ანდრია რაზმაძე

ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი

ნაწილი I

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

სტალინის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

თბილისი 1956

ძვირფასი მამის ხსოვნას

ანდრია რაზმაძე

პროფესორი ა. რაზმაძე იყო საბჭოთა მათემატიკური მეცნიერების ერთ-ერთი საუკეთესო წარმომადგენელი, ჩვენში ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა განვითარების დიდი მოამაგე და პროპაგანდისტი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ერთ-ერთი დამაარსებელი, ენერგიული საზოგადო მოღვაწე.

ა. რაზმაძე, როგორც რუსეთის მათემატიკის სახელოვან ტრადიციებზე აღზრდილი მოაზროვნე, ფართო მათემატიკური კულტურით აღჭურვილი მკვლევარი იყო. ძლიერი ნებისყოფით დაჯილდოებულმა მეცნიერმა დაძლია მის წინაშე წამოჭრილი ყველა დაბრკოლება და მოკლე დროში გახდა ვარიაციათა აღრიცხვის დიდი სპეციალისტი.

1917 წლიდან, როცა ა. რაზმაძემ მოსკოვის უნივერსიტეტში ჩააბარა სამაგისტრო გამოცდა და მიიღო პრივატ-დოცენტის თანამდებობა, მან კითხვა დაიწყო ვარიაციათა აღრიცხვის სპეციალურ კურსისა. დიდმა რუსულმა კულტურამ და მეცნიერულმა ტრადიციებმა ა. რაზმაძის გულში ახალი მიზნები აღძრა. ის მოუთმენლად ელოდა მოხერხებულ დროს უმაღლესი მათემატიკური განათლების საქართველოში გადმოტანისათვის. მას სურვილი ჰქონდა თავისი ფართო ცოდნა ქართველი ახალგაზრდობის აღზრდისათვის მოეხმარებინა.

ოქტომბრის სოციალისტურმა რევოლუციამ სინამდვილედ აქცია ჩვენი ხალხის საუკუნეობრივი ოცნება, ა. რაზმაძის სურვილსაც ხორცი შეესხა. მოწინავე ქართველ მეცნიერთა მცირე ჯგუფის ინიციატივით თბილისში უნივერსიტეტი დაარსდა. საქართველოში უნივერსიტეტის დაარსების ენთუზიასტთა ჯგუფს ა. რაზმაძეც ეკუთვნოდა. აქედან იწყება მისი მეცნიერული მოღვაწეობის ახალი პერიოდი. მან პირველად დანერგა თბილისის

უნივერსიტეტში დღეს უკვე საყოველთაოდ ცნობილი მათემატიკური მეცნიერებისა და აზროვნების შესანიშნავი ტრადიცია.

ა. რაზმაძის ნაშრომთა შორის მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ქართულ ენაზე მის მიერ დაწერილ სახელმძღვანელოებს. მას დასახული ჰქონდა საქართველოში თანამედროვე უმაღლესი მათემატიკური კულტურის დანერგვის დიდი გეგმა. ა. რაზმაძის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას შეადგენდა ქართულ ენაზე მათემატიკური ანალიზის ვრცელი კურსის შედგენა. მან მოასწრო ამ კურსის მხოლოდ ორი ნაწილის გამოქვეყნება, მათემატიკური ანალიზის შესავლისა (1920 წ.) და განუსაზღვრელ ინტეგრალთა თეორიის (1922 წ.). ამ სახელმძღვანელოებზე აღიზარდა ქართველ მათემატიკოსთა რიგი თაობა.

ა. რაზმაძის წიგნი განუსაზღვრელ ინტეგრალთა თეორიაში წარმოადგენს განუსაზღვრელ ინტეგრალთა თეორიის სრულ კურსს, იგი ბევრად აღემატება ამ დარგის კურსების ჩვეულებრივ ზომას.

დიდი იყო ა. რაზმაძის დამსახურება, როგორც პედაგოგისა და აღმზრდელისა. იგი დიდი დამაჯერებლობით და გატაცებით კითხულობდა თბილისის უნივერსიტეტის მათემატიკის ფაკულტეტზე მათემატიკური ანალიზის ძირითად საგნებს, ალბათობათა თეორიას, რიცხვთა თეორიას, მექანიკას. გრძნობდა რა ლექტორის უდიდეს პასუხისმგებლობას აუდიტორიის წინაშე, გამოჩენილი მეცნიერი განსაკუთრებით ზრუნავდა სალექციო თემის დამუშავებისათვის, მასალის მისაწვდომად წაკითხვისა და გარეგნული გაფორმებისათვის. ყოველი მისი ლექცია მასალის მხრივ ღრმაშინაარსიანი იყო. ყურადღების ცენტრში თემის პრინციპული საკითხები იდგა.

ა. რაზმაძე დიდის პასუხისმგებლობით ეკიდებოდა მის წინ მდგომ ამოცანებს, ის არასდროს არ მიდიოდა უმცირესი წინააღმდეგობის გზით და სიძნელეებს გვერდს კი არ უვლიდა, არამედ პირველ რიგში სწორედ მათ გადალახვას ცდილობდა. იგი დიდ მოთხოვნილებებს უყენებდა თავის თავს და სხვებისაგანაც მოითხოვდა მოვალეობის შესრულებას. ის ულმობლად იბრძოდა ჭეშმა-

რიტი მეცნიერული მუშაობის მომეცნიერო ხალტურით შეცვლის ყოველგვარი ცდის წინააღმდეგ. მეცნიერულ-საზოგადოებრივი საკითხების მიმართ ის მტკიცე პრინციპულობას იჩენდა და უგულვებელყოფდა შემთხვევითი და გარეშე მომენტების ზემოქმედებას, ის არასდროს არ მიმართავდა პოპულარობის იაფფასიან საშუალებებს. ანდრია რაზმაძე, როგორც სტუდენტებისა და ახალგაზრდა მეცნიერი მუშაკების ხელმძღვანელი, საკმაოდ მკაცრი და მომთხოვნი იყო, მაგრამ ამავე დროს ანგარიშს უწევდა მათი ნიჭისა და მეცნიერული მიდრეკილების თავისებურებას და მათ თავზე არ ახვევდა თავის სუბიექტურ მეცნიერულ გემოვნებას.

ა. რაზმაძე დიდი ინტერესით ადევნებდა თვალყურს მეცნიერების განვითარებას, მუდამ იყო მათემატიკის ახალი მიღწევების კურსში. იგი ეკუთვნოდა იმ მეცნიერთა კატეგორიას, რომელთაც შესწევთ ნამდვილად ნიჭიერი ახალგაზრდების შერჩევისა და გაბედულად დაწინაურების უნარი.

ა. რაზმაძემ მტკიცე საფუძველი ჩაუყარა საქართველოში მათემატიკური კადრების აღზრდასა და მომზადებას. ჩვენი ქართველი მათემატიკოსების უფროსი თაობის წარმომადგენლები მირითადად მისი მოწაფეები არიან და მის მიერ დანერგილ ტრადიციებს აგრძელებენ. მათ რიცხვში უკვე რამდენიმე ათეული მეცნიერი — მათემატიკოსი და ფიზიკოსია. ფართო მათემატიკურმა განათლებამ, რომელიც ა. რაზმაძემ დაუნერგა თავის მოწაფეებს, ხელი შეუწყო შემდგომში ნაყოფიერი მუშაობის გაშლას მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

კომუნისტურმა პარტიამ და საბჭოთა მთავრობამ ღირსეულად დააფასა ა. რაზმაძის მოღვაწეობა მშობლიური მეცნიერების წინაშე. მის სახელს ატარებს საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტი. საქართველოში მათემატიკური მეცნიერების განვითარების ისტორია განუყრელად დაკავშირებულია ანდრია რაზმაძის სახელთან. მისი მოღვაწეობა შთამაგონებელი მაგალითია მეცნიერთა როგორც უფროსი, ისე ახალგაზრდა თაობისათვის.

ა. რაზმაძის გარდაცვალების 25 წლისთავთან დაკავშირებით სტალინის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მიერ დადგენილი იყო ა. რაზმაძის განუსაზღვრელ ინტეგრალთა თეორიის კურსის ხელმეორედ გამოცემა.

მეორე გამოცემაში გასწორებულია კორექტურული შეცდომები და ზოგი არაზუსტი ადგილები. ზოგიერთი მოძველებული ტერმინები შეცვლილია ახლით.

2/VI 56.

პროფ. ვ. ჭელიძე

წინასიტყვაობა

ეს წიგნი, მცირეოდენი ცვლილებებით, წარმოადგენს ინტეგრალური აღრიცხვის ლექციების კურსს, რომელიც 1919 წლიდან მოყოლებული ხამჯერ წავიკითხე თბილისის უნივერსიტეტში და ორჯერაც პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში. ის შეიცავს მხოლოდ პირველ ნაწილს: განუსაზღვრელ ინტეგრალებს.

პირველი ტომის წინასიტყვაობაში აღნიშნული მქონდა, რომ მათემატიკური ანალიზის მთელი კურსი თანდათანობით უნდა გამომექვეყნებინა. წინამდებარე კურსი ანალიზის ნაგულისხმევი გამოცემის III წიგნია. შესაძლოა გაკვირვება გამოიწვიოს იმ გარემოებამ, რომ ინტეგრალური აღრიცხვა დიფერენციალურზე უფრო ადრე გამოდის. მაგრამ საქმე ისაა, რომ სრული უქონლობა მათემატიკური ლიტერატურისა ქართულ ენაზე მაიძულებს პირველ რიგში გამოვუშვა ანალიზის უფრო ძნელი ნაწილები და სწორედ ესაა მიზეზი, რომ ინტეგრალურმა აღრიცხვამ დიფერენციალურს უსწრო. რაც შეეხება ამ უკანასკნელს, ის უკვე მზადაა, და განზრახული მაქვს მოკლე ხანში შევუდგე მის ბეჭდვასაც.

ინტეგრალური აღრიცხვა მას შემდგომ წარმოიშვა, რაც რომ პირველად დაყენებულ იქნა საკითხი: მოვძებნოთ ფუნქცია (პირველყოფილი), რომელსაც წინასწარაღებული $f(x)$ ფუნქცია წარმოებულად აქვს, ანდა $f(x)dx$ დიფერენციალად. უცნობი ფუნქცია, რომელზედაც საუბარია აქ, განისაზღვრება როგორც ინტეგრალი $f(x)dx$ დიფერენციალიდან. ინტეგრალის ასეთი ცნებიდან ანალიზში გამოდიან ჩვეულებრივ მაშინ, როცა პირველ რიგში ელემენტარულ ფუნქციათა ინტეგრების პრობლემას აყენებენ. მაგრამ წამოიჭრება ხოლმე მთელი წყება საკითხებისა და მათ შორის საკითხი $f(x)$-ის პირველყოფილის არსებობის შესახებ. რა თქმა უნდა, ამ პრობლემათა გადაწყვეტისათვის საჭიროა უფრო ღრმა შეხედულება საგანზე. აქ უნდა გამოვიდეთ ინტეგრალის დამოუკიდებელი ცნებიდან, ამ ცნებიდან, რომელიც ინტეგრალს როგორც უსასრულოდ მცირეთა ჯამის ზღვარს განსაზღვრავს.

არსებითად ინტეგრალური აღრიცხვა დამოუკიდებელი დისციპლინაა: იგი დიფერენციალური აღრიცხვიდან დამოუკიდებელ პრობლემებს წყვეტს უმთავრესად. ბუნებრივი იქნებოდა ამიტომ ინტეგრალური აღრიცხვის გადმოცემის დროს ინტეგრალის დამოუკიდებელი ცნებიდან გამოვსული-

ქავით, მით უმეტეს, რომ ასეთი შეხედულება მიღებული აქვს დასავლეთევროპის მრავალ ავტორს. ზოგიერთმა მათგანმა იმდენად მტკიცედ შეითვისა ეს შეხედულება, რომ ინტეგრალის ცნებას აშუქებს იმ დროს, როცა დიფერენციალისა და წარმოებულის ცნებანი ჯერ კიდევ ცნობილი არ არიან. რაც შეეხება ფუნქციათა ინტეგრებას, მას ხსენებული ავტორები შედარებით მცირე ადგილს უთმობენ. მაგრამ დასავლეთ ევროპის მეცნიერებს სულ სხვა პირობებში უხდებათ სწავლება, ვიდრე ჩვენ. მრავალ საკითხს, რომლებიც იქ უკვე საშუალო სკოლაშია შესწავლილი, ჩვენში მხოლოდ უნივერსიტეტში ეცნობიან პირველად. ჩვენს პირობებში ფუნქციათა ინტეგრების პრობლემა არის ერთ-ერთი პრობლემათაგანი, რომლის პირველ რიგში დაყენება აუცილებელი საჭიროებითაა გამოწვეული. ამისათვის უმთავრესად ვხელმძღვანელობ პედაგოგიურისა და პრაქტიკული ხასიათის მოსაზრებით.

მთელი მასალა სამ თავად არის დალაგებული. პირველი თავი წარმოადგენს კურსის შესავალს, სადაც მოთავსებულია ინტეგრების ძირითადი მეთოდები. მეორე თავში განიხილება ალგებრულ ფუნქციათა ინტეგრება და უკანასკნელად მესამეში — ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა ინტეგრება. მაგალითები მრავლად არის მოყვანილი ამა თუ იმ თეორიის სრული დახასიათების მიზნით.

არ შემიძლია აქ არ აღვნიშნო წინამდებარე კურსის გადმოცემის ერთი მხარე. საკითხი ელემენტარულ ფუნქციათა ინტეგრების შესახებ არსებითად პრაქტიკის საქმეა იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრალი სასრული სახით წყდება. მით უმეტეს საჭიროა ვიცოდეთ ბუნება ფუნქციებისა, რომელთა ინტეგრებაც ამისდაგვარად შესრულდება. ესაა ასე ვთქვათ, ფილოსოფიური ელემენტი ჩვენი კურსისა. რა თქმა უნდა, ეს პრობლემა მეტად რთულია, თუ მხედველობაში გვაქვს ყოველგვარი ელემენტარული ფუნქცია; ხოლო ალგებრულ ფუნქციათა შემთხვევისათვის ის სრულიად გარკვეულ პასუხს იძლევა. ამ უკანასკნელ პრობლემას მეორე თავის მესამე ნაწილი აქვს დათმობილი. იგი თხოულობს ალგებრის ზოგიერთი სპეციალური საკითხის ცოდნას, ამიტომ სწავლების დროს შეიძლება გამოტოვებულიც იქნეს პირველ ხანებში. სხვაფრივ წიგნი არ მოითხოვს სპეციალურ ცოდნას, გარდა, რა თქმა უნდა, დიფერენციალური აღრიცხვისა.

ეს კურსი საკმაოდ სრულია სხვა ამგვარ წიგნებთან შედარებით. ამიტომ ეს წიგნი უმთავრესად მათემატიკური განყოფილების სტუდენტთათვისაა განკუთვნილი, მაგრამ არა ნაკლებად გამოდგება ინჟინერო ფაკულტეტის სტუდენტთათვისაც. ის §§-ები, რომელნიც უკა-

ნასკნელთათვის ზედმეტია, შინაარსის სარჩევში ვარსკვლავებით მაქვს აღნიშნული.

წინამდებარე წიგნი არის ანალიზური აზროვნების ზედმიწევნითი გამოთქმის პირველი ცდა ქართულ ენაზე. მის შედგენის დროს თავს გვაწვა ორგვარი მძიმე სამუშაო: ერთის მხრით ანალიზური ნომენკლატურის გადმოქართულება და მეორეს მხრით თვით მათემატიკური აზროვნების ამეტყველება ქართულ ენაზე. უთუოდ ამიტომ იგი მთლად თავისუფალი ვერაა ზოგიერთი უსწორმასწორობისაგან და, თუ საქმე გაუმჯობესებას მოითხოვს, მე თვითონ მოწადინებული ვარ, რომ შემდეგ გამოცემაში თავიდან ავიცილო ის ნაკლი, რომლის აცდენაც პირველში შეუძლებელი იყო.

დასასრულ, მხურვალე მადლობას ვუძღვნი ჩემ კოლეგას პროფ. ა. შანიძეს, რომლის არა ერთი რჩევა ქართული ენის სტილისტიკის დაცვაში, ასე ძვირფასი იყო ჩემთვის.

გულწრფელი მადლობა ჩემ მსმენელს სტუდენტ შელქისედექ ფარცხალაძეს, რომელმაც დიდი დახმარება გამიწია კორექტურების სწორების დროს და აგრეთვე მთელი წიგნის გადაკითხვით და ბეჭდვითი შეცდომების აღნუსხვით.

ულრმესი მადლობა თბილისის უნივერსიტეტსაც, რომლის ზნეობრივისა და ქონებრივი დახმარების მეოხებით წიგნმა ორი წლის ბეჭდვის შემდეგ, როგორც იყო, იხილა დღის სინათლე.

ა. რაზმაძე.

თბილისი, 5 ოქტომბერი, 1924.

თავი I

შესავალი

I. ძირითადი საკითხები

§ 1. **ძირითადი პრობლემა.** ინტეგრალური აღრიცხვა მას შემდგომ წარმოიშვა, რაც რომ წმინდა და გამოყენებითი მათემატიკის ზოგიერთმა საკითხმა შემდეგი პრობლემის გადაწყვეტის წინაშე დააყენა მათემატიკური მეცნიერება:

აღებულია $f(x)$ ფუნქცია; ვიპოვოთ ის $F(x)$ ფუნქცია, რომელსაც $f(x)$ წარმოებულად აქვს.

წამოყენებული პრობლემა მათემატიკური ანალიზის უმნიშვნელოვანესი პრობლემათაგანია საზოგადოდ, ხოლო მისი შესწავლა, ისე როგორც ამოხსნაც ინტეგრალური აღრიცხვის საგანს შეადგენს განსაკუთრებით.

მაგრამ ცხადია, რომ ამ პრობლემის ამოსახსნელად საჭიროა წინასწარ ვიცოდეთ არსებობა აღნიშნული თვისების $F(x)$ ფუნქციისა, რომელსაც $f(x)$-ის *პირველყოფილი ფუნქცია ეწოდება.*

ამრიგად, პრობლემის ბუნება მოითხოვს, რომ შესწავლილი იყოს პირობები $F(x)$ ფუნქციის არსებობისა. მაშასადამე, ამ პრობლემას შემდეგი საკითხი უნდა წაემძღვაროს:

რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $f(x)$ ფუნქცია, რომ მისი პირველყოფილი არსებობდეს?

ამ საკითხის ამოხსნის შემდგომ ზემოაღნიშნული პრობლემა უკვე ასე გამოითქმის:

ვიცით რა წინასწარ $f(x)$-ის პირველყოფილის არსებობა, ვიპოვოთ ეს უკანასკნელი ფუნქცია.

ორ უკანასკნელ საკითხთან დაკავშირებით გამოქვეყნებულია მრავალი ნაშრომი. მათ შორის უპირველესად აღსანიშნავია თავისი შესანიშნავი შედეგებით ის გამოკვლევანი, რომლებიც ეკუთვნის მეცნიერთ: კოში, რიმანი, ჰარნაკი, დირიხლე, დიუ ბუა რეიმონდი, ლებეგი, დანჟუა და ლუზინი.

როგორც ამ მეცნიერთა აღნიშნული შრომებიდან გამოირკვა, ძირითადი პრობლემის გადაწყვეტის ხასიათი და აგრეთვე საკითხი პირველყოფილის არსებობის შესახებ მჭიდროდ არის დაკავშირებული $f(x)$ ფუნქციის სტრუქტურულ თვისებასთან, ანუ $f(x)$ ფუნქციის კლასთან: რაც უფრო ვიწრო $f(x)$ ფუნქციათა კლასი, იმდენად მარტივია ზემოაღნიშნული ძირითადი პრობლემები; პირიქით ეს პრობლემები რთულდება, როცა $f(x)$ მიეკუთვნება ფუნქციათა ფართო კლასს.

კერძოდ, როცა $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რომელიმე შუალედში, მაშინ საკითხი $f(x)$-ის პირველყოფილის არსებობის შესახებ გარკვეულად წყდება:

უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი არსებობს ყოველთვის[1].

უწყვეტი ფუნქციის ასეთი თვისება ჩვენთვის მეტად მნიშვნელოვანია, ვინაიდან ამგვარ ფუნქციებთან ძალიან ხშირად გვექნება საქმე შემდეგ.

§ 2. **ფუნქციათა კლასი.** მას შემდგომ რაც აღინიშნა, რომ საკითხი $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილის არსებობის შესახებ მჭიდროდ დაკავშირებულია ამ ფუნქციის სტრუქტურულ თვისებასთან, საჭიროა წინასწარ განისაზღვროს $f(x)$ ფუნქციათა ის კლასი, რომელთანაც საქმე გვექნება შემდეგ. ამ მხრივ ორი უმთავრესი მიმართულება შეგვიძლია ავიღოთ იმისდა მიხედვით, თუ რა გვექნება მხედველობაში: პრაქტიკული გამოყენებები, თუ ზოგადი თეორიული მოსაზრებანი.

პირველ შემთხვევაში თვით საგანი ისეთი ხასიათისაა, რომ $f(x)$ ფუნქცია არის ან უწყვეტი ანდა წყვეტილი, მხოლოდ წყვეტის წერტილთა რიცხვი სასრულია. ეს არის კლასიკური ანალიზის შეხედულება.

რაც შეეხება მეორე მიმართულებას, მისი ობიექტი ზოგადი ხასიათის ფუნქციებია. ბუნებრივია ამ შემთხვევაში გამოვიდეთ ფუნქციის ყველაზე უფრო ზოგადი ცნებიდან, რომელიც ლობაჩევსკიმ და დირიხლემ მოგვცა, — იმ ცნებიდან, რომელიც ფუნქციას განსაზღვრავს როგორც შესაბამობას ორ სიმრავლეს შორის. მაგრამ, ვინაიდან თითქმის არც ერთი დებულება არ არსებობს, რო-

[1] ეს დებულება გეომეტრიულად დამტკიცებული იქნება § 4-ში, ხოლო მკაცრი ანალიზური დამტკიცება მოყვანილი იქნება მეორე ნაწილში (განსაზღვრული ინტეგრალი).

მელიც ამგვარ ფუნქციებს ახასიათებდეს, ამიტომ შეუძლებელია რაიმე გამოკვლევა მოხდეს მათი პირველყოფილის არსებობის შესახებ. ამრიგად, ზოგადობა სულ სხვა გვარის უნდა იყოს: ფუნქციის ზოგადობა უნდა ეხებოდეს არა ცნებას, არამედ თვით ფუნქციის სტრუქტურას, ანუ ფუნქციათა კლასს.

ანალიზის ფარგლებში, როგორც გამოირკვა, ფუნქციათა ყველაზედ ფართო კლასია ე. წ. ზომადი ფუნქციათა კლასი. კერძოდ, მაგალითად, განუწყვეტელი და ზემოაღნიშნული სახის წყვეტილი ფუნქციები ზომადი ფუნქციებია.

ზომადი ფუნქციების შესწავლა, მათი კლასიფიკაცია და მათი პირველყოფილის მოძებნაც ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის საგანს შეადგენს.

ახლა ბუნებრივია კითხვა: რა მიმართულება იქნება აღებული ჩვენს სახელმძღვანელოში?

ჩვენი სახელმძღვანელო მიზნად ისახავს უმთავრესად, საკმაოდ მოამზადოს მკითხველი სხვადასხვა გამოყენებითი საკითხების შესათვისებლად, ამიტომ ამ წიგნის უმეტესი ნაწილი უჭირავს კლასიკურ ანალიზს, რომელიც, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, პირველ მიმართულებას ეყრდნობა მთლიანად.

მაგრამ მეორეს მხრივ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიამ უკანასკნელ ხანებში მნიშვნელოვანი ადგილი დაიკავა მეცნიერებაში: მისი შესანიშნავი გამოკვლევები ფუნქციის სხვადასხვა თვისების შესახებ არსებითად შეცვალა და ზოგჯერ კიდეც უარყო ის ვიწრო შეხედულება ფუნქციაზე, რომელიც შეურყევლად ითვლებოდა კლასიკურ ანალიზში[1]. ამიტომ არ შეგვიძლია გვერდი ავუხვიოთ მეორე მიმართულებასაც.

რაც შეეხება თვით პრაქტიკულ გამოყენებას, რომელიც ბოლოს და ბოლოს კერძო სახის ფუნქციათა პირველყოფილის მოძებნაზე მიიყვანება, აქ მხოლოდ იმ ფუნქციებთან გვექნება საქმე, რომლებიც ძირითად ანალიზურ ოპერაციებით გამოისახებიან. ეს არის ან ელემენტარული ფუნქციები:

ა) ალგებრული (რაციონალური და ირაციონალური) ფუნქციები,

ბ) ტრანსცენდენტული ფუნქციები,

[1] მაგალითად, წინათ ეგონათ, რომ ყოველ უწყვეტ ფუნქციას უეჭველად აქვს წარმოებული. ვეიერშტრასმა უარყო ეს იმით, რომ აღმოაჩინა ერთი კერძო სახის ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია ყოველ წერტილზე, მაგრამ ამ წერტილებზე მას არ აქვს წარმოებული.

ანდა, თუ ანალიზურ სიმბოლოთა რიცხვი უსასრულოა, ეს იქნება ფუნქციები, რომლებიც მწკრივის სახით არიან წარმოდგენილი.

ამ კურსის პირველი ნაწილის მიზანს ზემოაღნიშნული ელემენტარული ფუნქციების პირველყოფილთა მოძებნა შეადგენს და სწორედ ამიტომ ზოგად საკითხებში ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ანდა წყვეტილი, მხოლოდ წყვეტის წერტილთა რიცხვი სასრულია.

რაც შეეხება საკითხს ფართო კლასის ფუნქციების პირველყოფილთა არსებობის შესახებ, იგი განხილული იქნება მეორე ნაწილში, ხოლო პრაქტიკულ გამოყენებებს, როგორც გეომეტრიაში, ისე მექანიკაში განვიხილავთ მესამე ნაწილში [1].

II. ინტეგრალი. ინტეგრების ძირითადი მეთოდები

§ 3. ძირითადი ცნებები. ვთქვათ, აღებული $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია; მაშინ ვიცით, რომ არსებობს ამ ფუნქციის პირველყოფილი. ვთქვათ, ერთი ასეთი პირველყოფილი მოვძებნეთ და ეს არის $F(x)$. ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა იმავე ფუნქციის სხვა პირველყოფილი კიდევ? წამოყენებულ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს შემდეგი

თეორემა. თ უ $F(x)$ ა ღ ე ბ უ ლ ი უ წ ყ ვ ე ტ ი $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს პ ი რ ვ ე ლ ყ ო ფ ი ლ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$F(x)+C,$$

ს ა დ ა ც C ნ ე ბ ს ი თ ი მ უ დ მ ი ვ ი ა, ი მ ა ვ ე $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს პ ი რ ვ ე ლ ყ ო ფ ი ლ თ ა ზ ო გ ა დ ი ს ა ხ ე ა.

მართლაც, ვინაიდან $F(x)$ ფუნქციას წარმოებულად $f(x)$ აქვს, ამიტომ $F(x)+C$ ჯამსაც იგივე წარმოებული ექნება. პირიქით, ყოველი $F_1(x)$ ფუნქცია, რომელსაც იგივე წარმოებული აქვს, როგორც $F(x)$-ს, ამ უკანასკნელიდან მხოლოდ მუდმივი სიდიდით განსხვავდება, ე. ი. ის არის $F(x)+C$ სახისა.

ამრიგად, $F(x)+C$ სახის ფუნქციის გარდა არ არსებობს არც ერთი ფუნქცია, რომელსაც იგივე წარმოებული ჰქონდეს, როგორც $F(x)$-ს და ამით ჩვენი თეორემაც დამტკიცებულია.

$f(x)$ ფუნქციის ყოველ პირველყოფილს ეწოდება აგრეთვე ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი $f(x)dx$ დიფერენციალიდან; მაშასადამე, $F(x)+C$ არის

[1] პროფ. ა. რაზმაძეს განზრახული ჰქონდა მათემატიკური ანალიზის სრული კურსის დაწერა, მაგრამ ვერ მოასწრო (რედ).

ასეთი ინტეგრალის ზოგადი სახე. ვინაიდან იგი ნებსით მუდმივს შეიცავს, ამიტომ მას **განუსაზღვრელ ინტეგრალს** უწოდებენ.

ეს ფაქტი აღინიშნება ტოლობით

(1) $$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

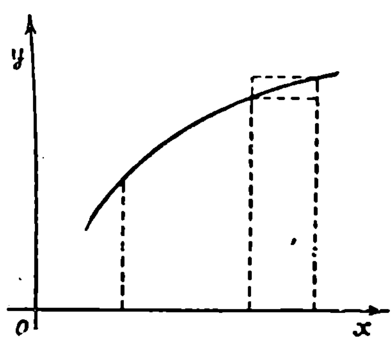
რომელიც გამოითქმის ასე: განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)dx$ დიფერენციალიდან არის $F(x)+$ ნებსითი მუდმივი C.

მოქმედებას, რომელიც განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნაში გამოისახება **ინტეგრება** ჰქვია.

§ 4. **გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.** ავიღოთ კოორდინატთა მართკუთხოვანი სისტემა xoy და ავაგოთ ის მრუდი, რომელიც

$$y = f(x)$$

განტოლებით გამოისახება. ამ მრუდზე ამოვარჩიოთ ერთი მუდმივი P_0 წერტილი x_0 აბსცისით (ნახ. 1).



ნახ. 1.

ვთქვათ, P ამ მრუდის ცვლადი წერტილია x აბსცისით. აშკარაა, რომ მრუდწირული P_0Q_0PQ ტრაპეციის ფართობი წარმოადგენს x-ის გარკვეულ ფუნქციას, რომელიც აღვნიშნოთ $A(x)$-ით. დავამტკიცოთ, რომ $A(x)$ არის $f(x)$-ის პირველყოფილი ანდა ინტეგრალი $f(x)dx$ დიფერენციალიდან.

მართლაც, მივცეთ x-ს მცირე ნაზრდი Δx და, ვთქვათ, P' მრუდის ის წერტილია, რომლის აბსცისიც არის $x+\Delta x$. როგორც

ნახაზიდან ჩანს, $PQP'Q'$ ფიგურის ფართობი წარმოადგენს ნაზრდს, რომელსაც P_0Q_0PQ-ს ფართობი მიიღებს. მაშასადამე, გვექნება

$$A(x+\Delta x)-A(x)=\text{ფართობი } (PQP'Q').$$

ვთქვათ, M და m არიან $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $(x,\ x+\Delta x)$ შუალედში. აშკარაა მაშინ, რომ $PQP'Q'$ ტრაპეციის ფართობი იმყოფება $M\Delta x$-სა და $m\Delta x$-ს შორის:

$$M\Delta x \geqslant A(x+\Delta x)-A(x) \geqslant m\Delta x;$$

ამ უტოლობათა ყველა წევრს თუ Δx-ზე გავყოფთ, მივიღებთ

$$M \geqslant \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \geqslant m. \tag{2}$$

გადავიდეთ ახლა ზღვრისაკენ, როცა Δx ნულისაკენ მიისწრაფვის. ვინაიდან $f(x)$ უწყვეტია, ამიტომ M და m მიისწრაფვიან $f(x)$-საკენ, როგორც ზღვრისაკენ. იგივე ზღვარი ექნება მე-(2) უტოლობათა შუა წევრსაც. მაგრამ ეს ზღვარი $A(x)$-ის წარმოებულია; ამიტომ

$$\frac{dA(x)}{dx}=f(x)$$

და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

ამგვარად დამტკიცებულია ერთის მხრივ, რომ $f(x)$-ის პირველყოფილი ანდა ინტეგრალი $f(x)dx$ დიფერენციალიდან წარმოადგენს იმ არის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია ზევიდან $y=f(x)$ მრუდით, ქვევიდან x ღერძით და გვერდებიდან ამ მრუდის ერთი მუდმივისა და ერთი ცვლადი ორდინატით.

მეორეს მხრივ ზემოაღნიშნული მსჯელობით აგრეთვე ის დებულება უნდა ჩაითვალოს დამტკიცებულად, რომ $f(x)$-ის პირველყოფილი ყოველთვის არსებობს, როცა $f(x)$ უწყვეტია. მაგრამ ეს არის წმინდა გეომეტრიული დამტკიცება, რომელიც რა თქმა უნდა, გულისხმობს, რომ გრაფიკულად $f(x)$-ის წარმოდგენა შესაძლოა. საზოგადოდ უწყვეტი ფუნქციის ასეთი წარმოდგენა როდი არის შესაძლო, ამიტომ საჭიროა ამ დებულების უფრო მკაცრი დამტკიცება, რაც შესრულებული იქნება წმინდა ანალიზურად ამ კურსის მეორე ნაწილში.

ზემოაღნიშნული გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ამას გარდა გვიჩვენებს, რომ P_0Q_0PQ ტრაპეციის ფართობი უშუალოდ მოიძებნება იმ შემთხვევაში, როცა ვიცით $f(x)$-ის ერთი რომელიმე პირველყოფილი.

მართლაც, ვთქვათ $F(x)$ ერთი ასეთი პირველყოფილია; მაშინ ზემონათქვამის თანახმად, $A(x)$, რომელიც $=P_0Q_0PQ$ ტრაპეციის ფართობს, მხოლოდ მუდმივი სიდიდით განსხვავდება $F(x)$-დან, ე. ი.

$$F(x)-A(x)=C.$$

მოვძებნოთ ახლა C მუდმივი. ამისათვის უკანასკნელ ტოლობაში $x=x_0$ ჩავსვათ; მაგრამ $A(x_0)=0$. ამიტომ

$$C=F(x_0).$$

მაშასადამე,

$$A(x)=F(x)-F(x_0)$$

და ამნაირად P_0Q_0PQ ტრაპეციის ფართობი მოძებნილია.

ვინაიდან ინტეგრალი გეომეტრიულად ფართობს წარმოადგენს, ამიტომ პრობლემას, რომელიც ინტეგრალის მოძებნაში გამოიხატება (ინტეგრებას), კ ვ ა დ რ ა ტ უ რ ა ეწოდება აგრეთვე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მუდმივი P_0 წერტილი ნებისმიერად იყო აღებული. მაგრამ, სადაც უნდა იყოს აღებული იგი, ფუნქციას, რომელიც P_0Q_0PQ-ს ფართობს გამოსახავს, ყოველთვის ერთი და იგივე $f(x)$ წარმოებული ექნება, და ამით გეომეტრიულად სავსებით არის გამართლებული ის თეორემა, რომელიც § 3-ში ანალიზურად იყო დამტკიცებული.

§ 6. **ინტეგრალური აღრიცხვის საგანი.** ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი საკითხების დაყენებიდან ჩანს, რომ ინტეგრალური აღრიცხვა არის შებრუნებული აღრიცხვა დიფერენციალურთან შედარებით.

მაგრამ, თუ იმ შედეგებს დავაკვირდებით, რომლებიც მიიღება დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი ოპერაციების ელემენტარულ ფუნქციებზე გამოყენებით, ერთ არსებით განსხვავებას შევამჩნევთ: იმ დროს, როდესაც ელემენტარულ ფუნქციათა გაწარმოება ელემენტარულსავე ფუნქციებზე მიგვიყვანს ყოველთვის, ამავე დროს შებრუნებული პროცესი, ელემენტარულ ფუნქციათა ინტეგრება, ყოველთვის როდი მიგვიყვანს ამგვარ ფუნქციებზე. მაგრამ ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ეს ინტეგრალი არსებობს, და თუ ელემენტარულ ფუნქციებს შორის მას ვერ ვპოულობთ, ეს მხოლოდ იმის მაჩვენებელია, რომ აღნიშნული ინტეგრალი არის ახალი არაელემენტარული ფუნქცია, რომელიც ძირითად ანალიზურ სიმბოლოთა სასრული რიცხვით ვერ გამოისახება. ეს ეგრეთ წოდებული ახალი ტრანსცენდენტული ფუნქციებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ფუნქცია, რომელსაც წარმოებულად $\operatorname{Lg} x$ აქვს არის $x \operatorname{Lg} x - x$. მაშასადამე,

$$\int \operatorname{Lg} x dx = x \operatorname{Lg} x - x + C.$$

ამავე დროს ის ფუნქცია, რომელსაც წარმოებულად აქვს $\frac{1}{\operatorname{Lg} x}$, ელემენტარულ ფუნქციებს შორის ვერ მოიპოვება. ამიტომ

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Lg} x}$$

ახალი ტრანსცენდენტულია: ეს ეგრეთ წოდებული ინტეგრალური ლოგარითმია, რომელსაც აღნიშნავენ $\operatorname{Li} x$.

ამრიგად, ინტეგრალური აღრიცხვის თვალსაზრისით ყველა ელემენტარული ფუნქცია ორ ჯგუფად იყოფა: ერთის მხრით ფუნქციები, რომლებზედაც ინტეგრების მოქმედების გამოყენება ელემენტარულსავე ფუნქციაზე მიგვიყვანს ყოველთვის, და მეორეს მხრივ ფუნქციები, რომლებზედაც უკანასკნელი მოქმედების გამოყენება ახალ ტრანსცენდენტულს ქმნის.

ისმის ახლა კითხვა: როგორ უნდა გვესმოდეს ინტეგრალური აღრიცხვის მიზანი ამ ორ უკანასკნელ შემთხვევაში?

პირველ შემთხვევაში ცხადია, რომ ინტეგრალური აღრიცხვის მიზანია სხვადასხვა მეთოდის აღმოჩენა, რომელთა საშუალებითაც შეიძლებოდეს ინტეგრალის მოძებნა.

მეორე შემთხვევაში კი, ინტეგრალური აღრიცხვა მიზნად ისახავს შეისწავლოს ახალი ტრანსცენდენტული ფუნქციების თვისებები და მათი კლასიფიკაციაც აგრეთვე.

ამგვარად, ინტეგრალური აღრიცხვა ერთის მხრით კვადრატურას სწყვეტს, ხოლო მეორეს მხრივ იგი ახალს უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს ჰქმნის.

§ 6. **ინტეგრალის ძირითადი თვისებები.** დავამტკიცოთ ინტეგრალის შემდეგი თვისებები:

1. თ უ რ ო მ ე ლ ი მ ე უ წ ყ ვ ე ტ ფ უ ნ ქ ც ი ა ზ ე ჯ ე რ გ ა წ ა რ მ ო ე ბ ი ს ა და შ ე მ დ ე გ ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ი ს მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა ს მ ო ვ ა ხ დ ე ნ თ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი თ, ა მ ი თ ე ს ფ უ ნ ქ ც ი ა მ ხ ო ლ ო დ ნ ე ბ ს ი თ ი მ უ დ მ ი ვ ი თ შ ე ი ც ვ ლ ე ბ ა.

ვთქვათ, $f(x)$ აღებული ფუნქციაა. ფუნქცია, რომელსაც წარმოებულად $f'(x)$ აქვს, არის $f(x)+C$, ამიტომ

$$\int f'(x)dx=f(x)+C$$

და ეს ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

უკანასკნელი ტოლობა შეგვიძლია აგრეთვე ასე გადმოვწეროთ:

$$\int df(x)=f(x)+C.$$

2. თუ რომელიმე უწყვეტ ფუნქციაზე ჯერ ინტეგრებისა და შემდეგ გაწარმოების მოქმედებას მოვახდენთ მიმდევრობით, ამით აღნიშნული ფუნქცია სრულებით არ შეიცვლება.

მართლაც, თვით ინტეგრალის ცნებიდან აშკარაა, რომ

$$\int f(x)dx$$

ისეთ ფუნქციას წარმოადგენს, რომლის წარმოებულიც არის $f(x)$, ამიტომ

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x),$$

რაც სავსებით ამტკიცებს ჩვენს დებულებას. უკანასკნელი ტოლობა შეგვიძლია აგრეთვე შემდეგნაირად გადმოვწეროთ:

$$d\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)dx.$$

3. ინტეგრალი, რამოდენიმე დიფერენციალის ჯამიდან აღებული, იმ ინტეგრალთა ჯამს ეტოლება, რომელნიც აღნიშნული დიფერენციალებიდან არიან აღებული.

ვთქვათ, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ სამი მოცემული ფუნქციაა. დავამტკიცოთ, რომ

$$\int[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int\varphi(x)\,dx-\int\psi(x)dx.$$

აღვნიშნოთ

$$\int[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]dx=F_1(x)+C_1, \tag{3}$$

$$\int f(x)\,dx+\int\varphi(x)dx-\int\psi(x)dx=F_2(x)+C_2, \tag{4}$$

სადაც C_1 და C_2 ნებსითი მუდმივებია. აღმოვაჩინოთ უპირველესად, რომ

(5) $$F_1(x)=F_2(x)+C.$$

ამისათვის გავაწარმოოთ მე-(3) და მე-(4) ტოლობების ორივე ნაწილი, მივიღებთ

$$f(x)+\varphi(x)-\psi(x)=F'_1(x),$$
$$f(x)+\varphi(x)-\psi(x)=F'_2(x).$$

ამრიგად, $F_1(x)$ და $F_2(x)$ ფუნქციებს ერთი და იგივე წარმოებული აქვთ და ამიტომ ისინი ნებსითი მუდმივით განსხვავდებიან ერთმანეთიდან, რის გამოც მე-(5) ტოლობა მართებულია. მაგრამ ამ ტოლობის ნებსითი C მუდმივი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ორი C_1 და C_2 ნებსითი მუდმივის სხვაობა. მაშასადამე,

$$F_1(x)=F_2(x)+C_2-C_1,$$

საიდანაც

$$F_1(x)+C_1=F_2(x)+C_2,$$

რაც მე-(3) და მე-(4) ტოლობათა ძალით ასე გადმოიწერება:

$$\int[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int\varphi(x)\,dx-\int\psi(x)dx$$

და ჩვენი დებულებაც სავსებით დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამ თეორემაში აღნიშნულ დიფერენციალთა რიცხვი აუცილებლად სასრული უნდა იყოს. თუ ეს პირობა შესრულებული არ არის, ე. ი. თუ დიფერენციალთა რიცხვი უსასრულოა, მაშინ, როგორც შემდეგში დავინახავთ, თეორემა ყოველთვის როდია სამართლიანი.

4. მ უ დ მ ი ვ ი მ ა მ რ ა ვ ლ ი ყ ო ვ ე ლ თ ვ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ს ნ ი შ ნ ი ს გ ა რ ე თ გ ა მ ო დ ი ს.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx.$$

რადგანაც ამ ტოლობის ორივე წევრს ერთი და იგივე წარმოებული აქვს, სახელდობრ, $af(x)$, ამიტომ ამ დებულების სამართლიანობა სრულებით იმავე წესით დამტკიცდება, როგორც ზემოაღნიშნულისა.

§ 7. **ძირითადი ფორმულები.** დიფერენციალური აღრიცხვიდან ვიცით უკვე უმარტივესი ელემენტარული ფუნქციების

x^m, $\mathrm{Lg}\, x$, e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}\, x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}\, x$,

$\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arc\,tg}\, x$, $\mathrm{arc\,cotg}\, x$, $\mathrm{arc\,sec}\, x$, $\mathrm{arc\,cosec}\, x$

წარმოებულნი. ახლა თუ გავითვალისწინებთ ინტეგრალის პირველ ძირითად თვისებას, მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1, \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{Lg}\,|x| + C, \tag{2}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \tag{3}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\mathrm{Lg}\, a} + C, \quad \text{სადაც } a > 0 \text{ და } a \neq 1. \tag{3'}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \tag{4}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \tag{5}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C, \tag{6}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\, x + C, \tag{7}$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \sec x + C, \tag{8}$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}\, x + C, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C', \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\, x + C = -\mathrm{arc\,cotg}\, x + C', \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arc\,sec}\, x + C = -\mathrm{arc\,cosec}\, x + C'. \tag{12}$$

ამ ფორმულებიდან ჩანს, რომ ყოველი ელემენტარული ფუნქცია ერთ-ერთი ინტეგრალის სახით გამოისახება, ამიტომ რომელიმე

კვადრატურა ელემენტარულ ფუნქციათა სასრული რიცხვით რომ გამოისახოს, ამისათვის აუცილებელია, რომ ეს კვადრატურა ერთსა ან რამდენსამე ზემოაღნიშნულ სახეზე მიიყვანებოდეს. თუ ასეთი მიყვანა შეუძლებელი ხდება, მაშინ ეს იმის მაჩვენებელია, რომ აღებული კვადრატურა ელემენტარულ ფუნქციებში ვერ გამოისახება. იგი ამ შემთხვევაში უმაღლესი ტრანსცენდენტული ფუნქციაა. სწორედ ამიტომ ზემოაღნიშნულ ფორმულებს ძირითადი ფორმულები ეწოდება.

ახლა ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა რაიმე ხერხი, რომლის საშუალებითაც შესაძლო იყოს აღებული კვადრატურის ძირითად ფორმულებზე მიყვანა. საზოგადოდ, რა თქმა უნდა ასეთი მიყვანა მოითხოვს ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქციის ხელოვნურად გარდაქმნას და ეს არის ნიჭისა და გამოცდილების საქმე. მაგრამ არსებობს რამოდენიმე ზოგადი ხერხი, რომელთა საშუალებითაც ხშირად შესაძლო ხდება აღებული ინტეგრალის გამარტივება. უახლოესი ჩვენი მიზანი სწორედ ამგვარ ხერხთა შესწავლაა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი. 1°. აღსანიშნავია ერთი გარემოება: (2), (10), (11), (12) ფორმულებში ინტეგრალები ალგებრულ დიფერენციალებიდან არიან აღებული, მაგრამ მიუხედავად ამისა ეს ინტეგრალები არა ალგებრულს, არამედ ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს გამოსახავენ: ლოგარითმულსა და შექცეულ ტრიგონომეტრიულს. მაშასადამე, ამ უკანასკნელ ფუნქციათა არსებობა ელემენტარული მათემატიკიდან რომ არ გვცოდნოდა, მაშინ ისინი ინტეგრალური აღრიცხვის საშუალებით აღმოჩნდებოდენ როგორც ახალი ტრანსცენდენტული ფუნქციები და მათი შესწავლა და კლასიფიკაცია ინტეგრალური აღრიცხვის ერთ-ერთ მიზანთაგანი იქნებოდა.

2°. ვინაიდან

$$\operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}\cos x=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc}\sec x+\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x=\frac{\pi}{2},$$

ამიტომ (10), (11), (12) ფორმულებში C და C' მუდმივები $\frac{\pi}{2}$-ით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

§ 8. **ინტეგრების ძირითადი ხერხები.** განვიხილოთ ახლა ინტეგრალის გამოთვლის შემდეგი ელემენტარული ხერხები:

1. დაშლის ხერხი. ეს ხერხი გამოიყენება, როცა ინტეგრალის ქვევით მყოფი ფუნქცია ელემენტარულ ფუნქციების ალგებრულ ჯამს წარმოადგენს. § 6-ს მე-3 დებულების ძალით ამგვარი ინტეგრალი შეიძლება ყოველთვის ინტეგრალთა ჯამის სახით წარმოვადგინოთ.

მაგალითი. გვაქვს:

$$\int (ax^3+bx^2+cx+e)\,dx=a\int x^3dx+b\int x^2dx+c\int xdx+e\int dx$$

$$=\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+ex+C;$$

მაგრამ ინტეგრალის ჯამის სახით დაშლა ხშირად იმ შემთხვევაშიც საჭირო ხდება, როცა ინტეგრალის ქვევით მყოფი ფუნქცია არ არის წარმოდგენილი ფუნქციათა ჯამის სახით.

მაგალითები.

1°. $$\int \operatorname{tg}^2 x dx=\int (1+\operatorname{tg}^2 x-1)\,dx=\int (1+\operatorname{tg}^2 x)dx-\int dx$$

$$=\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg} x-x+C.$$

2°. $$\int \frac{x^2dx}{1+x^2}=\int \frac{(1+x^2-1)dx}{1+x^2}=\int dx-\int \frac{dx}{1+x^2}=x-\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

ორ უკანასკნელ მაგალითში დაშლა ხელოვნურია.

2. ნაწილობითი ინტეგრება. დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ თუ u და v არიან x-ის წარმოებადი ფუნქციები, მაშინ

$$d(uv)=udv+vdu,$$

საიდანაც

$$udv=d(uv)-vdu.$$

თუ მოვახდენთ ამ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრებას, მივიღებთ:

(6) $$\int udv=uv-\int vdu.$$

ნებსითი მუდმივები ტოლობის ორივე ნაწილში შედიან, მაგრამ მათ იმავე მოსაზრებით არ ვწერთ, როგორც § 6-ში.

უკანასკნელი ფორმულა ნაწილობითი ინტეგრების წესს წარმოადგენს რაც, როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, იმაში გამოისახება, რომ აღებული

$$\int u dv$$

ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება ახალ

$$\int v du$$

ინტეგრალზე, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი იყოს, ვიდრე პირველი.

მაგალითები. 1°. ვიპოვოთ ინტეგრალი

$$\int x^n \operatorname{Lg} x dx.$$

მივიჩნიოთ $u = \operatorname{Lg} x$, $dv = x^n dx$, მაშინ $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. მე-(6) ფორმულა ამ შემთხვევაში მოგვცემს

$$\int x^n \operatorname{Lg} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{Lg} x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{Lg} x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

2°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int x \sin x dx.$$

მივიჩნიოთ $u = x$, $dv = \sin x dx$; მაშინ $v = -\cos x$ და ამიტომ ძირითადი მე-(6) ფორმულა მოგვცემს

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

შენიშვნა. ორივე მაგალითში ნაწილობითი ინტეგრების წესის გამოყენებამ მიგვიყვანა ახალ ინტეგრალზე, რომელიც უშუალოდ მოვიძებნეთ. მაგრამ იმავე მაგალითებზე შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ მე-(6) ფორმულა ყოველთვის როდი ამარტივებს ინტეგრალის მოძებნას.

ავიღოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, $u=\sin x$, $dv=xdx$; მაშინ $v=\frac{x^2}{2}$ და ძირითადი ფორმულა ღებულობს სახეს

$$\int x\sin x dx=\frac{x^2\sin x}{2}-\frac{1}{2}\int x^2\cos x dx.$$

ეს გვიჩვენებს, რომ ნაწილობითმა ინტეგრებამ ამ შემთხვევაში არამც თუ არ გაამარტივა საქმე, არამედ აღებული ინტეგრალის მოძებნა მიიყვანა უფრო რთული ინტეგრალის გამოთვლაზე.

ამრიგად, მე-(6) ფორმულის გამოყენება ნაყოფიერი რომ შეიქნეს, საჭიროა ინტეგრალის ქვევით მყოფი ფუნქცია იმნაირად დაიშალოს u და dv მამრავლებად, რომ ახალი კვადრატურა უფრო მარტივი შეიქმნეს, ვიდრე აღებული.

3. ჩასმის ხერხი. ვთქვათ,

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{1}$$

მაშინ, ინტეგრალის ცნების თანახმად,

$$dF(x)=f(x)dx.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილში ჩასმა

$$x=\varphi(t) \tag{7}$$

მოგვცემს შემდეგ ტოლობას:

$$dF(\varphi(t))=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

მოვახდინოთ ახლა უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრება, მივიღებთ

$$F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{8}$$

მაგრამ

$$F(\varphi(t))=F(x),$$

ამიტომ (1) და მე-(8) ტოლობათა ძალით გვექნება

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{9}$$

ეს არის ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით.

მე-(9) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი ამოიხსნება t ცვლადის ფუნქციის სახით. ეს ფუნქცია აღვნიშნოთ $\Phi(t)$-თი. მაშასადამე, გვექნება

$$\int f(x)dx=\Phi(t);$$

მაგრამ საჭიროა ისევ x ცვლადს დავუბრუნდეთ, ე. ი. $\Phi(t)$ გამოვსახოთ x-ის ფუნქციის სახით. ამისათვის t-ს მაგიერ უნდა ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა, რომელიც მე-(7) ტოლობიდან მოიძებნება.

ზემოაღნიშნული მსჯელობიდან ჩანს, რომ მე-(9) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის სახე, როგორც მის ამოხსნის სიადვილეც აგრეთვე, $\varphi(t)$ ფუნქციის შერჩევაზეა დამოკიდებული მთლიანად; ამიტომ ცხადია, აღნიშნული მეთოდი იმდენად უფრო ნაყოფიერია, რამდენადაც შესაფერისი იქნება $\varphi(t)$ ფუნქციის შერჩევა, რისთვისაც არავითარი ზოგადი კანონი არ არსებობს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1°. ვიპოვოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{(1+\operatorname{arc\,tg}^m x)dx}{1+x^2}.$$

ბუნებრივია t ცვლადი შევარჩიოთ აქ შემდეგნაირად:

$$x=\operatorname{tg} t.$$

აქედან

$$t=\operatorname{arc\,tg} x \text{ და } \frac{dx}{1+x^2}=dt.$$

აღებული ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int(1+t^m)\,dt=t+\frac{t^{m+1}}{m+1}+C.$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ x ცვლადს, მივიღებთ

$$\int\frac{(1+\operatorname{arc\,tg}^m x)dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{m+1}\operatorname{arc\,tg}^{m+1} x+C.$$

2°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\sin^6 x\cos^5 x dx.$$

x ცვლადი შემდეგნაირად გარდავქმნათ:

$$\sin x=t,$$

საიდანაც

$$\cos x dx = dt.$$

ჩავსვათ ახლა x-ის მაგიერ ახალი t ცვლადი ზემოაღნიშნული გარდაქმნის ფორმულის თანახმად, მაშინ გვექნება

$$\sin^6 x \cos^5 x dx = \sin^6 x \cos^4 x \cos x dx = t^6 (1-t^2)^2 dt = (t^6 - 2t^8 + t^{10})\, dt.$$

მაშასადამე,

$$\int \sin^6 x \cos^5 x dx = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10}) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{2t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C.$$

თუ დავუბრუნდებით ახლა ისევ x ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int \sin^6 x \cos^5 x dx = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{9} \sin^9 x + \frac{1}{11} \sin^{11} x + C.$$

შენიშვნა. თუ იმ ფუნქციის არგუმენტს, რომელიც ინტეგრალის ნიშნის ქვევით იმყოფება, სხვადასხვანაირად გარდავქმნით, მაშინ ამ ფუნქციის ინტეგრების შედეგებიც სხვადასხვა სახის ფუნქციებად წარმოგვიდგება აგრეთვე. მაგრამ, ვინაიდან ეს უკანასკნელი ფუნქციები ერთსა და იმავე ინტეგრალს გამოსახავენ, ამიტომ ცხადია, მათ შორის აუცილებლად იგივური დამოკიდებულება უნდა არსებობდეს.

ამრიგად, ჩასმის ხერხი არა მარტო ამარტივებს ინტეგრალის მოძებნას, არამედ ზოგჯერ ამყარებს დამოკიდებულებას სხვადასხვა ფუნქციებს შორის, რასაც კერძოდ შემდეგი მაგალითიდან დავინახავთ.

მაგალითი. უკვე ვიცით, რომ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \tag{10}$$

მოვახდინოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ცვლადის შემდეგი გარდაქმნა:

$$x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

აქედან

$$dx = 2\, \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt, \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}.$$

t ცვლადის ორი მნიშვნელობიდან ავიღოთ ჯერ ის, რომელსაც — ნიშანი აქვს ფესვის წინ; მაშინ გვექნება

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

თუ ჩავსვამთ ახლა ყველა მიღებულ სიდიდეს ინტეგრალის ნიშნის ქვევით, მივიღებთ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arc\,tg} t+C.$$

ახლა ისევ x ცვლადს თუ დავუბრუნდებით გვექნება

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$$

შევადარებთ რა ამ ფორმულას მე-(10) ფორმულასთან, მივიღებთ

$$\arcsin x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$$

თუ x-ის მაგიერ 1-ს ჩავსვამთ, ეს უკანასკნელი ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+C,$$

საიდანაც $C=0$ და ამიტომ გვექნება შემდეგი იგივეობა

$$\arcsin x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

ახლა თუ t ცვლადისათვის იმ მნიშვნელობას ავიღებთ, რომელსაც ფესვის წინ $+$ ნიშანი აქვს, მაშინ ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\arcsin x=2\operatorname{arc\,cotg}\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

ორი ამნაირად მიღებული ფორმულა გვაძლევს დამოკიდებულებას $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,cotg} x$ ფუნქციებს შორის.

§ 9. **ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის განზოგადება.** ვთქვათ, აღებულ ინტეგრალს აქვს სახე

$$\int uv^{(n+1)}\,dx,$$

სადაც u და v არიან x-ის ფუნქციები, ხოლო $v^{(n+1)}$ უკანასკნელის $(n+1)$ რიგის წარმოებულია. დავამტკიცოთ, რომ ეს ინტეგრალი

მე-(6) ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int vu^{(n+1)}dx, \tag{11}$$

სადაც $u^{(n+1)}$ არის u ფუნქციის $(n+1)$ რიგის წარმოებული.

მართლაც, ვინაიდან $v^{(n+1)}dx=dv^{(n)}$, ამიტომ მე-(6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\int uv^{(n+1)}dx=uv^{(n)}-\int v^{(n)}u'dx.$$

ავიღოთ ახლა ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი. იმავე წესით გვექნება

$$-\int v^{(n)}u'dx=-u'v^{(n-1)}+\int v^{(n-1)}u''dx$$

და ეს პროცესი შეგვიძლია იქამდის განვაგრძოთ, სანამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი არ შეიქნება მე-(11) სახისა; ამგვარად მივიღებთ:

$$\int v^{(n-1)}u''dx=u''v^{(n-2)}-\int v^{(n-2)}u'''dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(-1)^n\int v'u^{(n)}dx=(-1)^n u^{(n)}v+(-1)^{n+1}\int vu^{(n+1)}dx.$$

თუ შევკრებთ ამ ტოლობებს, მივიღებთ:

$$\int uv^{(n+1)}dx=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\dots+(-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int vu^{(n+1)}dx. \tag{12}$$

ეს არის **ნაწილობითი ინტეგრების ზოგადი ფორმულა**. როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, მის გამოყენებას განსაკუთრებით ის მიზანი აქვს, რომ აღებული

$$\int uv^{(n+1)}dx$$

ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანოს ახალ

$$\int vu^{(n+1)}dx$$

ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი იყოს, ვიდრე პირველი. პრაქტიკულად ამ ფორმულის გამოყენება შემდეგნაირად მოხდება: ვთქვათ

$$v^{(n+1)}=\varphi_0(x),$$

მაშინ აღნიშნული ფორმულის გამოსაყენებლად უნდა მოვძებნოთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$(13)\qquad \varphi_1(x)=v^{(n)}=\int\varphi_0(x)\,dx,\quad \varphi_2(x)=v^{(n-1)}=\int\varphi_1(x)dx,$$

$$\ldots,\varphi_{n+1}(x)=v=\int\varphi_n(x)dx.$$

ეს გვიჩვენებს, რომ ნაწილობითი ინტეგრების ზოგადი ფორმულის გამოყენება მიზანშეწონილი უმთავრესად მაშინაა, როცა უკანასკნელი ინტეგრალები უშუალოდ მოიძებნება, რაც, მაგალითად, მოხდება, როცა $\varphi_0(x)$ არის $\sin x$, $\cos x$, e^x.

ნაწილობითი ინტეგრების ზოგადი ფორმულა მე-(13) ტოლობის ძალით მიიღებს სახეს

$$(12_1)\quad \int u\varphi_0(x)dx=u\varphi_1(x)-u'\varphi_2(x)+u''\varphi_3(x)-\ldots+(-1)^n u^{(n)}\varphi_{n+1}(x)$$

$$+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}\varphi_{n+1}(x)dx.$$

კერძოდ, თუ u არის n-ური ხარისხის რომელიმე პოლინომი $P(x)$, მაშინ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი მოისპობა და ჩვენი ინტეგრალი უშუალოდ გამოითვლება:

$$(12_2)\qquad \int P(x)\varphi_0(x)dx=P\varphi_1(x)-P'\varphi_2(x)+P''\varphi_3(x)-\ldots+$$

$$+(-1)^n P^{(n)}\varphi_{n+1}(x).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ ინტეგრალი

$$\int P(x)e^{ax}dx,$$

სადაც $P(x)$ არის n-ური ხარისხის პოლინომი. ამ შემთხვევაში $\varphi_0(x)=e^{ax}$ და იმიტომაც

$$\varphi_1(x)=\frac{e^{ax}}{a},\quad \varphi_2(x)=\frac{e^{ax}}{a^2},\ldots,\varphi_{n+1}(x)=\frac{e^{ax}}{a^{n+1}}.$$

მე-(12_2) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\int P(x)e^{ax}dx = P(x)\frac{e^{ax}}{a} - P'(x)\frac{e^{ax}}{a^2} + \ldots + (-1)^n P^{(n)}(x)\frac{e^{ax}}{a^{n+1}},$$

ანდა

$$\int P(x)e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[P(x) - \frac{P'(x)}{a} + \frac{P'(x)}{a^2} - \right.$$
$$\left. - \ldots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n}\right].$$

ამრიგად, ჩვენი ინტეგრალი გამოთვლილია.

§ 10. ინტეგრება ფუნქციებისა, რომლებიც პარამეტრებს შეიცავენ. ინტეგრალურ აღრიცხვაში ხშირად ისეთ ინტეგრალებთანაც გვექნება საქმე, რომელთაგანაც თითოეული წარმოადგენს კერძო ინტეგრალთა მთელი სიმრავლის ზოგად სახეს. მაგალითად,

$$(14) \qquad \int \sin^m x \cos^n x dx$$

m და n პარამეტრების სხვადასხვა კერძო მნიშვნელობისათვის სხვადასხვა კერძო ინტეგრალად გარდაიქცევა. ამ უკანასკნელთა ერთობლიობა შეადგენს ინტეგრალთა იმ სიმრავლეს, რომელთა ზოგადი სახეც არის მე-(14) ინტეგრალი.

თავისთავად ცხადია, რომ თუ საკითხი ზოგადი სახის ინტეგრალის გამოთვლის შესახებ იქნება შესწავლილი, მაშინ ამ ინტეგრალის ყოველი კერძო სახის გამოთვლაც მეტად ადვილად მოხდება.

ამრიგად, ისმის კითხვა იმ ინტეგრალთა მოძებნაზე, რომელნიც პარამეტრებს შეიცავენ. ასეთი ინტეგრალების ზოგადი სახე შემდეგია:

$$\int f(x, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)dx,$$

სადაც f არის x-ისა და $a_1, a_2, \ldots, a_n$ პარამეტრთა ფუნქცია.

არსებობს ამგვარი ინტეგრალების ორი უმთავრესი სახე:

1°. *ინტეგრალები, რომელნიც მოიძებნებიან პარამეტრების კერძო მნიშვნელობათა დამოუკიდებლად.*

2°. ინტეგრალები, რომელთა გამოთვლის სიადვილე პარამეტრების კერძო მნიშვნელობებზეა დამოკიდებული მთლიანად.

მაგალითად, ინტეგრალი

$$\int \sin mx \cos nx dx, \tag{15}$$

სადაც $m \neq n$, ერთნაირად გამოითვლება მიუხედავად იმისა, თუ რა მნიშვნელობა ექნებათ m და n პარამეტრებს; ფუნქცია, რომელიც ამ ინტეგრალს გამოსახავს, არის

$$\frac{\cos(m-n)x}{2(n-m)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

ამნაირად, მე-(15) ინტეგრალი პირველი სახისაა.

მაგრამ აშკარაა, რომ მე-(14) ინტეგრალი მეორე სახისაა; მართლაც, თუ m და n მთელი რიცხვებია, მაშინ, როგორც შემდეგ დავინახავთ, ეს ინტეგრალი სრულებით ადვილად გამოითვლება, როცა ერთი რომელიმე ამ ორი პარამეტრიდან არის ლადებითი და კენტი. საზოგადოდ კი ამ ინტეგრალის გამოთვლა იმდენად უფრო მარტივია, რამდენადაც ნაკლები იქნება m-ისა და n-ის რიცხვითი მნიშვნელობები.

ამნაირად, ინტეგრალები, რომელნიც პარამეტრებს შეიცავენ, პირველ შემთხვევაში ჩვეულებრივი წესით მოიძებნებიან, ხოლო რაც შეეხება მეორე შემთხვევას, საჭიროა განსაკუთრებული, ამ შემთხვევისათვის შესაფერისი ხერხი, რომლის საშუალებითაც შესაძლო იყოს აღნიშნული სახის ინტეგრალების გამოთვლა.

არსებობს ორი ასეთი ხერხი: პირველი გამოისახება ეგრეთ წოდებული რედუქციის ფორმულებით, ხოლო მეორე არის ხერხი გაწარმოებისა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით.

განვიხილოთ ახლა ეს ორი ხერხი ცალ-ცალკე.

1. რედუქციის ხერხი. მეორე სახის ყოველი ინტეგრალისათვის არსებობს პარამეტრთა ერთი ანუ რამოდენიმე კერძო მნიშვნელობა, რომელთათვისაც ასეთი ინტეგრალი უმარტივეს სახეს ღებულობს გამოთვლის თვალსაზრისით. მაგალითად,

$$\int \sin^m x dx$$

ინტეგრალის უმარტივესი სახენი, როცა m მთელი რიცხვია, არის

$$\int \sin x dx, \int \frac{dx}{\sin x}, \int dx, \int \frac{dx}{\sin^2 x},$$

რომლებიც უშუალოდ მოიძებნება.

რედუქციის ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ ინტეგრალის გამოთვლა პარამეტრთა რომელიმე კერძო მნიშვნელობისათვის მივიყვანოთ უმარტივესი სახის ინტეგრალის გამოთვლაზე. ფორმულებს, რომელთა საშუალებითაც ეს მოხდება, **რედუქციის ფორმულები** ეწოდება.

უმთავრესი მოქმედება, რომლითაც რედუქციის ფორმულები გამოიყვანება, არის ნაწილობითი ინტეგრების წესი. მაგრამ ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქციის ზოგიერთი თვისება. სწორედ ამიტომ ზოგადი სახის რედუქციის ფორმულები არ არსებობს. ასეთი ფორმულები მხოლოდ კერძო შემთხვევაში გამოიყვანება. შემდეგი მაგალითი ერთ ასეთ შემთხვევას წარმოადგენს.

მაგალითი. ავიღოთ ინტეგრალი

$$\int \mathrm{Lg}^n x dx,$$

სადაც n მთელი რიცხვია. უპირველესად ის შემთხვევა განვიხილოთ, როცა n დადებითია. გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების წესი. თუ მივიჩნევთ $\mathrm{Lg}^n x=u$, $dv=dx$, გვექნება

$$\int \mathrm{Lg}^n x dx = x \mathrm{Lg}^n x - n\int \mathrm{Lg}^{n-1} x dx. \tag{16}$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ აღებული ინტეგრალი, რომლის მაჩვენებელი არის n, მიიყვანება იმავე სახის ინტეგრალზე, რომლის მაჩვენებელი ერთი ერთეულით ნაკლებია. მაშასადამე, ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება ბოლოს და ბოლოს მიგვიყვანს უმარტივეს სახეზე

$$\int dx = x + C$$

და ამით $\mathrm{Lg}^n x$-ის დიფერენციალის ინტეგრება შესრულებული იქნება.

ვთქვათ, ახლა n მთელი უარყოფითი რიცხვია. ვინაიდან $\mathrm{Lg}\, x$-ის ხარისხი მე-(16) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში იმატებს აბსოლუ-

ტური სიდიდით, ამიტომ ეს ფორმულა უკვე არ გამოგვადგება. მაგრამ ამ შემთხვევაში მოვიქცეთ შემდეგნაირად: n რიცხვის მაგიერ ტოლობის ორივე ნაწილში ჩავსვათ $n+1$. მაშინ ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\int \mathrm{Lg}^{n+1} x dx = x \,\mathrm{Lg}^{n+1} x - (n+1) \int \mathrm{Lg}^{n} x dx,$$

საიდანაც გვექნება

$$\int \mathrm{Lg}^{n} x dx = \frac{x \,\mathrm{Lg}^{n+1} x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \mathrm{Lg}^{n+1} x dx.$$

ეს ფორმულა სამართლიანია მანამდის, სანამ $n \neq -1$. მაშასადამე, თუ ამ ფორმულას მიმდევრობით გამოვიყენებთ, ბოლოს და ბოლოს მივიღებთ ინტეგრალს

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Lg}\, x},$$

რომელიც, როგორც უკვე აღნიშნული იყო, უმაღლეს ტრანსცენდენტულს წარმოადგენს. მაშასადამე, აღებული ინტეგრალიც, როცა n მთელი უარყოფითი რიცხვია, არის აგრეთვე უმაღლესი ტრანსცენდენტული, ხოლო უკანასკნელი ინტეგრალი მისი უმარტივესი ანდა კანონიკური სახეა.

ამრიგად, რედუქციის ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ ადვილად გამოვთვალოთ აღებული ინტეგრალი მაშინ, როცა იგი ელემენტარულ ფუნქციებში გამოისახება. მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა აღებული ინტეგრალი უმაღლეს ტრანსცენდენტულს წარმოადგენს, ეს ინტეგრალი რედუქციის ფორმულების საშუალებით მის უმარტივეს ანუ კანონიკურ სახეზე მიიყვანება და ამით ადვილად მოხდება შემდეგში ტრანსცენდენტული ფუნქციების კლასიფიკაცია.

2. **გაწარმოების ხერხი ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.** ვთქვათ, აღებულია ინტეგრალი

$$\int f(x, a) dx,$$

რომელიც ერთ a პარამეტრს შეიცავს. ეს ინტეგრალი წარმოადგენს x-ისა და a-ს ფუნქციას და ეს უკანასკნელი აღვნიშნოთ $F(x, a)$-თი. მაშასადამე, გვაქვს:

(17) $$\int f(x, a)\, dx = F(x, a) + C.$$

მოვახდინოთ ახლა აღებული ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გაწარმოება პარამეტრით. დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

(18) $$\int f'_a(x, a) dx = F'_a(x, a) + C,$$

თუ შესრულებულია პირობა

(19) $$F''_{ax} = F''_{xa}.$$

მართლაც, ინტეგრალის მეორე თვისების თანახმად (§ 6), მე-(17) ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$f(x, a) = F'_x(x, a);$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი a-თი გავაწარმოოთ, მივიღებთ

$$f'_a(x, a) = F''_{xa}(x, a)$$

ანდა მე-(19) პირობის ძალით

$$f'_a(x, a) = F''_{ax}(x, a);$$

მაგრამ ამ ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა ნაწილები მე-(18) ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა ნაწილების წარმოებულები არიან შესაბამისად და ამიტომ

$$\int f'_a(x, a)\, dx \quad \text{და} \quad F'_a(x, a)$$

ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ნებსითი მუდმივით, მაშასადამე, მე-(18) ტოლობა სამართლიანია.

ახლა თუ აღებული ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მოვახდენთ გაწარმოებას n-ჯერ a-თი, მაშინ იმავე წესით დავამტკიცებთ, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\int \frac{\partial^n f(x, a)}{\partial a^n} dx = \frac{\partial^n F(x, a)}{\partial a^n} + C,$$

თუ შესრულებული იქნება ტოლობა, რომელიც მე-(19) ტოლობის ანალოგიურია.

ამნაირად, თუ გამოთვლილია ინტეგრალი

$$\int f(x, a) dx,$$

მაშინ უბრალო გაწარმოებით გამოითვლება ინტეგრალიც

$$\int \frac{\partial^n f(x, a)}{\partial a^n} dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1°. გამოვიდეთ შემდეგი აშკარა ტოლობიდან:

$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C,$$

სადაც $a \neq 0$. გაწარმოების წესი ამ შემთხვევაში მოგვცემს

$$\int \frac{\partial^n}{\partial a^n} (\sin ax)\, dx = -\frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{\cos ax}{a}\right) + C.$$

მაგრამ

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} (\sin ax) = x^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right).$$

მაშასადამე, უკანასკნელი ფორმულა ასე გადმოიწერება:

$$\int x^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) dx = -\frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{\cos ax}{a}\right) + C.$$

კერძოდ, როცა $n = 4k+1$, ეს ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int x^{4k+1} \cos ax dx = -\frac{\partial^{4k+1}}{\partial^{4k+1}} \left(\frac{\cos ax}{a}\right) + C.$$

2°. გამოვიდეთ ახლა ტოლობიდან

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

სადაც $a \neq 0$. გაწარმოების წესისათვის ყველა საჭირო პირობა ამ შემთხვევაში შესრულებულია.

თუ მოვახდენთ გაწარმოებას a-თი n-ჯერ ინტეგრალის ნიშნის ქვეით, მივიღებთ

$$\int \frac{\partial^n e^{ax}}{\partial a^n} dx = \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{e^{ax}}{a}\right) + C;$$

მაგრამ

$$\frac{\partial^n e^{ax}}{\partial a^n} = x^n e^{ax}.$$

მაშასადამე, წინა ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)+C.$$

ცხადია, რომ თუ რომელიმე ან 1° ან და 2° ინტეგრალის მოძებნა გვინდა a-ს კერძო მნიშვნელობისათვის, ამისათვის ჯერ უნდა დაიშალოს ტოლობის მარჯვენა ნაწილი n-ჯერ გაწარმოების წესით და მხოლოდ შემდეგში a-ს მაგიერ უნდა ჩაისვას აღნიშნული მნიშვნელობა.

§ 11. **ძირითადი მაგილითები.**

1°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int (ax+b)^n dx.$$

ა) ვთქვათ, $n \gtrless -1$, მაშინ

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n\,d(ax+b) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C.$$

ბ) თუ $n=-1$, მაშინ ინტეგრალი ღებულობს სახეს:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Lg}\,|ax+b|+C.$$

2°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}.$$

გვაქვს:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{d\left(\frac{bx}{a}\right)}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{bx}{a}+C.$$

$3^0{}_1$. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2}.$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია ასე დავშალოთ:

$$\frac{1}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{a-bx}\right).$$

მაშასადამე,

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a-bx},$$

ახლა თუ 1^0, ბ) მაგალითს მივიღებთ მხედველობაში, გვექნება

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\operatorname{Lg}\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|+C=\frac{1}{ab}\operatorname{Lg}\frac{|a+bx|}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}+C.$$

3^0_2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{a^2x^2-b^2}.$$

სრულებით იმავე წესით, როგორც 3^0_1 შემთხვევაში, გამოვიყვანთ:

$$\int\frac{dx}{a^2x^2-b^2}=\frac{1}{2ab}\operatorname{Lg}\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right|+C=\frac{1}{ab}\operatorname{Lg}\frac{|ax-b|}{\sqrt{a^2x^2-b^2}}+C.$$

4^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

მოვახდინოთ x ცვლადის შემდეგი გარდაქმნა:

$$2ax+b=t,$$

მაშინ

$$dx=\frac{dt}{2a},$$

$$ax^2+bx+c=\frac{4a^2x^2+4abx+4ac}{4a}=\frac{(2ax+b)^2-(b^2-4ac)}{4a}=$$

$$=\frac{t^2-(b^2-4ac)}{4a}.$$

ამრიგად, J ინტეგრალი შემდეგ სახეს მიიღებს:

(20) $$J=2\int\frac{dt}{t^2-(b^2-4ac)};$$

როცა $b^2-4ac=0$, მაშინ უკანასკნელი ინტეგრალი სულ ადვილად მოიძებნება:

(21) $$J=2\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{2}{t}+C;$$

მაგრამ, თუ $b^2-4ac \neq 0$, მაშინ J ღებულობს ან 3^0_a ან 2^0 სახეს, იმისდა მიხედვით, b^2-4ac დადებითია, თუ უარყოფითი. ეს ორი შემთხვევა განვიხილოთ ცალ-ცალკე.

ა) ვთქვათ,

$$b^2-4ac > 0;$$

აღვნიშნოთ $b^2-4ac=D^2$; J ინტეგრალისათვის გვექნება

$$J=2\int\frac{dt}{t^2-D^2}=\frac{1}{D}\operatorname{Lg}\left|\frac{t-D}{t+D}\right|+C= \tag{22}$$

$$=\frac{2}{D}\operatorname{Lg}\frac{|t-D|}{\sqrt{t^2-D^2}}+C.$$

ბ) ვთქვათ,

$$b^2-4ac < 0.$$

აღვნიშნოთ ამ შემთხვევაში $b^2-4ac=-\Delta^2$. გვაქვს:

$$J=2\int\frac{dt}{t^2+\Delta^2}=\frac{2}{\Delta}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\Delta}+C. \tag{23}$$

ახლა ისევ x ცვლადს დავუბრუნდეთ; მაშინ (21), (22) და (23) ფორმულები შემდეგნაირად შეგვიძლია გავაერთიანოთ:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}\begin{cases}=\dfrac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{Lg}\dfrac{|2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}|}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+C, \\ \qquad b^2-4ac>0, \\ =\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C, \\ \qquad b^2-4ac<0, \\ =-\dfrac{2}{2ax+b}+C, \qquad b^2-4ac=0.\end{cases}$$

ამრიგად, მე-4^0 ინტეგრალის მნიშვნელობა მისი კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტის ნიშანზეა დამოკიდებული.

5^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

ამ შემთხვევაში გარდაქმნა ისეთივეა, როგორც მე-2° მაგალითში:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

6°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშით მყოფი ფუნქცია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

მაშასადამე,

$$J = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}; \tag{24}$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი მე-5° სახისაა, ხოლო მეორე ინტეგრალისათვის გვაქვს:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x\,\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int xd\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

$$= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

ჩავსვათ ეს (24)-ე ფორმულაში, მივიღებთ:

$$J = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - J,$$

საიდანაც

$$J = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$

J ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვთვალოთ ცვლადის გარდაქმნის ხერხითაც.

თუ მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას

$$x = a\sin t,$$

მივიღებთ

$$dx = a\cos t\,dt,\quad t = \arcsin\frac{x}{a},\quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t;$$

ამრიგად,

$$J = a^2 \int \cos^2 t\, dt;$$

მაგრამ

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}.$$

მაშასადამე,

$$J = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\, dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + C.$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ x ცვლადს, მივიღებთ

$$J = \frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

მივიღეთ იგივე შედეგი, როგორც წინათ.

7°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx.$$

აქ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია ასე გარდავქმნათ:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

მაშასადამე,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

8°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^n},$$

სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო $a > 0$. ამ §-ის მე-2° მაგალითის ძალით გვექნება

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} + C;$$

ამ შემთხვევაში აუცილებელი პირობა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გაწარმოებისათვის შესრულებულია, ვინაიდან $a \neq 0$; ამიტომ

თუ მოვახდენთ გაწარმოებას ინტეგრალის ნიშნის ქვევით a პარა-მეტრით $(n-1)$-ჯერ (§§ 10, 11), მივიღებთ

$$\int \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)dx = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+C;$$

მაგრამ

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x^2+a)^n};$$

მაშასადამე, უკანასკნელს შეგვიძლია ასეთი სახე მივცეთ:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+C.$$

ეს არის კლასიკური ფორმულა, რომელიც Bertrand-ის მიერ არის მოყვანილი პირველად (Bertrand. Traité de calcul intégral, P.20).

9⁰. $$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\operatorname{Lg}\cos x + C.$$

ანალოგიურად ვიპოვით

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \operatorname{Lg}\sin x + C.$$

10⁰. გამოვთვალოთ ინტეგრალები

$$\int \sec x dx,\ \int \operatorname{cosec} x dx.$$

ამ ორი ინტეგრალიდან მოვძებნოთ ჯერ მეორე; $\operatorname{cosec} x$ შემდეგ-ნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}};$$

მაშასადამე,

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \operatorname{Lg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

ვინაიდან $\sec x = \operatorname{cosec}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, ამიტომ

$$\int \sec x dx = \operatorname{Lg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]+C.$$

11°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \arcsin x dx.$$

თუ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების წესს, მივიღებთ:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C.$$

ანალოგიურად ვიპოვით

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}+C.$$

12°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \operatorname{arc\,tg} x dx.$$

აქ, როგორც წინათ, ნაწილობრივი ინტეგრების წესი გამოვიყენოთ:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{Lg} \sqrt{1+x^2}+C.$$

ანალოგიურად

$$\int \operatorname{arc\,cotg} x = x \operatorname{arc\,cotg} x + \operatorname{Lg} \sqrt{1+x^2}+C.$$

თავი II

ინტეგრება ალგებრული ფუნქციებისა

A. რაციონალური ფუნქციები

I. დაშლის ხერხი

§ 12. საკითხის დასმა და მისი გამარტივება. ერთის დამოუკიდებელი x ცვლადის ნამდვილი რაციონალური ფუნქციის ზოგადი სახე არის $\frac{f(x)}{F(x)}$, სადაც $f(x)$ და $F(x)$ ნამდვილი კოეფიციენტებიანი პოლინომებია:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m,$$
$$F(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1} x + B_n.$$

რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრება შემდეგი სახის ინტეგრალის მოძებნაში მდგომარეობს:

$$(1) \qquad \int \frac{f(x)}{F(x)}\, dx.$$

ასეთი ინტეგრალების შესასწავლად ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

1. $\frac{f(x)}{F(x)}$ წესიერი წილადია, ე. ი. $f(x)$ პოლინომის ხარისხი $F(x)$-ის ხარისხზე დაბალია.

2. ეს წილადი უკვეცია, ე. ი. $f(x)$ და $F(x)$ პოლინომებს საერთო მამრავლი არ აქვთ.

3. $F(x)$ პოლინომის უფროსი წევრის კოეფიციენტი $=1$.

მართლაც,

1. ვთქვათ, $f(x)$ პოლინომის ხარისხი $F(x)$-ის ხარისხზე დაბალი არ არის; მაშინ მრიცხველს მნიშვნელზე რომ გავყოფთ, მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{F(x)},$$

სადაც $\varphi(x)$ არის $(m-n)$-ური ხარისხის პოლინომი, ხოლო $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ წესიერი წილადია. უკანასკნელი ტოლობის ძალით (1) ინტეგრალი შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \varphi(x)\,dx + \int \frac{\psi(x)}{F(x)}\,dx.$$

მაგრამ მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალებიდან პირველი უშუალოდ მოიძებნება, ვინაიდან $\varphi(x)$ პოლინომია; დაგვრჩა, მაშასადამე, მოვძებნოთ მხოლოდ მეორე ინტეგრალი, რომელიც წესიერი წილადიდანაა აღებული.

ამრიგად, ზოგადი სახის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება ყოველთვის წესიერი წილადის ინტეგრალის მოძებნაზე მიიყვანება.

2. ვთქვათ, $f(x)$ და $F(x)$ პოლინომებს აქვთ საერთო მამრავლი და $D(x)$ ამ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფია, მაშინ

$$f(x) = D(x) f_1(x); \quad F(x) = D(x) F_1(x).$$

$f_1(x)$ და $F_1(x)$ ურთიერთ მარტივი პოლინომებია; მაშასადამე, ჩვენს წილადს $D(x)$-ზე რომ შევკვეცავთ, მივიღებთ უკვეც $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ წილადს.

3. დასასრულს, ჩვენი წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს B_0-ზე რომ გავყოფთ, მივიღებთ წილადს, რომლის მნიშვნელის უფროსი წევრის კოეფიციენტიც არის 1.

ამრიგად, ყოველთვის შესაძლოა $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის მიყვანა იმ მარტივი სახის წილადზე, რომელიც სამი ზემოაღნიშნული წინადადებით არის დახასიათებული. მაშასადამე, ამ წინადადებათა მიღება ჩვენს თეორიაში სავსებით გამართლებულია.

თურმე აღნიშნული მარტივი სახის წილადი ფუნქცია შემდეგი მარტივი წილადთა

$$\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}, \quad \frac{Px+Q}{[(x-p)^2+q^2]^k}$$

ჯამის სახით იშლება; α და k მთელი დადებითი რიცხვებია, რომლებიც $\geqslant 1$, ხოლო a, p, q, A, P, Q მუდმივი რიცხვებია.

მაშასადამე, რაციონალურ წილადთა ინტეგრება მიიყვანება ასეთი სახის

$$\int \frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\,dx, \quad \int \frac{Px+Q}{[(x-p)^2+q^2]^k}\,dx$$

ინტეგრალების მოძებნაზე.

ამრიგად, რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრების თეორია ორი შემდეგი საკითხით ამოიწურება:

ა) უნდა აღმოვაჩინოთ ხერხი, რომლითაც ყოველი რაციონალური წილადი ზემოაღნიშნულ ელემენტარულ ნაწილთა ჯამის სახით დაიშალოს.

ბ) უნდა მოვძებნოთ ელემენტარულ წილადთა ინტეგრების ხერხი.

შევისწავლოთ უპირველესად ა) საკითხი. როგორც ქვემოთ დავინახავთ, რაციონალური წილადის დაშლა თხოულობს მნიშვნელის ფესვთა ცოდნას; ამისდა მიხედვით ორი სხვადასხვა ხასიათის შემთხვევა წარმოგვიდგება:

I. $F(x)$ პოლინომს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები აქვს.

II. $F(x)$ პოლინომის ფესვებს შორის წარმოსახვითი ფესვებიც იმყოფება.

ეს ორი შემთხვევა ცალ-ცალკე განვიხილოთ.

§ 13. რაციონალური წილადის დაშლა იმ შემთხვევაში, როცა მნიშვნელს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები აქვს. ვთქვათ, $F(x)$-ის ფესვებია $a, b, c, \ldots, l$, ხოლო $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ ამ ფესვთა ჯერადობანია შესაბამისად. მაშინ

$$F(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}.$$

ცხადია, რომ $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=n$. კერძოდ, როდესაც ზოგიერთი ამ ხარისხთა მაჩვენებლებიდან არის 1, მაშინ შესაბამი ფესვი მარტივია.

ახლა $F(x)$ პოლინომი შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$F(x)=(x-a)^{\alpha}F_1(x),$$

სადაც

$$F_1(x)=(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}.$$

დავამტკიცოთ, რომ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი ასე იშლება:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{f_{\alpha}(x)}{F_1(x)},$$

სადაც A_0, $A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ მუდმივებია, ხოლო $\dfrac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}$ არის წესიერი წილადი. ამისათვის უპირველესად აღმოვაჩინოთ, რომ შეიძლება $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ წილადის შემდეგნაირად წარმოდგენა:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} F_1(x)},$$

სადაც A_0 მუდმივი კოეფიციენტია, ხოლო $f_1(x)$ არის პოლინომი, რომლის ხარისხი $(x-a)^{\alpha-1} F_1(x)$ პოლინომის ხარისხზე დაბალია.

მართლაც, ნებისმიერი A რიცხვისათვის გვაქვს იგივეობა:

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f(x) - AF_1(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)}.$$

ავიღოთ ახლა A მუდმივი ისე, რომ

$$f(x) - AF_1(x)$$

$(x-a)$-ზე გაიყოს, რისთვისაც აუცილებელია და ამავე დროს საკმარისიც, რომ

$$f(a) - AF_1(a) = 0.$$

მაგრამ $f(a) \neq 0$, $F_1(a) \neq 0$ და ამიტომ A-სათვის, რომელიც უკანასკნელ ტოლობას აკმაყოფილებს, ერთი სრულებით გარკვეული A_0 მნიშვნელობა მოიპოვება

$$A_0 = \frac{f(a)}{F_1(a)}.$$

მივიღოთ ახლა მე-(2) იგივეობაში $A = A_0$; მაშინ გვექნება

$$f(x) - A_0 F_1(x) = (x-a) f_1(x)$$

და როდესაც ამას აღნიშნულ იგივეობაში ჩავსვამთ, ეს უკანასკნელი შემდეგნაირად გადმოიწერება:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-\alpha)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} F_1(x)},$$

რისი დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

ამ წესის მიმდევრობითი გამოყენება შემდეგ იგივეობებზე მიგვიყვანს

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)},$$

$$\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)}=\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\frac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}F_1(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_{\alpha-1}(x)}{(x-a)F_1(x)}=\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}.$$

თუ წევრ-წევრა შევკრებთ ყველა ამ და წინათ მიღებულ იგივეობებს, მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}$$

ტოლობას, რომლის დამტკიცებაც ჩვენს მიზანს შეადგენდა.

მიღებული წესიერი $\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}$ წილადი აღებულ წილადზე უფრო მარტივია, ვინაიდან მისი მნიშვნელი $x=a$ ფესვს უკვე არ შეიცავს.

ახლა თუ აღნიშნული წესის თანახმად სხვა დანარჩენ $b, c, \ldots, l$ ფესვებსაც განვიხილავთ, მაშინ ანალოგიური იგივეობანი გვექნება:

$$\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}=\frac{B_0}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\frac{f_{\alpha,\beta}(x)}{F_{1,\beta}(x)},$$

$$\frac{f_{\alpha,\beta}(x)}{F_{1,\beta}(x)}=\frac{C_0}{(x-c)^\gamma}+\frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}}+\ldots+\frac{C_{\gamma-1}}{x-c}+\frac{f_{\alpha,\beta,\gamma}(x)}{F_{1,\beta,\gamma}(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_{\alpha,\beta,\ldots,\varkappa}(x)}{F_{1,\beta,\ldots,\varkappa}(x)}=\frac{L_0}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l};$$

თუ შევკრებთ ყველა ამ იგივეობას, მივიღებთ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის შემდეგ დაშლას:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}&=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\ &+\frac{B_0}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{L_0}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.\end{aligned}\right.$$

ამრიგად, დამტკიცებულია $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის უკანასკნელი სახით დაშლა. დაგვრჩა ახლა ამ დაშლის კოეფიციენტთა მოსაძებნი ხერხი აღმოვაჩინოთ. შემდეგ §-ში მოგვყავს ორი ასეთი ხერხი ყველაზე უფრო მიღებული და ამასთანავე მარტივიც.

§ 14. რაციონალური წილადის დაშლის კოეფიციენტების მოძებნა იმ შემთხვევაში, როცა მნიშვნელის ყველა ფესვი ნამდვილია.

I. კოეფიციენტთა შედარების ხერხი. შევკრიბოთ მე-(3) იგივეობის მარჯვენა ნაწილის ყველა მარტივი წილადი. მაშინ მივიღებთ წილადს, რომლის მნიშვნელი არის $F(x)$, ხოლო მრიცხველი იქნება $(n-1)$ ხარისხის პოლინომი. ცხადია, რომ ამ მრიცხველის კოეფიციენტები იქნება $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha-1}, B_0, \dots, B_{\beta-1}, \dots$ კოეფიციენტების წრფივი გამოსახულებანი და, ამას გარდა, იგი $f(x)$-ს ეტოლება იგივურად. სწორედ ამიტომ ორივე პოლინომის კოეფიციენტები x-ის ტოლი ხარისხის წინ ერთი და იგივე უნდა იყოს. გავუტოლებთ რა ამ კოეფიციენტებს ერთმანეთს მივიღებთ სისტემას n განტოლებისა n უცნობით. უკანასკნელი სისტემის ამონახსენი ყველა ამ კოეფიციენტის მნიშვნელობას მოგვცემს.

ვინაიდან $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის მარტივ წილადებად დაშლა წინასწარ დადგენილია, ამიტომ ზემოაღნიშნულ განტოლებათა სისტემა ყოველთვის თავსებადია.

II. მიმდევრობითი გაწარმოების ხერხი. ვიპოვოთ ჯერ A კოეფიციენტები. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f_A(x)=(x-a)^\alpha \frac{f(x)}{F(x)}. \tag{4}$$

ახლა თუ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის იმ დაშლას მივიღებთ მხედველობაში, რომელიც a ფესვს შეესაბამება, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$f_A(x)=A_0+A_1(x-a)+\dots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}+$$
$$+(x-a)^\alpha \frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)},$$

სადაც $F_1(a) \neq 0$. მაგრამ ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილი $f_A(x)$ ფუნქციის დაშლას წარმოადგენს $(x-a)$ ბინომის ხარისხით, და

ვინაიდან ასეთი დაშლა მხოლოდ ერთნაირად არის შესაძლო, ამიტომ მისი კოეფიციენტები ტ ე ი ლ ო რ ი ს მწკრივის კანონით იქნება შედგენილი, ე. ი.

$$(5)\qquad A_0=f_A(a),\ A_1=f'_A(a),\ A_2=\frac{f''_A(a)}{1\cdot 2},\ldots,A_i=$$

$$=\frac{f^{(i)}_A(a)}{1.2\ldots i},\ldots;$$

სხვა დანარჩენი კოეფიციენტი ანალოგიურად მოიძებნება; ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f_B(x)=(x-b)^\beta\,\frac{f(x)}{F(x)},\ f_C(x)=(x-c)^\gamma\,\frac{f(x)}{F(x)},\ldots,f_L(x)=$$

$$=(x-l)^\lambda\,\frac{f(x)}{F(x)},$$

რომელთა საშუალებით გვექნება

$$B_0=f_B(b),\ B_1=f'_B(b),\ B_2=\frac{f''_B(b)}{1\cdot 2},\ldots$$

. . . .

$$L_0=f_L(l),\ L_1=f'_L(l),\ L_2=\frac{f''_L(l)}{1\cdot 2},\ldots;$$

მაგრამ პრაქტიკულად წილადის მაღალი რიგის წარმოებულთა მოძებნა დიდ სირთულეს წარმოადგენს, ამიტომ მიღებულ ფორმულებს უფრო თეორიული ხასიათი აქვთ. კოეფიციენტთა პრაქტიკული გამოანგარიშებისათვის უფრო მიზანშეწონილად შემდეგი წესი უნდა ჩაითვალოს:

მე-(4) ფორმულა წინათ მიღებული აღნიშვნების თანახმად ასე გადმოვწეროთ:

$$f_A(x)=\frac{f(x)}{F_1(x)},$$

საიდანაც

$$f(x)=F_1(x)\,f_A(x).$$

ამ იგივეობის ორივე ნაწილი გავაწარმოვოთ ერთჯერ, ორჯერ ... და საზოგადოდ n-ჯერ. ამრიგად, გვექნება შემდეგი იგივეობები:

$$f'(x)=F'_1(x)f_A(x)+F_1(x)f'_A(x),$$
$$f''(x)=F''_1(x)f_A(x)+2F'_1(x)f'_A(x)+F_1(x)f''_A(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(k)}(x)=F^{(k)}_1(x)f_A(x)+k F_1^{(k-1)}(x)f'_A(x)+$$
$$+\frac{k(k-1)}{1\,.\,2}F_1^{(k-2)}(x)f''_A(x)+\ldots+F_1(x)f^{(k)}_A(x).$$

ჩავსვათ ახლა მიღებულ ტოლობებში $x=a$, მაშინ მე-(5) ტოლობათა ძალით გვექნება:

$$(6)\qquad\begin{cases} f(a)=A_0F_1(a), \\ f'(a)=A_0F'_1(a)+A_1F_1(a), \\ f''(a)=A_0F''_1(a)+2A_1F'_1(a)+2A_2F_1(a), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(k)}(a)=A_0F^{(k)}_1(a)+kA_1F_1^{(k-1)}(a)+k(k- \\ -1)A_2F_1^{(k-2)}(a)+\ldots+k(k-1)\ldots2_1\cdot A_kF_1(a). \end{cases}$$

პირველი ამ ტოლობათაგან მოგვცემს A_0-ს მნიშვნელობას; მეორიდან მივიღებთ A_1-ის მნიშვნელობას, მესამიდან A_2-ს და ასე შემდეგ.

სხვა დანარჩენი კოეფიციენტები B, C,... ანალოგიურად მოიძებნება.

თუ $F(x)$ პოლინომის ყველა ფესვი მარტივია, მაშინ $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ წილადის დაშლას ექნება შემდეგი სახე:

$$(7)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}.$$

ამ შემთხვევაში A, B,....L კოეფიციენტები ადვილად გამოითვლება. მართლაც, მე-(7) ტოლობა ასე გადმოვწეროთ:

$$(8)\qquad f(x)=A\frac{F(x)}{x-a}+B\frac{F(x)}{x-b}+\ldots+L\frac{F(x)}{x-l}.$$

მოვძებნოთ ჯერ A კოეფიციენტი; ამისათვის ამ ტოლობის ორივე ნაწილში თუ ჩავსვამთ $x=a$ მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$(9)\qquad f(a)=A\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_{x=a};$$

მაგრამ L'Hospital-ის წესით

$$\lim_{x=a}\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]=F'(a)$$

და ამიტომ მე-(9) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$f(a)=AF'(a),$$

საიდანაც

(9')
$$A=\frac{f(a)}{F'(a)}.$$

მარჯვენა ნაწილის წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ნულისაგან არიან განსხვავებული, ამიტომ A-ს გარკვეული მნიშვნელობა აქვს, რომელიც განსხვავდება 0-დან და ∞-დან.

დანარჩენ $B, C, \ldots, L$ კოეფიციენტთა მოძებნა ამავე წესით მოხდება: ამისათვის მე-(4) ტოლობის ორივე ნაწილში უნდა ჩავსვათ $x=b,\ c, \ldots, l$ მნიშვნელობანი შესაბამისად, რაც მოგვცემს

$$B=\frac{f(b)}{F'(b)},\quad C=\frac{f(c)}{F'(c)},\ldots,L=\frac{f(l)}{F'(l)}.$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, მე-(8) ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$f(x)=\frac{f(a)}{F'(a)}\,\frac{F(x)}{x-a}+\frac{f(b)}{F'(b)}\,\frac{F(x)}{x-b}+\ldots+\frac{f(l)}{F'(l)}\,\frac{F(x)}{x-l}.$$

მაგალითი 1. დავშალოთ მარტივ წილადებად შემდეგი წილადი:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{5x-1}{x(x^2-1)}.$$

აქ მნიშვნელის ფესვებია $x=0,\ 1,\ -1$. მოვძებნოთ დაშლის ყველა კოეფიციენტი. რადგანაც

$$F'(x)=3x^2-1,$$

ამიტომაც,

$$A=1,\ B=\frac{f(1)}{F'(1)}=2,\ C=\frac{f(-1)}{F'(-1)}=-3.$$

მაშასადამე, აღებული წილადი შემდეგნაირად იშლება:

$$\frac{5x-1}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}.$$

მაგალითი 2. დავშალოთ მარტივ წილადებად შემდეგი წილადი.

$$\frac{15x^4+2x-1}{x^3(x^2-1)^2}.$$

ამ წილადის მნიშვნელს აქვს ფესვები: სამჯერადი $x=0$, ორჯერადი $x=1$ და ორჯერადი $x=-1$, მაშასადამე, მის დაშლას შემდეგი სახე ექნება:

$$(10) \qquad \frac{15x^4+2x-1}{x^3(x^2-1)^2}=\frac{A_0}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B_0}{(x-1)^2}+$$
$$+\frac{B_1}{x-1}+\frac{C_0}{(x+1)^2}+\frac{C_1}{x+1}.$$

ამ დაშლის ყველა კოეფიციენტის მოსაძებნად გამოვიყენოთ ორივე ზემოაღნიშნული ხერხი.

1^0. კოეფიციენტთა შედარების ხერხი. მე-(10) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის წილადებს რომ შევკრებთ, მივიღებთ წილადს, რომლის მრიცხველია

$$(A_2+B_1+C_1)\,x^6+(A_1+B_0+B_1+C_0-$$
$$-C_1)x^5+(A_0-2A_2+2B_0-B_1$$
$$-2C_0-C_1)x^4+(B_0-2A_1-B_1+C_0+C_1)x^3+$$
$$+(A_2-2A_0)x^2+A_1x+A_0.$$

უკანასკნელი გამოსახულება მარცხენა ნაწილის წილადის მრიცხველს უნდა ეტოლებოდეს იგივურად, რაც მხოლოდ მაშინაა შესაძლო, როცა ამ ორი პოლინომის კოეფიციენტები x-ის ერთსა და იმავე ხარისხის წინ ტოლნი არიან, ე. ი.

$$\begin{aligned}A_2+B_1+C_1&=0,\\ A_1+B_0+B_1+C_0-C_1&=0,\\ A_0-2A_2+2B_0-B_1-2C_0-C_1&=15,\\ -2A_1+B_0-B_1+C_0+C_1&=0,\\ A_2-2A_0&=0,\\ A_1&=2,\\ A_0&=-1.\end{aligned}$$

ამრიგად, მიღებულია შვიდი წრფივი განტოლების სისტემა შვიდი უცნობით. ამოვხსნით რა ამ სისტემას, გვექნება:

$$A_0=-1,\ A_1=2,\ A_2=-2,\ B_0=4,\ B_1=-$$
$$-\frac{1}{2},\ C_0=-3,\ C_1=\frac{5}{2}.$$

მაშასადამე, ჩვენი წილადი ასე იშლება:

$$\frac{15x^4+2x-1}{x^3(x^2-1)^2}=-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{4}{(x-1)^2}-$$

$$-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{(x+1)^3}+\frac{5}{2(x+1)}.$$

2°. მიმდევრობითი გაწარმოების ხერხი. ამ შემთხვევაში

$$f(x)=15x^4+2x-1,\ F_1(x)=(x^2-1)^2,\ F_2(x)=x^3(x+1)^2,$$
$$F_3(x)=x^3(x-1)^2.$$

მოვძებნოთ ჯერ A კოეფიციენტები, რისთვისაც, როგორც მე (6) სისტემა გვიჩვენებს, საჭიროა ვიცოდეთ $f'(1)$, $f''(1)$, $F'_1(1)$, $F''_1(1)$. მაგრამ

$$f'(x)=60x^3+2,\ f''(x)=180x^2,$$
$$F'_1(x)=4x^3-4x,\ F''_1(x)=12x^2-4.$$

მე-(6) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$-1=A_0,$$
$$2=A_1,$$
$$0=-4A_0+2A_2,$$

საიდანაც გვექნება $A_0=-1,\ A_1=2,\ A_2=-2.$

მოვძებნოთ ახლა B კოეფიციენტები. ვინაიდან

$$F'_2(x)=5x^4+8x^3+3x^2,$$

ამიტომ ამ კოეფიციენტთა მოსაძებნად გვექნება სისტემა

$$16=4B_0,$$
$$62=16\,B_0+4B_1.$$

საიდანაც

$$B_0=4,\quad B_1=-\frac{1}{2}.$$

დაგვრჩა მოვძებნოთ C კოეფიციენტები. რადგანაც

$$F'_3(x)=5x^4-8x^3+3x^2,$$

ამიტომ ზემოაღნიშნული მე-(6) სისტემა ამ შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$12=-4C_0,$$
$$-58=16C_0-4C_1.$$

საიდანაც გვექნება

$$C_0=-3, \ C_1=\frac{5}{2}.$$

ამრიგად, ორივე ხერხით კოეფიციენტების ერთი და იგივე მნიშვნელობათა სისტემა მივიღეთ, რაც სრულებით მოსალოდნელი იყო.

§ 15. რაციონალური წილადის დაშლა იმ შემთხვევაში, როცა მნიშვნელი წარმოსახვით ფესვებს შეიცავს. ვთქვათ, $F(x)$ პოლინომს აქვს წარმოსახვითი $\alpha+\beta i$ ფესვი, რომლის ჯერადობა არის k. იმავე პოლინომს k ჯერადობის შეუღლებული $\alpha-\beta i$ ფესვიც ექნება აგრეთვე. მაშასადამე, $F(x)$ პოლინომი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$F(x)=[x-(\alpha+\beta i)]^k\,[x-(\alpha-\beta i)]^k\,F_1(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k\,F_1(x),$$

სადაც $F_1(x)$ არის პოლინომი, რომლის ხარისხი $2k$ ერთეულით უფრო დაბალია, ვიდრე $F(x)$ პოლინომის ხარისხი.

განვიზრახოთ ახლა $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის დაშლა ამ შემთხვევაში. ამისათვის დავამტკიცოთ უპირველესად, რომ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0x+B_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}+\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}F_1(x)}, \tag{11}$$

სადაც $f_1(x)$ არის პოლინომი, რომლის ხარისხი უფრო დაბალია, ვიდრე $[(x-\alpha)^2+\beta_2]^{k-1}F_1(x)$ პოლინომის ხარისხი. ამ მიზნისათვის შევადგინოთ იგივეობა

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}+\frac{f(x)-(Ax+B)\,F_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k\,F_1(x)}, \tag{12}$$

სადაც A და B სრულებით ნებსითი ნამდვილი რიცხვებია.

მოვძებნოთ ახლა ეს ორი რიცხვი ისე, რომ ტოლობის მარჯვენა წევრის $f(x)-(Ax+B)F_1(x)$ მრიცხველი $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ ჯამზე გაიყოს, რისთვისაც აუცილებელია და ამავე დროსაც საკმარისი, რომ $\alpha+\beta i$ იყოს ამ მრიცხველის ფესვი, ე. ი.

$$f(\alpha+\beta i)-[(\alpha+\beta i)A+B]F_1(\alpha+\beta i)=0. \tag{13}$$

აქედან ვიპოვოთ

$$A\alpha+B+A\beta i=\frac{f(\alpha+\beta i)}{F_1(\alpha+\beta i)}.$$

ვინაიდან $F_1(\alpha+\beta i)\neq 0$, ამიტომ ამ ტოლობის მარჯვენა წევრი წარმოადგენს გარკვეულ კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აღვნიშნოთ P_0+Q_0i-თი. მაშასადამე, ეს ტოლობა შემდეგ ორ ტოლობას წარმოშობს:

$$A\alpha+B=P_0;\ A\beta=Q_0;$$

აღვნიშნოთ A და B რიცხვთა ის მნიშვნელობები, რომლებიც უკანასკნელ სისტემას აკმაყოფილებენ A_0 და B_0-ით შესაბამისად; მაშინ

$$A_0=\frac{Q_0}{\beta};\ B_0=P_0-\frac{Q_0\alpha}{\beta}.$$

ამრიგად, მე-(13) ტოლობა შესრულებულია, როცა $A=A_0$, $B=B_0$ და ამიტომ $f(x)-(A_0x+B_0)F_1(x)$ გაიყოფა $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ ჯამზე. მაშასადამე,

$$f(x)-(A_0x+B_0)F_1(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\,f_1(x),$$

სადაც $f_1(x)$ პოლინომია.

ჩავსვათ ახლა მე-(12) იგივეობაში $A=A_0$, $B=B_0$, მაშინ უკანასკნელი ტოლობის ძალით ეს იგივეობა მიიღებს მე-(11) სახეს და ამით დამტკიცება შესრულებული იქნება.

გარდავქმნათ ახლად მიღებული $\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}F_1(x)}$ წილადი აღნიშნული წესით და შემდეგ ასეთი გარდაქმნის პროცესი მანამდის განვაგრძოთ, სანამ მნიშვნელში $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ ჯამის ხარისხი არ მოისპობა.

ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ იგივეობებს:

$$\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}F_1(x)}=\frac{A_1x+B_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}}+$$

$$+\frac{f_2(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-2}F_1(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_{k-1}(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]F_1(x)}=\frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f_k(x)}{F_1(x)}.$$

შევკრიბოთ წევრ-წევრა ყველა ეს და წინათ მიღებული მე-(11) იგივეობა, მივიღებთ:

$$(14)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0x+B_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}+\frac{A_1x+B_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}}+\dots+$$

$$+\frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f_k(x)}{F_1(x)}.$$

ყველა A და B გარკვეული მუდმივი რიცხვებია, ხოლო $\frac{f_k(x)}{F_1(x)}$ არის წესიერი წილადი.

ამგვარად, $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის დაშლა მიიყვანება $\frac{f_k(x)}{F_1(x)}$ წილადის დაშლაზე, რომელიც უფრო მარტივია, ვიდრე პირველი. თუ $\frac{f_k(x)}{F_1(x)}$ წილადის მნიშვნელი კიდევ შეიცავს წარმოსახვით ფესვებს, მაშინ ამ უკანასკნელ წილადს ისე უნდა მოვექცეთ, როგორც მოვექეცით აღებულ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადს და ეს პროცესი მანამდის უნდა განვაგრძოთ, სანამ არ მივიღებთ წილადს, რომლის მნიშვნელს წარმოსახვითი ფესვები არ ექნება უკვე. ამის შემდგომ დაშლა იმ წესით სწარმოებს, რომელიც ზემოთ იყო მოყვანილი.

ამრიგად, წესიერ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის დაშლის ზოგადი სახე შემდეგია:

$$(15)\left\{\begin{aligned}
&\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\
&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\quad+\frac{L_0}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\dots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}\\
&\quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+\frac{P_0x+Q_0}{[(x-p)^2+q^2]^\varkappa}+\frac{P_1x+Q_1}{[(x-p)^2+q^2]^{\varkappa-1}}+\dots+\frac{P_{\varkappa-1}x+Q_{\varkappa-1}}{(x-p)^2+q^2}\\
&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+\frac{R_0x+S_0}{[(x-r)^2+s^2]^\sigma}+\frac{R_1x+S_1}{[(x-r)+s^2]^{\sigma-1}}+\dots+\frac{R_{\sigma-1}x+S_{\sigma-1}}{(x-r)^2+s^2}.
\end{aligned}\right.$$

დაგვრჩა ახლა ის ხერხი აღმოვაჩინოთ მხოლოდ, რომლის საშუალებითაც შესაძლო იყოს მოძებნა ყველა კოეფიციენტისა, რომლებიც წარმოსახვით ფესვებს შეესაბამებიან.

§ 16. დაშლის იმ კოეფიციენტთა მოძებნა, რომლებიც წარმოსახვით ფესვებს შეესაბამებიან.

1. კოეფიციენტთა შედარების ხერხი. ვთქვათ, $F(x)$ პოლინომის n ფესვს შორის μ ფესვი ნამდვილია, ხოლო 2ν ფესვი წარმოსახვითია; მაშინ $n=\mu+2\nu$. ცხადია, რომ რიცხვი მე-(15) ტოლობების უცნობ კოეფიციენტებისა A_0, A_1,...; L_0, L_1,...; P_0, Q_0,...; P_1, Q_1,... აგრეთვე იქნება $\mu+2\nu=n$.

შევკრიბოთ ახლა მე-(15) იგივეობის მარჯვენა ნაწილის ყველა მარტივი წილადი, მაშინ მივიღებთ, როგორც წინათ, წილადს, რომლის მნიშვნელიც არის $F(x)$; ხოლო რაც შეეხება მრიცხველს, იგი წარმოადგენს $(n-1)$ ხარისხის პოლინომს, რომლის კოეფიციენტებია n აღნიშნულ უცნობ კოეფიციენტთა წრფივი გამოსახულებანი. მაგრამ ვინაიდან მარცხენა ნაწილის წილადსა და მიღებული მარჯვენა ნაწილის წილადს ერთი და იგივე მნიშვნელი აქვთ, ამიტომ მათი მრიცხველებიც ტოლი უნდა იქნენ იგივურად, ე. ი. ამ ორი მრიცხველის კოეფიციენტები x-ის ერთი და იგივე ხარისხის წინ ტოლი იქნებიან. გავუტოლებთ რა ამ კოეფიციენტებს ერთმანეთს, მივიღებთ n წრფივ განტოლებათა სისტემას აღნიშნული n უცნობი კოეფიციენტით. უკანასკნელი სისტემის ამონახსნი ყველა ამ კოეფიციენტის მნიშვნელობას მოგვცემს.

II. მიმდევრობითი გაწარმოების ხერხი. მე-(14) ტოლობა შემდეგნაირად გადმოვწეროთ:

$$f(x)=F_1(x)\{(A_0x+B_0)+(A_1x+B_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2)$$
$$+\cdots+(A_{k-1}x+B_{k-1})[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}\}+f_k(x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k,$$

საიდანაც გვექნება

$$f(x)-F_1(x)\{(A_0x+B_0)+(A_0x+B_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$
$$+\cdots+(A_{k-1}x+B_{k-1})[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}\}=f_k(x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k.$$

ცხადია, რომ ეს ტოლობა არის იგივეობა. მაგრამ ამ იგივეობის მარჯვენა წევრს k ჯერადობის $\alpha+\beta i$ ფესვი აქვს; მაშასადამე, მარცხენა წევრსაც k ჯერადობის იგივე $\alpha+\beta i$ ფესვი ექნება. ამიტომ თვით ეს მარცხენა წევრი, როგორც ყველა მისი წარმოებუ-

ლი $k-1$ რიგამდე მოისპობა $x=\alpha+\beta i$ მნიშვნელობისათვის. აღვნიშნოთ ეს მარცხენა წევრი—$R(x)$-ით:

$$R(x)=F_1(x)\{(A_0x+B_0)+(A_1x+B_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$
$$+\dots+(A_{k-1}x+B_{k-1})][(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}\}-f(x).$$

ამრიგად, გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$$(16)\qquad \begin{cases}[R(x)]_{x=\alpha+\beta i}=0,\\ [R'(x)]_{x=\alpha+\beta i}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ [R^{(k-1)}(x)]_{x=\alpha+\beta i}=0.\end{cases}$$

მაგრამ ამ ტოლობათა მარცხენა წევრები $\alpha+\beta i$ სიდიდის ჩასმის შემდგომ წარმოადგენენ კომპლექსურ რიცხვებს, რომელნიც A_0, $A_1,\dots$ და B_0, $B_1,\dots$ კოეფიციენტთა მიმართ წრფივი არიან. მაშასადამე, მათი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ნულს უნდა გავუტოლოთ, რაც მოგვცემს $2k$ განტოლების სისტემას $2k$ უცნობით A_0, B_0; A_1, B_1; $A_2, B_2;\dots$; A_{k-1}, B_{k-1}. ეს სისტემა, როგორც მის განტოლებათა აგებულებიდან ჩანს, ყოველთვის თავსებადია, ე. ი. ის ყოველთვის მოგვცემს უკანასკნელი კოეფიციენტების მნიშვნელობათა ერთს და მხოლოდ ერთს სისტემას. ამრიგად, მე-(16) სისტემის ამოხსნით მოძებნილი იქნება დაშლის ის ნაწილი, რომელიც $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ ფესვებით არის განსაზღვრული.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავშალოთ მარტივ წილადებად წილადი

$$\frac{3x^4+2x^3-3}{(x^2+1)^3}.$$

ამ წილადის მნიშვნელს აქვს სამჯერადი ფესვები: $x=i$ და $x=-i$. მაშასადამე, მისი დაშლა ასეთია

$$\frac{A_0x+B_0}{(x^2+1)^3}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+1)^2}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+1}.$$

მოვძებნოთ ახლა დაშლის ყველა კოეფიციენტი. $R(x)$ ფუნქციას ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$R(x)=\{(A_0x+B_0)+(A_1x+B_1)(x^2+1)+(A_2x+B_2)(x^2+1)^2\}$$
$$-(3x^4+2x^3-3).$$

მაშასადამე, მე-(16) სისტემა შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$[A_0x+B_0-3x^4-2x^3+3]_{x=i}=A_0i+B_0-3+2i+3=0,$$
$$[A_0+2A_1x^2+2B_1x-12x^3-6x^2]_{x=i}=A_0-2A_1+2B_1i+12i+6=0,$$
$$[6A_1x+2B_1+8A_2x^3+8B_2x^2-36x^2-12x]_{x=i}=6A_1i+2B_1-8A_2i,$$
$$-8B_2+36-12i=0.$$

აქედან

$$A_0=-2,\ B_0=0;\ A_1=2,\ B_1=-6,\ A_2=0,\ B_2=3.$$

მაშასადამე,

$$\frac{3x^4+2x^3-3}{(x^2+1)^3}=-\frac{2x}{(x^2+1)^3}+\frac{2x-6}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{x^2+1}. \tag{17}$$

§ 17. **რაციონალური წილადების ინტეგრება.** მას შემდგომ, რაც დავრწმუნდით, რომ ყოველი რაციონალური ფუნქცია მარტივი წილადების

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha},\quad \frac{Px+Q}{[(x-p)^2+q^2]^k}$$

ჯამის სახით იშლება, დაგვრჩენია მხოლოდ მოვახდინოთ ამ მარტივ წილადთა ინტეგრება. ამით, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, სავსებით იქნება ამოწურული საკითხი თვით რაციონალური წილადების ინტეგრების შესახებაც.

I. ინტეგრალი აღებული პირველი სახის წილადიდან არის

$$J=A\int\frac{dx}{(x-a)^\alpha};$$

მაგრამ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის დაშლაში ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება: $\alpha=1$, $\alpha>1$.

ვთქვათ $\alpha=1$, მაშინ

$$J=A\int\frac{dx}{x-a}=A\,\mathrm{Lg}\,(x-a)+C.$$

ვთქვათ ახლა $\alpha>1$; მაშინ

$$J=A\int\frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\frac{A}{1-\alpha}\,\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}+C.$$

მაშასადამე, იმ შემთხვევაში, როცა $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის მნიშვნელი მხოლოდ ნამდვილ ფესვებს შეიცავს, ამ წილადის ინტეგრება შემდეგ შედეგს გვაძლევს:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = -\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha-1}} - \dots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-a} + A_{\alpha-1}\,\mathrm{Lg}\,(x-b)$$
$$-\frac{1}{\beta-1}\,\frac{B_0}{(x-b)^{\beta-1}} - \dots - \frac{B_{\beta-2}}{x-b} + B_{\beta-1}\,\mathrm{Lg}\,(x-b)$$
$$- \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$-\frac{1}{\lambda-1}\,\frac{L_0}{(x-l)^{\lambda-1}} - \dots - \frac{L_{\lambda-2}}{x-l} + L_{\lambda-1}\,\mathrm{Lg}\,(x-l).$$

ამრიგად, ინტეგრალი $\frac{f(x)}{F(x)}\,dx$ დიფერენციალიდან აღებული აღნიშნულ შემთხვევაში წარმოადგენს ალგებრულისა და ლოგარითმული ფუნქციების ჯამს.

II. განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი მეორე მარტივი წილადიდან აღებული

$$J = \int \frac{(Px+Q)dx}{[(x-p)^2+q^2]^k}.$$

აღვნიშნოთ $x-p=t$ და ეს ინტეგრალი შემდეგნაირად დავშალოთ:

$$J = P\int \frac{t\,dt}{(t^2+q^2)^k} + (Pp+Q)\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k}. \tag{18}$$

აქაც, როგორც წინათ, ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება: $k=1$, $k>1$. პირველ შემთხვევაში ($k=1$)

$$J = \frac{P}{2}\,\mathrm{Lg}\,(t^2+q^2) + \frac{Pp+Q}{q}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{t}{q} + C.$$

თუ ისევ x-ს დავუბრუნდით, მივიღებთ

$$J = \frac{P}{2}\,\mathrm{Lg}\,[(x-p)^2+q^2] + \frac{Pp+Q}{q}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-p}{q} + C.$$

ვთქვათ ახლა $k>1$. მაშინ J ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ორი შემდეგი ინტეგრალის

$$J_1 = \int \frac{t\,dt}{(t^2+q^2)^k}, \quad J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k}$$

გამოთვლაზე.

პირველი ამ ინტეგრალიდან უშუალოდ მოიძებნება:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+q^2)}{(t^2+q^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\,\frac{1}{(t^2+q^2)^{k-1}} + C.$$

განვიხილოთ ახლა J_2 ინტეგრალი. იგი ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$(19) \qquad J_2=\frac{1}{q^2}\int\frac{(t^2+q^2-t^2)dt}{(t^2+q^2)^k}=\frac{1}{q^2}\int\frac{dt}{(t^2+q^2)^{k-1}}-$$
$$-\frac{1}{q^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+q^2)^k}.$$

მარჯვენა წევრის პირველი ინტეგრალი უცვლელად დავტოვოთ. რაც შეეხება იმავე წევრის მეორე ინტეგრალს, იგი ნაწილობითი ინტეგრების წესით გარდავქმნათ. ვთქვათ $u=t$, $\frac{tdt}{(t^2+q^2)^{k-1}}=dv$, მაშინ

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+q^2)^k}=-\frac{t}{2(k-1)(t^2+q^2)^{k-1}}+\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+q^2)^{k-1}}.$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, მე-(19) ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$(20) \qquad \int\frac{dt}{(t^2+q^2)^k}=\frac{1}{q^2}\,\frac{1}{(2k-2)}\,\frac{t}{(t^2+q^2)^{k-1}}+$$
$$+\frac{1}{q^2}\,\frac{2k-3}{2k-2}\int\frac{dt}{(t^2+q^2)^{k-1}}.$$

ეს არის რედუქციის ფორმულა, რომლის საშუალებითაც აღებული ინტეგრალი მიიყვანება იმავე სახის მეორე ინტეგრალზე, რომელშიც k ხარისხი ერთი ერთეულით არის დაწეული. ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება მიგვიყვანს ინტეგრალზე, რომელშიც $k=1$, ე. ი. ინტეგრალზე

$$\int\frac{dt}{t^2+q^2}=\frac{1}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{q}+C$$

და, ამგვარად, J_2 იქნება გამოთვლილი. მაგრამ მე-(18) ფორმულის ძალით

$$J=PJ_1+(Pp+Q)J_2.$$

მაშასადამე, აღებული J ინტეგრალი მარტივად გამოითვლება: საკმარისია ამისათვის უკანასკნელ ფორმულაში ჩავსვათ J_1 და J_2 ინტეგრალთა ზემოთ მიღებული მნიშვნელობანი.

ამრიგად, $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის დაშლის იმ ნაწილის ინტეგრება

რომელიც k ჯერადობის $p+qi$ ფესვს შეესაბამება, შემდეგნაირი სახით წარმოგვიდგება:

$$M\operatorname{Lg}[(x-p)^2+q^2]+N\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}+\sum_{i=1}^{i=k-1}\frac{A_ix+B_i}{[(x-p)^2+q^2]^i}+C,$$

სადაც M, N; A_1, B_1, A_2, B_2,... გარკვეულ მუდმივ რიცხვებს წარმოადგენენ.

ახლა თუ მხედველობაში მივიღებთ ყველაზე ზოგად შემთხვევას, როცა წილადის მნიშვნელი შეიცავს როგორც ნამდვილს, ისე წარმოსახვით ფესვებსაც, მაშინ შეგვიძლია შემდეგი თეორემა ჩამოვაყალიბოთ:

თეორემა. ინტეგრალი რაციონალურ ფუნქციიდან ყოველთვის ელემენტარულ ფუნქციას გვაძლევს.

ინტეგრალი რაციონალური დიფერენციალიდან აღებული ზოგად შემთხვევაში წარმოგვიდგება ალგებრულისა, ლოგარითმულისა და შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციათა ჯამის სახით.

მაგალითები.

1°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{5x-1}{x(x^2-1)}\,dx.$$

§ 13-ის მაგალითის ძალით ეს ინტეგრალი ასე დაიშლება

$$\int\frac{5x-1}{x(x^2-1)}\,dx=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}-3\int\frac{dx}{x+1},$$

საიდანაც

$$\int\frac{5x-1}{x(x^2-1)}\,dx=\operatorname{Lg}x+2\operatorname{Lg}(x-1)-3\operatorname{Lg}(x+1)+C$$
$$=\operatorname{Lg}[x(x-1)^2(x+1)^{-3}]+C.$$

2°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{15x^4+2x-1}{x^3(x^2-1)^2}\,dx.$$

მივიღებთ რა მხედველობაში რაციონალური წილადის დაშლას (§ 14), ეს ინტეგრალი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\int \frac{15x^4+2x-1}{x^3(x^2-1)^2}\,dx = -\int \frac{dx}{x^3} + 2\int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x} +$$

$$+4\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x+1},$$

საიდანაც, მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალების ამოხსნის შემდგომ, გვექნება

$$\int \frac{15x^4+2x-1}{x^3(x^2-1)^2}\,dx = \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x+1} - 2\,\mathrm{Lg}\,x -$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Lg}\,(x-1) + \frac{5}{2}\,\mathrm{Lg}\,(x+1) + C.$$

3°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{3x^4+2x^3-3}{(x^2+1)^3}\,dx.$$

ეს ინტეგრალი, თუ მივიღებთ მხედველობაში მე-(17) ფორმულას, შემდეგნაირად დაიშლება:

$$\int \frac{3x^4+2x^3-3}{(x^2+1)^3}\,dx = -\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^3} + \int \frac{2x-6}{(x^2+1)^2}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

მარჯვენა წევრის პირველი ინტეგრალი უშუალოდ გამოითვლება:

$$-\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2(x^2+1)^2}.$$

ავიღოთ ახლა მეორე ინტეგრალი. გვაქვს:

$$\int \frac{2x-6}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} - 6\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

მაგრამ

$$\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x^2+1}.$$

მე-(20) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x.$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{2x-6}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{3x+1}{x^2+1} - 3\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C.$$

მესამე ინტეგრალი უშუალოდ მოიძებნება და ამრიგად

$$\int\frac{3x^4+2x^3-3}{(x^2+1)^3}\,dx=-\frac{1}{2(x^2+1)^2}-\frac{3x+1}{x^2+1}-$$

$$-3\operatorname{arc\,tg}x+3\operatorname{arc\,tg}x+C$$

$$=-\frac{6x^3+2x^2+6x+1}{2(x^2+1)^2}+C.$$

მიღებული შედეგი იმ მხრივაცაა საინტერესო, რომ ამ შემთხვევაში ინტეგრალი აღებული რაციონალური წილადიდან თვითონ რაციონალურ წილადს წარმოადგენს.

II. რაციონალური ნაწილის გამოყოფის ოსტროგრადსკი—ერმიტის მეთოდი

§ 18. წინასწარი შენიშვნა ოსტროგრადსკი—ერმიტის მეთოდის შესახებ. რაციონალურ წილადების ინტეგრების მეთოდი, რომელიც ზემოთ იყო აღნიშნული, მეტად რთულია იმ შემთხვევაში, როცა მნიშვნელი ჯერად ფესვებს შეიცავს; განსაკუთრებით ეს სირთულე მაშინ აშკარავდება, როცა მნიშვნელის ზოგიერთი ფესვი წარმოსახვითია. დიდ სიძნელეს თვით ფესვების მოძებნაც წარმოადგენს აგრეთვე, როცა მნიშვნელი წრფივ მამრავლებად არ არის დაშლილი.

მაგრამ არსებობს მეთოდი, რომელიც ინტეგრალის რაციონალური ნაწილის მოსაძებნად არ თხოულობს არც მნიშვნელის ფესვთა ცოდნას და არც წილადების დაშლას ზემოაღნიშნული ჯამის სახით.

ასეთი მეთოდი, რომელიც ოსტროგრადსკის და ერმიტს ეკუთვნის, იმ მხრივაცაა მნიშვნელოვანი აგრეთვე, რომ აღნიშნული რაციონალური ნაწილის მოსაძებნად რაციონალური ოპერაციებია საჭირო მხოლოდ; კვადრატურების ამოხსნა კი ინტეგრალის ტრანსცენდენტული ნაწილის მოსაძებნად დაგვჭირდება განსაკუთრებით.

უახლოესი ჩვენი მიზანი ამ მეთოდის განხილვაა.

§ 19. რაციონალური წილადის დაშლა. ვთქვათ, აღებული წესიერი $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ წილადის მნიშვნელი ჯერად ფესვებს შეიცავს. მაშინ ეს უკანასკნელი ასე შეგვიძლია გამოვსახოთ:

$$F(x)=R_1\,R_2{}^2\,R_3{}^3\cdots R_k{}^k,$$

სადაც R ფუნქციები წარმოადგენენ პოლინომებს, რომლებიც ურთიერთ მარტივი არიან და რომელთა ფესვები მარტივია. მაშასადამე, განტოლება $R_1=0$ გვაძლევს $F(x)$ პოლინომის ყველა მარტივ ფესვს; განტოლება $R_2=0$ მოგვცემს იმავე პოლინომის ყველა ორჯერად ფესვს და ასე შემდეგ.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი შემდეგნაირად დაიშლება:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f_1(x)}{R_1(x)}+\frac{f_2(x)}{R^2{}_2(x)}+\dots+\frac{f_k(x)}{R_k{}^k(x)},$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყოველი შესაკრები წესიერუკვეც წილადს წარმოადგენს. ამ დებულების დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ შემდეგი თეორემა, რომლის დამტკიცებაც უმაღლეს ალგებრაშია მოყვანილი ჩვეულებრივ:

თეორემა. თუ $R(x)$ და $S(x)$ ორი ურთიერთ მარტივი პოლინომია და $T(x)$ რომელიმე მესამე პოლინომია, მაშინ არსებობს ისეთი $\varphi_1(x)$ და $f_1(x)$ პოლინომები, რომ

$$\varphi_1(x)R(x)+f_1(x)\,S(x)=T(x). \tag{21}$$

ჩვენს შემთხვევაში $R_1(x)$ და $R_2{}^2\,R_3{}^3\dots R_k{}^k$ ურთიერთ მარტივი არიან, ამიტომ შეგვიძლია მივიჩნიოთ

$$R(x)=R_1(x),\ S(x)=R_2{}^2\,R_3{}^3\dots R_k{}^k;$$

ვთქვათ, ამას გარდა, $T(x)=f(x)$. (21) ტოლობა მაშინ ასე დაიწერება:

$$\varphi_1(x)\,R_1(x)+f_1(x)\,R_2{}^2\,R_3{}^3\dots R_k{}^k=f(x). \tag{22}$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილს $F(x)$-ზე თუ გავყოფთ, მივიღებთ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f_1(x)}{R_1}+\frac{\varphi_1(x)}{R_2{}^2\,R_3{}^3\dots R_k{}^k}.$$

(22)-ე იგივეობიდან აშკარად ჩანს, რომ ვინაიდან f და F ურთიერთ მარტივი არიან, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა წილადები ორივე უკვეცი იქნებიან.

მიღებულ $\frac{\varphi_1}{R_2{}^2\,R_3{}^3\dots R^k{}_k}$ წილადს მოვექცეთ ისე, როგორც მოვექეცით $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადს და დაშლის ასეთი პროცესი ამნაირადვე განვაგრძოთ, რაც მოგვცემს შემდეგ იგივეობებს:

$$\frac{\varphi_1}{R_2^2 R_3^3 \cdots R_k^k} = \frac{f_2(x)}{R_2^2} + \frac{\varphi_2}{R_3^3 \cdots R_k^k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varphi_{k-2}}{R_{k-1}^{k-1} R_k^k} = \frac{f_{k-1}(x)}{R_{k-1}^{k-1}} + \frac{f_k}{R_k^k},$$

რომელთა შეკრებით მივიღებთ იგივეობას:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f_1(x)}{R_1(x)} + \frac{f_2(x)}{R_2^2(x)} + \cdots + \frac{f_k(x)}{R_k^k(x)}.$$

რ. დ. გ.

აქედან ჩანს, რომ ინტეგრალი $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადიდან აღებული შემდეგი ჯამის სახით წარმოგვიდგება:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{f_1(x)}{R_1(x)}\,dx + \int \frac{f_2(x)}{R_2^2(x)}\,dx + \cdots + \int \frac{f_k(x)}{R_k^k(x)}\,dx. \tag{23}$$

მაშასადამე, $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის ინტეგრება ასეთი სახის ინტეგრალის მოძებნაზე მიიყვანება:

$$\int \frac{\varphi(x)}{R^\lambda(x)}\,dx, \tag{24}$$

სადაც $R(x)$ არის პოლინომი, რომელსაც მხოლოდ მარტივი ფესვები აქვს, λ კი მთელი დადებითი რიცხვია; ამას გარდა, წილადი ინტეგრალის ქვევით წესიერია და უკვეცი.

§ 20. **რაციონალური ნაწილის გამოყოფა.** განვიხილოთ ახლა (24)-ე ინტეგრალი, რომელიც მნიშვნელის ხარისხის მაჩვენებლის სახით ერთს λ პარამეტრს შეიცავს. ცხადია, რომ ამ ინტეგრალის ამოხსნის სიადვილე პარამეტრის კერძო მნიშვნელობებზეა დამოკიდებული მთლიანად. სწორედ ამიტომ ბუნებრივია კითხვა: შეიძლება თუ არა ამ შემთხვევაში გამოვიყენოთ ინტეგრების ის ხერხი, რომელიც § 10-ში იყო აღნიშნული? შემდეგი ლემა პასუხს გვაძლევს ამ კითხვაზე.

ლ ე მ ა. ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი

$$\int \frac{\varphi(x)}{R^\lambda(x)}\,dx$$

ყოველთვის მიიყვანება იმავე სახის მეორე ინტეგ-რალზე, სადაც მნიშვნელის ხარისხის მაჩვენებლად λ-ს მაგიერ $\lambda-1$ იქნება.

ამ ლემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ ალგებრის ის თეო-რემა, რომელიც ზემო §-ში იყო მოყვანილი.

ვინაიდან $R(x)$-ს მარტივი ფესვები აქვს მხოლოდ, ამიტომ $R(x)$ და $R'(x)$ ურთიერთ მარტივი არიან; მაშასადამე, არსებობს ორი ისეთი პოლინომი $M(x)$ და $N(x)$, რომ

$$\varphi(x)=R(x)M(x)+R'(x)N(x).$$

ამრიგად,

$$\int\frac{\varphi(x)}{R^\lambda}dx=\int\frac{M(x)}{R^{\lambda-1}}dx+\int N(x)\frac{R'}{R^\lambda}dx.$$

ავიღოთ ახლა ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე ინტეგრალი. რადგანაც

$$\frac{R'(x)}{R^\lambda(x)}=-\frac{1}{\lambda-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R^{\lambda-1}}\right),$$

ამიტომ

$$\int N(x)\frac{R'}{R^\lambda}dx=-\frac{N(x)}{(\lambda-1)R^{\lambda-1}}+\frac{1}{\lambda-1}\int\frac{N'(x)}{R^{\lambda-1}}dx.$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, გვექნება

$$\int\frac{\varphi(x)}{R^\lambda}dx=-\frac{N(x)}{\lambda-1}\frac{1}{R^{\lambda-1}}+\int\frac{M(x)+\dfrac{N'(x)}{\lambda-1}}{R^{\lambda-1}}dx.$$

აღვნიშნოთ ახლა

$$-\frac{N(x)}{\lambda-1}=\psi(x),\quad M(x)+\frac{N'(x)}{\lambda-1}=\varphi_1(x).$$

$\psi(x)$ და $\varphi_1(x)$ პოლინომებია x-ის მიმართ.

ამგვარად მივიღებთ

$$\int\frac{\varphi(x)}{R^\lambda}dx=\frac{\psi(x)}{R^{\lambda-1}}+\int\frac{\varphi_1(x)}{R^{\lambda-1}}dx$$

და ჩვენი ლემა დამტკიცებულია.

უკანასკნელი ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება შემდეგ ტოლობაზე მიგვიყვანს:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\mathrm{R}^{\lambda}} dx = \frac{\Psi(x)}{R^{\lambda-1}} + \int \frac{\Phi(x)}{R} dx,$$

სადაც $\frac{\Psi(x)}{R^{\lambda-1}}$ და $\frac{\Phi(x)}{R}$ ორივე წესიერი წილადებია.

დამტკიცებული ლემიდან ამგვარად ასეთი შედეგი გამომდინარეობს:

(24)-ე ინტეგრალის მოძებნა ყოველთვის მიიყვანება იმ სახის ინტეგრალის ამოხსნაზე, რომელშიც მნიშვნელის ხარისხის მაჩვენებელი არის 1.

ახლა ისევ (23)-ე ტოლობას დავუბრუნდეთ და თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყოველ შესაკრებს უკანასკნელის წესის თანახმად გარდავქმნით, მაშინ შემდეგი სახის ტოლობას მივიღებთ:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \frac{A(x)}{B(x)} + \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \tag{25}$$

სადაც $\frac{A(x)}{B(x)}$ და $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წესიერი წილადებია. ამას გარდა,

$$B(x) = R_2\, R_3^2 \ldots R_k^{k-1},\quad Q(x) = R_1\, R_2\, R_3 \ldots R_k. \tag{26}$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წილადის მნიშვნელს მარტივი ფესვები აქვს და ამიტომ ინტეგრალი

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

§ 17-ის თანახმად, გამოისახება ლოგარითმულისა და შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებში. რაც შეეხება $\frac{A(x)}{B(x)}$, ეს, როგორც აღნიშნული იყო ზემოთ, x-ის რაციონალური ფუნქციაა და ამრიგად, ინტეგრალის რაციონალური ნაწილი გამოყოფილია.

ამრიგად, ყოველ რაციონალურ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადს ორი $\frac{A(x)}{B(x)}$ და $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წილადი შეესაბამება იმნაირად, რომ პირველი მათგანი არის რაციონალური ნაწილი ინტეგრალისა

$$(1') \qquad \int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx,$$

ხოლო მეორის ინტეგრება მოგვცემს ფუნქციას, რომელიც უკანასკნელი ინტეგრალის ტრანსცენდენტული ნაწილია.

დაგვრჩა ახლა აღნიშნული წილადები ვიპოვოთ, რის შემდგომ (1') ინტეგრალის მოძებნა უკვე § 13-ის წესის თანახმად მოხდება.

§ 21. ინტეგრალის რაციონალური და ტრანსცენდენტული ნაწილების მოძებნა. ვიპოვოთ ჯერ $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ და $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ წილადების მნიშვნელები. (26)-ე ტოლობის ძალით ცხადია, რომ $B(x)$ წარმოადგენს $F(x)$ პოლინომისა და მის $F'(x)$ წარმოებულის უდიდეს საერთო გამყოფს. რაც შეეხება $Q(x)$-ს, იგი მოიძებნება უბრალო გაყოფით

$$(27) \qquad Q(x)=\frac{F(x)}{B(x)}.$$

გადავიდეთ ახლა მრიცხველებზე. მათ მაგიერ ჩავსვათ განუსაზღვრელ კოეფიციენტებიანი პოლინომები, რომელთა ხარისხებიც ავიღოთ $B(x)$-ისა და $Q(x)$-ის ხარისხებზე ერთი ერთეულით ნაკლები შესაბამისად. ამის შემდგომ გავაწარმოოთ (25)-ე ტოლობა, რაც მოგვცემს

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{B}\right)+\frac{P}{Q}=\frac{A'B-AB'}{B^2}+\frac{P}{Q};$$

საიდანაც, (27)-ე ფორმულის ძალით, გვექნება

$$f(x)=QA'-A\frac{B'Q}{B}+PB.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ერთი წევრია მხოლოდ წილადის სახით მიღებული, ეს არის $\dfrac{AB'Q}{B}$. მაგრამ ნამდვილად კი ესეც პოლინომია. მართლაც, (27)-ე ტოლობიდან გვექნება

$$F'=B'Q+Q'B,$$

საიდანაც

$$\frac{F'}{B}=\frac{B'Q}{B}+Q'.$$

მაგრამ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, F' გაიყოფა B-ზე. მაშასადამე, თუ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა ნაწილს $X(x)$-ით აღვნიშნავთ, გვექნება:

$$\frac{B'Q}{B}=X-Q'$$

და ამიტომაც

(28) $$f(x)=QA'-A(X-Q')+BP.$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს ამ იგივეობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილის კოეფიციენტები x-ის ტოლი ხარისხების წინ, მაშინ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას, რომელთა რიცხვი უცნობ კოეფიციენტთა რიცხვის ტოლია.

ეს სისტემა მოგვცემს ყველა აღნიშნული კოეფიციენტის მნიშვნელობას და ამით $A(x)$ და $P(x)$ პოლინომები იქნება მოძებნილი.

ზემოაღნიშნული მსჯელობით სავსებით გამართლებულია ის, რაც თავიდანვე იყო აღნიშნული, ე. ი.

1°) $\frac{A(x)}{B(x)}$ და $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წილადების მოსაძებნად არაა საჭირო აღებული წილადის $F(x)$ მნიშვნელის ფესვთა ცოდნა,

2°) ინტეგრალის ალგებრული ნაწილის მოძებნა წმინდა რაციონალური წესით მოხდება.

ამრიგად, გამოდის, რომ ზემოაღნიშნული მეთოდით ინტეგრალის რაციონალური ნაწილი კვადრატურიდან გამოყოფილია, ამიტომ რაციონალური წილადის ინტეგრების ასეთ მეთოდს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ს რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი ნ ა წ ი ლ ი ს გ ა მ ო ყ ო ფ ი ს მეთოდი ეწოდება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. აღსანიშნავია ერთი მეტად საინტერესო გარემოება: (28)-ე იგივეობის ძალით; $A(x)$ და $B(x)$ პოლინომების კოეფიციენტები ერთის მხრით და $f(x)$ და $F(x)$ პოლინომების კოეფიციენტები მეორეს მხრით რაციონალურ დამოკიდებულებაში იმყოფებიან ერთმანეთს შორის; ამიტომ (1') ინტეგრალის რაციონალური ნაწილი რაციონალურია არა მარტო x-ის მიმართ, არამედ აღებული $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადის კოეფიციენტთა მიმართაც. სრულებით იგივე ითქმის $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წილადის კოეფიციენტებზეც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვიყენოთ სულ ახლად მიღებული მეთოდი შემდეგ კერძო მაგალითზე:

$$\int \frac{x^6-1}{x^3(x^2+1)^2}\, dx.$$

ამისათვის ჯერ გამოვარკვიოთ, თუ რა სახეს მიიღებს (25)-ე ფორმულა ამ შემთხვევაში. მოვძებნოთ მნიშვნელები B და Q.

აქ

$$F(x)=x^3(x^2+1)^2.$$

ამიტომ (26)-ე ფორმულის ძალით გვექნება

$$B(x)=x^2\,(x^2+1);\;\; Q(x)=x\,(x^2+1).$$

მაშასადამე, $A(x)$ და $P(x)$ პოლინომები მე-3 და მე-2 ხარისხის იქნება შესაბამისად. ამრიგად, ძირითადი ფორმულა ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\int \frac{x^6-1}{x^3(x^2+1)^2}\, dx= \frac{ax^3+bx^2+cx+h}{x^2(x^2+1)}+\int \frac{kx^2+lx+m}{x(x^2+1)}\, dx.$$

თუ გავაწარმოებთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს, მივიღებთ

$$\frac{x^6-1}{x^3(x^2+1)^2}=\frac{-ax^5-2bx^4+(a-3c)\,x^3-4h\,x^2-cx-2h}{x^3(x^2+1)^2}+$$
$$+\frac{kx^2+lx+m}{x(x^2+1)}.$$

ახლა შევკრიბოთ მარჯვენა ნაწილის წილადები და შემდეგ გავუტოლოთ ორივე ნაწილის მრიცხველები, რაც მოგვცემს

$$x^6-1=kx^6+(l-a)x^5+(m+k-2b)x^4+(l+a-3c)x^3+$$
$$+(m-4h)x^2-cx-2h.$$

მაგრამ ასეთი ტოლობა მხოლოდ მაშინ იქნება იგივეობა, როცა ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა კოეფიციენტები x-ის ტოლი ხარისხების წინ ტოლი არიან. ამრიგად, ამ კოეფიციენტთა მოსაძებნად შემდეგ სისტემას მივიღებთ:

$$k=1,\; l-a=0,\; m+k-2b=0,\; a-3c+l=0,$$
$$m-4h=0,\; c=0,\; 2h=1.$$

აქედან ვიპოვით

$$a=0,\;\; b=\frac{3}{2},\;\; c=0,\;\; h=\frac{1}{2},\; k=1,\; l=0,\; m=2.$$

ამრიგად, (25)-ე ფორმულა ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\int \frac{x^6-1}{x^3(x^2+1)^2}\, dx= \frac{3x^2+1}{2x^2(x^2+1)}+\int \frac{x^2+2}{x\,(x^2+1)}\, dx.$$

დაგვრჩა ახლა მოვძებნოთ მხოლოდ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი. რადგანაც

$$\frac{x^2+2}{x(x^2+1)}=\frac{2}{x}-\frac{x}{x^2+1},$$

ამიტომ

$$\int\frac{x^2+2}{x(x^2+1)}\,dx=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=2\,\mathrm{Lg}\,x-\frac{1}{2}\,\mathrm{Lg}\,(x^2+1)+C.$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება

$$\int\frac{x^6-1}{x^3(x^2+1)}\,dx=\frac{3x^2+1}{2x^2(x^2+1)}+\mathrm{Lg}\,\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

§ 22. **ზოგიერთი შესანიშნავი მაგალითი.** რაციონალური წილადის ინტეგრება, როგორც დავინახეთ, ყოველთვის შესრულდება ზემოაღნიშნული ორი ხერხის საშუალებით. მაგრამ ზოგიერთ რაციონალურ წილადს აქვს ისეთი აგებულება, რომ მათი ინტეგრება ჩვეულებრივ შეიძლება მოხდეს ძირითადი წესების გამოყენებითაც და ასეთ შემთხვევებში, რა თქმა უნდა, აღნიშნული ორი ხერხი არცაა საჭირო. ქვემოთ მოგვყავს რამოდენიმე ამგვარი მაგალითი.

1°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{x^m dx}{(a+bx)^n},$$

სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია.

გარდავქმნათ x ცვლადი შემდეგნაირად:

$$t=a+bx;$$

მაშინ

$$x=\frac{t-a}{b},\quad dx=\frac{dt}{b}.$$

მაშასადამე,

$$I=\frac{1}{b^{m+1}}\int\frac{(t-a)^m}{t^n}\,dt. \tag{29}$$

უკანასკნელი ინტეგრალის მოძებნა მეტად ადვილია: საკმარისია ამისათვის $(t-a)^m$ ნიუტონის ბინომის წესით დაიშალოს და შემდეგ დაშლის თითოეული წევრი t^n-ზე გაიყოს; ინტეგრება ჯამისა, რომელსაც ამნაირად მივიღებთ, მოხდება ინტეგრალის დაშლის ხერხის გამოყენებით (§ 8, 1). ინტეგრების შემდგომ ისევ x-ს

უნდა დავუბრუნდეთ და I ინტეგრალი მაშინ $(a+bx)$-ის ალგებრული ფუნქციის სახით წარმოგვიდგება.

2°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{x^m(a+bx)^n},$$

სადაც m და n მთელი რიცხვებია $\geqq 1$.

მოვახდინოთ ასეთი გარდაქმნა:

$$a+bx=xt.$$

აქედან

$$x=\frac{a}{t-b},\quad dx=-\frac{a}{(t-b)^2}\,dt.$$

მაშასადამე,

$$I=-\frac{1}{a^{m+n-1}}\int\frac{(t-b)^{m+n-2}}{t^n}\,dt.$$

მაგრამ $m+n-2$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვია და ამიტომაც უკანასკნელი ინტეგრალი არის (29)-ე სახისა. მაშასადამე, ამ ინტეგრალის მოძებნა მოხდება ზემოაღნიშნული წესის თანახმად.

3°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{(x-a)^m\,(x-b)^n}.$$

ეს ინტეგრალი დაიყვანება 2° სახის ინტეგრალზე. მართლაც, თუ მოვახდენთ გარდაქმნას

(30) $$x-a=z,$$

მივიღებთ

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m\,(x-b)^n}=\int\frac{dz}{z^m\,(z-c)^n},$$

სადაც $c=b-a$; უკანასკნელი ფორმულა ამტკიცებს ნათქვამს.

მაგრამ ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის მოსაძებნად უნდა გამოვიყენოთ, როგორც ზემოთ, გარდაქმნა:

$$z-c=zt$$

და თუ z-ს გამოვრიცხავთ ამ უკანასკნელისა და (30)-ე ტოლობიდან, მივიღებთ

$$x-b=(x-a)t.$$

ცხადია, ეს არის ის გარდაქმნა, რომლის საშუალებითაც უნდა გამოვთვალოთ I ინტეგრალი. მართლაც, აღნიშნული გარდაქმნა გვაძლევს:

$$x-a=\frac{b-a}{1-t}, \quad dx=\frac{b-a}{(1-t)^2}\,dt,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$I=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^n}\,dt$$

და ეს ინტეგრალი მოიძებნება ისე, როგორც (29)-ე ინტეგრალი. ინტეგრების შემდგომ ისევ x-ს თუ დავუბრუნდებით, I ინტეგრალი $\frac{x-b}{x-a}$ წილადის რაციონალური ფუნქციის სახით გამოისახება.

4^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},$$

სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო a, b, c აკმაყოფილებენ პირობებს

(31) $$a\gtrless 0;\ b^2-4ac\gtrless 0.$$

ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად შევადგინოთ სათანადო რედუქციის ფორმულა. გამოვიდეთ იგივეობიდან

$$4ac-b^2=4a(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2,$$

რომლის საშუალებითაც აღებული ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

(32) $$\left\{\begin{aligned} I=\frac{1}{4ac-b^2}\int\frac{(4ac-b^2)dx}{(ax^2+bx+c)^n}&=\frac{4a}{4ac-a^2}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\\ &-\frac{1}{4ac-b^2}\int\frac{(2ax+b)^2}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx.\end{aligned}\right.$$

მარჯვენა ნაწილის უკანასკნელი ინტეგრალი გარდავქმნათ ნაწილობითი ინტეგრების წესით. გვაქვს:

$$\int(2ax+b)\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx=-\frac{2ax+b}{n-1}\,\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$
$$+\frac{2a}{n-1}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}.$$

ჩავსვათ ეს (32)-ე ფორმულაში, რის შემდგომ უკანასკნელი ასე გადმოიწერება:

$$(33)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \\ \displaystyle\qquad+\frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{4a}{4ac-b^2}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}. \end{cases}$$

ეს არის რედუქციის ფორმულა, რომლის შედგენაც მოითხოვებოდა. ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით I ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

რომელიც შესწავლილია უკვე (§ 11, 4⁰) და ამრიგად თვით I ინტეგრალიც მოძებნილი იქნება.

5⁰. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

ამ ინტეგრალის მოსაძებნად, დავშალოთ იგი ჩვეულებრივი წესით:

$$(34)\qquad I=A\int\frac{xdx}{ax^2+bx+c}+B\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

განვიხილოთ ახლა მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი. რადგანაც

$$\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx=\mathrm{Lg}\,(ax^2+bx+c)+C,$$

ამიტომ

$$(35)\qquad \int\frac{xdx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2a}\,\mathrm{Lg}\,(ax^2+bx+c)-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

ჩავსვათ ახლა ეს (34)-ე ფორმულაში; მაშინ უკანასკნელი ასე გადმოიწერება:

$$(36)\qquad \int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{A}{2a}\,\mathrm{Lg}\,(ax^2+bx+c)+$$

$$+\frac{2aB-Ab}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

ამრიგად, I ინტეგრალი მიიყვანება ინტეგრალზე:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

რომელიც განხილულია უკვე (§ 11, მაგ. 4°).

6°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{x^m}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,$$

სადაც m, n დადებითი მთელი რიცხვებია და, ამას გარდა, $m \leqq 2n$; a, b, c აკმაყოფილებენ ზემოაღნიშნულ (31)-ე პირობებს.

შევადგინოთ ამ ინტეგრალისათვის შესაფერისი რედუქციის ფორმულა. გამოვიდეთ იგივეობიდან:

$$d\left[\frac{x^{m-1}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right]=\frac{(m-1)x^{m-2}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,dx-$$
$$-\frac{(n-1)(2ax+b)x^{m-1}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,$$

რომლის მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრი (ax^2+bx+c)-ზე გავამრავლოთ და გავყოთ; მაშინ მარტივი გარდაქმნის შემდგომ გვექნება:

$$d\left[\frac{x^{m-1}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right]=(m-1)\,c\,\frac{x^{m-2}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx-$$
$$-(n-m)\,b\,\frac{x^{m-1}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$
$$-(2n-m-1)\,a\,\frac{x^m}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx.$$

აქედან მივიღებთ რედუქციის ფორმულას:

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \int\frac{x^m}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx &= \frac{1}{(2n-m-1)a}\,\frac{x^{m-1}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\\ &-\frac{n-m}{2n-m-1}\,\frac{b}{a}\int\frac{x^{m-1}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx+\\ &+\frac{m-1}{2n-m-1}\,\frac{c}{a}\int\frac{x^{m-2}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx.\end{aligned}\right.$$

ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით I ინტეგრალი მიიყვანება მე-4⁰ ინტეგრალზე

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},$$

რომელიც გამოითვლება (33)-ე ფორმულის საშუალებით.

აღსანიშნავია ერთი გარემოება: რედუქციის (37)-ე ფორმულის გამოყენება მხოლოდ მაშინაა შესაძლო, როცა $2n-m-1 \neq 0$. კერძოდ, მაგალითად, ეს ფორმულა არაა სამართლიანი იმ შემთხვევაში, როცა $m=n=1$; მაგრამ I ინტეგრალის ამოხსნა ასეთ შემთხვევაში ცნობილია უკვე (მაგალითი 5^0, (35)-ე ფორმულა).

ვთქვათ ახლა $m=2n-1$, ხოლო $n>1$. რედუქციის ფორმულის შესადგენად ამ შემთხვევაში, გამოვიდეთ იგივეობიდან

$$x^2 = \frac{(ax^2+bx+c)-(bx+c)}{a},$$

რომლის საშუალებითაც გვექნება

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{x^{2n-1}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{x^{2n-3}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,dx &- \\ -\frac{c}{a}\int \frac{x^{2n-3}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx & \\ -\frac{b}{a}\int \frac{x^{2n-2}}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx&. \end{aligned} \right.$$

ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალებიდან პირველის მოსაძებნად თვით ეს (38)-ე ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ, ხოლო ორი უკანასკნელის გამოთვლა. ზემოაღნიშნული (37)-ე ფორმულის საშუალებით მოხდება.

7^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n},$$

სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, ხოლო a, b, c წინანდელ პირობებს აკმაყოფილებენ.

რედუქციის ფორმულის შესადგენად ვისარგებლოთ იგივეობით:

$$d\left[\frac{1}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right] = -\left(\frac{m-1}{x^m(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(2ax+b)}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n}\right)dx.$$

ამ იგივეობის მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრი (ax^2+bx+c)-ზე გავამრავლოთ და გავყოთ; მაშინ თვით ეს ფორმულა მარტივი გარდაქმნის შემდგომ ასე გადმოიწერება:

$$d\left[-\frac{1}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right]=(m-1)c\,\frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n}$$

$$+(m+n-2)\,b\,\frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n}+(m+2n-$$

$$-3)\,a\,\frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n}.$$

აქედან რედუქციის შემდეგი ფორმულა გამოგვყავს:

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n}=-\frac{1}{(m-1)c}\,\frac{1}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}\\&\quad-\frac{m+n-2}{m-1}\,\frac{b}{c}\int\frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n}-\\&\quad-\frac{m+2n-3}{m-1}\,\frac{a}{c}\int\frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n}.\end{aligned}\right.$$

ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება მიგვიყვანს მე-4° ინტეგრალზე, რომელიც ზემოთ იყო შესწავლილი.

მაგრამ ეს ფორმულა სამართლიანია მხოლოდ მაშინ, როცა $m\neq 1$. ვთქვათ ახლა $m=1$. გამოვიდეთ ამ შემთხვევაში იგივეობიდან

$$c=(ax^2+bx+c)-(ax^2+bx),$$

რომლის ძალითაც შეგვიძლია დავწეროთ

$$(40)\qquad \int\frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^n}=\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1}}-$$

$$-\frac{a}{c}\int\frac{xdx}{(ax^2+bx+c)^n}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n};$$

მაგრამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე ინტეგრალი (37)-ე რედუქციის ფორმულის გამოყენებით ასე გარდაიქმნება:

$$\int\frac{xdx}{(ax^2+bx+c)^n}=-\frac{1}{(2n-2)a}\,\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}-$$

$$-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

და როდესაც ამას (40) ტოლობაში ჩავსვამთ, ეს უკანასკნელი შემდეგნაირად გადმოიწერება:

$$(41)\quad \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{(2n-2)c}\,\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1}}.$$

ასეთია რედუქციის ფორმულა, როცა $m=1$.

აღსანიშნავია ერთი გარემოება: მიღებული (39) და (41) ფორმულები სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევისათვის, როცა $c \neq 0$; მაგრამ, თუ $c=0$, მაშინ I ინტეგრალი ღებულობს 2⁰ სახეს.

8⁰. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{x^{m-1}dx}{(a+bx^n)^p}\ [1],$$

სადაც m, n, p მთელი რიცხვებია, რომელთაგან m შეიძლება იყოს დადებითი, ან უარყოფითი, ანდა ნული, ხოლო $n>0$, $p>0$.

აქ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება: 1⁰) $m=0$, 2⁰) $m \gtreqless 0$. ეს ორი შემთხვევა განვიხილოთ ცალ-ცალკე.

1⁰) I ინტეგრალს ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$I=\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^p}.$$

მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$(42)\qquad z=x^n.$$

აქედან

$$\frac{dz}{z} = n\,\frac{dx}{x};$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, გვექნება

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^p} = \frac{1}{n}\int \frac{dz}{z(a+bz)^p}.$$

ამრიგად, როცა $m=0$, მაშინ აღებული ინტეგრალი გარდაქმნის (42) ფორმულის საშუალებით მიიყვანება 2⁰ სახეზე.

---

[1] ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი წილადის მრიცხველში x აღებულია $(m-1)$-სა და არა m-ურ ხარისხში სიმარტივის მოსაზრებით მხოლოდ და ეს აღმოჩნდება შემდეგში.

2^0) ($m \gtreqless 0$). დავამტკიცოთ, რომ შეიძლება I ინტეგრალის გამარტივება იმ შემთხვევაში, როცა m და n ურთიერთ მარტივი არ არიან. მართლაც, ვთქვათ ამ ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი არის k; მაშინ

$$m=\mu k, \quad n=\nu k,$$

μ და ν ურთიერთ მარტივი რიცხვებია. მოვახდინოთ ახლა გარდაქმნა

$$z=x^k.$$

გვაქვს:

$$x^n=z^{\frac{n}{k}}=z^\nu, \quad dx=\frac{1}{k}x^{-(k-1)}dz,$$

$$x^{m-1}dx=\frac{1}{k}x^{m-k}dz=\frac{1}{k}x^{(\mu-1)k}dz=\frac{1}{k}z^{\mu-1}dz.$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, I ინტეგრალი შეგვიძლია ასე გადმოვწეროთ:

$$I=\frac{1}{k}\int\frac{z^{\mu-1}dz}{(a+bz^\nu)^p}$$

და ეს არის აღნიშნული ინტეგრალის გამარტივებული სახე.

კერძოდ, როცა m იყოფა n-ზე, ე. ი. როცა m-ს აქვს სახე

$$m=n\lambda,$$

სადაც λ მთელი რიცხვია, მაშინ n თვითონ იქნება m-ისა და n-ის უდიდესი საერთო გამყოფი და I ინტეგრალს ექნება შემდეგი სახე:

$$I=\frac{1}{n}\int\frac{z^{\lambda-1}dz}{(a+bz)^p}.$$

მაშასადამე, I ინტეგრალის მოძებნა ამ შემთხვევაში 1^0 სახის ინტეგრალის გამოთვლაზე მიიყვანება.

ამრიგად, I ინტეგრალის განხილვისას შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ m და n ურთიერთ მარტივი რიცხვებია.

მეორეს მხრით, I ინტეგრალის გამოთვლის სიადვილე m, n, p რიცხვების კერძო მნიშვნელობებზეა დამოკიდებული მთლიანად, ე. ი. ეს ინტეგრალი არის მე-2^0 სახისა (§ 10). საჭიროა ამიტომ I ინტეგრალის მოსაძებნად სათანადო რედუქციის ფორმულების შედგენა. მაგრამ, როგორც ქვემოთ დავინახავთ, საკმარისია ვიცო-

დეთ ერთი ასეთი ფორმულა, სახელდობრ ის, რომლის საშუალებითაც p მაჩვენებლის ნაცვლად გვექნება $p-1$. ამგვარი ფორმულის შესადგენად გამოვიდეთ იგივეობიდან:

$$(43)\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{x^m}{(a+bx^n)^{p-1}}\right]=m\,\frac{x^{m-1}}{(a+bx^n)^{p-1}}-(p-1)\,n\,\frac{bx^{n+m-1}}{(a+bx^n)^p}.$$

მაგრამ

$$bx^{n+m-1}=x^{m-1}(a+bx^n)-ax^{m-1};$$

ამიტომაც (43) ფორმულა ასე გადმოიწერება:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^m}{(a+bx^n)^{p-1}}\right]=(m+n-np)\,\frac{x^{m-1}}{(a+bx^n)^{p-1}}+$$

$$+(p-1)na\,\frac{x^{m-1}}{(a+bx^n)^p}.$$

აქედან ინტეგრების შემდგომ გვექნება

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{(a+bx^n)^p}=\frac{1}{a(pn-n)}\,\frac{x^m}{(a+bx^n)^{p-1}}-$$

$$-\frac{m+n-np}{a(pn-n)}\int\frac{x^{m-1}}{(a+bx^n)^{p-1}}\,dx.$$

ეს არის ის რედუქციის ფორმულა, რომელზედაც საუბარი იყო ზემოთ. ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით აღებული I ინტეგრალი შემდეგი ინტეგრალის გამოთვლაზე მიიყვანება:

$$(44)\qquad \int\frac{x^{m-1}}{a+bx^n}\,dx.$$

შევისწავლოთ ახლა ეს ინტეგრალი. აქ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება: $m\geqq 1$, $m<1$.

პირველ შემთხვევაში შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ წილადი ინტეგრალის ნიშნის ქვევით წესიერია. მართლაც, თუ წილადი ინტეგრალს ნიშნის ქვევით წესიერი არ არის, მაშინ ამ ინტეგრალის მოძებნა ყოველთვის მიიყვანება ერთი წესიერი წილადის ინტეგრებაზე და ამისათვის, რა თქმა უნდა, საკმარისია მრიცხველი მნიშვნელზე გავყოთ.

მეორე შემთხვევაში ($m<1$) აღვნიშნოთ $m-1=-m_1$; m_1 დადებითი მთელი რიცხვია. ამრიგად, (44) ინტეგრალს ექნება სახე:

$$\int \frac{dx}{x^{m_1}(a+bx^n)}.$$

დავამტკიცოთ ახლა, რომ უკანასკნელი ინტეგრალის მოძებნა ყოველთვის მიიყვანება იმ სახის წილადის ინტეგრებაზე, რომელიც პირველ შემთხვევაში იყო განსაზღვრული (m დადებითი და $\leqq n$). მართლაც, უბრალო დაშლით მივიღებთ:

$$\frac{1}{x^{m_1}(a+bx^n)}=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{x^{m_1}}-\frac{bx^{n-m_1}}{a+bx^n}\right\}.$$

თუ $n>m_1$, მაშინ ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს (44) ინტეგრალი მივიყვანოთ საძიებელ სახეზე; მაგრამ თუ $n<m_1$, მაშინ ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება უეჭველად მოგვცემს აღნიშნული სახის ინტეგრალს და, მაშასადამე, ის, რაც მოითხოვებოდა, დამტკიცებულია.

ამრიგად, (44) ინტეგრალის განხილვისას ვიგულისხმოთ, რომ m დადებითია და $\leqq n$.

მოვახდინოთ ახლა გარდაქმნა:

$$z=\sqrt[n]{\pm\frac{b}{a}}\,x,$$

სადაც $\pm$ ნიშნებიდან ისეთი ნიშანი უნდა ავიღოთ, რომ უკანასკნელი რადიკალი ნამდვილი რიცხვი აღმოჩნდეს.

ამგვარი გარდაქმნის შემდგომ (44) ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$A\int\frac{z^{m-1}}{1\pm z^n}\,dz, \tag{45}$$

სადაც A გარკვეული მუდმივი რიცხვია.

ამრიგად, მე-8⁰ ინტეგრალის განხილვამ მიგვიყვანა (45) სახის ინტეგრალზე და ამ უკანასკნელის შესწავლა ჩვენს უახლოეს მიზანს შეადგენს.

9⁰. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{x^{m-1}}{1\pm x^p}\,dx,$$

სადაც m და p მთელი რიცხვებია და $m<p$; p რიცხვის მნიშვნელობისა და x^p ხარისხის წინა ნიშნის მიხედვით აქ წარმოგვიდგება ოთხი შემთხვევა; ეს შემთხვევებია:

$$\text{ა)} \int \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}\,dx,\quad \text{ბ)} \int \frac{x^{m-1}}{1-x^{2n}}\,dx,$$

$$\text{გ)} \int \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n+1}}\,dx,\quad \text{დ)} \int \frac{x^{m-1}}{1-x^{2n+1}}\,dx.$$

განვიხილოთ ყველა ეს ინტეგრალი მიმდევრობით.

ა). ამ ინტეგრალის მოსაძებნად გამოვიყენოთ დაშლის ხერხი (§§ 13, 14). მოვძებნოთ ამისათვის მნიშვნელის ფესვები.

$$x^{2n}+1=0$$

განტოლებას აქვს $2n$ მარტივი ფესვი და ეს ფესვები შემდეგია:

$$x=e^{\frac{2k+1}{2n}\pi i},\ x=e^{-\frac{2k+1}{2n}\pi i}\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots,n-1.$$

აღვნიშნოთ

(46)
$$\sigma_k=\frac{2k+1}{2n}\pi.$$

ამრიგად, წილადი, რომელიც ა) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით იმყოფება, შემდეგნაირად დაიშლება

(47)
$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_k}{x-e^{\sigma_k i}}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{x-e^{-\sigma_k i}}.$$

A_k და B_k კოეფიციენტების მოსაძებნად გამოვიყენოთ (9') ფორმულა. გვაქვს:

$$A_k=\frac{e^{(m-1)\sigma_k i}}{2ne^{(2n-1)\sigma_k i}}=-\frac{1}{2n}e^{m\sigma_k i},\quad B_k=\frac{e^{-(m-1)\sigma_k i}}{2ne^{-(2n-1)\sigma_k i}}=-\frac{1}{2n}e^{-m\sigma_k i}.$$

მაშასადამე, (47) ფორმულა ასე გადმოიწერება:

(48)
$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{e^{m\sigma_k i}}{x-e^{\sigma_k i}}+\frac{e^{-m\sigma_k i}}{x-e^{-\sigma_k i}}\right\}.$$

მაგრამ

$$\frac{e^{m\sigma_k i}}{x-e^{\sigma_k i}}+\frac{e^{-m\sigma_k i}}{x-e^{-\sigma_k i}}=\frac{x(e^{m\sigma_k i}+e^{-m\sigma_k i})-(e^{(m-1)\sigma_k i}+e^{-(m-1)\sigma_k i})}{x^2-(e^{\sigma_k i}+e^{-\sigma_k i})x+1}$$

$$=\frac{2x\cos m\sigma_k-2\cos(m-1)\sigma_k}{1-2x\cos\sigma_k+x^2}.$$

გარდავქმნათ ამ ფორმულაში $\cos(m-1)\sigma_k$. გვაქვს:

$$\cos(m-1)\sigma_k=\cos(m\sigma_k-\sigma_k)=\cos m\sigma_k\cos\sigma_k+\sin m\sigma_k\sin\sigma_k,$$

რის შემდგომაც აღნიშნული ფორმულა შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\frac{e^{m\sigma_k i}}{x-e^{\sigma_k i}}+\frac{e^{-m\sigma_k i}}{x-e^{-\sigma_k i}}=\frac{\cos m\sigma_k(2x-2\cos\sigma_k)}{1-2x\cos\sigma_k+x^2}-$$

$$-2\sin m\sigma_k\frac{\sin\sigma_k}{\sin^2\sigma_k+(x-\cos\sigma_k)^2}$$

და აქედან მივიღებთ

$$\int\left\{\frac{e^{m\sigma_k i}}{x-e^{\sigma_k i}}+\frac{e^{-m\sigma_k i}}{x-e^{-\sigma_k i}}\right\}dx=\cos m\sigma_k \operatorname{Lg}(1-2x\cos\sigma_k+x^2)$$

$$-2\sin m\sigma_k \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\sigma_k}{\sin\sigma_k}.$$

მოვახდინოთ ახლა (48) იგივეობის ორივე ნაწილის ინტეგრება, მაშინ უკანასკნელი ფორმულისა და (46) აღნიშვნის ძალით გვექნება:

$$\int\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}dx=$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)m\pi}{2n}\operatorname{Lg}\sqrt{1-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+x^2}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(2k+1)m\pi}{2n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

და, ამრიგად, ა) ინტეგრალი გამოთვლილია. სრულებით ამავე წესით მოიძებნება სხვა დანარჩენი ბ), გ), დ) ინტეგრალებიც.

ბ). $$\int\frac{x^{m-1}}{1-x^{2n}}dx=\frac{1}{2n}\left[(-1)^{m+1}\operatorname{Lg}(1+x)-\operatorname{Lg}(1-x)\right]$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}\operatorname{Lg}\left(1+2x\cos\frac{k\pi}{n}+x^2\right)$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

გ). $$\int \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n+1}}dx=\frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}\,\mathrm{Lg}\,(1+x)$$
$$-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)m\pi}{2n+1}\,\mathrm{Lg}\left(1-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}+x^2\right)$$
$$+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(2k+1)m\pi}{2n+1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}}.$$

დ). $$\int\frac{x^{m-1}}{1-x^{2n+1}}dx=-\frac{1}{2n+1}\,\mathrm{Lg}\,(1-x)$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)m\pi}{2n+1}\,\mathrm{Lg}\left(1+2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}+x^2\right)$$
$$+\frac{2(-1)^{m+1}}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(2k+1)m\pi}{2n+1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}}.$$

ეს ფორმულები მოყვანილია Bertrand'ის მიერ (იხილე მისი წიგნი: Traité de calcul intégral, P. 23).

10°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი
$$I=\int\frac{dx}{ax^4+bx^2+c}.$$
აქ სამი შემთხვევა წარმოგვიდგება:
$$b^2-4ac>0,\ b^2-4ac<0,\ b^2-4ac=0.$$

პირველ შემთხვევაში გვექნება
$$ax^4+bx^2+c=a(x^2-\alpha)\ (x^2-\beta),$$
სადაც α და β ნამდვილი რიცხვებია:
$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$
მაშასადამე,
$$\frac{1}{ax^4+bx^2+c}=\frac{1}{a(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{x^2-\alpha}-\frac{1}{x^2-\beta}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(\frac{1}{x^2-\alpha}-\frac{1}{x^2-\beta}\right).$$

აქედან მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{ax^4+bx^2+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\int\frac{dx}{x^2-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\int\frac{dx}{x^2-\beta}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალები არიან α და β რიცხვების ნიშანთა მიხედვით ან 2^0 ანდა 3_2^0 სახისა (§ 11). ამრიგად I ინტეგრალი პირველ შემთხვევაში ამოხსნილი იქნება უკვე ცნობილი კვადრატურების საშუალებით.

მ ე ო რ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი გვექნება

$$4ac>b^2.$$

ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ a და c დადებითი რიცხვებია.

ახლა დავშალოთ ax^4+bx^2+c შემდეგნაირად:

$$(49)\qquad \begin{cases} ax^4+bx^2+c=(\sqrt{a}\,x^2)^2+2\sqrt{ac}\,x^2+(\sqrt{c})^2-\\ \quad-\left(2\sqrt{ac}-b\right)x^2=(\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{c})^2-\\ -\left(2\sqrt{ac}-b\right)x^2=\left(\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{2\sqrt{ac}-b}x+\right.\\ \quad\left.+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}\,x^2-\sqrt{2\sqrt{ac}-b}x+\sqrt{c}\right). \end{cases}$$

აღვნიშნოთ

$$\sqrt{2\sqrt{ac}-b}=h.$$

მაშინ (49) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\frac{1}{ax^4+bx^2+c}=\left\{\frac{h+\sqrt{a}\,x}{\sqrt{a}\,x^2+hx+\sqrt{c}}+\right.$$

$$\left.+\frac{h-\sqrt{a}\,x}{\sqrt{a}\,x^2-hx+\sqrt{c}}\right\}\frac{1}{2h\sqrt{c}}.$$

მოვახდინოთ ახლა ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრება. მე-5^0 მაგალითის (36) ფორმულა გვაძლევს:

$$\int\frac{h\pm\sqrt{a}\,x}{\sqrt{a}\,x^2\pm hx+\sqrt{c}}\,dx=\pm\frac{1}{2}\,\mathrm{Lg}(\sqrt{a}\,x^2\pm hx+\sqrt{c})+$$

$$+\frac{h}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a}\,x^2\pm hx+\sqrt{c}}.$$

მივიღებთ რა ახლა მხედველობაში უკანასკნელ ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$
(50)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dx}{ax^4+bx^2+c}=\frac{1}{4h\sqrt{c}}\,\mathrm{Lg}\,\frac{\sqrt{a}\,x^2+hx+\sqrt{c}}{\sqrt{a}\,x^2-hx+\sqrt{c}}+\\ \displaystyle\qquad+\frac{1}{4\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{a}\,x^2+hx+\sqrt{c}}\\ \displaystyle\qquad+\frac{1}{4\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{a}\,x^2-hx+\sqrt{c}}. \end{cases}
$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ორივე ინტეგრალი არის მე-4^0 სახისა (§ 11); მაგრამ ამ ინტეგრალების ნიშნების ქვევით კვადრატული სამწევრების დისკრიმინანტებს აქვთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა:

$$
h^2-4\sqrt{ac}=2\sqrt{ac}-b-4\sqrt{ac}=-b-2\sqrt{ac},
$$

რომელიც უარყოფითია და ამიტომაც

$$
\int\frac{dx}{\sqrt{a}\,x^2\pm hx+\sqrt{c}}=
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{b+2\sqrt{ac}}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\sqrt{a}\,x\pm\sqrt{2\sqrt{ac}-b}}{\sqrt{b+2\sqrt{ac}}}+C.
$$

თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (50) ტოლობაში და, ამას გარდა, მივიღებთ მხედველობაში იგივეობას

$$
\mathrm{arc\,tg}\,u+\mathrm{arc\,tg}\,v=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{u+v}{1-uv}\ {}^{1},
$$

მაშინ აღნიშნული (50) ფორმულა საბოლოოდ ასე გადმოიწერება:

$$
(51)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dx}{ax^4+bx^2+c}=\\ \displaystyle=\frac{1}{2\sqrt{2c\sqrt{ac}-bc}}\,\mathrm{Lg}\,\frac{\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{2\sqrt{ac}-b}\;x+\sqrt{c}}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}}\\ \displaystyle\qquad+\frac{1}{2\sqrt{2c\sqrt{ac}+bc}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{b+2\sqrt{ac}}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}\,x^2}+C. \end{cases}
$$

მ ე ს ა მ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი გვექნება

$$
ax^4+bx^2+c=\frac{(2ax^2+b)^2}{4a}.
$$

მაშასადამე,

$$
\int\frac{dx}{ax^4+bx^2+c}=4a\int\frac{dx}{(2ax^2+b)^2}.
$$

[1] ამ ტოლობას მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როცა $uv<1$ (რედ.).

მაგრამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი არის მე-4° სახისა, ამიტომ მის მოსაძებნად უნდა გამოვიყენოთ რედუქციის (33) ფორმულა, რის შემდგომ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$\int \frac{dx}{ax^4+bx^2+c} = \frac{2a}{b}\left\{\frac{x}{2ax^2+b} + \int \frac{dx}{2ax^2+b}\right\}.$$

ამრიგად, მესამე შემთხვევაში I ინტეგრალი სულ ადვილად გამოითვლება, ვინაიდან ფრჩხილებში მყოფი ინტეგრალი არის ან 2°-სა ანდა 3° სახისა (§ 11).

11°. გამოვთვალოთ ინტეგრალები

$$\int \frac{xdx}{ax^4+bx^2+c}, \quad \int \frac{x^2dx}{ax^4+bx^2+c}, \quad \int \frac{x^3dx}{ax^4+bx^2+c}.$$

ამ ინტეგრალთაგან პირველი და მესამე მოიძებნება უბრალო გარდაქმნით:

$$x^2 = z.$$

მართლაც, ეს გარდაქმნა მოგვცემს ტოლობებს:

$$\int \frac{xdx}{ax^4+bx^2+c} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{az^2+bz+c},$$

$$\int \frac{x^3dx}{ax^4+bx^2+c} = \frac{1}{2}\int \frac{zdz}{az^2+bz+c}.$$

მაშასადამე, პირველი ინტეგრალი მიყვანილია 4° სახეზე (§ 11), ხოლო მესამე—5° სახეზე (§ 22).

რაც შეეხება მეორე ინტეგრალს, მის გამოსათვლელად გავყოთ მრიცხველი და მნიშვნელი ინტეგრალის ნიშნის ქვევით x^4-ზე და შემდეგ თუ მოვახდენთ გარდაქმნას

$$z = \frac{1}{x},$$

მივიღებთ:

$$\int \frac{x^2dx}{ax^4+bx^2+c} = -\int \frac{dz}{cz^4+bz^2+a}.$$

მაშასადამე, უკანასკნელი გარდაქმნით მეორე ინტეგრალი მიყვანილია 10° სახეზე და პრობლემა სამივე შემთხვევაში სავსებით ამოხსნილია.

12°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{P(x)dx}{(x-a)^n},$$

სადაც $P(x)$ არის პოლინომი:

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

რომლის ხარისხიც $m<n$.

ეს ინტეგრალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ჯამი ინტეგრალებისა

$$\int\frac{a_{m-i}x^idx}{(x-a)^n}\quad i=0,\ 1,2,\ldots,m;$$

მაგრამ უკანასკნელი ინტეგრალი არის 1° სახისა, ამიტომ მის გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ გარდაქმნა

$$x-a=t,$$

რის შედეგად მივიღებთ

$$\int\frac{a_{m-i}x^idx}{(x-a)^n}=\int\frac{a_{m-i}(a+t)^idt}{t^n}.$$

მაშასადამე,

$$I=\sum_{i=0}^m\int\frac{a_{m-i}(a+t)^idt}{t^n}=\int\frac{\Sigma a_{m-i}(a+t)^idt}{t^n}=\int\frac{P(a+t)dt}{t^n}.$$

დავშალოთ ახლა $P(a+t)$ ფუნქცია t ხარისხის მიხედვით:

$$P(a+t)=P(a)+tP'(a)+\frac{t^2}{1\,.\,2}P''(a)+\ldots+\frac{t^m}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,m}P^{(m)}(a)$$

და, როდესაც ამას ჩავსვამთ მრიცხველში უკანასკნელი ინტეგრალის ნიშნის ქვევით, გვექნება

$$I=P(a)\int\frac{dt}{t^n}+P'(a)\int\frac{dt}{t^{n-1}}+\frac{P''(a)}{1\,.\,2}\int\frac{dt}{t^{n-2}}+\ldots+$$

$$+\frac{P^{(m)}(a)}{1\,.\,2\ldots m}\int\frac{dt}{t^{n-m}}=-\frac{P(a)}{n-1}\,\frac{1}{t^{n-1}}-\frac{P'(a)}{n-2}\,\frac{1}{t^{n-2}}-\ldots-$$

$$-\frac{P^{(m)}(a)}{(n-m-1)\,1\,.\,2\ldots m}\,\frac{1}{t^{n-m-1}}+C.$$

ამრიგად, I ინტეგრალი უშუალოდ არის გამოთვლილი. როცა ისევ x-ს დავუბრუნდებით, დავინახავთ, რომ I ინტეგრალი წარმოადგენს პოლინომს $\dfrac{1}{x-a}$ წილადის მიმართ.

B. ირაციონალური ფუნქციები

III. ზოგადი თეორია

§ 23. **საკითხის დასმა.** ვთქვათ y არის x-ის ირაციონალური ფუნქცია, რომელიც მიღებულია განტოლებიდან:

(1) $$F(x, y)=0,$$

სადაც $F(x, y)$ არის ნამდვილი კოეფიციენტებიანი პოლინომი x-ისა და y-ის მიმართ, რომლის ხარისხიც y-ის მიმართ $\geqq 2$. ვიგულისხმოთ, ამას გარდა, რომ ეს პოლინომი დაუყვანადია, ე. ი. ნამდვილ არეში მისი დაშლა სხვა პოლინომთა ნამრავლის სახით შეუძლებელია.

ვთქვათ ახლა $R(x, y)$ არის x-ისა და y-ის რაციონალური ფუნქცია. ჩავსვათ უკანასკნელში y-ის მაგიერ (1) განტოლებიდან მიღებული ზემოაღნიშნული ფუნქცია, მაშინ $R(x, y)$ წარმოადგენს x-ის ალგებრულ ნამდვილ ფუნქციას.

ინტეგრალს

(2) $$\int R(x, y) dx,$$

სადაც y მიღებულია (1) განტოლებიდან, აბელის ინტეგრალი ეწოდება, ნორვეგიელი გეომეტრის აბელის სახელის საპატივცემლოდ, რომელმაც პირველად შეისწავლა ეს ინტეგრალი.

თუ $R(x, y)$ არის x და y ცვლადების ნებისმიერი რაციონალური ფუნქცია, მაშინ (2) ინტეგრალი საზოგადოდ ტრანსცენდენტულ ფუნქციას წარმოადგენს.

აბელის ინტეგრალების ზოგადი თეორია, მეტად რთული თავის ხასიათით, შეადგენს მათემატიკური ანალიზის სპეციალურ დარგს.

წინამდებარე კურსი ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითად ელემენტარულ საკითხებს ეხება მხოლოდ, ამიტომ ამ კურსის მიზანს არ შეადგენს აბელის ინტეგრალების ზოგადი თეორიის შესწავლა. ჩვენ ჯერჯერობით ერთი კერძო, მაგრამ საკმაოდ ფართო შემთხვევა გვაინტერესებს მხოლოდ, სახელდობრ ის, როცა მე-(2) სახის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში გარდაწყდება და შემდეგი § სწორედ ამ საკითხს ეხება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მე-(2) სახის ინტეგრალი შეიცავს ერთს y ირაციონალობას მხოლოდ. საზოგადოდ, რა თქმა უნდა, ინტეგრალის ნიშნის ქვევით შესაძლოა რამოდენიმე ირაციონალობა იმყოფებო-

დეს; ამიტომ ყველაზე ზოგადი სახე ინტეგრალისა, რომელიც ალგებრული დიფერენციალიდანაა აღებული, შემდეგი უნდა იყოს:

$$\int R(x, y, z, \ldots) dx, \tag{3}$$

სადაც y, $z, \ldots$ აკმაყოფილებენ შესაბამისად განტოლებებს:

$$f(x, y) = 0, \ \varphi(x, z) = 0, \ldots,$$

რომლებსაც იგივე აგებულება აქვთ, როგორც (1) განტოლებას, მაგრამ ალგებრის უმაღლესი დარგი გვიჩვენებს, რომ ამგვარ შემთხვევაში ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი დამხმარე λ ირაციონალობა, რომლის ფუნქციის სახითაც გამოისახოს ყოველი y, $z, \ldots$ ირაციონალობათაგანი; ცხადია ამიტომ, რომ მე-(3) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ნამდვილად გვექნება ერთი ეს λ ირაციონალობა მხოლოდ, ე. ი. უკანასკნელი ინტეგრალი ყოველთვის მიიყვანება მე-(2) სახეზე.

ავიღოთ, მაგალითად, მე-(3) ინტეგრალის ასეთი კერძო სახე:

$$\int R(x, \sqrt{x-1}, \sqrt{2x+7}) dx,$$

რომელიც შეიცავს ორ ირაციონალობას $\sqrt{x-1}$ და $\sqrt{2x+7}$.

დავამტკიცოთ, რომ არსებობს ისეთი მესამე ირაციონალობა, რომლის რაციონალური ფუნქციების სახითაც გამოისახება ეს ორი ირაციონალობა. მართლაც, მივიღოთ

$$\sqrt{x-1} = t\sqrt{2x+7},$$

საიდანაც

$$x = \frac{1+7t^2}{1-2t^2};$$

აქედან გვექნება

$$\sqrt{x-1} = \frac{3t}{\sqrt{1-2t^2}}, \quad \sqrt{2x+7} = \frac{3}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

ეს ფორმულები ამტკიცებენ ნათქვამს: მესამე ირაციონალობა, რომლის მიმართაც რაციონალურად უნდა გამოისახონ აღებული ირაციონალობანი, არსებობს და ეს არის $\sqrt{1-2t^2}$.

ამ ფორმულების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int R(x, \sqrt{x-1}, \sqrt{2x+7}) dx = \int R_1(t, \sqrt{1-2t^2}) dt,$$

სადაც R_1 არის რაციონალობის ახალი სიმბოლო. ამრიგად, მე-(3) სახის ინტეგრალი მიყვანილია მე-(2) სახის ინტეგრალზე.

§ 24. ძირითადი შემთხვევა, როცა მე-(2) სახის ინტეგრალი არის ელემენტარული ფუნქცია. ასეთი შემთხვევა ორი შემდეგი დებულებით განისაზღვრება:

I. მე-(2) სახის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება ყოველთვის, თუ x და y, რომლებიც (1) განტოლებას აკმაყოფილებენ, ერთი t ცვლადის რაციონალური ფუნქციით გამოისახებიან.

მართლაც, ვთქვათ

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \tag{4}$$

აღნიშნული რაციონალური ფუნქციებია; მაშინ ეს ფუნქციები იგივურად აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას, ე. ი. ტოლობა

$$F(\varphi(t),\ \psi(t))=0$$

არის იგივეობა. მეორეს მხრით მე-(4) ფორმულების ძალით აღებული მე-(2) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება·

$$\int R(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t)\,dt;$$

მაგრამ ფუნქცია, რომელიც ამ ინტეგრალის ნიშნის ქვეით იმყოფება, რაციონალურია t ცვლადის მიმართ. მაშასადამე, თვით ეს ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

II. მე-(2) სახის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება ყოველთვის, როცა არსებობს რედუქციის ფორმულები, რომელთა მიმდევრობითი გამოყენებით ეს ინტეგრალი უკვე ცნობილი ინტეგრალის მოძებნაზე მიიყვანება.

ამ დებულების ჭეშმარიტება აშკარაა თვით რედუქციის ფორმულების აგებულებიდან.

ირაციონალური დიფერენციალების ინტეგრების იმ შემთხვევის განხილვა, რომელიც ამ ორი დებულებით განისაზღვრება, წარმოადგენს წინამდებარე თავის მიზანს უპირველესად.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: გარდა ამ შემთხვევისა, არსებობს თუ არა სხვა ისეთი შემთხვევა კიდევ, როცა მე-(2) სახის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენდეს?

პასუხად ამ კითხვაზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ორ ზემოაღნიშნულ დებულებაში გამოთქმული პირობები არიან საკმარისი პირობათაგანი; მათგან არც ერთი არ არის აუცილებელი და ეს იმიტომ, რომ ყოველთვის შეგვიძლია მოვიყვანოთ მე-(2) სახის ინტეგრალები, რომელნიც ელემენტარულ ფუნქციებს წარმოადგენენ მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნული ორი პირობა მათთვის შესრულებული არ იქნება.

მაგალითად, თუ (1) განტოლებას აქვს სახე

$$y^2=1+x^3,$$

მაშინ შეუძლებელი ხდება x-ისა და y-ის რაიმე t პარამეტრის რაციონალური ფუნქციების სახით წარმოდგენა. მიუხედავად ამისა

$$\int\frac{x^3-2}{x^2\sqrt{1+x^3}}\,dx=\frac{2\sqrt{1+x^3}}{x}+C.$$

ამრიგად, I პირობა ამ შემთხვევაში შესრულებული არ არის, მაგრამ ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა. II პირობასაც არ აქვს ადგილი.

მაგრამ ასეთი შემთხვევა არანორმალურია; საზოგადოდ კი, თუ I პირობა შესრულებული არ არის, ე. ი. თუ (1) განტოლებაში x, y კოორდინატები რაციონალურად ვერ გამოისახებიან ერთი t პარამეტრის მიმართ, მაშინ მე-(2) ინტეგრალი წარმოადგენს არაელემენტარულსა, არამედ უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციას.

რაც შეეხება II პირობას, თუ იგი შესრულებული არაა, მაშინ საკითხს I პირობა წყვეტს მაინც.

საინტერესოა ახლა საქმის გეომეტრიული მხარე პირველ დებულებაში და შემდეგი პარაგრაფი სწორედ ამას ეხება.

§ 25. ცნება უნიკურსალური მრუდისა. გეომეტრიული თვალსაზრისით (1) განტოლება წარმოადგენს სიბრტყეზე ალგებრულ მრუდს დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამრიგად, ინტეგრალი

$$\int R(x,y)\,dx$$

შ ე კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ი ა ერთ ალგებრულ მრუდთან, რომლის ბუნებას აქვს გავლენა ამ ინტეგრალის გამოთვლაზე.

ისმის კითხვა: რა ხასიათის უნდა იყოს აღნიშნული დამოკიდებულება აბელის ინტეგრალსა და შესაბამ მრუდს შორის? ეს კითხვა

არ შეადგენს ამ კურსის საგანს ზოგად შემთხვევაში: მისი ამოხსნა მთლიანად მოხდება აბელის ინტეგრალთა ზოგად თეორიაში. აქ ამ კითხვის გადაწყვეტა შეგვიძლია ზემოაღნიშნულ კერძო შემთხვევაში მხოლოდ, ე. ი. როცა (1) მრუდის კოორდინატები რაციონალურად გამოისახებიან ერთი t პარამეტრის მიმართ. ამ მიზნისათვის შევისწავლოთ უპირველესად (1) მრუდის ბუნება აღნიშნულ კერძო შემთხვევაში.

მრუდს, რომლის მიმდინარე x და y კოორდინატები რაციონალურად ერთი t პარამეტრით გამოისახებიან, უნიკურსალური მრუდი ეწოდება.

ამრიგად, ზემოაღნიშნული I დებულება (§ 23) შეგვიძლია შემდეგნაირად გამოვთქვათ კიდევ:

თუ (1) განტოლება უნიკურსალურ მრუდს გამოსახავს, მაშინ მე-(2) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში გადაწყდება ყოველთვის.

მაგრამ, თუ (1) მრუდი უნიკურსალური არ არის, მაშინ § 24-ის თანახმად, მე-(2) სახის ინტეგრალი საზოგადოდ უმაღლესი ტრანსცენდენტულია და, როგორც აბელის ინტეგრალების ზოგადი თეორია გვიჩვენებს, ამ ტრანსცენდენტულთა კლასიფიკაცია (1) მრუდის გვარის (§ 26, V) მიხედვით შესრულდება.

ისმის კითხვა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს (1) განტოლებით განსაზღვრული მრუდი, რომ იგი უნიკურსალური იყოს? ეს კითხვა მჭიდროდ არის დაკავშირებული ალგებრული მრუდის ზოგადი თეორიის ზოგიერთ საკითხთან, ამიტომ უპირველესად გავიხსენოთ ეს საკითხები.

§ 26. ზოგიერთი საკითხი ალგებრულ მრუდთა ზოგადი თეორიიდან.

I. იმ პირობათა რიცხვი, რომლებიც საჭიროა n-ური რიგის მრუდის განსაზღვრისათვის. ვთქვათ (1) მრუდი n-ური რიგისაა; რადგანაც პოლინომი (1) განტოლების მარცხნივ დაუყვანადია, ამიტომ თვით ეს მრუდი არის დაუშლადი.

ცნობილია, რომ (1) განტოლებას, როგორც n-ურ რიგისას, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ კოეფიციენტები აქვს. მეორეს მხრით, რომ ალებული მრუდი გარკვეული იყოს, ამისათვის საჭირო არ არის ყველა აღნიშნული კოეფიციენტის ცოდნა: საკმარისია ამ კოეფიციენტთა

შეფარდებანი ვიცოდეთ ერთ რომელიმე მათგანზე. მაგრამ ამ შეფარდებათა რიცხვი ყველა კოეფიციენტის რიცხვზე ერთით ნაკლებია; მაშასადამე, n-ური რიგის მრუდი განისაზღვრება

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{1}{2}n(n+3)$$

პირობებით. აქედან აშკარაა, რომ n-ური რიგის მრუდი საზოგადოდ გარკვეულია ყოველთვის, თუ მოცემულია მისი $\frac{1}{2}n(n+3)$ წერტილი.

II. ალგებრულ მრუდთა კონა. თუ იმ პირობათა რიცხვი, რომლებიც მოცემულია n-ური რიგის მრუდის გასაყვანად, ნაკლებია, ვიდრე $\frac{1}{2}n(n+3)$, მაშინ ეს პირობები განსაზღვრავენ არა ერთ მრუდს, არამედ ასეთ მრუდთა მთელ კონას. მოვძებნოთ ეს კონა იმ შემთხვევაში, როცა აღნიშნულ პირობათა რიცხვი არის $\frac{1}{2}n(n+3)-1$.

ამრიგად, ვთქვათ, სიბრტყეზე აღებულია წერტილები რიცხვით $\frac{1}{2}n(n+3)-1$. გავიყვანოთ ამ წერტილებზე ორი n-ური რიგის მრუდი, რისთვისაც საკმარისია აღებულ წერტილებს მივუმატოთ თითოეული ამ მრუდისათვის თითო სრულებით ნებსითი წერტილი. ვთქვათ პირველი მრუდის განტოლება არის $U=0$, ხოლო მეორესი $V=0$; მაშინ განტოლება n-ური რიგის რომელიმე მრუდისა, რომელიც $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ აღებულ წერტილზე გაივლის, იქნება

$$U+\lambda V=0, \tag{5}$$

სადაც λ პარამეტრია. მართლაც, ზემოაღნიშნულ წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებებს: $U=0$, $V=0$ და, მაშასადამე, მე-(5) განტოლებასაც აგრეთვე, რაც ამტკიცებს ნათქვამს. მეორეს მხრით, λ პარამეტრი შეგვიძლია ისე ამოვარჩიოთ, რომ მე-(5) მრუდმა, გარდა აღებული $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ წერტილებისა, რომელიმე ერთ სხვა ნებსით წერტილზე გაიაროს კიდევ. მართლაც, თუ U_0 და V_0 არიან U-ს და V-ს მნიშვნელობანი ამ წერ-

ტილზე, ხოლო $\lambda_0 = -\frac{U_0}{V_0}$, მაშინ $U + \lambda_0 V = 0$ იქნება აღნიშნული მრუდის განტოლება.

ამრიგად, მე-(5) განტოლება წარმოადგენს n-ური რიგის იმ მრუდთა კონის განტოლებას, რომლებიც აღებულ $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ წერტილზე გაივლიან.

III. ალგებრული მრუდის ჯერადი წერტილები. ალგებრულ მრუდს, როგორც ცნობილია, საზოგადოდ აქვს ორგვარი წერტილები: ჩვეულებრივი და საგანგებო. უნიკურსალურ მრუდთა თეორიისათვის საგანგებო წერტილებიდან დიდ ინტერესს ჯერადი წერტილები წარმოადგენენ განსაკუთრებით და იმ თვალსაზრისით მხოლოდ, თუ რამდენი ასეთი წერტილი შეუძლია n-ური რიგის მრუდს რომ ჰქონდეს.

მაგრამ ყოველი ჯერადი წერტილი, რომლის ჯერადობა 2-ზე მეტია, შეგვიძლია ჩავთვალოთ რამოდენიმე ორჯერადი წერტილის ეკვივალენტურად.

გამოვარკვიოთ ამიტომ, თუ რამდენი ორჯერადი წერტილი შეესაბამება k ჯერადობის წერტილს. ამისათვის ავიღოთ სისტემა k სხვადასხვა წრფისა, რომლებიც ერთმანეთს წყვილ-წყვილად კვეთენ. ისინი ერთმანეთს გადაჰკვეთენ $\frac{1}{2}k(k-1)$ წერტილზე, რომლებიც წარმოადგენენ აღნიშნული სისტემის ორჯერად წერტილებს. ვთქვათ ახლა ყველა k წრფე ერთ წერტილზე გადის. მაშინ ეს წერტილი შეიქმნება k ჯერადობისა და მეორეს მხრით, ამ წერტილზე მოთავსდება სისტემის ყველა აღნიშნული ორჯერადი წერტილი. რა თქმა უნდა, შედეგი იგივე დარჩება, თუ წრფეებს მრუდებით შევცვლით.

ამრიგად, მრუდის k ჯერადობის წერტილი შედგება $\frac{1}{2}k(k-1)$ ორჯერადი წერტილისაგან.

მაშასადამე, ჯერადი წერტილი შეგვიძლია შევცვალოთ ორჯერად წერტილთა სათანადო რიცხვით და ამიტომ საქმე ისე წარმოვიდგინოთ ვითომ მრუდზე მხოლოდ ორჯერადი წერტილები ყოფილიყოს.

IV. ზედა საზღვარი ალგებრული მრუდის ორჯერადი წერტილების რიცხვისათვის. თურმე არსებობს ნამდვილი ზედა საზღვარი იმ რიცხვისათვის, რამდენიც ორჯერა-

დი წერტილი შეიძლება n-ური რიგის მრუდზე იყოს. მოვძებნოთ ახლა ეს ზედა საზღვარი.

განვიხილოთ ჯერ კერძო შემთხვევები.

მე-2 რიგის მრუდი. ვინაიდან მეორე რიგის დაუშლადი მრუდი არის ან ელიფსი ან ჰიპერბოლი ანდა პარაბოლი, ამიტომ აშკარაა, რომ მეორე რიგის მრუდს სრულებით არ აქვს ორჯერადი წერტილები.

მე-3 რიგის მრუდი. მესამე რიგის მრუდს მხოლოდ ერთი ორჯერადი წერტილი შეუძლია ჰქონდეს. მართლაც, მას რომ ორი ორჯერადი წერტილი ჰქონოდა, მაშინ წრფე რომელიც ამ ორ წერტილს შეაერთებდა, ოთხ წერტილზე გადაჰკვეთდა ჩვენს მრუდს, რაც შეუძლებელია.

n-ური რიგის მრუდი. დავამტკიცოთ, რომ ორჯერად წერტილთა რიცხვი n-ური რიგის მრუდზე შეუძლებელია იყოს $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$-ზე მეტი.

წარმოვიდგინოთ წინააღმდეგი, ვთქვათ n-ური რიგის მრუდს შეუძლია ჰქონდეს $\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right]$ ორჯერადი წერტილი; მაშინ ამ მრუდზე ავიღოთ $n-3$ სხვა წერტილი კიდევ. მაშასადამე, სულ გვექნება აღებული

$$\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1)\right]+n-3=\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$$

წერტილი. მაგრამ $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ წერტილები ერთ $(n-2)$ რიგის მრუდს განსაზღვრავენ. ავაგოთ ეს მრუდი; ვინაიდან ყოველი ორჯერადი წერტილი ორ წერტილად ითვლება, ამიტომ ამ მრუდს ექნება აღებული n-ური რიგის მრუდთან საერთო

$$2\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right]+n-3=n(n-2)+1$$

წერტილი, რაც შეუძლებელია, რადგანაც n-ურსა და $(n-2)$ რიგის მრუდებს ნამდვილად $n(n-2)$ წერტილი აქვთ საერთო. ამრიგად, n-ური რიგის ყოველ მრუდზე ორჯერად წერტილთა რიცხვი მართლაც არ აღემატება $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ რიცხვს და ჩვენი დებულე-

ბაც დამტკიცებულია სავსებით. ეს უკანასკნელი რიცხვი შემდეგისათვის აღვნიშნოთ Ω-თი:

$$\Omega = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

ბუნებრივად ისმის ახლა კითხვა: არსებობს თუ არა n-ური რიგის ისეთი მრუდი, რომლის ორჯერად წერტილთა რიცხვი იყოს Ω?

ქვემოთ დავინახავთ, რომ ასეთი მრუდი ნამდვილად არსებობს და ესაა უნიკურსალური მრუდი. სწორედ ამიტომ, n-ური რიგის მრუდისათვის Ω რიცხვი ითვლება ორჯერად წერტილთა მაქსიმალურ რიცხვად.

V. ალგებრული მრუდის გვარი (ჟანრი). ვთქვათ ორჯერადი წერტილების რიცხვი n-ური რიგის აღებულ მრუდზე არის N. ამ უკანასკნელ რიცხვსა და Ω რიცხვს შორის სხვაობას მრუდის გვარი ეწოდება. აღვნიშნოთ იგი J-თი:

$$J = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - N.$$

ამრიგად, თუ მრუდს აქვს ორჯერად წერტილთა მაქსიმალური რიცხვი, მაშინ იგი ნულის გვარისაა. მაგალითად დეკარტის ფოთოლი

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

მესამე რიგის მრუდია და მას ერთი ორჯერადი წერტილი აქვს კოორდინატთა სათავეში. მაშასადამე, დეკარტის ფოთოლი ნულის გვარისაა.

როგორც ანალიზური გეომეტრიის უმაღლესი დარგები გვიჩვენებს, გვარი მეტად დამახასიათებელი ელემენტია მრუდისა: რაც უფრო ნაკლებია მრუდის გვარი იმდენად უფრო მარტივია თვით მრუდიც; პირიქით, მრუდი იმდენად უფრო რთულია, რამდენადაც მაღალი გვარისაა იგი.

მრუდის გვარი განსაკუთრებული მნიშვნელობის ელემენტია აბელის ინტეგრალთა თეორიაშიც აგრეთვე. საკმარისია მხოლოდ აღვნიშნოთ, რომ მრუდების გვართან დაკავშირებულია მჭიდროდ იმ ფუნქციების ტრანსცენდენტობის ხასიათიც, რომლებსაც აბელის ინტეგრალები ჰქმნიან.

მაგალითად, თუ მრუდი ნულის გვარისაა, მაშინ აბელის ინტეგრალი ელემენტარული ტრანსცენდენტული ფუნქციაა. როცა

მრუდის გვარი არის 1, მაშინ აბელის ინტეგრალები, საზოგადოდ, ახალი ტრანსცენდენტული ფუნქციებია, რომლებსაც ელიფსური ფუნქციები ეწოდებათ. ახლა, თუ მრუდის გვარი არის 2, მაშინ აბელის ინტეგრალები საზოგადოდ წარმოადგენენ უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს, რომელთათვისაც ელიფსური ინტეგრალები უკვე ელემენტარული ფუნქციების როლს ასრულებენ და ა. შ.

§ 27. **უნიკურსალური მრუდის გვარი.** ახლა ისმის კითხვა: რა გვარის უნდა იყოს უნიკურსალური მრუდი? შემდეგი თეორემა პასუხს გვაძლევს წამოყენებულ კითხვაზე.

თეორემა. ყოველი უნიკურსალური მრუდი ნულის გვარისაა, ე. ი. უნიკურსალურ მრუდს აქვს ორჯერად წერტილთა მაქსიმალური რიცხვი.

ზოგადი სახე უნიკურსალური მრუდის განტოლებისა შემდეგია

$$x=\frac{\varphi(t)}{f(t)}, \quad y=\frac{\psi(t)}{f(t)}, \tag{6}$$

სადაც φ, ψ, f პოლინომებია, რომლებსაც საერთო გამყოფი არ აქვთ.

ვთქვათ აღებულია n-ური რიგის უნიკურსალური C მრუდი. ვინაიდან ყოველი წრფე

$$ax+by+c=0$$

C მრუდს n წერტილზე გადაჰკვეთს, ამიტომ მისთვის φ, ψ, f პოლინომების ხარისხები n-ს არ უნდა აღემატონ, მასთან ერთი რომელიმე მათგანის ხარისხი n უნდა იყოს.

შევადგინოთ ახლა მრუდის რომელიმე (x_0, y_0) წერტილზე (რომლისათვისაც $t=t_0$) გამავალი მხების განტოლება. ვინაიდან მე-(6) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi' f-f'\psi}{\varphi' f-f'\varphi},$$

ამიტომ აღნიშნულ განტოლებას აქვს სახე:

$$(x-x_0)\left[\psi'(t_0)f(t_0)-f'(t_0)\psi(t_0)\right]+(y-y_0)\left[f'(t_0)\varphi(t_0)-\varphi'(t_0)f(t_0)\right]=0; \tag{7}$$

ანდა, თუ მივიღებთ მხედველობაში x_0-სა და y_0-ს მნიშვნელობებს მე-(6) ტოლობებიდან მიღებულს, მაშინ მე-(7) განტოლება ასე გადმოიწერება:

$$(8)\quad x[\psi'(t_0)f(t_0)-f'(t_0)\psi(t_0)]+y[f'(t_0)\varphi(t_0)-\varphi'(t_0)f'(t_0)] + [\varphi'(t_0)\psi(t_0)-\psi'(t_0)\varphi(t_0)]=0.$$

ვთქვათ ახლა (x, y) არის მრუდის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ უკანასკნელი განტოლება განსაზღვრავს t პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება მრუდის წერტილს, სადაც (x, y) წერტილიდან გაყვანილი წრფე შეეხება C მრუდს. მაგრამ რა ხარისხისაა t_0-ს მიმართ ეს განტოლება?

ზემონათქვამის თანახმად φ, ψ, f ფუნქციებიდან ერთი მაინც იქნება n-ური ხარისხისა; ვთქვათ ეს არის φ, მაშინ გამოსახულება

$$\varphi'(t_0)f(t_0)-f'(t_0)\varphi(t_0)$$

იქნება $2n-2$ ხარისხისა t_0-ს მიმართ, იმიტომ, რომ ამ გამოსახულების კოეფიციენტი, რომელიც t_0^{2n-1}-ს წინა დგას ისპობა. ამნაირად, მე-(8) განტოლების უმაღლესი ხარისხი t_0-ს მიმართ არის $2n-2$ და ამიტომაც (x, y) წერტილიდან შეგვიძლია გავიყვანოთ $2n-2$ მხები C მრუდისადმი.

მაგრამ ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ თუ მრუდს აქვს N ორჯერადი წერტილი, მაშინ ამ მრუდის გარეთ მდებარე ყოველი წერტილიდან შეგვიძლია $n(n-1)-2N$ მხები გავიყვანოთ[1].

გამოვარკვიოთ ახლა, თუ რამდენი ორჯერადი წერტილი უნდა ჰქონდეს უნიკურსალურ მრუდს. მაგრამ C მრუდის იმ მხებთა რიცხვი, რომლებიც ერთსა და იმავე წერტილიდან გაიყვანებიან, არის $2n-2$, ამიტომ

$$2n-2=n(n-1)-2N,$$

საიდანაც

$$N=\frac{1}{2}[n(n-1)-2(n-1)]=\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

მაშასადამე, უნიკურსალურ მრუდს ჰქონია ორჯერად წერტილთა მაქსიმალური რიცხვი და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

გადავდივართ ახლა შებრუნებულ თეორემაზე.

შებრუნებული თეორემა. ნულის გვარის ყოველი მრუდი უნიკურსალურია, ე. ი. არსებობს ისეთი პარამეტრი, რომლის მიმართ რაციონალურად გამოისახებიან ამ მრუდის წერტილის კოორდინატები x, y.

[1] Salmon, Traité de géométrie analytique (courbes planes). Paris, Gauthier-Villars, 1884, P. 78.

ვთქვათ აღებული n-ური რიგის C მრუდის გვარი $J=0$, ე. ი. მის ორჯერად წერტილთა რიცხვია $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ და ვთქვათ, ამ მრუდის განტოლება არის

$$F(x, y)=0.$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მრუდი უნიკურსალურია. ავიღოთ ამ მრუდზე $n-3$ სხვა ჩვეულებრივი წერტილი კიდევ. მაშასადამე, სულ C მრუდზე გვექნება აღებული

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+(n-3)=\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-1$$

წერტილი. მაგრამ $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ წერტილით ერთი $(n-2)$ რიგის მრუდი განისაზღვრება (§ 24. I), და ამიტომაც $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-1$ წერტილი ასეთ მრუდთა მთელ კონას განსაზღვრავს.

შევადგინოთ, როგორც წინათ, ამ კონის განტოლება. ვთქვათ, ამ უკანასკნელს აქვს სახე:

(9) $$U(x, y)+tV(x, y)=0.$$

დავამტკიცოთ ახლა, რომ t სწორედ ის პარამეტრია, რომლის მიმართაც რაციონალურად გამოისახება C მრუდის წერტილის კოორდინატები x და y.

მართლაც, t-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის (9) მრუდი გაივლის C მრუდის ყველა ორჯერად წერტილზე და მისივე ზემოაღნიშნულ $(n-3)$ ჩვეულებრივ წერტილებზედაც კიდევ; მაგრამ ყოველი ორჯერადი წერტილი ორ წერტილად ითვლება, ამიტომ რიცხვი იმ წერტილებისა, რომლებიც მე-(9) კონის ყველა მრუდსა და C მრუდს შორის საერთოა, არის

$$2\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\right]+n-3=n(n-2)-1.$$

რადგანაც ეს წერტილები კონის ყველა მრუდს ეკუთვნიან, ამიტომ ცხადია, მათი კოორდინატები დამოუკიდებელი არიან t პარამეტრიდან.

მეორეს მხრით მე-(9) კონის ყოველი მრუდი $(n-2)$ რიგისაა და ამიტომ ყოველი ასეთი მრუდი C მრუდს $n(n-2)$ წერტილზე გადაჰკვეთს; მათ შორის ზემოაღნიშნული $n(n-2)-1$ წერტილი t პარამეტრიდან დამოუკიდებელი არიან. მაგრამ, ვინაიდან

$$n(n-2)-[n(n-2)-1]=1,$$

ამიტომ გადაკვეთის მხოლოდ ერთი წერტილი ყოფილა დამოკიდებული t პარამეტრზე.

ვთქვათ ახლა, t განუწყვეტლივ იცვლება, მაშინ გადაკვეთის აღნიშნული წერტილი განუწყვეტლივ მოძრაობს C მრუდზე; მაშასადამე, C მრუდის წერტილის კოორდინატები t ცვლადის ფუნქციებია. ეს ფუნქციები იყოს:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t).$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქციები რაციონალურია t-ს მიმართ.

მართლაც, გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები უკანასკნელი ფუნქციების სახით შემდეგი ორი განტოლებიდან მიიღება

$$U(x,\ y)+tV(x,\ y)=0,\ F(x,\ y)=0. \tag{10}$$

მოვძებნოთ აქედან ჯერ x. ამისათვის უკანასკნელი სისტემიდან გამოვრიცხოთ y; მაშინ x-ის მიმართ მივიღებთ $n(n-2)$ რიგის განტოლებას, რომლის კოეფიციენტები პოლინომებია t-ს მიმართ. ზემონათქვამის თანახმად ამ განტოლების $n(n-2)-1$ ფესვი დამოუკიდებელია t პარამეტრზე და მხოლოდ ერთი ფესვი არის t-ს ფუნქცია. მაშასადამე, თუ ამ განტოლების მარცხენა ნაწილს დავშლით წრფივ მამრავლებად და შემდეგ გავყოფთ ნამრავლზე $[n(n-2)-1]$ მამრავლისა, რომლებიც t-დან დამოუკიდებელი არიან, დაგვირჩება განტოლება

$$x-\varphi(t)=0,$$

რომელიც, რა თქმა უნდა, t-ს მიმართ რაციონალური იქნება.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ x-ის გამორიცხვა მე-(10) სისტემიდან მოგვცემს განტოლებას

$$y-\psi(t)=0,$$

რომელიც რაციონალურია t-ს მიმართ და, ამრიგად, C მრუდის x და y კოორდინატები რაციონალურად გამოისახებიან t ცვლადის მიმართ, ე. ი. C მრუდი უნიკურსალურია.

ორი უკანასკნელი თეორემა გვიჩვენებს, რომ მრუდი

$$F(x,y)=0, \tag{1}$$

უნიკურსალურია იგი თუ არა, მიიყვანება ამ უკანასკნელი მრუდის ორჯერად წერტილთა დათვლაზე.

ამ მოსაზრებით განვიხილოთ ახლა (1) მრუდის რამოდენიმე კერძო სახე.

§ 26. **უნიკურსალობა ზოგიერთი კერძო სახის მრუდისა.** პ ი რ- ვ ე ლ ი რ ი გ ი ს მ რ უ დ ი. ვთქვათ, (1) მრუდი პირველი რიგისაა, ე. ი. ის არის წრფე. რადგანაც წრფეს ორჯერადი წერტილები არ აქვს, ამიტომ მისი გვარი

$$J=\Omega-N=0.$$

ამრიგად, ყ ო ვ ე ლ ი წ რ ფ ე ა ნ უ პ ი რ ვ ე ლ ი რ ი გ ი ს ყ ო ვ ე- ლ ი მ რ უ დ ი უ ნ ი კ უ რ ს ა ლ უ რ ი ა.

მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს მ რ უ დ ი. მეორე რიგის ყოველ მრუდს, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ორჯერადი წერტილები არა აქვს, ამიტომ $J=\Omega-N=0$. მაშასადამე, მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს ყ ო ვ ე ლ ი მ რ უ დ ი უ ნ ი კ უ რ ს ა ლ უ რ ი ა.

მ ე ს ა მ ე რ ი გ ი ს მ რ უ დ ი. ვთქვათ, (1) მრუდი მესამე რიგისაა; მაშინ $n=3$. მისთვის

$$\Omega=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=1.$$

მაშასადამე, მ ე ს ა მ ე რ ი გ ი ს მ რ უ დ ე ბ ს შ ო რ ი ს, უ ნ ი კ უ რ- ს ა ლ უ რ ი ი ს ა ა, რ ო მ ე ლ ს ა ც ა ქ ვ ს ე რ თ ი ო რ ჯ ე რ ა დ ი წ ე რ ტ ი ლ ი.

მაგალითად, დეკარტის ფოთოლი

$$x^3+y^3-3axy=0$$

უნიკურსალურია, ვინაიდან მას ერთი ორჯერადი წერტილი აქვს, სახელდობრ კოორდინატთა სათავე.

n-უ რ ი რ ი გ ი ს მ რ უ დ ი ს ე რ თ ი კ ე რ ძ ო შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ (1) განტოლებას აქვს სახე

$$f_n(x, y)+f_{n-1}(x, y)=0, \tag{11}$$

სადაც f_n და f_{n-1} ერთგვაროვანი პოლინომებია x-ისა და y-ის მიმართ, ხოლო n და $n-1$ მათი ერთგვარობის მაჩვენებელია შესაბამისად.

ასეთი სახის მრუდები უნიკურსალურია ყოველთვის. მართლაც, გავიყვანოთ კოორდინატთა სათავეზე წრფე

$$y=tx, \tag{12}$$

რომელიც მე-(11) მრუდს n წერტილზე გადაჰკვეთს. მოვძებნოთ ეს წერტილები; ამისათვის ამოვხსნათ სისტემა

$$f_n(x, y)+f_{n-1}(x, y)=0, \ y=tx,$$

რაც f_n და f_{n-1} პოლინომების ერთგვარობის გამო მოგვცემს:

$$x^n f_n(1, t)+x^{n-1} f_{n-1}(1, t)=0.$$

უკანასკნელი განტოლების ფესვებია: $(n-1)$ ჯერადობის ფესვი $x=0$, რომელიც დამოუკიდებელია t-ზე და ერთი მარტივი ფესვიც

$$x=-\frac{f_{n-1}(1,t)}{f_n(1,t)},$$

რომელიც დამოკიდებულია t-ზე.

ამნაირად, მე-(12) წრფე გადაჰკვეთს მე-(11) მრუდს კოორდინატთა სათავეში, რომელიც მრუდის $n-1$ ჯერადობის წერტილია და, ამას გარდა, ერთ წერტილზე კიდევ, რომლის კოორდინატები

$$x=-\frac{f_{n-1}(1,t)}{f_n(1,t)},\quad y=-\frac{tf_{n-1}(1,t)}{f_n(1,t)}.$$

დამოკიდებულია t-ზე. მაშასადამე, x-ისა და y-ის უკანასკნელი რაციონალური გამოსახულებანი წარმოადგენენ ჩვენი მრუდის განტოლებას და ამიტომ თვით მრუდი უნიკურსალურია.

დეკარტის ფოთოლის განტოლება სწორედ მე-(11) სახისაა, ამიტომ მისი x, y კოორდინატები, უკანასკნელი ფორმულების ძალით, შემდეგნაირად გამოისახებიან t პარამეტრის მიმართ:

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

ჩვენს თეორიაში აღნიშნულ უნიკურსალურ მრუდებს შორის უნიკურსალობის თვალსაზრისით მეორე რიგის მრუდებს აქვთ უმთავრესი მნიშვნელობა.

შევისწავლოთ ამიტომ მეორე რიგის მრუდები იმ მხრივ, რომ ვიპოვოთ მათი კოორდინატების რაციონალური გამოსახულებანი. შემდეგი §-ი სწორედ ამ საკითხს ეხება.

§ 29. მეორე რიგის მრუდთა განტოლებები პარამეტრული რაციონალური სახით. მეორე რიგის მრუდზე

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+H=0 \tag{13}$$

ავიღოთ რომელიმე $P_0(x_0, y_0)$ წერტილი და გავატაროთ ამ წერტილზე წრფე

$$y-y_0=t(x-x_0), \tag{14}$$

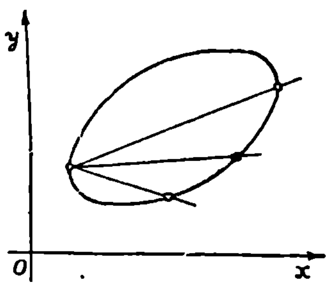
რომელიც მე-(13) მრუდს P_0 წერტილის გარდა კიდევ სხვა P წერტილზე გადაჰკვეთს (ნახ. 2). მოვძებნოთ ეს უკანასკნელი წერტილი. ამისათვის გამოვრიცხოთ y ორი უკანასკნელი განტოლებიდან, რაც ყველაზე უფრო კარგად შემდეგნაირად მოხდება:

მე-(13) განტოლების მარცხენა ნაწილი დავშალოთ $(x-x_0)$-სა და $(y-y_0)$ სხვაობათა ხარისხების მიხედვით, რის შემდგომ მე-(13) განტოლება ასე გადმოიწერება:

$$A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2+2(Ax_0+$$
$$+By_0+D)(x-x_0)+2(Bx_0+Cy_0+E)(y-y_0)=0.$$

თუ ჩავსვამთ ახლა ამ უკანასკნელ ტოლობაში $(y-y_0)$-ის გამოსახულებას, განსაზღვრულს მე-(14) განტოლებიდან, მივიღებთ:

$$(15)\quad \begin{cases} A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)^2 t+C(x-x_0)^2 t^2+2(Ax_0+ \\ +By_0+D)(x-x_0)+2(Bx_0+Cy_0+E)(x-x_0)t=0. \end{cases}$$



ნახ. 2.

მაგრამ ამ კვადრატული განტოლების ერთი ფესვი არის $x=x_0$. ესაა აბსცისი P_0 წერტილისა, რომლიდანაც გამოდის t პარამეტრის მნიშვნელობის დამოუკიდებლად მე-(14) განტოლებით განსაზღვრული ყოველი წრფე.

რაც შეეხება ახლა მეორე ფესვს, მის მოსაძებნად გავყოთ მე-(15) განტოლების ორივე ნაწილი $(x-x_0)$-ზე, რაც მოგვცემს განტოლებას

$$A(x-x_0)+2B(x-x_0)t+C(x-x_0)t^2+2(Ax_0+By_0+D)$$
$$+2(Bx_0+Cy_0+E)t=0,$$

რომლიდანაც ვიპოვით მეორე ფესვსაც:

$$(16)\qquad x=x_0-\frac{2[(Bx_0+Cy_0+E)t+Ax_0+By_0+D]}{A+2Bt+Ct^2}.$$

ეს არის აბსცისი ცვლადი P წერტილისა, რომელშიც მე-(14) წრფე გადაჰკვეთს მე-(13) მრუდს. რაც შეეხება იმავე წერტილის ორდინატს, მე-(14) ტოლობის ძალით, მისთვის გვექნება:

$$(16^1)\qquad y=y_0-\frac{2t[(Bx_0+Cy_0+E)t+Ax_0+By_0+D]}{A+2Bt+Ct^2}.$$

ორი უკანასკნელი ტოლობა არის მე-(13) მრუდის განტოლებანი რაციონალური პარამეტრული სახით.

მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა მეორე რიგის მრუდს ნამდვილი ასიმპტოტები აქვს, მისი წერტილის კოორდინატთა რაციონალური სახით წარმოდგენა კიდევ შემდეგი მეთოდითაც არის შესაძლო:

მე-(13) განტოლების უფროსი წევრები წრფივ მამრავლებად დავშალოთ:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=C(y-\varkappa x)(y-\lambda x);$$

მაშინ წრფეები

$$y=\varkappa x,\quad y=\lambda x,$$

მე-(13) მრუდის ასიმპტოტების პარალელური არიან,

მივიღოთ

$$y-\varkappa x=t,$$

ე. ი. გავიყვანოთ ერთი გარკვეული ასიმპტოტის პარალელური წრფეები, მაშინ მე-(13) განტოლების ძალით გვექნება

$$y-\lambda x=-\frac{2Dx+2Ey+H}{Ct}.$$

ორი უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$(17)\qquad x=\frac{Ct^2+2Et+H}{C(\lambda-\varkappa)\,t-2(E\varkappa+D)},\quad y=\frac{C\lambda t^2-2Dt+\varkappa H}{C(\lambda-\varkappa)\,t-2(E\varkappa+D)}.$$

ასეთია მეორე რიგის მრუდის წერტილის კოორდინატთა გამოსახულებანი აღნიშნულ შემთხვევაში.

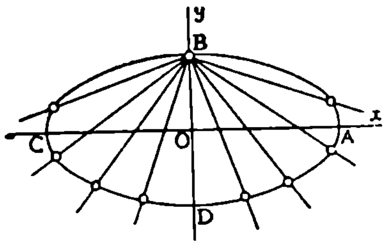
მე-(16), (16^1) ფორმულები ერთის მხრით და მე-(17) ფორმულები მეორეს მხრით ძირითად ფორმულებად ითვლება. ამ ფორმულებიდან მრავალი სხვა ფორმულა მიიღება იმისდა მიხედვით, თუ რა კერძო სახისა იქნება მე-(13) განტოლება.

ჩვენი თეორიისათვის მეტად საინტერესოა ფორმულები, რომლებსაც მივიღებთ აღნიშნული წესით, როდესაც გამოვალთ მეორე რიგის მრუდთა კანონიკური სახის განტოლებებიდან. განვიხილოთ ყველა ეს განტოლება მიმდევრობით.

ე ლ ი ფ ს ი. ავიღოთ ელიფსის კანონიკური განტოლება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

და გავიყვანოთ B წერტილზე (ნახ. 3) წრფეები $y=\tau x+b$. როგორც წინათ, ამოვხსნათ ეს განტოლება $ABCD$ ელიფსის განტოლებასთან ერთად; გვექნება:



ნახ. 3.

$$x_1=0;\ y_1=b;$$

$$x_2=-\frac{2a^2b\tau}{b^2+a^2\tau^2},$$

$$y_2=-\frac{b(a^2\tau^2-b^2)}{b^2+a^2\tau^2},$$

ამ ამონახსენთა პირველი წყვილი წარმოადგენს B წერტილის კოორდინატებს, ხოლო მეორე წყვილი გვაძლევს ელიფსის მიმდინარე კოორდინატების რაციონალურ გამოსახულებებს τ-ს მიმართ.

უკანასკნელი გამოსახულებანი შეგვიძლია კიდევ უფრო გავამარტივოთ. ამისათვის მოვახდინოთ გარდაქმნა: $t=-\frac{a\tau}{b}$; მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ

$$x=\frac{2at}{1+t^2},\ y=\frac{b(1-t^2)}{1+t^2}. \tag{18}$$

ამ ფორმულებს ელიფსური გარდაქმნის ფორმულები ვუწოდოთ.

უკანასკნელი ფორმულები შეგვიძლია უშუალოდ მე-(16), (16^1) ფორმულებიდანაც გამოვიყვანოთ. ამისათვის საკმარისია ჩავსვათ ამ ფორმულებში $A, B, \ldots, H$ კოეფიციენტთა მნიშვნელობანი ელიფსის კანონიკური განტოლებიდან, ხოლო x_0-სა და y_0-ის მაგიერ — B_0 წერტილის კოორდინატები შესაბამისად.

ჰიპერბოლი. ავიღოთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება.

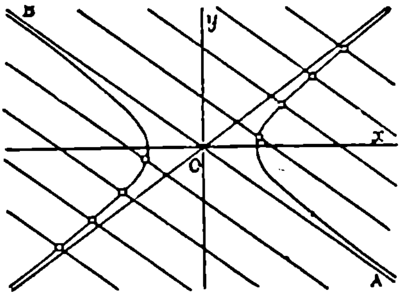
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{19}$$

გავიყვანოთ AB ასიმპტოტის პარალელური წრფეები (ნახ. 4). ერთი რომელიმე ასეთი წრფის განტოლება იქნება

$$y=-\frac{b}{a}x+\tau, \tag{20}$$

სადაც τ პარამეტრია.

ვიპოვოთ ახლა ამ წრფის გადაკვეთის წერტილი ჰიპერბოლთან. ამისათვის ამოვხსნათ მე-(19) და მე-(20) განტოლებები x-ისა და y-ის მიმართ; მივიღებთ:



ნახ. 4.

$$x=\frac{a(b^2+\tau^2)}{2b\tau},\quad y=\frac{-b^2+\tau^2}{2\tau}.$$

თუ აღვნიშნავთ $t=\frac{\tau}{b}$, მაშინ უკანასკნელი ფორმულები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

(21) $$x=\frac{a(t^2+1)}{2t};\quad y=\frac{b(t^2-1)}{2t}.$$

ეს არის ჰიპერბოლის წერტილის მიმდინარე კოორდინატების რაციონალური გამოსახულებანი t პარამეტრის მიმართ. ამ ფორმულებს **ჰიპერბოლური გარდაქმნის ფორმულები** ვუწოდოთ.

უკანასკნელი ფორმულები მე-(17) ფორმულებიდან, როგორც ელიფსის შემთხვევისათვის, უშუალოდ გამოიყვანება: საკმარისია ამისათვის A, B,...,H კოეფიციენტთა და $\varkappa$, λ-ს შესაბამი მნიშვნელობანი აღნიშნულ ფორმულებში ჩავსვათ.

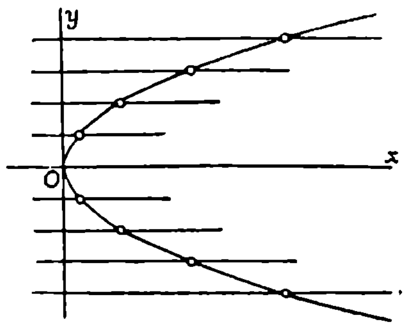
პარაბოლი. პარაბოლის კანონიკური განტოლება არის

$$y^2=ax.$$

ავიღოთ x ღერძის პარალელური რომელიმე წრფე $y=t$ (ნახ. 5). ეს წრფე გადაჰკვეთს პარაბოლს წერტილზე, რომლის კოორდინატებია

$$x=\frac{t^2}{a},\quad y=t.$$

ეს არის პარაბოლის განტოლება პარამეტრული სახით. ამ ფორმულებს **პარაბოლური გარდაქმნის ფორმულები** ვუწოდოთ.



ნახ. 5.

IV. ინტეგრება ირაციონალური დიფერენციალებისა იმ შემთხვევაში, როცა x პირველი ხარისხისაა ირაციონალობის მიმართ

§ 30. ინტეგრება დიფერენციალებისა, რომელნიც წრფივ ირაციონალობას შეიცავენ. ირაციონალობა წრფივია, თუ მას აქვს სახე

$$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{n}},$$

სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია; α, β, γ, δ ნებსითი მუდმივი რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$. ეს უკანასკნელი პირობა აუცილებელია, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში ირაციონალობა სრულებით მოისპობოდა. მაშასადამე, ზოგადი სახე ინტეგრალისა, რომელიც წრფივ ირაციონალობიდანაა აღებული, ასეთია:

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{n}}\right) dx, \tag{22}$$

სადაც R არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ (22) სახის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება ყოველთვის. ამისათვის საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ მრუდი

$$y=\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

უნიკურსალურია. მივიღოთ

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^n;$$

მაშინ მიმდინარე x და y კოორდინატებისათვის გვექნება

$$x=-\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n},\ y=t; \tag{23}$$

მაგრამ ეს გამოსახულებანი რაციონალურია t-ს მიმართ და ამიტომაც ზემოაღნიშნული მრუდი უნიკურსალურია. მაშასადამე, § 24-ის თანახმად (22) სახის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება ყოველთვის და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ახლა უფრო ზოგადი სახის ინტეგრალი:

$$\int R\left\{x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_1},\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_2},\ldots,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_k}\right\}dx, \tag{24}$$

სადაც α, β, γ, δ რიცხვები წინა პირობას აკმაყოფილებენ, ხოლო $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_k$ რაციონალური რიცხვებია.

დავამტკიცოთ, რომ უკანასკნელი სახის ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება ყოველთვის (22) სახის ინტეგრალის მოძებნაზე. მართლაც, ვთქვათ $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_k$ წილადების საერთო მნიშვნელი არის n; მაშინ $n\lambda_1, n\lambda_2,\ldots,n\lambda_k$ მთელი რიცხვები იქნება. მაგრამ, მეორე მხრით

$$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_i}=\left\{\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n\lambda_i}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ R ფუნქციის ყოველი ირაციონალური არგუმენტი წარმოადგენს მთელ ხარისხს

$$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

ირაციონალობისას, ე. ი. R ფუნქცია (24) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ნამდვილად შეიქმნება რაციონალური ფუნქცია x-ისა და მხოლოდ უკანასკნელი ირაციონალობისა. მაშასადამე, თვით (24) ინტეგრალი ყოველთვის მიიყვანება (22) სახეზე და გამოთქმული დებულებაც დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

I°. მოვძებნოთ ინტეგრალი

$$J=\int\frac{x-4}{\sqrt{x-3}-\sqrt[3]{x-3}}\,dx.$$

ამ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით იმყოფება ორი ირაციონალობა: $\sqrt{x-3}$ და $\sqrt[3]{x-3}$; ამ რადიკალებს ერთ მაჩვენებელზე რომ მივიყვანთ, მაშინ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გვექნება მხოლოდ ერთი ირაციონალობა: $\sqrt[6]{x-3}$. ზემოაღნიშნული წესის თანახმად მივიღოთ

$$t=\sqrt[6]{x-3}.$$

J ინტეგრალი მაშინ ასე გადმოიწერება:

$$J=6\int\frac{(t^6-1)t^3}{t-1}\,dt.$$

თუ დავშლით t^6-1, მაშინ მარტივი გარდაქმნის შემდგომ გვექნება

$$J=6\int(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)t^3dt$$

$$=\frac{2t^9}{3}+\frac{3t^8}{4}+\frac{6t^7}{7}+t^6+\frac{6t^5}{5}+\frac{3t^4}{2}+C.$$

ახლა ისევ x-ს თუ დავუბრუნდებით, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int\frac{x-4}{\sqrt{x-3}-\sqrt[3]{x-3}}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-3)^4}$$

$$+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-3)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-3)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-3)^2}+x+C.$$

2°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J=\int\sqrt[k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\,\frac{dx}{x},\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0.$$

მოვახდინოთ ჩასმა

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^k.$$

აქედან

$$x = \frac{\delta t^4 - \beta}{\alpha - \gamma t^4}, \quad dx = 4(\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{t^3}{(\alpha - \gamma t^4)^2}dt.$$

J ინტეგრალი ამ ფორმულების ძალით ასე გადმოიწერება:

$$J = 4(\alpha\delta - \beta\gamma)\int \frac{t^4}{(\alpha - \gamma t^4)(\delta t^4 - \beta)}dt.$$

დავშალოთ ახლა წილადი ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის ნიშნის ქვევით:

$$\frac{t^4}{(\alpha - \gamma t^4)(\delta t^4 - \beta)} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left\{\frac{\gamma t^4}{\alpha - \gamma t^4} + \frac{\delta t^4}{\delta t^4 - \beta}\right\};$$

მაშინ გვექნება

$$J = 4\int \frac{\gamma t^4}{\alpha - \gamma t^4}dt + 4\int \frac{\delta t^4}{\delta t^4 - \beta}dt.$$

მარტივი გარდაქმნის შემდგომ უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$J = 4\beta\int \frac{dt}{\delta t^4 - \beta} - 4\alpha\int \frac{dt}{\gamma t^4 - \alpha}.$$

ამრიგად, J ინტეგრალი მიიყვანება მე-10^0 სახის ორ ინტეგრალზე (§ 22) და უკვე ცნობილი ფორმულების გამოყენებით იგი სავსებით იქნება ამოხსნილი.

§ 31. ინტეგრება დიფერენციალებისა, რომლებიც შეიცავენ $\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}}$ ირაციონალობას. ზოგადი სახე ინტეგრალებისა, რომლებიც ამ ირაციონალობას შეიცავენ, ასეთია:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{A + \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}}\right)dx,$$

სადაც R რაციონალობის სიმბოლოა. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

ეს ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს ყოველთვის. მართლაც, საკმარისია ამისათვის აღმოვაჩინოთ, რომ მრუდი

$$y = \sqrt[n]{A + \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}}$$

უნიკურსალურია; მაგრამ ამ განტოლებიდან ვღებულობთ

$$\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=y^n-A,$$

საიდანაც

(25)
$$x=\frac{\delta(y^n-A)^m-\beta}{\alpha-\gamma(y^n-A)^m}.$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ x არის y-ის რაციონალური ფუნქცია; მაშასადამე, ზემოაღნიშნული მრუდი უნიკურსალურია და ამიტომაც ჩვენი ინტეგრალი მართლაც ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება ყოველთვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ ინტეგრალი

$$J=\int\sqrt{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\,\frac{dx}{(x+1)^2}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება

$$y=\sqrt{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}},$$

საიდანაც

$$x=\frac{y^4-2y^2+2}{2y^2-y^4}=-1-\frac{2}{y^4-2y^2};\quad dx=\frac{8(y^3-y)}{(y^4-2y^2)^2}\,dy.$$

მივიღებთ რა ახლა მხედველობაში უკანასკნელ ფორმულებს, გვექნება:

$$J=2\int(y^4-y^2)\,dy=\frac{2}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+C.$$

ახლა, თუ ისევ x-ს დავუბრუნდებით, საბოლოოდ გვექნება:

$$\int\sqrt{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\,\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{2}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right)^3+C.$$

§ **32. ზოგადი შემთხვევა.** (23) და (25) ფორმულებიდან ჩანს, რომ ინტეგრების ორ ზემოაღნიშნულ შემთხვევაში x ცვლადი პირველი ხარისხისაა y ირაციონალობის მიმართ. ამიტომ ინტეგრალები ამოიხსნა ელემენტარულ ფუნქციებში ამ ორ შემთხვევაში.

მაგრამ ესაა კერძო შემთხვევები. ზოგადი შემთხვევა კი შემდეგ დებულებაშია გამოთქმული:

დებულება. თუ

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

განტოლებაში x ცვლადი პირველ ხარისხში შედის, მაშინ რაგინდ ხარისხისა იყოს ის y-ის მიმართ, ინტეგრალი

$$\int R(x, y)\, dx \tag{2}$$

ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება ყოველთვის.

მართლაც, თუ აღნიშნულ განტოლებას x-ის მიმართ ამოვხსნით, მაშინ, თანახმად ამ დებულებაში გამოთქმული პირობისა, გვექნება

$$x=\varphi(y),$$

სადაც φ რაციონალური ფუნქციაა. მაშასადამე, მე-(2) ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int R(\varphi(y), y)\, \varphi'(y) dy,$$

რომელიც რაციონალური ფუნქციიდანაა აღებული და ამიტომაც ეს ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება. დებულება დამტკიცებულია.

მაგალითი. ვიპოვოთ ინტეგრალი

$$\int F(y)\, dx,$$

სადაც $F(y)$ არის y-ის რაციონალური ფუნქცია, ხოლო თვით y განისაზღვრება განტოლებიდან:

$$(a_0+b_0x)y^n+(a_1+b_1x)y^{n-1}+\ldots+(a_{n-1}+b_{n-1}x)y+(a_n+b_nx)=0.$$

ამ განტოლებიდან ვიპოვოთ x; გვაქვს:

$$x=-\frac{a_0y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0y_n+b_1y^{n-1}+\ldots+b_n}.$$

ნაწილობითი ინტეგრების წესი გვაძლევს:

$$\int F(y)\, dx= xF(y)-\int xF'(y) dy.$$

ჩავსვათ ახლა აქ x-ის მნიშვნელობა; მივიღებთ

$$\int F(y)\,dx = xF(y) + \int \frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n} F'(y)dy.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი მოიძებნება § 17-ის წესის მიხედვით და ამით აღებული ინტეგრალიც ამოხსნილი იქნება.

V. ჰიპერელიფსური ინტეგრალები

§ **38. საკითხის დასმა.** აბელის ინტეგრალებს შორის ყველაზე მარტივი და ამასთანავე მნიშვნელოვანიც იმ სახის ინტეგრალებია, რომლებშიაც y შემდეგი სახის ტოლობით არის დაკავშირებული x-თან:

(26) $$y^2 = f(x),$$

სადაც $f(x)$ პოლინომია, რომლის ხარისხი $r \geqq 2$.

ამრიგად, აქ აღნიშნულ აბელის ინტეგრალებს ასეთი სახე აქვთ:

(27) $$\int R(x, \sqrt{f(x)})\,dx,$$

სადაც R, როგორც წინათ, რაციონალობის სიმბოლოა.

(26) განტოლების ძალით, უკანასკნელი ინტეგრალის შესწავლისათვის ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ პოლინომს ჯერადი ფესვები არ აქვს.

(26) მრუდი, როცა $r > 2$, არ არის საზოგადოდ უნიკურსალური, ამიტომ (27) სახის ინტეგრალი საზოგადოდ ელემენტარულ სიმბოლოთა სასრული რიცხვით ვერ გამოისახება, ე. ი. წარმოადგენს უმაღლეს ტრანსცენდენტულს. ასეთი ინტეგრალები ჰ ი პ ე რ ე ლ ი ფ ს უ რ ი ინტეგრალების ზოგადი სახელწოდებითაა ცნობილი, ხოლო, როცა $r = 3$, 4, მათ ე ლ ი ფ ს უ რ ინტეგრალებს უწოდებენ.

მაგრამ საქმე ძლიერ მარტივდება იმ შემთხვევაში, როცა $r = 2$. მართლაც, მაშინ (26) მრუდი, როგორც მეორე რიგისა, უნიკურსალურია და ამიტომაც (27) ინტეგრალი, რომელსაც ამ შემთხვევაში აქვს სახე

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$$

ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება ყოველთვის.

გადავდოთ ჯერ-ჯერობით ამ უკანასკნელი განსაკუთრებული შემთხვევის განხილვა, რაც დაწვრილებით თავის დროზე იქნება განხილული, და შევუდგეთ პირველად ზოგადი ($r>2$) შემთხვევის შესწავლას. მაგრამ რა სახით უნდა მოხდეს ეს წინამდებარე სახელმძღვანელოში?

თეორია უმაღლესი ტრანსცენდენტული ფუნქციებისა, რომლებიც (27) სახის ინტეგრალების შესწავლის პროცესში აღმოაჩინეს, მათემატიკური ანალიზის განსაკუთრებულ დარგად გამოიყო და ამ უკანასკნელის ერთ-ერთი ნაწილი ელიფსურ ფუნქციათა თეორიის სახელწოდებითაა ცნობილი.

ერთის მხრით, სწორედ ამ მოსაზრებით აღნიშნული თეორია მთლიანად ვერ შევა ჩვენს სახელმძღვანელოში. აქ მხოლოდ შემდეგ საკითხს განვიხილავთ: ვიპოვოთ იმ ინტეგრალების კანონიკური სახეები, რომლებიც აღნიშნულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს ქმნიან.

მეორე მხრით, აქ უმთავრესად განიხილება შემთხვევები, როცა გარკვეული სახის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

ამრიგად, (27) სახის ინტეგრალის შესწავლა შემდეგი გეგმით უნდა მოხდეს:

1°. უნდა აღმოვაჩინოთ კანონიკური სახენი იმ ინტეგრალებისა, რომლებიც ახალ უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს ქმნიან.

2°. უნდა მოვძებნოთ პირობები, როცა (27) სახის ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

3°. უნდა აღმოვაჩინოთ ხერხი (27) სახის ინტეგრალების მოსაძებნად უკანასკნელ შემთხვევაში.

მაგრამ (27) სახის ინტეგრალი მეტად ზოგადია იმისათვის, რომ შესაძლო იყოს რაიმე მსჯელობა ვიქონიოთ ყველა ჩამოთვლილი საკითხის ამოსახსნელად. საჭიროა ინტეგრალის მიყვანა უმარტივეს სახეზე და ეს მოხდება $R(x, y)$ ფუნქციის დაშლის საშუალებით. შემდეგი § ეხება ამ საკითხს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $f(x)$ პოლინომის r ხარისხი შეიძლება ან ლუწი ანდა კენტი იყოს. მაგრამ ეს ორი შემთხვევა შესაძლოა ერთმანეთზე მივიყვანოთ ყოველთვის.

მართლაც, ვთქვათ $r=2k-1$. მოვახდინოთ გარდაქმნა:

$$x=\alpha+\frac{1}{t},$$

სადაც α არ არის $f(x)$-ის ფესვი; მაშინ $f(x)$ პოლინომს თუ დავშლით ტაილორის მწკრივად, გვექნება

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)\frac{1}{t}+\ldots+\frac{f^{(2k-1)}(\alpha)}{(2k-1)!}\frac{1}{t^{2k-1}}=\frac{f_1(t)}{t^{2k}},$$

სადაც $f_1(t)$ არის $2k$ ხარისხის პოლინომი.

აქედან

$$\sqrt{f(x)}=\frac{1}{t^k}\sqrt{f_1(t)}.$$

ამრიგად, $\sqrt{f(x)}$ ირაციონალობა მიყვანილია ახალ $\sqrt{f_1(t)}$ ირაციონალობაზე, რომელშიაც $f_1(t)$ პოლინომის ხარისხი არის $2k$.

შებრუნებით, ვთქვათ $n=2k$. მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$x=\alpha+\frac{1}{t},$$

სადაც α უკვე $f(x)$-ის ფესვია. $f(x)$ პოლინომი დავშალოთ ტაილორის მწკრივად:

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)\frac{1}{t}+\frac{f''(\alpha)}{1.2}\frac{1}{t^2}+\ldots+\frac{f^{(2k)}(\alpha)}{(2k)!}\frac{1}{t^{2k}}.$$

მაგრამ $f(\alpha)=0$ და ამიტომაც ეს ტოლობა ასეთ სახეს ღებულობს:

$$f(x)=\frac{f_1(t)}{t^{2k}},$$

სადაც $f_1(t)$ არის $(2k-1)$ ხარისხის პოლინომი. აქედან გვექნება

$$\sqrt{f(x)}=\frac{1}{t^k}\sqrt{f_1(t)}.$$

ამრიგად, $\sqrt{f(x)}$ ირაციონალობა მიყვანილია ახალ $\sqrt{f_1(t)}$ ირაციონალობაზე, რომელშიაც $f_1(t)$ პოლინომის ხარისხი არის $2k-1$.

§ 34. დაშლა (27) ინტეგრალისა. $R(x, y)$, როგორც ზოგადი სახის რაციონალური ფუნქცია, არის საზოგადოდ წილადი, რომლის მრიცხველი და მნიშვნელი პოლინომებს წარმოადგენენ x-ისა და y-ის მიმართ. მაშასადამე, მას აქვს სახე:

$$R(x, y)=\frac{\Sigma\Sigma A_{i,k}x^i y^k}{\Sigma\Sigma B_{r,s}x^r y^s}.$$

მაგრამ y-ის ყოველი ლუწი ხარისხი პოლინომია x-ის მიმართ, ხოლო y-ის კენტი ხარისხი იქნება ნამრავლი y-ისა პოლინომზე x-ის მიმართ. ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის ძალით $R(x, y)$ ფუნქცია შეგვიძლია ასე გადმოვწეროთ:

$$R(x, y)=\frac{M(x)+N(x)y}{M_1(x)+N_1(x)y},$$

სადაც $M(x)$, $N(x)$, $M_1(x)$ და $N_1(x)$ პოლინომებია x-ის მიმართ. ახლა ამ წილადის მრიცხველი, ისე როგორც მნიშვნელიც, გავამრავლოთ $[M_1(x)-N_1(x)y]$-ზე; მაშინ $R(x, y)$ ასე წარმოგვიდგება:

$$R(x, y)=\frac{A(x)}{B(x)}+\frac{C(x)}{D(x)}y,$$

სადაც $\frac{A(x)}{B(x)}$, $\frac{C(x)}{D(x)}$ არიან x-ის რაციონალური ფუნქციები. მაგრამ

$$\frac{C(x)}{D(x)}y=\frac{C(x)y^2}{D(x)y}=\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{f(x)}},$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ პოლინომებია.

ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება:

$$R(x, y)=\frac{A(x)}{B(x)}+\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{f(x)}}.$$

აქედან მივიღებთ

$$\int R(x, y)\,dx=\int\frac{A(x)}{B(x)}dx+\int\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{f(x)}}dx.$$

რადგანაც მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი რაციონალური წილადიდანაა აღებული, ამიტომ მისი ამოხსნა მოხდება § 17-ის წესის თანახმად. დაგვრჩენია ახლა შევისწავლოთ მეორე ინტეგრალი მხოლოდ.

ამისათვის დავშალოთ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წილადი ჩვეულებრივი წესით, რის შემდგომ მივიღებთ

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=F(x)+\sum\frac{A}{(x-\alpha)^m}+\sum\frac{Gx+H}{[(x-g)^2+h^2]^n},$$

სადაც $F(x)$ პოლინომია; Σ ჯამები გავრცელებულია m-სა და n-ის მთელ მნიშვნელობათა მიხედვით; $A; G, H;\ldots$ დაშლის მუდმივებია.

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$-ზე და შემდეგ მოვახდინოთ ინტეგრება. გვექნება

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{f(x)}}\,dx = \int \frac{F(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx + \sum A \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{f(x)}}$$
$$+\sum\int \frac{Gx+H}{[(x-g)^2+h^2]^n\sqrt{f(x)}}\,dx.$$

ამრიგად, მიღებული გვაქვს სამი შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$(28)\quad \begin{cases} X_k = \int \dfrac{x^k dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad Y_m = \int \dfrac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{f(x)}}, \\ Z_n = \int \dfrac{Gx+H}{[(x-g)^2+h^2]^n\sqrt{f(x)}}\,dx, \end{cases}$$

სადაც k, m, n მთელი დადებითი რიცხვებია. Z_n ინტეგრალები წარმოსახვითი სიდიდეების საშუალებით ყოველთვის Y_m ინტეგრალებზე მიიყვანებიან; მაგრამ წარმოსახვით სიდიდეებს თავიდან ვიცილებთ ასეთ შემთხვევაში და ამიტომაც ეს ინტეგრალები ცალ-ცალკე განიხილება შემდეგში.

X_k, Y_m, Z_n ინტეგრალები საზოგადოდ წარმოადგენენ უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს, როცა $f(x)$-ის ხარისხი >2-ზე. მაგრამ ყოველი მათგანი ალგებრულ ნაწილს შეიცავს; საჭიროა ამ უკანასკნელთა გამოყოფა იმისათვის, რომ აღნიშნულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა კანონიკური სახეები მოვძებნოთ. შემდეგი § სწორედ ამ საკითხს ეხება.

§ 35. რედუქცია (28) სახის ინტეგრალებისა. I. რედუქციის ფორმულა X_k ინტეგრალისათვის. განვიხილოთ X_k ინტეგრალი. გვაქვს:

$$(29)\qquad \frac{d}{dx}\left\{x^k\sqrt{f(x)}\right\} = \frac{kx^{k-1}f(x)+\frac{1}{2}\,x^k f'(x)}{\sqrt{f(x)}}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მრიცხველი არის $(k+r-1)$ ხარისხის პოლინომი, რომლის კოეფიციენტები $f(x)$ პოლინომის კოეფიციენტთა წრფივ კომბინაციებს წარმოადგენენ.

ვთქვათ ეს პოლინომი არის

$$A_1x^{k+r-1}+A_2x^{k+r-2}+\ldots+A_{r+1}x^{k-1}.$$

თუ მოვახდენთ (29) ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრებას, მივიღებთ:

$$x^k\sqrt{f(x)}=A_1X_{k+r-1}+A_2X_{k+r-2}+\cdots+A_{r+1}X_{k-1}.$$

მივცეთ k-ს მნიშვნელობანი: 1, 2,..., მაშინ ყოველი $X_{r-1}, X_r, \ldots X_{r+i}, \ldots$, ინტეგრალთაგანი გამოისახება ერთი გარკვეული ალგებრული ნაწილისა და შემდეგ ინტეგრალთა წრფივი ფუნქციის სახით:

$$X_0,\ X_1,\ldots,X_{r-2}. \tag{30}$$

ამ უკანასკნელ ინტეგრალთა რედუქცია უკვე არ არის შესაძლო და ამიტომაც ესენი იქნება X_k ინტეგრალთა კანონიკური სახეები.

II. რედუქციის ფორმულები Y_m, Z_n ინტეგრალებისათვის. Y_m, Z_n ინტეგრალები წარმოადგენენ კერძო სახეს შემდეგი ინტეგრალისას:

$$T\lambda=\int\frac{U(x)dx}{[V(x)]^\lambda\sqrt{f(x)}},$$

სადაც λ მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო $U(x)$ და $V(x)$ ურთიერთ მარტივი პოლინომებია და, ამას გარდა, $V(x)$-ს მარტივი ფესვები აქვს მხოლოდ. შევისწავლოთ უკანასკნელი ინტეგრალი. ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1⁰ $V(x)$ და $f(x)$ ურთიერთ მარტივია.

2⁰ ამ ორ პოლინომს აქვს საერთო მამრავლი.

1⁰. $V(x)$ პოლინომი, ამ შემთხვევაში, მარტივია $V'(x)$-თან, ვინაიდან მას მხოლოდ მარტივი ფესვები აქვს და რადგანაც, ამას გარდა, $V(x)$-სა და $f(x)$-ს საერთო მამრავლი არ აქვთ, ამიტომ ურთიერთ მარტივი არიან აგრეთვე $V(x)$ და $V'(x)\,f(x)$. მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, შეგვიძლია, თანახმად § 19-ში გამოთქმული თეორემისა, მოვძებნოთ ორი ისეთი პოლინომი $\varphi(x)$ და $\psi(x)$, რომ

$$\varphi(x)\,[V(x)]^\lambda+\psi(x)V'(x)\,f(x)=U(x).$$

ჩავსვათ ეს $T\lambda$ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით, გვექნება:

$$\int\frac{U(x)}{[V(x)]^\lambda\sqrt{f(x)}}\,dx=\int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx+ \tag{31}$$

$$+\int\frac{\psi(x)\,V'(x)\,\sqrt{f(x)}}{[V(x)]^\lambda}\,dx.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის უკანასკნელი ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების წესით გარდავქმნათ. მივიჩნიოთ

$$u=\psi(x)\sqrt{f(x)}, \quad dv=\frac{V'(x)}{[V(x)]^{\lambda}}\,dx.$$

აქედან

$$v=-\frac{1}{(\lambda-1)\,[V(x)]^{\lambda-1}}.$$

ამრიგად გვექნება

$$\int\frac{\psi(x)\,V'(x)\sqrt{f(x)}}{[V(x)]^{\lambda}}\,dx=-\frac{\psi(x)\sqrt{f(x)}}{(\lambda-1[V(x)]^{\lambda-1}}+\frac{1}{2(\lambda-1)}\int\frac{2\psi' f+f'\psi}{[V(x)]^{\lambda-1}\sqrt{f(x)}}\,dx.$$

ჩავსვათ ეს (31) ფორმულაში, მაშინ უკანასკნელი ასე გადმოიწერება:

$$\int\frac{U(x)}{[V(x)]^{\lambda}\sqrt{f(x)}}\,dx=-\frac{\psi(x)\sqrt{f(x)}}{(\lambda-1)\,[V(x)]^{\lambda-1}}+\int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx+\frac{1}{2(\lambda-1)}\int\frac{2\psi' f+f'\psi}{[V(x)]^{\lambda-1}\sqrt{f(x)}}\,dx.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები არის ალგებრული ფუნქცია, მეორე წარმოადგენს X_k ინტეგრალთა წრფივ ფუნქციას, ხოლო უკანასკნელი $T\lambda$ ინტეგრალის სახისაა, მხოლოდ მასში მაჩვენებელი λ ერთი ერთეულით არის დაწეული.

ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება მოგვცემს

$$\int\frac{U(x)}{[V(x)]^{\lambda}\sqrt{f(x)}}\,dx=\frac{E(x)\sqrt{f(x)}}{[V(x)]^{\lambda-1}}+\int\frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx+\int\frac{\Psi(x)}{V(x)\sqrt{f(x)}}\,dx,$$

სადაც $E(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ პოლინომებია x-ის მიმართ და, ამას გარდა, შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\Psi(x)$-ის ხარისხი $V(x)$-ის ხარისხზე უფრო დაბალია.

ამრიგად, უკანასკნელი ფორმულით $T\lambda$ ინტეგრალიდან გამოიყოფა ალგებრული ნაწილი ერთის მხრით და X_k სახის ინტეგრალი მეორე მხრით. ახალი ტრანსცენდენტული, რომელზედაც $T\lambda$ ინტეგრალი მიიყვანება აღნიშნულ ინტეგრალთა გარდა, არის შემდეგი:

$$\int \frac{\Psi(x)}{V(x)\sqrt{f(x)}}\, dx.$$

გადავიდეთ ახლა 2^0 შემთხვევაზე. ვთქვათ, $V(x)$-ისა და $f(x)$-ის უდიდესი საერთო გამყოფი არის $D(x)$; მაშინ გვექნება

(32) $$V(x)=W(x)\,D(x) \text{ და } f(x)=f_1(x)\,D(x).$$

$W(x)$ და $f_1(x)$ ურთიერთ მარტივი პოლინომებია. მეორე მხრით, $f(x)$-ს ჯერადი ფესვები არ უნდა ჰქონდეს. მაშასადამე, $f_1(x)$ და $D(x)$ ურთიერთ მარტივია. ამას გარდა, $T\lambda$ ინტეგრალის განხილვის დროს მხედველობაში გვაქვს Y_m და Z_n ინტეგრალების შესწავლა განსაკუთრებით. ვიგულისხმოთ ამიტომ, რომ $V(x)$-საც არ აქვს ჯერადი ფესვები, ე. ი. $W(x)$ და $D(x)$ ურთიერთ მარტივია.

ამრიგად, $W(x)$, $f_1(x)$, $D(x)$ წყვილ-წყვილად მარტივი პოლინომებია.

ახლა მოვძებნოთ ისეთი ორი პოლინომი $p(x)$ და $q(x)$, რომ

$$U(x)=p(x)\,[D(x)]^\lambda+q(x)\,[W(x)]^\lambda,$$

რაც შესაძლოა § 19-ის თეორემის ძალით. ჩავსვათ ეს $T\lambda$ ინტეგრალში, მაშინ უკანასკნელი ასე გადმოიწერება:

(33) $$\int \frac{U(x)}{[V(x)]^\lambda \sqrt{f(x)}}\, dx = \int \frac{p(x)}{[W(x)]^\lambda \sqrt{f(x)}}\, dx + \\ + \int \frac{q(x)}{[D(x)]^\lambda \sqrt{f(x)}}\, dx.$$

ვინაიდან $W(x)$-სა და $f(x)$-ს საერთო მამრავლი არ აქვთ, ამიტომ მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი 1^0 შემთხვევაში აღნიშნული სახისაა.

განვიხილოთ მეორე ინტეგრალი. $D(x)$ პოლინომი მარტივია $D'(x)$-თან და $f_1(x)$-თანაც, ამიტომ იგი მარტივი იქნება $D'(x)f_1(x)$ ნამრავლთანაც აგრეთვე. მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი ორი პოლინომი $r(x)$ და $s(x)$, რომ

$$r(x)\,[D(x)]^\lambda+s(x)\,D'(x)\,f_1(x)=q(x).$$

მაშასადამე, გვექნება

(34) $$\int \frac{q(x)}{[D(x)]^\lambda \sqrt{f(x)}}\, dx = \int \frac{r(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx + \\ + \int \frac{s(x)D'(x)f_1(x)}{[D(x)]^\lambda \sqrt{f(x)}}\, dx.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი X_k სახის ინტეგრალების ჯამს წარმოადგენს. განვიხილოთ მეორე ინტეგრალი. იგი ნაწილობითი ინტეგრების წესით გარდავქმნათ. (32) ფორმულათა ძალით გვექნება

$$(35)\qquad \int \frac{s(x)D'(x)f_1(x)}{[D(x)]^\lambda \sqrt{f(x)}}\,dx = \int s(x)\sqrt{f_1(x)}\,\frac{D'}{D^{\lambda+1/2}}\,dx.$$

მივიჩნიოთ

$$u = s(x)\sqrt{f_1(x)}\,;\quad dv = \frac{D'}{D^{\lambda+1/2}}\,dx.$$

აქედან

$$v = -\frac{2}{2\lambda-1}\,\frac{1}{D^{\lambda-1/2}}.$$

ამისა და (32) ფორმულების ძალით (35) ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$\int \frac{s(x)\,D'(x)\,f_1(x)}{[D(x)]^\lambda\sqrt{f(x)}}\,dx = -\frac{2}{2\lambda-1}\,\frac{s(x)\sqrt{f(x)}}{[D(x)]^\lambda}$$

$$+\frac{1}{2\lambda-1}\int \frac{2s'(x)f_1(x)+s(x)f'_1(x)}{[D(x)]^{\lambda-1}\sqrt{f(x)}}\,dx.$$

თუ ჩავსვამთ ამას (34) ფორმულაში, მაშინ უკანასკნელი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int \frac{q(x)}{[D(x)]^\lambda\sqrt{f(x)}}\,dx = -\frac{2}{2\lambda-1}\,\frac{s(x)\sqrt{f(x)}}{[D(x)]^\lambda} + \int \frac{r(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

$$+\frac{1}{2\lambda-1}\int \frac{2s'(x)\,f(x)+s(x)\,f'_1(x)}{[D(x)]^{\lambda-1}\sqrt{f(x)}}\,dx.$$

ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება მოგვცემს:

$$\int \frac{q(x)}{[D(x)]^\lambda\sqrt{f(x)}}\,dx = \frac{K(x)\sqrt{f(x)}}{[D(x)]^\lambda} + \int \frac{L(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx,$$

სადაც $K(x)$ და $L(x)$ პოლინომებია x-ის მიმართ.

ამრიგად, (33) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის მეორე ინტეგრალი მიიყვანება ერთი გარკვეული სახის ალგებრულ ფუნქციაზე და X_k სახის ინტეგრალებზე.

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, შეგვიძლია (33) ფორმულის ძალით ვთქვათ, რომ რედუქციის ფორმულა $T\lambda$ ინტეგრალისათვის 2^0 შემთხვევაშიც იმავე ხასიათისაა, როგორც 1^0 შემთხვევაშიც.

დავუბრუნდეთ ახლა ისევ Y_m და Z_n ინტეგრალებს. ვთქვათ, უპირველესად α არ არის $f(x)$-ის ფესვი, ანდა $f(x)$ არ გაიყოფა $[(x-g)^2+h^2]$-ზე; მაშინ ზემოაღნიშნული რედუქციის ფორმულების გამოყენებით Y_m ინტეგრალი მიიყვანება ალგებრულ ნაწილზე, X_k სახის ინტეგრალებზე და შემდეგ ახალ ინტეგრალზე

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{f(x)}}.$$

რაც შეეხება Z_n-ს, იგი, გარდა ალგებრული ნაწილისა და X_k სახის ინტეგრალებისა, მიიყვანება შემდეგ ინტეგრალზე:

$$\int\frac{Gx+H}{[(x-g)^2+h^2]\sqrt{f(x)}}\,dx,$$

სადაც G და H გარკვეული მუდმივი რიცხვებია.

თუ α არის $f(x)$-ის ფესვი, ანდა $f(x)$ გაიყოფა $[(x-g)^2+h^2]$-ზე, მაშინ 2^0 შემთხვევის ფორმულების გამოყენებით როგორც Y_m, ისე Z_n, მხოლოდ ალგებრულ ნაწილზე და X_k სახის ინტეგრალებზე მიიყვანება.

მიღებული ორი უკანასკნელი ინტეგრალი წარმოადგენს ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს, რომელთა რედუქცია უკვე არ არის შესაძლო.

ამრიგად, (28) სახის ინტეგრალის შესწავლით შემდეგი ახალი ტრანსცენდენტული ფუნქციებია აღმოჩენილი: X_k სახის (30) ინტეგრალები, რომელთა რიცხვი არის $(r-1)$ და, ამას გარდა, ეს ორი უკანასკნელი ინტეგრალიც.

VI. შემთხვევა, როცა $f(x)$ მეორე ხარისხის პოლინომია

§ 36. წინასწარი შენიშვნები. ამ შემთხვევაში (27) ინტეგრალი შემდეგი სახისაა:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \tag{36}$$

სადაც a, b, c ნამდვილი მუდმივი რიცხვებია, რომლებიდან $a\neq0$. ასეთი ინტეგრალი, როგორც ერთხელ იყო ნათქვამი, ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს ყოველთვის.

აღმოვაჩინოთ ხერხი აღნიშნული ინტეგრალის გამოსათვლელად. ორი შემდეგი გზით შეგვიძლია მივაღწიოთ ამ მიზანს:

1^0. უპირველესად მივიყვანოთ დიფერენციალი (36) ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ რაციონალურ სახეზე, ე. ი. მოვახდინოთ მისი

რ ა ც ი ო ნ ა ლ ი ზ ა ც ი ა და შემდეგ ინტეგრება § 13 — 17 წესების თანახმად შევასრულოთ.

2°. თავიდანვე დავშალოთ, როგორც ზოგად შემთხვევაში, $R(x, y)$ ფუნქცია და (36) ინტეგრალი კანონიკურ სახის ინტეგრალებზე მივიყვანოთ. ამ უკანასკნელთა ამოხსნით, თვით (36) ინტეგრალიც იქნება ამოხსნილი აგრეთვე.

1° გზით (36) ინტეგრალის მოძებნა მაშინაა უფრო მიზანშეწონილი, როცა ადვილად მოხდება იმ რაციონალური წილადის ინტეგრება, რომელსაც რაციონალიზაციის შემდგომ მივიღებთ. ესაა ინტეგრების უკვე ცნობილი გზა და ამიტომ მასზე არ შევჩერდებით.

მაგრამ (36) სახის ინტეგრალი ისეთ ნაწილებს შეიცავს საზოგადოდ, რომელთა მოსაძებნად სრულებით არ არის საჭირო რაციონალიზაციის მოხდენა. შესაძლოა მათი გამოყოფა წმინდა ალგებრული წესით, რომელიც ზოგადი თეორიის თანახმად მდგომარეობს შემდეგში:

უნდა დაიშალოს (36) ინტეგრალი ზოგადი თეორიის წესების მიხედვით, რაც X_k, Y_m, Z_n ინტეგრალებზე მიგვიყვანს და შემდეგ ამ ინტეგრალთა ალგებრული ნაწილები მოიძებნოს რედუქციის ფორმულების გამოყენებით.

ასეთია ინტეგრების 2° გზა და ის გვაქვს ამორჩეული აქ (36) ინტეგრალის გამოსათვლელად.

მაგრამ X_k, Y_m, Z_n ინტეგრალები ამ შემთხვევაში ასეთი სახის არიან:

$$X_k=\int\frac{x^k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\quad Y_m=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}},$$
$$Z_n=\int\frac{Gx+H}{[(x-g)^2+h^2]^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

ამ ინტეგრალთა ალგებრული ნაწილების გამოსაყოფად შევადგინოთ რედუქციის ფორმულები ყოველი ამ ინტეგრალისათვის.

შემდეგი §§ ეხება ამ საკითხს.

§ 37. რედუქციის ფორმულა X_k ინტეგრალისათვის. (29) ფორმულა ასე გადმოვწეროთ:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{k-1}\sqrt{ax^2+bx+c}\right]=$$
$$=\frac{(k-1)\,x^{k-2}(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}\,x^{k-1}(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

რომლის ინტეგრების შემდგომ გვექნება

$$x^{k-1}\sqrt{ax^2+bx+c}=kaX_k+\left(k-\frac{1}{2}\right)bX_{k-1}+(k-1)cX_{k-2}.$$

აქედან რედუქციის ფორმულას ვღებულობთ X_k ინტეგრალისათვის:

$$X_k=\frac{x^{k-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{ka}-\frac{2k-1}{2k}\,\frac{b}{a}\,X_{k-1}-\frac{k-1}{k}\,\frac{c}{a}\,X_{k-2}, \tag{37}$$

რომლის მიმდევრობითი გამოყენებით X_k ბოლოს და ბოლოს მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

ეს არის მისი კანონიკური სახე.

$$X_1=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2a}\,X_0.$$

§ 38. ალგებრული ნაწილების გამოყოფა X_k ინტეგრალიდან. X_k ინტეგრალები (36) ინტეგრალში საზოგადოდ ასეთი სახით შედიან

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{38}$$

სადაც $P(x)$ პოლინომია x-ის მიმართ, რომლის ხარისხიც ვთქვათ არის m. შეგვიძლია ეს ინტეგრალი შემდეგი ჯამის სახით წარმოვადგინოთ:

$$\sum_{k=0}^{m}A_k\int\frac{x^k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\sum_{k=0}^{m}A_kX_k,$$

სადაც $A_0, A_1,\ldots,A_m$ არიან $P(x)$ პოლინომის კოეფიციენტები. მაშასადამე, ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად საკმარისია უკანასკნელი ტოლობის მარჯვნივ X_k ინტეგრალთა მაგიერ შესაბამისი მნიშვნელობები ჩავსვათ.

მაგრამ (37) ფორმულის აგებულება საშუალებას გვაძლევს ამ ინტეგრალის ალგებრული ნაწილი თავიდანვე გამოვყოთ. მართლაც, როცა ყოველ X_k ინტეგრალზე რედუქციის (37) ფორმულას ბოლომდის გამოვიყენებთ, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=(a_0x^{m-1}+a_1x^{m-2}+\ldots+$$

$$+a_{m-2}x+a_{m-1})\sqrt{ax^2+bx+c}+a_m\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

მიღებული a_i კოეფიციენტების მოძებნა წმინდა ალგებრული წესით მოხდება. რომ ამაში დავრწმუნდეთ გავაწარმოოთ ეს ტოლობა; გვექნება:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\sqrt{ax^2+bx+c}\,((m-1)a_0x^{m-2}+$$

$$+(m-2)\,a_1x^{m-3}+\ldots+a_{m-2})+\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}(a_0x^{m-1}+$$

$$+a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-1})+\frac{a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

აქედან, ტოლობის ორივე ნაწილის $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ზე გამრავლებით, მივიღებთ

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned} & A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m\\ & =(ax^2+bx+c)\,((m-1)\,a_0x^{m-2}+\\ & +(m-2)\,a_1x^{m-3}+\ldots+a_{m-2})+\\ & +\left(ax+\frac{b}{2}\right)(a_0x^{m-1}+a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-1})+a_m.\end{aligned}\right.$$

ეს ტოლობა იგივეობა უნდა იყოს, რაც მაშინაა მხოლოდ შესაძლო, როცა კოეფიციენტები x-ის ტოლი ხარისხების წინ მარჯვნივ და მარცხნივ ტოლი იქნებიან შესაბამისად. გავუტოლებთ რა ამ კოეფიციენტებს, მივიღებთ $(m+1)$ წრფივ განტოლებას $(m+1)$ უცნობით $a_0, a_1, \ldots, a_m$. რადგანაც ეს სისტემა თავსებადია, ამიტომ აღნიშნული კოეფიციენტებისათვის გვექნება მნიშვნელობათა ერთი და მხოლოდ ერთი სისტემა.

ამრიგად, (38) სახის ინტეგრალის ალგებრული ნაწილი გამოყოფილია და დაგვრჩა ვიპოვოთ მხოლოდ შემდეგი ინტეგრალი:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

§ 39. რედუქციის ფორმულა Y_m ინტეგრალისათვის (ალგებრული ნაწილის გამოყოფა). Y_m ინტეგრალი ყოველთვის მიიყვანება

X_k სახის ინტეგრალზე. მართლაც, მოვახდინოთ ამ ინტეგრალს ქვევით შემდეგი გარდაქმნა

(40) $$x-\alpha=\frac{1}{t};$$

მაშინ

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}{t}, \quad dx=-\frac{dt}{t^2}.$$

მაშასადამე,

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{t^{m-1}}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}dt$$

და ეს ამტკიცებს ნათქვამს.

გამოვიყენოთ ახლა ტოლობის მარჯვენა ინტეგრალზე ზემოაღნიშნული რედუქციის ფორმულა, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int\frac{t^{m-1}}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}dt=\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}\,(b_0t^{m-2}+\ldots+b_{m-2})$$
$$+b_{m-1}\int\frac{dt}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}.$$

დავუბრუნდეთ ისევ x-ს. ვინაიდან

$$\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\alpha};$$

ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{(x-\alpha)^{m-1}}(B_0x^{m-2}+\ldots+B_{m-2})$$
$$+B_{m-1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის B კოეფიციენტები $b_0,\ldots,b_{m-1}$ კოეფიციენტთა წრფივ კომბინაციებს წარმოადგენენ და მათი მოძებნა იმავე წესით შესრულდება, როგორც წინათ a_i კოეფიციენტებისა (39) ფორმულაში და, ამრიგად, Y_m ინტეგრალის ალგებრული ნაწილი გამოყოფილი იქნება. მაშასადამე, დაგვრჩება გამოვთვალოთ მხოლოდ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

საქმე ძალიან მარტივდება იმ შემთხვევაში, როცა α არის ფესვი კვადრატული სამწევრისა, რომელიც რადიკალს ქვევით იმყოფება. მართლაც, მაშინ (40) გარდაქმნის ფორმულის ძალით გვექნება:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{t^{m-1}}{\sqrt{(2a\alpha+b)t+a}}\, dt.$$

ეს ინტეგრალი კი მოიძებნება § 30-ში აღნიშნული წესის მიხედვით.

§ 40. **რედუქციის ფორმულა Z_n ინტეგრალისათვის.** Z_n ინტეგრალი შემდეგი სახით ავიღოთ:

$$Z_n = \int \frac{Ax+B}{(x^2+p)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx,$$

რომელზედაც ის მიიყვანება ყოველთვის, თუ x-ის მაგიერ დამოუკიდებელ ცვლადად ინტეგრალის ნიშნის ქვეით $(x-g)$-ს მივიღებთ და შემოვიღებთ აღნიშვნას $h^2=p$.

ზემოთ რედუქციის ფორმულები უკვე გვქონდა მიღებული $T\lambda$ ინტეგრალისათვის, რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს Z_n ინტეგრალი. ზოგადი სახე, რომელიც ამ ფორმულებს აქვთ, საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ Z_n ინტეგრალისათვისაც ასეთივე ფორმულა. მართლაც, გამოვიდეთ იგივეობიდან

$$\frac{d}{dx}\left\{(Cx+C')\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{(x^2+p)^{n-1}}\right\} =$$
$$= \frac{2C(ax^2+bx+c)+(Cx+C')(2ax+b)}{2(x^2+p)^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}$$
$$-\frac{2(n-1)\,x\,(Cx+C')(ax^2+bx+c)}{(x^2+p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

სადაც C და C' ჯერ-ჯერობით ნებსითი მუდმივებია. ეს ტოლობა მარტივი გარდაქმნის შემდგომ, რომელიც მდგომარეობს გაყოფისა და შეკრების მოქმედებათა გამოყენებაში მხოლოდ, ასე გადმოიწერება:

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{(Cx+C')\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{(x^2+p)^{n-1}}\right\} &= -\frac{2(n-2)aC}{(x^2+p)^{n-2}\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &-\frac{Mx+N}{2(x^2+p)^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &+2(n-1)\frac{[bpC-(c-ap)C']\,x-[(ap^2-cp)C-bpC']}{(x^2+p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, \end{aligned}\right.$$

სადაც

$$M=(4n-7)bC+(4n-6)aC', \quad N=(4n-6)cC+$$
$$+(4n-5)bC'-(8n-12)apC.$$

ახლა C და C' შევარჩიოთ ისე, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის უკანასკნელ წილადს ჰქონდეს სახე

$$\frac{Ax+B}{(x^2+p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

რისთვისაც საკმარისია, რომ

(42) $$bpC-(c-ap)C'=A, \quad (cp-ap^2)C+bpC'=B.$$

გამოვარკვიოთ თუ როდის არის მიღებული სისტემა თავსებადი. ამისათვის განვიხილოთ ამ სისტემის დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix} bp, & -(c-ap) \\ (c-ap)p, & bp \end{vmatrix}=b^2p^2+(c-ap)^2p.$$

რადგანაც p დადებითი რიცხვია, ამიტომ აღნიშნული დეტერმინანტი ნულია მხოლოდ მაშინ, როცა

$$b=0, \ c=ap.$$

ეს განსაკუთრებული შემთხვევა განვიხილოთ შემდეგ; ახლა კი ვიგულისხმოთ, რომ

$$b\neq 0 \quad c\neq ap.$$

ამრიგად, (42) სისტემა თავსებადია და C-სა და C'-ისათვის მოიძებნება შესაფერისი მნიშვნელობანი. აღვნიშნოთ ეს მნიშვნელობანი C_0 და C'_0-ით, ხოლო M-სა და N-ის მნიშვნელობანი M_0 და N_0-ით შესაბამისად. მაშინ (41) ტოლობის ინტეგრების შემდგომ მივიღებთ:

(43) $$\left\{\begin{aligned} &\int\frac{Ax+B}{(x^2+p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx= \\ &=(C_0x+C'_0)\,\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{2(n-1)\,(x^2+p)^{n-1}} \\ &+\frac{(n-2)aC_0}{n-1}\int\frac{dx}{(x^2+p)^{n-2}\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &+\frac{1}{4(n-1)}\int\frac{M_0x+N_0}{(x^2+p)^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx. \end{aligned}\right.$$

ეს არის რედუქციის ფორმულა, რომლის მიმდევრობითი გამოყენება მიგვიყვანს ინტეგრალზე

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+p)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

რომლის გამოთვლა შეადგენს ჩვენს უახლოეს მიზანს. P და Q გარკვეული მუდმივი რიცხვებია.

ვთქვათ ახლა

$$b=0,\ \ c=ap.$$

ამ შემთხვევაში,

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Ax+B}{(x^2+p)^{n+1/2}}\,dx.$$

მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი ძალიან ადვილად მოიძებნება. მართლაც, ეს ინტეგრალი ორი ინტეგრალისაგან შედგება:

$$\frac{A}{\sqrt{a}}\int \frac{xdx}{(x^2+p)^{n+1/2}} \quad \text{და} \quad \frac{B}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{(x^2+p)^{n+1/2}}.$$

პირველი მათგანი მარტივად გამოითვლება:

$$\int \frac{xdx}{(x^2+p)^{n+1/2}}=-\frac{1}{2n-1}\,\frac{1}{(x^2+p)^{n-1/2}}+C.$$

რაც შეეხება მეორეს, მის გამოსათვლელად მოვახდინოთ გარდაქმნა:

$$t=\frac{x}{\sqrt{x^2+p}},$$

საიდანაც

$$x^2+p=\frac{p}{1-t^2},\quad dt=\frac{pdx}{(x^2+p)^{3/2}}.$$

ამ ფორმულების ძალით გვექნება

$$\int \frac{dx}{(x^2+p)^{n+1/2}}=\frac{1}{p^n}\int (1-t^2)^{n-1}dt.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი კი უბრალო დაშლით მოიძებნება.

§ 41. ალგებრული ნაწილის გამოყოფა Z_n ინტეგრალიდან. Z_n ინტეგრალის ალგებრული ნაწილის გამოყოფა (43) ფორმულის საშუალებითაა შესაძლო.

მართლაც, ამ ფორმულის ძალით გვექნება

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\left\{\frac{C_0x+C'_0}{(x^2+p)^{n-1}}+\frac{C_1x+C'_1}{(x^2+p)^{n-2}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{C_{n-2}x+C'_{n-2}}{x^2+p}\right\}\sqrt{ax^2+bx+c}+\int\frac{C_{n-1}x+C'_{n-1}}{(x^2+p)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

გავაწარმოოთ ახლა ეს ტოლობა და ამის შემდეგ მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ზე გავამრავლოთ. მაშინ ასეთი სახის ტოლობა გვექნება:

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{Ax+B}{(x^2+p)^n}=\left\{\frac{C_0x+C'_0}{(x^2+p)^{n-1}}+\cdots+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{C_{n-2}x+C'_{n-2}}{x^2+p}\right\}\left(ax+\frac{b}{2}\right)\\
&-\left\{\frac{(2n-3)\,C_0x^2+2(n-1)\,C'_0x-C_0p}{(x^2+p)^n}\right.\\
&+\frac{(2n-5)\,C_1x^2+2\,(n-2)\,C'_1x-C_1p}{(x^2+p)^{n-1}}+\cdots\\
&\left.+\frac{C_{n-2}x^2+2\,C'_{n-2}\,x-C_{n-2}p}{(x^2+p)^2}\right\}(ax^2+bx+c)\\
&+\frac{C_{n-1}x+C'_{n-1}}{x^2+p}+C_nx+C'_n.
\end{aligned}\right.$$

გავამრავლოთ ახლა ეს ტოლობა $(x^2+p)^n$-ზე, მაშინ მარცხნივ დაგვრჩება $Ax+B$, ხოლო მარჯვნივ გვექნება $(2n+1)$ ხარისხის პოლინომი, რომლის კოეფიციენტები C მუდმივთა წრფივ ფუნქციებს წარმოადგენენ. მიღებული ტოლობა იგივეობა უნდა იყოს და ამიტომ კოეფიციენტთა შედარების ჩვეულებრივი წესით გვექნება $(2n+2)$ განტოლების სისტემა $(2n+2)$ უცნობით: C_0, C'_0; C_1, C'_1;...;C_n, C'_n. ეს განტოლებანი თავსებადი არიან და ამიტომაც აღნიშნულ უცნობთათვის მივიღებთ მნიშვნელობათა ერთს და მხოლოდ ერთ სისტემას. მაშასადამე, Z_n ინტეგრალის ალგებრული ნაწილი გამოყოფილი იქნება.

ამრიგად, ზემოაღნიშნული თეორიის თანახმად, (36) ინტეგრალის მოსაძებნად დაგვრჩა გამოვთვალოთ მხოლოდ სამი ძ ი რ ი თ ა დ ი ინ ტ ე გ რ ა ლ ი:

$$ა)\ \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad ბ)\ \int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$გ)\ \int\frac{Px+Q}{(x^2+p)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

§ 42. **ა) ინტეგრალის მოძებნა.** ა) ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვთვალოთ ორი გზით:

I. **ელიფსურისა და ჰიპერბოლური გარდაქმნის ფორმულების გამოყენება.** რადგანაც $a \neq 0$, ამიტომ კოეფიციენტი x^2-ის წინ რადიკალს ქვევით შეგვიძლია a რიცხვის ნიშნის მიხედვით ან $+1$ ანდა -1 გავხადოთ ყოველთვის. მართლაც, თუ $a>0$, მაშინ აღნიშნული რადიკალი ასე გარდავქმნათ:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}},$$

თუ აღვნიშნავთ $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, მივიღებთ:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{x^2+px+q}\,.$$

ვთქვათ $a<0$, მაშინ გვექნება

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\sqrt{-x^2+px+q},$$

სადაც

$$p=-\frac{b}{a},\quad q=-\frac{c}{a}.$$

ამრიგად, ა) ინტეგრალი შემდეგი ორი სახისა იქნება:

$$ა_1)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}},\quad ა_2)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$$

გამოვთვალოთ ჯერ $ა_1$) ინტეგრალი. იმ მრუდის განტოლება, რომელიც ამ ინტეგრალთანაა დაკავშირებული, შემდეგია:

$$y^2=-x^2+px+q.$$

მაგრამ ეს განტოლება ასე შეგვიძლია გადმოვწეროთ:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\frac{p^2}{4}+q. \tag{45}$$

რადგანაც ტოლობის მარცხნივ გვაქვს კვადრატთა ჯამი, ამიტომ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი სიდიდე დადებითია. აღვნიშნოთ

$$R^2=\frac{p^2}{4}+q.$$

ზემოაღნიშნული მრუდი წარმოადგენს წ რ ე წ ი რ ს, რომლის რადიუსია R. ვისარგებლოთ ახლა ელიფსური გარდაქმნის ფორმულებით (ფორმ. (18), § 29). ეს ფორმულები (45) ტოლობის ძალით ასეთ სახეს ღებულობენ:

$$x=\frac{p}{2}+\frac{2Rt}{1+t^2},\quad y=\frac{R(1-t^2)}{1+t^2}. \tag{46}$$

აქედან

$$dx=2R\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

ჩავსვათ y-ისა და dx-ის მიღებული მნიშვნელობანი a_1) ინტეგრალის ნიშნის ქვეშით. მაშინ ეს უკანასკნელი ასე გამოითვლება:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arc\,tg}t+C. \tag{47}$$

(46) ფორმულებიდან გვაქვს:

$$t=\frac{B-y}{x-\frac{p}{2}}.$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, (47) ტოლობას ასეთი სახე მივცეთ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}=$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}-\sqrt{-x^2+px+q}}{x-\frac{p}{2}}+C.$$

მაგრამ § 8-ის შენიშვნის ბოლოში მიღებული გვქონდა დამოკიდებულება $\arcsin x$-სა და $\operatorname{arc\,tg}x$-ს შორის, რომლის ძალითაც უკანასკნელი ფორმულა უფრო მარტივ სახეს ღებულობს:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}=\arcsin\frac{x-\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}}+ \tag{48}$$

$$+C=\arcsin\frac{2x-p}{\sqrt{p^2+4q}}+C.$$

ავიღოთ ახლა ა$_2$) ინტეგრალი. იმ მრუდის განტოლება, რომელიც ამ ინტეგრალთანაა დაკავშირებული

$$y^2=x^2+px+q.$$

ეს კი ჰიპერბოლის განტოლებაა. იგი ასე გადმოვწეროთ:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-y^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\frac{p^2}{4}-q>0$ [1].

აღვნიშნოთ $\frac{p^2}{4}-q=D^2$ და გამოვიყენოთ ჰიპერბოლური გარდაქმნის მე-(19) ფორმულები (§ 29), რის შემდეგ მივიღებთ

(49) $$x+\frac{p}{2}=D\frac{t^2+1}{2t},\ y=D\frac{t^2-1}{2t}.$$

ამ ტოლობებიდან პირველი გვაძლევს

$$dx=D\frac{t^2-1}{2t^2}dt.$$

თუ ჩავსვამთ ა$_2$) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით dx-ისა და y-ის მაგიერ მიღებულ მნიშვნელობებს, გვექნება

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\int\frac{dt}{t}=\mathrm{Lg}\, t+C.$$

(49) ტოლობებიდან გვაქვს:

$$t=\frac{x+\frac{p}{2}+y}{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

და ამიტომ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\mathrm{Lg}\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right)+C.$$

ჩავსვათ ახლა (48)-სა და ამ უკანასკნელ ფორმულაში p-სა და q-ს სათანადო მნიშვნელობები, მაშინ ეს ფორმულები შეგვიძლია შემდეგნაირად დავწეროთ:

[1] შემთხვევები $\frac{p^2}{4}-p>0$ და $\frac{p^2}{4}-p<0$ ერთმანეთიდან $x+\frac{p}{2}$-სა და y ცვლადთა როლებით განსხვავდებიან მხოლოდ.

$$
(50)\quad \left\{ \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \right.
$$

$$
= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{Lg}\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c}\right) + C, & a>0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-(2ax-b)}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, & a<0. \end{cases}
$$

II. **ეილერის ხერხი.** ეს ხერხი ჩასმის სამი ფორმულით გამოისახება:

1°. ე ი ლ ე რ ი ს ჩ ა ს მ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი ფ ო რ მ უ ლ ა. ვთქვათ $a>0$. მოვახდინოთ ასეთი გარდაქმნა:

$$
(51)\qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}.
$$

აქედან მივიღებთ

$$
x = \frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}},
$$

$$
dx = \frac{2(t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a})}{(b+2t\sqrt{a})^2}\, dt.
$$

ამ მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ ა) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფ გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = 2\int \frac{dt}{b+2t\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{Lg}(b+2t\sqrt{a})
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{Lg}(b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}) + C.
$$

(51) ფორმულას ეწოდება ე ი ლ ე რ ი ს ჩ ა ს მ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი ფ ო რ მ უ ლ ა.

2°. ე ი ლ ე რ ი ს ჩ ა ს მ ი ს მ ე ო რ ე ფ ო რ მ უ ლ ა. ვთქვათ ახლა $a<0$. აქ ორი შემთხვევა არის შესაძლო: $c>0$, $c<0$.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა: $c>0$. თუ მოვახდენთ გარდაქმნას

$$
z = \frac{1}{x},
$$

გვექნება

$$
\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{cz^2+bz+a}}{z}.
$$

ამრიგად, მიღებულია ახალი ირაციონალობა, რომლის კოეფიციენტიც z^2-ის წინ რადიკალს ქვევით დადებითია. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ეილერის ჩასმის პირველი ფორმულა, რომელიც ასე დაიწერება

$$\sqrt{cz^2+bz+a}=t-z\sqrt{c}.$$

მაგრამ, თუ ისევ x-ს დავუბრუნდით, ეს ტოლობა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}.$$

უკანასკნელ ფორმულას ეილერის ჩასმის მეორე ფორმულა ეწოდება. ამ ფორმულის საშუალებით x-ი და თვით რადიკალიც რაციონალურად გამოისახება t-ს მიმართ. აღნიშნული ფორმულის გამოყენება ა) ინტეგრალზე, მიგვიყვანს ტოლობაზე

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}{\sqrt{-a}\,x}+C.$$

3°. ეილერის ჩასმის მესამე ფორმულა. ვთქვათ ახლა $a<0$ და $c<0$, მაშინ გარდაქმნის პირველი და მეორე ფორმულები უკვე არ გამოგვადგება. ასეთ შემთხვევაში თუ (ax^2+bx+c)-ს აქვს წარმოსახვითი ფესვები, მაშინ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ რადიკალიც თვითონ წარმოსახვით სიდიდეს წარმოადგენს x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. ეს შემთხვევა უნდა გამოვრიცხოთ შემდეგისათვის და ვიგულისხმოთ, რომ რადიკალი ნამდვილი სიდიდეა ყოველთვის.

განვიხილოთ ახლა a, b, c კოეფიციენტების ნიშანთა დამოუკიდებლად ზოგადი შემთხვევა, როცა (ax^2+bx+c)-ს აქვს ნამდვილი ფესვები და ვთქვათ უკანასკნელნი არიან α და β, მაშინ გვექნება

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t. \tag{52}$$

აქედან მივიღებთ

$$x=\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}.$$

ამრიგად, სიდიდეები, რომელნიც ინტეგრალის ნიშნის ქვევით არიან, რაციონალურად გამოისახებიან t-ს მიმართ და, მაშასადამე, თვით ინტეგრალიც გამოითვლება სავსებით. (52) ფორმულას ეწოდება ეილერის ჩასმის მესამე ფორმულა.

ეილერის ფორმულები, ისე როგორც ზემოაღნიშნული (46) და (49) ფორმულებიც, საშუალებას გვაძლევენ ამოვხსნათ არა მარტო ა) სახის კერძო ინტეგრალი, არამედ (36) სახის ყოველი ინტეგრალიც საზოგადოდ. მათ შორის, რა თქმა უნდა, ბ) და გ) ძირითადი ინტეგრალებიც ამოიხსნება აღნიშნული ფორმულების გამოყენებით. მაგრამ ამ ინტეგრალთა გამოსათვლელად აქ სხვა მეთოდებსაც განვიხილავთ კიდევ[1].

§ 43. ბ) ინტეგრალის მოძებნა.

ბ) $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ინტეგრალის მოძებნას ორი შემდეგი მეთოდით ვასრულებთ:

1°. მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$x-\alpha=\frac{1}{t},$$

აქედან მივიღებთ:

$$dx=-\frac{dt}{t^2}\quad ax^2+bx+c=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{t^2}.$$

---

[1] იმ შემთხვევაში, როცა $a<0$, ა) ინტეგრალი მარტივად გამოითვლება. მართლაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ იგივეობას

$$ax^2+bx+c=\frac{(b^2-4ac)-(2ax+b)^2}{-4a},$$

გვექნება:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=2\sqrt{-a}\int\frac{dx}{\sqrt{(b^2-4ac)-(2ax+b)^2}}.$$

აქ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $b^2-4ac>0$. თუ მოვახდენთ ჩასმას $2ax+b=t$, მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{\sqrt{-a}}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{(b^2-4ac)-t^2}}=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{b^2-4ac}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-(2ax+b)}{\sqrt{b^2-4ac}}+C\qquad\text{(რედ.)}.$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{a_1 t^2+b_1 t+c_1}}.$$

ეს გვიჩვენებს, რომ ბ) ინტეგრალი მიიყვანება ა) სახეზე და, მაშასადამე, იგი მოიძებნება ზემოაღნიშნული მეთოდების საშუალებით.

2^0. ბ) ინტეგრალი შესაძლოა პირდაპირ ელიფსურისა და ჰიპერბოლური ფორმულების საშუალებითაც გამოვთვალოთ. მართლაც, განვიხილოთ ამ ინტეგრალის ორი სახე:

$$\text{ბ}_1)\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{x^2+px+q}},\quad \text{ბ}_2)\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{-x^2+px+q}}.$$

ბ$_1$) ინტეგრალის გამოსათვლელად, როგორც წინათ, უნდა გამოვიყენოთ ჰიპერბოლური გარდაქმნის (49) ფორმულები. გვაქვს:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dt}{t},\quad x-\alpha = \frac{Dt^2-(p+2\alpha)t+D}{2t},$$

სადაც

$$D = \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

ამ ფორმულების ძალით, ეს ინტეგრალი ასე გადმოიწერება:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{x^2+px+q}} = 2\int \frac{dt}{Dt^2-(p+2\alpha)t+D}, \tag{53}$$

ე. ი. ბ$_1$) ინტეგრალი მიიყვანება მე-4^0 სახეზე (§ 11).

საინტერესო ისაა, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის ნიშნის ქვევით კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი არის

$$4(\alpha^2+p\alpha+q).$$

მაგრამ უკანასკნელი გამოსახულების ფრჩხილებში მყოფი სიდიდე წარმოადგენს ტოლობის მარცხენა ნაწილის ინტეგრალის ნიშნის ქვევით კვადრატული სამწევრის რიცხვით მნიშვნელობას, როცა x-ის მაგიერ α-ს ჩავსვამთ. მაშასადამე, თუ α არის ფესვი აღნიშნული კვადრატული სამწევრისა, ბ$_1$) ინტეგრალი ალგებრულ ფუნქციას წარმოადგენს. ეს უშუალოდაც ჩანს. მართლაც, მაშინ

$$p+2\alpha=2D$$

და ამიტომაც უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ინტეგრალი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$2\int\frac{dt}{Dt^2-2Dt+D}=\frac{2}{D}\int\frac{dt}{(t-1)^2}=-\frac{2}{D(t-1)},$$

რაც ამტკიცებს ნათქვამს.

თუ α არ არის ფესვი აღნიშნული კვადრატული სამწევრისა, მაშინ, ბ$'_1$) ინტეგრალი გამოსახავს ან ლოგარითმულსა, ანდა შებრუნებულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას.

ბ$_2$) ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ელიფსური გარდაქმნის (46) ფორმულები, რაც მოგვცემს

$$\frac{dx}{y}=\frac{2dt}{1+t^2},\quad x-\alpha=\frac{(p-2\alpha)t^2+4Rt+(p-2\alpha)}{2(1+t^2)}.$$

მაშასადამე,

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{-x^2+px+q}}=4\int\frac{dt}{(p-2\alpha)t^2+4Rt+(p-2\alpha)}. \tag{54}$$

ამრიგად, ელიფსური გარდაქმნის ფორმულების საშუალებით ბ$_2$) ინტეგრალი მიიყვანება მე-4^0 სახეზე (§ 11). თუ α არის ფესვი $(-x^2+px+q)$ კვადრატული სამწევრისა, მაშინ გვექნება

$$2\alpha-p=\pm 2R$$

და ამიტომაც უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ინტეგრალი შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$4\int\frac{dt}{(p-2\alpha)t^2+4Rt+(p-2\alpha)}=\mp\frac{2}{R}\int\frac{dt}{(t-1)^2}=\pm\frac{2}{R(t-1)}.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ბ$_2$) ინტეგრალი ალგებრულ ფუნქციას გამოსახავს. მაგრამ, თუ

$$-\alpha^2+p\alpha+q\neq 0,$$

მაშინ ბ$_2$) ინტეგრალი წარმოადგენს ან ლოგარითმულსა, ანდა შებრუნებულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას.

§ 44. გ) ინტეგრალის მოძებნა. გ) ინტეგრალი ავიღოთ ზოგადი სახით:

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx,$$

სადაც (ax^2+bx+c)-ს წარმოსახვითი ფესვები აქვს[1]. ეს ინტეგრალი გამოვთვალოთ ორი მეთოდით.

მეთოდი პირველი. იგი ემყარება ქვემოთ მოყვანილ ლემას, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა ექნება შემდეგშიაც.

ლემა. ვთქვათ აღებულია მეოთხე ხარისხის ნამდვილი კოეფიციენტებიანი პოლინომი:

$$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,$$

რომელსაც ჯერადი ფესვები არ აქვს. მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$z=\frac{x-g}{x-h}, \tag{55}$$

სადაც g და h ნამდვილი მუდმივებია. აქედან

$$x=\frac{hz-g}{z-1}. \tag{55'}$$

უკანასკნელი ფორმულების ძალით $f(x)$ პოლინომი ღებულობს სახეს:

$$f(x)=\frac{f_1(z)}{(z-1)^4}, \tag{56}$$

სადაც $f_1(z)$ მეოთხე ხარისხის პოლინომია.

ლემა მდგომარეობს შემდეგში: g და h შეგვიძლია ისე შევარჩიოთ, რომ $f_1(z)$-ში მხოლოდ ლუწი ხარისხის წევრები იმყოფებოდეს.

დამტკიცება. ვთქვათ, α, β, γ, δ არიან $f(x)$-ის ფესვები. ლემის პირობის თანახმად ეს რიცხვები ერთმანეთიდან განსხვავდებიან. ამას გარდა, როცა $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, მაშინ $f(x)$ სულ უბრალო გარდაქმნით მიიყვანება აღნიშნული სახის $f_1(z)$ პოლინომზე; ამიტომ შემდეგისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha+\beta-\gamma-\delta\neq 0$.

აღმოვაჩინოთ უპირველესად, რომ არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვი ξ, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$\frac{1}{\xi-\alpha}+\frac{1}{\xi-\beta}=\frac{1}{\xi-\gamma}+\frac{1}{\xi-\delta}. \tag{57}$$

[1] იმ შემთხვევაში, როცა (ax^2+bx+c)-ს ფესვები ნამდვილია, გ) ინტეგრალი ყოველთვის შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ა) სახის ორი ინტეგრალის ჯამი.

მარტივი გარდაქმნის შემდგომ ეს ტოლობა ღებულობს სახეს:

(58) $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\xi^2+2(\gamma\delta-\alpha\beta)\xi+[(\gamma+\delta)\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma\delta]=0.$

მაშასადამე, ξ არის ნამდვილი რიცხვი, როცა უკანასკნელი კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი დადებითია, ე. ი. როცა

$$(\gamma\delta-\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta-\gamma-\delta)[(\gamma+\delta)\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma\delta]>0.$$

თუ ამ უტოლობის მარცხენა ნაწილს გარდავქმნით და შემდეგ სათანადო შეკვეცას მოვახდენთ, მაშინ იგი ასე გადმოიწერება:

(59) $$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)>0.$$

მაგრამ α, β, γ, δ სრულებით ნებსითი რიგით იყო აღებული (57) ტოლობაში. დავამტკიცოთ, რომ ამ ფესვთა რიგი იმნაირად შეგვიძლია ავარჩიოთ, რომ უკანასკნელი ტოლობა შესრულდეს ყოველთვის. მართლაც, სამი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1°. α, β, γ, δ ყველა ნამდვილი რიცხვია.

2°. ორი მათგანი ნამდვილია, ხოლო ორი დანარჩენი წარმოსახვითია.

3°. ყველა ეს ფესვი წარმოსახვითია.

1° შემთხვევაში საკმარისია α და β უდიდეს ფესვებად ჩავთვალოთ. მაშინ (59) უტოლობის მარცხენა ნაწილის ყველა მამრავლი დადებითი რიცხვია და ამიტომ თვით ეს უტოლობაც შესრულდება.

2° შემთხვევაში α და β მივიღოთ ნამდვილ ფესვებად, ხოლო γ და δ წარმოსახვით ფესვებად. მაშინ აღნიშნული მამრავლნი წყვილ-წყვილად შეუღლებული წარმოსახვითი სიდიდეები იქნება და ამიტომ მათი ნამრავლიც დადებითი რიცხვი გახდება.

3° შემთხვევაში α და β მივიღოთ წყვილი შეუღლებული ფესვებად, ხოლო γ და δ შეუღლებული ფესვების მეორე წყვილად; მაშინ (59) უტოლობის მამრავლნი წყვილ-წყვილად შეუღლებული იქნებიან და ამიტომაც მათი ნამრავლი დადებით რიცხვს წარმოადგენს.

ამრიგად, (59) უტოლობა ყველა შემთხვევაში შესრულებულია.

ვთქვათ ξ_1, ξ_2 არის (58) კვადრატული განტოლების ფესვები; სულ ახლა ნათქვამის თანახმად ეს ორი რიცხვი ნამდვილი და სასრულია. ამას გარდა, (57) ტოლობისა და (59) უტოლობის ძალით, ყოველი ამ რიცხვთაგანი ერთის მხრით განსხვავდება α, β, γ, δ რიცხვებისაგან, ხოლო მეორე მხრით $\xi_1 \neq \xi_2$. შევარჩიოთ ახლა (55′) ფორმულაში g და h შემდეგნაირად:

$$g=\xi_2,\ h=\zeta_1,$$

რის შემდგომ ეს ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$x=\frac{\xi_1 z-\xi_2}{z-1}.$$

აშკარაა, რომ (55)-სა და (56) ტოლობათა ძალით $f_1(z)$ პოლინომის ფესვებია

$$z_1=\frac{\alpha-\xi_2}{\alpha-\xi_1},\quad z_2=\frac{\beta-\xi_2}{\beta-\xi_1},\quad z_3=\frac{\gamma-\xi_2}{\gamma-\xi_1},\quad z_4=\frac{\delta-\xi_2}{\delta-\xi_1}\text{[1]}.$$

მაგრამ, თუ მივიღებთ მხედველობაში (57) ტოლობას, მაშინ უბრალო შეკრებით დავრწმუნდებით, რომ

$$z_1+z_2=0,\ z_3+z_4=0;$$

ამიტომ $f_1(z)$ შემდეგნაირად დაიშლება:

$$f_1(z)=(kz^2+l)(Kz^2+L),$$

სადაც (kz^2+l) ის მამრავლია, რომლის ფესვებიც არის z_1 და z_2, ხოლო (Kz^2+L)-ის ფესვებია z_3 და z_4.

ამრიგად, $f_1(z)$-ს აქვს სახე

$$f_1(z)=A_0z^4+A_1z^2+A_2$$

და ლემა დამტკიცებულია სავსებით.

გამოვიყენოთ ახლა ეს ლემა გ) ინტეგრალის გამოთვლისათვის. $f(x)$ პოლინომი შემდეგი სახით ავიღოთ:

$$f(x)=(ax^2+bx+c)(Ax^2+Bx+C).$$

ვთქვათ, $f(x)$-ის ფესვები ასე არის განაწილებული: α, β წარმოადგენს (ax^2+bx+c)-ს ფესვებს, ხოლო γ, δ არის (Ax^2+Bx+C)-ს ფესვები, მაშინ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a};\ \gamma+\delta=-\frac{B}{A},\ \ \gamma\delta=\frac{C}{A}.$$

ამრიგად, (58) განტოლება ღებულობს სახეს:

$$(60)\qquad (Ab-aB)\xi^2+2(Ac-aC)\xi+(Bc-bC)=0.$$

ვინაიდან α და β შეუღლებული კომპლექსური სიდიდეებია, ამიტომ აქ გვექნება ან 2° ანდა 3° შემთხვევა, იმისდა მიხედვით, γ და δ

[1] ეს ასეა იმიტომ, რომ (56) ტოლობის მნიშვნელი არ მოისპობა, როცა $z=z_1, z_2, z_3, z_4$, ვინაიდან ყოველი ამ რიცხვთაგანი განსხვავდება 1-დან.

ნამდვილია თუ წარმოსახვითი. მაგრამ ორივე შემთხვევაში (60) განტოლების ξ_1 და ξ_2 ფესვები ნამდვილი რიცხვებია. უკანასკნელი ორი რიცხვი, ამას გარდა, სასრულიც უნდა იყოს და ამიტომ საკმარისია, რომ კოეფიციენტი ξ^2-ის წინ $\neq 0$, ე. ი.

$$Ab \neq aB,$$

რაც ვიგულისხმოთ უპირველესად.

მოვახდინოთ ახლა გ) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გარდაქმნა:

$$x = \frac{\xi_1 z - \xi_2}{z - 1}. \tag{61}$$

აქედან

$$dx = \frac{\xi_2 - \xi_1}{(z-1)^2}\, dz.$$

ზემოაღნიშნული ლემის თანახმად (61) გარდაქმნა მოგვცემს ფორმულებს:

$$ax^2 + bx + c = \frac{kz^2 + l}{(z-1)^2}, \quad Ax^2 + Bx + C = \frac{Kz^2 + L}{(z-1)^2},$$

რომლებსაც განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვთ გ) ინტეგრალის თეორიაში.

გ) ინტეგრალი უკანასკნელი ფორმულების ძალით ღებულობს სახეს

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}\, dx = \int \frac{Pz + Q}{(kz^2 + l)\sqrt{Kz^2 + L}}\, dz,$$

სადაც P და Q გარკვეული მუდმივი რიცხვებია. ეს ტოლობა შეადგენდა მიზანს ჩვენი დამტკიცებისას.

განვიხილოთ ახლა ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი. იგი დავშალოთ ჩვეულებრივი წესით:

$$\int \frac{Pz + Q}{(kz^2 + l)\sqrt{Kz^2 + L}}\, dz = P \int \frac{z\,dz}{(kz^2 + l)\sqrt{Kz^2 + L}} +$$

$$+ Q \int \frac{dz}{(kz^2 + l)\sqrt{Kz^2 + L}}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი ძალიან ადვილად გამოითვლება, თუ მოვახდენთ ჩასმას

$$t = \sqrt{Kz^2 + L},$$

მართლაც, ამ უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება

$$z^2=\frac{t^2-L}{K},\ zdz=\frac{tdt}{K}$$

და ამიტომაც

$$\int\frac{zdz}{(kz^2+l)\sqrt{Kz^2+L}}=\int\frac{dt}{kt^2+(Kl-kL)}.$$

მაშასადამე, პირველი ინტეგრალი მიყვანილია ან 3^0_1 ანდა 3^0_2 სახეზე (§ 11).

განვიხილოთ ახლა მეორე ინტეგრალი; მისთვის გამოვიყენოთ ჩასმა

$$\tau=\frac{z}{\sqrt{Kz^2+L}}.$$

აქედან მივიღებთ

$$z^2=\frac{L\tau^2}{1-K\tau^2},\ \frac{dz}{\sqrt{Kz^2+L}}=\frac{d\tau}{1-K\tau^2}.$$

თუ ჩავსვამთ მიღებულ მნიშვნელობებს მეორე ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$\int\frac{dz}{(kz^2+l)\sqrt{Kz^2+L}}=\int\frac{d\tau}{l+(kL-lK)\tau^2}.$$

მაშასადამე, მეორე ინტეგრალიც მიყვანილია 2^0 ან 3^0_1 სახის ინტეგრალზე (§ 11).

ამრიგად, გ) ინტეგრალი ზემოაღნიშნული (61) ფორმულისა და ამ ორი უკანასკნელი გარდაქმნის საშუალებით სავსებით იქნება გამოთვლილი.

მაგრამ ზემოთ ვიგულისხმეთ, რომ $Ab\neq aB$. ვთქვათ ახლა

$$Ab=aB,$$

მაშინ

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx=$$

$$=\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)\sqrt{A\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{C}{A}\right)}}dx.$$

თუ მოვახდენთ ჩასმას

$$x+\frac{b}{2a}=z,$$

მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ღებულობს სახეს:

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx = \int \frac{Pz+Q}{(az^2+r)\sqrt{Az^2+R}}\,dz,$$

სადაც

$$P=M,\ Q=N-\frac{Mb}{2a},\ r=\frac{4ac-b^2}{4a},\ R=C-\frac{Ab^2}{4a^2}.$$

ამრიგად, აღნიშნულ განსაკუთრებულ შემთხვევაში გ) ინტეგრალი სულ უბრალო გარდაქმნით მივიყვანეთ იმ ძირითად სახეზე, რომელიც ზოგად შემთხვევაში რთული გარდაქმნის შემდგომ იყო მიღებული.

გადავდივართ ახლა მეორე მეთოდზე.

მეთოდი მეორე. გ) ინტეგრალი ასეთი სახით ავიღოთ

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+c}}\,dx\ ^{1}.$$

თუ წილადს ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გავამრავლებთ და გავყოფთ (x^2-px+q)-ზე, გვექნება

$$(62)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+c}}\,dx = \\ \displaystyle= \int \frac{Ax^3+(B-Ap)x^2+(Aq-Bp)x+Bq}{[(x^2+q)^2-p^2x^2]\sqrt{ax^2+c}}\,dx \\ \displaystyle= \int \frac{Ax^2+(Aq-Bp)}{[(x^2+q)^2-p^2x^2]\sqrt{ax^2+c}}\,xdx+ \\ \displaystyle+ \int \frac{(B-Ap)x^2+Bq}{[(x^2+q)^2-p^2x^2]\sqrt{ax^2+c}}\,dx. \end{cases}$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი აღვნიშნოთ Z_1-ით, ხოლო მეორე Z_2-ით.

მოვახდინოთ Z_1 ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გარდაქმნა:

$$z=\sqrt{ax^2+c},$$

მაშინ იგი ღებულობს სახეს

$$Z_1=\int \frac{A_0z^2+A_1}{z^4+\beta z^2+\gamma}\,dz,$$

[1] ამ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით A, B, a, c კოეფიციენტებს სულ სხვა მნიშვნელობა აქვთ, ვიდრე წინათ.

სადაც

$$A_0=A,\ A_1=Aaq-Bap-Ac,\ \beta=2aq-ap^2-2c,$$
$$\gamma=c^2-2aqc+cap^2+a^2q^2.$$

მაგრამ ეს ინტეგრალი წარმოადგენს 10°-სა და 11°-ი სახის ინტეგრალების ჯამს (§ 22), ამიტომ იგი უშუალოდ მოიძებნება ამ ინტეგრალების უკვე ცნობილ მნიშვნელობათა ჩასმით.

რაც შეეხება ახლა Z_2-ს, მის გამოსათვლელად მოვახდინოთ ჩასმა

$$t=\frac{x}{\sqrt{ax^2+c}}.$$

აქედან

$$x^2=\frac{ct^2}{1-at^2},\ \frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}}=\frac{dt}{1-at^2}.$$

ამ ფორმულების ძალით Z_2 ინტეგრალი ღებულობს სახეს:

$$Z_2=\int\frac{B_0t^2+B_1}{kt^4+lt^2+m}\,dt,$$

სადაც

$$B_0=Bc-Acp-Baq,\ B_1=Bq,$$
$$k=c^2-2acq+acp^2+a^2q^2,\ l=2qc-cp^2-2aq^2,\ m=q^2.$$

Z_2 ინტეგრალი იმავე სახისა აღმოჩნდა, როგორც Z_1 ინტეგრალიც. ჩავსვამთ რა ახლა Z_1-სა და Z_2-ის მნიშვნელობებს (62) ფორმულაში, მივიღებთ გ) ინტეგრალის მნიშვნელობასაც აგრეთვე და პრობლემა ამოხსნილია სავსებით.

რა თქმა უნდა მეორე მეთოდი პირველზე უფრო უშუალოა, სამაგიეროდ მისი გამოყენება თხოულობს ბევრ რიცხვით გამოთვლებს და ამიტომ საზოგადოდ პირველი მეთოდი უფრო მიზანშეწონილად უნდა ჩაითვალოს, ვიდრე მეორე.

§ 45. ინტეგრება დიფერენციალებისა, რომლებიც შეიცავენ ორ ირაციონალობას: $\sqrt{\alpha x+\beta}$ და $\sqrt{\gamma x+\delta}$.

ზოგადი სახე ინტეგრალებისა, რომელნიც ამ ორ ირაციონალობას შეიცავენ, ასეთია:

$$\int R(x,\ \sqrt{\alpha x+\beta},\ \sqrt{\gamma x+\delta})dx, \tag{63}$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, ხოლო R რაციონალობის სიმბოლოა.

ასეთი ინტეგრალი (36) სახეზე მიიყვანება ყოველთვის. მართლაც, თუ მოვახდენთ გარდაქმნას

$$\sqrt{\alpha x+\beta}=t\sqrt{\gamma x+\delta},$$

გვექნება:

$$x=\frac{t^2\delta-\beta}{\alpha-t^2\gamma},\quad dx=\frac{2(\alpha\delta-\beta\gamma)t}{(\alpha-\gamma t^2)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{\alpha x+\beta}=\frac{t\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma t^2}},\quad \sqrt{\gamma x+\delta}=\frac{\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma t^2}}.$$

მაშასადამე, ზემოაღნიშნული ირაციონალობანი რაციონალურად გამოისახებიან ერთი $\sqrt{\alpha-\gamma t^2}$ ირაციონალობის მიმართ და (63) ინტეგრალს ექნება სახე:

$$\int R_1(t,\sqrt{\alpha-\gamma t^2})dt,$$

სადაც R_1 რაციონალობის ახალი სიმბოლოა. ამრიგად, გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია სავსებით.

§ 46. მაგალითები.

1°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}.$$

ზოგადი (50) ფორმულის გამოყენებით (§ 42) ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\mathrm{Lg}\,(x+\sqrt{x^2+k})+C.$$

კერძოდ, როცა $k=\pm1$, ეს უკანასკნელი ფორმულა ასე გადმოიწერება:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\mathrm{Lg}\,(x+\sqrt{x^2\pm1})+C.$$

2°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J=\int\frac{x^3+x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx.$$

გამოვყოთ ამ ინტეგრალიდან ალგებრული ნაწილი § 38-ის წესის მიხედვით. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$(64) \qquad J=(a_0x^2+a_1x+a_2)\sqrt{x^2-x+2}+a_3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+2}},$$

სადაც a_0, a_1, a_2, a_3 უცნობი კოეფიციენტებია.

გავაწარმოოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი და შემდეგ მოვახდინოთ გარდაქმნა აღნიშნული წესის თანახმად; მაშინ (39) ფორმულა (§ 38) მიიღებს სახეს

$$2(x^3+x+1)=2(x^2-x+2)(2a_0x+a_1)+$$
$$+(2x-1)(a_0x^2+a_1x+a_2)+2a_3,$$

ანდა

$$2x^3+2x+2=6a_0x^3+(4a_1-5a_0)x^2+$$
$$+(8a_0-3a_1+2a_2)x+(4a_1-a_2+2a_3).$$

ეს ტოლობა იგივეობა უნდა იყოს, რაც მაშინაა შესაძლო, როცა კოეფიციენტები x-ის ერთისა და იმავე ხარისხის წინ ტოლი არიან, ე. ი. როცა

$$6a_0=2,$$
$$4a_1-5a_0=0,$$
$$8a_0-3a_1+2a_2=2,$$
$$4a_1-a_2+2a_3=2.$$

ამოვხსნით რა ამ სისტემას, გვექნება

$$a_0=\frac{1}{3}, \quad a_1=\frac{5}{12}, \quad a_2=\frac{7}{24}, \quad a_3=\frac{5}{16}.$$

მაშასადამე, (64) ტოლობა ასე წარმოგვიდგება:

$$\int\frac{x^3+x+1}{\sqrt{x^2-x+2}}dx=\frac{8x^2+10x+7}{24}\sqrt{x^2-x+2}+$$
$$+\frac{5}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+2}}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი უშუალოდ ამოიხსნება (50) ფორმულის გამოყენებით (§ 42).

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int\frac{x^3+x+1}{\sqrt{x^2-x+2}}dx=\frac{8x^2+10x+7}{24}\sqrt{x^2-x+2}$$
$$+\frac{5}{16}\,\mathrm{Lg}\,(2x-1+2\sqrt{x^2-x+2})+C.$$

3°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J=\int\frac{dx}{(2x+1)^3\sqrt{x^2+6x+5}}.$$

ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ზოგადი წესი, რომელიც § 39-ში იყო მოყვანილი. გვაქვს:

$$J=\frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{(2x+1)^2}(B_0x+B_1)+ \tag{65}$$

$$+B_2\int\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+6x+5}}.$$

ამ ტოლობას თუ გავაწარმოებთ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{(2x+1)^3\sqrt{x^2+6x+5}}=\frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{(2x+1)^2}B_0-$$

$$-\frac{2x^2+17x+17}{(2x+1)^3\sqrt{x^2+6x+5}}(B_0x+B_1)$$

$$+\frac{B_2}{(2x+1)\sqrt{x^2+6x+5}}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს $(2x+1)^3\sqrt{x^2+6x+5}$-ზე გავამრავლებთ, მაშინ, ელემენტარული გარდაქმნის შემდეგ, იგი ასე გადმოიწერება:

$$1=-(4B_0+2B_1-4B_2)\,x^2-(B_0+17B_1-4B_2)\,x+$$

$$+(5B_0-17B_1+B_2).$$

მაგრამ ეს ტოლობა იგივეობა უნდა იყოს, ამიტომ კოეფიციენტთა შედარებით გვექნება:

$$4B_0+2B_1-4B_2=0,$$
$$B_0+17B_1-4B_2=0,$$
$$5B_0-17B_1+B_2=1.$$

ამოვხსნით რა ამ სისტემას, მივიღებთ

$$B_0=\frac{10}{27},\quad B_1=\frac{2}{27},\quad B_2=\frac{11}{27}.$$

ამას თუ ჩავსვამთ (65) ფორმულაში, ეს უკანასკნელი ასე გადმოიწერება:

$$J = \frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{27(2x+1)^2}(10x+2) + \frac{11}{27}\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+6x+5}}. \tag{66}$$

დაგვრჩა ახლა გამოვთვალოთ მხოლოდ მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი. ამისათვის გამოვიყენოთ ჰიპერბოლური გარდაქმნის ფორმულები. ეს უკანასკნელნი ამ შემთხვევაში ასეთი სახის არიან:

$$x+3 = \frac{t^2+1}{t}, \quad y = \frac{t^2-1}{t}. \tag{67}$$

ამ ფორმულების საშუალებით აღნიშნული ინტეგრალი ასე გამოითვლება:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+6x+5}} = \int \frac{dt}{2t^2-5t+2} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Lg}\,\frac{2t-4}{2t-1}.$$

დავუბრუნდეთ ისევ x-ს; (67) ფორმულებიდან გვექნება

$$x+y+3 = 2t.$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+6x+5}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Lg}\left(\frac{x-1+\sqrt{x^2+6x+5}}{x+2+\sqrt{x^2+6x+5}}\right) + C.$$

ჩავსვათ ახლა ეს (66) ტოლობაში, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^3\sqrt{x^2+6x+5}} = \frac{(10x+2)\sqrt{x^2+6x+5}}{27(2x+1)^2}$$
$$+\frac{11}{81}\,\mathrm{Lg}\left(\frac{x-1+\sqrt{x^2+6x+5}}{x+2+\sqrt{x^2+6x+5}}\right) + C.$$

4^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J = \int \frac{x+3}{(x^2-2x+5)^2\sqrt{9x^2-16x+46}}\,dx.$$

ეს არის Z_n სახის ინტეგრალი.

J ინტეგრალის გამოთვლისათვის ჯერ ალგებრული ნაწილი გამოვყოთ და ამის შემდგომ დაგვრჩება გამოსათვლელი მხოლოდ ტრანსცენდენტული ნაწილი.

ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ (44) ფორმულა, ანდა ამ შემთხვევაში უშუალოდ (43) ფორმულაც, რადგანაც აქ $n=2$ (§ 40).

თუ მოვახდენთ J ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ჩასმას

$$u = x-1,$$

მივიღებთ:

$$J=\int\frac{u+4}{(u^2+4)^2\sqrt{9u^2+2u+3}}\,du.$$

ასეთია J ინტეგრალის ის სახე, რომლიდანაც უნდა გამოვიდეთ, რომ (43) ფორმულის გამოყენება შესაძლო იყოს. ეს უკანასკნელი შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$(68)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{u+4}{(u^2+4)\sqrt{9u^2+2u+39}}\,du= \\ \displaystyle\qquad =(\lambda_0u+\mu_0)\frac{\sqrt{9u^2+2u+39}}{2(u^2+4)} \\ \displaystyle\qquad +\frac{1}{4}\int\frac{M_0u+N_0}{(u^2+4)\sqrt{9u^2+2u+39}}\,du. \end{cases}$$

დაგვრჩა მოვძებნოთ λ_0, μ_0, M_0, N_0 მუდმივები მხოლოდ.

მაგრამ (42) სისტემა, რომლიდანაც λ_0, μ_0 მოიძებნება, არის შემდეგი:

$$8\lambda_0-3\mu_0=1,$$
$$3\lambda_0+2\mu_0=1.$$

მაშასადამე,

$$\lambda_0=\frac{1}{5},\quad \mu_0=\frac{1}{5}.$$

ჩავსვამთ რა ამას ზოგად ფორმულებში, რომლებიც M-სა და N-ს განსაზღვრავენ (§ 40), გვექნება

$$M_0=4,\ N_0=-12.$$

ამრიგად, (68) ფორმულა შემდეგნაირად გადმოიწერება:

$$\int\frac{u+4}{(u^2+4)^2\sqrt{9u^2+2u^2+39}}\,du=\frac{(u+1)\sqrt{9u^2+2u+39}}{10(u^2+4)}$$
$$+\int\frac{u-3}{(u^2+4)\sqrt{9u^2+2u+39}}\,du.$$

დავუბრუნდეთ ისევ x-ს; მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ასე წარმოგვიდგება:

$$J=\frac{x\sqrt{9x^2-16x+46}}{10(x^2-2x+5)}+ \tag{69}$$
$$+\int\frac{x-4}{(x^2-2x+5)\sqrt{9x^2-16x+46}}\,dx.$$

ალგებრული ნაწილი ამგვარად გამოყოფილია.

დაგვრჩა მოვძებნოთ მხოლოდ მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი, რომელიც J-ს ტრანსცენდენტულ ნაწილს შეადგენს.

(69) ფორმულის მარჯვენა ინტეგრალი გ) სახისაა, ამიტომ მისთვის, ზოგადი თეორიის თანახმად (§ 44), უნდა მოვახდინოთ გარდაქმნა:

$$x=\frac{\xi_1 z-\xi_2}{z-1}.$$

ξ_1 და ξ_2 რიცხვები მოიძებნება (60) განტოლებიდან, რომელიც ამ შემთხვევაში ასეთია:

$$\xi^2+\xi-6=0.$$

მაშასადამე,

$$\xi_1=2,\quad \xi_2=-3.$$

ამრიგად, გარდაქმნის აღნიშნულ ფორმულას აქვს სახე:

$$x=\frac{2z+3}{z-1},$$

რომელიც მოგვცემს

$$x^2-2x+5=5\,\frac{z^2+4}{(z-1)^2},\quad 9x^2-16x+46=25\,\frac{2z^2+7}{(z-1)^2},$$

$$x-4=-\frac{2z-7}{z-1},\quad dx=-\frac{5}{(z-1)^2}\,dz.$$

მაშასადამე,

$$\int\frac{x-4}{(x^2-2x+5)\sqrt{9x^2-16x+46}}\,dx= \tag{70}$$
$$=\frac{1}{5}\int\frac{2z-7}{(z^2+4)\sqrt{2z^2+7}}\,dz.$$

მაგრამ

$$\int\frac{2z-7}{(z^2+4)\sqrt{2z^2+7}}\,dz=2\int\frac{z\,dz}{(z^2+4)\sqrt{2z^2+7}}- \tag{71}$$
$$-7\int\frac{dz}{(z^2+4)\sqrt{2z^2+7}}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალის მოსაძებნად თუ მოვახდენთ გარდაქმნას

$$t=\sqrt{2z^2+7},$$

გვექნება

$$\int\frac{z\,dz}{(z^2+4)\sqrt{2z^2+7}}=\int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc\,tg} t+$$

$$+C=\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2z^2+7}\right)+C.$$

რაც შეეხება მეორე ინტეგრალს, მისთვის თუ მოვახდენთ ჩასმას

$$\tau=\frac{z}{\sqrt{2z^2+7}},$$

გვექნება:

$$\int\frac{dz}{(z^2+4)\sqrt{2z^2+7}}=\int\frac{d\tau}{4-\tau^2}=\frac{1}{4}\operatorname{Lg}\frac{2+\tau}{2-\tau}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{Lg}\frac{2\sqrt{2z^2+7}+z}{2\sqrt{2z^2+7}-z}+C.$$

ჩავსვამთ რა მიღებულ მნიშვნელობებს (71) ფორმულაში, გვექნება

$$\int\frac{2z-7}{(z^2+4)\sqrt{2z^2+7}}\,dz=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2z^2+7}-$$

$$-\frac{7}{4}\operatorname{Lg}\frac{2\sqrt{2z^2+7}+z}{2\sqrt{2z^2+7}-z}+C.$$

(69) და (70) ფორმულების ძალით საბოლოოდ გვექნება

$$\int\frac{x+3}{(x^2-2x+5)^2\sqrt{9x^2-16x+46}}\,dx=\frac{x\sqrt{9x^2-16x+46}}{10(x^2-2x+5)}$$

$$+\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{9x^2-16x+46}}{x-2}-$$

$$-\frac{7}{20}\operatorname{Lg}\frac{2\sqrt{9x^2-16x+46}+x+3}{2\sqrt{9x^2-16x+46}-x-3}+C.$$

5^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: $m>0$, $m<0$.

1) ვთქვათ $m>0$; მაშინ რედუქციის (37) ფორმულა მოგვცემს

$$J_m=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}J_{m-2}, \tag{72}$$

რომლის მიმდევრობითი გამოყენებით J_m მიიყვანება J_0-ზე, ანდა J_1-ზე, იმისდა მიხედვით, არის m ლუწი, თუ კენტი. მაგრამ

$$J_0=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$$

$$J_1=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C$$

და ამრიგად J_m ინტეგრალი რედუქციის აღნიშნული ფორმულის საშუალებით გამოითვლება.

აქ მოგვყავს J_m-ის მნიშვნელობა ამ ორ შემთხვევაში:

$$\int\frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2k}\left\{x^{2k-1}+\frac{2k-1}{2k-2}x^{2k-3}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots3}{(2k-2)(2k-4)\ldots2}x\right\}$$

$$+\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots3\cdot1}{2k(2k-2)\ldots2}\arcsin x+C,$$

$$\int\frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2k+1}\left\{x^{2k}+\frac{2k}{2k-1}x^{2k-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2k(2k-2)}{(2k-1)(2k-3)}x^{2k-4}+\ldots+\frac{2k(2k-2)\ldots2}{(2k-1)(2k-3)\ldots1}\right\}+C.$$

2) ვთქვათ ახლა $m<0$; მაშინ რედუქციის (72) ფორმულა არ გამოგვადგება. მაგრამ, თუ ამ უკანასკნელში m-ის მაგიერ $(m+2)$-ს ჩავსვამთ და მიღებულ ტოლობას ამოვხსნით მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის მიმართ, გვექნება

$$J_m=\frac{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}{m+1}+\frac{m+2}{m+1}J_{m+2}.$$

ეს ფორმულა m უარყოფითისათვის გამოიყენება; მისი საშუალებით J_m მიიყვანება J_0-ზე ან J_{-1}-ზე, იმისდა მიხედვით, არის m ლუწი, თუ კენტი. მაგრამ

$$J_{-1}=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\mathrm{Lg}\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

და, ამრიგად, პრობლემა ამოხსნილია.

აქ მოგვყავს J_m-ის მნიშვნელობა ამ ორ შემთხვევაში:

$$\int\frac{dx}{x^{2k}\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2k-1}\left\{\frac{1}{x^{2k-1}}+\frac{2k-2}{2k-3}\,\frac{1}{x^{2k-3}}\right.$$

$$\left.+\dots+\frac{(2k-2)(2k-4)\dots 2}{(2k-3)(2k-5)\dots 1}\,\frac{1}{x}\right\}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^{2k+1}\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2k}\left\{\frac{1}{x^{2k}}+\frac{2k-1}{2k-2}\,\frac{1}{x^{2k-2}}+\dots+\right.$$

$$\left.\frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3\cdot 1}{(2k-2)(2k-4)\dots 2}\,\frac{1}{x^2}\right\}-$$

$$-\frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3.1}{2k(2k-2)\dots 4.2}\,\mathrm{Lg}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+C.$$

6°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx.$$

ასეთი ინტეგრალი საქანის თეორიაში გვხვდება.

ეს ინტეგრალი ზემოაღნიშნულ სახეზე მიიყვანება ყოველთვის. მართლაც, მოვახდინოთ გარდაქმნა:

$$x=az^2,\ \text{საიდანაც}\ dx=2azdz.$$

ამ ფორმულის ძალით გვექნება:

$$\int\frac{x^m}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx=2a^m\int\frac{z^{2m}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz.$$

უკანასკნელი ტოლობა სამართლიანია m რიცხვის ნიშნის დამოუკიდებლად. ვთქვათ, კერძოდ $m>0$; მაშინ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი გამოითვლება უკვე ცნობილი (72) ფორმულის ძალით და, როდესაც ისევ x-ს დავუბრუნდებით, მივიღებთ

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{ax - x^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{ax - x^2}}{m}\left\{x^{m-1} + \frac{2m-1}{2m-2}\, a x^{m-2}\right.$$

$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m-2)(2m-4)}\, a^2 x^{m-3} + \ldots + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3}{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\, a^{m-1}\right\}$$

$$+ \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3.1}{2m(2m-2)\ldots 4.2}\, a^m \arccos \frac{a-2x}{a} + C\ ^1.$$

ანალოგიურად ვიპოვით J_m-ის მნიშვნელობას, როცა $m<0$:

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{ax - x^2}} = -\frac{2\sqrt{ax - x^2}}{(2m-1)\, a^{m+1} x^m}\left\{a^m + \frac{2m-2}{2m-3}\, a^{m-1} x\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}{(2m-3)(2m-5)\ldots 1}\, a x^{m-1}\right\} + C.$$

VII. ელიფსური ინტეგრალები

§ 47. **წინასწარი შენიშვნები.** თავის დროზე (§ 31) აღნიშნული იყო, რომ, როცა $f(x)$ პოლინომი მესამე, ანდა მეოთხე ხარისხისაა, მაშინ (27) სახის ინტეგრალი საზოგადოდ წარმოადგენს უმაღლეს ტრანსცენდენტულს, რომელიც ელიფსური ფუნქციების ზოგადი სახელწოდებითაა ცნობილი. ეს არის უმარტივესი შემთხვევა ზემოგანხილული ელემენტარული შემთხვევის შემდგომ.

აქ მიზნად ვერ დავისახავთ არსებითად შევეხოთ ელიფსურ ფუნქციათა თვისებებს, რადგანაც ამისათვის მათემატიკური ანალიზის სპეციალური საკითხების ცოდნაა საჭირო.

მაგრამ ინტეგრალური აღრიცხვის თვალსაზრისით საინტერესოა ვიცოდეთ იმ ინტეგრალთა კანონიკური სახეები, რომელნიც ელიფსურ ფუნქციებს ქმნიან და ამ საკითხის ამოხსნა შეადგენს წინამდებარე თავის საგანს.

აღსანიშნავია ერთი გარემოება: თუ $f(x)$ არის მეოთხე ხარისხის პოლინომი, შესაძლოა ყოველთვის იმის მიყვანა მესამე ხარისხის პოლინომზე თანახმად ზოგადი თეორიისა, რომელიც § 33-ის

---

[1] ამ ფორმულის გამოყვანისას უნდა მივიღოთ მხედველობაში იგივეობა

$$\arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{1}{2} \arccos \frac{a-2x}{a}.$$

იხ. Serret, Lehrbuch der Differential und Integralrechnung. Bearbeitet von A. Harnack. Leipzig, 1885, S. 55–57.

შენიშვნაში იყო გამოთქმული. შებრუნებით, მესამე ხარისხის პოლინომი ყოველთვის შესაძლოა მეოთხე ხარისხის პოლინომზე მივიყვანოთ.

ბუნებრივია ამიტომ მივიღოთ მესამე ხარისხის პოლინომი, როგორც ძირითადი და სწორედ ასეთ შეხედულებაზეა აგებული ელიფსური ინტეგრალების თეორიის თანამედროვე კურსები. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ინტეგრალურ აღრიცხვაში ხშირად მეოთხე ხარისხის პოლინომიდანაც გამოდიან იმ მოსაზრებით, რომ არსებობს ასეთ შემთხვევაში ერთი გარდაქმნა, რომლის საშუალებითაც ძალიან ადვილად მოხდება ზემოთ წამოყენებული საკითხის გადაწყვეტა. ჩვენც ასეთივე გზა გვაქვს ამორჩეული.

ამრიგად, გამოვიდეთ შემდეგი სახის ინტეგრალიდან:

$$\int R(x, \sqrt{f(x)})\,dx, \tag{73}$$

სადაც

$$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$

და მოვძებნოთ მისი კანონიკური სახეები.

§ 48. **რედუქცია (73) ინტეგრალისა**. სანამ გადავიდოდეთ წამოყენებული საკითხის გადაწყვეტაზე, გარდავქმნათ $f(x)$ პოლინომი § 44 ლემის თანახმად.

განვიხილოთ ასეთი გარდაქმნა:

$$x=\frac{\xi_1 z-\xi_2}{z-1},$$

სადაც ξ_1 და ξ_2 არიან (58) განტოლების ფესვები. ამ ფორმულის ძალით გვექნება

$$f(x)=\frac{A_0z^4+A_1z^2+A_2}{(z-1)^4}$$

და ვინაიდან

$$dx=\frac{\xi_2-\xi_1}{(z-1)^2}\,dz,$$

ამიტომ (73) ინტეგრალი ასე გარდაიქმნება:

$$\int R_1(z, \sqrt{A_0z^4+A_1z^2+A_2})\,dz,$$

სადაც R_1 რაციონალობის ახალი სიმბოლოა.

ზოგადი თეორიის თანახმად (§ 35), ამ ინტეგრალიდან შეგვიძლია ალგებრული ნაწილი გამოვყოთ და მაშინ იგი მიიყვანება შემდეგ ინტეგრალებზე:

$$\int \frac{z^k}{\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}}\, dz, \quad k=0,\ 1, 2, 3,$$

$$\int \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}}, \quad \int \frac{dz}{(z^2+h^2)\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}}.$$

პირველი სახის ინტეგრალი, როცა $k=1$ ანდა 3-ს, ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს ყოველთვის. მართლაც, თუ მოვახდენთ გარდაქმნას

$$z^2 = t,$$

გვექნება

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{A_0 t^2 + A_1 t + A_2}},$$

$$\int \frac{z^3 dz}{\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{A_0 t^2 + A_1 t + A_2}}.$$

ეს კი ამტკიცებს ნათქვამს.

რაც შეეხება ორ უკანასკნელ ინტეგრალს, ისინი შეგვიძლია ერთსა და იმავე სახეზე მივიყვანოთ. მართლაც, განვიხილოთ პირველი ამათგანი. მარტივი გარდაქმნა გვაძლევს

$$\int \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}} = \int \frac{z\,dz}{(z^2-\alpha^2)\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}}$$

$$+\alpha \int \frac{dz}{(z^2-\alpha^2)\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს, ხოლო მეორე ინტეგრალი ახალი ტრანსცენდენტულია; მაგრამ ეს უკანასკნელი და

$$\int \frac{dz}{(z^2+h^2)\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}}$$

ინტეგრალი არიან კერძო სახე ინტეგრალისა

$$\int \frac{dz}{(z^2+p)\sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^2 + A_2}},$$

სადაც p ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ამრიგად (73) ინტეგრალის შესწავლამ შემდეგ სამ ინტეგრალზე მიგვიყვანა:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+p)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},$$

რომლებიც წარმოადგენენ ელიფსური ინტეგრალების კანონიკურ სახეებს.

ამ ინტეგრალებს ეწოდებათ: პირველს—ლეჟანდრის პირველი სახის ინტეგრალი, მეორეს—ლეჟანდრის მეორე სახის ინტეგრალი, ხოლო უკანასკნელს—ლეჟანდრის მესამე სახის ინტეგრალი.

სამი უკანასკნელი ინტეგრალი სხვა სახითაც შეგვიძლია ავილოთ კიდევ. ქვემოთ მოგვყავს ორი ყველაზე უფრო მიღებული და ამასთანავე მნიშვნელოვანი კანონიკური სახე ელიფსური ინტეგრალებისა.

§ 49. მოდულარული სახე ელიფსური ინტეგრალებისა. დავშალოთ ბიკვადრატული სამწევრი ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ჩეულებრივი წესით:

$$A_0x^4+A_1x^2+A_2=(P-Qx^2)(P'-Q'x^2)$$

და განვიხილოთ სამი ძირითადი შემთხვევა:

1°. P და Q რიცხვებს ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ; P', Q'-საც ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ.

ვთქვათ უპირველესად $P>0$, $P'>0$, ე. ი. ოთხივე რიცხვი დადებითია, მაშინ რადიკალი შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}=$$

$$=\sqrt{PP'}\sqrt{\left[1-\left(x\sqrt{\frac{Q}{P}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{Q'P}{P'Q}\right)\left(x\sqrt{\frac{Q}{P}}\right)^2\right]}.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$z=x\sqrt{\frac{Q}{P}}, \quad k^2=\frac{Q'P}{P'Q},$$

მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}=\sqrt{PP'}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

ასეთსავე სახეს წარმოადგენს რადიკალი იმ შემთხვევაშიაც, როცა $P<0$, $P'<0$.

ვთქვათ ახლა $P<0$, $P'>0$; მაშინ ანალოგიური გარდაქმნით გვექნება:

$$\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}=\sqrt{-PP'}\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}.$$

სრულებით ასეთივე სახე ექნება რადიკალს იმ შემთხვევაშიაც, როცა $P>0$, $P'<0$.

2°. P და Q ერთი და იმავე ნიშნის რიცხვებია; P' და Q'-ს საწინააღმდეგო ნიშნები აქვთ.

ვთქვათ უპირველესად $P>0$, $P'>0$; თუ მოვახდენთ ჩასმას

$$z=x\sqrt{\frac{Q}{P}},$$

გვექნება

$$\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}=\sqrt{PP'}\sqrt{(1-z^2)(1+k^2z^2)},$$

სადაც

$$k^2=-\frac{PQ'}{QP'}.$$

სრულებით ასეთივე იქნება რადიკალის სახე იმ შემთხვევაშიც, როცა

$$P<0,\ P'<0.$$

ვთქვათ ახლა $P>0$, $P'<0$. მაშინ რადიკალი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}$$
$$=\sqrt{-PP'}\sqrt{\left[\left(x\sqrt{\frac{Q}{P}}\right)^2-1\right]\left[1+\left(\sqrt{-\frac{Q'P}{P'Q}}\right)^2\left(x\sqrt{\frac{Q}{P}}\right)^2\right]}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$z=x\sqrt{\frac{Q}{P}},\quad k^2=-\frac{Q'P}{P'Q},$$

უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}=\sqrt{-PP'}\sqrt{(z^2-1)(1+k^2z^2)}.$$

ასეთივე იქნება რადიკალის სახე იმ შემთხვევაშიაც, როცა $P<0$, $P'>0$.

3°. P და Q-ს მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ; P' და Q'-საც მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ.

ვთქვათ უპირველესად $P>0$, $P'>0$. მოვახდინოთ ჩასმა

$$z=x\sqrt{-\frac{Q}{P}},$$

მაშინ გვექნება

$$\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}=\sqrt{PP'}\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}.$$

სადაც

$$k^2=\frac{Q'P}{QP'}.$$

ასეთივე სახისა იქნება რადიკალი იმ შემთხვევაშიაც, როცა $P<0$, $P'<0$.

ვთქვათ ახლა $P>0$, $P'<0$. თუ მოვახდენთ ჩასმას

$$z=x\sqrt{-\frac{Q}{P}},$$

გვექნება

$$\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}=\sqrt{-PP'}\sqrt{-(1+z^2)(1+k^2z^2)}, \tag{74}$$

სადაც

$$k^2=\frac{Q'P}{P'Q}.$$

(74) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში რადიკალი წარმოსახვით სიდიდეს წარმოადგენს ყოველთვის. სწორედ ამიტომ აღნიშნული შემთხვევა გამორიცხული იქნება განხილვიდან.

ასეთივეა რადიკალის სახე მაშინაც, როცა $P<0$, $P'>0$.

ამრიგად, $\dfrac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$ დიფერენციალს შეუძლია შემდეგი ხუთი სახიდან

$$\frac{Cdz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\frac{Cdz}{\sqrt{(1-z^2)(1+k^2z^2)}},$$

$$\frac{Cdz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}},$$

$$\frac{Cdz}{\sqrt{(z^2-1)(1+k^2z^2)}},$$

$$\frac{Cdz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}},$$

მხოლოდ ერთის სახე მიიღოს; C, k გარკვეული მუდმივი რიცხვებია, რომლებსაც ამ ხუთ შემთხვევაში საზოგადოდ სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვთ. ამას გარდა, შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $k<1$. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში საკმარისია მოვახდინოთ გარდაქმნა: $t=zk$, რაც იმავე სახის რადიკალებზე მიგვიყვანს, როგორც ზემოთ, ოღონდ ამ უკანასკნელებში k-ს მაგიერ უკვე $\frac{1}{k}$ გვექნება.

საინტერესო ახლა ისაა, რომ არსებობს ჩასმის ფორმულები, რომელთა გამოყენებით ყველა ეს ხუთი დიფერენციალი ერთ მათგანზე მიიყვანება. განვიხილოთ ეს ჩასმები.

დავამტკიცოთ, რომ ოთხი უკანასკნელი დიფერენციალი ყოველთვის პირველის სახეზე მიიყვანება.

ავიღოთ მეორე დიფერენციალი და მოვახდინოთ ჩასმა

(75) $$z=\sqrt{1-t^2}.$$

მაშინ გვექნება

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+k^2z^2)}}=-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{k^2}{1+k^2}t^2\right)}}.$$

$\frac{k^2}{1+k^2}$ ისევ დადებითი სიდიდეა <1-ზე, ამიტომ მარჯვენა ნაწილის დიფერენციალი პირველი სახისაა.

გადავიდეთ მესამე დიფერენციალზე; მოვახდინოთ z ცვლადის ასეთი გარდაქმნა:

(76) $$z=\frac{\sqrt{1-(1-k^2)t^2}}{k},$$

მაშინ გვექნება

$$\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}=-\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)[1-(1-k^2)t^2]}}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დიფერენციალი, როგორც წინათ, პირველი სახისა აღმოჩნდა, ვინაიდან $0<1-k^2<1$.

ავიღოთ ახლა მეოთხე დიფერენციალი. აქ z ცვლადი გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

(77) $$z=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

ამ ფორმულის ძალით გვექნება

$$\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1+k^2z^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{1}{1+k^2}t^2\right)}}.$$

აქაც მარჯვენა ნაწილის დიფერენციალი პირველი სახისაა.

დაბოლოს განვიხილოთ მეხუთე დიფერენციალი. მოვახდინოთ გარდაქმნა

(78) $$z=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

რომლის საშუალებითაც მივიღებთ

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}}=\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)[1-(1-k^2)t^2]}}.$$

ვინაიდან $k<1$, ამიტომ $1-k^2<1$. მაშასადამე, ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დიფერენციალი პირველი სახისაა.

ამრიგად, სავსებით დამტკიცებულია ის ფაქტი, რომელიც ზემოთ იყო გამოთქმული.

ვისარგებლოთ ახლა უკანასკნელი თეორიით ლეჟანდრის სამივე ინტეგრალის გარდასაქმნელად.

ლეჟანდრის პირველი სახის ინტეგრალი ზემოაღნიშნული ფორმულების გამოყენებით შემდეგი სახის ინტეგრალზე მიიყვანება:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad k<1.$$

რაც შეეხება ლეჟანდრის მეორე და მესამე ინტეგრალებს, ისინი გარდაქმნის (75), (76), (77), (78) ფორმულების გამოყენებით ყველა შემთხვევაში ასეთ სახეს ღებულობენ:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

სადაც α, β მუდმივებია, $k<1$. უკანასკნელი ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ორი პარამეტრის მაგიერ მხოლოდ ერთი გვექნება, თუ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ გამოვიტანთ β-ს და შემოვიღებთ აღნიშვნას $\frac{\beta}{\alpha}=n$.

ამრიგად, მიღებული გვაქვს ელიფსური ინტეგრალების სამი ახალი სახე:

$$
(79) \quad \begin{cases} u=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad v=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ w=\displaystyle\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \end{cases}
$$

ესაა ელიფსური ინტეგრალების მოდულარული სახე. k მუდმივი, რომელიც ამ ინტეგრალებში შედის, მოდულის სახელწოდებითაა ცნობილი, ხოლო n-ს, რომელიც w ინტეგრალშია, პარამეტრი ჰქვია.

სრულებით აშკარაა, რომ სამი უკანასკნელი ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს ყოველთვის, როცა $k=0$, ანდა $k=1$.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ, როცა $n=-1$, ანდა $n=-k^2$, მაშინ უკანასკნელი ინტეგრალი პირველი ორისა და გარკვეული ალგებრული ფუნქციის საშუალებით გამოისახება. მართლაც, უბრალო გაწარმოებით ვიპოვით ერთის მხრით

$$
\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\right\}=\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}+
$$

$$
+(1-k^2)\frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}=k^2\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+
$$

$$
+(1-k^2)\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},
$$

ხოლო მეორე მხრით

$$
\frac{d}{dx}\left\{x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}\right\}=\frac{1-\frac{1}{k^2}}{(1-k^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+
$$

$$
+\frac{1}{k^2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}-\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.
$$

მოვახდინოთ ორი უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრება; მაშინ გვექნება

$$
k^2(u-v)+(1-k^2)[w]_{n=-1}=x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}},
$$

$$
\frac{1}{k^2}u-v+\left(1-\frac{1}{k^2}\right)[w]_{n=-k^2}=x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}.
$$

ეს კი ამტკიცებს ნათქვამს.

§ 50. იაკობიური სახე ელიფსური ინტეგრალებისა. მოვახდინოთ u, v, w ინტეგრალების ნიშნის ქვევით ჩასმა

$$x=\sin\varphi.$$

ამას გარდა, აღვნიშნოთ

$$\sqrt{1-k^2x^2}=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\Delta\varphi.$$

მაშინ სამი ზემოაღნიშნული (79) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$u=\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\ v=\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta\varphi},\ w=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

ეს არის ელიფსური ინტეგრალების ის სახე, რომელიც მათ იაკობიმ მისცა.

φ კუთხეს ამპლიტუდა ეწოდება. უკანასკნელ ფორმულებს დიდი მნიშვნელობა აქვთ ელიფსურ ინტეგრალთა თეორიაში და მათ კიდევ ერთხელ დავუბრუნდებით, როცა განსაზღვრულ ინტეგრალებს გავეცნობით.

§ 51. ელიფსური ინტეგრალების სახელწოდების წარმოშობა. საინტერესოა ერთი გეომეტრიული პრობლემა იმ მხრივ, რომ იგი ნათელყოფს ელიფსური ინტეგრალების სახელწოდების წარმოშობას. ესაა შემდეგი:

ა ლ ე ბ უ ლ ი ა ე ლ ი ფ ს ი

$$x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi.$$

ვ ი პ ო ვ ო თ მ ი ს ი რ კ ა ლ ი ს გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ა.

უბრალო გაწარმოებით ვიპოვით

$$ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)d\varphi^2. \tag{80}$$

მაგრამ, თუ მივიღებთ მხედველობაში ელიფსის ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობას:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

მაშინ (80) ფორმულიდან გვექნება

$$ds=a\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

საიდანაც

$$s=a\int\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

თუ მოვახდენთ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ჩასმას

$$\cos\varphi = t,$$

გვექნება

$$s = a\int \frac{\sqrt{1-e^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = a\int \frac{1-e^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)}}\,dt.$$

ეს გვიჩვენებს, რომ s რკალი წარმოადგენს პირველისა და მეორე გვარის ელიფსური ინტეგრალების ჯამს. სწორედ აქედან წარმოიშვა ელიფსური ინტეგრალების სახელწოდება.

§ 52. **ფსევდო-ელიფსური ინტეგრალები.** (73) სახის ინტეგრალი, როგორც § 48-ში იყო გამოთქმული, ზოგად შემთხვევაში წარმოგვიდგება ერთი ელემენტარული ფუნქციისა და სამივე სახის ელიფსური ინტეგრალების ჯამის სახით. მაგრამ არის კერძო შემთხვევები, როცა იგი მხოლოდ ელემენტარულ ფუნქციათა სასრული რიცხვის საშუალებით გამოისახება. ასეთ შემთხვევაში (73) სახის ინტეგრალი ფ ს ე ვ დ ო - ე ლ ი ფ ს უ რ ი ს სახელწოდებითაა ცნობილი.

მაგალითად, § 24-ის კერძო ინტეგრალი

$$\int \frac{x^2-2}{x^2\sqrt{1+x^3}}\,dx$$

ფსევდო-ელიფსურია.

თუ როდის არის (73) სახის ინტეგრალი ფსევდო-ელიფსური, ამას დეტალურად ქვემოთ შევისწავლით (X განყოფ.). აქ განიხილება მაგალითის სახით ასეთი ინტეგრალების ერთი კერძო, მაგრამ საკმაოდ ფართო შემთხვევა.

როგორც § 34-ის ზოგადი თეორია გვიჩვენებს, ყოველი (73) სახის ინტეგრალი მას შემდეგ რაც მისგან ალგებრულ ნაწილს გამოვყოფთ, მიიყვანება ინტეგრალზე

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx, \tag{81}$$

სადაც $P(x)$ რაციონალური ფუნქციაა, ხოლო $f(x)$ მეოთხე ხარისხის პოლინომია.

უმარტივესი შემთხვევა, როცა უკანასკნელი ინტეგრალი ფსევდო-ელიფსურია, არის შემდეგი:

ვთქვათ $f(x)$ პოლინომი ბიკვადრატული სახითაა აღებული:

$$f(x) = A_0x^4 + A_1x^2 + A_2.$$

თუ აღმოჩნდა, რომ ამავე დროს $P(x)$ კენტი ფუნქციაა, ე. ი.

$$P(x)=xP_1(x^2),$$

მაშინ უკანასკნელი ინტეგრალი ფსევდო-ელიფსურია. მართლაც, მას ექნება სახე:

$$\int\frac{xP_1(x^2)}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}\,dx \tag{82}$$

და ჩასმით

$$z=x^2$$

იგი ასე წარმოგვიდგება:

$$\frac{1}{2}\int\frac{P_1(z)}{\sqrt{A_0z^2+A_1z+A_2}}\,dz,$$

რაც ამტკიცებს ნათქვამს.

დავუბრუნდეთ ისევ (81) ინტეგრალს. გამოვარკვიოთ, როდის შეუძლია ამ ინტეგრალს (82) სახე მიიღოს?

ამისათვის უპირველესად საჭიროა $f(x)$ პოლინომს ბიკვადრატული სახე მივცეთ, რისთვისაც, ზოგადი თეორიის თანახმად (§ 44), უნდა მოვახდინოთ ჩასმა

$$x=\frac{\xi_1z-\xi_2}{z-1}. \tag{83}$$

ξ_1 და ξ_2 არიან ფესვები განტოლებისა:

$$(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\,\xi^2+2\,(\gamma\delta-\alpha\beta)\,\xi+[(\gamma+\delta)\,\alpha\beta-(\alpha+\beta)\,\gamma\delta]=0, \tag{84}$$

სადაც α, β, γ, δ არიან $f(x)$ პოლინომის ფესვები, რომლებიც § 44-ის წესის მიხედვითაა დალაგებული. უკანასკნელი განტოლების კოეფიციენტები ასე აღვნიშნოთ:

$$\lambda=\delta+\beta-\gamma-\delta,\ \ \mu=\gamma\delta-\alpha\beta,\ \ \nu=(\gamma+\delta)\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma\delta.$$

აღნიშნული ჩასმა გვაძლევს

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=(\xi_2-\xi_1)\,\frac{dz}{\sqrt{A_0z^4+A_1z^2+A_2}}.$$

ვნახოთ ახლა, რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $P(x)$ ფუნქცია, რომ იგი გარდაქმნის შემდგომ კენტი აღმოჩნდეს. ამისათვის, საკმარისია ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$P\left(\frac{\xi_1z-\xi_2}{z-1}\right)=-P\left(\frac{-z\xi_1-\xi_2}{-z-1}\right).$$

აქედან

(85)
$$P\left(\frac{\xi_1 z-\xi_2}{z-1}\right)+P\left(\frac{\xi_1 z+\xi_2}{z+1}\right)=0.$$

ასეთია ის პირობა, რომელსაც P ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს იმისათვის, რომ (81) ინტეგრალი იყოს ფსევდო-ელიფსური. ვნახოთ უკანასკნელად, თუ როგორ გამოითქმის ეს პირობა x-ის მიმართ. (83) ფორმულიდან გვაქვს:

$$z=\frac{x-\xi_2}{x-\xi_1}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{\xi_1 z+\xi_2}{z+1}=\frac{(\xi_1+\xi_2)x-2\xi_1\xi_2}{2x-(\xi_1+\xi_2)}.$$

მივიღებთ რა ახლა მხედველობაში (84) განტოლებას, შეგვიძლია მიღებული ტოლობა ასე გადმოვწეროთ:

$$\frac{\xi_1 z+\xi_2}{z+1}=-\frac{\mu x+\nu}{\lambda x+\mu}.$$

ამრიგად, (85) ტოლობა ღებულობს სახეს

$$P(x)+P\left(-\frac{\mu x+\nu}{\lambda x+\mu}\right)=0.$$

ესაა საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ (81) სახის ყოველი ინტეგრალი ფსევდო-ელიფსური იყოს.

რაც შეეხება ახლა იმ შემთხვევას, რომ $f(x)$ პოლინომი მესამე ხარისხისაა, საჭიროა უპირველესად მივიყვანოთ ის მეოთხე ხარისხის პოლინომზე § 33-ის თანახმად და შემდეგ გარდაქმნა უკვე ზემოაღნიშნული წესით ვაწარმოოთ.

VIII. დიფერენციალური ბინომის ინტეგრება

§ 53. საკითხის დაყენება. დიფერენციალურ ბინომს უწოდებენ შემდეგი სახის დიფერენციალს:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

სადაც a, b რაიმე მუდმივებია, ხოლო m, n, p დადებითი, ან უარყოფითი რაციონალური რიცხვებია.

დიფერენციალური ბინომიდან ინტეგრალი

(86)
$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

საზოგადოდ უმაღლესი ტრანსცენდენტული ფუნქციაა. მაგრამ არის რამოდენიმე კერძო შემთხვევა, როცა ეს ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება.

ერთი ასეთი შემთხვევა აშკარად ჩანს: როცა m, n, p დადებითი, ან უარყოფითი მთელი რიცხვებია, დიფერენციალური ბინომი რაციონალურია და ამიტომ (86) ინტეგრალი მართლაც ელემენტარული ფუნქციაა.

აღნიშნულის გარდა ადგილი აქვს კიდევ სამ სხვა ასეთივე ხასიათის შემთხვევას, რომლებსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

მეორე მხრით არ შეგვიძლია გვერდი ავუხვიოთ იმ შემთხვევასაც, აგრეთვე, როცა (86) ინტეგრალი უმაღლესი ტრანსცენდენტულია. ერთადერთი საკითხი, რომლის ამოხსნაც ამ შემთხვევაში არის შესაძლო, ესაა ამ ტრანსცენდენტული ფუნქციების კანონიკური სახეთა მოძებნა. ეს შესრულებული იქნება ქვემოთ რედუქციის ფორმულების საშუალებით.

§ ã4. სამი ძირითადი შემთხვევა, როცა ინტეგრალი დიფერენციალური ბინომიდან ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

1° შემთხვევისათვის შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება დავამტკიცოთ:

შესაძლოა ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ m და n მაჩვენებლები ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მთელი რიცხვებია.

მართლაც, ვთქვათ ეს რიცხვები წილადებია და მათი საერთო მნიშვნელი არის λ; მაშინ λm, λn მთელი რიცხვებია. მოვახდინოთ ახლა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ჩასმა

$$x = z^{\lambda},$$

მაშინ გვექნება

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \lambda \int z^{m\lambda+\lambda-1} (a + bz^{n\lambda})^p dz$$

და ამით გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია სავსებით.

აქედან სრულებით აშკარად ჩანს, რომ (86) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება ყოველთვის, როცა p მთელი რიცხვია. ეს არის პირველი შემთხვევა ინტეგრებისა სასრული სახით.

2°. მოვახდინოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ჩასმა

$$z=a+bx^n.$$

მაშინ

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz.$$

მაშასადამე,

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}\,b^{-\frac{m+1}{n}}\int z^p\,(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dz.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი მარცხენა ნაწილის ინტეგრალის სახისაა, ოღონდ მასში p-ს ნაცვლად დგას მაჩვენებლად $\frac{m+1}{n}-1$. მაშასადამე, 1° შემთხვევის თანახმად, (86) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა ყოველთვის, როცა $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია.

3°. ფუნქცია ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ასე გარდავქმნათ:

$$x^m(a+bx^n)^p=x^{m+np}(b+ax^{-n})^p. \tag{87}$$

აქ m-ის ადგილზე $m+np$ დგას უკვე; ამიტომ, თუ გამოვიყენებთ მეორე შემთხვევის შედეგს, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (86) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა, როცა $\frac{m+np+1}{n}$ არის მთელი რიცხვი, ე. ი. როცა $\frac{m+1}{n}+p$ მთელია.

საინტერესო აქ ისაა კიდევ, რომ (87) ფორმულის ძალით შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ დიფერენციალურ ბინომში n დადებითი რიცხვია.

ამრიგად, დამტკიცებულია შემდეგი დებულება:

(86) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას გამოსახავს ყოველთვის, როცა სამი შემდეგი რიცხვიდან:

$$p,\ \frac{m+1}{n},\ \frac{m+1}{n}+p$$

ერთი მაინც მთელია.

კერძოდ, როცა $\frac{m+1}{n}=0$, ანდა $\frac{m+1}{n}+p=0$, გვექნება

$$m=-1,\ p=-\frac{m+1}{n}.$$

მაშასადამე, ინტეგრალები

$$\int (a+bx^n)^p \frac{dx}{x},\quad \int \frac{x^m}{\sqrt[n]{(a+bx^n)^{m+1}}}\,dx.$$

ყოველთვის ელემენტარულ ფუნქციებს წარმოადგენენ.

რუსმა მათემატიკოსმა ჩებიშევმა[1] დაამტკიცა, რომ თუ ზემოაღნიშნული სამი შემთხვევიდან არც ერთი არაა შესრულებული, მაშინ (86) ინტეგრალი ახალ ტრანსცენდენტულს გამოსახავს.

ახლა ისმება საკითხი თვით ინტეგრების შესახებ და შემდეგი § სწორედ ამას ეხება.

§ 55. შენიშვნები დიფერენციალური ბინომის ინტეგრების შესახებ. ზემოაღნიშნულ სამ შემთხვევაში დიფერენციალური ბინომი სათანადო ჩასმით რაციონალურ სახეზე მიიყვანება ყოველთვის. რაციონალიზაციის შემდგომ ინტეგრება შესაალოა ჩვეულებრივი წესით შესრულდეს (§ 17).

მაგრამ (86) ინტეგრალი ისეთი სახისაა, რომ მისთვის შეგვიძლია რედუქციის ფორმულები შევადგინოთ და ამ უკანასკნელთა მიმდევრობითი გამოყენებით თვით ეს ინტეგრალიც ამოვხსნათ. ინტეგრების ასეთ გზას მაშინ მიმართავენ უმთავრესად, როცა რაციონალური ფუნქციის ინტეგრების ჩვეულებრივი წესების გამოყენება დიდ სიძნელეს წარმოადგენს.

რედუქციის აღნიშნულ ფორმულებს მაშინაც ექნებათ ადგილი აგრეთვე, როცა (86) ინტეგრალი უმაღლესი ტრანსცენდენტულია და მათ გამოყენებას ასეთ შემთხვევაში ის აზრი აქვს განსაკუთრებით, რომ ეს ტრანსცენდენტული ფუნქციები კანონიკურ სახეზე მივიყვანოთ.

მაგრამ (86) ინტეგრალს ქვევით სამი პარამეტრია მაჩვენებელთა სახით: m, n, p. შეიძლება ამ პარამეტრთა რიცხვი ერთით შევამციროთ. მართლაც, თუ მოვახდენთ გარდაქმნას

$$z=x^n,$$

[1] იხილე: Tchebichef. Sur l'intégration des différentielles irrationnelles. Journal de Lionville T. XVIII, 1853.

გვექნება

$$x = z^{\frac{1}{n}},\quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$$

და ამიტომ

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q dz,$$

სადაც $q = \frac{m+1}{n} - 1$.

ამრიგად, (86) ინტეგრალი მიყვანილია ასეთივე სახის ინტეგრალზე, ოღონდ მასში n გახდა 1-თი, ე. ი. პარამეტრთა რიცხვი ერთით შემცირდა. აღვნიშნოთ

(88) $$I_{p,q} = \int (a+bz)^p z^q dz.$$

ესაა ინტეგრალის ის სახე, რომლისათვისაც ვადგენთ რედუქციის ფორმულებს.

არსებობს სამი ელემენტარული შემთხვევა, როცა უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლა სულ უბრალო დაშლით არის შესაძლო; სანამ რედუქციის ფორმულების შედგენაზე გადავიდოდეთ განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

§ 56. ინტეგრების ელემენტარული შემთხვევები.

1°. თუ p მთელი დადებითი რიცხვია, ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს. მართლაც, მაშინ საკმარისია $(a+bz)^p$ ნიუტონის ბინომის წესით დავშალოთ და (88) ინტეგრალი დაშლის წესით გადაწყდება.

2°. თუ q მთელი დადებითია, ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება. ამ შემთხვევაში მოვახდინოთ (88) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ჩასმა

$$a+bz=t,$$

რაც მოგვცემს

$$I_{p,q} = \frac{1}{b^{q+1}}\int (t-a)^p t^q dt,$$

ე. ი. ინტეგრალი მიყვანილია 1° შემთხვევაზე.

3°. როცა $p+q+2$ მთელი უარყოფითი რიცხვია. მაშინ (88) ფორმულაში მოვახდინოთ ჩასმა

$$z = \frac{1}{t},$$

რაც გვაძლევს

(89) $$I_{p,q}=-\int t^{-p-q-2}(b+at)^p\,dt,$$

ე. ი. საქმე ისე წარმოგვიდგება, როგორც 2⁰ შემთხვევაში.

სამი აღნიშნული შემთხვევის გარდა $I_{p,q}$ მოიძებნება ძალიან ადვილად მაშინ, როცა p, q ორივე მთელი რიცხვია, მიუხედავად მათი ნიშნებისა.

მართლაც, ასეთ შემთხვევაში $I_{p,q}$ ინტეგრალი ღებულობს § 22-ის ან 1⁰ ანდა 2⁰ სახეს.

§ 57. **რედუქციის ფორმულები.** $I_{p,q}$ ინტეგრალზე ნაწილობითი ინტეგრების წესი ორნაირად გამოვიყენოთ:

ა) მივიღოთ

$$u=(a+bz)^p,\ dv=z^q dz,\ \text{საიდანაც}\ v=\frac{z^{q+1}}{q+1}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება

(90) $$I_{p,q}=\frac{(a+bz)^p z^{q+1}}{q+1}-\frac{p}{q+1}\int(a+bz)^{p-1}bz^{q+1}\,dz.$$

მაგრამ bz^{q+1} ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$bz^{q+1}=(a+bz)z^q-az^q$$

და როდესაც ამას (90) ტოლობაში ჩავსვამთ, იგი შემდეგნაირად გადმოიწერება:

$$I_{p,q}=\frac{(a+bz)^p z^{q+1}}{q+1}-\frac{p}{q+1}I_{p,q}+\frac{ap}{q+1}I_{p-1,q}.$$

აქედან მარტივი გარდაქმნის შემდგომ გვექნება

I $$I_{p,q}=\frac{(a+bz)^p z^{q+1}}{p+q+1}+\frac{ap}{p+q+1}I_{p-1,q}.$$

ეს არის რედუქციის პირველი ფორმულა.

ბ) $I_{p,q}$ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მივიღოთ

$$u=z^q,\ dv=(a+bz)^p dz,\ \text{საიდანაც}\ v=\frac{(a+bz)^{p+1}}{(p+1)b}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება

(91) $$I_{p,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}z^q}{b(p+1)}-\frac{q}{b(p+1)}\int(a+bz)^{p+1}z^{q-1}\,dz.$$

მაგრამ

$$(a+bz)^{p+1}=a(a+bz)^p+bz(a+bz)^p$$

და როდესაც ამას (91) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ჩავსვამთ, იგი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$I_{p,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}z^q}{b(p+1)}-\frac{aq}{b(p+1)}I_{p,q-1}-\frac{q}{p+1}I_{p,q}.$$

აქედან მარტივი გარდაქმნის შემდგომ გვექნება

$$\text{II} \qquad I_{p,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}z^q}{b(p+q+1)}-\frac{aq}{b(p+q+1)}I_{p,q-1}.$$

ეს არის რედუქციის მეორე ფორმულა.

ამ ორი ფორმულიდან შეგვიძლია კიდევ ორი სხვა შევადგინოთ. I-ში p-ს მაგიერ $p+1$ ჩავსვათ, ხოლო II-ში q-ს მაგიერ $q+1$; მაშინ მიღებული ტოლობები $I_{p,q}$-ს მიმართ რომ ამოვხსნათ, გვექნება ორი ახალი ტოლობა:

$$\text{III} \qquad I_{p,q}=-\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(p+1)}+\frac{p+q+2}{a(p+1)}I_{p+1,q},$$

$$\text{IV} \qquad I_{p,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(q+1)}-b\frac{p+q+2}{a(q+1)}I_{p,q+1}.$$

ესენი წარმოადგენენ რედუქციის მესამე და მეოთხე ფორმულებს.

ამ ფორმულებიდან I და II გამოიყენება მაშინ, როცა p და q დადებითია; ხოლო III და IV იმ შემთხვევაში, როცა ეს ორი რიცხვი უარყოფითია.

ამას გარდა, მათი აგებულებიდან ჩანს, რომ ისინი სამართლიანი მანამდის იქნებიან მხოლოდ, სანამ ყოველი

$$p+1,\ q+1,\ p+q+1$$

რიცხვთაგანი $\neq 0$. გამოვარკვიოთ ამიტომ რედუქციის ფორმულების გამოყენების შესაძლებლობა. შემდეგი § ეხება ამ საკითხს.

§ 58. **რედუქციის ფორმულების გამოყენების შესაძლებლობა.** ამ საკითხის გადასაწყვეტად, რა თქმა უნდა, ორი შემთხვევა უნდა განვიხილოთ:

I. **ინტეგრების ხამი ზემოაღნიშნული პირობა შესრულებულია.** მაშინ ან p ან q ანდა $p+q$ მთელი რიცხვი იქნება. მაგრამ (89) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ამ სამ შემთხვევათაგან უკანასკნელი

მათგანი ყოველთვის მეორეზე მიიყვანება. ვიგულისხმოთ ამიტომ, რომ p ან q ანდა ორივე მათგანი მთელი რიცხვებია.

ჯერ დავუშვათ, რომ p და q ორივე მთელია. აქ სამი შემთხვევა წარმოგვიდგება: ა) ეს ორი რიცხვი დადებითია; ბ) ერთი მათგანი დადებითია, ხოლო მეორე — უარყოფითი; გ) ორივე უარყოფითია.

პირველ შემთხვევაში ჯერ I ფორმულით ვისარგებლოთ; $p+q+1$ ნული არ იქნება ამ ფორმულის გამოყენების მთელ პროცესში; ამიტომ p მიიყვანება 0-ზე, ხოლო $I_{p,q}$ ინტეგრალი $I_{0,q}$ ინტეგრალზე. ამის შემდეგ II ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ, რომელიც ყოველთვის სამართლიანი რჩება. ეს უკანასკნელი ფორმულა q-ს მიიყვანს 0-ზე, ხოლო $I_{0,q}$-ს $I_{0,0}$-ზე. ამრიგად, პირველ შემთხვევაში $I_{p,q}$ ინტეგრალი I და II ფორმულების გამოყენებით მიიყვანება $I_{0,0}$ ინტეგრალზე, რომელიც უშუალოდ გამოითვლება.

მეორე შემთხვევაში აზრი რომ გარკვეული იყოს, ვთქვათ $p<0$, $q>0$; მაშინ ჯერ ვისარგებლოთ III ფორმულით, რომელიც სამართლიანია მანამდის, სანამ $p+1\neq 0$; მაშასადამე, ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით p მაჩვენებელი მიიყვანება 1-ზე. ავილოთ ამის შემდეგ II ფორმულა, რომელიც q-ს 0-ზე მიიყვანს. ამრიგად, მეორე შემთხვევაში II და III ფორმულების გამოყენებით $I_{p,q}$ ინტეგრალი მიიყვანება $I_{-1,0}$ ინტეგრალზე, რომელიც მარტივად გამოითვლება.

რაც შეეხება მესამე შემთხვევას, ე. ი. როცა p და q ორივე უარყოფითია, აქ III და IV ფორმულები უნდა გამოვიყენოთ, რაც მანამდის იქნება შესაძლო, სანამ $p+1\neq 0$, $q+1\neq 0$; მეორე შემთხვევაში $I_{p,q}$ მიიყვანება $I_{-1,-1}$ ინტეგრალზე, რომელიც სულ უბრალოდ გამოითვლება.

ვთქვათ ახლა p და q რიცხვებიდან მხოლოდ ერთია მთელი და აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ ეს არის p. მაშინ რედუქციის ზემოაღნიშნული ფორმულის საშუალებით $I_{p,q}$ ინტეგრალი მიიყვანება $I_{0,q}$-ზე ანდა $I_{-1,q}$-ზე, იმისდა მიხედვით არის p დადებითი, თუ უარყოფითი. $I_{0,q}$ ინტეგრალი უშუალოდ გამოითვლება. რაც შეეხება $I_{-1,q}$-ს, ეს ინტეგრალი შესაძლოა რაციონალიზაციის წესით ვიპოვოთ. მაგრამ შეიძლება მისი გამარტივება II ანდა IV ფორმულების გამოყენებითაც. ბოლოს და ბოლოს ამ ფორმულების ძალით q შეიქნება წესიერი წილადი—დადებითი, თუ q დადებითია, ხოლო—უარყოფითი, თუ q უარყოფითია.

ცხადია, რომ II და IV ფორმულათაგან ერთიც არ კარგავს აზრს, იმიტომ, რომ $p+q+1$ და $q+1$ ვერ მოისპობა, რადგანაც q წილადია.

II. შემთხვევა როცა ინტეგრების სამი ზემოაღნიშნული პირობა შესრულებული არ არის. ასეთ შემთხვევაში $p+1$, $q+1$, $p+q+1$ ყოველთვის წილად რიცხვებს წარმოადგენენ; ამიტომ რედუქციის ზემოაღნიშნული ფორმულებიდან არც ერთი არ კარგავს აზრს მათი გამოყენების მთელ პროცესში.

მაგრამ რა აზრი აქვს ამ შემთხვევაში რედუქციის ფორმულების გამოყენებას?

აშკარაა, რომ მათი საშუალებით $I_{p,q}$ ინტეგრალიდან ალგებრული ნაწილი გამოიყოფა ერთის მხრით და მეორე მხრით იგი მიიყვანება კანონიკურ სახეზე, რომლისათვისაც p და q მაჩვენებელნი 0-სა და 1-ს შორის იმყოფებიან. ეს უკანასკნელი არის ახალი ტრანსცენდენტული, რომლის შემდეგი მიყვანა უკვე არაა შესაძლო.

§ 59. მაგალითები.

1°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int x^5\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$$

ამ შემთხვევაში $m=5$, $n=2$, $p=\frac{1}{3}$, აქედან $\frac{m+1}{n}=3$ მთელი რიცხვია და, მაშასადამე, J ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას გამოსახავს.

J ინტეგრალის გამოთვლისათვის მოვახდინოთ ჩასმა

$$1+x^2=t^3.$$

აქედან

$$x^5\,dx=\frac{3}{2}\,t^2(t^3-1)^2\,dt.$$

ამრიგად, J ინტეგრალი ღებულობს სახეს:

$$J=\frac{3}{2}\int(t^3-1)^2\,t^3\,dt.$$

დაშლის საშუალებით იგი ასე ამოიხსნება:

$$J=\frac{3}{2}\int(t^9-2t^6+t^3)dt=\frac{3}{20}\,t^{10}-\frac{3}{7}\,t^7+\frac{3}{8}\,t^4+C,$$

ანდა თუ ისევ x-ს დავუბრუნდებით საბოლოოდ გვექნება

$$\int x^5 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(1+x^2)^{10}} - \frac{3}{7}\sqrt[3]{(1+x^2)^7} +$$

$$+\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x^2)^4} + C.$$

2^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J = \int \frac{x^4}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\,dx.$$

ამ შემთხვევაში $m=4$, $n=3$, $p=-\frac{2}{3}$. აქ შესრულებულია ინტეგრების მესამე პირობა: $\frac{m+1}{n}+p=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$. მაშასადამე, J ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს. მისი გამოთვლისათვის გარდავქმნათ იგი შემდეგნაირად

$$J = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^{-3}-1)^2}}.$$

მოვახდინოთ ახლა ჩასმა

$$x^{-3}-1=t^3.$$

აქედან

$$x^3=(1+t^3)^{-1};\; x^2dx=-\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}.$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, J შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$J=-\int\frac{dt}{(1+t^3)^2}.$$

დაგვრჩა ახლა მოვძებნოთ მხოლოდ ეს უკანასკნელი ინტეგრალი. ამისათვის შეგვიძლია რედუქციის ზემოაღნიშნული ფორმულები გამოვიყენოთ. მაგრამ, ვინაიდან მარცხენა ნაწილის ინტეგრალი § 22-ის მე-8* სახის ინტეგრალია, ამიტომ უფრო უკეთესი იქნება ამ უკანასკნელი ინტეგრალის რედუქციის ფორმულით ვისარგებლოთ. გვაქვს:

$$\int\frac{dt}{(1+t^3)^2}=\frac{1}{3}\,\frac{t}{1+t^3}+\frac{2}{3}\int\frac{dt}{1+t^3}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი გ) სახის ინტეგრალია. (§ 22), ამიტომ

$$\int\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{3}\operatorname{Lg}(1+t)-\frac{1}{6}\operatorname{Lg}(1-t+t^2)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C.$$

ჩავსვათ ეს წინა ტოლობაში; მივიღებთ:

$$\int\frac{dt}{(1+t^3)^2}=\frac{1}{3}\,\frac{t}{1+t^3}+\frac{2}{9}\operatorname{Lg}(1+t)-\frac{1}{9}\lg(1-t+t^2)+$$
$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C.$$

დავუბრუნდეთ ისევ x-ს, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int\frac{x^4}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\,dx=-\frac{1}{3}x^2\sqrt[3]{1-x^3}-$$
$$-\frac{1}{9}\operatorname{Lg}\frac{x^2+2x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$
$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}}+C.$$

C. ზოგადი თეორია აბელის იმ ინტეგრალებისა, რომლებიც ელემენტარულ ფუნქციებს წარმოადგენენ

IX. წინასწარი გაცნობა საგანთან

§ 60. **თეორიის ძირითადი საკითხი.** ინტეგრალური აღრიცხვის თვალსაზრისით ყველა ელემენტარული ფუნქცია ორ კლასად იყოფა:

1°. ფუნქციები, რომელთა ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებს გვაძლევს.

2°. ფუნქციები, რომელთა ინტეგრება ახალ ტრანსცენდენტულს ჰქმნის.

ჩვენი სახელმძღვანელოს ერთ-ერთი მიზანთაგანია ამოწუროს საკითხი 1° კლასის ყველა ფუნქციის ინტეგრების შესახებ. ამისათვის საჭიროა, სრული წარმოდგენა გვქონდეს 1° კლასის შემად-

გენლობაზე, ე. ი. ვიცოდეთ, თუ რა სახის ფუნქციებისაგან შედგება 1^0 კლასი.

ვნახოთ, რამდენად გამორკვეულია უკანასკნელი საკითხი ალგებრული ფუნქციებისათვის, ინტეგრების ზემოაღნიშნულ თეორიის მიხედვით.

ერთი რამ აშკარაა: ყოველი რაციონალური ფუნქცია 1^0 კლასს მიეკუთვნება, ვინაიდან ყოველი ასეთი ფუნქციის ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში შესრულდება. რაც შეეხება ირაციონალურ ფუნქციებს, მათთვის აღნიშნული საკითხი ამოუხსნელი რჩება.

მართლაც, არის ნიშანი (მრუდის გვარი), რომლითაც ფუნქციის გარეგნული სახით შეგვიძლია გადავწყვიტოთ 1^0-სა, თუ 2^0 კლასს უნდა მიეკუთვნოს იგი. მაგრამ უკვე გვქონდა შემთხვევა აღგვენიშნა, რომ არსებობს ფუნქციები, რომლებიც თავისი სახით 2^0 კლასს უნდა მიეკუთვნონ, მიუხედავად იმისა, რომ მათი ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში შესრულდება. ასეთია, მაგალითად, ფსევდოელიფსური ინტეგრალები, რომლებზედაც § 52-ში გვქონდა საუბარი.

ამრიგად, აღნიშნული ნიშანი საკმარისი არ არის და თავისთავად ისმება ძირითადი პრობლემა:

ვთქვათ, y არის ალგებრული ფუნქცია, მიღებული ალგებრული განტოლებიდან

$$f(x, y)=0; \tag{1}$$

რა სახის უნდა იყოს $R(x, y)$ ფუნქცია, რომ აბელის ინტეგრალი

$$\int R(x, y)\, dx \tag{2}$$

ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენდეს.

წამოყენებული პრობლემის შესწავლა წარმოადგენს წინამდებარე თავის საგანს. მაგრამ ეს პრობლემა მეტად რთულია იმისათვის, რომ მას პირდაპირ გარკვეული პასუხი გავცეთ.

უფრო ადვილია პასუხის ბუნების გამორკვევა და ამით ყოველ კერძო შემთხვევისათვის შესაძლო შეიქნება თვით აღნიშნული პრობლემის გადაწყვეტაც აგრეთვე. ამ მიზნისათვის სხვა გზით მივუდგეთ აღნიშნულ პრობლემას.

ერთი უდავო ფაქტი გამოგვყავს იმ მრავალრიცხოვანი კერძო ინტეგრალების ამოხსნებიდან, რომლებიც ზემოთ ზოგადი თეორიის ილუსტრაციისათვის გვქონდა მოყვანილი (§§ 46, 59). ეს ფაქტი შემდეგია:

1°. ფუნქცია, რომელიც ერთ რომელიმე აღნიშნულ ინტეგრალს გამოსახავს წარმოგვიდგება სასრული ჯამის სახით. ამ უკანასკნელის ერთი შესაკრები ალგებრული ფუნქციაა, ხოლო დანარჩენი ლოგარითმული ფუნქციებია, რომლებიც თვითონ ალგებრული ფუნქციებიდან არიან აღებული[1].

2°. ყოველი ალგებრული ფუნქცია, რომელიც უკანასკნელ ჯამში ამა თუ იმ სახით შედის, წარმოადგენს რაციონალურ ფუნქციას მხოლოდ ორი ცვლადისას: x-ისა და y ირაციონალობისას, რომელიც ინტეგრალის ნიშნის ქვევით იმყოფება, ე. ი. იმ ირაციონალობის გარდა, რომელიც არის ინტეგრალის ნიშნის ქვევით, ინტეგრალში სხვა რაიმე ახალ ირაციონალობას ადგილი არ ექნება.

მაშასადამე, როცა მე-(2) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა, შესაძლოა ვიქონიოთ ცნ<्>ჯელობა ამ უკანასკნელი ფუნქციის ზოგადი სახის შესახებ და ასეთია ის გზა, რომლითაც შეიძლება ძირითადი პრობლემის ბუნების გამორკვევაც.

ამრიგად, აღნიშნული პრობლემის შესწავლისათვის ისმის შემდეგი ზოგადი კითხვა:

ვ თ ქ ვ ა თ მე-(2) ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ა; რ ა ს ა ხ ი ს უ ნ დ ა ი ყ ო ს ე ს უ კ ა ნ ა ს კ ნ ე ლ ი.

წამოყენებულ კითხვაზე არსებობს სრულიად გარკვეული პასუხი, რომელიც აბელის ორ თეორემაშია გამოთქმული.

სანამ გავცემდეთ პასუხს ამ კითხვაზე საჭიროა წინასწარი მომზადება და ეს იქნება შესრულებული შემდეგ §§-ში.

§ 61. **წინასწარი ლემები.** აბელის თეორემების დასამტკიცებლად საჭიროა ოთხი ქვემოთ მოყვანილი ლემა.

ლემა პირველი. ვ თ ქ ვ ა თ $f(x, y)$ ა რ ი ს ნ ა მ დ ვ ი ლ ა რ ე შ ი დ ა უ ყ ვ ა ნ ა დ ი პ ო ლ ი ნ ო მ ი და $F(x, y)$ მ ე ო რ ე პ ო ლ ი ნ ო მ ი ა, რ ო მ ე ლ ს ა ც ე რ თ ი ს ა ე რ თ ო ფ ე ს ვ ი ა ქ ვ ს $f(x, y)$-თ ა ნ; მ ა შ ი ნ $F(x, y)$-ს ე ქ ნ ე ბ ა $f(x, y)$-ი ს ყ ვ ე ლ ა ფ ე ს ვ ი; ე. ი.

$$F(x, y)=f(x, y)\varphi(x, y),$$

ს ა დ ა ც $\varphi(x, y)$ გ ა რ კ ვ ე უ ლ ი პ ო ლ ი ნ ო მ ი ა.

[1] ლოგარითმულ ფუნქციების გარდა აღნიშნულ ჯამში arc tg ფუნქციებიც შედის; მაგრამ arc tg-სი შეგვიძლია ლოგარითმული ფუნქციით შევცვალოთ ცნობილი დამოკიდებულების მიხედვით:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{1}{2i}\operatorname{Lg}\left(\frac{i-x}{i+x}\right).$$

შევადგინოთ $F(x, y)$-ისა და $f(x, y)$-ის უდიდესი საერთო გამყოფი $D(x, y)$. ეს უკანასკნელი ფუნქცია, რა თქმა უნდა, რაციონალური ოპერაციების საშუალებით მიიღება, და ამიტომ იგი ნამდვილ არეს ეკუთვნის. მაგრამ $f(x, y)$-ს, როგორც დაუყვანად პოლინომს, ნამდვილ არეში სრულებით არ ექნება გამყოფი, ამიტომ $D(x, y) = f(x, y)$-ს:

$$F(x, y) = f(x, y)\,\varphi(x, y);$$

აქედან ჩანს, რომ $f(x, y)$-ის ყოველი ფესვი არის ამავე დროს ფესვი $F(x, y)$-სა და ჩვენი ლემა დამტკიცებულია.

ლემა მეორე. ვთქვათ დაუყვანადი $f(x, y)$ პოლინომის ფესვებია

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n;$$

ამ ფესვების ყოველი სიმეტრიული პოლინომი x-ის რაციონალური ფუნქციაა.

მართლაც, $f(x, y)$ შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$f(x, y) = A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + A_2(x)y^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(x)y + A_n(x),$$

სადაც $A_0, A_1, \ldots, A_n$ არიან x-ის პოლინომები. აქედან ვღებულობთ

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -\frac{A_1(x)}{A_0(x)}$$

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n = \frac{A_2(x)}{A_0(x)}$$

. . . .

და საზოგადოდ

$$\sum y_1 y_2 y_3 \cdots y_k = (-1)^k \frac{A_k(x)}{A_0(x)}.$$

ამ ტოლობათა მარჯვენა ნაწილებში რაციონალური ფუნქციები იმყოფება და ამიტომ ლემა დამტკიცებულია სავსებით.

ლემა მესამე. ყოველი სიმეტრიული პოლინომი $y_2, y_3, \ldots, y_n$-ისა არის პოლინომი y_1-ის მიმართ და ამ უკანასკნელი პოლინომის კოეფიციენტები x-ის რაციონალურ ფუნქციებს წარმოადგენენ.

დავიწყოთ მარტივი შემთხვევიდან: $y_2 + y_3 + \cdots + y_n$; იგი ასე წარმოვადგინოთ:

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_n = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) - y_1;$$

მაგრამ ფრჩხილებში მყოფი სიდიდე არის x-ის რაციონალური ფუნქცია, ამიტომ ამ შემთხვევისათვის ლემა დამტკიცებულია.

ავიღოთ ახლა ასეთი შემთხვევა:

$$y_2y_3+y_2y_4+\cdots+y_{n-1}y_n=(y_1y_2+y_1y_3+\cdots+y_2y_3$$
$$+\cdots+y_{n-1}y_n)-y_1(y_2+y_3+\cdots+y_n);$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ფრჩხილების ჯამი მეორე ლემის ძალით წარმოადგენს x-ის რაციონალურ ფუნქციას. სიმეტრიული პოლინომი, რომელიც მეორე ფრჩხილებში იმყოფება უკვე გვქონდა განხილული და მისთვის, როგორც დავინახეთ, თეორემა სამართლიანია; მაშასადამე, თეორემა სამართლიანი იქნება აგრეთვე ტოლობის მარცხენა ნაწილის სიმეტრიული ფუნქციისათვისაც.

ზოგადი შემთხვევის დამტკიცება შესაძლოა ინდუქციის მეთოდით. ვთქვათ, თეორემა სამართლიანია, როცა აღნიშნული სიმეტრიული პოლინომი წარმოადგენს ჯამს, რომლის შესაკრები $(k-1)$ მამრავლისაგან შედგება, ე. ი.

$$\sum y_2y_3\cdots y_k$$

ჯამისათვის. დავამტკიცოთ, რომ იგი სამართლიანია

$$\sum y_2y_3\cdots y_{k+1}$$

ჯამისათვისაც. ეს უშუალოდ ჩანს შემდეგი ტოლობიდან:

$$\sum y_2\, y_3\cdots y_{k+1}=\sum y_1\, y_2\cdots y_k-y_1\sum y_2\, y_3\cdots y_k.$$

მაგრამ ლემა სამართლიანია, როცა $k=1$, 2-ს, ამიტომ იგი სამართლიანი იქნება იმ შემთხვევაშიც აგრეთვე, როდესაც $k=3,\ 4\ldots$

ლემა მეოთხე. თუ y არის x-ის ალგებრული ფუნქცია, განსაზღვრული

(1) $$f(x, y)=0$$

განტოლებიდან, რომლის ხარისხი y-ის მიმართ არის n, მაშინ ყოველი რაციონალური ფუნქცია

$$R(x, y)=\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

(φ და ψ პოლინომებია x-ისა და y-ის მიმართ) შეგვიძლია შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$R(x,\ y)=A_0(x)+A_1(x)y+A_2(x)y^2+\dots+A_{n-1}(x)y^{n-1}, \tag{3}$$

სადაც A_0, A_1, $A_2,\dots A_{n-1}$ არიან x-ის რაციონალური ფუნქციები.

მართლაც, ვთქვათ, y-ის გარდა (1) განტოლების ფესვებია

$$y',\ y'',\dots,y^{(n-1)};$$

$R(x,\ y)$ ასე წარმოვადგინოთ:

$$R(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}=\frac{\varphi(x,y)\,\psi(x,y')\,\psi(x,y'')\dots\psi(x,y^{(n-1)})}{\psi(x,y)\,\psi(x,y')\,\psi(x,y'')\dots\psi(x,y^{(n-1)})};$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მნიშვნელი არის $f(x,y)$ პოლინომის ყველა ფესვის სიმეტრიული ფუნქცია და ამიტომ მეორე ლემის ძალით იგი რაციონალური ფუნქციაა x-ის მიმართ. რაც შეეხება მრიცხველს, მესამე ლემის ძალით იგი პოლინომია y-ის მიმართ, რომლის კოეფიციენტები x-ის რაციონალურ ფუნქციებს წარმოადგენენ.

ახლა, თუ გამოვრიცხავთ (1) ტოლობის ძალით y-ის იმ ხარისხებს, რომლებიც $\geqq n$ და შემდეგ მრიცხველს მნიშვნელზე წევრობრივ გავყოფთ, მივიღებთ მე-(3) სახის ტოლობას, რომლის დამტკიცებაც გვსურდა.

გადავიდეთ ახლა ძირითადი საკითხის პირველი ნაწილის გადაწყვეტაზე.

X. აბელის ის ინტეგრალები, რომლებიც ალგებრულ ფუნქციებს წარმოადგენენ

§ 62. აბელის პირველი თეორემა. ვთქვათ y არის ალგებრული ფუნქცია, განსაზღვრული

$$f(x,y)=0$$

განტოლებიდან. თუ ინტეგრალი

$$\int y\,dx \tag{4}$$

ალგებრულ ფუნქციას წარმოადგენს, იგი ყოველთვის გამოისახება y-ის მთელი ფუნქციის სახით,

რომლის კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია.

თეორემის პირობის ძალით მე-(4) ინტეგრალი ალგებრულ ფუნქციას წარმოადგენს და ეს უკანასკნელი აღვნიშნოთ u-თი:

$$\int y\,dx = u; \tag{4'}$$

u არის ფესვი რაიმე დაუყვანადი განტოლებისა:

$$\varphi(x, u) = 0.$$

განვიხილოთ ახლა ორი განტოლება

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, u) = 0.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი:

1°. $f(x, y)$ და $\varphi(x, u)$ პოლინომები არიან ერთი და იგივე ხარისხის y და u-ს მიმართ შესაბამისად, ე. ი. თუ პირველის ხარისხი y-ის მიმართ არის n, ხოლო მეორისა u-ს მიმართ m, მაშინ $n = m$.

2°. პირველის ყოველი ფესვი არის მეორის მხოლოდ ერთი ფესვის წარმოებული და პირიქით, მეორის ერთი რომელიმე ფესვი პირველი განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვის პირველყოფილია.

ამ ორი დებულების დამტკიცებას ვასრულებთ ჰარდის მეთოდით[1]. პირველი განტოლების ფესვები იყოს

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

ხოლო მეორისა

$$u_1, u_2, \ldots, u_m.$$

აქ y_1 და u_1-ით აღნიშნულია y და u შესაბამისად.

მაშასადამე, როგორიც გინდა იყოს i და k მაჩვენებელნი, ყოველთვის გვექნება

$$f(x, y_i) = 0, \ \varphi(x, u_k) = 0.$$

თუ ამ ტოლობებიდან გავაწარმოებთ მეორეს, მივიღებთ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\frac{du_k}{dx} = 0, \ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

---

[1] Hardy. The integration of functions of a single variable. Cambridge, 1916, P. 39, 39.

არსებობს ამ წიგნის რუსული თარგმანი, გამოცემული 1935 წელს (რედ.).

მაგრამ, ვინაიდან მე-(4′) ტოლობის ძალით

$$\frac{du_1}{dx}=y_1,$$

ამიტომ მე-(5) ტოლობა, როცა $k=1$, შეგვიძლია ასე დავწეროთ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}=0. \tag{6}$$

შევადგინოთ ახლა შემდეგი ნამრავლი:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\cdots\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_n\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right).$$

x-ისა და u-ს მიმართ ეს არის პოლინომი, რომლის კოეფიციენტები $y_1, y_2,\ldots,y_n$-ის სიმეტრიული პოლინომებია; მეორე ლემის ძალით ეს უკანასკნელი კოეფიციენტები x-ის რაციონალურ ფუნქციებს წარმოადგენენ; მაშასადამე, თვით აღნიშნული ნამრავლიც u-ს მიმართ არის პოლინომი, რომლის კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია. აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელი ნამრავლი $\Phi(x, u)$-თი. მაგრამ მე-(6) ტოლობის ძალით

$$\Phi(x,u_1)=0.$$

მაშასადამე,

$$\Phi(x,u)=0 \text{ და } \varphi(x,u)=0$$

განტოლებებს აქვთ ერთი საერთო ფესვი $u=u_1$ და ამიტომ პირველი ლემის ძალით, პირველ ამათგანს ექნება მეორის ყველა ფესვი, ე. ი. როგორიც გინდა იყოს k

$$\Phi(x,\ u_k)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_2\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right)\cdots\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_n\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right)=0$$

$$k=1,\ 2,\ldots,m.$$

მაგრამ ეს ტოლობა მხოლოდ მაშინაა შესაძლო, როცა ტოლობის მარცხენა ნაწილის ერთი მაინც მამრავლი არის ნული. მაშასადამე, თუ k რომელიმე გარკვეული რიცხვია, უეჭველად გვექნება ისეთი l, რომ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}y_l=0.$$

თუ ამას მე-(5) განტოლებასთან შევადარებთ, გვექნება

$$\frac{du_k}{dx}=y_l.$$

აქედან ჩანს, რომ შეუძლებელია ერთსა და იმავე u_k-ს ორი სხვადასხვა y შეესაბამოს. მართლაც, წარმოვიდგინოთ წინააღმდეგი, ვთქვათ უკანასკნელი განტოლების გარდა გვაქვს

$$\frac{du_k}{dx}=y_\lambda,$$

საიდანაც

$$y_\lambda=y_i;$$

მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან $f(x, y)$ დაუყვანადია და მას ჯერადი ფესვები არ აქვს.

ამრიგად, დამტკიცებულია, რომ ყოველი u_k მხოლოდ ერთი y_i-ის პირველყოფილია.

შევადგინოთ ახლა შემდეგი ნამრავლი:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\right).$$

ეს ნამრავლი $u_1, u_2, \ldots, u_m$-ის სიმეტრიული ფუნქციაა; ამიტომ იმავე მოსაზრებით, როგორც ზემოთ, y-ის მიმართ იგი წარმოადგენს პოლინომს, რომლის კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია. აღვნიშნოთ იგი $\Psi(x, y)$-ით.

მაგრამ მე-(6) ტოლობის ძალით

$$\Psi(x, y_1)=0.$$

მაშასადამე, $\Psi(x, y)$-სა და $f(x, y)$-ს საერთო y_1 ფესვი აქვთ და ამიტომ პირველს მეორის ყველა ფესვი ექნება, ე. ი. როგორიც გინდა იყოს r, გვექნება

$$\Psi(x, y_r)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_r\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_r\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_r\frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\right)=0.$$

იმავე მოსაზრებით, როგორც ზემოთ, ტოლობის მარცხენა ნაწილის ერთი მაინც მამრავლი ნული უნდა იყოს, ე. ი. ყოველ r-ს ისეთი s შეესაბამება, რომ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_r\frac{\partial\varphi}{\partial u_s}=0.$$

აქედან მე-(5) განტოლებასთან შედარებით გვექნება

$$y_r=\frac{du_s}{dx};$$

მაგრამ, როგორც ზემოთ, შეუძლებელია, რომ ერთსა და იმავე y_r-ს ორი სხვადასხვა u შეესაბამებოდეს. მართლაც, წარმოვიდგინოთ წინააღმდეგი, ვთქვათ უკანასკნელი ტოლობის გარდა გვაქვს

$$y_r = \frac{du_\sigma}{dx};$$

მაშინ მივიღებთ:

$$u_\sigma - u_s = c,$$

სადაც c მუდმივი რიცხვია. აქედან ერთდროულად გვექნება

$$\varphi(x, u_s) = 0, \ \varphi(x, u_s + c) = 0.$$

ახლა თუ პირველს ამ ტოლობებიდან მეორეს გამოვაკლებთ, მივიღებთ $(m-1)$ რიგის პოლინომს u_s-ის მიმართ. მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან მაშინ გამოვა, რომ $\varphi(x, u) = 0$ არ არის დაუყვანადი განტოლება.

მაშასადამე, დამტკიცებულია, რომ ყოველი y_r არის მხოლოდ ერთი u_s-ის წარმოებული.

ამრიგად, y-ებსა და u-ებს შორის არსებობს ურთიერთ ცალსახა თანადობა, რაც მაშინაა შესაძლო მხოლოდ, როცა $m = n$.

ზემოთ გამოთქმული ორი ფაქტი დამტკიცებულია. ახლა თუ რომელიმე y-სა და შესაბამ u-ს ერთსა და იმავე ნიშნაკს მივუწერთ, მაშინ გვექნება

$$\frac{du_k}{dx} = y_k. \tag{7}$$

გადავდივართ აბელის პირველი თეორემის დამტკიცებაზე.

მე-(5) და მე-(7) ტოლობათა ძალით, მაგალითად $k=1$-თვის, გვექნება

$$y_1 = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}},$$

რაც გვიჩვენებს, რომ y_1 არის x-ისა და u_1-ს რაციონალური ფუნქცია; მაშასადამე, მეოთხე ლემის ძალით y_1 შემდეგნაირად წარმოგვიდგება

$$y_1 = P_0^{(1)}(x) + P_1^{(1)}(x)u_1 + P_2^{(1)}u_1^2 + \cdots + P^{(1)}_{n-1}(x)u_1^{n-1}, \tag{8}$$

სადაც $P^{(1)}_0, P^{(1)}_1, \ldots, P^{(1)}_{n-1}$ კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ u_1 წარმოადგენს ასეთივე სახის პოლინომს y_1-ის მიმართ. ამისათვის განვიხილოთ ნამრავლი $(z-y_2)(z-y_3)\dots(z-y_n)$. ცხადია, რომ ეს ნამრავლი წარმოადგენს z-ის მიმართ $n-1$ რიგის პოლინომს, რომლის კოეფიციენტებია $y_2, y_3, \dots, y_n$-ის სიმეტრიული პოლინომები. მაშასადამე, მესამე ლემის ძალით, ეს კოეფიციენტები y_1-ის მიმართ წარმოადგენენ პოლინომებს, რომელთა კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია. თუ (8) ტოლობის მიხედვით y_1-ს შევცვლით მისი გამოსახულებით და u_1-ის ხარისხებს, რომლებიც $(n-1)$-ზე მეტია, შევამცირებთ $\varphi(x, u_1)=0$ ტოლობის ძალით, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$(9) \qquad (z-y_2)(z-y_3)\dots(z-y_n)=\Psi(x, z, u_1),$$

სადაც $\Psi(x, z, u_1)$ არის პოლინომი z და u_1-ის მიმართ და მისი კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია. რადგანაც $u_2, u_3, \dots, u_n$ ფესვებია

$$\Psi(x, y_1, u)=0$$

განტოლებისა u-ს მიმართ, ამიტომ გვექნება:

$$\begin{aligned}\Psi(x, y_1, u)&=A_0(x, y_1)(u-u_2)(u-u_3)\dots(u-u_n)=\\&=A_0(x, y_1)\{u^{n-1}-u^{n-2}(u_2+u_3+\dots+u_n)+\dots\}=\\&=A_0(x, y_1)\left\{u^{n-1}+u^{n-2}\left[u_1+\frac{B_1(x)}{B_0(x)}\right]+\dots\right\},\end{aligned}$$

სადაც $A_0(x, y_1)$ არის კოეფიციენტი u^{n-1}-თან Ψ-ში, ხოლო $B_0(x)$ და $B_1(x)$ წარმოადგენენ კოეფიციენტებს u^n და u^{n-1}-თან φ-ში.

თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს კოეფიციენტებს u^{n-2}-თან ამ ტოლობის ორივე ნაწილში, მივიღებთ:

$$u_1+\frac{B_1(x)}{B_0(x)}=\frac{A_1(x, y_1)}{A_0(x, y_1)},$$

სადაც $A_1(x, y_1)$ არის კოეფიციენტი u^{n-2}-თან Ψ-ში. რადგანაც $\dfrac{A_1(x, y_1)}{A_0(x, y_1)}$ არის x-ისა და y_1-ის რაციონალური ფუნქცია, ამიტომ მეოთხე ლემის ძალით გვექნება

$$u_1=R_0(x)+R_1(x)y_1+R_2(x)y_1^2+\dots+R_{n-1}(x)y_1^{n-1},$$

რომლის კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია.

უკანასკნელი ტოლობა სავსებით ამტკიცებს აბელის თეორემას.

§ 63. აბელის თეორემის გამოყენება იმ შემთხვევაში, როცა y არის n-ური ხარისხის ფესვი x-ის რაციონალური ფუნქციიდან. გამოვიყენოთ, აბელის თეორემა იმ კერძო შემთხვევისათვის, როცა (1) განტოლებას აქვს სახე:

$$y^n = X(x), \tag{10}$$

სადაც $X(x)$ არის x-ის რაციონალური ფუნქცია.

ვთქვათ

$$\int \sqrt[n]{X(x)}\,dx \tag{11}$$

ალგებრული ფუნქციაა; მაშინ აბელის თეორემის ძალით გვექნება:

$$\left\{\begin{aligned} \int \sqrt[n]{X(x)}\,dx = R_0(x) + R_1(x)\sqrt[n]{X(x)} + R_2(x)\left(\sqrt[n]{X(x)}\right)^2 \\ + \dots + R_{n-1}(x)\left(\sqrt[n]{X(x)}\right)^{n-1} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

ყოველი R რაციონალური ფუნქციაა. დავამტკიცოთ, რომ ამათგან ყველა იგივურად ნულია, გარდა $R_1(x)$-სა, რომელიც $\neq 0$-ს.

მართლაც, გავაწარმოოთ ეს ტოლობა, რაც მოგვცემს

$$y = \frac{dR_0(x)}{dx} + y\frac{dR_1(x)}{dx} + y^2\frac{dR_2(x)}{dx} + \dots + y^{n-1}\frac{dR_{n-1}(x)}{dx}$$
$$+ \frac{dy}{dx}\left(R_1 + 2Ry + \dots + (n-1)R_{n-1}y^{n-2}\right).$$

მაგრამ მე-(10) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dX}{dx}}{ny^{n-1}}.$$

თუ გამოვრიცხავთ $\frac{dy}{dx}$ ორ უკანასკნელ ტოლობიდან, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$P(x,\ y) = 0, \tag{13}$$

სადაც $P(x,\ y)$ არის პოლინომი x და y-ის მიმართ. მაგრამ y მე-(10) განტოლების ფესვია; ამიტომ პირველი ლემის თანახმად, $P(x,y)$-ს ამ უკანასკნელი განტოლების ყველა ფესვი ექნება, რაც იმას ნიშნავს, რომ მე-(13) ტოლობა შესრულდება ყველა აღნიშნული

ფესვისათვის. მაგრამ თუ y ერთი ფესვია, დანარჩენი $(n-1)$ ფესვი იქნება:

$$y\varepsilon_1, \ y\varepsilon_2, \dots, y\varepsilon_{n-1},$$

სადაც ε-ბი არიან $(n-1)$ წარმოსახვითი მნიშვნელობანი $\sqrt[n]{1}$-დან.

მეორე მხრით მე-(13) ტოლობა მე-(12)-ის უშუალო შედეგია, ამიტომ უკანასკნელთან ერთად გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\varepsilon_k\int y dx = R_0(x) + \varepsilon_k R_1(x)y + \varepsilon^2_k R_2(x)y^2 + \dots + \varepsilon_k^{n-1} R_{n-1}(x)y^{n-1},$$

$$k = 1, \ 2, \dots, n-1.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი ε_k^{n-1}-ზე გავამრავლოთ; მაშინ მივიღებთ

$$\int y dx = \varepsilon_k^{n-1} R_0(x) + R_1(x)y + \varepsilon_k R_2(x)y^2 + \dots + \varepsilon_k^{n-1} R_{n-1}(x)y^{n-1}$$

$$k = 1, \ 2, \dots, n-1.$$

თუ შევკრებთ $n-1$ ამრიგად მიღებულ უკანასკნელ განტოლებას წინათ მიღებულ მე-(12) განტოლებასთან ერთად და გავითვალისწინებთ, რომ p რიცხვის ყოველი მთელი მნიშვნელობისათვის

$$1 + \varepsilon^p{}_1 + \varepsilon^p{}_2 + \dots + \varepsilon^p{}_{n-1} = 0,$$

მივიღებთ

$$n\int y dx = n \, R_1(x)y.$$

საიდანაც

$$(14) \qquad \int \sqrt[n]{X(x)}\, dx = R_1(x) \sqrt[n]{X(x)}.$$

რ. დ. გ.

უკანასკნელი ტოლობიდან შესაძლოა ახალი მეტად მნიშვნელოვანი ტოლობა გამოვიყვანოთ.

ვთქვათ

$$X = \frac{P}{Q},$$

სადაც P და Q პოლინომებია. გვაქვს:

$$\sqrt[n]{X} = \sqrt[n]{\frac{P}{Q}} = \frac{P}{\sqrt[n]{P^{n-1}Q}}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

(15) $$Z=P^{n-1}Q,$$

მაშინ მივიღებთ

$$\sqrt[n]{X}=\frac{P}{\sqrt[n]{Z}},\ R_1\sqrt[n]{X}=\frac{R_1P}{\sqrt[n]{Z}}=\frac{W(x)}{\sqrt[n]{Z}}.$$

W რაციონალური ფუნქციაა. ამ ტოლობათა ძალით მე-(14) ფორმულა ასე გადმოიწერება

(16) $$\int\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Z(x)}}dx=\frac{W(x)}{\sqrt[n]{Z(x)}}.$$

ასეთია ის სახე, რომელსაც ღებულობს მე-(14) ტოლობა ზემოაღნიშნული გარდაქმნის საშუალებით. უნდა გვახსოვდეს მხოლოდ, რომ $P(x)$, $Z(x)$ პოლინომები მე-(15) ტოლობით არიან დაკავშირებული ერთმანეთშორის.

განვიხილოთ ახლა, მე-(15) ტოლობის დამოუკიდებლად, ინტეგრალი

(17) $$\int\frac{P}{\sqrt[n]{Z}}dx,$$

რომელშიაც P და Z საზოგადოდ რაციონალური ფუნქციებია[1].

აშკარაა, რომ ეს ინტეგრალი მარტივი გარდაქმნით მიიყვანება მე-(11) სახეზე; ამიტომ, თუ აღნიშნული მე-(17) ინტეგრალი ალგებრული ფუნქციაა, ამ უკანასკნელს მე-(16) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის სახე ექნება მხოლოდ. ამრიგად, მე-(16) ტოლობას ზოგად შემთხვევაშიაც ჰქონია ადგილი.

დაგვრჩა ახლა გადავწყვიტოთ ორი საკითხი:

1^0. რა პირობებში გახდება მე-(11) ანდა მე-(17) სახის ინტეგრალი ალგებრულ ფუნქციად.

2^0. თუ იგი ალგებრულია, მოვძებნოთ მისი მნიშვნელობა. 1^0 საკითხი მჭიდროდ დაკავშირებულია 2^0-თან; ამიტომ შევისწავლოთ უპირველესად ეს უკანასკნელი.

§ 64. მე-(17) ინტეგრალის მოძებნა იმ შემთხვევაში, როცა იგი ალგებრულია. წამოყენებული საკითხის ამოხსნა მე-(14) ანდა

[1] თავისთავად ცხადია, რომ P და Z შეგვიძლია იმნაირად გარდავქმნათ, რომ მათ ადგილას პოლინომები იმყოფებოდეს.

მე-(16) ტოლობის ძალით მიიყვანება $R_1(x)$-ისა ანდა W ფუნქციის მოძებნაზე. დავამტკიცოთ

ლიუვილის თეორემა. როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt[n]{Z(x)}} dx = \frac{W(x)}{\sqrt[n]{Z(x)}},$$

სადაც $P(x)$ და $Z(x)$ ალებული პოლინომებია, მაშინ $W(x)$-იც პოლინომია.

მართლაც, თუ გავაწარმოებთ ამ უკანასკნელ ტოლობას, გვექნება:

$$\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Z(x)}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{W(x)}{\sqrt[n]{Z(x)}}\right),$$

საიდანაც

$$PZ = Z\frac{dW}{dx} - \frac{W}{n}\frac{dZ}{dx}.$$

აქედან, ტოლობის ორივე ნაწილის Z-ზე გაყოფით, გვექნება

$$\frac{dW}{dx} - \frac{W}{n}\frac{Z'}{Z} - P = 0. \tag{18}$$

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ W არ არის პოლინომი, მაშინ მას ექნება სახე

$$W = \frac{U}{V},$$

სადაც U და V პოლინომებია x-ის მიმართ.

ჩავსვათ W-ს მნიშვნელობა მე-(18) ტოლობაში. მაშინ უკანასკნელი ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{U'V - V'U}{V^2} - \frac{1}{n}\frac{U}{V}\frac{Z'}{Z} - P = 0,$$

საიდანაც გვექნება აგრეთვე:

$$\frac{U' - PV}{U} - \frac{V'}{V} = \frac{1}{n}\frac{Z'}{Z}. \tag{19}$$

მაგრამ ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ რადგანაც U და V ურთიერთ მარტივია, ამიტომ V პოლინომის ყოველი ფესვი ამავე დროს Z-ის ფესვიც უნდა იყოს. ვთქვათ a ერთი ასეთი ფესვია; მაშინ

$$V=(x-a)^p V_1(x), \quad Z=(x-a)^q Z_1(x),$$

სადაც V_1, Z_1 პოლინომებია, რომელთათვისაც $V_1(a)\neq 0$, $Z_1(a)\neq 0$. ამას გარდა, $U(a)\neq 0$; p, q მთელი დადებითი რიცხვებია.

მივიღებთ რა ახლა მხედველობაში V-სა და Z-ის ასეთი მნიშვნელობებს, შეგვიძლია მე-(19) ტოლობა შემდეგნაირად ვადმოვწეროთ:

$$\frac{U'-PV}{U}-\frac{V'_1}{V_1}-\frac{p}{x-a}=\frac{1}{n}\,\frac{q}{x-a}+\frac{1}{n}\,\frac{Z'_1}{Z_1}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\frac{U'-PV}{U}-\frac{V'_1}{V_1}-\frac{1}{n}\,\frac{Z'_1}{Z_1}=\frac{pn+q}{n(x-a)}.$$

მაგრამ $pn+q\neq 0$. გამოვიდა, რომ როცა x მიისწრაფვის a-საკენ, ტოლობის მარჯვენა ნაწილი უსაზღვროდ იზრდება იმ დროს, როცა ტოლობის მარცხენა ნაწილი სასრული რჩება; მაშასადამე, უკანასკნელი ტოლობა შეუძლებელია.

ამრიგად, V პოლინომს არ აქვს ფესვები და ეს მხოლოდ მაშინაა შესაძლო, როცა იგი მუდმივია. მაშასადამე, W მართლაც პოლინომია და ლიუვილის თეორემაც დამტკიცებულია.

§ 65. W პოლინომის ხარისხის მოძებნა. გადავიდეთ ახლა W პოლინომის ხარისხის ქვედა საზღვრის მოძებნაზე. დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

W პოლინომის ხარისხი ერთი ერთეულით მაინც მეტია P პოლინომის ხარისხზე.

მართლაც, მივმართოთ ამ დებულების დასამტკიცებლად მე-(18) ტოლობას, რომელიც ასე დავწეროთ:

$$\frac{dW}{dx}-\frac{Z'}{nZ}W=P. \tag{20}$$

ვთქვათ, W-ს ხარისხი არის ν. მაშინ ტოლობის მარცხენა ნაწილის პირველი წევრის ხარისხი $(\nu-1)$-ია. სულ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მეორე წევრის ხარისხიც არის $\nu-1$; ამიტომ მთელი მარცხენა ნაწილის ხარისხი $\leqq(\nu-1)$-ს. ასეთივე უნდა იყოს P პოლინომის ხარისხიც აგრეთვე და, თუ ამ უკანასკნელს აღვნიშნავთ μ-თი, გვექნება

$$\nu\geqq\mu+1.$$

მაშასადამე, W პოლინომის ხარისხის ქვედა საზღვარი მართლაც $\mu+1$ ყოფილა და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ამრიგად, ν ან $>(\mu+1)$-ზე, ანდა $=(\mu+1)$-ს. პირველ შემთხვევაში იმ პოლინომებს შორის, რომლებმაც მე-(20) ტოლობა უნდა დააკმაყოფილონ, W-სათვის ვღებულობთ უდიდესი ხარისხის პოლინომს.

განვიხილოთ ახლა მეორე შემთხვევა. ვთქვათ, W-ს უფროსი წევრია a_0x^ν, ხოლო m არის Z-ის ხარისხი. მაშინ მე-(20) ტოლობის მარცხენა ნაწილის უფროსი წევრია

$$a_0\left(\nu-\frac{m}{n}\right)x^{\nu-1}.$$

აშკარაა, რომ $\nu=\mu+1$ ყოველთვის, როცა აღნიშნული უფროსი წევრი ნულად ვერ გახდება, ე. ი. თუ

$$\nu-\frac{m}{n}\neq 0.$$

მაგრამ ამ უკანასკნელ უტოლობას ადგილი ექნება ორ შემთხვევაში:

1° როცა m არ გაიყოფა n-ზე,

2° როცა $m<(\mu+1)\,n$.

ესაა ძირითადი შემთხვევები, როცა W-ს ხარისხი $(\mu+1)$-ია. ასეთ შემთხვევებში W პოლინომის მოსაძებნად მე-(20) ტოლობაში ვწერთ განუსაზღვრელ კოეფიციენტებიან $\mu+1$ ხარისხის პოლინომს და შემდეგ კოეფიციენტთა შედარებით ჩვეულებრივი წესით მოვძებნით მას.

დამტკიცებული დებულება საშუალებას გვაძლევს: 1) გამოვარკვიოთ ინტეგრალი

$$(17^1)\qquad \int\sqrt[n]{X}\,dx=\int\frac{P}{\sqrt[n]{Z}}\,dx$$

არის ალგებრული თუ არა, და 2) მოვძებნოთ მისი მნიშვნელობა, როცა იგი ალგებრულია.

მართლაც, ზემოგანხილულ ორ შემთხვევაში უკვე ცნობილია ის გზა, რომლითაც შეგვიძლია გადავწყვიტოთ წამოყენებული 1) და 2) საკითხები.

რაც შეეხება ზოგად შემთხვევას, საჭიროა წინასწარი გამორკვევა იმისა, თუ რა ხარისხის უნდა იყოს W პოლინომი, რომ მე-(20) ტოლობა შესრულდეს. ამის შემდეგ W-ს მაგიერ უნდა

ჩავსვათ მოძებნილი ხარისხის განუსაზღვრელი კოეფიციენტებიანი პოლინომი.

მაგრამ, თუ მე-(17^1) ინტეგრალი ალგებრულია, მაშინ აუცილებლად $\frac{WZ'}{Z}$ უნდა იყოს პოლინომი. ამიტომ სანამ W პოლინომის კოეფიციენტების გამოთვლას დავიწყებდეთ, უნდა გამოვარკვიოთ, შესაძლოა თუ არა, რომ $\frac{WZ'}{Z}$ გახდეს პოლინომი და, თუ ეს შეუძლებელია, მაშინ დანამდვილებით შეიძლება ითქვას, რომ მე-(17^1) ინტეგრალი ალგებრული არ არის.

ვთქვათ ასეთ შემთხვევას ადგილი არ აქვს. მაშინ აღნიშნული შეფარდებიდან პოლინომი უნდა გამოვყოთ, ხოლო ნაშთი ნულს უნდა გავუტოლოთ. შემდეგ კოეფიციენტთა შედარებით მივიღებთ პოლინომის ყველა კოეფიციენტის მნიშვნელობას და ამრიგად მე-(17^1) ინტეგრალიც მოძებნილი იქნება.

ზემოაღნიშნული თეორიის ილუსტრაციისათვის განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

§ 66. მაგალითები. ვნახოთ, თუ რა პირობებში წარმოადგენენ ალგებრულ ფუნქციებს შემდეგი ინტეგრალები:

1°
$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

აქ და შემდეგ მაგალითებშიაც იგულისხმება, რომ ax^2+bx+c არ არის სრული კვადრატი, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში ინტეგრალს ქვევით რაციონალური ფუნქცია გვექნებოდა.

თუ ეს ინტეგრალი ალგებრული ფუნქციაა, მაშინ ლიუვილის თეორემის ძალით გვექნება

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{W(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{21}$$

სადაც $W(x)$ პოლინომია.

§ 65-ის ძირითად შემთხვევებს 1°-სა და 2°-ს აქ ადგილი არ აქვს, ამიტომ წამოყენებული საკითხის ამოსახსნელად ზოგად წესს უნდა მივმართოთ.

ვიპოვოთ ჯერ W-ს ხარისხი; ამისათვის გავაწარმოოთ (21) ტოლობა; გვექნება

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{2W'(ax^2+bx+c)-W(2ax+b)}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

აქედან მარტივი გარდაქმნით მივიღებთ

(22) $$2(ax^2+bx+c)=2W'(ax^2+bx+c)-W(2ax+b).$$

ვთქვათ, W-ს უფროსი წევრია Ax^ν; მაშინ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ასეთივე წევრი იქნება $(\nu-1)Aax^{\nu+1}$, ხოლო მარცხენა ნაწილის კი $2ax^2$. მაშასადამე, $\nu+1\geqq 2$.

მაგრამ, თუ $\nu+1>2$-ზე, მაშინ $(\nu-1)Aax^{\nu+1}$ უნდა მოისპოს და ეს შეუძლებელია, ვინაიდან ასეთ შემთხვევაში $(\nu-1)Aa\neq 0$.

დაგვრჩენია ვიგულისხმოთ, რომ $\nu+1=2$. მაშინ $\nu=1$ და კოეფიციენტი x^2-ის წინ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოისპობა; მაგრამ ესეც შეუძლებელია.

ამრიგად, (22) ტოლობის სამართლიანობა შეუძლებელია და ეს იმას ნიშნავს, რომ 1° ინტეგრალი ალგებრული არ არის.

2° $$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

ვთქვათ, ეს ინტეგრალი ალგებრული ფუნქციაა; მაშინ გვექნება

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\frac{W(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

სადაც $W(x)$ პოლინომია.

მე-(20) ტოლობა ამ შემთხვევაში ღებულობს სახეს:

(23) $$\frac{dW}{dx}-\frac{2ax+b}{2(ax^2+bx+c)}W=Ax+B.$$

მოვძებნოთ პირველად W-ს ხარისხი. ვთქვათ, W-ს უფროსი წევრია Kx^ν; უკანასკნელი ტოლობა დავწეროთ ასეთი სახით:

$$2(ax^2+bx+c)\frac{dW}{dx}-(2ax+b)W=2(ax^2+bx+c)(Ax+B).$$

ტოლობის მარცხენა ნაწილის უფროსი წევრი არის $2K(\nu-1)ax^{\nu+1}$. ვინაიდან ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ასეთივე წევრი არის 3, ამიტომ $\nu+1\geqq 3$; მაგრამ ამ შემთხვევაში შეუძლებელია, რომ $\nu+1$ მეტი იყოს 3-ზე. ამიტომ $\nu+1=3$, საიდანაც $\nu=2$.

ამრიგად, W არის მეორე ხარისხის პოლინომი:

$$W=Kx^2+Lx+M.$$

ჩავსვათ ახლა (23) ტოლობაში W-ს მნიშვნელობა; გვექნება

$$(24) \qquad 2Kx+L-\frac{(2ax+b)(Kx^2+Lx+M)}{2(ax^2+bx+c)}=Ax+B.$$

მაგრამ ax^2+bx+c და $2ax+b$ ურთიერთ მარტივია. ამიტომ ტოლობის მარცხენა ნაწილში მოთავსებული შეფარდება მხოლოდ მაშინ იქნება პოლინომი, როცა Kx^2+Lx+M გაიყოფა $(ax^2+$ $+bx+c)$-ზე, რისთვისაც აუცილებელია და საკმარისია, რომ

$$\frac{K}{a}=\frac{L}{b}=\frac{M}{c}=\lambda.$$

ჩავსვამთ რა ამას (24) ტოლობაში, გვექნება

$$(2ax+b)\lambda-\frac{\lambda}{2}(2ax+b)=Ax+B,$$

ანდა

$$(2ax+b)\frac{\lambda}{2}=Ax+B.$$

აქედან მივიღებთ აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისათვის, რომ მე-2° ინტეგრალი ალგებრული იყოს; ესაა შემდეგი

$$\frac{A}{2a}=\frac{B}{b}.$$

მაშასადამე, 2° ინტეგრალი მხოლოდ მაშინაა ალგებრული ფუნქცია, როცა მას აქვს სახე:

$$\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

3° $$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

თუ ეს ინტეგრალი ალგებრული ფუნქციაა, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)^2(ax^2+bx+c)}}=$$
$$=\frac{W}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

მე-(20) ტოლობა ამ შემთხვევაში ღებულობს სახეს:

$$\frac{dW}{dx}-\frac{W}{x-\alpha}-\frac{(2ax+b)W}{2(ax^2+bx+c)}=1. \tag{25}$$

ეს უკანასკნელი ასე გადმოიწერება:

$$2\,\frac{dW}{dx}(ax^2+bx+c)(x-\alpha)-W\left[2(ax^2+bx+c)+\right.$$
$$\left.+(2ax+b)(x-\alpha)\right]=2(x-\alpha)(ax^2+bx+c).$$

ვთქვათ, W-ს უფროსი წევრი არის Ax^ν; მაშინ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ასეთივე წევრი იქნება $2aA(\nu-2)x^{\nu+2}$, ხოლო მარჯვენა ნაწილის კი $2ax^3$. მაშასადამე, $\nu+2\geqq 3$. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ავიღოთ $\nu+2=4$, იმიტომ, რომ მაშინ ზემოაღნიშნული უმაღლესი წევრი, რომელიც მეოთხე ხარისხისაა, მოისპობა და მარცხნივ მესამე ხარისხის პოლინომი დაგვრჩება. ამრიგად, W ყოფილა მეორე ხარისხის პოლინომი.

აღვნიშნოთ

$$W=Ax^2+Bx+C$$

და მოვძებნოთ A, B, C კოეფიციენტები. ჩავსვამთ რა ახლა W-ს ასეთ მნიშვნელობას (25) ტოლობაში, შეგვიძლია ეს უკანასკნელი ასე გადავწეროთ:

$$2\{(x-\alpha)(2Ax+B-1)-(Ax^2+Bx+C)\}(ax^2+bx+c)$$
$$=(x-\alpha)(2ax+b)(Ax^2+Bx+C). \tag{26}$$

აქედან ჩანს, რომ $(x-\alpha)(2ax+b)(Ax^2+Bx+C)$ ნამრავლი უნდა გაიყოს (ax^2+bx+c)-ზე; მაგრამ $2ax+b$ და ax^2+bx+c ურთიერთ მარტივია, ამიტომ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1°. Ax^2+Bx+C გაიყოფა (ax^2+bx+c)-ზე,

2°. $(x-\alpha)(Ax^2+Bx+C)$ გაიყოფა (ax^2+bx+c)-ზე; ე. ი. $x-\alpha$ არის (ax^2+bx+c)-ს გამყოფი და, ამას გარდა, ორ ზემოაღნიშნულ სამწევრს მხოლოდ ერთი საერთო გამყოფი აქვთ.

განვიხილოთ პირველად 2° შემთხვევა. ვთქვათ,

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\quad \alpha\neq\beta,$$
$$Ax^2+Bx+C=A(x-\beta)(x-\gamma);$$

ჩავსვამთ რა ამას (26) ტოლობაში, იგი შეკვეცის შემდეგ ასე წარმოგვიდგება:

$$2a(x-\alpha)(2Ax+B-1)-2aA(x-\beta)(\alpha-\gamma)=A(2ax+b)(x-\gamma),$$

რაც გვიჩვენებს, რომ $2Ax+B-1$ გაიყოფა $(x-\gamma)$-ზე; გავყოთ მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი $2aA(x-\gamma)$-ზე; გვექნება

$$2(x-\alpha)-(x-\beta)=x+\frac{b}{2a}.$$

მაგრამ კვადრატული განტოლების ცნობილი თვისების ძალით

$$\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

ამიტომ

$$2(x-\alpha)-(x-\beta)=x-\frac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

საიდანაც გვექნება $\alpha=\beta$; რაც შეუძლებელია.

რაც შეეხება ახლა 1^0 შემთხვევას, იგი ყოველთვის არის შესაძლო, როგორც ამას (26) ტოლობა გვიჩვენებს. მივიღოთ

$$Ax^2+Bx+C=\lambda(ax^2+bx+c).$$

გვაქვს:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\lambda\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-a}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}$.

ამრიგად, მე-3^0 ინტეგრალი ალგებრული მხოლოდ მაშინაა, როცა α არის (ax^2+bx+c)-ს ფესვი, რაც სავსებით ეთანხმება § 43-ში გამოთქმულ დებულებას.

4^0
$$\int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x^3+1}}dx.$$

ამ შემთხვევაში $\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{2}$ არ არის მთელი რიცხვი, ამიტომ აქ ადგილი აქვს § 65-ში აღნიშნულ 1^0 ძირითად შემთხვევას. მაშასადამე, თუ ეს ინტეგრალი ალგებრულია, $W(x)$ პოლინომი მესამე ხარისხის უნდა იყოს. აღვნიშნოთ

$$W(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D.$$

გვაქვს:

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x^3+1}}dx=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{\sqrt{x^3+1}}.$$

მე-(20) ტოლობა ამ შემთხვევაში შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$3Ax^2+2Bx+C-\frac{3x^2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{2(x^3+1)}=ax^2+bx+c;$$

მაგრამ x^2 და (x^3+1) ურთიერთ მარტივია და ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა მხოლოდ მაშინაა შესაძლო, როცა Ax^3+Bx^2+Cx+D გაიყოფა (x^3+1)-ზე. ამისათვის აუცილებელია და საკმარისია, რომ

$$A=D,\ B=C=0.$$

ჩავსვამთ რა ამას აღნიშნულ ტოლობაში, მივიღებთ

$$\frac{2}{3}Ax^2=ax^2+bx+c,$$

საიდანაც

$$b=0,\ c=0,$$

ესაა ერთადერთი შემთხვევა, როცა 4⁰ ინტეგრალი წარმოადგენს ალგებრულ ფუნქციას.

ამ შემთხვევაში მისი მნიშვნელობა შემდეგია:

$$\int\frac{ax^2}{\sqrt{x^3+1}}dx=\frac{2a}{3}\sqrt{x^3+1}+C.$$

XI. აბელის ის ინტეგრალები, რომლებიც ალგებრულისა და ლოგარითმული ფუნქციების სასრული რიცხვის საშუალებით გამოისახებიან

§ 67. ძირითადი საკითხები. ზემოთ იყო განხილული ძირითადი საკითხის კერძო შემთხვევა, როცა ინტეგრალი ალგებრული ფუნქციიდან თვითონ ალგებრულ ფუნქციას წარმოადგენს. გადავდივართ ახლა ძირითადი საკითხის ზოგად შემთხვევაზე. როგორც ზემოაღნიშნულ კერძო შემთხვევაში, დავსვათ შემდეგი საკითხი:

ვთქვათ, აღებულია ინტეგრალი

$$\int y\,dx, \tag{27}$$

სადაც y ალგებრული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს ალგებრულ განტოლებას:

$$f(x,y)=0;$$

რა ბუნების უნდა იყოს აღნიშნული ინტეგრალი, რომ იგი ალგებრულთა და ელემენტარულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა სასრული რიცხვის საშუალებით გამოისახოს.

მაგრამ ცხადია, რომ ყოველ ელემენტარულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციას როდი ექნება ადგილი (27) ინტეგრალში. ამიტომ წამოყენებული საკითხის ამოხსნისათვის საჭიროა, ჯერ გამოვარკვიოთ:

რომელ ელემენტარულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციებიდან შედგება აღნიშნულ შემთხვევაში (27) ინტეგრალი.

მას შემდგომ, რაც ეს საკითხი იქნება გამორკვეული, ზემოაღნიშნული საკითხი შემდეგზე მიიყვანება:

რა სახით შედის ალგებრული და ელემენტარული ტრანსცენდენტული ფუნქციები (27) ინტეგრალში.

მაგრამ ამ ორი საკითხის ამოხსნისათვის საჭიროა ზოგიერთი ცნების წინასწარი ცოდნა და ამის შესახებ საუბარი იქნება ქვემოთ მოყვანილ §-ში.

§ 68. ელემენტარულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა კლასიფიკაცია ლიუვილის მიხედვით. ელემენტარულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა კლასიფიკაცია ლიუვილმა მოახდინა ამ ფუნქციათა რიგებად დაყოფით.

ელემენტარული ტრანსცენდენტული ფუნქცია პირველი რიგისაა, თუ სათანადო ანალიზური ნიშანი (ხარისხის ამაღლებისა, Lg, sin,...,arc sin,...) ალგებრულ ფუნქციებზეა შესრულებული. მაგალითად ფუნქციები:

$$e^{3x+1},\ \sin(2x+5),\ \arcsin\sqrt{1+x^2}$$

არიან პირველი რიგისა.

ელემენტარული ტრანსცენდენტული ფუნქცია მეორე რიგისაა, თუ აღნიშნული ანალიზური ნიშნები აღებულია პირველი რიგის ტრანსცენდენტულ ფუნქციებზე. ასეთია, მაგალითად, ფუნქციები:

$$e^{e^x},\ \operatorname{Lg}\sin x.$$

საზოგადოდ ელემენტარული ტრანსცენდენტული ფუნქცია n-ური რიგისაა, თუ მასში ანალიზური ნიშნები n-ჯერ არიან აღებული ალგებრულ ფუნქციაზე.

§ 69. e^x-ისა და $\operatorname{Lg} x$-ის ძირითადი თვისება. ეს თვისება შემდეგი ორი დებულებით გამოითქმება:

1^0. $\operatorname{Lg} x$ არ არის ალგებრული ფუნქცია.

2^0. e^x არ არის ალგებრული ფუნქცია.

დავამტკიცოთ პირველი დებულება. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ $\operatorname{Lg} x$ არის ალგებრული ფუნქცია. მაშინ

$$\int \frac{dx}{x}$$

აგრეთვე ალგებრული ფუნქცია იქნება. მაგრამ, თუ ეს ასეა, უკანასკნელი ინტეგრალი, აბელის პირველი თეორემის ძალით, რაციონალური უნდა იყოს. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $\frac{P(x)}{Q(x)}$-ით:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{28}$$

გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{1}{x} = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2},$$

საიდანაც

$$Q^2 = (P'Q - PQ')x; \tag{28'}$$

აქედან ჩანს, რომ Q უნდა გაიყოს x-ზე.

ვთქვათ x-ის უმაღლესი ხარისხი, რომელიც Q-ში მამრავლად შედის არის x^p; მაშინ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა ნაწილი გაიყოფა x^{2p}-ზე, ხოლო მარჯვენა—მხოლოდ x^p-ზე. ამრიგად, შეუძლებელია, რომ (28′) და (28) ტოლობებს ჰქონდეს ადგილი და ამით 1^0 დებულება დამტკიცებულია.

რაც შეეხება ახლა მე-2^0 დებულებას, ვინაიდან მაჩვენებლიანი ფუნქცია ლოგარითმული ფუნქციის შებრუნებული ფუნქციაა, ამიტომ შეუძლებელია, რომ e^x-იც ალგებრული იყოს.

§ 70. პირველი საკითხის ამოხსნა. პასუხი ამ საკითხზე შემდეგ თეორემაშია გამოთქმული:

თეორემა. *შეუძლებელია, რომ ელემენტარული ფუნქცია, რომელიც გამოსახავს (27) ინტეგრალს, მაჩვენებლიან e^u ფუნქციას შეიცავდეს, სადაც u არის x-ის ფუნქცია.*

ვიგულისხმოთ უპირველესად, რომ e^u ფუნქცია პირველი რიგისაა, ე. ი. რომ u არის ალგებრული ფუნქცია.

წარმოვიდგინოთ, რომ (27) ინტეგრალი შეიცავს ასეთ ფუნქციას. მაშინ გვექნება

$$\int y\,dx = F(x,\ e^u), \tag{29}$$

სადაც F ფუნქცია e^u-ს გარდა შესაძლოა კიდევ ელემენტარულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციებსაც შეიცავდეს. ავღნიშნოთ $e^u=\omega$. მოვახდინოთ ახლა (29) ტოლობის ორივე ნაწილის გაწარმოება; მივიღებთ

$$y=F'_x+F'_\omega\,\omega u'.$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა იგივეობაა. მისი მარცხენა ნაწილი ალგებრული ფუნქციაა, ამიტომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილიდან ω უნდა გამოირიცხოს, ვინაიდან წინა დებულების ძალით მაჩვენებლიანი ფუნქცია არ არის ალგებრული. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ω-ს მაგიერ სხვა რომელიმე ფუნქციას ჩავსვამთ, ანდა მას უბრალოდ სულ სხვა ასოთი შევცვლით, უკანასკნელი ტოლობა არ უნდა დაირღვეს. ჩავსვათ ω-ს მაგიერ $k\omega$; მაშინ ჩვეულებრივი შედარებით მივიღებთ

$$F'_x(x,\ \omega)+F'_\omega(x,\ \omega)\omega u'=F'_x(x,\ k\omega)+F'_{k\omega}(x,\ k\omega)\,k\omega u'.$$

თუ გავამრავლებთ ტოლობის ორივე ნაწილს dx-ზე და მოვახდენთ ინტეგრებას, მივიღებთ

$$F(x,\ k\omega)=F(x,\ \omega)+C,$$

სადაც C დამოუკიდებელია x-ისგან, მაგრამ იგი k-ს ფუნქციაა, რომელიც ავღნიშნოთ $\varphi(k)$-თი.

უკანასკნელი ტოლობიდან გვაქვს:

$$F(x,\ k\omega)-F(x,\ \omega)=\varphi(k).$$

როგორც ვხედავთ ტოლობის მარცხენა ნაწილი დამოუკიდებელია x-სა და ω-საგან. გავაწარმოოთ ეს ტოლობა k-ს მიმართ, მივიღებთ:

$$\omega F'_{k\omega}(x,\ k\omega)=\varphi'(k).$$

თუ აქ ვიგულისხმებთ $k=1$ და ავღნიშნავთ $\varphi'(1)=A$, გვექნება

$$F'_\omega(x,\ \omega)=\frac{A}{\omega},$$

რომლის ინტეგრება გვაძლევს

$$F(x,\ \omega)=A\,\mathrm{Lg}\,\omega+f(x),$$

სადაც $f(x)$ არ შეიცავს ω-ს.

მაგრამ $\mathrm{Lg}\,\omega=u$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოიწერება

$$F(x,\ \omega)=Au+f\,(x),$$

რაც გვარწმუნებს, რომ (27) ინტეგრალი ნამდვილად როდი შეიცავს მაჩვენებლიან e^u ფუნქციას.

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა $\omega=e^u$ არის მეორე რიგის მაჩვენებლიანი ფუნქცია, ე. ი. როცა u პირველი რიგისაა: $u=e^v$, სადაც v ალგებრული ფუნქციაა. დავამტკიცოთ, რომ (27) ინტეგრალი ასეთ ფუნქციასაც არ შეიცავს.

წარმოვიდგინოთ წინააღმდეგი, ვთქვათ ω შედის (27) ინტეგრალში:

$$\int y\,dx=\Phi\,(x,\ \omega).$$

ზემოხსენებულის ძალით Φ არ შეიცავს პირველი რიგის მაჩვენებლიან ფუნქციას. გავაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობა; გვექნება

$$y=\Phi'_x+\Phi'_\omega\,\omega e^v\,v'.$$

მაგრამ ასეთი ტოლობა შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა პირველი რიგის მაჩვენებლიანი e^v ფუნქცია გამოირიცხება და ვინაიდან Φ და მისი კერძო წარმოებულნი x-ისა და ω-ს მიმართ ამ ფუნქციას არ შეიცავენ, ამიტომ ეს შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა იგივურად

$$\Phi'_\omega=0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (27) ინტეგრალი არ შეიცავს მეორე რიგის მაჩვენებლიან e^u ფუნქციასაც.

ანალოგიურად n-იდან $(n+1)$-მდე გადასვლით დავრწმუნდებით, რომ გამოთქმულ თეორემას ადგილი აქვს ყველა შემთხვევაში და, ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა, თუ მივიღებთ მხედველობაში ცნობილ დამოკიდებულებას ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსა და მაჩვენებლიან ფუნქციას შორის, შეგვიძლია დამტკიცებული თეორემის ძალით ვთქვათ, რომ ინტეგრალი რომელიმე ალგებრული ფუნქციიდან ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსაც არ შეიცავს სრულებით.

რაც შეეხება ლოგარითმულსა და შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, ვინაიდან მათი გაწარმოება ალგებრულ ფუნქციებს გვაძლევს, ამიტომ ყოველ მათგანს შეუძლია ჰქონდეს ადგილი (27) ინტეგრალში. მაგრამ ყოველი შექცეული ტრიგონომეტრიულ

ფუნქცია ლოგარითმულის საშუალებით გამოისახება, ამიტომ შემდეგ მხოლოდ ეს უკანასკნელი ფუნქცია გვექნება მხედველობაში.

ამრიგად, გამორკვეულია, რომ განსახილველ შემთხვევაში ინტეგრალი ალგებრული ფუნქციიდან შეიცავს მხოლოდ ალგებრულსა და ლოგარითმულ ფუნქციებს.

მაგრამ რა სახით შედიან ეს ფუნქციები (27) ინტეგრალში? ესაა ძირითადი პრობლემის მეორე საკითხი, რომელსაც შევისწავლით შემდეგ პარაგრაფში.

§ 71. მეორე საკითხის ამოხსნა. გამოვარკვიოთ პირველად, თუ რა სახით შედის ლოგარითმული ფუნქცია (27) ინტეგრალში. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. *ლოგარითმული ფუნქცია მხოლოდ წრფივად შედის ინტეგრალში, რომელიც ალგებრული ფუნქციიდანაა აღებული.*

ვთქვათ, (27) ინტეგრალში შედის პირველი რიგის ლოგარითმული ფუნქცია $\operatorname{Lg} u$, სადაც u არის x-ის ფუნქცია. როგორც წინათ, გვექნება

$$\int y\,dx = F(x, \operatorname{Lg} u).$$

სიმარტივისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნა $\omega = \operatorname{Lg} u$. მოვახდინოთ ახლა უკანასკნელი ტოლობის გაწარმოება; მივიღებთ:

$$y = F'_x(x, \omega) + F'_\omega(x, \omega)\,\frac{u'}{u}.$$

მაგრამ ω არ არის ალგებრული ფუნქცია (§ 69), ამიტომ ეს ტოლობა შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, თუ ω გამოირიცხება ტოლობის მარჯვენა ნაწილიდან, ე. ი. როცა ამ იგივეობაში ω-ს მაგიერ ჩავსვამთ რომელიმე ნებსით გამოსახულებას, იგი ამით არ უნდა დაირღვეს.

ჩავსვათ ω-ს მაგიერ $\omega + k$; მაშინ ჩვეულებრივი შედარებით გვექნება

$$F'_x(x, \omega) + F'_\omega(x, \omega)\,\frac{u'}{u} = F'_x(x, \omega+k) + F'_\omega(x, \omega+k)\,\frac{u'}{u}.$$

ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ dx-ზე და შემდეგ მოვახდინოთ ინტეგრება, რაც მოგვცემს

$$F(x, \omega+k) = F(x, \omega) + C,$$

სადაც C დამოუკიდებელია x-ისაგან, მაგრამ წარმოადგენს k-ს ფუნქციას; აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელი $\varphi(k)$-თი; გვექნება

$$F(x,\ \omega+k)-F(x,\ \omega)=\varphi(k).$$

ტოლობის მარცხენა ნაწილი დამოუკიდებელია x-ისა და ω-საგან. გავაწარმოოთ ეს ტოლობა k-თი, რაც მოგვცემს

$$F'_\omega(x,\ \omega+k)=\varphi'(k).$$

ამ უკანასკნელ ტოლობაში თუ ვიგულისხმებთ $k=0$ და შემოვიღებთ აღნიშვნას $\varphi'(0)=A$, გვექნება:

$$F'_\omega(x,\ \omega)=A,$$

რომლის ინტეგრება გვაძლევს

$$F(x,\omega)=A\omega+f(x),$$

ანდა

(30) $$F(x,\ \omega)=A\,\mathrm{Lg}\,u+f(x),$$

სადაც $f(x)$ არ შეიცავს $\mathrm{Lg}\,u$ ფუნქციას. უკანასკნელი ტოლობა ამტკიცებს გამოთქმულ თეორემის პირველ ნაწილს.

დაგვრჩა ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილიც, ე. ი. რომ u არის ალგებრული ფუნქცია.

მაგრამ, ვინაიდან (27) ინტეგრალი არ შეიცავს მაჩვენებლიან ფუნქციას, ამიტომ შეუძლებელია u იყოს მაჩვენებლიანი ფუნქციის ფუნქცია[1]. მაშასადამე, თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ u ლოგარითმულ ფუნქციასაც არ შეიცავს. წარმოვიდგინოთ წინააღმდეგი, ვთქვათ

$$u=\varphi(x,\ \mathrm{Lg}\,v),$$

სადაც v არის x-ის ფუნქცია. მაშინ (30) ტოლობის ძალით გვექნება

$$\int y\,dx=A\,\mathrm{Lg}\,\varphi(x,\ \mathrm{Lg}\,v)+f(x).$$

მეორე მხრით, ყოველი ლოგარითმული ფუნქცია, როგორც დავრწმუნდებით, მხოლოდ წრფივად შედის (27) ინტეგრალში, ამიტომ $\mathrm{Lg}\,v$ ფუნქცია წრფივად უნდა გამოიყოს φ ფუნქციიდან. მაგრამ ეს შეუძლებელია და ამიტომ შეუძლებელია, რომ φ შეიცავდეს $\mathrm{Lg}\,v$ ფუნციასაც.

---

[1] აშკარაა, რომ აქ არ გვაქვს მხედველობაში შემთხვევა, როცა $\omega=\mathrm{Lg}(e^u)$.

ამრიგად დავრწმუნდით, რომ u არავითარ ტრანსცენდენტულ ფუნქციას არ შეიცავს. მაშასადამე, იგი ალგებრული ფუნქცია ყოფილა, და ამით თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

თუ მივიღებთ მხედველობაში ორ უკანასკნელ თეორემას, შეგვიძლია ასეთი შედეგი გამოვიყენოთ:

შედეგი. ინტეგრალი

$$\int y\,dx,$$

როცა იგი ელემენტარული ფუნქციაა, საზოგადოდ შემდეგი სახით წარმოგვიდგება:

$$\int y\,dx = t + A\,\mathrm{Lg}\,u + B\,\mathrm{Lg}\,v + \dots + K\,\mathrm{Lg}\,w, \tag{31}$$

სადაც $A, B, \dots, K$ მუდმივი კოეფიციენტებია, ხოლო $u, v, \dots, w$ არიან x-ის ალგებრული ფუნქციები.

აღსანიშნავია ერთი გარემოება: თუ (31) ტოლობა გამარტივებულია იმ მხრივ, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის წევრთა რიცხვი არის უმცირესი, მაშინ $A, B, \dots, K$ კოეფიციენტები უეჭველად უთანაზომო იქნებიან ერთმანეთს შორის.

მართლაც, წარმოვიდგინოთ წინააღმდეგი, ვთქვათ არსებობს საზოგადოდ ისეთი რაციონალური $a, b, \dots, k$ რიცხვები, რომ

$$Aa + Bb + \dots + Kk = 0; \tag{32}$$

მაშინ

$$A = -B\,\frac{b}{a} + \cdots$$

და ამიტომ

$$\int y\,dx = t + B\,\mathrm{Lg}\left(v\,u^{-\frac{b}{a}}\right) + \cdots$$

მაგრამ $v\,u^{-\frac{b}{a}}$ არის ალგებრული ფუნქცია; მაშასადამე, ლოგარითმულ ფუნქციათა რიცხვი შემცირდება ყოველთვის, როცა ადგილი აქვს (32) სახის ტოლობას და, ამრიგად, გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია.

დაგვრჩა ახლა $u, v, \dots, w$ ფუნქციათა ბუნების გამორკვევა, რისთვისაც საჭიროა ამ ფუნქციათა ერთი გარდაქმნა შევასრულოთ და ეს შეადგენს შემდეგი §-ის საგანს.

§ 72. გარდაქმნა ალგებრული ფუნქციებისა, რომლებიც (27) ინტეგრალის გამოსახულებაში შედიან. ეს გარდაქმნა ფრიად მნიშვნელოვანია იმ თეორემის დასამტკიცებლად, რომელიც სავსებით არკვევს (27) ინტეგრალის ბუნებას. იგი ემყარება შემდეგ მოსაზრებას:

ყოველი ალგებრული $t, u, v, \ldots, w$ ფუნქციათაგანი სათანადო ალგებრულ განტოლებას აკმაყოფილებს. ამიტომ შეგვიძლია მოვძებნოთ ერთი ალგებრული განტოლება, რომელსაც ყველა ეს ფუნქცია აკმაყოფილებდეს; ვთქვათ

(33) $$F(x, z)=0$$

არის ასეთი განტოლება და ν მისი ხარისხია z--ის მიმართ. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ უკანასკნელს არ აქვს ჯერადი ფესვები.

შევადგინოთ ახლა მისი ν ფესვის ისეთი H ფუნქცია, რომ, როცა ამ ფესვებზე ყველა 1, 2, 3,...ν გადანაცვლებას მოვახდენთ, H ფუნქციამაც ამდენივე სხვადასხვა მნიშვნელობა მიიღოს. უმაღლესი ალგებრიდან ცნობილია, რომ მაშინ (33)-ე განტოლების ყოველი ფესვი რაციონალურად გამოისახება H-სა და x-ის მიმართ. მაშასადამე, კერძოდ, $t, u, \ldots, w$ ფუნქციებიც ასეთივე თვისებისა იქნებიან.

ვთქვათ ამ ფუნქციების რაციონალური გამოსახულებანი x-ისა და H-ის მიმართ არიან

$$t=t(x, H), \; u=u(x, H), \ldots, w=w(x, H).$$

მაშინ (31) ძირითადი ტოლობა ასე გადმოიწერება:

(34) $$\int y dx=t(x, H)+A \operatorname{Lg} u(x, H)+$$
$$+B \operatorname{Lg} v(x, H)+\ldots+K \operatorname{Lg} w(x, H).$$

ეს არის ის გარდაქმნა $t, u, v, \ldots, w$ ფუნქციებისა, რომელზეც საუბარია აქ.

შევისწავლოთ ახლა ეს გარდაქმნა. ამისათვის ვნახოთ, თუ რა დამოკიდებულება არსებობს H-სა და y-ს შორის. უკანასკნელი საკითხის ამოსახსნელად ვიხმაროთ იგივე ხერხი, როგორც აბელის პირველი თეორემის დამტკიცებისათვის.

H ფუნქცია აკმაყოფილებს ერთ დაუყვანად ალგებრულ განტოლებას

$$\varphi(x, H)=0,$$

რომლის ხარისხიც ვთქვათ არის m. განვიხილოთ ახლა ორი განტოლება

$$f(x, y)=0, \ \varphi(x, H)=0.$$

დავამტკიცოთ, რომ საზოგადოდ φ-ს ხარისხი f-ის ხარისხის ჯერადია, ე. ი.

$$m=pn.$$

ვთქვათ, ამ ორი განტოლების ფესვებია შესაბამისად

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$
$$H_1, H_2, H_3, \ldots, H_m.$$

აქ y_1-ით და H_1-ით აღნიშნულია y და H შესაბამისად. ვნახოთ რა დამოკიდებულებაშია ერთმანეთს შორის ამ ორი მიმდევრობის რიცხვები. გვაქვს:

$$f(x, y_i)=0, \ \varphi(x, H_k)=0, \quad \begin{matrix} i=1, 2, \ldots, n, \\ k=1, 2, \ldots, m. \end{matrix} \tag{35}$$

გავაწარმოოთ (34) განტოლება, მივიღებთ

$$y_1=\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x}+A\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial H_1}\frac{dH_1}{dx}}{u(x, H_1)}+\ldots;$$

უკანასკნელი ტოლობა ასეთი სახისაა:

$$y_1=\frac{P(x, H_1)}{R(x, H_1)}+\frac{Q(x, H_1)}{R(x, H_1)}\frac{dH_1}{dx}, \tag{36}$$

სადაც P, Q, R არიან x-ისა და H-ის მიმართ პოლინომები, რომელთაგანაც R არ ისპობა იგივურად.

გავაწარმოოთ ახლა (35) ტოლობებიდან მეორე; გვექნება

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial H_k}\frac{dH_k}{dx}=0. \tag{37}$$

კერძოდ, როცა $k=1$, ეს ტოლობა, (36) ფორმულის ძალით, ასე გადმოიწერება:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial H_1}\left[y_1\frac{R(x, H_1)}{Q(x, H_1)}-\frac{P(x, H_1)}{Q(x, H_1)}\right]=0,$$

ანდა ასე:

$$Q(x, H_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial H_1}[y_1R(x, H_1)-P(x, H_1)]=0. \tag{38}$$

შემდეგში სიმარტივის მოსაზრებით $P(x, H_k)$, $Q(x, H_k)$, $R(x, H_k)$-ს მაგიერ დავწეროთ P_k, Q_k, R_k.

შევადგინოთ ახლა ნამრავლი

$$\left[Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(y_1R-P)\frac{\partial\varphi}{\partial H}\right]\left[Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+(y_2\ R-P)\frac{\partial\varphi}{\partial H}\right]\cdots\left[Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(y_n R-P)\frac{\partial\varphi}{\partial H}\right].$$

x-ისა და H-ს მიმართ ეს არის პოლინომი, რომლის კოეფიციენტები $y_1, y_2, \dots, y_n$-ის სიმეტრიული ფუნქციებია. მეორე ლემის ძალით ეს კოეფიციენტები x-ის რაციონალურ ფუნქციებს წარმოადგენენ. ამრიგად, აღნიშნული ნამრავლი არის პოლინომი H-ის მიმართ, ხოლო მისი კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია. აღვნიშნოთ იგი $\psi(x, H)$.

ახლა, თუ მივიღებთ მხედველობაში (38) იგივეობას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$\varphi(x, H)=0 \text{ და } \psi(x, H)=0$$

განტოლებებს აქვთ ერთი საერთო ფესვი $H=H_1$. მაშასადამე, მეორეს პირველის ყველა ფესვი ექნება, ე. ი. როგორიც უნდა იყოს k, გვექნება

$$\psi(x, H_k)=0;$$

მაგრამ უკანასკნელი ტოლობა მხოლოდ მაშინაა შესაძლო, როცა ერთი რომელიმე მისი მამრავლი ნულია, ე. ი. ყოველ H_k-ს ისეთი y_i შეესაბამება, რომ

$$Q_k\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(y_i R_k-P_k)\frac{\partial\varphi}{\partial H_k}=0.$$

შევადაროთ ახლა მიღებული ფორმულა (37) განტოლებასთან, გვექნება

$$\frac{dH_k}{dx}=\frac{R_k}{Q_k}y_i-\frac{P_k}{Q_k}.$$

აქედან ჩანს, რომ შეუძლებელია ერთსა და იმავე H-ს ორი სხვადასხვა y შეესაბამოს; მართლაც, ეს რომ ასე იყოს, გვექნებოდა

$$y_i=y_l,$$

რაც შეუძლებელია, რადგანაც $f(x, y)$-ს, როგორც დაუყვანად პოლინომს შეუძლია მხოლოდ მარტივი ფესვები ჰქონდეს.

ამრიგად, დამტკიცებულია, რომ ყოველ H-ს ერთი და მხოლოდ ერთი y შეესაბამება.

შებრუნებულ დასკვნას საზოგადოდ არ აქვს ადგილი.

მართლაც, შევადგინოთ შემდეგი ნამრავლი:

$$\left[Q_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (y R_1 - P_1) \frac{\partial\varphi}{\partial H_1}\right]\left[Q_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (y R_2 - P_2) \frac{\partial\varphi}{\partial H_2}\right]\cdots$$

$$\left[Q_m \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (y R_m - P_m) \frac{\partial\varphi}{\partial H_m}\right].$$

იმავე მოსაზრებით, როგორც წინათ, ეს ნამრავლი y-ის მიმართ პოლინომია, რომლის კოეფიციენტები x-ის რაციონალური ფუნქციებია. აღვნიშნოთ ეს პოლინომი $\chi(x, y)$-ით.

მაგრამ განტოლებებს

$$f(x, y)=0, \ \chi(x, y)=0$$

აქვთ ერთი საერთო ფესვი $y=y_1$, ამიტომ პირველს მეორის ყველა ფესვი ექნება, ე. ი. როგორიც უნდა იყოს r

$$\chi(x, y_r)=0, \ r=1, 2, \ldots, n;$$

მაგრამ ეს შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა მარცხენა ნაწილის ერთი მამრავლი მაინც ნულია, ე. ი. ყოველ y_r-ს ისეთი H_s შეესაბამება, რომ

$$Q_s \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (y_r R_s - P_s) \frac{\partial\varphi}{\partial H_s} = 0;$$

შევადარებთ რა ამას (37) განტოლებასთან, გვექნება

$$y_r = \frac{Q_s}{R_s} \frac{dH_s}{dx} + \frac{P_s}{R_s}.$$

აქედან ჩანს, რომ ერთ y-ს რამოდენიმე H შეესაბამება ყოველთვის, თუ განტოლება

$$\frac{Q_s}{R_s} \frac{dH_s}{dx} + \frac{P_s}{R_s} = \frac{Q_\sigma}{R_\sigma} \frac{dH_\sigma}{dx} + \frac{P_\sigma}{R_\sigma} \tag{39}$$

თავსებადია, როცა $s \neq \sigma$.

ასეთ შემთხვევაში y-სა და H-ს შორის არ იქნება ურთიერთ ცალსახა თანადობა და ვინაიდან ყოველ H-ს ერთი და მხოლოდ ერთი y შეესაბამება, ამიტომ $m \geqq n$-ზე.

ვნახოთ ახლა, თუ რა სახით მოხდება აღნიშნული შესაბამობა (y)-ებსა და (H)-ებს შორის. აზრის გარკვეულობისათვის ავიღოთ y_1 და ვთქვათ მას შეესაბამება (H) სიმრავლის p ელემენტი:

$$H^{(1)}{}_1,\ H^{(1)}{}_2, \ldots, H^{(1)}{}_p.$$

მივიღოთ ახლა

$$\frac{Q}{R}\,\frac{dH}{dx}+\frac{P}{R}=\theta(x, H).$$

მაშინ გვექნება

$$(40) \qquad \theta(x,\ H^{(1)}{}_1)=\theta(x,\ H^{(1)}{}_2)=\ldots=\theta(x,\ H^{(1)}{}_p);$$

მაგრამ ალგებრიდან ცნობილია, რომ ყოველი H ერთ რომელიმე სხვა H-ის რაციონალური ფუნქციაა. ვთქვათ,

$$(41) \qquad H^{(1)}{}_1=\omega_1(H_i),\ H^{(1)}{}_2=\omega_2(H_i), \ldots, H^{(1)}{}_p=\omega_p(H_i).$$

ამ ფორმულების ძალით მე-(40) ტოლობები ასეთ სახეს ღებულობენ:

$$(40') \qquad \theta(x,\ \omega_1(H_i))=\theta(x,\ \omega_2(H_i))=\ldots=\theta(x,\ \omega_p(H_i)).$$

მივცეთ i-ს ყველა მნიშვნელობა 1-დან m-მდე, მაშინ ტოლობათა აღნიშნული ჯგუფი სამართლიანი დარჩება ყოველთვის. მაგრამ რამდენ ასეთ ჯგუფს მივიღებთ?

ვინაიდან

$$y_1=\theta(x,\ \omega_1(H_i)), \text{ ხოლო } f(x,\ y_1)=0,$$

ამიტომ

$$f(x,\ \theta(x,\ \omega_1(H_i)))=0.$$

მაგრამ განტოლებას $f(x,\ y)=0$ აქვს n ფესვი: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. მაშასადამე, როცა i გაივლის ყველა მნიშვნელობას 1-დან m-მდე, მაშინ (40′) ტოლობათა სიდიდენი ტოლი დარჩებიან, მაგრამ ყოველი მათგანი მიიღებს მხოლოდ n მნიშვნელობას, რომლებიც არიან $y_1, y_2, \ldots, y_n$. ამრიგად, გვექნება ტოლობათა n ჯგუფი, თითოეული რომელთაგანი p ტოლ სიდიდეს შეიცავს და ამიტომ $n=\frac{m}{p}$; საიდანაც $m=np$ და გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია.

ამრიგად, (H) სიმრავლე შეგვიძლია, (40′) ფორმულათა ძალით, შემდეგ n ჯგუფად დავყოთ:

$$(42) \qquad \left\{\begin{array}{l} H^{(1)}{}_1,\ H^{(1)}{}_2, \ldots, H^{(1)}{}_p, \\ H^{(2)}{}_1,\ H^{(2)}{}_2, \ldots, H^{(2)}{}_p, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ H^{(n)}{}_1,\ H^{(n)}{}_2, \ldots, H^{(n)}{}_p. \end{array}\right.$$

თანახმად ზემოთ დამტკიცებულისა ყოველ y-ს ერთი და მხოლოდ ერთი სტრიქონის ყველა ელემენტი შეესაბამება. მივუწეროთ ახლა y-სა და შესაბამ სტრიქონს ერთი და იგივე მაჩვენებელი, მაშინ საზოგადოდ გვექნება:

$$y_k = \theta(x, H^{(k)}_1) = \theta(x, H^{(k)}_2) = \ldots = \theta(x, H^{(k)}_p), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

აღვნიშნოთ ერთი გარემოება: როცა (41) ტოლობებში i ღებულობს ყველა მნიშვნელობას 1-დან m-მდე, მაშინ მოხდება H სიდიდეთა გადანაცვლება. ამ გადანაცვლებათა ერთობლიობა შეადგენს ე. წ. გალუას ჯგუფს. მაგრამ რა სახით მოხდება ეს გადანაცვლება? აშკარაა, რომ (42) ტაბულის ერთი და იმავე სტრიქონის ელემენტები ან ერთმანეთს შორის გადაინაცვლებიან, ანდა ერთი რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტი მეორე სტრიქონისა და მხოლოდ მის ელემენტებთან გადაინაცვლებენ ადგილს. შეუძლებელია, რომ ერთ და იმავე სტრიქონის ორმა ელემენტმა სხვადასხვა სტრიქონის ელემენტთა ადგილები დაიკავონ. მართლაც, ვთქვათ $H^{(1)}_p$, $H^{(1)}_q$ გადადიან $H^{(i)}_r$, $H^{(k)}_s$ ელემენტების ადგილებზე შესაბამისად. მაშინ განტოლება

$$\theta(x, H^{(1)}_p) = \theta(x, H^{(1)}_q)$$

გადაიქცევა

$$\theta(x, H^{(i)}_r) = \theta(x, H^{(k)}_s)$$

განტოლებად, რაც შეუძლებელია.

განხილულ შემთხვევაში დაუყვანადი

$$\varphi(x, H) = 0 \tag{43}$$

განტოლება არაპირველყოფილია (imprimitive), ხოლო $\theta(x, H)$ მისი არაპირველყოფილი ელემენტია (imprimitives element)[1].

ავიღოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა უკანასკნელი განტოლება პირველყოფილია (primitive), ე. ი. როცა (39) ტოლობა მხოლოდ მაშინაა შესაძლო, თუ $\varsigma = \sigma$. თავისთავად ცხადია, რომ ასეთ შემთხვევაში (y)-ებსა და (H)-ებს შორის ურთიერთ ცალსახა თანადობა გვექნება და მაშინ $m = n$.

§ 78. აბელის მეორე თეორემა. ზემოდამტკიცებულ ტოლობაში

$$\int y\,dx = t + A \operatorname{Lg} u + B \operatorname{Lg} v + \cdots + K \operatorname{Lg} w$$

[1] იხილე Weber. Lehrbuch der Algebra. T. I Braunschweig, 1895. S. 483, 484.

ალგებრული t, u, $v,\ldots,w$ ფუნქციები ყოველთვის რაციონალურად გამოისახებიან x და y-ის მიმართ.

განვიხილოთ ჯერ უკანასკნელი შემთხვევა, როცა (43) განტოლება პირველყოფილია. ვინაიდან ასეთ შემთხვევაში $m=n$, ამიტომ იმავე მსჯელობით, როგორც აბელის პირველი თეორემისათვის, დავამტკიცებთ, რომ

$$H_1=P_0(x)+P_1(x)y_1+P_2(x)y_1^2+\cdots+P_{n-1}(x)y_1^{n-1},$$

სადაც P-ები წარმოადგენენ x-ის რაციონალურ ფუნქციებს. თუ H_1-ის ასეთ მნიშვნელობას ჩავსვამთ t, u, $v,\ldots,w$ ფუნქციებში, მივიღებთ ამ უკანასკნელი ფუნქციების რაციონალურ გამოსახულებებს x-ისა და y_1-ის მიმართ. აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელნი:

$$t=R_0(x,\ y_1),\ u=R_1(x,\ y_1),\ v=R_2(x,\ y_1),\ldots,w=R_\varkappa(x,\ y_1).$$

ამრიგად, გვაქვს:

$$\int y_1dx=R_0(x,\ y_1)+A\,\mathrm{Lg}\,R_1(x,\ y_1)+$$
$$+B\,\mathrm{Lg}\,B_2(x,\ y_1)+\cdots+KR_\varkappa(x,\ y_1)$$

და თეორემა დამტკიცებულია პირველ შემთხვევაში.

გადავიდეთ ახლა იმ შემთხვევაზე, როცა (43) განტოლება არაა პირველყოფილი. დავამტკიცოთ ამ შემთხვევაში შემდეგი

ლემა. ვთქვათ

$$\varphi(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots,\alpha_p)$$

არის თავის p ელემენტის სიმეტრიული ფუნქცია. აღვნიშნოთ

$$\varphi_1=\varphi(H^{(1)}{}_1,\ H^{(1)}{}_2,\ldots,H^{(1)}{}_p),$$
$$\varphi_2=\varphi(H^{(2)}{}_1,\ H^{(2)}{}_2,\ldots,H^{(2)}{}_p),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n=\varphi(H^{(n)}{}_1,\ H^{(n)}{}_2,\ldots,H^{(n)}{}_p).$$

მაშინ φ_1 არის რაციონალური ფუნქცია y_1-ისა, და, საზოგადოდ, φ_k არის რაციონალური ფუნქცია y_k-სი.

ამ ლემის დასამტკიცებლად შევადგინოთ შემდეგი ფუნქცია:

(44) $$\Psi(t)=(t-y_1)\,(t-y_2)\cdots$$
$$\cdots(t-y_n)\left(\frac{\varphi_1}{t-y_1}+\frac{\varphi_2}{t-y_2}+\cdots+\frac{\varphi_n}{t-y_n}\right).$$

აშკარაა, რომ t-ს მიმართ ეს ფუნქცია არის პოლინომი, რომლის კოეფიციენტები რაციონალური ფუნქციებია $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$-ის მიმართ. მოვახდინოთ ახლა H სიდიდეებზე გალუას რომელიმე გადანაცვლება; მაშინ რომელიმე φ ან სრულებით უცვლელი დარჩება, ანდა შესაბამ y-თან ერთნაირად გადაინაცვლებს ადგილს. ორივე შემთხვევაში ჯამი, რომელიც ფრჩხილებშია მოთავსებული, არ შეიცვლება. მაშასადამე, $\Psi(t)$ პოლინომის კოეფიციენტებიც უცვლელი რჩებიან, როცა H სიდიდეებზე გალუას რომელიმე გადანაცვლებას მოვახდენთ.

მაგრამ გალუას თეორიიდან ვიცით, რომ დაუყვანადი განტოლების ფესვთა ყოველი რაციონალური ფუნქცია, რომელიც უცვლელი რჩება გალუას ჯგუფის გადანაცვლების შემდგომ, თვითონ რაციონალური ფუნქციაა. მაშასადამე, $\Psi(t)$ ფუნქციის კოეფიციენტები რაციონალურ სიდიდეებს წარმოადგენენ.

ჩავსვათ ახლა (44) ტოლობის ორივე ნაწილში $y=y_1$. ვინაიდან $\Psi'(y_1) \neq 0$, ამიტომ გვექნება

$$\varphi_1 = \frac{\Psi(y_1)}{\Psi'(y_1)}.$$

მაგრამ Ψ, როგორც Ψ'-იც, თავის არგუმენტის რაციონალური ფუნქციაა და ამრიგად ლემა დამტკიცებულია.

გამოვიყენოთ ახლა ეს ლემა აბელის მეორე თეორემის დამტკიცებისათვის. (34) ტოლობაში H-ს მივცეთ p მნიშვნელობა: $H^{(1)}_1$, $H^{(1)}_2, \ldots, H^{(1)}_p$, რომლებიც ერთსა და იმავე $y=y_1$ შეესაბამებიან. ვთქვათ, t, u, $v, \ldots, w$-ს მნიშვნელობებია შესაბამისად

$$t_1,\ t_2, \ldots, t_p;\ u_1,\ u_2, \ldots, u_p; \ldots;\ w_1,\ w_2, \ldots, w_p.$$

შევკრიბოთ ყველა ამნაირად მიღებული ტოლობა; გვექნება:

$$p\int y_1 dx = t_1 + t_2 + \cdots + t_p + A\,\mathrm{Lg}\,(u_1 u_2 \cdots u_p) +$$
$$+ B\,\mathrm{Lg}\,(v_1 v_2 \cdots v_p) + \cdots + K\,\mathrm{Lg}\,(w_1 w_2 \cdots w_p).$$

მაგრამ $t_1 + t_2 + \cdots + t_p$, $u_1 u_2 \cdots u_p$, $v_1 v_2 \cdots v_p, \ldots, w_1 w_2 \cdots w_p$ არიან $H^{(1)}_1$, $H^{(1)}_2, \ldots, H^{(1)}_p$-ს სიმეტრიული ფუნქციები, ამიტომ ყოველი ამათგანი, ლემის ძალით, რაციონალურად გამოისახება y_2-ის მიმართ და, თუ ამ ფუნქციებს ავღნიშნავთ

$$pT(x,\ y_1),\ [U(x,\ y_1)]^p,\ [V(x,\ y_1)]^p, \ldots, [W(x,\ y_1)]^p,$$

გვექნება p-ზე გაყოფის შემდგომ

$$(45) \qquad \int y_1 dx = T(x, y_1) + A \operatorname{Lg} U(x, y_1) + $$
$$+ B \operatorname{Lg} V(x, y_1) + \ldots + K \operatorname{Lg} W(x, y_1)$$

და გამოთქმული თეორემა დამტკიცებულია.

§ 74. (27) სახის ინტეგრალის ერთი კერძო შემთხვევა. საინტერესოა ერთი კერძო შემთხვევა, როცა y არის რაციონალური ფუნქცია x-ისა და $\sqrt{X(x)}$, სადაც $X(x)$ რაციონალური ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში (27) ინტეგრალს აქვს სახე

$$\int R(x, \sqrt{X(x)})\, dx,$$

R რაციონალობის სიმბოლოა.

§ 36-ის ძალით

$$R(x, \sqrt{X(x)}) = G(x) + \frac{P(x)}{\sqrt{X(x)}},$$

სადაც $G(x)$ და $P(x)$ რაციონალური ფუნქციებია.

$G(x)$ ფუნქციის ინტეგრება ჩვეულებრივი წესით შესრულდება. დაგვრჩენია ამნაირად განვიხილოთ ინტეგრალი

$$(46) \qquad \int \frac{P(x)}{\sqrt{X(x)}}\, dx.$$

შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $P(x)$ და $X(x)$ პოლინომებია.

აქ გვაინტერესებს ზემოაღნიშნული ზოგადი თეორიის გამოყენება (46) სახის ინტეგრალისათვის. ამრიგად ვთქვათ, (46) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა. მაშინ ზოგად შემთხვევაში იგი (45) ფორმულის ძალით ასე წარმოგვიდგება:

$$(47) \quad \int \frac{P(x)}{\sqrt{X(x)}}\, dx = U + \frac{V}{\sqrt{X(x)}} + A \operatorname{Lg}\left[\alpha + \beta \sqrt{X(x)}\right]$$
$$+ B \operatorname{Lg}\left[\gamma + \delta \sqrt{X(x)}\right] + \ldots + K \operatorname{Lg}\left[\lambda + \mu \sqrt{X(x)}\right],$$

სადაც $U, V, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda, \mu$ არიან x-ის რაციონალური ფუნქციები, ხოლო $A, B, \ldots, K$—გარკვეული მუდმივებია.

გავაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობა და შემდეგ ორივე ნაწილი $\sqrt{X(x)}$-ზე გავამრავლოთ; მაშინ მარცხნით გვექნება რაციონალური ფუნქცია, ხოლო მარჯვნით — ალგებრული ირაციონალური, რომელშიც მხოლოდ ერთი $\sqrt{X(x)}$ ირაციონალობა შედის. აშკარაა, რომ ეს უკანასკნელი ირაციონალობა უნდა გაქრეს, აგრეთვე დამოუკიდებელი ერთმანეთისაგან ამიტომ, თუ აღნიშნულ ტოლობაში $\sqrt{X(x)}$ რადიკალს ნიშანს შევუცვლით, ეს ტოლობა ამით არ უნდა დაირღვეს.

ამრიგად გვექნება

$$-\int \frac{P(x)}{\sqrt{X(x)}}\,dx = U - \frac{V}{\sqrt{X}} + A\,\mathrm{Lg}\,[\alpha - \beta\sqrt{X}]$$

$$+B\,\mathrm{Lg}\,[\gamma - \delta\sqrt{X}] + \cdots + K\,\mathrm{Lg}\,[\lambda - \mu\sqrt{X}].$$

გამოვაკლოთ ახლა წევრობრივ (47) ტოლობიდან ეს უკანასკნელი, მაშინ მივიღებთ

$$2\int \frac{P(x)}{\sqrt{X(x)}}\,dx = \frac{2V}{\sqrt{X}} + A\,\mathrm{Lg}\,\frac{\alpha+\beta\sqrt{X}}{\alpha-\beta\sqrt{X}} + B\,\mathrm{Lg}\,\frac{\gamma+\delta\sqrt{X}}{\gamma-\delta\sqrt{X}}$$

$$+\cdots+K\,\mathrm{Lg}\,\frac{\lambda+\mu\sqrt{X}}{\lambda-\mu\sqrt{X}}.$$

ტოლობის ორივე ნაწილი გავყოთ 2-ზე და $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \ldots, \frac{K}{2}$ აღვნიშნოთ $A, B, \ldots, K$-თი, მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან საბოლოოდ გვექნება

$$\int \frac{P}{\sqrt{X(x)}}\,dx = \frac{V}{\sqrt{X}} + A\,\mathrm{Lg}\,\frac{\alpha+\beta\sqrt{X}}{\alpha-\beta\sqrt{X}} + B\,\mathrm{Lg}\,\frac{\gamma+\delta\sqrt{X}}{\gamma-\delta\sqrt{X}}$$

$$+\cdots+K\,\mathrm{Lg}\,\frac{\lambda+\mu\sqrt{X}}{\lambda-\mu\sqrt{X}}.$$

ასეთია, ტოლობის მარცხენა ნაწილის ინტეგრალის სახე ზოგად შემთხვევაში, როცა იგი ელემენტარული ფუნქციაა.

თავი III

ინტეგრება ტრანსცენდენტული ფუნქციებისა

I. გაცნობა საგანთან. ძირითადი ფორმულები

§ 75. **ინტეგრების ძირითადი მეთოდები.** ზემოთ დავინახეთ თუ რამდენად რთულია ალგებრულ ფუნქციათა ინტეგრების პრობლემა; არის მრავალი საკითხი, რომლებიც ჯერ კიდევ მოითხოვენ სრულსა და დაწვრილებით გაშუქებას. მაგრამ, თუ ეს ასეა ალგებრული ფუნქციებისათვის, ამ მხრივ ტრანსცენდენტული ფუნქციები გაცილებით ნაკლებად არიან შესწავლილი.

ინტეგრალი ტრანსცენდენტული ფუნქციიდან საზოგადოდ უმაღლესი ტრანსცენდენტულია; ინტეგრება სასრული სახით მხოლოდ მცირეოდენ კერძო შემთხვევაში შესრულდება.

წინამდებარე თავში განიხილება ტრანსცენდენტული ფუნქციების ინტეგრების რამოდენიმე მარტივი შემთხვევა, რომლებიც, მიუხედავად მათი კერძო ხასიათისა, მეტად მნიშვნელოვანი არიან მრავალი გამოყენებითი საკითხისათვის.

არსებობს ორი ძირითადი მეთოდი ასეთ ფუნქციათა ინტეგრებისათვის:

1° რაციონალიზაცია დიფერენციალისა, რომელიც ინტეგრალის ნიშნის ქვევით იმყოფება.

2° რედუქციის ხერხი.

ამ ორი მეთოდის გარდა ინტეგრება დაშლის ხერხით და კიდევ სხვა ხელოვნური ხერხითაც შესრულდება.

მაგრამ აშკარაა, რომ რთული ტრანსცენდენტული ფუნქციის რაციონალიზაცია, საზოგადოდ, შემადგენელ ელემენტარულ ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა რაციონალიზაციით შესრულდება; ამიტომ უპირველესად განვიხილოთ გარდაქმნის შესაფერისი ფორმულები ამ უკანასკნელი ფუნქციებისათვის.

§ 76. **ძირითადი ფორმულები.** ეს ფორმულები განსაკუთრებით ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისთვისაა შედგენილი.

1°. განვიხილოთ $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციები. აღვნიშნოთ

$$u=\sin x, \quad v=\cos x,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$u^2+v^2=1.$$

მაშასადამე, u და v რაციონალურად გამოისახებიან ელიფსური გარდაქმნის ფორმულების გამოყენებით (§ 29). ამგვარად გვექნება

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{1}$$

აქედან, ამას გარდა, გამოგვყავს

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

ცხადია, რომ ამ ფორმულათა ძალით $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$ ფუნქციებიც რაციონალურად გამოისახებიან t-ს მიმართ.

საჭიროა ახლა ვიცოდეთ t-ს მნიშვნელობა x-ის ფუნქციის სახით. (1) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$t=\frac{\sin x}{1+\cos x},$$

რომელიც, მარტივი გარდაქმნის შემდეგ ასე დაიწერება:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}; \tag{2}$$

ასეთია t-ს მნიშვნელობა x-ის ფუნქციის სახით. ესაა ძირითადი გარდაქმნა ტრანსცენდენტულ ფუნქციათა ინტეგრების თეორიაში.

2°. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ხშირად ან ლუწ ხარისხებში შედიან ანდა ნამრავლის სახით, რომლის მამრავლთა რიცხვი ლუწია. ასეთ შემთხვევაში შესაძლოა კიდევ სხვა ფორმულებითაც ვისარგებლოთ.

მართლაც, ცნობილია, რომ

$$\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin x\cos x=\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

მაშასადამე, თუ მოვახდენთ ჩასმას

$$t=\operatorname{tg} x,$$

გვექნება

(3) $$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\quad \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

მაგრამ აღნიშნულ შემთხვევაში ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მხოლოდ ეს უკანასკნელი ფუნქციები შევა არგუმენტთა სახით, ამიტომ მე-(3) ფორმულით მართლაც შესრულდება რაციონალიზაცია ასეთ შემთხვევაში.

ანალოგიურად, თუ მივიღებთ

$$t=\operatorname{cotg} x,$$

გვექნება

(3') $$\sin^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ dx=-\frac{dt}{1+t^2}.$$

3°. მეტად სასარგებლოა კიდევ გვახსოვდეს ანალიზის შემდეგი ფორმულები:

(4) $$\left\{\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\ \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\\ \qquad e^{ix}=\cos x+i\sin x.\end{array}\right.$$

II. $R(\sin x,\ \cos x)$ ფუნქციის ინტეგრება

§ 77. **რაციონალიზაციის მეთოდი.** პრობლემა, რომელიც აქაა დაყენებული, მდგომარეობს შემდეგში:

მოვძებნოთ ინტეგრალი

(5) $$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

სადაც R თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქციაა.

Rdx დიფერენციალის რაციონალიზაცია ყოველთვის ძირითადი მე-(2) ფორმულის გამოყენებით მოხდება; მართლაც, (1)-ფორმულათა ჩასმით გვექნება

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

და გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია.

ამრიგად, მე-(5) ინტეგრალი ყოველთვის ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

მაგრამ არსებობს სამი კერძო შემთხვევა, როცა Rdx დიფერენციალი უფრო მარტივ ჩასმათა საშუალებით გახდება რაციონალური. ეს შემთხვევები შემდეგია:

1^0. $R(\sin x,\ \cos x)$ კენტია $\cos x$-ის მიმართ, ე. ი.

$$R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x).$$

განვიხილოთ $R(u, v)$ ფუნქცია, სადაც $u=\sin x$, $v=\cos x$. ვინაიდან u და v დაკავშირებულია ერთმანეთშორის ტოლობით

$$u^2+v^2=1, \tag{6}$$

ამიტომ ზოგადი თეორიის თანახმად (§ 34), $R(u, v)$ შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$R(u, v)=\frac{f(u)}{F(u)}+\frac{P(u)}{Q(u)v}, \tag{7}$$

სადაც f, F, P, Q პოლინომებია u-ს მიმართ. ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი კენტია v-ს მიმართ.

მაგრამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიიღება მას შემდგომ, როცა $R(u,\ v)$ ფუნქციაში v-ს ყოველ ლუწ ხარისხს u-ს პოლინომის სახით წარმოვადგენთ მე-(6) ტოლობის ძალით, ამიტომ ეს მარჯვენა ნაწილიც კენტი უნდა იყოს v-ს მიმართ, ე. ი. გვექნება

$$\frac{f(u)}{F(u)}-\frac{P(u)}{Q(u)u}=-\frac{f(u)}{F(u)}-\frac{P(u)}{Q(u)v},$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\frac{f(u)}{F(u)}=0.$$

ამრიგად, 1^0 შემთხვევაში

$$R(u, v)=\frac{P(u)}{Q(u)v}.$$

მაგრამ

$$dx=\frac{du}{v}=-\frac{dv}{u},$$

ამიტომ მე-(6) და უკანასკნელ ტოლობების ძალით მივიღებთ

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int\frac{P(u)}{Q(u)(1-u^2)}\,du.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის ნიშნის ქვევით რაციონალური დიფერენციალი იმყოფება, ამიტომ შეგვიძლია შემდეგი დებულება გამოვთქვათ:

იმ შემთხვევაში, როცა $R(u, v)$ ფუნქცია კენტია v-ს მიმართ, მე-(5) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გამოსახულების რაციონალიზაცია მოხდება ჩასმით $u=\sin x$.

2°. $R(\sin x, \cos x)$ კენტია $\sin x$-ის მიმართ, ე. ი.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

სრულებით იმავე მსჯელობით, როგორც 1° შემთხვევაში, $R(u,v)$ ფუნქცია შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$R(u, v) = \frac{M(v)}{N(v)\,u},$$

სადაც $M(v)$ და $N(v)$ პოლინომებია.

ამრიგად გვექნება

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = -\int \frac{M(v)}{N(v)(1-v^2)}\,dv.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის ნიშნის ქვევით v-ს რაციონალური ფუნქცია იმყოფება. მაშასადამე, შეგვიძლია შემდეგი გამოვთქვათ:

იმ შემთხვევაში, როცა $R(u, v)$ კენტია u-ს მიმართ მე-(5) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გამოსახულების რაციონალიზაცია მოხდება ჩასმით $u=\cos x$.

3°. $R(\sin x, \cos x)$ არ იცვლება, როცა $\sin x$-სა და $\cos x$-ს ორივეს შევუცვლით ნიშანს, ე. ი.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

ეს ტოლობა შეგვიძლია კიდევ ასე დავწეროთ:

$$R(\sin(x+\pi), \cos(x+\pi)) = R(\sin x, \cos x),$$

მაშასადამე, R ფუნქცია პერიოდულია π პერიოდით.

დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში მე-(5) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით გამოსახულების რაციონალიზაცია მოხდება ჩასმით $t=\operatorname{tg} x$.

ამ მიზნით ვისარგებლოთ მე-(7) ტოლობით. აშკარაა, რომ იმავე მოსაზრებით, როგორც 1° შემთხვევაში, გვექნება

$$\frac{f(u)}{F(u)}+\frac{P(u)}{Q(u)v}=\frac{f(-u)}{F(-u)}-\frac{P(-u)}{Q(-u)v}.$$

მაგრამ, ვინაიდან v ირაციონალობას წარმოადგენს u-ს მიმართ, ამიტომ ეს ტოლობა შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\frac{f(u)}{F(u)}=\frac{f(-u)}{F(-u)}; \quad \frac{P(u)}{Q(u)}=-\frac{P(-u)}{Q(-u)}.$$

ეს იმას გვიჩვენებს, რომ პირველი ამ ფუნქციათაგანი ლუწია u-ს მიმართ, ხოლო მეორე—კენტი. შეგვიძლია ამიტომ ეს ორი ფუნქცია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{f(u)}{F(u)}=\varphi(u^2); \quad \frac{P(u)}{Q(u)}=u\psi(u^2),$$

სადაც φ და ψ რაციონალური ფუნქციებია.

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, გვექნება

$$R(u, v)=\varphi(u^2)+\frac{u}{v}\psi(u^2).$$

ანდა თუ ჩავსვამთ u-სა და v-ს მნიშვნელობებს, უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს:

$$R(\sin x, \cos x)=\varphi(\sin^2 x)+\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}\psi(\sin^2 x).$$

მაშასადამე,

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx=\int\left[\varphi(\sin^2 x)+\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}\psi(\sin^2 x)\right]dx.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალის ნიშნის ქვევით არგუმენტის სახით შედიან $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ და $\sin x\cos x$, ამიტომ § 76-ის ძალით რაციონალიზაცია მოხდება ჩასმით $t=\operatorname{tg} x$.

ამით გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია.

§ 78. **დაშლის ხერხი.** ერმიტმა თავის წიგნში Cours d'analyse mathématique მოიყვანა ახალი მეთოდი მე-(5) ინტეგრალის გამოსათვლელად. შინაარსი ამ მეთოდისა შემდეგია:

ვისარგებლოთ მე-(4) ფორმულებით და აღვნიშნოთ $t=e^{xi}$. მაშინ გვექნება

$$\sin x=\frac{t^2-1}{2it}, \quad \cos x=\frac{t^2+1}{2t}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი R ფუნქციაში, მაშინ იგი t-ს რაციონალურ ფუნქციად იქცევა. ეს უკანასკნელი აღვნიშნოთ $F(t)$-თი:

$$F(t)=R\left(\frac{t^2-1}{2it},\ \frac{t^2+1}{2t}\right).$$

თუ დაშალით $F(t)$ ფუნქციას § 13-ში აღნიშნული წესის მიხედვით, გვექნება

$$F(t)=\sum B_k t^k+\sum\frac{A_n}{(t-a)^n}, \tag{8}$$

სადაც a არის $F(t)$ ფუნქციის მნიშვნელის ერთი ფესვთაგანი, ხოლო A_n და B_n მუდმივი კოეფიციენტებია. ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველ ჯამში k მთელ უარყოფით მნიშვნელობასაც ღებულობს იმ შემთხვევაში, როცა $t=0$ არის $F(t)$ ფუნქციის მნიშვნელის ფესვი.

განვიხილოთ პირველად ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე ჯამი; ავიღოთ ამ უკანასკნელის ის ნაწილი, რომელიც a ფესვით განისაზღვრება. აღვნიშნოთ იგი $\varphi(t)$-ით:

$$\varphi(t)=\frac{A_1}{t-a}+\frac{A_2}{(t-a)^2}+\dots+\frac{A_n}{(t-a)^n}. \tag{9}$$

ვნახოთ, თუ როგორ წარმოგვიდგება $\varphi(t)$ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა საშუალებით. ვთქვათ,

$$a=e^{\alpha i},$$

მაშინ $\dfrac{1}{t-a}$ წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{t-a}=\frac{1}{e^{xi}-e^{\alpha i}}=-\frac{1}{2e^{xi}}\left[1-\frac{e^{xi}+e^{\alpha i}}{e^{xi}-e^{\alpha i}}\right];$$

მაგრამ

$$\frac{e^{xi}+e^{\alpha i}}{e^{xi}-e^{\alpha i}}=-i\operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right),$$

ამიტომ

$$\frac{1}{t-a}=-\frac{1}{2e^{xi}}\left[1+i\operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\right].$$

თუ ამას მე-(9) ტოლობაში ჩავსვამთ, მაშინ უკანასკნელი წარმოგვიდგება პოლინომის სახით $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x-\alpha}{2}\right)$-ის მიმართ:

$$\varphi(t)=C_0+C_1 \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+C_2 \operatorname{ctg}^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+\dots+ \tag{10}$$

$$+C_n \operatorname{ctg}^n\left(\frac{x-\alpha}{2}\right).$$

რადგანაც

$$\operatorname{ctg}^2 x=-1-\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx}, \quad \operatorname{ctg}^3 x=-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}\frac{d^2 \operatorname{ctg} x}{dx^2},\dots,$$

ამიტომ

$$\varphi(t)=a_0+a_1 \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+a_2\frac{d}{dx} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+\dots+$$

$$+a_n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right),$$

სადაც a_0, $a_1,\dots,a_n$ გარკვეული მუდმივი კოეფიციენტებია.

ანალოგიურ ტოლობებს შევადგენთ სხვა დანარჩენ b, $c,\dots,l$ ფესვებისათვის.

ამრიგად, თუ მე-(8) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე ჯამს აღვნიშნავთ $\Phi(t)$-თი, გვექნება:

$$\Phi(t)=a_0+a_1 \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+a_2\frac{d}{dx} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+\dots+$$

$$+a_n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)$$

$$+b_0+b_1 \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\beta}{2}\right)+b_2\frac{d}{dx} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\beta}{2}\right)+\dots+$$

$$+b_p\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\beta}{2}\right)$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+l_0+l_1 \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\lambda}{2}\right)+l_2\frac{d}{dx} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\lambda}{2}\right)+\dots+$$

$$+l_r\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\lambda}{2}\right).$$

n, $p,\dots,r$ არიან a, b, $c,\dots,l$ ფესვების ჯერადობათა მაჩვენებელნი. გავამრავლოთ $\Phi(t)$ ფუნქცია dx-ზე და მოვახდინოთ ინტეგრება. ინტეგრებას უშუალოდ შევასრულებთ იმ შემთხვევაში, როცა ინ-

ტეგრალის ნიშნის ქვევით წარმოებული იმყოფება; ერთადერთი ინტეგრალი, რომლის მოძებნაც დაგვჭირდება არის

$$\int \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) dx.$$

ასეთი ინტეგრალი უკვე გვქონდა განხილული (§ 11, მაგ. 9^0) და ვიცით, რომ მისი მნიშვნელობა არის $2\,\mathrm{Lg}\left[\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\right]$.

ახლა განვიხილოთ მე-(8) ტოლობის პირველი ჯამი $\sum B_k t^k$; აღვნიშნოთ იგი $\Psi(t)$-თი. რადგანაც

$$t^k = e^{kxi} = \cos kx + i \sin kx,$$

ამიტომ $\Psi(t)$ შემდეგი სახით წარმოგვიდგება:

$$\Psi(t) = C + \sum (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

სადაც α_k და β_k მუდმივი კოეფიციენტებია. ასეთი ჯამის ინტეგრება უშუალოდ შესრულდება.

მაგრამ

$$R(\sin x,\ \cos x) = \Phi(t) + \Psi(t);$$

ამიტომ

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx = \int \Phi(t)\, dx + \int \Psi(t) dx$$

და ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი ზემოაღნიშნული დაშლის ხერხის გამოყენებით ძალიან ადვილად მოიძებნება.

§ 79. შენიშვნები ინტეგრების შესახებ. 1^0. ვთქვათ, $R(\sin x,\ \cos x)$ არის პოლინომი არგუმენტთა მიმართ. მაშინ მე-(5) ინტეგრალი შემდეგ ინტეგრალთა ჯამის სახით წარმოგვიდგება:

$$\int \sin^m x dx, \quad \int \cos^n x dx, \quad \int \sin^m x \cos^n x dx,$$

სადაც m და n მთელი რიცხვებია.

ასეთ შემთხვევაში ინტეგრება შესრულდება, გარდა ორი ზემოაღნიშნული მეთოდისა, კიდევ სამი უკანასკნელი ინტეგრალის მოძებნის საშუალებით.

2^0. ხშირად ინტეგრალის ნიშნის ქვევით, გარდა $\sin x$, $\cos x$-ისა, იმყოფება აგრეთვე ჯერადი რკალების სინუსი და კოსინუსი: $\sin 2x$,

$\sin 3x, \ldots, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$ ასეთ შემთხვევაში უნდა გამოვსახოთ ეს უკანასკნელი ფუნქციები $\sin x$-ისა და $\cos x$-ით შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x,$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \ldots$$
$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{2!} \sin^2 x \cos^{n-2} x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \ldots$$

ვინაიდან ამ ტოლობათა მარჯვნით პოლინომებია $\sin x$-ისა და $\cos x$-ის მიმართ, ამიტომ აღნიშნული გარდაქმნა მიგვიყვანს მე-(5) სახის ინტეგრალზე.

არის კიდევ ისეთი შემთხვევაც, როცა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით იმყოფება ფუნქციები $\sin ax$, $\sin bx, \ldots; \cos a_1 x$, $\cos b_1 x, \ldots$, სადაც a, $b, \ldots, a_1$, $b_1, \ldots$ რაციონალური რიცხვებია. ვთქვათ, ამ უკანასკნელ რიცხვთა საერთო მნიშვნელი არის λ, მაშინ $a\lambda$, $b\lambda, \ldots, a_1\lambda$, $b_1\lambda, \ldots$ მთელ რიცხვებს წარმოადგენენ. მაშასადამე, თუ მოვახდენთ ჩასმას $t = \lambda x$, ზემოაღნიშნულ შემთხვევაზე მივალთ.

§ 80. მაგალითები.

1°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

ამ შემთხვევაში, თუ გამოვიყენებთ (1) ძირითად ფორმულებს, გვექნება

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Lg} t + C.$$

ჩავსვათ ახლა t-ს მნიშვნელობა მე-(2) ფორმულის მიხედვით. მაშინ საბოლოოდ გვექნება

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \operatorname{Lg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C.$$

შეგვიძლია ეს ინტეგრალი სულ სხვა მოსაზრებითაც გამოვთვალოთ. მართლაც, ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია არის კენტი $\sin x$-ის მიმართ, ამიტომ ზოგადი თეორიის თანახმად გამოვიყენოთ ჩასმა $v=\cos x$.

ეს კი გვაძლევს

$$\int\frac{dx}{\sin x}=-\int\frac{dv}{1-v^2}=\operatorname{Lg}\frac{1+v}{1-v}+C.$$

დავუბრუნდეთ ისევ x-ს, მივიღებთ იმავე შედეგს:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\operatorname{Lg}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+C=\operatorname{Lg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

2^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx.$$

რადგანაც ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია კენტია $\cos x$-ის მიმართ, ამიტომ $u=\sin x$ გარდაქმნის ძალით გვექნება:

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx=\int\frac{1-u^2}{u^4}\,du=-\frac{1}{3u^3}+\frac{1}{u}+C,$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ x-ს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C.$$

3^0. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{A\sin^2 x+B\sin x\cos x+C\cos^2 x+D},$$

სადაც A, B, C, D მუდმივი კოეფიციენტებია. ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია არ იცვლის ნიშანს $\sin x$-სა და $\cos x$-ის ნიშანთა შეცვლით, ე. ი. აქ ადგილი აქვს 3^0 შემთხვევას (§ 77). ამიტომ გამოვიყენოთ ჩასმა $t=\operatorname{tg} x$, რომელიც მე-(3) ფორმულათა ძალით მოგვცემს:

$$J=\int\frac{dt}{At^2+Bt+C+D(1+t^2)}=\int\frac{dt}{(A+D)\,t^2+Bt+C+D}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი არის მე-4^0 სახისა (§ 11) და ამიტომ J ინტეგრალიც მოძებნილი იქნება.

მაგალითად, როცა $D=0$ და $\Delta=B^2-4AC>0$, გვექნება

$$\int\frac{dx}{A\sin^2 x+B\sin x\cos x+C\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{Lg}\,\frac{2A\sin x+(B-\sqrt{\Delta})\cos x}{\sqrt{A\sin^2 x+B\sin x\cos x+C\cos^2 x}}.$$

4°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{1+p\cos x},$$

სადაც p პარამეტრია.

აქ წარმოგვიდგება სამი შემთხვევა: 1) $|p|<1$, 2) $|p|>1$, 3) $|p|=1$.

პირველსა და მეორე შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ მხოლოდ ზოგადი გარდაქმნა:

$$t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

ვინაიდან ზემოაღნიშნული სამი კერძო გარდაქმნა აქ არ გამოგვადგება. 3) შემთხვევაში ინტეგრალი მარტივად მოიძებნება.

უკანასკნელ ფორმულათა ძალით გვექნება

$$\int\frac{dx}{1+p\cos x}=2\int\frac{dt}{(1+p)+(1-p)\,t^2}. \tag{11}$$

1) შემთხვევაში $1+p$ და $1-p$ ორივე დადებითია და ამიტომ § 11-ის 2° მაგალითის ძალით უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$\int\frac{dx}{1+p\cos x}=2\int\frac{dt}{(\sqrt{1+p})^2+(\sqrt{1-p})^2\,t^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-p}{1+p}}\,t\right]+C.$$

დავუბრუნდეთ ისევ x-ს, მაშინ საბოლოოდ გვექნება

$$\int\frac{dx}{1+p\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-p}{1+p}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right]+C.$$

2) შემთხვევაში $(1+p)$-სა და $(1-p)$-ს საწინააღმდეგო ნიშნები აქვთ. ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $1+p$ დადებითია. მართლაც, თუ $1+p$ უარყოფითია, საკმარისია

(11) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მრიცხველსა და მნიშვნელს ნიშანი შევუცვალოთ.

ამრიგად, 2) შემთხვევაში ჩვენს ინტეგრალს შეგვიძლია მივცეთ § 11-ის 3^0_2 ინტეგრალის სახე:

$$\int \frac{dx}{1+p\cos x} = 2\int \frac{dt}{(\sqrt{p+1})^2-(\sqrt{p-1})^2\, t^2}$$

და ამიტომ

$$\int \frac{dx}{1+p\cos x} = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \operatorname{Lg} \frac{\sqrt{p+1}+\sqrt{p-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{p+1}-\sqrt{p-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \operatorname{Lg} \frac{p+\cos x+\sqrt{p^2-1}\sin x}{1+p\cos x} + C.$$

3) შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი ჩვენი ინტეგრალი ღებულობს ორ სახეს:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}} = -\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + C.$$

განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}.$$

არსებობს ისეთი გარდაქმნა, რომლითაც ეს ინტეგრალი ზემოაღნიშნულ სახეს ღებულობს. მართლაც, თუ ვიგულისხმებთ

$$b=r\cos\varphi, \quad c=r\sin\varphi,$$

გვექნება

$$a+b\cos x+c\sin x=a+r\cos(x-\varphi).$$

მაშასადამე, თუ აღვნიშნავთ $x-\varphi=z$ და $\frac{r}{a}=p$, გვექნება

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1+p\cos z}.$$

5°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{\sin 2x}{(\cos x - \cos \alpha)^2}\, dx.$$

ეს ინტეგრალი ერმიტის მეთოდით ამოვხსნათ.

მნიშვნელს აქვს ორჯერადი ფესვი $x=\alpha$ და ორჯერადი მეორე ფესვიც $x=-\alpha$. მაშასადამე, ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია შემდეგნაირად დაიშლება:

$$\frac{\sin 2x}{(\cos x - \cos \alpha)^2} = C + a_0 \operatorname{cotg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) + b_0 \operatorname{cotg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) + a_1 \frac{d}{dx} \operatorname{cotg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) + b_1 \frac{d}{dx} \operatorname{cotg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right). \tag{12}$$

მოვძებნოთ a_1, b_1 კოეფიციენტები; ამისათვის ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $(x+\alpha)^2$-ზე. უკანასკნელი ტოლობა გამრავლების შემდეგ ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{\sin 2x}{\sin^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\frac{(x+\alpha)^2}{4}}{\sin^2\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)} =$$

$$= C(x+\alpha)^2 + a_0 (x+\alpha)^2 \operatorname{cotg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) +$$

$$+ b_0 (x+\alpha)^2 \operatorname{cotg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) -$$

$$-2a_1 \frac{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)} - \frac{b_1}{2} \frac{(x+\alpha)^2}{\sin^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}.$$

გადავიდეთ ახლა ზღვრისაკენ, როცა x მიისწრაფვის α-საკენ. გვექნება

$$-2 \operatorname{cotg} \alpha = -2a_1,$$

საიდანაც

$$a_1 = \operatorname{cotg} \alpha.$$

ანალოგიურად, თუ იმავე მე-(14) ტოლობის ორივე ნაწილს $(x-\alpha)^2$-ზე გავამრავლებთ და შემდეგ ზღვრისაკენ გადავალთ, როცა x მიისწრაფვის α-საკენ, მივიღებთ

$$b_1 = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

ჩავსვათ ახლა a_1-სა და b_1-ის მიღებული მნიშვნელობები მე-(12) ტოლობაში, გვექნება

$$\frac{\sin 2x}{(\cos x - \cos\alpha)^2} = C + a_0 \operatorname{cotg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) + b_0 \operatorname{cotg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)$$
$$+ \operatorname{cotg}\alpha \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\right].$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მესამე წევრი მარცხნივ გადმოვიტანოთ, მაშინ, მარტივი გარდაქმნის შემდეგ, ეს ტოლობა ასე დაიწერება:

$$\frac{2\sin x}{\cos x - \cos\alpha} = C + a_0 \operatorname{cotg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) + b_0 \operatorname{cotg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right).$$

მოვძებნოთ a_0, b_0 კოეფიციენტები.

გავამრავლოთ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი $(x+\alpha)$-ზე და გადავიდეთ ზღვრისაკენ, როცა x მიისწრაფვის $-\alpha$-საკენ, გვექნება

$$a_0 = -1.$$

ანალოგიურად, იმავე ტოლობის $(x-\alpha)$-ზე გამრავლებით და ზღვრისაკენ გადასვლით მივიღებთ

$$b_0 = -1.$$

ჩავსვათ ახლა a_0, b_0, a_1, b_1-ის მნიშვნელობები მე-(12) ტოლობაში. ზღვრისაკენ გადასვლით, როცა x მიისწრაფვის 0-საკენ, გვექნება $C=0$. ამრიგად,

$$\frac{\sin 2x}{(\cos x - \cos\alpha)^2} = -\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\right]$$
$$+ \operatorname{cotg}\alpha \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\right].$$

გავამრავლოთ ტოლობის ორივე ნაწილი dx-ზე და მოვახდინოთ ინტეგრება, მაშინ საბოლოოდ გვექნება

$$\int \frac{\sin 2x}{(\cos x - \cos\alpha)^2}\,dx = \operatorname{Lg}(\cos x - \cos\alpha)^{-2} + \frac{2\cos\alpha}{\cos x - \cos\alpha} + C.$$

III. ინტეგრება $\sin^m x \cos^n x dx$ დიფერენციალისა

§ 81. **შემთხვევა სასრული სახით ინტეგრებისა.** დავაყენოთ შემდეგი პრობლემა:

მოვძებნოთ ინტეგრალი

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \tag{13}$$

სადაც m და n რაციონალური რიცხვებია.

ცხადია, ეს ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა ყოველთვის, როცა m და n ორივე მთელი რიცხვებია. ამას გარდა. არის კიდევ სამი სხვა შემთხვევა, როცა აღებული ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. მართლაც, მოვახდინოთ ჩასმა

$$t = \sin^2 x.$$

აქედან

$$\cos^2 x = 1 - t, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}.$$

მაშასადამე,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} \int t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

ამრიგად, ზემოაღნიშნული გარდაქმნით $\sin^m x \cos^n x dx$-მა მიიღო დიფერენციალური ბინომის სახე; ამიტომ § 54-ში გამოთქმული დებულების ძალით შეგვიძლია ვთქვათ. რომ მე-(13) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა ყოველთვის, თუ შემდეგი რიცხვებიდან

$$\frac{m+1}{2}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{m+n}{2}$$

ერთი მაინც მთელია. მაგრამ ეს იმას ნიშნავს, რომ m ან n კენტი რიცხვი უნდა იყოს, ანდა $(m+n)$—ლუწი. ესაა ერთადერთი შემთხვევა, როცა მე-(13) ინტეგრალი სასრული სახით ამოიხსნება. ყოველ სხვა შემთხვევაში ეს ინტეგრალი უმაღლესი ტრანსცენდენტულია.

სასრული სახით ინტეგრების შემთხვევაში ინტეგრება შესაძლოა დიფერენციალური ბინომის თეორიის მიხედვით შესრულდეს. მაგრამ არსებობს სხვა შესაძლებლობა კიდევ: ესაა მე-(13) ინტეგრალისათვის შესაფერისი რედუქციის ფორმულების გამოყენება. ასეთ ფორმულათა შედგენა ჩვენს უახლოეს მიზანს წარმოადგენს.

§ 82. **რედუქციის ფორმულები.** აღვნიშნოთ მე-(13) ინტეგრალი $I_{m,n}$-ით. ეს ინტეგრალი ორნაირად დარდავქმნათ ნაწილობითი ინტეგრების წესის მახედვით.

ა) მივიჩნიოთ $u=\sin^{m-1}x$, $dv=\cos^n x\sin x dx$,
საიდანაც

$$v=-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა გვაძლევს:

$$\text{I}\qquad I_{m,n}=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,\,n+2}.$$

ესაა რედუქციის პირველი ფორმულა.

ამ ფორმულიდან შეგვიძლია კიდევ ორი სხვა ფორმულა გამოვიყვანოთ:

1°. ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მოვახდინოთ ასეთი გარდაქმნა:

$$\cos^{n+2}x=\cos^n x-\cos^n x\sin^2 x;$$

. როდესაც ამას I ფორმულაში ჩავსვამთ, გვექნება:

$$I_{m,n}=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,\,n}-\frac{m-1}{n+1}I_{m,\,n}.$$

ამოვხსნით რა უკანასკნელ ტოლობას $I_{m,n}$-ის მიმართ, მივიღებთ

$$\text{II}\qquad I_{m,n}=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,\,n}.$$

ასეთია რედუქციის მეორე ფორმულა.

2°. უკანასკნელ ფორმულაში m-ის ნაცვლად ტოლობის ორივე ნაწილში დავწეროთ $m+2$, მაშინ ეს ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$I_{m+2,n}=-\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+n+2}+\frac{m+1}{m+n+2}I_{m,n};$$

აქედან

$$\text{III}\qquad I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+1}+\frac{m+n+2}{m+1}I_{m+2,n}.$$

ესაა რედუქციის მესამე ფორმულა.

ბ) მივიჩნიოთ ახლა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით:

$$u=\cos^{n-1}x,\ dv=\sin^m x\cos x dx,\ \text{საიდანაც}\ v=\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}.$$

ნაწილობითი ინტეგრება გვაძლევს:

IV $$I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}I_{m+2,\,n-2}.$$

ასეთია რედუქციის მეოთხე ფორმულა.

აქედან ორი სხვა ფორმულა გამომდინარეობს კიდევ.

1°. ტოლობის მარჯვენა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$\sin^{m+2}x=\sin^m x-\sin^m x\cos^2 x,$$

რომლის ძალითაც IV ფორმულა ასე დაიწერება:

$$I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}I_{m,\,n-2}-\frac{n-1}{m+1}I_{m,\,n}.$$

აქედან

V $$I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}.$$

ესაა რედუქციის მეხუთე ფორმულა.

2°. ჩავსვათ აქ n-ის მაგიერ $n+2$, გვექნება

$$I_{m,\,n+2}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+n+2}+\frac{n+1}{m+n+2}I_{m,\,n}.$$

აქედან

VI $$I_{m,\,n}=-\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}I_{m,\,n+2}.$$

ესაა რედუქციის მეექვსე ფორმულა.

§ 83. რედუქციის ფორმულების შედეგები. ზემოაღნიშნული რედუქციის ფორმულებიდან შედეგის სახით რამოდენიმე ახალი რედუქციის ფორმულა გამომდინარეობს.

1°. ვთქვათ $m+n=0$; განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა: $m>0$, $m<0$.

პირველ შემთხვევაში ვისარგებლოთ რედუქციის I ფორმულით, ხოლო მეორეში—IV-ით. ეს ფორმულები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\int \mathrm{tg}^m x dx=\frac{\mathrm{tg}^{m-1}x}{m-1}-\int \mathrm{tg}^{m-2}x dx, \tag{14}$$

$$\int \mathrm{cotg}^n x dx=-\frac{\mathrm{cotg}^{n-1}x}{n-1}-\int \mathrm{cotg}^{n-2}x dx. \tag{15}$$

ასეთია ზემოაღნიშნული ფორმულების პირველი შედეგი.

2°. ვთქვათ $n=0$; მაშინ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება: $m>0$, $m<0$, რომელთათვისაც ავიღოთ II და III ფორმულები. ესენი შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x dx, \tag{16}$$

$$\int \sin^m x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos x}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x dx. \tag{17}$$

3°. ვთქვათ $m=0$; ორ შესაძლო შემთხვევაში $n>0$, $n<0$ ავიღოთ V და VI ფორმულები, რომლებიც შემდეგი სახის გახდებიან:

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx, \tag{18}$$

$$\int \cos^n x dx = -\frac{\sin x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{n+2}{n+1}\int \cos^{n+2} x dx. \tag{19}$$

ასეთია მესამე შედეგი.

ახლა ისმის კითხვა რედუქციის ზემოაღნიშნულ ფორმულათა გამოყენების შესაძლებლობის შესახებ და შემდეგი § სწორედ ამას ეხება.

§ 84. რედუქციის ფორმულების გამოყენება. აქ ოთხი შემთხვევა წარმოგვიდგება: 1° m და n დადებითია; 2° m და n უარყოფითია; 3° m დადებითია, n უარყოფითია; 4° m უარყოფითია, n დადებითია.

1° შემთხვევაში ვისარგებლოთ II ფორმულით; მისი მიმდევრობითი გამოყენება m-ს დაიყვანს 0-მდე ან 1-მდე იმისდა მიხედვით, m ლუწია, თუ კენტი. ამრიგად, მივიღებთ ინტეგრალებს:

$$\int \cos^n x dx, \quad \int \sin x \cos^n x dx,$$

რომელთაგან პირველი მოიძებნება მე-(18) რედუქციის ფორმულის გამოყენებით. რაც შეეხება მეორეს, იგი უშუალოდ მოიძებნება:

$$\int \sin x \cos^n x dx = -\int \cos^n x d \cos x = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$$

2° შემთხვევაში გამოვიდეთ III ფორმულიდან, რომლის მიმდევრობითი გამოყენება m-ს დაიყვანს 0-მდე, როცა m ლუწია, ხოლო 1-მდე, როცა იგი კენტია. ამრიგად, მივიღებთ ინტეგრალებს

$$\int \cos^n x dx, \quad \int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx.$$

პირველი ინტეგრალის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (19) ფორმულით, რომლის მიმდევრობითი გამოყენება n-ს დაიყვანს 0-მდე, ან—1-მდე, იმისდა მიხედვით არის n ლუწი თუ კენტი. მაშასადამე, მივიღებთ უმარტივეს ინტეგრალებს:

$$\int dx = x + C, \int \frac{dx}{\cos x} = \mathrm{Lg}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + C.$$

რაც შეეხება მეორე ინტეგრალს, მისთვის უნდა გამოვიდეთ რედუქციის VI ფორმულიდან, რაც დაბოლოს მოგვცემს ინტეგრალებს:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \mathrm{Lg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C, \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \mathrm{Lg}\,(\mathrm{tg}\,x) + C.$$

3° შემთხვევა. აქ წარმოგვიდგება სამი შემთხვევა: $m+n>0$, $m+n<0$, $m+n=0$.

ა) ვთქვათ $m+n>0$, რედუქციის I ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება n-ს დაიყვანს 0-მდე ან—1-მდე, ხოლო m-ს — ერთ გარკვეულ დადებით k რიცხვამდე; ამგვარად მივიღებთ ინტეგრალებს:

$$\int \sin^k x dx, \quad \int \frac{\sin^k x}{\cos x} dx.$$

პირველი ამ ინტეგრალთაგანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ მე-(16) ფორმულით, რომლის გამოყენება დაბოლოს მოგვცემს უმარტივეს ინტეგრალებს:

$$\int dx, \int \sin x dx.$$

რაც შეეხება მეორე ინტეგრალს, მისთვის ავიღოთ II ფორმულა, რომელიც k-ს დაიყვანს 0-მდე ან 1-მდე; მაშასადამე, დაბოლოს გვექნება ინტეგრალები:

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \mathrm{tg}\, x dx.$$

ამ უკანასკნელი ინტეგრალების გამოთვლა კი ცნობილია.

ბ) ვთქვათ $m+n<0$; მაშინ I ფორმულის გამოყენებით m დაიყვანება 0-მდე ან 1-მდე, ხოლო n ერთ გარკვეულ უარყოფით $-k$ რიცხვამდე. პირველ შემთხვევაში გვექნება ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\cos^k x},$$

რომელიც რედუქციის (21) ფორმულის საშუალებით მოიძებნება. მეორე შემთხვევაში მივიღებთ ინტეგრალს:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^k x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^k x} = -\frac{1}{(k-1)\cos^{k-1} x} + C, \text{ როცა } k \neq 1;$$

ხოლო, როცა $k=1$, გვექნება:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\operatorname{Lg}(\cos x) + C.$$

გ) ვთქვათ $m+n=0$; მაშინ უნდა ავიღოთ მე-(16) ფორმულა, რომლის მიმდევრობითი გამოყენებით მივიღებთ უმარტივეს ინტეგრალებს:

$$\int dx, \int \operatorname{tg} x dx.$$

4° შემთხვევა სიმეტრიულია ზემოაღნიშნულთან. აქ, როგორც წინათ, სამი შემთხვევა წარმოგვიდგება: $m+n>0$, $m+n<0$, $m+n=0$. იმავე მსჯელობით, როგორც ზემოთ, დასასრულს მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალებს:

$$\int \cos^k x dx, \int \frac{\cos^k x}{\sin x}\,dx, \int \frac{dx}{\sin^k x}, \int \operatorname{cotg}^k x dx,$$

k დადებითი რიცხვია.

ამ ინტეგრალთაგან პირველი უკვე გვქონდა განხილული; მეორისათვის ავიღოთ რედუქციის V ფორმულა, რომლითაც იგი დაიყვანება ერთ რომელიმე შემდეგ ინტეგრალებამდე:

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx.$$

რაც შეეხება ახლა მესამე ინტეგრალს, მისთვის გამოვიყენოთ რედუქციის მე-(17) ფორმულა, რომელიც დაბოლოს მოგვცემს ცნობილ ინტეგრალებს:

$$\int dx, \int \frac{dx}{\sin x}.$$

უკანასკნელად მეოთხე ინტეგრალისათვის უნდა ავიღოთ რედუქციის მე-(15) ფორმულა, რომლითაც ეს ინტეგრალი დაიყვანება შემდეგ ინტეგრალებამდე:

$$\int dx, \int \operatorname{cotg} x dx.$$

§ 85. ინტეგრების უმარტივესი შემთხვევები. რედუქციის ექვსი ფორმულა, როგორც დავინახეთ, ყველა შემთხვევაში წყვეტს ძირითად პრობლემას. მაგრამ არის სამი შემთხვევა, როცა ინტეგრება მეტად ადვილად შესრულდება. ეს შემთხვევები შემდეგია:

1°. m *დადებითი კენტი რიცხვია.* ვთქვათ $m=2k+1$; მაშინ $I_{m,n}$-ს ექნება სახე:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx.$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია კენტია $\sin x$-ის მიმართ, ამიტომ, ზოგადი თეორიის თანახმად, მოვახდინოთ ჩასმა

$$v=\cos x,$$

რაც მოგვცემს

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int (1-v^2)^k v^n dv.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი დაშლის წესით მოიძებნება.

2°. n *დადებითი კენტი რიცხვია.* ვთქვათ $n=2k+1$; $I_{m,n}$-ს ექნება სახე

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx.$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია კენტია $\cos x$-ის მიმართ, ამიტომ მოვახდინოთ ჩასმა

$$u=\sin x,$$

რაც მოგვცემს:

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int u^m (1-u^2)^k dx.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალის ნიშნის ქვევით დაშლის შემდგომ პოლინომი გვექნება u-ს მიმართ.

3°. $m+n$ *უარყოფითი ლუწი რიცხვია.* ვთქვათ $m+n=-2k$; $I_{m,n}$ ასე წარმოვადგინოთ:

$$I_{m,n}=\int \cos^{m+n} x \operatorname{tg}^m x dx = \int \frac{\operatorname{tg}^m x}{\cos^{2k} x} dx, \tag{20}$$

რაც გვიჩვენებს, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფ ფუნქციას π პერიოდი აქვს, მაშასადამე, უნდა გამოვიყენოთ ჩასმა

$$t = \operatorname{tg} x;$$

(20) ტოლობისა და მე-(3) ფორმულათა ძალით გვექნება:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1+t^2)^{k-1} dt.$$

მარჯვენა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით დაშლის შემდგომ პოლინომი გვექნება და ამიტომ ინტეგრება უშუალოდ მოხდება.

კერძოდ, როცა $k=0$, უკანასკნელი ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int \operatorname{tg}^m x dx = \int \frac{t^m}{1+t^2} dt.$$

ტოლობის მარჯვენა ინტეგრალის გამოსათვლელად t^m უნდა გავყოთ $(1+t^2)$-ზე და შემდეგ მოვახდინოთ ინტეგრება. მაგრამ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს ინტეგრალი სრულებით იმავე სახის შედეგს მოგვცემს, როგორსაც რედუქციის მე-(14) ფორმულა იძლევა.

IV. ინტეგრება $\sin^m x dx$ და $\cos^m x dx$ დიფერენციალისა

§ 86. **საკითხის დაყენება.** აქ განიხილება ზემოაღნიშნული ზოგადი პრობლემის კერძო შემთხვევა, როცა $m=0$, ანდა $n=0$, ე. ი. ინტეგრალები:

$$\int \sin^m x dx, \quad \int \cos^n x dx. \tag{21}$$

ამ უკანასკნელთათვის უკვე გვქონდა მიღებული რედუქციის მე-(16), (17), (18), (19) ფორმულები. ფუნქციები, რომელნიც ამ ინტეგრალებს გამოსახავენ, უკანასკნელ ფორმულათა ძალით წარმოგვიდგებიან $\sin x$-ისა და $\cos x$-ის ხარისხთა ჯამის სახით შესაბამისად.

მაგრამ ხშირად საჭირო ხდება ამ ფუნქციებს კიდევ სხვა სახეც მივცეთ და ამისათვის შესაფერისი გარდაქმნა უნდა მოვახდინოთ. წინამდებარე თავის მიზანს, ასეთ გარდაქმნათა შესრულება და ინტეგრალის შესაფერისი მნიშვნელობის მოძებნა შეადგენს.

§ 87. **$\sin^m x$, $\cos^n x$-ის დაშლა.** გამოვიდეთ შემდეგი ტოლობიდან:

$$(2\cos x)^n = (e^{xi} + e^{-xi})^n.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილი დავშალოთ ნიუტონის ბინომის წესით. მე-(4) ფორმულებისა და მუავრის ფორმულის ძალით ეს დაშლა ასე წარმოგვიდგება:

$$2^n \cos^n x = (\cos nx + i \sin nx) + n [\cos (n-2) x + i \sin (n-2) x]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} [\cos (n-4) x + i \sin (n-4) x] + \dots + (\cos nx - i \sin nx).$$

აქ ტოლობის მარცხენა ნაწილი ნამდვილ სიდიდეს წარმოადგენს, ამიტომ წარმოსახვით წევრთა ჯამი მარჯვენა ნაწილში უნდა მოისპოს, ე. ი. თუ ეს წევრები ჩამოვაშორეთ, უკანასკნელი იგივეობა არ დაირღვევა.

ამრიგად გვექნება:

(22)
$$2^n \cos^n x = 2 \cos nx + 2n \cos (n-2) x +$$
$$+ 2 \frac{n(n-1)}{1 . 2} \cos (n-4) x + \dots + \frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2},$$

როცა n ლუწია, ხოლო

(23)
$$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx + n \cos (n-2) x +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 . 2} \cos (n-4) x + \dots + \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \cos x,$$

როცა n კენტია.

ჩავსვათ ახლა ამ ფორმულებში x-ის მაგიერ $x + \frac{\pi}{2}$. როცა p ლუწია,

$$\cos \left(px + p \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{p}{2}} \cos px$$

და, თუ p კენტია,

$$\cos \left(px + p \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \sin px,$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, (24), (25) ფორმულებიდან გამოგვყავს:

$$(24)\qquad (-1)^{\frac{n}{2}}2^n\sin^n x=2\cos nx-2n\cos(n-2)x+$$

$$+2\frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)x+\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2},$$

როცა n ლუწია,

$$(25)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\sin^n x=\sin nx-n\sin(n-2)x+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\sin(n-4)x+\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}\sin x,$$

როცა n კენტია.

ასეთია $\sin^n x$-ისა და $\cos^n x$-ის დაშლის ფორმულები. ვისარგებლოთ ახლა ამ ფორმულებით (21) ინტეგრალების მოსაძებნად.

§ 88. (21) ინტეგრალების მოძებნა დაშლის ზემოაღნიშნულ ფორმულების საშუალებით. მივიღოთ (22) და (24) ფორმულებში $n=2k$, ხოლო (23) და (25)-ში $n=2k+1$. გავამრავლოთ ეს ტოლობები dx-ზე და მოვახდინოთ ინტეგრება; გვექნება:

$$\int\cos^{2k}x\,dx=\frac{1}{2^{2k-1}}\left[\frac{\sin 2kx}{2k}+2k\frac{\sin(2k-2)x}{2k-2}\right.$$

$$\left.+\frac{2k(2k-1)}{1.2}\,\frac{\sin(2k-4)x}{2k-4}+\ldots+\frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}\,x\right]+C,$$

$$\int\cos^{2k+1}x\,dx=\frac{1}{2^{2k}}\left[\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}+(2k+1)\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\right.$$

$$+\frac{(2k+1)2k}{1.2}\,\frac{\sin(2k-3)x}{2k-3}+\ldots+$$

$$\left.+\frac{(2k+1)2k\ldots(k+2)}{1.2\ldots k}\sin x\right]+C.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\int \sin^{2k} x dx = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\left[\frac{\sin 2kx}{2k} - 2k\frac{\sin(2k-2)x}{2k-2} + \frac{2k(2k-1)}{1.2}\frac{\sin(2k-4)x}{2k-4} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^k \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots k}\frac{x}{2}\right] + C,$$

$$\int \sin^{2k+1} x dx = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}}\left[\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} - (2k+1)\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^k \frac{(2k+1)2k\ldots(k+2)}{1.2.3\ldots k}\cos x\right] + C.$$

§ 89. **პარამეტრული გარდაქმნის ხერხი.** (21) ინტეგრალთაგან განვიხილოთ მხოლოდ პირველი. მეორე პირველის სახეს მიიღებს ყოველთვის, როცა მოვახდენთ ჩასმას $z = x + \frac{\pi}{2}$.

თავისთავად ცხადია, რომ $\sin^m x dx$-ს ექნება ერთის რომელიმე სახე შემდეგი ოთხი დიფერენციალიდან:

$$\sin^{2k+1} x dx, \quad \frac{dx}{\sin^{2k+1} x}, \quad \sin^{2k} x dx, \quad \frac{dx}{\sin^{2k} x}.$$

მოვახდინოთ ამ დიფერენციალთა ინტეგრება მიმდევრობით.

რადგანაც პირველი კენტია $\sin x$-ის მიმართ, ამიტომ გამოვიყენოთ ჩასმა $t = \cos x$, რაც გვაძლევს

$$\int \sin^{2k+1} x dx = -\int (1-t^2)^k dt.$$

აღვნიშნოთ საზოგადოდ $P_m(x)$-ით პოლინომი m-ური ხარისხისა x-ის მიმართ. უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ მარცხენა ნაწილში მყოფი ინტეგრალის სახეს:

$$\int \sin^{2k+1} x dx = P_{2k+1}(\cos x).$$

მეორე დიფერენციალისათვის მოვახდინოთ ჩასმა $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

გვაქვს:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = \frac{1}{2^{2k}} \int \frac{(1+t^2)^{2k}}{t^{2k+1}}\, dx = \frac{1}{2^{2k}} \int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{2k} \frac{dt}{t}.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მყოფი ინტეგრალი დაშლის წესით მოიძებნება. ინტეგრების შემდეგ თუ დავუბრუნდებით ისევ x-ს, მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = P_{2k}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - P_{2k}\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right) + C \operatorname{Lg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right).$$

მესამე დიფერენციალის ინტეგრება პარამეტრული გარდაქმნით ძნელია. უკეთესია გამოვიყენოთ რედუქციის მე-(18) ფორმულა, რომლის ძალითაც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int \sin^{2k} x dx = \sin x \cos x\, P_{2k-2}(\sin x) + Ax + B,$$

სადაც A და B მუდმივებია. რაც შეეხება ახლა უკანასკნელ დიფერენციალს, მისთვის მოვახდინოთ ჩასმა $t = \operatorname{ctg} x$.

გვაქვს:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{k-1} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1+t^2)^{k-1}\, dt.$$

ამრიგად, ინტეგრალს შემდეგი სახე ექნება:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = P_{2k-1}(\operatorname{ctg} x).$$

V. ინტეგრება $F(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx})\, dx$ დიფერენციალისა

§ 90. ზოგადი შემთხვევა. ზოგად შემთხვევაში F თავისი არგუმენტების რაციონალურ ფუნქციას წარმოადგენს; $a, b, \ldots, k$ ნამდვილი ან წარმოსახვითი რიცხვებია.

ინტეგრალი

$$(26) \qquad \int F(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx})\, dx$$

საზოგადოდ უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციას წარმოადგენს და მხოლოდ მცირეოდენ კერძო შემთხვევაში ის არის ელემენტარული ფუნქცია.

როცა უკანასკნელი ინტეგრალი უმაღლესი ტრანსცენდენტულია, მაშინ ინტეგრების პრობლემა, როგორც ცნობილია, ინტე-

გრალის კანონიკურ სახეთა მოძებნაში მდგომარეობს. მაგრამ ეს უკანასკნელი შემდეგი გეგმით უნდა მოხდეს:

1° გამოყოფა ინტეგრალის უმაღლესი ტრანსცენდენტული ნაწილებისა.

2° დაყვანა კანონიკურ სახემდე ინტეგრალისა, რომელიც უმაღლეს ტრანსცენდენტულს წარმოადგენს.

3° დამტკიცება მიღებულ კანონიკურ სახეთა დამოუკიდებლობისა.

ქვემოთ მოგვყავს მაგალითის სახით (26) ინტეგრალის ერთი კერძო შემთხვევა.

§ 91. ინტეგრება $R(x)e^{kx}\,dx$ დიფერენციალისა. რადგანაც $R(x)$ არის x-ის რაციონალური ფუნქცია, ამიტომ იგი შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$R(x)=P(x)+\sum\frac{M(x)}{X^n},$$

სადაც $P(x)$, $M(x)$, $X(x)$ პოლინომებია, ხოლო X, ამას გარდა, მარტივია თავის წარმოებულთან.

ამრიგად, ინტეგრალი

$$\int R(x)\,e^{kx}\,dx \tag{27}$$

დაიყვანება შემდეგ ინტეგრალამდე:

$$\int\frac{Me^{kx}}{X^n}\,dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალისათვის შეგვიძლია რედუქციის ფორმულა შევადგინოთ. ამისათვის ვისარგებლოთ § 19-ში გამოთქმული თეორემით, რომლის ძალითაც ორი ისეთი $A(x)$ და $B(x)$ პოლინომი მოიძებნება, რომ

$$AX+BX'=M.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$\int\frac{Me^{kx}}{X^n}\,dx=\int\frac{(AX+BX')\,e^{kx}}{X^n}\,dx= \tag{28}$$

$$\int\frac{Ae^{kx}}{X^{n-1}}\,dx+\int\frac{BX'e^{kx}}{X^n}\,dx.$$

მოვახდინოთ ახლა ტოლობის მარცხენა ნაწილის მეორე ინტეგრალის ნაწილობითი ინტეგრება. ვთქვათ,

$$u=Be^{kx},\ dv=\frac{X'dx}{X^n},\ \text{საიდანაც}\ v=-\frac{1}{(n-1)\,X^{n-1}}.$$

გვაქვს:

$$\int\frac{BX'e^{kx}}{X^n}\,dx=-\frac{Be^{kx}}{(n-1)\,X^{n-1}}+\int\frac{B'e^{kx}+kBe^{kx}}{(n-1)\,X^{n-1}}\,dx.$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, (28) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადმოვწეროთ:

$$\int\frac{Me^{kx}}{X^n}\,dx=-\frac{Be^{kx}}{(n-1)\,X^{n-1}}+\int\frac{\left(A+\dfrac{B'+Bk}{n-1}\right)e^{kx}}{X^{n-1}}\,dx.$$

ესაა რედუქციის ფორმულა (30) ინტეგრალისათვის. ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება X-ის ხარისხს დაიყვანს 1-მდე და საბოლოოდ მივიღებთ ინტეგრალს

$$\int\frac{\varphi(x)e^{kx}}{X}\,dx.$$

აქ შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ პოლინომის ხარისხი X-ის ხარისხზე უფრო დაბალია.

ვთქვათ ახლა ვიცით X-ის ფესვები და ვიგულისხმოთ, რომ ყველა ისინი ნამდვილია; თუ a ერთი მათგანია, მაშინ (29) ინტეგრალი შემდეგ ინტეგრალთა ჯამის სახით დაიშლება:

$$C\int\frac{e^{kx}}{x-a}\,dx,$$

სადაც C გარკვეული მუდმივია. ასეთია (27) ინტეგრალის კანონიკური სახე. მაგრამ ამ უკანასკნელს შეგვიძლია უფრო მარტივი სახეც მივცეთ. მოვახდინოთ ჩასმა

$$x=\frac{z}{k}+a,$$

მაშინ, თუ მუდმივ მამრავლს ჩამოვაშორებთ, გვექნება (29) ინტეგრალის შემდეგი კანონიკური სახე:

$$\int\frac{e^z}{z}\,dz.$$

ესაა ერთადერთი ახალი ტრანსცენდენტული ფუნქცია, რომელზედაც დაიყვანება (27) სახის ინტეგრალი ზემოაღნიშნულ გარდაქმნების გამოყენებით.

შეგვიძლია უკანასკნელ ინტეგრალს კიდევ სხვა სახეც მივცეთ. მივიღოთ $t=e^x$, მაშინ იგი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int \frac{dt}{\operatorname{Lg} t}.$$

ესაა ეგრეთ წოდებული ლოგარითმული ინტეგრალი და როგორც ერთხელ იყო ნათქვამი (§ 5), ამ ტრანსცენდენტულ ფუნქციას აღნიშნავენ $\operatorname{Li} t$-თი.

თუ ავიღებთ ახლა ინტეგრალებს

$$\int \sin x R(x)\,dx, \quad \int \cos x R(x)\,dx,$$

სადაც $R(x)$ არის x-ის რაციონალური ფუნქცია, მაშინ ანალოგიური გარდაქმნა მოგვცემს ინტეგრალებს

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \int \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

რომლებიც ახალ ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს წარმოადგენენ. მათ უწოდებენ სინუს-ინტეგრალი და კოსინუს-ინტეგრალი და აღნიშნავენ $\operatorname{Si} x$ და $\operatorname{Ci} x$ სიმბოლოებით შესაბამისად.

§ 92. შემთხვევა, როცა F ფუნქცია პოლინომია თავის არგუმენტთა მიმართ. ამ შემთხვევაში (27) ინტეგრალი შემდეგ ინტეგრალთა ჯამის სახით წარმოგვიდგება:

$$\int P(x)e^{ax}\,dx, \int P(x)\sin ax\,dx, \int P(x)\cos bx\,dx,$$

სადაც $P(x)$ პოლინომია.

ამ სამ ინტეგრალთაგან პირველს ადგილი ექნება მაშინ, როცა e-ს ხარისხის მაჩვენებელი ნამდვილია, ხოლო ორ უკანასკნელს — როცა აღნიშნული ხარისხის მაჩვენებელი წარმოსახვითია.

პირველი ინტეგრალის მოძებნა უკვე ცნობილია: § 9-ში მაგალითის სახით მოყვანილი იყო შემდეგი ფორმულა:

$$\int P(x)\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[P(x) - \frac{P'(x)}{a} + \frac{P''(x)}{a^2} - \ldots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n}\right].$$

შეგვიძლია ამ ინტეგრალის მოსაძებნად შემდეგი ხელოვნური ხერხიც ვიხმაროთ აგრეთვე. გამოვიდეთ ტოლობიდან:

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

და მოვახდინოთ გაწარმოება ინტეგრალის ნიშნის ქვევით m ჯერ, მივიღებთ:

$$\int x^m e^{ax}\,dx = \frac{\partial^m}{\partial a^m}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right).$$

ეს ფორმულა საშუალებას მოგვცემს მოვძებნოთ ინტეგრალი

$$\int P(x)\,e^{ax}\,dx,$$

რისთვისაც საკმარისია ჯამის სახით დავშალოთ იგი.

§ 93. ინტეგრება $P(x)\sin ax\,dx$ და $P(x)\cos bx\,dx$ დიფერენციალებისა. განვიხილოთ პირველი ამ დიფერენციალთაგანი.

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ზოგადი (12_2) ფორმულა (§ 9). ამ შემთხვევაში

$$\varphi_0(x) = \sin ax$$

და ამიტომაც

$$\varphi_1(x) = -\frac{\cos ax}{a},\quad \varphi_2(x) = -\frac{\sin ax}{a^2},\quad \varphi_3(x) = \frac{\cos ax}{a^3},\ldots,$$

$$\varphi_{2k}(x) = (-1)^k\frac{\sin ax}{a^{2k}},\quad \varphi_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1}\frac{\cos ax}{a^{2k+1}}.$$

მაშასადამე, აღნიშნული ფორმულის ძალით გვექნება

$$\int P(x)\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{V}(x)}{a^5} - \ldots\right]$$

$$-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

ავიღოთ ახლა მეორე დიფერენციალი. მისთვის გვექნება:

$$\varphi_0(x) = \cos ax,\quad \varphi_1(x) = \frac{\sin ax}{a},\quad \varphi_2(x) = -\frac{\cos ax}{a^2},\ldots,$$

$$\varphi_{2k}(x) = (-1)^k\frac{\cos ax}{a^{2k}},\quad \varphi_{2k+1}(x) = (-1)^k\frac{\sin ax}{a^{2k+1}}$$

და ამიტომაც

$$\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \dots\right]$$
$$+ \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{\mathrm{V}}(x)}{a^5} - \dots\right] + C.$$

VI. ინტეგრება $P(x, e^{ax}, \sin bx, \cos cx)\,dx$ დიფერენციალისა [1]

§ 94. დაშლა $P(x, e^{ax}, \sin bx, \cos cx)\,dx$ დიფერენციალისა. აშკარაა, რომ აღნიშნული დიფერენციალი წარმოგვიდგება შემდეგ დიფერენციალთა ჯამის სახით:

$$x^m e^{kax} \sin^p bx \cos^q cx\,dx,$$

სადაც m, k, p, q მთელი დადებითი რიცხვებია.

ჩავსვათ ახლა $\sin^p bx$-ისა და $\cos^q cx$-ის ძაგიერ მათი მნიშვნელობანი (22), (23), (24), (25) ფორმულათა მიხედვით. ჩასმის შემდგომ $\sin^p bx \cos^q cx$ წარმოგვიდგება შემდეგი ნამრავლთა ჯამის სახით:

$$\sin \lambda bx \cos \mu cx, \quad \cos \lambda bx \cos \mu cx,$$

სადაც λ და μ მთელი დადებითი რიცხვებია. თუ ყოველ ასეთ ნამრავლს sinus-ებისა ანდა cosinus-ების ჯამის სახით წარმოვადგენთ, მაშინ $P(x, e^{ax}, \sin bx, \cos cx)\,dx$ დიფერენციალი შემდეგი დიფერენციალების ჯამის სახით გამოისახება:

$$x^m e^{kax}\,dx, \quad x^m e^{kax} \sin \lambda bx\,dx, \quad x^m e^{kax} \cos \mu cx\,dx.$$

პირველი ამ დიფერენციალთაგანის ინტეგრება უკვე ცნობილია. დაგვრჩა ახლა ორი უკანასკნელი განვიხილოთ. შემდეგი § ეხება ამ საკითხს.

§ 95. ინტეგრება $x^m e^{ax} \sin bx\,dx$ და $x^m e^{ax} \cos bx\,dx$ დიფერენციალებისა. მოვახდინოთ ინტეგრება უპირველესად იმ შემთხვევაში, როცა $m=0$, ე. ი. მოვძებნოთ ინტეგრალები

(29) $$\int e^{ax} \sin bx\,dx, \quad \int e^{ax} \cos bx\,dx.$$

შევასრულოთ ნაწილობითი ინტეგრება. პირველი ინტეგრალისათვის მივიღოთ

[1] P არის თავისი არგუმენტების პოლინომი.

$$\sin bx = u, \quad e^{ax}dx = dv, \text{ საიდანაც } v = \frac{e^{ax}}{a},$$

ხოლო მეორისათვის

$$\cos bx = u, \quad e^{ax}\, dx = dv.$$

გვაქვს:

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bx\, dx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

ამ ორი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$(30) \quad \begin{cases} \displaystyle\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{(a \sin bx - b \cos bx)e^{ax}}{a^2+b^2} + C, \\ \displaystyle\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{(a \cos bx + b \sin bx)e^{ax}}{a^2+b^2} + C. \end{cases}$$

ამრიგად, (29) ინტეგრალები მოძებნილია.

თუ მოვახდენთ ახლა (30) ტოლობების ორივე ნაწილის გაწარმოებას m-ჯერ a-თი გვექნება

$$\int x^m e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{\partial^m}{\partial a^m}\left\{\frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2+b^2}\right\},$$

$$\int x^m e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{\partial^m}{\partial a^m}\left\{\frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2+b^2}\right\}.$$

§ 96. ზოგიერთი კერძო ინტეგრალები, რომლებსაც შეუძლიათ ზემოაღნიშნული სახე მიიღონ. ასეთია ინტეგრალები:

$$\int P(x, \operatorname{Lg} x)dx, \quad \int P(x, \arcsin x)dx, \quad \int P(x, \arccos x)dx.$$

მართლაც, მოვახდინოთ პირველი ინტეგრალის ნიშნის ქვევით ჩასმა $x = e^z$, მაშინ იგი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int P(x, \operatorname{Lg} x)\, dx = \int P(e^z, z)\, e^z\, dz.$$

რაც შეეხება ორ დანარჩენ ინტეგრალს, მათთვის თუ მოვახდენთ შესაბამისად ჩასმებს

$$z = \arcsin x, \quad z = \arccos x,$$

გვექნება

$$\int P(x,\ \arcsin x)\,dx = \int P(\sin z, z)\cos z\,dz,$$

$$\int P(x,\ \arccos x)\,dx = -\int P(\cos z, z)\sin z\,dz.$$

VII. ლიუვილის თეორემები

§ 97. ლიუვილის პირველი თეორემა. ლიუვილმა დაამტკიცა ტრანსცენდენტული ფუნქციებისათვის თეორემები, ანალოგიური §§ 62, 73-ში დამტკიცებულისა.

თეორემა 1. ვ თ ქ ვ ა თ, y ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ა, რ ო მ ე ლ ი ც ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს n-უ რ ი რ ი გ ი ს ა ლ გ ე ბ რ უ ლ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს

$$f(x,\ y) = 0;$$

თ უ ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი

$$\int e^x y\,dx$$

ა რ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა, მ ა შ ი ნ

$$\int e^x y dx = e^x(t + uy + vy^2 + \ldots + wy^{n-1}),$$

ს ა დ ა ც t, u, v,...,w ა რ ი ა ნ x-ი ს რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი.

ამ თეორემის დამტკიცება სრულებით იმავე მოსაზრებაზეა აგებული, როგორ § 62-ის თეორემა $\int y\,dx$-ისათვის.

ახლა ადვილად შეგვიძლია აღმოვაჩინოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx$$

ვერ გამოისახება სასრული სახით. მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ ეს ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა; მაშინ გამოთქმული თეორემის ძალით უკანასკნელი ინტეგრალისათვის გვექნება:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = e^x\,\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{31}$$

სადაც P და Q პოლინომებია, რომლებსაც საერთო მამრავლი არ აქვთ.

თუ მოვახდენთ ტოლობის ორივე ნაწილის გაწარმოებას, მივიღებთ:

$$\frac{e^x}{x} = e^x \frac{P'Q-PQ'+PQ}{Q^2},$$

საიდანაც

$$Q^2=[(P+P')Q-PQ']x;$$

აქედან, როგორც § 69-ში ჩანს, Q უნდა გაიყოს x-ზე. ამიტომ ვთქვათ, რომ x-ის უმაღლესი ხარისხი, რომელიც Q-ში შედის არის x^p; მაშინ მარცხენა ნაწილი გაიყოფა x^{2p}-ზე იმ დროს, როცა ტოლობის მარჯვენა ნაწილი გაიყოფა მხოლოდ x^p-ზე, მაშასადამე, (31) ტოლობა შეუძლებელია და გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია.

ამას გარდა, (4) ფორმულათა ძალით (§ 76) შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ინტეგრალებიც

$$\int\frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int\frac{\cos x}{x}\,dx$$

სასრული სახით ვერ გამოისახებიან.

§ 98. **ლიუვილის მეორე თეორემა.** ეს თეორემა ასე გამოითქმება:

თეორემა 2. ვთქვათ $y, z, \ldots$ არიან x-ის ფუნქციები, რომელთა წარმოებულნი $x, y, z, \ldots$-ის ალგებრული ფუნქციებია. ვთქვათ, ამას გარდა, რომ $F(x, y, z, \ldots)$ წარმოადგენს ალგებრულ ფუნქციას. თუ ინტეგრალი

$$\int F(x, y, z, \ldots)dx$$

ელემენტარული ფუნქციაა, მაშინ ამ უკანასკნელს ექნება სახე

$$t+\alpha \operatorname{Lg} u+\beta \operatorname{Lg} v+\cdots+\lambda \operatorname{Lg} w,$$

სადაც $t, u, v, \ldots, w$ არიან $x, y, z, \ldots$-ის ალგებრული ფუნქციები.

კერძოდ, როცა F რაციონალურია, მაშინ $t, u, v, \ldots, w$ ფუნქციებიც რაციონალურია.

ეს თეორემა ყველაზე უფრო ზოგადია იმ თეორემათა შორის, რომელნიც ლიუვილის მიერ იყო მოცემული.

დამტკიცება იმავე პრინციპებზეა აგებული, როგორც § 71 74-ის თეორიაში.

ავიღოთ შემდეგი მაგალითი:

$$\int R\left(x,\ \sin x,\ \cos x,\ e^x,\ e^{e^x}\right)dx.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$y=\sin x,\ z=\cos x,\ \xi=e^x,\ \eta=e^{e^x},$$

გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2},\quad \frac{dz}{dx}=-\sqrt{1-z^2},\quad \frac{d\xi}{dx}=\xi,\quad \frac{d\eta}{dx}=\xi\eta,$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ y, z, ξ, η ფუნქციების წარმოებულნი უკანასკნელთა ალგებრულ ფუნქციებს წარმოადგენენ. მაშასადამე, როცა აღებული ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს, მისთვის შეგვიძლია ზემოაღნიშნული თეორემა გამოვიყენოთ.

VIII. მნიშვნელოვანი მაგალითები

§ 99. შენიშვნები ინტეგრების შესახებ. ერმიტის მეთოდის გამოყენების დროს ფრიად მნიშვნელოვანია ჰარდის შენიშვნა, რომელიც ეხება კერძო შემთხვევას, როცა $R(\sin x, \cos x)$-ს აქვს უმარტივესი სახე:

$$R(\sin x,\ \cos x)=A\operatorname{ctg}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+B\operatorname{ctg}\left(\frac{x-\beta}{2}\right)+\dots+L\operatorname{ctg}\left(\frac{x-\lambda}{2}\right), \tag{32}$$

სადაც A, B,...,L მუდმივებია, რომელთა მოსაძებნად შესაძლოა ჩვეულებრივი წესის გარდა კიდევ ჰარდის შემდეგი მოსაზრებიდან გამოვიდეთ:

ვისარგებლოთ იგივეობით:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)+\operatorname{cosec}(\alpha-\beta);$$

მივიღებთ რა ამას მხედველობაში, (34) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოგვიდგება ორი ფუნქციის ჯამის სახით; ერთი მათგანი

არის ctg-თა ჯამი, ხოლო მეორე cosec-თა ჯამი. აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად $G(x)$ და $H(x)$ სიმბოლოებით. აშკარაა, რომ

$$G(x+\pi)=G(x);\ H(x+\pi)=-H(x).$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1°. $R(\sin x,\ \cos x)$ პერიოდულია π პერიოდით; მაშინ H ფუნქცია მოისპობა.

2°. როცა არგუმენტს π-ს მივუმატებთ R ფუნქცია იცვლის ნიშანს; ასეთ შემთხვევაში G ფუნქცია მოისპობა.

ამ ორ შემთხვევაში, როგორც ქვემოთ მოყვანილი 1° და 4° მაგალითებიდან დავინახავთ, ძლიერ მარტივდება A, B,... კოეფიციენტთა მოძებნა.

§ 100. მაგალითები.

1°. მოვძებნოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{\sin mx}{\sin nx}\,dx \quad m<n.$$

დავშალოთ ფუნქცია ინტეგრალის ნიშნის ქვევით. მნიშვნელს აქვს მარტივი ფესვები:

$$0,\ \frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{3\pi}{n},\dots,\frac{(n-1)\pi}{n},\dots$$

მაგრამ, მეორე მხრით

$$\frac{\sin m(x+\pi)}{\sin n(x+\pi)}=(-1)^{m+n}\,\frac{\sin mx}{\sin nx}.$$

მაშასადამე, $\frac{\sin mx}{\sin nx}$ პერიოდულია π პერიოდით, თუ $m+n$ ლუწია; თუ $m+n$ კენტია, იგი ნიშანს იცვლის, როცა x ცვლადს π ს მივუმატებთ.

ეს ორი შემთხვევა ცალ-ცალკე განვიხილოთ.

1° შემთხვევაში პერიოდულობის გამო გვექნება:

$$\frac{\sin mx}{\sin nx}=A_0\operatorname{ctg}x+A_1\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{n}\right)+$$

$$+\dots+A_{n-1}\operatorname{ctg}\left(x-\frac{n-1}{n}\pi\right);$$

გავამრავლოთ ტოლობის ორივე ნაწილი მიმდევრობით:

$$\sin x,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{n}\right),\ldots,\sin\left(x-\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

და გადავიდეთ ზღვრისაკენ, როცა x მიისწრაფვის

$$0,\ \frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ldots,\frac{(n-1)\pi}{n}\text{-საკენ,}$$

მაშინ ვიპოვით კოეფიციენტთა მნიშვნელობებს:

$$A_0=0,\ A_1=-\frac{1}{n}\sin\frac{m\pi}{n},\ \ A_2=\frac{1}{n}\sin\frac{2m\pi}{n},\ldots,A_k=$$

$$=\frac{(-1)^k}{n}\sin\frac{km\pi}{n},\ldots$$

ამრიგად, პირველ შემთხვევაში მივიღებთ

$$\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin\frac{mk\pi}{n}\operatorname{ctg}\left(x-\frac{k\pi}{n}\right). \tag{33}$$

2^0 შემთხვევაში გვექნება:

$$\frac{\sin mx}{\sin nx}=B_0\operatorname{cosec}x+B_1\operatorname{cosec}\left(x-\frac{\pi}{n}\right)+ \tag{34}$$

$$+\ldots+B_{n-1}\operatorname{cosec}\left(x-\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

გავამრავლოთ ტოლობის ორივე ნაწილი მიმდევრობით:

$$x,\ x-\frac{\pi}{n},\ldots,\left(x-\frac{n-1}{n}\pi\right)\text{-ზე}$$

და გადავიდეთ ზღვრისაკენ, როცა ყოველი ეს სიდიდე ნულისაკენ მიისწრაფვის; მაშინ, მაგალითად, B_k კოეფიციენტისათვის გვექნება:

$$B_k=\frac{(-1)^k}{n}\sin\frac{mk\pi}{n}.$$

ამრიგად, (36) ტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}(-1)^k\sin\frac{mk\pi}{n}\operatorname{cosec}\left(x-\frac{k\pi}{n}\right).$$

თუ გავამრავლებთ ახლა ამ უკანასკნელისა და (33) ტოლობის ორივე ნაწილს dx-ზე და მოვახდენთ ინტეგრებას, მივიღებთ:

$$\int \frac{\sin mx}{\sin nx}\,dx \begin{cases} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{0}^{n-1}(-1)^k \sin\dfrac{mk\pi}{n}\,\mathrm{Lg}\left[\sin\left(x-\dfrac{k\pi}{n}\right)\right], \\ \qquad \text{თუ } m+n \text{ ლუწია,} \\ = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{0}^{n-1}(-1)^k \sin\dfrac{mk\pi}{n}\,\mathrm{Lg}\left[\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{k\pi}{2n}\right)\right], \\ \qquad \text{თუ } m+n \text{ კენტია.} \end{cases}$$

2°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{\cos mx}{\cos nx}\,dx \quad m<n,$$

სადაც m და n მთელი რიცხვებია.

ამ ინტეგრალის მოძებნა წინა ხერხის საშუალებითაა შესაძლო. მაგრამ აქ იგი აძოხსნილია რაციონალიზაციის მეთოდით.

ვისარგებლოთ მე-(4) ფორმულებით (§ 76), რომელთა ძალით გვექნება:

$$\int \frac{\cos mx}{\cos nx}\,dx = \int \frac{e^{mxi}+e^{-mxi}}{e^{nxi}+e^{-nxi}}\,dx.$$

თუ აღვნიშნავთ

(35) $$e^{xi}=z,$$

მივიღებთ

$$\int \frac{\cos mx}{\cos nx}\,dx = -i\int \frac{(z^{2m}+1)\,z^{n-m-1}}{z^{2n}+1}\,dz.$$

ასეთი ინტეგრალის ამოხსნა კი ცნობილია (§ 21, მაგ. 8°, 9°).

იმავე (35) გარდაქმნით ამოიხსნება აგრეთვე ინტეგრალებიც:

$$\int \frac{\cos mx}{\sin nx}\,dx,\quad \int \frac{\sin mx}{\cos nx}\,dx.$$

3°. გამოვთვალოთ ინტეგრალები

$$\int \frac{\sin nx}{\sin^m x}\,dx,\quad \int \frac{\cos nx}{\sin^m x}\,dx,\quad \int \frac{\cos nx}{\cos^m x}\,dx,\quad \int \frac{\sin nx}{\cos^m x}\,dx.$$

ამ ინტეგრალთა ამოსახსნელად შეგვიძლია ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მრიცხველში ჩავსვათ $\sin nx$, $\cos nx$-ის დაშლა § 79-ის მიხედვით. მაშინ ეს ინტეგრალები ჯამის სახით წარმოგვიდგებიან, რომელთა შესაკრებნი ცნობილი ინტეგრალებია.

მაგრამ ამ შემთხვევაში უფრო ადვილად მივაღწევთ მიზანს რედუქციის ფორმულების გამოყენებით. შევადგინოთ ეს ფორმულები.

ამისათვის გამოვიდეთ იგივეობებიდან[1]:

$$\frac{\sin nx}{\sin^m x}= 2\frac{\cos(n-1)x}{\sin^{m-1}x}+\frac{\sin(n-2)x}{\sin^m x},$$

$$\frac{\cos nx}{\sin^m x}=-2\frac{\sin(n-1)x}{\sin^{m-1}x}+\frac{\cos(n-2)x}{\sin^m x}.$$

აქედან გვექნება რედუქციის ფორმულები პირველი ორი ინტეგრალისათვის:

$$\int\frac{\sin nx}{\sin^m x}dx=2\int\frac{\cos(n-1)x}{\sin^{m-1}x}dx+\int\frac{\sin(n-2)x}{\sin^m x}dx,$$

$$\int\frac{\cos nx}{\sin^m x}dx=-2\int\frac{\sin(n-1)x}{\sin^{m-1}x}dx+\int\frac{\cos(n-2)x}{\sin^m x}dx.$$

თავისთავად ცხადია, რომ ამ ფორმულების მიმდევრობითი გამოყენებით ბოლოს და ბოლოს მივიღებთ მარტივ ინტეგრალებს, რომელთა ამოხსნა ცნობილია.

ანალოგიურად გვექნება მესამე და მეოთხე ინტეგრალებისათვის:

$$\int\frac{\cos nx}{\cos^m x}dx=2\int\frac{\cos(n-1)x}{\cos^{m-1}x}dx-\int\frac{\cos(n-2)x}{\cos^m x}dx,$$

$$\int\frac{\sin nx}{\cos^m x}dx=2\int\frac{\sin(n-1)x}{\cos^{m-1}x}dx-\int\frac{\sin(n-2)x}{\cos^m x}dx.$$

4°. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{\sin^m x}{\sin nx}dx,$$

სადაც m და n მთელი რიცხვებია.

ამ შემთხვევაში ვიხმაროთ იგივე ხერხი, როგორც 1° მაგალითისათვის. აქ გვექნება

$$\frac{\sin^m(x+\pi)}{\sin n(x+\pi)}=(-1)^{m+n}\frac{\sin^m x}{\sin nx}.$$

მაშასადამე, $\frac{\sin^m x}{\sin nx}$ პერიოდულია π პერიოდით, თუ $m+n$ ლუწია; თუ $m+n$ კენტია, იგი იცვლის ნიშანს, როცა x ცვლადს π-ს მივუმატებთ.

[1] იხილე Bertrand. ibid. P. 83.

ამრიგად, იმ მსჯელობით, რომელიც მოყვანილი იყო 1° მაგალითისათვის, გვექნება:

$$\frac{\sin^m x}{\sin nx}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sin^m \frac{k\pi}{n}\ \operatorname{ctg}\left(x-\frac{k\pi}{n}\right),\ m+n \text{ ლუწისათვის},$$

$$\frac{\sin^m x}{\sin nx}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sin^m \frac{k\pi}{n} \operatorname{cosec}\left(x-\frac{k\pi}{n}\right),\ m+n \text{ კენტისათვის}.$$

აქედან 1° მაგალითის ანალოგიურად ვიპოვით თვით მე-4° ინტეგრალსაც:

$$\int\frac{\sin^m x}{\sin nx}dx \begin{cases} =\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{0}^{n-1}(-1)^k \sin^m \frac{k\pi}{n} \operatorname{Lg}\left[\sin\left(x-\frac{k\pi}{n}\right)\right], \\ \qquad m+n \text{ ლუწისათვის}, \\ =\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{0}^{n-1}(-1)^k \sin^m \frac{k\pi}{n} \operatorname{Lg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)\right], \\ \qquad m+n \text{ კენტისათვის}. \end{cases}$$

შინაარსი

თავი I

შესავალი

თავი II

ინტეგრება ალგებრული ფუნქციებისა

A. რაციონალური ფუნქციები

B. ირაციონალური ფუნქციები

C. ზოგადი თეორია აბელის იმ ინტეგრალებისა, რომლებიც ელემენტარულ ფუნქციებს წარმოადგენენ

თავი III

ინტეგრება ტრანსცენდენტული ფუნქციებისა

რედაქტორი პროფ. ვლ. პელიძე
კორექტორი ც. ცერცვაძე
ტექნიკური რედაქტორი ა. გაბესკირია

უე 01579. შეკვეთის № 743. ტირაჟი 1.000. 1956 წ.

გადაეცა წარმოებას 9/VI. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 17/VIII. ანაწყობის ზომა 6×10. ქაღალდის ზომა 60×92. სასტამბო ფორმათა რაოდენობა 17,75. სააღრიცხვო-საგამომც. ფორმათა რაოდენობა 14,45.

ფასი 11 მან.

სტალინის სახელობის თ. ს. უ. გამომცემლობის სტამბა, უნივერსიტეტის ქ., 1.
Типография изд-ства ТГУ имени Сталина, Университетская, 1.