გ. ლობჟანიძე, ნ. მჭედლიშვილი,
ნ. სხირტლაძე, თ. ჯანგველაძე

მ ა თ ე მ ა ტ ი კ ა

*ლექციების კურსი
სავარჯიშოებით*

მეორე გამოცემა

თბილისი
2009

წინამდებარე წიგნი განკუთვნილია ეკონომიკური პროფილის ბაკალავრიატის საფეხურის სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია იმ მოთხოვნების შესაბამისად, რომელიც მიღებულია მსოფლიოს წამყვან უნივერსიტეტებში. მათემატიკური ანალიზისა და წრფივი ალგებრის საკვანძო საკითხები გადმოცემულია 36 ლექციაში. თეორიულ მასალას თან ახლავს არაერთი საილუსტრაციო მაგალითი დეტალური ამოხსნით. ლექციათა ბოლოში მოცემულია თეორიული შეკითხვები და პრაქტიკული სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. ავტორები მნიშვნელოვან ყურადღებას უთმობენ ძირითადი მათემატიკური ფაქტების გამოყენებით მხარეებს, კერძოდ, მათ ეკონომიკურ ინტერპრეტაციებს. განხილული ეკონომიკური ამოცანები არ მოითხოვს მკითხველისაგან შესაბამისი ეკონომიკური საკითხების წინასწარ ცოდნას, რაც მიმზიდველობას მატებს წიგნში გადმოცემულ მასალას, აადვილებს მის ათვისებას.

წიგნი სარგებლობას მოუტანს სხვა სპეციალობების სტუდენტებს და მათემატიკის შესაბამისი საკითხების შესწავლით დაინტერესებულ პირებსაც.

რედაქტორები: რ. მელაძე,
რ. ციცქიშვილი

ISBN 978-99940-861-9-1

შინაარსი

წინასიტყვაობა

მათემატიკის შესწავლისას განსაკუთრებულ და მნიშვნელოვან როლს თამაშობს წარმოსახვის უნარი, ინტუიცია და ლოგიკური აზროვნება. თავად მათემატიკას, ადამიანისათვის ამ ესოდენ საჭირო თვისებების განვითარებაში, მნიშვნელოვანი როლი შეუძლია ითამაშოს.

შეიძლება თამამად ითქვას, რომ მათემატიკის შესწავლა არსებით გავლენას ახდენს პიროვნების შემოქმედებითი უნარის განვითარებაზე. ის არა მარტო ცოდნის გარკვეულ მარაგს იძლევა, არამედ სრულყოფს აზროვნებას.

მათემატიკური განათლების მნიშვნელობას განაპირობებს ისიც, რომ მათემატიკა არის საერთო-საკაცობრიო კულტურის განუყოფელი და არსებითი ნაწილი. მათემატიკის ლოგიკურმა სიმწყობრემ და გასაოცარმა შინაგანმა კავშირებმა არ შეიძლება არ აღაფრთოვანოს ადამიანი, არ განავითაროს მისი ესთეტიკური გრძნობები.

საბუნებისმეტყველო, სოციალურ-ეკონომიკური და სხვა დისციპლინებისაგან განსხვავებით, რომელთაც საქმე აქვთ რეალურ ობიექტებთან, მათემატიკა წარმოადგენს აბსტრაქტულ მეცნიერებას, რომელიც შეისწავლის გარკვეული სახის ლოგიკურ სტრუქტურებს, ისეთებს როგორიცაა ალგებრული, ანალიზური, გეომეტრიული, ალბათური და ა.შ.

მათემატიკის აბსტრაქტულობა განაპირობებს მის უნივერსალურობას. მათემატიკური მოდელების მეშვეობით აღიწერება განსხვავებული რეალური პროცესები. ერთი და იგივე მათემატიკურმა მოდელმა შეიძლება სულ სხვადასხვა, ერთმანეთისაგან შინაარსით ძალიან დაშორებული მოვლენები აღწეროს. მათემატიკა წარმოადგენს მძლავრ საშუალებას გარე სამყაროს შესწავლისა და შემეცნებისათვის. მათემატიკა ვითარდება როგორც მის წიაღში წამოჭრილი პრობლემების, ასევე რეალური მოვლენების მათემატიკური მოდელირების დროს წამოჭრილი ამოცანების გადაწყვეტის შემდეგ.

ლექციების წინამდებარე კურსის შედგენისას ავტორებმა მიზნად დაისახეს ფუნდამენტური მათემატიკური მომზადების დონის ამაღლებისა და ეკონომიკური კომპონენტის გაძლიერების გზით აქცენტი კითხვიდან „როგორ?“ (ამოვხსნათ, გამოვთვალოთ, ვიპოვოთ და ა.შ.) გადაგვეტანა კითხვებზე „რა?“, „რისთვის?“ და შემდეგ „როგორ?“.

როგორც ცნობილია, სასწავლო მასალას სტუდენტები გაცილებით ადვილად ითვისებენ, თუ მას თან ახლავს საკმარისად დიდი რაოდენობის საილუსტრაციო მაგალითები. ამიტომ, ერთ წიგნში მოვაქციეთ როგორც თეორიული მასალა, ასევე სავარჯიშოები.

წიგნის ასეთმა არქიტექტურამ ხშირ შემთხვევაში მოითხოვა თეორიული მასალის ლაკონურად გადმოცემის აუცილებლობა,

უარის თქმა ნაკლებად მნიშვნელოვან, ვრცელ ან ერთისა და იმავე იდეაზე დაფუძნებულ დამტკიცებებზე. ამასთანავე, ჩვენ შევეცადეთ სრულად და დაწვრილებით გადმოგვეცა კურსის ძირითადი ცნებები და დებულებები.

მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი ალგებრის საკვანძო საკითხები ყველგან, სადაც კი შესაძლებელია, ისეა გადმოცემული, რომ ნათელი გახდეს მათემატიკის აბსტრაქტული ცნებების კავშირი ეკონომიკური დისციპლინების (მიკრო- და მაკროეკონომიკა, ბუღალტერია, ფინანსები, მარკეტინგი, მენეჯმენტი და ა.შ.) კონკრეტულ ცნებებთან. განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა განხილული თანაფარდობების გრაფიკულ ილუსტრაციას, როგორც ვიზუალურად აღქმისა და გააზრების საუკეთესო საშუალებას.

ძირითად ტექსტში, საილუსტრაციო მაგალითებში და სავარჯიშოებში განხილულია მთელი რიგი ეკონომიკური კანონზომიერებების აღმწერი მათემატიკური მოდელები (დანახარჯების, შემოსავლის, მოგების, ამორტიზაციის და სხვ.) და მეთოდები (მარტივი, რთული, უწყვეტი პროცენტის, ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების, წრფივი დაპროგრამების და სხვ.). შესაბამისი მასალა ისეა გადმოცემული, რომ არ საჭიროებს დამატებით ეკონომიკურ ინფორმაციას.

მაგალითები ამოხსნებითურთ სისტემატურად განიხილება კურსის გადმოცემისას. მათი რაოდენობა 140-ს აღწევს. თითოეულ ლექციას ახლავს კითხვები თვითშემოწმებისათვის და სავარჯიშოები. ყოველი ოთხი ლექციის შემდეგ კი, გავლილი მასალის გამეორებისა და განმტკიცების მიზნით, შეთავაზებულია შესაბამისი ტესტები და ამოცანები. დამოუკიდებლად შესასრულებელი სავარჯიშოების რაოდენობა 1700-ს აჭარბებს.

ლექციების კურსს ერთვის საცნობარო მასალა, რომლის დანიშნულებაა დაუზოგოს დრო სტუდენტს აუცილებლობის შემთხვევაში სასკოლო მათემატიკის ამა თუ იმ ცნების, ფორმულის ან გრაფიკის მოძიებისას.

ლექციების კურსის და სავარჯიშოების შედგენისას ავტორებმა ისარგებლეს წყაროებით, რომელთა სიაც წიგნის ბოლოშია მოთავსებული.

ავტორები მადლიერნი ვართ წიგნის რედაქტორების, ბატონების რევაზ მელაძის და რევაზ ციცქიშვილის, რომელთაც გულდასმით წაიკითხეს ხელნაწერი და რომელთა არაერთი სასარგებლო რჩევა და შენიშვნა იქნა გათვალისწინებული. ასევე მადლობას ვუხდით ბატონებს ზურაბ კილურაძეს და თემურ ხუციშვილს საქმიანი წინადადებებისათვის.

ავტორები სიამოვნებით მიიღებენ შემოთავაზებულ რჩევებს, შენიშვნებსა და წინადადებებს. მისამართი: nskhirtladze@cu.edu.ge.

ავტორები
თბილისი
2008 წლის აგვისტო

ლექცია 1

სიმრავლე. ოპერაციები სიმრავლეებზე

1.1. სიმრავლე და მისი მოცემის ხერხები

მათემატიკის ერთ-ერთი საწყისი ცნებაა სიმრავლის ცნება და მაშასადამე, იგი სხვა ცნებების საშუალებით არ განიმარტება.

შეიძლება საუბარი ქართული ასოების სიმრავლეზე, რომელიმე ბიბლიოთეკის წიგნების სიმრავლეზე, ფირმის თანამშრომლების სიმრავლეზე, ქალაქის სუპერმარკეტების სიმრავლეზე და სხვა.

იმ ობიექტებს, რომლებისგანაც სიმრავლე შედგება, ეწოდება სიმრავლის ელემენტები.

ზემოთ მოყვანილ პირველ მაგალითში *სიმრავლის ელემენტებს* წარმოადგენს ქართული ანბანის ასოები, მეორეში – წიგნები, მესამეში – ადამიანები, მეოთხეში – სუპერმარკეტები.

საზოგადოდ, სიმრავლე მოცემულად ითვლება, თუ დასახელებულია ან რაიმე წესით აღწერილია მისი ყველა ელემენტი. სიმრავლის მოცემის პირველ ხერხს ჩამოთვლის ხერხს, ხოლო მეორეს დახასიათების ხერხს უწოდებენ.

სიმრავლეებს ლათინური ანბანის დიდი ასოებით აღვნიშნავთ.

სიმრავლის ჩამოთვლის ხერხით მოცემისას, მის ელემენტებს ჩავწერთ ფიგურულ ფრჩხილებში.

მაგალითად, *ჩამოთვლის ხერხითაა* მოცემული სიმრავლე

$$A=\{1,2,3,5\},$$

რომელიც მოცემულია მისი *ყველა ელემენტის* დასახელებით.

დახასიათების ხერხით სიმრავლის მოცემისას ფიგურულ ფრჩხილებში *„ზოგადი ელემენტის"* მითითების შემდეგ ჩამოვუსვამთ ვერტიკალურ ხაზს და ჩავწერთ ამ ზოგადი ელემენტის *დახასიათებას – თვისებას,* რომლის მიხედვითაც განისაზღვრება რომელი ობიექტი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს. თუ ამ დამახასიათებელ თვისებას აღვნიშნავთ **P**, ხოლო სიმრავლის ზოგად ელემენტს **x** სიმბოლოებით, მაშინ *დახასიათების ხერხით* მოცემული სიმრავლის სქემატური ჩანაწერი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\{x \mid P(x)\} \quad \text{ან} \quad \{x \mid x \text{ აკმაყოფილებს } P \text{ თვისებას}\}.$$

ეს არის *„ერთობლიობა ყველა იმ* **x** *ობიექტისა, რომელიც აკმაყოფილებს* **P** *თვისებას".*

მაგალითად, დახასიათების ხერხითაა მოცემული სიმრავლე

$$B=\{x \mid x^2-9=0\}.$$

B არის სიმრავლე ყველა იმ x რიცხვისა, რომლისათვისაც $x^2-9=0$. ცხადია, რომ B შეიცავს მხოლოდ ორ ელემენტს; ესენია -3 და 3, ამიტომ შეგვეძლო დაგვეწერა ასეც: $B=\{-3, 3\}$.

მაგალითი 1. დახასიათების ხერხით მოცემული სიმრავლე $A=\{x|x$ არის 3 და 4-ის საერთო ჯერადი და $x<63\}$ ჩავწეროთ ჩამოთვლის ხერხით.

საკმარისია მოვძებნოთ 63-ზე ნაკლები ყველა ნატურალური რიცხვი, რომლებიც უნაშთოდ იყოფა ერთდროულად 3-ზე და 4-ზე. ცხადია, გვექნება

$$A=\{12, 24, 36, 48, 60\}.$$

მაგალითი 2. ჩამოთვლის ხერხით მოცემული სიმრავლე $B=\{-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt[3]{7}\}$ ჩავწეროთ დახასიათების ხერხით.

განვიხილოთ განტოლება $(x+\sqrt{2})x(x-\sqrt[3]{7})=0$. ცხადია, ამ განტოლების ამონახსნები B სიმრავლის ელემენტებს წარმოადგენს. ამიტომ, დახასიათების ხერხით B სიმრავლე შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$B=\{x|\,(x+\sqrt{2})x(x-\sqrt[3]{7})=0\}.$$

შენიშვნა. სიმრავლის მოცემისას არა აქვს მნიშვნელობა ჩაწერილი ელემენტების *თანმიმდევრობას. დაუშვებელია* ერთი და იგივე ელემენტის ორჯერ და მეტჯერ ჩაწერა – **სიმრავლე განსხვავებულ ობიექტთა ერთობლიობაა.**

მათემატიკაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება *რიცხვით სიმრავლეებს*, ე.ი. ისეთ სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტები *რიცხვებს* წარმოადგენენ. განიხილავენ სხვადასხვა რიცხვით სიმრავლეებს.

ნატურალურ, მთელ, რაციონალურ, ირაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების აღსანიშნავად სარგებლობენ შესაბამისად N, Z, Q, I და R ასოთი.

შეგახსენებთ, რომ **რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე პერიოდული ათწილადების სიმრავლეა, ხოლო უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადთა სიმრავლე ირაციონალურ რიცხვთა I სიმრავლეს წარმოადგენს.**

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ *ჩამოთვლის ხერხით* მხოლოდ ისეთი სიმრავლეების მოცემა შეიძლება, რომელთა ელემენტების რაო-

დენობაც *ნატურალური რიცხვით გამოისახება* (მათ მოკლედ *სასრულ სიმრავლეებს უწოდებენ*). ჩამოთვლის ხერხით მოცემული *უსასრულო სიმრავლის* (ე.ი. ისეთი სიმრავლისა, რომელიც *არაა სასრული*) *მაგალითებად* გამოდგება N და Z სიმრავლეები:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\},\ \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

ასევე სიმრავლე

$$C = \{3, 6, 9, 12, \dots\}.$$

ასეთ ჩანაწერებში სამი წერტილი მიუთითებს იმაზე, რომ დაცულია *„გარკვეული კანონზომიერება"*. კერძოდ, C სიმრავლის შემთხვევაში მრავალწერტილი მიგვანიშნებს იმაზე, რომ საქმე გვაქვს 3-ის ჯერად ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლესთან. რიგ შემთხვევაში ჩამოთვლის ხერხით სიმრავლის მოცემა მოუხერხებელია და შეუძლებელიც კი. ასეთ შემთხვევაში სიმრავლე მოიცემა *დახასიათების ხერხით.*

თუ **A** რაიმე სიმრავლეა, ხოლო **a** წარმოადგენს რაიმე ობიექტს, მაშინ ჩანაწერი $a \in A$ ნიშნავს, რომ **a** *არის* **A** *სიმრავლის ელემენტი* და იკითხება ასე: „**a** *ეკუთვნის* **A** *სიმრავლეს*". *თუ* **a** *ობიექტი არ ეკუთვნის* **A** *სიმრავლეს*, მაშინ წერენ $a \notin A$ ან $a \overline{\in} A$.

სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არცერთ ელემენტს ეწოდება ცარიელი სიმრავლე და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი.

თვალსაჩინოების მიზნით სიმრავლეს ხშირად გამოსახავენ როგორც სიბრტყის რაიმე ფიგურას. სიმრავლის ასეთ წარმოდგენას *ეილერ-ვენის დიაგრამას* უწოდებენ.

მათემატიკაში ვიყენებთ *სიმბოლოებს*, რომელთა დახმარებით მოკლედ და ზუსტად ჩაიწერება წინადადებები, რომლებიც ხშირად გამოიყენება. ეს სიმბოლოები შეიძლება ჩავთვალოთ *„მათემატიკური ანბანის ასოებად"*. ზოგიერთი მათგანი თქვენთვის უკვე ცნობილია. მაგალითად, $=$, $\geq$, $<$, $\Rightarrow$, $\in$ და ა.შ. გავეცნოთ ახლა ორ ახალ სიმბოლოს. მათ *კვანტორები* ეწოდება.

ნებისმიერობის (ზოგადობის) კვანტორია სიმბოლო $\forall$ და ნიშნავს – *„ყოველი"*, *„ნებისმიერი"*.

მაგალითად, წინადადება *„ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი დადებითია"* ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$\forall n (n \in \mathbf{N} \Rightarrow n > 0).$$

არსებობის კვანტორია სიმბოლო $\exists$ და ნიშნავს – *„არსებობს"*, *„მოიძებნება"*.

მაგალითად, წინადადება „მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომელიც მეტია 100-ზე" ასე შეიძლება ჩავწეროთ

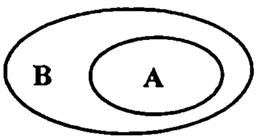
$\exists n \in N$ ისეთი, რომ $n>100$.

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლის ელემენტიც არის, მაშინ A სიმრავლეს B სიმრავლის ნაწილი ანუ ქვესიმრავლე ეწოდება და ეს გარემოება ასე ჩაიწერება

$$A \subset B \quad \text{ან} \quad B \supset A.$$

კითხულობენ: *„A სიმრავლე შედის B სიმრავლეში"* ან *„B სიმრავლე მოიცავს A სიმრავლეს"*. სიმბოლოების გამოყენებით გვექნება

$$A\subset B \Leftrightarrow \forall a (a\in A \Rightarrow a\in B).$$



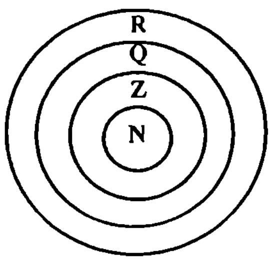
ნახ. 1.1

ის ფაქტი, რომ $A\subset B$, ნახ. 1.1-ზე ეილერ-ვენის დიაგრამითაა გამოსახული.

ადვილი დასანახია, რომ ჩვენთვის ცნობილი *რიცხვითი სიმრავლეებისათვის* სამართლიანია თანაფარდობა

$$N\subset Z\subset Q\subset R,$$

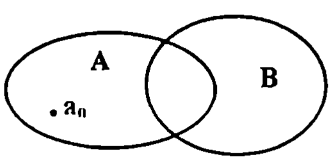
რასაც ეილერ-ვენის დიაგრამით ნახ. 1.2 სახით გამოსახავენ.



ნახ. 1.2

ჩანაწერი $A\not\subset B$ აღნიშნავს, რომ A *არ არის* B-ს ქვესიმრავლე, ე.ი. A-ში არსებობს *ერთი მაინც* ისეთი ელემენტი, ვთქვათ a_0, რომელიც არ ეკუთვნის B-ს.

$$A\not\subset B \Leftrightarrow (\exists\, a_0\in A \text{ ისეთი, რომ } a_0\notin B).$$



ნახ. 1.3

ეილერ-ვენის დიაგრამაზე A სიმრავლეში წერტილით გამოყოფილია ისეთი a_0 ელემენტი, რომელიც B-ს არ ეკუთვნის (ნახ. 1.3).

ქვესიმრავლის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ **ყოველი სიმრავლე არის თავისი თავის ქვესიმრავლე, ხოლო ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა.**

მტკიცდება (იხ. ლექცია 2), რომ **თუ A სასრული სიმრავლეა და მისი ელემენტების რაოდენობაა n, მაშინ A სიმრავლეს გააჩნია 2^n** ქვესიმრავლე. კერძოდ, ერთელემენტიანი

სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობა იქნება $2^1=2$, ორელემენტიანისა – $2^2=4$, სამელემენტიანისა – $2^3=8$ და ა.შ.

მაგალითად, $A=\{a\}$ ერთელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეებია $\varnothing$ და თვით $\{a\}$. ორელემენტიანი $A=\{a,b\}$ სიმრავლის ქვესიმრავლეებია: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$ და $\{a,b\}$. სამელემენტიანი $A=\{a,b,c\}$ სიმრავლის ქვესიმრავლეებია: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ და $\{a,b,c\}$.

შენიშვნა. საჭიროა ყურადღების გამახვილება, რათა არ იქნეს აღრეული *სიმრავლის ელემენტი* და ამავე სიმრავლის *ქვესიმრავლე*.

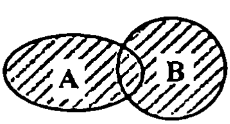
მაგალითად, როცა ვწერთ, $a\in\{a,b,c\}$ ეს ნიშნავს, რომ a არის სამი a, b, c ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლის *ელემენტი*, ხოლო როცა ვწერთ, $\{a\}\subset\{a,b,c\}$ ეს ნიშნავს, რომ a ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლე არის სამი a, b, c ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლის *ქვესიმრავლე*.

ამბობენ, რომ A და B სიმრავლეები ტოლია, თუ ისინი შედგება ერთი და იგივე ელემენტებისაგან (A სიმრავლის ყოველი ელემენტი შედის B სიმრავლეში და პირიქით, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი შედის A-ში), ანუ $A\subset B$ და $B\subset A$. სიმრავლეთა ტოლობისათვის გამოიყენება ჩანაწერი $A=B$. ამრიგად,

$$A=B \Leftrightarrow (A\subset B \text{ და } B\subset A).$$

1.2. ოპერაციები სიმრავლეებზე

შემოვიღოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი განმარტება.



$A\cup B$

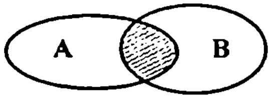
ნახ. 1.4

ორი A და B სიმრავლის გაერთიანება ეწოდება სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტისა, რომელიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის. A და B სიმრავლეების გაერთიანება აღინიშნება $A\cup B$ სიმბოლოთი.

მაგალითად, რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანება გვაძლევს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს:

$$R=Q\cup I.$$

ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა ეწოდება სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტისა, რომელიც ეკუთვნის როგორც A, ისე B სიმრავლეს. A და B სიმრავლეების თანაკვეთა აღინიშნება $A\cap B$ სიმბოლოთი.



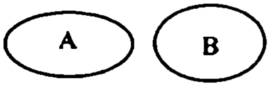
$A\cap B$

ნახ. 1.5

დიაგრამებზე დაშტრიხული ნაწილებით გამოსახულია შესაბამისად ორი A და B სიმრავლის *გაერთიანება* და *თანაკვეთა* (ნახ. 1.4 და ნახ. 1.5).

A და B სიმრავლეებს არაგადამკვეთი ეწოდება, თუ $A\cap B=\varnothing$.

ეილერ-ვენის დიაგრამით არაგადამკვეთი სიმრავლეები წარმოდგენილია ნახ. 1.6-ზე.

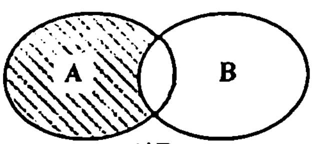


$A\cap B=\Phi$

ნახ. 1.6

A და B სიმრავლეების სხვაობა ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც შედგება A სიმრავლის იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც არ ეკუთვნის B-ს. A და B სიმრავლეების სხვაობა აღინიშნება $A\setminus B$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, $A\setminus B=\{x \mid x\in A$ და $x\notin B\}$. დიაგრამაზე დაშტრიხული ნაწილით გამოსახულია $A\setminus B$ (ნახ. 1.7).



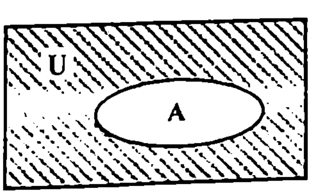
$A\setminus B$

ნახ. 1.7

ხშირად პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას გვიხდება ინფორმაციის მოპოვება მხოლოდ გარკვეული სახის ჩვენთვის საინტერესო ობიექტების შესახებ.

თუ განხილვა ან მსჯელობა ეხება მხოლოდ რაიმე U სიმრავლის ელემენტებს ან მის ქვესიმრავლეებს, მაშინ U სიმრავლეს უნივერსალურ სიმრავლესაც უწოდებენ. თუ A უნივერსალური U სიმრავლის ქვესიმრავლეა, მაშინ $U\setminus A$ სიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის დამატება და აღინიშნება A^C სიმბოლოთი.

მაგალითად. თუ ჩვენ გვაქვს მოთხოვნა გარკვეულ ნაწარმზე, რომელიც n სხვადასხვა საწარმოში მზადდება, ჩვენთვის საინტერესო ობიექტები სწორედ ეს საწარმოები იქნება. მათი სიმრავლე აღვნიშნოთ U-თი. ვთქვათ, აქედან ჩვენთვის მისაღებ პირობებში აღნიშნული ნაწარმის მიღება შესაძლებელია საწარმოთა მხოლოდ გარკვეულ ნაწილში. თუ ასეთი საწარმოების სიმრავლეს აღვნიშნავთ A-თი, მაშინ $U\setminus A$ იქნება აღნიშნულ n საწარმოდან იმ საწარმოთა სიმრავლე, რომელიც მოცემულ სიტუაციაში ჩვენთვის ინტერესს არ წარმოადგენს.



A^C

ნახ. 1.8

ნახ. 1.8-ზე დაშტრიხული ნაწილი შეესაბამება $A^C=U\setminus A$ სიმრავლეს.

შემდგომში ხშირად გამოვიყენებთ *ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის* ისეთ *ქვესიმრავლეებს*, რომლებსაც *რიცხვითი შუალედები* ეწოდება. მოვიყვანოთ მათი განსაზღვრებები.

ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ორმაგ უტოლობას a≤x≤b, ჩაკეტილი შუალედი (სეგმენტი) ეწოდება და აღინიშნება [a,b] სიმბოლოთი:

$$[a,b]=\{x\,|\,x\in R \text{ და } a\le x\le b\}.$$

სიმრავლეს

$$]a,b[=\{x\,|\,x\in R \text{ და } a<x<b\}$$

ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება.

სიმრავლეებს:

$$[a,b[=\{x\,|\,x\in R \text{ და } a\le x<b\},$$

$$]a,b]=\{x\,|\,x\in R \text{ და } a<x\le b\},$$

ეწოდება ნახევრადღია შუალედები.

a და b რიცხვებს განხილული შუალედების საზღვრები ან ბოლოები ეწოდება, b-a რიცხვს კი – შუალედის სიგრძე.

უსასრულო]-∞,+∞[ინტერვალი ეწოდება ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს.

ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას x>a (x<a), ეწოდება უსასრულო ნახევარინტერვალი მარცხენა (მარჯვენა) a საზღვრით და აღინიშნება]a,+∞[(]-∞,a[) სიმბოლოთი.

ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ x≥a (x≤a) უტოლობას, ეწოდება უსასრულო ნახევარსეგმენტი მარცხენა (მარჯვენა) a საზღვრით და აღინიშნება [a,+∞[(]-∞,a]) სიმბოლოთი.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. როგორ ცნებებს მიეკუთვნება სიმრავლის ცნება?
2. რას ეუწოდებთ სიმრაელის ელემენტებს?
3. რა შემთხევევაში ითვლება სიმრავლე მოცემულად?
4. რას ეწოდება ცარიელი სიმრავლე?
5. რომელ კვანტორებს იცნობთ?
6. რას ეწოდება სიმრავლის ქვესიმრაელე?
7. რამდენი ქვესიმრავლე გააჩნია სასრულ სიმრავლეს?
8. როგორ სიმრავლეებს ეწოდება ტოლი?
9. რას ეწოდება ორი სიმრავლის:
   ა) გაერთიანება?
   ბ) თანაკვეთა?
   გ) სხვაობა?
10. რას ეწოდება:
    ა) რაციონალური რიცხვი?
    ბ) ირაციონალური რიცხვი?
11. განსაზღვრეთ:
    ა) უნივერსალური სიმრავლე;
    ბ) სიმრავლის დამატება.
12. ჩაწერეთ ნატურალურ, მთელ და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეები.
13. რას წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე?
14. რომელ რიცხვით შუალედებს იცნობთ?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1.1. ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი გამონათქვამები? შეასწორეთ მათგან მცდარი:

ა) $2 \in N$;

ბ) $5 \notin N$;

გ) $-3 \notin N$;

დ) $7 \in R$;

ე) $0 \in R$;

ვ) $-2 \in Z$;

ზ) $\pi \in R$;

თ) $\pi \in Q$;

ი) $0 \in Z$;

კ) $5{,}3 \in Q$;

ლ) $-5{,}3 \notin Z$;

მ) $\pi \notin I$;

ნ) $\sqrt{2} \in Q$.

1.2. დახასიათების ხერხით მოცემული შემდეგი სიმრავლეები ჩაწერეთ ჩამოთვლის ხერხით:

ა) $\{x \mid x \in N$ და $3 < x \le 10\}$;

ბ) $\{x \mid x \in Z$ და $-3 \le x \le 1\}$;

გ) $\{x \mid x \in Z$ და $-2 < x < 5\}$;

დ) $\{x \mid x \in N$ და x არის 36-ის მარტივი გამყოფი$\}$;

ე) $\{x \mid x \in N$ და $(x^2-1)(x^2-4)=0\}$.

1.3. ჩამოთვლის ხერხით მოცემული შემდეგი სიმრავლეები ჩაწერეთ დახასიათების ხერხით:

ა) $\{11, 12, 13, 14\}$;

ბ) $\{-3, 3\}$;

გ) $\{-3, -2, 0\}$;

დ) $\{11, 17, -10\}$;

ე) $\{1, 3, 5, \ldots\}$;

ვ) $\{2, 4, 6, \ldots\}$.

1.4. ქვემოთ მოცემული სიმრავლეები ჩაწერეთ დახასიათების ხერხით:

ა) $[a, +\infty[$;

ბ) $]a, +\infty[$;

გ) $]-\infty, a]$;

დ) $]-\infty, a[$;

ე) $]-\infty, +\infty[$;

ვ) $\{1, 3, 5, 7, \ldots, 19\}$;

ზ) $\{2, 4, 6, \ldots, 48\}$.

1.5. შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები ისე, რომ სამართლიანი იყოს შემდეგი ტოლობები:

ა) $\{x \mid x \in N$ და $\ldots\} = \varnothing$;

ბ) $\{x \mid x \in R$ და $\ldots\} = \varnothing$;

გ) $\{x \mid x \in Z$ და $\ldots\} = \{-1, 0, 1\}$;

დ) $\{x \mid x \in Q$ და $\ldots\} = Z$;

ე) $\{x \mid x \in I$ და $\ldots\} = \varnothing$.

1.6. ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი გამონათქვამები? შეასწორეთ მათგან მცდარი, პასუხი დაასაბუთეთ:

ა) $2 \in \{1, 2, 3\}$;

ბ) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$;

გ) $\{1, 3, 8, 9\} = \{9, 1, 8, 3\}$;

დ) $\{\{a, \varnothing\}, \{b\}\}$ სამელემენტიანი სიმრავლეა;

ე) $\{x \mid x \in N$ და $2x = 3\} = \varnothing$;

ვ) $\{x \mid x \in R$ და $\dfrac{(x-2)^2}{x-2} = 0\} =$

$= \{x \mid x \in R$ და $x - 2 = 0\}$;

ზ) $\{x \mid x \in R$ და $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x + 5} = 0\} =$

$= \{x \mid x \in N$ და $x - 1 = 0\}$;

თ) $2 \subset \{1, 2, 3\}$;

ი) $\{2\} \subset \{1, 2, 3\}$;

კ) $\varnothing \subset \{0\}$;

ლ) $\{2\} \subset N$;

მ) $\{x \mid x \in R$ და $x^2 - 1 = 0\} \subset N$.

1.7. ცარიელია თუ არა შემდეგი სიმრავლეები? პასუხი დაასაბუთეთ:

ა) $A = \{x \mid x \in N$ და $x^2 = 4\}$;

ბ) $B = \{x \mid x \in Q$ და $x^2 = -4\}$;

გ) $C = \{x \mid x \in N$ და $3x = 2\}$;

დ) $\{0\}$;

ე) $\{\varnothing\}$;

ვ) $D = \{x \mid x \in I$ და $x^2 = 2\}$;

ზ) $E = \{x \mid x \in I$ და $x \in Q\}$;

თ) $F = \{x \mid x \in Q$ და $x \in Z\}$;

ი) $G = \{x \mid x \in R$ და $x^2 + x + 1 \le 0\}$;

კ) $H = \{x \mid x \in R$ და $\sin x + \cos x = 2\}$.

1.8. იპოვეთ შემდეგ სიმრავლეთა გაერთიანება:

ა) $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\}$;

ბ) $\{5, 8, 9, 11\} \cup \{1, 2, 11\}$;

გ) $N \cup Z$; $Q \cup I$; $Z \cup Q$; $Q \cup R$; $I \cup R$;

დ) $\{x \mid x \in N$ და $x < 10\} \cup \{x \mid x \in R$ და $x^2 - 1 = 0\}$;

ე) $\{x \mid x \in N$ და $x^2 + 5x + 4 \le 0\} \cup \{x \mid x \in N$ და $x^2 - 3x < 0\}$.

1.9. იპოვეთ შემდეგ სიმრავლეთა თანაკვეთა:

ა) $\{1, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4\}$;

ბ) $\{3, 4, a, 5\} \cap \{1, 5, a, b\}$;

გ) $Z \cap Q$;

დ) $\{x \mid x \in Z$ და $|x| < 3\} \cap \{x \mid x \in R$ და $(x-2)(x+1)(x-1.5) = 0\}$;

ე) $\{x \mid x \in Q$ და $(2x-1)(x-3)(3x+2) = 0\} \cap \{x \mid x \in R$ და $4x^2 = 1\}$;

ვ) $\{x \mid x \in R$ და $\sin x = 0\} \cap \{x \mid x \in R$ და $\sin 2x = 0\}$;

ზ) $\{x \mid x \in R$ და $tg^2 x = 1\} \cap \{x \mid x \in R$ $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\}$;

თ) $\{x \mid x \in N$ და $\log_2 x < 3\} \cap \{x \mid x \in N$ და $\log_{\frac{1}{3}} x < 1\}$.

1.10. ამოწერეთ შემდეგი სიმრავლეების ყველა ქვესიმრავლე:

ა) $\{a, b, 5\}$;

ბ) $\{\varnothing, 3, 7, 0\}$;

გ) $\{3, 4\}$;

დ) $\{7\}$;

ე) $\{0\}$;

ვ) {მდინარე, მთა, ბარი};

ზ) {მეწარმე, ბანკი, ქვეყანა}.

1.11. ვთქვათ,

$A = \{0, 2, 4, 6\}$,

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$C = \{2, 6, 0, 4\}$.

ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი გამონათქვამები? შეასწორეთ მათგან მცდარი:

ა) $A \subset B$;

ბ) $B \subset C$;

გ) $A = C$;

დ) $C \subset B$;

ე) $B \subset A$;

ვ) $A \cap C \subset A$;

ზ) $B \subset A \cup C$;

თ) $A \cap C \subset B$;

ი) $A \cup B \subset A$;

კ) $B \setminus A = \varnothing$;

ლ) $C \setminus B \subset \varnothing$.

1.12. ვთქვათ,

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

ამოწერეთ S-ის ყველა ის ქვესიმრავლე, რომლისთვისაც $\{3, 5, 6\}$ იქნება ერთ-ერთი ქვესიმრავლე.

1.13. ა) ეილერ-ვენის დიაგრამით გამოსახეთ $A \cup B \cup C$

$(A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C))$;

ბ) იპოვეთ $A \cup B \cup C$, სადაც $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 7, 8\}$, $C = \{1, 5, 8\}$.

1.14. ა) ეილერ-ვენის დიაგრამით გამოსახეთ $A \cap B \cap C$

$(A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C))$;

ბ) იპოვეთ $A \cap B \cap C$, სადაც
$A = \{2, 7, 9, 11\}$,
$B = \{1, 2, 7, 8\}$,
$C = \{1, 2, 3, 11\}$.

1.15. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ და $B \setminus A$, თუ:

ა) $A = \{3, 5, 7, 11\}$,
$B = \{-5, 5, 7, 13, 14\}$;

ბ) $A = \{x \mid x \in N$ და $x < 7\}$,
$B = \{x \mid x \in Z$ და $|x| < 4\}$;

გ) $A = [0,1]$, $B = \{0,1\}$;

დ) $A = [5, +\infty[$, $B =]-\infty, 7[$.

ე) $A = \{a, b, c, d, e\}$,
$B = \{b, d, e, g\}$;

ვ) $A = \{1, 5, 9\}$,
$B = \{3, 4, 6, 8\}$;

ზ) $A = \{3, 4, 6, 7\}$,
$B = \{3, 4, 5\}$;

თ) $A = \{3, 4, 6, 7\}$,
$B = \{3, 4, 7, 5\}$;

ი) $A = \{x \mid x \in R$ და $x^2 - 5x + 6 = 0\}$,
$B = \{-1, 3\}$.

1.16. იპოვეთ:

ა) $N \setminus Z$;

ბ) $N \cap Z$;

გ) $Z \setminus N$;

დ) $R \setminus Q$;

ე) $Q \cap I$;

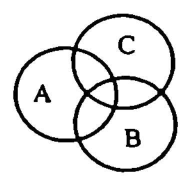
ვ) $Q \cap Z$;

ზ) $R \setminus I$;

თ) $Q \setminus I$;

ი) $Q \cap N$.

1.17. ნახაზზე მოცემული სიმრავლეებისათვის დაშტრიხეთ:



ა) $A \cap B \cap C$;

ბ) $(A \cap C) \cap C$;

გ) $A \cap (B \setminus C)$;

დ) $(A \cap B) \setminus C$;

ე) $(A \cup C) \setminus C$;

ვ) $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

1.18. ვთქვათ, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. იპოვეთ:

ა) A^C;

ბ) B^C;

გ) U^C;

დ) $\varnothing^C$;

ე) $(A^C)^C$.

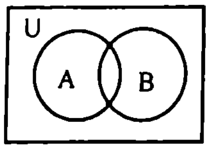
1.19. ვთქვათ, $U = R$ და $A =]-\infty, 3]$. იპოვეთ:

ა) A^C; ბ) $(A^C)^C$.

1.20. ნახაზზე მოცემული სიმრავლეებისათვის დაშტრიხეთ:

ა) $A^C \cup B$;

ბ) $A^C \cap B$;



გ) $A^C \cap B^C$;

დ) $A^C \cup B^C$;

ე) $(A \cup B)^C$;

ვ) $(A \cap B)^C$.

1.21. იპოვეთ $(C \cap A) \cup (C \cap B)$ და $(C \cup A) \cap (C \cup B)$, თუ $A = \{3, 4, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$, $C = \{4, 5, 2, 1\}$.

1.22. ვთქვათ, სასურსათო მაღაზიაში მყოფ ადამიანთა სიმრავლე არის U. იმ ადამიანების სიმრავლე, რომლებსაც სურთ შეიძინონ პური აღვნიშნოთ A ასოთი, ხოლო იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც სურთ შეიძინონ ფუნთუშა აღვნიშნოთ B ასოთი.

A და B სიმრავლეებზე ოპერაციების საშუალებით გამოსახეთ სიმრავლეები იმ ადამიანებისა, რომლებსაც:

ა) სურთ შეიძინონ მხოლოდ პური;

ბ) სურთ შეიძინონ მხოლოდ ფუნთუშა;

გ) სურთ შეიძინონ პური ან ფუნთუშა;

დ) სურთ შეიძინონ როგორც პური, ასევე ფუნთუშა;

ე) არ სურთ შეიძინონ არც პური და არც ფუნთუშა.

1.23. ვთქვათ, U არის მოცემულ მომენტში საქართველოში მცხოვრებ ადამიანთა სიმრავლე, A არის სიმრავლე ადამიანებისა რომელთა ასაკი მეტია 16 წელზე და 36 წელს არ აღემატება, ხოლო B არის სიმრავლე ადამიანებისა, რომელთა ასაკი 21 წელს არ აღემატება. A და B სიმრავლეებზე ოპერაციების საშუალებით გამოსახეთ სიმრავლე ადამიანებისა:

ა) რომელთა ასაკი 16 წელზე მეტია და 21 წელს არ აღემატება;

ბ) რომელთა ასაკი 21 წელზე მეტია და 36 წელს არ აღემატება;

გ) რომელთა ასაკი 16 წელს არ აღემატება;

დ) რომელთა ასაკი 36 წელს არ აღემატება;

ე) რომელთა ასაკი 36 წელზე მეტია.

ლექცია 2

კომბინატორიკის ელემენტები

2.1. ელემენტთა რაოდენობა სიმრავლეთა გაერთიანებაში

ვთქვათ, A რაიმე *სასრული* სიმრავლეა. მისი ელემენტების რაოდენობა $n(A)$-თი აღვნიშნოთ.

მაგალითად, თუ $A=\{a,b\}$, მაშინ $n(A)=2$; თუ $A=\{5, 1, 0\}$, მაშინ $n(A)=3$, $n(\varnothing)=0$ და ა.შ. ამ ლექციაში საქმე გვექნება მხოლოდ სასრულ სიმრავლეებთან.

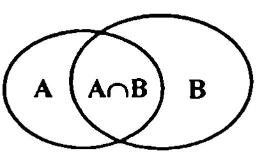
ცხადია, თუ $A\subset B$, მაშინ

$$n(B\backslash A) = n(B) - n(A). \qquad (1)$$

ნებისმიერი A და B სიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B). \qquad (2)$$

ფორმულა (2)-ის სამართლიანობა შეიძლება გავიაზროთ ნახ. 2.1-ზე გამოსახული დიაგრამიდან.



ნახ. 2.1

ამავე დიაგრამიდან ადვილად დავინახავთ, რომ

$$n(B\backslash A) = n(B) - n(A\cap B).$$

უნივერსალური სიმრავლის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისათვის გვაქვს

$$n(A) + n(A^c) = n(U). \qquad (3)$$

ნებისმიერი A, B და C სიმრავლეებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) -$$
$$- n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C).$$

მაგალითი 1. სასურსათო მაღაზიაში 160 ადამიანია, რომელთაგან 80-ს სურს შეიძინოს პური, ხოლო 70-ს — ფუნთუშა. 20 ადამიანს სურს შეიძინოს როგორც პური, ასევე ფუნთუშა. დავადგინოთ:

ა) რამდენ ადამიანს სურს შეიძინოს მხოლოდ პური?

ბ) რამდენ ადამიანს სურს შეიძინოს მხოლოდ ფუნთუშა?

გ) რამდენ ადამიანს სურს შეიძინოს პური ან ფუნთუშა?

დ) რამდენ ადამიანს არ სურს შეიძინოს არც პური და არც ფუნთუშა?

ამოხსნა. ბაზარში მყოფ ადამიანთა სიმრავლე აღვნიშნოთ U ასოთი (*უნივერსალური სიმრავლე*). იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც სურთ შეიძინონ პური, აღვნიშნოთ B ასოთი. პირობის თანახმად, $n(U)=160$, $n(B)=80$. იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც სურთ შეიძინონ ფუნთუშა, აღვნიშნოთ D ასოთი. ამ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობაა $n(D)=70$. იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც სურთ შეიძინონ როგორც პური, ასევე ფუნთუშა, არის $B\cap D$ და $n(B\cap D)=20$.

(2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

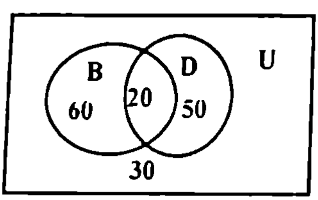
$$n(B\cup D)=n(B)+n(D)-n(B\cap D)=80+70-20=130.$$

ამრიგად, იმ ადამიანთა რაოდენობა, რომლებსაც სურთ შეიძინონ პური ან ფუნთუშა არის 130.

იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც სურთ მხოლოდ პურის შეძენა იქნება $B\setminus(B\cap D)$.

(1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$n(B\setminus(B\cap D))=n(B)-n(B\cap D)=80-20=60.$$



ნახ. 2.2

ასევე, რაოდენობა იმ ადამიანებისა, რომლებსაც მხოლოდ ფუნთუშას შეძენა სურთ, არის

$$n(D\setminus(B\cap D))=70-20=50.$$

ცხადია, იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებსაც არ სურთ არც პურის და არც ფუნთუშას შეძენა, არის $(B\cup D)^C$ და (3) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$n((B\cup D)^C)=n(U)-n(B\cup D)=$$
$$=160-130=30.$$

საილუსტრაციოდ გამოგვადგება ნახაზი 2.2.

პასუხი:
ა) მხოლოდ პურის შეძენა სურს 60 ადამიანს;
ბ) მხოლოდ ფუნთუშას შეძენა სურს 50 ადამიანს;
გ) პურის ან ფუნთუშას შეძენა სურს 130 ადამიანს;
დ) არც პურის და არც ფუნთუშას შეძენა არ სურს 30 ადამიანს.

2.2. გადანაცვლება. წყობა. ჯუფთება

მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტისას აუცილებელია მოცემული სასრული სიმრავლის ელემენტებისაგან გარკვეული წესებით შედგენილი კომბინაციების განხილვა.

სასრული სიმრავლის ელემენტებისაგან გარკვეული წესებით შედგენილი კომბინაციების რიცხობრივ მახასიათებლებს შეისწავლის კომბინატორიკა.

ჩვენ ქვემოთ განვსაზღვრავთ კონკრეტული ტიპის ისეთ კომბინაციებს, რომლებსაც ფართო გამოყენება აქვთ პრაქტიკაში. კერძოდ, *გადანაცვლებას, წყობას, ჯუფთებას* და მოვიყვანთ მათ რაოდენობათა გამოსათვლელ ფორმულებს.

სასრულ სიმრავლეს ეწოდება დალაგებული სიმრავლე, თუ ცნობილია და დაფიქსირებულია მისი პირველი ელემენტი, მეორე ელემენტი და ა.შ.

დალაგებული სიმრავლის აღსანიშნავად მის ელემენტებს ვათავსებთ მრგვალ ფრჩხილებში მოცემული რიგის მიხედვით.

ორი სასრული დალაგებული სიმრავლე ტოლია, თუ მათი ელემენტების რაოდენობა ერთი და იგივეა და შესაბამის ადგილებზე მდგომი ელემენტები ტოლია.

მაგალითად, $A=(1,7,3)$ და $B=(7,1,3)$ დალაგებული სიმრავლეები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი ელემენტების გადანაცვლება ეწოდება.

რამდენი გადანაცვლება შეიძლება შევადგინოთ სამი **a**, **b**, **c** ელემენტისაგან შედგენილ სიმრავლეში?

ეს რიცხვი ტოლია ექვსის. მართლაც, ამ ელემენტებისაგან შესაძლებლებია მხოლოდ ექვსი (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a) გადანაცვლების შედგენა.

საზოგადოდ, n ელემენტიან სიმრავლეში ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი აღინიშნება P_n სიმბოლოთი და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n!. \qquad (4)$$

სიმბოლო $n!$ იკითხება ასე: „n ფაქტორიალი". შეთანხმებით მიღებულია, რომ $0!=1$, $1!=1$. n-ის ზრდასთან ერთად n ფაქტორიალი ძალიან სწრაფად იზრდება.

მაგალითად, $P_1=1!=1$; $P_4=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$; $P_{10}=3\ 628\ 800$.

ფორმულა (4)-ის თანახმად, დაფაზე 10 ერთმანეთისაგან განსხვავებული სარეკლამო ფურცლის ერთ რიგში გასაკრავად არსებობს მათი განლაგების P_{10} ანუ 3 628 800 შესაძლებლობა!

n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ეწოდება m ელემენტიანი წყობა n ელემენტისაგან ($m \leq n$).

n ელემენტისაგან m ელემენტიან წყობათა რიცხვი აღინიშნება A_n^m სიმბოლოთი. განვიხილოთ კვლავ სამელემენტიანი სიმრავლე $\{a, b, c\}$ და მისი ელემენტებისაგან შევადგინოთ ორელემენტიანი კომბინაციები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ელემენტთა განლაგებით ან ელემენტებით. მივიღებთ: $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$, ე.ი. $A_3^2=6$.

საზოგადოდ, n ელემენტისაგან m ელემენტიან წყობათა რიცხვი A_n^m გამოითვლება ფორმულით

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}. \tag{5}$$

ვთქვათ, მოცემულია n ელემენტიანი სიმრავლე და ამ სიმრავლისაგან შევადგინოთ $m(m \leq n)$ ელემენტიანი ქვესიმრავლეები.

n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან ქვესიმრავლეს ($m \leq n$) ეწოდება m ელემენტიანი ჯუფთება n ელემენტისაგან.

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო m ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი აღინიშნება C_n^m სიმბოლოთი.

მტკიცდება, რომ ჯუფთებათა რიცხვი გამოითვლება ფორმულით

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}. \tag{6}$$

თუ (6) ტოლობაში გავითვალისწინებთ (4) და (5) ფორმულებს, მივიღებთ

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{7}$$

მარტივად მტკიცდება, რომ $C_n^m=C_n^{n-m}$.

მოვიყვანოთ რამდენიმე ამოცანა კომბინატორიკის პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ.

მაგალითი 1. თბილისში ახალ ოფისში განლაგებულმა ფირმამ იყიდა განსხვავებული ავეჯის ოთხი კომპლექტი. ავეჯის განლაგების რამდენი ვარიანტი არსებობს ოფისის მოსაწყობად?

ამოხსნა. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა აქვს ავეჯის ოთახებში განლაგების რიგს. ამიტომ ყველა შესაძლო ვარიანტის რაოდენობის დასადგენად საჭიროა გამოვთვალოთ *ოთხელემენტიან გადანაცვლებათა რიცხვი.* (4) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$P_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24.$$

პასუხი: არსებობს ოფისის მოწყობის 24 განსხვაეებული ეარიანტი.

მაგალითი 2. გაზის სამმართველოს დავალებული აქვს მოამარაგოს გაზის ბალონებით 6 დასახლებული პუნქტი. ერთ დღეში სამმართველოს შეუძლია მოამარაგოს მხოლოდ 3 დასახლებული პუნქტი. რამდენნაირი მარშრუტი შეიძლება შედგეს პირველი დღისათვის?

ამოხსნა. ცხადია, რომ მარშრუტის შედგენისას მნიშვნელობა აქვს პუნქტების დალაგების რიგს. რომ დავთვალოთ ყველა შესაძლო მარშრუტის რაოდენობა, უნდა გამოვთვალოთ *სამელემენტიან წყობათა რიცხვი 6 ელემენტისაგან.* (5) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$A_6^3=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=120\ .$$

პასუხი: ერთი დღისათვის მარშრუტების შედგენა შეიძლება 120 განსხვავებული წესით.

მაგალითი 3. ვთქვათ, ვალუტის გადამცვლელ პუნქტში აქვთ 10 სახის ვალუტა. ყოველდღე დავალებული აქვთ გასაყიდად გამოიტანონ 4 სახის ვალუტა. რამდენ ვარიანტად შეუძლიათ ვალუტის გამოტანა პუნქტში?

ამოხსნა. რადგან ვალუტის დალაგების რიგს ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა არა აქვს, ამიტომ უნდა გამოვთვალოთ *ოთხელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი 10 ელემენტისაგან.* (7) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$C_{10}^4=\frac{10!}{4!(10-4)!}=\frac{10!}{4!6!}=210\ .$$

პასუხი: ვალუტის გამოტანა პუნქტში შეუძლიათ 210 ვარიანტად.

2.3. ნიუტონის ბინომური ფორმულა

აღვწეროთ (7) ფორმულის გამოყენებით კარგად ცნობილი შემოკლებული გამრავლების ფორმულები:

$$(a+b)^1=a+b=C_1^0a+C_1^1b,$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3.$$

ამ ფორმულებში ჩვენ გამოვიყენეთ შემდეგი ტოლობები:

$$C_j^0=C_j^j=1,\ j=1,2,3; \qquad C_2^1=2; \qquad C_3^1=C_3^2=3.$$

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\begin{aligned}(a+b)^n&=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+\\&+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+C_n^nb^n,\end{aligned} \tag{8}$$

სადაც C_n^m განისაზღვრება (7) ფორმულით და მას **ბინომურ კოეფიციენტს**, ხოლო (8)-ს **ნიუტონის ბინომურ ფორმულას** (მოკლედ *ნიუტონის ბინომს*) უწოდებენ.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a-b=a+(-b)$, მაშინ (8) ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ $(a-b)^n$-ის სათანადო *გაშლასაც*:

$$\begin{aligned}(a-b)^n&=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+\\&+(-1)^mC_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+(-1)^nC_n^nb^n.\end{aligned} \tag{9}$$

თუ ავიღებთ $a=b=1$, მაშინ (8) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^m+\ldots+C_n^n=2^n. \tag{10}$$

ეს ფორმულა შემოკლებით ასეც ჩაიწერება

$$\sum_{m=0}^{n}C_n^m=2^n.$$

საზოგადოდ, $a_0+a_1+\cdots+a_n$ ჯამი შეჯამების $\sum$ სიმბოლოს გამოყენებით ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$a_0+a_1+\cdots+a_n=\sum_{m=0}^{n}a_m.$$

m-ს ეწოდება შეჯამების (აჯამვის) ინდექსი.

ახლა დავუბრუნდეთ პირველ ლექციაში დამტკიცების გარეშე მოყვანილ ფაქტს (იხ. გვ. 14).

ვინაიდან C_n^m არის n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა m ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა, ამიტომ (10) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრაველის რაოდენობა სწორედ 2^n-ის ტოლია.

ბინომური C_n^m კოეფიციენტებისაგან შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & C_0^0 & & & & & & \\
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & \\
 & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
C_n^0 & & C_n^1 & & C_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}$$

თუ აქ შევიტანთ C_n^m რიცხვების მნიშვნელობებს, მივიღებთ რიცხვით ცხრილს, რომელსაც *„პასკალის სამკუთხედი"* ეწოდება:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

ამ ცხრილიდან ნათლად ჩანს C_n^m რიცხვების შემდეგი თვისებები:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

ნიუტონის ბინომური ფორმულის გამოყენება ზოგჯერ საგრძნობლად გვიადვილებს გამოთვლებს. მოვიყვანთ კონკრეტულ მაგალითს ირაციონალობის შემცველი გამოსახულების გამოთვლაზე.

მაგალითი 4. ვთქვათ, მოცემულია გამოსახულება

$$x=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8}+1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{4}}.$$

დავადგინოთ, ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი — „x ირაციონალური რიცხვია".

ამოხსნა. მოცემულ გამოსახულებაში მრიცხველისა და მნიშვნელის $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{4}$-ზე გამრავლებისა და შემდგომ (8) და (9) ფორმულებით სარგებლობის შედეგად მივიღებთ

$$\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8}+1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{4}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{8}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{4}+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{4}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{4}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{4}}=$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{4}+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{4}=$$
$$=C_4^0(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^0-C_4^1(\sqrt{3})^3(\sqrt{2})^1+C_4^2(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^2-$$
$$-C_4^3(\sqrt{3})^1(\sqrt{2})^3+C_4^4(\sqrt{3})^0(\sqrt{2})^4+$$
$$+C_4^0(\sqrt{3})^4(\sqrt{3})^0+C_4^1(\sqrt{3})^3(\sqrt{2})^1+C_4^2(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^2+$$
$$+C_4^3(\sqrt{3})^1(\sqrt{2})^3+C_4^4(\sqrt{3})^0(\sqrt{2})^4=$$
$$=2(9+36+4)=98,$$

რის გამოც დავასკვნით, რომ გამონათქვამი „x ირაციონალური რიცხვია" ჭეშმარიტი არ არის

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. მოიყვანეთ ორი და სამი სიმრავლის გაერთიანებაში ელემენტთა რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულები.
2. რას შეისწავლის კომბინატორიკა?
3. განსაზღვრეთ დალაგებული სიმრავლე.
4. რას ეწოდება:
   ა) გადანაცვლება?
   ბ) m ელემენტიანი წყობა n ელემენტისაგან?
   გ) m ელემენტიანი ჯუფთება n ელემენტისაგან?
5. რას უდრის:
   ა) ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი n ელემენტიან სიმრავლეში?
   ბ) n ელემენტისაგან m ელემენტიან წყობათა რიცხვი?
   გ) n ელემენტისაგან m ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი?
6. მოიყვანეთ ნიუტონის ბინომური ფორმულა.
7. დაამტკიცეთ, რომ $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

2.1. შეიტანეთ გამოტოვებული რიცხვები:

$n(A)$	$n(B)$	$n(A\cup B)$	$n(A\cap B)$
6	3	8	
8	7		4
	5	8	1
1		9	0

2.2. ცნობილია, რომ $n(A)=18$, $n(B)=21$, $n(C)=22$, $n(A\cap B)=9$, $n(A\cap C)=7$, $n(B\cap C)=11$ და $n(A\cap B\cap C)=2$.

იპოვეთ:

ა) $n(B\cup C)$;

ბ) $n(A\cup B)$;

გ) $n(A\cup C)$;

დ) $n(A\cup B\cup C)$.

2.3. საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის ხარისხის განსაზღვრის მიზნით, პროდუქციის 2 000 ერთეულზე ჩატარდა შემოწმება სამი მაჩვენებლის მიხედვით. პირველი მაჩვენებლის მიხედვით მოთხოვნა დააკმაყოფილა 1 600-მა, მეორე მაჩვენებლის მიხედვით 1 400-მა, ხოლო მესამე მაჩვენებლის მიხედვით 1 200-მა ერთეულმა. ამასთანავე, პირველი და მეორე მაჩვენებლის მიხედვით ხარისხის მოთხოვნა დააკმაყოფილა 1 100-მა, პირველი და მესამე მაჩვენებლის მიხედვით 1 000-მა, მეორე და მესამე მაჩვენებლის მიხედვით 800-მა ერთეულმა. სამივე მაჩვენებლის მიხედვით ხარისხის მოთხოვნა დააკმაყოფილა პროდუქციის 600-მა ერთეულმა. შემოწმებული პროდუქციის რამდენმა პროცენტმა ვერ დააკმაყოფილა ხარისხის მოთხოვნა ვერც ერთი მაჩვენებლის მიხედვით?

2.4. 100 სტუდენტიდან ინგლისური ენა იცის 28-მ, გერმანული ენა – 30-მა, ფრანგული ენა – 42-მა, ინგლისური და გერმანული – 8-მ, ინგლისური და ფრანგული – 10-მა, სამივე ენა იცის 3-მა, არცერთი ამ სამი ენიდან არ იცის 20-მა. დაადგინეთ რამდენმა სტუდენტმა იცის:

ა) გერმანული და ფრანგული?

ბ) მხოლოდ ინგლისური ან მხოლოდ გერმანული?

გ) მხოლოდ ინგლისური ან მხოლოდ ფრანგული?

დ) გერმანული ან ფრანგული და არ იცის ინგლისური?

2.5. იპოვეთ:

ა) $\dfrac{A_5^4+A_5^3}{A_5^2}$;

ბ) $\dfrac{P_8}{P_6}$;

გ) $\dfrac{P_7+P_6}{P_5}$;

დ) $\dfrac{15!}{30P_{12}}$;

ე) $\dfrac{C_{100}^{97}\cdot P_4}{66\cdot A_{50}^2}$.

2.6. იპოვეთ $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\sqrt{x}\right)^8$-ის გაშლის ის წევრი, რომელიც არ შეიცავს x ცვლადს.

2.7. იპოვეთ $\left(\sqrt[5]{7}+\sqrt[3]{5}\right)^8$-ის გაშლის რაციონალური წევრი.

2.8. ვთქვათ, ღვინის ქარხანა აწარმოებს შვიდი სახის ღვინოს და დამზადებულ პროდუქციას ყოველთვიურად აწვდის მაღაზიას. რამდენი წესით შეიძლება მიეწოდოს ღვინო სავაჭრო ობიექტს, თუ მაღაზია იღებს მხოლოდ სამი სახის პროდუქციას?

2.9. რამდენ სხვადასხვა ვარიანტად შეიძლება დავსვათ რვა ადამიანი:

ა) გრძელ მაგიდასთან?

ბ) მრგვალ მაგიდასთან?

2.10. ბანკს შეუძლია 3 ერთმანეთისაგან განსხვავებული კრედიტის გაცემა. კრედიტის აღების მსურველთა რიცხვია 10. კრედიტის გაცემის რამდენი ვარიანტი არსებობს?

2.11. ოთახში n ნათურაა. ოთახის განათების რამდენი სხვადასხვა ვარიანტია, რომლის დროსაც ანთია ზუსტად $k\,(1 \le k \le n)$ ნათურა? ოთახის განათების სულ რამდენი ვარიანტი არსებობს?

2.12. ნიუტონის ბინომური ფორმულის გამოყენებით გაშალეთ ჯამის სახით ა) $(a-b)^5$; ბ) $(x+y)^4$.

2.13. გამოთვალეთ $E=\{a,b,c,d\}$ სიმრავლის გადანაცვლებათა რიცხვი და ჩაწერეთ ყველა შესაძლო გადანაცვლება.

2.14. გამოთვალეთ $A=\{a,b,c,d\}$ სიმრავლის ორელემენტიან წყობათა რიცხვი და ჩაწერეთ ყველა შესაძლო ორელემენტიანი წყობა.

2.15. აკადემიური ჯგუფი საგამოცდო სესიაზე აბარებს სამ საგანს. საგამოცდო ცხრილის შედგენის რამდენი ვარიანტი არსებობს?

2.16. იპოვეთ ციფრების ჯამი ყველა იმ ოთხნიშნა რიცხვისა, რომელიც შედგენილია ციფრებისაგან 1, 2, 3, 4. რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

2.17. რამდენი სხვადასხვა ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ 0, 1, 2, 3 ციფრების საშუალებით? რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

2.18. აკადემიური ჯგუფი სწავლობს 8 საგანს. ერთი დღის სასწავლო ცხრილის რამდენი ვარიანტი არსებობს, თუ დღეში სამი სხვადასხვა საგანი ისწავლება?

2.19. ჯგუფის 15 სტუდენტი ერთმანეთს უცვლის ფოტოსურათს. რამდენი ფოტოსურათი გაიცვლება სულ?

2.20. გამოთვალეთ $P=\{a,b,c,d,e\}$ სიმრავლის სამელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი და ჩაწერეთ ყველა შესაძლო ჯუფთება.

2.21. რამდენი სამელემენტიანი ქვესიმრავლე აქვს n ელემენტიან სიმრავლეს?

2.22. რამდენი სხვადასხვა ოთხკაციანი დელეგაციის არჩევა შეიძლება 20 სტუდენტიდან?

2.23. რამდენი ელემენტისაგან შეიძლება შევადგინოთ:

ა) 56 ორელემენტიანი წყობა?

ბ) 45 ორელემენტიანი ჯუფთება?

2.24. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $P_{x+1} - 6P_{x-1} = 0$;

ბ) $A_x^3 - P_3 A_x^2 = 0$;

გ) $A_x^2 + C_x^1 = 256$;

დ) $\dfrac{A_x^5 - 22A_x^3}{A_x^3} = -4x$.

2.25. იპოვეთ $2C_{x+1}^{x-1} < 5x + 21$ უტოლობის უდიდესი ამონახსნი.

ლექცია 3

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი

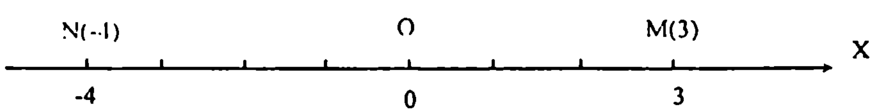
3.1. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა

წრფე, რომელზეც არჩეულია სათავე და მიმართულება, წარმოადგენს ღერძს.

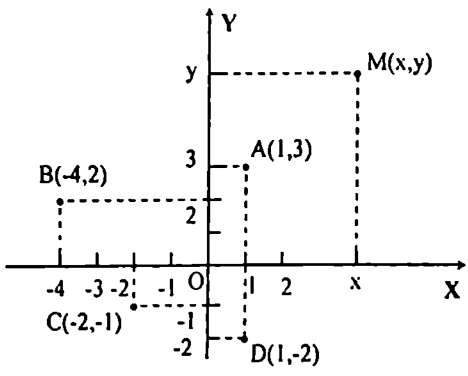
ვთქვათ, მოცემულია *სიგრძის საზომი ერთეული (მასშტაბი).* მაშინ, ყოველ *ნამდვილ რიცხვს* შეიძლება შევუსაბამოთ *ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი* ღერძზე და *პირიქით*. კერძოდ, თუ $x=0$, მაშინ მას შევუსაბამოთ O წერტილი (*სათავე*). თუ $x>0$, მაშინ მას შევუსაბამოთ ღერძის M(x) წერტილი, რომელიც მოთავსებულია O წერტილის *მარჯვნივ* და დაშორებულია O წერტილიდან x *მანძილით*. თუ $x<0$, მაშინ მას შევუსაბამოთ N(x) წერტილი, რომელიც მოთავსებულია O წერტილის *მარცხნივ* და დაშორებულია O წერტილიდან $|x|$ *მანძილით.*

ღერძს, რომლის ყოველ წერტილს შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი, რიცხვითი ღერძი ეწოდება.

აღვნიშნოთ ეს ღერძი OX-ით. OX ღერძზე რომელიმე M წერტილის მდებარეობა სავსებით დახასიათებულია იმ ნამდვილი x რიცხვით, რომელიც მას შეესაბამება. ამ რიცხვს უწოდებენ M წერტილის *კოორდინატს* და წერენ M=M(x). ხშირად, ნახაზებზე ღერძის M(x) წერტილს აწერენ მხოლოდ მის *შესაბამის* x რიცხვს (იხ. ნახ. 3.1) და ნაცვლად ტერმინისა: „M(x) *წერტილი*" ხმარობენ ტერმინს „x *წერტილი*". ეს ფაქტობრივად ნიშნავს, რომ პრაქტიკაში *რიცხვითი ღერძი გაიგივებულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესთან,* ხოლო ტერმინები „x *რიცხვი*" და „x *წერტილი*" იხმარება როგორც *სინონიმები.*



ნახ. 3.1



ნახ. 3.2

სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის მიზნით, შემოვიღოთ ე.წ. **დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. სიბრტყეზე დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა განსაზღვრულია, თუ მოცემულია სიგრძის საზომი ერთეული (მასშტაბი) და ორი ურთიერთმართობული OX და OY ღერძი, რომლებიც იკვეთებიან O წერტილში. ამ ღერძებს უწოდებენ კოორდინატთა ღერძებს, ხოლო O წერტილს – კოორდინატთა სათავეს.** სიბრტყეზე აღებულ ყოველ M წერტილს შევუსაბამოთ ნამდვილ რიცხვთა გარკვეული დალაგებული (x,y) წყვილი, რომელსაც M *წერტილის კოორდინატები* ეწოდება. ამ რიცხვებიდან x-ს, რომელიც OX ღერძზე M *წერტილის გეგმილის კოორდინატია*, ეწოდება M წერტილის *აბსცისა*, ხოლო y-ს, რომელიც OY ღერძზე M წერტილის გეგმილის კოორდინატია, ეწოდება M წერტილის *ორდინატი*. ამ შემთხვევაში წერენ M=M(x,y) (იხ. ნახ. 3.2).

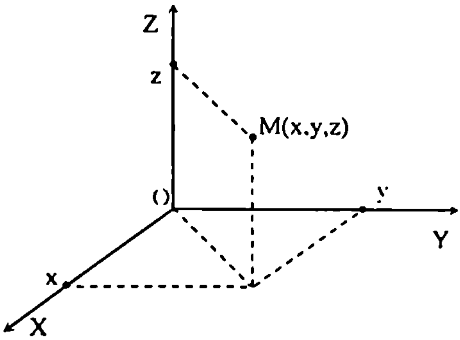
მაგალითად, ნახ. 3.2-ზე აგებულია წერტილები: A=A(1,3), B=B(-4,2), C=C(-2,-1) და D=D(1,-2).

შევნიშნოთ, რომ (x,0) ტიპის წერტილები მდებარეობენ OX ღერძზე, ხოლო (0, y) ტიპის წერტილები – OY ღერძზე.

ანალოგიურად შეგვიძლია დავახასიათოთ წერტილის მდებარეობა *სივრცეში*.

განვიხილოთ სივრცეში *ერთ* წერტილში თანამკვეთი *სამი ურთიერთმართობული რიცხვითი ღერძი*. მათი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ O ასოთი და ვუწოდოთ *კოორდინატთა სათავე*. **რიცხვითი ღერძები აღვნიშნოთ OX-ით, OY-ით, OZ-ით და ვუწოდოთ, შესაბამისად, აბსცისათა ღერძი OX, ორდინატთა ღერძი OY და აპლიკატთა ღერძი OZ.**

განვიხილოთ სივრცის ნებისმიერი M წერტილი. დავაგეგმილოთ M წერტილი *სამივე* საკოორდინატო ღერძზე. სივრცის M წერტილის გეგმილი ღერძზე ეწოდება M წერტილზე



ნახ. 3.3

ღერძის მართობულად გავლებული სიბრტყისა და ამ ღერძის გადაკვეთის წერტილს.

M წერტილის OX, OY და OZ ღერძებზე გეგმილთა *კოორდინატები* განისაზღვრება *ცალსახად*. აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად **x**, **y** და **z** ასოებით.

პირიქით, სივრცის ნებისმიერი წერტილის *მდებარეობა ცალსახად* ხასიათდება ნამდვილ რიცხვთა *დალაგებული სამეულით*. ამ რიცხვებს უწოდებენ M წერტილის კოორდინატებს სივრცეში, შესაბამისად – *აბსცისას, ორდინატს, აპლიკატს* და წერენ $M=M(x,y,z)$ (იხ. ნახ. 3.3).

ვთქვათ, მართკუთხა კოორდინატთა OXY სისტემაში ანუ სიბრტყეზე მოცემულია რაიმე ორი წერტილი: $M_1=M_1(x_1,y_1)$ და $M_2=M_2(x_2,y_2)$, მაშინ M_1 და M_2 წერტილებს შორის **d** მანძილი შემდეგი ფორმულის საშუალებით გამოითვლება

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\,, \qquad (1)$$

ხოლო M_1M_2 მონაკვეთის შუა $M(x,y)$ წერტილის კოორდინატები მოიცემა ფორმულებით:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

ანალოგიურად, თუ სივრცეში მოცემულია რაიმე ორი წერტილი: $M_1=M_1(x_1,y_1,z_1)$ და $M_2=M_2(x_2,y_2,z_2)$, მაშინ M_1 და M_2 წერტილებს შორის **d** მანძილი შემდეგი ფორმულის საშუალებით გამოითვლება

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,,$$

ხოლო M_1M_2 მონაკვეთის შუა $M(x,y,z)$ წერტილის კოორდინატები მოიცემა ფორმულებით:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

მაგალითი 1. მოცემული გვაქვს $A_1A_2A_3$ სამკუთხედი. A_1, A_2 და A_3 წერტილების კოორდინატები არის შესაბამისად: (1,1), (8,1) და $\left(\frac{26}{7},\frac{12\sqrt{6}+7}{7}\right)$. ვიპოვოთ $A_1A_2A_3$ სამკუთხედის ფართობი.

ამოხსნა. (1) ფორმულის გამოყენებით გამოვითვლით $\Delta A_1A_2A_3$-ის გვერდებს:

$$A_1A_2=\sqrt{(1-8)^2+(1-1)^2}=7,$$

$$A_1A_3=\sqrt{\left(\frac{26}{7}-1\right)^2+\left(\frac{12\sqrt{6}+1}{7}-1\right)^2}=5,$$

$$A_2A_3=\sqrt{\left(\frac{26}{7}-8\right)^2+\left(\frac{12\sqrt{6}+7}{7}-1\right)^2}=6.$$

როგორც ვიცით, თუ სამკუთხედის გვერდები ტოლია **a, b** და **c**-სი, მაშინ მისი *ფართობი* შეიძლება გამოვითვალოთ *ჰერონის* შემდეგი ფორმულით

$$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, \qquad (2)$$

სადაც $p=\frac{a+b+c}{2}$. მოცემული სამკუთხედისათვის (2) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)}=6\sqrt{6}$.

პასუხი: $S_{\Delta A_1A_2A_3}=6\sqrt{6}$.

3.2. სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი

მრავალი ამოცანის შესწავლისას მოხერხებულია სხვადასხვა ბუნების ობიექტთა *დალაგებული წყვილების, სამეულების* და ა.შ. გამოყენება. გავიხსენოთ, რომ დალაგებული სიმრავლეების განხილვისას არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება ობიექტთა *დალაგების რიგს.*

მაგალითად, a და b ობიექტების დალაგებული წყვილი არის ახალი ობიექტი, რომელიც (a,b) სიმბოლოთი აღინიშნება. a-ს ეწოდება წყვილის პირველი ელემენტი ან პირველი კომპონენტი, ხოლო b-ს კი მეორე ელემენტი ან მეორე კომპონენტი.

(a,b) და (c,d) წყვილებს ეწოდება ტოლი, თუ a=c და b=d.

A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ყველა შესაძლო დალაგებულ (a,b) წყვილთა სიმრავლეს, სადაც $a \in A$ და $b \in B$. A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი აღინიშნება AxB-თი. ამრიგად,

$$AxB = \{(a,b) \mid a \in A \text{ და } b \in B\}.$$

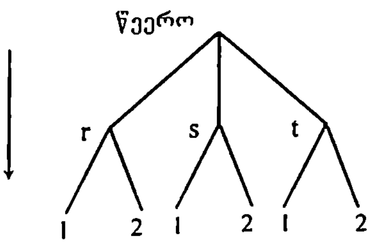
მაგალითად, თუ A={r, s, t} და B={1, 2}, მაშინ

$$AxB = \{(r,1), (r,2), (s,1), (s,2), (t,1), (t,2)\}.$$

დეკარტული ნამრავლის მოცემა მოხერხებულია ცხრილის მეშვეობით. ჩვენი მაგალითისათვის ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

A \ B	1	2
r	(r,1)	(r,2)
s	(s,1)	(s,2)
t	(t,1)	(t,2)

დეკარტული ნამრავლის წარმოდგენა შეიძლება ე.წ. *„დიაგრამა-ხის"* საშუალებითაც. *„დიაგრამა-ხე"* რამდენიმე *ნაბიჯისავან* შედგება.

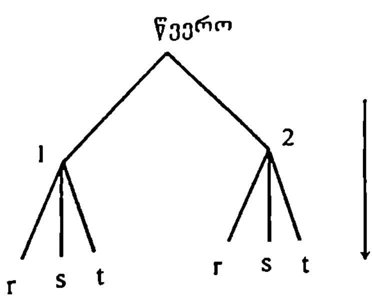


ნახ. 3.4

ნაბიჯი 1. *წვეროდან პირველ დონეზე* წერტილებით აღვნიშნავთ A სიმრავლის ელემენტებს. ესენია AxB ნამრავლის ყველა შესაძლო პირველი კომპონენტები;

ნაბიჯი 2. პირველი დონის ყოველი წერტილიდან *მეორე დონეზე* გამოდის *„ტოტები"* B სიმრავლის ელემენტებით. მიღებული წერტილები AxB ნამრავლის ყველა შესაძლო მეორე კომპონენტებია;

ნაბიჯი 3. AxB ნამრავლის ელემენტები მიიღება ამ *„დიაგრამა-ხის" ყველა ტოტის გავლით წვეროდან ძირამდე* (ნახ. 3.4).



ნახ. 3.5

BxA სიმრავლის *„დიაგრამა-ხესა"* და *ცხრილს* ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 3.5):

B \ A	r	s	t
1	(1,r)	(1,s)	(1,t)
2	(2,r)	(2,s)	(2,t)

$$B \times A = \{(1,r), (1,s), (1,t), (2,r), (2,s), (2,t)\}.$$

როგორც ვხედავთ, $A \times B \neq B \times A$.

$A \times B$ ნამრავლის ელემენტები შესაბამის ცხრილში განლაგებულია 3 *სტრიქონად* და 2 *სვეტად*, ამიტომ

$$n(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6, \text{ ე.ი. } n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

საზოგადოდ, თუ **A** და **B** სასრული სიმრავლეებისათვის $n(A)=m$ და $n(B)=k$, მაშინ $A \times B$ დეკარტული ნამრავლის ელემენტები განლაგებულია ცხრილში, რომელსაც აქვს **m** სტრიქონი და **k** სვეტი და $n(A \times B)=m \cdot k$.

ამრიგად, სასრული A და B სიმრავლეებისათვის სამართლიანია ფორმულა

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B). \tag{3}$$

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ $A=\varnothing$ ან $B=\varnothing$, მაშინ $A \times B=\varnothing$.

ანალოგიურად განიმარტება *სამი* და *მეტი* სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი. მაგალითად, **A, B** და **C** სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლია დალაგებული სამეულების სიმრავლე

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B \text{ და } c \in C\}.$$

შესაძლებელია (3) ტოლობის განზოგადება. კერძოდ, თუ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ სასრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_m).$$

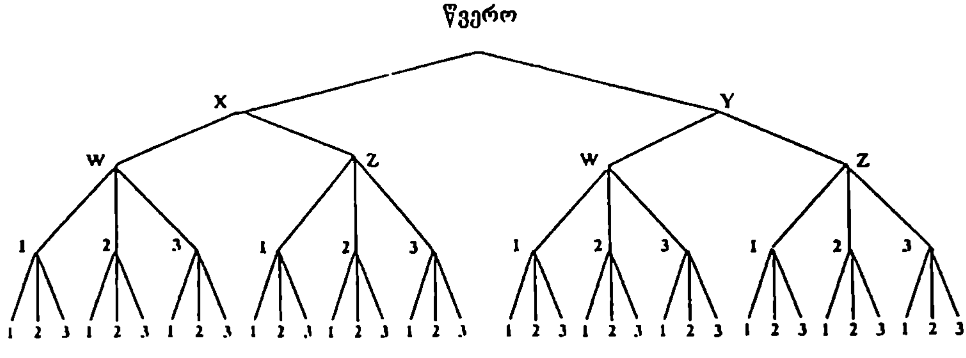
საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 2. ვთქვათ, მანქანის სანომრე ნიშანი შედგება ორი ასოსა და მათ მერე მდგომი ორი ციფრისაგან. პირველი ასო შეიძლება იყოს X ან Y. მეორე W ან Z. ხოლო ციფრები – 1, 2 ან 3. შევადგინოთ ყველა შესაძლო სანომრე ნიშანი.

ამოხსნა. ვთქვათ,

$$A=\{X,Y\}, B=\{W,Z\} \text{ და } C=\{1,2,3\}.$$

ყველა შესაძლო სანომრე ნიშანი იქნება ოთხი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი $A \times B \times C \times C$. შევადგინოთ „დიაგრამა-ხე“, რის შემდეგაც ადვილად ამოვწერთ აღნიშნული სიმრავლის ელემენტებს (იხ. ნახ. 3.6).



ნახ. 3.6

XW11	XW12	XW13
XW21	XW22	XW23
XW31	XW32	XW33
XZ11	XZ12	XZ13
XZ21	XZ22	XZ23
XZ31	XZ32	XZ33
YW11	YW12	YW13
YW21	YW22	YW23
YW31	YW32	YW33
YZ11	YZ12	YZ13
YZ21	YZ22	YZ23
YZ31	YZ32	YZ33

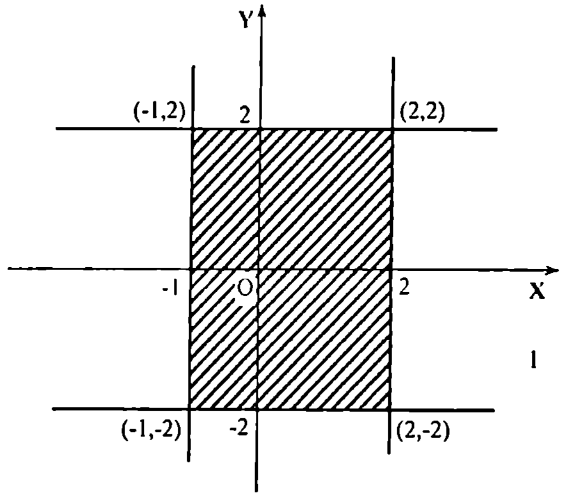
სულ გვექნება $n(AxBxCxC) = n(A) \cdot n(B) \cdot n^2(C) = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 36$ სანომრე ნიშანი.

ორი რიცხვითი სიმრავლის დეკარტულ ნამრავლს აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

მაგალითი 3. ვთქვათ, $A = [-1,2]$, $B = [-2,2]$. მოვიყვანოთ AxB ნამრავლის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

ამოხსნა. დეკარტული ნამრავლის განმარტების თანახმად $A \times B = \{(a,b) \mid a \in [-1,2], b \in [-2,2]\}$, ე.ი. $A \times B$ წარმოადგენს სიმრავლეს სიბრტ-

ყის ყველა ისეთი (a,b) წერტილისა, რომელთა აბსცისები და ორდინატები, შესაბამისად მოცემულ რიცხვით შუალედებს ეკუთვნის. ამგვარად, A×B ნამრავლი OXY საკოორდინატო სიბრტყეზე ასე შეიძლება გამოვსახოთ (ნახ. 3.7-ზე დაშტრიხული მართკუთხედი).



ნახ. 3.7

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას წარმოადგენს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა:
   ა) სიბრტყეზე?
   ბ) სივრცეში?
2. რას ეწოდება წერტილის კოორდინატები:
   ა) სიბრტყეზე?
   ბ) სივრცეში?
3. სიბრტყეზე მდებარე წერტილებიდან რა ტიპის წერტილები ძევს:
   ა) OX ღერძზე?
   ბ) OY ღერძზე?
4. მოიყვანეთ ორ მოცემულ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა:
   ა) სიბრტყეზე;
   ბ) სივრცეში.
5. მოიყვანეთ მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულა:
   ა) სიბრტყეზე;
   ბ) სივრცეში.
6. რა არის დალაგებული წყვილი?
7. რას ეწოდება სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი?
8. არაცარიელი A და B სიმრავლეებისათვის სამართლიანია თუ არა ტოლობა $A \times B = B \times A$? (პასუხი დაასაბუთეთ).
9. რამდენი ელემენტია ორი სასრული სიმრავლის დეკარტულ ნამრავლში?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

3.1. ააგეთ შემდეგი წერტილები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში:

ა) (0,0);

ბ) (0,1);

გ) (1,0);

დ) (-1,0);

ე) (0,-1);

ვ) (1,2);

ზ) ($\sqrt{3}$,-1);

თ) (-1,-3);

ი) (0,0,1);

კ) (0,1,0);

ლ) (-1,0,0);

მ) (1,-1,0);

ნ) (1,0,-1);

ო) (2,1,3).

3.2. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები, თუ:

ა) $A=A(1,7)$, $B=B(0,\sqrt{2})$;

ბ) $A=A(-\sqrt{2},1)$, $B=B(\sqrt{2},-1)$;

გ) $A=A(\sqrt{5},-\sqrt{3})$, $B=B(-\sqrt{5},\sqrt{3})$;

დ) $A=A(1,7)$, $B=B(2\sqrt{5},-1)$;

ე) $A=A(3,1,-2)$, $B=B(5,-2,4)$;

ვ) $A=A(\sqrt{3},2,-4)$, $B=B(1,\sqrt{2},-\sqrt{5})$;

ზ) $A=A(5,0,\pi)$, $B=B(-\pi,1,-\pi)$;

თ) $A=A(\lg 5, \log_4 8,-3)$,

$B=B(\lg 20, \log_4 2,-7)$.

3.3. $A=A(x_1,y_1)$ და $B=B(x_2,y_2)$ წერტილები სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, თუ $x_1=-x_2$ და $y_1=-y_2$. გაარკვიეთ დასახელებულ წერტილთა რომელი წყვილია სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ:

ა) $A(-5,1)$, $B(5,-1)$;

ბ) $A(-\sqrt{2},1)$, $B(\sqrt{2},5)$;

გ) $A(\sqrt{3},-\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{5},\sqrt{2})$;

დ) $A(-\sqrt{7},\sqrt{13})$, $B(\sqrt{7},-\sqrt{13})$.

3.4. $A(x_1,y_1)$ და $B(x_2,y_2)$ წერტილები სიმეტრიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ, თუ $x_1=x_2$ და $y_1=-y_2$. გაარკვიეთ, დასახელებულ წერტილთა რომელი წყვილია სიმეტრიული აბსცისათა ღერძის მიმართ:

ა) $A(-6,7)$, $B(7,-6)$;

ბ) $A(\sqrt{2},3)$, $B(\sqrt{2},-3)$;

გ) $A(\sqrt{7},4)$, $B(\sqrt{7},-4)$;

დ) $A(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

3.5. $A(x_1,y_1)$ და $B(x_2,y_2)$ წერტილები სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, თუ $x_1=-x_2$ და $y_1=y_2$. გაარკვიეთ, დასახელებულ წერტილთა რომელი წყვილია სიმეტრიული ორდინატთა ღერძის მიმართ:

ა) $A(-9,11)$, $B(9,-10)$;

ბ) $A(-\sqrt{5},15)$, $B(\sqrt{5},-15)$;

გ) $A(-\sqrt{11},13)$, $B(\sqrt{11},13)$;

დ) $A(-\sqrt{7},\sqrt{7})$, $B(\sqrt{7},\sqrt{7})$.

3.6. გაარკვიეთ, შეიძლება თუ არა წერტილთა წყვილი იყოს სიმეტრიული:

ა) ერთდროულად აბსცისათა ღერძის და კოორდინატთა სათავის მიმართ. მოიყვანეთ მაგალითები;

ბ) ერთდროულად ორდინატთა ღერძის და კოორდინატთა სათავის მიმართ. მოიყვანეთ მაგალითები;

გ) ერთდროულად აბსცისათა ღერძის და ორდინატთა ღერძის მიმართ.

3.7. იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის, თუ:

ა) $A=A(3,5)$, $B=B(1,2)$;

ბ) $A=A(0,1)$, $B=B(-1,0)$;

გ) $A=A(\sqrt{3},1)$, $B=B(-\sqrt{2},-\sqrt{5})$;

დ) $A=A(2,-3,6)$, $B=B(-2,3,-6)$;

ე) $A=A(1,\pi,-4)$, $B=B(\pi,2,-4)$;

ვ) $A=A(\sqrt{7},1,5)$, $B=B(1,-3,0)$.

3.8. დაადგინეთ A და B წერტილებიდან, რომელი წერტილი უფრო მეტადაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან:

ა) $A=A(\sqrt{2},1)$, $B=B(\sqrt{2},\sqrt{2})$;

ბ) $A=A(-\sqrt{7},\sqrt{5})$, $B=B(-\sqrt{3},3)$;

გ) $A=A(-\sqrt{11},5)$, $B=B(\sqrt{11},-5)$;

დ) $A=A(-\sqrt{2},3)$, $B=B(\sqrt{2},3)$;

ე) $A=A(\pi,2,4)$, $B=B(\sqrt{3},5,\sqrt{2})$.

3.9. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი რომლის წვეროებია:

ა) $A=A(0,0)$, $B=B(0,2)$, $C=C(-1,0)$;

ბ) $A=A(-2,-2)$, $B=B(-2,2)$, $C=C(-4,-2)$;

გ) $A=A(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $B=B(\sqrt{2},\sqrt{2}+3)$, $C=C(\sqrt{2}+4,\sqrt{2})$;

დ) $A=A(a,a)$, $B=B(a(\sqrt{3}+1),a)$, $C=C\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}a,\frac{3}{2}a\right)$;

ე) $A=A(1,0,0)$, $B=B(0,1,0)$, $C=C(0,0,1)$.

3.10. იპოვეთ x და y, თუ:

ა) $(x-2y,3)=(3,x+y)$;

ბ) $(x+y,3)=(1,x-y)$.

3.11. ცხრილისა და „დიაგრამა-ხის" საშუალებით იპოვეთ $A\times B$, $B\times A$, $A\times A$ და $B\times B$, თუ:

ა) $A=\{4,v\}$, $B=\{q,r\}$;

ბ) $A=\{a, b, c, d,\}$, $B=\{0,1,2\}$;

გ) $A=\{3\}$, $B=\{0,1,a\}$.

3.12. იპოვეთ A, B, $A\cup B$, $A\cap B$ და $A\backslash B$ სიმრავლეები, თუ ცნობილია, რომ $A\times B$ არის:

ა) $\{(1,0),(1,7),(8,0),(8,7),(0,0),(0,7)\}$;

ბ) $\{(1,\varnothing),(1,\{2\}),(2,\varnothing),(2,\{2\})\}$.

3.13. დაადგინეთ, წარმოადგენს თუ არა სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლს წყვილთა შემდეგი სიმრავლე? პასუხი დაასაბუთეთ.

$\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$.

3.14. შეიძლება თუ არა სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი იყოს ხუთელემენტიანი? პასუხი დაასაბუთეთ.

3.15. იპოვეთ $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$ და $(A \times B) \cap (B \times A)$. მოიყვანეთ მათი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში:

ა) $A=[-2,1]$, $B=[0,3]$;

ბ) $A=]1,3]$, $B=[2,4]$;

გ) $A=\{3\}$, $B=[2,4]$;

დ) $A=[0,1[$, $B=\{5\}$;

ე) $A=R$, $B=[-1,3]$;

ვ) $A=]0,1[$, $B=R$;

ზ) $A=N$, $B=\{-4\}$;

თ) $A=Z$, $B=R$;

ი) $A=[0,1[$, $B=[0,1] \cup [2,3]$.

3.16. „დიაგრამა-ხის" საშუალებით იპოვეთ $A \times B \times B$, თუ $A=\{a, p, q, t\}$ და $B=\{1;2\}$.

3.17. ბიზნესმენს განზრახული აქვს X, Y და Z ქალაქებიდან თითოეულში გახსნას განსხვავებული ტიპის A, B და C საწარმოებიდან ერთ-ერთი. შეადგინეთ სათანადო „დიაგრამა-ხე" და განსაზღვრეთ რამდენი ხერხით შეუძლია ბიზნესმენს თავისი განზრახვის განხორციელება.

ლექცია 4

ასახვა. რიცხვითი ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა

4.1. ასახვა. ფუნქციის გრაფიკი

ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი ორი **X** და **Y** სიმრავლე და წესი f, რომლის მიხედვითაც **X** სიმრავლის ყოველ **x** ელემენტს **Y** სიმრავლის ერთადერთი **y** ელემენტი შეესაბამება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ **მოცემულია f ასახვა (ფუნქცია) X სიმრავლისა Y სიმრავლეში** და ამ ფაქტს ასეთნაირად ჩაწერენ:

$$\mathbf{f{:}X\to Y} \quad \text{ან} \quad \mathbf{X\xrightarrow{f}Y}.$$

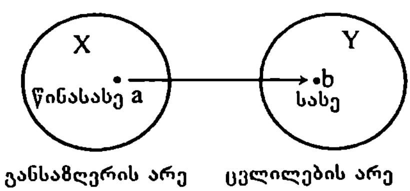
x-ს დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი, ხოლო y-ს დამოკიდებული ცვლადი ეწოდება.

ის ფაქტი, რომ f ასახვა $a\in X$ ელემენტს შეუსაბამებს $b\in Y$ ელემენტს, ასე ჩაიწერება:

$$\mathbf{a\to b} \quad \text{ან} \quad \mathbf{b=f(a)}.$$

b ელემენტს a ელემენტის სახეს, ხოლო a ელემენტს b-ს წინასახეს უწოდებენ.

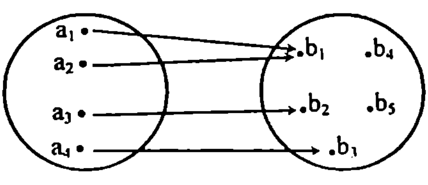
X სიმრავლეს f ასახვის განსაზღვრის არეს უწოდებენ და D-ით აღნიშნავენ, ხოლო Y სიმრავლეს f ასახვის ცვლილების არეს უწოდებენ და R-ით აღნიშნავენ.



ნახ. 4.1

სქემატურად ასახვა შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ (ნახ. 4.1)

ასახვის განსაზღვრა არ გამორიცხავს, რომ განსხვავებულ წინასახეებს ერთი და იგივე სახე შეესაბამებოდეს. მაგალითად, ქვემოთ ისრებით მოცემული შესაბამისობა არის ასახვა (ნახ. 4.2).



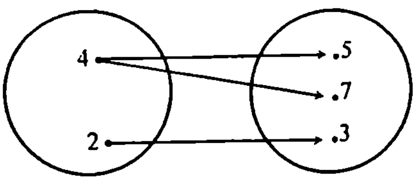
ნახ. 4.2

არ გამოირიცხება აგრეთვე, რომ ცვლილების არის ზოგიერთ ელემენტს არ გააჩ-

ნდეს წინასახე. ნახ. 4.2-ზე ასეთი ელემენტებია b_4 და b_5. ისინი სახეთა სიმრავლეს არ მიეკუთვნებიან.

ყველა სახისაგან შემდგარ სიმრავლეს f ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლეს უწოდებენ და E_f, ზოგჯერ კი f(X) სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ნახ. 4.2-ზე მოცემული f ასახვისათვის $E_f=\{b_1,b_2,b_3\}$. შევნიშნოთ, რომ ამ ნახაზზე, განსაზღვრის არის ყოველი წერტილიდან გამოდის მხოლოდ ერთი ისარი, რაც სქემატურად იმ ძირითად გარემოებას გამოხატავს, რომ f ასახვისას განსაზღვრის არის ყოველ x ელემენტს მნიშვნელობათა სიმრავლის ერთადერთი y ელემენტი შეესაბამება. ნახ. 4.3-ზე გამოსახულია შესაბამისობა, რომელიც არ წარმოადგენს ასახვას. აქ 4-ს ეთანადება ორი განსხვავებული ელემენტი 5 და 7. ცხადია, ასეთი შესაბამისობა არაა ასახვა.



ნახ. 4.3

ფუნქციის მოსაცემად ნახ. 4.2-ზე მოყვანილ ისრებით გამოსახვასთან ერთად წყვილების დასახელების წესსაც იყენებენ. კერძოდ, ნახ. 4.2-ზე ისრებით მოცემული ფუნქცია წყვილების სახით ასე ჩაიწერება:

$$(a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), (a_4,b_4).$$

გამოიყენება ფუნქციის აღწერითი წესით მოცემაც.

მაგალითი.]0;1[შუალედში მოთავსებულ ყოველ უკვეც წილადს, რომლის მნიშვნელია 8, შევუსაბამოთ თავის მრიცხველზე 5-ით მეტი რიცხვი.

ნათელია, რომ ამ მაგალითში აღწერილი წილადებია:

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \text{ და } \frac{7}{8},$$

ხოლო შესაბამისობაში მყოფი რიცხვები კი:

$$6, 8, 10, \text{ და } 12.$$

ასე რომ წყვილების სახით აღნიშნული ფუნქცია მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{1}{8},6\right), \left(\frac{3}{8},8\right), \left(\frac{5}{8},10\right) \text{ და } \left(\frac{7}{8},12\right).$$

ისეთ ასახვას, რომლის განსაზღვრის და ცვლილების არეები რიცხვითი სიმრავლეებია, რიცხვითი ფუნქცია ეწოდება. შემდგომში ტერმინ „რიცხვითი ფუნქციის“ ნაცვლად გამოვიყენებთ „ფუნქციას“.

ფუნქციის მოსაცემად ყველაზე ხშირად იყენებენ *ანალიზურ, ცხრილურ* და *გრაფიკულ* ხერხებს.

ანალიზური ხერხი ფუნქციის ფორმულის საშუალებით მოცემას გულისხმობს.

მაგალითად, $y = 2x^2 + 5x - 1$ არის *ანალიზური* ხერხით მოცემული ფუნქცია. აქ ფორმულის მეშვეობით მოცემულია ის მათემატიკური მოქმედებები, რომლებიც უნდა შევასრულოთ დამოუკიდებელ x ცვლადზე, რომ მივიღოთ დამოკიდებული y ცვლადის შესაბამისი მნიშვნელობა. მოყვანილ მაგალითში შესაბამისობის წესი (ფუნქცია) ასეთნაირად შეიძლება გამოვსახოთ:

$$\forall x \in R : x \to 2x^2 + 5x - 1.$$

ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს *ცხრილის* საშუალებით. ეს ხერხი მდგომარეობს შემდეგში: ამოვწეროთ დამოუკიდებელი ცვლადისა და დამოკიდებული ცვლადის შესაბამისი მნიშვნელობები.

მაგალითად, შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი ცხრილი:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	11	-2,5	-7,1	13	$2\sqrt{2}$	π	$\sqrt[3]{17}$	33

ცხრილიდან ჩანს, დამოკიდებული y ცვლადის რომელი მნიშვნელობები შეესაბამება დამოუკიდებელი x ცვლადის მნიშვნელობებს. აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე უსასრულო სიმრავლეა, მაშინ ცხრილის სახით ფუნქციის მოცემა, საზოგადოდ, შეუძლებელია.

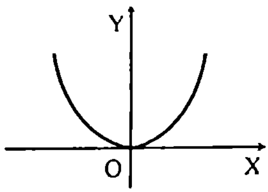
ფუნქცია შეიძლება მოცემული იქნეს *გრაფიკულადაც*.

თავდაპირველად განვიხილოთ *ფუნქციის გრაფიკის* ცნება. თუ გვაქვს განსაზღვრული $y = f(x)$ ფუნქცია, მაშინ x-ის სხვადასხვა მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ შესაბამისად y-ის მნიშვნელობებს. ამგვარად, მივიღებთ (x,y) წყვილთა სიმრავლეს, რომელსაც როგორც ვიცით, OXY სიბრტყეზე წერტილთა გარკვეული სიმრავლე შეესაბამება. თუ $M = M(x,y)$ წერტილი ამ სიმრავლიდანაა აღებული, ცხადია გვექნება $y = f(x)$.

f ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება OXY სიბრტყეზე ყველა იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც y=f(x). მას G-ით აღნიშნავენ.

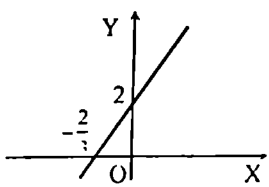
ხშირ შემთხვევაში, ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წირს საკოორდინატო **OXY** სიბრტყეზე. ამიტომ **y=f(x)** თანაფარდობას საზოგადოდ უწოდებენ წირის განტოლებას.

მაგალითი 1. $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკია პარაბოლა (ნახ. 4.4).



ნახ. 4.4

მაგალითი 2. $y=3x+2$ ფუნქციის გრაფიკია წრფე (ნახ. 4.5).



ნახ. 4.5

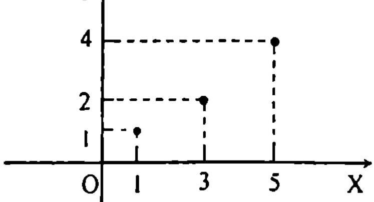
მაგალითი 3. ფუნქციის გრაფიკი შეიძლება დისკრეტული წერტილებისაგან შედგებოდეს. განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$\varphi:\{1,3,5\}\to R,$$

სადაც $\varphi(1)=1$, $\varphi(3)=2$ და $\varphi(5)=4$ ამ ფუნქციის გრაფიკი

$$G_\varphi=\{(1,1),(3,2),(5,4)\}$$

შედგება სამი წერტილისაგან (ნახ. 4.6).



ნახ. 4.6

ამრიგად, ფუნქციის „დანახვა" შეიძლება გრაფიკის საშუალებით. გრაფიკი, როგორც აღვნიშნეთ, არის დალაგებული წყვილების საშუალებით განსაზღვრული სიბრტყის წერტილთა გარკვეული სიმრავლე.

ახლა, ბუნებრივია, დავსვათ ასეთი კითხვა: სიბრტყის წერტილთა როგორი ქვესიმრავლით შეიძლება ფუნქციის მოცემა, ან, რაც იგივეა, (x,y) დალაგებულ წყვილთა როგორი სიმრავლე შეიძლება იყოს ფუნქციის გრაფიკი?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად გავიხსენოთ ფუნქციის განმარტება, რომლის თანახმადაც ყოველ x-ს შეესაბამება ერთადერთი მნიშვნელობა $f(x)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $(x,f(x))$ წყვილთა სიმრავლეში არ გვექნება ისეთი წყვილები, რომელთა პირველი კოორდინატები ტოლია და მეორე კოორდინატები კი განსხვავებული. ამ დაკვირვების გათვალისწინებით შეგვიძლია შემდეგი დასკვნის გაკეთება:

თუ

$$H=\{(x,y) \mid x\in X,\ y\in Y\}$$

სიმრავლე არ შეიცავს ისეთ წყვილებს, რომელთა პირველი კოორდინატები ტოლია, ხოლო მეორე კოორდინატები კი განსხვავებული, მაშინ H სიმრავლე განსაზღვრავს ფუნქციას X-დან Y-ში.

მაგალითი 4. $H=\{(1,2),\ (3,7),\ (0,1)\}$ წყვილთა სიმრავლე განსაზღვრავს ფუნქციას

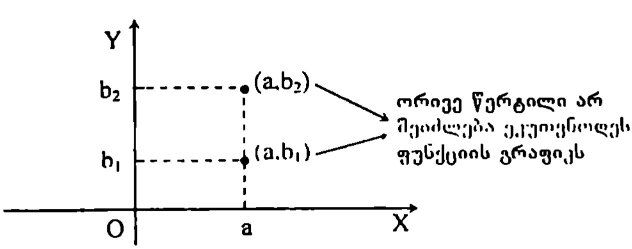
$$\varphi:\{0,1,3\}\to\{1,2,7\}$$

მოცემულს შემდეგი წესით:

$$1\to 2,\quad 3\to 7,\quad 0\to 1 \quad \text{ან} \quad \varphi(1)=2,\quad \varphi(3)=7,\quad \varphi(0)=1.$$

მაგალითი 5. $H=\{(2,5),\ (2,3),\ (5,4)\}$ წყვილთა სიმრავლე არ განსაზღვრავს ფუნქციას, რადგან H სიმრავლე შეიცავს $(2,5)$ და $(2,3)$ წყვილებს, რომელთაც პირველი კოორდინატები ტოლია, ხოლო მეორე კოორდინატები განსხვავებული.

ამრიგად, **$H=\{(x,y) \mid x\in X,\ y\in Y\}$ სიმრავლე განსაზღვრავს ფუნქციას, თუ იგი არ შეიცავს (a,b_1) და (a,b_2) სახის წყვილებს** (ნახ. 4.7).

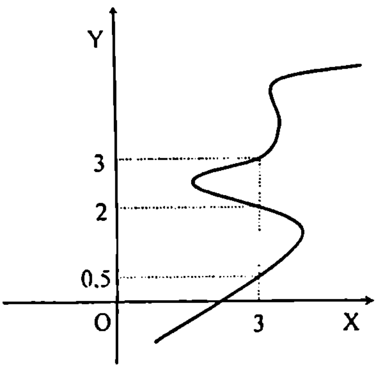


ნახ. 4.7

(a,b_1) და (a,b_2) წერტილებიდან ფუნქციის გრაფიკს შეიძლება ეკუთვნოდეს მხოლოდ ერთ-ერთი მათგანი. ამიტომ (a,b_1) და

(a,b_2) წერტილებზე გამავალმა $x=a$ ვერტიკალურმა წრფემ ფუნქციის გრაფიკი შეიძლება მხოლოდ ერთ წერტილში გადაკვეთოს.

მაგალითი 6. ნახ. 4.8-ზე მოცემული წირი არ წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკს, რადგან $x=3$-ის ტოლ არგუმენტს შეესაბამება სამი განსხვავებული ორდინატი: 0,5; 2 და 3.



ნახ. 4.8

ამრიგად, სამართლიანია ვერტიკალური წრფის წესი: სიბრტყეში მდებარე წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკს, თუ ნებისმიერი ვერტიკალური წრფე ამ სიმრავლეს გადაკვეთს ან მხოლოდ ერთ წერტილში ან საერთოდ არ გადაკვეთს.

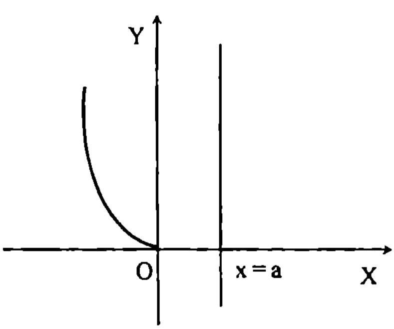
$x=a$ ვერტიკალური წრფე არ გადაკვეთს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე არ შეიცავს a წერტილს, ე.ი. $a\notin D_f$.

მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია

$$y=x^2 :]-\infty,0]\to R.$$

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D_f=]-\infty,0]$.

არცერთი დადებითი a-სათვის $x=a$ წრფე არ გადაკვეთს ფუნქციის გრაფიკს, რადგან $a\notin D_f$ (ნახ. 4.9).



ნახ. 4.9

4.2. მაგალითები ფუნქციის განსაზღვრის არის დადგენაზე

შევთანხმდეთ, რომ, თუ ფუნქციის მოცემისას არ იქნება მითითებული მისი განსაზღვრის არე, მაშინ განსაზღვრის არედ მივიჩნიოთ სიმრავლე არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობისა, რომელთათვისაც მოცემულ ფუნქციას აზრი აქვს.

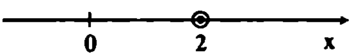
ამ შეთანხმების საფუძველზე დავადგინოთ განსაზღვრის არეები შემდეგი ფუნქციებისათვის:

1. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; 2. $\varphi(x)=\sqrt{x+4}$;

3. $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; 4. $F(x)=\log_4(x+3)$;

5. $H(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-5}$;

მაგალითი 1. წილადის მნიშვნელი არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს – $x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$, ამიტომ $D_f=R\setminus\{2\}$. ე.ი. $D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$, ანუ $D_f=\{x\,|\,x\in R$ და $x\neq 2\}$ (ნახ. 4.10).

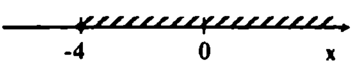


ნახ. 4.10

მაგალითი 2. ცხადია, რომ ფესვქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს არაუარყოფითი, ე.ი.

$$x+4\geq 0 \Rightarrow x\geq -4,$$

ამიტომ $D_\varphi=[-4,+\infty[$, ანუ $D_\varphi=\{x|x\in R$ და $x\geq -4\}$ (ნახ. 4.11).

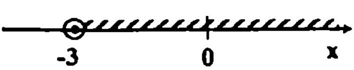


ნახ. 4.11

მაგალითი 3. $x^2+1=0 \Rightarrow x\in\varnothing$, ე.ი. ნებისმიერი x-სათვის წილადის მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ

$$D_g=R, \text{ ანუ } D_g=]-\infty,+\infty[.$$

მაგალითი 4. მათემატიკის სასკოლო კურსიდან ცნობილია, რომ $\log_a b$ გამოსახულებას აზრი აქვს, როცა $\begin{cases} a>0, \\ a\neq 1, \\ b>0. \end{cases}$

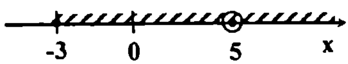


ნახ. 4.12

ამიტომ $F(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არის დასადგენად ვხსნით უტოლობას $x+3>0$.

ამრიგად, $D_F =]-3,+\infty[$, ანუ $D_F = \{x \mid x \in R$ და $x > -3\}$(ნახ. 4.12).

მაგალითი 5. პირველი ორი შემთხვევის გათვალისწინებით ადვილად მივიღებთ, რომ $H(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა იმ x რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს



ნახ. 4.13

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow D_H = [-3,5[\cup]5,+\infty[$$

(იხ. ნახ. 4.13).

4.3. ფუნქციათა კომპოზიცია

ვთქვათ, მოცემულია ორი ფუნქცია $\mathbf{f}$ და $\mathbf{g}$ და შემდეგი სიმრავლე $\mathbf{D}=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{D_g}$ და $\mathbf{g(x)} \in \mathbf{D_f}\}$.

$\mathbf{f}$ და $\mathbf{g}$ ფუნქციების კომპოზიცია ეწოდება $\mathbf{D}$ სიმრავლეზე შემდეგნაირად განსაზღვრულ ფუნქციას

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f(g(x))}.$$

$\mathbf{f}$ და $\mathbf{g}$ ფუნქციების კომპოზიცია აღინიშნება $\mathbf{f \circ g}$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. ვთქვათ, $f(x)=x+1$ და $g(x)=x^3$. ვიპოვოთ:

ა) $(f \circ g)(2)$; ბ) $(g \circ f)(2)$; გ) $(f \circ g)(x)$; დ) $(g \circ f)(x)$.

განმარტების თანახმად,

ა) $(f \circ g)(2)=f(g(2)) = f(2^3)=f(8)=8+1=9$;

ბ) $(g \circ f)(2)=g(f(2)) = g(2+1)=g(3)=3^3=27$;

გ) $(f \circ g)(x)=f(g(x)) = f(x^3)=x^3+1$;

დ) $(g \circ f)(x)=g(f(x)) = g(x+1)=(x+1)^3$.

როგორც განხილული მაგალითიდან ჩანს, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ და $g(x)=\sqrt{x}$. ვიპოვოთ:

ა) $(f\circ g)(9)$; ბ) $(f\circ g)(4)$; გ) $(g\circ f)(6)$.

განმარტების თანახმად,

ა) $(f\circ g)(9)=f\big(g(9)\big)=f(3)=\dfrac{1}{3-2}=1$;

ბ) $(f\circ g)(4)=f\big(g(4)\big)=f(2)=\dfrac{1}{2-2}$ არ განისაზღვრება;

გ) $(g\circ f)(6)=g\big(f(6)\big)=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$.

მაგალითი 3. პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად მიღებული შემოსავალი R დამოკიდებულია ამ პროდუქციის p საცალო ფასზე:

$$R=300p-2p^2.$$

პროდუქციის საცალო ფასი p კი დამოკიდებულია ბაზრის მოთხოვნაზე:

$$p=150-\frac{1}{2}x,$$

სადაც x პროდუქციის რაოდენობაა. ვიპოვოთ შემოსაელის დამოკიდებულება ბაზრის მოთხოვნაზე.

გვაქვს

$$R=R(p)=300p-2p^2 \text{ და } p=p(x)=150-\frac{1}{2}x,$$

ამიტომ ფუნქციათა კომპოზიციის განმარტების თანახმად

$$(R\circ p)(x)=R\big(p(x)\big)=R\left(150-\frac{1}{2}x\right)=$$

$$=300\cdot\left(150-\frac{1}{2}x\right)-2\left(150-\frac{1}{2}x\right)^2=150x-0{,}5x^2.$$

მაშასადამე, შემოსავლის დამოკიდებულება ბაზრის მოთხოვნაზე მოიცემა შემდეგი ფუნქციით

$$R(x)=150x-0{,}5x^2.$$

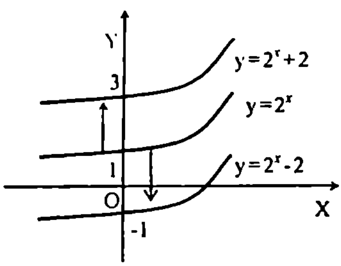
4.4. ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა

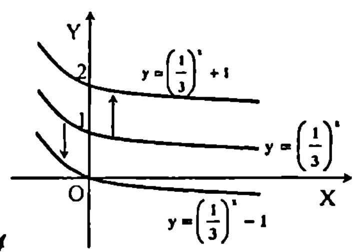
ჩვენ განმარტებული გვქონდა **f** ფუნქციის გრაფიკი. ახლა გავეცნოთ წესებს, რომელთა საშუალებითაც $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან მარტივი *გეომეტრიული გარდაქმნებით* მიიღება ზოგიერთი უფრო რთული ფუნქციის გრაფიკი.

გარდაქმნა 1. $y=f(x) \rightarrow y=f(x)+b$.

$y=f(x)+b$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $|b|$ *მანძილზე პარალელური გადატანით* **OY** ღერძის მიმართულებით (ზემოთ), თუ $b>0$ და **OY** ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ქვემოთ), თუ $b<0$.

მაგალითი 1. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის ($y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$) გრაფიკის გარდაქმნა (ნახ. 4.14).



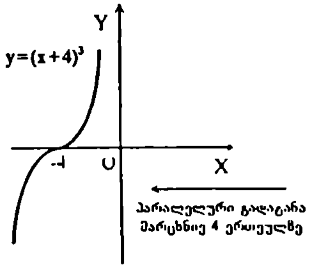


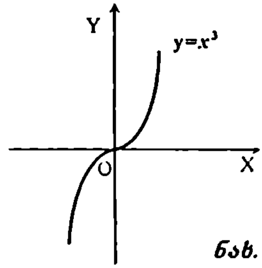
ნახ. 4.14

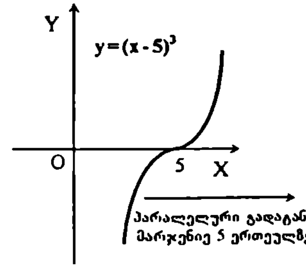
გარდაქმნა 2. $y=f(x) \rightarrow y=f(x+a)$.

$y=f(x+a)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $|a|$ *მანძილზე პარალელური გადატანით* **OX** ღერძის მიმართულებით (მარჯვნივ), თუ $a<0$ და **OX** ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით (მარცხნივ), თუ $a>0$.

მაგალითი 2. განვიხილოთ $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკის – კუბური პარაბოლას გარდაქმნა. ნახ. 4.15-ზე ნაჩვენებია $y=(x+4)^3$ და $y=(x-5)^3$ ფუნქციების გრაფიკების მიღება $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკიდან.







ნახ. 4.15

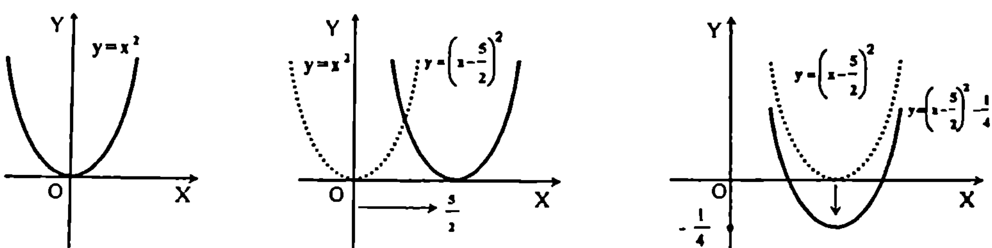
გარდაქმნა 3. $y = f(x) \rightarrow y = f(x+a) + b$.

ეს შემთხვევა წარმოადგენს წინა ორი შემთხვევის კომბინაციას. მაშასადამე, $y=f(x+a)+b$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან **OX** და **OY** ღერძების გასწვრივ პარალელური გადატანით, შესაბამისად, $|a|$ და $|b|$ მანძილებით. ამასთან, გადატანის მიმართულებები განსაზღვრულია a და b სიდიდეების ნიშნების მიხედვით წინა ორი გარდაქმნის შესაბამისად.

მაგალითი 3. განვიხილოთ $y = x^2 - 5x + 6$ კვადრატული ფუნქცია და კვადრატული სამწევრიდან გამოვყოთ ორწევრის კვადრატი

$$y = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = x^2$ პარაბოლის $\frac{5}{2}$ ერთეულზე პარალელური გადატანით OX ღერძის მიმართულებით და მიღებული გრაფიკის $\frac{1}{4}$ ერთეულებზე პარალელური გადატანით OY ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 4.16).



ნახ. 4.16

განვიხილოთ წილად-წრფივი ფუნქცია.

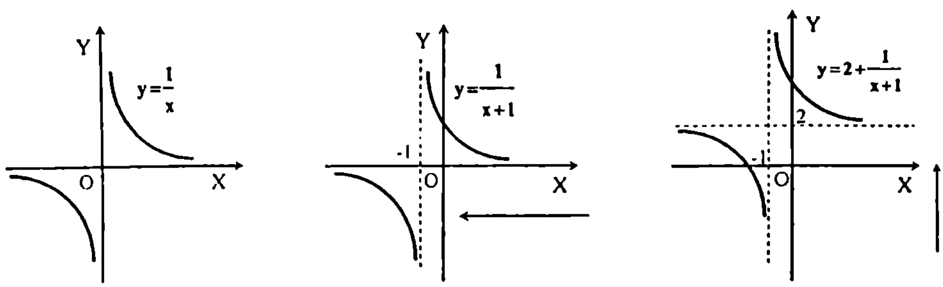
$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ **სახის ფუნქციას, სადაც a, b, c და d მოცემული რიცხვებია, $c \neq 0$ და $ad \neq bc$, წილად-წრფივი ფუნქცია ეწოდება.** მისი გრაფიკი მიიღება $y = \dfrac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის – ჰიპერბოლის გეომეტრიული გარდაქმნით.

მაგალითი 4. $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

მარტივი გარდაქმნების შედეგად ეს ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს:

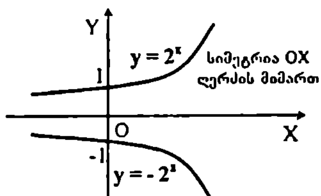
$$y=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2x+2+1}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}+\frac{1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}.$$

$y=2+\frac{1}{x+1}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ერთი ერთეულზე პარალელური გადატანით OX ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით და მიღებული გრაფიკის 2 ერთეულზე პარალელური გადანატით OY ღერძის მიმართულებით (ნახ. 4.17).



ნახ. 4.17

გარდაქმნა 4. $y=f(x) \rightarrow y=-f(x)$.

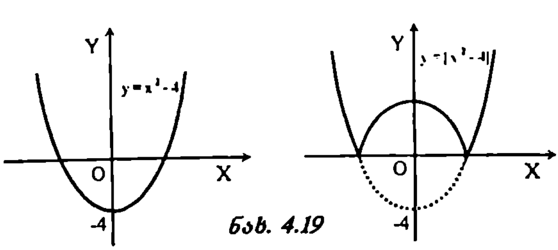


ნახ. 4.18

$y=-f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი *სიმეტრიულია* $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა **OX** ღერძის მიმართ. ნახ. 4.18-ზე მოცემულია $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკიდან $y=-2^x$ ფუნქციის გრაფიკის მიღება.

გარდაქმნა 5. $y=f(x) \rightarrow y=|f(x)|$.

$y=|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საჭიროა $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც **OY** ღერძის ქვემოთ მდებარეობს, *სიმეტრიულად აისახოს* **OX** ღერძის მიმართ, ხოლო დანარჩენი ნაწილი *უცვლელად დარჩეს*. ნახ. 4.19-ზე მოცემულია $y=x^2-4$ ფუნქციის გრაფიკიდან $y=|x^2-4|$ ფუნქციის გრაფიკის მიღება.



ნახ. 4.19

დავალება

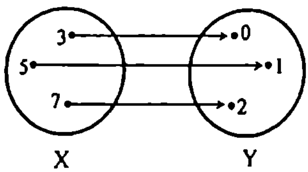
შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება ასახვა?
2. რას ეწოდება a ელემენტის სახე f ასახვის შემთხვევაში?
3. რას ეწოდება b ელემენტის წინასახე f ასახვის შემთხვევაში?
4. განმარტეთ ასახვის
   ა) განსაზღვრის არე;
   ბ) ცვლილების არე;
   გ) მნიშვნელობათა სიმრავლე.
5. განსაზღვრის არის ყოველ ელემენტს გააჩნია სახე?
6. ცვლილების არის ყოველ ელემენტს გააჩნია წინასახე?
7. მნიშვნელობათა არის ყოველ ელემენტს გააჩნია წინასახე?
8. რას ეწოდება ფუნქცია?
9. დაახასიათეთ ფუნქციის მოცემის ხერხები.
10. რას ეწოდება ფუნქციის გრაფიკი?
11. რიცხვით წყვილთა როგორი სიმრავლე განსაზღვრავს ფუნქციას?
12. ჩამოაყალიბეთ ვერტიკალური წრფის წესი.
13. რას ეწოდება ფუნქციათა კომპოზიცია?
14. დაახასიათეთ ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნის შემთხვევები.

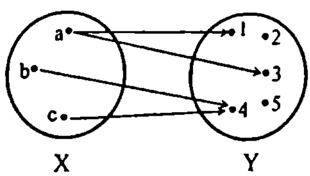
პრაქტიკული სავარჯიშოები:

4.1. არის თუ არა ისრებით მოცემული შესაბამისობა ასახვა? პასუხი დაასაბუთეთ:

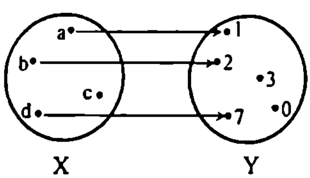
ა)



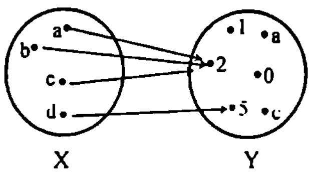
ბ)



გ)



დ)



4.2. $f(x)=3x-2$ და $g(x)=x-x^2$ ფუნქციებისათვის გამოთვალეთ:

ა) $f(2)$;

ბ) $g(5)$;

გ) $f(2)-g(5)$;

დ) $g(3)\cdot f(0)$;

ე) $\dfrac{g(-2)}{f(-2)}$;

ვ) $\dfrac{g(-3)}{f(2)}$.

4.3. $f(x)=3x+2$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ:

ა) $f(1)$;

ბ) $f(a)$;

გ) $f(a^2)$;

დ) $f(a+h)$;

ე) $f(a-h)$;

ვ) $f(a^2+h^2)$.

4.4. $f(x)=3x^2+7$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ:

ა) $f(c)$;

ბ) $f(c+h)$;

გ) $f(c-h)$;

დ) $f(c-h)-f(c)$;

ე) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

ვ) $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

4.5. $f(x)=3$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ:

ა) $f(0)$;

ბ) $f(-2)$;

გ) $f(c)$;

დ) $f(c+h)$;

ე) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4.6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ:

ა) $f(2)$;

ბ) $f(-2)$;

გ) $f(a)$;

დ) $f(-a)$.

4.7. $\varphi(x)=3x^2-x$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ:

ა) $\varphi(0)$;

ბ) $\varphi(a)$;

გ) $\varphi(-a)$;

დ) $\varphi(a+h)$;

ე) $\varphi(a+2h)$.

4.8. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}2x-3, & \text{როცა } x\geq 5,\\ 6-3x, & \text{როცა } x<5.\end{cases}$$

გამოთვალეთ:

ა) $f(0)$;

ბ) $f(7)$;

გ) $f(-2)$;

დ) $f(5+h)$, $h>0$;

ე) $f(5-h)$, $h>0$.

4.9. მოცემულია ფუნქცია

$$g(x)=\begin{cases}4x+3, & \text{როცა } x<0,\\ 1-x^2, & \text{როცა } 0\leq x\leq 2,\\ 7, & \text{როცა } x>2.\end{cases}$$

გამოთვალეთ:

ა) $g(1)$;

ბ) $g(3)$;

გ) $g(-1)$;

დ) $g(0)$;

ე) $g(-3)$;

ვ) $g(2+h)$, $h>0$.

4.10. $f(x)=\sin x+3\cos x-4\operatorname{tg}x$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ:

ა) $f(0)$;

ბ) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$;

გ) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

დ) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

ე) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

4.11. $f(x)=4^{2x+1}$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ:

ა) $f(0)$;

ბ) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$;

გ) $f(-1)$;

დ) $f(1)$.

4.12. $f(x)=\lg x$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ:

ა) $f(1)$;

ბ) $f(10)$;

გ) $f(0,1)$.

4.13. ვთქვათ, A არის

$$y=\operatorname{sign}x=\begin{cases}-1, & \text{როცა } x<0,\\ 0, & \text{როცა } x=0,\\ 1, & \text{როცა } x>0\end{cases}$$

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ხოლო $B=\{x \mid x\in Z$ და $x(x+1)(x-2)=0\}$. იპოვეთ $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$ და $B\setminus A$.

4.14. საწარმოს მიერ x რაოდენობის პროდუქციის გამოშვებაზე გაწეული დანახარჯი მოიცემა ფორმულით

$$C(x)=5000+6x+0,002x^2.$$

გამოთვალეთ დანახარჯი, თუ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაა: ა) 1000; ბ) 2500; გ) 0.

4.15. განსაზღვრავს თუ არა რიცხვით წყვილთა შემდეგი სიმრავლე ფუნქციას? დადებითი პასუხის შემთხვევაში ჩაწერეთ აღნიშნული ფუნქცია:

ა) $\{(1,3), (2,5), (4,7), (5,9)\}$;

ბ) $\{(-3,5), (-2,4), (-1,3), (0,2)\}$;

გ) $\{(6,-6), (3,-3), (0,0), (6,6)\}$;

დ) $\{(-6,6), (-3,3), (0,0), (3,3), (6,6)\}$;

ე) $\{(1,3), (2,3), (3,3), (4,4), (5,4), (6,4)\}$;

ვ) $\{(0,2), (1,2), (2,2), (0,1), (1,1), (2,1)\}$.

4.16. მოძებნეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები:

ა) $y=\dfrac{1}{5x+3}$;

ბ) $y=\dfrac{x^2-25}{x+5}$;

გ) $y=\sqrt{x^2-121}$;

დ) $y=\sqrt{9-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$;

ე) $y=\sqrt{x^2+8x+15}$;

ვ) $y=\log_2(x+7)$;

ზ) $y=\log_5(x+|x|)$;

თ) $y=\sqrt{\lg x}$.

4.17. ვთქვათ,

ა) $f(x)=\sqrt{x}$ და $g(x)=x^2+7$.

იპოვეთ:

$(f\circ g)(\sqrt{2}), (g\circ f)(\sqrt{2}),\ (f\circ g)(x)$ და $(g\circ f)(x)$;

ბ) $h(x)=\dfrac{2}{x-1}$ და $\varphi(x)=3x+2$.

იპოვეთ:

$(h\circ\varphi)(3),\ (\varphi\circ h)(3),\ (h\circ\varphi)(x)$ და $(\varphi\circ h)(x)$.

4.18. ვთქვათ, $f(x)=3^{\sqrt[3]{x+6}}$ და $\varphi(x)=\frac{1}{5}x^2$. იპოვეთ $(f\circ\varphi)(\sqrt{10})$.

4.19. მოცემულია $h(x)=3x+2$ და $\varphi(x)=4^{3x+1}$. იპოვეთ $(h\circ\varphi)(x)$ და $(\varphi\circ h)(x)$.

4.20. რომელი გეომეტრიული გარდაქმნით მიიღება:

ა) $y=\dfrac{2}{x+3}$ ფუნქციის გრაფიკი $y=\dfrac{2}{x}$ ფუნქციის გრაფიკისაგან?

ბ) $y=x^2-2x+5$ ფუნქციის გრაფიკი $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკისაგან?

4.21. ააგეთ:

ა) $y=x^2$ და $y=|x^2-9|$ ფუნქციათა გრაფიკები;

ბ) $y=|x|$ და $y=|x-1|+2$ ფუნქციათა გრაფიკები.

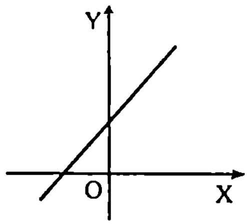
4.22. რომელი გეომეტრიული გარდაქმნით მიიღება $y=\dfrac{10}{x-10}$ ფუნქციის გრაფიკი $y=\dfrac{10}{x+4}$ ფუნქციის გრაფიკისაგან?

4.23. როგორ მიიღება $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკისაგან $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი?

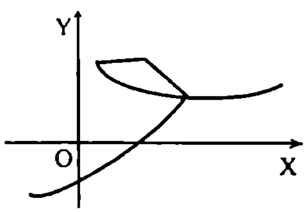
4.24. როგორ მიიღება $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკისაგან $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი?

4.25. წარმოადგენს თუ არა ფუნქციის გრაფიკს სიბრტყეზე მდებარე წერტილთა შემდეგი სიმრავლე?

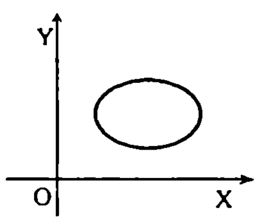
ა)



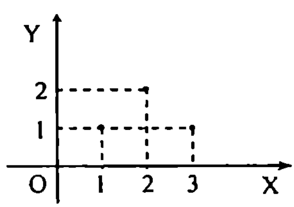
ბ)



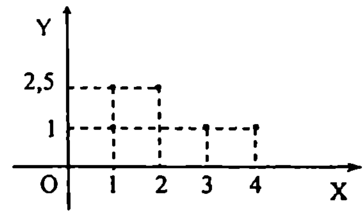
გ)



დ)



ე)



4.26. ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } x>0, \\ 2, & \text{როცა } x\le 0; \end{cases}$

ბ) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } x<0, \\ x, & \text{როცა } x\ge 0; \end{cases}$

გ) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა } x>1, \\ -x, & \text{როცა } x<1; \end{cases}$

დ) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{როცა } 0\le x<1, \\ 2, & \text{როცა } 1\le x<2, \\ 3, & \text{როცა } 2\le x\le 3; \end{cases}$

ე) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{როცა } x\le 0, \\ x, & \text{როცა } 0<x\le 1, \\ 2x, & \text{როცა } x>1. \end{cases}$

A. კითხვები და ამოცანები გამეორებისათვის (ლექციები 1-4)

A.1. ჩაწერეთ $C=\{x\in Z\,|\,-6\leq x\leq 10\}$ სიმრავლის 5-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე.

A.2. სასრულია თუ უსასრულო $D=\{x\in Z\,|\,-10\leq x\leq 2\}$ სიმრავლე?

A.3. იპოვეთ $(A\cup B)\cap C$, თუ $A=\{1,3\}$, $B=\{2,5,7,9\}$ და $C=\{2,6,10,12\}$.

A.4. ვთქვათ, მოცემულია ყველა მართკუთხედის და ყველა რომბის სიმრავლეები. რა იქნება ამ სიმრავლეების თანაკვეთა?

A.5. ვთქვათ, A არის სიმრავლე ფირმებისა, რომლებიც აწარმოებენ მანქანის საბურავებს, B არის სიმრავლე ფირმებისა, რომლებიც აწარმოებენ მოტოციკლებს, ხოლო C არის სიმრავლე ფირმებისა, რომლებიც აწარმოებენ ავტომობილებს. ცნობილია, რომ A, B და C სიმრავლეებიდან არცერთი არ შედის დანარჩენში და სამივე ამ სიმრავლის თანაკვეთა არაცარიელი სიმრავლეა. ეილერ-ვენის დიაგრამებზე დაშტრიხეთ სიმრავლე იმ ფირმებისა, რომლებიც დასახელებული პროდუქციიდან:

ა) ერთ-ერთ სახეობას მაინც აწარმოებენ;

ბ) სამივე სახის პროდუქციას აწარმოებენ;

გ) მხოლოდ ერთი სახის პროდუქციას აწარმოებენ;

დ) მხოლოდ ორი სახის პროდუქციას აწარმოებენ.

A.6. სიმრავლეებზე ოპერაციების გამოყენებით ჩაწერეთ წინა ამოცანის ა), ბ), გ) და დ) პუნქტებში მითითებული სიმრავლეები.

A.7. ვთქვათ, A არის ერთ-ერთი საწარმოს თანამშრომელთა სიმრავლე. ამასთან, თუ $x\in A$, მაშინ $P(x)$ არის x-ის ხელფასი.
მოცემულია სიმრავლეები:

$B=\{x\,|\,x\in A,\ P(x)\geq \$500\}$,
$C=\{x\,|\,x\in A,\ \$300\leq P(x)\leq \$500\}$.

A, B და C სიმრავლეების საშუალებით გამოსახეთ იმ თანამშრომელთა სიმრავლე, რომელთა ხელფასიც:

ა) არაა ნაკლები \$300-ზე;

ბ) არაა ნაკლები \$5 000-ზე და არ აღემატება \$1 000-ს;

გ) ნაკლებია \$300-ზე და მეტია \$1 000-ზე;

დ) ნაკლებია \$500-ზე;

ე) ნაკლებია \$300-ზე;

ვ) მეტია \$1 000-ზე;

ზ) არაა ნაკლები \$300-ზე და ნაკლებია \$500-ზე;

თ) ნაკლებია \$500-ზე ან მეტია \$1 000-ზე.

A.8. სიბრტყეზე გავლებულია n წრფე ისე, რომ არც ერთი ორი პარალელური არ არის და არცერთი სამი ერთ წერტილში არ იკვეთება.

ა) იპოვეთ ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილთა რაოდენობა;

ბ) რამდენ სამკუთხედს ქმნიან ეს წრფეები?

A.9. 1 000 სტუდენტის გამოკითხვის შედეგად დადგინდა, რომ:

200 სტუდენტი სწავლობს ფიზიკას,

290 სტუდენტი სწავლობს ბიოლოგიას,

340 სტუდენტი სწავლობს ქიმიას,

40 სტუდენტი სწავლობს ქიმიასაც და ფიზიკასაც,

70 სტუდენტი სწავლობს ფიზიკასაც და ბიოლოგიასაც,

30 სტუდენტი სწავლობს ქიმიასაც და ბიოლოგიასაც,

300 სტუდენტი კი არ სწავლობს არც ბიოლოგიას, არც ქიმიას და არც ფიზიკას.

ა) გამოკითხულთა რამდენი პროცენტი სწავლობს სამივე საგანს — ქიმიას, ბიოლოგიას და ფიზიკას?

ბ) გამოკითხულთა რამდენი პროცენტი სწავლობს მხოლოდ ქიმიას ან მხოლოდ ფიზიკას?

A.10. ქალაქის 76 სუპერმარკეტიდან 32-ში შესაძლებელია რძის პროდუქტების შეძენა, 34-ში იყიდება ალკოჰოლური სასმელები, 36-ში თევზეული. 8 სუპერმარკეტი ვაჭრობს რძის პროდუქტებითა და ალკოჰოლური სასმელებით და არ ვაჭრობს თევზეულით, 6 სუპერმარკეტი ვაჭრობს რძის პროდუქტებით და თევზეულით და არ ვაჭრობს ალკოჰოლური სასმელებით, 10 სუპერმარკეტი ვაჭრობს ალკოჰოლური სასმელებით, თევზეულით და არ ვაჭრობს რძის პროდუქტებით. დასახელებული პროდუქციიდან არც ერთით არ ვაჭრობს 6 სუპერმარკეტი.

ა) რამდენი სუპერმარკეტი ვაჭრობს სამივე სახის პროდუქციით?

ბ) იპოვეთ იმ სუპერმარკეტების რაოდენობა, რომლებიც დასახელებული პროდუქციიდან მხოლოდ რომელიმე ერთი სახეობით ვაჭრობენ.

A.11. მსხვილ გადამხდელთა კავშირში 105 წევრია. საერთო კრებაზე მათ უნდა აირჩიონ პრეზიდენტი, ვიცე-პრეზიდენტი და აღმასრულებელი დირექტორი. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება მათი არჩევა?

A.12. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$;

ბ) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!-n!}$;

გ) $\dfrac{(n+2)!}{n!+(n+1)!}$.

A.13. გაშალეთ ნიუტონის ბინომის ფორმულით:

ა) $(x+2a)^5$;

ბ) $(x^2-y)^6$.

A.14. იპოვეთ $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{a}+\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ ბინომის წევრი, რომელიც x^2-ს შეიცავს.

A.15. პარალელოგრამის ორი მომდევნო წვეროა A(1,1) და B(4,4), ხოლო O(5,3) არის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ დანარჩენი ორი წვერო.

A.16. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$;

ბ) $C_x^1 = 3.75A_x$;

გ) $P_{x+1} - 11 \cdot P_{x-2}A_x^2 = 0$;

დ) $\dfrac{C_x^3}{C_x^4} = 1$;

ე) $x^2(x-1)(x-2) = 5A_x^3$;

ვ) $\dfrac{C_x^2}{x(x-1)} = \dfrac{x^3}{128}$;

ზ) $x^2C_x^2 - 8A_x^2 = 0$.

A.17. ორდინატთა ღერძზე იპოვეთ წერტილები, რომლებიც A(4,-1) წერტილიდან დაშორებულია 5 ერთეულით.

A.18. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია: A(2,1), B(4,1) და C(4,-4) არის მართკუთხა.

A.19. მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია D(3,5) და E(6,-10) წერტილებში, გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ გაყოფის წერტილების კოორდინატები.

A.20. სამკუთხედის A წვერო აბსცისათა ღერძზე მდებარეობს. დანარჩენი ორი – B(2,1) და C(3,2) წერტილებშია. სამკუთხედის ფართობი 4 კვ. ერთეულის ტოლია. იპოვეთ A წვერო.

A.21. სამკუთხედის წვეროებია A(3,1), B(6,2) და C(5,-3). იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

A.22. A(2,y) და B(x,5) წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი C(3,-1) წერტილით შუაზე იყოფა. იპოვეთ A და B წერტილები.

A.23. ვთქვათ, T_1 არის სხეულის ტემპერატურა ცელსიუსის გრადუსებში, ხოლო T_2 – იგივე ტემპერატურა ფარენჰეიტის გრადუსებში. T_2-ის დამოკიდებულება T_1 – ზე მოიცემა ფორმულით: $T_2 = \dfrac{9}{5}T_1 + 32$. სხეულის ტემპერატურა ცელსიუსის გრადუსებში მზის ამოსვლიდან t სთ-ის გასვლის შემდეგ $T_1 = 5t + t^2$ ფორმულით გამოითვლება. განსაზღვრეთ სხეულის ტემპერატურა ფარენჰეიტის გრადუსებში:

ა) მზის ამოსვლიდან 2 სთ-ის შემდეგ;

ბ) მზის ამოსვლიდან x სთ-ის შემდეგ;

გ) რა შინაარსი აქვს $f(t) = (T_2 \circ T_1)(t)$ კომპოზიციას?

A.24. არის თუ არა კუბის ზედაპირის S ფართობი მისი V მოცულობის ფუნქცია? ჩაწერეთ ეს დამოკიდებულება ანალიზური სახით.

A.25. შემდეგი განტოლებებიდან რომლიდან განისაზღვრება y როგორც x ცვლადის ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთეთ:

ა) $4y - 3x = 8$;

ბ) $y^2 - x^2 = 9$;

გ) $y^2 - x^4 = 9$;

დ) $3y - 2x = 3$;

ე) $x^2 - y = 1$;

ვ) $xy - 4y = 1$;

ზ) $x^2 + y^2 = 25$;

თ) $x-y^2=1$;

ი) $xy+y-x=5$;

კ) $x^2-y^2=16$.

A.26. შესაბამისობა მოცემულია ცხრილის საშუალებით. იპოვეთ სიმრავლე, რომელზედაც ეს შესაბამისობაა განსაზღვრული და სიმრავლე, რომელზედაც ეს სიმრავლე აისახება. არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია? ჩაწერეთ მოცემული შესაბამისობა წყვილების საშუალებით.

საშუალო თვიური ტემპერატურის ცხრილი	
თვე	*ტემპერატურა*
იანვარი	5^0
თებერვალი	7^0
მარტი	12^0
აპრილი	16^0
მაისი	21^0
ივნისი	26^0
ივლისი	29^0
აგვისტო	31^0
სექტემბერი	20^0
ოქტომბერი	10^0
ნოემბერი	9^0
დეკემბერი	4^0

A.27. შესაბამისობა მოცემულია აღწერის საშუალებით. იპოვეთ სიმრავლე, რომელზედაც ეს შესაბამისობაა განსაზღვრული და სიმრავლე, რომელზედაც ეს სიმრავლე აისახება. არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია? ჩაწერეთ მოცემული შესაბამისობა ცხრილისა და წყვილების საშუალებით:

ა) 0-სა და 7,2-ს შორის მოთავსებულ ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება მასზე 3-ჯერ მეტი რიცხვი;

ბ)]1,2[შუალედში მოთავსებულ ყოველ უკვეც წილადს, რომლის მნიშვნელია 12, შეესაბამება თავისი მრიცხველისა და მნიშვნელის ჯამი.

A.28 შესაბამისობა მოცემულია ცხრილის საშუალებით. იპოვეთ მისი განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე და ააგეთ გრაფიკი:

ა)

x	-2	1	-4	-3	2	0	3
y	5	6	7	4	5	1	2

ბ)

x	-1	1	4	-1	2	0	3
y	4	2	1	7	3	2	1

A.29. მოცემულია შემდეგი შესაბამისობა: y მიიღება x-ის რაიმე რიცხვზე გამრავლებით. შეავსეთ ცხრილი და ჩაწერეთ ეს დამოკიდებულება ფორმულის საშუალებით:

ა)

x	1			-4	-3	
y		7	5	8		1

ბ)

x		4	2			6
y	3		1	7	8	

A.30. ასახვა მოცემულია შემდეგი წესით: -2-სა და 4-ს შორის მოთავსებულ ყოველ რიცხვს შეესაბამება მისი 3-ზე ნამრავლის და 2-ის ჯამი. ჩაწერეთ ეს ასახვა ფორმულით და შეავსეთ ცხრილი.

x	-1	2		0		
y			-0,4		3	0

ლექცია 5

შექცეული ფუნქცია. მონოტონური, შემოსაზღვრული, ლუწი და კენტი ფუნქციები

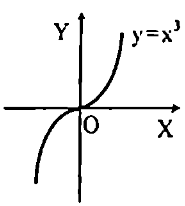
5.1. შექცეული ფუნქცია

ახლა გადავიდეთ ფუნქციის *შექცევადობისა* და *შექცეული* ფუნქციის ცნებების განხილვაზე.

$f: X \to Y$ ფუნქციას ეწოდება შექცევადი, თუ არგუმენტის განსხვავებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება ფუნქციის განსხვავებული მნიშვნელობები

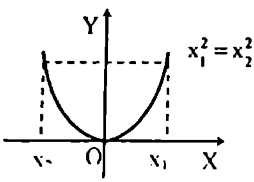
$$(\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X \text{ და } x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

მაგალითად, $y = x^3$ არის შექცევადი ფუნქცია, რადგან $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3$. ფუნქციის გრაფიკია კუბური პარაბოლა (ნახ. 5.1).



ნახ. 5.1

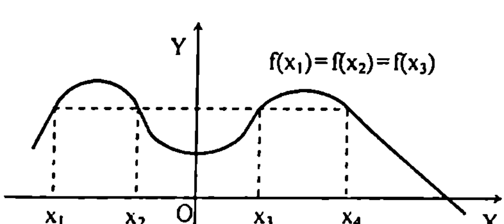
$y = x^2$ არ არის შექცევადი ფუნქცია, რადგან არგუმენტის მოპირდაპირე მნიშვნელობებს ფუნქციის ერთი და იგივე მნიშვნელობა შეესაბამება: $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$ (ნახ. 5.2).



ნახ. 5.2

ნახ. 5.3-ზე გრაფიკული ხერხით მოცემული ფუნქცია შექცევადი არ არის, რადგან არგუმენტის განსხვავებულ x_1, x_2, x_3 და x_4 მნიშვნელობებს ფუნქციის ერთი და იგივე მნიშვნელობა შეესაბამება.

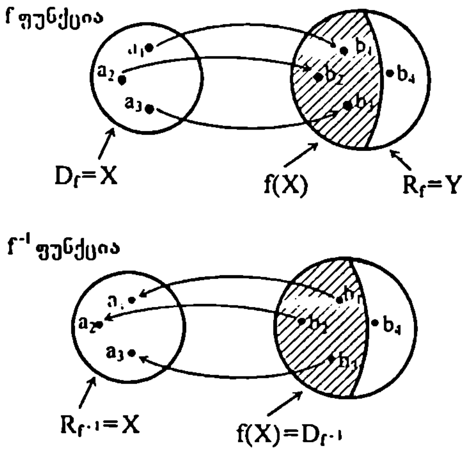
შექცევადი ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ შექცევადი ფუნქციის შესაბამის წყვილთა სიმრავლე $\{(x, f(x)) | x \in X\}$ არ შეიცავს (a_1,b) და (a_2,b), $a_1 \neq a_2$ სახის წყვილებს, რაც ნიშნავს, რომ შექცევადი ფუნქციის გრაფიკს არ გააჩნია ისეთი წერტილები, რომელთა აბსცისები განსხვავებულია, ხოლო ორდინატები კი ტოლია. (a_1,b) და (a_2,b) სახის წერტილებიდან შექცევადი ფუნქციის გრაფიკს შეიძ-



ნახ. 5.3

ლება ეკუთვნოდეს მხოლოდ ერთ-ერთი მათგანი, ე.ი. $y=b$ ჰორიზონტალური წრფე ან არ გადაკვეთს შექცევადი ფუნქციის გრაფიკს, ან გადაკვეთს მხოლოდ ერთ წერტილში.

ამრიგად, **ფუნქციის შექცევადობისათვის სამართლიანია ჰორიზონტალური წრფის წესი: $y=f(x)$ ფუნქცია შექცევადია, თუ ნებისმიერი $y=b$ ჰორიზონტალური წრფე ფუნქციის გრაფიკს გადაკვეთს ან მხოლოდ ერთ წერტილში ან საერთოდ არ გადაკვეთს.**



ნახ. 5.4

თუ $f: X \to Y$ შექცევადი ფუნქციაა, მაშინ $\forall y \in f(X)$ ელემენტისათვის მისი წინასახეთა სიმრავლე ერთელემენტიანია.

ეს კი ნიშნავს, რომ შეგვეიძლია განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც $f(X)$-ის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს მის წინასახეს.

ვთქვათ, $f: X \to Y$ შექცევადი ფუნქციაა. ფუნქციას, რომელიც $f(X)$ სიმრავლის ყოველ b ელემენტს შეუსაბამებს მის a წინასახეს, f ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ეწოდება და f^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება.

f^{-1} შექცეული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $f(X)$ და მნიშვნელობათა სიმრავლე კი $-$ X.

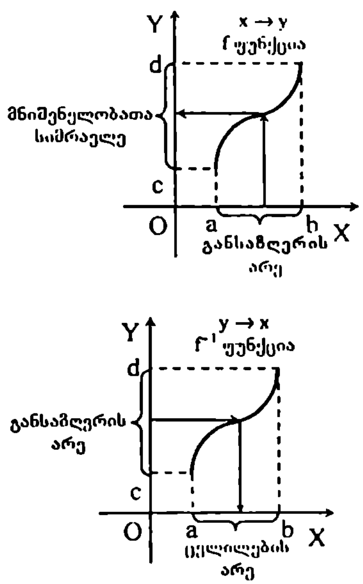
f და f^{-1} ფუნქციები სქემატურად ნახ. 5.4-ზეა წარმოდგენილი.

ამრიგად, თუ $f(a)=b$, მაშინ

$$f^{-1}(b)=a.$$

ადვილი დასანახია, რომ **შექცეული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია საწყისი ფუნქციაა, ანუ**

$$(f^{-1})^{-1}=f.$$



ნახ. 5.5

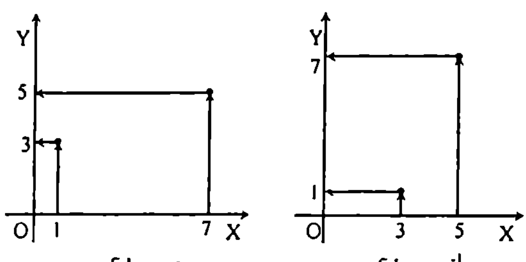
საკოორდინატო სიბრტყეზე $y=f(x)$ ფუნქცია OX ღერძს ან მის ნაწილს გადასახავს OY ღერძში, ხოლო შექცეული ფუნქცია OY ღერძიდან გვაბრუნებს OX ღერძზე (ნახ. 5.5).

5.2. შექცეული ფუნქციის მოძებნის წესი

შევისწავლოთ მოცემული შექცევადი f ფუნქციისათვის მისი შექცეული f^{-1} ფუნქციის მოძებნის წესი. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\varphi: X \to Y$, სადაც $X=\{1,7\}$, $Y=\{2,3,5\}$ და შესაბამისობის წესია

$$1 \to 3, \quad 7 \to 5.$$



ნახ. 5.6

φ ფუნქცია შექცევადია და $\varphi(X)=\{3,5\}$. შექცეული ფუნქციის განმარტების თანახმად

$$\varphi(1)=3 \Rightarrow \varphi^{-1}(3)=1,$$

$$\varphi(7)=5 \Rightarrow \varphi^{-1}(5)=7.$$

ამრიგად, φ^{-1} შექცეული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $\varphi(X)=\{3,5\}$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა X. ნახ. 5.6-ზე მოცემულია φ და φ^{-1} ფუნქციების გეომეტრიული წარმოდგენა.

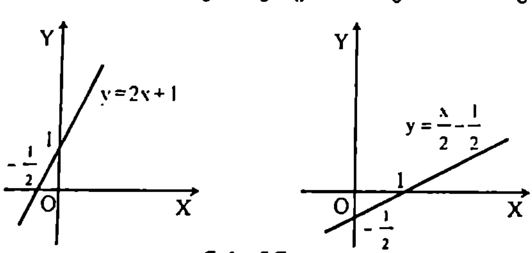
მაგალითი 2. $f: R \to R$, $y=f(x)=2x+1$.

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $f(R)=R$. ფუნქცია შექცევადია, ამიტომ არსებობს შექცეული ფუნქცია $f^{-1}: R \to R$.

შექცეული ფუნქცია გულისხმობს x-ის „მოძებნას“ y-ის მიხედვით. ეს კი ნიშნავს, რომ საჭიროა $y=2x+1$ განტოლების ამოხსნა x-ის მიმართ

$$y=2x+1 \Rightarrow x=\frac{y-1}{2}.$$

ე.ი. $y=2x+1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $x=\frac{y-1}{2}$.



ნახ. 5.7

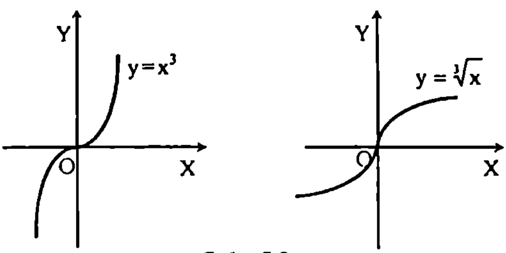
შექცეული ფუნქციის ტრადიციული ფორმით ჩასაწერად (x – დამოუკიდებელი ცვლადი, y – დამოკიდებული ცვლადი) უკანასკნელ ტოლობაში x-ის ნაცვლად ჩავწეროთ y, ხოლო y-ის ნაცვლად x. მივიღებთ $y=\frac{x-1}{2}$ ფუნქციას. მაშასადამე, $y=2x+1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y=\frac{x-1}{2}$. ეს ფუნქციები გრაფიკულად ნახ. 5.7-ზეა წარმოდგენილი.

მაგალითი 3. $g:R\to R,\ y=g(x)=x^3.$

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $g(R)=R$. ფუნქცია შექცევადია, ამიტომ არსებობს შექცეული ფუნქცია $g^{-1}:R\to R$. მის მოსაძებნად მოვიქცეთ ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში: ამოვხსნათ $y=x^3$ განტოლება x-ის მიმართ და შემდეგ x და y ცვლადებს შევუცვალოთ ადგილები. გვექნება

$$y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}.$$

ამრიგად, $y=x^3$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y=\sqrt[3]{x}$. გრაფიკული ილუსტრაციები მოცემულია ნახ. 5.8-ზე.



ნახ. 5.8

მაგალითი 4. $h:R\to R,\ y=h(x)=x^2.$

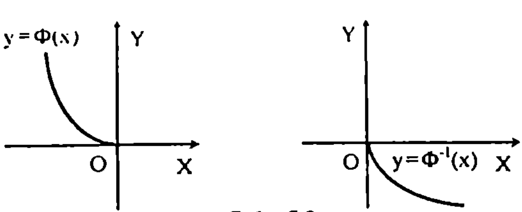
ეს ფუნქცია არ არის შექცევადი. ამიტომ მას შექცეული ფუნქცია არ გააჩნია.

მაგალითი 5. $\Phi:\,]-\infty,0]\to R,\ y=\Phi(x)=x^2.$

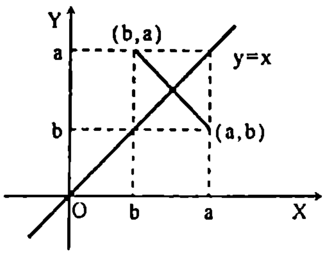
ეს ფუნქცია შექცევადია და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა

$$\Phi(]-\infty,0])=[0,+\infty[.$$

გავითვალისწინოთ, რომ შექცეული ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება $[0,+\infty[$ სიმრავლე, მნიშვნელობათა სიმრავლე კი – $]-\infty,0]$. ზემოთგანხილული წესით ვიპოვოთ შექცეული ფუნქცია



ნახ. 5.9



ნახ. 5.10

$$y=x^2 \Rightarrow x=-\sqrt{y}\ .$$

ამრიგად, $y=-\sqrt{x}$ არის $]-\infty,0]$ შუალედზე განსაზღვრული $y=x^2$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და $\Phi^{-1}:[0,+\infty[\rightarrow]-\infty,0]$ (იხ. ნახ. 5.9).

ამრიგად, $y=f(x)$ შექცევადი ფუნქციის შექცეული ფუნქციის მოსაძებნად საჭიროა ამოვხსნათ $y=f(x)$ განტოლება x-ის მიმართ და შემდეგ x და y ცვლადებს ადგილები შევუცვალოთ.

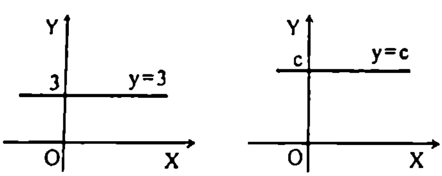
ვთქვათ, $y=f(x)$ შექცევადი ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y=f^{-1}(x)$. შექცეული ფუნქციის განმარტების თანახმად, თუ წერტილი $(a,b)\in G_f$, მაშინ წერტილი $(b,a)\in G_{f^{-1}}$. ადვილი საჩვენებელია, რომ წერტილები (a,b) და (b,a) სიმეტრიულად არიან განლაგებულნი $y=x$ წრფის მიმართ (იხ. ნახ. 5.10).

მაშასადამე, ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ.

$f:X\rightarrow Y$ ფუნქციას მუდმივი ფუნქცია ეწოდება, თუ X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთი და იგივე c რიცხვი

$$\forall x\in X \Rightarrow f(x)=c.$$

მაგალითად, $y=3$ არის მუდმივი ფუნქცია. მუდმივი ფუნქციის გრაფიკი OX ღერძის პარალელური წრფეა (ნახ. 5.11).

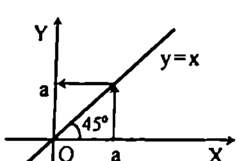


ნახ. 5.11

ცხადია, რომ მუდმივი ფუნქცია არ არის შექცევადი.

$f:X\rightarrow X$ ფუნქციას, რომელიც X-ის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს თვით ამ ელემენტს, იგივური ფუნქცია ეწოდება

$$\forall x\in X \Rightarrow f(x)=x.$$



ნახ. 5.12

ნახ. 5.12-ზე გამოსახულია $y=x$ იგივური ფუნქციის გრაფიკი.

ცხადია, რომ იგივური ფუნქცია შექცევადია და იგი თავისსავე შექცეულ ფუნქციას ემთხვევა.

5.3. მონოტონური ფუნქციები

გადავიდეთ მონოტონურ ფუნქციათა კლასების განსაზღვრაზე.

$f: X \to Y$ ფუნქციას ეწოდება მკაცრად ზრდადი, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის მეტი მნიშვნელობა

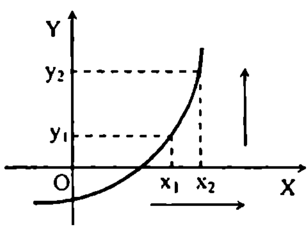
$$(\forall x_1 \in X,\ \forall x_2 \in X \text{ და } x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობისას მკაცრად ზრდადი ფუნქციის გრაფიკი „იწევს ზემოთ“ (ნახ. 5.13).

ცხადია, რომ მკაცრად ზრდადი ფუნქცია შექცევადია.

$f: X \to Y$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის მეტი ან იგივე მნიშვნელობა

$$(\forall x_1 \in X,\ \forall x_2 \in X \text{ და }$$
$$\forall x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2).$$



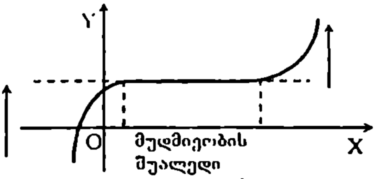
ნახ. 5.13

მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობისას ზრდადი ფუნქციის გრაფიკი ან იწევს ზემოთ, ან OX ღერძის პარალელურია, ე.ი. ფუნქციის გრაფიკი არ ეშვება ქვემოთ (ნახ. 5.14).

ცხადია, რომ ზრდადი ფუნქცია საზოგადოდ შექცევადი არ არის.

$f: X \to Y$ ფუნქციას ეწოდება მკაცრად კლებადი, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის ნაკლები მნიშვნელობა

$$(\forall x_1 \in X,\ \forall x_2 \in X \text{ და }$$
$$x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$



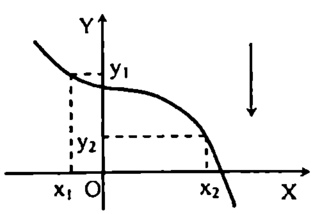
ნახ. 5.14

მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობისას მკაცრად კლებადი ფუნქციის გრაფიკი „ეშვება ქვემოთ“ (ნახ. 5.15).

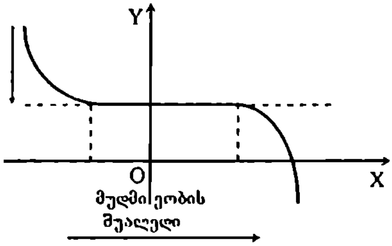
ცხადია, რომ მკაცრად კლებადი ფუნქცია შექცევადია.

$f: X \to Y$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის ნაკლები ან იგივე მნიშვნელობა

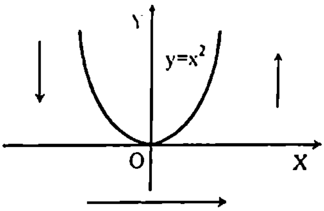
$$(\forall x_1 \in X,\ \forall x_2 \in X \text{ და }$$
$$x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2).$$



ნახ. 5.15



ნახ. 5.16



ნახ. 5.17

მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობისას კლებადი ფუნქციის გრაფიკი ან ეშვება ქვემოთ ან OX ღერძის პარალელურია, ე.ი. ფუნქციის გრაფიკი არ იწევს ზემოთ (ნახ. 5.16).

ისევე, როგორც ზრდადი ფუნქცია, კლებადი ფუნქციაც საზოგადოდ შექცევადი არ არის.

ზრდად და კლებად ფუნქციებს მონოტონური, ხოლო მკაცრად ზრდად და მკაცრად კლებად ფუნქციებს მკაცრად მონოტონური ფუნქციები ეწოდება.

ფუნქციის განსაზღვრის არეში შემავალ უდიდეს შუალედს, რომელზეც ფუნქცია მონოტონურია (მკაცრად მონოტონურია), მონოტონურობის (მკაცრად მონოტონურობის) შუალედი ეწოდება.

მაგალითად, $y=x^2$ ფუნქციისათვის]-∞,0] მკაცრად კლებადობის, ხოლო [0,+∞[მკაცრად ზრდადობის შუალედებია (ნახ. 5.17).

უდიდეს შუალედს, რომლის წერტილებშიც ფუნქცია ერთსადაიმავე მნიშვნელობას ღებულობს, მუდმივობის შუალედი ეწოდება (იხ. ნახ. 5.14 და ნახ. 5.16).

5.4. შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები

განვიხილოთ *შემოსაზღვრულ და შემოუსაზღვრელ ფუნქციათა კლასები.*

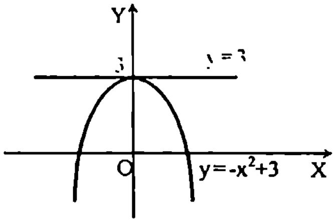
$f:X\to Y$ ფუნქციას ზემოდან შემოსაზღვრული ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი $M\ (\exists M\in R)$ რიცხვი, რომ სრულდება უტოლობა

$$f(x)\le M,\ \forall x\in X.$$

ზემოდან შემოსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=M$ წრფის ქვემოთ.

მაგალითად, $y=-x^2+3$ ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრულია, რადგან სამართლიანია უტოლობა

$$-x^2+3\le 3,\ \forall x\in R.$$



ნახ. 5.18

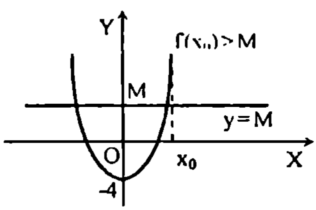
ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=3$ წრფის ქვემოთ (ნახ. 5.18).

$f: X \to Y$ ფუნქციას ზემოდან შემოუსაზღვრელი ეწოდება, თუ იგი არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული, ე.ი. თუ ნებისმიერი M რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $x_0 \in X$ ($\forall M \in R$, $\exists x_0 \in X$), რომ სრულდება უტოლობა

$$f(x_0) > M.$$

თუ f ფუნქცია ზემოდან შემოუსაზღვრელია, მაშინ ნებისმიერი $y=M$ წრფისათვის ფუნქციის გრაფიკზე მოვნახავთ წერტილს, რომელიც ამ წრფის ზემოთ მდებარეობს.

მაგალითად, $y=x^2-4$ ფუნქცია ზემოდან შემოუსაზღვრელია (ნახ. 5.19).



ნახ. 5.19

$f: X \to Y$ ფუნქციას ქვემოდან შემოსაზღვრული ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი m რიცხვი ($\exists m \in R$), რომ სრულდება უტოლობა

$$f(x) \geq m, \forall x \in X.$$

ქვემოდან შემოსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=m$ წრფის ზემოთ.

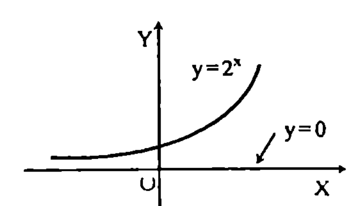
მაგალითად, $y=2^x$ ფუნქცია ქვემოდან შემოსაზღვრულია, რადგან სამართლიანია უტოლობა

$$2^x > 0, \forall x \in R.$$

ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=0$ წრფის (OX ღერძის) ზემოთ (ნახ. 5.20).

$f: X \to Y$ ფუნქციას ქვემოდან შემოუსაზღვრელი ეწოდება, თუ იგი არ არის ქვემოდან შემოსაზღვრული, ე.ი. თუ ნებისმიერი m რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $x_0 \in X$ ($\forall m \in R$, $\exists x_0 \in X$), რომ სრულდება უტოლობა

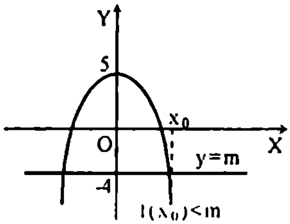
$$f(x_0) < m.$$



ნახ. 5.20

თუ f ფუნქცია ქვემოდან შემოუსაზღვრელია, მაშინ ნებისმიერი $y=m$ წრფისათვის ფუნქციის გრაფიკზე მოვნახავთ წერტილს, რომელიც ამ წრფის ქვემოთ მდებარეობს.

მაგალითად. $y=-x^2+5$ ფუნქცია ქვემოდან შემოუსაზღვრელია (ნახ. 5.21).



ნახ. 5.21

$f:X\to Y$ ფუნქციას შემოსაზღვრული ეწოდება, თუ იგი ზემოდანაც და ქვემოდანაც შემოსაზღვრულია, ე.ი. თუ არსებობს ისეთი m და M რიცხვები ($\exists m\in R, \exists M\in R$), რომ სრულდება ორმაგი უტოლობა

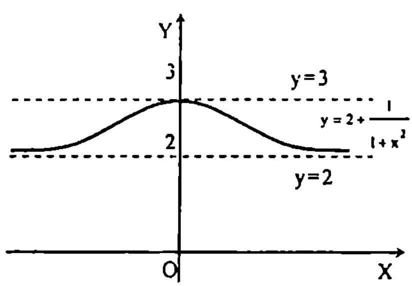
$$m\le f(x)\le M,\ \forall x\in X.$$

შემოსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=m$ და $y=M$ წრფეებს შორის.

მაგალითად, $y=2+\dfrac{1}{1+x^2}$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, რადგან სამართლიანია უტოლობა

$$2<2+\frac{1}{1+x^2}\le 3,\ \forall x\in R.$$

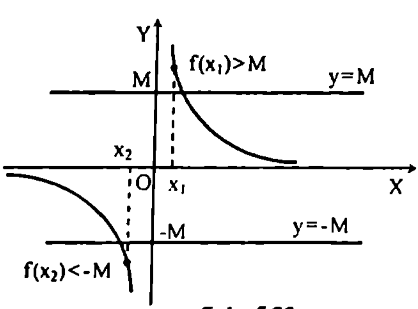
ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=2$ და $y=3$ წრფეებს შორის (ნახ. 5.22).



ნახ. 5.22

$f:X\to Y$ ფუნქციას შემოუსაზღვრელი ეწოდება, თუ იგი არ არის შემოსაზღვრული არც ზემოდან და არც ქვემოდან. ე.ი. თუ ნებისმიერი M რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $x_1\in X$ და $x_2\in X$, რომ სამართლიანია უტოლობები:

$$f(x_1)>M \text{ და } f(x_2)<-M.$$



ნახ. 5.23

თუ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია, მაშინ ნებისმიერი M რიცხვისათვის ფუნქციის გრაფიკზე მოვნახავთ ორ წერტილს მაინც, რომელთაგან ერთი მდებარეობს $y=M$ წრფის ზემოთ და მეორე კი $y=-M$ წრფის ქვემოთ.

მაგალითად, $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია (ნახ. 5.23).

5.5. ლუწი და კენტი ფუნქციები

ვიტყვით, რომ $X\subset R$ რიცხვითი სიმრავლე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, თუ იგი თავის ნებისმიერ ელემენტთან ერთად მის მოპირდაპირესაც შეიცავს, ანუ

$$\forall a\in X\Rightarrow -a\in X.$$

მაგალითად $\{-2,0,2\}$, $[-3,3]$, $]-5,5[$ სიმრავლეები სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, ხოლო $]-2,5[$ სიმრავლე არ არის სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ვთქვათ, $f:X\rightarrow Y$ ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. f ფუნქციას ლუწი ფუნქცია ეწოდება, თუ

$$\forall x\in X\Rightarrow f(-x)=f(x),$$

ხოლო f ფუნქციას კენტი ფუნქცია ეწოდება, თუ

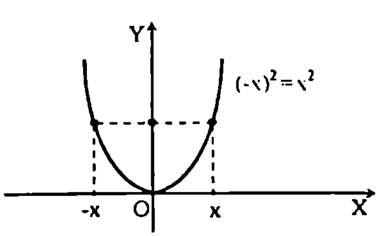
$$\forall x\in X\Rightarrow f(-x)=-f(x).$$

(x,y) და $(-x,y)$ წყვილების შესაბამისი წერტილები სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ, ამიტომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ.

(x,y) და $(-x,-y)$ წყვილების შესაბამისი წერტილები სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, ამიტომ კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

მაგალითად, $y=x^2$ ლუწი ფუნქციაა, რადგან

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).$$

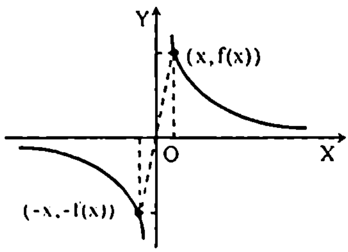


ნახ. 5.24

მისი გრაფიკი – პარაბოლა სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ (ნახ. 5.24).

$y=\frac{1}{x}$ კენტი ფუნქციაა, რადგან

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x).$$



ნახ. 5.25

მისი გრაფიკი – ჰიპერბოლა სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ (ნახ. 5.25).

შენიშვნა. **კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულ სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით.**

მართლაც,

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

სადაც

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\qquad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

ცხადია, $g(x)$ ლუწი, ხოლო $h(x)$ კენტი ფუნქციაა.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება შექცევადი ფუნქცია?
2. რას ეწოდება შექცეული ფუნქცია?
3. ჩამოაყალიბეთ ჰორიზონტალური წრფის წესი.
4. ჩამოაყალიბეთ შექცეული ფუნქციის მოძებნის წესი.
5. რას ეწოდება მკაცრად ზრდადი (მკაცრად კლებადი) ფუნქცია?
6. რას ეწოდება ზრდადი (კლებადი) ფუნქცია?
7. რას ეწოდება მონოტონური ფუნქცია?
8. რას ეწოდება მუდმივი ფუნქცია? იგივური ფუნქცია?
9. ჩამოაყალიბეთ ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული (შემოუსაზღვრელი) ფუნქციის განმარტება.
10. როგორ სიმრავლეს ეწოდება სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ? მოიყვანეთ მაგალითები.
11. როგორ ფუნქციას ეწოდება ლუწი (კენტი) ფუნქცია?
12. შეიძლება თუ არა, რომ ფუნქცია ერთდროულად იყოს ლუწი და კენტი?
13. შეიძლება თუ არა ლუწი (კენტი) ფუნქცია იყოს შექცევადი?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

5.1. $f(x)=2x+4$ ფუნქციისათვის იპოვეთ $f^{-1}(b)$, თუ:

ა) $b=0$;
ბ) $b=4$;
გ) $b=-4$.

5.2. $g(x)=x^3$ ფუნქციისათვის იპოვეთ $g^{-1}(b)$, თუ:

ა) $b=0$;
ბ) $b=4$;
გ) $b=9$;
დ) $b=-1$;
ე) $b=-4$.

5.3. $f(x)=\sin x,\quad x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ ფუნქციისათვის იპოვეთ $f^{-1}(a)$, თუ:

ა) $a=0$;
ბ) $a=-\frac{1}{2}$;
გ) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
ე) $a=-1$.

5.4. $f(x)=\cos x,\quad x\in[\pi,2\pi]$ ფუნქციისათვის იპოვეთ $f^{-1}(a)$, თუ:

ა) $a=0$;
ბ) $a=\frac{1}{2}$;
გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
დ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
ე) $a=1$.

5.5. $f(x)=\operatorname{tg}x,\quad x\in\left]-\frac{3}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$ ფუნქციისათვის იპოვეთ $f^{-1}(a)$, თუ:

ა) $a=0$;
ბ) $a=-1$;
გ) $a=\sqrt{3}$;
დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.6. $f(x)=\log_2 x$ ფუნქციისათვის იპოვეთ $f^{-1}(a)$, თუ:

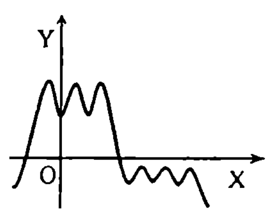
ა) $a=-2$;
ბ) $a=0$;
გ) $a=1$;
დ) $a=6$.

5.7. $f(x)=3^x$ ფუნქციისათვის იპოვეთ $f^{-1}(a)$, თუ:

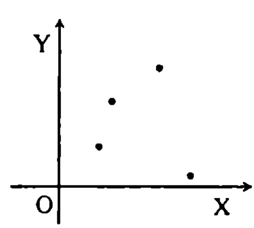
ა) $a=1$;
ბ) $a=3$;
გ) $a=2$.

5.8. შექცევადია თუ არა გრაფიკული ხერხით მოცემული შემდეგი ფუნქციები? პასუხი დაასაბუთეთ:

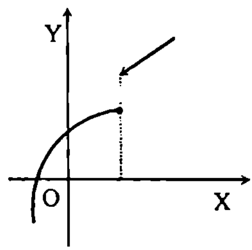
ა)



ბ)



გ)



5.9. დაადგინეთ, გააჩნიათ თუ არა შექცეული ფუნქცია შემდეგ ფუნქციებს. პასუხი დაასაბუთეთ:

ა) $f: \{1,3,7\} \to \{2,4,9\}$, $f(1)=9$, $f(3)=4$, $f(7)=2$;

ბ) $f: \{2,0,-2,3\} \to \{5,6,7,8\}$, $f(2)=6$, $f(0)=8$, $f(-2)=5$, $f(3)=7$;

გ) $f: \{-1,1,2\} \to \{\sqrt{3}, -\pi, 2\}$, $f(-1)=-\pi$, $f(1)=\sqrt{3}$, $f(2)=\sqrt{3}$;

დ) $f: \{\sqrt{2}, 3, \pi\} \to \{\sqrt{7}\}$, $f(\sqrt{2})=\sqrt{7}$, $f(3)=\sqrt{7}$, $(\pi)=\sqrt{7}$;

ე) $f: [-1,1] \to [0,1]$, $f(x)=x^4$;

ვ) $f: [0,2] \to [0,16]$, $f(x)=x^4$;

ზ) $f: [-1,2] \to [-1,8]$, $f(x)=x^3$;

თ) $f: [-1,2] \to [0,17]$, $f(x)=x^4+1$;

ი) $f:]-2,2[\to]0,7[$, $f(x)=x^2+3$.

5.10. მოცემული ფუნქციებისათვის იპოვეთ შექცეული ფუნქციები და ერთსა და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=2x$;

ბ) $y=-3x$;

გ) $y=3x+2$;

დ) $y=-2x+4$;

ე) $y=\dfrac{2}{x}$;

ვ) $y=-\dfrac{1}{x}$;

ზ) $y=x^3+1$;

თ) $y=-x^5$.

5.11. იპოვეთ $(f^{-1} \circ f)(5)$ და $(f \circ f^{-1})(x)$;

5.12. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა მკაცრად მონოტონურობის შუალედები:

ა) $f(x)=x$;

ბ) $f(x)=-x$;

გ) $f(x)=2x^2+1$;

დ) $f(x)=-x^2-5$;

ე) $f(x)=16$;

ვ) $f(x)=x^2-5x+6$;

ზ) $f(x)=|x|$;

თ) $f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{როცა } x<1, \\ -x^2+2, & \text{როცა } x\geq 1; \end{cases}$

ი) $f(x)=\begin{cases} -2, & \text{როცა } x<-1, \\ 2x, & \text{როცა } -1\leq x<1, \\ (x-2)^2+2, & \text{როცა } x\geq 1; \end{cases}$

კ) $f(x)=\begin{cases} 3^x, & \text{როცა } x\leq -1, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{როცა } -1<x<0, \\ -2x+\dfrac{1}{3}, & \text{როცა } x\geq 0. \end{cases}$

5.13. გაარკვიეთ შემდეგ ფუნქციათა შემოსაზღვრულობა-შემოუსაზღვრელობის საკითხი:

ა) $f(x)=2x^2+3;$

ბ) $f(x)=x^2+7x-12;$

გ) $f(x)=15;$

დ) $f(x)=x^3-x;$

ე) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{როცა } x\le -1,\\ 2, & \text{როცა } -1<x\le 1,\\ -2x^2, & \text{როცა } x>1;\end{cases}$

ვ) $f(x)=\begin{cases}3x^2, & \text{როცა } x\le 0,\\ 0, & \text{როცა } 0<x\le 1,\\ -x^3, & \text{როცა } x>1;\end{cases}$

ზ) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{როცა } x<-1,\\ 3x, & \text{როცა } -1\le x<1,\\ x^2, & \text{როცა } x\ge 1;\end{cases}$

თ) $f(x)=\dfrac{2}{5-3\cos x};$

ი) $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x;$

კ) $f(x)=3^{2|\sin x|}.$

5.14. გაარკვიეთ შემდეგ ფუნქციათა ლუწკენტობის საკითხი. ააგეთ სათანადო გრაფიკები:

ა) $f(x)=5;$

ბ) $f(x)=0;$

გ) $f(x)=-5;$

დ) $f(x)=3x;$

ე) $f(x)=3x-1;$

ვ) $f(x)=-x^2+1;$

ზ) $f(x)=x^3+2;$

თ) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } x<0,\\ 0, & \text{როცა } x=0,\\ -1, & \text{როცა } x>0;\end{cases}$

ი) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{როცა } x\le 0,\\ -x^2, & \text{როცა } x>0;\end{cases}$

კ) $f(x)=\begin{cases}3, & \text{როცა } -2<x<-1,\\ -3, & \text{როცა } 1<x<2;\end{cases}$

ლ) $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{როცა } x<-1,\\ 0, & \text{როცა } -1\le x\le 1,\\ 1, & \text{როცა } 1<x<2.\end{cases}$

5.15. ცნობილია, რომ $g(x)$ ნულოვანისაგან განსხვავებული ლუწი, ხოლო $h(x)$ ნულოვანისაგან განსხვავებული კენტი ფუნქციაა. გაარკვიეთ შემდეგ ფუნქციათა ლუწკენტობის საკითხი:

ა) $f(x)=g(x)+h(x);$

ბ) $f(x)=g(x)h(x);$

გ) $f(x)=g^n(x),\ n\in N;$

დ) $f(x)=h^n(x),\ n\in N.$

5.16. გაარკვიეთ შემდეგ ფუნქციათა ლუწკენტოვნების საკითხი.

ა) $f(x)=\sin 2x;$

ბ) $f(x)=\cos 5x;$

გ) $f(x)=|\sin x|;$

დ) $f(x)=\sin x+2\cos x;$

ე) $f(x)=\sin x\cos x$;

ვ) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}$;

ზ) $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$;

თ) $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^5}$;

ი) $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\cos x}{x^3}$.

5.17. შემდეგი ფუნქციები წარმოადგინეთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით:

ა) $f(x)=e^x+3e^{2x}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2}$;

გ) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

ლექცია 6

წრფე. წრფივ განტოლებათა სისტემა

6.1. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებანი

ვთქვათ, κ და b ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვებია და განვიხილოთ

$$y=\kappa x+b \qquad (1)$$

განტოლებით მოცემული ფუნქცია. როგორც ცნობილია, ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს.

ვთქვათ, $A=A(x_1,y_1)$ ამ გრაფიკზე აღებული რაიმე ფიქსირებული წერტილია. გრაფიკის განმარტების თანახმად, გვექნება

$$y_1=\kappa x_1+b. \qquad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან, წრფის ნებისმიერი $B=B(x,y)$ წერტილისათვის ვღებულობთ თანაფარდობას:

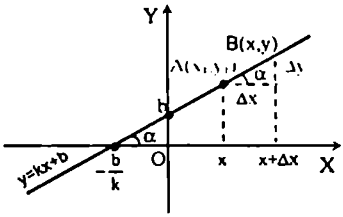
$$y-y_1=\kappa(x-x_1). \qquad (3)$$

$x-x_1=\Delta x$ სხვაობას x_1 წერტილში *არგუმენტის ნაზრდს*, ხოლო $y-y_1=\Delta y$ სხვაობას *ფუნქციის ნაზრდს* უწოდებენ. როგორც (3)-დან ჩანს $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\kappa$, ე.ი. **წრფივი ფუნქციისათვის ფუნქციის ნაზრდის შეფარდება არგუმენტის ნაზრდთან მუდმივი სიდიდეა. მას წრფის დახრილობა ეწოდება.**

მაგალითად, თუ ცნობილია, რომ წერტილები $A(3,5)$ და $B(-1,2)$ ძევს წრფეზე, მაშინ ამ წრფის დახრილობაა

$$\kappa=\frac{5-2}{3-(-1)}=\frac{3}{4}\,.$$

ამბობენ, რომ რაიმე წრფე OX ღერძთან ადგენს α კუთხეს ($0^0\leq\alpha<180^0$), თუ წრფის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილის გარშემო საათის ისრის მიმართულებით α-ს ტოლი კუთხით მობრუნების შედეგად იგი OX ღერძს შეუ-



ნახ. 6.1

თავსდება. თუ წრფე OX ღერძის პარალელურია, მაშინ მათ შორის კუთხე 0^0-ის ტოლად ითვლება.

დახრილობის გეომეტრიული შინაარსის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი ნახაზი (იხ. ნახ. 6.1).

როგორც ნახ. 6.1-დან ჩანს

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = k.$$

ამრიგად, OX ღერძთან წრფის მიერ შედგენილი კუთხის ტანგენსი უდრის წრფის დახრილობას. მას წრფის საკუთხო კოეფიციენტსაც უწოდებენ.

შენიშვნა. თუ კუთხე α მახვილია, *საკუთხო კოეფიციენტი დადებითია*, ხოლო თუ α ბლაგვია, *საკუთხო კოეფიციენტი უარყოფითია.*

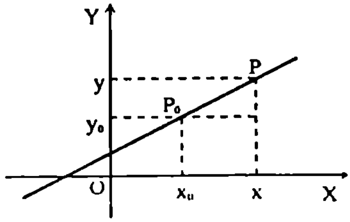
აბსცისათა ღერძის პერპენდიკულარული წრფეებისათვის (ისინი (1) განტოლებით არ მოიცემიან) საკუთხო კოეფიციენტი არ განისაზღვრება.

(1)-ს ეწოდება წრფის განტოლება k დახრილობითა და b-ს ტოლი y გადაკვეთით (OY ღერძთან წრფის გადაკვეთის წერტილის ორდინატა b-ს ტოლია).

შევადგინოთ $P_0(x_0,y_0)$ წერტილზე გამავალი k დახრილობის მქონე წრფის განტოლება. ვთქვათ, $P(x,y)$ არის საძიებელ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი, რომელიც განსხვავდება მოცემული $P_0(x_0,y_0)$ წერტილისაგან (ნახ. 6.2).

ამ ორ წერტილზე გამავალი წრფის დახრილობაა

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$



ნახ. 6.2

აქედან,

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

ამრიგად, ფიქსირებულ $P_0(x_0,y_0)$ წერტილზე მოცემული k დახრილობით გამავალი წრფის განტოლებაა

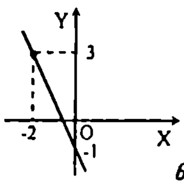
$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (4)$$

მაგალითი 1. შევადგინოთ (-2,3) წერტილზე $\kappa=-2$ დახრილობით გამავალი წრფის განტოლება. დავხაზოთ შესაბამისი წრფე.

ამოხსნა. $(x_0,y_0)=(-2,3)$ და $\kappa=-2$, ამიტომ (4) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$y-3=-2(x-(-2)),$$

$$y=-2x-1.$$



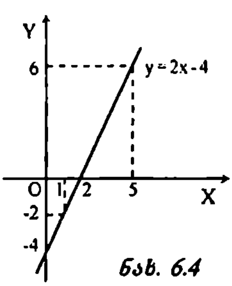
ნახ. 6.3

გრაფიკულად აღნიშნული წრფე ნახ. 6.3-ზეა წარმოდგენილი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ (1,-2) და (5,6) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება. დავხაზოთ შესაბამისი წრფე.

ამოხსნა. (1,-2) და (5,6) წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობაა

$$\kappa=\frac{6-(-2)}{5-1}=\frac{8}{4}=2.$$



ნახ. 6.4

ახლა დავწეროთ $\kappa=2$-ის ტოლი დახრილობით (1,-2) ან (5,6) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება:

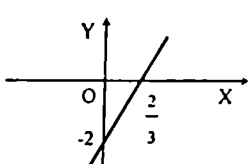
$$y-(-2)=2(x-1) \text{ ან } y-6=2(x-5),$$

რაც გვაძლევს $y=2x-4$ სახის განტოლებას.

გრაფიკულად წრფე ნახ. 6.4-ზეა წარმოდგენილი.

მაგალითი 3. ჩავწეროთ წრფის განტოლება $\kappa=3$-ის ტოლი დახრილობითა და -2-ის ტოლი y-გადაკვეთით. დავხაზოთ შესაბამისი წრფე.

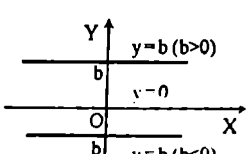
ამოხსნა. $\kappa=3$ და $b=-2$, ამიტომ წრფის განტოლებაა $y=3x-2$. შესაბამისი გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 6.5-ზე.



ნახ. 6.5

ნახ. 6.6-სა და ნახ. 6.7-ზე გამოსახულია შესაბამისად *ჰორიზონტალური* და *ვერტიკალური* წრფეები.

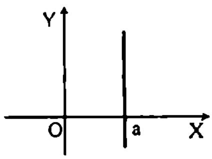
თუ წრფე ჰორიზონტალურია, მაშინ $\kappa=0$ და $y=b$ იქნება იმ ჰორიზონტალური წრფის განტოლება, რომლის y-გადაკვეთა ტოლია b-სი.



ნახ. 6.6

ახლა განვიხილოთ ვერტიკალური წრფე, რომელიც **OX** ღერძს კვეთს **A(a,0)** წერტილში (ნახ. 6.7).

ამ წრფის ყოველ წერტილს ექნება ერთიდაიგივე აბსცისა **$x=a$**. ამიტომ, **(a,0) წერტილზე გამავალი ვერტიკალური წრფის განტოლებაა $x=a$.**



ნახ. 6.7

ორ (x_0,y_0) და (x_1,y_1) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას, სადაც $(x_0 \neq x_1)$ და $(y_0 \neq y_1)$ აქვს სახე

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

ახლა განვიხილოთ *ორცვლადიანი წრფივი (პირველი ხარისხის) განტოლება*, რომლის ზოგადი სახეა $ax+by=c$, სადაც a, b და c ნამდვილი რიცხვებია, a და b ერთდროულად არ უდრის ნულს, x და y კი ნამდვილი ცვლადებია. იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს აღნიშნულ განტოლებას, წარმოადგენს წრფეს. ამის გამო აღნიშნულ განტოლებას *წრფის ზოგად განტოლებას უწოდებენ*.

ამრიგად, წრფის ზოგადი განტოლებაა

$$ax+by=c,$$

სადაც a, b და c ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან, a და b არ არის ერთდროულად ნულის ტოლი, x და y კი ნამდვილი ცვლადებია.

ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით ორცვლადიანი წრფივი განტოლების შესახებ შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა:

1. თუ $b \neq 0$, მაშინ წრფის ზოგადი განტოლება შეიძლება ასე გარდავქმნათ

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b},$$

რაც გვაძლევს წრფის განტოლებას $-\frac{a}{b}$ დახრილობითა და $\frac{c}{b}$-ის ტოლი y-გადაკვეთით;

2. თუ $b=0$, მაშინ წრფის ზოგადი განტოლებიდან ვღებულობთ $ax=c$ (ამ შემთხვევაში $a \neq 0$, რადგან $b=0$).

ამრიგად, თუ $b=0$, მაშინ წრფის ზოგადი განტოლება შეესაბამება ვერტიკალურ $x=\frac{c}{a}$ წრფეს.

მაგალითი 4. $2x+3y=6$ განტოლებით მოცემული წრფისათვის იპოვეთ დახრილობა და y-გადაკვეთა.

ამოხსნა. ამოვხსნათ მოცემული განტოლება y-ის მიმართ

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 .$$

ამრიგად, წრფის დახრილობა $-\frac{2}{3}$-ის, ხოლო y-გადაკვეთა 2-ის ტოლია.

წრფის განტოლების სახეებსა და შესაბამის წრფეებს შორის კავშირი მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში:

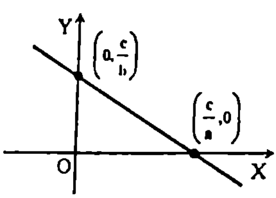
განტოლება	ფორმულის სახელწოდება
$ax + by = c$ a და b არ უდრის ერთდროულად ნულს	წრფის ზოგადი განტოლება
$y - y_0 = k(x - x_0)$	(x_0, y_0) წერტილზე k დახრილობით გამავალი წრფის განტოლება
$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$	(x_0, y_0) და (x_1, y_1) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება
$y = kx + b$	წრფის განტოლება k დახრილობითა და b-ს ტოლი y-გადაკვეთით
$y = b$	ჰორიზონტალური წრფის განტოლება
$x = a$	ვერტიკალური წრფის განტოლება

6.2. წრფის აგება ზოგადი განტოლების საშუალებით

იმ შემთხვევაში, როცა წრფე მოცემულია ზოგადი განტოლების საშუალებით, მისი გრაფიკის აგება მოხერხებულია ორი წერტილის – y-გადაკვეთისა და x-გადაკვეთის მოძებნით. მიღებულ ორ წერტილზე გამავალი წრფე იქნება სწორედ საძიებელი წრფე.

განვიხილოთ წრფის ზოგადი განტოლება

$$ax + by = c.$$



ნახ. 6.8

თუ ამ განტოლებაში ჩავსვამთ $x = 0$, მივიღებთ OY ღერძთან გადაკვეთის წერტილს

$$x = 0 \Rightarrow by = c \Rightarrow y = \frac{c}{b} \Rightarrow \text{ წერტილი } \left(0, \frac{c}{b}\right).$$

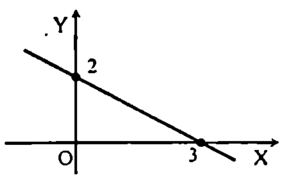
თუ ჩავსვავთ $y=0$, მივიღებთ OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილს

$$y=0 \Rightarrow ax=c \Rightarrow x=\frac{c}{a} \Rightarrow \text{წერტილი } \left(\frac{c}{a},0\right).$$

სათანადო წრფე გამოსახულია ნახ. 6.8-ზე.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $2x+3y=6$ განტოლებით მოცემული წრფის y-გადაკვეთა, x-გადაკვეთა და ავაგოთ შესაბამისი წრფე.

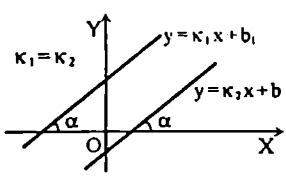
ამოხსნა. ვიპოვოთ y-გადაკვეთა: $x=0 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=2$, ე.ი. წრფე OY ღერძს კვეთს (0,2) წერტილში. ვიპოვოთ x-გადაკვეთა: $y=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$, ე.ი. წრფე OX ღერძს კვეთს (3,0) წერტილში. მოვნიშნოთ მიღებული წერტილები ღერძებზე და გავატაროთ მათზე წრფე (ნახ. 6.9).



ნახ. 6.9

6.3. პარალელური და პერპენდიკულარული წრფეები

გამოყვანის გარეშე მოვიყვანოთ *ორი წრფის პარალელურობისა და პერპენდიკულარობის პირობები*, რომელთა გეომეტრიული ილუსტრაცია ნახ. 6.10-სა და 6.11-ზეა მოყვანილი.



ნახ. 6.10

წრფეთა პარალელურობის პირობა: ორი არავერტიკალური წრფე პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მათი დახრილობები ტოლია. ვერტიკალური წრფეები პარალელურია.

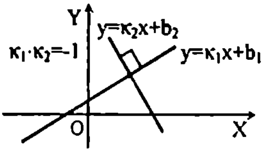
მაგალითი 6. ჩაწერეთ (2,1) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც $2x+3y=5$ წრფის პარალელურია.

ამოხსნა. ამოვხსნათ $2x+3y=5$ განტოლება y-ის მიმართ.

$$3y=-2x+5, \qquad y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}.$$

აღნიშნული წრფის დახრილობაა $k=-\frac{2}{3}$. ახლა ჩავწეროთ (2,1) წერტილზე $k=-\frac{2}{3}$-ის ტოლი დახრილობით გამავალი წრფის განტოლება

$$y-1=-\frac{2}{3}(x-2), \quad \text{ანუ} \quad 3y+2x=7.$$



ნახ. 6.11

წრფეთა პერპენდიკულარობის პირობა: ორი არავერტიკალური წრფე პერპენდიკულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი დახრილობების ნამრავლი -1-ის ტოლია, ე.ი. $k_1\cdot k_2=-1$, სადაც k_1 და k_2 აღნიშნულ წრფეთა დახრილობებია. ვერტიკალური წრფე ჰორიზონტალური წრფის პერპენდიკულარულია.

მაგალითი 7. ჩავწეროთ (2,5) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც პერპენდიკულარულია $x+2y-6=0$ წრფისა.

ამოხსნა. მოცემული განტოლებიდან განვსაზღვროთ y

$$y=-\frac{1}{2}x+3.$$

ე.ი. წრფის დახრილობაა $k_1=-\frac{1}{2}$.

ამ წრფის პერპენდიკულარული წრფის დახრილობა იქნება $k_2=2$. დავწეროთ (2,5) წერტილზე $k_2=2$-ის ტოლი დახრილობით გამავალი წრფის განტოლება $y-5=2(x-2)$, ანუ $y=2x+1$.

პასუხი: (2,5) წერტილზე $x+2y-6=0$ წრფის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფის განტოლებაა $y=2x+1$.

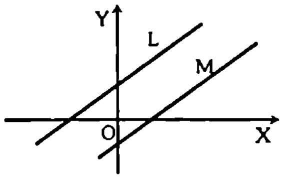
6.4. წრფივ განტოლებათა სისტემა

ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა ეწოდება შემდეგი სახის სისტემას

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

სადაც, a_i, b_i და c_i $(i=1,2)$ ნამდვილი რიცხვებია, x და y კი ცვლადები.

სიმრავლე იმ (x,y) წყვილების, რომლებიც მოცემული სისტემის რომელიმე განტოლებას აკმაყოფილებენ, წარმოადგენს წრფეს OXY საკოორდინატო სიბრტყეზე. ამოვხსნათ სისტემა ნიშნავს ვიპოვოთ ყველა ისეთი (x,y) წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს სისტემაში შემავალ ორივე განტოლებას, ე.ი. ვიპოვოთ ისეთი წერტილები, რომლებიც ძევს სისტემაში მოცემული განტოლებებით განსაზღვრულ ორივე წრფეზე. თუ ამ წრფეებს აღვნიშნავთ L-ითა და M-ით, ადგილი ექნება ერთ-ერთს შემდეგი სამი შემთხვევიდან.



ნახ. 6.12

1. L და M წრფეები *პარალელურია* (ნახ. 6.12), რაც იმას ნიშნავს, რომ არ არსებობს ისეთი წყვილი (x,y), რომელიც აკმაყოფილებს ორივე განტოლებას ერთდროულად, ე.ი. სისტემას *ამონახსნი არ გააჩნია.*

თუ სისტემის თითოეული განტოლებიდან განვსაზღვრავთ y-ს, მაშინ სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1}, & b_1 \neq 0, \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2}, & a_2 \neq 0, \quad b_2 \neq 0. \end{cases}$$

L და M წრფეების პარალელურობა ნიშნავს, რომ მათი დახრილობები ტოლია და y-გადაკვეთები კი განსხვავებულია, ე.ი.

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \quad \text{და} \quad \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}.$$

ამ ორი პირობიდან, პროპორციის თვისებებით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

მაშასადამე, თუ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ცვლადთა კოეფიციენტები პროპორციულია და ისინი არ არიან პროპორციული თავისუფალი წევრებისა, მაშინ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია.

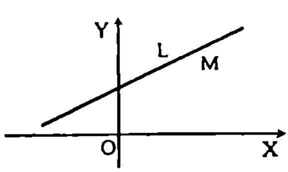
2. L და M *წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა* (ნახ. 6.13). ამ წრფეზე მდებარე ყოველი (x,y) წერტილი წარმოადგენს სისტემის ამონახსნს და, მაშასადამე, სისტემას გააჩნია *ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.*

თუ L და M წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ მათ აქვთ ტოლი დახრილობები და ტოლი y-გადაკვეთები, ე.ი.

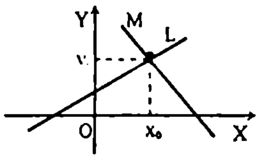
$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \quad \text{და} \quad \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}.$$

აქედან კი ვღებულობთ, რომ

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$



ნახ. 6.13



ნახ. 6.14

მაშასადამე, თუ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ცვლადთა კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები ერთმანეთის პროპორციულია, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

3. L და M *წრფეები იკვეთება* (x_0,y_0) *წერტილში* (ნახ. 6.14). (x_0,y_0) წყვილი წარმოადგენს სისტემის *ერთადერთ ამონახსნს.*

თუ L და M წრფეები იკვეთებიან, მაშინ მათი დახრილობები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, ე.ი.

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}, \quad \text{ანუ} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

მაშასადამე, თუ ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ცვლადთა კოეფიციენტები პროპორციულნი არ არიან, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მაგალითი 8. დავადგინოთ რამდენი ამონახსნი აქვს განტოლებათა შემდეგ სისტემებს:

$$\text{ა)} \begin{cases} x+2y=4, \\ 3x+6y=8; \end{cases} \quad \text{ბ)} \begin{cases} 2x-3y=6, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1; \end{cases} \quad \text{გ)} \begin{cases} x+y=3, \\ 3x-y=1. \end{cases}$$

ამოხსნა. ა) $\begin{cases} x+2y=4, \\ 3x+6y=8, \end{cases} \quad \dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{6}\neq\dfrac{4}{8},$

ე.ი. ცვლადთა კოეფიციენტები პროპორციულია და ისინი არ არიან პროპორციულნი თავისუფალი წევრებისა, რაც ნიშნავს, რომ სისტემას არა აქვს ამონახსნი.

$$\text{ბ)} \begin{cases} 2x-3y=6, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1. \end{cases} \qquad \frac{2}{\frac{1}{3}}=\frac{-3}{-\frac{1}{2}}=\frac{6}{1}.$$

ცვლადთა კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები პროპორციულია, რაც ნიშნავს, რომ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

$$\text{გ)} \begin{cases} x+y=3, \\ 3x-y=1, \end{cases} \qquad \frac{1}{3}\neq\frac{1}{-1}.$$

ცვლადთა კოეფიციენტები არ არის პროპორციული, რაც ნიშნავს, რომ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება არგუმენტის ნაზრდი?
2. რას ეწოდება ფუნქციის ნაზრდი?
3. შეიძლება თუ არა არგუმენტის ნაზრდი იყოს დადებითი და ფუნქციის ნაზრდი კი უარყოფითი?
4. რას ეწოდება წრფის დახრილობა?
5. რას უდრის ჰორიზონტალური წრფის დახრილობა?
6. რას უდრის ვერტიკალური წრფის დახრილობა?
7. რა გეომეტრიული შინაარსი აქვს წრფის დახრილობას?
8. როგორი სახე აქვს მოცემულ წერტილზე მოცემული დახრილობით გამავალი წრფის განტოლებას?
9. როგორი სახე აქვს წრფის განტოლებას k-დახრილობითა და y-გადაკვეთით?
10. დაახასიათეთ წრფის ზოგადი განტოლება.
11. რა კავშირია პარალელური და პერპენდიკულარული წრფეების დახრილობებს შორის?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

6.1. იპოვეთ მოცემულ წერტილთა წყვილზე გამავალი წრფის დახრილობა. დახაზეთ შესაბამისი წრფე:

ა) (1,3), (2,7);

ბ) (-1,3), (2,3).

6.2. შეადგინეთ მითითებულ P_1და P_2 წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება. დახაზეთ შესაბამისი წრფე:

ა) $P_1(-2,4)$, $P_2(-4,6)$;

ბ) $P_1(-1,4)$, $P_2(-3,2)$;

გ) $P_1(-2,4)$, $P_2(3,-5)$.

6.3. შეადგინეთ P წერტილზე k დახრილობით გამავალი წრფის განტოლება. დახაზეთ შესაბამისი წრფე:

ა) P(2,1), k=-3;

ბ) P(4,-2), k=-1;

გ) P(2,1), k არ განისაზღვრება.

6.4. დაადგინეთ მდებარეობს თუ არა B(0,3) და C(1,2) წერტილები P(2,1) წერტილზე k=3 დახრილობით გავლებულ წრფეზე.

6.5. იპოვეთ m-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც (m,5) და (3,2m) წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა არის 2-ის ტოლი.

6.6. იპოვეთ m-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც (m+1,2) და (-1,m) წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა არის უარყოფითი.

6.7. იპოვეთ m-ის ის მნიშვნელობა რომლისთვისაც (-2,m-1) და (m+2,1) წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა არის დადებითი.

6.8. იპოვეთ $y=2x-3$ და $y=-3x+5$ წრფეების გადაკვეთაზე 2-ის ტოლი დახრილობით გავლებული წრფის განტოლება.

6.9. დაწერეთ $y=5x+2$ და $y=-x+1$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე 3-ის ტოლი დახრილობით გავლებული წრფის განტოლება.

6.10. იპოვეთ p-ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც (p,2) და (3,-3p) წერტილებზე გავლებული წრფის დახრილობა მეტია 5-ზე.

6.11. იპოვეთ q-ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც (2q,-q) და (1,3) წერტილებზე გავლებული წრფის დახრილობა არაუარყოფითია.

6.12. შეადგინეთ k დახრილობისა და b-ს ტოლი y-გადაკვეთის მქონე წრფის განტოლება. ააგეთ შესაბამისი ნახაზი:

ა) k=3, b=3;

ბ) k=1, b=0;

გ) $k=-\dfrac{1}{2}$, b=3.

6.13. იპოვეთ ax+by=c ზოგადი განტოლებით მოცემული წრფის y-გადაკვეთა, x-გადაკვეთა და ააგეთ შესაბამისი წრფე:

ა) $2x-y-1=0$;

ბ) $x-3=0$;

გ) $y-4=0$;

დ) $x=0$;

ე) $y=0$.

6.14. შეადგინეთ ფიქსირებულ P წერტილზე გამავალი $ax+by=c$ წრფის პარალელური და პერპენდიკულარული წრფეების განტოლებები:

ა) $(-2,3)$, $2x+5y=3$;

ბ) $(-1,3)$, $x+2y-1=0$.

6.15. დაადგინეთ არის თუ არა პარალელური წრფეთა მოცემული წყვილები:

ა) $2x+3y=6$, $3x-2y=6$;

ბ) $y=x$, $x+y=1$;

გ) $y-4=0$, $4x-8y=0$.

6.16. იპოვეთ m-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(m+1)x+5y=3$ და $(3-m)x+10y=4$ წრფეები პარალელურია.

6.17. დაადგინეთ, რამდენი ამონახსნი აქვს მოცემულ წრფივ განტოლებათა სისტემას. დარწმუნდით მოცემული პასუხის სისწორეში სისტემის ამოხსნით. ააგეთ შესაბამისი ნახაზი:

ა) $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x+3y+8=0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 3u+2v=9, \\ 4u+3v=10; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 7x-8y=4, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 5x-7y+2=0, \\ 15x-21y=7. \end{cases}$

6.18. იპოვეთ მანძილი $(1,3)$ წერტილიდან $y=2x+3$ წრფემდე.

ლექცია 7

წრფივი მოდელები ეკონომიკაში

ნებისმიერი ბიზნესის მიზანია *მოგების* მიღება. *საბაზრო ეკონომიკის* პირობებში ეს მრავალ ფაქტორზეა დამოკიდებული. თითოეული ფაქტორი რაოდენობრივად შეიძლება დახასიათდეს. გარკვეული რიცხვების გამოსახული ფაქტორების ურთიერთდამოკიდებულებას *ფუნქციის* ხასიათი გააჩნია. მათემატიკურ წინადადებას, რომელიც ამ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას აღწერს, *მათემატიკური მოდელი* ეწოდება. ეს წინადადება შეიძლება განტოლების, უტოლობის ან სხვა სახით იყოს ჩაწერილი.

ამ ლექციაში გავეცნობით *ეკონომიკის წრფივ მოდელებს*. ამ შემთხვევაში დამოუკიდებელი ცვლადის როლში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა ან დრო გამოდის, ხოლო დამოკიდებული ცვლადის როლში კი ეკონომიკის ესა თუ ის მახასიათებელი სიდიდე. როცა მათ შორის დამოკიდებულება წრფივია, მაშინ სათანადო *მათემატიკური მოდელიც წრფივია*. ეს უმარტივესი შემთხვევაა. იგი საკმარისად კარგად აღწერს ეკონომიკური პროცესების არსებით მხარეებს. უფრო დეტალურ განხილვას *არაწრფივ მათემატიკურ მოდელებამდე* მიეყავართ.

7.1. დანახარჯის წრფივი მოდელი

პროდუქციის გამოშვებაზე ფირმის მიერ გაწეული დანახარჯები ორგვარია: *ფიქსირებული დანახარჯები* (Fixed Costs) და *ცვლადი დანახარჯები* (Variable Costs). ფიქსირებული დანახარჯები არ არის დამოკიდებული გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაზე. ასეთია, მაგალითად, *იჯარის გადასახადი, დაზღვევა, ხელმძღვანელ თანამშრომელთა ხელფასი* და სხვა. ცვლადი დანახარჯები კი დამოკიდებულია წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაზე. ასეთია, მაგალითად, *პროდუქციის წარმოებისათვის აუცილებელი ნედლეულის შეძენაზე დახარჯული თანხა, მუშების ხელფასი და სხვა. სრული დანახარჯი ამ ორი სახის დანახარჯის ჯამის ტოლია.*

თუ სრულ ცვლად დანახარჯს **a**-თი აღვნიშნავთ, სრულ ფიქსირებულ დანახარჯს **b**-თი, ხოლო სრულ დანახარჯს **C**-თი (Cost), მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$C = a + b. \qquad (1)$$

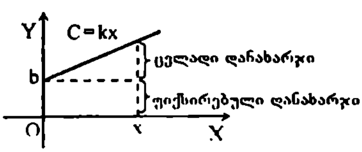
გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა აღვნიშნოთ x-ით. მაშინ ცხადია, რომ a არის x-ის ფუნქცია: $a = a(x)$.

ამ ფუნქციის ცხადი სახის დასადგენად შემოვიღოთ პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად გაწეული ცვლადი დანახარჯი და აღვნიშნოთ იგი k-თი. თუ ახლა დავუშვებთ, რომ სრული ცვლადი დანახარჯი გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობის პირდაპირპროპორციულად იცვლება, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$a(x) = kx, \quad k = \text{const} \qquad (2)$$

და მაშასადამე, (1) და (2) ფორმულების გამოყენებით გვექნება

$$C(x) = kx + b. \qquad (3)$$



ნახ. 7.1

მიღებული განტოლება წარმოადგენს დანახარჯის წრფივ მოდელს. გრაფიკულად იგი არის წრფე, რომლის k დახრილობა პროდუქციის ერთეულზე გაწეული ცვლადი დანახარჯის, ხოლო y-გადაკვეთა b სრული ფიქსირებული დანახარჯის ტოლია (ნახ. 7.1).

შენიშვნა. ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე წრფივი მოდელების გრაფიკები ძირითადად პირველ მეოთხედში აიგება.

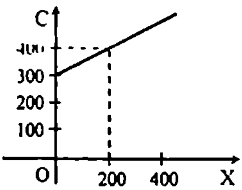
მაგალითი 1. ვთქვათ, 1 კგ ყავის მარცვლის წარმოებაზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია \$0,5, ხოლო ფირმის ფიქსირებული დანახარჯია \$300.

ა) ავაგოთ სრული დანახარჯის წრფივი მოდელი; ბ) ვიპოვოთ 200 კგ ყავის მარცვლის საწარმოებლად გაწეული სრული დანახარჯი; გ) ავაგოთ გრაფიკი.

ამოხსნა. ა) თუ ფირმა აწარმოებს x კგ ყავის მარცვალს, მაშინ (3) ფორმულის თანახმად სრული დანახარჯის მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე:

$$C(x) = 0{,}5x + 300.$$

ბ) როცა $x = 200$, მაშინ $C(200) = 0{,}5 \cdot 200 + 300 = 400(\$)$, ე.ი. 200კგ ყავის მარცვლის წარმოებაზე ფირმა ხარჯავს \$400-ს.



ნახ. 7.2

გ) OXC საკოორდინატო სიბრტყეზე სათანადო გრაფიკის – წრფის ასაგებად საკმარისია ორი წერტილის კოორდინატების ცოდნა. ერთი წერტილი ამოცანის პირობიდან უკვე ცნობილია. ესაა y-გადაკვეთა ანუ (0, 300), მეორე წერტილად ავიღოთ ბ) კითხვის პასუხად მიღებული შედეგი: (200, 400). მასშტაბების სათანადოდ შერჩევის შემდეგ გრაფიკს ექნება ნახ. 7.2-ზე მოცემული სახე.

შენიშვნა. სრული დანახარჯის (3) მათემატიკურ მოდელში შემავალი $\mathbf{k}$ და $\mathbf{b}$ პარამეტრები შესაბამისი შინაარსის $\mathbf{n}$ და $\mathbf{m}$ რაოდენობის ცალკეულ კომპონენტთა ჯამებს წარმოადგენს:

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{k}_i \,, \tag{4}$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{b}_i \,. \tag{5}$$

მაგალითი 2. გამომცემელმა ავტორს ხელნაწერში ჰონორარის სახით 5 000 ლარი გადაუხადა. თითო გვერდის კომპიუტერული აწყობა-დაკაბადონება 1 ლარი ჯდება; მისი ბეჭდვა და ყდაში ჩასმა 3 თეთრი. ქაღალდის ერთ შეკვრაში 500 ცალი ფურცელია და 10 ლარი ღირს, ყდის დიზაინი – 50 ლარი. ყდის ყოველი ეგზემპლარის ფერადად ბეჭდვა 90 თეთრი ჯდება. ვიპოვოთ 500 გვერდიანი წიგნის გამოცემაზე გამომცემლის მიერ გაწეული სრული დანახარჯი და ერთი ეგზემპლარის თვითღირებულება, თუ ტირაჟია: ა) 500 ეგზემპლარი; ბ) 1 000 ეგზემპლარი.

ამოხსნა. ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, სამართლიანია სრული დანახარჯების წრფივი მოდელის გამოყენება. თუ ტირაჟს x-ით აღვნიშნავთ, სრულ დანახარჯს კი C-თი, მაშინ (3) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$C(x) = kx + b.$$

k და b პარამეტრების (4) და (5) ფორმულების გამოყენებით დასადგენად, ამოცანის პირობაში მოცემული მონაცემები დავაჯგუფოთ ფიქსირებული და ცვლადი დანახარჯების მიხედვით.

ფიქსირებულ დანახარჯებს განეკუთვნება:

1. საავტორო ჰონორარი; აღვნიშნოთ იგი b_1-ით:

$$b_1 = 5\,000 \text{ (ლარი)};$$

2. ტექსტის აწყობა-დაკაბადონების ხარჯები; აღვნიშნოთ იგი b_2-ით:

$$b_2 = 500 \cdot 1 = 500 \text{ (ლარი)};$$

3. ყდის დიზაინის ღირებულება; აღვნიშნოთ იგი b_3-ით:

$$b_3 = 50 \text{ (ლარი)};$$

სრული ფიქსირებული დანახარჯი b ამ სამი სიდიდის ჯამის ტოლი იქნება (m = 3 მე-(5) ფორმულაში):

$$b = \sum_{i=1}^{3} b_i = 5\ 000 + 500 + 50 = 5\ 550 \text{ (ლარი)}.$$

ცვლად დანახარჯებს განეკუთვნება:

1. წიგნის ერთი ეგზემპლარის ბეჭდვა და ყდაში ჩასმა; აღვნიშნოთ იგი k_1-ით. ამოცანის პირობის თანახმად:

$$k_1 = 500 \cdot 0{,}03 = 15 \text{ (ლარი)};$$

2. ერთი ეგზემპლარისთვის საჭირო ქაღალდის 250 ფურცლის ღირებულება k_2:

$$k_2 = 250 \cdot \frac{10}{500} = 5 \text{ (ლარი)};$$

3. ერთი ეგზემპლარის ყდის ფერადად ბეჭდვის ღირებულება k_3:

$$k_3 = 0{,}9 \text{ (ლარი)}.$$

წიგნის ერთი ეგზემპლარის გამოსაცემად საჭირო ცვლადი დანახარჯი k ამ სამი სიდიდის ჯამის ტოლი იქნება (n = 3 მე-(4) ფორმულაში):

$$k = \sum_{i=1}^{3} k_i = 15 + 5 + 0{,}9 = 20{,}9 \text{ (ლარი)}.$$

თუ b და k პარამეტრების მიღებულ მნიშვნელობებს (3) ფორმულაში შევიტანთ, მაშინ წიგნის გამოცემისათვის საჭირო სრული დანახარჯის წრფივი მოდელი შემდეგი ცხადი სახით ჩაიწერება:

$$C(x) = 20{,}9x + 5\ 550.$$

ა) როცა ტირაჟია 500 ეგზემპლარი, ე.ი. როცა x = 500 უკანასკნელი ფორმულიდან მივიღებთ:

$$C(500) = 20{,}9 \cdot 500 + 5\ 550 = 10\ 450 + 5\ 550 = 16\ 000 \text{ (ლარი)};$$

ერთი ეგზემპლარის თვითღირებულება იქნება

$$\frac{C(500)}{500}=\frac{16\ 000}{500}=32 \ \text{(ლარი)};$$

ბ) როცა ტირაჟია 1000 ეგზემპლარი, მაშინ

$$C(1\ 000)=20{,}9\cdot 1\ 000+5\ 550=26\ 450 \ \text{(ლარი)};$$

ერთი ეგზემპლარის თვითღირებულება კი იქნება

$$\frac{26\ 450}{1\ 000}=26{,}45 \ \text{(ლარი)}.$$

მაშასადამე, ტირაჟის გაორმაგებით ერთი ეგზემპლარი წიგნის თვითღირებულება შემცირდა 32 - 26,45 = 5,55 ლარით.

პასუხი: ა) 500 ეგზემპლარი წიგნის გამოცემაზე გაწეული სრული დანახარჯი შეადგენს 16 000 ლარს, ხოლო ერთი ეგზემპლარის თვითღირებულება 32 ლარს;

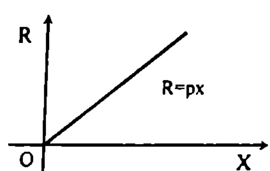
ბ) 1 000 ეგზემპლარი წიგნის გამოცემაზე გაწეული სრული დანახარჯი შეადგენს 26450 ლარს, ხოლო ერთი ეგზემპლარის თვითღირებულება 26,45 ლარს.

7.2. შემოსავლის წრფივი მოდელი

ფირმის მიერ გამოშვებული პროდუქციის *საცალო ფასი* აღვნიშნოთ **p**-თი (**Price**). დავუშვათ, რომ **p** *მუდმივია*. მაშინ, თუ ფირმის მიერ გამოშვებული და გაყიდულია პროდუქციის **x** რაოდენობა, მის მიერ მიღებული შემოსავალი ამ რაოდენობის *პირდაპირპროპორციული* იქნება. თუ შემოსავალს **R(x)**-ით (**Revenue**) აღვნიშნავთ, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$R(x)=px. \tag{6}$$

მაშასადამე, როცა საცალო ფასი მუდმივია, მაშინ შემოსავალი გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის წრფივი ფუნქციაა. (6) განტოლებას შემოსავლის წრფივი მოდელი ეწოდება.



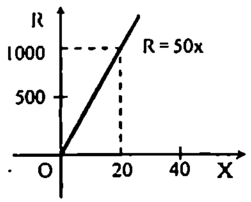
ნახ. 7.3

სათანადო გრაფიკს აქვს ნახ. 7.3-ზე მოცემული სახე.

როგორც ვხედავთ, შემოსავლის ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე: თუ პროდუქცია არ იყიდება, მაშინ $x=0$ და შემოსავალიც ნულის ტოლი იქნება.

მაგალითი 3. ფირმის მიერ გამოშვებული პროდუქციის საცალო ფასია \$50. ა) ავაგოთ შემოსავლის წრფივი მოდელი; ბ) რისი ტოლია შემოსავალი, თუ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 20? გ) ავაგოთ გრაფიკი.

ამოხსნა. ა) (6) ფორმულის თანახმად $R(x)=50x$;



ნახ. 7.4

ბ) $x=20 \Rightarrow R(20)=50\cdot 20=1\ 000$ (\$),

ე.ი. თუ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 20, მაშინ ფირმის მიერ მიღებული შემოსავალია \$1 000;

გ) შესაბამის გრაფიკს აქვს ნახ. 7.4-ზე მოცემული სახე.

7.3. მოგების წრფივი მოდელი

ფირმის მიერ მიღებული მოგება წარმოადგენს სხვაობას ფირმის მიერ მიღებულ შემოსავალსა და გაწეულ სრულ დანახარჯს შორის. თუ მოგების ფუნქციას აღვნიშნავთ **P(x)**-ით (**Profit**), მაშინ

$$P(x)=R(x)-C(x).$$

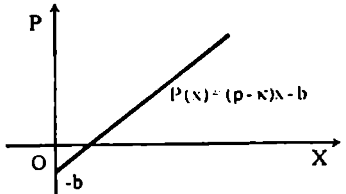
შემოსავლისა და დანახარჯის (6) და (3) წრფივი მოდელების გათვალისწინებით მიეიღებთ

$$P(x)=px-(\kappa x+b)=(p-\kappa)x-b. \qquad (7)$$

მაშასადამე, მოგების ფუნქცია $P(x)$ არის წრფივი ფუნქცია $p-\kappa$ დახრილობითა და $-b$-ს ტოლი y-გადაკვეთით. $-b<0$, რადგან b ფიქსირებული დანახარჯი დადებითია.

ეკონომიკა რენტაბელურია, როცა პროდუქციის საცალო ფასი აღემატება ამ პროდუქციის გამოშვებაზე გაწეულ დანახარჯს, ე.ი. $p>\kappa \Rightarrow p-\kappa>0$, რაც ნიშნავს, რომ მოგების ფუნქცია ზრდადია. შესაბამის გრაფიკს აქვს ნახ. 7.5-ზე მოცემული სახე.

მოგების ფუნქციას უფრო დაწვრილებით შემდეგ პუნქტში განვიხილავთ.



ნახ. 7.5

მაგალითი 4. ფირმის ფიქსირებული დანახარჯია \$80 000. ფირმის მიერ პროდუქციის ერთეულის გამოშვებაზე გაწეული სრული ცვლადი დანახარჯია \$25, ხოლო პროდუქციის საცალო ფასია \$75. ავაგოთ მოგების წრფივი მოდელი.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $b=80\,000$, $\kappa=25$ და $p=75$. მოგების წრფივი მათემატიკური მოდელის აღმწერ (7) განტოლებაში ამ მონაცემების შეტანით, მივიღებთ:

$$P(x)=75x-(25x+80\,000)=50x-80\,000.$$

პასუხი: მოგების წრფივ მოდელს აქვს სახე

$$P(x)=50x-80\,000.$$

7.4. ნულოვანი მოგების ანალიზი

თუ ფირმის მიერ გაწეული სრული დანახარჯი აღემატება პროდუქციის გაყიდვისაგან მიღებულ შემოსავალს

$$R(x)<C(x)\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)<0, \tag{8}$$

მაშინ ფირმას აქვს *ზარალი.*

თუ ფირმის შემოსავალი აღემატება სრულ დანახარჯს

$$R(x)>C(x)\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)>0, \tag{9}$$

მაშინ ფირმის მუშაობა *მომგებიანია.*

პროდუქციის იმ $x=x_0$ რაოდენობას, რომლისთვისაც სრული დანახარჯი უტოლდება შემოსავალს

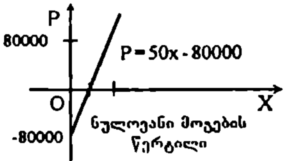
$$R(x_0)=C(x_0)\Rightarrow P(x_0)=R(x_0)-C(x_0)=0, \tag{10}$$

ე.ი. როდესაც ფირმას არც მოგება აქვს და არც ზარალი, ეწოდება ნულოვანი მოგების (Break – Even) წერტილი.

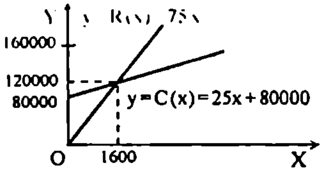
მაგალითი 5. მაგალითი 4-ის პირობებში: ა) ვიპოვოთ ნულოვანი მოგების წერტილი; ბ) ავაგოთ მოგების ფუნქციის გრაფიკი; გ) გამოვთვალოთ ნულოვანი მოგების წერტილის შესაბამისი შემოსავალი და სრული დანახარჯი.

ამოხსნა. ა) $P(x_0)=0\Rightarrow 50x_0-80\,000=0\Rightarrow x_0=1\,600.$

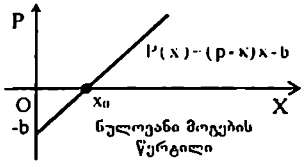
ამრიგად, ფირმას ნულოვანი მოგება ექნება, თუ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაა 1 600.



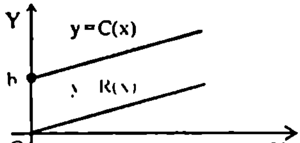
ნახ. 7.6



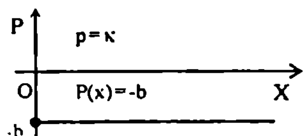
ნახ. 7.7



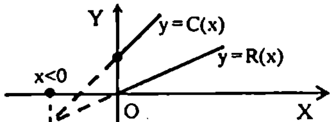
ნახ. 7.8



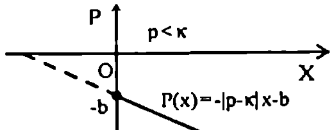
ნახ. 7.9



ნახ. 7.10



ნახ. 7.11



ნახ. 7.12

ბ) ნულოვანი მოგების $x_0 = 1\,600$ წერტილში მოგების ფუნქციის გრაფიკი კვეთს OX ღერძს $x_0 = 1600$ წერტილში (იხ. ნახ. 7.6) და (10) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$P(1\,600)=0 \Rightarrow R(1\,600)=C(1\,600).$$

ნულოვანი მოგების წერტილი არის აგრეთვე OXY სიბრტყეზე იმ წერტილის აბსცისა, რომელშიც შემოსავლის ფუნქციის გრაფიკი კვეთს სრული დანახარჯის ფუნქციის გრაფიკს (იხ. ნახ. 7.7).

ბ) ნულოვანი მოგების წერტილის შესაბამისი შემოსავალი და სრული დანახარჯი ერთმანეთის ტოლია და (10) ფორმულის ძალით უდრის

$$R(1\,600)=C(1\,600)=120\,000(\$).$$

ამრიგად, თუ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა ნაკლებია x_0-ზე, მაშინ ფირმას აქვს *ზარალი*, ე.ი. სამართლიანია (8), ხოლო, თუ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა აღემატება x_0-ს, მაშინ ფირმა *მოგებაშია*, ანუ მართებულია (9).

რენტაბელური ეკონომიკის პირობებში, როგორც ითქვა, პროდუქციის საცალო ფასი აღემატება პროდუქციის ერთეულზე გაწეულ ცვლად დანახარჯს, ე.ი. $p>k$. ასეთ შემთხვევაში შემოსავლისა და სრული დანახარჯის ფუნქციათა გრაფიკები იკვეთება დადებითი x-სათვის (მაგალითად, იხ. ნახ. 7.7). ამ შემთხვევაში $P(x)$ მოგების ფუნქცია *ზრდადია* და მისი გრაფიკი OX ღერძს გადაკვეთს დადებით $x=x_0$ წერტილში (იხ. ნახ. 7.8).

იმ შემთხვევაში, როცა $p=k$, სრული დანახარჯისა და შემოსავლის ფუნქციების გრაფიკები ერთმანეთს არ კვეთს (იხ. ნახ. 7. 9). ამ შემთხვევაში გრაფიკები პარალელურია, *ზარალი მუდმივია* და იგი b-ს ტოლია (იხ. ნახ. 7.10).

როცა $p<k$ ეს გრაფიკები ერთმანეთს კვეთს უარყოფითი x-სათვის (იხ. ნახ. 7.11). ამ შემთხვევაში მოგების ფუნქცია *კლებადია*, *ზარალი კი ზრდადია*: რაც მეტი პროდუქცია იქნება გამოშვებული, მით მეტი იქნება ზარალი (იხ. ნახ. 7.12).

7.5. მოთხოვნის წრფივი მოდელი

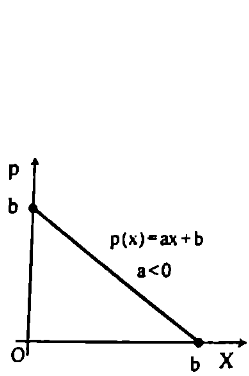
საბაზრო ეკონომიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა *მოთხოვნა* (Demand). *მოთხოვნა გადახდისუნარიანი მოთხოვნილებაა.* მომხმარებლის მიერ პროდუქციის შესყიდვის მოცულობა ანუ მოთხოვნის მოცულობა დამოკიდებულია პროდუქციის ფასზე. დადგენილია, რომ **სხვა თანაბარ პირობებში (Ceteris Paribus), რაც უფრო მაღალია პროდუქციის ფასი, მით უფრო ნაკლები რაოდენობით ყიდულობს მას მომხმარებელი და, პირიქით, თუ პროდუქციაზე ფასებმა იკლო, მაშინ მასზე მოთხოვნა გაიზრდება.**

დავუშვათ, ფირმის ან ეკონომიკის რომელიმე დარგის მიერ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა საკმაოდ დიდია. ასეთ შემთხვევაში პროდუქცია „კარგად გაიყიდება", თუ მისი საცალო ფასი შედარებით დაბალი იქნება. რაც უფრო მეტი პროდუქცია იქნება გამოტანილი ბაზარზე, მით ნაკლები იქნება მისი ფასი, ე.ი. პროდუქციის p საცალო ფასი (Price) დამოკიდებულია ამ პროდუქციის x რაოდენობაზე. დავუშვათ, რომ ეს დამოკიდებულება არის წრფივი, ე.ი. აქვს შემდეგი სახე

$$p(x) = ax + b, \tag{11}$$

სადაც x არის გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა, a და b კი მუდმივებია. x-ის ზრდასთან ერთად საცალო ფასი p მცირდება, ამიტომ $a<0$ და $p(x)$ ფუნქცია კლებადია.

(11) განტოლება, სადაც x არის გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა, p კი პროდუქციის საცალო ფასი, არის მოთხოვნის წრფივი მოდელი. მისი შესაბამისი გრაფიკია წრფე, რომელიც OX ღერძთან ადგენს ბლაგვ კუთხეს და მოცემულია ნახ. 7.13-ზე.



ნახ. 7.13

გავარკვიოთ b პარამეტრის ეკონომიკური შინაარსი (11) განტოლებაში. ცხადია, როცა $p=b>0$, მაშინ $x=0$, ე.ი. როდესაც საცალო ფასი არის b-ს ტოლი, მაშინ განხილულ პროდუქციაზე მოთხოვნა არ არსებობს. ამრიგად, b პარამეტრი დადებითია და პროდუქციის საცალო ფასი ბაზარზე შემოსაზღვრულია ამ b რიცხვით.

ასევე, ცხადია, როდესაც $p=0$, მაშინ $x=-\frac{b}{a}>0$. ამიტომ

$-\frac{b}{a}$ რიცხვი მიუთითებს ბაზრის მაქსიმალურ მოთხოვნას.

მაგალითი 6. საქონლის საცალო ფასი შემცირდა \$10-დან \$8-მდე. ამან გამოიწვია ის, რომ ერთ თვეში 1 000 ცალის ნაცვლად გაიყიდა 2 000 ცალი საქონელი. ვიპოვოთ მოთხოვნის წრფივი მოდელი.

ამოხსნა. გაყიდული საქონლის რაოდენობა აღვნიშნოთ x-ით, ხოლო p(x)-ით – საქონლის ერთეულის ფასი დოლარებში. დავუშვათ, რომ ეს ორი სიდიდე წრფივადაა ერთმანეთზე დამოკიდებული. მაშინ სამართლიანია მოთხოვნის წრფივი მოდელის (11) სახით გამოყენება:

$$p(x) = ax + b,$$

სადაც a და b საძიებელი მუდმივებია.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ამ განტოლებას აკმაყოფილებს რიცხეთა შემდეგი ორი წყვილი (1 000,10) და (2 000,8), ე.ი. a და b მუდმივები მოიძებნება შემდეგი სისტემიდან:

$$\begin{cases}10 = 1\ 000a + b, \\ 8 = 2\ 000a + b,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \dfrac{8-10}{2\ 000 - 1\ 000}, \\ b = 10 - 1\ 000a,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -0{,}002, \\ b = 12.\end{cases}$$

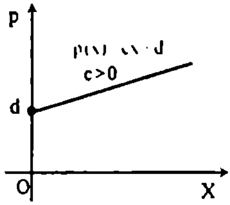
პასუხი: მოთხოვნის განტოლებაა

$$p(x) = -0{,}002x + 12.$$

7.6. მიწოდების წრფივი მოდელი

მოთხოვნასთან ერთად საბაზრო ეკონომიკის უმნიშვნელოვანესი ცნებაა *მიწოდება* (Supply). მიწოდება საბაზრო ურთიერთობაში მოთხოვნის მეორე მხარეა. მიწოდება ნიშნავს გამყიდველის სურვილს გაიტანოს ესა თუ ის პროდუქცია ბაზარზე გასაყიდად. დადგენილია, რომ **სხვა თანაბარ პირობებში (Ceteris Paribus), რაც უფრო მაღალია ფასი, მით უფრო მეტი პროდუქცია მიეწოდება მომხმარებელს და პირიქით, თუ პროდუქციაზე ფასმა იკლო, მაშინ მისი მიწოდება მცირდება.**

დავუშვათ, პროდუქციის მიმწოდებელს სურს გაყიდოს **x** რაოდენობის პროდუქცია, რომლის საცალო ფასია **p**. ცხადია, მას



ნახ. 7.14

სურს რაც შეიძლება მეტი პროდუქცია გაყიდოს რაც შეიძლება მეტ ფასად (თუ იყიდება, მიმწოდებელი უმატებს ფასს).

დავუშვათ დამოკიდებულება პროდუქციის საცალო ფასსა და პროდუქციის იმ რაოდენობას შორის, რომელიც მწარმოებელს სურს გაყიდოს არის წრფივი, ე.ი.

$$p(x) = cx + d, \qquad (12)$$

სადაც **x** მიწოდებული პროდუქციის რაოდენობაა, **c** და **d** კი მუდმივებია.

x-ის ზრდასთან ერთად საცალო ფასი **p** იზრდება, ამიტომ $c > 0$ და $p(x)$ ფუნქცია ზრდადია.

(12) განტოლება, სადაც x არის მიწოდებული პროდუქციის რაოდენობა, p კი საცალო ფასი, მიწოდების წრფივი მოდელია. მისი შესაბამისი გრაფიკია წრფე, რომელიც OX ღერძთან ადგენს მახვილ კუთხეს და მოცემულია ნახ. 7.14-ზე.

დავადგინოთ **d** პარამეტრის ეკონომიკური შინაარსი.

რადგან ფასი ყოველთვის დადებითია, ამიტომ **d** პარამეტრიც დადებითია: $d>0$. ვიდრე პროდუქციის საცალო ფასი არ გადააჭარბებს **d** სიდიდეს, მიმწოდებელი არ შეიტანს პროდუქციას ბაზარზე.

მაგალითი 7. ფერმერს ვაშლი მაშინ შეაქვს ბაზარზე გასაყიდად, როცა ერთი კილოგრამის ფასი 3 ლარს გადააჭარბებს. როცა 1 კილოგრამი ვაშლის ფასი 4 ლარი იყო, გაიყიდა 100 კილოგრამი. ააგეთ მიწოდების წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი.

ამოხსნა. მიწოდების წრფივ მოდელს ზოგადად აქვს (12) სახე

$$p(x) = cx + d.$$

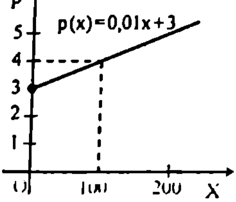
კონკრეტული შემთხვევისათვის საჭიროა c და d პარამეტრების ცოდნა. d მოცემულია ამოცანის პირობით: $d = 3$. მეორე, c პარამეტრის საპოვნელად ამოვხსნათ განტოლება

$$4 = 100 \cdot c + 3,$$

საიდანაც $c=0{,}01$. მაშასადამე, მიწოდების საძიებელ წრფივ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$p(x) = 0{,}01x + 3.$$

სათანადო გრაფიკი მოცემულია ნახ. 7.15-ზე.



ნახ. 7.15

7.7. საბაზრო წონასწორობის წრფივი მოდელი

თუ რაიმე პროდუქციის საცალო ფასი საკმაოდ მაღალია, მაშინ მომხმარებლები მას ნაკლები რაოდენობით იყიდიან. თუ პროდუქციის საცალო ფასი საკმაოდ დაბალი იქნება, მაშინ მიმწოდებელმა აღნიშნული პროდუქცია შეიძლება არც კი გაყიდოს. *საბაზრო ეკონომიკის პირობებში პროდუქციის საცალო ფასს აქვს ტენდენცია დააკმაყოფილოს როგორც მიმწოდებლის, ასევე მომხმარებლის ინტერესები,* ე.ი. საცალო ფასი უნდა იყოს ისეთი, რომ მიმწოდებელს სურდეს ამ პროდუქციის გაყიდვა და მყიდველს კი შეეძლოს მისი ყიდვა. ასეთ მდგომარეობას კი ადგილი ექნება მაშინ, როცა ბაზარზე მიწოდებული პროდუქციის რაოდენობა გაუტოლდება ამ პროდუქციაზე მოთხოვნის რაოდენობას, ე.ი. როცა მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციათა გრაფიკები ერთმანეთს გადაკვეთს.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა.

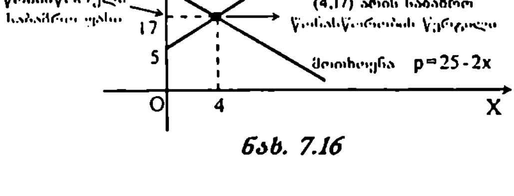
მაგალითი 8. პროდუქციაზე მოთხოვნის ფუნქციაა $p=25-2x$, ხოლო მიწოდების ფუნქცია $p=3x+5$. პროდუქციის რა რაოდენობისათვის გაუტოლდება ერთმანეთს მოთხოვნისა და მიწოდების ფასები. რისი ტოლია აღნიშნული ფასი? ავაგოთ სათანადო გრაფიკი.

ამოხსნა. $25-2x_0=3x_0+5 \Rightarrow x_0=4,\ p_0=p(4)=17(\$)$.

პასუხი: თუ ბაზარზე გამოტანილი იქნება აღნიშნული პროდუქციის 4 ერთეული, იგი მთლიანად გაიყიდება და შესაბამისი საცალო ფასი იქნება $17.

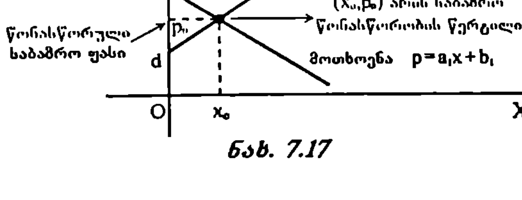
(4,17) წერტილს უწოდებენ *საბაზრო წონასწორობის წერტილს*, $p_0=\$17$ მნიშვნელობას კი – წონასწორულ საბაზრო ფასს.

სათანადო გრაფიკს აქვს ნახ. 7.16-ზე მოცემული სახე.



ნახ. 7.16

საზოგადოდ, (x_0,p_0) წერტილს, რომელშიც გადაიკვეთება მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციების გრაფიკები, ეწოდება საბაზრო წონასწორობის წერტილი, ხოლო p_0-ს წონასწორული საბაზრო ფასი (იხ. ნახ. 7.17).



ნახ. 7.17

აშკარაა, რომ გაწონასწორებული ბაზარი წარმოადგენს იდეალურ ვარიანტს. ამ იდეალური ვარიანტის შესაბამისი წონასწორული საბაზრო ფასი და პროდუქციის წონასწორული სიდიდე განისაზღვრება განტოლებათა შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} p = ax + b, \\ p = cx + d. \end{cases} \tag{13}$$

(13) სისტემის (x_0, p_0) ამონახსნი განსაზღვრავს მოთხოვნის და მიწოდების წრფეების საერთო წერტილის კოორდინატებს.

7.8. ამორტიზაციის წრფივი მოდელი

პროდუქციის წარმოების ან მომსახურების გაწევის პროცესში ფირმები იყენებენ მათ ხელთ არსებულ *ძირითად აქტივებს.*

ძირითადი აქტივები მოიცავს ყველა იმ მატერიალურ-ნივთობრივ ფასეულობას, რომლებიც ერთ წელზე მეტი ხნის განმავლობაში მრავალჯერადად ან განუწყვეტლივ გამოიყენება წარმოების ან მომსახურების პროცესში და რომელთა მინიმალური ღირებულებაც აღემატება სახელმწიფოს მიერ დაწესებულ ოდენობას.

შენიშვნა. საქართველოს კანონმდებლობით ძირითადი აქტივების მინიმალურ ღირებულებად 1 000 ლარია დაწესებული.

ძირითადი აქტივების საწყის ღირებულებას შეადგენს შესყიდვის ფასი, ადგილზე მიტანის, დატვირთვა-გადმოტვირთვის, მონტაჟის ხარჯები და სხვა.

ძირითადი აქტივები მოხმარების პროცესში თავის ღირებულებას თანდათან კარგავენ დროთა განმავლობაში *ცვეთის გამო.* ძირითადი აქტივები ფიზიკურ ცვეთას განიცდიან ექსპლუატაციის შედეგად, აგრეთვე ბუნებრივი ძალების ზემოქმედებით, ხოლო მორალურს ტექნიკური პროგრესის შედეგად.

დროთა განმავლობაში ძირითადი აქტივების ღირებულების შემცირების პროცესს ამორტიზაცია ეწოდება, ხოლო მათ მიმდინარე ღირებულებას – ნარჩენი ღირებულება.

ნარჩენი ღირებულება, როგორც წესი, გამოითვლება ყოველი კალენდარული წლის ბოლოს. ამიტომ *დროის საბაზისო ერთეულად* წელიწადია მიღებული. ზოგჯერ საჭირო ხდება ნარჩენი ღირებულების გამოთვლა არასრული კალენდარული

წლისთვის. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა ექსპლუატაციის პერიოდის წლობით გამოსახვა.

თუ საწყის ღირებულებას $\mathbf{I}$ ასოთი აღვნიშნავთ, ხოლო $\mathbf{t}$ წლის შემდეგ ნარჩენ ღირებულებას $\mathbf{S}$ ასოთი, მაშინ სხვაობა $\mathbf{S-I}$ გვიჩვენებს თუ შეძენიდან $\mathbf{t}$ წლის გასვლის შემდეგ რა ოდენობით შემცირდა ძირითადი აქტივების ღირებულება. ცხადია, ეს სიდიდე იქნება *უარყოფითი.*

დავუშვათ, რომ ექსპლუატაციის შედეგად ძირითადი აქტივების ღირებულება დროის *პროპორციულად* მცირდება, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\mathbf{S-I=mt}, \tag{14}$$

სადაც $\mathbf{t}$ არის წლობით გაზომილი დრო, ხოლო $\mathbf{m}$ პროპორციულობის კოეფიციენტი. ამ უკანასკნელის ეკონომიკური შინაარსის დასადგენად (14) ფორმულა ასე გადავწეროთ

$$\mathbf{m=\frac{S-I}{t}}. \tag{15}$$

ამ ფორმულიდან ცხადია, რომ $\mathbf{m}$ გვიჩვენებს თუ რა სიდიდით მცირდება ყოველწლიურად ძირითადი აქტივების ღირებულება. მას საამორტიზაციო დანარიცხი ეწოდება. იგი უარყოფითი სიდიდეა: $\mathbf{m<0}$.

მაგალითი 9. დანადგარის საწყისი ღირებულებაა 100 000 ლარი. 30 თვის ექსპლუატაციის შემდეგ მისმა ნარჩენმა ღირებულებამ შეადგინა 50 000 ლარი. ვიპოვოთ საამორტიზაციო დანარიცხი.

ამოხსნა. საამორტიზაციო დანარიცხის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (15) ფორმულით. ამოცანის პირობის თანახმად: I=100 000 ლარს, S=50 000 ლარს. ვინაიდან, დროის საბაზისო ერთეულად წელიწადია არჩეული, ექსპლუატაციის თვეებით მოცემული ხანგრძლივობა გადავიყვანოთ წლებში:

$$t=\frac{30}{12}=2{,}5\,(\text{წელი}),$$

მაშინ, (15) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$m=\frac{50\ 000-100\ 000}{2{,}5}=-20\ 000\left(\frac{\text{ლარი}}{\text{წელი}}\right).$$

პასუხი: საამორტიზაციო დანარიცხია $-$ $20\ 000\,\frac{\text{ლარი}}{\text{წელი}}$.

საამორტიზაციო დანარიცხის აბსოლუტური მნიშვნელობის შეფარდებას საწყის ღირებულებასთან ამორტიზაციის ნორმა ეწოდება. თუ ამორტიზაციის ნორმას μ ასოთი აღვნიშნავთ, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\mu = \frac{|m|}{I} = -\frac{m}{I}, \tag{16}$$

საიდანაც

$$m = -\mu I. \tag{17}$$

ყოველი სახელმწიფო ძირითადი აქტივების სხვადასხვა სახეობისათვის აწესებს ამორტიზაციის განსხვავებულ წლიურ ნორმას. როგორც წესი, ამორტიზაციის ნორმა პროცენტით სახელდება, ანუ სახელდება μ გამრავლებული 100-ზე. აღვნიშნოთ ეს სიდიდე μ_0-ით, ე.ი.

$$\mu_0 = \mu \cdot 100 = -\frac{m}{I}100, \tag{18}$$

საიდანაც

$$m = -0{,}01 \cdot \mu_0 I. \tag{19}$$

შენიშვნა. საქართველოს კანონმდებლობით შენობისა და ნაგებობისათვის ამორტიზაციის წლიური ნორმა 5%-ია, სარკინიგზო, საზღვაო და სამდინარო სატრანსპორტო საშუალებისათვის – 8%, მრეწველობის ყველა დარგის მანქანა-დანადგარებისათვის – 20% და ა. შ.

მაგალითი 10. ვიპოვოთ ამორტიზაციის ნორმა მაგალითი 9-ის შემთხვევაში.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (16) ფორმულით. მაგალითი 9-ის პირობის თანახმად I=100 000 ლარს, ხოლო პასუხის მიხედვით ამორტიზაციის დანარიცხია $m = -20\ 000 \frac{\text{ლარი}}{\text{წელი}}$.

მაშასადამე, $\mu = -\frac{-20\ 000}{100\ 000} = 0{,}2$, ხოლო (18) ფორმულით მივიღებთ $\mu_0 = \mu \cdot 100 = 0{,}2 \cdot 100 = 20\%$.

პასუხი: ამორტიზაციის ნორმა არის 0,2 ანუ 20%.

როცა m პროპორციულობის კოეფიციენტი (14) ფორმულაში დროზე არაა დამოკიდებული ანუ მუდმივია, მაშინ ნარჩენი S(t) ღირებულება დროის წრფივი ფუნქციაა:

$$S(t) = I + mt. \tag{20}$$

(20) განტოლება ამორტიზაციის წრფივი მოდელია ამორტიზაციის დანარიცხით.

თუ (20) განტოლებაში (17) და (19) ფორმულებიდან რიგრიგობით შევიტანთ **m**-ს, მივიღებთ:

$$S(t) = I - \mu It = I(1 - \mu t), \tag{21}$$

$$S(t) = I - 0{,}01\mu_0 It = I(1 - 0{,}01\mu_0 t). \tag{22}$$

(21) და (22) განტოლებები ამორტიზაციის წრფივი მოდელებია ამორტიზაციის ნორმით.

მაგალითი 11. ფიზიკურმა პირმა შეიძინა ერთოთახიანი ბინა 20 000 ლარად და 5 კომპიუტერი, თითოეული 1 200 ლარად. ის დარეგისტრირდა ინდივიდუალურ მეწარმედ და კალენდარული წლის დასაწყისში დაიწყო ინფორმატიკის სწავლება. ეკონომიკური საქმიანობისთვის გამოყენებული *ქონების წლიური გადასახადი* მის ქალაქში 1%-ია. რამდენი ლარი ექნება მას ქონების წლიური გადასახადის სახით გადასახდელი მეორე წლის ბოლოს, თუ ამორტიზაციის ნორმა ბინაზე 5%-ია, თითოეულ კომპიუტერზე კი 20%.

ამოხსნა. გადასახადის საძიებელი ოდენობის გამოსაანგარიშებლად ჯერ ვიპოვოთ ეკონომიკურ საქმიანობაში გამოყენებული ქონების ბინის და კომპიუტერების ნარჩენი ღირებულების ჯამი მეორე წლის ბოლოს. ამ მიზნით ვისარგებლოთ ამორტიზაციის წრფივი მოდელის (22) ფორმულით, როცა $t = 2$. ბინის ნარჩენი ღირებულება მეორე წლის ბოლოს იქნება

$$S_1 = 20\ 000(1 - 0{,}05 \cdot 2) = 18\ 000 \quad (\text{ლარი}),$$

5 კომპიუტერისა კი –

$$S_1 = 5 \cdot 1\ 200(1 - 0{,}2 \cdot 2) = 3\ 600 \quad (\text{ლარი}).$$

მაშასადამე, ეკონომიკურ საქმიანობაში ინდივიდუალური მეწარმის მიერ გამოყენებული ქონების ჯამური ნარჩენი ღირებულება მეორე წლის ბოლოს იქნება

$$S = S_1 + S_2 = 18\ 000 + 3\ 600 = 21\ 600 \quad (\text{ლარი}).$$

შესაბამისად, 1%-იანი დაბეგვრის პირობებში მეორე წლის ბოლოს წლიური გადასახადის ოდენობა ტოლი იქნება

$$0{,}01 \cdot S = 0{,}01 \cdot 21\ 600 = 216 \quad (\text{ლარი}).$$

პასუხი: ქონების წლიური გადასახადი მეორე წლის ბოლოს ტოლია 216 ლარის.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება მათემატიკური მოდელი?
2. როდისაა ეკონომიკის მათემატიკური მოდელი წრფივი?
3. განმარტეთ და დაახასიათეთ ფიქსირებული და ცვლადი დანახარჯები.
4. განმარტეთ სრული დანახარჯი.
5. როდისაა ცვლადი დანახარჯი გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობის წრფივი ფუნქცია?
6. აღწერეთ დანახარჯის წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი.
7. რა ეკონომიკური შინაარსი აქვთ სრული დანახარჯის მათემატიკურ მოდელში შემავალს k და b პარამეტრებს?
8. როდისაა შემოსავალი გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის წრფივი ფუნქცია?
9. რა არის მოთხოვნა და როგორაა იგი დამოკიდებული პროდუქციის ფასზე?
10. აღწერეთ მოთხოვნის წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი.
11. რა არის მიწოდება და როგორაა იგი დამოკიდებული პროდუქციის ფასზე?
12. აღწერეთ მიწოდების წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი.
13. განმარტეთ საბაზრო წონასწორობის წერტილი და წონასწორული საბაზრო ფასი.
14. რას ეწოდება ძირითადი აქტივები?
15. რას ეწოდება ამორტიზაცია? ნარჩენი ღირებულება?
16. რას ეწოდება საამორტიზაციო დანარიცხი? ამორტიზაციის ნორმა?
17. აღწერეთ ამორტიზაციის წრფივი მოდელები.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

7.1. ფირმა აწარმოებს სკამებს. თითოეული სკამის წარმოებაზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია $25. ფირმის ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს $3 000.

ა) ააგეთ დანახარჯების წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;

ბ) რისი ტოლია 100 ცალი სკამის წარმოებაზე გაწეული სრული დანახარჯი?

7.2. 7 ტ ოქროს მოპოვებაზე გაწეული სრული დანახარჯია $1 500, ხოლო 15 ტ ოქროს მოპოვებაზე გაწეული სრული დანახარჯი – $1 800.

ა) იპოვეთ ფიქსირებული დანახარჯი და 1 ტ ოქროს მოპოვებაზე გაწეული ცვლადი დანახარჯი.

ბ) ააგეთ დანახარჯის წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;

გ) რისი ტოლია 20 ტ ოქროს მოპოვებაზე გაწეული სრული დანახარჯი?

7.3. პროდუქციის საცალო ფასია $40. ააგეთ შემოსავლის წრფივი მოდელი და მისი გრაფიკი. რისი ტოლია შემოსავალი, თუ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 300?

7.4. თუ ფირმა გამოუშვებს და გაყიდის 500 ცალ ტელევიზორს, მაშინ მისი შემოსავალი იქნება $80 000.

ა) რისი ტოლია ტელევიზორის საცალო ფასი?

ბ) ააგეთ შემოსავლის წრფივი მოდელი;

გ) რისი ტოლია ფირმის მიერ მიღებული შემოსავალი, თუ გამოშვებული და გაყიდულია 300 ცალი ტელევიზორი?

7.5. ფირმის სრული ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს $400. პროდუქციის თითოეულ ერთეულზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია $2, ხოლო პროდუქციის საცალო ფასია $4. ააგეთ მოგების წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი. რისი ტოლია მოგება, თუ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა:

ა) 100 ცალი;

ბ) 200 ცალი;

გ) 300 ცალი.

7.6. ფირმის ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს $240. პროდუქციის თითოეულ ერთეულზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია $3,50, ხოლო პროდუქციის საცალო ფასია $12.

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი;

ბ) რისი ტოლია ნულოვანი მოგების შესაბამისი შემოსავალი და სრული დანახარჯი? ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

7.7. ფირმის სრული ფიქსირებული დანახარჯია $5 000. პროდუქციის თითოეულ ერთეულზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია $3,50, ხოლო პროდუქციის საცალო ფასია $6.

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი;

ბ) პროდუქციის რა რაოდენობაა გამოშვებული და გაყიდული,

თუ ფირმის მოგება $1 000-ის ტოლია?

გ) რისი ტოლია ზარალი, თუ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 1 500? ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

7.8. დანახარჯების წრფივი მოდელია $C(x)=2,8x+600$.

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი, თუ პროდუქციის საცალო ფასია $4;

ბ) ცნობილია, რომ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა არ იქნება 450-ზე ნაკლები. რისი ტოლი უნდა იყოს პროდუქციის საცალო ფასი, რომ ფირმამ არ იზარალოს? ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

7.9. დანახარჯების წრფივი მოდელია $C(x)=2,5x+300$.

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი, თუ პროდუქციის საცალო ფასია $5;

ბ) ცნობილია, რომ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა არ იქნება 150-ზე ნაკლები. რისი ტოლი უნდა იყოს საცალო ფასი, რომ ფირმამ არ იზარალოს? ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

7.10. იპოვეთ საბაზრო წონასწორობის წერტილი და წონასწორული საბაზრო ფასი მოთხოვნისა და მიწოდების შემდეგი ფუნქციებისათვის:

ა) მოთხოვნა: $p=-x+6$, მიწოდება: $p=x+3$;

ბ) მოთხოვნა: $p=-3x+12$, მიწოდება: $p=2x+5$;

გ) მოთხოვნა: $p=-10x+25$, მიწოდება: $p=5x+10$;

დ) მოთხოვნა: $p=-0,1x+2$, მიწოდება: $p=0,2x+1$.

ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები.

7.11. დანადგარის საწყისი ღირებულებაა $50 000. 54 თვის ექსპლუატაციის შემდეგ მისი ნარჩენი ღირებულებაა $5 000.

ა) განსაზღვრეთ საამორტიზაციო დანარიცხი;

ბ) ააგეთ ამორტიზაციის წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;

გ) რისი ტოლია დანადგარის ღირებულება 3 წლის შემდეგ?

7.12. რისი ტოლი იყო შენობის საწყისი ღირებულება, თუ ნარჩენი ღირებულებაა $50 000 და ექსპლუატაციის დაწყებიდან გასულია 10 წელი. ამორტიზაციის ნორმა 0,05-ია.

ააგეთ ამორტიზაციის წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი.

7.13. იახტის საწყისი ღირებულებაა $1 000 000. ექსპლუატაციიდან რა დროის შემდეგ იქნება მისი ნარჩენი ღირებულება $640 000, თუ ამორტიზაციის ნორმაა 8%?

ლექცია 8

ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

ფინანსური მათემატიკა ფინანსური ანალიზის შემადგენელი ნაწილია. ფინანსური მათემატიკის ძირითადი დანიშნულებაა ფინანსური ოპერაციების ადეკვატური მათემატიკური მოდელების შექმნა და მათი მეშვეობით ე.წ. ფინანსური ინსტრუმენტების პარამეტრების გაანგარიშება. იმისდა მიხედვით, თუ რა პრობლემაა გადასაწყვეტი და რა სიღრმითაა მისი შესწავლა საჭირო, ფინანსური მათემატიკა იყენებს მათემატიკის სხვადასხვა დარგში მიღებულ შედეგებს და კვლევის მეთოდებს: ზოგ შემთხვევაში ელემენტარული მათემატიკაც კი საკმარისია, მაგრამ უმეტეს შემთხვევებში უმაღლესი მათემატიკის აპარატის გამოყენება ხდება საჭირო. უფრო მეტიც, თანამედროვე ფინანსური მათემატიკის წინაშე ისეთი პრობლემებიც დგას, რომელთა სრულფასოვანი გადაწყვეტა ჯერ კიდევ არაა მიღწეული.

8.1. დროის ფაქტორი ფინანსურ ოპერაციებში

ამ ლექციაში შევისწავლით ფინანსური მათემატიკის ფუძემდებლურ ცნებებს და იმ კლასიკურ მათემატიკურ მოდელებს, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში.

ერთ-ერთ უძველეს ფინანსურ ინსტრუმენტს *ფულის პროცენტით გასესხება* წარმოადგენს.

პროცენტი (**Interest**) ამ შემთხვევაში არის ის *ფულადი საზღაური (სარგებელი)*, რასაც *გამსესხებელი (კრედიტორი)* იღებს *მსესხებლისგან (დებიტორისაგან)* „ხელის გამართვისა“ და დროის ფაქტორის გამო.

შენიშვნა 1. ეკონომიკაში, კერძოდ კი ფინანსურ ანალიზში, ტერმინი „პროცენტი“ ორი მნიშვნელობით იხმარება: ერთის მხრივ, ის გამოიყენება იმ აზრით, რაც წინა აბზაცში ითქვა (**Interest**), და მეორეს მხრივ, ჩვეულებრივი გაგებით ანუ როგორც რიცხვის მეასედი ნაწილი (**Per Cent, Percentage**).

მაგალითად, წინადადება „ჯერ კიდევ ძველ საბერძნეთში სესხზე წლიური საზღაური იცვლებოდა სესხის 10%-დან 30%-მდე წელიწადში“ ნიშნავს შემდეგს: თუ გასესხებული იყო 50 ლითონის მონეტა,

მაშინ კრედიტორი დებიტორისგან სარგებელის სახით იღებდა 5-დან 15 მონეტამდე

$$\left(\frac{50}{100}\cdot 10=5,\quad \frac{50}{100}\cdot 30=15\right).$$

რა იგულისხმება „დროის ფაქტორის" ქვეშ?

საყოველთაოდაა ცნობილი გამოთქმა – „დრო ფულია". ამ მოკლე ფრაზაში ასახულია ის ობიექტური კანონზომიერება, რომ ფულის მსყიდველობითი უნარი დროთა განმავლობაში, როგორც წესი, მცირდება. ფულის ერთი და იგივე რაოდენობა „დღეს" და „ხვალ" სხვადასხვა ფასეულობისაა. მაშასადამე, კრედიტორი გარკვეული დროით ფულის გასესხებისას ამ შესაძლო ზარალის თავიდან აცილების მიზნითაც ათანხმებს დებიტორთან იმ თანხის ოდენობას, რაც გაცემულ ვალთან (კრედიტთან) ერთად უნდა დაიბრუნოს.

ამრიგად, თუ სესხად გაცემულ საწყის თანხას **P** ასოთი აღენიშნავთ (**Present Value**), მომავალში, სესხის დაფარვის მომენტში დასაბრუნებელ თანხას კი **F** ასოთი (**Future Value**), ხოლო პროცენტს ანუ სესხის საზღაურს **I** ასოთი (**Interest**), მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$F=P+I. \tag{1}$$

როგორც წესი, კრედიტორი და დებიტორი აფორმებენ *ხელშეკრულებას*, რომელშიც მკაფიოდ არის დაფიქსირებული, თუ როდის გაიცა კრედიტი და როდის უნდა მოხდეს ვალის სრულად გასტუმრება. ამასთანავე, ხელშეკრულებაშივეა დათქმული, თუ როგორ მოხდება პროცენტის გაანგარიშება და როგორი იქნება დროის მიხედვით მისი დაბრუნების გრაფიკი ანუ როგორი იქნება პროცენტის დროითი სტრუქტურა.

მათემატიკის ენაზე ეს ნიშნავს შემდეგს.

ხელშეკრულება ფაქტობრივად შეიცავს პროცენტის დროზე დამოკიდებულების აღწერას. ამიტომ, თუ დროს *დამოუკიდებელ ცვლადად* განვიხილავთ და **t** (**time**) ასოთი აღვნიშნავთ, მაშინ ხელშეკრულების არსიდან გამომდინარე შესაძლებელი იქნება პროცენტის, როგორც დროის $I=I(t)$ *ფუნქციის* სახით ანალიზურად ჩაწერა.

ამდენად, დრო არსებით როლს თამაშობს ფინანსური ოპერაციების მათემატიკური მოდელირების პროცესში. ამიტომ, შემოვიღოთ მასთან დაკავშირებული რამდენიმე ძირითადი განსაზღვრება.

სესხის გაცემის მომენტიდან ვალის სრულად გასტუმრების მომენტამდე დროის შუალედს ეწოდება *სესხის პერიოდი*. ეს სიდიდე T ასოთი აღვნიშნოთ. იგი შეიძლება ნებისმიერი იყოს. ამიტომ, საჭიროა დროის რაიმე სტანდარტული საბაზისო შუალედის შემოღება, რომელთან მიმართებაშიც მოხდება ანგარიშსწორება. დროის ამ ძირითად საბაზისო ერთეულად, როგორც წესი, *წელიწადს* (Annual) ირჩევენ.

შენიშვნა 2. როცა დროის საბაზისო ერთეული წელიწადია, მაშინ დროის უფრო მცირე ინტერვალები – კვარტალი, თვე, კვირა, დღე და საათი შესაბამისად წელიწადის $\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{52},\frac{1}{365}$ და $\frac{1}{8760}$ ნაწილებით გამოისახება.

სესხის პერიოდს, იმისდა მიხედვით, თუ დროში როგორაა სტრუქტურირებული პროცენტის გადახდა, ყოფენ შუალედებად. დროის შუალედს, რომლის ბოლო მომენტშიც ხდება დათქმული ოდენობით პროცენტის გადახდა *დარიცხვის პერიოდი* ეწოდება. დარიცხვის პერიოდი τ ასოთი აღვნიშნოთ.

თუ სესხის პერიოდი T დაყოფილია N თანაბარ შუალედად, მაშინ ცხადია, რომ

$$T = N\tau, \tag{2}$$

ხოლო მიმდინარე დროის t მომენტისათვის კი შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$t = n\tau,\ \ n=0,1,2,\dots,N, \tag{3}$$

სადაც n არის დარიცხვის პერიოდის რიგითი ნომერი. თუ i_n-ით აღვნიშნავთ n-ური დარიცხვის პერიოდის ბოლოს გადახდილი პროცენტის ოდენობას, მაშინ პროცენტის სრული ოდენობისათვის გვექნება

$$I = \sum_{n=1}^{N} i_n\,. \tag{4}$$

შენიშვნა 3. ზოგიერთი ფინანსური ოპერაციის დროს დარიცხვა ხდება დარიცხვის პერიოდის დასაწყისში. ამ შემთხვევისათვის (4) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$I = \sum_{n=0}^{N-1} i_n\,. \tag{5}$$

თუ დარიცხვის პერიოდი ემთხვევა დროის საბაზისო ერთეულს, მაგალითად წელიწადს, მაშინ პროცენტის გადახდას *ეფექტური დარიცხვა* ეწოდება.

ყოველი τ დარიცხვის პერიოდის შემდეგ $\mathbf{P}$ საწყისი თანხის *ზრდის პროცესს თანხის დაგროვება* ეწოდება.

დროის ნებისმიერი $0<t<T$ მომენტისათვის საწყისი $\mathbf{P}$ თანხის და ამ მომენტისათვის პროცენტის ოდენობის ჯამს *მიმდინარე თანხა* ეწოდება. აღვნიშნოთ იგი $\mathbf{F(t)}$-თი. მაშინ, ცხადია

$$\mathbf{F(t)=P+I(t), \quad 0<t<T,} \tag{6}$$

სადაც $\mathbf{I(t)}$ მოიცემა (4) ან (5) ფორმულით.

დარიცხვის პერიოდი ჩვენ τ ასოთი გვაქვს აღნიშნული, მისი მიმდინარე რიგითი ნომერი კი $\mathbf{n}$-ით (იხ. ფორმულა (3)). ამიტომ, თუ $\mathbf{F(t)=F(n\tau)}$-ს $\mathbf{F_n}$-ით აღვნიშნავთ, ხოლო $\mathbf{I(t)}$-ს კი $\mathbf{I_n}$-ით, მაშინ (6) ფორმულა შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\mathbf{F_n = P + I_n, \quad n=1,2,3,\ldots,N-1.} \tag{7}$$

სესხის პერიოდის ბოლოს ანუ $\mathbf{t=T=N\tau}$ მომენტისათვის (იხ. (2)) სრულად დაბრუნებული ვალის ოდენობას *დაგროვილი თანხა* ეწოდება (იხ. ფორმულა (1)).

8.2. საპროცენტო განაკვეთი

პროცენტი შეიძლება განვიხილოთ როგორც „სესხის ფასის" *აბსოლუტური* მნიშვნელობა, რასაც იხდის დებიტორი. ცნობილია, რაც დიდია სესხი, მით უფრო დიდია მისი ფასი. იგი არსებითადაა დამოკიდებული საწყისი თანხის ოდენობაზე და ამიტომ, ნაკლებად გამოსადეგია საკრედიტო-საფინანსო პოლიტიკის დაგეგმვის და წარმართვის საქმეში.

კრედიტორისათვის მნიშვნელოვანია იცოდეს, თუ ფულის ყოველი გასესხებული *ერთეული* რა მოგებას მოუტანს დარიცხვის ყოველი პერიოდის ბოლოს. ასევე, დებიტორისათვის მნიშვნელოვანია იცოდეს, თუ რა ფასი უნდა გადაიხადოს ვალად აღებული ფულის ყოველ *ერთეულზე* დარიცხვის თითოეული პერიოდის ბოლოს. ამიტომ, საკრედიტო ოპერაციების მათემატიკური მოდელირებისათვის ფართოდ გამოიყენება *ფარდობითი მაჩვენებლები*.

კრედიტის, როგორც ფინანსური ინსტრუმენტის, ერთ-ერთი ასეთი მაჩვენებელია *საპროცენტო განაკვეთი* (**Interest Rate**).

სწორედ ის გვიჩვენებს, თუ ფულის *თითოეულ* ერთეულზე პროცენტის რა ოდენობა მოდის. იგი განისაზღვრება როგორც პროცენტის *შეფარდება* შესაბამის თანხასთან და **i** ასოთი აღინიშნება. მისი ეკონომიკური შინაარსის საჩვენებლად ჩავწეროთ მთელი სესხის პერიოდისთვის i_0 საპროცენტო განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულა შემდეგი სახით:

$$i_0 = \frac{I}{P}. \tag{8}$$

ჩვეულებრივი წილადის სახით ჩაწერილი ეს ფორმულა გვიჩვენებს თუ მნიშვნელის (საწყისი თანხის) რა ნაწილს შეადგენს მრიცხველი (პროცენტი). ცხადია, მიღებული რიცხვი განყენებულია – უგანზომილებოა. მას *საპროცენტო განაკვეთი* **(Interest Rate, Return)** ეწოდება.

როგორც წესი, ხელშეკრულებაში ფიქსირდება საპროცენტო განაკვეთი საბაზისო ერთეულთან მიმართებაში. თუ საბაზისო ერთეულად წელიწადია არჩეული, მაშინ მას *წლიური საპროცენტო განაკვეთი* ეწოდება. აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ სესხის პერიოდი **n** წელია, მაშინ **i** წლიური საპროცენტო განაკვეთია $i = \frac{i_0}{n}$, აქედან (8) ფორმულის გათვალისწინებით

$$i = \frac{i_0}{n} = \frac{I}{P \cdot n}. \tag{9}$$

საპროცენტო განაკვეთი ხშირად %-ით სახელდება ანუ სახელდება i_0 ან **i** გამრავლებული 100-ზე. აღვნიშნოთ ეს სიდიდე **r**-ით. მაშინ ცხადია,

$$r_0 = i_0 \cdot 100, \quad r = i \cdot 100. \tag{10}$$

ამ სიდიდეების ფინანსური შინაარსი შემდეგია: თუ i_0 ან **i** (ფორმულები (8) და (9)) გვიჩვენებს ფულის ერთი ერთეულის წილად მოსულ პროცენტს (სარგებელს), მაშინ r_0 და **r** (ფორმულა (10)) იძლევა ფულის 100 ერთეულის წილად მოსულ პროცენტს (სარგებელს).

როცა დათქმულია წლიური საპროცენტო **i** განაკვეთი, მაშინ მიმდინარე თანხის **I (t)** ფუნქციის კონკრეტულ სახეს ანუ მის დროზე დამოკიდებულების ხასიათს განაპირობებს ის *მეთოდი*, რომლითაც ხდება პროცენტის დარიცხვა.

განასხვავებენ პროცენტის დარიცხვის მარტივ, რთულ, შერეულ, უწყვეტ და სხვა მეთოდებს. თითოეულ ამ მეთოდს

თავისი გამოყენების მიზანი და არეალი გააჩნია და საბოლოო ანგარიშში, მივყავართ საკრედიტო ოპერაციების ერთმანეთისგან განსხვავებულ მათემატიკურ მოდელებამდე.

შენიშვნა 4. ამ ლექციაში განხილული ცნებები და მეთოდები ფართოდ გამოიყენება არა მარტო პირდაპირი გაგებით სესხის გაცემასთან დაკავშირებულ შემთხვევებში. ისინი გამოსადეგია მიმდინარე ან დაგროვილი თანხის გამოსაანგარიშებლად ყველა იმ შემთხვევაში, როცა შემდეგი მოგების მიზნით ხდება ფულადი თანხის რაიმე სახით *ინვესტირება*. მაგალითად, მოქალაქის მიერ დანაზოგი თანხის ანაბრის სახით ბანკში დაბანდება ან ობლიგაციების შეძენა, პროდუქციის კრედიტში გაყიდვა და ა.შ.

8.3. მარტივი პროცენტი

დავიწყოთ *მარტივი პროცენტის* (Simple Interest) მეთოდის განხილვით.

ვთქვათ, P საწყისი თანხა გასესხებულია i წლიური საპროცენტო განაკვეთით და პროცენტის დარიცხვა ხდება შემდეგი წესით: დარიცხვის ყოველი მიმდინარე პერიოდის ბოლოს თანხას ემატება საწყისი თანხის i წილი ანუ $i \cdot P$. მაშასადამე, დარიცხვის პირველი პერიოდის ბოლოს მიმდინარე თანხა იქნება

$$F_1 = P + iP = P(1+i).$$

მეორე პერიოდის ბოლოს ეს თანხა კიდევ iP სიდიდით გაიზრდება და გახდება

$$F_2 = F_1 + iP = P(1+i) + iP = P(1+2i).$$

მესამე პერიოდის ბოლოს უკვე ეს თანხა გაიზრდება iP სიდიდით და იქნება

$$F_3 = F_2 + iP = P(1+2i) + iP = P(1+3i).$$

და ა. შ. დარიცხვის მე-n პერიოდის ბოლოს მიმდინარე თანხის მარტივი პროცენტის მეთოდით გამოსათვლელ ფორმულას ექნება სახე:

$$F_n = P(1+ni), \quad 0 \le n \le N. \tag{11}$$

(7) და (11) ფორმულების შედარება გვაძლევს

$$I_n = inP.$$

მაგალითი 1. ბანკის მიერ 1000 ლარი გასესხებულია 9%-იანი წლიური საპროცენტო განაკვეთით. რას უდრის მიმდინარე თანხის ოდენობა მეოთხე წლის ბოლოს, თუ ბანკი იყენებს მარტივი პროცენტით დარიცხვის მეთოდს?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (11) ფორმულით. პირობის თანახმად

$$P = 1\,000, \quad i = 0.09, \quad n = 4.$$

მაშასადამე,

$$F_4 = 1\,000(1 + 0{,}09 \cdot 4) = 1\,000 \cdot 1{,}36 = 1\,360 \text{ (ლარი)}.$$

პასუხი: 1 360 ლარი.

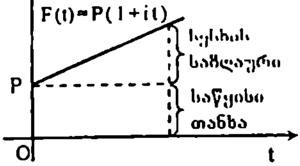
შენიშვნა 5. საწყისი და მიმდინარე თანხების $P, F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ მიმდევრობა მარტივი პროცენტის შემთხვევაში ადგენს *არითმეტიკულ პროგრესიას*, რომლის პირველი წევრია P და სხვაობაა $i \cdot P$.

განვაზოგადოთ (11) ფორმულა. ვთქვათ, საბაზისო ერთეულია წელიწადი.

თუ დარიცხვის პერიოდიც წელიწადია, ე. ი. გვაქვს ეფექტური დარიცხვა, მაშინ (11) ფორმულაში n ნიშნავს წლების რაოდენობას. თუკი დარიცხვის პერიოდად ავიღებთ კვარტალს, თვეს, დღეს და ა.შ. მაშინ მიმდინარე გადასახადი n_1 კვარტლის, n_2 თვის, n_3 დღის და ა.შ. იქნება შესაბამისად $P\left(1 + \frac{n_1}{4} i\right)$, $P\left(1 + \frac{n_2}{12} i\right)$, $P\left(1 + \frac{n_3}{365} i\right)$ და ა.შ. აქედან გამომდინარეობს, რომ საბაზისო ერთეულად წელიწადის აღების შემთხვევაში, თუ მის ნებისმიერ მთელის ჯერად ან წილად ნაწილს t ასოთი აღვნიშნავთ, მაშინ (11) ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$F(t) = P(1 + it), \quad 0 \le t \le T. \tag{12}$$

ამრიგად, **მარტივი პროცენტის შემთხვევაში მიმდინარე თანხა დროის წრფივი ფუნქციაა** (იხ. ნახ. 8.1).



ნახ. 8.1

(12) თანაფარდობა საკრედიტო ოპერაციის მათემატიკური მოდელია მარტივი პროცენტის შემთხვევაში. იგი ერთმანეთთან აკავშირებს ოთხ F, P, i და t სიდიდეს. ყოველი მათგანის გამოთვლა შესაძლებელია, თუ ცნობილია დანარჩენი სამი სიდიდე.

მაშასადამე, (12) თანაფარდობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მასში შემავალი რომელიმე ერთი ცვლადის მიმართ ერთუცნობიანი განტოლება.

მაგალითი 2. მოქალაქემ ბანკში შეიტანა 10 000 ლარი. ბანკი ანაბარს იღებს 3%-იანი წლიური საპროცენტო განაკვეთით და იყენებს მარტივი პროცენტით დარიცხვის მეთოდს. რამდენი წლის შემდეგ დაუბრუნებს ბანკი მოქალაქეს 10 900 ლარს?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (12) ფორმულით. პირობის თანახმად $P = 10\,000$, $F = 10\,900$, $i = 0{,}03$ და საძიებელია t. მაშასადამე,

$$10\,900 = 10\,000(1 + 0{,}03 \cdot t) \Rightarrow t = 3.$$

პასუხი: 3 წლის შემდეგ.

მაგალითი 3. რა თანხა იყო ორი წლით გასესხებული, თუ 6%-იანი მარტივი წლიური საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში დაგროვილმა თანხამ შეადგინა 784 000 ლარი?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (12) ფორმულით. პირობის თანახმად $t = 2$, $i = 0{,}06$, $F = 784\,000$ და საძიებელია P.

მაშასადამე, $784\,000 = P(1 + 0{,}06 \cdot 2) \Rightarrow P = 700\,000$.

პასუხი: 700 000 ლარი.

მაგალითი 4. როგორი იყო მარტივი წლიური საპროცენტო განაკვეთი, თუ 4500 ლარის სარგებელმა 9 თვეში შეადგინა 270 ლარი?

ამოხსნა. პირობის თანახმად $P = 4\,500$; $t = \dfrac{9}{12} = 0{,}75$, $I = 270$. მაშასადამე, (1) ფორმულის თანახმად $F = 4\,500 + 270 = 4\,770$ და (12) ფორმულაში უცნობია i:

$$4\,770 = 4\,500(1 + i0{,}75) \Rightarrow i = 0{,}08 \Rightarrow r = 8\%.$$

პასუხი: წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთია $i = 0{,}08$, ანუ $r = 8\%$.

8.4. რთული პროცენტი

გადავიდეთ *რთული პროცენტის* (**Compound Interest**) მეთოდის განხილვაზე.

ვთქვათ, ისევ P საწყისი თანხა გასესხებულია i წლიური საპროცენტო განაკვეთით. ამ შემთხვევაში პროცენტის დარიცხვა ასეთი წესით ხდება: დარიცხვის ყოველი პერიოდის ბოლოს ამ პერიოდის დასაწყისში არსებულ თანხას ემატება მისი i-ური ნაწილი. მაშასადამე, დარიცხვის პირველი პერიოდის ბოლოს მიმდინარე თანხა იქნება

$$F_1 = P + iP = P(1 + i).$$

(ეს თანხა ემთხვევა პირველი პერიოდის ბოლოს მარტივი პროცენტით გამოთვლილ თანხას). მეორე პერიოდის ბოლოს ეს თანხა უკვე iF_1 სიდიდით გაიზრდება და გახდება

$$F_2 = F_1 + iF_1 = P(1+i) + iP(1+i) = P(1+i)^2 .$$

მესამე პერიოდის ბოლოს უკვე ეს თანხა გაიზრდება iF_2 სიდიდით და გახდება

$$F_3 = F_2 + iF_2 = P(1+i)^2 + iP(1+i)^2 = P(1+i)^3$$

და ა.შ. დარიცხვის მე-n პერიოდის ბოლოს მიმდინარე თანხის რთული პროცენტის მეთოდით გამოსათვლელი ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$F_n = P(1+i)^n, \quad 0 \le n \le N . \tag{13}$$

მაგალითი 5. რას უდრის მიმდინარე თანხის ოდენობა მაგალითი 1-ის პირობებში, თუ ბანკი იყენებს რთული პროცენტით დარიცხვის მეთოდს?

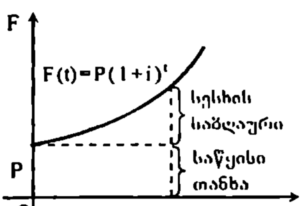
ამოხსნა. ვისარგებლოთ (13) ფორმულით. პირობის თანახმად $P = 1\,000$, $i = 0.09$, $n = 4$. მაშასადამე, $F_4 = 1\,000(1+0{,}09)^4 = 1\,000 \cdot 1{,}411 = 1\,411$ (ლარი).

პასუხი: 1 411 ლარი.

შენიშვნა 6. საწყისი და მიმდინარე თანხების P, F_1, F_2, F_3, ..., F_n მიმდევრობა რთული პროცენტის შემთხვევაში ადგენს *გეომეტრიულ პროგრესიას*, რომლის პირველი წევრია P და მნიშვნელია $(1+i)$.

ისევე, როგორც მარტივი პროცენტის შემთხვევაში, (13) ფორმულის განზოგადების შედეგად შეგვიძლია იგი შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

$$F(t) = P(1+i)^t, \quad 0 \le t \le T . \tag{14}$$



ნახ. 8.2

ამრიგად, რთული პროცენტის შემთხვევაში, მიმდინარე თანხა დროის მაჩვენებლიანი ფუნქციაა (იხ. ნახ. 8.2).

(14) თანაფარდობა საკრედიტო ოპერაციის არაწრფივი მათემატიკური მოდელია რთული პროცენტის შემთხვევაში.

(14) ფორმულაში მონაწილეობს ოთხი სიდიდე: **F, P, i** და **t**. ისევე, როგორც მარტივი პროცენტის შემთხვევაში, ნებისმიერი მათგანის გამოთვლა შეიძლება, თუ ცნობილია დანარჩენი სამი სიდიდე.

აქედან გამომდინარეობს, რომ (14) თანაფარდობაც შეიძლება განვიხილოთ როგორც რომელიმე ერთი ცვლადის მიმართ ერთუცნობიანი განტოლება.

მაგალითი 6. რა თანხა იყო შეტანილი ანაბარზე ბანკში, თუ რთული წლიური 3%-იანი დარიცხვის პირობებში დაგროვილმა თანხამ 4 წელიწადში შეადგინა 56 275 ლარი?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (14) ფორმულით. მოცემულობის თანახმად F=56 275, t=4, i=0,03 და უცნობია P, რომელიც (14) ფორმულის თანახმად ტოლია

$$P = \frac{F(4)}{(1+0,03)^4} = \frac{56\ 275}{1,1255} = 50\ 000 \text{ (ლარი)}.$$

პასუხი: საწყისი თანხაა 50000 ლარი.

მაგალითი 7. კრედიტი 3 000 ლარის ოდენობით გაიცა 3 წლით. როგორი იყო რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთი, თუ დაგროვილმა თანხამ შეადგინა 3 573 ლარი?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (14) ფორმულით. მოცემულობის თანახმად P=3 000, t=3, F=3 573 და უცნობია i. (14) ფორმულიდან i-ს გამოსათვლელად მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$i = \sqrt[t]{\frac{F}{P}} - 1,$$

მაშასადამე,

$$i = \sqrt[3]{\frac{3\ 573}{3\ 000}} - 1 = 1,06 - 1 = 0,06.$$

პასუხი: წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია $i = 0,06$, ანუ $r = 6\%$.

მაგალითი 8. A და B ბანკმა თავის თითო კლიენტზე გასცა სესხი 2 000-2 000 ლარის ოდენობით 20%-იანი წლიური საპროცენტო განაკვეთით. A ბანკი იყენებს მარტივი პროცენტით დარიცხვას, B ბანკი კი – რთული პროცენტით დარიცხვას. რომელ ბანკს ექნება მეტი სარგებელი როცა სესხი გაცემულია:

ა) 6 თვით; ბ) ერთი წლით; გ) 3 წლით?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ მარტივი პროცენტით დარიცხვის (12) და რთული პროცენტით დარიცხვის (14) მათემატიკური მოდელებით. A და B ბანკებისათვის მოცემულობის თანახმად გვექნება

$$F_A(t) = 2\ 000(1 + 0{,}2t),$$

$$F_B(t) = 2\ 000 \cdot 1{,}2^t,$$

სადაც დრო გაზომილია წლობით.

ბანკების მიერ მიღებული სარგებლის შესადარებლად განვიხილოთ $F_B(t) - F_A(t)$ სხვაობა დროის $t_1 = 0{,}5$, $t_2 = 1$ და $t_3 = 3$ მომენტისათვის. მივიღებთ:

ა) როცა $t_1 = 0{,}5$, მაშინ

$$F_B(t) - F_A(t) = 2\ 000\ 1{,}2^{0,5} - 2\ 000(1 + 0{,}2 \cdot 0{,}5) =$$
$$= 2\ 190 - 2\ 200 = -10 < 0.$$

მაშასადამე, თუ სესხი გაცემულია 6 თვით, მაშინ მეტ სარგებელს იღებს A ბანკი.

ბ) როცა t=1, მაშინ $F_B(1) - F_A(1) = 2\ 000 \cdot 1{,}2 - 2\ 000 \cdot 1{,}2 = 0.$

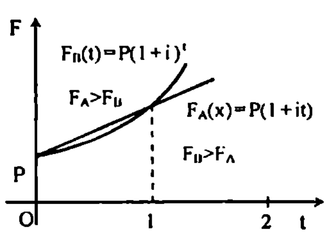
მაშასადამე, თუ სესხი გაცემულია 1 წლით, ორივე ბანკის მიერ მიღებული სარგებელი ერთნაირია.

გ) როცა t=3, მაშინ

$$F_B(t) - F_A(t) = 2\ 000 \cdot 1{,}2^3 - 2\ 000 \cdot 1{,}6 =$$
$$= 3\ 456 - 3\ 200 = 256 > 0.$$

მაშასადამე, თუ სესხი გაცემულია 3 წლით, მაშინ მეტ სარგებელს იღებს B ბანკი.

საზოგადოდ, თუ სესხის პერიოდი ერთ წელზე ნაკლებია, ყოველთვის მოგებაშია მარტივი პროცენტით სესხის გამცემი კრედიტორი (A ბანკი), ხოლო თუ სესხის პერიოდი ერთ წელზე მეტია, მაშინ მოგებაშია რთული პროცენტით სესხის გამცემი (B ბანკი). ეს ნათლად ჩანს OtF საკოორდინატო სისტემაში ერთად აგებული (12) და (14) მათემატიკური მოდელების შესაბამისი გრაფიკებიდან (იხ. ნახ. 8.3).



ნახ. 8.3

8.5 დაგროვების კოეფიციენტი

$(1+i)^t$ *გამოსახულებას* (14) *თანაფარდობაში დაგროვების კოეფიციენტი* (**Compound Interest Factor**) ეწოდება. აღვნიშნოთ იგი $q(i;t)$-თი:

$$q(i;t)=(1+i)^t. \qquad (15)$$

(15)-ის გამოყენებით (14) თანაფარდობა შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$F(t)=q(i;t)\cdot P, \quad 0\le t\le T. \qquad (16)$$

(16) თანაფარდობა საკრედიტო ოპერაციის არაწრფივი მათემატიკური მოდელია დაგროვების კოეფიციენტით.

დაგროვების კოეფიციენტი გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ იზრდება t წლის შემდეგ i რთული საპროცენტო წლიური განაკვეთით გასესხებული საწყისი P თანხა.

მისი ეკონომიკური შინაარსი ასეც შეიძლება გამოვთქვათ: $q(i;t)$ არის ფულის ერთი ერთეულის (1 ლარის, 1 ევროს, 1 აშშ დოლარის და ა.შ.) t წლის შემდეგ ღირებულება, როცა პროცენტის დარიცხვა ხდება რთული, i-ს ტოლი წლიური საპროცენტო განაკვეთით.

დაგროვების კოეფიციენტი i-სა და t-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის ტაბულირებულია და მოიცემა ცხრილის სახით (ამ ცხრილის ფრაგმენტი იხილეთ ქვემოთ). მიუხედავად იმისა, რომ ამჟამად პერსონალური კომპიუტერით და $\boxed{x^n}$ კლავიშის მქონე კალკულატორითაც კი შეიძლება $q(i,t)$-ს გამოთვლა, მისი ცხრილი კვლავაც ფართოდ გამოიყენება.

t \ i	0,05	0,1	0,15	0,2
1	1,05	1,1	1,15	1,2
2	1,106	1,21	1,323	1,44
3	1,158	1,331	1,521	1,728
4	1,216	1,464	1,749	2,074
5	1, 276	1,611	2,011	2,488
6	1,34	1,771	2,313	2,986

მაგალითი 9. რას უდრის დაგროვების კოეფიციენტი, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 10% და სესხის გაცემიდან გავიდა 3 წელი?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ცხრილით. წლების სვეტში მოვძებნოთ $t=3$ და საპროცენტო განაკვეთების სტრიქონში $i=0,1$. შესაბამისი სტრიქონის და სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი რიცხვი არის საძიებელი სიდიდე:

$$q=q\,(0,1;3)=1,331.$$

პასუხი: დაგროვების კოეფიციენტია 1,331.

მაგალითი 10. რამდენი წლის შემდეგ გახდება დაგროვების კოეფიციენტი 2,488, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 20%?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ცხრილით. $i=0,2$ სვეტში მოვძებნოთ 2,488-ის ტოლი კოეფიციენტი. მისი შესაბამისი წელი დროთა სვეტში არის $t=5$.

პასუხი: 5 წლის შემდეგ.

მაგალითი 11. რას უდრის წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთი, თუ დაგროვების კოეფიციენტი 6 წლის შემდეგ არის 1,771?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ცხრილით. წლების სვეტში მოვძებნოთ $t=6$ და შესაბამის სტრიქონში 1,771-ის ტოლი დაგროვების კოეფიციენტი. მისი შესაბამისი საპროცენტო განაკვეთის სტრიქონში არის $i=0,1$ ანუ $r=10\%$.

პასუხი: წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია $i=0,1$ ანუ $r=10\%$.

მაგალითი 12. რამდენი წლის შემდეგ გაორმაგდება საწყისი თანხა, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 15%?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (14) ფორმულით. პირობის თანახმად $F=2P$ და $i=0,15$. ამ მონაცემების (14) ფორმულაში შეტანის შემდეგ მივიღებთ მაჩვენებლიან განტოლებას t-ს მიმართ: $1,15^t=2$. ამ განტოლების ამონახსნს კი აქვს სახე: $t=\log_{1,15}^{2}$. მის გამოსათვლელად საჭიროა ლოგარითმების ცხრილის გამოყენება.

არსებობს ამოხსნის მეორე გზაც. ვისარგებლოთ ცხრილით. $1,15^t$ არის $i=0,15$ საპროცენტო განაკვეთის შესატყვისი დაგროვების კოეფიციენტი. ვინაიდან იგი 2-ის ტოლია, $i=0,15$ საპროცენტო განაკვეთის სვეტში ვიპოვოთ 2-თან ყველაზე ახლოს მდგომი მნიშვნელობა. ესაა 2,011, რომლის შესაბამისი წელიც არის $t=5$.

პასუხი: საწყისი თანხა გაორმაგდება 5 წელიწადში.

8.6 დისკონტირება

წინა პუნქტებში *ცნობილი საწყისი* **P** *თანხის* მეშვეობით ხდებოდა *საბოლოო* ანუ *დაგროვილი თანხის* გამოთვლა.

ფინანსურ პრაქტიკაში ხშირად საჭირო ხდება გადაიჭრას *შებრუნებული* ამოცანა: უკვე *ცნობილი დაგროვილი თანხის* ოდენობის მიხედვით მოიძებნოს *უცნობი საწყისი თანხა* **P**. ასეთი სიტუაციები წარმოიქმნება მაშინ, როცა ფორმდება ფინანსური გარიგებები ან როცა ხდება დაგროვილი პროცენტის (სარგებლის) დაკავება უშუალოდ სესხის გაცემის მომენტში.

დაგროვილი თანხა აქ S-ით აღენიშნოთ. მაშინ სხვაობას

$$D=S-P \tag{17}$$

ეწოდება *დისკონტი* (**Discount**), ხოლო *საწყისი თანხის მოძებნის პროცესს მისი საბოლოო (დაგროვილი) თანხის მიხედვით ეწოდება დისკონტირება.* საბოლოო და საწყის მომენტებს შორის დროის შუალედს კი – *დისკონტირების პერიოდი.*

ტერმინი დისკონტირება ფართო გაგებით ნიშნავს რაიმე ღირებულებითი სიდიდის – კაპიტალის განსაზღვრას დროის კონკრეტული მომენტისათვის, როცა ცნობილია, თუ რა იქნება მისი ღირებულება მომავალში. ზოგჯერ **P**-ს **S**-ის *დღევანდელ ღირებულებას უწოდებენ.* ხატოვნად რომ ითქვას, დისკონტირება იმის განსაზღვრაა, თუ მომავალი შემოსავლები ან ხარჯები რა ღირს დღეს.

ცხადია, ერთი და იმავე S-სთვის საწყისი ღირებულების **P** ოდენობა დამოკიდებული იქნება იმ მეთოდზე, რომლითაც ხდება პროცენტის დარიცხვა.

მარტივი პროცენტის შემთხვევაში (12) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$P=\frac{S}{1+it}, \tag{18}$$

ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში (14) ფორმულის თანახმად

$$P=\frac{S}{(1+i)^t}. \tag{19}$$

მაგალითი 13. კონტრაქტის ხელმოწერიდან ორი წლის შემდეგ გადახდილი უნდა იქნას $52 080 წლიური 12%-იანი მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ:

ა) სესხის საწყისი თანხა; ბ) დისკონტი.

ამოხსნა. $F=52\ 080$, $i=0{,}12$, $t=2$. (18) ფორმულიდან გვაქვს

$$P=\frac{52\ 080}{1+0{,}12\cdot 2}=\$42\ 000,$$

ხოლო დისკონტი კი იქნება $D=S-P=52\ 080-42\ 000=\$10\ 080$.

პასუხი: ა) სესხის საწყისი თანხაა \$42 000;
ბ) დისკონტი \$10 080.

მაგალითი 14. მაგალითი 13-ის პირობებში დავუშვათ, რომ გამოიყენება რთული პროცენტის მეთოდი.

ამოხსნა. $F=52\ 080$, $i=0{,}12$, $t=2$. (19) ფორმულიდან გვაქვს

$$P=\frac{52\ 080}{(1+0{,}12)^2}=\frac{52\ 080}{1{,}2544}=\$41\ 518,$$

ხოლო დისკონტია $D=S-P=52\ 080-41\ 518=\$10\ 562$.

პასუხი: ა) სესხის საწყისი თანხაა \$41 518, ბ) დისკონტი \$10 562.

როგორც ვხედავთ ერთი და იგივე საბოლოო თანხის მისაღწევად რთული პროცენტის შემთხვევაში ნაკლები საწყისი თანხაა საჭირო და შესაბამისად, დისკონტიც მეტია.

მაგალითი 15. ფირმას ბანკში ანაბრის სახით გარკვეული თანხა გააჩნია. ბანკი ყოველთვიურად ამ თანხას არიცხავს 1,5%-ს რთული პროცენტის მეთოდით. ფირმას ესაჭიროება მოწყობილობის შეძენა; მას ორი გამყიდველისაგან აქვს შეთავაზება, ოღონდ, ისინი შემდეგ პირობას აყენებენ. პირველი ითხოვს მოწყობილობის ღირებულების 4 000 ლარის გარიგებისთანავე გადახდას, მეორე კი ითხოვს 2 000 ლარის გადახდას ახლა და 2 180 ლარის გადახდას ერთი წლის შემდეგ. რომელი ვარიანტი უფრო სარფიანია ფირმისათვის?

ამოხსნა. ერთი შეხედვით თითქოს ყველაფერი ნათელია. პირველ გამყიდველს ფირმამ უნდა გადაუხადოს 4 000 ლარი, მეორეს კი – 4 180 ლარი. მაგრამ, ნუ გავაკეთებთ ნაჩქარევ დასკვნას. ვნახოთ, რა თანხა უნდა ჰქონდეს ფირმას ბანკში ანგარიშზე გარიგების მომენტისათვის, რათა ერთი წლის შემდეგ ამ თანხამ სარგებელთან (პროცენტთან) ერთად შეადგინოს 2 180 ლარი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (19) ფორმულით განვსაზღვროთ მომავალი $S=2\ 180$ ლარის საწყისი (დისკონტირებული) სიდიდე P, როცა $i=0{,}015$ და $t=12$. გვაქვს

$$P=\frac{2\ 180}{(1+0{,}015)^{12}}=\frac{2\ 180}{(1{,}015)^{12}}=\frac{2\ 180}{1{,}1956}=1\ 823{,}35.$$

ამრიგად, მეორე ვარიანტი იმის ტოლფასია, რომ მოწყობილობის ყიდვის მომენტში ფირმას ესაჭიროება

$$2\ 000 + 1\ 823{,}5 = 3\ 823{,}35 \text{ ლარი.}$$

პასუხი: სარფიანია მეორე ვარიანტი: $3\ 823{,}23 < 4\ 000$.

დისკონტირების აღწერილ მეთოდს *მათემატიკური დისკონტირება* ეწოდება. ამ მეთოდში არსებითია, რომ საწყისი თანხა P მიღებულია 100%-ად, ანუ, როგორც ამბობენ ეკონომისტები, მიღებულია *გაანგარიშების ბაზად*, და საპროცენტო განაკვეთი განისაზღვრება (8) ფორმულით.

ფინანსურ პრაქტიკაში გამოიყენება დისკონტირების მეორე მეთოდიც, რომელსაც *საბანკო აღრიცხვა* (**Bank Discount**) ეწოდება. ამ შემთხვევაში გაანგარიშების ბაზად (ე.ი. 100%-ად) მიიღება საბოლოო (დაგროვილი) **S** თანხა, ეს იმას ნიშნავს, რომ წილადი

$$\mathbf{d_0 = \frac{D}{S}} \qquad (20)$$

არის *ფარდობითი სიდიდე*, რომელიც გვიჩვენებს თუ **S** საბოლოო თანხის რა ნაწილს შეადგენს **D** დისკონტი (შეადარეთ (20) (8) ფორმულას). ამ სიდიდეს *დისკონტის განაკვეთი* ეწოდება. თუ დისკონტირების პერიოდი **t** წელია, მაშინ

$$\mathbf{d = \frac{d_0}{t}} \qquad (21)$$

სიდიდეს *დისკონტის წლიური განაკვეთი* ეწოდება.

გამოვიყვანოთ მისი მეშვეობით საბანკო აღრიცხვის მეთოდით საწყისი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა. ამ მიზნით (20) ფორმულაში შევიტანოთ დისკონტის (17) გამოსახულება და მიღებული ფორმულიდან განვსაზღვროთ **P**:

$$\mathbf{d_0 = \frac{S-P}{S} \Rightarrow P = S(1-d_0)}.$$

აქედან (21) ფორმულის გათვალისწინებით გვექნება

$$\mathbf{P = S(1-dt)}. \qquad (22)$$

მაგალითი 16. ფირმა ბანკში იღებს კრედიტს 3 თვით 20%-იანი წლიური დისკონტის განაკვეთით. რა თანხას მიიღებს ფირმა სესხის აღების მომენტში, თუ ბანკისთვის დასაბრუნებელი ექნება 6 000 ლარი?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (22) ფორმულით. მოცემულობის თანახმად $t=\frac{3}{12}=0{,}25$; $d=0{,}2$; $S=6\,000$. მაშასადამე,

$$P=6\,000(1-0{,}25\cdot 0{,}2)=6\,000\cdot 0{,}95=5\,700\,(\text{ლარი}).$$

პასუხი: 5 700 ლარი.

წლიური საპროცენტო განაკვეთი $\mathbf{i}$ და დისკონტის წლიური განაკვეთი $\mathbf{d}$ ფინანსური მათემატიკის ძირითადი ფარდობითი სიდიდეებია. მათ შორის არსებობს კავშირი, რომლის დადგენის მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრება. **$\mathbf{i}$ და $\mathbf{d}$ სიდიდეებს ვუწოდოთ ეკვივალენტური, თუ მათი მეშვეობით ერთი და იგივე $\mathbf{P}$ საწყისი თანხის პირობებში გამოთვლილი დაგროვილი თანხები ერთი წლის ბოლოს ერთმანეთის ტოლი იქნება.**

წლიური საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში ერთი წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა უდრის $\mathbf{P(1+i)}$-ს.

დისკონტის წლიური განაკვეთის შემთხვევაში ერთი წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა იმავე საწყისი $\mathbf{P}$ თანხის დროს, (22) ფორმულის თანახმად, როცა $\mathbf{t=1}$ იქნება:

$$S=\frac{P}{1-d}.$$

განაკვეთების ეკვივალენტურობა დაგროვილი თანხების ტოლობას ნიშნავს, ამიტომ

$$P(1+i)=\frac{P}{1-d},$$

საიდანაც $1+i=\frac{1}{1-d}\Rightarrow i=\frac{1}{1-d}-1=\frac{d}{1-d}$.

ამრიგად,

$$i=\frac{d}{1-d}; \qquad (23)$$

თავის მხრივ

$$d=\frac{i}{1+i}.$$

ამრიგად, $\mathbf{d}$ წარმოადგენს მარტივ პროცენტს, რომლის მიხედვითაც ხდება სარგებლის წინასწარ გადახდა და რომელიც ეკვივალენტურია მარტივი წლიური საპროცენტო $\mathbf{i}$ განაკვეთისა.

შენიშვნა. (23) ტოლობის ძალით $d<1$ და $d<i$, მაშასადამე $d<\min(1,i)$.

მაგალითი 17. ბანკი გასცემს სესხს 5%-იანი მარტივი წლიური საპროცენტო განაკვეთით. რა თანხა უნდა იქნას გადახდილი წინასწარ საპროცენტო გადასახადის დასაფარავად, თუ წლის ბოლოს ბანკს უნდა დაუბრუნდეს 88 200 ლარი.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ დისკონტირებული საწყისი თანხა P, შემდეგ მისი პროცენტი iP და ბოლოს ამ პროცენტის დისკონტირებული საწყისი მნიშვნელობა. მოცემულობის თანახმად $i=0,05$; $t=1$, $S=88\,200$. ვინაიდან დარიცხვა ხდება მარტივი პროცენტით, ვისარგებლოთ (18) ფორმულით, როცა $t=1$:

$$P=\frac{S}{1+i}\Rightarrow P=\frac{88\ 200}{1+0,5}=84\ 000\,(\text{ლარი}).$$

ამ საწყისი თანხის სარგებელი ერთი წლის შემდეგ იქნება

$$I=iP\Rightarrow I=0,05\cdot 84\ 000=4\ 200\,(\text{ლარი}).$$

ხოლო მისი დისკონტირებული საწყისი თანხა I_D ისევ (18) ფორმულის შესაბამისად კი –

$$I_D=\frac{I}{1+i}\Rightarrow\frac{4\ 200}{1+0,5}=4\ 000\,(\text{ლარი}).$$

პასუხი: 4 000 ლარი.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რა არის პროცენტი?
2. რას ეწოდება:
   ა) სესხის პერიოდი?
   ბ) დარიცხვის პერიოდი?
   გ) ეფექტური დარიცხვა?
   დ) თანხის დაგროვება?
   ე) მიმდინარე თანხა?
   ე) დაგროვილი თანხა.
3. განმარტეთ მარტივი საპროცენტო განაკვეთი.
4. მოიყვანეთ მიმდინარე თანხის გამოსათვლელი ფორმულა მარტივი საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში.
5. რომელ პროგრესიას უკავშირდება საწყისი თანხის ყოველწლიური ზრდა მარტივი საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში?
6. განმარტეთ რთული საპროცენტო განაკვეთი.
7. მოიყვანეთ მიმდინარე თანხის გამოსათვლელი ფორმულა რთული საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში.
8. რომელ პროგრესიას უკავშირდება საწყისი თანხის ყოველწლიური ზრდა რთული საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში?
9. რას ეწოდება დაგროვების კოეფიციენტი?
10. მოიყვანეთ მიმდინარე თანხის გამოსათვლელი ფორმულა დაგროვების კოეფიციენტით.
11. რას ეწოდება:
    ა) დისკონტი?
    ბ) დისკონტირება?
    გ) მათემატიკური დისკონტირება?
    დ) საბანკო აღრიცხვა?
    ე) დისკონტის განაკვეთი?
    ვ) დისკონტის წლიური განაკვეთი?
12. რაში მდგომარეობს საპროცენტო და დისკონტის წლიური განაკვეთების ეკვივალენტურობა?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

8.1. ცნობილია, რომ ბანკი გასცემს სესხს წლიური 8% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. ბანკის მიერ გასესხებულია $8 000.
ა) ააგეთ სესხის წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;
ბ) განსაზღვრეთ სესხის ოდენობა 5 წლის შემდეგ.

8.2. 10%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით ბანკის მიერ გასესხებულია $7 000. რამდენი წლით გაუსესხებიათ თანხა, თუ ბანკს დაუბრუნდა $9 975?

8.3. ცნობილია, რომ ბანკი გასცემს სესხს 5%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით, რა თანხა ისესხა პიროვნებამ ბანკიდან, თუ მან 5 წლის შემდეგ ბანკს $8 520 დაუბრუნა?

8.4. 4%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით ბანკის მიერ გასესხებულია $200 000. რა თანხა დაუბრუნდება ბანკს:
ა) 1 წლის შემდეგ?
ბ) 5 წლის შემდეგ?
გ) t წლის შემდეგ?

8.5. რა თანხა უნდა გაასესხოს ბანკმა 4%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით, რათა 5 წლის შემდეგ დაუბრუნდეს $360 000?

8.6. რამდენი წლით უნდა გაასესხოს ბანკმა 3%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით $20 000, რათა მას დაუბრუნდეს $26 000?

8.7. ბანკმა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით გაასესხა $2 000. 2 წლის შემდეგ სესხის ოდენობაა $2 500. იპოვეთ საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე.

8.8. ბანკმა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით გაასესხა $10 000. 4 წლის შემდეგ სესხის ოდენობაა $12 070. იპოვეთ საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე.

8.9. 5%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით თქვენ დააბანდეთ $2 000. რა თანხას მიიღებთ:
ა) 3 წლის შემდეგ?
ბ) t წლის შემდეგ?

8.10. რა თანხა უნდა დააბანდოთ 10%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით, რათა 3 წლის შემდეგ დაიბრუნოთ $6 655?

8.11. ბანკი გასცემს სესხს 5%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით. რა მაქსიმალური ვადით (წელი) შეგიძლიათ ისესხოთ ბანკიდან $20 000, რათა საპროცენტო გადასახადმა არ გადააჭარბოს $5 000?

8.12. რა თანხა უნდა დააბანდოთ 11%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით, რათა 4 წლის შემდეგ დაიბრუნოთ $45 540?

8.13. რამდენი წლით იყო გასესხებული 10%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით $10 000, თუ დაბრუნებული სესხის ოდენობაა $12 100?

8.14. რამდენი წლით იყო გასესხებული 10%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით $40 000, თუ

დაბრუნებული სესხის ოდენობაა $58 564?

8.15. ბანკი გასცემს სესხს 5%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ დისკონტის განაკვეთი და რა თანხა უნდა იქნეს გადახდილი საპროცენტო გადასახადის წინასწარ დასაფარად, თუ წლის ბოლოს ბანკს უნდა მიეღო $6 300.

8.16. ბანკი გასცემს სესხს 3%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო გადასახადით. იპოვეთ დისკონტის განაკვეთი და დისკონტი, თუ წლის ბოლოს ბანკს უნდა მიეღო $3 090.

8.17. რას უდრის დაგროვების კოეფიციენტი, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 15% და სესხის გაცემიდან გავიდა 5 წელი?

8.18. რამდენი წლის შემდეგ გახდება დაგროვების კოეფიციენტი 1,21, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 10%.

8.19. რას უდრის წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთი, თუ დაგროვების კოეფიციენტი 4 წლის შემდეგ არის 1,216?

B. კითხვები და ამოცანები გამეორებისათვის (ლექციები 5-8)

B.1. შეადგინეთ A(-7,1) წერტილზე საკოორდინატო ღერძების პარალელურად გავლებულ წრფეთა განტოლებები.

B.2. შეადგინეთ $x-5y+3=0$ წრფის მიმართ საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებში გავლებულ პერპენდიკულარულ წრფეთა განტოლებები.

B.3. მართკუთხედის ერთ-ერთი წვერო მდებარეობს A(-5,2) წერტილში, მისი მოპირდაპირე წვერო კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო დანარჩენი წვეროები საკოორდინატო ღერძებზეა. შეადგინეთ ამ მართკუთხედის გვერდებისა და დიაგონალების შემცველ წრფეთა განტოლებები.

B.4. შეადგინეთ განტოლება A(2,1) წერტილზე გამავალი წრფისა, რომელიც OX ღერძთან ადგენს: ა) 45^0-ის ტოლ კუთხეს; ბ) 60^0-ის ტოლ კუთხეს; გ) 90^0-ის ტოლ კუთხეს; დ) 135^0-ის ტოლ კუთხეს.

B.5. მოძებნეთ ფართობი სამკუთხედისა, რომელიც $x-y-3=0$, $2x-y-12=0$ წრფეებით და აბსცისათა ღერძითაა შემოსაზღვრული.

B.6. მოძებნეთ მანძილი $4x-3y+8=0$ და $4x-3y+12=0$ პარალელურ წრფეთა შორის.

B.7. რომბის ორი მოპირდაპირე წვეროა A(4,-3) და B(2,1). შეადგინეთ დიაგონალების შემცველ წრფეთა განტოლებები.

B.8. დაწერეთ AB მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარის განტოლება, თუ A = A(2,-3) და B = B(0,5).

B.9. პარალელოგრამის გვერდების შემცველ წრფეთა განტოლებებია: $x-y+1=0$, $x-y-3=0$, $3x-4y+6=0$ და $3x-4y-9=0$. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

B.10. ფირმის შემოსავალი ლარებში მოცემულია ფორმულით $R(x)=3\sqrt{x}$, სადაც x გამოშვებული და რეალიზებული პროდუქციის რაოდენობაა. ფირმის მოგების დამოკიდებულება შემოსავალზე შემდეგი ფორმულითაა მოცემული $P(R)=\frac{1}{81}R^2-5\,000$. იპოვეთ რეალიზებული პროდუქციის რაოდენობა, თუ მოგება 15 000 ლარის ტოლია.

B.11. აჩვენეთ, რომ ფუნქციები

$$f(x)=\frac{ax-b}{cx-a}, \qquad g(x)=\sqrt[n]{a-x^n}$$

ემთხვევა თავის შექცეულ ფუნქციებს.

B.12. მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია

$$y=\begin{cases} x, & \text{როცა } x\le 0, \\ x^2, & \text{როცა } x>0. \end{cases}$$

B.13. გაარკვიეთ შემდეგ ფუნქციათა ლუწკენტოვნების საკითხი:

ა) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$;

ბ) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

B.14. შენობის საწყისი ღირებულებაა \$1 000 000, ნარჩენი ღირებულებაა \$100 000, ხოლო ექსპლუატაციის პერიოდია 50 წელი.

ა) განსაზღვრეთ საამორტიზაციო დანარიცხი;

ბ) ააგეთ ამორტიზაციის წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;

გ) რისი ტოლი იქნება შენობის ღირებულება 40 წლის შემდეგ?

B.15. მამამ გადაწყვიტა თავისი დანაზოგი 30 000 ლარი გაუნაწილოს თავის სამ შვილს და დაუბანდოს ბანკში იმ ანგარიშით, რომ თითოეულს 18 წლის ასაკში დაუგროვდეს თანაბარი თანხა. გამოთვალეთ, რა თანხა დაუბანდა მამამ თითოეულ შვილს, თუ იმ მომენტში შვილების წლოვანება იყო 12, 13 და 16 წელი და ბანკი იძლეოდა სარგებელს 7,5% წლიური რთული პროცენტული განაკვეთით.

B.16. დანახარჯების წრფივი მოდელია $C(x) = 5x + 1\,000$.

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი, თუ პროდუქციის საცალო ფასია \$7;

ბ) ფირმას შეუძლია შეამციროს პროდუქციის თითოეული ერთეულის წარმოებაზე გაწეული ცვლადი დანახარჯი \$4-მდე ფიქსირებული დანახარჯის \$1 200-მდე გაზრდის ხარჯზე. დაადგინეთ, ხელსაყრელი იქნება თუ არა ფირმისათვის ამგვარი ცვლილება, თუ ცნობილია, რომ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა არ იქნება 300-ზე ნაკლები.

B.17. ერთი კილოგრამი შაქრის ფასი გაიზარდა 1,1 ლარიდან 1,3 ლარამდე. ამან გამოიწვია ის, რომ 200 კგ-ის ნაცვლად ერთ კვირაში გაიყიდა 160 კგ შაქარი. ა) ააგეთ მოთხოვნის წრფივი მოდელი; ბ) რა შემთხვევაში იქნება ყოველკვირეული შემოსავალი მაქსიმალური?

B.18. ვთქვათ, მტვერსასრუტის ფასი ბაზარზე შემოსაზღვრულია 300 ლარით, ხოლო თუ ფასი 120 ლარია, მაშინ ყოველთვიურად იყიდება 60 მტვერსასრუტი. ა) ააგეთ მოთხოვნის წრფივი მოდელი; ბ) რა შემთხვევაში იქნება ყოველთვიური შემოსავალი მაქსიმალური?

B.19. ფირმა წელიწადში 10 ტონა ნაყინს აწარმოებს. ყოველ სამ თვეში, რომელიც ზაფხულის თვეებს არ მოიცავს ფირმის ფიქსირებული დანახარჯი 7 000 ლარს შეადგენს, ხოლო ზაფხულის სამ თვეში გაზრდილი მოთხოვნილების დასაკმაყოფილებლად ფირმის ფიქსირებული დანახარჯი 30%-ით იზრდება. რის ტოლია ფირმის წლიური მოგება, თუ 1 კგ ნაყინის წარმოების ცვლადი დანახარჯია 5,5 ლარი, ხოლო 1 კგ ნაყინის ფასი 10 ლარი?

B.20. პიცის ბაზრის კვლევის შედეგად დადგინდა, რომ:

ა) მოთხოვნა შეიძლება აღიწეროს განტოლებით $x=1\,600-30p$, სადაც x მოთხოვნის რაოდენობაა, ხოლო p – საცალო ფასი.

ბ) მიწოდება შეიძლება აღიწეროს განტოლებით $x=1\,100+70p$, სა-

და x მიწოდების რაოდენობაა. გამოთვალეთ პიცის ბაზრისათვის წონასწორული ფასი და წონასწორული რაოდენობა.

B.21. ტურისტულმა ფირმამ შეიძინა: ა) ოფისებისთვის ფართი თბილისში 50 000 ლარად, ბათუმში 20 000 ლარად; ბ) ორი მიკროავტობუსი, თითოეული 15 000 ლარად და აღრიცხვაზე აიყვანა თბილისში. გ) სამი კატარღა, თითოეული 10 000 ლარად და აღრიცხვაზე აიყვანა ბათუმში. ფირმამ ეკონომიკური საქმიანობა დაიწყო წლის დასაწყისში. იპოვეთ ფირმის მიერ წლის ბოლოს გამოყენებული ქონების გადასახადის ოდენობა, თუ: თბილისში ეკონომიკური საქმიანობისთვის გამოყენებული ქონების გადასახადია 1%, ბათუმში კი – 1,2%; საქართველოს ტერიტორიაზე ფართის ამორტიზაციის ნორმაა 5%, კატარღის – 8%, მიკროავტობუსის – 20%.

B.22. ამორტიზაციის წრფივი მოდელისაგან განსხვავებით *ამორტიზაციის დეგრესიულ მოდელში*, ისევე როგორც რთული პროცენტის შემთხვევაში, ყოველწლიური ნარჩენი ღირებულების გამოთვლა ხდება არა საწყისი I ღირებულებიდან, არამედ საანგარიშო მე-n წლის დასაწყისში არსებული S_{n-1} ღირებულებიდან. ააგეთ ამორტიზაციის დეგრესიული მოდელი, თუ ამორტიზაციის ნორმაა μ.

B.23. წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთი 12,5%-ია. რამდენი წლის შემდეგ გაორმაგდება საწყისი თანხა?

B.24. რომელი თანხა უმჯობესია 6%-იანი რთული საპროცენტო განაკვეთის პირობებში: $1 000 დღეს თუ $2 000 რვა წლის შემდეგ?

B.25. წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთია 8%. რამდენი წლის შემდეგ გასამმაგდება საწყისი თანხა?

B.26. მრავალსართულიანი სახლის თითოეული სართულის „გასაღების ჩაბარებამდე" აშენება 85 000 ლარი დაჯდა. გარდა ამისა, ფიქსირებულმა გადასახადმა (მიწის ღირებულება, დაპროექტება, საძირკველი, სახურავი, კომუნიკაციები და ა.შ.) შეადგინა 512 000 ლარი. რამდენ სართულიანი სახლი აშენდა, თუ ერთი სართული საშუალოდ 117 000 ლარი დაჯდა?

B.27. *თამასუქი არის წერილობითი ვალდებულება იმის შესახებ, რომ ხელმომწერი პიროვნება თამასუქის მფლობელს დათქმულ დროს გადაუხდის დათქმულ თანხას.* $1 400 ღირებულების თამასუქი ბანკმა მფლობელისაგან შეისყიდა იმ მომენტში, როცა თამასუქის განაღდებამდე რჩებოდა 60 დღე. რა თანხა მიიღო თამასუქის მფლობელმა, თუ დისკონტის წლიური განაკვეთი 20%-ია და ბანკი წელიწადს 360 დღედ თვლის?

B.28. თამასუქი ბანკმა მფლობელისაგან შეიძინა 225 დღით ადრე თამასუქის განაღდების დღემდე 1 050 ლარად 20%-იანი დისკონტის წლიური განაკვეთის დროს. რის ტოლია თამასუქის ღირებულება, თუ ბანკი წელიწადს 360 დღედ თვლის?

B.29. 3 000 ლარის ღირებულების თამასუქი ბანკმა შეისყიდა 50 დღით ადრე მის განაღდებამდე 2 800 ლარად. რისი ტოლია დისკონტის წლიური განაკვეთი, თუ ბანკი წელიწადს 360 დღედ თვლის?

B.30. განაღდებამდე რამდენი დღით ადრე შეიძინა ბანკმა 10 000 ლარის ღირებულების თამასუქი 9 900 ლარად, თუ დისკონტის წლიური განაკვეთია 6% და ბანკი წელიწადს 360 დღედ თვლის?

ლექცია 9

მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი

9.1. მიმდევრობა

მიმდევრობა ეწოდება ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.

მაგალითად: განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული შემდეგი ფუნქცია

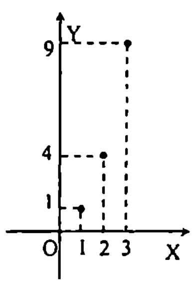
$$y = f(n) = n^2,\ n \in N.$$

იგი ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეუსაბამებს ამ რიცხვის კვადრატს

$$\forall n \in N : n \to n^2.$$

ამ ფუნქციის მნიშვნელობებია:

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots.$$

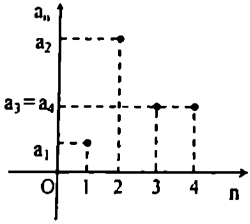


ნახ. 9.1

ბუნებრივია, რომ 1-ს ვუწოდოთ მიმდევრობის პირველი წევრი, 4-ს მეორე წევრი და ა.შ. n^2-ს კი n-ური ანუ *ზოგადი წევრი*. ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ნახ. 9.1-ზე მოცემული სახე.

$f(n)$-ის მაგივრად იყენებენ აღნიშვნას $f(n) = a_n$.

მიმდევრობას აღნიშნავენ $(a_n)_{n\geq 1}$ სიმბოლოთი. a_1 არის მიმდევრობის პირველი წევრი, a_2 – მეორე წევრი და ა.შ. a_n არის *n-ური* ანუ *ზოგადი წევრი.*



მიმდევრობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია სიბრტყეზე

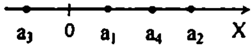
ნახ. 9.2

მიმდევრობის თვალსაჩინოდ წარმოდგენა შესაძლებელია ორი გზით:

1. (დისკრეტული) ფუნქციის გრაფიკი სიბრტყეზე (იხ. ნახ. 9.2);

2. წერტილთა ერთობლიობა OX ღერძზე (იხ. ნახ. 9.3).

შემოსაზღვრული, შემოუსაზღვრელი და მონოტონური ფუნქციების განმარტებებიდან გამომდინარეობს ანალოგიური განმარტებები მიმდევრობებისათვის.

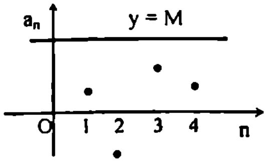


მიმდევრობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია OX ღერძზე

ნახ. 9.3

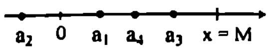
$(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ $\forall n \in N$ სრულდება უტოლობა

$$a_n \leq M.$$



ნახ. 9.4

$(a_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია ნიშნავს, რომ ამ მიმდევრობის შესაბამისი წერტილები სიბრტყეზე მოთავსებულია $y=M$ წრფის ქვევით ან ამ წრფეზე (იხ. ნახ. 9.4), ხოლო შესაბამისი წერტილები OX ღერძზე კი – $x=M$ წერტილის მარცხნივ ან მას ემთხვევა (იხ. ნახ. 9.5).

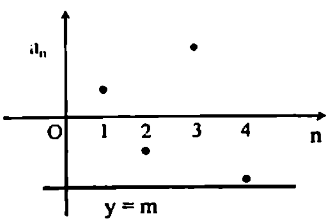


ნახ. 9.5

მიმდევრობას, რომელიც არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული, ზემოდან შემოუსაზღვრელი მიმდევრობა ეწოდება.

ე.ი. $(a_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობა არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ

$$\forall M\in R\,\exists n_0\in N\Rightarrow a_{n_0}>M.$$

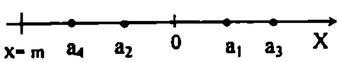


ნახ. 9.6

$(a_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობას ეწოდება ქვემოდან შემოსაზღვრული თუ არსებობს ისეთი m რიცხვი, რომ $\forall n\in N$ სრულდება უტოლობა

$$a_n\ge m.$$

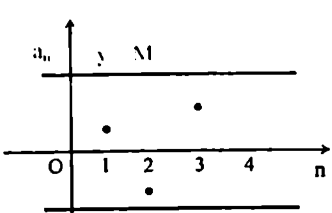
$(a_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია ნიშნავს, რომ ამ მიმდევრობის შესაბამისი წევრები სიბრტყეზე მოთავსებულია $y=m$ წრფის ზევით ან ამ წრფეზე (იხ. ნახ. 9.6), ხოლო შესაბამისი წერტილები OX ღერძზე კი – $x=m$ წერტილის მარჯვნივ ან მას ემთხვევა (იხ. ნახ. 9.7).



ნახ. 9.7

მიმდევრობას, რომელიც არ არის ქვემოდან შემოსაზღვრული, ქვემოდან შემოუსაზღვრელი მიმდევრობა ეწოდება:

$$\forall m\in R\,\exists n_0\in N\Rightarrow a_{n_0}<m.$$

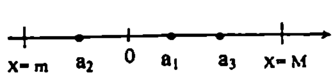


ნახ. 9.8

მიმდევრობას, რომელიც შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება.

ე.ი. $(a_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, თუ

$$\exists M\in R \text{ და } \exists m\in R\Rightarrow m\le a_n\le M,\forall n\in N.$$



ნახ. 9.9

შემოსაზღვრული მიმდევრობის შესაბამისი წერტილები სიბრტყეზე მოთავსებულია $y=m$ და $y=M$ წრფეებს შორის (იხ. ნახ. 9.8), ხოლო

შესაბამისი წერტილები OX ღერძზე – $x=m$ და $x=M$ წერტილებს შორის (იხ. ნახ. 9.9).

მაგალითად. მიმდევრობა $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ შემოსაზღვრულია, რადგან სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$-1\leq\frac{(-1)^n}{n}\leq 1, \forall n\in N.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $((-1)^n n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული არც ზემოდან და არც ქვემოდან.

$(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ზრდადი (კლებადი) ეწოდება, თუ $a_n\leq a_{n+1}$ $(a_n\geq a_{n+1})$ $\forall n\in N$.

$(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას მკაცრად ზრდადი (კლებადი) ეწოდება, თუ $a_n< a_{n+1}$ $(a_n> a_{n+1})$ $\forall n\in N$.

ზრდად და კლებად მიმდევრობებს მონოტონური, ხოლო მკაცრად ზრდად და მკაცრად კლებად მიმდევრობებს მკაცრად მონოტონური მიმდევრობები ეწოდება.

მაგალითი 1. ა) მიმდევრობა $(n)_{n\geq 1}$ არის მკაცრად ზრდადი მიმდევრობა;

ბ) 1, 1, 2, 2, 3, 3, არის ზრდადი მიმდევრობა;

გ) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ არის მკაცრად კლებადი მიმდევრობა;

დ) 3, 3, 0, 0, -3, -3... არის კლებადი მიმდევრობა;

ე) $((-1)^n n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არ არის მონოტონური მიმდევრობა.

მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი ერთი და იგივე რიცხვია, მუდმივი (სტაციონარული) მიმდევრობა ეწოდება.

მაგალითი 2. მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $a_n=7$, არის სტაციონარული მიმდევრობა.

ცხადია, რომ სტაციონარული მიმდევრობა ზრდადიც არის და კლებადიც.

მაგალითი 3. განვიხილოთ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $a_n=\frac{1}{n}$.

გამოვყოთ ამ მიმდევრობიდან ლუწნომრიანი წევრები. მივიღებთ ახალ მიმდევრობას

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6}....$$

ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $b_n=\frac{1}{2n}$.

$(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ყოველი წევრი გვხვდება $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობაშიც. ამავე დროს დაცულია წევრთა თანამიმდევრობა, რაც ნიშნავს, რომ თუ $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობაში b_k წევრი უფრო ადრე გვხვდება, ვიდრე b_m წევრი, ე.ი. $k<m$, მაშინ $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობაშიც b_k-ს შესაბამისი წევრი a_p უფრო ადრე გვხვდება, ვიდრე b_m-ის შესაბამისი წევრი a_ℓ, ანუ სამართლიანია უტოლობა $p<\ell$. მაგალითად, $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობაში ჯერ გვხვდება $b_2=\frac{1}{4}$ და შემდეგ $b_3=\frac{1}{6}$; $b_2=\frac{1}{4}$-ის შესაბამისი წევრი $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობაში არის a_4, $b_3=\frac{1}{6}$-ის კი a_6, ასე რომ, ჯერ გვხვდება $a_4=\frac{1}{4}$ წევრი და შემდეგ კი – $a_6=\frac{1}{6}$ წევრი. გვაქვს:

$(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots,$

$(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots,$

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არის $(a_n)_{n\geq 1}$ *მიმდევრობის ქვემიმდევრობა.*

ახლა მოვიყვანოთ ქვემიმდევრობის მკაცრი განმარტება.

ვთქვათ, მოცემულია მიმდევრობა $(a_n)_{n\geq 1}$. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა რაიმე მკაცრად ზრდადი მიმდევრობა $(n_k)_{k\geq 1}$

$$n_1<n_2<n_3<\ldots<n_k<\ldots.$$

$(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის წევრებისაგან შევადგინოთ ახალი მიმდევრობა იმ წევრების გამოყოფით, რომელთა ნომრებია $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k, \ldots$. ე.ი. განვიხილოთ შემდეგი მიმდევრობა

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_k}, \ldots.$$

მიღებულ $(a_{n_k})_{k\geq 1}$, მიმდევრობას ეწოდება $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა.

ამრიგად, ქვემიმდევრობაში დაცულია ელემენტთა იგივე თანამიმდევრობა, რაც საწყის მიმდევრობაში. დაუშვებელია ქვემიმდევრობაში ახალი ელემენტების დამატება ან ელემენტების გამეორება, თუკი ეს ელემენტები საწყის მიმდევრობაში არ მეორდება.

მაგალითი 4. ვთქვათ, გვაქვს მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $a_n = \frac{1}{n}$.

მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $b_n = \frac{1}{n+20}$, არის მოცემული $(a_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. ქვემიმდევრობა მიიღება საწყისი მიმდევრობიდან პირველი ოცი ელემენტის „ჩამოჭრით". კერძოდ, გვაქვს:

$(a_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობა: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22} \ldots$

$(b_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობა: $\frac{1}{21}, \frac{1}{22} \ldots$

მაგრამ თუ განვიხილავთ შემდეგ მიმდევრობებს:

$$(c_n)_{n\geq1}: 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22} \ldots.$$

$$(d_n)_{n\geq1}: 1, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{3}, \ldots.$$

ისინი არ წარმოადგენენ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობებს. $(c_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობაში გადაადგილებულია მეორე და მესამე წევრი, $(d_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობაში კი დამატებულია ახალი წევრი $d_3 = 5$.

ახლა განვმარტოთ მიმდევრობათა *ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და შეფარდება.*

ვთქვათ, მოცემულია ორი მიმდევრობა $(a_n)_{n\geq1}$ და $(b_n)_{n\geq1}$. ამ ორი მიმდევრობის

1. ჯამი ეწოდება შესაბამისი წევრების ჯამთა $(a_n+b_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობას და აღინიშნება $(a_n)_{n\geq1}+(b_n)_{n\geq1}$ სიმბოლოთი;

2. სხვაობა ეწოდება შესაბამისი წევრების სხვაობათა $(a_n-b_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობას და აღინიშნება $(a_n)_{n\geq1}-(b_n)_{n\geq1}$ სიმბოლოთი;

3. ნამრავლი ეწოდება შესაბამისი წევრების ნამრავლთა $(a_n \cdot b_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობას და აღინიშნება $(a_n)_{n\geq1} \cdot (b_n)_{n\geq1}$ სიმბოლოთი;

4. შეფარდება ეწოდება შესაბამისი წევრების შეფარდებათა $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq1}$ მიმდევრობას, თუ $(b_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობის ყოველი წევრი ნულისაგან განსხვავებულია, და აღინიშნება $\frac{(a_n)_{n\geq1}}{(b_n)_{n\geq1}}$ სიმბოლოთი.

მაგალითი 5. ვთქვათ, $(a_n)_{n\ge1}$ და $(b_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობის ზოგადი წევრებია შესაბამისად:

$$a_n=\frac{1}{n} \text{ და } b_n=\frac{1}{n^2}.$$

ამ მიმდევრობათა ჯამის

$$(c_n)_{n\ge1}=(a_n)_{n\ge1}+(b_n)_{n\ge1}$$

ზოგადი წევრი იქნება

$$c_n=a_n+b_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}.$$

ანალოგიურად, ამ მიმდევრობათა სხვაობის, ნამრავლისა და შეფარდების ზოგადი წევრებია შესაბამისად:

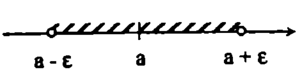
$$d_n=a_n-b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}, \qquad f_n=a_n\cdot b_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^3},$$

$$g_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=n.$$

9.2. მიმდევრობის ზღვარი

ახლა ჩვენ შევისწავლით *მიმდევრობის ზღვრის* ცნებას და მოვიყვანთ მიმდევრობის ზღვრის ზოგიერთ თვისებას. შემოვიღოთ ნამდვილი a რიცხვის ε მიდამოს განსაზღვრება.

ვთქვათ, a რაიმე ნამდვილი რიცხვია, ხოლო ε კი – რაიმე დადებითი რიცხვი. **a რიცხვის ε-მიდამო ეწოდება $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[$ ღია ინტერვალს** (ნახ. 9.10).



ნახ. 9.10

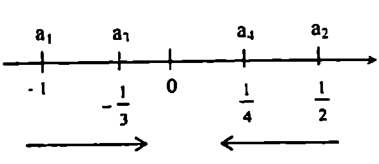
მაშასადამე, x *რიცხვი ეკუთვნის* a *რიცხვის* ε-*მიდამოს ნიშნავს, რომ სრულდება უტოლობა*

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,$$

ანუ

$$|x-a|<\varepsilon.$$

მაგალითი 6. განვიხილოთ $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\ge1}$ მიმდევრობა და შევეცადოთ გავცეთ პასუხი შემდეგ კითხვაზე: როგორია ამ მიმდევრობის „წევრთა ყოფაქცევა“, როცა ნომრები „ძალიან დიდია“?



ნახ. 9.11

მოვიშველიოთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

როგორც ნახ. 9.11-დან ჩანს, ნომრის ზრდასთან ერთად მიმდევრობის წევრები 0-თან უფრო და უფრო „ახლოს განლაგდებიან“.

განვიხილოთ 0-ის ε-მიდამო, სადაც $\varepsilon=0{,}01$. განხილული მიმდევრობის ყველა წევრი, რომელთა ნომერი აღემატება 100-ს, მოთავსდება ამ მიდამოში, რადგან სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$-0{,}01<\frac{(-1)^n}{n}<0{,}01, \text{ როცა } n>100.$$

ანუ

$$|a_n|<0{,}01, \text{ როცა } n>100.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $N_1=100$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობა ასე ჩაიწერება

$$|a_n|<0{,}01, \text{ როცა } n>N_1.$$

ახლა, ვთქვათ $\varepsilon=0{,}001$, მაშინ ამ მიმდევრობის ყველა წევრი, რომელთა ნომერი აღემატება 1000-ს, მოთავსდება 0-ის ε-მიდამოში ($\varepsilon=0{,}001$), რადგან სამართლიანია უტოლობა

$$-0{,}001<\frac{(-1)^n}{n}<0{,}001, \text{ როცა } n>1000.$$

$N_2=1000$ აღნიშვნის შემოღების შემდეგ ეს უტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

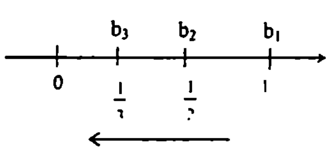
$$|a_n|<0{,}001, \text{ როცა } n>N_2.$$

როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში **დასახელებული ε-სთვის ვიპოვეთ ისეთი ნომერი $N(\varepsilon)$, რომ $N(\varepsilon)+1$ ნომრიდან დაწყებული მიმდევრობის ყველა წევრი მოთავსდა 0-ის ε-მიდამოში.**

ε-ის შეცვლა იწვევს შესაბამისი N ნომრის შეცვლას. მაშასადამე, აღნიშნული ნომერი დამოკიდებულია ε-ზე, რაზეც მიუთითებს აღნიშვნა $N(\varepsilon)$.

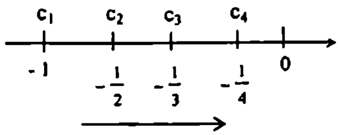
ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ „0-ის მიდამოშია თავმოყრილი“ ამ მიმდევრობის ყველა ის წევრი რომლის ნომერიც „საკმაოდ დიდია“.

მაგალითი 7. განვიხილოთ ორი მიმდევრობა, რომელთა ზოგადი წევრებია შესაბამისად: $b_n=\frac{1}{n}$ და $c_n=-\frac{1}{n}$.



ნახ. 9.12

$(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის წევრები უსასრულოდ უახლოვდებიან 0-ს მარჯვენიდან, როცა მიმდევრობის წევრთა ნომერი უსასრულოდ იზრდება (ნახ. 9.12).



ნახ. 9.13

$(c_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის წევრები უსასრულოდ უახლოვდებიან 0-ს მარცხნიდან, როცა მიმდევრობის წევრთა ნომერი უსასრულოდ იზრდება (ნახ. 9.13).

განვიხილოთ $\varepsilon=0{,}001$. ორივე მიმდევრობის ის წევრები, რომელთა ნომერი აღემატება $N=1000$-ს მოთავსებულია 0-ის ε-მიდამოში, რადგან სამართლიანია შემდეგი უტოლობები:

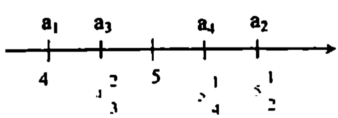
$$(b_n)_{n\geq 1}:\left|\frac{1}{n}\right|<0{,}001,\ \text{როცა}\ n>1000,$$

$$(c_n)_{n\geq 1}:\left|-\frac{1}{n}\right|<0{,}001,\ \text{როცა}\ n>1000.$$

თუ განვიხილავთ $\varepsilon=0{,}0001$, მაშინ 0-ის ε-მიდამოში მოთავსდება ამ მიმდევრობის ყველა ის წევრი, რომლის ნომერიც აღემატება $N=10000$-ს.

მაგალითი 8. განვიხილოთ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია

$$a_n=5+\frac{(-1)^n}{n}.$$



ნახ. 9.14

შესაბამისი გეომეტრიული სურათი გვკარნახობს, რომ ამ მიმდევრობის წევრები „უახლოვდებიან" 5-ს, როცა მათი ნომრები „საკმაოდ დიდია" (ნახ. 9.14).

განვიხილოთ $\varepsilon=0{,}01$, მაშინ ამ მიმდევრობის ყველა წევრი დაწყებული ასმეერთედან მოთავსებულია 5-ის ε-მიდამოში. მართლაც,

$$|a_n-5|=\left|5+\frac{(-1)^n}{n}-5\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<0{,}01,\ \text{როცა}\ n>100.$$

განხილულ მაგალითებში მოყვანილი თითოეული მიმდევრობისათვის არსებობს ისეთი რიცხვი, რომლის ნებისმიერი მცირე მიდამო შეიცავს აღნიშნული მიმდევრობის ყველა წევრს, დაწყებული გარკვეული ნომრიდან. სწორედ ეს თვისება წარმოადგენს *მიმდევრობის ზღვრის* ცნების არსს.

შემოვიღოთ მიმდევრობის ზღვრის მკაცრი განმარტება.

ვიტყვით, რომ a რიცხვი არის $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ სრულდება უტოლობა

$$|a_n-a|<\varepsilon,\ \text{როცა}\ n>N.$$

ის ფაქტი, რომ a რიცხვი არის $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი ასე აღინიშნება:

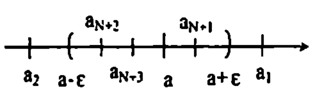
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

ან უბრალოდ

$$a_n \to a, \text{ როცა } n \to \infty.$$

(იკითხება: „ლიმეს a_n-სა უდრის a-ს, როცა n მიისწრაფეის უსასრულობისაკენ“).

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $|a_n - a| < \varepsilon$ უტოლობა ეკვივალენტურია $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ უტოლობისა. ამ ფაქტისა და მიმდევრობის ზღვრის განმარტების თანახმად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ **მიმდევრობის ზღვრის გეომეტრიული შინაარსი: $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის a რიცხვი, თუ a-ს ნებისმიერ ε მიდამოში მოთავსებულია $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ყველა წევრი დაწყებული გარკვეული N ნომრიდან.**



ნახ. 9.15

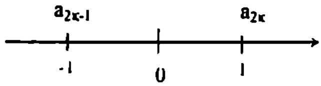
მიმდევრობის ზღვრის განმარტებაში არაფერია ნათქვამი ამ მიმდევრობის პირველი N წევრის – $a_1, a_2, \ldots, a_N$-ის შესახებ. ზოგიერთი მათგანი შეიძლება ეკუთვნოდეს a-ს ε-მიდამოს (თუ კმაყოფილდება შესაბამისი უტოლობა) და ზოგიერთი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს ამ მიდამოს (ნახ. 9.15).

მიმდევრობას ეწოდება კრებადი, თუ მას აქვს ზღვარი; მიმდევრობას ეწოდება განშლადი, თუ მას ზღვარი არა აქვს.

მაგალითი 9. ვაჩვენოთ, რომ $((-1)^n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა განშლადია.

ამ მიმდევრობის ლუწნომრიანი წევრები ტოლია 1-ის, ხოლო კენტნომრიანი წევრები კი ტოლია -1-ის (იხ. ნახ. 9.16)

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{თუ } n = 2k, \quad k \in N, \\ -1, & \text{თუ } n = 2k-1, \quad k \in N. \end{cases}$$

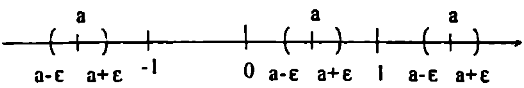


ნახ. 9.16

მიმდევრობის ყოველ ორ მეზობელ წევრს შორის მანძილი 2-ის ტოლია, ამიტომ ნებისმიერი ε-სთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $0 < \varepsilon < 2$, 1-ის მიდამოში მოთავსდება მხოლოდ ლუწნომრიანი წევრები, ხოლო -1-ის ε-მიდამოში კი – მხოლოდ კენტნომრიანი წევრები. მაშასადამე, არ არსებობს ისეთი N ნომერი, რომ

მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული N-ურიდან, მოთავსდეს 1-ის ε-მიდამოში ან -1-ის ε-მიდამოში.

ამ მიმდევრობის ზღვარი ვერ იქნება 1-სა და -1-საგან განსხვავებული რომელიმე ნამდვილი რიცხვი, რადგან ამ შემთხვევაში ყოველთვის არსებობს აღნიშნული რიცხვის ისეთი მცირე მიდამო, რომელიც არ შეიცავს არც 1-ს და არც -1-ს, ე.ი. მიდამო, რომელიც არ შეიცავს მიმდევრობის არცერთ წევრს (ნახ. 9.17)



ნახ. 9.17

$$\forall a\in R,\ a\neq 1,\ a\neq -1,\ \exists\varepsilon>0 \Rightarrow 1\notin(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \text{ და } -1\notin(a-\varepsilon; a+\varepsilon).$$

მაშასადამე, $((-1)^n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა განშლადია.

მაგალითი 10. განვიხილოთ მუდმივი მიმდევრობა. მისი ზოგადი წევრია $a_n = C$. რადგან $|a_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0$, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$. ე.ი. მუდმივი მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარი თვით ეს რიცხვია.

კრებად მიმდევრობებს გააჩნიათ მრავალი საინტერესო თვისება. ზოგიერთ მათგანს ჩვენ შემდეგ ლექციაში გავეცნობით. ახლა კი მოვიყვანოთ ორი მნიშვნელოვანი თვისება დამტკიცებითურთ.

თეორემა 1. **ყოველ კრებად მიმდევრობას აქვს ერთადერთი ზღვარი.**

დამტკიცება. ვთქვათ, $(a_n)_{n\geq 1}$ რაიმე კრებადი მიმდევრობაა. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ მას აქვს ერთადერთი ზღვარი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. $(a_n)_{n\geq 1}$ კრებად მიმდევრობას აქვს ორი განსხვავებული ზღვარი:

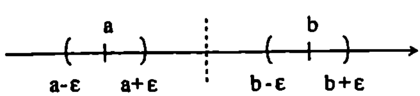
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b,$$

ამასთან, $a \neq b$. ვთქვათ, $a < b$.

ავირჩიოთ ε რიცხვი ისე, რომ $0 < \varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$, მაშინ a-სა და b-ს ε-მიდამოები არაგადამკვეთ სიმრავლეებს წარმოადგენენ (ნახ. 9.18):

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon; b+\varepsilon) = \varnothing.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ნიშნავს, რომ აღნიშნული ε-თვის მოიძებნება ისეთი ნომერი N_1, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული N_1-დან, მოთავსდება a რიცხვის ε-მიდამოში.



ნახ. 9.18

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ ნიშნავს, რომ აღნიშნული ε-თვის მოიძებნება ისეთი ნომერი N_2, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული N_2-დან მოთავსდება **b** რიცხვის ε-მიდამოში. N_1 და N_2 ნატურალურ რიცხვებს შორის უდიდესი აღვნიშნოთ N-ით:

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

მაშინ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული ამ ნომრიდან, უნდა მოთავსდეს როგორც **a** რიცხვის ε მიდამოში, ასევე **b** რიცხვის ε მიდამოშიც. ეს კი შეუძლებელია, რადგან ამ მიდამოებს საერთო წერტილი არ აქვთ. მიღებული წინააღმდეგობა შედეგია იმ დაშვებისა, რომ კრებად მიმდევრობას აქვს ერთზე მეტი ზღვარი. ამრიგად, კრებად მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი გააჩნია.

თეორემა 2. **ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.**

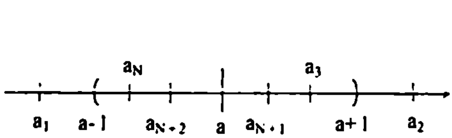
დამტკიცება. განვიხილოთ რაიმე კრებადი მიმდევრობა $(a_n)_{n\geq 1}$. ვთქვათ, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. დავუშვათ $\varepsilon = 1$ და განვიხილოთ **a** რიცხვის ε მიდამო, ე.ი. $]a-1, a+1[$ ღია შუალედი. ზღვრის განმარტების თანახმად არსებობს ისეთი ნომერი N, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი, რომლის ნომერიც აღემატება N-ს, მოთავსდება აღნიშნულ შუალედში, ე.ი. სრულდება უტოლობა

$$a-1 < a_n < a+1, \text{ როცა } n > N.$$

რაც შეეხება მიმდევრობის პირველ N წევრს – $a_1, a_2, \ldots a_N$-ს, ისინი შეიძლება აღმოჩნდნენ როგორც ამ მიდამოში, ასევე მის გარეთაც.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$M = \max\{a_1, a_2, \ldots a_N, a+1\},$$
$$m = \min\{a_1, a_2, \ldots a_N, a-1\}.$$



ნახ. 9.19

მაშინ მიმდევრობის ყველა წევრი დააკმაყოფილებს უტოლობას

$$m \leq a_n \leq M,$$

რაც ნიშნავს $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობას (ნახ. 9.19).

თეორემა 3. **a რიცხვისკენ კრებადი მიმდევრობის ნებისმიერი ქვემიმდევრობა ამავე a რიცხვისკენაა კრებადი.**

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება მიმდევრობა?
2. რას ეწოდება ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული მიმდევრობა? როგორია შესაბამისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია?
3. რას ნიშნავს, რომ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული ზემოდან, ქვემოდან? როგორია შესაბამისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია?
4. მოიყვანეთ ზრდადი, კლებადი, მკაცრად ზრდადი და მკაცრად კლებადი მიმდევრობების განმარტებანი.
5. ჩამოაყალიბეთ ქვემიმდევრობის განმარტება.
6. რას ეწოდება მიმდევრობის ზღვარი?
7. რაში მდგომარეობს მიმდევრობის ზღვრის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია?
8. რას ეწოდება კრებადი (განშლადი) მიმდევრობა?
9. შეიძლება თუ არა, რომ მიმდევრობას გააჩნდეს რამდენიმე განსხვავებული ზღვარი?
10. როგორია კრებადი მიმდევრობის კავშირი ამ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობასთან?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

9.1. იპოვეთ პირველი ექვსი წევრი მიმდევრობისა, რომელიც შემდეგი ფორმულითაა მოცემული:

ა) $x_n = 8 - n^2$;

ბ) $x_n = \frac{n+2}{n}$;

გ) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$;

დ) $x_n = \frac{6}{2^n+3}$.

9.2. მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით: $x_n = n^2+5$. იპოვეთ:

ა) x_{20};

ბ) x_{100};

გ) x_{k-1};

დ) x_{2k}.

9.3. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = 4n-1$ ფორმულით. იპოვეთ მიმდევრობის იმ წევრის ნომერი, რომელიც უდრის:

ა) 95-ს; ბ) 115-ს.

9.4. მიმდევრობა მოცემულია

$$x_n = n^2+2n+1$$

ფორმულით. არის თუ არა ამ მიმდევრობის წევრი შემდეგი რიცხვი:

ა) 289; ბ) 223.

9.5. მიმდევრობა მოცემულია

$$x_n = 3n+2$$

ფორმულით. იპოვეთ n-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც ჭეშმარიტია უტოლობა:

ა) $x_n \ge 29$; ბ) $80 \le x_n \le 180$.

9.6. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = n+\frac{1}{n}$ ფორმულით. იპოვეთ n-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც ჭეშმარიტია უტოლობა:

ა) $x_n > 2$;

ბ) $x_n > 5$;

გ) $x_n \le 6$;

დ) $3 < x_n < 20$.

9.7. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = n^2$ ფორმულით. იპოვეთ იმ წევრის ნომერი, რომლიდანაც დაწყებული მიმდევრობის წევრები მეტია:

ა) 100-ზე;

ბ) 1 000-ზე.

9.8. იპოვეთ ზოგადი წევრის ფორმულა მოცემული თითოეული მიმდევრობისათვის:

ა) 1, 3, 5, 7, 9,... ;

ბ) 2, 5, 8, 11, 14,... ;

გ) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;

დ) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$.

9.9. დაადგინეთ არის თუ არა მონოტონური მიმდევრობა, რომელიც შემდეგი ფორმულითაა მოცემული:

ა) $x_n = 10 - n$;

ბ) $x_n = |3 - n|$;

გ) $x_n = n - \frac{1}{n}$;

დ) $x_n = \frac{2n+1}{n}$;

ე) $x_n = 8 - |6-n| + 2n$.

9.10. დაამტკიცეთ, რომ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $x_n = \frac{2n}{2n+1}$, ზრდადია.

9.11. დასახელებული ε-სათვის მოძებნეთ უმცირესი ნატურალური N რიცხვი ისეთი, რომ, როცა $n>N$ შესრულდეს უტოლობა $|a_n - a| < \varepsilon$:

ა) $a_n = \frac{n+3}{n+2}$, $a = 1$, $\varepsilon = 0{,}01$;

ბ) $a_n = \frac{4n-5}{3n+6}$, $a = \frac{4}{3}$, $\varepsilon = 0{,}001$;

გ) $a_n = \frac{2n-1}{6n+1}$, $a = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = 0{,}1$.

9.12. ზღვრის განმარტების საფუძველზე დაადგინეთ ჭეშმარიტია თუ არა ტოლობები:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} = 1$;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-5}{3n+6} = \frac{4}{3}$.

9.13. განშლადია თუ არა $(a_n)_{n\ge 1}$ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია:

ა) $a_n = 1\frac{1}{2}$;

ბ) $a_n = 3(-1)^n$;

გ) $a_n = n^2$.

9.14. ვთქვათ,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{როცა } n = 2k, \quad k \in N, \\ 5 - \frac{2}{n}, & \text{როცა } n = 2k-1, k \in N. \end{cases}$$

ა) დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი $(a_n)_{n\ge 1}$ მიმდევრობა;

ბ) გამოყავით $(a_n)_{n\ge 1}$ მიმდევრობის კრებადი ქვემიმდევრობა.

ლექცია 10

მიმდევრობის ზღვრის ზოგიერთი თვისება. უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე მიმდევრობები. რიცხვითი მწკრივი

10.1. მიმდევრობის ზღვრის ზოგიერთი თვისება

წინა ლექციაში ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ მიმდევრობის კრებადობა საკმარისი პირობაა ამ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობისათვის. შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ, სწორი არ არის, ე.ი. მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა არ არის საკმარისი პირობა ამ მიმდევრობის კრებადობისათვის. მაგალითად, მიმდევრობა $((-1)^n)_{n\geq 1}$ შემოსაზღვრულია, მაგრამ კრებადი არ არის.

თუ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის პირობას დაემატება კიდევ მონოტონურობის პირობაც, მაშინ მიმდევრობა კრებადი იქნება.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ

თეორემა 1. ყოველი მონოტონური შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

მაგალითი 1. (ეილერის რიცხვი). განვიხილოთ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

მტკიცდება, რომ ეს მიმდევრობა ზრდადია და შემოსაზღვრული, ე.ი. თეორემა 3-ის თანახმად ამ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, რომელიც **e** ასოთი აღინიშნება

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

e არის ირაციონალური რიცხვი (უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი) და მას *ეილერის* (ზოგჯერ *ნეპერის*) რიცხვს უწოდებენ

$$e\approx 2,718.$$

მტკიცდება, რომ, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

დამტკიცების გარეშე ჩამოვაყალიბოთ მიმდევრობის ზღვრის კიდევ რამდენიმე თვისება.

თეორემა 2. თუ $(a_n)_{n\geq1}$ და $(b_n)_{n\geq1}$ კრებადი მიმდევრობებია, მაშინ კრებადია მოცემული მიმდევრობების ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლებებს:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^k=\left[\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right]^k$, $k\in N$. მტკიცდება აგრეთვე, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^\alpha=\left[\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right]^\alpha$, როცა $a_n>0$, $\alpha\in R$.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $(a_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n=3+\dfrac{(-1)^n}{n}$ და $(b_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $b_n=8+\dfrac{(-1)^n}{n}$. იპოვეთ:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$; გ) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$.

ამოხსნა. ზღვრის განმარტების საფუძველზე ადვილად დავადგენთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{(-1)^n}{n}\right)=3 \text{ და } \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(8+\frac{(-1)^n}{n}\right)=8.$$

თეორემა 4-ის თანახმად

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3+8=11$;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3-8=-5$;

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3\cdot8=24$.

თეორემა 3. ვთქვათ, $(a_n)_{n\geq1}$ და $(b_n)_{n\geq1}$ კრებადი მიმდევრობებია. თუ $(b_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობის თითოეული წევრი ნულისაგან განსხვავებულია, ე.ი. $b_n\neq0$, $\forall n\in N$ და $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$, მაშინ $(a_n)_{n\geq1}$ და $(b_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობის შეფარდებაც კრებადია და

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

მაგალითი 3. ვთქვათ, $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = 7 + \frac{1}{n}$ და $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $b_n = 5 - \frac{1}{n}$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{5-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)} = \frac{7}{5}.$$

10.2. უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე მიმდევრობები

შემოვიღოთ *პლუს უსასრულოდ და მინუს უსასრულოდ დიდი მიმდევრობების* განმარტებები.

ვიტყვით, რომ $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა პლუს უსასრულოდ დიდია ანუ კრებადია $+\infty$-სკენ, თუ ნებისმიერი M რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ სრულდება უტოლობა

$$a_n > M, \text{ როცა } n > N.$$

ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

მაგალითად, $a_n = n^2, b_n = \sqrt{n}$, $c_n = 2n+5$, $d_n = n$ მიმდევრობები პლუს უსასრულოდ დიდი მიმდევრობებია.

ვიტყვით, რომ $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა მინუს უსასრულოდ დიდია ანუ კრებადი $-\infty$-სკენ, თუ ნებისმიერი m რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ სრულდება უტოლობა

$$a_n < m, \text{ როცა } n > N.$$

ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

მაგალითად, $a_n = -n^2$, $b_n = -\sqrt{n}$, $c_n = 5 - 2n$, $d_n = -n$ მიმდევრობები მინუს უსასრულოდ დიდი მიმდევრობებია.

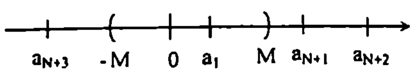
ვიტყვით, რომ $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა უსასრულოდ დიდია ან კრებადია ∞-სკენ, თუ ნებისმიერი დადებითი M რიცხვისათვის არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ სრულდება უტოლობა

$$|a_n| > M, \text{ როცა } n > N.$$

ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

მაგალითად, $a_n = (-1)^n n$, $b_n = (-1)^n n^2$, $c_n = (-1)^n \sqrt{n}$, $d_n = (-1)^n (5-2n)$, $f_n = (-1)^{n+1} n$, $g_n = (-1)^n 2^n$, $h_n = (-1)^n (4n-3)$ უსასრულოდ დიდი მიმდევრობებია.



ნახ. 10.1

რიცხვით ღერძზე უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია შემდეგში მდგომარეობს: ნებისმიერი]-M,M[ინტერვალისათვის არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული ამ ნომრიდან, აღმოჩნდება აღნიშნული შუალედის გარეთ (ნახ. 10.1).

სიბრტყეზე კი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია შემდეგში მდგომარეობს: ნებისმიერი ჰორიზონტალური ზოლისთვის, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = M$ და $y = -M$ წრფეებით, მოიძებნება ისეთი N, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული ამ ნომრიდან, აღმოჩნდება აღნიშნული ზოლის გარეთ.

სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

ა) თუ მიმდევრობა კრებადია +∞-სკენ, მაშინ იგი უსასრულოდ დიდია;

ბ) თუ მიმდევრობა კრებადია -∞-სკენ, მაშინ იგი უსასრულოდ დიდია.

ცხადია, ყოველი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა შემოუსაზღვრელია. მაგრამ არა პირიქით: მიმდევრობის შემოუსაზღვრელობა არ ნიშნავს, რომ ეს მიმდევრობა აუცილებლად კრებადია უსასრულობისაკენ.

მაგალითად. მიმდევრობა. რომლის ზოგადი წევრია

$$a_n = \begin{cases} n, \text{ თუ } n = 2k, & k \in N, \\ 1, \text{ თუ } n = 2k-1, & k \in N, \end{cases}$$

ზემოდან შემოუსაზღვრელია, მაგრამ იგი არ არის ∞-საკენ კრებადი.

ახლა განვიხილოთ *0-საკენ კრებადი მიმდევრობები.* ასეთ მიმდევრობებს განსაკუთრებულ ყურადღებას უთმობენ მათემატიკური ანალიზის საკითხების შესწავლის დროს.

მიმდევრობას უსასრულოდ მცირე ეწოდება, თუ მისი ზღვარი ნულის ტოლია.

თეორემა 2-დან გამომდინარეობს, რომ უსასრულოდ მცირეთა ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

რაც შეეხება ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის შეფარდებას, აქ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ერთ-ერთს შემდეგი ოთხი შემთხვევიდან:

1. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა შეფარდება შეიძლება უსასრულოდ მცირე იყოს.

მაგალითად, განვიხილოთ შემდეგი ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა:

$$a_n = \frac{1}{n^2},\ b_n = \frac{1}{n}, \text{ მაშინ } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \cdot$$

2. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა შეფარდება შეიძლება იყოს უსასრულოდ დიდი.

მაგალითად, წინა შემთხვევაში მოცემული მიმდევრობებისათვის განვიხილოთ $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობასთან შეფარდების ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \cdot$$

3. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა შეფარდების ზღვარი შეიძლება იყოს ნულისაგან განსხვავებული რიცხვი.

განვიხილოთ შემდეგი ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა:

$$a_n = \frac{5}{n},\ b_n = \frac{1}{n}, \text{ მაშინ } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}}{\frac{1}{n}} = 5 \cdot$$

4. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა შეფარდება შეიძლება არ იყოს კრებადი.

განვიხილოთ შემდეგი ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა:

$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$, მაშინ $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}}=(-1)^n$. ამ ბოლო მიმდევრობის ზღვარი კი არ არსებობს.

ანალოგიურ ოთხ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე ორი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის შეფარდებისთვისაც.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ **შემოსაზღვრული მიმდევრობის შეფარდება უსასრულოდ დიდ მიმდევრობასთან უსასრულოდ მცირეა.**

ახლა განვიხილოთ კრებადი მიმდევრობის ზღვრის მოძებნის რამდენიმე ხერხი.

მაგალითი 4. იპოვეთ მიმდევრობის ზღვარი, რომლის ზოგადი წევრია:

ა) $a_n=\frac{2n-1}{5n+2}$;　　ბ) $b_n=\frac{n^2+3}{4n^2+7}$;

გ) $c_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$;　　დ) $d_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$.

ამოხსნა.

ა) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{n}}{\frac{5n+2}{n}}=\lim_{n\to\infty}=\frac{2-\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}=\frac{2}{5};$$

ბ) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{4n^2+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+3}{n^2}}{\frac{4n^2+7}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}=\frac{1+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{7}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}}=\frac{1}{4};$$

გ) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=0;$$

დ) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=e.$$

10.3. ნეპერის რიცხვი და უწყვეტი პროცენტი

ამ პუნქტში ჩვენი მიზანია ვისაუბროთ მიმდევრობის ზღვრის ერთი მნიშვნელოვანი გამოყენების შესახებ ფინანსურ მათემატიკაში. კერძოდ, ეილერის (ნეპერის) რიცხვისა და *უწყვეტი დარიცხვის პროცენტის* ურთიერდამოკიდებულების შესახებ.

თანამედროვე საფინანსო პრაქტიკაში პროცენტების დარიცხვა ხდება არა წელიწადში ერთხელ, არამედ რამდენჯერმე. ვთქვათ, წელიწადში დარიცხვის რაოდენობაა m. თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია i, მაშინ დარიცხვის პერიოდის საპროცენტო განკვეთი იქნება $\frac{i}{m}$, ხოლო პერიოდების რაოდენობა სესხის გაცემიდან t წლის შემდეგ იქნება $t \cdot m$. ასეთ პირობებში რთული პროცენტის მეთოდით დაგროვილი თანხის გამოსათველი ფორმულა (იხ. ლექცია 8, ფორმულა (14)) მიიღებს სახეს:

$$F(t) = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{tm}. \qquad (1)$$

მაგალითი 5. ფირმამ ბანკში აიღო კრედიტი 250 000 ლარის ოდენობით 8%-ის ტოლი რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთით. რა თანხა უნდა დაუბრუნოს ფირმამ ბანკს ორი წლის შემდეგ, თუ სესხზე დარიცხვას ბანკი აწარმოებს კვარტალში ერთხელ? რისი ტოლი იქნებოდა დასაბრუნებელი თანხა, თუ დარიცხვა ორ თვეში ერთხელ ჩატარდებოდა?

ამოხსნა. მოცემულობის თანახმად $P=250\,000$, $i=0{,}08$, $t=2$; $m_1=4$; $m_2=6$. ვისარგებლოთ (1) ფორმულით. ყოველ კვარტალში დარიცხვის შემთხვევაში მივიღებთ:

$$F_1(2) = 250\ 000\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{2\cdot 4} = 250\ 000(1{,}02)^8 =$$

$$= 250\ 000 \cdot 1{,}1717 = 292\ 925\,(\text{ლარი}).$$

ყოველ ორ თვეში დარიცხვის შემთხვევაში კი

$$F_2(2) = 250\ 000\left(1+\frac{0{,}08}{6}\right)^{2\cdot 6} = 250\ 000(1{,}0133)^{12} =$$

$$= 250\ 000 \cdot 1{,}1718 = 292\ 950\,(\text{ლარი}).$$

მაშასადამე, $F_2(2) - F_1(2) = 292950 - 292925 = 25 > 0.$

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ რაც უფრო ხშირია დარიცხვები წელიწადში, მით უფრო იზრდება დაგროვილი თანხის სიდიდე. ამიტომ, ბუნებრივია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა დარიცხვების რაოდენობა წელიდწადში უსასრულოდ იზრდება, ე.ი. როცა $m \to \infty$. ამ დროს, ცხადია, დარიცხვის პერიოდი უსასრულოდ მცირდება. ეს კი ნიშნავს, რომ დარიცხვა ხდება *მყისიერად, დროის ყოველ მომენტში. დარიცხვის ამ მეთოდს უწყვეტი პროცენტით დარიცხვა ეწოდება.* იგი ფართოდ გამოიყენება ფინანსური ბაზრის ანალიზის დროს.

საკრედიტო ოპერაციის სათანადო მათემატიკური მოდელის მისაღებად, საკმარისია ვიპოვოთ (1) გამოსახულების ზღვარი, როცა $m \to \infty$. ამ მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\frac{i}{m} = \frac{1}{n}.$$

მაშინ, ცხადია $m = in$ და $mt = int$. მაშასადამე, (1) ფორმულა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$F(t) = P\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{int} = P\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{it}. \qquad (2)$$

ვინაიდან $n \to \infty$, როცა $m \to \infty$, ამიტომ (2) ფორმულაში ზღვარზე გადასვლა ნეპერის რიცხვის განმარტების გათვალისწინებით მოგვცემს:

$$F(t) = \lim_{n \to \infty} P\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{int} = P\left[\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{it} = Pe^{it}.$$

ამრიგად,

$$F(t) = Pe^{it}, \quad 0 \le t \le T. \qquad (3)$$

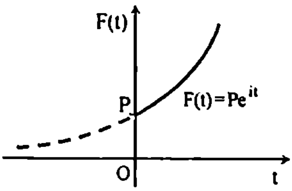
მაშასადამე, *უწყვეტი პროცენტის შემთხვევაშიც მიმდინარე თანხა დროის მაჩვენებლიანი ფუნქციაა.*

მაჩვენებლიან e^x ფუნქციას, რომლის ფუძეც ნეპერის რიცხვია, *ექსპონენციალურ ფუნქციას* უწოდებენ. მისთვის ხშირად იყენებენ ჩანაწერს $\exp(x)$, რომელიც ასე იკითხება: „ექსპონენტა იქს“. თუ ამ აღნიშვნას გამოვიყენებთ, (3) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$F(t) = P\exp(it), \quad 0 \le t \le T.$$

ამრიგად, უწყვეტი პროცენტის შემთხვევაში მიმდინარე თანხა დროის ექსპონენციალური ფუნქციაა. მისი გრაფიკი მოცემულია ნახ. 10.2-ზე.

მაგალითი 6. კრედიტი 100 000 ლარის ოდენობით აღებულია 5 წლით. 7%-იანი წლიური საპროცენტო განაკვეთით. რა თანხა იქნება დასაბრუნებელი სესხის პერიოდის ბოლოს, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება უწყვეტად?



ნახ. 10.2

ამოხსნა. მოცემულობის თანახმად $P=100\,000$, $t=5$, $i=0{,}07$. ვისარგებლოთ (3) ფორმულით:

$$F(3)=100\,000\cdot e^{0{,}07\cdot 5}=100\,000\cdot e^{0{,}35}\approx$$
$$\approx 100\,000\cdot 1{,}4191=141\,910 \text{ (ლარი)}.$$

აღსანიშნავია, რომ მიღებული სიდიდე არის ის *შესაძლო მაქსიმალური მნიშვნელობა*, სადამდეც შეიძლება გაიზარდოს 100 000 ლარი 7%-იანი განაკვეთის შემთხვევაში.

პასუხი: 141 910 ლარი.

10.4. რიცხვითი მწკრივი

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე მიმდევრობა $(a_n)_{n\geq 1}$. **რიცხვითი მწკრივი ეწოდება შემდეგ ფორმალურ გამოსახულებას**

$$a_1+a_2+a_3+\ldots a_i+\ldots, \text{ ან მოკლედ, } \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,.$$

a_i-ს ეწოდება მწკრივის i-ური წევრი, ხოლო $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას მწკრივის წევრთა მიმდევრობა.

მწკრივის წევრთა $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობისათვის შევადგინოთ *კერძო ჯამთა* მიმდევრობა:

$$S_1=\sum_{i=1}^{1} a_i=a_1,$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{2} a_i=a_1+a_2$$

$$S_3=\sum_{i=1}^{3} a_i=a_1+a_2+a_3,$$

... ...

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+...+a_n,$$

....

$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ მწკრივს კრებადი ეწოდება, თუ კრებადია მწკრივის კერძო ჯამთა $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა და ამ მიმდევრობის ზღვარს მწკრივის ჯამი ეწოდება, ე.ი. თუ $\lim_{n\to\infty}S_n=S$, მაშინ $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=S$, ხოლო, თუ მწკრივის კერძო ჯამთა $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადი არ არის, მაშინ მწკრივს განშლადი ეწოდება და მისი ჯამი არ განიმარტება.

შევისწავლოთ შემდეგი მწკრივის კრებადობის საკითხი

$$\sum_{i=1}^{\infty}q^{i-1}. \tag{4}$$

(4) მწკრივის კერძო ჯამებია:

$$S_n=1+q+q^2+...+q^{n-1},\ n=1,2....$$

ვთქვათ $q\neq 1$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}. \tag{5}$$

ცნობილია, რომ, თუ $|q|<1$, მაშინ $\lim_{n\to\infty}q^n=0$, ამიტომ (5)-დან მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-q},\ \text{როცა}\ |q|<1. \tag{6}$$

ამრიგად, (4) მწკრივი კრებადია, როცა $|q|<1$ და მისი ჯამია $S=\frac{1}{1-q}$. მტკიცდება, რომ, როცა $|q|\geq 1$, მაშინ (4) მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ მწკრივის ჯამი. (6) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

მაგალითი 8. განვიხილოთ მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია $a_n=(-1)^n$.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i=-1+1-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots.$$

შევადგინოთ კერძო ჯამთა მიმდევრობა:

$$S_1=-1,$$
$$S_2=-1+1=0,$$
$$S_3=-1+1-1=-1,$$
$$S_4=-1+1-1+1=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ე.ი. კერძო ჯამთა მიმდევრობა $-1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \ldots$ განშლადია. მაშასადამე, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^n$ მწკრივიც განშლადია.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. შეიძლება თუ არა, რომ განშლადი მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული?
2. ჩამოაყალიბეთ თეორემა კრებად მიმდევრობათა ჯამის, სხვაობის, ნამრავლის და ფარდობის შესახებ.
3. განმარტეთ ეილერის (ნეპერის) რიცხვი.
4. მოიყვანეთ უსასრულოდ დიდ და უსასრულოდ მცირე მიმდევრობათა განმარტება და გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.
5. არის თუ არა ყოველი შემოუსაზღვრელი მიმდევრობა უსასრულოდ დიდი?
6. ვთქვათ, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. აჩვენეთ, რომ $(a_n - a)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა.
7. მოიყვანეთ მიმდინარე თანხის გამოსათვლელი ფორმულა წელიწადში რამდენჯერმე დარიცხვის შემთხვევაში.
8. რას ეწოდება უწყვეტი პროცენტი და რა კავშირი აქვს მას ნეპერის რიცხვთან?
9. განმარტეთ კრებადი (განშლადი) მწკრივი.
10. გამოიკვლიეთ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{i-1}$ მწკრივის კრებადობა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები

10.1. მიმდევრობის ზღვრის თვისებებისა და ზღვრის მოძებნის ხერხების გამოყენებით გამოთვალეთ:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n+5}$;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n+3}{4n^2+5}$;

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n+7}{8n^2-1}$;

დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$;

ე) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{7n}\right)^{3n}$;

ვ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-5}{3n^2+2}$;

ზ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{3n}\right)^{n+2}$;

თ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4n}\right)^{2n}$;

ი) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n-1}\right)$;

კ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2+3}\right)$.

10.2. გამოარკვიეთ ორი უსასრულოდ მცირე $(a_n)_{n\geq 1}$ და $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის შეფარდების კრებადობის საკითხი. იპოვეთ შეფარდების ზღვარი, თუ იგი არსებობს:

ა) $a_n=\dfrac{3}{n},\ \ b_n=\dfrac{4}{n}$;

ბ) $a_n=\dfrac{8}{n^2},\ \ b_n=\dfrac{6}{n^2}$;

გ) $a_n=\dfrac{(-1)^n 3}{n},\ \ b_n=\dfrac{4}{n^2}$;

დ) $a_n=\dfrac{5}{3n^3},\ \ b_n=\dfrac{2}{n^2}$;

ე) $a_n=\dfrac{(-1)^n 5}{3n},\ \ b_n=\dfrac{3}{5n}$;

ვ) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ \ b_n=\dfrac{1}{n}$;

ზ) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ \ b_n=\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

თ) $a_n=\sqrt{n^2+8}-\sqrt{n^2-6}$,

$b_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+9}$.

10.3. ჩაწერეთ აჯამვის ინდექსის გარეშე:

ა) $\sum\limits_{k=1}^{5}(-1)^{k+1}(2k-1)^2$;

ბ) $\sum\limits_{i=0}^{4}\dfrac{(-2)^{i-1}}{2i+1}$;

გ) $\sum\limits_{j=2}^{5}\dfrac{2^j}{2j+3}$;

დ) $\sum\limits_{n=4}^{8}\dfrac{x^{n+1}}{n}$.

10.4. იპოვეთ ჯამები:

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5^n}$;

ბ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}$;

გ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3}{4^n}$;

დ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$.

10.5. ვთქვათ, ტოლგვერდა სამკუთხედები $A_nB_nC_n$, $n \in N$ ისეთია, რომ $A_1B_1 = a$ და $\frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n} = \frac{1}{3}$, $n \in N$.

იპოვეთ:

ა) ამ სამკუთხედების პერიმეტრების ჯამი;

ბ) თითოთითოდ აღებული მათი სიმაღლეების ჯამი;

გ) მათი ფართობების ჯამი.

10.6. გამოიკვლიეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty} n$;

ბ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

გ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

ლექცია 11

ფუნქციის ზღვარი წერტილში. ცალმხრივი ზღვრები

11.1. ფუნქციის ზღვარი წერტილში

ფუნქციის ზღვარი წერტილში მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნებაა. მას დიდი გამოყენება აქვს მრავალი ეკონომიკური ამოცანის მათემატიკური მოდელის შესწავლისასაც. ფუნქციის ზღვრის ცნების გაშუქებისას არსებითად დაეეყრდნობით იმ გარემოებას, რომ ჩვენთვის უკვე ცნობილია რიცხვითი მიმდევრობის ზღვრის ცნება. იმასთან დაკავშირებით, რომ ფუნქციის ზღვარს განსაზღვრის არის ე.წ. *ზღვარითი წერტილში* განვმარტავთ, შემოგვაქვს რიცხვითი სიმრავლის ზღვარითი წერტილის ცნება.

a რიცხვს ნამდვილ რიცხვთა რაიმე D სიმრავლის ზღვარით წერტილს უწოდებენ, თუ არსებობს D-ს ელემენტებისაგან შედგენილი ისეთი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა, რომლის თითოეული წევრი განსხვავებულია a-სგან $(x_n \neq a, \forall n \in N)$ და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

ამ განმარტებიდან და მიმდევრობის ზღვრის შინაარსიდან გამომდინარე, a ზღვარითი წერტილის ნებისმიერი ε-მიდამო D სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლეს შეიცავს და ამდენად, სასრულ სიმრავლეს არ შეიძლება გააჩნდეს ზღვარითი წერტილი. მეორეს მხრივ, არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ყოველ უსასრულო სიმრავლეს გააჩნია ზღვარითი წერტილი. მაგალითად, მთელ რიცხვთა სიმრავლეს არ გააჩნია ზღვარითი წერტილი. მტკიცდება, რომ თუ უსასრულო სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მას ერთი ზღვარითი წერტილი მაინც ექნება.

დავსვათ შეკითხვა: წარმოადგენს თუ არა რიცხვითი სიმრავლის ზღვარითი წერტილი ამ სიმრავლის ელემენტს? როგორც ადვილად დავრწმუნდებით, D სიმრავლის ზოგიერთი ზღვარითი წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს D სიმრავლეს, ზოგიერთი კი არა.

მოვიყვანოთ კონკრეტული მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $D =]0,1[$. ამ სიმრავლის ყოველი ელემენტი იმავდროულად ზღვარითი წერტილიცაა, მაგრამ ამ სიმრავლეს ისეთი ზღვარითი წერტილებიც გააჩნია, რომლებიც მას არ

ეკუთვნის. ეს ზღვარითი წერტილებია 0 და 1. ამრიგად, D-ს ზღვარით წერტილთა სიმრავლეს წარმოადგენს [0,1] სეგმენტი.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $D=[-1,1[\cup]1,2[$. ადვილი დასანახია, რომ D სიმრავლის ზღვარით წერტილთა სიმრავლეა [-1,2] შუალედი. ზღვარითი წერტილები 1 და 2 არ ეკუთვნის D სიმრავლეს.

მაგალითი 3. ვთქვათ, $D=]-2,-1[\cup]1,3[$. ზღვარით წერტილთა სიმრავლეა $[-2,-1]\cup[1,3]$. წერტილები -2, -1, 1 და 3 არ ეკუთვნის მოცემულ D სიმრავლეს.

მაგალითი 4. ვთქვათ, $D=\left\{\frac{n-1}{n}\mid n\in N\right\}$. რიცხვი 1 არის ამ სიმრავლის ერთადერთი ზღვარითი წერტილი, რომელიც არ ეკუთვნის D-ს.

მაგალითი 5. ვთქვათ, $D=\left\{2^{-n}\mid n\in N \text{ და } n<10^9\right\}$. D სასრული სიმრავლეა – მას არ გააჩნია ზღვარითი წერტილი.

ძნელი არ არის იმის შემჩნევა, რომ თუ **a** რიცხვი **D** სიმრავლის ზღვარითი წერტილია, მაშინ არსებობს **D**-ს ელემენტებისაგან შედგენილი არა მხოლოდ ერთი, არამედ უსასრულოდ ბევრი ისეთი $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობა, რომლის თითოეული წევრი განსხვავებულია **a**-საგან ($x_n\neq a, \forall n\in N$) და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

ასე რომ „ზღვარითი წერტილისაკენ მისწრაფება" („ზღვარით წერტილთან მიახლოვება") უსასრულოდ ბევრი ხერხით შეიძლება განხორციელდეს. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ზღვარითი წერტილისაკენ მისწრაფების (ზღვარით წერტილთან მიახლოვების) ორი ტიპი: *მისწრაფება მარცხნიდან* და *მისწრაფება მარჯვნიდან.*

თუ a-საკენ კრებადი $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა $x_n>a$, მაშინ ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის (კრებადია) a-საკენ მარჯვნიდან.

ანალოგიურად, თუ a-საკენ კრებადი $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა $x_n<a$, მაშინ ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის (კრებადია) a-საკენ მარცხნიდან.

ახლა გადავიდეთ უშუალოდ ფუნქციის ზღვრის ცნების განმარტებაზე. ვთქვათ, **a** რიცხვი $y=f(x)$ ფუნქციის D_f განსაზღვრის არისათვის ზღვარით წერტილს წარმოადგენს.

დავსვათ შეკითხვა: უახლოვდებიან თუ არა $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები რაიმე რიცხვს, როდესაც x არგუმენტის მნიშვნელობები უახლოვდებიან a ზღვარით წერტილს? ჩამოვაყალიბოთ ეს შეკითხვა უფრო დაზუსტებული სახით. რამდენადაც a რიცხვი D_f-ის ზღვარითი წერტილია, D_f-დან უსასრულოდ ბევრი ხერხით შეიძლება აირჩეს x არგუმენტის a-საგან განსხვავებულ მნიშვნელობათა a-საკენ კრებადი მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots . \tag{1}$$

თითოეულ ასეთ მიმდევრობას შეესაბამება $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა

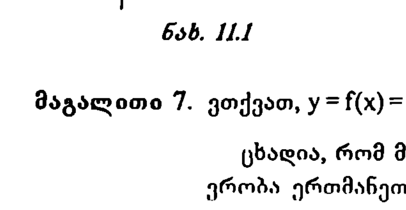
$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \tag{2}$$

მიმდევრობა, რომელშიც $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \ldots, y_n=f(x_n), \ldots$

ჩვენ გვაინტერესებს – აქვს თუ არა ყველა ასეთ მიმდევრობას ერთი და იგივე ზღვარი.*

ირკვევა, რომ დასმულ კითხვაზე პასუხი შეიძლება დადებითიც იყოს და უარყოფითიც. როგორც მოსალოდნელია, ყველაფერი დამოკიდებულია $f(x)$ ფუნქციის „ყოფაქცევაზე a წერტილის მახლობლობაში“. ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები. პირველ რიგში მოვიყვანთ ისეთ მაგალითებს, როცა დასმულ შეკითხვას დადებითი პასუხი გაეცემა.

მაგალითი 6. ვთქვათ, $y=f(x)\equiv 1$, $D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ და $a=2$ (ნახ. 11.1).



ნახ. 11.1

ნათელია, რომ როგორიც არ უნდა იყოს (1) მიმდევრობა, (2) მიმდევრობა იქნება მუდმივი (სტაციონარული):

$$1, 1, \ldots, 1, \ldots ,$$

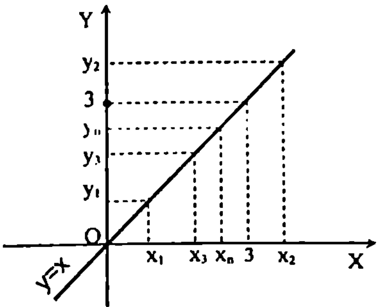
რომლის ზღვარია 1. ამრიგად, მოყვანილი მაგალითისათვის თითოეული (2) მიმდევრობა კრებადია ერთი და იგივე რიცხვისაკენ. ეს რიცხვია 1.

მაგალითი 7. ვთქვათ, $y=f(x)=x$, $D_f=]-\infty,+\infty[$ და $a=3$ (ნახ. 11.2).

ცხადია, რომ მოყვანილი მაგალითისათვის (1) და (2) მიმდევრობა ერთმანეთს ემთხვევა. თუ მაგალითად, (1) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $x_n=3+\frac{5}{n}$, $n=1,2,\ldots$, მაშინ (2) მიმდევრო-

---

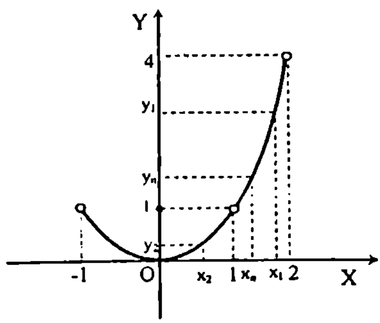
* მტკიცდება, რომ თუ თითოეული (2) სახის მიმდევრობა კრებადია, მაშინ ყველა ასეთ მიმდევრობას ერთი და იგივე ზღვარი აქვს.



ნახ. 11.2

ბაც მოცემული იქნება იმავე ფორმულით $y_n = f(x_n) = 3 + \dfrac{5}{n}$, $n=1,2,\ldots$ და საზოგადოდ, $y_n = f(x_n) = x_n$, $n=1,2,\ldots$. ამრიგად, (2) მიმდევრობებს ექნებათ ზღვარად ერთი და იგივე რიცხვი 3, მიუხედავად იმისა თუ როგორ მიისწრაფვიან (1) მიმდევრობები 3-სკენ მარცხნიდან, მარჯვენიდან თუ ნებისმიერი სხვა წესით.

მაგალითი 8. ვთქვათ, $y=f(x)=x^2$, $D_f =]-1,1[\cup]1,2[$ და $a=1$ (ნახ. 11. 3).



ნახ. 11.3

ისევე როგორც წინა მაგალითებში, იმისდა მიუხედავად თუ როგორია (1) მიმდევრობის კონკრეტული სახე, (2) მიმდევრობა კრებადია. ამასთან, მისი ზღვარია 1. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით მიმდევრობის ზღვრის თვისებების გამოყენებით:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 = 1^2 = 1.$$

ანალოგიური მდგომარეობა გვექნება $f(x)=x^k$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერი პოლინომიალური $f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_k x^k$ ფუნქციისათვისაც, სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, $C_0, C_1, \ldots, C_k$ კი ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

ყურადღების ღირსია ის გარემოება, რომ ფუნქციის მნიშვნელობათა (2) მიმდევრობაში არ გვხვდება ფუნქციის მნიშვნელობა a წერტილში. a წერტილში ფუნქცია შეიძლება განსაზღვრული არც კი იყოს (ასე იყო მეექვსე და მერვე მაგალითში).

ვფიქრობთ, ჩვენ უკვე საკმარისად მოვემზადეთ იმისათვის, რომ შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრება. **A რიცხვს ეწოდება f(x) ფუნქციის ზღვარი a წერტილში, თუ f(x) ფუნქციის განსაზღვრის არის წერტილთა a-სკენ კრებადი ნებისმიერი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობისათვის, რომლის ყოველი წევრი განსხვავებულია a-სგან, ადგილი აქვს ტოლობას**

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\,.$$

იმ ფაქტს, რომ A რიცხვი არის f(x) ფუნქციის ზღვარი a წერტილში, ასე ჩაწერენ

$$\lim_{x \to a} f(x) = A .$$

იკითხება: „ლიმეს f(x)-ისა, როცა x მიისწრაფვის a-სკენ, ტოლია A-სი".

II.2. ცალმხრივი ზღვრები

წინა პუნქტში განხილულის ანალოგიურად განიმარტება ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები წერტილში:

A რიცხვს ეწოდება f(x) ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან (მარჯვნიდან) a წერტილში, თუ f(x) ფუნქციის განსაზღვრის არის წერტილთა a-სკენ მარცხნიდან (მარჯვნიდან) კრებადი ნებისმიერი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

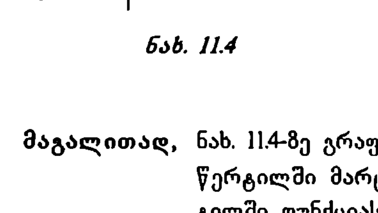
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A .$$

იმ ფაქტს, რომ A რიცხვი არის f(x) ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან a წერტილში, ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A \quad \text{ან} \quad f(a-) = A .$$

მარჯვენა ზღვრისათვის გვექნება ჩანაწერი:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \quad \text{ან} \quad f(a+) = A .$$



ნახ. 11.4

ცხადია, რომ თუ რაიმე a წერტილში არსებობს ზღვრები როგორც მარცხნიდან ასევე მარჯვნიდან, მაგრამ ისინი არ არის ერთმანეთის ტოლი, მაშინ ფუნქციას ამ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

მაგალითად, ნახ. 11.4-ზე გრაფიკულად მოცემულ ფუნქციას აქვს ზღვარი a = 3 წერტილში მარცხნიდანაც და მარჯვნიდანაც, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას არა აქვს ზღვარი, რადგან ხსენებული ცალმხრივი ზღვრები არ არის ერთმანეთის ტოლი.

მტკიცდება, რომ f(x) ფუნქციას აქვს ზღვარი a წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ წერტილში არსებობს ორივე ცალმხრივი ზღვარი და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

ამ შემთხვევაში ფუნქციის ზღვარი წერტილში ცალმხრივი ზღვრების საერთო მნიშვნელობის ტოლია.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. განმარტეთ სიმრავლის ზღვარითი წერტილი. მოიყვანეთ მაგალითები.
2. ვთქვათ, a წარმოადგენს D სიმრავლის ზღვარით წერტილს. a-სკენ კრებადი რამდენი მიმდევრობის გამოყოფა შეიძლება D სიმრავლიდან? მოიყვანეთ მაგალითები.
3. შეიძლება თუ არა, რომ სასრულ სიმრავლეს გააჩნდეს ზღვარითი წერტილი? ახსენით რატომ.
4. წარმოადგენს თუ არა რიცხვითი სიმრავლის ზღვარითი წერტილი ამ სიმრავლის ელემენტს? მოიყვანეთ მაგალითები.
5. $a \in D$ წერტილს D სიმრავლის *იზოლირებულ წერტილს* უწოდებენ, თუ იგი ამ სიმრავლისათვის ზღვარით წერტილს არ წარმოადგენს. ექნება თუ არა სასრულ სიმრავლეს, უსასრულო სიმრავლეს იზოლირებული წერტილები? მოიყვანეთ მაგალითები.
6. განმარტეთ a წერტილისაკენ მარცხნიდან (მარჯვენიდან) კრებადი მიმდევრობა.
7. იმისათვის, რომ ფუნქციას ჰქონდეს ზღვარი a წერტილში, არის თუ არა აუცილებელი, რომ იგი განსაზღვრული იყოს a წერტილში?
8. განსაზღვრეთ ფუნქციის ზღვარი წერტილში.
9. განმარტეთ ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები წერტილში.
10. რა კავშირი არსებობს ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრების არსებობასა და ფუნქციის ზღვრის არსებობას შორის?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

11.1. იპოვეთ D სიმრავლის ზღვარით წერტილთა $\bar{D}$ სიმრავლე, თუ:

ა) $D =]-1, \sqrt{2}\,[$;

ბ) $D = [5, \sqrt{26}\,[$;

გ) $D =]\sqrt{7}, \sqrt{17}\,]$;

დ) $D =]\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{7}\,]$;

ე) $D =]a, b[$;

ვ) $D = [a, b[$;

ზ) $D =]a, b]$;

თ) $D = [a, b]$;

ი) $D =]a, b[\cup]b, c[$;

კ) $D = [a, a+1[\cup]a+2, a+3[$;

ლ) $D = \left\{ \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n} \middle| n \in N \right\}$;

მ) $D = \left\{ \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \middle| n \in N \right\}$;

ნ) $D = \left\{ \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n} \middle| n \in N \right\}$;

ო) $D = N$;

პ) $D = I$.

11.2. $D = \left]\dfrac{1}{e}, e\right[$ სიმრავლიდან გამოყავით a ზღვარითი წერტილისაკენ კრებადი მიმდევრობა, თუ:

ა) $a = 2$;

ბ) $a = e$;

გ) $a = \dfrac{1}{e}$.

11.3. D=Q სიმრავლიდან გამოყავით a ზღვარითი წერტილისაკენ კრებადი მიმდევრობა, თუ:

ა) $a = e$;

ბ) $a = e^2$;

გ) $a = \dfrac{1}{e}$.

11.4. მოცემულია ფუნქცია

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{როცა } x < 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \\ 1, & \text{როცა } x > 0. \end{cases}$$

ა) ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი;

ბ) გამოთვალეთ ცალმხრივი ზღვრები: $f(0-)$ და $f(0+)$;

გ) აქვს თუ არა $\operatorname{sign} x$ ფუნქციას ზღვარი $x=0$ წერტილში?

11.5. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{როცა } x < 1, \\ 2x^2, & \text{როცა } x > 1. \end{cases}$$

დაადგინეთ აქვს თუ არა $f(x)$ ფუნქციას ზღვარი $x=1$ წერტილში.

11.6. მოცემულია ფუნქცია

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{როცა } x < 3, \\ x^3-24, & \text{როცა } x > 3. \end{cases}$$

დაადგინეთ აქვს თუ არა $\varphi(x)$ ფუნქციას ზღვარი $x=3$ წერტილში.

11.7. ვთქვათ,

$$f(x) = \begin{cases} kx+k^2, & \text{როცა } x < 0, \\ 5, & \text{როცა } x > 0. \end{cases}$$

შეარჩიეთ k პარამეტრი ისე, რომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნდეს ზღვარი

$x=0$ წერტილში. k-ს რამდენი ასეთი მნიშვნელობა არსებობს?

11.8. შეიძლება თუ არა k პარამეტრის შერჩევა ისეთნაირად, რომ

$$\varphi(x)=\begin{cases} kx^2-x+1, & \text{როცა } x<-1, \\ -kx, & \text{როცა } x>-1 \end{cases}$$

ფუნქციას გააჩნდეს ზღვარი $x=-1$ წერტილში? პასუხი დაასაბუთეთ.

11.9. შეარჩიეთ k პარამეტრი ისეთნაირად, რომ არსებობდეს ზღვარი:

ა) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-k}{x-4}$;

ბ) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x+k}{x-5}$;

გ) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{3x+k}{x-7}$;

დ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+k}{(x-1)^2}$;

ე) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-k)(x+1)}{x-2}$;

ვ) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(2x+k)(x+3)}{x+2}$;

ზ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+k}{x-2}$;

თ) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-kx+6}{x-3}$.

ლექცია 12

ფუნქციის ზღვრის თვისებები. ზღვარი უსასრულობაში. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები

12.1. ფუნქციის ზღვრის თვისებები

ფუნქციის ზღვრის განმარტებიდან და მიმდევრობის ზღვრის თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ანალოგიური თვისებები ფუნქციის ზღვრისთვისაცაა დამახასიათებელი. ჩვენ, უპირველეს ყოვლისა შევეხებით ისეთ თვისებებს, რომლებიც ხშირად გამოიყენება ფუნქციათა ზღვრების გამოთვლისას. სახელდობრ, მოვიყვანოთ დებულებებს *ფუნქციათა ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და ფარდობის ზღვრის* შესახებ.

ვთქვათ, **a** წარმოადგენს $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეთა თანაკვეთის ზღვარით წერტილს და ამ წერტილში ზღვარი აქვს როგორც $f(x)$, ასევე $g(x)$ ფუნქციას, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x) \tag{1}$$

(ფუნქციათა ჯამის ზღვარი ამ ფუნქციათა ზღვრების ჯამის ტოლია).

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x) \tag{2}$$

(ფუნქციათა ნამრავლის ზღვარი ამ ფუნქციათა ზღვრების ნამრავლის ტოლია).

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)} \quad \text{თუ} \quad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0 \tag{3}$$

(ფუნქციათა შეფარდების ზღვარი ტოლია ზღვრების შეფარდებისა, თუ მნიშვნელის ზღვარი განსხვავებულია ნულისაგან).

შევნიშნოთ, რომ მოყვანილი თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

$$\lim_{x\to a}Cf(x)=C\lim_{x\to a}f(x),\ \forall C\in R \tag{4}$$

(„მუდმივი მამრავლი გამოდის ზღვარზე გადასვლის ნიშნის გარეთ“).

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x) \tag{5}$$

(ფუნქციათა სხვაობის ზღვარი ამ ფუნქციათა ზღვრების სხვაობას უდრის)

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n,\ \forall n\in N \tag{6}$$

(ფუნქციის ხარისხის ზღვარი ფუნქციის ზღვრის ხარისხს უდრის).

სამართლიანია აგრეთვე

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\alpha}=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^{\alpha}, \tag{7}$$

სადაც, $f(x)>0,\ \alpha\in R$.

ახლა გამოვითვალოთ ზოგიერთი კონკრეტული ზღვარი აქ მოყვანილი (1) – (7) თვისებების გამოყენებით.

მაგალითი 1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+5x-9)=\lim\limits_{x\to 2}3x^2+\lim\limits_{x\to 2}5x-\lim\limits_{x\to 2}9=3\lim\limits_{x\to 2}x^2+$

$+5\lim\limits_{x\to 2}x-9=3\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2+5\cdot 2-9=3\cdot 2^2+5\cdot 2-9=13.$

აქ $x=2$ წერტილში კვადრატული ფუნქციის ზღვრის პოვნა, ამავე წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლაზე იქნა დაყვანილი. ანალოგიური მდგომარეობაა ნებისმიერი პოლინომიალური $P_n(x)=C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n$ ფუნქციის შემთხვევაშიც. მართლაც,

$$\lim_{x\to a}P_n(x)=\lim_{x\to a}\left(C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n\right)=\lim_{x\to a}C_0+$$

$$+\lim_{x\to a}C_1x+\ldots+\lim_{x\to a}C_{n-1}x^{n-1}+\lim_{x\to a}C_nx^n=C_0+C_1\lim_{x\to a}x+\ldots+$$

$$+C_{n-1}\lim_{x\to a}x^{n-1}+C_n\lim_{x\to a}x^n=$$

$$=C_0+C_1\cdot a+\ldots+C_{n-1}\left(\lim_{x\to a}x\right)^{n-1}+C_n\left(\lim_{x\to a}x\right)^n=$$

$$=C_0+C_1\cdot a+\ldots+C_{n-1}\cdot a^{n-1}+C_n\cdot a^n=P_n(a).$$

ამრიგად, $\lim\limits_{x\to a}P_n(x)=P_n(a)$.

მაგალითი 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-5x+6)}=\dfrac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=\dfrac{6}{3}=2$.

წინა მაგალითის მსგავსად, აქაც *რაციონალური ფუნქციის* (ორი პოლინომის შეფარდება) ზღვრის პოვნა ამ ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობის გამოთვლაზე იქნა დაყვანილი. ანალოგიური მდგომარეობა გვაქვს ნებისმიერი რაციონალური ფუნქციის შემთხვევაში, თუკი მნიშვნელი ნულის ტოლი არაა განსახილავ წერტილში.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$. აქ ჩვენ ვერ ვისარგებლებთ (3) ტოლობით ($x = 4$ წერტილში ნულის ტოლია როგორც მნიშვნელი, ასევე მრიცხველი), თუმცა როგორც ადვილი სანახავია, ზღვარი არსებობს

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 2)\cdot(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4}(x - 2) = 4 - 2 = 2.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2}$. ისევე როგორც წინა მაგალითში, აქაც მნიშვნელი და მრიცხველი ნულის ტოლია განსახილავ წერტილში, ანუ როგორც ამბობენ ასეთ შემთხვევებში, საქმე გვაქვს $\dfrac{0}{0}$ *სახის განუზღვრელობასთან.* საძიებელი ზღვრის პოვნას ადვილად მოვახერხებთ მნიშვნელში ირაციონალობის მოსპობით

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{(\sqrt{x + 1} - 2)(\sqrt{x + 1} + 2)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{(x + 1) - 4} = \lim_{x \to 3}(x + 3)(\sqrt{x + 1} + 2) =$$

$$= (3 + 3)(\sqrt{3 + 1} + 2) = 24.$$

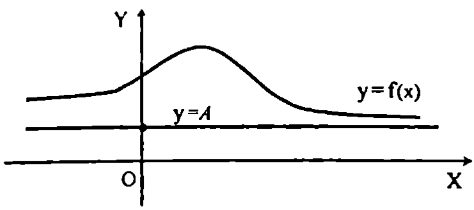
12.2. ზღვარი უსასრულობაში

წერტილში ფუნქციის ზღვრის ცნება ჩვენ მიმდევრობის ზღვრის ცნების მეშვეობით შემოვიტანეთ. ამავე ცნების საშუალებით განვმარტავთ ფუნქციის ზღვარს პლუს უსასრულობაში და მინუს უსასრულობაში.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული. ვიტყვით, **რომ A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი $+\infty$-ში, (ანუ, როცა $x \to +\infty$), თუ D_f სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობისათვის,**

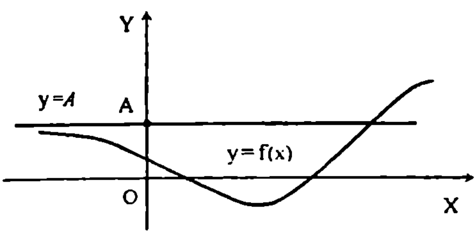
რომელიც კრებადია $+\infty$-სკენ, ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა $(f(x_n))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა A რიცხვისკენაა კრებადი. ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$



ნახ. 12.1

ნახ. 12.1-ზე, $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკსა და $y=A$ წრფეს „შორის მანძილი უსასრულოდ მცირდება, როდესაც $x \to +\infty$". ასეთ შემთხვევაში ამობენ, რომ $y=A$ წრფე არის $f(x)$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი, როცა $x \to +\infty$.



ნახ. 12.2

ანალოგიური განმარტებები გვაქვს ფუნქციისათვის, რომლის განსაზღვრის არე არაა ქვემოდან შემოსაზღვრული. სახელდობრ, ჩვენ ვიტყვით, რომ A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი $-\infty$-ში (ანუ, როცა $x \to -\infty$), თუ D_f სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია $-\infty$-სკენ, ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა $(f(x_n))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა A რიცხვისაკენაა კრებადი. ამ ფაქტის აღნიშვნაც ანალოგიურია

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $y=A$ წრფე არის $f(x)$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი, როცა $x \to -\infty$ (ნახ. 12.2).

პლუს (მინუს) უსასრულობაში ფუნქციის ზღვრისათვის სამართლიანია წერტილში ფუნქციის ზღვრისათვის ზემოთ მოყვანილი თვისებების ანალოგიური თვისებები.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{4x^2+7x-5}$. როდესაც $x\to+\infty$, მრიცხველიცა და მნიშვნელიც შემოუსაზღვრელად იზრდებიან („საქმე გვაქვს $\dfrac{\infty}{\infty}$ *სახის განუზღვრელობასთან*"). ასეთ შემთხვევაში მრიცხველს და მნიშვნელს x-ის უმაღლეს ხარისხზე (ჩვენს შემთხვევაში x^2-ზე) ვყოფთ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+3x+1}{4x^2+7x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{7+0+0}{4+0-0}=\frac{7}{4}.$$

აქ ჩვენ ვისარგებლეთ იმით, რომ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, რაც უშუალოდ პლუს უსასრულობაში ფუნქციის ზღვრის განმარტებიდანაა ნათელი.

12.3. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები

ჩვენ უკვე გვქონდა საქმე $\dfrac{0}{0}$ და $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობებთან. მათი გამოჩენა დაკავშირებული იყო იმასთან, რომ ერთ შემთხვევაში წილადის ზღვრის გამოთვლისას მრიცხველის და მნიშვნელის ზღვარი ერთდროულად ნულის ტოლი აღმოჩნდა, ხოლო მეორე შემთხვევაში მრიცხველიცა და მნიშვნელიც „იზრდებოდა შემოუსაზღვრელად". ამასთან დაკავშირებით შემოვიღებთ ზოგიერთ განმარტებას.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა a წერტილის მახლობლობაში, თუ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი კვლავ უსასრულოდ მცირე იქნება, ხოლო ფარდობა შეიძლება არ იყოს უსასრულოდ მცირე (მაგალითები 3 და 4). უფრო მეტიც, უსასრულოდ მცირეთა შეფარდების ზღვარი შეიძლება არც კი არსებობდეს.

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ ფუნქციის ზღვარი $x=0$ წერტილში.

გავითვალისწინოთ, რომ $|x|=x$, როცა $x>0$ და გამოვთვალოთ მარჯვენა ზღვარი

$$\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0+}1=1.$$

ახლა გამოვთვალოთ მარცხენა ზღვარი. იმის გათვალისწინებით, რომ $|x| = -x$, როცა $x < 0$, მივიღებთ

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1.$$

ამრიგად, არსებობს მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები, მაგრამ ისინი ერთმანეთის ტოლი არ არის. ამიტომ $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ფუნქციას $x = 0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

ახლა გადავიდეთ უსასრულოდ დიდი ფუნქციების განსაზღვრაზე.

ვიტყვით, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია არის პლუს (მინუს) უსასრულოდ დიდი a წერტილში მარჯვნიდან, თუ a-სკენ მარჯვნიდან კრებადი ნებისმიერი $(x_n)_{n \ge 1}$ მიმდევრობისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty \right).$$

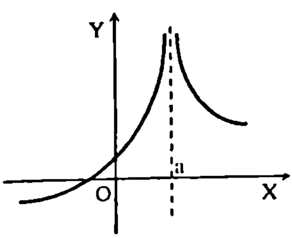
ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty \left(\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty \right).$$

სრულიად ანალოგიური აზრი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty \left(\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty \right).$$

რაც მიუთითებს იმაზე, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია არის *პლუს (მინუს) უსასრულოდ დიდი* a წერტილში მარცხნიდან.



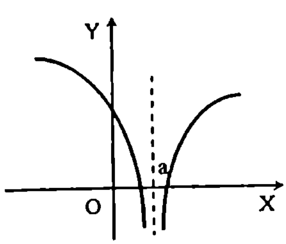
a წერტილში პლუს უსასრულოდ დიდი ფუნქციის გრაფიკი

ნახ. 12.3

სათანადო ილუსტრაციები მოყვანილია ნახ. 12.3 და ნახ. 12.4-ზე.

თუ $f(x)$ ფუნქცია არის პლუს (მინუს) უსასრულოდ დიდი a წერტილში მარცხნიდანაც და მარჯვნიდანაც, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია პლუს (მინუს) უსასრულოდ დიდია a წერტილში და დავწერთ

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \left(\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \right).$$



a წერტილში მინუს უსასრულოდ დიდი ფუნქციის გრაფიკი

ნახ. 12.4

თუკი ფუნქცია არის პლუს (მინუს) უსასრულოდ დიდი a წერტილში რომელიმე ერთი მხრიდან მაინც (მარცხნიდან ან მარჯვნიდან), მაშინ ვიტყვით, რომ $x = a$ წრფე წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ვერტიკალურ ასიმპტოტს.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. ჩამოაყალიბეთ ფუნქციის ზღვრის თვისებები. რაზეა დამყარებული ფუნქციის ზღვრის თვისებების გამომხატველ თანაფარდობათა ჭეშმარიტება?
2. როგორ გამოითვლება ნებისმიერი პოლინომიალური ფუნქციის ზღვარი წერტილში? რაციონალური ფუნქციის ზღვარი?
3. რას ეწოდება უსასრულოდ მცირე ფუნქცია a წერტილის მახლობლობაში?
4. ვთქვათ, f(x) და g(x) უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია a წერტილის მახლობლობაში. რა შემთხვევები შეიძლება შეგვხვდეს $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ზღვრის გამოთვლისას? მოიყვანეთ სათანადო მაგალითები.
5. როდის ამბობენ, რომ A რიცხვი არის f(x) ფუნქციის ზღვარი $+\infty$-ში? $-\infty$-ში?
6. D_f სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვემოდან. შეიძლება თუ არა, რომ f(x) ფუნქციას გააჩნდეს ზღვარი $-\infty$-ში?
7. როდის ამბობენ, რომ ფუნქციას გააჩნია ჰორიზონტალური ასიმპტოტი, როცა $x \to -\infty$? როცა $x \to +\infty$?
8. განმარტეთ წერტილში მარცხნიდან (მარჯვენიდან) პლუს (მინუს) უსასრულოდ დიდი ფუნქცია.
9. განმარტეთ წერტილში პლუს (მინუს) უსასრულოდ დიდი ფუნქცია.
10. რა არის ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

12.1. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$;

ბ) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

გ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$;

დ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

ე) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5}$;

ვ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$;

ზ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$;

თ) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$;

ი) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

12.2. იპოვეთ $f(x)=\dfrac{6}{x-3}$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან და მარჯვნიდან $x=3$ წერტილში.

12.3. გააჩნია თუ არა $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ ფუნქციას ვერტიკალური ასიმპტოტი? პასუხი დაასაბუთეთ.

12.4. იპოვეთ $f(x)=\dfrac{5}{(x-3)^2}$ ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები $x=3$ წერტილში.

12.5. აქვს თუ არა ჰორიზონტალური ასიმპტოტები ფუნქციებს:

ა) $f(x)=\dfrac{6x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

12.6. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x<0,\\ 1, & \text{როცა } x\ge 0.\end{cases}$$

ექნება თუ არა ასეთ ფუნქციას ვერტიკალური ასიმპტოტი? დახაზეთ შესაბამისი ნახაზი.

12.7. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2-7x+3}{10x^2+2x-1}$;

ბ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3-x^2+2x-1}{-20x^3+x+3}$;

გ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^5-1}{2x^5+x^4-x^3+7}$.

12.8. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$;

ბ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+10x+1}-\sqrt{x^2+5x+1}}{x}$;

გ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$;

დ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

ე) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-\sqrt[3]{1+x}}$;

ვ) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

ზ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

თ) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{18+x^2}-3\sqrt{-2x-3}}{x+3}$;

ი) $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

12.9. იპოვეთ $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{x}}$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტები.

12.10. დაადგინეთ, გააჩნია თუ არა $f(x)=\dfrac{x-7}{|x-7|}$ ფუნქციას ზღვარი $x=7$ წერტილში.

C. კითხვები და ამოცანები გამეორებისათვის (ლექციები 9-12)

C.1. ვთქვათ, $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის წევრთა სიმრავლეა A, ხოლო $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის წევრთა სიმრავლეა. B. ამასთან $a_n=2n-1$ და $b_n=4n-1$. დაადგინეთ, რომელია ჭეშმარიტი შემდეგი წინადადებებიდან:

ა) $A\cup B=A$;

ბ) $A\cup B=B$;

გ) $A\cap B=A$;

დ) $A\cap B=B$;

ე) $A\subset B$;

ვ) $A\supset B$;

ზ) $A=B$;

თ) $A\cap B=\varnothing$;

ი) $A\setminus B=\varnothing$;

კ) $B\setminus A=\varnothing$.

C.2. ვთქვათ, $a_n=(-1)^n$ და $b_n=(-1)^{n+1}$. იპოვეთ $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$, $(a_n-b_n)_{n\geq 1}$, $(a_nb_n)_{n\geq 1}$ და $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ მიმდევრობების ზოგადი წევრები.

C.3. დაადგინეთ, არის თუ არა მკაცრად მონოტონური მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია:

ა) $a_n=13-2n$;

ბ) $a_n=\dfrac{3n+4}{2}$;

გ) $a_n=|9-2n|$;

დ) $a_n=n+\dfrac{5}{n}$;

ე) $a_n=n^2-6n+14$;

ვ) $a_n=(-1)^n\left(n-\dfrac{1}{n}\right)$;

ზ) $a_n=19-2n^2$.

C.4. $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის პირველი და მეორე წევრი 1-ის ტოლია, ხოლო მესამედან დაწყებული მიმდევრობის ყოველი წევრი მისი წინა ორი წევრის ჯამის ტოლია (*ფიბონაჩის მიმდევრობა*). ამოწერეთ ამ მიმდევრობის პირველი ათი წევრი.

C.5. ამოწერეთ $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის პირველი ოთხი წევრი, თუ

$$\varphi_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right).$$

C.6. დაადგინეთ, მოცემული მიმდევრობებიდან რომელია შემოსაზღვრული და რომელი არა:

ა) $a_n=-n^2+8n+5$;

ბ) $a_n=2n^2-10n+7$;

გ) $a_n=\sqrt[3]{1-n^3}+n$;

დ) $a_n=\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$;

ე) $a_n=\dfrac{n\sin n}{2n^2-1}$;

ვ) $a_n=\dfrac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

C.7. მოიყვანეთ ისეთი განშლადი $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის მაგალითი, რომლისთვისაც კრებადია მისი

წევრების აბსოლუტური სიდიდეების $(|a_n|)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა.

C.8. იპოვეთ $(a_n)_{n\geq 1}$ და $(b_n)_{n\geq 1}$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობების შეფარდების ზღვარი.

ა) $a_n = 1-\dfrac{n}{n+1}$, $b_n = \dfrac{n}{n+1}-1$;

ბ) $a_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{2}}{n^2}$, $b_n = \dfrac{2}{n+1}$;

გ) $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2-2n+6}$,

$b_n = \dfrac{3n-4}{2n^2+5}$;

დ) $a_n = \sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+3}$,

$b_n = \sqrt{2n^2-3}-\sqrt{2n^2+1}$.

C.9. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!+(n+2)!}{(n+5)!}$;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+3)!+(n+1)!}$;

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+5^{n+1}}{4^n+5^n}$;

დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n}$;

ე) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$;

ვ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$.

C.10. დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი მწკრივი:

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{\sqrt[3]{n}}$.

C.11. იპოვეთ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ და $g(x)=\log_2(x^2-5x+6)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეთა თანაკვეთის ზღვარით წერტილთა სიმრავლე.

C.12. გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;

ბ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{x^3-x^2-x+1}$;

გ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

დ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{x^4-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

ე) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;

ვ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{4x+1}-\dfrac{2x^3}{8x^2-1}\right)$;

ზ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$;

თ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

C.13. იპოვეთ ცალმხრივი ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x-2}{|x-2|}$;

ბ) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x-2}{|x-2|}$;

გ) $\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{x^2-7x+12}{|x-3|}$;

დ) $\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{x^2-7x+12}{|x-3|}-1$;

ე) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin 3x}{|x|}$;

ვ) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin 3x}{|x|}$.

C.14. დაადგინეთ, გააჩნია თუ არა $f(x)=x\cdot \mathrm{sign}x$ ფუნქციის ზღვარი $x=0$ წერტილში, სადაც

$$\mathrm{sign}x=\begin{cases}-1, & \text{როცა } x<0,\\ 0, & \text{როცა } x=0,\\ 1, & \text{როცა } x>0.\end{cases}$$

C.15. R-რადიუსიან წრეში ჩახაზულია კვადრატი, ამ კვადრატში წრე, რომელშიც კვლავ ჩახაზულია კვადრატი და ა.შ. იპოვეთ მიღებული კვადრატების ფართობთა ჯამი.

C.16. ვთქვათ, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ და $a\neq b$. შესაძლებელია თუ არა, რომ მიმდევრობა $(a_n)_{n\geq 1}+(b_n)_{n\geq 1}$ იყოს შემოუსაზღვრელი? პასუხი დაასაბუთეთ.

C.17. შეიძლება თუ არა, რომ ორი $g(x)$ და $h(x)$ ფუნქციის ჯამს (სხვაობას, ნამრავლს, ფარდობას) გააჩნდეს ზღვარი $x=a$ წერტილში, თუ ამ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია $g(x)$ და $h(x)$ ფუნქციებს? მოიყვანეთ მაგალითები.

C.18. აჩვენეთ, რომ ფუნქციას

$$h(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=0\end{cases}$$

არა აქვს ზღვარი $x=0$ წერტილში.

ლექცია 13

ფუნქციის უწყვეტობა. წყვეტის წერტილები

13.1. ფუნქციის უწყვეტობა

ფუნქციის ზღვრის ცნებასთან მჭიდროდაა დაკავშირებული მათემატიკური ანალიზის მეორე მნიშვნელოვანი ცნება – *ფუნქციის უწყვეტობა*. ამ ლექციაში სწორედ ფუნქციის უწყვეტობის ცნებას გავაშუქებთ.

როგორც ჩვენ უკვე დავრწმუნდით, ნებისმიერი პოლინომიალური $P_n(x)$ ფუნქციისათვის, რაიმე a წერტილში ზღვრის მოძებნის საკითხი ამავე a წერტილში პოლინომის მნიშვნელობის გამოთვლის პროცედურაზე დაიყვანება

$$\lim_{x \to a} P_n(x) = P_n(a). \tag{1}$$

ანალოგიურ გარემოებას მრავალი სხვა სახის ფუნქციისათვისაც აქვს ადგილი. თუმცა არსებობს ისეთი ფუნქციებიც, რომელთათვისაც (1)-ის ანალოგიური ტოლობა არ არის სამართლიანი.

განსაზღვრება. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი განსაზღვრის არის $x = a$ ზღვარით წერტილში, თუ მას გააჩნია ზღვარი ამ წერტილში და ეს ზღვარი ამავე a წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{2}$$

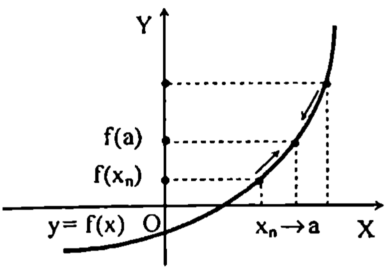
თუ $f(x)$ ფუნქცია არ არის უწყვეტი $x = a$ ზღვარით წერტილში (ე.ი. არ სრულდება (2) ტოლობა), მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია $x = a$ წერტილში.

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე D სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია უწყვეტია D სიმრავლეზე.

ფუნქციის უწყვეტობის ანალოგიურად განიმარტება ფუნქციის *ცალმხრივი უწყვეტობა*.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან (მარჯვნიდან) $x = a$ ზღვარით წერტილში, თუ მას გააჩნია მარც-

ხენა (მარჯვენა) ზღვარი ამ წერტილში და ეს ზღვარი ამავე a წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია: $f(a-)=f(a)$ $(f(a+)=f(a))$.



ნახ. 13.1

ძნელი საჩვენებელი არა, რომ რაიმე ინტერვალზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=a$ წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$f(a-)=f(a+)=f(a). \tag{3}$$

ახლა მოვახდინოთ უწყვეტი ფუნქციების გეომეტრიული (გრაფიკული) ილუსტრაცია.

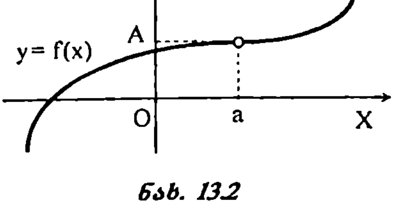
ნახ. 13.1-ზე ფუნქციის გრაფიკს „უწყვეტი წირის“ სახე აქვს. $x=a$ წერტილში დაცულია (2) პირობა, ანუ შესრულებულია (3) ტოლობები.

უწყვეტ ფუნქციათა კლასს მიეკუთვნებიან ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები – *ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული, ტრიგონომეტრიული და შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.*

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი ორი უწყვეტი ფუნქციის კომპოზიცია კვლავ უწყვეტი ფუნქციაა.

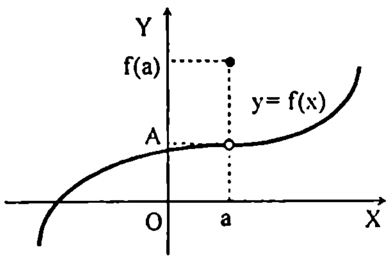
13.2. წყვეტის წერტილები

ახლა ვნახოთ, თუ რა მდგომარეობაა წყვეტის წერტილებში. ცხადია, ასეთ წერტილებში დარღვეულია (3) თანაფარდობა (წინააღმდეგ შემთხვევაში ფუნქცია უწყვეტი იქნებოდა). (3) ტოლობების დარღვევა სხვადასხვანაირადაა შესაძლებელი და ჩვენც სწორედ ზოგიერთი ასეთი შემთხვევის ილუსტრირებას მოვახდენთ.



ნახ. 13.2

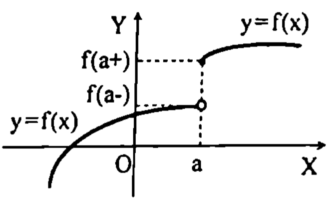
I შემთხვევა. არსებობს სასრული ზღვრები $f(a+)$ და $f(a-)$. ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია $f(a+)=f(a-)=A$, მაგრამ a წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის (ამაზე მიუთითებს „o“ ნიშანი (a,A) წერტილში) (იხ. ნახ. 13.2).



ნახ. 13.3

II შემთხვევა. არსებობს სასრული ზღვრები $f(a+)$ და $f(a-)$. ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ მათი საერთო მნიშვნელობა არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას: $f(a+) = f(a-) = A \neq f(a)$. $f(x)$-ის მნიშვნელობად a წერტილში A რომ აგვეღო, „ფუნქცია უწყვეტი გახდებოდა" (იხ. ნახ. 13.3). იგივე შედეგს მივიღებდით წინა შემთხვევაშიც, თუ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში მივანიჭებთ $f(a) = A$ მნიშვნელობას (იხ. ნახ. 13.2). როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში წყვეტის თავიდან აცილება ერთ წერტილში ფუნქციის „გადაკეთებით" მიიღწევა. ამითაა ნაკარნახევი ის გარემოება, რომ როგორც პირველ, ისე მეორე შემთხვევაში **a წერტილს ასაცილებელ წყვეტის წერტილს უწოდებენ.**

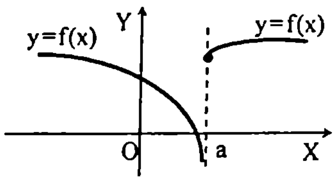
ამრიგად, a წყვეტის წერტილს ეწოდება ასაცილებელი წყვეტის წერტილი, თუ ამ წერტილში ფუნქციას გააჩნია სასრული ზღვარი.



ნახ. 13.4

III შემთხვევა. არსებობს სასრული ზღვრები $f(a+)$ და $f(a-)$, მაგრამ $f(a+) \neq f(a-)$ (იხ. ნახ. 13.4). ამ შემთხვევაში **a წერტილს ნახტომის წყვეტის წერტილი, ხოლო $f(a+) - f(a-)$ სხვაობას $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი ეწოდება a წერტილში.**

აქამდე აღწერილ თითოეულ შემთხვევაში წყვეტის წერტილში არსებობდა სასრული ცალმხრივი ზღვრები. ასეთ წყვეტის წერტილს პირველი გვარის წყვეტის წერტილს უწოდებენ. თუ a წერტილში რომელიმე სასრული ცალმხრივი ზღვარი არ არსებობს, მაშინ მას ეწოდება მეორე გვარის წყვეტის წერტილი. ჩვენ არ შევუდგებით ასეთი შემთხვევების აღწერას. მოვიყვანთ მხოლოდ ერთ შედარებით მარტივ სურათს.



ნახ. 13.5

IV შემთხვევა. $x = a$ წრფე ვერტიკალური ასიმპტოტია. არ არსებობს სასრული მარცხენა ზღვარი $f(a-)$ და ამიტომაც $x = a$ მეორე გვარის წყვეტის წერტილია (იხ. ნახ. 13.5).

ახლა მოვიყვანოთ კონკრეტულ ფუნქციათა მაგალითები თითოეული ზემოთ აღწერილი შემთხვევისათვის.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}.$$

$x=2$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის. ამ წერტილში ფუნქციას გააჩნია ორივე ცალმხრივი ზღვარი:

$$f(2+)=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(x+1)=3,$$

$$f(2-)=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}(x+1)=3.$$

როგორც ვხედავთ, მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები ერთმანეთის ტოლია. $x=2$ წერტილი $f(x)$ ფუნქციის ასაცილებელი წყვეტის წერტილია.

მაგალითი 2. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases}|x+1|, & \text{როცა } x\neq -1,\\ 5, & \text{როცა } x=-1.\end{cases}$$

$f(x)$ ფუნქციისათვის $x=-1$ წერტილი არის ასაცილებელი წყვეტის წერტილი, რადგან $f(-1+)=f(-1-)=0$, ხოლო $f(-1)=5$.

მაგალითი 3. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{როცა } x\le 0,\\ 1, & \text{როცა } x>0.\end{cases}$$

$x=0$ არის მოცემული ფუნქციის ნახტომის წყვეტის წერტილი, რადგან $f(0-)=0\neq f(0+)=1$. ამ წერტილში ფუნქციის ნახტომია $f(0+)-f(0-)=1-0=1$.

მაგალითი 4. ვთქვათ, $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$.

$f(x)$ ფუნქციისათვის $x=-3$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, რადგან ამ წერტილში არ არსებობს ცალმხრივი ზღვრები.

როგორც აღვნიშნეთ, აქ მოყვანილი ფუნქციები ზემოთ ილუსტრირებული შემთხვევების კონკრეტულ მაგალითებს წარმოადგენენ და ამდენად, სტუდენტისათვის სასარგებლო იქნება ამ ფუნქციათა გრაფიკების აგება.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. ფუნქციის განსაზღვრის არის რომელი წერტილებისათვის განიმარტება ფუნქციის უწყვეტობა?
2. განმარტეთ f(x) ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში.
3. რომელი უწყვეტი ფუნქციებია თქვენთვის ცნობილი?
4. შეიძლება თუ არა, რომ წყვეტილ ფუნქციათა ჯამი, ნამრავლი ან შეფარდება იყოს უწყვეტი? პასუხი დაასაბუთეთ.
5. განმარტეთ ფუნქციის ცალმხრივი უწყვეტობა.
6. მოიყვანეთ წერტილში ფუნქციის უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.
7. მოიყვანეთ უწყვეტ ფუნქციათა მაგალითები.
8. რა შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფუნქცია წყვეტილია რაიმე a წერტილში?
9. განმარტეთ პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.
10. როგორ წერტილს უწოდებენ ასაცილებელ წყვეტის წერტილს?
11. განმარტეთ ფუნქციის ნახტომის წყვეტის წერტილი და ფუნქციის ნახტომი ამ წერტილში.
12. რას ეწოდება მეორე გვარის წყვეტის წერტილი?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

13.1. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წყვეტის წერტილები:

ა) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{3}{(x^2+1)(x+1)}$;

გ) $f(x)=\dfrac{x+7}{3x(x^2-36)}$;

დ) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x-5}$.

13.2. დაადგინეთ, უწყვეტია თუ არა შემდეგი ფუნქციები განსაზღვრის არის ზღვარით წერტილებში:

ა) $f(x)=4x^5-7x^3+2x^2-\sqrt{2}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{x-2}$;

გ) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$;

დ) $f(x)=\sqrt[5]{x^3-2}$;

ე) $f(x)=\sqrt{x-4}$;

ვ) $f(x)=|x-3|+1$.

13.3. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგ ფუნქციებს აქვთ ასაცილებელი წყვეტის წერტილი:

ა) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}$;

გ) $f(x)=\begin{cases}|x|, & \text{როცა } x\neq 0,\\ 1, & \text{როცა } x=0;\end{cases}$

დ) $f(x)=\begin{cases}|x+5|, & \text{როცა } x\neq -5,\\ 3, & \text{როცა } x=-5.\end{cases}$

13.4. იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები და დაადგინეთ მათი გვარობა:

ა) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{2}{\sin x}$;

გ) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$;

დ) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

13.5. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{როცა } x\le 0,\\ x^2+2, & \text{როცა } x>0\end{cases}$$

ფუნქცია განიცდის ნახტომის ტიპის წყვეტას $x=0$ წერტილში.

13.6. გამოთვალეთ ფუნქციის ნახტომი წყვეტის წერტილში:

ა) $f(x)=\begin{cases}-3x^2, & \text{როცა } x\le 1,\\ 0, & \text{როცა } x>1;\end{cases}$

ბ) $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{როცა } x\le 5,\\ 2x^2, & \text{როცა } x>5.\end{cases}$

13.7. k-ს რომელი მნიშვნელობისათვის იქნება

$$f(x)=\begin{cases}kx+3, & \text{როცა } x\le 2,\\ x^2+1, & \text{როცა } x>2\end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი $x=2$ წერტილში?

13.8. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{როცა } x\neq 0,\\ -k^2+2k, & \text{როცა } x=0.\end{cases}$$

k-ს რომელი მნიშვნელობისათვის იქნება უწყვეტი f(x) ფუნქცია x=0 წერტილში?

13.9. იპოვეთ

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & \text{როცა } x\le 0,\\ 3+x^2, & \text{როცა } 0<x<2,\\ 9, & \text{როცა } x\ge 2\end{cases}$$

ფუნქციის წყვეტის წერტილები და გაარკვიეთ ცალმხრივი უწყვეტობის საკითხი ამ წერტილებში.

13.10. იპოვეთ

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{როცა } x<2,\\ -x^2+3, & \text{როცა } 2\le x\le 4,\\ -12+\sqrt{x-4}, & \text{როცა } x>4\end{cases}$$

ფუნქციის წყვეტის წერტილები.

13.11. ცნობილია, რომ f(x) ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. იპოვეთ $f(x_0)$, თუ:

ა) $x_0=1$ და $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, როცა $x\neq 1$;

ბ) $x_0=-1$ და $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, როცა $x\neq -1$;

გ) $x_0=0$ და $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, როცა $x\neq 0$.

13.12. იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები, გამოარკვიეთ რომელი გვარის წყვეტა აქვს ფუნქციას ამ წერტილებში და ააგეთ გრაფიკი:

ა) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{როცა } x\le 0,\\ x-2, & \text{როცა } x>0;\end{cases}$

ბ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=0.\end{cases}$

13.13. დაადგინეთ a და b პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი:

ა) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{როცა } x\le 2,\\ ax+b, & \text{როცა } 2<x\le 3,\\ a(x-1), & \text{როცა } x>3;\end{cases}$

ბ) $f(x)=\begin{cases}x+a, & \text{როცა } x\le 0,\\ 2x+3, & \text{როცა } 0<x\le 1,\\ ax^2+b, & \text{როცა } x>1.\end{cases}$

13.14. დაადგინეთ, არსებობს თუ არა a პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ფუნქცია უწყვეტია $x_0=0$ წერტილში, თუ:

ა) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}}, & \text{როცა } -1<x<0,\\ a, & \text{როცა } x\ge 0;\end{cases}$

ბ) $f(x)=\begin{cases}ax^2+1, & \text{როცა } x>0,\\ -x, & \text{როცა } x\le 0.\end{cases}$

13.15. დაადგინეთ, არსებობს თუ არა a და b პარამეტრების ისეთი მნიშვნელობები, რომელთათვისაც f(x) ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეზე, თუ:

ა) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა } |x|\le 1, \\ x^2+ax+b, & \text{როცა } |x|>1; \end{cases}$

ბ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{როცა } |x|\ne 1, \\ a, & \text{როცა } x=-1, \\ b, & \text{როცა } x=1. \end{cases}$

13.16. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases} 2, & \text{როცა } x<0, \\ k^2-4k+7, & \text{როცა } x=0, \\ 3, & \text{როცა } x>0. \end{cases}$$

დაადგინეთ, არსებობს თუ არა k პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც:

ა) f(x) ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან x=0 წერტილში;

ბ) f(x) ფუნქცია უწყვეტია მარჯვენიდან x=0 წერტილში.

13.17. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases} x+2k, & \text{როცა } x<0, \\ k^2, & \text{როცა } x=0, \\ kx^2, & \text{როცა } x>0. \end{cases}$$

დაადგინეთ:

ა) k პარამეტრის რომელი მნიშვნელობებისთვისაა უწყვეტი f(x) ფუნქცია მარცხნიდან x=0 წერტილში;

ბ) იქნება თუ არა უწყვეტი f(x) ფუნქცია k-ს ამ მნიშვნელობებისათვის x=0 წერტილში.

ლექცია 14

უწყვეტ ფუნქციათა თვისებები. ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

14.1. უწყვეტ ფუნქციათა თვისებები

უპირველეს ყოვლისა შევეხებით უწყვეტ ფუნქციათა ისეთ თვისებებს, რომლებიც უშუალოდ გამომდინარეობს წერტილში ფუნქციის უწყვეტობის განმარტებიდან და ფუნქციის ზღვრის ჩვენთვის ცნობილი თვისებებიდან. სახელდობრ:

ა) რაიმე წერტილში უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ წერტილში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან) აგრეთვე უწყვეტია ამ წერტილში.

მოყვანილი თვისებიდან, როგორც შედეგი გვექნება:

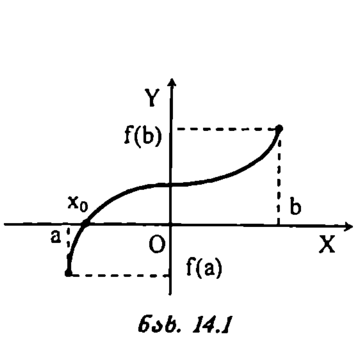
ბ) წერტილში უწყვეტ ფუნქციათა სხვაობა, მუდმივისა და უწყვეტი ფუნქციის ნამრავლი და უწყვეტი ფუნქციის ნებისმიერი ნატურალური ხარისხი კვლავ უწყვეტი ფუნქციაა იმავე წერტილში.

მტკიცდება აგრეთვე, რომ

გ) n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი რაიმე წერტილში უწყვეტი არაუარყოფითი ფუნქციიდან ისევ უწყვეტი ფუნქციაა იმავე წერტილში.

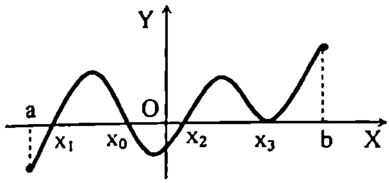
უწყვეტი ფუნქციებისათვის დამახასიათებელ ძალიან მნიშვნელოვან თვისებას გამოხატავს შემდეგი

თეორემა. **თუ $[a,b]$ შუალედზე განსაზღვრულ უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას ამ შუალედის ბოლოებზე ურთიერთსაწინააღმდეგო ნიშანი გააჩნია ($f(a)f(b)<0$), მაშინ $[a,b]$ შუალედის შიგნით არსებობს ერთი მაინც ისეთი x_0 წერტილი, რომ $f(x_0)=0$.**

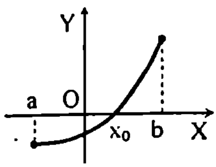


ნახ. 14.1

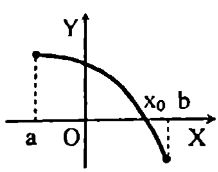
ინტუიციურად თეორემის მართებულობა ცხადია. მართლაც, თუ ფუნქციის გრაფიკი უწყვეტი მრუდია და შუალედის ბოლო წერტილებზე ფუნქციას ურთიერთსაწინააღმდეგო ნიშნები გააჩნია, მაშინ ფუნქციის გრაფიკმა ერთხელ მაინც უნდა გადაკვეთოს **OX** ღერძი (ნახ. 14.1).



ნახ. 14.2



ნახ. 14.3



ნახ. 14.4

ხაზგასასმელია ის გარემობა, რომ თეორემის პირობებში, $[a,b]$ შუალედის შიგნით შესაძლოა $f(x)=0$ განტოლების ერთზე მეტი ფესვიც არსებობდეს (ნახ. 14.2).

ისეთი $[a,b]$ სეგმენტის მოძებნას, რომლის შიგნით არ არსებობს $f(x)=0$ განტოლების სხვა ფესვი, გარდა x_0-სა, უწოდებენ x_0 ფესვის განცალებას.

ნახ. 14.1-ზე x_0 ფესვი განცალებულია, ხოლო ნახ. 14.2-ზე კი არა.

ზოგჯერ ჩვენთვის დამატებით ცნობილია, რომ $f(x)$ ფუნქცია მკაცრად მონოტონურია $[a,b]$ სეგმენტზე. ასეთ შემთხვევაში x_0 ფესვი განცალებულია, რაც ნათლად ჩანს შემდეგი გეომეტრიული სურათებიდან (ნახ. 14.3 და ნახ. 14.4).

14.2. განტოლებათა ამოხსნა მიახლოებით

მოყვანილი თეორემა საშუალებას გვაძლევს მიახლოებით გამოვთვალოთ $f(x)=0$ განტოლების განცალებული ფესვი.

მაგალითად, განვიხილოთ განტოლება

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0. \qquad (1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$. ჩვენთვის ცნობილია, რომ $f(x)$ მრავალწევრი არის უწყვეტი ფუნქცია $]-\infty,+\infty[$ შუალედზე. გვაქვს:

$$f(1) = 1^4 + 1^3 - 1^2 - 2\cdot 1 - 2 = -3,$$

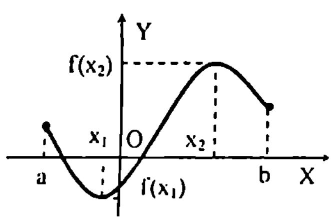
$$f(2) = 2^4 + 2^3 - 2^2 - 2\cdot 2 - 2 = 14.$$

$f(x)$ ფუნქციას სხვადასხვა ნიშანი აქვს $[1,2]$ სეგმენტის ბოლოებზე და ამდენად, ამ სეგმენტის შიგნით (1) განტოლების ერთი ფესვი მაინც არის მოთავსებული. ძნელი შესამოწმებელი არაა, რომ $f(x)$ ფუნქცია მკაცრად ზრდადია $[1,2]$ სეგმენტზე (იხ. მითითება 14.7 ამოცანაზე) და ამდენად, $[1,2]$ შუალედში მოთავსებული ფესვი განცალებულია.

დავყოთ ახლა [1,2] შუალედი 10 ტოლ ნაწილად და გამოვთვალოთ f(x) მრავალწევრის მნიშვნელობები $x=1,1$; $1,2$;...; $1,9$ წერტილებში. გვაქვს: რომ $f(1,4)<0$, ხოლო $f(1,5)>0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფესვი მოთავსებულია $x=1,4$ და $x=1,5$ წერტილებს შორის. [1,4, 1,5] შუალედი კვლავ გავყოთ 10 ტოლ ნაწილად. მივიღებთ შემდეგ წერტილებს: $x=1,41$; $1,42$;...;$1,49$. თუ ჩავატარებთ გამოთვლებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $f(1,41)<0$, ხოლო $f(1,42)>0$. მაშასადამე, (1) განტოლების ფესვი მოთავსებულია]1,41, 1,42[შუალედში. ამ შუალედში მოთავსებული ნებისმიერი რიცხვი წარმოადგენს (1) განტოლების ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობას 0.01-ის სიზუსტით. თუ გავაგრძელებთ ამ მოქმედებებს, შეგვიძლია (1) განტოლების ფესვი გამოვთვალოთ ნებისმიერი სიზუსტით.

მკაცრი დასაბუთების გარეშე მოვიყვანოთ უწყვეტ ფუნქციათა კიდევ ერთ საინტერესო თვისება.

თუ f(x) ფუნქცია უწყვეტია [a,b] შუალედზე, მაშინ ამ შუალედში არსებობს ერთი მაინც ისეთი წერტილი, რომ ამ წერტილში ფუნქცია ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას და ერთი მაინც ისეთი წერტილი, რომელშიც ფუნქცია ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას. ამასთან, f(x) ფუნქცია მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც ამ უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობათა შორისაა მოთავსებული.

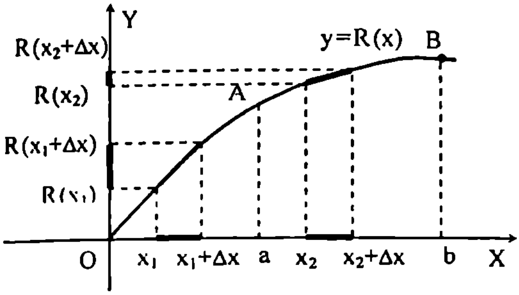


ნახ. 14.5

ნახ. 14.5-ზე მითითებულია ისეთი x_1 და x_2 წერტილები, რომ ყოველი x წერტილისათვის [a,b] შუალედიდან ადგილი აქვს დამოკიდებულებას $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.

14.3. წარმოებულის ცნება

შევნიშნოთ, რომ უწყვეტი ფუნქციის ზემოთ მოყვანილი უკანასკნელი თვისების ჩამოყალიბებისას საუბარია x_1 და x_2 წერტილის მხოლოდ არსებობაზე, ხოლო მათი მოძებნის გზა მითითებული არ არის. მრავალი ეკონომიკური ხასიათის ამოცანაში კი სწორედ ასეთი წერტილების მოძებნა გვჭირდება. ხშირად ესეც არაა საკმარისი და გვიხდება იმის გაგება თუ განსაზღვრის არის რომელ უბნებზე აქვს ფუნქციას ზრდის ან კლების ტენდენცია, რამდენად ძლიერია ეს ტენდენცია და ა.შ.



ნახ. 14.6

მოკლედ რომ ვთქვათ, გვიხდება ფუნქციის ყოფაქცევის სრული გამოკვლევა, რაშიც დიდ სამსახურს გვიწევს *ფუნქციის წარმოებულის* ცნება. ვიდრე უშუალოდ წარმოებულის განმარტებაზე გადავიდოდეთ, განვიხილოთ შემდეგი ეკონომიკური სიტუაცია.

ვთქვათ, შემოსავლის $y=R(x)$ ფუნქციის გრაფიკია წირი, რომელიც გამოსახულია ნახ. 14.6-ზე.

ნახაზიდან აშკარად ჩანს, რომ $R(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[0,b]$ შუალედზე. ამასთან, იგი უფრო სწრაფად იზრდება $[0,a]$ შუალედზე (OA წირი), ვიდრე $[a,b]$ შუალედზე (AB წირი). ამ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი ეკონომიკური შინაარსი. თუ შევადარებთ ერთმანეთს შემოსავლის ზრდას გაყიდული საქონლის ერთი და იმავე Δx რაოდენობით ზრდისას x_1 რაოდენობიდან $(x_1+\Delta x)$-მდე და x_2-დან $(x_2+\Delta x)$-მდე, დავრწმუნდებით, რომ პირველ შემთხვევაში *შემოსავლის ცვლილება (ნამატი)* საქონლის ერთეულზე გაანგარიშებით არის

$$\frac{R(x_1+\Delta x)-R(x_1)}{\Delta x},$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$\frac{R(x_2+\Delta x)-R(x_2)}{\Delta x}.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$R(x_1+\Delta x)-R(x_1)>R(x_2+\Delta x)-R(x_2),$$

ამიტომ

$$\frac{R(x_1+\Delta x)-R(x_1)}{\Delta x}>\frac{R(x_2+\Delta x)-R(x_2)}{\Delta x}.$$

აქედან კი გამომდინარეობს შემდეგი: გაყიდული პროდუქციის Δx რაოდენობით გაზრდისას შემოსავლის საშუალო ცვლილება (ნამატი) პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით უფრო მეტია $[0,a]$ შუალედის x_1 წერტილისათვის, ვიდრე $[a,b]$ შუალედის x_2 წერტილისათვის.

ამრიგად, ფუნქციის ნაზრდის შეფარდება არგუმენტის ნაზრდთან

$$\frac{R(x+\Delta x)-R(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

აღწერს *შემოსავლის „ცვლილების სიჩქარეს“* პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით, როდესაც გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა იზრდება x-დან $(x+\Delta x)$-მდე. გავიხსენოთ, რომ *შემოსავლის წრფივი მოდელის შემთხვევაში (2) შეფარდება მუდმივია*

$$\frac{R(x+\Delta x)-R(x)}{\Delta x}=\frac{p(x+\Delta x)-px}{\Delta x}=\frac{p\Delta x}{\Delta x}=p\,.$$

ამდენად, წრფივი მოდელის შემთხვევაში შემოსავლის „ცვლილების სიჩქარის“ გამოთვლისას არა აქვს მნიშვნელობა Δx ნაზრდის სიდიდის შერჩევას. ზოგად შემთხვევაში კი, როგორც ეს ნახ. 14.6-დანაც ჩანს, რაც უფრო მცირეა Δx ნაზრდი, მით უფრო ემსგავსება ამ ნაზრდის სათანადო გრაფიკის ნაწილი წრფის მონაკვეთს და მაშ, უფრო ზუსტად ახასიათებს $R(x)$ ფუნქციის „ცვლილების სიჩქარეს“ x-ის მახლობლობაში. იდეალურად ზუსტი მახასიათებელი კი იქნება (2) გამოსახულების ზღვარი, როდესაც $\Delta x \to 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მას *მარჟინალური ანუ ზღვრული შემოსავალი* ეწოდება და (MR) სიმბოლოთი აღინიშნება

$$(MR)(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{R(x+\Delta x)-R(x)}{\Delta x}\,. \tag{3}$$

სწორედ აღნიშნული ტიპის ზღვრებს მივყავართ *წარმოებულის* ცნებამდე. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (2)-ის ანალოგიური შეფარდება შეიძლება რაიმე შუალედზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქციისთვისაც შევადგინოთ და ამის შემდეგ დავსვათ საკითხი ამ შეფარდების ზღვრის არსებობის შესახებ, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის 0-სკენ.

ვთქვათ, $y=f(x)$ რაიმე შუალედზე განსაზღვრული ფუნქციაა და x ამ შუალედიდან აღებული რაიმე წერტილია. განვიხილოთ არგუმენტის Δx ნაზრდი, როგორც დამოუკიდებელი ცვლადი და შევადგინოთ შესაბამისი ნაზრდი ფუნქციისათვის

$$\Delta y=\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)\,.$$

ცხადია, იგი Δx ნაზრდის ფუნქციას წარმოადგენს. Δx ნაზრდის ფუნქცია იქნება აგრეთვე შეფარდება

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

და ამდენად, შესაძლოა განვიხილოთ ამ შეფარდების ზღვარი $\Delta x=0$ წერტილში. თუკი ეს ზღვარი არსებობს, მას $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულს უწოდებენ x წერტილში.

ამრიგად, ფუნქციის წარმოებული x წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

ფუნქციის წარმოებულის აღსანიშნავად მიღებულია შემდეგი სიმბოლოები: $f'(x)$, y'. ასე, რომ

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{5}$$

(4) შეფარდებას $[x, x+\Delta x]$ შუალედზე $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს უწოდებენ.

გამოსახულებას $f'(x)\Delta x$ ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი. მას dy სიმბოლოთი აღნიშნავენ (იკითხება „დე იგრეკ“).

ამრიგად,

$$dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx.$$

განმარტების თანახმად,

$$dx=x'\,\Delta x=\Delta x,$$

საიდანაც გვექნება $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ (იკითხება „დე იგრეკ დე იქსით“.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $y=f(x)=x^2$ ფუნქციის წარმოებული $x=3$ წერტილში.

ვიპოვოთ $f(x)=x^2$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე $[3, 3+\Delta x]$ შუალედზე:

$$\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\frac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x\,(6+\Delta x)}{\Delta x}=6+\Delta x.$$

ცხადია,

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6.$$

მაგალითი 2. ადვილი შესამჩნევია, რომ ზუსტად ასევე გამოითვლება $y = f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ x წერტილში. მართლაც, ვიპოვოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე $[x, x + \Delta x]$ შუალედზე:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x .$$

ცხადია,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x .$$

დიფერენციალისთვის გვექნება $dy = df(x) = f'(x)dx = 2x\,dx$..

ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას გაწარმოება ეწოდება. თუ (5) ტოლობაში Δx მარჯვნიდან მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ შესაბამის ზღვარს ეწოდება f ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული x წერტილში და აღინიშნება $f'_+(x)$ სიმბოლოთი. ე.ი. განსაზღვრებით

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

ანალოგიურად, (5) ზღვარს როცა Δx მარცხნიდან მიისწრაფვის ნულისაკენ, ეწოდება f ფუნქციის მარცხენა წარმოებული x წერტილში და აღინიშნება $f'_-(x)$ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

$f'_+(x)$-ს და $f'_-(x)$-ს ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები ეწოდება x წერტილში.

ფუნქციას წარმოებადი ეწოდება $]a,b[$ ინტერვალზე, თუ ის წარმოებადია ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში, ხოლო ფუნქციას წარმოებადი ეწოდება $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ ის წარმოებადია $]a,b[$ ინტერვალზე და a წერტილში წარმოებადია მარჯვნიდან, b-ში კი მარცხნიდან.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $x \in]a,b[$ წერტილში ფუნქცია წარმოებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მას გააჩნია ერთმანეთის ტოლი ცალმხრივი წარმოებულები.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. ჩამოაყალიბეთ უწყვეტ ფუნქციათა თვისებები.
2. რას უწოდებენ ფესვის განცალებას?
3. დაახასიათეთ კონკრეტული სიტუაცია, როდესაც ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $f(x)=0$ განტოლების x_0 ფესვი განცალებულია.
4. აღწერეთ განცალებული ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოძებნის ალგორითმი.
5. შეიძლება თუ არა არგუმენტის ნაზრდი იყოს უარყოფითი? ფუნქციის ნაზრდი იყოს უარყოფითი? მოიყვანეთ მაგალითები.
6. განსაზღვრეთ $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე $[x, x+\Delta x]$ შუალედზე.
7. განსაზღვრეთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში.
8. განსაზღვრეთ $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი.
9. ვთქვათ, $y=R(x)$ შემოსავლის ფუნქციაა. რისი ტოლი იქნება მარჟინალური ანუ ზღვრული შემოსავალი?
10. რა მოქმედებების შესრულება გვიხდება ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლისას?
11. რას უწოდებენ ფუნქციის წარმოებულის პოვნის ოპერაციას?
12. განსაზღვრეთ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა წარმოებული.
13. მოიყვანეთ წარმოებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

14.1. იქნება თუ არა რაიმე წერტილში სამი უწყვეტი ფუნქციის ჯამი და ნამრავლი უწყვეტი ფუნქცია იმავე წერტილში? პასუხი დაასაბუთეთ. იქნება თუ არა იგივე შედეგი სამართლიანი უწყვეტ ფუნქციათა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის?

14.2. ცნობილია, რომ $f(x)=0$ განტოლების არც ერთი ფესვი არ არის მოთავსებული $[0,1]$ შუალედში და $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$. $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[0,1]$ შუალედზე. შეიძლება თუ არა, რომ $[0,1]$-დან აღებული რომელიმე x-სთვის შესრულდეს უტოლობა $f(x)<0$. პასუხი დაასაბუთეთ.

14.3. მიიღებს თუ არა ღია $]0,\infty[$ შუალედზე განსაზღვრული უწყვეტი $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას? პასუხი დაასაბუთეთ. დახაზეთ სათანადო გრაფიკი.

14.4. ვთქვათ,

$$f(x)=\frac{1}{1-|x|},$$

$D_f=]-1,1[$. მიიღებს თუ არა $f(x)$ ფუნქცია უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას განსაზღვრის არეში? პასუხი დაასაბუთეთ.

14.5. $f(x)$ უწყვეტი ფუნქცია ზრდადია $[a,b]$ შუალედზე. დაასახელეთ ამ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

14.6. ვთქვათ, $f(x)$ არის უწყვეტი და $[a,b]$ შუალედზე მკაცრად მონოტონური ფუნქცია. $f(x)=0$ განტოლების რამდენი ფესვი შეიძლება ეკუთვნოდეს $[a,b]$ შუალედს? პასუხი დაასაბუთეთ.

14.7. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$ ფუნქცია მკაცრად ზრდადია $[1,2]$ სეგმენტზე.

14.8. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $]-\infty,\infty[$ შუალედზე და x_1 და x_2 წარმოადგენს $f(x)=0$ განტოლების ფესვებს, რომელთა შორის არ მდებარეობს ამ განტოლების არც ერთი ფესვი. შეიძლება თუ არა $[x_1,x_2]$ სეგმენტზე მოვძებნოთ ორი ისეთი x_3 და x_4 წერტილი, რომ შესრულდეს უტოლობა $f(x_3)\,f(x_4)<0$? პასუხი დაასაბუთეთ.

14.9. $]0,2[$ შუალედზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის ცნობილია, რომ განსაზღვრის არის ნებისმიერ წერტილში $f(x)\neq 0$ და $f(1)<0$. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უარყოფითია აღნიშნულ შუალედზე.

14.10. $[0,1]$-ზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია იცვლის ნიშანს აღნიშნულ შუალედზე. ამავე დროს $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[0,1]$. დაადგინეთ, შეიძლება თუ არა $f(x)$ ფუნქცია იყოს უწყვეტი $[0,1]$-ზე.

14.11. იპოვეთ ფუნქციის *ნიშანმუდმივობის შუალედები* (ე.ი. შუალედები, რომლებზეც ფუნქცია ინარჩუნებს ნიშანს) და დაადგინეთ ფუნქციის ნიშანი თითოეულ შუალედზე:

ა) $f(x)=3x+4$;

ბ) $f(x)=3$;

გ) $f(x)=x^2-5x+4$;

დ) $f(x)=x^3-7x^2+12x$.

14.12. აჩვენეთ, რომ შემდეგი განტოლებებიდან თითოეულს [0,1] სეგმენტზე აქვს ერთადერთი ფესვი და კალკულატორის დახმარებით იპოვეთ ისინი 0.1-მდე სიზუსტით:

ა) $2x^3-x^2+4x-1=0$;

ბ) $x^3+x-0,25=0$.

14.13. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის $\Delta y=\Delta f(x)$ ნაზრდი x_0 წერტილში, თუ:

ა) $y=x^2$, $x_0=1$, $\Delta x=0,1$;

ბ) $y=4^x$, $x_0=2$, $\Delta x=-0,5$;

გ) $y=\lg x$, $x_0=1$, $\Delta x=9$;

დ) $y=\sin x$, $x_0=0$, $\Delta x=-\dfrac{\pi}{6}$.

14.14. იპოვეთ x არგუმენტის Δx ნაზრდის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობა x_0 წერტილში და ფუნქციის შესაბამისი Δy ნაზრდი, თუ:

ა) $y=x^2+x$, $x\in[0,2]$, $x_0=1,5$;

ბ) $y=\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$, $x\in[0,2]$, $x_0=\dfrac{1}{3}$.

14.15. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი Δy ნაზრდი x წერტილში:

ა) $y=ax+b$;

ბ) $y=ax^2+bx+c$;

გ) $y=a^x$;

დ) $y=\ln x$;

ე) $y=\sin x$;

ვ) $y=\cos x$.

14.16. დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $\Delta(f(x)+g(x))=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

ბ) $\Delta(f(x)\,g(x))=$
$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$;

გ) $\Delta(f(x)\,g(x))=$
$=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x)$;

დ) $\Delta\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)\Delta f(x)-f(x)\Delta g(x)}{g(x)\,g(x+\Delta x)}$.

14.17. იპოვეთ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა x_0 წერტილში, თუ:

ა) $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=\dfrac{19}{8}$;

ბ) $y=\left(\dfrac{1}{27}\right)^x$, $x_0=0$, $\Delta x=-\dfrac{1}{3}$.

14.18. ვთქვათ, $u=u(x)$ და $v=v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია. დაამტკიცეთ:

ა) $d(u+v)=du+dv$;

ბ) $d(u-v)=du-dv$;

გ) $d(uv)=v\,du+u\,dv$;

დ) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$, $v\neq 0$.

14.19. იპოვეთ $f(x)=-x^2+8x$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე შემდეგ შუალედებზე:

ა) $[0,3]$;

ბ) $[5,7]$;

გ) $[a,a+h]$.

14.20. წარმოებულის განსაზღვრის საფუძველზე გამოთვალეთ $f'(x_0)$, თუ:

ა) $f(x)=3, \quad x_0=1$;

ბ) $f(x)=2x+3, \quad x_0=-1$;

გ) $f(x)=x^2-x, \quad x_0=-1$;

დ) $f(x)=ax^2+bx+c, \; x_0=d$.

14.21. იპოვეთ $y=|x|$ ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები $x=0$ წერტილში და დაადგინეთ, გააჩნია თუ არა წარმოებული მოცემულ ფუნქციას ამ წერტილში.

14.22. შემოსავლის ფუნქციას აქვს სახე $R(x)=2x^2+2x$. იპოვეთ მარჟინალური (ზღვრული) შემოსავალი.

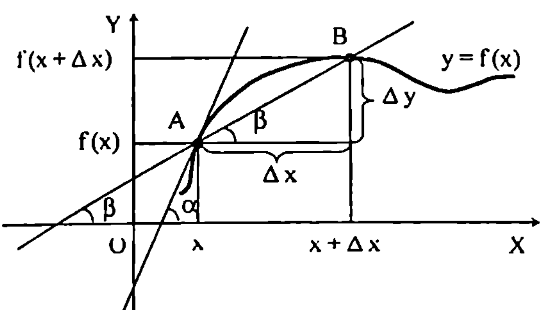
ლექცია 15

წარმოებულის გეომეტრიული და ფიზიკური ინტერპრეტაცია. კავშირი წარმოებადობასა და უწყვეტობას შორის. გაწარმოების წესები

15.1. წარმოებულის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

წერტილში *ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსის* გაცნობის მიზნით მივმართოთ ფუნქციის გრაფიკულ წარმოდგენას.

როგორც ნახ. 15.1-დან ჩანს, $[x, x+\Delta x]$ სეგმენტზე $y=f(x)$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ტოლია



ნახ. 15.1

იმ β კუთხის ტანგენსისა, რომელსაც აბსცისათა ღერძთან ადგენს f ფუნქციის *გრაფიკის მკვეთი*, გავლებული იმ A და B წერტილებზე, რომელთა აბსცისებია x და $x+\Delta x$. როდესაც Δx ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ გადაკვეთის B წერტილი მიისწრაფვის A-სკენ და AB მკვეთიც მიისწრაფვის თავის ზღვრული მდებარეობისაკენ ანუ როგორც ამბობენ, იკავებს *მხების* მდებარეობას. β კუთხე თავის მხრივ მიისწრაფვის იმ α კუთხისაკენ, რომელსაც ეს მხები შეადგენს OX ღერთან. გამოთქმული მოსაზრებისა და წარმოებულის განმარტების თანახმად, მივიღებთ

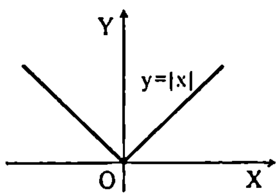
$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x). \qquad (1)$$

ამრიგად, ფუნქციის წარმოებული x წერტილში ტოლია იმ კუთხის ტანგენსისა, რომელსაც $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მიმართ $A=(x, f(x))$ წერტილში გავლებული მხები ადგენს OX ღერძთან.

მაგალითი 1. დავწეროთ $y=f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის მიმართ (3,9) წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

ჩვენ უკვე დავადგინეთ, რომ $f'(x)=(x^2)'=2x$. კერძოდ, $f'(3)=2\cdot 3=6$. ამრიგად, (3,9) წერტილში $y=x^2$ პარაბოლის მიმართ გავლებული მხების დახრილობაა $k=6$. ამიტომ საძიებელ განტოლებას ექნება სახე: $y-9=6(x-3)$, ანუ $y=6x-9$.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში წარმოებული არ გააჩნია, მაშინ ასეთი x-სათვის არც გრაფიკის მხები იქნება განსაზღვრული. ასეთი მდგომარეობაა მაგალითად, $\varphi(x)=|x|$ ფუნქციის შემთხვევაში $x=0$ წერტილისათვის (ნახ. 15.2).



ნახ. 15.2

ნახაზზე მოცემული ფუნქციის გრაფიკს არ გააჩნია მხები (0,0) წერტილში და რა თქმა უნდა, არც დახრილობა განისაზღვრება (1) ტოლობის გამოყენებით.

მკითხველმა უთუოდ შენიშნა, რომ ნახ. 15.2-ზე ფუნქციის გრაფიკს (0,0) წერტილში „წვეტი" აქვს, მაშინ როდესაც ნახ. 15.1-ზე „გლუვი" წირია წარმოდგენილი.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ჩამოვაყალიბოთ წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი.

თუ f ფუნქციას x წერტილში გააჩნია $f'(x)$ წარმოებული, მაშინ f ფუნქციის გრაფიკს $(x, f(x))$ წერტილში გააჩნია მხები, რომლის დახრილობა $f'(x)$ მნიშვნელობის ტოლია.

15.2. წარმოებულის ფიზიკური ინტერპრეტაცია

გამოვარკვიოთ წარმოებულის მექანიკური შინაარსი. ვიგულისხმოთ, რომ მატერიალური წერტილი მოძრაობს წრფეზე და მის მიერ გავლილი S მანძილი ამ მანძილის გასავლელად დახარჯული t დროის $S(t)$ ფუნქციაა, ანუ როგორც მოკლედ იტყვიან, წერტილის მოძრაობის განტოლებას $S=S(t)$ სახე აქვს. როგორც ცნობილია, დროის რაიმე Δt მონაკვეთში მოძრაობის *საშუალო სიჩქარე* გამოითვლება ფორმულით

$$V_{\text{საშ}}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta S}{\Delta t},$$

რომელიც მით უკეთესად ახასიათებს წერტილის სიჩქარეს t მომენტში, რაც უფრო მცირეა Δt (რაც უფრო მცირეა Δt, მით უფრო „ვერ მოასწრებს" მატერიალური წერტილი იმ სიჩქარის შეცვლას, რაც მას t მომენტში გააჩნდა).

ამდენად, t მომენტში მატერიალური წერტილის სიჩქარის (*მყისი სიჩქარის*) იდეალურად კარგი მახასიათებელი იქნება

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

ასე რომ, თუკი $V(t)$-თი აღვნიშნავთ $S = S(t)$ კანონით მოძრავი მატერიალური წერტილის სიჩქარეს დროის t მომენტში, გვექნება

$$V(t) = S'(t),$$

ანუ როგორც ამბობენ, *„მანძილის წარმოებული დროით სიჩქარის ტოლია"*. ამაში მდგომარეობს *წარმოებულის მექანიკური შინაარსი*.

15.3. კავშირი ფუნქციის წარმოებადობასა და უწყვეტობას შორის

ჩვენ, $y = |x|$ ფუნქციის მაგალითზე (ნახ. 15.2) უკვე დავრწმუნდით, რომ ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არ არის წარმოებადი. ე.ი. ფუნქციის უწყვეტობა არ არის საკმარისი პირობა, რათა არსებობდეს ამ ფუნქციის წარმოებული. ადვილია დარწმუნება იმაში, რომ ფუნქციის წარმოებადობა არის საკმარისი იმისათვის, რომ ეს ფუნქცია იყოს უწყვეტი. მართლაც, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე x_0 წერტილში და განვიხილოთ ზღვარი

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

ამრიგად, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x = x_0$ წერტილში.

15.4. გაწარმოების წესები

გავეცნოთ ფუნქციათა *გაწარმოების ზოგიერთ წესს*. უპირველეს ყოვლისა მოვიყვანოთ თეორემას *ფუნქციათა ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და ფარდობის გაწარმოების* შესახებ.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალზე, მაშინ ამავე ინტერვალზე წარმოებადია აგრეთვე $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ ფუნქციები და მართებულია ტოლობები:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x), \tag{2}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{3}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0. \tag{4}$$

კერძოდ, თუ C მუდმივია, გვექნება

$$[Cf(x)]' = C'f(x) + Cf'(x) = Cf'(x)$$

(აქ გამოვიყენეთ, რომ მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია). ამრიგად, მუდმივი მამრავლი გამოდის გაწარმოების ნიშნის გარეთ

$$[C\,f(x)]' = C\,f'(x).$$

მოყვანილი თეორემის სამართლიანობაში დარწმუნება ადვილია. მართლაც,

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).$$

ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი ტოლობებიც.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ გაწარმოების წესები ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციისათვის:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \text{კერძოდ,} \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad \text{კერძოდ,} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

ახლა გამოვიყენოთ (2)-(4) ფორმულები და გაწარმოების აქ გადმოცემული წესები კონკრეტული ფუნქციების გასაწარმოებლად.

მაგალითი 2. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1.$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\right)' = \left(\frac{1}{4}x^3\right)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + (1)' =$$

$$= \frac{1}{4}(x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{3}{4}x^2 - x.$$

მაგალითი 3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5\sqrt{x}.$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 5\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + 5\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}(x^3)' + 5 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = x^2 + \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} = x^2 + \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

მაგალითი 4. $f(x) = 5^x \sin x.$

$$f(x)' = (5^x \cdot \sin x)' = (5^x)' \sin x + 5^x \cdot (\sin x)' =$$

$$= \ln 5 \cdot 5^x \sin x + 5^x \cos x.$$

მაგალითი 5. $f(x) = e^x \mathrm{tg}\, x + 2^x \mathrm{ctg}\, x.$

$$f'(x) = (e^x \mathrm{tg}x + 2^x \mathrm{ctg}x)' = (e^x \mathrm{tg}x)' + (2^x \mathrm{ctg}x)' =$$

$$= (e^x)' \mathrm{tg}x + e^x (\mathrm{tg}x)' + (2^x)' \mathrm{ctg}x + 2^x (\mathrm{ctg}x)' =$$

$$= e^x \mathrm{tg}x + \frac{e^x}{\cos^2 x} + \ln 2 \cdot 2^x \mathrm{ctg}x - \frac{2^x}{\sin^2 x}.$$

მაგალითი 6. $f(x) = x^3 \log_2 x + \frac{\ln x}{\cos x}.$

$$f'(x) = (x^3 \log_2 x)' + \left(\frac{\ln x}{\cos x}\right)' = (x^3)' \log_2 x + x^3 (\log_2 x)' +$$

$$+\frac{(\ln x)'\cos x-(\cos x)'\ln x}{\cos^2 x}=3x^2\log_2 x+x^3\cdot\frac{1}{x\ln 2}+$$

$$+\frac{\frac{1}{x}\cdot\cos x+\sin x\ln x}{\cos^2 x}=3x^2\log_2 x+\frac{x^2}{\ln 2}+\frac{\cos x+x\sin x\ln x}{x\cos^2 x}.$$

ვთქვათ, ახლა გვაქვს ორი წარმოებადი ფუნქციის *კომპოზიცია (რთული ფუნქცია)* $y(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$. მივცეთ x-ს Δx ნაზრდი, მაშინ g და y ფუნქციებიც მიიღებენ Δg და Δy ნაზრდებს. Δy ნაზრდის შეფარდება არგუმენტის Δx ნაზრდთან იგივურად ასე წარმოვადგინოთ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x},$$

საიდანაც შეიძლება ვივარაუდოთ (ზღვარზე გადასვლით), რომ სამართლიანია **ფუნქციათა კომპოზიციის (რთული ფუნქციის) გაწარმოების შემდეგი წესი:**

$$y'(x)=y'(g)\cdot g'(x), \tag{5}$$

რომლის მკაცრ დასაბუთებას ჩვენ არ მოვიყვანთ.

ვისარგებლოთ ფუნქციათა კომპოზიციის გაწარმოების წესით კონკრეტულ შემთხვევაში.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $y(x)=\sqrt{x^2-1}$ ფუნქციის წარმოებული. ბუნებრივია, შემოვიღოთ აღნიშვნა: $g=x^2-1$, მაშინ $y(x)=\sqrt{g}$ და (5) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$y'(x)=\left(\sqrt{g}\right)'\cdot\left(x^2-1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{g}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{g}}.$$

შემოღებული აღნიშვნის გათვალისწინებით, საბოლოოდ გვექნება

$$y'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

შესაძლოა (5) ფორმულა უფრო ადვილად დაგვამახსოვრდეს, თუ ვისარგებლებთ მისი ჩაწერის სხვა ფორმით:

$$y'_x=y'_g\cdot g'_x,\quad \text{ან}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}. \tag{6}$$

ზოგჯერ გვიხდება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით თანმიმდევრულად, რამდენიმეჯერ სარგებლობა.

მაგალითი 8. ვთქვათ, საჭიროა $y(x)=\sin\ln\sqrt{x^2-1}$ ფუნქციის წარმოებულის პოვნა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $g(x)=\ln\sqrt{x^2-1}$ და ვისარგებლოთ (5) (ან რაც იგივეა (6)) ფორმულით

$$\begin{aligned} y'(x) &= (\sin g)'\cdot\left(\ln\sqrt{x^2-1}\right)' = \cos g\cdot\left(\ln\sqrt{x^2-1}\right)' = \\ &= \cos\ln\sqrt{x^2-1}\cdot\left(\ln\sqrt{x^2-1}\right)'. \end{aligned} \tag{7}$$

როგორც ვხედავთ, გაწარმოების დასასრულებლად გვჭირდება $\ln\sqrt{x^2-1}$ ფუნქციის გაწარმოება, რომელიც თავის მხრივ რთულ ფუნქციას წარმოადგენს. ამიტომ, ვიქცევით ისევე, როგორც წინა საფეხურზე. შემოვიღოთ აღნიშვნა $u=\sqrt{x^2-1}$ და ვისარგებლოთ იმავე წესით

$$\left(\ln\sqrt{x^2-1}\right)' = (\ln u)'\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{1}{u}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}. \tag{8}$$

(8)-ის გათვალისწინებით (7)-დან საბოლოოდ მივიღებთ

$$y'(x)=\frac{x\cos\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}.$$

შევნიშნოთ, რომ (8)-ის მისაღებად ვისარგებლეთ $\left(\sqrt{x^2-1}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ტოლობით, რომელიც აგრეთვე რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გვქონდა მიღებული.

ჩვენ გარკვეული გამოცდილება დაგვეგროვება ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელად. როგორც ენახეთ, $f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული ისევ x ცვლადის ფუნქციაა.

თუ $f'(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, მაშინ ამ წარმოებულს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f''(x)$ („f ორი შტრიხ x“) ან $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ („დე ორი f დე x კვადრატ“) სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(f'(x)\right).$$

ანალოგიურად განიმარტება *მესამე და უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები.*

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რაში მდგომარეობს წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი?
2. ვთქვათ, $f(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა. დაწერეთ ამ ფუნქციის გრაფიკისადმი $(x_0, f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.
3. რაში მდგომარეობს წარმოებულის მექანიკური შინაარსი?
4. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე $x=a$ წერტილში. იქნება თუ არა $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადი იმავე $x=a$ წერტილში? პასუხი დაასაბუთეთ.
5. არის თუ არა ფუნქციის წარმოებადობა საკმარისი პირობა ფუნქციის უწყვეტობისათვის? მოიყვანეთ დასაბუთება.
6. მოიყვანეთ ფუნქციათა ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და ფარდობის წარმოებულთა გამოსათვლელი ფორმულები.
7. მოიყვანეთ ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გაწარმოების ფორმულები.
8. რაში მდგომარეობს ფუნქციათა კომპოზიციის (რთული ფუნქციის) გაწარმოების წესი? მოიყვანეთ მაგალითი რთული ფუნქციის გაწარმოებაზე.
9. რას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

15.1. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი $(x_0, f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხები წრფის დახრილობა, თუ:

ა) $f(x)=2$, $x_0=3$;

ბ) $f(x)=-2x+1$, $x_0=1$;

გ) $f(x)=-2x^2+x-1$, $x_0=0$;

დ) $f(x)=5x^4-7x^3+x^2-x-1$, $x_0=-1$;

ე) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=2$;

ვ) $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$, $x_0=-2$;

ზ) $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{3}{x}+3^x$, $x_0=1$;

თ) $f(x)=2\sin x-6$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

ი) $f(x)=\left(x^2-1\right)\cos x-6, x_0=\frac{\pi}{6}$;

კ) $f(x)=3^x\log_5 x$, $x_0=1$;

ლ) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $x_0=0$;

მ) $f(x)=x^3e^x$, $x_0=-1$.

15.2. დაწერეთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი გავლებული მხების განტოლება წერტილში, რომლის აბსცისაა x_0:

ა) $f(x)=2x^2-3x+5$, $x_0=0$;

ბ) $f(x)=e^x$, $x_0=1$;

გ) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

დ) $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.

15.3. $y=x^2-8x+15$ პარაბოლის რომელ წერტილში გავლებული მხები არის $2x+4y=5$ წრფის პარალელური?

15.4. $y=2x^2$ პარაბოლის რომელ წერტილში გავლებული მხები არის $3x-4y=7$ წრფის პერპენდიკულარული?

15.5. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი რომელ წერტილში გავლებული მხებია ჰორიზონტალური?

ა) $f(x)=x^3+3x+2$;

ბ) $f(x)=x+\frac{1}{x}$;

გ) $f(x)=x^3-3x^2+4$.

15.6. მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე $S=t^2+2t$. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე მომენტებში: $t_0=0$, $t_1=1$ და $t_2=2$.

15.7. იპოვეთ შემდეგ ფუქციათა დიფერენციალები:

ა) $y=x^{\frac{2}{3}}$;

ბ) $y=5^x$;

გ) $y=\ln x$;

დ) $y=\sin x$;

ე) $y=\cos x$;

ვ) $y=\operatorname{tg}x$.

15.8. გააწარმოეთ რთული ფუნქცია:

ა) $f(x)=(3x-1)^3$;

ბ) $f(x)=(2x-3)^7$;

გ) $f(x)=(2x^2+5)^4$;

დ) $f(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}$;

ე) $f(x)=(3-x)^{\frac{7}{2}}$;

ვ) $f(x)=(x^3+2)^{-2,7}$;

ზ) $f(x)=(x^2+2x-1)^{0,8}$;

თ) $f(x)=\sqrt{3x-2}$;

ი) $f(x)=\sqrt{1-2x}$;

კ) $f(x)=2\sqrt[3]{x^2+1}$;

ლ) $f(x)=-3\sqrt[7]{3x^2-1}$;

მ) $f(x)=e^{5x-1}$;

ნ) $f(x)=2^{3x^2-2x+1}$;

ო) $f(x)=\ln(x^2+4x+7)$;

პ) $f(x)=\log_4(3x^2+9x+1)$;

ჟ) $f(x)=\ln\sin x$;

რ) $f(x)=\sin(\cos x)$;

ს) $f(x)=e^{\mathrm{tg}\,x}$;

ტ) $f(x)=\cos^3(4x+e^x)$;

უ) $f(x)=\sin^2(2x+\ln x)$.

15.9. ცნობილია, რომ $S''(t)$ მეორე წარმოებული გამოსახავს $S=S(t)$ *კანონით მოძრავი მატერიალური წერტილის აჩქარებას.* იპოვეთ აჩქარება, თუ წერტილი მოძრაობს შემდეგი კანონით:

ა) $S=2t$;

ბ) $S=2t^2+te^t$.

15.10. იპოვეთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

ა) $y=3x^5-2x^4+x^3-7x^2+15$;

ბ) $y=e^{x^2}$;

გ) $y=\sin^2 x$.

15.11. იპოვეთ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული:

ა) $y=5x^{-4}$;

ბ) $y=3-2x+x^2+x^6$;

გ) $y=xe^x$;

დ) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

15.12. $y=x^4-2x+1$ ფუნქციის რომელი რიგის წარმოებულია იგივურად ნულის ტოლი?

15.13. იპოვეთ $y=\ln(1+x)$ ფუნქციის მეხუთე რიგის წარმოებული.

15.14 ვთქვათ, $f(x)$, $g(x)$ და $h(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+$$
$$+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$

ლექცია 16

ფუნქციის მონოტონურობის შუალედების დადგენა. ფერმას თეორემა. კრიტიკული წერტილები

16.1. ფუნქციის მონოტონურობის შუალედების დადგენა

ბუნებისა და ეკონომიკის მრავალი მოვლენა შეიძლება აღვწეროთ ფუნქციების დახმარებით, რომელთა ყოფაქცევის გამოკვლევა ხშირად ჩვენთვის საინტერესო მოვლენის შესწავლას გვეიადვილებს. ფუნქციის დინამიკის გამოკვლევაში კი, როგორც ეს ადრეც აღვნიშნეთ, განსაკუთრებული მნიშვნელობა წარმოებულის გამოყენებას ენიჭება. კერძოდ, წარმოებულის გამოყენებით ადვილად ხერხდება *მონოტონურობის შუალედების* დადგენა, რაც ფუნქციის გამოკვლევის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს.

თეორემა 1. **თუ $y=f(x)$ წარმოებადი ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ ამ ინტერვალიდან აღებული ნებისმიერი x-სათვის სრულდება უტოლობა**

$$f'(x)\geq 0 \qquad (f'(x)\leq 0).$$

დამტკიცება. ფუნქციის ზრდადობის განმარტებიდან გამომდინარე, ზრდადი ფუნქციისათვის არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდებს ერთნაირი ნიშანი აქვთ, ამიტომ

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$, მივიღებთ

$$f'(x)\geq 0.$$

ანალოგიურად მტკიცდება $f'(x)\leq 0$ უტოლობა კლებადი ფუნქციისათვის.

სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც.

თეორემა 2. **თუ $[a,b]$ ინტერვალზე წარმოებადი ფუნქციისათვის ამ ინტერვალის ყოველ x წერტილში სრულდება უტოლობა**

$$f'(x)\geq 0 \qquad (f'(x)\leq 0),$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) $[a,b]$ ინტერვალზე.

ამრიგად, იმისათვის, რომ $[a,b]$ ინტერვალზე წარმოებადი $f(x)$ ფუნქცია იყოს ზრდადი (კლებადი) ამ ინტერვალზე, აუცილებელი და საკმარისია $[a,b]$ ინტერვალის ყოველ x წერტილში ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

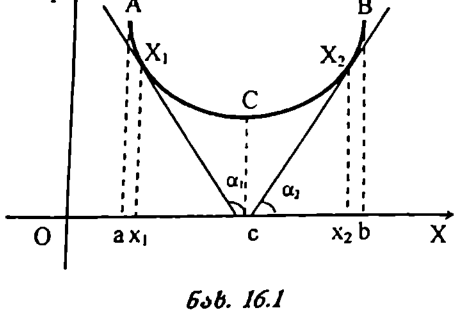
ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის მკაცრად მონოტონურობის საკმარისი პირობა.

თეორემა 3. თუ $[a,b]$ ინტერვალის ნებისმიერ x წერტილში ადგილი აქვს უტოლობას $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მკაცრად ზრდადია (მკაცრად კლებადია) $[a,b]$ ინტერვალზე.

შევნიშნოთ, რომ მოყვანილი უტოლობის შესრულება არაა აუცილებელი იმისათვის, რომ ფუნქცია იყოს მკაცრად მონოტონური.

მაგალითად, $f(x)=x^3$ ფუნქცია მკაცრად ზრდადია $]-\infty,+\infty[$ შუალედზე, თუმცა $f'(0)=0$.

როგორც დავინახეთ, $f'(x)$ წარმოებულის *ნიშანმუდმივობის შუალედები* $f(x)$ ფუნქციისათვის მონოტონურობის შუალედებს წარმოადგენს. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსის გათვალისწინებით, ადვილად მოვახდენთ მოყვანილი დებულებების გეომეტრიულ არგუმენტაციას. ავიღოთ $y=f(x)$ ფუნქცია, რომლის შესაბამისი გრაფიკია ნახ. 16.1-ზე გამოსახული AB მრუდი.



ნახ. 16.1

ამ წირზე AC რკალი, რომელიც ქვემოთ ეშვება, გამოსახავს ფუნქციის კლებადობას $[a,c]$ შუალედზე, ხოლო CB რკალი, რომელიც ზემოთ მიემართება, გამოსახავს ფუნქციის ზრდადობას $[c,b]$ შუალედზე. ნახ. 16.1-დან აშკარად ჩანს, რომ თუ $x_1 \in [a,c]$, მაშინ გრაფიკის შესაბამის X_1 წერტილში გავლებული მხები შეადგენს ბლაგვ კუთხეს OX ღერძთან და ამიტომ $\operatorname{tg}\alpha_1 = f'(x_1) < 0$. ხოლო თუ $x_2 \in [c,b]$, მაშინ შესაბამის X_2 წერტილში გავლებული მხები OX ღერძთან შეადგენს მახვილ კუთხეს და ამიტომ $\operatorname{tg}\alpha_2 = f'(x_2) > 0$.

მაგალითი. ვიპოვოთ $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}.$$

როგორც ვხედავთ, $f(x)$ განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $x=0$ წერტილისა. $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, თუ $f'(x)\geq 0$. ეს უტოლობა ტოლფასია $x^2\geq 1$ უტოლობისა, საიდანაც მივიღებთ: $|x|\geq 1$.

მაშასადამე, ფუნქცია ზრდადია $]-\infty,-1]$ და $[1,\infty[$ შუალედებზე. $f(x)$ ფუნქცია კლებადია, თუ $f'(x)\leq 0$. მაშასადამე, ფუნქცია კლებადია $[-1,0[$ და $]0,1]$ შუალედებზე (და არა $[-1,1]$ შუალედზე!).*

როდესაც ჩვენ უწყვეტ ფუნქციათა თვისებებს ვსწავლობდით, აღვნიშნეთ, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია მიიღებს როგორც უმცირეს, ასევე უდიდეს მნიშვნელობას. გარდა ამისა, იგი მიიღებს ამ უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს შორის მოთავსებულ ყველა რიცხვით მნიშვნელობას. ფუნქციის გამოკვლევისას, უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებთან ერთად არსებითია ფუნქციის ეგრეთ წოდებული *ლოკალური მინიმუმისა* და *ლოკალური მაქსიმუმის წერტილების* მოძებნა.

$f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არის x_0 წერტილს ეწოდება ლოკალური მაქსიმუმის (ლოკალური მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, რომ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ მიდამოდან ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x)\leq f(x_0) \qquad (f(x)\geq f(x_0)).$$

$f(x_0)$-ს ეწოდება ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი (მინიმუმი). შესაბამისი აღნიშვნებია:

$$\operatorname{locmax} f(x)=f(x_0) \quad \text{და} \quad \operatorname{locmin} f(x)=f(x_0).$$

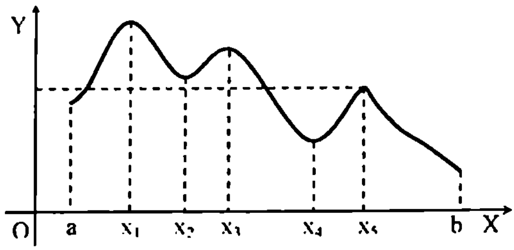
წერტილებს, სადაც მიიღწევა ლოკალური მინიმუმი ან ლოკალური მაქსიმუმი, ეწოდება ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებში ეწოდება ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები.

$[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი.

* შევნიშნოთ, რომ მითითებულ შუალედებზე ფუნქცია მკაცრად მონოტონურია.

ამასთან, ზოგიერთი ლოკალური მაქსიმუმი შეიძლება ზოგიერთ ლოკალურ მინიმუმზე ნაკლებიც კი იყოს. ამიტომ უნდა გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშენელობებისაგან.

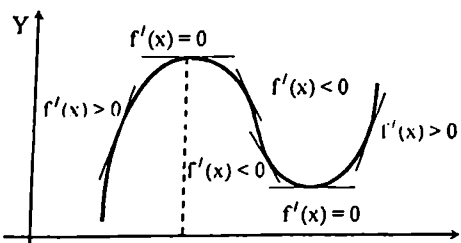
მაგალითად, ნახ. 16.2-ზე გამოსახულია ისეთი ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც [a,b] სეგმენტზე უდიდეს მნიშენელობას აღწევს x_1 წერტილში, უმცირეს მნიშენელობას კი – b წერტილში. გარდა ამისა, x_1, x_3 და x_5 ლოკალური მაქსიმუმის, ხოლო x_2 და x_4 კი ლოკალური მინიმუმის წერტილებია. ამასთან შევნიშნოთ, რომ ლოკალური მინიმუმი $f(x_2)$ მეტია $f(x_5)$ ლოკალურ მაქსიმუმზე.



ნახ. 16.2

16.2. ფერმას თეორემა

ლოკალური ექსტრემუმის წერტილის „გავლისას“ ფუნქცია იცვლის მონოტონურობის სახეს. ნახ. 16.2-დან ნათლად ჩანს, რომ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილის მიდამოში ფუნქცია ჯერ ზრდადია, შემდეგ კი კლებადი, ხოლო ლოკალური მინიმუმის წერტილის მიდამოში ფუნქცია ჯერ კლებადია და შემდეგ კი – ზრდადი. ამიტომ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილის მიდამოში ფუნქციის წარმოებული ჯერ დადებითია, ხოლო შემდეგ კი უარყოფითი. ლოკალური მინიმუმის წერტილის მიდამოში პირიქით, წარმოებული ჯერ უარყოფითია და შემდეგ კი დადებითი. მაშასადამე, თვით ლოკალური ექსტრემუმის წერტილებში წარმოებული (თუკი იგი არსებობს) ნულის ტოლი უნდა იყოს. *გლუვი ფუნქციის* (*წარმოებადი ფუნქცია*) შემთხვევაში, ამ მოსაზრების ჭეშმარიტება გეომეტრიული სურათიდანაც ნათელია.



ნახ. 16.3

ნახ. 16.3-დან ჩანს, თუ როგორ იცვლება მხების დახრილობა და მაშასადამე, წარმოებულის ნიშანი ექსტრემუმის წერტილის „გავლისას“. თვით ექსტრემუმის წერტილთა შესაბამისი მხებები აბსცისათა

ღერძის პარალელურია და მამასადამე, ამ წერტილებში წარმოებული ნულის ტოლია.

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. **თუ x წერტილში წარმოებად $f(x)$ ფუნქციას ამავე წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ $f'(x)=0$.**

ეს დებულება *ფერმას თეორემის* სახელწოდებითაა ცნობილი და მას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების მოძებნისას.

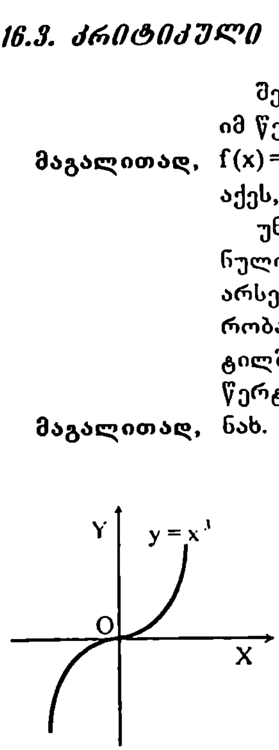
16.3. კრიტიკული წერტილები

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება გააჩნდეს იმ წერტილშიც, სადაც წარმოებული არ არსებობს.

მაგალითად, $f(x)=|x|$ უწყვეტ ფუნქციას $x=0$ წერტილში წარმოებული არა აქვს, მაგრამ ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი.

უნდა აღინიშნოს, რომ წერტილში ფუნქციის წარმოებულის ნულთან ტოლობა ან არარსებობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ *აუცილებელ*, მაგრამ *არა საკმარის* პირობას, ე.ი. იქიდან, რომ ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია ან არ არსებობს, არ გამომდინარეობს, რომ ეს წერტილი ექსტრემუმის წერტილია.

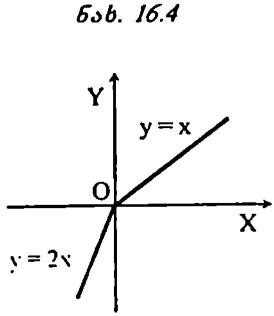
მაგალითად, ნახ. 16.4-ზე გამოსახული $y=x^3$ ფუნქციისათვის წარმოებული $y'=3x^2$ ნულის ტოლია $x=0$ წერტილში, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია. ნახ. 16.5-ზე გამოსახულ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს „წვეტი“, წარმოებული არ არსებობს და ფუნქციას არც აქ გააჩნია ექსტრემუმი.



ნახ. 16.4

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ისეთ წერტილებში, რომლებშიც *წარმოებული არ არსებობს ან ნულის ტოლია.*

წერტილებს, რომლებშიც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და წარმოებული ნულის ტოლია ან არ არსებობს, კრიტიკული წერტილები ეწოდება.



ნახ. 16.5

როგორც უკვე შევნიშნეთ, კრიტიკული წერტილი ყოველთვის არ წარმოადგენს ექსტრემუმის წერტილს, მაგრამ თუ ფუნქცია ექსტრემუმს აღწევს რაიმე წერტილში, მაშინ იგი აუცილებლად კრიტიკული წერტილი იქნება.

იმ კრიტიკულ წერტილებს, რომლებშიც $f'(x)=0$, სტაციონარული წერტილები ეწოდება.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. ჩამოაყალიბეთ წარმოებადი ფუნქციის ზრდადობის (კლებადობის) აუცილებელი და საკმარისი პირობა.
2. ჩამოაყალიბეთ წარმოებადი ფუნქციის მკაცრად მონოტონურობის საკმარისი პირობა.
3. რას ეწოდება ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები? ექსტრემუმები?
4. შეიძლება თუ არა, რომ ლოკალური მინიმუმი აღემატებოდეს ლოკალურ მაქსიმუმს? მოიყვანეთ სათანადო მაგალითი.
5. ჩამოაყალიბეთ ფერმას თეორემა.
6. ვთქვათ, $f'(x_0)=0$. ექნება თუ არა $f(x)$ ფუნქციას ექსტრემუმი $x=x_0$ წერტილში? პასუხი დაასაბუთეთ.
7. მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციის მაგალითი, რომელსაც რაიმე წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაგრამ არ გააჩნია წარმოებული იმავე წერტილში.
8. მოიყვანეთ ისეთი ფუნქციის მაგალითი, რომელსაც არა აქვს წარმოებული რაიმე წერტილში და არც ექსტრემუმი გააჩნია იმავე წერტილში.
9. რას ეწოდება სტაციონალური წერტილი? კრიტიკული წერტილი?
10. შესაძლებელია თუ არა, რომ რაიმე x_0 წერტილი ეკუთვნოდეს $f(x)$ ფუნქციის როგორც მკაცრად ზრდადობის, ისე მკაცრად კლებადობის შუალედს? პასუხი დაასაბუთეთ.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

16.1. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები, თუ:

ა) $f(x)=x^2+2x-1$;

ბ) $f(x)=-2x^3+3x^2-1$;

გ) $f(x)=x^5-80x$;

დ) $f(x)=x^4+108x$;

ე) $f(x)=x^2(x-2)^3$;

ვ) $f(x)=x\ln x$;

ზ) $f(x)=xe^x$;

თ) $f(x)=xe^{-x}$;

ი) $f(x)=2x^3-3x^2$;

კ) $f(x)=x^4-8x^2+12$;

ლ) $f(x)=2x^3-6x^2+18x+7$;

მ) $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$;

ნ) $f(x)=3x+\dfrac{12}{x}$;

ო) $f(x)=x^2e^{-x}$;

პ) $f(x)=3e^{x^2-4x}$.

16.2. დაამტკიცეთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია სტაციონარული წერტილი:

ა) $\varphi(x)=3x-1$;

ბ) $\varphi(x)=-2x+7$;

გ) $\varphi(x)=2e^x$;

დ) $\varphi(x)=3\ln x+1$;

ე) $\varphi(x)=2x+\sin x$;

ვ) $\varphi(x)=\operatorname{tg} x$;

ზ) $\varphi(x)=2\operatorname{tg} x-x$;

თ) $\varphi(x)=5x-\cos x$.

16.3. იპოვეთ t პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $h(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია სტაციონარული წერტილი:

ა) $h(x)=tx^3-3x^2+3x-1$;

ბ) $h(x)=x^3+tx^2-2x-2$;

გ) $h(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+tx+9$;

დ) $h(x)=2x^3+x^2-2tx-1$;

ე) $h(x)=tx+3\sin x$;

ვ) $h(x)=x+t\sin x$;

ზ) $h(x)=e^{(t-1)x}$;

თ) $h(x)=e^x+tx$.

16.4. დაადგინეთ, არის თუ არა x_0 კრიტიკული წერტილი:

ა) $g(x)=\begin{cases}2x, & \text{როცა } x\le 0,\\ 3x, & \text{როცა } x>0,\end{cases}$

$x_0=0$;

ბ) $h(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x\le 0,\\ x^2, & \text{როცა } x>0,\end{cases}$

$x_0=0$;

გ) $\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & \text{როცა } x<0,\\ -x^2, & \text{როცა } x\ge 0,\end{cases}$

$x_0=0$;

დ) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-7, & \text{როცა } x<1,\\ 4x-8, & \text{როცა } x\ge 1,\end{cases}$

$x_0=1$;

ე) $h(x)=\begin{cases}x^3-2x^2+1, & \text{როცა } x\le 2,\\ 4x-7, & \text{როცა } x>2,\end{cases}$

$x_0=2$;

ვ) $g(x)=\begin{cases} e^x, & \text{როცა } x<1, \\ ex, & \text{როცა } x\ge 1, \end{cases}$

$x_0=1$;

ზ) $\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა } x\le 0, \\ \sin x, & \text{როცა } x>0. \end{cases}$

$x_0=0$;

თ) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{როცა } x\le 1, \\ 1, & \text{როცა } x>1, \end{cases}$

$x_0=1$;

ი) $h(x)=\begin{cases} 2x+3, & \text{როცა } x\ge 2, \\ 4x-1, & \text{როცა } x<2, \end{cases}$

$x_0=2$.

16.5. დაადგინეთ, შეიძლება თუ არა შეირჩეს a პარამეტრის მნიშვნელობა ისეთნაირად, რომ x_0 არ იყოს ფუნქციის კრიტიკული წერტილი:

ა) $f(x)=\begin{cases} ax+2, & \text{როცა } x\le 1, \\ ax^2+2x, & \text{როცა } x>1, \end{cases}$

$x_0=1$;

ბ) $g(x)=\begin{cases} x^3, & \text{როცა } x\le 2, \\ 12x+a, & \text{როცა } x>2, \end{cases}$

$x_0=2$;

გ) $h(x)=\begin{cases} x^2-x+3, & \text{როცა } x\le 2, \\ ax-1, & \text{როცა } x>2, \end{cases}$

$x_0=2$;

დ) $\varphi(x)=\begin{cases} 3x+a, & \text{როცა } x\le 1, \\ 2x^3-3x+1, & \text{როცა } x>1. \end{cases}$

$x_0=1$;

ე) $g(x)=\begin{cases} 2x^4, & \text{როცა } x\le 0, \\ ax, & \text{როცა } x>0, \end{cases}$

$x_0=0$;

ვ) $f(x)=\begin{cases} ax, & \text{როცა } x<0, \\ \sin x, & \text{როცა } x\ge 0, \end{cases}$

$x_0=0$;

ზ) $h(x)=\begin{cases} ax+1, & \text{როცა } x<0, \\ \cos x, & \text{როცა } x\ge 0, \end{cases}$

$x_0=0$;

თ) $\varphi(x)=\begin{cases} ax, & \text{როცა } x<0, \\ \operatorname{tg}x, & \text{როცა } x\ge 0, \end{cases}$

$x_0=0$.

16.6. შეამოწმეთ, ზრდადია თუ არა $f(x)$ ფუნქცია თავის განსაზღვრის არეზე:

ა) $f(x)=2x^2+x$;

ბ) $f(x)=2x+3e^x$;

გ) $f(x)=2\sqrt{x}+1$;

დ) $f(x)=2\cos x-5x$;

ე) $f(x)=\ln x$;

ვ) $f(x)=xe^x$.

16.7. იპოვეთ ფუნქციის მკაცრად ზრდადობისა და მკაცრად კლებადობის შუალედები:

ა) $f(x)=x^3-3x^2+9x+14$;

ბ) $f(x)=x^4-2x^2-5$;

გ) $f(x)=x^3-6x^2+15x-2$;

დ) $f(x)=2-3x-6x^2-4x^3$;

ე) $f(x)=x-e^x$;

ვ) $f(x)=x^2e^{-x}$;

ზ) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$;

თ) $f(x) = 2e^{x^2-4x}$;

ი) $f(x) = 2x + \sin x$.

16.8. მოძებნეთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $f(x)$ ფუნქცია იქნება მკაცრად მონოტონური $]-\infty,\infty[$ შუალედზე:

ა) $f(x) = ax^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

ბ) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + x - 7$;

გ) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 10$;

დ) $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 2a$.

16.9. იპოვეთ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{4}x^2 + 7$ ფუნქციის ზრდადობის შუალედის სიგრძე.

16.10. იპოვეთ

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$$

ფუნქციის კლებადობის შუალედის სიგრძე.

16.11. იპოვეთ უდიდესი მთელი რიცხვი

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1{,}75x^2 - 11x + 1$$

ფუნქციის კლებადობის შუალედიდან.

16.12. იპოვეთ უმცირესი მთელი რიცხვი

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2{,}25x^2 + 15$$

ფუნქციის ზრდადობის შუალედიდან.

D. კითხვები და ამოცანები გამეორებისათვის (ლექციები 13-16)

D.1. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წყვეტის წერტილები:

ა) $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x(x^2-9)}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{1}{\sin 2x}$;

გ) $f(x)=\dfrac{1}{2\cos x-1}$;

დ) $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x-1}$;

ე) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\ln|x+1|}$;

ვ) $f(x)=\dfrac{x^2+10}{x(x+1)(x^2-2)}$.

D.2. f(x) ფუნქცია არ არის განსაზღვრული მითითებულ x_0 წერტილში. განსაზღვრეთ ამ წერტილში ფუნქცია ისე, რომ იგი იყოს უწყვეტი:

ა) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$, $x_0=-1$;

ბ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$, $x_0=5$.

D.3. აჩვენეთ, რომ $f(x)=x\cdot \mathrm{sign}x$ ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეზე.

D.4. ვთქვათ, E(x) არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც x-ს არ აღემატება. გამოიკვლიეთ E(x) ფუნქციის უწყვეტობა და ააგეთ გრაფიკი.

D.5. $y=\sqrt[3]{x}$ ფუნქციისათვის იპოვეთ Δy, თუ:

ა) $x=0$, $\Delta x=0{,}001$;

ბ) $x=8$, $\Delta x=-9$.

D.6. იპოვეთ Δy ნაზრდი და $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა შემდეგი ფუნქციებისათვის:

ა) $y=\sqrt{x}$, როცა $x=0$ და $\Delta x=0{,}001$;

ბ) $y=\lg x$, როცა $x=100$ და $\Delta x=-90$.

D.7. იპოვეთ $y=\dfrac{1}{x}$ ჰიპერბოლის მკვეთის დახრილობა, თუ გადაკვეთის წერტილების ორდინატებია $Y_1=\dfrac{1}{2}$ და $Y_2=\dfrac{1}{4}$.

D.8. იპოვეთ $y=2x-x^2$ პარაბოლის მკვეთის დახრილობა, თუ გადაკვეთის წერტილთა აბსცისებია $x_1=1$ და $x_2=2$.

D.9. იპოვეთ $y=x^3$ წირის (-1,-1) და (1,1) წერტილებში გავლებული მხებების დახრილობები.

D.10. იპოვეთ $y=\dfrac{1}{x}$ წირის მხების დახრილობა, თუ:

ა) $x=\dfrac{1}{2}$;

ბ) $x=1$.

D.11. წერტილის მოძრაობის განტოლება OX ღერძის გასწვრივ არის $x=3t-t^3$. იპოვეთ მოძრაობის სიჩქარე $t=0$ და $t=1$ მომენტებისათვის.

D.12. გააწარმოეთ ფუნქციები:

ა) $y=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5x^5}$;

ბ) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{x\sqrt{x}}$;

გ) $f(x)=\frac{3}{x}+\ln x$;

დ) $f(x)=\frac{\pi}{x}+\ln 2$;

ე) $y=\sin 6x$;

ვ) $y=\cos^3 x$;

ზ) $y=\sin(\ln x)$;

თ) $y=e^{\cos x}\cdot\sin x$.

D.13. იპოვეთ $f'(x_0)$, თუ:

ა) $f(x)=x^{\text{[illegible]}}-\frac{1}{2x^2}$, $x_0=1$;

ბ) $f(x)=\frac{x}{2x-1}$, $x_0=0$;

გ) $f(x)=x(1+\sqrt{x})$, $x_0=4$;

დ) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, $x_0=3$.

D.14. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა დიფერენციალები:

ა) $y=x\ln x-x$;

ბ) $y=\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3x+\mathrm{tg}x$;

გ) $y=e^{x^2+3}$;

დ) $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$.

D.15. იპოვეთ ფუნქციის ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $y=3x^2-x$, $x=1$ და $\Delta x=0{,}1$.

D.16. განსაზღვრეთ შემდეგ ფუნქციათა ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები:

ა) $y=\ln x$;

ბ) $y=x+\sin x$;

გ) $y=x\ln x$;

დ) $y=(x-3)\sqrt{x}$.

D.17. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-სთვის სამართლიანია ტოლობა

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

D.18. დაამტკიცეთ ფუნქციათა ნამრავლისა და ფარდობის გაწარმოების ფორმულები.

D.19. დაამტკიცეთ, რომ როცა $x>0$, ჭეშმარიტია უტოლობა

$$e^x>1+x.$$

ლექცია 17

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა, ჩაზნექილობა და გადაღუნვის წერტილები

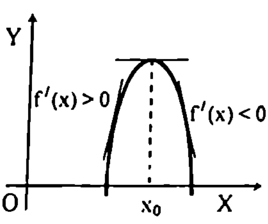
17.1. ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები

ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის თანახმად, ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ამ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს შორის უნდა ვეძებოთ. ბუნებრივად ისმის კითხვა: როგორ დავადგინოთ, წარმოადგენს თუ არა ესა თუ ის კრიტიკული წერტილი ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილს, ანუ რაში მდგომარეობს *ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა?*

ფუნქციის მონოტონურობის საკმარისი პირობის გათვალისწინებით მარტივად დავასკვნით, რომ სამართლიანია

თეორემა 1. **თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და ამ წერტილის რაიმე მიდამოში**

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x)>0, & \text{როცა}\ \ x<x_0 \\ f'(x)<0, & \text{როცა}\ \ x>x_0 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$



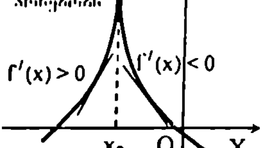
ნახ. 17.1

მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ

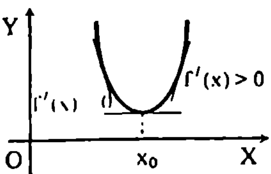
$$\left.\begin{array}{ll} f'(x)<0, & \text{როცა}\ \ x<x_0 \\ f'(x)>0, & \text{როცა}\ \ x>x_0 \end{array}\right\}, \qquad (2)$$

მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

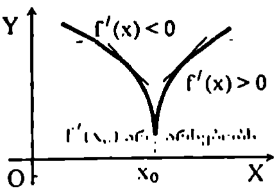
დამტკიცება. ვთქვათ, x_0 წერტილის რაიმე $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ მიდამოში შესრულებულია (1) პირობა. რადგან $]x_0-\delta, x_0[$ ინტერვალში $f'(x)>0$ და $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ იგი მკაცრად ზრდადია $]x_0-\delta, x_0]$ შუალედზე. ე.ი. ნებისმიერი $x\in\,]x_0-\delta, x_0[$ წერტილისათვის მართებულია უტოლობა $f(x)<f(x_0)$. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს უტოლობა მართე-



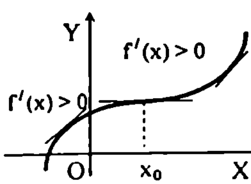
ნახ. 17.2



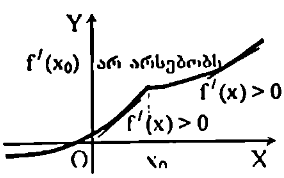
ნახ. 17.3



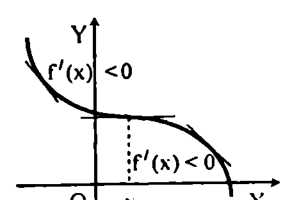
ნახ. 17.4



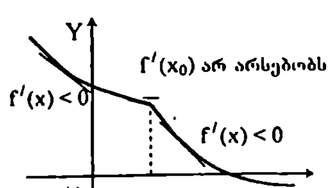
ნახ. 17.5



ნახ. 17.6



ნახ. 17.7



ნახ. 17.8

ბულია აგრეთვე ნებისმიერი $x \in]x_0, x_0+\delta[$ წერტილისათვის.

ამრიგად, x_0-საგან განსხვავებული ყოველი x წერტილისათვის $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ მიდამოდან მართებულია უტოლობა $f(x)<f(x_0)$, ე.ი. x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ, თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში შესრულებულია (2) პირობა, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი.

ხშირად სარგებლობენ ჩამოყალიბებული დებულების შემდეგი ფორმულირებით:

თუ წერტილში ფუნქცია უწყვეტია და ამ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს წარმოებული ნიშანს იცვლის „+"-დან „–"-ზე, მაშინ x_0 ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო, თუ წარმოებული ნიშანს იცვლის „–"-დან „+"-ზე, მაშინ x_0 ლოკალური მინიმუმის წერტილია.

ნახ. 17.1-ზე და ნახ. 17.2-ზე გამოსახულია ლოკალური მაქსიმუმის შემთხვევა.

ნახ. 17.3-ზე და ნახ.17.4-ზე გამოსახულია ლოკალური მინიმუმის შემთხვევა.

ამრიგად, ზემოთ დასმულ კითხვას პასუხი ასე შეიძლება გაეცეს: **კრიტიკული წერტილი ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილს წარმოადგენს, თუ ამ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლისას ფუნქციის წარმოებული იცვლის ნიშანს. ამაში მდგომარეობს ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა.**

შევნიშნოთ რომ, თუ კრიტიკული წერტილის გავლისას ფუნქციის წარმოებული ნიშანს არ იცვლის, მაშინ ეს წერტილი არ წარმოადგენს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილს. ნახ. 17.5-17.8-ზე გამოსახულია ამ სიტუაციის სათანადო გეომეტრიული სურათები.

ნახ. 17.5 და ნახ. 17.6-ზე ფუნქციის წარმოებული დადებითია x_0 წერტილის მარცხნივაც და მარჯვნივაც. x_0 არ არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი.

ნახ. 17.7 და ნახ. 17.8-ზე ფუნქციის წარმოებული უარყოფითია x_0 წერტილის მარცხნივაც და მარჯვნივაც. x_0 არ არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები.

მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ იგი ნულს

$$f'(x)=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0.$$

აქედან გვაქვს, რომ $x_1=\frac{2}{5}$. გარდა ამისა, $x_2=0$ წერტილში არ არსებობს წარმოებული. მაშასადამე, მოცემულ ფუნქციას აქვს ორი კრიტიკული წერტილი: $x_1=\frac{2}{5}$ და $x_2=0$. შევნიშნოთ რომ, როცა x ნაკლებია $\frac{2}{5}$-ზე, მაშინ $f'(x)<0$, ხოლო, როცა x მეტია $\frac{2}{5}$-ზე, მაშინ $f'(x)>0$. ამრიგად, $x_1=\frac{2}{5}$ არის მოცემული ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი და

$$\operatorname{loc}\min f(x)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

$x_2=0$ კრიტიკული წერტილის მარცხნივ $f'(x)>0$, ხოლო, თუ x მეტია ნულზე და ნაკლებია $\frac{2}{5}$-ზე, მაშინ $f'(x)<0$. როგორც ვხედავთ, $x_2=0$ არის მოცემული ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი და $\operatorname{loc}\max f(x)=0$.

ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანა შეიძლება გადავწყვიტოთ მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებითაც. მტკიცდება შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 2. **ვთქვათ, x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი და $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$), მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი).**

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x-1$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ იგი ნულს

$$f'(x)=x^2-6x+5=0.$$

აქედან მივიღებთ ფუნქციის სტაციონარულ წერტილებს: $x_1=1$, $x_2=5$. ახლა გამოვთვალოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული

$$f''(x)=2x-6.$$

გამოვარკვიოთ უკანასკნელის ნიშანი $x_1=1$ წერტილში

$$f''(1)=2\cdot 1-6<0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_1=1$ არის ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი და ამასთან

$$\operatorname{loc\,max} f(x)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-3\cdot 1^2+5\cdot 1-1=\frac{4}{3}.$$

ახლა შევამოწმოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი $x_2=5$ წერტილში, გვაქვს

$$f''(5)=2\cdot 5-6>0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_2=5$ არის მოცემული ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი და ამასთან,

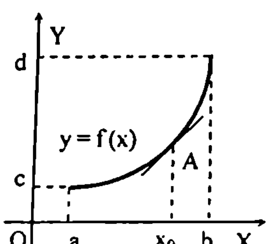
$$\operatorname{loc\,min} f(x)=\frac{1}{3}\cdot 5^3-3\cdot 5^2+5\cdot 5-1=-9\frac{1}{3}.$$

ამრიგად, ჩვენ გავეცანით ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის ორ წესს. პირველი მათგანი ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულს, ხოლო მეორე ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულსაც იყენებს. მათ შესაბამისად, **პირველი რიგის წარმოებულის** და **მეორე რიგის წარმოებულის წესს** უწოდებენ. თუ გამოსაკვლევი ფუნქცია ისეთია, რომ თითოეული ამ წესით სარგებლობა შესაძლებელია, მაშინ ჩვენს არჩევანზეა დამოკიდებული, თუ რომელი წესით ვისარგებლებთ. მაგრამ, თუკი ფუნქციას მეორე რიგის წარმოებული არ გააჩნია, ანდა $f''(x_0)=0$, მაშინ ექსტრემუმის საკითხის გამოკვლევა პირველი რიგის წარმოებულის წესით უნდა ჩავატაროთ.

17.2. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა. ჩაზნექილობა და გადაღუნვის წერტილები

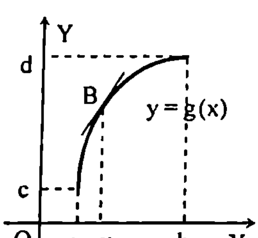
მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში აუცილებელი ხდება გავარკვიოთ ფუნქციის ცვალებადობის ტემპი, ე.ი. ფუნქცია იზრდება სულ უფრო სწრაფად თუ სულ უფრო ნელა, ან ფუნქცია იკლებს სულ უფრო სწრაფად თუ სულ უფრო ნელა. ნათქვამის საილუსტრაციოდ მივმართოთ გეომეტრიულ წარმოდგენას. განვიხილოთ ორი კონკრეტული ფუნქცია $y=f(x)$ და $y=g(x)$, რომელთა გრაფიკები გამოსახულია ნახ. 17.9-ზე და ნახ. 17.10-ზე.

ორივე ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b]$ შუალედზე, ორივე ფუნქცია ზრდადია ამ შუალედზე, ორივე ფუნქცია იღებს c და d რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა მნიშვნელობას, მაგრამ მათი გრაფიკები მაინც თვისობრივად განსხვავებულ წირებს წარმოადგენენ: $f(x)$ ფუნქციის შემთხვევაში, დამოუკიდებელი x ცვლადის ერთი და იგივე Δx ნაზრდის შესაბამისი Δf ნაზრდი მატულობს x-ის ზრდასთან ერთად, ხოლო $g(x)$ ფუნქციის შემთხვევაში პირიქით, x ცვლადის ერთი და იგივე Δx ნაზრდის შესაბამისი Δg ნაზრდი კლებულობს x-ის ზრდასთან ერთად. პირველ შემთხვევაში ფუნქცია იზრდება სულ უფრო სწრაფად და გრაფიკი *„ჩაზნექილია ქვემოთ"*, ხოლო მეორე შემთხვევაში ფუნქცია იზრდება სულ უფრო ნელა და შესაბამისად, $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი *„ამოზნექილია ზემოთ"*. ფუნქციათა გრაფიკების მსგავსი ყოფაქცევა შეიძლება დადგინდეს წარმოებულების გამოყენებით. წინასწარ შემოვიღოთ რამდენიმე განმარტება.



ნახ. 17.9

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია $A(x_0, f(x_0))$ წერტილში ($f(x)$ ფუნქცია ჩაზნექილია x_0 წერტილში), თუ არსებობს x_0-ის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია A წერტილში გავლებული მხების ზემოთ (ნახ. 17.9).



ნახ. 17.10

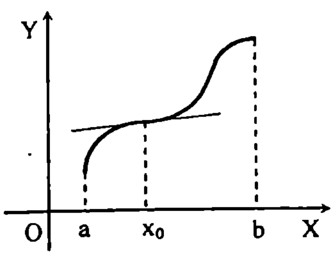
ვიტყვით, რომ $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია $B(x_0, g(x_0))$ წერტილში ($g(x)$ ფუნქცია ამოზნექილია x_0 წერტილში), თუ არსებობს x_0-ის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია B წერტილში გავლებული მხების ქვემოთ (ნახ. 17.10).

თუ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია (ამოზნექილია) რომელიმე შუალედის ყოველ წერ-

ტილში, მაშინ ამბობენ, რომ იგი ჩაზნექილია (ამოზნექილია) ამ შუალედზე.

წერტილში ფუნქციის ჩაზნექილობა-ამოზნექილობის გამოსარკვევად სარგებლობენ შემდეგი კრიტერიუმით.

თეორემა 3. **თუ არსებობს სასრული მეორე რიგის წარმოებული $f''(x_0)$ და $f''(x_0)>0$, მაშინ გრაფიკი ამ წერტილში ჩაზნექილია, ხოლო თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ გრაფიკი ამ წერტილში ამოზნექილია.**



ნახ. 17.11

წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილს, რომელიც ყოფს წირის ამოზნექილ ნაწილს ჩაზნექილისაგან ეწოდება ამ წირის გადაღუნვის წერტილი (ნახ. 17.11).

საკმარისი პირობა იმისა, რომ $(x_0, f(x_0))$ წარმოადგენდეს გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს, არის შემდეგი

თეორემა 4. **ვთქვათ, $f(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა და $f''(x_0)=0$ ან $f''(x_0)$ არ არსებობს. თუ ამავე დროს $f''(x)$ მეორე რიგის წარმოებულს $x=x_0$ წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ სხვადასხვა ნიშანი გააჩნია, მაშინ $(x_0, f(x_0))$ წერტილი გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს წარმოადგენს.**

მაგალითი 3. ვისარგებლოთ მოყვანილი დებულებით $f(x)=x\sqrt[3]{x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილებისა და ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედების დასადგენად. გამოვთვალოთ წარმოებულები:

$$f'(x)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}, \qquad f''(x)=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

$x=0$ წერტილში მეორე რიგის წარმოებული არ არსებობს. ამავე დროს $f''(x)<0$, როცა $x<0$ და $f''(x)>0$, როცა $x>0$. ამრიგად, $]-\infty,0[$ შუალედზე ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია, ხოლო $]0,\infty[$ შუალედზე – ჩაზნექილია. კოორდინატთა სათავე მოცემული ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს წარმოადგენს.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. ჩამოაყალიბეთ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) არსებობის საკმარისი პირობები.
2. ჩამოაყალიბეთ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის მოძებნის პირველი რიგის წარმოებულის წესი.
3. ჩამოაყალიბეთ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის მოძებნის მეორე რიგის წარმოებულის წესი.
4. მოიყვანეთ მაგალითი ფუნქციისა, რომლის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილის მოსაძებნად ვერ ვისარგებლებთ მეორე რიგის წარმოებულის წესით.
5. განმარტეთ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობა (ამოზნექილობა) წერტილში და შუალედზე.
6. მოიყვანეთ წერტილში ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის (ამოზნექილობის) საკმარისი პირობა.
7. განმარტეთ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.
8. ჩამოაყალიბეთ საკმარისი პირობა იმისა, რომ $(x_0, f(x_0))$ წერტილი $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს წარმოადგენდეს.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

17.1. ვთქვათ, მოგების ფუნქციაა $P(x) = -x^2 + 12x + 10$, სადაც x გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა. განსაზღვრეთ, პროდუქციის რა რაოდენობის გაყიდვა უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას.

17.2. შემოსავლის ფუნქციას აქვს სახე $R(x) = x^2\left(100 - \frac{2}{3}x\right)$, სადაც x გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა. იპოვეთ მაქსიმალური შემოსავალი.

17.3. იპოვეთ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი პირველი რიგის წარმოებულის წესის გამოყენებით:

ა) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{4}{3}$;

ბ) $y = x + \frac{1}{x}$;

გ) $y = \frac{3x^2}{e^x}$;

დ) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$;

ე) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;

ვ) $y = 3x^4 - 4x^3$.

17.4. იპოვეთ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი პირველი რიგის წარმოებულის წესის გამოყენებით:

ა) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 30{,}7$;

ბ) $y = 4x - x^4$;

გ) $y = \frac{3(x-1)}{x^2+3}$;

დ) $y = 3x + \frac{12}{x}$;

ე) $y = 2\sqrt{x} - x$;

ვ) $y = x\sqrt{2 - x^2}$.

17.5. იპოვეთ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები მეორე რიგის წარმოებულის წესის გამოყენებით:

ა) $f(x) = x^2 - 12x + 10$;

ბ) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$;

გ) $f(x) = x^4 - 32x + 1$;

დ) $f(x) = x^4 - 4x + 3$;

ე) $f(x) = 4x^5 - 5x + 1$;

ვ) $f(x) = 6x^7 - 7x + 1$.

17.6. იპოვეთ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები:

ა) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$;

ბ) $f(x) = \frac{x^4}{5^{5x}}$;

გ) $f(x) = \frac{x^4 e^x}{3^x}$;

დ) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

ე) $f(x) = 2e^x + e^{-x}$;

ვ) $f(x) = x \ln x$.

17.7. ვთქვათ, საჭიროა აშენდეს ერთსართულიანი შენობა, რომლის იატაკიც წარმოადგენს S ფართობის მქონე მართკუთხედს, ხოლო სიმაღლე ფიქსირებულია. რო-

გორი უნდა იყოს მართკუთხედის ზომები, რომ გარე კედლებისათვის დაიხარჯოს საამშენებლო მასალის მინიმალური რაოდენობა?

17.8. ვთქვათ, მასალის მინიმალური დანახარჯებით გვინდა დავამზადოთ V მოცულობის მქონე წრიული ცილინდრული ფორმის დახურული კასრი. როგორი უნდა იყოს კასრის ზომები?

17.9. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები:

ა) $f(x) = x^2 - 6x + 7$;

ბ) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$;

გ) $f(x) = x^3 - 12x + 10$;

დ) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

ე) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

ვ) $f(x) = x^5 - 5x^2 + 1$;

ზ) $f(x) = x^7 - 7x^6$;

თ) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

ი) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

კ) $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$;

ლ) $f(x) = (x+1)^4 + e^x$;

მ) $f(x) = e^{-x^2}$.

17.10. a და b პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება

$$y = ax^3 + bx^2$$

ფუნქციის გრაფიკისათვის (1,3) გადაღუნვის წერტილი?

ლექცია 18

ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები. გლობალური ექსტრემუმი. ფუნქციის გამოკვლევა და მისი გრაფიკის აგება

18.1. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

ფუნქციის ცვალებადობის ხასიათის გამოკვლევისათვის მნიშვნელოვანია მისი გრაფიკის ფორმის დადგენა, როდესაც ამ გრაფიკის წერტილი *უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს*, ანუ როგორც ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, *მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ*. უფრო ზუსტად, ვიტყვით, რომ **ფუნქციის გრაფიკის $M(x,y)$ წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, თუ ამ წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური სიდიდით მიისწრაფვის $+\infty$-სკენ.** განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როდესაც ფუნქციის გრაფიკი მისი წერტილის უსასრულობისაკენ მისწრაფების დროს სულ უფრო და უფრო უახლოვდება (ემსგავსება) რომელიღაც წრფეს. ფუნქციის ამდაგვარ ყოფაქცევასთან დაკავშირებით შემოაქვთ *ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტის ცნება*. ჩვენ უკვე გვქონდა შეხება ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტის ორ კერძო სახესთან, როდესაც უსასრულობაში ფუნქციის ზღვრისა და წერტილში უსასრულოდ დიდი ფუნქციის ცნებას გავეცანით (გაიხსენეთ ფუნქციის *ჰორიზონტალური* და *ვერტიკალური ასიმპტოტების* განმარტება!). შემოვიღოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტის ზოგადი განსაზღვრა.

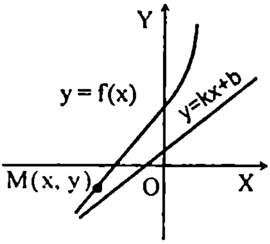
რაიმე წრფეს ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, თუ მანძილი გრაფიკის წერტილიდან ამ წრფემდე მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც ეს წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი OY ღერძის პარალელურია.

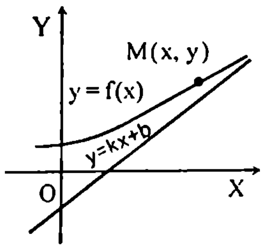
ასიმპტოტს, რომელიც OY ღერძის პარალელური არ არის, დახრილი ასიმპტოტი ეწოდება.

კერძოდ, ჰორიზონტალური ასიმპტოტიც დახრილი ასიმპტოტის კონკრეტულ მაგალითს წარმოადგენს.

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს გააჩნია დახრილი ასიმპტოტი (ნახ. 18.1).



ნახ. 18.1



ნახ. 18.2

ნახ. 18.1-ზე მანძილი $\mathbf{f}$ ფუნქციის გრაფიკის $\mathbf{M(x, y)}$ წერტილიდან $\mathbf{y=kx+b}$ ასიმპტოტამდე მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $\mathbf{x \to -\infty}$, ხოლო ნახ. 18.2-ზე, როდესაც $\mathbf{x \to +\infty}$. ადვილია დარწმუნება იმაში, რომ თუ $\mathbf{y=kx+b}$ წრფე $\mathbf{f}$ ფუნქციის გრაფიკის დახრილ ასიმპტოტს წარმოადგენს, მაშინ

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0, \tag{1}$$

ან

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0. \tag{2}$$

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს 18.1 ნახაზზე წარმოდგენილი შემთხვევა, ე.ი. შესრულებულია (1) ტოლობა, მაშინ

$$\lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

აქედან $$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0,$$

საიდანაც

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{3}$$

ახლა $\mathbf{b}$ შეგვიძლია განვსაზღვროთ (1) ტოლობიდან.

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]. \tag{4}$$

ამრიგად, თუ $\mathbf{y=kx+b}$ წრფე არის $\mathbf{y=f(x)}$ ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტი, მაშინ $\mathbf{k}$ და $\mathbf{b}$ გამოითვლება (3) და (4) ფორმულებით. ძნელი საჩვენებელი არაა, რომ პირიქითაც, თუ (3) და (4) ზღვრები არსებობს, მაშინ $\mathbf{y=kx+b}$ არის დახრილი ასიმპტოტი.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, მივიღებთ $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ და $b=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. ამიტომ ფუნქციის გრაფიკს ექნება პორიზონტალური ასიმპტოტი, რომლის განტოლებაა $\mathbf{y=b}$.

ცხადია, 18.2 ნახაზზე წარმოდგენილი შემთხვევისათვის დახრილი ასიმპტოტის განსასაზღვრავად გვექნება ფორმულები:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \tag{5}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]. \tag{6}$$

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტთან შეიძლება ჰქონდეს *საერთო წერტილები* (სასრული ან უსასრულო რაოდენობის).

მაგალითად, $y=\dfrac{\cos x}{x}$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y=0$ წრფე, რომელსაც $y=\dfrac{\cos x}{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან გადაკვეთის წერტილთა უსასრულო რაოდენობა გააჩნია (ეს წერტილებია $x_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z$).

ცხადია, რომ $f(x)$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტის მოსაძებნად. საკმარისია მოვძებნოთ ისეთი a წერტილი, რომ შესრულდეს ერთი მაინც შემდეგი პირობებიდან:

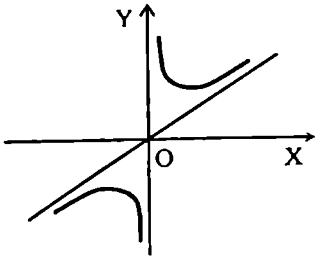
$$\lim_{x\to a+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to a-}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a-}f(x)=-\infty.$$

ასეთი a წერტილის არსებობის შემთხვევაში $x=a$ წრფე იქნება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

მაგალითი 1. მოვძებნოთ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის ასიმპტოტები.

ცხადია, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-\infty$ და $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=+\infty$. ამგვარად, $x=0$ წრფე $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალურ ასიმპტოტს წარმოადგენს. დახრილი ასიმპტოტის მოსაძებნად გამოვითვალოთ (3) და (4) ზღვრები:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}-1\cdot x\right)=0.$$



ნახ. 18.3

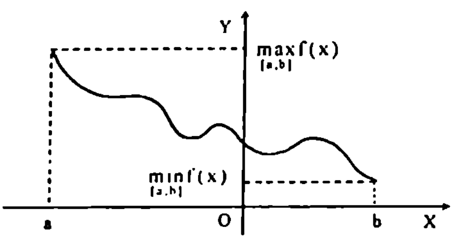
ამრიგად, ფუნქციის დახრილი ასიმპტოტია $y=x$ ($k=1$ და $b=0$).

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამავე ასიმპტოტთან მიგვიყვანს (5) და (6) ზღვრების განხილვა.

ნახ. 18.3-ზე წარმოდგენილია $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი ასიმპტოტთან ერთად.

18.2. გლობალური ექსტრემუმი

ფუნქციის ყოფაქცევის სრულყოფილად შესწავლისათვის, აგრეთვე მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტისას მნიშვნელოვანია *ფუნქციის უდიდესი* და *უმცირესი მნიშვნელობების (გლობალური ექსტრემუმების)* პოვნა. $[a,b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობების აღსანიშნავად სარგებლობენ $\min\limits_{[a,b]} f(x)$ და $\max\limits_{[a,b]} f(x)$ სიმბოლოებით.



ნახ.18.4

ცხადია, ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა სეგმენტზე შესაძლოა არ უდრიდეს ამ ფუნქციის რომელიმე *ლოკალურ მაქსიმუმს (ლოკალური მინიმუმს)* ამ სეგმენტზე (ნახ. 18.4).

ასევე ცხადია, რომ თუ ფუნქცია უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას ღებულობს სეგმენტის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი *ლოკალური მაქსიმუმის (ლოკალური მინიმუმის)* წერტილიც იქნება.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის შემდეგი წესი:

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა, საჭიროა გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლოებსა და ფუნქციის ყველა კრიტიკულ წერტილში, რომელიც ამ სეგმენტში მდებარეობს. გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი იქნება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი კი – ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

შევნიშნოთ, რომ თუ $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე *ზრდადი (კლებადი) ფუნქცია*, მაშინ $f(a)$ და $f(b)$ იქნება შესაბამისად მისი *უმცირესი (უდიდესი)* და *უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობები* ამ სეგმენტზე.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $f(x)=x^3-3x^2$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $[1,3]$ სეგმენტზე.

მოცემულ ფუნქციას $[1,3]$ სეგმენტზე აქვს ერთადერთი კრიტიკული წერტილი $x=2$ და $f(2)=-4$. ვინაიდან $f(1)=-2$ და $f(3)=0$, ამიტომ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 0, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობა -4.

10.9. ფუნქციის გამოკვლევა და მისი გრაფიკის აგება

ახლა ჩვენ უკვე საკმაო ინფორმაციას ვფლობთ იმისათვის, რომ სრულყოფილად გამოვიკვლიოთ ფუნქცია და ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი. ფუნქციის გამოკვლევის სქემას ცალკეული პუნქტების ჩამოთვლის გზით გავეცნობით:

ა) ფუნქციის განსაზღვრის არის დადგენა;

ბ) საკოორდინატო ღერძებთან ფუნქციის გრაფიკის გადაკვეთის წერტილების მოძებნა (OY ღერძთან გრაფიკის გადაკვეთის წერტილია $(0, f(0))$, ხოლო OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილისა მისაძებნად საჭიროა $f(x)=0$ განტოლების ამოხსნა);

გ) ფუნქციის კენტობისა და ლუწობის დადგენა;

დ) კრიტიკული წერტილების პოვნა;

ე) ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების მოძებნა;

ვ) ექსტრემუმის წერტილების მოძებნა და ექსტრემუმების გამოთვლა;

ზ) ფუნქციის ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედებისა და გრაფიკის გადაღუნვის წერტილების მოძებნა;

თ) ფუნქციის ვერტიკალური და დახრილი ასიმპტოტების მოძებნა;

ი) მოპოვებული ინფორმაციის საფუძველზე ფუნქციის გრაფიკის აგება.

მაგალითი 3. ვისარგებლოთ მოყვანილი სქემით $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ ფუნქციის გამოკვლევისა და სათანადო გრაფიკის აგებისათვის.

მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty,\infty[$ შუალედი და ეს ფუნქცია უწყვეტია. ადვილი დასანახია, რომ ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე და სხვა თანაკვეთის წერტილი კოორდინატთა ღერძებთან გრაფიკს არა აქვს.

ცხადია ფუნქცია კენტია, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ახლა მოვძებნოთ ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

$f'(x)=0$ განტოლების ამოხსნით ვადგენთ, რომ ფუნქციის სტაციონარული წერტილებია $x_1=-1$ და $x_2=1$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f(x)>0$, როცა $x\in\ ]-1,1[$ და $f'(x)<0$, როცა $x\in\ ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. ე.ი. ფუნქცია ზრდადია $]-1,1[$ შუალედში და კლებადია $]-\infty,-1[$ და $]1,+\infty[$ შუალედებში, ამიტომ $x_1=-1$ არის ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, ხოლო $x_2=1$ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი:

$$\operatorname{loc}\min f(x)=-\frac{1}{2},\qquad \operatorname{loc}\max f(x)=\frac{1}{2}.$$

ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2-3\right)x}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$f''(x)>0$ და $f''(x)<0$ უტოლობების ამოხსნით, ადვილად მიიღება რომ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია, როცა $x\in\ ]-\infty,-\sqrt{3}[$ და $x\in\ ]0,\sqrt{3}[$ და ჩაზნექილია, როცა $x\in\ ]-\sqrt{3},0[$ და $x\in\ ]\sqrt{3},+\infty[$.

გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები იქნება: $M_1\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $M_2(0,0)$ და $M_3\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

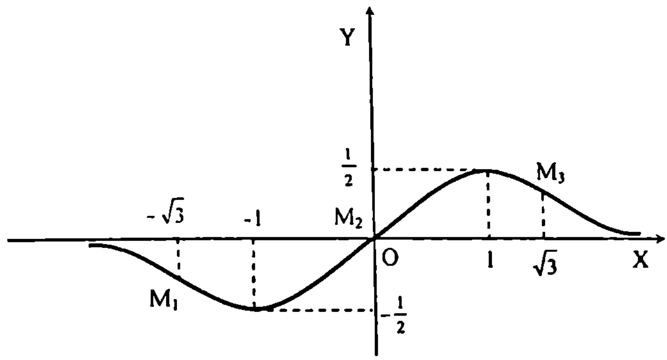
ცხადია, რომ $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია. გამოვიკვლიოთ $y=kx+b$ ტიპის დახრილი ასიმპტოტების არსებობის საკითხი. ამისათვის გამოვთვალოთ შემდეგი ზღვრები:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ჰორიზონტალური ასიმპტოტი $y=0$.

ჩატარებული გამოკვლევის საფუძველზე შეგვიძლია ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 18.5).



ნახ. 18.5

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რა შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფუნქციის გრაფიკის $M(x,y)$ წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ?
2. განსაზღვრეთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი.
3. რით განსხვავდებიან ვერტიკალური და დახრილი ასიმპტოტები ერთმანეთისაგან?
4. მოიყვანეთ ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც განისაზღვრება ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტები.
5. შესაძლოა თუ არა, რომ ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტთან ჰქონდეს გადაკვეთის წერტილთა უსასრულო რაოდენობა? მოიყვანეთ სათანადო მაგალითი.
6. რა პირობის შესრულებაა საკმარისი იმისათვის, რომ $x=a$ წრფე წარმოადგენდეს $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალურ ასიმპტოტს?
7. ჩამოაყალიბეთ რაიმე სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის წესი.
8. გადმოეცით ფუნქციის გამოკვლევის ზოგადი სქემა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

18.1. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკების ჰორიზონტალური ასიმპტოტები:

ა) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2+5}$;

გ) $f(x)=\dfrac{5x+7}{-2x-1}$;

დ) $f(x)=\dfrac{3-2x-9x^2}{3x^2+14x-17}$;

ე) $f(x)=\dfrac{5-7x^5}{3x^5+2x^2-1}$;

ვ) $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$;

ზ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5x+4}$;

თ) $f(x)=\dfrac{9\cdot5^x-2\cdot2^x}{6\cdot5^x-3\cdot2^x}$;

ი) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+7}-x$;

კ) $f(x)=\dfrac{3\cdot7^{-x}+5}{2\cdot7^{-x}+10}$.

18.2. დაადგინეთ, აქვს თუ არა ვერტიკალური ასიმპტოტები შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკებს:

ა) $f(x)=\dfrac{2}{3+4x}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2+5}$;

გ) $f(x)=x+\dfrac{2}{x-3}$;

დ) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$;

ე) $f(x)=\dfrac{5x^4+2}{4x^3}$;

ვ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$.

18.3. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკების ასიმპტოტები:

ა) $f(x)=x-\dfrac{7}{x}$;

ბ) $f(x)=\dfrac{3x^3}{x^2+16}$;

გ) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$;

დ) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$;

ე) $f(x)=xe^x$;

ვ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$.

18.4. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გლობალური ექსტრემუმები მითითებულ შუალედებზე:

ა) $f(x)=x^2-4x+1,\quad [-1,1]$;

ბ) $f(x)=x^3-3x^2+2,\quad [0,4]$;

გ) $f(x)=-x^4+8x^2+1,\quad [-1,3]$.

18.5. გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

ა) $f(x)=x^4+4x^3+7$;

ბ) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$;

გ) $f(x)=\frac{x+1}{x^2}$;

დ) $f(x)=\frac{x^2+2x-4}{x^2}$.

18.6. იპოვეთ p პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)=\frac{px^2+1}{x-p}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი $y=2x-1$ წრფის პარალელურია.

18.7. იპოვეთ p პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)=\frac{(p^2+1)x^2-1}{px+1}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი $y=-\frac{1}{2}x$ წრფის პერპენდიკულარულია.

18.8. იპოვეთ p პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $f(x)=\frac{1}{p^2x^2+x+1}$ ფუნქციის გრაფიკს არ გააჩნია ვერტიკალური ასიმპტოტი.

18.9. იპოვეთ p პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)=-x^2+p\sqrt{x}$ ფუნქციას გლობალური მაქსიმუმი აქვს $x=2$ წერტილში.

18.10. იპოვეთ p პარამეტრის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(1,f(1))$ იქნება $f(x)=(p+1)x^3-px^2+3$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

ლექცია 19

მრავალი ცვლადის ფუნქცია. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა. კერძო წარმოებულები

ბიზნესსა და ეკონომიკაში ხშირად ეხედებით ისეთ ამოცანებს, რომელთა გადაწყვეტა შესაძლებელია მხოლოდ *მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციათა* თეორიის დახმარებით. სიმარტივისათვის ჩვენ განვიხილავთ ორი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებს, რაც გამართლებულად მიგვაჩნია იმის გამო, რომ ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში მიღებული ძირითადი შედეგების განზოგადება სამი და უფრო მეტი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებისათვის ხდება სრულიად ბუნებრივად და რაიმე არსებით სიძნელეებთან არ არის დაკავშირებული.

19.1. მრავალი ცვლადის ფუნქცია

განვიხილოთ კონკრეტული

მაგალითი 1. ვთქვათ, ფირმა აწარმოებს და ყიდის ორი – A და B სახის პროდუქციას. A სახის პროდუქციის საცალო ფასია $2, ხოლო B სახის პროდუქციის საცალო ფასი $4.

დავუშვათ, გაიყიდა A სახის პროდუქციის x რაოდენობა და B სახის პროდუქციის y რაოდენობა, მაშინ ფირმის მიერ მიღებული შემოსავალი იქნება

$$R = 2x + 4y.$$

როგორც ვხედავთ, შემოსავლის მნიშვნელობა განისაზღვრება ორი ცვლადით x-ითა და y-ით. ეს კი ნიშნავს, რომ შემოსავალი არის ორი ცვლადის x-ის და y-ის ფუნქცია

$$R = R(x,y) = 2x + 4y.$$

ახლა შემოვიღოთ ორი ცვლადის ფუნქციის მკაცრი განმარტება.

ვთქვათ, D_f არის რიცხვითი წყვილების რაიმე სიმრავლე, ე.ი. $D_f \subset R \times R$. $f\colon D_f \to R$ ასახვას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქცია.

ე.ი. ორი ცვლადის ფუნქცია $z = f(x,y)$ არის ასახვა, რომლის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს რიცხვით წყვილთა რაიმე სიმრავლე.

ორი ცვლადის ფუნქცია $z=f(x,y)$ განსაზღვრის არის ყოველ დალაგებულ რიცხვით წყვილს უთანადებს ერთსა და მხოლოდ ერთ რიცხვს z-ს. x და y არიან დამოუკიდებელი ცვლადები, z კი – დამოკიდებული ცვლადი.

მაგალითი 2. ვთქვათ, გამოსათვლელია $f(5,1)$, $g(2,3)$ და $h(1,2)$, თუ

ა) $f(x,y)=2x-3y$; ბ) $g(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$; გ) $h(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

ამოხსნა. გვექნება: ა) $f(5,1)=2\cdot5-3\cdot1=7$; ბ) $g(2,3)=\dfrac{1}{2+3}=\dfrac{1}{5}$;

გ) $h(1,2)=\sqrt{9-1^2-2^2}=2$.

თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე წარმოადგენს რიცხვთა *დალაგებული სამეულების რაიმე სიმრავლეს*, მაშინ საქმე გვაქვს *სამი ცვლადის ფუნქციასთან*

$$w=f(x,y,z).$$

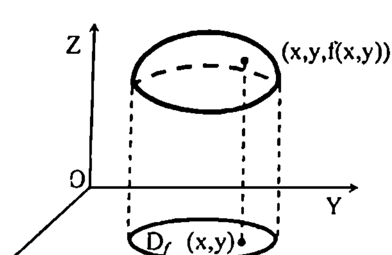
ანალოგიურად განიმარტება *ოთხი და მეტი ცვლადის ფუნქცია*.

19.2. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

როგორც უკვე აღინიშნა, *ორი ცვლადის* $f(x,y)$ *ფუნქცია* თავისი განსაზღვრის D_f არის ყოველ (x,y) წერტილს შეუსაბამებს ერთადერთ $z=f(x,y)$ ნამდვილ რიცხვს. აქედან გამომდინარე, ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში შეიძლება განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა *დალაგებული სამეულების* ანუ სივრცის წერტილთა შემდეგი სიმრავლე

$$G_f=\{(x,y,f(x,y))\,|\,(x,y)\in D_f\}.$$

ბუნებრივია, ისევე როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, აღნიშნულ სიმრავლეს ვუწოდოთ *ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი*. ხშირ შემთხვევაში იგი წარმოადგენს გარკვეულ ზედაპირს სივრცეში. ამიტომ $z=f(x,y)$ თანაფარდობას საზოგადოდ უწოდებენ ზედაპირის განტოლებას. ცხადია, OXY სიბრტყის პერპენდიკულარულად გავლებულმა ნებისმიერმა წრფემ $f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი მხოლოდ ერთ წერტილში შეიძლება გადაკვეთოს (იხ. ნახ. 19.1).



ნახ. 19.1

ვთქვათ, რაიმე წესის მიხედვით ნებისმიერ ნატურალურ n რიცხვს შეესაბამება სიბრტყის ერთადერთი $C_n = C_n(x_n, y_n)$ წერტილი. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ მოცემულია C_n წერტილთა (ანუ დალაგებულ (x_n, y_n) რიცხვით წყვილთა) მიმდევრობა. ჩვენთვის ცნობილია, რომ მანძილი C_n და $C = C(a,b)$ წერტილებს შორის

$$C_nC = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \tag{1}$$

ფორმულით გამოითვლება.

ვიტყვით, რომ $C_n = C_n(x_n, y_n)$ წერტილთა მიმდევრობა $C = C(a,b)$ წერტილისაკენაა კრებადი (ანუ დალაგებულ (x_n, y_n) წყვილთა მიმდევრობა დალაგებული (a,b) წყვილისაკენაა კრებადი), თუ არაუარყოფით რიცხვთა $(C_nC)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არის უსასრულოდ მცირე. შესაბამისი აღნიშვნებია:

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C, \quad \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a,b).$$

(1) ფორმულის გათვალისწინებით, ადვილად დავასკვნით, რომ (x_n, y_n) დალაგებულ წყვილთა მიმდევრობა (a,b) წყვილისაკენაა კრებადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი წერტილში ისევე განიმარტება, როგორც ეს ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში გვქონდა.

A რიცხვს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი (a,b) წერტილში, თუ $f(x,y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არის წერტილთა (a,b)-სკენ კრებად დალაგებულ (x_n, y_n) წყვილთა ნებისმიერი მიმდევრობისათვის, რომლის ყოველი წევრი განსხვავებულია (a,b)-საგან, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = A.$$

იმ ფაქტს, რომ A რიცხვი არის $f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი (a,b) წერტილში, ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y) = A. \tag{2}$$

ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში უწყვეტობის განმარტების ანალოგიურია (a,b) წერტილში *ორი ცვლადის* $f(x,y)$ *ფუნქციის უწყვეტობის* განმარტებაც.

$f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი განსაზღვრის არის (a,b) წერტილში, თუ მას გააჩნია ზღვარი ამ წერტილში და ეს ზღვარი ამავე (a,b) წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b). \tag{3}$$

თუ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე D სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია D სიმრავლეზე.

თუ $z=f(x,y)$ ფუნქცია არ არის უწყვეტი (a,b) წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ამ წერტილში ის განიცდის წყვეტას.

შევნიშნავთ, რომ თეორემები ზღვრისა და უწყვეტობის შესახებ, რომლებიც ჩვენთვის ერთი ცვლადის ფუნქციებისთვისაა ცნობილი, სამართლიანია ორი ცვლადის ფუნქციების შემთხვევაშიც.

მაგალითი 3. ვთქვათ, $f(x,y)=2x^2-3xy+y^2$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს OXY სიბრტყეზე. განვიხილოთ წერტილი $C(2,3)$. $C_n=C_n(x_n,y_n)$ წერტილთა ყოველი მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია $C(2,3)$ წერტილისაკენ, გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2x_n^2-3x_ny_n+y_n^2\right)=2\cdot 2^2-3\cdot 2\cdot 3+3^2=-1.$$

ამრიგად, $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი $(2,3)$ წერტილში

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\to 3}}\left(2x^2-3xy+y^2\right)=-1.$$

როგორც ადვილი შესამოწმებელია, -1-ის ტოლია განსახილველი ფუნქციის მნიშვნელობაც $(2,3)$ წერტილში და მაშასადამე, $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია ამ წერტილში.

მაგალითი 4. არსებითად განსხვავებული მდგომარეობაა

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+2y^2, & \text{როცა } (x,y)\neq(0,1),\\ 10, & \text{როცა } (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

ფუნქციის შემთხვევაში:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x,y)=2\neq f(0,1)=10,$$

და მაშასადამე, ფუნქცია წყვეტას განიცდის (0,1) წერტილში.

19.3. კერძო წარმოებულები

ორი ცვლადის ფუნქციის ყოფაქცევის გამოკვლევისათვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია *კერძო წარმოებულის* ცნება.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$z=f(x,y).$$

თუ ამ დამოკიდებულებაში y-ს ჩავთვლით მუდმივად, მაშინ $z=f(x,y)$ ფუნქცია შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ერთი x ცვლადის ფუნქცია ეთქვათ, Δx არის x ცვლადის ნაზრდი. ფუნქციის სათანადო ნაზრდს ვუწოდოთ *კერძო ნაზრდი x ცვლადის მიმართ* და აღვნიშნოთ იგი Δz_x -ით. ამრიგად,

$$\Delta z_x=f(x+\Delta x,\ y)-f(x,y).$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ Δx-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$. გვექნება

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}. \tag{4}$$

თუ არსებობს (4) ზღვარი, მაშინ მას $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულს უწოდებენ x ცვლადით. ამრიგად, $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული x ცვლადით ეწოდება ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

მისთვის გვაქვს აღნიშვნები: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, f_x', $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. იკითხება შესაბამისად: „დე z დე x-ით“, „f შტრიხ x-ით“, „დე f(x,y) დე x-ით“.

ანალოგიურად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ **x** მუდმივია და **y** ცვლადს მივცემთ Δy ნაზრდს, მაშინ ფუნქციის სათანადო ნაზრდი იქნება

$$\Delta z_y = f(x, y+\Delta y) - f(x, y), \qquad (5)$$

რომელსაც ვუწოდებთ *კერძო ნაზრდს* **y** *ცვლადის მიმართ.* (5) ტოლობის ორივე მხარის Δy-ზე გაყოფა და ზღვარზე გადასვლა, როცა $\Delta y \to 0$ მოგვცემს (ამ ზღვარის არსებობის შემთხვევაში) $f(x, y)$ *ფუნქციის კერძო წარმოებულს* **y** *ცვლადით*, ე.ი. გვექნება

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

ვინაიდან კერძო წარმოებულის განმარტება ფორმალურად ისეთივეა, როგორიც ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის განმარტება, ამიტომ თეორემები ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულების შესახებ მართებულია ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულებისთვისაც.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი ფუნქციის კერძო წარმოებულის მოძებნაზე.

მაგალითი 5. ვთქვათ, $z = f(x, y) = \dfrac{xy}{x+y}$. ვიპოვოთ z ფუნქციის კერძო წარმოებული x ცვლადით (z ფუნქციის გამოსახულებაში y-ს ვგულისხმობთ მუდმივად)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}.$$

სრულიად ანალოგიურად,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

თუ გვაინტერესებს კერძო წარმოებულის მნიშვნელობა რომელიმე ფიქსირებულ წერტილში, ე.ი. არგუმენტების რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, მაშინ მიღებულ კერძო წარმოებულში ჩავსვამთ არგუმენტების მოცემულ მიშვნელობებს და გამოვითვლით მიღებული რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობას.

მაგალითად, ზემოთ მოცემული z ფუნქციის კერძო წარმოებულების მნიშვნელობები (1,2) წერტილში იქნება:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = \frac{2^2}{(1+2)^2} = \frac{4}{9},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}=\frac{1^2}{(1+2)^2}=\frac{1}{9}.$$

როგორც ადვილი დასანახია, ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ (მათ *პირველი რიგის კერძო წარმოებულებსაც* უწოდებენ) კვლავ ორი ცვლადის ფუნქციებს წარმოადგენენ. ამ ფუნქციათა კერძო წარმოებულებს (თუკი ისინი არსებობენ), $z=f(x,y)$ *ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს* უწოდებენ. მათთვის სარგებლობენ აღნიშვნებით:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$ – *მეორე რიგის კერძო წარმოებული* x*-ით,*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$ – *მეორე რიგის კერძო წარმოებული* y*-ით,*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}&=\left(f'_x\right)'_y=f''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\left(f'_y\right)'_x=f''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}$$ – *მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულები.*

ანალოგიურად განიმარტება *ფუნქციის მესამე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები.*

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

ჯერ ვიპოვოთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

ახლა ვიპოვოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$$

$$=x\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\cdot 2y=-\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$$

$$=y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\cdot 2x=-\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x}(x)-x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)-x^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

19.1. $z=-5x+3y+1$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს სიბრტყეს სივრცეში. იპოვეთ ამ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილები საკოორდინატო OX, OY და OZ ღერძებთან.

19.2. დაადგინეთ, ძევს თუ არა $C=C(x_0,y_0,z_0)$ წერტილი $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკზე:

ა) $C=C(0,1,4)$, $z=2x^2+y^2+5$;

ბ) $C=C(0,0,0)$, $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

გ) $C=C(1,2,-3)$,
$z=\sqrt{2x^2+y^2+3}$;

დ) $C=C(3,2,\sqrt{3}-\sqrt{2})$,
$z=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

19.3. წარმოადგენს თუ არა სფერო (ბირთვული ზედაპირი) რომელიმე ფუნქციის გრაფიკს? პასუხი დაასაბუთეთ.

19.4. შეარჩიეთ p პარამეტრის მნიშვნელობა ისეთნაირად, რომ წერტილი $C=C(x_0,\ y_0,\ z_0)$ მოთავსებული იყოს $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკზე:

ა) $C=C(1,2,2)$,
$z=px^2-p^2y+3$;

ბ) $C=C(1,2,4)$,
$z=2p^2x+y^2-4p$.

19.5. ვთქვათ, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. იპოვეთ:

ა) $f(0,0)$;

ბ) $f(0,1)$;

გ) $f(1,0)$;

დ) $A=A(x,y)$ წერტილიდან რომელ წერტილამდე მანძილს გამოსახავს $f(x,y)$ ფუნქცია?

19.6. რამდენი ცვლადის ფუნქციით გამოისახება სიბრტყის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი?

19.7. სიბრტყის ნებისმიერი (x,y) წერტილიდან რომელ წერტილამდე მანძილს გამოსახავს

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

ფუნქცია?

19.8. გაარკვიეთ, კრებადია თუ არა წერტილთა მიმდევრობები:

ა) $C_n=C_n\left(\dfrac{1}{n},n^2\right)$,
$n=1,2,\ldots;$

ბ) $M_n=M_n\left(\sqrt{n},\dfrac{n+1}{n}\right)$,
$n=1,2,\ldots;$

გ) $D_n=D_n\left(\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}},\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)$,
$n=1,2,\ldots;$

დ) $B_n=B_n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n},\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}\right)$,
$n=1,2,\ldots.$

19.9. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\left(3x^2-2x^2y\right)$;

ბ) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

გ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy+x^2+y+x}{xy+y^2+x+y}$;

დ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin x\,\sin y}{xy}$.

19.10. ისარგებლეთ იმით, რომ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს ორი სხვადასხვა ზღვარი წერტილში და დაასაბუთეთ, რომ ფუნქციას $z=\dfrac{x-y}{x+y}$ არა აქვს ზღვარი (0,0) წერტილში.

19.11. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$;

ბ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2y^2)}{x^2y}$.

19.12. დაასაბუთეთ $z=f(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობა $C=C(a,b)$ წერტილში:

ა) $z=x+2xy+y^2$, $C=C(1,0)$;

ბ) $z=2x^3-x^2y+4$, $C=C(-1,2)$;

გ) $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $C=C(0,-1)$.

19.13. დაადგინეთ, განიცდის თუ არა წყვეტას კოორდინატთა სათავეში ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{როცა } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

19.14. იპოვეთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და გამოთვალეთ მათი მნიშვნელობები მითითებულ წერტილში:

ა) $f(x,y)=x^2-y^2$, $(1,2)$;

ბ) $f(x,y)=xy-x^2y^3+y^4$, $(1,-1)$;

გ) $f(x,y)=\sqrt{xy}$, $(1,1)$;

დ) $f(x,y)=\sqrt{1+xy}$, $(0,1)$;

ე) $f(x,y)=e^{x-y^2}$, $(0,3)$;

ვ) $f(x,y)=xy\,e^{xy}$, $(1,1)$;

ზ) $f(x,y)=xy\,e^{-xy}$, $(1,1)$;

თ) $f(x,y)=\ln(x+2y)$, $(1,0)$;

ი) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$, (e,e).

19.15. იპოვეთ f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} და f''_{yx}, თუ:

ა) $f(x,y)=x^2y^4$;

ბ) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^3}$;

გ) $f(x,y)=e^{2x-3y}$;

დ) $f(x,y)=e^{x-y}$.

ლექცია 20

ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი. პირობითი ექსტრემუმი. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი

20.1. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

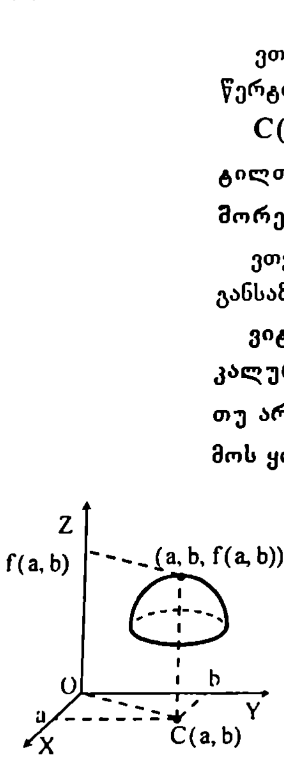
ვთქვათ, $C(a,b)$ არის სიბრტყის ნებისმიერი, ფიქსირებული წერტილი.

$C(a,b)$ წერტილის δ მიდამო ეწოდება ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც $C(a,b)$ წერტილიდან დაშორებული არიან δ-ზე ნაკლები მანძილით.

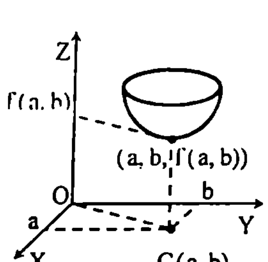
ვთქვათ, $C(a,b)$ წერტილი ეკუთვნის $z=f(x,y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

ვიტყვით, რომ $C(a,b)$ არის $z=f(x,y)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (ლოკალური მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი δ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი (x,y) წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$f(a,b)\ge f(x,y) \quad (f(a,b)\le f(x,y)).$$



ნახ. 20.1



ნახ. 20.2

$f(a,b)$-ს ეწოდება ლოკალური მაქსიმუმი (ლოკალური მინიმუმი). შესაბამისი აღნიშვნაა $\text{loc max } f(x,y)$ $(\text{loc min } f(x,y))$. ლოკალური მაქსიმუმისა და ლოკალური მინიმუმის წერტილებს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო ლოკალურ მაქსიმუმებსა და ლოკალურ მინიმუმებს – ლოკალური ექსტრემუმები.

ნახ. 20.1 და ნახ. 20.2-ზე გამოსახულია შესაბამისად ლოკალური მაქსიმუმისა და ლოკალური მინიმუმის შემთხვევები.

ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქციას (a,b) წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, მაშინ ერთი ცვლადის $f(x,b)$ ფუნქციას $x=a$ წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი და $f'_x(a,b)=0$. ანალოგიურად

გვექნება $f'_y(a,b)=0$. ადვილი დასანახია, რომ ეს ტოლობები ძალაშია იმ შემთხვევაშიც, როცა (a,b) წარმოადგენს $f(x,y)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილს.

ამრიგად, თუ $z=f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და (a,b) არის ამ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ პირველი რიგის კერძო წარმოებულების მნიშვნელობები ამ წერტილში ნულის ტოლია:

$$\begin{cases} f'_x(a,b)=0, \\ f'_y(a,b)=0. \end{cases} \tag{1}$$

ჩამოყალიბებული დებულება *ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის* სახელწოდებითაა ცნობილი. მას დიდი გამოყენება აქვს ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანებში.

$C(a,b)$ წერტილს, რომლის კოორდინატებიც (1) სისტემას აკმაყოფილებენ, ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი.

შევნიშნოთ, რომ უწყვეტ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს აგრეთვე იმ წერტილშიც, რომელშიც კერძო წარმოებულები არ არსებობენ.

ყველა იმ წერტილის ერთობლიობას, რომლებშიც $f(x,y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები ნულის ტოლია ან არ არსებობს, კრიტიკული წერტილები ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ (1) პირობები არ არის საკმარისი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობისათვის.

მაგალითად, $z=xy$ ფუნქციას (0,0) წერტილში აქვს კერძო წარმოებულები, რომლებიც ნულის ტოლია, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი. ფუნქცია დადებითია OXY სიბრტყის I და III მეოთხედში და უარყოფითია II და IV მეოთხედში.

ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის თანახმად, ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ამ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს შორის უნდა ვეძებოთ. ბუნებრივად ისმის კითხვა: როგორ დავადგინოთ, წარმოადგენს თუ არა ესა თუ ის კრიტიკული წერტილი ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილს, ანუ რაში მდგომარეობს *ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა?*

დასმულ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა (*ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა*).

თეორემა. **ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქციას აქვს პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, (a,b) წარმოადგენს $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონარულ წერტილს და აგრეთვე**

$$W(a,b)=f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b)-\left(f''_{xy}(a,b)\right)^2>0, \qquad (2)$$

მაშინ ამ წერტილში ფუნქციას აქვს ლოკალური ექსტრემუმი, სახელდობრ, ფუნქციას (a,b) წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, თუ ამ წერტილში $f''_{xx}(a,b)<0$, ხოლო აქვს ლოკალური მინიმუმი, თუ $f''_{xx}(a,b)>0$. თუ $W(a,b)<0$, მაშინ $f(x,y)$ ფუნქციას არა აქვს ლოკალური ექსტრემუმი (a,b) წერტილში. თუ $W(a,b)=0$, მაშინ გვაქვს საეჭვო შემთხვევა და საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა იმის დასადგენად, აქვს თუ არა $f(x,y)$ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი (a,b) წერტილში.

$W(a,b)$-ს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის დისკრიმინანტი (a,b) წერტილში.

მაგალითი 1. მოყვანილი თეორემა გამოვიყენოთ, $z=f(x,y)=2x+8y-x^2-2y^2$ ფუნქციისათვის ექსტრემუმის საკითხის გამოსაკვლევად. ამ ფუნქციისათვის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2-2x=0, \\ f'_y(x,y)=8-4y=0. \end{cases}$$

მიღებული სისტემის ამოხსნა გვაძლევს ერთადერთ კრიტიკულ წერტილს $C=C(1,2)$. გამოვთვალოთ ფუნქციის დისკრიმინანტი ამ წერტილში, გვაქვს:

$$f''_{xx}(1,2)=-2, \quad f''_{yy}(1,2)=-4, \quad f''_{xy}(1,2)=0,$$

საიდანაც $W(1,2)=(-2)(-4)-0^2=8>0$. ამრიგად, ფუნქციას აქვს ლოკალური ექსტრემუმი. რადგანაც $f''_{xx}(1,2)<0$, ამიტომ $(1,2)$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი

$$\operatorname{loc}\max f(x,y)=f(1,2)=9.$$

20.2. პირობითი ექსტრემუმი

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ამოცანები, რომლებშიც საჭიროა მოიძებნოს ფუნქციის ექსტრემუმი ისეთ სიტუაციაში, როდესაც არგუმენტები აკმაყოფილებენ რაიმე დამატებით პირობებს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა. ვთქვათ, ფარმაცევტული ფირმა აწარმოებს ორი – A და B სახის წამალს. 1 კგ A სახის წამლის რეალიზაციით მიღებული მოგებაა 4 დოლარი, ხოლო B სახის წამლით – 6 დოლარი. A და B სახის წამლებზე მოთხოვნის ერთმანეთთან დამოკიდებულება მოიცემა შემდეგი განტოლებით

$$x^2+y^2+2x+4y-4=0, \tag{3}$$

სადაც x და y არის, შესაბამისად, A და B სახის წამლების რაოდენობა კილოგრამებში.

ფირმას სურს დაადგინოს, თუ A და B სახის წამლების რა რაოდენობა (გამოსახული კილოგრამებში) უნდა გამოუშვას მაქსიმალური მოგების მიზნით. ამ ეკონომიკურ ამოცანას ბუნებრივად მიეყავართ შემდეგ მათემატიკურ ამოცანაზე.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$P(x,y)=4x+6y$$

მოგების ფუნქციის მაქსიმუმი იმ პირობით, რომ x და y აკმაყოფილებდნენ (3) განტოლებას. მოკლედ ამ ამოცანას ასეთნაირად ჩაწერენ:

$$\begin{cases} \max P(x,y), \\ x^2+y^2+2x+4y-4=0. \end{cases} \tag{4}$$

(4) სახის ამოცანების განხილვას მივყავართ ე.წ. *პირობითი ექსტრემუმის* ამოცანებამდე.

ვთქვათ, მოსაძებნია $z=f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი, როდესაც დამოუკიდებელი ცვლადები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი განტოლებით

$$g(x,y)=0. \tag{5}$$

ამ ამოცანის ჩაწერის ფორმა ასეთია:

$$\begin{cases} \text{ext}\, f(x,y), \\ g(x,y)=0. \end{cases} \tag{6}$$

მაგალითი 3. ნათქვამის საილუსტრაციოდ ვიპოვოთ $z=x+2y$ ფუნქციის ექსტრემუმი $x^2+y^2=5$ პირობით (ბმის განტოლება).

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x,y,\lambda)=x+2y+\lambda x^2+\lambda y^2-5\lambda.$$

შესაბამისად (8) სისტემას ექნება სახე:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=1+2\lambda x=0, \\ L'_y(x,y,\lambda)=2+2\lambda y=0, \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-5=0, \end{cases}$$

რომელსაც გააჩნია ორი ამონახსნი $\left(-1,-2,\frac{1}{2}\right)$ და $\left(1,2,-\frac{1}{2}\right)$.

რადგანაც $g'_x(x,y)=2x, g'_y(x,y)=2y, L''_{xx}(x,y)=2\lambda, L''_{yy}(x,y)=2\lambda$ და $L''_{xy}(x,y)=0$, გვექნება

$$W(x,y,\lambda)=4x^2\cdot 2\lambda+4y^2\cdot 2\lambda=8\lambda(x^2+y^2).$$

რადგანაც $W\left(-1,-2,\frac{1}{2}\right)=8\cdot\frac{1}{2}(1+4)=20>0$, წერტილი (-1,-2) არის პირობითი მინიმუმის წერტილი და

$$\min f(x,y)=f(-1,-2)=-1+2\cdot(-2)=-5.$$

ანალოგიურად, $W\left(1,2,-\frac{1}{2}\right)=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+4)=-20<0$ და ამდენად, (1,2) პირობითი მაქსიმუმის წერტილია, ამასთან

$$\max f(x,y)=f(1,2)=1+2\cdot 2=5.$$

შევნიშნოთ რომ, ზოგჯერ ბმის $g(x,y)=0$ განტოლება ისეთია, რომ ამ განტოლებიდან შესაძლებელია ერთ-ერთი ცვლადის, მაგალითად, y-ის განსაზღვრა: $y=\varphi(x)$. თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობას განსახილველ $z=f(x,y)$ ფუნქციაში, მივიღებთ ერთი ცვლადის $z=f(x,\varphi(x))$ ფუნქციას. ამრიგად, ასეთ შემთხვევაში პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა დაიყვანება ჩვეულებრივი ექსტრემუმის ამოცანაზე ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება $C(a,b)$ წერტილის δ მიდამო?
2. განსაზღვრეთ $f(x,y)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმისა და ლოკალური მაქსიმუმის წერტილები.
3. რას ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი? კრიტიკული წერტილი?
4. რაში მდგომარეობს ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა?
5. ამოწერეთ $f(x,y)$ ფუნქციის დისკრიმინანტი (a,b) წერტილში.
6. ჩამოაყალიბეთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა.
7. ამოწერეთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც წარმოადგენს პირობითი ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას.
8. რას უწოდებენ პირობითი ექსტრემუმის სტაციონარულ წერტილს ბმის $g(x,y)=0$ განტოლების მიმართ?
9. რა შემთხვევაში აქვს $f(x,y)$ ფუნქციას პირობითი მაქსიმუმი პირობითი (მინიმუმი) (a,b) წერტილში?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

20.1. დაადგინეთ, ეკუთვნის თუ არა $M=M(x_0,y_0)$ წერტილი $C=C(a,b)$ წერტილის δ მიდამოს:

ა) $M=M(-1,3)$, $C=C(0,1)$ და $\delta=1$;

ბ) $M=M(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $C=C(\sqrt{3},\sqrt{3})$ და $\delta=0{,}5$.

20.2. იპოვეთ δ-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წერტილი (2,5) არ ეკუთვნის (-1,-2) წერტილის δ მიდამოს.

20.3. იპოვეთ მოცემულ ფუნქციათა კრიტიკული წერტილები:

ა) $z=(x-1)^2+2y^2$;

ბ) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;

გ) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$;

დ) $z=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$;

ე) $z=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

20.4. გამოთვალეთ $f(x,y)$ ფუნქციის დისკრიმინანტი $C=C(a,b)$ წერტილში:

ა) $f(x,y)=x^2+y^2+5$, $C=C(0,0)$;

ბ) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$, $C=C(1,1)$;

გ) $f(x,y)=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$, $C=C(1,3)$;

დ) $f(x,y)=e^{x\cdot y}(x^2-2y^2)$, $C=C(1,0)$.

20.5. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა ლოკალური ექსტრემუმები:

ა) $f(x,y)=5+4x+6y-x^2-3y^2$;

ბ) $f(x,y)=2x^2+xy+2y^2$;

გ) $f(x,y)=x^3+y^2-3x-4y+7$;

დ) $f(x,y)=xy(x-y)+y^2-4y$.

20.6. როგორი უნდა იყოს V მოცულობის მქონე მართკუთხა აუზის განზომილებები (აუზის სიღრმე, ფსკერის სიგრძე და ფსკერის სიგანე), რომ მის მოსაპირკეთებლად დაიხარჯოს უმცირესი რაოდენობის მასალა?

20.7. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ პირობითი ექსტრემუმები:

ა) $\begin{cases}\min(3x^2+y^2),\\ x+y=4;\end{cases}$

ბ) $\begin{cases}\max(-x^2+xy-4y^2),\\ x+y=-4;\end{cases}$

გ) $\begin{cases}\min(2x^2+xy+y^2+x),\\ 2x+y-3=0;\end{cases}$

დ) $\begin{cases}\max(-2x^2+xy-y^2+3x+y),\\ 2x+3y+11=0.\end{cases}$

20.8. რა მაქსიმალური ფართობი შეიძლება შემოისაზღვროს P პერიმეტრის მქონე მართკუთხედით? განსაზღვრეთ ამ მართკუთხედის გვერდები.

20.9. 20.7. ა) სავარჯიშოში მოცემული პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა დაიყვანეთ ერთი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის ამოცანაზე.

20.10. ვთქვათ, ფარმაცევტული ფირმა აწარმოებს ორი – A და B სახის წამალს. 1 კგ A სახის წამლის რეალიზაციით მიღებული მოგებაა 3 დოლარი, ხოლო B სახის წამლით – 4 დოლარი. A და B სახის წამლებზე მოთხოვნის ერთმანეთთან დამოკიდებულება მოიცემა შემდეგი განტოლებით $x^2+y^2-1=0$, სადაც x და y არის, შესაბამისად, A და B სახის წამლების რაოდენობა კილოგრამებში. A და B სახის წამლების რა რაოდენობა უნდა გამოუშვას ფირმამ მაქსიმალური მოგების მიზნით?

20.11. ვთქვათ, სარეკლამო სააგენტო A სახის რეკლამის დასამზადებლად ხარჯავს 25 დოლარს, ხოლო B სახის რეკლამაზე – 36 დოლარს. A და B სახის რეკლამებზე მოთხოვნის ერთმანეთთან დამოკიდებულება მოიცემა განტოლებით $xy-900=0$, სადაც x და y არის, შესაბამისად, A და B სახის რეკლამების რაოდენობა. A და B სახის რეკლამების რა რაოდენობა უნდა აწარმოოს სააგენტომ მინიმალური ხარჯის მიზნით?

E. კითხვები და ამოცანები გამეორებისათვის (ლექციები 17-20)

E.1. 40 მეტრი სიგრძის მავთული უნდა შემოავლონ ყვავილნარს, რომელსაც წრის სექტორის ფორმა უნდა ჰქონდეს. როგორი რადიუსისათვის ექნება ყვავილნარს უდიდესი ფართობი?

E.2. მდინარის გასწვრივ უნდა შემოიღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი. როგორი ზომები უნდა ჰქონდეს ამ მართკუთხედს, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი, თუ ღობის სიგრძე 200 მეტრია, ხოლო მიწის ნაკვეთი სამი მხრიდანაა შემოღობილი?

E.3. უნდა დამზადდეს 72 სმ^3 მოცულობის სახურავიანი ყუთი, რომლის ფუძის (მართკუთხედის) გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2. რა ზომების უნდა იყოს ყუთი, რომ მის დამზადებაზე დაიხარჯოს მასალის უმცირესი რაოდენობა?

E.4. ცილინდრული ფორმის უსახურავო კასრი V ლ წყალს იტევს. როგორი ზომები ექნება კასრს, რომელსაც უმცირესი ზედაპირის ფართობი აქვს?

E.5. ფანჯარა მართკუთხოვანი და ნახევარწრის ფორმის ორი ნაწილისაგანაა დამზადებული (მართკუთხოვანზე დადგმულია ნახევარწრის ფორმის მქონე ნაწილი). მოცემული P პერიმეტრისათვის შეარჩიეთ ფანჯრის ზომები ისე, რომ ფანჯარამ „გაატაროს ყველაზე მეტი სინათლე“.

E.6. მოძებნეთ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები:

ა) $f(x)=\frac{1}{2}x(200-x)$;

ბ) $f(x)=\pi x^2+\frac{2}{x}$;

გ) $f(x)=2x^2+\frac{108}{x}$;

დ) $f(x)=\frac{\pi x^2}{2}+x(p-\pi x-2x)$.

E.7. იპოვეთ ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები:

ა) $y=x+2x^4$;

ბ) $y=\frac{1}{x+3}$;

გ) $y=\sqrt[3]{x+2}$;

დ) $y=3x^5-5x^4+3x-2$.

E.8. იპოვეთ ფუნქციათა გრაფიკების ასიმპტოტები:

ა) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$;

ბ) $f(x)=\frac{x}{x^2-4x+3}$;

გ) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$;

დ) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+9}$;

ე) $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$;

ე) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

E.9. გამოიკვლიეთ ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

ა) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$;

ბ) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

E.10. მოცემულია სამკუთხედის პერიმეტრი 2P. გამოსახეთ სამკუთხედის S ფართობი, როგორც მისი ორი x და y გვერდის ფუნქცია.

E.11. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და ფუძის y რადიუსის ფუნქცია.

E.12. გამოსახეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის V მოცულობა, როგორც მისი x სიმაღლისა და y გვერდითი წიბოს ფუნქცია.

E.13. ვთქვათ, $F(x,y)=\dfrac{x}{x-y}$. აჩვენეთ, რომ $F(a,b)+F(b,a)=1$.

E.14. იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

ბ) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

გ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

დ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$.

E.15. იპოვეთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები:

ა) $z=x^4+y^3+3x^3y-2xy^2+3$;

ბ) $z=x^2\sin^2 y$;

გ) $z=\dfrac{5}{x+2y}$;

დ) $z=\ln(x^2+y^2)$;

ე) $z=e^{-\frac{x}{y}}$;

ვ) $z=\sin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

E.16. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლოკალური ექსტრემუმები:

ა) $z=1+6x-x^2-xy-y^2$;

ბ) $z=x^3+y^3+3xy$;

გ) $z=x^2+3xy-17x-12y$;

დ) $z=x^2-xy+y^2-3x-2y+2$;

ე) $z=x^3+y^3-3xy+10$;

ვ) $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

E.17. იპოვეთ $z=f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი, როდესაც დამოუკიდებელი ცვლადები ერთმანეთთან დაკავშირებულია $g(x,y)=0$ განტოლებით:

ა) $f(x,y)=xy,\ g(x,y)=x+y-1$;

ბ) $f(x,y)=x^2+y^2$,

$g(x,y)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1$;

გ) $z=x+2y$,

$g(x,y)=x^2+y^2-5$;

დ) $z=e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, $g(x,y)=x+y-2$.

ლექცია 21

პირველადი ფუნქცია. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები

21.1. პირველადი ფუნქცია

ფუნქციის დინამიკის გამოკვლევასთან დაკავშირებული კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისას ჩვენ არაერთგზის მოგვიხდა გაწარმოების ოპერაციის ჩატარება, რაც მოცემული ფუნქციის მიხედვით მისი წარმოებულის მოძებნას გულისხმობს. ეკონომიკური თეორიის მათემატიკურ მოდელებში ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნა გაწარმოების შებრუნებული ოპერაციის ჩატარებას მოითხოვს.

განსაზღვრება. **რიცხვით შუალედზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია ანუ ინტეგრალი ეწოდება ისეთ $F(x)$ ფუნქციას, რომლის წარმოებული $f(x)$ ფუნქციის ტოლია:**

$$F'(x) = f(x).$$

მაგალითად, $\sin x$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა $-\cos x$.

მოცემული ფუნქციის პირველადი ფუნქციის ანუ ინტეგრალის მოძებნას ფუნქციის ინტეგრება ეწოდება.

ინტეგრება წარმოადგენს გაწარმოების შებრუნებულ ოპერაციას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ერთი პირველადი ფუნქცია, მაშინ მას ექნება უამრავი პირველადი ფუნქცია. კერძოდ, თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველადი ფუნქცია, მაშინ $F(x)+C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირველად ფუნქციას.

მართლაც, თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია, ე.ი., თუ

$$F'(x) = f(x),$$

მაშინ

$$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x).$$

ცნობილია, რომ ერთი და იმავე ფუნქციის ორ ნებისმიერ პირველად ფუნქციათა შორის სხვაობა მუდმივია, ამიტომ $F(x)+C$ გამოსახულება მოგვცემს $f(x)$ ფუნქციის ყველა პი-

რეელადთა სიმრავლეს, როცა C გაირბენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს. ამრიგად, $F(x)+C$ გამოსახულება არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციის ზოგადი სახე.

მოცემული $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველადი ფუნქციისა და ნებისმიერი C მუდმივის $F(x)+C$ ჯამს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და ასე აღინიშნება

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{1}$$

ეს ტოლობა შემდეგნაირად იკითხება: განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)\,dx$-დან ტოლია $F(x)$ პლუს ნებისმიერი მუდმივი C.

(1) ტოლობაში $f(x)$-ს *ინტეგრალქვეშა ფუნქციას*, $f(x)dx$-ს *ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას*, ხოლო $\int$ სიმბოლოს *ინტეგრალის ნიშანს* უწოდებენ.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს

თეორემა 1. **სეგმენტზე განსაზღვრულ ყოველ უწყვეტ ფუნქციას აქვს პირველადი ფუნქცია.**

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პირველადი ფუნქცია, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ *ინტეგრებადი ფუნქციაა*.

21.2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები

განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ:

ა) განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ტოლია

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x);$$

ბ) განუსაზღვრელი ინტეგრალი რაიმე ფუნქციის წარმოებულიდან უდრის ამ ფუნქციისა და ნებისმიერი მუდმივის ჯამს

$$\int F'(x)dx = F(x)+C;$$

გ) მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A = \text{const};$$

დ) განუსაზღვრელი ინტეგრალი ორი ფუნქციის ალგებრული ჯამიდან უდრის მოცემული ფუნქციებიდან ინტეგრალების ალგებრულ ჯამს

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

ეს უკანასკნელი თვისება სამართლიანია აგრეთვე შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

ადვილი შესამოწმებელია აგრეთვე შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad \alpha \in R;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

აღნიშნული ფორმულების მართებულობის შესამოწმებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ მარჯვენა მხარეში მდგომი ფუნქციების წარმოებულები მარცხენა მხარის ინტეგრალქვეშა ფუნქციების ტოლია. ეს კი უშუალოდ ელემენტარული ფუნქციების გაწარმოების ჩვენთვის ცნობილი ფორმულებიდან გამომდინარეობს.

ახლა გავეცნოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის *ნაწილობითი ინტეგრების ხერხს.* $U=U(x)$ და $V=V(x)$ ფუნქციათა ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად გვაქვს

$$(UV)'=U'V+UV',$$

ასე

$$U'V=(UV)'-UV'.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int U'Vdx=\int (UV)'dx-\int UV'dx,$$

საიდანაც გვექნება

$$\int U'Vdx=UV-\int V'Udx. \qquad (2)$$

ამ ტოლობას ეწოდება *ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.* მისი გამოყენებით ერთი განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება მეორე განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი აღმოჩნდეს, ვიდრე პირველი.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $U'dx=dU$ და $V'dx=dV$, ფორმულა (2) შემდეგი სახით შეიძლება გადაიწეროს

$$\int VdU=UV-\int UdV.$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int xe^x dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $U(x)=x$, $V'(x)=e^x$. ცხადია, რომ $U'(x)=1$ და $V(x)=e^x$. თუ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების (2) ფორმულას, მივიღებთ

$$\int xe^x dx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int (x)'e^x dx=$$
$$=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$

თუ ჩვენთვის ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის პირველადი $F(x)$ ფუნქცია, მაშინ $\int f(ax+b)dx$ ტიპის ინტეგრალის გამოთვლის საშუალებას გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 2. (ჩასმის ხერხი). თუ $\int f(x)dx = F(x)+C$, მაშინ

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია და $a \neq 0$.

დამტკიცება. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}\left[F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\frac{1}{a}F(ax+b)$ არის $f(ax+b)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია და მაშასადამე,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

$$\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1, \alpha \in R;$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C;$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C.$$

მოვიყვანოთ კონკრეტული

მაგალითები: ა) $\int (2x+3)^4 dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^5}{5}+C = \frac{(2x+3)^5}{10}+C;$

ბ) $\int \frac{1}{5-8x}dx = -\frac{1}{8}\ln|5-8x|+C;$

გ) $\int e^{3x+2}dx = \frac{1}{3}e^{3x+2}+C.$

ზოგიერთი ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს წილადს, რომლის მრიცხველი მნიშენელის წარმოებულის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გამოსათვლელია *განუსაზღვრელი ინტეგრალი ლოგარითმული წარმოებულიდან.*

ჩვენთვის ცნობილია, რომ

$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტების თანახმად, როცა $f(x) > 0$ გვექნება

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x) < 0$, ფორმულას ექნება სახე

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

მართლაც, როცა $f(x) < 0$, გვაქვს $|f(x)| = -f(x)$ და, მაშასადამე, $\left(\ln|f(x)|\right)' = \left[\ln\left(-f(x)\right)\right]' = \dfrac{-f'(x)}{-f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

მაგალითად, გამოვითვალოთ ინტეგრალი: $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1 + x^2}$.

გვექნება $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1 + x^2} = \int \frac{2x\,dx}{2(1 + x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2} dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$$

ანალოგიური მსჯელობით ადვილი შესამოწმებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$\int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} = \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია ანუ ინტეგრალი?
2. რას ეწოდება ფუნქციის ინტეგრება?
3. მოიყვანეთ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციის არსებობის საკმარისი პირობა.
4. როგორ ფუნქციას წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი ორი პირველადი ფუნქციის სხვაობა?
5. მოიყვანეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტება.
6. განუსაზღვრელი ინტეგრალის რომელი თვისებებია თქვენთვის ცნობილი?
7. რომელ ელემენტარულ ფუნქციათა განუსაზღვრელი ინტეგრალებია თქვენთვის ცნობილი? ამოწერეთ სათანადო ტოლობები.
8. მოიყვანეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.
9. რაში მდგომარეობს ჩასმის ხერხი?
10. როგორ გამოითვლება განუსაზღვრელი ინტეგრალი ლოგარითმული წარმოებულიდან?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

21.1. იპოვეთ f(x) ფუნქციის ისეთი პირველადი ფუნქცია, რომლის გრაფიკზეც ძევს $A=A(x_0,y_0)$ წერტილი:

ა) $f(x)=2,\ A=A(1,2)$;

ბ) $f(x)=2x-1,\ A=A(0,1)$;

გ) $f(x)=e^x,\ A=A(0,5)$;

დ) $f(x)=\frac{2}{x},\ A=A(1,8)$;

ე) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ A=A\left(\frac{1}{2},2\right)$;

ვ) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\ A=A\left(\frac{\pi}{4},2\right)$.

21.2. ცნობილია, რომ $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ რომელიღაც $\varphi(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციებია. ცნობილია აგრეთვე, რომ $\varphi_1(1)=-1$ და $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=x^2$. იპოვეთ $\varphi_2(x)$ ფუნქცია.

21.3. $g(x)=x\sqrt{x}+1$ წარმოადგენს f(x)-ის პირველად ფუნქციას. იპოვეთ f(x) ფუნქციის გრაფიკისადმი გავლებული მხების დახრილობა წერტილში, რომლის აბსცისა ტოლია 3-ის.

21.4. შეარჩიეთ k პარამეტრის მნიშვნელობა ისეთნაირად, რომ $\varphi(x)=(k^2-1)x^2+x-1$ ფუნქცია წარმოადგენდეს $f(x)=2x+1$-ის პირველად ფუნქციას.

21.5. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

ა) $\int x^3dx$;

ბ) $\int x^{0.2}dx$;

გ) $\int x^{-9}dx$;

დ) $\int x^{-0.01}dx$;

ე) $\int 11dx$;

ვ) $\int\frac{dx}{x^2}$;

ზ) $\int\frac{dt}{t^2}$;

თ) $\int\frac{x^{\frac{4}{5}}dx}{x}$;

ი) $\int 2\pi t^{\frac{7}{4}}dt$;

კ) $\int\sqrt{x^3}dx$;

ლ) $\int(5x^2+3x)dx$;

მ) $\int(8x^4-e^x+2)dx$;

ნ) $\int\left(7x^2+3e^x+\frac{5}{x}\right)dx$;

ო) $\int\left(3t^2+5t^7-\frac{8}{t^4}\right)dt$;

პ) $\int\sqrt[m]{x^n}dx$;

ჟ) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$;

რ) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$;

ს) $\int 10^x dx$;

ტ) $\int a^x e^x dx$;

უ) $\int(3\sin x+4\cos x)dx$;

ყ) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$;

ქ) $\int\left(2\cdot 5^x+3\sin x+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$;

ღ) $\int\left(5e^x+\frac{7}{\cos^2 x}+2\cos x\right)dx$.

21.6. საწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

ა) $\int x\sin x\,dx$;

ბ) $\int x\cos x\,dx$;

გ) $\int x^2\sin x\,dx$;

დ) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

ე) $\int\ln x\,dx$;

ვ) $\int x^2e^x\,dx$;

ზ) $\int x\ln x\,dx$;

თ) $\int x^2\cos x\,dx$.

21.7. ჩასმის ხერხის გამოყენებით იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

ა) $\int(5x-3)^4\,dx$;

ბ) $\int(4x-5)^{-3}\,dx$;

გ) $\int(4-3x)^7\,dx$;

დ) $\int\sqrt{3x+2}\,dx$;

ე) $\int\sqrt{(8x-1)^3}\,dx$;

ვ) $\int\sqrt[3]{(2-7x)^5}\,dx$;

ზ) $\int e^{3x+1}\,dx$;

თ) $\int e^{-2x+5}\,dx$;

ი) $\int e^{5x+4}\,dx$;

კ) $\int\frac{dx}{3x+1}$;

ლ) $\int\frac{dt}{1-4t}$;

მ) $\int\frac{dt}{(3t-1)^2}$;

ნ) $\int\frac{dx}{(2-5x)^3}$;

ო) $\int\frac{dx}{(7x-3)^8}$;

პ) $\int\left(\frac{1}{(3x+4)^2}-\frac{1}{3x+4}\right)dx$;

ჟ) $\int\frac{dx}{(ax+b)^n}$.

21.8. ლოგარითმული წარმოებულიდან ინტეგრების ხერხის გამოყენებით იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

ა) $\int\frac{dx}{x+1}$;

ბ) $\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}$;

გ) $\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}$;

დ) $\int\frac{e^x\,dx}{e^x+3}$;

ე) $\int\frac{x+2}{x+3}dx$;

ვ) $\int\frac{dx}{x\ln x}$.

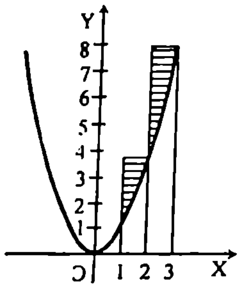
ლექცია 22

განსაზღვრული ინტეგრალი. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

22.1. განსაზღვრული ინტეგრალი

განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებათაგანია, რომლის წარმოშობა ისტორიულად დაკავშირებულია ფიგურის ფართობის, სხეულის მოცულობისა და წირის სიგრძის გამოთვლის ამოცანებთან. ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია მხოლოდ ისეთი ბრტყელი ფიგურების ფართობთა გამოთვლა, რომლებიც შემოსაზღვრულია წრფეთა მონაკვეთებით და წრეწირის რკალებით. გაცილებით უფრო ზოგადი ფორმის ბრტყელ ფიგურათა ფართობების გამოთვლა შესაძლებელია განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით. ვიდრე განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებას შემოვიტანდეთ, განვიხილოთ

მაგალითი. ავიღოთ ფუნქცია $y=x^2$ და გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია OX ღერძით, $y=x^2$ პარაბოლით და ორდინატთა ღერძის პარალელური $x=1$ და $x=3$ წრფეებით (ნახ. 22.1).



ნახ. 22.1

[1,3] სეგმენტი დავყოთ ორ ტოლ ნაწილად. მივიღებთ წერტილებს:

$$x_0=1, \quad x_1=2, \quad x_3=3$$

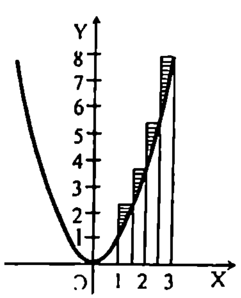
და

$$\Delta x_0=\Delta x_1=1.$$

სიდიდე,

$$f(x_1)\Delta x_0+f(x_2)\Delta x_1=f(2)\Delta x_0+f(3)\Delta x_1=$$
$$=f(2)+f(3)=4+9=13,$$

რომელიც გამოსახავს მიღებულ ქვესეგმენტებზე აგებული ორი მართკუთხედის ფართობთა ჯამს, წარმოადგენს ზემოთ აღნიშნული ფართობის მიახლოებით მნიშვნელობას.



ნახ. 22.2

ახლა [1,3] სეგმენტი დავყოთ ოთხ ტოლ ნაწილად (ნახ. 22.2). ახალი დაყოფის წერტილებია:

$$x_0=1,\quad x_1=\frac{3}{2},\quad x_2=2,\quad x_3=\frac{5}{2},\quad x_4=3,$$

ხოლო $\Delta x_0=\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=0{,}5$.

აქაც, წინა შემთხვევის ანალოგიურად, სიდიდე

$$\begin{aligned}&f(x_1)\Delta x_0+f(x_2)\Delta x_1+f(x_3)\Delta x_2+f(x_4)\Delta x_3=\\&=\left[f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)\right]0{,}5=\\&=(2{,}25+4+6{,}25+9)\cdot 0{,}5=10{,}75,\end{aligned}$$

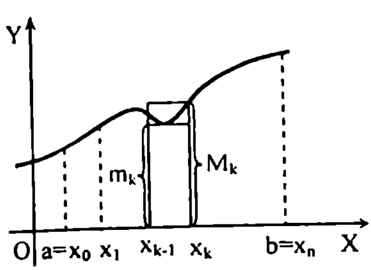
რომელიც გამოსახავს მიღებულ ქვესეგმენტებზე აგებული ოთხი მართკუთხედის ფართობთა ჯამს, წარმოადგენს განსახილველი ფიგურის ფართობის მეორე, უფრო ზუსტ მიახლოებით მნიშვნელობას.

ცხადია რომ, რაც უფრო მეტია აღებული სეგმენტის თანაბრად დაყოფათა რიცხვი, მით უფრო ზუსტია საძიებელი ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ამ გზით მიღებული მართკუთხედების ფართობთა ჯამის ზღვარი, როცა აგებული სეგმენტის თანაბრად დაყოფათა რიცხვი უსასრულოდ იზრდება, არის საძიებელი ფართობი.

განვაზოგადოთ ეს ამოცანა. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და ღებულობს მხოლოდ არაუარყოფით მნიშვნელობებს (ნახ. 22.3). განვიხილოთ **ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია OX ღერძით, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით და ორდინატთა ღერძის პარალელური $x=a$ და $x=b$ წრფეებით. ასეთ ფიგურას მრუდწირულ ტრაპეციას ვუწოდებთ.** ჩვენს მიზანს ამ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის განსაზღვრა შეადგენს.

დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი n ნაწილად, ნებისმიერი $x_0, x_1, x_2\dots, x_n$ წერტილებით, სადაც

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{k-1}<$$
$$<x_k<\dots<x_{n-1}<x_n=b.$$



ნახ. 22.3

ამ შემთხვევაში მრუდწირული ტრაპეცია დაიყოფა ზოლებად. აღვნიშნოთ m_k-თი $[x_{k-1},x_k]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა, ხოლო M_k-თი უდიდესი მნიშვნელობა.

შესაბამისი ზოლის ფართობი იყოს $S(x_{k-1},x_k)$ $(k=1,2,...,n)$. ცხადია, რომ m_k და M_k სიდიდეები არსებობენ, რადგან სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას გააჩნია თავისი უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები. $S(x_{k-1},x_k)$ ფართობი ნაკლები არაა იმ მართკუთხედის ფართობზე, რომლის ფუძეა x_k-x_{k-1} და სიმაღლეა m_k და არ აღემატება იმ მართკუთხედის ფართობს, რომლის ფუძეა x_k-x_{k-1} და სიმაღლეა M_k (ნახ. 22.3), ე.ი.

$$(x_k-x_{k-1})m_k \leq S(x_{k-1},x_k) \leq (x_k-x_{k-1})M_k . \qquad (1)$$

თუ (1) უტოლობებში k-ს მივცემთ $1,2,...,n$ მნიშვნელობებს, გვექნება:

$$(x_1-x_0)m_1 \leq S(x_0,\ x_1) \leq (x_1-x_0)M_1,$$

$$(x_2-x_1)m_2 \leq S(x_1,\ x_2) \leq (x_2-x_1)M_2,$$

....

$$(x_k-x_{k-1})m_k \leq S(x_{k-1},x_k) \leq (x_k-x_{k-1})M_k,$$

....

$$(x_n-x_{n-1})m_n \leq S(x_{n-1},x_n) \leq (x_n-x_{n-1})M_n.$$

ამ უტოლობათა წევრობრივი შეკრება გვაძლევს

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})_k \leq S(a,b) \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})M_k . \qquad (2)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})m_k \quad \textit{(ქვედა ჯამების მიმდევრობა)}, \qquad (3)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})M_k \quad \textit{(ზედა ჯამების მიმდევრობა)}. \qquad (4)$$

ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით, (2) შემდეგნაირად გადაიწერება

$$s_n \leq S(a,b) \leq S_n . \qquad (5)$$

მტკიცდება რომ, თუ დაცულია პირობა $\lim\limits_{n\to\infty}(x_k - x_{k-1}) = 0$, $(k = 1,2,\dots,n)$, მაშინ არსებობს ქვედა და ზედა ჯამების (3), (4) მიმდევრობათა ზღვრები და ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{6}$$

უკანასკნელი (6) ტოლობის გათვალისწინებით, (5) უტოლობებში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$S(a,b) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{7}$$

ამრიგად, ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას.

თეორემა 1. თუ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ქვედა და ზედა ჯამების მიმდევრობები კრებადია და მათ აქვთ ერთი და იგივე ზღვარი. ამ საერთო ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი a-დან b-მდე და აღინიშნება ასე

$$\int_a^b f(x)dx.$$

ამრიგად, განმარტების თანახმად

$$S(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k.$$

ახლა შევარჩიოთ თითოეულ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ნებისმიერი ξ_k წერტილი. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k \le \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(\xi_k) \le \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k,$$

ანუ

$$s_n \le \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(\xi_k) \le S_n,$$

და ამდენად,

$$S(a,b) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(\xi_k).$$

უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი შეიძლება შემდეგნაირადაც განიმარტოს: $[a,b]$ სეგმენტი დავყოთ ქვესეგმენტებად, ყოველ მათგანში შევარჩიოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\overline{S}_n=(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_1)+\cdots+$$
$$+(x_k-x_{k-1})f(\xi_k)+\cdots+(b-x_{n-1})f(\xi_n).$$

თუ $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფათა რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება, ამასთან თითოეული ქვესეგმენტის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ $\overline{S}_n$ ჯამების მიმდევრობას აქვს ზღვარი, რომელიც $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის ტოლია.

22.2. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

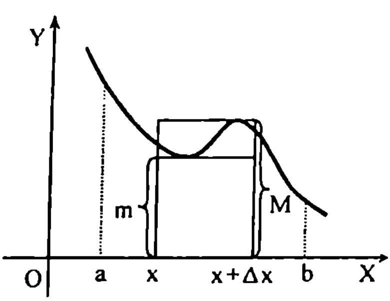
ახლა ვნახოთ თუ რა კავშირი არსებობს განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალებს შორის. ამისათვის, განვიხილოთ არაუარყოფითი $y=f(x)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე. შევარჩიოთ ამ სეგმენტზე რაიმე x წერტილი და სიმოკლისათვის $S(x)$-ით აღვნიშნოთ $S(a,x)$ ფართობი. ცხადია, რომ თუ x იცვლება a-დან b-მდე, მაშინ $S(x)$ ფართობი იცვლება 0-დან $S(a,b)$-მდე.

ვთქვათ, Δx არის დამოუკიდებელი ცვლადის რაიმე ნაზრდი. თუ m და M სათანადოდ აღნიშნავს $y=f(x)$ ფუნქციის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობას $[x,\ x+\Delta x]$ სეგმენტზე (ნახ. 22.4), მაშინ

$$\Delta x\cdot m\le \Delta S(x)\le\Delta x\cdot M,$$

ანუ

$$m\le\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}\le M.$$



ნახ. 22.4

თუ $\Delta x\to 0$, მაშინ M და m სიდიდეებიც მიისწრაფვიან $f(x)$-საკენ ($f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო) და, მაშასადამე

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=f(x),$$

ანუ

$$S'(x)=f(x).$$

ამრიგად, $S(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი ფუნქცია. თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველადი, მაშინ

$$S(x)=F(x)+C.$$

მეორეს მხრივ, განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტების თანახად

$$S(x)=\int_a^x f(x)dx,$$

ამიტომ

$$S(a)=F(a)+C=0.$$

აქედან

$$C=-F(a)$$

და

$$S(b)=F(b)+C=F(b)-F(a).$$

ამრიგად,

$$S(b)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

მიღებული შედეგი ჩამოვაყალიბოთ დებულების სახით.

თეორემა 2. $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი a-დან b-მდე b და a წერტილებში $f(x)$ ფუნქციის პირველადი $F(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობის ტოლია.

ეს არის *ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა.*

სხვაობა $F(b)-F(a)$ აღინიშნება სიმბოლოთი

$$[F(x)]_a^b \quad \text{ან} \quad F(x)\Big|_a^b.$$

ფორმულას

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{7}$$

ეწოდება ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა.

იგი ამყარებს კავშირს განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალებს შორის.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნის ნაწილობითი ინტეგრების, ჩასმის და ლოგარითმული წარმოებულიდან ინტეგრების ხერხის გათვალისწინებით ადვილად მივიღებთ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელ სათანადო ფორმულებს:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx;$$

$$\int_a^b f(kx+c)\,dx = \frac{1}{k}\left[F(kx+c)\right]_a^b, \quad k \neq 0;$$

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left[\ln|f(x)|\right]_a^b,$$

სადაც $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირველადი ფუნქცია.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებაზე.

მაგალითად, გამოვთვალოთ $y=3x^2+2x+5$ ფუნქციის გრაფიკით, OX ღერძით, $x=1$ და $x=3$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობი.

(7)-ის თანახმად საძიებელი ფართობია

$$S = \int_1^3 (3x^2+2x+5)dx =$$

$$= \left[x^3+x^2+5x\right]_1^3 = 51-7 = 44.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია უარყოფითია, ე.ი. მისი გრაფიკი მდებარეობს OX ღერძის ქვემოთ, მაშინ შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ $y=x^2-9$ ფუნქციის გრაფიკით, OX ღერძით, $x=0$ და $x=2$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი.

(8) ფორმულის თანახმად, საძიებელი ფართობია

$$S=-\int_0^2(x^2-9)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_0^2=9\cdot2\frac{2^3}{3}=\frac{46}{3}.$$

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს როგორც დადებით, ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს და შესაძლებელია ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილების პოვნა. ასეთ შემთხვევაში ფიგურა, რომლის ფართობსაც ვეძებთ, შედგება რამდენიმე მრუდწირული ტრაპეციისაგან. მათგან ნაწილი მოთავსებულია OX ღერძის ზემოთ, ნაწილი კი OX ღერძის ქვემოთ, ამიტომ საჭიროა $[a,b]$ შუალედი დავყოთ $f(x)$ ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედებად და თითოეულ მათგანზე გამოვთვალოთ ფართობი შესაბამისი ფორმულით. საძიებელი ფართობი იქნება მიღებულ ფართობთა ჯამი.

მაგალითად, $y=-x^2+4$ ფუნქციის გრაფიკით, OX ღერძით, $x=0$ და $x=3$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობია ($y=-x^2+4$ ფუნქცია დადებითია $]0,2[$ შუალედზე და უარყოფითია $]2,3[$ შუალედზე)

$$S=\int_0^2(-x^2+4)dx-\int_2^3(-x^2+4)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2-\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_2^3=7\frac{2}{3}.$$

იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან $y=g(x)>0$ ფუნქციის გრაფიკით და $x=a$ და $x=b$ წრფეებით, იქნება $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციისა და $y=g(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობთა სხვაობა.

მაგალითად, $y=x^2+5$, $y=x^3$ ფუნქციათა გრაფიკებით და $x=1$ და $x=2$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობია ($[1,2]$ შუალედზე $y=x^2+5$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკის ზემოთ)

$$S=\int_1^2\left[(x^2+5)-x^3\right]dx=\left[\frac{x^3}{3}+5x-\frac{x^4}{4}\right]_1^2=3\frac{7}{12}.$$

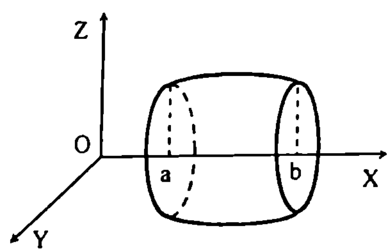
22.3. ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოთვლა

განვიხილოთ OXYZ საკოორდინატო სივრცეში სხეული, რომლის გეგმილი OX ღერძზე არის $[a,b]$ სეგმენტი. ნებისმიერ $x\in[a,b]$ წერტილზე გავავლოთ OX ღერძის მართობული სიბრტყე. ამ სიბრტყისა და სხეულის თანაკვეთით მიღებული ფიგურის ფართობი აღვნიშნოთ $S(x)$-ით. როცა x იცვლება $[a,b]$ სეგმენტზე, $S(x)$ გვაძლევს ამ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციას. ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ მოცემული *სხეულის მოცულობა* გამოითვლება ფორმულით

$$V=\int_a^b S(x)dx. \tag{9}$$

კერძოდ, $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული არაუარყოფითი, უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, და $x=a$, $x=b$ და $y=0$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის (ნახ. 22.5) მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{10}$$



ნახ. 22.5

(10) ფორმულის მისაღებად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $x\in[a,b]$-ზე გამავალი კვეთა არის წრე, რომლის რადიუსია $r=f(x)$ და ე.ი. $S(x)=\pi r^2=\pi f^2(x)$. ახლა (10) ფორმულის გამოსაყვანად საკმარისია გამოვიყენოთ (9).

მაგალითი. გამოვთვალოთ $[0, \frac{\pi}{2}]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $y=\sqrt{x\cos x}$ ფუნქციის გრაფიკითა და $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ და $y=0$ წრფეებით შე-

მოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა. საძიებელი მოცულობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (10) ფორმულით

$$V=\pi\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{x\cos x}\right)^2dx=\pi\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx=\pi\int_0^{\pi/2}x(\sin x)'dx=$$

$$=\pi\left[x\sin x\right]_0^{\pi/2}-\pi\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\frac{\pi^2}{2}+\pi\left[\cos x\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{2}-\pi.$$

პასუხი: $V=\dfrac{\pi^2}{2}-\pi.$

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. როგორ ფიგურას უწოდებენ მრუდწირულ ტრაპეციას?
2. $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის როგორ აიგება ქვედა (ზედა) ჯამების მიმდევრობა?
3. რა პირობებშია კრებადი ქვედა (ზედა) ჯამების მიმდევრობები?
4. მოიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტება.
5. მოიყვანეთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა.
6. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უარყოფითია $[a,b]$ სეგმენტზე. რომელი ფორმულით გამოითვლება შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი?
7. როგორ გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან $y=g(x)$ ფუნქციის გრაფიკით და $x=a$ და $x=b$ წრფეებით?
8. მოიყვანეთ ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

22.1. დაყავით [0,1] სეგმენტი ოთხ ტოლ ქვესეგმენტად და $f(x)=x^3$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ სათანადო ზედა და ქვედა ჯამები.

22.2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:

ა) $\int_{-1}^{4} x^3 dx$;

ბ) $\int_{0}^{27} \sqrt[3]{x} dx$;

გ) $\int_{0}^{1} 2^x dx$

დ) $\int_{1}^{5} e^x dx$;

ე) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x}$;

ვ) $\int_{0}^{\pi} \cos x dx$.

22.3. შემდეგი ინტეგრალების გამოსათვლელად ისარგებლეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით:

ა) $\int_{0}^{\pi} x \sin x dx$;

ბ) $\int_{1}^{e} \ln x dx$;

გ) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx$;

დ) $\int_{1}^{e} x \ln x dx$.

22.4 ისარგებლეთ ჩასმის ხერხით და გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

ა) $\int_{0}^{1} (5x-3)^3 dx$;

ბ) $\int_{0}^{2} \sqrt{3x+2} dx$;

გ) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{3x+1}$;

დ) $\int_{1}^{3} e^{2x+1} dx$.

22.5. ლოგარითმული წარმოებულიდან ინტეგრების ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

ა) $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x+1}$;

ბ) $\int_{0}^{2} \frac{x dx}{1+x^2}$;

გ) $\int_{0}^{\pi} \frac{-\sin x dx}{\cos x+4}$;

დ) $\int_{1}^{2} \frac{e^x dx}{e^x+2}$;

ე) $\int_{2}^{e} \frac{dx}{x \ln x}$;

ვ) $\int_{2}^{3}\frac{3e^{2x}\,dx}{e^{2x}-1}$.

22.6. გამოთვალეთ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომლის საზღვრებია:

ა) $y=5x^2$, $x=0$, $x=2$, OX ღერძი;

ბ) $y=2+x-x^2$, $x=-1$, $x=2$, OX ღერძი;

გ) $y=e^x$, $x=-1$, $x=2$, OX ღერძი;

დ) $y=-x^2$, $x=-1$, $x=1$, OX ღერძი.

22.7. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია:

ა) $y=2e^x+1$ და $y=x^2$ ფუნქციათა გრაფიკებით და $x=0$ და $x=1$ წრფეებით;

ბ) $y=\sqrt{x}$ და $y=5$ ფუნქციათა გრაფიკებით და $x=1$ და $x=4$ წრფეებით.

22.8. იპოვეთ $y=x\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკით და $x=0$, $x=4$, $y=0$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.9. იპოვეთ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკით და $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.10. იპოვეთ $y=e^x$ ფუქციის გრაფიკით და $x=1$, $x=3$, $y=0$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.11. სხეული მიიღება $y=x^2$ პარაბოლის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით ($1\le x\le 2$). იპოვეთ მიღებული ბრუნვითი სხეულის მოცულობა.

ლექცია 23

არასაკუთრივი ინტეგრალი

წინა ლექციაზე განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება შემოტანილი იყო $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი (და ამიტომ შემოსაზღვრული) ფუნქციებისათვის. მაგრამ ხშირად საჭირო ხდება ისეთი ინტეგრალების განხილვა, რომლებშიც ან ინტეგრების შუალედი ან საინტეგრო ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული. მათ *არასაკუთრივ ინტეგრალებს* უწოდებენ.

23.1. არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელ შუალედზე

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,+\infty[$ უსასრულო ნახევარსეგმენტზე და ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,t]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\varphi(t)=\int_a^t f(x)dx$$

ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,+\infty[$ შუალედზე.

თუ არსებობს $\varphi(t)$ ფუნქციის სასრული ზღვარი, როცა $t\to+\infty$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,+\infty[$ შუალედზე და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოთი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

ამრიგად,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx. \tag{1}$$

ანალოგიურად, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty,b]$ შუალედზე, მაშინ

$$g(t)=\int_t^b f(x)dx$$

ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty,b]$ შუალედზე.

თუ არსებობს $g(t)$ ფუნქციის სასრული ზღვარი, როცა $t \to -\infty$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $]-\infty, b]$ შუალედზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx.$$

ამრიგად,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx. \qquad (2)$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედზე და არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad \text{და} \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

სადაც a ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მათ ჯამს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $]-\infty, +\infty[$ შუალედზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

ამრიგად,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (3)$$

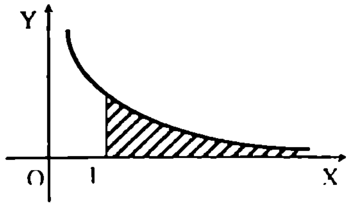
თუ არასაკუთრივი ინტეგრალი არსებობს, მაშინ ინტეგრალს კრებადი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ინტეგრალს ეწოდება განშლადი.

მაგილითი 1. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

არსაკუთრივი ინეგრალის განმარტების თანახმად გვაქვს

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{1}^{t} = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}.$$



ნახ. 23.1

ამრიგად,

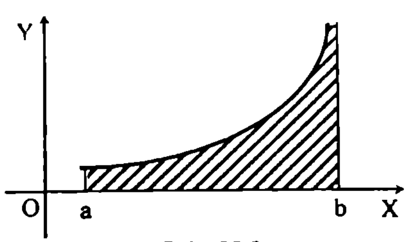
$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ გამოთვლილი არასაკუთრივი ინტეგრალი ნახ. 23.1-ზე დაშტრიხული *„უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის"* ფართობს გამოსახავს.

საზოგადოდ, თუ $f(x)>0$, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ წარმოადგენს აბსცისათა ღერძით, $x=a$ წრფითა და $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს. ანალოგიური გეომეტრიული ინტერპრეტაცია აქვს $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$ არასაკუთრივ ინტეგრალს.

23.2. არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b[$ შუალედზე და უწყვეტია ყოველ $[a,t]$ სეგმენტზე, სადაც $a<t<b$. ამასთან, მას აქვს მეორე გვარის წყვეტა b წერტილში (ნახ. 23.2).



ნახ. 23.2

ცხადია, ყოველი t-სთვის არსებობს ინტეგრალი $\int_{a}^{t}f(x)dx$. იგი წარმოადგენს t არგუმენტის უწყვეტ ფუნქციას:

$$F(t)=\int_{a}^{t}f(x)dx, \qquad a<t<b. \tag{4}$$

თუ არსებობს ამ ფუნქციის სასრული ზღვარი მარცხნიდან b წერტილში, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a,b[$ შუალედზე და აღინიშნება $\int_{a}^{b}f(x)dx$ სიმბოლოთი.

ამრიგად,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx. \qquad (5)$$

ამ შემთხვევაში არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება კრებადი. წინააღმდეგ შემთხვევაში არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება განშლადი.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]a,b]$ შუალედზე და უწყვეტია ყოველ $[t,b]$ სეგმენტზე, სადაც $a<t<b$, ხოლო a წერტილში აქვს მეორე გვარის წყვეტა. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $]a,b]$ შუალედზე და $\int_a^b f(x)dx$ აღინიშნება სიმბოლოთი.

ამრიგად,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება განშლადი.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია წყვეტას განიცდის $[a,b]$ სეგმენტის შიგა c წერტილში. თუ კრებადია არასაკუთრვი ინტეგრალები

$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{და} \quad \int_c^b f(x)dx,$$

მაშინ მათ ჯამს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a,b]$ შუალედზე და აღინიშნება $\int_a^b f(x)dx$ -ით.

ამრიგად,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია. თუ $\int_a^c f(x)dx$ და $\int_c^b f(x)dx$ ინტეგრალებიდან ერთი მაინც განშლადია, მაშინ ამბობენ, რომ განშლადია არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha > 0.$$

აქ $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ ფუნქცია წყვეტას განიცდის შუალედის მარცხენა ბოლოზე $x = 0$ წერტილში. ამიტომ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0+} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{როცა } \alpha > 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{როცა } \alpha < 1. \end{cases}$$

როცა $\alpha = 1$, მაშინ გვექნება

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+} [\ln|x|]_t^1 = +\infty.$$

მაშასადამე, არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $0 < \alpha < 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \ge 1$.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|}}$.

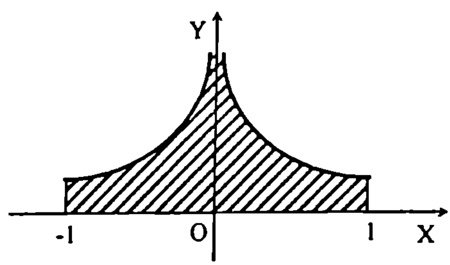
აქ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{|x|}}$ ფუნქციას წყვეტა აქვს $x = 0$ წერტილში. ამიტომ

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x|}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x|}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x|}}=\lim_{t\to 0-}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{-\sqrt[3]{x}}+\lim_{t\to 0+}\int_{t}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\lim_{t\to 0-}\left[-\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{-1}^{t}+\lim_{t\to 0+}\left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{t}^{1}=3.$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ გამოთვლილი არასაკუთრივი ინტეგრალი ნახ. 23.3-ზე დაშტრიხული უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ტოლია.

საზოგადოდ, თუ $f(x)>0$ შემოუსაზღვრელი ფუნქციაა $[a,b]$-ზე და კრებადია არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$, მაშინ იგი გამოსახავს აბსცისათა ღერძით, $x=a$, $x=b$ წრფეებით და $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს.



ნახ. 23.3

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. მოიყვანეთ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ და $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ არასაკუთრივ ინტეგრალთა განსაზღვრებები.
2. რა შემთხვევაში ამბობენ, რომ განშლადია არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$?
3. აჩვენეთ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, თუ $\alpha > 1$ და განშლადია, თუ $\alpha \le 1$.
4. მოიყვანეთ შემოუსაზღვრელი ფუნქციებიდან არასაკუთრივ ინტეგრალთა განმარტებები.
5. რა შემთხვევაში ამბობენ, რომ კრებადია არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან?
6. მოიყვანეთ არასაკუთრივი ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.
7. α-ს რომელი მნიშვნელობებისთვისაა კრებადი არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

23.1. გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

ა) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$;

ბ) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$;

გ) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(2x-3)^2}dx$;

დ) $\int_0^{+\infty}e^{\text{[illegible]}}dx$;

ე) $\int_{-\infty}^{0}e^{2x+1}dx$;

ვ) $\int_0^{+\infty}2^{-x}dx$.

23.2. დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი შემდეგი ინტეგრალები:

ა) $\int_{\text{[illegible]}}^{+\infty}\frac{dx}{3x+1}$;

ბ) $\int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx$;

გ) $\int_0^{+\infty}x\sin x\,dx$;

დ) $\int_{-\infty}^{1}5^x dx$.

23.3. გამოთვალეთ იმ უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია:

ა) $x=-3$ წრფით, აბსცისათა ღერძით და $y=2e^{-x}$, $x\geq -3$ ფუნქციის გრაფიკით;

ბ) აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებით და $y=-3e^{-x}$, $x\geq 0$ ფუნქციის გრაფიკით.

23.4. გამოთვალეთ ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან:

ა) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$;

ბ) $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;

გ) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

დ) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$;

ე) $\int_1^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

23.5. დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი შემდეგი ინტეგრალები:

ა) $\int_1^{4}\frac{dx}{(3x-3)^2}$;

ბ) $\int_0^{5}\frac{dx}{(x-5)^2}$;

გ) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

დ) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(5x+3)^2}$.

23.6. გამოსახეთ გრაფიკულად უსასრულო მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც შემოსაზღვრულია:

ა) $y=0,\ x=0,\ x=3$ წრფეებით და $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ფუნქციის გრაფიკით;

ბ) $y=0,\ x=0,\ x=2$ წრფეებით და $y=\frac{1}{x^2-4}$ ფუნქციის გრაფიკით;

გ) $y=0,\ x=0,\ x=1$ წრფეებით და $y=\frac{1}{e^x-1}$ ფუნქციის გრაფიკით.

23.7. გამოთვალეთ იმ უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია:

ა) ორდინატთა ღერძით, $x=3$ წრფით, აბცისათა ღერძით და $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ფუნქციის გრაფიკით;

ბ) $y=1,\ x=3\frac{1}{2},\ x=4$ წრფეებით და $y=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$ ფუნქციის გრაფიკით.

ლექცია 24

დიფერენციალური განტოლების ცნება. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგიერთი კერძო სახე

24.1. დიფერენციალური განტოლების ცნება

განტოლებას, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს დამოუკიდებელ ცვლადს, საძიებელ $y=f(x)$ ფუნქციას და მის სხვადასხვა რიგის წარმოებულებს, ეწოდება დიფერ-ენციალური განტოლება.

დიფერენცალურ განტოლებას ეწოდება n-ური რიგის, თუ მასში მონაწილე საძიებელი ფუნქციის წარმოებულის უმაღლესი რიგია n.

მაგალითად, $y'=3x-2$ პირველი რიგის განტოლებაა, ხოლო $y''-xy'+3y=x^5$ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას წარმოადგენს.

ყოველი დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ჩაიწე-როს დამოუკიდებელი ცვლადის და საძიებელი ფუნქციის დიფე-რენციალების ტერმინებში.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ეწოდება რიცხვით შუალედზე განსაზღვრულ ისეთ $y=y(x)$ ფუნქ-ციას, რომელიც მოცემულ განტოლებაში ჩასმით მას იგი-ვურ ტოლობად აქცევს.

ჩვენ უკვე გვქონდა შეხება უმარტივესი სახის დიფერენცი-ალურ განტოლებასთან, როდესაც მოცემული ფუნქციის ინტეგ-რების საკითხს შევისწავლიდით. $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრე-ლი ინტეგრალის მოძებნა ფაქტობრივად შემდეგი პირველი რიგის *დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის (ე.ი. ყველა ამონახსნის პოვნის) ტოლფასია*

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1}$$

ინტეგრება გვაძლევს

$$y=F(x)+C, \tag{2}$$

სადაც $F(x)$ ფუნქცია $f(x)$-ის ერთ-ერთი პირველადია, ხოლო C – ნებისმიერი მუდმივია. გამოსახულება (2) წარმოადგენს (1)

დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს, რაც იმას ნიშნავს რომ იგი არის (1)-ის ამონახსნი C-ს ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის.

24.2. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგიერთი კერძო სახე

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება განტოლება განცალებადი ცვლადებით, თუ ის შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$P(x)dx+Q(y)dy=0. \tag{3}$$

(3) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C, \tag{4}$$

სადაც C მუდმივია. (4) ტოლობა ხშირად (3) განტოლების ზოგადი ამონახსნის (*ზოგადი ინტეგრალის*) მოძებნის საშუალებას გვაძლევს. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$3xdx+3y^2dy=0.$$

ამ განტოლებისათვის (4) ტოლობას შემდეგი სახე ექნება

$$\int 3xdx+\int 3y^2dy=C,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{3x^2}{2}+y^3=C,$$

$$y^3=C-\frac{3x^2}{2}$$

და საბოლოოდ

$$y=\sqrt[3]{C-\frac{3x^2}{2}}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$y'=3(y+5)$$

დიფერენციალური განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას (*საწყისი პირობა*)

$$y(0)=1. \tag{5}$$

ცვლადთა განცალებით ((3) სახეზე დაყვანით) მივიღებთ

$$\frac{dy}{y+5}=3dx,$$

ანუ

$$\ln|y+5|=3x+C.$$

ვიპოვოთ C მუდმივის მნიშვნელობა. (5) პირობა გვაძლევს

$$\ln|1+5|=3\cdot 0+C,$$

საიდანაც

$$C=\ln 6.$$

მაშასადამე,

$$\ln|y+5|=3x+\ln 6,$$

ანუ

$$|y+5|=6e^{3x}.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

$$y=6e^{3x}-5.$$

(ამონახსნი $y=-6e^{3x}-5$ – არ აკმაყოფილებს (5) საწყის პირობას).

მაგალითი 3. ამოეხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$e^{y}\frac{dy}{dx}=x,$$

საწყისი პირობით $y(0)=\ln 2$.

განტოლების გარდაქმნა გვაძლევს

$$e^{y}dy=x\,dx,$$

საიდანაც

$$e^{y}=\frac{x^2}{2}+C.$$

საწყისი პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$C=2.$$

საბოლოოდ

$$y=\ln\left(\frac{x^2}{2}+2\right).$$

პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x). \tag{6}$$

თუ $Q(x)\not\equiv 0$, მაშინ (6) განტოლებას არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. თუ $Q(x)\equiv 0$, ე.ი. თუ განტოლებას აქვს სახე

$$y'+P(x)\cdot y=0, \tag{7}$$

მას ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

(6) განტოლების ამოსახსნელად ვისარგებლებთ *მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით.* ამ მეთოდის დედააზრი იმაში მდგომარეობს, რომ ჯერ მოიძებნება (7) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი და შემდგომ, ამ ზოგად ამონახსნში შემავალი ნებისმიერი მუდმივი შეიცვლება სათანადოდ შერჩეული ფუნქციით, რის შედეგადაც აიგება (6) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ჩავწეროთ (7) როგორც განცალებადცვლადებიანი განტოლება

$$\frac{dy}{y}+P(x)dx=0,$$

საიდანაც გვექნება

$$\int\frac{dy}{y}=-\int P(x)\,dx.$$

$P(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირველყოფილი ფუნქცია აღვნიშნოთ $F(x)$-ით, მაშინ

$$\ln|y|=-F(x)+C,\quad y=Ke^{-F(x)}, \tag{8}$$

სადაც K ნებისმიერი მუდმივია. (8) გამოსახულება არის (7) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, (6) განტოლების ზოგად ამონახსნს ვეძებთ (8) სახით, სადაც K მუდმივის ნაცვლად იგულისხმება $K(x)$ ფუნქცია, რომელიც შეირჩევა ისეთნაირად, რომ $y=K(x)e^{-F(x)}$ ფუნქცია წარმოადგენდეს (6)-ის ამონახსნს.

ამგვარად, გვექნება

$$\left(K(x)e^{-F(x)}\right)'+P(x)\cdot K(x)e^{-F(x)}=Q(x),$$

საიდანაც მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$K'(x)=Q(x)e^{F(x)}.$$

ვთქვათ, $\Phi(x)$ არის $Q(x)e^{F(x)}$-ის რომელიმე პირველადი ფუნქცია, მაშინ გვექნება

$$K(x)=\Phi(x)+C.$$

საბოლოოდ, (6) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$y=e^{-F(x)}[\Phi(x)+C], \tag{9}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, $F(x)$ არის $P(x)$-ის პირველადი ფუნქცია, $\Phi(x)$ კი $Q(x)e^{F(x)}$-ის პირველად ფუნქციას წარმოადგენს.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'-xy=e^{\frac{x^2}{2}}. \tag{10}$$

აქ $P(x)=-x,\ Q(x)=e^{\frac{x^2}{2}}.$

ვიპოვოთ $F(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციები. რადგანაც $\int -x\,dx=-\frac{x^2}{2}+C,$ შეგვიძლია ავიღოთ $F(x)=-\frac{x^2}{2}$. ახლა გამოვთვალოთ

$$\int Q(x)e^{F(x)}dx=\int e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=x+C.$$

შეგვიძლია ავიღოთ $\Phi(x)=x$. საბოლოოდ (9) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ (10) განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y=e^{\frac{x^2}{2}}(x+C),$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

მაგალითი 5. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'-y=e^x+1.$$

აქ $P(x)=-1$ და $Q(x)=e^x+1.$

$$\int P(x)dx=\int(-1)dx=-x+C, \quad \text{ე.ი.} \quad F(x)=-x.$$

$$\int Q(x)e^{F(x)}dx=\int(e^x+1)\,e^{-x}dx=x-e^{-x}+C,$$

და მაშასადამე, $\Phi(x)=x-e^{-x}$.

(9) ფორმულის გამოყენებით, საბოლოოდ მივიღებთ

$$y=xe^{x}-1+Ce^{x},$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

მაგალითი 6. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$y'+\frac{2}{x}y=x^{3},$$

საწყისი პირობით

$$y(1)=1\frac{1}{6}.$$

აქ $P=\dfrac{2}{x}$ და $Q=x^{3}$.

ვიპოვოთ $F(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციები:

$$\int P(x)dx=\int\frac{2}{x}dx=2\ln|x|+C,\quad \text{ე.ი.}\quad F(x)=2\ln|x|.$$

$$\int Q(x)e^{F(x)}dx=\int x^{3}\cdot e^{2\ln|x|}dx=\int x^{3}\cdot|x|^{2}dx=\frac{x^{6}}{6}+C,\ \text{ე.ი.}$$

$$\Phi(x)=\frac{x^{6}}{6}.$$

(9) ფორმულის გამოყენებით ჩავწეროთ ზოგადი ინტეგრალი

$$y=e^{-2\ln|x|}\left(\frac{x^{6}}{6}+C\right)=\frac{x^{4}}{6}+\frac{C}{x^{2}},$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. შევარჩიოთ C მუდმივი საწყისი პირობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$\frac{1}{6}+\frac{C}{1}=1\frac{1}{6},$$

საიდანაც $C=1$.

ამრიგად, საძიებელი ამონახსნია

$$y=\frac{x^{4}}{6}+\frac{1}{x^{2}}.$$

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდებენ დიფერენციალურ განტოლებას?
2. განსაზღვრეთ დიფერენციალური განტოლების რიგი.
3. რას უწოდებენ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს?
4. განისაზღვრება თუ არა ცალსახად დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი? მოიყვანეთ სათანადო მაგალითი.
5. როგორი სახე აქვს დიფერენციალურ განტოლებას განცალებადი ცვლადებით?
6. როგორი სახე აქვს პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას? შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას?
7. რაში მდგომარეობს მუდმივთა ვარიაციის მეთოდის შინაარსი?
8. მოიყვანეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის ზოგადი სახე.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

24.1. უშუალო შემოწმებით აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებას:

ა) $y = x + 2\sin x$,

$y + \cos x \; y -$

$= (x+2)\cos x + 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

ბ) $y = 2xe^{-x}$,

$y'' + y' + y = 2e^{-x}(x-1)$.

24.2. იპოვეთ $f(x)$ თუ:

ა) $y = 2\sin x$ წარმოადგენს $y' - y\cos x = f(x)$ განტოლების ამონახსნს;

ბ) $y = xe^{x}$ წარმოადგენს $y'' - 2y = f(x)$ განტოლების ამონახსნს.

24.3. ამოხსენით დიფერენციალური განტოლება:

ა) $y' = x^2 - 2x$;

ბ) $y' = 2^x$;

გ) $y' = x\sin x$;

დ) $y' = x\ln x$;

ე) $y' = (3x-1)^3$;

ვ) $y' = \dfrac{1}{6x+1}$;

ზ) $y' = \dfrac{4x}{1+2x^2}$;

თ) $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$.

24.4. მოცემული დიფერენციალური განტოლება დაიყვანეთ განცალებადცვლადებიანი განტოლების სახეზე:

ა) $yy' - 3x = 0$;

ბ) $y - y\,\mathrm{tg}\,x = 0$;

გ) $y'\ln y + 2xy = 0$;

დ) $x^2y' + (1-2x)y = 0$;

ე) $y' + (1+y^2)e^x = 0$;

ვ) $x(x+1)y' + y^2 = 0$;

ზ) $y\,\mathrm{tg}\,x - y\ln y = 0$;

თ) $y' - e^{3x-2y} = 0$.

24.5. იპოვეთ განცალებადცვლადებიან განტოლებათა ზოგადი ამონახსნები:

ა) $y^2y' - 5x = 0$;

ბ) $2y^2y' - x^2 = 0$;

გ) $5y^4y' - 2x^{\frac{3}{2}} = 0$;

დ) $y' - e^{5x-2y} = 0$.

24.6. იპოვეთ განცალებადცვლადებიანი განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას:

ა) $y'y - x = 0$, $\quad y(1) = 1$;

ბ) $xy' = 1 - x^2$, $\quad y(1) = 0$;

გ) $x^2dx - \frac{1}{2}y^2dy = 0$, $\quad y(1) = 1$;

დ) $\dfrac{2x-1}{y+1} = \dfrac{dx}{dy}$, $\quad y(5) = 0$.

24.7. ამოხსენით პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები:

ა) $y' + 2y + 3 = 0$;

ბ) $y' - y - 6x^2 = 0$;

გ) $y' - 3y = 2e^{3x} - 3$;

დ) $y' - 5xy = x^2 e^{\frac{5x^2}{2}}$;

ე) $y' - 4x^3 y = e^{x^4} \cos x$;

ვ) $y' + y\cos x = e^{-\sin x} \cos x$.

24.8. ამოხსენით პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება მოცემული საწყისი პირობით:

ა) $y' + xy - x = 0$, $\quad y(0) = 4$;

ბ) $y' + \frac{4}{x}y - x^2 = 0$, $\quad y(1) = -\frac{1}{6}$;

გ) $y' + x^2 y = xe^{-\frac{x^3}{3}}$, $\quad y(0) = 5$;

დ) $y' + y\sin x = e^{\cos x} \cos x$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

F. კითხვები და ამოცანები გამეორებისათვის (ლექციები 21-24)

F.1. იპოვეთ შემდეგი ინტეგრალები:

ა) $\int 2x^5 dx$;

ბ) $\int (x^2+2x+3)dx$;

გ) $\int (6x^2+4x+\frac{1}{x})dx$;

დ) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$;

ე) $\int \frac{2-x+x^2}{x}dx$;

ვ) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$;

ზ) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

თ) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$;

ი) $\int \frac{2\sqrt[3]{x}+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$;

კ) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$;

ლ) $\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}}\,dx$;

მ) $\int 5a^x e^x\,dx$;

ნ) $\int \frac{xe^x-x}{x}dx$;

ო) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{x^4}\right)dx$;

პ) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$;

ჟ) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$;

რ) $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

ს) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$;

ტ) $\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx$;

უ) $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$.

F.2. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მოახდინეთ ინტეგრება:

ა) $\int x2^x dx$;

ბ) $\int x\cos 3x\,dx$;

გ) $\int x\sin 2x\,dx$;

დ) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

F.3. მოახდინეთ ინტეგრება ჩასმის ხერხის გამოყენებით:

ა) $\int e^{ax+b}dx$;

ბ) $\int \cos(ax+b)\,dx$;

გ) $\int 5^{3x-1}dx$;

დ) $\int \sin(2x-5)\,dx$;

ე) $\int \sqrt[3]{(7x+1)^2}\,dx$;

ვ) $\int \frac{dx}{ax+b}$, $a\neq 0$.

F.4. ლოგარითმული წარმოებულიდან ინტეგრების ხერხის გამოყენებით იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

ა) $\int \operatorname{tg}x\,dx$;

ბ) $\int \operatorname{ctg}x\,dx$;

გ) $\int \frac{dx}{9x-1}$;

დ) $\int \frac{e^x+2}{e^x+2x-1}dx$;

ე) $\int \frac{x+a}{x+b}dx$.

F.5. დაადგინეთ, მართებულია თუ არა შემდეგი ტოლობები:

ა) $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$;

ბ) $\int \sin^3 x\,dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$;

გ) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} + C$;

დ) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C$.

F.6. გამოთვალეთ ინტეგრალები:

ა) $\int_1^2 2^{3x-4}dx$;

ბ) $\int_0^1 \ln(1+x)dx$;

გ) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$;

დ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}x\,dx$;

ე) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx$;

ვ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

ზ) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;

თ) $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$.

F.7. თუ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები შესაბამისად m-ის და M-ის ტოლია, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

შეაფასეთ ინტეგრალები:

ა) $\int_1^3 (2x+1)dx$;

ბ) $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$;

გ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx$;

დ) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

F.8. თუ $f(x) \le g(x)$, როცა $a \le x \le b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

გამოთვლის გარეშე გამოარკვიეთ, რომელი ინტეგრალია მეტი

ა) $\int_0^1 x^2 dx$ თუ $\int_0^1 x^3 dx$;

ბ) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$ თუ $\int_0^1 x\, dx$.

F.9. იპოვეთ $y=-x^2$, $y=x-2$ და $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

F.10. იპოვეთ $y=x^2-2$ და $y=x$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

F.11. იპოვეთ $y=\ln x$, $y=0$ და $x=e$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

F.12. იპოვეთ $y=\text{tg}x$, $y=0$ და $x=\frac{\pi}{3}$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

F.13. იპოვეთ $y=x^2$ და $y=2-x^2$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

F.14. ვთქვათ, მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც $y=f(x)$ წირით, OX ღერძითა და $x=a$, $x=b$ წრფეებითაა შემოსაზღვრული $(a<b)$, ბრუნავს OX ღერძის გარშემო. გამოთვალეთ ბრუნვით სხეულთა მოცულობები, თუ:

ა) $y=e^{-x}$, $x=0$ და $x=1$;

ბ) $y=\sin x$, $x=0$ და $x=\pi$.

F.15. მონაკვეთი, რომელიც კოორდინატთა სათავეს აერთებს $M(a,b)$ წერტილთან, ბრუნავს OX ღერძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული კონუსის მოცულობა.

F.16. გამოიყვანეთ R რადიუსისა და H სიმაღლის მქონე ცილინდრის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა.

F.17. გამოიყვანეთ R რადიუსიანი ბირთვის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა (R რადიუსიანი ბირთვი მიიღება $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ნახევარწრეწირის ბრუნვით OX ღერძის გარშემო).

F.18. გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები (ან დაადგინეთ მათი განშლადობა):

ა) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;

ბ) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$;

გ) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$;

დ) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

ე) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg}x\, dx$;

ვ) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

F.19. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებას:

ა) $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$,

$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$;

ბ) $y = \frac{c^2 - x^2}{2x}$, $x + y + x\frac{dy}{dx} = 0$.

F.20. ამოხსენით დიფერენციალური განტოლებები მითითებული საწყისი პირობებით:

ა) $xy' - y = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$;

ბ) $y' = y$, $y(-2) = 4$;

გ) $y' - \frac{y}{x} = x$, $y(1) = 3$;

დ) $y' - y = e^{+x}$, $y(0) = 5$;

ე) $y' - 2xy = xe^{+x^2}$, $y(0) = -1$;

ვ) $y' + 2y = e^{3x}$, $y(0) = 0$.

ლექცია 25

ვექტორები. ოპერაციები ვექტორებზე. ვექტორის გეგმილი ღერძზე

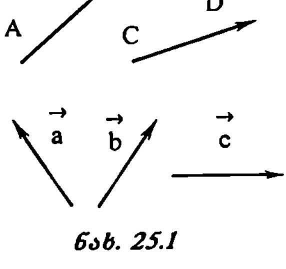
25.1. ვექტორები. ოპერაციები ვექტორებზე

რეალური ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტისას, ისევე როგორც ფიზიკის, მათემატიკის და სხვადასხვა ტექნიკურ მეცნიერებათა პრობლემების შესწავლისას, ჩვეულებრივ ორი ტიპის — *სკალარული* და *ვექტორული ტიპის სიდიდეებით* სარგებლობენ. ყოველი სკალარული სიდიდე სავსებით განისაზღვრება თავისი *რიცხვითი მნიშვნელობით*, ხოლო ვექტორული სიდიდის განსაზღვრისათვის, გარდა რიცხვითი მნიშვნელობისა, საჭიროა აგრეთვე მისი *მიმართულების* ცოდნა. სკალარული სიდიდეების მაგალითებია სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, მასა, ტემპერატურა და სხვა. ვექტორული სიდიდეებია — ძალა, სიჩქარე, აჩქარება, მაგნიტური ველის დაძაბულობა და სხვა.

სხვადასხვა სახის ვექტორული სიდიდეების ზოგადად შესწავლისათვის (მათი კონკრეტული თვისებების გაუთვალისწინებლად) მიზანშეწონილია *ვექტორის ცნების* შემოტანა.

განსაზღვრება. **ვექტორი ეწოდება მიმართულ მონაკვეთს, ე.ი. მონაკვეთს, რომლისთვისაც დასახელებულია სათავე და ბოლო წერტილი.**

ვექტორი, რომლის სათავეა A, ხოლო ბოლო წერტილია B, აღინიშნება სიმბოლოთი $\vec{AB}$. ზოგჯერ ვექტორის აღსანიშნავად ლათინური ანბანის მცირე ასოებს იყენებენ (ნახ. 25.1). მაგალითად: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ და ა.შ.



ნახ. 25.1

ნახაზზე ვექტორი გამოისახება ისრით (ნახ. 25.1).

ვექტორის სათავეს მისი მოდების წერტილი ეწოდება.

ვექტორს, რომლის სათავე და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა ნულოვანი ვექტორი ანუ ნულ-ვექტორი ეწოდება. ის აღინიშნება $\vec{0}$ სიმბოლოთი. ნულ-ვექტორს გარკვეული მიმართულება არ გააჩნია.

ვექტორის სიგრძე ეწოდება მანძილს მის სათავესა და ბოლო წერტილს შორის.

$\overrightarrow{AB}$ და $\vec{a}$ ვექტორთა სიგრძეები აღინიშნება, შესაბამისად $|\overrightarrow{AB}|$ და $|\vec{a}|$ სიმბოლოებით. ცხადია, $|\vec{0}|=0$.

ვექტორს, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია, ერთეულოვანი ვექტორი ეწოდება.

ერთი და იგივე წრფის პარალელურ ვექტორებს კოლინეარული ვექტორები ეწოდება, ხოლო ერთი და იგივე სიბრტყის პარალელურ ვექტორებს – კომპლანარული.

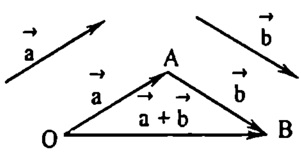
მიღებულია, რომ ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულია, ხოლო, თუ სამი ვექტორიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ ისინი კომპლანარულია.

ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე სიგრძე და მიმართულება.

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ტოლია, წერენ $\vec{a}=\vec{b}$.

ვექტორებზე წრფივი ოპერაციები ეწოდება ვექტორთა შეკრებას და ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას.

გავეცნოთ ამ ოპერაციებს.



ნახ. 25.2

ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ნებისმიერი ორი ვექტორია. ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი O წერტილი და ავაგოთ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ვექტორი, შემდეგ კი $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ვექტორი. $\overrightarrow{OB}$ ვექტორს (ნახ. 25.2) ეწოდება $\vec{a}$ *და* $\vec{b}$ *ვექტორების ჯამი* და აღინიშნება შემდეგნაირად: $\vec{a}+\vec{b}$. ე.ი.

$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}.$$

ვექტორთა შეკრების ასეთ წესს *სამკუთხედის წესი* ეწოდება. იგი შეიძლება განვაზოგადოთ შესაკრებ ვექტორთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის. ვთქვათ, მოცემულია $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ვექტორები. $\vec{a}_1$ ვექტორის ბოლო წერტილზე მოვდოთ $\vec{a}_2$ ვექტორი, $\vec{a}_2$-ის ბოლო წერტილზე $\vec{a}_3$ ვექტორი და ა.შ. $\vec{a}_{n-1}$ ვექტორის ბოლო წერტილზე – $\vec{a}_n$ ვექტორი. ვექტორს, რომლის სათავე $\vec{a}_1$-ის სათავეს, ხოლო ბოლო წერტილი

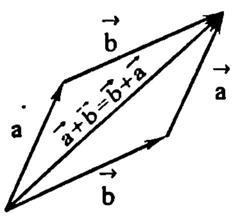
$\vec{a}_n$ -ის ბოლო წერტილს ემთხვევა, ეწოდება $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *ვექტორების ჯამი* და ასე აღინიშნება: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$.

ვექტორთა შეკრების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (კომუტატიურობა);

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (ასოციაციურობა).

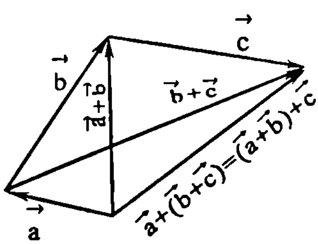
ამ თვისებების მართებულობა ჩანს შესაბამისად ნახ. 25.3 და ნახ. 25.4-დან.



ნახ. 25.3

ცხადია, ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} .$$



ნახ. 25.4

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\vec{b}$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1. $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$;

2. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება, თუ $\lambda > 0$ და ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება, თუ $\lambda < 0$.

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი აღინიშნება $\lambda \vec{a}$ სიმბოლოთი.

თუ $\lambda = 0$ ან $\vec{a} = \vec{0}$, მაშინ მიღებულია, რომ $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.

$\vec{a}$ ვექტორის (-1)-ზე ნამრავლს ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი და აღნიშნება $-\vec{a}$ სიმბოლოთი.

ცხადია,

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} .$$

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{\ell},$$

სადაც $\vec{\ell}$ არის $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორი. მას $\vec{a}$ **ვექტორის მიმმართველი ვექტორი, ანუ მგეზავი ეწოდება.**

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განმარტების თანახმად, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის კოლინეარულია. პირიქით, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, სადაც $\lambda = |\vec{b}| / |\vec{a}|$, თუ ამ ვექტორებს ერთნაირი მიმართულება აქვთ, და $\lambda = -|\vec{b}| / |\vec{a}|$, თუ მათ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ.

ამრიგად, **ორი ვექტორი კოლინეარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთ-ერთი მათგანი წარმოადგენს მეორის ნამრავლს გარკვეულ რიცხვზე.**

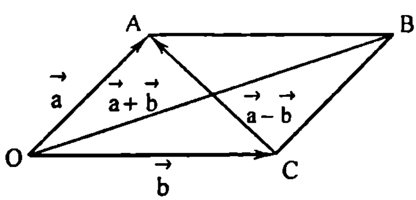
ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

2. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$;

3. $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = \lambda_2(\lambda_1\vec{a})$.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა ეწოდება $\vec{a} + (-\vec{b})$ ვექტორს და ასე აღინიშნება: $\vec{a} - \vec{b}$. ცხადია, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა არის ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომ $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



ნახ. 25.5

მოვიყვანოთ არაკოლინეარულ ვექტორთა შეკრების კიდევ ერთი წესი, ე.წ. *პარალელოგრამის წესი*, რომელიც ვექტორთა სხვაობის აგების წესსაც გვაძლევს.

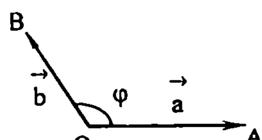
ვთქვათ, მოცემულია არაკოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. ეს ვექტო-

რები მოვდოთ ნებისმიერ O წერტილზე და ავაგოთ მათზე პარალელოგრამი (ნახ. 25.5). ნახაზიდან ჩანს, რომ $\vec{OB}$ (OB დიაგონალით განსაზღვრული ვექტორი) წარმოადგენს $\vec{a}+\vec{b}$ ჯამს, ხოლო $\vec{CA}$ (CA დიაგონალით განსაზღვრული ვექტორი) $\vec{a}-\vec{b}$ სხვაობას.

25.2. კუთხე ორ ვექტორს შორის. ვექტორის გეგმილი ღერძზე

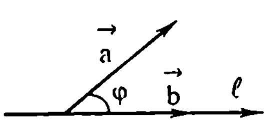
ვთქვათ, მოცემულია ორი არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. სივრცის ნებისმიერ O წერტილზე მოვდოთ $\vec{OA}=\vec{a}$ და $\vec{OB}=\vec{b}$ ვექტორი (ნახ. 25.6). $\vec{a}$ და $\vec{b}$ **ვექტორებს შორის კუთხე ეწოდება იმ უმცირეს φ კუთხეს, რომლითაც უნდა მობრუნდეს ერთ-ერთი ვექტორი, რომ მისი მიმართულება დაემთხვეს მეორე ვექტორის მიმართულებას.** $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხისათვის გვექნება აღნიშვნა $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$.

თუ $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=90^0$, მაშინ წერენ $\vec{a}\perp\vec{b}$.



ნახ. 25.6

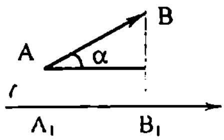
კუთხე $\vec{a}$ ვექტორსა და ℓ ღერძს შორის ეწოდება კუთხეს $\vec{a}$ ვექტორსა და ℓ ღერძის მიმართულების მქონე ნებისმიერ $\vec{b}$ ვექტორს შორის (ნახ. 25.7).



ნახ. 25.7

სივრცის რაიმე წერტილის გეგმილი ℓ ღერძზე ეწოდება ამ წერტილზე ℓ ღერძის მართობულად გავლებული სიბრტყის გადაკვეთის წერტილს ამ ღერძთან (ცხადია, რაიმე წერტილის გეგმილი ღერძზე წარმოადგენს ამავე წერტილზე ℓ ღერძის მიმართ გავლებული პერპენდიკულარის გადაკვეთის წერტილს

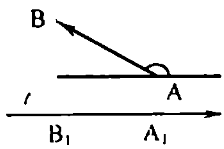
ℓ ღერძთან).



ნახ. 25.8

ვთქვათ, მოცემულია $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი და დავუშვათ, რომ A და B წერტილების გეგმილები ℓ ღერძზე არის შესაბამისად A_1 და B_1.

$\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი ℓ ღერძზე ეწოდება A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძეს, ე.ი. $|A_1B_1|$-ს, თუ $\overrightarrow{A_1B_1}$ ვექტორს და ℓ ღერძს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ და $-|A_1B_1|$-ს, წინააღმდეგ შემთხვევაში.



ნახ. 25.9

$\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი ℓ ღერძზე $გეგ_{\ell}\,\overrightarrow{AB}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორსა და ℓ ღერძს შორის კუთხე α-ს ტოლია, მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$გეგ_{\ell}\,\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\alpha. \qquad (1)$$

(1) ტოლობის მართებულობა ნათლად ჩანს ნახ. 25.8 და ნახ. 25.9-დან.

ცხადია, რომ ტოლ ვექტორებს ერთსა და იმავე ღერძზე ტოლი გეგმილები აქვთ.

თეორემა. **ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამის ტოლია; ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის გეგმილი უდრის ვექტორის გეგმილის ნამრავლს ამავე რიცხვზე.**

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება ვექტორი? რას ეწოდება ნულ-ვექტორი?
2. რას ეწოდება ვექტორის სიგრძე? რა არის ერთეულოვანი ვექტორი?
3. როგორ ვექტორებს ეწოდება კოლინეარული? კომპლანარული?
4. განმარტეთ ვექტორთა ტოლობა.
5. რომელ ოპერაციებს ეწოდება წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე?
6. ჩამოაყალიბეთ ვექტორთა შეკრების სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესები.
7. მართებულია თუ არა ვექტორთა შეკრების სამკუთხედის წესი (პარალელოგრამის წესი) კოლინეარული ვექტორებისათვის?
8. რას ეწოდება ვექტორის ნამრავლი რიცხვზე?
9. რას ეწოდება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა?
10. ჩამოაყალიბეთ ვექტორებზე წრფივ ოპერაციათა თვისებები.
11. რას ეწოდება ვექტორის მგეზავი?
12. რას ეწოდება კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის? $\vec{a}$ ვექტორსა და ℓ ღერძს შორის?
13. რას ეწოდება ვექტორის გეგმილი ღერძზე?
14. შეიძლება თუ არა, რომ არატოლი ვექტორების გეგმილები ℓ ღერძზე იყოს ტოლი? მოიყვანეთ სათანადო ნახაზი.
15. მოიყვანეთ თეორემა ვექტორთა ჯამის და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის გეგმილის შესახებ.

პრაქტიკული სავარჯიშოები

25.1. მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისათვის ააგეთ: $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $4\vec{a}+2\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$.

25.2. რა პირობებში სრულდება შემდეგი ტოლობები:

ა) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|$;

ბ) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

გ) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

დ) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

ე) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

ვ) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;

ზ) $|\vec{a}|\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\vec{a}$;

თ) $|2\vec{a}+\vec{b}|=2|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

25.3. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები იყვნენ კოლინეარულნი?

25.4. რა შემთხვევაში ყოფს შუაზე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეს $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორი?

25.5. იპოვეთ $|\vec{a}-\vec{b}|$, თუ მოცემულია:

ა) $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=15$, $|\vec{a}+\vec{b}|=20$;

ბ) $|\vec{a}|=16$, $|\vec{b}|=20$, $|\vec{a}+\vec{b}|=6$.

25.6. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$, თუ მოცემულია:

ა) $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=11$, $|\vec{a}-\vec{b}|=14$;

ბ) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=8$, $|\vec{a}-\vec{b}|=6$.

25.7. მოცემულია: $|\vec{a}-\vec{b}|=20$, $|\vec{a}+\vec{b}|=15$, $(\vec{a}+\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{a}-\vec{b})=60^0$. იპოვეთ $|\vec{a}|$ და $|\vec{b}|$.

25.8. მოცემულია: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=8$, $|\vec{a}-\vec{b}|=4$. იპოვეთ $|\vec{b}|$.

25.9. მოცემულია: $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. იპოვეთ: $|\vec{a}+\vec{b}|$ და $|\vec{a}-\vec{b}|$.

25.10. მოცემულია: $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=120^0$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$.

25.11. მოცემულია: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=7$, $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=30^0$. იპოვეთ: $|\vec{a}+\vec{b}|$ და $|\vec{a}-\vec{b}|$.

25.12. მოცემულია: $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=60^0$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$.

25.13. მოცემულია: $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=60^0$. იპოვეთ:
$|5\vec{a}+4\vec{b}|$ და $|5\vec{a}-4\vec{b}|$.

25.14. $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებით გამოსახეთ $\vec{c}$ ვექტორი, თუ:

ა) $5\vec{p}-7\vec{q}-4\vec{c}=0$;

ბ) $-\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{5}{8}\vec{q}+\frac{1}{3}\vec{c}=0$.

25.15. ABCD პარალელოგრამში $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ და $\vec{MD}$, თუ M წარმოადგენს დიაგონალების გადაკვეთის წერტილს.

25.16. ABC სამკუთხედში $\vec{AB}=\vec{c}$, $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებით შემდეგი ვექტორები: $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ და $\vec{CP}$, სადაც M, N და P შესაბამისად BC, AC და AB გვერდების შუაწერტილებია.

25.17. ABC სამკუთხედში $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{b}$. BC გვერდზე აღებულია M წერტილი, რომელიც მას ყოფს შეფარდებით $\frac{BM}{MC}=\frac{5}{8}$. გამოსახეთ $\vec{AM}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

25.18. ABCDEF წესიერ ექვსკუთხედში $\vec{AB}=\vec{p}$, $\vec{BC}=\vec{q}$. გამოსახეთ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებით $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ და $\vec{EA}$ ვექტორები.

25.19. ABC სამკუთხედში $\vec{BC}=\vec{a}$ და $\vec{CA}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით შემდეგი ვექტორები: $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ და $\vec{CP}$, სადაც M, N და P შესაბამისად BC, AC და AB გვერდების შუაწერტილებია.

25.20. ABC სამკუთხედის BC გვერდი გაყოფილია ხუთ ტოლ ნაწილად და B წვეროს მხრიდან მიმდევრობით დაყოფის D_1, D_2, D_3, D_4 წერტილები შეერთებულია A წვეროსთან. იპოვეთ $\vec{AD_1}$, $\vec{AD_2}$, $\vec{AD_3}$, $\vec{AD_4}$ ვექტორები, თუ $\vec{AB}=\vec{c}$ და $\vec{BC}=\vec{a}$.

25.21. ABC სამკუთხედში N წერტილი BC გვერდის შუა წერტილია. $\vec{AN}=\vec{m}$, $\vec{AC}=\vec{n}$. გამოსახეთ $\vec{AB}$ ვექტორი $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ვექტორებით.

25.22. ვთქვათ, M არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო O სივრცის ნებისმიერი წერტილი. $\overrightarrow{OM}$ ვექტორი გამოსახეთ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ და $\overrightarrow{OC}$ ვექტორების საშუალებით.

25.23. B წერტილი წრეწირის $\breve{AC}=90^0$ რკალს ყოფს ისე, რომ $\breve{AB}:\breve{BC}=2:1$. O წრეწირის ცენტრია. გამოსახეთ $\overrightarrow{OC}$ ვექტორი $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ და $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ვექტორების საშუალებით.

25.24. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილი ℓ ღერძზე, თუ $|\vec{a}|=4$ და $\vec{a}$ ვექტორი ℓ ღერძთან ადგენს კუთხეს: ა) 30^0; ბ) 120^0.

25.25. იპოვეთ OXY სიბრტყეზე მდებარე $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილები OX და OY ღერძებზე, თუ მისი სიგრძეა $|\vec{a}|=6$ და OX ღერძთან ადგენს 60^0-იან კუთხეს.

25.26. რამდენიმე ვექტორის ერთსა და იმავე ღერძზე გეგმილების ჯამი ნულის ტოლია. შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ ეს ვექტორები ადგენენ შეკრულ ტეხილს?

25.27. იპოვეთ $გეგ._{\vec{\ell}}(4\vec{a}-3\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\frac{3}{2}$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{\ell})=45^0$, $(\vec{b},\hat{\ }\vec{\ell})=60^0$.

25.28. იპოვეთ $გეგ._{\vec{\ell}}(2\vec{a}+5\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{\ell})=30^0$, $(\vec{b},\hat{\ }\vec{\ell})=120^0$.

25.29. გამოთვალეთ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე, თუ იგი საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს შესაბამისად $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$ და $\gamma=120^0$ კუთხეებს, ამასთან $|\vec{a}|=16$.

ლექცია 26

ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულება. ბაზისი. ვექტორის კოორდინატები

26.1. ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა

ვთქვათ, მოცემულია $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორები. ამ *ვექტორების წრფივი კომბინაცია* ეწოდება ვექტორს

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n ,$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ნებისმიერი რიცხვებია.

ვექტორთა $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0} . \qquad (1)$$

ვექტორთა $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ (1) ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თვისებები:

1. თუ ვექტორთა სისტემა შეიცავს ნულოვან ვექტორს, მაშინ ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებულია;

2. თუ ვექტორთა სისტემა შეიცავს წრფივად დამოკიდებულ ვექტორთა ქვესისტემას (ნაწილს), მაშინ თვით მოცემული სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება;

3. წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემის ყოველი ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

დავრწმუნდეთ მაგალითად მეორე თვისების სამართლიანობაში.

ეთქვათ, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ რიცხვები, რომ

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}$$

და ერთი მაინც $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$.

განვიხილოთ ვექტორთა ნებისმიერი სიმრავლე:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k \quad (k > m),$$

რომელიც შეიცავს თავდაპირველ სისტემას. ავიღოთ $\alpha_{m+1} = 0, \ldots, \ldots, \alpha_k = 0$. გვექნება

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k = \alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0},$$

სადაც $\alpha_i \neq 0$. ე.ი. *ვექტორთა წრფივად დამოკიდებული სისტემის შემცველი ვექტორთა ნებისმიერი სისტემაც წრფივად დამოკიდებულია.*

შევნიშნოთ, რომ პირველი და მესამე თვისებები შეიძლება განხილულ იქნან როგორც მეორე თვისებიდან გამომდინარე შედეგები (ახსენით რატომ!).

ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულების საკითხის გასარკვევად მნიშვნელოვანია შემდეგი

თეორემა 1. **$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის რომელიმე ვექტორი წარმოადგენს დანარჩენი ვექტორების წრფივ კომბინაციას.**

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, ე.ი. ადგილი აქვს (1) ტოლობას და $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, $\alpha_1 \neq 0$. მაშინ (1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n.$$

ამრიგად, $\vec{a}_1$ ვექტორი არის დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაცია.

ახლა დავუშვათ, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ ვექტორებიდან ერთ-ერთი, მაგალითად, $\vec{a}_n$ წარმოადგენს დანარჩენი ვექტორების წრფივ კომბინაციას, ე.ი. არსებობს ისეთი λ_1, λ_2, ... λ_{n-1} რიცხვები, რომ

$$\vec{a}_n = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_{n-1} \vec{a}_{n-1}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ ... + \lambda_{n-1} \vec{a}_{n-1} + (-1)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

რაც ნიშნავს, რომ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. თეორემა 1 დამტკიცებულია.

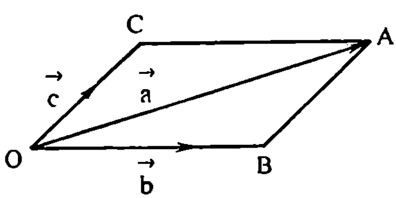
ამ თეორემიდან კერძოდ გამომდინარეობს, რომ **ორი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი კოლინეარულია.**

განვიხილოთ ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის საკითხი სიბრტყეზე და სივრცეში.

თეორემა 2. **ერთ სიბრტყეზე მდებარე ყოველი სამი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ვექტორებია. თუ ამ ვექტორებიდან რომელიმე ორი კოლინეარულია, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია.

თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებს შორის არც ერთი წყვილი ვექტორებისა არ არის კოლინეარული, მაშინ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ამ ვექტორებიდან ერთ-ერთი წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას. დავუშვათ, რომ სამივე ვექტორს აქვს საერთო O სათავე (ნახ. 26.1).



ნახ. 26.1

გავავლოთ ერთ-ერთი ვექტორის, მაგალითად, $\vec{a}$-ს ბოლო A წერტილზე დანარჩენი ვექტორების პარალელური წრფეები იმ წრფეების გადაკვეთამდე B და C წერტილებში, რომლებზეც მდებარეობენ შესაბამისად $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები. მივიღებთ, რომ

$$\vec{a} = \vec{OB} + \vec{OC}.$$

რადგან $\vec{OB}$ და $\vec{OC}$ ვექტორები შესაბამისად $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების კოლინეარულია, ე.ი. $\vec{OB}=\lambda\vec{b}$ და $\vec{OC}=\mu\vec{c}$, ამიტომ

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}.$$

თეორემა 2 დამტკიცებულია.

შედეგი 1. **თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ვექტორთა რაოდენობა ორზე მეტია, მაშინ ისინი წრფივად დამოკიდებულია.**

შედეგი 2. **სამი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი კომპლანარულია ან, რაც იგივეა, სამი ვექტორი წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი არაკომპლანარულია.**

შედეგი 3. **სიბრტყეზე წრფივად დამოუკიდებულ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი უდრის ორს.**

თეორემა 2-ის ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 3. **სივრცეში ყოველი ოთხი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.**

შედეგი 1. **თუ ვექტორთა რიცხვი სამზე მეტია, მაშინ ისინი წრფივად დამოკიდებულია.**

შედეგი 2. **წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი უდრის სამს.**

26.2. ბაზისი. ვექტორის კოორდინატები

ვექტორთა ალგებრის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა *ბაზისის ცნება.*

განსაზღვრება. **ა) ბაზისი წრფეზე ეწოდება ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერ არანულოვან ვექტორს;**

ბ) ბაზისი სიბრტყეზე ეწოდება ამ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერ ორ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს, აღებულს გარკვეული რიგით;

გ) ბაზისი სივრცეში ეწოდება ნებისმიერ სამ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს, აღებულს გარკვეული რიგით.

ვიტყვით, რომ *ვექტორი დაშლილია* რაიმე ვექტორების მიხედვით, თუ ის წარმოადგენს ამ ვექტორების წრფივ კომბინაციას.

ძნელი საჩვენებელი არაა, რომ

1. წრფის პარალელური ნებისმიერი ვექტორი იშლება ამ წრფის ბაზისის მიხედვით;

2. სიბრტყის პარალელური ყოველი ვექტორი იშლება ამ სიბრტყის ბაზისის მიხედვით;

3. სივრცის ყოველი ვექტორი იშლება სივრცის ბაზისის ვექტორების მიხედვით.

დავრწმუნდეთ, რომ ყოველი ასეთი დაშლა ერთადერთია. ვთქვათ, მაგალითად, $\vec{\ell}_1$, $\vec{\ell}_2$, $\vec{\ell}_3$ სივრცის ბაზისია, ხოლო $\vec{a}$ – ნებისმიერი ვექტორია, რომლისთვისაც ადგილი აქვს დაშლებს:

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{\ell}_1+\lambda_2\vec{\ell}_2+\lambda_3\vec{\ell}_3, \tag{2}$$

$$\vec{a}=\mu_1\vec{\ell}_1+\mu_2\vec{\ell}_2+\mu_3\vec{\ell}_3. \tag{3}$$

თუ (2) ტოლობას გამოვაკლებთ (3)-ს გვექნება

$$(\lambda_1-\mu_1)\vec{\ell}_1+(\lambda_2-\mu_2)\vec{\ell}_2+(\lambda_3-\mu_3)\vec{\ell}_3=\vec{0} \tag{4}$$

და $\vec{\ell}_1$, $\vec{\ell}_2$, $\vec{\ell}_3$ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო (4) ტოლობიდან დავასკვნით, რომ

$$\lambda_1-\mu_1=0,\quad \lambda_2-\mu_2=0,\quad \lambda_3-\mu_3=0.$$

ამრიგად, $\lambda_1=\mu_1$, $\lambda_2=\mu_2$, $\lambda_3=\mu_3$, რაც დაშლის ერთადერთობას ამტკიცებს.

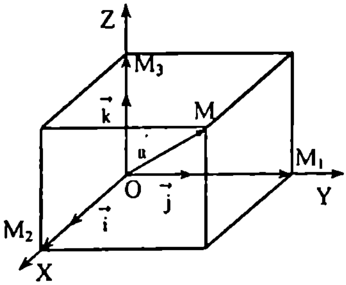
λ_1, λ_2, λ_3 რიცხვებს ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები (კომპონენტები) $\vec{\ell}_1$, $\vec{\ell}_2$, $\vec{\ell}_3$ ბაზისში, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{\ell}_1+\lambda_2\vec{\ell}_2+\lambda_3\vec{\ell}_3.$$

იმ ფაქტს, რომ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები λ_1, λ_2, λ_3 რიცხვებია, ასეთნაირად ჩავწერთ:

$$\vec{a}=\vec{a}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \text{ ან } \vec{a}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$$

ძნელი შესამჩნევი არაა, რომ ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები უდრის ამ ვექტორის სათანადო კოორდინატების იმავე რიცხვზე ნამრავლს, ხოლო ვექტორთა ჯამის კოორდინატები უდრის შესაკრები ვექტორების სათანადო კოორდინატების ჯამს.



ნახ. 26.2

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა OXYZ სისტემა სივრცეში. ვთქვათ, $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ შესაბამისად OX, OY და OZ ღერძების მგეზავებია (ნახ. 26.2). ცხადია, ეს ვექტორები არაკომპლანარულია. ამიტომ ვექტორთა ეს სისტემა წარმოადგენს ბაზისს, რომელსაც *დეკარტის მართკუთხა ბაზისი* ეწოდება.

ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორი ერთადერთი სახით წარმოიდგინება დეკარტის $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ მართკუთხა ბაზისის მიხედვით:

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

ამ **x, y, z** სიდიდეებს **დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები** ეწოდება.

ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების გეომეტრიულ აზრს განმარტავს შემდეგი

თეორემა 4. **ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები უდრის ამ ვექტორის გეგმილებს შესაბამის ღერძებზე.**

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{OM}$ რადიუს-ვექტორის (სათავეზე მოდებული ვექტორი) კოორდინატები უდრის მისი ბოლო M წერტილის კოორდინატებს. ასე რომ, თუ სივრცეში მოცემულია რაიმე $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$ წერტილები, მაშინ

$$\vec{OA} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k},$$

$$\vec{OB} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}.$$

ვექტორთა სხვაობის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ ნებისმიერი $\vec{AB}$ ვექტორის კოორდინატები უდრის მისი ბოლო წერტილისა და სათავის სათანადო კოორდინატების სხვაობას, ე.ი.

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. განსაზღვრეთ ვექტორთა წრფივად დამოკიდებული და დამოუკიდებელი სისტემები.
2. შეიძლება თუ არა, რომ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემის რაიმე ქვესისტემა იყოს წრფივად დამოკიდებული? პასუხი დაასაბუთეთ.
3. რა შეიძლება ითქვას ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოკიდებულების შესახებ, თუ ცნობილია რომ, ამ სისტემის რომელიღაც ვექტორი დანარჩენების წრფივი კომბინაციაა? ჩამოაყალიბეთ სათანადო თეორემა.
4. დაამტკიცეთ თეორემა სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი სამი ვექტორის წრფივად დამოკიდებულების შესახებ.
5. რას უდრის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი: ა) წრფეზე; ბ) სიბრტყეზე; გ) სივრცეში?
6. მოიყვანეთ ბაზისის განსაზღვრება.
7. რა შემთხვევაში იტყვიან, რომ $\vec{a}$ ვექტორი დაშლილია $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ ვექტორების მიხედვით.
8. დაიშლება თუ არა სივრცის ნებისმიერი ვექტორი სივრცის ბაზისის ვექტორების მიხედვით? რამდენნაირია ეს დაშლა?
9. რომელი ვექტორები დაიშლება: ა) წრფის ბაზისის მიხედვით? ბ) სიბრტყის ბაზისის მიხედვით?
10. განსაზღვრეთ ვექტორის კოორდინატები ბაზისში.
11. როგორ ხორციელდება კოორდინატული ფორმით მოცემულ ვექტორთა შეკრება-გამოკლების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები?
12. განმარტეთ ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები. რა კავშირი აქვს ამ კოორდინატებს ვექტორის გეგმილებთან კოორდინატთა ღერძებზე?
13. რას უდრის რადიუს-ვექტორის კოორდინატები? როგორ გამოისახება ნებისმიერი $\vec{AB}$ ვექტორის კოორდინატები A და B წერტილთა კოორდინატების საშუალებით?

პრაქტიკული სავარჯიშოები

26.1. მოცემულია ვექტორები:

$\vec{a}(1,-2,4)$ და $\vec{b}(-3,1,-2)$.

იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები:

ა) $\vec{a}+\vec{b}$;

ბ) $\vec{a}-\vec{b}$;

გ) $2\vec{a}$;

დ) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$;

ე) $3\vec{a}+6\vec{b}$;

ვ) $-5\vec{a}+2\vec{b}$.

26.2. მოცემულია: $\vec{a}(-2,4,-3)$, $\vec{b}(4,-2,5)$ და $\vec{c}(0,1,3)$ ვექტორები. იპოვეთ $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ ვექტორის კოორდინატები.

26.3. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}(4,-3,6)$ და $\vec{b}(-5,2,4)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე:

ა) $3\vec{b}$;

ბ) $2\vec{a}-5\vec{b}$;

გ) $\frac{1}{2}\vec{a}+4\vec{b}$;

დ) $2\vec{a}-\vec{b}$.

26.4. მოცემულია $A(-3,4,2)$ და $B(-2,1,5)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BA}$ ვექტორების კოორდინატები.

26.5. მოცემულია $\overrightarrow{AB}(-4,-2,1)$ ვექტორი და $B(1,4,5)$ წერტილი. იპოვეთ A წერტილის კოორდინატები.

26.6. მოცემულია $\overrightarrow{AB}(3,7,1)$ ვექტორი და $A(-2,1,-3)$ წერტილი. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები.

26.7. მოცემულია $A(-2,1,3)$, $B(1,4,2)$, $C(5,6,4)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AM}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ M არის BC მონაკვეთის შუა წერტილი.

26.8. მოცემულია $\vec{a}(-1,2,3)$ და $\vec{b}(1,-4,5)$ ვექტორები. იპოვეთ $\vec{c}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$.

26.9. დაადგინეთ, კოლინეარულია თუ არა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები:

ა) $\vec{a}=(-3,-2,1)$, $\vec{b}=(6,4,-2)$;

ბ) $\vec{a}=(\frac{1}{2},4,\frac{1}{3})$, $\vec{b}=(-1,-8,1)$.

26.10. λ-ს რა მნიშვნელობისთვისაა შემდეგი კოლინეარული ვექტორები $\vec{a}(1,-2,\lambda)$ და $\vec{b}(-4,8,3)$.

26.11. α და β-ს რა მნიშვნელობებისათვის არის კოლინეარული ვექტორები $\vec{a}(1,\alpha,-2)$ და $\vec{b}(\beta,4,6)$?

26.12. მოცემულია შემდეგი წერტილები: $A(-7,2,2)$, $B(-10,-1,5)$, $C(2,5,-4)$ და $D(8,5,-7)$. აჩვენეთ, რომ $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{BD}$ ვექტორები კოლინეარულია.

26.13. აჩვენეთ, რომ: წერტილები $A(-3,-1,1)$, $B(2,3,-1)$, $C(3,3,-5)$ და $D(2,-1,-19)$ წარმოადგენენ ტრაპეციის წვეროებს.

26.14. აჩვენეთ, რომ: $A(1,-1,3)$, $B(2,2,-5)$, $C(4,1,-6)$ და $D(3,-2,2)$ წერტილები წარმოადგენენ პარალელოგრამის წვეროებს.

26.15. პარალელოგრამის სამი მომდევნო წვეროა $A(1,2,3)$, $B(3,1,6)$, $C(0,-1,4)$. იპოვეთ პარალელოგრამის მეოთხე წვეროს კოორდინატები.

26.16. $ABCD$ პარალელოგრამში $M(2,2,1)$ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ C და D წერტილების კოორდინატები, თუ: $A=A(-2,6,0)$ და $B=B(2,8,-6)$.

26.17. მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამის სამი მომდევნო წვერო: $A(1,2,1)$, $B(0,0,-2)$, $C(1,3,0)$.

იპოვეთ $\overrightarrow{BD}$ ვექტორის კოორდინატები.

26.18. დაადგინეთ, ქმნიან თუ არა ბაზისს ვექტორები:

ა) $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(1,5,4)$, $\vec{c}(4,1,-3)$;

ბ) $\vec{a}(2,-1,1)$, $\vec{b}(1,2,3)$, $\vec{c}(1,-3,-2)$.

26.19. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები ქმნიან ბაზისს. როგორი უნდა იყოს m, n, k რიცხვები, რომ

$$(2m-3)\vec{a}-(2n+7)\vec{b}-(2k-9)\vec{c}=\vec{0}.$$

ლექცია 27

სკალარული ნამრავლი. n განზომილებიანი E^n სივრცე

27.1. სკალარული ნამრავლი და მისი თვისებები

პრაქტიკაში ვექტორების გამოყენებისას მნიშვნელოვან როლს თამაშობს *ვექტორთა სკალარული ნამრავლის* ცნება.

განსაზღვრება. **ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.**

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $(\vec{a}, \vec{b})$ ან $\vec{a} \cdot \vec{b}$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრებით

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha, \tag{1}$$

სადაც α არის $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, ე.ი. $\alpha = (\vec{a}, \wedge\, \vec{b})$. თუ მხედველობაში მივიღებთ ვექტორის ღერძზე გეგმილის გამოსახულებას

$$\text{გეგ.}_\ell \vec{AB} = |\vec{AB}|\cos\alpha,$$

(1) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,\text{გეგ.}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}|\,\text{გეგ.}_{\vec{b}} \vec{a}, \tag{2}$$

სადაც $\text{გეგ.}_{\vec{a}} \vec{b}$ არის $\vec{b}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{a}$ ვექტორით განსაზღვრულ ღერძზე.

ამრიგად, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის ერთ-ერთი ვექტორის სიგრძისა და ამ ვექტორით განსაზღვრულ ღერძზე მეორე ვექტორის გეგმილის ნამრავლს.

(2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\text{გეგ.}_{\vec{\ell}} \vec{a} = (\vec{a}, \vec{\ell}).$$

სადაც $\vec{\ell}$ ერთეულოვანი ვექტორია.

ვთქვათ, $\vec{a}= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, მაშინ

$$x=(\vec{a}, \vec{i}), \quad y=(\vec{a}, \vec{j}), \quad z=(\vec{a}, \vec{k}).$$

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი

თვისებები:

1. სკალარული ნამრავლი კომუტატიურია: $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.

2. სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორები ურთიერთმართობულია ან ერთი მათგანი მაინც ნულ-ვექტორია. ე.ი. ორი არანულოვანი ვექტორის მართობულობის პირობაა მათი სკალარული ნამრავლის ნულთან ტოლობა.

3. ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$, ე.ი.

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}.$$

4. საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ მგეზავებისათვის მართებულია ტოლობები:

$$(\vec{i},\vec{i})=(\vec{j},\vec{j})=(\vec{k},\vec{k})=1,$$

$$(\vec{i},\vec{j})=(\vec{j},\vec{k})=(\vec{k},\vec{i})=0.$$

5. სკალარული ნამრავლი დისტრიბუციულია ვექტორთა შეკრების ოპერაციის მიმართ, ე.ი.

$$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c}).$$

6. ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისა და λ რიცხვისათვის

$$(\lambda\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

7. თუ ნებისმიერი $\vec{d}$ ვექტორისათვის $(\vec{a},\vec{d})=(\vec{b},\vec{d})$, მაშინ $\vec{a}=\vec{b}$.

პირველი ოთხი თვისების მართებულობა უშუალოდ გამომდინარეობს სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან.

დავამტკიცოთ მეხუთე და მეექვსე თვისება:

$$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,\text{გეგ}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,\text{გეგ}_{\vec{a}}\vec{b}+$$

$$+|\vec{a}|\,\text{გეგ}_{\vec{a}}\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c});$$

ასევე,

$$(\lambda\vec{a},\vec{b})=|\vec{b}|\,\text{გეგ}_{\vec{b}}\lambda\vec{a}=\lambda|\vec{b}|\,\text{გეგ}_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a},\vec{b})$$

და

$$(\vec{a},\lambda\vec{b})=(\lambda\vec{b},\vec{a})=\lambda(\vec{b},\vec{a})=\lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

დავამტკიცოთ მეშვიდე თვისება. თუ $(\vec{a},\vec{d})=(\vec{b},\vec{d})$, მაშინ მეხუთე და მეექვსე თვისებების ძალით $(\vec{a}-\vec{b},\vec{d})=0$. რადგან $\vec{d}$ ნებისმიერია, ამიტომ მეორე თვისების თანახმად, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$, ე.ი. $\vec{a}=\vec{b}$.

თეორემა 1. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის მათი ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლთა ჯამს, ე.ი. თუ $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ და $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, მაშინ

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{3}$$

დამტკიცება. რადგან $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ და $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, ამიტომ სკალარული ნამრავლის სათანადო თვისებების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$(\vec{a},\vec{b})=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2(\vec{i},\vec{i})+$$

$$+x_1y_2(\vec{i},\vec{j})+x_1z_2(\vec{i},\vec{k})+y_1x_2(\vec{j},\vec{i})+y_1y_2(\vec{j},\vec{j})+$$

$$+y_1z_2(\vec{j},\vec{k})+z_1x_2(\vec{k},\vec{i})+z_1y_2(\vec{k},\vec{j})+z_1z_2(\vec{k},\vec{k})=$$

$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

თეორემა 1 დამტკიცებულია.

შედეგი 1. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მართობულობის პირობა კოორდინატებში ასე ჩაიწერება

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

შედეგი 2. $\vec{a}=(x,y,z)$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (4)$$

შედეგი 3. მანძილი $A(x_1,y_1,z_1)$ და $B(x_2,y_2,z_2)$ წერტილებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (5)$$

მართლაც, რადგანაც $\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ და $|AB|=|\vec{AB}|$, ამიტომ (4) ფორმულის გამოყენებით უშუალოდ მიიღება (5).

შედეგი 4. კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

ეს შედეგი უშუალოდ სკალარული ნამრაველის განმარტებიდან (3) და (4) ტოლობების გათვალისწინებით მიიღება.

ვთქვათ, α, β და γ კუთხეებია, რომლებსაც $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ვექტორი ადგენს შესაბამისად OX, OY და OZ ღერძებთან. OX, OY და OZ ღერძებზე $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილებია:

$$x=|\vec{a}|\cos\alpha,\quad y=|\vec{a}|\cos\beta,\quad z=|\vec{a}|\cos\gamma, \qquad (6)$$

საიდანაც (4) ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (7)$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსები ეწოდება. (6)-დან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ *ერთეულოვანი ვექტორის კოორდინატები მისი მიმართულების კოსინუსებია.*

(7) ტოლობებიდან უშუალოდ მიიღება

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

რის გამოც ადვილად ვასკვნით, რომ **$\vec{a}$ ვექტორის მგეზავს წარმოადგენს $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ვექტორი.**

27.2. n განზომილებიანი E^n სივრცე

როგორც დავინახეთ, სივრცის ყოველი ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება თავისი *კოორდინატებით – ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეულით* (ანალოგიურად, წრფისა და სიბრტყის ვექტორები ცალსახად განისაზღვრება შესაბამისად – *ნამდვილი რიცხვით* და *ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილით*). ყველა ასეთი სამეულების სიმრავლე წარმოქმნის სამგანზომილებიან სივრცეს. ჩვენ შეგვიძლია განვაზოგადოთ *სამგანზომილებიანი სივრცის* ცნება, თუ განვიხილავთ ნამდვილ *რიცხვთა დალაგებული ოთხეულების, ხუთეულების* და ა.შ. *n-ეულების* სიმრავლეებს. შევნიშნოთ, რომ ასეთი სიმრავლეებისათვის ჩვენ ვეღარ ვიხელმძღვანელებთ იმ ბუნებრივი გეომეტრიული წარმოდგენებით, რაც ჩვენს ხელთ იყო სამგაზნომილებიანი სივრცის შემთხვევაში. მიუხედავად ამისა, ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n-ეულების სიმრავლეზე შესაძლებელია განისაზღვროს ყველა ის ოპერაცია, რომელიც სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში გვქონდა. შემოვიღოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი განსაზღვრება.

n რაოდენობის ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ ერთობლიობას (ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ n-ეულს) ეწოდება n კოორდინატიანი (n კომპონენტიანი) ვექტორი და იგი ჩაიწერება შემდეგნაირად $\vec{a} = \vec{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ან $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. a_i ($i=1,2,\ldots,n$) რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები (კომპონენტები) ეწოდება.

თუ ვექტორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, მას *ნულოვანი ვექტორი* ეწოდება $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$.

n განზომილებიანი კოორდინატული სივრცე E^n ეწოდება ყველა n კოორდინატიან $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $a_i\in R$, $i=1,2,\ldots,n$, ვექტორთა სიმრავლეს. $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ვექტორს ეწოდება E^n-ის წერტილი.

E^n სივრცის ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი ტოლია (($a_1,a_2,\ldots,a_n$) წერტილი ემთხვევა ($b_1,b_2,\ldots,b_n$) წერტილს), თუ სრულდება ტოლობები: $a_1=b_1$, $a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$.

შემოვიღოთ *ვექტორების შეკრებისა* და *ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ოპერაცია.*

ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის ჯამი ეწოდება ვექტორს

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\, a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n).$$

$\vec{a}$ ვექტორის $\lambda\in R$ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ვექტორს

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n).$$

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორთა სხვაობა ეწოდება ვექტორს

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}=(a_1-b_1,\, a_2-b_2,\ldots,a_n-b_n).$$

ძნელი საჩვენებელი არაა, რომ n კოორდინატიანი ვექტორებისათვის ძალაში რჩება ყველა ის თვისება, რომელიც სამკოორდინატიან ვექტორებზე ოპერაციებისათვის იყო ჩვენთვის ცნობილი.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი

თეორემა 2. **E^n სივრცეში ყოველი $n+1$ რაოდენობის ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რაოდენობაა n. E^n-ში არსებობს უამრავი ბაზისი (n რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა). თითოეულ ბაზისში არის ზუსტად n ცალი ვექტორი. ნებისმიერი ვექტორი ერთადერთი გზით წარმოდგება, როგორც ბაზისური ვექტორების წრფივი კომბინაცია. ერთეულოვან**

ბაზისში $\vec{\ell}_1=(1,0,...,0)$, $\vec{\ell}_2=(0,1,...,0)$,..., $\vec{\ell}_n=(0,0,...,1)$, ნებისმიერი $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ ვექტორი წარმოდგება შემდეგი სახით

$$\vec{a}=a_1\vec{\ell}_1+a_2\vec{\ell}_2+...+a_n\vec{\ell}_n.$$

ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს კოორდინატების საშუალებით განვსაზღვრავთ.

E^n სივრცის ორი $\vec{a}=(a_1,...,a_n)$ და $\vec{b}=(b_1,...,b_n)$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება შესაბამისი კომპონენტების ნამრავლთა ჯამს:

$$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n.$$

$\vec{a}=(a_1,...,a_n)$ ვექტორის სიგრძე ეწოდება სიდიდეს

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}.$$

ცხადია, რომ $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

E^n სივრცის ორ $(a_1,\ldots,a_n)$ და $(b_1,\ldots,b_n)$ წერტილს შორის მანძილი $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის სიგრძის ტოლია

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b},\,\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}.$$

ორ არანულოვან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორს შორის კუთხე φ განისაზღვრება შემდეგი ორი პირობით:

$$0\le\varphi\le\pi \text{ და } \cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}.$$

ცხადია, რომ *ორი არანულოვანი ვექტორი ორთოგონალურია* (მათ შორის კუთხეა $\frac{\pi}{2}$) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(\vec{a},\vec{b})=0$.

განვიხილოთ *ერთეულოვან (ნორმირებულ) ვექტორთა სისტემა*

$$\vec{\ell}_1=(1,0,\dots,0),\ \vec{\ell}_2=(0,1,\dots,0),\dots,\ \vec{\ell}_n=(0,0,\dots,1). \qquad (8)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ვექტორთა (8) სისტემის ნებისმიერი ორი ვექტორი ორთოგონალურია.

ვექტორთა (8) სისტემას E^n სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი ეწოდება.

n კოორდინატიან ვექტორთა რაიმე M სიმრავლეს ეწოდება ვექტორული (წრფივი) სივრცე თუ სრულდება პირობები:

1. M სიმრავლის ნებისმიერი ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისათვის

$$\vec{a}+\vec{b}\in M;$$

2. ნებისმიერი $\lambda\in R$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $\vec{a}\in M$-სთვის

$$\lambda\vec{a}\in M.$$

ვექტორული სივრცის ქვესიმრავლეს, რომელიც თავად წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს, ეწოდება ვექტორული სივრცის ქვესივრცე.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. განსაზღვრეთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი სამგანზომილებიან სივრცეში.
2. ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ სკალარული ნამრავლის თვისებები.
3. მოიყვანეთ კოორდინატული ფორმით მოცემულ ვექტორთა მართობულობის (ორთოგონალურობის) პირობა.
4. მოიყვანეთ ვექტორის სიგრძისა და ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულები.
5. მოიყვანეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელი ფორმულა.
6. რას ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსები?
7. რას ეწოდება n კოორდინატიანი ვექტორი?
8. განსაზღვრეთ n განზომილებიანი კოორდინატული სივრცე.
9. როგორ განისაზღვრება ვექტორთა შეკრებისა და რიცხვის ვექტორზე გამრავლების ოპერაციები E^n სივრცეში?
10. რას უდრის E^n სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რაოდენობა?
11. როგორ განისაზღვრება სკალარული ნამრავლი E^n სივრცეში?
12. მოიყვანეთ E^n სივრცის ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა.
13. როგორ განისაზღვრება კუთხე E^n-ის ორ არანულოვან ვექტორს შორის?
14. განსაზღვრეთ ვექტორული სივრცე და ვექტორული სივრცის ქვესივრცე.

პრაქტიკული სავარჯიშოები

27.1. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$.

27.2. მოცემულია: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$. იპოვეთ:

ა) $(\vec{a},\vec{b})$;

ბ) $\vec{a}^{\,2}$ $(\vec{a}^{\,2}=(\vec{a},\vec{a}))$;

გ) $(\vec{a}-\vec{b})^2$;

დ) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$;

ე) $(2\vec{a}+\vec{b},3\vec{a}-2\vec{b})$;

ვ) $(2\vec{a}-3\vec{b},4\vec{a}+\vec{b})$.

27.3. მოცემულია: $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{c})=\dfrac{\pi}{3}$, $(\vec{b},\hat{\ }\vec{c})=\dfrac{\pi}{2}$.

იპოვეთ $(3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c},\vec{b}+\vec{c})$.

27.4. მოცემულია: $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$.

იპოვეთ $|2\vec{a}-\vec{b}|$ და $|3\vec{a}+2\vec{b}|$.

27.5. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ერთეულოვანი ვექტორები აკმაყოფილებენ პირობას $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. იპოვეთ

$(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{c})$.

27.6. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორები აკმაყოფილებენ პირობას $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. იპოვეთ $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{c})$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=1$.

27.7. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\vec{b})=2\sqrt{2}$.

27.8. მოცემულია: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. იპოვეთ კუთხე $2\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-3\vec{b}$ ვექტორებს შორის.

27.9. დაადგინეთ k-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $3\vec{a}+2k\vec{b}$ და $2k\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=60^0$.

27.10. α-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნებიან $\vec a+\alpha\vec b$ და $\vec a-\alpha\vec b$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ $|\vec a|=4$ და $|\vec b|=3$?

27.11. იპოვეთ კუთხე $\vec a$ და $\vec b$ ერთეულოვან ვექტორებს შორის, თუ $\vec p=\vec a+2\vec b$ და $\vec q=5\vec a-4\vec b$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

27.12. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედი რომლის წვეროებია A(-3,5,6), B(1,-5,7), C(8,-3,-1) და D(4,7,-2) კვადრატია.

3.13. იპოვეთ $გეგ_{\vec a}\vec b$, თუ $|\vec a|=2$, $(\vec a,\vec b)=-4$.

27.14. იპოვეთ $გეგ_{\vec b}(3\vec a+2\vec b)$, თუ $|\vec a|=2$, $|\vec b|=1$, $(\vec a,\widehat{\ }\,\vec b)=\dfrac{2\pi}{3}$.

27.15. იპოვეთ $გეგ_{\vec a-\vec b}(\vec a+\vec b)$, თუ $|\vec a|=\sqrt3$, $|\vec b|=2$, $(\vec a,\widehat{\ }\,\vec b)=\dfrac{\pi}{6}$.

27.16. გამოთვალეთ:

ა) $(\vec j+2\vec k)^2-(2\vec j+\vec i,\ \vec k-\vec j)+$
$+(\vec k,\ \vec j+\vec k)$;

ბ) $(\vec i-2\vec j,\ \vec k)^2-(\vec j,\ 2\vec i+3\vec k)+$
$+(\vec j-\vec k)^2$.

27.17. $\vec a=(1,0,-5)$ და $\vec b=(-3,1,-2)$. იპოვეთ $(\vec a,\vec b)$.

27.18. იპოვეთ $\vec a$ ვექტორის სიგრძე და მიმართულების კოსინუსები, თუ:

ა) $\vec a=3\vec i-5\vec j+\sqrt2\,\vec k$;

ბ) $\vec a=2\vec i+3\vec j-6\vec k$.

27.19. იპოვეთ $\vec a=\vec i+2\vec j-2\vec k$ ვექტორის მგეზავი.

27.20. იპოვეთ $\vec a$ ვექტორის მგეზავი, თუ:

ა) $\vec a=\vec i+8\vec j-2\vec k$;

ბ) $\vec a=-5\vec j+4\vec k$;

გ) $\vec a=6\vec i-3\vec k$;

დ) $\vec a=-2\vec j$.

27.21. იპოვეთ $\vec a=2\vec i+\vec j-2\vec k$ ვექტორის კოლინეარული $\vec b$ ვექტორი, თუ ის OZ ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს და $|\vec b|=9$.

27.22. იპოვეთ $\vec a\,(x,y)$ ვექტორი, თუ იგი კოლინეარულია $\vec b\,(1,-3)$ ვექტორისა და $|\vec a|=\sqrt3$.

27.23. იპოვეთ $\vec{p}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ იგი $\vec{a}=(2,1,-1)$ ვექტორის კოლინეარულია და აკმაყოფილებს პირობას $(\vec{a},\vec{p})=3$.

27.24. სამკუთხედის წვეროებია A(-1,-2,4), B(-4,-1,-2) და C(-5,6,-4). BD სიმაღლეა. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები.

27.25. მოცემულია A(2,2,0) და B(5,-2,0) წერტილები. აბსცისთა ღერძზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ $<AMB=\dfrac{\pi}{2}$.

27.26. დაასაბუთეთ, რომ:

ა) n განზომილებიანი კოორდინატული სივრცე E^n არის ვექტორული სივრცე;

ბ) $\vec{a}=(a_1,...,a_n)$ ვექტორთა სიმრავლე, სადაც $a_1=\ldots=a_n$, არის ვექტორული სივრცე;

გ) სიმრავლე ვექტორებისა, რომელთა $a_1, a_2, \ldots, a_n$ კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n=0,$$

სადაც $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in R$ მოცემული რიცხვებია, არის ვექტორული სივრცე.

დ) ყველა არაუარყოფით კომპონენტებიან ვექტორთა სიმრავლე არ არის ვექტორული სივრცე;

ე) სიმრავლე ყველა იმ ვექტორებისა, რომელთა $a_1,\ldots,a_n$ კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_n a_n=b,$$

$$b\neq 0,\quad \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in R,$$

არ არის ვექტორული სივრცე.

ლექცია 28

მატრიცები. ოპერაციები მატრიცებზე. მატრიცათა სახეები

28.1. მატრიცები. ოპერაციები მატრიცებზე

წარმოების დაგეგმვა უნდა ემყარებოდეს ინფორმაციის სათანადოდ მოწესრიგებულ სისტემას, რომლის დახმარებითაც მარტივად და მოკლედ აღიწერება დამოკიდებულებანი, რომელთაც ადგილი აქვთ მატერიალურ წარმოებაში. მონაცემთა ასეთი მოწესრიგებული სისტემა შეიძლება თვალნათლივ წარმოვადგინოთ შესაბამისი ცხრილით, რომელსაც მათემატიკაში *მატრიცას* უწოდებენ.

ამრიგად, მატრიცა წარმოადგენს მონაცემთა (რიცხვთა) მართკუთხა ცხრილს.

მონაცემები მატრიცაში მოთავსებულია *სტრიქონებსა* და *სვეტებში.* მატრიცებს აღნიშნავენ ლათინური დიდი ასოებით, ხოლო მონაცემებს ათავსებენ კვადრატულ ან მრგვალ ფრჩხილებში. **მატრიცაში მოთავსებულ მონაცემებს უწოდებენ მატრიცის ელემენტებს და მათ ლათინური პატარა ასოებით აღნიშნავენ. მატრიცაში ელემენტის ადგილმდებარეობის განსაზღვრისათვის გამოიყენება ორმაგი ინდექსი, რომელშიც პირველი მიუთითებს სტრიქონის ნომერს, მეორე კი — სვეტის ნომერს.**

ამრიგად, მატრიცა, რომელიც შეიცავს m სტრიქონსა და n სვეტს ასე წარმოსდგება

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A მატრიცა შეიძლება აღნიშნული იქნას ორმაგი ვერტიკალური ხაზითაც, რომელშიც ჩაიწერება *მატრიცის ზოგადი ელემენტი*

$$A=\|a_{ij}\|.$$

ამბობენ, რომ A მარტიცა არის $m \times n$ რიგის, თუ იგი შეიცავს m სტრიქონს და n სვეტს.

$1 \times n$ რიგის მატრიცას n განზომილებიანი მატრიცა-სტრიქონი ან ვექტორ-სტრიქონი ეწოდება, ხოლო $m \times 1$ რიგის მატრიცას m – განზომილებიანი მატრიცა-სვეტი ან ვექტორ-სვეტი.

მატრიცას ეწოდება კვადრატული, თუ მისი სტრიქონებისა და სვეტების რაოდენობა ერთმანეთის ტოლია.

ერთი და იგივე რიგის A და B მატრიცებს ეწოდებათ ტოლი, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია. ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ: $A = B$.

მატრიცებზე ძირითადი მოქმედებებია: *რიცხვისა (სკალარის) და მატრიცის გამრავლება, მატრიცთა შეკრება და მატრიცის მატრიცზე გამრავლება.*

c ნამდვილი რიცხვისა (სკალარის) და A მატრიცის ნამრავლი არის მატრიცა, რომლის თითოეული ელემენტი მიიღება A მატრიცის შესაბამისი ელემენტების c რიცხვზე გამრავლებით. ამ ნამრავლს აღნიშნავენ cA სიმბოლოთი

$$cA = \| ca_{ij} \| = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}.$$

ერთი და იმავე რიგის A და B მატრიცების ჯამი (სხვაობა) $A+B$ $(A-B)$ ეწოდება მატრიცას, რომლის ელემენტები მიიღება A და B მატრიცების შესაბამისი ელემენტების შეკრებით (გამოკლებით)

$$A \pm B = \| a_{ij} \pm b_{ij} \|.$$

D მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი ნულის ტოლია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება. მას 0 ასოთი აღნიშნავენ.

სკალარზე მატრიცის ნამრავლს და მატრიცთა შეკრების ოპერაციებს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $A+B=B+A$ (მატრიცთა შეკრების კომუტატიურობა);
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (მატრიცთა შეკრების ასოციატიურობა);
3. $A+0=A$;
4. $(c+d)A=cA+dA$;
5. $c(A+B)=cA+cB$;
6. $cdA=c(dA)$.

აღნიშნული თვისებების დასამტკიცებლად საკმარისია გამოვიყენოთ რიცხვთა შესაბამისი თვისებები და მატრიცებისათვის შემოღებული ოპერაციების განმარტებები.

ვიდრე *მატრიცათა ნამრავლის* ზოგად განსაზღვრებას შემოვიტანდეთ, გავეეცნოთ, თუ როგორ ხდება *მატრიცა-სტრიქონისა* და *მატრიცა-სვეტის გამრავლება*.

ვთქვათ, **D** არის **n** განზომილებიანი მატრიცა-სტრიქონი

$$D=[d_1, d_2, \ldots d_n]$$

და **C** არის **n** განზომილებიანი მატრიცა-სვეტი

$$C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}.$$

D მატრიცა-სტრიქონისა და **C** მატრიცა-სვეტის ნამრავლი ეწოდება რიცხვს, რომელიც შემდეგნაირად გამოითვლება

$$DC=d_1c_1+d_2c_2+\ldots+d_nc_n=\sum_{i=1}^{n} d_ic_i.$$

მატრიცა-სტრიქონისა და მატრიცა-სვეტის გადასამრავლებლად აუცილებელია, რომ მათ ჰქონდეთ ელემენტთა ერთი და იგივე რაოდენობა, წინააღმდეგ შემთხვევაში ნამრავლი არ განიმარტება.

ახლა განვიხილოთ $m\times r$ რიგის **A** მატრიცა და $r\times n$ რიგის **B** მატრიცა

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ir} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mr} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{ij} & \ldots & b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rj} & \ldots & b_{rn} \end{bmatrix}.$$

A მატრიცის ყოველი სტრიქონი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც **r** განზომილებიანი მატრიცა-სტრიქონი, ხოლო **B** მატ-

რიცის ყოველი სვეტი კი – როგორც r განზომილებიანი მატრიცა-სვეტი. ამიტომ, A მატრიცის ყოველი სტრიქონი შეგვიძლია „გავამრავლოთ" B მატრიცის ნებისმიერ სვეტზე.

მაგალითად, A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის j -ური სვეტის ნამრავლი იქნება:

$$[a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{ir}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{rj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}.$$

A მატრიცა შეიცავს ზუსტად იმდენივე სვეტს (r), რამდენ სტრიქონსაც შეიცავს B მატრიცა. ამიტომ, შესაძლებელია A მატრიცის ყოველი (m რაოდენობის) სტრიქონის გამრავლება B მატრიცის ყოველ (n ცალ) სვეტზე. ყველა შესაძლო გადამრავლების შედეგად მივიღებთ mn რაოდენობის რიცხვს. ამ რიცხვებისაგან ადგენენ მატრიცას, რომელიც იქნება A და B მატრიცების *მატრიცული ნამრავლი.*

$m \times r$ რიგის A მარტიცისა და $r \times n$ რიგის B მატრიცის მატრიცული ნამრავლი არის $m \times n$ რიგის მატრიცა $C=AB$, რომლის ელემენტებიც მიიღებიან A მატრიცის სტრიქონებისა და B მატრიცის სვეტების გამრავლებით. C მატრიცის ელემენტები მოცემულია შემდეგი ფორმულით

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}, \quad i=\overline{1,m} \ \text{ და } \ j=\overline{1,n}.$$

AB მატრიცული ნამრავლი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის სვეტების რაოდენობა ტოლია B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობისა.

AB მატრიცულ ნამრავლში A მატრიცას ეწოდება მარცხენა მამრავლი, ხოლო B მატრიცას – მარჯვენა მამრავლი.

შევნიშნოთ, რომ მატრიცათა გამრავლება არ არის კომუტატიური ოპერაცია, ე.ი. საზოგადოდ, $AB \neq BA$. უფრო მეტიც, AB და BA შეიძლება სხვადასხვა რიგის მატრიცები იყოს.

მაგალითად. თუ $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$,

მაშინ

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

ხოლო

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

იმისათვის, რომ AB ტოლი იყოს BA-სი, აუცილებელია A და B იყოს ერთი და იმავე რიგის კვადრატული მატრიცა, მაგრამ ეს პირობა საკმარისი არ არის.

მაგალითად, თუ $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, მაშინ $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,

ხოლო $BA=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ მატრიცული ნამრავლის ნულოვან მატრიცასთან ტოლობის შემთხვევაში არ არის აუცილებელი რომ ერთ-ერთი თანამამრავლი მატრიცა იყოს ნულოვანი.

მაგალითად, არანულოვანი $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ და $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ მატრიცების ნამრავლია

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

ძნელი შესამოწმებელი არაა მატრიცული ნამრავლის (თუ, რასაკვირველია, მატრიცების გადამრავლება შესაძლებელია) შემდეგი თვისებების სამართლიანობა:

1. **$A(BC)=(AB)C$ (ასოციაციურობა);**
2. **$A(B+C)=AB+AC$ (დისტრიბუციულობა);**
3. **$(A+B)C=AC+BC$ (დისტრიბუციულობა);**
4. **$AcB=cAB=(cA)B,\ \forall c\in R$.**

28.2. მატრიცათა სახეები

კვადრატული მატრიცის შემდეგი ელემენტები $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ქმნიან ეგრეთ წოდებულ *მთავარ დიაგონალს.*

n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცას, რომლის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ყოველი ელემენტი ერთის ტოლია, ხოლო ყველა დანარჩენი ნულოვანია, n-ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცა ეწოდება და აღინიშნება I_n ან I სიმბოლოთი

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

დიაგონალური მატრიცა ეწოდება ისეთ კვადრატულ მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი, გარდა მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტებისა, უდრის ნულს.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ მატრიცას ეწოდება

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

მატრიცის ტრანსპონირებული.

(მატრიცის ტრანსპონირებისას სტრიქონები გადადიან სვეტებში და სვეტები – სტრიქონებში).

როგორც ადვილი დასანახია, თუ A მატრიცის რიგია $m \times n$, მაშინ A^T მატრიცის რიგი იქნება $n \times m$.

ტრანსპონირების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(AB)^T = B^T A^T$.

n-ური რიგის A კვადრატულ მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული, თუ $A^T = A$ და ირიბადსიმეტრიული (ანტისიმეტრიული), თუ $A^T = -A$.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რა არის მატრიცა? მატრიცის რიგი? კვადრატული მატრიცა?
2. როგორ მატრიცებს ეწოდება ტოლი?
3. განსაზღვრეთ რიცხვისა და მატრიცის ნამრავლი, მატრიცების ჯამი (სხვაობა) და მატრიცების ნამრავლი.
4. მოიყვანეთ სკალარზე მატრიცის ნამრავლისა და მატრიცათა შეკრების ოპერაციების ძირითადი თვისებები.
5. კომუტატიურია თუ არა მატრიცათა ნამრავლი? მოიყვანეთ მაგალითები.
6. შეიძლება თუ არა, რომ არანულოვან მატრიცათა ნამრავლი იყოს ნულოვანი მატრიცა? პასუხი დაასაბუთეთ.
7. მოიყვანეთ მატრიცათა ნამრავლის თვისებები.
8. რას ეწოდება დიაგონალური მატრიცა? ერთეულოვანი მატრიცა?
9. რას ეწოდება A მატრიცის ტრანსპონირებული?
10. მოიყვანეთ ტრანსპონირების ოპერაციის ძირითადი თვისებები.
11. განსაზღვრეთ სიმეტრიული და ირიბადსიმეტრიული მატრიცები.
12. რისი ტოლია ირიბადსიმეტრიული მატრიცის დიაგონალური ელემენტები?

პრაქტიკული სავარჯიშოები

28.1. ჩაწერეთ A მატრიცა, რომლის ზოგადი ელემენტია:

ა) $a_{ij} = 2i + j - 1, i = \overline{1,4}$ და $j = \overline{1,3}$;

ბ) $a_{ij} = \max(i, j), \; i = 1,4$ და $j = 1,3$;

გ) $a_{ij} = \begin{cases} 5, & \text{თუ } i = j, \\ j + (-1)^j, & \text{თუ } i \neq j, \end{cases}$

$i = \overline{1,3}$ და $j = \overline{1,3}$;

დ) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i = j, \\ 0, & \text{თუ } i \neq j, \end{cases}$

$i = \overline{1,4}$ და $j = \overline{1,4}$.

28.2. იპოვეთ x, y და z, თუ:

ა) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+y & z-2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} x & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ y-1 & 0 \\ 4 & z+x \end{bmatrix}$.

28.3. მოცემულია მატრიცები:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

იპოვეთ: ა) A+B; ბ) -4A; გ) 3A-2B; დ) B-A.

28.4. მოცემულია მატრიცები:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

იპოვეთ: ა) A-B; ბ) 2A+B; გ) A-4B; დ) 3A-2B.

28.5. იპოვეთ AB ნამრავლი, თუ:

ა) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$;

ბ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$;

გ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

დ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$;

ე) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & p \\ p & m & n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} m & p & 1 \\ n & m & 1 \\ p & n & 1 \end{bmatrix}$;

ე) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

28.6. იპოვეთ AB-BA, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

28.7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

მატრიცებისათვის შეამოწმეთ, სრულდება თუ არა ტოლობა $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

28.8. სამართლიანია თუ არა ტოლობა
$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$,
თუ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$?

28.9. $A = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
მატრიცებისათვის განსაზღვრეთ p და q ისეთსაირად, რომ:
ა) $(A + B)^2 = A^2 + B^2$;
ბ) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

28.10. დაამტკიცეთ, რომ თუ $AB = BA$, მაშინ
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

28.11. დაამტკიცეთ, რომ თუ $AB = BA$, მაშინ
$(AB)^2 = A^2 B^2$.

28.12. იპოვეთ ისეთი A მატრიცა, რომლისთვისაც სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობები:
ა) $A\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$;
ბ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

28.13. იპოვეთ C მატრიცა, თუ:
ა) $C = A^T B - 2B^T$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,
$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;
ბ) $C = B - AA^T$,
$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,
$B = \begin{bmatrix} 20 & 19 \\ 18 & 17 \end{bmatrix}$.

28.14. დაამტკიცეთ, რომ, თუ n-ური რიგის სიმეტრიული A მატრიცისა და n-ური რიგის ირიბადსიმეტრიული B მატრიცისათვის $AB = BA$, მაშინ AB იქნება ირიბადსიმეტრიული მატრიცა.

28.15. დაამტკიცეთ, რომ ერთი და იმავე რიგის A და B ირიბადსიმეტრიული მატრიცების ნამრავლი AB სიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $AB = BA$.

28.16. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი კვადრატული A მატრიცა ერთადერთი გზით წარმოიდგინება ორი მატრიცის ჯამის სახით, რომელთაგან ერთი სიმეტრიულია, ხოლო მეორე ანტისიმეტრიული.

28.17. $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ მატრიცა წარმოადგინეთ სიმეტრიული და ირიბადსიმეტრიული მატრიცების ჯამის სახით.

G.1. M_1 და M_2 წერტილები შესაბამისად A_1B_1 და A_2B_2 მონაკვეთების შუა წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}).$$

G.2. M_1 და M_2 წერტილები შესაბამისად $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედების მედიანების გადაკვეთის წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}).$$

G.3. ვექტორების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ, თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფს, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

G.4. ABC სამკუთხედში AM მონაკვეთი A კუთხის ბისექტრისაა. იპოვეთ $\overrightarrow{AM}$, თუ $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AC}=b$.

G.5. იპოვეთ $\vec p$ ვექტორის გეგმილები OX და OY ღერძებზე, თუ $|\vec p|=2$ და $\vec p$ ვექტორი OX ღერძთან შეადგენს 30^0-იან კუთხეს.

G.6. $\vec a$ და $\vec b$ ვექტორებს შორის კუთხე $\varphi=\frac{2}{3}\pi$, ხოლო $|\vec a|=11$, $|\vec b|=2$. გამოთვალეთ:

ა) $(2\vec a+3\vec b)\cdot(2\vec a-\vec b)$;

ბ) $(2\vec a-5\vec b)^2$.

G.7. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: A(1,2,1), B(3,-1,7), C(7,4,-2). გამოთვალეთ მისი შიგა კუთხეების კოსინუსები.

G.8. იპოვეთ ერთეული სიგრძის ვექტორი, რომელიც პარალელურია $\vec P(6,7,-6)$ ვექტორისა.

G.9. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: A(2,-4,3), B(1,-7,2) და C(2,-2,1). იპოვეთ $\overline{CD}$ სიმაღლის სიგრძე.

G.10. მოცემულია სამი ვექტორი: $\vec a(1,-3,4)$, $\vec b(3,-4,2)$ და $\vec c(-1,1,4)$. გამოთვალეთ გეგ$_{\vec b+\vec c}\,\overrightarrow{2a}$.

G.11. $\vec m$ და $\vec n$ ერთეული სიგრძის ვექტორებს შორის კუთხე 120^0-ია. იპოვეთ $\vec a=2\vec m+4\vec n$ და $\vec b=\vec m-\vec n$ ვექტორებს შორის კუთხე.

G.12. $\vec m$ და $\vec n$ ერთეული სიგრძის ვექტორებს შორის კუთხე 60^0-ია. იპოვეთ $\vec a=2\vec m+\vec n$ და $\vec b=\vec m-2\vec n$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები.

G.13. იპოვეთ $\vec a=5\vec p+2\vec q$ და $\vec b=\vec p-3\vec q$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები, თუ $|\vec p|=2\sqrt{2}$, $|\vec p|=3$ და $(\widehat{\vec p,\vec q})=\frac{\pi}{4}$.

G.14. განსაზღვრეთ $\vec{P}(2,-3,-1)$ ვექტორის საწყისი A წერტილი, თუ მისი ბოლო წერტილია B(1,-1,2).

G.15. მოცემულია A(2,2,0) და B(0,-2,5) წერტილები. ააგეთ $\vec{AB}$ ვექტორი, იპოვეთ მისი სიგრძე და მიმართულების კოსინუსები.

G.16. იპოვეთ $\vec{P}$ ვექტორი, თუ ის OX და OY ღერძებთან ადგენს $\alpha=60^0$, $\beta=120^0$ კუთხეებს და მისი სიგრძეა 2.

G.17. ვექტორი OX და OZ ღერძებთან ადგენს $\alpha=120^0$, $\gamma=45^0$ კუთხეებს. რა კუთხეს ადგენს ის OY ღერძთან?

G.18. M წერტილით განსაზღვრული რადიუს-ვექტორი საკოორდინანტო ღერძებთან ტოლ კუთხეებს ადგენს. იპოვეთ M წერტილის კოორდინატები, თუ მისი რადიუს-ვექტორის სიგრძეა 3.

G.19. განსაზღვრეთ $\vec{P}(6,-2,-3)$ და $\vec{Q}(3,4,-12)$ ვექტორების მგეზავები.

G.20. $\vec{Q}$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა 75, $\vec{P}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$ ვექტორის პარალელურია. იპოვეთ $\vec{Q}$ ვექტორი.

G.21. პარალელოგრამის სამი მომდევნო წვეროა: A(1,1), B(2,-1) და C(6;8). იპოვეთ მეოთხე წვერო.

G.22. იპოვეთ ერთეული სიგრძის ვექტორი, თუ ის ერთდროულად მართობულია $\vec{P}(3,6,8)$ ვექტორისა და OX ღერძისა.

G.23. $\vec{P}$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა 2, $\vec{Q}(3,4)$ ვექტორთან ადგენს 60^0-იან კუთხეს. იპოვეთ $\vec{P}$ ვექტორი.

G.24. იპოვეთ $\vec{P}(5,2,5)$ ვექტორის გეგმილი $\vec{Q}(2,-1,2)$ ვექტორზე.

G.25. მოცემულია A(3,-4,-2) და B(2,5,-2) წერტილები. იპოვეთ $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი იმ ℓ ღერძზე, რომელიც OX და OY ღერძებთან ადგენს $\alpha=60^0$, $\beta=120^0$ კუთხეებს.

G.26. იპოვეთ $\vec{P}(\sqrt{2},-3,-5)$ ვექტორის გეგმილი იმ ℓ ღერძზე, რომელიც OX და OZ ღერძებთან ადგენს $\alpha=45^0$, $\gamma=60^0$ კუთხეებს, ხოლო OY ღერძთან – მახვილ კუთხეს.

ლექცია 29

დეტერმინანტები და მათი თვისებები

29.1. დეტერმინანტი

განვიხილოთ ნებისმიერი n რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

არსებობს წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ კვადრატულ მატრიცას შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ამ *მატრიცის დეტერმინანტი* ეწოდება.

თუ $n=1$, მაშინ (1) მატრიცა შედგება a_{11} რიცხვისაგან და მისი შესაბამისი პირველი რიგის დეტერმინანტი ეწოდება თვით ამ რიცხვს.

თუ $n=2$, მაშინ (1) მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

ამ მატრიცის შესაბამისი მეორე რიგის დეტერმინანტი ეწოდება $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ რიცხვს და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოებიდან ერთ-ერთით:

$$|A|, \quad \det A, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

ე.ი. განსაზღვრით გვაქვს

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

ნებისმიერი $n>2$ რიგის დეტერმინანტი განისაზღვრება ინდუქციის წესით, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $n-1$ რიგის მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის ცნება უკვე შემოყვანილია.

წინასწარ მოვიყვანოთ *მატრიცის ელემენტის მინორის* და *ალგებრული დამატების* ცნებები.

n რიგის (1) მატრიცის a_{ij} $(i, j=1,2,...,n)$ ელემენტის მინორი M_{ij} ეწოდება $n-1$ რიგის იმ მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს, რომელიც (1) მატრიციდან მისი i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლით მიიღება.

a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ij} განისაზღვრება ტოლობით

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

(1) მატრიცის შესაბამისი n-ური რიგის დეტერმინანტი ეწოდება რიცხვს

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$$

და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოებიდან ერთ-ერთით:

$$|A|, \quad \det A, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ე.ი. განსაზღვრით გვაქვს

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \qquad (2)$$

A მატრიცის ელემენტებს, სტრიქონებს, სვეტებს და დიაგონალებს ეწოდებათ შესაბამისად $|A|$ დეტერმინანტის ელემენტები, სტრიქონები, სვეტები და დიაგონალები.

მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის (2)-დან გვაქვს

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}+a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

ამ ფორმულის დასამახსოვრებლად სასარგებლოა ეგრეთ-წოდებული *სამკუთხედების წესი,* რომელიც სიმბოლურად ილუსტრირებულია შემდეგი სქემით:

$$\begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot&0&0\\0&\cdot&0\\0&0&\cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0&0&\cdot\\\cdot&0&0\\0&\cdot&0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0&\cdot&0\\0&0&\cdot\\\cdot&0&0 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 0&0&\cdot\\0&\cdot&0\\\cdot&0&0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot&0&0\\0&0&\cdot\\0&\cdot&0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0&\cdot&0\\\cdot&0&0\\0&0&\cdot \end{vmatrix}.$$

მაგალითი. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} -1&2&0\\3&-2&1\\4&-3&2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2)\cdot 2 + 0\cdot 3\cdot(-3) + 4\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot(-2)\cdot 0 -$$

$$-(-1)\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot 3\cdot 2 = 4+8-3-12 = -3.$$

29.2. დეტერმინანტის თვისებები

მოვიყვანოთ დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები, რომელთა მართებულობას სიმარტივისათვის შევამოწმებთ $n=3$ შემთხვევაში.

1. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტის მათ შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი მოცემული დეტერმინანტის ტოლია, ე.ი.

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \qquad (3)$$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \qquad (4)$$

ეს თვისება შევამოწმოთ მესამე სვეტისათვის. გვაქვს

$$a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{33}\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{33}a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}(a_{33}a_{22} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33} \end{vmatrix}.$$

(3) და (4) ფორმულებს ეწოდება დეტერმინანტის გაშლა შესაბამისად j-ური სვეტის და i-ური სტრიქონის ელემენტების მიხედვით.

დეტერმინანტის გამოთვლას ამ ფორმულებით უწოდებენ აგრეთვე დეტერმინანტის გამოთვლას მინორებად გაშლის წესით.

ამ თვისებიდან მარტივად მივიღებთ, რომ

$$|I|=1.$$

2. მატრიცის ტრანსპონირებით დეტერმინანტი არ იცვლება, ე.ი.

$$|A^T|=|A|.$$

თვისების დასამტკიცებლად საკმარისია გამოვთვალოთ ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები.

3. დეტერმინანტი მხოლოდ ნიშანს იცვლის, თუ მოვახდენთ მისი ნებისმიერი ორი სვეტის (სტრიქონის) ურთიერთგადანაცვლებას.

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

ამ თვისების მართებულობა მტკიცდება უშუალო შემოწმებით.

4. დეტერმინანტი უდრის ნულს, თუ მისი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტი ნულია.

ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს პირველი თვისებიდან.

5. დეტერმინანტი უდრის ნულს, თუ მისი რომელიმე ორი სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, A მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის რომელიმე ორი სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთის ტოლია. თუ ურთიერთგადავანაცვლებთ ამ სვეტებს (სტრიქონებს). მაშინ მესამე თვისების ძალით $|A|$-ს უნდა შეეცვალოს მხოლოდ ნიშანი. მეორეს მხრივ, დეტერმინანტი არ შეიცვლება, რადგანაც გადანაცვლებული სვეტები (სტრიქონები) ერთნაირია, ე.ი. $|A|=-|A|$, საიდანაც $|A|=0$.

6. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტის საერთო მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

ამ თვისების მართებულობა მტკიცდება უშუალო შემოწმებით.

7. დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტები პროპორციულია სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტებისა.

დამტკიცება. მე-6 თვისების თანახმად პროპორციულობის კოეფიციენტი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ, რის შემდეგ მივიღებთ დეტერმინანტს ორი ერთნაირი სვეტით (სტრიქონით), რომელიც მე-5 თვისების ძალით ნულის ტოლია.

8. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტი ორი შესაკრების ჯამს წარმოადგენს, მაშინ ეს დეტერმინანტი წარმოიდგინება ორი შესაბამისი დეტერმინანტის ჯამის სახით.

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12}+\dot{a}_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22}+\dot{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32}+\dot{a}_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dot{a}_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \dot{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \dot{a}_{32} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

ამ ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ეს დეტერმინანტები გავშალოთ მეორე სვეტის ელემენტების მიხედვით და მიღებული შედეგები ერთმანეთს შევადაროთ.

9. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს მივუმატებთ სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული დეტერმინანტის ტოლ დეტერმინანტს.

დამტკიცება. მიღებული დეტერმინანტი მე-8 თვისების ძალით წარმოიდგინება ისეთი ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით, რომელთაგან ერთი ემთხვევა მოცემულ დეტერმინანტს, მეორე კი ნულის ტოლია, ვინაიდან მისი ორი სვეტი (სტრიქონი) პროპორციულია.

10. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტის ნებისმიერი სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია, ე.ი.

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\ldots+a_{jn}A_{in}=0,$$

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\ldots+a_{nj}A_{ni}=0,$$

სადაც $i,j=1,2,\ldots,n;\ i\neq j$.

შევამოწმოთ, მაგალითად ბოლო ტოლობის მართებულობა მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის, როცა $i=1$ და $j=3$. პირველი და მეხუთე თვისებების ძალით გვაქვს

$$a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ კიდევ სამი თვისება.

11. ორი კვადრატული მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის ამ მატრიცთა დეტერმინანტების ნამრავლს, ე.ი.

$$|AB|=|A|\cdot|B|.$$

12. დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი სვეტებისაგან წარმოქმნილი ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

13. ნებისმიერი n რიგის A მატრიცისა და $\alpha\in R$-თვის გვაქვს

$$|\alpha A|=\alpha^n|A|.$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ კვადრატული მატრიცის ელემენტის მინორის ცნებას განაზოგადებს *მართკუთხოვანი მატრიცის მინორის ცნება*, რომელიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობის საკითხის შესწავლისას. მოვიყვანოთ

განსაზღვრება. მართკუთხოვანი მატრიცის ნებისმიერად არჩეული r სტრიქონისა და r სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს მატრიცის r რიგის მინორი ეწოდება.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. ამოწერეთ პირველი, მეორე და მესამე რიგის კვადრატული მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულები.
2. როგორ განისაზღვრება ნებისმიერი $n>2$ რიგის დეტერმინანტი?
3. რას ეწოდება n რიგის მატრიცის a_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ ელემენტის მინორი? ალგებრული დამატება?
4. ამოწერეთ n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულა.
5. მოიყვანეთ სამკუთხედების წესის ილუსტრაცია.
6. ჩამოთვალეთ დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები.
7. დეტერმინანტის გამოსათვლელ რომელ ფორმულებს უწოდებენ მინორებად გაშლის წესს?
8. n რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელად რამდენი $n-1$ რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა გვიხდება მინორებად გაშლის წესით სარგებლობისას?
9. ჩამოაყალიბეთ (მე-12 თვისებიდან გამომდინარე) დეტერმინანტის ნულთან ტოლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.
10. ვთქვათ, A წარმოადგენს $m\times n$ რიგის მატრიცას და $m<n$. რამდენი m რიგის მინორი აქვს A მატრიცას?

პრაქტიკული სავარჯიშოები

29.1. გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

ა) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$;

ბ) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$;

გ) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$;

დ) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix}$;

ე) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

ვ) $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} & \sqrt{3}+2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}-2} & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix}$.

29.2. გამოთვალეთ დეტერმინანტები სამკუთხედების წესით:

ა) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

ბ) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

გ) $\begin{vmatrix} a & -a & -a \\ a & a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$;

დ) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$;

ე) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ a & b & c \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$;

ვ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$.

29.3. დაამტკიცეთ n რიგის დეტერმინანტისთვის მე-2, მე-6 და მე-8 თვისებები.

29.4. გამოთვალეთ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

მატრიცის $a_{22}=1$ და $a_{32}=6$ ელემენტთა მინორები და ალგებრული დამატებები.

29.5. გამოთვალეთ დეტერმინანტები მინორებად დაშლის წესით:

ა) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

ბ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$;

გ) $\begin{vmatrix} 1 & \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ 1 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

დ) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$;

ე) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

ვ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$;

ზ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

თ) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 9 & 3 & 3 & 12 \\ 25 & 15 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

29.6. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$;

ბ) $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & x \end{vmatrix}$;

გ) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$;

დ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix}$;

ე) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$;

ვ) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

ზ) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+15 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$.

29.7. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$;

ბ) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$;

გ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ x^2 & 9 & 16 \end{vmatrix} < 0$;

დ) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 41 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \geq 0$;

ე) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \leq 0$;

ვ) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$;

ზ) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3x-1 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-3x \end{vmatrix}$.

29.8. დაამტკიცეთ, რომ n რიგის შემდეგი დეტერმინანტებისათვის სამართლიანია ტოლობები:

ა) $$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n ;$$

ბ) $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_1 \dots \lambda_n .$$

29.9. გამოთვალეთ n რიგის დეტერმინანტები:

ა) $$\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ 0 & a^2 & a^2 & \dots & a^2 \\ 0 & 0 & a^3 & \dots & a^3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^n \end{vmatrix} ;$$

ბ) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} .$$

29.10. ვთქვათ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. რამდენი არანულოვანი მეორე რიგის მინორი აქვს A მატრიცას?

29.11. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=(a_1,a_2)$ და $\vec{b}=(b_1,b_2)$. დაამტკიცეთ, რომ ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი ტოლია $|\det A|$-სი, სადაც $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$.

29.12. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი:

ა) $\vec{a} = (1,5)$, $\vec{b} = (-1,3)$;

ხ) $\vec{a} = (-5,0)$, $\vec{b} = (0,-3)$.

29.13. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ:

ა) $A=A(3,-1)$, $B=B(2,2)$, $C=C(-3,0)$;

ბ) $A=A(1,0)$, $B=B(-4,1)$, $C=C(0,-1)$.

ლექცია 30

შებრუნებული მატრიცა

ვთქვათ, A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, ხოლო I – იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა.

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ეწოდება ისეთ B მატრიცას, რომლისთვისაც

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა აღინიშნება სიმბოლოთი A^{-1}, ე.ი.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I. \qquad (1)$$

(1) ტოლობა სიმეტრიულია A და A^{-1} მატრიცების მიმართ (ე.ი. (1) ტოლობა არ შეიცვლება, თუ A და A^{-1}-ს ადგილებს შევუცვლით), ამიტომ თუ A^{-1} არის A-ს შებრუნებული, მაშინ A არის A^{-1}-ის შებრუნებული

$$A = (A^{-1})^{-1}.$$

სიმეტრიულობიდან ცხადია აგრეთვე, რომ A^{-1} არის იმავე რიგის კვადრატული მატრიცა.

თეორემა 1. **თუ A მატრიცას გააჩნია შებრუნებული მატრიცა, მაშინ ის ერთადერთია.**

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ, რაიმე C მატრიცა აგრეთვე აკმაყოფილებს (1) პირობებს. ტოლობა

$$AC = I$$

მარცხნიდან გავამრავლოთ A^{-1}-ზე. მივიღებთ

$$A^{-1}(AC) = A^{-1} \cdot I.$$

მატრიცებზე ოპერაციათა თვისებების ძალით ეს ტოლობა ასე გადაიწერება

$$(A^{-1}A)C = A^{-1},$$

ანუ

$$IC = A^{-1},$$

ე.ი.

$$C = A^{-1}.$$

ამით თეორემა 1 დამტკიცებულია.

კვადრატულ მატრიცას ეწოდება განსაკუთრებული (გადაგვარებული), თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია; წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცას ეწოდება არაგანსაკუთრებული (გადაუგვარებელი).

A კვადრატული მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა ეწოდება მატრიცას

$$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

სადაც A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} $(i,\ j=1,2,..,n)$ ელემენტის ალგებრული დამატება.

მაშასადამე, A^{*} მატრიცის მისაღებად A მატრიცის ყოველი a_{ij} ელემენტი უნდა შეიცვალოს A_{ji} ალგებრული დამატებით.

ძნელი საჩვენებელი არაა, რომ

$$I^{*}=I.$$

თეორემა 2. ნებისმიერი კვადრატული A მატრიცისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$A^{*}\cdot A=A\cdot A^{*}=|A|\cdot I. \qquad (2)$$

დამტკიცება. ვიპოვოთ $C=A\cdot A^{*}$ ნამრავლი. მატრიცთა ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}.$$

აქედან დეტერმინანტთა სათანადო თვისებების გამოყენებით გვექნება

$$c_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{როცა } i\neq j, \\ |A|, & \text{როცა } i=j. \end{cases}$$

ამრიგად,

$$C=A\cdot A^{*}=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}=|A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}=|A|\cdot I.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$A^{*}\cdot A=|A|\cdot I.$$

თეორემა 2 დამტკიცებულია.

შებრუნებული მატრიცის არსებობის შესახებ მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3. **იმისათვის, რომ A მატრიცას გააჩნდეს შებრუნებული მატრიცა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ A იყოს არაგანსაკუთრებული მატრიცა. შებრუნებული მატრიცა გამოითვლება ფორმულით**

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}. \tag{3}$$

აუცილებლობა. ვთქვათ, A-ს გააჩნია შებრუნებული A^{-1} მატრიცა, ე.ი.

$$A\cdot A^{-1}=I.$$

ამიტომ

$$|A\cdot A^{-1}|=|I|.$$

დეტერმინანტთა თვისებებიდან გამომდინარე გვაქვს

$$|A|\cdot|A^{-1}|=1.$$

აქედან ჩანს, რომ

$$|A|\neq 0.$$

საკმარისობა. ვთქვათ, $|A|\neq 0$, მაშინ (2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}\cdot A=A\cdot\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}=I.$$

აქედან, შებრუნებული მატრიცის განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}.$$

თეორემა 3 დამტკიცებულია.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

გამოვთვალოთ A მატრიცის დეტერმინანტი:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-18+100-84-105+90+16=-1.$$

ცხადია.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-9+8=-1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-(-18-20)=38,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-12-15=-27,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-(-15+14)=1,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-6-35=-41,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-(-4-25)=29,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=20-21=-1,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-(8-42)=34,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}=6-30=-24.$$

ამრიგად, მიკავშირებული მატრიცაა

$$A^{*}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{bmatrix}.$$

(3) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{bmatrix}.$$

დავამტკიცოთ შებრუნებული და მიკავშირებული მატრიცების ზოგიერთი თვისება:

1. $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

მართლაც, $A^{-1}A=I$ ტოლობიდან გვაქვს $|A^{-1}A|=1$. აქედან $|A^{-1}|\cdot|A|=1$, საიდანაც $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

მატრიცათა გამრავლების ასოციაციურობის თვისების ძალით გვაქვს:

$$(AB)\,(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=I,$$

ე.ი.

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

3. $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.

მართლაც, $AA^{-1}=I$ ტოლობის ორივე მხარის ტრანსპონირებით მივიღებთ

$$(AA^{-1})^{T}=I^{T},$$

საიდანაც

$$(A^{-1})^{T}A^{T}=I.$$

აქედან

$$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}.$$

4. $(A^{T})^{*}=(A^{*})^{T}$.

ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს ტრანსპონირებული და მიკავშირებული მატრიცების განსაზღვრებებიდან.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ კიდევ ერთი თვისება.

5. $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. განსაზღვრეთ n-ური რიგის კვადრატული A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.
2. შესაძლებელია თუ არა, რომ A მატრიცას ჰქონდეს ერთზე მეტი შებრუნებული მატრიცა? პასუხი დაასაბუთეთ.
3. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი კვარატული A მატრიცისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $A^*A=AA^*=|A|\cdot I$.
4. რაში მდგომარეობს შებრუნებული მატრიცის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა? მოიყვანეთ შებრუნებული მატრიცის გამოსათვლელი ფორმულა.
5. რა კავშირი არსებობს მატრიცისა და მისი შებრუნებულის დეტერმინანტთა შორის?
6. რას უდრის მატრიცათა ნამრავლის შებრუნებული მატრიცა? მატრიცთა ნამრავლის მიკავშირებული მატრიცა?
7. დაამტკიცეთ, რომ გადაუგვარებელი A მატრიცისათვის სამართლიანია ტოლობა
$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}.$$

პრაქტიკული სავარჯიშოები

30.1. იპოვეთ A მატრიცის მიკავშირე-ბული მატრიცა, თუ:

ა) $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$;

გ) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{bmatrix}$;

დ) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

30.2. მოცემულია A და B მატრიცა. იპოვეთ ამ მატრიცების ნამრავლის მიკავშირებული მატრიცა, თუ:

ა) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

30.3. დაამტკიცეთ, რომ თუ A მეორე რიგის კვადრატული მატრიცაა, მაშინ $|A|=|A^{*}|$.

30.4. დაამტკიცეთ რომ, თუ A და B ერთიდაიგივე რიგის კვადრატული მატრიცებია. მაშინ

$(A^{T}B)^{*}=((B^{T}A)^{*})^{T}$.

30.5. იპოვეთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, თუ:

ა) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{bmatrix}$;

გ) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$;

დ) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & -2\end{bmatrix}$;

ე) $A=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix}$;

ვ) $A=\begin{bmatrix}15 & 6 & 8\\ 7 & 1 & 6\\ 10 & 5 & 4\end{bmatrix}$;

ზ) $A=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ . & . & & .\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix}$, $\lambda\neq 0$;

თ) $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}$,

$\lambda_i\neq 0;\ i=\overline{1,n}$.

30.6. დაადგინეთ გააჩნია თუ არა A მატრიცას შებრუნებული, თუ:

ა) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$;

გ) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$;

დ) $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$.

30.7. დაამტკიცეთ რომ, თუ A და B კვადრატული მატრიცებია და

$$AB=I,$$

მაშინ $A=B^{-1}$ $(B=A^{-1})$.

30.8. უშუალო გადამრავლებით დაადგინეთ, არის თუ არა A მატრიცა B მატრიცის შებრუნებული:

ა) $A=\begin{bmatrix}8&3&4\\1&-1&2\\10&2&7\end{bmatrix}$,

$$B=\begin{bmatrix}11&13&-10\\-13&-16&12\\-12&-14&11\end{bmatrix};$$

ბ) $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\4&3&1\\2&-1&2\end{bmatrix}$,

$$B=\begin{bmatrix}\frac{7}{8}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{bmatrix};$$

გ) $A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$,

$$B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{bmatrix};$$

დ) $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$,

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

ე) $A=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&8\end{bmatrix}$,

$$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0&0\\0&\frac{1}{4}&0&0\\0&0&\frac{1}{7}&0\\0&0&0&\frac{1}{8}\end{bmatrix}.$$

30.9. შემდეგი მატრიცებიდან ამოარჩიეთ ისეთი ორი, რომელთაც გააჩნიათ შებრუნებული და იპოვეთ მათი ნამრავლი:

$$A=\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\4&4\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}6&7\\36&42\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&5\\3&6\end{bmatrix}.$$

30.10. მოცემულია მატრიცა

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

დაამტკიცეთ, რომ $A^T=A^{-1}$.

30.11. ამოხსენით მატრიცული განტოლებები:

ა) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$;

ბ) $X \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$;

გ) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 0]$;

დ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

30.12. დაამტკიცეთ, რომ $I^* = I$.

30.13. იპოვეთ $|A|$, თუ ცნობილია, რომ

$$A^* A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{bmatrix}.$$

30.14. $|A^{-1}| = -\sqrt{2}$. იპოვეთ $|A|$.

30.15. იპოვეთ $(AB)^{-1}$, თუ ცნობილია, რომ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

30.16. იპოვეთ $(A^T)^{-1}$ მატრიცა, თუ ცნობილია, რომ:

ა) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$;

ბ) $A^{-1} = B^T C^T$.

30.17. ცნობილია, რომ

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

იპოვეთ $(A^T)^*$.

30.18. ცნობილია, რომ

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

იპოვეთ $(AB)^*$.

30.19. ვთქვათ, A არის n-ური რიგის ($n \geq 2$) კვადრატული მატრიცა. აჩვენეთ, რომ

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

30.20. ვთქვათ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in R,$$

$i, j = 1,2,3$. შესაძლებელია თუ არა, რომ შესრულდეს უტოლობა $|A^*| < 0$. პასუხი დაასაბუთეთ.

30.21. შეამოწმეთ $(AB)^* = B^* A^*$ ტოლობის სამართლიანობა შემდეგი მატრიცებისათვის

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

30.22. მოცემულია A მატრიცის ტრანსპონირებული A^T მატრიცა. იპოვეთ A^{-1} მატრიცის დეტერმინანტი, თუ

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ლექცია 31

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები. კრამერის წესი. გაუს-ჟორდანის მეთოდი

31.1. წრფივ განტოლებათა სისტემა

ვთქვათ, მოცემულია n-უცნობიან m წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1}$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებია, ხოლო $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ კოეფიციენტები და $b_1, b_2, \ldots b_m$ თავისუფალი წევრები კი ცნობილი რიცხვებია. საზოგადოდ, უცნობთა რიცხვი n არ უდრის განტოლებათა m რიცხვს.

განტოლებათა (1) სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი ყველა თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია, ხოლო არაერთგვაროვანი, თუ ერთი თავისუფალი წევრი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

$[c_1c_2...c_n]^T$ მატრიცას ეწოდება (1) სისტემის ამონახსნი, თუ (1) სისტემაში $x_1, x_2, \ldots x_n$ უცნობების ნაცვლად შესაბამისად $c_1, c_2, \ldots c_n$ რიცხვების ჩასმით, სისტემის ყოველი განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად.

(1) სისტემის ყველა ამონახსნის პოვნას (1) სისტემის ამოხსნა ეწოდება.

სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი, ხოლო არათავსებადი, თუ მას არა აქვს არც ერთი ამონახსნი.

მატრიცას

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

რომელიც შედგენილია (1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან, ამ სისტემის მატრიცა ეწოდება.

მატრიცას

$$A_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

(1) სისტემის გაფართოებულ მატრიცას უწოდებენ.

31.2. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის მატრიცული ჩაწერა. კრამერის წესი

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}.$$

მატრიცათა გამრავლების წესის გათვალისწინებით განტოლებათა (1) სისტემა შემდეგნაირად შეიძლება ჩავწეროთ

$$A\,X = B. \qquad (2)$$

ეს არის (1) სისტემის ჩაწერა *მატრიცული ფორმით.*

როცა განტოლებათა და უცნობთა რიცხვი ერთმანეთს ემთხვევა ($m = n$), მაშინ (1)-ს კვადრატულ სისტემას უწოდებენ. მისი მატრიცის დეტერმინანტს

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

სისტემის დეტერმინანტი ეწოდება.

თუ სისტემის დეტერმინანტი გადაუგვარებელია, ე.ი. $|A| \neq 0$, მაშინ არსებობს A^{-1} და (2) მატრიცული სისტემის მარცხნიდან A^{-1}-ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$X = A^{-1}B. \tag{3}$$

(3) წარმოადგენს (2) სისტემის ერთადერთ ამონახსნს მატრიცული სახით.

სისტემის Δ დეტერმინანტის j-ური ($j=1,2,\dots,n$) სვეტის ელემენტები შევცვალოთ შესაბამისი თავისუფალი წევრებით; ასეთნაირად მიღებული დეტერმინანტი აღვნიშნოთ Δ_j სიმბოლოთი (მას დამხმარე დეტერმინანტს უწოდებენ), ე.ი.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თეორემა. **(კრამერის წესი). თუ სისტემის Δ დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნი გამოითვლება ფორმულით:**

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1,2,\dots,n.$$

კვადრატული სისტემების ამოსახსნელად კრამერის წესის გამოყენება საკმაოდ შრომატევადია (საჭიროა სისტემის დეტერმინანტისა და დამხმარე დეტერმინანტების გამოთვლა).

31.3. გაუს-ჟორდანის მეთოდი

სისტემა (1)-ის თავსებადობის საკითხის გარკვევა, აგრეთვე ამოხსნა (თავსებადობის შემთხვევაში) შესაძლებელია შედარებით ნაკლებად შრომატევადი *გაუს-ჟორდანის მეთოდის* გამოყენებით. ამ მეთოდის ძირითად ასპექტებს გავაშუქებთ კონკრეტულ მაგალითებზე.

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოცემულია სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 200, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 480, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 170. \end{cases} \tag{4}$$

(4) სისტემისათვის გაუს-ჟორდანის მეთოდის გამოყენება გულისხმობს შემდეგი პუნქტების შესრულებას.

პუნქტი 1. სისტემის პირველი განტოლება გარდავქმნათ ისე, რომ x_1 უცნობის პირველი კოეფიციენტი გახდეს 1-ის ტოლი. ამისათვის პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{1}{2}$-ზე. ეს ოპერაცია სქემატურად ასე ჩავწეროთ

$$\frac{1}{2}\text{გ}_1 \longrightarrow \text{გ}_1$$

„ძველი“ პირველი განტოლების $\frac{1}{2}$-ზე გამრავლებით	მიიღება	ახალი პირველი განტოლება

პირველი პუნქტის შესრულების შედეგად გვექნება სისტემა:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=100, \\ 3x_1+5x_2+7x_3=480, \\ 2x_1+x_2+3x_3=170. \end{cases}$$

პუნქტი 2. პირველ პუნქტში მიღებული სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ x_1 უცნობი. ამისათვის მეორე განტოლებას გამოვაკლოთ 3-ზე გამრავლებული პირველი განტოლება და მიღებული განტოლება მივიჩნიოთ ახალ მეორე განტოლებად

$$\text{გ}_2-3\text{გ}_1 \rightarrow \text{გ}_2 .$$

მესამე განტოლებას გამოვაკლოთ 2-ზე გამრავლებული პირველი განტოლება და მიღებული განტოლება მივიჩნიოთ ახალ მესამე განტოლებად

$$\text{გ}_3-2\text{გ}_1 \rightarrow \text{გ}_3 .$$

შედეგად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=100, \\ \quad 2x_2+4x_3=180, \\ \quad -x_2+x_3=-30. \end{cases}$$

პუნქტი 3. მიღებული სისტემის მეორე განტოლების მიმართ მოვახდინოთ პირველ პუნქტში შესრულებული გარდაქმნის ანალოგიური გარდაქმნა

$$\frac{1}{2}\text{გ}_2 \to \text{გ}_2 .$$

მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=100, \\ x_2+2x_3=90, \\ -x_2+x_3=-30. \end{cases}$$

პუნქტი 4. მესამე განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_2

$$\text{გ}_2+\text{გ}_3 \to \text{გ}_3 .$$

გვექნება

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=100, \\ x_2+2x_3=90, \\ 3x_3=60. \end{cases}$$

პუნქტი 5. მესამე განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{1}{3}$-ზე

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=100, \\ x_2+2x_3=90, \\ x_3=20. \end{cases}$$

პუნქტი 6. პირველი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_2

$$\text{გ}_1-\text{გ}_2 \to \text{გ}_1 .$$

გვექნება

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3=10, \\ x_2+2x_3=90, \\ x_3=20. \end{cases}$$

პუნქტი 7. პირველი და მეორე განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_3

$$\text{გ}_1+\text{გ}_3 \to \text{გ}_1 ,$$

$$\text{გ}_2-2\text{გ}_3 \to \text{გ}_2 .$$

მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1 \qquad = 30, \\ \quad x_2 \quad = 50, \\ \qquad x_3 = 20. \end{cases}$$

სვეტ-მატრიცა $[30 \ 50 \ 20]^T$ წარმოადგენს (4) სისტემის ამონახსნს.

როგორც ვხედავთ, გაუს-ჟორდანის მეთოდით სისტემის ამოხსნისას გამოყენებულია ისეთი გარდაქმნები, რომელთა შედეგადაც ყოველ პუნქტში მიიღება მოცემული სისტემის ტოლფასი სისტემა.

(4) სისტემა წარმოვადგინოთ გაფართოებული მატრიცის სახით და ამოვწეროთ პუნქტების შესრულების შედეგად მიღებული მატრიცები:

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 200 \\ 3 & 5 & 7 & 480 \\ 2 & 1 & 3 & 170 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 3 & 5 & 7 & 480 \\ 2 & 1 & 3 & 170 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 4 & 180 \\ 0 & -1 & 1 & -30 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 90 \\ 0 & -1 & 1 & -30 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 90 \\ 0 & 0 & 3 & 60 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

როგორც ვხედავთ A_B მატრიცა „სტრიქონების გარდაქმნით" დაყვანილი იქნა

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

მატრიცაზე. ასეთ მატრიცებს *დაყვანილი სახის მატრიცებს* უწოდებენ. უფრო ზუსტად, ვიტყვით, რომ **მატრიცა არის დაყვანილი სახის, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:**

1. თითოეულ სტრიქონში მარცხნიდან პირველი ნულისაგან განსხვავებული ელემენტი 1-ის ტოლია (მას მარცხნიდან პირველ ერთიანს ვუწოდებთ);

2. თუ სვეტი შეიცავს რომელიმე სტრიქონის მარცხნიდან პირეელ ერთიანს, მაშინ ამ სვეტის ყველა სხვა ელემენტი ნულის ტოლია;

3. ყოველი სტრიქონის (გარდა პირველისა) მარცხნიდან პირველი ერთიანი მდებარეობს უფრო მარჯვნივ, ვიდრე წინა სტრიქონის მარცხნიდან პირველი ერთიანი;

4. მხოლოდ ნულებისაგან შემდგარი სტრიქონი უფრო ქვემოთაა, ვიდრე ნებისმიერი სტრიქონი, რომელიც ერთ არანულოვან ელემენტს მაინც შეიცავს.

დაყვანილი სახის მატრიცათა

მაგალითებია:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

როგორც ვიცით, ორუცნობიან ორ წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის ადგილი აქვს ერთ-ერთს შემდეგი სამი შემთხვევიდან:

1. სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (სისტემა თავსებადია);

2. სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე (სისტემა თავსებადია);

3. სისტემას არა აქვს ამონახსნი (სისტემა არათავსებადია).

ანალოგიური შემთხვევები გვაქვს n-უცნობიანი n წრფივი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემის შემთხვევაშიც.

ზემოთ განხილულ (4) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მაგალითი 2.

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=9,\\ 3x_1-2x_2+7x_3=20,\\ 2x_1+7x_2+3x_3=27.\end{cases} \tag{5}$$

გარდავქმნათ ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცა დაყვანილ სახემდე

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 9\\ 3 & -2 & 7 & 20\\ 2 & 7 & 3 & 27\end{bmatrix}\xrightarrow[i_3-2i_1\to i_3]{i_2-3i_1\to i_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & -5 & 1 & -7\\ 0 & 5 & -1 & 9\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}i_2\to i_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & 5 & -1 & 9\end{bmatrix}\xrightarrow[i_3-5i_2\to i_3]{i_1-i_2\to i_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{38}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

მიღებული დაყვანილი სახის მატრიცა არის

$$\begin{cases}1\cdot x_1+0\cdot x_2+\frac{11}{5}x_3=\frac{38}{5},\\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2-\frac{1}{5}x_3=\frac{7}{5},\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=2\end{cases}$$

სისტემის გაფართოებული მატრიცა. ამ სისტემის მესამე განტოლება არ იქცევა ჭეშმარიტ ტოლობად x_1, x_2 და x_3 უცნობთა არავითარი მნიშვნელობებისათვის. მაშასადამე, განტოლებათა (5) სისტემა არათავსებადია.

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი სამუცნობიანი სამი განტოლების სისტემისა, რომელსაც აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

მაგალითი 3.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4,\\ 2x_1+4x_2+6x_3=8,\\ \qquad x_2+x_3=1.\end{cases}\tag{6}$$

გაფართოებული მატრიცის სტრიქონების გარდაქმნით გვექნება

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{i_2-2i_1\to i_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[i_3\to i_2]{i_2\to i_3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{i_1-2i_2\to i_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

მიღებული დაყვანილი სახის მატრიცა არის

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 2, \\ \quad x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

სისტემის გაფართოებული მატრიცა. აღნიშნულ სისტემას და მაშასადამე, (4) სისტემასაც გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე: $\left\{[2 - x_3 \quad 1 - x_3 \quad x_3]^T \middle| x_3 \in R\right\}$.

შევნიშნოთ, რომ **სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის თითოეული განტოლება წარმოადგენს სიბრტყის განტოლებას სამგანზომილებიან სივრცეში. როცა ეს სიბრტყეები ერთ წერტილში იკვეთებიან, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი; როცა ეს სიბრტყეები ერთმანეთს ემთხვევიან ან მათი თანაკვეთა წარმოადგენს წრფეს, სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი და სისტემა არათავსებადია, როცა ამ სიბრტყეთა თანაკვეთა ცარიელია.** თუ მაგალითად, მოცემული გვაქვს სამუცნობიანი ორი წრფივი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა, გვექნება ორი შემთხვევა: ამ განტოლებათა შესაბამისი სიბრტყეები *პარალელურია* ან ეს სიბრტყეები *გადაიკვეთება წრფეზე*. პირველ შემთხვევაში სისტემას ამონახსნი არ ექნება, ხოლო მეორე შემთხვევაში სისტემას ექნება ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ერთადერთი ამონახსნის შემთხვევა გამორიცხულია. შემდეგში ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ **საზოგადოდ, თუ (1) სისტემაში უცნობთა რაოდენობა მეტია განტოლებათა რაოდენობაზე, მაშინ ამონახსნთა სიმრავლე ან ცარიელია ან უსასრულო, ერთადერთი ამონახსნის შემთხვევა გამორიცხულია.**

როდესაც (1) სისტემაში უცნობთა რაოდენობა ნაკლებია განტოლებათა რაოდენობაზე, მაშინ შეიძლება გვქონდეს *არათავსებადობის, ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლის და ერთადერთი ამონახსნის შემთხვევაც.*

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. ამოწერეთ n-უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა. რა შემთხვევაში უწოდებენ ამ სისტემას ერთგვაროვანს?
2. რას უწოდებენ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს? რას ნიშნავს სისტემის ამოხსნა?
3. როგორ სისტემას უწოდებენ თავსებადს? არათავსებადს?
4. ჩაწერეთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა მატრიცული ფორმით.
5. ჩამოაყალიბეთ კრამერის წესი.
6. ამოწერეთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცა.
7. გადმოეცით გაუს-ჟორდანის მეთოდის ძირითადი ასპექტები კონკრეტულ მაგალითზე.
8. განსაზღვრეთ დაყვანილი სახის მატრიცა.
9. რამდენი ამონახსნი შეიძლება ჰქონდეს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას?
10. შეიძლება თუ არა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი, როდესაც მასში შემავალ უცნობთა რაოდენობა განტოლებათა რაოდენობაზე მეტია?

პრაქტიკული სავარჯიშოები

31.1. შეამოწმეთ წარმოადგენს თუ არა $[1\ \ 0\ \ 2\ \ 0]^T$ სვეტ-მატრიცა შემდეგი სისტემის ამონახსნს:

ა) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+5x_4=3, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=-1, \\ x_1-4x_2-5x_3-10x_4=-9, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=3; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=5, \\ x_1+3x_2+x_3-6x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4. \end{cases}$

31.2. ჩაწერეთ მატრიცული სახით წინა სავარჯიშოში მოყვანილი სისტემები.

31.3. იპოვეთ $AX=B$ სისტემის თავისუფალი წევრები, თუ ცნობილია, რომ:

ა) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad X=[2\ \ 3]^T$;

ბ) $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

$X=[1\ \ 1\ \ 2]^T$.

31.4. კრამერის წესის გამოყენებით აჩვენეთ შემდეგი სისტემების თავსებადობა:

ა) $\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ 3x_1-2x_2=0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=3; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=15, \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ x_1+3x_2=16, \\ 5x_2-x_3=10. \end{cases}$

31.5. კრამერის წესის გამოყენებით ამოხსენით 31.4-ში მოყვანილი სისტემები.

31.6. დაადგინეთ, არის თუ არა დაყვანილი სახის შემდეგი მატრიცები:

ა) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

დ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$;

ე) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

31.7. კრამერის წესის გამოყენებით დაადგინეთ, a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის ექნება ერთადერთი ამონახსნი სისტემებს:

ა) $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ 2x_1-ax_2=0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} ax_1+x_2=3, \\ x_1+ax_2=4; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 2x_1-3ax_2=-1, \\ ax_1-2x_2=1; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=5, \\ 3x_1+x_2-x_3=-1. \end{cases}$

31.8. გაუს-ჟორდანის მეთოდის გამოყენებით დაადგინეთ, არის თუ არა თავსებადი შემდეგი სისტემები:

ა) $\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ 3x_1+6x_2=2; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 3x_1-x_2=5, \\ x_1+2x_2=4; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1, \\ 3x_1+4x_2+x_3=2, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=3; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 2x_1-x_2=3, \\ x_1+2x_2-x_3=3, \\ 3x_1-4x_2+2x_3=4. \end{cases}$

31.9. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები გაუს-ჟორდანის მეთოდის გამოყენებით:

ა) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=2, \\ 3x_1+x_2+3x_3=1; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 5x_1+x_2+6x_3=2, \\ 3x_1+x_2+4x_3=0, \\ 5x_1-x_2+3x_3=0; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 7x_1+14x_2+20x_3+27x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+16x_3+19x_4=-2, \\ 3x_1+5x_2+6x_3+13x_4=5; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1+x_2+x_3=4, \\ x_2+x_3+x_4=-3, \\ x_3+x_4+x_5=2, \\ x_4+x_5=-1. \end{cases}$

31.10. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა შესაბამისი გაფართოებული მატრიცის დაყვანილ სახემდე გარდაქმნით:

ა) $\begin{cases} 3x_1-2x_2=4, \\ 2x_1+5x_2=9; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 5x_1+7x_2+7x_3=4, \\ 3x_1+4x_2+4x_3=2, \\ 4x_1+4x_2-5x_3=0; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=16, \\ x_2+2x_3+x_4=12, \\ x_1-3x_3+3x_4=4, \\ x_1-2x_2+x_4=-3. \end{cases}$

31.11. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1+x_2+5x_3=6; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+4x_2-x_3=0; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x_1-4x_2+5x_3=2, \\ -3x_1+12x_2-15x_3=5; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1. \end{cases}$

31.12. წრფივ განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცა დაყვანილ იქნა სახეზე

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

რამდენი ამონახსნი აქვს სისტემას? ამოწერეთ სისტემის ამონახსნი.

31.13. წრფივ განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცა დაყვანილ იქნა სახეზე

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

დაადგინეთ, თავსებადია თუ არა წრფივ განტოლებათა სისტემა.

31.14. წრფივ განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცა დაყვანილ იქნა სახეზე

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

დაადგინეთ, რამდენი ამონახსნი აქვს სისტემას. ამოწერეთ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე.

ლექცია 32

მატრიცის რანგი. კრონეკერ-კაპელის თეორემა

32.1. მატრიცის რანგი

$m \times n$ რიგის A მატრიცის რანგი ეწოდება A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების (როგორც ვექტორების) მაქსიმალურ რაოდენობას. A მატრიცის რანგი აღინიშნება rang A-თი.

რანგის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ A მატრიცის რანგი ტოლია ნულის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ყველა ელემენტი ნულის ტოლია. თუ მატრიცის ერთი ელემენტი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია, რანგი ნულს არ უდრის.

მაგალითები: ა) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ – მატრიცის რანგია 2, რადგან სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია.

ბ) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ – მატრიცის სვეტები წრფივად დამოკიდებულია. რანგი 1-ის ტოლია.

გ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია. რანგი ტოლია 3-ის.

დ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ – მატრიცის მეორე სვეტი ნულოვანია, ამიტომ სვეტები წრფივად დამოკიდებულია. პირველი და მესამე სვეტი წრფივად დამოუკიდებელია. რანგი უდრის 2-ს.

ე) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ – მატრიცის ყოველი ორი სვეტი წრფივად დამოკიდებულია. რანგი უდრის 1-ს.

ვ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ – მატრიცის ნებისმიერი სამი სვეტი წრფივად დამოკიდებულია. სვეტებს შორის არსებობს ორი წრფივად დამოუკიდებელი სვეტი. მაგალითად, პირველი და მეორე. რანგი ტოლია 2-ის.

თუ მოყვანილ მაგალითებს დავაკვირდებით, დავინახავთ, რომ თითოეული მატრიცის რანგი ემთხვევა მისსავე ნულისა-

გან განსხვაეებულ მინორთა უმაღლეს რიგს. საზოგადოდ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1. **$m \times n$ რიგის A მატრიცის რანგი k-ს ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის ყოველი k+1 რიგის მინორი ნულის ტოლია და ამავე დროს k-ური რიგის ერთი მინორი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.**

ამ თეორემის თანახმად, მატრიცის რანგის დასადგენად, უნდა მოვძებნოთ მის მინორებს შორის მაქსიმალური რიგის ნულისაგან განსხვავებული მინორი. სწორედ ასეთი მინორის რიგია მატრიცის რანგის ტოლი. შევნიშნოთ რომ, თუ A მატრიცის ყველა k+1 რიგის მინორი ნულის ტოლია, მაშინ ნულის ტოლი იქნება აგრეთვე ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი. ეს გარემოება მაქსიმალური რიგის ნულისაგან განსხვავებული მინორის მოსაძებნად ჩასატარებელ სამუშაოს საგრძნობლად ამცირებს. რანგის მოძებნის ასეთი წესი მაინც ძალიან შრომატევადია, როცა მატრიცის განზომილებები საკმაოდ დიდი რიცხვებია. რანგის მოძებნის უფრო პრაქტიკულ მეთოდს ქვემოთ გავეცნობით.

თეორემა 2. **ვთქვათ, A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა. $\mathrm{rang}A=n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|A|\neq 0$.**

დამტკიცება. თუ $\mathrm{rang}A=n$, მაშინ მატრიცის სვეტები (n სვეტი) წრფივად დამოუკიდებელია და დეტერმინანტის სათანადო თვისებიდან გამომდინარე $|A|\neq 0$.

პირიქითაც, თუ $|A|\neq 0$, ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს n-ური რიგის ნულისაგან განსხვავებული მინორი, უფრო მაღალი რიგის მინორი კი საერთოდ არ გვაქვს. ზემოთ მოყვანილი თეორემა 1-ის ძალით $\mathrm{rang}A=n$.

თეორემა 3. **მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალური რაოდენობა მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სტრიქონების მაქსიმალური რაოდენობის ტოლია.**

დამტკიცება. განვიხილოთ A-ს ტრანსპონირებული A^T მატრიცა. A-ს სტრიქონები წარმოადგენს A^T-ს სვეტებს, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\mathrm{rang}A=\mathrm{rang}A^T.$$

განვიხილოთ A მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული მაქსიმალური რიგის მინორი. ამ მინორის შესაბამისი მატრიცა A-ს

ტრანსპონირებისას შეიცვლება თავისი ტრანსპონირებულით. მისი დეტერმინანტი არ შეიცვლება, ე.ი. A და A^T მატრიცების ნულისაგან განსხვავებულ მინორთა მაქსიმალური რიგები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ მატრიცთა რანგები ტოლია.

ამრიგად, მატრიცის რანგი წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა მაქსიმალურ რაოდენობას უდრის.

მოვიყვანოთ *მატრიცის ისეთი გარდაქმნები*, რომლებიც არ ცვლიან რანგს. მათ *ელემენტარული გარდაქმნები* ეწოდება. ელემენტარული გარდაქმნებია:

1. **მატრიციდან ნულოვანი სვეტის (სტრიქონის) ამოშლა;**
2. **ორი სვეტის (სტრიქონის) ურთიერთგადანაცვლება;**
3. **სვეტის (სტრიქონის) გამრავლება ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ რიცხვზე;**
4. **ერთი სვეტისადმი (სტრიქონისადმი) სხვა სვეტის (სტრიქონის) პროპორციული (რაიმე რიცხვზე გამრავლებული) სვეტის (სტრიქონის) დამატება.**

92.2. მატრიცის რანგის დადგენა გაუსის მეთოდით

მატრიცის რანგის დასადგენად გამოიყენება *გაუსის მეთოდი.* ამ მეთოდით ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით ხდება მატრიცის დაყვანა *სამკუთხა მატრიცამდე,* რომლის მთავარ დიაგონალზე არის არანულოვანი ელემენტები:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0,\ i=1,2,\dots,k.$ ამ მატრიცის რანგი k-ს ტოლია (ახსენით რატომ). საწყისი მატრიცის რანგიც იქნება k.

შევნიშნოთ, რომ გაუსის მეთოდით, გაუს-ჟორდანის მეთოდისაგან განსხვავებით ხდება მხოლოდ მთავარი დიაგონალის ქვემოთ მდგომი ელემენტების განულება.

მაგალითი. ვთქვათ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$

დავადგინოთ A მატრიცის რანგი გაუსის მეთოდის გამოყენებით:

$$\begin{bmatrix}1&3&7&2&5\\-1&0&4&8&3\\3&6&10&-4&7\end{bmatrix}\xrightarrow[i_3-3i_1\to i_3]{i_2+i_1\to i_2}\begin{bmatrix}1&3&7&2&5\\0&3&11&10&8\\0&-3&-11&-10&-8\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{i_3+i_2\to i_3}\begin{bmatrix}1&3&7&2&5\\0&3&11&1&8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{ამოვშალოთ მესამე სტრიქონი}}\begin{bmatrix}1&3&7&2&5\\0&3&11&10&8\end{bmatrix}.$$

ამრიგად, $\operatorname{rang} A=2$.

32.3. კრონეკერ-კაპელის თეორემა

როგორც ჩვენთვის ცნობილია, კრამერის წესი საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემა იმ კერძო შემთხვევაში, როცა განტოლებათა რიცხვი უდრის უცნობთა რიცხვს და სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. მატრიცის რანგის ცნების შემოტანის შემდეგ, ჩვენ საშუალება გვაქვს შევისწავლოთ ზოგადი სახის წრფივ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1}$$

თავსებადობის საკითხი. კერძოდ, სამართლიანია *კრონეკერ-კაპელის* შემდეგი

თეორემა 4. **წრფივ განტოლებათა (1) სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის მატრიცის რანგი ტოლია ამავე სისტემის გაფართოებული მატრიცის რანგისა.**

მაგალითად, $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\x_1\quad+\quad x_3=2,\\2x_1+2x_2-2x_3=5\end{cases}$

სისტემისათვის გვექნება

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\2&2&-2\end{bmatrix},\qquad A_B=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&0&1&2\\2&2&-2&5\end{bmatrix}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\operatorname{rang} A=2$, $\operatorname{rang} A_B=3$. ე.ი. $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} A_B$ და მაშასადამე, სისტემა არათავსებადია.

კრონეკერ-კაპელის თეორემა იძლევა საშუალებას, დავადგინოთ რამდენი ამონახსნი აქვს სისტემას. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A_B=n$, სადაც n უცნობთა რაოდენობაა.

ამ შემთხვევაში სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. მართლაც, $\operatorname{rang} A=n$ ნიშნავს, რომ მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სტრიქონების რაოდენობაა n, ე.ი.

$$m=n \quad \text{ან} \quad m>n.$$

თუ $m=n$, გვაქვს კვადრატული სისტემა. მისი მატრიცის სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია, დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან და კრამერის თეორემის თანახმად, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

თუ $m>n$, მაშინ $m-n$ განტოლება წარმოადგენს დანარჩენი n განტოლების წრფივ კომბინაციას, ე.ი. „$m-n$ განტოლება ზედმეტია", ისინი შეიძლება ამოგდებული იქნან სისტემიდან.

2. $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A_B=k<n$.

ცხადია, რომ $k \leq m$. ამ შემთხვევაში სისტემაში შეიძლება დავტოვოთ მხოლოდ k განტოლება (დანარჩენები შეიძლება ამოვაგდოთ სისტემიდან). ცხადია, არსებობს მიღებული სისტემის მატრიცის k რიგის მინორი, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ამ მინორის შესაბამისი მატრიცა მიიღება პირველი k სვეტისა და პირველი k სტრიქონის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან (ეს ყოველთვის მიიღწევა უცნობთა სათანადო გადანომრვით). ეს მატრიცა აღვნიშნოთ A_1-ით და სისტემა ასე გადავწეროთ

$$A_1X_1 = B^* - GX_2, \tag{2}$$

სადაც

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{bmatrix},$$

ხოლო G წარმოადგენს $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი $k \cdot (n-k)$ რიგის მატრიცას. ცხადია, რომ ნებისმიერი დაფიქსირებული X_2 ვექტორისათვის არსებობს (2)-ის და მაშასადამე, მოცემული სისტემის ერთადერთი ამონახსნი. X_2-ის დაფიქსირების შესაძლებლობათა სიმრავლე უსასრულოა, ე.ი. განსახილავ შემთხვევაში სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა.

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ ცვლადებს ეწოდება ბაზისური ცვლადები, $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ცვლადებს კი – თავისუფალი ცვლადები.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანების განხილვისას, ჩვენთვის საინტერესო იქნება ისეთი სისტემები, რომლებსაც გააჩნიათ უსასრულო რაოდენობის ამონახსნები. არსებითად გამოვიყენებთ *სისტემის ბაზისურ ამონახსნებს.*

(2) სისტემის ამონახსნს, რომელიც მიიღება მაშინ, როდესაც თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობები ნულის ტოლია, ეწოდება ბაზისური ამონახსნი. ბაზისურ ამონახსნს ეწოდება გადაგვარებული, თუ ამ ამონახსნში ბაზისურ ცვლადებს შორის ერთი მაინც ნულოვანია.

ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით, მოვიყვანოთ სქემა, რომლის მიხედვითაც პრაქტიკულად ამოიხსნება ზოგადი სახის (1) სისტემა:

1. ამოვწეროთ სისტემის გაფართოებული მატრიცა A_B.

2. გაუს-ჟორდანის მეთოდით დავიწყოთ A_B მატრიცის დაყვანილ სახემდე მიყვანის პროცესი. თუ რომელიმე ეტაპზე მიიღება სტრიქონი

$$[0\ 0 \ldots 0\ b], \quad b \neq 0,$$

მაშინ დავასკვნით, რომ სისტემას ამონახსნი არა აქვს. თუ რომელიმე სტრიქონი მთლიანად განულდება, ე.ი. მივიღებთ

$$[0\ 0 \ldots 0\ 0]$$

სახის სტრიქონს, მაშინ ამ სტრიქონს ამოვაგდებთ სისტემიდან. როდესაც სისტემას მივიყვანთ დაყვანილ სახემდე, ჩვენ შეგვეძლება დავადგინოთ სისტემის რანგი: იგი ტოლია დაყვანილი მატრიცის სტრიქონების რაოდენობისა.

3. თუ რანგი ტოლია უცნობების რაოდენობისა, ე.ი. $k=n$, მაშინ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. ამ შემთხვევაში დაყვანილ მატრიცას აქვს სახე:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^* \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{bmatrix}.$$

სისტემის ამონახსნია $\begin{bmatrix} b_1^* & b_2^* & \dots & b_n^* \end{bmatrix}^T$.

4. თუ $k<n$, მაშინ სისტემას აქვს უსასრულო რაოდენობის ამონახსნები. k რაოდენობის ცვლადი იქნება ბაზისური, დანარჩენი $n-k$ თავისუფალი.

დაყვანილ მატრიცას ექნება სახე

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1k+1}^* & a_{1k+2}^* & \dots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2k+1}^* & a_{2k+2}^* & \dots & a_{2n}^* & b_2^* \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{kk+1}^* & a_{kk+2}^* & \dots & a_{kn}^* & b_k^* \end{bmatrix}$$

და ბაზისური ცვლადები უშუალოდ გამოისახება თავისუფალი ცვლადებით:

$$x_1 = b_1^* - (a_{1k+1}^* x_{k+1} + \dots a_{1n}^* x_n),$$
$$x_2 = b_2^* - (a_{2k+1}^* x_{k+1} + \dots a_{2n}^* x_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_k = b_k^* - (a_{kk+1}^* x_{k+1} + \dots a_{kn}^* x_n).$$

როდესაც $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$, მივიღებთ ბაზისურ ამონახსნს $-\begin{bmatrix} b_1^* & b_2^* \dots b_k^* & 0 \dots 0 \end{bmatrix}^T$. თუ რომელიმე $b_i^* = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, მაშინ ამონახსნი იქნება გადაგვარებული. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ბაზისური ამონახსნების მაქსიმალური შესაძლო რაოდენობა იქნება

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

მაგალითად, ვიპოვოთ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

სისტემის ბაზისური ამონახსნები.

$$A_B=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\2&1&4&6\end{bmatrix}\xrightarrow{i_2-2i_1\to i_2}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-1&0&4\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-i_2\to i_2}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&0&-4\end{bmatrix}.$$

x_1, x_2 ბაზისური ცვლადებია, x_3 თავისუფალი. ვთქვათ, $x_3=0$, მაშინ $x_1=5$, $x_2=-4$. ბაზისური ამონახსნია $[5\ -4\ 0]^T$. არსებობს თუ არა სხვა ბაზისური ამონახსნი? x_1, x_3 ბაზისური ცვლადები ვერ იქნება, რადგან ამ ცვლადების შესაბამისი კოეფიციენტებისაგან შემდგარი მატრიცის დეტერმინანტია

$$\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}=0.$$

x_2, x_3 ბაზისური ცვლადებია $\left(\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}=-2\neq 0\right)$.

ვთქვათ, $x_1=0$, მაშინ $x_3=\dfrac{5}{2}$, $x_2=-4$. მაშასადამე, სისტემას გააჩნია მეორე ბაზისური ამონახსნი $[0\ -4\ \frac{5}{2}]^T$. ორივე ბაზისური ამონახსნი გადაუგვარებელია.

განვიხილოთ ახლა ერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}\qquad(3)$$

ცხადია, რომ $\mathrm{rang}A=\mathrm{rang}A_B$, (3) სისტემა ყოველთვის თავსებადია, მას ყოველთვის გააჩნია *ნულოვანი (ტრივიალური) ამონახსნი* – $[0\ 0\ \ldots\ 0]^T$.

თუ $\mathrm{rang}A=n$, მაშინ (3) სისტემას მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი აქვს. თუ $\mathrm{rang}A<n$, მაშინ (3) სისტემას გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს E^n სივრცის ქვესივრცეს.

ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილ E^n-ის ქვესივრცის ბაზისს ეწოდება ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა.

მაგალითად, ვიპოვოთ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

სისტემის ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა. სისტემის მატრიცის დაყვანის გზით ადვილად ვრწმუნდებით, რომ $[-2x_3\ -x_3\ x_3]^T$ ამონახსნია ნებისმიერი x_3-თვის. დავასახელოთ x_3-ის რაიმე ნულისაგან განსხვავებული მნიშვნელობა, მაგალითად, $x_3=1$. მივიღებთ ერთი $[-2\ -1\ 1]^T$ ამონახსნისაგან შედგენილ ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. მოიყვანეთ მატრიცის რანგის განმარტება.
2. რა კავშირი არსებობს მატრიცის რანგსა და არანულოვან მინორთა მაქსიმალურ რიგს შორის?
3. მოიყვანეთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ კვადრატული n რიგის მატრიცის რანგი უდრიდეს n-ს.
4. შესაძლებელია თუ არა, რომ A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალური რაოდენობა აღემატებოდეს წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა მაქსიმალურ რაოდენობას? პასუხი დაასაბუთეთ.
5. ჩამოთვალეთ მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები.
6. რაში მდგომარეობს მატრიცის რანგის დადგენის გაუსის მეთოდი?
7. ჩამოაყალიბეთ კრონეკერ-კაპელის თეორემა.
8. წრფივი სისტემის მატრიცის რანგის საშუალებით დაახასიათეთ თავსებადი სისტემის ამონახსნთა რაოდენობა.
9. განსაზღვრეთ ბაზისური ამონახსნი.
10. მოიყვანეთ ზოგადი სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სქემა.
11. რას უდრის ბაზისური ამონახსნების მაქსიმალური რაოდენობა?
12. რას ეწოდება ერთგვაროვანი სისტემის ტრივიალური ამონახსნი? ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა?

პრაქტიკული სავარჯიშოები

32.1. რანგის განმარტების საფუძველზე იპოვეთ შემდეგი მატრიცების რანგები:

ა) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

დ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

ე) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$;

ვ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

ზ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$;

თ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

32.2. როგორ შეიძლება შეიცვალოს მატრიცის რანგი, თუ მას მივუწერთ:

ა) ერთ სტრიქონს?

ბ) ერთ სტრიქონს და ერთ სვეტს? მოიყვანეთ სათანადო მაგალითები.

32.3. დაადგინეთ, λ-ს რომელი მნიშვნელობებისათვის იქნება:

ა) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ მატრიცის რანგი 1-ის ტოლი;

ბ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ მატრიცის რანგი 2-ის ტოლი;

გ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ მატრიცის რანგი 2-ის ტოლი;

დ) $\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ მატრიცის რანგი 3-ის ტოლი.

32.4. დაადგინეთ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{bmatrix}$$

მატრიცის რანგი λ პარამეტრის მნიშვნელობათა მიხედვით.

32.5. გაუსის მეთოდის გამოყენებით დაადგინეთ შემდეგ მატრიცთა რანგები:

ა) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$;

დ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

32.6. კრონეკერ-კაპელის თეორემის გამოყენებით დაადგინეთ, თავსებადია თუ არა განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

ა) $\begin{cases} 3x_1-x_2=5, \\ x_1+2x_2=4; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x_1-2x_2=3, \\ 2x_1-4x_2=1; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1, \\ 3x_1+4x_2+x_3=2, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=3; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 2x_1-x_2=3, \\ x_1-2x_2-x_3=3, \\ 3x_1-4x_2+2x_3=4; \end{cases}$

ე) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+4x_4=4, \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=2, \\ 4x_1+3x_2-5x_3+6x_4=6; \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-x_2+2x_3=5, \\ x_1-3x_2+4x_3=3, \\ 5x_1-4x_2+8x_3=14. \end{cases}$

32.7. დაადგინეთ, აქვს თუ არა არანულოვანი ამონახსნი ერთგვაროვან სისტემას:

ა) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+x_2-5x_3=0, \\ 5x_1-3x_2+x_3=0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5=0. \end{cases}$

32.8. დაადგინეთ, კომპლანარულია თუ არა ვექტორები:

ა) $\vec{a}\,(1,7,5)$, $\vec{b}\,(2,14,10)$, $\vec{c}\,(3,5,2)$;

ბ) $\vec{a}\,(1,-2,0)$, $\vec{b}\,(-3,1,1)$, $\vec{c}\,(0,2,-2)$.

32.9. იპოვეთ კვადრატული ფუნქცია, რომლის გრაფიკზეც ძევს წერტილები: (-1,-1), (0,0) და (1,5).

32.10. დაადგინეთ, a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არ ექნება ამონახსნი სისტემებს:

ა) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=1, \\ 4x_1-ax_2+2x_3=3; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=a, \\ 2x_1+4x_2-10x_3=7. \end{cases}$

32.11. დაადგინეთ, a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის ექნება უამრავი ამონახსნი სისტემებს:

ა) $\begin{cases} 3x_1-x_2=4, \\ 6x_1+2x_2=a, \\ 15x_1+5x_2=20; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x_1+2x_2=a, \\ 2x_1+4x_2=7; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 7x_1+6x_2+5x_3=1, \\ x_1+2x_2+3x_3=a. \end{cases}$

32.12. დაადგინეთ, აქვს თუ არა გადაგვარებული ბაზისური ამონახსნი სისტემებს:

ა) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=3; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+13x_3+4x_4+x_5=6, \\ 9x_1+x_2+2x_3+6x_4+x_5=11; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2, \\ x_1+x_2+7x_3+x_4=6, \\ 3x_1+2x_2+x_3+5x_4=8. \end{cases}$

32.13. იპოვეთ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა:

ა) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ 2x_1+3x_2=0, \\ x_1+7x_2=0; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ x_1+x_2+5x_3+x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$

H. კითხვები და ამოცანები გამეორებისათვის (ლექციები 29-32)

H.1. გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

ა) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$

ბ) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix};$

გ) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$

დ) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$

H.2. ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

ა) $\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0;$

ბ) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

H.3. ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

ა) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$

ბ) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

H.4. გამოთვალეთ $|A+B|$, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

H.5. გამოთვალეთ $|A-B|$, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

H.6. გამოთვალეთ $|AB^T|$, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

H.7. გამოთვალეთ $\left|\left(A^T B\right)^*\right|$, თუ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

H.8. გამოთვალეთ $\left|\left(A^T B\right)^* - B^T A\right|$,

$$\text{თუ } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

H.9. დაადგინეთ გააჩნია თუ არა A მატრიცას შებრუნებული, თუ:

ა) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

გ) $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

დ) $A^3=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

H.10. დაადგინეთ, არის თუ არა A მატრიცა B მატრიცის შებრუნებული, თუ:

ა) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

გ) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$;

დ) $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 16 & 0 \end{bmatrix}$.

H.11. იპოვეთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, თუ:

ა) $A=\begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & 7 \end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

H.12. ამოხსენით მატრიცული განტოლებები:

ა) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

H.13. იპოვეთ მეოთხე რიგის A მატრიცის დეტერმინანტი, თუ ცნობილია, რომ $|A^*|=27$.

H.14. კრამერის წესის გამოყენებით ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

ა) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_2+4x_3=-6, \\ x_1+x_3=1. \end{cases}$

H.15. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა გაუს-ჟორდანის მეთოდის გამოყენებით:

ა) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

H.16. გამოთვალეთ მატრიცის რანგი:

ა) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$;

დ) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.

H.17. დაადგინეთ α-ს რომელი მნიშვნელობებისათვის იქნება:

ა) $\begin{bmatrix} \alpha-7 & 4 \\ -3 & \alpha \end{bmatrix}$

მატრიცის რანგი 1-ის ტოლი;

ბ) $\begin{bmatrix} \alpha-1 & 4 \\ 2 & \alpha+1 \end{bmatrix}$

მატრიცის რანგი 2-ის ტოლი;

გ) $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{bmatrix}$

მატრიცის რანგი 3-ის ტოლი;

დ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & \alpha \\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha \end{bmatrix}$

მატრიცის რანგი 2-ის ტოლი.

H.18. კრონეკერ-კაპელის თეორემის გამოყენებით დაადგინეთ, თავსებადია თუ არა განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

ა) $\begin{cases} 5x + 5y + 3z = 2, \\ x - 3y + z = -1, \\ 4x - y + z = 7; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

H.19. დაადგინეთ, აქვს თუ არა არანულოვანი ამონახსნი ერთგვაროვან სისტემას:

ა) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

H.20. სიბრტყის ზოგად განტოლებას OXY კოორდინატთა სისტემაში აქვს შემდეგი სახე:

$$ax + by + cz = d.$$

შეარჩიეთ a, b და c კოეფიციენტები ისე, რომ წერტილები (1,1,2), (2,0,-1) და (4,2,1) ეკუთვნოდეს

$$ax + by + cz = 1$$

სიბრტყეს.

H.21. სიბრტყის განტოლებას მონაკვეთებში აქვს სახე:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

სადაც a, b და c აღნიშნავს იმ მონაკვეთის სიდიდეებს, რომლებსაც სიბრტყე ჩამოჭრის საკოორდინატო ღერძებზე. განსაზღვრეთ, რა სიდიდის მონაკვეთებს ჩამოჭრის საკოორდინატო ღერძებზე სიბრტყე, რომელზეც ძევს წერტილები (7,6,7), (5,10,5) და (-1,8,9).

H.22. იპოვეთ სისტემის ყველა ბაზისური ამონახსნი

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

H.23. დაადგინეთ, აქვს თუ არა გადაგვარებული ბაზისური ამონახსნი სისტემას:

ა) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

ლექცია 33

ეკონომიკის დარგთაშორისი მოდელი. ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების მატრიცა

33.1. ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების მოდელი

ინდუსტრიული ქვეყნების ეკონომიკა შედგება მრავალი დარგისაგან, მაგალითად, ფოლადჩამომსხმელი მრეწველობა, საავტომობილო მრეწველობა და ა.შ. ამ დარგების ფუნქციონირება მჭიდროდაა ერთმანეთთან დაკავშირებული, ადგილი აქვს მათ შორის პროდუქციის „გაცვლა-გამოცვლას". ასე მაგალითად, საავტომობილო მრეწველობა იყენებს ფოლადსა და საბურავებს, რომლებსაც აწარმოებენ, შესაბამისად, ფოლადჩამომსხმელ და რეზინის მრეწველობაში. ამასთან, ეკონომიკის დარგები გარკვეული რაოდენობის პროდუქციას ყიდიან ბაზარზე.

იმისათვის, რომ ქვეყანაში არ შეიქმნას დეფიციტი რომელიმე დარგის პროდუქციაზე, ან ადგილი არ ჰქონდეს რომელიმე დარგის ჭარბწარმოებას, საჭიროა წინასწარ განისაზღვროს ეროვნული ეკონომიკის თითოეული დარგის მიერ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც დააკმაყოფილებს *ეკონომიკის დარგთაშორის და საბაზრო მოთხოვნას.*

ჰარვარდის უნივერსიტეტის პროფესორმა ვასილი ლეონტიევმა დაჰყო აშშ-ს ეკონომკა 500 დარგად და შეისწავლა მათი ურთიერთქმედება. ამ შესწავლის შედეგია ვ. ლეონტიევის მიერ შემოთავაზებული ე.წ. *მოთხოვნა-მიწოდების მოდელი.*

მოთხოვნა-მიწოდების მოდელი საშუალებას აძლევს ეკონომისტებს მაღალი სიზუსტით გამოთვალონ ეკონომიკის თითოეული დარგის მიერ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა დარგთაშორისი და საბაზრო მოთხოვნის დაკმაყოფილების, ანუ ეკონომიკის *მოთხოვნა-მიწოდების დაბალანსების (გატოლების) მიზნით.*

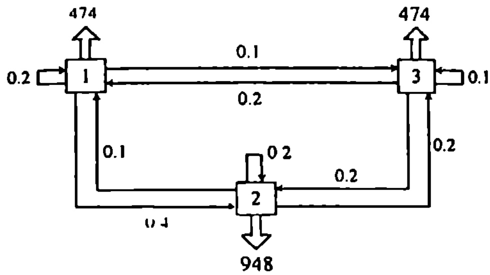
ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების მოდელში იგულისხმება, რომ:

1. ეკონომიკის ყოველი დარგი აწარმოებს მხოლოდ ერთი სახის პროდუქციას;

2. ყოველი დარგისათვის ცნობილია ამ დარგში პროდუქციის საწარმოებლად საჭირო სხვა დარგების (მათ შორის აღნიშნული დარგისაც) პროდუქციის რაოდენობა;

3. მოთხოვნა-მიწოდება უცვლელია იმ პერიოდის განმავლობაში, რომლისთვისაც ხდება დაგეგმვა.

33.2. ეკონომიკის დარგთაშორისი მოდელის კერძო მაგალითი

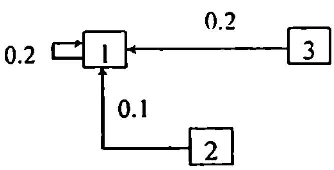


ნახ. 33.1

ვთქვათ, ქვეყნის ეკონომიკა შედგება სამი – საავტომობილო, ენერგეტიკის და სატრანსპორტო დარგისაგან. ნახ. 31.1-ზე მათ შეესაბამება ნომრები $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ და $\boxed{3}$. ცნობილია *ბაზრის მოთხოვნა* თითოეული დარგის პროდუქციაზე და აგრეთვე, დარგებს შორის მოთხოვნა-მიწოდება, ე.წ. ეკონომიკის *საშუალედო პროდუქცია*.

სქემაზე ისრებითა და მათზე მიწერილი რიცხვებით მოცემულია ეკონომიკის დარგებს შორის პროდუქციის ნაკადი. აღნიშნული რიცხვები გვიჩვენებენ ისრით მითითებულ დარგში \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად საჭირო სხვა დარგების პროდუქციის ღირებულებებს.

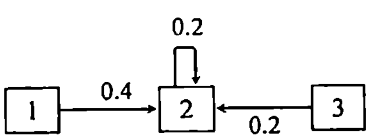
მაგალითად, $\boxed{1}$ დარგში შემავალი ისრები მათზე მოცემული რიცხვებით საშუალებას გვაძლევენ დავასკვნათ, რომ $\boxed{1}$ დარგში \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად საჭიროა $\boxed{3}$ დარგის \$0.2 ღირებულების პროდუქცია (ღირებულების 20%), $\boxed{2}$ დარგის – \$0.1 ღირებულების პროდუქცია (ღირებულების 10%) და $\boxed{3}$ დარგის – \$0.2 ღირებულების პროდუქცია (ღირებულების 20%) (ნახ. 33.2). მაშასადამე, $\boxed{1}$ დარგს \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად ესაჭიროება



ნახ. 33.2

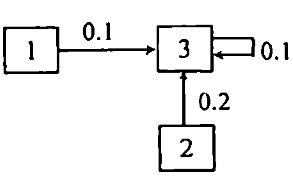
$$0.2+0.1+0.2=\$0.5$$

ღირებულების პროდუქცია ეკონომიკის სხვა (მათ შორის $\boxed{1}$) დარგებიდან.



ნახ. 33.3

ანალოგიურად, $\boxed{2}$ და $\boxed{3}$ დარგში შემავალი ისრებით აღნიშნულია, რომ $\boxed{2}$ დარგში \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად საჭიროა $\boxed{2}$ და $\boxed{3}$ დარგების \$0.2 ღირებულების პროდუქციები და $\boxed{1}$ დარგის \$0.4 ღირებულების პროდუქცია (ნახ. 33.3), ხოლო $\boxed{3}$ დარგში \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად საჭიროა $\boxed{1}$ და $\boxed{3}$ დარგების \$0.1 ღირებულების პროდუქციები და 0.2 ღირებულების პროდუქცია $\boxed{2}$ დარგიდან (ნახ. 33.4).



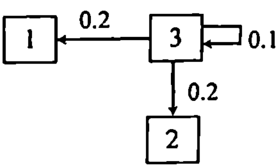
ნახ. 33.4

ე.ი. $\boxed{2}$ დარგს \$1 ღირებულების პროდუქციის შესაქმნელად ესაჭიროება 0.2+0.4+0.2=\$0.8 ღირებულების პროდუქცია და $\boxed{3}$ დარგს კი \$1 ღირებულების პროდუქციის შესაქმნელად – 0.1+0.2+0.1=\$0.4 ღირებულების პროდუქცია.

როგორც ვხედავთ, **თითოეულ დარგში \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად გაწეული ხარჯი ნაკლებია \$1-ზე. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ეკონომიკა რენტაბელურია.**

თითოეული დარგიდან გამომავალი ისრები მიუთითებენ სხვა *დარგების მოთხოვნას* აღნიშნული დარგის პროდუქციაზე.

მაგალითად, $\boxed{3}$ დარგიდან გამომავალი ისრები გვიჩვენებენ, რომ $\boxed{3}$ დარგმა $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ და $\boxed{3}$ დარგებს უნდა მიაწოდოს, შესაბამისად, \$0.2, \$0.2 და \$0.1 ღირებულების პროდუქციები (რომლებიც ამ დარგებს ესაჭიროებათ \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად) (ნახ. 33.5).



ნახ. 33.5

ორმაგ ისრებთან განლაგებული რიცხვები აღნიშნავენ შესაბამისი დარგის პროდუქციაზე *საბაზრო მოთხოვნას*, ანუ აღნიშნული დარგის რა ღირებულების პროდუქცია უნდა იქნას გატანილი ბაზარზე. ჩვენს შემთხვევაში $\boxed{2}$ დარგმა ბაზარზე უნდა გაიტანოს \$948 ღირებულების პროდუქცია, ხოლო $\boxed{1}$ და $\boxed{3}$ დარგებმა – \$474 ღირებულების პროდუქცია. ამ რიცხვთა ჯამი – \$1 896 წარმოადგენს *ეკონომიკის ეროვნულ შემოსავალს*.

შემოვიღოთ *მოთხოვნა-მიწოდების (ლეონტიევის) A მატრიცა* (იგულისხმება მოთხოვნა-მიწოდება \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად)

$$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 0.2 & 0.1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\longrightarrow \text{მოთხოვნა 1 დარგის პროდუქციაზე}\\ \longrightarrow \text{მოთხოვნა 2 დარგის პროდუქციაზე}\\ \longrightarrow \text{მოთხოვნა 3 დარგის პროდუქციაზე}\end{array}$$

$\downarrow$ მიწოდება 1 დარგისათვის

$\downarrow$ მიწოდება 2 დარგისათვის

$\downarrow$ მიწოდება 3 დარგისათვის

ამ მატრიცის სტრიქონები წარმოადგენენ მოთხოვნას შესაბამისი დარგის პროდუქციაზე, ხოლო სვეტში კი სხვა დარგებიდან მიწოდებული პროდუქციის ღირებულებებს.

მაგალითად, მეორე სტრიქონი

a_{21}	a_{22}	a_{23}
0.1	0.2	0.2

გვიჩვენებს, რომ $\boxed{2}$ დარგი $\boxed{1}$ დარგს აწვდის a_{21}=\$0.1 ღირებულების პროდუქციას, $\boxed{2}$-ს – a_{22}=\$0.2 და $\boxed{3}$-ს a_{23}=\$0.2 ღირებულების პროდუქციას.

მესამე სვეტი

$$\begin{array}{l} 0.1\ (a_{13}) \\ 0.2\ (a_{23}) \\ 0.1\ (a_{33}) \end{array}$$

კი მიუთითებს, თუ რა ღირებულების პროდუქციას აწვდიან $\boxed{3}$ დარგს დანარჩენი დარგები. კერძოდ, $\boxed{1}$ დარგი $\boxed{3}$ დარგს აწვდის a_{13}=\$0.1 ღირებულების პროდუქციას, $\boxed{2}$ დარგი $\boxed{3}$ დარგს აწვდის a_{23}=\$0.2 ღირებულების პროდუქციას და $\boxed{3}$ დარგი იყენებს a_{33}=\$0.1 ღირებულების საკუთარ პროდუქციას.

მაშასადამე, A-ს ელემენტი a_{ij} გვიჩვენებს, თუ რა ღირებულების პროდუქციას აწვდის i-ური დარგი j-ურ დარგს (\$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად).

შემოვიღოთ საბაზრო მოთხოვნის მატრიცა

$$D=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 474 \\ 948 \\ 474 \end{bmatrix}.$$

ჩვენი მიზანია დავადგინოთ, თუ რა ღირებულების პროდუქცია უნდა აწარმოოს თითოეულმა დარგმა, რათა დააკმაყოფილოს როგორც დარგთაშორისი, ასევე საბაზრო მოთხოვნა. ვთქვათ, ამ მიზნით $\boxed{1}$ დარგმა უნდა აწარმოოს x_1 ღირებულების პროდუქცია, $\boxed{2}$ დარგმა – x_2 და $\boxed{3}$ დარგმა – x_3 ღირებულების პროდუქცია.

ჩავწეროთ ეს უცნობი სიდიდეები შემდეგი *საერთო პროდუქციის მატრიცის* სახით:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{1}$ დარგმა დარგთაშორისი მოთხოვნის სრულად დაკმაყოფილებისათვის უნდა აწარმოოს

$$0.2x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3$$

ღირებულების პროდუქცია, ე.წ. *საშუალედო პროდუქცია.* $\boxed{1}$ დარგმა, ამავე დროს, უნდა დააკმაყოფილოს საბაზრო მოთხოვნა $d_1 = 474$. მამასადამე, $\boxed{1}$ დარგმა სულ უნდა აწარმოოს

$$x_1 \quad = \quad \underbrace{0.2x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3} \quad + \quad 474$$

↓	↓	↓
$\boxed{1}$ დარგის საერთო პროდუქციის ღირებულება	$\boxed{1}$ დარგის საშუალედო პროდუქციის ღირებულება	$\boxed{1}$ დარგის საბაზრო პროდუქციის ღირებულება

ღირებულების პროდუქცია.

ანალოგიურად, $\boxed{2}$ და $\boxed{3}$ დარგებმა უნდა აწარმოონ

$$x_2 = 0.1\,x_1 + 0.2\,x_2 + 0.2\,x_3 + 948,$$

$$x_3 = 0.2\,x_1 + 0.2\,x_2 + 0.1\,x_3 + 474$$

ღირებულების პროდუქცია.

მიღებული დამოკიდებულებები ქმნიან სამუცნობიან განტოლებათა სისტემას, რომელიც ზემოთ შემოღებული მატრიცების საშუალებით ასე ჩაიწერება:

$$X = AX + D. \tag{1}$$

(1) წარმოადგენს *ბალანსის განტოლებას.*

მატრიცებზე შემოღებული ოპერაციებისა და ერთეულოვანი მატრიცის თვისებების გათვალისწინებით (1) განტოლება შემდეგნაირად შეიძლება გარდავქმნათ:

$$X - AX = D,$$

$$IX - AX = D,$$

$$(I - A)X = D. \tag{2}$$

(X მატრიცის „ფრჩხილებს გარეთ გატანა“ შესაძლებელია მხოლოდ მარჯვნივ!).

თუ (I-A) მატრიცას გააჩნია შებრუნებული, მაშინ

$$X = (I - A)^{-1} D. \tag{3}$$

ამით ჩვენ გამოვითვლით, თუ რისი ტოლია საერთო პროდუქციის მატრიცა. **$(I-A)^{-1}$ მატრიცას უწოდებენ ლეონტიევის შებრუნებულ მატრიცას.**

მტკიცდება, რომ თუ არაუარყოფით ელემენტებიანი A კვადრატული მატრიცის თითოეულ სვეტში ელემენტების ჯამი ნაკლებია ერთზე, მაშინ არსებობს I-A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა და

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\ldots. \tag{4}$$

რენტაბელური ეკონომიკის პირობებში ყოველ დარგში \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად გაწეული ხარჯი ნაკლებია \$1-ზე. ეს კი ნიშნავს, რომ მოთხოვნა-მიწოდების A მატრიცის ყოველ სვეტში ელემენტების ჯამი ნაკლებია 1-ზე, რაც მოყვანილი თეორემის თანახმად საკმარისია ლეონტიევის შებრუნებული $(I-A)^{-1}$ მატრიცის არსებობისათვის.

ზემოთ განხილული ეკონომიკისათვის

$$I-A=\begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

და

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{474}\begin{bmatrix} 680 & 380 & 160 \\ 130 & 700 & 170 \\ 180 & 240 & 600 \end{bmatrix},$$

ხოლო საერთო პროდუქციის მატრიცაა

$$X=(I-A)^{-1}D=\frac{1}{474}\begin{bmatrix} 680 & 380 & 160 \\ 130 & 700 & 170 \\ 180 & 240 & 600 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 474 \\ 948 \\ 474 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\,600 \\ 1\,700 \\ 1\,260 \end{bmatrix}.$$

მაშასადამე, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ და $\boxed{3}$ დარგებმა უნდა აწარმოონ შესაბამისად, x_1=\$1 600, x_2=\$1 700 და x_3=\$1 260 ღირებულების საერთო პროდუქცია.

33.3. ეკონომიკის დარგთაშორისი მოდელის ზოგადი ვარიანტი

განვიხილოთ დარგთაშორისი ეკონომიკის მოდელი ზოგად შემთხვევაში. ვთქვათ, ეკონომიკა შედგება n დარგისაგან, დარგთაშორისი მოთხოვნა-მიწოდება მოიცემა n-ური რიგის კვადრატული A მატრიცით

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \longrightarrow$$

მოთხოვნა i – ური დარგის პროდუქციაზე

$$\downarrow$$

მიწოდება j – ური დარგისადმი

სადაც a_{ij} არის i-ური *დარგის პროდუქციის ღირებულება*, რომელიც მიეწოდება j-ურ დარგს \$1 ღირებულების პროდუქციის საწარმოებლად

$$\boxed{i} \xrightarrow{\quad a_{ij} \quad} \boxed{j}$$

საბაზრო მოთხოვნა მოიცემა n-ური რიგის მატრიცა-სვეტით

$$D=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}.$$

$d_i,\ i=1,\dots,n$ არის i-ური დარგის მიერ ბაზარზე გატანილი პროდუქციის ღირებულება. საჭიროა ვიპოვოთ საერთო პროდუქციის მატრიცა

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}.$$

x_i, $i=1,\dots,n$ არის i-ური დარგის მიერ წარმოებული საერთო პროდუქციის ღირებულება.

თითოეულმა დარგმა უნდა გამოუშვას იმდენი პროდუქცია, რომ დააკმაყოფილოს ეკონომიკის საშუალედო და საბაზრო მოთხოვნა

$$x_i = \underbrace{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots a_{in}x_n}_{} + d_i \quad i=1,\dots,n \tag{5}$$

$\downarrow$ $\boxed{i}$ დარგის საერთო პროდუქციის ღირებულება

$\downarrow$ $\boxed{i}$ დარგის საშუალედო პროდუქციის ღირებულება

$\downarrow$ $\boxed{i}$ დარგის საბაზრო ღირებულება

n-უცნობიან n წრფივ განტოლებათა (5) სისტემა ზემოთ შემოღებული მატრიცების საშუალებით შეიძლება ჩავწეროთ მატრიცული ფორმით

$$X = AX + D \quad \textit{(ბალანსის განტოლება).}$$

მატრიცებზე შემოღებული ოპერაციებისა და ერთეულოვანი მატრიცის თვისების თანახმად გვექნება

$$X = (I - A)^{-1} D.$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, რენტაბელური ეკონომიკის შემთხვევაში A მატრიცის ყოველ სვეტში ელემენტების ჯამი ნაკლებია 1-ზე

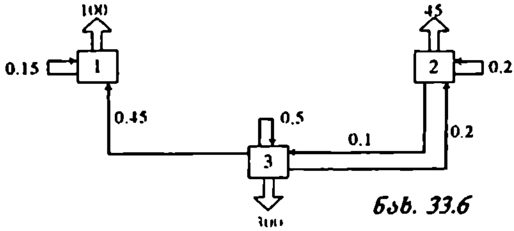
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \quad j = 1,\dots,n\,.$$

რაც უზრუნველყოფს ლეონტიევის შებრუნებული $(I-A)^{-1}$ მატრიცის არსებობას. ხშირად *ლეონტიევის შებრუნებულ მატრიცას პოულობენ მიახლოებით.* (4) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცის მიახლოებით მნიშვნელობად შეიძლება მივიჩნიოთ $I + A + A^2 + \dots + A^k \dots$ მწკრივის პირველი $k+1$ წევრის ჯამი

$$(I - A)^{-1} \approx I + A + A^2 + \dots + A^k.$$

რაც უფრო დიდია k, მით უფრო მეტი სიზუსტითაა გამოთვლილი ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცა.

მაგალითი. ნახ. 33.6-ზე მოცემული ეკონომიკის დარგთაშორისი მოდელისათვის ვიპოვოთ საერთო პროდუქციის ზუსტი და მიახლოებითი მნიშვნელობები.



ნახ. 33.6

ამოხსნა. შევადგინოთ მოთხოვნა-მიწოდების მატრიცა

$$A=\begin{bmatrix}0.15 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.1\\ 0.45 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix}.$$

საბაზრო მოთხოვნის მატრიცაა

$$D=\begin{bmatrix}100\\ 45\\ 300\end{bmatrix}.$$

შესაბამისად გვექნება:

$$I-A=\begin{bmatrix}0.85 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & -0.1\\ -0.45 & -0.2 & 0.5\end{bmatrix}.$$

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{0.32}\begin{bmatrix}0.38 & 0 & 0\\ 0.05 & 0.43 & 0.09\\ 0.36 & 0.17 & 0.68\end{bmatrix}.$$

საერთო პროდუქციის მატრიცის ზუსტი მნიშვნელობაა

$$X=(I-A)^{-1}D=\frac{1}{0.32}\begin{bmatrix}0.38 & 0 & 0\\ 0.05 & 0.43 & 0.09\\ 0.36 & 0.17 & 0.68\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\ 45\\ 300\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}118\\ 152\\ 766\end{bmatrix}.$$

ახლა გამოვიყენოთ ტოლობა

$$(I-A)^{-1}\approx I+A+A^2$$

და გამოვთვალოთ ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცა მიახლოებით.

გვაქვს:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.06 & 0.07 \\ 0.30 & 0.14 & 0.27 \end{bmatrix},$$

$$I+A+A^2 = \begin{bmatrix} 1.17 & 0 & 0 \\ 0.05 & 1.26 & 0.17 \\ 0.75 & 0.34 & 1.77 \end{bmatrix}.$$

საერთო პროდუქციის მატრიცის მიახლოებითი მნიშვნელობა იქნება

$$X \approx \left(I + A + A^2\right)D,$$

$$X \approx \begin{bmatrix} 1.17 & 0 & 0 \\ 0.05 & 1.26 & 0.17 \\ 0.75 & 0.34 & 1.77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 45 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117 \\ 112.7 \\ 621.3 \end{bmatrix}.$$

უკეთესი სიზუსტის მისაღწევად შეგვეძლო გამოგვეყენებინა ტოლობა

$$(I - A)^{-1} \approx I + A + A^2 + A^3$$

და ა.შ.

ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცის მისაღებად შეიძლება ვისარგებლოთ შებრუნებული მატრიცის გამოთვლის პრაქტიკული (ნაკლებად შრომატევადი) ხერხით, რომელიც სტრიქონების გარდაქმნას ემყარება. ვთქვათ, $\mathbf{B}$ არაგადაგვარებული $\mathbf{n}$ რიგის კვადრატული მატრიცაა. $\mathbf{B}^{-1}$-ის გამოსათვლელად საჭიროა:

1. შევადგინოთ $\mathbf{n \times 2n}$ რიგის მატრიცა

$$[\mathbf{B}\ \mathbf{I}];$$

2. სტრიქონების გარდაქმნით დავიყვანოთ იგი

$$[\mathbf{I}\ \mathbf{F}]$$

სახის მატრიცამდე;

3. გვექნება $\mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1}$.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რომელი სამი პირობის შესრულება იგულისხმება ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების მოდელში?
2. აღწერეთ ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების მატრიცა.
3. როგორ ეკონომიკას უწოდებენ რენტაბელურს?
4. რას უწოდებენ ლეონტიევის შებრუნებულ მატრიცას?
5. ჩამოაყალიბეთ ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცის არსებობის საკმარისი პირობა.
6. როგორ გამოითვლება მიახლოებით ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცა?

პრაქტიკული სავარჯიშოები

33.1. ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების მატრიცას აქვს სახე

$$A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3 & 0\\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.4\\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0 & 0 & 0.2\end{bmatrix}.$$

ა) რა ღირებულების პროდუქციას აწვდის წარმოების მეორე დარგი მეოთხე დარგს $1 პროდუქციის საწარმოებლად?

ბ) ამოწერეთ მესამე დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის გამომსახველი სტრიქონ-ვექტორი;

გ) ამოწერეთ მეოთხე დარგისათვის მიწოდების გამომსახველი სვეტ-ვექტორი.

33.2. ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების და საერთო პროდუქციის მატრიცებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$\text{ა) } A=\begin{bmatrix}0 & 0.2 & 0.3\\ 0.1 & 0 & 0.4\\ 0.2 & 0.3 & 0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}1100\\ 2000\\ 3200\end{bmatrix};$$

$$\text{ბ) } A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.4\\ 0.1 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}1500\\ 2500\\ 3500\end{bmatrix}.$$

გამოთვალეთ მეორე დარგის საშუალედო პროდუქციის ღირებულება და მესამე დარგის საბაზრო პროდუქციის ღირებულება.

33.3. ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების და საბაზრო მოთხოვნის მატრიცებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$\text{ა) } A=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0.1\\ 0.2 & 0.3 & 0.1\\ 0.1 & 0.4 & 0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1000\\ 1500\\ 4500\end{bmatrix};$$

$$\text{ბ) } A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0.6\\ 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.4 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}900\\ 500\\ 800\end{bmatrix}.$$

ამოწერეთ ბალანსის განტოლებები.

33.4. დაადგინეთ, არსებობს თუ არა $(I-A)^{-1}$ მატრიცა, თუ:

$$\text{ა) } A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.5\end{bmatrix};$$

$$\text{ბ) } A=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0.2\\ 0.5 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.1 & 0.3\end{bmatrix};$$

$$\text{გ) } A=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0.4\\ 0.2 & 0.5 & 0.1\\ 0.3 & 0.1 & 0\end{bmatrix}.$$

33.5. მოძებნეთ ლეონტიევის შებრუნებული $(I-A)^{-1}$ მატრიცა მიახლოებით, თუ:

$$\text{ა) } A=\begin{bmatrix}0.3 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix};$$

$$\text{ბ) } A=\begin{bmatrix}0 & 0.2 & 0\\ 0.1 & 0 & 0.3\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}.$$

შებრუნებული მატრიცის მიახლოებით გამოსათვლელად ისარგებლეთ მიახლოებითი ტოლობით $(I-A)^{-1}\approx I+A+A^2$.

33.6. მოცემული მოთხოვნა-მიწოდებისა და საბაზრო მოთხოვნის მატრიცებისათვის იპოვეთ საერთო პროდუქციის მატრიცის ზუსტი მნიშვნელობა.

ა) $A=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix} 10\,000\,000 \\ 20\,000\,000 \end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix} 100\,000\,000 \\ 200\,000\,000 \end{bmatrix}$;

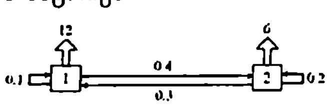
გ) $A=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$,

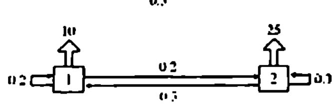
$D-\begin{bmatrix} 200\,000\,000 \\ 300\,000\,000 \end{bmatrix}$;

დ) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix} 20\,000\,000 \\ 40\,000\,000 \\ 10\,000\,000 \end{bmatrix}$.

33.7. ისარგებლეთ მიახლოებითი ტოლობით $(I-A)^{-1} \approx I+A+A^2$ და სქემაზე მოცემული ეკონომიკური მოდელისათვის მიახლოებით გამოთვალეთ სრული პროდუქციის მატრიცა

ა) 

ბ) 

33.8. სტრიქონების გარდაქმნის ხერხის გამოყენებით ვიპოვოთ ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცა, თუ მოთხოვნა-მიწოდების მატრიცაა:

ა) $A=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$.

33.9. ლეონტიევის შებრუნებულ მატრიცას აქვს სახე:

ა) $\begin{bmatrix} \frac{25}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{25}{12} \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} \frac{15}{2} & \frac{5}{4} \\ 5 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

დაადგინეთ, რენტაბელურია თუ არა ეკონომიკა.

ლექცია 34

ორუცნობიანი წრფივი უტოლობები და უტოლობათა სისტემები. ამოზნექილი სიმრავლეები

34.1. ორუცნობიანი წრფივი უტოლობები და უტოლობათა სისტემები

განვიხილოთ ორცვლადიანი წრფივი უტოლობა. საზოგადოდ, მას ექნება ერთ-ერთი შემდეგ სახეთაგანი:

$$ax + by > c\,, \tag{1}$$

$$ax + by \geq c\,, \tag{2}$$

$$ax + by < c\,, \tag{3}$$

$$ax + by \leq c\,, \tag{4}$$

სადაც **a**, **b** და **c** რაიმე მუდმივებია.

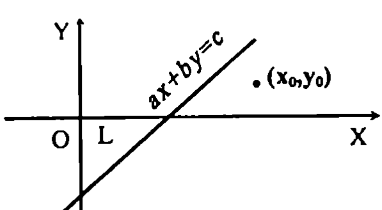
უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს სიბრტყის ყველა იმ წერტილის მოძებნას, რომელთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ უტოლობას.

იმისათვის, რომ გეომეტრიულად ამოვხსნათ ასეთი ტიპის უტოლობა, პირველ რიგში განვიხილოთ OXY საკოორდინატო სიბრტყე და ავაგოთ L წრფე, რომლის განტოლებაა

$$ax + by = c. \tag{5}$$

ამ წრფით მთელი სიბრტყე გაიყოფა ორ ნახევარსიბრტყედ (იხ. ნახ. 34.1).

შევნიშნოთ, რომ თუ (x_0, y_0) წერტილი არ ეკუთვნის L წრფეს, მაშინ $ax_0 + by_0 \neq c$, რადგან $ax + by - c$ ფუნქცია ნული ხდება მხოლოდ L წრფის წერტილებზე. ამაზე დაყრდნობით, მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $ax + by - c$ ფუნქციას L წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარე ნახევარსიბრტყეებში სხვადასხვა ნიშანი აქვს. მისი ნიშნის დასადგენად ფიქსირებულ ნახევარსიბრტყეში საკმარისია ავიღოთ რაიმე *„საცდელი წერტილი“* (x_0, y_0)



ნახ. 34.1

და გამოვთვალოთ ax_0+by_0-c სიდიდე. ამ რიცხვის ნიშანი განსაზღვრავს $ax+by-c$ ფუნქციის ნიშანს განსახილველ ნახევარსიბრტყეში. ამ მეთოდის გამოყენებით მარტივად დავასკვნით, რომ მოცემულ ნახევარსიბრტყეში $ax+by>c$ ან $ax+by<c$.

ამრიგად, (1)–(4) ტიპის უტოლობის ამონახსნს წარმოადგენს (5) წრფის ერთ-ერთ მხარეს მდებარე ნახევარსიბრტყე. კერძოდ, ის ნახევარსიბრტყე, რომლის ერთი „საცდელი წერტილი" აკმაყოფილებს მოცემულ უტოლობას. ამასთან, L წრფე ეკუთვნის ამონახსნთა ნახევარსიბრტყეს, როდესაც გვაქვს არამკაცრი უტოლობა (2) ან (4), ხოლო L წრფე არ ეკუთვნის ამონახსნთა ნახევარსიბრტყეს, თუ გვაქვს მკაცრი უტოლობა (1) ან (3).

მაგალითი 1. ამოვხსნათ უტოლობა

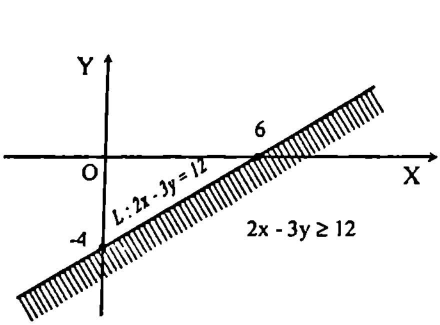
$$2x-3y\geq 12.$$

ჯერ ავაგოთ L წრფე, რომლის განტოლებაა

$$2x-3y=12.$$

ეს წრფე ნაჩვენებია ნახ. 34.2-ზე.

ავიღოთ საცდელი (0,0) წერტილი და შევამოწმოთ, კმაყოფილდება თუ არა მოცემული უტოლობა ამ შემთხვევაში: $2\cdot 0-3\cdot 0<12$. ვხედავთ, რომ აღებული საცდელი წერტილის კოორდინატები მოცემულ უტოლობას არ აკმაყოფილებენ. ამიტომ უტოლობის ამონახსნი არ შეიძლება იყოს ის ნახევარსიბრტყე, რომელსაც ეკუთვნის (0,0) წერტილი. მაშინ ამონახსნი იქნება მეორე ნახევარსიბრტყე, ე.ი. L წრფის ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე.



ნახ. 34.2

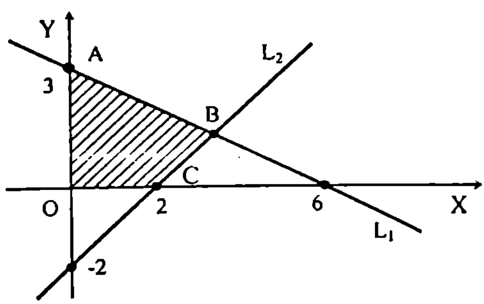
მართლაც, მარტივად შევამოწმებთ, რომ „საცდელი" (8,0) წერტილი, რომელიც ძევს L წრფის ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყეში, აკმაყოფილებს მოცემულ უტოლობას. შევნიშნოთ, რომ თვით L წრფე ეკუთვნის ამონახსნთა ნახევარსიბრტყეს.

თუ მოცემულია რამდენიმე ორუცნობიანი წრფივი უტოლობისაგან შედგენილი სისტემა, მაშინ მისი ამოხსნა ნიშნავს სიბრტყის ყველა იმ წერტილის მოძებნას, რომელთა კოორდინატები

აკმაყოფილებენ სისტემაში შემავალ ყველა უტოლობას. რადგან თითოეული უტოლობის ამონახსნია ნახევარსიბრტყე, ამიტომ უტოლობათა სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შესაბამისი უტოლობებით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთის პოვნაზე. ამ თანაკვეთით განსაზღვრულ სიმრავლეს ეწოდება *დასაშვებ მნიშვნელობათა არე (დმა).*

მაგალითი 2. ავაგოთ დმა, რომელიც მოცემულია შემდეგი სისტემით:

$$\begin{cases} x+2y\le 6, \\ -x+y\ge -2, \\ y\ge 0, \\ x\ge 0. \end{cases}$$



ნახ. 34.3

სისტემის პირველი უტოლობის ამონახსნია L_1 წრფის ($x+2y=6$) ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე (საცდელი წერტილია (0,0)). მეორე უტოლობის ამონახსნია L_2 წრფის ($-x+y=-2$) ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე (საცდელი წერტილია (0,0)). მესამე უტოლობის ამონახსნია OX ღერძის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე, ხოლო მეოთხე უტოლობისა – OY ღერძის მარჯვნივ მდებარე ნახევარსიბრტყე. ამიტომ ამ უტოლობათა სისტემის ამონახსნს (დმა-ს) წარმოადგენს ნახ. 34.3-ზე დაშტრიხული OABC ოთხკუთხედი.

A წერტილის კოორდინატებია (0,3), C წერტილისა – (2,0). B წერტილი წარმოადგენს L_1 და L_2 წრფეების გადაკვეთის წერტილს და ამიტომ მისი კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} x+2y=6, \\ -x+y=-2. \end{cases}$$

აქედან მივიღებთ: $x=\dfrac{10}{3}$, $y=\dfrac{4}{3}$. ამრიგად, $B=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

34.2. ამოზნექილი სიმრავლეები

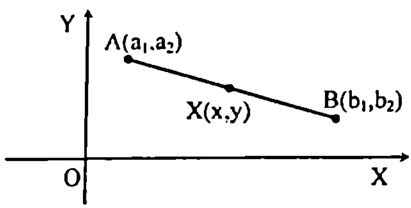
ვთქვათ, $A(a_1, a_2)$ და $B(b_1, b_2)$ სიბრტყის რაიმე ორი წერტილია. განვიხილოთ სიბრტყის იმ $X(x,y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას

$$(x,y)=(1-\lambda)(a_1,a_2)+\lambda(b_1,b_2),\ \ 0\le\lambda\le 1,$$

ანუ

$$x=(1-\lambda)a_1+\lambda b_1,\ \ y=(1-\lambda)a_2+\lambda b_2,\ \ 0\le\lambda\le 1. \tag{6}$$

თუ $\lambda=0$, მაშინ (6) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ $x=a_1$ და $y=a_2$, ე.ი. როცა $\lambda=0$, მაშინ $X(x,y)$ წერტილი დაემთხვევა A წერტილს.



ნახ. 34.4

თუ $\lambda=1$, მაშინ (6) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ $x=b_1$ და $y=b_2$, ე.ი. როცა $\lambda=1$, მაშინ $X(x,y)$ წერტილი დაემთხვევა B წერტილს.

თუ $0<\lambda<1$, მაშინ $X(x,y)$ წერტილი მოთავსებულია „A და B *წერტილებს შორის*".

(6) ტოლობებს შემდგომში ასეთნაირად ჩავწერთ

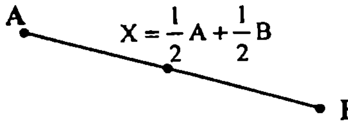
$$X=(1-\lambda)A+\lambda B. \tag{7}$$

განსაზღვრება. $A(a_1, a_2)$ და $B(b_1, b_2)$ წერტილების შემაერთებელი AB მონაკვეთი, ეწოდება სიბრტყის $X(x,y)$ წერტილთა შემდეგ სიმრავლეს:

$$X=(1-\lambda)A+\lambda B,\ \ 0\le\lambda\le 1.$$

A და B წერტილებს ეწოდება AB მონაკვეთის ბოლოები.

როგორც უკვე ვნახეთ, λ სკალარის „უკიდურეს" მნიშვნელობებს – $\lambda=0$ და $\lambda=1$, შეესაბამება AB მონაკვეთის A და B ბოლოები.



ნახ. 34.3

AB მონაკვეთის A და B წერტილებისაგან განსხვავებულ წერტილებს ეწოდება AB მონაკვეთის შიგა წერტილები, ე.ი. X შიგა წერტილია, თუ

$$X=(1-\lambda)A+\lambda B \text{ და } 0<\lambda<1.$$

$\lambda=\frac{1}{2}$-ს შეესაბამება AB მონაკვეთის შუა წერტილი (ნახ. 34.3).

განსაზღვრება. სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ იგი თავის ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად შეიცავს მათ შემაერთებელ მონაკვეთსაც, ე.ი. M სიმრავლე ამოზნექილია, თუ

$$\forall A\in M \text{ და } \forall B\in M \Rightarrow X=(1-\lambda)A+\lambda B\in M,$$
$$\forall\lambda\in[0,1].$$

ახლა დავამტკიცოთ ზოგიერთი დებულება ამოზნექილი სიმრავლეების შესახებ.

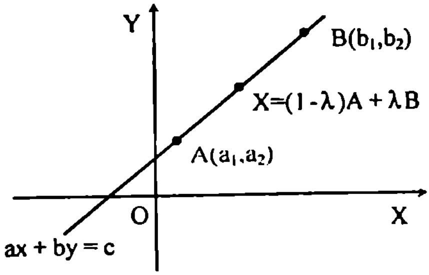
თეორემა 1. წრფე ამოზნექილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $ax+by=c$ წრფეზე აღებულია ნებისმიერი ორი წერტილი, $A(a_1, a_2)$ და $B(b_1, b_2)$, ე.ი.

$$a\cdot a_1+b\cdot a_2=c,$$
$$a\cdot b_1+b\cdot b_2=c.$$

განვიხილოთ $\forall\lambda\in[0,1]$. გავამრავლოთ პირველი ტოლობის ორივე მხარე $(1-\lambda)$-ზე, მეორე ტოლობის ორივე მხარე კი λ-ზე:

$$a(1-\lambda)a_1+b(1-\lambda)a_2=(1-\lambda)c,$$
$$a\lambda b_1+b\lambda b_2=\lambda c.$$



ნახ. 34.4

შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები

$$a[(1-\lambda)a_1+\lambda b_1]+$$
$$b[(1-\lambda)a_2+\lambda b_2]=c.$$

ე.ი. $(1-\lambda)A+\lambda B$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $ax+by=c$ განტოლებას, რაც ნიშნავს, რომ $(1-\lambda)A+\lambda B$ წერტილი მდებარეობს $ax+by=c$ განტოლებით განსაზღვრულ წრფეზე (იხ. ნახ. 34.4).

თეორემა 2. **ღია (ჩაკეტილი) ნახევარსიბრტყე ამოზნექილი სიმრავლეა.**

დამტკიცება. დავამტკიცოთ, მაგალითად $ax+by>c$ ღია ნახევარსიბრტყის ამოზნექილობა.

ვთქვათ, $A(a_1,a_2)$ და $B(b_1,b_2)$ წერტილები ეკუთვნიან $ax+by>c$ უტოლობით განსაზღვრულ ნახევარსიბრტყეს, ე.ი. ჭეშმარიტია შემდეგი უტოლობები:

$$a\cdot a_1+b\cdot a_2>c$$

(A წერტილი მდებარეობს $ax+by>c$ უტოლობით განსაზღვრულ ნახევარსიბრტყეზე).

$$a\cdot b_1+b\cdot b_2>c$$

(B წერტილი მდებარეობს $ax+by>c$ უტოლობით განსაზღვრულ ნახევარსიბრტყეზე).

თუ $\lambda=0$, მაშინ $(1-\lambda)A+\lambda B=A$. თუ $\lambda=1$, მაშინ $(1-\lambda)A+\lambda B=B$. A და B წერტილები ეკუთვნიან აღნიშნულ ნახევარსიბრტყეს.

ვთქვათ, $\lambda\in(0,1)$. პირველი უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(1-\lambda)$-ზე, მეორე კი – λ-ზე, მივიღებთ:

$$a(1-\lambda)a_1+b(1-\lambda)a_2>(1-\lambda)c,\quad (1-\lambda>0),$$

$$a\lambda b_1+b\lambda b_2>\lambda c.$$

შევკრიბოთ მიღებული უტოლობები

$$a[(1-\lambda)a_1+\lambda b_1]+b[(1-\lambda)a_2+\lambda b_2]>(1-\lambda)c+\lambda c=c.$$

ე.ი. $(1-\lambda)A+\lambda B$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $ax+by>c$ უტოლობას $\forall\lambda\in[0,1]$ და, მაშასადამე, $(1-\lambda)A+\lambda B$, $\lambda\in[0,1]$ წერტილიც მდებარეობს $ax+by>c$ უტოლობით განსაზღვრულ ნახევარსიბრტყეში.

ანალოგიურად მტკიცდება თეორემა $ax+by<c$, $ax+by\geq c$, $ax+by\leq c$ უტოლობებით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეების შემთხვევაშიც.

თეორემა 3. **ორი ამოზნექილი სიმრავლის გადაკვეთა ამოზნექილი სიმრავლეა.**

დამტკიცება. ვთქვათ, M და N ამოზნექილი სიმრავლეებია. განვიხილოთ A და B წერტილები მათი გადაკვეთიდან

$$\forall A\in M\cap N,\ \forall B\in M\cap N \Rightarrow \begin{cases} A\in M, B\in M & (M \text{ ამოზნექილია}) \\ A\in N, B\in N & (N \text{ ამოზნექილია}) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow (1-\lambda)A+\lambda B\in M,\ \forall\lambda\in[0,1] \\ &\Rightarrow (1-\lambda)A+\lambda B\in N,\ \forall\lambda\in[0,1] \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1-\lambda)A+$$

$$+\lambda B\in M\cap N, \forall\lambda\in[0,1].$$

ანალოგიურად მტკიცდება თეორემა 3 სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობის შემთხვევაშიც. ე.ი. თუ $M_1, M_2, \dots, M_k$, $k\in N$ ამოზნექილი სიმრავლეებია, მაშინ ამოზნექილია $\bigcap_{i=1}^{k} M_i$ სიმრავლეც.

შევნიშნოთ, რომ ორი ამოზნექილი სიმრავლის გაერთიანება, საზოგადოდ არ არის ამოზნექილი.

ზემოთმოყვანილი თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ **დასაშვებ მნიშვნელობათა არე, როგორც სასრული რაოდენობის ნახევარსიბრტყეების გადაკვეთა, ამოზნექილი სიმრავლეა.**

დამტკიცების გარეშე აღვნიშნოთ ამოზნექილი სიმრავლისათვის დამახასიათებელი შემდეგი

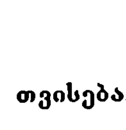
თვისება. ამოზნექილი სიმრავლის საზღვრის ყოველ წერტილზე შეიძლება გავავლოთ ისეთი წრფე, რომ ამოზნექილი სიმრავლე მთლიანად (მისი ყოველი წერტილი) მოთავსდეს ამ წრფით განსაზღვრულ ნახევარსიბრტყეში (ამოზნექილი სიმრავლე მოთავსდება ამ წრფის ერთ მხარეს). ასეთ წრფეს საყრდენი წრფე ეწოდება (იხ. ნახ. 34.5-34.7).

საყრდენი წრფე

ნახ. 34.5

საყრდენი წრფე

ნახ. 34.6

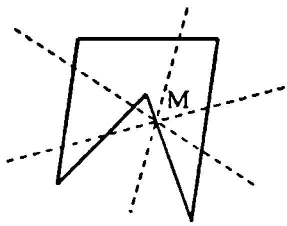


საყრდენი წრფე

ნახ. 34.7

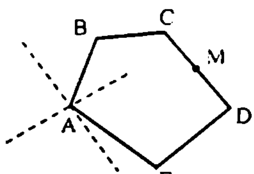
არაამოზნექილი სიმრავლის საზღვარზე კი არსებობენ ისეთი წერტილები, რომლებზედაც აღნიშნული თვისების მქონე წრფის გავლება შეუძლებელია (ნახ. 34.8)

ახლა განვიხილოთ ნახ. 34.9-ზე მოცემული ამოზნექილი სიმრავლე. ამ სიმრავლის საზღვრის M წერტილი CD მონაკვეთის შიგა წერტილია. CD მონაკვეთის ორივე ბოლო – C და D წერტილი ეკუთვნის მოცემულ ამოზნექილ სიმრავლეს. საზღვრის A წერტილი კი არ წარმოადგენს არცერთი ისეთი მონაკვეთის შიგა წერტილს, რომლის ორივე ბოლო მდებარეობს აღნიშნულ ამოზნექილ სიმრავლეში. ასეთ

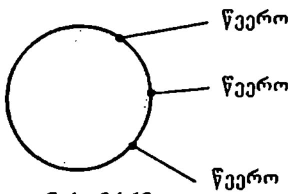


M წერტილზე შეუძლებელია საყრდენი წრფის გავლება

ნახ. 34.8



ნახ. 34.9



ნახ. 34.10

წერტილს *წვერო* ეწოდება. წვეროებია, აგრეთვე **B, C, D** და **E** წერტილებიც.

ამოზნექილი სიმრავლის საზღვრის P წერტილს ეწოდება ამ სიმრაელის წვერო, თუ აღნიშნულ სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ორი A_1 და B_1 წერტილი, რომ

$$P=(1-\lambda)A_1+\lambda B_1, \quad 0<\lambda<1.$$

ამრიგად, **წვერო ვერ იქნება ისეთი მონაკვეთის შიგა წერტილი, რომლის ბოლოებიც ეკუთვნის მოცემულ ამოზნექილ სიმრავლეს.**

ნახ. 34.9-ზე მოცემულ მაგალითში სასაზღვრო M წერტილი არ წარმოადგენს წვეროს. თუმცა, არსებობს ამოზნექილი სიმრავლე, მაგალითად, წრე, რომლის ყოველი სასაზღვრო წერტილი წვეროსაც წარმოადგენს (ნახ. 34.10).

ჩაკეტილ ნახევარსიბრტყეს აქვს საზღვრის წერტილების უსასრულო რაოდენობა, მაგრამ არც ერთი მათგანი წვერო არ არის.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას წარმოადგენს გეომეტრიულად $ax + by \geq c$ ტიპის უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე?
2. რას არკვევენ „საცდელი წერტილით" სარგებლობისას?
3. რას ეწოდება დასაშვებ მნიშვნელობათა არე?
4. განსაზღვრეთ $A(a_1,a_2)$ და $B(b_1,b_2)$ წერტილების შემაერთებელი AB მონაკვეთი, ამ მონაკვეთის ბოლოები და შიგა წერტილები.
5. რას ეწოდება ამოზნექილი სიმრავლე?
6. მოიყვანეთ ამოზნექილ სიმრავლეთა მაგალითები.
7. დაამტკიცეთ, რომ ორი ამოზნექილი სიმრავლის თანაკვეთა ამოზნექილი სიმრავლეა.
8. განსაზღვრეთ ამოზნექილი სიმრავლის საყრდენი წრფე.
9. რას უწოდებენ ამოზნექილი სიმრავლის წვეროს?

პრაქტიკული სავარჯიშოები

34.1. ამოხსენით უტოლობა და დამტრიხეთ სიბრტყეზე შესაბამისი ნახევარსიბრტყე:

ა) $2x - 3y \geq 2$;

ბ) $-3x + 2y \leq 2$;

გ) $5y - 7x \leq 9$;

დ) $-3y + 2x \geq 4$;

ე) $y \geq 3$;

ვ) $x \geq -2$;

ზ) $y \leq -1$;

თ) $x \leq 2$.

34.2. ამოხსენით უტოლობათა სისტემა და დამტრიხეთ სიბრტყეზე შესაბამისი ღმა:

ა) $\begin{cases} 4x + 2y \leq 5, \\ -x + y \leq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 2x + 3y \leq -5, \\ 3x - 2y \geq 12, \\ x, y \geq 0; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x + y \geq 1, \\ x + y \leq 4, \\ -x + y \leq 1, \\ y \geq 0; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 2x + y \leq 10, \\ x + y \leq 7, \\ x + 2y \leq 12, \\ x, y \geq 0: \end{cases}$

ე) $\begin{cases} 2x - 3y \geq -4, \\ 3x + 2y \leq 7, \\ x, y \geq 0; \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 7 \geq 0, \\ -x + y + 1 \leq 0, \\ y \geq 2. \end{cases}$

34.3. ვთქვათ, S_1 და S_2 ამოზნექილი სიმრავლეებია OXY სიბრტყეზე. დავამტკიცოთ, რომ ამოზნექილია შემდეგი სიმრავლე

$$S = \left\{ (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \,\middle|\, \begin{matrix} (x_1, y_1) \in S_1 \\ (x_2, y_2) \in S_2 \end{matrix} \right\}$$

(S_1 და S_2 სიმრავლეთა ალგებრული ჯამი).

34.4. დაადგინეთ, ამოზნექილია თუ არა სიმრავლე:

ა) $\{(x,y) \mid x, y \in R, \quad y \geq |x|\}$;

ბ) $\{(x,y) \mid x, y \in R, \quad y \leq 0.5\,|x|\}$;

გ) $\{(x,y) \mid x, y \in R, \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$;

დ) $\{(x,y) \mid x, y \in R, \ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9\}$;

ე) $\{(x,y) \mid x, y \in R, \quad y \leq 2|x| + 1\}$;

ვ) $\{(x,y) \mid x, y \in R, \quad y \geq x^2 + 4\}$;

ზ) $\{(x,y) \mid x, y \in R, \quad y \leq -x^2 + 2x\}$.

34.5. იპოვეთ შემდეგი უტოლობათა სისტემებით განსაზღვრული ამოზნექილი სიმრავლეების წვეროები:

ა) $\begin{cases} 5x + 3y \le 30, \\ 7x + 2y \le 28, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x + y \ge 2, \\ x - y \le 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 1; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x + 2y \le 10, \\ 3x + y \le 10, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x + y \le 16, \\ x + y \ge 8, \\ x \ge 1, \\ y \ge 1; \end{cases}$

ე) $\begin{cases} y \le 2, \\ 2x + y \le 10, \\ x \ge 1, \\ x, y \ge 0; \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} y \le 4, \\ 2x - y \le 6, \\ x \le 6, \\ x, y \ge 0. \end{cases}$

34.6. ცნობილია, რომ $y = x^2$ „პარაბოლას ზემოთ მდებარე წერტილთა სიმრავლე“

$$\{(x,y) \mid x, y \in R,\ y \ge x^2\}$$

ამოზნექილია. დაწერეთ (1,1) წერტილზე გაელებული საყრდენი წრფის განტოლება.

34.7. დაწერეთ

$$\{(x,y) \mid x, y \in R, y \le -2x^2 + 1\}$$

ამოზნექილი სიმრავლის საზღვრის (-2,-7) წერტილზე გაელებული საყრდენი წრფის განტოლება.

34.8. მოცემულია

$$\begin{cases} x - y \ge 0, \\ y - 2x \le 0, \\ y \ge -x + 1 \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემით განსაზღვრული ამოზნექილი სიმრავლე OXY სიბრტყეზე. დაადგინეთ, ამ ამოზნექილი სიმრავლის რამდენ საყრდენ წრფეზე ძევს წერტილი (-1,2). დაწერეთ ამ საყრდენ წრფეთა განტოლებები.

34.9. ვთქვათ, $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

დაადგინეთ ამოზნექილია თუ არა სიმრავლე $B = \{(2x,2y) \mid (x,y) \in S\}$.

ლექცია 35

წრფივი დაპროგრამების ორცვლადიანი ამოცანა და მისი ამოხსნის გეომეტრიული მეთოდი

მე-20 საუკუნის 30-40-იან წლებში დიდი ინტენსივობით მიმდინარეობდა წარმოების ორგანიზაციისა და დაგეგმვის, სხვადასხვა საწარმოთა ეკონომიკური ურთიერთკავშირის, სამხედრო საქმეში და სხვა პრაქტიკული სახის ამოცანებში მათემატიკური მეთოდების გამოყენება. ამ გამოკვლევებმა მეცნიერები ბუნებრივად მიიყვანა *წრფივი დაპროგრამების* **(Linier Programming)** (*წრფივი დაგეგმვის*) მათემატიკურ ამოცანებამდე.

წრფივი დაპროგრამების მეთოდების გამოყენებამ, პრაქტიკული რეალიზაციის შედეგებმა და შემდგომმა კრიტიკულმა ანალიზმა შესაძლებელი გახადა ფართო პროფილის ამოცანების გადაწყვეტა. წრფივი დაპროგრამების მეთოდები წარმატებით იქნა გამოყენებული და დღესაც დიდი ინტენსივობით გამოიყენება ისეთ სფეროებში, როგორიცაა: ეკონომიკა, წარმოება, სოფლის მეურნეობა, ტრანსპორტი, ჯანმრთელობის დაცვა, ფსიქოლოგია, სოციოლოგია და სხვა.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნისას მოითხოვება რაიმე *წრფივი ფორმის ოპტიმიზაცია (მინიმუმის ან მაქსიმუმის მოძებნა) გარკვეულ შეზღუდვებში*, რომლებიც შეიძლება მოცემული იყოს როგორც *ტოლობების*, ისე *უტოლობების* სახით.

განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების ერთი კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა. კომპანია აწარმოებს ორი – D და G სახის ხის ნავებს. საწარმოო პროცესი გულისხმობს ხის დამუშავებას სამ საამქროში:

I – ხის დაჭრის საამქრო;

II – ნავების აწყობის საამქრო;

III – ნავების შეღებვის საამქრო.

D სახის ერთი ცალი ნავის დასამზადებლად საჭიროა ხის დაჭრა I საამქროში 2 საათის განმავლობაში, II საამქროში აწყობა 4 საათის განმავლობაში და III საამქროში შეღებვა 2 საათის განმავლობაში.

G სახის ერთი ცალი ნავის დასამზადებლად საჭიროა ხის დაჭრა I საამქროში 4 საათის განმავლობაში, II საამქროში აწყობა 2 საათის განმავლობაში და III საამქროში შეღებვა 2 საათის განმავლობაში.

საამქროების მუშაობა დროში შეზღუდულია: კვირის განმავლობაში I საამქრო მუშაობს არაუმეტეს 80 საათისა, II – არაუმეტეს 84 საათისა და III საამქრო კი – არაუმეტეს 50 საათისა.

D სახის ერთი ცალი ნავის გაყიდვით მიღებული მოგებაა \$60, ხოლო G სახის ერთი ცალი ნავის გაყიდვით მიღებული მოგება კი – \$80.

კომპანიას სურს დაადგინოს, რამდენი ცალი D და G სახის ნავი უნდა დაამზადოს კვირის განმავლობაში, რათა მიიღოს მაქსიმალური მოგება.

ამოხსნა. ამოცანის პირობების უფრო ნათლად წარმოსადგენად შევადგინოთ შემდეგი სახის ცხრილი:

საწარმოო პროცესი	სამუშაო საათების დანახარჯი ერთეულზე		სამუშაო საათების მაქს. რაოდენობა (კვირის განმ.)
	D სახის ნავი	G სახის ნავი	
I საამქრო (ხის დაჭრა)	2	4	80
II საამქრო (ნავის აწყობა)	4	2	84
III საამქრო (შეღებვა)	2	2	50
მოგება რეალიზებულ ერთეულზე	\$60	\$80	

ავღნიშნოთ x-ითა და y-ით D და G სახის ნავების რაოდენობა, რომელიც სურს დაამზადოს კომპანიას კვირის განმავლობაში. მაშინ კვირის განმავლობაში მიღებული მოგებაა

$$P(x,y) = 60x + 80y.$$

კომპანიის მიზანია ამ $P(x,y)$ ფუნქციის მაქსიმიზაცია, ე.ი. მოსაძებნია $\max P(x,y)$ ანუ $\max(60x + 80y)$.

$P(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება ამ ამოცანის მიზნობრივი ფუნქცია.

ამოცანის პირობით საამქროების მუშაობის საათები შეზღუდულია.

D სახის x ცალი ნავისა და G სახის y ცალი ნავისათვის საჭირო ხის მასალის დაჭრაზე დახარჯული დრო არ უნდა აღემატებოდეს 80-ს, ე.ი. გვაქვს შემდეგი შეზღუდვა

$$2x + 4y \le 80 \quad \text{(I საამქრო).}$$

ანალოგიურად მივიღებთ შეზღუდვებს, რომლებიც ითვალისწინებენ II და III საამქროების სამუშაო საათების მაქსიმალურ რაოდენობას:

$$4x + 2y \le 84 \quad \text{(II საამქრო),}$$

$$2x + 2y \le 50 \quad \text{(III საამქრო).}$$

გარდა აღნიშნული შეზღუდვებისა, ცხადია, რომ x და y ცვლადები უნდა აკმაყოფილებდნენ *არაუარყოფითობის შეზღუდვებს*:

$$x \geq 0 \text{ და } y \geq 0 .$$

არაუარყოფითობის პირობები შემდგომში ასე ჩავწეროთ:

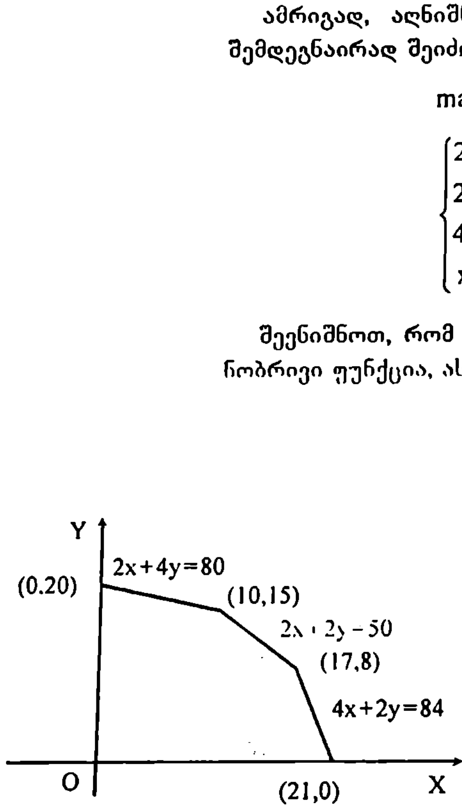
$$x, y \geq 0 .$$

ამრიგად, აღნიშნული ამოცანის მათემატიკური მოდელი შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\max(60x + 80y), \tag{1}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 80, \\ 2x + 2y \leq 50, \\ 4x + 2y \leq 84, \\ x,y \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

შევნიშნოთ, რომ (1), (2) ამოცანაში წრფივია როგორც მიზნობრივი ფუნქცია, ასევე უტოლობათა სისტემაც.



ნახ. 35.1

ამოცანებს, რომლებშიც მოსაძებნია წრფივი ფუნქციის უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა და რომლებშიც ცვლადები აკმაყოფილებენ წრფივი უტოლობების სახით მოცემულ შეზღუდვებს, ეწოდებათ წრფივი დაპროგრამების ამოცანები.

ავაგოთ (2) სისტემით განსაზღვრული დმა (ნახ. 35.1).

დმა-ის ყოველი წერტილის კოორდინატები მიგვითითებენ D და G სახის ნავების იმ რაოდენობაზე, რომელიც შეუძლია აწარმოოს კომპანიამ. წერტილის ცვლილება, საზოგადოდ, იწვევს მოგების ცვლილებასაც.

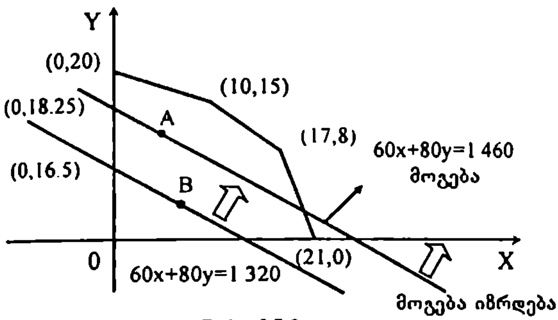
მაგალითად, A(7,13) წერტილის არჩევით კომპანია აწარმოებს x=7 ცალ D სახის ნავს და y=13 ცალ G სახის ნავს. შესაბამისი მოგება იქნება

$$P(7,13) = 7 \cdot 60 + 13 \cdot 80 = \$1\,460.$$

განვიხილოთ $60x+80y=1\,460$ წრფე. ამ წრფისა და დმა-ის საერთო წერტილების არჩევით კომპანია ყოველთვის მიიღებს \$1 460-ის ტოლ მოგებას, ანუ

$$60x+80y=1\,460.$$

წრფის დასაშვები წერტილებისათვის მოგება მუდმივია (\$1 460) (ნახ. 35.2). ასეთ წრფეს *ინდიფერენტულობის* (ამ შემთხვევაში *მუდმივი მოგების*) *წრფე* ეწოდება.



ნახ. 35.2

B(14,6) წერტილის არჩევით კომპანია აწარმოებს $x=14$ ცალ D სახის ნავს და $y=6$ ცალ G სახის ნავს. შესაბამისი მოგებაა

$$P(14,6)=14\cdot 60+6\cdot 80=\$1\,320.$$

$60x+80y=1\,320$ ინდიფერენტულობის წრფის ყოველი დასაშვები წერტილისათვის მოგება მუდმივია და უდრის \$1 320-ს (ნახ. 35.2).

ამ ამოცანისათვის ინდიფერენტულობის წრფის ზოგადი სახეა

$$60x+80y=c,$$

სადაც c მუდმივი გვიჩვენებს მოგების რაოდენობას. მაშასადამე, ინდიფერენტულობის წრფეები პარალელურია. მოგება A წერტილზე გამავალ ინდიფერენტულობის წრფეზე უფრო მეტია, ვიდრე B წერტილზე გამავალ ინდიფერენტულობის წრფეზე. ამავე დროს A წერტილზე გამავალი ინდიფერენტულობის წრფისათვის y-გადაკვეთაც უფრო მეტია, ვიდრე B წერტილზე გამავლი ინდიფერენტულობის წრფისათვის, ე.ი. y-გადაკვეთის ზრდასთან ერთად იზრდება მოგებაც, ინდიფერენტულობის წრფე კი უფრო „შორდება" კოორდინატთა სათავეს.

ჩვენი მიზანია დმა-ის ისეთი (x_0,y_0) წერტილის მოძებნა, რომლისათვისაც

$$P(x,y)=60x+80y$$

ფუნქცია ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ანუ ისეთი c რიცხვის მოძებნა, რომლის შესაბამისი $P(x,y)=60x+80y=c$

ინდიფერენტულობის წრფე „ყველაზე შორსაა" კოორდინატთა სათავიდან და მას გააჩნია დასაშვები წერტილები, ე.ი. ინდიფერენტულობის წრფისა და დმა-ის გადაკვეთა არ უნდა იყოს ცარიელი სიმრავლე.

თუ განვიხილავთ $60x+80y=c$ პარალელურ წრფეთა ერთობლიობას, როცა c იზრდება 0-დან, აღმოჩნდება, რომ ის ინდიფერენტულობის წრფე, რომელიც გადის (10,15) წერტილზე შეესაბამება მაქსიმალურ მოგებას

$$\max P(x,y)=P(10,15)=\$1\ 800.$$

$\forall\varepsilon>0$-სათვის

$$60x+80y=1\ 800+\varepsilon$$

წრფე აღარ შეიცავს დასაშვებ წერტილებს (ასეთი წრფისა და დმა-ის გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა).

მაშასადამე, (10,15) წერტილის „გაუმჯობესება" შეუძლებელია.

ამრიგად, კომპანიამ მაქსიმალური მოგების მიზნით უნდა გამოუშვას 10 ცალი D სახის და 15 ცალი G სახის ნავი, რათა მიიღოს

$$P(10,15)=60\cdot10+80\cdot15=\$1\ 800$$

მაქსიმალური მოგება.

(10,15) წერტილს ეწოდება (1) და (2) *წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნი.*

აქვე შევნიშნოთ, რომ (0,0) დასაშვებ წერტილზე მოგების ფუნქცია მინიმალურია

$$\min P(x.y)=P(0.0)=\ 0.$$

თუ განხილულ ამოცანაში შევცვლით მიზნობრივ ფუნქციას, მაშინ, ბუნებრივია ამონახსნიც შეიცვლება.

ვთქვათ, თითოეული სახის ნავის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგებაა \$70, მაშინ მიზნობრივი ფუნქცია იქნება

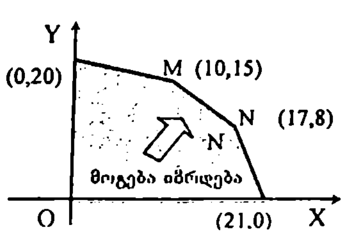
$$P(x,y)=70x+70y.$$

თუ გავიმეორებთ ანალოგიურ მსჯელობას მივიღებთ, რომ დმა-ის MN მონაკვეთი მდებარეობს

$$70x+70y=1\ 750$$

ინდიფერენტულობის წრფეზე (ნახ. 35.3).

მაშასადამე, MN მონაკვეთის ყოველი წერტილი ამონახსნია (MN მონაკვეთის ყოველი წერტილის შესაბამისი მოგებაა \$1 750).



ნახ. 35.3

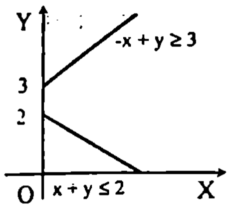
წრფივი დაპროგრამების ამოცანებს შეიძლება არ ჰქონდეთ ამონახსნი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\max(3x+2y), \tag{3}$$

$$\begin{cases} x+y\le 2, \\ -x+y\ge 3, \\ x,y\ge 0 \end{cases} \tag{4}$$

წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნი.



ნახ. 35.4

ამოხსნა. დმა ცარიელი სიმრავლეა. ამიტომ (3), (4) ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია (ნახ. 35.4).

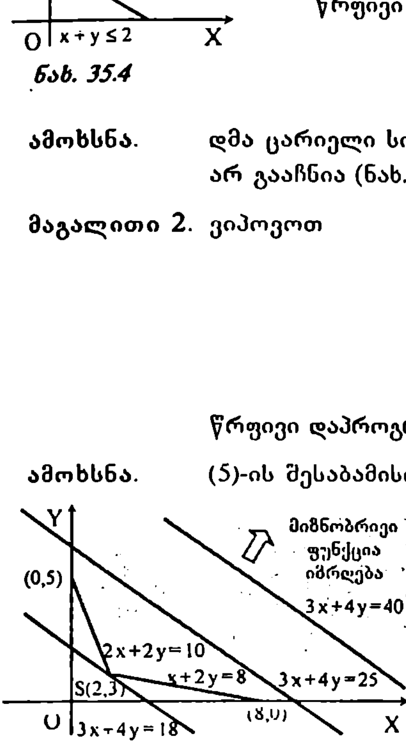
მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$\max(3x+4y) \quad \text{და} \quad \min(3x+4y),$$

$$\begin{cases} x+2y\ge 8, \\ 2x+2y\ge 10, \\ x,y\ge 0 \end{cases} \tag{5}$$

წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამონახსნები.

ამოხსნა. (5)-ის შესაბამისი დმა შემოუსაზღვრელია (ნახ. 35.5).



ნახ. 35.5

მიზნობრივ ფუნქციას $P(x,y)=3x+4y$ შეუძლია მიიღოს რაგინდ დიდი მნიშვნელობა. ამიტომ მაქსიმიზაციის ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია.

მინიმიზაციის ამოცანის ამონახსნი არის S(2,3) წერტილი და

$$\min(3x+4y)=3\cdot 2+4\cdot 3=18.$$

განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ **წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნი (თუ არსებობს) მიიღწევა დმა-ის საზღვარზე, კერძოდ, ან ერთ წვეროზე, ან ორი წვეროთი განსაზღვრულ მონაკვეთზე.**

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ წრფივი დაპროგრამების ორცვლადიანი ამოცანის ამონახსნის არსებობის დებულება.

თეორემა. ვთქვათ, წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში

1. მიზნობრივი ფუნქციაა $P(x,y)=ax+by$;
2. დმა არაცარიელი, შემოსაზღვრული სიმრავლეა, მაშინ $P(x,y)$ მიზნობრივი ფუნქცია ღებულობს მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობებს დმა-ის რომელიმე წვეროზე, ან ორი წვეროს შემაერთებელ მონაკვეთზე.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნის მოსაძებნად საჭიროა:

1. ავაგოთ დმა (არაცარიელი, შემოსაზღვრული);
2. ვიპოვოთ დმა-ის ყველა წვერო;
3. გამოვთვალოთ მიზნობრივი ფუნქციის მნიშვნელობები თითოეულ წვეროზე;
4. წინა პუნქტში მიღებული მნიშვნელობებიდან ავირჩიოთ ამონახსნი.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას უწოდებენ წრფივი დაპროგრამების ამოცანას? მოიყვანეთ მაგალითი.
2. რას წარმოადგენს ინდიფერენტულობის წრფე?
3. რამდენი ამონახსნი შეიძლება გააჩნდეს წრფივი დაპროგრამების ამოცანას?
4. მოიყვანეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნის არსებობის თეორემა.
5. დმა-ის რომელ წერტილებში შეიძლება მიიღოს მიზნის ფუნქციამ თავისი მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები?
6. მოიყვანეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნის მოძებნის მეთოდი.

პრაქტიკული სავარჯიშოები

35.1. ცნობილია, რომ წრფივი დაპროგრამების მაქსიმიზაციის ამოცანის მიზნობრივი ფუნქცია თავის მინიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს (1,3) და (2,5) წერტილებში. დაწერეთ კოორდინატთა სათავეზე გავლებული ინდიფერენტულობის წრფის განტოლება.

35.2. წრფივი დაპროგრამების ამოცანაში მიზნობრივ ფუნქციას აქვს სახე

$$p(x,y) = 20x + 25y.$$

იპოვეთ ინდიფერენტულობის წრფის დახრილობა.

ქვემოთ მოყვანილი ამოცანები (35.3-35.6) ჩაწერეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ფორმით და ამოხსენით:

35.3. შეზღუდული პასუხისმგებლობის საწარმო უშვებს ორი A და B ტიპის პროდუქციას.

A ტიპის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად საჭიროა ნედლეულის წინასწარი 0,5 საათიანი დამუშავება I საამქროში და საბოლოო (სასაქონლო) სახის მისაღებად 2 საათიანი დამუშავება II საამქროში.

B ტიპის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად კი საჭიროა ნედლეულის წინასწარი 45 წუთიანი დამუშავება I საამქროში და საბოლოო სახის მისაღებად 1,5 საათიანი დამუშავება II საამქროში. კვირის განმავლობაში I საამქრო მუშაობს არაუმეტეს 70 საათისა, ხოლო II საამქრო არაუმეტეს 77 საათისა.

A სახის პროდუქციის ერთეულის გაყიდვით მიღებული მოგება $85, ხოლო B ტიპის პროდუქციის ერთეულის გაყიდვით მიღებული მოგება არის $95. რამდენი A და რამდენი B ტიპის პროდუქციის ერთეული უნდა გამოუშვას საწარმომ ერთი კვირის განმავლობაში მაქსიმალური მოგების მისაღებად?

35.4. ჯარისკაცის რაციონი შედგება ორი საკვები პროდუქტისაგან, მაგალითად, პურისა და ხორცისაგან. თითოეული პროდუქტი ხასიათდება პროტეინისა და კალორიის შემცველობით. პურის წონის ერთეული შეიცავს 1 ერთეულ პროტეინს და 5 ერთეულ კალორიას, ხოლო ხორცის წონის ერთეული შეიცავს 5 ერთეულ პროტეინს და 1 ერთეულ კალორიას. ჯარისკაცმა ყოველდღიურად უნდა მიიღოს არანაკლები 15 ერთეული კალორია და 15 ერთეული პროტეინი. როგორი რაციონის დროს იქნება მისი ღირებულება მინიმალური, თუ პური ღირს 1, ხოლო ხორცი 3 ფულის ერთეული?

35.5. ხის დამმუშავებელი მრეწველობის საამქროს ყოველთვიურად აქვს თავის განკარგულებაში 48 $მ^3$ ხის მასალა და 45 $მ^2$ მინა. საამქროში მზადდება ორი სახის კარადა: საკანცელარიო და საბიბლიოთეკო. ხის დანახარჯი

ერთ საკანცელარიო კარადაზე შეადგენს 0,3 $м^3$-ს, ხოლო მინის დანახარჯი – 1 $м^2$-ს, ერთ საბიბლიოთეკო კარადაზე კი ხის დანახარჯი შეადგენს 0,3 $м^3$-ს, ხოლო მინის დანახარჯი – 1,5 $м^2$-ს. საკანცელარიო კარადის გასაყიდი ფასი არის 2 000, ხოლო საბიბლიოთეკო კარადისა – 2 500 ფულის ერთეული. განსაზღვრეთ ისეთი ასორტიმენტი, რომლის დროსაც თვიური შემოსავალი იქნება მაქსიმალური.

35.6. ფირმა უშვებს წიგნებსა და რვეულებს. 1 ცალი წიგნის დასამზადებლად საჭიროა 500 გ ხის მასალა და 30 გ წებო, ხოლო 1 ცალი რვეულისათვის კი – 100 გ ხის მასალა და 10 გ წებო. ხის მასალის მარაგია 200 კგ, ხოლო წებოსი 15 კგ. ცნობილია, რომ წიგნების რაოდენობა არ აღემატება პროდუქციის საერთო რაოდენობის 37,5%-ს. წიგნის საცალო ფასია \$5, ხოლო რვეულისა კი – \$2. რამდენი წიგნი და რვეული უნდა დაამზადოს ფირმამ მაქსიმალური შემოსავლის მიღების მიზნით?

35.7. ამოხსენით წრფივი დაპროგრამების ამოცანა გეომეტრიული მეთოდით:

ა) $\max(20x+30y)$,
$$\begin{cases} 2x+y\le 10, \\ x+y\le 7, \\ x+2y\le 12, \\ x,y\ge 0; \end{cases}$$

ბ) $\min(x+y)$,
$$\begin{cases} 3x+y\ge 10, \\ 3x+2y\ge 17, \\ x+2y\ge 11, \\ x,y\ge 0; \end{cases}$$

გ) $\max(2x+4y)$,
$$\begin{cases} x-y\le 0, \\ x,y\ge 0; \end{cases}$$

დ) $\min(20x+30y)$,
$$\begin{cases} x+y\le 0, \\ -2x+y\ge 1, \\ x,y\ge 0. \end{cases}$$

35.8. საწარმო ამზადებს ქურთუკებსა და შარვლებს. 1 ქურთუკის შესაკერად საჭიროა 4 მ ქსოვილი და 50 გ ძაფი. 1 შარვლის შესაკერად კი – 2 მ ქსოვილი და 40 გ ძაფი. საწარმოს გააჩნია 600 მ ქსოვილი და 9 000 გ ძაფი. ცნობილია, რომ ქურთუკების რაოდენობა არ აღემატება პროდუქციის საერთო რაოდენობის 2/3-ს. 1 ქურთუკის რეალიზაციის შედეგად მიღებული შემოსავალია \$90, 1 შარვლის რეალიზაციის შედეგად კი – \$60. რამდენი ქურთუკი და შარვალი უნდა შეკეროს საწარმომ მაქსიმალური შემოსავლის მიღების მიზნით? იპოვეთ მაქსიმალური შემოსავალი.

ლექცია 36

წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის ალგებრული მეთოდი. წრფივი დაპროგრამების ამოცანა n ცვლადის შემთხვევაში

36.1. წრფივი დაპროგრამების კონკრეტული ამოცანის ამოხსნა ალგებრული მეთოდით

გავიხსენოთ წინა ლექციაზე განხილული ამოცანა D და G სახის ნავების დამზადების შესახებ. ჩავწეროთ იგი როგორც წრფივი დაპროგრამების ამოცანა

$$\max P(x_1,x_2),\ P(x_1,x_2)=60x_1+80x_2, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} 2x_1+4x_2\le 80 \\ 2x_1+2x_2\le 50 \\ 4x_1+2x_2\le 84 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \text{უტოლობების სახით ჩაწერილი შეზღუდვები} \\ \quad x_1,x_2\ge 0 \quad \longrightarrow \text{არაუარყოფითობის შეზღუდვა.} \end{cases} \tag{2}$$

ჩვენი მიზანია უტოლობების სახით მოცემული შეზღუდვები ჩავწეროთ განტოლებების სახით. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ყოველი უტოლობა ახალი ცვლადის (*შემავსებელი, განმასხვავებელი*) შემოღებით შეიძლება ტოლობის სახით გადავწეროთ.

შევთანხმდეთ, რომ S_i-ით აღვნიშნავთ **სხვაობას i-ური უტოლობის მეტ მხარესა და ნაკლებ მხარეს შორის. ასე, რომ $S_i\ge 0$.**

(2) უტოლობების განტოლებების სახით გადაწერის მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი S_1, S_2 და S_3 სიდიდეები:

$$S_1=80-2x_1-4x_2,$$
$$S_2=50-2x_1-2x_2,$$
$$S_3=84-4x_1-2x_2.$$

მათი საშუალებით (2) უტოლობები ჩაიწერება განტოლებების სახით შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+S_1=80, \\ 2x_1+2x_2+S_2=50, \\ 4x_1+2x_2+S_3=84, \end{cases}$$

სადაც $S_1, S_2, S_3\ge 0$.

S_1, S_2 და S_3 სახის ცვლადებს *სუსტი ცვლადები* ეწოდება. ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე

$$S_1 = 80 - 2x_1 - 4x_2$$

სუსტი ცვლადი გვიჩვენებს I საამქროში გამოყოფილი საათების იმ რაოდენობას, რომელიც არ იქნა გამოყენებული საწარმოო პროცესში.

ანალოგიურად, $S_2 = 50 - 2x_1 - 2x_2$ და $S_3 = 84 - 4x_1 - 2x_2$ სუსტი ცვლადები მიუთითებენ, შესაბამისად, II და III საამქროში გამოყოფილი საათების რაოდენობას, რომელიც არ გამოიყენა საწარმოო პროცესმა.

საზოგადოდ, **სუსტი ცვლადები მიუთითებენ აუთვისებელი ნედლეულის რაოდენობაზე** (განხილულ მაგალითში ნედლეულია საათების რაოდენობა).

ამრიგად, სუსტი ცვლადების შემოღების შემდეგ წრფივი დაპროგრამების (1), (2) ამოცანა ასე ჩაიწერება

$$\max P(x_1,x_2),\ P(x_1,x_2) = 60x_1 + 80x_2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + S_1 = 80, \\ 2x_1 + 2x_2 + S_2 = 50, \\ 4x_1 + 2x_2 + S_3 = 84, \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0. \end{cases} \qquad (3)$$

როგორც ვხედავთ, საჭიროა ამოვხსნათ ხუთუცნობიანი სამი წრფივი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა. ასეთ სისტემას ან არ გააჩნია ამონახსნი, ან აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ჩვენი მიზანია ისეთი (x_1, x_2, S_1, S_2, S_3) ამონახსნის შერჩევა (ამონახსნის არსებობის შემთხვევაში), რომლისთვისაც მიზნობრივი ფუნქცია ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

განსაზღვრება. **განტოლებათა სისტემის დასაშვები ბაზისური ამონახსნი ვუწოდოთ ისეთ ბაზისურ ამონახსნს, რომლის თითოეული კომპონენტი არაუარყოფითია.**

აღსანიშნავია, რომ დასაშვები ბაზისური ამონახსნი წარმოადგენს დმა-ს წვეროს.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ წრფივი დაპროგრამების თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი დებულება.

თეორემა. **თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ ეს ამონახსნი არის შესაბამისი განტოლებათა სისტემის დასაშვები ბაზისური ამონახსნი.**

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ განხილული ამოცანის ამონახსნის მოსაძებნად, საჭიროა (3) განტოლებათა სისტემის დასაშვებ ბაზისურ ამონახსნებს შორის ვიპოვოთ ისეთი, რომლისთვისაც მიზნობრივი ფუნქცია მაქსიმალურია.

გამოსაკვლევი განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+S_1=80, \\ 2x_1+2x_2+S_2=50, \\ 4x_1+2x_2+S_3=84 \end{cases}$$

ბაზისური ამონახსნების მაქსიმალური რაოდენობაა

$$\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}=10\,.$$

მონაცემების ჩაწერა მოხერხებულია შემდეგი ცხრილის სახით:

x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	სუსტი ცვლადების შემოწმება	დასაშვები ბაზისური ამონახსნების შერჩევა	მიზნობრივი ფუნქცია $P(x_1,x_2)=60x_1+$ $+80x_2$
0	0	80	50	84	$S_1, S_2, S_3 \geq 0$	დასაშვებია	P(0,0)=$0
0	20	0	10	44	$S_1, S_2, S_3 \geq 0$	დასაშვებია	P(0,20)=$1 600
10	15	0	0	14	$S_1, S_2, S_3 \geq 0$	დასაშვებია	P(10,15)=$1 800 max
17	8	14	0	0	$S_1, S_2, S_3 \geq 0$	დასაშვებია	P(17,8)=$1 660
21	0	38	8	0	$S_1, S_2, S_3 \geq 0$	დასაშვებია	P(21,0)=$1 260
0	25	-20	0	34	$S_1<0$	არ არის დასაშვები	
0	42	-88	-34	0	$S_1, S_2<0$	არ არის დასაშვები	
25	0	30	0	-16	$S_3<0$	არ არის დასაშვები	
40	0	0	-30	-76	$S_2, S_3<0$	არ არის დასაშვები	
$14\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3}$	0	$-4\frac{2}{3}$	0	$S_2<0$	არ არის დასაშვები	

ამრიგად, ამონახსნია

$$(10,15,0,0,14),$$

ხოლო შესაბამისი მაქსიმალური მოგებაა

$$P(10,15)=10\cdot60+15\cdot80=1\ 800.$$

ახლა ჩავწეროთ წრფივი დაპროგრამების (1), (2) ამოცანა მატრიცული სახით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}60\\ 80\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}80\\ 50\\ 84\end{bmatrix},$$

მაშინ (1), (2) ამოცანა ასე ჩაიწერება:

$$\max C^{T}X,\qquad \begin{cases}AX\le B,\\ X\ge 0.\end{cases}\tag{4}$$

ადვილი დასანახია, რომ სუსტი ცვლადების მატრიცა (*აუთვისებელი რესურსების მატრიცა*) იქნება

$$S=B-AX,\; S=\begin{bmatrix}S_1\\ S_2\\ S_3\end{bmatrix}.$$

S მატრიცის საშუალებით (4) ამოცანაში უტოლობით მოცემული შეზღუდვები ჩაიწერება მატრიცული შეზღუდვების სახით

$$\max C^{T}X,\qquad \begin{cases}AX+S=B,\\ X,S\ge 0.\end{cases}\tag{5}$$

ახლა შემოვიღოთ 3x5 რიგის $\tilde{A}$ მატრიცა

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}2 & 4\\ 2 & 2\\ 4 & 2\end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I_3}\end{bmatrix}=\left[A I_3\right]$$

და 5x1 რიგის $\tilde{X}$ და $\tilde{C}$ მატრიცები:

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ S_1\\ S_2\\ S_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ S\end{bmatrix},\qquad \tilde{C}=\begin{bmatrix}60\\ 80\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

ამ აღნიშვნების საშუალებით (5) ამოცანა ასე გადაიწერება

$$\max \tilde{C}^T \tilde{X},$$

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{X} = B \rightarrow (3) \text{ განტოლებათა სისტემა,} \\ \tilde{X} \geq 0 \rightarrow \text{არაუარყოფითობის შეზღუდვა.} \end{cases} \quad (6)$$

ამონახსნის მოძებნის ზემოთგანხილული პროცესი ახლა ასე ჩამოვაყალიბოთ:

(6) სახით მოცემული წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნის მოსაძებნად (თუ იგი არსებობს) საჭიროა:

1. **$\tilde{A}\tilde{X} = B$ წრფივ განტოლებათა სისტემის ყველა ბაზისური ამონახსნის გამოთვლა;**
2. **მიღებული ბაზისური ამონახსნებიდან დასაშვები ბაზისური ამონახსნების შერჩევა ($\tilde{X} \geq 0$ არაუარყოფითობის შეზღუდვის შემოწმება);**
3. **დასაშვები ბაზისური ამონახსნებისათვის მიზნობრივი $P = \tilde{C}^T \tilde{X}$ ფუნქციის გამოთვლა;**
4. **მიზნობრივი ფუნქციის მნიშვნელობებიდან მაქსიმალურის (მინიმალურის) არჩევა.**

36.2. წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა

გავეცნოთ *წრფივი დაპროგრამების მრავალი ცვლადის* შემცველ ამოცანებს.

ვთქვათ, კომპანია ამზადებს $\mathbf{n}$ სახის სხვადასხვა პროდუქტს, რისთვისაც იყენებს $\mathbf{m}$ სახის რესურსს (ნედლეული, დრო და სხვა). რესურსის მაქსიმალური (მინიმალური) ოდენობა განისაზღვრება $\mathbf{m x 1}$ რიგის მატრიცით

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

ცნობილია რესურსების გადამუშავების $\mathbf{m x n}$ რიგის მატრიცა

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

სადაც a_{ij} არის i სახის რესურსის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა j სახის პროდუქტის ერთეულის დასამზადებლად.

საძიებელია $n\times1$ რიგის

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

პროდუქციის რაოდენობის მატრიცა (x_i არის i-ური დარგის პროდუქციის რაოდენობა). კომპანიას სურს დაადგინოს, თუ თითოეული სახის პროდუქციის რა რაოდენობა უნდა გამოუშვას მიზნობრივი

$$P=C^T X$$

ფუნქციის *ოპტიმიზაციის (მაქსიმიზაციის, მინიმიზაციის)* მიზნით, სადაც

$$C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

წინასწარ ცნობილი მატრიცაა (მისი კომპონენტები შეიძლება იყოს i-ური პროდუქტის ფასი, მოგება და ა.შ.).

ჩამოყალიბებული წრფივი დაპროგრამების ამოცანის მათემატიკური მოდელი ასე ჩაიწერება

$$\max C^T X \quad (\min C^T X),$$
$$\begin{cases} AX \le B, \\ X \ge 0, \end{cases} \tag{7}$$

ან, რაც იგივეა

$$\max(c_1x_1+\dots+c_nx_n) \quad \left(\min(c_1x_1+\dots+c_nx_n)\right),$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \le b_m, \\ \quad x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0. \end{cases} \tag{8}$$

შემოვიღოთ $\mathbf{m}$ ცალი სუსტი ცვლადი

$$S_i=b_i-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\ldots-a_{in}x_n,\ i=1,2,\ldots,m$$

(*ათვისებელი* $\mathbf{i}$-*ური რესურსის ოდენობა*), მაშინ (8) უტოლობათა სისტემა ჩაიწერება განტოლებათა სისტემის სახით

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots.+a_{1n}x_n+S_1=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots.+a_{2n}x_n+S_2=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots.+a_{mn}x_n+S_m=b_m, \\ x_1,x_2,\ldots.,x_n,S_1,S_2,\ldots,S_m\ge 0. \end{cases}$$

$\mathbf{m\times 1}$ რიგის სუსტი ცვლადების მატრიცის

$$S=B-AX=\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \ldots \\ S_n \end{bmatrix}$$

შემოღების შემდეგ აღნიშნული სისტემა ჩაიწერება მატრიცული სახით

$$\begin{cases} AX+S=B, \\ X,S\ge 0. \end{cases}$$

განვსაზღვროთ $\mathbf{m\times(m+n)}$ რიგის $\tilde{A}$ და $\mathbf{(m+n)\times 1}$ რიგის $\tilde{C}$ და $\tilde{X}$ მატრიცები შემდეგნაირად:

$$\tilde{A}=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A}\!\!\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{I_m}=[AI],$$

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-\text{ცალი ნული},$$

$$\bar{X}=\begin{bmatrix} X \\ S \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ S_1 \\ \dots \\ S_m \end{bmatrix}.$$

ამ აღნიშვნების გამოყენებით წრფივი დაპროგრამების (7) ამოცანა მიიღებს სახეს

$$\max \tilde{C}^T \tilde{X} \ \ (\min \tilde{C}^T \tilde{X}),$$
$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{X}=B, \\ \tilde{X} \ge 0. \end{cases} \tag{9}$$

$\tilde{A}\tilde{X}=B$ არის $(n+m)$-უცნობიანი m წრფივი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა.

როგორც ვიცით წრფივი დაპროგრამების (9) ამოცანის ამონახსნი (თუ იგი ერთადერთია) არის $\tilde{A}\tilde{X}=B$ სისტემის დასაშვები ბაზისური ამონახსნი. მიუხედავად იმისა, რომ ბაზისური ამონახსნების რაოდენობა ყოველთვის სასრულია, როცა შეზღუდვათა სისტემის განზომილებები იზრდება, ყველა ბაზისური ამონახსნის პოვნა და მათზე მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობების დათვლა მეტად არაპრაქტიკულია. ამიტომ (9) ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად შემუშავებულია სპეციალური მეთოდები, რომელთა რეალიზაცია ხორციელდება კომპიუტერების საშუალებით.

დავალება

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება სუსტი ცვლადები?
2. რა ეკონომიკური შინაარსი აქვთ სუსტ ცვლადებს?
3. რას ეწოდება დასაშვები ბაზისური ამონახსნი?
4. რა გეომეტრიული შინაარსი აქვს დასაშვებ ბაზისურ ამონახსნს?
5. რა კავშირი არსებობს წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნსა და შესაბამისი ალგებრული განტოლებათა სისტემის დასაშვებ ბაზისურ ამონახსნს შორის?
6. ჩამოაყალიბეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნის მოძებნის სქემა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები

36.1. მოცემული წრფივი დაპროგრამების ამოცანებისათვის შემოიღეთ სუსტი ცვლადები და გარდაქმენით უტოლობებით მოცემული შეზღუდვები განტოლებებით მოცემულ შეზღუდვებად. იპოვეთ შესაბამის განტოლებათა სისტემის დასაშვები ბაზისური ამონახსნები და მოცემული ამოცანის ამონახსნი.

ა) $\max(2x+3y)$,
$$\begin{cases} x+2y \le 24, \\ 5x+y \le 30, \\ x,y \ge 0; \end{cases}$$

ბ) $\max(3x+2y)$,
$$\begin{cases} -x+2y \le 1, \\ x-y \le 1, \\ x,y \ge 0; \end{cases}$$

გ) $\max(2x+y)$,
$$\begin{cases} x+y \le 8, \\ x \le 2, \\ x,y \ge 0; \end{cases}$$

დ) $\max(x+2y)$.
$$\begin{cases} x+y \le 6, \\ -x+2y \le 0, \\ y \le 4, \\ x,y \ge 0; \end{cases}$$

ე) $\max(x+2y)$,
$$\begin{cases} x+3y \le 36, \\ x+y \le 16, \\ 2x+y \le 24, \\ x,y \ge 0; \end{cases}$$

ვ) $\max(x+2y+z)$,
$$\begin{cases} x+y+z \le 12, \\ 2x+y+4z \le 24, \\ x,y,z \ge 0. \end{cases}$$

ქვემოთ მოყვანილი ამოცანები (36.2-36.6) ამოხსენით წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის ალგებრული მეთოდით:

36.2. ფერმას აქვს 50 ძროხისა და 200 ცხვრის სადგომი. ფერმის საძოვრების ფართობია 72 ჰა. წლის განმავლობაში ერთი ძროხის გამოსაკვებად საჭიროა 1 ჰა საძოვარი, ხოლო ერთი ცხვრის გამოსაკვებად – 0.2 ჰა. ფერმას შეუძლია აანაზღაუროს 10 000 სამუშაო საათი წლის განმავლობაში. ერთი ძროხის მოსავლელად საჭიროა 150 სამუშაო საათი, ხოლო ერთი ცხვრისთვის კი – 25 სამუშაო საათი. ცნობილია, რომ ერთი ძროხა იძლევა $250 მოგებას, ხოლო ცხვარი კი – $45-ს (ყოველწლიურად). რამდენი ძროხა და ცხვარი უნდა ჰყავდეს ფერმას, რათა მოგება იყოს მაქსიმალური? რისი ტოლია მაქსიმალური მოგება?

36.3. საწარმო ამზადებს მაგიდებსა და კარადებს. ერთი მაგიდის დასამზადებლად საჭიროა 1 $м^3$ ხის მასალა და 2 კგ წებო, ერთი კარადის დასამზადებლად კი 2 $м^3$ ხის მასალა და 5 კგ წებო. საწარმოს შეუძლია გამოიყენოს 210 $м^3$ ხის მასალა და 450 კგ წებო. ცნო-

ბილია, რომ კარადების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს მაგიდების რაოდენობის 1/2-ს. ერთი მაგიდის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგებაა $150, ხოლო ერთი კარადის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება კი – $500. რამდენი მაგიდა და კარადა უნდა დაამზადოს საწარმომ მაქსიმალური მოგების მისაღებად? რისი ტოლია მაქსიმალური მოგება?

36.4. ფირმა უშვებს წიგნებსა და რვეულებს. 1 ცალი წიგნის დასამზადებლად საჭიროა 400 სმ^3 ხის მასალა და 40 გ წებო, ხოლო 1 ცალი რვეულისათვის კი – 200 სმ^3 ხის მასალა და 30 გ წებო. ფირმა ყოველდღიურად იღებს 20 000 სმ^3 ხის მასალას და 2 400 გ წებოს. ცნობილია, რომ რვეულების რაოდენობა არ აღემატება წიგნებისა და რვეულების საერთო რაოდენობის 2/3-ს. წიგნის საცალო ფასია $3, ხოლო რვეულისა კი – $2. რამდენი წიგნი და რვეული უნდა დაამზადოს ფირმამ მაქსიმალური შემოსავლის მიღების მიზნით? იპოვეთ მაქსიმალური შემოსავალი.

36.5. ფარმაცევტული ფირმა აწარმოებს ვიტამინების ორ კომპლექსს: ბავშვებისათვის და მოზრდილებისათვის. ბავშვებისათვის განკუთვნილი 1 კოლოფი საჭიროებს 2 მგრ A ვიტამინს და 2 მგრ E ვიტამინს, ხოლო მოზრდილთა 1 კოლოფისათვის საჭიროა 2 მგრ A ვიტამინი და 5 მგრ E ვიტამინი. ფირმას ყოველთვიურად მიეწოდება 100 მგრ A ვიტამინი და 160 მგრ E ვიტამინი. ცნობილია, რომ ბავშვებისათვის განკუთვნილი ვიტამინების კომპლექსის რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს მთელი პროდუქციის 80%-ს. ბავშვებისათვის განკუთვნილი 1 კოლოფის ფასია $30, ხოლო მოზრდილთათვის განკუთვნილისა – $50. რამდენი კოლოფი ვიტამინების კომპლექსი უნდა გამოუშვას ფირმამ ბავშვებისათვის და მოზრდილებისათვის, რომ შემოსავალი იყოს მაქსიმალური? იპოვეთ მაქსიმალური შემოსავალი.

36.6. ფირმა აწარმოებს A და B სახის პროდუქციას. თითოეული სახის პროდუქციის დამუშავება ხდება ეტაპობრივად ორ ჩარხზე. A სახის პროდუქციის ერთეულს ესაჭიროება I ჩარხზე დამუშავება 5 წთ და II-ზე 10 წთ, ხოლო B სახის პროდუქციის ერთეულს ესაჭიროება I ჩარხზე დამუშავება 5 წთ და II-ზე 20 წთ. ჩარხების სამუშაო დრო შეზღუდულია, შესაბამისად, 10 სთ-ითა და 20 სთ-ით. ცნობილია, რომ A პროდუქციის რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს B პროდუქციის გაორმაგებულ რაოდენობას. A სახის პროდუქციის საცალო ფასია $90, ხოლო B სახის პროდუქციისა კი – $100. A და B სახის პროდუქციის რა რაოდენობა უნდა გამოუშვას ფირმამ მაქსიმალური შემოსავლის მიღების მიზნით? იპოვეთ მაქსიმალური შემოსავალი.

Q. კითხვები და ამოცანები გამეორებისათვის (ლექციები 33-36)

Q.1. ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების მატრიცას აქვს სახე:

$$A=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3\end{bmatrix}.$$

ა) რა ღირებულების საკუთარ პროდუქციას იყენებს წარმოების მეოთხე დარგი $1 პროდუქციის საწარმოებლად?

ბ) ამოწერეთ მეორე დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის გამომსახველი ვექტორი;

გ) ამოწერეთ მესამე დარგისათვის მიწოდების გამომსახველი ვექტორი.

Q.2. ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების და საერთო პროდუქციის მატრიცებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$A=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}2500\\ 4500\\ 3000\end{bmatrix}.$$

ა) გამოთვალეთ პირველი დარგის საშუალედო პოდუქციის ღირებულება;

ბ) გამოთვალეთ მეორე დარგის საბაზრო პროდუქციის ღირებულება.

Q.3. ლეონტიევის მოთხოვნა-მიწოდების და საბაზრო მოთხოვნის მატრიცებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$A=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}5700\\ 6000\\ 8500\end{bmatrix}.$$

ამოწერეთ ბალანსის განტოლებები.

Q.4. ისარგებლეთ მიახლოებითი ტოლობით $(I-A)^{-1}\approx I+A+A^2$ და მოძებნეთ ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცა მიახლოებით:

ა) $A=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}3\end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix}0{,}1 & 0 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2\end{bmatrix}$.

Q.5. მოცემული მოთხოვნა-მიწოდებისა და საბაზრო მოთხოვნის მატრიცებისათვის იპოვეთ საერთო პროდუქციის მატრიცა:

ა) $A=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}3000\\ 750\end{bmatrix}$;

ბ) $A=\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}6000\\ 3000\end{bmatrix}$;

გ) $A=\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2\end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix}400\\ 400\\ 700\end{bmatrix}$;

დ) $A=\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3\end{bmatrix}$,

$$D = \begin{bmatrix} 400 \\ 1800 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Q.6. გამოსახეთ სქემატურად სავარჯიშო Q.5-ში მოცემული ეკონომიკური მოდელები.

Q.7. სტრიქონების გარდაქმნის ხერხის გამოყენებით იპოვეთ ლეონტიევის შებრუნებული მატრიცა, თუ მოთხოვნა-მიწოდების მატრიცას აქვს სახე:

ა) $\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix}$.

Q.8. ლეონტიევის შებრუნებულ მატრიცას აქვს სახე:

ა) $\begin{bmatrix} \frac{15}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{5}{22} & \frac{175}{11} \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{7}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$.

დაადგინეთ, რენტაბელურია თუ არა ეკონომიკა.

Q.9. დაადგინეთ როგორი სახე აქვს შემდეგი უტოლობათა სისტემის შესაბამის ღმა-ს:

ა) $\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ y-1 \ge 0, \\ x+y-3 \ge 0, \\ -6x-7y+42 \ge 0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x \ge 0, \\ x+y-2 \ge 0, \\ x-y+1 \ge 0, \\ y \le 2; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x \ge 2, \\ x+3y \le 0, \\ x-y+1 \le 0; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 2x-y \ge 2, \\ x-y \ge -2, \\ x \le 0, \\ 2x-y \ge 0; \end{cases}$

ე) $\begin{cases} 3x-y \ge 0, \\ x-y \le 0, \\ 2x+y \le 6, \\ x \le 2, \\ 3x-y \ge -4; \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} x+y-5 \ge 0, \\ x-y-5 \ge 0, \\ x \le 7; \end{cases}$

ზ) $\begin{cases} x-5y+5 \ge 0, \\ x+3y-3 \le 0, \\ x \le 5; \end{cases}$

თ) $\begin{cases} x-y+1 \ge 0, \\ 2x+y-7 \ge 0, \\ x-2y+4 \ge 0. \end{cases}$

Q.10. იპოვეთ შემდეგი უტოლობათა სისტემებით განსაზღვრული ამოზნექილი სიმრავლეების წვეროები:

ა) $\begin{cases} y-2x-1 \le 0, \\ y-\frac{1}{2} \ge 0, \\ x-1 \le 0, \\ x \ge 0; \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x \ge 0, \\ y - \dfrac{1}{2}x \ge 0, \\ y + 2x \le 17, \\ y \ge 0; \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 2x + 3y \ge 6, \\ 3x + 4y \le 24, \\ x \le 10, \\ y \ge 0; \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 3y - x \le 0, \\ y + 4x \le 8, \\ y \le 4, \\ x \ge 0; \end{cases}$

ე) $\begin{cases} y - 2x \le -1, \\ 3x + 2y \le 19, \\ x \ge 1, \\ y \ge 0; \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} y + 3x \ge 6, \\ y - 5x \le 0, \\ x \le 4, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Q.11. დაწერეთ ამოზნექილი

$$A = \{(x,y) \mid x,y \in R,\ y \le -2x^2 + x - 1\}$$

სიმრავლის საზღვრის (-1,-4) წერტილზე გამავალი საყრდენი წრფის განტოლება.

Q.12. ვთქვათ,

$A = \{(x,y) \mid x,y \in R,\ y \ge x^2\}$ და

$B = \{(x,y) \mid x,y \in R,\ y \ge x^2 - 2x - 1\}$

დაწერეთ A და B სიმრავლეების საერთო საყრდენი წრფის განტოლება.

Q.13. ორი სახის ნაკეთობის დასამზადებლად გამოყოფილია 100 კგ მეტალი. პირველი ნაკეთობის ერთი ეგზემპლარის დამზადებაზე იხარჯება 2 კგ მეტალი, ხოლო მეორე სახის ერთი ეგზემპლარის დამზადებაზე – 4კგ. პირველი სახის ნაკეთობას ყოველ ეგზემპლარს მოაქვს $3 მოგება, ხოლო მეორე სახის ნაკეთობის ყოველ ეგზემპლარს – $2. ცნობილია, რომ პირველი სახის ნაკეთობათა საერთო რაოდენობა არ აღემატება 40-ს, ხოლო მეორე სახის ნაკეთობათა საერთო რაოდენობა არ აღემატება 20-ს. რა რაოდენობის ნაკეთობები უნდა დამზადდეს მაქსიმალური მოგების მისაღებად?

Q.14. მოძებნეთ $\varphi = 7x_1 + 5x_2$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა და მინიმუმის მიმნიჭებელი ამონახსნი შემდეგი განტოლებათა სისტემის არაუარყოფითკომპონენტებიან ამონახსნთა სიმრავლეზე:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

Q.15. მოძებნეთ φ ფუნქციის მინიმუმის მიმნიჭებელი არაუარყოფითკომპონენტებიანი ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \end{cases}$

$\varphi = x_1 - x_2;$

ბ) $\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - x_4, \\ x_1 = 1 + x_3 - 2x_4, \\ x_5 = 5 - x_3 + x_4, \end{cases}$

$\varphi = x_1 + x_2;$

გ) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ \quad\; x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$

$\varphi = x_1 - x_2;$

დ) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900. \end{cases}$

$\varphi = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3.$

Q.16. მოძებნეთ φ ფუნქციის მაქსიმუმის მიმნიჭებელი არაუარყოფითკომპონენტებიანი ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ \quad x_2 + 2x_4 \geq 20, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 8, \end{cases}$

$\varphi = 2x_1 + x_4;$

ბ) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq -1, \end{cases}$

$\varphi = -x_1 - 2x_2 - 3x_3.$

საცნობარო მასალა

ძირითადი ცნებები

ალგებრა

1. თვლის შედეგად მიღებულ რიცხვებს **ნატურალური რიცხვები** ეწოდება. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება N სიმბოლოთი.

რიცხვს რომელიც უნაშთოდ იყოფა მხოლოდ ერთზე და თავისთავზე, **მარტივი რიცხვი** ეწოდება.

რიცხვს, რომელიც ერთისა და თავისთავის გარდა სხვა რიცხვზეც უნაშთოდ იყოფა, **შედგენილი რიცხვი** ეწოდება.

რიცხვი **ერთი** არც მარტივია და არც შედგენილი.

რიცხვს, რომელზედაც უნაშთოდ იყოფა ნატურალური რიცხვი, მისი **გამყოფი** ეწოდება.

რიცხვს, რომელიც უნაშთოდ იყოფა ნატურალურ რიცხვზე, მისი **ჯერადი** ეწოდება.

რამდენიმე რიცხვის **უდიდესი საერთო გამყოფი** (უ.ს.გ.) ეწოდება მათ საერთო გამყოფებს შორის უდიდესს.

რამდენიმე რიცხვის **უმცირესი საერთო ჯერადი** (უ.ს.ჯ.) ეწოდება მათ საერთო ჯერადებს შორის უმცირესს.

2. მთელი რიცხვები ეწოდება $\pm n$ სახის რიცხვებს, სადაც n ნატურალური რიცხვი ან ნულია. მთელ რიცხვთა სიმრავლე Z სიმბოლოთი აღინიშნება.

$2n$ $(n \in N)$ სახის რიცხვებს **ლუწი რიცხვები**, ხოლო $2n-1$ $(n \in N)$ სახის რიცხვებს კენტი რიცხვები ეწოდება.

რაციონალური რიცხვები ეწოდება $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვებს, სადაც $m \in Z$ და $n \in N$. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე Q სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ $m \in N$ და $m<n$, მაშინ $\frac{m}{n}$ რიცხვს **წესიერი წილადი** ეწოდება, ხოლო როცა $m \geq n$, ასეთ რიცხვს **არაწესიერი წილადი** ეწოდება. ამასთან, თუ $n=10^k$ $(k \in N)$, მას **ათწილადი** ეწოდება.

უსასრულო ათწილადს, რომლის ერთი ან რამდენიმე ციფრი უცვლელად მეორდება ერთი და იმავე მიმდევრობით, **პერიოდული ათწილადი** ეწოდება. აღნიშნულ ციფრს ან ციფრთა ერთობლიობას, რომელიც მეორდება, **პერიოდი** ეწოდება.

უსასრულო პერიოდული ათწილადი წარმოადგენს **რაციონალურ რიცხვს** და პირიქით, ყოველი რაციონალური რიცხვი წარმოდგინდება **უსასრულო პერიოდული** ათწილადის სახით.

უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს **ირაციონალური რიცხვი** ეწოდება.

x რიცხვის მთელი ნაწილი ($[x]$) ეწოდება უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც x-ს არ აღემატება. **x რიცხვის წილადი ნაწილი** ეწოდება $x-[x]$ სხვაობას.

3. რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს **ნამდვილი რიცხვები** ეწოდება. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R სიმბოლოთი აღინიშნება. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ერთ-ერთი წარმომადგენელია π რიცხვი, რომელიც წრეწირის სიგრძის მის დიამეტრთან შეფარდების ტოლია. π რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობაა 3,14.

$a \in R$ რიცხვის **მოპირდაპირე რიცხვი** ეწოდება $-a$ რიცხვს.

არაუარყოფითი a **ნამდვილი რიცხვის მოდული (აბსოლუტური სიდიდე)** ეწოდება თვით ამ a რიცხვს, ხოლო a უარყოფითი რიცხვის მოდული — მის მოპირდაპირე $-a$ რიცხვს. მოდული გეომეტრიულად გამოსახავს მანძილს რიცხვით ღერძზე მოცემული რიცხვის შესაბამისი წერტილიდან სათავემდე (ათვლის წერტილამდე):

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ თუ } a \geq 0, \\ -a, \text{ თუ } a<0. \end{cases}$$

4. ორი $\frac{a}{b}$ და $\frac{c}{d}$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$ შეფარდების ტოლობას **პროპორცია** ეწოდება. a და d-ს პროპორციის კიდურა, ხოლო b და c-ს შიგა წევრები ეწოდებათ.

თუ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გაზრდით მეორე სიდიდე იმდენჯერვე იზრდება, მაშინ მეორეს პირველის **პირდაპირპროპორციული** ეწოდება, ხოლო თუ მეორე იმდენჯერვე მცირდება — **უკუპროპორციული**.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვების **საშუალო არითმეტიკული** ეწოდება $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ სიდიდეს. თუ ეს რიცხვები არაუარყოფითია, მაშინ განიმარტება მათი **საშუალო გეომეტრიულიც**, რომელიც ტოლია $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ სიდიდის.

5. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 და 9-ს **ციფრები** ეწოდება. ციფრების მეშვეობით ხდება რიცხვების ჩაწერა.

რიცხვთა და იმ ნიშანთა ერთობლიობას, რომლებიც გვიჩვენებენ, თუ რა მოქმედებები და რა მიმდევრობით უნდა იქნას შესრულებული ამ რიცხვებზე, **რიცხვითი გამოსახულება** ეწოდება.

სიდიდეს ეწოდება **მუდმივი**, თუ იგი მხოლოდ ერთ მნიშვნელობას ღებულობს, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში (ე.ი. თუ ღებულობს სხვადასხვა მნიშვნელობებს) — **ცვლადი**.

თუ გამოსახულება ცვლადს შეიცავს, მას **ცვლადის შემცველი გამოსახულება** ეწოდება.

6. $a \in R$ რიცხვის n-ური $(n\neq 1,\ n \in N)$ **ხარისხი** (a^n) ეწოდება n ცალი a რიცხვის ნამრავლს. $a^0=1$ $(a\neq 0)$, $a^1=a$.

n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი $\sqrt[n]{a}$ ($n\in N$, $n>1$) არაუარყოფითი რიცხვიდან ეწოდება იმ არაუარყოფით რიცხვს, რომელიც აყვანილი n ხარისხში გვაძლევს a-ს: $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

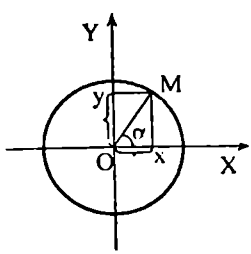
7. **ერთწევრი** ეწოდება რამდენიმე თანამამრავლის ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული ან რიცხვია, ან ცვლადის ხარისხი ნატურალური მაჩვენებლით. ერთწევრში შემავალი რიცხვითი თანამამრავლების ნამრავლს ამ ერთწევრის **კოეფიციენტი** ეწოდება. **ერთწევრის ხარისხი** ეწოდება მასში შემავალი ცვლადების ხარისხის მაჩვენებლთა ჯამს.

ერთწევრებს **მსგავსი** ეწოდებათ, თუ ისინი ერთნაირია ან განსხვავდებიან მხოლოდ კოეფიციენტებით.

მრავალწევრი ეწოდება ერთწევრების ჯამს.

მრავალწევრის ხარისხი ან **რიგი** ეწოდება მასში შემავალი ერთწევრების ხარისხებს შორის უდიდესს.

8. სიბრტყეზე განვიხილოთ დეკარტის OXY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ვთქვათ, M წერტილი O ცენტრისა და ერთის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირზე (**ერთეულოვანი წრეწირი**) მდებარეობს და OM მონაკვეთი OX ღერძთან α სიდიდის კუთხესადგენს. M წერტილის y ორდინატას α რიცხვის **სინუსი** ($\sin\alpha$), ხოლო x აბსცისას – **კოსინუსი** ($\cos\alpha$) ეწოდება. α რიცხვის სინუსის შეფარდებას კოსინუსთან α რიცხვის **ტანგენსი** ($\mathrm{tg}\alpha$), ხოლო პირიქითა შეფარდებას **კოტანგენსი** ($\mathrm{ctg}\alpha$) ეწოდება.



ნახ. 1

a რიცხვის **არკსინუსი** ($\arcsin a$) ეწოდება ისეთ რიცხვს $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედიდან, რომლის სინუსი a-ს ტოლია.

a რიცხვის **არკკოსინუსი** ($\arccos a$) ეწოდება ისეთ რიცხვს $[0,\pi]$ შუალედიდან, რომლის კოსინუსი a-ს ტოლია.

a რიცხვის **არკტანგენსი** ($\mathrm{arctg}\, a$) ეწოდება ისეთ რიცხვს $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ შუალედიდან, რომლის კოსინუსი a-ს ტოლია.

a რიცხვის **არკკოტანგენსი** ($\mathrm{arcctg}\, a$) ეწოდება ისეთ რიცხვს $]0,\pi[$ შუალედიდან, რომლის კოტანგენსი a-ს ტოლია.

9. ორ სიმრავლეს შორის f მიმართებას, როცა ერთი სიმრავლის (**განსაზღვრის არე**) ყოველ x ელემენტს შეესაბამება მეორე სიმრავლის ერთადერთი f(x) ელემენტი, **ფუნქცია (ასახვა)** ეწოდება. ამასთან, თუ ამ სიმრავლეებს შორის ანალოგი-

ურად შეიძლება უკუმიმართების დამყარება, მაშინ მიღებულ ფუნქციას f-ის **შექცეული (შებრუნებული) ფუნქცია** ეწოდება. f ფუნქციის განსაზღვრის არე D_f სიმბოლოთი აღინიშნება. f(x) სახის ყველა ელემენტთა სიმრავლეს, სადაც $x \in D_f$ ეწოდება f ფუნქციის მნიშვნელობათა არე. f ფუნქციის **შექცეული ფუნქცია** f^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება.

10. f ფუნქციის **გრაფიკი** ეწოდება საკოორდინატო სიბრტყის იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლეს, რომლებისთვისაც $x \in D_f$ და $y = f(x)$.

f ფუნქციას ეწოდება **პერიოდული პერიოდით** $\omega \in R$, $\omega \neq 0$, თუ პირობიდან $x \in D_f$ გამომდინარეობს, რომ $x \pm \omega \in D_f$ და ნებისმიერი x-სთვის განსაზღვრის არედან $f(x+\omega) = f(x)$. ω რიცხვს f ფუნქციის **პერიოდი** ეწოდება.

f ფუნქციას ეწოდება **ლუწი (კენტი)**, თუ მისი განსაზღვრის არედან აღებული ნებისმიერი x-სთვის -x წერტილიც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

11. მონაკვეთზე ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის უდიდესს (უმცირესს), მონაკვეთზე ფუნქციის **უდიდესი (უმცირესი)** მნიშვნელობა ეწოდება.

12. $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; $y = ax^n$, $a \neq 0$, $n \in N$ და $n \neq 1$; $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ ფუნქციებს, სადაც a, b და c ნამდვილი მუდმივებია, ხოლო x და y ცვლადები, შესაბამისად ეწოდებათ **წრფივი, კვადრატული, ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული** ფუნქციები.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციებს, სადაც x და y ნამდვილი ცვლადებია, **ტრიგონომეტრიული ფუნქციები** ეწოდებათ.

$y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geq 2$) ფუნქციას, სადაც x და y არაუარყოფითი ცვლადებია, **არითმეტიკული ფესვი** ეწოდება.

13. ორ გამოსახულებას, შეერთებულს ტოლობის (=) ნიშნით, **ტოლობა** ეწოდება. უცნობის შემცველ ტოლობას **განტოლება** ეწოდება.

უცნობის იმ მნიშვნელობას, რომელიც განტოლებას აკმაყოფილებს, **განტოლების ამონახსნი (ფესვი)** ეწოდება. მოცემული განტოლების ყველა ამონახსნის ერთობლიობას, **განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე** ეწოდება.

განტოლებებს ეწოდებათ **ტოლფასი განტოლებები**, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა.

14. ორ გამოსახულებას, შეერთებულს უტოლობის ნიშნით, **უტოლობა** ეწოდება.

თუ უტოლობა უცნობს შეიცავს, მაშინ უცნობის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც მოცემული უტოლობა სამართლიანია, **უტოლობის ამონახსნი** ეწოდება. მოცემული უტოლობის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას, **უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე** ეწოდება.

უტოლობებს ეწოდებათ **ტოლფასი უტოლობები**, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა.

15. რამდენიმე განტოლებისაგან შემდგარ ერთობლიობას **განტოლებათა სისტემა** ეწოდება. უცნობების იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც თითოეული განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს, **განტოლებათა სისტემის ამონახსნი** ეწოდება. მოცემულ განტოლებათა სისტემის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას **განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე** ეწოდება.

ერთი უცნობის შემცველი უტოლობებისაგან შემდგარ სისტემას **ერთცვლადიან უტოლობათა სისტემა** ეწოდება. უცნობის იმ მნიშვნელობას, რომელიც სისტემაში შემავალ ნებისმიერ უტოლობას აკმაყოფილებს, **უტოლობათა სისტემის ამონახსნი** ეწოდება. მოცემულ უტოლობათა სისტემის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას, **უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე** ეწოდება.

განტოლებათა და უტოლობათა სისტემებს ეწოდებათ **ტოლფასი სისტემები**, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა.

16. უსასრულო მიმდევრობა ეწოდება ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.

მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრისაგან ერთი და იმავე რიცხვის (**სხვაობა**) მიმატებით, **არითმეტიკული პროგრესია** ეწოდება.

მიმდევრობას, რომლის პირველი წევრი არ უდრის ნულს და რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრისაგან ერთი და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე (**მნიშვნელი**) გამრავლებით, **გეომეტრიული პროგრესია** ეწოდება.

17. მოცემული A დადებითი რიცხვის **ლოგარითმი** დადებითი $a \neq 1$ ფუძით (**$\log_a A$**) ეწოდება ისეთ **b** რიცხვს, რომელშიც ახარისხებული **a** ფუძე გვაძლევს მოცემულ **A** რიცხვს (**$A = a^b$, $\log_a A = b$, $\lg A = \log_{10} A$**).

გეომეტრია

1. წერტილი, წრფე, სიბრტყე და სივრცე საწყისი მათემატიკური ცნებებია.

წრფის ნაწილს, რომელიც ამ წრფის მოცემული წერტილის ერთ მხარეს მდებარე ყველა წერტილისაგან შედგება, **სხივი (ნახევარწრფე)** ეწოდება.

ერთი და იმავე წრფის ორ ნახევარწრფეს, რომლებსაც საერთო საწყისი წერტილი (**სათავე**) აქვთ, **დამატებითი ნახევარწრფეები** ეწოდება.

სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფე ყოფს მას ორ **ნახევარსიბრტყედ**.

საერთო სათავის მქონე ორი განსხვავებული სხივით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს, ამ სხივების ჩათვლით **კუთხე** ეწოდება. საერთო წერტილს **კუთხის წვერო** ეწოდება, ნახევარწრფეებს – **კუთხის გვერდები**.

ნახევარწრფეს, რომელიც კუთხის წვეროდან გამოდის, მის გვერდებს შორის გადის და კუთხეს ორ ტოლ ნაწილად ყოფს **კუთხის ბისექტრისა** ეწოდება.

ორ კუთხეს **მოსაზღვრე** ეწოდება, თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ, დანარჩენი გვერდები კი დამატებითი ნახევარწრფეებია.

ორ კუთხეს **ვერტიკალური** ეწოდება, თუ ერთი კუთხის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების დამატებითი ნახევარწრფეებია.

სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს **პარალელური** ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ გადაკვეთენ.

სივრცეში ორ წრფეს **პარალელური** ეწოდება, თუ ისინი ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ და ერთმანეთს არ კვეთენ.

ორ წრფეს რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთენ და ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ, **აცდენილი წრფეები** ეწოდება.

მოცემული წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს **წერტილიდან წრფემდე მანძილი** ეწოდება.

მოცემული წერტილიდან სიბრტყემდე დაშვებულ მართობის სიგრძეს **წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი** ეწოდება.

ორ პარალელურ წრფეს შორის მანძილი ეწოდება ერთ-ერთი წრფის რომელიმე წერტილიდან მეორე წრფემდე მანძილს.

ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი ეწოდება ერთ-ერთი სიბრტყის რომელიმე წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე მანძილს.

2. $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ **ტეხილი** ეწოდება ფიგურას, რომელიც A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n წერტილებისა და მათი შემაერთებელი A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ მონაკვეთებისაგან შედგება. A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n წერტილებს **ტეხილის წვეროები** ეწოდება. A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ მონაკვეთებს **ტეხილის მდგენები** ეწოდება. თუ ტეხილი თავის თავს არ კვეთს, მაშინ მას მარტივი ტეხილი ეწოდება. ტეხილის **სიგრძე** მისი მდგენების სიგრძეთა ჯამს ეწოდება. ტეხილს ეწოდება შეკრული, თუ მისი ბოლოები ერთმანეთს ემთხვევა ($A_n = A_1$).

მარტივი შეკრული ტეხილით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს თვით ამ ტეხილის ჩათვლით **ბრტყელი მრავალკუთხედი** ეწოდება. ტეხილის წვეროებს **მრავალკუთხედის წვეროები**, ხოლო მდგენებს **მრავალკუთხედის გვერდები** ეწოდება.

მრავალკუთხედის არამეზობელი წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთებს **მრავალკუთხედის დიაგონალები** ეწოდება.

მრავალკუთხედს **ამოზნექილი** ეწოდება, თუ იგი მის ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად მათ შემაერთებელ მონაკვეთსაც შეიცავს.

მრავალკუთხედს **წესიერი** ეწოდება, თუ მისი ყველა გვერდი და ყველა კუთხე ტოლია.

3. სამკუთხედის მოცემული წვეროდან გავლებული **მედიანა** ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც ამ წვეროს სამკუთხედის მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილთან აერთებს.

სამკუთხედის მოცემული წვეროდან გავლებული **ბისექტრისა** ეწოდება ამ წვეროს შესაბამისი სამკუთხედის შიგა კუთხის ბისექტრისის მონაკვეთს, რომელიც ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდის წერტილთან აერთებს.

სამკუთხედის მოცემული წვეროდან დაშვებული **სიმაღლე** ეწოდება მართობს, რომელიც ამ წვეროდან სამკუთხედის მოპირდაპირე გვერდის გაგრძელებით მიღებული წრფისადმი არის გავლებული.

სამკუთხედს, რომლის ყველა შიგა კუთხე მახვილია, **მახვილკუთხა** ეწოდება.

სამკუთხედს, რომლის ერთი შიგა კუთხე მართია, **მართკუთხა** სამკუთხედი ეწოდება.

სამკუთხედს, რომლის ერთი შიგა კუთხე ბლაგვია, **ბლაგვკუთხა** ეწოდება.

სამკუთხედს, რომლის ორი გვერდი ტოლია, **ტოლფერდა** ეწოდება. ამასთან, ტოლ გვერდებს **ფერდები**, ხოლო მესამე გვერდს **ფუძე** ეწოდება.

სამკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია, **ტოლგვერდა** (ან **წესიერი**) ეწოდება.

სამკუთხედის რომელიმე წვეროსთან მდებარე შიგა კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს სამკუთხედის **გარე კუთხე** ეწოდება.

4. პარალელოგრამი ეწოდება **ოთხკუთხედს**, რომლის მოპირდაპირე გვერდები ერთმანეთის პარალელურია, ანუ პარალელურ წრფეებზე მდებარეობს.

მართკუთხედი ეწოდება პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე ტოლია.

კვადრატი ეწოდება მართკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია.

ტრაპეცია ეწოდება ოთხკუთხედს, რომლის მხოლოდ ორი გვერდია პარალელური. ამ პარალელურ გვერდებს **ფუძეები**, ხოლო დანარჩენ ორ გვერდს **ფერდები** ეწოდება.

მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის (ტრაპეციის) გვერდების (ფერდების) შუაწერტილებს აერთებს, **სამკუთხედის (ტრაპეციის) შუახაზი** ეწოდება.

5. სიბრტყის მოცემული წერტილიდან (**ცენტრი**) ერთი და იგივე მანძილით (**რადიუსი**) დაშორებულ ყველა წერტილთა სიმრავლეს (**წრეწირი**) ეწოდება.

სიბრტყის მოცემული წერტილიდან (**ცენტრი**) არაუმეტეს მოცემული მანძილით (**რადიუსი**) დაშორებულ ყველა წერტილთა სიმრავლეს **წრე** ეწოდება.

მონაკვეთს, რომელიც წრეწირის ორ წერტილს აერთებს, **ქორდა** ეწოდება. ქორდას, რომელიც წრეწირის ცენტრზე გადის, **დიამეტრი** ეწოდება.

წრფეს, რომელიც წრეწირის წერტილზე ამ წერტილში გავლებული რადიუსის მართობულად გადის, წრეწირის **მხები** ეწოდება.

წრფეს, რომელიც წრეწირის ორ წერტილზე გადის, წრეწირის **მკვეთი** ეწოდება.

წრისა და ნახევარსიბრტყის არაცარიელ თანაკვეთას **წრიული სეგმენტი** ეწოდება.

წრის ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია მისი ორი რადიუსით და მათი ბოლოების შემაერთებელი ამ წრის წრეწირის რკალით, **წრიული სექტორი** ეწოდება.

6. კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირის ცენტრში მდებარეობს, **ცენტრალური კუთხე** ეწოდება.

კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირზე მდებარეობს, ხოლო გვერდები ამ წრეწირს გადაკვეთს, წრეწირში **ჩახაზული კუთხე** ეწოდება.

7. კუთხის **რადიანული ზომის** ერთეულად მიღებულია ის ცენტრალური კუთხე, რომლის მიერ მოკვეთილი წრეწირის რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია, ხოლო **გრადუსული ზომის** ერთეულად მიღებულია ის ცენტრალური კუთხე, რომელიც სრული კუთხის 360-ე ნაწილს შეადგენს.

8. სამკუთხედს **წრეწირში ჩახაზული** ეწოდება, თუ მისი ყველა წვერო ამ წრეწირზე მდებარეობს.

სამკუთხედს **წრეწირზე შემოხაზული** ეწოდება, თუ მისი ყველა გვერდი ამ წრეწირის მხებია.

9. ორ სიბრტყეს **ურთიერთგადამკვეთი** ეწოდება, თუ მათ ერთი საერთო წრფე აქვთ.

ორ ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეს **ურთიერთმართობული** ეწოდება, თუ მესამე სიბრტყე, რომელიც ამ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფის მართობულია, აღნიშნულ სიბრტყეებს კვეთს ურთიერთმართობულ წრფეებზე.

ორ სიბრტყეს **პარალელური** ეწოდება, თუ მათ საერთო წერტილი არა აქვს.

10. წრფესა და სიბრტყეს **პარალელური** ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ.

სიბრტყის მკვეთ წრფეს ამ სიბრტყისადმი **მართობული** ეწოდება, თუ იგი გადაკვეთის წერტილზე გამავალ და მოცემულ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის მართობულია.

11. მოცემული წერტილიდან მოცემული სიბრტყისადმი **გავლებული დახრილი** ეწოდება ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც სიბრტყისადმი მართობს არ წარმოადგენს და რომლის ერთი ბოლო მოცემულ წერტილშია, ხოლო მეორე ბოლო (დახრილის ფუძე) სიბრტყეს ეკუთვნის.

ერთი და იმავე წერტილიდან გავლებული მართობისა და დახრილის ფუძეების შემაერთებელ მონაკვეთს **დახრილის გეგმილი** ეწოდება.

წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება კუთხეს ამ წრფესა და სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის.

12. საერთო წრფიდან გამომავალი ორი ნახევარსიბრტყით შექმნილ ფიგურას **ორწახნაგა კუთხე** ეწოდება. ამ ნახევარსიბრტყეებს ორწახნაგა კუთხის **წახნაგები**, ხოლო საერთო წრფეს ორწახნაგა კუთხის **წიბო** ეწოდება.

ორწახნაგა კუთხის წიბოს მართობული სიბრტყის წახნაგებთან თანაკვეთით მიღებულ ნახევარწრფეებს შორის კუთხეს ორწახნაგა კუთხის **ხაზოვანი კუთხე** ეწოდება.

13. **მრავალწახნაგა** ეწოდება სხეულს, რომელიც შემოსაზღვრულია სასრული რაოდენობის სიბრტყეებით. მრავალწახნაგას ზედაპირისა და მისი შემომსაზღვრელი ნებისმიერი სიბრტყის საერთო ნაწილს მრავალწახნაგას **წახნაგი** ეწოდება. მრავალწახნაგას წახნაგები წარმოადგენენ ბრტყელ მრავალკუთხედებს, რომელთა გვერდებს მრავალწახნაგას **წიბოები**, ხოლო წვეროებს მრავალწახნაგას **წვეროები** ეწოდება. მონაკვეთს, რომელიც მრავალწახნაგას ერთ წახნაგზე არამდებარე ორ წვეროს აერთებს, მრავალწახნაგას **დიაგონალი** ეწოდება.

მრავალწახნაგას, რომლის ორი წახნაგი (ფუძეები) პარალელურ სიბრტყეებში მოთავსებული ბრტყელი **n**-კუთხედებია, ხოლო დანარჩენი **n** წახნაგი (გვერდითი წახ-

სახეები) პარალელოგრამებს წარმოადგენს, პრიზმა ეწოდება. იმ წიბოებს, რომლებიც ფუძეების გვერდებს არ წარმოადგენენ, პრიზმის **გვერდითი წიბოები** ეწოდება.

მანძილს ფუძეების სიბრტყეებს შორის პრიზმის **სიმაღლე** ეწოდება.

პრიზმას **მართი** ეწოდება, თუ მისი გვერდითი წიბოები ფუძეების მართობულია.

მართ პრიზმას **წესიერი** ეწოდება, თუ მისი ფუძეები წესიერი მრავალკუთხედებია.

პრიზმას, რომლის ყველა წახნაგი პარალელოგრამია **პარალელეპიპედი** ეწოდება.

მართ პარალელეპიპედს, რომლის ფუძეები მართკუთხედებია, **მართკუთხა პარალელეპიპედი** ეწოდება.

მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის ყველა წიბო ტოლია **კუბი** ეწოდება.

მრავალწახნაგას, რომლის ერთი წახნაგი ნებისმიერი n-კუთხედია (**ფუძე**) ხოლო დანარჩენები საერთო წვეროს (**პირამიდის წვერო**) მქონე სამკუთხედებს წარმოადგენენ, n-კუთხა **პირამიდა** ეწოდება.

პირამიდის სამკუთხა წახნაგებს, რომლებიც ფუძეს არ ემთხვევა, პირამიდის **გვერდითი წახნაგები** ეწოდება.

პირამიდის **გვერდითი წიბო** ეწოდება იმ წიბოს, რომელიც პირამიდის წვეროს აერთიებს ფუძის წვეროსთან.

პირამიდის წვეროდან ფუძის შემცველ სიბრტყეზე დაშვებულ მართობს **პირამიდის სიმაღლე** ეწოდება.

პირამიდის გვერდითი წახნაგის სიმაღლეს, რომელიც გაელებულია პირამიდის წვეროდან, **აპოთემა** ეწოდება.

პირამიდას ეწოდება **წესიერი**, თუ მისი ფუძე წესიერი მრავალკუთხედია, ხოლო სიმაღლის ფუძე ამ მრავალკუთხედის ცენტრს ემთხვევა.

პირამიდის **გვერდითი ზედაპირის ფართობი** ეწოდება მისი გვერდითი წახნაგების ფართობების ჯამს.

14. მართკუთხედის თავისი ერთ-ერთი გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებულ ფიგურას **ცილინდრი** ეწოდება.

ცილინდრის ზედაპირი შედგება პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე ორი ტოლი წრისაგან (**ცილინდრის ფუძეები**) და **გვერდითი ზედაპირისაგან**.

ცილინდრის **რადიუსი** ეწოდება მისი ფუძის რადიუსს.

ცილინდრის ფუძეთა ცენტრების შემაერთებელ მონაკვეთს ცილინდრის **სიმაღლე** ეწოდება.

ცილინდრის **ღერძი** ეწოდება ფუძეთა ცენტრებზე გამავალ წრფეს.

კვეთას, რომელიც მიიღება ცილინდრის ღერძზე გამავალი სიბრტყით, ცილინდრის **ღერძული კვეთა** ეწოდება.

მართკუთხა სამკუთხედის თავისი ერთ-ერთი კათეტის გარშემო ბრუნვით მიღებულ ფიგურას **კონუსი** ეწოდება. მონაკვეთს, რომელიც კონუსის წვეროს ფუძის წრეწირის წერტილთან აერთიებს, კონუსის **მსახველი** ეწოდება.

კონუსის ზედაპირი შედგება **ფუძისა** და **გვერდითი ზედაპირისაგან**.

კონუსის **სიმაღლე** ეწოდება მართობს, რომელიც დაშვებულია წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე.

კონუსის **ღერძი** ეწოდება წრფეს, რომელიც მის სიმაღლეს შეიცავს.

კვეთას, რომელიც მიიღება კონუსის ღერძზე გამავალი სიბრტყით, კონუსის **ღერძული კვეთა** ეწოდება.

სივრცის მოცემული წერტილიდან (**ცენტრი**) ერთი და იგივე მანძილით (**რადიუსი**) დაშორებულ ყველა წერტილთა სიმრავლეს **სფერო** ეწოდება.

სივრცის მოცემული წერტილიდან (**ცენტრი**) არაუმეტეს მოცემული მანძილით (**რადიუსი**) დაშორებულ ყველა წერტილთა სიმრავლეს **ბირთვი** ეწოდება.

მონაკვეთს, რომელიც სფეროს ორ წერტილს აერთებს და ბირთვის ცენტრზე გადის, ბირთვის **დიამეტრი** ეწოდება.

სიბრტყეს, რომელიც სფეროს წერტილზე (**შეხების წერტილი**) გადის და ამ წერტილზე გამავალი რადიუსის მართობულია, სფეროს **მხები სიბრტყე** ეწოდება.

ძირითადი ფორმულები და ფაქტები

ალგებრა

1. პროცენტი ეწოდება რიცხვის მეასედ ნაწილს და აღინიშნება % სიმბოლოთი.

მოცემული A რიცხვის p% მოიძებნება ფორმულით $a = \frac{A \cdot p}{100}$.

რიცხვი რომლის p% არის a-ს ტოლი მოიძებნება ფორმულით $A = \frac{a \cdot 100}{p}$.

ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდება მიიღება მათი შეფარდების 100-ზე გამრავლებით. კერძოდ, რომ ვიპოვოთ A რიცხვის რამდენი პროცენტია a რიცხვი საჭიროა შემდეგი ფორმულის გამოყენება $p = \frac{a \cdot 100}{A}$.

2. **გაყოფადობის ნიშნები:**

2-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომელიც ბოლოვდება ლუწი ციფრით.

3-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამი სამზე უნაშთოდ იყოფა.

4-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომლის ბოლო ორი ციფრი ნულებია ან შეადგენს რიცხვს, რომელიც ოთხზე უნაშთოდ იყოფა.

5-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომელიც ბოლოვდება ნულით ან ხუთით.

6-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომელიც ერთდროულად უნაშთოდ იყოფა ორზე და სამზე.

8-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომლის ბოლო სამი ციფრი ნულებია ან შეადგენს რიცხვს, რომელიც უნაშთოდ იყოფა რვაზე.

9-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამი ცხრაზე უნაშთოდ იყოფა.

10-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომელიც ნულით ბოლოვდება.

11-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომლის კენტ ადგილზე მდგომ ციფრთა ჯამისა და ლუწ ადგილზე მდგომ ციფრთა ჯამის სხვაობა უნაშთოდ იყოფა თერთმეტზე.

25-ზე უნაშთოდ იყოფა ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვი, რომლის ბოლო ორი ციფრი ნულებია ან შეადგენს რიცხვს, რომელიც უნაშთოდ იყოფა ოცდახუთზე.

3. **პროპორციის თვისებები.** ვთქვათ, მოცემულია პროპორცია $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$ad = bc; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}; \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}; \quad \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}; \quad \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

x რიცხვის a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად დასაყოფად საჭიროა A გავყოთ მათ ჯამზე და გავამრავლოთ თითოეულ მათგანზე.

4. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

5. მოქმედებანი ხარისხებზე:

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0); \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0); \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (a \neq 0); \qquad (a^m)^n = a^{mn}.$$

6. მოქმედებანი არითმეტიკულ ფესვებზე:

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}; \qquad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}};$$
$$(\sqrt[m]{a^n})^p = \sqrt[m]{a^{np}}; \qquad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

7. რიცხვითი უტოლობების თვისებები:

თუ $a > b$ მაშინ $b < a$;
თუ $a > b$ და $b > c$, მაშინ $a > c$;
თუ $a > b$, მაშინ $a + c > b + c$;
თუ $a > b$ და $c > 0$, მაშინ $ac > bc$, ხოლო თუ $c < 0$, მაშინ $ac < bc$.

8. კვადრატული განტოლების ამონახსნთა ფორმულები:

$x^2 + px + q = 0$ დაყვანილი კვადრატული განტოლების ამონახსნები მოიცემა $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ფორმულით.

თუ x_1 და x_2 დაყვანილი სახის კვადრატული განტოლების ფესვებია, მაშინ $x_1 + x_1 = -p$ და $x_1 \cdot x_1 = q$ (ვიეტას თეორემა).

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ზოგადი სახის კვადრატული განტოლების ამონახსნები მოიცემა $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ფორმულით.

თუ x_1 და x_2 ზოგადი სახის კვადრატული განტოლების ფესვებია, მაშინ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ და $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (ვიეტას თეორემა).

$ax^2+2kx+c=0$ $(a\neq 0)$ განტოლების ამონახსნები მოიცემა $x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$ ფორმულით.

9. კვადრატული სამწევრის დაშლა წრფივ მამრავლებად:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, სადაც x_1 და x_2 (სამწევრის ფესვები, ნულები) არის $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ამონახსნები.

10. $ax^2+bx+c>0$ კვადრატული უტოლობის ამოხსნა:

თუ $D=b^2-4ac<0$, მაშინ როცა $a>0$, ამონახსნთა სიმრავლეა $]-\infty,+\infty[$; ხოლო როცა $a<0$ უტოლობას ამონახსნი არ აქვს.

თუ $D>0$, მაშინ როცა $a>0$, ამონახსნთა სიმრავლეა $]-\infty, x_1[\cup]x_2,+\infty[$, სადაც x_1 და x_2 $(x_1<x_2)$ არის $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ამონახსნები, ხოლო როცა $a<0$ ამონახსნთა სიმრავლეა $]x_1,x_2[$.

თუ $D=0$, მაშინ, როცა $a>0$, ამონახსნთა სიმრავლეა $]-\infty, x_1[\cup]x_1,+\infty[$, როცა $a<0$, უტოლობას ამონახსნი არა აქვს.

$ax^2+bx+c<0$ უტოლობა (-1)-ზე გამრავლებით დაიყვანება წინა შემთხვევაზე.

არამკაცრი უტოლობების შემთხვევაში ამონახსნთა სიმრავლეს ეკუთვნიან აგრეთვე სამწევრის ფესვებიც.

11. არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესია:

ვთქვათ, a_1 არითმეტიკული პროგრესიის პირველი, ხოლო a_n კი n-ური წევრია, d მისი სხვაობა, ხოლო S_n პირველი n წევრის ჯამია, მაშინ

$$a_n=a_1+d(n-1);\quad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n;\quad a_i=\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2},\quad i=2,3,\dots,n-1.$$

ვთქვათ, b_1 გეომეტრიული პროგრესიის პირველი, ხოლო b_n კი n-ური წევრია, $q\neq 1$ – მისი მნიშვნელი, ხოლო S_n – პირველი n წევრის ჯამი, მაშინ

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1};\quad S_n=\frac{b_1-b_nq}{1-q};\quad b_i^2=b_{i-1}\cdot b_{i+1},\quad i=2,\dots,n-1.$$

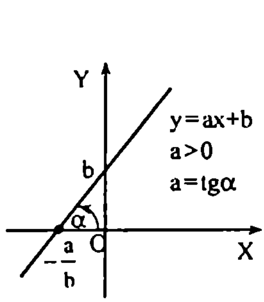
12. ლოგარითმის თვისებები:

$$a^{\log_a A}=A;\ \log_a 1=0;\ \log_a(A\cdot B)=\log_a A+\log_a B;\ \log_a\left(\frac{A}{B}\right)=\log_a A-\log_a B;$$

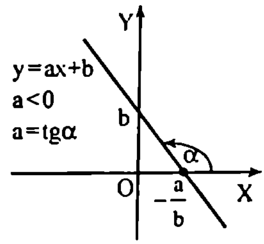
$$\log_a A^m=m\log_a A;\ \log_a\sqrt[m]{A}=\frac{1}{m}\log_a A;\ \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

სადაც a, b, c>0, A>0, B>0.

13. $y=ax+b$ წრფივი ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი:



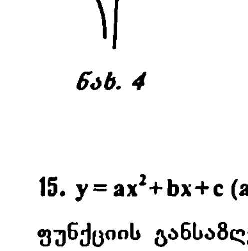
ნახ. 2



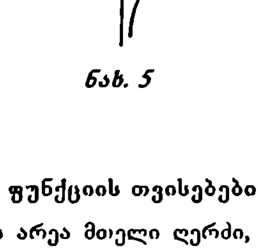
ნახ. 3

წრფივი ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს. წრფივი ფუნქცია მთელ ღერძზე ზრდადია, როცა საკუთხო კოეფიციენტი დადებითია ($a>0$) და კლებადია, როცა საკუთხო კოეფიციენტი უარყოფითია ($a<0$). მისი გრაფიკი OX საკოორდინატო ღერძის პარალელურია, როცა $a=0$. გრაფიკი, როცა $a\neq 0$, მაშინ OY საკოორდინატო ღერძს კვეთს $(0,b)$ წერტილში, ხოლო OX საკოორდინატო ღერძს $\left(-\frac{b}{a},0\right)$ წერტილში. თუ $a=0$, მაშინ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობათა არე არის $\{b\}$, ხოლო როცა $a\neq 0$, მაშინ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობათა არე ემთხვევა მთელ რიცხვით ღერძს (ის. ნახ. 2 და ნახ. 3).

14. $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი:



ნახ. 4

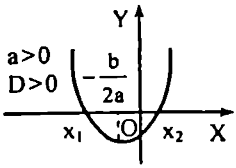


ნახ. 5

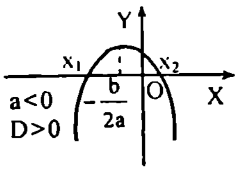
ფუნქციის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეები ემთხვევა $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ სიმრავლეს. ეს ფუნქცია კენტია, ამასთან, როცა $k<0$, ფუნქცია ზრდადია, ხოლო, როცა $k>0$, კლებადია ზემოთაღნიშნულ ცალ-ცალკე შუალედებზე. მას არა აქვს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, მისი გრაფიკი ჰიპერბოლაა (ის. ნახ. 4 და ნახ. 5).

15. $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი:

ფუნქციის განსაზღვრის არეა მთელი ღერძი, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\left[-\frac{D}{4a},+\infty\right[$, როცა $a>0$ და $\left]-\infty,-\frac{D}{4a}\right]$, როცა $a<0$ $(D=b^2-4ac)$. მისი გრაფიკი პარაბოლაა, რომლის შტოები, როცა $a>0$ მიმართულია ზემოთ (OY ღერძის დადებითი მიმართულებით), ხოლო როცა $a<0$ – ქვემოთ (უარყოფითი მიმართულებით).



ნახ. 6



ნახ. 7

თუ $D<0$, მაშინ ფუნქციას ნულები არა აქვს და მისი გრაფიკი მთლიანად ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს, როცა $a>0$, და ქვედა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს, როცა $a<0$.

თუ $D=0$, მაშინ ფუნქციას ნული აქვს $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილში და ამავე წერტილში მისი გრაფიკი ეხება OX ღერძს.

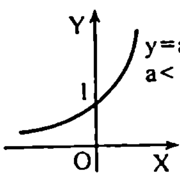
თუ $D>0$, მაშინ ფუნქციას აქვს ორი ნული $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ და $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ და მისი გრაფიკი ამავე წერტილებში კვეთს OX ღერძს.

თუ $b\neq 0$, მაშინ ფუნქცია არც კენტია და არც ლუწი. ხოლო თუ $b=0$, მაშინ ის ლუწია.

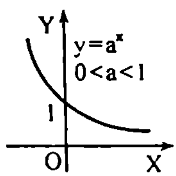
როცა $a>0$, ფუნქცია კლებადია $\left]-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ ინტერვალზე და ზრდადია $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$ ინტერვალზე, ხოლო როცა $a<0$ – პირიქით.

როცა $a>0$ ($a<0$), ფუნქცია მინიმალურ (მაქსიმალურ) მნიშვნელობას აღწევს $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილში და ეს მნიშვნელობა $-\frac{D}{4a}$-ს ტოლია (იხ. ნახ. 6 და ნახ. 7).

16. $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) **მაჩვენებლიანი ფუნქცია და მისი გრაფიკი:**



ნახ. 8

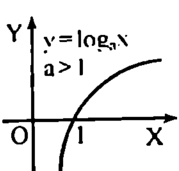


ნახ. 9

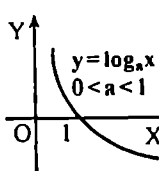
ფუნქციის განსაზღვრის არეა მთელი ღერძი, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $]0,+\infty[$ ინტერვალი.

თუ $a>1$, ფუნქცია ზრდადია, ხოლო თუ $0<a<1$ – კლებადი. მისი გრაფიკი OY ღერძს კვეთს (0,1) წერტილში (იხ. ნახ. 8 და ნახ. 9).

17. $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) **ლოგარითმული ფუნქცია და მისი გრაფიკი:**



ნახ. 10



ნახ. 11

ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]0,+\infty[$ ინტერვალი, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $]-\infty,+\infty[$ ინტერვალი.

თუ $a>1$, მაშინ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო თუ $0<a<1$ – კლებადი. მისი გრაფიკი OX ღერძს კვეთს (1,0) წერტილში (იხ. ნახ. 10 და ნახ. 11).

18. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$ და $y=ctgx$ ფუნქციათა თვისებები და მათი გრაფიკები:

სინუსის და კოსინუსის განსაზღვრის არეა R, ტანგენსის – $\left]-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$, $k\in Z$, ინტერვალები, ხოლო კოტანგენსის $]\pi k,\pi+\pi k[$, $k\in Z$, ინტერვალები. სინუსის და კოსინუსის მნიშვნელობათა არეა $[-1, 1]$ სეგმენტი, ტანგენსის და კოტანგენსის კი – $]-\infty,+\infty[$ ინტერვალი.

სინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი კენტი, ხოლო კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა.

სინუსის და კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ხოლო ტანგენსის და კოტანგენსის – π.

$\sin\alpha>0$, როცა $2\pi k<\alpha<\pi+2\pi k$; $\sin\alpha<0$, როცა $\pi+2\pi k<\alpha<2\pi+2\pi k$;

$\cos\alpha>0$, როცა $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<\alpha<\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\cos\alpha<0$, როცა $\frac{\pi}{2}+2\pi k<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$;

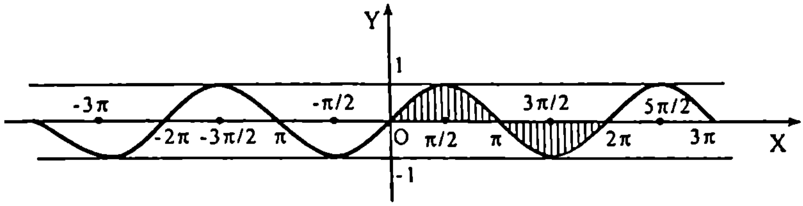
$tg\alpha>0$, $ctg\alpha>0$, როცა $\pi k<\alpha<\frac{\pi}{2}+\pi k$ და $\pi+\pi k<\alpha<\frac{3\pi}{2}+\pi k$;

$tg\alpha<0$, $ctg\alpha<0$, როცა $\frac{\pi}{2}+\pi k<\alpha<\pi+\pi k$ და $\frac{3\pi}{2}+\pi k<\alpha<2\pi+\pi k$.

ამ ფორმულებში ყველგან $k\in Z$.

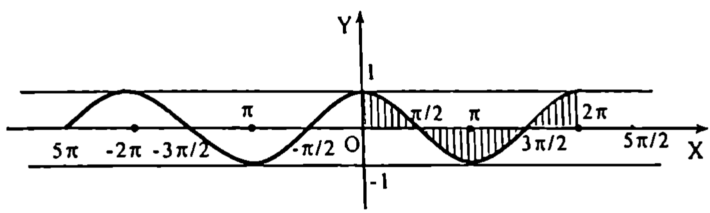
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0		0
$ctg\alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0	

სინუსი ნული ხდება $x=\pi k$ $(k\in Z)$ წერტილებში და მისი გრაფიკი ამავე წერტილებში კვეთს OX ღერძს. ის ზრდადია $\left]-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[$ ინტერვალში და კლებადია $\left]\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right[$ ინტერვალში. ამასთან, მაქსიმუმს (1-ს) აღწევს $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ წერტილებში, ხოლო მინიმუმს ((-1)-ს) – $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ წერტილებში. მისი გრაფიკი OY ღერძს კვეთს (0,0) წერტილში (ის. ნახ. 12).

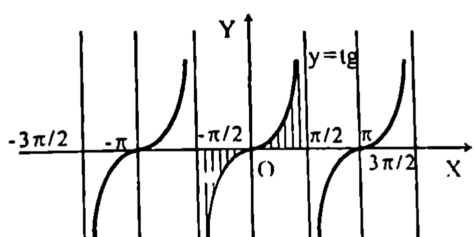


ნახ. 12

კოსინუსი ნული ხდება $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$ წერტილებში და მისი გრაფიკი ამავე წერტილებში კვეთს OX ღერძს. ის ზრდადია $]\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k[$ ინტერვალში და კლებადია $]2\pi k, \pi+2\pi k[$ ინტერვალში. ამასთან, მაქსიმუმს (1-ს) აღწევს $x=2\pi k$ წერტილებში, ხოლო მინიმუმს ((-1)-ს) – $x=\pi+2\pi k$ წერტილებში. მისი გრაფიკი OY ღერძს კვეთს (0,1) წერტილში (იხ. ნახ. 13).

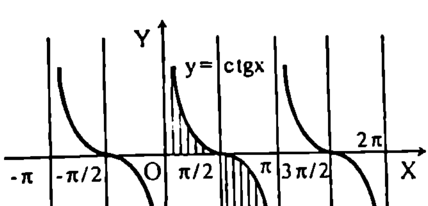


ნახ. 13



ნახ. 14

ტანგენსი ნული ხდება $x=\pi k$ $(k\in Z)$ წერტილებში და მისი გრაფიკი ამავე წერტილებში კვეთს OX ღერძს. ის ზრდადია მისი განსაზღვრის არის ნებისმიერ ინტერვალში. მაქსიმუმი და მინიმუმი არა აქვს. მისი გარფიკი OY ღერძს კვეთს (0,0) წერტილში (იხ. ნახ. 14).



ნახ. 15

კონტანგენსი ნული ხდება $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$ წერტილებში და მისი გრაფიკი ამავე წერტილებში კვეთს OX ღერძს. ის კლებადია მისი განსაზღვრის არის ნებისმიერ ინტერვალში. მაქსიმუმი და მინიმუმი არა აქვს. მისი გრაფიკი OY ღერძს არ კვეთს (იხ. ნახ. 15).

19. თანაფარდობანი ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \qquad \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha=1,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z;$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z.$$

20. შეკრების ფორმულები:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta; \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\pm\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta},\quad \alpha\pm\beta\neq\pi k,\ \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

21. დაყვანის ფორმულები:

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sinx	-sinα	sinα	sinα	-sinα
cosx	-cosα	-cosα	cosα	cosα
tgx	tgα	-tgα	tgα	-tgα
ctgx	ctgα	-ctgα	ctgα	-ctgα

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
sinx	cosα	cosα	-cosα	-cosα
cosx	-sinα	sinα	sinα	-sinα
tgx	-ctgα	ctgα	-ctgα	ctgα
ctgx	-tgα	tgα	-tgα	tgα

22. ორმაგი და ნახევარი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{2\mathrm{tg}\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},\ \alpha\neq 2\pi k,\ k\in Z.$$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოსახვა ნახევარი არგუმენტის ტანგენსით:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z;$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \alpha\neq\pi+2\pi k\ k\in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+\pi k,\ k\in Z.$$

23. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ჯამის ნამრავლად და ნამრავლის ჯამად გარდაქმნის ფორმულები:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha,\beta\neq\pi k,\ k\in Z;$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};\qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

24. ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამონახსნთა ფორმულები:

$$\sin x = a\ ,\ -1 \le a \le 1\ ,\ \ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k\ ,\ k \in Z;$$

$$\cos x = a\ ,\ -1 \le a \le 1\ ,\ \ x = \pm \arccos a + 2\pi k\ ,\ k \in Z;$$

$$\mathrm{tg} x = a\ ,\ a \in R,\ \ x = \mathrm{arctg} a + \pi k\ ,\ k \in Z;$$

$$\mathrm{ctg} x = a\ ,\ a \in R,\ x = \mathrm{arcctg} a + \pi k\ ,\ k \in Z.$$

გეომეტრია

1. ორი სამკუთხედის ტოლობის ნიშნები:

თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე შესაბამისად უდრის მეორე სამკუთხედის ორ გვერდსა და მათ შორის მდებარე კუთხეს, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია;

თუ ერთი სამკუთხედის გვერდი და მასთან მდებარე კუთხეები შესაბამისად უდრის მეორე სამკუთხედის გვერდსა და მასთან მდებარე კუთხეებს, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია;

თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის სამი გვერდისა, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

2. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებები:

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

თუ სამკუთხედში ორი კუთხე ტოლია, მაშინ იგი ტოლფერდაა.

ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძისადმი გავლებული მედიანა წარმოადგენს ამ სამკუთხედის ბისექტრისას და სიმაღლეს.

თუ სამკუთხედის რომელიმე წვეროდან გავლებული მედიანა და ბისექტრისა (ან მედიანა და სიმაღლე, ან სიმაღლე და ბისექტრისა) ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ასეთი სამკუთხედი ტოლფერდაა.

3. მონაკვეთის შუამართობის თვისება:

მონაკვეთის შუამართობის (ე.ი. მონაკვეთის შუაწერტილზე გამავალი პერპენდიკულარული წრფის) ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ამ მონაკვეთის ბოლოებიდან.

მონაკვეთის ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული ნებისმიერი წერტილი ამ მონაკვეთის შუამართობზე მდებარეობს.

4. კუთხის ბისექტრისის თვისება:

კუთხის ბისექტრისის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ამ კუთხის გვერდების შემცველი წრფეებიდან.

ნებისმიერი წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული კუთხის გვერდების შემცველი წრფეებიდან და მდებარეობს ამ კუთხის შიგნით, კუთხის ბისექტრისას ეკუთვნის.

5. წრფეთა პარალელობის ნიშნები. თეორემები წრფეთა პარალელობის და მართობულობის შესახებ:

ორი წრფე, რომელიც მესამე წრფის პარალელურია, ურთიერთპარალელურია.

თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას შიგა (გარე) ჯვარედინა კუთხეები ტოლია ან შიგა (გარე) ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180^0-ს უდრის, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

თუ ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით, მაშინ შიგა და გარე ჯვარედინა კუთხეები ტოლია, სოლო შიგა და გარე ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180^0-ს უდრის.

ერთი და იმავე წრფის მართობული ორი წრფე ერთმანეთის პარალელურია, თუ სამივე წრფე ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.

თუ წრფე პარალელური წრფეებიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ იგი მეორის მართობულიცაა.

6. სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი. ამოზნექილი n-კუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი:

სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180^0-ს უდრის.

სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე ორი შიგა კუთხის ჯამის ტოლია.

ამოზნექილი n-კუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი $180^0(n-2)$-ის ტოლია. ამოზნექილი n-კუთხედის თითო წვეროსთან თითო-თითოდ აღებული გარე კუთხეების ჯამი 360^0-ის ტოლია.

7. პარალელოგრამის ნიშანი. პარალელოგრამის თვისებები:

თუ ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი ორივე დიაგონალს შუაზე ყოფს, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

თუ ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე გვერდი ტოლია და პარალელურია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

პარალელოგრამის დიაგონალები მათი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები და კუთხეები ტოლია.

8. მართკუთხედის, რომბისა და კვადრატის თვისებები:

მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია.

თუ პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ის მართკუთხედია.

რომბის დიაგონალები მართი კუთხით გადაკვეთს ერთმანეთს.

რომბის დიაგონალები მისი კუთხეების ბისექტრისებია.

თუ პარალელოგრამის დიაგონალი წარმოადგენს მისი კუთხის ბისექტრისას ან პარალელოგრამის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ ის რომბია.

კვადრატი მართკუთხედიცაა და რომბიც, ამიტომ მას მართკუთხედის და რომბის ყველა თვისება გააჩნია.

9. სამკუთხედზე შემოხაზუდი წრეწირის არსებობა:

სამკუთხედის სამი გვერდის შუამართობები ერთ წერტილში იკვეთება და ეს წერტილი სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს. სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ყოველთვის არსებობს და ის ერთადერთია.

მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ჰიპოტენუზის შუაწერტილია.

10. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის არსებობა:

სამკუთხედის სამივე ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება და ეს წერტილი სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი ყოველთვის არსებობს და ის ერთადერთია.

11. წესიერი n-კუთხედის a_n გვერდის გამოსახვა ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსებით:

თუ R წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, ხოლო r ამავე n-კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია, მაშინ

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}, \quad a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}.$$

წესიერი სამკუთხედისათვის: $a_3 = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$.

წესიერი ოთხკუთხედისათვის: $a_4 = R\sqrt{2} = 2r$.

წესიერი ექვსკუთხედისათვის: $a_6 = R = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

12. წრეწირში ჩახაზული კუთხის ზომა:

წრეწირში ჩახაზული კუთხის სიდიდე უდრის იმ რკალის გრადუსული ან რადიანული ზომის ნახევარს, რომელსაც იგი ეყრდნობა.

13. ორი სამკუთხედის მსგავსების ნიშნები. მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრთა და ფართობთა შეფარდება:

თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის ტოლია, მაშინ ასეთი სამკუთხედები მსგავსია;

თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის პროპორციულია და ამ გვერდებით შექმნილი კუთხეები ტოლია, მაშინ ასეთი სამკუთხედები მსგავსია;

თუ ერთი სამკუთხედის სამივე გვერდი მეორე სამკუთხედის სამივე გვერდის პროპორციულია, მაშინ ასეთი სამკუთხედები მსგავსია;

ყველა წესიერი n-კუთხედი ერთმანეთის მსგავსია.

მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც მათი შესაბამისი გვერდები და ეს შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია.

მსგავსი ფიგურების (მაგალითად, მრავალკუთხედების) ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც მათი შესაბამისი წრფივი ზომების (მაგალითად, გვერდების) კვადრატები და ეს შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის კვადრატის ტოლია.

14. პითაგორას თეორემა:

მართკუთხა სამკუთხედში c ჰიპოტენუზის კვადრატი უდრის a და b კათეტების კვადრატების ჯამს: $c^2 = a^2 + b^2$.

15. კოსინუსების თეორემა:

სამკუთხედის c გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი a და b გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ გვერდებისა და მათ შორის მდებარე γ კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma .$$

16. სინუსების თეორემა:

სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R ,$$

სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, α, β, γ – შესაბამისი მოპირდაპირე კუთხეები, ხოლო R სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

17. პარალელოგრამის, სამკუთხედის, ტრაპეციის, რომბის და ოთხკუთხედის ფართობების ფორმულები:

პარალელოგრამის ფართობი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის (ან მისი ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის) ნამრავლის ტოლია.

სამკუთხედის ფართობი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის (ან მისი ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის) ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება **ჰერონის ფორმულით:**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ,$$

სადაც a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო p მისი პერიმეტრის ნახევარია.

ასევე ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr,$$

სადაც R და r შესაბამისად სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსებია.

ტრაპეციის ფართობი ფუძეების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

რომბის ფართობი მისი დიაგონალების ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

ოთხკუთხედის ფართობი მისი დიაგონალების და მათ შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

18. წრეწირის და მისი რკალის სიგრძეების გამოსათვლელი ფორმულები. წრისა და მისი სექტორის ფართობების გამოსათვლელი ფორმულები. წრეწირის განტოლება და წრეწირთან დაკავშირებული ზოგიერთი თეორემა:

R რადიუსიანი წრეწირის სიგრძეა $L=2\pi R$, ხოლო ამავე წრეწირის α რადიანის ტოლი ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძე კი αR-ს უდრის.

R რადიუსიანი წრის ფართობია $S=\pi R^2$, ხოლო ამავე წრის α რადიანის ტოლი კუთხის შესაბამისი სექტორის ფართობი კი $\frac{\alpha}{2}R^2$-ს უდრის.

R რადიუსიან წრეწირს ცენტრით (x_0,y_0) წერტილში შეესაბამება $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ სახის განტოლება.

თუ წრფეს წრეწირთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს, მაშინ იგი ამ წრეწირის მხებია.

ერთი და იმავე წრეწირის ორი ურთიერთგადამკვეთი ქორდიდან თითოეული გადაკვეთის წერტილით იყოფა მონაკვეთებად, რომელთა ნამრავლი ერთმანეთის ტოლია.

თუ მოცემული წერტილიდან ერთი და იმავე წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი, მაშინ მხების მონაკვეთის კვადრატი მკვეთის და მისი გარე მონაკვეთის ნამრავლის ტოლია.

თუ წრის გარეთ აღებული წერტილიდან შესაბამისი წრეწირისადმი გავლებულია მკვეთები, მაშინ თითოეული მკვეთის ნამრავლი მისსავე გარე ნაწილზე ყველა მკვეთისათვის მუდმივი სიდიდეა.

წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180^0-ს უდრის.

წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების სიგრძეების ჯამები ტოლია.

წრეწირის ქორდის მართობული დიამეტრი ამ ქორდას და მის მიერ მოჭიმულ რკალს შუაზე ყოფს.

მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის დიამეტრი უდრის ამ სამკუთხედის კათეტების ჯამს გამოკლებული ჰიპოტენუზა.

19. თალესის თეორემა:

თუ კუთხის გვერდების გადამკვეთი პარალელური წრფეები მის ერთ გვერდზე ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს, მაშინ ეს წრფეები კუთხის მეორე გვერდზეც ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს.

20. სამკუთხედთან დაკავშირებული ზოგიერთი სხვა თეორემა:

სამი წრფე, რომლებიც სამკუთხედის სიმაღლეებს შეიცავს, ერთ წერტილში იკვეთება.

სამკუთხედის შუახაზი მესამე გვერდის პარალელურია და მის ნახევარს უდრის.

სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება და გადაკვეთის წერტილით თითოეული წვეროს მხრიდან იყოფა შეფარდებით 2:1.

სამკუთხედის ბისექტრისა მოპირადპირე გვერდს ყოფს მიმდებარე გვერდების პროპორციულ ნაწილებად.

მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანა ამ სამკუთხედს ორ ტოლფერდა სამკუთხედად ჰყოფს.

მართკუთხა სამკუთხედში კათეტის კვადრატი ჰიპოტენუზისა და ჰიპოტენუზაზე ამ კათეტის გეგმილის ნამრავლის ტოლია.

მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის კვადრატი ჰიპოტენუზაზე კათეტების გეგმილების ნამრავლის ტოლია.

მართკუთხა სამკუთხედში გვერდებსა და კუთხეებს შორის არსებობს შემდეგი თანაფარდობები:

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta, \quad b = c \cdot \sin\beta = c \cdot \cos\alpha,$$

$$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha = b \cdot \mathrm{ctg}\beta, \quad b = a \cdot \mathrm{tg}\beta = a \cdot \mathrm{ctg}\alpha,$$

სადაც a და b კათეტებია, α და β - ამ კათეტების მოპირდაპირე კუთხეები, ხოლო c ჰიპოტენუზაა.

21. ტრაპეციასთან დაკავშირებული ზოგიერთი თეორემა:

ტრაპეციის შუახაზი ფუძეების პარალელურია და მათი ნახევარჯამის ტოლია.

ტრაპეციის დიაგონალების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი ფუძეების პარალელურია და მათი სხვაობის ნახევრის ტოლია.

ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

22. წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშანი:

თუ წრფე, რომელიც სიბრტყეს არ ეკუთვნის, ამ სიბრტყეზე მდებარე რომელიმე წრფის პარალელურია, მაშინ ის თვით სიბრტყის პარალელურია.

23. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი:

თუ სიბრტყის გადამკვეთი წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე და გადაკვეთის წერტილზე გამავალი ორი წრფის მართობულია, მაშინ იგი სიბრტყის მართობულია.

24. თეორემები წრფისა და სიბრტყის მართობულობის და პარალელურობის შესახებ:

თუ სიბრტყე ორი ურთიერთპარალელური წრფიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ იგი მეორე წრფის მართობულიც იქნება.

თუ ორი წრფე ერთი და იმავე სიბრტყის მართობულია, მაშინ ისინი პარალელურია.

25. თეორემები ორი სიბრტყის მართობულობისა და პარალელურობის შესახებ:

თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.

თუ ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან ერთ-ერთში გავავლებთ მათი გადაკვეთის წრფის მართობულ წრფეს, მაშინ ეს წრფე მეორე სიბრტყის მართობულიც იქნება.

ორი სიბრტყე პარალელურია, თუ ერთი მათგანი მეორე სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის პარალელურია.

სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილზე შეიძლება მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

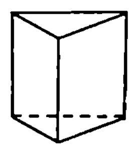
თუ ორი პრალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, მაშინ გადაკვეთის წრფეები პარალელურია.

ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების მონაკვეთები ტოლია.

26. სამი მართობის თეორემა:

თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის ფუძეზე გადის და ამ დახრილის გეგმილის მართობულია, მაშინ იგი თვით დახრილის მართობულიც არის. პირიქით, თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის მართობულია, მაშინ ის ამ დახრილის გეგმილის მართობულიც არის.

27. მართი პრიზმის მოცულობისა და ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები:

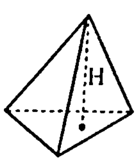


ნახ. 16

პრიზმის მოცულობა (V) მისი ფუძის ფართობის (Q) და სიმაღლის (H) ნამრავლის ტოლია: $V = QH$ (ნახ. 16).

მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ($S_{გვ}$) ფუძის პერიმეტრისა (P) და პრიზმის სიმაღლის, ე.ი. გვედითი წიბოს (H) ნამრაველის ტოლია $S_{გვ} = PH$.

28. პირამიდის მოცულობის და ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები:

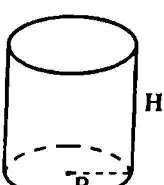


ნახ. 17

პირამიდის მოცულობა (V) მისი ფუძის ფართობის (Q) და სიმაღლის (H) ნამრაველის მესამედის ტოლია: $V = \frac{1}{3}QH$ (ნახ. 17).

წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ($S_{გვ}$) ფუძის ნახევარპერიმეტრის (p) და აპოთემის (h) ნამრაველის ტოლია: $S_{გვ} = ph$.

29. ცილინდრის მოცულობის და ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები:



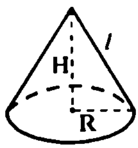
ნახ. 18

ცილინდრის მოცულობა (V) მისი ფუძის ფართობის და სიმაღლის (H) ნამრაველის ტოლია: $V = \pi R^2 H$, სადაც R ცილინდრის ფუძის რადიუსია (ნახ. 18).

ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ($S_{გვ}$) მისი ფუძის წრეწირის სიგრძის და მსახველის (H) ნამრაველის ტოლია: $S_{გვ} = 2\pi RH$.

ცილინდრის ზედაპირის ფართობია $S = 2\pi R(H+R)$.

30. კონუსის მოცულობის და ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები:



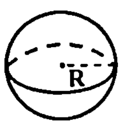
ნახ. 19

კონუსის მოცულობა (V) მისი ფუძის ფართობის და სიმაღლის (H) ნამრავლის მესამედის ტოლია: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, სადაც R კონუსის ფუძის რადიუსია (ნახ.19).

კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ($S_{გვ}$) მისი ფუძის წრეწირის სიგრძის და მსახველის (l) ნამრავლის ნახევრის ტოლია $S_{გვ} = \pi R l$.

კონუსის ზედაპირის ფართობია $S = \pi R(l+R)$.

31. ბირთვის მოცულობის და სფეროს ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები:



ნახ. 20

ბირთვის მოცულობაა $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, ხოლო სფეროს ფართობია $S = 4\pi R^2$, სადაც R სფეროს რადიუსია.

ლიტერატურა

1. ბალაშვილი დ., ბედოშვილი მ., ბლიაძე ზ., გობრონიძე ე., სკამკოჩაიშვილი ლ., ჯიქია ზ. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული. თბილისი, 2001.
2. გოგიბერიძე ნ. მათემატიკური ანალიზის საფუძვლები ბიზნესისათვის. თბილისი, 2006.
3. გოგიბერიძე ნ., დეალიშვილი ფ. წრფივი ალგებრა ბიზნესისა და ეკონომიკისათვის. თბილისი, 2006.
4. დურგლიშვილი ნ., ბუაძე ა., იოსავა ნ., მელაძე ო., სიგუა ლ. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული. ნაწილი I. თბილისი, 1989.
5. თაეაძე ა. ფინანსური მათემატიკა. თბილისი, 2006.
6. თოფურია ს., ხოჭოლავა ვ., გაბიძაშვილი მ., მაჭარაშვილი ნ., კვალიაშვილი ა. ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა. თბილისი, 1989.
7. თოფურია ს., ხოჭოლავა ვ., მაჭარაშვილი ნ., გიორგაძე დ. წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. თბილისი, 1998.
8. კრინსკი ჰ. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. თბილისი, 1974.
9. ლაზრიევა ნ., მანია მ., მირზაშვილი გ., ტორონჯაძე თ., ღლონტი ო., ჯამბურია ლ. ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები. თბილისი, 1999.
10. მათემატიკური ანალიზის საკითხები (№ 1-12, ლექციების კურსი). შემდგენლები: ლობჟანიძე გ., მჭედლიშვილი ნ., სხირტლაძე ნ., ჯანგველაძე თ. თბილისი, 2007.
11. მათემატიკური ანალიზის საკითხები (№ 13-24, ლექციების კურსი). შემდგენლები: ლობჟანიძე გ., მჭედლიშვილი ნ., სხირტლაძე ნ., ჯანგველაძე თ. თბილისი, 2007.
12. მელაძე ჰ., სხირტლაძე ნ. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები (სახელმძღვანელო უნივერსიტეტის სტუდენტებისათვის). თბილისი, 2000.
13. ნატროშვილი დ., გიორგაშვილი ლ., ჯაშიაშვილი გ. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. თბილისი, 2008.
14. წრფივი ალგებრის საკითხები (№ 1-12, ლექციების კურსი). შემდგენლები: ლობჟანიძე გ, მჭედლიშვილი ნ., სხირტლაძე ნ., ჯანგველაძე თ. თბილისი, 2007.
15. Barnett R., Zeigler M., Byleen E. Calculus for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences (Tenth edition). Pearson Education Inc, 2005.

16. Lay D. Linear Algebra and its Applications. Pearson Education, Inc, 2003.
17. Lial M., Greenwell R., Ritchey N. Calculus with Applications. Pearson Education Inc, 2005.
18. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. Москва, 1985.
19. Высшая математика для экономистов. Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера. Москва, 2006.
20. Гасс С. Линейное программирование. Москва, 1961.
21. Гринглаз Л., Копытов Е. Высшая математика для экономистов. Ч. 1. Рига, 2003.
22. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. Москва, 1980.
23. Экономико-математические методы и прикладные модели. Под редакцией В.В. Федосеева. Москва, 1999.
24. Кочетыгов А.А. Финансовая математика. Ростов-на-Дону, 2004.
25. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. Москва, 1977.
26. Стюарт Я. Концепции современной математики. Минск, 1980.
27. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. Москва, 1974.

პასუხები და მითითებები

ლექცია 1

1.1. ა) ჭეშმარიტია; ბ) მცდარია, $5 \in N$.

1.2. ა) $\{4,5,6,7,8,9,10\}$.

1.3. ა) $\{x \mid x \in N$ და $11 \leq x \leq 14\}$.

1.4. ა) $\{x \mid x \in R, x \geq a\}$.

1.5. ა) $x^2 = -1$.

1.6. ა), გ), ე), ზ), ი), კ), ლ) – ჭეშმარიტია; ბ), დ), ვ), თ), მ) – მცდარია.

1.7. ა), დ), ე), ვ), თ) – არაა ცარიელი; ბ), გ), ზ), ი), კ) – ცარიელია.

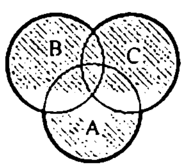
1.8. ა) $\{1,2,3,5\}$.

1.9. ა) $\{3,4\}$.

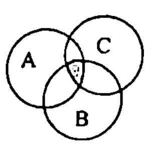
1.10. ა) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{5\}$, $\{a,b\}$, $\{a,5\}$, $\{b,5\}$, $\{a,b,5\}$.

1.11. ა) ჭეშმარიტია.

1.13. ა)



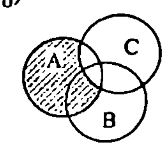
1.14. ა)



1.15. ა) $A \cup B = \{-5,3,5,7,11,13,14\}$, $A \cap B = \{5,7\}$, $A \setminus B = \{3,11\}$, $B \setminus A = \{-5, 13,14\}$. ე) $A \cup B = \{a,b,c,d,e,g\}$, $A \cap B = \{b.d.e\}$. $A \setminus B = \{a,c\}$, $B \setminus A = \{g\}$.

1.16. ა) $\varnothing$.

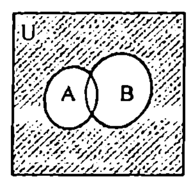
1.17. ე)



1.18. ა) $\{2,4,6,8\}$.

1.19. ა) $]3,+\infty[$.

1.20. ე)



1.21. $\{1,4,5\}$ და $\{1,2,4,5,7,9\}$.

1.22. ა) $A \setminus B$.

1.23. ა) $A \cap B$.

ლექცია 2

2.1. I სტრიქონი – 1; II სტრიქონი – 11; III სტრიქონი – 4; IV სტრიქონი – 8.

2.2. ა) 32; ბ) 30; გ) 33; დ) 36.

2.3. 5%.

2.4. ა) 5; ბ) 33; გ) 43; დ) 52.

2.5. ა) 9; ბ) 56; გ) 48; დ) 91; ე) 24.

2.6. 28.

2.7. 1 960.

2.8. 35.

2.9. ა) 40 320; ბ) 5 040.

2.10. 720.

2.11. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$; $2^n - 1$.

2.13. 24.

2.14. 12.

2.15. 6.

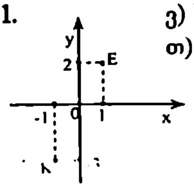
2.16. 240.

2.17. 18.

2.18. 336.

2.19. 210.
2.20. 10.
2.21. C_n^3.
2.22. 4 845.
2.23. ა) 8; ბ) 10.
2.24. ა) 2; ბ) 8; გ) 16; დ) 5.
2.25. 6.

ლექცია 3

3.1. 

ე) E(1,2);
თ) K(-1,-3).

3.2. ა) $\left(\frac{1}{2}, \frac{7+\sqrt{2}}{2}\right)$; ბ) (0,0); გ) (0,0);

დ) $\left(\frac{1+2\sqrt{5}}{2}, 3\right)$; ე) $\left(4, -\frac{1}{2}, 1\right)$

ვ) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}, -\frac{4+\sqrt{5}}{2}\right)$;

ზ) $\left(\frac{5-\pi}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; თ) (1,1,-5).

3.3. ა), დ) სიმეტრიულია; ბ), გ) არ არის სიმეტრიული.

3.4. ა) არ არის სიმეტრიული; ბ), გ), დ) სიმეტრიულია.

3.5. ა), ბ) არ არის სიმეტრიული; გ), დ) სიმეტრიულია.

3.7. ა) $\sqrt{13}$; ბ) $\sqrt{2}$;

გ) $\sqrt{11+2\sqrt{6}+2\sqrt{5}}$; დ) 14;

ე) $\sqrt{2\pi^2-6\pi+5}$; ვ) $\sqrt{49-2\sqrt{7}}$.

3.8. ა) B წერტილი; ბ), გ), დ) თანაბრად არის დაშორებული; ე) B წერტილი.

3.9. ა) 1; ბ) 4; გ) $3(2+\sqrt{2})$;

დ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; ე) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.10. ა) 3 და 0; ბ) 2 და -1.

3.11. ა) $A\times B = \{(4,q); (4,r); (v,q); (v,r)\}$,
$B\times A = \{(q,4); (q,v); (r,4); (r,v)\}$,
$A\times A = \{(4,4); (4,v); (v,4); (v,v)\}$,
$B\times B = \{(q,q); (q,r); (r,q), (r,r)\}$.

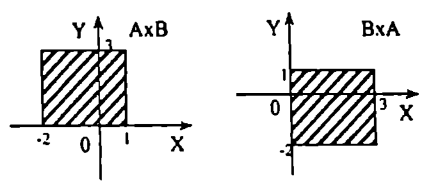
3.12. ა) $A=\{1,8,0\}$, $B=\{0,7\}$,
$A\cup B=\{0,1,7,8\}$, $A\cap B=\{0\}$,
$A\backslash B=\{1,8\}$;

ბ) $A=\{1,2\}$, $B=\{\varnothing,\{2\}\}$,
$A\cup B=\{1,2,\varnothing,\{2\}\}$, $A\cap B=\varnothing$,
$A\backslash B=\{1,2\}$.

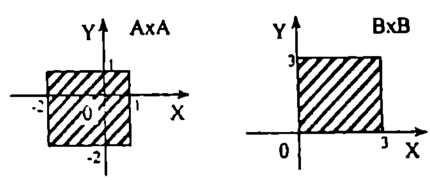
3.13. არ წარმოადგენს.

3.14. შეიძლება.

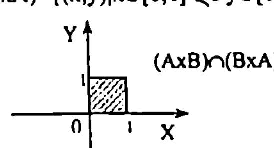
3.15. ა) $A\times B=\{(x,y)|x\in[-2,1]$ და $y\in[0,3]\}$;
$B\times A=\{(x,y)|x\in[0,3]$ და $y\in[-2,1]\}$;



$A\times A=\{(x,y)|x\in[-2,1]$ და $y\in[-2,1]\}$;
$B\times B=\{(x,y)|x\in[0,3]$ და $y\in[0,3]\}$;



$(A\times B)\cap(B\times A)=\{(x,y)|x\in[0,1]$ და $y\in[0,1]\}$



3.16. $\{(a,1,1); (a,1,2); (a,2,1); (a,2,2);$ $(p,1,1); (p,1,2); (p,2,1); (p,2,2);$ $(q,1,1); (q,1,2); (q,2,1); (q,2,2);$ $(t,1,1); (t,1,2); (t,2,1); (t,2,2)\}$;

3.17. 9.

ლექცია 4

4.1. ა) არის; ბ) არ არის; გ) არ არის; დ) არის.

4.2. ა) 4; ბ) -20; გ) 24; დ) 12; ე) $\frac{3}{4}$; ვ) -3.

4.3. ა) 5; ბ) $3a+2$; გ) $3a^2+2$; დ) $3a+3h+2$; ე) $3(a-h)+2$; ვ) $3(a^2+h^2)+2$.

4.4. ა) $3c^2+7$; ბ) $3(c+h)^2+7$; გ) $3(c-h)^2+7$; დ) $3h(h-2c)$; ე) $\frac{3}{x^2}+7$; ვ) $\frac{3}{x^4}+7$.

4.5. ა) 3; ბ) 3; გ) 3; დ) 3; ე) 3.

4.6. ა) $\frac{1}{5}$; ბ) $\frac{1}{5}$; გ) $\frac{1}{a^2+1}$; დ) $\frac{1}{a^2+1}$.

4.7. ა) 0; ბ) $3a^2-a$; გ) $3a^2+a$; დ) $(a+h)(3a+3h-1)$; ე) $(a+2h)(3a+6h-1)$.

4.8. ა) 6; ბ) 11; გ) 12; დ) $7+2h$; ე) $3h-9$.

4.9. ა) 0; ბ) 7; გ) -1; დ) 1; ე) -9; ვ) 7.

4.10. ა) 3; ბ) $\frac{3-7\sqrt{3}}{2}$; გ) $2(\sqrt{2}-2)$; დ) არ არის განსაზღვრული; ე) არ არის განსაზღვრული.

4.11. ა) 4; ბ) 1; გ) $\frac{1}{4}$; დ) 64.

4.12. ა) 0; ბ) 1; გ) -1.

4.13. $\{-1,0\}$, $\{-1,0,1,2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$.

4.14. ა) 13000; ბ) 32500; გ) 5000.

4.15. ა) დიახ, $\varphi:\{1,2,4,5\}\to\{3,5,7,9\}$, $\varphi(1)=3$, $\varphi(2)=5$, $\varphi(4)=7$, $\varphi(5)=9$;
ბ) დიახ, $\varphi:\{-3,-2,-1,0\}\to\{5,4,3,2\}$, $\varphi(-3)=5$, $\varphi(-2)=4$, $\varphi(-1)=3$, $\varphi(0)=2$;
გ) არ განსაზღვრავს;
დ) დიახ, $\varphi:\{-6,-3,0,3,6\}\to\{0,3,6\}$, $\varphi(-6)=6$, $\varphi(-3)=3$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(3)=3$, $\varphi(6)=6$;
ე) დიახ, $\varphi:\{1,2,3,4,5,6\}\to\{3,4\}$, $\varphi(1)=3$, $\varphi(2)=3$, $\varphi(3)=3$, $\varphi(4)=4$, $\varphi(5)=4$, $\varphi(6)=4$;
ვ) არ განსაზღვრავს.

4.16. ა) $\left]-\infty,-\frac{3}{5}\right[\cup\left]-\frac{3}{5},+\infty\right[$;
ბ) $]-\infty,-5[\cup]-5,+\infty[$;
გ) $]-\infty,-11]\cup[11,+\infty[$;
დ) $]3,9]$;
ე) $]-\infty,-5]\cup[-3,+\infty]$;
ვ) $]-7,+\infty[$;
ზ) $]0,+\infty[$; თ) $[1,+\infty[$.

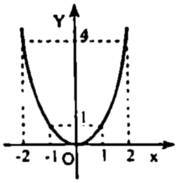
4.17. ა) 3, $\sqrt{2}+7$, $\sqrt{x^2+7}$, $x+7$;
ბ) 0, 2, 5, $\frac{2}{3x+1}$, $\frac{6}{x-1}+2$.

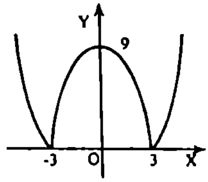
4.18. 9;

4.19. $3\cdot 4^{3x+1}+2$; 4^{9x+7}.

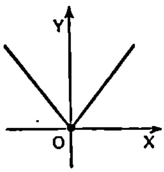
4.20. ა) პარალელური გადატანით 3 ერთეულით მარცხნივ;
ბ) პარალელური გადატანით 1 ერთეულით მარჯვნივ და 4 ერთეულით ზემოთ.

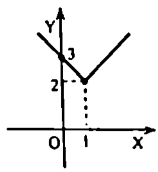
4.21. ა)





ბ)





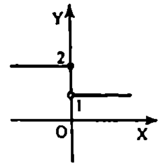
4.22. პარალელური გადატანით 14 ერთეულით მარჯვნივ.

4.23. პარალელური გადატანით $\frac{\pi}{2}$ ერთეულით მარცხნივ.

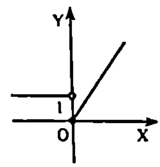
4.24. პარალელური გადატანით $\frac{\pi}{2}$ ერთეულით მარცხნივ ან მარჯვნივ და სიმეტრიული ასახვით OX ღერძის მიმართ.

4.25. ა) დიახ; ბ) არა; გ) არა; დ) დიახ; ე) არა.

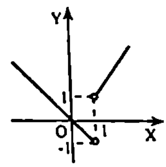
4.26. ა)



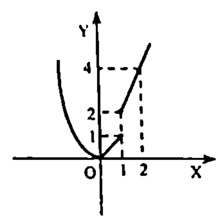
ბ)



გ)



ე)



A (ლექციები 1-4)

A.4. ყველა კვადრატის სიმრავლე.

A.8. ა) C_n^2; ბ) C_n^3.

A.9. ა) 1%; ბ) 38%.

A.10. ა) 4; ბ) 42.

A.11. 1 124 760.

A.12. ა) $\frac{n}{n+1}$; ბ) $\frac{1}{n}(n+1)(n+2)(n+3)$; გ) $n+1$.

A.14. $\frac{495}{a^4}x^2$.

A.15. ა) (9,5); ბ) (6,2).

A.16. ა) 7; ბ) 12; გ) 10; დ) 7; ე) 5; ვ) 4; ზ) 4.

A.17. (0,2); (0,-4).

A.19. (4,0); (5,-5).

A.20. (-7,0); (9,0).

A.21. 7.

A.22. $A(2,-7)$; $B(4,5)$.

A.23. ა) $57{,}2^0F$; ბ) $\frac{9}{5}x^2+9x+32$.

A.25. ა); დ); ე); ვ); ი).

ლექცია 5

5.1. ა) -2; ბ) 0; გ) -4.

5.2. ა) 0; ბ) $\sqrt[3]{4}$; გ) $\sqrt[3]{9}$; დ) -1;
ე) $-\sqrt[3]{4}$.

5.3. ა) π; ბ) $\frac{7}{6}\pi$; გ) $\frac{3}{4}\pi$; დ) $\frac{4}{3}\pi$;
ე) $\frac{3}{2}\pi$.

5.4. ა) $\frac{3}{2}\pi$; ბ) $\frac{5}{3}\pi$; გ) $\frac{5}{4}\pi$; დ) $\frac{11}{6}\pi$;
ე) 2π.

5.5. ა) $-\pi$; ბ) $-\frac{5}{4}\pi$; გ) $-\frac{2}{3}\pi$;
დ) $-\frac{7}{6}\pi$.

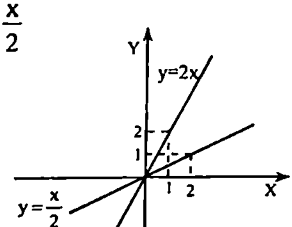
5.6. ა) $\frac{1}{4}$; ბ) 1; გ) 2; დ) 64.

5.7. ა) 0; ბ) 1; გ) $\log_3 2$.

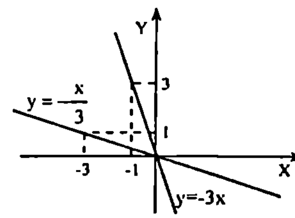
5.8. ა) არ არის შექცევადი;
ბ) შექცევადია; გ) შექცევადია.

5.9. ა) დიახ; ბ) დიახ; გ) არა;
დ) არა; ე) არა; ვ) დიახ;
ზ) დიახ; თ) არა; ი) არა.

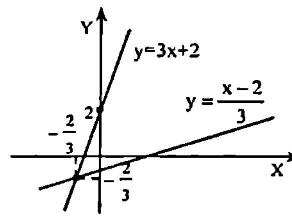
5.10. ა) $y=\frac{x}{2}$



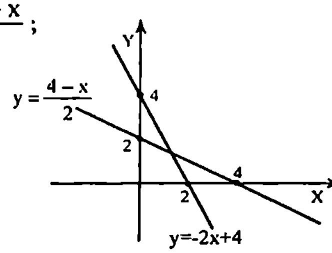
ბ) $y=-\frac{x}{3}$



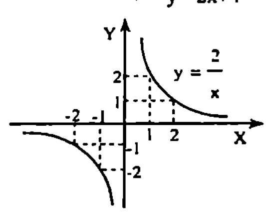
გ) $y=\frac{x-2}{3}$



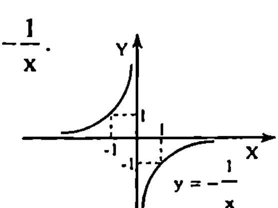
დ) $y=\frac{4-x}{2}$;



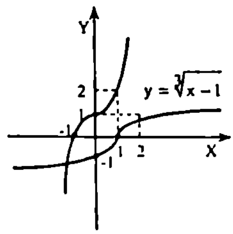
ე) $y=\frac{2}{x}$;



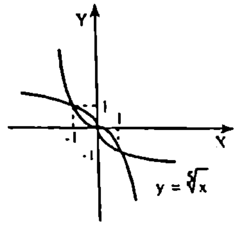
ვ) $y=-\frac{1}{x}$.



ზ) $y=\sqrt[3]{x-1}$;



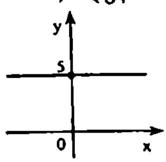
თ) $y=-\sqrt[5]{x}$.



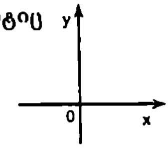
5.12. ა) R; ბ) R; გ)]-∞,0] და [0,+∞[; დ)]-∞,0] და [0,+∞[; ე) არა აქვს; ვ)]-∞,2,5] და [2,5,+∞[; ზ)]-∞,0] და [0,+∞[; თ)]-∞,1] და [1,+∞[; ი) [-1,1], [1,2], [2,+∞[; კ)]-∞,-1] და [0,+∞[.

5.13. ა) შემოსაზღვრულია ქვემოდან;
ბ) შემოსაზღვრულია ქვემოდან;
გ) შემოსაზღვრულია;
დ) შემოუსაზღვრელია;
ე) შემოსაზღვრულია ზემოდან;
ვ) შემოუსაზღვრელია;
ზ) შემოუსაზღვრელია;
თ) შემოსაზღვრულია;
ი) შემოსაზღვრულია;
კ) შემოსაზღვრულია.

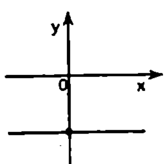
5.14. ა) ლუწია



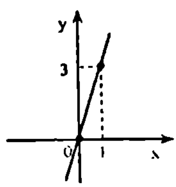
ბ) ლუწიცაა და კენტიც



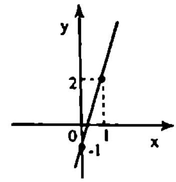
გ) ლუწია



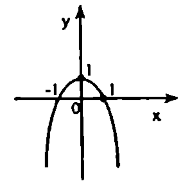
დ) კენტია



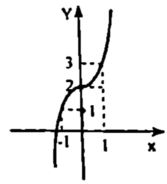
ე) არც ლუწია არც კენტი



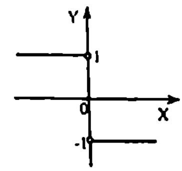
ვ) ლუწია



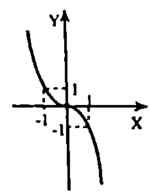
ზ) არც ლუწია არც კენტი



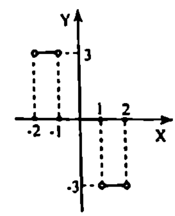
თ) კენტია



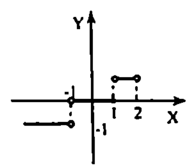
ი) კენტია



კ) კენტია



ლ) არც ლუწია არც კენტია



5.15. ა) არც ლუწია, არც კენტი;
ბ) კენტია; გ) ლუწია;
დ) კენტია, როცა n=2k-1, ლუწია როცა n=2k, k∈ N.

5.16. ა) კენტია; ბ) ლუწია; გ) ლუწია; დ) არც ლუწია, არც კენტი; ე) კენტია; ვ) კენტია; ზ) არც ლუწია, არც კენტი; თ) კენტია; ი) არც ლუწია, არც კენტი.

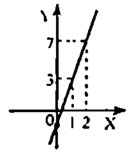
5.17. ა) $f(x)=\dfrac{e^x+3e^{2x}+e^{-x}+3e^{-2x}}{2}+$
$+\dfrac{e^x+3e^{2x}-e^{-x}-3e^{-2x}}{2};$

ბ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}+\dfrac{x}{x^2+2};$

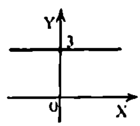
გ) $f(x)=0+f(x)$.

ლექცია 6

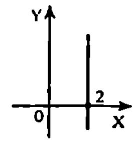
6.1. ა) $k=4$



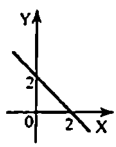
ბ) $k=0$



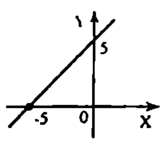
გ) $x=2$



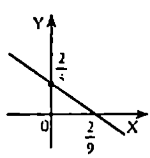
6.2. ა) $y=-x+2$



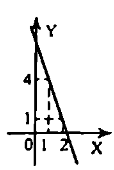
ბ) $y=x+5$



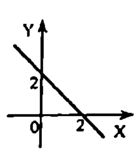
გ) $y=-\dfrac{9}{5}x+\dfrac{2}{5}$



6.3. ა) $y=-3x+7$



ბ) $y=-x+2$



6.4. არც B და არც C არ მდებარეობს.

6.5. $m=\dfrac{11}{4}$.

6.6. $m\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]2,+\infty[$.

6.7. $m\in\,]-4,2[$.

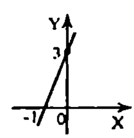
6.8. $y=2x-3$.

6.9. $y=3x+\dfrac{5}{3}$.

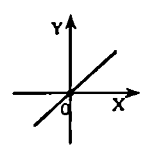
6.10. $p\in\left]3,\dfrac{17}{2}\right[$.

6.11. $q\in\left[-3,\dfrac{1}{2}\right[$.

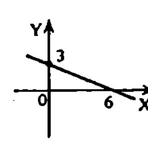
6.12. ა) $y=3x+3$



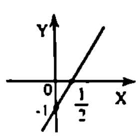
ბ) $y=x$



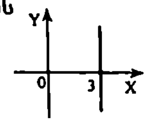
გ) $y=-\dfrac{x}{2}+3$



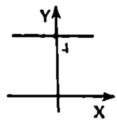
6.13. ა) (0,-1) და $(\frac{1}{2},0)$



ბ) (3,0), y-ს არ კვეთს



გ) (0,4), x-ს არ კვეთს



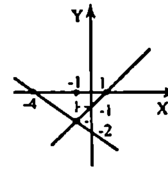
დ) y ღერძის განტოლებაა;
ე) x ღერძის განტოლებაა.

6.14. ა) პარალელური წრფეა $y=-\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$, პერპენდიკულარული წრფეა $y=\frac{5}{2}x+8$;
ბ) პარალელური წრფეა $y=-\frac{x}{2}+2,5$, პერპენდიკულარული წრფეა y=2x+5.

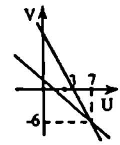
6.15. ა) არა; ბ) არა; გ) არა.

6.16. $m=\frac{1}{3}$.

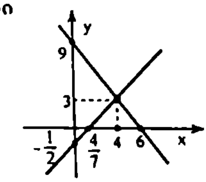
6.17. ა) ერთადერთი



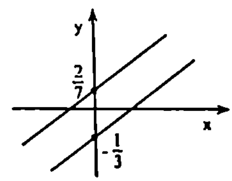
ბ) ერთადერთი



გ) ერთადერთი



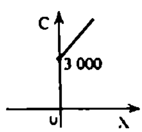
დ) არ აქვს ამონახსნი



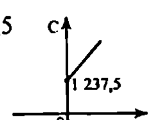
6.18. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

ლექცია 7

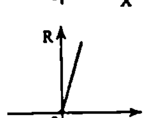
7.1. ა) C(x)=25x+3000
ბ) $5 500



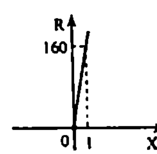
7.2. ბ) C(x)=37,5x+1 237,5
გ) $1 987,5



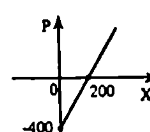
7.3. R(x)=40x
$12 000.



7.4. ა) $160;
ბ) R(x)=160x;
გ) $48 000.

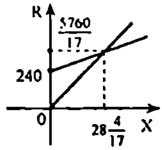


7.5. P(x)=2x-400;
ა) $200 ზარალია;
ბ) $0;
გ) $200.

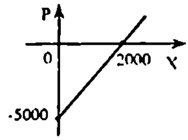


7.6. ა) $28\frac{4}{17}$;

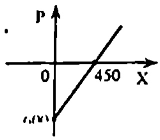
ბ) $\$\frac{5\ 760}{17}$.



7.7. ა) 2 000;
ბ) 2 400;
გ) -1 250.

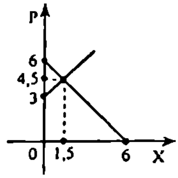


7.8. ა) \$500;
ბ) არანაკლებ $\$4\frac{2}{15}$.

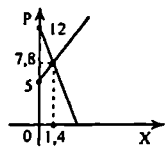


7.9. ა) 120; ბ) არანაკლებ \$4,5.

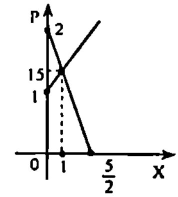
7.10. ა) (1,5; 4,5)



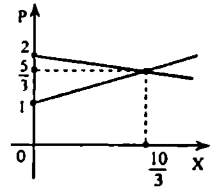
ბ) (1,4; 7,8)



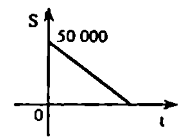
გ) (1,15)



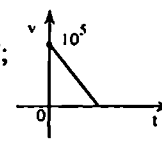
დ) $(\frac{10}{3}, \frac{5}{3})$



7.11. ა) $-10\ 000\frac{\text{დოლარი}}{\text{წელი}}$;
ბ) $S(t)=-10\ 000t+50\ 000$;
გ) 20 000.



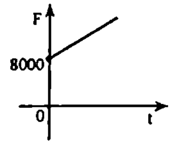
7.12. ა) $\$10^5$;
ბ) $s(t)=-5\ 000t+10^5$;



7.13. 4,5 წლის.

ლექცია 8

8.1. ა) $F=640t+8\ 000$;
ბ) \$11200.



8.2. 4,25 წლით.

8.3. \$6 816.

8.4. ა) \$208 000; ბ) \$240 000;
გ) $200\ 000+8\ 000t$.

8.5. \$300 000.

8.6. 10.

8.7. 12.5%.

8.8. 5.175%.

8.9. ა) \$2 315.25; ბ) $2\ 000\cdot(1{,}05)^t$

8.10. ა) \$5 000.

8.11. 4.

8.12. \$30 000.

8.13. 2.

8.14. 4.

8.15. $\frac{1}{21}$, $\$\frac{2\ 000}{7}$.

8.16. $\dfrac{3}{103}$, \$90.

8.17. 2,011.

8.18. 2 წლის.

8.19. 5%.

B(ლექციები 5-8)

B.1. $x=-7$, $y=1$;

B.2. $y=-5x+\dfrac{3}{5}$, $y=-5x-15$.

B.3. $x=0$; $y=0$; $x=-5$; $y=2$; $y=-\dfrac{2}{5}x$;

$y=\dfrac{2}{5}x+2$.

B.4. ა) $y=x-1$; ბ) $y=\sqrt{3}x+1-2\sqrt{3}$;
გ) $x=2$; დ) $y=-x+3$.

B.5. 9.

B.6. $\dfrac{4}{5}$.

B.7. $y=-2x+5$; $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$.

B.8. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$.

B.9. 60.

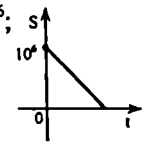
B.10. 180 000.

B.12. $\begin{cases} x, & \text{როცა } x\le 0, \\ \sqrt{x}, & \text{როცა } x>0. \end{cases}$

B.13. ა) არც ლუწია და არც კენტი;
ბ) ლუწია.

B.14. ა) $-18\,000\dfrac{\text{დოლარი}}{\text{წელი}}$;

ბ) $s(t)=-18\,000t+10^6$;



გ) \$280 000.

B.15. 8 796,4; 9 456,2; 11 747,4.

B.16. ა) 500; ბ) ხელსაყრელი იქნება.

B.17. ა) $P(x)=-0{,}005x+2{,}1$; ბ) როცა 1 კგ. მაქრის ფასი იქნება 1,05 ლარი.

B.18. ა) $-3x+300$; ბ) როცა მტვერსასრუტის ფასი იქნება 150 ლარი.

B.19. 14 900 ლარი.

B.20. $p_0=5$, $x_0=1\,450$.

B.21. 1 274,2 ლარი.

B.22. $s(t)=l(1-\mu)^t$.

B.23. 8 წლის.

B.24. \$2 000 რვა წლის შემდეგ.

B.25. 25 წლის.

B.26. 16.

B.27. \$1 353,3.

B.28. 1 200 ლარი.

B.29. 48%.

B.30. 60 დღით.

ლექცია 9

9.1. ა) 7, 4, -1, -8, -17, -28;

ბ) 3, 2, $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{7}{5}$, $\dfrac{4}{3}$;

გ) 0, 1, 0, $\dfrac{1}{2}$, 0, $\dfrac{1}{3}$;

დ) $\dfrac{6}{5}$, $\dfrac{6}{7}$, $\dfrac{6}{11}$, $\dfrac{6}{19}$, $\dfrac{6}{35}$, $\dfrac{6}{67}$.

9.2. ა) 405; ბ) 10 005; გ) k^2-2k+6;
დ) $4k^2+5$.

9.3. ა) 24; ბ) 29.

9.4. ა) არის; ბ) არ არის.

9.5. ა) $n\ge 9$, $n\in N$; ბ) $n\in[26,59]$, $n\in N$.

9.6. ა) $n=2,3,4,\ldots$; ბ) $n=5,6,7,\ldots$;
გ) $n=1,2,3,4,5$; დ) $n\in[3,19]$, $n\in N$.

9.7. ა) n=11; ბ) n=32.

9.8. ა) $x_n=2n-1$;
ბ) $x_n=3n-1$;
გ) $x_n=\frac{n}{n+1}$;
დ) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

9.9. ა) არის; ბ) არ არის; გ) არის; დ) არის; ე) არის.

9.11. ა) 98; ბ) 4331; გ) 2.

9.12. ა) ჭეშმარიტია; ბ) ჭეშმარიტია.

9.13. ა) არა; ბ) დიახ; გ) დიახ.

9.14. ა) განშლადია; ბ) $a_n=\frac{1}{n}$, $n=2k$, $k\in N$ და $a_n=5-\frac{2}{n}$, $n=2k-1$, $k\in N$.

ლექცია 10

10.1. ა) $\frac{3}{4}$; ბ) 0; გ) $\frac{5}{8}$; დ) e; ე) $e^{\frac{12}{7}}$;
ვ) $\frac{7}{3}$; ზ) $e^{\frac{4}{3}}$; თ) $e^{\frac{3}{2}}$; ი) 0; კ) 0.

10.2. ა) $\frac{3}{4}$; ბ) $\frac{4}{3}$; გ) განშლადია; დ) 0;
ე) განშლადია; ვ) $+\infty$; ზ) 0; თ) $-\frac{7}{4}$.

10.3. ა) 1-9+25-49+81.

10.4. ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) -1.

10.5. ა) $\frac{9}{2}a$; ბ) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a$; გ) $\frac{9\sqrt{3}}{32}a^2$.

10.6. ა) განშლადია;
ბ) კრებადია;
მითითება: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;
გ) კრებადია.

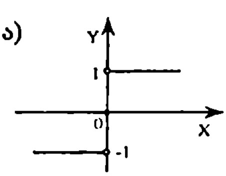
ლექცია 11

11.1. ა) $[-1;\sqrt{2}]$; ბ) $[5;\sqrt{26}]$;
გ) $[\sqrt{7};\sqrt{17}]$; დ) $[\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{7}]$;
ე) [a,b]; ვ) [a,b]; ზ) [a,b]; თ) [a,b];
ი) [a,c]; კ) $[a,a+1]\cup[a+2;a+3]$;
ლ) $\{-1,1\}$; მ) $\{e\}$; ნ) $\{e^{-2}\}$;
ო) არ გააჩნია; პ) $]-\infty;+\infty[$.

11.2. ა) $a_n=2-\frac{1}{n}$; ბ) $a_n=e-\frac{1}{n}$;
გ) $a_n=\frac{1}{e}+\frac{1}{n}$.

11.3. ა) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;
ბ) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$; გ) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

11.4. ა)



ბ) $f(0-)=-1$; $f(0+)=1$
გ) არ აქვს.

11.5. ა) აქვს.

11.6. აქვს.

11.7. $k=\pm\sqrt{5}$.

11.8. არ შეიძლება.

11.9. ა) 4; ბ) -5; გ) -21; დ) 1; ე) 2;
ვ) 4; ზ) 6; თ) 5.

ლექცია 12

12.1. ა) 3; ბ) 7; გ) 2; დ) 0; ე) $\frac{3}{4}$; ვ) $\frac{5}{11}$;

ზ) -40; თ) $\frac{1}{6}$; ი) $\frac{3}{4}$.

12.2. $f(3-)=-\infty$, $f(3+)=+\infty$.

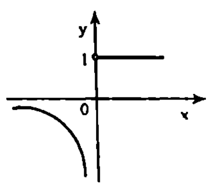
12.3. გააჩნია ($x=1$).

12.4. $+\infty$.

12.5. ა) აქვს ($y=-6$, როცა $x\to-\infty$;
$y=6$, როცა $x\to+\infty$;);

ბ) აქვს ($y=1$, როცა $x\to+\infty$;
$y=-1$, როცა $x\to-\infty$).

12.6. ექნება ($x=0$)



12.7. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $-\frac{3}{20}$; გ) 2.

12.8. ა) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; ბ) $\frac{5}{2}$; გ) $\frac{1}{4}$; დ) $\frac{1}{2}$;

ე) $-\frac{3}{2}$; ვ) $\frac{3}{5}$; ზ) $\frac{4}{3}$; თ) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

ი) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

12.9. $x=7$.

12.10. არ გააჩნია.

C (ლექციები 9-12)

C.1. ჭეშმარიტია: ა), დ), ვ), კ).

C.3. მკაცრად მონოტონურია: ა), ბ), დ), ზ).

C.6. შემოსაზღვრულია: დ), ე), ვ).

C.8. ა) -1; ბ) 0; გ) $\frac{4}{3}$; დ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C.9. ა) 0; ბ) 1; გ) 5; დ) 1; ე) $\frac{4}{3}$; ვ) e^2.

C.10. ა) განშლადია:

მითითება: $\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sqrt{k}$;

ბ) განშლადია

C.11. $]-4,2[\cup]3,4[$.

C.12. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) 3; გ) $-\frac{1}{2}$; დ) $-\frac{3}{2}$;

ე) 0; ვ) $-\frac{1}{16}$; ზ) 4; *მითითება:*

$\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$; თ) $\frac{m}{n}$.

C.13. ა) -1; ბ) 1; გ) 1; დ) -2; ე) -3; ვ) 3.

C.14. გააჩნია.

C.15. $4R^2$.

C.17. შეიძლება $g(x)=\begin{cases}-1, & \text{როცა } x\leq a,\\ 1, & \text{როცა } x>a,\end{cases}$

$h(x)=g(x)$ – სხვაობის შემთხვევაში; დანარჩენ შემთხვევებში კი $h(x)=-g(x)$.

C.18. *მითითება:* განიხილეთ 0-სკენ კრებადი $x_n=\frac{1}{\pi n}$ და $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ მიმდევრობები.

ლექცია 13

13.1. ა) 1; ბ) -1; გ) 0; -6; 6; დ) 5.

13.2. ა) უწყვეტია; ბ) არა; გ) უწყვეტია; დ) უწყვეტია; ე) უწყვეტია; ვ) უწყვეტია.

13.3. *მითითება*: განიხილეთ ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები წყვეტის წერტილებში.

13.4. ა) $x=0$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი;

ბ) $x=\pi k$, $k\in Z$ არიან მეორე გვარის წყვეტის წერტილები;

გ) $x=0$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი;

დ) $x=1$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

13.5. *მითითება*: განიხილეთ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები წყვეტის წერტილში.

13.6. ა) 3; ბ) 51.

13.7. 1.

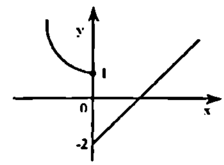
13.8. 1.

13.9. $x=2$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, რომელშიც ფუნქცია უწყვეტია მარჯვენიდან.

13.10. $x=4$ არის წყვეტის წერტილი.

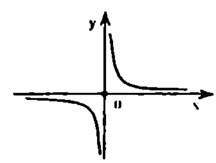
13.11. ა) 2; ბ) $-\dfrac{3}{2}$; გ) $\dfrac{1}{2}$.

13.12. ა)



$x=0$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი;

ბ)



$x=0$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

13.13. ა) $a=4$, $b=-4$; ბ) $a=3$, $b=2$.

13.14. ა) $a=0$; ბ) არ არსებობს.

13.15. ა) $a=1$, $b=-1$; ბ) არ არსებობს.

13.16. ა) არ არსებობს; ბ) $k=2$;

13.17. ა) $k=0$, $k=2$; ბ) თუ $k=0$ იქნება უწყვეტი, ხოლო თუ $k=2$ – არა.

ლექცია 14

14.1. იქნება; იქნება.

14.2. არ შეიძლება.

14.3. არ მიიღებს.

14.4. უდიდესი არ არსებობს, $\min\limits_{]-1,1[} f(x)=1$.

14.5. $f(b)$ და $f(a)$.

14.6. ერთი ან არცერთი.

14.7. *მითითება*:

$$(x_1^4+x_1^3-x_1^2-2x_1-2)-(x_2^4+x_2^3-$$

$$-(x_2^2-2x_2-2)=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2-1)+$$

$$+(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2)>0,$$

როცა $x_1>x_2$ და $x_1,x_2\in[1;2]$.

14.8. არ შეიძლება.

14.10. არა.

14.11. ა) $\left]-\dfrac{4}{3},+\infty\right[$ შუალედზე დადებითია, $\left]-\infty,-\dfrac{4}{3}\right[$ -ზე უარყოფითია;

ბ) $]-\infty,+\infty[$ შუალედზე დადებითია;

გ) დადებითია $]-\infty,1[$ და $]4,+\infty[$ შუალედებზე, უარყოფითია $]1,4[$-ზე;

დ) დადებითია $]0,3[$ და $]4,+\infty[$ შუალედებზე, უარყოფითია $]-\infty,0[$ და $]3,4[$-ზე.

14.12. ა) 0,3; ბ) 0,2.

14.13. ა) 0,21; ბ) -8; გ) 1; დ) -0,5.

14.14. ა) $\Delta x_1 = \max \Delta x = 0{,}5$;

$\Delta x_2 = \min \Delta x = -1{,}5$; $\Delta y_1 = 2{,}25$;

$\Delta y_2 = -3{,}75$;

ბ) $\Delta x_1 = \max \Delta x = \frac{5}{3}$;

$\Delta x_2 = \min \Delta x = -\frac{1}{3}$;

$\Delta y_1 = -\frac{31}{64}$; $\Delta y_2 = \frac{1}{2}$.

14.15. ა) $a\Delta x$; ბ) $2ax\Delta x + b\Delta x + a\Delta x^2$;

გ) $a^x(a^{\Delta x} - 1)$; დ) $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$;

ე) $2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$;

ვ) $-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

14.17. ა) $\frac{4}{19}$; b) -6.

14.19. ა) 5; ბ) -4; გ) $-2a - h + 8$.

14.20. ა) 0; ბ) 2; გ) -3; დ) $2ad+b$.

14.21. $f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = -1$.

14.22. $4x + 2$.

ლექცია 15

15.1. ა) 0; ბ) -2; გ) 1; დ) -44; ე) $-\frac{1}{4}$;

ვ) $-3\frac{3}{4}$; ზ) $4 + \ln 27$; თ) 1;

ი) $\frac{12\sqrt{3}\pi - \pi^2 + 36}{72}$; კ) $\frac{3}{\ln 5}$;

ლ) 2; მ) $2e^{-1}$.

15.2. ა) $y = -3x + 5$;

ბ) $y = e \cdot x$;

გ) $y = 2x + \frac{2-\pi}{2}$;

დ) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}$.

15.3. $\left(\frac{15}{4}, \frac{15}{16}\right)$.

15.4. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$.

15.5. ა) არ არსებობს ასეთი წერტილი;

ბ) (-1,-2); (1,2); გ) (0,4); (2,0).

15.6. 2; 4; 6.

15.7. ა) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx$; ბ) $5^x \ln 5\, dx$; გ) $\frac{dx}{x}$;

დ) $\cos x\, dx$; ე) $-\sin x\, dx$; ვ) $\frac{dx}{\cos^2 x}$.

15.8. ა) $9(3x-1)^2$; ბ) $14(2x-3)^6$;

გ) $16x(2x^2+5)^3$; დ) $-5x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$;

ე) $-\frac{7}{2}(3-x)^{\frac{5}{2}}$; ვ) $13{,}5x^4(x^5+2)^{1,7}$;

ზ) $1{,}6(x+1)(x^2+2x-1)^{-0,2}$;

თ) $\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$; ი) $-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

კ) $\frac{4x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$; ლ) $-\frac{18x}{7\sqrt[7]{(3x^2-1)^6}}$;

მ) $5e^{5x-1}$;

ნ) $2(3x-1)2^{3x^2-2x+1}\ln 2$;

ო) $\frac{2x+4}{x^2+4x+7}$;

პ) $\frac{6x+9}{(3x^2+9x+1)\ln 4}$;

ჟ) $\operatorname{ctg} x$; რ) $-\sin x \cos(\cos x)$;

ს) $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$;

ტ) $-3(4+e^x)\sin(4x+e^x)\cos^2(4x+e^x)$;

უ) $\frac{2x+1}{x} \cdot \sin[2(2x+\ln x)$.

15.9. ა) 0; ბ) $4+(2+t)e^t$.

15.10. ა) $60x^3-24x^2+6x-14$;

ბ) $(2+4x^2)e^{x^2}$; გ) $2\cos 2x$.

15.11. ა) $-600x^{-7}$; ბ) $120x^3$; გ) $(3+x)e^x$;

დ) $\dfrac{8-6\ln x}{x^4}$;

15.12. მეხუთე.

15.13. $\dfrac{24}{(1+x)^5}$.

15.14. *მითითება*: აღნიშნეთ ნებისმიერი ორი მათგანის ნამრავლი ახალი ფუნქციით და ისარგებლეთ ორი ფუნქციის ნამრავლის გაწარმოების ფორმულით.

ლექცია 16

16.1. ა) -1; ბ) 0; 1; გ) -2; 2; დ) -3;

ე) 0; 2; $\frac{4}{5}$; ვ) e^{-1}; ზ) -1; თ) 1;

ი) 0; 1; კ) 0; -2; 2; ლ) არა აქვს;

მ) -3; 3; ნ) -2; 2; ო) 0; 2; პ) 2.

16.2. *მითითება*: განიხილეთ $\varphi'(x)=0$ განტოლება.

16.3. ა)]1,+∞[; ბ) ∅; გ)]4,+∞[;

დ) $]-\infty,-\frac{1}{12}[$; ე) $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$;

ვ)]-1,1[; ზ) $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$;

თ) [0,+∞[.

16.4. ა) არის; ბ) არის; გ) არის;

დ) არ არის; ე) არ არის;

ვ) არ არის; ზ) არ არის;

თ) არის; ი) არის.

16.5. ა) a=-2; ბ) a=-16; გ) a=3;

დ) a=-3; ე) არ შეიძლება;

ვ) a=1; ზ) არ შეიძლება; თ) a=1.

16.6. ა) არა; ბ) ზრდადია; გ) ზრდადია;

დ) არა; ე) ზრდადია; ვ) არა.

16.7. ა) მკაცრად ზრდადია]-∞,+∞[-ზე;

ბ) მკაცრად ზრდადია [-1,0] და [1,+∞[-ზე, მკაცრად კლებადია]-∞,-1] და [0,1]-ზე;

გ) მკაცრად ზრდადია]-∞,+∞[-ზე;

დ) მკაცრად კლებადია]-∞,+∞[-ზე;

ე) მკაცრად ზრდადია]-∞,0]-ზე, მკაცრად კლებადია [0,+∞[-ზე;

ვ) მკაცრად ზრდადია [0,2]-ზე, მკაცრად კლებადია]-∞,0] და [2,+∞[-ზე;

ზ) მკაცრად ზრდადია [1,+∞[-ზე, მკაცრად კლებადია]-∞,0[და]0,1]-ზე;

თ) მკაცრად ზრდადია [2,+∞[-ზე, მკაცრად კლებადია]-∞,2]-ზე;

ი) მკაცრად ზრდადია]-∞,+∞[-ზე.

16.8. ა) $]\frac{4}{9},+\infty[$; ბ)]-1;1[; გ) $]\frac{3}{2},+\infty[$;

დ) ∅.

16.9. 8,5.

16.10. 3.

16.11. 2.

16.12. -4.

D(ლექციები 13-16)

D.1. ა) 0; -3; 3; ბ) $\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$;

გ) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$;

დ) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k, k\in Z$; ე) 0; -2;

ვ) 0; -1; $\pm\sqrt{2}$.

D.2. ა) f(-1)=3; ბ) f(5)=-0,5.

D.5. ა) 0,1; ბ) -3.

D.6. ა) 0,1; 10; ბ) -1; $\frac{1}{90}$.

D.7. $-\frac{1}{8}$.

D.8. -1.

D.9. 3.

D.10. ა) -4; ბ) -1.

D.11. 3; 0.

D.12. ა) $1-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}$;

ბ) $\frac{6}{x^2\sqrt{x}}-\frac{2}{x\sqrt[3]{x^2}}$;

გ) $\frac{1}{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)$;

დ) $-\frac{\pi}{x^2}$;

ე) $6\cos 6x$;

ვ) $-3\cos^2 x\sin x$;

ზ) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$;

თ) $e^{\cos x}\left(\cos x-\sin^2 x\right)$.

D.13. ა) 3; ბ) -1; გ) 4; დ) $-\frac{1}{8}$.

D.14 ა) $\ln x dx$; ბ) $\frac{dx}{\cos^4 x}$;

გ) $2xe^{x^2+3}dx$; დ) $\frac{dx}{1+e^x}$.

D.15. $\Delta y=0{,}53$; $dy=0{,}5$.

D.16. ა) ზრდადია $]0,+\infty[$ შუალედში;

ბ) ზრდადია $]-\infty,+\infty[$ შუალედში;

გ) ზრდადია $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$ შუალედში,

კლებადია $\left]0,\frac{1}{e}\right]$ შუალედში;

დ) ზრდადია $[1,+\infty[$ შუალედში, კლებადია $[0,1]$ შუალედში.

D.17. *მითითება*: $(x+\Delta x)^n - x^n$ ნაზრდის გამოსათვლელად ისარგებლეთ ნიუტონის ბინომური ფორმულით.

D.18. *მითითება*: ისარგებლეთ სავარჯიშო 14.16-ით.

D.19. *მითითება*: განიხილეთ ფუნქცია $f(x)=e^x-1-x$. აჩვენეთ, რომ იგი მკაცრად ზრდადია $[0,\infty[$ შუალედზე.

ლექცია 17

17.1. 6.

17.2. $\frac{10^6}{3}$.

17.3. ა) -2; ბ) 2; გ) 0; დ) 2; ე) 2; ვ) -1;

17.4. ა) 37,7; ბ) 3; გ) 0,5; დ) -12; ე) 1; ვ) 1.

17.5. ა) $\operatorname{locmin} f(x)=-26$;

ბ) $\operatorname{locmax} f(x)=7$, $\operatorname{locmin} f(x)=-25$;

გ) $\operatorname{locmin} f(x)=-47$;

დ) $\operatorname{locmin} f(x)=0$;

ე) $\operatorname{locmin} f(x)=\frac{-4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$,

$\operatorname{locmax} f(x)=\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

ვ) $\operatorname{locmin} f(x)=\frac{-6+\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{6}}$,

$\operatorname{locmax} f(x)=\frac{6+\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{6}}$.

17.6. ა) $\operatorname{locmin} f(x)=-\frac{1}{4}$,

$\operatorname{locmax} f(x)=\frac{1}{4}$;

ბ) $\operatorname{locmin} f(x)=0$,

$$\operatorname{loc\,max} f(x)=\left(\frac{4}{5\ln 5^{\ln\sqrt[5]{5}}}\right)^4;$$

გ) $\operatorname{loc\,min} f(x)=0$,

$$\operatorname{loc\,max} f(x)=\left(\frac{4}{e\ln\frac{e}{3}}\right)^4;$$

დ) $\operatorname{loc\,min} f(x)=e$;

ე) $\operatorname{loc\,min} f(x)=2\sqrt{2}$;

ვ) $\operatorname{loc\,min} f(x)=-e^{-1}$.

17.7. $\sqrt{S}$; $\sqrt{S}$.

17.8. $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $H=\frac{\sqrt[3]{4V\pi^2}}{\pi}$.

17.9. ა) ჩაზნექილია $]-\infty,+\infty[$-ზე;

ბ) ამოზნექილია $]-\infty,+\infty[$-ზე;

გ) $]-\infty,0[$-ზე ამოზნექილია; $]0,+\infty[$-ზე ჩაზნექილია; $(0,10)$ გადაღუნვის წერტილია;

დ) ჩაზნექილია $]0,+\infty[$-ზე; ამოზნექილია $]-\infty,0[$-ზე;

ე) ჩაზნექილია $]-\infty,0[$ და $]0,+\infty[$-ზე;

ვ) ჩაზნექილია $]\sqrt[3]{0,5},+\infty[$-ზე; ამოზნექილია $]-\infty,\sqrt[3]{0,5}[$-ზე; $(\sqrt[3]{0,5},-4,5\sqrt[3]{0,25}+1)$ გადაღუნვის წერტილია;

ზ) ჩაზნექილია $]5,+\infty[$-ზე; ამოზნექილია $]-\infty,0[$ და $]0,5[$, $(5,-31\,250)$ გადაღუნვის წერტილია;

თ) ამოზნექილია $]-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}[$-ზე; ჩაზნექილია $]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}[$ და $]\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty[$-ზე; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{5}{9}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{5}{9}\right)$ გადაღუნვის წერტილებია;

ი) ჩაზნექილია $]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}[$ და $]\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty[$-ზე; ამოზნექილია $]-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}[$-ზე; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$ გადაღუნვის წერტილებია;

კ) ამოზნექილია $]-1,0[$-ზე; ჩაზნექილია $]0,+\infty[$-ზე; $(0,1)$ გადაღუნვის წერტილია;

ლ) ჩაზნექილია $]-\infty,+\infty[$-ზე;

მ) ჩაზნექილია $]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}[$ და $]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty[$-ზე; ამოზნექილია $]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}[$-ზე; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ გადაღუნვის წერტილებია.

17.10. $a=-\frac{3}{2}$; $b=\frac{9}{2}$.

ლექცია 18

18.1. ა) $y=0$; ბ) $y=\frac{1}{2}$;

გ) $y=-\frac{5}{2}$; დ) $y=-3$;

ე) $y=-\frac{7}{3}$; ვ) $y=\frac{2}{3}$;

ზ) $y=\frac{2}{5}$, როცა $x\to+\infty$; $y=0$, როცა $x\to-\infty$;

თ) $y=\frac{3}{2}$, როცა $x\to+\infty$; $y=\frac{2}{3}$, როცა $x\to-\infty$;

ი) $y=-2$, როცა $x\to+\infty$;

კ) $y=\frac{1}{2}$, როცა $x\to+\infty$; $y=\frac{3}{2}$, როცა $x\to-\infty$.

18.2. ა) $x=-\frac{3}{4}$; ბ) არა აქვს; გ) $x=3$; დ) $x=3$; ე) $x=0$; ვ) $x=-2$; $x=3$.

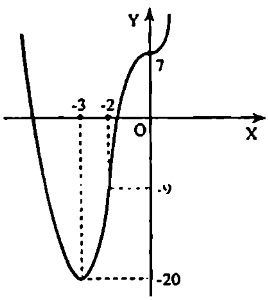
18.3. ა) $y=x$; $x=0$; ბ) $y=3x$; გ) $y=x$, როცა $x\to+\infty$; $y=-x$, როცა $x\to-\infty$.

დ) $y=x-\frac{1}{3}$; ე) $y=0$, როცა $x\to-\infty$;

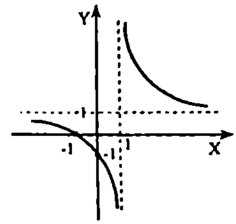
ვ) $x=1$; $x=3$; $y=0$.

18.4. ა) $\min\limits_{[-1,1]} f(x)=-2$; $\max\limits_{[-1,1]} f(x)=6$; ბ) $\min\limits_{[0;4]} f(x)=-2$; $\max\limits_{[0;4]} f(x)=18$; გ) $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=-8$; $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=17$.

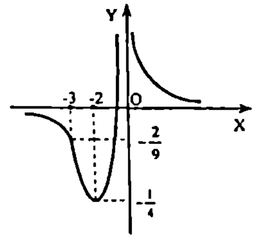
18.5. ა)



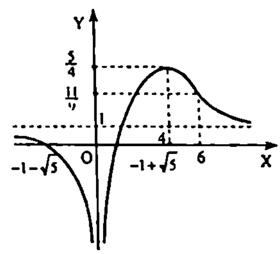
ბ)



გ)



დ)



18.6. 2.

18.7. 1.

18.8. $]-\infty,-\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$.

18.9. $8\sqrt{2}$.

18.10. $-\frac{3}{2}$.

ლექცია 19

19.1. $\left(\frac{1}{5},0,0\right)$; $\left(0,-\frac{1}{3},0\right)$; $(0,0,1)$.

19.2. ა) არ ძევს; ბ) არ ძევს; გ) არ ძევს; დ) ძევს.

19.3. არ წარმოადგენს.

19.4. ა) -0,5; 1; ბ) 0; 2.

19.5. ა) 0; ბ) 1; გ) 1; დ) კოორდინატთა სათავემდე.

19.6. ოთხი.

19.7. (0,-3) წერტილამდე.

19.8. ა) არა; ბ) არა; გ) კრებადია; დ) კრებადია.

19.9. ა) 5; ბ) 0; გ) 1; დ) 1.

19.10. *მითითება:* განიხილეთ წერტილთა ორი მიმდევრობა $a_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ და $b_n\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$.

19.11. ა) 2; ბ) 3; *მითითება*: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

19.13. განიცდის; *მითითება*: განიხილეთ 19.10 სავარჯიშოს მითითებაში მოცემული მიმდევრობები.

19.14. ა) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=2$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=-4$;

ბ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1)=1$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)=-6$;

გ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\dfrac{1}{2}$;

დ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)=0$;

ე) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,3)=e^{-9}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,3)=-6e^{-9}$;

ვ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2e$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=2e$;

ზ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$;

თ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)=1$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=2$;

ი) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(e,e)=\dfrac{2}{e-1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(e,e)=\dfrac{1}{e-e^2}$.

19.15. ა) $2y^4$; $12y^2x^2$; $8xy^3$; $8xy^3$;

ბ) $2y^{-3}$; $12x^2y^{-5}$; $-6xy^{-4}$; $-6xy^{-4}$;

გ) $4e^{2x-3y}$; $9e^{2x-3y}$; $-6e^{2x-3y}$; $-6e^{2x-3y}$;

დ) e^{x-y}; e^{x-y}; $-e^{x-y}$; $-e^{x-y}$.

ლექცია 20

20.1. ა) არ ეკუთვნის; ბ) ეკუთვნის.

20.2. $\sqrt{58}$.

20.3. ა) (1,0); ბ) (1,0);

გ) (0,0); $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$;

დ) (0,0); (0,1); (0,-1); (1,0); (-1,0);

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$;

ე) (1,-1).

20.4. ა) 4; ბ) 0; გ) $\dfrac{95}{81}$; დ) $-30e^2$.

20.5. ა) $\operatorname{loc}\max f(x,y)=12$;

ბ) $\operatorname{loc}\min f(x,y)=0$;

გ) $\operatorname{loc}\min f(x,y)=1$;

დ) ექსტრემუმი არა აქვს.

20.6. $\dfrac{\sqrt[3]{2v}}{2}$; $\sqrt[3]{2v}$; $\sqrt[3]{2v}$.

20.7. ა) $\min f(x,y)=12$;

ბ) $\max f(x,y)=-10$;

გ) $\min f(x,y)=5$;

დ) $\max f(x,y)=-14$.

20.8. $S=\dfrac{P^2}{16}$; გვერდების სიგრძეებია $\dfrac{P}{4}$ და $\dfrac{P}{4}$.

20.10. 0,6 კგ და 0,8 კგ.

20.11. 36 და 25.

E (ლექციები 17-20)

E.1. 10 მ.

E.2. 50 მ, 50 მ და 100 მ.

E.3. 3 სმ, 6 სმ, 4სმ.

E.4. $r=h=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$, სადაც r ფუძის რადიუსი, ხოლო h კასრის სიმაღლეა.

E.5. $r = h = \dfrac{P}{4+\pi}$, სადაც h მართკუთხოვანი ნაწილის სიმაღლეა, ხოლო r ნახევარწრის ფორმის ნაწილის რადიუსია.

E6. ა) $x = 100$ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია;

ბ) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ ლოკალური მინიმუმის წერტილია;

გ) $x = 3$ ლოკალური მინიმუმის წერტილია;

დ) $x = \dfrac{P}{\pi + 4}$ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია;

E.7. ა)]-∞,+∞[-ში ჩაზნექილია;

ბ)]-∞,-3[-ში ამოზნექილია,]-3,+∞[-ში ჩაზნექილია, გადაღუნვის წერტილი არა აქვს;

გ)]-∞,-2[-ში ჩაზნექილია,]-2,+∞[-ში ამოზნექილია, (-2,0) გადაღუნვის წერტილია;

დ)]-∞,1[-ში ამოზნექილია,]1,+∞[-ში ჩაზნექილია, (1,-1) გადაღუნვის წერტილია.

E.8. ა) $x = 2, y = 0$;

ბ) $x = 1,\ x = 3, y = 0$;

გ) $x = \pm 2, y = 1$;

დ) $y = x$;

ე) $x = -1, x = 1, y = -x$, როცა $x \to -\infty$ $y = x$, როცა $x \to +\infty$;

ვ) $y = 0$.

E.9. ა) $y(-2) = -4$ მაქსიმუმი; $y(0) = 0$ მინიმუმი;]-∞,-1[-ში ამოზნექილია,]-1,+∞[-ში ჩაზნექილია; $x = -1, y = x - 1$ – ასიმპტოტები;

ბ) $y(\sqrt{2}) = 2$ მინიმუმი;]$\sqrt{2}$,+∞[-ში ჩაზნექილია; $x = 1, y = x$ – ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია 0Y ღერძის მიმართ.

E.10. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$.

E.11. $V = \dfrac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$.

E.12. $V = \dfrac{2}{3} x(y^2 - x^2)$.

E.14. ა) $-\dfrac{1}{4}$; ბ) ln2; გ) 2; დ) $\dfrac{1}{2}$.

E.15. ა) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 2y^2$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 3x^3 - 4xy$;

ბ) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin^2 y$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y$;

გ) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{5}{(x+2y)^2}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{10}{(x+2y)^2}$;

დ) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$;

ე) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$;

ვ) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

E.16. ა) $\operatorname{loc}\max Z(x,y) = 13$;

ბ) $\operatorname{loc}\max Z(x,y) = 1$;

გ) არა აქვს ექსტრემუმი;

დ) $\operatorname{loc}\min Z(x,y) = -\dfrac{13}{3}$;

ე) $\operatorname{loc}\min Z(x,y) = 9$;

ვ) $\operatorname{loc}\min Z(x,y) = -2e^{-1}$.

E.17. ა) $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ ლოკალური მაქსიმუმი;

ბ) $f\left(\frac{18}{13},\frac{12}{13}\right)=\frac{36}{13}$ ლოკალური მინიმუმი;

გ) $f(-1,-2)=-5$ ლოკალური მინიმუმი, $f(1,2)=5$ ლოკალური მაქსიმუმი;

დ) $f(1,1)=e^2$ ლოკალური მინიმუმი.

ლექცია 21

21.1. ა) $2x$;

ბ) x^2-x+1;

გ) e^x+4;

დ) $2\ln x+8$;

ე) $-\frac{1}{x}+4$;

ვ) $\operatorname{tg}x+1,\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

21.2. $\frac{x^2+3}{2}$.

21.3. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

21.4. $\pm\sqrt{2}$.

21.5. ა) $\frac{x^4}{4}+C$;

ბ) $\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6}+C$;

გ) $-\frac{1}{8}x^{-8}+C$;

დ) $\frac{100}{99}\sqrt[100]{x^{99}}+C$;

ე) $11x+C$;

ვ) $-\frac{1}{x}+C$;

ზ) $-\frac{1}{t}+C$;

თ) $\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}+C$;

ი) $\frac{8}{11}\pi t^{\frac{11}{4}}+C$;

კ) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$;

ლ) $\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+C$;

მ) $\frac{8}{5}x^5-e^x+2x+C$;

ნ) $\frac{7}{3}x^3+3e^x+5\ln|x|+C$;

ო) $t^3+\frac{5}{8}t^8+\frac{8}{3t^3}+C$, როცა $n\neq-m$;
$\ln|x|+C$, როცა $n=-m$;

პ) $\frac{m}{n+m}\sqrt[m]{x^{n+m}}+C$, როცა $\frac{n}{m}\neq-1$; $\ln|x|+C$, როცა $\frac{n}{m}=-1$;

ჟ) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+x+C$;

რ) $6\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x^5}}{10}+C$;

ს) $\frac{10^x}{\ln 10}+C$;

ტ) $\frac{a^xe^x}{\ln a+1}+C$;

უ) $-3\cos x+\ +4\sin x+C$;

ფ) $2\operatorname{tg}x+5\operatorname{ctg}x+C$;

ქ) $\frac{2\cdot5^x}{\ln 5}-3\cos x-4\operatorname{ctg}x+C$;

ღ) $5\cdot e^x+7\cdot\operatorname{tg}x+2\sin x+C$.

21.6. ა) $-x\cos x+\sin x+C$;

ბ) $x\sin x+\ +\cos x+C$;

გ) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$;

დ) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$;

ე) $x\ln x-x+C$;
ვ) $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$;
ზ) $\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$;
თ) $x^2\sin x+ +2x\cos x-2\sin x+C$.

21.7. ა) $\frac{1}{25}(5x-3)^5+C$;
ბ) $-\frac{1}{8}(4x-5)^{-2}+C$;
გ) $-\frac{1}{24}(4-3x)^8+C$;
დ) $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+2)^3}+C$;
ე) $\frac{1}{20}\sqrt{(8x-1)^5}+C$;
ვ) $-\frac{3}{56}\sqrt[3]{(2-7x)^8}+C$;
ზ) $\frac{1}{3}e^{3x+1}+C$;
თ) $-\frac{1}{2}e^{-2x+5}+C$;
ი) $\frac{1}{5}e^{5x+4}+C$;
კ) $\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$;
ლ) $-\frac{1}{4}\ln|1-4t|+C$;
მ) $-\frac{1}{3(3t-1)}+C$;
ნ) $\frac{1}{10(2-5x)^2}+C$;
ო) $-\frac{1}{49(7x-3)^7}+C$;
პ) $-\frac{1}{3(3x+4)}-\frac{1}{3}\ln|3x+4|+C$;
ჟ) $\frac{(ax+b)^{1-n}}{a(1-n)}+C$, თუ $a\neq 0$ და $n\neq 1$;
$\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$, თუ $a\neq 0$ და
$n=1$; $\frac{x}{b^n}+C$, თუ $a=0$.

21.8. ა) $\ln|x+1|+C$;
ბ) $\ln(1+x^2)+C$;
გ) $\ln|ax^2+bx+c|+C$, თუ $a^2+b^2\neq 0$;
C, თუ $a^2+b^2=0$;
დ) $\ln(e^x+3)+C$;
ე) $x-\ln|x+3|+C$; *მითითება:*
$x+2=(x+3)-1$;
ვ) $\ln|\ln x|+C$.

ლექცია 22

22.1. $\underline{P}_4=0{,}140625$; $\overline{P}_4=0{,}390625$.

22.2. ა) $63\frac{3}{4}$; ბ) $60\frac{3}{4}$; გ) $\frac{1}{\ln 2}$;
დ) e^5-e; ე) 1; ვ) 0.

22.3. ა) π; ბ) 1; გ) 0; დ) $\frac{e^2+1}{4}$.

22.4. ა) $-\frac{13}{4}$; ბ) $\frac{28\sqrt{2}}{9}$;
გ) $\frac{1}{3}\ln\frac{10}{7}$; დ) $\frac{1}{2}(e^7-e^3)$.

22.5. ა) $\ln\frac{5}{3}$; ბ) $\frac{\ln 5}{2}$; გ) $\ln\frac{3}{5}$;
დ) $\ln\frac{e^2+2}{e+2}$;
ე) $-\ln\ln 2$;
ვ) $\frac{3}{2}\ln\frac{e^4+e^2+1}{e^2+1}$.

22.6. ა) $\frac{40}{3}$; ბ) $4\frac{1}{2}$; გ) $\frac{e^3-1}{e}$; დ) $\frac{2}{3}$.

22.7. ა) $\frac{6e-4}{3}$; ბ) $\frac{31}{3}$.

22.8. 64π.

22.9. $\frac{\pi^2}{2}$.

22.10. $\frac{\pi}{2}e^2(e^4-1)$.

22.11. $\frac{31\pi}{5}$.

ლექცია 23

23.1. ა) 1; ბ) $\sqrt{2}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) 1;

ე) $\frac{e}{2}$; ვ) $\frac{1}{\ln 2}$.

23.2. ა) განშლადი; ბ) განშლადი;
გ) განშლადი; დ) კრებადი.

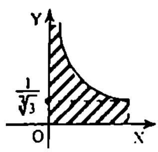
23.3. ა) $2e^3$; ბ) 3.

23.4. ა) $-\frac{5}{4}$; ბ) 2; გ) $6\sqrt[3]{2}$;

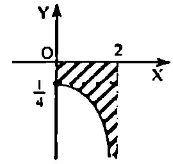
დ) $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1)$; ე) $2\frac{2}{3}$.

23.5. ა) განშლადი; ბ) განშლადი;
გ) კრებადი; დ) განშლადი.

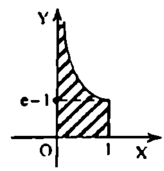
23.6. ა)



ბ)



გ)



23.7. ა) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$; ბ) $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$.

ლექცია 24

24.2. ა) $2\cos x-\sin 2x$; ბ) $2e^x-xe^x$.

24.3. ა) $\frac{x^3}{3}-x^2+C$;

ბ) $\frac{2^x}{\ln 2}+C$;

გ) $-x\cos x+\sin x+C$;

დ) $\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$;

ე) $\frac{(3x-1)^4}{12}+C$;

ვ) $6\ln|6x+1|+C$;

ზ) $\ln(1+2x^2)+C$;

თ) $\ln|\ln x|+C$.

24.5. ა) $\sqrt[3]{C+\frac{15}{2}x^2}$; ბ) $\sqrt[3]{C+\frac{x^3}{2}}$;

გ) $\sqrt[5]{C+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}}$; დ) $\frac{1}{2}\ln\left(C+\frac{2}{5}e^{5x}\right)$.

24.6. ა) $y=x$; ბ) $\ln x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$;

გ) $\sqrt[3]{2x^3-1}$; დ) $\frac{\sqrt{2x-1}}{3}-1$.

24.7. ა) $Ce^{-2x}-\frac{3}{2}$;

ბ) $C\cdot e^x-6x^2-12x-12$;

გ) $C\cdot e^{3x}+2xe^{3x}+1$;

დ) $e^{\frac{5x^2}{2}}\left(C+\frac{x^3}{3}\right)$;

ე) $e^{x^4}(C+\sin x)$;

ვ) $e^{-\sin x}(C+\sin x)$.

24.8. ა) $C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+1$; ბ) $-\frac{13}{42}x^{-4}+\frac{x^3}{7}$; გ) $e^{-\frac{x^3}{3}}\left(5+\frac{x^2}{2}\right)$; დ) $e^{\cos x}(1+\sin x)$.

F(ლექციები 21-24)

F.1. ა) $\frac{x^6}{3}+C$;

ბ) $\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C$;

გ) $2x^3+2x^2+\ln|x|+C$;

დ) $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$;

ე) $2\ln|x|-x+\frac{x^2}{2}+C$;

ვ) $6\sqrt{x}-\frac{x^2\sqrt{x}}{10}+C$;

ზ) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}(x-4)+C$;

თ) $-\frac{2}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$;

ი) $\frac{24}{13}x\sqrt[12]{x}+\frac{4}{3}x^2\sqrt[4]{x}+C$;

კ) $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$;

ლ) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$;

მ) $\frac{5(ae)^x}{\ln a+1}+C$;

ნ) e^x-x+C;

ო) $\frac{a^x}{\ln a}-\frac{1}{3x^3}+C$;

პ) $e^x+\frac{1}{x}+C$;

ჟ) $\cos x-\mathrm{ctg}x+C$;

რ) $x-\cos x+C$;

ს) $x-\sin x+C$;

ტ) $x+\sin x+C$;

უ) $3\mathrm{tg}x+2\mathrm{ctg}x+C$.

F.2. ა) $\frac{2^x}{\ln^2 2}(x\ln 2-1)+C$;

ბ) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$;

გ) $\frac{1}{4}(\sin 2x-2x\cos 2x)+C$;

დ) $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$.

F.3. ა) $\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$, როცა $a\neq 0$ და $e^b x$, როცა $a=0$;

ბ) $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$, როცა $a\neq 0$ და $x\cos b$, როცა $a=0$;

გ) $\frac{5^{3x-1}}{3\ln 5}+C$;

დ) $-\frac{1}{2}\cos(2x-5)+C$;

ე) $\frac{3(7x+1)^{\frac{5}{3}}}{35}+C$;

ვ) $\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$, როცა $a\neq 0$ და $\frac{x}{b}$, როცა $a=0$.

F.4. ა) $-\ln|\cos x|+C$;

ბ) $\ln|\sin x|+C$;

გ) $\frac{1}{9}\ln|9x-1|+C$;

დ) $\ln|e^x+2x-1|+C$;

ე) $x+(a-b)\ln|x+b|+C$.

F.6. ა) $\frac{7}{6\ln 2}$; ბ) $\ln 4-1$; გ) $3(e-1)$;

დ) $\ln 2$; ე) $\frac{1}{2}$; ვ) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

8) $\frac{7}{4}$; თ) $2-\frac{3}{4\ln 2}$.

F.9. $\frac{5}{6}$;

F10. 4,5.

F11. 1.

F.12. ln2.

F.13. $\frac{8}{3}$.

F.14. ა) $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$; ბ) $\frac{\pi^2}{2}$.

F.15. $\frac{\pi|a|b^2}{3}$.

F.18. ა) $\frac{1}{3}$; ბ) განშლადია; გ) 1; დ) 4; ე) განშლადია; ვ) განშლადია.

F.20. ა) $y=4x$; ბ) $y=4e^{x+2}$;

გ) $y=2x+x^2$; დ) $y=e^x(x+5)$;

ე) $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}-1\right)$;

ვ) $y=-\frac{1}{5}e^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$.

ლექცია 25

25.2. ა) *მითითება: შემოვხაზოთ $|\vec{a}|$ რადიუსიანი წრეწირი ცენტრით $\vec{a}$ ვექტორის სათავეში.*

ბ) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს ერთნაირი მიმართულება აქვთ ან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის ერთი მაინც ნულოვანია;

დ) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ ან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის ერთი მაინც ნულოვანია;

ვ) $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=90^0$.

25.3. კოლინეარულნი უნდა იყვნენ.

25.4. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

25.5. ა) $5\sqrt{10}$.

25.6. ა) 12.

25.7. $2{,}5\sqrt{13}$, $2{,}5\sqrt{37}$.

25.8. $\sqrt{31}$.

25.9. 13, 13.

25.10. 7.

25.11. $\sqrt{53+14\sqrt{3}}$, $\sqrt{53-14\sqrt{3}}$.

25.12. $\sqrt{129}$.

25.13. $\sqrt{129}$, 7.

25.15. $\vec{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$,

$\vec{MD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$.

25.16. $\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$, $\vec{BN}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c})$,

$\vec{CP}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

25.17. $\frac{8}{13}\vec{a}+\frac{5}{13}\vec{b}$.

25.18. $\vec{AC}=\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{AD}=2\vec{q}$,

$\vec{EA}=\vec{p}-2\vec{q}$.

25.19. $\vec{AM}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{BN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,

$\vec{CP}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$.

25.20. $\vec{AD_1}=\vec{c}+\frac{1}{5}\vec{a}$, $\vec{AD_2}=\vec{c}+\frac{2}{5}\vec{a}$,

$\vec{AD_3}=\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{a}$, $\vec{AD_4}=\vec{c}+\frac{4}{5}\vec{a}$.

25.21. $2\vec{m}-\vec{n}$.

25.22. $\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$.

25.23. $\frac{2\sqrt{3}}{3}(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a})$.

25.24. ა) $2\sqrt{3}$; ბ) -2.

25.25. $3{,}3\sqrt{3}$.

25.26. არა.

25.27. $\frac{16\sqrt{2}-9}{4}$.

25.28. $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-15)$.

25.29. $8\sqrt{2}$, 8, -8.

ლექცია 26

26.1. ა) (-2,-1,2); ბ) (2,-4,8); გ) (-15,0,0).

26.3. ა) (-15,6,12); ბ) $(-18,\frac{13}{2},19)$.

26.4. $\vec{AB}=(1,-3,3)$. $\vec{BA}=(-1,3,-3)$.

26.5. A(5,6,4).

26.6. (1,8,–2).

26.7. (5,4,0).

26.8. $(1,-\frac{8}{3},-\frac{1}{3})$.

26.9. a) კოლინეარულია.

26.10. $-\frac{3}{4}$.

26.11. $\alpha=-\frac{4}{3}$, $\beta=-3$.

26.15. (-2,0,1).

26.16. C(6,-2,2), D(2,-4,8).

26.17. (2,5,5).

26.18. ა) ქმნიან ბაზისს.

26.22. $m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{7}{2}$, $k=\frac{9}{2}$.

ლექცია 27

27.1. 5.

27.2. ა) -3; ბ) 19; გ) 49.

27.3. 12.

27.4. $\sqrt{129}$ და $2\sqrt{31}$.

27.5. $-\frac{3}{2}$.

27.6. –7.

27.7. $\frac{\pi}{4}$.

27.8. $\frac{\pi}{2}$.

27.9. $\frac{1}{4}(1-\sqrt{13})$, $\frac{1}{4}(1+\sqrt{13})$.

27.10 $\pm\frac{4}{3}$.

27.11. $\frac{\pi}{3}$.

27.13. -2.

27.14. –1.

27.15. -1.

27.16. ა) 8; ბ) 2.

27.17. 7.

27.18. ა) $|\vec{a}|=6$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$,

$\cos\beta=-\frac{5}{6}$, $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{6}$;

ბ) $|\vec{a}|=7, \quad \cos\alpha=\frac{2}{7},$

$\cos\beta=\frac{3}{7}, \quad \cos\gamma=-\frac{6}{7}$

27.19. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right).$

27.20. ა) $\frac{1}{\sqrt{69}}\vec{i}+\frac{8}{\sqrt{69}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{69}}\vec{k}$;

ბ) $-\frac{5}{\sqrt{41}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{41}}\vec{k}$;

გ) $\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i}-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{k}$; დ) $-\vec{j}$.

27.21. (-6,-3, 6).

27.22. $\pm 0{,}1(\sqrt{30},-3\sqrt{30})$.

27.23. $(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

27.24. $(-\frac{2}{9},-\frac{32}{9},\frac{50}{9})$.

27.25. (1,0,0), (6,0,0).

ლექცია 28

28.1. ა)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix};$$

დ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

28.2. 3, 0, 4.

28.3. ა) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

28.5. ა) $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; გ) $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$;

ე) $\begin{bmatrix} m+n+p & m+n+p & 3 \\ m^2+n^2+p^2 & mp+mn+np & m+n+p \\ mp+mn+np & p^2+m^2+n^2 & m+n+p \end{bmatrix}$.

28.6. $\begin{bmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 7 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

28.9. ა) $p=1, q=4$; ბ) $p=-3, q=-2$.

28.12. ა) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

28.13. ა) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$.

G(ლექციები 25-28)

G.4. $\overrightarrow{AM}=\frac{|\vec{a}|b+|\vec{b}|a}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$.

G.5. $\sqrt{3}$ და 1.

G.6. ა) 428; ბ) 804.

G.7. $\cos A=-12/49$;

$\cos B=\cos C=\sqrt{122}/14$.

G.8. $\vec{e}(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11})$.

G.9. $6\sqrt{\frac{2}{11}}$.

G.10. 10.

G.11. -120^0.

G.12. $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$.

G.13. 15 და $\sqrt{593}$.

G.14. $A(-1,2,3)$.

G.15. $\vec{p}=(-2,-4,5)$, $|\vec{p}|=3\sqrt{5}$.

$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{15}$, $\cos\beta=-\frac{4\sqrt{5}}{15}$,

$\cos\gamma=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

G.16. $\vec{p}=(1,-\sqrt{3})$.

G.17. 60^0ან 120^0.

G.18. $M(\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3})$.

G.19. $\vec{e}(6/7,-2/7,-3/7)$ და $\vec{e}(3/13,4/13,-12/13)$. $\vec{p}$ ვექტორის $\vec{e}$ მგეზავი განისაზღვრება ფორმულით $\vec{e}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

G.20. $\vec{Q}=(\pm48,\mp45,\pm36)$.

G.21. (5,10).

G.22. $\vec{e}\left(0,\pm\frac{4}{5},\mp\frac{3}{5}\right)$.

G.23. $\vec{p}\left(\frac{3\pm4\sqrt{3}}{5},\frac{4\mp3\sqrt{3}}{5}\right)$.

G.24. 6.

G.25. -5.

G.26. -3.

ლექცია 29

29.1. ა) -10; გ) $\sin(\alpha-\beta)$; ე) -2.

29.2. ა) 0; გ) $4a^3$; ე) $9b+3c$.

29.4. $M_{22}=12$, $A_{22}=12$, $M_{32}=-4$, $A_{32}=12$.

29.5 ა) 0; გ) $2\sin\alpha-\sin2\alpha$; ე) -68; ზ) 75.

29.6. ა) $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{6}$;

გ) $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$;

ე) -9, 2.

29.7. ა) $(3,\infty)$; გ) $(3,4)$;

ე) $(4,\infty)$; ზ) $(-\infty,-2)\cup(0,\frac{1}{3})$.

29.9. ა) $a^{\frac{n^2+n}{2}}$; ბ) $(-1)^{n-1}$;

მითითება: პირველი სტრიქონი გამოვაკლოთ ყველა დანარჩენს.

29.10. 3.

29.11. *მითითება:* $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{(\vec{a},\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}}$,

სადაც $\alpha=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

29.12. ა) 8.

29.13. ა) $\frac{17}{2}$.

ლექცია 30

30.1. ა) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 6\\ 15 & -1 & -3\\ -5 & 10 & 1\end{bmatrix}$.

30.2. ა) $\begin{bmatrix}29 & 2\\ -10 & -6\end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix}18 & -5 & -34\\ -6 & 35 & -2\\ -6 & -5 & 38\end{bmatrix}$.

30.5. ა) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

ე) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$;

ზ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$.

30.6. ა) გააჩნია; დ) არ გააჩნია.

30.8. ა) არის; გ) არის; დ) არ არის.

30.11. ა) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; გ) განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი.

30.13. 5.

30.14. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

30.15. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

30.16. ა) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; ბ) CB.

30.17. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

30.18. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

30.20. შეუძლებელია.

30.22. $-\frac{1}{98}$.

ლექცია 31

31.3. ა) $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

31.4. ა) თავსებადია; ბ) თავსებადია.

31.5. ა) $\begin{bmatrix} \frac{10}{7} & \frac{15}{7} \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

31.6. ა) არ არის; ე) არის.

31.7. ა) $a \neq -2$; ბ) $a \neq \pm 1$; გ) $a \neq -1$.

31.8. ა) არ არის თავსებადი;

ბ) თავსებადია;

გ) არ არის თავსებადი;

დ) თავსებადაია.

31.9. ა) არ არის თავსებადი;

ბ) $\begin{bmatrix} -7 & -11 & 8 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

დ) $\begin{bmatrix} 6-x_5 & -5+x_5 & 3 & -1-x_5 & x_5 \end{bmatrix}$.

31.10. ა) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{22}{7} & \frac{17}{7} & 4 \end{bmatrix}$;

31.11. ა) $\begin{bmatrix} 3x_3+3 & -7x_3-6 & x_3 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} \frac{14}{17}-\frac{x_3}{17} & \frac{5}{17x_3}-\frac{3}{17} & x_3 \end{bmatrix}$;

გ) არ არის თავსებადი;

დ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_2-\frac{x_4}{16}+\frac{1}{2} & x_2 & -\frac{11}{8} & x_4 \end{bmatrix}$.

31.12. ერთი, $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$.

31.13. არ არის თავსებადი.

31.14. $\begin{bmatrix} 2x_3+3 & 2x_3+7 & x_3 \end{bmatrix}$.

ლექცია 32

32.1. ა) ორი; გ) ერთი;
ე) ერთი; ზ) ორი.

32.2. ა) არ შეიცვალოს ან გაიზარდოს ერთით; ბ) არ შეიცვალოს, გაიზარდოს ერთით ან ორით.

32.3. ა) $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$; გ) $\lambda=1$;
დ) $\lambda\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$.

32.4. $\operatorname{rang}A=3,\ \lambda\in R$.

32.5. ა) 3; დ) 3.

32.6. ა) თავსებადია;
ბ) არ არის თავსებადი;
გ) არ არის თავსებადი;
დ) თავსებადია;
ე) არ არის თავსებადი;
ვ) თავსებადია.

32.7. ა) აქვს; ბ) აქვს.

32.8. ა) კომპლანარულია; ბ) არაა კომპლანარული.

32.9. $y=2x^2+3x$.

32.10. ა) $a=2$; ბ) $a\neq\frac{7}{2}$.

32.11. ა) $a\in\varnothing$; ბ) $a=\frac{7}{2}$; გ) $a=3$.

32.12. ა) არა აქვს. გ) არა აქვს.

32.13. გ) ამოხსნა:

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&0\\1&1&5&1&0\\2&2&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{i_2-i_1\to i_2}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&0\\0&-1&2&-3&0\\2&2&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{i_3+2i_1\to i_3}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&0\\0&-1&2&-3&0\\0&-2&-5&-7&0\end{bmatrix}\xrightarrow{i_1+i_3\to i_4}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-2&-3&0\\0&-1&2&-3&0\\0&-2&-5&-7&0\end{bmatrix}\xrightarrow{i_3+2i_2\to i_3}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-2&-3&0\\0&-1&2&-3&0\\0&0&-9&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{i_2\cdot(-1)\text{ და }i_3:(-9)}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-2&-3&0\\0&1&-2&3&0\\0&0&1&\frac{1}{9}&0\end{bmatrix}\xrightarrow{i_1+2i_3\text{ და }i_2+2i_3}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{25}{9}&0\\0&1&0&\frac{29}{9}&0\\0&0&1&\frac{1}{9}&0\end{bmatrix}.$$

$$\left\{\begin{bmatrix}\frac{25}{9}x_4 & -\frac{29}{9}x_4 & -\frac{1}{9}x_4 & x_4\end{bmatrix}\ \middle|\ x_4\in R\right\}.$$

ვთქვათ, $x_4=1$, მაშინ $\begin{bmatrix}\frac{25}{9} & -\frac{29}{9} & -\frac{1}{9} & 1\end{bmatrix}$ არის ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა.

H(ლექციები 29-32)

H.1. ა) 2; ბ) 4; გ) $3abc-a^3-b^3-c^3$; დ) $a^3+b^3+c^3-3abc$.

H.2. ა) 2; ბ) -3.

H.3. ა) $x>7/2$; ბ) $-6<x<-4$.

H.4. -48.

H.5. 8.

H.6. 40.

H.7. 0.

H.8. 8640.

H.9. ა) არ გაიჩნია; ბ) გაიჩნია;
გ) გაიჩნია; დ) გაიჩნია.

H.10. ა) არის; ბ) არ არის;
გ) არის; დ) არ არის.

H.11. ა) $\begin{bmatrix} 11 & 13 & -10 \\ -13 & -16 & 12 \\ -12 & -14 & 11 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$.

H.12. ა) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

H.13. 3; *მითითება*: $|A^*| = |A|^{n-1}$.

H.14. ა) $[1 \quad 2 \quad 3]^T$; ბ) $[1 \quad -2 \quad 0]^T$.

H.15. ა) $[1 \quad 1 \quad 1]^T$; ბ) $[1 \quad -1 \quad 2 \quad 0]^T$.

H.16. ა) 3; ბ) 2; გ) 2; დ) 3.

H.17. ა) 3, 4; ბ) $\alpha \neq \pm 3$;
გ) $\alpha \in R \setminus \{0,1,2\}$; დ) 0, 1, 2.

H.18. ა) არათავსებადია;
ბ) თავსებადია;
გ) არათავსებადია;
დ) თავსებადია.

H.19. ა) არა აქვს; ბ) აქვს.

H.20. $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$.

H.21. $\frac{100}{3}$, 20, $\frac{100}{7}$.

H.22. $\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{17}{5}, 0\right)$; $\left(\frac{9}{7}, 0, 0, -\frac{17}{7}\right)$;
$(0,-9,0,4)$; $(0,0,9,4)$.

H.23. ა) არა აქვს; ბ) არა აქვს.

ლექცია 33

33.1. ა) 0,4; ბ) $[0.3 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0]$.

33.2 ა) 1 390; ბ) 2 380.

33.4. ა) არსებობს; ბ) არსებობს.

33.5. ა) $\begin{bmatrix} 1.41 & 0.14 \\ 0.28 & 1.13 \end{bmatrix}$.

33.6. ა) $\frac{10^8}{41}\begin{bmatrix} 11 \\ 18 \end{bmatrix}$; გ) $\frac{10^9}{41}\begin{bmatrix} 21 \\ 23 \end{bmatrix}$.

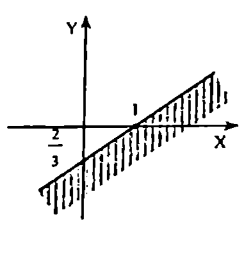
33.7. ა) $\frac{3}{25}\begin{bmatrix} 149 \\ 107 \end{bmatrix}$.

33.8. ა) $\begin{bmatrix} \frac{80}{63} & \frac{10}{63} \\ \frac{10}{63} & \frac{80}{63} \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} \frac{35}{28} & 0 \\ \frac{5}{28} & \frac{10}{7} \end{bmatrix}$.

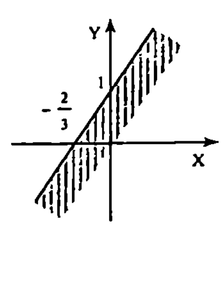
33.9. ა) რეგულარულია; ბ) არაა რეგულარული.

ლექცია 34

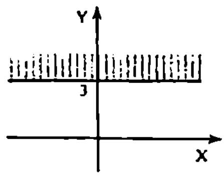
34.1. ა)



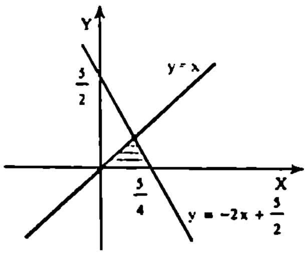
ბ)



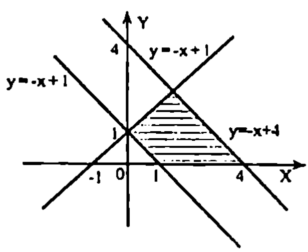
ე)



34.2. ა)



გ)



34.4. ა) ამოზნექილია;
ბ) არ არის ამოზნექილი;
გ) ამოზნექილია;
დ) ამოზნექილია;
ე) არაა ამოზნექილი;
ე) ამოზნექილია;
ზ) ამოზნექილია

34.5. ბ) (0,2), (1,1);

დ) (1,7), (1.15), (7,1), (15,1).

34.6. $y=2x-1$.

34.7. $y=8x+9$.

34.8. ერთი, $y=-x+1$.

34.9. ამოზნექილია.

ლექცია 35

35.1. ა) $y=2x$.

35.2. $-\frac{4}{5}$.

35.3. A ტიპის 0, B ტიპის $51\frac{1}{3}$.

35.4. $2\frac{1}{2}$ და $2\frac{1}{2}$.

35.5. საკანცელარიო 0, საბიბლიოთეკო 45.

35.6. წიგნი 0, რვეული 1 500.

35.7. ა) 190; დ) ამონახსნი არა აქვს.

35.8. 100, 100, 15 000.

ლექცია 36

36.1. ა) 38; გ) 10; ე) 26.4.

36.2. ძროხა 40, ცხვარი 160, \$17 200.

36.3. 150; 180; 112 500.

36.4. წიგნი 30, რვეული 40, \$170.

36.5. ბავშვებისათვის 30, მოზრდილებისათვის 20, \$1 900.

36.6. A სახის 60, B სახის 30, \$8 400.

Q(ლექციები 33-36)

Q.1. ა) 0,3; ბ) $[0{,}4 \quad 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}2]$;

გ) $[0{,}3 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}1]^T$.

Q.2. ა) 1 950; ბ) 1 850.

Q.4. ა) $\begin{bmatrix} 1{,}78 & 0{,}34 \\ 0{,}17 & 1{,}41 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 1{,}11 & 0{,}03 & 0{,}39 \\ 0{,}3 & 1{,}56 & 0{,}06 \\ 0{,}02 & 0{,}16 & 1{,}24 \end{bmatrix}$.

Q.5. ა) $\begin{bmatrix} 5000 \\ 2500 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 10000 \\ 15000 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$;

დ) $\begin{bmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 2000 \end{bmatrix}$.

Q.7. ა) $\frac{25}{11}\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$;

ბ) $\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}9 \end{bmatrix}$.

Q.8. ა) რენტაბელურია;
ბ) რენტაბელურია.

Q.9. ა) ოთხკუთხედი;
ბ) შემოუსაზღვრელი სიმრავლე;
გ) ცარიელი სიმრავლე;
დ) ცარიელი სიმრავლე;
ე) სამკუთხედი;
ვ) სამკუთხედი;
ზ) შემოუსაზღვრელი სიმრავლე;
თ) წერტილი (2,3).

Q.10. ა) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, (0,1), $\left(1,\frac{1}{2}\right)$, (1,3);
ბ) (2,1), (2,13), (4,9);
გ) (0,2), (0,6), (3,0), (8,0);
დ) (0,0), $\left(\frac{24}{13},\frac{8}{13}\right)$, (2,0);
ე) (1,0), (1,1), (3,5), $\left(\frac{19}{3},0\right)$;
ვ) $\left(\frac{3}{4},\frac{15}{4}\right)$, (2,0), (4,0), (4,20).

Q.11. $y = 5x + 1$;

Q.12. $y = -2x - 1$.

Q.13. 40 და 5

Q.14. $\varphi_{max} = 50$, $[5 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 3]^T$;

Q.15. ა) $[0 \quad 1 \quad 3 \quad 0]^T$;

ბ) $\left[\frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{11}{2}\right]^T$;

გ) $[0 \quad 3 \quad 1 \quad 0]^T$;

დ) $[0 \quad 50 \quad 30 \quad 215/6]^T$.

Q.16. ა) არ არსებობს;

ბ) $\left[0 \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{5}\right]^T$.

ლათინური ანბანი

A	a	ა	N	n	ენ
B	b	ბე	O	o	ო
C	c	ცე	P	p	პე
D	d	დე	Q	q	ქუ
E	e	ე	R	r	ერ
F	f	ეფ	S	s	ეს
G	g	გე (ჟე)	T	t	ტე
H	h	ჰაშ	U	u	უ
I	i	ი	V	v	ვე
J	j	ჟი	W	w	დუბლვე
K	k	კა	X	x	იქს
L	l	ელ	Y	y	იგრეკ
M	m	ემ	Z	z	ზეტ

ბერძნული ანბანი

Α	α	ალფა	Ν	ν	ნიუ
Β	β	ბეტა	Ξ	ξ	ქსი
Γ	γ	გამა	Ο	ο	ომიკრონ
Δ	δ	დელტა	Π	π	პი
Ε	ε	ეფსილონ	Ρ	ρ	რო
Ζ	ζ	ძეტა	Σ	σ	სიგმა
Η	η	ეტა	Τ	τ	ტაუ
Θ	θ	თეტა	Υ	υ	იფსილონ
Ι	ι	იოტა	Φ	φ	ფი
Κ	κ	კაპა	Χ	χ	ხი
Λ	λ	ლამბდა	Ψ	ψ	ფსი
Μ	μ	მიუ	Ω	ω	ომეგა