; $y(0) = 0$ მინიმუმი; $]-\infty, -1[$-ში ამოზნექილია; $]-1, +\infty[$-ში ჩაზნექილია; $x = -1$, $y = x - 1$—ასიმპტოტები. **1607.** $y(\sqrt{2}) = 2$ მინიმუმი; $]\sqrt{2}, +\infty[$-ში ჩაზნექილია; $x = 1$, $y = x$ — ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. **1608.** $y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ მინიმუმი; (0; 0) გადაღუნვის წერტილია; $]0; 1[$-ში და $]3, +\infty[$-ში ამოზნექილია; $]1; \sqrt{3}[$-ში ჩაზნექილია; $x = 1$—ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ. **1609.** $y(-1) = 1$ მაქსიმუმი; $y(0) = 0$ მინიმუმი; $]-\infty, 0[$-ში და $]0, +\infty[$-ში ამოზნექილია. **1610.** $y(0) = 0$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{2}{5}\right) \approx -0{,}33$ მინიმუმი; $x = -\frac{1}{5}$ — გადაღუნვის წერტილის აბსცისა; $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right[$-ში ამოზნექილია; $\left]-\frac{1}{5}; 0\right[$-ში და $]0, +\infty[$-ში ჩაზნექილია. **1611.** $y(1) = \sqrt{2}$ მაქსიმუმი; $(1, +\infty)$-ში ჩაზნექილია; $y = 0$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. **1612.** $(-\infty, 0)$-ში ჩაზნექილია; $(0, +\infty)$-ში ამოზნექილია; $x = 0$, $y = x + 2$ — ასიმპტოტები. **1613.** $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ მინიმუმი; $y(0) = 0$; $y(1) = 0$; $(0, +\infty)$-ში ჩაზნექილია. **1614.** $y(e) = \frac{1}{e}$ მაქსიმუმი; $\left(e^{\frac{2}{3}}; \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ გადაღუნვის წერტილია $\left]0; e^{\frac{3}{2}}\right[$-ში ამოზნექილია; $\left]e^{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$-ში ჩაზნექილია; $x = 0$, $y = 0$ — ასიმპტოტები. **1615.** $]1, +\infty[$-ში ამოზნექილია; $x = 1$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. **1616.** $y(0) = 0$ მინიმუმი; $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; e^{-\frac{3}{2}}\right)$ გადაღუნვის წერტილია; $\left]0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$-ში ჩაზნექილია; $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[$-ში ამოზნექილია; $y = 1$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. **1617.** ფუნქცია პერიოდულია 2π პერიოდით; $[0; 2\pi]$ სეგმენტზე; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$

$= -\sqrt{2}$ მინიმუმი; $\left(\frac{3\pi}{4}; 0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4}; 0\right)$ გადაღუნვის წერტილებია.

1618. ფუნქცია პერიოდულია 2π პერიოდით; $[0; 2\pi]$ სეგმენტზე $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ და $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$ მინიმუმი; $x_1 \approx \frac{3\pi}{10}$, $x_2 \approx \frac{2\pi}{3}$, $x_3 \approx \frac{11}{9}\pi$, $x_4 \approx \frac{16}{9}\pi$ გადაღუნვის წერტილების აბსცისებია. **1619 — 1622** მ ი თ ი თ ე ბ ა. თუ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, მაშინ ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება შესრულდება ისევე, როგორც $y = f(x)$ განტოლებით მოცემული წირისათვის. გამოვითვლით $\frac{dx}{dt} = f'(t)$, $\frac{dy}{dt} = \varphi'(t)$ წარმოებულებს. გარდა ამისა, გამოვითვლით $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$ (A) წარმოებულს. ვიპოვით t პარამეტრის იმ $t_1, t_2, \ldots, t_k$ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც $f'(t)$ ან $\varphi'(t)$ წარმოებულები ნულის ტოლი ხდება, ან განიცდის წყვეტას (ესენია ე. წ. კრიტიკული წერტილები). (A) ფორმულის მიხედვით ყოველ (t_1, t_2); $(t_2, t_3); \cdots$; (t_{k-1}, t_k) ინტერვალში და, მაშასადამე, ყოველ (x_1, x_2); $(x_2, x_3); \cdots$; (x_{k-1}, x_k) ინტერვალში (სადაც $x_i = f(t_i)$) განვსაზღვრავთ $\frac{dy}{dx}$ წარმოებულის ნიშანს და ამით დავადგენთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედებს. შემდეგ გამოვითვლით $\frac{d^2y}{dx^2}$ წარმოებულს და განვსაზღვრავთ წირის ჩაზნექილობასა და ამოზნექილობას. ასიმპტოტების მოსაძებნად ვიპოვით t-ს იმ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც x ან y ან ორივე ერთად უსასრულოდ დიდი ხდება. **1623.** $3x + y - 2 = 0$; $x - 3y + 6 = 0$. **1624.** $4x + y - 8 = 0$; $x - 4y - 2 = 0$. **1625.** $y = 0$; $x + 1 = 0$. **1626.** $8x - y - 22 = 0$; $x + 8y - 19 = 0$. **1627.** 1) $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$; 2) $y = x - 1$; $y = 1 - x$. **1628.** $2x + y - 3 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$; $2x - y + 3 = 0$; $x + 2y - 1 = 0$. **1529.** 1) $xx_0 + yy_0 = R^2$; $xy_0 - yx_0 = 0$; 2) $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$; $\frac{xy_0}{b^2} - \frac{yx_0}{a^2} = \frac{c^2x_0\, y_0}{a^2b^2}$ $(c^2 = a^2 - b^2)$. **1630.** 1) $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$; $\frac{x\, y_0}{b^2} + \frac{yx_0}{a^2} = \frac{c^2x_0y_0}{a^2\, a^2}$ $(c^2 = a^2 + b^2)$; 2) $y\, y_0 = p\,(x + x_0)$; $xy_0 + py = y_0(p + x_0)$. **1631.** $y = a$;

$x=0$. **1632.** $y=0$; $x=0$. **1633.** $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$. **1634.** $4x+3y-30=0$. **1635.** $3x-5y+30=0$. **1636.** $4x+3y-12\sqrt{2}=0$. **1637.** 1) $y=0$; 2) $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4}=0$. **1638.** $x+2y-4$; $2x-y-3=0$. **1639.** $4x+2y-3=0$; $2x-4y+1=0$. **1640.** $y=1+x\ln a$; $y=1-\frac{x}{\ln a}$. **1641.** $2x+3y\pm 26=0$. **1642.** $y=x+5$. **1643.** $2x-y\pm 1=0$. **1644.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$. **1645.** 45°. **1646.** $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **1647.** 0; $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **1648.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. **1649.** $\operatorname{tg}\omega=\frac{\ln a-\ln b}{1+\ln a\cdot\ln b}$. **1650.** $\operatorname{arctg}\frac{41}{2}$. **1651.** $\operatorname{arctg} 3$. **1652.** 90°. **1653.** $TM=MN=2\sqrt{2}$; $TK=KN=2$. **1654.** $TM=MN=\sqrt{2}$; $TK=KN=1$. **1655.** $1/\ln 2$. **1657.** $TM=\frac{a}{2}\sqrt{5}$; $MN=a\sqrt{5}$; $TK=\frac{a}{2}$; $KN=2a$; $2x-y-a=0$; $x+2y-3a=0$. **1658.** $TM=MN=a\sqrt{2}$; $TK=KN=a$. **1660.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm\sqrt{2}$; $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\pm\sqrt{2}$. **1663.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$. **1664.** $\frac{\pi}{2}+2\varphi$. **1665.** $TM=\sqrt{a^2+r_0^2}$; $MN=\frac{r_0}{a}\sqrt{a^2+r_0^2}$; $OT=a$; $ON=\frac{a}{\varphi_0^2}$; $\operatorname{tg}\mu=-\varphi_0$. **1666.** $TM=2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}$; $MN=a\sqrt{1+4\pi^2}$; $OT=4\pi a^2$; $ON=a$; $\operatorname{tg}\mu=2\pi$. **1667.** $ds=\frac{a}{y}dx$; $\cos\alpha=\frac{y}{a}$; $\sin\alpha=-\frac{x}{a}$. **1668.** $ds=\frac{1}{y}\sqrt{p^2+y^2}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}$; $\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}$. **1669.** $ds=\sqrt{1+9a^2x^4}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+9a^2x^4}}$; $\sin\alpha=\frac{3ax^2}{\sqrt{1+9a^2x^4}}$. **1670.** $ds=\sqrt[3]{\frac{a}{x}}dx$; $\cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$; $\sin\alpha=-\sqrt[3]{\frac{y}{a}}$. **1671.** $ds=3a\sin t\cos t\,dt$; $\cos\alpha=-\cos t$; $\sin\alpha=\sin t$. **1672.** $ds=2a\sin\frac{t}{2}dt$;

$\cos\alpha = \sin\dfrac{t}{2}$; $\sin\alpha = \cos\dfrac{t}{2}$. **1673.** $ds = a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$; $\sin\beta = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **1674.** $ds = \dfrac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$; $\sin\beta = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **1675.** $ds = r\sqrt{1+\ln^2 a}\,d\varphi$; $\cos\beta = \dfrac{\ln a}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$; $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$. **1676.** 1) $ds = a\,d\varphi$; $\cos\beta = \cos\varphi$; $\sin\beta = \sin\varphi$; 2) $ds = 2a\sin\dfrac{\varphi}{2}\,d\varphi$; $\cos\beta = \cos\dfrac{\varphi}{2}$; $\sin\beta = \sin\dfrac{\varphi}{2}$.
1677. $K = 24/125$; $R = 125/24$. **1678.** $K = -2$; $R = 1/2$. **1679.** 1) $K=0$; $R = +\infty$; 2) $|K| = 1/5$; $R = 5$. **1680.** $|K_A| = |K_{A1}| = 2$; $|K_B| = |K_{B1}| = 1/4$; $R_A = R_{A1} = 1/2$; $R_B = R_{B1} = 4$. **1681.** 1) $K = \dfrac{6x}{(1+9x^4)^{3/2}}$; $R = 1/|K|$; 2) $K = \dfrac{4a^2}{(4a^2+x^2)^{3/2}}$; $R = 1/K$.
1682. $K = 3/80\sqrt{10}$; $R = 1/K$. **1683.** 1) $K = 1/2\sqrt{2}$; $R = 2\sqrt{2}$; 2) $K = -1$; $R = 1$. **1684.** $R = \dfrac{1}{|\cos x|}$; $K = \cos x$. **1685.** $K = 6/13\sqrt{13}$; $R = 1/K$. **1686.** $K = -1/6$; $R = 6$. **1687** $K = -1/4a$; $R = 4a$. **1688.** $K = -2/3\,a\sin 2t$; $R = 1/|K|$. **1689.** $K = 1/\sqrt{2}$; $R = \sqrt{2}$. **1690.** $K = \dfrac{r^2+2a^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}$; $R = 1/K$. **1691.** $K = 2/a$; $R = a/2$. **1692.** $K = 3/4\,a\cos\dfrac{\varphi}{2}$; $R = 1/|K|$. **1693.** $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$ წერტილზე. $R_{\text{მინ.}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. **1694.** $M\left(-\dfrac{1}{2}\ln 2;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ წერტილზე. $R_{\text{მინ.}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ **1695.** $(4;\ 4)$; $(x-4)^2+(y-4)^2 = 8$. **1696.** $(3;\ 1,5)$; $(x-3)^2+(y-1,5)^2 = 0,25$. **1697.** $(-2;\ 3)$; $(x+2)^2+(y-3)^2 = 8$. **1698.** $(3;\ -2)$; $(x-3)^2+(y+2)^2 = 8$. **1699.** $Y^2 = \dfrac{8}{27p}(X-p)^3$.

1700. $O(0;\ 0)$ წერტილი. **1701.** $(X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} = (4a)^{\frac{2}{3}}$.
1702. $\left(\dfrac{X}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{Y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}$. **1703.** $X = a(t+\sin t)$, $Y = -a(1-\cos t)$. შემოვიღოთ ახალი პარამეტრი $\tau = t - \pi$, მაშინ მარ-

ტივი გარდაქმნებით მივიღებთ: $X' = a(\tau - \sin\tau)$, $Y' = a(1-\cos\tau)$, სადაც $X' = X - a\pi$, $Y' = Y + 2a$. ციკლოიდის ევოლუტი არის ისევ ციკლოიდი, მხოლოდ კოორდინატთა სათავე გადატანილია $O'(a\pi; -2a)$ წერტილში. **1704.** $X^3 + Y^2 = a^2$. **1705.** $(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$. **1706.** $(X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$. **1707.** $X = \frac{a}{3}(1+\cos\varphi)$; $Y = -\frac{2}{3}a\sin\varphi$. **1708.** 1) $X = \frac{a\varphi}{\varphi^2+2}$; $Y = \frac{a(\varphi^2+1)}{\varphi^2+2}$; 2) $X=0$; $Y = ae^{a\varphi}$. **1709.** $8-i$. **1710.** $\frac{14}{5}i$. **1711.** $-32+16i$. **1712.** $\frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$. **1713.** -1. **1714.** $x=2$; $y=3$. **1715.** $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{4}$. **1716.** $x = \frac{17}{7}$; $y = -\frac{13}{7}$. **1717.** $x = \frac{-b}{a^2+b^2}$; $y = \frac{-a}{a^2+b^2}$. **1718.** $z_1 = 1$; $z_2 = i$. **1719.** $z_1 = 2+i$; $z_2 = 2-i$. **1720.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **1721.** $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. **1722.** $2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$. **1723.** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. **1724.** -2^{10}. **1725.** $\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}$. **1726.** 2^{20}. **1727.** $\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. **1728.** $\cos(2k+1)\frac{\pi}{4} + i\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k=0, 2, 3$. **1729.** $\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k=0, 1$. **1730.** $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{8k+1}{8}\pi + i\sin\frac{8k+1}{8}\pi\right)$, $k = 0,1$. **1732.** $\frac{x^6}{3} + C$. **1733.** $a^2x^5 + C$. **1734.** $\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C$. **1735.** $2x^3 + 2x^2 + \ln|x| + C$. **1736.** $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$. **1737.** $2\ln|x| - x + \frac{x^3}{2} + C$. **1738.** $6\sqrt{x} - \frac{x^2\sqrt{x}}{10} + C$. **1739.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}(x-4) + C$. **1740.** $-\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} +$

$+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$. **1741.** $\frac{24}{13}x\sqrt[12]{x}+\frac{4}{3}x^2\sqrt[4]{x}+C$. **1742.** $\frac{8}{15}x\times$ $\times\sqrt[8]{x^7}+C$. **1743.** $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$. **1744.** $\frac{(ae)^x}{\ln a+1}+C$. **1745.** e^x- $-x+C$. **1746.** $\frac{a^x}{\ln a}-\frac{1}{3x^3}+C$. **1747.** $e^x+\frac{1}{x}+C$. **1748.** $\operatorname{tg}x-$ $-x+C$. **1749.** $-\operatorname{ctg}x-x+C$. **1750.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C$. **1751.** $2\operatorname{arctg}x-3\arcsin x+C$. **1752.** $\cos x-\operatorname{ctg}x+C$. **1753.** $x-\cos x+C$. **1754.** $x-\sin x+C$. **1755.** $x+\sin x+C$. **1756.** $-\operatorname{ctg}t-\operatorname{tg}t+C$. **1757.** $\operatorname{tg}t-\operatorname{ctg}t+C$. **1758.** $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+C$. **1759.** $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x+C$. **1760.** $x+\ln|3x+2|+C$. **1761.** $4(x+7\ln|x-7|)+C$. **1762.** $-\frac{1}{9(3x+2)^3}+C$. **1763.** $-\sqrt{3-2x}+C$. **1764.** $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$. **1765.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x+C$. **1766.** $\frac{1}{5}e^{5x}+C$. **1767.** $\ln(1+x^2)+C$. **1768.** $\frac{2^{5x+3}}{5\ln 2}+C$. **1769.** $3\sin\frac{x+1}{3}+C$. **1770.** $-\ln|\cos x|+C$. **1771.** $\ln|\sin x|+C$. **1772.** $e^x-e^{-x}+C$. **1773.** $\frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C$. **1774.** $3\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right|+C$. **1775.** $\frac{1}{6}\sqrt{(1+4\sin x)^3}+C$. **1776.** $-\frac{1}{\arcsin x}+C$. **1777.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x-1}+C$. **1778.** $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$. **1779.** $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}^2 x+C$. **1780.** $\frac{1}{3}\ln^3|x|+C$. **1781.** $-e^{\frac{1}{x}}+C$. **1782.** $2\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+C$. **1783.** $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C$. **1784.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}+C$. **1785.** $\frac{2}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$. **1786.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. **1787.** $-\sqrt{a^2-x^3}+C$. **1788.** $\ln(e^x+1)+C$. **1789.** $x-\ln(e^x+1)+C$. **1790.** $\ln(e^x+e^{-x})+C$. **1791.** $-\ln|\sin x+\cos x|+C$. **1792.** $\frac{2^{\operatorname{arc\,tg}x}}{\ln 2}+C$. **1793.** $\frac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg}3^x+C$. **1794.** $-\frac{1}{3}\cos(1+x^3)+C$.

1795. $\ln|x+\cos x|+C$. **1796.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$. **1797.** $\frac{1}{3\cos^3 x}+C$. **1798.** $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+C$. **1799.** $\frac{5}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}+C$. **1800.** $\ln|\sin 2x|+C$. **1801.** $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$. **1802.** $\ln\ln|x|+C$. **1803.** $\frac{1}{2}\arcsin^2 x+C$. **1804.** $\arcsin(\ln x)+C$. **1805.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$. **1806.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. **1807.** $\frac{1}{48}(4x^2-1)^6+C$. **1808.** $\frac{1}{2}\sin(x^2+3)+C$. **1809.** $-\frac{1}{2}\cos^4 x+C$. **1810.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+4)^4}+C$. **1811.** $\frac{1}{2}\sqrt{7+x^4}+C$. **1812** $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+C$. **1813.** $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C$. **1814.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{5}}+$ $+C$. **1815.** $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$. **1816.** $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. **1817.** $-\frac{1}{3\ln 3}2^{-x^3}+C$. **1818.** $\sin(\ln x)+C$. **1819.** $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+C$. **1820.** $\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$. **1821.** $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$.. **1822.** $2(\sqrt{x+1}-$ $-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C$. **1823.** $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|+C$. **1824.** $\ln|\sin e^x|+C$. **1825.** $-\frac{4}{x-2}-\frac{11}{2(x-2)^2}+C$. **1826.** $\frac{4}{3}\times$ $\times\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$. **1827.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}+C$. **1828.** $2e^{\sqrt{x}}+C$. **1829.** $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}+C$. **1830.** $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}x+C$. **1831.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}x+C$. **1832.** $\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right|+C$. **1833.** $\frac{1}{60}\ln\left|\frac{6x+5}{6x-5}\right|+C$. **1834.** $\frac{1}{b}\arcsin\frac{b}{a}x+C$. **1835.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{4}x+C$. **1836.** $\ln|x+$ $+\sqrt{x^2+a}|+C$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ $\sqrt{x^2+a}=t-x$ ჩასმით, საიდანაც მარტივი გარდაქმნებით მიიღება $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$. **1837.** $\frac{1}{b}\ln|bx+$ $+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C$. **1838.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})+C$. **1839.** $\frac{1}{3}\ln|x^3+$

$+\sqrt{x^6-1}\,|+C$. 1840. $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C$. 1841. $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$. 1842. $2\left(\frac{x\sqrt{x}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})\right)+C$. 1843. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$. 1844. $\frac{1}{2}\ln^2\operatorname{tg}x+C$. 1845. $\ln|x|-\ln 2+C$. მითითება. ჩასმა $\ln x=t$. 1846. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$. 1847. $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$. 1848. $\frac{x}{2\sqrt{2-x^2}}+C$. 1849. $\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$. 1850. $\sqrt{x^2-a^2}-a+C$. 1851. $\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2}+C$. 1852. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$. 1853. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$. 1854. $e^x(x-1)+C$. 1855. $\frac{2^x}{\ln^2 2}(x\ln 2-1)+C$. 1856. $x\ln|x|-x+C$. 1857. $\frac{x^2}{4}(2\ln|x|-1)+C$. 1858. $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$. 1859. $\frac{1}{4}(\sin 2x-2x\cos 2x)+C$. 1860. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. 1861. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 1862. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln|x|-\frac{1}{n+1}\right)+C$. 1863. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$. 1864. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$. 1865. $\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$. 1866. $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C$. 1867. $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$, 1868. $x(\ln^2|x|-2\ln|x|+2)+C$. 1869. $x\operatorname{tg}x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$. 1870. $2\sqrt{x}(\ln|x|-2)+C$. 1871. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$. 1872. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$. 1873. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$. 1874. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$. 1875. $\frac{x}{3}\operatorname{tg}3x+$

$+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|+C.$ **1876.** $2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C.$ **1877.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$ **1878.** $\ln x\cdot(\ln(\ln x)-1)+C.$ **1879.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln(x)))+C.$ **1880.** $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$ **1881.** $\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}.$ **1882.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$ **1883.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$ **1884.** $-\frac{1}{x+1}+C.$ **1885.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$ **1886.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$ **1887.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ **1888.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C.$ **1889.** $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\operatorname{arctg}(x-2)+C.$ **1890.** $\frac{2}{3}\ln(3x^2+2x+5)+\frac{20}{3\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C.$ **1891.** $\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+3)+\frac{9}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$ **1892.** $\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$ **1893.** $\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$ **1894.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$ **1895.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x-3}|+C.$ **1896.** $3\sqrt{x^2-4x+5}+C.$ **1897.** $-4\sqrt{3-2x-x^2}+3\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$ **1898.** $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x-3}-\frac{7}{2}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}|+C.$ **1899.** $\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+C.$ **1900.** $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+C.$ **1901.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2x-1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x^2-3x+1}\right)+C.$ **1902.** $\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(1-x)}+C.$ **1903.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{1+x}\right|+C.$ **1904.** $\ln\left|\frac{x+1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\right|+C.$ **1905.** $-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{5}\,x}+C.$ **1906.**

$\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$. **1907.** $\ln\frac{(x-2^2)}{x-3}\Big|+C$. **1908.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right|+$ $+C$. **1909.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3(x-2)^2}{(x+1)^5}\right|+C$. **1910.** $\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{9}{10}\ln|x-2|-$ $-\frac{26}{15}\ln|x+3|+C$. **1911.** $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$. **1912.** $5x+$ $+\ln\left|\frac{\sqrt{x}\ \sqrt[6]{(x-4)^{161}}}{\sqrt[3]{(x-1)^7}}\right|+C$. **1913.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$. **1914.** $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$. **1915.** $\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$. **1916.** $\frac{6}{x+1}+\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+C$. **1917.** $\frac{2}{x-1}+\ln|x(x-1|+C$. **1918.** $\frac{1}{x}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **1919.** $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$. **1920.** $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C$. **1921.** $\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2-\frac{5x+12}{x^2+6x+16}+$ $+C$. **1922.** $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$. **1923.** $3x+5\ln|x+2|+$ $+\frac{6}{x-1}+C$. **1924.** $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$. **1925.** $x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$. **9126.** $\frac{1}{10\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **1927.** $\frac{1}{2}\ln|x+1|-$ $-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$. **1928.** $\ln\left|\frac{(x^2-2x+5)^{3/2}}{x-1}\right|+$ $+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. **1929.** $\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **1930.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **1931.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\times$ $\times\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C$. **1932.** $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+$ $+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **1933.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+1)-$ $-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **1934.** $\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **1935.** $\frac{1}{8a^4}\left(\frac{x(3x^2+5a^2)}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C$. **1936.** $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+$

$+\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **1937.** $\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C$.

1938. $\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+\ln(x^2+1)+C$. **1939.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+$ $+\frac{2-x}{4(x^2+2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **1940.** $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+$ $+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C$. **1941.** $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+$ $+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$. **1942.** $5\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{3x+5}{2(x^2+1)}+$ $+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **1943.** $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+C$. **1944.** $-$ $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **1945.** $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C$. **1946.** $\frac{4}{x+2}+$ $+\ln|x+1|+C$. **1947** $\frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}-\frac{x}{3(x^3-1)}+$ $+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **1948.** $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+$ $+6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$. **1949.** $\frac{4}{3}(\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1))+C$.

1950. $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+C$. **1951.** $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

1952. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$. **1953.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C$. **1954.** $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$. **1955.** $-6t^4\left(\frac{t^5}{9}+\frac{t^4}{8}+\frac{t^3}{7}+\frac{t^2}{6}+\frac{t}{5}+\frac{1}{4}\right)+$ $+C,\ t=\sqrt[6]{1+x}$. **1956.** $4t-2t^2-4\ln|t+1|+C,\ t=\sqrt[4]{5-x}$. **1957.** $t^2+4t+4\ln|t-1|+C,\ t=\sqrt{x+1}$. **1958.** $-\frac{3t}{t^2+1}+$ $+3\operatorname{arctg}t+C,\ t=\sqrt[6]{x}$. **1959.** $\frac{8}{3}t^3+2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+4\operatorname{arctg}t+C$, $t=\sqrt[8]{x}$. **1960.** $2\operatorname{arctg}(x+\sqrt{x^2+2x-1})+C$. **1961.** $\ln\left|\frac{1}{2}+x+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+x}\right|+C$ **1962.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x+\frac{1}{2}+\sqrt{9x^2+3x+5}\right|+C$.

1963. $2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\,\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+C$. 1964. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{9+x-4x^2}-3}{2x}+C$. 1965. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$. 1966. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}-\sqrt{2}}{x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$. 1967. $\frac{x}{2(1-\sqrt{1-x^2})}-\frac{x^3}{6(1-\sqrt{1-x^2})^3}+C$. 1968. $-2\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+C$. 1969. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{2+x}}+C$. 1970. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}+C$. 1971. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(x-4)}{3-x}}+C$. 1972. $-\frac{2x+x}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{27}{8}\arcsin(2x-3)+C$. 1973. $\frac{x(x^2+1)}{4}\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+2}|+C$. 1974. $\frac{x-2}{3(x-1)}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C$. 1975. $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+C$. 1976. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$. 1977. $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}+C$. 1978. $\frac{1}{2\sqrt{42}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}\sqrt{5x^2-2}}{\sqrt{21}}+C$. 1979. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2(x^2+3)}}+C$. 1980. $\frac{3}{4}z^8+\frac{36}{11}z^{11}+\frac{27}{7}z^{14}+C$, $z=\sqrt[10]{x}$. 1981. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C$. 1982. $\frac{z^7}{7}+\frac{2}{6}z^5+z^3+z+C$, $z=\sqrt{x^2-1}$. 1983. $\frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{1+2x^2}+C$. 1984. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$. 1985. $6\left(\frac{z^7}{7}-\frac{3}{5}z^5+z^3-z\right)+C$, $z^2=\sqrt[3]{x}+1$. 1986. $\frac{5}{18}z^3-\frac{5}{2}z+C$, $z=\sqrt{3-2\sqrt[5]{x^3}}$. 1987. $\frac{12}{7}z^7-3z^4+C$. $z=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$. 1988. $-\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^5}}{5x^5}+C$. 1989. $\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}+z+C$, $z=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. 1990. $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$.

1991. $\frac{x^3}{6\sqrt{(2+x^2)^3}}+C$. **1992.** $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$. **1993.** $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$. **1994.** $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$. **1995.** $\sin x-\sin^3 x+\frac{3\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C$. **1996.** $\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+C$. **1997.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$. **1998.** $\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}+C$. **1999.** $-\frac{\cos^7 x}{7}+\frac{2\cos^9 x}{9}-\frac{\cos^{11} x}{11}+C$. **2000.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 6x}{12}+C$. **2001.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **2002.** $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **1003.** $\frac{5x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **2004.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. **2005.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **2006.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **2007.** $\frac{3x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}+\frac{\sin 8x}{1024}+C$. **2008.** $-\frac{1}{\sin x}+C$. **2009.** $\frac{1}{\cos x}+C$. **2010.** $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$. **2011.** $-\frac{1}{2\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{2}-2\ln|\sin x|+C$. **2012.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\cos x|-\frac{\cos^2 x}{2}+C$. **2013.** $\cos x+\frac{1}{\cos x}+C$. **2014.** $\frac{\sin^3 x}{\cos x}-\frac{3x}{2}+\frac{3\sin 2x}{4}+C$. **2015.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **2016.** $\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C$. **2017.** $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$. **2018.** 1) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x+C$. 2) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$. **2019.** $\operatorname{tg} x+\frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. **2020.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+2\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. **1021.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+3\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$. **2022.** 1) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$. 2) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$. **2032.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|-$

$-\frac{1}{\sin x}+C$. **2024.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$. **2025.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+$ $+\operatorname{ctg} x+x+C$. **2026.** $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+C$. **2027.** $-\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6}-$ $-\frac{\operatorname{ctg}^8 x}{8}+C$. **2028.** $-\operatorname{ctg} x-\frac{2\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+C$. **2029.** $\frac{2}{7}\operatorname{tg}^{\frac{7}{2}} x+$ $+\frac{2}{11}\operatorname{tg}^{\frac{11}{2}} x+C$. **2030.** $\frac{\sin 3x}{6}+\frac{\sin 11x}{22}+C$. **2031.** $3\sin\frac{x}{6}+$ $+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+C$. **2032.** $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C$. **2033.** $\frac{\sin(2x+15)}{4}-$ $-\frac{\sin(8x+1)}{16}+C$. **2034.** $\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **2035.** $-\frac{\sin 4x}{8}-$ $-\frac{\cos 6x}{12}+C$. **2036.** $-\frac{\cos 2x}{8}-\frac{\cos 4x}{16}+\frac{\cos 6x}{24}+C$. **2037.** $\frac{\sin 2x}{8}+$ $+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{x}{4}+C$. **2038.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **2039.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{x}{2}\right)\right|+C$. **2040.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$. **2041.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\times$ $\times\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$. **2042.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C$. **2043.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$. **2044.** $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **2045.** $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+$ $+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C$. **2046.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+C$. **2047.** $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-x+C$. **2048.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right)+C$. **2049.** $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)+C$. **2050.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x)+C$. **2051.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+$ $+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. **2052.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C$. **2053.** $-\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}+C$.

2054. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)+C$. 2055. $-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}^3 x)}+C$. 2056. $\frac{1}{\sqrt{13}}\times$ $\times\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}x+3+\sqrt{13}}\right|+C$. 2057. $-\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\right)+$ $+C$. 2058. $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$. 2059. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}+C$. 2060. $\frac{2}{5}\operatorname{tg}^2 x\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$.

2061. $2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C$. 2062. $\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x-\frac{x}{2}+C$. 2063. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C$. 2064. $\ln\operatorname{ch}x+C$. 2065. $\operatorname{sh}x+\frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}+C$.

2066. $\frac{1}{4}\operatorname{sh}^4 x+C$. 2067. $\ln|\operatorname{th}x|+C$. 2068. $\frac{x}{2}+\operatorname{ch}2x+\frac{\operatorname{sh}4x}{8}+C$.

2069. $\ln\operatorname{ch}x-\frac{\operatorname{th}^2 x}{2}+C$. 2070. $\operatorname{th}\frac{x}{2}+C$. 2071. $2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2}+C$.

2072. $\frac{\operatorname{sh}4x}{32}-\frac{x}{2}+C$. 2073. $\operatorname{th}x-\frac{2}{\operatorname{ch}x}+C$. 2074. $2\sqrt{x^2-1}-$ $-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$. 2075. $\frac{1}{2}(\arcsin 2x+\sqrt{1-4x^2})+C$.

2076. $2.\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$. 2077. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|+C$. 2078. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$. 2079. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right|+C$.

2080. $\frac{2}{3}(\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{(x-2)^3})+C$. 2081. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

2082. $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$. 2083. $\frac{\sqrt{(x^2+2x)^3}}{3}+C$. 2084. $\frac{1}{3}(x^3-$ $-\sqrt{(x^2-1)^3})+C$. 2085. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-2})+C$. 2086. $\operatorname{arctg}e^x+C$.

2087. $-\frac{1}{\lg e}\cos(\lg x)+C$. 2088. $e^{e^x}+C$. 2089. $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$.

2090. $\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|+C$. 2091. $\frac{a^{3x}b^{2x}}{\ln(a^3b^2)}+C$. 2092. $\ln(e^x+$ $+\frac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1})+C$. 2093. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1+x^2}{\sqrt{2}}+C$. 2094. $-\frac{1}{2(e^{2x}-1)}+C$. 2095. $\ln|\ln\sin x|+C$. 2096. $\frac{e^{2x}}{2}+e^x+\ln|e^x-$

$-1|+C$. **2097.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x-3}{\sqrt{3}}+C$. **2098.** $-\ln|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}|+C$. **2099** $2\sqrt{1+\ln x}+2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|-\ln|\ln x|+C$. **2100.** $\frac{x^2-4}{3}\sqrt{x^2+2}+C$. **2101.** $\frac{3}{4}\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C,\ t=\sqrt[3]{x^4+1}$. **2102.** $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

2103. $\frac{1}{20}\operatorname{arc\,tg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}+C$. **2104.** $\sqrt{1+x^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+C$.

1025. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}+C$. **2106.** $-\frac{1}{12\sqrt{(x^2-4)^3}}+\frac{1}{16\sqrt{x^2-4}}+\frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x}+C$. **2107.** $2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right)+C$. **2108.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$. **2109.** $\arccos\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$. ჩასმა. $x=\frac{1}{t}$.

2110. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$. ჩასმა $\frac{x-1}{x-2}=t^2$. **2111.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$. ჩასმა $\frac{x+1}{x-1}=t^3$. **2112.** $\sqrt{1-x}\times(\sqrt{x}-2)-\arcsin\sqrt{x}+C$. ჩასმა $t=\sqrt{x}$. **2113.** $3(\ln|t|-\ln|1+\sqrt{1-t^2}|-\arcsin t)+C$, $t=\sqrt[3]{x}$. **2144.** $\operatorname{tg}x\cdot\ln|\cos x|+\operatorname{tg}x-x+C$. **2115.** $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2}+C$.

2116. $\frac{e^x}{x+1}+C$. მითითება. $u=xe^x,\ dv=\frac{dx}{(x+1)^2}$. **2117.** $-\frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}}-\arcsin\frac{1}{x}+C$. **2118.** $\frac{x}{\ln|x|}+C$. **2119.** $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$. **2120.** $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)+C$.

2121. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. მითითება. $u=x+\sin x,\ dv=\frac{dx}{1+\cos x}$.

2122. $\frac{1}{4}\left(\ln(1+x^4)+\frac{1}{1+x^4}\right)$ ჩასმა $1+x^4=t$. **2123.** $\frac{1}{6}\ln\frac{|x^2-2|}{x^2+1}+C$. **2124.** $\operatorname{arctg}x+\frac{\operatorname{arctg}x^3}{3}+C$. **2125.** $\frac{1}{8}\ln\frac{x^8}{x^8+1}+C$. ჩასმა

$x^4=t$. **2126.** $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3(x^3+1)} + C$. ჩასმა $x^3=t$. **2127.** $\frac{1}{2^7}\left(\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 15t - 20\ln|t| - \frac{15}{t} + \frac{3}{t^2} - \frac{1}{3t^3}\right) + C$, $t=\frac{x-1}{x+1}$. **2128.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x^3-1}+C$. **2129.** $\frac{3t^4}{7}(4t^3-7)+C$, $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$. **2130.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|+C$. **3131.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|+C$. **2132.** $\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$. ჩასმა $\operatorname{tg}x=t$. **2133.** $\operatorname{ctg}x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$. **2134.** $\frac{1}{4}\ln\frac{|\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}}+C$. **2135.** $\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+C$. **2136.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{ctg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{ctg}x}\right|+C$. **2137.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{3}}{\operatorname{tg}x-\sqrt{3}}\right|+C$. **2138.** $\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

2139. $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2}+C$. **2140.** $x-\ln|2\sin x+5\cos x|+C$. მითითება. მრიცხველი წარმოადგინეთ $Au+Bu'$ ჯამის სახით, სადაც $u=5\cos x+2\sin x$. **2141.** $\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C$. ჩასმა $\operatorname{tg}x=t$. **2142.** 99. **2143.** $a^3/3$. **2144.** $e-1$ **2145** $\frac{2^{10}-1}{\ln 2}$.

2146. 1/5. **2147.** 14/3. **2148.** $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$. **2149.** 7/3. **2150.** 35.

2151. 2/3. **2152.** 2. **2153.** $\frac{\pi}{2}$. **2154.** $\pi/4$. **2155.** $3(e-1)$.

2156. $\ln 2$. **2157.** $\frac{1}{2}$. **2158.** $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$. **2159.** $\ln(1+\sqrt{2})$. **2160.** $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2161.** $\frac{7}{4}$. **2162.** $\frac{23}{3}$. **2163** $e-\sqrt{e}$. **2164.** $\frac{2}{3}$. **2165.** 12.

2166. $2(1+\ln 2)$. **2167.** $2\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$. **2168.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **2169.** $2(2-\operatorname{arctg}2)$. **1170.** $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2171.** $\frac{\pi a^4}{16}$ **2172.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.

2173. $\ln\frac{3}{2}$. 2174. $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$. 2175. $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2176. $\frac{\pi}{16}$. 2177. $\ln 2$. 2178. $\frac{\pi}{2}$. 2179. $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$. 2180. $\frac{4-\pi}{2}$.
2181. 1. 2182. $\frac{2}{7}$. 2183. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 2184. $4-\pi$. 2185. $8+$
$+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$. 2186. $\frac{\pi a}{4}-\frac{a}{2}$. ჩასმა $x=a\sin^2 t$. 2187. $\ln\frac{9}{8}$.
2188. $\frac{\pi}{2}-1$. 2189. 1. 2190. 1. 2191. $\frac{1}{4}(e^2-1)$. 2192. $\frac{\pi-2}{4}$.
2193. $\frac{\pi}{36}(9-4\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 2194. $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$. 2195. $2-$
$-\frac{3}{4\ln 2}$. 2196. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2197. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. 2198. $\frac{2}{\pi}$.
2199. $\frac{1}{2}$. 2200. $\frac{\pi}{4}$. 2201. 1. 2202. $\frac{1}{e-1}$. 2203. $\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{e^2+1}\right)$.
2204. $16<I<24$. (სადაც I აღნიშნავს მოცემულ ინტეგრალს). 2205. $2<$
$<I<\sqrt{5}$. 2206. $\frac{\pi}{2}<I<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. 2207. $\pi<I<2\pi$. 2108.
$\frac{2\pi}{13}<I<\frac{2\pi}{7}$. 2209. $\frac{2}{9}<I<\frac{2}{7}$. 2210. მეტია პირველი. 2211.
მეტია პირველი. 2212. მეტია მეორე. 2213. მეტია მეორე. 2214. $\ln|x|$.
2215. $-\sqrt{1+x^4}$. 2216. x. 2217. $2\ln^2 2x-\ln^2 x$. 2218. $2xe^{-x^4}-$
$-e^{-x^2}$. 2219. $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$. 2220. $\frac{1}{3}$. 2221. $-\frac{5}{4}$.
2222. -2. 2223. $y(0)=0$. მინიმუმი. 2224. $42\frac{2}{3}$. 2225. $10\frac{2}{3}$.
2226. $4\ln 3$. 2227. 1. 2228. 2. 2229. $\ln 2$. 2230. πab. 2231.
$\frac{a^2}{2e}(e^2-1)$. 2232. $\frac{8}{3}$. 2233. $\frac{4}{3}p^2$. 2234. $e+\frac{1}{e}-2$. 2235. $4\frac{1}{4}$.
2236. 12. 2237. $\frac{3}{5}a^2(\sqrt[3]{32}-1)$. 2238. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. 2239. $2\frac{2}{15}$.
2240π. $2\pi+\frac{4}{3}$ და $6\pi-\frac{4}{3}$. 2241. $4\frac{1}{2}$. 2422. 4. 2432. $20\frac{5}{6}$.
2244. π. 2245. $3\pi a^2$. 2246. πR^2. 2247. 15π. 2248. $3\pi a^2$.

2249. $\frac{2}{8}\pi a^2$. 2250. $\frac{3}{2}\pi a^2$. 2251. a^2. 2252 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) $\frac{\pi a^2}{2}$; 3) $\frac{\pi a^2}{4}$. 2253. 1) $\frac{\pi a^2}{4}$; 2) $\frac{\pi a^2}{2}$; 3) $\frac{\pi a^2}{4}$. 2254. 1) $\frac{7'a^2}{4\pi}$; 2) $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$. 2255. $8\pi^3 a^2$. 2256. $\pi\sqrt{2}$. 2257. $\frac{3}{2}a^2$.

2258. $\frac{112}{27}$. 2259. 10π. 2260. $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$. 2261. $6a$. 2262. $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 2263. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 2264. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

2265. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{e^2+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$. 2266. $4\sqrt{3}$.

2267. 1) $\frac{e^2+1}{4}$; 2) $\ln(2+\sqrt{3})$. 2268. $8a$. 2269. $\frac{\pi^2 R}{2}$.

2270. $\frac{4(a^2+ab+b^2)}{a+b}$. 2271. $16a$. 2272. $8a$. 2273. $2\pi a$.

2274. $a(\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 2275. $\frac{r}{a}\sqrt{1+a^2}$.

2276. $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$. 2277. 21. 2278. $e-e^{-1}$. 2279. $\sqrt{3}(e^t-1)$.

2280. 5. 2281. $\frac{3+\ln 2}{2}$. 2282. 32π. 2283. 12π. 2284. $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

2285. $\frac{\pi a^3}{8}(e^2+4-e^{-2})$. 2286. $\frac{\pi}{4}$ და $\frac{4\pi}{7}$. 2287. $\frac{\pi^2}{2}$ და $2\pi^2$.

2288. $\frac{(\pi+2)\pi}{4}$. 2289. $\frac{\pi ab^2}{3}$. 2290. $\frac{96\pi}{5}$. 2291. $\frac{8}{3}\pi a^2 b$.

2292. $\frac{3\pi}{10}$. 2293. $\frac{16}{5}\pi a^3$. 2294. $\frac{\pi R^2 H}{2}$. 2295. $\frac{\pi a^3}{15}$. 2296. πa^2.

2297. $\frac{\pi}{2}$. 2298. $\frac{32\pi a^3}{105}$. 2299. $5\pi^2 a^3$ და $6\pi^3 a^3$. 2300 $\frac{8}{3}\pi a^3$.

2301. $\frac{64\pi a^3}{105}$. 2302. $2\pi^2 a^2 b$. 2303. $2\pi^2 a^2 b$. 2304. $\frac{128\pi}{3}$.

2305. $\frac{32\pi a^3}{15}$. 2306. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2307. $\pi a^2\sqrt{pq}$. 2308. 36π.

2309. $\frac{16a^3}{3}$. 2310. $\frac{2}{3}R^3\,\mathrm{tg}\alpha$. 2311. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 2312. $4\pi R^2$.

2313. $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 2314. $2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. 2315. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$. 2316. $\frac{14\pi}{3}$. 2317. $2\pi\left(1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$. 2318. $8\sqrt{5}\pi$ და $4\sqrt{5}\pi$. 2319. 3π. 2320 $4\pi^2 ab$. 2321. $\frac{12}{5}\pi a^2$. 2322 $\frac{64}{3}\pi a^2$ და $16\pi^2 a^2$. 2323. $\frac{128}{5}\pi a^2$. 2324. $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}+$ $+\pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$. 2325. $\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$. 2326. $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. მითითება. ნახევარი ლემნისკატისათვის $\frac{Sp}{2}=$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi,$$

სადაც $y=\sin\varphi$. 2327. $4\pi^2a^2$. მითითება.

$$Sp=2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi.$$

2328. $M_x=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}$; $M_y=$ $=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. 2329. $M_x=2a^2$; $M_y=0$. 2330. $M_x=\frac{ah^2}{2}$. მითითება. მართკუთხედის ფუძე შეუთავსეთ Ox ღერძს. 2331. $M_x=\frac{ab^2}{6}$. $M_y=\frac{a^2b}{6}$. 2332. $x_c=y_c=\frac{2a}{\pi}$. 2333. $x_c=0$; $y_c=a\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$. 2334. $x_c=\pi a$; $y_c=\frac{4}{3}a$. 2335. $x_c=y_c=\frac{2}{5}a$. 2336. $x_c=\frac{\pi}{2}$; $y_c=\frac{\pi}{8}$. 2337. $x_c=\frac{4a}{3\pi}$; $y_c=\frac{4b}{3\pi}$. 2338. $x_c=\frac{3}{5}$; $y_c=\frac{3}{8}$. 2339. $x_c=y_c=\frac{a}{5}$. 2340. $x_c=\frac{3}{5}a$; $y_c=0$; 2341. $x_c=y_c=9$. 2342. $x_c=-\frac{1}{5}\,\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$; $y_c=\frac{1}{5}\,\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$. 2343. $x_c=y_c=$ $=\frac{4}{5}a$. 2344. $x_c=\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$; $y_c=0$. 2345. $x_c=\frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3}$;

$y_c = \frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}$. **2346.** $s = 250$ მ; $v_{საშ.} = 25$ მ/წმ. **2347.** $\frac{mT^2}{2}$.

2348. $v_0 T - \frac{gT^2}{2}$. **2349.** 10^4 მ. **2350.** 0,18 კგმ. **2351.** 0,024 კგმ.

2352. $\frac{1}{2}\pi R^2 H^2$ კგმ. **2353.** $25 \cdot 10^5 \pi$ კგმ. **2354.** 18,24. **2355.** 0,719.
2356. $-1{,}96$; **2357.** $-0{,}995$. **2358.** 1,9541. **2359.** $-1{,}9541$.
2360. 0.75. **2361.** 0,69. **2362.** 0,78. **2363.** 0,31. **2364.** $n = 10$.
2365. $n = 10$. **2366.** $n = 12$. **2386.** 0,10682. **2387.** 0,08593.
2388. 16,3325. **2389.** 2,574. **2390.** 0,15635. **2391.** 17,23571.
2392. 46892,986. **2393.** 0,2319. **2394.** 0,15771. **2395.** 3,812. **2399.** 1.
2400. 1/3. **2401.** 1/ln 2. **2402.** $\pi/2$. **2403.** განშლადია. **2404.** განშლადია. **2405.** 1) განშლადია. 2) 1/ln 3. **2406.** 1. **2407.** 1/3. **2408.** $\pi^2/8$.
2409. $\pi/\sqrt{5}$. **2410.** π. **2411.** კრებადია. **2312.** კრებადია. **2413.** განშლადია. **2414.** განშლადია. **2415.** კრებადია. **2416.** განშლადია. **2417.** განშლადია. **2418.** კრებადია. **2419.** კრებადია. მ ი თ ი თ ე ბ ა. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx =$

$= \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$. აქედან პირველი ინტეგრალი მარჯვენა ნაწილში არ არის განსაკუთრებული, ამიტომ იგი არსებობს, ხოლო როცა $x \geqslant 1$, მაშინ $e^{-x^2} \leqslant x e^{-x^2}$, რის გამოც გვექნება; $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \leqslant \int\limits_1^{+\infty} x e^{-x^2}dx =$

$= \frac{1}{2e}$. **2270.** კრებადია. **2271.** $\frac{\pi}{2}$. **2420.** კრებადია. **2421.** $\pi/2$.
2422. 1. **2423.** განშლადია. **2424.** $1/e$. **2425.** 2. **2426.** -1. **2427.** 8/3.
2428. 2. **2429.** განშლადია. **2430.** $\sqrt[4]{125}$ **2421.** განშლადია. **2432.** 6.
2433. 10/7. **2434.** $14\frac{4}{7}$. **2435.** 6. **2436.** $6\sqrt[3]{2}$. **2437.** კრებადია.
2438. კრებადია. **2439.** 1) კრებადია. 2) განშლადია. **2440** კრებადია.
2441. $s = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. **2442.** $V = \frac{\pi}{3} y(x^2 - y^2)$.
2443. $\frac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$. **2444.** $\frac{2}{3} x(y^2 - x^2)$. **2445.** 1) $\frac{5}{3}$; -2;

2) 1/5; —1/7; 3) —13/12; $\frac{x^2+y^2}{2xy}$; 4) 1. 2446. 1) 16; 2; 3) $\frac{y^2-x^2}{2xy}$; $\frac{2xy}{x^2-y^2}$. 2447. განსაზღვრულია ყველგან. 2448. განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $O(0;0)$ წერტილისა. 2449. განსაზღვრულია $x^2+y^2=4$ წრეწირის შიგნით. 2450. განსაზღვრულია, როცა $x^2+y^2\leqslant 1$, $y\neq x$. 2451. განსაზღვრულია, როცა $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. 2452. განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $y=x$ წრფის წერტილებისა. 2453 განსაზღვრულია, როცა $y>-x$. 2454. განსაზღვრულია, როცა $x<\frac{y^2}{4}+2$. 2455. განსაზღვრულია პირველ და მესამე საკოორდინატო კუთხეებში. 2456. განსაზღვრულია $1\leqslant x^2+y^2<4$ წრიულ რგოლში. 2457. განსაზღვრულია $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 2$ მართკუთხედში. 2458. განსაზღვრულია, როცა $|x|\geqslant 2$, $|y|\geqslant 2$. 2459. განსაზღვრის არეებია: 1) $-2\leqslant x\leqslant 0$, $-\infty<y\leqslant 0$; 2) $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y<+\infty$. 2460. განსაზღვრულია ყველგან. 2461. 1) განსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=1$ სფეროს ზედაპირზე და მის შიგნით; 2) განსაზღვრულია პირველ ოქტანტში. 2462. განსაზღვრულია, როცა $x^2+y^2+z^2>1$. 2463. განსაზღვრულია, როცა $y\geqslant|x-1|$. 2464. განსაზღვრულია $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\frac{1}{4}$ და $(x-1)^2+x^2\leqslant 1$ რგოლში. 2465. განსაზღვრის არეებია: 1) $x>1$; $y\leqslant x$; $y\geqslant -x+2$; 2) $x<1$; $y\geqslant x$; $y\leqslant -x+2$. 2446. განსაზღვრულია, როცა $y\leqslant x$, $x^2+y^2<9$. 2467. განსაზღვრულია $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}<1$ ელიფსის შიგნით. 2468. 1) $x+$ $+y=c$ ($y=-x$ წრფის პარალელური წრფეები); 2) $x^2-y^2=c$ (ტოლფერდა ჰიპერბოლები); 3) $y=c-x^2$ ($c>0$, პარაბოლები); 4) $xy=c$ ($c>0$, ტოლფერდა ჰიპერბოლები). 2469. 1) $x^2+y^2=c$ (კონცენტრული წრეწირები; 2) $y=\frac{c}{x^2}$; 3) $x=cy^2$ (პარაბოლები); 4) $\left(x-\frac{1}{c}\right)^2+$ $+y^2=\frac{1}{c^2}$ (წრეწირები) 2470. 1) $x+y+z=c$ ($x+y+z=0$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეები); 2) $x^2+y^2=cz$ (ბრუნვის პარაბოლოიდები); 3) $x^2+y^2=c$ (ცილინდრები); 4) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=c$ (ელიფსოიდები). 2471. 1) $2x+3y-z=c$; 2) $x^2+y^2+z^2=c$ (კონცენტრული სფეროები); 3) $x^2+y^2=\frac{z^2}{c^2}$ (კონუსური ზედაპირები).

2472. $-\frac{1}{4}$. ამოხსნა: აღვნიშნოთ $xy=\alpha$; როცა $x\to 0$, $y\to 0$, მაშინ $\alpha\to 0$, რის გამოც საკითხი დაიყვანება $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{2-\sqrt{\alpha+4}}{\alpha}$ ზღვრის მოძებნამდე; ეს ზღვარი უდრის $-\frac{1}{4}$-ს. 2473. 2. 2474. e^k. 2475. $\ln 2$ (ზღვარი გამოითვლება უშუალო ჩასმით). 2476. 0. მითითება. შემოიღეთ პოლარული კოორდინატები; $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; როცა $x\to\infty$, $y\to\infty$, მაშინ $r\to\infty$ და მივიღებთ $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{r}$ ზღვარს, რაც ნულის ტოლია. 2477. არ არსებობს. 2478. 0. 2479. 0. 2480. 1) 2; 2) 1/2. 2481. 1. 2482. 1) წყვეტას განიცდის $x^2+y^2=9$ წრეწირის წერტილებზე; 2) წყვეტას განიცდის $y=x$ და $y=-x$ წრფეების წერტილებზე; 3) წყვეტას განიცდის კოორდინატთა სათავეზე; 4) წყვეტის ზედაპირია $z^2=x^2+y^2$ კონუსი 2483. 1) წყვეტას განიცდის $y=x$ წრფის წერტილებზე; 2) წყვეტას განიცდის კოორდინატთა სათავეზე; 3) წყვეტას განიცდის $y=x^2$ პარაბოლის წერტილებზე; 4) წყვეტას განიცდის $x=0$, $y=0$ ღერძებზე. 2484. $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+9x^2y-2y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+3x^3-4xy$.

2485. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$. 2486. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\sin 2y$.

2487. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{5}{(x+2y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{10}{(x+2y)^2}$. 2488. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$. 2489. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 2490. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

2491. $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{ctg}(x-2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-2\operatorname{ctg}(x-2y)$. 2492. $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy(5x^2y-y^3+7)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$.

2493. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x(x+2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3(x^2-y^2)$. 2494. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. 2495. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$. 2496. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

2497. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$. 2498. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$. 2499. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\,|x|}{x^2\sqrt{(x^2-y^2)}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}$. 2500. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-y^2)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{3\sqrt{x^2-y^2)^2}}$. 2501. $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 2502. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$. 2503. $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}e^{\arcsin\frac{y}{x^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}e^{\arcsin\frac{y}{x^2}}$. 2504. $\frac{\partial z}{x\partial}=\frac{2(x+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}\sin 2(x+\sqrt{x^2+y^2})}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}\sin 2(x+\sqrt{x^2+y^2})}$. 2505. $\frac{\partial z}{\partial x}=7\left(xy+\frac{y}{x}\right)^6\left(y-\frac{y}{x^2}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=7\left(xy+\frac{y}{x}\right)^6\times$ $\times\left(x+\frac{1}{x}\right)$. 2506. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3y\,\mathrm{arctg}^2\sqrt{xy}}{2(1+xy)\sqrt{xy}}\,2^{\mathrm{arctg}^3\sqrt{xy}}\cdot\ln 2$; $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{3x\,\mathrm{arctg}^2\sqrt{xy}}{2(1+xy)\sqrt{xy}}\,2^{\mathrm{arctg}^3\sqrt{xy}}\cdot\ln 2$. 2507. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y\cdot(x^2+1)^{\sin y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+1)^{\sin y}\cdot\ln(x^2+1)\cdot\cos y$. 2508. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+x^2+z^2}}$. 2509. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$; $\frac{\partial u}{\partial z}=y+x$. 2510. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z+2$; $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=2x^3yz-3$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2+1$. 2511. $\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=2y\,e^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2z\,e^{x^2+y^2+z^2}$. 2512. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xy(xx)^{z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$. 2513. $\frac{\partial u}{\partial x}=y\,z^{xy}\ln z$; $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=x\,z^{xy}\ln z$; $\frac{\partial u}{\partial z}=xy\cdot z^{xy-1}$. 2514. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{\sqrt{z^2-(x+y)^2}}\times$

$\times \arccos\frac{x+y}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2\arccos\frac{x+y}{z}}{\sqrt{z^2-(x+y)^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2(x+y)}{z\sqrt{z^2-(x+y)^2}}\times$
$\times \arccos\frac{x+y}{z}$. **2515.** $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{\sqrt{y}(z-\sqrt{y})^2\sin^2\frac{z+\sqrt{y}}{z-\sqrt{y}}}$;
$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2\sqrt{y}}{(z-\sqrt{y})^2\sin^2\frac{z+\sqrt{y}}{z-\sqrt{y}}}$. **2516.** $\frac{\partial u}{\partial x}=$
$=\frac{3(yz(x+z)^2-2\sqrt{xyz}}{2(x+z)(\sqrt{xxz}+(x+z)xyz)}\ln^2\left(\sqrt{xyz}+\frac{1}{x+z}\right)$. $\frac{\partial u}{\partial y}=$
$=\frac{3xz(x+z)}{2((x+z)xyz+\sqrt{xyz})}\ln^2\left(\sqrt{xyz}+\frac{1}{x+z}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial z}=$
$=\frac{3(xz(x+z)^2-2\sqrt{xyz})}{2(x+z)(\sqrt{xyz}+(x+z)xyz)}\ln^2\left(\sqrt{xyz}+\frac{1}{x+z}\right)$. **2517.**
$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{zx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\cdot\sin\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{zy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\times$
$\times\sin\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\sin\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
2518. $f'_x(2;3)=4$; $f'_y(2;3)=27$. **2519.** $f'_x(2;1)=\frac{1}{2}$; $f'_y(2;1)=0$.
2520. $f'_x(1;2;0)=1$; $f'_y(1;2;0)=\frac{1}{2}$; $f'_z(1;2;0)=\frac{1}{2}$. **2521.**
$f'_x(0;0;1)=-2$; $f'_y(0;0;1)=0$; $f'_z(0;0;1)=-6$. **2522.** $dz=$
$=2xy^3\,dx+3x^2y^2\,dy$. **2523.** $dz=3(x^2-y)\,dx+3(y^2-x)\,dy$.
2524. $dz=(2x+y^2)\,dx+(2xy+\cos y)\,dy$. **2555.** $dz=\frac{ydx+xdy}{xy}$.
2526. $dz=\frac{xdy+ydy}{x^2+y^2}$. **2527.** $dz=\sin 2x\,dx-\sin 2y\,dy$. **2528.** $dz=$
$=2x\cos(x^2+y^2)\,dx+2y\,cxs\,(x^2+y^2)\,dy$. **2529.** $dz=0$. **2530.** $dz=$
$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{ydx-xdy}{xy}$. **2531.** $dz=-\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+\right.$
$\left.+\frac{x}{y^2}\right)dy$. **2532.** $dz=\frac{2xydy-(3y^2+x^2)\,dx}{x^4}$. **2533.** $dz=$
$=3\left(x^2y+\frac{y}{x}\right)^2\left(\left(2xy-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{x^3+1}{x}\,dy\right)$. **2534.** $dz=$

$= y^x(1+\ln x)\,dx + x^2 y^{x-1}\,dy$. **2535.** $dz = \dfrac{(x^2-y)\,dx + (y^2-x)\,dy}{\sqrt[3]{(x^3+y^3-3xy)^3}}$.

2536. $dz = -\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot 2^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}(y\,dx - x\,dy)$. **2537.** $dz = -$
$-\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{y}{x}+1\right)}\cdot\dfrac{ydx-xdy}{x^2}$. **2538.** $dz = -\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x+y}{x^2+y^2}}\times$
$\times\dfrac{(y^2-2xy-x^2)\,dx + (x^2-2xy-y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. **2539.** $dz = -\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\times$
$\times\dfrac{ydx-xdy}{y^2}$. **2540.** $du = yzdx + xzdy + xydz$. **2541.** $du = x^{yz-1}(yzdx +$
$+ zx\ln xdy + xy\ln xdz)$. **2542.** $du = \dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **2543.** $du =$
$= 3^{xy}\left(y\ln 3\cdot\operatorname{tg}3z\,dx + x\ln 3\cdot\operatorname{tg}3z\,dy + \dfrac{3dz}{\cos^2 3z}\right)$. **2544.** $du = -$
$-z^{\cos x+\cos y}\left(\sin x\cdot\ln z\,dx + \sin y\cdot\ln z\,dy - \dfrac{\cos x+\cos y}{z}\,dz\right)$.
2545. $du = -(\cos x+\cos y)^{z-1}\cdot(z\sin x\,dx + z\sin y\,dy - (\cos x+\cos y)\times$
$\times\ln|\cos x+\cos y|\,dz)$. **2546.** $\Delta f = 36$; $df = 28{,}5$. **2547.** $\Delta f\approx 0{,}071$; $df = 0{,}075$. **2548.** $\Delta f(x,y) = 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3$. **2549.** $\Delta f(x,y) = 2h + k + h^2 + 2hk + h^2k$. **2550.** $\approx 1{,}06$. **2551.** $\approx 4{,}998$; **2552.** ≈ 1. **2553.** $\approx 0{,}788$. **2554.** $\Delta l\approx 0{,}062$ სმ. (გადიდდება). **2555.** $\Delta v\approx -31{,}4$ სმ³ (შემცირდება). **2556.** 1) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$.
2) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$. 3) $\dfrac{dz}{dt} = -4e^{2\cos 2t}\sin 2t$. 4) $\dfrac{dz}{dt} =$
$= \dfrac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$. 5) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3t^2-2\sin 2t}{1+(t^3+\cos 2t)^2}$. 6) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{6t\left(2^{3t^2}\ln 2 + 2t^{10}\right)}{2^{3t^2}+t^{12}}$.
7) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2\sqrt{t}-\sin 2\sqrt{t}}{4\cos^2\sqrt{t}\,(\operatorname{tg}^2\sqrt{t}+t)^{3/2}}$; 8) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2}{t}\cdot 3^{4\cos^2\frac{4}{t}+\ln^2 t}\left(\ln t +\right.$
$\left.+\dfrac{8\sin\dfrac{8}{t}}{t}\right)$. 9) $\dfrac{dz}{dt} = -\sin\dfrac{\operatorname{sh}2t+4t}{\sqrt{2t\operatorname{sh}2t}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2t\operatorname{sh}2t}}\left((\operatorname{ch}2t -\right.$
$\left.-4\operatorname{cth}2t) - \dfrac{\operatorname{sh}2t}{2t}\right)$. 10) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2(\sin t\cdot\operatorname{tg}t - \cos t\ln|\cos t|)}{(\cos t)^{2\sin t}}$.

11) $\frac{dz}{dt}=\frac{2}{\cos^2(2^{2(1-\cos t)}-\ln^2 t)}\cdot\left(2^{2(1-\cos t)}\cdot\sin t\cdot\ln 2-\frac{\ln t}{t}\right)$. 12) $\frac{dz}{dt}=4\cos^3 t\cdot\frac{4\sin^2 t\,(1+\cos^2 t)\cdot\ln 4\,(1+\cos^2 t)\sin^2 t+1}{\sin t\cdot(1+\cos^2 t)\cdot\ln 4\,(1+\cos^2 t)\sin^2 t}$.

14) $\frac{dz}{dt}=e^{-(t+1)}\cdot\frac{3\,(1-\operatorname{tg} e^{-(t+1)})^2}{\cos^2 e^{-(t+1)}}$. 15) $\frac{dz}{dt}=\frac{1}{4t^{3/4}}\times$ $\times\frac{(12+\ln t)\ln^2 t}{1+\sqrt[4]{t}\ln^3 t}$. 16) $\frac{dz}{dt}=2t\ln 3-\frac{t}{t^2+1}$. 17) $\frac{dz}{dt}=$ $=\frac{2t}{\cos^2\frac{t^2\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^4 t+t^4}}\cdot\frac{t^4-\operatorname{tg}^4 t}{(t^4+\operatorname{tg}^4 t)^2}\cdot\operatorname{tg} t\cdot\left(\frac{t}{\cos^2 t}-\operatorname{tg} t\right)$. 9) $\frac{dz}{dt}=-$ $-e^{\arcsin\frac{t-2}{t^2}}\cdot\frac{t-4}{t\sqrt{t^4-(t-2)^2}}$. 20) $-\frac{2\sin^2 t}{(t\sin^3 t-\cos t)^2}\cdot(\cos t\sin t+$ $+3t^2\cos^2 t+t\sin^2 t)$. **2557.** 1) $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$. 2) $\frac{dz}{dx}=2x+$ $+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$. **2558.** 1) $\frac{du}{dt}=2t\ln t\cdot\operatorname{tg} t+\frac{(t^2+1)\operatorname{tg} t}{t}+\frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$.

2) 0. **2559.** 1) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right)$.

2) $\frac{\partial z}{\partial u}=2\left(u+\frac{\ln(u+v)}{u+v}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial v}=\cos v+\frac{2\ln(u+v)}{u+v}$.

3) $\frac{\partial z}{\partial u}=0$; $\frac{\partial z}{\partial v}=1$; 4) $\frac{\partial z}{\partial u}=e^{\sin u-2(u^3+v^3)}(\cos u-6u^2)\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=$ $=-6v^2e^{\sin u-2(u^3+v^3)}$. 5) $\frac{\partial z}{\partial u}=e^{\ln^2(u^2+v)-\frac{3u^2}{v^2}}\left(\frac{4u\ln(u^2+v)}{u^2+v}-\frac{6u}{v^2}\right)$.

$\frac{\partial z}{\partial v}=e^{\ln^2(u^2+v)-\frac{3u^2}{v^2}}\left(\frac{2\ln(u^2+v)}{u^2+v}+\frac{6u^2}{v^3}\right)$. 6) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{3u^2(v-1)\sin v}{(v-1)^2\sin^2 v+u^6}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{u^3(\sin v-(v-1)\cos v)}{(v-1)^2\sin^2 v+u^6}$. 7) $\frac{\partial z}{\partial u}=4u^3\sin^2 v+\frac{3\ln^2(u+v)}{u+v}$; $\frac{\partial z}{\partial v}=$ $=u^4\sin 2v+\frac{3\ln^2(u+v)}{u+v}$. 8) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{v^2}+\frac{\cos\frac{u}{v}}{v\sqrt{2\sin\frac{u}{v}}}$; $\frac{\partial z}{\partial v}=$

$$=-\frac{u}{v^2}\left(2u+\frac{\cos\frac{u}{v}}{\sqrt{2\sin\frac{u}{v}}}\right).$$ 9) $$\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{u^2}{1+v^2}\cdot\left(3\operatorname{arctg}\frac{v^3}{1+u^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2u^2v^3}{(1+u^2)^2+v^6}\right);\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u^3v}{1+v^2}\left(2\operatorname{arctg}\frac{v^3}{1+u^2}-\frac{3v(1+u^2)}{(1+u^2)^2+v^6}\right),$$

10) $$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(u+\frac{v}{u}\right)^{\left(v+\frac{u}{v}\right)^2}\frac{v^2+u}{v^2}\left(2\ln\left(u+\frac{v}{u}\right)+\frac{(v^2+u)(u^2-v)}{u(u^2+v)}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(u+\frac{v}{u}\right)^{\left(v+\frac{u}{v}\right)^2}\frac{v^2+u}{v^2}\left(\frac{2(v^2-u)}{v}\ln\left(u+\frac{v}{u}\right)+\frac{v^2+u}{u^2+v}\right).$$

11) $$\frac{\partial z}{\partial u}=\operatorname{tg}\frac{ve^{uv}+u}{2v}\cdot\frac{v^2e^{ux}+1}{2v}.\quad \frac{\partial}{\partial v}=\frac{u(v^2e^{uv}-1)}{2v^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{ve^{uv}+u}{2v}.$$

12) $$\frac{\partial z}{\partial u}=(2^{uv}+uv)^{uv}v\left(\ln(2^{uv}+uv)+\frac{uv(2^{uv}\ln 2+1)}{2^{uv}+uv}\right);\quad \frac{\partial z}{\partial v}=$$

$$=(2^{uv}+uv)^{uv}\cdot u\left(\ln(2^{uv}+uv)+\frac{uv(2^{uv}\ln 2+1)}{2^{uv}+uv}\right).$$ 13) $$\frac{\partial z}{\partial u}=$$

$$=\frac{-3\cos^2\frac{u}{v}\sin\frac{u}{v}+6uv-6uv\cos\frac{u}{v}+3u^2\sin\frac{u}{v}}{2v\sqrt{\cos^3\frac{u}{v}+u^6-3u^2\cos\frac{u}{v}}};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=$$

$$=\frac{3u\sin\frac{u}{v}\left(\cos^2\frac{u}{v}-u^2\right)}{2v^2\sqrt{\cos^3\frac{u}{v}+u^6-3u^2\cos\frac{u}{v}}}.$$ 14) $$\frac{\partial z}{\partial u}=3\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)^2\times$$

$$\times\frac{1}{u^2v}\cdot\ln^2\frac{u}{v}\left((u^2-v^2)\ln\frac{u}{v}+u^2+v^2\right);\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-3\left(\frac{u}{v}+\right.$$

$$\left.+\frac{v}{u}\right)^2\frac{1}{uv^2}\ln^2\frac{u}{v}\left((u^2-v^2)\ln\frac{u}{v}+u^2+v^2\right).$$ 15) $$\frac{\partial z}{\partial u}=$$

$$=\frac{uv\cos v(2\sin u+u\cos u)}{v^2\cos^4 v+u^4\sin^2 u};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u^2\sin u(\cos^2 v-v\sin 2v)}{v^2\cos^4 v+u^4\sin^2 u}.$$

16) $$\frac{\partial z}{\partial u}=-\sin\ln\left(u^2+v+\frac{u}{v-2}\right)\cdot\frac{2uv-4u+1}{(u^2+v)(v-2)+u}.\quad \frac{\partial z}{\partial v}=$$

$$=-\sin\ln\left(u^2+v+\frac{u}{v-2}\right)\cdot\frac{(v-2)^2-u}{(v-2)((u^2+v)(v-2)+u)}.$$

17) $\frac{\partial z}{\partial u} = (1+u+v)^{\ln(u^2+v^2)} \cdot \left(\frac{2u\ln(1+u+v)}{u^2+v^2} + \frac{\ln(u^2+v^2)}{1+u+v}\right)$;

$\frac{\partial z}{\partial v} = (1+u+v)^{\ln(u^2+v^2)} \cdot \left(\frac{2v\ln(1+u+v)}{u^2+v^2} + \frac{\ln(u^2+v^2)}{1+u+v}\right)$.

2560. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}$. **2561.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$.

2562. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy$;

2563. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{4x}{(1-2y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}$.

2564. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \frac{\sin y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2}$.

2565. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2\cos xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\sin xy - xy\cos xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2\cos xy$. **2566.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{9\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-x^2}{16\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{4\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^3}}$. **2567.**

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

2568. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8y^2}{(2x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-8xy}{(2x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(2x+y)^3}$.

2569. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = y^{x-1}(1 + x\ln y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)\,y^{x-2}$.

2570. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-4xy}{(x^2+4y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{2x^2}{(x^2+4y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{16xy}{(x^2+4y^2)^2}$.

2571. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\,2^{\sin xy}(\cos^2 xy - \sin xy)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2^{\sin xy}(xy\cos^2 xy - y^2\sin xy + \cos xy)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\,2^{\sin xy}(\cos^2 xy - \sin xy)$. **2572.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$

$= \frac{3(2xy^2 - x^4)}{(x^3+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-6x^3y}{(x^3+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^3-y^2)}{(x^3+y^2)^2}$. **2573.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-1}{x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-x}{y^2}$. **2574.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ $= \frac{2(x-y)(2xy+(x+y)^2)}{(x^2+y^2)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-2(x+y)((x-y)^2-2xy)}{(x^2+y^2)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(y-x)((x+y)^2+2xy)}{(x^2+y^2)^3}$. **2575.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y+1)(x-2)^{y-1}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = (x-2)^y(y+(y+1)\ln|x-2|)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x-2)^{y+1}\cdot\ln^2|x-2|$.

2576. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2}(2x^2+1)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 4xy\,e^{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$ $= 2e^{x^2+y^2}(2y^2+1)$. **2577.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} =$ $= \frac{2x^2(y+1)^2(y^2-2y+2)}{y^4}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2(y^4+3)}{y^4}$. **2580.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$ $= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = 1$. **2581.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} =$ $= -x(2\sin xy - xy\cos xy)$. **2582.** $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\,\partial y} = 2y^3e^{xy^2}(2+xy^2)$. **2583.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = abc\,x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}$. **2584.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = (1+xy)\,e^{xy}\cos z$.

2585. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z} = 4yz\,e^{x+y^2}$. **2586.** $f''_{xx}(0;\ 0) = m(m-1)$; $f''_{xy}(0;\ 0) = mn$; $f''_{yy}(0;\ 0) = n(n-1)$. **2589.** $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$.

2590. 1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-2y+y^2+1}{2xy-2x+1}$; 2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y-y^2-2}{3x-2xy+3}$; 3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; 4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-2y^2+1}{2(2xy+1)}$, 5) $\frac{dy}{dx} = -$ $-\frac{3x^2y^2\sqrt{x^2+3y}+x}{4x^3y\sqrt{x^2+3y}+3}$. 6) $\frac{dy}{dx} = \frac{6xy^3\sqrt[3]{(x+2y)^2}-1}{2-9x^2y^2\sqrt[3]{(x+2y)^2}}$; 7) $\frac{dy}{dx} = -\frac{16x^3y\sqrt[4]{(x+5y)^3}+1}{4x^4\sqrt[4]{(x+5y)^3}+5}$; 8) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-e^y}{xe^y-4xy+1}$;

9) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{e^y+x}$; 10) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xe^{x^2}+y^2}{e^{y-1}+2xy}$; 11) $\frac{dy}{dx}=-$ $-\frac{e^{x-1}+y}{2e^{2y}+x-3}$; 12) $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{y-1}+3(x-1)^2y^2}{(x+1)e^{y-1}+2y(x-1)^3}$. 13) $\frac{dy}{dx}=$ $-\frac{y\ln y-3x^2y^3}{x+y-2x^3y^2}$; 14) $\frac{dy}{dx}=-\frac{(y-1)x(2\ln(y-1)-3xy}{x^2+y-1-x^3(y-1)}$; 15) $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2\cos y^2-2x\sin(y-1)-5}{3-6x^3y\sin y^2-x^2(\cos(y-1)}$; 16) $\frac{dy}{dx}=$ $=-\frac{3(e^{x-2}+y^3)}{4e^{\frac{4}{3}y}-9(x-2)y^2}$; 17) $\frac{dy}{dx}=-\frac{5x^4\operatorname{tg}3y-3x^2y^2+e^y}{\frac{3x^5}{\cos^2 3y}-2x^3y-(1-x)e^y}$;

18) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y(y^2-(1+x)e^{xy})}{(3y^2\ln(1+x)-xe^{xy}-1)(1+x)}$; 19) $\frac{dy}{dx}=-$ $-\frac{ye^{xy}(1-y^2)-2y}{2y(2-e^{xy})\ln(2-e^{xy})+xe^{xy}(1-y^2)-2x}$; 20) $\frac{dy}{dx}=$ $=-\frac{5x^4y^3\sqrt{x^2+4y}+x}{3y^2x^5\sqrt{x^2+4y}+2}$; 21) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy\ln y-y^4}{x^2+y-3xy^3}$;

22) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y(y^3-5x^4\ln y)}{3(x-1)y^3-x^5}$; 23) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2(x+1)y^5-4x^3e^y}{5(x+1)^2y^4+x^4e^y}$;

24) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y(2x\cos^2 y+\ln y-5)}{3y-x^2y\sin y\,2x-x}$; 25) $\frac{dy}{dx}=-$ $-\frac{e^{y^2}+2(x-2)y^3}{2y(x-2)e^{y^2}-3(x-2)^2y^2+2}$; 26) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2(xe^{2y}-y^2)}{2x^2e^{2y}-4xy+1}$;

27) $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{2y}+2y}{2x-e^{2x}}$; 28) $\frac{dy}{dx}=-\frac{4y^2-xe^{4x^2}}{e^{2y-4}+8xy}$; 29) $\frac{dy}{dx}=-$ $-\frac{e^{2y}-8y^2}{2xe^{2x}-16xy+2}$; **2501.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3-x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}$.

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+3z^3}{9xz^2-y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y+z}{9xz^2-y^2}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$. 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}$;

5) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3x^2y^2z}{e^z - x^3y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^3yz}{e^z - x^3y^2}$. 6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{c^2x}{a^2z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{c^2y}{a^2z}$. **2592.** $x + 2y + 3z - 14 = 0$; $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. **2593.** $2x + 4x - z - 3 = 0$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$.

2594. $3x + 4y - 6z = 0$; $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$. **2595.** $8x + 9y + 9\sqrt{11}\,z - 36 = 0$; $\dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{9} = \dfrac{6z-\sqrt{11}}{36\sqrt{11}}$. **2596.** $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} - \dfrac{zz_1}{c^2} = 1$; $\dfrac{x-x_1}{\dfrac{x_1}{a^2}} = \dfrac{y-y_1}{\dfrac{y_1}{b^2}} = \dfrac{z-z_1}{-\dfrac{z_1}{c^2}}$.

2597. $x + 11y + 5z - 18 = 0$; $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z+1}{5}$. **2598.** $x + 4y + 6z \pm 21 = 0$. **2599.** $x + y - z \pm 9 = 0$. **2600.** $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{-5}$. ნორმალი განსაზღვრული არ არის O (0! 0, 0) წერტილში. **2601.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$; $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$; $\cos\gamma = -\dfrac{1}{3}$. **2602.** $3x - 3y + z - 2 = 0$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. u და v პარამეტრების გამორიცხვ. გვაძლევს $x^3 - 3xy + 2z = 0$ განტოლებას. **2603.** $2x + y - z - 2 = 0$ა **2604.** $\dfrac{9}{2}a^3$. **2606** 60° ან 120°. მ ი თ ი თ ე ბ ა. კუთხე ორ ზედაპირს შორის ეწოდება ამ ზედაპირების გადაკვეთის წირის წერტილში მათდამი გავლებულ მხებ სიბრტყეებს შორის მოთავსებულ კუთხეს. **2607.** ზედაპირებს ეწოდება ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი, თუ ისინი მართი კუთხით იკვეთება მათი გადაკვეთის წირის ყოველ წერტილში. **2608.** $f(x+h,\ y+k) = x^3 + 2y^3 - xy + h)(3x^2 - y) + k(6y^2 - x) + 3xh^2 - hk + 6yk^2 + h^3 + 2k^3$. **2609.** $f(x+h,\ y+k) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(ax + by)h + 2(bx + cy)k + ah^2 + 2bhk + ck^2$. **2610.** $f(x, y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$. **2611.** $1 + ((x-1) + (y+1)) + \dfrac{((x-1)+(y+1))^2}{2!} + \dfrac{((x-1)+(y+1))^3}{3!}$.

2612. $y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}$. 2613. $y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y -$ $- 3xy^2 + 2y^3)$. 2614. $z(4;\ -2) = 13$ მაქსიმუმი. 2615. $z(1;\ 2) = -1$ მინიმუმი. 2616. $z(1;\ 0) = -1$ მინიმუმი. 2618. $z(-1;\ -1) = 1$ მაქსიმუმი. 2619. $Z(4;\ 4) = 12$ მაქსიმუმი. 2620. არა აქვს ექსტრემუმი. 2621. არა აქვს ექსტრემუმი. 2622. $Z(2;\ 1) = -28$ მინიმუმი; $Z(-2;$ $-1) = 22$ მაქსიმუმი. 2623. $Z(1;\ 1) = 4$ მინიმუმი 2624. $Z(1;\ 0) = 0$ მინიმუმი. 2626. $Z(2;\ 0) = 0$ მინიმუმი. 2628. $Z(1;\ 0) = -1$ მინიმუმი. 2630. $Z(3;\ 2) = 108$ მაქსიმუმი. 2632. $Z(4;\ -2) = 13$ მაქსიმუმი. 2634. $Z(-1;\ 1) = 1$ მაქსიმუმი. 2636. $Z(3;\ 4) = -54$ მინიმუმი; $Z(-2;\ -1) = 28$ მაქსიმუმი. 2638. $Z\left(\frac{8}{3};\ \frac{7}{3}\right) = -\frac{13}{3}$ მინიმუმი. 2640. $Z(1;\ 1) = 9$ მინიმუმი. 2642. არა აქვს ექსტრემუმი. 2644. არა აქვს ექსტრემუმი. 2646. $Z(-1;\ 0) = -2/e$ მინიმუმი. 2654. $Z\left(\frac{1}{2};\ -1\right) =$ $= -\frac{e}{2}$ მინიმუმი. 2655 $Z(-1;\ 0) = \frac{1}{e}$ მინიმუმი. 2656. $Z\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ მაქსიმუმი. 2657. $Z\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ მაქსიმუმი. 2658. არა აქვს ექსტრემუმი. 2659. $Z(\pm\sqrt{2};\ \mp\sqrt{2}) = -8$ მინიმუმი. 2660. $Z\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ მაქსიმუმი. 2661 $Z\left(\frac{18}{13};\ \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$ მინიმუმი. 2662. $Z\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi,\ \frac{\pi}{8} + k\pi\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, $k \in Z$ მაქსიმუმი. 2663. $Z\left(-\frac{1}{2};\ -1\right) = -2{,}5$ მინიმუმი; $Z\left(\frac{1}{2};\ 1\right) = 2{,}5$ მაქსიმუმი. 2666. $Z(1;\ 1) = 2$ მინიმუმი. 2667. $Z(a\sqrt{2};\ a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a}$ მაქსიმუმი; $Z(-a\sqrt{2};\ -a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a}$ მინიმუმი. 2668. $Z\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right) = 11$ მაქსიმუმი; $Z\left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right) = 1$ მინიმუმი. 2669. $Z\left(\frac{18}{13};\ \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$ მინიმუმი. 2670. $Z(0;\ 1) = 3$ უდიდესი მნიშვნელობა. 2671. $Z(1;\ 2) = 17$ უდიდესი მნიშვნელობა; $Z(1;\ 0) = -3$ უმცირესი მნიშვნელობა; $(-4{,}6)$ სტაციონარული წერტილი ძევს მართკუთხედის გა-

რეთ. **2672.** $Z\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ უდიდესი მნიშვნელობა; $Z(4;\ 2) = -128$ უმცირესი მნიშვნელობა. **2673.** $Z(-3;\ 0) = Z(0,\ -3) = 6$ უდიდესი მნიშვნელობა; $Z(-1;\ -1) = -1$ უმცირესი მნიშვნელობა. **2674.** $Z(\pm 2;\ 0) = 4$ უდიდესი მნიშვნელობა; $Z(0,\ \pm 2) = -4$ უმცირესი მნიშვნელობა; სტაციონარული წერტილი (0, 0) არ იძლევა ექსტრემუმს. **2675.** $Z\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$ უდიდესი მნიშვნელობა. $Z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ უმცირესი მნიშვნელობა. **2676.** $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$ და $\frac{a}{3}$. **2683.** $xy' - y = 0$. **2684.** $x + yy' = 0$. **2685.** $y - 2xy' = 0$. **2686.** $y = xy' + y'^2$. **2687.** $xy' - y \ln y' = 0$. **2688.** $y = xy' \ln \frac{x}{y}$. **2689.** $2yy'' - y'^2 = 0$. **2690.** $y'' - y' - 2y = 0$. **2691.** $y = x^3 - x^2 + x + C$; $y = x^3 - x^2 + x + 1$. **2692.** $y = Cx$; $y = 4x$. **2693.** $y = Ce^x$; $y = 4e^{x+2}$. **2594.** $(1 - x)(1 + y) = C$. **2695.** $x^2(1 + y^2) = C$. **2696.** $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$. **2697.** $y = C \sin x$. **2698.** $\arcsin x + \arcsin y = C$. **2699.** $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$. **2700.** $y \sin y + \cos y - x \cos x + \sin x = C$. **2701.** $\sqrt{1 + x^2}\, e^{\operatorname{arc\,tg} y} = C$. **2702.** $y = C e^{\sqrt{1 - x^2}}$. **2703.** $Cy = \sqrt{1 + e^{2x}}$. **2704.** $\operatorname{tg} \frac{x + y}{2} - x = C$. **2705.** $c \sqrt[4]{1 + 4x + 2y} = e^{x+y}$. **2706.** $10^x + 10^{-y} = C$. **2707.** $e^x + e^{-y} = c$. **2708.** $x^2 y = c e^y$. **2709.** $y = x - \frac{1}{x - c}$. **2710.** $x + c = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} = \frac{x - y}{2}\right)$. **2711.** $8x + 2y + 1 = 2 \operatorname{tg}(4x + c)$. **2712.** $\frac{x + t}{xt} + \ln \frac{x}{t} = c$. **2713.** $z^{2a} = C \frac{t - a}{t + a}$. **2714.** $r = Ce^{\varphi} + a$. **2715.** $\sin^2 \varphi + \sin^2 \theta = C$. **2711.** $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$. **2717.** $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = C$. **2718.** $y = e^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$. **2719.** $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$; $y^2 - 1 = 2 \ln \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$. **2720.** $2y = C \sin^2 x - 1$; $y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$. **2721.** $\ln x - \frac{x}{y} = C$. **2722.** $y = x \ln \frac{c}{x}$. **2723.** $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = C$. **2724.** $y = x \ln \frac{y}{C}$. **2725.** $1 + 2Cy + C^2x^2 = 0$.

2726. $y = x\sqrt[3]{3\ln Cx}$. 2727. $\sin\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{x}$. 2728. $\ln Cx = -e^{-\frac{y}{x}}$. 2729. $x = ce^{\frac{y^2}{x^2}}$. 2730. $x = C\operatorname{tg}\frac{y}{2x}$. 2731. $y^2 + 2xy - x^2 = C$. 2732. $y - x = Ce^{\frac{y}{y-x}}$. 2733. $x^3 = C(y^2 - x^2)$; $3x^3 = 8(x^2 - y^2)$. 2734. $y = x\sqrt{C + 2\ln|x|}$; $y = x\sqrt{2\ln|x|}$. 2735. $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. 2736. $y = \frac{2x}{1 - Cx^2}$; $y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$. 2737. $y = Ce^{-2\sqrt{\frac{x}{x}}}$; $y = e^{2\left(1 - \sqrt{\frac{x}{y}}\right)}$.

2738. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$; $y = x^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$. 2739. $y = Cx + x^2$. 2740. $y = e^x(C + x)$; 2741. $y = \sqrt{1 + x^2}(C + \sqrt{1 + x^2})$. 2742 $y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{6}$. 2743. $y = x^n(C + e^x)$. 2744. $y = e^{-x^3}\left(C + \frac{2}{3}x^3\right)$. 2745. $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$. 2746. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$. 2747. $y = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}$. 2748. $x = Ce^{-\operatorname{arctg} y} + \operatorname{arctg} y - 1$. 2749. $y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2} + 1$; $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1$. 2750. $y = \frac{C}{x} + x\ln x$; $y = x\ln x$. 2751. $y = \frac{c + x}{\cos x}$; $y = \frac{x}{\cos x}$, 2752. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$; $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$. 2753. $y = \frac{c}{x^2} + x$; $y = \frac{8}{x^2} + x$. 2754. $y = c\sqrt{1 - x^2} + x$; $y = \sqrt{1 - x^2} + x$. 2755. $y^2(ce^{x^2} + 1) - 1$. 2556. $y\left(c + \frac{x^7}{7}\right) = x^3$. 2757. $y = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ln x\right)^2$. 2758. $y^n = ce^{-x} + x - 1$. 2759. $y^3(ce^{\cos x} + 3) = 1$. 2760. $y(cx + \ln x + 1) = 1$. 2761. $y = \frac{1}{c\sqrt{1 - x^2} - 1}$; $y = \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2} - 1}$. 2762. $y = \sqrt{c\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1}$; $y = \sqrt{2\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1}$. 2763. $y^3(ce^{\cos x} + 3) = 1$; $3y^3(1 - e^{\cos x}) = 1$. 2764. $7x^2 + 6xy - 5y^2 = C$. 2765. $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$. 2766. $x^3e^y - y = C$. 2767. $xe^y - y^3 = C$. 2768. $x^2 + \cos^2 y + y^2 = C$. 2769.

$\frac{x^2}{2}\cos 2y + x = C$. **2770.** $x^y = C$. **2771.** $\ln|x+y| + \frac{y}{x+y} = C$.
2772. $x + y + \frac{y}{x} = C$; $x + y + \frac{y}{x} = 3$. **2773.** $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C$; $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$. **2774.** $u = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + C$. **2775.** $u = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C$. **2776.** $u = \frac{x^2}{2} + x\ln y - \cos y + C$ **2777.** $u = \sqrt{x^2+y^2} + C$. **2778.** $2xe^x - y^2e^x = C$. **2779.** $e^{-y}\cos x = x + C$. **2780.** $x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = C$. **2781.** $x\sin y + y\ln x = C$. **2782.** $x^2y + \frac{1}{y} = C$. **2783.** $\frac{x}{\sin y} + x^3 = C$. **2784.** $\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$. **2785.** $y\cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x = C$. **2786.** $y + C \pm \ln|x + \sqrt{x^2-1}| = 0$. **2787.** $15y + C \pm (6\sqrt{(1-x)^5} - 10\sqrt{(1-x)^3})$. **2788.** $x = 2p - \frac{1}{p^2}$, $y = p^2 - \frac{2}{p} + C$. **2789.** $x = \sin p + \ln p$, $y = p\sin p + \cos p + p + C$. **2790.** $x = ap + bp^2$, $6y = 3ap^2 + 4bp^3 + C$. **2791.** $x = e^p + p$, $y = e^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + C$. **2792.** $x = C - \ln(e^y - 1|$. **2793.** $x = \pm\frac{1}{2}(\arcsin y - y\sqrt{1-y^2} + C)$. **2794.** $x = 2q + \frac{3}{2}p^2 + C$, $y = p^2 + p^3$. **2795.** $x = 2p - \frac{2}{p} + C$, $y = p^2 + 2\ln p$. **2796.** $x = \frac{1}{2}\ln^2 p + \ln p + C$, $y = p\ln p$. **2797.** $x = e^p(p+1) + C$, $y = p^2e^p$. **2798.** $(x^2 - 2y + C)\cdot(x + y - 1 - Ce^{-x}) = 0$. **2799.** $(xy - C)\times(x^2y - C) = 0$. **2800.** $(\sqrt{y} - c)^2 - \frac{x^3}{9a^2} = 0$. **2801.** $\left(y - \frac{C}{1+\cos x}\right)\cdot\left(y - \frac{C}{1-\cos x}\right) = 0$. **2802.** 1) ზოგადი ამონახსნი $y = Cx^2$ წარმოადგენს იმ პარაბოლების ოჯახს, რომელთა წვეროები კოორდინატთა სათავეშია. გარდა ამისა, განტოლებას აქვს კიდევ ინტეგრალური წირი $x = 0$. კოორდინატთა სათავეზე როგორც

$f(x, y)=\frac{2y}{x}$, ასევე $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{x}$ განიცდის წყვეტას. ასეთ განსაკუთრებულ წერტილს *კვანძითი წერტილი* ეწოდება; 2) $y=Cx$ $(x\neq 0)$ — ნახევარწრფეთა ოჯახი. $O(0;\ 0)$ წერტილი წარმოადგენს კვანძით წერტილს. **2803.** $x^2+y^2=C^2$ — წრეწირთა ოჯახი (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში). თვით განსაკუთრებულ წერტილზე არ გადის არც ერთი ინტეგრალური წირი. ასეთ წერტილს ეწოდება *ცენტრი*. **2804.** $xy=C$ — ჰიპერბოლების ოჯახი. როცა $C=0$, მივიღებთ საკოორდინატო ღერძებს $x=0$, $y=0$. ეს წირები გადის სათავეზე. დანარჩენი წირები განსაკუთრებულ წერტილზე არ გადის. ასეთი სახის განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება *უნაგირა წერტილი*.

2805. $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით მივიღებთ $r=Ce^{\varphi}$. $O(0;\ 0)$ განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება *ფოკუსი*. **2806.** $y-1=(x-C)^2$; $y=1$. **2807.** $y^3=(x+C)^2$; განსაკუთრებული ამონახსნი არა აქვს. $y=0$ წრფე არის მიღებულ წირთა ოჯახის უკუქცევის წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. **2808.** $(x-C)^2+y^2=a^2$; $y=\pm a$. **2809.** $(x+\sqrt{2}\,C)^2+y^2=C^2$; $y=\pm x$. **2810.** $y=\frac{1}{2}\cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$. **2811.** $y=1-\frac{x^2}{4}$; $y=x-\frac{x^2}{4}$. **2812.** $x=\frac{C}{p^2}+\frac{2p}{3}$, $y=\frac{2C}{p}+\frac{p^2}{3}$. **2813.** $x=\frac{C+\ln p}{p^2}$, $y=\frac{2}{p}(C+\ln p)+\frac{1}{p}$. **2814.** $x=Ce^{-p}+2(1-p)$, $y=x(1+p)+p^2$. **2815.** $x=\frac{1}{p^2}(C-p\sin p-\cos p)$, $y=2xp+\sin p$. **2816.** $y=(C+\sqrt{x+1})^2$; $y=0$ განსაკუთრებული ამონახსენი. **2817.** $Cy=(x-C)^2$; $y=0$ და $y=-4x$ — განსაკუთრებული — ამონახსნები. **2818.** $y=Cx+Cx^2$; $y=-\frac{x^2}{4}$. **2819.** $y=Cx+\frac{1}{C}$; $y^2=4x$. **2820.** $y=Cx-a\sqrt{1+C^2}$; $x^2+y^2=C^2$. **2821.** $y=Cx+\frac{1}{2C^2}$; $y^3=\frac{27}{8}x^2$. **2822.** $y=Cx++C-C^2$; $y=\frac{(x+1)^2}{4}$. **2823.** $y=Cx+C+e^c$. **2824.** $2x^2+y^2=C$. **2825.** $x^2-y^2=C$. **2826.** $y=Cx$. **2827.** $2x^2+3y^2=C$. **2828.** $y=Cx^2$. **2829.** $x^2+y^2-2Cx=0$. **2830.** კონფოკალური ჰიპერბოლები. **2831.** $x^2+y^2=2a^2\cdot\ln Cx$. მითი-

თ ე ბ ა. მოცემული ელიფსების ოჯახის განტოლებაა $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, სადაც a მუდმივია, ხოლო b — ცვლადი პარამეტრი. **2832.** $r=2C\cos\varphi$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. როცა წირთა ოჯახი მოცემულია პოლარული კოორდინატებით $F(r,\ \varphi,\ a)=0$ და $\Phi\ (r,\ \varphi,\ r')=0$ არის ამ ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ ორთოგონალური და იზოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალური განტოლებები შესაბამისათ არის; $\Phi\left(r,\ \varphi,\ -\frac{r^2}{r'}\right)=0$, $\Phi\left(r,\ \varphi,\ \frac{r'+kr}{r-kr'}\right)=0$ $(k=\operatorname{tg}\alpha)$. **2833.** $r=C(1-\cos\varphi)$. **2834.** $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ ან პოლარულ კოორდინატებში; $r=Ce^{\frac{\varphi}{k}}$.

2835. $r=C$. **2836.** $x=\frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}}+2p$, $y=p^2-\frac{C}{\sqrt{p^2+1}}-2$. **2837.** $x=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\left(C+\frac{h}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{p^2+1}+1}{p}-\frac{\sqrt{p^2+1}}{p^2}\right)\right)$, $y=$ $=-\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(C+\frac{h}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{p^2+1}+1}{p}-\frac{\sqrt{p^2+1}}{p^2}\right)\right)-\frac{h}{2p^2}$. **2838.** $x=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\left(C+a\left(\frac{1}{p}+\operatorname{arc\,tg}p\right)\right)$, $y=-\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\Big(C+$ $+a(\operatorname{arc\,tg}p-p)\Big)$. **2839.** $x=-\frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}}+\frac{1}{2p^2}$, $y=\frac{C}{\sqrt{p^2+1}}+$ $+\frac{1}{p}$. **2840.** $y=Cx$; $y=\frac{C}{x}$. **2841.** $y=Ce^{\frac{x}{y}}$. **2842.** $(x-y)^2-$ $-Cy=0$. **2843.** $y^2=2x^2\ln\frac{C}{x}$. **2844.** $x^2+y^2=a^2(x-C)^2$. **2845.** $y=\frac{x}{2}\left(\left(\frac{C}{x}\right)^a-\left(\frac{x}{C}\right)^a\right)$. **2846.** $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$. **2847.** $x^2=$ $=C(2y+C)$. **2848.** $2Cx=y^2-C^2$. **2849.** 1), 2) $xy=6$ **2850.** $y=$ $=\frac{x}{2}\left(Ce^{\frac{a}{x}}-\frac{1}{C}e^{-\frac{a}{x}}\right)$. **2851.** $y^2=4ax+4a^2\left(1-e^{\frac{x}{a}}\right)$. **2852.** $y=Cx^2+\frac{2a^2}{3x}$. **2853.** $Cy^2-xy+2=0$; $3y^2+2xy-4=0$.

2854. $y^2=Cx$; $y^2=8x$. 2855. $y=\frac{1}{2C}\left(C^2 e^{\pm\frac{x}{a}}+a^2 e^{\mp\frac{x}{a}}\right)$, $y=\frac{a}{2}\left(e^{\pm\frac{x}{a}}+e^{\mp\frac{x}{a}}\right)$. 2856. $\approx 3{,}9$ კგ. 2857. $x=Ce^{-\frac{bt}{a}}$, სადაც x-ით აღნიშნულია მარილის რაოდენობა ქურჭელში მოცემული t მომენტისათვის. 2858. $t\approx 10$ წამ. მ ი თ ი თ ე ბ ა. ხვრელიდან გამოსული წყლის სიჩქარე გამოითვლება $V=0{,}6\sqrt{2gh}$ სმ/წმ ფორმულით, სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, ხოლო h — მანძილი წყლის ზედაპირიდან ხვრელამდე. 2859. $t=\frac{D^2\sqrt{H}}{0{,}3\,a^2\sqrt{2g}}$; $t\approx 5$ წუთს და 56 წამს. 2860. $y=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$; $y=\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{2}-\frac{2}{3}$. 2861. $y=-\cos 2x+C_1x+C_2$; $y=-\cos 2x+1$. 2862. $y=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2$; $y=-\ln|\cos x|$. 2863. $y=3\ln x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$; $y=3\ln x+2x^2-6x+6$. 2864. $y=-e^{-x}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$; $y=-e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x+1$. 2865. $y=\frac{1}{8}e^{2x+1}+C_1x^2+C_2x+C_3$. 2866. $y=\cos x+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$. 2867. $y=\ln|\sin x|+C_1x^2+C_2x+C_3$. 2868. $y=\frac{x^3}{6}\ln x-\frac{11x^2}{36}+C_1x^2+C_2x+C_3$. 2869. $\left(y-\frac{x^2}{2}-C_1x-C_2\right)\cdot(y-x^2-C_1x-C_2)=0$. 2870. $x=p^3+1$; $y=\frac{9}{28}p^7+C_1p^3+C_2$. 2871. $x=e^p+p$; $y=\left(\frac{1}{2}p-\frac{3}{4}\right)e^{2p}+\left(\frac{1}{2}p^2-1+C_1\right)e^p+\frac{p^3}{6}+C_1p+C_2$. 2872. $y=\frac{x^3}{9}+C_1\ln x+C_2$. 2873. $y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$. 2874. $y=\frac{1}{2}\ln^2 x+C_1\ln x+C_2$. 2875. $y=c_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$. 2876. $y=\frac{C_1}{3}x^3+C_1x+C_2$; $y=x^3+3x+1$. 2877. $y=\ln(x^2+$

$+2C_1) + C_2$; $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}$. **2878.** $y = C_1 x \ln x + C_2 x + C_3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$. **2879.** $y = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 - C_1^2 (x+C_1)(\ln(x+C_1) - 1)$. **2880.** $y^2 = C_1 x + C_2$; $y = C$. **2881.** $x = \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right| + C_2$; $y = C$. **2882.** $(x + C_2)\cdot(y - 1) = C_1$. **2883.** $\frac{3}{2}C_1 x + C_2 = (C_1 y - 1)^{\frac{3}{2}}$. **2884.** $y = \frac{(x+9)^2}{16}$. **2885.** $y = x + 1$. **2886.** წრფივად დამოუკიდებელია. **2887.** წრფივად დამოუკიდებელია. **2888.** წრფივად დამოკიდებულია. **2889.** წრფივად დამოკიდებულია. **2890,** წრფივად დამოუკიდებელია. **2891.** წრფივად დამოუკიდებელია. **2892.** წრფივად დამოუკიდებელია. **2893.** წრფივად დამოკიდებულია. **2894.** წრფივად დამოკიდებულია. **2895.** წრფივად დამოკიდებულია. **2896.** წრფივად დამოუკიდებელია. **2897.** წრფივად დამოუკიდებელია. **2898.** წრფივად დამოუკიდებელია. **2899.** წრფივად დამოკიდებულია. **2900.** წრფივად დამოკიდებულია. **2901.** წრფივად დამოუკიდებელია. **2902.** $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. საძიებელი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება $y = C_1 x + C_2 x^2$, აქედან $y' = C_1 + 2C_2 x$, $y'' = 2C_2$. მიღებული სისტემიდან C_1 და C_2 მუდმივების გამორიცხვა მოგვცემს საძიებელ განტოლებას. **2903.** $y'' + y = 0$. **2904.** $\sin 2x \cdot y'' - 2\cos 2x \cdot y' = 0$. **2905.** $y'' - 2y'' + y = 0$. **2906.** $y = 3x^2 - 2x^3$. **2907.** $y = 3x - 5x^2 + 2x^3$. **2908.** $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$. **2909.** $y = C_1 x + \frac{C_2}{x^4}$. **2910.** $y = C_1 x + C_2 \ln x$. **2911.** $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$ **2912.** $y = C_2 + (C_1 - C_2 x)\operatorname{ctg} x$. **2913.** $y(1 - x) = C_1 x + C_2(1 - x^2 + 2x\ln x)$. **2914.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. **2915.** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$, **2916.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. **2917.** $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$. **2918.** $y = C_1 + C_2 e^{x}$. **2919.** $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$. **2920.** $y = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} + C_2 e^{2x}$. **2921.** $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{t}$. **2922.** $y = 4e^{x} + e^{4x}$. **2923.** $y = 2e^{\frac{x}{2}} - 8e^{-\frac{3}{4}x}$ **2924.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. **2925.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3}{2}x}$. **2926.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3}{4}x}$. **2927.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{x}{4}}$. **2928.** $y = (2 - 3x)e^{1-2x}$. **2929.** $y = 2xe^{3x}$.

2930. $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)\,e^{-x}$. 2831. $y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)\,e^{2x}$ 2832. $y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$ 2833. $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)\,e^{-2x}$. 2834. $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$. 2835. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. 2836. $y=\sin 2x$. 2837. $y=(\cos x+2\sin x)\,e^{-x}$. 2838. $y=(C_1+C_2x)\,e^{2x}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$. 2839. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+x-x^2-3$. 2840. $y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{3}}-x^2+4x-15$. 2841. $y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}+3x-5$. 2842. $y=C_1+C_2e^{-x}+3x$. 2843. $y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$. 2844. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$. 2945. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{7x}{25}-\frac{3x^2}{5}+\frac{x^3}{3}$. 2946. $y=(C_1+C_2x)\,e^{-x}+\frac{e^{2x}}{9}$. 2947. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2e^x$. 2948. $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}-3xe^x$. 2949. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)e^{3x}$. 2950. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2}\right)e^x$. 2951. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$. 2952. $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{1}{74}(5\sin x+7\cos x)$. 2953. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(3\sin 2x+\cos 2x)$. 2954. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-e^x(2\cos 2x+\sin 2x)$. 2955. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+2\cos 3x-\sin 3x$. 2956. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x$. 2957. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x$. 2958. $y=C_1+C_2e^x-x-x^2-3xe^x$. 2959. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x$. 2960. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{34}\cos 4x-\frac{1}{10}\cos 2x$. მითითება. $\cos x\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 4x+$

$+\frac{1}{2}\cos 2x$. 2961. $y=(C_1+C_2x+x^2)e^{2x}+\frac{x+1}{8}$. 2962. $y=e^x+x^2$ 2963. $y=\frac{3}{2}x^2e^{-2x}$. 2964. $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$. 2965. $y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$. 2966. $y=A\cos x+B\sin x-\cos x\times\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|$. 2967. $y=(A+Bx)e^x+xe^x\ln x$. 2968. $y=(x+B)e^x-(e^x+1)\ln(e^x+1)+A$. 2969. $y=A\cos x+B\sin x-x\cos x+\sin x\ln\sin x$. 2970. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. 2971. $y=e^{-x}(\cos x+2\sin x)$. 2972. $y=\frac{5}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}$. 2973. $s=2e^{-\frac{t}{2}}\sin t$ მითითე-ბა. $v=\frac{ds}{dt}$, $w=\frac{d^2s}{dt^2}$. 2974. $s=\left(1+\frac{t}{2}\right)\sin 2t$. 2975. $y=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+y_0$. 2976. $y=1000-490{,}5\,t^2$; $t\approx 1{,}43$ წმ. 2977. $y=y_0+100t-490{,}5\,t^2$; $t\approx 0{,}1$ წმ. 2978. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$. 2979. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{12x}$. 2980. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$. 2981. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$. 2982. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}+C_3e^{-3x}$. 2983. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$. 2984. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_2e^{2x}+C_4e^{-2x}$. 2985. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}+C_4e^{3x}+C_5e^{-3x}$. 2986. $y=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{2x}$. 2987. $y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)e^{2x}$. 2988. $(y=(C_1+C_2x)\,C_3x^2)\,e^{2x}$. 2989. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$. 2990. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{-x}$. 2991. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+(C_3+C_4x)e^{-2x}$. 2992. $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}\,x+C_3\sin\sqrt{3}\,x)$. 2993. $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 2994. $y=C_1e^x+e^{-2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$. 2995. $y=C_1e^x+e^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$. 2996. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$. 2997. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 2998. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$. 2999. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$. 3000. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. 3001. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3\cos x+C_4\sin x$. 3002. $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$. 3003. $y=(C_1+$

$+C_2x)\cos\sqrt{3}\,x+(C_3+C_4x)\sin\sqrt{3}\,x$. 3004. $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x$. 3005. $y=\left((C_1+C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+(C_3+C_4x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$. 3006. $y=1+\cos x$. 3007. $y=1$. 3008. $y=e^x$. 3009. $y=e^x+\cos x-2$. 3010. $y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-x^3-5$. 3011. $y=C_1+C_2x+C_3e^x+\frac{x^3}{2}+x^2$. 3012. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{2x}-x-4$. 3013. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x+\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}+3x^3+12x^2$. 3014. $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{8}\right)e^x$. 3015. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-2x}+(x^2+x-1)e^{-x}$. 3016. $y=C_1+\left(C_2+C_3x+\frac{x^2}{2}\right)e^x$. 3017. $y=C_1e^{3x}+\left(C_2-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$. 3018 $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-x}+(C_3\cos x+C_4\sin x)e^x+\frac{\sin 2x}{20}$. 3019. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+\frac{1}{1088}(4\cos 4x-\sin 4x)$. 3020. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\left(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}\right)e^x$. 3021. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x+\frac{x^2-3x}{8}e^x-\frac{x\sin x}{4}$. 3022. $y=A+B\cos x+C\sin x+\sec x+\cos x\ln|\cos x|-\operatorname{tg}x\times\sin x+x\sin x$. 3023. $y=A+Bx+Ce^{-x}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+x^2$. 3024. $y=e^x+x^3$. 3025. $y=e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x-2$. 3026. $y=2e^x-x-1$. 3027. $y=-2-2x-x^2$. 3028. $y=1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots$. 3029. $y=$

$= x e^{x^3}$. 3030. $y = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3k-1)3k} + \ldots$

3031. $y_1 = \frac{\sin x}{x}$. 3032. $y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \cdots$. 3033. $y = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \cdots$. 3034. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{24} + \cdots$. 3035. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 9} + \cdots$. 3036. $y = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi x^{n+1}}{(n+1)!}$. 3037. $y = 1 + \frac{e x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^2 x^4}{4!} + \frac{e x^5}{5!} + \cdots$

3038. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; $z = C_2 \cos x - C_1 \sin x$. 3039. $y = C_1 e^{abx} + C_2 e^{-abx}$; $z = -\frac{b}{a}(C_1 e^{abx} - C_2 e^{-abx})$. 3040. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$; $z = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-2x}$. 3041. $y = e^{-6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; $z = e^{-6x}((C_2 + C_1)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x)$. 3042. $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{t^2}{2}$; $y = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t^2 + t$. 3043. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$; $y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t$. 3044. $y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}$; $z = C_2 e^{C_1 x}$; $y = x - e^x$; $z = e^{-x}$. 3045. $y = C_1 C_2 e^{C_1 x}$; $z = C_2 e^{C_1 x}$; $y = e^x$; $z = e^x$. 3046. $y = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$; $z = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$. 3047. $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 2x + e^x$; $z = -C_1 e^{\sqrt{2}x} - C_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{C_3}{4}\cos x - \frac{C_4}{4}\sin x + x - \frac{e^x}{2}$. 3048. $x = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$;

$$y = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3} - C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{C_2\sqrt{3} + C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right);$$

$$z = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3} - C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{C_2\sqrt{3} - C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

3049. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$; $y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$; $z = -(C_1 + C_3)e^{-t} +$

$+C_2e^{2t}$. **3050.** $x=C_1+3C_2e^{2t}$; $y=-2C_2e^{2t}-\frac{C_3}{2}e^{-t}$; $z=C_1+$ $+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$. **3051.** $x=-C_1+e^t(C_3\cos t-C_2\sin t)+t^2+2t$; $y=-C_1+e^t(C_2\cos t+C_3\sin t)+t^2-2$; $z=C_1+e^t(C_2\cos t+$ $+C_3\sin t)-t^2$. **3052.** $y=C_1x$; $z=C_2x$. **3053.** $y=C_1x$; $xy=z^2+C_2$. **3054.** 1) $\sqrt{y}-\sqrt{x}=C_1$; $z-\sqrt{x}=C_2$; 2) $y=C_1$; $z=C_2e^{\frac{x}{y}}$. **3055.** $x+y+z=C_1$; $x^2+y^2+z^2=C_2$. **3056.** $z-x=C_1(y-x)$; $(x+y+z)\cdot(x-y)^2=C_2$. **3057.** $y^2-z^2=C_1$; $2x+(z-y)^2=C_2$. **3058.** $\frac{dx_1}{dt}=x_2$, $\frac{dx_2}{dt}=-kx^2$, სადაც $x_1=x$, $x_2=\frac{dx}{dt}$. **3059.** $y_1'=y_2$, $y_2'=-\frac{y_2}{x}-y_1$, სადაც $y_1=y$, $y_2=y'$. **3060.** $y_1'=y_2$, $y_2'=y_3$, $y_3'=y_1$, სადაც $y_1=y$, $y_2=y'$, $y_3=y''$. **3061.** $y_1'=y_2$, $y_2'=y_3$. $y_3'=y_4$, $y_4'=-x^2y_1$, სადაც $y_1=y$, $y_2=y'$, $y_3=y''$, $y_4=y'''$. **3062.** $y=C_1+C_2e^{-x}$; $z=-2C_1-3C_2e^{-x}$. **3063.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$; $z=2C_1e^x+5C_2e^{-2x}$. **3064.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$; $z=-C_1e^x-$ $-\frac{3}{2}C_2e^{2x}$; $y=e^x-2e^{2x}$; $z=-e^x+3e^{2x}$. **3065.** $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$; $z=-\frac{C_1}{2}e^x+C_2e^{4x}$; $y=e^{4x}$; $z=e^{4x}$. **3066.** $x=C_1e^{2t}+3C_2e^{4t}-$ $e^{-t}-4e^{3t}$; $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-2e^{-t}-2e^{3t}$. **3067.** $y=C_1e^x+$ $C_2e^{2x}-2e^{-x}$; $z=-x_1e^x-\frac{3}{2}C_2e^{2x}+e^{-x}$. **3068.** $x=C_1e^{-t}+$ $+C_2e^{2t}+C_3e^{-2t}$; $y=C_1e^{\ t}+C_2e^{2t}-C_3e^{-2t}$; $z=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}$. **3069.** $x=C_1+C_2e^t+C_3e^{2t}$; $y=\frac{3}{2}C_1-2C_3e^{2t}$; $z=\frac{1}{2}C_1+$ $+C_2e^t+2C_3e^{2t}$. **3070.** $x=-2C_1e^t-8C_2e^{2t}-3C_3e^{3t}$; $y=C_1e^t+$ $+3C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$; $z=2C_1e^t+7C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}$. **3071.** $x=C_2e^{-3t}-$ $-C_3e^{3t}$; $y=C_1e^{-t}-2C_2e^{-3t}+C_3e^{3t}$; $z=-C_1c^{-t}-C_2e^{-3t}$.

3072.
```
      SUBROUTINE RK (F, X0, Y0, H, N, Y, EPS)
      DIMENSION Y (N)
      L = 1
      DO 6 I = 1, N
    6 Y (I) = C
    7 X!= X 0
      Z =|Y 0
```

```
      DO  9  K = 1, N
      DO  8  J = 1, L
      Q1 = F (X, Z) * H
      Q2 = F (X + H/2, Z + Q 1/2) * H
      Q3 = F (X + H/2, Z + Q2/2) * H
      Q4 = F (X + H,  Z + Q3) * H
      DEY = (Q 1 + 2 * Q 2 + 2 * Q 3 + Q 4) / 6
      Z = Z + DEY
    8 X = X + H
      C = ABS (Z — Y (K) ) / 15
      Y (K) = Z
      IF (C. GT. EPS)  KIND = 1
    9 CONTINUE
      IF (KIND. EQ. 1)  GOTO  10
      RETUPN
   10 H = H/2
      L = L * 2
      KIND = 0
      GOTO 7
      END
```

3073.

```
      SUBROUTINE EUL (F, X 0, Y 0, N, H, Y)
      DIMENSION  Y (N)
      DO  1  I = 1, N
    1 Y (I) = 0
    3 X = X 0
      U = Y 0
      DO 4  I = 1, N
      A = F (X, U) * H
      Y (I) = U + A
      U = Y (I)
    4 X = X + H
      RETURN
      END
```

3074.

```
      SUBROUTINE EULRK (F, X 0, Y 0, N, H, Y, EPS)
      DIMENSION  Y (N)
      X = X 0
      Z = Y 0
      L = 0
```

```
 7  A = F (X, Z)
    Y 1 = Z + H * A
 5  Y 2 = (Z + (A + F (X, Y 1) ) * H) / 2
    B = ABS (Y 2 — Y1)
    IF (B.LT.EPS) GOTO 10
    Y 1 = Y 2
    GOTO 5
10  L = L + 1
    Y (L) = Y 2
    X = X + H
    IF (L. LT. N) GOTO 7
    RETURN
    END
```

3075.

```
    SUBROUTINE MILN (F, X 0, H, N, Y, EPS)
    DIMENSION Y (N)
    M = N — 4
    EPS = 0
    X = X0
    F 1 = F (X + H, Y (2) )
    F 2 = F (X + 2 * H, Y (3) )
    F 3 = F (X + 3 * H, Y (4) )
    DO 2 K = 1, M
    YKX = Y (K) + (2 * F 1 — F 2+2 * F 3) * 4 * H/3
    Y(K+4)=Y(K+2)+(F 2+4 * F3+F (X+4 * H, YKX)) * H/3
    B = ABS (YKX — Y (K + 4) )
    EPS = AMAX 1 (B, EPS)
    F 1 = F 2
    F 2 = F 3
    F 3 = Y (K + 4)
 2  X = X + H
    RETURN
    END
```

3076. გვექნება სამი პროგრამა ერთეული.

ა) ქვეპროგრამა

```
    SUBROUTINE RK (F, X 0, Y 0, H, N, Y, EPS)
```

ბ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```
    FUNCTION F (X, Y)
    F = X * Y / (3 + COS (X) * * 2)
    RETURN
    END
```

გ) ძირითადი პროგრამა

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y (30)
CALL RK (F, 0, 1, 0·05, 30. Y, 1 E — 6)
WRITE (3, 1) Y
1 FORMAT (5 (2 X, 6 F 12. 6))
STOP
END
```

$y(0{,}25) = 1{,}007904$, $y(0{,}5) = 1{,}032735$, $y(1) = 1{,}149478$
$y(1{,}25) = 1{,}255612$, $y(1{,}5) = 1{,}405889$.

3077. ა) ქვეპროგრამა

```
EUL (F, X0, Y0, N, H, Y)
```

ბ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```
FUNCTION F (X, Y)
F = SQRT (X * X + Y * Y) / (4.563 + TAN (X/Y) * * 2)
RETURN
END
```

გ) ძირითადი პროგრამა

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y (25)
CALL EUL (F, 1, 3, 25, 0. 04, Y)
WRITE (3, 1) Y
' FORMAT (5 (2X, 5F 12.5))
STOP
END
```

$y(1{,}25)=3{,}39024$, $y(1{,}5)=3{,}83433$, $y(1{,}75)=4{,}33876$, $y=$
$=4{,}91069$

3078. ა) ქვეპროგრამა

```
SUBROUTINE EULRK (F, X 0, Y 0, N, H, Y, EPS)
```

ბ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```
FUNCTION F (X, Y)
F = EXP (X * X + Y) / (6 * SIN (X) * * 2 + Y * Y * X * * 4)
RFTURN
END
```

გ) ძირითადი პროგრამა

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y (10)
```

```
CALL EULRK (F, —1, — 4.632, 10, 0.01, Y, 1E — 4)
WRITE (3,1) Y
1 FORMAT (2X, 10 F 10. 5)
STOP
END
```

$y(-0{,}9) = -4{,}55848.$

3079. ა) ქვეპროგრამა

```
SUBROUTINE MILN (F, X 0, H, N, Y, EPS)
```

ბ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```
FUNCTION F (X, Y)
F = EXP (X * X + Y) / (6 * SIN (X) * * 2+Y * Y *X * * 4)
RETURN
END
```

გ) ძირითადი პროგრამა

```
EXTERNAL
DIMENSION Y (21)
DATA Y (1) 0.5, Y (2) 0. 621, Y(3)/0. 7202, Y (4) 0.8011/
CALL MILN (F, 1. 0. 05, 21. Y, FPS)
WRITE (3, 1) Y, EPS
1 FORMAT (3 (2X, 7F 12. 6), 'EPS = ' , F 10.6)
STOP
END
```

$y(1{,}25) = 0{,}8281$. $y(1{,}5) = 1{,}1274$, $y(1{,}75) = 1{,}4038$, $y(2) = 1{,}6679$.

3080. $y(1{,}25) = 0{,}51021$; $y(2{,}5625) = 0{,}82708$; $y(2{,}66) = 1{,}03512$. **3081.** $y(2{,}25) = 3{,}30285$; $y(2{,}5) = 3{,}53471$; $y(2{,}75) = 3{,}74642$. $y(3) = 3{,}93234$. **3082.** $y(1{,}98) = 2{,}60671$; $y(1{,}73) = 2{,}87318$; $y(1{,}98) = 3{,}13885$; $y(2{,}23) = 3{,}40355$; $y(2{,}56) = 3{,}75144$, **3083.** $y(2.1875) = 1{,}63523$; $y(2{,}25) = 2{,}10538$; $y(2{,}3125) = 2{,}55755$; $y(2.625) = 4{,}61886$; $y(3.17) = 7{,}83070$. **3084.** $y(0.00097656) = 3.0009851$; $y(0.00195312) = 3.0019774$; $y(0.00878906) = 3.0090162$. **3085.** ($y(0.015625) = 3.01512$; $y(0.03125) = 3.02992$; $y(0{,}28125) = 3.30555$; $y(0{,}765625) = 5{,}87155$; $y(1) = 5.90691$. **3086.** $y(1{,}10969753) = 2{,}04295$; $y(1{,}17220) = 2{,}05752$; $y(1{,}35970) = 2{,}04892$; $y(1{,}48470) = 1{,}97217$; $y(1{,}57080) = 1{,}89133$. **3087.** $y(0{,}03125) = 1{,}89494$; $y(0.0625) = 2{,}13772$; $y(0{,}14453125) = 4{,}72251$; $y(0{,}16455078) = 21{,}53611$; $y(0{,}16555786) = 95{,}54480$; $y(0{,}16560173 = 215{,}87120$. **3088.** $y(2{,}02245338) = 2{,}04298$; $y(2{,}27245339) = 2{,}07659$; $y(2{,}50662818) = 2{,}1017$. **3089.** $y(1{,}37) = 4{,}55240$;

$y(1{,}62) = 4{,}55525$; $y(1{,}87) = 4{,}55864$; $y(2{,}12) = 4{,}56268$; $y(2{,}15) = 4{,}56322$. **3090.** $y(2{,}5) = -2{,}99791$; $y(3) = -2{,}99666$; $y(4) = -2{,}995227$ **3091.** $y(1) = 3{,}46735$; $y(1{,}6) = 3{,}40556$; $y(2{,}3) = 4{,}01080$; $y(\pi) = 4{,}55792$; **3092.** $y(1{,}3) = 1{,}43217$; $y(1{,}8) = 2{,}49471$; $y(2) = 2{,}857372$; $y(2{,}8) = 4{,}035644$; $y(3) = 4{,}276436$. **3093.** $y(0{,}5) = 2{,}221510$; $y(1) = 2{,}588922$; $y(2) = 2{,}744293$. **3094.** $y(1{,}71) = 1{,}25158$; $y(3) = 1{,}44620$. **3095.** $y(0{,}018) = -0{,}48714$; $y(0{,}089) = -0{,}44211$; $y(0{,}21) = -0{,}37618$; $y(0{,}33) = -0{,}31318$. **3096.** $y(1{,}4) = 0{,}75162$; $y(1{,}6) = 0{,}92964$; $y(1{,}8) = 1{,}12586$; $y(2) = 1{,}43970$. **3097.** $y(2{,}2) = -0{,}03211$; $y(2{,}40) = -0{,}32448$; $y(2{,}8) = -1{,}04209$; $y(3) = -1{,}40856$.

3098.

```
      SUBROUTINE RKS (F1, F2, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS)
      DIMENSION Y (N), Z (N)
      K =1
      DO 7 I = 1, N
      Y (I) = 0
    7 Z (I) = 0
    8 X = X0
      A=Y0
      B = Z0
      DO 10 J=1, N
      DO 9  M=1, K.
      YQ1=F1 (X, A, B) * H
      ZQ1 = F2(X, A, B) * H
      YQ2 = F1 (X + H/2, A+YQ1/2, B+ZQ1/2) * H
      ZQ2 = F2 (X + H/2, A + YQ1/2, B+ZQ1/2) * H
      YQ3 = F1 (X+H/2, A + YQ2/2, B + ZQ2/2) * H
      ZQ3 = F2 (X + H/2, A + YQ2/2, B + ZQ2/2) * H
      YQ4 = F1 (X + H, A + YQ3, B + ZQ3) * H
      ZQ4 = F2 (X + H, A + YQ3, B + ZQ3) * H
      DEY = (YQ1 + 2 * YQ2 + 2 * YQ3 + YQ4)/6
      ZED = (ZQ1 + 2 * ZQ2 + 2 * ZQ3 + ZQ4)/6
      A = A + DEY
      B = B + ZED
    9 X = X + H
      C = ABS ((A - Y (J)) / 15)
      C1 = ABS ((B - Z (J)) / 15)
      Y (J) = A
      Z (J) = B
```

```
      IF (C. GT. EFS. OR- C1. CT. EPS) KA = 1.
   10 CONTINUE
      IF (KA. EQ. 1) GOTO 11
      RFTURN
   11 H = H/2
      K = K * 2
      KA = 1
      GOTO 8
      END
8099. SUBROUTINE RK 99 (F1, F2, F3, X0, Y0, Z0, U0, H, N,
      Y, Z, U, EPS)
      DIMENSION Y (N), Z (N), U (N)
      M = 1
      DO 1 I = 1, N
      Y (I) = 0
      Z (I) = 0
    1 U (I) = 0
    2 X = X0
      A = Y0
      B = Z0
      C = U0
      DO 4 J = 1, N
      DO 3 K = 1, M
      Q1Y = F1 (X, A, B, C) * H
      Q1Z = F2 (X, A, B, C) * H
      Q1U = F3 (X, A, B, C) * H
      Q2Y = F1(X+H/2, A+Q1Y/2, B + Q1Z/2, C + Q1U/2) * H
      Q2Z=F2 (X+H/2, A+ Q1Y/2, B + Q1Z/2, C + Q1U/2) * H
      Q2U=F3(X+H/2, A + Q1Y/2, B + Q1Z/2, C + Q1U/2) * H
      Q3Y=F1 (X+H/2, A+Q2Y/2, B + Q2Z/2, C + Q2U/2) * H
      Q3Z=F2 (X+H/2, A+Q2Y/2, B + Q2Z/2, C + Q2U/2) * H
      Q3U=F3 (X+H/2, A+Q2Y/2, B + Q2Z/2, C + Q2U/2) * H
      Q4Y=F1(X + H, A + Q3Y, B + Q3Z, C + Q3U) * H
      Q4Z =F2 (X + H, A + Q3Y, B + Q3Z, C + Q3U) * H
      Q4U = F3 (X + H, A + Q3Y, B + Q3Z, C + Q3U) * H
      DY = (Q1Y + 2 * Q2Y + 2 * Q3Y + Q4Y)/6
      QZ = (Q1Z + 2 * Q2Z + 2 * Q3Z + Q4Z)/6
```

```
      DU = (Q1U + 2 * Q2U + 2 * Q3U + Q4U)/6
      A = A + DY
      B = B + DZ
      C = C + DU
    3 X = X + H
      A1 = ABS (A — Y (J) ) / 15
      B1 = ABS (B — Z (J) ) / 15
      C1 = ABS (C — U (J) ) / 15
      Y (J) = A
      Z (J) = B
      U (J) = C
      IF(A1. GT. EPS, OR. B1. GT. EPS, OR. C1. GT. EPS)
      KIND = 1
    4 CONTINUE
      IF (KIND. EQ. 1) GOTO 5
      RETURN
    5 H = H 2
      M = M * 2
      KIND = 0
      END.
```

3100. ა) ქვეპროგრამა

```
      SUBROUTINE RKS (F1, F2, X2, Y0, Z0)
```

ბ) ქვეპროგრამა-ფუნქცია

```
      FUNCTION F1 (X, Y, Z)
      F1 = Z X + 1
      RETURN
      END
```

გ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```
      FUNCTION F2 (X, Y, Z)
      F2 = 3 * Z * Z / (X * (Y — 1)) + X/Z
      RETURN
      END
```

დ) ძირითადი პროგრამა

```
      EXTERNAL F1, F2
      DIMENSION Y (25), Z (25)
      CALL RK (F1, F2, 1, 0, 1, , , Y, Z, 1E — 4)
      WRITE (3, 1) Y, Z
    1 FORMAT (2X; 5F 10. 4)
      STOP
      END.
```

3103. სისტემა იქნება $y'=u$; $u'=z$; $z'=\frac{x}{2}z+\frac{1}{2}(x^2-6)(u-y)$, $y(0)=0$; $u(0)=1$; $z(0)=0$.

ა) ქვეპროგრამა

```
SUBROUTINE RK
```

ბ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```
FUNCTION F1 (X, Y, Z, U)
F1 = U
RETURN
END
```

გ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```
FUNCTION F2 (X, Y, Z, U)
F2 = Z
RETURN
END
```

დ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```
FUNCTION F3 (X, Y, Z, U)
F3 = X * Z / 2 + (X * X — 6) * (U — Y) / 2
RETURN
END
```

ე) ძირითადი პროგრამა

```
EXTERNAL F1, F2, F3
DIMENSION Y (25), Z (25), U (25)
GALL RK (F1, F2, F3, 0, 0, 0, 1, , , Y; Z, U, F — 3)
WRITE (3,1) Y, Z, U
FORMAT (2X, 5 F 10. U)
STOP
END
```

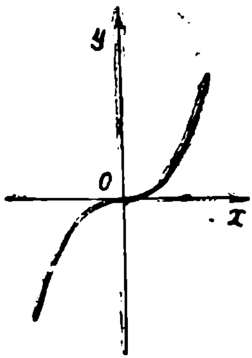
$y(0{,}5)=0{,}8243$; $y(1)=2{,}7183$.

3104. $y(0{,}25)=0{,}53125$; $y(0{,}5)=-0{,}50000$. **3105.** $y(0{,}5)=4{,}19475$; $y(1)=6{,}73376$. **3106.** $y(0{,}5)=0{,}310930$; $y(1)=0{,}386294$. **3107.** $y(1{,}25)=0{,}247698$; $y(1{,}5)=0{,}483673$; $y(1{,}75)=0{,}700992$; $y(2)=0{,}896362$. **3108.** $y(0{,}25)=-0{,}1875$; $y(0{,}5)=-0{,}2500$, $y(0{,}75)=-0{,}1875$; $y(1)=0{,}0000$. **3109.** $y(0{,}25)=2{,}3333$; $y(0{,}5)=3{,}0000$; $y(0{,}75)=5{,}0000$. **3110.** $y(1)=1$; $y(1{,}5)=0{,}34027$; $y(2)=0{,}69444$. **3111.** $y(1)=0{,}841471$; $y(1{,}5)=2{,}244363$; $y(2)=3{,}637189$. **3112.** $y(0{,}5)=7{,}5937$; $y(1)=32{,}0000$; $y(1{,}5)=97{,}6562$; $y(2)=243{,}0000$. **3113.** $y(0{,}5)=1{,}30958$; $y(1)=$

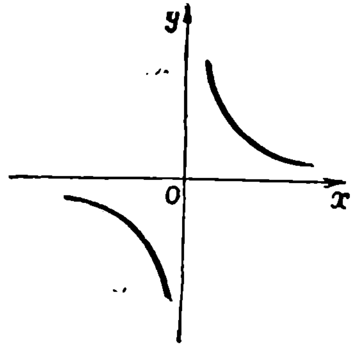
$=2{,}61444$; $y(1{,}5)=2{,}88981$; $y(2)=7{,}32464$. **3114.** $y(0{,}5)=1{,}58986$; $y(1)=2{,}19328$; $y(1{,}5)=2{,}67191$; $y(2)=3{,}02571$. **3115.** $y(0{,}5)=$ $=1{,}36824$; $y(1)=7{,}3890$; $y(1{,}5)=120{,}\ 97415$; $y(2)=22026{,}\ 46582$.

3116. 1) $\frac{d\vec{r}}{dt}=-\frac{1}{\sin^2 t}\vec{i}+\frac{1}{1+t^2}\vec{j}$; 2) $\frac{d\vec{r}}{dt}=-e^{-t}\vec{i}+2\vec{j}+$ $+\frac{1}{t}\vec{k}$; 3) $\frac{d\vec{r}}{dt}=2t\vec{i}+\frac{1}{t^2}\vec{j}-\frac{2}{t^2}\vec{k}$. **3117.** $3x+4y=0$ — ტრაექტორია; $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{w}=0$; $|\vec{v}|=5$; $|\vec{w}|=0$. **3118.** $\frac{x-1}{0}=$ $=\frac{y}{-4}=\frac{z}{3}$; $\vec{v}=-8t\vec{j}+6t\vec{k}$; $\vec{w}=-8\vec{j}+6\vec{k}$; $|\vec{v}|=10|t|$; $|\vec{w}|=10$. **3119.** $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\vec{i}+a\vec{j}$; $\vec{v}(\pi)=2a\vec{i}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\vec{i}$; $\vec{w}(\pi)=-a\vec{j}$. **3120.** $y=\frac{4}{3}x-\frac{x^2}{9}$ — ტრაექტორია; $\vec{v}=3\vec{i}+$ $+2(2-t)\vec{j}$; $\vec{v}(0)=3\vec{i}+4\vec{j}$; $\vec{v}(1)=3\vec{i}+2\vec{j}$; $\vec{v}(2)=3\vec{i}$; $\vec{v}(3)=3\vec{i}-2\vec{j}$. **3121.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ — ტრაექტორია; $\vec{v}=-3\sin t\times$ $\times\vec{i}+4\cos t\cdot\vec{j}$; $\vec{w}=-3\cos t\cdot\vec{i}-4\sin t\cdot\vec{j}$; $\vec{v}(0)=4\vec{j}$; $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ $=-\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{i}+2\sqrt{2}\vec{j}$; $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\vec{i}$; $\vec{w}(0)=-3\vec{i}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ $=-\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{c}-2\sqrt{2}\vec{j}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4\vec{j}$. **3122.** 1) $\frac{x-c_x}{a_x}=$ $=\frac{y-c_y}{a_y}$ (წრფე); 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 3) $x=\frac{a}{b^2}y^2$. **3126.** $ds=2dt$. **3127.** $ds=\sec t\,dt$. **3128.** $ds=(e^t+e^{-t})\,dt$. **3129.** $ds=\sqrt{3}\,e^t\,dt$. **3130.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$; $x+2y+3z-6=0$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$; $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$. **3131.** $\frac{x-\frac{R}{2}}{2}=\frac{y-\frac{R}{2}}{0}=$ $=\frac{z-\frac{R\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}$; $2x-\sqrt{2}z=0$; $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\cos\beta=0$; $\cos\gamma=$

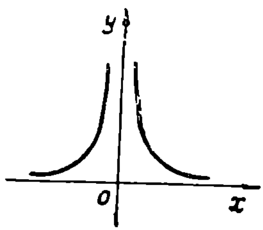
$= \frac{1}{\sqrt{3}}$. **3132.** $\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} = \frac{z-\frac{k\pi}{2}}{k}$; $xR - zk + \frac{k^2\pi}{2} = 0$.
3133. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$; $2x+y+2z-6=0$. **3134.** $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12=0$. **3135.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}$; $x+y+4z-10=0$. **3136.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$ (ბინორმალი); $3x+3y-z-2=0$ (მიმხები სიბრტყე). **3137.** $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{1}$; $6x-8y-z+3=0$; **3138.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ (მთავარი ნორმალი); $x-y-z-2=0$ (გამწრფევი სიბრტყე).
3139. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$; $x+y-2=0$. **3140.** $\frac{4x-1}{4} = \frac{3y+1}{-3} = \frac{2z-1}{2}$; $\frac{x-3}{4} = \frac{3y+8}{-6} = \frac{z-2}{1}$. **3141.** $x+y = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (ნორმალური სიბრტყე); $x-y=0$ (მიმხები სიბრტყე); $z=0$ (გამწრფევი სიბრტყე). **3142.** $k = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{\sqrt{(9t^4+4t^2+1)^3}}$; $T = \frac{3}{9t^4+9t^2+1}$; $k(0)=2$; $T(0)=3$. **3143.** $k = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}$; $T = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$; $k(1) = \frac{2}{9}$; $T(1) = -\frac{2}{9}$. **3144.** $k = \frac{a}{a^2+b^2}$; $T = \frac{b}{a^2+b^2}$.
3145. $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $T = -\frac{1}{3}$. **3146.** $k = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$. **3147.** $k = \frac{a}{a^2+ab+t^2}\sqrt{\frac{a(a+b)}{a^2+ab+t^2}}$; $T=0$. **3148.** $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $T = \frac{1}{3}$.
3149. $k = T = \frac{a}{(a+y)^2}$.



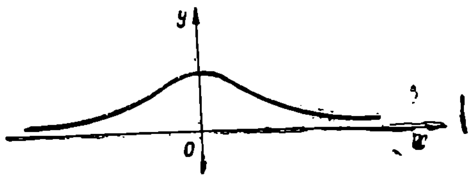
ნახ. 24. კუბური პარაბოლა
$y=x^3$.



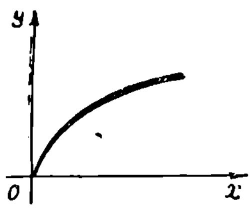
ნახ. 25. ტოლფერდა ჰიპერბოლა
$y=\frac{1}{x}$.



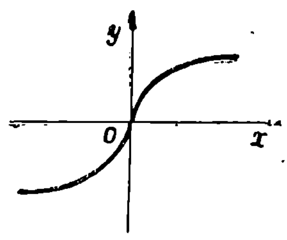
ნახ. 26. წილადი ფუნქციის
გრაფიკი $y=\frac{1}{x^2}$.



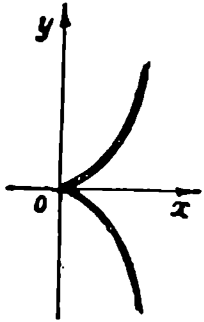
ნახ. 27. ანიეზის კულული
$y=\frac{1}{1+x^2}$.



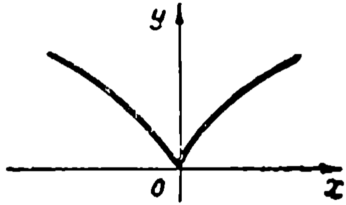
ნახ. 28. პარაბოლა (ზედა შტო)
$y=\sqrt{x}$



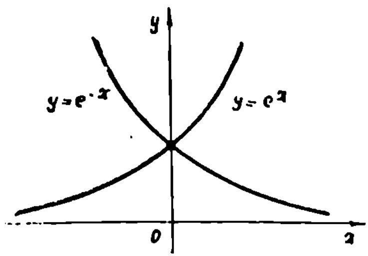
ნახ. 29. კუბური პარაბოლა
$y=\sqrt[3]{x}$.



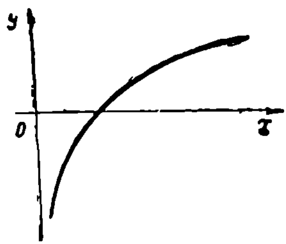
ნახ. 30. ნახევრად კუბური პარაბოლა
$y^2=x^3$, $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$



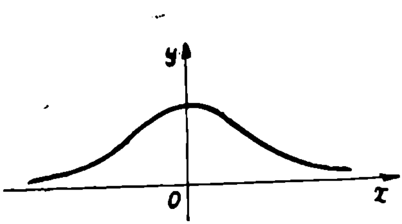
ნახ. 31. ნახევრად კუბური პარაბოლა
$y^3=x^2$, $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^2. \end{cases}$



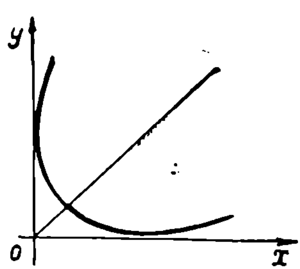
ნახ. 32. მაჩვენებლიანი ფუნქციების გრაფიკები: $y=e^x$ და $y=e^{-x}$.



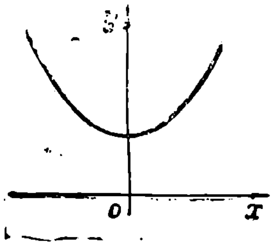
ნახ. 33. ლოგარითმული წირი
$y=\ln x$.



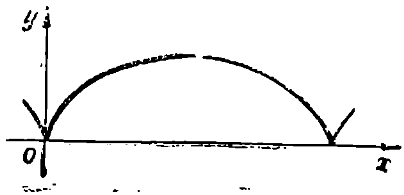
ნახ. 34. ალბათობის წირი $y=e^{-x^2}$.



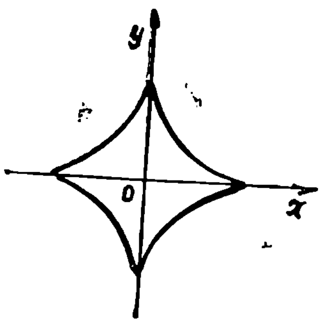
ნახ. 35. პარაბოლა $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.



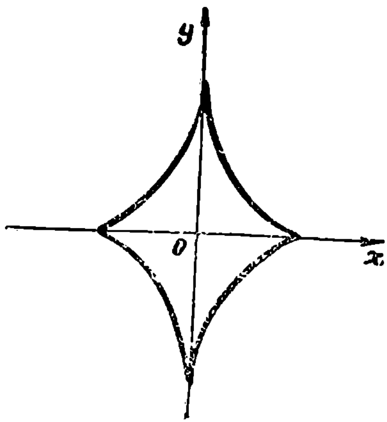
ნახ. 36. ჯაჭვწირი $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.



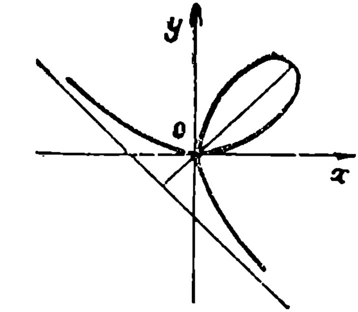
ნახ. 37. ციკლოიდი $\begin{cases} x=a\,(t-\sin t), \\ y=a\,(1-\cos t). \end{cases}$



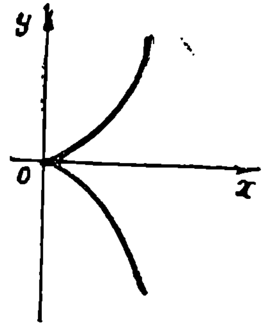
ნახ. 38. ასტროიდი $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^2 t \end{cases}$



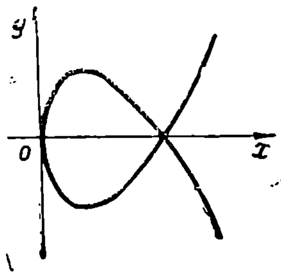
ნახ. 39. ელიფსის ევოლუტი $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.



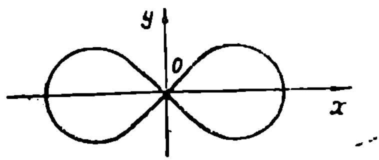
ნახ. 40. დეკარტის ფოთოლი $x^3+y^3-3axy=0$, $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.



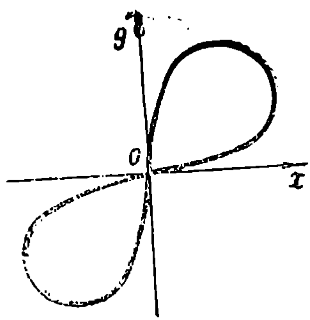
ნახ. 41. ცისოიდი $y^2=\frac{x^3}{a-x}$, $x=\frac{at^2}{1+t^2}$, $y=\frac{at^3}{2+t^2}$.



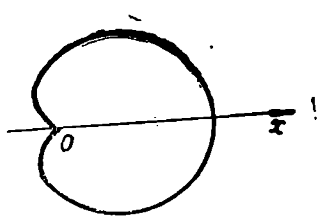
ნახ. 42. მარყუჟიანი პარაბოლა $ay^2=x(x-a)^2$.



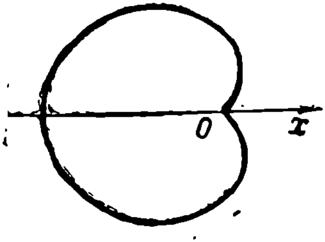
ნახ. 43. ბერნულის ლემნისკატი $(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)$, $r^2=a^2\cos 2\varphi$.



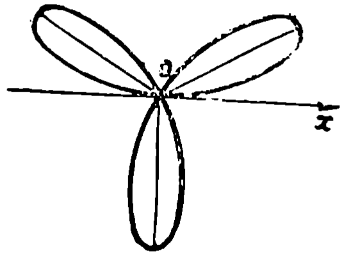
ნახ. 44. ლემნისკატი $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$, $r^2=a^2\sin^2\varphi$.



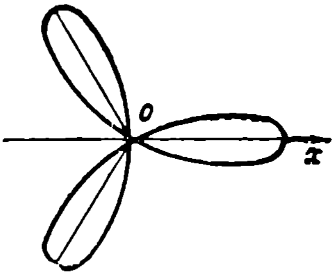
ნახ. 45. კარდიოიდი $r=a\,(1+\cos\varphi)$.



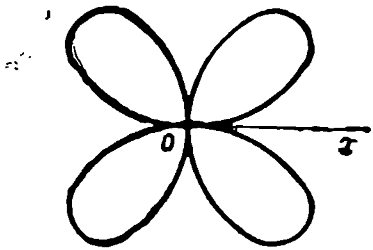
ნახ. 46. კარდიოიდი $r=a(1-\cos\varphi)$.



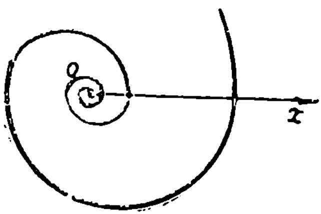
ნახ. 47. სამფოთოლა $r=a\sin 3\varphi$.



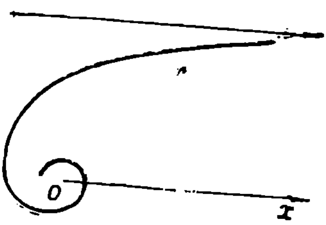
ნახ. 48. სამფოთოლა $r=a\cos 3\varphi$.



ნახ. 49. ოთხფოთოლა $r=a\sin 2\varphi$.



ნახ. 50. ლოგარითმული ხვია $r=e^{a\varphi}$
ან $\ln r=a\varphi$.



ნახ. 51. ჰიპერბოლური ხვია $r=\dfrac{a}{\varphi}$.

ლიტერატურა

1. ნ. დურგლიშვილი, უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, I—II ნაწ., განათლება, 1977, 1980.
2. ა. ბუაძე, მათემატიკა ინჟინრებისათვის, I. თსუ, 1984.
3. ა. ბუაძე, ა. გაბრაშეილი, დ. წვენიაშვილი. მათემატიკა ინჟინრებისათვის, II, თსუ, 1986.
4. ნ. ართმელაძე, თ. კოხია, ო. მელაძე. პრაქტიკული სახელმძღვანელო გამოთვლების მეთოდებსა და პროგრამირებაში, I—II ნაწ. სპი, 1974, 1980.
5. ს. თოფურია და სხვ. წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები, თბილისი 1988.
6. ვლ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი. ტ. I, თბილისი, 1981.
7. Я. С. Бугров, С. М. Никольский, Дифференциальное и интегральное исчисление, М., 1980.
8. Я. С. Бугров, С. М. Никольский, Дифференциальные уравнения. М., 1981.
9. Г. А. Дробушевич, Программирование на фортране, Минск, 1976.
10. Ф. Грунд, Программирование на языке фортран IV, М., «Мир», 1976.
11. И. А. Марон, Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах, М., 1970.
12. В. Ф. Бутузов и др., Математический анализ в вопросах и задачах, М., 1988.
13. П. С. Моденов, А. С. Пархоменко, Сборник задач по аналитической геометрии, М., «Наука», 1976.
14. Д. В. Клетеник, Сборник задач по аналитической геометрии, М., 1972.
15. Г. И. Марчук, Методы вычислительной математики, М., 1977.
16. В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов, Краткий курс высшей математики, I, М., 1978.
17. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, М., «Наука» 1970.
18. Г. Н. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа, М., «Наука» 1986.
19. Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., «Высшая школа», 1980.
20. Д. К. Фадеев и И. С. Сомонский, Сборник задач по высшей алгебре. М., 1977.
21. И. И. Лихолетов, И. П. Мацкевич, Руководство к решению задач по высшей математике. Минск, 1969.
22. Н. Я. Виленкин и др. Задачник по курсу математического анализа, часть I, М., «Просвещение», 1971.
23. Г. И. Запорожец, Руководство к решению задач по математическому анализу, М., «Высшая школа», 1964.
24. Я. С. Бугров, С. М. Никольский, Задачник, М., «Наука», 1982.
25. Сборник задач по математике для втузов под редакцией А. В. Ефимова и Б. П.Демидовича , М., «Наука», 1981.

სარჩევი

ა

V თავი

ფუნქციები

VI თავი

დიფერენციალური აღრიცხვა

VII თავი

წარმოებულის გამოყენება ფუნქციათა გამოკვლევაში

VIII თავი

მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე

IX თავი

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

X თავი

განსაზღვრული ინტეგრალი

XI თავი

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

XII თავი

დიფერენციალური განტოლებები

XIII თავი

სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია

Дурглишвили Николай Егорович
Буадзе Алексей Иосифович
Иосава Мимоза Джондоевна
Меладзе Отари Багратович
Сигуа Лейла Филимоновна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть I

(На грузинском языке)

რედაქტორი რ. დანელია
სამხატვრო რედაქტორი გ. ზაკალაშვილი
ტექრედაქტორი ნ. ძნელაძე
უფროსი კორექტორი მ. ოდილავაძე
კორექტორი ნ. ჩხიკვიშვილი
გამომშვები ლ. დავითური

ИБ № 3724. Учебное издание

გადაეცა ასაწყობად 30.11.87. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 30.04.89. საბეჭდი ქაღალდი № 2. ქაღალდის ზომა 60×90 1/16. გარნიტურა ვენა. ბეჭდვა მაღალი. ნაბეჭდი თაბახი 27,75. საღებავგატარება 27,75. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 26,28. ტირაჟი 20.000. შეკვეთა № 506.

ფასი 1 მან. 20 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, ორჯონიკიძის ქ. № 50.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50

1989

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნით ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის თბილისის ი. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, მეგობრობის გამზირი № 7.

Тбилисская Книжная фабрика им. И. Чавчавадзе Государственного комитета Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, пр. Дружбы № 7.