საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია
ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტი

ანდრია რაზმაძე

რჩეული შრომები

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის გამომცემლობა
19 * თბილისი * 52

რედაქციისაგან

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტმა მიზანშეწონილად ჩათვალა თავი მოეყარა ანდრია რაზმაძის რჩეული შრომებისათვის.

ამის საფუძვლად ინსტიტუტს მიაჩნია არა მარტო ის, რომ ანდრია რაზმაძის ძირითადი სამეცნიერო შრომები, რომელნიც ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემებს შეეხებიან, მათემატიკური მეცნიერების თვალსაჩინო განძს წარმოადგენენ, არამედ ისიც, რომ ეს შრომები გააცნობს ჩვენს ახალგაზრდობას სახელოვანი ქართველი მეცნიერის მემკვიდრეობას და წააქეზებს მას შემოქმედებითი მუშაობისაკენ.

ანდრია რაზმაძე
(1890—1929)

ანდრია რაზმაძე დაიბადა სოფელ ჩხენისში (სამტრედიის რაიონი), 1890 წელს. დაწყებითი სწავლა მიიღო ხაშურის რკინიგზის ორკლასიან სკოლაში. 1904 წელს შევიდა ქუთაისის რეალურ სასწავლებელში. ოთხი წლის კურსი ორი წლის განმავლობაში გაიარა და სასწავლებელი 1906 წელს დაამთავრა. იმავე წელს შევიდა მოსკოვის უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მათემატიკურ განყოფილებაზე, რომელიც 1910 წელს დაამთავრა.

ანდრია რაზმაძემ ძალიან ადრე, ჯერ კიდევ საშუალო სკოლაში ყოფნის დროს, გამოავლინა თავისი მათემატიკური ნიჭი და მიდრეკილება, სერიოზული დამოკიდებულება მათემატიკისა და, საზოგადოდ, მეცნიერების საფუძვლიანი დაუფლებისადმი. მოსკოვის უნივერსიტეტში სტუდენტად ყოფნისას მან საბოლოოდ განსაზღვრა თავისი მათემატიკური გემოვნება და შემოქმედებითი მიმართულება: მისი სამეცნიერო მუშაობის ცენტრში, მთელი შემდგომი ცხოვრების განმავლობაში, იყო ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემები. მოსკოვის უნივერსიტეტში ყოფნისას ანდრია რაზმაძემ შეითვისა რუსული მათემატიკური კულტურის დიდი ცხოველმყოფელი ძალა და ტრადიციები, რამაც წარუშლელი კვალი დატოვა მთელ მის შემდგომ მეცნიერულ მუშაობაზე. ა. რაზმაძე მთელი თავის არსებით გრძნობდა იმ უდიდეს მნიშვნელობას, რომელიც რუსულ კულტურას, რუსეთის მეცნიერებასა და ხელოვნებას აქვს თანამედროვე ქართველი ადამიანის შეგნების ფორმირებისათვის უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ ა. რაზმაძე ინიშნება საშუალო სკოლის მასწავლებლად ქალაქ მურომში. აქ ის ენერგიულად განაგრძობს თანამედროვე მათემატიკის გაღრმავებულ შესწავლას და დიდის დაძაბულობით აწარმოებს მეცნიერულ კვლევა-ძიებას; 1917 წელს მოსკოვის უნივერსიტეტში აბარებს სამაგისტრო გამოცდებს და მას იმავე უნივერსიტეტში იწვევენ პრივატ-დოცენტის თანამდებობაზე. საქართველოში უნივერსიტეტის დაარსებისთანავე ის გადმოდის თბილისში. ქართულ უნივერსიტეტთან განუყრელად დაკავშირებულია მთელი მისი შემდგომი მოღვაწეობა. მთელ თავის ენერგიასა და ნიჭს ის ახმარს მათემატიკური განყოფილების ორგანიზაციას, მათემატიკოსთა კადრების აღზრდას და მათემატიკური კვლევა-ძიების საქმის ფართოდ დაყენებას საქართველოში. ის ერთნაირად ზრუნავდა ქართული მათემატიკური ტერმინოლოგიისა და მეტყველების სტილის შექმნისათვის, სახელმძღვანელოების გამოცემისათვის, მაღალი კვალიფიკაციის სამეცნიერო ძალების მოწვევისა და მომზადებისათვის, სამეცნიერო კვლევა-ძიების გაშლისათვის, თავისი ყოველდღიური სწავლებისა და ლექციების საქმისათვის. დღეს, როცა ქართული მათემატიკური ტერმინოლოგია ძირითადად დამუშავებულია და ქართული მათემატიკური მეტყველების ფორმები მტკიცედ დადგენილია და მასობრივ ჩვევებად გადაქცეული, ძნელი წარმოსადგენია მთელი სიდიდე იმ საქმისა, რომელიც ამ მხრივ ანდრია რაზმაძემ შეასრულა. თავის „განუსაზღვრელ ინტეგ-

რალთა თეორიის" კურსის წინასიტყვაობაში ის თვითონ აღნიშნავს, თუ რა ძნელი სამუშაოს შესრულება უხდებოდა: „ერთის მხრივ ანალიტიკური ნომენკლატურის გადმოქართულება და, მეორეს მხრივ, თვით მათემატიკური აზროვნების ამეტყველება ქართულ ენაზე". ანდრია რაზმაძე დიდ ყურადღებას აქცევდა მეტყველებისა და წერის კულტურას და, უნდა ითქვას, რომ მისი სტილი ქართულ მეცნიერულ ლიტერატურაში და მისი აკადემიური მჭერმეტყველება შეიძლება სანიმუშოდ იქნას მიჩნეული.

ერთ-ერთი დიდი ამოცანა, რომელიც ანდრია რაზმაძემ თბილისის უნივერსიტეტში მუშაობასთან დაკავშირებით დაისახა, იყო მათემატიკური ანალიზის ვრცელი კურსის შედგენა ქართულ ენაზე. მან მოასწრო ამ კურსის მხოლოდ ორი ნაწილის გამოქვეყნება: ანალიზის შესავლისა (1920 წ.) და განუსაზღვრელ ინტეგრალთა თეორიისა (1922 წ.). ამ ნაშრომებით, რომლებითაც პირველად ეზიარა უმაღლეს მათემატიკურ მეცნიერებას ჩვენს უნივერსიტეტში აღზრდილი მათემატიკოსების რამდენიმე თაობა, მტკიცე საფუძველი ჩაეყარა ქართულ ენაზე საუნივერსიტეტო მათემატიკური სახელმძღვანელოების შექმნას. არ უნდა იქნას დავიწყებული, კერძოდ, ის დიდი მუშაობაც, რომელიც ანდრია რაზმაძემ ჩაატარა იმისათვის, რომ თბილისის მაშინდელი სტამბების პირობებში შესაძლებელი გამხდარიყო რთული მათემატიკური ტექსტის ტექნიკურად სრულყოფილი აწყობა. მას ჰქონდა, ჰაინეს ერთი გამოთქმის პერეფრაზირება რომ მოვახდინოთ, არა მარტო ფრთები შემოქმედებითი აღმაფრენისათვის, არამედ ძლიერი ხელებიც მეცნიერების წარმატებისათვის ხელშემწყობი ორგანიზაციული და ნივთიერი პირობების შესაქმნელად.

ანდრია რაზმაძის სამეცნიერო გამოკვლევები, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, უმთავრესად მიეკუთვნება ვარიაციათა აღრიცხვას. უკანასკნელი შეისწავლის მაქსიმუმისა და მინიმუმის პრობლემას იმ შემთხვევისათვის, როცა სიდიდის ესა თუ ის მნიშვნელობა არის დამოკიდებული მთლიანად აღებული ფუნქციისაგან. ასეთ დამოკიდებულების მარტივ მაგალითს წარმოადგენს ხაზის სიგრძე. ვარიაციათა აღრიცხვის შექმნას უკავშირებენ 1696 წელს იოჰან ბერნულის მიერ ე. წ. ბრაქისტოქრონის პრობლემის წამოყენებას, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: სხეული სიმძიმის ძალის გავლენით ერთი მდებარეობიდან მეორეში გადადის; რა გზით უნდა იმოძრაოს სხეულმა, რომ ეს გადასვლა მოხდეს მინიმალური დროის განმავლობაში? ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემები წინათ დასმული იყო, უმთავრესად, ორი აღებული წერტილის შემაერთებელი ისეთი მრუდების შესახებ, რომელთა მხების ცვალება განუწყვეტელია. შემდეგში ცდილობდნენ სხვადასხვა მიმართულებით გაეფართოებინათ იმ ფუნქციათა კლასი, რომელთა მიმართ დასმულია ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემა. ანდრია რაზმაძის გამოკვლევები, ძირითადად, ამ ხაზით ვითარდება. მის პირველ შრომაში, რომელიც 1914 წელს გამოვიდა, მიზნად დასახულია ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემის გავრცელება ისეთ მრუდებზე, რომელთა ერთი ბოლოწერტილი ფიქსირებულია, ხოლო მეორე წინასწარი პირობით შეზღუდული არაა. მნიშვნელოვან პროგრესს ვა-

რიაციათა აღრიცხვისათვის ზემოაღნიშნული მიმართულებით წარმოადგენს ანდრია რაზმაძის მიერ შექმნილი წყვეტილ ექსტრემალთა თეორია, რომელშიაც ხდება ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემის გავრცელება მარტივი ხასიათის წყვეტილ მრუდებზე და რომლითაც ვარიაციათა აღრიცხვა პირველად გამოყვანილია წყვეტილ ფუნქციათა ფართო ასპარეზზე. ეს თეორია საგულისხმო ნაწილია თანამედროვე ვარიაციათა აღრიცხვისა და მისი მნიშვნელობა არ იკარგება ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითად და ზოგად ხაზებში მიმოხილვის დროსაც. ა. რაზმაძის კვლევა-ძიების ერთ-ერთ საყურადღებო შედეგს წარმოადგენს ვარიაციათა აღრიცხვის ლემა, რომელიც მის სახელს ატარებს და რომლიდანაც მოხდენილად გამომდინარეობს ვარიაციათა აღრიცხვისათვის ძირითადი მნიშვნელობის მქონე ეილერის დიფერენციალური განტოლება.

ა. რაზმაძის სხვა შრომათა შორის დავასახელებთ მის უკანასკნელ გამოკვლევას, რომელშიაც პირველად მოცემულია დასრულებული გადაწყვეტა იმგვარ ინტეგრალთა მინიმუმის პრობლემისა, რომელთათვისაც ინტეგრალის ქვეშ მდგომი ფუნქცია პერიოდულია. ამ გამოკვლევასთან დაკავშირებულია განსვენებული მეცნიერის უკანასკნელი წლების მუშაობა. უკვე შეპყრობილი თავისი უკანასკნელი საბედისწერო ავადმყოფობით, ის აჩქარებს ამ გამოკვლევის დამთავრებას, მედგრად ძლევს ავადმყოფობის პირველ იერიშებს და ახერხებს გამოკვლევის დატოვებას დასაბეჭდად მზა სახით. შრომა გამოქვეყნდა მისი სიკვდილის შემდეგ.

თავისი კვლევა-ძიების სტილით ვარიაციათა აღრიცხვაში ანდრია რაზმაძე ახლო დგას ამ დარგის კლასიკოსებთან და მუშაობს მათთვის დამახასიათებელი პრობლემატიკისა და მეთოდების შემდგომ განვითარებაზე.

ანდრია რაზმაძეს გაცხოველებული მეცნიერული ურთიერთობა ჰქონდა მთელ რიგ გამოჩენილ მათემატიკოსებთან; უცხოეთში სამეცნიერო მივლინებების დროს ის ყოველთვის გამოდიოდა როგორც საქართველოსა და მთელი საბჭოთა ქვეყნის მგზნებარე პატრიოტი და ყოველთვის ახსოვდა საბჭოთა მეცნიერის მაღალი სახელი და დანიშნულება.

ა. რაზმაძე იყო დიდი შემოქმედებითი გაქანების მეცნიერი, დაჯილდოებული ცოცხალი მათემატიკური წარმოდგენით და მათემატიკური კონსტრუირების მახვილი უნარით; ის მუდამ ახლის ძიებაში იყო და უკვე მიღწეულზე დიდი ხნით არ ჩერდებოდა.

ა. რაზმაძე უდავოდ მიჩნეულია თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთ გამოჩენილ მოღვაწედ. მისმა შრომებმა ფართო გამოხმაურება ჰპოვეს მეცნიერულ ლიტერატურაში და საპატიო ადგილი დაიკავეს ვარიაციათა აღრიცხვის მთელ რიგ თანამედროვე კურსებში.

ანდრია რაზმაძე არ იყო ისეთი მეცნიერი, რომელიც ჩამალულია თავის ვიწრო მეცნიერულ ნაჭუჭში და არ უნდა მის გარეთ რაიმე დაინახოს. ის კარგად ხედავდა თეორიისა და პრაქტიკის ერთიანობას, მეცნიერების კავშირს ცხოვრების სხვა მხარეებთან და მის დიდ სოციალურ ღირებულებას. მის მოღვაწეობაში, როგორც სპეციალისტისა, ამავე დროს ჩანდა ზოგადი სახე მეცნიერი მოქალაქისა, რომელიც ზრუნავდა მარქსისტულ-ლენინური მსოფლმხე-

დველობის დაუღლებისათვის და თავის მუშაობას განუყრელად უკავშირებდა კომუნისტური საზოგადოების მშენებლობის საქმეს. ის ენერგიულად ეკიდებოდა საზოგადოებრივ მუშაობას და გულმხურვალე იყო იმ კოლექტივის მიმართ, რომელშიაც იმყოფებოდა.

ა. რაზმაძის მეცნიერულ მუშაობას ახასიათებს იშვიათი მეთოდურობა და სისტემატურობა. ის ამ მუშაობას მტკიცე გეგმის მიხედვით აწარმოებდა. მთელი მისი მოღვაწეობისათვის, რომელსაც მისი ნებისყოფის ძლიერი დაღი ამჩნევია, დამახასიათებელია ღრმა სერიოზულობა, მოვალეობის შეგნებისა და პასუხისმგებლობის გამახვილებული გრძნობა; ის ყოველთვის მტკიცედ და შეუდრეკლად იბრძოდა მეცნიერული მუშაობის მაღალი დონის დაცვისათვის.

ანდრია რაზმაძე თავის მუშაობას დიდი ტემპერამენტით და დაძაბულობით აწარმოებდა და ყოველთვის აქტიურად იყო განწყობილი თავისი საქმიანობის მიმართ; მეცნიერული მუშაობა მისთვის არ წარმოადგენდა განყენებულ პროცესს, მისი ცხოვრების სხვა მხარეებისაგან დაშორებულს. ის ამ მუშაობაში ებმებოდა მთელი თავისი არსებით და აიზბოდა მას შემოქმედებითი მგზნებარებით.

დაუვიწყარია ანდრია რაზმაძის ფიგურა უნივერსიტეტის კათედრაზე. ლამაზი, ამასთანავე შეკუმშული და ეკონომიური მეტყველება, ყოველთვის კარგად შევსებული ფრაზის მკაფიო ლოგიკური ტონირება, შინაგანი სიხარული და საზეიმო ელფერი, რომლითაც მოწოდებული იყო აუდიტორიისათვის მეცნიერული სიტყვა, ამავე დროს უტყუარი გრძნობა ზომიერებისა—ქმნიდენ ა. რაზმაძის, როგორც მასწავლებლის, ჭეშმარიტად მიმზიდველ სახეს. მისი ენთუზიაზმი, მეცნიერებისადმი სიყვარული, შემეცნების სიხარული, რომელსაც მთელი მისი არსება გამოასხივებდა, მათემატიკური სიმბოლოების დაწერის გარეგნული სიკოხტავეც კი, რომელშიაც იგრძნობოდა რაღაც ალერსიანი დამოკიდებულება მათდამი—აუდიტორიაზე წარუშლელ შთაბეჭდილებას ახდენდა. ამიტომ არის ანდრია რაზმაძის სახელი ასე პოპულარული ჩვენს ახალგაზრდობაში, რომელმაც საყვარელი მასწავლებლის ცოცხალი სახე მიიღო მისი მოწაფეთა თაობიდან თაობაზე გადასვლით.

ანდრია რაზმაძე იყო ქართული საბჭოთა მეცნიერების ერთ-ერთი დიდი წარმომადგენელი, მეცნიერი და საზოგადო მოღვაწე, რომელიც ერთგულად ემსახურებოდა ლენინ-სტალინის საქმეს.

ჩვენმა პარტიამ და საბჭოთა ხელისუფლებამ მაღალი შეფასება მისცეს ა. რაზმაძის დამსახურებას ქართველი ხალხისა და მშობლიური მეცნიერების წინაშე. საქართველოს სსრ სახკომსაბჭოს 1944 წლის 14 ოქტომბრის დადგენილებით საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტს—ერთ-ერთ დიდ მეცნიერულ მათემატიკურ კერას საბჭოთა კავშირში—ა. რაზმაძის სახელი მიეკუთვნა.

ანდრია რაზმაძე ისეთ მეცნიერთა რიცხვს ეკუთვნის, რომელთაგანაც შემდგომ თაობებს რჩებათ არა მარტო გარკვეული მეცნიერული ნაშრომები და ისტორიულად აღნუსხული დამსახურებანი, არამედ, ამასთან ერთად, მეცნიერის, მასწავლებლის, მოქალაქის, მშობლიური კულტურის განვითარებისა და ხალხის ბედნიერებისათვის თავდადებული მებრძოლის მომხიბლავი სახე.

ლ. გოკიელი

I

ცვალებად ბოლოწერტილიანი ამონახსნების შესახებ ვარიაციათა აღრიცხვაში[1]

შესავალი

ვარიაციათა აღრიცხვის ზოგადი ამოცანა შეიძლება შემდეგი სახით ჩამოვაყალიბოთ:

მოცემულია ინტეგრალი

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\,dt,$$

სადაც f და F ფუნქციები აკმაყოფილებენ ცნობილ პირობებს გარკვეულ B არეში და განსაზღვრავენ უწყვეტ წირთა ფუნქციონალურ ველს, რომელიც მთლიანად ამ არეშია მოთავსებული. საჭიროა ამ ველიდან იმ მრუდის განსაზღვრა, რომელიც I ინტეგრალს ექსტრემალურ მნიშვნელობას ანიჭებს.

პრობლემის ხასიათი დამოკიდებულია სხვადასხვა პირობაზე, რომლებსაც (გარდა რეგულარობის პირობებისა: უწყვეტობისა, მხების არსებობისა და სხვა) ველის ყველა მრუდი უნდა აკმაყოფილებდეს. მაგალითად, თუ ყველა მრუდისათვის შესრულებული უნდა იყოს ტოლობა:

$$\int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x,' y')\,dt = l, \tag{l}$$

სადაც G რაღაც მეორე ფუნქციაა, ხოლო l რაიმე მუდმივი, ამგვარი პრობლემა ცალკე განსახილავია და ამ სახის ამოცანას „იზოპერიმეტრული პრობლემა“ ეწოდება.

განსაკუთრებული პირობები, რომლებიც ფუნქციონალურ ველს ახასიათებს, ორგვარია: ან მოცემულია განტოლებები (სასაზღვრო პირობები), რომლებსაც ველის მრუდების ყველა წირითი $\left(x, y, \dfrac{y'}{x'}\right)$ ელემენტი ან მათი გარკვეული სიმრავლე უნდა აკმაყოფილებდეს ((l) არის ამგვარი პირობის სპეციალური სახე); ან მოცემულია პირობები მრუდის ცალკეული წირითი ელემენტისათვის.

რაც შეეხება ბოლოწერტილებს, მათთვის შესაძლებელია ორი ძირითადი პირობა:

a) ყველა მრუდს აქვს ერთნაირი ბოლოწერტილები;

[1] ეს წერილი დაიბეჭდა ჟურნალში „Mathematische Annalen“ (იხ. A. Rasmadse, Über Lösungen mit einem variablen Endpunkt in der Variationsrechnung, Math. Ann. Bd. 75, 1914).

ბ) ორივე ბოლოწერტილი, ან მხოლოდ ერთი მათგანი არის ნებისმიერი, ანდა მოცემულია მრუდები, რომლებზედაც ბოლოწერტილებს შეუძლიათ მოძრაობა.

ვთქვათ პრობლემა დასმულია სასაზღვრო პირობების გარეშე.

ჩვენ წინასწარ დავუშვებთ, რომ ამ პრობლემის ექსტრემალი არსებობს და ვუჩვენებთ, რომ ველის მრუდთაგან იგი არის სწორედ ის მრუდი, რომლის წირითი ელემენტები აკმაყოფილებენ ე ი ლ ე რ - ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - y'x'') = 0. \tag{1}$$

გარდა ამისა ველის დამახასიათებელი პირობების გამო ექსტრემალის ერთი ან რამდენიმე ელემენტი უნდა აკმაყოფილებდეს სხვა განტოლებებსაც; უკანასკნელთ ჩვენ მივიღებთ ვარიაციის მეთოდით; მათ აქვთ სახე:

$$\varphi_i\{F_{x'}(x_1, y_1, x'_1, y'_1),\ F_{y'}(x_1, y_1, x'_1, y'_1);$$
$$F_{x'}(x_2, y_2, x_2', y_2'),\ F_{y'}(x_2, y_2, x_2', y_2'); \ldots;\ a_0, a_1, \ldots\} = 0,$$

აქ φ_i არის F ფუნქციის x' და y'-ით წარმოებულების წრფივი ფუნქცია, a_0, $a_1, \ldots$ კი პარამეტრები. კერძოდ, ხ) ტიპის პრობლემისათვის ბოლოწერტილის ელემენტები ექსტრემალზე ვარიაციის მეთოდით განისაზღვრება, ამიტომ ისინი ზემოდასახელებულ დამოკიდებულებებს აკმაყოფილებენ.

ა) ტიპის უმარტივესი ველი არის ისეთი, რომლის მრუდები C' კლასისაა[1], მასთან შესრულებულია მხოლოთ ერთი ტოლობა, სახელდობრ (1). შევარჩევთ რა გარკვეული წესით t პარამეტრს, ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალისათვის ჩვენ ვპოულობთ შემდეგს:

$$\begin{aligned} x &= f(t, \alpha, \beta), \\ y &= f_1(t, \alpha, \beta), \end{aligned} \tag{2}$$

სადაც α და β ორი ნებისმიერი მუდმივია. (2) განტოლებებით წარმოდგენილი მრუდები ამგვარად ექსტრემალთა უმარტივესი თვისების მქონეა. ისინი ფარავენ B არეს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ სხვა პრობლემის ამოხსნები, სასაზღვრო პირობების გარეშე, ან მთლიანად ეკუთვნიან (2) ოჯახს ანდა ამ ოჯახის მრუდთა ნაჭრებისაგან შედგებიან.

ამგვარად, ვარიაციათა აღრიცხვის ყოველი პრობლემა სასაზღვრო პირობების გარეშე იმაში მდგომარეობს, რომ განისაზღვროს (2) ოჯახის მრუდი, რომელსაც გარდა უმარტივესი ექსტრემალური თვისებისა აქვს აგრეთვე ის თვისება, რომელიც პრობლემაშია დასახელებული; ანდა იმავე ოჯახის რამდენიმე მრუდი, რომელთა ნაჭრები შეადგენენ ერთ მრუდს, რომელიც პრობლემას უპასუხებს.

ხ) ტიპის ექსტრემუმის ერთი განსაკუთრებით მარტივი ამოცანა, სასაზღვრო პირობების გარეშე, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ, შემდეგში მდგომარეობს: ფუნქციონალური ველი შედგება იმ უწყვეტი მრუდების კონისაგან, რომლებიც გამოდიან მოცემული A წერტილიდან და ბოლოვდებიან საკმარისად

[1] იხ. **Bolza**, Vorlesungen über Variationsrechnung, გვ. 13, 14.

მცირე რადიუსიანი წრის შიგნით. ამ ველში λ ექსტრემალი უნდა იყოს აგრეთვე ექსტრემალი თავის თავის მიმართაც, ე. ი. ის უნდა დაბოლოვდეს, ანუ „შეწყდეს" ისეთ R_0 წერტილში, რომ I ინტეგრალი აღებული AR_0-ის გასწვრივ ექსტრემალურ მნიშვნელობას ღებულობდეს. სწორედ ამიტომ ასეთ λ ექსტრემალს ჩვენ ვუწოდებთ შეწყვეტილ ექსტრემალს და წერტილს, სადაც ის წყდება, შეწყვეტის წერტილს.

(2) მრუდთაგან სწორედ ისინია შეწყვეტილი, რომლებზედაც შეწყვეტის წერტილები არსებობ ენ.

ჩვენ შემდეგში ვაჩვენებთ, რომ შეწყვეტილ ექსტრემალთა ერთობლიობა შეადგენს ოჯახს, ერთი ნებისმიერი პარამეტრით.

მრუდთა იმ კონის შესახებ, რომლებიც A წერტილიდან გამოდიან, უნდა შევნიშნოთ შემდეგი: პრობლემის ხასიათი დამოკიდებულია იმაზე, A წერტლს მივიღებთ საწყის თუ ბოლოწერტილად. ამის შესაბამისად შესაძლებელია აგრეთვე შეწყვეტის R_0 წერტილი მივიღოთ საწყის ან ბოლოწერტილად.

პირველ შემთხვევაში ექსტრემალებს ვუწოდებთ „პირველი გვარისას" — მეორეში კი — „მეორე გვარისას".

წინამდებარე შრომაში ჩვენ განვიხილავთ აუცილებელ და საკმარის პირობებს „პირველი გვარის" შეწყვეტილი ექსტრემალებისთვის. ბოლოს კი ჩვენ განვსაზღვრავთ პირველი და მეორე გვარის ექსტრემალთა ურთიერთ დამოკიდებულებას.

ორი ექსტრემალური მნიშვნელობიდან—maxima და minima სიმარტივისთვის ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ უკანასკნელთ.

შრომის შინაარსში მოკლედ ორიენტირებისათვის უკანასკნელ თავში მოცემულია მაგალითი.

A. აუცილებელი პირობები

1. F ფუნქციისაგან ჩვენ მოვითხოვთ, რომ ის ეკუთვნოდეს $B(x, y, x'^2 + y'^2 \neq 0)$ არეში C'' კლასს და, გარდა ამისა, ორი უკანასკნელი x' და y' არგუმენტის მიმართ აკმაყოფილებდეს ერთგვაროვნობის ცნობილ პირობას:

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y') \quad k > 0$$

ვთქვათ ამის გარდა:

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t) \quad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

არის C' კლასის რაიმე L მრუდი, რომელიც მთლიანად B არეში ძევს და ამ არეში ორ მოცემულ წერტილს აერთებს. მაშინ ფუნქცია:

$$F\,(\varphi(t),\; \psi(t),\; \varphi'(t),\; \psi'(t))$$

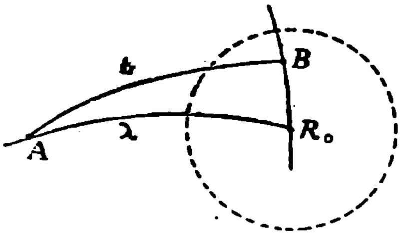
უწყვეტია (t_1, t_2) შუალედში; ამიტომ

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t),\; \psi(t),\; \varphi'(t),\; \psi'(t))\; dt$$

ინტეგრალს L მრუდის გასწვრივ აქვს სრულიად გარკვეული სასრულო მნიშვნელობა. შემდეგში ჩვენ ამ ინტეგრალს მოკლედ აღვნიშნავთ I_L-ით.

ვთქვათ λ შეწყვეტილი ექსტრემალია (ნახ. 1), რომელიც A საწყისი წერტილიდან გამოდის, R_0 კი მისი შეწყვეტის წერტილი. R_0 წერტილის გარშემო საკმაოდ მცირე რადიუსიანი წრის შიგნით ავიღოთ B წერტილი. L იყოს ნებისმიერი მეზობელი მრუდი, რომელიც A და B წერტილებს აერთებს, მაშინ შეწყვეტილი ექსტრემალის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$I_L > I_\lambda.$$



ნახ. 1

შევაერთოთ ახლა B და R_0 წერტილები ნებისმიერი E $(R_0\,B)$ მრუდით; რადგანაც B წერტილი ნებისმიერია, უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ R_0B მრუდი ტრანსვერსალია λ ექსტრემალის მიმართ; აქედან ვღებულობთ, რომ λ ექსტრემალი E მრუდთან, რომელიც R_0-დან გამოდის, ტრანსვერსალურად გადაიკვეთება.

თუ Θ_0 არის E მრუდის R_0 წერტილში მხების მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხე, ხოლო x_0, y_0, x_0', y_0' კი λ ექსტრემალის კოორდინატები და წარმოებულები იმავე R_0 წერტილში, მაშინ ტრანსვერსალობის პირობა:

$$F_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0')\cos\theta_0 + F_{y'}(x_0, y_0, x_0', y_0')\sin\theta_0 = 0 \tag{3}$$

შესრულებული უნდა იყოს; რადგანაც (3) განტოლებაში θ_0 ნებისმიერია, ამიტომ ამას ჩვენ მივყევართ შემდეგ დებულებამდე:

დებულება I. *შეწყვეტილი ექსტრემალის შეწყვეტის R_0 წერტილში შესრულებული უნდა იყოს შემდეგი ორი ტოლობა:*

$$\begin{aligned} F_{x'}(x_0, y_0, x_0', y'_0) &= 0, \\ F_{y'}(x_0, y_0, x_0', y'_0) &= 0. \end{aligned} \tag{I}$$

თუ ერთგვაროვნობის პირობას ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$F = x'\,F_{x'} + y'\,F_{y'},$$

მაშინ (I)-ის თანახმად, მივიღებთ:

$$F(x_0, y_0, x'_0, y'_0) = 0; \tag{4}$$

მაშასადამე, შეწყვეტის R_0 წერტილში F ფუნქცია ნულის ტოლია.

2. $$x = x(t),\ \ y = y(t)\ \ (t_1 < t < t_0)$$

იყოს $\lambda(AR_0)$ ექსტრემალის განტოლება, ხოლო t_1 და t_0 კი t პარამეტრის მნიშვნელობები სათანადოდ A და R_0 წერტილებში. განვიხილოთ ახლა ფუნქცია:

$$I(t) = \int_{t_1}^{t} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\,dt.$$

ამ ფუნქციას $t = t_0$ წერტილში უნდა ჰქონდეს მინიმუმი, ამიტომ $t = t_0$ წერ-

ტილში პირველი $I'(t)$ წარმოებული უნდა იყოს ნულის ტოლი, ხოლო მეორე წარმოებული კი $I''(t) \geqq 0$; მაგრამ პირველი $I'(t)$ წარმოებული არის:

$$I'(t) = F(x(t), y(t), x'(t), y'(t)).$$

(4) ფორმულის საფუძველზე მინიმუმის პირველი პირობა შესრულებულია. მეორე წარმოებულისთვის კი გვაქვს:

$$I''(t) = F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_{x'} x''(t) + F_{y'} y''(t)$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $t = t_0$ და გავითვალისწინოთ (I) პირობა. მივიღებთ:

$$I''(t_0) = F_x x'(t_0) + F_y y'(t_0).$$

აქედან ვღებულობთ, რომ შეწყვეტის R_0 წერტილში (1) პირობის გარდა უნდა იყოს შესრულებული აგრეთვე უტოლობაც:

$$F_x(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\, x'_0 + F_y(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\, y'_0 \geqq 0 \qquad (5)$$

შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ შეწყვეტილი ექსტრემალის AR_0 რკალისათვის ლეჟანდრისა და იაკობის პირობა არის შესრულებული მკაცრი სახით, ე. ი.

$$F_1 > 0 \text{ და } \bar{t}^{-1} < t_1 < t_0,$$

სადაც

$$F_1 = \frac{F_{x'^2}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'^2}}{x'^2}, \qquad (6)$$

ხოლო $\bar{t}'_0$ აღნიშნავს t პარამეტრის მნიშვნელობას იმ წერტილისთვის, რომლის შეუღლებული წერტილია R_0.

B. შეწყვეტის წერტილთა წირი

3. ზემოთ ჩვენ ენახეთ, რომ C' კლასის ექსტრემალი წირით $\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$ ელემენტზე განიცდის შეწყვეტას, თუ:

$$F_{x'}'(x, y, x', y') = 0, \quad F_{y'}'(x, y, x', y') = 0 \qquad (7)$$

ეს (7) სისტემა იძლევა ოჯახს ისეთი შეწყვეტის ელემენტებისა, რომლებშიაც C' კლასის ექსტრემალები შესაძლებელია შეწყდენ. თუ აქედან ჩვენ $\frac{y'}{x'}$-ს გამოვრიცხავთ[1], მივიღებთ ყველა შეწყვეტის წერტილის გეომეტრიულ ადგილს:

$$R(x, y) = 0$$

---

[1] ეს შეიძლება, ვინაიდან $F_{x'}$ და $F_{y'}$ ფუნქციები x' და y'-ის მიმართ ნულოვანი რიგის არიან, ამიტომ:

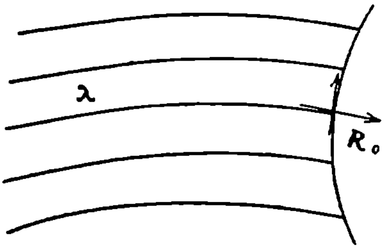
$$F_{x'}(x, y, x', y') = F_{x'}\left(x, y, 1, \frac{y'}{x'}\right),$$

$$F_{y'}(x, y, x', y') = F_{y'}\left(x, y, 1, \frac{y'}{x'}\right).$$

ეს არის შეწყვეტის წერტილთა წირის განტოლება. (7) სისტემიდან, (6) ფორმულის თანახმად, მივიღებთ:

$$F_{x'x}dx + F_{x'y}dy - x'^2y'F_1\, d\left(\frac{y'}{x'}\right) = 0,$$

$$F_{y'x}dx + F_{y'y}dy + x'^3F_1\, d\left(\frac{y'}{x'}\right) = 0$$



ნახ. 2

ახლა, გამორიცხავთ რა $d\left(\frac{y'}{x'}\right)$-ს, მივიღებთ შეწყვეტის წერტილთა წირის გასწვრივ ტოლობას:

$$F_x\, dx + F_y\, dy = 0;$$

და ამიტომ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{8}$$

ამ ფორმულიდან ვღებულობთ, რომ: თუ F ფუნქცია არ არის დამოკიდებული x ან y-ზე, მაშინ შეწყვეტის წერტილთა წირი წარმოადგენს x ან y ღერძის პარალელურს ერთს ან რამდენიმე წრფეს. თუ F არაა დამოკიდებული არც x და არც y-ზე, მაშინ შეწყვეტის წერტილთა მრუდი განუსაზღვრელია.

(7) განტოლებით ყოველი შეწყვეტილი ექსტრემალის წირითი ელემენტი ცალსახად არის განსაზღვრული. ამიტომ მთელი ექსტრემალი ამ განტოლების საშუალებით სავსებით განსაზღვრულია.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ვინაიდან შეწყვეტილი ექსტრემალები C' კლასს ეკუთვნიან, რომელთაც ჩვენ ვავლებთ შეწყვეტის წერტილთა წირის წერტილებზე სათანადო მიმართულებით (რაც (7) ფორმულითაა განსაზღვრული) (ნახ. 2), ამიტომ მათი ერთობლიობა წარმოადგენს ოჯახს ერთი ნებისმიერი პარამეტრით (ერთ პარამეტრიან ოჯახს).

C. შეუღლებული წერტილების თეორია

4. ვთქვათ

$$x = \bar{x}(a),\ y = \bar{y}(a)$$

იმ E მრუდის განტოლებანია, რომელიც R_0 წერტილზე გადის; ცნობილია (n^0. 1) რომ E მრუდი არის λ ექსტრემალის ტრანსვერსალი. დავუშვათ, რომ E მრუდისა და λ ექსტრემალის მხებები R_0 წერტილში სხვადასხვა არიან, მაშინ E მრუდის ყოველ ნებისმიერ B წერტილში, რომელიც R_0 წერტილის საკმარისად ახლოს მდებარეობს, E მრუდის ტრანსვერსალურად მხოლოდ ერთი ექსტრემალის გავლება შეიძლება; ასეთი ექსტრემალების ერთობლიობა, რომლებიც E მრუდის ტრანსვერსალურია, ჰქმნის ექსტრემალთა ერთპარამეტრიან ოჯახს.

[1] Bolza, Vorlesungen, გვ. 321.

ვთქვათ
$$x = \varphi(t, a),\quad y = \psi(t, a) \tag{9}$$
ამ ოჯახის განტოლებანია, ხოლო $a = a_0$ კი a პარამეტრის მნიშვნელობა λ ექსტრემალისთვის. E მრუდის გასწრივ გვაქვს:
$$t = t(a); \tag{10}$$

მაშინ გვაქვს იგივობა:
$$\begin{aligned}&\bar{x}'(a)\, F_{x'}(\varphi(t(a), a), \psi(t(a), a), \varphi_t(t(a), a), \psi_t(t(a), a)) + \\ &\bar{y}'(a)\, F_{y'}(\varphi(t(a), a), \psi(t(a), a), \varphi_t(t(a), a), \varphi_t(t(a), a)) = 0\end{aligned} \tag{11}$$

თუ გავაწარმოებთ ამ ტოლობის ორივე მხარეს, მივიღებთ:
$$\begin{aligned}&\left[\bar{x}'(a)\frac{d}{dt}F_{x'} + \bar{y}'(a)\frac{d}{dt}F_{y'}\right]\frac{dt}{da} + \bar{x}''(a)\, F_{x'} + \bar{y}''(a) F_{y'} + \\ &+ \bar{x}'(a)\left[F_{x'x}\varphi_a + F_{x'y}\psi_a + F_{x'^2}\varphi_{ta} + F_{x'y'}\psi_{ta}\right] + \\ &+ \bar{y}'(a)\left[F_{y'x}\varphi_a + F_{y'y}\psi_a + F_{x'y'}\varphi_{ta} + F_{y'^2}\psi_{ta}\right] = 0;\end{aligned}$$

ახლა თუ ვისარგებლებთ აღნიშვნებით:
$$\begin{gathered}L = F_{x'x} - \psi_t\psi_{t^2} F_1,\quad M = F_{x'y} + \varphi_{t^2}\psi_t F_1 = F_{y'x} + \varphi_t\psi_{t^2} F_1, \\ N = F_{y'y} - \varphi_t\varphi_{t^2} F_1,\quad K = \bar{x}''(a) F_{x'} + \bar{y}''(a) F_{y'},\quad \Delta = \varphi_t\psi_a - \psi_t\varphi_a,\end{gathered}$$

მივიღებთ:
$$\left[F_x\bar{x}'(a) + F_y\bar{y}'(a)\right]\frac{dt}{da} + (L\varphi_a + M\psi_a - \psi_t F_1\Delta_t)\bar{x}'(a) + $$
$$+ (M\varphi_a + N\psi_a + \varphi_t F_1\Delta_t)\bar{y}'(a) + K(a) = 0;$$
საიდანაც:

$$\frac{dt}{da} = -\frac{(L\varphi_a + M\psi_a - \psi_t F_1\Delta_t)\bar{x}'(a) + (M\varphi_a + N\psi_a + \varphi_t F_1\Delta_t)\bar{y}'(a) + K(a)}{F_x\bar{x}'(a) + F_y\bar{y}'(a)} \tag{12}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $a = a_0$ წერტილის მიდამოში (10) ფუნქცია საზოგადოდ მხოლოდ ისეთი E მრუდებისათვის არსებობს, რომელთათვისაც ზემო წილადის მნიშვნელი $a = a_0$ მნიშვნელობისათვის განსხვავებულია ნულისაგან, ე. ი.
$$F_x\bar{x}'(a) + F_y\bar{y}'(a) \neq 0;$$
მაგრამ, თუ
$$F_y\bar{x}'(a) + F_y\bar{y}'(a) = 0,$$

მაშინ E მრუდისა და შეწყვეტის წერტილთა მრუდის მხებები შეწყვეტის R_0 წერტილში ერთმანეთს ემთხვევა (n°. 3). ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ E მრუდებს, რომელთათვისაც მხებთა ეს მიმართულებები განსხვავებულია.

მოვძებნოთ ახლა მხების $T_0 = \operatorname{tg}\theta_0$ დახრა E მრუდის K_0 წერტილში. (10) ფორმულის საფუძველზე ჩვენ გვაქვს ორი იგივობა:

$$\bar{x}(a) = \varphi(t(a), a), \quad \bar{y}(a) = \psi(t(a), a)$$

და რადგანაც

$$t(a_0) = t_0,$$

ამიტომ გვაქვს:

$$T_0 = \left(\frac{\psi_t \dfrac{dt}{da} + \psi_a}{\varphi_t \dfrac{dt}{da} + \varphi_a} \right)_{\substack{t = t_0 \\ a = a_0}};$$

შევიტანოთ აქ მრიცხველში და მნიშვნელში $\dfrac{dt}{da}$-ს ნაცვლად (12) გამოსახულება, მივიღებთ:

$$\psi_t \frac{dt}{da} + \psi_a = -\frac{-(L\bar{x}' + M\bar{y}')\Delta + \psi_t(\varphi_t\bar{y}' - \psi_t\bar{x}')F_1\Delta_t + K(a)\psi(t)}{F_x\bar{x}' + F_y\bar{y}'},$$

$$\varphi_t \frac{dt}{da} + \varphi_a = -\frac{(M\bar{x}' + N\bar{y}')\Delta + \varphi_t(\varphi_t\bar{y}' - \psi_t\bar{x}')F_1\Delta_t + K(a)\varphi(t)}{F_x\bar{x}' + F_y\bar{y}'}.$$

აქ

$$K(a_0) = o,$$

ამიტომ გვექნება:

$$T_0 = \frac{-(L_0\bar{x}_0' + M_0\bar{y}'_0)\Delta(t_0, a_0) + y'_0(x'_0\bar{y}'_0 - y_0'\bar{x}'_0)F_1(t_0, a_0)\Delta_t(t_0, a_0)}{(M_0\bar{x}'_0 + N_0\bar{y}'_0)\Delta(t_0, a_0) + x'_0(x'_0\bar{y}'_0 - y'_0\bar{x}'_0)F_1(t_0, a_0)\Delta_t(t_0, a_0)}, \tag{13}$$

სადაც L_0, M_0, N_0, $\bar{x}'_0$, $\bar{y}'_0$ არიან L, M, N, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$-ის მნიშვნელობები $t = t_0$, $a = a_0$ წერტილში. შემდეგში ჩვენ დავწერთ $\Delta(t_0, a_0)$, $\Delta_t(t_0, a_0)$, $F_1(t_0, a_0)$-ის ნაცვლად[1] მარტივად Δ, Δ_t, F_1.

(13)-დან ვღებულობთ:

$$T_0 = \frac{-(L_0 + M_0T_0)\Delta + y'_0(x'_0T_0 - y'_0)F_1\Delta_t}{(M_0 + N_0T_0)\Delta + x'_0(x'_0T_0 - y'_0)F_1\Delta_t};$$

ამრიგად T_0-ის განსაზღვრა დაიყვანება შემდეგი კვადრატული განტოლების ამოხსნამდე:

$$(N_0\Delta + x'^2_0F_1\Delta_t)T_0^2 + 2(M_0\Delta - x'_0y'_0F_1\Delta_t)T_0 + (L_0\Delta + y'^2_0F_1\Delta_t) = o;$$

აქედან:

---

[1] შემოკლებული აღნიშვნები შემოღებულია ბოლცას მიერ (იხ. Bolza, Vorlesunge, გვ. 223). $F(\varphi(t,a), \psi(t,a), \psi_t(t,a), \psi_t(t,a)) = F(t, a)$.

$$T_0 = \frac{-(M_0\Delta - x'_0 y'_0 F_1 \Delta_t) \pm \sqrt{(M_0\Delta - x'_0 y'_0 F_1\Delta_t)^2 - (N_0\Delta + x_0'^2 F_1\Delta_t)(L_0\Delta + y_0'^2 F_1 \Delta_t)}}{N_0\Delta + x_0'^2 F_1 \Delta_t}$$

რაც მარტივი გამოთვლების შემდეგ მოგვცემს

$$T_0 = \frac{-(M_0\Delta - x'_0 y'_0 F_1\Delta_t) \pm \sqrt{(M_0^2 - N_0 L_0)\Delta^2 - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2) F_1 \Delta\Delta_t}}{N_0\Delta + x_0'^2 F_1\Delta_t} \quad (14)$$

ვთქვათ $P(\tau)$ არის E მრუდის ფოკუსი λ ექსტრემალზე[1]. გვაქვს[2]:

$$\Delta(t, a_0) = C\theta(t, \tau), \quad (15)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო θ ვაიერშტრასის მიხედვით იაკობის დიფერენციალური განტოლების ის ინტეგრალი, რომელიც λ ექსტრემალს ეთანადება და ისპობა $\tau = t$ მნიშვნელობისთვის. (15)-დან ვღებულობთ:

$$\Delta(t_0, a_0) = C\theta(t_0, \tau),$$
$$\Delta_t(t_0, a_0) = C\theta_t(t_0, \tau),$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი (14)-ში, მივიღებთ:

$$T_0 = \frac{-(M_0\theta - x'_0 y'_0 F_1 \theta_t) \pm \sqrt{(M_0^2 - N_0 L_0)\theta^2 - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2) F_1 \theta\theta_t}}{N_0\theta + x_0'^2 F_1 \theta_t},$$

ანუ

$$T_0 = \frac{\left(-M_0 - x'_0 y'_0 F_1 \frac{\theta_t}{\theta}\right) \pm \sqrt{(M_0^2 - N_0 L_0) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2) F_1 \frac{\theta_t(t_0, \tau)}{\theta(t_0, \tau)}}}{N_0 + x_0'^2 F_1 \frac{\theta_t}{\theta}} \quad (16)$$

ეს არის თანაფარდობა მხების მიერ x ღერძთან შედგენილ კუთხეებს შორის E მრუდის R_0 წერტილზე და λ ექსტრემალის ფოკუსზე.

5. განვიხილოთ ახლა ფესვქვეშა ფუნქცია. მოკლედ ჩვენ მას აღვნიშნავთ $f(\tau)$-თი:

$$f(\tau) = (M_0^2 - N_0 L_0) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y'^2) F_1 \frac{\theta_t(t_0, \tau)}{\theta(t_0, \tau)}.$$

იაკობის დიფერენციალური განტოლების თეორიიდან ცნობილია, რომ

---

[1] (9) ოჯახის ფოკუსს λ ექსტრემალზე ვუწოდებთ E მრუდის ფოკუსს λ ექსტრემალზე ან, მოკლედ, λ ექსტრემალის ფოკუსს.

[2] B o l z a, American Journal of Mathematics 30.

$$\frac{\cdot\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$$

არის τ-ს ზრდადი ფუნქცია. რადგანაც გარდა ამისა:

$$F_x = Lx' + My';\ F_y = Mx' + Ny', \qquad (17)$$

ამიტომ გვექნება:

$$L_0x'^2_0 + 2M_0x'_0y'_0 + N_0y'^2_0 = x'_0F_x + y'_0F_y$$

(n^0. 2)-ში ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ

$$x'_0F_x + y'_0F_y \geqq 0.$$

განვიხილოთ ეს პირობა მკაცრი სახით, ე. ი. გამოვრიცხოთ ტოლობის ნიშანი; მივიღებთ, რომ $f(\tau)$ ფუნქცია მუდამ კლებულობს. ვთქვათ $P_0(\tau_0)$ არის λ ექსტრემალის ის წერტილი, რომლისთვისაც

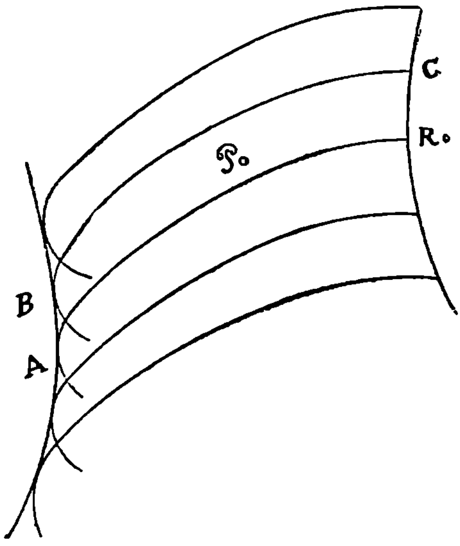
$$f(\tau_0)=0. \qquad (18)$$

მაშინ $f(\tau)$ ფუნქცია τ-ს მნიშვნელობებისთვის τ_0-დე დადებითია და უარყოფითი τ_0 მნიშვნელობის შემდეგ;

ვთქვათ $\tau < \tau_0$,

მაშინ

$$f(\tau) > 0. \qquad (19)$$



ნახ. 3

ამ შემთხვევაში (16) ფორმულიდან ვღებულობთ T_0-სათვის ორნამდვილ მნიშვნელობას; მაშასადამე, არსებობს R_0 წერტილში მხების ორი მიმართულება, რომლებიც ეთანადებიან (19) უტოლობის დამაკმაყოფილებელ τ-ს მნიშვნელობას. გავავლოთ ახლა R_0 წერტილზე ერთ-ერთი ამ მიმართულებით E მრუდი და ავაგოთ ტრანსვერსალურად ამ მრუდის მიმართ იმ ექსტრემალთა ოჯახი, რომლებიც შეწყვეტილ ექსტრემალს შემოევლებიან; ამ ოჯახის ფოკუსი იქნება λ ექსტრემალის ის წერტილი, რომელიც პარამეტრის $t = \tau$ მნიშვნელობას ეთანადება. ვთქვათ A არის ეს წერტილი, ხოლო B კი ანალოგიური წერტილი დასახელებული ოჯახის BC ექსტრემალისთვის.

A და B წერტილები ძევს ამ ოჯახის მომვლებზე. ც ე რ მ ე ლ ო - კ ნ ე ზ ე რ ი ს დებულების თანახმად გვიქვს (ნახ. 3).

$$I_{AB} + I_{BC} = I_{AR_0}.$$

ამგვარად, შეწყვეტილი AR_0 ექსტრემალი არ ანიჭებს მინიმუმს ინტეგრალს, თუ საწყისი $A(t_1)$ წერტილისათვის

$$t_1 \leqq \tau_0.$$

თუ კი $\tau > \tau_0$, გვექნება:

$$f(\tau) < 0. \tag{20}$$

ამ შემთხვევაში T_0 წარმოსახვითია; ამგვარად, τ-სათვის არ არსებობს მხების ნამდვილი მიმართულება, რომლის მნიშვნელობა აკმაყოფილებს (20) უტოლობას.

ყველა ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ მინიმუმის აუცილებელი პირობა არის უტოლობა:

$$t_1 > \tau_0 \tag{21}$$

6. დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი დებულება:

დებულება II. $P_0(\tau_0)$ წ ე რ ტ ი ლ ი ა რ ი ს შ ე წ ყ ვ ე ტ ი ლ ე ქ ს ტ რ ე მ ა ლ თ ა ო ჯ ა ხ ი ს ფ ო კ უ ს ი λ ე ქ ს ტ რ ე მ ა ლ ზ ე.

ამის დასამტკიცებლად დავუშვათ წინასწარ, რომ შეწყვეტის წერტილთა წირის გასწვრივ F_x და F_y არ არიან იგივურად ნული.

ვთქვათ

$$x = x(t, m), \quad y = y(t, m)$$

განტოლებებია შეწყვეტილ ექსტრემალთა კონისა, რომელიც λ ექსტრემალს $m = m_0$ მნიშვნელობისთვის შეიცავს.

შეწყვეტის წერტილთა მრუდის გასწვრივ ვთქვათ

$$t = t(m).$$

როცა $m = m_0$, გვაქვს:

$$t(m_0) = t_0.$$

მაშინ მივიღებთ ორ იგივეობას:

$$F_{x'}(x(t(m), m), \; y(t(m), m), \; x_t(t(m), m), \; y_t(t(m), m)) = 0,$$
$$F_{y'}(x(t(m), m), \; y(t(m), m), \; x_t(t(m), m), \; y_t(t(m), m)) = 0,$$

თუ ამათ გავაწარმოებთ, მივიღებთ:

$$F_x \frac{dt}{dm} + F_{x'x}\, x_m + F_{x'y}\, y_m + x_{tm} F_{x'^2} + y_{tm}\, F_{x'y'} = 0,$$
$$F_y \frac{dt}{dm} + F_{y'x} x_m + F_{y'y} y_m + x_{tm} F_{y'x'} + y_{tm}\, F_{y'^2} = 0.$$

(n^0. 5) აღნიშვნის თანახმად ჩვენ შეგვიძლია ეს განტოლებანი ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} F_x \frac{dt}{dm} + Lx_m + My_m - y_t F_1 \Delta_t = 0, \\ F_y \frac{dt}{dm} + Mx_m + Ny_m + x_t F_1 \Delta_t = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

თუ გამოვრიცხავთ $\dfrac{dt}{dm}$-ს, მივიღებთ:

$$\frac{Lx_m+My_m-y_tF_1\Delta_t}{F_x}=\frac{Mx_m+Ny_m+x_tF_1\Delta_t}{F_y}.$$

(17) ფორმულის საფუძველზე, შეწყვეტის წერტილთა წირის გასწვრივ გვექნება იგივურად:

$$(M^2-LN)\,\Delta-(Lx_t^2+2Mx_ty_t+Ny_t^2)\,F_1\Delta_t=0$$

და, მაშასადამე, R_0 წერტილში:

$$(M_0^2-L_0N_0)\,\Delta(t_0,m_0)-(L_0x'^2_0+2M_0x'_0y'_0+N_0y'^2_0)\,F_1(t_0,m_0)\,\Delta_t(t_0,m_0)=0.$$

ვთქვათ $H_0(h_0)$ არის შეწყვეტილ ექსტრემალთა ოჯახის ფოკუსი λ ექსტრემალზე. (15)-ის შესაბამისად უკანასკნელ განტოლებას ჩვენ გადავწერთ შემდეგნაირად:

$$(M_0^2-L_0N_0)-(L_0x'^2_0+2M_0x'_0y'_0+N_0y'^2_0)\,F_1(t_0,a_0)\,\frac{\theta_t(t_0,h_0)}{\theta(t_0,h)}=0.$$

თუ ამ გამოსახულებას შევადარებთ (18)-ს, დავინახავთ, რომ

$$\frac{\theta_t(t_0,\tau_0)}{\theta(t_0,\tau_0)}=\frac{\theta_t(t_0,h_0)}{\theta(t_0,h_0)}.$$

ეს კი მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა:

$$h_0=\tau_0,$$

ანუ, როცა P_0 ემთხვევა H_0-ს. ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ შეწყვეტის წერტილთა მრუდის გასწვრივ F_x და F_y ნულისგან განსხვავებულია; ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ერთ-ერთი ამ პირობათაგანი არ არის არსებითი, მაგალითად, თუ $F_x\neq0$, ხოლო

$$F_y=0, \tag{23}$$

მაშინ შეწყვეტის წერტილთა მრუდი y ღერძის პარალელურია. მაშასადამე

$$x(t(m),m)=\text{const}.$$

თუ გავაწარმოებთ ამ განტოლებას, მივიღებთ:

$$x_t\frac{dt}{dm}+x_m=0.$$

აქედან და (22)-ის პირველი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ $\frac{dt}{dm}$; მივიღებთ:

$$\frac{Lx_m+My_m-y_tF_1\Delta_t}{F_x}=\frac{x_m}{x_t}.$$

აქედან და (17)-ის პირველი განტოლებიდან გვექნება:

$$M\Delta-x_ty_tF_1\Delta_t=0,$$

ანუ

$$M-x_ty_tF_1\frac{\Delta_t}{\Delta}=0.$$

ახლა ჩავსვათ აქ m-ის ნაცვლად m_0 და გავითვალისწინოთ (15), მივიღებთ:

$$M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\theta_t(t_0,h_0)}{\theta(t_0,h_0)}=0. \tag{24}$$

ამ სახემდე შეგვიძლია აგრეთვე (18)-ის დაყვანა. (23)-დან გვექნება:

$$M_0x'_0+N_0y'_0=0,$$

საიდანაც

$$N_0=-\frac{x'_0}{y'_0}M_0.$$

ჩავსვათ N_0-ის ეს მნიშვნელობა (18)-ში, მივიღებთ:

$$M_0^2+M_0L_0\frac{x'_0}{y'_0}-(L_0x'^2_0+M_0x_0'y'_0)F_1\frac{\theta_t(t_0,\tau_0)}{\theta(t_0,\tau_0)}=0,$$

ანუ

$$\frac{L_0x'_0+M_0y'_0}{y'_0}\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\theta_t(t_0,\tau_0)}{\theta(t_0,\tau)}\right)=0.$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$\frac{L_0x'_0+M_0y'_0}{y'_0}\neq 0,$$

ამიტომ

$$M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\theta_t(t_0,\tau_0)}{\theta(t_0,\tau_0)}=0.$$

თუ უკანასკნელს შევადარებთ (24) მივიღებთ:

$$h_0=\tau_0.$$

ამგვარად დებულება ამ შემთხვევაშიაც დამტკიცებულია. ამ დებულების თანახმად (21) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$t_1>h_0. \tag{II}$$

ამას კი მივყევართ შემდეგ დებულებამდე:

დებულება III. I ინტეგრალის მინიმუმის აუცილებელი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ λ ექსტრემალის საწყისი A წერტილი H_0 ფოკუსსა და შეწყვეტის R_0 წერტილს შორის უნდა მდებარეობდეს.

D. სუსტი შეწყვეტილი ექსტრემალები

7. ზემოთ, როდესაც განვიხილეთ რადიკალქვეშა გამოსახულება, ჩვენ (5) პირობა მივიღეთ მკაცრი სახით. ადვილი შესამჩნევია, რომ იმ შემთხვევაში, როცა

$$x'_0F_x+y'_0F_y=0, \tag{25}$$

λ ექსტრემალი სუსტია. მართლაც, (25) შემდეგის ტოლფასია:

$$L_0x'^2_0+2M_0x'_0y'_0+N_0y'^2_0=0.$$

მაგრამ, რადგანაც x'_0 და y'_0 ნამდვილი სიდიდეებია და

$$x'^2_0+y'^2_0\neq 0,$$

ამიტომ უკანასკნელი მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა:

$$M_0^2-N_0L_0\geqq 0.$$

მაშინ (16)-ის თანახმად T_0 ყოველთვის ნამდვილია, მაშასადამე λ ექსტრემა-

ლი არის სუსტი ყველა წერტილისათვის. კერძოდ თუ შეწყვეტის წერტილთა მრუდის გასწვრივ გვაქვს:

$$F_x = F_y = 0,$$

მაშინ $F_x x' + F_y y'$ იგივურად ნულია ნებისმიერი შეწყვეტის $\left(x, y, \dfrac{y'}{x'}\right)$ ელემენტისათვის. მაშასადამე, ყველა შეწყვეტილი ექსტრემალი სუსტია; ჩვენ ამ შემთხვევას არ განვიხილავთ.

(5) უტოლობა შეიძლება კიდევ სხვა სახით ჩავწეროთ. აღვნიშნოთ ξ და η-თი შეწყვეტის წერტილის კოორდინატები. მაშინ (8) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{F_x}{F_y},$$

საიდანაც

$$F_y = -\frac{\xi' F_x}{\eta'}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (5) უტოლობაში, მივიღებთ:

$$F_x x' - \frac{\xi' F_x}{\eta'} y' > 0,$$

ანუ

$$\frac{F_x}{\eta'} (x'\eta' - y'\xi') > 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მხოლოდ ის შეწყვეტის წერტილები ეთანადება ძლავრ ექსტრემალებს, რომლებშიაც უკანასკნელნი არ ეხებიან შეწყვეტის წერტილთა მრუდს. ამგვარად, როცა შეწყვეტის წერტილთა მრუდი შეწყვეტილ ექსტრემალთა კონის მომვლებია, მაშინ ყველა შეწყვეტილი ექსტრემალი არის სუსტი.

E. საკმარისი პირობები

8. ვთქვათ მოცემულია λ ექსტრემალი, რომლისათვისაც შესრულებულია მინიმუმის ყველა პირობა, რომლებიც ჩვენ (n^0. 2)-ში დავასახელეთ; გარდა ამისა ვთქვათ საწყის წერტილში დაცულია (II) პირობა, ე. ი.

$$t_1 > h_0,$$

ხოლო ბოლო R_0 წერტილში (I) და (5) პირობები.

$\lambda(AR_0)$ ექსტრემალი მართლაც არის შეწყვეტილი, ე. ი. იგი ანიჭებს I ინტეგრალს უფრო ნაკლებ მნიშვნელობას იმ მეზობელ მრუდებთან შედარებით, რომლებიც A წერტილიდან გამოდიან და რომელთა ბოლო B წერტილი R_0 წერტილის ირგვლივ შემოწერილი მცირე რადიუსიანი წრის შიგნით მდებარეობს. მართლაც, შევაერთოთ R_0 წერტილი B წერტილთან ნებისმიერი $E(R_0 B)$ მრუდით:

$$x = \widetilde{x}(\alpha), \quad y = \widetilde{y}(\alpha).$$

R_0 წერტილში გვექნება:

$$F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)=0,$$
$$F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)=0.$$

ვთქვათ $\widetilde{x'_0}$ და $\widetilde{y'_0}$ არიან $\widetilde{x}$ და $\widetilde{y}$ ფუნქციების წარმოებულები R_0 წერტილში; უკანასკნელი განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\,\widetilde{x'_0}+F_{y'}(x_0, y_0, x'_0\, y'_0)\,\widetilde{y'_0}=0.$$

მაშასადამე, E მრუდი AR_0 ექსტრემალს ჰკვეთს ტრანსვერსალურად. ახლა კიდევ დასამტკიცებელია, რომ A წერტილი ისეა შერჩეული, რომ R_0B მრუდი მართლაც λ ექსტრემალის ტრანსვერსალია. ამისათვის, როგორც ცნობილია, საჭიროა დამტკიცდეს, რომ t_1 აკმაყოფილებს პირობას[1]:

$$A_0+B_0\,\frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)}>0, \tag{26}$$

სადაც A_0 და B_0 არიან შემდეგ გამოსახულებათა

$$A=\widetilde{x''}F_{x'}+\widetilde{y''}F_{y'}+L\widetilde{x'^2}+2M\widetilde{x'}\widetilde{y'}+N\widetilde{y'^2}$$
$$B=(x'\widetilde{y'}-y'\widetilde{x'})^2F_1$$

მნიშვნელობები R_0 წერტილში.

(I)-ის თანახმად, აღნიშნული პირობა შემდეგი სახით შეიძლება ჩავწეროთ:

$$L_0\widetilde{x'^2_0}+2M_0\widetilde{x'_0}\widetilde{y'_0}+N_0\widetilde{y'^2_0}+(x'_0\widetilde{y'_0}-y'_0\widetilde{x'_0})^2\,F_1\,\frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)}>0, \tag{26'}$$

ანუ

$$\left(L_0+y'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)\widetilde{x'^2_0}+2\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)\widetilde{x'_0}\widetilde{y'_0}+\left(N_0+x'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)\widetilde{y'^2_0}>0.$$

ამ უტოლობის პირველი ნაწილი არის $\widetilde{x'_0}$ და $\widetilde{y'_0}$-ის მიმართ კვადრატული ფორმა; იმისათვის, რომ ეს უტოლობა ნებისმიერი $\widetilde{x'_0}$ და $\widetilde{y'_0}$-სათვის შესრულდეს აუცილებელია:

$$\begin{gathered}\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)^2-\left(L_0+y'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)\left(N_0+x'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)<0,\\ L_0+y'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}>0.\end{gathered} \tag{27}$$

მაგრამ ჩვენ გვაქვს:

$$\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)^2-\left(L_0+y'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)\left(N_0+x'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)=(M_0^2-N_0L_0)-$$
$$-(L_0x'^2_0+2M_0x'_0y'_0+N_0y'^2_0)\,F_1\,\frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)},$$

და რადგანაც

$$t_1>h_0,$$

ამიტომ (n^0. 5 და 6) თანახმად გვექნება:

---

[1] *Bolza*, Vorlesungen, გვ. 316.

$$(M_0^2 - N_0L_0) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2) F_1 \frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)} < 0.$$

ამრიგად, (27)-ის პირველი უტოლობა შესრულებულია.

ახლა კიდევ დასამტკიცებელია, რომ შესრულებულია (27)-ის მეორე უტოლობაც.

ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია:

$$\varphi(\tau) = L_0 + y_0'^2 F_1 \frac{\theta_t(t_0, \tau)}{\theta(t_0, \tau)}.$$

ჩვენ ვეძებთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობას $\tau = h_0$ წერტილზე. (18)-დან ვპოულობთ:

$$\frac{\theta_t(t_0, h_0)}{\theta(t_0, h_0)} = \frac{M_0^2 - N_0L_0}{(L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2) F_1},$$

ამიტომ გვაქვს:

$$\varphi(h_0) = L_0 + \frac{M_0^2 - N_0 L_0}{L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2} y_0'^2,$$

ანუ

$$\varphi(h_0) = \frac{(L_0 x'_0 + M_0 y'_0)^2}{L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2}.$$

მაშასადამე, გვაქვს:

$$\varphi(h_0) \geqq 0.$$

მაგრამ $\varphi(\tau)$ არის ზრდადი ფუნქცია და რაკი $t_1 > h_0$, ამიტომ გვაქვს:

$$\varphi(t_1) > 0.$$

ამგვარად, (27)-ის მეორე უტოლობაც არის შესრულებული. მაშასადამე, (26′) და ამის გამო (26)-იც შესრულებულია ნებისმიერი $\widetilde{x_0}'$ და $\widetilde{y_0}'$-თვის; მაგრამ:

$$I_{AB} - I_{AR_0} = \left(A_0 + B_0 \frac{\theta_t}{\theta}\right) \varepsilon^2 + \dots,$$

სადაც ε საკმაოდ მცირე სიდიდეა. ამიტომ გვექნება:

$$I_{AB} > I_{AR_0}.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ AR_0 ექსტრემალი მართლაც შეწყდება R_0 წერტილში და, ამგვარად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

F. მეორე გვარის შეწყვეტილი ექსტრემალები

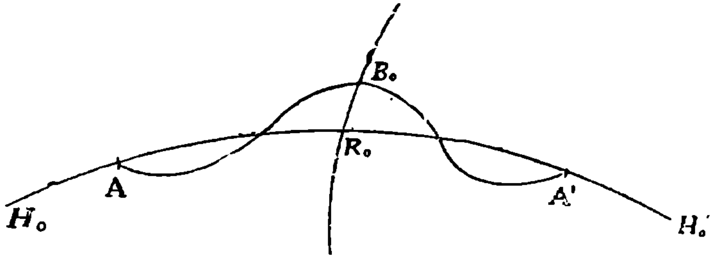
9. დავამტკიცოთ ახლა, რომ მეორე გვარის შეწყვეტილი ექსტრემალები წარმოადგენენ პირველი გვარის შეწყვეტილი ექსტრემალების გაგრძელებას.

ვთქვათ AR_0A' არის C' კლასის ექსტრემალი, რომელიც შეწყვეტის $\left(x_0, y_0, \frac{y'_0}{x'_0}\right)$ ელემენტზე გადის და

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

ამ ექსტრემალის განტოლებებია (ნახ. 4).

გავავლოთ რომელიმე მეზობელი AR_0A' მრუდი. ნებისმიერი მრუდი თუ გადის შეწყვეტის R_0 წერტილზე და დასაშვები მრუდის B_0 წერტილზე და თუ B_0 მდებარეობს R_0-ის საკმარისად ახლოს, მაშინ ის (I) განტოლების ძალით წარმოადგენს ტრანსვერსალს, როგორც AR_0 ისე R_0A' მრუდისთვის. მაშასადამე, AR_0 არის ექსტრემალი AB_0 სახის მრუდების ფუნქციონალურ ველში და R_0A' ექსტრემალი B_0A' მრუდების ფუნქციონალურ ველში. პირველ შემთხვევაში ყველა დასაშვები წირი გამოდის საწყისი წერტილიდან,



ნახ. 4

მეორე შემთხვევაში კი ისინი ერთდებიან ბოლოწერტილში; ამასთანავე ბოლოწერტილი პირველ შემთხვევაში, ხოლო საწყისი წერტილი მეორე შემთხვევაში მდებარეობენ წრეში, რომელიც საკმარისად მცირე რადიუსით არის R_0-ის გარშემო შემოწერილი; ამიტომ ჩვენი განმარტების თანახმად AR_0 არის პირველი გვარის შეწყვეტილი ექსტრემალი, ხოლო R_0A' მეორე გვარის შეწყვეტილი ექსტრემალი. ამგვარად, მეორე გვარის ექსტრემალი წარმოადგენს პირველი გვარის ექსტრემალის გაგრძელებას.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი დებულება:

დებულება IV. *თუ ერთ-ერთი ექსტრემალი* (AR_0 *ან* R_0A') *მძლავრია, მაშინ მეორე არის სუსტი.*

ვთქვათ t_0 და t_2 არიან t პარამეტრის მნიშვნელობანი R_0 და A' წერტილებში შესაბამისად. იმისათვის, რომ შეწყვეტილი ექსტრემალი იყოს მეორე გვარისა, საჭიროა

$$\overline{I}(t)=\int_{t}^{t_2} F(x(t),y(t),x'(t),y'(t))\,dt$$

ინტეგრალს ჰქონდეს $t=t_0$ წერტილში მინიმუმი. როგორც (n^0. 2)-ში იყო დამტკიცებული, მინიმუმის პირველი პირობა შესრულებულია. მეორე წარმოებულისთვის ჩვენ გვაქვს:

$$\overline{I}''(t)=-(F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_{x'} x''(t)+F_{y'} y''(t))$$

და (I)-ის თანახმად

$$\overline{I}''(t)=-(F_x x'(t_0)+F_y y'(t_0));$$

ამიტომ შეწყვეტის წერტილში უნდა იყოს შესრულებული უტოლობა:

$$F_x x'(t_0)+F_y y'(t_0)\leqq 0. \qquad (28)$$

უკანასკნელად, ისე როგორც ეს უკვე გაკეთებული იყო (n^0. 6,7)-ში შეიძლება ვაჩვენოთ:

a) იმისათვის, რომ R_0A' ექსტრემალი იყოს სუსტი, საჭიროა (28) პირობა შესრულებული იყოს მკაცრი სახით, ე. ი.

$$F_x x'_0 + F_y x'_0 < 0.$$

b) თუ $H'_0(h'_0)$ არის R_0A' ექსტრემალზე მეორე გვარის შეწყვეტილ ექსტრემალთა ოჯახის ფოკუსი, რადგან ეს ექსტრემალი მძლავრია, ამიტომ A' წერტილი აუცილებლად უნდა მდებარეობდეს R_0 და H'_0 წერტილებს შორის.

დავუშვათ, რომ A და A' წერტილები, H_0, R_0 და R_0, H'_0 წერტილებს შორის მდებარეობენ შესაბამისად და AA' ექსტრემალის გასწვრივ შესრულებულია ლეჟანდრის პირობა:

$$F_1(x, y, \cos\beta, \sin\beta) > 0 \qquad (0 \leqq \beta \leqq 2\pi).$$

თუ ახლა

$$W = F_x x' + F_y y' \tag{29}$$

ფუნქციას შეწყვეტის $\left(x_0, y_0, \dfrac{y'_0}{x'_0}\right)$ ელემენტისათვის დადებითი მნიშვნელობა აქვს, მაშინ პირველი გვარის AR_0 ექსტრემალი მძლავრია, ხოლო მეორე გვარის R_0A' ექსტრემალი კი სუსტი; მაგრამ თუ მას უარყოფითი მნიშვნელობა აქვს, მაშინ მეორე გვარის R_0A' ექსტრემალი არის მძლავრი, ხოლო პირველი გვარის A_0R ექსტრემალი კი სუსტი.

ამგვარად ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

G. აბსოლუტური ექსტრემუმი

10. H_0 და H'_0 წერტილების გეომეტრიული ადგილები ჰქმნიან შეწყვეტილ

$$x = x(t, m), \quad y = y(t, m)$$

ექსტრემალთა ოჯახის მომვლებებს. აღვნიშნოთ ეს მომვლებნი შესაბამისად E და E'-ასოებით.

არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ მრუდებით, ამოვკრიფოთ პირველი და მეორე გვარის ყველა მძლავრი ექსტრემალი, ე. ი. ყველა ის ექსტრემალი, რომელთათვისაც შეწყვეტის წერტილში $W \neq 0$ და რომელთა გასწვრივ

$$F_1(x, y, \cos\beta, \sin\beta) > 0 \qquad (0 \leqq \beta \leqq 2\pi)$$

და აღვნიშნოთ D_1 და D_2-ით არეები, რომლებიც შემოსაზღვრულია სათანადოდ პირველი და მეორე გვარის ექსტრემალთა ერთობლიობით.

ჩვენ ახლა დავამტკიცებთ, რომ ყოველი შეწყვეტილი ექსტრემალი, რომელიც D_1 არის შიგა წერტილზე გადის, ინტეგრალს ანიჭებს უფრო ნაკლებ მნიშვნელობას, ვიდრე ის წირი, რომელსაც იგივე საწყისი წერტილი აქვს, მთლიანად მდებარეობს D_1 არეში და შეწყვეტის წერტილის მახლობლად მთავრდება.

მართლაც, ვთქვათ AR_0 შეწყვეტილი ექსტრემალია, ხოლო AC დასაშვები წირი. ავიღოთ ამ წირზე A_1, A_2, ..., A_n წერტილთა მიმდევრობა (ნახ. 5)

ერთმანეთთან საკმაოდ ახლოს; ამ წერტილებზე გავავლოთ შეწყვეტილი A_1R_1, A_2R_2,..., ექსტრემალები. მაშინ ჩვენ გვექნება:

$$I_{AR_0} < I_{AA_1} + I_{A_1R_1},$$

$$I_{A_1R} < I_{A_1A_2} + I_{A_2R_2},$$

$$I_{A_{n-1}R_{n-1}} < I_{A_{n-1}A_n} + I_{A_nR_n}$$

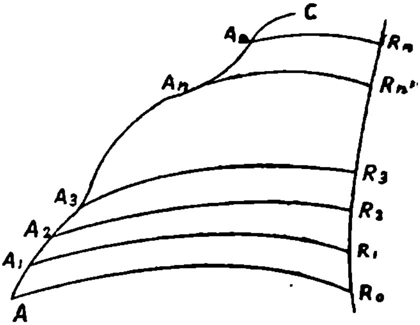
$$I_{A_nR} < I_{A_nC}.$$

შევკრიბოთ ეს უტოლობები; მივიღებთ:

$$I_{AR_0} < I_{AA_1} + I_{A_1A_2} + I_{A_nC}$$

ანუ

$$I_{AR_0} < I_{AC}.$$



ნახ. 5

ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია. ანალოგიური დებულება შეიძლება დავამტკიცოთ აგრეთვე D_2 არისათვის. აქედან მივიღებთ ასეთ შედეგს:

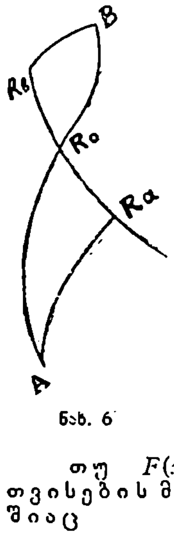
$L(AB)$ ვთქვათ არის რაიმე ექსტრემალი, რომელიც შეწყვეტის წირთა მრუდს R_0 წერტილში ჰკვეთს; AR_0 და R_0B ნაწილები კი მდებარეობენ შესაბამისად D_1 და D_2 არეებში (ნახ. 6). ბოლოწერტილებზე გავავლოთ პირველი გვარის AR_a და მეორე გვარის R_bB შეწყვეტილი ექსტრემალები. დამტკიცებულის თანახმად:

$$I_{AR_a} < I_{AR_0},$$

$$I_{R_bB} < I_{R_0B}.$$

შევკრიბოთ ეს ორი უტოლობა:

$$I_{AR_a} + I_{R_bB} < I_{AB}.$$



ნახ. 6

აქედან მივიღებთ, რომ AR_aR_bB მრუდი ანიჭებს ინტეგრალს აბსოლუტურ მინიმუმს; უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, თუ D წარმოადგენს არეს, რომელიც ეკუთვნის ორივე D_1 და D_2 არეს, მაშინ შეწყვეტილი AR_aR_bB მრუდი, რომელიც ამ არეშია გავლებული, ანიჭებს ინტეგრალს უმცირეს მნიშვნელობას იმ მრუდთა ველში, რომლებიც მთლიანად D არეში მდებარეობენ და ორ მოცემულ A და B წერტილს აერთებენ.

აქედან ვხედავთ, რომ D არეში ინტეგრალს აბსოლუტურ ექსტრემუმს ანიჭებს უწყვეტი მრუდი კი არა, არამედ წყვეტილი მრუდი, წყვეტის (x, y) კოორდინატებით. საზოგადოდ:

თუ $F(x, y, x', y')$ ფუნქცია ყველა ზემოდასახელებული თვისების მქონეა, მაშინ არსებობს ისეთი D არე, რომელშიაც

$$I_A^B = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

ინტეგრალს უწყვეტ მრუდებში ექსტრემუმი არ გააჩნია. ამ არეს ექსტრემალები წყვეტილი უნდა იყვნენ, წყვეტილი x და y კოორდინატებით.

II. მაგალითი

11. ვთქვათ საძიებელია მრუდი, რომელიც ანიჭებს მინიმუმს ინტეგრალს:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}(ab\sqrt{x'^2+y'^2}+ayx'+bxy')\,dt. \qquad (a>b>o)$$

აქ

$$F=ab\sqrt{x'^2+y'^2}+ayx'+bxy'.$$

ეილერის (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$b-a+ab\,\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=0,$$

ანუ

$$\frac{1}{R}=\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=\frac{a-b}{ab}. \tag{30}$$

ამრიგად, სიმრუდე არის მუდმივი და ტოლი:

$$\frac{1}{R}=\frac{a-b}{ab}.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ ექსტრემალები წრეებია. $R=\dfrac{ab}{a-b}$ რადიუსით, რომელნიც დადებითი მიმართულებით არიან შემოწერილი, ესე იგი ისე, რომ ცენტრი მარცხნივ მდებარეობს.

(30) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შეგვიძლია ჩავწეროთ პარამეტრული სახით:

$$x=\alpha+R\cos t,\quad y=\beta+R\sin t, \tag{31}$$

სადაც α და β ნებისმიერი მუდმივებია.

ახლა ჩვენ ვიპოვოთ შეწყვეტის წერტილთა წირის განტოლება. გვაქვს:

$$F_{x'}=ab\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}+ay,$$

$$F_{y'}=ab\,\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}+bx,$$

მაშასადამე, (I) განტოლებანი იქნება:

$$ab\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}+ay=0, \qquad ab\,\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}+ax=0. \tag{32}$$

აღვნიშნოთ ξ და η-თი შეწყვეტის წერტილთა წირის მიმდინარე კოორდინატები, მაშინ (32)-ის თანახმად გვექნება:

$$\xi=-a\cos t, \qquad \eta=b\sin t. \tag{33}$$

თუ გამოვრიცხავთ t-ს, მივიღებთ:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$$

ამგვარად, შეწყვეტის წერტილთა მრუდი არის ელიფსი ($ABCD$) ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, a და b ნახევარღერძებით (ნახ. 7).

ახლა განვსაზღვროთ შეწყვეტილ ექსტრემალთა ცენტრების გეომეტრიული ადგილი. (31) და (33) ფორმულებიდან ვპოულობთ, რომ შეწყვეტის წერტილთა მრუდის გასწვრივ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\alpha+R\cos t=-a\cos t,\qquad \beta+R\sin t=b\sin t. \tag{34}$$

რადგანაც $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$, ამიტომ $R>b$.

(34)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha=-(a+R)\cos t,\qquad \beta=-(R-b)\sin t.$$

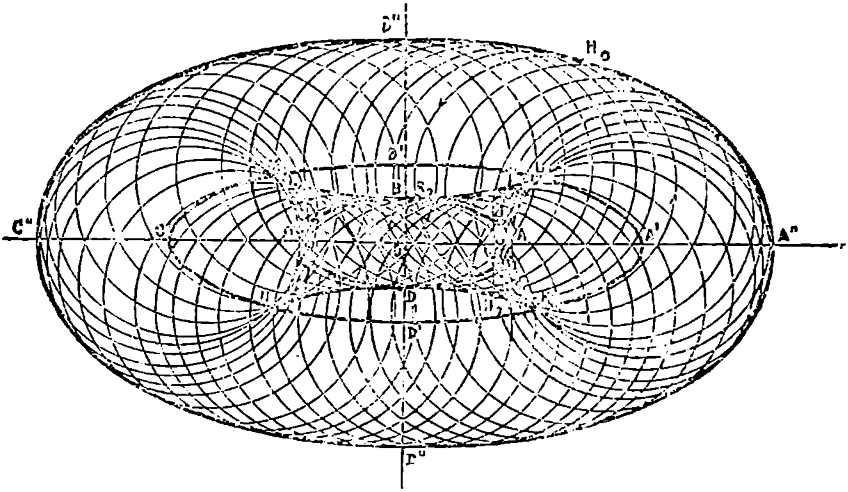
სიმოკლისათვის მივიღოთ:

$$a+R=a',\qquad R-b=b';$$

მაშინ გვექნება.

$$\frac{\alpha^2}{a'^2}+\frac{\beta^2}{b'^2}=1. \tag{35}$$

ამგვარად, ექსტრემალთა ცენტრების გეომეტრიული ადგილი არის აგრეთვე ელიფსი ($A'B'C'D'$), ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და $a'=R+a$ და $b'=R-b$ ნახევარ ღერძებით.



ნახ. 7

განვსაზღვროთ ახლა E და E' მრუდები, შეწყვეტილ ექსტრემალთა H_0 და H'_0 ფოკუსების გეომეტრიული ადგილი.

E და E' არიან R რადიუსიანი წრეების მომვლებნი, რომელთა ცენტრები (35) ელიფსზე ძევს; ამიტომ E არის (35) ელიფსის პარალელური ($A''B''C''D''$) ელიფსი, $a'+R=2R+a$ და $b'+R=2R-b$ ნახევარღერძებით.

რაც შეეხება E'-ს, მისი x და y კოორდინატებისთვის ვღებულობთ

$$x=\alpha-R\cos\varphi,$$

$$y=\beta-R\sin\varphi,$$

სადაც φ არის (35) ელიფსის ნორმალის დახრის კუთხე.

ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$\alpha=\frac{a'^2\cos\varphi}{\sqrt{a'^2\cos^2\varphi+b'^2\sin^2\varphi}},\qquad \beta=\frac{b'^2\sin\varphi}{\sqrt{a'^2\cos^2\varphi+b'^2\sin^2\varphi}}$$

ამიტომ:

$$x=\frac{a'^2\cos\varphi}{\sqrt{a'^2\cos^2\varphi+b'^2\sin^2\varphi}}-R\cos\varphi,\qquad y=\frac{b'^2\sin\varphi}{\sqrt{a'^2\cos^2\varphi+b'^2\sin^2\varphi}}-R\sin\varphi.$$

ამ მრუდის ფორმა დამოკიდებულია a', b' და R მნიშვნელობებისგან. ჩვენს შემთხვევაში ეს განტოლებანი განსაზღვრავენ მეოთხე რიგის $(KLMN)$ მრუდს, რომელიც (33) ელიფსს A, B, C, D წერტილებში ეხება.

ბოლოს, მოვძებნოთ მძლავრ ექსტრემალთა ველი, რადგანაც

$$F_1=\frac{ab}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

ამიტომ ჩვეულებრივი მინიმუმის პირობა $F_1(x, y, \cos\beta, \sin\beta)>0$ ყველა შეწყვეტილი ექსტრემალისთვის შესრულებელია.

ახლა საძიებელია მხოლოდ შეწყვეტის წერტილები, რომლებიც პირველი და მეორე გვარის ექსტრემალებს ეკუთვნიან. (29) ფუნქცია იქნება:

$$W=x'F_x+y'F_y=(a+b)x'y'.$$

(31) და (32)-ის თანახმად:

$$W=\frac{a+b}{ab}R^2\xi\eta,$$

მაგრამ შეწყვეტის წერტილთა მრუდზე გვაქვს:

$W=0$, A, B, C, D წერტილებისათვის,

$W>0$, AB და CD რკალების წერტილებისთვის,

$W<0$, BC და DA რკალების წერტილებისთვის.

ამიტომ, შეწყვეტილ ექსტრემალთა ერთობლიობიდან მხოლოდ ოთხი არის სუსტი. სახელდობრ ისინი, რომლებიც შეწყვეტის წერტილთა მრუდს კიდურ A, B, C, D წერტილებში ეხებიან. AB და CD რკალების წერტილები პირველი გვარის მძლავრი ექსტრემალების შეწყვეტის წერტილებია; BC და DA რკალების წერტილები კი მეორე გვარის მძლავრ ექსტრემალთა შეწყვეტის წერტილები.

პირველი და მეორე გვარის ექსტრემალთა ერთობლიობა ჰქმნის D_1 და D_2 არეებს, რომელთაც ზემოხსენებული თვისებები აქვთ.

მურომი, 21 მაისი, 1913 წ.

II

ვაიერშტრასის E ფუნქციის დაშლა კუთხიანი წერტილის მახლობლობაში[1]

შესავალი

1. განვიხილოთ ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი პრობლემა, რომელიც შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

ვიპოვოთ

$$I_{P_1}^{P_2} = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

ინტეგრალის შედარებითი ექსტრემუმი იმ დასაშვებ მრუდთა ფუნქციონალურ ველში, რომელნიც ორ აღებულ $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილს აერთებენ.

ოთხი ცვლადის $F(x, y, x', y')$ ფუნქცია თავის წარმოებულებითურთ მესამე რიგამდე უწყვეტია, როდესაც (x, y) იმყოფება xy სიბრტყის R არეში და (x', y')-ის ყოველი სასრული მნიშვნელობისათვის, რომლისათვისაც $x'^2 + y'^2 \neq 0$. იგივე F ფუნქცია აკმაყოფილებს ერთგვაროვნების პირობას ორი უკანასკნელი ცვლადის შესახებ, ე. ი. $F = x' F_{x'} + y' F_{y'}$.

საზოგადოდ ეს პრობლემა იძლევა ორნაირი სახის ექსტრემალს: ან ეს არის ექსტრემალი უწყვეტი მხებით ანდა კუთხისებრი ექსტრემალი.

როგორც პირველი სახის, აგრეთვე მეორე სახის ექსტრემალის ყოველი წრფივი $\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$ ელემენტი აკმაყოფილებს ე ი ლ ე რ ი ს დიფერენციალურ განტოლებას: $F_{xy'} - F_{yx'} + F_1 (x'y'' - y'x'') = 0;$
მაგრამ, მიუხედავად ამისა, მათ შორის ერთი არსებითი განსხვავებაა; იმ დროს, როცა საწყისი P_1 წერტილის თავისუფალი ამორჩევა პირველი გვარის ექსტრემალზე არავითარ გავლენას არ იქონიებს ინტეგრალის ექსტრემუმზე, ამავე დროს კუთხისებრი ექსტრემალი I ინტეგრალს მხოლოდ მაშინ ანიჭებს ექსტრემუმს, როცა საწყისი P_1 წერტილი კ ა რ ა თ ე ო დ ო რ ი ს E_0 წერტილის მარჯვნივ იმყოფება.

თუ E_0 წერტილისათვის t პარამეტრის მნიშვნელობას e_0-ით აღვნიშნავთ, ხოლო საწყისი P_1 წერტილისათვის t_1-ით, მაშინ ზემოთ ნათქვამის გამო კუთხისებრი ექსტრემლისათვის აუცილებელია, რომ

$$t_1 > e_0.$$

ახლა ბუნებრივია კითხვა: რა მიზეზის გამო ხდება კუთხისებრ ექსტრემალზე საწყისი წერტილის თავისუფალი ამორჩევის შეზღუდვა?

---

[1] ეს წერილი დაიბეჭდა თბილისის უნივერსიტეტის მოამბეში (იხ. ა. რ ა ზ მ ა ძ ე, Weierstrass-ის E ფუნქციის დაშლა კუთხიანი წერტილის მახლობლობაში, ტფილისის უნივერსიტეტის მოამბე, № 1, 1919).

ვინაიდან ჩვეულებრივი (უწყვეტ მხებიანი) ექსტრემალისათვის ასეთ შეზღუდვას ადგილი არ აქვს, ამიტომ თავისთავად ცხადია, რომ პასუხი წამოყენებულ კითხვაზე იმ განსაკუთრებულ პირობებში უნდა ვეძებოთ, რომელნიც კუთხისებრი ექსტრემალის განსაკუთრებულ სახიდან გამომდინარეობენ.

საქმე გარკვეული რომ იქნეს, ვთქვათ მეორე გვარის ექსტრემალს მხოლოდ ერთი კუთხიანი $K_0(x_0, y_0)$ წერტილი აქვს; ამ წერტილზე x', y' წარმოებულთაგან ერთი მაინც განიცდის წყვეტას. ვთქვათ x'_0, y'_0 და $\bar{x}'_0, \bar{y}'_0$ არის ამ წარმოებულთა მნიშვნელობანი K_0 წერტილზე მარცხნივ და მარჯვნივ შესაბამისად, მაშინ კუთხიანი წერტილის ორი

$$\left(x_0, y_0, \frac{y'_0}{x'_0}\right) \quad \text{და} \quad \left(x_0, y_0, \frac{\bar{y}'_0}{\bar{x}'_0}\right)$$

ელემენტი ეილერის განტოლების გარდა ერდმან-ვაიერშტრასის ორ პირობასაც აკმაყოფილებს:

$$\begin{aligned} F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) &= F_{x'}(x_0, y_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0), \\ F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) &= F_{y'}(x_0, y_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0). \end{aligned} \tag{1}$$

ეს ორი პირობა კუთხისებრი ექსტრემალის განსაკუთრებული სახის უშუალო შედეგია, და სწორედ ამიტომ ეს არის მიზეზი იმ არსებითი განსხვავებისა, რომელიც ორგვარ ექსტრემალს შორის არსებობს.

ამ შრომის მიზანია გამოკვლეულ იქნეს, თუ რა სახით შეუძლია ამ ორ უკანასკნელ ტოლობას შეზღუდოს კუთხისებრ ექსტრემალზე საწყისი წერტილის თავისუფალი ამორჩევა.

2. შემდეგში ორი ექსტრემუმიდან საუბარი გვექნება მხოლოდ პირველ მათგანზე (მინიმუმზე).

ამას გარდა ვგულისხმობთ, რომ ლეჟანდრისა და იაკობის მინიმუმის ჩვეულებრივი პირობები P_1K_0 და K_0P_2 რკალებისათვის შესრულებულია მკაცრი სახით[1], ე. ი.

$$\begin{aligned} &F_1 > 0 \quad \text{და} \quad \bar{F}_1 > 0 \\ &t_1 > t'_0 \qquad t_2 < \bar{t}'_0 \end{aligned} \tag{2}$$

სადაც t'_0 და $\bar{t}'_0$ არიან t პარამეტრის მნიშვნელობანი K'_0 და $\bar{K}'_0$ ფოკუსებისათვის, რომელნიც K_0 წერტილთან შეუღლებულნი არიან P_1K_0 და K_0P_2 ექსტრემალებზე შესაბამისად. F_1 ფუნქციას აქვს შემდეგი მნიშვნელობა:

$$F_1 = \frac{F_{x'^2}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'^2}}{x'^2} \tag{3}$$

E ფუნქციის დაშლა

3. ვთქვათ ჩვენი პრობლემისათვის კუთხისებრი ექსტრემალი, რომელიც ორ აღებულ $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილს აერთებს, არის $C_0(P_1 K_0 P_2)$ (ნახ. 1).

[1] შემდეგში, თუ F თავის წარმოებულითურთ აღნიშნულია ხაზით, მაშინ მისი არგუმენტები მიეკუთვნებიან C_0 ექსტრემლის მარჯვენა შტოს, წინააღმდეგ შემთხვევაში ისინი მიეკუთვნებიან მარცხენა შტოს.

ვთქვათ C_0 ექსტრემლის მარცხენა შტოს განტოლება არის:

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ t_1\leqq t\leqq t_0,$$

ხოლო.

$$x=\bar{x}(t),\ \ y=\bar{y}(t),\ \ \tau_0\leqq \tau\leqq \tau_2$$

იმავე ექსტრემლის მარჯვენა შტოს განტოლებაა.

განვაგრძოთ K_0P_2 წირი K_0 წერტილის მარცხნივ და გავიყვანოთ P_1 წერტილიდან ექსტრემლების კონა, რომელიც P_1K_0 ხაზს შეიცავს. ვინაიდან P_1K_0 და K_0P_2 ერთმანეთს ისე გადაჰკვეთენ, რომ შეადგენენ კუთხეს, რომელიც არ არის ნული და არც π, ამიტომ გაყვანილი კონის ყოველი წირი LP_2 ექსტრემალს მხოლოდ ერთ წერტილზე გადაკვეთს.

ვთქვათ

$$x=\varphi(t,\alpha),\ \ y=\psi(t,\alpha) \tag{α}$$

ამ კონის განტოლებანია და $\alpha=\alpha_0$ არის α პარამეტრის მნიშვნელობა P_1K_0 ექსტრემლისათვის.

მთელს LP_2 წირზე გვექნება:

$$\varphi(t,\alpha)=\bar{x}(\tau),\ \ \psi(t,\alpha)=\bar{y}(\tau).$$

ეს ორი განტოლება შესრულებულია t, α, τ-ს მნიშვნელობათა შემდეგ სისტემისათვის:

$$t=t_0,\ \ \alpha=\alpha_0,\ \ \tau=\tau_0,$$

ვინაიდან K_0 წერტილი P_1 წერტილთან შეუღლებული არ არის, ე. ი.

$$\Delta(t,\alpha)=\varphi_t\psi_\alpha-\psi_t\varphi_\alpha$$

არ ისპობა $t=t_0$, $\alpha=\alpha_0$ მნიშვნელობათათვის, ამიტომ ეს ორი განტოლება შეგვიძლია t და α-ს შესახებ ამოვხსნათ.

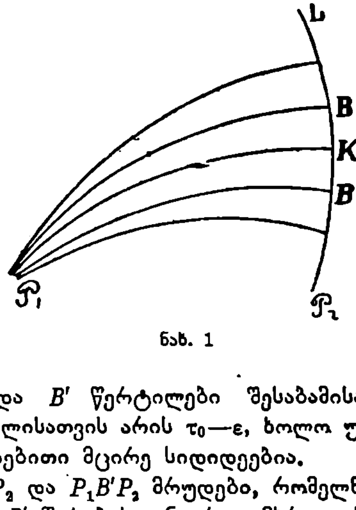
ავღნიშნოთ ეს ამონახსნი:

$$t=t(\tau),\ \ \alpha=\alpha(\tau);$$

ამ ფუნქციათა წარმოებულთათვის გვექნება:

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{\bar{x}'\psi_\alpha-\bar{y}'\varphi_\alpha}{\Delta},\ \ \frac{d\alpha}{d\tau}=\frac{\bar{y}'\varphi_t-\bar{x}'\psi_t}{\Delta}.$$

LP_2 წირზე τ პარამეტრი იზრდება მარცხნიდან მარჯვნივ იმ დამკვირვებელისათვის, რომელიც P_1K_0 შტოს რომელიმე წერტილზე იმყოფება და LP_2 წირს უყურებს.



ნახ. 1

კუთხისებრ C_0 ექსტრემალზე ავიღოთ K_0 წერტილის საკმაო მახლობლობაში მის მარცხნივ და მარჯვნივ B და B' წერტილები შესაბამისად. ვთქვათ τ პარამეტრის მნიშვნელობა პირველისათვის არის $\tau_0-\varepsilon$, ხოლო უკანასკნელისათვის $\tau_0+\varepsilon'$, სადაც ε და ε' დადებითი მცირე სიდიდეებია.

განვიხილოთ ახლა კუთხისებრი P_1BP_2 და $P_1B'P_2$ მრუდები, რომელნიც შედგენილნი არიან ჩვენი კონის P_1B და P_1B' წირებისაგან ერთი მხრით, ხოლო LP_2 ექსტრემლის BK_0 და K_0B' ნაწილებისაგან მეორე მხრით.

(2) უტოლობათა ძალით (α) კონა შეადგენს ველს და ამიტომ მისთვის ადგილი აქვს ვაიერშტრასის თეორემას, ე. ი.

$$\Delta I_{(B)} = I_{P_1BP_2} - I_{P_1K_0P_2} = \int_{\tau_0-\varepsilon}^{\tau_0} \mathscr{E}(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

სადაც $\mathscr{E}(\tau)$ შემოკლებულად ვაიერშტრასის E ფუნქციის შემდეგ მნიშვნელობას აღნიშნავს:

$\mathscr{E}(\tau) = E(\varphi(t(\tau), \alpha(\tau)), \psi(t(\tau), \alpha(\tau)); \varphi_t(t(\tau), \alpha(\tau)), \psi_t(t(\tau), \alpha(\tau)); \bar{x}'(\tau), \bar{y}'(\tau))$.

რაც შეეხება სხვაობას:

$$\Delta I_{(B')} = I_{P_1B'P_2} - I_{P_1K_0P_2},$$

იგი ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\Delta I_{(B')} = -(I_{P_1K_0} + I_{K_0B'} - I_{P_1B'}),$$

საიდანაც იმავე თეორემის ძალით გვექნება:

$$\Delta I_{(B')} = -\int_{\tau_0}^{\tau_0+\varepsilon'} \mathscr{E}(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

მაგრამ მინიმუმისათვის აუცილებელია, რომ

$$\Delta I_{(B)} < 0, \quad \Delta I_{(B')} < 0,$$

ამიტომ, მივიღებთ რა მხედველობაში (4) და (5) ფორმულებს, შეგვიძლია შემდეგი დებულება გამოვთქვათ:

კუთხისებრ C_0 ექსტრემალმა I ინტეგრალს მინიმუმი რომ მიანიჭოს, ამისათვის აუცილებელია, რომ $\mathscr{E}(\tau)$ ფუნქცია დადებითი იყოს სანამ τ-ს მნიშვნელობა $\tau=\tau_0$ წერტილზე გადავიდოდეს, ხოლო უარყოფითი მას შემდგომ, როცა τ ამ უკანასკნელ წერტილს გადაშორდება.

უკვე ამ დებულებიდან ჩანს, რომ $\tau=\tau_0$ წერტილზე E ფუნქცია ისპობა, რაც ვაიერშტრას-ერდმანის (1) პირობათაგანაც უშუალოდ ნათელია.

რომ გავიგოთ, თუ რა პირობებში იქნება $\mathscr{E}(\tau)$ ფუნქცია დადებითი τ_0 წერტილის მარცხნივ, ხოლო უარყოფითი ამ წერტილის მარჯვნივ, ამისათვის დავშალოთ ეს ფუნქცია $\tau=\tau_0$ წერტილის მახლობლობაში.

ვიპოვოთ $\dfrac{dE}{d\tau}$, გვექნება:

$$\frac{dE}{d\tau} = F_x\bar{x}'(\tau) + F_y\bar{y}'(\tau) - \bar{x}'^2 F_{x'x} - \bar{x}'\bar{y}' F_{x'y} - \bar{x}'\bar{y}' F_{xy'} - \bar{y}'^2 F_{y'y} -$$

$$-(\bar{x}'F_{x'^2} + \bar{y}' F_{x'y'})\left(\varphi_{t^2}\frac{dt}{d\tau} + \varphi_{t\alpha}\frac{d\alpha}{d\tau}\right) - (\bar{x}'F_{x'y'} + \bar{y}'F_{y'^2})\left(\psi_{t^2}\frac{dt}{d\tau} + \psi_{t\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right) +$$

$$+ \overline{F}_{x'}\bar{x}''(\tau) + \overline{F}_{y'}\bar{y}''(\tau) - \bar{x}''(\tau)F_{x'} - \bar{y}''(\tau)F_{y'}$$

მივიღოთ ახლა ვაიერშტრასის აღნიშნულებანი:

$$L = F_{x'x} - y'y''F_1, \quad M = F_{xy'} + x'y''F_1 = F_{yx'} + x'y''F_1,$$

$$N = F_{yy'} - x'x''F_1,$$

მაშინ უკანასკნელი განტოლება (3) ფორმულების ძალით ასე გადაიწერება:

$$\frac{dE}{d\tau}=(\overline{L}\overline{x}'^2+2\,\overline{M}\overline{x}'\overline{y}'+\overline{N}\overline{y}'^2)-\overline{x}'^2\,F_{xx'}-\overline{x}'\overline{y}'\,F_{x'y}-\overline{x}'\overline{y}'F_{y'x}-\overline{y}'^2F_{yy'}+$$

$$+(\overline{y}'\varphi_t-\overline{x}'\psi_t)\,F_1\left[(\varphi_{t^2}\,\psi_t-\psi_{t^2}\,\varphi_t)\frac{dt}{d\tau}+(\varphi_{t\alpha}\,\psi_t-\psi_{t\alpha}\,\varphi_t)\frac{d\alpha}{d\tau}\right]+$$

$$+\overline{x}''(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\overline{y}''(\overline{F}_{y'}-E_y).$$

როდესაც $\frac{dt}{d\tau}$ და $\frac{d\alpha}{d\tau}$ წარმოებულებს შევცვლით შესაბამისი მნიშვნელობებით, მაშინ ის სიდიდე, რომელიც ამ უკანასკნელი ტოლობის კვადრატულ ფრჩხილში იმყოფება შემდეგნაირად გადმოიწერება:

$$(\psi_t\,\varphi_{t^2}-\varphi_t\,\psi_{t^2})\frac{dt}{d\tau}+(\psi_t\,\varphi_{t\alpha}-\varphi_t\,\psi_{t\alpha})\frac{d\alpha}{d\tau}=-(\overline{y}'\varphi_t-\overline{x}'\psi_t)\frac{\Delta_t}{\Delta}+\varphi_{t^2}\overline{y}'-\psi_{t^2}\overline{x}',$$

და ამიტომ:

$$\frac{dE}{d\tau}=\overline{L}\overline{x}'^2+2\overline{M}\overline{x}'\overline{y}'+\overline{N}\overline{y}'^2-L\overline{x}'^2-2M\overline{x}'\overline{y}'-N\overline{y}'^2-(\overline{y}'\varphi_t-\overline{x}'\psi_t)\,F_1\frac{\Delta_t}{\Delta}+$$

$$+\overline{x}''(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\overline{y}''(\overline{F}_{y'}-F_{y'}).$$

აღვნიშნოთ ახლა

$$\mathfrak{L}=\overline{L}-L,\quad \mathfrak{M}=\overline{M}-M,\quad \mathfrak{N}=\overline{N}-N.$$

ვთქვათ $\theta(t,\tau)$ არის იაკობის დიფერენციალური განტოლების ის ინტეგრალი, რომელიც $t=\tau$ მნიშვნელობისათვის ისპობა; მაშინ

$$\Delta(t,\alpha_0)=C\theta(t,t_1),\qquad \Delta_t(t,\alpha_0)=C\,\theta_t(t,t_1),$$

ამიტომ $\frac{dE}{d\tau}$ წარმოებულის უკანასკნელი გამოსახულება ასე გადმოიწერება:

$$\frac{dE}{d\tau}=\mathfrak{L}\overline{x}'^2+2\mathfrak{M}\overline{x}'\overline{y}'+\mathfrak{N}y'^2-(\overline{y}'\varphi_t-\overline{x}'\psi_t)^2\,F_1\,\frac{\theta_t\,(t,t_1)}{\theta\,(t,t_1)}+$$

$$+\overline{x}''(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\overline{y}''(\overline{F}_{y'}-F_y).$$

უკანასკნელ განტოლებაში ჩავსვათ $t=t_0$ და აღვნიშნოთ $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ და $\mathfrak{N}$ სიდიდეთა მნიშვნელობანი ამ წერტილზე $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$ და $\mathfrak{N}_0$-ით შესაბამისად, მაშინ ვ ა ი ე რ შ ტ რ ა ს-ე რ დ მ ა ნ ი ს პირობათა ძალით გვექნება:

$$\left(\frac{dE}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0}=\mathfrak{L}_0\,\overline{x}'^2_0+2\mathfrak{M}_0\,\overline{x}'_0\overline{y}'_0+\mathfrak{N}_0\overline{y}'^2_0-(\overline{y}'_0x'_0-\overline{x}'_0\,y'_0)^2F_1\,\frac{\theta_t(t_0,\,t_1)}{\theta(t_0,\,t_1)},$$

საიდანაც მივიღებთ E ფუნქციის დაშლას:

$$\mathscr{E}(\tau)=(\tau-\tau_0)\left[(\mathfrak{L}_0\overline{x}'^2_0+2\mathfrak{M}_0\overline{x}'_0\overline{y}'_0+\mathfrak{N}_0\overline{y}'^2_0)-(\overline{y}'_0\,x'_0-\overline{x}'_0y'_0)^2F_1\,\frac{\theta_t(t_0,t_1)}{\theta\,(t_0,t_1)}\right]+$$

$$+\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2}K,$$

K რაიმე სასრულო რიცხვზე ნაკლებია.

ამ დაშლაში საინტერესო ის არის, რომ $\mathscr{E}(\tau)$ აღმოჩნდა არა მარტო τ ცვლადის ფუნქცია, არამედ t_1 პარამეტრისაც, ე. ი. $\mathscr{E}$ ფუნქციის მნიშვნელობა დამოკიდებულია არა მარტო ექსტრემალთა (α) კონის ბოლოწერტილების მდებარეობაზე, არამედ C_0 ექსტრემალის საწყისი P_1 წერტილის მდე-

ბარეობაზედაც, რომლიდანაც (α) კონის ყველა ექსტრემალი გამოდის. ეს გარემოება მეტად დამახასიათებელია ვაიერშტრასის E ფუნქციის აგებულებისათვის ამ შემთხვევაში.

რა გვარის უნდა იყოს აღნიშნული დამოკიდებულება $\mathscr{E}(\tau)$ ფუნქციისა- და P_1 წერტილს შორის, რომ მინიმუმის ზემოაღნიშნული პირობა შესრულდეს?

თავისთავად ცხადია $\mathscr{E}(\tau)$ დადებითი რომ შეიქნეს τ ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც $<$ ვიდრე τ_0 და უარყოფითი τ-ს იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც $>$ ვიდრე τ_0 ამისათვის საკმარისია, რომ t_1 აკმაყოფილებდეს უტოლობას:

$$\mathfrak{L}_0 \bar{x}'^2_0 + 2\mathfrak{M}_0 \bar{x}'_0 \bar{y}'_0 + \mathfrak{N}_0 \bar{y}'^2_0 - (\bar{y}'_0 x'_0 - \bar{x}'_0 y'_0)^2 F_1 \frac{\theta_t(t_0 t_1)}{\theta(t_0, t_1)} < 0. \tag{6}$$

განვიხილოთ ახლა ფუნქცია:

$$\Psi(t) = \mathfrak{L}_0 \bar{x}'^2_0 + 2\mathfrak{M}_0 \bar{x}'_0 \bar{y}'_0 + \mathfrak{N}_0 \bar{y}'^2_0 - (\bar{y}'_0 x'_0 - \bar{x}'_0 y'_0)^2 F_1 \frac{\theta_t(t_0, t)}{\theta(t_0, t)}.$$

ვინაიდან ფარდობა:

$$\frac{\theta_t(t_0, t)}{\theta(t_0, t)}$$

ზრდადია t ცვლადის მიმართ, ამიტომ $\Psi(t)$ ფუნქცია კლებულობს, როდესაც იზრდება.

ვთქვათ h_0 არის t ცვლადის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$\Psi(h_0) = 0, \tag{7}$$

მაშინ მე-(6) უტოლობა შესრულდება ყოველთვის, როცა $t_1 > h_0$. ამნაირად პასუხი დასმულ კითხვაზე შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

კუთხისებრ C_0 ექსტრემალმა I ინტეგრალს მინიმუმი რომ მიანიჭოს, ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$t_1 > h_0.$$

ამით გამორკვეულია ის მიზეზი, რის გამოც ხდება საწყისი წერტილის თავისუფალ ამორჩევის შეზღუდვა კუთხისებრ ექსტრემალზე.

4. გადავდივართ ახლა H_0 ფოკუსის გეომეტრიული მნიშვნელობის განხილვაზე.

LP_2 წირის წერტილებიდან, რომელნიც K_0 წერტილის საკმაო მახლობლობაში იმყოფებიან, გავიყვანოთ ექსტრემალები ისეთი მიმართულებით, რომ E ფუნქცია ყველა ამ ექსტრემალისათვის LK_2 წირის წერტილებზე იგივურად ნული იყოს. თავისთავად ცხადია, რომ ვინაიდან კუთხისებრ C_0 ექსტრემლისათვის E ფუნქცია K_0 წერტილზე ნულია, ამიტომ P_1K_0 წირი ერთი ასეთი ექსტრემალთაგანია.

დავამტკიცოთ ჯერ, რომ ექსტრემალების ასეთი გაყვანა ყოველთვის არის შესაძლო.

ვთქვათ ϑ გასაყვანი ექსტრემალის მხების დახრის კუთხეა $(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$ წერტილზე და კერძოდ $\vartheta = \vartheta_0$ არის ϑ-ს მნიშვნელობა P_1K ექსტრემალისათვის. ამ ექსტრემალების აგებულებიდან აშკარად ჩანს, რომ ϑ აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$F(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{x}'(\tau), \bar{y}'(\tau)) - \bar{x}'(\tau) F_{x'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \cos\vartheta, \sin\vartheta) -$$
$$- \bar{y}'(\tau) F_{y'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \cos\vartheta, \sin\vartheta) = 0, \tag{8}$$

რომელიც კერძოდ შესრულებულია $\tau=\tau_0$, $\vartheta=\vartheta_0$ მნიშვნელობებისათვის, ე. ი. K_0 წერტილზე.

ეს განტოლება შეგვიძლია ამოვხსნათ ამ უკანასკნელი მნიშვნელობათა საკმაო მახლობლობაში ϑ ცვლადის მიმართ.

მართლაც, ამ განტოლების მარცხენა წევრის წარმოებული ϑ-ს მიმართ არის:

$$-\bar{x}'(\tau)(-F_{x'^2}\sin\vartheta + F_{x'y'}\cos\vartheta) - \bar{y}'(\tau)(-F_{x'y'}\sin\vartheta + F_{y'^2}\cos\vartheta),$$

რომელიც, თუ (3) ფორმულებს მივიღებთ მხედველობაში, ასე გადაიწერება:

$$(\bar{x}'(\tau)\sin\vartheta - \bar{y}'(\tau)\cos\vartheta) F_1;$$

მაგრამ ეს უკანასკნელი ნული არ არის K_0 წერტილზე და ამიტომ თანახმად ძირითადი თეორემისა არაცხადი ფუნქციის შესახებ, მე-(8) განტოლება მართლაც შეიძლება ამოიხსნას K_0 წერტილის საკმაო მახლობლობაში ϑ-ს მიმართ. აღვნიშნოთ ეს ამონახსნი

$$\vartheta = \vartheta(\tau);$$

მაშასადამე, საძიებელი ექსტრემლები უნდა გავიყვანოთ $\bar{x}(\tau)$, $\bar{y}(\tau)$ წერტილებიდან $\vartheta(\tau)$ მიმართულებით, რაც ყოველთვის არის შესაძლო.

ვთქვათ

$$x = p(t, \lambda), \quad y = q(t, \lambda) \tag{λ}$$

ამ ექსტრემალების ოჯახის განტოლებაა, და $t=t(\tau)$, $\lambda=\lambda(\tau)$ არის τ და λ პარამეტრების მნიშვნელობანი LP_2 ექსტრემალისათვის. დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა: $H_0(h_0)$ წერტილი არის λ ოჯახის ფოკუსი P_1K ექსტრემალზე.

მე-(8) იგივეობა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$F(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{x}'(\tau), \bar{y}'(\tau)) - \bar{x}'(\tau) F_{x'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), p_t(t,\lambda), q_t(t,\lambda)) -$$
$$- \bar{y}'(\tau) F_{y'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), p_t(t,\lambda), q_t(t,\lambda)) = 0,$$

სადაც t და λ არიან τ-ს ზემოაღნიშნული ფუნქციები.

გავაწარმოვოთ ეს იგივეობა τ-ს მიმართ; მაშინ სრულიად იმავე მსჯელობით, როგორც (n°. 3), მივიღებთ

$$\mathfrak{L}\bar{x}'^2 + 2\mathfrak{M}\bar{x}'\bar{y}' + \mathfrak{N}\bar{y}'^2 - (\bar{y}'p_t - \bar{x}'q_t)^2 F_1 \frac{\Delta_t(t(\tau), \lambda(\tau))}{\Delta(t(\tau), \lambda(\tau))} +$$
$$+ \bar{x}''(\overline{F}_{x'} - F_{x'}) + \bar{y}''(\overline{F}_{y'} - F_{y'}) = 0$$

ამ იგივეობაში ჩავსვათ $\tau=\tau_0$, მაშინ იგი მიიღებს სახეს:

$$\mathfrak{L}_0\bar{x}'^2_0 + 2\mathfrak{M}_0\bar{x}'_0\bar{y}'_0 + \mathfrak{N}_0\bar{y}'^2_0 - (\bar{y}'_0x'_0 - \bar{x}'_0y'_0)^2 F_1 \frac{\Delta_t(t_0, \lambda_0)}{\Delta(t_0, \lambda_0)} = 0.$$

შევადაროთ ამ ტოლობას წინათმიღებული მე-(7) ტოლობა, გვექნება:

$$\frac{\Delta_t(t_0, \lambda_0)}{\Delta(t_0, \lambda_0)} = \frac{\theta_t(t_0, h_0)}{\theta(t_0, h_0)}.$$

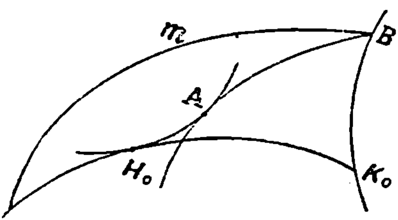
მაგრამ

$$\frac{\theta_t(t_0, t)}{\theta(t_0, t)}$$

ფუნქცია დაწყებული t'_0 მნიშვნელობიდან t_0 მნიშვნელობამდე ზრდადია t ცვლადის მიმართ, ამიტომ ამ უკანასკნელი ტოლობიდან სრულებით ნათელია ის, რომ $H_0(h_0)$ წერტილი მართლაც არის (λ) ოჯახის ფოკუსი და ჩვენი თეორემაც დამტკიცებულია.

E ფუნქციის დაშლა, რომელიც ჩვენ (n^0. 3) მივიღეთ, გვიხსნის წმინდა ანალიტიკური მოსაზრებით იმ მიზეზს, რის გამოც ხდება საწყისი P_1 წერტილის თავისუფალი ამორჩევის შეზღუდვა კუთხისებრ ექსტრემალზე. მაგრამ მას შემდგომ, რაც რომ ვიცით H_0 წერტილის გეომეტრიული მნიშვნელობა, შეგვიძლია ხსენებული მიზეზი გეომეტრიული მოსაზრებითაც აღმოვაჩინოთ.

მართლაც, ვთქვათ P_1 წერტილი იმყოფება H_0 წერტილის მარჯვნივ. გავიყვანოთ ამ წერტილიდან ისეთი P_1mB ექსტრემალი, რომელმაც LP_2 წირი B წერტილზე გადაჰკვეთოს (ნახ. 2).



ნახ. 2

ავიღოთ ახლა (λ) ოჯახის ის ექსტრემალი, რომელიც გამოდის B წერტილიდან. ვთქვათ ეს უკანასკნელი ექსტრემალი (λ) ოჯახის მომვლებს A წერტილზე შეეხება. მაშინ (λ) ოჯახის განსაკუთრებულ აგებულებისა გამო:

$$I_{P_1H_0}+I_{H_0A}+I_{AB}+I_{BK_0}+I_{P_1H_0K_0}=0.$$

მაგრამ

$$I_{P_1mB}<I_{P_AH_0}+I_{H_0A}+I_{AB},$$

ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის ძალით გვექნება:

$$I_{P_1mB}+I_{BP_2}<I_{C_0},$$

რაც ამტკიცებს, რომ კუთხისებრი C_0 ექსტრემალი I ინტეგრალს ვერ მიანიჭებს მინიმუმს, თუ P_1 წერტილი H_0 ფოკუსის მარჯვნივ იმყოფება.

5. დაგვრჩა ახლა ჩვენ მიერ მიღებული $H_0(h_0)$ წერტილსა და კარათეოდორის $E_0(e_0)$ წერტილს შორის არსებული დამოკიდებულების მოძებნა.

ცნობილია[1], რომ $E_0(e_0)$ წერტილი არის იმ კუთხისებრ ექსტრემალთა ოჯახის ფოკუსი P_1K_0 წირზე, რომელთა წვეროების მრუდი შეეხება K_0P_2 წირს K_0 წერტილზე.

მაგრამ საზოგადოდ წვეროების მრუდის კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$E(x, y, x', y'; \bar{x}', \bar{y}')=0,$$

სადაც x', y' და $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ გამოთვლილია, x-ისა და y-ის საშუალებით ერდმან-ვაიერშტრასის პირობებიდან; ამიტომ თუ T აღნიშნავს წვეროების მრუდის მხების დახრის tg-ს, მაშინ უკანასკნელი ტოლობის ძალით გვექნება:

$$\bar{x}' \frac{\partial(\bar{F}_{x'}-F_{x'})}{\partial x}+\bar{y}'\frac{\partial(\bar{F}_{y'}-F_{y'})}{\partial x}+\left[\bar{x}'\frac{\partial(\bar{F}_{x'}-F_{x'})}{\partial y}+\bar{y}'\frac{\partial(\bar{F}_{y'}-F_{y'})}{\partial y}\right]T=0 \qquad (9)$$

[1] Bolza, Vorlesungen uber Variationsrehnung, გვ. 375—376.

ახლა მეტად ადვილად შეგვიძლია დავადგინოთ შემდეგი ფორმულები:

$$y'\frac{\partial x'}{\partial x}-x'\frac{\partial y'}{\partial x}=\frac{y'\Delta_t-y''\Delta}{\Delta},\qquad y'\frac{\partial x'}{\partial y}-x'\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{x''\Delta-x'\Delta_t}{\Delta},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\Delta_t}{\Delta}, \tag{10}$$

სადაც Δ-ს იგივე აზრი აქვს, როგორც (n°. 3).

ამ ფორმულების საშუალებით დავამტკიცებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\frac{\partial(\overline{F}_{y'}-F_{y'})}{\partial x}=\frac{\partial(\overline{F}_{x'}-F_{x'})}{\partial y}.$$

ამ ტოლობისა და ვაიერშტრას-ერდმანის პირობათა ძალით გვექნება იგივეობა:

$$\frac{\partial(\overline{F}_{x'}-F_{x'})}{\partial x}\,\frac{\partial(\overline{F}_{y'}-F_{y'})}{\partial y}-\left[\frac{\partial(\overline{F}_{x'}-F_{x'})}{\partial y}\right]^2=0,$$

რომელიც კერძოდ $x=x_0$, $y=y_0$ მნიშვნელობათათვის მოგვცემს დამოკიდებულებას C_0 ექსტრემალის ფოკუსებს შორის.

ვთქვათ ახლა აგებულია კუთხისებრ ექსტრემალთა ის ოჯახი, რომლის ფოკუსი P_1K_0 წირზე არის E_0. ასეთი ოჯახისათვის მე-(9) ტოლობა $K_0(x_0, y_0)$ წერტილზე მიიღებს სახეს:

$$\bar{x}'^2_0\left[\frac{\partial(\overline{F}_{x'}-F_{x'})}{\partial x}\right]_0+2\bar{x}'_0\bar{y}'_0\left[\frac{\partial(\overline{F}_{y'}-E_{y'})}{\partial x}\right]_0+y'^2_0\left[\frac{\partial(\overline{F}_{y'}-F_{y'})}{\partial y}\right]_0=0,$$

რომელიც მე-(10) ფორმულების ძალით ასე გადაიწერება:

$$\left(\mathfrak{L}_0-y'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)\bar{x}'^2_0+2\left(\mathfrak{M}_0+x'_0y'_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)\bar{x}'_0\bar{y}'_0+\left(\mathfrak{N}_0-x'^2_0F_1\frac{\theta_t}{\theta}\right)\bar{y}'^2_0=0,$$

სადაც $\frac{\theta_t}{\theta}$ მოკლედ აღნიშნავს ფარდობას:

$$\frac{\theta_t(t_0, e_0)}{\theta(t_0, e_0)}.$$

მაგრამ უკანასკნელი ტოლობის გამარტივება გვაძლევს:

$$\mathfrak{L}_0\bar{x}'^2_0+2\mathfrak{M}_0\bar{x}'_0\bar{y}'_0+\mathfrak{N}_0\bar{y}'^2_0-(\bar{y}'_0x'_0-\bar{x}'_0y'_0)^2F_1\frac{\theta_t(t_0, e_0)}{\theta(t_0, e_0)}=0.$$

შევადარებთ რა ამ უკანასკნელს მე-(7) ტოლობას, გვექნება:

$$e_0=h_0,$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ ჩვენ მიერ მიღებული H_0 ფოკუსი არის იგივე კარათეოდორის E_0 წერტილი, რომელსაც მხოლოდ, როგორც აქამდე აღნიშნული იყო, სულ სხვა აზრი ჰქონდა.

თბილისი, იანვარი 1919 წ.

III

ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემის შესახებ[1]

წინამდებარე წერილის მიზანია ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემის ისეთი განზოგადება, რომელიც ჩვეულებრივ ძირითად ლემას, ასევე დიუბუა-რეიმონის ლემასაც კერძო შემთხვევის სახით შეიცავს.

თეორემა: ვთქვათ $M(x)$ და $N(x)$ წარმოადგენენ (x_1, x_2) შუალედში განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციებს. თუ უწყვეტად წარმოებადი ყოველი $y(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც x_1 და x_2-ზე ისპობა, ინტეგრალი:

$$I = \int_{x_2}^{x_1} [M(x)y(x) + N(x)y'(x)]\,dx$$

ნულია, მაშინ (x_1, x_2) შუალედის შიგნით არსებობს $N(x)$ ფუნქციის უწყვეტი წარმოებული და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{d}{dx} N(x) = M(x).$$

შევარჩიოთ $\varphi(z)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

ვთქვათ, (x, ξ) არის (x_1,x_2)-ის ქვეშუალედი, ხოლო ε ისეთი დადებითი სიდიდეა, რომელიც $< \dfrac{\xi - x}{2}$. როდესაც z იზრდება x-დან $x+\varepsilon$-მდე, მაშინ $\varphi(z)$ ფუნქცია იზრდება 0-დან ε-მდე, ხოლო როცა z იცვლება $\xi-\varepsilon$-დან ξ-მდე, მაშინ $\varphi(z)$ კლებულობს ε-ან 0-მდე. მაგრამ $(x+\varepsilon, \xi-\varepsilon)$ ინტერვალში $\varphi(z)$ ფუნქცია მუდამ ε-ის ტოლი რჩება, ხოლო (x_1,x) და (ξ,x_2) ინტერვალებში $\varphi(z) = 0$. გარდა ამისა მას ყველგან უწყვეტი წარმოებული აქვს, აგრეთვე $z=x$, $x+\varepsilon$, $\xi-\varepsilon$ და ξ წერტილებზე.

ეს ფუნქცია ზუსტად აკმაყოფილებს ყველა პირობას, რომელიც ჩვენ $y(z)$ ფუნქციას მოვთხოვეთ, ამიტომ $\varphi(z)$ ფუნქციისათვის აგებული I ინტეგრალი ნულის ტოლი უნდა იყოს, ე. ი.

$$\int_{x}^{x+\varepsilon} [M(z)\varphi(z) + N(z)\varphi'(z)]dz + \varepsilon \int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} M(z)\,dz + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} [M(z)\varphi(z)+N(z)\varphi'(z)]dz = 0,$$

ანუ

$$\int_{x}^{x+\varepsilon} N(z)\varphi'(z)dz + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} N(z)\varphi'(z)dz + \varepsilon \int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} M(z)dz = -\int_{x}^{x+\varepsilon} M(z)\varphi(z)\,dz -$$

[1] ეს წერილი დაიბეჭდა ჟურნალში „Mathematische Annalen" (იხ. A. Razmadze. Über das Fundamentallemma der Variationsrechnung, Math. Ann. Bd. 84, 1921. იხ. აგრეთვე A. Razmadze, Sur un theoréme fondamental du calcul des variations, თბილისის უნივერსიტეტის მოამბე, № 1, 1920).

$$\int\limits_{\xi-x}^{\xi} M(z)\varphi(z)dz. \tag{1}$$

$|M(z)|$ ფუნქციის მაქსიმუმი (x_1x_2) შუალედში აღვნიშნოთ G-თი. ზემო ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\left| \int\limits_{x}^{x+\varepsilon} M(z)\varphi'(z)dz + \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} N(z)\,\varphi'(z)dz + \varepsilon \int\limits_{x+\xi}^{\xi-\varepsilon} M(z)\,dz \right| < 2G\varepsilon^2.$$

თუ ახლა (1) განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ $\varepsilon(\xi-x)$-ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon\to 0$, მაშინ საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\frac{N(x)-N(\xi)}{\xi-x}+\frac{1}{\xi-x}\int\limits_{x}^{\xi} M(z)\,dz=0,$$

ანუ

$$\frac{N(\xi)-N(x)}{\xi-x}=\frac{1}{\xi-x}\int\limits_{x}^{\xi} M(z)\,dz. \tag{2}$$

ეს განტოლება იგივურად უნდა შესრულდეს რიცხვთა ყოველი x, ξ წყვილისათვის, რომელიც (x_1,x_2) შუალედს ეკუთვნის.

თუ ჩავთვლით x-ს მუდმივად და ვიგულისხმებთ, რომ ξ მიისწრაფვის x-საკენ, მაშინ (2) განტოლების მარჯვენა მხარის ზღვარი იქნება $M(x)$, ამიტომ მარცხენა მხარის ზღვარიც უნდა არსებობდეს, ე. ი.

$$\frac{dN(x)}{dx}=M(x)$$

ჩვენი თეორემა, როგორც კერძო შემთხვევას შეიცავს, ერთი მხრით, ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითად ლემას (როცა $N(x)\equiv 0$) და, მეორე მხრით, დიუ-ბუა-რეიმონის ლემას (როცა $M(x)\equiv 0$) და თანაც იგი ზოგადი სახითაა ჩამოყალიბებული[1].

შემდეგ, ამ თეორემის საშუალებით $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx$ ინტეგრალის პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობიდან უშუალოდ, ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენების გარეშე, რასაც ლაგრანჟისა და დიუ-ბუა-რეიმონის ლემები მოითხოვს, გამომდინარეობს ეილერის დიფერენციალური განტოლება.

თბილისის უნივერსიტეტი, 17 ოქტომბერი, 1920 წ.

---

[1] შეადარეთ, Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, გვ. 25, 57.

IV

ვარიაციათა აღრიცხვის ისეთი წყვეტილი ამონახსნების შესახებ[1], რომელთაც ერთი წყვეტის წერტილი აქვთ

შესავალი

ვთქვათ ამოსახსნელია ვარიაციათა აღრიცხვის გარკვეული პრობლემა, დაკავშირებული შემდეგი ინტეგრალის

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

ექსტრემუმის მოძებნასთან, სადაც F ფუნქცია აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს B არეში. ჩვეულებრივად ამ ამოცანას ხსნიან იმ პირობით, რომ შესადარი წირების ფუნქციონალური ველი მხოლოდ უწყვეტი წირებისაგან შედგება, მაგრამ ჩვენს შრომაში: „ცვლადი ბოლოწერტილიანი ამონახსნების შესახებ ვარიაციათა აღრიცხვაში"[2]. დამტკიცებულია, რომ გარკვეულ პირობებში არსებობს ისეთი D არე, რომელშიდაც არც ერთი უწყვეტი წირი I ინტეგრალს არ ანიჭებს აბსოლუტურ ექსტრემუმს. ის წირი, რომელიც აღნიშნულ არეში ინტეგრალს ანიჭებს აბსოლუტურ ექსტრემუმს წყვეტილია, ერთი წყვეტილი x ან y კოორდინატით. იმავე შრომაში მოცემულია აუცილებელი და საკმარისი პირობები წყვეტილი ექსტრემალებისათვის x-ის ან y-ის წყვეტის შემთხვევაში. ასეთი ექსტრემალის AR_0 და $\overline{R}_0B$ ნაწილები (R_0 და $\overline{R}_0$ შეწყვეტის წერტილებია), რომლებიც ეკუთვნიან C' კლასს, ერთმანეთისაგან სავსებით დამოუკიდებელია; და ისინი შესაბამისად პირველი ან მეორე გვარის შეწყვეტილი ექსტრემალებია.

ახლა, ჩვენ გვსურს შევზღუდოთ წყვეტის ხასიათი. ჩვენ მივიღებთ, რომ მხოლოდ ერთი კოორდინატი, სახელდობრ, y არის წყვეტილი, ხოლო მეორე x ყოველთვის უწყვეტია. ამ შემთხვევაში ექსტრემუმის პირობების განსაზღვრას აქვს სხვაგვარი ხასიათი, რადგანაც ცხადია, რომ წირის უწყვეტი ნაწილები ერთმანეთთან არიან დაკავშირებული იმ პირობით, რომ მრუდის პირველი ნაწილის საწყის წერტილსა და მეორე ნაწილს ბოლოწერტილს ერთნაირი აბსცისი აქვთ.

ამგვარ ექსტრემალებს ჩვენ ვუწოდებთ წყვეტილ ექსტრემალებს, ხოლო წერტილს, რომელშიდაც ეს ექსტრემალი წყდება ვუწოდებთ წყვეტის წერტილს.

---

[1] ეს წერილი დაიბეჭდა თბილისის უნივერსიტეტის მოამბეში (იხ. A. Razmadze, Über unstetige Lösungen mit einem Unstetigkeitspunkt in der Variationsrechnung, თბილისის უნივერსიტეტის მოამბე, № 1, 1922)

[2] Mathemat. Annalen, გვ. 75.

წინამდებარე შრომაში ჩვენ განვიხილავთ სწორედ ამგვარი ექსტრემალების აუცილებელსა და საკმარის პირობებს.

რადგანაც ამ წირებისათვის y ორდინატი განიცდის წყვეტას, ბუნებრივი იქნება, ამოცანა ამოვხსნათ იმ დაშვებით, რომ არგუმენტი არის x („x" პრობლემა); ჩვენ მაინც ამოცანას ამოვხსნით პარამეტრული სახით („t" პრობლემა), ფორმულების სიმეტრიულობისა და იმ მოხერხებულობის გამო, რომელსაც ვარიაციული ამოცანების პარამეტრული ფორმა იძლევა. ორი ექსტრემუმიდან—მაქსიმუმი და მინიმუმი, სიმარტივისათვის განვიხილავთ მხოლოდ უკანასკნელს.

აუცილებელი პირობები

1. F ფუნქციისაგან მოვითხოვთ, რომ ის ეკუთვნოდეს C'' კლასს $B(x, y, x'^2 + y'^2 \neq 0)$ არეში და ორი უკანასკნელი არგუმენტის მიმართ აკმაყოფილებდეს ერთგვაროვნობის ცნობილ პირობას:

$$F(x, y, kx', ky') = k\,F(x, y, x', y'), \qquad k > 0$$

მრუდის ზოგად განტოლებას ავიღებთ შემდეგი სახით:

$$x = \varphi(t), \;\; y = \psi(t), \;\; t_1 \leqq t \leqq t_2.$$

ჩვენ დავუშვებთ, რომ φ ფუნქცია არის უწყვეტი და $\varphi'(t) \geqq 0$ მთელ (t_1, t_2) შუალედში. ψ ფუნქცია განიცდის წყვეტას ამ შუალედის შიგა $t = t_0$ წერტილზე; $t_1 \leqq t < t_0$, $t_0 < t \leqq t_2$ შუალედებში ის არის უწყვეტი. ასეთ მრუდებს ჩვენ ვუწოდებთ წყვეტილს.

ინტეგრალი:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t))\, dt$$

აღებული წყვეტილი წირის გასწვრივ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ჯამის სახით:

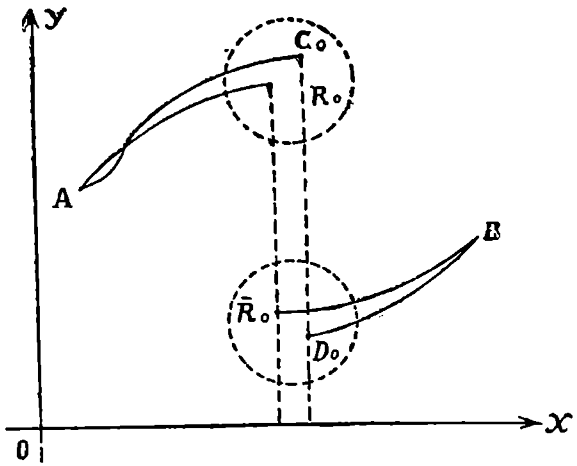
$$\int_{t_1}^{t_0} F(\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t))\, dt + \int_{t_0}^{t_2} F(\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t))\, dt.$$

ამ ორ ინტეგრალს სრულიად გარკვეული სასრულო მნიშვნელობები აქვს, რადგანაც ინტეგრალები გავრცელებულია უწყვეტ წირებზე; I ინტეგრალის საინტეგრაციო t ცვლადი იცვლება უწყვეტად, რის გამოც ამ ინტეგრალს სრულიად გარკვეული აზრი აქვს.

2. E_0 იყოს წყვეტილი ექსტრემალი (ნახ. 1); A და B ამ ექსტრემალის ბოლოწერტილებია, ხოლო R_0 და $\overline{R}_0$ შეწყვეტის წერტილები. შემოვწეროთ R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილების გარშემო მცირე რადიუსიანი წრეწირები და ავიღოთ მათ შიგნით სათანადოდ ორი ნებისმიერი C_0 და D_0 წერტილი, რომელთაც თანატოლი აბსცისები აქვთ. L იყოს E მრუდის მეზობელი ნებისმიერი წყვეტილი მრუდი, რომელიც A წერტილს C_0-თან, ხოლო D_0 წერტილს B-თან აერთებს.

წყვეტილი ექსტრემალების განსაზღვრის თანახმად გვექნება:

$$I_{E_0} \leqq I_L$$



ნახ. 1

გავატაროთ C_0 და R_0, $\overline{R}_0$ და D_0 წერტილებზე რაიმე წირები:

$$K(C_0R_0) \text{ და } \overline{K}(R_0D)$$

მათი განტოლებები სათანადოდ იყოს:

$$K \qquad x = \xi(a),\ y = \eta(a),$$
$$\overline{K} \qquad x = \overline{\xi}(a) \quad y = \overline{\eta}(a)$$

$a = a_0$ იყოს a პარამეტრის მნიშვნელობა R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში. ცხადია, რომ δI_E ვარიაციისათვის, გვექნება:

$$\delta I_{E_0} = \delta I_{AR_0} + \delta I_{\overline{R}_0B}.$$

(x_0, y_0, x_0', y'_0) და $(x_0, \overline{y}_0, \overline{x}_0', \overline{y}'_0)$-ით აღვნიშნოთ E_0 ექსტრემალის კოორდინატები და წარმოებულები R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში სათანადოდ; გვექნება[1]:

$$\delta I_{AR_0} = \varepsilon [F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\, \xi'(a_0) + F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\, \eta'(a_0)],$$

$$\delta I_{\overline{R}_0R} = -\varepsilon [\, F_{x'}(x_0, \overline{y}_0, \overline{x}'_0, \overline{y}'_0)\, \xi'(a_0) + F_{y'}(x_0, \overline{y}_0, \overline{x}'_0, \overline{y}'_0)\eta'(a_0)],$$

სადაც ε საკმაოდ მცირე სიდიდეა. აქედან:

$$\delta I_{E_0} = \varepsilon[(F_{x'} - \overline{F}_{x'})\, \xi'(a_0) + F_{y'}\eta'(a_0) + \overline{F}_{y'}\, \overline{\eta}'(a_0)]^2.$$

ამგვარად K და $\overline{K}$ მრუდებისათვის შესრულებული უნდა იყოს შემდეგი განტოლება:

$$(F_x' - \overline{F}_{x'})\ \xi'(a_0) + F_{y'}\eta(a_0) + \overline{F}_{y'}\eta'(a_0) = 0. \tag{1}$$

უკანასკნელ პირობას ჩვენ ვუწოდებთ ტრანსვერსალობის პირობას გაფართოებული აზრით, ხოლო E_0 ექსტრემალს, ტრანსვერსალს K და $\overline{K}$ მრუდთა სისტემის მიმართ.

[1] Bolza, Vorlesungen über Variationstechnung. Leipzig, 1908, გვ. 248.

[2] შემდეგში ხშირად $F_x'(x, y, x,' y')$ და $F_y'(x, y, x,' y')$ ფუნქციებს შემოკლებით უარგუმენტოდ ჩავწერთ; როდესაც ამ ფუნქციებს ზემოთ არ უზის ხაზი, მაშინ არგუმენტები ეკუთვნიან წყვეტილი წირის მარცხენა შტოს, ხოლო თუ აღნიშნულ ფუნქციებს ზემოთ ხაზი უზის, არგუმენტები მარჯვენა შტოს ეკუთვნიან.

მაგრამ (1) განტოლება სამართლიანია ნებისმიერი K და $\overline{K}$ მრუდებისათვის, ამიტომ E_0 ექსტრემალი არის ტრანსვერსალური მრუდთა ნებისმიერი სისტემის მიმართ, რომელიც R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებზე გადის. ამგვარად, სამართლიანია შემდეგი დებულება:

დებულება 1. წყვეტილი ამონახსნის წყვეტის წერტილებში შესრულებული უნდა იყოს შემდეგი სამი განტოლება:

$$F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) = F_{x'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0),$$
$$F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) = 0 \quad F_{y'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0) = 0. \qquad \text{(I)}$$

3. ვიგულისხმოთ რომ:

$$x = x(t), \quad y = \begin{cases} y(t), & t_1 \leqq t \leqq t_0 - 0 \\ \bar{y}(t), & t_0 + 0 \leqq t \leqq t_2 \end{cases}$$

არის $\dot{E}_0$ ექსტრემალის განტოლებანი; ამასთან წინასწარ დავუშვათ, რომ t პარამეტრი რკალის სიგრძეს აღნიშნავს. t_1 და t_2 არიან t პარამეტრის მნიშვნელობები A და B წერტილებში, ხოლო t_0 კი R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი ფუნქცია:

$$I(t) = \int_{t_1}^{t} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\, dt + \int_{t}^{t_2} F(x(t), \bar{y}(t), \bar{x}'_i(t), \bar{y}'(t),)\, dt.$$

ამ ფუნქციას $t = t_0$ წერტილზე უნდა ჰქონდეს მინიმუმი, ამიტომ:

$$I^1(t_0) = 0, \quad I''(t_0) \geqq 0. \qquad (2)$$

მაგრამ:

$$I'(t) = F(x(t), y(t), x'(t), y'(t) - F(x(t), \bar{y}(t), \bar{x}'(t), \bar{y}'(t)).$$

აქედან (2) და (3)-ის თანახმად გვაქვს:

$$F(x_0, y_0, x'_0, y'_0) = F(x_0, \bar{y}'_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0) \quad .$$

(1) დებულების საფუძველზე, ეს შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$(x'_0 - \bar{x}'_0) F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) = 0$$

და რადგანაც, საზოგადოდ, $F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) \neq 0$ მივიღებთ, რომ:

$$x'_0 = \bar{x}'_0.$$

ამგვარად, $x = x(t)$ ფუნქცია შეიძლება იყოს მხოლოდ C' კლასისა.

(3) განტოლების ერთხელ კიდევ გაწარმოება მოგვცემს:

$$I''(t) = F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_{x'} x''(t) + F_{y'} y''(t) - F_x x'(t) - F_y \bar{y}'(t) - \overline{F}_{x'} x''(t) - \overline{F}_{y'} \bar{y}''(t);$$

ჩავსვათ ამ განტოლებაში $t = t_0$ და გავითვალისწინოთ (1), მივიღებთ:

$$I''(t_0) = F_x x'_0 + F_y y'_0 - \overline{F}_x x'_0 - \overline{F}_y \bar{y}'_0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ წყვეტის R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში წყვეტილი ექსტრემალები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ უტოლობას:

$$x'_0 F_x + y'_0 F_y - x'_0 \overline{F}_x - \bar{y}'_0 \overline{F}_y \geqq 0 \qquad \text{(II)}$$

4. შემდეგში ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მთელი $AR_0 \overline{K}_0 B$ რკალისათვის ლეჟანდრისა და იაკობის პირობები შესრულებულია, ე. ი.

$$F_1 > 0;\ t'_0 < t_1 < t_0;\ t_0 < t_2 < \bar{t}'_0,$$

სადაც

$$F_1 = \frac{F_{x'^2}}{y'^2} = \frac{F_{x'y'}}{-x'y'} = \frac{F_{y'^2}}{x'^2}; \tag{4}$$

აქ $R'_0(t'_0)$ აღნიშნავს, AR_0 ექსტრემალის იმ წერტილს, რომლის შეუღლებული წერტილი არის R_0, ხოლო $\bar{R}'_0(\bar{t}'_0)$ არის $\bar{R}_0B$ ესქტრემალის ის წერტილი, რომლის შეუღლებული წერტილია $\bar{R}_0$.

შეუღლებული წერტილის თეორია

5. ვთქვათ P და $\bar{P}$ ორი წერტილია, სათანადოდ, E_0 ექსტრემალის AR_0 და $\bar{R}_0B$ ნაწილებზე, ხოლო $t = \tau$ და $t = \bar{\tau}$ კი t პარამეტრის მნიშვნელობა P და $\bar{P}$ წერტილებში. გავავლოთ ახლა P წერტილზე C' კლასის ექსტრემალთა ოჯახი, რომელიც AR_0 ექსტრემალს პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობისათვის შეიცავს, ხოლო $\bar{P}$ წერტილზე აგრეთვე გავავლოთ ექსტრემალთა მეორე ოჯახი, რომელიც შეიცავს $\bar{R}_0B$ ექსტრემალს.

R_0 და $\bar{R}$ წერტილებზე გავავლოთ e და $\bar{e}$ მრუდთა სისტემა, ისე რომ ის წყვეტილ წირებს ტრანსვერსალურად კვეთდეს ზემოხსენებული აზრით (ნახ. 2). ზოგად შემთხვევაში e და $\bar{e}$ მრუდების ასეთი სისტემა შეიძლება ა რ ა რ ს ე ბ ო ბ დ ე ს. მაგრამ ჩვენ განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როდესაც მრუდთა ასეთი წყვილი არსებობს და ამ მრუდების განტოლებებია სათანადოდ:

$$x = \xi(a),\ y = \eta(a); \tag{E}$$

$$x = \xi(a),\ y = \bar{\eta}(a). \tag{$\bar{E}$}$$

ვთქვათ $a = a_0$ პარამეტრის მნიშვნელობაა R_0 და $\bar{R}_0$ წერტილებში. (1)-ის თანახმად $\xi(a)$, $\eta(a)$, $\bar{\eta}(a)$ ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} I(x_1, y_1, \xi(a), \eta(a))\,\xi'(a) + \frac{\partial}{\partial\gamma} I(x_1, y_1, \xi(a), \eta(a))\,\eta'(a) +$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} I(\xi(a), \bar{\eta}(a), x_2, y_2)\,\xi'(a) + \frac{\partial}{\partial\gamma} I(\xi(a), \eta(a), x_2, y_2)\,\bar{\eta}'(a) = 0, \tag{5}$$

სადაც I ექსტრემალთა-ინტეგრალს წარმოადგენს[1]. შემდეგში $I(x_1, y_1, \xi, \eta)$ და $I(\xi, \eta, x_2, y_2)$-ს მოკლედ აღვნიშნავთ, სათანადოდ, I და $\bar{I}$-ით. უკანასკნელი განტოლება გვიჩვენებს, რომ e და $\bar{e}$ მრუდებიდან ერთ-ერთი შეიძლება ნებისმიერი იყოს.

ვთქვათ e მრუდი მოცემულია. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ $\bar{e}$ მრუდი საჭიროა $\bar{\eta}(a)$ ფუნქციის განსაზღვრა, ამისათვის კი უნდა ამოვხსნათ (5) დიფერენციალური განტოლება. $\eta(a)$ ფუნქცია, რომელიც ამ განტოლების ამოხსნას წარმოადგენს, საზოგადოდ შესაძლოა არ იყოს ნამდვილი, ე. ი. e მრუდი შეიძლება არც არსებობდეს. მაგრამ ჩვენ დავუშვით, რომ ის არსე-

[1] **B o l z a**, Vorlesungen. გვ. 306.

ბობს. მაშინ ადგილი აქვს (5) იგივეობას, ის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{da} I(x_1, y_1, \xi(a), \eta(a)) + \frac{d}{da} I(\xi(a), \overline{\eta}(a), x_2, y_2) = 0;$$

აქედან:

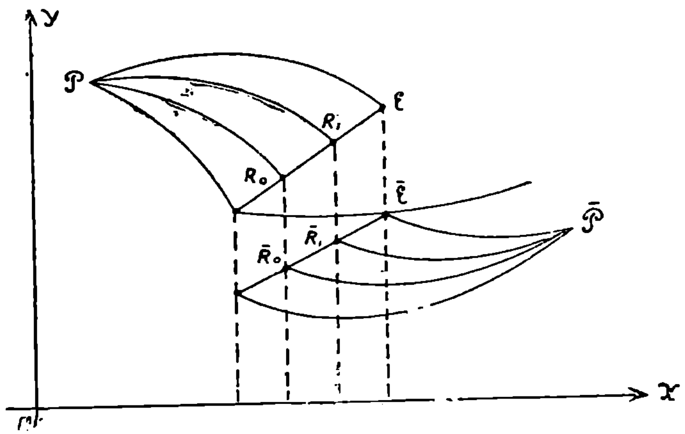
$$I(x_1, y_1, \xi(a), \eta(a)) + I(\xi(a), \overline{\eta}(a), x_2, y_2) = \text{Const.}. \qquad (6)$$

$E_1(PR_1\overline{R}_1\overline{P})$ იყოს ერთ-ერთი მრუდი ჩვენი სიმრავლისა, $a=a_1$ კი a პარამეტრის მნიშვნელობა წყვეტის R_1 და $\overline{R}_1$ წერტილებში. (6) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$I(x_1, y_1, \xi(a_0), \eta(a_0)) + I(\xi(a_0), \overline{\eta}(a_0), x_2, y_2) =$$
$$I(x_1, y_1, \xi(a_1), \eta(a_1)) + I(\xi(a_1), \overline{\eta}(a_1), x_2, y_2).$$

მაგრამ ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს I ინტეგრალის მნიშვნელობას E_0 ექსტრემალის გასწვრივ, ხოლო მარჯვენა კი იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობაა E_1 მრუდის გასწვრივ. მაშასადამე,

$$I_{E_0} = I_{E_1}.$$



ნახ. 2

ამგვარად, თუ მოცემული P და $\overline{P}$ წერტილებისა და e მრუდისათვის არსებობს $\overline{e}$ მრუდი, რომელიც (5) განტოლებას აკმაყოფილებს, მაშინ E_0 ექსტრემალი I ინტეგრალს საკუთრივ ექსტრემუმს არ ანიჭებს.

მაშასადამე, მინიმუმის პირობების განსაზღვრა დაყვანილია იმ პირობების განსაზღვრაზე, რომელთა შესრულებისას მოცემულა e მრუდისთვის არ არსებობს $\overline{e}$ მრუდი. ჩვენი უახლოესი მიზანია სწორედ ამ პირობების მოძებნა.

6. ამოვხსნათ (5) განტოლება $\overline{\eta}'(a)$-ს მიმართ და ვიპოვოთ $\dfrac{\overline{\eta}'(a)}{\xi'(a)}$ შეფარდება პარამეტრის $a=a_0$ მნიშვნელობისათვის, ანუ მხების დახრა $\overline{e}$ წირის $\overline{R}_0$ წერტილში. (5)-დან გვექნება:

$$\overline{\eta}'(a) = -\frac{\dfrac{\partial I}{\partial \xi}\xi'(a) + \dfrac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{\xi}}\overline{\xi}'(a) + \dfrac{\partial I}{\partial \eta}\eta'(a)}{\dfrac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{\eta}}}.$$

მაგრამ ამ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი $a = a_0$ მნიშვნელობისათვის ნულის ტოლია, ამიტომ განუზღვრელობის გასახსნელად გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს; ჩვენ მივიღებთ:

$$\overline{\eta}'(a_0) = -$$

$$\frac{\left(\dfrac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0\xi'^2(a_0)+2\left(\dfrac{\partial^2 I}{\partial \xi\partial \eta}\right)_0\xi'(a_0)\,\eta'(a_0)+\left(\dfrac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0\eta'^2(a_0)+\left(\dfrac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}^2}\right)_0\overline{\xi}'^2(a_0)+\left(\dfrac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}\partial \overline{\eta}}\right)_0\overline{\xi}'(a_0)\,\overline{\eta}'(a_0)}{\left(\dfrac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}\partial \overline{\eta}}\right)_0\overline{\xi}'(a_0) + \left(\dfrac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0\overline{\eta}'(a_0)}, \tag{7}$$

სადაც

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi\partial \eta}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}\partial \overline{\eta}}\right)_0$$

არიან I და $\overline{I}$ ფუნქციების მეორე რიგის წარმოებულთა მნიშვნელობები $a=a_0$-თვის[1], ე. ი.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0 &= L_0 + y_0'^2 F_1\,\frac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)}, & \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}^2}\right)_0 &= -\overline{L}_0 - \overline{y}_0'^2\overline{F}_1\,\frac{\overline{\Theta}_t(t_0,\overline{\tau})}{\overline{\Theta}(t_0,\overline{\tau})}, \\
\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi\partial \eta}\right)_0 &= M_0 - x'_0 y'_0 F_1\,\frac{\Theta_t(t_1,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)}, & \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}\partial \overline{\eta}}\right)_0 &= -\overline{M}_0 + x'_0\overline{y}'_0\overline{F}_1\,\frac{\overline{\Theta}_t(t_0,\overline{\tau})}{\Theta(t_0,\overline{\tau})}, \\
\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 &= N_0 + x_0'^2 F_1\,\frac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)}, & \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 &= -\overline{N}_0 - x_0'^2\overline{F}_1\,\frac{\Theta_t(t_0,\overline{\tau})}{\Theta(t_0,\overline{\tau})}
\end{aligned} \tag{A}$$

$L_0, M_0, \ldots \overline{L}_0, \ldots$ ვაიერშტრასის მიერ განსაზღვრული კოეფიციენტებია[2], ხოლო Θ და $\overline{\Theta}$ იაკობის დიფერენციალური განტოლებების ის ინტეგრალები AR_0 და $\overline{R}_0B$ ექსტრემალებისათვის, რომლებიც ისპობიან როცა $\tau=t_0$ და $\overline{\tau}=t_0$.

(7) განტოლებიდან გამომდინარეობს:

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0\overline{\eta}'^2(a_0) + 2\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}\partial \overline{\eta}}\right)_0\overline{\xi}'(a_0)\,\overline{\eta}'(a_0)+\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\xi}^2}\right)_0\overline{\xi}'^2(a_0) +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0\eta'^2(a^0)+2\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi\partial \eta}\right)_0\xi'(a_0)\,\eta'(a_0)+\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0\xi'^2(a_0)=0.$$

[1] Bolza, Vorlesungeu. გვ. 312.

[2] იქვე, გვ. 224.

აღვნიშნოთ T_0 და $\overline{T}_0$-ით მხების დახრა სათანადოდ e და $\overline{e}$ წირების R_0 და $\overline{R}$ წერტილებში. გავყოთ ამ განტოლების ორივე მხარე $\xi'^2(a_6)$-ზე. მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას;

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 \overline{T}^2_0 + 2\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi \partial \overline{\eta}}\right)_0 \overline{T}_0 + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 T^2 + 2\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0 T_0 + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0 = 0,$$

საიდანაც $\overline{T}_0$ განისაზღვრება T_0-ის საშუალებით.
აქედან:

$$\overline{T}_0 = \frac{-\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi \partial \overline{\eta}}\right)_0 \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi \partial \overline{\eta}}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 \left[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 T_0^2 + 2\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0 T_0 + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi^2}\right)_0\right]}}{\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0} \tag{8}$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ $\overline{e}$ არ არსებობს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ფესვქვეშა გამოსახულება უარყოფითია.

7. განვიხილოთ ახლა ეს გამოსახულება; იგი წარმოადგენს τ, $\overline{\tau}$, და T_0-ის ფუნქციას, რასაც ჩვენ აღვნიშნავთ ასე: $\omega(\tau, \overline{\tau}, T_0)$, ამგვარად

$$\omega(\tau, \overline{\tau}, T_0) = \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi \partial \overline{\eta}}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 \left[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 T_0^2 + 2\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0 T_0 + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi^2}\right)_0\right].$$

ეს განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\omega(\tau, \overline{\tau}, T_0) = -\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 T_0^2 - 2\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0 T_0 - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi \partial \overline{\eta}}\right)_0^2.$$

აქედან ჩანს, რომ ω არის T_0-ის მიმართ კვადრატული ფორმა. ამგვარად უტოლობა:

$$\omega(\tau, \overline{\tau}, T_0) < 0$$

შესრულებული იქნება ნებისმიერი T_0-სათვის, თუ

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 > 0 \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0^2 \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 \left[\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi \partial \overline{\eta}}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0\right] \leqq 0.$$

უკანასკნელი უტოლობა შეგვიძლია შემდეგი სახით გადავწეროთ (n^0.10):

$$\left[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0\right] \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0^{-} + \left[\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi \partial \overline{\eta}}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)\right] \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 \leqq 0.$$

გავითვალისწინოთ (9)-ს პირველი უტოლობა და გავყოთ მეორე $\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial \bar{\eta}^2}\right)_0$-ზე.

ახლა (9) სისტემა შეიცვლება შემდეგით:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial \bar{\eta}^2}\right)_0 > 0,$$

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0}{\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2}\right)_0} + \frac{\left(\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial \xi \partial \bar{\eta}}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial \bar{\eta}^2}\right)_0}{\left(\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial \bar{\eta}^2}\right)_0} \leqq 0. \tag{10}$$

ჯერ განვიხილოთ მეორე უტოლობა. ამ უტოლობაში შევცვალოთ I და $\bar{I}$-ს მეორე წარმოებულები (A) მნიშვნელობებით, მივიღებთ:

$$\frac{(M_0^2 - N_0 L_0) - (L_0 x_0'^2 + 2 M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2) F_1 \frac{\Theta_t (t_0, \tau)}{\Theta (t_0, \tau)}}{N_0 + x_0'^2 F_1 \frac{\Theta_t (t_0, \tau)}{\Theta(t_0, \tau)}} -$$

$$- \frac{(\bar{M}_0^2 - \bar{N}_0 \bar{L}_0) - (\bar{L}_0 x_0'^2 + 2 \bar{M}_0 x'_0 \bar{y}'_0 + \bar{N}_0 \bar{y}'^2_0) \bar{F}_1 \frac{\bar{\Theta}_t (t_0, \bar{\tau})}{\bar{\Theta}(t_0, \bar{\tau})}}{\bar{N}_0 + x_0'^2 \bar{F}_1 \frac{\bar{\Theta}_t (t_0, \bar{\tau})}{\bar{\Theta}(t_0, \bar{\tau})}} \leqq 0. \tag{11}$$

განვიხილოთ ახლა შემდეგი ფუნქცია:

$$\Psi(\tau) = \frac{M_0^2 - N_0 L_0) - (L_0 x'^2_0 + 2 M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2) F_1 \frac{\Theta_t (t_0, \tau)}{\Theta (t_0, \tau)}}{N_0 + x_0'^2 F_1 \frac{\Theta_t (t_0, \tau)}{\Theta(t_0, \tau)}} \tag{12}$$

$\frac{\Theta_t (t_0, \tau)}{\Theta (t_0, \tau)}$-ფარდობა არის τ-ს ზრდადი ფუნქცია. მაგრამ (12) ფუნქციის წარმოებული $z = \frac{\Theta_t}{\Theta}$ ცვლადით არის:

$$- \frac{(M_0 x'_0 + N_0 y'_0)^2}{\left(N_0 + x_0'^2 F_1 \frac{\Theta_t}{\Theta}\right)^2}.$$

მივიღოთ, რომ $M_0 x'_0 + N_0 y'_0 = F_y \neq 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ τ-ს ზრდისას (12) ფუნქცია კლებულობს. ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ აგრეთვე, რომ ზრდადი τ-სთვის გამოსახულება:

$$\overline{\Psi}(\overline{\tau}) = \frac{(\overline{M}_0^2 - \overline{N}_0\,\overline{L}_0) - (\overline{L}_0 x_0'^2 + 2\overline{M}_0 x'_0 \overline{y}'_0 + \overline{N}_0 \overline{y}_0'^2)\,\overline{F}_1 \dfrac{\overline{\Theta}_t(t_0,\overline{\tau})}{\overline{\Theta}(t_0,\overline{\tau})}}{\overline{N}_0 + x_0'^2 \overline{F}_1 \dfrac{\overline{\Theta}_t(t_0,\overline{\tau})}{\overline{\Theta}(t_0,\overline{\tau})}} \qquad (13)$$

კლებულობს, როცა $\overline{F}_y \not\equiv 0$.

ამგვარად, (11) სხვაობა მოცემული τ-სთვის არის $\overline{\tau}$-ს ზრდადი ფუნქცია. ვთქვათ ეს სხვაობა ნულია, როდესაც $\overline{\tau} = \tau^*$, ე. ი. ვთქვათ

$$\Psi(\tau) - \overline{\Psi}(\tau^*) = 0; \qquad (14)$$

რადგან ზრდადი τ-სთვის (12) ფუნქცია ყოველთვის კლებადია და (13) ფუნქციას მხოლოდ ზრდადი τ^*-სთვის შეიძლება იყოს კლებადი, ამიტომ (14)-დან მივიღებთ, რომ τ ზრდადია τ^*-თან ერთად.

R'_0R_0 და $\overline{R}_0\overline{R}'_0$ ექსტრემალებზე P და $\overline{P}^*$ წერტილებს, რომლებიც პარამეტრის $t=\tau$ და $t=\tau^*$ მნიშვნელობებს ეთანადებიან, ჩვენ ვუწოდებთ E_0 წყვეტილი ექსტრემალის შეუღლებულ წერტილებს. რადგანაც ორი R_0 და R'_0 შეუღლებული წერტილი AR_0 ექსტრემალზეა, ამიტომ (12) ფუნქცია ღებულობს ამ წერტილებზე ერთსა და იმავე მნიშვნელობას. ყოველ წერტილზე, რომელიც ამ წერტილებს შორის არის მოთავსებული, მას აქვს სხვადასხვა მნიშვნელობა. ასევე $\overline{R}_0$ და $\overline{R}'_0$ წერტილებს ეთანადება (13) ფუნქციის ერთი და იგივე მნიშვნელობა; $\overline{R}_0$ და $\overline{R}'_0$ წერტილებს შორის კი იგი ცალსახაა.

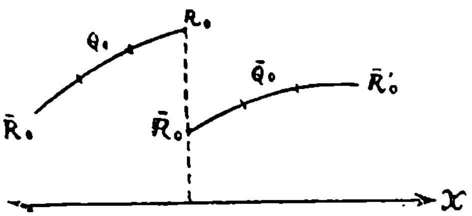
Q_0 იყოს R'_0R_0 ექსტრემალის წერტილი, რომლის შეუღლებული წერტილები E_0 ექსტრემალის მიმართ არიან $\overline{R}_0$ და $\overline{R}'_0$, ხოლო $\overline{Q}_0$ იყოს $\overline{R}_0\overline{R}'_0$ ექსტრემალის წერტილი, რომლის შეუღლებული წერტილებია R_0 და R'_0; ზემოთქმულიდან ცხადია, რომ P წერტილის მოძრაობისას R'_0 წერტილიდან Q_0-სკენ მისი შეუღლებული P^* წერტილი იმოძრავებს $\overline{Q}_0$-დან $\overline{R}'_0$-სკენ. მაგრამ, როცა P წერტილი Q_0-დან R_0-სკენ მოძრაობს, მისი შეუღლებული წერტილი იმოძრავებს $\overline{R}_0$-დან $\overline{Q}$-კენ (ნახ. 3).

განვიხილოთ ახლა სხვაობა:

$$\frac{(M_0^2 - N_0 L_0) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2)\,F_1 \dfrac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)}}{N_0 + x_0'^2 F_1 \dfrac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)}} -$$

$$- \frac{(\overline{M}_0^2 - \overline{N}_0\overline{L}_0) - (\overline{L} x_0'^2 + 2\overline{M}_0 x'_0 \overline{y}'_0 + \overline{N}_0 \overline{y}_0'^2)\,\overline{F}_1 \dfrac{\overline{\Theta}_t(t_0,\overline{\tau})}{\overline{\Theta}(t_0,\overline{\tau})}}{N_0 + x_0'^2 \overline{F}_1 \dfrac{\overline{\Theta}_t(t_0,\overline{\tau})}{\overline{\Theta}(t_0,\overline{\tau})}},$$

რადგან ეს სხვაობა, როდესაც τ მოცემულია, $\overline{\tau}$-ს ზრდადი ფუნქციაა, იგი



ნახ. 3

$\overline{\tau}=\tau^*$ მნიშვნელობამდე უარყოფითია, ხოლო ამ მნიშვნელობის შემდეგ კი დადებითი, ამიტომ (11) უტოლობა ანუ მეორე (10) უტოლობათაგან სამართლიანია, როცა: $\overline{\tau}\leqq\tau^*$.

ამგვარად, თუ t_1 არის t პარამეტრის მნიშვნელობა საწყისი A წერტილისათვის, მაშინ პირობა იმისა, რომ მოცემული c წირისთვის არ არსებობდეს $\bar{c}$ წირი, ე. ი. ექსტრემუმის პირობა წყვეტილი ექსტრემალებისათვის მდგომარეობს იმაში, რომ პარამეტრის $t=t_2$ მნიშვნელობა, რომელიც ეთანადება ბოლოწერტილს, აკმაყოფილებდეს უტოლობას:

$$t_2 \leqq t_1^*. \qquad (15)$$

8. განვიხილოთ ახლა $\omega(\tau,\overline{\tau},T_0)$ ფუნქცია; თუ შევცვლით მეორე წარმოებულებს (A) მნიშვნელობებით, იგი შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}\omega(\tau,\overline{\tau},T_0) =\, & \overline{M}_0^2-\overline{N}_0\overline{L}_0+\overline{N}_0\left[\left(N_0+x'^2_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)T_0^2+2\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)T_0+\right.\\ & \left.+\left(L_0+y'^2_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)\right]+\left[\left(N_0+x'^2_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)x'^2_0T_0^2+2\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)x'^2_0T_0+\right.\\ & \left.+x'^2_0\left(L_0+y'^2_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)-\left(\overline{L}_0x'^2_0+2\overline{M}_0x'_0\bar{y}'_0+\overline{N}_0\bar{y}'^2_0\right)\right]\overline{F}_1\frac{\overline{\Theta}_t}{\overline{\Theta}}. \qquad (16)\end{aligned}$$

$\overline{F}_1\frac{\overline{\Theta}_t}{\overline{\Theta}}$-ს წინ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება, როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, არის ორი τ და T_0 ცვლადის ფუნქცია. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $\varphi(\tau,T_0)$-ით, ე. ი.

$$\begin{aligned}\varphi(\tau,T_0)=\, & \left(N+x'^2_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)x'^2_0T_0^2+2\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)x'^2_0T_0+\\ & +\left(L_0+y'^2_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)x'^2_0-\left(\overline{L}_0x'^2_0+2\overline{M}_0x'_0\bar{y}'_0+\overline{N}_0\bar{y}'^2_0\right);\end{aligned}$$

ამგვარად, φ ფუნქცია T_0-ის მიმართ წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას. ვიპოვოთ ამ ფორმის $D(\tau)$ დისკრიმინანტი; გვაქვს:

$$\begin{aligned}D(\tau)=\, & \left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)^2x'^4_0-\left(N_0+x'^2_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)x'^2_0\left[\left(L_0+y'^2_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)x'^2_0-\right.\\ & \left.-\left(\overline{L}_0x'^2_0+2\overline{M}_0x'_0\bar{y}'_0+\overline{N}_0\bar{y}'^2_0\right)\right].\end{aligned}$$

მარტივი გამოთვლების შედეგად მივიღებთ:

$$D(\tau)=(M_0^2-N_0L_0)x_0'^4+N_0(\overline{L}_0x_0'^2+2\overline{M}_0x'_0\overline{y}'_0+\overline{N}_0\overline{y}_0'^2)x_0'^2-$$
$$-(L_0x_0'^2+2M_0x'_0y'_0+N_0y_0'^2-\overline{L}_0x_0'^2-2\overline{M}_0x'_0\overline{y}'_0-\overline{N}_0\overline{y}_0'^2)\,x_0'^4F_1\cdot\frac{\Theta_t}{\Theta}. \tag{17}$$

$\dfrac{\overline{\Theta}_t}{\overline{\Theta}}$ ფუნქცია, როგორც ზევით იყო ნაჩვენები, იზრდება τ-თან ერთად. რადგანაც გარდა ამისა:

$$F_x=Lx'+My',\quad F_y=Mx'+Ny',$$

ამიტომ გვექნება:

$$L_0x_0'^2+2M_0x'_0y'_0+N_0y_0'^2-\overline{L}_0x_0'^2-2\overline{M}_0x'_0\overline{y}'_0-\overline{N}_0\overline{y}_0'^2=$$
$$x'_0F_x+y'_0F_y-x'_0\overline{F}_x-\overline{y}'_0\overline{F}_y.$$

(n^0.3)-ში ჩვენ ვნახეთ, რომ:

$$x'_0F_x+y'_0F_y-x'_0\overline{F}_x-\overline{y}'_0\overline{F}_y\geqq 0.$$

ავიღოთ ეს უტოლობა მკაცრი სახით, ე. ი. გამოვრიცხოთ ტოლობის ნიშანი. (17)-ის თანახმად ჩვენ მივიღებთ, რომ $D(\tau)$ ფუნქცია კლებულობს τ-ს ზრდასთან ერთად. $H_0(h_0)$ იყოს E_0 ექსტრემალის K'_0R_0 შტოზე ის წერტილი, რომლისათვისაც

$$D(h_0)=0. \tag{18}$$

მაშინ $D(t)$ ფუნქცია $\tau=\tau_0$ მნიშვნელობაზე გადასვლამდე დადებითია, გადასვლის შემდეგ კი უარყოფითი.
ვთქვათ

$$\tau<h_0 \tag{19}$$

მაშინ გვექნება:

$$D(\tau)>0$$

და ამიტომ ყოველი τ-სთვის, რომელიც (19) უტოლობას აკმაყოფილებს, შეგვიძლია შევარჩიოთ T_0-ის ისეთი ნამდვილი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც:

$$\varphi(\tau,T_0)=0. \tag{20}$$

მაგრამ $\varphi(\tau,T_0)$ შეგვიძლია x'_0 და y'_0 წარმოებულთა საშუალებით შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

$$\varphi(\tau,T_0)=-\left[\overline{L}_0-\left(N_0+x_0'^2F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)T_0^2-2\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)T_0-\right.$$
$$\left.-\left(L_0+y_0'^2F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)\right]x_0'^2-2\overline{M}_0x'_0\overline{y}'_0-\overline{N}_0\overline{y}_0'^2.$$

მაგრამ რადგანაც (20) განტოლება შესაძლებელია და $x_0'^2+y_0'^2\neq 0$, ამიტომ უკანასკნელი კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი იქნება:

$$\overline{M}_0^2-\overline{N}_0\overline{L}_0+\overline{N}_0\left[\left(N_0+x_0'^2F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)T_0^2+2\left(M_0-x'_0y'_0F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)T_0+\right.$$
$$\left.+\left(L_0+y_0'^2F_1\frac{\Theta_t}{\Theta}\right)\right]\geqq 0. \tag{21}$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (20) და (21) ფორმულებს, (16)-დან გვექნება ასეთი შედეგი:

ყოველი τ-სთვის, რომელიც (19) უტოლობას აკმაყოფილებს, შეიძლება ვიპოვოთ e მრუდის ისეთი მიმართულება, რომლისთვისაც ყოველი τ-სათვის:

$$\omega(\tau, \overline{\tau}, T_0) \geqq 0.$$

ამ შემთხვევაში $\overline{T}_0$-სთვის ვიპოვით (8)-დან ორ ნამდვილ მნიშვნელობას, მაშასადამე, არსებობს $\bar{e}$ მრუდი, რომელიც e მრუდს ეთანადება; მოცემული საწყისი წერტილებისათვის და (n^0.5) პარაგრაფის დასაწყისში დამტკიცებულის თანახმად E_0 ექსტრემალი ინტეგრალს ექსტრემუმს არ ანიჭებს.

ამგვარად, E_0 ექსტრემალი არ ანიჭებს I ინტეგრალს ექსტრემუმს, თუ საწყისი $A(t_1)$ წერტილისათვის გვაქვს:

$$t_1 \leqq h_0.$$

ვთქვათ ახლა: $\tau > h_0$,

მაშინ გვექნება: $D(\tau) < 0$

და, მაშასადამე, არ არსებობს T_0-ის ნამდვილი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს (20) განტოლებას. აქედან ჩვენ დავასკვნით: მინიმუმის აუცილებელი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ საწყისი $A(t_1)$ წერტილისათვის შესრულებული იყოს უტოლობა:

$$t_1 > h_0. \tag{22}$$

ჩვენ ზევით მივიღეთ, რომ $F_y = M_0 x'_0 + N_0 y'_0 \neq 0$, $\overline{F}_y = \overline{M}_0 x'_0 + \overline{N}_0 \bar{y}'_0 \neq 0$. ადვილი შესამჩნევია, რომ როცა $F_y = \overline{F}_y = 0$, ყველა წყვეტილი ექსტრემალი სუსტია. მართლაც, (n^0.7)-ის საფუძველზე გვექნება იგივურად:

$$\Psi'(\tau) = \overline{\Psi}'(\overline{\tau}) = 0.$$

და, მაშასადამე, $\Psi(\tau)$ და $\overline{\Psi}(\overline{\tau})$ ფუნქციები მუდმივია. ამრიგად წერტილთა ნებისმიერი წყვილი, რომელიც სათანადოდ AK_0 და $\overline{K}_0 B$-ზე მდებარეობს, შეგვიძლია შეუღლებულ წერტილთა წყვილად მივიღოთ. ამგვარად ზემოთქმული დამტკიცებულია.

იმ შემთხვევას, როდესაც წყვეტის წერტილებში $F_y = \overline{F}_y = 0$, ჩვენ არ განვიხილავთ.

9. დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი დებულება:

დებულება II. $H_0(h_0)$ არის ის წერტილი, რომლის შეუღლებული წერტილი წყვეტის $\overline{R}_0$ ($\overline{R}'_0$) წერტილია, ე. ი. ((n^0.7)-ის საფუძველზე) H_0 წერტილი Q_0-ს ემთხვევა.

მსჯელობისათვის ავიღოთ (14) განტოლება. ჩავსვათ ამ განტოლებაში $\tau^* = t_0$; მაშინ τ^*-ის შესაბამისი τ-ს განსასაზღვრავად გვექნება შემდეგი:

$$\frac{(M_0^2 - N_0 L_0) - (L_0 x_0'^2 + 2 M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2) F_1 \dfrac{\Theta_t(t_0, \tau)}{\Theta(t_0, \tau)}}{N_0 + x_0'^2 F_1 \dfrac{\Theta_t(t_0, \tau)}{\Theta(t_0, \tau)}} = -$$

$$\cdot - \frac{\overline{L}_0 x_0'^2 + 2\overline{M}_0 x'_0 \bar{y}'_0 + \overline{N}_0 \bar{y}_0'^2}{x_0'^2}.$$

ეს უკანასკნელი მარტივი გარდაქმნების შედეგად მიიღებს სახეს:

$$(M_0^2 - N_0 L_0)x_0'^2 + N_0(\bar L_0 x_0'^2 + 2\bar M_0 x'_0 \bar y_0 + \bar N_0 \bar y_0'^2) - (L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2 - \bar L_0 x_0'^2 - 2\bar M_0 x'_0 \bar y_0 - \bar N_0 \bar y_0'^2)\, x_0'^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)} = 0. \tag{23}$$

თუ ამ გამოსახულებას შევადარებთ (18)-ს, მივიღებთ, რომ:

$$\frac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)} = \frac{\Theta_t(t_0,h_0)}{\Theta(t_0,h_0)}.$$

მაგრამ ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა:

$$\tau = h_0.$$

ამგვარად ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

$\bar H(\bar h_0)$ იყოს E_0 ექსტრემალის $\bar H_0$ წერტილის ანალოგიური წერტილი $\bar R_0 \bar R'_0$ შტოზე. ისე როგორც ზევით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ იგი ემთხვევა Θ_0 წერტილს; $\bar\Theta_0$-ის შეუღლებული წერტილი კი არის წყვეტის $R_0 (R'_0)$ წერტილი.

(n^0.7)-ის ბოლოს ჩვენ ვნახეთ, რომ A_0 წერტილის მოძრაობისას H_0-დან R_0 წერტილისაკენ, მისი შეუღლებული A^* წერტილი მოძრაობს $\bar R_0$ წერტილიდან $\bar H_0$ წერტილისაკენ. (22) უტოლობა გვიჩვენებს, რომ საწყისი A წერტილი R_0 და H_0 წერტილებს შორის უნდა იმყოფებოდეს. (15) უტოლობიდან კი მივიღებთ, რომ ბოლოწერტილი $\bar R_0$ და $\bar H_0$-ს წერტილებს შორის ძევს. ყველა ამას მივყევართ შემდეგ ძირითად დებულებამდე:

I ინტეგრალის მინიმუმის აუცილებელი პირობები წყვეტილი ექსტრემალისათვის იმაში მდგომარეობს, რომ E_0 ექსტრემალის საწყისი A წერტილი და ბოლო B წერტილი სათანადოდ H_0, R_0 და $\bar R_0$, $\bar H_0$ წერტილებს შორის უნდა იყოს მოთავსებული.

10. გადავიდეთ ახლა (10)-ის პირველ უტოლობაზე. თუ მეორე წარმოებულებს შევცვლით სათანადო მნიშვნელობებით, აღნიშნული უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left[N_0 + x_0'^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)}\right] \left[\bar N_0 + x_0'^2 \bar F_1 \frac{\bar\Theta_t(t_0,\bar\tau)}{\bar\Theta(t_0,\bar\tau)}\right] < 0.$$

$\tau = h_0$-თვის მოვძებნოთ პირველ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების მნიშვნელობა; (18)-დან გვექნება:

$$\frac{\Theta_t(t_0,h_0)}{\Theta(t_0,h_0)} = -\frac{(M_0^2 - N_0 L_0)x_0'^2 + N_0(\bar L_0 x_0'^2 + 2\bar M_0 x'_0 \bar y'_0 + \bar N_0 \bar y_0'^2)}{(L_0 x_0'^2 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y_0'^2 - \bar L_0 x_0'^2 - 2\bar M_0 x'_0 \bar y'_0 - \bar N_0 \bar y_0'^2)\, x_0'^2 F_1};$$

აქედან

$$N_0+x_0'^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0,h_0)}{\Theta(t_0,h_0)} =$$

$$N_0+\frac{(M_0^2-N_0L_0)x_0'^2+N_0(\overline{L}_0x_0'^2+2\overline{M}_0x_0'\overline{y}_0'+\overline{N}_0\overline{y}_0'^2)}{L_0x_0'^2+2M_0x_0'y_0'+N_0y_0'^2-\overline{L}_0x_0'^2-2\overline{M}_0x_0'\overline{y}_0'-\overline{N}_0\overline{y}_0'^2}=$$

$$=\frac{(M_0x_0'+N_0y_0')^2}{L_0x_0'^2+2M_0x_0'y_0'+N_0y_0'^2-\overline{L}_0x_0'^2-2\overline{M}_0x_0'\overline{y}_0'-\overline{N}_0\overline{y}_0'^2}>0.$$

$N+x_0'^2F_1\frac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)}$ ფუნქცია τ-ს მიმართ ზრდადი ფუნქციაა, მაშასადამე, ის არის დადებითი τ-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც (22) უტოლობას აკმაყოფილებენ.

როდესაც $\tau=t_0$ ვთქვათ

$$N_0+x_0'^2F_1\frac{\Theta_t(t_0,t_0)}{\Theta(t_0,t_0)}=0.$$

ზემოთქმულიდან ცხადია, რომ $P_0(t_0)$ წერტილი R'_0 და H_0 წერტილებს შორის ძევს.

ახლა დავუშვათ:

$$\overline{N}_0+x_0'^2\overline{F}_1\frac{\overline{\Theta}_t(t_0,\bar{t}_0)}{\overline{\Theta}(t_0,\bar{t}_0)}=0.$$

როგორც ზევით, შეიძლება აქაც ვაჩვენოთ, რომ $\overline{P}_0(\bar{t}_0)$ წერტილი $\overline{H}_0\overline{R}'_0$ ნაწილს ეკუთვნის.

რადგანაც ფუნქცია:

$$\overline{N}_0+x_0'^2\overline{F}_1\frac{\overline{\Theta}_t(t_0,\bar{\tau})}{\overline{\Theta}(t_0,\bar{\tau})}$$

$\bar{\tau}$-თან ერთად იზრდება, ამიტომ იგი უარყოფითია (t_0,h_0) შუალედის ყოველ წერტილზე, რომელშიაც შეიძლება მოთავსდეს B ბოლოწერტილი; მაშასადამე, ნამრავლი:

$$\left[N_0+x_0'^2F_1\frac{\Theta_t(t_0,\tau)}{\Theta(t_0,\tau)}\right]\left[\overline{N}_0+x_0'^2\overline{F}_1\frac{\overline{\Theta}_t(t_0,\bar{\tau})}{\overline{\Theta}(t_0,\bar{\tau})}\right]$$

უარყოფითი იქნება იმ E_0 ექსტრემალის ბოლო და საწყის წერტილებზე, რომელიც მინიმუმის ყველა პირობას აკმაყოფილებს (n^0.5, 6,7). ამგვარად, (15) და (22) უტოლობების აუცილებელი შედეგია (10)-ის პირველი უტოლობა.

ადვილი დასადგენია, რომ P_0 და $\overline{P}_0$ წერტილები არიან სათანადოდ ფოკუსები იმ ექსტრემალთა კონისა AR_0 და $\overline{R}_0B$ შტოებზე, რომელნიც ტრანსვერსალური არიან $R_0\overline{R}_0$-ის მიმართ.

შეწყვეტის წერტილთა მრუდი

11. ჩვენს შრომაში [1] მრუდს, რომელიც შემდეგი სისტემით არის განსაზღვრული:

$$F_{x'}(x,y,x',y')=0,\quad F_{y'}(x,y,x',y')=0$$

[1] Mathemat. Annalen, Bd. 75.

შეწყვეტის წერტილთა მრუდი ვუწოდეთ. შესაძლებელია განვაზოგადოთ განსაზღვრა და ყველა წირს, რომლებიც შემდეგი განტოლებებით არიან წარმოდგენილი

$$F_{x'} = a, \quad F_{y'} = b \tag{24}$$

ვუწოდოთ შეწყვეტის წერტილთა მრუდი; აქ a და b არიან მუდმივები; ისე, როგორც ზემოხსენებულ შრომაში, (24) სისტემა გვაძლევს:

$$F_x dx + F_y dy = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

ამ ფორმულიდან, ისე როგორც წინათ, გამომდინარეობს, რომ როცა F ფუნქცია დამოუკიდებელია x ან y ცვლადზე, შეწყვეტის წერტილთა ყოველი მრუდი წარმოადგენს წრფეს, რომელიც x ან y ღერძის პარალელურია.

განვიხილოთ ახლა შეწყვეტის წერტილთა მრუდების სპეციალური კონა, რომელიც შემდეგი სისტემით არის განსაზღვრული:

$$F_{x'}(x, y, x', y') = a, \qquad F_{y'}(x, y, x', y') = 0 \tag{25}$$

ავიღოთ ამ კონის ერთ-ერთი წირი, პარამეტრის კერძო $a = a_0$ მნიშვნელობისათვის, და გავავლოთ მის წერტილებზე C კლასის ექსტრემალები ისეთი $\frac{y'}{x'}$ მიმართულებით, რომელიც (25)-დან არის განსაზღვრული. PQ იყოს y ღერძის პარალელური წრფე. მაშინ P და Q წერტილებზე გავლებული C კლასის ექსტრემალები ქმნიან წყვეტილ ექსტრემალებს (P და Q არიან წრფის გადაკვეთის წერტილები შეწყვეტის წერტილთა მრუდთან).

საზოგადოდ: C კლასის ორი ექსტრემალი, რომლებიც (25) განტოლებებით განსაზღვრული მიმართულებით ისეთ ორ წერტილზე გადიან, რომელთა აბსცისები თანატოლია, წყვეტილ ექსტრემალს შეადგენს.

ინდიკატრისი

12. $R_0(x_0, y_0)$ და $\overline{R}_0(x_0, \overline{y_0})$ წყვეტის წერტილებისათვის ავაგოთ კარათეოდორის ინდიკატრისი.

ამ წერტილებში ინდიკატრისის განტოლებებია:

$$F(x_0, y_0, \xi, \eta) = 1, \qquad F(x_0, \bar{y}_0, \xi, \eta) = 1.$$

ϑ_0 და $\overline{\vartheta}_0$ იყოს წყვეტილი ექსტრემალის მიმართულებათა წყვილი R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში. მაშინ გვექნება:

$$\begin{gathered} F_{x'}(x_0, y_0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) = F_{x'}(x_0, y_0 \cos\overline{\vartheta}_0, \sin\overline{\vartheta}_0), \\ F_{y'}(x_0, y_0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) = 0, \\ F_{y'}(x_0, y_0, \cos\overline{\vartheta}_0, \sin\overline{\vartheta}) = 0. \end{gathered} \tag{I'}$$

მხები ინდიკატრისის ნებისმიერ ϑ წერტილში (x, y)-სათვის განისაზღვრება შემდეგი განტოლებით:

$$X F_{x'}(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta) + Y F_{y'}(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta) = 1$$

ავაგოთ ახლა მხებები ϑ_0 და $\overline{\vartheta}_0$ წერტილებში სათანადოდ პირველი და მეორე ინდიკატრისის მიმართ.

(I′) სისტემის ორი უკანასკნელი ტოლობების საფუძველზე პირველი მხებისთვის გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$X F_{x'}(x_0, y_0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) = 1,$$

ხოლო მეორისათვის კი:

$$X F_{x'}(x_0, \overline{y}_0, \cos\overline{\vartheta}_0 \sin\overline{\vartheta}_0) = 1.$$

იმავე სისტემის პირველი განტოლების საფუძველზე ორივე ეს წრფე y ღერძის პარალელურია. აქედან ცხადია შემდეგი:

ორივე ინდიკატრისს, რომლებიც აგებულია R_0 და $\overline{R}_0$ წყვეტის წერტილებისთვის, აქვთ ერთი საერთო მხები იმ წერტილებში, რომლებიც ეთანადებიან წყვეტილ ექსტრემალთა ϑ_0 და $\overline{\vartheta}_0$ მიმართულებებს. წყვეტის წერტილებში ამასთან ეს საერთო მხები არის y ღერძის პარალელური.

წყვეტილი სუსტი ექსტრემალები

13. ზევით ჩვენ ავიღეთ II პირობა მკაცრი სახით. ადვილი დასანახია, რომ E_0 ექსტრემალი სუსტია იმ შემთხვევაში, როცა:

$$W_0 - \overline{W}_0 = x'_0 F_x + y'_0 F_y - x'_0 \overline{F}_x - \overline{y}'_0 \overline{F}_y = 0.^1 \qquad (26)$$

მართლაც (26) განტოლება შემდეგი განტოლების ტოლფასია:

$$\left[L_0 - \left(\overline{L}_0 + 2\overline{M}_0 \frac{\overline{y}'_0}{x'_0} + \overline{N}_0 \left(\frac{\overline{y}'_0}{x'_0}\right)^2\right)\right] x'^2_0 + 2M_0 x'_0 y'_0 + N_0 y'^2 = 0;$$

რადგანაც ამ განტოლებაში

$$x'^2_0 + y'^2_0 \neq 0,$$

იგი შესაძლებელია შესრულდეს მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$M_0^2 - N_0 L_0 + N_0 \left(\overline{L}_0 + 2\overline{M}_0 \frac{\overline{y}'_0}{x'_0} + \overline{N}_0 \left(\frac{\overline{y}'^2_0}{x'^2_0}\right)^2\right] \geqq 0.$$

ამგვარად, (17)-დან τ-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$D(\tau) \geqq 0;$$

ამიტომ არსებობს $\overline{c}$ წირი და, მაშასადამე, E_0 ექსტრემალი მართლაც სუსტი ექსტრემალია.

იმ შემთხვევაში, როცა შეწყვეტის წერტილთა მრუდის გასწვრივ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$F_x = F_y = 0,$$

ნებისმიერი ექსტრემალისთვის, გამოთქმა: $x'_0 F_x + y'_0 F_y - x'_0 \overline{F}_x - \overline{y}'_0 \overline{F}_y$ იგივურად ნულის ტოლია და, მაშასადამე, ყველა წყვეტილი ექსტრემალი სუსტია.

ისე როგორც მოხსენებულ შრომაში, შესაძლებელია II პირობა მივიყვანოთ შემდეგ სახემდე.

(ξ, η) იყოს შეწყვეტის წერტილის კოორდინატები მაშინ, როგორც უკვე იყო ნაჩვენები:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

---

[1] $W = x' F_x + y' F_y$ არის ფუნქცია, რომელიც პირველად ჩვენ განვიხილეთ (იხ. Math. Annalen Bd. 75).

თუ ამას გავითვალისწინებთ, შესაძლებელია $W_0 - W_0$ შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

$$\frac{F_y}{\xi'}(y'\xi' - x'\eta') - \frac{\overline{F}_y}{\xi'}(\bar{y}'\xi' - x'\overline{\eta'}) > 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მხოლოდ ის ექსტრემალები შეიძლება იყოს მძლავრი, რომლებიც შეწყვეტის წერტილთა მრუდს ორივე შეწყვეტის წერტილში არ ეხებიან.

ამგვარად, როცა შეწყვეტის წერტილთა მრუდი არის მომვლები C კლასის იმ ექსტრემალთა კონისა, რომლებიც წყვეტილ ექსტრემალებს შეადგენენ, მაშინ უკანასკნელი ექსტრემალები სუსტია.

14. დავუბრუნდეთ ახლა e და $\bar{e}$ მრუდეებს, ვიპოვოთ R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში დამოკიდებულება e და $\bar{e}$ მრუდთა დახრებს შორის.

როგორც ზევით, დავუშვათ, რომ:

$$x = \xi(a),\ y = \eta(a), \qquad (e)$$
$$x = \xi(a),\ y = \overline{\eta}(a) \qquad (\bar{e})$$

ამ მრუდეების განტოლებებია, ხოლო $a = a_0$ წარმოადგენს a პარამეტრის მნიშვნელობას R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში.

მაშინ ჩვენ გვექნება:

$$F(\xi(a), \eta(a), x', y') = F(\xi(a), \overline{\eta}(a), x', \bar{y}'), \tag{27}$$

სადაც $x', y', \bar{y}'$ არის a პარამეტრის ფუნქციები, რომლებიც წარმოდგენილია შემდეგ განტოლებათა სისტემით.

$$F_{x'}(\xi(a), \eta(a), x', y') = F_{x'}(\xi(a), \overline{\eta}(a), x', \bar{y}')$$
$$F_{y'}(\xi(a), \eta(a), x', y') = 0,$$
$$F_{y'}(\xi(a), \overline{\eta}(a), x', \bar{y}') = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\frac{y'}{x'}$, $\frac{\bar{y}'}{x'}$ სიდიდეები, რომლებიც უკანასკნელ განტოლებებს აკმაყოფილებენ, წარმოადგენენ წყვეტილი ექსტრემალის მხებთა დახრას e და $\bar{e}$ მრუდთა შეწყვეტის წერტილებში.

(27) განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ:

$$F_x\,d\xi + F_y\,d\eta + F_{x'}\,dx' + F_{y'}\,dy' = \overline{F}_x d\xi + \overline{F}_y\,d\overline{\eta} + \overline{F}_{x'}\,dx' + \overline{F}_{y'}\,d\bar{y}'.$$

თუ გავითვალისწინებთ სამ უკანასკნელ განტოლებას, მივიღებთ შემდეგს

$$F_x\,d\xi + F_y\,d\eta = \overline{F}_x\,d\xi + \overline{F}_y d\overline{\eta},$$

ანუ

$$F_x\xi' + F_y\eta' - \overline{F}_x\xi' - \overline{F}_y\overline{\eta}' = 0.$$

აქედან:

$$\frac{\eta'}{\xi'} = -\frac{F_x - \overline{F}_x - \overline{F}_y\dfrac{\overline{\eta}'}{\xi'}}{F_y}. \tag{28}$$

ეს არის სწორედ ის გამოსახულება, რომელიც $\frac{\eta'}{\xi'}$-სა და $\frac{\overline{\eta'}}{\xi'}$-ს აკავშირებს.

15. დავუშვათ ახლა, რომ $\bar{e}_0^*$, $\bar{e}_0$ მრუდთა ის წყვილია e და $\bar{e}$ მრუდებიდან, რომელნიც H_0 და $\overline{R_0}$ შეუღლებულ წერტილებს ეთანადებიან. e_0, $\bar{e}_0^*$ იყვნენ R_0 და $\overline{H_0}$ შეუღლებული წერტილების სათანადო მრუდები.

მოვძებნოთ $\bar{e}_0$ მრუდზე $\overline{R_0}$ წერტილში მხების დახრის ტანგენსი. განტოლება, რომელსაც შეწყვეტის წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ, შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

$$\frac{\partial I(\xi(a),\overline{\eta}(\alpha),x_2,y_2)}{\partial\overline{\eta}}=0.$$

გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2\overline{I}}{\partial\xi\partial\overline{\eta}}\xi'(a)+\frac{\partial^2\overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\overline{\eta}'(a)=0.$$

აქედან:

$$\frac{\overline{\eta}'(a)}{\xi'(a)}=-\frac{\dfrac{\partial^2\overline{I}}{\partial\xi\partial\overline{\eta}}}{\dfrac{\partial^2\overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}}.$$

ჩავსვათ მეორე წარმოებულების მნიშვნელობები $\overline{R}_0$ წერტილისთვის; გვექნება:

$$\frac{\overline{\eta}'_0}{\xi'_0}=\frac{\overline{\eta}'(a_0)}{\xi'(a_0)}=\frac{\bar{y}'_0}{x'_0}.$$

ამგვარად, $\bar{e}_0$ მრუდი ეხება F_0 ექსტრემალის $\overline{R_0}\,\overline{R'}_0$ შტოს $\overline{R_0}$ წერტილში.

შეიძლება ამავე გზით ვაჩვენოთ, რომ e_0 მრუდი R'_0R_0 შტოს ეხება R_0 წერტილში.

ვიპოვოთ ახლა დახრა e_0^* მრუდის R_0 წერტილში; (28) ფორმულიდან უშუალოდ მივიღებთ:

$$\frac{\eta'_0}{\xi'_0}=-\frac{x'_0F_x-x'_0\overline{F}_x-\bar{y}'_0\overline{F}_y}{x'_0F_y}. \tag{29}$$

F და $\overline{F}$ ფუნქციების წარმოებულთა არგუმენტებია (x_0, y_0, x'_0, y'_0) და $(x_0, \bar{y}, x'_0, \bar{y}'_0)$. გამოვაკლოთ $\frac{y'_0}{x'_0}$-გამოსახულებას (29) განტოლების ორივე მხარე; მივიღებთ:

$$\frac{y'_0}{x'_0}-\frac{\overline{\eta}'_0}{\xi'_0}=\frac{x'_0F_x+y'_0F_y-x'_0\overline{F}_x-\bar{y}'_0\overline{F}_y}{x'_0F_y}.$$

ანალოგიურად $\bar{e}_0^*$ მრუდის $\overline{R_0}$ წერტილში $\frac{\overline{\eta}'_0}{\xi'_0}$ დახრისათვის გვექნება

$$\frac{\bar{y}'_0}{x'_0} - \frac{\bar{\eta}'_0}{\xi'_0} = \frac{x'_0 F_x + y'_0 F_y - x'_0 \bar{F}_x - \bar{y}'_0 \bar{F}_y}{x'_0 \bar{F}_y}.$$

უკანასკნელს მივყევართ შემდეგ დებულებამდე:

დებულება. როცა წყვეტილი E_0 ექსტრემალი e_0 ან $\bar{e}_0$ მრუდებს შეწყვეტის R_0 ან $\bar{R}_0$ წერტილებში ეხება, მაშინ ეს წყვეტილი ექსტრემალი არის სუსტი.

საკმარისი პირობები

16. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე E_0 ექსტრემალი, რომლისათვისაც ჩვეულებრივი მინიმუმის (n^0.4)-ში დასახელებული ყველა პირობა დაცულია. $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ იყოს ექსტრემალის ბოლოწერტილები, ხოლო $R_0(x_0, y_0)$ და $\bar{R}_0(x_0, \bar{y}_0)$ მისი წყვეტის წერტილები. $A(t_1)$ და $B(t_2)$ ბოლოწერტილებში უნდა შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:

$$t_1 > h_0,$$
$$t_2 < t_1^*, \tag{30}$$

ხოლო წყვეტის წერტილებში კი II პირობები. მაშინ E_0 ექსტრემალი მართლაც ანიჭებს მინიმუმს ყველა იმ წყვეტილ წირებთან შედარებით, რომლებსაც იგივე ბოლოწერტილები აქვთ და რომელთა წყვეტის წერტილებს თანატოლი აბსცისები აქვთ და მოთავსებული არიან R_0 და $\bar{R}_0$ წერტილების ირგვლივ შემოწერილი მცირე რადიუსიანი წრეების შიგნით.

მართლაც, გავავლოთ A წერტილზე C კლასის ექსტრემალი, რომელიც მთავრდება R_0 წერტილის გარშემო შემოწერილი მცირე წრის შიგნით C წერტილში. D წერტილზე, რომელიც მოთავსებულია $\bar{R}_0$ წერტილზე შემოწერილი წრის შიგნით და ისეთივე აბსცისი აქვს, რაც C წერტილს, გავავლოთ აგრეთვე C' კლასის ექსტრემალი, რომელიც გადის B წერტილზეც. ამგვარად ჩვენ შევადგინეთ წყვეტილი შესადარი L-წირი. ანალოგიურად ავაგებთ შესადარ წირთა სიმრავლეს. ვთქვათ

$$x = \xi(a), \qquad y = \eta(a),$$
$$x = \xi(a), \qquad y = \bar{\eta}(a)$$

არიან C და D წერტილთა გეომეტრიული ადგილების განტოლებები. A და B წერტილები წარმოადგენენ ამ სიმრავლის ფოკუსებს AR_0 და $\bar{R}_0 B$ ექსტრემალებზე. I ინტეგრალის მნიშვნელობა ჩვენი სიმრავლის რომელიმე წირის გასწვრივ შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ჯამი:

$$I(x_1, y_1, \xi(a), \eta(a)) + \bar{I}(\xi(a), \bar{\eta}(a), x_2, y_2),$$

სადაც I და $\bar{I}$ არიან ექსტრემალ-ინტეგრალები.

თუ გავითვალისწინებთ (5) განტოლებას, მივიღებთ;

$$I - I_{E_0} = \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi^2}\right)_0 \xi'^2(a_0) + 2\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 \xi'(a_0)\,\eta'(a_0) + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial\eta^2}\right)_0 \eta'^2(a_0) + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\xi^2}\right)_0 \xi'^2(a_0) + 2\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\xi\partial\overline{\eta}}\right)_0 \xi'(a_0)\,\overline{\eta}'(a_0) + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\right)\overline{\eta}'^2(a_0)\Bigg]da^2 + \cdots$$

$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\eta^2}\right)_0$ არიან I და $\overline{I}$ ექსტრემალ-ინტეგრალების მეორე წარ-მოებულების მნიშვნელობები $a = a_0$-თვის.

გადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგი სახით:

$$I_L - I_E = \xi'^2(a_0)\Bigg[\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\right)_0\left(\frac{\overline{\eta}'}{\xi'}\right)_0^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\xi\partial\overline{\eta}}\right)_0\left(\frac{\overline{\eta}'}{\xi'}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\xi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)_0\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi^2}\right)_0\Bigg]da^2 + \cdots,$$

სადაც $\left(\frac{\overline{\eta}'}{\xi'}\right)_0 = \frac{\overline{\eta}'(a_0)}{\xi'(a_0)}$ და $\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0 = \frac{\eta'(a_0)}{\xi'(a_0)}$, ამასთან, ვთქვათ $\xi'(a_0) \neq 0$.

კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ჩვენ შეგვიძლ ი განვიხილოთ, როგორც $\left(\frac{\overline{\eta}'}{\xi'}\right)_0$-ის მიმართ კვადრატული ფორმა. ამიტომ ჩვენი უტოლობა:

$$I_L - I_{E_0} > 0$$

გარდაიქმნება ორ უტოლობად:

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\right)_0 > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\xi\partial\overline{\eta}}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\right)_0\Bigg[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\eta^2}\right)_0\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0^2 + 2\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\xi^2}\right)\Bigg] < 0 \qquad (31)$$

ეს უკანასკნელი $\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0$-ის მიმართ შეიძლება შემდეგი სახით წარმო-ვადგინოთ:

$$-\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\eta^2}\right)_0\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0^2 - 2\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\xi^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\overline{\eta}^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\xi^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial\xi\partial\overline{\eta}}\right)_0^2.$$

ამ უტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს $\omega(\tau, \overline{\tau}, T_0)$ ფუნქციას, რომელშიაც τ, $\overline{\tau}, T_0$ შეცვლილია სათანადოდ t_1, t_2 და $\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0$-ით, მაგრამ (30) პირობიდან, როგორც ზევით იყო ნათქვამი, ნებისმიერი $\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0$- სთვის

მივიღებთ:

$$\omega\left[t_1, t_2, \left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)_0\right] > 0.$$

ამგვარად (31)-ის უკანასკნელი უტოლობა არის შესრულებული. რაც შეეხება პირველს

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial \overline{\eta}^2}\right)_0 > 0,$$

ანუ

$$\overline{N}_0 + x'^2_0\, \overline{F}_1 \frac{\overline{\Theta}_t(t_0, t_2)}{\overline{\Theta}(t_0, t_2)} < 0$$

უტოლობას, t_2 აკმაყოფილებს, როგორც ეს (n^0.7)-ში იყო ნათქვამი, (30) პირობასთან ერთად შემდეგ უტოლობასაც

$$t_0 \leqq t_2 \leqq \overline{h}_0.$$

აქედან (n^0.10) პარაგრაფის თანახმად $\overline{N}_0 + x'^2_0\, \overline{F}_1 \frac{\overline{\Theta}_t(t_0, \overline{\tau})}{\overline{\Theta}(t_0, \overline{\tau})}$ ფუნქცია უარყოფითია $\tau = t_2$ მნიშვნელობისათვის.

ამგვარად, თუ (30) პირობები დაცულია, (31) უტოლობანიც შესრულდება. აქედან ჩანს, რომ ნებისმიერი L წირისთვის სამართლიანია უტოლობა:

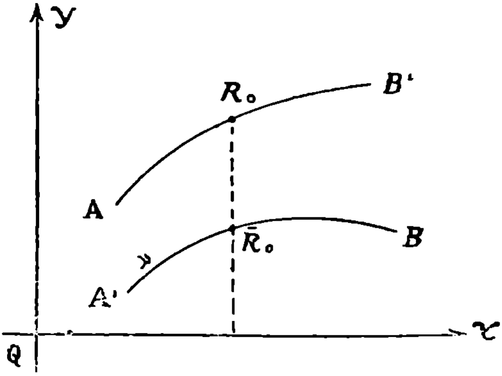
$$I_L - I_{E_0} > 0,$$

ე. ი. E_0 ექსტრემალი მართლაც ანიჭებს I ინტეგრალს მინიმუმს.

$W - \overline{W}$ ფუნქცია

17. განვაგრძოთ ახლა წყვეტილი E_0 ექსტრემალის AR_0 შტო R_0 წერტილის შემდეგ და გავავლოთ $\overline{R}_0$ წერტილზე $A'\overline{R}_0$ ექსტრემალი, რომლის გაგრძელებასაც $\overline{R}_0 B$ წარმოადგენს (ნახ. 4).

R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში $A'\overline{R}_0$ და R_0B' ექსტრემალებს ისეთივე მიმართულება აქვთ, როგორც $\overline{R}_0 B$. და AR_0 ექსტრემალებს ამავე წერტილებში, ამიტომ $A'\overline{R}_0 R_0 B'$ მრუდზე I პირობები შესრულებულია და ის არის წყვეტილი ექსტრემალი. ამგვარად შესაძლებელია შეწყვეტის წერტილთა ყოველ წყვილზე გავატაროთ ორი წყვეტილი ექსტრემალი და ესენი ერთად შეადგენენ C' კლასის ორ ექსტრემალს, რომლებიც ამ წერტილებზე სათანადოდ I განტოლებებით განსაზღვრული მიმართულებით გადიან.



ნახ. 4

აღვნიშნოთ $A'\overline{R_0}R_0B'$ ექსტრემალი E_1-ით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ერთ-ერთი (E_0 ან E_1) ექსტრემალი არის სუსტი, როდესაც მეორე მძლავრია. მართლაც, ვთქვათ τ_1 და τ_2 არის t პარამეტრის მნიშვნელობები A' და B' წერტილებში, ხოლო τ_0 კი იმავე პარამეტრის მნიშვნელობაა R_0 და $\overline{R_0}$ წერტილებში. იმისთვის, რომ E_0 ექსტრემალი იყოს მძლავრი, აუცილებელია, რომ ფუნქციას:

$$I_1(t) = \int_{\tau_1}^{t} F(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{x}'(t), \bar{y}'(t))\,dt + \int_{t}^{\tau_2} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\,dt,$$

ჰქონდეს მინიმუმი $t=\tau_0$ წერტილში, ე. ი. შესრულებული უნდა იყოს განტოლებები:

$$I'_1(\tau_0) = 0, \quad I''_1(\tau_0) \geqq 0.$$

ისე, როგორც ($n^0.4$)-ში, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ პირველი განტოლება შესრულებულია. $I''_1(t)$-სთვის ჩვენ გვაქვს:

$$I''_1(t) = \overline{F_x}\, x'(t) + \overline{F_y}\, \bar{y}'(t) - F_x\, x'(t) - F_y\, y'(t),$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $I_1(t)$ ფუნქციის $t=\tau_0$ წერტილში აქვს მინიმუმი, როცა:

$$x'(\tau_0)\overline{F_x} + \bar{y}'_0(\tau_0)\overline{F_y} - x'(\tau_0)F_x - y'(\tau_0)F_y \geqq 0$$

ან, როცა:

$$x'_0 F_x + y'_0 F_y - x'_0 \overline{F_x} - \bar{y}'_0 \overline{F_y} \leqq 0.$$

ვთქვათ ახლა E_1 ექსტრემალის A' და B' წერტილებისათვის ($n^0.7$)-ში ჩამოყალიბებული პირობები შესრულებულია და გარდა ამისა $A'\overline{R_0}$ და R_0B' ექსტრემალების გასწვრივ ლეჟანდრის (4) პირობა

$$F_1(x, y, \cos\beta, \sin\beta) > 0, \quad 0 \leqq \beta \leqq 2\pi$$

მკაცრი სახით არის შესრულებული.

თუ ახლა

$$W - \overline{W} = x'F_x + y'E_y - x'\overline{F_x} - \bar{y}'\overline{F_y}$$

ფუნქცია დადებითია $\left(x_0, y_0, \frac{y'_0}{x'_0}\right)$ და $\left(x_0, \bar{y}_0, \frac{\bar{y}'_0}{x'_0}\right)$ წირითი ელემენტებისათვის, მაშინ E_0 ექსტრემალი იქნება მძლავრი, E_1—კი სუსტი. თუ $W - \overline{W}$ უარყოფითია, მაშინ E_1 მძლავრია და E_0 სუსტი; იმ შემთხვევაში, როცა $W - \overline{W} = 0$, ყველა წყვეტილი ექსტრემალი სუსტია.

V

მინიმუმის ერთი აუცილებელი პირობის შესახებ კუთხიანი ამოხსნებისათვის ვარიაციათა აღრიცხვაში[1]

შესავალი

1. განვიხილოთ ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა, რომელიც ასეთნაირად შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

საძიებელია

$$I=\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

ინტეგრალის ფარდობითი ექსტრემუმი ორი მოცემული $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილის შემაერთებელ დასაშვებ წირთა ფუნქციონალურ ველში.

ვთქვათ ოთხი x, y, x', y' ცვლადის F ფუნქცია უწყვეტია ისევე, როგორც მისი წარმოებულები მესამე რიგამდე, როცა (x, y) წერტილი რჩება სიბრტყის R ნაწილში, ხოლო x' და y' ღებულობს ყოველ სასრულო მნიშვნელობას, რომლისათვისაც $x'^2+y'^2\neq 0$. გარდა ამისა, ვთქვათ F ფუნქცია აკმაყოფილებს ერთგვაროვნობის ცნობილ პირობას:

$$F=x' F_{x'}+y' F_{y'}.$$

ამ ამოცანისათვის, საზოგადოდ, დასაშვებია ორგვარი ექსტრემალები: ან ექსტრემალები უწყვეტი მხებებით, ანდა კუთხიანი ექსტრემალები.

ორივე გვარი ექსტრემალების ელემენტები აკმაყოფილებენ ე ი ლ ე რ ი ს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F_{xy'}-F_{yx'}+F_1(x'y''-y'x'')=0$$

მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ამ ორგვარ ექსტრემალებს შორის ჩვენ ვპოულობთ არსებით განსხვავებას.

მაშინ, როდესაც პირველი სახის ექსტრემალზე საწყისი წერტილის არჩევა გავლენას არ ახდენს I ინტეგრალის ექსტრემუმზე, პირიქით, კუთხიან ექსტრემალს შეუძლია მიანიჭოს I ინტეგრალს მინიმუმი მარტო იმ პირობით, თუ საწყისი $P_1(x_1, y_1)$ წერტილი იმყოფება კ ა რ ა თ ე ო დ ო რ ი ს[2] E_0 წერტილის მარჯვნივ.

თუ e_0-ით აღვნიშნავთ t პარამეტრის მნიშვნელობას E_0 წერტილისათვის, ხოლო t_1-ით საწყისი წერტილისათვის, მაშინ წინა პირობა შეიძლება გამოთქმულ იქნეს შემდეგი უტოლობით:

$$t_1>e_0.$$

ახლა, სავსებით ბუნებრივად ისმება კითხვა: რა არის მიზეზი ორგვარ ექსტრემალებს შორის ზემოაღნიშნული განსხვავებისა?

---

[1] ეს წერილი დაიბეჭდა ჟურნალში „Bulletin de la société Mathématique de France" (იხ. A. Razmadzé, „Sur une condition de minimum nécessaire pour les solutions anguleuses dans le calcul des variations", Bulletin de la société Mathématique de France, t. LI. 1923).

[2] C. Carathéodory, Uber die discontinüerliche Lösungen in der Variationsrechnung (Thèse, Gottingen, 1904).

აზრის გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ მეორე სახის ექსტრემალს აქვს მხოლოდ ერთი $K_0(x_0, y_0)$ კუთხითი წერტილი. თუ x'_0, y'_0 და $\bar{x}'_0$ $\bar{y}'_0$ აღნიშნავს x', y' წარმოებულთა მნიშვნელობებს $K_0(x_0, y_0)$ წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ, მაშინ კუთხითი წერტილის ორივე წრფივი ელემენტი აკმაყოფილებს ვაიერშტრას-ერდმანის პირობებს:

$$\begin{aligned} F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) &= F_{x'}(x_0, y_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0), \\ F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) &= F_{y'}(x_0, y_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0). \end{aligned} \tag{1}$$

ახლა ადვილია იმის შემჩნევა, რომ ორივე სახის ექსტრემალებს შორის განსხვავების მიზეზი უნდა ვეძიოთ ამ უკანასკნელ ორ პირობაში, რომლებსაც აკმაყოფილებენ კუთხითი წერტილის წრფივი ელემენტები ეილერის პირობასთან ერთად.

წინამდებარე ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს უშუალო დამტკიცება იმისა, თუ რანაირად შეუძლია აღნიშნულ პირობებს შეზღუდოს კუთხიანი ექსტრემალისათვის საწყისი წერტილის თავისუფალი არჩევა, რასაც ადგილი აქვს ექსტრემალისათვის უწყვეტი მხებით.

2. ქვემოთ ჩვენ შემდეგი ორი ექსტრემუმიდან — მინიმუმი და მაქსიმუმი — საქმე გვექნება მხოლოდ პირველთან.

გარდა ამისა, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ლეჟანდრისა და იაკობის პირობები $P_1 K_0$ და $K_0 P_2$ რკალებისათვის შესრულებულია მკაცრი სახით, ე. ი.

$$F_1 > 0, \quad \overline{F}_1 > 0,$$
$$t'_0 < t_1 < t_0, \quad t_0 < t_2 < \bar{t}'_0,$$

სადაც t'_0 და $\bar{t}'_0$ წარმოადგენენ t პარამეტრის მნიშვნელობებს K_0 წერტილის შეუღლებული K'_0 და $\overline{K}'_0$ ფოკუსებისათვის შესაბამისად P_1K_0 და K_0P_2 რკალებზე, ხოლო F_1 განსაზღვრულია შემდეგი განტოლებებით:

$$F_1 = \frac{F_{x'^2}}{y'^2} = \frac{F_{x'y'}}{-x'y'} = \frac{F_{y'^2}}{x'^2}. \tag{2}$$

E ფუნქციის წარმოებული ველში

3. წინასწარი ფორმულები — ვთქვათ,

$$x = x(t, \alpha), \quad y = y(t, \alpha) \tag{3}$$

მოცემული ამოცანის რაიმე უწყვეტი მხების მქონე ექსტრემალთა კონაა. ამ კონის წირთა ველში, ფუნქციონალური დეტერმინანტი:

$$\Delta = x' y_\alpha - y' x_\alpha$$

განსხვავებულია ნულისაგან და, მაშასადამე, (3) განტოლებანი ამოხსნადი იქნება t და α-ს მიმართ ყოველგვარი ორაზროვნობის გარეშე, სანამ (x, y) წერტილი რჩება ამ ველში.

ვთქვათ ეს ამონახსნებია:

$$t = t(x, y), \qquad \alpha = \alpha(x, y); \tag{4}$$

მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{y_\alpha}{\Delta}, & \frac{\partial t}{\partial y} &= -\frac{x_\alpha}{\Delta}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= -\frac{y'}{\Delta}, & \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{x'}{\Delta}, \end{aligned} \tag{5}$$

სადაც შტრიხით ჩვენ აღვნიშნავთ გაწარმოებას t-ს მიმართ. (3) და (4) განტოლებათა თანახმად, x', y' წარმოებულები მთელ ველში x და y-ის გარკვეული ფუნქციებია.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (5) ფორმულებს, x'-ის და y'-ის წარმოებულებისათვის გვექნება შემდეგი გამოსახულებანი:

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{x''x_\alpha-y'x'_\alpha}{\Delta}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{-x''x_\alpha+x'_\alpha x'}{\Delta},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x}=\frac{y''y_\alpha-y'_\alpha y'}{\Delta}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{-y''x_\alpha+x'_\alpha x'}{\Delta}.$$

ამ ოთხი ფორმულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ფორმულები:

$$\begin{aligned} y'\frac{\partial x'}{\partial x}-x'\frac{\partial y'}{\partial x}&=\frac{y'\Delta'-y''\Delta}{\Delta},\\ y'\frac{\partial x'}{\partial y}-x'\frac{\partial y'}{\partial x}&=\frac{x''\Delta-x'\Delta'}{\Delta},\\ \frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial y}&=\frac{\Delta'}{\Delta}, \end{aligned} \tag{6}$$

რომლებიც საჭირო იქნება შემდეგში.

4. ახლა ჩვენ გვინდა მოვძებნოთ $F_{x'}$-ის და $F_{y'}$-ის კერძო წარმოებულები ველში.

(2)-ის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{x'}}{\partial x}&=F_{x'x}+y'\left(y'\frac{\partial x'}{\partial x}-x'\frac{\partial y'}{\partial x}\right)F_1,\\ \frac{\partial F_{x'}}{\partial y}&=F_{x'y}+y'\left(y'\frac{\partial x'}{\partial y}-x'\frac{\partial y'}{\partial y}\right)F_1,\\ \frac{\partial F_{y'}}{\partial x}&=F_{y'x}-x'\left(y'\frac{\partial x'}{\partial x}-x'\frac{\partial y'}{\partial x}\right)F_1,\\ \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}&=F_{y'y}-x'\left(y'\frac{\partial x'}{\partial y}-x'\frac{\partial y'}{\partial y}\right)F_1. \end{aligned}$$

(6) ფორმულებისა და ვაიერშტრასის შემდეგი აღნიშვნების საშუალებით

$$L=F_{x'x}-y'y''F_1,\ \ M=F_{x'y}+y'x''F_1=F_{y'x}+x'y''F_1,\ \ N=F_{yy'}-x'x''F_1$$

ვღებულობთ ფორმულებს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{x'}}{\partial x}&=L+y'^2F_1\frac{\Delta'}{\Delta}, & \frac{\partial F_{x'}}{\partial y}&=M-x'y'F_1\frac{\Delta'}{\Delta},\\ \frac{\partial F_{y'}}{\partial x}&=M-x'y'F_1\frac{\Delta'}{\Delta}, & \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}&=N+x'^2F_1\frac{\Delta'}{\Delta}, \end{aligned} \tag{7}$$

რომელნიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ვარიაციათა აღრიცხვაში (დრეზდენის ფორმულები).

5. ბოლოს, გადავიდეთ ვაიერშტრასის E ფუნქციის წარმოებულის მოძებნაზე ველში მოცემული რომელიმე წირის გასწვრივ.

ვთქვათ

$$x=\bar{x}(\tau), \qquad y=\bar{y}(\tau)$$

ველში მოთავსებული რაიმე წირია. განვიხილოთ ვაიერშტრასის E ფუნქცია, აღებული ამ წირის გასწვრივ. გვაქვს:

$$\mathscr{E}(\tau)=F(\bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ \bar{x}'(\tau),\ \bar{y}'(\tau))-\bar{x}'(\tau)\,F_{x'}(\bar{x}(\tau),\bar{y}(\tau),x',y')-$$
$$-\bar{y}'(\tau)F_{y'}(\bar{x}(\tau),\bar{y}(\tau),x',y')$$

ვიპოვოთ $\dfrac{d\mathscr{E}}{d\tau}$. გვაქვს:

$$\frac{d\mathscr{E}}{d\tau}=\overline{F}_x\,\bar{x}'(\tau)+\overline{F}_y\bar{y}'(\tau)+\overline{F}_{x'}\bar{x}''(\tau)+\overline{F}_{y'}\bar{y}''(\tau)-F_{x'}\bar{x}''(\tau)-F_{y'}\bar{y}''(\tau)-$$
$$-\bar{x}'(\tau)\left[\frac{\partial F_{x'}}{\partial x}\bar{x}'(\tau)+\frac{\partial F_{x'}}{\partial y}\bar{y}'(\tau)\right]-\bar{y}'(\tau)\left[\frac{\partial F_{y'}}{\partial x}\bar{x}'(\tau)+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\bar{y}'(\tau)\right].$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში $F_{x'}$ და $F_{y'}$ კერძო წარმოებულების მნიშვნელობებს, წინა განტოლება შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\frac{d\mathscr{E}}{d\tau}=\overline{L}\bar{x}'^2+2\,\overline{M}\bar{x}'\bar{y}'+\overline{N}\bar{y}'^2-L\bar{x}'^2-2M\bar{x}'\bar{y}'-N\bar{y}'^2-$$
$$-(\bar{y}'x'-\bar{x}'y')^2F_1\frac{\Delta'}{\Delta}+(\overline{F}_{x'}-F_{x'})\,\bar{x}''+(\overline{F}_{y'}-F_{y'})\bar{y}''.$$

ახლა აღვნიშნოთ:

$$\overline{L}-L=\mathfrak{L},\quad \overline{M}-M=\mathfrak{M},\quad \overline{N}-N=\mathfrak{N},$$

მაშინ გვექნება:

$$\frac{d\mathscr{E}}{d\tau}=\mathfrak{L}\bar{x}'^2+2\mathfrak{M}\bar{x}'\bar{y}'+\mathfrak{N}\bar{y}'^2-(\bar{y}'x'-\bar{x}'y')^2F_1\frac{\Delta'}{\Delta}+$$
$$+(\overline{F}_{x'}-F_{x'})\,\bar{x}''+(\overline{F}_{y'}-F_{y'})\,\bar{y}'', \tag{8}$$

ეს სწორედ ის არის, რის პოვნაც გვინდოდა.

ზოგადი (8) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $\dfrac{d\mathscr{E}}{d\tau}$ წარმოებული დამოკიდებულია ექსტრემალთა კონის ფოკუსზე და E ფუნქციის ამ თვისებას ქვემოთ დიდი მნიშვნელობა ექნება ვარიაციათა აღრიცხვის ზოგიერთ საკითხში.

ახლა გამოვიყენოთ (8) ფორმულა წანამდებარე ნაშრომის ძირითადი საკითხის გადასაწყვეტად.

E ფუნქციის გაშლა

6. ვთქვათ $P_1K_0P_2$ არის მოცემული ამოცანის კუთხიანი ექსტრემალი, რომელიც აერთებს ორ მოცემულ $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილს (ნახ. 1).

ვთქვათ

$$x=x(t),\ y=y(t),\qquad t_1\leqq t\leqq t_0$$

არის P_1K_0 შტოს განტოლება, ხოლო

$$x=\bar{x}(\tau),\ y=\bar{y}(\tau),\qquad \tau_0\leqq\tau\leqq\tau_2$$

მეორე შტოს განტოლება.

P_1 წერტილიდან გავიყვანოთ ექსტრემალთა კონა, რომელიც შეიცავს მოცემულ P_1K_0 წირს.

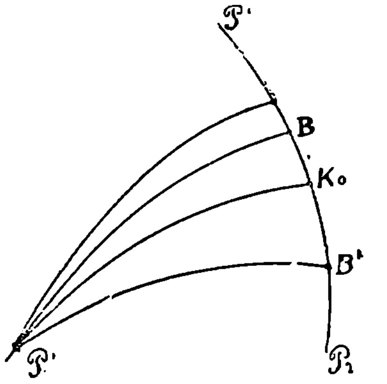
რადგანაც K_0 წერტილი არ არის P_1 წერტილის შეუღლებული ფოკუსი, ამიტომ ამ კონის ყოველი წირი ჰკვეთს K_0P_2 ექსტრემალს და მის მარცხნივ გაგრძელებას, ე. ი. $P'K_0$-ს მხოლოდ ერთ წერტილში.

ვთქვათ,

$$x=\varphi(t,\alpha),\quad y=\psi(t,\alpha) \qquad (\alpha)$$

ამ კონის განტოლებებშია და $\alpha=\alpha_0$ არის α პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება P_1K_0 ექსტრემალს.

ავიღოთ ახლა $P'P_2$ წირზე K_0-ის მეზობელი ორი B და B' წერტილი, რომლებიც იმყოფებიან შესაბამისად K_0-ის მარცხნივ და მარჯვნივ.



ნახ. 1

აღვნიშნოთ τ პარამეტრის მნიშვნელობა B-სათვის $\tau_0-\varepsilon$-ით, ხოლო B'-სათვის კი $\tau_0+\varepsilon'$-ით, სადაც ε და ε' დადებითი სიდიდეებია.

განვიხილოთ ორი P_1BP_2 და $P_1B'P_2$ კუთხიანი წირი, შედგენილი შესაბამისად ჩვენი კონის P_1B და P_1B' წირებისა და $P'P_2$-წირის BP_2 და $B'P_2$ რკალებისაგან.

ცხადია, რომ (α) სიმრავლე ჰქმნის ველს და, მაშასადამე, ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად, გვექნება:

$$\Delta I_{(B)}=I_{P_1BP_2}-I_{P_1K_0P_2}=\int_{\tau_0-\varepsilon}^{\tau_0}\mathscr{E}(\tau)\,d\tau,$$

სადაც $\mathscr{E}(\tau)$ აღნიშნავს E ფუნქციის შემდეგ მნიშვნელობას:

$$\mathscr{E}(\tau)=E(\bar{x}(\tau),\bar{y}(\tau);\,x',y';\,\bar{x}'(\tau),\bar{y}'(\tau)),$$

და, ისე როგორც (n°.3)-ში, აქაც x' და y' წარმოადგენენ (α) კონის საშუალებით განსაზღვრულ x და y-ის ფუნქციებს.

რაც შეეხება სხვაობას:

$$\Delta I_{(B')}=I_{P_1B'P_2}-I_{P_1K_0P_2},$$

იგი შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\Delta I_{(B')}=-(I_{P_1K_0}+I_{K_0B'}-I_{P_1B'})$$

და მაშინ, ვაიერშტრასის იმავე თეორემის თანახმად, გვექნება:

$$\Delta I_{(B')}=-\int_{\tau_0}^{\tau_0+\varepsilon'}\mathscr{E}(\tau)\,d\tau.$$

მაგრამ მინიმუმისათვის აუცილებელია, რომ

$$\Delta I_{(B)}>0,\qquad \Delta I_{(B')}>0$$

და, მაშასადამე,

$$\int_{\tau_0-\varepsilon}^{\tau_0} \mathscr{E}(\tau)\, d\tau$$

უნდა იყოს დადებითი, ხოლო

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+\varepsilon'} \mathscr{E}(\tau)\, d\tau$$

უარყოფითი, რაგინდ მცირეც იყოს ε და ε' სიდიდეები.

ამნაირად, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ აუცილებელ პირობას:

$P_1K_0P_2$ კუთხიან ექსტრემალს, რომლისათვისაც დაკმაყოფილებულია ლეჟანდრისა და იაკობის პირობები, შეუძლია მიანიჭოს ინტეგრალს მინიმუმი, თუ τ_0 მნიშვნელობაზე τ-ს ზრდით გავლის დროს, $\mathscr{E}(\tau)$ ფუნქცია დადებითი მნიშვნელობიდან გადადის უარყოფითზე.

აქედან, კერძოდ, დავასკვნით, რომ $\mathscr{E}(\tau)$ ისპობა, როცა $\tau=\tau_0$, ეს უშუალოდ ჩანს (1) პირობებიდანაც.

7. ახლა, გავშალოთ $\mathscr{E}(\tau)$ ფუნქცია $\tau=\tau_0$-ის არეში, რომ გავიგოთ, თუ რომელ შემთხვევაში შეიძლება შესრულებული იყოს მინიმუმის ზემოხსენებული პირობა. ამისათვის დავუბრუნდეთ (n°.5)-ის (8) ფორმულას.

ამ ფორმულის თანახმად ჩვენი კონისათვის გვექნება:

$$\frac{d\mathscr{E}}{d\tau}=\mathfrak{L}\bar{x}'^2+2\,\mathfrak{M}\bar{x}'\bar{y}'+\mathfrak{N}\bar{y}'^2-(\bar{y}'\varphi_t-\bar{x}'\psi_t)^2F_1\,\frac{\Delta'}{\Delta}+$$

$$+(\overline{F}_{x'}-F_{x'})\,\bar{x}''+(\overline{F}_{y'}-F_y)\bar{y}''.$$

ვთქვათ, $\theta(t, t_1)$ არის იაკობის განტოლების ინტეგრალი, რომელიც ისპობა $t=t_1$-სათვის; აქედან:

$$\theta(t, t_1)=C\Delta(t, \alpha),\ \ \theta_t(t, t_1)=C\Delta'(t, \alpha).$$

ამის ძალით წინა ფორმულა ასეთნაირად შეიძლება დაიწეროს:

$$\frac{d\mathscr{E}}{d\tau}=\mathfrak{L}\,\bar{x}'^2+2\mathfrak{M}\,\bar{x}'\bar{y}'+\mathfrak{N}\bar{y}'^2-(\bar{y}'\varphi_t-x'\psi_t)^2F_1\,\frac{\theta_t(t, t_1)}{\theta(t, t_1)}+$$

$$+(\overline{F}_{x'}-F_{x'})\,\bar{x}''+(\overline{F}_{y'}-F_{y'})\bar{y}''.$$

ახლა, ამ განტოლებაში დავუშვათ $t=t_0$. თუ მივიღებთ, რომ $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ არის $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$-ის მნიშვნელობანი ამ წერტილზე და გავითვალისწინებთ ვაიერშტრას-ერდმანის პირობას, გვექნება შემდეგი გაშლა:

$$\mathscr{E}(\tau)=(\tau-\tau_0)\left[\mathfrak{L}_0\,\bar{x}_0'^2+2\mathfrak{M}_0\bar{x}'_0\,\bar{y}'_0+\mathfrak{N}_0\,\bar{y}_0'^2-(\bar{y}'_0x'_0-\bar{x}'_0y'_0)^2F_1\,\frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)}\right]+$$

$$+\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2}K,$$

სადაც K არის ფუნქცია, რომლის გაშლილ გამოსახულებას ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ და რომელიც ინარჩუნებს სასრულ მნიშვნელობას $\tau=\tau_0$ წერტილის მიდამოში.

ასეთია E ფუნქციის გაშლა, რომელიც მოგვცემს პრობლემის სრულ ამოხსნას. მართლაც, თუ τ_0 მნიშვნელობაზე გავლის დროს τ იზრდება, მაშინ ამ გაშლის თანახმად, ვღებულობთ, რომ $\mathscr{E}(\tau)$ ფუნქცია დადებითი მნიშვნელობიდან უარყოფითზე გადადის, თუ

$$\mathfrak{L}_0 \bar{x}'^2_0+2\mathfrak{M}_0 \bar{x}'_0\bar{y}'_0+\mathfrak{N}_0\bar{y}'^2_0-(\bar{y}'_0x'_0-\bar{x}'_0y'_0)^2 F_1 \frac{\theta_t(t_0, t_1)}{\theta(t_0, t_1)}<0. \tag{9}$$

განვიხილოთ ახლა ეს ფუნქცია:

$$\Psi(t)=\mathfrak{L}_0\bar{x}'^2_0+2\mathfrak{M}_0\bar{x}'_0\bar{y}'_0+\mathfrak{N}_0\bar{y}'^2_0-(\bar{y}'_0x'_0-\bar{x}'_0y'_0)^2F_1 \frac{\theta_t(t_0, t)}{\theta(t_0, t)}.$$

რადგანაც ფარდობა:

$$\frac{\theta_t(t_0, t)}{\theta(t_0, t)}$$

იზრდება t-სთან ერთად, $\Psi(t)$ ფუნქცია კლებულობს, როცა t იზრდება.

ვთქვათ, $t=h_0$ არის t-ს მნიშვნელობა, რომლისათვისაც

$$\mathfrak{L}_0\bar{x}'^2_0+2\mathfrak{M}_0\bar{x}'_0\bar{y}'_0+\mathfrak{N}_0\bar{y}'^2_0-(\bar{y}'_0x'_0-\bar{x}'_0y'_0)^2F_1 \frac{\theta_t(t_0, h_0)}{\theta(t_0, h_0)}=0. \tag{10}$$

მაშინ, (9) უტოლობა უფლებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წინადადება:

მ ი ნ ი მ უ მ ი ს ა თ ვ ი ს ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი ა, რ ო მ t პ ა რ ა მ ე ტ რ ი ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა, რ ო მ ე ლ ი ც ს ა წ ყ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ს შ ე ე ს ა ბ ა მ ე ბ ა, ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ დ ე ს შ ე მ დ ე გ უ ტ ო ლ ო ბ ა ს:

$$t_1 \geqq h_0 \tag{11}$$

ამგვარად, ჩვენ ვიპოვეთ მიზეზი, რომლის მიხედვით ორივე ძირითადმა პირობამ შეზღუდა საწყისი წერტილის ის თავისუფალი არჩევა, რომელსაც ადგილი აქვს ჩვეულებრივი ექსტრემუმისათვის.

გადავიდეთ ახლა H_0 წერტილის გეომეტრიულ აგებაზე.

8. ჩვენ ჯერ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს კონა P_1K_0-ის მომცველი და შედგენილი იმ ექსტრემალებისაგან, რომელთათვისაც ვ ა ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს E ფუნქცია, აღებული $P'P_2$-ის გასწვრივ, იგივურად ნულია.

მართლაც, ვთქვათ ϑ არის კუთხე, რომელსაც ადგენს x ღერძთან ჩვენი კონის ექსტრემალის მხები $P'P_2$ წირის $[\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)]$ წერტილში, და ϑ_0 არის ϑ-ს მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება P_1K_0 ექსტრემალს.

თუ კი E ფუნქცია აღებული $P'P_2$-ის გასწვრივ იგივურად ნულია, მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} F(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{x}'(\tau), \bar{y}'(\tau))-\bar{x}'(\tau)\, F_{x'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \cos\vartheta, \sin\vartheta)- \\ -\bar{y}'(\tau)\, F_{y'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \cos\vartheta, \sin\vartheta)=0. \end{aligned} \tag{12}$$

ამრიგად, საძიებელი კონა ყოველთვის არსებობს, თუ შესაძლებელია უკანასკნელი განტოლების ამოხსნა ϑ-ს მიმართ.

მაგრამ ეს განტოლება კმაყოფილდება, როცა $\vartheta=\vartheta_0$, $\tau=\tau_0$. მარცხენა მხარის წარმოებული ϑ-ს მიმართ არის:

$$-\bar{x}'(\tau)(-F_{x'^2}\sin\vartheta+F_{x'y'}\cos\vartheta)-\bar{y}'(\tau)(-F_{y'x'}\sin\vartheta+F_{y'^2}\cos\vartheta),$$

რაც, (2) ფორმულების თანახმად, მიგვიყვანს შემდეგ დამოკიდებულებამდე:

$$(\bar{x}'(t)\sin\vartheta-\bar{y}'(\tau)\cos\vartheta)F_1,$$

მაგრამ უკანასკნელი გამოსახულება განსხვავებულია ნულისაგან, როცა $\tau=\tau_0$, $\vartheta=\vartheta_0$ და, მაშასადამე, შესაძლებელია (12) განტოლების ამოხსნა ϑ-ს მიმართ $\tau=\tau_0$, $\vartheta=\vartheta_0$ წერტილის არეში. ვთქვათ, ეს ამონახსნი არის

$$\vartheta=\vartheta(\tau).$$

იმ ექსტრემალთა სიმრავლე, რომლებიც გავლებულია $P'P_2$ წირის ყოველ წერტილზე შესაბამისი მიმართულებით, რომელიც $\vartheta(\tau)$ კუთხეს ადგენს x-ს ღერძთან, ჰქმნის ერთ პარამეტრიან კონას. ეს კონა შეიცავს P_1K_0 წირს.

ვთქვათ

$$x=\xi(t,\lambda),\ \ y=\eta(t,\lambda) \tag{λ}$$

ამ კონის განტოლებებია და $\lambda=\lambda_0$ არის λ პარამეტრის მნიშვნელობა P_1K_0 ექსტრემალისათვის. ჩვენ ახლა დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა: $H_0(h_0)$ წერტილი არის (λ) კონის ფოკუსი P_1K_0 ექსტრემალზე.

მართლაც, რადგანაც ვაიერშტრასის E ფუნქცია, აღებული $P'P_2$-ის გასწვრივ კონაში იგივურად ნულია, ე. ი.

$$E(\bar{x}(\tau),\bar{y}(\tau);\ x',y';\ \bar{x}'(\tau),\bar{y}'(\tau))=0,$$

ამიტომ E ფუნქციის წარმოებული τ-ს მიმართ აგრეთვე იგივურად მოისპობა.

ამრიგად, თუ ძირითად (8) ფორმულას მხედველობაში მივიღებთ, გვექნება:

$$\mathfrak{L}\bar{x}'^2+2\mathfrak{M}\bar{x}'\bar{y}'+\mathfrak{N}\bar{y}'^2-(\bar{y}'\xi_t-\bar{x}'\eta_t)^2\,F_1\frac{\Delta'}{\Delta}+(\overline{F}_{x'}-F_{x'})\bar{x}''+(\overline{F}_{y'}-F_{y'})\,\bar{y}''=0. \tag{13}$$

დავუშვათ ახლა $\tau=\tau_0$, მაშინ (13) იგივეობა მოგვცემს:

$$\mathfrak{L}_0\bar{x}'^2_0+2\mathfrak{M}_0\bar{x}'_0\bar{y}'_0+\mathfrak{N}_0\bar{y}'^2_0-(\bar{y}'_0x'_0-\bar{x}'_0y'_0)^2\,F_1\frac{\Delta'(t_0,\lambda_0)}{\Delta(t_0,\lambda_0)}=0,$$

სადაც $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$-ს იგივე მნიშვნელობანი აქვთ, რაც (n°.7)-ში. ამ განტოლების (13)-თან შედარებით, ვღებულობთ:

$$\frac{\Delta'(t_0,\lambda_0)}{\Delta(t_0,\lambda_0)}=\frac{\theta_t(t_0,h_0)}{\theta(t_0,h_0)};$$

მაგრამ ფარდობა:

$$\frac{\theta_t(t_0,t)}{\theta(t_0,t)}$$

მუდამ იზრდება, როცა t იცვლება t'_0-დან t_0-მდე. მაშასადამე,

$$\frac{\Delta'(t_0,\lambda_0)}{\Delta(t_0,\lambda_0)}-\frac{\theta_t(t_0,t)}{\theta(t_0,t)}=0$$

განტოლებას აქვს $t'_0\leqq t\leqq t_0$ შუალედში მხოლოდ ერთი $t=h_0$ ნული, რაც იმას ამტკიცებს, რომ $H_0(h_0)$ არის (λ) კონის ფოკუსი P_1K_0 ექსტრემალზე.

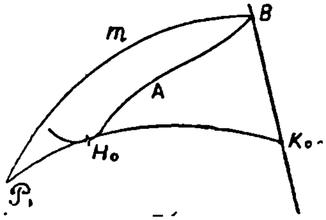
9. ეს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (11) პირობის აუცილებლობის წმინდა გეომეტრიული დამტკიცების საშუალებას იძლევა.

მივიღოთ, რომ P_1K_0 ექსტრემალის საწყისი P_1 წერტილი იმყოფება H_0 წერტილის მარცხნივ. P_1 წერტილზე გავატაროთ რაიმე ექსტრემალი P_1K_0-ის მიდამოში და ვთქვათ B არის ის წერტილი, სადაც ეს ექსტრემალი ჰკვეთს $P'P_2$ წირს (ნახ. 2).

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ

$$I_{P_1mBP_2} < I_{P_1K_0P_2} \,.$$

ამისათვის, ვთქვათ AB არის (λ) კონის სწორედ ის ექსტრემალი, რომელიც გადის იმავე B წერტილზე და ვთქვათ A არის მისი შეხების წერტილი (λ) ოჯახის მომვლებთან. როგორც აშკარაა, ფოკუსის გეომეტრიული მნიშვნელობიდან, $H_0(h_0)$ არის P_1K_0 ექსტრემალის შეხების წერტილი იმავე მომვლებთან.



ნახ. 2

კონის ბუნების თანახმად, გვაქვს:

$$I_{P_1H_0} + I_{H_0A} + I_{AB} + I_{BK_0} - I_{P_1H_0K_0} = 0.$$

მაგრამ

$$I_{P_1mB} < I_{P_1H_0} + I_{H_0A} + I_{AB}$$

და, მაშასადამე,

$$I_{P_1mB} + I_{BK_0} < I_{P_1H_0K_0} \,,$$

საიდანაც გამომდინარეობს:

$$I_{P_1mBP_2} < I_{P_1K_0P_2},$$

რაც ამტკიცებს ჩვენს წინადადებას.

10. ახლა ჩვენ დაგვრჩა მხოლოდ H_0 ფოკუსის შედარება კ ა რ ა თ ე ო დ ო რ ი ს ფოკუსთან.

$P_1K_0P_2$ კუთხიანი ექსტრემალი გარშემოვავლოთ ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული კუთხიან ექსტრემალთა კონით[1], რომელსაც ჩვენ მივიღებთ კუთხითი K_0 წერტილზე $P'P_2$ რკალის აღწერით. ამ კონის ფოკუსი P_1K_0 ექსტრემალზე არის E_0.

მაგრამ წვეროთა თითოეული წირის (Knickpunktskurve) გასწვრივ ვ ა ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს E ფუნქცია იგივურად ნულია, ე. ი.

$$E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}') = 0, \tag{14}$$

სადაც x', y' წარმოებულებია მარცხნივ, ხოლო $\bar{x}', \bar{y}'$ — მარჯვნივ კუთხიანი ექსტრემალისათვის წვეროთა წირის რაიმე $M(x, y)$ წერტილზე.

თუ წვეროთა წირის $M(x, y)$ წერტილში მხების საკუთხო კოეფიციენტს T-თი აღვნიშნავთ, მაშინ (14) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x'\frac{\partial(\overline{F}_{x'} - F_{x'})}{\partial x} + y'\frac{\partial(\overline{F}_{y'} - F_{y'})}{\partial x} + \left[x'\frac{\partial(\overline{F}_{x'} - F_{x'})}{\partial y} + y'\frac{\partial(\overline{F}_{y'} - F_{y'})}{\partial y}\right]T = 0 \tag{15}$$

---

[1] C a r a t h é o d o r y (იხ. ზემოხსენებული დისერტაცია), § 9, გვ. 28—31. ცნობილია (loc. cit.), რომ K_0-ის მეზობელ ყოველ K წერტილს შეესაბამება სავსებით გარკვეული ექსტრემალი, რომლისათვისაც K კუთხითი წერტილია და რომელიც $P_0K_0P_2$-ის მეზობელია.

იმ შემთხვევაში, როცა წვეროთა წირი არის $P'P_2$, გვექნება:

$$T' = \frac{\bar{y}'(\tau)}{\bar{x}'(\tau)}$$

და, მაშასადამე, (15) განტოლება მოგვცემს:

$$\bar{x}'^2 \frac{\partial(\overline{F}_{x'} - F_{x'})}{\partial x} + 2\bar{x}'\bar{y}' \frac{\partial(\overline{F}_{x'} - F_{x'})}{\partial y} + \bar{y}'^2 \frac{\partial(\overline{F}_{y'} - F_{y'})}{\partial y} = 0.$$

დავუშვათ, ახლა, $\tau = \tau_0$; მაშინ უკანასკნელი იგივეობიდან, (7) ფორმულების თანახმად, გამოგვყავს:

$$\left(\mathfrak{L}_0 - y'^2_0 F_1 \frac{\theta_t(t_0, e_0)}{\theta(t_0, e_0)}\right)\bar{x}'^2_0 + 2\left(\mathfrak{M}_0 + x'_0 y'_0 F_1 \frac{\theta_t(t_0, e_0)}{\theta(t_0, e_0)}\right)\bar{x}'_0\bar{y}'_0 +$$
$$\left(\mathfrak{N}_0 - x'^2_0 F_1 \frac{\theta_t(t_0, e_0)}{\theta(t_0, e_0)}\right)\bar{y}'^2_0 = 0,$$

რაც შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\mathfrak{L}_0\bar{x}'^2_0 + 2\mathfrak{M}_0\bar{x}'_0\bar{y}'_0 + \mathfrak{N}_0\bar{y}'_0 - (\bar{y}'_0 x'_0 - \bar{x}'_0 y'_0)^2 F_1 \frac{\theta_t(t_0, e_0)}{\theta(t_0, e_0)} = 0.$$

ამ განტოლების (13)-თან შედარება მიგვიყვანს შემდეგ ტოლობამდე:

$$\frac{\theta_t(t_0, h_0)}{\theta(t_0, h_0)} = \frac{\theta_t(t_0, e_0)}{\theta(t_0, e_0)}.$$

ამნაირად, როგორც წინათ, გვექნება:

$$h_0 = e_0.$$

აქედან დავასკვნით, რომ H_0 ფოკუსი და კარათეოდორის E_0 წერტილი იგივური არიან.

ჟურნალ „Bulletin de la Société mathématique de France"-ის რედაქციის შენიშვნა. ავტორის ეს უკანასკნელი დასკვნა პირველი შეხედვით გაკვირვებას იწვევს. მართლაც, კარათეოდორის E_0 ფოკუსი მიღებულია ექსტრემალთა იმ ოჯახის საშუალებით, რომელიც მოცემულია მათი კუთხითი წერტილების მიხედვით, სადაც იგულისხმება, რომ ეს კუთხითი წერტილები აღწერენ $P'P_2$ სახის მოცემულ წირს. ამ წირების მხებთა მიმართულებანი $P'P_2$-ის ყოველ B წერტილზე სავსებით განსაზღვრულია, სახელდობრ, მოცემულია ვაიერშტრას-ერდმანის პირობებით, ხოლო ავტორის მიერ B-ზე განხილული მიმართულება მათგან განსხვავებულია.

თუ Γ'-ით აღვნიშნავთ „გამომსახველს" B წერტილზე, მაშინ კარათეოდორის მიმართულებანი შეესაბამება ამ წირის ორმაგი მხების შეხების წერტილებს იმ დროს, როცა რაზმაძის მიმართულება (ეს ინტერპრეტაცია შეიძლება მიეცეს მისი მემუარის მე-8 პარაგრაფს) განისაზღვრება Γ' წირის იმ წერტილზე გავლებული მხებით, რომელიც $P'P_2$ წირის მხებს შეესაბამება.

მიუხედავად ამისა, H_0 ფოკუსის იგივეობა E_0-თან სავსებით ზუსტია: ამას იმიტომ აქვს ადგილი, რომ ამნაირად შემოღებული ორივე მიმართულება, ერთი მხრივ, მოცემული კარათეოდორის მიერ, მეორე მხრივ, რაზმაძის მიერ, განსხვავდება მოცემული K_0 კუთხითი წერტილის მიდამოში მხოლოდ მეორე რიგის უსასრულო მცირით.

მართლაც, $P'P_2$-ის მხების შესაბამისი M' წერტილი Γ'-ზე პირველი რიგის უსასრულო მცირით განსხვავდება Γ'-ის ორმაგი მხების შეხების M_1 წერტილისაგან; მაშასადამე, მისი M_1N_1 მანძილი ორმაგ მხებამდე მეორე რიგისაა და, თუ Γ'-ის N'-ზე გავავლებთ $M'N'$ მხებს, მაშინ $N'N_1$ რკალი მეორე რიგის იქნება.

VI

წყვეტილი ამონახსნებისათვის ვარიაციათა აღრიცხვაში[1]

შესავალი

ვთქვათ სამი ცვლადის $f(x, y, y')$ ფუნქცია უწყვეტია თავისი კერძო წარმოებულებიანად მესამე რიგამდე, როდესაც (x, y) წერტილი რჩება სიბრტყის ამოზნექილ R არეში და $y' = \frac{dy}{dx}$ სასრულო მნიშვნელობებს ღებულობს. ვთქვათ, ამას გარდა, მოცემულია იმ უწყვეტ მრუდთა $\mathfrak{M}$ სიმრავლე, რომლებიც აერთებენ ორ მოცემულ $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილს, აკმაყოფილებენ რეგულარობის ცნობილ პირობებს (უწყვეტობა, წარმოებულთა არსებობა და ა. შ.) და მოთავსებული არიან R არეში.

ვარიაციათა აღრიცხვის ზოგადი პრობლემა ასე ჩამოყალიბდება: $\mathfrak{M}$ სიმრავლის მრუდთა შორის მოვძებნოთ ისეთი, რომელიც ინტეგრალს:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx,$$

აღებულს ამ მრუდზე, უმცირეს ან უდიდეს მნიშვნელობას მიანიჭებს იმავე სიმრავლის ყოველ სხვა მრუდთან შედარებით.

ცნობილია, რომ ექსტრემალები აკმაყოფილებენ ეილერის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

ამას გარდა, თუ საძიებელი უწყვეტი მრუდი კუთხიანია, მხებთა მიმართულებანი კუთხიან წერტილებში აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ პირობას:

$$f(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = f(x_0, y_0, \bar{y}'_0) - \bar{y}'_0 f_{y'}(x_0, y_0, \bar{y}'_0),$$

$$f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = f_{y'}(x_0, y_0, \bar{y}'_0),$$

სადაც y'_0 და $\bar{y}'_0$ მხებთა საკუთხო კოეფიციენტებია ექსტრემალის ორი რკალისათვის იმ (x_0, y_0) წერტილში, რომელშიაც ეს რკალები ერთდებიან.

მაგრამ არის პრობლემები, რომლებშიაც არც ერთი უწყვეტი მრუდი ინტეგრალს მინიმუმს არ ანიჭებს, მაშინ როდესაც არსებობს წყვეტილი მრუ-

[1] ეს წერილი, წარმოადგენს ანდრია რაზმაძის სადოქტორო დისერტაციას (იხ. A. Razmadzé, Sur les solutions discontinues dans le calcul das variations, Paris, 1925 იხ. აგრეთვე A. Razmadzé, Sur les solutions discontinues du caleul des variations, Mathematische Annalen, Bd. 94).

დები, ე. ი. მრუდები, რომლებიც ნახტომს განიცდიან და იმავე დროს ნამდვილად ანიჭებენ მინიმუმს ჩვენს ინტეგრალს სავსებით გარკვეული აზრით. სწორედ ასეთ წყვეტილ ამონახსნებს შევისწავლით ამ შრომაში. ამოცანის უკეთესი გაგებისათვის ავიღოთ ვ ა ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს ცნობილი მაგალითი:

საძიებელია მინიმალური მნიშვნელობა ინტეგრალისა

$$I = \int_{-1}^{+1} x^2 y'^2 \, dx,$$

რომელიც აღებულია $P_1(-1,a)$ და $P_2(1,b)$ წერტილთა შემაერთებელ უწყვეტ წირზე. a და b ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. არ არსებობს P_1 და P_2 წერტილების შემაერთებელი არც ერთი უწყვეტი ექსტრემალი; მაგრამ I ინტეგრალის ქვედა საზღვარი ნულია. მართლაც, აღვნიშნოთ ξ ასოთი რომელიმე მუდმივი და განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია:

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\xi}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\xi}}.$$

ამ განტოლებით წარმოდგენილი მრუდი გადის P_1 და P_2 წერტილებზე. თუ ამ y ფუნქციას ჩავსვამთ ინტეგრალში, გვექნება:

$$I < \frac{\xi\,(b-a)^2}{4\operatorname{arctg} \frac{1}{\xi}}.$$

ამრიგად, I რაგინდ მცირე შეგვიძლია გავხადოთ, თუ ξ საკმაოდ მცირე ავიღეთ. მაშასადამე, ჩვენი ინტეგრალის ქვედა საზღვარი გარკვევით ნულია. მაგრამ, მეორე მხრივ, როგორიც უნდა იყოს უწყვეტი მრუდი, რომელიც P_1 და P_2 წერტილებს აერთებს, I ინტეგრალის მნიშვნელობა ამ მრუდზე ნული ვერ იქნება. აქედან ის დასკვნა მიიღება, რომ წარმოდგენილ ამოცანას უწყვეტი ამონახსნი არ გააჩნია.

მაგრამ, როდესაც ξ ნულისაკენ მიისწრაფვის, გვაქვს შემდეგი ზღვარი:

$$y = a, \quad x < 0,$$
$$y = b, \quad x > 0,$$
$$y = \frac{a+b}{2}, \; x = 0\,.$$

სწორედ ეს წყვეტილი ფუნქცია ანიჭებს ვ ა ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს ინტეგრალს მინიმალურ მნიშვნელობას — ნულს. მაშასადამე, ვაიერშტრასის ამოცანისათვის ექსტრემალი წყვეტილია, მასთან პირველი გვარის წყვეტის წერტილით.

საზოგადოდ, თუ მოცემულ პრობლემას არ აქვს უწყვეტი ამონახსნი, რაც f ფუნქციის ბუნებაზეა დამოკიდებული, მაშინ მიზანშეწონილია პრობლემის გაფართოებულად განხილვა იმ მრუდთა შემოღებით, რომელთაც წყვეტის

პირველი გვარის წერტილები გააჩნიათ. ამ ამონახსნებს წყვეტილი. ამონახსნები ვუწოდოთ [1].

ამ შრომის მიზანია მოვძებნოთ მოცემული ამოცანისათვის P_1 და P_2 წერტილებზე გამავალი ექსტრემალი პირველი გვარის წყვეტის ერთი წერტილით და გამოვარკვიოთ ექსტრემუმის აუცილებელი და საკმარისი პირობები ასეთი ამონახსნებისათვის; მაგრამ იმისათვის, რომ ასეთ განზოგადებას აზრი და გამართლება ჰქონდეს, წყვეტილი ექსტრემალები უნდა იყვნენ გარკვეული ბუნებისა:

წყვეტილი მრუდი, რომელსაც პირველი გვარის წყვეტის ერთი წერტილი გააჩნია, უწყვეტ მრუდთა მიმდევრობის ზღვარს წარმოადგენს. უწყვეტ მრუდებს, რომლებიც წყვეტილი ექსტრემალისაკენ მიისწრაფვიან, მიახლოების მრუდები ვუწოდოთ. I ინტეგრალის მნიშვნელობა წყვეტილ ექსტრემალზე შევადაროთ იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობას მიახლოების მრუდებზე. საკმარისი არ არის დავრწმუნდეთ იმაში, რომ პირველი ინტეგრალი ნაკლები აღმოჩნდა მეორეებზე; საჭიროა კიდევ, რომ უკანასკნელ ინტეგრალთა შორის მოიძებნებოდეს ისეთი, რომელიც რაგინდ ახლოს იქნება პირველთან. სწორედ ასეთ მრუდებს განვიხილავთ, როგორც შედარების უწყვეტ მრუდებს. ასეთებს ჩვენ მიახლოების მისაღებ მრუდებს ვუწოდებთ. მაგალითად, უმოკლესი მანძილის პრობლემისათვის ჩვენ დავრწმუნდებით (გვ. 87), რომ არ არსებობს მიახლოების მისაღები მრუდები და, მაშასადამე, ამ პრობლემისათვის წყვეტილ ამონახსნებს აზრი არა აქვს. ვაიერშტრასის პრობლემისათვის აღნიშნული პირობა შესრულებულია და სწორედ ამიტომაც წყვეტილ ამონახსნებს აქ აზრი აქვს.

საკითხის გადმოცემას ჩვენ ორ ნაწილად დავყოფთ. პირველ ნაწილში განვიხილავთ მინიმუმის აუცილებელ პირობებს. მეორე ნაწილი საკმარისი პირობებისათვისაა მიძღვნილი. ბოლოს ჩვენ გავარჩევთ ამ სახის პრობლემების ორ მაგალითს. ორი ექსტრემუმიდან — მინიმუმი და მაქსიმუმი — საკითხი ყოველთვის პირველს შეეხება.

ბ-ნ ე. ვესიოს მიერ დავალებული ვარ რამდენიმე მეტად ძვირფასი შენიშვნით ზოგიერთი ცნების დაზუსტების თვალსაზრისით. მას უღრმეს მადლობას ვუძღვნი.

დიდად დავალებული ვარ ბ-ნ ო. ბლუმენტალისაგან, რომელიც პირველი იყო მათ შორის, ვინც დაინტერესდა ამ შრომაში გადმოცემული ჩემი კვლევა-ძიებით. იგი მუშაობისათვის უძვირფასეს რჩევას მაძლევდა და ბედნიერად ვრაცხ თავს, მას ჩემი მხურვალე მადლობა მოვახსენო.

---

[1] ვარიაციათა აღრიცხვაში წყვეტილი ექსტრემალები ჩვეულებრივ იმ უწყვეტ ექსტრემალებს ეწოდება, რომელთაც კუთხიანი წერტილები აქვთ. ეს სახელწოდება, შესული თითქმის ყოველ თხზულებაში, ჩვენ აღარ მიგვაჩნია შესაფერისად, ახლა, როდესაც ნამდვილად წყვეტილი მრუდები შემოგვაქვს. სწორედ ამიტომაც ვამჯობინებთ იმ ექსტრემალებისათვის კუთხიანი ექსტრემალები გვეწოდებინა, ხოლო წყვეტილი ამონახსნების სახელწოდება ჩვენი ამონახსნებისათვის შემოგვენახა.

1. აუცილებელი პირობები

A. პირველი რიგის პირობები

1. წყვეტილ მრუდთა ზოგადი განტოლება ასეთი სახით ავიღოთ

$$y = y(x) \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

სადაც $y(x)$ ფუნქციას (x_1, x_2) შუალედში გააჩნია პირველი გვარის წყვეტის $x = x_0$ წერტილი. ეს ფუნქცია შუალედებში

$$x_1 \leqq x < x_0, \quad x_0 < x \leqq x_2$$

უწყვეტია, არც ერთი მისი მხები y ღერძის პარალელური არ არის და $y'(x)$ საკუთხო კოეფიციენტიც მუდამ შემოსაზღვრული რჩება.

$y = y(x)$ განტოლებით წარმოდგენილი მრუდი უწყვეტ მრუდთა ორი P_1R_0 და $\overline{R_0}\,P_2$ განცალკევებული რკალისაგან შედგება (ნახ. 1). y ორდინატის მნიშვნელობა, რომელიც წყვეტის წერტილის x_0 აბსცისს შეესაბამება, ნებისმიერი შეიძლება იყოს, რადგან ამას არავითარი გავლენა არა აქვს ინტეგრალის მნიშვნელობისათვის შესაბამ მრუდზე. წერტილებს, რომლებშიაც ადგილი აქვს ამ უწყვეტ მრუდთა გადატეხას, ჩვენ **გადატეხის წერტილებს** (points de rupture) ვუწოდებთ.

ჩვენი ინტეგრალი:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

აღებული წყვეტილ მრუდზე, ორი ინტეგრალის ასეთი ჯამის სახით წარმოგვიდგება:

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x, y(x), y'(x))\, dx + \int_{x_0}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

თითოეულ ამ შუალედში $y(x)$ უწყვეტია, ხოლო $y'(x)$ კი შემოსაზღვრული; მაშასადამე, ჩვენს ინტეგრალს სასრული მნიშვნელობა აქვს. ამ ინტეგრალს ასე ჩავწერთ I_E, სადაც E იმ მრუდს აღნიშნავს, რომელზედაც ინტეგრალია აღებული.

ამ თეორიაში საქმე გვაქვს აგრეთვე უწყვეტ მრუდებთანაც, რომელთა ფორმაც განსაზღვრული იქნება მომდევნო (n^0)-ში.

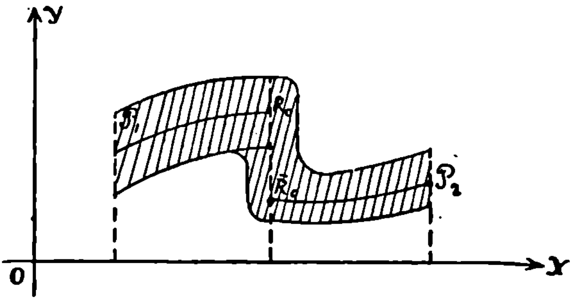
2. განვმარტოთ ახლა წყვეტილი ექსტრემალის ის მახლობლობა, რომელშიაც უნდა მოთავსდეს ყველა სხვა ანალოგიური წყვეტილი მრუდი და ყველა ის შედარების უწყვეტი მრუდებიც, რომლებიც $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილებს აერთებენ.

ვთქვათ ჩვენი ამოცანის წყვეტილი ექსტრემალი შემდეგია:

$$y = \varphi_0(x) \begin{cases} = y_0(x) & x_1 \leqq x < x_0, \\ = \overline{y}_0(x) & x_0 < x \leqq x_2; \end{cases} \qquad (E_0)$$

$x = x_0$ წყვეტის წერტილია, ხოლო $R_0(x_0, y_0)$, $\overline{R}_0(x_0, \overline{y}_0)$ გადატეხის წერტილებია. განვიხილოთ $P_1R_0\overline{R}_0P_2$ ტეხილი მრუდი, რომელიც ჩვენი ექსტრემალის P_1R_0 და $\overline{R}_0P_2$ უწყვეტი რკალებისა და ვერტიკალური $R_0\overline{R}_0$ სეგმენ-

ტისაგან შედგება. შევადგინოთ არე, რომლის ყოველ (x, y) წერტილს შეესაბამებოდეს ჩვენი ტეხილის ისეთი (x^0, y^0) წერტილი, რომლიდანაც (x, y) წერტილამდე მანძილი მოცემულ ρ სიდიდეზე ნაკლებია. ამნაირად, ჩვენ შევადგენთ R_ρ არეს, რომელიც ნახაზზე დაშტრიხულია. ამ არეში უნდა მოთავსდეს შედარების ყოველი უწყვეტი მრუდი და ყოველი ანალოგიური წყვეტილი მრუდიც, რომლის გადატეხის წერტილებიც მოთავსებულია ρ რადიუსიან წრეებში $R_0, \overline{R_0}$ ცენტრებით და რომელიც აერთებს უკიდურეს P_1, P_2 წერტილებს.



ნახ. 1

ახლა ზუსტად შეგვიძლია განვმარტოთ შედარების უწყვეტ მრუდთა ფორმა.

ვთქვათ $E(P_1 K\overline{K} P_2)$ რაღაც წყვეტილი მრუდია R_ρ არეში და აერთებს უკიდურეს P_1, P_2 წერტილებს. ამ მრუდის გადატეხის წერტილები იყოს K და $\overline{K}$, ხოლო $\bar{x}_0$ კი ამათი საერთო აბსცისი.

განსახილავ მრუდთა ფორმა ისეთივეა, როგორც იმ უწყვეტი მრუდებისა R_ρ არეში, იმავე უკიდურეს წერტილებს რომ აერთებენ და უფრო და უფრო უახლოვდებიან $P_1 K\overline{K} P_2$ ტეხილ წირს ისე, რომ ამ მრუდთა არც ერთი მხები x ღერძის პარალელური არ არის. ჩვენ მოკლედ ვიტყვით, რომ ეს მრუდები მ ი ი ს წ რ ა ფ ვ ი ა ნ E მრუდისაკენ.

ვთქვათ ამნაირი λ_n მრუდის განტოლებაა:

$$y = \omega_n(x)$$

და ავიღოთ რაიმე კლებადი მიმდევრობა დადებითი ε_n რიცხვებისა, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის. ზემოაღნიშნული განმარტების საფუძველზე ადვილი შესამჩნევია, რომ $\omega'_n(x)$ წარმოებული, როდესაც n უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, $(\bar{x}_0 - \varepsilon_n, \bar{x}_0 + \varepsilon_n)$ შუალედში შემოსაზღვრული არ არის.

λ_n მრუდის რკალი $(\bar{x}_0 - \varepsilon_n, \bar{x}_0 + \varepsilon_n)$ შუალედში გადამწყვეტ როლს ასრულებს f ფუნქციის იმ შესაძლო სახეთა გამორკვევაში, რომლებიც ამოსახსნელ საკითხს შეესაბამებიან. ამ რკალს ჩვენ λ_n წირის ვ ა რ დ ნ ა ს (la chute) ვუწოდებთ.

2 bis. ვარიაციათა აღრიცხვის მეთოდები ჩვენ საშუალებას გვაძლევენ მივიღოთ შედარების უწყვეტ წირებად მხოლოდ ისეთები, რომლებიც იმის

მსგავს პირობას აკმაყოფილებენ, რაც მიახლოების წირებისათვის ამ შრომის შესავალში იყო აღნიშნული. ეს ნიშნავს შემდეგს: ვთქვათ $\{\lambda_n\}$ წარმოადგენს $R\rho$ არეში რაიმე სიმრავლეს უწყვეტი მრუდებისა, რომლებიც გარკვეული E წყვეტილი მრუდისაკენ მიისწრაფვიან ამავე არეში. (კერძოდ, E მრუდი E_0 ექსტრემალს წარმოადგენს, როდესაც $\{\lambda_n\}$ არის სიმრავლე მიახლოების მრუდებისა). საქმე ეხება მინიმუმის მოძებნას ყველა $\{\lambda_n\}$ სიმრავლისა და შესაბამ იმ წყვეტილ E მრუდთა ველში, რომელთათვისაც I ინტეგრალი λ_n მრუდებზე, რაგინდ ახლოს იქნება იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობასთან E მრუდზე. მხოლოდ ასეთი λ_n მრუდები და შესაბამისი წყვეტილი E მრუდებია, რომლებსაც ჩვენ ვღებულობთ შედარების წირებად. ამათ ჩვენ ვუწოდებთ შედარების მისაღებ მრუდებს.

ამნაირად, ჩვენ ვიტყვით, რომ წყვეტილი E_0 წირი I ინტეგრალს შედარებით მინიმუმს აიღებს, თუ ამ ინტეგრალის მნიშვნელობა E_0 წირზე ნაკლებია, ვიდრე ამავე ინტეგრალის მნიშვნელობა ყოველ მსგავს წყვეტილ ან უწყვეტ მისაღებ წირზე, რომელიც კი მოცემულ P_1 და P_2 წერტილებს აერთებს და მთლიანად R_ρ არეშია მოთავსებული.

ამ განმარტებიდან პირველი პირობა მიიღება, რომელსაც E_0 მრუდი უნდა აკმაყოფილებდეს.

E_0 მრუდი I ინტეგრალს შედარებით მინიმუმს მხოლოდ მაშინ მიაღწევს, როდესაც P_1R_0 და $\bar{R}_0P_2$ რკალები ექსტრემალებს (ეილერის მრუდებს) წარმოადგენენ და აკმაყოფილებენ ჩვეულებრივი მინიმუმის ყველა პირობას.

3. უპირველეს ყოვლისა, ჩვენ შემდეგ ძირითად საკითხს ამოვხსნით:

რა პირობებში შეიძლება, რომ I ინტეგრალის მნიშვნელობა მიახლოების წირზე რაგინდ ახლო იყოს იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობასთან E_0 ექსტრემალზე?

ვთქვათ $\{\lambda_n\}$ წარმოადგენს მიახლოების მისაღებ წირთა ერთობლიობას და λ_n წირის განტოლებაა:

$$y = \omega_n(x).$$

აქედან შემდეგი დასკვნა მიიღება:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta I_n = \lim_{n\to\infty}(I_{\lambda_n} - I_{E_0}) = 0, \tag{1}$$

ანუ ასეთი:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_1}^{x_2} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))\,dx.$$

ამას გარდა, ვთქვათ ვარდნის შუალედია $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$, ხოლო ამისი ბოლოების აბსცისთა შესაბამისი წერტილები λ_n წირზე ასეა აღნიშნული: $K(x_0 - \varepsilon_n, y_0 + \eta')$, $\bar{K}(x_0 + \varepsilon_n, \bar{y}_0 + \eta)$. შევაერთოთ P_1, K და $\bar{K}, P_2$ წერტილები P_1K და $\bar{K}P_2$ მახლობელი ექსტრემალური წირებით (იხ. ნახ. 9, n°.26). ცხადია, რომ ამ ორი რკალისაგან შედგენილი $L_n(P_1K\bar{K}P_2)$ მრუდი, რომელსაც

იგივე ვარდნა ექნება, მიახლოების წირს წარმოადგენს. მაშასადამე, $\{\lambda_n\}$ ერთობლიობას ასე შედგენილი $\{L_n\}$ ერთობლიობა შეესაბამება.

იმ მიზნით, რომ ვარიაციათა აღრიცხვის მეთოდები გამოსაყენებელი იყოს ამოსახსნელი პრობლემის შემთხვევაში, აუცილებელი ხდება მინიმუმისათვის ერთდროულად შემდეგი ორი პირობის შესრულება:

$$I_{\lambda_n} - I_{E_0} \geqq I_{L_n} - I_E \geqq 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ აუცილებელი და საკმარისი პირობების მოსაძებნად წირთა ორი $\{\lambda_n\}$ და $\{L_n\}$ ველი ტოლფასი უნდა იყოს.

L_n მრუდის განტოლება ასე დავწეროთ $y=\varphi_n(x)$; თუ მხედველობაში მივიღებთ უკანასკნელ უტოლობასა და (1) განტოლებას, დასმული საკითხის ამოხსნადობისათვის ამათგან შემდეგი აუცილებელი პირობა გამოიყვანება:

$$\lim_{n\to\infty}(I_{L_n} - I_{E_0}) = \lim_{n\to\infty}\left[\int_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi_n(x),\varphi'_n(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi_0(x),\varphi'_0(x))\,dx\right] = 0. \tag{2}$$

მაშასადამე, თუ $\{\lambda_n\}$ წარმოადგენს მიახლოების მისაღები წირების სიმრავლეს, შესაბამი $\{L_n\}$ სიმრავლეც აგრეთვე მისაღები უნდა იყოს.

მეორე მხრივ, თუ η ნებისმიერი მცირე დადებითი რიცხვია, ორ L_n და E_0 მრუდს ერთმანეთთან, n რიცხვის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული, $(x_0-\varepsilon_n, x_0+\varepsilon_n)$ შუალედს გარეთ ექნება 1 რიგის მახლობლობა, რომელიც სწორედ ამ η რიცხვითაა განსაზღვრული [1]. ეს იმას ნიშნავს, რომ რაგინდ მცირეც იყოს დადებითი η რიცხვი, შეგვიძლია მას ისეთი მთელი N რიცხვი შევუსაბამოთ, რომ ყოველთვის, როდესაც $n>N$, ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობებს:

$$|\varphi_n(x)-\varphi_0(x)|<\eta,\quad |\varphi'_n(x)-\varphi'_0(x)|<\eta \tag{η}$$

იმ პირობით, რომ x ეკუთვნის ერთ-ერთს ორი $(x_1, x_0-\varepsilon_n)$ და $(x_0+\varepsilon_n, x_2)$ შუალედიდან.

ვთქვათ ეს ასეა და დავამტკიცოთ, რომ ზემოხსენებული პირობა შემდეგის ტოლფასია:

I ინტეგრალის მნიშვნელობა მიახლოების მისაღები წირის ვარდნაზე ნულისაკენ მიისწრაფვის.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს პირობა საკმარისია. დავამტკიცოთ, რომ იგი აუცილებელიც არის.

განვიხილოთ I ინტეგრალი, აღებული λ_n მრუდის ვარდნაზე; რადგან L_n მრუდსაც იგივე ვარდნა გააჩნია, ამიტომ შეგვიძლია შემდეგი დავწეროთ:

[1] Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. გვ. 49.

$$\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))dx -$$

$$- \int_{x_1}^{x_0-\varepsilon_n} \Big[f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) - f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \Big] dx -$$

$$- \int_{x_0+\varepsilon_n}^{x_2} [f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) - f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))]dx + \int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))dx$$

საიდანაც ასეთი დასკვნა მიიღება:

$$\left| \int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))dx \right| \leqq \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_n(x), \varphi_n'(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_1}^{x_0-\varepsilon_n} [f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) - f(x, \varphi_0(x) \varphi'_0(x))] dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_0+\varepsilon_n}^{x_2} [f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) - f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))]dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))dx \right|.$$

(η) უტოლობათა და (2) განტოლების ძალით, მარჯვენა მხარის თითოეული წევრი რაგინდ მცირე გახდება, თუ n საკმაოდ დიდია. იგივე ითქმის მარცხენა მხარეზედაც, ასე რომ მივიღებთ ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\, dx = 0, \qquad (A)$$

და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ახლა უწყვეტ მრუდთა $\{\overline{\lambda_n}\}$ სიმრავლე, რომელიც რაიმე წყვეტილი $\overline{E}$ წირისაკენ მიისწრაფვის R_ρ არეში.

ანალოგიური გზით შეიძლება შემდეგი გარემოების დამტკიცება: აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ $\{\overline{\lambda_n}\}$ წირები და შესაბამისი $\overline{E}$ წირი მისაღები წირები იყოს, მდგომარეობს ასეთი ტოლობის შესრულებაში:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bar{x}_0-\varepsilon_n}^{\bar{x}_0+\varepsilon_n} f(x, \overline{\omega_n}(x), \overline{\omega'_n}(x))\, dx = 0, \qquad (\overline{A})$$

სადაც $y = \overline{\omega_n}(x)$ წარმოადგენს $\overline{\lambda_n}$ მრუდის განტოლებას, ხოლო $x = \bar{x}_0$ წყვეტის წერტილია $\overline{E}$ მრუდისა.

4. ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ უწყვეტ მისაღებ წირთა არსებობის საკითხი დაიყვანება წყვეტილ მისაღებ წირთა არსებობის საკითხამდე, ე. ი. ისეთი $\bar{x}_0$ მნიშვნელობების არსებობის საკითხამდე, რომელთათვისაც ძირითადი $(\bar{A})$ პირობა შესრულებულია (წყვეტის მისაღები წერტილები).

ორი შემთხვევა უნდა განვასხვავოთ. $(\bar{A})$ პირობა შეიძლება შესრულებული იყოს ან $\bar{x}_0$ მნიშვნელობათა უწყვეტი სიმრავლისათვის, ანდა არსებობს მხოლოდ იზოლირებული $\bar{x}_0$ მნიშვნელობანი[1]. მაგალითად, ამოცანისათვის რომელიც მოყვანილია ჩვენი შრომის ბოლოში, სახელდობრ, შემდეგი ინტეგრალის ექსტრემუმისათვის:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin(yy')\,dx$$

წყვეტის მისაღები წერტილის $\bar{x}_0$ აბსცისა სავსებით ნებისმიერია მაშინ, როდესაც ვაიერშტრასის პრობლემისათვის წყვეტის მხოლოდ ერთი მისაღები წერტილი არსებობს, ესაა $\bar{x}_0 = 0$. გამოსადეგია ამ დასკვნების გეომეტრიული ახსნა.

წყვეტილ მისაღებ წირთა გადატეხის წერტილები უნდა მოთავსდნენ ρ რადიუსიან ორ წრეში, რომლებიც E_0 ექსტრემალის გადატეხის R_0 და $\bar{R}_0$ წერტილებიდანაა შემოხაზული.

პირველ შემთხვევაში (ზოგადი შემთხვევა) დასმულ საკითხს ამოვხსნით, თუ თანატოლ აბსცისებიანი ყოველი წყვილი წერტილებისა, ამ წრეებში მოთავსებული მისაღები წყვეტილი წირის გადატეხის წერტილებსაც წარმოადგენს[2].

მეორე შემთხვევაში (გამონაკლისი შემთხვევა) გადატეხის წერტილები ერთსა და იმავე წრეში რჩება და მუდამ მოთავსებულია იმ $x = x_0$ წრფეზე, რომელიც E_0 წირის გადატეხის R_0 და $\bar{R}_0$ წერტილებზე გადის.

4 bis. ცოტაა იმისი იმედი, რომ მოხერხდება ზოგადი წესის აღმოჩენა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა გამოგვეცნო, თუ რა შემთხვევაში შეიძლება შესრულდეს $(\bar{A})$ პირობა. შეიძლება მივუთითოთ სხვადასხვა წესი, უფრო და უფრო ფართე, მაგრამ ეს ზოგადი წესი მაინც არ იქნება.

აი ზოგიერთი ასეთ წესთაგან.

$(\bar{A})$ პირობა სრულდება $\bar{x}_0$ აბსცისის ყველა მნიშვნელობათათვის შემდეგ შემთხვევებში:

[1] შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ მხოლოდ ეს ორი შემთხვევაა გასარჩევი, თუ f ფუნქცია სულ ცოტა რეგულარობის ცნობილ პირობებს მაინც დავუმორჩილეთ.

[2] არსებობს შემთხვევაც, როდესაც გადატეხის ორი წერტილი არ შეიძლება ვცვალოთ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლივ და ისინი შებმული არიან გარკვეული დამოკიდებულებით. ეს შეიძლება დავინახოთ შემდეგი ამოცანის გარჩევისას:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(y, v')\,dx,$$

სადაც $f(y, y')$ წარმოადგენს მრავალწევრს y' წარმოებულის მიმართ, ხოლო y-სათვის კენტ ფუნქციას, ე. ი.

$$f(-y, y') = -f(y, y').$$

ეს შენიშვნა სამართლიანია აგრეთვე გამონაკლის შემთხვევაშიაც.

1. როდესაც f ფუნქციის აბსოლუტური მნიშვნელობა x, y, y' სიდიდეთა ყველა მნიშვნელობისათვის R არეში რაიმე M რიცხვზე მუდამ ნაკლები რჩება.

ასეა მაგალითად შემდეგი ამოცანებისათვის:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{G(x, y)}{(1+y'^2)^k} dx, \qquad \int_{x_1}^{x_2} F(x, y) \sin y' dx,$$

სადაც $G(x, y)$ და $F(x, y)$ შემოსაზღვრული ფუნქციებია R არეში; k რაღაც დადებითი რიცხვია.

2. როდესაც იმ წრფის ყოველ წერტილში, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $\frac{1}{\varepsilon}$, შესრულებულია უტოლობა:

$$|f| < \frac{M}{\varepsilon^k},$$

სადაც k ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია.

ასეთია შემდეგი ამოცანების შემთხვევა:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \sqrt[3]{1+y'^2}\, dx, \qquad \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')(y'^{2/3} - y'^{2/5}) dx,$$

სადაც $F(x, y, y')$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა რეგულარობის R არეში.

3. კერძო შემთხვევაში, როდესაც:

$$f = \varphi(x, y)(a y'^2 + b y' + c),$$

სადაც a, b, c მუდმივებს წარმოადგენენ, ხოლო $\varphi(x, y)$ შემოსაზღვრულია. x-სიდიდის მუდმივი მნიშვნელობისათვის გარკვეულ (ξ_1, ξ_2) შუალედში $\varphi(x, y)$-ფუნქცია ნიშანს ორჯერ მაინც იცვლის.

ასეთია მაგალითად შემდეგი ამოცანა:

$$\int_{x_1}^{x_2} (A y^2 + B y + C)(a y'^2 + b y' + c)\, dx.$$

მისაღებ ვარდნას ადგილი აქვს, თუ $B^2 - 4AC > 0$ და ასეთ ვარდნასთან საქმე არ გვექნება, როდესაც $B^2 - 4AC \leqq 0$.

დაბოლოს, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ იმის ზოგადი პირობა, რომ უწყვეტი მისაღები მრუდების არსებობა შეუძლებელი იყოს. მოვახდინოთ ასეთი ჩასმა:

$$x = Y, \quad y = X.$$

მაშინ გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dY}{dX}},$$

და

$$\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, y, y')\, dx = \int_{y_0+\eta}^{\bar{y}_0+\bar{\eta}} Y' f\left(Y, X, \frac{1}{Y'}\right) dX,$$

სადაც $y_0+\eta$, $\bar{y}_0+\bar{\eta}$ სიდიდეები წარმოადგენენ ორდინატებს მიახლოების მრუდის ვარდნის ბოლოებში.

მარჯვენა ინტეგრალის საზღვრების სხვაობა $\bar{y}_0-y_0$ სიდიდისაკენ მიისწრაფვის. ინტეგრალის ასეთი სახე ძალიან ხშირად საშუალებას გვაძლევს გამოვარკვიოთ, შეიძლება თუ არა შესრულდეს $(\bar{A})$ განტოლებანი. მაგალითად, თუ ფუნქცია:

$$Y' f\left(Y, X, \frac{1}{Y'}\right)$$

ნიშანს ინარჩუნებს და ინტეგრების შუალედში თითქმის ყველგან გარკვეულ საზღვარს აღემატება, $(\bar{A})$ განტოლებანი შეუძლებელია დაკმაყოფილებული იყვნენ. ასეთია შემდეგი ამოცანები:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx, \qquad \int_{x_1}^{x_2} y^{\alpha} \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

5. ძ ი რ ი თ ა დ ი პ ი რ ო ბ ე ბ ი. (n^0.2)-ში ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ ამოსახსნელი პრობლემის წყვეტილი ამონახსნი ექსტრემალურ მრუდთა (ეილერის მრუდთა) ორი რკალისაგან შედგება. გარდა ამისა, გადატეხის წერტილებში გარკვეული პირობები უნდა შესრულდეს. ამ პირობების მისაღებად, ჩვენ დავინახავთ, რომ საკმარისია E_0 ექსტრემალი შევადაროთ R_ρ არეში ყველა სხვა წ ყ ვ ე ტ ი ლ მისაღებ მრუდებს.

მართლაც, ვთქვათ $\{\bar{\lambda}_n\}$ უწყვეტ მისაღებ წირთა სიმრავლეა, რომელიც R_ρ არეში წყვეტილი $\bar{E}$ წირისაკენ მიისწრაფვის. ჯერ დავუშვათ, რომ $\bar{E}$ წირი E_0 წირისაგან განსხვავებულია. თუ მინიმუმის განმარტებას გამოვიყენებთ, უნდა გვქონდეს შემდეგი:

$$\Delta I_n = I_{\bar{\lambda}_n} - I_{E_0} \geqq 0, \qquad \Delta I = I_{\bar{E}} - I_{E_0} \geqq 0, \tag{3}$$

მაგრამ ΔI_n ასეც ჩაიწერება

$$\Delta I_n = I_{\bar{E}} - I_{E_0} + (I_{\bar{\lambda}_n} - I_{\bar{E}}). \tag{4}$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახვა ნულისაკენ მიისწრაფვის. მაშასადამე, ΔI_n სიდიდის ნიშანი, თუ n საკმაოდ დიდია, $I_{\bar{E}}-I_{E_0}$, სხვაობის ნიშნით განისაზღვრება, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ საკმაოდ დიდი n რიცხვისათვის (3) უტოლობათაგან პირველი მეორის შედეგია და შებრუნებით, მეორე უტოლობაც აგრეთვე შედეგია პირველი უტოლობისა. სწორედ ეს იყო დასამტკიცებელი.

ამგვარად, მინიმუმის აუცილებელ პირობათა მოძებნის თვალსაზრისით, მისაღებ უწყვეტ მრუდთა ველი, სანამ მიახლოების მრუდები მხედველობაში მიღებული არ არის, წყვეტილ მისაღებ წირთა ველის ტოლფასია.

შევადაროთ ახლა I ინტეგრალი წყვეტილ E_0 ექსტრემალზე იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობას ანალოგიურ წყვეტილ $\bar{E}$ მრუდზე. ავიღოთ ჯერ ზოგადი შემთხვევა.

ვთქვათ $\overline{E}$ მრუდის განტოლება შემდეგია:

$$y = \varphi(x), \quad x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad (E)$$

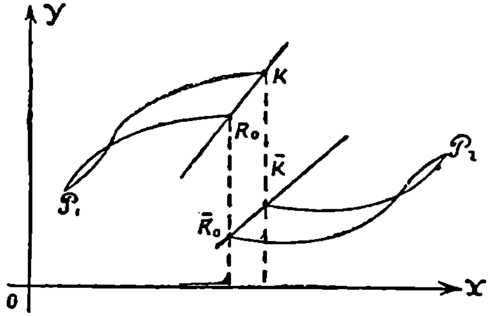
ხოლო K და $\overline{K}$ გადატეხის წერტილებია.

ვთქვათ ამასთან მოცემულია რაიმე ორი მრუდი:

$$y = \eta(x), \qquad (L)$$

$$y = \overline{\eta}(x), \qquad (\overline{L})$$

რომელთაგან პირველი აერთებს R_0 და K წერტილებს, ხოლო მეორე კი $\overline{R}_0$ და $\overline{K}$ წერტილებს (ნახ. 2).



ნახ. 2

წარმოვიდგინოთ, რომ ვახდენთ ინტეგრების E_0 წირის უწყვეტ დეფორმაციას საწყისი $P_1 R_0 \overline{R}_0 P_2$ მდგომარეობიდან მოყოლებული; P_1 და P_2 საწყისი წერტილები უძრავი რჩება ისე, რომ R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილები ინარჩუნებენ ერთსა და იმავე აბსცისს და განიცდიან გადაადგილებას L და $\overline{L}$ მრუდებზე შესაბამად. ამ უწყვეტი დეფორმაციის საშუალებით შეგვეძლია E_0 მრუდიდან $\overline{E}$ მრუდისკენ გადასვლა. ერთხელ და საბოლოოდ R_0 და $\overline{R}_0$ წერტილებში E_0 ექსტრემალის მხებთა საკუთხო კოეფიციენტები აღვნიშნოთ ასე: $y'_0, \overline{y}'_0$. ამ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებისათვის ზოგადი ფორმულის მიხედვით შემდეგი გვექნება:

$$\delta I_{E_0} = \varepsilon[f(x_0+0, \overline{y}_0, \overline{y}'_0) - f(x_0-0, y_0, y'_0) - \overline{y}'_0 f_{y'}(x_0+0, \overline{y}_0, \overline{y}'_0) +$$
$$+ y'_0 f_{y'}(x_0-0, y_0 y'_0) + \overline{\eta}'(x_0) f_{y'}(x_0+0, \overline{y}_0, \overline{y}'_0) - \eta'(x_0) f_{y'}(x_0-0, x_0, y'_0)].$$

მაგრამ L და $\overline{L}$ მრუდები სავსებით ნებისმიერია და, მაშასადამე, $\eta'(x)$ და $\overline{\eta}'(x)$ აგრეთვე ნებისმიერია. ამის მახედვით, თუ მხედველობაში მივიღებთ f ფუნქციისა და მისი წარმოებულების უწყვეტობას, მინიმუმის აუცილებელი პირობა შემდეგ სამ განტოლებამდე დაიყვანება:

$$\begin{aligned} &f(x_0, y_0, y'_0) = f(x_0, \overline{y}_0, \overline{y}'_0), \\ &f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0, \\ &y_{y'}(x_0, \overline{y}_0, \overline{y}'_0) = 0. \end{aligned} \qquad (\mathrm{I})$$

ავიღოთ ახლა გამონაკლისი შემთხვევა. მაშინ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, შედარების უწყვეტი მრუდებისა და წყვეტილი E_0 ექსტრემალის გადატეხის წერტილების $x = x_0$ აბსცისი ერთი და იგივეა.

ვთქვათ $P_1K\overline{K}P_2$ შედარების მისაღები მრუდია, ხოლო მისი გადატეხის წერტილები ასეა აღნიშნული $K(x_0, y_0+\eta)$, $\overline{K}(x_0, \bar{y}_0+\bar{\eta})$. თუ ისევე ვიმსჯელებთ, როგორც ზევით, I ინტეგრალის ვარიაცია შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$\delta I = \eta f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) + \bar{\eta} f_{y'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0);$$

იგი ნული უნდა იყოს ყოველი $\eta, \bar{\eta}$ რიცხვებისათვის. აქედან გამონაკლისი შემთხვევისათვის შემდეგი ორი განტოლება მიიღება:

$$f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0, \; f_{y'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0. \qquad (I')$$

სწორედ ეს არის ძირითადი (A) პირობა, რომლითაც განსაზღვრულია მისაღები წყვეტის წერტილის x_0 აბსცისი და, რომლითაც განსახილავ გამონაკლის შემთხვევაში შეცვლილია (I) ძირითადი სისტემის პირველი განტოლება.

6. ძირითადი (I) განტოლების დადგენისას მიახლოების წირები, როგორც შედარების წირები მხედველობაში არ მიგვიღია.

მეორე მხრივ, E_0 მრუდი გარკვეულია საწყისი პირობებითა და (I) განტოლებებით და ვთქვათ, რომ $\{\lambda_n\}$ მრუდთა სიმრავლე E_0 მრუდისაკენ მიისწრაფვის და I ინტეგრალს I_{E_0} ინტეგრალთან რაგინდ მახლობელ მნიშვნელობებს ანიჭებს. იმაში დასარწმუნებლად, რომ E_0 ჩვენი ამოცანის წყვეტილი ამონახსნია და რომ, მაშასადამე, $\{\lambda_n\}$ მიახლოების წირთა სიმრავლეა, E_0 მრუდი სხვათა შორის უნდა აკმაყოფილებდეს პირველი რიგის პირობებს, მიღებულს შემდეგი უტოლობის საფუძველზე:

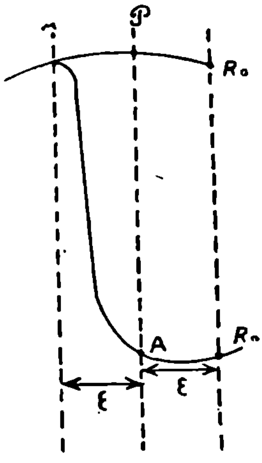
$$\Delta I_n = I_{\lambda_n} - I_{E_0} > 0. \qquad (5)$$

ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს უტოლობა, ჯერ ერთი, იმავე (I) განტოლებებს გვაძლევს და ამას გარდა მისგან ზოგიერთი დამატებითი პირობაც მიიღება.

მართლაც, ვთქვათ $\overline{A}\overline{R}_0$ წარმოადგენს ექსტრემალური $\overline{R}_0P_2$ მრუდის გაგრძელებას $\overline{R}_0$ წერტილის მარცხნივ. განვიხილოთ ასეთი მრუდი

$$\lambda(P_1 A\overline{A}\overline{R}_0 P_2),$$

რომელიც შედგენილია ექსტრემალური P_1R_0 მრუდის P_1A რკალისა, მისაღები $A\overline{A}$ ვარდნისა და $\overline{A}\overline{R}_0P_2$ რკალისაგან. ეს წირი E_0 მრუდისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც δ და ε ერთდროულად მიისწრაფვის ნულისაკენ (ნახ. 3 a). მეორე მხრივ, $I_\lambda - I_{E_0}$ სხვაობა რაგინდ მცირე შეგვიძლია გავხადოთ. მაშასადამე, ეს მრუდი აკმაყოფილებს ორივე ზემოხსენებულ პირობას.



ნახ. 3a

შედარება მოგვცემს შემდეგ ფორმულას:

$$\Delta I = I_\lambda - I_{E_0} = I_{A\bar A} - I_{AP} + (I_{\bar A\bar R_0} - I_{PR_0}).$$

მაგრამ

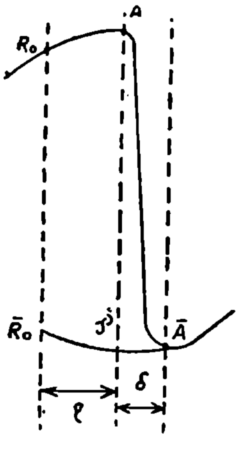
$$\lim_{\delta\to 0} I_{A\bar A} = 0$$

მაშასადამე, ყოველ ε სიდიდეს ყოველთვის შეგვიძლია ისეთი δ შევუსაბამოთ, რომ შესრულდება უტოლობა:

$$|I_{A\bar A} - I_{AP}| < \varepsilon^2.$$

ამგვარად, ΔI სხვაობის ნიშანი ფრჩხილებში მოთავსებული სხვაობის ნიშანზეა დამოკიდებული. მაშასადამე, იმისათვის, რომ ΔI დადებითი იყოს, საკმაოდ მცირე ε სიდიდისათვის უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$I_{\bar A\bar R_0} - I_{PR_0} = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} [f(x, \bar y_0(x), \bar y'_0(x)) - f(x, y_0(x), y'_0(x))]\, dx \geqq 0.$$



ნახ. 3b

თუ ანალოგიურადვე განვიხილავთ 3b ნახაზზე წარმოდგენილ მრუდებს, შემდეგ უტოლობას მივიღებთ:

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} [f(x, y_0(x), y'_0(x)) - f(x, \bar y_0(x), \bar y'_0(x))]\, dx \geqq 0.$$

მაგრამ, იმისათვის, რომ ადგილი დაურჩეს ორ უკანასკნელ უტოლობას, შემდეგი ფუნქცია:

$$f(x, y_0(x), y'_0(x)) - f(x, \bar y_0(x), \bar y'_0(x)),$$

როდესაც x იზრდება და x_0 მნიშვნელობას გაივლის, უარყოფითი მნიშვნელობიდან დადებითზე უნდა გადავიდეს.

აქედან დავასკვნით, რომ აღნიშნული ფუნქცია ნული უნდა გახდეს, როდესაც $x=x_0$, ე. ი. უნდა გვქონდეს შემდეგი ტოლობა:

$$f(x_0, y_0, y'_0) - f(x_0, \bar y_0, \bar y'_0) = 0.$$

ესაა პირველი I პირობათაგან.

ორი დანარჩენის დასამტკიცებლად შედარების მრუდები შემდეგნაირად შევადგინოთ:

$R_0\bar R_0$ მრუდზე ავიღოთ $A(x_0, y_0-\varepsilon)$ წერტილი და იგი P_1 წერტილთან შევაერთოთ მახლობელი P_1A ექსტრემალური წირით. განვიხილოთ $\lambda(P_1A\bar AP_2)$ მრუდი, შედგენილი P_1A რკალისა, მისაღები AA ვარდნისა და ექსტრემალური $\bar R_0P_2$ წირის $\bar AP_2$ რკალისაგან (ნახ. 3c). თუ δ და ε ერთდროულად ნულისაკენ მიისწრაფვის, λ წირი E_0 წირისაკენ მიისწრაფვის. მეორე მხრივ, I_λ ინტეგრალი I_{E_0} ინტეგრალთან რაგინდ ახლო იყოს.

შედარება გვაძლევს სხვაობას:

$$\Delta I = I_\lambda - I_{E_0} = I_{P_1A} - I_{P_1R_0} + (I_{A\bar A} - I_{\bar R_0\bar A})$$

როგორც ზევით, δ და ε რიცხვთა შესაბამისობის დამყარება ისე შეიძლება, რომ შესრულდება უტოლობა:

$$|I_{\bar{A}A} - I_{\overline{R_0 A}}| < \varepsilon^2.$$

მაგრამ

$$I_{P_1A} - I_{P_1R_0} = \varepsilon f_y(x_0, y_0, y'_0) + A\varepsilon^2.$$

ამ ფორმულებს თუ მხედველობაში მივიღებთ; ΔI სხვაობა შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$\Delta I = \varepsilon f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) + B\varepsilon^3,$$

სადაც A და B სიდიდეები სასრული რჩება.

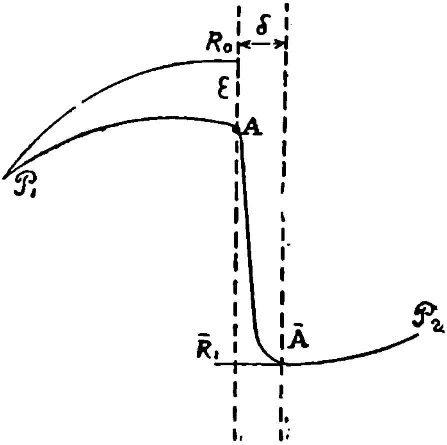
მაგრამ ε შეიძლება დადებითიც იყოს და უარყოფითიც, მაშასადამე, იმისათვის, რომ ΔI დადებითი იყოს უნდა გვქონდეს შემდეგი ტოლობა:

$$f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0.$$

ანალოგიურადვე დამტკიცდება შემდეგი განტოლების აუცილებლობა:

$$f_{y'}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0.$$

ამგვარად, ჩვენ ხელახლა მივიღეთ I პირობები.



ნახ. 3c

7. ავიღოთ ისევ (5) უტოლობა და ვთქვათ $\{\lambda_n\}$ მიახლოების წირთა სიმრავლეა. მაშინ, ვარიაციათა აღრიცხვის ცნობილი ფორმულის თანახმად[1], თუ მხედველობაში მივიღებთ I განტოლებებს გვექნება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\Delta I_n = I_{\lambda_n} - I_{E_0} = \int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\,dx - 2\varepsilon_n f(x_0, y_0, y'_0) + \varepsilon_n(\varepsilon_n) > 0, \quad (6)$$

რომელშიაც $y = \omega_n(x)$ არის λ_n წირის განტოლება, ხოლო (ε_n) სიდიდე ნულისაკენ მიისწრაფვის ε_n სიდიდესთან ერთად.

(6) უტოლობა სავსებით ზოგადია. იგი ძნელი გამოსაყენებელია პრაქტიკაში, რადგან ჩვენ საზოგადოდ არაფერი ვიცით შემდეგი უსასრულოდ მცირე სიდიდის ბუნების შესახებ

$$\int_{x_0+\varepsilon_n}^{x_0-\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\,dx.$$

[1] Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, 1909, გვ. 44, 45.

სავსებით უცნობია, თუ რანაირადაა დამოკიდებული ეს ინტეგრალი ε_n სიდიდეზე. იგი შესაძლოა სხვადასხვა რიგისა აღმოჩნდეს ε_n სიდიდის მიმართ იმისდა მიხედვით, თუ რა ხასიათისაა f და $\omega_n(x)$ ფუნქციები.

(6) უტოლობა არსებითად აუცილებელ და საკმარის პირობათა საკითხის გამოსახვაა მიახლოების მრუდთა ველში.

მაგრამ ერთ საკმაოდ ვრცელ შემთხვევაში, სახელდობრ, როდესაც არსებობს ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\varepsilon_n}\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega_n'(x))\, dx\right\}$$

ან, როდესაც ეს ზღვარი უსასრულოდ დიდია, (6) პირობებიდან შეიძლება მივიღოთ აუცილებელი პირობები გარკვეული სახით. ამისათვის გავყოთ უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარე $2\varepsilon_n$ სიდიდეზე და შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, რაც მოგვცემს შემდეგ პირობას:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\varepsilon_n}\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x)\, dx \geqq f(x_0, y_0, y'_0).\right. \tag{B}$$

სწორედ ესაა მინიმუმის აუცილებელი პირობა განსახილავ შემთხვევაში. იგი შეგვიძლია კიდევ უფრო დავაზუსტოთ ერთ საინტერესო შემთხვევაში, სახელდობრ მაშინ, როდესაც ამოსახსნელ პრობლემას ისეთი ვარდნა გააჩნია, რომელიც გადატეხის $R_0\overline{R_0}$ მონაკვეთს ჰკვეთს ნებისმიერი კუთხით, ხოლო გადაკვეთის K წერტილი ამავე მონაკვეთის რაიმე წერტილია[1]. ამას ადგილი აქვს მაგალითად ($n^0.4^{bis}$)-ის 1°, 2° და 3° ამოცანებისათვის.

საძიებელი პირობის მისაღებად ავიღოთ 1° ამოცანის შემთხვევა:

$$|f|<M.$$

განვიხილოთ y, y' მნიშვნელობათა ველი, როდესაც $\bar{y}_0 \geqq y \leqq y_0$, ხოლო y' ნებისმიერია.

ვთქვათ y_k, y_k' არიან y, y' სიდიდეთა ნებისმიერი მნიშვნელობანი ველში. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ძირითადი (B) უტოლობიდან მიიღება შემდეგი უტოლობა:

$$f(x_0, y_k, y'_k) \geqq f(x_0, y_0, y'_0).$$

მართლაც, $K(x_0, y_k)$ წერტილზე გავატაროთ რაიმე CD მრუდი, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია y'_k. ვთქვათ $\varepsilon_n = \delta_n + \delta_n^2$. თუ ავიღებთ $ACKDB$ ვარდნას, რომლის A და B ბოლოები E_0 ექსტრემალის რკალზე მდებარეობენ, ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის მიხედვით შემდეგი გამოსახვა გვექნება:

[1] ეს შემთხვევა მე მაცნობა ბ-ნ მ. ვესიომ თავის ორ წერილში, რომლებიც დათარიღებულია 1924 წლის 29 ნოემბრითა და 3 დეკემბრით. ბ-ნ ვესიოს ეს შენიშვნა გამოუწვევია ბ-ნ პოლ ლევის ერთ შრომას (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1924 წ. 17 ნოემბერი).

$$\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\,dx = 2\delta_n f(x_0, y_k, y'_k) + K_0\delta_n^2,$$

საიდანაც შემდეგი ტოლობა მიიღება:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\varepsilon_n}\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\,dx\right] = f(x_0, y_k, y'_k)$$

და, მაშასადამე, (B) პირობა ასეთ უტოლობას მოგვცემს

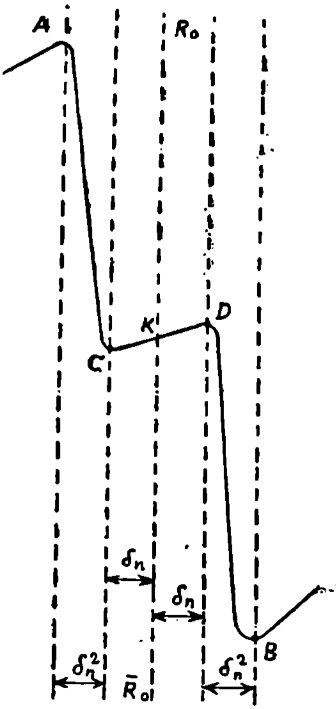
$$f(x_0, y_k, y'_k) \geqq f(x_0, y_0, y'_0). \qquad (B_1)$$

ამგვარად, განსახილავ ველში $f(x_0, y, y')$ უმცირეს მნიშვნელობას უნდა ღებულობდეს[1], როდესაც $y=y_0$, $y'=y'_0$ ან როდესაც

$$y = \bar{y}_0, \quad y' = \bar{y}'_0.$$

ჩვენ თავიდან აღებული გვქონდა, რომ $|f| < M$. მაგრამ დამტკიცება ანალოგიურია განხილული შემთხვევის სხვა ამოცანებისათვისაც.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ადვილად დავინახავთ, რომ ზემომოყვანილი მსჯელობა გამოსადეგია მხოლოდ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც K წერტილი $R_0\bar{R}_0$ მონაკვეთზე ძევს. უამისოდ λ_n მრუდი არ მიისწრაფვის წყვეტილი E_0 ექსტრემალისაკენ.



ნახ. 4

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ასეთია ვაიერშტრასის ამოცანა:

$$\int_{-1}^{+1} x^2 y'^2\,dx.$$

აქ გვაქვს გამონაკლისი შემთხვევა, რადგან (A) პირობა მხოლოდ მაშინ სრულდება, როდესაც $\bar{x}_0 = 0$.

ძირითადი I' პირობები წყვეტილი ამონახსნებისათვის ასე გამოისახება: $x^2 y' = 0$, $x^2\bar{y}' = 0$.

მაშასადამე, წყვეტილი ექსტრემალი Ox ღერძის $y = a$, $y = b$ პარალელების ორი მონაკვეთისაგან შედგება და მისი გადატეხის წერტილებია $R_0(o, a)$, $\bar{R}_0(o, b)$.

უწყვეტი მისაღები მრუდისათვის ვარდნა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წყვეტილი ექსტრემალის ორი წერტილის, სახელდობრ, $K(-\varepsilon, a)$,

[1] ეს პირობა ეკუთვნის ბ-ნ ვ ე ს ი ო ს და მას ჩვენ ვ ე ს ი ო ს პირობას ვუწოდებთ.

$\overline{K}(\varepsilon, b)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი. მართლაც, I ინტეგრალი ამ მონაკვეთზე ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x^2\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{6}\,\varepsilon,$$

ეს გამოსახვა კი ნულისაკენ მიისწრაფვის.

უფრო მეტიც, შეიძლება ადვილად დავრწმუნდეთ იმაში, რომ (6) ან (B) პირობა შესრულებულია მკაცრად.

8. იმის მიხედვით, რაც ნათქვამი იყო ($n^0.2^{bis}$)-ის ბოლოში, ჩვენ მივიღებთ, რომ ჩვეულებრივი მინიმუმის აუცილებელი პირობები შესრულებულია:

1. ლეჟანდრისა და იაკობის პირობები P_1R_0 და $\overline{R_0}\,P_2$ მრუდებისათვის მკაცრი სახით:

$$f_{y'^2} > 0, \qquad \overline{f}_{y'^2} > 0,$$
$$x'_0 < x_1 < x_0, \qquad x_0 < x_2 < \overline{x}'_0$$

სადაც x'_0 და $\overline{x}'_0$ არის R_0 და $\overline{R_0}$ წერტილების შეუღლებულ R'_0 და $\overline{R}'_0$ წერტილთა აბსცისები P_1R_0 და $\overline{R_0}P_2$ რკალებზე შესაბამისად.

2. ვაიერშტრასის პირობები იმავე რკალთათვის

$$E(x, y_0(x), y'_0(x), \widetilde{p}) \geqq 0, \quad E(x, \overline{y}_0(x), \overline{y}'_0(x), \widetilde{p}) \geqq 0.$$

დავუშვათ ამ უტოლობებში $x = x_0$. მაშინ, ორი უკანასკნელი განტოლების საფუძველზე I განტოლებათაგან გვექნება შემდეგი:

$$f(x_0, \overline{y}_0, \widetilde{p}) \geqq f(x_0, y_0, y'_0), \qquad f(x_0, \overline{y}_0, \widetilde{p}) \geqq f(x_0, \overline{y}_0, \overline{y}'_0).$$

ამგვარად, მინიმუმისათვის აუცილებელია, რომ $f(x_0, y_0, \widetilde{p})$ და $f(x_0, \overline{y}_0, \widetilde{p})$ ფუნქციებს გააჩნდეთ აბსოლუტური მინიმუმი, როდესაც $\widetilde{p} = y'_0$, $\widetilde{p} = \overline{y}'_0$, ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ მოვძებნეთ (B_1) პირობები y_k სიდიდის ორი კერძო მნიშვნელობისათვის $y_k = y_0$, $y_k = \overline{y}_0$.

9. უწყვეტ წირთა ორი ველი. ზემოთქმულის მიხედვით ჩვენ მივდივართ იქამდე, რომ უნდა გავარჩიოთ შედარების მისაღებ მრუდთა ორი ველი — უწყვეტ მრუდთა ველი და ველი წყვეტილი მრუდებისა. ესაა:

1. ველი უწყვეტი მრუდებისა, რომლებიც მიისწრაფვიან შედარების წყვეტილი მრუდებისაკენ.

2. ველი უწყვეტ მრუდებისა, რომლებიც მიისწრაფვიან წყვეტილი ექსტრემალისაკენ (მიახლოების მრუდები).

ეს ორი ველი შესაბამად ასე აღვნიშნოთ F_1 და F_2, ხოლო F_0 იყოს ველი ანალოგიური წყვეტილი მრუდებისა.

იმ პირობების მიხედვით, რომლებსაც მივიღებთ, თუ პირველ ვარიაციას ნულს გავუტოლებთ, F_1 და F_2 ველები ერთსა და იმავე შედეგს გვაძლევენ. ესაა I ძირითადი განტოლებანი.

მაგრამ F_2 ველმა ჩვენ მოგვცა კიდევ სხვა პირობაც, სახელდობრ, (6) უტოლობა.

ამგვარად ვხედავთ, რომ დასმული ამოცანის ამოხსნაში ამ ორი ველის როლი ანალოგიურია სუსტი და მძლავრი ვარიაციების ველებისა ჩვეულებრივი ამოცანისათვის.

დავუერთოთ ახლა F_1 და F_2 ველებს F_0 ველი. მაშინ ზემოაღნიშნული გარემოება შემდეგი სახით ჩამოყალიბდება:

იმისათვის, რომ მინიმუმი განხორციელდეს F_2+F_0 ველში, იგი უნდა განხორციელდეს F_1+F_0 ველში.

ქვევით ჩვენ უწინარეს ყოვლისა შევისწავლით მინიმუმის პირობებს სწორედ ამ უკანასკნელ ველში.

B. მინიმუმის სხვა აუცილებელი პირობები. ძირითად *I* პირობათა მნიშვნელობა

10. განვაგრძოთ P_1R_0 ექსტრემალი R_0 წერტილის მარჯვნივ, ხოლო $\overline{R}_0 P_2$ ექსტრემალი $\overline{R}_0$ წერტილის მარცხნივ. ვთქვათ X და $\overline{X}$ საერთო x აბსცისებიანი ორი წერტილია ამ მრუდებზე და x შემდეგ პირობას აკმაყოფილებს:

$$|x-x_0|<\rho.$$

განვიხილოთ $P_1X\overline{X}P_2$ მრუდი (ნახ. 5), როგორც შედარების ერთ-ერთი მრუდი. I ინტეგრალი ამ მრუდზე x აბსცისის ფუნქციაა:

$$I(x)=\int_{x_1}^{x} f(x, y_0(x), y'_0(x))\,dx+\int_{x}^{x_2} f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x))\,dx.$$

$I(x)$ ფუნქციამ თავისი უმცირესი მნიშვნელობა უნდა მიიღოს $x=x_0$ წერტილზე და, მაშასადამე, უნდა გვქონდეს შემდეგი დამოკიდებულებანი: $I'(x_0)=0$, $I'(x_0)\geqq 0$. მაგრამ $I'(x)$ ასე ჩაიწერება:

$$I'(x)=f(x, y_0(x), y'_0(x))-f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)).$$

I პირობების მიხედვით $I'(x_0)=0$ ტოლობა შესრულებულია. მეორე რიგის $I''(x_0)$ წარმოებულების მისაღებად საკმარისია გავაწარმოოთ უკანასკნელი განტოლება, რაც მოგვცემს გამოსახვას:

$$I''(x)=f_x+y'_0(x)f_y+y''_0(x)f_{y'}-\bar{f}_x-\bar{y}'_0(x)\bar{f}_y-\bar{y}''_0(x)\bar{f}_{y'}.$$

ვთქვათ ახლა $x=x_0$, მაშინ I პირობების გამო მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$I''(x_0)=f_x+y'_0f_y-\bar{f}_x-\bar{y}'_0\bar{f}_y.$$

აქედან შემდეგი პირობა მიიღება:

$$f_x-y'_0f_y-\bar{f}_x-\bar{y}'_0\bar{f}_y\geqq 0, \qquad \text{(II)}$$

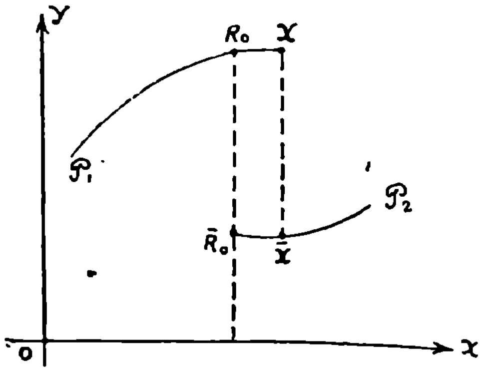
რომელსაც წყვეტილი ექსტრემალი უნდა აკმაყოფილებდეს გადატეხის წერტილში.

11. I განტოლებებიდან ორი უკანასკნელი განტოლება, ანდა I' პირობები გამონაკლის შემთხვევაში, სახელდობრ, განტოლებები

$$f_{y'}=0, \quad \bar{f}_{y'}=0$$

იმის მაჩვენებელია, რომ $R_0\overline{R_0}$ წირი ტრანსვერსალურად ჰკვეთს, ერთი მხრივ, E_0 ექსტრემალის P_1R_0 შტოს და, მეორე მხრივ, R_0P_2 შტოს, მაგრამ $R_0\overline{R_0}$ წრფე P_1R_0 და $\overline{R_0}P_2$ წირთა მხები არ არის და, მაშასადამე, ტრანსვერსალთა

ცნობილი თეორემის[1] საფუძველზე, ამ წრფის ყოველ M წერტილზე R_0 წერტილის მახლობლობაში შეიძლება ერთადერთი ექსტრემალის გატარება, რომელიც P_1R_0 წირის მახლობლობაშია და $R_0\overline{R_0}$ წირის ტრანსვერსალია M წერტილში. სწორედ ამ ექსტრემალთა ერთობლიობა მოცემულ P_1R_0 ექსტრემალთან ერთად შეადგენს წირთა ერთ პარამეტრიან ოჯახს.



ნახ. 5

ვთქვათ ამ ოჯახის განტოლება შემდეგია

$$y = \psi(x, a), \tag{a}$$

ხოლო a პარამეტრის მნიშვნელობა $a = a_0$ შეესაბამება P_1R_0 ექსტრემალს. მეორე მხრივ, $R_0\overline{R_0}$ წრფეზე გვაქვს ტოლობა $x=x_0$ და, მაშასადამე, შესრულდება ტოლობა:

$$f_{y'}(x_0, \psi(x_0, a), \psi_x(x_0, a)) = 0.$$

ვთქვათ X_0 წარმოადგენს (a) ოჯახის ფოკუსს P_1R_0 შტოზე და $x_1=r_0$ შესაბამი აბსცისია. მაშინ, ფოკუსების ცნობილი თეორემის თანახმად, მინიმუმის შემდეგ აუცილებელ პირობას მივიღებთ:

$$x_1 \geqq r_0. \tag{7}$$

გავაწარმოოთ ამის წინა იგივეობა. გვექნება ტოლობა:

$$f_{y'y}\,\psi_a(x_0, a) + f_{y'^2}\,\psi_{ax}(x_0, a) = 0. \tag{8}$$

იაკობის განტოლების ამონახსნი, რომლის ფესვიცაა x_0 ისე აღვნიშნოთ $\Delta(x, x_0)$. მაშინ გვექნება:

$$\psi_a(x, a_0) = C\Delta(x, r_0),\quad \psi_{ax}(x, a_0) = C\Delta_x(x, r_0).$$

თუ ახლა (8) განტოლებაში ჩავსვით $a=a_0$, ორი უკანასკნელი განტოლების გამო შემდეგი გამოსახვა დაიწერება:

$$f_{y'y}\,\Delta(x_0, r_0) + f_{y'^2}\,\Delta_x(x_0, r_0) = 0.$$

ასეთივე მსჯელობის საფუძველზე მივიღებთ, რომ თუ $\overline{X_0}$ წარმოადგენს $R_0\overline{R_0}$ წრფის ფოკუსს $\overline{R_0}P_2$ შტოზე და $\bar{r}_0$ მისი აბსცისია, ეს უკანასკნელი წინა განტოლების ანალოგიურ შემდეგ განტოლებას აკმაყოფილებს:

$$\bar{f}_{y'y}\overline{\Delta}(x_0, \bar{r}_0) + \bar{f}_{y'^2}\,\Delta_x(x_0, \bar{r}_0) = 0,$$

ხოლო P_2 წერტილის x_2 აბსცისისათვის შესრულებულია ასეთი უტოლობა

$$x_2 \leqq \bar{r}_0. \tag{$\overline{7}$}$$

მაგრამ ადვილი შესამჩნევია, რომ R'_0 და R_0 წერტილებს შორის მხოლოდ ერთი ფოკუსი გვაქვს, რაც იმას ნიშნავს რომ განტოლებას:

$$f_{y'y}\,\Delta(x, x_0) + f_{y'^2}\,\Delta_x(x, x_0) = 0$$

ერთადერთი $x = r_0$ ფესვი გააჩნია შემდეგ შუალედში $x'_0 \leqq x \leqq x_0$. მსგავსივე დასკვნა მიიღება ასეთი განტოლებისათვისაც:

$$\bar{f}_{y'y}\overline{\Delta}(x, x_0) + \bar{f}_{y'^2}\,\overline{\Delta}_x(x, x_0) = 0.$$

---

[1] Bolza, Vorlesungen, გვ. 322.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია:

$$U(x) = f_{y'y}(x_0, y_0, y'_0)\,\Delta(x, x_0) + f_{y'}^{\prime 2}(x_0, y_0, y'_0)\,\Delta_x(x, x_0) \tag{9}$$

ინარჩუნებს ერთსა და იმავე ნიშანს $r_0 \leqq x \leqq x_0$ შუალედში. ასეთსავე გარე-მოებას აქვს ადგილი $x_0 \leqq x \leqq \bar{r}_0$ შუალედში შემდეგი ფუნქციისათვის:

$$\overline{U}(x) = f_{y'y}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0)\,\overline{\Delta}(x, x_0) + f_{y'^2}(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0)\overline{\Delta}_x(x, x_0) \tag{$\overline{9}$}$$

11^{bis}. $X_0, \overline{X}_0$ წერტილები შეადგენენ წყვეტილი E_0 ექსტრემალის ფოკუს-თა ერთადერთ წყვილს გამონაკლისი შემთხვევისათვის.

ამგვარად, ამ (n^0)-ში ჩატარებულმა მსჯელობამ ჩვენ მოგვცა, ერთი მხრივ, P_1, P_2 ბოლოებისათვის მინიმუმის ორი აუცილებელი პირობა ზოგად შემ-თხვევაში და, მეორე მხრივ, ფოკუსების სრული თეორია გამონაკლისი შემ-თხვევისათვის.

ახლა შეგვიძლია საკმარისი პირობების მოძებნა გამონაკლისი შემთხვე-ვისათვის. მართლაც, როდესაც (7) და $(\overline{7})$ პირობები მკაცრად არის შესრუ-ლებული, წყვეტილი E_0 ექსტრემალი ყოველთვის შეგვიძლია მოვაყოლოთ იმ წყვეტილ ექსტრემალთა ველში, რომელთა გადატეხის წერტილები $x = x_0$ წრფეზეა მოთავსებული. ამ ექსტრემალთა ორი შტო ერთმანეთთან არ არის დაკავშირებული. ესაა ორი სხვადასხვა ჯგუფი უწყვეტი ექსტრემალებისა, რომლებიც $x = x_0$ წრფეს ტრანსვერსალურად ჰკვეთენ. მაშასადამე, ადგილი აქვს ვაიერშტრასის თეორემას და შეგვიძლია შემდეგი ტოლობა დავწეროთ:

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}')\,dx.$$

ამიტომ გამონაკლისი შემთხვევისათვის საკმარისი პირო-ბა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

ΔI არსებითად დადებითია, როდესაც ადგილი აქვს

$$E(x, y, p(x, y), \tilde{p}) > 0$$

უტოლობას ველის ყოველი წერტილისა და $\tilde{p}$ პარამეტრის ყოველი p-საგან განსხვავებული მნიშვნელობისათვის.

ამგვარად, E_0 ველში მინიმუმის პრობლემა გამონაკლისი შემთხვევისა-თვის ამოხსნილია. ახლა მივმართოთ ზოგად შემთხვევას.

12. ტრანსვერსალობის ცნების გამოყენებით ადვილად შეიძლება შემ-დეგი ამოცანის ამოხსნის ჩამოყალიბება:

საძიებელია ორ მოცემულ P_1 და P_2 წერტილზე გამავალი წყვეტილი ექსტრემალი.

განვიხილოთ y ღერძის პარალელური იმ $x = \bar{x}_0$ წრფეების $\mathfrak{N}$ ოჯახი, რომლებიც გადიან x_1 და x_2 წერტილებს შორის მისაღებ $\bar{x}_0$ აბსცისიან წერ-ტილებზე. გავატაროთ P_1 და P_2 წერტილებზე ექსტრემალები, რომლებიც ჩვენს წრფეებს ტრანსვერსალურად ჰკვეთენ.

ერთისა და იმავე $x = \bar{x}_0$ წირის ორი ტრანსვერსალის სისტემა ჰქმნის წყვეტილ მისაღებ მრუდს. ახლა მოვძებნოთ ამ ოჯახში ისეთი წყვეტილი მრუ-

დი, რომ f ფუნქცია უწყვეტი იყოს ამ მრუდზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ დასმულ ამოცანას საზოგადოდ აქვს წყვეტილი ამონახსნები, რადგან ჩვენ გვაქვს ფაქტიურად ხუთი განტოლება ხუთი ცვლადით (n^0.20). თუ ასეთი მრუდი არსებობს, იგი წარმოადგენს წყვეტილ ამონახსნს. თუ იგი არ არსებობს, წყვეტილი ამონახსნები შეუძლებელია.

C. ფოკუსთა თეორია

13. უწინარეს ყოვლისა ისმის შემდეგი საკითხი: *წერტილების რაიმე ახალი წყვილი $R(x,y)$, $\overline{R}(x,\bar{y})$, რომლებიც $R_0(x_0,y_0)$, $\overline{R}_0(x_0,\bar{y}_0)$ წერტილების მახლობელია, რა პირობებში შეიძლება იყოს წყვეტილი ამონახსნის გადატეხის წერტილები?*

ამ ორ წერტილში ერთდროულად უნდა შესრულდეს შემდეგი განტოლებანი:

$$\begin{aligned} f(x,\bar{y},\bar{y}')-f(x,y,y')&=0,\\ f_{y'}(x,y,y')&=0,\\ f_{y'}(x,\bar{y},\bar{y}')&=0, \end{aligned} \qquad (I')$$

სადაც y' და $\bar{y}'$ ახალ მიმართულებათა წყვილს წარმოადგენს. აქ ჩვენ გვაქვს სამი განტოლების სისტემა ხუთი ცვლადით და, მაშასადამე, ამ ცვლადთა შორის ორი ნებისმიერია. ვთქვათ, ესენია R წერტილის x, y კოორდინატები. ჩვენი განტოლებები შესრულებული იქნება უცნობთა მნიშვნელობების შემდეგი სისტემისათვის:

$$x=x_0,\ y=y_0,\ \bar{y}=\bar{y}_0,\ y'=y'_0,\ \bar{y}'=\bar{y}'_0$$

და ამიტომ მათი საშუალებით მოძებნილი იქნება გადატეხის მეორე $\overline{R}$ წერტილიც და ახალ მიმართულებათა წყვილიც, თუ აღებული სისტემისათვის იაკობიანი:

$$I=\frac{\partial(\bar{f}-f,f_{y'},\bar{f}_{y'})}{\partial(\bar{y},y',\bar{y}')}$$

ნულისაგან განსხვავებულია. თუ I_0 ამისი მნიშვნელობაა აღებული სისტემისათვის, მაშინ გვექნება გამოსახვა:

$$I_0=\left|\begin{matrix} \bar{f}_y, & 0, & \bar{f}_{y'y}\\ -f_{y'}, & f_{y'^2}, & 0\\ \bar{f}_{y'}, & 0, & \bar{f}_{y'^2} \end{matrix}\right|_{\substack{x=x_0,\quad y=y_0,\quad \bar{y}=\bar{y}_0,\\ y'=y'_0,\quad \bar{y}'=\bar{y}'_0.}}$$

მაგრამ

$$(f_{y'})_0=0,\qquad (\bar{f}_{y'})_0=0$$

და ამიტომ:

$$I_0=f_y(x_0,\bar{y}_0,\bar{y}'_0)\,f_{y'^2}\bar{f}_{y'^2}.$$

ახლა თუ მხედველობაში მივიღებთ ლეჟანდრის პირობას, გვექნება ასეთი შედეგი:

იმისათვის, რომ $\bar{y}, y', \bar{y}'$ უცნობთა მოძებნა მხოლოდ ცალსახად შეიძლებოდეს, უნდა შესრულდეს უტოლობა:

$$f_y(x_0,\bar{y}_0,\bar{y}'_0)\neq 0.$$

ახლა, თუ ჩვენ ავიღებთ ნებისმიერად $\bar{R}$ წერტილის კოორდინატებს, მივიღებთ ზემომოყვანილის ანალოგიურ პირობას:

$$f_y(x_0, y_0, y'_0) \neq 0.$$

შემდეგში დავინახავთ, რომ მინიმუმის თვალსაზრისით ეს ორი პირობა იგივურია და მჭიდროდაა დაკავშირებული II პირობასთან.

ახლა ავიღოთ საწინააღმდეგო შემთხვევა, როდესაც (I') განტოლებებიდან ასეთი ტოლობები გამომდინარეობს:

$$(f_y)_0 = 0, \quad (\bar{f}_y)_0 = 0. \tag{10}$$

მივიღოთ საზოგადოდ, რომ წერტილთა $R, \bar{R}$ წყვილი გადაადგილდა საწყისი $R_0, \bar{R}_0$ მდებარეობიდან. მაშინ (I') განტოლებათაგან პირველი მოგვცემს შემდეგს:

$$(\bar{f}_x)_0 + (\bar{f}_y)_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - (f_x)_0 - (f_y)_0 \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

განსახილავ შემთხვევაში ეს ფორმულა შემდეგზე დაიყვანება:

$$f_x(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) - f_x(x_0, y_0, y'_0) = 0.$$

ეს არის აუცილებელი პირობა იმისათვის, რომ (10) შემთხვევაში არსებობდეს $R_0, \bar{R}_0$ წერტილთა მახლობლობაში გადატეხის $R, \bar{R}$ წერტილები და ახალ მიმართულებათა წყვილი. მაგრამ თავისთავად ცხადია, რომ თვით $R, \bar{R}$ წერტილებს შორის შესაბამობა აქ ცალსახა არ არის და უფრო მეტიც, იგი შეიძლება ნებისმიერიც იყოს.

ამგვარად ვხედავთ, რომ ზოგად შემთხვევაში f_y ფუნქცია განსაზღვრავს დასმული ამოცანის ხასიათს (n^0.4), სახელდობრ:

$R_0, \bar{R}_0$ წ ე რ ტ ი ლ თ ა მ ა ხ ლ ო ბ ლ ო ბ ა შ ი გ ა დ ა ტ ე ხ ი ს $R, \bar{R}$ წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ს შ ო რ ი ს შ ე ს ა ბ ა მ ო ბ ა ც ა ლ ს ა ხ ა ა, რ ო დ ე ს ა ც $(f_y)_0 \neq 0$ ა ნ $(\bar{f}_y)_0 \neq 0$.

ე ს შ ე ს ა ბ ა მ ო ბ ა ც ა ლ ს ა ხ ა ა რ ა რ ი ს დ ა უ ფ რ ო მ ე ტ ი ც — ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ც შ ე ი ძ ლ ე ბ ა ი ყ ო ს, რ ო დ ე ს ა ც $(f_y)_0 = (\bar{f}_y)_0 = 0$[1].

პირველ შემთხვევაში ჩვენ ამოცანას სავსებით ამოვხსნით. მეორე შემთხვევა ამის კერძო შემთხვევაა, რასაც შემდეგში დავინახავთ.

ამგვარად ქვევით ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ:

$$f_y(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) \neq 0. \tag{11}$$

დავუბრუნდეთ ახლა (I') განტოლებებს. ვთქვათ მათი ამოხსნები შემდეგია:

$$\bar{y} = F(x, y), \quad y' = p(x, y), \quad \bar{y}' = \bar{p}(x, y). \tag{12}$$

ეს სამი ფუნქცია და მათი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები ცალსახა და უწყვეტი ფუნქციებია, სანამ R წერტილი რჩება იმ მცირე წრის შიგნით, რომლის ცენტრია R_0. როდესაც $x = x_0$, $y = y_0$, გვაქვს შემდეგი:

$$\bar{y}_0 = F(x_0, y_0), \quad y'_0 = p(x_0, y_0), \quad \bar{y}'_0 = \bar{p}(x_0, y_0).$$

მაშასადამე, როდესაც R წერტილი შემოხაზავს R_0 წერტილზე გამავალ Γ მრუდს[2], შესაბამისი $\bar{R}$ მოხაზავს მეორე $\bar{\Gamma}$ მრუდს, რომელიც $\bar{R}_0$ წერტილზე გაივლის.

[1] ადვილად შესამჩნევია ის კავშირი, რომელიც არსებობს ამ დასკვნასა და ბ-ნ ვ ე ს ი ო ს (B_1) პირობას შორის.

[2] ეს მრუდი ნებისმიერია, რადგან ლეჟანდრის პირობა შესრულებულია მკაცრი სახით.

14. როგორც აქამდე, P_1 და P_2 იყოს წყვეტილი E_0 ექსტრემალის ბოლოები, რომლებიც X_0 და $\overline{X}_0$ წერტილებისაგან განსხვავდებიან (n^0.11). შემოვაკრათ P_1R_0 შტოს P_1 წერტილზე გამავალ ექსტრემალთა ოჯახი. ვთქვათ ამ ოჯახის განტოლება შემდეგია:

$$y = y(x, \alpha), \tag{α}$$

ხოლო α_0 არის α-ს მნიშვნელობა P_1R_0 შტოსათვის.

გადატეხის R წერტილების გეომეტრიული ადგილი (α) ოჯახში შემდეგი განტოლებით განისაზღვრება:

$$f_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) = 0. \tag{13}$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს მნიშვნელობათა შემდეგი სისტემა:

$$x = x_0, \quad \alpha = \alpha_0.$$

მარცხენა მხარის წარმოებული α ცვლადის მიმართ შემდეგია:

$$D = f_{y'y}\, y'_{\alpha} + f_{y'y'}\, y'_{\alpha x}.$$

ანუ (9) ფორმულის საფუძველზე:

$$D_0 = [D]_{x=x_0,\ \alpha=\alpha_0} = CU(x_1).$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ შედეგს, რომელიც (11)-დან გამომდინარეობს, გვექნება:

$$D_0 \neq 0$$

და, მაშასადამე, (13) განტოლება ამოხსნადია α სიდიდის მიმართ $x = x_0$, $\alpha = \alpha_0$ წერტილის მახლობლობაში. ეს ამონახსნი ასე აღვნიშნოთ:

$$\alpha = \alpha(x).$$

ახლა თუ ამ მნიშვნელობას (α) ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ ზემოხსენებული გეომეტრიული ადგილის შემდეგ განტოლებას:

$$y = y(x, \alpha(x)) = \gamma(x). \tag{Γ}$$

ზემოთქმულის მიხედვით ეს მრუდი განსხვავდება $x = x_0$ წრფისაგან და, მაშასადამე, შესაბამისი $\overline{\Gamma}$ მრუდიც, რომელსაც ქვევით მივიღებთ, აგრეთვე იმავე წრფისაგან განსხვავებულია[1].

თუ y სიდიდის ამ გამოსახვას (12)-ის პირველ ფორმულაში ჩავსვამთ, მივიღებთ იმ $\overline{\Gamma}$ მრუდის განტოლებას, რომელსაც შესაბამისი $\overline{R}$ წერტილი მოხაზავს:

$$y = F(x, \gamma(x)) = \overline{\gamma}(x) \tag{$\overline{\Gamma}$}$$

ახალ მიმართულებათა წყვილი შემდეგი განტოლებების საშუალებით განისაზღვრება:

$$y' = p(x, \gamma(x)), \quad \overline{y}' = \widetilde{p}(x, \overline{\gamma}(x)).$$

$\overline{\Gamma}$ მრუდის წერტილებზე გავატაროთ ისეთი ექსტრემალური წირები, რომელთა საკუთხო კოეფიციენტებია $\overline{p}(x, \overline{\gamma}(x))$. ასეთი ექსტრემალების სიმრავლე $\overline{R}_0P_2$ რკალთან ერთად შეადგენს ოჯახს, რომელსაც ერთადერთი პა-

[1] თანამთხვევას მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც (α) ოჯახი X_0 წერტილზე გადის.

-რამეტრი გააჩნია. ვთქვათ ამ ოჯახის განტოლება შემდეგია:

$$y = \bar{y}(x, \overline{\alpha}), \tag{$\overline{\alpha}$}$$

ხოლო $\overline{\alpha}$ სიდიდის მნიშვნელობა $\overline{\Gamma}$ მრუდზე ასე გამოისახება:

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x).$$

ამგვარად, ჩვენ შემდეგ იგივეობებთან გვაქვს საქმე:

$$\bar{y} = \bar{y}(x, \overline{\alpha}(x)) = \overline{\gamma}(x), \quad \bar{y}' = \bar{p}(x, \overline{\gamma}(x)) = \bar{y}_x(x, \overline{\alpha}(x)).$$

x ცვლადის $y, \bar{y}, y', \bar{y}'$ ფუნქციების ყველა მნიშვნელობა (I') განტოლებებს იგივურად აკმაყოფილებს.

ამგვარად, ასე აგებულ Γ და $\overline{\Gamma}$ მრუდთათვის შემდეგი სამი იგივეობა გვექნება:

$$\begin{aligned} f(x, y(x, \alpha(x)), y_x(x, \alpha(x))) - f(x, \bar{y}(x, \overline{\alpha}(x)), \bar{y}_x(x, \overline{\alpha}(x))) &= 0, \\ f_{y'}(x, y(x, \alpha(x)), y_x(x, \alpha(x))) &= 0, \\ f_{y'}(x, \bar{y}(x, \overline{\alpha}(x)), \bar{y}_x(x, \overline{\alpha}(x))) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Γ და $\overline{\Gamma}$ წირებს, რომელთათვისაც ეს სამი ტოლობა შესრულებულია *შეუღლებული წირები* დავარქვათ. (α) ოჯახის ფოკუსი P_1R_0 რკალზე იყოს $P_1(x_1)$, შესაბამისი $(\overline{\alpha})$ ოჯახის ფოკუსი $\overline{R}_0P_2$ რკალზე ასე აღვნიშნოთ $P_1^*(x_1^*)$. ამ ორ წერტილს, რომლებიც Γ და $\overline{\Gamma}$ შეუღლებულ წირებს შეესაბამებიან, *შეუღლებულ* წერტილებს ვუწოდებთ.

უწინარეს ყოვლისა საჭიროა იმ დამოკიდებულების მოძებნა, რომელიც P_1 და P^*_1 წერტილებს ერთმანეთთან აკავშირებს.

15. ვთქვათ Γ და $\overline{\Gamma}$ შეუღლებული წირებია. მაშინ შესაბამისი $\alpha(x)$ და $\overline{\alpha}(x)$ ფუნქციები (14) განტოლებებს იგივურად აკმაყოფილებენ. მაგრამ ამ შემთხვევაში ფუნქციონალური დეტერმინანტი:

$$\frac{\partial(f - \bar{f}, f_{y'}, \bar{f}_{y'})}{\partial(x, \alpha, \overline{\alpha})},$$

როდესაც $\alpha = \alpha(x)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x)$, აგრეთვე იგივურად ნული ხდება ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(f - \bar{f}), & \dfrac{\partial}{\partial \alpha}(f - \bar{f}), & \dfrac{\partial}{\partial \overline{\alpha}}(f - \bar{f}) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} f_{y'}, & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} f_{y'}, & \dfrac{\partial}{\partial \overline{\alpha}} f_{y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \bar{f}_{y'}, & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \bar{f}_{y'}, & \dfrac{\partial}{\partial \overline{\alpha}} \bar{f}_{y'} \end{matrix} \right|_{\alpha = \alpha(x),\ \overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x)} = 0.$$

თუ ამ გამოსახვაში გამოვთვლით წარმოებულებს, გვექნება შემდეგი:

$$\left| \begin{matrix} f_x + y_x f_y - \bar{f}_x - \bar{y}_x \bar{f}_y, & f_y y_\alpha, & -\bar{f}_y \bar{y}_{\overline{\alpha}} \\ f_{y'}, & f_{yy'} y_\alpha + f_{y'^2} y_{\alpha x}, & 0 \\ \bar{f}_{y'}, & 0, & \bar{f}_{yy'} \bar{y}_{\overline{\alpha}} + \bar{f}_{y'^2} \bar{y}_{\overline{\alpha} x} \end{matrix} \right| = 0,$$

საიდანაც მიიღება ტოლობა:

$$(f_x + y_x f_y - \bar{f}_x - \bar{y}_x \bar{f}_y)(f_{yy'} y_\alpha + f_{y'^2} y_{x\alpha})(\bar{f}_{yy'} \bar{y}_{\bar{\alpha}} + \bar{f}_{y'^2} \bar{y}_{x\bar{\alpha}}) -$$
$$-(\bar{f}_{yy'} \bar{y}_{\bar{\alpha}} + \bar{f}_{y'^2} \bar{y}_{\bar{\alpha}x}) f_y^2 y_\alpha + (f_{yy'} y_\alpha + f_{y'^2} y_{\alpha x}) \bar{f}^2_y \bar{y}_{\bar{\alpha}}) = 0,$$

რაც ასე გადაიწერება:

$$\{[(f_x + y_x f_y) f_{yy'} - f^2_y] y_\alpha + (f_x + y_x f_y) f_{y'^2} y_{\alpha x}\} (\bar{f}_{yy'} \bar{y}_{\bar{\alpha}} + \bar{f}_{y'^2} \bar{y}_{x\bar{\alpha}}) -$$
$$-\{[(\bar{f}_x + \bar{y}_x \bar{f}_y) \bar{f}_{yy'} - \bar{f}^2_y] \bar{y}_{\bar{\alpha}} + (\bar{f}_x + \bar{y}_x \bar{f}_y) \bar{f}_{y'^2} \bar{y}_{\bar{\alpha} x}\} (f_{yy'} y_\alpha + f_{y'^2} y_{x\alpha}) = 0. \quad (15)$$

მაგრამ ჩვენ გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$y_\alpha(x_0, \alpha_0) = C\Delta(x_0, x_1), \quad \bar{y}_{\bar{\alpha}}(x_0, \bar{\alpha}_0) = \bar{C}\bar{\Delta}(x_0, x^*_1),$$
$$y_{\alpha x}(x_0, \alpha_0) = C\Delta_x(x_0, x_1), \quad \bar{y}_{\bar{\alpha}x}(x_0, \bar{\alpha}_0) = \bar{C}\bar{\Delta}_x(x_0, x_1^*), \qquad \Delta))$$

სადაც Δ და $\bar{\Delta}$ იმავე აზრით იხმარება, როგორც (n^0.11)-ში.

თუ (15) განტოლებებში შევიტანთ $\alpha = \alpha_0$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0$, $x = x_0$ მნიშვნელობებს შემდეგ გამოსახვას მივიღებთ:

$$\{[(f_x + y'_0 f_y) f_{y'y} - f^2_y] \Delta(x_0, x_1) + (f_x + y'_0 f_y) f_{y'^2} \Delta_x(x_0, x_1)\} [\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) +$$
$$+ \bar{f}_{y'^2} \bar{\Delta}_x(x_0, x^*_1)] - \{[(\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'y} - \bar{f}_y^2)] \bar{\Delta}(x_0, x^*_1) + (\bar{f}_x +$$
$$+ \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'^2}] \bar{\Delta}_x(x_0, x^*_1)\} [f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'^2} \Delta_x(x_0, x_1)] = 0. \qquad (15')$$

იმის მიხედვით, რაც (n^0.11)-ში იყო ნათქვამი, იგივურად ნული არ არის შემდეგი გამოსახვა:

$$U(x_1)\,\bar{U}(x^*_1) = [f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'^2} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1)] [\bar{f}_{yy'} \bar{\Delta}(x_0, x^*_1) + \bar{f}_{y'^2} \bar{\Delta}_x(x_0, x_1)].$$

თუ (15′) განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ ამ გამოსახვაზე, იგი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{[(f_x + y'_0 f_y) f_{y'y} - f_y^2] \Delta(x_0, x_1) + (f_x + y'_0 f_y) f_{y'^2} \Delta_x(x_0, x_1)}{f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'^2} \Delta_x(x_0, x_1)} =$$
$$= \frac{[(\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'y} - \bar{f}^2_y] \bar{\Delta}(x_0, x_1^*) + (\bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y) \bar{f}_{y'^2} \bar{\Delta}_x(x_0, x^*_1)}{\bar{f}_{y'y} \bar{\Delta}(x_0, x^*_1) + \bar{f}_{y'^2} \bar{\Delta}_x(x_0, x^*_1)}. \qquad (16)$$

სწორედ ეს არის საძიებელი დამოკიდებულება, რომლითაც შეუღლებულ წერტილთა x_1 და x_1^* აბსცისები შებმულია ერთმანეთთან.

წინა განტოლებიდან საინტერესო დასკვნები მიიღება. როდესაც $f_y(x_0, y_0, y'_0) = 0$, ამ განტოლების მარცხენა მხარე მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს და, მაშასადამე, თუ ეს განტოლება შესრულებულია, მარჯვენა მხარეც მუდმივი იქნება; ეს კი მხოლოდ მაშინაა შესაძლებელი, როდესაც $\bar{f}_y(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0$. ამის გამო (16) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$f_x(x_0, y_0, y'_0) - \bar{f}_x(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0) = 0,$$

რაც უკვე (n^0.13)-ში მიღებული იყო. როგორც მაშინ დავინახეთ, ეს მახლობელი წყვეტილი ამოხსნების არსებობის აუცილებელი პირობაა აღებული შემთხვევისათვის. მეორე მხრივ, აღნიშნულ პირობაში არ შედის არც x_1 და არც x_1^*. მაშასადამე, განსახილავ შემთხვევაში, ე. ი., როდესაც $f_y(x_0, y_0, y'_0) = 0$, E_0 ექსტრემალის ორი ნებისმიერი წერტილი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც შეუღლებული წერტილები. ასეთ შემთხვევას ჩვენ უკუვაგდებთ (ფორმულა (11)) და შემდეგში მუდამ ვიგულისხმებთ, რომ შესრულებულია უტოლობანი:

$$f_y(x_0, y_0, y'_0) \neq 0, \quad \bar{f}_y(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}') \neq 0.$$

16. ახლა განვიხილოთ შემდეგი ინვარიანტი:

$$T = \frac{[(f_x + y'_0 f_y) f_{y'y} - f_y^2] \Delta(x_0, x_1) + (f_x + y'_0 f_y) f_{y'^2} \Delta_x (x_0, x_1)}{f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'^2} \Delta_x (x_0, x_1)}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს ინვარიანტი $\operatorname{tg}\varphi$ სიდიდეს წარმოადგენს, სადაც φ კუთხეა, რომელსაც x ღერძთან შეადგენს $x = x_0$ წერტილში შემდეგი მრუდის მხები:

$$y = f(x, y(x, \alpha(x)), y_x(x, \alpha(x))). \qquad (\lambda)$$

სავსებით ასევე ინვარიანტი:

$$\overline{T} = \frac{[(\bar f_x + \bar y'_0 \bar f_y) \bar f_{y'y} - \bar f_y^2] \overline{\Delta}(x_0, x^*_1) + (\bar f_x + \bar y'_0 \bar f_y) \bar f_{y'^2} \Delta_x(x_0, x^*_1)}{\bar f_{y'y} \overline{\Delta}(x_0, x^*_1) + \bar f_{y'^2} \overline{\Delta}_x (x_0, x^*_1)}$$

არის $\operatorname{tg}\overline{\varphi}$ სიდიდის ტოლი, სადაც $\overline{\varphi}$ კუთხეა, რომელსაც x ღერძთან შეადგენს $x = x_0$ წერტილში შემდეგი მრუდის მხები:

$$y = f(x, \bar y(x, \overline{\alpha}(x)), \bar y_x(x, \overline{\alpha}(x))). \qquad (\overline{\lambda})$$

ბოლოს (16) განტოლების მიხედვით დავასკვნით, რომ Γ და $\overline{\Gamma}$ მრუდები შეუღლებულია, თუ შესაბამი λ და $\overline{\lambda}$ მრუდები ერთმანეთს ეხებიან $x = x_0$ წერტილში.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ $T(x_1)$ ფუნქცია იზრდება x_1 ცვლადთან ერთად. მართლაც მისი წარმოებული ასე ჩაიწერება:

$$\frac{dT}{dx_1} = \frac{k^2 f^2_y f_{y'^2}(x_0, y_0 y'_0)}{[f_{y'y} \Delta(x_0, x_1) + f_{y'^2} \Delta_x (x_0, x_1)]^2},$$

სადაც k ნულისაგან განსხვავებულია. ლეჟანდრის პირობა გვაძლევს, რომ $\dfrac{dT}{dx_1} > 0$, და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

სავსებით ასეთივე გამოთვლა გვარწმუნებს, რომ $\overline{T}$ აგრეთვე იზრდება x_1^* ცვლადის ზრდასთან ერთად. მაშასადამე, x^*_1 წარმოადგენს x_1 ცვლადის ზრდად ფუნქციას:

$$x^*_1 = \Phi(x_1).$$

მაგრამ x'_0 და x_0 მნიშვნელობათათვის, რომლებიც R'_0 და R_0 წერტილებს შეესაბამებიან, $T(x_1)$ ფუნქცია ღებულობს ერთსა და იმავე $f_x + y'_0 f_y$ მნიშვნელობას. რაც შეეხება $\overline{T}(x^*_1)$ ფუნქციას, x_2 ცვლადის x_0 და $\bar x'_0$ მნიშვნელობათათვის, რომლებიც $\overline{R}_0$ და $\overline{R}'_0$ წერტილებს შეესაბამება, ეს ფუნქციაც ღებულობს ერთსა და იმავე $\bar f_x + \bar y'_0 \bar f_y$ მნიშვნელობას.

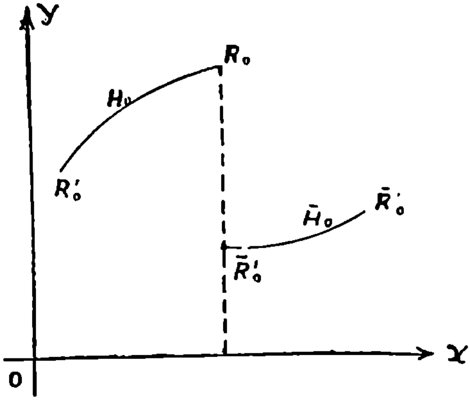
ვთქვათ $H_0(h_0)$ არის $R'_0 R_0$ რკალის ის წერტილი, რომლისთვისაც $T = \bar f_x + \bar y'_0 \bar f_y$. ამგვარად, H_0 და $\overline{R}_0$ წერტილები შეუღლებულია. ვთქვათ $\overline{H}_0(\bar h_0)$ არის $\overline{R}_0 \overline{R}'_0$ რკალის ის წერტილი, რომლისთვისაც $\overline{T} = f_x + y'_0 f_y$; ამნაირად, $\overline{H}_0(\bar h_0)$ და R_0 წერტილებიც შეუღლებული წერტილებია. მაგრამ x_1^* წარმოადგენს x_1 ცვლადის ზრდად ფუნქციას, მაშასადამე:

$$T(x_0) = \overline{T}(\bar h_0 - 0); \qquad T(x'_0) = \overline{T}(\bar h_0 + 0).$$

ეს ასეა $\overline{T}(x^*_1)$ ფუნქციისათვისაც, ე. ი.:

$$\overline{T}(x_0) = T(h_0 + 0), \ \overline{T}(\bar x'_0) = T(h_0 - 0).$$

ზემოთქმულის თანახმად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ P_1 გადაადგილდება R'_0H_0 რკალზე, მაშინ მისი შეუღლებული ფოკუსი მოძრაობს $\overline{H}_0\,\overline{R}'_0$ რკალზე და თუ P_1 მოხაზავს H_0R_0 რკალს, მისი შეუღლებული ფოკუსი აღწერს $\overline{R}_0\,\overline{H}_0$ რკალს (ნახ. 6).



ნახ. 6

ამნაირად ჩვენ ვხედავთ, რომ $\Phi(x_1)$ ფუნქცია წყვეტილია h_0 წერტილზე.

17. ახლა დავუშვათ, რომ P_2 წერტილი დაემთხვა P_1^* წერტილს, რომელიც მოცემული P_1 წერტილის შეუღლებულია. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ მაშინ წყვეტილი E_0 ამონახსნი, რომლის ბოლოებია P_1 და P_1^*, არ შეიძლება I ინტეგრალს მკაცრ მინიმუმს ანიჭებდეს.

ვთქვათ, Γ და $\overline{\Gamma}$ შეუღლებული წირებია შეუღლებული P_1 და P^*_1 წერტილების შესაბამისი.

ვთქვათ, ამას გარდა, განტოლება (n^0.14)-ში გარჩეულ ექსტრემალთა $(\overline{\alpha})$ ოჯახის მომვლებისა, რომელიც მოცემულ E_0 ექსტრემალს $P_2(P^*_1)$ წერტილში ეხება, შემდეგია:

$$y = g(x). \tag{E}$$

ავარჩიოთ ამ E მრუდზე ისეთი გეზი, რომ შესაბამისი მხების მიმართულება იგივე იყოს, რაც E_0 ექსტრემალის მხებს გააჩნია P_2 წერტილში. ამგვარად, მომვლებ წირზე გვექნება ტოლობა:

$$\overline{y}_x(x, \overline{\alpha}) = g'(x). \tag{17}$$

ახლა ავიღოთ თანატოლაბსცისიანი ორი $R(x, \gamma(x))$, $\overline{R}(x, \overline{\gamma}(x))$ წერტილი და (α) ოჯახის P_1R რკალს დავუმატოთ $(\overline{\alpha})$ ოჯახის $\overline{R}P$ რკალი, სადაც P წარმოადგენს ამ რკალისა და E მომვლები წირის თანახების წერტილს. (14) განტოლების მიხედვით ადვილად შევნიშნავთ, რომ ეს ორი რკალი ერთ მეზობელ წყვეტილ ამონახსნს წარმოადგენს. მაშასადამე, არსებობს წყვეტილ

ექსტრემალთა α და $\overline{\alpha}$ პარამეტრებიანი ოჯახი, რომელშიაც ამ პარამეტრთა კერძო α_0 და $\overline{\alpha_0}$ მნიშვნელობებისათვის შედის E_0 მრუდი.

განვიხილოთ ახლა I ინტეგრალი $L(P_1R\overline{R}P_mP_2)$ მრუდზე, რომელიც წყვეტილი ექსტრემალისა და E მომვლების P_mP_2 რკალისაგან შედგება. ცხადია, რომ ეს ინტეგრალი P_1R რკალზე წარმოადგენს R წერტილის კოორდინატების ჰამილტონის $W(x,y)$ ფუნქციას. რაც შეეხება $I_{\overline{R}P}$ და I_{PmP_2} ინტეგრალებს, ესენი შემდეგნაირად გამოისახებიან:

$$I_{\overline{R}P} = \int_x^{\xi} f(t, \overline{y}(t, \overline{\alpha}(x)), \overline{y}_t(t, \overline{\alpha}(x)))\, dt,$$

$$I_{PmP_2} = \int_{\xi}^{x_2} f(x, g(x), g'(x))\, dx,$$

სადაც ξ არის P წერტილის აბსცისი, იგი x ცვლადის უწყვეტი ფუნქციაა. მაგრამ გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \gamma'(x)\frac{\partial W}{\partial y} = f - y' f_{y'} - \gamma'(x) f_{y'},$$

$$\frac{dI_{\overline{R}P}}{dx} = -\overline{f} + \overline{y}'\overline{f}_{y'} + f(\xi, \overline{y}(\xi, \overline{\alpha}(x)), \overline{y}_t(\overline{\xi}\alpha(x)))\frac{d\xi}{dx},$$

$$\frac{dI_{PmP_2}}{dx} = -f(\xi, g(\xi)\, g'(\xi))\frac{d\xi}{dx}.$$

თუ ამ განტოლებებს წევრ-წევრად შევკრებთ და მხედველობაში მივიღებთ (14) და (17) ტოლობებს, გვექნება ტოლობა:

$$\frac{dI_L}{dx} = 0, \text{ ან } I_L = \text{const}.$$

ამგვარად, როდესაც $x = x_0$, მაშინ L მრუდი დაიყვანება E_0 მრუდზე და მაშასადამე:

$$I_L = I_{E_0},$$

რაც დასამტკიცებელი იყო.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $(\overline{\alpha})$ ოჯახის P_2 ან P_1^* ფოკუსი ჩვეულებრივია, ე. ი. რომ ამ ოჯახის ექსტრემალები არ გადიან P_2 წერტილზე. მაშინ მომვლების PmP_2 რკალი შეგვიძლია შევცვალოთ ექსტრემალური მრუდის რაიმე რკალით, რომელიც უკიდურეს P, P_2 წერტილებს აერთებს. $\overline{L}$ რკალი L მრუდისაგან ასეთნაირად მიღებული I ინტეგრალს უფრო მცირე მნიშვნელობას მიანიჭებს, ვიდრე E_0 მრუდი.

აქედან ჩანს, რომ E_0 ექსტრემალი უკვე მინიმუმს აღარ ანიჭებს I ინტეგრალს, როდესაც P_2 წერტილი P^*_1 წერტილს შემდეგ მდებარეობს. მაშასადამე, მინიმუმის აუცილებელ პირობას შემდეგი უტოლობა წარმოადგენს:

$$x_2 \leqq x^*_1. \qquad \text{(III}$$

ამისა და იმის გამო, რაც (n^0.15)-ში იყო ნათქვამი, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, როდესაც $f_y = \bar{f}_y = 0$, მაშინ I ინტეგრალს, საზოგადოდ, მკაცრი მინიმუმი არ გააჩნია.

ამას გარდა შემდეგ დასკვნასაც მივიღებთ:

18. თუ P_1 ს ა თ ა ვ ე R'_0 და H_0 წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ს შ ო რ ი ს ი მ ყ ო ფ ე ბ ა, I ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ს მ ი ნ ი მ უ მ ი ა რ გ ა ა ჩ ნ ი ა.

მართლაც, ჯერ ვთქვათ, რომ P_2 წერტილი განსხვავდება $\overline{R}_0$ წერტილისაგან. ამრიგად, H_0R_0 რკალის ყოველ P წერტილს, რომელიც H_0 წერტილთან საკმაოდ ახლოს იმყოფება, $\overline{R}_0\overline{H}_0$ რკალზე $\overline{R}_0$ წერტილის მახლობლობაში შეუღლებული წერტილი შეესაბამება. ამგვარად ორი შეუღლებული წერტილი მაინც არსებობს, რომლებიც E_0 ექსტრემალის P_1 და P_2 ბოლოებს შორის მოთავსდება და, მაშასადამე, შეიძლება დამტკიცება, რომ არსებობს მრუდი, რომელიც I ინტეგრალს კიდევ უფრო მცირე მნიშვნელობას მიანიჭებს, ვიდრე I_0 მნიშვნელობაა (ეს დამტკიცება იხ. შემდეგ პარაგრაფში (n^0.19)). ამავე ასკვნას მივიღებთ, თუ P_2 წერტილი $\overline{R}_0$ წერტილს დაემთხვა, რადგან მაშინ ავიღებთ ისევ H_0 წერტილს, რომლის შეუღლებული P_2 წერტილი მოთავსებული P_1 და P_2 ბოლოებს შორის.

საზოგადოდ, ზემოთქმული იმის მაჩვენებელია, რომ როდესაც $x_1 < h_0$, მინიმუმს ადგილი არა აქვს.

ამგვარად, შეგვიძლია შემდეგი თეორემა ჩამოვაყალიბოთ:

იმისათვის, რ ო მ E_0 მ რ უ დ მ ა I ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ს მ ი ნ ი მ უ მ ი მ ი ა ნ ი ჭ ო ს, ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი ა შ ე მ დ ე გ ი პ ი რ ო ბ ი ს შ ე ს რ უ ლ ე ბ ა:

$$x_1 \geqq h_0. \tag{IV}$$

მაგრამ, იმის მიხედვით, რაც (n^0.11)-ში ნათქვამი იყო, P_1 წერტილის x_1 აბსცისი ამას გარდა შემდეგ უტოლობას უნდა აკმაყოფილებდეს:

$$x_1 \geqq r_0. \tag{18}$$

ახლა საჭიროა იმის დამტკიცება, რომ ეს ორი უტოლობა ერთმანეთს არ ეწინააღმდეგება. განვიხილოთ ასეთი ფუნქცია:

$$\psi(x) = f_{y'y} + f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x_0, x)}{\Delta(x_0, x)}.$$

$\dfrac{\Delta_x(x_0, x)}{\Delta(x_0, x)}$ ფარდობა წარმოადგენს x ცვლადის ზრდად ფუნქციას და, მაშასადამე, ლეჟანდრის პირობის თანახმად ასეთივე იქნება $\psi(x)$ ფუნქციაც, მაგრამ

$$f_{y'y} + f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x_0, r_0)}{\Delta(x_0, r_0)} = 0.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ (IV) და (18) უტოლობანი ერთმანეთს არ ეწინააღმდეგებოდნენ, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\psi(h_0) \geqq 0$. (16) განტოლებიდან შემდეგი დასკვნა მიიღება:

$$\frac{[(f_x + y'_0 f_y) f_{y'y} - f_y^2] + (f_x + y'_0 f_y) f_{y'^2}\dfrac{\Delta_x(x_0, h_0)}{\Delta(x_0, h_0)}}{f_{y'y} + f_{y'^2}\dfrac{\Delta_x(x_0, h_0)}{\Delta(x_0, h_0)}} = \bar{f}_x + \bar{y}'_0 \bar{f}_y.$$

ეს ტოლობა შემდეგზე დაიყვანება:

$$\left(f_x + y'_0 f_y - \bar{f}'_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y\right)\left(f_{y'y} + f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x_0,h_0)}{\Delta(x_0,h_0)}\right) = f_{y'}^2 \qquad (19).$$

მაგრამ $f_y \neq 0$; თუ II უტოლობას ავიღებთ მკაცრი სახით, დავასკვნით, რომ

$$\psi(h_0) > 0,$$

ე. ი. (18) პირობა IV პირობის შედეგი არის.

ახლა ვთქვათ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f_{y'y} + f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x_0,h_0)}{\Delta(x_0,h_0)} = 0,$$

რაც შესაძლებელია მაშინ, როდესაც H_0 წერტილი X_0 წერტილის თანხვდენილია. მივიღებთ, რომ $f_y=0$, მაშინ (n^0.17)-ის თანახმად მკაცრ მინიმუმს ადგილი არა აქვს. შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ IV ტოლობა მხოლოდ მკაცრი სახით არის შესრულებული.

19. ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ IV პირობა შესრულებული არ არის, მაშინ არსებობს მრუდი, რომელიც I ინტეგრალს უფრო მცირე მნიშვნელობას მიანიჭებს, ვიდრე I_0 მნიშვნელობაა. ეს დამტკიცება დამყარებულია ΔI სხვაობის გამოთვლაზე შედარების მრუდთა სპეციალური ველისათვის.

შემოვაკრათ P_1R_0 შტოს ექსტრემალთა ოჯახი, რომლებიც P_1 წერტილზე გადიან. ვთქვათ ამ ოჯახის განტოლებაა:

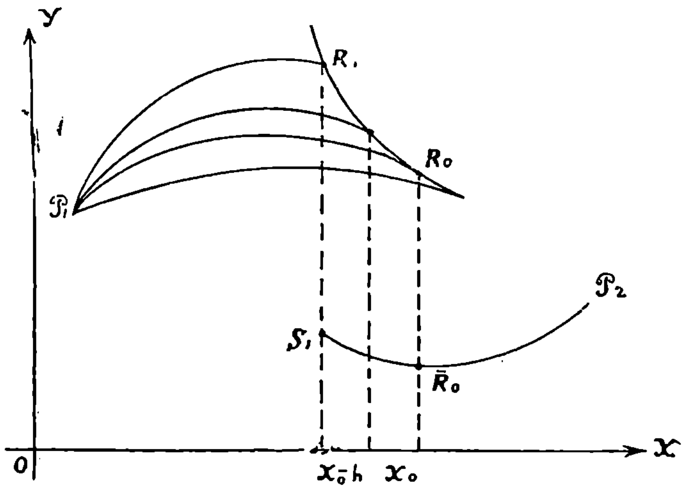
$$y = y(x, \alpha), \qquad (20)$$

ხოლო შესაბამისი გადატეხის წერტილთა მრუდის განტოლება ასეთია

$$y = v(x). \qquad (v)$$

ამგვარად ჩვენ გვაქვს განტოლება (n^0.14-ის მიხედვით)

$$f_{y'}(x, v(x), p(x, v(x))) = 0. \qquad (21)$$



ნახ. 7

გავაგრძელოთ $\overline{R_0}P_2$ შტო $\overline{R}_0$ წერტილის მარცხნივ და გავატაროთ y-ის ღერძის პარალელური წრფე, ვთქვათ ესაა:

$$x = x_0 - h, \qquad 0 < h < \rho.$$

ვთქვათ ეს წრფე (v) და $\overline{R}_0P_2$ მრუდებს R_1 და S_1 წერტილებში ჰკვეთს. შედარების მრუდად ავიღოთ შემდეგი წყვეტილი მრუდი $L_0(P_1R_1S_1\overline{R}_0P_2)$, რომელიც (20) ოჯახის P_1R_1 ექსტრემალისა და $S_1\overline{R}_0P_2$ ექსტრემალისაგან შედგება (ნახ. 7). მაშინ ჩვენ უნდა გვქონდეს ასეთი უტოლობა:

$$\Delta I = I_{L_0} - I_{E_0} > 0.$$

მაგრამ ΔI ინტეგრალი შემდეგი სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$\Delta I = \int_{\overline{E}} E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}')\, dx - \int_{x_0-h}^{x_0} f(x, v(x), v'(x))\, dx + \int_{x_0-h}^{x_0} f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x))\, dx,$$

სადაც $\overline{E}$ წარმოადგენს უწყვეტ $(P_1R_1R_0)$ მრუდს, ხოლო E კი ვაიერშტრასის ფუნქციაა.

მაგრამ ადგილი აქვს ასეთ ფორმულას:

$$\int_{\overline{E}} [illegible] = \int_{x_0-h}^{x_0} [f(x, \nu(x), \nu'(x)) - f(x, \nu(x), p(x, \nu(x))) - (\nu'(x) - p(x, \nu)) f_{y'}(x, v, p(x, \nu))]\, dx,$$

ანუ (21) განტოლების საფუძველზე:

$$\int_{\overline{E}} E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}')\, dx = \int_{x_0-h}^{x_0} [f(x, \nu(x), \nu'(x)) - f(x, \nu(x), p(x, \nu(x)))]\, dx,$$

აქედან შემდეგი დასკვნა მიიღება:

$$\Delta I = \int_{x_0-h}^{x_0} [f(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)) - f(x, \nu, p(x, \nu))] dx.$$

ვთქვათ $B(x)$ აღნიშნავს ინტეგრალქვეშა ფუნქციას:

$$B(x) = f(x, \bar{y}_0(x)), \bar{y}'_0(x)) - f(x, \nu(x), p(x, \nu(x))).$$

მაშინ, თუ მხედველობაში მივიღებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, გვექნება შემდეგი:

$$\Delta I = h\, B(x_0 - \varepsilon), \qquad (22)$$

სადაც ε დადებითი სიდიდეა, რომელიც $\leqq h$. (I) ფორმულების მიხედვით

$$B(x_0) = 0.$$

(22) ფორმულაში ჩვენ შეგვიძლია h და, მაშასადამე, ε რაგინდ მცირე ავიღოთ. მეორე მხრივ, თუ გავშლით $B(x_0 - \varepsilon)$ ფუნქციას ε-ის ხარისხების მიხედვით, გვექნება შემდეგი:

$$B(x_0 - \varepsilon) = \varepsilon[f_x + \nu'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y] + \cdots$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ ΔI დადებითი იყოს, უნდა შესრულდეს უტოლობა:

$$f_x + v'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y \geqq 0.$$

ამგვარად საძიებელი დაგვრჩა მხოლოდ v'_0, მაგრამ:

$$v = y(x, \alpha(x))$$

და, მაშასადამე:

$$v' = y_x + y_\alpha \frac{d\alpha}{dx},$$

სადაც $\alpha(x)$, ცხადია, აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$f_{y'}(x, y(x, \alpha(x)), y_x(x, \alpha(x))) = 0.$$

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ $\frac{d\alpha}{dx}$, საკმარისია გავაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობა, რაც მოგვცემს ასეთ გამოსახვას:

$$f_y + (f_{y'y}\, y_\alpha + f_{y'^2}\, y_{\alpha x}) \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

საიდანაც გვექნება:

$$v' = y_x - y_\alpha \frac{f_y}{f_{y'y}\, y_\alpha + f_{y'^2}\, y_{\alpha x}}.$$

თუ ამ გამოსახვაში შევიტანთ $x = x_0$ მნიშვნელობას, გვექნება შემდეგი:

$$v'_0 = \frac{(f_{y'y}\, y'_0 - f_y)\,\Delta(x_1, x_0) + f_{y'^2}\, y'_0\, \Delta_x(x_1, x_0)}{f_{y'y}\,\Delta(x_1, x_0) + f_{y'^2}\,\Delta_x(x_1, x_0)}$$

და, მაშასადამე, დაიწერება ტოლობა:

$$f_x + v'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y = \frac{f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y)\,(f_{y'y} + f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x_1, x_0)}{\Delta(x_1, x_0)}) - f_y^2}{f_{y'y} + f_{y'^2}\dfrac{\Delta_x(x_1, x_0)}{\Delta(x_1, x_0)}}.$$

როგორც უკვე ($n^0.18$)-ში ვნახეთ, როდესაც $x = h_0$, მაშინ (იხ. (19) ფორმულა) ფუნქცია:

$$(f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y)(f_{y'y} + f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x_1, x_0)}{\Delta(x, x_0)}) - f_y^2$$

ნული ხდება.

მეორე მხრივ, იგი შემდეგი სახით შეიძლება ჩავწეროთ:

$$f_{y'y}(f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y) - f_y^2 + (f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y)\, f_{y'^2} \frac{\Delta_x(x, x_0)}{\Delta(x, x_0)}.$$

მაგრამ ეს უკანასკნელი x ცვლადის ზრდადი ფუნქციაა, მაშასადამე, იგი უარყოფითია ყველა იმ წერტილისათვის, რომლებიც H_0 და R'_0 წერტილებს შორისაა მოთავსებული. h_0 წერტილს შემდეგ კი, პირიქით, ეს ფუნქცია აუცილებლად დადებითია.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია:

$$f_{y'y} + f_{y'^2}\,\frac{\Delta_x(x, x_0)}{\Delta(x, x_0)}.$$

(n^0.13)-ის ძალით ეს ფუნქცია დადებითია $r_0 < x < x_0$ შუალედში. მაგრამ x_1 აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$x_1 > r_0.$$

აქედან ასეთი დასკვნა მიიღება: (r_0, x_0) შუალედში

$$f_x + y'_0 f_y - \bar{f}_x - \bar{y}'_0 \bar{f}_y \begin{cases} >0, \text{ როდესაც } x_1 > h_0, \\ =0, \text{ როდესაც } x_1 = h_0, \\ <0, \text{ როდესაც } x_1 < h_0. \end{cases}$$

მაშასადამე, (22) ფორმულის მიხედვით, როდესაც $x_1 < h_0$, დავასკვნით, რომ:

$$\Delta I < 0.$$

სწორედ ეს იყო დასამტკიცებელი.

20. სავსებით ბუნებრივია შემდეგი საკითხის დასმა:

ვთქვათ $A(\xi_1, \eta_1)$ და $B(\xi_2, \eta_2)$ ის წერტილებია, რომლებიც შესაბამისად $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილების საკმაო მახლობლობაში იმყოფება. რა პირობებში შეიძლება A და B წერტილების შეერთება წყვეტილი ექსტრემალით?

ეილერის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასე აღვნიშნოთ:

$$y = \varphi(x, \alpha, \beta)$$

და ვთქვათ α და β პარამეტრების კერძო მნიშვნელობანი, რომლებიც E_0 ექსტრემალის P_1R_0 და $\overline{R_0P_2}$ შტოებს შეესაბამება, ასე გამოისახება: $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ და $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0$, $\bar{\beta} = \bar{\beta}_0$.

იმ ექსტრემალის მოძებნისას, რომელსაც წყვეტის ერთადერთი წერტილი გააჩნია და რომელიც მოცემულ ორ $A(\xi_1, \eta_1)$, $B(\xi_2, \eta_2)$ წერტილს აერთებს, საქმე გვექნება შემდეგ უცნობებთან:

1. საძიებელი ექსტრემალის ორი შტოს შესაბამისი (α, β) და $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ პარამეტრთა მნიშვნელობანი, და

2. წყვეტის წერტილის ξ_0 აბსცისი.

მართლაც, ჩვენ გვაქვს შემდეგი ხუთი განტოლების სისტემა:

$$\eta_1 = \varphi(\xi_1, \alpha, \beta), \quad \eta_2 = \varphi(\xi_2, \bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$

$$f(\xi_0, \varphi(\xi_0, \alpha, \beta), \varphi_x(\xi_0, \alpha, \beta)) = f(\xi_0, \varphi(\xi_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), \varphi_x(\xi_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta})),$$

$$f_{y'}(\xi_0, \varphi(\xi_0, \alpha, \beta), \varphi_x(\xi_0, \alpha, \beta)) = 0,$$

$$f_{y'}(\xi_0, \varphi(\xi_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), \varphi_x(\xi_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta})) = 0,$$

რომლებიც შესრულებულია უცნობთა შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0, \quad \bar{\beta} = \bar{\beta}_0, \quad \xi_0 = x_0.$$

ამ განტოლებათა ამოხსნა $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \xi_0$ უცნობების მიმართ ყოველთვის შეგვიძლია, თუ $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0$, $\bar{\beta} = \bar{\beta}_0$, $\xi_0 = x_0$, მნიშვნელობათათვის ნულისაგან განსხვავდება იაკობის შემდეგი დეტერმინანტი:

$$D = \frac{\partial(\varphi - \eta_1, \varphi - \eta_2, f - \bar{f}, f_{y'}, \bar{f}_{y'})}{\partial(\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \xi_0)}.$$

თუ ცვლადთა ხსენებულ კერძო მნიშვნელობათათვის D დეტერმინანტის მნიშვნელობას D_0-ით აღვნიშნავთ, გვექნება ფორმულა:

$$
D_0=\left|\begin{matrix}
\varphi_\alpha, & 0, & \dfrac{\partial(f-\bar f)}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial f_{y'}}{\partial\alpha}, & 0\\[2ex]
\varphi_\beta, & 0, & \dfrac{\partial(f-\bar f)}{\partial\beta}, & \dfrac{\partial f_{y'}}{\partial\beta}, & 0\\[2ex]
0, & \varphi_{\bar\alpha}, & \dfrac{\partial(f-\bar f)}{\partial\bar\alpha}, & 0, & \dfrac{\partial\bar f_{y'}}{\partial\bar\alpha}\\[2ex]
0, & \varphi_{\bar\beta}, & \dfrac{\partial(f-\bar f)}{\partial\bar\beta}, & 0, & \dfrac{\partial\bar f_{y'}}{\partial\bar\beta}\\[2ex]
0, & 0, & \dfrac{\partial(f-\bar f)}{\partial\xi_0}, & \dfrac{\partial f_{y'}}{\partial\xi_0}, & \dfrac{\partial\bar f_{y'}}{\partial\xi_0}
\end{matrix}\right|_{\substack{\xi_1=x_1,\ \xi_2=x_2,\ \xi_0=x_0,\\ \alpha=\alpha_0,\ \beta=\beta_0,\ \bar\alpha=\bar\alpha_0,\ \bar\beta=\bar\beta_0}} \tag{23}
$$

მაგრამ ჩვენ გვაქვს ასეთი ფორმულები:

$$
\left[\frac{\partial(f-\bar f)}{\partial\alpha}\right]_0=f_y\,\varphi_\alpha(x_0,\alpha_0,\beta_0),\ \left(\frac{\partial f_{y'}}{\partial\alpha}\right)_0=f_{y'y}\,\varphi_\alpha(x_0,\alpha_0,\beta_0)+f_{y'^2}\,\varphi_{x\alpha}(x_0,\alpha_0,\beta_0),
$$

$$
\left[\frac{\partial(f-\bar f)}{\partial\beta}\right]_0=f_y\,\varphi_\beta(x_0,\alpha_0,\beta_0),\ \left(\frac{\partial f_{y'}}{\partial\beta}\right)=f_{y'y}\,\varphi_\beta(x_0,\alpha_0,\beta_0)+f_{y'^2}\,\varphi_{x\beta}(x_0,\alpha_0,\beta_0),
$$

$$
\left[\frac{\partial(f-\bar f)}{\partial\bar\alpha}\right]_0=-\bar f_y\varphi_{\bar\alpha}(x_0,\bar\alpha_0,\bar\beta_0),\ \left(\frac{\partial\bar f_{y'}}{\partial\bar\alpha}\right)=\bar f_{y'y}\varphi_{\bar\alpha}(x_0,\bar\alpha_0,\bar\beta_0)+\bar f_{y'^2}\varphi_{x\bar\alpha}(x_0,\bar\alpha_0,\bar\beta_0),
$$

$$
\left[\frac{\partial(f-\bar f)}{\partial\bar\beta}\right]_0=-\bar f_y\varphi_{\bar\beta}(x_0,\bar\alpha_0,\bar\beta_0),\ \left(\frac{\partial\bar f_{y'}}{\partial\bar\beta}\right)_0=\bar f_{y'y}\varphi_{\bar\beta}(x_0,\bar\alpha_0,\bar\beta_0)+\bar f_{y'^2}\varphi_{x\bar\beta}(x_0,\bar\alpha_0,\bar\beta_0),
$$

$$
\left[\frac{\partial(f-\bar f)}{\partial\xi_0}\right]_0=f_x+y'_0f_y-\bar f_x-\bar y'_0\bar f_y,\ \left(\frac{\partial f_y}{\partial\xi_0}\right)_0=f_y,\qquad \left(\frac{\partial f_{y'}}{\partial\xi_0}\right)_0=\bar f_y.
$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (23) ფორმულებში და მიღებულ დეტერმინანტს დავშლით პირველი ორი სვეტის მიხედვით, ასეთ გამოსახვას მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
D_0={}&-\varphi_\alpha(x_1,\alpha_0,\beta_0)\,\varphi_{\bar\alpha}(x_2,\bar\alpha_0,\bar\beta_0)\left|\begin{matrix}
f_y\varphi_\beta, & f_{y'y}\varphi_\beta+f_{y'^2}\varphi_{\beta x}, & 0\\
-\bar f_y\varphi_{\bar\beta}, & 0, & \bar f_{y'y}\varphi_{\bar\beta}+\bar f_{y'^2}\varphi_{\bar\beta x}\\
f_x+y'_0f_y-\bar f_x-\bar y'_0\bar f_y, & f_y, & \bar f_y
\end{matrix}\right|\\[2ex]
&+\varphi_\alpha(x_1,\alpha_0,\beta_0)\,\varphi_{\bar\beta}(x_2,\bar\alpha_0,\bar\beta_0)\left|\begin{matrix}
f_y\varphi_\beta, & f_{y'y}\varphi_\beta+f_{y'^2}\varphi_{\beta x}, & 0\\
-\bar f_y\varphi_{\bar\alpha}, & 0, & \bar f_{y'y}\varphi_{\bar\alpha}+\bar f_{y'^2}\varphi_{\bar\alpha x}\\
f_x+y'_0f_y-\bar f_x-\bar y'_0\bar f_y, & f_y, & \bar f_y
\end{matrix}\right|\\[2ex]
&+\varphi_\beta(x_1,\alpha_0,\beta_0)\varphi_{\bar\alpha}(x_2,\bar\alpha_0,\bar\beta_0)\left|\begin{matrix}
f_y\varphi_\alpha, & f_{y'y}\varphi_{\bar\alpha}+\bar f_{y'^2}\varphi_{\bar\alpha x}, & 0\\
-\bar f_y\varphi_{\bar\beta}, & 0, & \bar f_{y'y}\varphi_{\bar\beta}+\bar f_{y'^2}\varphi_{\bar\beta x}\\
f_x+y'_0f_y-f_x-\bar y'_0\bar f_y, & f_y, & \bar f_y
\end{matrix}\right|\\[2ex]
&+\varphi_\beta(x_1,\alpha_0,\beta_0)\varphi_{\bar\beta}(x_2,\bar\alpha_0,\bar\beta_0)\left|\begin{matrix}
f_y\varphi_\alpha, & f_{y'y}\varphi_{\bar\alpha}+f_{y'^2}\varphi_{\bar\alpha x}, & 0\\
-\bar f_y\varphi_{\bar\alpha}, & 0, & \bar f_{y'y}\varphi_{\bar\alpha}+\bar f_{y'^2}\varphi_{\bar\alpha x}\\
f_x+y'_0f_y-\bar f_x-\bar y'_0\bar f_y, & f, & \bar f_y
\end{matrix}\right|
\end{aligned}
$$

(n^0.15)-ის (Δ) ფორმულების ანალოგიური ფორმულების მიხედვით უკანასკნელი განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$D_0 = -(f_x + y'_0 f_y - \bar f_x - \bar y'_0 \bar f_y)\,[f_{y'y}\Delta(x_1, x_0) + f_{y'^2}\Delta_x(x_1, x_0)]\,[\bar f_{y'y}\overline{\Delta}(x_2, x_0) +$$
$$+\bar f_{y'^2}\overline{\Delta}_x(x_2, x_0)] + f_{y'}^2\,\Delta(x_1, x_0)\,[\bar f_{y'y}\,\overline{\Delta}(x_2, x_0) + \bar f_{y'^2}\overline{\Delta}_x(x_2, x_0)] -$$
$$-\bar f_{y'}^2\,\overline{\Delta}(x_2, x_0)\,[f_{y'y}\Delta(x_1, x_0) + f_{y'^2}\Delta_x(x_1, x_0)].$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (n^0.15)-ის შედეგებს, ასეთი დასკვნა ჩამოყალიბდება:

იმისათვის, რომ $\alpha, \beta, \bar\alpha, \bar\beta$ და ξ_0 სიდიდეები ცალსახად იყოს განსაზღვრული აუცილებელია, რომ კიდურა P_1 და P_2 წერტილები შეუღლებულ წერტილებს არ წარმოადგენდნენ.

თუ ეს ასეა, არსებობს ერთადერთი წყვეტილი ექსტრემალი, რომელიც P_1 და P_2 წერტილებს აერთებს. წყვეტის წერტილის ξ_0 აბსცისისათვის გვექნება:

$$\xi_0 = F(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2),$$

სადაც F თავისი არგუმენტების უწყვეტ ფუნქციას წარმოადგენს.

თუ გავიხსენებთ (n^0.13)-ის შედეგებს, ამის მიხედვით ასეთი დასკვნა მიიღება: არსებობს ცალსახა თანადობა წყვეტილი ექსტრემალების კიდურა წერტილებსა და ამ ექსტრემალთა გადატეხის წერტილებს შორის.

თუ წყვეტილი ექსტრემალის განტოლებებში, რომელიც A და B წერტილებს აერთებს, სახელდობრ შემდეგ განტოლებებში:

$$y = \begin{cases} \varphi(x, \alpha, \beta), & \xi_1 \leqq x < \xi_0, \\ \varphi(x, \bar\alpha, \bar\beta), & \xi_0 < x \leqq \xi_2, \end{cases}$$

ჩავსვამთ $\alpha, \beta, \bar\alpha, \bar\beta$ სიდიდეთა ნაცვლად მათი გამოსახვებს $\xi_1, \eta_1\, \xi_2, \eta_2$ ცვლადების საშუალებით, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებებს:

$$y = \begin{cases} \Phi(x; \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \\ \overline{\Phi}(x; \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2). \end{cases} \tag{Φ}$$

მაშასადამე, I ინტეგრალი აღებული ასეთ ექსტრემალზე, A წერტილიდან B წერტილამდე თვითონაც ამ წერტილების კოორდინატების ფუნქციაა, ე. ი.

$$I = I(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2).$$

ესაა წყვეტილ ექსტრემალთა ველის ინტეგრალი ანუ მოკლედ წყვეტილი ველის ინტეგრალი.

A და B წერტილებში p_1 და p_2 მხებთათვის შესაბამისად (Φ) განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ:

$$p_1 = \Phi_x(\xi_1; \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \qquad p_2 = \overline{\Phi_x}(\xi_2; \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2).$$

მარტივი გამოთვლების შედეგად I ინტეგრალის კერძო წარმოებულებისათვის შემდეგი გამოსახვები მიიღება:

$$\frac{\partial I}{\partial \xi_1} = -[f(\xi_1, \eta_1, p_1) - p_1 f_{y'}(\xi_1, \eta_1, p_1)],$$

$$\frac{\partial I}{\partial \eta_1} = -f_{y'}(\xi_1, \eta_1, p_1),$$

$$\frac{\partial I}{\partial \xi_2} = f(\xi_2, \eta_1, p_2) - p_2 f_{y'}(\xi_2, \eta_2, p_2),$$

$$\frac{\partial I}{\partial \eta_2} = f_{y'}(\xi_2, \eta_2, p_2),$$

ამგვარად, წყვეტილი ველის ინტეგრალის პირველი რიგის წარმოებულების და უწყვეტი ველის ინტეგრალის იმავე რიგის წარმოებულების გამოსახვები ერთი და იგივეა.

II. საკმარისი პირობები

A. შედარების წყვეტილი მრუდები

21. **წინასწარი ფორმულები.** ვთქვათ

$$y = y(x, \alpha) \tag{α}$$

მოცემული პრობლემისათვის ექსტრემალთა (ეილერის მრუდთა) რაიმე ოჯახია. ამ ოჯახის მრუდთა არეში $y_\alpha(x, \alpha)$ წარმოებული ნულისაგან განსხვავებულია და, მაშასადამე, (α) განტოლება ყოველი ორაზროვნობის გარეშე ამოიხსნება α ცვლადის მიმართ, სანამ (x, y) წერტილი ველში რჩება.

ვთქვათ ეს ამონახსნია:

$$\alpha = \alpha(x, y).$$

ამრიგად, ჩვენ გვექნება შემდეგი წარმოებულები:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{y'}{y_\alpha}, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{y_\alpha}, \tag{24}$$

სადაც y' აღნიშნავს იმ ექსტრემალის მხების საკუთხო კოეფიციენტს, რომელიც $P(x, y)$ წერტილზე გადის, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$y' = y_x(x, \alpha(x, y)).$$

(24) ფორმულის მიხედვით y' ფუნქციის კერძო წარმოებულებისათვის შემდეგი გამოსახვები გვექნება:

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = y'' - y' \frac{y_{\alpha x}}{y_\alpha}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{y_{\alpha x}}{y_\alpha}, \tag{25}$$

სადაც შტრიხი აღნიშნავს x ცვლადის მიმართ გაწარმოებას.

ახლა განვიხილოთ სწორედ ის ოჯახი ექსტრემალებისა, რომლებიც მკვიდრ P_1 წერტილზე გადიან და მოცემულ P_1R_0 ექსტრემალს გარს ეკვრიან. ეს ოჯახი ასე აღვნიშნოთ $F(P_1)$.

(n^0.15)-ის (Δ) ფორმულების ანალოგიური ფორმულების მიხედვით გვექნება, რომ:

$$\frac{y_{\alpha x}}{y_\alpha} = \frac{\Delta_x(x, x_1)}{\Delta(x, x_1)}.$$

I ინტეგრალი ერთ-ერთ ასეთ $P_1 P$ ექსტრემალზე წარმოადგენს $P(x, y)$ წერტილის კოორდინატების ჰამილტონის $W(x, y)$ ფუნქციას.

ჩვენ უკვე მიღებული გვაქვს W ფუნქციის პირველი წარმოებულების ფორმულები:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = f - y' f_{y'}, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = f_{y'}.$$

ახლა მოვძებნოთ იმავე W ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულები, დავწეროთ:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(f-y'f_{y'})=f_x+f_{y'}\frac{\partial y'}{\partial x}-f_{y'}\frac{\partial y'}{\partial x}-y'f_{y'x}-y'f_{y'^2}\frac{\partial y'}{\partial x}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (25) ფორმულებსა და ეილერის განტოლებას, აქედან გვექნება შემდეგი:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=f_x-y'f_y+y'^2f_{y'y}+y'^2f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x,x_1)}{\Delta(x,x_1)}.$$

ანალოგიურად მოიძებნება მეორე რიგის დანარჩენი წარმოებულებიც:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=f_y-y\,f_{y'y}-y'f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x,x_1)}{\Delta(x,x_1)},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=f_{y'y}+f_{y'^2}\frac{\Delta_x(x,x_1)}{\Delta(x,x_1)}.$$

ახლა ავიღოთ სწორედ ის ოჯახი ექსტრემალებისა, რომლებიც P_2 წერტილზე გადიან და $\overline{R}_0P_2$ ექსტრემალს გარს ეკვრიან. ეს ოჯახი იყოს $\overline{F}(P_2)$. მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულებს:

$$\frac{\partial\overline{W}}{\partial x}=-\bar f+\bar y'\bar f_{y'},\quad \frac{\partial\overline{W}}{\partial y}=-\bar f_{y'},$$

$$\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial x^2}=-\bar f_x+\bar y'\bar f_y-\bar y'^2\bar f_{y'y}-\bar y'^2\bar f_{y'^2}\frac{\overline{\Delta}_x(x,x_2)}{\overline{\Delta}(x,x_2)}$$

$$\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial x\partial\bar y}=-\bar f_y+\bar y'\bar f_{y'y}+\bar y'\bar f_{y'^2}\frac{\overline{\Delta}_x(x,x_2)}{\overline{\Delta}(x,x_2)},$$

$$\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\bar y^2}=-\bar f_{y'y}-\bar f_{y'^2}\frac{\overline{\Delta}_x(x,x_2)}{\overline{\Delta}(x,x_2)}\,..$$

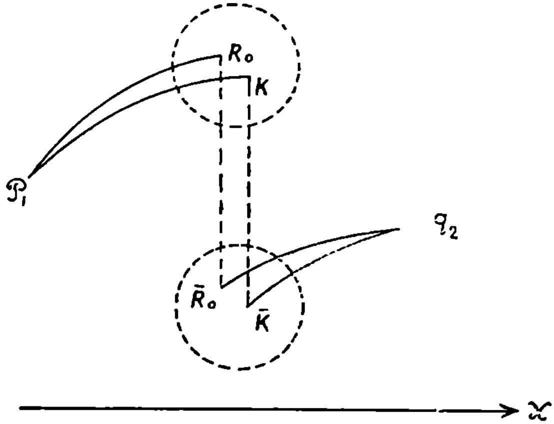
ამის შემდეგ გადავიდეთ საკმარისი პირობების მოძებნაზე.

22. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ვაიერშტრასის მეთოდი საკმარის პირობებს მხოლოდ იმ მეტად კერძო შემთხვევაში იძლევა, როდესაც შედარების წყვეტილი მრუდის გადატეხის წერტილები შეუღლებულ $\Gamma,\overline{\Gamma}$ მრუდებზე იმყოფება. სწორედ ამიტომაც ჩვენ მათ ვიპოვით უფრო მძლავრი ხერხით, რისთვისაც დაგვჭირდება W და $\overline{W}$ ფუნქციათა მეორე რიგის წარმოებულები[1].

შემდეგში მუდამ ნაგულისხმევი იქნება, რომ ჩვეულებრივი მინიმუმის პირობები შესრულებულია მკაცრი სახით. ავაგოთ $F(P_1)$ და $\overline{F}(P_2)$ ოჯახები. R_0 წრის ყოველი წერტილი შეერთებულია P_1 წერტილთან პირველი ოჯახის ექსტრემალით და ასევე, $\overline{R}_0$ წრის ყოველი წერტილი შეერთებულია P_2 წერტილთან მეორე ოჯახის ექსტრემალით (იხ. 8).

[1] იხ. Dresden, Transactions of the American Math. Soc. 1910.

განვიხილოთ ამ ორი წრის წყვილი $K(x, y)$ და $K(x, \bar{y})$ წერტილი, რომელთაც ერთი და იგივე x აბსცისი აქვთ. წყვეტილი E მრუდი, რომელიც ამ ოჯახთა P_1K და $\overline{K}P_2$ ექსტრემალებითაა შედგენილი I ინტეგრალს უფრო მცირე მნიშვნელობას ანიჭებს, ვიდრე ყოველი სხვა მისაღები წყვეტილი წირი, რომელსაც გადატეხის იგივე $K, \overline{K}$ წერტილები გააჩნია. მაშასადამე, საკმარისი პირობების მოსაძებნად საკმარისია I ინტეგრალის მნიშვნელობა E მრუდზე შევადაროთ იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობას წყვეტილ E_0 ექსტრემალზე.



ნახ. 8

მაგრამ I ინტეგრალი E წირზე წარმოადგენს ჰამილტონის W და $\overline{W}$ ფუნქციების შემდეგ ჯამს:

$$I_E = W(x, y) + \overline{W}(x, \bar{y}).$$

მაშასადამე, $x_0, y_0, \bar{y}_0$ მნიშვნელობებთან საკმაოდ მახლობელ ყველა $x, y, \bar{y}$ მნიშვნელობისათვის უნდა გვქონდეს უტოლობა:

$$\Delta I = I_E - I_{E_0} = W(x, y) + \overline{W}(x, \bar{y}) - W(x_0, y_0) - \overline{W}(x_0, \bar{y}_0) > 0.$$

ვთქვათ:

$$x = x_0 + \alpha, \quad y = y_0 + \beta, \quad \bar{y} = \bar{y}_0 + \bar{\beta}.$$

თუ $W + \overline{W}$ ჯამს დავშლით $\alpha, \beta, \bar{\beta}$ სიდიდეთა ხარისხების მიხედვით გვექნება შემდეგი გამოსახვა:

$$\Delta I = \alpha \frac{\partial W}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial W}{\partial y_0} + \alpha \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_0} + \bar{\beta} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{y}_0} + \frac{1}{2}\Big(\alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} +$$
$$+ \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0^2} + 2\alpha\bar{\beta} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0 \partial \bar{y}_0} + \bar{\beta}^2 \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \bar{y}_0^2}\Big) + (\alpha, \beta, \bar{\beta})_3,$$

სადაც $(\alpha, \beta, \bar{\beta})_3$ აღნიშნავს მესამე რიგის წევრთა ერთობლიობას.

ერთხელ და საბოლოოდ შევთანხმდეთ შემდეგ აღნიშვნაში:

$$\Theta(\alpha, \beta, \overline{\beta}) = \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} + \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0^2} + + 2\alpha\overline{\beta} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0 \partial \overline{y}_0} + \overline{\beta}^2 \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ პირველი რიგის წარმოებულთა ფორმულებსა და ძირითად (I) პირობებს, შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ ΔI დაშლაში პირველი რიგის წევრები ისპობა და, მაშასადამე, ადგილი დაურჩება შემდეგ ტოლობას:

$$\Delta I = \frac{1}{2} \Theta(\alpha, \beta, \overline{\beta}) + (\alpha, \beta, \overline{\beta})_3. \qquad (26)$$

23. ახლა ჩვენ დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა: თუ II, III და IV აუცილებელი პირობები შესრულებულია მკაცრად, მაშინ ყოველთვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\Theta(\alpha, \beta, \overline{\beta}) > 0,$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\alpha, \beta, \overline{\beta}$, გარდა ყველა ნულებისა.

დამტკიცებისათვის ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha \neq 0$. მართლაც, დავუშვათ, რომ $\alpha = 0$, მაშინ:

$$\Theta(0, \beta, \overline{\beta}) = \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} + \overline{\beta}^2 \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2}$$

მაგრამ W და $\overline{W}$ ფუნქციების მეორე რიგის წარმოებულთა ფორმულები ასე წარმოგვიდგება:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2_0} = f_{y'y} + f_{y'^2} \frac{\Delta_x(x_0, x_1)}{\Delta(x_0, x_1)}, \qquad \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}'^2_0} = -(\overline{f}_{y'y} + \overline{f}_{y'^2} \frac{\overline{\Delta}_x(x_0, x_2)}{\overline{\Delta}(x_0, x_2)}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (n^0.11)-ში ნათქვამს და (7), ($\overline{7}$) უტოლობებს, აქედან გვექნება ასეთი უტოლობანი:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2_0} > 0, \qquad \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}'^2_0} > 0. \qquad (27)$$

მეორე მხრივ $(\beta, \overline{\beta}) \neq (0, 0)$ და, მაშასადამე, ყოველთვის გვექნება უტოლობა:

$$\Theta(0, \beta, \overline{\beta}) > 0.$$

ამრიგად დავუშვათ, რომ $\alpha \neq 0$. ჩვენი Θ ფუნქცია წარმოადგენს ორი კვადრატული ფორმის ჯამს. (27) უტოლობის თანახმად იგი შემდეგ სახეზე მიიყვანება:

$$\Theta(\alpha,\beta,\overline{\beta})=\frac{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_0\partial y_0}\alpha+\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}\beta\right)^2}{\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}}+\frac{\left(\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0\partial \overline{y}_0}\alpha+\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2}\overline{\beta}\right)^2}{\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2}}+$$

$$+\left[\frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2}{\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}}+\frac{\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2}-\left(\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0\partial \overline{y}_0}\right)^2}{\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2}}\right]\alpha^2. \tag{28}$$

განვიხილოთ ფრჩხილებში ჩასმული ჯამი. თუ ამ ჯამში შევიტანთ მეორე წარმოებულთა მნიშვნელობებს, (n^0.16)-ის აღნიშვნათა თანახმად გვექნება შემდეგი:

$$\frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2}{\frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}}+\frac{\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2}-\left(\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0\partial \overline{y}_0}\right)^2}{\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2}}=T(x_1)-\overline{T}(x_2).$$

ჩვენ ახლავე დავინახავთ, რომ მარჯვენა მხარეში $T(x_1)-\overline{T}(x_2)$ სხვაობა მუდამ დადებითი რჩება, როდესაც უკიდურეს P_1 და P_2 წერტილთა აბსცისები III და IV პირობებს აკმაყოფილებენ მკაცრად, ე. ი. როდესაც შესრულებულია შემდეგი უტოლობანი:

$$x_2<x_1^*, \qquad x_1>h_0.$$

მართლაც, (n^0.16)-ის მიხედვით ამ შემთხვევაში კიდურა P_1 და P_2 წერტილებს შორის უკვე არა გვაქვს შეუღლებული წერტილები. მაშასადამე, როდესაც $x\geqq x_1^*$, $\bar{x}\leqq x_2$ შეუძლებელია შესრულდეს ასეთი ტოლობა:

$$T(x)-\overline{T}(\bar{x})=0.$$

მეორე მხრივ, $T(x)-\overline{T}(\bar{x})$ სხვაობა x ცვლადის ზრდადი ფუნქციაა და კლებადია $\bar{x}$-ის მიმართ. ამას გარდა, იგი უწყვეტია იმ შუალედებში, რომლებიც III და IV პირობებითაა განსაზღვრული. მაშასადამე, აღნიშნული სხვაობა მუდამ ინარჩუნებს ნიშანს, როგორიც არ უნდა იყოს მნიშვნელობათა წყვილები: $x\geqq x_1$, $\bar{x}\leqq x_2$.

მაგრამ თუ $x\geqq x_1>h_0$ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$f_x+y'_0f_y\geqq T(x)>\bar{f}_x+\bar{y}'_0\bar{f}_y=\overline{T}(x_0);$$

მაშასადამე:

$$T(x)-\overline{T}(x_0)>0,$$

საიდანაც ვღებულობთ დასკვნას:

$$T(x)-\overline{T}(\bar{x})>0, \qquad x\geqq x_1,\ \bar{x}\leqq x_2.$$

მით უმეტეს, შესრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$T(x_1)-\overline{T}(x_2)>0.$$

ახლა დავუბრუნდეთ (28) განტოლებას. პირველი ორი წევრის ჯამი

არასოდეს უარყოფითი არ არის. აღვნიშნოთ ეს ჯამი K^2-ით. ამრიგად, როგორიც არ უნდა იყოს $(\alpha, \beta, \overline{\beta}) \neq (0, 0, 0)$ სიდიდეთა სისტემა, ჩვენ გვაქვს უტოლობა:

$$\Theta(\alpha, \beta, \overline{\beta}) = [T(x_1) - \overline{T}(x_2)]\,\alpha^2 + K^2 > 0,$$

ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

23^{bis}. ახლა ავიღოთ ისევ (26) განტოლება. შეგვიძლია $\alpha, \beta, \overline{\beta}$ იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ იყოს შესრულებული მკაცრად უტოლობა:

$$\Delta I = I_E - I_{E_0} = \frac{1}{2}\,\Theta(\alpha, \beta, \overline{\beta}) + (\alpha, \beta, \overline{\beta})_3 > 0$$

ყოველივე წინათქმულის საფუძველზე შემდეგი დებულება ჩამოყალიბდება:

წყვეტილი E_0 ექსტრემალი I ინტეგრალს ძლიერ მინიმუმს მიანიჭებს შედარების წყვეტილი მრუდების F_0 ველში, თუ შესრულებულია ჩვეულებრივი მინიმუმის ყველა პირობა და ამასთან I, II, III, IV პირობებიც (სამი უკანასკნელი პირობა მკაცრად).

24. ახლა შეგვიძლია მოვძებნოთ:

$$\Delta I = I_E - I_{E_0}$$

სხვაობის ქვედა ზღვარი.

თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ზოგად ფორმულას და დაშლას განვაგრძობთ მეორე რიგის წევრამდე, ეს ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\Delta I = \frac{1}{2}\widetilde{\Theta}(\alpha, \beta, \overline{\beta}) = \frac{1}{2}\left\{ [\widetilde{T}(x_1) - \widetilde{\overline{T}}(x_2)]\,\alpha^2 + \widetilde{K}^2 \right\},$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნები:

$$\widetilde{T}(x_1) - \widetilde{\overline{T}}(x_2) = [T(x_1) - \overline{T}(x_2)]\begin{array}{l} x_0 + \vartheta\alpha, \\ y_0 + \vartheta'\beta \\ \overline{y}_0 + \vartheta''\overline{\beta} \end{array}$$

$$\widetilde{K} = [K]\begin{array}{l} x_0 + \vartheta\alpha \\ y_0 + \vartheta'\beta \\ \overline{y}_0 + \vartheta''\overline{\beta} \end{array},$$

ე. ი. მეორე რიგის წარმოებულებში $x_0, y_0, \overline{y}_0$ შეცვლილია შემდეგი სიდიდეებით: $x_0 = \vartheta\alpha$, $y_0 + \vartheta'\beta$, $\overline{y}_0 + \vartheta''\overline{\beta}$.

ვინაიდან W და $\overline{W}$ ფუნქციების მეორე წარმოებულები მათი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქციებია ველში, ამიტომ α, β, $\overline{\beta}$ შეგვიძლია იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ სიდიდეებს:

$$\widetilde{T}(x_1) - \widetilde{\overline{T}}(x_2), \quad \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial y_0^2}, \quad \frac{\partial^2 \widetilde{\overline{W}}}{\partial \overline{y}_0^2}. \qquad (29$$

იგივე ნიშანი ჰქონდეს, რაც აქვთ შემდეგ სიდიდეებს:

$$T(x_1) - \overline{T}(x_2), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2}, \quad \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \overline{y}_0^2},$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\alpha, \beta, \overline{\beta}$-ის ნიშნები.

(29) სიდიდეთაგან უმცირესი აღვნიშნოთ $2g_0$-ით, მაშინ გვექნება:

$$\Delta I = \frac{1}{2}\widetilde{\Theta}(\alpha, \beta, \overline{\beta}) \geqq g_0\varepsilon^2,$$

სადაც ზოგად შემთხვევაში ε^2 არის α^2 $(\alpha \neq 0)$, ხოლო კერძო შემთხვევაში კი, როდესაც α ნულია, იგი უდრის უდიდესს β^2, $\overline{\beta}^2$ სიდიდეთაგან.

ამგვარად შეგვიძლია შემდეგი დებულება ჩამოვაყალიბოთ:

თუ შედარების წყვეტილ წირს R_ρ არეში აქვს გადატეხის $K(x_0+\alpha,\ y_0+\beta)$, $\overline{K}(x_0+\alpha,\ \overline{y}_0+\overline{\beta})$ წერტილები, მაშინ ამ მრუდზე I ინტეგრალის მნიშვნელობასა და წყვეტილ E_0 ექსტრემალზე იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობის სხვაობას გააჩნია დადებითი ქვედა ზღვარი, ესაა $g_0\varepsilon^2$, სადაც ε სიდიდე წარმოადგენს ერთ-ერთ $\alpha, \beta, \overline{\beta}$ ვარიაციათაგანს.

B. შედარების უწყვეტი წირების შემთხვევა

25. F_1 ველი. ახლა შევადაროთ I ინტეგრალის მნიშვნელობა უწყვეტ მისაღებ $\overline{\lambda}_n$ მრუდზე იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობას წყვეტილ E_0 ექსტრემალზე. ვთქვათ $\overline{E}$-ის უწყვეტი მრუდია R_ρ არეში, რომლისაკენაც მიისწრაფვის $\{\lambda_n\}$ მიმდევრობა. ისე, როგორც (n^0.5)-ში, მივიღებთ რომ:

$$\Delta I_n = I_{\overline{\lambda}_n} - I_{E_0} = I_{\overline{E}} - I_{E_0} + (I_{\overline{\lambda}_n} - I_{\overline{E}}). \tag{30}$$

$\overline{E}$ და $\overline{\lambda}_n$ მრუდების განტოლებები შესაბამად იყოს $y=\overline{y}(x)$ და $y=\overline{\omega}_n(x)$. ვთქვათ ამას გარდა $\overline{E}$ მრუდის გადატეხის წერტილები ასეა აღნიშნული: $K(x_0+\alpha,\ y_0+\beta)$, $\overline{K}(x_0+\alpha,\ \overline{y}_0+\overline{\beta})$.

დავუშვათ, რომ მინიმუმს ადგილი აქვს შედარების წყვეტილ მრუდთა F_0 არეში. თუ გამოვიყენებთ (n^0.24)-ის თეორემას, გვექნება:

$$I_{\overline{E}} - I_{E_0} = \frac{1}{2}\widetilde{\Theta}(\alpha, \beta, \overline{\beta}) > 0.$$

ამის შემდეგ, (30) განტოლება შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\Delta I_n = \frac{1}{2}\widetilde{\Theta}(\alpha, \beta, \overline{\beta}) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, \overline{\omega}_n(x), \overline{\omega}'_n(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx.$$

იმის მიხედვით, რაც (n^0.3)-ში იყო ნათქვამი, ეს განტოლება შემდეგი სახით წარმოგვიდგება:

$$\Delta I_n = \frac{1}{2}\widetilde{\Theta}(\alpha, \beta, \overline{\beta}) + \int_{\overline{x}_0-\varepsilon_n}^{\overline{x}_0+\varepsilon_n} f(x, \overline{\omega}_n(x), \overline{\omega}'_n(x))dx + (\varepsilon_n),$$

სადაც $\overline{x}_0 = x_0 + \alpha$, ხოლო (ε_n) წარმოადგენს სიდიდეს, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის ε_n-თან ერთად.

ამრიგად მინიმუმის საკმარისი პირობა F_1 ველში შემდეგნაირად გამოიხატება:

$$\frac{1}{2}\widetilde{\Theta}(\alpha,\beta,\overline{\beta}) > -\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x,\overline{\omega}_n(x),\overline{\omega'}_n(x))dx + (\varepsilon_n), \tag{31}$$

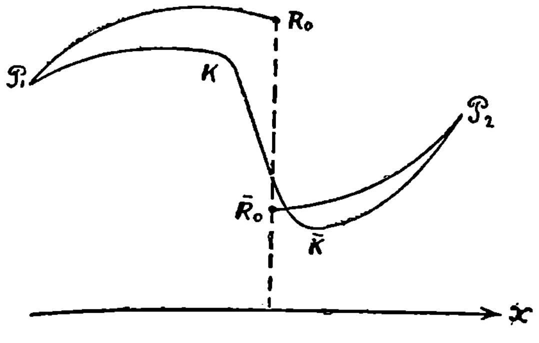
ამ უტოლობის პირველი წევრი დადებითი მუდმივია და $g_0\varepsilon^2$ სიდიდეზე ნაკლები არ არის, ამასთან g_0 და ε იმასვე აღნიშნავენ, რასაც (n^0.24)-ში.

რაც შეეხება უტოლობის მეორე ნაწილს, იგი ნულისაკენ მიისწრაფვის ε_n სიდიდესთან ერთად. მაშასადამე, მოიძებნება დადებითი N რიცხვი ისეთი, რომ ყოველთვის, როდესაც $n > N$, ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობას:

$$\left|\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x,\overline{\omega}_n(x),\overline{\omega'}_n(x))dx + (\varepsilon_n)\right| < g_0\varepsilon^2.$$

ამგვარად n რიცხვის იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც N რიცხვს აღემატება, (31) უტოლობა ყოველთვის შესრულებულია.

26. F_2 ველი. ახლა შევადაროთ I ინტეგრალის მნიშვნელობა მიახლოების მრუდზე იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობას წყვეტილ ექსტრემალზე.



ნახ. 9

ვთქვათ λ_n ასეთი წყვეტილი მრუდია და მისი განტოლება შემდეგია:

$$y = \omega_n(x).$$

ეს $\omega_n(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (A) განტოლებას.

ვარდნის შუალედი ასე აღვნიშნოთ: $(x_0-\varepsilon_n,\ x_0+\varepsilon_n)$, ხოლო λ_n მრუდის ის წერტილები, რომელთაც $x_0-\varepsilon_n$ და $x_0+\varepsilon_n$ აბსცისები აქვთ, იყოს შემდეგი:

$$K(x_0-\varepsilon_n, y_0+\beta),\quad \overline{K}(x_0+\varepsilon_n, \overline{y}_0+\overline{\beta}).$$

ვთქვათ P_1K არის ექსტრემალი $F(P_1)$ ოჯახში და ასევე $\overline{K}P_2$—ექსტრემალი $\overline{F}(P_2)$ ოჯახში. შევადგინოთ მიახლოების $L_n(P_1K\overline{K}P_2)$ მრუდი, რომელიც λ_n მრუდს შეესაბამება (n^0.3).

ცხადია F_2 ველში საკმარისი პირობების მოსაძებნად, საკმარისია I ინტეგრალის მნიშვნელობა E_0 მრუდზე შევადაროთ იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობას L_n მრუდზე.

მაგრამ ადგილი აქვს ასეთ ფორმულას:

$$\Delta I_n = I_{L_n} - I_{E_0} = W(x_0 - \varepsilon_n, y_0 + \beta) - \overline{W}(x_0 + \varepsilon_n, \bar{y}_0 + \bar{\beta}) - W(x_0, y_0) -$$

$$-\overline{W}(x_0, \bar{y}_0) + \int\limits_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\, dx. \tag{32}$$

თუ $W + \overline{W}$ ჯამს გავშლით $\varepsilon_n, \beta, \bar{\beta}$ სიდიდეთა ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ შემდეგ გამოსახვას:

$$W(x_0 - \varepsilon_n, y_0 + \beta) + \overline{W}(x_0 + \varepsilon_n, \bar{y}_0 + \bar{\beta}) = W(x_0, y_0) + \overline{W}(x_0, \bar{y}_0) - \varepsilon_n \frac{\partial W}{\partial x_0} + \varepsilon_n \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_0} +$$

$$+ \beta \frac{\partial W}{\partial y_0} + \bar{\beta} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{y}_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2} \varepsilon_n^2 - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0} \varepsilon_n \beta + \frac{\partial^2 W}{\partial y_0^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0^2} \varepsilon_n^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x_0 \partial \bar{y}_0} \varepsilon_n \bar{\beta} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \bar{y}_0^2} \bar{\beta}^2 \right) + (\varepsilon_n, \beta, \bar{\beta})_3.$$

მეორე რიგის წევრთა ერთობლიობა ზუსტად გვაძლევს შემდეგ სიდიდეს: $\Theta(-\varepsilon_n, \beta, -\bar{\beta})$. შევიტანოთ ამ ფორმულაში პირველ წარმოებულთა მნიშვნელობანი. მაშინ, თუ ვისარგებლებთ ძირითადი (I) განტოლებებით, (32) განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\Delta I_n = -I_{L_n} - I_{E_0} = \int\limits_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\, dx - 2\varepsilon_n f(x_0, y_0, y'_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \widetilde{\Theta}(-\varepsilon_n, \beta, -\bar{\beta}).$$

განსახილავ შემთხვევაში ε_n არსებითად დადებითი სიდიდეა, მაშასადამე, (n^0.24)-ის თეორემის თანახმად $\frac{1}{2}\widetilde{\Theta}$ სიდიდის ქვედა საზღვარია $g_0 \varepsilon_n^2$, ე. ი.

$$\frac{1}{2} \widetilde{\Theta}(-\varepsilon_n, \beta, -\bar{\beta}) \geqq g_0 \varepsilon_n^2,$$

სადაც g_0 წარმოადგენს დადებითი $\widetilde{T}(x_1) - \widetilde{T}(x_0)$ სიდიდის მნიშვნელობას.

ახლა შეგვიძლია F_2 ველისათვის ჩამოვაყალიბოთ მინიმუმის საკმარისი პირობა:

ΔI_n არსებითად დადებითია, თუ n რიცხვის გარკვეული მნიშვნელობიდან მოყოლებული ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\frac{1}{2\varepsilon_n} \int\limits_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\, dx \geqq f(x_0, y_0, y'_0) \tag{C}$$

ყოველი $\omega_n(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც (A) განტოლებას აკმაყოფილებს.

კერძოდ, თუ ამ უტოლობის მარცხენა მხარის ზღვარი არსებობს, საკმარისი პირობა ყოველი $\omega_n(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც (A) განტოლებას აკმაყოფილებს უფრო ზუსტი სახით შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\varepsilon_n}\int\limits_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\,dx\right\} > f(x_0, y_0, y'_0). \qquad (C_1)$$

საეჭვო შემთხვევაა, როდესაც გამოსახვა:

$$\frac{1}{2\varepsilon_n}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x, \omega_n(x), \omega'_n(x))\,dx - f(x_0, y_0, y'_0)$$

ნულისაკენ მიისწრაფვის ისე, რომ მისი მნიშვნელობანი შესაძლოა უარყოფითიც იყოს. მაგრამ თუ ეს მისწრაფება ხდება დადებითი მნიშვნელობებით, შეგვიძლია დარწმუნებული ვიყოთ, რომ ΔI დადებითი იქნება.

27. წინა ორი პარაგრაფის შედეგები შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

თუ წყვეტილი E_0 წირი F_0 ველში მინიმუმს ახორციელებს, იგივე წირი I ინტეგრალს უფრო მცირე მნიშვნელობას მიანიჭებს, ვიდრე

1. ყოველი სხვა მრუდი F_1 ველისა,

2. ყოველი სხვა მრუდი F_2 ველისა, როდესაც ამას გარდა შესრულებულია (C) პირობაც.

მეორე მხრივ, მიახლოების წირები I ინტეგრალს ანიჭებენ მნიშვნელობებს, რომლებიც რაგინდ ახლოს იქნებიან I_{E_0} მნიშვნელობასთან.

ამგვარად, როდესაც მინიმუმი განხორციელებულია F_0 ველში და ამას გარდა (C) ან (C_1) პირობა შესრულებულია, ადგილი აქვს შემდეგ სამ გარემოებას:

1. უწყვეტი მრუდი I ინტეგრალს მინიმუმს არ ანიჭებს,

2. არსებობს უწყვეტ მრუდთა ველში I ინტეგრალის მნიშვნელობების ქვედა საზღვარი,

3. ექსტრემალური წყვეტილი E_0 მრუდი სწორედ ის მრუდია, რომელზედაც I ინტეგრალს მინიმალურ მნიშვნელობად ხსენებული ქვედა საზღვარი აქვს.

ახლა განვიხილოთ მხოლოდ წყვეტილ მრუდთა ველი. ზემოთქმულის მიხედვით შევნიშნავთ, რომ შედარების წყვეტილ მრუდთა F_0 ველის როლი მხოლოდ დამხმარეა. ამ F_0 ველის შემოღებამ საშუალება მოგვცა მოგვეძებნა აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ უწყვეტ მრუდთა ველში I ინტეგრალის მნიშვნელობათა ქვედა საზღვარი არსებობდეს.

წყვეტილი E_0 წირი F_0 ველისათვის წარმოადგენს ჭეშმარიტ წყვეტილ ექსტრემალს, მაშინ როდესაც უწყვეტ მრუდთა ველისათვის იგივე წირი მხო-

ლოდ ზღვრული წირია ანუ ლ ი მ ი ტ ა ლ ი ა, რომელიც I ინტეგრალს ამ ქვედა საზღვრის მნიშვნელობას ანიჭებს.

ამრიგად, განსაკუთრებულობის იმ შემთხვევებში, რომლებიც ჩვენი შემთხვევების მსგავსია, ვარიაციათა აღრიცხვის საგანი უნდა განვიხილოთ I ინტეგრალის ქვედა საზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პ ი რ ო ბ ე ბ ი ს ძიების თვალსაზრისით, ე. ი. იმ თვალსაზრისით, რომ დამხმარე ველის ექსტრემალი ამოცანისათვის ჭეშმარიტ ლ ი მ ი ტ ა ლ ს წარმოადგენს.

III. V ფუნქცია

28. გადატეხის წერტილებისათვის ზევით ნაგულისხმევი იყო შემდეგი უტოლობის შესრულება:

$$f_x+y'_0 f_y-\bar{f}_x-\bar{y}'_0\bar{f}_y>0.$$

ახლა გამოვარკვიოთ, არსებობს თუ არა წყვეტილი მძლავრი ექსტრემალი საწინააღმდეგო შემთხვევაში, ე. ი. როცა:

$$f_x+y'_0 f_y-\bar{f}_x-\bar{y}'_0\bar{f}_y<0. \tag{33}$$

განვაგრძოთ P_1R_0 და $\overline{R}_0P_2$ ექსტრემალები: პირველი R_0 წერტილის მარჯვნივ, ხოლო მეორე $\overline{R}_0$ წერტილის მარცხნივ. (I) პირობების მიხედვით, ჩვენ მივიღებთ ახალ წყვეტილ ექსტრემალს:

$$\overline{E}_0(\widetilde{P}_1, \overline{R}_0 R_0 \widetilde{P}_2).$$

ჩვენ ახლავე დავინახავთ, რომ სწორედ ეს არის ის წყვეტილი ექსტრემალი, რომელიც (33) შემთხვევაში მძლავრი ექსტრემალია.

მართლაც, თუ ისე ვიმსჯელებთ, როგორც (n^0.10)-ში, მივიღებთ შემდეგ ფუნქციას:

$$\widetilde{I}(x)=\int_{\bar{x}_1}^{x} f(x,\bar{y}_0(x),\bar{y}_0{}'(x))\,dx+\int_{x}^{\bar{x}_2} f(x,y_0(x),y'_0(x))dx,$$

სადაც $\bar{x}_1$ წარმოადგენს $\widetilde{P}_1$ წერტილის აბსცისს, ხოლო $\bar{x}_2$ კი $\widetilde{P}_2$ წერტილისას; x აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$|x-x_0|<\rho.$$

$\widetilde{I}(x)$ ფუნქციას უმცირესი მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს, როდესაც $x=x_0$, მაშასადამე,

$$\widetilde{I}'(x_0)=0, \quad \widetilde{I}''(x_0)\geqq 0.$$

(I) განტოლებათა ძალით ადგილი აქვს $\widetilde{I}'(x_0)=0$ ტოლობას. მეორე პირობას მივყევართ შემდეგ უტოლობამდე;

$$f_x+y'_0 f_y-\bar{f}_x-\bar{y}'_0\bar{f}_y<0.$$

სწორედ ეს იყო დასამტკიცებელი.

ვთქვათ ჩვეულებრივი მინიმუმის აუცილებელი პირობები $P_1\widetilde{P}_1$ და $\widetilde{P}_1 P_2$ ექსტრემალებზე შესრულებულია. ამრიგად, თუ ფუნქცია:

$$V=f_x+y'_0 f_y-\bar{f}_x-\bar{y}'_0\bar{f}_y$$

დადებითია $L(x_0, y_0, \bar{y}_0, y'_0, \bar{y}'_0)$ მრუდისათვის, მაშინ E_0 ექსტრემალი მძლავრია, ხოლო $\bar{E}_0$ ექსტრემალი სუსტი. თუ იმავე მნიშვნელობათათვის აღნიშნული ფუნქცია უარყოფითია, მაშინ $\bar{E}_0$ ექსტრემალი მძლავრია, ხოლო E_0 კი სუსტი. საეჭვოა $I' = 0$ შემთხვევა. ასეთ შემთხვევაში საჭირო ხდება $I(x)$ ანდა $\bar{I}(x)$ ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულთა განხილვა, $x = x_0$ წერტილზე.

IV. მაგალითები

29. საძიებელია შემდეგი ინტეგრალის მინიმუმი:

$$I = \int_{-1}^{+1} (xy' + y)^2 \, dx$$

იმ მისაღებ მრუდთა შორის, რომლებიც აერთებენ ორ

$$P_1(-1, -1) \text{ და } P_2(1, 1)$$

წერტილს.

აქ ეილერის განტოლება წრფივი განტოლებაა y'' და y' წარმოებულთა მიმართ:

$$x^2 y'' + 2x y' = 0,$$

ვისი ზოგადი ინტეგრალია:

$$y = \alpha + \frac{\beta}{x}$$

ამას გარდა გვაქვს კიდევ კერძო ექსტრემალი $x=0$. ამგვარად არ არსებობს არც ერთი უწყვეტი ექსტრემალი, რომელიც P_1 და P_2 წერტილებს აერთებდეს.

მაშასადამე, განსახილავ ამოცანას უწყვეტი ამონახსნები არ გააჩნია.

განვიხილოთ წყვეტილი ამონახსნები. აქ საქმე გვაქვს გამონაკლის შემთხვევასთან, რადგან არსებობს მისაღები წყვეტის მხოლოდ ერთი წერტილი $\bar{x}_0 = 0$. (A) პირობა შესრულებულია $\bar{x}_0$ სიდიდის მხოლოდ ამ მნიშვნელობისათვის. (I') განტოლებები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$x(xy' + y) = 0, \quad x(x\bar{y}' + \bar{y}) = 0,$$

საიდანაც[1]

$$x = 0.$$

ამგვარად საძიებელი წყვეტილი ექსტრემალი შედგენილია x-ღერძის პარალელური წრფეების ორი შემდეგი მონაკვეთისაგან:

$$(E_0) \qquad \begin{aligned} y &= -1, \quad -1 \leqq x < 0, \\ y &= +1, \quad 0 < x \leqq +1. \end{aligned}$$

სწორედ ამ წყვეტილ წირზე აღწევს I ინტეგრალი თავის ქვედა საზღვარს.

ახლა შევამოწმოთ, რომ არსებობს მიახლოების მისაღები უწყვეტი λ_n წირები, ე. ი. წირები, რომლებიც ძირითად (A) პირობას აკმაყოფილებენ. E_0 ექსტრემალის P_1R_0 და $\overline{R_0P_2}$ შტოებზე ავიღოთ ორი $A(-\varepsilon, -1)$, $B(+\varepsilon, +1)$

[1] ჩვენ განუხილავად დავტოვებთ შემდეგ განტოლებებს: $xy' + y = 0$, $x\bar{y}' + \bar{y} = 0$, რადგან ისინი არ გვაძლევენ მისაღებ წყვეტილ ექსტრემალებს.

წერტილი და შევაერთოთ ისინი AB წრფით. ამგვარად ჩვენ შევადგენთ მიახლოების უწყვეტ λ_n წირს. I ინტეგრალის მნიშვნელობა λ_n წირზე შემდეგნაირად გამოისახება:

$$I_{\lambda_n} = \int_{-1}^{-\varepsilon} dx + \frac{4}{\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x^2\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} dx,$$

საიდანაც $I_{\lambda_n} = 2 + \frac{2\varepsilon}{3}$.

ამრიგად I_{λ_n} ნებისმიერად შეგვიძლია დავუახლოვოთ $I_{E_0} = 2$ მნიშვნელობას და, მაშასადამე, ძირითადი (A) პირობა შესრულებულია.

უკანასკნელი განტოლება იმის მაჩვენებელია, რომ I_{λ_n} მუდამ აღემატება I_{E_0} სიდიდეს. ჩვენ დავინახავთ, რომ E_0 წირის ეს უკანასკნელი თვისება ზოგადია, ე. ი. I_{E_0} ყოველთვის ნაკლები რჩება ვიდრე იმავე I ინტეგრალის მნიშვნელობა ნებისმიერ სხვა უწყვეტ მრუდზე, რომელიც კიდურა P_1 და P_2 წერტილებს აერთებს.

მართლაც, თუ ვისარგებლებთ ფორმულით:

$$\int_a^b y'^2\, dx \geqq \frac{(B-A)^2}{b-a},$$

სადაც A და B კიდურა წერტილების ორდინატებს წარმოადგენენ, გვექნება:

$$\int_{-1}^{+1} (xy' + y)^2\, dx = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{d(xy)}{dx}\right]^2 dx = \int_{-1}^{0} \left[\frac{d(xy)}{dx}\right]^2 dx + \int_{0}^{1} \left[\frac{d(xy)}{dx}\right]^2 dx \geqq 2.$$

მეორე მხრივ, ადვილი საჩვენებელია, რომ I ინტეგრალი ვერ მიაღწევს 2 მნიშვნელობას მისაღები უწყვეტი წირისათვის, რომელიც მოცემულ P_1 და P_2 წერტილებს აერთებს.

მაგრამ ზემოთ ჩვენ დავრწმუნდით ისეთი უწყვეტი წირების არსებობაში, რომლებიც I ინტეგრალს ანიჭებენ 2-თან რაგინდ მიახლოებულ მნიშვნელობას და, მაშასადამე, $I_{E_0} = 2$ წარმოადგენს I ინტეგრალის ქვედა საზღვარს. სწორედ ეს იყო დასამტკიცებელი.

საკმარისი პირობების შესამოწმებლად დაგვრჩა მხოლოდ ის, რომ შევადაროთ E_0 ექსტრემალი შედარების წყვეტილ ანალოგიურ წირებს.

უშუალოდ ჩანს, რომ (n^0.11)-ის (7), $(\overline{7})$ პირობები შესრულებულია და, მაშასადამე, P_1 და P_2 სათავეებად შეიძლება E_0 ექსტრემალის ნებისმიერი წერტილების აღება.

დავუშვათ, რომ E_0 ექსტრემალს შემოკრული აქვს ანალოგიურ წყვეტილ ექსტრემალთა ოჯახი. ცხადია, რომ თითოეული ამ ექსტრემალთაგანი x-ების ღერძის პარალელურ წრფეთა ორი ნაკვეთისაგან შედგება, რომლებიც შეერთებული არ არიან. წყვეტის წერტილთა წირი არის: $x = 0$.

ახლა შევადაროთ I ინტეგრალი E_0 ექსტრემალის გასწვრივ ანალოგიურ მისალებ წყვეტილ წირებს, რომლებიც იმავე P_1 და P_2 წერტილებს აერთებენ. ვაიერშტრასის E ფუნქციას რომელიმე ასეთი წყვეტილი მრუდის გასწვრივ, როგორიც $y=\bar{y}(x)$ მრუდია, აქვს შემდეგი გამოსახვა:

$$E=(x\bar{y}'+\bar{y})^2-\bar{y}^2-2\bar{y}\,\bar{y}'x=x^2\,\bar{y}'^2,$$

მაშასადამე,

$$\Delta I=\int_{-1}^{+1} x^2\,\bar{y}'^2\,dx$$

და E_0 მრუდი ახორციელებს I ინტეგრალის მკაცრ მინიმუმს ანალოგიურ წყვეტილ მრუდთა F_0 ველში.

30. საძიებელია ინტეგრალის:

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sin(yy')\,dx$$

ექსტრემუმი.

ამ შემთხვევაში ეილერის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$-y\frac{d}{dx}[\cos yy']=0\cdot$$

მისი ზოგადი ინტეგრალია

$$y^2=\alpha x+\beta.$$

გარდა ამისა, მას გააჩნია განსაკუთრებული ინტეგრალი $y=0$. მოვძებნოთ ამ ამოცანის წყვეტილი ექსტრემალი.

უშუალოდ ჩანს, რომ ძირითადი $(\overline{A})$ პირობა შესრულებულია $\bar{x}_0$ ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის, რასაც $f=\sin yy'$ ფუნქციის სახე გვიჩვენებს; ეს იმას ნიშნავს, რომ შედარების ყოველი უწყვეტი მრუდი, რომელიც რეგულარობის ცნობილ პირობებს აკმაყოფილებს მისაღები მრუდია (n^0.3)-ის თვალსაზრისით. ამრიგად წყვეტის წერტილი ნებისმიერია. ეს ზოგადი შემთხვევის ამოცანაა.

(I) განტოლებები შემდეგი სახით წარმოგვიდგება:

$$\sin yy'=\sin\bar{y}\bar{y}',$$

$$y\cos yy'=0,\qquad \bar{y}\cos\bar{y}\bar{y}'=0,$$

საიდანაც ასეთი დასკვნები მიიღება:

$$yy'=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad \bar{y}\bar{y}'=\frac{5\pi}{2}+k\pi.$$

ამრიგად წყვეტილი ექსტრემალი შედგება ორი პარაბოლისაგან:

$$y^2=(2k+1)\pi x+\beta,\quad y^2=(2k+5)\pi x+\bar{\beta}. \tag{34}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ გვაქვს შემთხვევა როდესაც $f_y=0$, $\bar{f}_y=0$ (იხ. n^0.13).

ახლა განვიხილოთ ჩვეულებრივი მინიმუმის იაკობისა და ვაიერშტრასის პირობები. გვექნება:

$$\Delta(x, x_0) = \frac{x-x_0}{yy'_0}.$$

ამგვარად, იაკობის პირობები მუდამ შესრულებულია.

ვაიერშტრასის ფუნქცია ასე გამოისახება:

$$E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}') = \sin \bar{y}\bar{y}' - \sin(\bar{y}\, p(x, \bar{y})) - (\bar{y}' - p)\cos(\bar{y}\, p(x, \bar{y})).$$

მაგრამ (34) განტოლებების მიხედვით მივიღებთ:

$$y\, p(x, y) = \begin{cases} (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \\ (2k+5)\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

და, მაშასადამე,

$$\sin y \cdot p = (-1)^k, \ \cos y \cdot p = 0,$$

აქედან მიიღება დასკვნა:

$$E = \sin \bar{y}\bar{y}' + (-1)^{k+1} \begin{cases} \leqq 0, & \text{როცა } k \text{ კენტია,} \\ \geqq 0, & \text{როცა } k \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

მეორე მხრივ (B_1) პირობა შესრულებულია.

გარდა ამისა შეიძლება დამტკიცება, რომ:

$$\Delta I = \frac{1}{2}\widetilde{\Theta}(\alpha, \beta, \overline{\beta}) \begin{cases} \geqq 0 \\ \leqq 0 \end{cases},$$

იმის მიხედვით k ლუწია თუ კენტი.

ამგვარად, გვაქვს ორი ჯგუფი წყვეტილი ამონახსნებისა, იმისდა მიხედვით, k ლუწია თუ კენტი. პირველი ჯგუფის ექსტრემალები I ინტეგრალს აბსოლუტურ მაქსიმუმს ანიჭებენ, ესაა x_2-x_1, ხოლო მეორე ჯგუფის ექსტრემალები გვაძლევენ აბსოლუტურ მინიმუმს $-(x_2-x_1)$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ კიდურა P_1 და P_2 წერტილები x ღერძის ერთსა და იმავე მხარეზე მდებარეობენ, იარსებებს უამრავი უწყვეტი კუთხიანი მრუდები, რომლებიც ამ ორ წერტილს აერთებენ და რომლებიც I ინტეგრალს ან მაქსიმალურ x_2-x_1 მნიშვნელობას მიანიჭებენ, ან მინიმალურ $-(x_2-x_1)$ მნიშვნელობას. მაგრამ თუ ეს კიდურა წერტილები იმყოფებიან x ღერძის სხვადასხვა მხარეზე, მაშინ არ იარსებებს არც ერთი მისაღები წირი, რომელიც ამ წერტილებს აერთებს და იმავე დროს I ინტეგრალს ექსტრემალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს. მეორე მხრივ ამ უკანასკნელ შემთხვევაში მუდამ შესრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$-2\varepsilon < \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \sin yy'\, dx < 2\varepsilon.$$

აქედან (n^0.27)-ის თეორემის მიხედვით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ როდესაც P_1 და P_2 წერტილები x ღერძის სხვადასხვა მხარეს იმყოფება:

ექსტრემუმი არ ხორციელდება უწყვეტ მრუდთა ველში.

I ინტეგრალს უწყვეტ მრუდთა ველში აქვს ქვედა $-(x_2, -x_1)$ და ზედა $x_2 - x_1$ საზღვარი.

არსებობს წყვეტილი ექსტრემალები, რომელნიც I ინტეგრალს ამ ზღვრულ მნიშვნელობებს ანიჭებენ.

VII

მინიმალურ ზედაპირთა თეორიის ერთი თეორემის შესახებ[1]

ბ-ნ კარლემანმა შრომაში „Zur Theorie der Minimalflächen“, რომელიც Mathematische Zeitchrift-ის IX ტომშია მოთავსებული, იპოვა მინიმალურ ზედაპირთა ახალი თვისება, რომელიც შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

მინიმალური ზედაპირის იმ ნაჭრის A ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია მოცემული L სიგრძის C მრუდით, ყოველთვის შემდეგ უტოლობას აკმაყოფილებს:

$$A \leqq \frac{L^2}{4\pi}.$$

ეს უტოლობა ბ-ნ კარლემანს შემდეგი ორი ფორმულის მთელი რიგი გარდაქმნების საფუძველზე აქვს მიღებული:

$$A = \iint (1 + |\tau|^2)^2 \, |F(\tau)|^2 \, d\alpha \, d\beta,$$

$$L = \int (1 + |\tau|^2) \, |F(\tau)| \, |d\tau|;$$

ეს ფორმულები გამოსახავენ განსახილავ ფართობსა და სიგრძეს, სადაც $F(\tau)$ წარმოადგენს მინიმალური ზედაპირის შესაბამის ვაიერშტრასის ფუნქციას, ხოლო $\tau = \alpha + i\beta$.

ჩვენ მივაღწიეთ ბ-ნ კარლემანის ამ თეორემის დამტკიცების მნიშვნელოვან გამარტივებას. ჩვენ დავემყარეთ ზემომოყვანილ ფორმულებს და მოვიშველიეთ, გარდა ამისა, ის მოსაზრებანი, რომლებიც Collège de France-ის სემინარში გამოთქვეს ბ. ბ. პოლ ლევიმ და ვეილმა. ამ დამტკიცებაში ნაგულისხმევია, რაც, სხვათა შორის, თითონ კარლემანსაც აქვს, რომ განსახილავი მინიმალური ზედაპირი, ან ყოველ შემთხვევაში მისი ის ნაჭერი, რომელთანაც საქმე გვექნება, მარტივია და ადგილი არა აქვს იმ გარემოებას, რაც დარბუმ შეისწავლა თავისი Théorie des surfaces-ის I ტომის (n^0.220)-ში[2], ე. ი. ნაგულისხმევია, რომ ერთ-ერთი წარმომშობი მინიმალური მრუდის კოორდინატები არ არიან τ (ან τ_1) პარამეტრის პერიოდული ფუნქციები. როდესაც განსახილავი ზედაპირის ნაჭერი მარტივადბმულია, ჩვენ შემდეგში დარწმუნებული ვიქნებით, რომ აღნიშნული პირობა შესრულებულია.

---

[1] ეს წერილი შეადგენს ჟ. ადამარის სემინარის შრომების ნაწილს. პოლ ლევი და ვეილი მასში თანამშრომლობდნენ. წერილი დაიბეჭდა ჟურნალში „Bulletin des Sciences mathématiques“ (იხ. A. Razmadse, Sur un theoréme de la theorie des surfaces minima, Bulletin des Sciences mathématiques, 1925).

[2] მეორე გამოცემა, გვ. 401.

I

1. მოცემულ მინიმალურ Σ ზედაპირზე და სათანადო მიკავშირებულ Σ_0 ზედაპირზე წერტილის კოორდინატები შესაბამისად ასე აღვნიშნოთ: x, y, z; x_0, y_0, z_0; მაშასადამე, გვაქვს:

$$x = \frac{1}{2}\int(1-\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int(1-\tau_1^2)\,F_1(\tau_1)\,d\tau_1,$$

$$y = \frac{i}{2}\int(1+\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau - \frac{i}{2}\int(1+\tau_1^2)\,F_1(\tau_1)\,d\tau,$$

$$z = \int\tau\,F(\tau)\,d\tau + \int\tau_1\,F_1(\tau_1)\,d\tau_1,$$

$$x_0 = \frac{i}{2}\int(1-\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau - \frac{i}{2}\int(1-\tau_1^2)\,F_1(\tau_1)d\tau_1,$$

$$y_0 = -\frac{1}{2}\int(1+\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int(1+\tau_1^2)\,F_1(\tau_1)\,d\tau_1,$$

$$z = i\int\tau\,F(\tau)\,d\tau - i\int\tau_1\,F_1(\tau_1)\,d\tau_1$$

ამ ორ ზედაპირზე შესაბამისი წერტილები მოცემულია ორი კომპლექსური τ, τ_1 ცვლადის მნიშვნელობათა ერთი და იმავე სისტემით, ამასთანავე აღნიშნულ წერტილებში ზედაპირების მხები სიბრტყეები პარალელურია.

წინა განტოლებანი შემდეგ დამოკიდებულებებს მოგვცემს:

$$u = x_0 + ix = i\int(1-\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau, \quad v = y_0 + iy = -\int(1+\tau^2)\,F(\tau)d\tau,$$

$$w = z_0 + iz = 2i\int\tau\,F(\tau)\,d\tau,$$

$$\bar{u} = x_0 - ix = -i\int(1-\tau_1^2)\,F_1(\tau_1)\,d\tau_1, \quad \bar{v} = y_0 - iy = -\int(1+\tau_1^2)\,F_1(\tau_1)\,d\tau_1,$$

$$\bar{w} = z_0 - iz = -2i\int\tau_1\,F_1(\tau_1)\,d\tau_1$$

ამგვარად, u, v, w; $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ანალიზური ფუნქციებია, პირველი სამი — τ ცვლადისა, ხოლო უკანასკნელი სამი კი τ_1-ისა.

სამი u, v, w ცვლადის სიბრტყის შესაბამისი წირითი ელემენტები აღვნიშნოთ ასე: ds_u, ds_v, ds_w. მაშინ უკანასკნელი განტოლებების ძალით გვექნება:

$$ds_u^2 = (dx_0 + idx)\,(dx_0 - idx) = (1-\tau^2)\,(1-\tau_1^2)\,F(\tau)\,F_1(\tau_1)\,d\tau\,d\tau_1.$$

იგრეთვე ანალოგიურად მივიღებთ, რომ:

$$ds_v^2 = (1+\tau^2)\,(1+\tau_1^2)\,F(\tau)\,F_1(\tau_1)\,d\tau\,d\tau_1,$$

$$ds_w^2 = 4\tau\,\tau_1\,F(\tau)\,F_1(\tau_1)\,d\tau\,d\tau_1.$$

მეორე მხრივ, Σ და Σ_0 ზედაპირთა წირითი ელემენტები ასე გამოისახება:

$$ds^2 = ds_0^2 = (1+\tau\,\tau_1)^2\,F(\tau)\,F_1(\tau_1)\,d\tau\,d\tau_1.$$

თუ შევასრულებთ ds_u, ds_v; ds_w დიფერენციალთა გაყოფას ds დიფერენციალზე, ადვილად ვიპოვით შემდეგ გაჭოსახვებს:

$$\left(\frac{ds_u}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\tau + \tau_1}{\tau\tau_1 + 1}\right)^2, \quad \left(\frac{ds_v}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{i(\tau_1 - \tau)}{\tau\tau_1 + 1}\right)^2,$$

$$\left(\frac{ds_w}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\tau\tau_1 - 1}{\tau\tau_1 + 1}\right)^2.$$

მაგრამ მარჯვენა მხარის ფრჩხილებში მოქცეული გამოსახულებები, ვთქვათ ეს იყოს X, Y, Z, წარმოადგენენ Σ ზედაპირის ნორმალის გეზის კოსინუსებს. ამგვარად გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\left(\frac{ds_u}{ds}\right)^2 = 1 - X^2, \quad \left(\frac{ds_v}{ds}\right)^2 = 1 - Y^2, \quad \left(\frac{ds_w}{ds}\right)^2 = 1 - Z^2 \tag{1}$$

ამათგან კი მიიღება ასეთი:

$$ds^2 = \frac{1}{1 - X^2}(dx^2 + dx_0^2) = \frac{1}{1 - Y^2}(dy^2 + dy_0^2) = \frac{1}{1 - z^2}(dz^2 + dz_0^2). \tag{2}$$

ამ ფორმულებით დადგენილია, თუ როგორაა შებმული ერთმანეთთან Σ და Σ_0 ზედაპირები. წარმოსახვითი მინიმალური ზედაპირებისათვისაც ეს ფორმულები ისევეა გამოსადეგი, როგორც ნამდვილი მინიმალური ზედაპირებისათვის. მათი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია უშუალოდ ცხადია.

2. მოცემულ მინიმალურ Σ ზედაპირს ცალ-ცალკე u, v, w სიბრტყეები წერტილ-წერტილ ისე შევუსაბამოთ, რომ სათანადო წერტილები τ, τ_1 სიდიდეთა ერთი და იმავე სისტემით იყოს მოცემული. მაშინ (1) ფორმულები იმას გვიჩვენებენ, რომ ასეთი შესაბამისობა წარმოადგენს Σ ზედაპირის კონფორმულ ასახვას ამ სიბრტყეებზე და რომ მსგავსობის სათანადო სამი ფარდობა, რომლებიც ამ სიბრტყეებს შეესაბამება, მუდმივია შესაბამისი წერტილებისათვის ყოველ მინიმალურ ზედაპირზე.

წრფივი ელემენტის (2) ფორმულების მიხედვით Σ ზედაპირის ფართითი ელემენტი შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{1}{1 - X^2}\, dx\, dx_0, \quad \text{ან} \quad \frac{1}{1 - Y^2}\, dy\, dy_0, \quad \text{ან} \quad \frac{1}{1 - Z^2}\, dz\, dz_0.$$

ვთქვათ ფართითი ელემენტი Σ ზედაპირზე არის dA, ხოლო dA_u, dA_v, dA_w შესაბამისი ელემენტებია u, v, w სიბრტყეებზე. მაშინ (1) ფორმულების მიხედვით გვექნება:

$$dA_u = (1 - X^2)\, dA, \quad dA_v = (1 - Y^2)\, dA, \quad dA_w = (1 - Z^2)\, dA.$$

ამ განტოლებათა შეკრება მოგვცემს ფორმულას:

$$2dA = dA_u + dA_v + dA_w,$$

ხოლო აქედან კი მიიღება რიმანის დებულება[1]:

$$2A = A_u + A_v + A_w. \tag{3}$$

3. ჩვენ ახლავე დავინახავთ, რომ თუ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$dX^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2, \tag{4}$$

[1] B. Riemann. Oeuvres complètes, თარგმანი Laugel-ისა, გვ. 205.

მაშინ ყოველთვის ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობასაც:

$$\left(\int dX\right)^2 \geqq \left(\int dX_1\right)^2 + \left(\int dX_2\right)^2 + \left(\int dX_3\right)^2, \qquad (A)$$

სადაც X, X_1, X_2, X_3 ნამდვილი ფუნქციებია.

აი ამ დებულების მოხდენილი დამტკიცება, რომელიც შეასრულა ბ-ნ პოლ ლევიმ ჩემი მოხსენების დროს.

(4) განტოლების გამო ყოველთვის შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ტოლობები:

$$dX_1 = \gamma_1 dX, \quad dX_2 = \gamma_2 dX, \quad dX_3 = \gamma_3 dX,$$

შესრულებულია ისე, რომ ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

ახლა ავიღოთ შვარცის უტოლობა:

$$\left(\int uv dX\right)^2 \leqq \int u^2 dX \cdot \int v^2 dX.$$

თუ მასში მიმდევრობით ჩავსვამთ მნიშვნელობებს: $u = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ და $v = 1$, მივიღებთ ასეთ უტოლობებს:

$$\left(\int dX_1\right)^2 \leqq \int \gamma_1^2 dX \int dX, \quad \left(\int dX_2\right)^2 \leqq \int \gamma_2^2 dX \int dX,$$

$$\left(\int dX_3\right)^2 \leqq \int \gamma_3^2 dX \int dX.$$

ახლა, თუ ამათ წევრ-წევრად შევკრებთ, გვექნება უტოლობა:

$$\left(\int dX_1\right)^2 + \left(\int dX_2\right)^2 + \left(\int dX_3\right)^2 \leqq \left(\int dX\right)^2$$

ამით დებულებაც დამტკიცებულია.

ძალიან ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ამ ფორმულაში ტოლობას მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც (X_1, X_2, X_3) წერტილი წრფეს აღწერს.

II

4. ვთქვათ L სიგრძის შესაბამისი სიგრძეები u, v, w სიბრტყეებზე ასეა აღნიშნული: L_u, L_v, L_w. შემდეგი აშკარა ტოლობის საფუძველზე

$$2ds^2 = ds_u^2 + ds_v^2 + ds_w^2$$

თუ გავიხსენებთ (A) უტოლობასაც, ასეთი უტოლობა მიიღება:

$$2L^2 \geqq L_u^2 + L_v^2 + L_w^2. \qquad (5)$$

მეორე მხრივ, ცნობილია, რომ ერთისა და იმავე სიგრძის მრუდთა შორის წრეწირი ყველაზე დიდ ფართობს შემოსაზღვრავს. მაშასადამე, გვექნება უტოლობანი:

$$A_u \leqq \frac{L_u^2}{4\pi}, \quad A_v \leqq \frac{L_v^2}{4\pi}, \quad A_w \leqq \frac{L_w^2}{4\pi}. \qquad (6)$$

ახლა თუ ამათ შევკრებთ და მხედველობაში მივიღებთ (3) ტოლობასა და (5) უტოლობას, მივიღებთ ასეთ დამოკიდებულებას:

$$A \leqq \frac{L_u^2 + L_v^2 + L_w^2}{8\pi} \leqq \frac{L^2}{4\pi}. \qquad (7)$$

ამგვარად საძიებელი უტოლობა დამტკიცებული იქნება, თუ აუცილებელი პირობები (6) უტოლობის გამოსაყენებლად შესრულებულია.

მართლაც, უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ იმის გამო, რაც აღებული ზედაპირის ფორმისა და ანალიზური ბუნების შესახებ იყო ნაგულისხმევი, არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ზედაპირსა და ერთ-ერთ მინიმალურ წირს შორის, ეს აღარ იქნება აუცილებლად ასე, რო კა საქმე ეხება ამ მრუდის მხოლოდ ერთ კოორდინატს, ე. ი. როცა საქმე ეხება u ცვლადის სიბრტყეზე მოხაზულ ფიგურას. პირიქით, ეს ფიგურა რამდენჯერმე გადაფარავს განსახილავი ცვლადის სიბრტყის რაღაც ნაჭერს და იმავე სიბრტყეში ექნება განშტოების წერტილები ყოველთვის, როდესაც მინიმალურ წირს vw სიბრტყის პარალელური მხებები გააჩნია (vw სიბრტყე იგულისხმება u, v, w სისტემაში).

პირიქით, თუ u რჩება τ ცვლადის ანალიზურ ფუნქციად, u სიბრტყეში ნამდვილი კოორდინატების ფუნქციონალური დეტერმინანტი τ სიბრტყეში ანალოგიური კოორდინატების მიმართ მუდამ დადებითი დარჩება.

მაგრამ ეს საკმარისია იმისათვის, რომ (6) უტოლობანი ძალაში დარჩენ. ამასთან A_u ფართობი იმდენჯერ ითვლება თითოეული თავისი ელემენტით, რამდენჯერაც ესენი u ცვლადის სიბრტყეს ჰფარავენ და ანალოგიურად იქნება A_v, A_w ფართობებისათვისაც.

მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ზემოაღნიშნულ შენიშვნას ფუნქციონალური დეტერმინანტის ნიშნის შესახებ, მაგალითად, A_u ფართობის კონტურები (ასე ვუწოდოთ ყოველ წირს, რომლის გასწვრივაც დაფარული ფართობის ფურცელთა რიცხვი იცვლება) ყველა შედგენილია სწორედ იმ მრუდის ნაჭრებისაგან, რომელსაც L_u ვუწოდეთ, ზემოხსენებული შეთანხმების საფუძველზე A_u ფართობი შემდეგი ინტეგრალით წარმოგვიდგება:

$$A_u = \frac{1}{2}\left|\int x dx_0 - x_0 dx\right|\cdot$$

და ახლა მხოლოდ ისღა დარჩა, რომ შევადაროთ იგი იმ ინტეგრალს, რომელსაც L_u გვაძლევს. მაგრამ ამ მხრივ შეცვლას არ საჭიროებს ვარიაციათა აღრიცხვის კლასიკური დამტკიცება, რომელიც სრულიად არ გულისხმობს რომ L_u წირი თავისუფალია ჯერადი წერტილებისაგან.

აგრეთვე შეიძლება შევნიშნოთ, როგორც ეს ბ-ნ ვეილმა გვირჩია, რომ თუ A_u ფართობი რამდენიმე ფურცლისაგან შედგება, იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჯამი ფართობების, თითო-თითო ფურცელზე, სახელდობრ იმ ფურცელზე, რომელიც შედგენილია ყველა ერთხელ მაინც დაფარული წერტილისაგან, რასაც ემატება ისეთი, რომელიც შედგენილია (ან ისეთები, რომლებიც შედგენილია) ორჯერ მაინც დაფარული წერტილებისაგან და ასე შემდეგ. თუ ვისარგებლებთ იმ ფაქტით, რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი ნიშანს არ იცვლის, ყოველი განსახილავი ცალკეული ფართობის კონტური მხოლოდ და მხოლოდ L_u წირის ნაჭრებისაგან შედგება და, მაშასადამე, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ (6) უტოლობას ადგილი აქვს იმ ფართობი-

სათვის, რომელიც შედგენილია რამდენიმე ურთიერთდამოუკიდებელი ნაწილისაგან, ეს კი მით უფრო სამართლიანია მას შემდეგ, როცა იგი მიღებული იყო ერთადერთი ფართობისათვის.

ამგვარად ჩვენი დამტკიცება ყოველმხრივ დასრულებულია.

იმის მიხედვით, რაც (A) უტოლობის შესახებ იყო დადგენილი, (7) უტოლობის ტოლობით შესაცვლელად საჭიროა არა მარტო ის, რომ ეს ასე მოხდეს ყოველი (6) უტოლობისათვისაც, არამედ, გარდა ამისა, ისიც, რომ ds_u, ds_v, as_w-ის მსგავსობის შეფარდებანი განსახილავი ფართობის მთელ კონტურზე უცვლელი დარჩეს და, მაშასადამე, რაკი საქმე ანალიზურ ფუნქციებთან გვაქვს, du, dv, dw დიფერენციალების ურთიერთშეფარდება მუდმივი იყოს მთელ ამ ფართობზე ასე, რომ ეს უკანასკნელი ბრტყელი და წრიული უნდა გახდეს.

პარიჟი, 1925 წლის 26 მარტი.

VIII

ინტეგრალის ქვედა ზღვარის არსებობის პირობების შესახებ ვარიაციათა აღრიცხვაში, იმ შემთხვევისათვის, როცა ექსტრემუმი არ არსებობს[1]

წინათ, *ვაიერშტრასამდე*, ფიქრობდნენ, რომ თუ არსებობს ქვედა ზღვარი ინტეგრალისა:

$$I_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx,$$

ამით სავსებით უზრუნველყოფილია მისი აბსოლუტური მინიმუმის არსებობაც. მაგალითად: *რიმანი* ამტკიცებდა, რომ მინიმუმი ორმაგი ინტეგრალისა

$$\iint \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy$$

აუცილებლად უნდა არსებობდეს უბრალოდ იმის გამო, რომ ამ ინტეგრალის ქვედა ზღვარი ნულია.

როგორც ცნობილია, ამის საფუძველზე *რიმანმა* ააგო დირიხლეს პრობლემის ამოხსნა. *ვაიერშტრასმა* პირველმა დაამტკიცა, რომ აღნიშნული დასკვნა მცდარია.

შემდეგი კერძო სახის ინტეგრალზე:

$$I_{(-1, A)}^{(+1, B)} = \int_{-1}^{+1} (xy' + y)^2\, dx,$$

რომელიც ყოველთვის $\geqq A^2 + B^2$, ძალიან ადვილად შეიძლება იმ ფაქტის აღმოჩენა, რომ, მიუხედავად ქვედა ზღვარის არსებობისა, შეუძლებელია ამ ინტეგრალის მინიმუმის განხორციელება, თუ კი $A \neq B$.

მეორე მხრივ, შეიძლება აგებულ იქნეს ისეთი მაგალითებიც, რომ ინტეგრალის ქვედა ზღვარი არ არსებობდეს, როცა ამ ინტეგრალს არ აქვს მინიმუმი.

ამრიგად, ბუნებრივად ისმება საკითხი:

მოვძებნოთ $I_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$ *ინტეგრალის ქვედა ზღვარის არსებობის პირობები იმ შემთხვევაში, როცა მინიმუმი არ შეიძლება განხორციელდეს უწყვეტ დასაშვებ წირთა ველში.*

როგორც ცნობილია, ინტეგრალის აბსოლუტური ექსტრემუმი განხორციელდება მხოლოდ მაშინ, თუ შესრულებული იქნება გარკვეული პირობები,

---

[1] ეს წერილი დაიბეჭდა კრებულში: „Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля—4 мая 1927". (იხ. А. Размадзе. Об условиях существования нижнего предела интеграла при отсутствии экстремума в вариационном исчислении. Труды Всероссийского съезда математиков. გვ. 180).

რომელნიც ზღუდავენ f ფუნქციათა კლასს; ამიტომ დასმული საკითხის შესწავლას ჩვენ არსებით მნიშვნელობას ვანიჭებთ.

ვთქვათ I_0 არის I ინტეგრალის ქვედა ზღვარი, მაშინ შეიძლება არჩეულ იქნეს ისეთ დასაშვებ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ წირთა ოჯახი, რომელნიც აერთებენ (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებს, ისე რომ $I\lambda_n$ ინტეგრალი მიისწრაფოდეს I_0-საკენ, როცა n უსაზღვროდ იზრდება. მაგრამ მრუდთა შემოსაზღვრულ სიმრავლეს, როგორც ცნობილია, ყოველთვის არა აქვს ზღვარითი წირი ან დაგროვების წირი. ამ შემთხვევაში არა აქვს ადგილი ანალოგიას წერტილთა შემოსაზღვრულ სიმრავლესთან. ამიტომ (λ_n) ოჯახის ზღვრული წირის მოძებნისას ადგილი ექნება შემდეგ სამ შემთხვევას: 1°. ზღვრული წირი არ არსებობს; 2°. არსებობს ზღვრული წირი და იგი უწყვეტია და 3°. არსებობს ზღვრული წირი, რომელსაც მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილი გააჩნია.

პირველ და უკანასკნელ შემთხვევაში, უწყვეტ წირთა ველში, საზოგადოდ, მინიმუმი ვერ განხორციელდება. რაც შეეხება მეორე შემთხვევას, აქ, ცხადია, მინიმუმი ვერ განხორციელდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც ინტეგრალი ზღვრული წირის გასწვრივ განსხვავებულია I_0-საგან.

ამჟამად არსებული მეთოდებით დასმული საკითხის ამოხსნა პირველ ორ შემთხვევაში დიდ სიძნელეს წარმოადგენს. ჩვენ ვიძლევით საკითხის მთლიან ამოხსნას მხოლოდ მესამე შემთხვევაში, მასთან გამოვდივართ იმ პირობიდან, რომ ინტეგრალი აღებული ზღვრული წირის გასწვრივ ზუსტად ტოლია ქვედა I_0 ზღვარისა.

ამგვარად, ჩვენ წყვეტილი წირების შემოღებით ვაფართოვებთ დასაშვებ წირთა ველს და ვეძებთ ჩვეულებრივ მინიმუმს ამ გაფართოებულ ველში. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს ორი ველი: წყვეტილი წირების F_0 ველი და მაახლოებელი წირების F_1 ველი.

ქვედა ზღვარის არსებობის ძირითადი პირობები იმ შემთხვევისათვის, როცა წყვეტილ წირებს აქვთ ერთადერთი წყვეტის წერტილი, მოცემულია ჩვენს ერთ შრომაში (იხ. Mathem. Annalen, ტ. 94); აქ ჩვენ მოვიყვანთ მხოლოდ ზოგიერთ დამატებით პირობას.

თუ შევადარებთ წყვეტილ E_0 ექსტრემალს მაახლოებელ წირებს, რომელნიც გადაკვეთენ წყვეტის R_0, $\overline{R_0}$ წირს R_0, $\overline{R_0}$ წერტილებთან საკმაოდ მახლობელ $K, \overline{K}$ წერტილებში, ჩვენ მივიღებთ შემდეგ პირობებს:

$$f_y(x_0, y_0, y'_0) \leqq 0, \qquad f_y(x_0, \bar y_0, \bar y'_0) \geqq 0, \qquad \text{როცა } y_0 > \bar y_0$$

$$f_y(x_0, y_0, y'_0) \geqq 0, \qquad f_y(x_0, \bar y_0, \bar y'_0) \leqq 0, \qquad \text{როცა } y_0 < \bar y_0,$$

სადაც (x_0, y_0, y'_0), $(x_0, \bar y_0, \bar y'_0)$ არიან E ექსტრემალის წირითი ელემენტები R_0 და $\overline{R_0}$ წერტილებში. ეს პირობები მიიღება აგრეთვე F_0 ველის ზოგიერთი სპეციალური წირის E_0 ექსტრემალთან შედარებით.

მართლაც, შეიძლება შემდეგი იგივეობის დამტკიცება:

$$f_x + y'_0 f_y - \bar f_x - \bar y'_0 \bar f_y = \frac{f_y^2}{f_{yy'} + f_{y'^2} \dfrac{\Delta_x(x_0, x_1)}{\Delta(x_0, x_1)}} - \frac{\bar f_y^2}{\bar f_{yy'} + \bar f_{y'^2} \dfrac{\bar\Delta_x(x_0, x_1^*)}{\bar\Delta(x_0, x_1^*)}},$$

სადაც $\Delta(x_0, x)$ არის იაკობის განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც ისპობა $x = x_0$-ზე, ხოლო x_1^* არის $P_1(x_1)$ წერტილს შეუღლებული წერტილის აბსცისი. უკანასკნელი ტოლობიდან აუცილებლად გამომდინარეობს, რომ f_y და $\bar{f}_y$ განსხვავდებიან ნულისაგან, ვინაიდან ამ იგივეობის მარცხენა მხარე ნულს არ უდრის.

შემდგომი გამოკვლევა სწარმოებს

$$y'_0 = y_0 - \frac{f_{y'}}{f_{y/} + f_{y'^2} \dfrac{\Delta_x(x_0, x_1)}{\Delta(x_0, x_1)}}$$

ფორმულის გამოყენების საფუძველზე, სადაც $y = \eta(x)$ არის შეწყვეტის წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელიც R_0-ზე გადის, ხოლო η'_0 კი $\eta'(x)$ წარმოებულის მნიშვნელობაა R_0 წერტილზე.

IX

ვარიაციათა აღრიცხვის პერიოდული ამონახსნები და შეკრული ექსტრემალები[1]

შესავალი

პუანკარემ თავის ნაშრომში „Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste“ პირველმა წამოაყენა აზრი იმგვარი შემთხვევის განხილვისა, როდესაც შეკრული ექსტრემალური წირი ინტეგრალს:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

უფრო მცირე მნიშვნელობას მიანიჭებს, ვიდრე სხვა მეზობელი შეკრული წირები.

მას ეკუთვნის ცნობილი დებულება, რომელიც შეეხება მძლავრი ექსტრემუმის პირობებს და რომელიც ასეთნაირად ჩამოყალიბდება:

თუ $\mathfrak{C}_0$ არის შეკრული ექსტრემალური წირი, ხოლო $\mathfrak{C}$ მეზობელი შეკრული წირი, რომელიც $n+1$ ჯერ შემოუვლის $\mathfrak{C}_0$-ს, მაშინ მინიმუმის განხორციელებისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$I_{\mathfrak{C}} > (n+1)\, I_{\mathfrak{C}_0} \tag{P}$$

აქედან მიიღება შემდეგი მნიშვნელოვანი შედეგი: თუ გამოვალთ შეკრული ექსტრემალის $P_1(t_1)$ წერტილიდან ექსტრემალური მიმართულებით, არამცთუ არ უნდა შეგვხვდეს მისი შეუღლებული წერტილი $\mathfrak{C}_0$ წირის ერთი შემოვლით, არამედ არ უნდა შეგვხვდეს არც ერთი შეუღლებული წერტილი, როცა P_1 წერტილი ამ წირს საზოგადოდ $n+1$ ჯერ შემოწერს, რა დიდიც არ უნდა იყოს n.

---

[1] ეს წერილი წარმოადგენს ანდრია რაზმაძის უკანასკნელ გამოკვლევას, რომელიც დაიბეჭდა ჟურნალში „Mathematische Annalen“ (იხ. A. Razmadzé. Sur les solutions périodiques et les extrémales fermées du calcul des variations, Math. Ann. Bd. 110, 1934). წერილს თან ახლავს ცნობილი მათემატიკოსის კ. კარათეოდორის შენიშვნა, რომელიც მოგვყავს უცვლელად: „ანდრია რაზმაძე დაიბადა 1890 წელს ჩხენისში (საქართველო). 1906 წელს მან მიიღო რეალური სასწავლებლის სიმწიფის მოწმობა ქუთაისში, სადაც ოთხი უკანასკნელი კლასი ორ წელიწადში გაიარა. 1906 წლიდან 1910 წლამდე სწავლობდა მოსკოვის უნივერსიტეტში და სწავლის დამთავრების შემდეგ რამდენჯერმე იყო დასავლეთ ევროპაში. მაშინ იგი გაიტაცა ვარიაციათა აღრიცხვამ და სხვას გარდა რამდენიმე თვე იმუშავა ბრესლაუში კ. კარათეოდორისთან. 1917 წელს სწავლების უფლება მიიღო მოსკოვში. რამდენიმე სხვა მეცნიერთან ერთად რაზმაძემ დააარსა თბილისის უნივერსიტეტი (1917 წ.) და პირველმა დაიწყო საქართველოში უმაღლესი მათემატიკის სწავლება. ქართული სპეციალური ტერმინოლოგიაც მისგან წარმოდგება და მან ამ ენაზე დაწერა რამდენიმე შრომა და სახელმძღვანელო. ომის შემდეგ იგი რამდენიმე წლის განმავლობაში ცხოვრობდა დასავლეთ ევროპაში და 1925 წელს პარიზში მიიღო დოქტორის ხარისხი. მისი დისერტაცია „Sur les solution discontinues du calcul des variations“ გამოქვეყნებულია Math. Annalen-ის 94-ე ტომში. ადრინდელი შრომები, აგრეთვე ვარიაციათა აღრიცხვაში, მოთავსებულია Math. Annalen-ის 75-ე და 84-ე ტომში. 1929 წელს მძიმე ავადმყოფობის შედეგად რაზმაძე მოულოდნელად გარდაიცვალა.

წინამდებარე შრომა რაზმაძეს დაუწერია სიკვდილის წინ. ზოგ ადგილას შრომა ზედმეტად გართულებულია. მიუხედავად ამისა მე ვურჩიე Math. Annalen-ის რედაქციას გამოექვეყნებინა ეს შრომა, რადგანაც აქ მესულია ძლიერ საინტერესო შედეგები, რომელთა საშუალებითაც შეკრულ ექსტრემალთა თეორია სიბრტყეზე დამთავრებულ სახემდე მიიყვანება“.

კ. კარათეოდორი

პუანკარეს პირობა არის აბსოლუტურად ზოგადი. ის ძნელად გამოსაყენებელია პრაქტიკაში. (P) უტოლობა ნაძღვილად არის მხოლოდ ჩამოყალიბება საკითხისა აუცილებელი და საკმარისი პირობების შესახებ იმისათვის, რომ ექსტრემუმი განხორციელებული იყოს შეკრული ექსტრემალური წირით. ამ გარემოებამ გამოიწვია საკმაოდ დიდი რიცხვი შრომებისა, რომელნიც ისახავდნენ მიზნად მიღებული ყოფილიყო ექსტრემუმის ნაკლებად ზოგადი პირობები ვიდრე პუანკარეს პირობებია, მაგრამ გამოსაყენებლად უფრო მოსახერხებელი. ძირითადი შედეგები მიღებული ამ მიმართულებით ეკუთვნის — ადამარს, უიტეკერს, ტონელის და კარათეოდორის.

დასმული პრობლემის გადაწყვეტის გასამარტივებლად ადამარმა თავის წიგნში Leçons sur le Calcul des Variations შეკრული ექსტრემალის მეზობელი წერტილები შეუფარდა კოორდინატთა მრუდწირულ (x, y) სისტემას, რომლის x ღერძი მიიღება უსასრულოდ მრავალჯერ აღწერილი პერიოდული ექსტრემალის ასახვით, როცა თვით ასახვა პერიოდულია. პერიოდი ყოველთვის შეიძლება აღებული იყოს ერთეულად, რაც ცხადია ზოგადობას არ ამცირებს და, მაშასადამე, ორი წერტილი ერთი და იგივე ორდინატით, რომელთა აბსცისები მთელი რიცხვით განსხვავდებიან, შეიძლება განხილული იქნეს როგორც ტოლფასი.

დასმული პრობლემა ამგვარად შემდეგის ექვივალენტურია:

ვთქვათ $f(x, y, y')$ არის სამი x, y, y' ცვლადის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს რეგულარობის ცნობილ პირობებს და ამის გარდა განტოლებას:

$$f(x+1, y, y') = f(x, y, y')$$

x-ის ყველა სასრული მნიშვნელობისათვის; ვთქვათ, ამას გარდა, მოცემულია $P_0(0, k)$ და $P_1(1, k)$ წერტილების შემაერთებელი, x ღერძის გარშემო აღებული $|y| < \rho$ ზოლის შიგნით მდებარე, მისაღებ მრუდთა $\mathfrak{W}$ სიმრავლე.

საჭიროა მოიძებნოს აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ინტეგრალი:

$$I = \int_0^1 f(x, y, y')dx$$

აღებული $0 \leqq x \leqq 1$ ინტერვალში იყოს უფრო მცირე, ვიდრე $\mathfrak{W}$ სიმრავლის რომელიმე სხვა მრუდის გასწვრივ.

I ინტეგრალის მეორე ვარიაციის დახმარებით ადამარმა მიიღო საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ პერიოდულმა (0,1) ექსტრემალმა მიანიჭოს I ინტეგრალს მინიმუმი. ამ უკვე კლასიკურად ქცეულ პირობაზე დაყრდნობით, მას მოხდენილი გზით გამოყავს პირობა შეუღლებული წერტილის არარსებობისა, რაზედაც ზემოთ იყო საუბარი. ადამარი ამას გარდა, დამტკიცების გარეშე, გამოთქვამს იმ აზრს, რომ „საერთოდ არარსებობა შეუღლებული ფოკუსისა არის (ცხადია, ვაიერშტრასის პირობის დამატებით) აუცილებელი და საკმარისი პირობა ექსტრემუმისათვის“. აშკარაა, რომ აქ იგულისხმება კერძო შემთხვევა, განხილული ადამარის მიერ, რომელიც უმატებს, რომ „ერთი შემთხვევა არ ექვემდებარება მის ანალიზს; შემთხვევა, როდესაც ვარიაციებიანი განტოლება (იაკობი) იძლევა პერიოდულ ინტეგრალს, რომელიც ნიშანს არ იცვლის“.

პუანკარესა და ადამარის გამოკვლევათა გასაგრძელებლად რადონი თავის შრომაში „Zur Behandlung geschlossener Extremalen in der Variationsrechnung"[1] ამტკიცებს, რომ ადამარის ეს პირობა არის საკმარისი და, ამის შემდეგ, მსგავსი საშუალებით აჩვენებს, რომ ადამარის შედეგები შეიძლება გავრცელებული იყოს შემდეგი სახის ინტეგრალის შემთხვევაზედაც:

$$\int_0^1 f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)\,dx$$

შეკრული ექსტრემალების შესწავლა არა მარტო დიდად მნიშვნელოვანია ვარიაციათა აღრიცხვაში, არამედ მას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ზეციური მექანიკის ზოგიერთი საკითხისათვის. 1902 წელს უიტეკერმა გამოაქვეყნა „Monthly Notices R. A. S."-ში შრომა სახელწოდებით: „On periodic orbits", რომელშიაც იძლევა შესანიშნავ კრიტერიუმს პერიოდული ორბიტების არსებობისა. მაგრამ უიტეკერმა თავის მსჯელობაში დაუშვა ზოგიერთი შეცდომა, რამაც შემდეგში გამოიწვია სერიოზული კრიტიკა. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei-ში 1912 წელს გამოქვეყნებულ ორ შრომაში: „Sulle orbite periodiche" ტონელისა და „Sul teorema di Whittaker" სინიორინისა, ამ ორმა ავტორმა, უიტეკერის მსჯელობის გაკრიტიკების შემდეგ, მკაცრად, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, დაამტკიცეს უიტეკერის კრიტერიუმი, გამოთქმული სათანადოდ დაზუსტებული სახით.

დაბოლოს ჩვენ უნდა მივუთითოთ ბირკოფის საინტერესო შრომაზე, მოთავსებული „Transactions of the American Mathematical Society"-ში 1917 წელს), სადაც ავტორი განიხილავს უიტეკერის შემთხვევას და ამას გარდა იკვლევს პერიოდულ ორბიტებს, რომელნიც ეთანადებიან

$$I = \int_C \{\varphi(x, y) + \alpha(x, y)\,x' + \beta(x, y)\,y'\}\,ds$$

სახის ინტეგრალს, სადაც φ არის არსებითად დადებითი ფუნქცია, ხოლო s — რკალის სიგრძე. ბირკოფი იძლევა კრიტერიუმს, ანალოგიურს უიტეკერის კრიტერიუმისა და ამას გარდა პირველად გვაჩვენებს უიტეკერის კრიტერიუმის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას.

ჩვენ არ შევეხებით სხვა საინტერესო გამოკვლევებს პერიოდული ექსტრემალების შესახებ და პირდაპირ გადავალთ კარათეოდორის მნიშვნელოვან მემუარზე: „Über geschlossene Extremalen und periodische Variationsprobleme in der Ebene und im Raume", რომელიც მოთავსებულია Annali bi Mathematica-ში 1925 წელს.

გამოჩენილი გეომეტრი იქ არკვევს მეტად მნიშვნელოვან ფაქტს, სახელდობრ იმას, რომ არარსებობა შეკრული ექსტრემალის შეუღლებული ფოკუსისა არ არის საზოგადოდ საკმარისი, რასაც ის აჩვენებს შემდეგი ინტეგრალის მაგალითზე:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{1+y^4}}\,dx.$$

და მართლაც, ადვილად შეიძლება იმის დანახვა, რომ ამ ინტეგრალის მინიმუმი ვერ იქნება განხორციელებული პერიოდული (0,1) ექსტრემალის საშუალებით, მიუხედავად იმისა, რომ ამ წირზე სრულებით არ არის შეუღლებული ფოკუსი. ამგვარად, შეუღლებული ფოკუსის არარსებობის პირობა

[1] Abh. Mathem. Semin. Hamburg, 1, გვ. 195.

არასგზით არ შეიძლება იყოს განხილული, როგორც საკმარისი. ამით გამოწვეული სიძნელე ძირითადია.

ახალი საკითხი, რომელიც ჩვენ წარმოგვიდგება, ამგვარად შემდეგია: როგორი პირობა, გარდა შეუღლებული წერტილების არარსებობისა, უნდა იყოს დაკმაყოფილებული იმისათვის, რომ მინიმუმი იყოს განხორციელებული პერიოდული (0,1) ექსტრემალით?

კ ა რ ა თ ე ო დ ო რ ი არ იძლევა ამ საკითხის გადაწყვეტას, გარდა იმ საინტერესო კერძო შემთხვევისა, როდესაც სათავეზე გამავალი და პერიოდული (0,1) ექსტრემალის მეზობელი ექსტრემალთა ოჯახის მომვლები არ გადაკვეთს x ღერძს და უკანასკნელი მის ასიმპტოტს წარმოადგენს. ამას გარდა თავის მემუარში ის გულისხმობს, რომ $I(x, y, y')$ ფუნქცია არის დადებითი, რაც ცხადია ამცირებს ზოგადობას.

ამ შრომაში ჩვენ მიზნად ვისახავთ გადავწყვიტოთ დასმული პრობლემა მთელი თავისი ზოგადობით. პერიოდული ექსტრემალების შესაძლებელ შემთხვევათა სისტემატურმა შესწავლამ კლასიკური შეუღლებული წერტილებისაგან განსხვავებულ სხვადასხვა რიგის კრიტიკულ წერტილებამდე მიგვიყვანა. ჩვენ დავინახავთ, რომ კრიტიკული წერტილების არსებობა ან არარსებობა მოგვცემს პრობლემის სრულ გადაწყვეტას.

შრომას ვყოფთ ექვს თავად. პირველ ოთხ თავში ჩვენ განვიხილავთ პერიოდული ექსტრემალების შესაძლებელი შემთხვევის აუცილებელ და საკმარის პირობებს. მეხუთე თავი ეთმობა პ უ ა ნ კ ა რ ე ს ზემოთ დასახელებული თეორემის ზუსტ დამტკიცებას. ბოლოს ჩვენ მოვიყვანთ ორ მარტივ მაგალითს მთელი თეორიის დასურათების მიზნით. ორი ექსტრემუმიდან ჩვენ საუბარი გვექნება მხოლოდ მინიმუმის შესახებ.

I. წინასწარი ფორმულები. საკმარისი პირობა

1. ჩვენ თავიდანვე მოვითხოვთ, რომ დაცული იყოს ჩვეულებრივი მინიმუმის აუცილებელი პირობები:

1^0. ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს და ი ა კ ო ბ ი ს პირობები მკაცრი სახით x ღერძის ინტერვალისათვის $(0, 1)$:

$$f_{y'^2}(x, 0, 0) > 0; \quad 1 < x_0^*,$$

სადაც x_0^* არის სათავის შეუღლებული წერტილის აბსცისი.

2^0. ვ ა ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს პირობა იმავე შუალედისათვის:

$$E(x, 0, 0, p) > 0, \qquad -\infty < p < +\infty.$$

ამას გარდა ჩვენ მოვითხოვთ, რომ მინიმუმის საკმარისი პირობა დაცული იყოს იმავე შუალედში.

2. ვთქვათ ρ დადებითი რიცხვია და k საკმაოდ მცირე სიდიდე. ყველა შესადარებელი მრუდები, რომლებიც აერთებენ $A(0, k)$, $B(1, k)$ წერტილებს და მთლიანად მოთავსებულია სწორკუთხედში:

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad -\rho \leqq y \leqq \rho$$

წარმოდგენილი არიან შემდეგი სახის განტოლებით:

$$y = \eta(x) + k, \qquad (\text{ა})$$

სადაც $\eta(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს რეგულარობის პირობებს და ამას გარდა შემდეგ პირობებს:

$$\eta(0)=\eta(1)=0, \qquad |\eta(x)+k|<\rho.$$

თუ შევადარებთ I ინტეგრალს, აღებულს პერიოდულ $\mathfrak{E}_0(0,1)$ ექსტრემალზე და იმავე ინტეგრალს მეზობელ $\mathfrak{E}$ მრუდზე, მივიღებთ[1]:

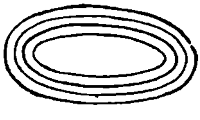
$$\Delta I = I_{\mathfrak{E}} - I_{\mathfrak{E}_0} = \frac{k^2}{2}\int_0^1 f_{y^2}[x]\,dx + k\int_0^1\left(f_{y^2}-\frac{d}{dx}f_{yy'}\right)\eta(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (f_{y^2}\eta^2+2f_{yy'}\eta\eta'+f_{y'^2}\eta'^2)\,dx + A[\eta,k]_3, \tag{1}$$

სადაც A არის η და k სიდიდეთა ფუნქცია და ინარჩუნებს სასრულო მნიშვნელობას.

ავიღოთ ჯერ $\eta(x)\equiv 0$, აქედან მივიღებთ მინიმუმის აუცილებელ შემდეგ უტოლობას:

$$\int_0^1 f_{y^2}[x]\,dx \geqq 0. \tag{2}$$

ამ პირობის ინტერპრეტაცია ცხადია. ავიღოთ ისეთ წრფეთა ოჯახი, რომლებიც x ღერძის პარალელურია და მისი მახლობელია $0\leqq x\leqq 1$ შუალედში, ანდა შეკრულ მრუდთა ოჯახი, რომლებიც ამათ შეესაბამება და შეკრული ექსტრემალის მახლობლობაში იმყოფება. სწორედ (2) პირობამდე მიგვიყვანს ამ ოჯახის წირებზე I ინტეგრალის მნიშვნელობათა შედარება პერიოდულ (შეკრულ) ექსტრემალზე აღებული იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობასთან.



ნახ. 1

3. ჩვენ ახლა შევადგენთ $(0,k)$, $(1,k)$ წერტილებზე გამავალ ექსტრემალურ წირთა $\mathfrak{E}_k$ ოჯახს (ეილერის წირებს), რომელნიც შეიცავენ პერიოდულ $(0,1)$ ექსტრემალს, როცა $k=0$. ვთქვათ

$$y=G(x,\alpha,\beta) \tag{3}$$

არის ეილერის $f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0$ განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ კი პერიოდული $(1,0)$ ექსტრემალის შესაბამისი α და β-ს მნიშვნელობანი. α და β-ს მნიშვნელობანი $\mathfrak{E}_k$ მრუდისათვის მოიძებნება შემდეგი ორი განტოლების სისტემიდან:

$$k=G(0,\alpha,\beta), \qquad k=G(1,\alpha,\beta), \tag{k}$$

რომელნიც დაკმაყოფილებულნი არიან $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$-სათვის. იაკობის პირობის გამოყენებით ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ამ განტოლებებს აქვთ ამონახსნთა ერთი და მხოლოდ ერთი სისტემა:

$$\alpha=\alpha(k), \qquad \beta=\beta(k)$$

[1] ჩვენ აღვნიშნავთ $f[x]=f(x,0,0)$, $f_y[x]=f_y(x,0,0)$ და ა. შ.

რომელნიც მიისწრაფვიან შესაბამისად α_0 და β_0-საკენ, როცა k ცვლადი მიისწრაფვის ნულისაკენ. თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს (3) ფორმულაში, გვექნება $\mathfrak{C}_k$ წირის განტოლება:

$$y = \varphi(x, k), \qquad 0 \leqq x \leqq 1, \qquad |k| < \rho \tag{4}$$

სადაც $\varphi(x, k)$ აღნიშნავს შემდეგს:

$$\varphi(x, k) = G(x, \alpha(k), \beta(k)).$$

(4) ოჯახი შეადგენს ველს ან სპეციალურ კონას, რომელიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებს შესავალში დასახელებულ ა დ ა მ ა რ ი ს შრომაში.

გამოვთვალოთ ახლა $\varphi_k(x, k)$. უკანასკნელი ტოლობის გაწარმოება მოგვცემს

$$\varphi_k(x, 0) = G_\alpha[x]\left[\frac{d\alpha}{dk}\right]_0 + G_\beta[x]\left[\frac{d\beta}{dk}\right]_0.$$

თუ ამ განტოლებაში შევიტანთ $\frac{d\alpha}{dk}$ და $\frac{d\beta}{dk}$-ს მნიშვნელობებს მიღებულს (k) სისტემიდან, ადვილად მივიღებთ:

$$\varphi_k(x, 0) = \frac{\Delta(x, 1) - \Delta(x, 0)}{\Delta(0, 1)},$$

სადაც $\Delta(x, x_0)$ აღნიშნავს ვარიაციებიანი განტოლების ინტეგრალს, რომელიც ნული ხდება $x = x_0$-თვის და ამას გარდა აკმაყოფილებს პირობას: $\Delta(x, x_0) = -\Delta(x_0, x)$. ავღნიშნოთ $\Delta(x) = \varphi_k(x, 0)$, მაშინ უკანასკნელი ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\left\{f_{y^2}[x] - \frac{d}{dx} f_{yy'}[x]\right\}\Delta(x) = \frac{d}{dx}\{f_{y'^2}[x]\,\Delta'(x)\}, \tag{5}$$

$$\Delta(0) = \Delta(1) = 1.$$

4. ახლა მივმართოთ $\delta^2 I$-ს მნიშვნელობას, რომელსაც (1) ფორმულა გვაძლევს. თუ იქ ჩავსვამთ $\eta(x) = k\{\Delta(x) - 1\}$, მივიღებთ:

$$\delta^2 I = \frac{k^2}{2} f_{y'^2}[0]\;[\Delta'(1) - \Delta'(0)] + Bk^3,$$

საიდანაც გამოგვყავს ა დ ა მ ა რ ი ს აუცილებელი პირობა ექსტრემუმისა

$$\Delta'(1) - \Delta'(0) \geqq 0. \tag{6}$$

აქედან გამოგვყავს, რომ $\Delta(x)$ ვერ მოისპობა x-ის ვერც ერთი (დადებითი ან უარყოფითი) მნიშვნელობისათვის და, მაშასადამე, ი ა კ ო ბ ი ს პირობა (შეუღლებული ფოკუსის არარსებობა) უნდა იყოს დაკმაყოფილებული $-\infty < x < +\infty$ შუალედში.

5. ჩვენ ახლა დავამყარებთ დამოკიდებულებას (2) და (6) პირობებს შორის. ამ მიზნით განვიხილოთ (5) ტოლობა, რომელიც შეიძლება შემდეგი სახით დაიწეროს:

$$f_{y^2}[x] - \frac{d}{dx} f_{yy'}[x] = \frac{1}{\Delta x}\,\frac{d}{dx}\left\{f_{y'^2}[x]\frac{d\Delta}{dx}\right\},$$

ანდა ასე:

$$f_{y^2}[x] - \frac{d}{dx}\, f_{yy'}[x] = f_{y'^2}[x]\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left\{f_{y'^2}[x]\,\frac{\Delta'(x)}{\Delta(x)}\right\}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარის ინტეგრებით, f ფუნქციის პერიოდულობის გამო მივიღებთ, შემდეგ ფორმულას:

$$\int_0^1 f_{y^2}[x]\, dx = f_{y'^2}[0]\,(\Delta'(1) - \Delta'(0)) + \int_0^1 f_{y'^2}[x]\frac{\Delta'^2}{\Delta^2}\, dx. \tag{7}$$

თუ ამ ტოლობას მხედველობაში მივიღებთ უშუალოდ დავინახავთ, რომ როდესაც (6) პირობა დაკმაყოფილებელია ფართო აზრით, (2) პირობა დაკმაყოფილებული იქნება საზოგადოდ მკაცრი სახით: ტოლობას ამ უკანასკნელ პირობაში ექნება ადგილი მხოლოდ იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $\Delta(x) = \mathrm{const}$. ამგვარად, (6) პირობას ყოველთვის მოსდევს (2) პირობა.

შებრუნებული დასკვნა არ არის საზოგადოდ სწორი, მაგრამ მაინც მიზანშეწონილია პირველად განვიხილოთ (2) პირობა, რომელიც ძალიან ადვილი გამოსაყენებელია. ამგვარად, თუ (2) პირობა არ არის დაცული, იგივე იქნება (6) პირობის შესახებაც; მაგრამ მაშინაც კი თუ გვაქვს

$$\int_0^1 f_{y^2}[x]dx = 0$$

შეიძლება დარწმუნებული ვიყოთ, რომ ექსტრემუმი არ იქნება განხორციელებული ყველა იმ შემთხვევაში, როდესაც $\Delta(x)$ არ არის მუდმივი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$I = \int_0^1 (y'^2 + y^2 \cos 2\pi x)\, dx.$$

ე ი ლ ე რ ი ს განტოლება, ისევე როგორც ი ა კ ო ბ ი ს ა, არის

$$y'' - y\cos 2\pi x = 0,$$

საიდანაც უშუალოდ ჩანს, რომ $\Delta(x)$ ფუნქცია არ არის მუდმივი.

მეორე მხრივ,

$$\int_0^1 f_{y^2}[x]\, dx = 2\int_0^1 \cos 2\pi x\, dx = 0.$$

მაშასადამე, I ინტეგრალის მინიმუმი არ იქნება განხორციელებული პერიოდული ექსტრემალით.

6. ახლა ავიღოთ ისევ (4) არე. ვთქვათ

$$k = k(x, y)$$

არის (4) განტოლების ამონახსნი k-ს მიმართ. ამ ფუნქციის ნაწილობით წარმოებულებს ექნებათ შემდეგი გამოსახულება:

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{\varphi_x(x, k(x, y))}{\varphi_k(x, k(x, y))}, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{\varphi_k(x, k(x, y))}.$$

კონის $\mathfrak{C}_k$ მრუდის (x, y) წერტილში მხების საკუთხო კოეფიციენტი ასე გამოისახება:

$$p(x, y) = \varphi_x(x, k(x, y)).$$

ცხადია, რომ ეს ფუნქცია განუწყვეტელია ისევე, როგორც მისი ნაწი-

ლობითი წარმოებულები. ამ ფუნქციის გაწარმოებით y-ის მიმართ წინა ფორმულების ძალით მივიღებთ:

$$p_y(x, y) = \frac{\varphi_{kx}(x, k)}{\varphi_k(x, k)} \tag{8}$$

და, მაშასადამე,

$$p_y(x, 0) = \frac{\Delta'(x)}{\Delta(x)}. \tag{8$_1$}$$

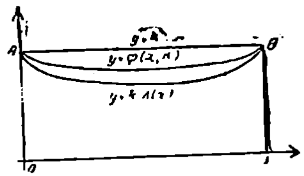
7. ამის შემდეგ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ (6) პირობა, აღებული მკაცრი სახით, არის საკმარისი იმისათვის, რომ I ინტეგრალის მინიმუმი იყოს განხორციელებული პერიოდული $\mathfrak{E}_0(0, 1)$ ექსტრემალით. მართლაც, განვიხილოთ (4) არის $A(0, k)$ და $B(0, k)$ წერტილების შემაერთებელი წირი:

$$y = \varphi(x, k) \tag{$\mathfrak{E}_k$}$$

მინიმუმისათვის საკმარისია, რომ ადგილი ჰქონდეს k-ს საკმაოდ მცირე მნიშვნელობათათვის უტოლობას:

$$\Delta I = \int_0^1 \{f(x, \varphi(x, k), \ \varphi_x(x, k)) - f(x, 0, 0)\}\, dx > 0. \tag{9}$$

თუ A და B ბოლოწერტილებს x ღერძის სწვრივი წრფით შევაერთებთ, ჰ ი ლ ბ ე რ ტ ი ს თეორემის ძალით მივიღებთ:



ნახ. 2

$$I_{\mathfrak{E}_k} = \int_0^1 [f(x, k, p(x, k)) - p(x, k)\, f_{y'}(x, k, p(x, k))]\, dx$$

და, მაშასადამე,

$$\Delta I = \int_0^1 E(x, k)\, dx, \tag{10}$$

სადაც $E(x, k)$-თი აღვნიშნავთ ვ ა ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს ფუნქციის ანალოგიურ შემდეგ ფუნქციას:

$$E(x, k) = f(x, k, p(x, k)) - f(x, 0, 0) - p(x, k)\, f_{y'}(x, k, p(x, k)).$$

თუ ამ ფუნქციას დავშლით k-ს ხარისხების მიხედვით, (8_1) ფორმულის ძალით გვექნება:

$$E(x, k) = k \frac{d}{dx} f_{y'}[x] + \frac{k^2}{2} \left\{ f_{y^2}[x] - \frac{\Delta'^2}{\Delta^2} f_{y'^2}[x] \right\} + Ak^3,$$

სადაც A არის ფუნქცია, რომელიც ინარჩუნებს სასრულო მნიშვნელობას $k=0$ წერტილის მახლობლობაში. ამ ტოლობის ორივე მხარის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\Delta I = \frac{k^2}{2}\left\{\int_0^1 f_{y^2}[x]\,dx - \int_0^1 \frac{\Delta'^2}{\Delta^2} f_{y'^2}[x]\,dx\right\} + \overline{A}k^3. \tag{10_1}$$

(7)-ის ძალით გვექნება:

$$\Delta I = \frac{k^2}{2} f_{y'^2}[0]\,(\Delta'(1) - \Delta'(0)) + k^3\overline{A}$$

და, მაშასადამე, (6) პირობა, ალებული მკაცრი სახით, არის საკმარისი. ჩვენ დაგვრჩა განვიხილოთ $\Delta'(1) - \Delta'(0) = 0$ შემთხვევა, რომლის გამოკვლევა უფრო რთულია. ჯერ გამოვიყვანოთ რამდენიმე ზოგადი ფორმულა, რომლებიც შემდეგ გამოყენებული იქნებიან სათანადო აუცილებელი და საკმარისი პირობების მისაღებად.

II. ზოგადი ფორმულები

8. ჩვენთვის მეტად მნიშვნელოვანია, უპირველესად ყოვლისა, ვიცოდეთ $p(x, y)$ ფუნქციის დაშლა y-ის ხარისხების მიხედვით. ჩვენ დავუშვებთ, რომ არსებობენ $\varphi(x, k)$, $\varphi_k(x, k)$ ფუნქციების უმაღლესი რიგის წარმოებულები k-ს მიმართ და ისინი არიან განუწყვეტელნი (4) არეში.

ალვნიშნოთ:

$$\omega_1 = \frac{1}{\varphi_k(x, k)}, \quad \omega_2 = \frac{\varphi_{k^2}(x, k)}{\varphi_k(x, k)}, \ldots, \omega_n = \frac{\varphi_{k^n}(x, y)}{\varphi_k(x, k)}.$$

გვექნება:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial k} = -\omega_1\omega_2, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial k} = \omega_3 - \omega_2^2, \ldots, \frac{\partial \omega_n}{\partial k} = \omega_{n+1} - \omega_2\omega_n.$$

(8) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$p_y(x, y) = \omega_1\frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \quad p_{y^2}(x, y) = \omega_1\frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \quad p_{y^3}(x, y) = \omega_1^2\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 3\omega_2\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right),$$

$$p_{y^4}(x, y) = \omega_1^3\left(\frac{\partial \omega_4}{\partial x} - 6\omega_2\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 4\omega_3\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + 15\,\omega_2^2\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right),$$

$$p_{y^5}(x, y) = \omega_1^4\left(\frac{\partial \omega_5}{\partial x} - 10\omega_2\frac{\partial \omega_4}{\partial x} + 45\omega_2^2\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 10\omega_3\frac{\partial \omega_3}{\partial x} + 60\omega_2\omega_3\frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - 5\omega_4\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + 105\omega_2^3\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right).$$

ყველა ამ ფორმულაში ერთი ფორმულიდან გადასვლა შემდეგზე ხდება შემდეგი დაყვანის ფორმულის მიხედვით:

$$p_{y^n} = \omega_1\frac{\partial p_{y^{n-1}}}{\partial k}.$$

საერთოდ, ამ ნაწილობითი წარმოებულების შედგენის კანონიდან ჩანს, რომ:

$$p_{y^n}(x, y) = \omega_1^{n-1}\left\{\frac{\partial \omega_n}{\partial x} - \frac{n(n-1)}{2}\omega_2\frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x} - \ldots - n\omega_{n-1}\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)\,\omega_2^{n-2}\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right\}.$$

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$p_1(x) = \Delta(x) p_y(x, 0), \qquad p_2(x) = \frac{1}{2!}\Delta^2(x) p_{y^2}(x, 0), \ldots,$$
$$p_n(x) = \frac{1}{n!}\Delta^n(x) p_{y^n}(x, 0). \tag{11}$$

გვექნება შემდეგი დაშლა:

$$p(x, y) = \frac{y}{\Delta(x)} p_1(x) = \frac{y^2}{\Delta^2(x)} p_2(x) + \ldots + \frac{y}{\Delta^n(x)} p_n(x) + \ldots$$

თუ ჩავსვამთ $y = k\Delta(x)$, მივიღებთ:

$$p(x, k\Delta(x)) = k p_1(x) + k^2 p_2(x) + \ldots + k^n p_n(x) + \ldots \tag{12}$$

ამ ფორმულას შემდეგში ხშირად გამოვიყენებთ.

9. ახლა ავიღოთ (9) უტოლობა ფართო მნიშვნელობით, რომელიც არის აუცილებელი მინიმუმისათვის:

$$\Delta I = \int_0^1 \{f(x, \varphi(x, k), \varphi_x(x, k)) - f(x, 0, 0)\} \, dx \geqq 0.$$

შევაერთოთ $A(0, k)$ და $B(1, k)$ ბოლოწერტილები $y = k\Delta(x)$ მრუდით (ნახ. 2). ჰ ი ლ ბ ე რ ტ ი ს ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\Delta I = \int_0^1 H(x, k) \, dx,$$

სადაც $H(x, k)$-თი აღვნიშნავთ ვ ა ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს ფუნქციის ანალოგიურ შემდეგ ფუნქციას:

$$H(x, k) = f(x, k\Delta, p(x, k\Delta)) - f(x, 0, 0)$$
$$+ (k\Delta' - p(x, k\Delta)) f_{y'}(x, k\Delta, p(x, k\Delta)).$$

დავშალოთ $H(x, k)$ ფუნქცია k-ს ხარისხების მიხედვით. ტეილორის ფორმულის ძალით გვექნება:

$$H(x, k) = f(x, k\Delta, k\Delta') - f(x, 0, 0) - \frac{(p - k\Delta')^2}{2!} f_{y'^2}(x, k\Delta, k\Delta')$$
$$- \ldots - \frac{(n-1)(p - k\Delta')^n}{n!} f_{y'}\ (x, k\Delta, k\Delta') - \ldots$$

სიმოკლისათვის აღვნიშნოთ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\varphi_k + \frac{\partial}{\partial y'}\varphi_{kx}\right)^{(n)} f(x, \varphi, \varphi_x) = \nabla_n f,$$
$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}\varphi_k + \frac{\partial}{\partial y'}\varphi_{kx}\right)^{(n)} f(x, \varphi, \varphi_x)\right\}_{k=0} = \nabla_n^0 f.$$

$H(x, k)$-ს პირველი ორი წევრის სხვაობის დაშლა იგივეა, რაც ის, რომელსაც ტ ე ი ლ ო რ ი ს ფორმულა გვაძლევს:

$$f(x, k\Delta, k\Delta') - f(x, 0, 0) = k\Delta_1^0 f + \frac{k^2}{2!}\nabla_2^0 f + \ldots + \frac{k^n}{n!}\nabla_n^0 f + \ldots$$

$H(x, k)$-ს დაშლის შემდგომ წევრთა ერთობლიობა შეიძლება შემდეგი სახით დაიწეროს:

$$-\frac{1}{2!}(k^2 p_2 + k^3 p_3 + \ldots)^2 \left\{ f_{y'^2}[x] + k\nabla_1^0 f_{y'^2} + \frac{k^2}{1\cdot 2}\nabla_2^0 f_{y'^2} + \ldots \right\}$$

$$-\frac{2}{3!}(k^2p_2+k^3p_3+\ldots)^3\left\{f_{y'^3}[x]+k\nabla_1^0 f_{y'^3}+\frac{k^2}{1\cdot 2}\nabla_2^0 k_{y'^3}+\cdots\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{n-1}{n!}(k^2p_2+k^3p_3+\cdots)^n\left\{f_{y'^n}[x]+k\nabla_1^0 f_{y'^n}+\frac{k^2}{1\cdot 2}\nabla_2^0 f_{y'^n}+\ldots\right\}.$$

თუ დავაჯგუფებთ ერთად იმ წევრებს, რომლებიც იყოფა k-ს ერთსა და იმავე ხარისხზე, მივიღებთ დაშლას შემდეგი სახით:

$$\frac{(p-k\Delta')^2}{2!}f_{y'^2}(x,k\Delta,k\Delta')$$

$$+\frac{2(p-k\Delta')^3}{3!}f_{y'^3}(x,k\Delta,k\Delta')+\ldots+\frac{(n-1)(p-k\Delta')^n}{n!}f_{y'^n}(x,k\Delta,k\Delta')+\ldots$$

$$=\frac{\mu_4}{4!}k^4+\frac{\mu_5}{5!}k^5+\ldots+\frac{\mu_n}{n!}k^n+\ldots,$$

სადაც

$$\frac{\mu_4}{4!}=\frac{1}{2!}p_2^2 f_{y'^2}[x],$$

$$\frac{\mu_5}{5!}=\frac{1}{2!}\{p_2^2\nabla_1^0 f_{y'^2}+2p_2p_3 f_{y'^2}[x]\},$$

$$\frac{\mu_6}{6!}=\frac{1}{2!}\left\{\frac{1}{2!}p_2^2\Delta_2^0 f_{y'^2}+2p_2p_3\nabla_1^0 f_{y'^2}+(p_3^2+2p_2p_4)f_{y'^2}[x]\right\}+\frac{2}{3!}p_2^3 f_{y'^3}[x]$$

და, საერთოდ, კოეფიციენტების შედგენის კანონის მიხედვით გვექნება:

$$\frac{\mu_n}{n!}=\frac{1}{2!}\left\{\frac{1}{(n-4)!}p_2^2\nabla_{n-4}^0 f_{y'^2}+\frac{1}{(n-5)!}(p_2p_3+p_3p_2)\nabla_{n-5}^0 f_{y'^2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\nabla_1^0 f_{y'^2}\sum_{2}^{i+k=n-1}p_ip_k+f_{y'^2}[x]\sum_{2}^{i+k=n}p_ip_k\right\}$$

$$+\frac{2}{3!}\left[\frac{1}{(n-6)!}p_2^3\nabla_{n-6}^0 f_{y'^3}+\ldots+\Delta_1^0 f_{y'^3}\sum_{2}^{i+j+k=n-1}p_ip_jp_k+f_{y'^3}[x]\sum_{2}^{i+j+k=n}p_ip_jp_k\right]$$

$$+\ldots+\frac{r-1}{r!}B_r,$$

სადაც

$$R_r=\begin{cases}p_2^r f_{y'^r}[x], & \text{როცა } n=2r\\ p_2^r\nabla^0 f_{y'^r}+r\,p_2^{r-1}p_r f_{y'^r}[x], & \text{როცა } n=2r+1.\end{cases}$$

თუ გავითვალისწინებთ ყველა ამ ფორმულას, მივიღებთ $H(x,k)$ ფუნქციის შემდეგ დაშლას k-ს ხარისხების მიხედვით:

$$H(x,k)=k\nabla^0 f+\frac{k^2}{2!}\nabla_2^0 f+\frac{k^3}{3!}\nabla_3^0 f+\frac{k^4}{4!}(\nabla_4^0 f-\mu_4)+\ldots \tag{13}$$

$$+\frac{k_n}{n!}(\Delta_n^0 f-\mu_n)+\ldots$$

ახლა საჭიროა მოვძებნოთ $\nabla_n^0 f$ გამოსახულება. ამ მიზნისათვის გამოვითვალოთ ასეთი სახის გამოთქმები:

$$D_nf=\varphi_{k^2}\nabla_n f_y+\varphi_{k^2x}\nabla_n f_y,$$

რომელნიც შემდეგში ძალიან მნიშვნელოვან როლს ითამაშებენ.

10. გამოვიდეთ კარგად ცნობილი ტოლობიდან:

$$\Delta_1 f_y = \frac{d}{dx}[\Delta_1 f_{y'}]. \tag{14}$$

ამ ტოლობის ორივე წევრის φ_{k^2}-ზე გამრავლებით და შემდეგ $\varphi_{k^2x}\nabla_1 f_{y'}$-ის მიმატებით, მივიღებთ:

$$D_1 f = \varphi_{k^2}\Delta_1 f_y + \varphi_{k^2x}\nabla_1 f_{y'} = \frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\Delta_1 f_{y'}]. \tag{15}$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$\Psi(Y) = f_{y^2} Y + f_{yy'} Y' - \frac{d}{dx}\left\{f_{yy'} Y + f_{y'^2} Y'\right\}.$$

(14) ფორმულის ძალით ის შეიძლება კიდევ ასე დაიწეროს:

$$\Psi(Y) = -\frac{1}{\varphi_k}\frac{d}{dx}\left\{(Y'\varphi_k - Y\varphi_{kx}) f_{y'^2}\right\} \tag{16}$$

და, მაშასადამე,

$$\Psi(\varphi_{k^2}) = -\omega_1\frac{d}{dx}\left(\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x} f_{y'^2}\right). \tag{17}$$

ახლა გავაწარმოოთ (14) ტოლობა k-ს მიმართ. მაშინ უკანასკნელი ტოლობის ძალით გვექნება:

$$\Delta_2 f_y = \frac{d}{dx}[\nabla_2 f_{y'}] + \omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{dx} f_{y'^2}\right], \tag{18}$$

საიდანაც უშუალოდ მიიღება:

$$D_2 f = \frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\nabla_2 f_{y'}] + \omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x} f_{y'^2}\right].$$

$D_3 f$-ის მისაღებად გავაწარმოოთ (18) ტოლობა k-ს მიმართ, რაც მოგვცემს:

$$\begin{aligned}\nabla_3 f_y + 2[\varphi_{k^2}\nabla_1 f_{y^2} + \varphi_{k^2x}\nabla_1 f_{yy'}]\\ = \frac{d}{dx}[\nabla_3 f_{y'}] + 2\frac{d}{dx}\,\varphi_{k^2}\nabla_1 f_{yy'} + \varphi_{k^2x}\nabla_1 f_{y'^2}] - \omega_1\omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{dx} f_{y'^2}\right]\\ + \omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_3}{\partial x} f_{y'^2}\right] + \omega_1\frac{\partial}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right].\end{aligned}$$

მეორე მხრივ, (17) ფორმულის ძალით ადვილად მიიღება, რომ:

$$\begin{aligned}\varphi_{k^2}\nabla_1 f_{y^2} + \varphi_{k^2x}\nabla_1 f_{yy'} - \frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\nabla_1 f_{yy'} + \varphi_{k^2x}\nabla_1 f_{y'^2}]\\ = \omega_1\omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x} f_{y'^2}\right] - \omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right].\end{aligned} \tag{19}$$

თუ ჩავსვამთ ამ გამოთქმას წინა ტოლობაში, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\nabla_3 f_y = \frac{d}{dx}[\nabla_3 f_{y'}] - 3\omega_1\omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x} f_{y'^2}\right]\\ + 3\omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right] + \omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_3}{\partial x} f_{y'^2}\right]\end{aligned} \tag{20}$$

საიდანაც დავასკვნით:

$$D_3 f = \frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\nabla_3 f_{y'}] + \frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\,\omega_2\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x} - 3\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)f_{y'^2}\right]$$
$$+ 3\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\,\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right] - \varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_3}{dx} - 6\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\omega_2}{dx}f_{y'^2}$$
$$-3\varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^2\nabla_1 f_{y'^2}.$$

დაბოლოს, ჩვენ გამოვითვლით $D_4 f$-ს. ამისათვის გავუტოლოთ ერთმანეთს (20) ტოლობის ორივე მხრის k-ს მიმართ აღებული წარმოებულები. მივიღებთ:

$$\nabla_4 f_y + 3[\varphi_{k^2}\nabla_2 f_{y^2} + \varphi_{k^2x}\nabla_2 f_{yy'}]$$
$$= \frac{d}{dx}[\nabla_4 f_{y'}] + 3\frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\Delta_2 f_{yy'} + \varphi_{k^2x}\nabla_2 f_{y'^2}] + 6\omega_1\,\omega_2^2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}f_{y'^2}\right]$$
$$-3\omega_1\omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_3}{\partial x}f_{y'^2}\right] + \omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_4}{\partial x}f_{y'^2}\right]$$
$$-4\omega_1\omega_3\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}f_{y'^2}\right] + 4\omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right] \tag{21}$$
$$-6\omega_1\omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right] + 3\omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\,\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right]$$
$$+3\omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^3\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^2 f_{y'^3}\right] + 3\omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_2 f_{y'^2}\right].$$

ახლა თუ (19) ტოლობის ორივე მხარეს გავაწარმოებთ k-ს მიმართ, საკმაოდ რთული გამოთვლების შედეგად მივიღებთ[1]:

$$\varphi_{k^2}\nabla_2 f_{y^2} + \varphi_{k^2x}\nabla_2 f_{y'^2} = \frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\nabla_2 f_{yy'} + \varphi_{k^2x}\nabla_2 f_{y'^2}]$$
$$-3\omega_1\omega_2^2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}f_{y'^2}\right] + \omega_1\,\omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_3}{\partial x}f_{y'^2}\right]$$
$$+3\omega_1\omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right] - \omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_2 f_{y'^2}\right]$$

თუ ამ მნიშვნელობას (21) ფორმულაში ჩავსვამთ, გვექნება:

$$D_4 f = \frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\nabla_4 f_{y'}] + \frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\,\omega_2\left(\frac{\partial\omega_4}{\partial x} - 6\,\omega_2\frac{\partial\omega_3}{\partial x} - 4\,\omega_3\frac{\partial\omega_2}{\partial x} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 15\,\omega_2^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)f_{y'^2}\right] + 4\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\,\omega_2\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x} - 3\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)\nabla_1 f_{y'^2}\right] +$$

---

[1] აქ ვეყრდნობით შემდეგ ფორმულას:

$$f_{y^3}\varphi_{k^2}^2 + 2f_{y^2y'}\varphi_{k^2}\varphi_{k^2x} + f_{yy'^2}\varphi_{k^2x}^2$$
$$= \frac{d}{dx}\left[f_{y^2y'}\varphi_{k^2}^2 + 2f_{yy'^2}\varphi_{k^2}\varphi_{k^2x} + f_{y'^3}\varphi_{kx}^2\right] - \omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^3\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^2 f_{y'^3}\right]$$
$$-\omega_1\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\,\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\Delta_1 f_{yy'}\right] + \omega_1\,\omega_2^2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}f_{y'^2}\right] - \omega_1\omega_2\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right].$$

$$+6\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\,\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_2 f_{y'^2}\right]+3\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\,\omega_2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^2 f_{y'^3}\right] \tag{22}$$
$$-\varphi_k^2\left[\frac{\partial\omega_4}{\partial x}-16\,\omega_2\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-4\omega_3\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+45\,\omega_2^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right]\frac{\partial\omega_2}{\partial x}f_{y'^2}$$
$$-\varphi_k^2\left[4\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-27\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right]\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}-6\varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^2\nabla_2 f_{y'^2}-3\varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^3 f_{y'^3}.$$

$D_n f$ გამოთქმათა შედგენის კანონი სავსებით ცხადია. $D_5 f$-ის მისაღებად იგივე კანონი იქნება ხელახლა გამოყენებული და ასე თანმიმდევრობით მივიღებთ ყველა $D_n f$-ს.

ამის შემდეგ გადავიდეთ $\nabla_n f$-ის გამოთვლაზე.

11. $\nabla_2 f$-ის გამოსათვლელად ჩვენ გამოვალთ (14) უტოლობიდან. მისი φ_k-ზე გამრავლებით და ამის შემდეგ $f_{yy'}\varphi_k\varphi_{kx}+f_{y'^2}\varphi_{kx}^2$-ის მიმატებით მივიღებთ $\nabla_2 f$-ის გამოთქმას:

$$\nabla_2 f=\frac{d}{dx}[\varphi_k\nabla_1 f_{y'}]. \tag{23}$$

გავაწარმოოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე k-ს მიმართ, გვექნება:

$$\nabla_3 f+2D_1 f=\frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\nabla_1 f_{y'}]+\frac{d}{dx}[\varphi_k\nabla_2 f_{y'}]$$
$$+\frac{d}{dx}[\varphi_k(f_{yy'}\varphi_{k^2}+f_{y'^2}\varphi_{k^2x})].$$

მაგრამ

$$f_{yy'}\varphi_{k^2}+f_{y'^2}\varphi_{k^2x}=\omega_2\nabla_1 f_{y'}+\varphi_k\frac{\partial\omega_2}{\partial x}f_{y'^2}.$$

ამისა და (15) ფორმულის ძალით საბოლოოდ გვექნება:

$$\nabla_3 f=\frac{d}{dx}[\varphi_k\nabla_2 f_{y'}]+\frac{d}{d\lambda}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}f_{y'^2}\right]. \tag{24}$$

$\nabla_4 f$-ის გამოსათვლელად გავაწარმოოთ ეს ტოლობა k-ს მიმართ, რაც მოგვცემს:

$$\nabla_4 f+3D_2 f=\frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}\nabla_2 f_{y'}]+\frac{d}{dx}[\varphi_k\nabla_3 f_{y'}]$$
$$+2\frac{d}{dx}[\varphi_k(\varphi_{k^2}\nabla_1 f_{yy'}+\varphi_{k^2x}\nabla_1 f_{y'^2})]+\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_3}{\partial x}f_{y'^2}\right]$$
$$+\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right].$$

მეორე მხრივ,

$$\varphi_k(\varphi_{k^2}\nabla_1 f_{yy'}+\varphi_{k^2x}f_{y'^2})=\varphi_{k^2}\nabla_2 f_{y'}+\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right].$$

ამის მიხედვით და $D_2 f$-ის გამოსახულების მხედველობაში მიღებით საბოლოოდ დავასკვნით:

$$\nabla_4 f = \frac{d}{dx}\,[\varphi_k \nabla_3 f_{y'}] + 3\,\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right] + \frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 3\omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right) f_{y'^2}\right]$$
$$+ 3\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)^2 f_{y'^2}. \qquad (25)$$

გადავიდეთ $\Delta_5 f$-ის გამოთვლაზე. k-ს მიმართ გაწარმოების იმავე წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\nabla_5 f + 4D_3 f = \frac{d}{dx}[\varphi_k \nabla_4 f_{y'}] + \frac{d}{dx}[\varphi_{k^2} \nabla_3 f_{y'}]$$
$$+ 3\,\frac{d}{dx}\,[\varphi_k(\varphi_{k^2}\nabla_2 f_{yy'} + \varphi_{k^2 x}\nabla_2 f_{y'^2})] + 3\,\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x}\nabla_1 f_{y'^2}\right]$$
$$+ 3\,\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\nabla_2 f_{y'^2}\right] + 3\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\,(f_{yy'^2}\varphi_{k^2} + f_{y'^3}\varphi_{k^2 x}]\right]$$
$$+ \frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_4}{\partial x} - 2\omega_2\,\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 4\,\omega_3\,\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + 3\,\omega_2^2\,\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right) f_{y'^2}\right]$$
$$+ \frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 3\omega_2\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)\nabla_1 f_{y'^2}\right] + 6\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \omega_2\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)\frac{\partial \omega_2}{\partial x} f_{y'^2}$$
$$+ 3\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)^2 \nabla_1 f_{x'y'}.$$

მაგრამ ადვილია ვაჩვენოთ, რომ:

$$\varphi_k\,[\varphi_{k^2}\nabla_2 f_{yy'} + \varphi_{k^2 x}\nabla_2 f_{y'^2}] = \varphi_{k^2}\nabla_3 f_{y'} + \varphi_k^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\nabla_2 f_{y'^2}$$

და ამას გარდა

$$f_{yy'^2}\varphi_{k^2} + f_{y'^3}\varphi_{k^2 x} = \omega_2 \nabla_1 f_{y'^2} + \varphi_k\,\frac{\partial \omega_2}{\partial x} f_{y'^3}.$$

თუ შევიტანთ ყველა ამ მნიშვნელობას წინა ფორმულაში და მივიღებთ მხედველობაში $D_3 f$-ის გამოთქმას, გვექნება:

$$\nabla_5 f = \frac{d}{dx}\,[\varphi_k \nabla_4 f_{y'}] + \frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_4}{\partial x} - 6\omega_2\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 4\omega_3\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + 15\omega_2^2\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right) f_{y'^2}\right]$$
$$+ 3\,\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 3\omega_2\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)\nabla_1 f_{y'^2}\right] + 6\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\,\nabla_2 f_{y'^2}\right] + 3\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)^2 f_{y'^3}\right]$$
$$+ 10\,\varphi_k^2\,\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 3\omega_2\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right) f_{x'y'} + 15\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)^2 \nabla_1 f_{y'^2}. \qquad (26)$$

დაბოლოს გავუტოლოთ ერთმანეთს ამ ტოლობის ორივე მხრის k-ს მიმართ წარმოებულები, (22) ფორმულის საფუძველზე და ანალოგიური მსჯელობის დახმარებით მივიღებთ ფორმულას, რომელიც მოგვცემს $\nabla_6 f$-ს, ე. ი.

$$\nabla_6 f = \frac{d}{dx}\,[\varphi_k \nabla_5 f] + \frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial \omega_5}{\partial x} - 10\,\omega_2\frac{\partial \omega_4}{\partial x} + 45\omega_2^2\,\frac{\partial \omega_3}{\partial x}\right.\right.$$
$$\left.\left. - 10\,\omega_3\,\frac{\partial \omega_3}{\partial x} + 60\,\omega_2\,\omega_3\frac{\partial \omega_2}{\partial x} - 5\omega_4\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + 105\omega_2^3\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right) f_{y'^2}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+5\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_4}{\partial x}-6\omega^2\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-4\omega_3\frac{\partial\omega_3}{\partial x}+15\omega_2^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)\nabla_1 f_{y'^2}\right]\\
&+10\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-3\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)\nabla_2 f_{y'^2}\right]\\
&+10\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-3\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)f_{y'^3}\right]\\
&+15\frac{d}{dx}\left[\varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^2\nabla_1 f_{y'^3}\right]+10\varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-3\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^2 f_{y'^2}\\
&+15\varphi_k^2\left[\frac{\partial\omega_4}{\partial x}-6\omega_2\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-4\omega_3\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+15\omega_2^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right]\frac{\partial\omega_2}{\partial x}f_{y'^2}\\
&+60\varphi_k^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-3\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)\nabla_1 f_{y'^2}+45\varphi_k^3\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)^2\nabla_2 f_{y'^2}\\
&+30\varphi_k^2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)f_{y'^3}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

12. $\nabla_n f$-ის შედგენის კანონი ცხადია. ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ საერთო ფორმულა $\nabla_n f$-სათვის. მაგრამ (13) დაშლის ყველა კოეფიციენტების მისაღებად საკმარისია მოვნახოთ $\nabla_n f$-ის მნიშვნელობანი, როცა $k=0$, ე, ი. $\nabla_n^0 f$. ამისათვის აღვნიშნოთ სიმოკლისათვის v_{n+1}-ით შემდეგი ზოგადი გამოთქმა:

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{2!}\Bigg\{&\frac{1}{(n-4)!}p_2^2\nabla_{n-4}^0 f_{y'^3}+\frac{1}{(n-5)!}(p_2p_3+p_3p_2)\nabla_{n-5}^0 f_{y'^3}+\dots\\
&+\nabla_1^0 f_{y'^3}\sum_{2}^{i+k=n-1}p_ip_k+f_{y'^3}[x]\sum_{2}^{i+k=n}p_ip_k\Bigg\}\\
&+\frac{2}{3}\Bigg\{\frac{1}{(n-6)!}p_2^3\nabla_{n-6}^0 f_{y'^4}+\dots+\nabla_1^0 f_{y'^4}\sum_{2}^{i+j+k=n-1}p_ip_jp_k\\
&+f_{y'^4}[x]\sum_{2}^{i+j+k=n}p_ip_jp_k\Bigg\}+\dots+\frac{r-1}{r!}R_r,
\end{aligned}
$$

სადაც

$$
R_r=\begin{cases}p_2^r f_{y'^{r+1}}[x], & \text{როცა } n=2r\\[2ex] p_2^r\nabla_1^0 f_{y'^{r+1}}+rp_2^{r-1}p_r f_{y'^{r+1}}[x], & \text{როცა } n=2r+1.\end{cases}
$$

შევნიშნოთ, რომ: $\frac{v_{n-1}}{(n+1)!}$-ის მისაღებად შეგვიძლია გამოვიდეთ $\frac{\mu_n}{n}$-დან და ყველგან მივუმატოთ y' ინდექსი f ფუნქციების წარმოებულების ინდექსებს, რომლებიც გვხდებიან $\frac{\mu_n}{n}$-ის გამოთქმაში.

ახლა მივცეთ (23), (24), (25), (26) და (27) ფორმულებში k-ს 0-ის მნიშვნელობა, მაშინ (n^0.8)-ის მარტივი აღნიშვნების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
\nabla_2^0 f &= \frac{d}{dx}\,[\Delta\cdot\nabla_1^0 f_{y'}],\\
\nabla_3^0 f &= \frac{d}{dx}\,[\Delta\cdot\nabla_2^0 f_{y'}] + 1\cdot 2\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_2(x)\, f_{y'^2}[x]\},\\
\Delta_4^0 f &= \frac{d}{dx}\,[\Delta\cdot\nabla_3^0 f_{y'}] + 2\cdot 3\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_2(x)\,\nabla_1^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + 1\cdot 2\cdot 3\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_3(x)\, f_{y'^2}[x]\} + \mu_4,\\
\nabla_5^0 f &= \frac{d}{dx}\,[\Delta\cdot\nabla_4^0 f_{y'}] + 3\cdot 4\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_2(x)\,\nabla_2^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + 2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_3(x)\,\nabla_1^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_4(x)\, f_{y'^2}[x]\} + \frac{dv_5}{dx} + \mu_5,\\
\nabla_6^0 f &= \frac{d}{dx}\,[\Delta\cdot\nabla_5^0 f_{y'}] + 4\cdot 5\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_2(x)\,\nabla_3^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + 3\cdot 4\cdot 5\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_3(x)\,\Delta_2^0 f_{y'^2}\} + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_4(x)\,\nabla_1^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_5(x)\, f_{y'^2}[x]\} + \frac{dv_6}{dx} + \mu_6.
\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

ახლა $\nabla_n^0 f$-ის შედგენის კანონი ნათლად დასანახია. თუ დავუშვებთ ამ კანონს $\nabla_{n-1}^0 f$-სათვის, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ის დარჩება ძალაში $\nabla_n^0 f$-სათვისაც; მაშასადამე, საერთო ფორმულა არის შემდეგი:

$$\left.\begin{aligned}
\nabla_n^0 f &= \frac{d}{dx}[\nabla\cdot\nabla_{n-1}^0 f_{y'}] + \frac{(n-1)!\,d}{(n-3)!\,dx}\{\Delta\cdot p_2(x)\,\nabla_{n-3}^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + \frac{(n-1)!\,d}{(n-4)!\,dx}\{\Delta\cdot p_3(x)\,\nabla_{n-4}^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + \ldots + \frac{(n-1)!}{1\cdot 2}\,\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_{n-3}(x)\,\nabla_2^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + \frac{(n-1)!}{1!}\,\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_{n-2}(x)\,\Delta_1^0 f_{y'^2}\}\\
&\quad + (n-1)!\,\frac{d}{dx}\{\Delta\cdot p_{n-1}(x) f_{y'^2}[x]\} + \frac{dv_n}{dx} + \mu_n.
\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

ამის შემდეგ ჩვენ გადავალთ აუცილებელი და საკმარისი პირობების მოძებნაზე.

III. აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმ შემთხვევისათვის, როცა $\Delta'(1)-\Delta'(0)=0$

13. $\Delta'(1)-\Delta'(0)=0$ შემთხვევაში $\Delta(x)$ ფუნქცია, რომელიც ყოველთვის დადებითი რჩება, არის თვითონ პერიოდული. ეს შემთხვევა არ ექვემდებარება ($n^0.7$)-ის გამოკვლევას, რადგან იქ მოხდენილ მსჯელობაში არ შეიძლება y შევცვალოთ $\Delta(x)$-ით. მაგრამ ($n^0.12$)-ის ფორმულები საშუალებას მოგვცემენ მოვძებნოთ ამ შემთხვევის შესაფერი აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

მივმართოთ (13) ფორმულას, რომელიც გვაძლევს $H(x,k)$ ფუნქციის დაშლას k-ს ხარისხების მიხედვით. აქედან მივიღებთ სრული ვარიაციის შემდეგ დაშლას:

$$\Delta I = k\int_0^1 \nabla_1^0 f\,dx+\frac{k^2}{2!}\int_0^1 \nabla_2^0 f\,dx+\frac{k^3}{3!}\int_0^1 \nabla_3^0 f\,dx \tag{30}$$

$$+\frac{k_4}{4!}\int_0^1 (\nabla_4^0 f-\mu_4)\,dx+\ldots+\frac{k^n}{n!}\int_0^1 (\nabla_n^0 f-\mu_n)\,dx+\ldots$$

უშუალოდ ჩანს, რომ ამ დაშლაში პირველი რიგის წევრი მოისპობა. მაგრამ (28) ფორმულის ძალით ამასვე ექნება ადგილი მეორე რიგის წევრის მიმართაც.

(28) მეორე ფორმულა გვაძლევს:

$$\int_0^1 \nabla_3^0 f\,dx=\frac{1}{3}\,[p_2(1)-p_2(0)]\,f_{y'^2}[0].$$

ამგვარად, ჩვენ მივედით განსახილველ შემთხვევაში მინიმუმის შემდეგ აუცილებელ პირობამდე:

$$p_2(1)-p_2(0)=0. \tag{31}$$

დავუშვათ, რომ ეს პირობა დაცულია. $(28)_3$ ტოლობის ორივე მხარის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{4!}\int_0^1 (\nabla_4^0 f-\mu_4)\,dx=\frac{1}{4}\,[p_3(1)-p_3(0)]\,f_{y'^2}[0],$$

აქედან დავასკვნით მინიმუმის შემდეგ აუცილებელ პირობას:

$$p_3(1)-p_3(0)\geqq 0. \tag{32}$$

ეს პირობა მკაცრი სახით არის საკმარისი მინიმუმისათვის. მაგრამ ზოგადი შემთხვევის განხილვის მიზნით დავუშვათ, რომ

$$[p_1(x)]_0^1=[p_2(x)]_0^1=[p_3(x)]_0^1=\ldots=[p_{n-1}(x)]_0^1=0, \tag{33}$$
$$[p_n(x)]_0^1\neq 0.$$

მაშინ (30) დაშლაში პირველი $n-1$ რიგის წევრი მოისპობა და ΔI-ს ზოგადი ფორმულა (29)-ს ძალით ამ შემთხვევისათვის გვაძლევს:

$$\Delta I=\frac{k^{n+1}}{n-1}\,[p_n(1)-p_n(0)]\,f_{y'^2}[0]+A\,K^{n+2},$$

თუ n-ური ხარისხის წევრით შემოვიფარგლებით, სადაც A არის ფუნქცია. (მისი გამოსახულების გაშლილი სახით მოყვანა ჩვენთვის არ არის საჭირო), რომელიც ინარჩუნებს სასრულო მნიშვნელობას $k=0$-ის მახლობლობაში.

ავიღოთ k იმდენად მცირე, რომ ΔI-ს ჰქონდეს იგივე ნიშანი, რაც

$$k^{n+1}[p_n(1)-p_n(0)].$$

იმ შემთხვევაში, როცა n ლუწია, დავინახავთ, რომ ΔI ვარიაცია იცვლის ნიშანს k-სთან ერთად და მინიმუმი არ იქნება განხორციელებული პერიოდული $\mathfrak{C}_0(0,1)$ ექსტრემალით. მაგრამ თუ n კენტია, ΔI-ს აქვს იგივე ნიშანი, რაც $p_n(1)-p_n(0)$-ს და, როდესაც

$$p_n(1)-p_n(0)<0$$

მინიმუმი არ იქნება აგრეთვე განხორციელებული. მინიმუმს ექნება ადგილი თუ ჩვენს შემთხვევაში:

$$p_n(1)-p_n(0)>0.$$

მეორე მხრივ, (n^0.8)-ს (12) ფორმულა გვაძლევს:

$$p(1,k)-p(0,k)=k^n[p_n(1)-p_n(0)+B\,k^{n+1},$$

სადაც B რჩება სასრული. ამგვარად, ზემონათქვამის მიხედვით შეიძლება გამოითქვას შემდეგი თეორემა:

თეორემა: იმისათვის, რომ $\Delta'(1)-\Delta'(0)=0$ შემთხვევაში I ინტეგრალის მინიმუმი იყოს განხორციელებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ (4) არეში $A(0,k)$ და $B(1,k)$ წერტილებზე გაყვანილ მხებთა კუთხური კოეფიციენტების სხვაობა იყოს იმავე ნიშნისა, რაც ამ წერტილების ორდინატების საერთო k მნიშვნელობა.

ახლა აღსანიშნავია, რომ თუ $p_n(1)-p_n(0)$ არის ნულის ტოლი, როგორი დიდიც არ უნდა იყოს n რიცხვი, მაშინ ΔI აგრეთვე ნული იქნება. ჩვენ დავინახავთ, რომ ამ შემთხვევაში $\varphi(x,k)$ ფუნქცია თვითონ იქნება პერიოდული k-ს ყველა მნიშვნელობისათვის ამ არეში.

14. მინიმუმის გამოთქმული პირობა ძალიან მნიშვნელოვანია გეომეტრიული თვალსაზრისით, რადგან ის არკვევს მეზობელ ექსტრემალთა გეომეტრიულ ბუნებას ყოველგვარ შემთხვევაში (ექსტრემუმი მძლავრია თუ სუსტი). მაგრამ ეს პირობა შეიძლება შეიცვალოს მეორე პირობით, რომელიც უფრო მოსახერხებელია გამოყენებისათვის. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლემა: ვარიაციებიანი

$$\left(f_{y^2}[x]-\frac{d}{dx}f_{yy'}[x]\right)Y-\frac{d}{dx}(f_{y'^2}[x]\,Y')=0$$

განტოლების ყველა პერიოდულ ინტეგრალს აქვს სახე $C\omega(x)$ და ისეთები, რომელნიც პერიოდულნი არ არიან, აუცილებლად ისპობიან მხოლოდ ერთხელ; $\omega(x)$ არის ამ განტოლების პერიოდული ინტეგრალი, რომელიც არ იცვლის ნიშანს (0,1) ინტერვალში.

ლემის პირველი ნაწილი სამართლიანია. მართლაც, დავუშვათ რომ ვარიაციებიანი განტოლების Y ინტეგრალი არის პერიოდული. მაშინ, იგივე იქნება იმავე განტოლების $\overline{Y}=\omega(x_0)\,Y(x)-Y(x_0)\,\omega(x)$ ინტეგრალისათვის. მაგრამ ეს უკანასკნელი ისპობა $x=x_0$-სათვის და, მაშასადამე, შტურმის თეორიის ძალით ის ისპობა იგივურად, რაც ამტკიცებს ლემის პირველ ნაწილს.

მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად დავუშვათ: რომ $Y(x)$ არ არის პერიოდული. აბელის იგივობის

$$[Y'(x)\,\omega(x) - Y(x)\,\omega'(x)]\,f_{y'^2}[x] = C$$

გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$[Y'(x+1) - Y'(x)]\,\omega(x) - [Y(x+1) - Y(x)]\,\omega'(x) = 0;$$

მაშასადამე,

$$Y(x+1) - Y(x) = c\omega(x),$$

სადაც c ნულისაგან განსხვავებული მუდმივია. აქედან მივიღებთ:

$$Y(x+n) = Y(x) + nc\omega(x),$$
$$Y(x-n) = Y(x) - nc\omega(x),$$

სადაც n არის რაიმე მთელი რიცხვი. აქედან შტურმის იგივე თეორემის გამოყენებით გამომდინარეობს, რომ $Y(x)$-ს აქვს მხოლოდ ერთი ნამდვილი ფესვი $x-n$ და $x+n$ შორის, როგორი დიდიც არ უნდა იყოს მთელი n რიცხვი. ამგვარად, ლემა დამტკიცებულია.

14^{bis}. ჩვენ მივუთითებთ $\varphi_{k^n}(x, 0)$ წარმოებულების კიდევ ერთ თვისებაზე, რომელიც შემდეგში მნიშვნელოვან როლს ითამაშებს.

დავშალოთ $\varphi(x, k)$ ფუნქცია k-ს ხარისხების მიხედვით, გვექნება:

$$\varphi(x, k) = k\varphi_k(x, 0) + \frac{k^2}{2!}\varphi_{k^2}(x, 0) + \ldots + \frac{k^n}{n!}\varphi_{k^n}(x, 0) + \ldots \tag{34}$$

x-ს რომ მივანიჭოთ მნიშვნელობები 0 და 1, ადვილად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} &\varphi_{k^2}(0, 0) = \varphi_{k^2}(1, 0) = 0, \\ &\varphi_{k^3}(0, 0) = \varphi_{k^3}(1, 0) = 0, \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\varphi_{k^n}(0, 0) = \varphi_{k^n}(1, 0) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

15. ახლა დავწეროთ (28) მეორე განტოლება შემდეგი სახით:

$$\nabla_3^0 f - \frac{d}{dx}\{\Delta \cdot \nabla_2^0 f_{y'}\} = 1\cdot 2\,\frac{d}{dx}\{\Delta \cdot p_2(x)\,f_{y'^2}[x]\}.$$

ამ ტოლობის პირველი მხარე არის პერიოდული და, მაშასადამე, მეორე მხარისათვისაც იგივე გვექნება, ამიტომ:

$$\Delta(x) \cdot f_{y'^2}[x]\,p_2(x+1) - p_2(x)] = C. \tag{36}$$

იმისათვის, რომ (31) პირობა დაკმაყოფილებული იყოს საჭიროა, რომ $p_2(x)$ იყოს პერიოდული:

$$p_2(x+1) - p_2(x) = 0.$$

მეორე მხრივ, (36) ტოლობა დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta(x)\,\frac{d}{dx}[\varphi_{k^2}(x+1, 0) - \varphi_{k^2}(x, 0)] \\ &-\Delta'(x)\,[\varphi_{k^2}(x+1, 0) - \varphi_{k^2}(x, 0)] \end{aligned}\right\} f_{y'^2}[x] = C_2$$

აქედან (16) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $\varphi_{k^2}(x+1, 0) - \varphi_{k^2}(x, 0)$ არის ვარიაციებიანი განტოლების ინტეგრალი. დამტკიცებული ლემის მიხედვით შესაძლებელია ორი შემთხვევა: ან $\varphi_{k^2}(x+1, 0) - \varphi_{k^2}(x, 0)$ ფუნქცია არის პერიოდული და ამიტომ (25)-ის ძალით ის იგივურად ისპობა, ანდა

ეს ინტეგრალი არის $\Delta(x)$-საგან წრფივად დამოუკიდებელი და ამ შემთხვევაში მას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი $x=0$.

ახლა მივმართოთ (11) ფორმულას, რომელიც $p_2(x)$-ს გამოსახავს:

$$p_2(x) = \frac{1}{2!}\Delta(x)\frac{d}{dx}\left\{\frac{\varphi_{k^2}(x,0)}{\Delta(x)}\right\},$$

საიდანაც:

$$p_2(x+1) - p_2(x) = \frac{\Delta(x)}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi_{k^2}(x+1,0) - \varphi_{k^2}(x,0)}{\Delta(x)}\right].$$

აქედან დავასკვნით, რომ $\varphi_{k^2}(x,0)$-ის პერიოდულობის შემთხვევაში (31) პირობა დაკმაყოფილებული იქნება. მას არ ექნება ადგილი მეორე შემთხვევაში, როდესაც $\varphi_{k^2}(x+1,0) - \varphi_{k^2}(x,0)$-ს აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი სათავეში. ამ შემთხვევაში $x=0$ წერტილს ვუწოდოთ მეორე რიგის **კ რ ი ტ ი კ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ი**[1].

ამგვარად, ჩვენ მივედით შემდეგ დებულებამდე:

იმისათვის, რომ *I* ინტეგრალის მინიმუმი განხორციელებული იყოს პერიოდული $\mathfrak{C}_0$ ექსტრემალით, საჭიროა სათავე არ იყოს მეორე რიგის კრიტიკული წერტილი.

ახლა დავუშვათ, რომ ეს პირობა შესრულებულია. მივმართოთ $(28)_3$ ფორმულას. მისგან ისევე, როგორც წინა (n^0)-ში, მივიღებთ რომ:

$$\Delta(x)\left[p_3(x+1) - p_3(x)\right] f_{y'^2}[x] = C_3,$$

სადაც C_3 არის მუდმივი, რომელიც (32) პირობის მიხედვით უარყოფითი არ უნდა იყოს. თუ უკანასკნელ ტოლობაში $p_3(x)$-ის ადგილას ჩავსვამთ მის მნიშვნელობას ($n^0.7$), ადვილად მივიღებთ:

$$f_{y'^2}[x]\left\{\left[\frac{\varphi_{k^3x}\varphi_k - \varphi_{k^3}\varphi_{kx})\varphi_k - 3(\varphi_{k^2x}\varphi_k - \varphi_{k^2}\varphi_{kx})}{\varphi_k(k,0)}\right]_{k=0}\right\}_x^{x+1} = C_3,$$

საიდანაც $\varphi_{k^3}(x,0)$-ის პერიოდულობის გამო დავასკვნით:

$$f_{y'^2}[x]\left\{\Delta(x)\frac{d}{dx}\left[\varphi_{k^3}(x+1,0) - \varphi_{k^3}(x,0)\right] - \Delta'(x)\left(\varphi_{k^3}(x+1,0) - \varphi_{k^3}(x)\right]\right\} = C_3. \qquad (37)$$

ეს გვიჩვენებს, რომ $\varphi_{k^3}(x+1,0) - \varphi_{k^3}(x,0)$ არის ვარიაციებიანი განტოლების ინტეგრალი. მაშასადამე, ზემოთ დამტკიცებული ლემის ძალით, ორი შემთხვევა შეიძლება წარმოგვიდგეს: ან ფუნქციას $\varphi_{k^3}(x+1,0) - \varphi_{k^3}(x,0)$ აქვს ერთადერთი $x=0$ ფესვი, ანდა ის ისპობა იგივურად. პირველ შემთხვევაში $C_3 \neq 0$, ხოლო მეორე შემთხვევაში C_3 არის ნული, მაშასადამე, $\varphi_{k^3}(x,0)$ არის პერიოდული.

პირველ შემთხვევაში ვუწოდოთ

$$y = \varphi_{k^3}(x+1,0) - \varphi_{k^3}(x,0) \qquad (38)$$

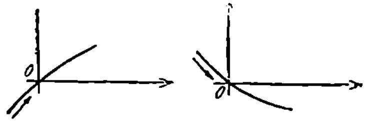
ფუნქციის ერთადერთ ფესვს ($x=0$) **კ რ ი ტ ი კ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ი მ ე ს ა მ ე**

[1] თუ $x=0$ არის $\varphi_k(x+1,0) - \varphi_k(x,0) = 0$ განტოლების ერთადერთი ფესვი, მას ვუწოდებთ **პ ი რ ვ ე ლ ი რ ი გ ი ს კ რ ი ტ ი კ უ ლ წ ე რ ტ ი ლ ს.** ის ყოველთვის არსებობს ($n^0.7$)-ში. განხილულ $\Delta'(1) - \Delta'(0) \gtrless 0$ შემთხვევაში, მაგრამ ის იქნება უმაღლესი რიგისა $\Delta'(1) - \Delta'(0) = 0$ შემთხვევაში.

რიგისა. C_3-ის ნიშნის გამოსარკვევად ამ შემთხვევაში (37) განტოლებაში შევიტანოთ $x=0$, მაშინ გვექნება:

$$f_{y'^2}[0]\left\{\frac{d}{dx}\,[\varphi_{k^3}(x+1,0)-\varphi_{k^3}(x,0)]\right\}_{x=0}=C_3,$$

საიდანაც უშუალოდ ვხედავთ, რომ C_3-ს აქვს იგივე ნიშანი, რაც წარმოებულს მოთავსებულს { } ფრჩხილებში. მაგრამ ამ უკანასკნელი ნიშნის მიხედვით გვექნება სათავის მახლობლად (ნახ. 3) ორნაირი მდებარეობა (38) მრუდისა.



ნახ. 3

პირველი მდებარეობისათვის გვექნება $C_3>0$, ხოლო მეორისათვის $C_3<0$. პირველი მდებარეობისათვის კრიტიკულ წერტილს sinistrorsum ვუწოდოთ, ხოლო მეორე მდებარეობისათვის—dextrorsum. მაგრამ (32) უტოლობა, აღებული ვიწრო მნიშვნელობით, არის საკმარისი მინიმუმისათვის. მაშასადამე, მინიმუმი განხორციელებული იქნება sinistrorsum-ის შემთხვევაში და არ იქნება განხორციელებული dextrorsum-ის შემთხვევაში.

ახლა განვიხილოთ (n^0.13)-ის ზოგადი (33) შემთხვევა. გვექნება:

$$[\varphi_k(x,0)]_x^{x+1}=[\varphi_{k^2}(x,0)]_x^{x+1}=\ldots=[\varphi_{k^{n-1}}(x,0)]_x^{x+1}\equiv 0$$

$$[\varphi_{k^2}(x,0)_x^{x+1}\neq 0. \tag{39}$$

მაშინ, (29) ფორმულის მიხედვით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$y=\varphi_{k^n}(x+1,0)-\varphi_{k^n}(x,0)$$

არის ვარიაციებიანი განტოლების ინტეგრალი, რომელიც მხოლოდ ერთხელ ისპობა სათავეში. ამ შემთხვევაში $x=0$-ს ვუწოდოთ კრიტიკული წერტილი n-ური რიგისა. ანალოგიურ მსჯელობათა დახმარებით დამტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა: *თუ კოორდინატთა სათავე არის n-ური რიგის კრიტიკული წერტილი, მაშინ მინიმუმი არ იქნება განხორციელებული, როცა n არის ლუწი, მაგრამ როცა n არის კენტი, ადგილი ექნება ძლიერ მინიმუმს ყოველთვის sinistrorsum კრიტიკული წერტილის $[\varphi_{k^n x}(1,0)-\varphi_{k^n x}(0,0)>0]$ შემთხვევაში და ის არ იქნება განხორციელებული dextrorsum კრიტიკული წერტილის $[\varphi_{k^n x}(1,0)-\varphi_{k^n x}(0,0)<0]$ შემთხვევაში.*

ახლა აღსანიშნავია, რომ საერთოდ კრიტიკული წერტილის უქონლობის შემთხვევაში გვექნება იგივურად:

$$\varphi_{k^n}(x+1,0)-\varphi_{k^n}(x,0)=0$$

n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის და, მაშასადამე, $\mathfrak{C}_0$ ეკუთვნის პერიოდულ ექსტრემალთა მიმდევრობას. მაგრამ, მეორე მხრივ, ამ შემთხვევაში გვექნება $\Delta I=0$ და, მაშასადამე, ეს წირები აძლევენ ერთსა და იმავე მნიშვნელობას ყველა I ინტეგრალს.

ახლა გადავიდეთ შეკრული ექსტრემალების შემთხვევაზე. მივმართოთ (34) ფორმულას:

$$\varphi(x, k) = k\varphi_k(x, 0) + \frac{k^2}{2!}\varphi_{k^2}(x, 0) + \ldots + \frac{k^n}{n!}\varphi_{k^n}(x, 0) + \cdots$$

ზოგადი შემთხვევის განხილვის მიზნით დავუშვათ, რომ (39) ტოლობანი შესრულებულნი არიან. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით ადამართან ერთად, რომ მეზობელი $y = \varphi(x, k)$ ექსტრემალები იკვრებიან n-ური რიგის უსასრულოდ მცირის სიზუსტით.

დამტკიცებული თეორემის მიხედვით შეიძლება ითქვას, რომ თუ ექსტრემალები იკვრებიან ლუწი რიგის უსასრულოდ მცირის სიზუსტით, მაშინ მინიმუმი არ იქნება განხორციელებული. მინიმუმს მაშინ ექნება ადგილი, თუ ეს წირები იკვრებიან კენტი რიგის უსასრულოდ მცირის სიზუსტით, მაგრამ იმ პირობით, რომ $\varphi_k{}''_x(1, 0) - \varphi_k{}''_x(0, 0)$ იყოს დადებითი.

16. ამის შემდეგ დავუბრუნდეთ შესავალში დასმულ პრობლემას: რა არის მიზეზი იმისა, რომ I ინტეგრალის მინიმუმი ზოგიერთი პრობლემისათვის არ შეიძლება იყოს განხორციელებული, მიუხედავად შეუღლებული წერტილის სრული უქონლობისა?

უპირველესად ყოვლისა სავსებით ბუნებრივად ისმება ერთი კითხვა: რომელ შემთხვევაში აქვს ადგილი შეუღლებული წერტილის სრულ უქონლობას $-\infty < x < +\infty$ ინტერვალში?

დავუშვათ, როგორც ყოველთვის, რომ იაკობის პირობა დაკმაყოფილებულია (0, 1) ინტერვალში მკაცრი სახით. ადამარმა გვიჩვენა, რომ თუ

$$\Delta'(1) - \Delta'(0) \geqq 0 \qquad (6_1)$$

შეუღლებული წერტილი არ არსებობს.

ახლა დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება: თუ არ არსებობს შეუღლებული წერტილი, უკანასკნელი უტოლობა დაკმაყოფილებული იქნება.

მართლაც, ადვილად შეიძლება მიღებულ იქნეს სამი მიმდევრობით ინტეგრალს შორის შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულება:

$$\Delta(x + 1) = [1 + \Delta(-1)]\,\Delta(x) - \Delta(x - 1).$$

გამოვიდეთ ვარიაციებიანი განტოლებიდან და შევადგინოთ შესაბამისი ფუნდამენტალური განტოლება[1], რომელიც უკანასკნელი ტოლობის ძალით მიიღებს ასეთ სახეს:

$$e^{2\lambda} - ae^{\lambda} + 1 = 0,$$

სადაც

$$a = 1 + \Delta(-1).$$

გავარჩიოთ სამი შემთხვევა:

$$a > 2, \quad a = 2, \quad a < 2.$$

პირველ შემთხვევაში ფუნდამენტალურ განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი ფესვი: $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$. მეორე შემთხვევაში გვექნება $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ და მესამე შემთხვევა გვაძლევს $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = -\alpha - \beta i$.

[1] Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, გვ. 94.

პირველ და მესამე შემთხვევაში გვექნება ინტეგრალთა ფუნდამენტალური სისტემა:

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x}\psi_1(x), \quad Y_2 = e^{\lambda_1 x}\psi_1(x),$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში კი შემდეგი სისტემა:

$$Y_1 = \psi_1(x), \quad Y_2 = \psi_2(x) + Cx\,\psi_1(x);$$

სადაც $\psi_1(x)$ და $\psi_2(x)$ პერიოდული ფუნქციებია პერიოდით ერთი.

შეუღლებული წერტილი არ არსებობს მხოლოდ პირველ და მეორე შემთხვევაში და ისიც იმ პირობით თუ $\psi_1(x)$ და $\psi_2(x)$ ფუნქციები არ იცვლიან ნიშანს. $\Delta(0) = \Delta(1) = 1$ პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\Delta(x) = \psi_1(x)\left[\frac{\psi_2(0)}{\psi_1(0)}\right]^x + \psi_2(x)\left[\frac{\psi_1(0)}{\psi_2(0)}\right]^x$$

სადაც:

$$\psi_1(0) + \psi_2(0) = 1, \quad \ln\frac{\psi_2(0)}{\psi_1(0)} = \alpha.$$

აქედან დავასკვნით, რომ $\Delta(x)$, რჩება რა დადებითი, არ შეიძლება მოისპოს x-ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის და ამას გარდა

$$\lim_{x\to\pm\infty}\Delta(x) = +\infty. \tag{40}$$

მეორე მხრივ, (16) ტოლობის ძალით გვექნება:

$$\Delta^2(x) f_{y'^2}[x]\frac{d}{dx}\left[\frac{\Delta(x+1)}{\Delta(x)}\right] = C$$

და, მაშასადამე, თუ ანგარიშს გავუწევთ (40) დამოკიდებულებას, ადვილად მივიღებთ, რომ C უნდა იყოს დადებითი; ამგვარად გვექნება:

$$\Delta'(x+1)\Delta(x) - \Delta'(x)\Delta(x+1) > 0. \tag{41}$$

მეორე შემთხვევაში გვაქვს:

$$\Delta(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi'(0)}$$

და, მაშასადამე:

$$\Delta'(x+1) - \Delta'(x) = 0. \tag{42}$$

თუ (41) და (42) ფორმულებში შევიტანთ $x=0$, ჩვენ მივიღებთ (6) უტოლობას, რაც დასამტკიცებელი იყო.

ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ შეუღლებული წერტილის არარსებობის პირობის ტოლფასობა იმ პირობასთან, რომელიც ჩვენ ეს არის ვაჩვენეთ.

შეუღლებული წერტილის არსებობის შემთხვევაში გვექნება:

$$\Delta'(1) - \Delta'(0) < 0.$$

ახლა დავუბრუნდეთ ამ (n^0)-ის თავში დასმულ კითხვას. ზემოთქმულის მიხედვით, პირველი რიგის კრიტიკული sinistrorsum წერტილის ან უმაღლესი რიგის კრიტიკული (sinistrorsum ან dextrorsum) წერტილის შემთხვევაში არ გვექნება შეუღლებული წერტილი. მაგრამ იმ დროს, როცა მინიმუმი პირველ შემთხვევაში ყოველთვის განხორციელებულია, უმაღლესი რიგის კრიტიკული წერტილის შემთხვევაში მას აქვს ადგილი მხოლოდ ძირითად თეორემაში (n^0.15) მითითებულ პირობებში. ეს ჩვენ გვიჩვენებს, რომ შეუღლებული წერტილის არარსებობა არ არის საზოგადოდ საკმარისი. ის მხოლოდ აუცილებელია მინიმუმისათვის.

ამგვარად, ჩვენ გამოვარკვიეთ იმის მიზეზი, თუ რატომ არ შეიძლება ზოგიერთ პრობლემაში მინიმუმის განხორციელება, მიუხედავად შეუღლებული წერტილების არარსებობისა. ეს გამოწვეულია უმაღლესი ლუწი რიგის კრიტიკული წერტილის არსებობით, ანდა უმაღლესი კენტი რიგის კრიტიკული dextrorsum წერტილის არსებობით, ასე რომ შესავალში დასმული პრობლემა მთლიანად გადაწყვეტილია.

IV. (2) პირობის განზოგადოება

17. მივმართოთ (10) ფორმულას, რომელიც გამოსახავს სრულ ΔI ვარიაციას:

$$\Delta I = \int_0^1 [f(x, k, p(x, k)) - f(x, 0, 0) - p(x, k) f_{y'}(x, k, p(x, k))]\, dx.$$

თუ მეორე მხარეს დავშლით k-ს ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ:

$$\Delta I = \frac{k^2}{2!}\int_0^1 (f_{y'^2} - \lambda_2)\,dx$$

$$+ \frac{k^3}{3!}\int_0^1 (f_{y'^3} - \lambda_3)\,dx + \dots + \frac{k^n}{n!}\int_0^1 (f_{y'^n} - \lambda_n)\,dx + \cdots,$$

სადაც $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$-ით აღვნიშნავთ:

$$\frac{\lambda_2}{2!} = \frac{p_1^2}{\Delta^2} f_{y'^2}[x],$$

$$\frac{\lambda_3}{3!} = \frac{1}{\Delta^3}\left\{\frac{1}{2!}\left[2 p_1 p_2 f_{y'^2}[x] + p_1^2 \Delta(x) D_y f_{y'^2}\right] + \frac{2}{3!} p_1^3 f_{y'^3}[x]\right\},$$

$$\frac{\lambda_4}{4!} = \frac{1}{\Delta^4}\left\{\frac{1}{2!}\left[(p_2^2 + 2p_1 p_3) f_{y'^2}[x] + 2p_1 p_2 \Delta(x) D_y f_{y'^2} + p_1^2 \Delta^2(x) \frac{D_y^2 f_{y'^2}}{2!}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{2}{3!}\left[3p_1^2 p_2 \Delta(x) f_{y'^3}[x] + p_1^3 \Delta(x) D_y f_{y'^3}\right] + \frac{3}{4!} p_1^4 \Delta^4(x) f_{y'^4}[x]\right\}$$

და საერთოდ:

$$\frac{\lambda_n}{n!} = \frac{1}{\Delta^n}\left\{\frac{1}{2!}\left[f_{y'^2}[x] \sum_{1}^{i+k=n} p_i p_k + \Delta(x) D_y f_{y'^2} \sum_{1}^{i+k=n-1} p_i p_k\right.\right.$$

$$+ \frac{\Delta^2}{2!} D_y^2 f_{y'^2} \sum_{1}^{i+k=n-2} p_i p_k + \dots + \frac{\Delta^{n-3}}{(n-3)!} D_y^{n-3} f_{y'^2} \sum_{1}^{i+k=3} p_i p_k$$

$$\left. + \frac{\Delta^{n-2}}{(n-2)!} p_1^2 D_y^{n-2} f_{y'^2}\right] + \frac{2}{3!}\left[f_{y'^3}[x] \sum_{1}^{i+j+k=n} p_i p_j p_k\right.$$

$$\left. + \Delta(x) D_y f_{y'^3} \sum_{1}^{i+j+k=n-1} p_i p_j p_k + \dots + \frac{\Delta^{n-3}}{(n-3)!} D_y^{n-3} f_{y'^3}\right] + \dots$$

$$\left. + \frac{n-2}{(n-1)!} p_1^{n-1} f_{y'^{n-1}}[x] + \frac{n-2}{n!} p_1^n f_{y'^n}[x]\right\}.$$

ჩვენ აქ აღვნიშნეთ $p_1(x) = \Delta'(x)$ და ამას გარდა:

$$D_y^m f_{y'} = \left[\frac{\partial^m f_{y'^n}(x, y, y')}{\partial^m y}\right]_{\substack{y=0\\ y'=0}}$$

ახლა შევადარით უკანასკნელი დაშლა ΔI-ს იმ დაშლას, რომელიც მიღებული გვქონდა (n^0.13)-ში (ფორმულა (30)), მაშინ გვექნება საძიებელი ფორმულები:

$$\int_0^1 f_{y^2}[x]\,dx = \int_0^1 (\nabla_2^0 f + \lambda_2)\,dx,$$

$$\int_0^1 f_{y^3}[x]\,dx = \int_0^1 (\nabla_3^0 f + \lambda_3)\,dx,$$

$$\int_0^1 f_{y^4}[x]\,dx = \int_0^1 (\nabla_4^0 f - \mu_4 + \lambda_4)\,dx,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\int_0^1 f_{y^n}[x]\,dx = \int_0^1 (\nabla_n^0 f - \mu_n + \lambda_n)\,dx.$$

18. ახლა განვიხილოთ კერძო შემთხვევა $\Delta(x) = 1$. გვექნება:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \frac{\lambda_4}{4!} = \frac{1}{2!} p_2^2 f_{y'^2}[x], \quad \frac{\lambda_5}{5!} = \frac{1}{2!}[p_2^2 D_y f_{y'^2} + 2p_2 p_3 f_{y'^2}], \ldots$$

აქედან ამ შემთხვევაში მივიღებთ მინიმუმისათვის აუცილებელსა და საკმარის შემდეგ პირობას:

$$\int_0^1 f_{y^3}[x]\,dx = 0, \quad \int_0^1 f_{y^4}[x]\,dx \geqq 3\cdot 4 \int_0^1 p_2^2 f_{y'^2}[x]\,dx. \tag{43}$$

უკანასკნელი უტოლობა, აღებული მკაცრი სახით, საკმარისია ექსტრემუმისათვის. ტოლობის შემთხვევაში, როგორც აუცილებელი პირობა, გვექნება:

$$\int_0^1 f_{y^5}[x]\,dx + \frac{5!}{2!}\int_0^1 [2p_2 p_3 f_{y'^2}[x] + p_2^2 D_y f_{y'^2}]\,dx,$$

$$\int_0^1 f_{y^6}[x]\,dx \geqq \frac{6!}{2!}\int_0^1 \left\{(2p_2 p_4 + p_3^2) f_{y'^2}[x] + 2p_2 p_3 D_y f_{y'^2} + \frac{p_2^2}{2!} D^2 f_{y'^2}\right\} dx. \tag{44}$$

ამ ფორმულებიდან მივიღებთ მარტივ აუცილებელ პირობებს, რომლებიც მეტად ადვილად გამოიყენებიან. მართლაც, (43_2) უტოლობის ძალით ადგილი უნდა ჰქონდეს უტოლობას:

$$\int_0^1 f_{y^4}[x]dx \geqq 0.$$

$$\int_0^1 f_{y^4}[x]\,dx = 0$$

ტოლობის შემთხვევა მინიმუმისათვის მოითხოვს, რომ ადგილი ჰქონდეს

$p_2(x) = \varphi_{y^2 x}(x, 0) = 0$, ე. ი. $\varphi_{y^2}(x, 0)$ ფუნქცია უნდა იყოს მუდმივი. თუ ამას ადგილი არ აქვს, შეიძლება დარწმუნებული ვიყოთ, რომ მინიმუმი არ განხორციელდება. დავუშვათ, რომ $\varphi_{y^2}(x, 0) = \text{const.}$; (44)-დან მივიღებთ ორ ახალ პირობას:

$$\int_0^1 f_{y^5}[x]\,dx = 0, \qquad \int_0^1 f_{y^6}[x]\,dx \geqq 0 \quad \text{და ა. შ.}$$

ტოლობის შემთხვევაში უკანასკნელ ფორმულაში, უნდა გვქონდეს $\varphi_{y^3}(x,0) = \text{const}$.

მაგალითისათვის მივმართოთ კარათეოდორის ინტეგრალს:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{1 + y^4}}\,dx.$$

აქ იგივურად გვექნება:

$$f_{y^2}[x] - \frac{d}{dx} f_{yy'}[x] = 0$$

და, მაშასადამე, ვარიაციებიანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი არის წრფეები:

$$y = \alpha x + \beta,$$

და ამიტომ გვექნება $\Delta(x) = 1$.

თუ გამოვითვლით $f_{y^2}[x], f_{y^3}[x], f_{y^4}[x]$, ადვილად შევამჩნევთ, რომ:

$$\int_0^1 f_{y^2}[x]\,dx = 0, \quad \int_0^1 f_{y^3}[x]\,dx = 0, \quad \int_0^1 f_{y^4}[x]\,dx = -6.$$

ამგვარად მინიმუმი არ არის განხორციელებული. ასეთივე დასკვნა იყო მიღებული კარათეოდორის მიერაც, მაგრამ უფრო რთული გზით.

ამის შემდეგ გადავიდეთ პუანკარეს თეორემის დამტკიცებაზე.

V. პუანკარეს თეორემა

19. თუ $\mathfrak{C}_0$ არის შეკრული ექსტრემალური წირი, $\mathfrak{C}$ კი მეზობელი შეკრული წირი, რომელიც $(n+1)$-ჯერ შემოუვლის $\mathfrak{C}_0$-ს, მაშინ იმისათვის, რომ მინიმუმი განხორციელებული იყოს აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$I_{\mathfrak{C}} > (n + 1)\, I_{\mathfrak{C}_0}, \tag{45}$$

სადაც n არის ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ ჩვეულებრივი მინიმუმის პირობები, მითითებული (n^0.1)-ში, და, ამას გარდა, (2) პირობა დაცულია მკაცრი სახით (ტოლობას ამ უკანასკნელ პირობაში არ ექნება ადგილი, გარდა სპეციალური $\Delta(x) = \text{const}$ შემთხვევისა).

განვიხილოთ ორი შესაძლებელი შემთხვევა: 1^0. პერიოდული ექსტრემალის შეუღლებული წერტილი არსებობს x-ის გარკვეული მნიშვნელობისათვის (0,1) ინტერვალის გარეთ. 2^0. შეუღლებული წერტილი არ არსებობს $-\infty < x < +\infty$ ინტერვალში.

1^0. ვთქვათ x_0 არის კოორდინატთა სათავის შეუღლებული წერტილი. ამ შემთხვევაში (n^0.3)-ის $\Delta(x, 0)$ ფუნქციას აქვს მიმდევრობითი $x = 0$, $x=x_0$ ნულები და, მაშასადამე, ის არ ისპობა $0 < x < x_0$ ინტერვალში.

ვთქვათ[1] $E(x_0) = m$, მაშინ $(0, m)$ ინტერვალში იაკობის პირობა დაცულია მკაცრი სახით. (n^0.3)-ის მოსაზრებათა მხედველობაში მიღებით, შეიძლება შევადგინოთ ვარიაციებიანი განტოლების ინტეგრალი, რომელიც $x=0$ და $x=n$-სათვის მიიღებს 1 მნიშვნელობას, სადაც n მთელი რიცხვია. ეს ინტეგრალი აღვნიშნოთ $\Delta_n(x)$-ით; გვექნება:

$$\Delta_n(x) = \frac{\Delta(x, n) - \Delta(x, 0)}{\Delta(0, n)}.$$

შტურმის თეორემის ძალით ყოველი $\Delta_n(x)$ მხოლოდ ერთხელ ისპობა $(0, x_0)$ შუალედში. (n^0.16)-ის მოსაზრებათა შედეგად მივიღებთ, რომ:

$$\Delta'_n(1) - \Delta'_n(0) < 0 \qquad 0 \leqq n \leqq m - 1.$$

ვთქვათ $\mathfrak{C}_{n+1}$ არის $(0, y)$ და $(n + 1, y)$ წერტილების შემაერთებელი მისაღები მრუდი, რომელიც მოთავსებულია $|y| < \rho$, $0 \leqq x \leqq n + 1$ არეში. (10_1)-ის ძალით გვექნება:

$$\Delta I = I_{\mathfrak{C}_{n+1}} - (n + 1) I_{\mathfrak{C}_0} < 0, \qquad 0 \leqq n \leqq m - 1.$$

ახლა ცხადია, რომ უკანასკნელი უტოლობა დაკმაყოფილებულია აგრეთვე $n > m - 1$-სათვისაც, რადგან იაკობის პირობა არ არის დაკმაყოფილებული $x > x_0$-სათვის.

მაგრამ ერთი შემთხვევა არ ექვემდებარება ჩვენს მსჯელობას, სახელდობრ, როდესაც შეუღლებული x_0 წერტილი m-ის ტოლია. მაშინ გვაქვს:

$$\int_0^m \{f_{y^2} \Delta^2(x, 0) + 2f_{yy'} \Delta(x, 0) \Delta_x(x, 0) + f_{y'^2} \Delta_x^2(x, 0)\} dx = 0$$

ახლა მივმართოთ (1) ფორმულას, რომელიც გამოსახავს I ინტეგრალის მეორე ვარიაციას. თუ ამ ფორმულაში ჩავსვამთ

$$\eta(x) = \varepsilon \Delta(x, 0)$$

წინა ტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$\delta^2 I = k\varepsilon \int_0^m \left(f_{y^2} - \frac{d}{dx} f_{yy'}\right) \Delta(x, 0) dx + \frac{k^2}{2} \int_0^1 f_{y^2}[x]\, dx, \tag{46}$$

მეორე მხრივ, ვარიაციებიანი განტოლების ძალით გვაქვს:

$$\int_0^m \left(f_{y^2} - \frac{d}{dx} f_{yy'}\right) \Delta(x, 0)\, dx = f_{y'^2}[0] \{\Delta_x(m, 0) - \Delta_x(0, 0)\}.$$

მაგრამ $\Delta_x(m, 0) - \Delta_x(0, 0)$ განსხვავებულია ნულისაგან და იგივე იქნება პირველი მხარის ინტეგრალისათვისაც. თუ (46) ფორმულაში ავიღებთ $\varepsilon = k^{\frac{2}{3}}$, მივიღებთ სრული ვარიაციის შემდეგ გამოსახულებას:

$$\Delta I = k^{\frac{5}{3}} \int_0^m \left(f_{y^2} - \frac{d}{dx} f_{yy'}\right) \Delta(x, 0)\, dx + A k^2,$$

სადაც A სასრულოა. უშუალოდ ჩანს, რომ ΔI იცვლის ნიშანს k-სთან ერთად.

---

[1] $E(a)$-თი აღვნიშნავთ a-ს მთელ ნაწილს.

ამგვარად, შეუღლებული წერტილის არსებობის შემთხვევაში (45) უტოლობა n-ის არც ერთი მთელი მნიშვნელობისათვის არ იქნება დაკმაყოფილებული.

20. ახლა განვიხილოთ შეუღლებული წერტილის არარსებობის შემთხვევა. შევადგინოთ ვარიაციებიანი განტოლების $\Delta_i(x)$ ინტეგრალი, რომელიც იღებს $x=0$, i-თვის 1 მნიშვნელობას, სადაც i არის რაიმე მთელი რიცხვი.

ჯერ დავუშვათ, რომ:

$$\Delta'(1) - \Delta'(0) > 0,$$

ამიტომ

$$\Delta'_i(i) - \Delta'_i(0) > 0, \quad \text{თუ } i > 0,$$
$$\Delta'_i(0) - \Delta'_i(i) > 0, \quad \text{თუ } i < 0.$$

პირიქით, თუ დაკმაყოფილებულია რომელიმე წინა უტოლობათაგანი, მაშინ დაკმაყოფილებული იქნება ყველა დანარჩენიც.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (n^0.7)-ის მსჯელობას დავასკვნით, რომ განსახილველ შემთხვევაში (45) უტოლობა იქნება დაკმაყოფილებული n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.

ახლა დავუშვათ:

$$\Delta'(1) - \Delta'(0) = 0;$$

მაშინ $\Delta_i(x)$ არის იგივურად $\Delta(x)$-ის ტოლი. პირიქით, თუ

$$\Delta'_i(i) - \Delta'_i(0) = 0$$

i-ის რომელიმე ერთი მნიშვნელობისათვის, იგივე იქნება i-ს ყველა დანარჩენი მთელი მნიშვნელობისათვისაც.

ვთქვათ:

$$y = \varphi^{n+1}(x, k) \qquad (\mathfrak{E}^{n+1})$$

პერიოდული $(0, n+1)$ ექსტრემალის მეზობელი ექსტრემალია, რომელიც აერთებს $(0, k)$ და $(n+1, k)$ წერტილებს, ხოლო

$$p_2^{n+1}(x), \quad p_3^{n+1}(x), \dots, \quad p_m^{n+1}(x), \dots$$

საკუთხო $p(x, k\Delta(x))$ კოეფიციენტის k-ს ხარისხების მიხედვით დაშლის შესაბამისი კოეფიციენტები. იმისათვის, რომ მოვძებნოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომელნიც შეესაბამებიან $(0, n+1)$ ინტერვალს, უპირველესად ყოვლისა საჭიროა შევადგინოთ (24)...(28)-ის ანალოგიური განტოლებანი. მაგრამ ამისათვის საკმარისია შევცვალოთ ამ განტოლებებში $\varphi(x, k)$ ფუნქცია და ყველა მისი წარმოებულები $\varphi^{n+1}(x, k)$-თი და ამ უკანასკნელის წარმოებულებით.

თუ ამის შემდეგ ჩავსვამთ $k=0$, მივიღებთ:

$$\nabla_2^0 f = \frac{d}{dx}[\Delta(x)\nabla_2^0 f_{y'}] + 1\cdot 2\frac{d}{dx}\{\Delta(x) p_2^{n+1}(x) f_{y'^2}[x]\},$$

$$\nabla_3^0 f = \frac{d}{dx}[\Delta(x)\nabla_3^0 f_{y'}] + 2\cdot 3\frac{d}{dx}\{\Delta(x) p_2^{n+1}(x)\nabla_2^0 f_{y'^2}\} \qquad (47)$$

$$+ 1\cdot 2\cdot 3\frac{d}{dx}\{\Delta(x) p_3^{n+1}(x) f_{y'^3}[x]\} + \mu_3^{n+1}, \dots$$

განვიხილოთ ჯერ მესამე რიგის წევრი.

$\nabla_3^0 f$-ის პერიოდულობის გამო გვექნება:

$$\int_0^{n+1} \nabla_3^0 f dx = (n+1) \int_0^1 \nabla_3^0 f \, dx.$$

მაშასადამე, თუ (31) პირობა დაკმაყოფილებულია, გვექნება აგრეთვე:

$$p_3^{n+1}(n+1) - p_3^{n+1}(0) = 0$$

და, პირიქით, თუ ეს უკანასკნელი დაკმაყოფილებულია, ადგილი ექნება (31) პირობასაც. აქედან, ისე როგორც (n^0.13)-ში, გამოგვყავს $p_2^{n+1}(x)$-ის პერიოდულობა:

$$p_2^{n+1}(x+1) - p_2^{n+1}(0) = 0,$$

და, მაშასადამე, $\varphi_{k2}^{n+1}(x, 0)$ არის აგრეთვე პერიოდული.

მეორე მხრივ, თუ შევადარებთ (28_2) და (47) განტოლებებს, მივიღებთ

$$\Delta(x) f_{y'^2}[x] \{p_2^{n+1}(x) - p_2(x)\} = C.$$

თუ ჩავსვამთ { } ფრჩხილებში მოთავსებული ფუნქციების მნიშვნელობებს, გვექნება:

$$f_{y'^2}[x] \left\{ \Delta(x) \frac{d}{dx} [\varphi_{k2}^{n+1}(x, 0) - \varphi_{k^2}(x,0)] \right.$$

$$\left. - \Delta'(x) [\varphi_{k2}^{n+1}(x, 0) - \varphi_{k^2}(x, 0)] \right\} = C.$$

მაშასადამე, $\varphi_{k2}^{n+1}(x, 0) - \varphi_{k^2}(x, 0)$ სხვაობა არის ვარიაციებიანი განტოლების ინტეგრალი. მაგრამ ის ისპობა x-ის მთელ მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლისათვის და, მაშასადამე, ისპობა იგივურად, ე. ი.,

$$\varphi_{k2}^{n+1}(x, 0) \equiv \varphi_{k^2}(x, 0).$$

აქედან უშუალოდ მივიღებთ:

$$p_2^{n+1}(x) = p_2(x), \qquad \mu_4^{n+1} = \mu_4.$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ მეოთხე რიგის წევრი. უკანასკნელი ტოლობის ძალით გვექნება:

$$\int_0^{n+1} (\nabla_1^0 f - \mu_1^{n+1}) dx = (n+1) \int_0^1 (\nabla_1^0 f - \mu_1) \, dx.$$

მაშასადამე, თუ (32) პირობა დაკმაყოფილებულია მკაცრი სახით, მაშინ გვექნება აგრეთვე:

$$p_3^{n+1}(n+1) - p_3^{n+1}(0) > 0,$$

ხოლო, როცა $p_3(1) - p_3(0) = 0$ გვექნება $[p_3^{n+1}(x)]_0^{n+1} = 0$.

ახლა განვიხილოთ (n^0.13)-ის ზოგადი (33) შემთხვევა.

ანალოგიური გზით დამტკიცდება, რომ:

$$\begin{array}{lll} p_2^{n}(x) = p_2(x), & \mu_1^{n+1} = \mu_4, & \\ p_3^{n+1}(x) = p_3(x), & \mu_5^{n+1} = \mu_5, & \nu_5^{n+1} = \nu_5, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ p_{m-2}^{n+1}(x) = p_{m-2}(x), & \mu_m^{n+1} = \mu_m, & \nu_m^{n+1} + \nu_m. \end{array}$$

აღვნიშნოთ ΔI^{n+1} ით სხვაობა $\mathfrak{C}^{n+1}$ წირზე აღებული ინტეგრალისა და პერიოდულ $\mathfrak{C}_0(0, n+1)$ ექსტრემალზე აღებული იმავე ინტეგრალს შორის.

ΔI^{n+1}-ის დაშლა გვაძლევს:

$$\Delta I^{n+1} = \frac{k^m}{m!}\int_0^{n+1}(\nabla_m^0 f - p_m^{n+1})\,dx + Ak^{m+1}.$$

$\nabla_m^0 f - \mu_m^{n+1}$-ის პერიოდულობის გამო გვექნება:

$$\int_0^{n+1}(\nabla_m^0 f - \mu_m^{n+1})\,dx = (n+1)\int_0^1(\nabla_m^0 f - \mu_m^{n+1})\,dx,$$

და, მაშასადამე, მინიმუმის პირობა (0, 1) და (1, $n+1$) ინტერვალებისათვის ერთი და იგივეა.

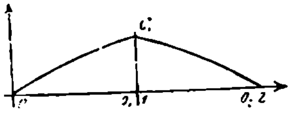
ამგვარად, საბოლოოდ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყველა სრულ ΔI^{m+1} ვარიაციას ყველა განხილულ შემთხვევაში აქვს ერთი და იგივე ნიშანი.

აგრეთვე აღსანიშნავია, რომ თუ რომელიმე ერთი ΔI^{m+1} არის ნული, ასეთივე იქნება ყველა დანარჩენიც.

მაგრამ ერთი შემთხვევა არ ექვემდებარება წინა ანალიზს, ეს არის $(0, n+1)$ შუალედში ჩვეულებრივი ძლიერი მინიმუმის შემთხვევა.

ცხადია, თუ ჩვეულებრივი მინიმუმი განხორციელებულია პერიოდული ექსტრემალით (0, 1) შუალედში, იმავეს ექნება ადგილი ყოველ (1, 2), (2, 3), ..., $(n, n+1)$ შუალედთაგანშიც. ახლა საჭიროა გამოვარკვიოთ, არის თუ არა განხორციელებული ეს მინიმუმი მთელ $(0, n+1)$ შუალედში.

განვიხილოთ ჯერ (0, 2) შუალედში და ავიღოთ ორი კონა: ერთი—შედგენილი სათავიდან გამომავალი ექსტრემალებით, ხოლო მეორე—შედგენილი $O_2(2, 0)$ წერტილზე გამავალი ექსტრემალებით. ვთქვათ $C_1(1, \alpha)$ არის $x=1$ წირის რომელიმე O_1-ის მეზობელი წერტილი. აღვნიშნოთ $\mathfrak{C}$-თი შესაბამისი



ნახ. 6

რებელი მრუდი, შედგენილი ამ ორ კონიდან აღებული ექსტრემალების OC_1, C_1O_2 რკალებისაგან შესაბამისად. ცხადია, რომ ეს მრუდი მიანიჭებს I ინტეგრალს უფრო მცირე მნიშვნელობას, ვიდრე სხვა მისაღები მრუდი, გამავალი სამ O, C_1, O_2 წერტილზე. მაშასადამე, იმის გამოსარკვევად, არის თუ არა განხორციელებული ჩვეულებრივი მინიმუმი (0, 2) შუალედში, საკმარისია შევადაროთ $\mathfrak{C}$-ზე აღებული I ინტეგრალი პერიოდულ $\mathfrak{C}_0(0, 2)$ ექსტრემალზე აღებულ იმავე ინტეგრალს. ეს შედარება გვაძლევს:

$$\Delta I = I_{\mathfrak{C}} - I_{\mathfrak{C}_0} = \frac{\alpha^2}{2}\left\{\frac{\Delta_x(1,0)}{\Delta(1,0)} - \frac{\Delta_x(1,2)}{\Delta(1,2)}\right\} + A\alpha^3,$$

სადაც A ინარჩუნებს სასრულო მნიშვნელობას. ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდე დადებითია, რადგან განხილულ ინტერვალში იაკობის და ლეჟანდრის პირობები დაკმაყოფილებულია მკაცრი სახით[1].

[1] J. Hadamard, Leçons sur le calcul des variations, გვ. 403. G. Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, ტ. III, გვ. 97.

ანალოგიური გზით ვაჩვენებთ, რომ ჩვეულებრივი მინიმუმი განხორციელებულია (0, 3) ინტერვალში და ასე თანდათანობით შემდეგზე გადასვლით მივაღწევთ (0, $n+1$) ინტერვალს. ამგვარად, პ უ ა ნ კ ა რ ე ს თეორემა მთლიანად დამტკიცებულ ია.

VI. მაგალითები

21.
$$I=\int_0^1 (y^2+y'^2)dx.$$

ეილერის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:
$$y''-y=0.$$

ამ განტოლების ზოგადი ინტეგრალია:
$$y=\alpha e^x+\beta e^{-x}.$$

აქედან გამოიყვანება განტოლება მეზობელი ექსტრემალისა, რომელიც გადის $(0, k)$ და $(1, k)$ წერტილებზე:
$$y=\frac{k}{e+1}(e^x+e^{1-x}).$$

აქ გვაქვს შეუღლებული წერტილის სრული უქონლობა.

უშუალოდ მიიღება $\Delta(x)$-ის გამოთქმა:
$$\Delta(x)=\frac{e^x+e^{1-x}}{e+1}$$

და, მაშასადამე,
$$\Delta'(1)-\Delta'(0)=\frac{2e}{e+1}.$$

ამგვარად, I ინტეგრალის მინიმუმი ვიწრო მნიშვნელობით განხორციელებულია პერიოდული (0, 1) ექსტრემალით. ადვილია იმის ჩვენება, რომ ამ შემთხვევაში მინიმუმი არის აბსოლუტური.

22.
$$I=\int_0^1 (y^4+2y'^2)\,dx.$$

დავწეროთ ეილერის განტოლება:
$$y''-y^3=0. \tag{48}$$

მისი პირველი ინტეგრალი იქნება:
$$y'^2=\frac{1}{2}(y^4+\alpha^4),$$

საიდანაც მიიღება:
$$x+\beta=\sqrt{\ }\int\frac{dy}{\sqrt{y^4+\alpha^4}}.$$

ავიღოთ
$$y=\alpha\frac{\operatorname{tg}\varphi-(1+\sqrt{2})}{\operatorname{tg}\varphi+(1+\sqrt{\ }}.$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^4+\alpha^4}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\alpha^2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi}}\,.$$

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს პირველი გვარის ელიპსური ინტეგრალი.

ცნობილი აღნიშნვის მიხედვით:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi).$$

ეილერის განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მიიღება შემდეგი სახით:

$$x+\beta = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\alpha^2} F(k,\varphi), \qquad k^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$$

ვარიაციებიანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი არის წრფივი x-ის მიმართ. ე. ი.

$$y = ax + b.$$

ამგვარად, არ არსებობს შეუღლებული წერტილი, მაგრამ აქ ჩვენ საქმე გვაქვს $\Delta'(1) - \Delta'(0) = 0$ შემთხვევასთან, რადგან $\Delta(x)$ ერთის ტოლია.

ჩვენ დაგვრჩა გამოვარკვიოთ, არის თუ არა ამ შემთხვევის შესრულებული მინიმუმის შესაბამისი პირობები.

ვთქვათ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots \tag{49}$$

არის y-ის დაშლა x-ის ხარისხების მიხედვით, რომელიც აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას. აქედან მიიღება:

$$y^3 = A_0^3 + 3A_0^2 A_1 x + 3(A_0^2 A_2 + A_0 A_1^2)x^2 + (A_1^3 + 3A_0^2 A_3)x + 3(A_0 A_2^2 + A_1^2 A_2 + A_0^2 A_4)x^4 + \ldots,$$

$$y'' = 2A_2 + 6A_3 x + 12 A_3 x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2} + \ldots$$

თუ შევადარებთ კოეფიციენტებს (48) განტოლების მიხედვით, მივიღებთ:

$$A_2 = \tfrac{1}{2}A_0^3, \quad A_3 = \tfrac{1}{2}A_0^2 A_1, \quad A_4 = \tfrac{1}{8}(A_0^5 + 2A_0 A_1^2),$$
$$A_5 = \tfrac{1}{10}(2A_1^3 + 3A_0^4 A_1), \ldots \tag{50}$$

ახლა შევადგინოთ განტოლება მეზობელი ექსტრემალისა, რომელიც გადის $(0,k)$ და $(1,k)$ წერტილებზე. (49) განტოლების ძალით გვექნება:

$$k = A_0,$$

$$0 = A_1 + \tfrac{1}{2}k^3 + \tfrac{1}{2}A_1 k^2 + \tfrac{1}{8}(k^5 + 2kA_1^2) + \tfrac{1}{40}(2A_1^3 + 3k^4 A_1) + \ldots$$

საიდანაც მიიღება:

$$A_1 = -\tfrac{1}{2}k^3 + \tfrac{1}{8}k^5 - \tfrac{7}{40}k^7 + \ldots$$

თუ ჩავსვამთ $A_0, A_1, \ldots$ კოეფიციენტების მნიშვნელობებს, გამოთქმულს k-ს საშუალებით (49) დაშლაში, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$y = k + \frac{x^2 - x}{3}k^3 + \frac{x - 2x^3 + x^4}{8}k^5 + \ldots$$

ამისდა მიხედვით გვაქვს:

$$\varphi_{k}(x, 0) = 1, \quad \varphi_{k^2}(x, 0) = 0, \quad \varphi_{k^3}(x, 0) = 6\frac{x^2 - x}{3},$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\varphi_{k^3}(x+1, 0) - \varphi_{k^3}(x, 0) = 4x.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $\varphi_{k^3}(x+1, 0) - \varphi_{k^3}(x, 0)$ არის ნამდვილად ვარიაციებიანი განტოლების ინტეგრალი, რომელსაც აქვს მხოლოდ ერთი ნული სათავეში. ჩვენ ვხედავთ, რომ სათავე არის მესამე რიგის კრიტიკული sinistrorsum წერტილი. ამგვარად, მინიმუმი განხორციელებულია ვიწრო მნიშვნელობით, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო $f = y^4 + 2y'^2$ ფუნქციის ბუნების მიხედვით.

ტფილისი, 5.7.1929.

შინაარსი

დაიბეჭდა საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის
სარედ.-საგამომც. საბჭოს დადგენილებით

*

რედაქტორი ა. ხ ა რ ა ძ ე
ტექრედაქტორი ა. თ ო დ უ ა
კორექტორი ზ. გ ო ზ ი ა
გამომშვები ზ. ს ი ხ ა რ უ ლ ი ძ ე
გადაეცა წარმოებას 10.2.52. ხელმოწ. დასაბეჭდად 18.4.52. ქაღალდ.
ზომა 70×108 1/16. ქაღალდ. ფურც. 5,375. საბეჭდ. ფორ. 14,72.
სააღრ.-საგამომც. ფურც. 11,59. სააღტ. 11,3 შეკვ. № 1600
უე 04340. ტირაჟი 2000.
ფასი 8 მან. 10 კაპ.
ყდა 3 მან.

სულ 11 მან. 10 კაპ.

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკად. გამომცემლობის სტამბა
თბილისი, წერეთლის 3-5