ანდრია რაზმაძე

ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი

ნაწილი II

განსაზღვრული ინტეგრალები

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 2004

უაკ (UDC) 517
 რ 176

წიგნი წარმოადგენს ქართველი მათემატიკოსის, თბილისის უნივერსიტეტის ერთ-ერთი დამაარსებლის — პროფესორ ანდრია რაზმაძის მიერ 1929 წელს წაკითხული ინტეგრალური აღრიცხვის კურსის კონსპექტურ ჩანაწერებს.

ა. რაზმაძე თბილისის უნივერსიტეტში წლების განმავლობაში კითხულობდა მათემატიკური ანალიზის სრულ კურსს, რომლის ორი ნაწილი (ანალიზის შესავალი და ინტეგრალური აღრიცხვა — „განუსაზღვრელი ინტეგრალი") მისივე სიცოცხლეში გამოიცა.

წიგნი სარგებლობას მოუტანს ყველას , ვინც დაინტერესებულია მათემატიკის შესწავლით. მისი გამოყენება, უნივერსიტეტების მათემატიკისა და ფიზიკის სპეციალობის სტუდენტთა გარდა, შეეძლებათ პედაგოგიური ინსტიტუტების საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტების სტუდენტებს.

რედაქტორი ნ ი ო თ ა მ ქ ა რ ც ი ვ ა ძ ე
რეცენზენტი თ ა მ ა ზ ვ ა შ ა ყ მ ა ძ ე

ISBN 99940-20-17-X

რედაქტორის წინასიტყვაობა

მიუხედავად იმისა, რომ ბატონი ანდრია რაზმაძის ცხოვრება ტრაგიკულად ხანმოკლე აღმოჩნდა (ის 1929 წელს გარდაიცვალა 40 წლის ასაკში), მისი სულ ათწლიანი მოღვაწეობა თბილისის უნივერსიტეტში (1918-1929 წლები) უაღრესი მრავალფეროვნებით ხასიათდება: მათემატიკური და საბუნებისმეტყველო დარგების სასწავლო გეგმებზე და პროგრამებზე მუშაობა, განუწყვეტელი სალექციო საქმიანობა მათემატიკისა და ფიზიკის დარგებში, ქართული მათემატიკური ტერმინოლოგიის დამუშავება და, რაც მთავარია, სახელმძღვანელოების შექმნა ქართულ ენაზე მისი მუდმივი ზრუნვის საგანი იყო.

სხვა სახელმძღვანელოებთან ერთად ა. რაზმაძეს ეკუთვნის მათემატიკური ანალიზის ორი წიგნი, რომელთაგან პირველი — მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I (შესავალი) — გამოიცა 1920 წელს, მეორე კი — მათემატიკური ანალიზი, ტ. III (ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი, ნაწ. I, განუსაზღვრელი ინტეგრალები) — 1922 წელს.

დაუშვებელია ვიფიქროთ, რომ მას ჩაფიქრებული არ ჰქონდა მათემატიკური ანალიზის სხვა ნაწილების გამოცემა, მით უფრო, რომ საამისოდ მრავალი საფუძველი გაგვაჩნია: იგი წლების განმავლობაში კითხულობდა ანალიზის სრულ კურსს თბილისის უნივერსიტეტში და მისი ყოფილი მსმენელების დამოწმებით, ყოველწლიურად ხვეწდა და აუმჯობესებდა მას. ამისავე უტყუარი დასტურია ა. რაზმაძის მიერ უკანასკნელ წლებში წაკითხული ანალიზის კურსის ერთი ჩანაწერი, რომელიც ჩვენამდე მოიტანა თსუ მაღალი ენერგიების ბირთვული ფიზიკის ინსტიტუტის უფროსმა მეცნიერ თანამშრომელმა ვლადიმერ (ბიჭიკო) ცინცაძემ. ეს ჩანაწერები მის ოჯახში ინახებოდა მისი მამის, მათემატიკის ცნობილი პედაგოგის დიმიტრი ცინცაძის მიერ 1927-28 სასწავლო წელს შედ-

გენილი განსაზღვრული ინტეგრალის თეორიის რაზმაძისეული ლექციების კონსპექტის სახით.

ასე დაიბადა იდეა ა. რაზმაძის მათემატიკური ანალიზის კურსის ახალი ნაწილის — „განსაზღვრული ინტეგრალების“ გამოცემის შესახებ ზემოხსენებული კონსპექტის საფუძველზე. ამ იდეის ინიციატორი გახლავთ ბატონი ნოდარ ამაღლობელი, ხოლო მისი განხორციელების ცდა წილად მე მერგო.

ამ სამუშაოს შესრულებისას გარკვეულ სიძნელეებს წავაწყდი. რა თქმა უნდა, სასურველი იყო მაქსიმალურად შეგვენარჩუნებინა ავტორის ტერმინოლოგია, აღნიშვნები, სტილი და მსჯელობანი. ეს სურვილი ძირითადად განხორციელებულია და მისგან გადახვევა, როგორც წესი, მოხდა მხოლოდ იმ ადგილებში, სადაც მათემატიკის დარგში უკანასკნელი 70-წლიანი პერიოდის განმავლობაში მომხდარმა კონცეფციურმა ცვლილებებმა დიდად დაგვაშორა გამოსავალი ტექსტისაგან. ამასთან, ზოგჯერ დგებოდა კონსპექტის ლექციებთან ადეკვატურობის საკითხიც. იქ კი, სადაც ასეთ ცვლილებებს შეეძლოთ გამოეწვიათ მკვეთრი გადახრა კონსპექტის ტექსტიდან, იძულებული ვიყავი შენიშვნები გამეტანა წიგნისათვის თანდართული "რედაქტორის კომენტარებში". მითითებანი "კომენტარებისადმი" წიგნის ტექსტში აღნიშნულია სათანადო ადგილებში სტრიქონზედა ნომრებით. ასე, მაგალითად, ...[1] ან ... [2] მიგვანიშნებს, რომ ამ ადგილს თან ახლავს შენიშვნა "კომენტარებში". ამ უკანასკნელში თვით შენიშვნას იგივე ნომერი აქვს და აღნიშნულია იმ გვერდის ნომერიც, საიდანაც მოდის ეს შენიშვნა. ჩვეულებრივი სქოლიოები მონიშნულია *) ნიშნით.

იმედია, რომ ეს წიგნი საინტერესო იქნება ქართველი მათემატიკოსებისათვის არა მარტო ისტორიული თვალსაზრისით (წიგნი [1] და [2] სახელმძღვანელოებთან ერთად ნათლად მიგვითითებს მათემატიკის სწავლების იმ მაღალ დონეზე, რომელიც სუფევდა ჩვენს უნივერსიტეტში დაარსების პირველივე წლებიდან), არამედ როგორც შესანიშნავი მასალის შემცველი მაღალი დონის სახელმძღვანელო (რიმანის) ინტეგრალთან დაკავშირებულ საკითხებში.

ი. ქარცივაძე

ლექცია 1

განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტება

განვიხილოთ ერთი ცვალებადის ფუნქცია: $y=f(x)$. ვიგულისხმოთ, რომ ის განუწყვეტელია დახურულ (a,b) შუალედში.

დავყოთ (a,b) შუალედი n ნაწილ-ნაწილ შუალედებად, ისე, რომ ეს ნაწილები ტოლნი ან ერთმანეთისაგან განსხვავებული იყვნენ. აღვნიშნოთ დანაწილების წერტილები: $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ (იხ. ნახ. 1).

ნახ. 1

ახლა შევადგინოთ შემდეგი ჯამი:

$$f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(b)(b-x_{n-1})=s$$

ვთქვათ, ვახდენთ მიმდევრობით (a,b) შუალედის დანაწილებებს ისე, რომ შუალედთა რიცხვი უსასრულოდ იზრდება და თითოეული შუალედის ზომა უსასრულოდ მცირდება, ე.ი. $\lim(x_i-x_{i-1})=0$. იბადება კითხვა, არსებობს თუ არა s გამოსახულების ზღვარი? დავამტკიცოთ, რომ s გამოსახულება სრულიად გარკვეული ზღვრისაკენ მიისწრაფვის და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული დანაწილების ბუნებაზე.

გვექნება დამტკიცების ორი ეტაპი:

1) დავამტკიცებთ, რომ ეს ზღვარი მართლაც არსებობს და,

2) რომ ის არ არის დამოკიდებული დანაწილების ბუნებაზე, სხვანაირად, ყოველი ახალი დანაწილება მოგვცემს იმავე ზღვარს.

განვიხილოთ პირველი ეტაპი: აღვნიშნოთ $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმა და მინიმა[1] დანაწილების პირველ შუალედში სათანადოდ M_1 და m_1-ით და ა.შ. სხვა შუალედებისთვისაც.

განვიხილოთ შემდეგი ჯამები:

[1] ე. ი. ამ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა.

$$\sum = M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_n(b-x_{n-1}),$$

$$\sigma = m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\cdots+m_n(b-x_{n-1}).$$

ცხადია, რომ S ჯამი იმყოფება შემდეგ ორ ცვალებადს შორის:

$$\sigma \le s \le \sum \tag{1}$$

(ეს იმიტომ, რომ სხვაობები $x_1-a, x_2-x_1,...$ დადებითნი არიან, და $m_i \le f(x_i) \le M_i$ $(i=1,2,...,n)$. ამგვარად, თუ ამ უტოლობებს გავამრავლებთ რომელიმე დადებით სიდიდეზე, ამით არაფერი არ შეიცვლება:

$$m_i(x_i-x_{i-1}) \le f(x_i)(x_i-x_{i-1}) \le M_i(x_i-x_{i-1}) \tag{2}$$

უკანასკნელი უტოლობების შეჯამებით მივიღებთ (1) -ს).

ახლა შევეცადოთ $\sum$ გამოსახულების ზღვრის მონახვას.

ამისათვის დანაწილების შემდეგი ეტაპი გავიაროთ: აღებული შუალედები კიდევ დავანაწილოთ. ვთქვათ, მოვახდინეთ პირველი (a,x_1) შუალედის შემდეგი დანაწილება (იხ. ნახ. 2)

ნახ. 2

ამ დანაწილების ყოველ კერძო შუალედში ფუნქციას თავისი მაქსიმა და მინიმა ექნება. ვთქვათ, ესენია $M_1^{'}, M_2^{'},..., M_p^{'}$ და $m_1^{'}, m_2^{'},..., m_p^{'}$, შესაბამისად. ცხადია, რომ ფუნქციის მაქსიმა (a,x_1) შუალედში $\ge$, ვიდრე ფუნქციის მაქსიმუმი თითოეულ ნაწილაკ შუალედში და ამიტომ

$$M_1^{'}(x_1^{'}-a)+M_2^{1}(x_2^{'}-x_1^{'})+...+M_p^{'}(x_1^{'}-x_{p-1}^{'}) \le M_1(x_1^{'}-a)+M_1(x_2^{'}-x_1^{'})+...$$
$$+M_1(x-x_{p-1}^{'}) = M_1(x_1-a).$$

მაშასადამე, Σ ჯამის ყოველი შესაკრები კლებულობს, თუ მოცემული დანაწილებიდან ახალ დანაწილებაზე გადავდივართ, რო-

მელიც დანაწილების ახალი წერტილების შემოტანით მიიღება. საზოგადოდ, მთელი Σ ჯამიც, ასეთ შემთხვევაში არ მატულობს. ამავე დროს, ყოველი Σ ჯამი მუდამ რჩება $m(b-a)$-ზე მეტი (ან ტოლი), თუ m აღნიშნავს ფუნქციის მინიმას მთელს (a,b) შუალედზე:

$$\sum = M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_n(b-x_{n-1})\geq$$
$$\geq m(x_1-a)+m(x_2-x_1)+\cdots+m(b-x_{n-1})=m(b-a).$$

ამგვარად, Σ კლებულობს, მაგრამ მუდამ $\geq m(b-a)$. მაშ Σ-ს აქვს გარკვეული ზღვარი, რომელიც აღვნიშნოთ L-ით:

$$\ell im\sum = L.$$

ახლა განვიხილოთ σ და ამავე წესით დავამტკიცოთ, რომ, როცა რაიმე დანაწილებიდან გადავდივართ ახალ დანაწილებაზე დანაწილების ახალი წერტილების დამატებით, σ არ კლებულობს.

ავიღოთ (a_1x_1) შუალედი და მასში დამატებული დანაწილების ახალი $x_1'x_2',\ldots,x_{p-1}'$ წერტილები (იხ. ნახ.2). მაგრამ ფუნქციის მინიმუმი მთელ შუალედში ნაკლებია, ვიდრე მინიმუმი კერძო შუალედში. ამიტომ

$$m_1'(x_1'-a)+m_2'(x_2'-x_1')+\ldots+m_p'(x_1-x_{p-1}')\geq m_1(x_1-a).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მთელი σ ჯამი არ იკლებს. მაგრამ $\sigma\leq M(b-a)$, სადაც M აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმს მთელს (a,b)-ზე. ამგვარად, σ ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული და მას აქვს გარკვეული l ზღვარი:

$$\ell im\,\sigma = \ell.$$

დავამტკიცოთ, რომ $L=l$, მართლაც, ავიღოთ სხვაობა:

$$\sum-\sigma=(M_1-m_1)(x_1-a)+(M_2-m_2)(x_2-x_1)+\cdots+(M_n-m_n)(b-x_{n-1}).$$

ანალიზის შესავლიდან ვიცით: რომ თუ ფუნქცია განუწყვეტელია დახურულ (a,b) შუალედში, იგი თანაბრად განუწყვეტელია იმავე შუალედში.

მაშასადამე, შეგვიძლია (a,b) შუალედი ისე დავანაწილოთ, რომ ყოველი $M_i - m_i$ სხვაობა $(i=1,2,...,n)$ ნაკლები იყოს ε-ზე, სადაც ε წინასწარ ნებისმიერად არჩეული რიცხვია, მაშინ მივიღებთ:

$$\sum - \sigma < \varepsilon\left(x_1 - a + x_2 - x_1 + \cdots + b - x_{n-1}\right) = \varepsilon(b-a).$$

თუ ეს ასეა, მივიღებთ $l = L$, ე.ი. σ და Σ ჯამებს ერთი და იგივე ზღვარი ჰქონია და რადგან

$$\sigma \le s \le \Sigma,$$

ამიტომ s-საც იგივე ზღვარი აქვს, რაც σ-ს და Σ-ს, ე.ი.

$$\lim s = L.$$

ამგვარად, I-ლი დებულება დამტკიცებულია, ე.ი. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ s-ის ზღვარი მართლაც არსებობს.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (a,b) შუალედის სხვა დანაწილებათა მიმდევრობა, მოხდენილი ზემოაღნიშნული წესით, მოგვცემს იმავე ზღვარს.

ვთქვათ, ახალი დანაწილების წერტილებია:

$$a, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, b \tag{z}$$

ამ დანაწილების შესაბამისი s, σ, Σ ჯამები აღვნიშნოთ s_z, σ_z, Σ_z-ით. ვინაიდან ქვემოთ მოგვიხდება მათი შედარება ზემოთ განხილულ დანაწილებათა შესაბამის ჯამებთან, ეს უკანასკნელნი აღვნიშნოთ s_x, σ_x, Σ_x-ით. სრულიად იმავე მსჯელობით, როგორც ზემოთ, დავამტკიცებთ, რომ სამივე სიდიდე $s_z, \sigma_z \Sigma_z$ ერთი გარკვეული ზღვრისაკენ მიისწრაფვის, რომელიც აღვნიშნოთ L'-ით. ამნაირად, დაგვრჩენია მხოლოდ აღმოვაჩინოთ, რომ $L = L'$. ამ მიზნით, შევადგინოთ ახალი დანაწილება (x) და (z) დანაწილებათა შეერთებით, x_i და z_i სიდიდეების ზრდადობის მიხედვით. ამ

მესამე (x,z) დანაწილებისათვის s,σ,Σ ჯამები აღვნიშნოთ შესაბამისად $s_{xz},\sigma_{xz},\Sigma_{xz}$-ით.

აშკარაა, რომ მესამე დანაწილება შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პირველისა და მეორის გაგრძელება განაწილების ზემოაღნიშნული წესის მიხედვით *). სწორედ ამიტომ, გვექნება:

$$\sigma_x \le \sigma_{xz} \le \Sigma_{xz} \le \Sigma_z, \qquad \sigma_z \le \sigma_{xz} \le \Sigma_{xz} \le \Sigma_x.$$

გადავიდეთ ზღვრისაკენ; მაშინ, ცნობილი თეორემის ძალით, გვექნება

$$\lim \sigma_x \le \lim \Sigma_z, \quad \text{ე. ი.} \quad L \le L',$$

აგრეთვე

$$\lim \sigma_z \le \lim \Sigma_x \quad \text{ე. ი.} \quad L' \le L,$$

მაგრამ ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $L = L'$. ამგვარად, დამტკიცებულია, რომ ორი ერთმანეთისაგან სრულიად დამოუკიდებელი დანაწილებების გამოყენებით s,σ და Σ ჯამებისათვის ერთსა და იმავე ზღვარს ვღებულობთ. ამ ზღვარს აღნიშნავენ $\int_a^b f(x)dx$ სიმბოლოთი, რომელიც ასე გამოითქმის: განსაზღვრული ინტეგრალი a-დან b-მდე $f(x)dx$-დან. a-სა და b-ს ინტეგრალის საზღვრები ეწოდება. თვით ნიშანი $\int$ არის "წაგრძელებული" S ასო. ამნაირად, გვექნება[1]:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim\left[f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n)(b - x_{n-1})\right].$$

---

[1] ეს იმას ნიშნავს, რომ (xy) დანაწილება როგორც (x), ისე (z), დანაწილებისაგან მიიღება ახალი წერტილების დამატებით.

განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

თვისება 1) ვთქვათ, $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალში $a=b$. მაშინ $\int_a^b f(x)dx = 0$.

თვისება 2)

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

განვიხილოთ კვლავ დახურულ (a,b) შუალედში განუწყვეტელი $f(x)$ ფუნქციის ზემოთ განხილული ტიპის ჯამები და მოვახდინოთ მათი შემდეგი სახის მოდიფიკაცია: ვთქვათ:

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$$

(a,b) შუალედის რაიმე დანაწილებაა და ყოველ კერძო (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ შუალედში, სადღაც, ავიღოთ თითო საშუალო $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ წერტილი. ავიღოთ, ნაცვლად ძველი s ჯამისა, ახალი ჯამი

$$s_\xi = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}).$$

დავამტკიცოთ, რომ ამ ახალი ჯამის ზღვარი იგივეა, რაც ძველ შემთხვევაში, ე.ი. სადაც არ უნდა ავიღოთ კერძო (x_i, x_{i+1}) შუალედში $\xi_i (i = 1,2,\ldots,n)$ წერტილი, შუალედის შიგნით თუ მის ბოლოებზე, ზღვრის მნიშვნელობა მუდამ ერთი და იგივეა. მართლაც, თუ ძველი s ჯამისათვის გამოვიყენებთ s_x აღნიშვნას, სხვაობა s_x და s_ξ -ს შორის იქნება

$$s_\xi - s_x = [f(\xi_1) - f(x_1)](x_1 - a) + [f(\xi_2) - f(x_2)](x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$+ [f(\xi_n) - f(b)](b - x_{n-1}).$$

ვიცით, რომ $f(x)$ ფუნქცია განუწყვეტელია (a,b) შუალედში და, ამიტომ, ის თანაბრად განუწყვეტელია იმავე შუალედში, ე.ი. ε რიცხვისათვის შეიძლება მოვახდინოთ (a,b) შუალედის ისეთი დანაწილება, რომ გვქონდეს $\left|f(\xi_i)-f(x_i)\right|<\varepsilon$, როცა $i=1,2,\ldots,n$. ამიტომ

$$\left|\lambda_\xi-\lambda_x\right|\le\varepsilon\left[\left(x_1-a\right)+\left(x_2-x_1\right)+\ldots+\left(b-x_{n-1}\right)\right]=\varepsilon(b-a).$$

აქედან, ცხადია, რომ, რადგან $\lim s_x=\int_a^b f(x)dx$, ამიტომ $\lim s_\xi=\lim s_x=\int_a^b f(x)dx$. მაშ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b f(x)dx=\ell im\left[f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})\right].$$

ადრე განხილული შემთხვევა არის უკანასკნელის კერძო შემთხვევა, როცა $\xi_1=x_1,\ \ \xi_2=x_2,\ \ldots,\ \ \xi_n=x_n.$

ავილოთ (a,b) შუალედი და ავირჩიოთ მასში რომელიმე c წერტილი. დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

ამის დასამტკიცებლად დავანაწილოთ (a,b) შუალედი ისე, რომ დანაწილების ერთ-ერთი წერტილი დაემთხვეს c-ს. ვთქვათ, ესაა x_p. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim\left[f(x_1)(x_1-a)+\ldots+f(c)(c-x_{p-1})+f(x_{p+1}-c)+\right.$$
$$\left.+\ldots+f(b)(b-x_{n-1})\right]=\lim\left[f(x_1)(x_1-a)+\ldots+f(c)(c-x_{p-1})\right]+$$
$$+\lim\left[f(x_{pH})(x_{pH}-c)+\ldots+f(b)(b-x_{n-1})\right]=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

საბოლოოდ, დავასკვნით, რომ სამართლიანია თვისება 3)

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

ავიღოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, როცა c წერტილი (a,b) შუალედის გარეთ მდებარეობს (მაგალითად, როცა $b<c$). მაშინ ამ ფორმულას ექნება ადგილი ამ შემთხვევაშიაც, მხოლოდ იმ პირობით, რომ $f(x)$ ფუნქცია განუწყვეტელია (a,c) შუალედში: მართლაც,

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx.$$

აქედან

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx,$$

მაგრამ

$$-\int_b^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx$$

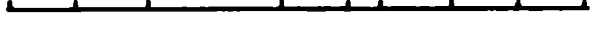
და ამიტომ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

ახლა დავამტკიცოთ უფრო ზოგადი ფორმულის სამართლიანობა: $a_1,c_1,c_2,\ldots,c_p,b$ წერტილების ნებისმიერი განლაგებისათვის

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\ldots+\int_{c_{p-1}}^{c_p} f(x)dx+\int_{c_p}^b f(x)dx.$$

(იხ. ნახ. 3)



ნახ.3

მართლაც, რადგან

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^b f(x)dx,$$

$$\int_{c_1}^{b} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{c_2}^{b} f(x)dx_2 = \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \int_{c_3}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{c_{p-1}}^{b} f(x)dx = \int_{c_{p-1}}^{c_p} f(x)dx + \int_{c_p}^{b} f(x)dx,$$

შეკრებით და შეკვეცით მივიღებთ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + .. + \int_{c_{p-1}}^{c_p} f(x)dx + \int_{c_p}^{b} f(x)dx.$$

მ თ ა ვ ა რ ი   დ ე ბ უ ლ ე ბ ა

განსაზღვრული ინტეგრალი რამდენიმე ფუნქციის ალგებრული ჯამიდან არის იმავე ფუნქციების განსაზღვრული ინტეგრალების ალგებრული ჯამი, ე.ი.

$$\int_a^b \left[f(x) - \varphi(x) + \psi(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx.$$

მართლაც, პირველი ამ ინტეგრალთაგანი არის:

$$\ell im\left\{\left[f(x_1) - \varphi(x_1) + \psi(x_1)\right](x_1 - a) + \cdots + \left[f(b) - \varphi(b) + \psi(b)\right](b - x_{n-1})\right\} =$$

$$= \ell im\left[f(x_1)(x_1 - a) + \cdots + f(b)(b - x_{n-1})\right] - \ell im\left[\varphi(x_1)(x_1 - a) + \cdots + \varphi(b)(b - x_{n-1})\right] +$$

$$+ \ell im\left[\psi(x_1)(x_1 - a) + \cdots + \psi(b)(b - x_{n-1})\right] = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx.$$

ან საბოლოოდ

4)
$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x0+\psi(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx+\int_a^b \psi(x)dx.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება განსაზღვრული ინტეგრალების მიმართ: მუდმივი მამრავლი გამოდის ინტეგრალის გარეთ, ე.ი.
$$\int_a^b cg(x)dx=c\int_a^b g(x)dx.$$

მართლაც, (1) ფორმულაში დავუშვათ $f(x)=Cg(x)$, მაშინ მივიღებთ:
$$\int_a^b cg(x)dx=c\lim[g(x_1)(x_1-a)+g(x_2)(x_2-x_1)+...+g(b)(b-x_{n-1})=$$
$$=c\int_a^b g(x)dx.$$
საბოლოოდ,

5)
$$\int_a^b cg(x)dx=c\int_a^b g(x)dx.$$

გავაერთიანოთ ეს ორი დებულება და მაშინ უფრო ზოგადი სახის ფორმულა გვექნება:
$$\int_a^b [Af(x)+B\vartheta(x)+C\psi(x)]dx=A\int_a^b f(x)dx+B\int_a^b \vartheta(x)dx+C\int_a^b \psi(x)dx.$$
გამოვიყვანოთ განსაზღვრული ინტეგრალის კიდევ ერთი თვისება:

6)
$$\int_a^b dx=b-a.$$

მართლაც, ძირითად (1) ფორმულაში მივიღოთ $f(x)=1$. მაშინ (1)-ის მარჯვენა მხარეში მოხდება შეკვეცები და დაგვრჩება მხოლოდ $b-a$. საბოლოოდ, $\int_a^b dx=b-a.$

ლექცია 2

განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

დავხაზოთ მრუდი, რომელიც შემდეგი განტოლებით გამოიხატება: $y = f(x)$ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია (a,b) შუალედშია განსაზღვრული. დავყოთ (a,b) შუალედი და დაყოფის წერტილებიდან აღვმართოთ მართობები x ღერძისადმი.

ასე, თუ დაყოფის წერტილებს $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ -თი აღვნიშნავთ, გაჩნდება (იხ. ნახ.4) სწორკუთხედები,* რომელთა ქვედა ფუძეები (x_i, x_{i+1}) $(i = 0,1,\ldots,n-1;\ \ x_0 = a,\ \ x_n = b)$ შუალედებია, ხოლო სიმაღლეები — $f(x_i)$ რიცხვები.

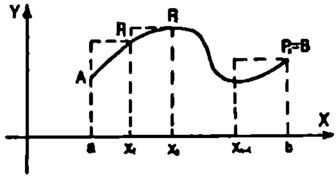
აღვნიშნოთ ამ სწორკუთხედების ფართობები სათანადოდ $D_1, D_2, \ldots, D_n$ -ით და მათი ჯამი Ω -თი:

$$D_1 = f(x_1)(x_1 - a),$$

$$D_2 = f(x_2)(x_2 - x_1),$$

. . . .

$$D_n = f(x_n)(b - x_{n-1}).$$



ნახ. 4

შევკრიბოთ ყველა ეს ტოლობა, მივიღებთ:

$$\Omega = D_1 + D_2 + \cdots + D_n = f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(b)(b - x_{n-1})$$

აღვნიშნოთ P_i სიმბოლოთი წერტილი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე, რომლის კოორდინატები $(x_i, f(x_i))$ რიცხვებია $(i = 1,2,\ldots,n)$. ვთქვათ, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ წერტილების რიცხვი უსასრულოდ იზრდება და მანძილები მათ შორის უსასრულოდ მცირდება. მაშინ ტეხილი ხაზი

---

* იგულისხმება, რომ $f(x) > 0$ ყველგან, (a,b) შუალედზე.

$AP_1P_2...P_{n-1}B$ უახლოვდება მრუდს და "ზღვარზე გადასვლით მრუდს გამოხატავს", Ω-ს ზღვარი კი — იმ მრუდხაზოვანი ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია x-თა ღერძით, მრუდით და განაპირა $x=a$ და $x=b$ ვერტიკალებით. მაგრამ Ω ჯამის ზღვარი ანალიზურად არის $\int_a^b f(x)dx$ და, საბოლოოდ, $\int_a^b f(x)dx =$ ფართი $(a\overset{\smile}{AB}ba)$ ესაა განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული აზრი. უფრო ზოგადად, რომ ავიღოთ ჯამი

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1}),$$

სურათი საბოლოოდ იგივე იქნებოდა, მხოლოდ სწორკუთხედები — სხვანაირი.

დებულება საშუალო მნიშვნელობის შესახებ

ცხადია, რომ, თუ $f(x)>0$ $(f(x)<0$, ყველგან (a,b)-ზე, მაშინ $\int_a^b f(x)dx>0$ (შესაბამისად, $\int_a^b f(x)dx<0)$, რადგანაც ჯამის ყველა წევრი მეტია (ნაკლებია) ნულზე. ახლა განვიხილოთ $\int_a^b f(x)dx$ ზოგად შემთხვევაში. რადგანაც $f(x)$ განუწყვეტელია (a,b) შუალედში, მას ექნება თავისი მინიმუმიც და მაქსიმუმიც. პირველი აღვნიშნოთ m-ით, მეორე M-ით. მაშინ

$$m\le f(x)\le M,$$

და, ცხადია, რომ

$$f(x)-m\ge 0, \qquad M-f(x)\ge 0.$$

აქედან, ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის თანახმად,

$$\int_a^b (f(x)-m)dx\ge 0 \quad \text{და} \quad \int_a^b (M-f(x)dx\ge 0,$$

ან $\int_a^b f(x)dx - m(b-a) \geq 0$ და $M(b-a) - \int_a^b f(x)dx.$

საბოლოოდ გვექნება

$$\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a) \quad \text{და} \quad M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx.$$

ამ უტოლობათა გაერთიანებით მივიღებთ:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

აქ ტოლობა შესაძლებელია, როცა $f(x)$ მუდმივია და მაშინ $f(x) = m = M$. უტოლობისათვის (ვთქვათ, მარცხნივ) აუცილებელია $f(x)$ არ იყოს ყველგან ტოლი m-ისა.

რადგან $f(x)$ განუწყვეტელია (a,b) შუალედში და მისი ინტეგრალი იმყოფება ორ საზღვარს შორის: $m(b-a)$ და $M(b-a)$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

სადაც $m \leq \mu \leq M$,

მაგრამ, რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია განუწყვეტელია, ის გაივლის ყველა მნიშვნელობებს m-სა და M-ს შორის. ამიტომ, მოიძებნება ისეთი ξ წერტილი, რომელზედაც ფუნქცია გაუტოლდება μ-ს: $f(\xi) = \mu$ ინტეგრალისთვის კი გვექნება:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \qquad (a \leq \xi \leq b).$$

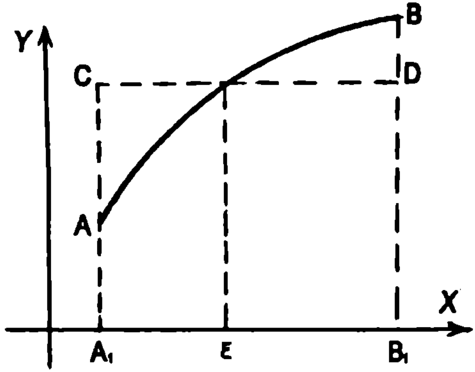
ეს არის საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა.

გავარკვიოთ უკანასკნელი ფორმულის გეომეტრიული სახე:

$\int_a^b f(x)dx =$ ფართი (ABB_1A_1), ხოლო $f(\xi)(b-a) =$ ფართი (CDB_1A_1) (ნახ.5).

საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა გვეუბნება, რომ შესაძლებელია ისეთი $(\xi, f(\xi)$ წერტილის მოძებნა მრუდზე, რომ მრუდი

წირით შემოფარგლული ფართი ამ წერტილის ორდინატზე აგებული სწორკუთხედის ფართით გამოიხატოს, ე.ი. მრუდი წირით შემოფარგლული ფართი სწორი წირით შემოფარგლულ ფართს გაუტოლდეს. სხვანაირად, მოვახდინოთ "კვადრატურა". ამიტომ $\int_a^b f(x)dx$ -ის გამოთვლას ეწოდება კვადრატურა. რაც შეეხება ξ-ს, მის მოსაძებნად არავითარი ზოგადი წესი არ არსებობს.



ნახ. 5

განვიხილოთ შემდეგი კვადრატურები: $\int_a^b f(x)dx$, $\int_z^b f(t)dt$, $\int_a^b f(z)dz$,... აქ დამოუკიდებელი ცვლადის აღნიშვნას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს. განსაზღვრული ინტეგრალი არის მუდმივი სიდიდე და იგი დამოკიდებულია მხოლოდ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფ ფუნქციის სახეზე და ინტეგრალის საზღვრებზე. ამიტომ ყველა ამოწერილი ინტეგრალი ტოლია:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \ldots$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის კვადრატურა: $\int_a^x f(t)dt$. აქ კვადრატურის ზედა საზღვრად ვღებულობთ x-ს, რომელიც a-სა და b-ს შორისაა მოთავსებული, $a \le x \le b$, $f(x)$ კი განუწყვეტელი ფუნქციაა (a,b) შუალედში. ისმება საკითხი, რას წარმოადგენს ასეთი სახის კვადრატურა?

ცხადია, რომ ასეთი სახის გამოთქმა ზედა საზღვრის ფუნქციას წარმოადგენს. მართლაც, $\int_a^x f(t)dt = F(x)$ ინტეგრალში, როცა x-ს შევცვლით, ინტეგრალიც შეიცვლება და მისი მნიშვნელობა მთლიანად x-ის მნიშვნელობაზეა დამოკიდებული.

მივცეთ ახლა x-ს ნაზრდი Δx, მაშინ მივიღებთ

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

ამიტომ

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ, მივიღეთ შემდეგი დამოკიდებულება:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

გამოვიყენოთ უკანასკნელი ინტეგრალისათვის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x+\Theta.\Delta x)(x+\Delta x - x) =$$

$$= f(x+\Theta.\Delta x)\cdot \Delta x,$$

სადაც $0 < \Theta < 1$, გავყოთ ორივე მხარე Δx -ზე:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x+\Theta.\Delta x).$$

ასეთი დამოკიდებულება სამართლიანია ყოველი მცირე Δx-ისათვის, თუ x-თან ერთად $x+\Delta x$-იც (a,b) შუალედიდანაა აღებული. მაგრამ, როცა $\Delta x \to 0$, $f(x+\Theta\cdot\Delta x)$-ის ზღვარი არსებობს და $f(x)$-ის ტოლია, რადგანაც $f(x)$ განუწყვეტელია (a,b) შუალედში. მაშ, ზღვარზე გადასვლით, როცა Δx მიისწრაფვის ნულისაკენ, მივიღებთ: $F'(x)=f(x)$, ე.ი. $F(x)$ ფუნქცია ისეთი თვისებისაა, რომ მისი წარმოებული ყოფილა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებული $f(x)$ ფუნქცია. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ არსებობს ისეთი $f(x)$, რომ $F'(x)=f(x)$, და ერთ-ერთი ასეთი არის $F(x)=\int_a^x f(t)dt.$

ამგვარად, ყოველი განუწყვეტელი $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილის არსებობა დამტკიცებულია. დიფერენციალური აღრიცხვიდან ჩვენ ვიცით, რომ ყოველი წარმოებადი ფუნქცია განუწყვეტელია. რადგანაც $\int_a^x f(t)dt$ წარმოებადია, იგი განუწყვეტელი ფუნქციაცაა.

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა

ჩვენ ვნახეთ, რომ როცა $f(x)$ განუწყვეტელი ფუნქციაა (a,b) შუალედში, მაშინ $\int_a^x f(t)dt$ წარმოებადი ფუნქციაა ამავე შუალედში და მისი წარმოებული არის $f(x)$. მეორე მხრივ ვიცით, რომ, თუ ავიღებთ $\int f(x)dx$ განუსაზღვრელ ინტეგრალს, ისიც ისეთი ფუნქციაა, რომლის წარმოებული არის $f(x)$, ე.ი. შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი დამოკიდებულება ამ ორ ინტეგრალს შორის:

$$\int f(x)dx = C + \int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

ეს არის ფუნდამენტური დამოკიდებულება განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალებს შორის, ე.ი. თუ ვიცით $\int_a^x f(t)dt$, გვეცოდინება $\int f(x)dx$. დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება: თუ ვიცით $\int f(x)dx$, გვეცოდინება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალიც: მართლაც, ვთქვათ, ვიცით $\int f(x)dx$ და აღვნიშნოთ $f(x)$-ის ერთ-ერთი პირველყოფილი $\Phi(x)$-ით. რადგან $\int_a^x f(t)dt$ აგრეთვე ერთ-ერთი პირველყოფილია $f(x)$ ფუნქციისა, ამიტომ გვექნება:

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C \qquad (2)$$

საინტერესოა ვიცოდეთ C-ს მნიშვნელობა.* ამისათვის ავიღოთ *x*-ის ნაცვლად *x=a*. მაშინ მივიღებთ:

$$\int_a^a f(t)dt = \Phi(a) + C$$

და რადგან $\int_a^a f(t)dt = 0,$ გვექნება: $\Phi(a) + C = 0.$

აქედან დავასკვნით, რომ $C = -\Phi(a)$ და (2) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს: $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a)$. ახლა შევიტანოთ აქ *x=b*

---

* საჭიროა ალინიშნოს, რომ *C* (2) ტოლობაში გარკვეული მუდმივია, რომელიც ორი გარკვეული $\int_a^x f(t)dt$ და $\Phi(x)$ ფუნქციების სხვაობას აღნიშნავს, მაშინ როცა (1) ფორმულაში იგივე სიმბოლო სულ სხვა შინაარსისაა: აქ იგი ნებისმიერი მუდმივის ალნიშვნას წარმოადგენს.

მნიშვნელობა. მაშინ მივიღებთ მთელი მათემატიკური ანალიზის ძირითად ფორმულას:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

მარჯვენა მხარეს შემოკლებულად შემდეგნაირად აღნიშნავენ: $\Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b$ და მას a და b საზღვრების ჩასმას უწოდებენ $\Phi(x)$ ფუნქციაში. ამგვარად, საბოლოოდ,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b,$$

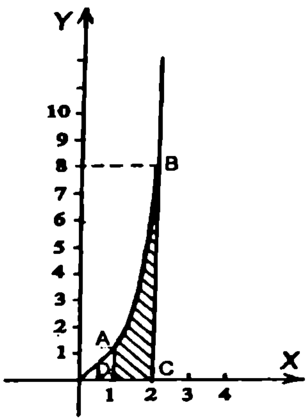
სადაც $\Phi(x)$ ერთ-ერთი პირველყოფილია $f(x)$ ფუნქციისა.

განვიხილოთ ზოგიერთი კერძო მაგალითი:

1) $\int_1^2 x^3 dx$. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი არის $\frac{x^4}{4}$ და, გამოყვანილი ფორმულის თანახმად,

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

ამ მაგალითის გეომეტრიული მხარე მოცემულია მე-6 ნახაზზე.

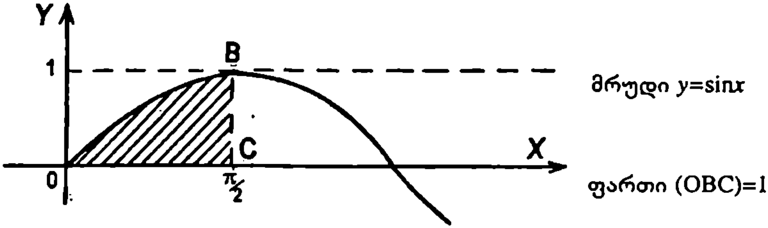


ნახ.6

$y = x^3$ კუბური პარაბოლია, ფართი $(ABCD) = \frac{15}{4}$.

2) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \pi/2 + \cos 0 = 1.$

შესაბამისი გეომეტრიული სურათი ნაჩვენებია ნახ. 7-ზე.



ნახ.7

თუ BC სიმაღლეზე ავაგებთ კვადრატს, მაშინ ამ კვადრატის ფართი =1.

3) $\int_0^e \frac{dx}{x}$. შეიძლება თუ არა გამოვიყენოთ აქ ჩვენი ძირითადი ფორმულა? არა, რადგან $\frac{1}{x}$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას x=0 წერტილზე. ამიტომ ავიღოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = [Logx]_1^e = 1.$$

4) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$. ამ ინტეგრალის ამოხსნა ჩვენი ძირითადი ფორმულით არ შეიძლება. თუ ინტეგრალის ქვედა საზღვრისათვის ნულის მაგივრად მივიღებთ რომელიმე დადებით რიცხვს (მაგალითად, $\pi/4$ -ს), ინტეგრალის ამოხსნა შეიძლება:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \left[Log\left(tg\frac{x}{2}\right)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -Logtg\frac{\pi}{8}.$$

5) $\int_{1/4}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[ArcSinx\right]_{1/4}^{1/2}=Arc\sin 1/2-Arc\sin\frac{1}{4}=\pi/6-Arc\sin\frac{1}{4}.$

განხილული მაგალითებიდან ვხედავთ, რომ, თუ ვიცით ფუნქციის პირველყოფილი, ამით მისი განსაზღვრული ინტეგრალიც ცნობილია. მაგრამ საქმე იმაშია, რომ უფრო მეტ შემთხვევებში პირველყოფილი არ ვიცით. მიუხედავად ამისა, განსაზღვრული ინტეგრალი მაინც გამოითვლება. თუ რანაირად ხდება ეს, ამას შემდეგში დავინახავთ.

გამოვიყვანოთ საშუალო მნიშვნელობის ძირითადი ფორმულა. ავიღოთ ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ინტეგრალი:

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b F(x)dx,$$

სადაც $f(x)$ და $F(x)$ განუწყვეტელი ფუნქციებია (a,b) შუალედში და ისინი ერთსა და იმავე წერტილზე ერთდროულად არ ისპობა. ვიგულისხმოთ, რომ $\int_a^b F(x)dx \neq 0$. აღვნიშნოთ სათანადოდ $\varphi(x)$ და $\Phi(x)$-ით $f(x)$ და $F(x)$ ფუნქციების რაიმე პირველყოფილები. თანახმად ძირითადი ფორმულისა, გვექნება:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b F(x)dx}=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\Phi(b)-\Phi(a)},$$

მაგრამ კოშის ინტეგრალური ფორმულის თანახმად, უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე არის $\frac{\varphi'(\xi)}{\Phi'(\xi)}$ ფარდობა, სადაც ξ რაღაც წერტილია (a,b) შუალედიდან. მაგრამ $\varphi'(\xi)=f(\xi)$, $\Phi'(\xi)=F(\xi)$ და საბოლოოდ მივიღებთ:

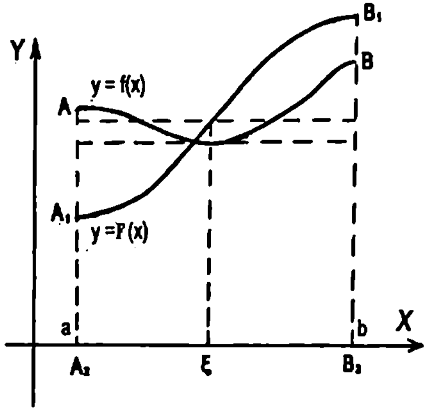
$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b F(x)dx}=\frac{f(\xi)}{F(\xi)} \tag{3}$$

ე.ი. არსებობს (a,b) შუალედში ისეთი ξ წერტილი, რომ ინტეგრალების შეფარდება სათანადო ფუნქციების ამ წერტილზე მნიშვნელობების შეფარდებაზე დაიყვანება.

განვიხილოთ უკანასკნელი ფორმულის გეომეტრიული სახე (იხ. ნახ. 8).

დავხატოთ ორივე $y=f(x)$ და $y=F(x)$ მრუდი. ცხადია, რომ პირველი ინტეგრალი გამოსახავს (ABB_2A_2) მრუდწირული ოთხკუთხედის ფართს, მეორე ინტეგრალი კი არის ფართი $(A_1B_1B_2A_2)$. რაც შეეხება

$$\frac{f(\xi)}{F(\xi)}=\frac{f(\xi)(b-a)}{F(\xi)(b-a)},$$



ნახ. 8

ის წარმოადგენს ξ წერტილის შესაბამის ორდინატებზე აგებული (a,b) -ფუძიანი მართკუთხედების ფართობთა ფარდობას. პირველი ფარდობა შეიძლება შევცვალოთ მეორეთი.

კერძო შემთხვევები: ავილოთ $f(x)$ ფუნქციის მაგივრად $f(x)\varphi(x)$ ნამრავლი, $F(x)$ -ის მაგივრად $\varphi(x)$. მთავარი პირობა, რომ $f(x)$ და $F(x)$ ერთდროულად არ ისპობოდეს, აქ იმასვე ჩიშნავს, რომ $\varphi(x)$ არ მოისპოს არსად (a,b) -ზე. ვთქვათ, $\varphi(x) \gtrless 0$ ყველგან (a,b) -ზე. მაშინ, ცხადია, $\int_a^b \varphi(x)dx \gtrless 0$ და წინა ყველა პირობა შესრულებულია. ამიტომ, ნათქვამის თანახმად, არსებობს ისეთი ξ წერტილი (a,b) შუალედიდან, რომ

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}=f(\xi).$$

ეს გვაძლევს შემდეგ კლასიკურ (საშუალო მნიშვნელობის) პირველ ფორმულას: როცა $\varphi(x)>0$ (ან $\varphi(x)<0$) ყველგან (a,b)-ზე, არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

კერძოდ, როცა $\varphi(x)=1$, მივიღებთ ადრე გამოყვანილ ფორმულას:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

ავიღოთ კიდევ ერთი კერძო შემთხვევა. მივიღოთ ზოგად ფორმულაში $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, $F(x)=\Phi(x)\Psi(x)$. ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ერთდროულად არ ისპობა და, ამას გარდა $\psi(x)>0$ (ან $\Psi(x)<0$). ასეთი შემთხვევისათვის ძირითადი ფორმულა გვაძლევს:

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_a^b \Phi(x)\Psi(x)dx} = \frac{\varphi(\xi)\psi(\xi)}{\Phi(\xi)\Psi(\xi)} = \frac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}, \qquad (a \le \xi \le b).$$

მიუხედავად ამ ფორმულის გარეგნული სახისა, შედეგი მაინც დამოუკიდებელი აღმოჩნდა ψ-სახეზე, რადგან, ცხადია, $\xi \equiv \xi$-ზე დამოკიდებულია ψ-ს არჩევა.[3)]

ლექცია 3

საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა

ჯერ დავამტკიცოთ აბელის ლემა: ვთქვათ, ε_0, ε_1, ..., ε_n სიდიდეები დადებითია და შეადგენენ კლებად მიმდევრობას:

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n.$$

ვთქვათ, მოცემულია აგრეთვე ნებისმიერი $u_0, u_1, \dots, u_n$ სიდიდეები. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$s_0 = u_0,$$
$$s_1 = u_0 + u_1,$$
$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

ვთქვათ, რომ ყველა $s_i (0 \le i \le n)$ იმყოფება (A,B) შუალედში:

$$A \le s_i \le B.$$

ასეთ პირობებში ყოველი $\varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_p u_p \quad (0 \le p \le n)$ ჯამისათვის გვაქვს:

$$A\varepsilon_0 \le \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_p u_p \le B\varepsilon_0.$$

დასამტკიცებლად, ავიღოთ რაიმე $p (0 \le p \le n)$ და წარმოვადგინოთ $u = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_p u_p$ ჯამი შემდეგი სახით:

$$u = \varepsilon_0 s_0 + \varepsilon_1 (s_1 - s_0) + \varepsilon_2 (s_2 - s_1) + \dots \varepsilon_p (s_p - s_{p-1}) =$$
$$= s_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots + s_{p-1} (\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p \varepsilon_p.$$

მაგრამ სიდიდეები $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \ \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p$, პირობის ძალით, ყველა მეტია ნულზე, ხოლო $s_0, s_n, \dots, s_p$ მოქცეულია A და B-ს შორის. ამიტომ მათ ნაცვლად თუ A-ს ჩავწერთ, გვექნება

$$U \ge A (\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p + \varepsilon_p) = A\varepsilon_0.$$

საბოლოოდ: $U \ge A\varepsilon_p$.

იმავე წესით მივიღებთ: $U \le B\varepsilon_0$.

მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ: $A\varepsilon_0 \le U \le B\varepsilon_0$ და აბელის ლემა დამტკიცებულია.

ახლა ავიღოთ (a,b) შუალედზე განუწყვეტელი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები, რომელთაგან $g(x)$ კლებადი და დადებითია მთელს (a,b)-ზე. გავიხსენოთ, რომ

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \lim [g(\xi_1) f(\xi_1)(x_1 - a) + g(\xi_2) f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots$$
$$\dots + g(\xi_n) f(\xi_n)(b - x_{n-1})],$$

სადაც $a, x_1, ..., x_{n-1}, b$ (a,b) შუალედის რაიმე დანაწილებაა და ყოველი $\xi_i (i=1,2,...,n)$ x_{i-1} და x_i-ს შორისაა მოთავსებული.

ξ_i რიცხვები, საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულის ძალით, შეგვიძლია ისე შევარჩიოთ, რომ $(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim[g(\xi_1)\int_a^{x_1} f(x)dx + g(\xi_2)\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + g(\xi_n)\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx].$$

აღვნიშნოთ:

$$\varepsilon_0 = g(\xi_1), \varepsilon_1 = g(\xi_2), \ldots, \varepsilon_{n-1} = g(\xi_n),$$

$$u_0 = \int_a^{x_1} f(x)dx,\ \ u_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx, ...,\ \ u_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx.$$

მაშინ, აბელის ლემის აღნიშვნებს თუ გავიხსენებთ, გვექნება:

$$s_0 = \int_a^{x_1} f(x)dx,\ \ s_1 = \int_a^{x_2} f(x)dx, ...,\ \ s_{n-1} = \int_a^{b} f(x)dx,$$

ცხადია, რომ ყველა ინტეგრალი $\int_a^{x_1} f(x)dx$, $\int_a^{x_2} f(x)dx, ...,$ $\int_a^b f(x)dx$ მოთავსებულია ინტეგრალის $\int_a^x f(t)dt$ (x იცვლება შუალედში) მინიმუმსა და მაქსიმუმს შორის (ეს უკანასკნელნი არსებობენ, რადგან $\int_a^x f(t)dt$ განუწყვეტელ ფუნქციას წარმოადგენს). აღვნიშნოთ ეს მინიმუმი და მაქსიმუმი A და B-თი. მაშინ ყველა $s_0, s_1, ..., s_{n-1}$ მოთავსებულია A და B-ს შორის.

ამას გარდა, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$ წარმოადგენს დადებით რიცხვთა კლებად მიმდევრობას ($g(x)$ ჩვენი პირობის თანახმად, დადებითი

და კლებადია). ჩვენ ვხედავთ, რომ აქ დაცულია აბელის ლემის ყველა პირობა. ამიტომ

$$Ag(\xi_1) \le g(\xi_1)\int_a^{x_1} f(x)dx + g(\xi_2)\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots +$$

$$+ g(\xi_n)\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \le Bg(\xi_1).$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა შუალედთა სიგრძეები ნულისაკენ მიისწრაფვიან. მაშინ $g(\xi_1)$ მიისწრაფვის $g(a)$-საკენ და მივიღებთ:

$$Ag(a) \le \int_a^b g(x)f(x)dx \le Bg(a).$$

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$A \le \frac{\int_a^b g(x)f(x)dx}{g(a)} \le B.$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ $\int_a^x f(t)dt$ განუწყვეტელი ფუნქციაა (a,b) შუალედზე, რომლის მინიმუმი და მაქსიმუმი შესაბამისად A და B რიცხვებია. ამიტომ ამ განუწყვეტელ ფუნქციას (a,b) შუალედის გარკვეულ ξ წერტილში ექნება A-სა და B-ს შორის მოთავსებული სასურველი რიცხვითი მნიშვნელობა. კერძოდ, მოიძებნება ისეთი ξ, რომ

$$\int_a^\xi f(x)dx = \frac{\int_a^b g(x)f(x)dx}{g(a)},$$

ანუ

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

ესაა საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა:

ჩვენ რომ აგველო არა კლებადი, არამედ ზრდადი მიმდევრობა, აბელის ლემის დასკვნაში მივიღებდით: $A\varepsilon_p < U < B\varepsilon_p.$ ამის შედეგად, თუ ყველა ძველ პირობებში $\varphi(x)$ ზრდადი და დადებითი ფუნქციაა (a,b) -ზე, საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულას ექნება სახე:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b)\int_a^\xi f(x)dx.$$

არსებობს საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულის ზოგადი სახე, რომელშიაც $\varphi(x)$ -ის ნიშანს არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს (ოღონდ $\varphi(x)$ კლებადი უნდა იყოს).

მართლაც, ვთქვათ $\varphi(x)$ (ნებისმიერი ნიშნის) კლებადი ფუნქციაა (a,b) -ზე და $\Phi(x)$ აღნიშნავს

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \varphi(b).$$

ცხადია, $\Phi(x)$ კლებადი და დადებითი ფუნქცია იქნება (a,b) შუალედზე. ამიტომ მისთვის შეგვიძლია დავწეროთ ზემომოყვანილი ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)\Phi(x)dx = \Phi(a)\int_a^\xi f(x)dx = [\varphi(a) - \varphi(b)]\int_a^\xi f(x)dx.$$

ახლა ეს ტოლობა შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\int_a^b f(x)[\varphi(x) - \varphi(b)]dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx - \varphi(b)\int_a^b f(x)dx =$$
$$= \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx - \varphi(b)\int_a^\xi f(x)dx.$$

უკანასკნელ ფორმულაში ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ დავშალოთ შემდეგნაირად:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx-$$
$$-\varphi(b)\int_a^\xi f(x)dx.$$

მაშასადამე, ზოგად ფორმულას აქვს სახე:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

უკანასკნელ ფორმულას ვეიერშტრასის ფორმულა ეწოდება. ეს ფორმულა სამართლიანია ყოველთვის, როცა $\varphi(x)$ კლებადი ფუნქციაა (a,b) -ზე.*

ავიღოთ მაგალითი:

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x dx.$$

ჩვენ ვიცით, რომ $\cos x$ დადებითი და კლებადია $(0,\pi/2)$ შუალედზე. ამიტომ გამოიყენება საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა:

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x dx=\cos 0\int_0^\xi x^2dx=\int_0^\xi x^2dx=\frac{\xi^3}{3},$$

სადაც $0<\varepsilon<\pi/2$.

---

* ცხადია, ფორმულა სამართლიანია ყოველთვის, როცა $\varphi(x)$ მონოტონურია (a,b) -ზე, მართლაც, თუ $\varphi(x)$ ზრდადია, ცხადია, $\varphi(x)$ კლებადი ფუნქცია იქნება და, ამიტომ, უკვე დამტკიცებული დებულება მოგვცემს:

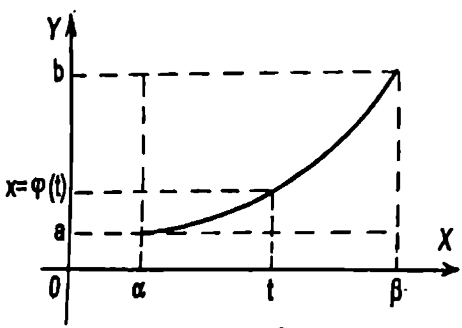
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\int_a^b(-f(x))(-\varphi(x))dx=-\varphi(a)\int_a^\xi(-f(x))dx-\varphi(b)\int_\xi^b(-f(x))dx=$$
$$=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

ინტეგრაციის მეთოდები

განსაზღვრული ინტეგრაციის გამოთვლის ამოცანა ერთბაშად წყდება, თუ მოხერხდა ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველყოფილის მოძებნა. მაშინ უკანასკნელში უნდა მოვახდინოთ საზღვრების ჩასმა და განსაზღვრული ინტეგრალი მოძებნილია. მაგრამ ზოგჯერ არ არის საჭირო პირველყოფილის ცოდნა. განსაზღვრული ინტეგრალის ამოხსნა გარკვეული $A=\int_a^b f(x)dx$ რიცხვის მოძებნაში მდგომარეობს და მის მოსაძებნად არსებობს ინტეგრაციის გარკვეული მეთოდები.

1. ცვალებადის გარდაქმნა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

მოვახდინოთ $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალში $x=\varphi(t)$ გარდაქმნა, სადაც t ახალი ცვალებადია. ვიგულისხმოთ $\varphi(t)$ არის განუწყვეტელი და x-ის ყოველ მნიშვნელობას (a,b) შუალედში t-ს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა ეთანადება და პირიქით, ე.ი. $\varphi(t)$ არის მონოტონური (ზრდადი ან კლებადი).



ნახ. 9

ვთქვათ, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. როცა t იცვლება α და β-ს შორის, მაშინ x გაივლის ყოველ მნიშვნელობას a და b-ს შორის მხოლოდ ერთხელ (იხ. ნახ. 9).

დავწეროთ ჩვენი ინტეგრალი ცნობილი სახით:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim[f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})],$$

სადაც $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ იმყოფებიან სათანადო ელემენტარულ (a,x_1), (x_1,x_2), $\ldots,(x_{n-1},b)$ ინტერვალებში. აღვნიშნოთ a-ს შე-

საბამისი t-ს მნიშვნელობა α-თი, x_1-ის t_1-ით,…, და b-სი β-თი. მაშინ, ლაგრანჟის* ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$x_1 - a = \varphi(t_1) - \varphi(\alpha) = \varphi'(\tau_1)(t_1 - \alpha), \quad (\alpha < \tau_1 < t_1).$$

$$x_2 - x_1 = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi'(\tau_2)(t_2 - t_1), \quad (t_1 < \tau_2 < t_2)$$

$$b - x_{n-1} = \varphi(\beta) - \varphi(t_{n-1}) = \varphi'(\tau_n)(\beta - t_{n-1}), \quad (t_{n-1} < \tau_n < \beta)$$

ამასთან (ვინაიდან $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ წერტილების შერჩევა ნებისმიერად ხდება (a_1, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (_{n-1}, b)$ შუალედებში), შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\xi_1 = \varphi(\tau_1), \xi_2 = \varphi(\tau_2), \ldots, \xi_n = \varphi(\tau_n).$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}) =$$
$$= f[\varphi(\tau_1)]\varphi'(\tau_1)(t_1 - \alpha) + f[\varphi(\tau_2)]\varphi'(\tau_2)(t_2 - t_1) + \ldots +$$
$$+ f[\varphi(\tau_n)]\varphi'(\tau_n)(\beta - t_{n-1}).$$

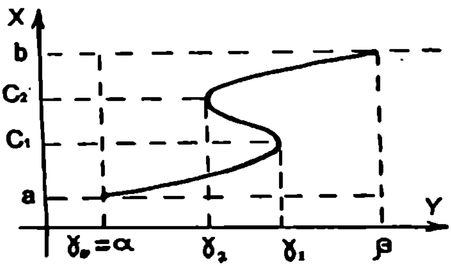
ახლა უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით (როცა ყოველი (t_i, t_{i+1}) შუალედის სიგრძე და მასთან ერთად, $\varphi(t)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, $(x_i, x_{i+1}) = (\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1}))$ შუალედის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ, $\varphi'(t)$ ფუნქციის უწყვეტობის შემთხვევაში), მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (*)$$

* ახლა გამოჩნდა, რომ $\varphi(x)$-ს, გარდა უწყვეტობისა, უნდა მოვთხოვოთ წარმოებადობაც და, როგორც ქვემოთ გამოირკვა, $\varphi(x)$ წარმოებულის უწყვეტობა, ამასთან, მსჯელობაში ქვემოთ ნაგულისხმევია, რომ $\varphi(x)$ ზრდადი ფუნქციაა.

უკანასკნელი ფორმულა არის ცვალებადის გარდაქმნის ფორმულა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ. საზოგადოდ, $\varphi(t)$ ფუნქციის შერჩევისათვის არავითარი კანონი არ არსებობს.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)$ არ არის მონოტონური ფუნქცია (მაგალითად, განვიხილოთ ნახ. 10-ზე წარმოდგენილი შემთხვევა[4]). აქ, როგორც ნახაზზე ჩანს, t-ს ერთ მნიშვნელობას x-ის რამდენიმე მნიშვნელობა შეესაბამება. მოვიქცეთ შემდეგნაირად: დავანაწილოთ (α,β) შუალედი ისეთნაირად, რომ თითოეულ ნაწილაკ შუალედში ფუნქცია $\varphi(t)$ მონოტონური იყოს. შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:



ნახ. 10

$$\varphi(\gamma_1)=c_1,\quad \varphi(\gamma_2)=c_2,$$
$$\varphi(\gamma_3)=c_3.$$

მაშინ გვექნება:

$$\int_a^{c_1} f(x)dx=\int_\alpha^{\gamma_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx=\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

$$\int_{c_2}^{b} f(x)dx=\int_{\gamma_2}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

შევკრიბოთ ეს გამოსახულებები. მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

(აქ უნდა გვახსოვდეს, რომ სხვადასხვა (α,γ_1), (γ_1,γ_2), (γ_2,γ_3) შუალედებში $\varphi(t)$ ფუნქციას სხვადასხვა სახე აქვს). ამგვარად,

ფორმულა ცვალებადის გარდაქმნის შესახებ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, სამართლიანია ზოგად შემთხვევაშიაც. მიუხედავად ამისა, მისი გამოყენება დიდ სიფრთხილეს მოითხოვს. ნათქვამის თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ შემდეგი კლასიკური მაგალითი:

$$\int_{-1}^{+1} dx = 2$$

ინტეგრალში მოვახდინოთ გარდაქმნა $x = t^{3/2}$, ე.ი. $t = \sqrt[3]{x^2}$. აქ როცა $x=\pm 1$, ვღებულობთ $t=1$ და ამიტომ, მოყვანილი წესის ფორმალური გამოყენება, რადგან $dx = \frac{3}{2} t^{1/2} dt$, გვაძლევს:

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_{1}^{1} \frac{3}{2} t^{1/2} dt = 0,$$

ე.ი. გამოდის, რომ 2=0.

ამ უაზრობის მიზეზი ისაა, რომ ჩვენ მხედველობაში არ მივიღეთ ერთი გარემოება: ყოველ x-ს $(-1, +1)$ შუალედიდან წესის გამოსაყენებლად ერთი მაინც t უნდა შეესაბამებოდეს, მაშინ როცა $x = \sqrt{t^3}$ მუდამ დადებითია. შეცდომის შესწორება შესაძლებელია, თუ მივიღებთ შემდეგს:

როცა $-1 \le x \le 0$, უნდა ავიღოთ $x = -\sqrt{t^3}$, ხოლო, როცა $0 \le x \le 1$, მაშინ $x = \sqrt{t^3}$. ახლა სათანადო პასუხსაც მივიღებთ:

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx = -\int^{0} \frac{3}{2} t^{1/2} dt + \int_{0}^{1} \frac{3}{2} t^{1/2} dt = 1 + 1 = 2\,.$$

ლექცია 4

ნაწილობითი ინტეგრება

ინტეგრალური აღრიცხვიდან ვიცით, რომ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განუსაზღვრელი ინტეგრალებისათვის:

$$\int u dv = u\upsilon - \int v du ,$$

სადაც $u = \varphi(x), \upsilon = \psi(x)$

გავიხსენოთ, რომ $\int u dv = c + \int_a^x u dv$ და $\int v du = c' + \int_a^x v du$, სადაც c და c' მუდმივებია. მაშინ, პირველი ფორმულა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\int_a^x u dv = \tilde{c} + u\upsilon - \int_a^x v du ,$$

სადაც $\tilde{c}$ აღნიშნავს $c + c'$ ჯამს. მივიღოთ ამ ტოლობაში $x=a$. ეს მოგვცემს: $0 = \tilde{c} + [uv]_a$, საიდანაც $\tilde{c} = -[uv]_a$.

მივიღებთ რა ყოველივე ამას მხედველობაში, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^x u d\upsilon = [uv]_x - [u\upsilon]_a - \int_a^x v du = [uv]_a^x - \int_a^x v du$$

ახლა, ვთქვათ, $x=b$, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

უკანასკნელი ფორმულა არის ნაწილობითი ინტეგრაციის ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის. მისი გამოყენების აზრი მდგომარეობს იმაში, რომ შესაძლებელია მეორე ინტეგრალი უფრო მარტივი აღმოჩნდეს, ვიდრე პირველი.

განვიხილოთ მაგალითი:

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-\cos x)dx,$$

ანუ

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x dx = \int_0^{\pi/2}\cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრაციის ფორმულის განზოგადება. ავიღოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი: $\int_a^b uv^{(n+1}dx$, სადაც $v^{(n+1)}$ არის v-ს $n+1$ რიგის წარმოებული, ე.ი. $\upsilon^{(n+1)}dx = d(v^{(n)})$. მაშ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \left[uv^{(n)}\right]_a^b - \int_a^b u'v^{(n)}dx,$$

$$-\int_a^b u'v^{(n)}dx = -\left[u'v^{(n-1)}\right]_a^b + \int_a^b u''v^{(n-1)}dx,$$

$$\int_a^b u''v^{(n-1)}dx = \left[u''v^{(n-2)}\right]_a^b - \int_a^b u'''v^{(n-2)}dx,$$

$$(-1)^n\int_a^b v'u^{(n)}dx = (-1)^n\left[u^{(n)}v\right]_a^b - (-1)^n\int_a^b vu^{(n+1)}dx.$$

ყველა ამ ფორმულის შეკრება მოგვცემს:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \left[uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{n-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v\right]_a^b +$$

$$+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}\cdot v dx.$$

ესაა ნაწილობითი ინტეგრაციის ზოგადი ფორმულა. მას დიდი გამოყენება აქვს.

ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int_a^b P(x)e^{\alpha x}dx, \quad (\alpha = const),$$

სადაც $P(x)$ არის რაიმე n-ური რიგის პოლინომი x-ის მიმართ.

თუ მივიღებთ: $u = P(x)$, $v^{(n+1)}(x) = e^{\alpha x}$, მაშინ $v^{(n)}(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$,

$v^{(n-1)}(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}$, ..., $v(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{n+1}}$.

ამის გამო ნაწილობითი ინტეგრაციის ზოგადი ფორმულის გამოყენებით, ჩვენი ინტეგრალი შემდეგი სახით წარმოგვიდგება:

$$\int_a^b P(x)e^{\alpha x}dx = \left[P(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - P'(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + \ldots + (-1)^n P^{(n)}(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{n+1}}\right]_a^b$$

,

ვინაიდან $P(x)$-ის $n+1$ რიგის წარმოებული ნულია.

გამოვიყენოთ იგივე ფორმულა უფრო ზოგადი შემთხვევისათვის. მივიღოთ $v(x) = f(x)$, $u(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}$;

მაშინ

$$u'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad u''(x) = -\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}, \ldots, \quad u^{(n)}(x) = (-1)^n$$

ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრაციის ზოგადი ფორმულა მოგვცემს:

$$\frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx = \left[\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{b-x}{1!}f'(x) + f(x)\right]_a^b.$$

აქაც ინტეგრალი მარჯვენა მხარეში მოისპობა, რადგან u-ს $n+1$ რიგის წარმოებული ნულია. ამასთან, ცხადია, რომ მარჯვენა მხარეში ზედა b საზღვარზე ყველა წევრი (გარდა $f(x)$ -ისა) ნულის ტოლი აღმოჩნდება, რაც საბოლოოდ მოგვცემს:

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx.$$

ეს, ცხადია, არის ტეილორის ფორმულა $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელშიაც ნაშთი ინტეგრალის სახით გვაქვს წარმოდგენილი:

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx.$$

შევეცადოთ ეს ნაშთი დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილ ნაშთს დავამსგავსოთ. ჩვენ ვიცით შემდეგი ფორმულა: $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx$, თუ $\varphi(x)$ ინარჩუნებს ნიშანს მთელს (a,b) შუალედში (საშუალო მნიშვნელობის 1 ფორმულა).

რადგან $(b-x)^n$ ფუნქცია (a,b) შუალედზე სწორედ ასეთია, მისი გამოყენებით მივიღებთ:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^b (b-x)^n dx=-\left[\frac{(b-x)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}=$$

$$=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\qquad \text{სადაც}\quad a<\xi<b.$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ ნაშთი ლაგრანჟის სახით. მაშასადამე, ლაგრანჟის ნაშთის სახე წარმოადგენს ნაშთის ახლად მიღებული ფორმულის შედეგს. ახალ ფორმულას ის უპირატესობა აქვს, რომ მისი საშუალებით შეიძლება ნაშთის გამოთვლა.

ახლა განვიხილოთ საკითხი "ინტეგრალის გაწარმოების შესახებ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ".

ხშირად, განსაზღვრულ ინტეგრალში, გარდა დამოუკიდებელი ცვალებადისა, შედის რაიმე α პარამეტრი. მაგალითად,

$$\int_{-1}^{+1} e^{\alpha x}dx=\left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_{-1}^{+1}=\frac{e^{\alpha}}{\alpha}-\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

აქ, რა თქმა უნდა, ინტეგრაციის შედეგი წარმოგვიდგება როგორც α-ს ფუნქცია. ისმება კითხვა: როგორ მოვძებნოთ ამ ფუნქციის წარმოებული α-ს მიმართ. ზოგად შემთხვევაში განსახილავი ინტეგრალი შემდეგი სახისა იქნება:

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx=F(\alpha)$$

$f(x,\alpha)$ ფუნქციის შესახებ ვიგულისხმოთ, რომ:

1) $f(x,\alpha)$ განუწყვეტელია, როცა $a \le x \le b$ და $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$. 2) ამ ფუნქციას აქვს კერძო წარმოებული α-ს მიმართ:

$$f'_\alpha(x,\alpha)=\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha},$$

და ეს წარმოებული განუწყვეტელია (x,α)-ს იმავე მნიშვნელობებისათვის. აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევის განხილვა: 1) როცა α შედის მხოლოდ ინტეგრალქვეშა ფუნქციაში და 2) როცა α-ს შეიცავენ a და b საზღვრებიც. განვიხილოთ ჯერ პირველი შემთხვევა და მოვნახოთ $F(\alpha)$ ფუნქციის წარმოებული. რადგანაც $f(x,\alpha)$ განუწყვეტელია, ამიტომ $F(\alpha)$ არსებობს. დავამტკიცოთ, რომ $F(\alpha)$ აგრეთვე განუწყვეტელია. ავიღოთ ჩვენი ინტეგრალი $F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$ და განვიხილოთ α-ს მცირე $\Delta\alpha$ ნაზრდისათვის

$$F(\alpha+\Delta\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx.$$

. მაშინ ლაგრანჟის სასრული სხვაობის ფორმულის გამოყენება მოგვცემს:

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^b f(x,\alpha)dx=$$

$$=\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-f(x,\alpha)]dx=\int_a^b\Delta\alpha\cdot f'_\alpha(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)dx$$

აქ $\Delta\alpha$ დამოუკიდებელია x-საგან და შეგვიძლია გამოვიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ. ამასთან, რადგან $f(x,\alpha)$ განუწყვეტელია ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის, როცა $\Delta\alpha$ მცირეა, გვექნება: $|f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|<\varepsilon$, მაშინ მივიღებთ:

$$|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)|=\left|\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx\right|.$$

მაგრამ, საზოგადოდ, $\left|\int_a^b g(x)dx\right| \le \int_a^b |g(x)|dx$,

მართლაც, რადგან

$$-|g(x)| \le g(x) \le |g(x)|$$

გვექნება:

$$-\int_a^b |g(x)|dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b |g(x)|dx,$$

ანუ

$$\left|\int_a^b g(x)dx\right| \le \int_a^b |g(x)|dx.$$

ამ უტოლობის გამოყენებით $F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)$ სხვაობისათვის მივიღებთ:

$$|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)| \le \int_a^b |f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|dx < \varepsilon\int_a^b dx = \varepsilon(b-a),$$

თუ $\Delta\alpha$ - საკმარისად მცირეა. მაშ, $F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha) \to 0$, როცა $\Delta\alpha \to 0$, ე.ი. $F(\alpha)$ განუწყვეტელია.

ახლა გავყოთ $F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha) = \Delta\alpha \cdot \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)dx$ ტოლობის ორივე მხარე $\Delta\alpha$-ზე:

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\cdot\Delta\alpha)dx.$$

ჩვენი პირობის თანახმად, $f'_\alpha(,\alpha)$ განუწყვეტელია დახურულ არეში $a \le x \le b$ და $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$. მაშინ ის ამავე არეში იქნება თანაბრად განუწყვეტელი და ყოველი ε>0 რიცხვისათვის გვექნება

$$f'_\alpha(x,\alpha+\Delta\alpha) = f'_\alpha(x,\alpha)+\omega,$$

სადაც $|\omega|<\varepsilon$ თუკი $|\Delta\alpha|<\eta$; აქ η შესაბამისი დადებითი რიცხვია, x-ისა და α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის ჩვენს არეში. მაშასადამე,

$$\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx+\int_a^b \omega(x,\alpha)dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი, თუ $|\Delta\alpha|<\eta$, თავისი აბსოლუტური მნიშვნელობით $<\varepsilon(b-a)$ და, მაშასადამე,

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\lim\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx\,.$$

ამგვარად, $F(\alpha)$-ს წარმოებული არსებობს და ტოლია $\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx$ ინტეგრალისა:

$$F'(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx\,.$$

გაწარმოება პირველ შემთხვევაში მოხდენილია.

ახლა, ვთქვათ, α შედის როგორც ინტეგრალქვეშა ფუნქციაში, ისე საზღვრებშიაც, ე.ი. $a=a(\alpha)$, $b=b(\alpha)$. ვიგულისხმოთ, რომ ეს ორი ფუნქცია განუწყვეტელი და წარმოებადია $\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2$ საზღვრებში. რადგან

$$F(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$$

და

$$F(\alpha+\Delta\alpha)=\int_{a(\alpha+\Delta\alpha)}^{b(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx\,,$$

გვექნება:

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^b f(x,\alpha)dx=$$

$$=\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx+\int_b^{b+\Delta b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-$$

$$-\int_a^{a+\Delta a}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx \qquad (1)$$

დავარქვათ ამ ინტეგრალებს სათანადოდ I, II და III ინტეგრალები. ცხადია, რომ

$$\mathrm{I}=\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx=\Delta\alpha\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)dx\,.$$

II-სათვის გვაქვს:

$$\mathrm{II}=\int_b^{b+\Delta b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx=f(b+\vartheta.\Delta b,\alpha+\Delta\alpha)\cdot\Delta b$$

ასევე

$$\mathrm{III}=\int_a^{a+\Delta a}f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx=f(a+\vartheta'.\Delta a,\alpha+\Delta\alpha)\cdot\Delta a$$

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (I) გამოსახულებაში და შედეგი გავყოთ $\Delta\alpha$-ზე:

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta.\Delta\alpha)dx+f(b+\vartheta\cdot\Delta b,\alpha+\Delta\alpha)\cdot\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}-$$

$$-f(a+\vartheta'\cdot\Delta a,\alpha+\Delta\alpha)\cdot\frac{\Delta a}{\Delta\alpha}.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta\alpha\to0$. თუ ზღვარი მარჯვენა მხარისა არსებობს, მაშინ არსებობს მარცხენა მხარის ზღვარიც. ვნახოთ, რაც უდრის მარჯვენა მხარის ზღვარი. ზღვარი პირველი წევრისა არის $\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx$; განვიხილოთ ზღვარი მეორისა. რადგან ჩვენი პირობების თანახმად, $b(\alpha)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული,

ამიტომ $\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}$-ს ზღვარი იქნება $\frac{db}{d\alpha}$ და მეორე შესაკრების ზღვარი იქნება $f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}$. სავსებით ასევე, მესამე შესაკრების ზღვარი იქნება $-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}$. მაშ, არსებობს მარცხენა მხარის ზღვარიც, რომელიც არის $F'(\alpha)$. საშუალოდ მივიღეთ:

$$F'(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx+f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

ესაა განარმოების ზოგადი ფორმულა პარამეტრის შემცველი ინტეგრალისათვის.

განვიხილოთ მაგალითები:

$\int_0^1 e^{\alpha x}dx=\left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_0^1=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}$. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ჩვენი ყველა პირობა დაცულია. გავაწარმოოთ ეს ინტეგრალი α-ს მიმართ m-ჯერ, მივიღებთ:

$$\int_0^1 xe^{\alpha x}dx=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right),\qquad \int_0^1 x^2e^{\alpha x}dx=\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right),\cdots,$$

$$\int_0^1 x^m e^{\alpha x}dx=\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right).$$

ეს ის შემთხვევაა, როცა უბრალო ინტეგრალის საშუალებით შეგვიძლია უფრო რთული ინტეგრალების გამოთვლა.

კერძო შემთხვევა: ვთქვათ, α შედის ინტეგრალის მხოლოდ საზღვრებში. მაშინ ძირითადი ფორმულა ღებულობს სახეს:

$$F'(\alpha)=f(b)\frac{db}{d\alpha}-f(a)\frac{da}{d\alpha}.$$

აქ $f(x,\alpha)=f(x)$ და ამიტომ $f'_\alpha(x,\alpha)=0$.

ლექცია 5

ინტეგრალი უსასრულო საზღვრებით

აქამდე ინტეგრალქვეშა ფუნქცია იგულისხმებოდა განუწყვეტლად მთელს (a,b) შუალედში, ხოლო თვით საზღვრები სასრული იყო. მაგრამ როგორც თეორიული, ისე გამოყენებითი ხასიათის საკითხები ხშირად გვაიძულებს ჩავთვალოთ, რომ a (ქვედა საზღვარი) ან b (ზედა საზღვარი) (ან ორივე) უსასრულოა. არის აგრეთვე ისეთი შემთხვევები, როცა თვით ინტეგრალქვეშა ფუნქცია განიცდის წყვეტას (a,b) შუალედში. თავისთავად ცხადია, რომ ინტეგრალის ცნება ამ შემთხვევებში მოითხოვს გაფართოებას. ასეთი საკითხების გარკვევა ჩვენს უახლოეს მიზანს შეადგენს. იმისათვის, რომ გავარკვიოთ, რა ხასიათისაა ინტეგრალის ცნების შესაძლო გაფართოება, განვიხილოთ მარტივი მაგალითები.

1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^t \frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t=1-\frac{1}{t}$.

ვთქვათ, ახლა $t\to\infty$. მაშინ $\frac{1}{t}\to 0$ და გვექნება:

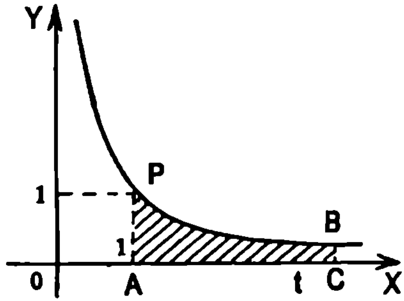
$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1.$$

ამგვარად, განსახილველ ინტეგრალს ჰქონია გარკვეული ზღვარი, როცა $t\to\infty$. ეს უკანასკნელი აღინიშნება $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$-ით. ამგვარად, გვექნება $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=1$.

აქ მოყვანილ მსჯელობას შეესაბამება გარკვეული გეომეტრიული სურათი: დავხატოთ $y=\frac{1}{x^2}$ მრუდი. მას ასიმპტოტებად X და Y ღერძები აქვს. როცა $x\to\infty$, მაშინ $y\to 0$. $\int_1^z \frac{dx}{x^2}$ გამოხატავს მრუდწირული $APBC$ ტრაპეციის ფართობს. როცა $x\to\infty$, ეს ტრაპეცია

გადაიქცევა ზოლად მრუდსა და x ღერძს შორის, რომელიც მარცხნიდან შემოფარგლულია $x=1$ ვერტიკალით. როგორც ჩვენი გამოთვლა გვიჩვენებს, ამ ზოლის ფართობი არის 1. ამავე წესით დავრწმუნდებით, რომ $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ ინტეგრალი უსასრულოდ დიდია.

2. ზოგადი შემთხვევა, როცა ინტეგრალის საზღვრები უსასრულოდ დიდია. როგორ უნდა გვესმოდეს ინტეგრალი, რომლის ერთ-ერთი საზღვარი უსასრულოა, ე.ი. როგორც გაიგება, მაგალითად, $\int_a^{\infty} f(x)dx$?



ნახ. 11

ამისათვის იღებენ $\int_a^t f(x)dx$. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ განუწყვეტელია x-ის ყოველი სასრული მნიშვნელობისათვის, რომელიც $\geq a$. რადგანაც უკანასკნელი ინტეგრალი t ცვალებადის გარკვეულ ფუნქციას წარმოადგენს, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t).$$

თუ $t\to\infty$, მაშინ შესაძლებელია წარმოგვიდგეს სამი შემთხვევა:

1) $\lim F(t) = L$, გარკვეული სასრული სიდიდეა.

2) $\lim F(t) = \infty$,

3) $\lim F(t)$ არ არსებობს.

პირველ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ინტეგრალი $\int_a^{\infty} f(x)dx$ სასრულია, რასაც გამოვთქვამთ შემდეგი ტოლობის საშუალებით:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx .$$

ასეთ შემთხვევაში ხშირად ამბობენ, აგრეთვე, რომ ინტეგრალი $\int_a^{\infty} f(x)dx$ კრებადია. მეორე და მესამე შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ინტეგრალს $\int_a^{\infty} f(x)dx$ აზრი არა აქვს ან, რომ იგი განშლადია.

ახლა შევეცადოთ მოვნახოთ კრიტერიუმი იმისა, რომ ინტეგრალი $\int_a^{\infty} f(x)dx$ იყოს კრებადი. ამისათვის მოგვიხდება დამატებით შემდეგი საკითხის შესწავლა. ვთქვათ, $\varphi(x)$ ფუნქცია $x\to a$. რა შემთხვევაში ექნება ასეთ დროს $\varphi(x)$-ს ზღვარი?

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება, იმისათვის, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს ზღვარი, როცა $x\to a$, აუცილებელია და საკმარისია, რომ ყოველ $\varepsilon(\varepsilon>0)$ რიცხვს შეესაბამებოდეს ისეთი $\eta(\eta>0)$ რიცხვი, რომ როცა $0<|x'-a|<\eta$ და $0<|x''-a|<\eta$, შესრულდეს უტოლობა $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$.

ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=L$, მაშინ ყოველი $\varepsilon(\varepsilon>0)$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta(\eta>0)$ რიცხვი, რომ როცა $0<|x-a|<\eta$, სრულდება უტოლობა $|\varphi(x)-L|<\varepsilon/2$. ამიტომ, როცა $0<|x'-a|<\eta$ და $0<|x''-a|<\eta$, გვექნება $|\varphi(x')-L|<\varepsilon/2$ და $|\varphi(x'')-L|<\varepsilon/2$. აქედან კი მივიღებთ:

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')| = |\varphi(x')-L-(\varphi(x'')-L)| \le |\varphi(x')-L| + |\varphi(x'')-L| < \varepsilon$$

ამით დებულების პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. განვიხილოთ რაიმე x_0 წერტილი a-ს მახლობლობაში და შევადგინოთ მიმდევრობა

$$x_n = x_0+\Theta_n(a-x_0),$$

სადაც θ_n არის ისეთი დადებითი ცვალებადი, რომელიც მუდამ ნაკლები რჩება ერთზე და მისი ზღვარი არის 1. მაშინ გვექნება

$$\lim x_n = x_0 + \lim \theta_n (a - x_0) = x_0 + a - x_0 = a.$$

მაგალითად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\theta_n = \frac{n}{n+1}$ (n=1, 2,...). $\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა შესაბამისი მიმდევრობა იქნება

$$\varphi(x_1),\ \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n), \dots$$

მაგრამ ამ მიმდევრობას აქვს ზღვარი. მართლაც, ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის, პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი $\eta>0$ რიცხვი, რომ, როცა $0<|x'-a|<\eta$ და $0<|x''-a|<\eta$, გვექნება $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$. რადგან $x_n \to a$, η რიცხვს შეესაბამება ისეთი N, რომ, როცა $n>N$, შესრულდება უტოლობა:

$$|x_n - a| < \eta/2\,.$$

ამიტომ (რადგან n-თან ერთად $n+p>N$), შესრულდება უტოლობაც $|x_{n+p} - a| < \eta/2$.

აქედან დავადგენთ, რომ

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - a + a - x_n| \le |x_{n+p} - a| + |x_n - a| < \eta.$$

მაგრამ მაშინ გვექნება

$$|\varphi(x_{n+p}) - \varphi(x_n)| < \varepsilon\,,$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots$ მიმდევრობისათვის შესრულებულია კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. მაშ, არსებობს ამ მიმდევრობის გარკვეული ზღვარი: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = L$.

უკანასკნელი გარემოება იმას ნიშნავს, რომ ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი N_1, რომ, როცა $n>N_1$, გვექნება $|\varphi(x_n)-L|<\varepsilon$. ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი x, ისეთი, რომ $0<|x-a|<\eta$ და ავიღოთ $n>\max(N,N_1)$. მაშინ მივიღებთ

$$|\varphi(x)-L|=|\varphi(x)-\varphi(x_n)+\varphi(x_n)-L|\le|\varphi(x)-\varphi(x_n)|+|\varphi(x_n)-L|.$$

პირველი წევრი მარჯვენა მხარეში <ε, რადგან $|x-a|<\eta$ და $|x_n-a|<\eta$ (ვინაიდან $n>N$). ასევე ნაკლებია ε-ზე მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრებიც, ვინაიდან $n>N_1$. ამგვარად, როცა $0<|x-a|<\eta$, გვექნება $|\varphi(x)-L|<2\varepsilon$, რითაც დადგენილია, რომ არსებობს $\varphi(x)$ ფუნქციის ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=L$. პირობის საკმარისობა და მასთან ლემა დამტკიცებულია.

ყველაფერი, რაც აქ იყო ნათქვამი, სამართლიანია, როცა a უსასრულოა, ე.ი. $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lim\left[\varphi(x')-\varphi(x'')\right]=0$. როცა x' და $x''\to\infty$, დავამტკიცოთ ეს დებულება. მართლაც, x გარდავქმნათ შემდეგი სახით: $x=\dfrac{1}{y}$. როცა $x\to\infty$, მაშინ, $y\to 0$ და პირიქით. ახლა შეგვიძლია დავწეროთ $\varphi(x)=\varphi\left(\dfrac{1}{y}\right)=\psi(y)$. მაშასადამე, თუ არსებობს $\lim\varphi(x)$, როცა $x\to\infty$, მაშინ არსებობს მისი ტოლი $\lim\psi(y)$, როცა y უსასრულოდ მცირეა და პირიქით, თუ არსებობს $\lim\psi(y)$, როცა $y\to 0$, მაშინ არსებობს $\lim\varphi(x)$-იც, როცა $x\to\infty$. მაგრამ $\lim\psi(y)$, როცა $y\to 0$ რომ არსებობდეს, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა:

$$\lim\left[\psi(y')-\psi(y'')\right]=0, \quad \text{როცა} \quad y'\to 0,\ y''\to 0.$$

ეს კი იმასვე ნიშნავს, რომ შესრულდება ტოლობა:

$$\lim\left[\varphi(x') - \varphi(x'')\right] = 0\,,\quad \text{როცა } x'\to\infty,\ x''\to\infty.$$

ამით ლემა გავრცელებულია იმ შემთხვევაზე, როცა a უსასრულოა.

უკანასკნელი პირობა, რა თქმა უნდა, ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ არითმეტიკულად: $\varphi(x)$ ფუნქციას აქვს გარკვეული ზღვარი, როცა x უსასრულოდ იზრდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წინასწარ აღებულ ყოველ დადებით ε რიცხვს ისეთი დადებითი A შეესაბამება, რომ ყოველთვის

$$\left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right| < \varepsilon$$

როცა $x'>A$ და $x''>A$.

ვისარგებლოთ დამტკიცებული ლემით და განვიხილოთ ინტეგრალის არსებობის საკითხი უსასრულო ზედა საზღვრის შემთხვევისათვის. გავიხსენოთ, რომ $\int_a^\infty f(x)dx$ არსებობს, როცა არსებობს ფუნქციის

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

ზღვარი უსასრულობაში. გამოვარკვიოთ, როდის აქვს $F(t)$ ფუნქციას $\lim F(t)$ ზღვარი, როცა $t\to\infty$.

ჯერ განვიხილოთ კერძო შემთხვევა: $\int_a^t \frac{dx}{x^\mu}(a>0)$ და გამოვარკვიოთ, როდის აქვს ამ ინტეგრალს ზღვარი, როცა $t\to\infty$. ამისათვის გამოვთვალოთ იგი. ვთქვათ, ჯერ $\mu\neq 1$ და ავიღოთ

$$\int \frac{dx}{x^\mu} = \int x^{-\mu}dx = \frac{x^{-\mu+1}}{-\mu+1} = -\frac{x^{-\mu+1}}{\mu-1}.$$

მაშასადამე,

$$\int_a^t \frac{dx}{x^\mu} = \frac{1}{\mu-1}\left[\frac{1}{a^{\mu-1}} - \frac{1}{t^{\mu-1}}\right].$$

გადავიდეთ ახლა ზღვარზე, როცა $t \to \infty$. ტოლობის მარჯვენა მხარეში $\frac{1}{a^{\mu-1}}$ მუდმივი სიდიდეა. რაც შეეხება $\frac{1}{t^{\mu-1}}$-ს, აქ წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა:

1) $\mu>1$, მაშინ აშკარაა, რომ $\lim \frac{1}{t^{\mu-1}} = 0$ და წინა განტოლება გვაძლევს: $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$ კრებადია.

2) $\mu<1$, მაშინ $\lim \frac{1}{t^{\mu-1}} = \infty$ და $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$ განშლადია.

ავიღოთ კიდევ შემთხვევა $\mu=1$. მაშინ ჩვენი ინტეგრალი დაიწერება სახით: $\int_a^\infty \frac{dx}{x} = Lgt - Lga$ და, როცა $t \to \infty$, $Lgt \to \infty$. ამგვარად, $\int_a^\infty \frac{dx}{x}$ კვლავ განშლადია.

ამგვარად, ინტეგრალი $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$ $(a>0)$ კრებადია, როცა $\mu>1$ და განშლადია, თუ $\mu \le 1$.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი $\int_a^\infty f(x)dx$ სახის ინტეგრალი, სადაც სიმარტივისათვის ვიგულისხმებთ, რომ $a>0$. წარმოვადგინოთ $f(x)$ ფუნქცია $f(x) = \frac{f(x)x^\mu}{x^\mu} = \frac{\Psi(x)}{x^\mu}$ სახით, ე.ი. $f(x) = \frac{\Psi(x)}{x^\mu}$, და ვიგულისხმოთ, რომ $\Psi(x)$ ყველგან შემოსაზღვრულია a-დან ∞-მდე, ე.ი. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ისეთი $c>0$ რიცხვი, რომ $|\psi(x)| \le c$, ყოველი x-სათვის, როცა $x \ge a$. ცხადია, ეს პირობა $f(x)$-ის შესახებ იმას ნიშნავს, რომ $|f(x)| \le \frac{c}{x^\mu}$, როცა $x \ge a$.

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx=\int_a^t \frac{\psi(x)}{x^{\mu}}dx.$$

ცხადია, რომ $F(t'')-F(t')=\int_{t'}^{t''}\frac{\psi(x)}{x^{\mu}}dx$, საიდანაც საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულის თანახმად, შეიძლება დავწეროთ:

$$\left|F(t'')-F(t')\right|=\left|\psi(\xi)\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{x^{\mu}}\right|=\left|\psi(\xi)\right|\left|\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{x^{\mu}}\right|\le c\left|\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{x^{\mu}}\right|.$$

ვთქვათ, გარდა აღნიშნულისა, $\mu>1$. მაშინ ნებისმიერი მცირე $\varepsilon>0$ სიდიდისათვის არსებობს ისეთი A, რომ, როცა $t'>A$, $t''>A$, გვექნება:

$$\left|F(t'')-F(t')\right|\le C\varepsilon,$$

და რადგან ε ნებისმიერია, ზემოდამტკიცებული ლემის თანახმად დავასკვენით, რომ ინტეგრალი $\int_a^{\infty}f(x)dx$ კრებადია.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ ზემოთ აღწერილი $\Psi(x)$ ფუნქცია ნიშანს ინარჩუნებს და, ვთქვათ, $\left|\psi(x)\right|\ge\alpha$, სადაც α გარკვეული დადებითი სიდიდეა. თუ ამას გარდა $\mu\le1$, $\left|\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{x^{\mu}}\right|$ სიდიდე არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $t'\to\infty$, $t''\to\infty$ და ამიტომ, არც $\left|F(t')-F(t'')\right|$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ასეთ დროს, რადგან

$$\left|F(t')-F(t'')\right|=\left|\psi(\xi)\right|\left|\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{x^{\mu}}\right|\ge\alpha\left|\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{x^{\mu}}\right|.$$

ამგვარად, ასეთ პირობებში ინტეგრალი $\int_a^{\infty} f(x)dx$ განშლადია.

სხვა შემთხვევაში, ე.ი. როცა $\mu \leq 1$ და $\Psi(x)$ ნიშანს იცვლის უსასრულოდ ბევრჯერ, როცა $a \leq x$ ან $\Psi(x) \to 0$: როცა $x \to \infty$, ზემომოყვანილი მსჯელობა არავითარ დასკვნამდე არ მიგვიყვანს; ასეთ დროს ინტეგრალის ყოფაქცევას დამატებითი შესწავლა ესაჭიროება და, ამიტომ, ამბობენ, რომ ეს საეჭვო შემთხვევაა.

მაშასადამე, საბოლოოდ შეგვიძლია გამოვთქვათ, რომ: როცა $f(x) = \dfrac{\psi(x)}{x^{\mu}}$ და 1) არსებობს ისეთი დადებითი c სიდიდე, რომ, როცა $a \leq x$ $|\psi(x)| \leq c$, ხოლო $\mu > 1$, მაშინ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ კრებადია.

2) თუ $\Psi(x)$ ნიშანს არ იცვლის და არსებობს ისეთი α დადებითი სიდიდე, რომ $|\psi(x)| \geq \alpha$, ხოლო $\mu \leq 1$, მაშინ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ განშლადია.

3) თუ $\Psi(x)$ უწყვეტია და ნიშანს იცვლის ყოველ $C (C > 0)$ სიდიდის მარჯვნით, ხოლო $\mu \leq 1$, საეჭვო შემთხვევა გვაქვს. (განვიხილოთ მაგალითი: $\int_a^{\infty} \dfrac{\sin x}{1+x^4}$. აქ ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ $\dfrac{\psi(x)}{x^4}$ სახით, სადაც $\psi(x) = \dfrac{x^4 \sin x}{1+x^4}$.

ცხადია, რომ, როცა $x \geq 1$, გვექნება $|\psi(x)| \leq |\sin x| \dfrac{x^4}{1+x^4} < |\sin x| \leq 1$.

ამგვარად, ჩვენ ვიმყოფებით 1) პირობებში $(C = 1, \quad \mu = 4 > 1)$. ამიტომ ინტეგრალი $\int_a^{\infty} \dfrac{\sin x}{1+x^4} dx$ კრებადია.

ლ ე ქ ც ი ა 6

დავუბრუნდეთ შემდეგი სახის ინტეგრალს $\int_a^\infty f(x)dx$ და გამოვიყვანოთ წინა ლექციის ბოლოს გამოყვანილი ნიშნის ერთი შედეგი, რომელიც შემდეგნაირად მიიღება: ვთქვათ, არსებობს ისეთი μ ხარისხის მაჩვენებელი, რომ $f(x)\cdot x^\mu$ ნამრავლს აქვს გარკვეული, ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი, როცა $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot x^\mu\right]=L\neq 0.$$

ასეთ პირობებში $\int_a^\infty f(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობის საკითხი სავსებით გარკვეულია და არავითარი საეჭვო შემთხვევა არ წარმოგვეიდგება. მართლაც, თუ ეს ზღვარი არსებობს, $f(x)\cdot x^\mu$ ნამრავლი, როცა x საკმარისად დიდი სიდიდეა, მოთავსებული იქნება $L-\varepsilon$ და $L+\varepsilon$ რიცხვებს შორის. ამგვარად, აღვნიშნავთ რა $f(x)x^\mu=\psi(x)$, გვექნება: $f(x)=\dfrac{\psi(x)}{x^\mu}$ და დიდი x-სათვის $L-\varepsilon\leq\psi(x)\leq L+\varepsilon$. აქედან, თუ $0<\varepsilon<|L|$ ცხადია, დავასკვნით, რომ დიდი x-სათვის $\psi(x)$ იგივე ნიშანს ინარჩუნებს, როგორიც აქვს L-ს; ამიტომ წინა ლექციის 3) შემთხვევა გამორიცხულია. მაშ, დაგვრჩება მხოლოდ 1) და 2) შემთხვევები. და, ასეთ პირობებში, დავასკვნით, რომ როცა არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)x^\mu=L$ და $\mu>1$ ინტეგრალი $\int_a^\infty f(x)dx$ კრებადია, ხოლო, თუ $\mu\leq1$ და $L\neq0$, მაშინ $\int_a^\infty f(x)dx$ — განშლადია.

სამწუხაროდ, ზოგიერთი მარტივი ინტეგრალის შესწავლისას ზემოთ გადმოცემული ნიშანი სავსებით უძლურია. განვიხილოთ მაგალითისათვის $\int_1^\infty\dfrac{\sin x}{x^\mu}dx$. აქ, როცა $\mu>1$, იმის გამო, რომ $|\sin|\leq1$, გვექნება წინა ლექციაზე განხილული 1) შემთხვევა, და ამიტომ ეს ინტეგრალი კრებადი იქნება, მაგრამ, როცა $\mu\leq1$, იმის გამო, რომ

$\psi(x)=\sin x$ ფუნქცია უსასრულოდ ბევრჯერ იცვლის ნიშანს დიდი x-ებისათვის, საეჭვო შემთხვევა გვაქვს. ასევე არ გამოდგება ამ ინტეგრალის შესასწავლად არც ამ ლექციაში მიღებული ნიშანი, რადგან ინტეგრალქვეშა $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^{\mu}}$ ფუნქციის ნამრავლს x^{μ}-ზე, ე.ი. $x^{\mu}f(x)=\sin x$ ფუნქციას ზღვარი, როცა $x\to\infty$ არ გააჩნია, თუკი ავიღებთ μ' რიცხვს, რომელიც ოდნავ მეტია μ-ზე, ზღვარი

$$\lim_{x\to\infty} x^{\mu'}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[x^{\mu'-\mu}\cdot x^{\mu}f(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x^{\mu'-\mu}\cdot\sin x\right]$$

იარსებებს, მაგრამ ნულის ტოლი აღმოჩნდება.

ამიტომ ახლა სპეციალურად შევჩერდებით შემთხვევაზე, როცა ინტეგრალქვეშ, ამ მაგალითის მსგავსად, უსასრულოდ ნიშანცვლადი მამრავლი გვაქვს: ვთქვათ, $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ ყველგან დადებითი და კლებადია, a-დან უსასრულობამდე, მაგრამ ისე, რომ $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ კრებადია, თუ $\psi(x)$ისეთი ფუნქციაა, რომ $\left|\int\limits_{t'}^{t''}\psi(x)dx\right|$ შემოსაზღვრულია ერთი გარკვეული რიცხვით ზემოდან, ყოველი t',t''-სათვის $(a\le t', a\le t'')$.

დასამტკიცებლად აღვნიშნოთ M-ით $(M>0)$ თეორემის პირობაში აღნიშნული რიცხვი, რომლისათვისაც გვაქვს:

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''}\psi(x)dx\right|\le M$$

ყოველი t' და t''-სათვის. გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის I ფორმულა ზოგადი სახით; მაშინ მივიღებთ:

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| = \left|\int_{t'}^{t''} \varphi(x)\psi(x)dx\right| = \varphi(\xi)\left|\int_{t'}^{t''} \psi(x)dx\right| \le M\varphi(\xi),$$

სადაც ξ ცვალებადის რაღაც მნიშვნელობაა t'-სა და t''-ს შორის. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ როცა $t' \to \infty, t'' \to \infty$, გვექნება აგრეთვე $\xi \to \infty$, და ამიტომ, $\lim \varphi(\xi) = 0$, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\lim_{t' \to \infty, t'' \to \infty} \left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| = 0,$$

რაც, როგორც წინა ლექციაში იყო ნაჩვენები, ნიშნავს, რომ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ კრებადია.

მაგალითი: ვთქვათ, $\varphi(x)$ ნებისმიერი, დადებითი და ყველგან a-დან ∞-მდე კლებადი ისეთი ფუნქციაა, რომელიც მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $x \to \infty$. ასეთ შემთხვევაში

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)\sin x dx$$

კრებადია. მართლაც, წინა დებულების თანახმად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\left|\int_{t'}^{t''} \sin x dx\right|$ შემოსაზღვრულია ზემოდან გარკვეული M რიცხვით. მაგრამ ეს მართლაც ასეა, რადგან

$$\left|\int_{t'}^{t''} \sin x dx\right| = \left|\left[-\cos x\right]_{t'}^{t''}\right| = \left|\cos t' - \cos t''\right| \le \left|\cos t'\right| + \left|\cot t''\right| \le 2$$

(ე.ი. M რიცხვად შეგვიძლია მივილოთ M=2). ამგვარად, ყოველი ასეთი ინტეგრალი $\int_a^{\infty}\varphi(x)\sin x dx$ (თუ $\varphi(x)$ დადებითი და ისეთი კლებადი ფუნქციაა, რომ $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$), კრებადია.

კერძო შემთხვევა: ინტეგრალი

$$\int_a^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}}dx \qquad (a>0)$$

თუ $\mu>0$ კრებადია. მართლაც, $\varphi(x)=\frac{1}{x^{\mu}}$, ცხადია, აკმაყოფილებს ახლახან აღნიშნულ პირობებს. μ=1-სათვის დავასკვნით: $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ კრებადია.

კრებადი $\int_a^{\infty}f(x)dx$ სახის ყველა ინტეგრალის აქამდე განხილულ მაგალითში $f(x)$ ფუნქციას გააჩნდა ის განსაკუთრებული თვისება, რომ არსებობდა ზღვარი $\lim_{x\to\infty}f(x)$ და ეს ზღვარი ნულის ტოლი იყო. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $y=f(x)$ ფუნქციით გამოხატულ მრუდს ასიმპტოტად x ღერძი ჰქონდა. ეს $\int_a^{\infty}f(x)dx$ სახის ინტეგრალის კრებადობისათვის სრულებითაც არ არის აუცილებელი. არის მთელი კლასი ისეთი კლასის ინტეგრალებისა, რომლებისთვისაც $\lim_{x\to\infty}f(x)$ ზღვარი სრულებითაც არ არსებობს. ასეთებია, მაგალითად, $\int_0^{\infty}\sin_x^2 dx$ ან $\int_0^{\infty}\cos x^2 dx$ ინტეგრალები, რომლებიც, როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, კრებადნი არიან.

მიუხედავად ამისა $\lim_{x\to\infty}\sin x^2$ და $\lim_{x\to\infty}\cos x^2$ ზღვრები არ არსებობენ.

ამ ინტეგრალებს დიდი მნიშვნელობა აქვს ფიზიკაში, სახელდობრ, სინათლის ტალღათა დიფრაქციის თეორიაში. მათ პირველად ყურადღება მიაქცია ფრენელმა და შეისწავლა მათი თვისებები.

განვიხილოთ ინტეგრალი $\int_0^t \sin x^2 dx$, სადაც მივიღოთ ჯერ $t=\sqrt{(n+1)\pi}$. ინტეგრების მთელი $\left(0,\sqrt{(n+1)\pi}\right)$ შუალედი დავანაწილოთ წერტილებით:

$$0,\sqrt{\pi},\sqrt{2\pi},\ldots,\sqrt{n\pi},\sqrt{(n+1)\pi}.$$

განსახილავი ინტეგრალი მაშინ შემდეგნაირად დაიშლება:

$$\int_0^{\sqrt{(n+1)\pi}}=\int_0^{\sqrt{\pi}}+\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}+\ldots+\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}$$

აქ მანძილი აღებული წერტილებს შორის თანდათანობით კლებულობს და ზღვარში ნული ხდება. მართლაც, განვიხილოთ ორი მეზობელი წერტილის სხვაობა

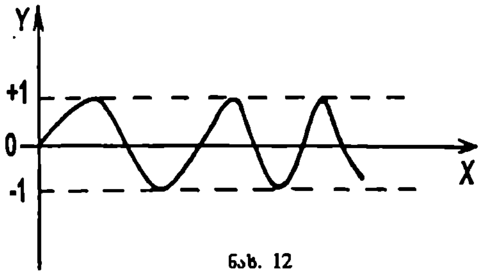
$$\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}=\frac{\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)\left(\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}\right)}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}=$$

$$=\frac{(n+1)\pi-n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}=\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}$$

აქედან დავრწმუნდებით, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)=0.$$

შევნიშნოთ, რომ $y=\sin x^2$ ფუნქცია ისპობა სწორედ $0,\sqrt{\pi},\sqrt{2\pi},\ldots,\sqrt{n\pi}$ წერტილებში, და ის, რაც ჩვენ დავადგინეთ, იმას ნიშნავს, რომ ამ ფუნქციის შესაბამისი მრუდის "ტალღები" (რომელთა სიმაღლე სულ I რჩება) სიგრძით მცირდებიან (ნახ.12).



ნახ. 12

ახლა განვიხილოთ ორი ამისთანა "მეზობელი ტალღითა" და x ღერძით შემოსაზღვრული (სხვადასხვა ნიშნით აღებული) ფართობები. ამ მიზნით ავიღოთ

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 dx \quad \text{და მისი მეზობელი} \quad \int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{\sqrt{(n+2)\pi}} \sin x^2 dx$$

ინტეგრალები. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ მეორე ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია პირველის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე. გეომეტრიულად ეს თავისთავად გასაგებია, რადგან „ტალღები ერთნაირი სიმაღლის“ რჩებიან, მაგრამ n-ის გაზრდით მოკლდებიან. ამის დამტკიცებას ჩვენ ანალიზურად ვაწარმოებთ: მოვახდინოთ $x^2=\pi+z^2$ გარდაქმნა მეორე ინტეგრალში. გავაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობა: $2xdx=2zdz$, $xdx=zdz$ და $dx=\frac{z}{x}dz=\frac{z}{\sqrt{\pi+z^2}}dz$. ამასთან, როცა $x=\sqrt{(n+1)\pi}$, მაშინ $z=\sqrt{n\pi}$, ხოლო თუ $x=\sqrt{(n+2)\pi}$, მაშინ შესაბამისი $z=\sqrt{(n+1)\pi}$.

თუ ყოველივე ამას გავითვალისწინებთ, ცვალების გარდაქმნის ფორმულა მეორე ინტეგრალში მოგვცემს:

$$\int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{\sqrt{(n+2)\pi}} \sin x^2 \cdot dx = -\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin z^2 \cdot \frac{z}{\sqrt{\pi + z^2}} dz =$$

$$= -\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi + x^2}} dx.$$

(აქ ჩვენ z-ის ნაცვლად ჩავწერეთ ისევ x, რადგან ამას, როგორც ვიცით, არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს). ახლა შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ფუნქცია ყველგან ინარჩუნებს ნიშანს განსაზღვრული ინტეგრალის საზღვრებს შორის. მართლაც, თუ $\sqrt{n\pi} \le x \le \sqrt{(n+1)\pi}$, მაშინ $n\pi \le x^2 \le (n+1)\pi$ და ამიტომ $\sin x^2 \ge 0$, თუ n ლუწია, ხოლო $\sin x^2 \le 0$, თუ n — კენტია. აქედან მარტივად გამომდინარეობს, რომ

$$\left| \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi + x^2}} dx \right| = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \left| \sin x^2 \right| \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi + x^2}} dx$$

და, რადგან $\dfrac{x}{\sqrt{\pi + x^2}} < 1$, მივიღებთ:

$$\left| \int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{\sqrt{(n+2)\pi}} \sin x^2 \cdot dx \right| = \left| \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi + x^2}} dx \right| <$$

$$< \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \left| \sin x^2 \right| dx = \left| \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \cdot dx \right|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს:

$$u_k = \left| \int\limits_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin x^2 dx \right|,$$

გვექნება: $u_o>0$ $u_1>0,\dots, u_n>0,\dots$ ამასთან, ეს რიცხვთა მიმდევრობა კლებადია, და

$$\int\limits_0^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 dx = u_o - u_1 + u_2 - \cdots (-1)^n u_n.$$

ადვილად დასამტკიცებელია აგრეთვე, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. მართლაც, საშუალო მნიშვნელობის 1 ფორმულის ძალით: მივილებთ:

$$|u_n| = \left| \int\limits_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \cdot dx \right| = \left|\sin \xi^2\right| \int\limits_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} dx \cdot \le 1 \cdot \left(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\right),$$

საიდანაც: ზემონათქვამის შედეგად მივილებთ: $|u_n| \to 0$.

ახლა გავიხსენოთ ანალიზის შემდეგი დებულება: თუ მოცემულია რაიმე ნიშანცვლადი (u) მწკრივი: $u_o - u_1 + u_2 - u_3 + \dots$, სადაც u_o, u_1, $u_2,\dots$ კლებადია და $u_n \to 0$, მაშინ ეს მწკრივი კრებადია. ამიტომ ამ მწკრივის $n+1$ წევრის ჯამს, $u_o - u_1 + \dots + (-1)^n u_n$-ს, რომელიც როგორც ზემოთ ვნახეთ, $\int\limits_0^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \cdot dx$ ინტეგრალია, აქვს გარკვეული ზღვარი, ე.ი. არსებობს

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 dx = S .$$

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი $t>0$ რიცხვი და ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური n რიცხვი, რომ გვქონდეს $\sqrt{(n+1)\pi} \le t < \sqrt{(n+2)\pi}$.

მაშინ გვექნება:

$$\int_0^t \sin x^2 \cdot dx = \int_0^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 dx + \int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^t \sin x^2 \cdot dx$$

მაგრამ ჩვენ უკვე ვიცით, რომ პირველი ინტეგრალის ზღვარი, როცა $n \to \infty$ არსებობს და არის S. ახლა, თუ ვაჩვენებთ, რომ, როცა $t \to \infty$, მაშინ

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^t \sin x^2 dx = 0,$$

იმის გამო, რომ, როცა $t \to \infty$, გვაქვს აგრეთვე $n \to \infty$, მივიღებთ, რომ არსებობს ზღვარი:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \sin x^2 \cdot dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \cdot dx +$$

$$+ \lim_{t\to\infty} \int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^t \sin x^2 \cdot dx = S + 0 = S,$$

ე.ი. ნაჩვენები იქნება, რომ ინტეგრალი $\int_0^\infty \sin x^2 \cdot dx$ კრებადია.

მაგრამ ეს ადვილი საჩვენებელია. მართლაც, თუ

$$\sqrt{(n+1)\pi} \le t < \sqrt{(n+2)\pi},$$

მაშინ

$$\left|\int\limits_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{t} \sin x^2 \cdot dx\right| = \left|\sin \xi^2 \int\limits_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{t} dx\right| \le 1 \cdot \int\limits_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{t} dx = \left(t - \sqrt{(n+1)\pi}\right) <$$

$$< \left(\sqrt{(n+2)\pi} - \sqrt{(n+1)\pi}\right)$$

(და, ეს უკანასკნელი, როგორც ვნახეთ, მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $t \to \infty$). და, ამასთან ერთად $n \to \infty$). ამით ჩვენი ინტეგრალის კრებადობა დადგენილია.

აქამდე ვიხილავდით ისეთი ინტეგრალების თეორიას, რომელსაც ზედა საზღვარი აქვს უსასრულო, ე.ი. ვიხილავდით $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ სახის ინტეგრალის თეორიას, შემთხვევა, როცა უსასრულოა ქვედა საზღვარი, ე.ი. გვაქვს $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ სახის ინტეგრალი, არსებითად არ განსხვავდება განხილულისაგან. აქაც ვიღებთ რაიმე t-ს, სადაც $t<a$ და ვიხილავთ ინტეგრალს: $\int\limits_t^a f(x)dx = \Phi(t)$. თუ t-ს ამ ფუნქციას აქვს გარკვეული ზღვარი, როცა $t \to -\infty$, მაშინ ვამბობთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ კრებადია, და ვწერთ: $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int\limits_t^a f(x)dx$. თუ $\Phi(t)$ ფუნქციის ზღვარი (როცა $t \to -\infty$) არ არსებობს, ვამბობთ, რომ $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ – განშლადია.

ასევე შეგვიძლია განვიხილოთ ინტეგრალები, რომელთაც ორივე საზღვარი უსასრულო აქვს, ე.ი. განვიხილოთ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ სახის ინტეგრალი. ის ყოველთვის შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ორი ზემოგანხილული ინტეგრალის ჯამი, თუ ავირჩევთ რაიმე a რიცხვს:

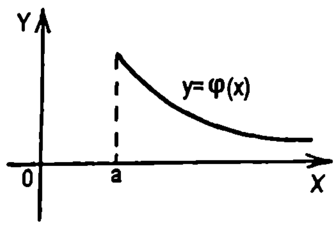
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

ორივე ასეთი სახის ინტეგრალი კი ჩვენ უკვე განხილული გვაქვს.[5]

ახლა გადავიდეთ ახალ საკითხზე, რომელიც კვლავ დაკავშირებულია უსასრულო საზღვრიან ინტეგრალებთან და დავადგინოთ მწკრივების კრებადობის ერთი ახალი ნიშანი, რომელიც კოშის ეკუთვნის.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც ვიგულისხმოთ, რომ გარკვეული a მნიშვნელობიდან მოყოლებული ∞-მდე არის კლებადი და დადებითი (იხ. ნახ. 13). განვიხილოთ შემდეგი სახის უსასრულო მწკრივი:

(φ) $\varphi(a)+\varphi(a+1)+...+\varphi(a+n)+...$



ნახ. 13

ამ მწკრივის კერძო შემთხვევაა, მაგალითად, ჰარმონიული მწკრივი, რომელიც მიიღება, თუ $a=1$ და $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$.

კოშიმ დაამტკიცა, რომ (φ) მწკრივი კრებადია, თუ ინტეგრალი $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ კრებადია, და პირიქით, (φ) მწკრივი განშლადია, როცა აღნიშნული ინტეგრალი განშლადია (მისი მნიშვნელობა უსას-

რულოა). ამის დასამტკიცებლად ავილოთ x, რომელიც მოთავსებულია საზღვრებში: $a+n-1\le x\le a+n$. მაშინ თავისთავად ცხადია, რომ

$$\varphi(a+n-1)\ge\varphi(x)\ge\varphi(a+n).$$

გავამრავლოთ ამ უტოლობის ყველა წევრი dx-ზე და მოვახდინოთ ინტეგრაცია $a+n-1$-დან $a+n$-მდე. მაშინ მივიღებთ:

$$\int_{a+n-1}^{a+n}\varphi(a+n-1)dx \ge \int_{a+n-1}^{a+n}\varphi(x)dx \ge \int_{a+n-1}^{a+n}\varphi(a+n)dx\,.$$

მაგრამ, რადგან $\varphi(a+n-1)$ და $\varphi(a+n)$ მუდმივებია და $\int_{a+n-1}^{a+n}dx=1$, ამიტომ მივიღებთ:

$$\varphi(a+n-1)\ge\int_{a+n-1}^{a+n}\varphi(x)dx\ge\varphi(a+n)\,.$$

დავწეროთ ეს უტოლობები n-ის ყველა მნიშვნელობებისათვის, როცა n=0, 1, 2, ..., m:

$$\varphi(a)\ge\int_{a}^{a+1}\varphi(x)dx\ge\varphi(a+1)\,,$$

$$\varphi(a+1)\ge\int_{a+1}^{a+2}\varphi(x)dx\ge\varphi(a+2)\,,$$

$$\varphi(a+m-1)\ge\int_{a+m-1}^{a+m}\varphi(x)dx\ge\varphi(a+m)\,.$$

ამ უტოლობათა შეკრებით მივიღებთ:

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+m-1)\geq \int_a^{a+m}\varphi(x)dx\geq\varphi(a+1)+\varphi(a+2)+$$

$$+\ldots+\varphi(a+m).$$

თუ ახლა $\int_a^{\infty} f(x)dx$ კრებადია, მაშინ ამ უტოლობის მარცხენა ნაწილი, რომელიც წარმოადგენს ჩვენი მწკრივის პირველი m წევრის ჯამს S_m-ს, რომელიც (რადგან $\varphi(x)$ დადებითი ფუნქციაა და ჩვენი მწკრივის წევრები დადებითია), მოგვცემს, რომ მწკრივი კრებადია (და ამ მწკრივის ჯამი

$$\left(S=\lim_{m\to\infty} S_m\leq\lim_{m\to\infty}\int_a^{a+m}\varphi(x)dx=\int_a^{\infty}\varphi(x)dx\right).$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ვთქვათ ახლა, რომ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ განშლადია, მაშინ, რადგან $\varphi(x)>0$ (და $\int_a^{a+m}\varphi(x)dx$ ზრდადია), $\lim\int_a^{a+m}\varphi(x)dx=\infty$. ასეთ შემთხვევაში, ჩვენი უტოლობის მარჯვენა მხარე გვიჩვენებს, რომ (φ) მწკრივის m-1 წევრის ჯამი, რომელსაც აკლია მხოლოდ $\varphi(a)$, მეტია, ვიდრე $\int_a^{a+m}\varphi(x)dx$,

ე.ი.

$$S_{m-1}-\varphi(a)>\int_a^{a+m}\varphi(x)dx.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{m\to\infty} S_{m-1}=+\infty$ და (φ) მწკრივი განშლადია.

მაგალითის სახით განვიხილოთ ჰარმონიული მწკრივი

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ავილოთ $\varphi(x)=\frac{1}{x}$. მაგრამ $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ ინტეგრალი, როგორც ვნახეთ, განშლადია. ამიტომ კოშის თეორემის თანახმად, ჰარმონიული მწკრივი აგრეთვე განშლადია.

განვიხილოთ ცნობილი მწკრივი: $1+\frac{1}{2^{\mu}}+\frac{1}{3^{\mu}}+\cdots+\frac{1}{n^{\mu}}+\cdots$

ანალიზის შესავლიდან ვიცით, რომ ეს მწკრივი კრებადია, როცა $\mu>1$ და განშლადია, როცა $\mu\leq 1$. ამ მწკრივისათვის შეგვიძლია მივიღოთ, $\varphi(x)=\frac{1}{x^{\mu}}$ და მწკრივთა თეორიის ეს შედეგი მიიღება კოშის თეორემიდან, თუ გავიხსენებთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\mu}}$ კრებადია, როცა $\mu>1$ და განშლადია, როცა $\mu\leq 1$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი საკითხი, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს ანალიზის შესავლისათვის. განვიხილოთ რიცხვთა მწკრივი

$$(\mu)\quad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

როგორც ვიცით, ამ მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\lim[u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}]=0,$$

როცა $n\to\infty$ და p — ნებისმიერია.

მაგრამ, თუ n-ის ზრდის დროს p ამ ტოლობაში სპეციალური კანონით იცვლება (n-ის მიხედვით), ეს პირობა შეიძლება შესრულებული იყოს მაშინაც, როცა მწკრივი განშლადია. მაგალითად, ჰარმონიული მწკრივისათვის, თუ p რაიმე ფიქსირებული რიცხვია, ცხადია, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty}[u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}]=0\,.$$

(რადგან ყოველი წევრი $\to 0$ და ამ წევრების რაოდენობა ერთი და იგივეა), მაგრამ ჰარმონიული მწკრივი განშლადია!

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ ამგვარი ჯამების ყოფაქცევა, როცა n-თან ერთად p-ც უსასრულოდ იზრდება.

ვთქვათ, ისევ $\varphi(x)$ რაიმე დადებითი და კლებადი ფუნქცია a-დან უსასრულობამდე ყველგან, და მწკრივი, რომელსაც ვიხილავთ, ასეთი სახისაა:

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+\mathrm{n})+\ldots$$

გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ გამოყვანილი უტოლობანი:

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+n-1)\geq\int\limits_a^{a+n}\varphi(x)dx\geq\varphi(a+1)+\varphi(a+2)+\cdots$$

$$\cdots+\varphi(a+n)$$

აქ a-ს ნაცვლად ავილოთ $a+n$, ხოლო n-ის ნაცვლად p. მაშინ გვექნება:

$$\varphi(a+n)+\varphi(a+n+1)+\cdots+\varphi(a+n+p-1)\geq\int\limits_{a+n}^{a+n+p}\varphi(x)dx$$

და

$$\varphi(a+n+1)+\varphi(a+n+2)+\cdots+\varphi(a+n+p)\leq\int_{a+n}^{a+n+p}\varphi(x)dx.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\int_{a+n}^{a+n+p}\varphi(x)dx+\varphi(a+n+p)\leq\sum_{k=n}^{n+p}\varphi(k+a)\leq\int_{a+n}^{a+n+p}\varphi(x)dx+\varphi(a+n).$$

მაგრამ $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(a+n)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(a+n+p)=0$ და ამიტომ, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{n+p}\varphi(k+a)=\lim_{n\to\infty}\int_{a+n}^{a+n+p}\varphi(x)dx.$$

ლექცია 7

ზოგიერთი გამოყენება

გამოვიყენოთ ახლა წინა ლექციის ბოლოს გამოყვანილი ფორმულა, როცა $\varphi(x)=\frac{1}{x}$. ამ შემთხვევაში,

$$\int_{n}^{n+p}\frac{dx}{x}=Log(n+p)-Logn=Log\left(1+\frac{P}{n}\right).$$

ამიტომ, თუ n და p უსასრულოდ იზრდებიან ისე, რომ $\frac{p}{n}$-ს ზღვრად აქვს λ რიცხვი, ზემონახსენები ფორმულა მოგვცემს:

$$\lim_{n\to\infty, p\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+P}\right)=Log(1+\lambda),$$

სადაც $\lambda=\lim\frac{p}{n}$.

ასე, მაგალითად, თუ $p=n$, გვექნება: $\lambda=1$ და მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=Log\,2.$$

უკანასკნელი ფორმულა საინტერესოა იმით, რომ ადასტურებს შესაძლებლობას, რომ უსასრულოდ მცირეთა ჯამი, თუ მათი რიცხვი უსასრულოდ დიდია, შეიძლება გარკვეული სასრული სიდიდე იყოს.

გამოვითვალოთ

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

ჯამის ზღვარი, როცა $n\to\infty$. აქ შეიძლება ჩვენს აღნიშვნებში მივიღოთ $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$ კრებადია და, ამიტომ, $\lim\int_n^{n+p}\frac{dx}{x^2}$ ყოველთვის მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n\to\infty$. ამგვარად, წინა ლექციის ფორმულა გვაძლევს:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\right)=0$$

როგორც არ უნდა იცვლებოდეს p, როცა $n\to\infty$.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ზღვარი:

$$\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}\right)$$

ამისათვის ავიღოთ ფუნქცია $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ და გამოვითვალოთ

$$\int_{n}^{n+p}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_{n}^{n+p}=2\left(\sqrt{n+p}-\sqrt{n}\right)=\frac{2p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}.$$

ამიტომ, თუ $n\to\infty$ და p იზრდება ისე, რომ ის ტოლი რჩება n-სა, ზემოაღნიშნული ფორმულა მოგვცემს:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{2n}+\sqrt{n}}=\lim\frac{2\sqrt{n}}{1+\sqrt{2}}=\infty.$$

ამ მსჯელობაში p ყველგან მთელი რიცხვია, ახლა მის ადგილას ავიღოთ ისეთი უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება $\sqrt{n}$ -ს. ამ რიცხვს $\sqrt{n}$ -ის მთელი ნაწილი ჰქვია და ის შემდეგნაირად აღინიშნება: $p=E\left(\sqrt{n}\right)$. ეს, ცხადია, იმას ნიშნავს, რომ $\sqrt{n}=p+\alpha$, სადაც $0\le\alpha<1$. ახლა, თუ ამ ტოლობას ავიყვანთ მეორე ხარისხში, გვექნება:

$$n=p^2+2p\alpha+\alpha^2.$$

აქედან

$$n+p=p^2+p(1+2\alpha)+\alpha^2$$

და

$$\sqrt{n+p}=\sqrt{p^2+p(1+2\alpha)+\alpha^2}=p\sqrt{1+\frac{1+2\alpha}{p}+\frac{\alpha^2}{p^2}}.$$

ამგვარად,

$$\int_n^{n+p} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2p}{\sqrt{n}+\sqrt{n+p}} = \frac{2p}{p+\alpha+p\sqrt{1+\frac{1+2\alpha}{p}+\frac{\alpha^2}{p^2}}} =$$

$$= \frac{2}{1+\frac{\alpha}{p}+\sqrt{1+\frac{1+2\alpha}{p}+\frac{\alpha^2}{p^2}}}.$$

აქედან, რადგან $p\to\infty$, როცა $n\to\infty$, გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{1+1} = 1,$$

ე.ი. გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}\right)=1,$$

როცა $p = E\left(\sqrt{n}\right)$.

ახლა შემოვიტანთ უსასრულო საზღვრიანი ინტეგრალის თანაბარი კრებადობის განმარტებას, რომელიც ეხება პარამეტრიანი ინტეგრალების შემთხვევას.

განვიხილოთ ორი ცვალებადის ფუნქცია $f(x,\alpha)$, რომელიც განუწყვეტელია, როცა $x\geq a$ და $\alpha_1\leq\alpha\leq\alpha_2$, სადაც α_1, α_2 რაღაც რიცხვებია.

დავუშვათ, რომ ინტეგრალი $\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ კრებადია, α-ს რომელიმე აღნიშნული მნიშვნელობისათვის. მაშინ ინტეგრაციის შედეგი წარმოგვიდგება, როგორც α-ს ფუნქცია:

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)dx = F(\alpha).$$

განვიხილოთ უკანასკნელი ინტეგრალის შემდეგნაირი წარმოდ-გენა:

$$F(\alpha) = \int_a^t f(x,\alpha)dx + \int_t^\infty f(x,\alpha)dx .$$

ჩვენ ვამბობთ, რომ $\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$ არის თანაბრად კრებადი ინტეგრალი (α_1, α_2) შუალედში, თუ ყოველ წინასწარ აღებულ ε დადებით რიცხვს ისეთი ζ რიცხვი შეესაბამება, რომ α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის, α_1-სა და α_2-ს შორის, ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\left|\int_t^\infty f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon .$$

ყოველთვის, როცა $t>\zeta$.

დავამტკიცოთ, რომ ასეთ პირობებში (α) განუწყვეტელი ფუნქციაა.

მივცეთ α-ს ნაზრდი $\Delta\alpha$. მაშინ გვექნება:

$$F(\alpha+\Delta\alpha) = \int_a^t f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx + \int_t^\infty f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx .$$

აქედან მივიღებთ:

$$F(\alpha+\Delta\alpha) - F(\alpha) = \int_a^t [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]dx + \int_t^\infty f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx -$$

$$-\int_t^{\infty} f(x,\alpha)dx.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)| \le \left|\int_a^t [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx\right| +$$

$$+\left|\int_t^{\infty} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx\right| + \left|\int_t^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| \qquad (1)$$

ახლა ავირჩიოთ რაიმე დადებითი ε რიცხვი და ავიღოთ იმდენად დიდი t, რომ მეორე და მესამე სიდიდეები მარჯვენა მხარეში ნაკლებნი იყვნენ ცალ-ცალკე $\frac{\varepsilon}{3}$-ზე. ვთქვათ, ამისათვის საჭიროა შესრულდეს უტოლობა: $t>k$. რაც შეეხება პირველ წევრს (1), უტოლობის მარჯვენა მხარეში, რადგან $f(x,\alpha)$ ფუნქცია განუწყვეტელია, $\frac{\varepsilon}{3(t-a)}$ რიცხვისათვის შეიძლება შევარჩიოთ ისეთი δ(δ>0), რომ, როცა $|\Delta\alpha|<\delta$, გვექნება $|f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)|<\frac{\varepsilon}{3(t-a)}$ ყოველი x-სათვის a-დან t-მდე შუალედში. აქედან, ცხადია, მივიღებთ, რომ

$$\left|\int_a^t [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx\right| < \frac{\varepsilon}{3(t-a)}\cdot(t-a)=\frac{\varepsilon}{3}.$$

ამგვარად, ასეთი Δα-ს შერჩევა, (1) უტოლობის თანახმად, მოგვცემს:

$$|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)|<\varepsilon.$$

უკანასკნელი გარემოება ამტკიცებს განსახილავი $F(\alpha)$ ფუნქციის უწყვეტობას (α_1, α_2) შუალედში. საბოლოოდ, თუ გვაქვს ინტეგრალი $\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$, სადაც $f(x,\alpha)$ განუწყვეტელია ყველა მნიშვნელობებისათვის $a \leq x$ და $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ და ეს ინტეგრალი თანაბრად კრებადია (α_1, α_2) შუალედში, მაშინ ფუნქცია

$$F(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha)dx$$

განუწყვეტელია α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის α_1-სა და α_2-ს შორის.

განვიხილოთ ზოგადი სახის ინტეგრალი $\int_a^\infty \frac{P_{(x)}}{\sqrt{\theta(x)}}dx$ და გამოვარკვიოთ, როდის არის ის კრებადი, თუ $P(x)$ და $\theta(x)$ ორივე რაღაც პოლინომია. ვიგულისხმოთ, რომ a და მასზე მეტი რიცხვები არ არიან $\theta(x)$ პოლინომის ფესვები.

ვთქვათ, $P(x)$ პოლინომის ხარისხი არის m და $\theta(x)$ -ისა – n. ამგვარად,

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$$

და

$$\theta(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

სადაც $a_o \neq 0$ და $b_0 \neq 0$. გავიტანოთ ამ გამოსახულებებიდან ფრჩხილებს გარეთ x-ის უმაღლესი ხარისხი. მაშინ მივიღებთ $P(x)$ და $\theta_{(x)}$ ფუნქციების შემდეგნაირ წარმოდგენას:

$$P(x) = x^m P_1^{(x)} \qquad \text{და} \qquad \theta(x) = x^n \theta_1(x)^x,$$

სადაც

$$P_1(x)^x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}, \quad \theta_1(x) = b_o + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{x^n}.$$

ასე მივიღებთ ჩვენი ინტეგრალქვეშა ფუნქციის შემდეგი სახის წარმოდგენას:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{\theta(x)}} = \frac{x^m P_1(x)}{x^{n/2}\sqrt{\theta_1(x)}} = x^{m-\frac{n}{2}}\psi_{(x)},$$

სადაც

$$\psi_{(x)} = \frac{a_o + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}}{\sqrt{b_o + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{x^n}}}.$$

ვხედავთ, რომ ფუნქციას $\frac{P(x)}{\theta(x)}$ აქვს სახე $\frac{\psi(x)}{x^{\mu}}$, სადაც არსებობს $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_{(x)} = \frac{a_o}{\sqrt{b_o}} \neq 0$ და $\mu = -m + \frac{n}{2}$. მეორე მხრივ, ვიცით ასეთი სახის ფუნქციის ინტეგრალის კრებადობის ნიშანი:

$$\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{\sqrt{\theta(x)}}dx = \int_a^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{\mu}}dx$$

კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\frac{n}{2} - m > 1$, ე.ი. როცა $n>2m+2$.

მაგრამ m და n აქ მთელი რიცხვებია, ამიტომ უკანასკნელი პირობა იმას ნიშნავს, რომ $n\geq 2m+3$, ე.ი. იმისათვის, რომ ინტეგრალი $\int_a^{\infty}\frac{P(x)}{\sqrt{\theta(x)}}dx$ (სადაც $P(x)$ და $\theta(x)$ პოლინომებია) იყოს

კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი $\theta(x)$-ს ხარისხი სამი ერთეულით მაინც აღემატებოდეს $P(x)$-ს გაორკეცებულ ხარისხს.

მაგალითად, $\int_0^\infty \frac{x^4-1}{\sqrt{x^{10}+1}}$ განშლადია (რადგან 10 მხოლოდ ორი ერთეულით აღემატება 2.4=8-ს), ხოლო $\int_0^\infty \frac{x^4-1}{\sqrt{x^{11}+1}}$ – კლებადია.

შემთხვევა, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია განიცდის წყვეტას საზღვრებს შორის.

გადავიდეთ ამ შემთხვევის განხილვაზე, როცა ფუნქცია განიცდის წყვეტას ინტეგრალის საზღვრებს შორის. ავიღოთ, მაგალითად, $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$. აქ a და b სასრული რიცხვებია და $a<b$. მაგრამ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია განიცდის წყვეტას ინტეგრალის a საზღვარზე. ავიღოთ განსახილავი ინტეგრალის ნაცვლად შემდეგი სახის ინტეგრალი

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^n},$$

სადაც $0<\varepsilon<b-a$. თავისთავად ცხადია, რომ ასეთ ინტეგრალს უკვე აქვს აზრი. გამოვითვალოთ ის და შემდეგ განვიხილოთ მისი ზღვარი, როცა $\varepsilon \to 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, მას კვლავ აღვნიშნავთ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$-ით და, ამგვარად, ასეთ შემთხვევაში ინტეგრალი გარკვეული სიდიდე აღმოჩნდება. ახლა ვნახოთ n-ის რომელი მნიშვნელობებისათვის იარსებებს ეს ინტეგრალი ამ ახალი აზრით.

გამოვითვალოთ ინტეგრალი

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^n} = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} (x-a)^{-n} dx = \left[\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}\right]_{a+\varepsilon}^{b} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} - \frac{1}{(b-a)^{n-1}}\right].$$

(აქ იგულისხმება ჯერ, რომ $n \neq 1$). ახლა, ცხადია, როდის არსებობს ამ ინტეგრალის ზღვარი, როცა $\varepsilon \to 0$. ეს მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა n-$1<0$, ე.ი. $n<1$ (გავიხსენოთ, რომ ჩვენ ვგულისხმობთ, $n \neq 1$). წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა $n>1$, ინტეგრალის ზღვარი უსასრულობა იქნება.

თუ ავიღებთ შემთხვევას: $n=1$, მივიღებთ:

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-a} = \left[Log(x-a)\right]_{a+\varepsilon}^{b} = Log(b-a) - Log\varepsilon$$

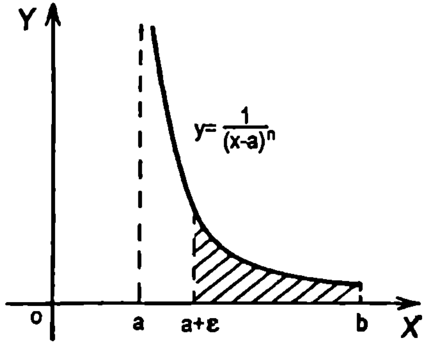
და ამ გამოსახულების ზღვარი, როცა $\varepsilon \to 0$, კვლავ არის ∞. მაშასადამე, ინტეგრალი

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^n}$$

მიისწრაფვის გარკვეული სასრული ზღვრისაკენ, როცა $\varepsilon \to 0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $n<1$. ასეთ დროს უკანასკნელი ინტეგრალის ზღვარი შემდეგი სიდიდეა:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}}. \qquad \text{(როცა } n<1\text{)}$$

ეს ხერხი არის საფუძველი, რაზედაც აშენებულია ინტეგრაციის თეორია, როცა ფუნქცია წყვეტილია ინტეგრაციის საზღვრებს შორის. სანამ ზოგად განმარტებაზე გადავიდოდეთ, განვიხილოთ ზემომოყვანილი მაგალითის შესაბამისი გეომეტრიული სურათი. დავხაზოთ მრუდი $y=\dfrac{1}{(x-a)^n}$. მისი „მარჯვენა“ კალთისათვის $x=a$ ვერტიკალი ასიმპტოტს წარმოადგენს (იხ. ნახ. 14).



ნახ. 14

ინტეგრალი $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{(x-a)^n}$ გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოფარგლულია $x=a+\varepsilon$, $x=b$ ვერტიკალებით, ზემოდან ჩვენი მრუდით და ქვემოდან x-თა ღერძით.

ეს ფართობი ნახაზზე დაშტრიხულია. როცა $\varepsilon \to 0$, ამ ფიგურის მარცხენა გვერდი მიისწრაფვის $x=a$ ასიმპტოტისაკენ, მისი ფართობი იზრდება და მას აქვს სასრული ზღვარი, როცა $n<1$, ხოლო ეს ზღვარი უსასრულოა, თუ $n \geq 1$.

ლექცია 8

ინტეგრალი არაშემოსაზღვრული ფუნქციისაგან

წინა ლექციაზე განხილული მაგალითის შესაბამისად, განვიხილოთ (a,b) შუალედზე მოცემული ფუნქცია $f(x)$, რომელიც განიცდის წყვეტას a წერტილზე და ყველგან სხვაგან განუწყვეტელია ამ შუალედში. ისმება საკითხი, როგორ უნდა გვესმოდეს

$\int_a^b f(x)dx$ ამ შემთხვევაში? ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

სადაც ε რაიმე რიცხვია $0<\varepsilon<b-a$. ეს ინტეგრალი, ცხადია, აზრიანია და წარმოადგენს ε სიდიდის ფუნქციას:

$$F(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

დავუშვათ, რომ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon)=K,$$

მაშინ $\int_a^b f(x)dx$-ს განმარტავენ როგორც ასეთ K სიდიდეს, ე.ი.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon).$$

ასეთ დროს ამბობენ, რომ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ კრებადია.

თუ ფუნქციას $F(\varepsilon)$ არა აქვს ზღვარი, როცა $\varepsilon\to 0$, მაშინ ამბობენ, რომ $\int_a^b f(x)dx$ განშლადია და მას არავითარი სიდიდე არ მიეწერება.

ისმის კითხვა, რა პირობებშია კრებადი განსახილავი სახის ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$? ეს, როგორც ვნახეთ, $F(\varepsilon)$ ფუნქციის ზღვარის არსებობის დროს ხდება, როცა $\varepsilon\to 0$. მაგრამ ეს ზღვარი, როგორც ვიცით, არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი დადებითი η რიცხვს შეესაბამება ისეთი დადებითი δ, რომ როცა $0<\varepsilon<\delta$ და $0<\varepsilon'<\delta$, გვექნება $|F(\varepsilon)-F(\varepsilon')|<\eta$.

განვიხილოთ, კერძოდ, ფუნქცია $f(x)=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}}$, სადაც ფუნქცია $\psi(x)$ განუწყვეტელია (a,b) შუალედში და, მაშასადამე, ის ერთ გარკვეულ საზღვარს არ აღემატება. ავიღოთ ინტეგრალი

$$F(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}}dx.$$

დავამტკიცოთ, რომ, თუ $\mu<1$, მას აქვს ზღვარი, როცა $\varepsilon\to 0$. წარმოვადგინოთ სხვაობა $F(\varepsilon)-F(\varepsilon')$ შემდეგნაირად:

$$F(\varepsilon)-F(\varepsilon')=\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}}dx-\int_{a+\varepsilon'}^{b}\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}}dx=\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'}\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}}dx.$$

გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა:

$$\left|F(\varepsilon)-F(\varepsilon')\right|=\left|\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'}\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}}dx\right|=\left|\psi(\xi)\right|\left|\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'}\frac{dx}{(x-a)^{\mu}}\right|$$

ახლა გავიხსენოთ ჩვენს მიერ განხილული ინტეგრალი $\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$ და შევნიშნოთ, რომ მას (რადგან $\mu<1$) აქვს ზღვარი,

როცა $\varepsilon \to 0$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\left|\int\limits_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}\right|$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon' \to 0$.

ამის გამო, რადგან $|\psi(\xi)|$ მამრავლი შემოსაზღვრულია, დავასკვნით, რომ ასეთ დროს არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{\varepsilon \to 0, \varepsilon' \to 0} |F(\varepsilon) - F(\varepsilon')|$ და ის ტოლია ნულისა.

ეს კი, თავის მხრივ, იმას ნიშნავს, რომ $\int\limits_a^b \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}} dx$ კრებადია.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, როცა $\mu \geq 1$. აქ თავის მხრივ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება.

I. $\psi(x)$ ფუნქცია ერთსა და იმავე ნიშანს ინარჩუნებს (a,b) შუალედზე და $|\psi(x)| \geq \zeta$, სადაც $\zeta > 0$. ასეთ შემთხვევაში (იმის გამო, რომ $\mu \geq 1$), რადგან ინტეგრალი $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$ უსაზღეროდ იზრდება, როცა $\varepsilon \to 0$, საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა მოგვცემს, რომ ინტეგრალი

$$\left|\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}} dx\right| = |\psi(\xi)| \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}} \geq \zeta \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$$

აგრეთვე უსაზღვროდ იზრდება, როცა $\varepsilon \to 0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^b \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}} dx$ – განშლადია.

II. $\psi(x)$ ფუნქცია ნიშანცვლადია ან მისი მნიშვნელობების აბსოლუტური სიდიდე არ არის არც ერთი დადებითი ξ რიცხვით შემოსაზღვრული ქვემოდან. მაშინ წინა უტოლობის მარჯვენა მხარეში $\psi(\xi)$ მამრავლი შეიძლება უსასრულოდ მცირდებოდეს

(როცა $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$ ინტეგრალი უსაზღვროდ იზრდება). ამიტომ, საკითხი $\int\limits_{a}^{b} \frac{\psi_{(x)}dx}{(x-a)^{\mu}}$ ინტეგრალის კრებადობის შესახებ, ასეთ შემთხვევაში, გაურკვეველი რჩება.

გაურკვევლობას ადგილი არა აქვს, როცა $f(x)=\frac{\psi_{(x)}}{(x-a)^{\mu}}$ და $\psi_{(x)}$ ფუნქციას (ე.ი. $\psi(x)=f(x)(x-a)^{\mu}$ ნამრავლს) აქვს გარკვეული და ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი, როცა $x\to a$, ე.ი. თუ

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)(x-a)^{\mu}\right]=\lim_{x\to a}\psi_{(x)}=K\neq 0.$$

მართლაც, ასეთ დროს, ზღვართა თეორიის თანახმად, ყოველი $\eta>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\varepsilon_0>0$ რიცხვი, რომ, როცა $a<x<a+\varepsilon_0$, გვექნება:

$$k-\eta<\psi(x)<k+\eta.$$

(აქ იგულისხმება, რომ $\eta<|k|$, და ამიტომ, $k-\eta$ და $k+\eta$ იგივე ნიშნისაა, რაც k და, მაშასადამე, ψ ნიშანს ინარჩუნებს $(a,\ a+\varepsilon_0)$ შუალედში, შემოსაზღვრულია და $|\psi_{(x)}|$ აღემატება რალაც დადებით რიცხვს). ამიტომ, დავასკვნით, რომ ასეთ პირობებში ინტეგრალი $\int\limits_{a}^{b} \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}}dx$ კრებადია, როცა $\mu<1$ და განშლადია, როცა $\mu\geq 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ინტეგრალი $\int\limits_{a}^{b} \frac{P(x)}{\theta(x)}dx$, სადაც $P(x)$ და $\theta(x)$ პოლინომებია, რომელთაგან $\theta(x)$-ის a აქვს ფესვად, ხოლო $P(a)\neq 0$. ასეთ პირობებში, თუ $\theta(x)$-ის a ფესვი μ ჯერადობისაა, გვექნება: $\theta(x)=(x-a)^{\mu}\theta_1(x)$, სადაც $\theta_1(a)\neq 0$. მაშინ, ცხადია, გვექნება:

$$\frac{P(x)}{\theta(x)}=\frac{1}{(x-a)^{\mu}}\frac{P(x)}{\theta_1(x)},$$

სადაც, თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას და თუ $\psi(x)=\dfrac{P(x)}{\theta_1(x)}$, გვექნება:

$\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\dfrac{P(a)}{\theta_1(a)}\neq 0$. ამიტომ, რადგან μ (a-ფესვის ჯერადობა) მთელი ≥ 1 რიცხვია, წინა შედეგის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^b \dfrac{P(x)}{\theta(x)}dx$, ჩვენს პირობებში, განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. იმავე პირობებში განვიხილოთ ინტეგრალი $\int\limits_a^b \dfrac{P(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}dx$. აქ საინტეგრო ფუნქცია იმავე აღნიშვნებს იხარჩუნებს და აქვს სახე:

$$\frac{P(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}=\frac{1}{(x-a)^{\mu/m}}\cdot\psi(x),$$

სადაც $\psi(x)=\dfrac{P(x)}{\sqrt[m]{\theta_1(x)}}$, და $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\dfrac{P(a)}{\sqrt[m]{\theta_1(a)}}\neq 0$.

ამგვარად, ინტეგრალი $\int\limits_a^b \dfrac{P(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}dx$ კრებადი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mu/m<1$, ე.ი. $\mu<m$.

ჩვენ დავადგინეთ, რომ აღნიშნულ პირობებში ინტეგრალი $\int\limits_a^b \dfrac{P(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}dx$ კრებადია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $\theta(x)$ პოლინომის a ფესვის ჯერადობა ნაკლებია ფესვის m მაჩვენებელზე.

ახლა მოკლედ შევეხოთ იმ შემთხვევას, როცა საინტეგრაციო ფუნქცია განიცდის წყვეტას ზედა b საზღვარზე. მაშინ განიხილება

$$F(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

ინტეგრალი, სადაც $0<\varepsilon<b-a$ და შემდეგ აიღება $F(\varepsilon)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $\varepsilon\to 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, ამბობენ, რომ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ კრებადია და ღებულობენ: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. როცა უკანასკნელი ზღვარი არ არსებობს, ინტეგრალს $\int_a^b f(x)dx$ განშლადი ეწოდება.

ბოლოს, შესაძლებელია ისეთი შემთხვევის განხილვა, როცა $f(x)$ ფუნქცია წყვეტას განიცდის (a,b) შუალედის რომელიმე შიგა, მაგალითად c წერტილში. მაშინ $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი გაიგება როგორც შემდეგი ზღვრების ჯამი:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx\,,$$

თუ, რა თქმა უნდა, არსებობს ორივე აქ აღნიშნული ზღვარი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი : $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ კრებადია. მართლაც, ვინაიდან $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ფუნქციის პრიმიტიულს აქვს სახე: $\frac{3}{2}x^{2/3}+c$, ამიტომ, რადგან $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ფუნქციის ერთადერთი წყვეტის წერტილი არის x=0, გვექნება:

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon'\to 0}\int\limits_{\varepsilon'}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{-1}^{-\varepsilon}\right\}+$$

$$+\lim_{\varepsilon'\to 0}\left\{\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{\varepsilon'}^{1}\right\}=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\varepsilon^{2/3}\right)-3/2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon'\to 0}\left(\varepsilon'^{2/3}\right)=0.$$

ე.ი. საბოლოოდ ინტეგრალი $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ კრებადია და ნულის ტოლია.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი შესანიშნავი დებულება: თუ (a,b) შუალედზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის პრიმიტიული ფუნქცია $F(x)$ განუწყვეტელია ამ შუალედზე ($f(x)$-ს კი აქვს წყვეტები), მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ კრებადია და ის ტოლია $F(b)-F(a)$ სიდიდისა.

მართლაც, ვთქვათ, $f(x)$-ს წყვეტა აქვს c წერტილში, მაგრამ მას ყველგან (a,b)-ზე გააჩნია უწყვეტი პრიმიტიული $F(x)$ ფუნქცია. ვთქვათ, $a<c<b$. ასეთ დროს

$$\int\limits_{a}^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int\limits_{c+\varepsilon'}^{b}f(x)dx=F(c-\varepsilon)-F(a)+F(b)-F(c+\varepsilon'),$$

და ამიტომ, რადგან $F(x)$ ფუნქცია განუწყვეტელია c წერტილში, გვექნება:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a)+\lim_{\varepsilon\to 0}F(c-\varepsilon)-$$

$$-\lim_{\varepsilon'\to 0}F(c+\varepsilon')=F(b)-F(a)+F(c)-F(c)=F(b)-F(a).$$

ამგვარად, $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი მართლაც კრებადია და

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი :

1) განვიხილოთ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას (0,1) ინტერვალზე გააჩნია პირველყოფილი ფუნქცია $arc\sin x$, რომელიც უწყვეტია. ამიტომ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ინტეგრალი არსებობს და ტოლია

$$[arc\sin x]_0^1 = \arcsin 1-\arcsin 0=\pi/2.$$

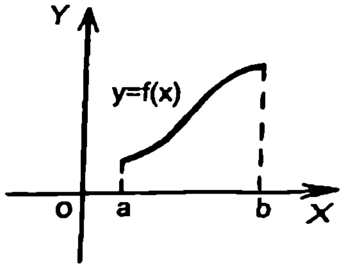
2) $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ ინტეგრალი იმავე მოსაზრებებით არსებობს და

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\left[-2\sqrt{1-x}\right]_{-1}^{+1}=2\sqrt{2}.$$

ლექცია 9

მრუდწირული ინტეგრალები

განვიხილოთ გარკვეული $y=f(x)$ განტოლებით გამოსახული მრუდი, სადაც $f(x)$ განუწყვეტელი ფუნქციაა (a,b) შუალედში. ჯერჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ მონოტონური ფუნქციაა (ნახ.15-ზე წარმოდგენილია ზრდადი ფუნქციის შემთხვევა). ავიღოთ (a,b) შუალედის რაიმე დაყოფა, წერტილებით



ნახ. 15

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=b.$$

ვთქვათ, რომ $\alpha, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, $y_n=\beta$ მათი შესაბამისი ორდინატებია $y=f(x)$ მრუდზე. მაშინ

$$\alpha=f(a),\ y_1=f(x_1), \dots,\ y_{n-1}=f(x_{n-1}),\ \beta=f(b).$$

ალვნიშნოთ მოცემული მრუდი c-თი და განვიხილოთ ორი ცვალებადის ისეთი $F(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განუწყვეტელია ორივე ცვალებადის მიმართ გარკვეულ, c მრუდის შემცველ, R არეში (ე.ი. c მრუდის ყოველი წერტილი მოთავსებულია R არეში). განვიხილოთ ახლა $F(x,y)$ ფუნქციის მნიშვნელობები (x_1,y_1), $(x_2, y_2), \dots$, $(x_n, y_n)=(b, \beta)$ წერტილებზე და შევადგინოთ შემდეგი ჯამი:

$$S=F(x_1, y_1)(x_1-a)+F(x_2, y_2)(x_2-x_1)+\dots+F(b, \beta)\,(b-x_{n-1}). \qquad (1)$$

უკანასკნელი ჯამი შეგვიძლია შემდეგი სახითაც წარმოვიდგინოთ:

$$S = F(x_1, f(x_1)),(x_1-a)+F(x_2, f(x_2)),(x_2-x_1)+\dots$$

$$+F(b, f(b))(b-x_{n-1}).$$

ვთქვათ, რომ (a,b) შუალედის დანაწილების წერტილთა რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ $\lim(x_i-x_{i-1})=0$. მაშინ S ჯამი

გარკვეული ზღვრისაკენ მიისწრაფვის, რომელიც არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი იყო თითოეული დანაწილების წესი. ამის საჩვენებლად შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $F(x,f(x))=\Phi(x)$, სადაც $a\leq x\leq b$. მაშინ S ჯამი ასეთი სახით წარმოგვიდგება

$$S=\Phi(x_1)(x_1-a)+\Phi(x_2)(x_2-x_1)+...+\Phi(b)(b-x_{n-1}).$$

მაგრამ, როგორც უკვე ვიცით, რადგან $\Phi(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა x-ისა, უკანასკნელ ჯამს აქვს ჩვენს შემთხვევაში გარკვეული ზღვარი, რომელიც მართლაც დამოუკიდებელია ცალკეული დანაწილებების სახისაგან და

$$\lim S=\int_a^b \Phi(x)dx=\int_a^b F\big(x,f(x)\big)dx\,.$$

უკანასკნელ ინტეგრალს ეწოდება ორი ცვლადის $F(x,y)$ ფუნქციის მრუდხაზოვანი ინტეგრალი c მრუდზე x-ით და ის შემდეგი სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$\int_c F(x,y)dx\,.$$

ახლა შევაბრუნოთ მრუდის განტოლება, ისე რომ x იყოს y-ის ფუნქცია: $x=\varphi(y)$, სადაც y იცვლება (α,β) ინტერვალზე. ეს ყოველთვის შესაძლებელია, რადგან ფუნქცია $f(x)$, როგორც ვიგულისხმეთ, მონოტონურია. მაშინ გვექნება:

$$a=\varphi(\alpha),\, x_1=\varphi(y_1),\, x_2=\varphi(y_2),...,\, x_{n-1}=\varphi(y_{n-1}),\, b=\varphi(\beta)$$

და თავდაპირველად განხილული ჯამის ნაცვლად ავიღოთ

$$\Sigma=F(x_1,\, y_1)(y_1-\alpha)+F(x_2,\, y_2)(y_2-y_1)+...+F(x_n,\, \beta)(\beta-y_{n-1}).$$

ეს უკანასკნელი, რა თქმა უნდა, შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახითაც:

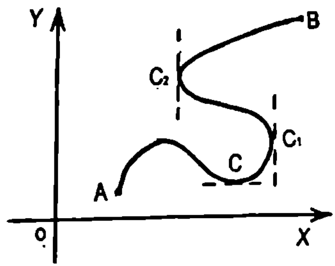
$$\Sigma=F(\varphi(y_1),\, y_1)(y_1-\alpha)+F(\varphi(y_2),\, y_2)(y_2-y_1)+...+F(\varphi(y_n),\, \beta)(\beta-y_{n-1}).$$

აქაც, სავსებით ანალოგიური მსჯელობით დადგინდება, რომ არსებობს ამ ჯამის გარკვეული ზღვარი, როცა (α, β) ინტერვალის დაყოფის $y_1,\ldots,y_{n-1}$ წერტილების რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ თითოეული i-სათვის $\lim(y_i-y_{i-1})=0$ და რომ ეს ზღვარი

$$\lim\sum=\int_\alpha^\beta F(\varphi(y),y)dy\,.$$

ამბობენ, რომ ეს არის $F(x,y)$ ფუნქციის მრუდხაზოვანი ინტეგრალი c მრუდზე (y-ით) და ის შემდეგი სიმბოლოთი აღინიშნება: $\int\limits_c F(x,y)dy$.

ახლა გავთავისუფლდეთ ზემოთ მიღებული მონოტონურობის შეზღუდვისაგან და ვიგულისხმოთ, რომ c მრუდი განუწყვეტელია, მაგრამ არ არის მონოტონური (იხ. მაგალითად, ნახ. 16-ზე წარმოდგენილი შემთხვევა).



ნახ. 16

დავანაწილოთ ეს მრუდი ისეთ AC_1,C_1C_2,C_2B ნაწილებად, რომ თითოეული ნაწილი გამოსახავდეს მონოტონურ ფუნქციას. მაშინ მრუდხაზოვანი ინტეგრალისათვის c-ზე (მაგალითად x-ით) შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი განმარტება:

$$\int\limits_c F(x,y)dx=\int\limits_{AC_1}F(x,y)dx+\int\limits_{C_1C_2}F(x,y)dx+\int\limits_{C_2B}F(x,y)dx\,.$$

ახლა განვიხილოთ ასეთივე c მრუდი და ისეთი ორი ცვალებადის უწყვეტი ორი $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქცია, რომლებიც განმარტებული არიან c-ს შემცველ რაღაც არეზე. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ზოგადი სახის

მრუდხაზოვანი ინტეგრალი (P-სი x-ით, და Q-სი y-ით), როგორც შემდეგი სახის J_c ჯამი:

$$J_c = \int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy\,.$$

ამ უკანასკნელს, უფრო ხშირად, უბრალოდ (ფრჩხილების გამოყენების გარეშე) აღნიშნავენ:

$$\int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy\,.$$

ამგვარად, ეს მრუდხაზოვანი ინტეგრალი გაიგება როგორც ჯამი

$$\int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c P(x, y)dx + \int_c Q(x, y)dy\,.$$

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ c მრუდი შეიძლება დანაწილდეს სასრულ რიცხვად ისეთი სახის ნაწილებისა, რომელთა განტოლებანი ან $y=f(x)$, ან $x=\varphi(y)$ ტოლობით გამოისახება. ჩვენ შეგვიძლია გავთავისუფლდეთ ამ პირობისაგან და დავწეროთ c მრუდის განტოლება პარამეტრული სახით:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

სადაც t (პარამეტრი) იცვლება გარკვეულ (t_1, t_2) შუალედში.

ამასთან, აქ საჭიროა $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებს ჰქონდეთ განუწყვეტელი წარმოებულები $\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$. მაშინ ზოგადი სახის მრუდხაზოვანი J_c ინტეგრალი შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი ჩვეულებრივი ინტეგრალის სახით:

$$J_c = \int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\right]dt.$$

განვიხილოთ მაგალითი: ვთქვათ, C წარმოადგენს a და b ნახევარღერძებიან ელიფსს, რომელიც განლაგებულია xy სიბრტყეში ისე, რომ მისი ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში და ღერძები ემთხვევა საკოორდინატო ღერძებს. ასეთი ელიფსის პარამეტრულ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

გამოვითვალოთ $\int\limits_C ydx - xdy$ მრუდხაზოვანი ინტეგრალი. განმარტების თანახმად გვექნება:

$$\int\limits_C ydx - xdy = \int\limits_0^{2\pi} [b\sin t(-a\sin t) - a\cos t(b\cos t)]dt =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} ab\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = -ab\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi ab.$$

მრუდხაზოვანი ინტეგრალის შემოტანილ ცნებასთან დაკავშირებით აქ უნდა შევთანხმდეთ მრუდზე მოძრაობის მიმართულების ამორჩევის შესახებ. განვიხილოთ ზოგადად პარამეტრული სახით მოცემული

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

მრუდი, რომლის t პარამეტრი იცვლება $(t_1;t_2)$ $(t_1<t_2)$ ინტერვალზე. $t=t_1$ მნიშვნელობის შესაბამისი $A(\varphi(t_1), \psi(t_1))$ წერტილი (1) მრუდის საწყის წერტილად გამოვაცხადოთ, ხოლო $t=t_2$-ის შესაბამის $B(\varphi(t_2), \psi t_2))$-ს (1)-ის ბოლო წერტილი ვუწოდოთ. გამორიცხული არ არის შემთხვევა, როცა $A=B$. ასეთ დროს (1) მრუდს ჩაკეტილი მრუდი ეწოდება. როცა t (ზრდით) გაირბენს (t_1,t_2)

შუალედს, მაშინ მისი შესაბამისი $(\varphi(t), \psi(t))$ წერტილი სიბრტყის A წერტილიდან C-ზე მოძრაობით B-მდე გადაინაცვლებს. ასეთ დროს ამბობენ, რომ C მრუდზე არჩეულია მოძრაობის გარკვეული მიმართულება, ჰნუ გარკვეული ორიენტაცია. ვთქვათ, t' წარმოადგენს t-ს შემდეგი სახის ფუნქციას: $t'=t_1+t_2-t$. ცხადია, აქედან გვექნება:

$$t=t_1+t_2-t'$$

და (1) მრუდი შესაძლებელია გამოისახოს ახალი t' პარამეტრით:

$$x=\varphi(t_1+t_2-t')=\varphi_1(t')$$

$$y=\psi(t_1+t_2-t')=\psi_1(t')$$

აქ t' ისევ (t_1,t_2) შუალედზე იცვლება, მხოლოდ როცა $t'=t_1$, გვექნება $t=t_2$, ხოლო თუ $t'=t_2$, მივიღებთ $t=t_1$.

ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა ახალი t' პარამეტრი კვლავ ზრდით გაირბენს იმავე (t_1,t_2) შუალედს, C მრუდზე მოძრავი $(\varphi_1(t'), \varphi_2(t'))$ წერტილი C-ს აღწერს B-დან A-საკენ, ე.ი. შებრუნებული მიმართულებით. ამ ახალ მრუდს C-თი აღნიშნავენ და C-ს საწინააღმდეგოდ ორიენტირებულ წირს უწოდებენ. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ორი ცვლადის ნებისმიერი ორი P და Q უწყვეტი ფუნქციის შემთხვევაში სამართლიანია ტოლობა:

$$\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y+dy=-\int\limits_{C^-} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

მართლაც, თუ C მოცემულია $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ განტოლებებით, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, C^- განმარტებულია განტოლებებით

$$x=\varphi_1(t')=\varphi(t_1+t_2-t')=\varphi(t),$$

$$y=\psi_1(t')=\psi(t_1+t_2-t')=\psi(t).$$

ამიტომ, მაგალითად, დასამტკიცებელი ტოლობის პირველი ინტეგრალისათვის გვექნება:

$$\int_C P(x,y)dx = \int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t),\psi(t)\varphi'(t)dt\,.$$

უკანასკნელ ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვალებადის გარდაქმნა, ფორმულით $t=t_1+t_2-t'$. მაშინ, რადგან $t=t_1$-სათვის გვაქვს $t'=t_2$ და $t=t_2$-სათვის $t'=t_1$, ცვალებადის ეს გარდაქმნა (რადგან $dt=-dt'$ და $\varphi'(t)=-\ \varphi'_1(t')$), მოგვცემს:

$$\int_C P(x,y)dx = \int_{t_2}^{t_1} P\big(\varphi(t_1+t_2-t'),\psi(t_1+t_2-t')\big)\big(-\varphi_1'(t')\big)\big(-dt'\big)=$$

$$=\int_{t_2}^{t_1} P\big(\varphi_1(t'),\psi_1(t')\big)\varphi_1'(t')dt' = -\int_{t_1}^{t_2} P\big(\varphi_1(t'),\psi_1(t')\big)\varphi_1'(t')dt' =$$

$$=-\int_{C^-} P(x,y)dx\,.$$

სავსებით ასევე მტკიცდება, რომ $\int_C Q(x,y)dy = -\int_{C^-} Q(x,y)dy$, ე.ი.

ჩვენ დავადგინეთ, რომ მრუდის ორიენტაციის შებრუნება იწვევს მრუდხაზოვანი ინტეგრალის ნიშნის შეცვლას.

ლ ე ქ ც ი ა 10

განვიხილოთ R არე სიბრტყეზე და ამ არეში განსაზღვრული ორი განუწყვეტელი ფუნქცია $P(x,y)$ და $Q(x,y)$. ავილოთ R არის რომელიმე ორი $M_1(\alpha,A)$ და $M_2(\beta,B)$ წერტილი. ეს ორი წერტილი შეგვიძლია შევაერთოთ სხვადასხვა $C_1,C_2,\ldots$ მრუდებით. ყოველი მათგანისათვის შეგვიძლია განვიხილოთ სათანადო მრუდხაზოვანი ინტეგრალი:

$$\int_{C_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,, \qquad \int_{C_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,\cdots$$

მაშასადამე, ყოველ ასეთ C მრუდს შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელიც არის ინტეგრალი $\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. ეს სურათი მოგვაგონებს შემთხვევას, როცა განიხილება რაღაც ფუნქცია, როცა არგუმენტის როლს წერტილის ნაცვლად ასრულებს C მრუდი, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობის როლს მრუდწირული ინტეგრალის მნიშვნელობა. ასეთ "ფუნქციას" ფუნქციონალი ეწოდება.

ამგვარად, ჩვენი მრუდხაზოვანი ინტეგრალი $\int P(x,y)dx+$ $+Q(x,y)dy$ ფუნქციონალის კერძო სახეა.

როგორც ვიცით, არსებობს ე.წ. მუდმივი ფუნქციები, რომელნიც ერთსა და იმავე მნიშვნელობას ინარჩუნებენ, როგორიც არ უნდა იყოს ცვალებადი წერტილი; მაგალითად, ორი ცვალებადის ფუნქციას

$$f(x\cdot y)=x^2+2xy+y^2-(x+y)^2+5$$

ყოველი (x,y) წერტილისათვის 5-ის ტოლი მნიშვნელობა აქვს, ჩვენ ვიცით $f(x,y)$ ფუნქციის მუდმივობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა:

$$\frac{\partial \iota}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad \text{იგივურად.}$$

ახლა ჩვენ გვაინტერესებს ახლახან განხილული ტიპის ფუნქციონალის მუდმივობის პირობის მოძებნა. განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როცა ორი წერტილის შემაერთებელი C მრუდები $y=f(x)$ სახის განტოლებითაა მოცემული ($f(\alpha)=A, f(\beta)=B$).

შევარჩიოთ ახლა C მრუდის ახლობელი C_1 მრუდი, რომლის განტოლება განისაზღვრება $y_1=f_1(x)$ ფუნქციით და რომელიც იმავე $M_1(\alpha,A)$ და $M_2(\beta,B)$ წერტილების შემაერთებელია ($f_1(\alpha)=A$, $f_1(\beta)=B$). ასეთ შემთხვევაში $\delta y=f_1(x)-f(x)$ სხვაობას C მრუდის ვარიაცია ეწოდება.

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა C მრუდის მახლობელი C_1 მრუდი წარმოდგენილია $y=f(x)+\varepsilon\eta(x)$ სახის განტოლებით, სადაც ε მცირე მუდმივი სიდიდეა, ხოლო $\eta(\alpha)=\eta(\beta)=0$, ცხადია, ეს C_1 აგრეთვე გადის იმავე M_1 და M_2 წერტილებზე და C მრუდის ვარიაცია იქნება $\delta y=\varepsilon\eta(x)$.

ინტეგრალის მნიშვნელობა C_1 მრუდზე (C-ს მეზობელ მრუდზე) იქნება:

$$\int\limits_{C_1} P(x\cdot y)dx+Q(x\cdot y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P\big(x,f(x)+\varepsilon\eta(x)\big)+Q\big(x,f(x)+\varepsilon\eta(x)\big)\right]$$

$$\big(f'(x)+\varepsilon\eta'(x)\big)dx\,,$$

და აქ, როცა ვცვლით ε-ს, იცვლება ინტეგრალიც, ე.ი. ეს ინტეგრალი ε-ის ფუნქციაა: $J(\varepsilon)$. ამასთან, ინტეგრალი C-ზე იქნება

$$J(0)=\int\limits_{C} P(x\cdot y)dx+Q(x\cdot y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P\big(x,f(x)\big)+Q\big(x,f(x)\big)f'(x)\right]dx$$

თუ გვინდა, რომ ინტეგრალი დამოუკიდებელი იყოს ε-საგან, საჭიროა, რომ ამ ფუნქციის $J'(\varepsilon)$ წარმოებული ნული იყოს. ვნახოთ,

როდის იქნება ეს. ამისათვის მოვახდინოთ განარმოება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ და შედეგი გავუტოლოთ ნულს.

$$J'(\varepsilon)=\int_{\alpha}^{\beta}\Big[\eta(x)P_y'\big(x,f(x)+\varepsilon\eta(x)\big)+\eta(x)Q_y'\big(x,f(x)+\varepsilon\eta(x)\big)\big(f'(x)+$$

$$+\varepsilon\eta'(x)\big)+\eta'(x)Q\big(x,f(x)+\varepsilon\eta(x)\big)\Big]dx=0 \qquad (1)$$

აღვნიშნოთ აქ $f(x)+\varepsilon\eta(x)=y(x)$-ით. მაშინ უკანასკნელი ტოლობა შემდეგი სახით დაიწერება:

$$J'(\varepsilon)=\int_{\alpha}^{\beta}\eta(x)\big[P_y'(x\cdot y)+Q_y'(x\cdot y)\cdot y'(x)\big]dx+\int_{\alpha}^{\beta}Q(x,y)\eta'(x)dx=0$$

განვიხილოთ მეორე ინტეგრალი ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში და გამოვიყენოთ მისთვის ნაწილობითი ინტეგრაციის წესი:

$$\int_{\alpha}^{\beta}Q(x\cdot y)\eta'(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}Q(x\cdot y)d\eta(x)=\big[Q(x\cdot y)\eta(x)\big]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\eta(x)\big(Q_x'+$$

$$+Q_y'\cdot y\big)dx\,.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\eta(\alpha)=\eta(\beta)=0$, ე.ი. რომ ჩასმის შედეგი გვაძლევს ნულს და შევიტანოთ ეს გამოსახულება (1) ფორმულაში. მივიღებთ:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\Big\{\eta(x)\Big[P_y'(x\cdot y)+Q_y'(x\cdot y)y'\Big]-\eta\Big[Q_x'+Q_y'y'\Big]\Big\}dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\eta(x)\left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right]dx=0.$$

აღვნიშნოთ ახლა $\Omega(x)=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$ და დავამტკიცოთ, რომ $\int\limits_C P(x\cdot y)dx+Q(x\cdot y)dy$ ფუნქციონალის დამოუკიდებლობისათვის C მრუდისაგან აუცილებელია, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $\Omega(x)\equiv 0$ იგივურად.

მართლაც, წარმოვიდგინოთ წინააღმდეგი: ვთქვათ, არსებობს ისეთი წერტილი $\xi(\alpha<\xi<\beta)$, რომ $\Omega(\xi)>0$. მაშინ, $\Omega(x)$ ფუნქციის განუწყვეტლობის გამო, ეს ფუნქცია დადებითი დარჩება აგრეთვე ξ-ს საკმაოდ მცირე მახლობლობაში. ვთქვათ, $\Omega(x)>0$, ყველგან (ξ_1,ξ_2), შუალედში, რომელიც მთლიანად ეკუთვნის (α, β) შუალედს.

ავიღოთ ასეთ შემთხვევაში $\eta(x)$-ად შემდეგი: $\eta(x)=(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2$ შუალედში (ξ_1,ξ_2), ხოლო $\eta(x)=0$ ყველგან (α, β)-ში (ξ_1,ξ_2)-ის გარეთ. მაშინ, გვექნება:

$$\int\limits_\alpha^\beta \Omega(x)\eta(x)dx=\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(x)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2dx>0,$$

რადგან ყველგან მეტია ნულზე ინტეგრალქვეშა გამოსახულება. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება უმართებულოა და დადგენილია, რომ J_c ინტეგრალის დამოუკიდებლობისათვის C მრუდისაგან, აუცილებელია გვქონდეს $\Omega(x)=0$, ე.ი. გვქონდეს: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს პირობა საკმარისიცაა იმისათვის, რომ ინტეგრალი

$$\int\limits_C Pdx+Qdy$$

დამოუკიდებელი იყოს C გზიდან. მართლაც, თუ ეს ასეა, მაშინ $Pdx+Qdy$ არის სრული დიფერენციალი რაიმე U ფუნქციისა, ასე რომ,

$$P(x\cdot y)dx+Q(x\cdot y)dx=dU(x\cdot y)$$

და ამიტომ

$$J_C=\int\limits_C dU(x,y)=U(\beta,B)-U(\alpha,A)\ ,$$

და C-ს ფორმას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს.

აქ ამ მსჯელობათა სამართლიანობისათვის როგორც $P(x,y)$, ისე $Q(x,y)$ და აგრეთვე $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ ფუნქციები, უნდა იყვნენ განუწყვეტელნი იმ არეში, რომელშიაც მათ განვიხილავთ.

შედეგი: ვთქვათ, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ პირობა შესრულებულია არეში და C შეკრული მრუდია. მაშინ წინა ტოლობა გვიჩვენებს, რომ

$$\int\limits_C Pdx+Qdy=0\ .$$

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ამ დასკვნისათვის აუცილებელია აქ განხილული ყველა ფუნქცია განუწყვეტელი იყოს[6]. თუ ეს პირობა დარღვეულია, მაშინ ძირითადი განტოლება $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ შესრულებულიც რომ იყოს, ინტეგრალი შეკრულ მრუდზე შეიძლება არც იყოს 0-ის ტოლი. აი, ამის შესაბამისი მაგალითი: $\int\limits_C Pdx+Qdy$,

სადაც $\qquad P(x.y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\quad Q(x.y)=\frac{x}{x^2+y^2}\ ,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ;\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

ცხადია, აქ საჭირო პირობა შესრულებულია, მაგრამ $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ფუნქციები არ არიან განუწყვეტელნი. ამის გამო, ინტეგრალი

შეკრულ მრუდზე, მაგალითად, ერთეულ რადიუსიან წრეწირზე, ცენტრით სათავეში, ნული აღარ არის. მართლაც, ამ წრეწირის განტოლება პარამეტრული სახით შეიძლება დაიწეროს სახით:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi),$$

და

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{1} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi .$$

მაშასადამე, P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ფუნქციების განუწყვეტლობა აუცილებელია ზემომოყვანილ მსჯელობებში.

ლექცია 11

განვიხილოთ რაიმე R არეში განსაზღვრული ორი განუწყვეტელი ფუნქცია $P(x,y)$ და $Q(x,y)$, რომლებსაც გააჩნიათ განუწყვეტელი $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ და $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ წარმოებულები და, დავუშვათ, რომ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ყველგან R-ში. მაშინ, როგორც ეს წინა ლექციაზე ვნახეთ, მრუდხაზოვანი ინტეგრალის

$$\int_C Pdx + Qdy$$

მნიშვნელობა დამოკიდებული იქნება მხოლოდ C მრუდის ბოლო წერტილებზე და დამოუკიდებელი იქნება ამ წერტილების შემაერთებელი მრუდის ფორმაზე. ამიტომ, თუ განვიხილავთ ამ სახის ინტეგრალს R არის რაიმე ფიქსირებული $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის

მოძრავ $M(x,y)$ წერტილთან შემაერთებელი C მრუდის გასწვრივ, ეს უკანასკნელი აღმოჩნდება (x,y) ცვალებადების რაღაც $U(x,y)$ ფუნქცია. ასეთ პირობებში (რადგან C-ს სახეს მნიშვნელობა არა აქვს) თვით მრუდხაზოვანი ინტეგრალიც შეგვიძლია ჩავწეროთ $\int\limits_{(x_o,y_o)}^{(x,y)}$ სახით, ე.ი. მივიღებთ ორი ცვალებადის ფუნქციას $U(x,y)$ R არეზე:

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_o,y_o)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\ .$$

ისმის საკითხი ამ $U(x,y)$ ფუნქციის წარმოებულების მოძებნის შესახებ. ამისათვის მივცეთ x-ს Δx ნაზრდი, ხოლო y დავტოვოთ უცვლელად. მაშინ მივიღებთ:

$$u(x+\Delta x,y)=\int\limits_{(x_o,y_o)}^{(x+\Delta x,y)}Pdx+Qdy\ .$$

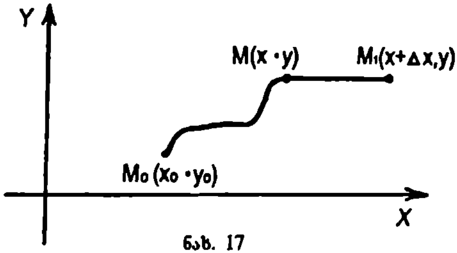
განვიხილოთ სხვაობა

$$U(x+\Delta x,y)-U(x,y)=\int\limits_{(x_o,y_o)}^{(x+\Delta x,y)}Pdx+Qdy-\int\limits_{(x_o,y_o)}^{(x,y)}Pdx+Qdy\ .$$

სხვაობის გამოთვლისას შეგვიძლია ვისარგებლოთ იმით, რომ ინტეგრალის სიდიდე დამოუკიდებელია გზის ფორმისაგან და გზა პირველ ინტეგრალში, რომელიც (x_o,y_o) წერტილს აერთებს $(x+\Delta x,y)$ წერტილთან, ისე ავირჩიოთ, რომ მან გაიაროს (x,y)-ზე. ასეთი გზა შეიძლება გაიყოს ორ ნაწილად: გზა (x_o,y_o)-დან (x, y)-მდე და შემდეგ ჰორიზონტალური მონაკვეთი, რომელიც აერთებს (x,y)-ს $(x+\Delta x,y)$ წერტილთან. მაშინ, თუ ამ გზაზე ინტეგრალს დავაკლებთ ინტეგრალს (x_o,y_o)-დან (x,y)-მდე, ცხადია, დაგვრჩება:

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+QDy,$$

სადაც უკანასკნელი ინტეგრალი აღებულია ჰორიზონტალურ M_oM_1 მონაკვეთზე. მაგრამ ამ მონაკვეთზე $dy=0$, ამგვარად, დაგვრჩება:



ნახ. 17

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int_{(x\cdot y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x, y)dx.$$

მეორე მხრივ, MM_1 მონაკვეთის განტოლებას აქვს სახე $y=$ მუდმივს, და x იცვლება x-დან $x+\Delta x$-მდე. ამიტომ

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx,$$

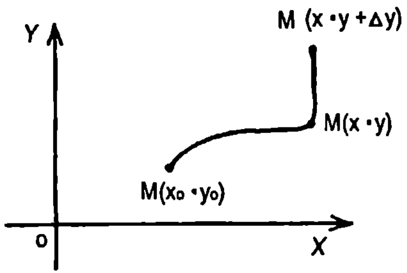
სადაც ეს უკანასკნელი ჩვეულებრივი განსაზღვრული ინტეგრალია და $P(x,y)$-ში y მუდმივი რჩება. საშუალო მნიშვნელობის I ფორმულა მაშინ გვაძლევს:

$$U(x+\Delta x,y)-U(x,y)=P(x+\theta\,\Delta\, x,y)\,\Delta\, x,$$

და

$$\frac{U(x+\Delta x, y)-U(x\cdot y)}{\Delta x}=P(x+\theta,\Delta x, y),$$

სადაც θ რაღაც რიცხვია, $0<\theta<1$. ახლა გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$. ეს მოგვცემს: არსებობს U ფუნქციის კერძო წარმოებული x-ით და $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=P(x\cdot y)$.



ნახ. 18

სავსებით ანალოგიურად, თუ ავიღებთ ახალ $(x,y+\Delta y)$ წერტილს და განვიხილავთ (x_0,y_0) წერტილის მასთან შემაერთებელ გზას, რომელიც წარმოდგენილი იქნება როგორც (x_0,y_0)-ის (x,y)-თან შემაერთებელი გზა და შემდგომი (x,y)-ის $(x,y+\Delta y)$-თან შემაერთებელი ვერტიკალური მონაკვეთი, დავადგენთ, რომ არსებობს $U(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y-ით და $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$ ყველგან R არეში.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ, როცა რაიმე R არეზე მოცემულია ორი $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ პირობას ყველგან R-ზე, ამ არეზე არსებობს ისეთი $U(x\cdot y)$ ფუნქცია, რომ $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$, ე.ი. ისეთი ორი ცვლადის $U(x,y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=Pdx+Qdy\,.$$

ასეთი ფუნქციის აღდგენა შესაძლებელია ჩვეულებრივი (ერთი ცვლადის მიმართ) ინტეგრაციების ჩატარებით.

მართლაც, თუ გვინდა ვიპოვოთ ისეთი $U(x,y)$, რომ გვქონდეს: $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე dx-ზე და მოვახდინოთ ინტეგრაცია x-ით რაიმე x_0-დან x-მდე (y აქ განიხილება როგორც მუდმივი პარამეტრი). მაშინ ვპოულობთ:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \varphi(y),$$

სადაც $\varphi(y)$ მხოლოდ y-ის (ე.ი. x-ის მიმართ მუდმივი) ფუნქციაა. $\varphi(y)$-ის განსაზღვრისათვის გავაწარმოოთ ეს ტოლობა y-ით და გავიხსენოთ, რომ y პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის გაწარმოება ხდება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ. მივიღებთ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dx + \varphi'(y).$$

მაგრამ $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ და თუ ამას გამოვიყენებთ, გვექნება:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dx + \varphi'(y).$$

ახლა ინტეგრაცია x-ით ხდება $\frac{\partial Q}{\partial x}$ წარმოებულისა და ამიტომ ეს უკანასკნელი ინტეგრალი მოგვცემს:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x, y) - Q(x_0, y)$$

საბოლოოდ, ვღებულობთ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) - Q(x_o,y) + \varphi'(y).$$

მაგრამ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ ტოლობა გვაძლევს $\varphi'(y)=Q(x_o, y)$, და მაშ, φ-ს მოსაძებნად მივიღეთ: $\varphi'(y)=Q(x_o,y)$. აქედან კი მიიღება $\varphi(y)$-ის მნიშვნელობა:

$$\varphi(y) = \int_{y_o}^{y} Q(x_o,y)dy + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ამგვარად, საბოლოოდ, $U(x,y)$ ფუნქციის მისაღებად მისი მოცემული $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ და $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ კერძო წარმოებულების საშუალებით (როცა $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$), გვაქვს შემდეგი ფორმულა:

$$U(x,y) = \int_{x_o}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x_o,y)dy + C.$$

მაგალითი: ვთქვათ, მოსაძებნია ისეთი $U(x,y)$ ფუნქცია, რომლის კერძო წარმოებული x-ით, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y$ და კერძო წარმოებული y-ით $\dfrac{\partial U}{\partial y} = x - y$. აქ $P(x,y)=x+y$ და $Q(x,y)=x-y$. ამასთან,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

ე.ი. საჭირო იგივეობა შესრულებულია. ამიტომ U ფუნქციის მოსაძებნად შეგვიძლია ვისარგებლოთ ახლახან აღწერილი წესით. ავიღოთ $x_o=y_o=0$. მაშინ გვექნება:

$$U(x,y)=\int_0^x (x+y)dx+\int_0^y (0-y)dy+C=\frac{x^2}{2}+yx-\frac{y^2}{2}+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. შემოწმება გვარწმუნებს, რომ $U(x,y)$ მართლაც საძიებელი ფუნქციაა.

ამით ჩვენ ამოვწერეთ ხაზოვანი ინტეგრალების თეორია და ვუბრუნდებით ფუნქციათა უსასრულო მწკრივების ზოგიერთი თვისებების შესწავლას. წინასწარ განვიხილოთ შემდეგი საკითხი:

ვთქვათ, რაიმე არეზე განსაზღვრულია ორი ცვალებადის $f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განუწყვეტელია ამ არეზე და განიხილება მისი ინტეგრალი x-ის მიმართ (y აქ მუდმივ პარამეტრადაა მიღებული):

$$\int_a^b f(x,y)dx.$$

ეს უკანასკნელი ასეთ შემთხვევაში y-ის ფუნქცია იქნება. მოვახდინოთ მისი ინტეგრაცია რაღაც $(c,\text{д})$ საზღვრებში. ასეთ დროს სამართლიანია შემდეგი დებულება: თუ $f(x,y)$ ფუნქცია განუწყვეტელია არეში, რომელიც შეიცავს $a\le x\le b$, $c\le y\le \text{д}$ სწორკუთხოვან არეს, მაშინ

$$\int_c^{\text{д}} dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^{\text{д}} f(x,y)dy$$

ე.ი. ორი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალის ინტეგრაცია პარამეტრით შეიძლება მოვახდინოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

დასამტკიცებლად ავიღოთ რაიმე t, სადაც $a\le t\le b$, და ვაჩვენოთ რომ დასამტკიცებელი სახის ტოლობა სამართლიანია ასეთი ზოგადი სახითაც:

$$\int_c^{\text{д}} dy\int_a^t f(x,y)dx=\int_a^t dx\int_c^{\text{д}} f(x,y)dy \tag{2}$$

განვიხილოთ (2) ტოლობის მარცხენა მხარე, რომელსაც შეგვიძლია შევხედოთ როგორც t პარამეტრზე დამოკიდებულ ინტეგრალს

$$\int_c^d \Phi(y,t)dy,$$

სადაც $\Phi(y,t)=\int_a^t f(x,y)dx$. ცხადია, Φ-ს აქვს წარმოებული t-ს მიმართ, და $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, როგორც ცნობილია, ტოლია $f(t,y)$-ისა. ამიტომ, პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის გაწარმოების ჩვენს მიერ ადრე შესწავლილი წესი გვაძლევს:

$$\frac{d}{dt}\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dx=\int_c^d dy\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t f(x,y)dx=\int_c^d f(t,y)dy.$$

სავსებით ასევე, (2) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოებადია t-ს მიმართ და ინტეგრალის გაწარმოების წესი ცვალებადი ზედა საზღვრით გვაძლევს:

$$\frac{d}{dt}\int_a^t dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d f(t,y)dy.$$

როგორც ვხედავთ, (2) ტოლობის ორივე მხარეს, რომლებიც t-ს ფუნქციებს წარმოადგენენ, ერთნაირი წარმოებულები აქვთ t-ს მიმართ. ამიტომ ეს ორი გამოსახულება t-საგან დამოუკიდებელი მუდმივით შეიძლება განსხვავდებოდეს. მაგრამ ორივე ამ ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $t=a$, ნულის ტოლია: მართლაც,

$$\int_c^d dy\int_a^a f(x,y)dx=\int_c^d dy\cdot 0=0 \quad \text{და}$$

$$\int_a^a dx \int_c^\partial f(x,y)dy = 0\,.$$

ამგვარად, მუდმივი სხვაობა (2) ფორმულის ორივე მხარეს შორის ნული ყოფილა და (2) ტოლობა დადგენილია ყოველი t-სათვის, როცა $a \le t \le b$. აქედან, როცა $t=b$, მივიღებთ ჩვენი დებულების სამართლიანობას.

შევნიშნოთ, რომ დებულების სამართლიანობა შესაძლებელია დაირღვეს, როცა ფუნქცია $f(x,y)$ განიცდის წყვეტას, თუნდაც ერთ წერტილში. განვიხილოთ ასეთი კლასიკური მაგალითი: ინტეგრალები

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy \quad \text{და} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx$$

ტოლნი არ არიან. მართლაც, $\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

და ამიტომ

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = \left[-\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{1+y^2}\,.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \left[-wrctgy\right]_0^1 = -\frac{\pi}{4}\,.$$

ანალოგიურად,

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

და
$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dy = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \left[wrctgx\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

ასეთი რამ ხდება იმის გამო, რომ ფუნქცია $f(x, y) = \frac{x^2 = y^2}{\left(x^2 y^2\right)^2}$ არ აკმაყოფილებს განუწყვეტლობის პირობას მთელ განსახილავ არეში (სახელდობრ, ის წყვეტილია $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ სწორკუთხოვანი არის (0,0) წერტილში).

ეს მაგალითი ეკუთვნის ბერტრანს და ამიტომ მას ბერტრანის მაგალითი ეწოდება.

ახლა განვიხილოთ საკითხი იმ ფუნქციების ინტეგრაციის შესახებ, რომელნიც მწკრივის სახით არიან წარმოდგენილი.

ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი სახის ფუნქციათა მწკრივი:

$$U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

და ყველა ეს ფუნქცია განუწყვეტელია შუალედში $A \le x \le B$.

ვთქვათ, ეს მწკრივი კრებადია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის შუალედიდან (a,b) $(A \le a < b \le B)$. მაშინ ამ მწკრივის ჯამი წარმოადგენს გარკვეულ ფუნქციას x-ისა, რომელიც განსაზღვრულია (a,b) შუალედში. ალვნიშნოთ ის $f(x)$-ით. აქ, ცხადია, $f(x)$ მოიძებნება შემდეგნაირად: აიღება მწკრივის პირველი n წევრის ჯამი და გადავდივართ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, ე.ი.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left[U_1(x) + U_2(x) + \cdots + U_n(x)\right].$$

ლ ე ქ ც ი ა 12

ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა მ წ კ რ ი ვ ე ბ ი

ვთქვათ, განუწყვეტელ ფუნქციათა მწკრივი

$$U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)+...$$

განხილული წინა ლექციის ბოლოს, თანაბრად კრებადია (a,b) შუალედში. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $\sqrt{N}$ რიცხვი, რომ, როცა $n>N$, გვექნება:

$$|R_n(x)<\varepsilon|,$$

ყოველი x-სათვის (a,b) შუალედიდან, სადაც

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x) \quad \text{და} \quad S_n(x)=U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x).$$

დავამტკიცოთ, რომ ასეთ პირობებში $f(x)$ განუწყვეტელი ფუნქციაა (a,b) შუალედზე.

განვიხილოთ x და $x+h$ წერტილი ამ შუალედიდან და შევისწავლოთ $|f(x+h)-f(x)|$ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა. ჩვენი აღნიშვნის თანახმად, გვექნება:

$$f(x+h)-f(x)=\left[S_n(x+h)-S_n(x)\right]+R_n(x+h)-R_n(x)$$

და ამიტომ

$$|f(x+h)-f(x)|\le|S_n(x+h)-S_n(x)|+|R_n(x+h)|+|R_n(x)|$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და $\varepsilon/3$-სათვის შევარჩიოთ ისეთი N, რომ, როცა $n>N$, გვქონდეს: $|R_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ ყოველი x-სათვის (a,b) შუალედიდან. მაშინ, ასე შერჩეული n-სათვის ორივე უკანასკნელი წევრი წინა უტოლობაში იქნება ნაკ-

ლები $\frac{\varepsilon}{3}$-ზე. ახლა დავაფიქსიროთ ამისთანა n და შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია $S_n(x)=U_1(x)+...+...+U_n(x)$ როგორც განუწყვეტელი ფუნქციების სასრული ჯამი, აგრეთვე განუწყვეტელია და ამიტომ $\frac{\varepsilon}{3}$-სათვის არსებობს ისეთი $\eta(\varepsilon)$ დადებითი რიცხვი, რომ, როცა $|h|<\eta(\varepsilon)$, გვექნება: $|S_n(x+h)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

h-ის ასეთი შერჩევისას, წინა უტოლობა, ცხადია, გვაძლევს:

$$\left|f(x+h)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\,,$$

ე.ი. ჩვენ დავადგინეთ, რომ ფუნქცია $f(x)$ განუწყვეტელია.

ქვემოთ მოგვიხდება კიდევ ორი ხერხის გამოყენება:

1) მწკრივის ინტეგრაცია.

2) მწკრივის გაწარმოება.

განვიხილოთ ეს ხერხები ცალ-ცალკე.

ვთქვათ, ფუნქციათა $U_2(x)+U_2(x)+...+U_n(x)+...$ მწკრივი თანაბრად კრებადია (a,b) შუალედზე და $f(x)$ არის მისი ჯამი. მაშინ შესაძლებელია ამ მწკრივის „წევრობრივი ინტეგრაცია“, ე.ი. სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b U_1(x)dx+\int_a^b U_2(x)dx+\cdots+\int_a^b U_n(x)dx+\cdots$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა : ვინაიდან $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$, სადაც $S_n(x)=U_1(x)+...+U_n(x)$, გვექნება:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b S_n(x)dx+\int_a^b R_n(x)dx=\int_a^b U_1(x)dx+\int_a^b U_2(x)dx+\cdots+$$

$$+\int_a^b U_n(x)dx+\int_a^b R_n(x)dx\,.$$

განვიხილოთ უკანასკნელი ინტეგრალი $\int_a^b R_n(x)dx$ და გამოვიყენოთ აქ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა:

$$\int_a^b R_n(x)dx = R_n(\xi)(b-a),$$

ე.ი. $\left|\int_a^b R_n(x)dx\right| = |R_n(\xi)|(b-a) < \varepsilon(b-a)$, როცა $n<N(\varepsilon)$, სადაც $\varepsilon>0$ წინასწარ არჩეული მცირე სიდიდეა. ამგვარად,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \left\{\int_a^b U_1(x)dx + \cdots + \int_a^b U_n(x)dx\right\}\right| < \varepsilon(b-a),$$

როცა $n>N(\varepsilon)$. ε-ის ნებისმიერობის გამო ეს სწორედ იმას ნიშნავს, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b U_1(x)dx + \int_a^b U_2(x)dx + \cdots + \int_a^b U_n(x)dx + \cdots$$

და ამით დებულება დამტკიცებულია, ე.ი. თუ მწკრივი თანაბრად კრებადია (a,b) შუალედზე, მაშინ შეიძლება მისი წევრობრივი ინტეგრაცია.

ვთქვათ, ახლა, გარდა ზემოაღნიშნულისა, სრულდება ის, რომ (a,b) შუალედში თანაბრად კრებადია მწკრივის წევრთა განარმოებით მიღებული მწკრივიც, ე.ი. თანაბრად კლებადია (a,b)-ში მწკრივიც.

$$U'_1(x)+U'_2(x)+...+U'_n(x)+... \qquad (2)$$

ვაჩვენოთ, რომ ასეთ პირობებში მისი ჯამი არის $f(x)$. ამისათვის აღვნიშნოთ $U(x)$-ით უკანასკნელი მწკრივის ჯამი:

$$U(x)=U'_1(x)+U'_2(x)+\ldots+U'_n(x)+\ldots$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $U(x)=f'(x)$.

რადგან ახალი მწკრივი (2) არის თანაბრად კრებადი, შეგვიძლია მისი წევრობრივი ინტეგრაცია:

$$\int_a^x U(t)dt=\int_a^x U_1'(t)dt+\int_a^x U_2'(t)dt+\cdots+\int_a^x U_n'(t)dt+\cdots$$

საიდანაც

$$\int_a^x U(t)dt=\left[U_1(x)-U_1(a)\right]+\left[U_2(x)-U_2(a)\right]+\cdots+\left[U_n(x)-U_n(a)\right]+$$

$$+\cdots=U_1(x)+U_2(x)+\cdots+U_n(x)+\cdots-\left[U_1(a)+U_2(a)+\cdots+U_n(a)+\cdots\right]=$$

$$=f(x)-f(a)\,.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის განარმოება მოგვცემს $U(x)=f'(x)$ და ეს ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

ამგვარად, დავადგინეთ შემდეგნაირი დებულება: ვთქვათ, მოცემულია ფუნქციათა მწკრივი

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots \tag{3}$$

რომელიც კრებადია (a,b) შუალედში. თუ ამ მწკრივის წევრთა წარმოებულებისაგან შემდგარი მწკრივი თანაბრად კრებადია ამავე შუალედში, მაშინ შეგვიძლია მოვახდინოთ მოცემული მწკრივის წევრობრივი განარმოება (ე.ი. (3) მწკრივის ჯამის წარმოებული (2) მწკრივის ჯამის ტოლია).

მაგალითი 1. განვიხილოთ $\int \frac{\sin x}{x}dx$. ეს ფუნქცია არის უმაღლესი ტრანსცენდენტული, მაგრამ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $\frac{\sin x}{x}$ შესაძლებელია დაიშალოს თანაბრად კრებად მწკრივად:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}+\cdots$$

ამიტომ ნებისმიერ $(0, x)$ შუალედში შეიძლება მისი წევრობრივი ინტეგრაცია. შედეგად მივიღებთ, რომ $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}dx$ ტრანსცენდენტული ფუნქცია გამოისახება შემდეგი მწკრივის სახით:

$$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)}+\cdots$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ $\sin x$ ფუნქციის გამწკრივება:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots$$

ეს მწკრივი მისი წევრების წარმოებულთაგან შემდგარ მწკრივთან ერთად, რომელიც არის

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots$$

თანაბრად კრებადია ყოველ შუალედში, და ამიტომ, უკანასკნელი მწკრივის ჯამი არის $\sin x$ ფუნქციის წარმოებული. უკანასკნელი მართლაც წარმოადგენს $\cos x$-ის გამწკრივებას.

ლექცია 13

ფუნქციათა მიმდევრობანი

ახლა განვიხილოთ ასეთი ფუნქცია $f(x,n)$, სადაც x იცვლება რაღაც (a,b) შუალედში, ხოლო n ღებულობს მთელ დადებით მნიშვნელობებს. n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ეს არის ერთი ცვალებადის x-ის ფუნქცია. n-ის ცვლა იწვევს ამ ფუნქციის ცვლას. ვთქვათ, $n\to\infty$ და არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty} f(x,n)$, ყოველი x-ისათვის, როცა $a\le x\le b$. მაშინ ეს ზღვარი წარმოადგენს x-ის გარკვეულ ფუნქციას:

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f(x,n)$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(x,n)$-ის მისწრაფება $F(x)$-საკენ არის თანაბარი, თუ ყოველ ε დადებით რიცხვს შეესაბამება ისეთი (ყველა x-სათვის საერთო) N რიცხვი, რომ, როდესაც $n>N$, მაშინ

$$|F(x)-f(x,n)|<\varepsilon.$$

შევადგინოთ ასეთი მწკრივი:

$$f(x,1)+[f(x,2)-f(x,1)]+\ldots+[f(x,n)-f(x,n-1)]+\ldots$$

ცხადია, ამ მწკრივის პირველი n წევრის ჯამი S_n სწორედ $f(x,n)$ იქნება, ხოლო ამ მწკრივის ჯამი იქნება ფუნქცია $F(x)$. ამიტომ $f(x,n)$ მიისწრაფვის $F(x)$-საკენ თანაბრად (a,b) შუალედზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა უკანასკნელი მწკრივი თანაბრად კრებადია. მაშასადამე, ამ მწკრივისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ უკვე დამტკიცებული თეორემები, რაც შემდეგი სახის დებულებებს მოგვცემს:

თუ $f(x,n)$ ფუნქციები განუწყვეტელი არიან ყოველი n-სათვის ($n=1,2,\ldots$) და $f(x,n)$ თანაბრად მიისწრაფვიან $F(x)$-საკენ (a,b) შუალედზე, მაშინ ზღვარი $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x,n)$ აგრეთვე განუწყვეტელი ფუნქციაა (a,b) შუალედზე.

იმავე პირობებში გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x,n)dx=\int_a^b F(x)dx\,,$$

ან კიდევ, თუ, გარდა ამისა, $f(x,n)$ ფუნქციათა წარმოებულები (x-ით), $f(x,n)$ თანაბრად მიისწრაფვიან $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ $\varphi(x)=F'(x)$.

განვიხილოთ ახლა α პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალი უსასრულო საზღვრით: $\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$, სადაც $f(x,\alpha)$ ორი ცვალებადის განუწყვეტელი ფუნქციაა, როცა $x\geq a$ და $\alpha_1\leq\alpha\leq\alpha_2$.

ამბობენ, რომ ეს ინტეგრალი თანაბრად კრებადია, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი K რიცხვი (საერთო ყველა α-სათვის (α_1,α_2) შუალედიდან), რომ, როცა $L>K$, მაშინ

$$\left|\int_L^\infty f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon\,,$$

α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის α_1-სა და α_2-ს შორის.

ვაჩვენოთ, რომ ასეთი ინტეგრალი $\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$, რომელიც α-ს გარკვეულ ფუნქციას წარმოადგენს, ე.ი.

$$F(\alpha)=\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$$

აგრეთვე განუწყვეტელი ფუნქციაა (α_1,α_2) შუალედში.

ამ გარემოების დასამტკიცებლად მივცეთ $F(\alpha)$-ს შემდეგი სახე:

$$F(\alpha)=\int_a^L f(x,\alpha)dx+\int_L^\infty f(x,\alpha)dx\,.$$

აქ, იმის გამო, რომ ეს ინტეგრალი თანაბრად კრებადია, ყოველი $\dfrac{\varepsilon}{3}$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი K, რომ, როცა $L>K$, გვექნება: $\left|\int_L^{\infty} f(x,\alpha)dx\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ ყველა α-სათვის (α_1,α_2) შუალედიდან. ამიტომ, რადგან

$$F(\alpha+h)-F(\alpha)=\int_a^L f(x,\alpha+h)dx-\int_a^L f(x,\alpha)dx+$$

$$+\int_L^{\infty} f(x,\alpha+h)dx-\int_L^{\infty} f(x,\alpha)dx,$$

მივიღებთ:

$$|F(\alpha+h)-F(\alpha)|\le\left|\int_a^L f(x,\alpha+h)dx-\int_a^L f(x,\alpha)dx\right|+\left|\int_L^{\infty} f(x,\alpha+h)dx\right|+$$

$$+\left|\int_L^{\infty} f(x,\alpha)dx\right|<\left|\int_a^L f(x,\alpha+h)dx-\int_a^L f(x,\alpha)dx\right|+\frac{2\varepsilon}{3}.$$

მაგრამ პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალი $\int_a^L f(x,\alpha)dx$ განუწყვეტელია α-ს მიმართ და, ამიტომ, $\dfrac{\varepsilon}{3}$-სათვის არსებობს $\eta(\varepsilon)$ ისეთი, რომ, როცა $|h|<\eta(\varepsilon)$, გვექნება

$$\left|\int_a^L f(x,\alpha+h)dx-\int_a^L f(x,\alpha)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

და მაშინ მივიღებთ:

$$|F(\alpha+h)-F(\alpha)|<\varepsilon \quad (\text{როცა } |h|<\eta(\varepsilon)),$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $F(\alpha)$ განუწყვეტელია α-ს მიმართ.

აქ ჩვენ შეგვეძლო სხვაგვარად გვემსჯელა: განვიხილოთ $F(\alpha)=\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ ინტეგრალთან დაკავშირებული

$$\int_a^{a+1} f(x,\alpha)dx + \int_{a+1}^{a+2} f(x,\alpha)dx + \ldots + \int_{a+n}^{a+n+1} f(x,\alpha)dx + \ldots$$

მწკრივი, ადვილად შევნიშნავთ, რომ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია (α_1, α_2) შუალედზე, როცა $F(\alpha)$ თანაბრად კრებადი ინტეგრალია. მართლაც, ამ მწკრივის ნაშთი $R_n(\alpha)$ არის

$$R_n(\alpha) = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x,\alpha)dx + \int_{a+n+1}^{a+n+2} f(x,\alpha)dx + \ldots +$$

$$+ \int_{a+n+p}^{a+n+p+1} f(x,\alpha)dx + \ldots$$

და ის, ჩვენს პირობებში, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც

$$\int_{a+n}^{\infty} f(x,\alpha)dx.$$

ამიტომ, ინტეგრალის თანაბარი კრებადობიდან ერთბაშად გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი N, რომ, როცა $n > N$, გვექნება $|R_n(\alpha)| < \varepsilon$ ყოველი α-სათვის (α_1, α_2)-დან, რაც მართლაც მწკრივის თანაბარ კრებადობას ნიშნავს. ამიტომ, რადგან ამ მწკრივის ყოველი წევრი $\int_{a+n}^{a+n+1} f(x,\alpha)dx$, როგორც პარამეტრზე დამოკიდებული სასურველსაზღვრებიანი ინტეგრალი, განუწყვეტელია α-ს მიმართ,

$$F(\alpha) = \int_a^{a+1} f(x,\alpha)dx + \int_{a+1}^{a+2} f(x,\alpha)dx + \ldots + \int_{a+n}^{a+n+1} f(x,\alpha)dx + \ldots \quad (1)$$

მწკრივის ჯამიც განუწყვეტელი აღმოჩნდება. ეს ჩვენი დებულების მეორენაირი დამტკიცებაა.

ახლა ისმის კითხვა, როდის აქვს ამ $F(\alpha)=\int f(x,\alpha)dx$ ფუნქციას წარმოებული?

ამისათვის გავიხსენოთ, რომ, როცა ინტეგრალის საზღვრები სასრული a და b რიცხვებია და $f(x,\alpha)$ ფუნქციას გააჩნია განუწყვეტელი წარმოებული α-ს მიმართ, მაშინ არსებობს წარმოებული

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx=\int_a^b f_\alpha^{\prime}(x,\alpha)dx.$$

ახლა შევადგინოთ ახალი მწკრივი:

$$\int_a^{a+1} f_\alpha^{\prime}(x,\alpha)dx+\int_a^{a+2} f_\alpha^{\prime}(x,\alpha)dx+\ldots+\int_{a+n}^{a+n+1} f_\alpha^{\prime}(x,\alpha)dx+\ldots \qquad (2)$$

წინა ფორმულის თანახმად, ამ მწკრივის წევრები წარმოადგენენ (1) მწკრივის შესაბამისი წევრების წარმოებულებს. ამიტომ, ზემოთ გაკეთებული შენიშვნების თანახმად, თუ $\int_a^\infty f_\alpha^{\prime}(x,\alpha)dx$ თანაბრად კრებადი ინტეგრალია (α_1,α_2) შუალედში, ხოლო $\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$ კრებადია იმავე შუალედში, (2) მწკრივი თანაბრად კრებადი აღმოჩნდება (α_1,α_2) შუალედში და, მწკრივთა წევრობრივი განარმოების თეორიის თანახმად, დავასკვნით, რომ $F(\alpha)=\int_\alpha^\infty f(x,\alpha)dx$ ინტეგრალი წარმოებადი იქნება α-ს მიმართ და განარმოება α-თი შეიძლება შევასრულოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, ე. ი. გვექნება:

$$F'(\alpha)=\int_a^\infty f_\alpha'(x,\alpha)dx.$$

სავსებით ასევე, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $F(\alpha)=\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$ ინტეგრალი თანაბრად კრებადია, როცა α მოთავსებულია (α_1,α_2)

შუალედში, დადგინდება, რომ $F(\alpha)$-ს ინტეგრაცია α-ს მიმართ შეიძლება შევასრულოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, ე. ი.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx = \int_a^{\infty} dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)dx.$$

გამოვიყენოთ აქ გადმოცემული მასალა საინტერესო მაგალითებზე.

1. განვიხილოთ კლასიკური ინტეგრალი $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

იგი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ალბათობათა აღრიცხვაში. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველყოფილი არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში. ამიტომ მისი გამოთვლა გარკვეულ სიძნელეს წარმოადგენს. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი არსებობს. მართლაც, ავიღოთ ნამრავლი

$$x^2 e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{4} + \ldots} \le \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

ამგვარად, $x^2 e^{-x^2}$ შემოსაზღვრულია ზემოდან 1-ით და, მაშინ, $e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$, საიდანაც დავასკვნით, რომ $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ სასრულია.
ახლა განვიხილოთ რაიმე $\alpha > 0$ რიცხვი და მოვახდინოთ უკანასკნელ ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნა: $x = \alpha y$; ცხადია, ამით ინტეგრალის საზღვრები არ შეიცვლება და მივიღებთ:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2} \cdot \alpha dy.$$

ამგვარად, მარჯვენა მხარე α-ს მიმართ მუდმივი კრებადი ინტეგრალია. ამიტომ, თუ ორივე მხარეს გავამრავლებთ $e^{-\alpha^2}$

მამრავლზე, კვლავ მივიღებთ თანაბრად კრებად ინტეგრალს α-ს მიმართ. ეს კი, α-თი ინტეგრაციის შემდეგ 0-დან ∞-მდე, მოგვცემს:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+y^2)} dy.$$

ამიტომ, თუ შევნიშნავთ, რომ $\int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^\infty e^{-x^2} dx = J^2$, სადაც $J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$, და თუ მარჯვნივ მოვახდენთ ინტეგრაციას ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ (რაც შესაძლებელია შიგა ინტეგრალის თანაბარი კრებადობის გამო α-ს მიმართ[8]), მივიღებთ:

$$J^2 = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+y^2)} \alpha d\alpha.$$

მაგრამ უკანასკნელი ინტეგრალი უბრალოდ მოიძებნება: $\alpha e^{-\alpha^2(1+y^2)}$ გამოსახულებას აქვს პირველყოფილად α-ს მიმართ

$$-\frac{e^{-\alpha^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}$$

და, ამიტომ გვექნება:

$$J^2 = \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-\alpha^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)} \right]_0^\infty dy = \int_0^\infty \frac{dy}{2(1+y^2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[arctgy \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

საიდანაც მივიღებთ: $J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ე. ი.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია J ინტეგრალში დადებითია და, მაშასადამე, $J>0$ აგრეთვე). აქედან, თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx+\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

მივიღებთ აგრეთვე, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

2) განვიხილოთ მეორე კლასიკური მაგალითი.
გამოვითვალოთ

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx, \qquad \text{სადაც } \alpha>0.$$

ამ ინტეგრალის განხილვისას გამოვიყენოთ განარმოება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ. საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულის თანახმად, რომელსაც აქვს სახე: $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$, როცა $\varphi(x)$ კლებადი ფუნქციაა, გვექნება:

$$\int_K^{t} e^{-\alpha x}\frac{\sin}{x}dx=\frac{e^{-\alpha K}}{K}\int_K^{\xi}\sin dx.$$

მაგრამ $\left|\int_K^{\xi}\sin xdx\right|\le 2$ და ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი უტოლობა:

$$\left|\int_K^t e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|<\frac{2}{K},$$

რადგან $e^{-\alpha K}<1$. აქედან, ნებისმიერი $\varepsilon<0$ რიცხვისათვის, თუ $K>\frac{2}{\varepsilon}$, გვექნება:

$$\left|\int_K^t e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|<\varepsilon$$

და $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ აღმოჩნდება თანაბრად კრებადი. სავსებით ასევე, თანაბრად კრებადია $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx$ ინტეგრალიც, როცა $\alpha>0$, რადგან

$$\left|\int_K^{\infty}e^{-\alpha x}\sin sdx\right|\le\int_K^{\aleph}e^{-\alpha x}dx=-\left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right]_K^{\infty}=\frac{1}{Ke^{\alpha K}}$$

და ის ნაკლებია $\varepsilon>0$ რიცხვზე, როცა $K>\frac{1}{\varepsilon}$; ამიტომ უსასრულოსაზღვრიანი ინტეგრალის გაწარმოების წესის გამოყენებით, უფლება გვაქვს დავწეროთ, რომ

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=-\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx.$$

მეორე მხრივ,

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}\left[a\sin bx-b\cos bx\right]}{a^2+b^2}+C.$$

ამიტომ

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=-\left[\left[\frac{e^{-\alpha x}(-\alpha\sin x-\cos x)}{1+\alpha^2}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{1+\alpha^2};\right.$$

ინტეგრაცია α -თი მოგვცემს:

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=-\int\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}=C-arctg\alpha.$$

აქ შევიტანოთ $\alpha=\infty$. მაშინ, რადგან $e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}=0$, და $corctg\infty=\pi/2$, მივიღებთ: $0=C-\pi/2$, ე. ი. $C=\pi/2$. ამიტომ, გვექნება:

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-corctg\alpha=corctg\frac{1}{\alpha}.$$

კერძოდ, როცა ავიღებთ $\alpha=0$, მივიღებთ $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ ინტეგრალის მნიშვნელობას:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi/2.$$

ლ ე ქ ც ი ა 1 4

რამდენიმე საინტერესო მაგალითი

განვიხილოთ კიდევ ინტეგრალის რამდენიმე საინტერესო მაგალითი:

1) $$F(\alpha)=\int_0^{\pi} Log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx \tag{1}$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს ლოგარითმს $1-2\alpha\cos x+\alpha^2$ გამოსახულებისა, რომელიც შეიძლება წარმოვიდგინოთ სახით: $1-2\alpha\cos x+\alpha^2=(\alpha-\cos)^2+1-\cos^2 x$, საიდანაც ჩანს, რომ ეს გამოსახულება ყოველი x-ისათვის $(0,\pi)$ შუალედზე დადებითია, თუ $|\alpha|\neq 1$. $\alpha=\pm 1$-ისათვის გვაქვს $1\mp 2\cos x+1=$ $=2\mp 2\cos x$, რომელიც ნული ხდება $x=0$ (ან $x=\pi$) წერტილზე და ამიტომ მისი ლოგარითმი კარგავს განუწყვეტლობის თვისებას. ამის გამო, განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $|\alpha|\neq 1$.

ვაჩვენოთ, უპირველეს ყოვლისა, რომ $F(\alpha)$ ლუწი ფუნქციაა α-სი, ე. ი. $F(\alpha)=F(-\alpha)$.

მართლაც,

$$F(-\alpha)=\int_0^{\pi}\log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)dx.$$

მოვახდინოთ აქ ცვლადების გარდაქმნა: $x=\pi-y$. ინტეგრაციის ახალი საზღვრები, ცხადია, იქნება π და 0. ამგვარად:

$$F(-\alpha)=\int_{\pi}^{0}\log(1+2\alpha\cos(\pi-y)+\alpha^2)(-dy)=$$

$$=-\int_{\pi}^{0}\log(1-2\alpha\cos y+\alpha^2)dy=\int_0^{\pi}\log(1-2\alpha\cos y+\alpha^2)dy=F(\alpha).$$

ახლა ავიღოთ $F(\alpha)+F(-\alpha)$ და მოვახდინოთ შემდეგნაირი გარდაქმნები:

$$2F(\alpha)=F(\alpha)+F(-\alpha)=\int_0^\pi Log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx+$$

$$+\int_0^\pi Log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=$$

$$=\int_0^\pi Log\Big[(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\Big]dx=$$

$$=\int_0^\pi Log\Big[(1+\alpha^2)^2-4\alpha^2\cos^2 x\Big]dx=$$

$$=\int_0^\pi Log\Big[1+2\alpha^2(1-2\cos^2 x)+\alpha^4\Big]dx=$$

$$=\int_0^\pi Log(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)dx.$$

მოვახდინოთ ცვლადების გარდაქმნა: $2x=y$. მაშინ მივიღებთ:

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} Log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\int_0^\pi Log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy+$$

$$+\int_\pi^{2\pi} Log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy\Big]$$

მოვახდინოთ უკანასკნელ ინტეგრალში ცვლადების ასეთი გარდაქმნა: $y=2\pi-z$. ეს მოგვცემს:

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}\Big[\int_0^\pi Log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy+$$

$$+\int_{\pi}^{0} Log(1+2\alpha\cos z+\alpha^4)(-dz)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} Log(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy+\int_0^{\pi} Log(1+2\alpha^2\cos z+\alpha^4)dz\right]$$

უკანასკნელი ინტეგრალებიდან პირველი, ცხადია, $F(\alpha^2)$-ია, მეორე კი $F(-\alpha^2)$, რომელიც $F(\alpha)$ ფუნქციის ლუწობის გამო კვლავ $F(\alpha^2)$-ს გვაძლევს და, საბოლოოდ, ვღებულობთ: $2F(\alpha)=F(\alpha^2)$, ანუ $F(\alpha)=\frac{F(\alpha^2)}{2}$. ამ თვისების განმეორებით გამოყენება გვაძლევს, რომ

$$F(\alpha)=\frac{F(\alpha^2)}{2}=\frac{F(\alpha^4)}{2^2}=\ldots=\frac{F(\alpha^{2n})}{2n},$$

ყოველი n-ისათვის.

თუ აქ ვიგულისხმებთ, რომ $|\alpha|<1$ და განვიხილავთ ზღვარს მარჯვენა მხარისა, როცა $n\to\infty$, მივიღებთ ($F(\alpha)$ ფუნქციის განუწყვეტლობის თვისების გათვალისწინებით):

$$F(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{F(\alpha^{2n})}{2^n}=0.$$

ე. ი. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ $F(\alpha)=0$, როცა $|\alpha|<1$.

ვთქვათ, $|\alpha|>1$. მაშინ, წარმოვადგენთ რა $\alpha=\frac{1}{\gamma}$, გვექნება $|\alpha|<1$, და

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi} Log(1-\frac{2}{\gamma}\cos x+\frac{1}{\gamma^2})dx=\int_0^{\pi}[Log(\gamma^2-2\gamma\cos x+1)dx-$$

$$-Log\gamma^2\Big]dx = F(\gamma) - Log\gamma^2 \cdot \int_0^{\pi} dx = 0 + \pi Log\alpha^2.$$

ამგვარად, საბოლოოდ მივიღეთ:

$$F(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } |\alpha| < 1, \\ \pi Log\alpha^2 & |\alpha| > 1. \end{cases}$$

2) შევისწავლოთ შემდეგი შესანიშნავი ინტეგრალები:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx.$$

სრულიად აშკარაა, რომ მეორე ინტეგრალი ყოველთვის დაიყვანება პირველზე მარტივი გარდაქმნის საშუალებით:

$$x = \frac{\pi}{2} - y. \tag{9}$$

ახლა გავიხსენოთ პირველი ინტეგრალის რედუქციის ფორმულა

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \Big[-\sin^{m-1} x \cdot \cos x\Big]_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

აქ საზღვრების ჩასმის შედეგი, ცხადია, მოგვცემს 0-ს და, ამგვარად, ყოველი მთელი დადებითი m-სათვის გვექნება:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა.

ა) ვთქვათ, m ლუწი რიცხვია. მაშინ, რედუქციის ფორმულის გამოყენება რამდენჯერმე ($\frac{m}{2}$ -ჯერ), მოგვცემს:

$$J_m = \frac{1.3.5...(m-1)}{2.4.6...m} \cdot J_0,$$

მაგრამ $J_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$ და ლუწი m -სათვის გვექნება:

$$J_m = \frac{1.3.5...(m-1)}{2.4.6...m} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

თუ

ბ) m კენტია, იგივე გამოთვლების გამეორება ($\frac{m-1}{2}$ -ჯერ) მოგვცემს:

$$J_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} J_1,$$

მაგრამ

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin dx = 1,$$

და ამიტომ მივიღებთ:

$$J_m = \frac{(m-1)!!}{m!!}.$$

აქედან გამოვიყვანთ მნიშვნელოვან ფორმულას, რომელიც საშუალებას მოგვცემს π რიცხვის უსასრულო ნამრავლის სახით წარმოდგენისა. ამ ფორმულას ვალისის ფორმულა ეწოდება.

ვიცით, რომ ყოველი მთელი n -სათვის გვაქვს

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

სადაც x განიხილება პირველ კვადრატში, ე. ი. $0<x<\frac{\pi}{2}$. ამ უტოლობათა ინტეგრაცია $(0, \pi/2)$ საზღვრებში გვაძლევს

$$J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}.$$

წინა ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{2n}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}<\frac{\pi}{2}<\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}\cdot\frac{1}{2n}.$$

ცხადია, რომ არსებობს ისეთი $\Theta=\Theta_n$, რომ $0<\Theta_n<1$ და

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+\Theta_n}.$$

აქედან π-ს მნიშვნელობა შეიძლება დაიწეროს შემდეგი უსასრულო ნამრავლის სახით:

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2n(2n-2)\ldots4.2}{(2n-1)(2n-3)\ldots3.1}\cdot\frac{1}{n}\right\}$$

ეს არის ვალისის ზემონახსენები ფორმულა.

ლ ე ქ ც ი ა 1 5

ეილერის ინტეგრალები

3) ახლა შევისწავლოთ ე. წ. ეილერის $\Gamma(p)$ და $B(p,q)$ ინტეგ-რალები, რომლებსაც განსაკუთრებული ადგილი უკავიათ მათემა-ტიკურ ანალიზში.

ამ ინტეგრალს აქვს სახე:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx \quad \text{და} \quad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ .$$

ავიღოთ პირველი მათგანი და ვაჩვენოთ, რომ მას აზრი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $p>0$. ამისათვის წარმოვადგინოთ ეს ინტეგრალი შემდეგნაირად:

$$\Gamma(p)=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

პირველი ინტეგრალის შიგნით $f(x)=x^{p-1}e^{-x}$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს უსასრულო წყვეტა $x=0$ წერტილში, ამასთან, ცხადია, არსებობს ზღვარი:

$$\lim_{x\to 0} x^{1-p}f(x)=\lim_{x\to 0} e^{-x}=1.$$

ამიტომ, ჩვენთვის ცნობილი ნიშნის თანახმად, ეს ინტეგრალი არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $1-p<1$, ე. ი. როცა $p>0$. რაც შეეხება მეორე ინტეგრალს, რომლის ზედა საზღვარი უსასრულოა, იმის გამო, რომ, მაგალითად,

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^2x^{p-1}e^{-x})=\lim_{x\to\infty}(x^{p+1}e^{-x})=0,$$

და, რადგან $2>1$, უსასრულოსაზღვრიანი ინტეგრალის არსებობის პირობის თანახმად, ეს ინტეგრალი არსებობს ნებისმიერი p-

სათვის. ამგვარად, ორივე ინტეგრალი, ე. ი. $\Gamma(p)$ ინტეგრალი მართლაც არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $p>0$.

სავსებით ანალოგიურად, $B(p,q)$ ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით:

$$B(p,q)=\int_0^c x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_c^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

სადაც c რაღაც რიცხვია, $0<c<1$. ახლა, თუ აღვნიშნავთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, გვექნება:

$$\lim_{x\to 0}\left[x^{1-p}f(x)\right]=\lim_{x\to 0}(1-x)^{q-1}=1$$

და ამიტომ, პირველი ინტეგრალი არსებობს, როცა $1-p<1$, ე. ი. როცა $p>0$. მეორე ინტეგრალისათვის, ვინაიდან გვაქვს:

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)^{1-q}f(x)\right]=\lim_{x\to 1}x^{p-1}=1,$$

დავასკვნით, რომ ის არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $1-q<1$, ე. ი. $q>0$. ამგვარად, ორივე ინტეგრალი $B(p,q)$-ს გამოსახულებაში, და თვითონ $B(p,q)$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $p>0$ და $q>0$.

$\Gamma(p)$ და $B(p,q)$ ინტეგრალებს შორის არსებობს მეტად მჭიდრო კავშირი. ამ კავშირის აღმოსაჩენად მოვახდინოთ $B(p,q)$ ინტეგრალში ცვლადების შემდეგი გარდაქმნა:

$x=\dfrac{t}{1+t}$. აქ, როცა $t=0$, მაშინ $x=0$ და როცა $t=\infty$, მაშინ $x=1$. ამიტომ ეს გარდაქმნა მოგვცემს:

$$B(p,q)=\int_0^\infty\left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1}\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{q-1}\frac{dt}{(1+t)^2}=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt \qquad (*)$$

ახლა მივმართოთ $\Gamma(p)$ ინტეგრალს და შევიტანოთ მასში x-ის ნაცვლად xy, სადაც y რაიმე (დადებითი) პარამეტრია:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty (xy)^{p-1}e^{-xy}\cdot ydx=y^{p-1}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-xy}dx$$

ე. ი.

$$\frac{\Gamma(p)}{y^p}=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-xy}dx.$$

შევიტანოთ ამ ფორმულაში y-ის ნაცვლად $y=1+t$, ხოლო p შევცვალოთ $p+q$-თი. მივიღებთ:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x(1+t)}dx.$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე t^{p-1}-ზე და მოვახდინოთ ინტეგრაცია t-ს მიმართ $(0,\infty)$ შუალედზე. ეს მოგვცემს:

$$\Gamma(p+q)\cdot\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^\infty t^{p-1}dt\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x(1+t)}dx.$$

აქ, მარჯვენა მხარეში, ვინაიდან შიგა ინტეგრალი თანაბრად კრებადია t-ს მიმართ, შეგვიძლია ინტეგრალების გადასმა[10], ე. ი. ინტეგრაცია ჯერ მოვახდინოთ t-თი, ხოლო შემდეგ x-ით. მივიღებთ:

$$\Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^\infty x^{q-1}e^{-x}\ \Gamma(p)dx=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q).$$

მაგრამ (*) და (*.) ფორმულების თანახმად, უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\Gamma(p)\ \Gamma(q)$$

ამგვარად, საბოლოოდ მივიღეთ, რომ ყოველი $p>0$, და $q>0$ რიცხვებისათვის სამართლიანია იგივეობა:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

ეს არის ის ძირითადი დამოკიდებულება, რომელიც აკავშირებს ერთმანეთთან ეილერის $\Gamma(p)$ და $B(p,q)$ ინტეგრალებს.

ახლა გადავიდივართ $\Gamma(p)$ ინტეგრალის უფრო ღრმა შესწავლაზე. განვიხილოთ $\Gamma(p)$ ინტეგრალი $\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ $(p>0)$ და მოვახდინოთ მასში ნაწილობრივი ინტეგრაცია აღნიშვნებით: $x^{p-1}dx=du,\quad v=e^{-x}$. მაშინ შეგვიძლია მივიღოთ $u=\dfrac{x^p}{p},\quad dv=-e^{-x}dx.$ ეს მოგვცემს:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty vdu=\left[uv\right]_0^\infty-\int_0^\infty udv,$$

მაგრამ

$$\left[uv\right]_0^\infty=\left[\frac{x^p}{p}e^{-x}\right]_0^\infty=0,$$

და ამგვარად გვექნება:

$$\Gamma(p)=-\int_0^\infty udv=-\int_0^\infty\frac{x^p}{p}(-e^{-x})dx=\frac{1}{p}\int_0^\infty x^pe^{-x}\cdot dx.$$

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი ინტეგრალი ისევ ეილერის $\Gamma(p+1)$ ინტეგრალია და, მაშასადამე, როცა $p>0$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p).$$

ეს ფორმულა გამოსახავს $\Gamma(p)$ ინტეგრალის ძირითად თვისებას, რომელიც საშუალებას გვაძლევს $\Gamma(p)$ ფუნქციის გამოთვლის საკითხი დავიყვანოთ მისი მნიშვნელობების გამოთვლაზე, როცა $0<p\leq 1$. მართლაც, ვთქვათ, p რაიმე დადებითი რიცხვია, რომელიც აღემატება 1-ს. მაშინ ის შეიძლება ცალსახად წარმოვადგინოთ $p=n+\lambda$ სახით, სადაც n არის მთელი დადებითი რიცხვი, ხოლო λ ისეთი დადებითი რიცხვია, რომ

$$0<\lambda\leq 1.$$

ახლა ზემოთ დადგენილი რედუქციის ფორმულის გამოყენება n-ჯერ მოგვცემს:

$$\Gamma(p)=\Gamma(n+\lambda)=(n+\lambda-1)\;\Gamma(n+\lambda-1)=$$
$$=(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)\;\Gamma(n+\lambda-2)=$$
$$=\ldots=(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)\ldots\lambda\,\Gamma(\lambda),$$

ე. ი. საბოლოოდ მივიღეთ: თუ $p=n+\lambda$, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია და $0<\lambda\leq 1$, გვაქვს:

$$\Gamma(p)=\Gamma(n+\lambda)=(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)\ldots(\lambda+1)\lambda\,\Gamma(\lambda) \tag{2}$$

საინტერესოა საგანგებოდ აღვნიშნოთ შემთხვევა, როცა $p=m$ მთელია. მაშინ მისი ზემონახსენები წარმოდგენა იქნება ასეთი სახისა:

$$m=(m-1)+1$$

და, ამიტომ,

$$\Gamma(m)=(m-1)(m-2)...2.1.\ \Gamma\quad(1).$$

მაგრამ

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}x^{1-1}e^{-x}dx=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}=1.$$

შევიტანთ რა ამ მნიშვნელობას წინა ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\Gamma(m)=(m-1)(m-2)...2.1,$$

ე. ი. ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი მთელი დადებითი m რიცხვისათვის მივიღეთ:

$$\Gamma(m)=(m-1)!$$

საზოგადოდ, როცა p მთელი არაა, (2) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს $\Gamma(p)$-ს გამოთვლა დავიყვანოთ $\Gamma(\lambda)$-ს გამოთვლამდე, სადაც $0<\lambda<1$. ახლა ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ სინამდვილეში $\Gamma(p)$ ინტეგრალის გამოთვლა ყოველთვის დაიყვანება მის გამოთვლაზე $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ შუალედში. ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ ყოველი p-სათვის, თუ $0<p<1$, სამართლიანია ფორმულა:

$$\Gamma(p)\ \Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\qquad(3)$$

ვიდრე ამ ფორმულას გამოვიყვანდეთ, განვიხილოთ მისი კერძო შემთხვევა: ვთქვათ, $p=\frac{1}{2}$. მაშინ გვაქვს: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-x}\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx.$

მაგრამ $x^{-\frac{1}{2}}dx = 2d(x^{\frac{1}{2}})$ და, ამიტომ, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x} d(x^{\frac{1}{2}})$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $x^{\frac{1}{2}} = t$. მაშინ $x = t^2$ და მივიღებთ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

ამასვე გვაძლევს (3) ფორმულა: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi}$,

ე.ი. $(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right))^2 = \pi$, და (რადგან $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$), ვღებულობთ:

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

ახლა გადავიდეთ (3) ფორმულის გამოყვანაზე, ჩვენ ვიცით, რომ, როცა $p > 0$, $q > 0$, მაშინ $\Gamma(p+q)B(p,q) = \Gamma(p)\ \Gamma(q)$.

ავიღოთ $0 < p < 1$ და, ვთქვათ, $q = 1-p$; მაშინ $q > 0$ და გვექნება: $B(p,1-p) = \Gamma(p)\ \Gamma(1-P)$, რაც (*) ფორმულის ძალით, იმის გამო, რომ $p+(1-p) = 1$, გვაძლევს

$$\Gamma(p)\ \Gamma(1-p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} dt. \tag{4}$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლის მიზნით განვიხილოთ ჯერ შემდეგი სახის განუსაზღვრელი ინტეგრალი

$$\int \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx,$$

სადაც m და n მთელი რიცხვებია და $m<n$.

ჩვენ ვიცით,[11] რომ ასეთი სახის განუსაზღვრელი ინტეგრალი უდრის

$$\int \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = -\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}\cos(2m+1)\gamma_K Log(x^2-2x\cos\gamma_K+1)+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{K=0}^{n-1}\sin(2m+1)\gamma_K \cdot arctg\frac{x-\gamma_K}{\sin\gamma_K},$$

სადაც $\quad \gamma_K = \dfrac{(2K+1)\pi}{2n}.$

ამის გამო განსაზღვრული ინტეგრალი $(-R,+R)$ საზღვრებში მოგვცემს:

$$\int_{-R}^{+R}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = -\frac{1}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}\cos(2m+1)\gamma_K \cdot Log\frac{R^2-2R\cos\gamma_K+1}{R^2+2R\cos\gamma_K+1}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{K=0}^{n-1}\sin(2m+1)\gamma_K \cdot \left[arctg\frac{R-\cos\gamma_K}{\sin\gamma_K}-arctg\frac{-R-\cos\gamma_K}{\sin\gamma_K}\right].$$

მაგრამ

$$\lim_{R\to\infty}\log\frac{R^2-2R\cos\gamma_K+1}{R^2+2R\cos\gamma_K+1}=\lim_{R\to\infty}Log\frac{1-2\dfrac{\cos\gamma_K}{R}+\dfrac{1}{R^2}}{1+2\dfrac{\cos\gamma_K}{R}+\dfrac{1}{R^2}}=Log1=0,$$

და

$$\lim_{R\to\infty}\left[arctg\frac{R-\cos\gamma_K}{\sin\gamma_K}+arctg\frac{R+\cos\gamma_K}{\sin\gamma_K}\right]=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

ამიტომ

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{2n}\sum_{K=0}^{n-1}\sin(2K+1)\alpha,$$

სადაც $\alpha=\frac{2m+1}{2n}\pi.$

მოვძებნოთ ეს ჯამი. აღვნიშნოთ

$$S=\sum_{K=0}^{n-1}\sin(2K+1)\alpha=\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha.$$

$2\sin\alpha$-ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$2\sin\alpha\cdot S=2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin3\alpha+2\sin\alpha\cdot\sin5\alpha+$$

$$+\ldots+2\sin\alpha\sin(2n-1)\alpha=$$

$$=(1-\cos2\alpha)+(\cos2\alpha-\cos4\alpha)+(\cos4\alpha-$$

$$\cos6\alpha)+\ldots+(\cos(2n-2)\alpha-\cos2n\alpha)=1-\cos2n\alpha,$$

მაგრამ $2n\alpha=(2m+1)\pi$ და, ამიტომ

$$2\sin\cdot S=1-\cos(2m+1)\pi=1-(-1)=2.$$

აქედან ვპოულობთ:

$$S=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

საბოლოოდ,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{2n\sin\alpha}.$$

ახლა აღვნიშნოთ $x^{2n}=t, \quad x=t^{\frac{1}{2n}}$. აქედან

$$dx=\frac{1}{2n}t^{\frac{1}{2n}-1}dt, \qquad x^{2m}=t^{\frac{m}{n}},$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{2n\sin\frac{2m+1}{n}\pi}.$$

ამ ტოლობიდან უკანასკნელი ორი წევრის გატოლება, თუ ამას გარდა აღვნიშნავთ $p=\dfrac{2m+1}{2n}$, გვაძლევს:

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin p\pi},$$

ე. ი. (4) ფორმულის თანახმად, გვაქვს:

$$\Gamma(p)\ \Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},$$

თუ $p=\dfrac{2m+1}{2n}$ (აქ $m<n$ და ამიტომ, $2m+1<2n$).

ამგვარად, ჩვენი სასურველი ფორმულა დადგენილია ისეთი p (რაციონალური) რიცხვებისათვის, რომელთაც აქვთ შემდეგი სახე:

$$p=\frac{2m+1}{2n}$$

(m, n მთელებია და, $2m+1<2n$).

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მიღებული ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი (რაციონალური თუ ირაციონალური) p რიცხვი-

სათვის, თუ $0 < p < 1$. ამისათვის ავიღოთ $\dfrac{2m+1}{2n}$ სახის რიცხვთა $(2m+1 < 2n)$ ისეთი $p_K (K = 1,2,...)$ მიმდევრობა, რომელსაც ზღვრად აქვს p რიცხვი: $\lim\limits_{K\to\infty} p_K = p$.

იმის გამო, რომ ფორმულა სამართლიანია ყოველი p_K-სათვის, გვექნება:

$$\Gamma(p_K)\ \Gamma(1-p_K) = \frac{\pi}{\sin p_K\pi} \tag{5}$$

მაგრამ $\Gamma\ (p)$ განუწყვეტელი ფუნქციაა p-სი, როცა $p > 0$ (მართლაც, $\Gamma\ (p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ ინტეგრალი თანაბრად კრებადია ყოველ (p_0, ∞) შუალედზე, თუ $0 < p_0$), ასევე განუწყვეტელი ფუნქციაა p-სი $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$ წილადიც. ამიტომ, რადგან $\lim\limits_{K\to\infty} p_K = p$, გვექნება:

$$\lim_{K\to\infty} \Gamma(p_K) = \Gamma(p), \qquad \lim_{K\to\infty} \Gamma(1-p_K) = \Gamma(1-p) \quad \text{და}$$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\pi}{\sin p_K\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

და, მაშასადამე, ზღვარზე გადასვლა (5) ფორმულაში, როცა $K \to \infty$, გვაძლევს:

$$\Gamma(p)\ \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

ამით ფორმულა დადგენილია ნებისმიერი $0 < p < 1$ რიცხვისათვის.

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს $\Gamma\ (p)$ ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ ისეთ $\Gamma\ (p)$ ინტეგრალის გამოთვლაზე,

რომლის არგუმენტი p მოთავსებულია $(0, \frac{1}{2})$ შუალედში: მართლაც, ჩვენ ადრე უკვე ვნახეთ, რომ $\Gamma(p)$-ს გამოთვლა დაყვანილი იყო შემთხვევაზე, როცა $0 < p < 1$. მაგრამ ასეთი p-სათვის ან $0 < p < \frac{1}{2}$ ან $0 < 1 - p < \frac{1}{2}$ (თუ $p \neq \frac{1}{2}$ და $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ უკვე გამოთვლილია). ე. ი. ერთ-ერთი მათგანი ნაკლებია $\frac{1}{2}$-ზე და ეილერის $\Gamma(p)$ ინტეგრალი გამოისახება მეორის საშუალებით.

ლ Ე Ქ Ც Ი Ა 1 6

ორმაგი ინტეგრალის ცნება

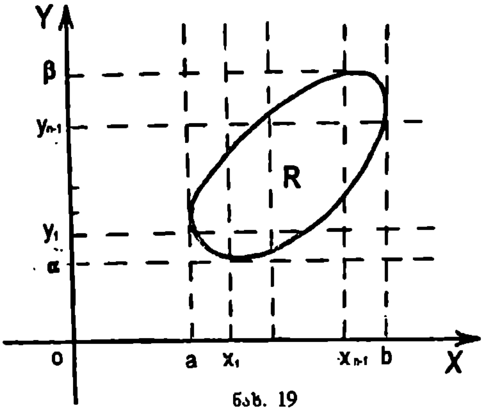
განვიხილოთ ორი ცვალებადი ფუნქცია $f(x, y)$, რომელიც განუწყვეტელია C მრუდით შემოფარგლული რაღაც R არეში. ვთქვათ, C მარტივი, მთლიანად გარკვეულ ოთხკუთხედში მოთავსებული მრუდია. აღვნიშნოთ x-ის უკიდურესი მნიშვნელობანი ამ ოთხკუთხედში სათანადოდ a და b-თი $(a < b)$, ხოლო y-ის უკიდურესი მნიშვნელობანი α და β-თი (იხ. ნახ. 19).

(a, b) და (α, β) შუალედები შესაბამისად დავყოთ m და n ნაწილ-ნაწილად შუალედებად.

ვთქვათ, დანაწილების წერტილებია: (x) დანაწილება: $a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < b$, (Y) დანაწილება:

$$\alpha < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < \beta.$$

ახლა, თუ დანაწილების ამ წერტილებიდან გავავლებთ X და Y ღერძების პარალელურ წრფეებს, მთელი R არე მოიფინება მცირე ოთხკუთხედებით, რომელნიც ორი სხვადასხვა სახისაა: 1) ოთხკუთხედები, რომელნიც მთლიანად R არეში არიან მოთავსებული, რომლებსაც ქვემოთ წესიერ ოთხკუთხედებს ვუწოდებთ და 2)



ნახ. 19

ოთხკუთხედები, რომლებიც მხოლოდ ნაწილობრივ შედიან R-ში მათ, იმ ნაწილებს, რომლებიც შედიან R-ში. არაწესიერი ოთხკუთხედები დავარქვათ.

ავღნიშნოთ ყველა ეს მცირე ოთხკუთხედები (როგორც წესიერი, ისე არაწესიერი) ω_{ik} სიმბოლოებით, თუ მისი მარცხნიდან შემომსაზღვრელი წრფე არის $x=x_i$ და ქვემოდან შემომსაზღვრელი წრფე არის $y=y_k$, ცხადია, თუ ω_{ik}-ს ფართობს აღვნიშნავთ $|\omega_{ik}|$-თი, გვექნება: $|\omega_{ik}| = (x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k)$, როცა ω_{ik} წესიერი ოთხკუთხედია, და $|\omega_{ik}| < (x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k)$, როცა ეს ოთხკუთხედი არაწესიერია.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ორმაგი ჯამი:

$$S = \sum_i \sum_k f(x_i y_k) \, |\omega_{ik}|,$$

სადაც ჯამი აღებულია ყველა, როგორც წესიერი, ისე არაწესიერი ოთხკუთხედებისათვის.

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ S ცვალებადს გააჩნია გარკვეული ზღვარი, როდესაც (a,b) და (α,β) შუალედების ელემენტარული ქვეშუალედების სიგრძეები ნულისაკენ მიისწრაფვის.

ამისათვის ω_{ik} ელემენტარულ ოთხკუთხედზე $f(x,y)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ შესაბამისად M_{ik} და m_{ik}-თი. შევადგინოთ შემდეგი ჯამები:

$$\Sigma = \sum_i \sum_k M_{ik} |\omega_{ik}|, \tag{1}$$

$$\sigma = \sum_1 \sum_k m_{ik} |\omega_{ik}|. \tag{2}$$

Σ-ს ეწოდება $f(x \cdot y)$ ფუნქციის ზედა ჯამი, σ-ს კი — ქვედა ჯამი R არის მოცემული დანაწილებისათვის. რადგან ყოველი (i,k) - სათვის $m_{ik} \leq f(x_{i,k} y_k) \leq M_{ik}$, ცხადია, გვექნება:

$$\sigma \leq S \leq \Sigma.$$

ვაჩვენოთ, რომ, როცა გამოსავალი დანაწილება იცვლება უფრო "მჭიდრო" დანაწილებით, ზედა ჯამი არ იზრდება, ხოლო ქვედა ჯამი არ კლებულობს. მართლაც, განვიხილოთ (a,b) შუალედის დანაწილების ის ახალი წერტილები, რომლებიც ხვდებიან (x_i, x_{i+1}) მონაკვეთში. ვთქვათ, ესაა

$$x_i < x_i^1 < x_i^2 < \ldots < x_i^{(p-1)} < x_{i+1}$$

წერტილები; ანალოგიურად, ვთქვათ (α, β) შუალედის დანაწილების ის ახალი წერტილები, რომლებიც ხვდებიან (y_k, y_{k+1}) შუალედში, არიან

$$y_k < y_k^1 < y_k^2 < \cdots < y_k^{(q-1)} < y_{k+1}.$$

მაშინ ω_{ik} არე დაიშლება $\omega_{ik}^i, \omega_{ik}^2, \ldots, \omega_{ik}^s$ (წესიერ ან არაწესიერ) ოთხკუთხედებად, სადაც $1 \leq s \leq pq$. უკანასკნელთა გაერთიანება იქნება მთელი ω_{ik} და ამიტომ, მთელი ω_{ik}-ს $|\omega_{ik}|$ ფართობი იქნება $|\omega_{ik}^1|, \ldots |\omega_{kk}^s|$ ფართობების ჯამი:

$$|\omega_{ik}| = \sum_{j=1}^{s} |\omega_{ik}^j|$$

ამავე დროს შევნიშნოთ, რომ, თუ M_{ik}^{j} და m_{ik}^{j} $(j=1,2,..,s)$ აღნიშნავენ $f(x,y)$ ფუნქციის $\max ima$ -სა და $\min ima$ -ს სათანადოდ ω_{ik}^{j} ნაწილზე, გვექნება: $M_{ik}^{j} \le M_{ik}, m_{ik}^{j} \ge m_{ik}$ $(j=1,2,...,s)$. ამიტომ ახალი დანაწილების Σ ან σ ჯამის ის ნაწილი, რომელიც წარმოიქმნება ω_{ik} -ს შემდგომი დანაწილებით, მოგვცემს:

$$\sum_{j=1}^{s} M_{ik}^{j}\left|\omega_{ik}^{j}\right| \le M_{ik}\sum_{j=1}^{s}\left|\omega_{ik}^{j}\right| = M_{ik}\left|\omega_{ik}\right|,$$

$$\sum_{j=1}^{s} m_{ik}^{j}\left|\omega_{ik}^{j}\right| \ge m_{ik}\sum_{j=1}^{s}\left|\omega_{ik}^{j}\right| = m_{ik}\left|\omega_{ik}\right|.$$

ახლა, თუ ამ უტოლობებს კიდევ შევაჯამებთ ყველა (i,k) წყვილისათვის, საბოლოდ მივიღებთ, რომ

$$\sum_{i}\sum_{k}\sum_{j=1}^{s} M_{ik}^{j}\left|\omega_{ik}^{j}\right| \le \sum_{i}\sum_{k} M_{ik}\left|\omega_{ik}\right|,$$

$$\sum_{i}\sum_{k}\sum_{j=1}^{s} m_{ik}^{j}\left|\omega_{ik}^{j}\right| \ge \sum_{i}\sum_{k} m_{ik}\left|\omega_{ik}\right|,$$

ე.ი. $\Sigma_1 \le \Sigma$ და $\sigma_1 \ge \sigma$, სადაც Σ_1 და σ_1 აღნიშნავენ სათანადოდ ზედა და ქვედა ჯამებს, ახალი, უფრო მჭიდრო დანაწილებისათვის.

მეორე მხრივ, ჩვენ ახლა ვაჩვენებთ, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის შესრულდება უტოლობა $\Sigma - \sigma < \varepsilon$, როცა R არის დანაწილება საკმაოდ მჭიდროა. მართლაც, რადგან $f(x,y)$ განუწყვეტელი ფუნქციაა R არეზე, ის თანაბრად განუწყვეტელია მასზე, ე.ი. $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა R არის ორი (x,y) და (x',y') წერტილი ერთმანეთისაგან აღმოჩნდება დაშორებული δ-ზე ნაკლები მანძილით,

$\left|f(x,y)-f(x',y')\right|<\dfrac{\varepsilon}{|R|}$ (სადაც $|R|$ აღნიშნავს R არის ფართობს).

აქედან, ცხადია, რომ როცა ზემოგანხილული დანაწილება საკმაოდ მჭიდროა (სახელდობრ, როცა $(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{k+1}-y_k)^2<\delta$ ყოველი (i,k) წყვილისათვის, სადაც $1\le i\le m-1, 1\le k\le n-1$), გვექნება: $M_{ik}-m_{ik}<\dfrac{\varepsilon}{|R|}$ და, ამიტომ

$$\Sigma-\sigma=\sum_i\sum_k(M_{ik}-m_{ik})\left|\omega_{ik}\right|<\frac{\varepsilon}{R}\sum_i\sum_k\left|\omega_{ik}\right|=\frac{\varepsilon}{|R|}\cdot|R|,$$

ე.ი. ასეთი დანაწილებებისათვის გვექნება $\Sigma-\sigma<\varepsilon$, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

აქედან ადვილად გამომდინარეობს, რომ როცა ვიხილავთ R არის დანაწილებათა ისეთ მიმდევრობას, რომელნიც შემდგომ დანაწილებაზე გადასვლისას სულ უფრო და უფრო მჭიდრო ხდება, და ყოველი (x_i,x_{i+1}) და (x_k,x_{k+1}) შუალედის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ, გვექნება: არსებობს $\lim\Sigma$ და $\lim\sigma$ ზღვრები და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim\Sigma=\lim\sigma. \tag{3}$$

მართლაც, ასეთი Σ-ჯამების მიმდევრობა კლებადია, σ-ჯამების მიმდევრობა ზრდადია, და ამიტომ ეს ჯამების მიმდევრობანი კრებადი არიან სათანადო ზღვრებისაკენ (შევნიშნოთ, რომ ზედა ჯამების მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ქვემოდან, ნებისმიერი σ ჯამით, ხოლო ქვედა ჯამების მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან, ნებისმიერი Σ ჯამით). ამასთან, რადგან ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის საკმაოდ მჭიდრო დანაწილებისათვის გვექნება $\Sigma-\sigma<\varepsilon$, ცხადია, $\lim\Sigma$ და $\lim\sigma$ ზღვრები ტოლნი არიან. აღვნიშნოთ ამ ზღვრების საერთო მნიშვნელობა J ასოთი.

მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ როცა განიხილება არის დანაწილებათა ისეთი მიმდევრობა, რომელიც თანდათან სულ უფ-

რო მჭიდრო და მჭიდრო ხდება ისე, რომ ყოველი ω_{ik} ნაწილის ზომა მიისწრაფვის ნულისაკენ, გვაქვს:

$$\lim \Sigma = \lim \sigma = J.$$

ახლა ვნახავთ, რომ ეს საერთო J ზღვარი დამოკიდებული არაა ზემოაღწერილი ტიპის დანაწილებათა მიმდევრობისაგან.

მართლაც, განვიხილოთ ასეთივე სახის დანაწილებათა ახალი მიმდევრობა, რომელიც მიიღება (a,b) და (α,β) ინტეგრალების სხვა დანაწილების წერტილებისაგან:

(z) (დანაწილება) $a<z_1<z_2<\ldots<z_{p-1}<b$,

(t) (დანაწილება) $\alpha<t_1<t_2<\ldots<t_{q-1}<\beta$.

ასეთი დანაწილებების მიმდევრობისათვის, უკვე დამტკიცებულის თანახმად, აგრეთვე გვექნება:

$$\lim \Sigma' = \lim \sigma' = J',$$

სადაც Σ' და σ' აღნიშნავენ შესაბამისად ზედა და ქვედა ჯამებს ახალი $(z)(t)$ დანაწილებებისათვის.

ვაჩვენოთ, რომ $J=J'$.

ამისათვის განვიხილოთ ძველი მიმდევრობის შესაბამისი რომელიმე $(x)(y)$ დანაწილება და ახალი მიმდევრობის შესაბამისი იმავე ნომრის $(z)(t)$ დანაწილება. შევადგინოთ ამ ორი დანაწილების $(x)(z)$ და $(y)(t)$ წერტილთა გაერთიანებით მიღებული ახალი

(xz) დანაწილება: $a<x_1<x_2<z_1<x_3<z_2<\ldots<b$

(yt) დანაწილება $\alpha<t_1<y_1<t_2<t_3<\ldots<\beta$

(აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ამოწერილია x_i და z_j წერტილები ზრდის მიხედვით, ისევე როგორც t_i და y_j წერტილები).

აღვნიშნოთ ამ ახალი დანაწილების შესაბამისი ზედა და ქვედა ჯამები შესაბამისად $\overline{\Sigma}$ და $\overline{\sigma}$ -ით. შევნიშნოთ, რომ (xz) (yt) დანაწილება მიიღება როგორც (x) (y), ისე (z) (t) დანაწილებიდან დანაწილების შემდგომი შემჭიდროებით (დანაწილების ახალი წერტილების დამატებით). ამიტომ უკვე დამტკიცებულის ძალით

$$\overline{\Sigma} \leq \Sigma, \overline{\Sigma} \leq \Sigma', \overline{\sigma} \geq \sigma, \overline{\sigma} \geq \sigma'.$$

ცხადია, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sigma' \leq \overline{\sigma} \leq \overline{\Sigma} \leq \Sigma \text{ და } \sigma \leq \overline{\sigma} \leq \overline{\Sigma} \leq \Sigma'$$

ე.ი. ვღებულობთ, რომ

$$\sigma' \leq \Sigma \text{ და } \sigma \leq \Sigma',$$

ყოველი (z) (t) და (x) (y) დანაწილებისათვის. ახლა გადავალთ რა ზღვარზე, როცა ორივე ეს დანაწილება უსასრულოდ მჭიდროვდება, უკვე დამტკიცებული ზღვრების არსებობის ფაქტიდან მივიღებთ:

$$J' \leq J \text{ და } J \leq J',$$

რაც მართლაც ამტკიცებს, რომ $J = J'$.

ამგვარად ჩვენ მიერ დადგენილია, რომ არსებობს Σ და σ ჯამების გარკვეული J ზღვარი, როცა დანაწილებანი თანდათან უსასრულოდ მჭიდრო ხდება. მაგრამ როგორც ვიცით, S ჯამი ყოველი დანაწილებისათვის აკმაყოფილებს $\sigma \leq S \leq \Sigma$ უტოლობას. აქედან, ცხადია, გამომდინარეობს, რომ არსებობს ასეთ დროს აგრეთვე $\lim S$ ზღვარიც და $\lim S = \lim\sigma = \lim\Sigma = J$.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ, როცა R არის დანაწილება თანდათან უსასრულოდ მჭიდრო ხდება (რაც იმას ნიშნავს რომ დანაწილების ყოველი $(x_i x_{i+1})$ მონაკვეთის $x_{i+1}-x_i$ სიგრძე, ისევე როგორც ყოველი (y_k, y_{k+1}) მონაკვეთის სიგრძე $y_{k+1}-y_k$, ნულისაკენ მიისწრფვის, S ჯამებს აქვთ სავსებით გარკვეული (დანაწილების წესისაგან დამოუკიდებელი J ზღვარი. J რიცხვს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის ორმაგი ინტეგრალი R არეზე და ის აღინიშნება $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$-ით. ამგვარად, გვაქვს:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \lim \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)|\omega_{ik}|.$$

შენიშვნა: განვიხილოთ R არის რაიმე დანაწილება და ყოველ ω_{ik} ნაწილ არეში ავირჩიოთ სავსებით ნებისმიერად (ξ_i,η_k) წერტილი. შევადგინოთ S ჯამებისაგან განსხვავებული ასეთი ახალი S' ჯამი:

$$S' = \sum_i \sum_k f(\xi_i, \eta_k)|\omega_{ik}|.$$

ვაჩვენოთ, რომ როცა დანაწილებანი თანდათან უსასრულოდ მჭიდროვდებიან, S' ჯამებს აგრეთვე გააჩნიათ ზღვარი, და ეს ზღვარი იგივე $J = \iint\limits_R f(x,y)dxdy$ რიცხვია.

მართლაც, რამდენადაც (ξ_i,η_k) ეკუთვნის ω_{ik} არეს გვექნება: $m_{ik} \le f(\xi_i, \eta_k) \le M_{ik}$, ყოველი (i,k) წყვილისათვის. ამიტომ რადგან $|\omega_{ik}|$ ფართობი დადებითი რიცხვია, გვექნება:

$$m_{ik}\,|\omega_{ik}| \le f(\xi_i, \eta_k)\,|\omega_{ik}| \le M_{ik}\,|\omega_{ik}|$$

და ასეთი უტოლობების შეჯამებით მივიღებთ:

$$\sigma \le S' \le \Sigma.$$

მაგრამ, როცა დანაწილებანი უსასრულოდ მჭიდროვდებიან, როგორც ვიცით, $\lim\sigma = \lim\Sigma = \iint\limits_R f(x,y)dxdy$, რის გამოც, უკანასკნელი უტოლობიდან დავასკვნით: არსებობს $\lim S'$ და

$$\lim S' = \iint\limits_R f(x,y)dxdy,$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა.

ლექცია 17

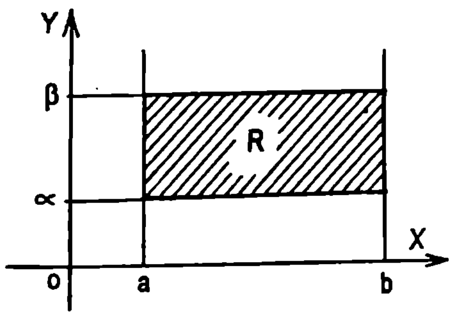
ორმაგი ინტეგრალის გამოთვლა

განვიხილოთ სწორკუთხოვანი R არის შემთხვევა, რომლის გვერდები პარალელურია საკოორდინატო ღერძებისა, ე.ი. ვიგულისხმოთ, რომ ორი ცვალებადის ფუნქცია $f(x,y)$ განუწყვეტელია R ოთხკუთხედზე (იხ. ნახ. 20).

განვიხილოთ ამ ოთხკუთხედის რაიმე, ზემოთ შემოტანილი სახის დანაწილება, რომელიც მიიღება (a,b) და (α,β) მონაკვეთების შემდეგი (x) დანაწილება: $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < b$, (Y) – დანაწილება: $\alpha < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < \beta$ დაყოფის წერტილებით.

წინასწარ დავადგინოთ შემდეგი ლემა: თუ $f(x)$ რაიმე განუწყვეტელი ფუნქციაა (a,b) შუალედზე, ამ შუალედის ყოველი

$$(X): a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < b$$



ნახ. 20

დანაწილებისათვის მოიძებნება ისეთი $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ წერტილები, რომ $x_{i-1} < \xi_i < x_i \quad (i = 1,2,\ldots m, x_0 = a, x_m = b)$ და

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_m)(b - x_{m-1}).$$

მართლაც, როგორც ვიცით,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{m-1}}^{b} f(x)dx,$$

მაგრამ $\int_{x_{i-1}}^{x} f(x)dx$ ინტეგრალისათვის საშუალო მნიშვნელობის თე-

ორემა გვაძლევს, რომ $\int_{x_{i-x1}}^{x_i} f(x)dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $(i = 1,2,..m)$,

სადაც ξ_i რაღაც გარკვეული წერტილია (x_{i-1},x_i) შუალედზე. ამიტომ გვექნება:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_m)(b - x_{m-1})$$

და ლემა დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ ორმაგი ინტეგრალის გამოთვლის საკითხს. განვიხილოთ R მართკუთხედის $(X)(Y)$ დანაწილება და შევადგინოთ ორმაგი ჯამი

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}(x_{i+1} - x_i)\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_k)(y_{k+1} - y_k)\,.$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია $f(x,y)$ როგორც მხოლოდ y ცვლადის ფუნქცია, რომელშიც $x\,(a \le x \le b)$ ფიქსირებულია. ეს y-ის ფუნქცია განუწყვეტელია (α,β) შუალედში და ამიტომ არსებობს

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dy$ ინტეგრალი, რომელიც, ცხადია, x-ის ფუნქცია იქნება, როცა $(a \le x \le b)$. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $F(x)$-ით:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dy.$$

განვიხილოთ (a,b) მონაკვეთის (x) დანაწილება: $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < b$ და ავიღოთ $F(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი $x_1, x_2, \ldots, x_m = b$ წერტილებში:

$$F(x_i) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x_i, y)dy (i = 1,2,\ldots,m)$$

ყოველი ამ ინტეგრალისათვის და (α,β) ინტეგრალის (y) დანაწილებისათვის $\alpha<y_1<y_2<\ldots<y_{n-1}<\beta$, შეიძლება გამოვიყენოთ ზემოთ დამტკიცებული ლემა: მაშინ ყოველი i-სათვის მოიძებნება ისეთი $\eta_{ik} (k = 1,2,\ldots,n)$ წერტილები, რომ

$$F(x_i) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x_i y)dy = \sum_{k=1}^{n} f(x_i, \eta_{ik})(y_{k+1} - y_k).$$

ცხადია, რომ $(x_i,\eta_{i,k})$ წერტილი ეკუთვნის ω_{ik} ოთხკუთხედს, რომელიც წარმოადგენს (x,y) წერტილების სიმრავლეს, სადაც $x_{i-1} \le x \le x_i$, $y_{k-1} \le y \le y_k$. ამიტომ შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი ორმაგი ჯამი:

$$S' = \sum_i \sum_k f(x_i, \eta_{ik})(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k),$$

რომელსაც, როგორც წინა ლექციის ბოლო შენიშვნა გვიჩვენებს, ზღვრად ინტეგრალი $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ აქვს, როცა $(X)(Y)$ დანაწილება თანდათან უსასრულოდ მჭიდრო ხდება. მაგრამ S' შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$S' = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\sum_{k=0}^{m-1} f(x_i, \eta_{ik})(y_{k+1} - y_k) = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

აქედან კი, როცა გადავალთ ზღვარზე, თუ ყოველი $x_{i+1} - x_i \to 0$ და $y_{i+1} - y_i \to 0$ მივიღებთ: $\lim S' = \iint\limits_R f(x \cdot y)dxdy$ და $\lim \sum\limits_{i=0}^{n-1} F(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b F(x)dx$. საბოლოოდ, ჩვენ დავადგინეთ, რომ

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy.$$

ამგვარად, გვაქვს:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_a^b dx = \int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \tag{4}$$

ეს ფორმულა გვაძლევს ორმაგი ინტეგრალის გამოთვლის ხერხს, როცა ინტეგრაცია ხდება სწორკუთხედზე, რომლის გვერდები ეპარალელება კოორდინატთა ღერძებს.

ცხადია, ამ ფორმულასთან ერთად სამართლიანია აგრეთვე ასეთი ფორმულაც:

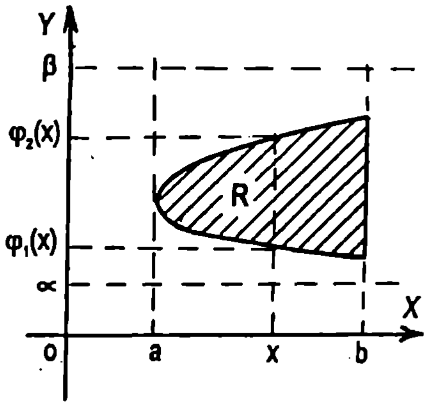
$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{5}$$

(4) და (5) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

ეს ფორმულა გამოსახავს ინტეგრალის პარამეტრით ინტეგრაციის ხერხს ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

ახლა გადავიდეთ ზოგადი სახის არეთა განხილვაზე.



ნახ. 21

ვთქვათ, R ისეთი არეა, რომლის C საზღვარს Y ღერძის ყოველი პარალელური წრფე (გარდა კიდურა ასეთი წრფეებისა), მხოლოდ ორ წერტილში გადაკვეთს (იხ. ნახ. 21), ე.ი. თუ $a<x<b$, x-ზე გავლებული Y ღერძის პარალელი ღერძის პარალელი გადაკვეთს R-ის საზღვარს $y=\varphi_1(x)$ და $y=\varphi_2(x)$ ორდინატებიან წერტილებში ($\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$. ამგვარად, ეს გადაკვეთის წერტილებია $(x,\varphi_1(x))$ და $(x,\varphi_2(x))$. ასე, როცა x იცვლება (a,b) მონაკვეთზე,

გაჩნდება ორი $y=\varphi_1(x)$ და $y=\varphi_2(x)$ მრუდი. პირველს ქვედა, ხოლო მეორეს ზედა მრუდი ვუწოდოთ. განვიხილოთ (a,b) მონაკვეთის $a<x_1<x_2<\ldots<x_{m-1}<b$ დანაწილება და ყოველი x -სათვის (a,b) -დან ავიღოთ შემდეგი (x-ზე დამოკიდებული) განსაზღვრული

$$\Phi(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

ინტეგრალი (აქ ყველა (x,y) წერტილი, როცა x ფიქსირებულია, წარმოადგენს $(x,\varphi_1(x))$ და $(x,\varphi_2(x))$ წერტილების შემაერთებელი ვერტიკალური მონაკვეთის წერტილს და ისინი, ცხადია, R არეს ეკუთვნიან). განვიხილოთ $\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი $x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},b$ წერტილებში, და (α,β) ინტერვალის (y) $\alpha<y_1<y_2<\ldots y_{n-1}<\beta$ დანაწილების იმ y_k წერტილებისათვის, რომლებიც მოხვდებიან $\varphi_1(x_i)$ და $\varphi_2(x_i)$-ს შორის, გამოვიყენოთ ამ ლექციაზე დამტკიცებული ლემა $\Phi(x_1)=\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i,y)dy$ ინტეგრალისათვის. მაშინ, ლემის თანახმად, მოიძებნება η_{ik} წერტილები, რომ

$$y_{k-1}\le\eta_{ik}\le y_k$$

და

$$\Phi(x_i)=\int\limits_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i,y)dy=\sum_k f(x_i,\eta_{ik})(y_k-y_{k-1})\,.$$

ამიტომ, თუ ჩვენ, როგორც წინა შემთხვევაში, განვიხილავთ ჯამს

$$S=\sum_i\sum_k f(x_i,\eta_{ik})(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1})\,,$$

სადაც i იცვლება $i=1,2,\ldots,m$ მნიშვნელობებზე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$S = \sum^{m} (x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

ზღვარზე გადასვლა უკანასკნელ ტოლობაში, როცა ყოველი $x_i - x_{i-1} \to 0$ და $y_k - y_{k-1} \to 0$ მოგვცემს:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

ამგვარად, თუ R არის საზღვარი ისეთია, რომ მას Y ღერძის ყოველი პარალელური (გარდა კიდურა პარალალელებისა) ჰკვეთს ორ წერტილში და $y = \varphi_1(x)$ არის R -ის ქვევიდან შემომსაზღვრელი წირი, ხოლო $y = \varphi_2(x)$ არის R-ის ზემოდან შემომსაზღვრელი წირი, მაშინ

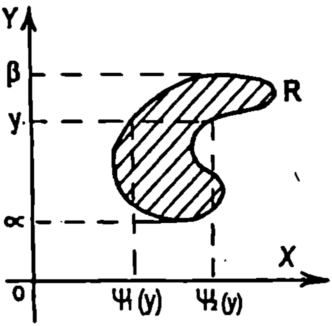
$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \tag{6}$$

ეს არის ორმაგი ინტეგრალის გამოთვლის წესი განსახილავი ტიპის არეების შემთხვევაში.

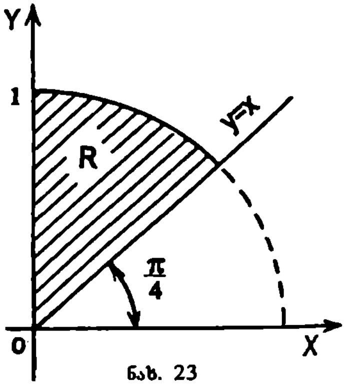
ვთქვათ, ახლა (იხ.ნახ. 22) R ისეთი არეა. რომლის საზღვარსაც x-თა ღერძის ყოველი პარალელური წრფე (გარდა ორი უკიდურესი ჰორიზონტალისა) მხოლოდ ორ წერტილში ჰკვეთს, რომელთა აბსცისებია $x = \psi_1(y)$ და $x = \psi_2(y)$ (იგულისხმება, რომ $\psi_1(y) < \psi_2(Y)$), მაშინ მიიღება არის სათანადოდ მარცხნიდან და მარჯვნიდან შემომსაზღვრელი $x = \psi_1(y)$ და $x = \psi_2(y)$ მრუდები. ასეთ შემთხვევაში, სავსებით ისევე, როგორც ზემოთ, შეიძლება დავადგინოთ, რომ

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{7}$$

განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, მაგალითად, შემთხვევა, როცა Y ღერძის პარალელური წრფეები R არის საზღვარს კვეთენ ორზე მეტ წერტილებში. თვალსაჩინოებისათვის შევჩერდეთ ნახ. 23-ზე გამოსახული R არის შემთხვევაზე. ასეთ შემთხვევაში,



ნახ. 22



ნახ. 23

ცხადია ერთი (ან რამდენიმე) დამატებითი γ "ჭრილების" გატარებით შესაძლებელია R არე დაიშალოს ისეთი ორი (ან რამდენიმე) A და B არის გაერთიანებად, რომელთა თითოეულისათვისაც შესრულებულია სასურველი თვისება. მაშინ $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ორი $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$ და $\iint\limits_B f(x,y)dxdy$ ინტეგრალის ჯამის მოძებნაზე, თითოეული მათგანისათვის კი შესაძლებელია ზემოთ მოყვანილი ხერხის გამოყენება.

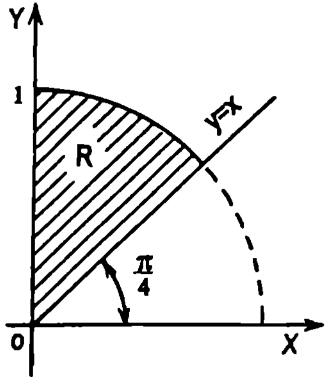
მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი: 1) ვთქვათ, R არე წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეში აღებული ცენტრიანი ერთეული რადიუსიანი წრის იმ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია Y ღერძის ზედა ნახევარსა და პირველი კვადრატის ბისექტრისას შორის (იხ. ნახ. 24), განვიხილოთ ამ არეზე $f(x,y)=x+y$ ფუნქცია და გამოვითვალოთ ინტეგრალი.

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

ცხადია, რომ ამ არის ქვემოდან შემომსაზღვრელი წირი ესაა $y=x$ ბისექტრისა, ხოლო ზემოდან შემომსაზღვრელი წირი — ეს ერთეული რადიუსიანი $x^2+y^2=1$ წრეხაზია, რომლის განტოლება არის

$$y=+\sqrt{1-x^2}.$$

ასე რომ, აქ



ნახ. 24

$$\varphi_1(x)=x,\quad \varphi_2(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

ამასთან, a=0 და $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, რადგან b არის $y=x$ ბისექტისისა და ზემოაღნიშნული წრეხაზის გადაკვეთა, საიდანაც ვღებულობთ:

$$x^2+x^2=1,$$

ე.ი.

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}=b.$$

ამგვარად,

$$\iint_R (x+y)dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}(x+y)dy.$$

მაგრამ

$$\int_x^{\sqrt{1-x^2}}(x+y)dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_x^{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}+\frac{1-x^2}{2}-x^2-\frac{x^2}{2}=$$

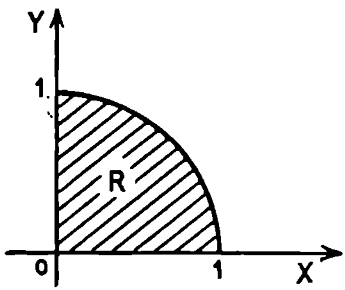
$$=x\sqrt{1-x^2}-2x^2+\frac{1}{2},$$

ამიტომ

$$\iint\limits_R (x+y)dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{2}-2x^2+x\sqrt{1-x^2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x}{2}-\frac{2x^3}{3}-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვითვალოთ $\iint\limits_R (x^2+y^2)dxdy$. სადაც R წარმოადგენს სათავეში აღებული ცენტრიანი, ერთეული რადიუსიანი წრის მეოთხედს პირველი კვადრატიდან (იხ. ნახ. 25).



ნახ. 25

აქ a=0, b=1. ქვემო მრუდია y=0, ზემო მრუდია, $y=+\sqrt{1-x^2}$ ამიტომ

$$\iint\limits_R (x^2+y^2)dxdy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dy.$$

გამოვითვალოთ ჯერ

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dy=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}=x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

ამიტომ

$$\iint\limits_R\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^1\left[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $x=\sin t$; მაშინ $dx=\cos t\cdot dt$ და როცა t იცვლება $\left(0,\pi/2\right)$ მონაკვეთზე, x იცვლება 0-დან 1-მდე, ამგვარად:

$$\iint\limits_R\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}\left[\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-\sin^2 t}\right)^3\right]\cos t dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left[\sin^2 \mathrm{t}\cdot\cos \mathrm{t}+\frac{1}{3}\cos 3\mathrm{t}^3\right]\cos \mathrm{t}d\mathrm{t}$$

და, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, გვექნება:

$$\iint\limits_R\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{11}{24}-\frac{1}{24}\cos 4t+\frac{2}{3}\cos 2t\right)dt=\frac{11\pi}{48}.$$

მკითხველს აქ ვთავაზობთ დამოუკიდებლად დაამტკიცოს, რომ ნებისმიერი R არისათვის და ყოველი A და B რიცხვისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულა:

$$\iint\limits_R\left[\mathrm{A}f(x,y)+\mathrm{B}\varphi(x,y)\right]dxdy=\mathrm{A}\iint\limits_R f(x,y)dxdy+\mathrm{B}\iint\limits_R\varphi(x,y)dxdy.$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა ორმაგი ინტეგრალისათვის

ვთქვათ, R ისეთი ფორმის არეა, რომლისათვისაც სამა თლიანია ორმაგი ინტეგრალის გამოთვლის, მაგალითად, (6) ან (ფორმულა. ასეთ შემთხვევაში, გვექნება:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

გამოვიყენოთ ახლა საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფო მულა შიგა ინტეგრალისათვის (სადაც ინტეგრაცია ხდება y-ით).

მაშინ გვექნება

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = f(x,\eta_x)[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)],$$

სადაც η_x — რაღაც მნიშვნელობაა შუალედიდან: $\varphi_1(x)\le\eta_x \le\varphi_2(x)$ (შევნიშნოთ, რომ η_x დამოკიდებულია x-ზე). რადგ $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, ცხადია, $\varphi_2(x)-\varphi_1(x)$ ყველგან ინარჩუნებს ნიშა და ამიტომ ინტეგრალისათვის $\int_a^b f(x,\eta_x)[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$, სად $f(x,\eta_x)$ უკვე x-ის ფუნქციაა, ისევ საშუალო მნიშვნელობ ფორმულა გვაძლევს,[12] რომ

$$\int_a^b f(x,\eta_x)[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx = f(\xi,\eta_\xi')\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx.$$

ეს უკანასკნელი ინტეგრალი $\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$ ისევ (5) ფო მულის თანახმად, $\iint_R 1\cdot dxdy$ ინტეგრალია, რომელიც R-ის

ფართობს წარმოადგენს. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ, რომ მოიძებნება R არის ისეთი $(\xi'\eta')$ წერტილი, რომ

$$\iint_R f(x,y)dxdy = f(\xi',\eta')|R|.$$

ეს არის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა ორმაგი ინტეგრალისათვის.

ლექცია 18

გრინის ფორმულა

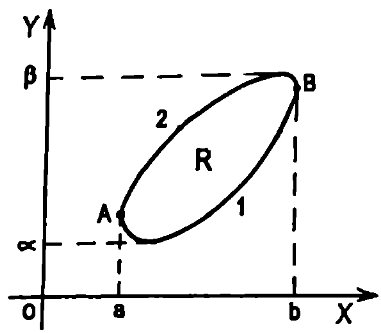
ვთქვათ, გვაქვს ორი ცვალებადის ორი ფუნქცია: $P(s,y)$ და $Q(x,y)$.

ვიგულისხმოთ, რომ ისინი განუწყვეტელნი არიან გარკვეულ D არეში და აქვთ განუწყვეტელი კერძო წარმოებულები x-ის და y-ის მიმართ.

ავიღოთ D არეში რაიმე შეკრული რეგულარული C მრუდი (ე.ი. ისეთი, რომლის ყოველ წერტილზე არსებობს მხები), რომლის საზღვარსაც, როგორც X, ისე Y ღერძის ყოველი პარალელური წრფე (გარდა შესაძლებელი კიდურა წრფეებისა) ორ წერტილზე გადაკვეთს. აღვნიშნოთ R-ით (იხ. ნახ. 26) C მრუდის მიერ შემოსაზღვრული არე და განვიხილოთ ორმაგი ინტეგრალი

$$\iint_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

R არე ისეთი ფორმისაა, რომ ამ ინტეგრალის გა-



ნახ. 26

მოთვლა შესაძლებელია ვაწარმოოთ წინა ლექციაზე გამოყვანილი (6) ან (7) ფორმულით. მაშინ, თუ a და b კიდურა აბსცისებია R-ში,ხოლო C საზღვრის ქვემო და ზემო მრუდების განტოლებებია $y=\varphi_1(x)$ და $y=\varphi_2(x)$, გვექნება,

$$\iint\limits_R \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int_a^b [P(x\cdot\varphi_2(x)-P(x\cdot\varphi_1(x))dx=$$

$$=-\int_a^b P(x\cdot\varphi_2(x)]dx+\int_a^b P(x\cdot\varphi_1(x))dx.$$

მაგრამ $\int_a^b (x,\varphi_1(x))dx$ ინტეგრალი, რამდენადაც $y=\varphi_1(x)$ წარმოადგენს AIB მრუდის განტოლებას, არის $P(x,y)$ ფუნქციის მრუდხაზოვანი ინტეგრალი $\int\limits_{AIB} P(x,y)dx.$ სავსებით ასევე,

$\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx$ არის მრუდხაზოვანი ინტეგრალი $\int\limits_{B2A} P(x,y)dx$.

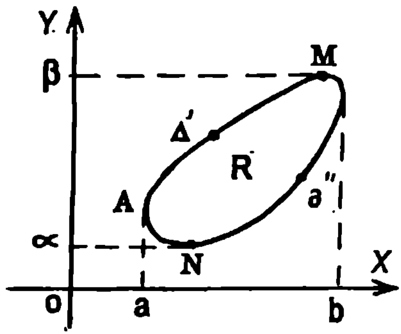
ამიტომ

$$\iint\limits_R \frac{\partial P}{\partial y}\partial x\partial y=-\left\{\int\limits_{A1B} P(x,y)\partial x+\int\limits_{B2A} P(x,y)\partial x\right\}=-\int\limits_C P(x,y)\partial x,$$

სადაც C მრუდი აღიწერება მასზე საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას (ამ მიმართულებას შეკრული წირის შემოვლის დადებითი მიმართულება ჰქვია).

ახლა განვიხილოთ პირველი ინტეგრალი $\iint\limits_R \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$. R არის ფორმა საშუალებას გვაძლევს მისი გამოთვლისას გამოვიყენოთ (7) ფორმულა (ნახ.27). თუ $x=\psi_1(y)$ და $x=\psi_2(y)$ წარმოადგენს R

არის "მარცხენა" და "მარჯვენა" საზღვრების განტოლებებს, ხოლო α და β კიდურა ორდინატებია R-ში გვექნება:



ნახ. 27

$$\iint\limits_R \frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial x\partial y = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\partial y \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[Q(x,y)\right]_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[Q(\psi_2(y)y,) - Q(\psi_1(y),)\right]dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\psi_2(y), y)dy + \int\limits_{\beta}^{\alpha} Q(\psi 1(y), y)dy.$$

მაგრამ რადგან $x = \psi_2(y)$ არის $N2'M$ მრუდის განტოლება, ამიტომ $\int_{\alpha}^{\beta} Q(\psi_2(y), y)dy$ წარმოადგენს მრუდხაზოვან ინტეგრალს

$\int\limits_{N2'M} Q(x,y)dy$. სავსებით ასევე $\int_\alpha^\beta Q(\psi_1(y),y)dy = \int\limits_{M\tau N} Q(x,y)dy.$

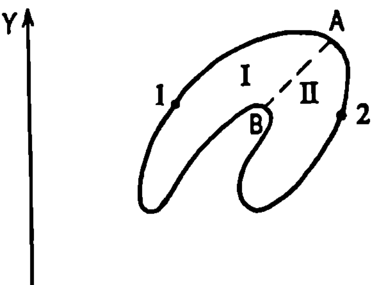
ამიტომ გვექნება:

$$\iint\limits_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int\limits_c Q(x,y)dy,$$

სადაც C კვლავ ალიწერება მასზე მოძრაობის დადებითი მიმართულებით. აქედან, თუ ჩვენ გავაერთიანებთ ორივე ფორმულას, გვექნება:

$$\iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

(შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი მრუდწირული ინტეგრალი, დაწერილი ფრჩხილების გარეშე, სინამდვილეში $\int\limits_C Pdx + \int\limits_C Qdy =$ $\int\limits_C (Pdx + Qdy)$-ის ალნიშვნაა). ამ ფორმულას გრინის ფორმულა ეწოდება.



ნახ. 28

ახლა ჩვენ ვნახავთ, რომ ამ ფორმულის სახე სამართლიანი რჩება ზოგადი ფორმის ისეთი R არეებისთვისაც, რომელნიც არ აკმაყოფილებენ თავიდან მიღებულ პირობებს. ვთქვათ, მართლაც, საქმე გვაქვს ნახ. 28-ზე ნაჩვენები სახის არესთან, რომელსაც არა აქვს ის თვი-

სება, რომ X დაY ღერძის პარალელები მის საზღვარს მხოლოდ ორ წერტილში კვეთენ, მაგრამ დამატებითი ჭრილების გატარებით იშლებიან, რამდენიმე ასეთი არის გაერთიანებად (ნახ.28-ზე ნაჩვენებია შემთხვევა, როცა საკმარისია 1 ასეთი AB ჭრილის გატარება, რომელიც R არეს ყოფს ზემოგანხილული ტიპის ორი არის ერთობლიობად. ამ უბრალო მაგალითზე შეიძლება დავინახოთ, რომ ეს მსჯელობა საკმარისად ზოგადი ხასიათისაა).

რამდენადაც I და II არეებისათვის ჩვენი გამოსავალი პირობები შესრულებულია, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\iint\limits_{I}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=+\int\limits_{A1BA}Pdx+Qdy=+\int\limits_{A1B}Pdx+Qdy+\int\limits_{BA}Pdx+Qdy,$$

და

$$\iint\limits_{II}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=+\int\limits_{B2AB}Pdx+Qdy=+\int\limits_{B2A}Pdx+Qdy+\int\limits_{AB}Pdx+Qdy.$$

მაგრამ რადგან

$$\iint\limits_{I}+\iint\limits_{II}{}^{B2AB}=\iint\limits_{R} \qquad \text{და} \qquad \int\limits_{AB}Pdx+Qdy=-\int\limits_{BA}Pax+Qdy,$$

უკანასკნელი ტოლობების შეკრება მოგვცემს:

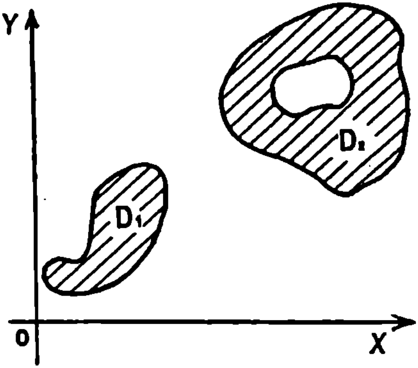
$$\iint\limits_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=+\int\limits_{A1B}Pdx+Qdy+\int\limits_{B2A}Pdx+Qdy=+\int\limits_{c}Pdx+Qdy.$$

ე.ი. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ გრინის ფორმულა სამართლიანია ასეთი არეებისათვისაც.

მოვიყვანოთ ახლა გრინის ფორმულის ორიოდე გამოყენება. განვიხილოთ თავიდან მიღებულ აღნიშვნებში შემოტანილი D არე

და დავსვათ საკითხი იმის შესახებ, თუ როდის იქნება $\int\limits_C Pdx+Qdy$ მრუდხაზოვანი ინტეგრალი ნულის ტოლი ყოველ შეკრულ C კონტურზე D არის შიგნით.[13]

ვიგულისხმოთ, რომ D არეს გააჩნია შემდეგი თვისება: როგორიც უნდა იყოს D-ში აღებული შეკრული C მრუდი, C-ს შიგა არე მთლიანადაა მოთავსებული D-ში. ასეთ არეებს ჩვეულებრივ მარტივადბმული არეები ეწოდებათ. ასე, მაგალითად, ნახ. 29-ზე ნაჩვენები D_1 მარტივადბმული არეა, D_2 ასეთი არ არის.



ნახ. 29

დავამტკიცოთ, რომ როცა D მარტივადბმული არეა და $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ისეთი განუწყვეტელი ფუნქციებია D-ში, რომელთა უკერძო წარმოებულები x-ით და y-ით აგრეთვე განუწყვეტელნი არიან, იმისათვის, რომ $\int\limits_C Pdx+Qdy$ მრუდხაზოვანი ინტეგრალი ნულის ტოლი იყოს ყოველი შეკრული C მრუდისათვის D-დან, აუცილებელია და საკმარისი ტოლობა $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ შესრულებული იყოს D-ს ყველა წერტილში.

ამ პირობის საკმარისობა ნათელია, რადგან, თუ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ ყველგან D-ში, როცა D-ში ავიღებთ შეკრულ C მრუდს, მის მიერ შემოსაზღვრული R არისათვის (რომელიც პირობის თანახმად მთლიანად ეკუთვნის D-ს), შეგვიძლია დავწეროთ გრინის ფორმულა:

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial X}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

მაგრამ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ ყველგან R-ზე, და ამიტომ, მართლაც გვექნება

$$\int_C Pdx+Qdy=0.$$

ახლა დავამტკიცოთ ჩვენი პირობის აუცილებლობა. ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ D არის ერთ რომელიმე (x_0,y_0) წერტილში $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)\neq\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$; ვთქვათ, ამ წერტილში $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=$ $=A>0$ (ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა, როცა $A<0$). ვინაიდან $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ სხვაობა განუწყვეტელია, (x_0,y_0) წერტილის ყველა მახლობელ წერტილებში D-დან გვექნება: $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\geq\frac{A}{2}$. შემოვწეროთ (x_0,y_0) წერტილის გარშემო იმდენად მცირე $\varepsilon>0$-რადიუსიანი γ წრეხაზი, რომლის შიგნით და თვით წრეხაზზე, ყველგან შესრულდეს აღნიშნული უტოლობა. მაშინ, ისევ გრინის ფორმულის თანახმად,

$$\int_\gamma Pdx+Qdx=\iint_K\left(\frac{\partial Q}{\partial X}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

სადაც K ამ γ წრეწირით შემოსაზღვრული წრეა. მაგრამ რადგან K-ზე ყველგან $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\geq\dfrac{A}{2}$, გვექნება:

$$\iint_K\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy\geq\frac{A}{2}\iint_K dxdy=\frac{A\pi\varepsilon^2}{2}$$

და წინა ტოლობა მოგვცემს, რომ

$$\int_\gamma Pdx+Qdx\succ 0.$$

ამგვარად, ინტეგრალი ჩაკეტილ γ მრუდზე არაა ნული. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

გრინის ფორმულის მეორე გამოყენება ეხება სიბრტყეში აღებული არეების ფართობების გამოთვლის საკითხს.

განვიხილოთ რაიმე რეგულარული შეკრული C მრუდი და აღვნიშნოთ D-თი C მრუდით შემოსაზღვრული ბრტყელი არე. ავიღოთ ამ არეში ორი $P(x,y)=-\dfrac{1}{2}y$ და $Q(x,y)=\dfrac{1}{2}x$ ფუნქცია. ცხადია, ისინი განუწყვეტელნი არიან D-ზე და მათი კერძო წარმოებულები $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$, (როგორც მუდმივები) აგრეთვე განუწყვეტელნი არიან D-ზე. მაშასადამე, შეგვიძლია გამოვიყენოთ გრინის ფორმულა ფუნქციათა ამ წყვილისათვის. ეს მოგვცემს:

$$\iint_D\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)dxdy=\int-\frac{1}{2}ydx+\frac{1}{2}xdy,$$

მაგრამ

$$\iint_D\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)dxdy=\iint_D dxdy=|D|$$

(D-ს ფართობი). ამგვარად, ბრტყელი D არის ფართობი $|D|$ შეიძლება გამოვითვალოთ ფორმულით

$$|D|=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx,$$

სადაც C არის D-ს საზღვარი, რომელიც აღიწერება დადებითი მიმართულებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი : გამოვითვალოთ a და b ნახევარღერძებიანი ელიფსის ფართობი. ასეთი ელიფსის განტოლება შეიძლება დაიწეროს სახით:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t, \end{cases}$$

სადაც $0\le t\le 2\pi$. ამიტომ, ახლახან გამოყვანილი ფორმულა გვაძლევს

$$|D|=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\bigl(a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t(-a\sin t)\bigr)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\pi ab.$$

ლ ე ქ ც ი ა 19

ცვალებადის გარდაქმნა ორმაგ ინტეგრალში

წინასწარ მოსამზადებელი მასალა

ვთქვათ, ორი ცვალებადის ორი ფუნქცია $f(u,v)$ და $\varphi(u,v)$ განსაზღვრული და განუწყვეტელია რაიმე D არეზე (u,v) სიბრტყეში. აღვნიშნოთ ამ ფუნქციათა მნიშვნელობები სათანადოდ x-ით და y-ით, ამგვარად,

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = \varphi(u, v) \end{cases} \tag{1}$$

როცა (u,v) წერტილი იცვლება D არეზე (x,y) წყვილი გამოთვლილი ფორმულებიდან მოგვცემს ახალ წერტილს, რომელიც იცვლება XY სიბრტყის რაღაც D_1 არეზე. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (1) სისტემა გვაძლევს UV სიბრტყის D არის გარდაქმნას XY სიბრტყის არეზე.

მომავალში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ (1) სისტემით მოცემული გარდაქმნა რეგულარულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $f(u,v)$ და $\varphi(u,v)$ ფუნქციებს აქვთ განუწყვეტელი კერძო წარმოებულები u და v-ს მიმართ, ყველგან D არეზე.

2) (1) ფორმულებით მოცემული გარდაქმნა (D-სი D_1-ზე) ურთიერთცალსახაა, ე.ი. D არის სხვადასხვა (u,v) წერტილებს სხვადასხვა (x,y) წერტილები შეესაბამება D_1-ში და D_1-ის ყოველი (x,y) წერტილი (ერთადერთი) (u,v)-ს შესაბამისი აღმოჩნდება.

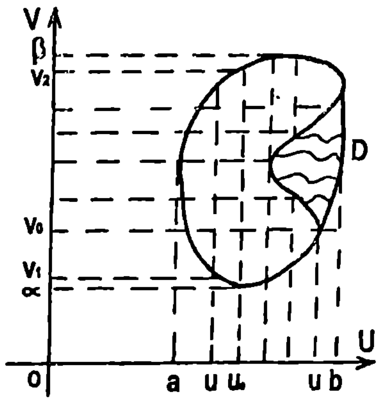
3) გარდაქმნის იაკობიანი

$$Y = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}, & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

განსხვავებულია ნულისაგან ყველგან D-ზე.

განვიხილოთ ასეთი (ე.ი. რეგულარული) გარდაქმნა D არისა D_1-ზე და დავფაროთ D არე საკოორდინატო ღერძების პარალელური წრფე მონაკვეთებით. ასეთი მონაკვეთების სისტემას საკოორდინატო ბადე ეწოდება D-ზე (იხ.ნახ.30). ვთქვათ, $u = u_0$ (სადაც u_0 გარკვეული რიცხვია, რომელიც მოთავსებულია D არის შესაბამისი წერტილების უკიდურესი აბსცისების a-სა და b-ს შორის) V ღერძის პარალელური იმ წრფის განტოლებაა, რომელიც D-ს საკოორდინატო ბადის ერთ-ერთ ვერტიკალურ მონაკვეთს

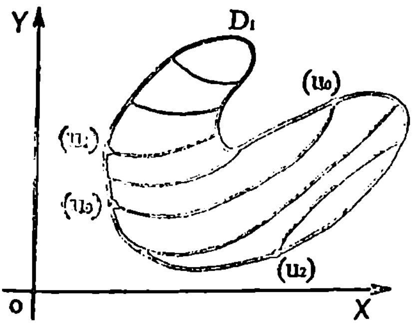
გვაძლევს. ვთქვათ, მთელი ამ მონაკვეთის აღსაწერად v საჭიროა ვცვალოთ v_1-დან v_2-მდე (იხ. ნახ. 30), მაშინ ბადის ამ ვერტიკალური მონაკვეთის წერტილებს ექნებათ (u_0, v) სახე, სადაც $v_1 < v < v_2$. ასეთი წერტილების შეტანით (t) განტოლებაში მივიღებთ ამ მონაკვეთის შესაბამისი წერტილების გარდაქმნით მიღებულ მრუდს, რომელიც აღიწერება



ნახ. 30

$$\begin{cases} x = f(u_0, v) \\ y = \varphi(u_0, v) \end{cases} \qquad (v_1 < v < v_2)$$

განტოლებებით და რომელიც, ცხადია, (x,y) სიბრტყის D_1 არეში იქნება გატარებული (იხ. ნახ.31). უკანასკნელ მრუდს, ბუნებრივია, u_0 მრუდი ვუწოდოთ D_1-ში. ცხადია, როცა u_0 სხვადასხვანაირად იქნება შერჩეული (a,b) მონაკვეთიდან, შესაბამისი u_0 მრუდები დაფარავენ D_1 არეს, ე.ი. გვექნება უკანასკნელ ნახაზზე წარმოდგენილის მსგავსი სურათი.

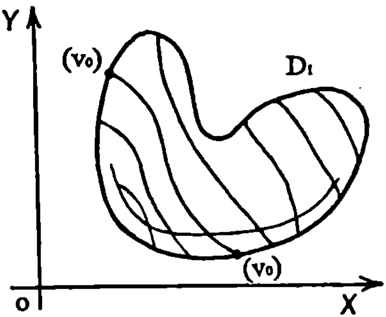


ნახ. 31

ანალოგიურად განისაზღვრება ე.წ. v_0 მრუდები D_1-ში. ამისათვის უნდა ავიღოთ რაიმე ფიქსირებული v_0 D არის წერტილთა კი-

დურა α და β ორდინატებს შორის და განვიხილოთ v_0-ის შესაბამისი ჰორიზონტალური კვეთის (u, v_0) წერტილები, სადაც u იცვლება $u_1 < u < u_2$ (იხ. ნახ. 30) ფარგლებში. სათანადო (x,y) წერტილი იმოძრავებს D_1-ში

$$\begin{cases} x = f(u_0, v_0) \\ y = \varphi(u_0, v_0) \end{cases} \qquad (u_1, < u < u_2)$$



ნახ. 32

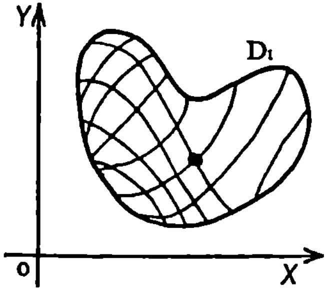
განტოლებათა თანახმად, ეს უკანასკნელნი წარმოადგენენ გარკვეულ მრუდს D_1-ზე, რომელსაც, ბუნებრივია, (v_0) მრუდი ვუწოდოთ D_1-ზე (იხ. ნახ.32).

v_0-ის ცვალებადობა (α, β) ინტაგრალზე მოგვცემს ახალი (v_0) მრუდების ბადეს D_1-ში, რომელიც აგრეთვე ფარავს D_1 არეს მთლიანად.

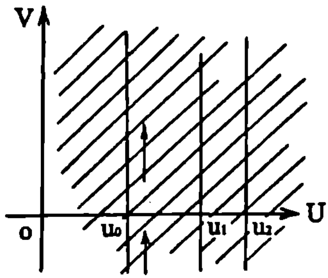
ამგვარად, როდესაც მოცემულია D-ს რეგულარული გარდაქმნა D_1-ზე (1) სახის ფუნქციათა წყვილით, D სიმრავლის საკოორდინატო ბადეს (რომელიც ორმაგად ფარავს D-ს, ვინაიდან ყოველ წერტილზე D-დან გადის წყვილი ასეთი მონაკვეთებისა — ჰორიზონტალური და ვერტიკალური), (t) გარდაქმნით შეესაბამება D_1-ში მრუდწირული (u_0) და (v_0) მრუდების ბადე, რომლებიც ორმაგად ფარავენ D_1-ს (ე.ი. ყოველ წერტილზე D_1-დან გადის ერთი და მხოლოდ ერთი (u_0) და, ერთი და მხოლოდ ერთი (v_0) მრუდი (იხ. ნახ.33).

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ამ სურათის ერთი ასეთი კონკრეტული მაგალითი: ავიღოთ (u,v) სიბრტყის მარჯვენა

ნახევარსიბრტყე, ე.ი. (u,v) წერტილები, სადაც $u>0$ და მივიღოთ: $f(u,v)=au\cos v$, $\varphi(u,v)=bu\sin v$, სადაც a და b რაიმე დადებითი რიცხვებია (იხ. სურათი 34). გავატაროთ რაიმე $u=u_0$ $(u_0>0)$



ნახ. 33



ნახ. 34

წრფე (u,v) სიბრტყეზე. ეს უსასრულო ვერტიკალია და ვნახოთ, სად გარდაიქმნება ამ ვერტიკალის წერტილები.

გარდაქმნის ფორმულებს ჩვენს შემთხვევაში აქვს სახე:

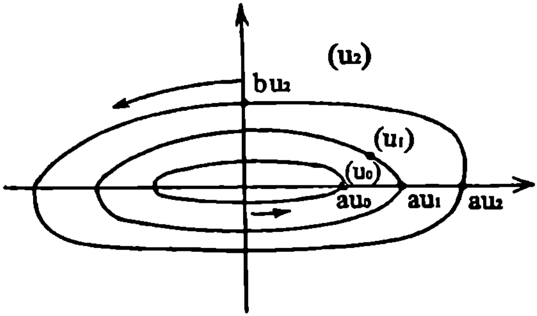
$$\left.\begin{aligned} x &= au\cos v \\ y &= bu\sin v \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

ახლა ამ ფორმულებში უნდა შევიტანოთ $u=u_0=const$ და მოვნახოთ ასეთი (u_0,v) წერტილების შესაბამისი (x,y) წერტილები, როცა v იცვლება $-\infty<v<+\infty$ საზღვრებში. (1') განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$\left(\frac{x}{au_0}\right)^2+\left(\frac{y}{bu_0}\right)^2=1.$$

ეს, ცხადია, au_0 და bu_0 ნახევარღერძებიანი ელიფსის განტოლებაა, რომლის ცენტრი მოთავსებულია (0,0) სათავეში და რომლის სიმეტრიის ღერძები x და y ღერძებს ემთხვევა. ამასთან,

ადვილი მისახვედრია, რომ როცა $(u_0 v)$ წერტილი აღწერს ზემოაღნიშნულ ვერტიკალს, გარდაქმნილი (x,y) წერტილი შემოწერს შესაბამის ელიფსს უსასრულოდ ბევრჯერ (იხ. ნახ. 35, სადაც გამოსახულია სხვადასხვა ასეთი ელიფსები).



ნახ. 35

ახლა ვნახოთ, სად გარდაიქმნება $v = v_0$ (სადაც v_0 ფიქსირებული რიცხვია) ჰორიზონტალის მარჯვენა ნახევარწრფე u,v სიბრტყიდან.

აქ შესაბამისი წერტილების კოორდინატები მოიცემა ფორმულებით

$$\left.\begin{aligned} x &= au\cos v_0 \\ y &= bu\sin v_0 \end{aligned}\right\}, \qquad (2')$$

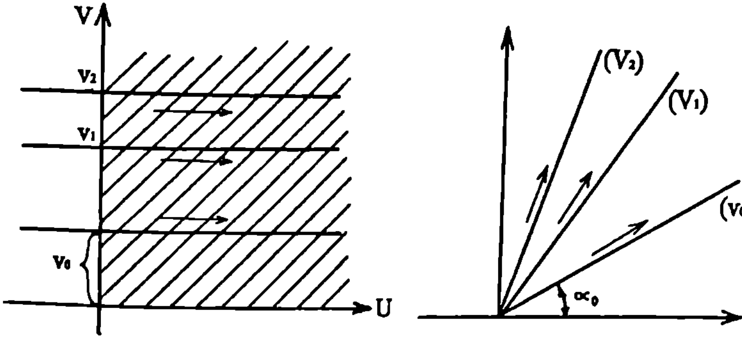
საიდანაც შეფარდების აღებით მივიღებთ:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} tg v_0,$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნული ჰორიზონტალი გარდაიქმნება სხივში, რომელიც ადგენს ისეთ α კუთხეს x ღერძის დადებით მიმართულებასთან, რომ

$$tg\alpha_0 = \frac{b}{a} tg v_0.$$

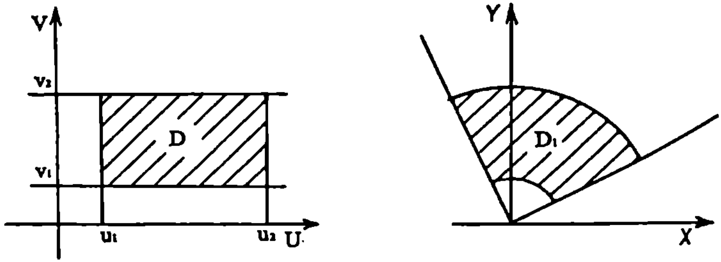
განხილული გარდაქმნა, ცხადია, არ არის მთელს მარჯვენა ნახევარსიბრტყეზე რეგულარული (მართლაც, აქ დარღვეულია რეგულარობის განმარტების ურთიერთცალსახობის პირობა: მაგა-



ნახ. 36

ლითად, მარჯვენა ნახევარსიბრტყის ორი სხვადასხვა (u,v) და $(u,v+2\pi)$ წერტილი ერთსა და იმავე (x,y) წერტილში გადადის); მაგრამ თუ ავიღებთ "საკმარისად მცირე" ზომის არეებს მარჯვენა (u,v) ნახევარსიბრტყიდან, ისინი ურთიერთცალსახად (მეტიც — რეგულარულად) გარდაიქმნებიან სათანადო არეებზე. გამოთქმა "საკმარისად მცირე" — აქ უნდა გავიგოთ როგორც ისეთი არე, რომელშიაც არ შედის ორი ერთსა და იმავე ვერტიკალზე მოთავსებული ისეთი წყვილი წერტილებისა, რომელთა შორის მანძილი $\geq 2\pi$ (შეიძლება ვთქვათ, რომ ასეთ არეში ყველგან ვერტიკალური მონაკვეთები 2π-ზე ნაკლები სიგრძისა უნდა იყოს. მაგალითად, D ოთხკუთხედი $D=\{u_1<u<u_2,\quad v_1<v<v_2\}$, თუ $v_2-v_1<2\pi$, რეგულარულად აისახება 37-ე ნახაზზე ნაჩვენებ მრუდწირულ ოთხკუთხედში).

ცხადია, ასეთი ზომების მართკუთხედი ურთიერთცალსახად აისახება D_1-ზე და, ამასთან, ასახვის იაკობიანი



ნახ. 37

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos v, & -au\sin v\\ a\sin v, & bu\cos v\end{vmatrix}=abu\cos^2 v+abu\sin^2 v=abu>0,$$

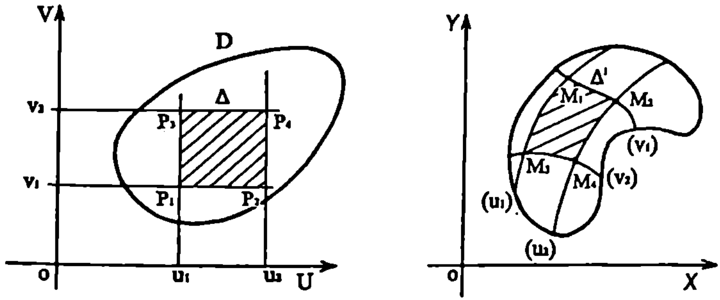
რამდენადაც $a>0$, $b>0$ და $u>0$ ყველგან, მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში. ამგვარად, ასეთი ზომების ოთხკუთხედების გარდაქმნა (1) ფორმულებით მართლაც რეგულარულია.

დავუბრუნდეთ ზოგადი სახის რეგულარულ გარდაქმნას (1), (u,v) სიბრტყის D არედან (x,y) სიბრტყის D_1 არეზე და ავიღოთ D-ში მცირე ზომის რაიმე Δ სწორკუთხედი, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი მხრივ $u=u_1$ და $u=u_2$ $(u_1<u_2)$ ვერტიკალებით, ქვემოდან და ზემოდან კი $v=v_1$ და $v=v_2$ $(v_1<v_2)$ ჰორიზონტალებით. ცხადია, Δ-ს გარდაქმნა მოგვცემს რაღაც მრუდწირულ "ოთხკუთხედს" Δ'-ს D_1-ში, რომელიც შემოსაზღვრული იქნება ორი "მხრივ" (u_1) და (u_2) მრუდებით, სხვა ორი "მხრიდან" კი (v_1) და (v_2) მრუდებით (იხ. ნახ. 38).

ცხადია, რომ Δ ოთხკუთხედის წვეროები $P_1(u_1,v_1)$, $P_2(u_2,v_1)$, $P_3(u_1,v_2)$, და $P_4(u_2,v_2)$ წერტილებია. მათი შესაბამისი წერტილები Δ_1-ში ეს

$$M_1(f(u_1,v_1),\varphi(u_1,v_1)),\qquad M_2(f(u_2,v_1),\varphi(u_2,v_1)),$$
$$M_3(f(u_1,v_2),\varphi(u_1,v_2)),\qquad M_4(f(u_2,v_2),\varphi(u_2,v_2)),$$

წერტილებია, რომლებსაც ვუწოდოთ მრუდწირული Δ′ "ოთხკუთხედის" წვეროები.



ნახ. 38

მივიღებთ რა უკანასკნელ "ოთხკუთხედს" $M_1M_2M_3M_4$ წვეროებიან პარალელოგრამად, რომელიც აგებულია M_1M_2 და M_1M_3 მონაკვეთებზე, რაც სინამდვილესთან კარგი მიახლოებაა, როცა Δ (და, მაშ, Δ′) მცირე ზომისაა, ანალიზური გეომეტრიის ცნობილი ფორმულის თანახმად,[*] შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\left|\Delta'\right| = \left|[f(u_1+\Delta u_1, v_1) - f(u_1, v_1)]\ [\varphi(u_1, v_1+\Delta v) - \varphi(u_1, v_1] - \right.$$

$$\left. -[f(u_1, v_1+\Delta \upsilon) - f(u_1, \upsilon_1)]\ [\varphi(u_1+\Delta u, v_1) - \varphi(u_1, \upsilon_1)\right|.$$

მაგრამ ტეილორის ფორმულის თანახმად,

$$f(u_1+\Delta u, v_1) - f(u_1, v_1) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\Delta u + \varepsilon_1,$$

$$\varphi(u_1+\Delta u, v_1) - \varphi(u_1, v_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\Delta u + \varepsilon_2,$$

---

[*] რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ როცა (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) პარალელოგრამის წვეროებია, მისი ფართობი S გამოისახება ტოლობით:

$$S = \left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y)\right|.$$

$$f(u_1+\Delta u v_1)-f(u_1 v_1)=\frac{\partial f}{\partial v}\Delta v+\varepsilon_3,$$

$$\varphi(u_1,v_1+\Delta v)-\varphi(u_1 v_1)=\frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v+\varepsilon_4,$$

სადაც ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეებია Δu და Δv -ს მიმართ. აქედან

$$|\Delta'|=\left|\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]\Delta u\cdot\Delta v+\delta\cdot\Delta u\cdot\Delta v\right|,$$

სადაც δ ისევ უსასრულოდ მცირეა Δu და Δv -სთან ერთად.

ამგვარად, ჩვენ დავადგინეთ, რომ

$$|\Delta'|=|j(u_1,v_1)|\cdot|\Delta|+\tilde{\delta}|\Delta|,$$

სადაც $\tilde{\delta}$ -ს გააჩნია ის თვისება, რომ ყოველი $\varepsilon<o$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ როცა $|\Delta u|<\eta$ და $\Delta v<\eta$, გვექნება:

$$|\tilde{\delta}|<\varepsilon.$$

ახლა გადავიდეთ ცვალებადის გარდაქმნის ფორმულის გამოყვანაზე ორმაგი ინტეგრალისათვის. ვთქვათ, განტოლებები

$$\left.\begin{aligned} x&=f(u,v)\\ y&=\varphi(u,v)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

წარმოადგენენ (u,v) სიბრტყის D არის რეგულარულ გარდაქმნას (x,y) სიბრტყის D_1 არეზე. დავუშვათ, ამასთან, რომ D_1 არეზე განმარტებულია ორი ცვალებადის რაღაც განუწყვეტელი $F(x,y)$ ფუნქცია. ასეთ პირობებში, როგორც ქვემოთ დავამტკიცებთ, სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

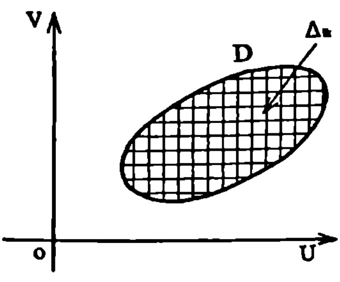
$$\iint\limits_{D_1} F(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} F\big(f(u,v),\varphi(u,v)\big)\big|J(u,v)\big|dudv,$$

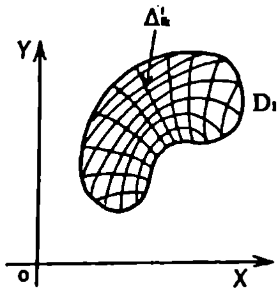
სადაც $J(u,v)$ წარმოადგენს (I) გარდაქმნის იაკობიანის მნიშვნელობას D სიმრავლის (u,v) წერტილში, ე.ი.

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\end{vmatrix}=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)$$

მოვიყვანოთ ამ ფორმულის დამტკიცება.

განვიხილოთ D არის დანაწილება u და v ღერძების პარალელური წრფეებით მცირე $\Delta_{i,k}$ სწორკუთხედებად, რომელთა Δu და Δv გვერდების სიგრძეები მცირეა. ზოგიერთი ამ ოთხკუთხედიდან მთლიანად არ იქნება მოთავსებული D-ში (ისინი, რომლებიც მოიცავენ D-ს სასაზღვრო წერტილებს). თითოეული მათგანის გარდაქმნა (1) ფორმულებით მოგვცემს $\Delta_{i,k}$ მრუდწირულ "მართკუთხედებს", რომლებიც გაერთიანებისას გვაძლევენ მთელს D_1 არეს (იხ. ნახ.39).





ნახ. 39

შევადგინოთ $\iint\limits_D F(f(u,v),\varphi(u,v))|J(u,v)|dudv$ ინტეგრალის შესაბამისი ჯამი, რომელიც ზღვარზე გადასვლის შემდეგ ამ ინტეგრალს მოგვცემს:

$$\sum_i\sum_k F\big(f(u_i,v_k),\varphi(u_i,v_k)\big)\big|J(u_i,v_k)\big|\,|\Delta_{ik}|.$$

აქ, $(f(u_i,v_k),\varphi(u_i,v_k)=(x_{ik},y_{ik})$ წერტილი, ცხადია, Δ'_{ik} მრუდწირულ "ოთხკუთხედს" ეკუთვნის და, როგორც ვნახეთ,

$$|\Delta'_{ik}|=|J(u_i,v_k)|\ \ |\Delta'_{ik}|+\tilde{\delta}_{ik}|\Delta_{ik}|,$$

სადაც, იმის გამო, რომ $|\Delta u|<\eta$, $|\Delta v|<\eta$, გვექნება $|\tilde{\delta}_{ik}|<\varepsilon$. ამიტომ

$$\sum_i\sum_k F\big(f(u_i,v_k),\varphi(u_i,v_k)\big)\big|J(u_i,v_k)\big|\,|\Delta_{ik}|=$$

$$=\sum_i\sum_k F(x_{ik},y_{ik})|\Delta_{ik}|-\sum_i\sum_k F(x_{ik},y_{ik})\tilde{\delta}_{ik}|\Delta_{ik}|. \qquad (*)$$

ახლა გადავიდეთ ზღვარზე, როცა ყოველი Δ_{ik} ოთხკუთხედის Δu და Δv გვერდები $\to 0$ (ასე რომ, მათი რაოდენობა უსაზღვროდ იზრდება). მაშინ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარე ზღვარში მოგვცემს ინტეგრალს

$$\iint\limits_D F(f(u,v),\varphi(u,v)|J(u,v)|dudv.$$

ვაჩვენოთ, რომ ამავე ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები მიისწრაფვის ნულისაკენ. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი და მოვძებნოთ შესაბამისი $\eta>0$ ისეთი, რომ როცა $|\Delta u|<\eta$, $|\Delta v|<\eta$, გვქონდეს $|\tilde{\delta}_{ik}|<\varepsilon$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$\left|\sum_i \sum_k F(x_{ik} y_{ik})\widetilde{\delta}_{ik}|\Delta_{ik}|\right| \le \sum_i \sum_k |F(x_{ik} y_{ik})||\widetilde{\delta}_{ik}||\Delta_{ik}| <$$

$$< \varepsilon \cdot M \cdot \sum_i \sum_k |\Delta_{ik}|,$$

სადაც M აღნიშნავს $F(x,y)$ ფუნქციის აბსოლუტური სიდიდის მაქსიმუმს მთელს D_1-ზე; მაგრამ Δ_{ik} მართკუთხედები ფარავენ D_1-ს და ამიტომ $\sum_i \sum_k |\Delta_{ik}| = |D_1|$ ($|D_1|$-არის D-ს ფართობი). ამგვარად, ε-ის ნებისმიერობის გამო, ცხადია, რომ სასურველი ჯამი მართლაც მიისწრაფვის ნულისაკენ. ვაჩვენოთ კიდევ, რომ (*•) ტოლობის მარჯვენა მხარეში პირველი ჯამის ზღვარი არის ინტეგრალი

$$\iint_{D_1} F(x,y)dxdy$$

მართლაც, განვიხილოთ ეს ინტეგრალი და, რადგან D_1 არის Δ_{ik} "ოთხკუთხედების"გაერთიანება, წარმოვადგინოთ იგი როგორც ჯამი:

$$\iint_{D_1} F(x,y)dxdy = \sum_i \sum_k \iint_{\Delta_{ik}} F(x,y)dxdy.$$

მაგრამ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად, ორმაგი ინტეგრალისათვის, ყოველი Δ_{ik} "ოთხკუთხედისათვის" მოიძებნება ისეთი $(\overline{x}_{ik}, \overline{y}_{ik})$ წერტილი Δ_{ik}-ში, რომ

$$\iint_{\Delta_{ik}} F(x,y)dxdy = F(\overline{x}_{ik}, \overline{y}_{ik})|\Delta'_{ik}|.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\iint_{D_1} F(x,y)dxdy = \sum_i \sum_k F(\overline{x}_{ik}, \overline{y}_{ik})|\Delta'_{ik}|.$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$\left|\sum_i\sum_k F\left(x_{ik}, y_{ik}\right)\left|\Delta'_{ik}\right| - \iint_{D_1} F(x,y)dxdy\right| =$$

$$= \left|\sum_i\sum_k F\left(x_{ik}, y_{ik}\right)\left|\Delta'_{ik}\right| - \sum_l\sum_k F\left(\bar{x}_l, \bar{y}_k\right)\left|\Delta'_{ik}\right|\right| =$$

$$= \left|\sum_i\sum_k \left[F\left(x_{lk}, y_{ik}\right) - F\left(\bar{x}_i, \bar{y}_k\right)\right]\left|\Delta'_{ik}\right|\right| \le$$

$$\le \sum_l\sum_k \left|F(x_{ik}, y_{ik}) - F(\bar{x}_{ik}, y_{lk}\right| \; \left|\Delta'_{ik}\right|.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და დავუშვათ, რომ ყოველი Δ'_{ik} "ოთხკუთხედის" ზომები იმდენად მცირეა, რომ მასში აღებული ორი (x_{lk}, y_{ik}) და $(\bar{x}_{ik}, \bar{y}_{lk})$ წერტილთა წყვილისათვის გვაქვს:

$$\left|F\left(x_{ik}, y_{ik}\right) - F\left(\bar{x}_{ik}, \bar{y}_{ik}\right)\right| < \varepsilon.$$

ასეთ შემთხვევაში წინა უტოლობა მოგვცემს:

$$\left|\sum_i\sum_k F\left(x_{ik}, y_{ik}\right)\left|\Delta'_{ik}\right| - \iint_{D_1} F(xy)dxdy\right| < \varepsilon\sum_i\sum_k\left|\Delta'_{ik}\right| = \varepsilon\left|D_i\right|,$$

რაც ε-ის ნებისმიერობის გამო იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim \sum_l\sum_k F\left(x_{ik}, y_{ik}\right)\left|\Delta'_{ik}\right| = \iint_D F(x,y)dxdy.$$

ახლა ცხადია, რომ (*$_*$) ტოლობაში ზღარზე გადასვლა, როცა ყველა Δ_{ik} ოთხკუთხედის Δu, Δv ზომები მიისწრაფვიან ნულისაკენ მოგვცემს დასამტკიცებელ ტოლობას:

$$\iint\limits_{D_1} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} F\big(f(u,v),\varphi(u,v)\big)|J(u,v)|dudv.$$

ამ ფორმულით, ჩვეულებრივ, ორმაგი $\int\limits_{D_1} F(x,y)dxdy$ ინტეგრალის გამოთვლის საკითხი დაჰყავთ ახალი ორმაგი

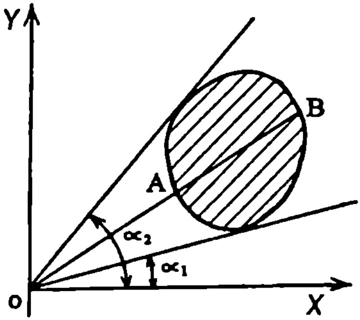
$$\iint\limits_{D} E\big(f(u,v),\varphi(u,v)\big)|J(u,v)|dudv$$

ინტეგრალის გამოთვლამდე. უნდა ვეცადოთ, უკანასკნელი უფრო მარტივი აღმოჩნდეს. ისმის კითხვა, როგორ უნდა მოვძებნოთ ის D არე, რომელიც (1) გარდაქმნის დროს შეესაბამება D_1-ს. მაგრამ D-ს მოძებნა მრავალ შემთხვევაში საჭირო არაა: ჩვენ ვიცით, რომ დამოკიდებულება D-სა და D_1-ს შორის ურთიერთცალსახაა. ამიტომ D_1 არის ყოველ წერტილზე გაივლის ერთი და მხოლოდ ერთი როგორც (u_0) მრუდი, ასევე ერთი და მხოლოდ ერთი (v_0) მრუდი. ახლა საჭირო იქნება მოვძებნოთ v_0-ის ის უკიდურესი მნიშვნელობანი, v_1 და v_2, რომელთა შესაბამისი (v_0) მრუდები ჯერ კიდევ გადის D_1-ში. ამის შემდეგ ავიღოთ რაიმე (v_0) $(v_1 < v_0 < v_2)$ და მოვძებნოთ $v = v_0$ მრუდზე u-ს ცვალებადობის $u_1(v_0)$ და $u_2(v_0)$ საზღვრები. მაშინ, ორმაგი ინტეგრალის გამოთვლის ხერხის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\iint\limits_{D_1} F(x,y)dxdy = \int\limits_{v_1}^{v_2} dv \int\limits_{u_1(v)}^{u_2(v)} F\big(f(u,v),\varphi(u,v)\big)|J(u,v)|du,$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, (x,y) სიბრტყეზე მოცემულია ისეთი D_1 არე (იხ.ნახ. 40), რომლის საზღვარს სათავიდან გამოსული ყოველი $y = tg\alpha \cdot x$ სხივი (როცა $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$) მხოლოდ ორ A და B

წერტილში კვეთს. ვთქვათ, $\left|\overline{OB}\right|=\rho_2(\alpha)$, $\left|\overline{OA}\right|=\rho_1(\alpha)$, მაშინ, გადავალთ რა პოლარკოორდინატებზე, გვექნება:*



ნახ. 40

$$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi.$$

ცხადია, φ-ს კიდურა მნიშვნელობებია α_1 და α_2, ამასთან, რომელიმე α-სათვის $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$, გვექნება, რომ ρ იცვლება $\rho_1(\alpha)$-დან $\rho_2(\alpha)$-მდე. ამიტომ, რადგან

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial y}, & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho}, & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi, & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi, & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

წინა ფომრულა გვაძლევს:

$$\iint\limits_{D_1}F(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\alpha)}^{\rho_2(\alpha)}F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho d\rho.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ ნახ.24-ზე აღნიშნულ D_1 არეზე შემდეგი სახის ინტეგრალი

$$\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy$$

(ნახ.24-ზე აღნიშნული რკალი ერთეული რადიუსიანი წრეხაზის მეოთხედია).

---

* აქ $v=\varphi$, $u=\rho$.

წინა ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$\iint_{D_1}(x+y)dxdy=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)d\rho=\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_0^1\rho^2d\rho=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=\frac{1}{3}[\sin\varphi-\cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{1}{3}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ, იმავე არეზე გამოსათვლელია $I=\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy.$ ისევ

$$I=\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy.$$

პოლარკოორდინატებზე გადასვლა გვაძლევს:

$$I=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{16}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ინტეგრალი $J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ მარტივად გამოითვლება ორმაგი ინტეგრალის გამოყენებით. ამ მიზნით გავიხსენოთ, რომ $I=\lim\limits_{a\to\infty}I(a)$, სადაც $I(a)=\int_0^a e^{-x^2}dx$ (სადაც a რაიმე დადებითი რიცხვია). ახლა განვიხილოთ

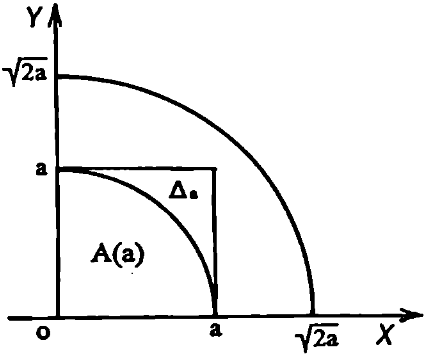
$$I(a)^2=\int_0^a e^{-x^2}dx\cdot\int_0^a e^{-y^2}dy.$$

მაგრამ ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის წესის მიხედვით, ეს უკანასკნელი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, კვადრატზე გავრცელებული ორმაგი ინტეგრალი

$e^{-(x^2+y^2)}$ ფუნქციიდან. აღვნიშნოთ ეს კვადრატი $\Delta(a)$-თი. ამგვარად (იხ. ნახ. 41), გვაქვს:

$$I(a)^2 = \iint\limits_{\Delta(a)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy.$$

შემოვხაზოთ $\Delta(a)$-ზე და ჩავხაზოთ მასში ცენტრით სათავეში a და $\sqrt{2a}$ რადიუსიანი A(a) და B(a) წრეები (ნახ. 41). რადგან $e^{-(x^2+y^2)}$ ფუნქცია დადებითია ყველგან პირველ კვადრატში, ცხადია, გვექნება:



ნახ. 41

$$\iint\limits_{A(a)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy < \iint\limits_{\Delta(a)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy < \iint\limits_{B(a)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy.$$

მაგრამ კიდურა ინტეგრალებში შეგვიძლია გადავიდეთ პოლარკოორდინატებზე: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. მაშინ, მივიღებთ

$$\iint\limits_{A(a)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right),$$

$$\iint\limits_{B(a)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2a}} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^{\sqrt{2a}} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right),$$

და ამიტომ, გვექნება:

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)<\iint\limits_{\Delta(a)} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy<\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right)$$

ან,

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)<\left(I(a)\right)^2<\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right).$$

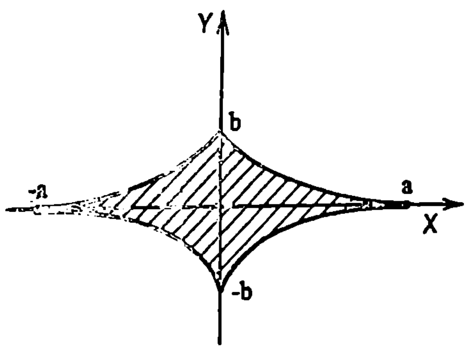
ახლა გადავიდეთ ზღვარზე ამ უტოლობაში, როცა $a\to\infty$. მაშინ, რადგან $e^{-a^2}\to 0$, $e^{-2a^2}\to 0$, კიდურა წევრებს ექნება საერთო ზღვარი $\frac{\pi}{4}$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ იგივე ზღვარი აქვს აგრეთვე $I(a)^2$-სა ჯ. მაგრამ $\lim I(a)=I$ და, ამგვარად, მივიღეთ $I^2=\pi/4$, ე.ი.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. განვიხილოთ x,y სიბრტყეში მრუდი, რომლის განტოლებაა

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1.$$

(ნახ. 42-ზე ნაჩვენებია ამ შეკრული მრუდის მიახლოებითი ფორმა). მის მიერ შემოფარგლული არის S ფართობის მოძებნა ჩვეულებრივი წესით დიდ სიძნელეს წარმოადგენს. გარდაქმნის გამოყენება აადვილებს გამოთვლას.



ნახ. 42

შემოვიტანოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos^3\varphi, \\ y = b\rho\sin^3\varphi, \end{cases}$$

და ვცვალოთ φ 0-დან $\pi/2$ საზღვრებში, ხოლო ყოველი φ-სათვის $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ მონაკვეთიდან ρ ვცვალოთ. $0 \le \rho \le 1$. ასეთ დროს, როგორც ეს ადვილი შესამოწმებელია, (x,y) წერტილი შეავსებს ჩვენი არის პირველ კვადრატში მოთავსებულ ნაწილს, რომლის ფართობი, ცხადია, არის $\dfrac{S}{4}$. ამასთან, აქ გარდაქმნის იაკობიანი იქნება

$$J = \begin{vmatrix} a\cos^3\varphi, & -3a\rho\cos^3\sin\varphi \\ b\sin^3\varphi & 3b\rho\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 3ab\rho\cos^2\sin^2\varphi.$$

თუ ყოველივე ამას გავითვალისწინებთ, გვექნება:

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 3ab\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 3ab\rho d\rho = 3ab\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho =$$

$$= \frac{3}{4}ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho =$$

$$= \frac{3}{4}ab\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\pi ab}{32}.$$

და საძიებელი ფართობი $S=\frac{3\pi ab}{8}$. შევადაროთ ეს ფართობი a და b ნახევარღერძებიანი ელიფსის $S=\pi ab$ ფართობს. ვხედავთ, რომ ამ ფიგურის ფართობი 3/8-ჯერ ნაკლებია სათანადო ელიფსის ფართობზე.

ლ ე ქ ც ი ა 20

ორმაგი ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

სანამ ორმაგი ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საკითხს განვიხილავდეთ, შევეხოთ სივრცითი ტანის მოცულობის ცნებას. ავიღოთ რაიმე მრუდი ზედაპირით შემოფარგლული სივრცითი Ω ტანი და ჩავწეროთ მასში რაიმე Ω_1 მრავალწახნაგა, შემდეგ კი შემოვწეროთ მასზე რაღაც Ω_2 მრავალწახნაგა. ვთქვათ, პირველის მოცულობა არის V_i, ხოლო მეორესი — V_e, ახლა წახნაგების რაოდენობა ორივე მრავალწახნაგისა უსაზღვროდ ვზარდოთ. თუ ასეთ პირობებში არსებობს $\lim v_i$ და $\lim v_e$ ზღვრები და, ამასთან, $\lim v_i = \lim v_e$, ვიტყვით, რომ Ω ტანს აქვს მოცულობა V, რომელიც

$$U = \lim U_i = \lim U_e.$$

იმისათვის, რომ Ω ტანს გააჩნდეს მოცულობა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს Ω-ში ჩაწერილი და Ω-ზე შემოწერილი ისეთი მრავალწახნაგები Ω_1 და Ω_2, რომ მათი V_i და V_e მოცულობებისათვის გვქონდეს: $V_e - V_i < \varepsilon$.

ამ შენიშვნის შემდეგ განვიხილოთ x,y სიბრტყის R არე, რომელიც C მრუდითაა შემოსაზღვრული და ავიღოთ R-ზე განუწყვეტელი რაიმე ორი ცვალებადის დადებითი $f(x,y)$ ფუნქცია.

ავაგოთ სივრცითი B ტანი x, y, z სივრცეში, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია R არით, ზემოდან $z=f(x,y)$ ზედაპირით, გვერდებიდან კი ცილინდრით, რომლის მსახველები Z ღერძის პარალელური, C-ზე გამავალი პარალელებით ალიწერება. ახლა R დავანაწილოთ X და Y ღერძების პარალელური სწორებით რაღაც მცირე სრულ და არასრულ ω_{ik} ოთხკუთხედებად. ავაგოთ ω_{ik} ოთხკუთხედის საზღვრიდან Z ღერძის პარალელური მსახველები და $f(x,y)$ ფუნქციის M_{ik} და m_{ik} უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის მქონე სიმაღლეების სწორი პრიზმები. ვთქვათ, ეს პრიზმებია Ω_{ik} და $\tilde{\omega}_{ik}$ შესაბამისად. მათი სათანადო მოცულობები იქნება $M_{ik}|\omega_{ik}|$ და $m_{ik}|\omega_{ik}|$, სადაც $|\omega_{ik}|=(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k)$, ω_{ik} სრული ოთხკუთხედისთვის.

ცხადია, რომ ყველა ასეთი მოცულობების

$$\sum_i \sum_k M_{ik}|\omega_{ik}| \quad \text{და} \quad \sum_i \sum_k m_{ik}|\omega_{ik}|$$

ჯამები წარმოადგენენ $f(x,y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამებს; მეორე მხრივ, იგივე ჯამები იქნება B ტანის გარშემო შემოწერილი და მასში ჩაწერილი მრავალწახნაგების მოცულობები. ახლა, თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა ყველა ოთხკუთხედის ზომები $\to 0$, ზედა და ქვედა ჯამებს საერთო ზღვარი გააჩნიათ, რომელიც $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ ორმაგი ინტეგრალია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ B ტანს* აქვს მოცულობა და ის არის $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ ინტეგრალი.

თუ გვაინტერესებს უარყოფითი $f(x,y)$ ფუნქციის ორმაგი იტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობა, შევნიშნოთ, რომ $-f(x,y)$ დადებითი ფუნქცია იქნება, და ამიტომ $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ იქნება

* რომელსაც $f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკქვეშა ეწოდება.

$-f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკქვეშას მოცულობა. ამიტომ უარყოფითი $f(x,y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ წარმოადგენს ნიშნით აღებულ იმ ტანის მოცულობას, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია $z=f(x,y)$ ზედაპირით, ზემოდან R არით და გვერდიდან C-ზე გატარებული ვერტიკალური წრფეებით მიღებული ცილინდრით.

თუ გვაქვს რაიმე, მაგალითად, ნახ.43-ზე წარმოდგენილი Ω ტანი, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $z_2=f_2(x,y)$ ზედაპირით, ქვემოდან კი $z_1=f(x,y)$ ზედაპირით, მაშინ გვექნება

მოც.

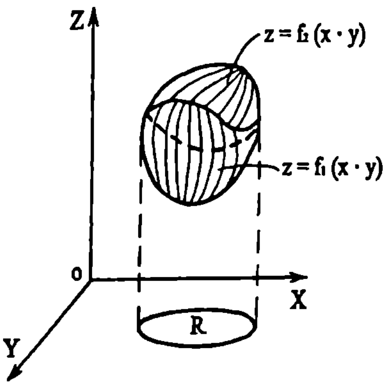
$$\Omega=\iint\limits_R f_2(x,y)dxdy-\iint\limits_R f(x,y)dxdy.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი :

1) ვიპოვოთ იმ ელიფსოიდის მოცულობა, რომლის ცენტრი მოთავსებულია სათავეში და რომლის ნახევარღერძებია a,b,c.

დავწერთ რა ასეთი ელიფსოიდის განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



ნახ. 43

სახით, ცხადია, გვექნება

$$z_1=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \quad \text{და} \quad z_1=+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

აქ R არის ელიფსი D, რომელიც მოცემულია $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ უტოლობით. ამგვარად, მოცულობა ელიფსოიდისა =

$$\iint_R\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right]dxdy=$$

$$=2c\iint_R\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy.$$

ამ ინტეგრალის გამოთვლა ვაწარმოოთ პოლარკოორდინატებზე გადასვლით. ვთქვათ, $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. მაშინ ρ იცვლება 0-დან 1-მდე, $0\le\varphi\le 2\pi$; ამასთან,

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} a\cos\varphi, -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi, b\rho\cos\rho \end{vmatrix}=ab\rho.$$

ამგვარად, მოცულობა ელიფსოიდისა =

$$2c\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho d\varphi=$$

$$=2abc\cdot 2\pi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=4\pi abc\frac{1}{3}\left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^1=\frac{4}{3}\pi abc.$$

მოცულობის გამოთვლა უბრალო ინტეგრალების საშუალებებით

განვიხილოთ ზემოგანხილული B ტანის (დადებითი $f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკქვეშას) მოცულობა:

$$\text{მოც.}B=\iint_R f(x,y)dxdy.$$

თუ აქ R ისეთი ბრტყელი არეა, რომელსაც Y ღერძის ყოველი პარალელი X, Y სიბრტყეში (თუ ის მატარებელია კიდურა

აბსცისების a და b-ს შორის) R-ის საზღვარს ორ წერტილში კვეთს, გვექნება:

$$\text{მოც.} B=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

სადაც $y=y_1(x)$ და $y=y_2(x)$ R-ის ქვედა და ზედა მრუდებია შესაბამისად. მაგრამ რიცხვი $\omega(x)$, სადაც

$$\omega(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

წარმოადგენს $f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკქვეშას იმ ბრტყელი კვეთის ფართობს, რომელიც მიიღება X ღერძის x წერტილზე YOZ ღერძის პარალელური სიბრტყის საშუალებით, ამგვარად, დავადგინეთ, რომ

$$\text{მოც.} B=\int_a^b \omega(x)dx,$$

ე.ი. B ტანის მოცულობის მისაღებად შეიძლება მოვახდინოთ ახლახან ნახსენები კვეთების ფართობთა ($\omega(x)$ ფუნქციის) ინტეგრაცია x-ის ცვალების კიდურა a და b საზღვრებს შორის.

მაგალითად, ავიღოთ ახლახან განხილული ელიფსოიდის მოცულობის შემთხვევა. ამ შემთხვევისათვის $-a\le x\le a$ და x-ზე გატარებული კვეთა გვაძლევს ელიფსს, რომლის განტოლებაა:

$$\frac{y^2}{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}+\frac{z^2}{\frac{c^2(a^2-x^2)}{a^2}}=1$$

ამიტომ,

$$\omega(x)=\pi\frac{bc(a^2-x^2)}{a^2},$$

მაშასადამე, მოცულობა მოცემული ელიფსოიდისა =

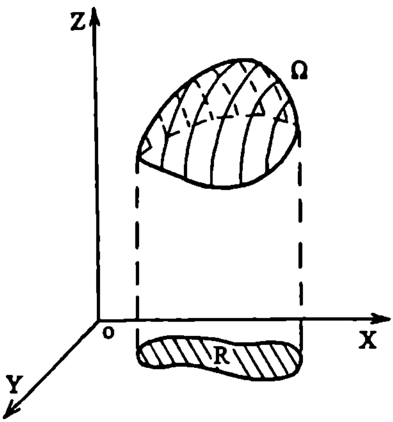
$$\int_{-a}^{+a}\pi\frac{bc}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)dx=$$

$$=\frac{\pi bc}{a^2}\left(2a^2\cdot a-\frac{2}{3}a^3\right)=\frac{\pi bc}{a^2}\cdot\frac{4}{3}a^3=\frac{4}{3}\pi abc,$$

რაც ეთანხმება ზემოთ ჩატარებულ გამოთვლას.

ზედაპირული ინტეგრალი

ვთქვათ, Ω რაიმე სამგანზომილებიანი არეა X, Y, Z სისტემაში და ამ არეზე განსაზღვრულია სამი ცვალებადის განუწყვეტელი $F(x,y,z)$ ფუნქცია. ვთქვათ, x,y სიბრტყის რაღაც R არეზე განმარტებულია ამავე დროს ორი ცვალებადის $f(x,y)$ ფუნქცია, რომლის შესაბამისი $z=f(x,y)$ ზედაპირი ($f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი), რომელსაც ქვემოთ ჩვენ უბრალოდ S-ით აღვნიშნავთ, Ω-შია მოთავსებული (იხ. ნახ. 44).



ნახ. 44

დავანაწილოთ, როგორც ჩვეულებრივ, ბრტყელი R არე ω_{ik} "ოთხკუთხედებად" და აღვმართოთ ω_{ik}-ს საზღვარზე Z-ის პარალელური მსახველები. ასე მიღებული ცილინდრი $z=f(x,y)$ ზედაპირიდან ამოკვეთს რაღაც σ_{ik} ნაწილს. ცხადია, რომ როცა წერტილი (x_i,y_k) აიღება ω_{ik} "ოთხკუთხედში", მისი შესაბამისი წერტილი S ზედაპირზე, ე.ი. $(x_i,y_k,\ f(x_i,y_k))$

წერტილი აღმოჩნდება σ_{ik}-ზე. მაგრამ ეს უკანასკნელი წერტილი ეკუთვნის S-ს და, ცხადია, დევს Ω -ში მაშასადმე, ამ წერტილში აზრი აქვს $F(x,y,z)$ ფუნქციას: $F(x,y_k, f(x_i,y_k))$.

შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_i \sum_k F(x_i, y_{ki}) f(x_i, y_k) |\omega_{i,k}|, \qquad (*)$$

სადაც $|\omega_{ik}|$, როგორც ზემოთ, ბრტყელი "ოთხკუთხედის" ω_{ik}-ს ფართობს აღნიშნავს.

ჩვენ ახლა ვნახავთ, რომ უკანასკნელ ჯამს აქვს გარკვეული ზღვარი, როცა ყველა ω_{ik} არეების ზომები მიისწრაფვიან ნულისაკენ და, ამგვარად, შეიძლება შემოვიტანოთ $F(x,y,z)$ ფუნქციის ზედაპირული ინტეგრალის ცნება S-ზე x და y-ით, რომელსაც $\iint\limits_S F(x, y)dxdy$ -ით აღვნიშნავთ, და რომელიც განმარტებულია ტოლობით:

$$\iint\limits_S F(x, y, z)dxdy = \lim \sum_i \sum_k F(x_i, y_k f(x_i, y_i))|\omega_{ik}|,$$

სადაც S აღნიშნავს $z=f(x,y)$ ზედაპირს.

ის გარემოება, რომ აქ განხილული ზღვარი მართლაც არსებობს, გამომდინარეობს იქედან, რომ (*) ჯამი წარმოადგენს ორი ცვალებადის რთული $F(x,y), f(x,y,)$ ფუნქციისათვის დაწერილ ინტეგრალურ ჯამს, რომელსაც, რამდენადაც ეს რთული ფუნქცია განუწყვეტელია, აქვს ზღვარი და ის, ცხადია, უდრის $\iint\limits_R F(x, y,$ $f(x,y,))dxdy$ ორმაგ ინტეგრალს, ამგვარად, დავადგინეთ, რომ განხილული სახის ზედაპირული ინტეგრალი $F(x,y,z)$ ფუნქციისა S-ზე ($z=f(x,y)$ ზედაპირზე) x-ით და y-ით იგივეა, რაც ჩვეულებრივი ორმაგი ინტეგრალი R-ზე რთული $F(x,y), f(x,y,)$ ფუნქციისა, ე.ი.

$$\iint\limits_S F(x,y,z)dxdy=\iint\limits_R F(x,y,f(x,y))dxdy,$$

თუ S აღნიშნავს $z=f(x,y)$ ზედაპირს.

S ზედაპირს აქვს ორი მხარე: ავიღოთ მისი რომელიმე $P(x,y,z)$ წერტილი და გავატაროთ მასზე ორი მიმართულების ნორმალი* და n''. ერთ-ერთი მათგანი z ღერძთან ადგენს მახვილ კუთხეს, მაშინ, როცა მეორე z ღერძთან ბლაგვ კუთხეს ქმნის.

თუ ახლა S-ის ყველა წერტილში ავირჩევთ n' ნორმალებს (ე.ი. ისეთებს, რომ კუთხე n'-სა და z-ს შორის მახვილია), მიიღება S-ის ე.წ. ზედა მხარე. S-ის ქვედა მხარე მიიღება ყოველ წერტილში n'' ნორმალის არჩევით.

აღვნიშნოთ α, β, γ-თი S-ის ნებისმიერ წერტილში არჩეული "ზედა n'' ნორმალის მიერ სათანადოდ X, Y და Z ღერძებთან შედგენილი კუთხეები, თუ შემოვიტანთ შემოკლებულ აღნიშვნებს:

$$z=f(x,y),\quad p=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), q=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

მაშინ, როგორც დიფერენციალური გეომეტრიიდანაა ცნობილი,

$$\cos\alpha=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\cos\beta=-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

შევნიშნოთ, რომ ზედაპირული ინტეგრალის ის ცნება ჩვენ რომ აქ შემოვიტანეთ, უფრო ზუსტად, იწოდება S ზედაპირის "ზედა" მხარეზე გავრცელებულ ინტეგრალად $F(x,y,z)$ ფუნქციიდან dx, dy-ით. S-ის "ქვედა" მხარეზე გავრცელებული ინტეგრალის განმარტებისას ω_k-ს ფართობებს ინტეგრალურ ჯამში, იღებენ

* აქ ვგულისხმობთ, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრავს S ზედაპირს, განუწყვეტლად წარმოებადია x-ისა და y-ის მიმართ.

მინუს ნიშნით. ამგვარად, $\iint F(x,y,z)dxdy$ ზედაპირული ინტეგრალის მნიშვნელობა S^s-ის ქვედა მხარეზე მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება მის "ზედა" მხარეზე გავრცელებული ინტეგრალისაგან.

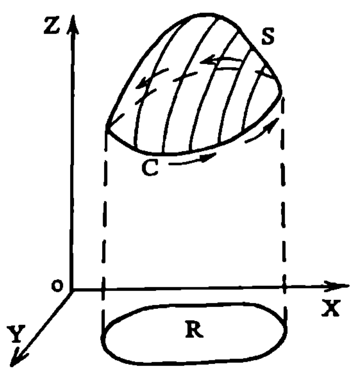
ლექცია 21

სტოქსის ფორმულა

აქ მთლიანად ვინარჩუნებთ წინა ლექციაზე შემოტანილ აღნიშვნებს. ახლა განვიხილოთ იქ შემოტანილი S ზედაპირი და მისი შემომსაზღვრელი C მრუდი. ეს, საზოგადოდ, x,y,z სივრცეში მოთავსებული გრეხილი მრუდი იქნება. განვიხილოთ Ω არეში აღებული სამი განუწყვეტელი სამი ცვალებადის $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$ და $C(x,y,z)$, რომელთაც აქვთ განუწყვეტელი კერძო წარმოებულები x, y და z-ით და ავიღოთ მრუდხაზოვანი ინტეგრალი

$$\int_C A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz,$$

სადაც ინტეგრაცია C-ზე ხდება დადებითი მიმართულებით x,y,z სივრცეში, რომელიც იმით ხასიათდება, რომ C-ს ამ მიმართულებით შემოვლისას მის მიერ შემოსაზღვრული S ზედაპირი ხელმარცხნივ უნდა გვრჩებოდეს, როცა C-ზე ვდგავართ S-ის ზედა ნორმალის გასწვრივ (იხ. ნახ. 45). აღვნიშნოთ აგრეთვე C მრუდის პროექცია X,Y სიბრტყეში C_1-



ნახ. 45

ით. ცხადია, რომ C_1 წარმოადგენს R-ის შემომსაზღვრელ მრუდს. რამდენადაც C მრუდის წერტილები (x,y,z) იგივეა, რაც $(x; y; f(x; y))$, სადაც (x,y) C_1-ს ეკუთვნის, ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\int_C A(x,y,z)dx = \int_{C_1} A(x,y;f(x,y))dx,$$

სადაც ორივე მხარეში მრუდხაზოვანი ინტეგრალები გვაქვს მარცხნივ C-ზე, მარჯვნივ კი C_1-ზე. მაგრამ გრინის ფორმულის თანახმად,

$$\int_{C_1} A(x,y;f(x,y))dx = -\iint_R \frac{\partial}{\partial y}(A(x,y;f(x,y))dxdy.$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით გვაქვს:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(A(x,y,f(x,y)\big) = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y},$$

ამიტომ

$$\int_C A(x,y,z)dx = -\iint_R \left[\frac{\partial A}{\partial y}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial A}{\partial z}(x,y,f(x,y)\right]dxdy \quad (*\cdot)$$

პირველი ინტეგრალი მარჯვენა მხარეში, ცხადია,

$$-\iint_S \frac{\partial A}{\partial y}(x,y,z)dxdy$$

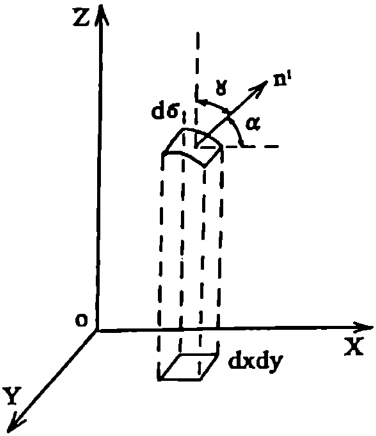
ზედაპირული ინტეგრალია S-ის "ზედა" მხარეზე. რაც შეეხება მეორე ინტეგრალს, რადგან

$$\frac{\partial f}{\partial y} = q = -\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

ამიტომ

$$qdxdy=-\cos\beta\frac{dxdy}{\cos\gamma}.$$

მაგრამ $dxdy$ წარმოადგენს S-ის ელემენტარული $d\sigma$ ფართობის პროექციას x,y სიბრტყეში (იხ. ნახ. 46), საიდანაც მივიღებთ: $qdxdy=-\cos\beta\cdot d\sigma$, ეს უკანასკნელი კი, ცხადია, $d\sigma$-ს პროექციაა Z,X სიბრტყეში. ამ პროექციას $dzdx$ სახე აქვს და ამიტომ (*•) ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე ინტეგრალი S ზედაპირის "ზედა"მხარეზე გავრცელებული $\iint\limits_S \frac{\partial A}{\partial Z}dzdx$ ზედაპირული ინტეგრალია. ამგვარად, საბოლოოდ მივიღეთ:



ნახ. 46

$$\int\limits_C A(x,y,z)dx=$$

$$=\iint\limits_S\frac{\partial A}{\partial z}dzdx-\iint\limits_S\frac{\partial A}{\partial y}dxdy$$

ანალოგიურად გამოიყვანება, რომ

$$\int\limits_C B(x,y,z)dy=\iint\limits_S\frac{\partial B}{\partial x}dxdy-\iint\limits_S\frac{\partial B}{\partial z}dydz$$

და

$$\int\limits_C C(x,y,z)dz=\iint\limits_S\frac{\partial C}{\partial y}dydz-\iint\limits_S\frac{\partial C}{\partial x}dzdx.$$

ჩვეულებრივ, ამ სამი ფორმულის შეკრებით მიღებულ ფორმულას წერენ ინტეგრალების ნიშნის ქვეშ უფრჩხილებოდ:

$$\int_C Adx + Bdy + Cdz = -\iint_S \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)dydz + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \Delta}{\partial z}\right)dzdx +$$

$$+\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)dxdy.$$

ეს არის კლასიკური სტოქსის ფორმულა, რომელსაც მრავალნაირი გამოყენება აქვს მექანიკაში, ელექტრობის თეორიაში და სხვ. ის აკავშირებს ერთმანეთთან ზედაპირის შემომსაზღვრელი მრუდის გასწვრივ გავრცელებულ მრუდხაზოვან ინტეგრალს ამ ზედაპირზე გავრცელებულ ზედაპირულ ინტეგრალთან.

სამმაგი ინტეგრალები

განვიხილოთ სამგანზომილებიანი სივრცის რაიმე მოცულობითი V არე, რომელზედაც განმარტებულია სამი ცვალებადის განუწყვეტელი $f(x,y,z)$ ფუნქცია. მოვახდინოთ V არის დანაწილება მცირე ზომების რაღაც V_{ijk} არეებად, მაგალითად, ყველა საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური მჭიდროდ აღებული სიბრტყეების ბადით, რაც გამოიწვევს V-ს დაყოფას წესიერი და ასეთი პარალელეპიპედის ნაწილებად. ავირჩიოთ ყოველ V_{ijk} მცირე არეში თითო (x_i,y_j,z_k) წერტილი და შევადგინოთ შემდეგი სახის ჯამი:

$$S = \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\left|V_{ijk}\right|,$$

სადაც $|V_{ijk}|$ ახლა წარმოადგენს V_{ijk} არის მოცულობის აღნიშვნას.

აღვნიშნოთ $f(x,y,z)$ ფუნქციის მაქსიმა და მინიმა V_{ijk} არეში შესაბამისად M_{ijk} და M_{ijk} ასოებით და შევნიშნოთ, რომ ყოველი (x_i,y_j,z_k) წერტილისათვის გვექნება უტოლობა:

$$m_{ijk} \le f(x_i, y_j, z_k) \le M_{ijk}\ .$$

ამიტომ, თუ განვიხილავთ V-ს იმავე დანაწილების შესაბამის ახალ σ და Σ ჯამებს, სადაც

$$\sigma = \sum_i \sum_j \sum_k m_{ijk} \,|V_{ijk}|, \qquad \text{(ქვედა ჯამი)}$$

$$\sum = \sum_i \sum_j \sum_k M_{ijk} \,|V_{ijk}|, \qquad \text{(ზედა ჯამი)}$$

ცხადია, გვექნება: $\sigma \le S \le \Sigma$.

ახლა, სავსებით ისეთივე ტრაფარეტული მსჯელობით, რომელიც ჩვენ უკვე ორჯერ ჩავატარეთ, ერთხელ ერთმაგი, მეორედ კი ორმაგი ინტეგრალის შემოტანისას, შეიძლება დავასკვნათ, რომ, როცა V არის დანაწილება სულ უფრო და უფრო მჭიდრო ხდება, ისე, რომ თითოეული ნაწილაკი $Vijk$ არის ზომები მისწრაფვიან ნულისაკენ, არსებობს σ, S და Σ ჯამების საერთო ზღვარი, რომელიც სავსებით დამოკიდებულია V-ს დანაწილებათა წესისაგან ან, S ჯამში არჩეული (x,y,z,k) წერტილების მდებარეობათა შერჩევისაგან (რა თქმა უნდა, სათანადო V_{ijk} არეში). ასე განიმარტება $f(x,y,z)$ ფუნქციის სამმაგი ინტეგრალი V არეზე, რომელიც აღინიშნება $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ -ით და, მაშასადამე,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\,|V_{ijk}|.$$

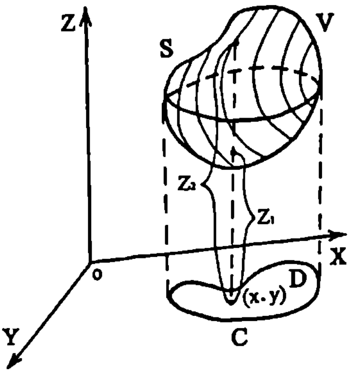
ლ ე ქ ც ი ა 22

ს ა მ მ ა გ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ს გ ა მ ო თ ვ ლ ა

განვიხილოთ სამგანზომილებიანი სივრცის რაიმე V არე და მასზე განმარტებული განუწყვეტელი ფუნქცია, $f(x,y,z)$. ვიგულისხმოთ, რომ V შემოსაზღვრულია S ზედაპირით. აღვნიშნოთ V-ს

გეგმილი X,Y სიბრტყეზე D-თი და D-ს საზღვარი X,Y სიბრტყეში C-თი (იხ. ნახ. 47).

ვთქვათ, D-ს შიგნით აღებულ ყოველ (x,y) წერტილზე გატარებული Z ღერძის პარალელური წრფე S ზედაპირს მხოლოდ ორ წერტილში გადაკვეთს z_1 და z_2 სიმაღლეზე. ცხადია, z_1 და z_2 (x,y)-ზე დამოკიდებული სიდიდეებია და, ამგვარად, ასეთ დროს, თუ მათ $z_1=\varphi_1(x,y)$ -ით და $z_2=\varphi_2(x,y)$ -ით აღვნიშნავთ, გაგვიჩნდება V-ს ქვედა და ზედა ზედაპირები, რომელთა გაერთიანება არის მთელი S.



ნახ. 47

დავანაწილოთ D არე მცირე მრუდწირულ ω_{ij} "ოთხკუთხედებად", როგორც ეს ჩვენ ადრე გაგვიკეთებია, და აღვმართოთ მისი საზღვრებიდან Z ღერძის პარალელები. ასე გაჩენილი "პრიზმები" ამოკვეთენ V-დან გარკვეული სახის სვეტებს, რომლებიც შემდგომ X,Y სიბრტყის პარალელური სიბრტყეების გატარებით შეგვიძლია დავაქუცმაცოთ V_{ijk} არეებად. შედეგად მივიღებთ მთელი V-ს რაღაც დანაწილებას.

თუ (x,y) წერტილი ეკუთვნის D-ს და z იცვლება $z_1=\varphi_1(x,y)$ -დან $z_2=\varphi_2(x,y)$ -მდე, ცხადია, (x,y,z) წერტილი მოხვედრილია V-ში, და ამიტომ ფიქსირებული (x,y)-სთვის, როცა $\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)$, $f(x,y,z)$ იქნება z-ის განუწყვეტელი ფუნქცია. მაშასადამე, შეგვიძლია განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

ის ცხადია, (x,y) ცვალებადების ფუნქცია იქნება, რომელიც განუწყვეტელია D არეზე. ავიღოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობა ჩვენი

V არის დანაწილების რომელიმე (x_i, y_j) წერტილისათვის და დავწეროთ შემდეგი ტოლობა:

$$\int_{\varphi_1(x_i,y_j)}^{\varphi_2(x_i,y_j)} f(x_i, y_j, z)dz = \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x_i, y_j, z)dz,$$

სადაც z_k არიან ჰორიზონტალური, ე.ი. X,Y სიბრტყის პარალელური სიბრტყეების შესაბამისი სიმაღლეები V-ს ზემოაღწერილ დანაწილებაში. მაგრამ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით,

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x_i, y_j, z)dz = f(x_i, y_j, z_k)(z_{k+1} - z_k),$$

სადაც z_k რაღაც წერტილია (z_k, z_{k+1}) მონაკვეთზე. ავიღოთ V_{ijk}-ში $f(x, y, z)$ ფუნქციის მნიშვნელობა სწორედ ასეთ წერტილებში და მაშინ S ჯამს ექნება სახე (შევნიშნოთ, რომ

$$|V_{ijk}| = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k) = |\omega_{ij}|(z_{k+1} - z_k).$$

$$S = \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)|V_{ijk}| = \sum_i \sum_j |\omega_{ij}| \sum_k f(x_i, y_j, z_k)(z_{k+1} - z_k) =$$

$$= \sum_i \sum_j \left[\int_{\varphi_1(x_i,y_j)}^{\varphi_2(x_i,y_j)} f(x_i, y_j, z)dz \right] |\omega_{ij}|.$$

აქედან, ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ სამჯერადი ინტეგრალის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

თუ D არე ისეთია, რომ ის მთლიანადაა მოთავსებული $x=a$ და $y=b$ წრფეებს შორის და შემოსაზღვრულია X, Y სიბრტყეში ქვედა $y=\psi_1(x)$ და $y=\psi_2(x)$ მრუდებით, გამოვითვლით ორმაგ ინტეგრალს D-ზე და გვექნება:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}dy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი . განვიხილოთ $\iiint\limits_V zdxdydz$, სადაც V წარმოადგენს ცენტრით სათავეში, ერთეული რადიუსის მქონე სფეროს იმ მერვედს, რომლისთვისაც $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$. აღნიშნული სფეროს განტოლებაა

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

აშკარაა, რომ D არის X, Y სიბრტყის ერთეული რადიუსიანი წრის მეოთხედი, სადაც $x\geq 0, y\geq 0$.

ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს

$$\varphi_1(x,y)=0, \varphi_2(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, \psi_1(x)=0, \psi_2(x)=\sqrt{1-x^2}$$

და, ამგვარად,

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dy,$$

ე.ი.

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx -$$

$$-\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$1 - x^2 = \sin^2 t; dx = -\sin t dt.$$

ამიტომ

$$\iiint\limits_V zdxdydz = -\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t dt = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t dt = \frac{\pi}{6}.$$

აღვნიშნოთ ჩვენს მიერ გამოყვანილი ფორმულის ერთი კერძო შემთხვევა: როცა V არის პარალელეპიპედი

$a \le x \le A,$

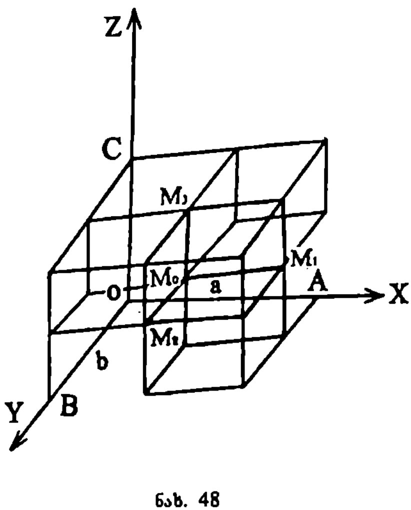
$b \le y \le B,$

$c \le z \le C,$

(იხ. ნახ. 48). ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x,y,z)dz.$$



ნახ. 48

ცვალებადი გარდაქმნა სამმაგ ინტეგრალში

მსგავსად იმისა, რაც გვქონდა ორმაგი ინტეგრალის შემთხვევისათვის, განვიხილოთ რაიმე მოცულობითი V არე U, V, W სივრცეში და მასზე განსაზღვრული სამი განუწყვეტელი სამი ცვალებადის ფუნქცია:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases}$$

ფუნქციათა ეს სისტემა წარმოადგენს V არის გარდაქმნას x, y, z სივრცის რაღაც V_1 არეზე. ვიგულისხმოთ, რომ ეს რეგულარული ასახვაა. ეს იმას ნიშნავს, რომ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა: 1) ეს გარდაქმნა ურთიერთცალსახაა, ე.ი. ყოველი ორი სხვადასხვა წერტილი V-დან სხვადასხვა წერტილს გვაძლევს V_1-ში და V_1-ის ყოველი წერტილი ერთი წერტილის გარდაქმნაა V-დან 2) $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$ და $\chi(u,v,w)$ ფუნქციებს აქვთ განუწყვეტელი კერძო წარმოებულები u, v, და w ცვალებადების მიმართ. 3) ამ გარდაქმნის J იაკობიანი, ანუ დეტერმინანტი

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v,w), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v,w), \frac{\partial\varphi}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v,w), \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v,w), \frac{\partial\psi}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial\chi(u,v,w)}{\partial u}, \frac{\partial\chi}{\partial v}(u,v,w), \frac{\partial\chi}{\partial w}(u,v,w) \end{vmatrix}$$

(რომელიც, ცხადია, აგრეთვე განუწყვეტელი ფუნქციაა V-ზე) ყველგან განსხვავებულია ნულისაგან.

ავიღოთ ახლა V არის რაიმე $M_0(u,v,w)$ წერტილი და განვიხილოთ მისი სამი მახლობელი M_1, M_2, M_3 წერტილები:

$$M_1=(u+\Delta u,v,w),\quad M_2=(u,v+\Delta v,w),\quad M_3=(u,v,w+\Delta w).$$

ავაგოთ $\overline{M_0M_1},\overline{M_0M_2},\overline{M_0M_3}$ მონაკვეთებზე მართკუთხა Δ პარალელეპიპედი (იხ. ნახ. 49) და შევნიშნოთ, რომ მცირე Δu, Δv, Δw სიდიდეებისათვის Δ მთლიანად V-ში იქნება მოთავსებული.

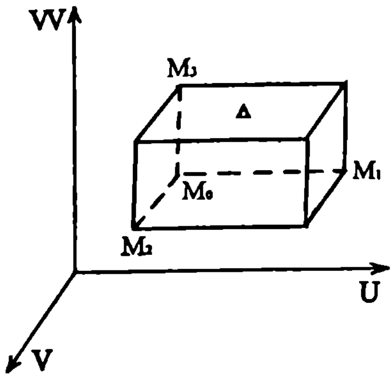
ცხადია, (1) გარდაქმნის შედეგად $\overline{M_0M_1},\overline{M_0M_2},\overline{M_0M_3}$ სწორი მონაკვეთები გარდაიქმნებიან საზოგადოდ მრუდწირულ $\overline{M_0'M_1'},\overline{M_0'M_2'},\overline{M_0'M_3'}$ მონაკვეთებში.

მთელი Δ გარდაიქმნება რაღაც მრუდწირულ "პარალელეპიპედში" Δ', რომელიც დიდი მიახლოებით შეგვიძლია შევცვალოთ $\overline{M_0'M_1'},\overline{M_0'M_2'},\overline{M_0'M_3'}$ სწორხაზოვან მონაკვეთებზე აგებული პარალელეპიპედით, რომელსაც Δ'' დავარქვათ.

გავიხსენოთ, რომ თუ M_0',M_1',M_2',M_3' წერტილებს კოორდინატებად აქვთ

$$M_0'(x_0,y_0,z_0),$$
$$M_1'(x_1,y_1,z_1)$$
$$M_2'(x_2,y_2,z_2),$$
$$M_3'(x_3,y_3,z_3),$$

მაშინ



ნახ. 49

$\overline{M_0'M_1'},\quad \overline{M_0'M_2'},\quad \overline{M_0'M_3'}$ მონაკვეთებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა $|\Delta''|$ გამოისახება ფორმულით:

$$|\Delta''|=\begin{vmatrix} x_1-x_0, & y_1-y_0, & z_1-z_0\\ x_2-x_0, & y_2-y_0, & z_2-z_0\\ x_3-x_0, & y_3-y_0, & z_3-z_0\end{vmatrix}$$

ამიტომ, რადგან ჩვენს შემთხვევაში

$$x_0=\varphi(u,v,w), y_0=\psi(u,v,w), z_0=\chi(u,v,w),$$

$$x_1=\varphi(u+\Delta u,v,w), y_1=\psi(u+\Delta u,v,w), z_1=\chi(u+\Delta u,v,w),$$

$$x_2=\varphi(u,v+\Delta v,w), y_2=\psi(u,v+\Delta v,w), z_2=\chi(u,v+\Delta v,w),$$

$$x_3=\varphi(u,v,w+\Delta w), y_3=\psi(u,v,w+\Delta w), z_3=\chi(u,v,w+\Delta w),$$

გვექნება: $x_1-x_0=\varphi(u+\Delta u,v,w)-\varphi(u,v,w)$. მაგრამ ტეილორის ფორმულის ძალით მივიღებთ:

$$x_1-x_0=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v,w)\Delta u+\varepsilon_1,$$

სადაც ε_1 მეორე ხარისხის უსასრულოდ მცირეა Δu -სთან ერთად. ანალოგიურად მიიღება

$$y_1 \div y_0=\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\varepsilon_2;\;\; z_1-z_8=\frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\Delta u+\varepsilon_3;$$

$$x_2-x_0=\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\Delta v+\eta_1;\;\; y_2-y_0=\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\Delta v+\eta_2;$$

$$z_2-z_0=\frac{\partial\chi}{\partial v}\cdot\Delta v+\eta_3;\; x_3-x_0=\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\Delta w+\zeta_1,$$

$$y_3-y_0=\frac{\partial\psi}{\partial w}\cdot\Delta w+\zeta_2;\;\; z_3-z_0=\frac{\partial\chi}{\partial w}\cdot\Delta w+\zeta_3.$$

აქედან, $|\Delta'|$-ის წინა გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ მისთვის შემდეგ მიახლოებით გამოსახულებას:

$$|\Delta'| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\varepsilon_1; \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\varepsilon_2; \frac{\partial\chi}{\partial u}\Delta u+\varepsilon_3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v+\eta_1; \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v+\eta_2; \frac{\partial\chi}{\partial v}\Delta v+\eta_3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w+\xi_1; \frac{\partial\psi}{\partial w}\Delta w+\xi_2; \frac{\partial\chi}{\partial w}\Delta w+\xi_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\chi}{\partial v} \\ \frac{\partial\chi}{\partial w}, \frac{\partial\psi}{\partial w}, \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix} \Delta u\cdot\Delta v\cdot\Delta w + w\cdot\Delta u\cdot\Delta v\cdot\Delta w,$$

სადაც ω რაღაც გამოსახულებაა, რომელსაც გააჩნია ის თვისება, რომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ, როცა $|\Delta u|<\delta$, $|\Delta v|<\delta$, $|\Delta w|<\delta$, მაშინ $|\omega|<\varepsilon$. ამგვარად, ჩვენ დავადგინეთ, რომ მცირე ზომის Δ პარალელეპიპედისათვის V-დან (რომლის წიბოებია Δu, Δv, Δw), გვექნება

$$|\Delta'| = |J(u,v,w)| + \tilde{\omega}\cdot|\Delta|.$$

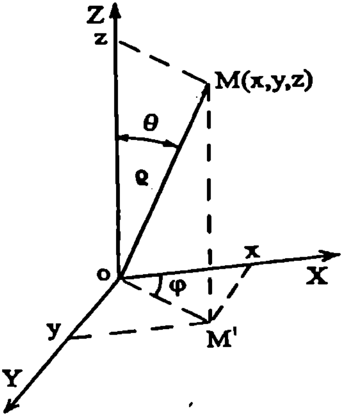
აქედან, სავსებით ისევე, როგორც ორმაგი ინტეგრალისათვის, ადვილად გამოიყვანება ცვალებადის გარდაქმნის ფორმულა სამჯერადი ინტეგრალისათვის, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს.

ვთქვათ, V რაიმე არეა სამგანზომილებიან U, V, W სივრცეში და (1) ტოლობის სისტემა გვაძლევს მის რეგულარულ გარდაქმნას X, Y, Z სივრცის V_1 არეზე. ამას გარდა, დავუშვათ, რომ V_1-ზე მოცემულია განუწყვეტელი ფუნქცია $f(x, y, z)$. მაშინ

$$\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{v} f\left[\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)\right]\cdot$$

$$\cdot\left|J(u,v,w)\right|dudvdw.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. სფერული კოორდინატების სისტემა. განვიხილოთ x, y, z სივრცის M (x, y, z) წერტილი (იხ. ნახ. 50) და შემოვიტანოთ შემდეგი ρ, φ, θ სიდიდეები:



ნახ. 50

ρ -აღნიშნავს მანძილს 0 სათავიდან M წერტილამდე. φ აღნიშნავს OM' სხივის მიერ X ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილ კუთხეს X, Y სიბრტყეში. θ კი აღნიშნავს კუთხეს Z ღერძის დადებით მიმართულებასა და OM სხივს შორის.

ცხადია, ρ იცვლება 0-დან $+\infty$-მდე, φ-ს ცვლილება ხდება $[0,\ 2\pi]$ ფარგლებში, ხოლო θ მოთავსებულია $[0,\ \pi]$ სეგმენტზე. ნახაზიდან ჩანს, რომ $x = |\overline{OM'}|\cos\varphi$, $y = |\overline{OM'}|\sin\varphi$; ამასთან, $|\overline{OM'}| = |\overline{OM}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho\sin\theta = Z$ და ამის გამო, საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta\,,$$

$$y = \rho\sin\varphi\cdot\sin\theta,$$

$$z = \kappa\cos\theta.$$

ეს ფორმულები, როგორც ადვილი მისახვედრია, წარმოადგენენ ნებისმიერ ისეთ (ρ,φ,θ) სივრცეში აღებული V არის რეგულარულ ასახვას x, y, z სივრცის რაღაც $V\,'$ არეზე, თუ, V მაგალითად, მთლიანადაა მოთავსებული სივრცის პირველ მერვედში. გამოვითვალოთ რომელიმე (ρ,φ,θ)-სათვის ამ გარდაქმნის იაკობიანი.

აქ

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}=\cos\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial \varphi}=-\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial \theta}=\rho\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial \theta}=\rho\sin\varphi\sin\theta,$$
$$\frac{\partial z}{\partial \rho}=\cos\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial \varphi}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-\rho\sin\theta.$$

ამის გამო

$$J(\rho,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta, -\rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta,\ 0,\ -\rho\sin\theta\end{vmatrix}=$$

$$=-\rho\sin\theta\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta, -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta\end{vmatrix}+\cos\theta\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta\end{vmatrix}=$$

$$=-\rho\sin\theta\left(\rho\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)+\cos\theta(-\rho^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta-$$

$$-\rho^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta)=-\rho^2\sin^2\varphi\sin\theta-\rho^2\cos^2\varphi\sin\theta=-\rho^2\sin\theta.$$

ამგვარად, $\quad |J(\rho,\varphi,\theta)|=\rho^2\sin\theta$

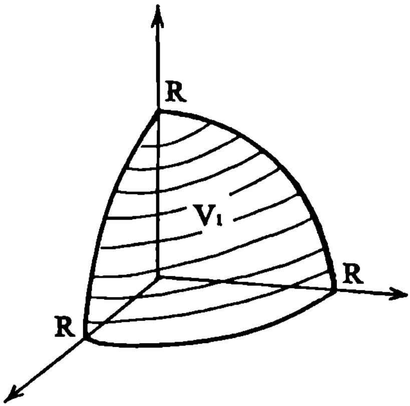
და $J\neq 0$, თუ $\theta\neq 0,\ \theta\neq\pi,\ \rho\neq 0.$

ამგვარად, პოლარკოორდინატებიდან დეკარტულზე გადასვლისას სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz=$$
$$=\iiint\limits_{V} f(\rho\cos\varphi\sin\theta;\rho\sin\varphi\sin\theta;\rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta,$$

სადაც V არის (ρ,φ,θ) წერტილის ცვალებადობის არე, ხოლო V_1 შესაბამისი არეა (x,y,z) წერტილის ცვალებადობისა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი : გამოვითვალოთ R რადიუსიანი სფეროს მოცულობა. ვიგულისხმოთ, რომ სფეროს ცენტრი მოთავსებულია სათავეში. ავიღოთ ამ სფეროს ის მერვედი, რომელიც მოთავსებულია სივრცის $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ მერვედში. ამგვარად, საძიებელი მოცულობის მერვედისათვის, $\frac{V_1}{8}$-სათვის (იხ. ნახ. 51) გვექნება:



ნახ. 51

$$\frac{V_1}{8} = \iiint_{V_1} dxdydz,$$

სადაც V_1 აღნიშნავს ნახ. 51-ზე გამოკვეთილ მოცულობით არეს (R რადიუსიანი სფეროს 1/8 ნაწილს). ცხადია, რომ ამ არისათვის ρ იცვლება $[0,R]$ საზღვრებში, φ იცვლება $[0,\pi/2]$ სეგმენტზე, ხოლო Θ _ აგრეთვე $[0,\pi/2]$-ზე. ამიტომ ცვალებადის გარდაქმნის ახლახან მიღებული ფორმულის მიხედვით, გვექნება (აქ $f(x,y,z)$ ფუნქცია 1-ის ტოლია):

$$\frac{|V_1|}{8} = \iiint_{V_1} dxdydz = \iiint_{V} \rho^2 \sin\Theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\Theta d\theta =$$

$$= \int_0^{\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\Theta d\theta = \frac{R^3}{3}\frac{\pi}{2}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$=\frac{R^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi R^3}{6},$$

საიდანაც საძიებელი სფეროს მოცულობა $|V_1|=\frac{4}{3}\pi R^3$.

საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა სამმაგი ინტეგრალისათვის

განვიხილოთ V არე სამგანზომილებიან x,y,z სივრცეში და ავიღოთ V-ზე განმარტებული რაიმე განუწყვეტელი $f(x,y,z)$ ფუნქცია. თუ m და M ამ ფუნქციის მინიმა და მაქსიმაა შესაბამისად, გვექნება:

$$m\leq f(x,y,z)\leq M$$

ყველგან V-ზე. მოვახდენთ რა ამ უტოლობათა ინტეგრაციას V-ზე, გვექნება:

$$\iiint\limits_V m\,dxdydz\leq\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz\leq\iiint\limits_V M\,dxdydz$$

ანუ

$$m\iiint\limits_V dxdydz\leq\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz\leq M\iiint\limits_V dxdydz$$

მაგრამ $\iiint\limits_V dxdydz=|V|$. მართლაც, ამ ინტეგრალის სიდიდე, ცხადია, არის $\iiint\limits_V dxdydz=\lim\sum\limits_i\sum\limits_j\sum\limits_k 1\cdot|\Delta_{ijk}|$; მაგრამ, რადგან Δ_{ijk} არეები ავსებენ V-ს, ასეთი მოცულობების შეკრებით მივიღებთ მთელ V-ს მოცულობას, ე.ი.

$$\iiint_V dxdydz = \lim |V| = |V|.$$

წინა უტოლობა გვაძლევს:

$$m|V| \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq M|V|.$$

ამგვარად, $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ არის რაღაც m-სა და M-ს შორის აღებული საშუალედო μ რიცხვისა და $|V|$ მოცულობის ნამრავლის ტოლი. მეორე მხრივ, ვინაიდან μ მოთავსებულია m-სა და M-ს შორის, განუწყვეტელ $f(x,y,z)$ ფუნქციას V არის რაღაც წერტილში ექნება μ მნიშვნელობა. ვთქვათ, ესაა V არის (ξ,η,ζ) წერტილი. მაშინ მივიღებთ:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)|V|.$$

ესაა საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა სამმაგი ინტეგრალისათვის.

ლექცია 23

მრავალჯერადი ინტეგრალები

როცა განიხილება n ცვალებადის ფუნქცია $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ბუნებრივია, შემოვიტანოთ n-განზომილებიანი სივრცის ცნება, რომელსაც ვუწოდებთ რიცხვთა ყველა $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ n-ეულების ერთობლიობას. ყოველ ასეთ n-ეულს n-განზომილებიანი სივრცის წერტილი ჰქვია. $x_1,x_2,\dots,x_n$ მისი კოორდინატებია.

განვიხილოთ n განზომილებიანი სივრცის ისეთი $(x_1,x_2,\dots x_n)$ წერტილების ერთობლიობა, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ

$0 \le x_1 \le 1, \quad -1 \le x_2 \le 3, \dots, \quad \frac{1}{2} \le x_n \le 2$, ე.ი. ყოველი კოორდინატისათვის x_i დანიშნულია რაღაც (a_i, b_i) ცვლილების არე. ამ ერთობლიობას, ბუნებრივია, ვუწოდოთ n განზომილებიანი სივრცის პარალელეპიპედი.

განვიხილოთ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილების ერთობლიობა, რომლის ყველა კოორდინატი აკმაყოფილებს უტოლობას $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \le 1$. ბუნებრივია, რომ ამ ერთობლიობას ვუყუროთ როგორც n-განზომილებიანი სივრცის ერთეულ რადიუსიან ბირთვს, რომლის ცენტრი მოთავსებულია (0,0,...0) წერტილში.

ავიღოთ სიმარტივისათვის n განზომილებიანი სივრცის რაიმე პარალელეპიპედი Δ, რომელიც, როგორც ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, არის ერთობლიობა ყველა ისეთი $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილებისა, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $a_1 \le x_n \le b_1 \quad a_2 \le x_2 \le b_2, \dots,$ $a_n \le x_n \le b_n$ უტოლობებს, სადაც $a_1<b_1$, $a_2<b_2, \dots, a_n<b_n$, რაღაც რიცხვებია.

განვმარტოთ Δ პარალელეპიპედის (n-განზომილებიანი) მოცულობა, როგორც $|\Delta|$ რიცხვი, რომელიც განიმარტება ტოლობით:

$$|\Delta| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n).$$

განვიხილოთ Δ პარალელეპიპედი n-განზომილებიან სივრცეში და ვთქვათ, რომ Δ-ზე განმარტებულია n ცვალებადის განუწყვეტელი ფუნქცია $f(x_1, x_2, \dots x_n)$. დავანაწილოთ Δ პარალელეპიპედი $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ მცირე პარალელეპიპედებად და ავიღოთ ყოველ მათგანში თითო $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ წერტილი. ამის შემდეგ შევადგინოთ ჯამი

$$S = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} f\left(x_{i_1}, x_{i_2} \dots, x_{i_n}\right) \left|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}\right|.$$

შეიძლება ძველი შემთხვევების ანალოგიურად დავამტკიცოთ, რომ არსებობს S ჯამების ზღვარი, როცა $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ პარა-

ლელეპიპედების ყველა "ზომა" $\to 0$, ისე, რომ მათი რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება, და ეს ზღვარი არაა დამოკიდებული Δ-ს დანაწილების წესისა და $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$-ის არჩევისაგან. ამ ზღვარს ეწოდება $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ფუნქციის n-ჯერადი ინტეგრალი Δ-ზე და ის $\iint\limits_{\Delta}\ldots\int f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$-ით აღინიშნება. მაშასადამე, გვაქვს:

$$\iint_{\Delta}\ldots\int f(x_1, x_2 \ldots x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \lim \sum_{i_1}\sum_{i_2}\ldots\sum_{in} f(x_{i_1}, x_{i_2} \ldots x_{i_n})|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}|$$

უკანასკნელი ინტეგრალისათვის სამართლიანია მისი მარტივ ინტეგრალებზე დასაყვანი შემდეგი ფორმულა:

$$\iint\limits_{\Delta}\ldots\int f(x_1, x_2 \ldots x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)dx_n.$$

აქ ყოველი შიგა ინტეგრალის გამოთვლისას იგულისხმება, რომ წინა ნომრის ცვლადები მუდმივ მნიშვნელობებს ინარჩუნებენ.

მრავალჯერადი ინტეგრალის ცნება შეიძლება შეტანილ იქნეს სხვა სახის არეებისათვის n-განზომილებიან სივრცეში (მაგალითად, ბირთვებისა და სხვა "ფორმის" არეებისათვის n-განზომილებიან სივრცეზე), მაგრამ ამ საკითხზე არ შევჩერდებით. განვიხილოთ მხოლოდ ერთი მაგალითი იმის საილუსტრაციოდ, რომ ასეთი ჯერადი ინტეგრალების თეორია ისევე სრულყოფილია, როგორც, მაგალითად, n=1,2 ან 3 -სათვის.

ვთქვათ, B არის 4-განზომილებიანი R რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით 0,(0,0,0,0) წერტილებში. მის შემადგენლობაში შედიან ისეთი (x_1, x_2, x_3, x_4) წერტილები, რომელთათვისაც სამართლიანია $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=R^2$. დავარქვათ (x_1, x_2, x_3, x_4) წერტილის გეგმილი X_1, X_2, X_3 ქვესივრცეში (რომელიც ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი სივრცეა) უკანასკნელის (x_1, x_2, x_3) წერტილს (ის მიიღება

მეოთხე კოორდინატის ჩამოშორებით). B ბირთვის გეგმილი $x_1x_2x_3$ სივრცეზე ვუწოდოთ ამ ბირთვის ყველა წერტილის გეგმილის ერთობლიობას. ეს გეგმილი B', როგორც ადვილი მისახვედრია, სამგანზომილებიანი სივრცის R რადიუსიანი ბირთვი იქნება ცენტრით სათავეში, ე.ი. იქნება იმ $(x_1x_2x_3)$ წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le R^2$.

თუ (x_1,x_2,x_3) ამ ბირთვის "შიგა" წერტილია, ე.ი. $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le R^2$, მაშინ მისი დაფიქსირების შემდეგ მოიძებნება მთელი მონაკვეთი წერტილებისა B-ში, რომელნიც გეგმილდებიან (x_1,x_2,x_3)-ზე. ასეთებია ყველა (x_1,x_2,x_3,x_4) წერტილი, რომელთათვისაც $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \le R^2$, ანუ ყველა ისეთი წერტილი, რომელთა x_4 იცვლება $-\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$-სა და $+\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$-ს შორის. აღვნიშნოთ აქ მიღებული ორი სხვადასხვა სამი ცვალებადის ფუნქცია $\pm\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$, სათანადოდ, $\varphi_1(x_1,x_2,x_3)$-თა და $\varphi_2(x_1,x_2,x_3)$-ით

$$(\text{ე.ი. } \varphi_1(x_1,x_2,x_3) = -\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\,,$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3)\ \sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\,.\,).$$

ეს B არის "ქვემოდან" და "ზემოდან" შემომსაზღვრელი სამგანზომილებიანი "ზედაპირების" განტოლებები, და აი, მსგავსად სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის წესისა, აქაც გვაქვს:

$$\iiiint_B f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 =$$

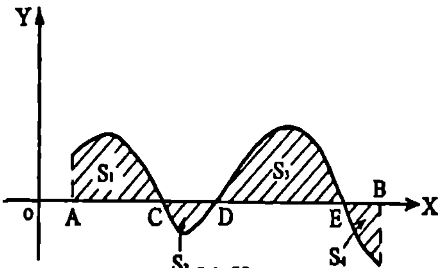
$$=\iiint_{B_1} dx_1dx_2dx_3 \int_{-V\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}}^{+\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_4.$$

ამით ოთხჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის საკითხი დაყვანილია ერთი უბრალო კვადრატულისა და სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლაზე, რისი განხორციელებაც ჩვენ უკვე შეგვიძლია.

ლ ე ქ ც ი ა 24

ინტეგრალური აღრიცხვის გეომეტრიული გამოყენებანი

1. გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ ა ნ ი ფ ა რ თ ო ბ ი ს გ ა მ ო ს ა თ - ვ ლ ე ლ ა დ . ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $[A,B]$ შუალედი და მასზე განსაზღვრული განუწყვეტელი ფუნქცია $f(x)$, რომელიც ნიშანს იცვლის სადღაც, ვთქვათ, C,D,E წერტილებში, ისე როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 52-ზე.



ნახ.52

ასეთ შემთხვევაში, რადგან

$$\int_A^B = \int_A^C f(x)dx + \int_C^D f(x)dx + \int_D^E f(x)dx + \int_E^B f(x)dx,$$

ამიტომ ეს ინტეგრალი, ცხადია, გამოსახავს S_1, S_2, S_3, S_4 ფართობების ალგებრულ ჯამს:

$$\int_A^B f(x)dx = S_1 + S_3 - S_4.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ წრფეზე ცურვის გარეშე მგორავი a რადიუსიანი წრეხაზის რომელიმე p წერტილის მიერ შემოწერილი მრუდი. მას ციკლოიდა ეწოდება. როგორც ცნობილია,

თუ ეს p წერტილი გორვის დასაწყის მომენტში (t=0 მომენტში) კოორდინატთა სათავეშია და გორვა ხდება x ღერძის დადებითი მიმართულებით, ციკლოიდის განტოლება პარამეტრული სახით დაიწერება ასე:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

ამიტომ ციკლოიდის ერთი კალთის მიერ შემოსაზღვრული A ფართობი ტოლია

$$A = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 \frac{t}{2}\right) dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2} dt.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{t}{2} = z$. მაშინ ინტეგრალის გარდაქმნა ჩვენთვის ცნობილი წესით მოგვცემს:

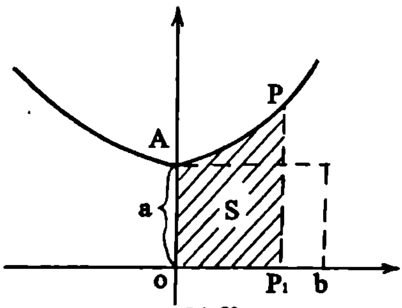
$$A = 4a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 z \cdot 2dz = 16a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 z dz = 16a^2 \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} 3\pi a^2.$$

ამგვარად, ციკლოიდის ერთი კალთის ფართობი 3-ჯერ მეტია იმ წრის ფართობზე, რომლის გორვითაცაა გაჩენილი ეს ციკლოიდა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ მრუდი, რომელიც გამოისახება განტოლებით:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

ამ ფორმას ღებულობს 2 წერტილში დამაგრებული მძიმე ჯაჭვი, თუ დამაგრების წერტილები სიმეტრიულია Y ღერძის მიმართ (ნახ. 53). ამიტომ ამ მრუდს ჯაჭვმრუდს უწოდებენ.



ნახ.53

ავიღოთ მის მარჯვენა რკალზე ნებისმიერი P წერტილი და შევეცადოთ $OAPP_1$-ის ფართობის გამოთვლას. თუ P_1-ის აბსცისა x_1 რიცხვია, საძიებელი ფართობი, ცხადია, უდრის

$$S=\int_{a}^{x_1}\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx.$$

ამიტომ

$$S=\frac{a}{2}\left[ae^{\frac{x}{a}}-ae^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{x_1}=\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ფართობი S ტოლია იმ სწორკუთხედის ფართობისა, რომელსაც ფუძედ აქვს OB, ხოლო სიმაღლედ a, სადაც B არის x ღერძის ის (მარჯვენა) წერტილი, რომელიც A-დან დაშორებულია y_1 მანძილით, სადაც y_1 არის P წერტილის ორდინატი, ე.ი. $y_1=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}}+e^{-\frac{x_1}{a}}\right)$. მართლაც, თუ B ასეთი წერტილია, მაშინ

$$\left|\overline{OB}\right|=\sqrt{y_1^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x_1}{a}}+e^{-\frac{2x_1}{a}}+2\right)-a^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x_1}{a}}+e^{-\frac{2x_1}{a}}-\frac{a^2}{2}\right)}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x_1}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right)^2}=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}}+e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

აქედან კი მართლაც მიიღება, რომ

$$S=a\cdot\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{2}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right)=a\cdot\left|\overline{OB}\right|.$$

გამოვიყენოთ ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა პოლარკოორდინატებში. განვიხილოთ რაიმე მრუდი X,Y სიბრტყეში, რომელსაც, ვთქვათ, ის თვისება აქვს, რომ 0-დან გამოსული ყოველი სხივი მას მხოლოდ ერთ წერტილში ხვდება. ვთქვათ, φ_1 და φ_2 ამ მრუდის ბოლო წერტილების შესაბამისი პოლარული φ კუთხეებია.

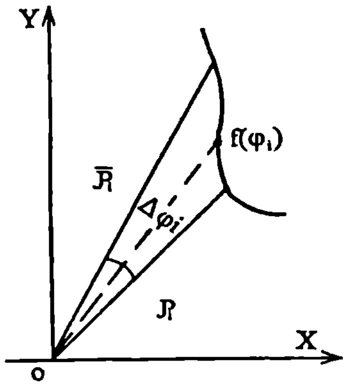
ასეთ პირობებში მრუდის განტოლება, რა თქმა უნდა, $\rho=f(\varphi)$ სახით შეიძლება ჩაიწეროს, სადაც φ იცვლება (φ_1,φ_2) ინტერვალზე. დავანაწილოთ ახლა (φ_1,φ_2) ინტერვალი მცირე $\Delta\varphi_i$ სიგრძის ინტერვალებად და განვიხილოთ $f(\varphi)$ ფუნქციის მნიშვნელობა რომელიმე ამ მცირე i-ურ ინტერვალზე. ვთქვათ, ρ_i და $\overline{\rho_i}$ f ფუნქციის მინიმა და მაქსიმაა მასზე. მაშინ (იხ. ნახ.54) თუ φ_i აღნიშნულ i-ურ ინტერვალზე არის მოთავსებული, გვექნება:

$$\rho_2\le\rho=f(\varphi_i)\le\overline{\rho}_i$$

და ამიტომ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\sum_i\rho_i^2\Delta\varphi_i\le\frac{1}{2}\sum_i f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i\le\frac{1}{2}\sum_i\rho_i^{-2}\Delta\varphi_i \qquad (*)$$

მაგრამ, $\frac{1}{2}\rho_i^2\cdot\Delta\varphi_i$. $\left(\frac{1}{2}\overline{\rho}_i^2\cdot\Delta\varphi_i\right)$ ცხადია, წარმოადგენს ρ_i რადიუსიანი ($\overline{\rho_i}$ -რადიუსიანი) წრიული სექტორის ფართობს, რომლის გაშლის კუთხე $\Delta\varphi_i$ სიდიდეა. ასეთი სექტორების ფართობთა ჯამი, ცხადია, მოგვცემს ჩვენი მრუდითა და მისი უკიდურესი სხივებით შემოსაზღვრულ არეში ჩახაზული (მასზე შემოხაზული) ფიგურის ფართობს, და ეს უკანასკნელნი, როცა $\Delta\varphi_i \to 0$, ყოველი i-სათვის გადაიზრდება იმ ფიგურის S ფართობად, რომელიც შემოსაზღვრულია φ_1, φ_2 სხივებითა და $\rho = f(\varphi)$ მრუდით. მეორე მხრივ, (*) ტოლობაში ზღვარზე გადასვლისას, როცა $\Delta\varphi_i \to 0$, შუა წევრი მოგვცემს



ნახ.54

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi$$

ინტეგრალს.

ჩვენ დავადგინეთ, რომ

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi.$$

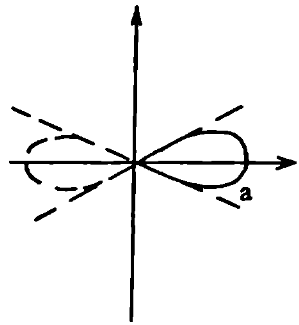
მ ა გ ა ლ ი თ ი : გამოვითვალოთ ე.წ. ბერნულის ლემნისკატის ფართობი, რომლის მარჯვენა ნახევრის განტოლება პოლარკოორდინატებში მოცემულია ტოლობით

$$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi \qquad \left(-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right).$$

ამ მრუდის ფორმა გამოსახულია ნახ. 55-ზე. მის მიერ შემოსაზღვრული ფართობის ნახევარი შეიძლება გამოვითვალოთ ჩვენი ფორმულით:

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t dt=\frac{a^2}{2},$$



ნახ.55

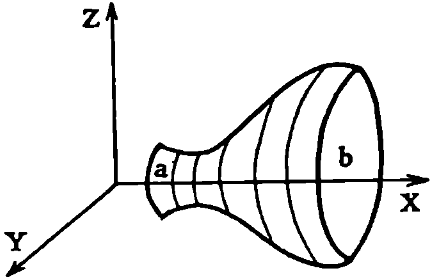
და, მაშასადამე, სრული (რვიანის ფორმის) ლემნისკატით შემოსაზღვრული ფართობი a^2-ის ტოლია.

ლ ე ქ ც ი ა 25

მ რ უ დ ი ზ ე დ ა პ ი რ ი ს ფ ა რ თ ო ბ ი ს გ ა მ ო თ ვ ლ ა

ჯერ განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა (a,b) მონაკვეთზე განუწყვეტელი $y=f(x)$ მრუდი (სადაც f-ს აქვს განუწყვეტელი $f'(x)$ წარმოებული) ბრუნავს ღერძის გარშემო (იხ. ნახ.56). ასე მიიღება გარკვეული ბრუნვითი S ზედაპირი, რომლის ფართობის საკითხის განხილვა გვინდა.

დავყოთ (a,b) მონაკვეთი, ჩვეულებრივ, Δ_i მონაკვეთებად და აღვნიშნოთ y_i-ით $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები Δ_i მონაკვეთების მარცხენა ბოლო წერტილებზე. (x_i,y_i) და (x_{i+1},y_{i+1}) წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი ბრუნვისას შემოწერს ნაკვეთილ კონუსს, რომლის გვერდითი ზედაპირი ტოლია



ნახ. 56

$$2\pi\frac{y_{i+1}+y_i}{2}l_i,$$

სადაც l_i-ამ წაკვეთილი კონუსის მსახველია. მაგრამ l_i არის (x_i,y_i) და (x_{i+1}, y_{i+1}) წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძე და ამიტომ

$$l_i=\sqrt{x_{i+1}-x_i^2+(y_{i+1}-y_i)^2}=(x_{i+1}-x_1)\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2}.$$

მაგრამ ლაგრანჟის თეორემა გვაძლევს:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_1}=f\left(\overline{x_1}\right),$$

სადაც x_i რაღაც წერტილია Δ_i მონაკვეთზე. ამგვარად, აღნიშნული ტეხილით შემოწერილი ზედაპირის ფართობი σ' უდრის

$$\sigma'=\pi\sum_i\left(y_{i+1}+y_i\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)\sqrt{1+f'^2\left(\bar{x}_i\right)},$$

და რადგან $y_i=f(x_i)$, საბოლოოდ,

$$\sigma'=\pi\sum_i f\left(x_{i+1}\right)\sqrt{1+f'^2\left(\bar{x}_i\right)}\left(x_{i+1}-x_i\right)+$$
$$+\pi\sum_i f\left(x_i\right)\sqrt{1+f'^2\left(\bar{x}_i\right)}\left(x_{i+1}-x_i\right),$$

თუ აქ $f(x_{i+1})$ და $f(x_i)$ მნიშვნელობებს შევცვლით $f\left(\overline{x_i}\right)$ რიცხვებით, გვექნება

$$\sigma'=\pi\sum_i f(\overline{x_i})\sqrt{1+f'^2(\overline{x_i})}(x_{i+1}-x_i)+\delta,$$

სადაც δ ჯამია, რომლის ყოველ შესაკრებში მამრავლებად შევა ან $f(x_i)-(\overline{x_i})$ სხვაობა ან $f(x_{i+1})-(\overline{x_i})$. ცხადია, ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta>0$, რომ როცა $|x_{i+1}-x_i|>\eta$, გვექნება $|f(x_{i+1})-f(\overline{x_i})|<\varepsilon$, $|f(x_{i+1})-f(\overline{x_i})|<\varepsilon$, და ამიტომ

$$|\delta|\le 2\varepsilon\sum_i\sqrt{1+f'^2(\bar{x}_i)}(x_{i+1}-x_i)\le 2\varepsilon M(b-a),$$

სადაც $M=\max\sqrt{1+f'^2(x)}$, როცა $a\le x\le b$. ამიტომ, საბოლოოდ, მჭიდრო დანაწილებისათვის გვექნება $|\delta|\le 2\varepsilon\cdot M\cdot(b-a)$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\delta\to 0$, როცა ყველა $x_{i+1}-x_i\to 0$.

ასეთ პროცესში, ცხადია, σ' ჯამის პირველი შესაკრები მარჯვენა მხარეში გვაძლევს $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ ინტეგრალს. მაშასადამე, ვაჩვენეთ, რომ არსებობს

$$\lim\sigma'=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

მეორე მხრივ, სწორედ σ' სიდიდის ზღვარს (როგორც ჩვენს ბრუნვით ზედაპირში ჩაწერილი ტეხილების ბრუნვით მიღებული ზედაპირების ფართობების ზღვარს) ვუწოდოთ ბრუნვითი S' ზედაპირის σ ფართობი. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ საძიებელი სიდიდისათვის ასეთი ფორმულა

$$\sigma=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ და $y=f(x)$ აღნიშვნებს, გვექნება

$$\sigma = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

მაგრამ $\sqrt{dx^2+dy^2}$ სიგრძის ds ელემენტია $y=f(x)$ მრუდზე. ამიტომ ბრუნვითი ზედაპირის σ ფართობი ასეთი ფორმულითაც შეიძლება გამოვსახოთ:

$$\sigma = 2\pi\int_0^L y\,ds,$$

სადაც s საწყისი $(u,f(a))$ წერტილიდან მრუდზე ცვალებადი $(x,f(x))$ წერტილამდე მიღებული რკალის სიგრძეა, რომელიც $(0,L)$ ინტერვალზე იცვლება, სადაც L მთელი $y=f(x)$ მრუდის სიგრძეა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: გამოვითვალოთ ციკლოიდის

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

x ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, უკვე გამოყვანილი ფორმულის თანახმად, უდრის

$$\sigma = 2\pi\int_{t=0}^{t=2\pi} y(t)\sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+1}\,dt = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt,$$

და მარტივი გამოთვლა გვაძლევს, რომ $\sigma = \frac{64}{3}\pi a^2$.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი პრობლემა არა ბრუნვითი, არამედ რაღაც ნებისმიერი გლუვი ზედაპირის ფართობის გამოთვლის შესახებ.

ვთქვათ, მოცემულია S ზედაპირი თავისი გაუსის კოორდინატების საშუალებით:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(u,V) \\ y = \varphi(u,V) \\ z = \psi(u,V) \end{cases}$$

სადაც ეს სამივე ორი ცვალებადის ფუნქცია განუწყვეტელი და განუწყვეტლად წარმოებადია u და v-ს მიმართ რაღაც D არეში u,v სიბრტყისა.

დავანილოთ D არე მცირე "მართკუთხედებად". ავიღოთ, კერძოდ, D-ში Δ_i მართკუთხედი, რომელიც აგებულია (u_i,v_i), $(u_i+\Delta u,v_i)$, $(u_i,v_i+\Delta v)$ და $(u_i+\Delta u,v_i+\Delta v)$ წვეროებზე. (1) გარდაქმნა მოგვცემს მრუდ ω_i "ოთხკუთხედს" S ზედაპირზე, "წვეროებით":

$$A_i = (f(u_iV_i), \varphi(u_iV_i), \psi(u_iV_i)),$$

$$B_i = (f(u_i+\Delta u,V_i), \varphi(u_i+\Delta u,V_i), \psi(u_i+\Delta u,V_i)),$$

$$C_i = (f(u_iV_i+\Delta V_i), \varphi(u_iV_i+\Delta V_i), \psi(u_iV_i+\Delta V_i)),$$

$$D_i = (f(u_i+\Delta u,V_i+\Delta V), \varphi(u_i+\Delta u,V_i+\Delta V), \psi(u_i+\Delta u,V_i+\Delta V))$$

ამიტომ გამოსავალი ოთხკუთხედის ფართობი $\Delta u\cdot\Delta v$ გარდაიქმნება A_iB_i და A_iC_i მონაკვეთზე აგებული "პარალელოგრამის" ფართში. მაგრამ უკანასკნელი მონაკვეთები მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეთა სიზუსტით არიან

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_iV_i)\Delta U, \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_iV_i)\Delta u, \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_i,V_i)\Delta u\right)$$

და

$$\left(\frac{\partial f}{\partial V}(u_iV_i)\Delta U, \frac{\partial\varphi}{\partial V}(u_iV_i)\Delta u, \frac{\partial\psi}{\partial V}(u_i,V_i)\Delta u\right)$$

მონაკვეთები. მათზე ω_i აგებული პარალელოგრამის ფართობი დაახლოებით გვაძლევს:*

ფართ.

$$\omega_i = \sqrt{(\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u)^2 + (\psi_u f_v - \psi_v f_u)^2 + (f_u\varphi_v - f_v\varphi_u)^2}\cdot\Delta u\cdot\Delta V.$$

მაგრამ, როგორც დიფერენციალური გეომეტრიის კურსიდან ვიცით, ეს გამოსახულება ტოლია

$$\text{ფართ. } \omega_i = \left(\sqrt{EG - F^2}\right)\cdot\Delta u\cdot\Delta V$$

სიდიდისა,

სადაც $E = f_u^2 + \varphi_u^2 + \psi_u^2, G = f_v^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2, \ F = f_u f_v + \varphi_u\varphi_v + \psi_n\psi_v,$ ხოლო ინდექსი i ფრჩხილებს გარეთ ნიშნავს, რომ ეს ფესვი გამოთვლილია (u_i, v_i) წერტილში.

ახლა, ცხადია, რომ ყველა ω_i ფარავს S-ს, და ამიტომ მათი ფართობების ჯამის ზღვარს, ბუნებრივია, ვუწოდოთ S' ზედაპირის ფართობი. მივიღებთ:

$$\text{ფართობი } S = \lim\sum_i\left(\sqrt{EG - F^2}\right)_i\Delta u\Delta v = \iint_D\sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

ესაა S ზედაპირის ფართობის საძიებელი ფორმულა.

კ ე რ ძ ო შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა . თუ S ზედაპირი მოცემულია $z=f(x,y)$ ტოლობით, შეგვიძლია მივიღოთ $x=u$, $y=v$, $z=f(x,y)$. ამიტომ გვექნება:

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1 + 0 + f_u^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 1 + \rho^2,$$

---

* აქ $\varphi_u, \varphi_v, \ldots$ აღნიშნავენ $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \ldots$ კერძო წარმოებულებს.

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 1 + 0 + f_v^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1 + q^2,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0 + 0 + pq = pq.$$

მაშასადამე,

$$EG - F^2 = \left(1 + p^2\right)\left(1 + q^2\right) - p^2 q^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

ამგვარად, ასეთი ზედაპირის σ ფართობისათვის გვაქვს ფორმულა

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \cdot dxdy.$$

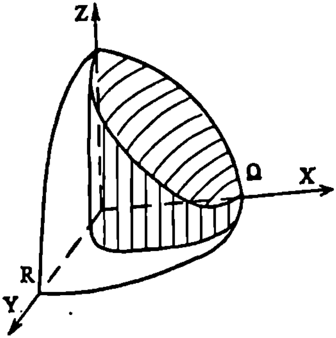
ლ ე ქ ც ი ა 2 6

ვივიანის ამოცანა

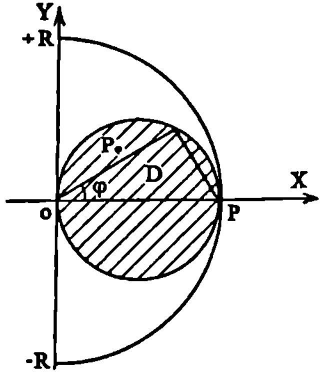
განვიხილოთ $XOYZ$ სივრცეში R-რადიუსიანი K სფერო (იხ. ნახ.57) ცენტრით კოორდინატთა O=(0,0,0) სათავეში და ამ სფეროთი შემოსაზღვრული M ბირთვი. K სფეროს გადაკვეთის წერტილი X ღერძის დადებით ნახევართან აღვნიშნოთ P-თი. ცხადია, $P=(R,0,0)$ ავაგოთ XOY სიბრტყეში C წრეხაზი OP დიამეტრზე. ავაგოთ ცილინდრი C-ზე Z ღერძის პარალელური მსახველებით. ეს ცილინდრი M ბირთვიდან ამოკვეთს გარკვეულ Ω არეს და K სფეროდან გარკვეულ S ზედაპირს. გამოვითვალოთ Ω-ს $|\Omega|$ მოცულობა და S ზედაპირის σ ფართობი (ვივიანის ამოცანა).

განვიხილოთ საჭირო სურათი XY სიბრტყეში (იხ. ნახ. 58).

ცხადია, საძიებელ Ω მოცულობას და S ზედაპირს XY სიბრტყეში აქვს საერთო R დიამეტრის მქონე წრიული გეგმილი, რომლის შიდა ნახევარი ნახ. 58-ზე D-თია აღნიშნული.



ნახ. 57



ნახ. 58

თუ სივრცის მხოლოდ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ მერვედით დავკმაყოფილდებით, ცხადია, გვექნება:

$$\frac{|\Omega|}{4} = \iint_D z dxdy$$

და

$$\frac{\sigma}{4} = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy,$$

სადაც $Z(x,y)$ წარმოადგენს K^D სფეროს განტოლებიდან $x^2+y^2+z^2=R^2$ z-ის ამოხსნით მიღებულ ფუნქციას დადებითი ნიშნით, ე.ი. $Z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ((x,y) წერტილი ეკუთვნის D ნახევარწრეს).

$\frac{|\Omega|}{4}$-ის გამოსათვლელად შემოვიტანოთ პოლარ კოორდინატები D-ზე: $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, მაშინ გვექნება $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ და თუ გვინდა D-ში დავრჩეთ, უნდა ჩავთვალოთ, რომ φ იცვლება $\left[0, \pi/2\right]$ საზღვრებში, ხოლო ρ იცვლება ასეთი φ–სათვის 0-დან $R\cos\varphi$–მდე. ამიტომ

$$\frac{|\Omega|}{4}=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left[R^2-\rho^2\right]^{3/2}\Big|_0^{R\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(R^3-R^3\sin^3\varphi\right)d\varphi=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

საბოლოოდ, Ω არის მოცულობისათვის ვღებულობთ

$$|\Omega|=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3.$$

ახლა გამოვითვალოთ $\frac{\sigma}{4}$.

შევნიშნოთ, რომ $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ გვაძლევს $z_x=-\frac{x}{z}$, $z_y=-\frac{y}{z}$ და ამიტომ

$$1+z_x^2+z_y^2=\frac{z^2-x^2-y^2}{z^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{\sigma}{4}=\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

პოლარ კოორდინატებზე გადასვლა გვაძლევს:

$$\frac{\sigma}{4}=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\int\limits_0^{\pi/2}\left[-R\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^{R\cos\varphi}d\varphi.$$

აქედან მარტივად ვღებულობთ, რომ

$$\sigma=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

განსაზღვრულ ინტეგალთა გამოთვლა სასრული სახით მხოლოდ იშვიათ შემთხვევაში ხერხდება. ეს განსაკუთრებით ადვილია, როცა საინტეგრაციო ფუნქციის პირველყოფილი გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში. მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა უბრალოდ მიიღება პირველყოფილში საზღვრების ჩასმის განხორციელებით. როცა ეს ხერხი არ გამოდგება, ცდილობენ $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნას. ამ მიმართულებით არსებობს სხვადასხვა ხერხები. მთავარი მიდგომა ასეთია: $f(x)$-ის ნაცვლად იღებენ მეორე $\varphi(x)$ ფუნქციას, რომელიც გარკვეული აზრით ახლოსაა $f(x)$-თან და ისეთს, რომლის ინტეგრალი $\int_a^b \varphi(x)dx$ ადვილად გამოითვლება. ამ უკანასკნელს ღებულობენ ძირითადი ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობად.

შევეცადოთ ერთი ასეთი ხერხის განხორციელებას. დავანაწილოთ (a,b) მონაკვეთი წერტილთა $u=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ სისტემით და მოვძებნოთ ისეთი n-ური ხარისხის $\varphi(f)$ პარაბოლა (n ხარისხის მრავალწევრი), რომელიც გადის $y=f(x)$ მრუდის

$$(x_0, y_0)=(a, f(a)), (x_1 f(x_1)), \ldots, (x_{n-1}, f(x_n-1)), (x_n, f(x_n))=(b, f(b))$$

წერტილებზე. ვთქვათ, $\varphi(x)$-ის (ჯერჯერობით უცნობი) კოეფიციენტები $a_0, a_1, \ldots, a_n$ რიცხვებია, ე.ი. ვთქვათ,

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \qquad (1)$$

მაშინ ჩვენი პირობები გვაძლევს:

$$\left.\begin{array}{l} a_o+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_o^n=f(x_0) \\ a_o+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n=f(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_o+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n=f(x_n) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

ეს ტოლობები წარმოადგენენ $n+1$ უცნობიან (ესენია $a_0, a_1, ..., a_n$) განტოლებათა ხაზოვან სისტემას, რომლის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია, როცა $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$) (როგორც ჩვენ ამას ვითხოვთ), ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვებია. მართლაც, ამ სისტემის დეტერმინანტი ცნობილი ვანდერმონდის

$$\begin{vmatrix} 1, x_0, x_0^2, ... x_0^n \\ 1, x_1, x_1^2, ... x_1^2 \\ .... \\ 1, x_n, x_n^2, ... x_n^n \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტია, რომელიც, როგორც ცნობილია $\neq 0$. ამოვხსნით რა ამ სისტემას $a_0, a_1, ..., a_n$ უცნობების მიმართ, შევადგენთ (1) სახის $\varphi(f)$ პოლინომს, რომელსაც $f(x)$ ფუნქციის საინტერპოლაციო პოლინომი ეწოდება$(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1)),...,(x_n,f(x_n))$ კვანძებით და რომელიც ერთადერთი ისეთი, არა უმეტესი, ვიდრე n-ხარისხის კოლინოზია, რომლის $y=\varphi(x)$ მრუდი გადის ყველა აღნიშნულ კვანძზე. ამის შემდეგ, ნაცვლად $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალისა, გამოვითვლით მის მიახლოებით მნიშვნელობას, რომელიც, რა თქმა უნდა, ადვილი გამოსათვლელია.

მაგრამ სიძნელე ის არის, რომ a_i $(i=0,1,...,n)$კოეფიციენტების მოძებნა (2) სისტემიდან, როცა n დიდი რიცხვია, გარკვეულ სირთულეს წარმოადგენს. მეორე მხრივ ლაგრანჟს ეკუთვნის ხერხი, რომელიც საშუალებას იძლევა დავწეროთ საძიებელი $\varphi(f)$ პოლინომი ისე, რომ ფაქტიურად არ გამოვითვალოთ a_i $(i=0,1,...,n)$ კოეფიციენტები (2) სისტემიდან. განვიხილოთ ამ მიზნით შემდეგი ($n+1$ ცალი) n ხარისხის $X_0(x), X_1(x), X_n(x)$, პოლინომები:

$$x_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)..(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)..(x_0-x_n)},$$

$$x_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)..(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)..(x_1-x_n)},$$

....

$$x_k(x)=\frac{(x-x_0)..(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})..(x-x_n)}{(x_k-x_0)..(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})..(x_k-x_n)},^*$$

....

$$x_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)..(x_n-x_{n-1})}.$$

ცხადია, რომ ყოველი $X_k(x)$, წარმოადგენს n ხარისხის პოლინომს და, ამასთან, ყოველ მათგანს გააჩნია ის თვისება, რომ

$$x_k(x_i)=0,$$

როცა $0\le k\le n$ და $i\neq k$, და $x_k(x_k)=1$.

ეს ტოლობები ელემენტარულად მოწმდება. ახლა ავიღოთ რაღაც $y_0, y_1, \dots y_n$ რიცხვები და შევადგინოთ

$$P(x)=y_o x_o(x)+y_1x_1(x)+\dots+y_nx_n(x)$$

ცხადია, ეს $P(x)$ აგრეთვე პოლინომია, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს და $P(x_i)=y_i$ ყოველი i-სათვის $(i=0,1,\dots,n)$.

მართლაც, თუ x-ის ნაცვლად $P(x)$-ში შევიტანთ x_i რიცხვს (სადაც $0\le i\le 1)$) გვექნება:

$$P(x_i)=y_oX_o(x_i)+y_1X_1(x_i)+\dots+y_iX_i(x_i)+\dots+y_nX_n(x_i)$$

მაგრამ ყოველი $X_k(x_i)=0$ თუ $k\neq i$ და მხოლოდ $X_i(x_i)=1$. ამიტომ გვექნება:

---

* შევნიშნოთ, რომ $X_k(x)$ პოლინომის მრიცხველში არ მონაწილეობს $x-x_k$ მამრავლი, ხოლო მნიშვნელი მიიღება მრიცხველიდან, როცა x-ის მაგივრად მასში x_k ჩაისმება.

$$P(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,...n)$$

ამ პოლინომს ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი ეწოდება. (x_0,y_0), (x_1,y_1),..., (x_n,y_n) კვანძებით. ყოველი ასეთი კვანძებისათვის ეს ერთადერთი ისეთი პოლინომია, რომელსაც აქვს n-ზე არაუმეტესი ხარისხი და $y=P(x)$ გადის ყველა ამ კვანძზე. ახლა ჩვენთვის საინტერესო $\varphi(f)$ ფუნქცია, ცხადია, დაიწერება

$$\varphi(x) = f(x_0)X_0(x) + f(x_1)X_1(x) + ... + f(x_n)X_n(x)$$

სახით, და $\int_a^b f(x)dx$-ისათვის მივიღებთ მიახლოებით ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_0)\int_a^b X_0(x)dx + f(x_1)\int_a^b X_1(x)dx + ... + f(x_n)\int_a^b X_n(x)dx.$$

შევნიშნოთ, რომ მარჯვენა მხარის ყველა აქ განხილულ ინტეგრალს სასურველია მივცეთ სტანდარტული სახე; ამ მიზნით ავიღოთ $X_i(x)$ და განვიხილოთ x ცვლადის შემდეგი სახის გარდაქმნა:

$$x = a + t(b-a)$$

მაშინ $t = \dfrac{x-a}{b-a}$ და $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$ კვანძები გარდაიქმნება სათანადოდ

$$\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{x_1 - a}{b-a}, \theta_2 = \frac{x_2 - a}{b-a}, ..., \theta_n = 1.$$

კვანძებში. ამასთან, $dx=(b-a)dt$ და $t=0$ გვაძლევს $x=a$; $t=1$ გვაძლევს $x=b$. ამიტომ

$$\int_a^b X_i(x)dx \approx$$

$$\approx (b-a)\int_0^1 \frac{t(t-\theta_1)..(t-\theta_{i-1})(t-\theta_{i+1})..(t-\theta_{n-1})(t-1)}{\theta_i(\theta_i-\theta_1)..(\theta_i-\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i+1})..(\theta_i-\theta_{n-1})(\theta_i-1)}dt.$$

ამგვარად, საბოლოოდ, თუ θ_i აღნიშნავენ $\dfrac{x_1-u}{b-a}$ სიდიდეებს (როცა i=0, 1,...n), ინტეგრალის მიახლოებითი ფორმულა გვაძლევს:

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_0^1 \frac{t(t-\theta_1)...(t-\theta_{i-1})(t-\theta_{i+1})...(t-1)}{\theta_i(\theta_i-\theta_1)...(\theta_i-\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i+1})...(\theta_i-1}dt,$$

(სადაც, სხვათა შორის, $\theta_0=0, \theta_1=1$).

მ ა გ ა ლ ი თ ი : ავილოთ შემთხვევა, როცა n=2 და მივილოთ (a,b) შუალედში კვანძებად $x_0=a, x_1=\dfrac{a+b}{2}, x_2=b.$

ასეთ შემთხვევაში გვექნება სულ სამი θ_i :

$$\theta_0=0, \qquad \theta_1=\frac{\frac{b+a}{2}-a}{b-a}=\frac{1}{2}, \qquad \theta_2=1.$$

გამოსათვლელია სამი ინტეგრალი:

$$\int_0^1 \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)}dt=\int_0^1 (2t-1)(t-1)dt=\int_0^1 \left(2t^2-3t+1\right)dt=\frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{t(t-1)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}dt = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \qquad \text{და} \qquad \int_0^1 \frac{t\left(t-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}dt = \frac{1}{6}.$$

ამის გამო ასეთი სამკვანძიანი ინტერპოლაცია გვაძლევს ინტეგრალის შემდეგ მიახლოებით მნიშვნელობას:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{f(a)}{6} + \frac{4f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{6} + \frac{f(b)}{6}\right]$$

(კოტესის ფორმულა).

ახლა გამოვიყვანოთ განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი ფორმულა, რომელიც სიმპსონის სახელს ატარებს. ამისათვის დავანაწილოთ ინტეგრაციის (a,b) შუალედი $2n$ თანასწორ ნაწილად წერტილებით:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1} b = x_{2n},$$

სადაც $x_i = a + i\dfrac{b-a}{2n}(i = 0,1,\ldots 2n)$.

აღვნიშნოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი ამ საკვანძო წერტილებში $y_i = f(x_i)$ ასოებით. განვიხილოთ (a,b) შუალედის შემდეგი n ქვეშუალედი (a,x_2), (x_2,x_4),...,(x_{2n-4},x_{2n-2}), (x_{2n-2},b) ყოველ ამ შუალედში, რამდენადაც x_1 არის (a,x_2)-ის შუა წერტილი, x_3 არის (x_2,x_4) ის შუა წერტილი და ა.შ., x_{2n-1} არის (x_{2n-2},b) შუალედის შუა წერტილი, შეგვიძლია გამოვიყენოთ კოტესის უკვე გამოყვანილი მიახლოებითი ფორმულა. ასე მივიღებთ ტოლობებს:

$$\int_a^{x_2} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_3 + y_4),$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_n)$$

ამ ფორმულების შეკრება მოგვცემს მიახლოებით ფორმულას.

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})]$$

ამ ფორმულას სიმპსონის ფორმულა, ენოდება. ის, განსაკუთრებით მაშინ, როცა n საკმაოდ დიდია, ძალიან კარგ მიახლოებას გვაძლევს.

კარგ მიახლოებას გვაძლევს უკვე კოტესის ზემომოყვანილი ფორმულაც. მაგალითად, $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$-სათვის, რომლის ზუსტი მნიშვნელობა უდრის 1-ს. კოტესის ფორმულა, რადგან $x_0=0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$ და, მაშასადამე, $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = 1$, გვაძლევს

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx \approx \frac{\pi}{12}(2\sqrt{2} + 1).$$

ცხრილების გამოყენებით უკანასკნელი გამოსახულება დაახლოებით ტოლია $\frac{11,9948}{12}$-სა.

ლექცია 27

ტრიგონომეტრიული მწკრივები

ტრიგონომეტრიული მწკრივი ეწოდება შემდეგი სახის მწკრივს:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

სადაც a_0, $a_1,...,a_n,...$; b_1, $b_2,...b_n...$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია (აქ $\frac{a_0}{2}$-ს, რომელიც ასეთი სახით ჩაწერილია ტექნიკური მოხერხებულობის მიზნით, ამ მწკრივს თავისუფალი წევრი ეწოდება; $\sum_{k=1}^{\infty}$ შეჯამების ნიშნის ქვეშა ფრჩხილები არ გამოიყენება, თუმცა, რა თქმა უნდა, იგულისხმება, რომ შეჯამება ეხება სინუსების შემცველ წევრებსაც).

ისმება კითხვა: რა დამოკიდებულება არსებობს ამ მწკრივის კოეფიციენტებსა და მის ჯამს შორის, თუ (1) კრებადი მწკრივია.

სანამ ამ ძირითადი საკითხის გარკვევაზე გადავიდოდეთ, დავადგინოთ ზოგიერთი აუცილებელი ტოლობა.

ვაჩვენოთ, რომ

I. $\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin xdx=0,$ როცა და $m\neq n$ და m და n მთელებია.

II. $\int_0^{2\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx=0,$ „————————“

III. $\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\cos dx=0,$ ყოველი m, n-სათვის, როცა ისინი მთელებია.

IV. $\int_0^{2\pi}\sin^2 mxdx=\int_0^{2\pi}\cos^2 mxdx=\pi$, ყოველი მთელი m რიცხვისათვის, თუ $m\geq 1$ (შევნიშნოთ, რომ, როცა m=0, პირველი ამ ინტეგრალთაგან ტოლია ნულისა, ხოლო მეორე უდრის 2π -ს).

ყველა ეს ტოლობა ერთნაირი ხერხით დგინდება და ამიტომ ვაჩვენოთ, როგორ მიიღება, მაგალითად, I,III და ერთ-ერთი IV ტოლობებიდან. სხვა შემთხვევების განხილვას მკითხველს ვანდობთ.

დავამტკიცოთ ჯერ I. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\right]$$

და ამიტომ

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m+n)xdx-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m-n)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi}=0.$$

ახლა შევამოწმოთ III ტოლობა. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ $\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]$ და, მაშასადამე,

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(m+n)xdx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(m-n)xdx=$$

$$
=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi}, & \text{როცა} \quad m\neq n,\\ \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2mx}{2m}\right]_0^{2\pi}, & m=n.\end{cases}
$$

მაგრამ ჩასმის შედეგი ორივე შემთხვევაში მოგვცემს 0-ს. ბოლოს განვიხილოთ

$$
\int_0^{2\pi}\cos^2 mxdx=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dx+
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2mxdx=\pi+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2mx}{2m}\right]_0^{2\pi}=\pi+0=\pi.
$$

ამ ტოლობების შემოწმების შემდეგ განვიხილოთ (1) მწკრივი და ვიგულისხმოთ, რომ ის თანაბრად კრებადია მთელს $[0,2\pi]$ შუალედზე[1] და აღვნიშნოთ მისი ჯამი $f(x)$-ით.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ მწკრივის გამრავლება *cosmx* ან sin*nx* მამრავლზე არ დაარღვევს მწკრივის თანაბარ კრებადობას. მართლაც, (1)-ის თანაბარი კრებადობა ნიშნავს იმას, რომ ნებისმიერი ε>0 რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი N(ε), რომ როცა $n\geq N(\varepsilon)$, გვექნება $\left|\sum_{k=n}^{\infty}\cos kx+bk\sin kx\right|<\varepsilon$, ყველგან $[0,2\pi]$ შუალედზე. მაგრამ ასეთ დროს, გვექნება:

[1] ასეთ შემთხვევაში, იმის გამო, რომ ამ მწკრივის წევრები პერიოდული ფუნქციებია 2π პერიოდით, ცხადია, ეს მწკრივი თანაბრად კრებადი იქნება მთელს $(-\infty,+\infty)$ შუალედზედაც.

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\sin x(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|=|\sin nx|\cdot\left|\sum_{k=n}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{k=n}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right|<\varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს,რომ თანაბრად კრებადია აგრეთვე

$$\frac{G_0}{2}\sin nx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\sin nx+b_k\sin kx\sin nx$$

მწკრივიც. მეორე მხრივ, ამ მწკრივის ჯამი, ცხადია, $f(x)\sin x$ ფუნქციაა.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ

$$f(n)\sin nx=\frac{G_0}{2}\sin nx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\sin nx+b_k\sin kx\sin nx,$$

სადაც მთელი $n\ge 1$.

ასევე შემოწმდება, რომ

$$f(x)\cos mx=\frac{a_0}{2}\cos mx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\cos mx+b_k\sin kx\sin mx,$$

ყოველი მთელი $m\ge 0$ -სათვის.

ზემონათქვამის ძალით, უკანასკნელი ორივე მწკრივი თანაბრად კრებადია და, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია მათი წევრ-წევრა ინტეგრაცია $[0,2\pi]$ მონაკვეთზე. მივიღებთ:

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin mxdx=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin nxdx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^{2\rho}[\cos kx\sin nxdx+$$

$$+b_k\int_0^{2\pi}\sin kx\sin nxdx]$$

და

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos mxdx=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos mxdx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left[\int_0^{2\pi}\cos kx\cos mxdx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\sin kx\cos mxdx\right].$$

მაგრამ I, II, III, IV თვისებების თანახმად, აქედან, ვინაიდან მარჯვენა მხარეში მხოლოდ თითო ინტეგრალი გადარჩება განულებას, მივიღებთ:

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\pi b_n\,(n\geq 1)$$

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos mxdx=\pi a_m\,(m\geq 1)$$

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}2\pi=a_0\pi$$

(შემთხვევა m=0 წინა გამოსახულებაში).

ამგვარად, საბოლოოდ ვღებულობთ: თუ (1) ტრიგონომეტრიული მწკრივი თანაბრად კრებადია $[0,2\pi]$ შუალედზე და $f(x)$ აღნიშნავს ამ მწკრივის ჯამს, მაშინ

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos mxdx,\quad (m\geq 0),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \quad (m \geq 1). \tag{2}$$

ამ კოეფიციენტებს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ეწოდება. ახლა განვიხილოთ, საზოგადოდ, რაიმე განუწყვეტელი $f(x)$ ფუნქცია განმარტებული $[0,2\pi]$ შუალედზე. ცხადია, მისთვის შეიძლება გამოვითვალოთ (2) ფორმულებით განსაზღვრული $a_m(m \geq 0)$ და $b_m(m \geq 1)$ ფურიეს კოეფიციენტები. ამის შემდეგ შეგვიძლია შევადგინოთ ამ კოეფიციენტებიანი

$$\frac{G_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{3}$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი.მას $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ეწოდება. ის, რაც აქამდე დავამტკიცეთ, შემდეგი შინაარსის დებულებაა: თუ (1) ტრიგონომეტრიული მწკრივი თანაბრად კრებადია $[0,2\pi]$ შუალედზე და $f(x)$ აღნიშნავს ამ მწკრივის ჯამს, მაშინ (1) მწკრივი არის $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

ახლა სულ სხვანაირად დავსვათ საკითხი. განვიხილოთ ნებისმიერი განუწყვეტელი $f(x)$(ან უფრო ზოგადად, რაიმე ისეთი ფუნქცია* $f(x)$, რომელსაც შესაძლებელია ჰქონდეს წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობა, მაგრამ ისე, რომ მისი ინტეგრაცია შესაძლებელი იყოს $[0,2\pi]$ შუალედზე). გამოვითვალოთ ამ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები (2) ფორმულებით და შევადგინოთ მისი ფურიეს (3) მწკრივი. კრებადია თუ არა (3) მწკრივი და თუ ეს ასეა, რა კავშირი აქვს (3)-ის ჯამს $f(x)$ ფუნქციასთან?

ეს ფურიეს მწკრივთა თეორიის ძირითადი საკითხია და მისი გადაწყვეტის მიზნით წინასწარ მოგვიხდება გარკვეული სახის (ე.წ. დირიხლეს) ინტეგრალის ყოფაქცევის შესწავლა.

---

* ეს პირობები დაზუსტებულია ქვემოთ, დირიხლეს პირობების სახელწოდებით.

ავიღოთ რაღაც $[a,b]$ შუალედი და მასზე განსაზღვრული $\varphi(x)$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ $\varphi(x)$ აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს $[a,b]$-ზე, თუ: 1) $\varphi(x)$ შემოსაზღვრულია $[a,b]$-ზე. 2) მთელი $[a,b]$ შეიძლება დავანაწილოთ სასრული რაოდენობა წერტილებით $a<x_1<x_2<...<x_p<b$, ისე, რომ თითოეულ შუალედზე (a,x_1), $(x_1,x_2),...,(x_p,b)$ ეს ფუნქცია იყოს მონოტონური. 3) $\varphi(x)$ ფუნქციას $[a,b]$-ზე შესაძლებელია ჰქონდეს სასრული რიცხვი წყვეტის წერტილებისა, რომლებიც პირველი გვარისაა, ე.ი. წყვეტის რომელიმე x წერტილში უნდა არსებობდეს $\varphi(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან $\varphi(\bar{x}-0)$ და ზღვარი მარჯვნიდან – $\varphi(\bar{x}+0)$.

ახლა განვიხილოთ ასეთი $\varphi(x)$ ფუნქცია და ავიღოთ მისი ე.წ. დირიხლეს ინტეგრალი $\int_a^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx$, სადაც m რაიმე მთელი რიცხვია.

წინასწარ შევისწავლოთ უფრო მარტივი ინტეგრალის, კერძოდ, $\int_a^b \frac{\sin mx}{x}dx$ ინტეგრალის ყოფაქცევა.

ვაჩვენოთ, რომ, როცა $x=0$ წერტილი მდებარეობს $[a,b]$ მონაკვეთის გარეთ, ანუ, როცა $0<a<b$, ან $a<b<0$, მაშინ

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx=0.$$

მართლაც, ვთქვათ ადგილი აქვს პირველ შემთხვევას (მეორე შემთხვევა ანალოგიურად განიხილება), ე.ი. $0<a<b$, აქ $\frac{1}{x}$ კლებადი ფუნქციაა $[a,b]$ შუალედზე და ამიტომ, საშუალო მნიშვნელობა. მეორე თეორემა გვაძლევს:

$$\int_a^b \frac{\sin mx}{x}dx=\frac{1}{a}\int_a^{\xi}\sin mxdx=\frac{\cos ma-\cos \xi m}{ma},$$

სადაც ξ რაღაც წერტილია: $a<\xi<b$. მაგრამ ამ ტოლობის მრიცხველი აბსოლუტური სიდიდით არ აღემატება 2-ს, მაშინ როცა

$m \to \infty$, აქედან გამომდინარეობს სასურველი დასკვნა. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a<b<0$. ასეთ შემთხვევაში (რადგან $\frac{\sin mx}{x}$ ლუწი ფუნქციაა) გვექნება

$$\int_a^b \frac{\sin mx}{x}dx = \int_{-b}^{-a} \frac{\sin mx}{x}dx \quad \text{და} \quad 0<-b<-a;$$

ამიტომ კვლავ გვექნება: $\lim\limits_{m\to\infty}\int_a^b \frac{\sin mx}{x}dx = 0.$

ახლა განვიხლოთ ის შემთხვევა, როცა ინტეგრალის ერთ-ერთი საზღვარი 0-ის ტოლია. ვთქვათ, კერძოდ, $a=0<b$. დავამტკიცოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში $\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}dx = \pi/2.$

მართლაც, აღნიშვნა $mx=y$ გვაძლევს

$$\int_0^b \frac{\sin mx}{x}dx = \int_0^{mb} \frac{\sin y}{y}dy,$$

და, ცხადია, რომ, როცა $m \to \infty$, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ, როცა $a<0=b$,

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^0 \frac{\sin mx}{x}dx = \pi/2.$$

ახლა გადავიდეთ დირიხლეს ინტეგრალის შესწავლაზე. როგორც უკვე აღვნიშნავდით, ასე ეწოდება ინტეგრალს $\int_a^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx$, სადაც $\varphi(x)$ ნებისმიერი კლებადი ფუნქციაა. აღვნიშნოთ $\varphi(a+0)$ და $\varphi(b-0)$-ით $\varphi(x)$ ფუნქციის ზღვარი სათანადოდ, a წერტილში მარჯვნიდან და b წერტილში მარცხნიდან. გამოვიყენოთ ვეიერშტრასის ფორმულა:

$$\int_a^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx = \varphi(a+0)\int_a^{\xi} \frac{\sin mx}{x}dx + \varphi(b-0)\int_{\xi}^{b} \frac{\sin mx}{x}dx,$$

სადაც $a<\xi<b$. ვთქვათ, მაგალითად, $0<a<b$. (ან $a<b<0$). მაშინ a,ξ და ξ,b დადებითებია (სათანადოდ, უარყოფითებია და ამიტომ, როგორც უკვე ვნახეთ*) ეს ინტეგრალები მიისწრაფვიან ნულისაკენ. მაშასადამე, გვექნება:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx = 0.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a=0$ და $b>0$ (ან $a<b$, $b=0$), მაშინ მიიღება:

$$\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx = \varphi(0+)\int_0^{\xi} \frac{\sin mx}{x}dx + \varphi(b-0)\int_{\xi}^{b} \frac{\sin mx}{x}dx,$$

სადაც $0<\xi<b$. მაგრამ უკანასკნელი ინტეგრალის ზღვარი ნულია, რადგან ξ,b დადებითი რიცხვებია, ხოლო პირველი ინტეგრალი ზღვარში გვაძლევს $\pi/2$-ს ამგვარად, ჩვენ დავადგინეთ**), რომ, როცა $b>0$,

---

* შევნიშნოთ, რომ აქ ξ დამოკიდებულია საზოგადოდ m-ის არჩევაზე ე.ი. უნდა გვეწერა ξ_m. მაშასადამე, m-ის ცვალებადობის დროს ის მუდმივად არაა. მიუხედავად ამისა, $\int_a^{\xi_m}\frac{\sin mx}{x}dx\to 0$ და $\int_{\xi_m}^{b}\frac{\sin mx}{x}dx\to 0$ (რადგან $c<\xi_m<b$ და ყოველთვის მოშორებულია 0-საგან).

** ეს მსჯელობა სავსებით გამართულად არ გამოიყურება. საქმე ისაა, რომ ξ აქაც, საზოგადოდ, m-ზე დამოკიდებული სიდიდეა, რომელიც, ამ შემთხვევაში $(0,b)$ საზღვრებშია მოთავსებული. აქედან კი არ ჩანს, რომ m-ის ზრდისას ξ არ შეიძლება ნულს უახლოვდებოდეს. ეს, რა თქმა უნდა,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx = \pi/_2\,\varphi(0+),$$

(რომ, როცა $a<0$, $\lim\int_a^0 \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx = \frac{\pi}{2}\varphi(0-)$. ბოლოს, როცა $a<0<b$, წინა ორი შემთხვევის გათვალისწინებით, იმის გამო, რომ $\int_a^b = \int_a^0 + \int_0^b$, ადვილად დავასკვნით,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx = \frac{\pi}{2}[\varphi(0-)+\varphi(0+)]$$

ამგვარად, ჩვენ დავადგინეთ, რომ როცა $m\to\infty$, დირიხლეს ინტეგრალისათვის სამართლიანია შემდეგი ზღვარითი ტოლობანი:

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ თუ } a<\mathrm{b}<0 \text{ ან } 0<a<b \\ \frac{\pi}{2}\varphi(0+), \text{ თუ } a=0<b \\ \frac{\pi}{2}\varphi(0-), \text{ თუ } a<0=b \\ \frac{\pi}{2}[\varphi(0+)+\varphi(0-)], \text{ თუ } a<0<b \end{cases}$$

დასკვნის გაკეთების საშუალებას არ მოგვცემდა, რადგან, როცა $\xi_m\to 0$, შესაძლებელია $\int_a^{\xi_m}\frac{\sin mx}{x}dx$-ს ზღვრად $\pi/_2$ არ ჰქონდეს, ისევე როგორც $\int_{\xi_m}^b \frac{\sin mx}{x}dx$ შესაძლოა არ მიისწრაფოდეს ნულისაკენ! საბედნიეროდ, შედეგი, რომელიც აქაა ჩამოყალიბებული, სწორია. მისი კორექტული დასაბუთება იხ. შენიშვნაში [15].

იმის გამო, რომ ზრდადი $\varphi(x)$ ფუნქციის შემთხვევაში $-\varphi(x)$ კლებადი ფუნქციაა, გვექნება:

$$\int_a^b \frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx = -\int_a^b \frac{\sin mx}{x}[-\varphi(x)]dx.$$

ამიტომ, ახლახან მოყვანილი ზღვრული დამოკიდებულებანი, სამართლიანია (a,b) მონაკვეთზე განსაზღვრული ზრდადი ფუნქციისათვისაც.

ლექცია 28

ფუნქციათა წარმოდგენა ფურიეს მწკრივის საშუალებით

ავიღოთ ისეთი ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქცია (a,b) შუალედზე, რომელიც აკმაყოფილებს დირიხლეს ზემოთ ჩამოთვლილ პირობებს, და დავადგინოთ, რომ წინა ლექციის ბოლოს მიღებული ზღვარითი გამოსახულება დირიხლეს ინტეგრალისათვის სამართლიანია ასეთი ზოგადი სახის $\varphi(x)$ ფუნქციისათვისაც. მართლაც, სანიმუშოდ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a<0<b$. რადგან $\varphi(x)$ აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს, (a,b) შუალედი შეიძლება დავანაწილოთ ისეთ (a,c_1), (c_1,c_2),..., (c_n,b) ქვეშუალედებად, რომელთაგანშიაც თითოეული $\varphi(x)$ მონოტონური ფუნქციაა. ვთქვათ ჯერ, რომ 0 წერტილი მოთავსებულია რომელიმე ორ მეზობელ C_k და C_{k+1} წერტილს შორის. მაშინ გვექნება

$$a<c_1<c_2<\ldots<c_k<0<c_{k+1}<\ldots<c_n<b.$$

ამიტომ, რადგან

$$\int_a^b \frac{\sin mx}{x}dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} + \int_{c_k}^{c_{k+1}} + \int_{c_{k+1}}^{c_{k+2}} + \ldots + \int_{c_n}^{b} .$$

მაგრამ m-ის უსასრულო ზრდისას, რადგან ყოველი ცალკეული ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ $\varphi(x)$ მონოტონურია, უკვე დამტკიცებულის თანახმად, ყველა ინტეგრალი მარჯვენა მხარეში, გარდა $\int_{Ck}^{c_k+1}\frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx$-ისა, მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო ამ განსაკუთრებულ ინტეგრალს ზღვრად $\pi/2[\varphi(0-)+\varphi(0+)]$ ექნება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ კვლავ

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx=\frac{\pi}{2}[\varphi(0-)+\varphi(0+)],$$

თუ $a<0<b$.

ახლა, ვთქვათ, 0 ტოლია რომელიმე C_k წერტილისა. მაშინ გვექნება:

$$\int_a^b\frac{\sin mx}{x}\varphi(x)dx=\int_a^{c_1}+\int_{c_1}^{c_2}+\ldots+\int_{c_{k-1}}^{0}+\int_0^{c_{k+1}}+\ldots+\int_{c_n}^{b}.$$

მაგრამ მარჯვენა მხარეში ყოველი ინტეგრალი (გარდა შუა ორისა), მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $m\to\infty$, დარჩენილი ორი ინტეგრალიდან პირველს ზღვრად აქვს $\pi/2\,\varphi(0-)$, ხოლო მეორეს – $\pi/2\,\varphi(0+)$ და მიიღება იგივე შედეგი.

ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ როცა $\varphi(x)$ ფუნქცია (a,b) შუალედზე აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს, მაშინ სამართლიანია (4) ზღვრული დამოკიდებულებანი.

ახლა დავუბრუნდეთ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კრებადობის საკითხს და განვიხილოთ $[0,2\pi]$ შუალედზე განსაზღვრული რაიმე ისეთი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ამ შუალედზე დირიხლეს პირობებს. დავწეროთ ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx; \tag{5}$$

აქ

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha d\alpha \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha d\alpha \qquad (k=1,2,\ldots)$$

განვიხილოთ (5) მწკრივის $m+1$ კერძო ჯამი:

$$S_{m+1}^{(x)} = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{\cos kx}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha d\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin kx}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha d\alpha\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_0^{2\pi} f(\alpha)[\cos kx \cos k\alpha + \sin kx \sin k\alpha]d\alpha =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\ldots+\cos m(\alpha-x)\right]f(\alpha)d\alpha.$$

უკანასკნელი ჯამის გამარტივების მიზნით განვიხილოთ შემდეგი სახის ჯამი:

$$\sum\nolimits_m = \frac{1}{2}+\cos\beta+\cos 2\beta+\ldots+\cos m\beta.$$

გავამრავლოთ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარე $2\sin\frac{\beta}{2}$-ზე, მაშინ მივიღებთ

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sum_m=\sin\frac{\beta}{2}+2\cos\beta\sin\frac{\beta}{2}+2\cos2\beta\sin\frac{\beta}{2}+\ldots+2\cos\beta\sin\frac{\beta}{2}=$$

$$=\sin\frac{\beta}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}\beta-\sin\frac{\beta}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}\beta-\sin\frac{3}{2}\beta\right)+\ldots+$$

$$+\left(\sin\frac{2m+1}{2}\beta-\sin\frac{2m-1}{2}\beta\right).$$

რაც, მსგავსი წევრების გაბათილების შემდეგ მოგვცემს:

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sum_m=\sin\frac{2m+1}{2}\beta,$$

საიდანაც ვპოულობთ, რომ

$$\sum_m=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

ამ შედეგის გამოყენებით $S_{m+1}(x)$-სათვის შეიძლება დავწეროთ შემდეგი გამოსახულება

$$S_{m+1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}f(\alpha)d\alpha.$$

გავიხსენოთ ახლა, რომ $0\le x\le 2\pi$ და განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როცა $0<x<2\pi$.

ასეთ დროს მოვახდენთ უკანასკნელ ინტეგრალში ცვალებადის გარდაქმნას $\frac{\alpha - x}{2} = t$, ე.ი. $\alpha = x + 2t$, მივიღებთ: $d\alpha = 2dt$ და ინტეგრაციის ახალი საზღვრები იქნება: $-\frac{x}{2}$ და $\pi - \frac{x}{2}$. ამგვარად, მივიღებთ:

$$S_{m+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x/2}^{\pi - x/2} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} f(x+2t)dt,$$

ეს უკანასკნელი ინტეგრალი, თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$\varphi(t) = \frac{t}{\sin t} f(x+2t)$, ასედაც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$S_{m+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x/2}^{\pi - x/2} \frac{\sin(2m+1)t}{t} \varphi(t)dt,$$

სადაც, ცხადია, $-\frac{x}{2} < 0 < \pi - \frac{x}{2}$. ამგვარად, ეს დირიხლეს ინტეგრალია, რომელიც გავრცელებულია მონაკვეთზე, რომლისთვისაც 0 ინტეგრაციის საზღვრებს შორისაა მოთავსებული. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრაციის ინტერვალი π სიგრძისაა და t=0 წერტილში $\frac{t}{\sin t}$ ფუნქციას აქვს ზღვარი; სხვა არც ერთ წერტილში $\sin t$ ნულის ტოლი ამ ინტერვალზე არ ხდება. ამგვარად (თუ $\frac{t}{\sin t}$-ს მნიშვნელობად t=0-ში 1-იანს მივიღებთ), ეს ფუნქცია ყველგან უწყვეტი იქნება და $f(x+2t)$ ფუნქციასთან ერთად დირიხლეს პირობებს დააკმაყოფილებს $\varphi(t)$ ფუნქციაც. ამიტომ $S_{m+1}(x)$-

ისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ წინა ლექციის (4) ტოლობა. დასკვნა: არსებობს $S_{m+1}(x)$-ის ზღვარი, როცა $m\to\infty$ და

$$\lim_{m\to\infty} S_{m+1}(x)=\frac{\pi}{2}[\varphi(0+)+\varphi(0-)]$$

მაგრამ

$$\varphi(0+0)=\lim_{t\to 0, t>0}[f(x+2t)]\cdot\lim\frac{t}{\sin t}=f(x+0).$$

სავსებით ასევე,

$$\varphi(0-)=\lim_{t\to 0, t<0}[f(x+2t)]\lim\frac{t}{\sin t}=f(x-0).$$

მეორე მხრივ, $S_{m+1}(x)$-ის ზღვარი წარმოადგენს, ცხადია, (5) მწკრივის ჯამს და, მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია $[0,2\pi]$ მონაკვეთის ყოველ შიგა წერტილში და მისი ჯამი არის

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $x=0$. მაშინ

$$S_{m+1}(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(m+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}f(\alpha)d\alpha.$$

აქ კვლავ გამოვიყენოთ ცვალებადის გარდაქმნა $\frac{\alpha}{2}=t$, ე.ი. $\alpha=2t$, ეს მოგვცემს:

$$S_{m+1}(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+1)t}{\sin t}f(2t)dt.$$

მაგრამ მამრავლი $\sin t$ მნიშვნელში ისპობა $[0,\pi]$ მონაკვეთის ორივე ბოლოზე. ეს გვაიძულებს ვიმოქმედოთ სხვანაირად. წარმოვადგინოთ $S_{m+1}(0)$ შემდეგი ორი ინტეგრალის სახით:

$$S_{m+1}(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(m+1)t}{\sin t}f(2t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(m+1)t}{\sin t}f(2t)dt.$$

ახლა მეორე ინტეგრალში განვახორციელოთ გარდაქმნა $t=\pi-\tau$.

მაშინ მეორე ინტეგრალი მოგვცემს:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin(m+1)t}{\sin t}f(2t)dt=\int_{\pi/2}^{0}\frac{\sin(m+1)(\pi-r)}{\sin(\pi-r)}f(2\pi-2\tau)(-d\tau).$$

მაგრამ $\sin(\pi-\tau)=\sin\tau$ და $\sin(m+1)(\pi-\tau)=\sin(m+1)\tau$. ამგვარად, $S_{m+1}(0)$-ის მარჯვენა მხარეში მეორე ინტეგრალი იქნება

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(m+1)\tau}{\sin\tau}f(2\pi-2\tau)d\tau.$$

საბოლოოდ,

$$S_{m+1}(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(m+1)t}{\sin t}\varphi_1(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(m+1)t}{t}\varphi_2(t)dt,$$

სადაც $\varphi_1(t)=\dfrac{t}{\sin t}f(t)$ და $\varphi_2(t)=\dfrac{t}{\sin t}f(2\pi-2t)$. ახლა თუ შევნიშნავთ, რომ $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ აკმაყოფილებენ დირიხლეს პირობებს $[0,\pi/2]$ შუალედზე, და $t=0$ არის ორივე ამ შუალედის

მარცხენა ბოლო, წინა ლექციის (4) ფორმულები მოგვცემს, რომ არსებობს $\lim\limits_{m\to\infty} S_{m+1}(0)$ და ეს ზღვარი ტოლია $\frac{1}{2}[\varphi_1(0+)+\varphi_2(0+))]$. მაგრამ, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, დავრწმუნდებით, რომ ეს ჯამი არის

$$\frac{f(0+)+f(2\pi-0)}{2}.$$

ამგვარად, ჩვენ დავადგინეთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია O წერტილში და მისი ჯამი x=0-ში არის

$$\frac{f(0+1)+f(2\pi-0)}{2}.$$

სავსებით ანალოგიურად დგინდება, რომ (4) მწკრივი კრებადია $x=2\pi$ წერტილში და მისი ჯამი აგრეთვე არის

$$\frac{f(0+1)+f(2\pi-0)}{2}.$$

საბოლოოდ ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს $[0,2\pi]$ მონაკვეთზე, მისი (4) ფურიეს მწკრივი კრებადია ყველგან $[0,2\pi]$-ზე და მისი ჯამი არის $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, თუ $0<x<2\pi$, ხოლო ეს ჯამი არის $\frac{f(0+)+f(2\pi-)}{2}$, თუ $x=0$, ან $x=2\pi$.

განვიხილოთ მაგალითები:

1) ვთქვათ, $f(x)$ განსაზღვრულია $[0,2\pi]$ მონაკვეთზე შემდეგი ტოლობით:

$$f(x)=\begin{cases}-\pi/4, & \text{თუ} \quad 0<x<\pi,\\ \pi/4, & \quad\quad\ \pi<x<2\pi.\end{cases}$$

(ფუნქციის მნიშვნელობანი არაა მოცემული $0, \pi, 2\pi$ წერტილებში. მნიშვნელობები ნებისმიერად შეიძლება ავიღოთ. ეს არჩევანი არ იმოქმედებს ფურიეს კოეფიციენტებზე და, ამიტომ, არც ფურიეს მწკრივის სახეზე). ამ ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 59-ზე.

გამოვითვალოთ ამ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{4}\cdot\pi+\frac{\pi}{4}\pi\right]=0,$$

და როცა $m\geq 1$,

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\cos mxdx+\frac{\pi}{4}\int_{\pi}^{2\pi}\cos mxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{4}\left[\frac{\sin mx}{m}\right]_0^{\pi}+\frac{\pi}{4}\left[\frac{\sin mx}{m}\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}=0.$$

ამგვარად, ყველა $a_m=0 \ (m=0,1,2,\ldots)$.

ამავე დროს

$$b_m=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\sin mxdx+\frac{\pi}{4}\int_{\pi}^{2\pi}\sin mxdx\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left[\frac{\cos mx}{m}\right]_0^{\pi}-\left[\frac{\cos mx}{m}\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}=\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{m}+\frac{2}{m}(-1)^m\right)=$$

$$=\frac{1}{2m}\left(-1+(-1)^m\right)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad m \quad \text{ლუწია,}\\ -\dfrac{1}{m}, & \phantom{\text{თუ}} \quad m \quad \text{კენტია.}\end{cases}$$

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქცია ასე წარმოიდგინება:

$$f(x)=-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 5x}{5}-\ldots$$

ეს მწკრივი კრებადია ყველგან $f(x)$ რიცხვისაკენ, თუ $\alpha\le x\le 2\pi$ და x=0, π, 2π. მისი ჯამი ამ წერტილებში 0-ის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2) ვთქვათ $f(x)=\frac{x}{2}$, როცა $0\le x\le 2\pi$. ვიპოვოთ მისი ფურიეს a_m და b_m კოეფიციენტები.

აქ

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi.$$

თუ $k\ge 1$, მაშინ

$$a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\cos kxdx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}\sin kxdx.$$

მაგრამ ეს ინტეგრალები ნულის ტოლია. ავიღოთ $k\ge 1$, და გამოვთვალოთ b_k კოეფიციენტები:

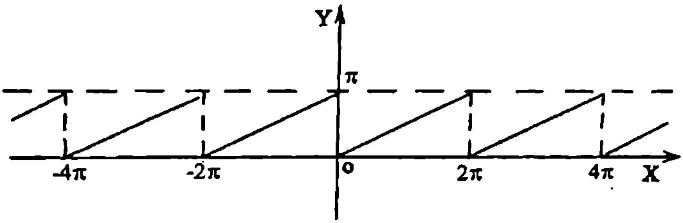
$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos kx}{k}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos kx}{k}dx.\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{k} = -\frac{1}{k} \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

ამგვარად, ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$$

ეს მწკრივი კრებადია ყველგან, როცა $-\infty < x < \infty$ და მისი ჯამი თუ, $0<x<2\pi$ ($f(x)$-ის უწყვეტობის გამო) ტოლია $\frac{x}{2}$-სა. 0 და 2π წერტილებში ჯამი მწკრივისა ტოლია $\frac{0+\pi}{2} = \pi/2$-სა. ნახ. 59 -ზე



ნახ. 59

გამოსახულია მწკრივის ჯამი მთელ ღერძზე (მიაქციეთ ყურად-ღება, რომ ყველა ფუნქცია პერიოდულია 2π პერიოდით და ამიტომ ამ მწკრივის ჯამიც პერიოდული ფუნქციაა).

რედაქტორის კომენტარები

1) (გვ.7) ტექსტში აღწერილი ზღვარითი პროცესი წარმოადგენს უწყვეტი ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებას, რომელიც ფრანგი მათემატიკოსის ო. კოშის მიერ იყო შემოთავაზებული ჯერ კიდევ XIX საუკუნის 20-იან წლებში. მხოლოდ უწყვეტი ფუნქციების განხილვით, რა თქმა უნდა, გარკვეულნაირად იზღუდება ამ ცნების გამოყენებათა სფერო.

კლასიკური ანალიზის თანამედროვე კურსებში, ნაცვლად ინტეგრების კოშის ამ პროცესისა, ინტეგრების რიმანის პროცესს შეისწავლიან, რომელიც, თუ ა. ლებეგის (იხ. [3]) მოხდენილი დახასიათებით დავკმაყოფილდებით, იმით განსხვავდება კოშის კონსტრუქციისაგან, რომ მას მიუყენებენ არა მარტო უწყვეტ ფუნქციებს, არამედ ყველა ისეთებს, რომელთათვისაც მის გამოყენებას გარკვეულ რიცხვამდე მივყავართ: ვთქვათ, რაიმე $[a,b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ფუნქციაა. შევადგინოთ $[a,b]$ მონაკვეთის რაიმე დანაწილების შესაბამისი, ტექსტში აღნიშნული სახის σ ინტეგრალური ჯამი და f-ს ვუწოდოთ (რიმანის აზრით) ინტეგრებადი ფუნქცია, თუ არსებობს გარკვეული $\lim\sigma$ ზღვარი, როცა მონაკვეთის დანაწილება "უსაზღვროდ მჭიდროვდება" (ე.ი. როცა $\max\limits_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k)\to 0$). ზღვრის ამ მნიშვნელობას ასეთ შემთხვევაში f ფუნქციის (რიმანის) ინტეგრალს უწოდებენ $[a,b]$ შუალედზე და მას $\int_a^b f(x)dx$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ამგვარად, ტექსტში ნაჩვენებია, რომ ნებისმიერ სეგმენტზე განსაზღვრული ყოველი უწყვეტი f ფუნქცია ინტეგრებადია (რიმანის აზრით) და მისი რიმანის $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი მისივე კოშის ინტეგრალს წარმოადგენს.

რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი, სინამდვილეში, გაცილებით უფრო ფართოა უწყვეტ ფუნქციათა კლასზე. ცნობილია ფუნქციათა რიმანის აზრით ინტეგრებადობის სხვადასხვა სახის კრიტერიუმები. განსაკუთრებით სასარგებლოა ამ კრიტერიუმის ერთი ფორმა, რომელიც აგრეთვე ა. ლებეგს ეკუთვნის: f ფუნქცია ინტეგრებადია რაიმე მონაკვეთზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f შემოსაზღვრულია და მისი წყვეტის წერტილთა სიმრავლე "ნული ზომისაა". აქ ჩვენ არ შევჩერდებით "ნულის ზომის" სიმრავლის განმარტებაზე. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ ეს ამ სიმრავლის ისეთ სპეციფიკურ განლაგებას ნიშნავს რიცხვით ღერძზე, როცა მას, გარკვეული აზრით, "რაგინდ მცირე ადგილი აქვს დაკავებული მთლიანობაში". კერძოდ, ყოველი თვლადი (ან, მით უფრო, სასრული) სიმრავლე "ნული ზომისაა". ამიტომ ყოველი შემოსაზღვრული ფუნქცია, თუ მას წყვეტის წერტილთა მხოლოდ სასრული სიმრავლე გააჩნია, ინტეგრებადია. ამით ხშირად სარგებლობს კურსის ავტორი მასალის გადმოცემისას.

2) (გვ.10) ინტეგრალის აქ აღნიშნული 1) და 2) თვისება სინამდვილეში განსაზღვრული $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის ცნების გაფართოებაა იმ შემთხვევისათვის, როცა ინტეგრების ზედა b საზღვარი არ აღემატება ქვედა a საზღვარს. ეს იმას ნიშნავს, რომ, როცა $a=b$ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ გაიგება როგორც 0, ხოლო როცა $b<a$, მაშინ განმარტებით ვღებულობთ $\int_a^b f(x)dx =$

$$=-\int_b^a f(x)dx.$$

3) (გვ. 65). აქ, რა თქმა უნდა, საკითხი ისმის ამ ტოლობით $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალის განმარტების კორექტულობის შესახებ, ე.ი.

საჩვენებელია, რომ საბოლოო მნიშვნელობა დამოუკიდებელია a-ს შერჩევისაგან.

ამისათვის შევნიშნოთ ჯერ, რომ არასაკუთრივი $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (ან $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ინტეგრალს გააჩნია ე.წ. ადიციურობის თვისება:

თუ, მაგალითად, $a<a'$ და $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია აგრეთვე $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალიც, და

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{a'} f(x)dx+\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$$

(ანალოგიურად, თუ $a'<a$, $\int_{\infty}^{a} f(x)dx=\int_{\infty}^{a'} f(x)dx+\int_{a'}^{a} f(x)dx$. ეს ტოლობა ერთბაშად გამომდინარეობს არასაკუთრივი ინტეგრალის განმარტებიდან.

აქედან, თუ მაგალითად, $a<a'$ გვექნება:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a'} f(x)dx+\int_{a'}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{a'} f(x)dx+\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx,$$

რაც უნდა გვეჩვენებია.

4) (გვ.100). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, J_c ინტეგრალის გზიდან დამოუკიდებლობის აღნიშნული პირობა საკმარისია მხოლოდ ე.წ. მარტივადბმული არეების შემთხვევაში, ე.ი. სამართლიანია შემდეგი დებულება: ვთქვათ, D სიბრტყეზე მოცემული არეა, რომელშიაც განსაზღვრულია ორი ცვლადის P და Q უწყვეტი ფუნქციები, რომელთაც გააჩნიათ სათანადოდ $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ უწყვეტი წარმოებულები. ასეთ შემთხვევაში წირითი $\int_C Pdx+Qdy$ ინტეგრალის გზიდან დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია D არეში ყველგან სრულდებოდეს $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ტოლობა.

ეს პირობა აგრეთვე საკმარისია ინტეგრალის გზიდან დამოუკიდებლობისათვის, საზოგადოდ, მხოლოდ მაშინ, როცა D მარტივადბმულია. ამასთან, D არეს მარტივადბმული ეწოდება, როცა ამ არეში აღებული ყოველი შეკრული C წირი "ჰომოტოპურია ნულისა D-ში", რაც იმას ნიშნავს, რომ D-ში აღებული ყოველი უწყვეტი შეკრული

$$(C)\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (0\le t\le 1,\ \ \varphi(0)=\varphi(1),\ \ \psi(0)=\psi(1))$$

წირისათვის მოიძებნება ორი ცვლადის ისეთი $\tilde{\varphi}(t,u),\tilde{\varphi}(t,u)$ უწყვეტი, $\Delta=\{0\le t\le 1,0\le u\le 1\}$ კვადრატზე განსაზღვრული, ფუნქციები, რომ

1) $(\tilde{\varphi}(t,u),\tilde{\varphi}(t,u))\in D$ ყოველი (t,u) წყვილისათვის Δ -დან.

2) $\tilde{\varphi}(t,0)=\varphi(t),\psi(t,0)=\psi(t)$ ყოველი t-სათვის $[0,1]$ მონაკვეთიდან.

3) $\tilde{\varphi}(t,1)=x_0,\psi(t,1)=y_0$, სადაც (x_0,y_0) რაღაც წერტილია (D-ში).

უკანასკნელი განმარტების ინტუიციური შინაარსი ისაა, რომ D არეში აღებული ყოველი შეკრული წირი, მისი უწყვეტი დეფორმაციით (შეკრულობის შენარჩუნებით) შეიძლება მოვჭიმოთ

D-სავე რაიმე ფიქსირებულ (x_0,y_0) წერტილში, ისე რომ დეფორმაციის პროცესში არ გამოვიდეთ D-ს გარეთ. ასეთი D არე სიბრტყეზე "გარეგნულად" იმით ხასიათდება, რომ მასში ჩახაზული ყოველი შეკრული წირის მიერ შემოსაზღვრული "შიგა" არე მთლიანად D-ს ეკუთვნის. ქვემოთ, ტექსტში (იხ. გვ.141) მოცემულია მორტივადბმული არის ეს დახასიათება.

მაგალითი, რომელიც მოყვანილია 84-ე გვერდზე, წარმოადგენს ფუნქციათა ისეთი (P,Q) წყვილის ნიმუშს, რომლებიც განსაზღვრულია მთელს სიბრტყეზე (გარდა (0,0) წერტილისა), და აკმაყოფილებს $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ პირობას, მაგრამ $\int Pdx+Qdy$ წირითი ინტეგრალი არაა გზისაგან დამოუკიდებელი. ამის მიზეზი ისაა, რომ სიბრტყე, რომლიდანაც ამოღებულია ერთი (მაგალითად (0,0)) წერტილი, მარტივადბმული არაა.

ამგვარად, ყველგან მე-11 ლექციაში, D არისაგან საჭიროა დამატებით მოთხოვნილი იყოს მისი მარტივადბმულობა.

5) (გვ.102). აქ მოყვანილი მსჯელობისა და მიღებული ფორმულის სამართლიანობისათვის საჭიროა გარკვეულნაირად შეიზღუდოს იმ D არის ფორმა, რომელზედაც განიხილება ფუნქციათა P,Q წყვილი. მართლაც, ამ მსჯელობის ანალიზი გვაჩვენებს, რომ D არის (x_0,y_0) და (x,y) წერტილებთან ერთად D-ს უნდა ეკუთვნოდეს (x_0,y_0), (x_0,y) და (x_0,y), (x,y) წვეროების შემაერთებელი მონაკვეთებით შედგენილი ტეხილი. ეს პირობა კი, ცხადია, წერტილთა ყოველი (x_0,y_0) და (x,y) წყვილისათვის შესრულდება მაშინ, როცა D მართკუთხედის ფორმის არეა საკოორდინატო ღერძების პარალელური გვერდებით.

6) (გვ.122). სამწუხაროდ, ინტეგრალების გადასმა, როცა ორივე ინტეგრალი განმეორებით ინტეგრალში არასაკუთრივია, ყოველთვის შესაძლებელი არ არის, მაშინაც კი, როცა თითოული არასაკუთრივი ინტეგრალი თანაბრად კრებადია მეორე ცვლადის (პარამეტრის) ცვალებადობის მთელს (ჩვენს შემთხვევაში) უსასრულო მონაკვეთზე.

მაგრამ კურსის ამ ადგილას მოყვანილი შემთხვევისათვის ინტეგრალების გადასმა დასაშვებია, თუნდაც იმის გამო, რომ

$f(x,\alpha)$ ყველგან დადებითია. აქ ჩვენ მოვიყვანთ ერთ მარტივ დებულებას, რომელიც ასაბუთებს ასეთ შესაძლებლობას: ვთქვათ, $f:[a,+\infty[x[b,+\infty[\to R^{+}$ აღნიშნულ "უსასრულო ოთხკუთხედზე" განსაზღვრული დადებითი ფუნქციაა და პარამეტრზე დამოკიდებული

$$\int_{b}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha(a \le x < +\infty) \quad \text{და} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx(b \le \alpha < \infty)$$

ინტეგრალები თანაბრად კრებადნი არიან ყოველ $[a,c]$ $(c>a)$ და, შესაბამისად, $[b,c]$ $(c>b)$ სეგმენტებზე. ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია ტოლობა

$$\int_{a}^{+\infty} dx \int_{b}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha = \int_{b}^{+\infty} d\alpha \int_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx$$

(რომელიც შემდეგნაირად გაიგება: ორივე მხარე ერთი და იგივე რიცხვია, თუ ერთ-ერთი მათგანი სასრულია ან ორივე მხარე არის $+\infty$).

მართლაც, ავიღოთ რაიმე $c(c>a)$ და დავწეროთ ტოლობა:

$$\int_{a}^{c} dx \int_{b}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha = \int_{b}^{+\infty} d\alpha \int_{a}^{c} f(x,\alpha)dx.$$

ეს ტოლობა მართებულია, რადგან, პირობის თანახმად, არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{b}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha$ თანაბრად კრებადია x-ის მიმართ $[a,c]$ სეგმენტზე ცვლილების დროს. ახლა შევნიშნოთ, რომ f-ის დადებითობის გამო

$$\int_{a}^{c} f(x,\alpha)dx \le \int_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx$$

ყოველი α-სათვის $[b,+\infty[$ შუალედზე. ამიტომ, წინა ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\int_a^c dx \int_b^{+\infty} f(x,\alpha)dx \le \int_b^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx.$$

აქედან, რადგან მარცხენა მხარე ზრდადია c-ს მიმართ (კვლავ f ფუნქციის დადებითობის გამო), ზღვარზე გადასვლა, როცა $c \to +\infty$, მოგვცემს:

$$\int_a^{+\infty} dx \int_b^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha \le \int_b^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx,$$

ე.ი. მივიღებთ, რომ ინტეგრალების გადასმის შედეგად განმეორებითი $\int_a^{\infty} dx \int_b^{\infty} f(x,\alpha)d\alpha$ ინტეგრალი არ მატულობს (შევნიშნოთ, რომ გამორიცხული არაა რომელიმე მხარე ან ორივე იყოს $+\infty$). მაგრამ მაშინ (რადგან $f(x,\alpha)$ ფუნქციას ორივე ცვლადის მიმართ აქვს "ერთნაირი პირობები" — მათი არასაკუთრივი ინტეგრალები თითოეული ცვლადით თანაბრად კრებადნი არიან მეორის მიმართ), ასეთმა გადასმამ არ შეიძლება გამოიწვიოს განმეორებითი ინტეგრალის გაზრდა (წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოვიდოდით მეორე ინტეგრალიდან და მასში ინტეგრების რიგის გადასმით მივიღებდით ინტეგრალის მნიშვნელობის შემცირებას, რაც, როგორც ვნახეთ, შეუძლებელია).

7) (გვ.129). აქ გამოყენებულია ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი განსაზღვრულ ინტეგრალში: თუ $J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx$, გვექნება

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = \sin^{m-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$+(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\cdot\cos x d(\sin x)=$$

$$=-\sin^{m-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^m x dx-(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^m x dx.$$

ჩასმის განხორციელება გვაძლევს:

$$J_m=(m-1)J_{m-2}-(m-1)J_m,$$

საიდანაც მიიღება სასურველი რედუქცია.

8) ეს ინტეგრალი გამოთვლილია ა. რაზმაძის [2] სახელმძღვანელოში, გვ. 72-73.

9) (გვ.164). ეს საკითხი ადრე განხილული ამოცანისადმი დაბრუნებაა (იხ. ლექცია №11), რომელიც აქ შეისწავლება ახლახან შექმნილი აპარატით — გრინის ფორმულის გამოყენებით. მართლაც, როგორც ადვილი შესამჩნევია, არეში აღებული წირითი $\int Pdx+Qdy$ ინტეგრალი გზიდან დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია ამ არეში აღებული ყოველი შეკრული წირის გასწვრივ.

10) (გვ.249-ზე შენიშვნა სქოლიოში). აქ ჩვენ მოგვყავს დირიხლეს ინტეგრალის 215-ე გვერდზე მოცემული ძირითადი ზღვარითი ტოლობის დეტალური დამტკიცება. წინასწარ დაგვჭირდება ერთი დამხმარე დებულების დადგენა, რომელსაც ქვემოთ რიმანის ლემას ვუწოდებთ და რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: თუ f რაიმე (რიმანის აზრით) ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ შუალედზე ($b-a\leq 2\pi$), მაშინ

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\sin mx dx=\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\cos mx dx=0$$

(შევნიშნოთ, რომ რიმანის ლემა სამართლიანია გაცილებით უფრო ზოგადი სახითაც, მაგრამ ჩვენ აქ მოყვანილი ფორმულირებით დავკმაყოფილდებით).

დამტკიცების მიზნით განვიხილოთ ნებისმიერი Δ მონაკვეთი და მასზე განსაზღვრული ფუნქციების ორთონორმირებული $(\varphi_k)_{k\ge1}$ მიმდევრობა, ე.ი. ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$\int\limits_{\Delta}\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad i\neq j\\ 1, & \text{თუ} \quad i=j.\end{cases}$$

აღვნიშნოთ $\alpha k(f)$-ით $(k=1,2,\dots)$ Δ-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი (რიმანის აზრით) ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები (φ_k) სისტემის მიმართ:

$$\alpha_k(f)=\int\limits_{\Delta}f(x)\varphi_k(x)dx$$

და შევისწავლით შემდეგ არაუარყოფით

$$J_m=\int\limits_{\Delta}f(x)-\sum_{k=1}^{m}d_k(f)\varphi_k(x)]^2\,dx$$

ინტეგრალს. ცხადია, რომ

$$0\le J_m=\int\limits_{\Delta}f^2(x)dx-2\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(f)\int\limits_{\Delta}f(x)\varphi_k(x)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}\alpha_k(f)\alpha_n(f)\int\limits_{\Delta}\varphi_k(x)\varphi_n(x)dx.$$

თუ აქ ვისარგებლებთ (φ_k) სისტემის ორთონორმირებულობის პირობებითა და $\alpha_k(f)$ კოეფიციენტების აღნიშვნებით, გვექნება:

$$0 \le \int_{\Delta} f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2(f) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k{}^2(f) = \int_{\Delta} f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2(f)$$

ეს უტოლობა, რომელიც შეიძლება გადაიწეროს

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2(f) \le \int_{\Delta} f^2(x)dx.$$

სახით, სამართლიანია ყოველი m-სათვის, რაც იმას ნიშნავს, რომ რიცხვთა დადებითი $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2(f)$ მწკრივის კერძო ჯამები შემოსაზღვრულია ზემოდან $\int_{\Delta} f^2(x)dx$ რიცხვით. აქედან ერთბაშად გამომდინარეობს, რომ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2(f)$ მწკრივი კრებადია და, მაშასადამე,

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k(f) = 0.$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$, $\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$ ორთონორმირებულია ნებისმიერ $[a, a+2\pi]$ მონაკვეთზე და ამიტომ, ახლახან დამტკიცებული ფაქტის თანახმად, თუ f ინტეგრებადია $[a, a+2\pi]$ მონაკვეთზე, გვექნება:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos mx dx = \lim_{m\to\infty}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin mx dx = 0.$$

ამით რიმანის ლემა დამტკიცებულია 2π სიგრძის ნებისმიერი $[a,b]$ შუალედისათვის.

ნებისმიერი $[a,b]$ მონაკვეთისათვის $(b-a\le 2\pi)$ რიმანის ლემის დასადგენად განვიხილოთ $[a,b]$ მონაკვეთზე ინტეგრებადი ნებისმიერი f ფუნქცია და აღვნიშნოთ $\tilde{f}$ -ით მისი $[a, a+2\pi]$ შუალედზე შემდეგი სახის გავრცელება:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{თუ} \quad a\le x\le b, \\ 0, & \text{თუ} \quad b< x\le a+2\pi. \end{cases}$$

ცხადია, f-თან ერთად ინტეგრებადი იქნება $\tilde{f}$ და ამიტომ გვექნება:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^{b} f(x)\frac{\sin mx}{\cos mx}dx = \lim_{m\to\infty}\int_a^{a+2\pi} \tilde{f}(x)\frac{\sin mx}{\cos mx}dx = 0,$$

რითაც რიმანის ლემა დადგენილია.

ახლა განვიხილოთ $[a,b]$ შუალედზე განსაზღვრული ისეთი f ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს ამ შუალედზე და შევისწავლოთ მისი დირიხლეს

$$D_m(f)=\int_a^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx$$

ინტეგრალის ყოფაქცევა, როცა $m\to\infty$, ჩვენ ვნახავთ, რომ აღნიშნულ პირობებში არსებობს $\lim\limits_{m\to\infty} D_m(f)$ ზღვარი და

$$\lim_{m\to\infty} D_m(f)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad 0<a<b, \quad (I)\\ \frac{\pi}{2}f(0+), & \text{თუ} \quad a=0<b, \quad (II)\\ \frac{\pi}{2}[f(0+)+f(0-)], & \text{თუ} \quad a<0<b, \quad (III)\\ \frac{\pi}{2}f(0-), & \text{თუ} \quad a<b=0, \quad (IV)\\ 0, & \text{თუ} \quad a<b<0, \quad (V)\end{cases} \qquad *$$

I და V შემთხვევებში დასკვნა ტრივიალურია, რადგან ასეთ დროს $f(x)/x$ ფუნქცია, ცხადია, ინტეგრებადია $[a,b]$ შუალედზე და შედეგი ერთბაშად გამომდინარეობს რიმანის ლემიდან.

ვაჩვენოთ ახლა (*) ზღვარითი დამოკიდებულების სამართლიანობა II შემთხვევისათვის, ე.ი. ვთქვათ, $a=0<b$. ასეთ დროს გვაქვს:

$$D_m(f)=\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx.$$

ამგვარად, ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx=\frac{\pi}{2}f(0+).$$

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ $\int_p^q \frac{\sin mx}{x}dx$ ინტეგრალი ცვალებადი p,q ($p>0$, $q>0$) საზღვრებით და ცვალებადი m რიცხვისათვის, ყოველთვის შემოსაზღვრულია. მართლაც, $\int_0^u \frac{\sin x}{x}dx$ ინტეგრალი

უწყვეტი ფუნქციაა u-ს მიმართ და არსებობს მისი ზღვარი $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \pi/2$, როცა $u \to \infty$. ამიტომ მოიძებნება ისეთი M>0 რიცხვი, რომ გვექნება $\left|\int_o^u \frac{\sin x}{x}dx\right| \le M$, საიდანაც $\int\limits_p^q \frac{\sin mx}{x}dx$ ინტეგრალისათვის $mx=t$ გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\left|\int\limits_p^q \frac{\sin mx}{x}dx\right| = \left|\int\limits_{mp}^{mq} \frac{\sin t}{t}dt\right| = \left|\int\limits_0^{mq} \frac{\sin t}{t}dt - \int\limits_0^{mp} \frac{\sin t}{t}dt\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_0^{mq} \frac{\sin t}{t}dt\right| + \left|\int\limits_0^{mp} \frac{\sin t}{t}dt\right| \le M + M = 2M,$$

ე.ი. ვაჩვენეთ, რომ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ ყოველი (დადებითი) p, q და m-სათვის გვაქვს:

$$\left|\int\limits_p^q \frac{\sin mx}{x}dx\right| \le 2M \qquad (*.)$$

ახლა დავუბრუნდეთ დირიხლეს ინტეგრალს და გავიხსენოთ, რომ f ფუნქცია მასში აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს. ამის გამო არსებობს $f(0+)$ ზღვარი და, მაშასადამე, ნებისმიერი ε>0 რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მცირე δ_0>0 რიცხვი, რომ ყოველი q-სათვის, თუ $0<q<\delta_0$, გვექნება: $\left|f(q) - f(0+) < \varepsilon/6M\right|$.

ამას გარდა, q ისე შეგვიძლია შევამციროთ, რომ $[0,q]$ შუალედზე f მონოტონური იყოს (ეს შესაძლებელია, რადგან f აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს $[0,b]$ შუალედზე). შევარჩიოთ ერთ-ერთი ასეთი q>0 რიცხვი და განვიხილოთ

$$D_m(f)=\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx$$

ინტეგრალისა და $\frac{\pi}{2}f(0+)$ რიცხვის სხვაობა. ის ასე შეიძლება წარმოვიდგინოთ:

$$\left|D_m(f)-\frac{\pi}{2}f(0+)\right|=\left|\int_0^q f(x)\frac{\sin mx}{x}dx+\int_q^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx-\frac{\pi}{2}f(0+)\right|=$$

$$=\left|\int_0^q f(x)\frac{\sin mx}{x}dx+\int_q^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx-\int_0^q f(0+)\frac{\sin mx}{x}dx+\right.$$

$$\left.-\int_0^q f(0+)\frac{\sin mx}{x}dx-\frac{\pi}{2}f(0+)\right|\leq\left|\int_0^q f(x)-f(0+)\frac{\sin mx}{x}dx\right|+$$

$$\left|\int_q^b \frac{f(x)}{x}\sin mxdx\right|+\left|f(0+)\left(\int_0^q \frac{\sin mx}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right)\right| \qquad (\text{**}_*)$$

პირველი ინტეგრალის ქვეშ $f(x)-f(0+)=g(x)$ მონოტონური ფუნქციაა $[0,q]$ შუალედზე. ამიტომ ამ ინტეგრალისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ვეიერ-შტრასის ფორმულა (საშუალო მნიშვნელობის II თეორემა). ეს მოგვცემს:

$$\left|\int_0^q (f(x)-f(0+))\frac{\sin mx}{x}dx\right|=\left|g(0+)\int_0^\xi \frac{\sin mx}{x}dx+g(q-)\int_\xi^q \frac{\sin mx}{x}dx\right|.$$

მაგრამ $g(0+) = f(0+) - f(0+) = 0$ და $g(q-) = f(q-) + f(0+)$, საიდანაც, q-ს ($q<\delta_0$) შერჩევის გამო, მივიღებთ $\left|g(q-)\right| < \frac{\varepsilon}{6\mathrm{M}}$. ამგვარად, გვექნება

$$\left|\int_0^q (f(x) - f(0+))\frac{\sin mx}{x}dx\right| = \left|g(q-)\int_\xi^q \frac{\sin mx}{x}dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6M}\cdot 2M = \frac{\varepsilon}{3}.$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ $q>0$ და $\frac{f(x)}{x}$, ამიტომ ფუნქცია შემოსაზღვრული (ინტეგრებადი) ფუნქციაა $[q,b]$ შუალედზე. აქედან, რიმანის ლემის ძალით დავასკვნით, რომ $\int_q^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx \to 0$, როცა $m\to\infty$, ე.ი. $\varepsilon/3$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური N_1 რიცხვი, რომ როცა $m>N_1$, გვექნება:

$$\left|\int_q^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

სავსებით ანალოგიურად, რადგან

$$\int_0^q \frac{\sin mx}{x}dx = \int_0^{mq}\frac{\sin t}{t}dt \to \pi/2,$$

როცა $m\to\infty$, გვექნება

$$f(0+)\int_0^q \frac{\sin mx}{x}dx \to \frac{\pi}{2}f(0+)$$

და, მაშასადამე, $\varepsilon/3$-სათვის მოიძებნება ისეთი N_2, რომ როცა $m>N_2$, გვექნება:

$$\left|f(0+)\int_0^a \frac{\sin mx}{x}dx-\frac{\pi}{2}f(0+)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

ახლა ცხადია (**) უტოლობისა და ჩატარებული შეფასებების ძალით, როცა $m>N=max(N_1,N_2)$, გვექნება:

$$\left|D_m(f)-\frac{\pi}{2}f(0+)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

რაც ამტკიცებს (*) დამოკიდებულებას II შემთხვევაში.

ახლა ვაჩვენოთ (*) ფორმულის სამართლიანობაზე IV შემთხვევაში. ახლა გვაქვს $D_m(f)=\int_a^0 f(x)\frac{\sin mx}{x}dx(a<0)$. შემოვიტანოთ ახალი t ცვლადი $x=-t$ ფორმულით. ცვლადის გარდაქმნის წესი განსაზღვრულ ინტეგრალში გვაძლევს:

$$D_m(f)=\int_{-a}^{0} f(-t)\frac{\sin m(-t)}{-t}d(-t)=$$

$$=-\int_{-a}^{0} f(-t)\frac{\sin mt}{t}dt=\int_{0}^{-a} f(-t)\frac{\sin mt}{t}dt,$$

ე.ი. მივიღეთ $f(-t)$ ფუნქციის დირიხლეს ინტეგრალი II შემთხვევისათვის (ზედა $-a$ საზღვარი აქ დადებითია).

ამიტომ, დამტკიცებულის თანახმად, არსებობს $\lim_{m\to\infty} D_m(f)$ ზღვარი და ის ტოლია $\frac{\pi}{2}\lim_{x\downarrow 0} f(-t) = \frac{\pi}{2}\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \pi/_2\, f(0-)$, რაც ამტკიცებს (*) ფორმულას IV შემთხვევისათვის.

ბოლოს, III შემთხვევაში $D_m(f) = \int_a^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx$, სადაც $a<0$, $b>0$. ამიტომ შეიძლება ვწეროთ:

$$D_m(f) = \int_a^0 f(x)\frac{\sin mx}{x}dx + \int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}dx \to \frac{\pi}{2}\left(f(0-) + f(0+)\right).$$

ამით (*) ფორმულა საბოლოოდ დამტკიცებულია.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. ა. რაზმაძე – მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I – შესავალი. თბილისი, 1920.
2. ა. რაზმაძე – ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი – მათემატიკური ანალიზი, III ტომი, ნაწ. I – განუსაზღვრელი ინტეგრალები, თბილისი, 1922 წ.
3. **А. Лебег** – Интегрирование и отыскание примитивных функций. Москва - Ленинград, 1936.
4. **Э. Гурса** – Курс математического анализа, том 1,2. Москва, Ленинград, 1936.
5. ა. ხარაძე, ვ. ჭელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე — მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, II. თბილისი, 1963.
6. ვ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე – მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, II, თბილისი, 1975.
7. **М. Спивак** – Математический анализ на многообразиях. Издательство "Мир", Москва, 1968.
8. **В.А. Зорич** – Математический анализ, т. 1,2. Издательство "Наука", Москва, 1984.
9. **С. Стернберг** – Лекции по дифференциальной геометрии. Издательство "Мир", Москва, 1970.

სარჩევი

АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ РАЗМАДЗЕ

КУРС ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Часть II

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 2004

გამომცემლობის რედაქტორი ა. სტურუა
სამხატვრო რედაქტორი ი. ჩიქვინიძე
ტექრედაქტორი ფრ. ბუდაღაშვილი
კორექტორები: ნ. ჩახაია, ქ. გაჩეჩილაძე

კომპიუტერული უზრუნველყოფა და
დაკაბადონება ნ. დვალი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 15.07.04
საბეჭდი ქაღალდი 60X84
პირ. ნაბეჭდი თაბახი 18,9
სააღრ.-საგამომც. თაბახი 11,03
შეკვეთა №10 ტირაჟი 200

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1.