ანდრია რაზმაძე

ვარიაციათა აღრიცხვა

პროფ. ა. რაზმაძის ლექციების მიხედვით—შედგენილი
პროფ. ლ. გოკიელის მიერ.

სახელმძღვანელო
უმაღლესი სასწავლებლებისათვის

სახელმწიფო გამომცემლობა

ტფილისი
1933

სასწ. პედაგოგიური სექტორი

გადაეცა წარმოებას 29/XI-32
ხელმოწერილი დასაბეჭდად 22/V-33
მთავლიტის რწმუნ. №ა — 215
სტ. ქ. 62×94. ს. ნ. ფ. 40.100
ტირაჟი 2500. შეკვ. № 963
სახელგამის I სტ. ხლ. პრო. № 91.

წინასიტყვაობა

ვარიაციათა აღრიცხვა წარმოადგენდა სპეციალურ და საყვარელ დარგს პროფ. ა. რაზმაძის, რომელშიაც მან დაგვიტოვა მთელი რიგი მეტად მნიშვნელოვანი გამოკვლევებისა. სამწუხაროთ მის განუხორციელებელ განზრახვად დარჩა ვარიაციათა აღრიცხვის კურსის დაწერა. ასეთ პირობებში ერთერთი საშუალება განსვენებულის ხსოვნის პატივსაცემად იყო ვარიაციათა აღრიცხვის კურსის შედგენა მისი ლექციების მიხედვით.

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს ვარიაციათა აღრიცხვის კურსს, შედგენილს პროფ. ა. რაზმაძის მიერ 1923 წ. წაკითხულ ლექციების ჩემ მიერ შესრულებულ ჩანაწერების საფუძველზე. კურსის შედგენის დროს ვისახავდი მიზნად, როგორც ა. რაზმაძის კურსის ხასიათის ზუსტად გადაცემას მისი შინაარსის მხრივ, ისე მისი ცოცხალი მეტყველების დაცვას და მისი აზრების მისივე ენით ალაპარაკებას. ა. რაზმაძე არ ეკუთვნოდა უპიროვნო მეცნიერთა რიცხვს, რომელთა აზრების ქვეშ სრულებით არ სჩანს მათი გამომთქმელის სახე. მის მიერ გამოთქმული აზრი მოწოდებულია ყოველთვის მთელი მისი პსიქიკის ამ აზრისადმი ცოცხალი და აქტიური დამოკიდებულების ფონზე და იდეების გაშლა მისთვის განცდის დრამატიზმით და მეცნიერებისადმი ღრმა სიყვარულის გრძნობით არის გამთბარი. მე ყოველგვარად ვცდილობდი მისი აზროვნების და გამოთქმის სტილი მთელი თავისი განუმეორებელი თავისებურებით დაცული ყოფილიყო და მას მთელი თავისი უშუალო ზედმოქმედების ძალა შერჩებოდა. ამისათვის, რასაკვირველია, არავითარ საჭიროებას არ წარმოადგენდა სიტყვიერი მასალის ხელოვნური სტილიზაცია, რასაც, პირიქით, შეეძლო მხოლოდ ყალბი ნოტის შემოტანა.

ცვლილებები, შედარებით ლექციური მასალის აგებასთან, მოხდენილია მხოლოდ იქ, სადაც ეს აუცილებელი იყო წიგნისათვის სახელმძღვანელოს ხასიათის მიცემის მიზნისათვის.

წიგნის გამოსვლას დიდად ხელი შეუწყო სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასისტენტმა ~~[illegible]~~ რომელსაც დააწვა მთელი სიმძიმე კორექტურის გასწორებისა.

წიგნს ზოგიერთი ტექნიკური დეფექტი გამოყვა. მე-2 და მე-16 ნახაზები (5 და 54 გვ.) შემობრუნებულია (პირველი 90°-ით საათის

ისრის მოძრაობის წინააღმდეგი მიმართულებით, მეორე 180°-ით). ეს მოხდა სამანქანო განყოფილების მიზეზით.

ამ წიგნის გამოშვების დროს არ შეიძლება გულისტკივილით არ განვიცადოთ ის, რომ ა. რაზმაძის ვარიაციათა აღრიცხვის კურსი ვერ იქნება უშუალოდ მიღებული თვით მისივე ხელიდან. მაგრამ თუ უბედურმა მიზეზმა ეს შეუძლებელი გახადა, ვისურვოთ, რომ წინამდებარე წიგნი ამ მიზეზის არსებობის ფაქტის მარტო დადასტურებას კი არ წარმოადგენდეს, არამედ მის საწინააღმდეგოთ მოქმედებდეს და ხელს უწყობდეს განსვენებულის ხსოვნის განმტკიცებას.

ლ. გოკიელი.

პროფ. ა. რაზმაძის მოკლე ბიოგრაფია

ანდრია რაზმაძე დაიბადა სოფ. ჩხენისში 1890 წ. პირველდაწყებითი სწავლა მიიღო ხაშურის რკინის გზის ორკლასიან სკოლაში, შემდეგ ფოთის და ქუთაისის სამოქალაქო სასწავლებლებში. 1904 წ. შევიდა ქუთაისის რეალურ სასწავლებელში, მეოთხე კლასში. ოთხი წლის კურსი მან ორი წლის განმავლობაში გაიარა და რეალური სასწავლებელი უკვე 1906 წ. დაამთავრა, იმავე წელს შევიდა მოსკოვის უნივერსიტეტის მათემატიკურ ფაკულტეტზე, რომელიც 1910 წ. დაამთავრა. 1917 წ. ჩააბარა მოსკოვის უნივერსიტეტში სამაგისტრო გამოცდები, რის შემდეგაც მიწვეული იყო იმავე უნივერსიტეტში პრივატ-დოცენტად. ამ ხანებში ის რამდენჯერმე მივლინებული იყო სამეცნიერო მიზნით უცხოეთში.

ანდრია რაზმაძე იყო ერთერთი ინიციატორი საქართველოში უნივერსიტეტის დაარსებისა. ტფილისში უნივერსიტეტის დაარსებისთანავე ის მუდმივად მოღვაწეობს მასში, კითხულობს მათემატიკურ ანალიზის მთავარ საგნებს და მხურვალე მონაწილეობას ღებულობს მათემატიკურ დარგის და უნივერსიტეტის ცხოვრებაში. ანდრია რაზმაძე არის უმაღლესი მათემატიკური განათლების პიონერი საქართველოში. მან საფუძველი ჩაუყარა ქართულ მათემატიკურ თერმინოლოგიას და ქართულ მათემატიკურ ლიტერატურას.

1924 წ. მიემგზავრება ამერიკაში მათემატიკოსთა საერთაშორისო ყრილობაზე, რომელზედაც გამოდის მოხსენებით, ხოლო 1925 წ. იცავს პარიზში სადოქტორო დისერტაციას და ღებულობს მათემატიკის დოქტორის სახელწოდებას.

გარდაიცვალა 1929 წ., სავსე ახალგაზრდული ძალღონით, თავისი მეცნიერული მოღვაწეობის გაშლის საუკეთესო ხანაში.

პროფ. ა. რაზმაძის გამოკვლევები შეეხებიან უმთავრესად ვარიაციათა აღრიცხვას, რომელშიაც მას მიღებული აქვს მთელი რიგი მეტად მნიშვნელოვანი შედეგებისა (შეწყვეტილ ექსტრემალთა თეორია, წყვეტილ ექსტრემალთა თეორია, ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემა და სხვ.). ამ გამოკვლევების ზოგიერთ ელემენტარულ ნაწილებს მკითხველი გაეცნობა წინამდებარე სახელმძღვანელ. (II, XXII და XXVI ლექციებში).

ქვემოთ მოგვყავს პროფ. ა. რაზმაძის მთავარ ნაშრომთა სია:

1. Über Lösungen mit einem variablen Endpunkt in der Variationsrechnung (Mathematische Annalen B. 75).
2. Sur un théorème fondamental du calcul des variations (ტფილისის უნივერსიტეტის მოამბე, № 1, 1919).
3. Weierstrass-ის E ფუნქციის დაშლა კუთხიანი წერტილის მახლობლობაში (ტფილისის უნივერსიტეტის მოამბე, № 1, 1919).
4. Über das Fundamentallemma der Variationsrechnung (Mathematische Annalen, B. 84, 1921). წარმოადგენს მე-2-ის გადამუშავებას.
5. მრუდის ერთი თვისების დამტკიცება და ამ თვისების გამოყენება დიფერენციალურ აღრიცხვაში (ჟურნ. ჩვენი მეცნიერება, 1921).
6. Sur une formule de la moyenne (ჟურნ. ჩვენი მეცნიერება, 1921).
7. Über unstetige Lösungen mit einem Unstetigkeitspunkt in der Variationsrechnung (ტფილისის უნივერსიტეტის მოამბე, № 2, 1923).
8. Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations (Mathematische Annalen, B. 94, 1925). დისერტაციაა.
9. Sur une condition de minimum nécessaire pour les solutions anguleuses dans le calcul des variations (Bulletin de la Société mathématique de France, t. LI, 1923). წარმოადგენს მე-3-ის გადამუშავებას.
10. Sur un théorème de la théorie des surfaces minima (Bulletin des Sciences mathématiques, 1925).
11. მათემატიკური ანალიზის კურსი. I ტ. მათემატიკური ანალიზის შესავალი, ტფილისი, 1919.
12. მათემატიკური ანალიზის კურსი. III ტ. ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი ნაწილი I. განუსაზღვრელი ინტეგრალები, ტფილისი, 1922.

სარჩევი

თავი I

თავი II

შემჩნეულ შეცდომათა გასწორება

გვერდი	სტრიქონი	დაბეჭდილია	უნდა იყოს
6	7	სუსტი ექსტრემუმი	შეზღუდული სუსტი ექსტრემუმისათვის შემოღებულ დამატებითი პირობით
95	2	(იხ. გვ.)	(იხ. 30 გვ.)
134	3, 4, 6, 8, 9	$(x'^2+y'^2)\frac{3}{2}$	$(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}$

თავი პირველი

I ლექცია

ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემა

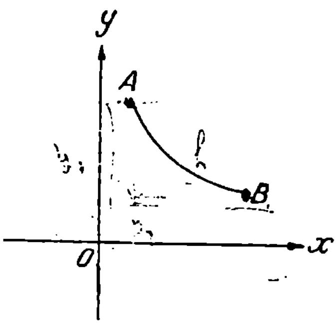
ვარიაციათა აღრიცხვის წარმოშობა დაკავშირებულია ერთ პრობლემასთან, რომელიც პირველად მკაფიო სახით წამოაყენა Johann Bernoulli-მ 1696 წელს. ეს პრობლემა მდგომარეობს შემდეგში: სიბრტყეზე აღებულია ორი წერტილი A და B. წერტილები A და B უნდა შევაერთოთ ისეთი მრუდით, რომ მძიმე მატერიალური წერტილი, რომელიც ამ მრუდით იმოძრავებს, უმოკლეს დროში მიაღწევს A-დან B-მდე, ე. ი. ყოველი სხვა გზა, რომლითაც ის იმოძრავებს, უფრო მეტ დროს მოითხოვს ისეთი მოძრაობისთვის.

როგორ შეიძლება ეს პრობლემა ანალიზურად გამოისახოს? აღვნიშნოთ v_0 სხეულის საწყისი სიჩქარე ე. ი. სიჩქარე A წერტილში. ვთქვათ ჩვენი სხეულის მასა არის m. ცვლადი სიჩქარე აღვნიშნოთ v-თი. თანახმად მექანიკის, ცნობილი ფორმულისა დავწერთ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mgh \qquad \text{(I)}$$

სადაც $h=y-y_0$ (აქ ჩვენ ნაგულისხმევი გვაქვს, რომ Y ღერძს აქვს ვერტიკალური მიმართულება) (I)-დან მივიღებთ:

$$v^2=v_0^2+2gh;$$



ნახ. 1.

ანუ

$$v=\sqrt{v_0^2+2g(y-y_0)}.$$

აღვნიშნოთ $\sqrt{2g}=k$ და $\frac{v_0^2}{2g}=a$. მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$v=k\sqrt{a+y-y_0}$$

რადგან $v=\frac{ds}{dt}$ (s არის განვლილი გზა, t დრო) ამიტომ გვექნება:

$$\frac{ds}{dt}=k\sqrt{a+y-y_0}$$

აქედან (თუ მხედველობაში მივიღებთ ds-ის გამოხატულებას: $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$).

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{k\sqrt{y-y_0+a}} \qquad \text{და}$$

$$t=\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{y-y_0+a}}$$

ახლა პრობლემა იმაში მდგომარეობს, რომ მოვძებნოთ ამ ინტეგრალის მინიმუმი. ამისათვის უნდა მოვძებნოთ ისეთი ფუნქცია $y=\varphi(x)$, რომლისათვისაც ჩვენი ინტეგრალი მოგვცემს მინიმუმს. სწორედ ეს ფუნქცია $y=\varphi(x)$ გამოხატავს საძიებელი მრუდის განტოლებას. აქ საქმე გვაქვს მინიმუმისა და მაქსიმუმის პრობლემასთან, მაგრამ არა ჩვეულებრივი სახით, რადგან იმ სიმბოლოს ცვალება, რომლისაგან დამოკიდებულია ექსტრემუმის მხრივ შესამოწმებელი გამოთქმა, რიცხობრივი მნიშვნელობის მიღების სხვადასხვაობაში კი არ მდგომარეობს, არამედ ფუნქციის სახის სხვადასხვაობაში და ვეძებთ სწორედ ისეთნაირ ფუნქციას, რომელიც ჩვენს გამოთქმას ექსტრემუმს მიანიჭებს.

ზემოთდასახელებულ პრობლემას ბრაქისტოქრონის პრობლემა ეწოდება. ჩვენ მას ადვილად ამოვხსნით შემდეგში, როდესაც ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითად მეთოდებს გავეცნობით.

ბრაქისტოქრონის პრობლემა იყო პირველი პრობლემა, რომლიდანაც დაიწყო მრავალი სხვა მსგავსი პრობლემების გარდაწყვეტა. შეიქმნა უმშვენიერესი დარგი მათემატიკური ანალიზისა — ვარიაციათა აღრიცხვა, რომელსაც არა მარტო უდიდესი თეორიული მნიშვნელობა აქვს, არამედ აგრეთვე ფართო პრაქტიკული გამოყენებაც მრავალ მეცნიერებაში: მექანიკაში, ფიზიკაში, ასტრონომიაში და სხვა.

დავასახელებთ ერთ მაგალითს, რომელშიაც ზემოთმოყვანილი პრობლემის მსგავს პრობლემასთან გვაქვს საქმე: ყველა იმ მრუდთა შორის, რომელთაც ერთიდაიგივე სიგრძე აქვთ, მოვძებნოთ ისეთი, რომელიც უმეტეს არეს შეიცავს. ვიცით, რომ არე, რომელსაც მრუდი შე-

ცავს, გამოიხატება ინტეგრალით $\int_{x_0}^{x_1} y dx$, მხოლოდ მრუდის სიგრძე ინტეგრალით $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$;

ჩვენი პრობლემა შემდეგში მდგომარეობს: უნდა მოვძებნოთ ინტეგრალის $\int_{x_0}^{x_1} y dx$ მინიმუმი იმ პირობით, რომ ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$ იყოს მუდმივი.

ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემა ზოგადი სახით პირველად Euler'-მა წამოაყენა:
მოცემულია ინტეგრალი

$$J=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') \, dx$$

y ამ შემთხვევაში ერთი x ცვლადის ფუნქციაა. უნდა განვსაზღვროთ ეს ფუნქცია ისე, რომ J ღებულობდეს მინიმალურ მნიშვნელობას.

შეიძლება მრუდის განტოლება ავიღოთ პარამეტრალური სახით: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.
მაშინ უნდა მოვძებნოთ მინიმუმი

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y') \, dt$$ სახის ინტეგრალის.

მაგალითად, პრობლემა ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილისა, იმ შემთხვევაში, როცა ვიღებთ x დამოუკიდებელ ცვალებადს, მიიყვანება ინტეგრალის $\int \sqrt{1+y'^2}\, dx$ მინიმუმის მოძებნაზე; ხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა დამოუკიდებელი ცვალებადი არის t $\int \sqrt{x'^2+y'^2}\, dt$ ინტეგრალის მინიმუმის მოძებნაზე.

შემდეგ ჩვენ დავინახავთ, თუ რა უპირატესობა აქვს პრობლემის მეორე სახით წარმოდგენას.

საკითხის დაყენება ზემოთ დაკავშირებული იყო სიბრტყის მრუდებთან, თუ საკითხი ეხება სივრცის მრუდებს, პრობლემა მიიყვანება $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')\, dx$ ინტეგრალის (თუ დამოუკიდებელ ცვალებადად ვიღებთ x) ან და ინტეგრალის

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x, y, z, x', y', z')\, dt$$

(თუ დამოუკიდებელ ცვალებადად ვიღებთ t) მინიმუმის მოძებნაზე.

დავუბრუნდეთ იმ შემთხვევას, როცა გვაქვს ინტეგრალი:

$$I=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx,$$

სადაც y არის ერთი ცვალებადის x-ის ფუნქცია. $f(x, y, y')$ ფუნქციიდან მოვითხოვოთ, რომ ის და მისი პირველი სამი რიგის წარმოებულები იყოს განუწყვეტელი გარკვეულ D არეში, რომელიც ისეთი (x, y, y') წერტილებისაგან შედგება, რომლისათვისაც (x, y) გარკვეულ R არეს ეკუთვნის და y' აქვს რაიმე სასრული მნიშვნელობა.

ავიღოთ R არეში მდებარე ორი წერტილი: $A(x_0, y_0)$ და $B(x_1, y_1)$ და განვიხილოთ სიმრავლე ყველა იმ მრუდისა, რომლებსაც შემდეგი თვისებები აქვთ:

1) ისინი გადიან A და B წერტილებზე.

2) ყოველი Y ღერძის პარალელური სწორი, გავლებული (x_0, x_1) შუალედის რომელიმე წერტილზე, მას მხოლოდ ერთ წერტილზე გადაკვეთს, ე. ი. მრუდი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (x_0, x_1) შუალედში განსაზღვრული ფუნქციით: $y = y(x)$.

3) ფუნქციას $y(x)$ აქვს პირველი რიგის განუწყვეტელი წარმოებული, რაც იმას მოასწავებს, რომ განუწყვეტელია მრუდი და აგრეთვე იმ კუთხის ტანგენსი, რომელსაც მხები შეადგენს X ღერძის დადებით გეზთან, და ის (მხები) არასდროს Y ღერძის პარალელური არაა.

4) ჩვენი მრუდები მთლიანად მოთავსებულნი არიან R არეში.

მრუდებს, რომელნიც ზემოთმოყვანილი ოთხი პირობით შევზღუდეთ, მისაღები მრუდები ეწოდებათ.

ზემოთმოყვანილ პირობებს ჩვენ შემდეგში საჭიროების მიხედვით გავაძლიერებთ, ისე რომ ეს პირობები იძლევიან იმის მინიმუმს, რაც ჩვენ შემდეგ დაგვჭირდება.

მისაღები მრუდები აღვნიშნოთ მ-ით. ვთქვათ $y = \varphi(x)$ არის რაიმე მისაღები მრუდის განტოლება, მაშინ ინტეგრალი J აღებული ასეთ მ მრუდზე იქნება:

$$J_{\text{მ}} = \int_{x_0}^{x_1} f[x, \varphi(x), \varphi'(x)]\, dx.$$

უნდა მოვძებნოთ ისეთი მრუდი, რომელიც ინტეგრალს უმცირეს მნიშვნელობას მიანიჭებს. აღვნიშნოთ ეს მრუდი მ_0. ვთქვათ მისი განტოლება არის $y = y_0(x)$. მაშინ ინტეგრალი J აღებული მ_0 მრუდზე იქნება

$$J_{\text{მ}_0} = \int_{x_0}^{x_1} f[x, y_0(x)\ y_0'(x)]\, dx$$

თანახმად ჩვენი განმარტებისა, როგორიც არ უნდა იყოს მ მრუდი, $J_{\text{მ}_0} \leqslant J_{\text{მ}}$. იმ შემთხვევაში თუ მ_0 მაქსიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს, მაშინ $J_{\text{მ}_0} \geqslant J_{\text{მ}}$.

ვარიაციათა აღრიცხვა განსაკუთრებით შეისწავლის ინტეგრალის მინიმუმს, რადგან მხოლოდ ნიშნის შეცვლაა საკმარისი იმისა-

თვის, რომ მაქსიმუმის შემთხვევის გარჩევა დავიყვანოთ მინიმუმის შემთხვევაზე.

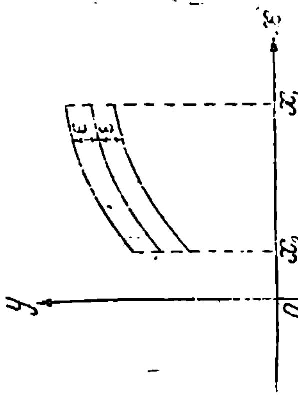
ზემოთჩამოყალიბებული პრობლემა წარმოადგენს ვარიაციათა აღრიცხვის აბსოლუტურ პრობლემას, მაგრამ ვარიაციათა აღრიცხვაში უმთავრესად განიხილება არა აბსოლუტური, არამედ შედარებითი ექსტრემუმის პრობლემა. ამ შემთხვევაში მინიმუმისა და, აგრეთვე, მაქსიმუმის საკითხს იხილავენ არა ყველა მრუდების შესახებ, რომელნიც ზემოთმოყვანილ ორს პირობას აკმაყოფილებს, არამედ მხოლოდ იმათ შესახებ, რომელნიც აღებულ შესადარებელ მრუდთან საკმაო მახლობლობაში იმყოფებიან.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ზედმიწევნითი სახით შედარებითი ექსტრემალის პრობლემა: ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა. რაიმე მრუდი $მ_0$ მიანიჭებს ინტეგრალს შედარებითი მინიმუმს, თუ არსებობს ისეთი დადებითი ε რიცხვი, რომ ინტეგრალი, აღებული ამ $მ_0$ მრუდზე: $I_{მ_0}$ არ აღემატება ინტეგრალს $I_მ$, აღებულს A და B-ზე გამავალ მისაღებ მრუდზე, რომელიც კი მოთავსდება ჩვენი მრუდის ორივე მხრიდან ε მანძილით შემოსაზღვრული ზოლის (ამ ზოლს მოკლედ (ε) ზოლი შეგვიძლია ვუწოდოთ) შიგნით: $I_{მ_0} \leqslant I_მ$.

თუ არსებობს ისეთი ε რიცხვი, რომ სათანადო ზოლში მდებარე ყოველი მრუდისთვის მარტო უტოლობას $I_{მ_0} < I_მ$ აქვს ადგილი, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს საკუთრივი მინიმუმი, თუ ასეთი ε არ არსებობს, მაშინ ვიტყვით, რომ მინიმუმი არასაკუთრივია.

უტოლობა $I_{მ_0} \leqslant I_მ$ შეგვიძლია შემდეგნაირად გადმოვწეროთ:

$$I_მ - I_{მ_0} \geqslant 0$$



ნახ. 2.

მარცხენა მხარეზე მდგომი სხვაობა ΔI-თი აღვნიშნოთ.

აღვნიშნოთ $მ_0$ მრუდის განტოლება: $y=y_0(x)$. ავიღოთ ჩვენ ზოლში მდებარე რომელიმე შესადარებელი მრუდი: $y=\varphi(x)$ განვიხილოთ სხვაობა $\varphi(x)-y_0(x)$. ცხადია, რომ მისი აბსოლუტური სიდიდე იქნება ε-ზე ნაკლები. ამ სხვაობას მრუდის ვარიაციას უწოდებენ. აღვნიშნოთ მრუდის ვარიაცია $\omega(x)$-ით, გვექნება

$$\varphi(x)=y_0(x)+\omega(x).$$

მრუდის ვარიაციის შესახებ განვმარტავთ რამდენიმე ცნებას. თუ ისეთი ε რიცხვი არსებობს, რომ ექსტრემუმს ადგილი აქვს ყველა იმ შესადარებელი მრუდის მიმართ, რომლისათვის არა მარტო $\omega(x)$-ის, არამედ მისი წარმოებულის: $\omega'(x)$ აბსოლუტური სიდიდე ε-ზე ნაკლებია,—მაშინ ვიტყვით, რომ საქმე სუსტ ექსტრემუმთან გვაქვს.

ექსტრემუმს, რომელიც იმავე დროს არაა სუსტი ექსტრემუმი, მძლავრი ექსტრემუმი ეწოდება.

II ლექცია.

პირველი ვარიაცია. ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემა. Euler'-ის დიფერენციალური განტოლება.

მოვძებნოთ ახლა აუცილებელი პირობები მინიმუმისათვის.

ვთქვათ M_0 მრუდი იძლევა ინტეგრალის მინიმუმს. მაშინ ისეთი ε არსებობს, რომ (ε) ზოლში აღებული ყოველი შესადარებელი M მრუდისათვის ადგილი ექნება უტოლობას: $\Delta J \geqslant 0$. სხვაობას $J_M - J_{M_0} = \Delta J$ უწოდებენ ინტეგრალის სრულ ვარიაციას.

ჩვენ უნდა მოვძებნოთ აუცილებელი პირობა იმისა, რომ $\Delta J \geqslant 0$.

აღვნიშნოთ M_0 და M მრუდების განტოლებანი შესაბამისად $y=y_0(x)$ და $y=y(x)$. სხვაობას $y(x)-y_0(x)$, როგორც ვიცით მრუდის ვარიაციას უწოდებენ. აღვნიშნოთ იგი $\omega(x)$, გვექნება $|\omega(x)|<\varepsilon$ განვიხილოთ კერძო სახე $\omega(x)$ ფუნქციისა: ვთქვათ $\omega(x)=\alpha p(x)$, სადაც $p(x)$ არის რაიმე მოცემული ფუნქცია განუწყვეტელი წარმოებულით, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $p(x_0)=p(x_1)=0$ და α არის პარამეტრი, რომელსაც იმ ფარგლებში ვცვლით, რომ სხვადასხვა მრუდები, რომელთაც ამ ცვალების დროს მივიღებთ, უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას: $|\alpha p(x)|<\varepsilon$.

ვნახოთ ახლა რას წარმოადგენს ΔJ.

დავწეროთ:

$$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left[f(x,\ y_0(x)+\alpha p(x),\ y_0'(x)+\alpha p'(x))-\right.$$

$$\left.-f(x,\ y_0(x),\ y'(x))\right]dx$$

თუ ინტეგრალის ქვეშ მყოფ სხვაობას დავშლით Taylor-ის ფორმულის ძალით და შევჩერდებით მესამე წევრზე (ეს ყოველთვის შესაძლებელია, რადგან თანახმად f ფუნქციის შესახებ მოთხოვნილი

პირობისა, ეს ფუნქცია და მისი პირველი სამი რიგის ნაწილობითი წარმოებულები არიან განუწყვეტელი) მივიღებთ:

$$\Delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} p(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} p'(x) \right) dx + \frac{\alpha^2}{1\,.\,2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} p^2(x) + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y\,.\,\partial y'} p p' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} p'^2 \right) dx + \frac{\alpha^3}{1\,.\,2\,.\,3} \int_{x_0}^{x_1} M\, dx + \ldots \qquad (\mathrm{I})$$

მიღებული ჯამის პირველ წევრს ეწოდება J ინტეგრალის პირველი ვარიაცია და აღინიშნება δJ.

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial y'} p' \right) dx$$

მეორე წევრს, გარდა $\frac{1}{1\,.\,2}$ კოეფიციენტისა, ეწოდება მეორე ვარიაცია და აღინიშნება $\delta^2 J$. ასევე იქნება მესამე ვარიაცია $\delta^3 J$ და სხვ. საერთოდ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{1\,.\,2} \delta^2 J + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \delta^3 J + \cdot \qquad (\mathrm{II})$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, თუ რატომ ვუწოდებთ ΔJ სრულ ვარიაციას.

თუ α საკმაოდ მცირეა და δJ ნულისაგან განსხვავდება, მთელ (I) ჯამს ნიშანს აძლევს პირველი წევრი.

ახლა რადგან α-ს სხვადასხვა ნიშანი შეგვიძლია მივცეთ, ამიტომ ჯამის პირველი წევრი და, მაშასადამე, მთელი ΔJ ჯამიც ნიშანს შეიცვლის.

ამგვარად, აუცილებელი პირობა იმისა, რომ $\Delta J \geqslant 0$, იმაში მდგომარეობს, რომ პირველი ვარიაცია δJ ნულის ტოლი იყოს. ეს პირობა ასე დაიწერება:

$$\alpha \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial y'} p' \right) dx = 0$$

ანუ

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial y'} p' \right) dx = 0.$$

$p(x)$ ნებსითი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $p(x_0) = p(x_1) = 0$.

ახლა ვნახოთ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდენ ორი ფუნქცია $\frac{\partial f}{\partial y}$ და $\frac{\partial f}{\partial y'}$, რომ ნებსითი განუწყვეტელ წარმოებულებიან p ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს მხოლოდ პირობას $p(x_0) = p(x_1) = 0$,

ინტეგრალი

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial y'} p' \right) dx \text{ იგივეობურად}$$

ნულის ტოლი იყოს.

დავამტკიცოთ, რომ ამის აუცილებელი და საკმარისი პირობა შემდეგი ტოლობით გამოიხატება:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

ზემოთნათქვამიდან სრულიად დამოუკიდებლად შეგვიძლია შემდეგი პრობლემა დავსვათ:

ავიღოთ ინტეგრალი

$$\int_{x_0}^{x_1} [M(x)\, y + N(x)\, y']\, dx, = 0$$

სადაც y ნებსითი განუწყვეტლად წარმოებული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $y(x_0) = y(x_1) = 0$, ხოლო $M(x)$ და $N(x)$ მოცემული განუწყვეტელი ფუნქციებია. ვიპოვოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ეს ინტეგრალი იგივეობურად ნულის ტოლი იყოს.

დავამტკიცოთ, რომ ამის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ

$$\frac{dN}{dx} = M(x).$$

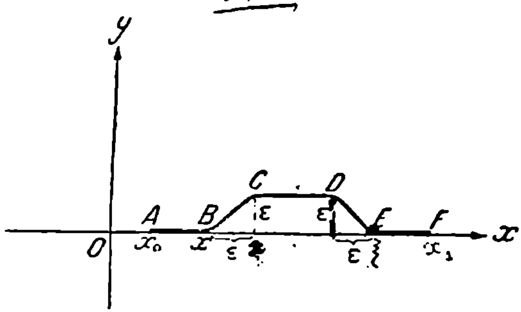
სწორედ ეს დებულება საშუალებას მოგვცემს გადავწყვიტოთ ზემოთდასმული პრობლემა პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობის პირობის შესახებ.

x_0 და x_1 წერტილებს შუა ავიღოთ რომელიმე ორი წერტილი x და ξ $(x < \xi)$. ავიღოთ შემდეგ მცირე დადებითი ε რიცხვი და მოვზომოთ ε მანძილები ξ-დან მარცხნივ და x-დან მარჯვნივ. მიღებული ორი წერტილისაგან აღვმართოთ პერპენდიკულარები და ამ პერპენდიკულარებზედაც მოვზომოთ მანძილები ε.

განვიხილოთ მრუდი, რომელიც შემდეგი მრუდებისაგან შედგება: სწორი AB, მოზარდი მრუდი BC, სწორი CD, პარალელური X ღერძისა, კლებადი მრუდი DE და სწორი EF (იხ. ნახ.), კუთხითი წერტილებზე ჩვენი მრუდი მოვარგვალოთ. ეს გვჭირია იმისათვის, რომ ამ მრუდით წარმოდგენილი ფუნქცია წარმოებადი იყოს. ეს ფუნქცია ამის გარდა წერტილებზე x_0 და x_1 ნულის ტოლია. იგი ერთერთი ფუნქციაა ზემოთმოთხოვნილი სახისა.

ავიღოთ ჩვენი ინტეგრალი ამ მრუდის მიმართ (აღვნიშნოთ ეს მრუდი $\mathfrak{m}_0$). თეორემის პირობის ძალით დავწერთ:

$$J\mathfrak{m}_0=0$$



ნახ. 3.

უკანასკნელი თანასწორობა ასე შეგვიძლია გადმოვწეროთ

$$JAB+JBC+JCD+JDE+JEF=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \; (ა)$$

ცხადია, რომ $JAB=0$ და $JEF=0$ (რადგან AB და EF მიმართ y და y'=ნულის ტოლნი არიან,—ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფი გამოსახულებაც ნულის ტოლია).

განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი JBC. ვთქვათ BC მრუდის განტოლება არის $y=\mu(x)$, დავწერთ:

$$JBC=\int_x^{x+\varepsilon}[M\mu(z)+N\mu'(z)]\,dz$$

ასევე დავწერთ JDE ინტეგრალის გამოსახულებას:

$$JDE=\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi}[M\mu_1(z)+N\mu_1'(z)]\,dz$$

სადაც $y=\mu_1(x)$ არის DE მრუდის განტოლება.

განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი JCD. ამ შემთხვევაში y იქნება მუდმივი და ε-ის ტოლი. ამიტომ გვექნება

$$JCD=\varepsilon\int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}M(z)\,dz$$

(ა) ჯამი ასე დაიწერება

$$\int_x^{x+\varepsilon}M\mu(z)\,dz+\int_x^{x+\varepsilon}N\mu'(z)\,dz+\varepsilon\int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}M(z)\,dz+$$

$$+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi}M\mu_1(z)\,dz+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi}N\mu_1'(z)\,dz=0 \quad . \qquad . \; (ბ)$$

განვიხილოთ მარცხენა მხარეზე მდგომი ჯამის შემდეგი ნაწილი:

$$\int_x^{x+\varepsilon}M\mu(z)\,dz+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi}M\mu_1(z)\,dz$$

აღვნიშნოთ ეს ნაწილი S-ით.

$M(z)$ ფუნქციის განუწყვეტლობის გამო ის შემოსაზღვრული იქნება და ამიტომ ისეთი g რიცხვი არსებობს, რომ $|M(z)|<g$. ამის გარდა ცხადია, რომ $|\mu(z)|<\varepsilon$ და $|\mu_1(z)|<\varepsilon$. დავწერთ:

$$|S| \leqslant \int_x^{x+\varepsilon} M|\mu(z)|\,dz + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} M|\mu_1(z)|\,dz <$$

$$< \int_x^{x+\varepsilon} g\,\varepsilon\,dz + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} g\,\varepsilon\,dz = g\,\varepsilon^2 + g\,\varepsilon^2 = 2g\,\varepsilon^2$$

ამგვარად

$$|S| < 2g\,\varepsilon^2.$$

აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ $S=k\,\varepsilon^2$, სადაც k შემოსაზღვრული სიდიდეა.

განვიხილოთ ახლა (ბ) ჯამის წევრები:

$$\int_x^{x+\varepsilon} N\mu'(z)\,dz \text{ და } \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} N\mu'_1(z)\,dz.$$

თანახმად საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულისა, რომლის გამოყენება უზრუნველყოფილია იმით, რომ $\mu'(x)$ და $\mu'_1(x)$ ნიშანს არ იცვლის მთელ შუალედში, დავწერთ:

$$\int_x^{x+\varepsilon} N\mu'(z)\,dz = N(x+\theta\varepsilon)\int_x^{x+\varepsilon}\mu'(z)\,dz =$$

$$= N(x+\theta\varepsilon)\int_x^{x+\varepsilon} d[\mu(z)] = N(x+\theta\varepsilon)\,[\mu(z)]_x^{x+\varepsilon} = \varepsilon\,N(x+\theta\varepsilon).$$

სრულებით ასევე მივიღებთ:

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} N\mu'_1(z)\,dz = -\varepsilon\,N(\xi-\theta'\varepsilon)$$

ჯამი (ბ) ასეთნაირად გადმოიწერება:

$$\varepsilon\,N(x+\theta\varepsilon) + \varepsilon\int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} M(z)\,dz - \varepsilon\,N(\xi-\theta'\varepsilon) + k\,\varepsilon^2 = 0$$

აქედან მივიღებთ:

$$N(x+\theta\varepsilon) + \int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} M(z)\,dz - N(\xi-\theta_1\varepsilon) + k\,\varepsilon = 0.$$

გადავიდეთ ახლა ზღვარზე, როცა ε ნულისაკენ მიისწრაფვის. რადგან ფუნქცია N განუწყვეტელია, ამიტომ $N(x+\theta\varepsilon)$ და $N(\xi-\theta_1\varepsilon)$ ზღვრები იქნებიან შესაბამისად $N(x)$ და $N(\xi)$. დავწერთ

$$N(x) + \int_x^{\xi} M(z)\,dz - N(\xi) = 0 \text{ ანუ}$$

$$N(\xi) - N(x) = \int_x^{\xi} M(z)\,dz.$$

გავყოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე $\xi-x$-ზე. მივიღებთ:

$$\frac{N(\xi)-N(x)}{\xi-x} = \frac{1}{\xi-x}\int_x^{\xi} M(z)\,dz.$$

განვიხილოთ ახლა x, როგორც მუდმივი, და ξ, როგორც ცვლადი, რომელიც x-კენ მიისწრაფვის. მარჯვენა მხრის ზღვარი იქნება $M(x)$, მაშასადამე, მარცხენა მხარესაც აქვს ზღვარი.

ამით დამტკიცებულია, რომ არსებობს N-ის წარმოებული $\frac{dN}{dx}$ და დავწერთ:

$$\frac{dN}{dx}=M(x)$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა ჩვენი პირობის საკმარისობა. ვთქვათ პირობა $\frac{dN}{dx}=M(x)$ შესრულებულია, მაშინ

$$\int_{x_0}^{x_1}[My+Ny']\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dN}{dx}y+Ny'\right)dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}d[N\cdot y]=[N\cdot y]_{x_0}^{x_1}=0$$

გამოვიყენოთ ახლა დამტკიცებული დებულება ზემოთ დასმული პრობლემისათვის. ცხადია, რომ ინტეგრალი

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial f}{\partial y}p\ \ (x)+\frac{\partial f}{\partial y'}p'\ (x)\right]dx$$

წარმოადგენს კერძო სახეს ინტეგრალისა

$$\int_{x_0}^{x_1}(My+Ny')\,dx, \text{ სადაც}$$

$$M=\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\quad N=\frac{\partial f}{\partial y'}\ ,\ y=p\ \ (x)$$

ინტეგრალის ნულთან ტოლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა $\frac{dN}{dx}=M\ (x)$ ჩვენი ინტეგრალისათვის შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

ასეთი არის ის დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია $y_0\ (x)$ იმისათვის რომ ინტეგრალი

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\ p\ \ (x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\ p'\ (x)\right]dx$$

ნულის ტოლი იყოს.

ამ განტოლებას Euler-ის განტოლებას უწოდებენ.

ჩვენ დავინახავთ, რომ აუცილებელი პირობა იმისათვის, რომ ΔJ იყოს $\geqslant 0$ იმასში მდგომარეობს, რომ $\delta J=0$, მხოლოდ ამის, აუცი-

ლებელი და საკმარისი პირობა გამოიხატება დიფერენციალური განტოლებით:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0.$$

ამგვარად, ეს განტოლება აუცილებელ პირობას გამოხატავს იმისა, რომ ΔJ იყოს $\geqslant 0$.

Euler-ის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს ექსტრემალს უწოდებენ. ინტეგრალის მინიმუმი ექსტრემალთა შორის უნდა ვეძებოთ. მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს რომ ყოველი ექსტრემალი ინტეგრალს იმავე დროს მინიმუმს მიანიჭებს, რადგან Euler-ის დიფერენციალური განტოლება ექსტრემუმის მხოლოდ აუცილებელ პირობას წარმოადგენს.

III ლექცია

Euler'-ის დიფერენციალური განტოლების გამოკვლევა

დავუბრუნდეთ ჩვენს ძირითად ინტეგრალს:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx \cdot \qquad \cdot \text{(I)}$$

ვიცით, რომ ფუნქცია, რომელიც ინტეგრალს ექსტრემუმს ანიჭებს, აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{(II)}$$

შემდეგში ვისარგებლოთ ნაწილობითი წარმოებული Kneser'-ის აღნიშვნებით, რომელსაც ის გარეგნული გამარტივება შეაქვს, რომ წარმოებულის აღნიშვნაში ტოვებს მხოლოდ ინდექსის სახით დაწერილ ცვლადების ნიშნაკებს, რომელთა მიხედვით ხდება განწარმოება, ხოლო შტრიხებს, რომელთაც ჩვეულებრივად წერენ, ის არ წერს. Kneser'-ის აღნიშვნებში გვექნება მაგალითად:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x, \; \frac{\partial f}{\partial y}=f_y, \; \frac{\partial f}{\partial y'}=f_{y'}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}=f_{yy'}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=f_{y'y'}$$

(II) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$f_y-\frac{d}{dx}\,(f_{y'})=0 \cdot \qquad \cdot \text{(III)}$$

გავხსნათ ახლა ეს დიფერენციალური განტოლება. დავწეროთ:

$$f_y-f_{y'x}-f_{y'y}\,y'-f_{y'y'}\,y''=0 \cdot \qquad \cdot \text{(IV)}$$

მიღებული განტოლება მეორე რიგისაა. მისი ზოგადი ინტეგრალი შეიცავს ორ ნებსით მუდმივს. მას ექნება სახე: $y=\varphi(x, \alpha, \beta)$.

ნებსითი მუდმივების α და β განსაზღვრისათვის გავიხსენოთ, რომ მრუდებს თავიდანვე იმ პირობით ვზღუდავთ, რომ ისინი გადიოდენ $A\ (x_0, y_0)$ და $B\ (x_1, y_1)$ წერტილებზე. ამიტომ გვექნება:

$$y_0=\varphi(x_0, \alpha, \beta),$$
$$y_1=\varphi(x_1, \alpha, \beta) \cdot \qquad \cdot (V)$$

მივიღეთ ორი განტოლება, ორი უცნობით.

ახლა წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა:

1. არსებობს განტოლებათა გარდაწყვეტა α და β-ს შესახებ. ე. ი. არსებობს სისტემა მნიშვნელობათა α და β-სი, რომელნიც მე (III) განტოლებას აკმაყოფილებენ. მაშინ ისეთნაირი მრუდები გვექნება, რომლებმაც შესაძლებელია ინტეგრალს მინიმუმი მიანიჭონ (მიანიჭებენ თუ არა ისინი ინტეგრალს ნამდვილად მინიმუმს ეს ჩვენ ჯერ არ ვიცით, რადგან Euler'-ის განტოლება მინიმუმის მხოლოდ აუცილებელ პირობას წარმოადგენს. ყოველ შემთხვევაში ის ვიცით, რომ არც ერთ სხვა მრუდს ინტეგრალისათვის მინიმუმის მინიჭება არ შეუძლია).

2. მე (V)-თე სისტემის გარდაწყვეტა α და β შესახებ შეუძლებელია. ამ შემთხვევაში ჩვენ იმთავითვე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ინტეგრალის მინიმუმი არ არსებობს.

იმ შემთხვევაში როცა შესაძლებელია (V) გარდაწყვეტა α და β შესახებ, სიმარტივის მოსაზრებით ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს მხოლოდ ერთი ასეთნაირი გადაწყვეტა ე. ი. ერთი წყვილი α და β მნიშვნელობათა: α_0 და β_0 რომელიც (V) განტოლებებს აკმაყოფილებს.

აღვნიშნოთ მ$_0$-ით ის მრუდი, რომელიც α და β ასეთ მნიშვნელობას ეთანადება.

ვიმეორებთ, რომ ჩვენ მხოლოდ მოვძებნეთ ისეთი მ$_0$ მრუდი, რომელსაც შეუძლია ჩვენი ინტეგრალისათვის მინიმუმის მინიჭება, მაგრამ კიდევ არ ვიცით ანიჭებს თუ არა იგი მას ნამდვილად მინიმუმს, რადგან მ$_0$ მრუდი მიღებულია მხოლოდ მინიმუმის აუცილებელი პირობიდან. თუ ინტეგრალის მინიმუმი არსებობს რაც, რასაკვირველია, წინასწარ არაა სავალდებულო, მაშინ მრუდი მ$_0$ სწორედ ისეთი მრუდი იქნება, რომელიც ნამდვილად ანიჭებს ინტეგრალს მინიმუმს. ყოველ შემთხვევაში მ$_0$ მრუდის გარდა არც ერთ სხვა მრუდს არ შეუძლია ჩვენს ინტეგრალს მინიმუმი მიანიჭოს.

მ$_0$ მრუდის მოძებნა მოასწავებს ჯერ ჯერობით საკითხის მხოლოდ ფორმალურად გარდაწყვეტას.

დავუბრუნდეთ ისევ ჩვენ პრობლემას და განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა. ვთქვათ რომ (I) ინტეგრალის ნიშნის ქვევით x არ შედის, ე. ი. ინტეგრალს აქვს ასეთი სახე:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\,(y,\ y')\,dx.$$

ამ შემთხვევაში $f_{y'x}=0$ და IV დიფერენციალური განტოლება ასე დაიწერება:

$$f_y - y' f_{yy'} - y'' f_{y'y'} = 0 \cdot \cdot \qquad \cdot \cdot (\mathrm{VI})$$

ავიღოთ ახლა ასეთი გამოხატულება: $f-y'f_{y'}$ და ვიპოვოთ მისი წარმოებული x-ის შესახებ. დავწერთ:

$$\frac{d}{dx}(f-y'f_{y'})=f_y\,y'+f_{y'}\,y''-$$

$$-f_{y'}\,y''-y'^2\,f_{y'y}-y'y''\,f_{y'y'}=y'\ (f_y-y'f_{yy'}-y''\,f_{y'y'}).$$

y'-ის გვერდით ბრჩხილებში მდგომი გამოსახულება წარმოადგენს (VI) განტოლების მარცხენა მხარეს, ამიტომ (VI) განტოლების მაგიერად ჩვენ შეგვიძლია გადავწყვიტოთ განტოლება:

$$\frac{d}{dx}\,(f-y'f_{y'})=0 \text{ ანუ}$$

$$f-y'f_{y'}=C \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \cdot (\mathrm{VII})$$

ოლონდ ამ განტოლების ის გარდაწყვეტანი, რომელიც გვაძლევს y-სათვის მუდმივსა და, მაშასადამე, y'-სათვის ნულს, შეიძლება არ ივარგოს, რადგან განტოლება (VI) და (VII) ტოლფასია მაშინ როცა $y'\neq 0$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ არ შედის x-ი, შეიძლება მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების (IV) მაგივრად გარდავწყვიტოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება (VII).

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა როცა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ არ შედის არც x და არც y. ამგვარად გვექნება ინტეგრალი:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\,(y')\,dx.$$

ვნახოთ რა სახეს ღებულობს Euler-ის დიფერენციალური განტოლება. (III). რადგან $f_y=0$, ამიტომ დავწერთ:

$$\frac{d}{dx}\,f_{y'}=0 \text{ ანუ } f_{y'}=C.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ $f'\,(y')$ არის მუდმივი, ასეთ პირობებში საზოგადოთ მუდმივი უნდა იყოს თვითონ y'-იც: $y'=m$. აქედან $y=mx+n$. ამგვარად, ექსტრემალი წარმოადგენს სწორ ხაზს.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ არ შედის y', ე. ი. გვაქვს $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,dx$ სახის ინტეგრალი. Euler-ის დიფერენციალური განტოლება (III) ამ შემთხვევაში მოგვცემს $f_y=0$. ეს უკვე დიფერენციალური განტოლება არ არის, არამედ უბრალოდ არა ცხადი სახით მოცემული დამოკიდებულება x და y შორის. რადგან ამ განტოლების ამოხსნა ნებსით მუდმივებს არ შეიცავს, ამიტომ თუ მიღებული მრუდი შემთხვევით არ გადის $A(x_0, y_0)$ და $B(x_1, y_1)$ წერტილებზე, არ გვექნება ისეთნაირი ელემენტი, რომლის რეგულაციით ამის განხორციელებას შევძლებთ. განხილული შემთხვევა, ამიტომ, ინტერესს არ წარმოადგენს.

განვიხილოთ ახლა კერძო მაგალითი.

შევაერთოთ ორი წერტილი A და B ისეთი მრუდით, რომ იმ ზედაპირის ფართი, რომელსაც მივიღებთ ამ მრუდის ბრუნვით X ღერძის გარშემო, იყოს უმცირესი. როგორც ცნობილია, ბრუნვითი ზედაპირის არე გამოიხატება შემდეგი ინტეგრალით:

$$s=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

რადგან ინტეგრალის ქვეშ x არ არის, ამიტომ პრობლემა მიიყვანება დიფერენციალური განტოლების $f-y'f_{y'}=C$ გარდაწყვეტაზე, რომელიც ამ შემთხვევაში მიიღებს სახეს (ძირს c მუდმივს მაგიერად დავწერთ α):

$$y\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{y\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\alpha. \quad \text{აქედან}$$

$$\frac{y+y\,y'^2-yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=\alpha, \quad \text{ანუ} \quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=\alpha.$$

აქ α უნდა იყოს დადებითი, რადგან y და $\sqrt{1+y'^2}$ არიან დადებითი.

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$y'=\frac{\sqrt{y^2-\alpha^2}}{\alpha} \quad \text{ანუ} \quad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2-1}.$$

ახლა შეგვიძლია მოვახდინოთ ცვლადთა განცალება. დავწეროთ:

$$dx=\pm\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2-1}}$$

ინტეგრაციის შემდეგ მივიღებთ:

$$\alpha\lg\left(\frac{y}{\alpha}\pm\sqrt{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2-1}\right)=x-\beta,$$

ანუ, $\frac{y}{\alpha}+\sqrt{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2-1}=e^{\frac{x-\beta}{\alpha}}$ აქედან კი მივიღებთ

$$y=\alpha\frac{e^{\frac{x-\beta}{\alpha}}+e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}}}{2}, \text{ანუ, } y=\alpha\cos h\frac{x-\beta}{\alpha}$$

(იგივე შედეგი გვექნება მაშინაც, როცა რადიკალის $\sqrt{y^2-\alpha^2}$ წინ ავიღებთ — ნიშანს).

ეს არის ჯერჯერობით ჩვენი პრობლემის მხოლოდ ფორმალური გარდაწყვეტა. ჩვენ მოვძებნეთ ნამდვილად მხოლოდ ექსტრემალი და ჯერ საბოლოოდ არ ვიცით, ანიჭებს ის ინტეგრალს მინიმუმს თუ არა. ვიცით მხოლოდ ის, რომ ყოველი სხვა მრუდი ინტეგრალს მინიმუმს ვერ მიანიჭებს, ისე რომ თუ რომელიმე მრუდი მიანიჭებს ინტეგრალს მინიმუმს, ეს იქნება ჩვენს მიერ მიღებული მრუდი. შემდეგ დავინახავთ რომ მიღებული ფუნქცია ნამდვილად ანიჭებს ინტეგრალს მინიმუმს და იძლევა უმცირეს ბრუნვის ზედაპირს.

IV ლექცია

ტრანსვერსალი

აქამდე ჩვენ მხოლოდ ისეთ შემთხვევებს ვიხილავდით, როცა მრუდები, რომელთა შესახებაც ექსტრემუმს ვპოულობდით, ორ აღებულ წერტილზე უნდა გასულიყო. მაგრამ ექსტრემუმის საკითხის დასმა შესაძლებელია იმ შემთხვევაშიც, როცა გვაქვს მხოლოდ ერთი დამაგრებული A წერტილი, ხოლო მეორე წერტილი მოძრაობს გარკვეულ L მრუდზე. ასეთნაირი პრობლემა წარმოგვიდგება, მაგალითად, მაშინ, როცა გვინდა გავიგოთ უმოკლესი მანძილი რომელიმე წერტილიდან მრუდამდე.

ვთქვათ მოვძებნეთ მრუდი AB, რომელზედაც ინტეგრალი უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს. აღვნიშნოთ ეს მრუდი მ_0. რასაკვირველია, ასეთ თვისების მრუდს ჩვენ ვეძებთ მხოლოდ იმ მრუდებს ~~შორის~~, რომელნიც მის მახლობლობაში იმყოფებიან.

პირველად ცხადია, რომ მ_0 უეჭველად უნდა იყოს ექსტრემალი. და აკმაყოფილებდეს განტოლებას: $y=\varphi(x, \alpha, \beta)$, რომელსაც მივიღებთ Euler-ის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით.

მართლაც, A და B წერტილებზე გავიყვანოთ რომელიმე მ მრუდი. თანახმად მ_0 მრუდის განმარტებისა დავწერთ: $J\text{მ} \geqslant J\text{მ}_0$. ეს კი

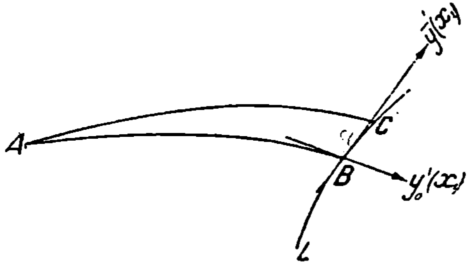
გვიჩვენებს, რომ M_0 მრუდი არის ექსტრემალი, და, მაშასადამე, წევრი

$$y=\varphi(x, \alpha, \beta) \text{ ოჯახისა.}$$

საკითხი იმაში მდგომარეობს, რომ მოვძებნოთ სად მდებარეობს B წერტილი L მრუდზე. ვთქვათ მოვძებნეთ წერტილი B. M_0 მრუდის განტოლება აღვნიშნოთ: $y=y_0(x)$. აღვნიშნოთ A და B წერტილების კოორდინატები შესაბამისად x_0, y_0 და x_1, y_1. გავიყვანოთ შესადარებელი AC მრუდი. ვთქვათ ამ მრუდის განტოლება არის:

$$y=y_0(x)+\alpha h(x).$$

$h(x)$ ფუნქციას ის თვისება უნდა ჰქონდეს, რომ $h(x_0)=0$, რადგან ყველა შესადარებელი მრუდი A წერტილზე გადის. მოვითხოვოთ ამის გარდა რომ $h(x_1)\neq 0$. აღვნიშნოთ C წერტილის აბსცისი $x_1+\varepsilon$ და L მრუდის განტოლება $y=\tilde{y}(x)$.



ნახ. 4.

რადგან წერტილი C მოთავსებულია როგორც AC ისე L მრუდზე, ამიტომ გვექნება:

$$y_0(x_1+\varepsilon)+\alpha\, h(x_1+\varepsilon)=\tilde{y}(x_1+\varepsilon)\ \ldots \quad (I).$$

ამის გარდა გვექნება:

$$y_0(x_1)=\tilde{y}(x_1)\ \ldots \quad (I'),$$

რადგან B საერთო წერტილია AB და L მრუდებისათვის.

(I)-ში x_1 არის მუდმივი და α და ε კი ცვალებადნი. (I) ტოლობა გამოხატავს დამოკიდებულებას α და ε შორის. (I) და (I') ტოლობანი გვიჩვენებენ, რომ როცა $\varepsilon=0$, მაშინ $\alpha=0$. ვიპოვოთ წარმოებულის $\frac{d\alpha}{d\varepsilon}$ მნიშვნელობა $\varepsilon=0$ წერტილისათვის. ამისათვის განვაწარმოოთ (I) ε-ის შესახებ. დავწერთ:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big[y_0(x_1+\varepsilon)\Big]+\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\,h(x_1+\varepsilon)+\alpha\frac{d}{d\varepsilon}\Big[h(x_1+\varepsilon)\Big]=\frac{d}{d\varepsilon}\Big[\tilde{y}(x_1+\varepsilon)\Big].$$

ახლა თუ მივცემთ ε-ს ნულის მნიშვნელობას, მაშინ $\alpha=0$. ამ შემთხვევაში წინა ტოლობიდან მივიღებთ:

$$y'_1+\left[\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\right]_0 h(x_1)=\tilde{y}'_1,$$

სადაც y'_1 და $\widetilde{y'_1}$ მოკლედ აღნიშნავენ წარმოებულებს $\frac{d}{d\varepsilon}\left[y_0(x_1+\varepsilon)\right]$ და $\frac{d}{d\varepsilon}\left[\widetilde{y}(x_1+\varepsilon)\right]$ წერტილზე $\varepsilon=0$. აქედან შეგვიძლია ვიპოვოთ $\left[\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\right]_0$. დავწერთ

$$\left[\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\right]_0=\frac{\widetilde{y'_1}-y'_1}{h(x_1)} \qquad (\mathrm{II})$$

ახლა ინტეგრალის მნიშვნელობა AC და AB მრუდებზე იქნება შესაბამისად:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1+\varepsilon} f[x,\ y_0(x)+\alpha h(x),\ y'_0(x)+\alpha h'(x)]\,dx\\ &\text{და}\\ &\int_{x_0}^{x_1} f[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)]\,dx.\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{III})$$

თანახმად AB მრუდის განმარტებისა გვექნება:

$$\int_{x_0}^{x_1+\varepsilon} f[x,\ y_0(x)+\alpha h(x),\ y'_0(x)+\alpha h'(x)]\,dx-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1} f[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)]\,dx\geqslant 0.$$

პირველი ინტეგრალი იქნება ε-ს ფუნქცია. აღვნიშნოთ იგი $J(\varepsilon)$. მაშინ მეორე ინტეგრალი იქნება $J(0)$. ამგვარად გვექნება

$$J(\varepsilon)-J(0)\geqslant 0.$$

ახლა ჩვეულებრივი ექსტრემუმის თეორიის ძალით უკანასკნელი უტოლობის შესრულების აუცილებელი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ $J'(0)=0$.

მოვძებნოთ $J'(0)$, ამისათვის გავაწარმოოთ (III) ε-ის შესახებ. ამ შემთხვევაში ε იმყოფება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ და აგრეთვე ზედა ზღვარშიც შედის. დავწერთ:

$$J'(\varepsilon)=\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1+\varepsilon}\left[f_y h(x)+f_{y'} h'(x)\right]dx+f\Big(x_1+\varepsilon,\ y_0(x_1+\varepsilon)+$$
$$+\alpha h(x_1+\varepsilon),\ y'_0(x_1+\varepsilon)+\alpha h'(x_1+\varepsilon)\Big).$$

ჩავსვათ ახლა ამ ტოლობაში ε-ს მაგიერ 0 და $\left[\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}$ მაგიერ კი მისი მნიშვნელობა (II)-დან. მივიღებთ:

$$J'(0)=\frac{\widetilde{y'_1}-y'_1}{h(x_1)}\int_{x_0}^{x_1}[f_y h(x)+f_{y'} h'(x)]\,dx+f[x,\ y(x_1),\ y'(x_1)] \qquad (\mathrm{VI})$$

განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1} f_{y'} h'(x_1)\, dx$. ნაწილობით ინტეგრაციის ფორმულის ძალით გვექნება:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{y'} h'(x)\, dx = \Big[f_{y'} h(x) \Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x}^{x_1} h \frac{d}{dx} (f_{y'})\, dx =$$

$$= f_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\, h(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} h \frac{d}{dx} (f_{y'})\, dx.$$

ახლა შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_y h(x) + f_{y'} h'(x)]\, dx =$$

$$= f_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\, h(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \left[f_y - \frac{d}{dx} (f_{y'}) \right] h\, dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალის ქვეშ $h\,dx$-ის გვერდით მდგომი გამოხატულება წარმოადგენს Euler-ის განტოლების მარცხენა მხარეს. ეს განტოლება, როგორც ვიცით, იქნება დაკმაყოფილებული, ამიტომ ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1} \left[f_y - \frac{d}{dx} (f_{y'}) \right] h\, dx$ მოისპობა და გვექნება

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_y h(x) + f_{y'} h'(x)]\, dx = h(x_1)\, f_{y'}(x_1, y_1, y'_1).$$

ახლა (IV) შეგვიძლია შემდეგნაირად გადმოვწეროთ:

$$J'(0) = \frac{\tilde{y}'_1 - y'_1}{h(x_1)} f_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\, h(x_1) + f(x_1, y_1, y'_1)$$

ანუ საბოლოოდ:

$$J'(0) = (\tilde{y}'_1 - y'_1) f_{y'}(x_1, y_1, y'_1) + f(x_1, y_1, y'_1) \quad . \quad . \quad . \quad (V).$$

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა $J'(0) = 0$ ასეთ სახეს მიიღებს:

$$f(x_1, y_1, y'_1) + (\tilde{y}'_1 - y'_1) f_{y'}(x_1, y_1, y'_1) = 0 \quad . \quad . \quad (VI).$$

ეს ის პირობაა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდენ B წერტილის კოორდინატები x_1, y_1. (VI) განტოლება და განტოლებანი

$$\varphi(x_0, \alpha, \beta) = y_0$$

და

$$\varphi(x_1, \alpha, \beta) = \tilde{y}(x_1)$$

საშუალებას მოგვცემენ განვსაზღვროთ B წერტილის აბსცისი x_1 და Euler-ის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალის $\varphi(x, \alpha, \beta)$ მუდმივები α და β.

ამბობენ, რომ $\mathfrak{C}_0$ მრუდი, რომელიც მინიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს, ტ რ ა ნ ს ვ ე რ ს ა ლ უ რ ა დ გადაკვეთს L-მრუდს. თვით ამ მრუდს

ეწოდება ტ რ ა ნ ს ვ ე რ ს ა ლ ი, მხოლოდ მე- (VI) პირობა ტრანსვერსალობის პირობაა.

განვიხილოთ ერთი მაგალითი. მოვძებნოთ უმოკლესი მანძილი რომელიმე $A(x_0, y_0)$ წერტილიდან L მრუდამდე. ამისათვის უნდა განვიხილოთ ინტეგრალის $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ მინიმუმი. რადგან ტრანსვერსალი არის იმავე დროს ექსტრემალი L მრუდის ერთი გარკვეული $B(x_1, y_1)$ წერტილის შესახებ, ამიტომ ცხადია, რომ ასეთი უმოკლესი მანძილი იქნება სწორი ხაზი. იმისათვის რომ განვსაზღვროთ ეს სწორი, შევადგინოთ ჩვენი პრობლემისათვის ტრანსვერსალობის პირობა. გვექნება

$$\sqrt{1+y'^2} + (\tilde{y}'_1 - y'_1)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = O$$

აქედან

$$1 + y'_1 \tilde{y}'_1 = O,$$

რაც გამოხატავს იმას, რომ სწორი AB, რომელიც წარმოადგენს ტრანსვერსალს, უნდა იყოს მართობი L მრუდის მხებთან. ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ AB სწორი.

— V ლექცია

მეორე ვარიაცია

Legendre-ის და Jacobi-ის პირობები.

შემდეგისათვის საჭიროა ვიცოდეთ ინტეგრალის

$$\int_{x_0}^{x_1} y'^2 dx \,. \qquad (1)$$

მინიმუმის მნიშვნელობა. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ აქ შედის მხოლოდ y'. ამიტომ, როგორც წინათ დავინახეთ, ექსტრემალი იქნება წარმოდგენილი სწორი ხაზით: $y = mx + n$. კოეფიციენტებს m და n ს ვიპოვით ორი განტოლებიდან: $y_0 = mx_0 + n$ და $y_1 = mx_1 + n$; გვექნება $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

ახლა ექსტრემალის განტოლებიდან მივიღებთ: $y' = m$. ამიტომ (1)-ი ინტეგრალის მინიმალური მნიშვნელობა იქნება:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(y_1 - y_0)^2}{(x_1 - x_0)^2} dx = \frac{(y_1 - y_0)^2}{(x_1 - x_0)}$$

ვხედავთ, რომ ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1} y'^2\,dx$ ყოველთვის იქნება მეტი, ან უკიდურეს შემთხვევაში ტოლი $\frac{(y_1-y_0)^2}{x_1-x_0}$-სა:

$$\int_{x_0}^{x_1} y'^2\,dx \geqq \frac{(y_1-y_0)^2}{x_1-x_0}\,. \qquad \text{(II)}$$

ეს დებულება აქ მხოლოდ ფორმალურად არის დამტკიცებული. ჩვენ ნამდვილად მხოლოდ ის დავამტკიცეთ, რომ თუ გვაქვს (I) ინტეგრალის მინიმუმი, მაშინ ადგილი აქვს (II) უტოლობას. ამ უტოლობას ჩვენთვის დიდი მნიშვნელობა აქვს, ამიტომ აქ მოვიყვანთ მის ზედმიწევნით დამტკიცებას. ეს დამტკიცება სრულებით დამოუკიდებელია ვარიაციათა აღრიცხვის მეთოდებისაგან. დავამტკიცოთ, რომ როგორი მრუდიც არ უნდა აერთებდეს (a, A) და (b, B) წერტილებს, ინტეგრალი $\int_a^b y'^2\,dx$ ყოველთვის იქნება მეტი ან უკიდურეს შემთხვევაში ტოლი $\frac{(B-A)^2}{b-a}$-სი. ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$\int_a^b (\alpha y'+\beta)^2\,dx,$$

სადაც α და β არიან ნებსითი მუდმივი კოეფიციენტები. ეს ინტეგრალი იქნება დადებითი, რადგან $(\alpha y'+\beta)^2$ დადებითია. ჩვენი ინტეგრალი შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\int_a^b (\alpha y'+\beta)^2\,dx = \alpha^2 \int_a^b y'^2\,dx + 2\,\alpha\,\beta \int_a^b y'\,dx + \beta^2 \int_a^b dx.$$

უკანასკნელი ჯამი უნდა იყოს $\geqq 0$. ეს ჯამი წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას α და β შესახებ. კვადრატული ფორმის ნიშნის შესახებ არსებული ცნობილი დებულების ძალით (კვადრატიული ფორმა მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება დადებითი როცა მისი დისკრიმინატი არის უარყოფითი), უნდა გვქონდეს:

$$\int_a^b dx \int_a^b y'^2\,dx \geqq \left(\int_a^b y'\,dx\right)^2$$

ანუ

$$(b-a)\int_a^b y'^2\,dx \geqq (B-A)^2$$

აქედან

$$\int_a^b y'^2\,dx \geqq \frac{(B-A)^2}{b-a} \qquad \text{(III)}$$

ამით დებულებაც დამტკიცებულია.

გადავიდეთ ახლა ინტეგრალის მეორე ვარიაციის განხილვაზე. გვაქვს ინტეგრალი:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx.$$

ვთქვათ ექსტრემალის განტოლება არის: $y=y_0(x)$. რომელიმე სხვა მრუდის განტოლება, რომელიც A და B წერტილებზე გადის, ასეთნაირი სახით წარმოვადგინოთ: $y=y_0(x)+\varepsilon h(x)$. ფუნქცია $h(x)$ აკმაყოფილებს პირობას:

$$h(x_0)=h(x_1)=0.$$

როგორც ვიცით, ინტეგრალის მეორე ვარიაცია $\delta^2 J$ შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\delta^2 J=\varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1}\left(f_{yy}\,h^2+2f_{yy'}\,hh'+f_{y'y'}\,h'^2\right)dx.$$

აქ f_{yy}, $f_{yy'}$ და $f_{y'y'}$ მოკლედ აღნიშნავენ

$$f_{yy}[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)],$$
$$f_{yy'}[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)]$$

და

$$f_{y'y'}[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)].$$

აღვნიშნოთ ეს სამი ფუნქცია შესაბამისად: $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$.

ექსტრემუმისათვის აუცილებელია, რომ $\delta^2 J \geqslant 0$. მაშასადამე, უნდა გვქონდეს:

$$\int_{x_0}^{x_1}[A(x)\,h^2+2B(x)\,hh'+C(x)\,h'^2]\,dx \geqslant 0.$$

ახლა ზემონათქვამიდან სრულიად დამოუკიდებლად დავსვათ შემდეგი საკითხი: ვთქვათ გვაქვს სამი ფუნქცია: $A(x)$, $B(x)$ და $C(x)$, რომელთაც აქვთ პირველი რიგის განუწყვეტელნი წარმოებულნი (x_0, x_1) შუალედში* და აგრეთვე ნებსითი განუწყვეტლად წარმოებადი ფუნქცია $y(x)$, რომელსაც (x_0, x_1) შუალედში აქვს შემდეგი თვისება

$$y(x_0)=y(x_1)=0.$$

დავსვათ შემდეგი პრობლემა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდენ სამი ფუნქცია: $A(x)$, $B(x)$ და $C(x)$ რომ, როგორიც არ უნდა იყოს y ფუნქცია, მუდამ ჰქონდეს ადგილი უტოლობას:

$$\int_{x_0}^{x_1}[A(x)\,y^2+2B(x)\,yy'+C(x)\,y'^2]\,dx \geqslant 0\ . \qquad \ldots (\mathrm{IV})$$

---

* იმისათვის, რომ ეს პირობები უზრუნველვყოთ $f_{yy}[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)]$, $f_{yy'}[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)]$ და $f_{y'y'}[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)]$ ფუნქციებისათვის, საჭიროა გარდა წინათ მოთხოვნილი პირობებისა f ფუნქციის შესახებ მოვითხოვოთ, რომ $y_0(x)$ ჰქონდეს მეორე რიგის განუწყვეტელი წარმოებული.

ავიღოთ ინტეგრალი

$$-\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(By^2)\,dx \quad . \quad .. \qquad . \text{(V)}$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია. მართლაც,

$$-\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left[By^2\right]dx = -\left[By^2\right]_{x_0}^{x_1}, \text{ ხოლო } \left[By^2\right]_{x_0}^{x_1}$$

ნულის ტოლია, რადგან $y(x_0)=y(x_1)=0$.

თუ (IV) ინტეგრალი მივუმატეთ (V) ინტეგრალს, ამით ის არ შეიცვლება. ინტეგრალი (V) ასე გადმოიწერება:

$$-\int_{x_0}^{x_1} (2Byy'+B'y^2)\,dx.$$

ჩვენი ორი ინტეგრალის ჯამს ექნება შემდეგი სახე:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{\left[A(x)-\frac{d}{dx}\Big(B(x)\Big)\right]y^2+C(x)\,y'^2\right\}dx.$$

ინტეგრალის უკანასკნელ სახეს ის უპირატესობა აქვს (IV)-თან, რომ აქ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ არ შედის წევრი yy' მამრავლით.

(IV) უტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{\left[A(x)-\frac{d}{dx}\Big(B(x)\Big)\right]y^2+C(x)\,y'^2\right\}dx \geqslant 0 \quad . \qquad . \text{(VI)}$$

აღვნიშნოთ $A(x)-\frac{d}{dx}B(x)=f_0(x)$ და $C(x)=f_1(x)$.

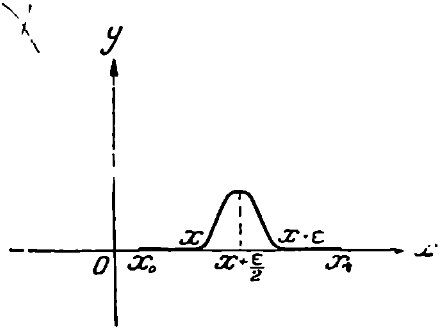
(VI) უტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_0(x)\,y^2+f_1(x)\,y'^2]\,dx \geqslant 0 \quad . \qquad . \text{(VII)}$$

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება: აუცილებელი პირობა იმისა, რომ (VII) უტოლობას ადგილი ჰქონდეს, იმაში მდგომარეობს, რომ $f_1(x)$ მუდამ დადებითი იყოს (x_0, x_1) შუალედში. უნდა დავამტკიცოთ, რომ თუ ეს პირობა შესრულებული არ არის, მაშინ მე-(VII) უტოლობას ადგილი არ ექნება.

წარმოვიდგინოთ, რომ შუალედში (x_0, x_1) არის ისეთი x წერტილი, რომ $f_1(x) < 0$. თანახმად განუწყვეტელი ფუნქციათა თვისებისა ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი მცირე შუალედი $(x, x+\varepsilon_0)$, რომ მთელ ამ შუალედში $f_1(x)$ დარჩეს უარყოფითი. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ შეგვიძლია ისეთი $y(x)$ ფუნქცია მოვძებნოთ, რომლისათვისაც ინტეგრალი: $\int_{x_0}^{x_1}[f_0y^2+f_1\,y'^2]\,dx$ უარყოფითი იქნება.

ავიღოთ რაიმე დადებითი ε რიცხვი ნაკლები ε_0-ზე და $\varphi(z)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს: (x_0, x) შუალედში $\varphi(z)$ ნულის ტოლია, ამის შემდეგ იგი იზრდება და წერტილზე $x+\frac{\varepsilon}{2}$ მიაღწევს მაქსიმუმს, რომელიც ε-ს ტოლია, შემდეგ კლებულობს და წერტილზე $x+\varepsilon$ ნულის ტოლი ხდება და ასეთივე რჩება მთელ $(x+\varepsilon, x_1)$ შუალედში. ამის გარდა ვთქვათ, რომ ჩვენი მრუდი ისეა აწერილი, რომ ყველგან მხების კუთხე X ღერძთან განუწყვეტლივ იცვლება. $\varphi(z)$ ფუნქცია ისპობა როგორც x_0 ისე x_1 წერტილზე.



ნახ. 5.

დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(z)$ ფუნქციისთვის ჩვენი ინტეგრალი უარყოფითი იქნება. ამგვარად განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_0\varphi^2 + f_1\varphi'^2]\,dx.$$

ეს ინტეგრალი ტოლია ინტეგრალის

$$\int_{x}^{x+\varepsilon} [f_0\varphi^2 + f_1\varphi'^2]\,dx. \qquad \text{(VIII)}$$

რადგან შუალედში (x_0, x) და $(x+\varepsilon, x_1)$ $\varphi(z)$ ნულის ტოლია.

განვიხილოთ ჯერ ინტეგრალი $\int_x^{x+\varepsilon} f_0\varphi^2\,dx$. აღვნიშნოთ M-ით $f_0(x)$ ფუნქციის მოდულის მაქსიმუმი მთელ $(x, x+\varepsilon)$ შუალედში: $|f_0(x)| \leqslant M$. რადგან φ ფუნქციის მაქსიმუმი მთელ $(x, x+\varepsilon)$ შუალედში არის ε, ამიტომ $|f_0(x)\varphi^2| \leqslant M\varepsilon^2$. ამისდამიხედვით მივიღებთ:

$$\int_x^{x+\varepsilon} f_0\varphi^2\,dx \leqslant \int_{x_0}^{x+\varepsilon} |f_0\varphi^2|\,dx\,dx \leqslant M\varepsilon^2 \int_x^{x+\varepsilon} dx = M\varepsilon^3$$

ამგვარად

$$\left|\int_x^{x+\varepsilon} f_0\varphi^2\,dx\right| \leqslant M\varepsilon^3.$$

განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი $\int_x^{x+\varepsilon} f_1(x)\varphi'^2\,dx$. აღვნიშნოთ m_1-ით $f_1(x)$ მოდულის მინიმუმი მთელ $(x, x+\varepsilon)$ შუალედში: $f_1(x) \geqslant m_1$. $m_1 > 0$, რადგან m_1 რომ ნულის ტოლი იყოს, $|f_1(x)|$ როგორც განუწყვეტელი ფუნქცია მიაღწევდა მინიმალურ მნიშვნე-

ლობას ნულს, რაც იმას ეწინააღმდეგება, რომ $f_1(x)$ მთელ $(x, x+\varepsilon)$ შუალედში უარყოფითია. საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის ძალით დავწერთ:

$$\int_x^{x+\varepsilon} f_1(x)\, \varphi'^2\, dx = f_1(x+\theta\varepsilon) \int_x^{x+\varepsilon} \varphi'^2\, dx.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\left|\int_x^{x+\varepsilon} f_1(x)\, \varphi'^2\, dx\right| \geqslant m_1 \int_x^{x+\varepsilon} \varphi'^2\, dx.$$

ახლა $\int_x^{x+\varepsilon} \varphi'^2\, dx$ ასე წარმოვადგინოთ:

$$\int_x^{x+\varepsilon} \varphi'^2\, dx = \int_x^{x+\frac{\varepsilon}{2}} \varphi'^2\, dx + \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\varepsilon} \varphi'^2\, dx.$$

(XI) უტოლობის ძალით გვექნება:

$$\int_x^{x+\frac{\varepsilon}{2}} \varphi'^2\, dx \geqslant \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon} = 2\varepsilon$$

$$\int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\varepsilon} \varphi'^2\, dx \geqslant \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon} = 2\varepsilon.$$

ამგვარად, $\int_x^{x+\varepsilon} \varphi'^2\, dx \geqslant 4\varepsilon.$

და
$$\left|\int_x^{x+\varepsilon} f_1(x)\, \varphi'^2\, dx\right| \geqslant m_1\, 4\varepsilon.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მე (VIII) ჯამის პირველი წევრის მოდული $\leqslant M\varepsilon^3$, ხოლო მეორე წევრის მოდული $\geqslant m_1 4\varepsilon$ (სადაც $m_1 > 0$). რიცხვები M და m_1 დამოკიდებულნი არიან ε-ზე. ამის აღსანიშნავად დავწეროთ $M(\varepsilon)$ და $m_1(\varepsilon)$. მე-(VIII) ჯამის პირველი წევრის მოდული $\leqslant M(\varepsilon)\,\varepsilon^3$ და მით უმეტეს $M(\varepsilon_0)\,\varepsilon^3$-ზე. მეორე წევრის მოდული კი მეტი იქნება $m_1(\varepsilon)\,\varepsilon$-ზე და მით უფრო $m_1(\varepsilon_0)\,\varepsilon$-ზე. ახლა ε იმდენად მცირედ შეგვიძლია ავიღოთ, რომ $m_1(\varepsilon_0)\varepsilon > M(\varepsilon_0)\,\varepsilon^3$. (ჩვენ გვახსოვს, რომ $m_1 > 0$). მაშინ (VIII) ჯამს ნიშანს აძლევს მეორე შესაკრები $\int f_1 \varphi'^2\, dx$. მაგრამ ის უარყოფითია (f_1, ჩვენი დაშვების თანახმად, უარყოფითია, φ'^2 დადებითი. მაშასადამე, უარყოფითი იქნება $f_1\, \varphi'^2$ და ინტეგრალიც $\int_x^{x+\varepsilon} f_1\, \varphi'^2\, dx$). ამიტომ ინტეგრალიც $\int_{x_0}^{x_1} (f_0\, \varphi^2 + f_1\, \varphi'^2)\, dx$ უარყოფითი იქნება. ამით ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

ამგვარად აუცილებელი პირობა იმისათვის, რომ $\int_{x_0}^{x_1}(f_0 y^2+f_1 y'^2)\,dx$ ინტეგრალი იყოს დადებითი, იმაში მდგომარეობს, რომ მთელ (x_0, x_1) შუალედში f_1 ფუნქცია დადებითი იყოს. ეს პირობა აღმოჩენილია Legendre-ის მიერ და მის სახელს ატარებს.

ზემოთმიღებული შედეგების თანახმად გვაქვს მინიმუმის შემდეგი აუცილებელი პირობა: Euler'-ის დიფერენციალური განტოლება და Legendre'-ის უტოლობა, რომელსაც ვრცლად ასეთი სახე ექნება.

$$f''_{y'y'}[x,\ y_0(x),\ y'_0(x)] \geqslant 0.$$

ახლა გადავდივართ მინიმუმის Jacobi'-ის პირობაზე. განვიხილოთ შემდეგი იგივეობა:

$$f_0 y^2+f_1 y'^2=f_1\left[y'-\frac{y}{Y}Y'\right]^2+\frac{d}{dx}\left[f_1\frac{y^2}{Y}\frac{dY}{dx}\right]-$$

$$-\frac{y^2}{Y}\left[\frac{d}{dx}\left(f_1\frac{dY}{dx}\right)-f_0 Y\right]. \qquad (\mathrm{X})$$

ავიღოთ ამ იგივეობის ორივე მხარის ინტეგრალი. დავწერთ:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(f_0 y^2+f_1 y'^2\right)dx=\int_{x_0}^{x_1} f_1\left(y'-\frac{y}{Y}Y'\right)^2 dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(f_1\frac{y^2}{Y}\frac{dY}{dx}\right)dx-\int_{x_0}^{x_1}\frac{y^2}{Y}\left[\frac{d}{dx}\left(f_1\frac{dY}{dx}\right)-f_0 Y\right]dx \qquad . (\mathrm{X})$$

ვთქვათ ახლა, რომ არსებობს ისეთი ფუნქცია Y, რომელიც აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას $\frac{d}{dx}\left(f_1\frac{dY}{dx}\right)-f_0 Y=0$ და მთელ (x_0, x_1) შუალედში ნულისაგან განსხვავდება. მაშინ (X)-ს უკანასკნელი ინტეგრალი ნულის ტოლია. მეორე ინტეგრალი კი საერთოდ ნულის ტოლია, რადგან ჩასმა $\left[f_1\frac{y^2}{Y}\frac{dY}{dx}\right]_{x_0}^{x_1}$, რომელზედაც ეს ინტეგრალი დაიყვანება, გვაძლევს ნულს, პირობების $y(x_0)=0$ და $y(x_1)=0$ მიხედვით. მაშასადამე, დაგვრჩება:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(f_0 y^2+f_1 y'^2\right)dx=\int_{x_0}^{x_1} f_1\left(y'-\frac{y}{Y}Y'\right)^2 dx.$$

$\left(y'-\frac{y}{Y}Y'\right)^2$ არის დადებითი. თუ მოვითხოვთ დამატებით, რომ f_1 ფუნქცია მთელ (x_0, x_1) შუალედში დადებითი უნდა იყოს, მაშინ

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1\left(y'-\frac{y}{Y}Y'\right)^2 dx$$

და მასთან ერთად

$$\int_{x_0}^{x_1}[f_0 y^2+f_1 y'^2]\,dx$$

ინტეგრალიც დადებითი იქნება. ამგვარად დამტკიცებულია, რომ თუ არსებობს ისეთი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლების:

$$\frac{d}{dx}\left(f_1 \frac{dY}{dx}\right) - f_0 Y = 0 \ . \qquad . \text{(X)}$$

რომელიც მუდმივ ნიშანს შეინარჩუნებს მთელ (x_0, x_1) შუალედში (ეს საჭიროა რადგან მე-(IX) ტოლობაში Y მნიშვნელში გვაქვს) და ამისგარდა ფუნქცია f_1 დადებითია, მაშინ ინტეგრალი

$$\int_{x_0}^{x_1} [f_0 y^2 + f_1 y'^2]\, dx$$

ყოველ y ფუნქციისათვის იქნება დადებითი. ჩვენ ვიპოვეთ საკმარისი პირობა იმისა, რომ

$$\int_{x_0}^{x_1} (f_0 y^2 + f_1 y'^2)\, dx$$

იყოს დადებითი.

ახლა გადავიდეთ (X) განტოლების დაწვრილებით შესწავლაზე ამ განტოლებას Jacobi'-ის განტოლებას უწოდებენ. ეს განტოლება შემდეგნაირად დაიწერება:

$$f_1 \frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{dY}{dx} f_1' - f_0 Y = 0,$$

ანუ, თუ ორივე მხარეს გავყოფთ f_1-ზე (რაც შესაძლებელია, რადგან $f_1 > 0$ *)

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{f_1'}{f_1} \frac{dY}{dx} - \frac{f_0}{f_1} Y = 0 \ . \qquad . \ . \ . \text{(XI)}$$

ჩვენ ვხედავთ რომ Jacobi-ის დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის ხაზოვნურ დიფერენციალურ განტოლებას.

გამოვარკვიოთ როდის არსებობს Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლების ისეთი ინტეგრალი, რომელიც ერთსადაიმავე ნიშანს შეინარჩუნებს მთელ (x_0, x_1) შუალედში. ამისათვის საჭიროა გამოვიყვანოთ რამდენიმე თვისება Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლებისა.

განვიხილოთ ჯერ უფრო ზოგადი სახის დიფერენციალური განტოლება.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p\frac{du}{dx} + qu = 0 \ . \qquad . \text{(XI')}$$

სადაც p და q x-ის განუწყვეტელი ფუნქციებია. ცნობილი დებულების ძალით, (XI) განტოლებას უნდა ჰქონდეს ერთი და მხოლოდ ერთი ისეთი ინტეგრალი $u(x)$, რომ რაიმე x_0 წერტილზე ეს ინტეგრალი

---

* პირობას $f_1 \geqslant 0$ ცოტა ვაძლიერებთ იმ მხრივ, რომ ტოლობის შესაძლებლობას გამოვრიცხავთ და ვტოვებთ მხოლოდ უტოლობას.

და მისი წარმოებული, წინასწარ დასახელებულ მნიშვნელობებს მიიღებენ u_0 და u'_0: $u(x_0) = u_0$, $u'(x_0) = u'_0$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $u(x)$ ინტეგრალი და მისი წარმოებული რომელიმე წერტილზე მოისპობა, მაშინ ეს ინტეგრალი ყოველთვის ნულის ტოლი უნდა იყოს, რადგან დასახელებული თვისება აქვს ინტეგრალს, რომელიც ყოველთვის ნულის ტოლია და, მაშასადამე, სხვა ინტეგრალს ასეთი თვისება ვერ ექნება.

ახლა დავამტკიცოთ XI განტოლების ინტეგრალის ერთი მეტად შესანიშნავი თვისება. ეს თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ თუ ეს ინტეგრალი იგივეობურად ნულის ტოლი არაა, მას რაიმე შუალედში მხოლოდ სასრული რიცხვი ფესვებისა შეუძლია ჰქონდეს. მართლაც, $u(x)$ ინტეგრალს აღებულ შუალედში უსასრულო სიმრავლე ფესვების რომ ჰქონდეს, მაშინ ამ ფესვებს ექნებათ ზღვარითი წერტილი, რომელიც λ-თი აღვნიშნოთ. მაშინ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება 1) $u(\lambda) \neq 0$. 2) $u(\lambda) = 0$.

1. შემთხვევაში, განუწყვეტელი ფუნქციის ცნობილი თვისების ძალით, $u(x)$ ფუნქცია უნდა იყოს ნულისაგან განსხვავებული λ წერტილის მახლობლობაში, რაც იმას ეწინააღმდეგება, რომ λ არის $u(x)$-ის ფესვების ზღვარითი წერტილი.

2. შემთხვევაში უნდა გვქონდეს $u'(\lambda) = 0$, რადგან, როგორც ზემოთ დავინახეთ, შეუძლებელია, რომ ინტეგრალისათვის, რომელიც ყოველთვის ნულის ტოლი არაა, რომელიმე წერტილზე ჰქონდეს ადგილი ერთდროულად $u(x) = 0$ და $u'(x) = 0$. რადგან $u'(\lambda) = 0$, ამიტომ λ წერტილზე $u(x)$-ის დიფერენციალი ნულისაგან განსხვავდება, და, თუ არგუმენტის ნაზრდი საკმაოდ მცირეა, ნულისაგან განსხვავებული იქნება $u(x)$ ფუნქციის ნაზრდიც $u(\lambda + h) - u(\lambda)$, რაც $u(\lambda + h)$-ის ტოლია. ეს კვლავ ეწინააღმდეგება იმ გარემოებას, რომ λ არის $u(x)$-ის ფესვების ზღვარითი წერტილი. ამგვარად, ჩვენი დაშვება შესახებ იმისა, რომ $u(x)$-ის ფესვთა სიმრავლე უსასრულოა, ყალბი აღმოჩნდა და ამით დებულება დამტკიცებულია.

ახლა კიდევ ერთი დებულება დავამტკიცოთ $\frac{d^2u}{dx^2} + p\frac{du}{dx} + q = 0$ განტოლების შესახებ.

ვთქვათ, რომ u_1 და u_2 არიან ამ განტოლების ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ინტეგრალები.

დავწერთ:

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + p\frac{du_1}{dx} + qu_1 = 0$$

$$\frac{d^2u_2}{dx^2} + p\frac{du_2}{dx} + qu_2 = 0.$$

გავამრავლოთ პირველი ტოლობა u_2-ზე და მეორე კი u_1-ზე, და შემდეგ პირველს მეორე გამოვაკლოთ.

მივიღებთ:

$$\left(u_2\frac{d^2u_1}{dx^2}-u_1\frac{d^2u_2}{dx^2}\right)+p\left(u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}\right)=0$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ ის; რაც პირველ ბრჩხილებშია, წარმოადგენს მეორე ბრჩხილებში მოთავსებული გამოთქმის წარმოებულს. ამიტომ

$$d\left(u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}\right)+p\left(u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}\right)=0.$$

მაშასადამე გვექნება:

$$\frac{d\left(u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}\right)}{\left(u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}\right)}=-p$$

ხახოვნური დამოკიდებულება u_1 და u_2 ინტეგრალებისა უზრუნველყოფს იმას, რომ მნიშვნელი $u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}$ ნულისაგან განსხვავდება.

ინტეგრაციის მოხდენის შემდეგ მივიღებთ:

$$\lg\left(u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}\right)=-\int p\,dx+\lg C$$

აქედან:

$$u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}=Ce^{-\int p\,dx} \qquad . \text{(XII)}$$

დავუბრუნდეთ ახლა ისევ Jacobi-ს დიფერენციალურ განტოლებას. ამ შემთხვევაში p არის $\frac{f_1'}{f_1}$. დავწერთ:

$$\int p\,dx=\int\frac{f_1'}{f_1}\,dx=\lg f_1$$

(XII) ფორმულა მოგვცემს:

$$u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}=\frac{c}{f_1},$$

ანუ,

$$f_1(x)\left[u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}\right]=c$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ თუ $f_1(x)$ ფუნქციას გავამრავლებთ

$$\left(u_2\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_2}{dx}\right)\text{-ზე,}$$

სადაც u_1 და u_2 არის ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ინტეგრალები Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლებისა, მივიღებთ მუდმივს. აქ c ნულისაგან განსხვავებული უნდა იყოს. c რომ ნულის ტოლი იყოს, მაშინ $u_2 \frac{du_1}{dx} - u_1 \frac{du_2}{dx}$ იქნებოდა ნულის ტოლი და u_1 და u_2 არ იქნებოდენ ხაზოვნურად დამოუკიდებელი.

(XII) ფორმულა Abel'-ს ეკუთვნის.

ლექცია VI

შეუღლებული წერტილი. მინიმუმის მესამე აუცილებელი პირობა.

წინა ლექციაზე ჩვენ გავეცანით Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლების:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{f_1'}{f_1} \frac{dy}{dx} - \frac{f_0}{f_1} y = 0 \quad . \qquad (1)$$

ზოგიერთ თვისებას.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი. თუ გვაქვს (1) განტოლების ორი ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ინტეგრალი $u_1(x)$ და $u_2(x)$, ყოველთვის შეგვიძლია ამ განტოლების ისეთი ინტეგრალი შევადგინოთ, რომელიც იგივეობურად ნულის ტოლი არაა, მაგრამ მოისპობა ჩვენ მიერ წინასწარ დანიშნულ ξ წერტილზე. მართლაც, ყველა ამ პირობებს დააკმაყოფილებს ასეთი ინტეგრალი

$$u_1(x)\, u_2(\xi) - u_1(\xi)\, u_2(x).$$

აღვნიშნოთ ეს ინტეგრალი $\Omega(x, \xi)$. განვიხილოთ გარკვეულ (a, b) შუალედში მოთავსებული ξ-ს მარჯვნივ მყოფი $\Omega(x, \xi)$ ინტეგრალის სხვა ფესვები.

თანახმად წინა ლექციაზე დამტკიცებული დებულებისა, ამ ფესვთა რიცხვი შეიძლება მხოლოდ სასრული იყოს. ამიტომ მათ შორის არსებობს ისეთი, რომელიც ξ-თან არის უახლოესი (თუ, რასაკვირველია, ასეთი ფესვები საზოგადოდ არსებობს (a, b) შუალედში). ამ უახლოეს ფესვს ვუწოდოთ ξ-ს შეუღლებული ფესვი და ასე აღვნიშნოთ: ξ^*.

სიდიდე ξ^* წარმოადგენს ξ-ს ფუნქციას. დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქცია არის ზრდადი. ამისათვის მოვძებნოთ ამ ფუნქციის წარმოებული და დავამტკიცოთ, რომ ის დადებითია.

რადგან $\Omega(x, \xi)$ ფუნქცია ξ^* წერტილზე მოისპობა, ამიტომ გვექნება: $u_1(\xi^*)\, u_2(\xi) - u_1(\xi) u_2(\xi^*) = 0 \ldots (2)$. უკანასკნელი ტოლობა

იძლევა არაცხადი სახით მოცემულ დამოკიდებულებას ξ და ξ^* შორის. განვაწარმოოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე ξ-ს შესახებ. მივიღებთ:

$$u'_1(\xi^*)\,u_2(\xi)\,\frac{d\xi^*}{d\xi}+u_1(\xi^*)\,u'_2(\xi)-u'_1(\xi)\,u_2(\xi^*)-$$
$$-u_1(\xi)\,u'_2(\xi^*)\,\frac{d\xi^*}{d\xi}=0$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს $u_1(\xi^*)\,u_1(\xi)$-ზე გავამრავლებთ და (2) ტოლობით ვისარგებლებთ, მივიღებთ:

$$u_1^2(\xi)\,[u'_1(\xi^*)\,u_2(\xi^*)-u_1(\xi^*)\,u'_2(\xi^*)]\,\frac{d\xi^*}{d\xi}=$$
$$=u_1^2(\xi^*)\,[u'_1(\xi)\,u_2(\xi)-u_1(\xi)\,u'_2(\xi)].$$

აქედან, Abel'-ის ფორმულის ძალით, გვექნება:

$$u_1^2(\xi)\,\frac{c}{f_1(\xi^*)}\,\frac{d\xi^*}{d\xi}=u_1^2(\xi^*)\,\frac{c}{f_1(\xi)},$$

ანუ,

$$\frac{d\xi^*}{d\xi}=\frac{f_1(\xi^*)}{f_1(\xi)}\left[\frac{u_1(\xi)^*}{u_1(\xi)}\right]^2.$$

რადგან ჩვენი პირობის ძალით $f_1>0$, ამიტომ $\frac{d\xi^*}{d\xi}$ დადებითი იქნება და, მაშასადამე, ξ^* იქნება ξ-ის ზრდადი ფუნქცია.

როგორც შედეგი ზემოთ დამტკიცებული დებულებიდან, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ Sturm-ის დებულება.

ეს დებულება შემდეგში მდგომარეობს:

Jacobi-ის განტოლების რომელიმე ინტეგრალის ორ ფესვს შორის ერთი და მხოლოდ ერთი ფესვი იმყოფება იმავე განტოლების ყოველი სხვა ინტეგრალისა, რომელიც პირველისაგან ხაზოვნურად დამოუკიდებელია.

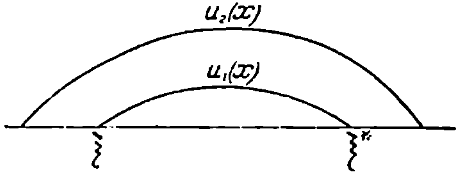
აღვნიშნოთ ξ-თ Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალის $u_1(x)$ ერთი ფესვი და ξ^*-თ მისი შეუღლებული ფესვი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $(\xi,\ \xi^*)$ ინტერვალში ყოველი u_1-გან ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ინტეგრალი Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლებისა ერთხელ მაინც მოისპობა.

წარმოვიდგინოთ წინააღმდეგი: ვთქვათ არსებობს ისეთი ინტეგრალი $u(x)$, რომელიც ამ შუალედში არ მოისპობა.

$u(x)$-ის ფესვები განსხვავდება $u_1(x)$-ის ფესვებიდან, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, როგორც Abel-ის ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ, u და u_1 ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ვერ იქნება.

ის სურათი, რომელსაც მაშინ X ღერძზე მივიღებთ, ეწინააღმდეგება ზემოთდამტკიცებულ დებულებას შესახებ იმისა, რომ ξ^* იზრ-

დება ξ-ის ზრდასთან ერთად. ასეთივე წინააღმდეგობას მივიღებთ ამ დებულებასთან, თუ დავუშვებთ, რომ შუალედში (ξ, ξ*) რაიმე ინტეგრალს ექნება ერთზე მეტი ფესვი.



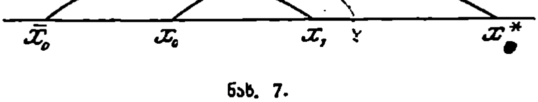
ნახ. 6

ავიღოთ ახლა ინტეგრალის $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx$ ქვედა საზღვარი x_0 და შევადგინოთ Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლების ისეთი ინტეგრალი $\Omega(x, x_0)$, რომელიც მოისპობა x_0 წერტილზე. x_0 ფესვის შეუღლებული ფესვი აღვნიშნოთ x_0^*. (თუ, რასაკვირველია, ასეთი შეუღლებული ფესვი საზოგადოდ არსებობს (a, b) შუალედში).

ახლა სამი შემთხვევა წარმოგვიდგება: I $x_1 < x_0^*$. II x_0-ის შეუღლებული ფესვი (a, b) შუალედში არ არსებობს. III $x_0^* \leqslant x_1$.

დავამტკიცოთ, რომ პირველ შემთხვევაში არსებობს Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლების ისეთი ინტეგრალი, რომელიც (x_0, x_1) შუალედში მუდამ დადებითია, რაც, როგორც წინა ლექციაზე დავინახეთ, არის იმის პირობა, რომ ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1}(f_0 y^2 + f_1 y'^2)\,dx$ დადებითი იყოს. ვთქვათ, ამგვარად, რომ $x_1 < x_0^*$.

ავიღოთ ინტეგრალი $\Omega(x, \overline{x_0})$, სადაც $\overline{x_0}$ ისე არის ამორჩეული, რომ მისი შეუღლებული წერტილი იყოს x_1.



ნახ. 7.

თუ Ω ინტეგრალს ავიღებთ ისეთნაირად, რომ მისი ფესვი მოთავსდეს $\overline{x_0}$, x_0 შორის ამ ფესვის შეუღლებული ფესვი მოთავსდება x_1 და x_0^* შორის. ამ Ω ინტეგრალს მთელ (x_0, x_1) შუალედში ერთიდაიგივე ნიშანი ექნება. იგი სწორედ წარმოადგენს საძიებელ y ფუნქციას და ამგვარად, ასეთი ფუნქციის არსებობა დამტკიცებულია იმ შემთხვევაში როცა $x_1 < x_0^*$.

ასევე დამტკიცდება, რომ II შემთხვევაშიც არსებობს Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლების ისეთი ინტეგრალი, რომელიც ყოველთვის განსხვავდება ნულისაგან. ჩვენ ვხედავთ, რომ I და II შემთხვევაში დაცულია საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $\int_{x_0}^{x_1}(f_0 y^2 + +f_1 y'^2)\,dx$ ინტეგრალი დადებითი იყოს. ამგვარად, როცა x_0 ის შეუღლებული წერტილი (a, b) შუალედში (რომელიც ცხადია უნდა შეიცავდეს (x_0, x_1) შუალედს) არ არსებობს, ან ეს შეუღლებული წერტილი x_1-ზე მეტია, მაშინ (თუ, რასაკვირველია, დამატებით დაცულია პირობა $f_1 > 0$) ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1}(f_0 y^2 + f_1 y'^2)\,dx$ დადებითი იქნება.

განვიხილოთ ახლა III შემთხვევა $x_0^* \leqslant x_1$. Sturm-ის დებულების ძალით არ შეიძლება არსებობდეს ისეთი სხვა ინტეგრალი, რომელიც არ მოისპობა (x_0, x_0^*) შუალედში და მით უმეტეს (x_0, x_1) შუალედში.

ამგვარად, არ არსებობს ისეთი Y ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს Jacobi-ს დიფერენციალურ განტოლებას და იმავე დროს არ მოისპობა (x_0, x_1) შუალედში.

ჩვენ ვხედავთ, რომ $x_0^* \leqslant x_1$ უტოლობის პირობებში არ არის დაცული ის პირობა, რომელიც წარმოადგენს საკმარის პირობას იმისათვის, რომ ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1}(f_0 y^2 + f_1 y'^2)\,dx$ დადებითი იყოს. მაგრამ ამით ჯერ კიდევ დამტკიცებული არაა, რომ $\int_{x_0}^{x_1}(f_0 y^2 + f_1 y'^2)\,dx$ ინტეგრალი დადებითი ვერ იქნება, რადგან საკმარისი პირობის უარყოფა კიდევ თეზისის უარყოფას არ ნიშნავს.

ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ნამდვილად ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1}[f_0 y^2 + f_1 y'^2]\,dx$ არ შეიძლება იყოს დადებითი, როცა $x_0^* \leqslant x_1$ ე. ი. პირობა, რომ შეუღლებული წერტილი არ არსებობს, ან, თუ არსებობს, x_1-ზე მეტია, არის არა მარტო საკმარისი, არამედ აგრეთვე აუცილებელი პირობაც იმისა, რომ ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1}[f_0 y^2 + +f_1 y'^2]\,dx$ დადებითი იყოს.

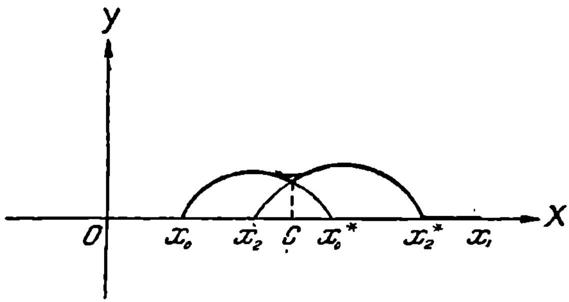
ჩვენ ამ დებულებას დავამტკიცებთ Erdmann-ის წესით. ვთქვათ, რომ $x_0^* \leqslant x_1$. დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში ინტეგრალი ვერ იქნება მუდამ დადებითი.

განვიხილოთ რომელიმე x_2 წერტილი, მოთავსებული x_0 და x_0^* შორის ისეთნაირად, რომ მისი შეუღლებული x_2^* წერტილი x_1-ს არ გასცილდეს.

ფუნქციები $\Omega(x, x_0)$ და $\Omega(x, x_2)$ იქნებიან ერთმანეთისაგან ხაზოვნურად დამოუკიდებელი. მაშ. აგრეთვე, იქნებიან ერთმანეთისაგან ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ფუნქციები: $\Omega(x, x_0)$ და $\Omega(x, x_2) - \Omega(x, x_0)$, ამიტომ, Sturm'-ის თეორემის ძალით, (x_0, x_0^*) შუალედში არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი, რომელზედაც $\Omega(x, x_2) - \Omega(x, x_0)$ მოისპობა. აღვნიშნოთ ეს წერტილი c.

c იქნება $\Omega(x, x_2)$ და $\Omega(x, x_0)$ მრუდების გადაკვეთის წერტილის აბსცისი.

შემოვიყვანოთ ახლა ახალი y ფუნქცია, რომელიც შემდეგნაირად განვსაზღვროთ.



ნახ. 8.

$$y = \begin{cases} \Omega(x, x_0), & \text{როცა } x \text{ იმყოფება შუალედში } x_0 \leqslant x \leqslant c \\ \Omega(x, x_2), & \text{„} \quad x \quad \text{„} \quad \text{„} \quad c \leqslant x \leqslant x_2^* \\ 0 & \text{„} \quad x \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x^*_2 \leqslant x \leqslant x_1 \end{cases}$$

ცხადია, რომ y ფუნქცია აკმაყოფილებს Jacobi-ს დიფერენციალურ განტოლებას.

დავწერთ:

$$\frac{d}{dx}\left(f_1 \frac{dy}{dx}\right) = f_0 y;$$

აქედან

$$y \frac{d}{dx}\left(f_1 \frac{dy}{dx}\right) = f_0 y^2.$$

ამისდამიხედვით ინტეგრალი $J = \int_{x_0}^{x_1} [f_0 y^2 + f_1 y'^2]\, dx$ ასე შეგვიძლია გადმოვწეროთ:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \left(y \frac{d}{dx}\left(f_1 \frac{dy}{dx}\right) + f_1 y'^2 \right) dx$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მდგომი გამოხატულება ფორმალურად წარმოადგენს $f_1 y y'$ ფუნქციის დიფერენციალს, მაგრამ, რად-

გან ფუნქცია განიცდის წყვეტას c წერტილზე, ამიტომ იმისათვის, რომ აღნიშნული გარემოებით ვისარგებლოთ, უნდა დავყოთ (x_0, x_1) შუალედი ორ შუალედად $(x_0, c-0)$ და $(c+0, x_1)$.

დავწეროთ:

$$J=\int_{x_0}^{c-0}\frac{d}{dx}(f_1\ y\ y')\,dx+\int_{c+0}^{x_1}\frac{d}{dx}(f_1\ y\ y')\,dx=$$
$$=(f_1\ y\ y')_{x_0}^{c-0}+(f_1\ y\ y')_{c+0}^{x'}$$

ახლა, რადგან $f_1(c-0)=f_1(c+0)=f_1(c)$ და $y(c-0)=y(c+0)=$ $=y_1(c)$ (ფუნქციები f_1 და y c წერტილზე განუწყვეტელი არიან), ამიტომ დავწეროთ

$J=f_1(c)\ y(c)\ y'(c-0)-f_1(c)\ y(c)\ y'(c+0)$.

აღვნიშნოთ $\Omega(x, x_0)=u_1(x)$, $\Omega(x, x_2)=v(x)$.

ცხადია, რომ $y(c)=u(c)=v(c)$, $y'(c-0)=u'(c)$.

$y'(c+0)=v'(c)$.

გვექნება:

$J=f_1(c)\,[v(c)\ u'(a)-u(c)\ v'(c)]$.

Abel'-ის ლემის ძალით $f_1(c)\,[v(c)\ u'(c)-u(c)\ v'(c)]$ არის c-გან დამოუკიდებელი. აღვნიშნოთ იგი c_0: $J=c_0$.

თუ ახლა ინტეგრალების u და v მაგივრად განვიხილავთ ინტეგრალებს $-u$ და v, მაშინ J-თვის მივიღებთ მნიშვნელობას $-c_0$.

ჩვენ ამნაირად დავამტკიცეთ, რომ იმ შემთხვევაში როცა $x_0^*\leqslant x_1$ ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1}(f_0\,y^2+f_1\,y'^2)\,dx$ ვერ შეინარჩუნებს ნიშანს. დამტკიცებაში არსებითია, ის რომ ზემოთ გარჩეულ ორივე შემთხვევაში c_0 ერთიდაიგივეა. სწორედ ამაში მდგომარეობს მნიშვნელობა იმ სამსახურისა, რომელიც დებულების დამტკიცებისათვის გაგვიწია *Abel*-ის ტოლობამ. ამგვარად, აუცილებელი პირობა იმისა, რომ ჩვენი ინტეგრალი იყოს დადებითი, იმაში მდგომარეობს, რომ შეუღლებული x_0-ის წერტილი არ არსებობს, ან და, თუ არსებობს, $x_1<x_0^*$. ჩვენ წინათ დავამტკიცეთ, რომ ეს პირობა საკმარისია. ამგვარად, დამტკიცებულია პირობის, როგორც აუცილებლობა, ისე საკმარისობა.

ჩვენ extremum-ისათვის მივიღეთ სამი პირობა: 1) Euler-ის დიფერენციალური განტოლება: $f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})=0$. 2) $f_1>0$. 3) x_0^* არ არსებობს ან, თუ არსებობს $x_1<x_0^*$.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი მაგალითი:

$$\int_{x_0}^{x_1}(y'^2-\lambda y^2)\,dx$$

რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს λ სიდიდე იმისათვის, რომ ასეთი ინტეგრალი დადებითი იყოს.

ჩვენ ვხედავთ რომ $f_1=1$ და $f_0=-\lambda$.

f_1 არის დადებითი და 2) პირობა დაცულია.

შევადგინოთ ახლა ჩვენი განტოლებისათვის Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლება, გვექნება

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0,$$

ანუ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0.$$

ასეთი განტოლების გარდაწყვეტა იქნება

$$y=\alpha \sin[(x-x_0)\sqrt{\lambda}].$$

იმისათვის, რომ y ფუნქცია არ მოისპოს (x_0, x_1) შუალედში, საჭიროა, რომ $|x_1-x_0|\sqrt{\lambda}<\pi$, აქედან

$$\lambda<\frac{\pi^2}{(x_1-x_0)^2}$$

თუ ახლა, ჩვენ ინტეგრალში λ მაგივრად ჩავსვამთ $\frac{\pi^2}{(x_1-x_0)^2}$, ინტეგრალი იქნება დადებითი:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2-\frac{\pi^2}{(x_1-x_0)^2}y^2\right)dx\geqslant 0.$$

აქედან მივიღებთ

$$\int_{x_0}^{x_1}y'^2\,dx\geqslant\frac{\pi^2}{(x_1-x_0)^2}\int_{x_0}^{x_1}y^2\,dx.$$

ამ ტოლობით შემდეგში ვისარგებლებთ.

გამოვიყენოთ ახლა ზემოთმიღებული ზოგადი დასკვნები მეორე რიგის ვარიაციისათვის.

f_0 და f_1 არიან:

$f_1=f_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x))$

$f_0=f_{yy}(x, y_0(x), y'_0(x))-\frac{d}{dx}f_{yy'}(x, y_0(x), y'_0(x)).$

გვექნება შემდეგი დებულებანი:

აუცილებელი პირობა მინიმუმისა იმაში მდგომარეობს, რომ $f_{y'y'}(x_1, y_0(x), y'_0(x))$ დადებითი იყოს მთელ (x_0, x_1) შუალედში.

მინიმუმისათვის საჭიროა აგრეთვე ის, რომ $x_0{}^*$ არ იყოს $\leqslant x_1$-ზე.

როგორია ახლა ამ უკანასკნელი პირობის გეომეტრიული მნიშვნელობა. ვთქვათ ორ წერტილს $A(x_0, y_0)$, და $B(x_1, y_1)$ შორის გაყვანილია ექსტრემალი.

აღვნიშნოთ A_0^*-ით ექსტრემალის ის წერტილი, რომლის აბსცისა არის x_0^*. A_0^* წერტილს ეწოდება A წერტილის შეუღლებული წერტილი. ჩვენი პირობა შემდეგნაირად შეგვიძლია გამოვხატოთ:

ნახ. 9.

მინიმუმისათვის საჭიროა, რომ A და B წერტილებს შორის არ მოხვდეს A-ს შეუღლებული წერტილი A_0^*.

ლექცია VII.

შეუღლებული წერტილის მოძებნა.

საინტერესოა გამოვარკვიოთ, თუ როგორ უნდა მოვძებნოთ x_0 წერტილის შეუღლებული წერტილი.

ჩვენ დავინახავთ, რომ თუ ვიცით ექსტრემალის განტოლება, დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს მოძებნა Jacobi-ის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალისა. აქედან კი შეგვიძლია ვიპოვოთ x_0 წერტილის შეუღლებული წერტილი. Jacobi-ს დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე —

$$\frac{d}{dx}\left(f_1\frac{du}{dx}\right)-f_0 u=0,$$

სადაც $f_1=f_{y'y'}$ და $f_0=f_{yy}-\frac{d}{dx}f_{yy'}$.

ეს განტოლება ვრცლად ასე დაიწერება:

$$\frac{d}{dx}\left(f_{y'y'}\frac{du}{dx}\right)-\left(f_{yy}-\frac{d}{dx}f_{yy'}\right)u=0 \quad \ldots \ldots (I)$$

ვთქვათ ახლა, რომ $y=\varphi(x, \alpha, \beta)$ არის ინტეგრალი Euler-ის დიფერენციალური განტოლებისა

$$f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})=0$$

თუ ამ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩავსვამთ მის ინტეგრალს $y=\varphi(x, \alpha, \beta)$, მივიღებთ იგივეობას:

$f_y(x, \varphi(x, \alpha, \beta), \varphi'(x, \alpha, \beta))-\frac{d}{dx}[f_{y'}(x, \varphi(x, \alpha, \beta), \varphi'(x, \alpha, \beta))]=0.$

ახლა თუ ამ იგივეობას განვაწარმოებთ α-ს შესახებ, მივიღებთ აგრეთვე (II) იგივეობას. ეს წარმოებული α შესახებ შემდეგნაირად შეგვიძლია გამოვხატოთ:

$$f_{yy}\varphi_\alpha+f_{yy'}\varphi_{x\alpha}-\frac{d}{dx}(f_{y'y}\varphi_\alpha+f_{y'y'}\varphi_{\alpha x})=0$$

უკანასკნელ იგივეობას ასე გადმოვწერთ:

$$f_{yy}\varphi_\alpha + f_{yy'}\varphi_{x\alpha} - \varphi_\alpha \frac{d}{dx} f_{yy'} - f_{yy'}\varphi_{x\alpha} - \frac{d}{dx}(f_{y'y'}\varphi_{x\alpha}) = 0$$

აქედან (განწარმოების რიგის შეცვლის შესახებ არსებული დებულების ძალით):

$$\left(f_{yy} - \frac{d}{dx} f_{yy'}\right)\varphi_\alpha - \frac{d}{dx}\left(f_{y'y'}\frac{d\varphi_\alpha}{dx}\right) = 0.$$

α და β მივცეთ მნიშვნელობანი α_0 და β_0, რომელნიც ექსტრემალს ეთანადება.

ახლა, თუ მიღებულ იგივეობას შევადარებთ (I) დიფერენციალურ განტოლებას დავინახავთ, რომ $\varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$ წარმოადგენს უკანასკნელის კერძო ინტეგრალს.

სრულებით ამავე გზით დავამტკიცებთ (თუ (II) იგივეობას განვაწარმოებთ β მიმართ), რომ მეორე კერძო ინტეგრალი Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლებისა არის $\varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$.

ავღნიშნოთ $u(x) = \varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$ და $v(x) = \varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$. დავამტკიცოთ, რომ ეს ორი ინტეგრალი $u(x)$ და $v(x)$ არის ხაზოვნურად დამოუკიდებელი. უნდა აღმოვაჩინოთ, რომ ვრონსკის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} u, & v \\ u', & v' \end{vmatrix} \quad \text{ანუ} \quad \begin{vmatrix} \varphi_\alpha, & \varphi_\beta \\ \varphi_{\alpha x}, & \varphi_{\beta x} \end{vmatrix}$$

არ არის ნულის ტოლი.

ამისათვის შევნიშნავთ შემდეგს: ფუნქციები $\varphi(x, \alpha, \beta)$ და $\varphi'_x(x, \alpha, \beta)$ არიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი α და β-ს მიმართ (α_0, β_0) წერტილის მახლობლობაში (ეს იქედან გამომდინარეობს, რომ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალისათვის და მისი პირველი წარმოებულისათვის აღებულ წერტილზე ნებსითი მნიშვნელობანი შეგვიძლია მივცეთ). ამიტომ Jacobi-ს დეტერმინანტი $\left.\frac{\partial(\varphi, \varphi')}{\partial(\alpha, \beta)}\right|_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=\beta_0}}$ ნულისაგან განსხვავებული იქნება.

ეს დეტერმინანტი გაშლილი სახით ასე დაიწერება:

$$\begin{vmatrix} \varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0), & \varphi_{x\alpha}(x, \alpha_0, \beta_0) \\ \varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0), & \varphi_{x\beta}(x, \alpha_0, \beta_0) \end{vmatrix}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\begin{vmatrix} \varphi_\alpha, & \varphi_\beta \\ \varphi_{\alpha x}, & \varphi_{\beta x} \end{vmatrix}$$

ამგვარად უკანასკნელი დეტერმინანტი ნულისაგან განხვავებულია. ამით დამტკიცებულია, რომ $\varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$ და $\varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$ ფუნქციები არიან ხაზოვნურად დამოუკიდებელი.

ინტეგრალს $\Omega(x, x_0)$ შემდეგნაირად შევადგენთ:

$$\Omega(x, x_0) = u(x)\,v(x_0) - v(x)\,u(x_0) =$$

$$= \varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)\,\varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0) - \varphi_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0)\,\varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) \quad \text{(III)}.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ x_0-ის შეუღლებული ფესვი, უნდა გავუტოლოთ ნულს გამოხატულება $\varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)\,\varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0) - \varphi_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0)\,\varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$ და ვიპოვოთ მიღებული განტოლების ფესვები. იმ ფესვებში, რომელნიც იქნებიან x_0-ზე მეტი, უნდა ავიღოთ უმცირესი და ეს იქნება სწორედ x_0-ის შეუღლებული წერტილი. თუ ჩვენს განტოლებას x-ის არც ერთი მნიშვნელობა არ აკმაყოფილებს (გარდა x_0-სა, რასაკვირველია), ეს იმას ნიშნავს, რომ x_0-ის შეუღლებული წერტილი x_0^* არ არსებობს.

განვიხილოთ კერძო მაგალითი, რომელიც ეხება უმოკლეს მანძილს ორ წერტილთა შორის. პრობლემა მიიყვანება ინტეგრალის $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ მინიმუმის მოძებნაზე. ამ შემთხვევაში ექსტრემალი არის სწორი ხაზი. ვნახოთ შესრულდება თუ არა Legendre'-ის და Jacobi-ის პირობა.

ამისათვის ვიპოვით $f_1 = f_{y'y'}$. დავწერთ

$$f_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$f_{y'y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2} - y'\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^2} = \frac{1+y'^2-y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$\dfrac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ არის დადებითი, რანაირიც არ უნდა იყოს y', და, ამგვარად, Legendre'-ის პირობა შესრულებულია.

გადავიდეთ ახლა Jacobi-ს პირობაზე.

ვთქვათ ექსტრემალის განტოლება არის $y = \alpha x + \beta$. შევადგინოთ $\Omega(x, x_0)$ (III)-ის მიხედვით.

გვექნება:

$$\Omega(x, x_0) = x - x_0.$$

იმისათვის. რომ ვიპოვოთ შეუღლებული წერტილი x_0^*, უნდა გავაწყვიტოთ განტოლება $x - x_0 = 0$. ამ განტოლებას აკმაყოფილებს მხოლოდ x_0. ამგვარად, x_0 წერტილის შეუღლებული წერტილი არ არსებობს და მაშ Jacobi-ს პირობაც დაცულია.

განვიხილოთ ახლა უმცირესი ბრუნვის ზედაპირის ფართის პრობლემა. როგორც ვიცით პრობლემა მიიყვანება $\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

ინტეგრალის (y იქნება დადებითი) მინიმუმის მოძებნაზე. ვნახოთ შესრულდება თუ არა ამ შემთხვევაში Legendre'-ის და Jacobi-ს პირობა.

მოვძებნოთ $f_1=f_{y'y'}$. გვექნება:

$$f_{y'}=\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$f_{y'y'}=\frac{y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}=\frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

რადგან y არის დადებითი, ამიტომ $\frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ იქნება დადებითი, როგორიც არ იყოს y'. ამგვარად, Legendre'-ის პირობა შესრულებულია.

გადავიდეთ ახლა Jacobi-ს პირობაზე.

შევადგინოთ $\varphi_\alpha(x, \alpha, \beta)$. ჩვენ ვიცით, რომ Euler'-ის დიფერენციალურ განტოლების ინტეგრალი ამ შემთხვევაში არის $\varphi(x, \alpha, \beta)=\alpha\, ch\frac{x-\beta}{\alpha}$. დავწეროთ:

$$\varphi_\alpha(x, \alpha, \beta)=ch\frac{x-\beta}{\alpha}+\alpha\, sh\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\cdot -\frac{x-\beta}{\alpha^2}$$
$$=ch\frac{x-\beta}{\alpha}-\frac{x-\beta}{\alpha}\,sh\frac{x-\beta}{\alpha}$$

მოვძებნოთ ახლა $\varphi_\beta(x, \alpha, \beta)$.

გვექნება:

$$\varphi_\beta(x, \alpha, \beta)=sh\frac{x-\beta}{\alpha}=-sh\frac{x-\beta}{\alpha}$$

შევადგინოთ $\Omega(x, x_0)$. ქვემოთ სიმოკლისათვის აღვნიშნავთ:

$$\frac{x-\beta_0}{\alpha_0}=\theta,\quad \frac{x_0-\beta_0}{\alpha_0}=\theta_0.$$

დავწეროთ:

$$\Omega(x, x_0)=-(ch\,\theta-\theta\, sh\,\theta)\,sh\,\theta_0+(ch\,\theta_0-\theta_0\,sh\,\theta_0)\,sh\,\theta=$$
$$=-ch\,\theta\,sh\,\theta_0+sh\,\theta\,ch\,\theta_0+\theta\,sh\,\theta\,sh\,\theta_0-\theta_0\,sh\,\theta\,sh\,\theta_0.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ x_0 წერტილის შეუღლებული წერტილი, უნდა გარდავწყვიტოთ განტოლება:

$$-ch\,\theta\,sh\,\theta_0+sh\,\theta\,ch\,\theta_0+\theta\,sh\,\theta\,sh\,\theta_0-\theta_0\,sh\,\theta\,sh\,\theta_0=0.$$

გავყოთ ამ განტოლების ორივე მხარე $sh\,\theta\,sh\,\theta_0$-ზე.

მივიღებთ:

$$-\mathrm{ctg}\,h\,\theta+\mathrm{ctg}\,h\,\theta_0+\theta-\theta_0=0$$

ანუ

$$\mathrm{ctg}\,h\,\theta-\theta=\mathrm{ctg}\,h\,\theta_0-\theta_0$$

ეს არის ის განტოლება, რომლიდანაც უნდა მივიღოთ x_0-ის შეუღლებული ფესვი.

თავისთავად ცხადია, რომ ამ განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდეს x-ის მნიშვნელობა $x=x_0$.

დავამტკიცოთ, რომ ჩვენ განტოლებას სხვა ფესვიც აქვს, ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია $ctgh v-v$.

ვსთქვათ v იცვლება $-\infty$-დან ნულამდის. როცა v მიისწრაფის $-\infty$-კენ, $ctghv=\frac{e^v+e^{-v}}{e^v-e^{-v}}$ მიისწრაფის -1-კენ. მართლაც, გავყოთ მრიცხველი და მნიშვნელი e^{-v}-ზე.

მივიღებთ $\frac{e^{2v}+1}{e^{2v}-1}$. როცა v მიისწრაფის $-\infty$-კენ, e^{2v} მიისწრაფის ნულისაკენ, და ჩვენი შეფარდების ზღვარი იქნება -1. ფუნქცია $cthv-v$ ამ შემთხვევაში მიისწრაფის $+\infty$ კენ. ეხლა როცა v მიისწრაფის ნულისაკენ (მარცხნივ), $ctgh\,v-v$ ფუნქცია მიისწრაფის $-\infty$-კენ, რადგან ამ შემთხვევაში e^v-e^{-v} იქნება უარყოფითი უსასრულოდ მცირე.

ამის გარდა $ctgh\,v-v$ ფუნქცია $(-\infty,0)$ შუალედში იქნება მონოტონური (მისი წარმოებული $tgh\,v-1$ ნიშანს არ შეიცვლის) და განუწყვეტელი, და ამიტომ ერთხელ გაივლის ყველა მნიშვნელობებს $+\infty$-დან $-\infty$-მდე.

სრულებით ასევე დავამტკიცებთ, რომ როცა v იცვლება ნულიდან $+\infty$მდე, $ctg\,v-v$ კიდევ ერთხელ გაივლის ყველა მნიშვნელობებს $-\infty$დან $+\infty$მდე. ჩვენ ვხედავთ, რომ, როცა v იცვლება $(-\infty,+\infty)$ შუაალედში, $ctgh\,v-v$ გაივლის ყველა მნიშვნელობებს და თითეულ მნიშვნელობას გაივლის ორჯერ. ამგვარად, თუ რომელიმე v_0—თვის გვაქვს $ctgh\,v_0-v_0=K$, არსებობს მეორე მნიშვნელობა v—სი v_0^* რომლისთვისაც აგრეთვე

$$ctgh\,v_0^*-v_0^*=K$$

(თუ v_0 არის მოთავსებული შუალედში $(-\infty,0)$, v^*_0 იქნება შუალედში $(0,+\infty)$ და პირიქით).

ეს ამტკიცებს, რომ განტოლებას

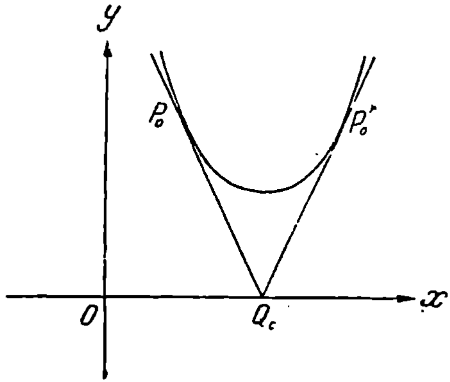
$$ctgh\,v-v=ctgh\,v_0-v_0,$$

გარდა v_0—ს, აქვს სხვა ფესვიც v_0^*.

დამოკიდებულების $v=\frac{x-k_0}{a_0}$ ძალით, v-ს ორი მნიშვნელობისათვის v_0 და v_0^*, არსებობს x-ის ორი შესაბამი, ერთიმეორისაგან განსხვავებული მნიშვნელობანი x_0 და x_0^*. ამით დამტკიცებულია, რომ ჯაჭვის მრუდისათვის არსებობს შეუღლებული ფესვი.

აღმოვაჩინოთ ახლა ეს შეუღლებული წერტილი გეომეტრიული თვალსაზრისით.

ჯაჭვის მრუდის რომელიმე P_0 წერტილზე გავიყვანოთ ამ მრუდის მხები.



ნახ. 10.

ვთქვათ ეს მხები გადაკვეთს X ღერძს Q_0 წერტილში მოვძებნოთ მანძილი O-დან Q_0-მდე. ჩვენი მრუდის განტოლება არის.

$y=\alpha_0 ch\,\dfrac{x-\beta_0}{\alpha_0}$. აქედან $y'=sh\,\dfrac{x-\beta_0}{\alpha_0}$. განტოლება მხებისა გაყვანილი მრუდის რომელიმე (x,y) წერტილზე იქნება

$Y-y=sh\dfrac{x-\beta_0}{\alpha_0}(X-x)$

აღვნიშნოთ x_0-ით P_0 წერტილის აბსცისი. მაშინ მისი ორდინატი y იქნება $\alpha_0 ch\dfrac{x-\beta_0}{\alpha_0}$. P_0 წერტილის მხების განტოლება ასე დაიწერება:

$$Y-\alpha_0 ch\frac{x_0-\beta_0}{\alpha_0}=sh\frac{x_0-\beta_0}{\alpha_0}(X-x_0).$$

ახლა იმისათვის, რომ ვიპოვოთ OQ მანძილი Y უნდა გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ.

$$-\alpha_0 ch\frac{x_0-\beta_0}{\alpha_0}=sh\frac{x_0-\beta_0}{\alpha_0}(X-x_0)$$

აქედან,

$$X-x_0=-\frac{\alpha_0 ch\dfrac{x_0-\beta_0}{\alpha_0}}{sh\dfrac{x_0-\beta_0}{\alpha_0}},$$

ანუ,

$$X - x_0 = -\alpha_0 \, ctgh \, v_0.$$

მანძილისათვის OQ_0 გვექნება:

$$OQ_0 = x_0 - \alpha_0 \, ctgh \, v_0$$

ეხლა ვთქვათ მოვძებნეთ P_0 წერტილის შეუღლებული წერტილი. გავიყვანოთ ამ წერტილზე მხები და აღვნიშნოთ Q_0^*-ით წერტილი, რომელზედაც ეს მხები X ღერძს გადაკვეთს.

სრულებით იმავე მსჯელობით, როგორც წინათ, OQ_0^* მანძილისათვის მივიღებთ:

$$OQ_0^* = x_0^* - \alpha_0 \, ctgh \, v_0^*.$$

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $OQ_0 = OQ_0^*$.

ჩვენ ვიცით, რომ $ctgh \, v_0^* - v_0^* = ctgh \, v_0 - v_0$. თუ v_0^* და v_0 მაგივრათ ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობებს $v_0 = \frac{x_0 - \beta_0}{\alpha_0}$, $v_0^* = \frac{x_0^* - \beta_0}{\alpha_0}$, მივიღებთ:

$$\frac{x_0}{\alpha_0} - \frac{\beta_0}{\alpha_0} - ctgh \, v_0 = \frac{x_0^*}{\alpha_0} - \frac{\beta_0}{\alpha_0} - ctgh \, v_0^*,$$

აქედან:

$$x_0 - \alpha_0 \, ctgh \, v_0 = x_0^* - \alpha_0 \, ctgh \, v_0^*.$$

თუ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს შევადარებთ ზემოთგამოყვანილ OQ_0 და OQ_0^* გამოხატულებებს, დავინახავთ, რომ მართლაც $OQ_0 = OQ_0^*$.

ჩვენ ამგვარად დავამტკიცეთ, რომ ჯაჭვის მრუდის რომელიმე წერტილის და მის შეუღლებული წერტილის მხებნი გადაკვეთენ ერთმანეთს და ეს განკვეთის წერტილი მდებარეობს X ღერძზე.

ამ დებულებიდან გამომდინარეობს მარტივი გეომეტრიული წესი ჯაჭვის მრუდის რომელიმე წერტილის შეუღლებული წერტილის მოძებნისა.

უნდა გავიყვანოთ აღებულ A წერტილზე მხები და იმ წერტილიდან, რომელზედაც ეს მხები განკვეთს X ღერძს, უნდა გავიყვანოთ ჯაჭვის მრუდის მეორე მხები. ახალი შეხების წერტილი A^* წარმოადგენს სწორედ A წერტილის შეუღლებულ წერტილს.

ლ ე ქ ც ი ა VIII.

შეუღლებული წერტილის გეომეტრიული მნიშვნელობა. მრუდის დამრგვალება.

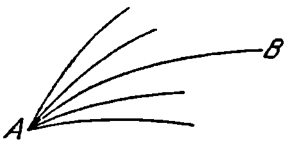
გადავიდეთ შეუღლებული წერტილის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე.

ვთქვათ $y = \varphi(x, \alpha, \beta)$ არის ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება. α_0 და β_0 არიან α და β პარამეტრების ის მნიშვნელობანი, რომელნიც აღებულ ექსტრემალს ეთანადებიან.

აღვნიშნოთ $u=\varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$, $v=\varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$. $\Omega(x, x_0)$ ფუნქციას, რომელიც შეუღლებულ წერტილს განსაზღვრავს, ექნება სახე:

$$\Omega(x, x_0)=u(x)\,v(x_0)-v(x)\,u(x_0).$$

შევადგინოთ ახლა სიმრავლე ექსტრემალთა, რომელნიც A წერტილზე გადიან.



ნახ. 11

ამ სიმრავლის გამოსახატავად განტოლებას $y=\varphi(x, \alpha, \beta)$ უნდა მივუმატოთ განტოლება $y_0=\varphi(x_0, \alpha, \beta)$, რომელიც გამოხატავს იმას, რომ ჩვენი ექსტრემალები გადიან A წერტილზე. უკანასკნელი განტოლება გვაძლევს არა ცხადი სახით მოცემულ დამოკიდებულებას α და β შორის. შეიძლება თუ არა ამ განტოლების გარდაწყვეტა α ან β-ს შესახებ? ამ განტოლებას აკმაკოფილებენ α და β მნიშვნელობანი α_0 და β_0 (რადგან ექსტრემალი AB ეკუთვნის ჩვენს სიმრავლეს), ამიტომ, თანახმად არა ცხადი ფუნქციების არსებობის თეორემისა, თუ დამტკიცდა, რომ $\varphi_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0)$ ან $\varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0)$ არ არის ნული, მაშინ დამტკიცებული იქნება, რომ განტოლების $y_0=\varphi(x_0, \alpha, \beta)$ გარდაწყვეტა α ან β შესახებ შესაძლებელია.

ჩვენ ვიცით, რომ ფუნქციები $\varphi_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0)$ და $\varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0)$ აკმაყოფილებენ პირობას $\varphi_\alpha \varphi'_\beta-\varphi_\beta \varphi'_\alpha=\frac{c}{f_1}$ სადაც $c \neq O$. ამიტომ შეუძლებელია, რომ φ_α და φ_β ერთდროულად მოისპონ. ერთი მათგანი მაინც აუცილებლად უნდა ნულიდან განსხვავდეს.

რომ აზრი გარკვეული იყოს, ვთქვათ $\varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0)$ ნულისაგან განსხვავდება.

ამ შემთხვევაში შეიძლება განტოლების $y_0=\varphi(x_0, \alpha, \beta)$ გარდაწყვეტა β შესახებ. მივიღებთ $\beta=\beta(\alpha)$.

ჩავსვათ β ეს გამოხატულება განტოლებაში $y=\varphi(x, \alpha, \beta)$. გვექნება $y=\varphi(x, \alpha\ \beta(\alpha))$, ანუ თუ $\varphi(x, \alpha, \beta(\alpha))$ აღვნიშნავთ $\psi(x, \alpha)$:

$$y=\psi(x, \alpha).$$

ორი პარამეტრის მაგივრად ჩვენ გვაქვს აქ მხოლოდ ერთი პარამეტრი. $y=\psi(x, \alpha)$ წარმოადგენს განტოლებას იმ ექსტრემალებისა, რომელნიც A წერტილზე გაივლიან და რომელნიც AB ექსტრემალს, როგორც კერძო შემთხვევას, შეიცავენ. ვიპოვოთ ახლა მნიშვნელობა $\psi_\alpha(x, \alpha)$ წარმოებულისა, როცა α მაგივრად ჩავსვამთ α_0, ე. ი. $\psi_\alpha(x, \alpha_0)$..

ჯერ ვიპოვოთ თვით წარმოებული $\psi_\alpha(x, \alpha)$. ამისათვის განვაწარმოოთ $\psi(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha, \beta(\alpha))$. დავწეროთ:

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha + \varphi_\beta \frac{d\beta}{d\alpha} \quad (ა)$$

აქ მხოლოდ $\frac{d\beta}{d\alpha}$ არის უცნობი. ამის მოსაძებნად მივმართოთ ტოლობას $y_0 = \varphi(x_0, \alpha, \beta)$, საიდანაც მივიღეთ $\beta = \beta(\alpha)$ ფუნქცია. განვაწარმოოთ ეს ტოლობა. გვექნება:

$$(\varphi_\alpha)_0 + (\varphi_\beta)_0 \frac{d\beta}{d\alpha} = O,$$

სადაც $(\varphi_\alpha)_0$ და $(\varphi_\beta)_0$ ნიშნავს იმას, რომ φ_α და φ_β ფუნქციებში x-ის ნაცვლად დაიწერება x_0. უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{(\varphi_\alpha)_0}{(\varphi_\beta)_0}$$

შევიტანოთ $\frac{d\beta}{d\alpha}$ მიღებული მნიშვნელობა (ა) ტოლობაში. დავწეროთ:

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha - \varphi_\beta \frac{(\varphi_\alpha)_0}{(\varphi_\beta)_0} = \frac{\varphi_\alpha (\varphi_\beta)_0 - \varphi_\beta (\varphi_\alpha)_0}{(\varphi_\beta)_0}$$

ჩავსვათ ახლა α მაგივრად α_0. მაშინ β გახდება β_0 (თანახმად იმავე თეორემისა არაცხადი ფუნქციის შესახებ გვექნება $\beta_0 = \varphi(\alpha_0)$). მივიღებთ:

$$\psi_\alpha(x, \alpha_0) = \frac{\varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)\,\varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0) - \varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)\,\varphi_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0)}{\varphi_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0)} =$$

$$= \frac{u(x)\,v(x_0) - v(x)\,u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{\Omega(x, x_0)}{v(x_0)}$$

თუ აღვნიშნავთ $\frac{1}{v(x_0)} = c$, დავწეროთ:

$$\psi_\alpha(x, \alpha_0) = c\,\Omega(x, x_0) \qquad (ბ).$$

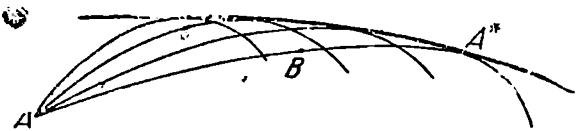
ახლა რადგან $\Omega(x_0^*, x_0) = O$, ამიტომ (ბ) ტოლობის ძალით:

$$\psi_\alpha(x_0^*, \alpha_0) = O.$$

ეს ტოლობა საშუალებას მოგვცემს მოვახდინოთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია შეუღლებული წერტილისა. როგორც ვიცით, განტოლება იმ ექსტრემალთა ოჯახისა, რომელნიც A წერტილზე გადიან, არის $\psi(x, \alpha) - y = O$. მოვძებნოთ ამ ოჯახის მომვლები. ამისათვის განტოლება $\psi(x, \alpha) - y = O$ უნდა განვაწარმოოთ α პარამეტრის შესახებ და მიღებული განტოლებებიდან უნდა გამოვრიცხოთ α.

$\psi(x, \alpha) - y = O$ წარმოებული α შესახებ იქნება $\psi_\alpha'(x, \alpha) = O$. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მომვლები, განტოლებებიდან: $\psi(x, \alpha) - y = O$ და $\psi_\alpha(x, \alpha) = O$ უნდა გამოვრიცხოთ α.

ახლა როგორ ვიპოვოთ მომვლების ის წერტილი, რომელიც ექსტრემალეს ეთანადება.



ნახ. 12.

ამისათვის განტოლებებში: $\psi(x, \alpha) - y = O$ და $\psi_\alpha(x, \alpha) = O$ α-ს მაგივრად უნდა ჩავსვათ α_0. წერტილი, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებებს $\psi(x, \alpha_0) - y = O$, $\psi_\alpha(x, \alpha_0) = O$, წარმოადგენს მომვლების იმ წერტილს, რომელიც ექსტრემალს ეთანადება.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ შეუღლებული A^* წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივე განტოლებას. მართლაც, როგორც ჩვენ დავინახეთ ზემოთ, $\psi_\alpha(x_0^*, \alpha_0) = O$. ამის გარდა A^* წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებენ განტოლებას $y = \psi(x, \alpha_0)$, რადგან A^* წერტილი იმყოფება ექსტრემალზე.

ჩვენ ვხედავთ, რომ შეუღლებული წერტილი გეომეტრიულად გამოიხატება მომვლების იმ წერტილით, რომელიც ექსტრემალს ეთანადება. შეუღლებული წერტილი იქნება სწორედ ის წერტილი, რომელშიაც მომვლები შეეხება ექსტრემალს.

დავუბრუნდეთ ისევ ჩვენ ძირითად პრობლემას: გვქონდა ინტეგრალი:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

და ვეძებდით ამ ინტეგრალის მინიმუმს.

ჩვენ დავინახეთ, რომ მრუდი, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს ინტეგრალს, უნდა აკმაყოფილებდეს Euler-ის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = O$$

ამის გარდა დაკმაყოფილებული უნდა იყოს Legendre-ის პირობა:

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > O$$

და ბოლოს ინტეგრალის ზედა საზღვრისათვის x_1 გვაქვს Jacobi-ს პირობა $x_1 < x_0^*$ (როცა x_0^* არსებობს).

ზემოთმოყვანილი სამი პირობა წარმოადგენს მინიმუმის აუცილებელ პირობას. იმ შემთხვევაში, როცა რომელიმე ამ პირობათაგანი არ არის დაცული, მაშინ მინიმუმს ვერ მივიღებთ. ახლა საინ-

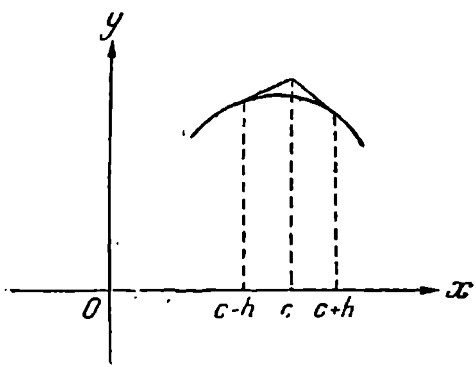
ტერესოა, წარმოადგენენ თუ არა ეს პირობები მინიმუმის საკმარის. პირობებს. სანამ ამ საკითხზე გადავიდოდეთ, საჭიროა ერთი დამატება მოვახდინოთ წინა ნათქვამისათვის.

ეს დამატება შეეხება პირობის $x_1 < x_0$* აუცილებლობის დამტკიცებას.

ამის დასამტკიცებლად ჩვენ აღმოვაჩინეთ, რომ თუ დავუშვებთ ჩვენი პირობის წინააღმდეგს, ისეთი მ$_1$ მრუდი შეგვიძლია ავაგოთ, რომ ინტეგრალი აღებული ამ მ$_1$ მრუდზე იქნება ნაკლები, ვიდრე ინტეგრალი აღებული მ$_0$ ექსტრემალზე.

მაგრამ აქ ერთი გარემოება უნდა მივიღოთ მხედველობაში. მრუდს, რომელიც ჩვენ ავაგეთ, ჰქონდა კუთხითი წერტილი, ე. ი. მისი წარმოებული არ იყო განუწყვეტელი ან, უფრო სწორედ რომ ვთქვათ, ზოგიერთ წერტილებში მას სრულებით არ ჰქონდა წარმოებული. ჩვენ კი მხოლოდ ისეთ მრუდს განვიხილავთ, რომელსაც აქვს განუწყვეტელი წარმოებული. ამიტომ ჩვენი დამტკიცება არ არის კიდევ დამთავრებული.

ჩვენ კიდევ უნდა დავამტკიცოთ, რომ არსებობს ისეთი განუწყვეტელ წარმოებულიანი მრუდი, რომელსაც იგივე თვისება აქვს რაც მ$_1$ მრუდს. იმისათვის, რომ ეს დავამტკიცოთ, საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ თუ ინტეგრალი აღებული კუთხითი წერტილიან მრუდზე მ$_1$ ნაკლებ მნიშვნელობას ღებულობს, ვიდრე ინტეგრალი აღებული მ$_0$ მრუდზე, ყოველთვის არსებობს ისეთი განუწყვეტელი წარმოებულებიანი მრუდი მ, რომელზედაც ინტეგრალი აგრეთვე ნაკლებ მნიშვნელობას ღებულობს, ვიდრე მ$_0$ მრუდზე.



ნახ. 13.

ჩვენ ამ შემთხვევაში გვაინტერესებს მ$_1$ მრუდის ის ნაწილი, რომელიც კუთხითი წერტილის საკმაო მახლობლობაში იმყოფება.

ავიღოთ მცირე h რიცხვი.

გავიყვანოთ ისეთი მ მრუდი, რომელიც ერთვის $მ_1$ მრუდს ყველა წერტილებში, გარდა იმ წერტილებისა, რომელნიც $c-h$ და $c+h$ შუალედის შიგ იმყოფებიან (c არის კუთხითი წერტილის აბსცისი).

მრუდი მ არის განუწყვეტელ შემხებიანი მრუდი.

აღვნიშნოთ $მ_1$ მრუდის განტოლება: $y=y_1(x)$ და მ მრუდის: $y=y(x)$ განვიხილოთ სხვაობა $J მ_1-J მ$. რადგან მ და $მ_1$ მრუდები $(c-h,\ c+h)$ შუალედების გარეთ ერთმანეთს ემთხვევიან, ამიტომ მოგვიხდება სხვაობის $J მ_1-J მ$ განხილვა მხოლოდ $(c-h,\ c+h)$ შუაალედში. დავწეროთ:

$$J მ_1-J მ=\int_{c-h}^{c+h} f[x,y_1(x),y'_1(x)]\,dx-\int_{c-h}^{c+h} f[x,y(x),y'(x)]\,dx=$$

$$=\int_{c-h}^{c+h}[f(x,y_1(x),y'_1(x))-f(x,y(x),y'(x)]\,dx$$

ვთქვათ ახლა, რომ იმ არეში, რომელშიაც პრობლემა განიხილება, $f(x,y,y')$—ის ზედა საზღვარი არის M.

დავწეროთ:

$$|J მ_1-J მ|<\int_{c-h}^{c+h}2M\,dx$$

ანუ:

$$|J მ_1-J მ|<4Mh$$

აქედან მივიღებთ:

$$J მ_1-4Mh<J მ<J მ_1+4Mh$$

ეხლა, თანახმად ჩვენი შედეგისა,

$$J მ_0-J მ_1>O$$

აღვნიშნოთ სხვაობა:

$$J მ_0-J მ_1=\varepsilon,$$

ε დადებითი იქნება. უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება $J მ_0=J მ_1+\varepsilon$. იმისათვის, რომ $J მ$ იყოს ნაკლები ვიდრე $J მ_0$ ანუ $J მ_1+\varepsilon$, საკმარისია რომ h, რომელიც ჯერ ჯერობით ნებსითად არის აღებული, ისე ამოვარჩიოთ, რომ $4Mh<\varepsilon$, ანუ, $h<\frac{\varepsilon}{4M}$.

ჩვენ ამგვარად დავამტკიცეთ, რომ, თუ კუთხითი წერტილიან $მ_1$ მრუდისათვის გვაქვს $J მ_1<J მ_0$, ყოველთვის არსებობს ისეთი განუწყვეტელ შემხებიანი მ მრუდი, რომლისთვისაც აგრეთვე გვექნება $J მ<J მ_0$. ზემოთ მოყვანილ წესს $მ_1$ მრუდის შეცვლისა მ მრუდით კუთხის მორგვალება ეწოდება.

ამგვარად დამტკიცებულია, რომ თუ ინტეგრალს არა აქვს ექსტრემუმი კუთხიან მრუდთა არეში, მას არ ექნება აგრეთვე ექსტრემუმი განუწყვეტელ შემხებიან მრუდთა არეშიც.

სწორედ ამის დამტკიცება იყო საჭირო, რომ პირობის $x_1<x^*_0$ აუცილებლობა საბოლოოდ დადასტურებულიყო.

ლექცია IX.

ექსტრემუმის საკმარისი პირობები სუსტი ვარიაციის შემთხვევაში.

წინად ჩვენ გამოვიყვანეთ ექსტრემუმის სამი აუცილებელი პირობა. ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს პირობები სუსტი ვარიაციის შემთხვევაში საკმარის პირობებსაც წარმოადგენენ.

ჯერ ჯერობით ერთი უტოლობა დავამტკიცოთ:

განვიხილოთ კვადრატული ფორმა:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

იგი შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\frac{(Ax+By)^2+(AC-B^2)y^2}{A} \qquad (I)$$

და:

$$Ax^2+2Bxy+Cx^2=\frac{(Cy+Bx)^2+(AC-B^2)x^2}{C} \qquad (II)$$

ვიგულისხმოთ, რომ A და C არიან დადებითი.

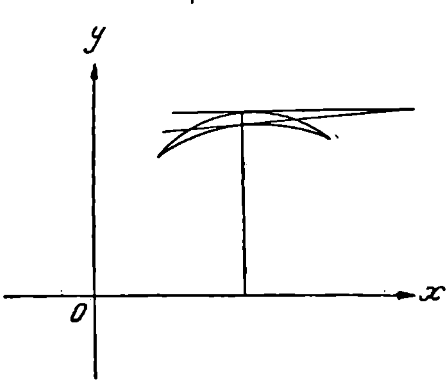
ამ ტოლობებიდან ვხედავთ, რომ $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ არის მეტი ვიდრე $\frac{(AC-B^2)y^2}{A}$ და აგრეთვე $\frac{(AC-B^2)x^2}{C}$.

ახლა, თუ გამოვიყენებთ შემდეგ არითმეტიკულ დებულებას: თუ $x>\frac{p}{q}$ და $x>\frac{p_1}{q_1}$ სადაც q და q_1 არიან დადებითი რიცხვები, მაშინ $x>\frac{p+p_1}{q+q_1}$, მივიღებთ:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2>\frac{(AC-B^2)(x^2+y^2)}{A+C}. \qquad (III)$$

დავუბრუნდეთ ჩვენს პრობლემას.

ვთქვათ ექსტრემუმის სამივე აუცილებელი პირობა შესრულებულია. შევაერთოთ წერტილები A და B ექსტრემალით AB, რომლის განტოლება აღვნიშნოთ $y=y_0(x)$. გავიყვანოთ ახლა მოსაზღვრე შესადარებელი, მრუდი AmB, რომელიც AB მრუდის სუსტ ვარიაციას წარმოადგენს. ამ მრუდის განტოლება აღვნიშნოთ $y=y(x)$.



ნახ. 14

განვიხილოთ ინტეგრალის ვარიაცია ΔJ.

თუ დავამტკიცებთ, რომ ჩვენი სამი პირობის დაცვით ΔJ ყოველთვის არის დადებითი, როგორიც არ უნდა იყოს შესადარებელი AmB მრუდი, მაშინ დამტკიცდება, რომ ეს სამი პირობა წარმოადგენს საკმარის პირობასაც. გვექნება:

$$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1}(f_y\Delta y+f_{y'}\Delta y')\,dx+$$

$$+{}^1/_2\int_{x_0}^{x_1}(f_{yy}\Delta y^2+2f_{yy'}\Delta y\Delta y'+f_{y'y'}\Delta y'^2)\,dx+$$

$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\int_{x_0}^{x_1}(\overline{f}_{yyy}\Delta y^3+3\overline{f}_{yyy'}\Delta y^2\Delta y'+3\overline{f}_{yy'y'}\Delta y\Delta y'^2+\overline{f}_{y'y'y'}\Delta y'^3),\quad (IV)$$

სადაც ხაზი $\overline{f}_{yyy}$ და სხვა ზემოთ იმის მაჩვენებელია, რომ არგუმენტისათვის აღებულია საშუალო მნიშვნელობანი.

ჩვენი პირობების ძალით, პირველი ვარიაცია:

$$\int_{x_0}^{x_1}(f_y\Delta y+f_{y'}\Delta y')\,dx$$

უნდა იყოს ნული.

მეორე ვარიაციას კი ექნება სახე:

$$\int_{x_0}^{x_1}f_1\left(\Delta y'-\frac{\Delta y}{Y}Y'\right)^2dx.$$

(IV) ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\Delta J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}f_1\left(\Delta y-\frac{\Delta y}{Y}Y'\right)^2dx+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\int_{x_0}^{x_1}(\varphi_1\Delta y^2+\varphi_2\Delta y'^2)\,dx$$

სადაც $\varphi_1=\overline{f}_{yyy}\Delta y+3\overline{f}_{yyy'}\Delta y'$ (V).

და $\varphi_2=3\overline{f}_{yy'y'}\Delta y+\overline{f}_{y'y'y'}\Delta y'$

ვთქვათ M არის ყველა წარმოებულების $f_{yyy'}, f_{yyy}, f_{yy'y'}, f_{y'y'y'}$ მოდულების ზედა საზღვარი.

მაშინ გვექნება (გავიხსენოთ რომ ჩვენ განვიხილავთ სუსტ ვარიაციას, ისე რომ $|\Delta y|<\varepsilon$ და $|\Delta y'|<\varepsilon$).

$$|\varphi_1|<M|\Delta y|+M3|\Delta y'|<M(\varepsilon+3\varepsilon)=M\cdot4\cdot\varepsilon,$$

ანუ, თუ აღვნიშნავთ $4\varepsilon=\varepsilon'$, დავწერთ

$$|\varphi_1|<M\varepsilon'$$

სრულებით ასევე მივიღებთ რომ $|\varphi_2|<M\varepsilon'$

(V) ტოლობის მარცხენა მხარის მეორე წევრი

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\int_{x_0}^{x_1}(\varphi_1\Delta y^2+\varphi_2\Delta y'^2)\,dx$$

თავის აბსოლუტური სიდიდით იქნება ნაკლები, ვიდრე

$$\frac{M\varepsilon'}{6}\int_{x_0}^{x_1}(\Delta y'^2+\Delta y^2)\,dx$$

განვიხილოთ ახლა პირველი წევრი

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f_1\left(\Delta y'-\frac{\Delta y}{Y}Y'\right)^2 dx \qquad \text{(VI)}$$

რადგან

$$\Delta y'-\frac{\Delta y}{Y}Y'=\frac{\Delta y'Y-\Delta yY'}{Y}=Y\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta y}{Y}\right)=Y\eta'$$

$\left(\eta\right.$ 'აღნიშნავს $\left.\frac{\Delta y}{Y}\right)$, ამიტომ ჩვენი ინტეგრალი ასე გადმოიწერება

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f_1\,\eta'^2\,Y^2\,dx. \qquad \text{(VII)}$$

ვისარგებლოთ ახლა უტოლობით, რომელიც ჩვენ გვქონდა წინათ გამოყვანილი (გვერდი 36):

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta^2\,dx\leqslant\frac{(x_1-x_0)^2}{\pi^2}\int_{x_0}^{x_1}\eta'^2\,dx$$

იმისათვის, რომ ეს უტოლობა შესრულდეს, საჭიროა რომ η მოისპოს წერტილებში x_0 და x_1, მაგრამ ამ გარემოებას სწორედ ექნება ადგილი, რადგან აღნიშნულ წერტილებზე $\Delta y=0$.

უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარეს მივუმატოთ ინტეგრალი $\int_{x_0}^{x_1}\eta'^2\,dx$. დავწერთ:

$$\int_{x_0}^{x_1}(\eta^2+\eta'^2)dx\leqslant\frac{\pi^2+(x_1-x_0)^2}{\pi^2}\int_{x_0}^{x_1}\eta'^2dx.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta'^2\,dx\geqslant\frac{\pi^2}{\pi^2+(x_1-x_0)^2}\int_{x_0}^{x_1}(\eta^2+\eta'^2)\,dx \qquad \text{(VIII)}.$$

განვიხილოთ ჯამი $\eta^2+\eta'^2$. გვექნება

$$\eta^2+\eta'^2=\frac{\Delta y^2}{Y^2}+\left(\frac{\Delta y'Y-\Delta yY'}{Y^2}\right)^2=\frac{\Delta y^2}{Y^2}+\frac{\Delta y^2Y'^2-2YY'\Delta y\Delta y'+\Delta y'^2\,Y^2}{Y^4}=$$

$$=\frac{\Delta y^2(Y^2+Y'^2)-2YY'\,\Delta y\Delta y'+Y^2\Delta y'^2}{Y^4} \qquad \text{(IX)}$$

უკანასკნელი გამოხატულების მრიცხველი წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას. ამ შემთხვევაში $A=Y^2+Y'^2$, $B=YY'$, $C=Y^2$, $AC-B^2=(Y^2+Y'^2)Y^2-Y^2\;Y'^2=Y^4$. ჩვენ ვხედავთ რომ A და C არიან დადებითი.

ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ (III) უტოლობა.

დავწერთ:

$$(Y^2+Y'^2)\,\Delta y^2+2YY'\,\Delta y\,\Delta y'+Y^2\,\Delta y'^2>\frac{Y^4}{Y'^2+2Y^2}\,(\Delta y^2+\Delta y'^2)$$

(IX) ტოლობის ძალით გვექნება

$$\eta^2+\eta'^2 > \frac{1}{Y'^2+2Y^2}(\Delta y^2+\Delta y'^2),$$

$\frac{1}{Y'^2+2Y^2}$ არის დადებითი, აღვნიშნოთ მისი მინიმუმი g; g იქნება დადებითი, რადგან ის არის ერთერთი მნიშვნელობა განუწყვეტელი ფუნქციის $\frac{1}{Y'^2+2Y^2}$ (ფუნქციის წყვეტის შესაძლებლობა არის იმით გამორიცხული, რომ მნიშვნელი არ ისპობა, რაც თავის მხრივ იმასთანაა დაკავშირებული რომ Jacobi-ს პირობის ძალით Y ნულისაგან განსხვავდება). გვექნება:

$$\eta^2+\eta'^2 > g(\Delta y^2+\Delta y'^2)$$

აქედან:

$$\int_{x_0}^{x_1}(\eta^2+\eta'^2)\,dx > g\int_{x_0}^{x_1}(\Delta y^2+\Delta y'^2)\,dx.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (VIII) უტოლობას, შევვიძლია დავწეროთ:

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta'^2\,dx > \frac{g\pi^2}{\pi^2+(x_1-x_0)^2}\int_{x_0}^{x_1}(\Delta y^2+\Delta y'^2)$$

ანუ, თუ $\frac{g\pi^2}{\pi^2+(x_1-x_0)^2}$, რომელიც დადებით რიცხვს წარმოადგენს, g_1-ით აღვნიშნავთ:

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta'^2\,dx > g_1\int_{x_0}^{x_1}(\Delta y^2+\Delta y'^2)\,dx$$

განვიხილოთ ახლა (VII) ინტეგრალი: $\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}f_1\,\eta'^2\,Y^2\,dx$. ვთქვათ $f_1\,Y^2$ ქვედა საზღვარი არის g_2; g_2 იქნება დადებითი, რადგან განუწყვეტელი ფუნქციაა $f_1\,Y^2$ დადებითია (Legendre-ის და Jacobi-ს პირობების ძალით). გვექნება:

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}f_1\,\eta'^2\,Y^2\,dx > H\int_{x_0}^{x_1}(\Delta y^2+\Delta y'^2)\,dx$$

სადაც H არის დადებითი რიცხვი და ტოლია $\frac{g_1\cdot g_2}{2}$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ჯამის (V) პირველი წევრის მოდული არის მეტი ვიდრე

$$H\int_{x_0}^{x_1}(\Delta y^2+\Delta y'^2)\,dx$$

მხოლოდ მეორე წევრის არის ნაკლები, ვიდრე

$$\frac{M\varepsilon'}{6}\int_{x_0}^{x_1}(\Delta y^2+\Delta y'^2)\,dx$$

აქედან ცხადია, რომ თუ ε' საკმაოდ მცირე რიცხვია, (V) ჯამს ნიშანს აძლევს პირველი წევრი, მაგრამ ეს წევრი იქნება დადებითი. ამიტომ მთელი ჯამიც იქნება დადებითი.

ამგვარად ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ΔJ არის დადებითი.

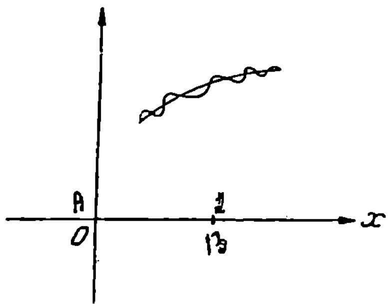
ამით ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

ლექცია X

ექსტრემალის ველი. ექსტრემალური მანძილი

წარსულ ლექციაზე დავინახეთ, რომ ექსტრემუმის სამი აუცილებელი პირობა, რომელიც ჩვენ გამოვიყვანეთ წინათ, არის სუსტი ვარიაციისათვის არა მარტო აუცილებელი, არამედ საკმარისი პირობაც. ახლა ისმება საკითხი, არიან თუ არა ეს პირობები საკმარისი იმ შემთხვევაში, როცა ძლიერი ვარიაცია გვაქვს.

ჩვენ მოვიყვანთ ერთ მაგალითს, საიდანაც დავინახავთ, რომ თუმცა მრუდი, რომელსაც მივიღებთ, სამივე პირობას აკმაყოფილებს, მაგრამ მაინც არ ანიჭებს ინტეგრალს ძლიერ ექსტრემუმს. აქედან ცხადი იქნება, რომ ძლიერი ვარიაციისათვის ჩვენი სამი პირობა საკმარისი არ არის.



ნახ. 15.

მაგალითი, რომელსაც ჩვენ მოვიყვანთ, Bolza-ს ეკუთვნის.

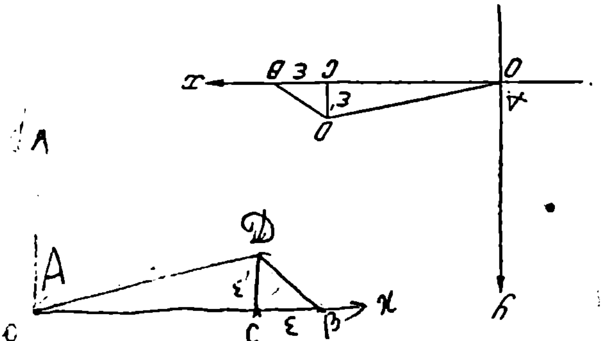
განვიხილოთ ინტეგრალი

$$J=\int_0^1 (y'^2+y'^3)\,dx \qquad (I)$$

მოვძებნოთ ექსტრემუმი, რომელიც აერთებს ორ წერტილს $A(0,0)$ და $B(1,0)$.

რადგან ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შედის მხოლოდ y' ამიტომ ექსტრემალი, როგორც ვიცით, იქნება მხოლოდ სწორი ხაზი. რადგან ახლა ეს სწორი გაივლის A და B წერტილზე, რომელთა ორდინატები ნულის ტოლია, ამიტომ ეს სწორი არის აბსცისათა ღერძი.

ვნახოთ, შესრულებულია თუ არა ჩვენი სამი პირობა. ცხადია, რომ პირველი პირობა შესრულებულია, რადგან ექსტრემალი უკვე გვაქვს. აგრეთვე შესრულებულია მესამე პირობა, რადგან, როგორც ვიცით, სწორ ხაზზე არ არსებობს საერთოდ შეუღლებული წერტილი.



ნახ. 16.

ვნახოთ ახლა შესრულებულია თუ არა Legendre-ის პირობა. ამისათვის უნდა მოვძებნოთ

$$f_1 = f_{y'y'}\left[x, y_0(x), y'_0(x)\right].$$

გვექნება:

$$f_{y'} = 2y' + 3y'^2 \quad f_{y'y'} = 2 + 6y'$$

აქედან მივიღებთ: $f_1 = 2$ (ექსტრემალი არის X ღერძი და ამიტომ $y_0(x)$ და $y_0'(x)$ ნულის ტოლია).

ჩვენ ვხედავთ, რომ $f_1 > 0$.

ამგვარად, სამივე პირობა შესრულებულია.

ვნახოთ, ახლა მოძებნილი ექსტრემალი ნამდვილად ანიჭებს თუ არა ჩვენს ინტეგრალს ძლიერ მინიმუმს. (სუსტი მინიმუმისათვის უკვე ასეთი საკითხი არ დგას, რადგან ის სამი პირობა, რომელიც საკმარის პირობას წარმოადგენს სუსტი ვარიაციისათვის, დაცულია და, მაშასადამე, ამ შემთხვევაში საკითხი უკვე გარდაწყვეტილია).

ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი შესადარებელი მრუდი. B წერტილიდან მოვზომოთ მანძილი ε მარცხნივ. მიღებული წერტილი აღვნიშნოთ C. C წერტილიდან გავიყვანოთ სწორი პარალელური Y ღერძის და ამ სწორზე მოვზომოთ მანძილი ε'. მიღებული ნაკვეთის ბოლო აღვნიშნოთ D. შევაერთოთ D წერტილი A და B წერტილებთან და განვიხილოთ შესადარებელი მრუდი ADB, რომელიც

შედგება AD და BD სწორებიდან. AD და BD სწორების განტოლებანი იქნებიან შესაბამისად

$$Y=\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}X, \quad Y=-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}(X-1)$$

დავამტკიცოთ, რომ ყოველთვის შეგვიძლია სიდიდეები ε და ε' ავიღოთ ისე, რომ ინტეგრალი J აღებული ADB მრუდზე იყოს ნაკლები, ვიდრე ინტეგრალი J აღებული AB სწორზე, ე. ი. სხვაობა $J_{ADB}-J_{AB}=\Delta J$ იყოს უარყოფითი.

მართალია მრუდი ADB არის კუთხოვანი მრუდი, მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ თუ არსებობს ისეთი კუთხოვანი მრუდი, რომ ინტეგრალი აღებული ასეთ მრუდზე არის ნაკლები, ვიდრე ინტეგრალი აღებული AB სწორზე, მაშინ ყოველთვის არსებობს ისეთი განუწყვეტელი შემხებიანი მრუდი, რომ ინტეგრალი აღებული ამ მრუდზე იქნება ნაკლები, ვიდრე ინტეგრალი აღებული AB სწორზე. ამიტომ საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ $\Delta J=J_{ADB}-J_{AB}$ არის უარყოფითი, რომ უკვე დამტკიცებულად მივიღოთ ის, რომ AB სწორი არ ანიჭებს ინტეგრალს მინიმუმს.

განვიხილოთ სხვაობა $\Delta J=J_{ADB}-J_{AB}$.

რადგან J_{AB} ნულის ტოლია (სწორისათვის AB y და y' ნულის ტოლია) ამიტომ

$$\Delta J=J_{ADB}.$$

დავწეროთ

$$J_{ADB}=J_{AD}+J_{DB}.$$

ვნახოთ რა არის J_{AD}. y' წარმოებული AD სწორისათვის ტოლია $\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}$, ამიტომ გვექნება

$$J_{AD}=\left[\frac{\varepsilon'^2}{(1-\varepsilon)^2}+\frac{\varepsilon'^3}{(1-\varepsilon)^3}\right]\int_0^{1-\varepsilon}dx=\left[\frac{\varepsilon'^2}{(1-\varepsilon)^2}+\frac{\varepsilon'^3}{(1-\varepsilon)^3}\right](1-\varepsilon)=$$

$$=\frac{\varepsilon'^2}{1-\varepsilon}+\frac{\varepsilon'^3}{(1-\varepsilon)^2}.$$

რაც შეეხება J_{DB} ინტეგრალს, იგი შემდეგნაირად გამოიხატება. (ამ შემთხვევაში $y'=-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$).

$$J_{DB}=\left(\frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2}-\frac{\varepsilon'^3}{\varepsilon^3}\right)\int_{1-\varepsilon}^{1}dx=\left(\frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2}-\frac{\varepsilon'^3}{\varepsilon^3}\right)\varepsilon=\frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon}-\frac{\varepsilon'^3}{\varepsilon^2}.$$

ამგვარად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta J=\frac{\varepsilon'^2}{1-\varepsilon}+\frac{\varepsilon'^3}{(1-\varepsilon)^2}+\frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon}-\frac{\varepsilon'^3}{\varepsilon^2}.$$

უკანასკნელი ტოლობა შეგვიძლია შემდეგნაირად გარდავქმნათ:

$$\Delta J=\varepsilon'^3\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)^3}-\frac{1}{\varepsilon^3}\right)+\varepsilon'^2\left(\frac{1}{1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\varepsilon'^3\left(\frac{1}{1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{1-\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\varepsilon'^2\left(\frac{1}{1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\varepsilon'^2\left(\frac{1}{1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left[1-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}\right]$$

ამგვარად ჩვენ მივიღებთ საბოლოოდ

$$\Delta J=\varepsilon'^3\left(\frac{1}{1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left[1-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}\right].$$

ε'^2 და $\frac{1}{1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}$ ε-ის საკმაოდ მცირე მნიშვნელობისათვის იქნება დადებითი. ამიტომ ΔJ ნიშანი დამოკიდებულია ჯამის $1-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}$ ნიშანზე, მაგრამ მცირე დადებითი სიდიდენი ε და ε' ყოველთვის შეგვიძლია ისე ავიღოთ, რომ $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ იყოს საკმაოდ დიდი.

ჯამს $1-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}$ ნიშანს მიანიჭებს წევრი $-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$, მხოლოდ რადგან ეს წევრი არის უარყოფითი, ამიტომ მთელი ჯამი იქნება უარყოფითი, და მაშასადამე, უარყოფითი იქნება აგრეთვე ΔJ.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ყოველთვის შეგვიძლია ისეთი მრუდი ADB მოვძებნოთ, რომ ინტეგრალი (I) აღებული ამ მრუდზე იყოს ნაკლები, ვიდრე ინტეგრალი აღებული AB სწორზე და, მაშასადამე, AB სწორი არ ანიჭებს ინტეგრალს მინიმუმს. მეორე მხრივ სწორი AB მივიღეთ ისე, რომ სამივე პირობა: ეილერის, ლეჟანდრის და იაკობის დაცულია. ეს გვიჩვენებს, რომ ეილერის, ლეჟანდრისა და იაკობის პირობები არ წარმოადგენენ საკმარის პირობებს მინიმუმისა იმ შემთხვევაში, როცა ძლიერი ვარიაცია გვაქვს.

ახლა ჩვენ გადავალთ ძლიერი ვარიაციის თეორიაზე.

ის ნაწილი ვარიაციათა აღრიცხვისა, რომელიც ჩვენ გავიცანით, იყო დამუშავებული უკვე Legendre-ს, Euler-ისა და Jacobi-ს მიერ, მაგრამ ამითვე თავდებოდა მათი ვარიაციული აღრიცხვა.

მათ ეგონათ, რომ ექსტრემალის სამი პირობა წარმოადგენს საკმარის პირობას იმ შემთხვევაშიაც, როცა ძლიერი ვარიაცია გვაქვს.

მხოლოდ Weierstrass-მა დაამტკიცა, რომ ეს პირობები არ არის საკმარისი ძლიერი ვარიაციისათვის და ამის შემდეგ მან განსაკუთრებული ყურადღება მიაქცია ძლიერი ვარიაციის პრობლემას. მან შექმნა მთელი თეორია ძლიერი ვარიაციისა, რომლის შესწავლაზე ჩვენ ახლა გადავდივართ.

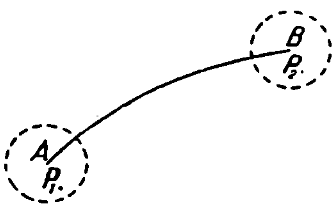
ავიღოთ ინტეგრალი

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y')\, dx \qquad \text{(II)}$$

და ვთქვათ ვეძებთ ამ ინტეგრალის მინიმუმს იმ მრუდთა შორის, რომელნიც $A(a_1, b_1)$ და $B(a_2, b_2)$ წერტილებს აერთებენ.

ვთქვათ ექსტრემალის სამივე პირობა Euler-ის, Jacobi-ს და Legendre-ის შესრულებულია ე. ი. მოვძებნეთ ექსტრემალი, შევამოწმეთ, რომ $f_1 > 0$ და ამის გარდა A და B შორის არ არის შეუღლებული წერტილი.

A და B წერტილების გარშემო შემოვწეროთ ორი წრე საკმაო მცირე რადიუსით. ავიღოთ პირველი წრეში P_1 წერტილი (x_1, y_1) კოორდინატებით და მეორე წრეში P_2 წერტილი (x_2, y_2) კოორდინატებით. დავსვათ შემდეგი პრობლემა:



ნახ. 17.

შეგვიძლია თუ არა ეს ორი წერტილი P_1 და P_2 შევაერთოთ ექსტრემალით, ე. ი. არსებობს თუ არა ექსტრემალთა ოჯახის ისეთი მრუდი, რომელიც ამ ორ წერტილს აერთებს. დავამტკიცოთ, რომ თუ ზემოთხსენებული სამივე პირობა შესრულებულია, ყოველთვის შეგვიძლია წერტილები P_1 და P_2 ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალით შევაერთოთ. ვთქვათ $y = \varphi(x, \alpha, \beta)$ არის ექსტრემალის ოჯახის განტოლება. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ α და β ისეთი მნიშვნელობანი და მხოლოდ ერთადერთი, რომ ასეთი მნიშვნელობისათვის ექსტრემალმა გაიაროს წერტილებზე P_1 და P_2.

ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ, რომ არსებობს განტოლებათა $y_1 = \varphi(x_1, \alpha, \beta)$ და $y_2 = \varphi(x_2, \alpha, \beta)$ გარდაწყვეტა α და β შესახებ.

ცხადია, რომ ამ განტოლებებს აკმაყოფილებს ცვლადების $x_1, x_2, y_1, y_2, \alpha, \beta$ მნიშვნელობათა სისტემა $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, რადგან AB მრუდი ექსტრემალთა ოჯახს ეკუთვნის. ამიტომ თანახმად ცნობილი დებულებისა, თუ აღმოვაჩენთ, რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \varphi_\alpha(x_1, \alpha, \beta), & \varphi_\beta(x_1, \alpha, \beta) \\ \varphi_\alpha(x_2, \alpha, \beta), & \varphi_\beta(x_2, \alpha, \beta) \end{vmatrix} \qquad \text{(V)}$$

განსხვავდება ნულისაგან, როცა $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, ამით დამტკიცდება, რომ (a_1, b_1, a_2, b_2) წერტილის მახლობლობაში არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი სისტემა ფუნქციებისა: $\alpha = \alpha(x_1, y_1,$

x_2, y_2), $\beta=\beta(x_1, y_1, x_2, y_2)$, რომელნიც იგივეობურად აკმაყოფილებს განტოლებებს $y_1=\varphi(x_1, \alpha, \beta)$, $y_2=\varphi(x_2, \alpha, \beta)$, და მაშასადამე, არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალი, რომელიც აერთებს P_1 და P_2 წერტილებს.

დეტერმინანტი (V) როცა $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$, ტოლია გამოთქმის

$$u(a_1)\, v(a_2)-u(a_2)\, v(a_1), \text{ ანუ, } \Omega(a_1, a_2)$$

(აქ, როგორც წინათ, $u(x)$ და $v(x)$ აღნიშნავენ შესაბამისად $\varphi_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$ და $\varphi_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$).

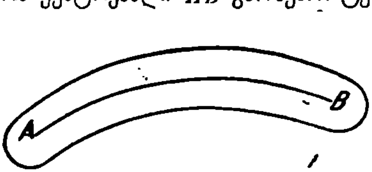
აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან, თუ B არ არის A წერტილის შეუღლებული, მაგრამ ამ გარემოებას არასდროს ადგილი არ ექნება იმ პირობების ძალით, რომელიც ჩვენ ზემოთ მივიღეთ.

ამგვარად, დამტკიცებულია, რომ სადაც არ უნდა ავიღოთ წერტილები P_1 და P_2 ჩვენს ორ წრეში, რომელთა რადიუსი საკმაოდ მცირეა, ამ წერტილებს შორის გაივლის ერთი და მხოლოდ ერთი მრუდი ექსტრემალთა ოჯახისა. ახლა ცხადია, რომ თუ ასეთივე წრეებს შემოვწერთ AB ექსტრემლის სხვა წერტილებზე, რომელნიც A და B წერტილებს შორის იმყოფებიან, ჩვენი დებულება მაშინაც დამტკიცდება. ამ წრეების რადიუსების ქვედა საზღვარი, განუწყვეტელ ფუნქციათა თვისების ძალით, ნულისაგან განსხვავებული იქნება.

ამიტომ შეგვიძლია შემდეგი დებულება გამოვთქვათ:

თუ AB ექსტრემლის გარშემო შემოვწერთ მრუდს, რომლის წერტილები დაშორებული არიან AB ექსტრემლიდან საკმაოდ მცირე მანძილით ε, მაშინ ყოველ ორ წერტილს შორის იმ არისა, რომელსაც ასეთი მრუდი შემოსაზღვრავს, გაივლის ექსტრემალთა ოჯახის ერთი და მხოლოდ ერთი მრუდი.

აღნიშნულ არეს უწოდებენ ექსტრემალის ველს და ამბობენ, რომ ექსტრემალი AB გარშემორტყმულია ველით.



ნახ. 18.

ჩვენ ზემოთ დავინახეთ, რომ შეიძლება განტოლებათა $y_1=\varphi(x_1, \alpha, \beta)$, $y_2=\varphi(x_2, \alpha, \beta)$ გარდაწყვეტა α და β შესახებ მივიღებთ $\alpha=\alpha(x_1, y_1, x_2, y_2)$ $\beta=\beta(x_1, y_1, x_2, y_2)$.

ჩავსვათ α და β ეს გამოხატულებანი ექსტრემალთა ოჯახის განტოლებაში $y=\varphi(x, \alpha, \beta)$, მივიღებთ ახალი სახის ფუნქციას

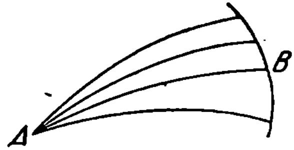
$$y=\Phi(x,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2) \qquad \text{(VI)}$$

ეს არის განტოლება ექსტრემალისა, რომელიც გაივლის P_1 და P_2 წერტილებზე. (VI) წარმოადგენს ახალ სახეს ექსტრემალთა ოჯახის განტოლებისა. ამ განტოლებიდან ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ ექსტრემალთა ყოველგვარი კერძო ოჯახი.

ვთქვათ, მაგალითად, A წერტილი არის დამაგრებული და B წერტილი მოძრაობს რომელიმე L მრუდზე. მაშინ მივიღებთ ექსტრემალთა იმ ოჯახს, რომელიც A წერტილიდან გამოდის. x_1 და y_1 იქნებიან მუდმივი და ისინი აღვნიშნოთ a_1, b_1; x_2 და y_2-სთვის გვექნება $x_2=\varphi(a)$, $y_2=\omega(a)$ (ეს გამოხატავს L მრუდის განტოლებას პარამეტრული სახით).

ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება (VI) მიიღებს სახეს $y=y\ (x,\ a)$.

ამგვარად, ჩვენ ვიპოვეთ ექსტრემალთა იმ ოჯახის განტოლება რომელიც A წერტილზე გადის. ცხადია, რომ ველის ყოველ წერტილზე შეგვიძლია A წერტილიდან გავიყვანოთ ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალი, რადგან ველში ორ წერტილზე ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალი გადის.



ნახ. 19.

შევისწავლოთ ახლა Φ ფუნქციის თვისებანი.

ფუნქცია $y=\Phi(x,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)$ შემოკლებულად აღვნიშნოთ ასეთნაირად $\Phi[x]$.

გვექნება $y_1=\Phi[x_1]$, $y_2=\Phi[x_2]$.

განვაწარმოოთ ეს ტოლობანი x_1, y_1, x_2, y_2 შესახებ. განწარმოების დროს არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ x_1, y_1, x_2, y_2 არიან ერთმანეთისაგან სრულებით დამოუკიდებელი. განწარმოება $y_1=\Phi[x_1]$ ის x_1, y_1, x_2, y_2 შესახებ მოგვცემს შესაბამისად:

$$\Phi_x[x_1]+\Phi_{x_1}[x_1]=0;\ \Phi_{y_1}[x_1]=1,\ \Phi_{x_2}[x_1]=0,\ \Phi_{y_2}[x_1]=0. \qquad \text{(VII)}$$

$y_2=\Phi[x_2]$-ის განწარმოება მოგვცემს:

$$\Phi_x[x_2]+\Phi_{x_2}[x_2]=0,\ \Phi_{y_2}[x_2]=1.\ \Phi_{x_1}[x_2]=0,\ \Phi_{y_1}[x_2]=0. \qquad \text{(VIII)}$$

აღვნიშნოთ $\Phi_x[x]=p[x]$ მაშინ $\Phi_x[x_1]=p[x_1]$, $\Phi_x[x_2]=p[x_2]$. $p[x_1]$ და $p[x_2]$ ნაცვლად სიმოკლისათვის დავწეროთ p_1 და p_2. (VII)-ის პირველი ტოლობის ძალით გვექნება

$$\Phi_{x_1}[x_1]=-p_1 \qquad \text{(IX)}$$

აგრეთვე (VIII)-ს პირველი ტოლობა მოგვცემს

$$\Phi_{x_2}[x_2]=-p_2 \qquad \text{(X)}$$

ავიღოთ ახლა ექსტრემალი

$$y=\Phi(x,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)=\Phi[x]$$

და განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, \Phi[x], \Phi_x[x])\,dx$$ აღებული P_1 P_2 ექსტრემალზე.

ეს ინტეგრალი წარმოადგენს ოთხი ცვლადის x_1, y_1, x_2, y_2 ფუნქციას. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $J(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)$. ამ ფუნქციას ეწოდება ექსტრემალური მანძილი P_1 და P_2 შორის.

განვაწარმოოთ ახლა ფუნქცია x_1-ის შესახებ.

თანახმად ცნობილი ფორმულისა ინტეგრალის განწარმოებისა პარამეტრის შესახებ (ამ შემთხვევაში პარამეტრი x_1 შედის როგორც ინტეგრალის ქვეშ, ისე ზედა საზღვარზე), გვექნება:

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}=-f(x_1,\ y_1,\ p_1)+\int_{x_1}^{x_2}\{f_y\Phi_{x_1}[x]+f_{y'}\Phi_{xx_1}[x]\}\,dx \quad \text{(XI)}$$

ინტეგრალი $\int_{x_1}^{x_2} f_{y'}\Phi_{xx_1}[x]\,dx$, ნაწილობრივ ინტეგრაციის წესის ძალით, შემდეგნაირად შეგვიძლია გარდავქმნათ:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{y'}\Phi_{xx_1}[x]\,dx=\{f_{y'}\Phi_{x_1}[x]\}_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\Phi_{x_1}\frac{d}{dx}(f_{y'})\,dx$$

ვნახოთ ახლა რას წარმოადგენს $\{f_{y'}\Phi_{x_1}[x]\}_{x_1}^{x_2}$

დავწერთ:

$$\{f_{y'}\Phi_{x_1}[x]\}_{x_1}^{x_2}=f_{y'}(x_2,\ y_2,\ p_2)\ \Phi_{x_1}[x_2]-f_{y'}(x_1,\ y_1,\ p_1)\Phi_{x_1}[x_1].$$

მაგრამ ჩვენ უკვე ვიცით, რომ $\Phi_{x_1}[x_2]=0$ და $\Phi_{x_1}[x_1]=-p_1$ ამიტომ

$$\{f_{y'}\Phi_{x_1}[x]\}_{x_1}^{x_2}=p_1\ f_{y'}(x_1,\ y_1,\ p_1).$$

(XI) შემდეგნაირად გადმოიწერება:

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}=-f(x_1,\ y_1,\ p_1)+p_1\ f_{y'}(x_1, y_1, p_1)+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left(f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})\right)\Phi_{x_1}[x]\,dx$$

უკანასკნელი ინტეგრალის ქვეშ მოთავსებული გამოხატულება წარმოადგენს ეილერის დიფერენციალური განტოლების $f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0$ მარცხენა მხარეს, მხოლოდ, რადგან f_y და $f_{y'}$ ფუნქციების ქვეშ y მაგივრად ჩასმული გვაქვს $\Phi[x]$, რაც ეილერის განტოლების ინტეგრალს წარმოადგენს, ამიტომ $f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}$ იგივეობურად ნულის ტოლია.

გვექნება: $$\frac{\partial J}{\partial x_1}=-f(x_1, y_1, p_1)+p_1 f_y'(x_1, y_1, p_1) \tag{XII}$$

სრულებით ასეთივე წესით მივიღებთ:

$$\frac{\partial J}{\partial y_1}=-f_y'(x_1, y_1, p_1) \tag{XIII}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_2}=f(x_2, y_2, p_2)-p_2 f_y'(x_2, y_2, p_2) \tag{XIV}$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_2}=f_y'(x_2, y_2, p_2) \tag{XV}$$

ეს უკანასკნელი ოთხი ფორმულა მეტად მნიშვნელოვანია ვარიაციათა აღრიცხვაში.

მიღებული ფორმულებიდან ჩვენ შეგვიძლია ერთი შედეგი გამოვიყვანოთ.

თუ მხედველობაში მივიღებთ Schwarz-ის თეორემას, ეს ტოლობანი მოგვცემენ:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}[f(x_1, y_1, p_1)-p_1 f_y'(x_1, y_1, p_1)]=\frac{\partial}{\partial x_1}[f_y'(x_1, y_1, p_1)]$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}[f(x_2, y_2, p_2)-p_2 f_y'(x_2, y_2, p_2)]=\frac{\partial}{\partial x_2}[f_y'(x_2, y_2, p_2)]$$

საერთოდ ველში ჩვენ გვაქვს ასეთი ტოლობა:

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y, p)-p f_y'(x, y, p)]=\frac{\partial}{\partial x}[f_y'(x, y, p)] \tag{XVI}$$

ესეც მეტად მნიშვნელოვანი ტოლობაა.

ჩვენ უნდა გვახსოვდეს, რომ (XVI) ფორმულაში f-ის არგუმენტებში x და y არიან დამოუკიდებელნი, მხოლოდ p არის მათი ფუნქცია და ტოლია $\Phi_x[x]$.

განვიხილოთ ახლა ერთ წერტილზე გამავალ ექსტრემალთა ოჯახის შემთხვევა. როგორც ვიცით, ამ ოჯახის განტოლება გამოიხატება შემდეგნაირად $y=y(x, a)$; p-თვის გვექნება $p=y_x(x, a)$. განტოლებიდან $y=y(x, a)$ გვექნება $a=a(x, y)$. ამიტომ p წარმოადგენს x და y ფუნქციას $p=p(x, y)$. (XVI) თანასწორობა მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial}{\partial y}(f-p(x, y) f_y')=\frac{\partial}{\partial x} f_y'.$$

ლექცია XI

ექსტრემუმის მეორე აუცილებელი პირობა. Weierstrass-ის ფუნქცია.

დავუბრუნდეთ კვლავ ექსტრემალურ მანძილს.

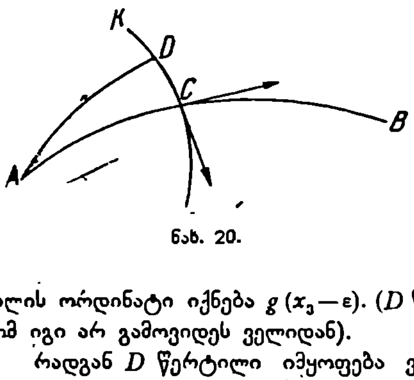
ვთქვათ A წერტილის კოორდინატები არიან x_1, y_1 და B წერტილის კოორდინატები x_2, y_2. დავამაგროთ A წერტილი და ვამო-

ძრაოთ მხოლოდ ბოლო წერტილი. ექსტრემალური მანძილი $J(x_1, y_1, x_2, y_2)$ წარმოადგენს ამ შემთხვევაში მხოლოდ x_2, y_2 ფუნქციას, რადგან A წერტილის კოორდინატები x_1, y_1 არიან მუდმივი. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $J(x_2, y_2)$.

აღვნიშნოთ ბოლო წერტილის ცვალებადი კოორდინატები x_2, y_2-ის მაგივრად x და y, მაშინ ინტეგრალი $\int_{x_1}^{x} f(x, y, y')\,dx$ აღებული ექსტრემალზე AC (C რომელიმე მდებარეობაა ბოლო წერტილის) იქნება $J(x, y)$.

კერძოდ ინტეგრალი აღებული ექსტრემალზე AB იქნება $J(x_2, y_2)$.

განვიხილოთ AB ექსტრემალზე რომელიმე C წერტილი, მოთავსებული A და B წერტილებს შორის. C წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_3, y_3. ამ წერტილიდან გავიყვანოთ ნებსითი K მრუდი, რომლის განტოლება იყოს $y=g(x)$



ნახ. 20.

თავისთავად ცხადია, რომ $g(x_3)=y_3$, რადგან $g(x)$ მრუდი C წერტილზე გადის. ავიღოთ K მრუდზე C წერტილის მახლობლად რომელიმე D წერტილი, რომლის აბსცისი არის x_3-ზე ნაკლები. აღვნიშნოთ ეს აბსცისი $x_3-\varepsilon$ (ε დადებითი რიცხვია). ამ წერტილის ორდინატი იქნება $g(x_3-\varepsilon)$. (D წერტილი ისე უნდა ავიღოთ, რომ იგი არ გამოვიდეს ველიდან).

რადგან D წერტილი იმყოფება ველში, შეიძლება A და D წერტილი შევაერთოთ ერთი ექსტრემალით. როგორც შესადარებელი მრუდი, ავიღოთ მრუდი $ADCB$. თუ ექსტრემალი AB მინიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს $J=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$, მაშინ

$$J_{ADCB}-J_{AB}>0,$$

ანუ,

$$J_{AD}+J_{DC}-J_{AC}>0 \qquad (1).$$

ეს არის ის პირობა, რომელიც უნდა იყოს შესრულებული, თუ ექსტრემალი AB მინიმუმს ანიჭებს ინტეგრალს.

შესადარებელი $ADCB$ მრუდი იძლევა AB ექსტრემალთან ძლიერ ვარიაციას, რადგან K მრუდი ჩვენ გავიყვანეთ სრულებით ნებსითად.

განვიხილოთ (1) უტოლობის მარცხენა მხარეზე მყოფი ჯამი.

ამ ჯამის პირველი და მესამე წევრი წარმოადგენს ინტეგრალს აღებულს ექსტრემლებზე, რომელნიც გადიან A წერტილზე და თანახმად ზემოთნათქვამისა ეტოლებიან შესაბამისად $J(x_3-\varepsilon,\ g(x_3-\varepsilon))$ და $J(x_3,\ y_3)$.

რაც შეეხება წევრს J_{DC}, იგი უბრალოდ წარმოადგენს ინტეგრალს

$$\int_{x_3-\varepsilon}^{x_3} f[x,\ g(x),\ g'(x)]\,dx.$$

(1) უტოლობა ასე გადმოიწერება:

$$J(x_3-\varepsilon,\ g(x_3-\varepsilon))+\int_{x_3-\varepsilon}^{x_3} f[x,\ g(x), g'(x)]\,dx-J(x_3,\ y_3)>0.$$

მარცხენა მხარეზე მყოფი გამოხატულება წარმოადგენს ε-ს ფუნქციას. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $\psi(\varepsilon)$. დავშალოთ ეს $\psi(\varepsilon)$ ფუნქცია Taylor-ის მწკრივად:

$$\psi(\varepsilon)=\psi(0)+\varepsilon\,\psi'(0)+\frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}\,\psi''(0)+\ldots$$

აქ $\psi(0)=0$ (როცა $\varepsilon=0$, მაშინ D წერტილი C წერტილს ერთვის და $J(x_3-\varepsilon,\ g(x_3-\varepsilon))=J(x_3,\ y_3)$). რადგან ε არის საკმაოდ მცირე სიდიდე, ამიტომ იმისათვის, რომ $\psi(\varepsilon)$ დადებითი იყოს, აუცილებელია, რომ $\psi'(0)\geqslant 0$.

ვნახოთ ახლა რას წარმოადგენს $\psi'(0)$. ამისათვის ვიპოვოთ ჯერ $\psi'(\varepsilon)$. დავწეროთ:

$$\psi'(\varepsilon)=\frac{\partial J}{\partial x_3}+\frac{\partial J}{\partial y_3}\,g'(x_3-\varepsilon)+f\left(x_3-\varepsilon,\ g(x_3-\varepsilon), g'(x_3-\varepsilon)\right)$$

ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში $\frac{\partial J}{\partial x_3}$ და $\frac{\partial J}{\partial y_3}$-ის გამოხატულებებს, რომელიც წინა ლექციაზე გამოვიყვანეთ, და აგრეთვე იმ გარემოებას, რომ, როცა $\varepsilon=0$, მაშინ წერტილი D ერთვის C წერტილს და AD მრუდი AC მრუდს (ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ ველის ორ წერტილს შორის შეგვიძლია გავიყვანოთ მხოლოდ ერთი ექსტრემალი) და, მაშასადამე, ერთვიან ერთმანეთს აგრეთვე ამ მრუდების მხებიც, შეგვიძლია დავწეროთ (ძირს ჩვენ AB მრუდის მხების კუთხის tg C წერტილზე აღვნიშნავთ y'_3 და K მრუდის მხების tg იმავე C წერტილზე აღვნიშნავთ $\tilde{y}'_3$):

$$\psi'(0)=-f(x_3,\ y_3,\ y'_3)+y'_3 f_{y'}(x_3,\ y_3,\ y'_3)-f_{y'}(x_3,\ y_3,\ y'_3)\tilde{y}'_3+$$

$+f(x_3,\ y_3, \tilde{y}'_3)$, (1) უტოლობის შესრულებას მოსდევს ის, რომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე იყოს $\geqslant$ ნულზე.

ამგვარად მეოთხე აუცილებელი პირობა იმისა, რომ AB ანიჭებდეს ინტეგრალს ძლიერ მინიმუმს, იმასში მდგომარეობს, რომ ყოველი მრუდისათვის, რომელიც გაივლის A და B წერტილებს შორის გაყვანილი ექსტრემალის ნებსით წერტილებზე, დაცული იყოს შემდეგი უტოლობა:

$$-f(x_3, y_3, y'_3)+y'_3 f_{y'}(x_3, y_3, y'_3)-f_{y'}(x_3, y_3, y'_3)\cdot \tilde{y}'_3+$$
$$+f(x_3, y_3, \tilde{y}'_3)\geqslant 0, \qquad (2)$$

ანუ,

$$f(x_3, y_3, \tilde{y}'_3)-f(x_3, y_3, y'_3)-(\tilde{y}'_3-y'_3)\, f_{y'}(x_3, y_3, y'_3)\geqslant 0$$

ეს პირობა გამოიყვანა Weierstrass-მა 1879 წ.

ფუნქცია:

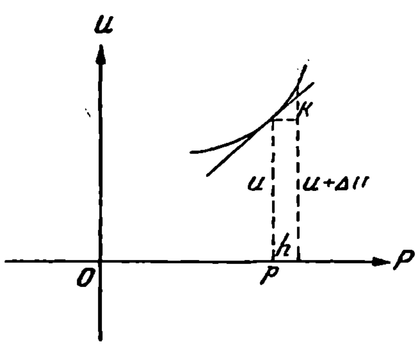
$$f(x_3, y_3, \tilde{y}'_3)-f(x_3, y_3, y'_3)-(\tilde{y}'_3-y'_3)\, f_{y'}(x_3, y_3, y'_3)$$

Weierstrass-მა აღნიშნა სიმბოლოთი $E(x_3, y_3, y'_3, \tilde{y}'_3)$.

Weierstrass-ის პირობა შემდეგნაირად დაიწერება:

$$E(x_3, y_3, y'_3, \tilde{y}'_3)\geqslant 0.$$

გადავიდეთ ახლა ამ პირობის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე. ავიღოთ ინტეგრალი $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$ და განტოლება $u=f(x,y,p)$; ვთქვათ p ასრულებს დამოუკიდებელ ცვლადის როლს, და x და y ასრულებენ პარამეტრის როლს. განტოლება $u=f(x, y, p)$ გამოხატავს ერთ მრუდს და ყოველ x, y წერტილს თავისი მრუდი ეთანადება.



ნახ. 21.

ავიღოთ მრუდის რომელიმე წერტილი და ამ წერტილზე გავიყვანოთ მხები. ამ მხების კუთხითი კოეფიციენტი იქნება

$$\frac{du}{dp}=f_p(x, y, p).$$

მივცეთ p-ს ნაზრდი Δp, მაშინ u მიიღებს ნაზრდს Δu. ჩვენი მხები გადაკვეთს ახალ ორდინატს K წერტილში. ორდინატის ის ნაწილი, რომელიც

ამ წერტილსა და მრუდს შორის იმყოფება აღვნიშნოთ δ. როგორც ცნობილია:

$$\delta=\frac{\Delta p^2}{1\cdot 2} f_{pp}\ (x,\ y,\ p)+\ldots$$

თუ $f_{pp}\ (x,\ y,\ p)$ არის დადებითი, მაშინ δ-ც იქნება დადებითი, და ამ შემთხვევაში მრუდი ამოზნექილია P ღერძის მხრივ. თუ $f_{pp}\ (x, y, p)$ უარყოფითია, მაშინ უარყოფითია აგრეთვე δ-ც და მრუდი ჩაზნექილია P ღერძის მხრივ.

ახლა ჩვენთვის ცხადია, თუ როგორი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს პირობას $f_{y'y'}(x,\ y,\ p)>0$. (აქ y' ჩვენ აღვნიშნეთ p-თი).

ამ შემთხვევაში მრუდი, რომელსაც $u=f(x,\ y,\ p)$ განტოლება იძლევა და რომელსაც ფიგურატივი ეწოდება, ამოზნექილია P ღერძის მხრივ.

როცა გვაქვს $f'_{y'y'}<0$, მაშინ ფიგურატივი ჩაზნექილია P ღერძის მხრივ.

როცა ვცვლით x და y ჩვენ მივიღებთ სხვადასხვა მრუდებს. თუ $f_{y'y'}$ ყოველთვის მეტია ან და ყოველთვის ნაკლებია ნულზე ყველა ფიგურატივები იქნებიან მათი მხების ერთ მხარეზე. ასეთია Legendre-ის პირობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

დავუბრუნდეთ ახლა ისევ Weierstrass-ის პირობას.

Taylor-ის ფორმულის ძალით გვექნება

$$f(x,\ y, \overline{y}')-f(x,\ y,\ y')=(\overline{y}'-y')\ f_{y'}\ (x,\ y,\ y')+$$

$$+\frac{(\overline{y}'-y')^2}{2} f_{y'y'}(x,\ y,\ p^*),\ \text{სადაც}$$

$$p^*=y'+\theta\ \ (\overline{y}'-y')\quad (0<\theta<1).$$

დავწეროთ (ძირს ჩვენ y' მაგივრად ვწეროთ p)

$$E\,(x,\ y,\ p,\ \overline{y}')=(\overline{y}'-y')\, f_{y'}\ (x,\ y,\ y')+\frac{(\overline{y}'-y')^2}{2} f_{y'y'}(x,\ y,\ p^*)-$$

$$-(\overline{y}'-y')\ f_{y'}\ (x,\ y,\ y')=\frac{(\overline{y}'-y')^2}{2} f_{y'y'}\,(x,\ y,\ p^*).$$

Weierstrass-ის პირობას შეგვიძლია მივცეთ სახე:

$$f_{y'y'}(x,\ y,\ p^*)\geqslant 0$$

Legendre-ის პირობა გამომდინარეობს ამ პირობიდან.

მართლაც, ზემოთ მიღებული ტოლობა მოგვცემს:

$$\lim_{\overline{y}'=y'} \frac{E\,(x,\ y,\ p,\overline{y}')}{\left(\overline{y}'-y'\right)^2}=\lim \frac{1}{2} f_{y'y'}\ \ (x,\ y,\ p^*)=\frac{1}{2} f_{y'y'}\,(x,\ y,\ p).$$

აქედან ჩვენ ვხედავთ, რომ უტოლობას $E(x, y, p, \bar{y}') \geqslant 0$ მოსდევს უტოლობა $f_{y'y'}(x, y, p) \geqslant 0$. ეს უკანასკნელი კი სწორედ Legendre-ის პირობას წარმოადგენს.

ლექცია XII.

ექსტრემუმის საკმარისი პირობა.

წინა ლექციაზე ჩვენ გამოვიყვანეთ ექსტრემალის მეოთხე (Weierstrass-ის) აუცილებელი პირობა, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ ფუნქციას $E(x, y, p, \bar{p},)$, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს:

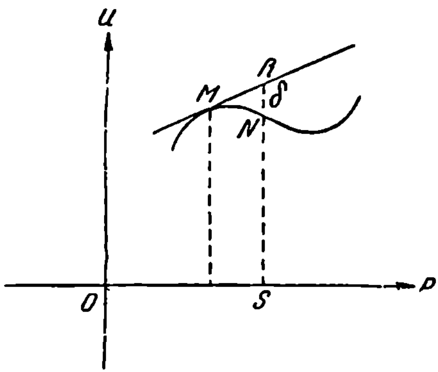
$$E(x, y, p, \bar{p}) = f(x, y, \bar{p}) - f(x, y, p) - (\bar{p} - p) f_{y'}(x, y, p) =$$

$$= \frac{(\bar{p} - p)^2}{2} f_{y'y'}(x, y, p^*) \qquad (1)$$

იყოს ნულზე მეტი.

მოვიყვანოთ ახლა ამ პირობის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას. ავიღოთ ფიგურატივი, რომლის განტოლება არის $u = f(x, y, p)$, სადაც დამოუკიდებელი ცვალებადი არის p, მხოლოდ x და y ასრულებენ პარამეტრის როლს.

გავიყვანოთ ფიგურატივის რომელიმე M წერტილზე მხები.



ნახ 22.

შემდეგ ავიღოთ M წერტილის მეზობელი N წერტილი და ამ წერტილზე გავიყვანოთ სწორი პარალელური U ღერძისა. ვთქვათ ეს სწორი გადაკვეთს მხებს R წერტილში. მანძილი RN აღვნიშნოთ δ.

მხების განტოლება იქნება:

$$U - u = f_{y'}(x, y, p)(P - p),$$

სადაც u და p არიან M წერტილის კოორტინატები, მხოლოდ U და P მხების წარმდინარე კოორდინატები.

ვთქვათ ახლა R წერტილის აბსცისა არის $\bar{p}$, მაშინ RS იქნება

$$f(x, y, p) + (\bar{p} - p) f_{y'}(x, y, p).$$

მოვძებნოთ ახლა NS. დავწეროთ $NS = f(x, y, \bar{p})$.

სხვაობისათვის $NS-RS$ გვექნება შემდეგი გამოხატულება:

$$NS-RS=f(x, y, \bar{p})-f(x, y, p)-(\bar{p}-p) f_y'(x, y, p)$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას შევადარებთ (I)-ს, მივიღებთ

$$NS-RS=E(x, y, p, \bar{p}),$$

ანუ,

$$\delta=E(x, y, p, \bar{p}).$$

როცა დაცულია Weierstrass-ის პირობა $E(x, y, p, \bar{p})>0$, მაშინ δ მანძილი იქნება დადებითი და ამ შემთხვევაში ფიგურატივი უნდა იყოს ჩვენი მხების ზემოთ.

ასეთი მდგომარეობა ეთანადება მინიმუმს. როდესაც გვაქვს მაქსიმუმი, ფიგურატივი უნდა იყოს მხების ქვემოთ (ჩვენი ნახაზი მაქსიმუმის შემთხვევას გამოხატავს).

ასეთია გეომეტრიული ინტერპრეტაცია Weierstrass-ის პირობისა.

ავიღოთ ისევ ჩვენი წერტილები A და B და შევაერთოთ ისინი ექსტრემალით. ვთქვათ ექსტრემალის განტოლება არის

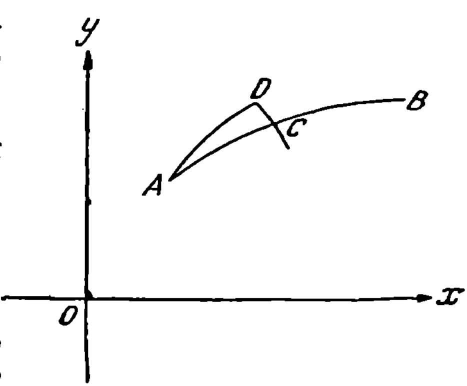
$$y=y_0(x)$$

მინიმუმის მეოთხე (Weierstrass-ის) აუცილებელი პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$E(x, y_0(x), y'_0(x), \bar{p})>0$$

x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის x_1 და x_2 შორის: $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ (x_1 და x_2 არიან შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისები) და $\bar{p}$ ყოველი მნიშვნელობისათვის $-\infty$ და $+\infty$ შორის.

ავიღოთ რომელიმე C წერტილი AB ექსტრემალზე. ვთქვათ, მისი აბსცისი არის x_0. ამ წერტილზე გავიყვანოთ ნებსითი მრუდი, რომლის მხების კუთხის tg ავღნიშნოთ $\bar{p}$ და ამ მრუდზე ავიღოთ წერტილიD, მოთავსებული ველის შიგნით. წერტილები A და D შევაერთოთ ექსტრემალით. როგორც ვიცით ასეთი ექსტრემალი არის ერთადერთი.



ნახ. 23.

ჩვენ წინათ დავინახეთ, რომ თუ შესადარებელ მრუდათ მივიღებთ $ADCB$ მაშინ ვარიაციისათვის ΔJ გვექნება

$$\Delta J = E(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x), \bar{p}) \cdot \varepsilon$$

— უსასრულოდ მცირე უმაღლესი რიგისა. აქედან ჩვენ გამოვიყვანეთ ძლიერი ვარიაციის მეოთხე აუცილებელი პირობა.

განვიხილოთ ახლა რომელიმე შესადარებელი მრუდი, რომელიც ძლიერ ვარიაციას წარმოადგენს.

ეს მრუდი აღვნიშნოთ მ. ექსტრემალი, როგორც წინათ, აღვნიშნოთ $\mathfrak{e}_0$. $\mathfrak{e}_0$ და მ მრუდების განტოლებანი აღვნიშნოთ შესაბამისად $y = y_0(x)$ და $y = \bar{y}(x)$.

იმისათვის, რომ $\mathfrak{e}_0$ ექსტრემალი ანიჭებდეს ინტეგრალს ძლიერ ექსტრემალს, ინტეგრალის ვარიაცია ΔJ უნდა იყოს მეტი ნულზე.

ვნახოთ რას წარმოადგენს ΔJ.

დავწეროთ:

$$\Delta J = J_{მ} - J_{\mathfrak{e}_0} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0(x), y_0'(x))dx$$

აქ ჩვენ გვაქვს ორ ინტეგრალთა სხვაობა.

პირველი ინტეგრალი აღებულია მრუდზე მ, მეორე — ექსტრემალზე $\mathfrak{e}_0$. ახლა დავსვათ შემდეგი პრობლემა: შესაძლებელია თუ არა ეს სხვაობა წარმოვადგინოთ ერთი ინტეგრალის სახით, რომელიც აღებულია ერთსადაიმავე შესადარებელ მ მრუდზე.

ვთქვათ AB ექსტრემალი გარშემორტყმულია ველით.

დავამაგროთ ახლა დასაბამი წერტილი A. მაშინ ექსტრემალური მანძილი წარმოადგენს ბოლო წერტილის B კოორდინატების ფუნქციას. ბოლო წერტილის ცვალებადი კოორდინატები აღვნიშნოთ x_2, y_2-ის მაგივრად x და y-ით. ამგვარად ექსტრემალური მანძილი J წარმოადგენს x და y ფუნქციას: $J(x_1, y_1, x, y)$, (x_1 და y_1 არიან მუდმივი და წარმოადგენენ A წერტილის კოორდინატებს). ავიღოთ ველში რომელიმე წერტილი $P(x, y)$. A წერტილიდან P—მდე აღებული ინტეგრალის მნიშვნელობა იქნება

$$J(x_1, y_1, x, y).$$

აღვნიშნოთ

$$J(x_1, y_1, x, y) = w(x, y)$$

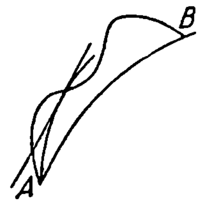
ჩვენ ვიცით, რომ

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x, y, p) - p\, f_y'(x, y, p),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y'(x, y, p).$$

p არის x და y ფუნქცია: $p = p(x, y)$

(მართლაც, როგორც ჩვენ ვიცით, ყოველ ორ წერტილს შორის ველში შეიძლება გავიყვანოთ ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალი. და ყოველი P წერტილისათვის გვექნება ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალი, რომელიც აერთებს ამ წერტილს A წერტილთან. მაშასადამე, ამ ექსტრემალზე გვექნება P წერტილის ერთი მხები. ყოველ P (x, y) წერტილს შეესაბამება ერთი მხები და, ამგვარად, ამ მხების კუთხის tg, ანუ, p წარმოადგენს P წერტილის კოორდინატების x, y ფუნქციას:



ნახ. 24.

$$p=p\ (x,\ y)).$$

ექსტრემალური მანძილი $მ_0$ ექსტრემალისათვის იქნება $w\,(x_2, y_2)$.

მივმართოთ ახლა შემდეგ ხელოვნურ ხერხს:

გამოვაკლოთ $w\,(x_2,y_2)$-ს $w\,(x_1, y_1)$. ამით არაფერი არ შეიცვლება, რადგან $w\,(x_1, y_1)$ არის ნული. ამგვარად, ექსტრემალური მანძილი $მ_0$ ექსტრემალისათვის შეგვიძლია გამოვხატოთ როგორც: $w\,(x_2, y_2)-w\,(x_1, y_1)$.

ახლა ეს სხვაობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ინტეგრალის სახით:

$$w\,(x_2, y_2)-w\,(x_1, y_1)=\int_{x_1}^{x_2} dw\,(x, y), \qquad (ა).$$

ინტეგრალის ქვეშ მყოფი გამოხატულება შემდეგნაირად გარდავქმნად:

$$dw\,(x, y)=\frac{\partial w}{\partial x}\,dx+\frac{\partial w}{\partial y}\,dy,$$

ანუ, რადგან y არის x-ის ფუნქცია:

$$dw\,(x, y)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}+y'\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx.$$

ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ ინტეგრალი აღებული უკანასკნელი გამოხატულებიდან დამოუკიდებელია იმ გზიდან, რომლითაც ინტეგრალს ვიღებთ და ყოველი ასეთი გზა ინტეგრალისათვის ერთსადაიმავე შედეგს მოგვცემს.

ასეთ გზად ავიღოთ მ მრუდი. თუ გავიხსენებთ $\frac{\partial w}{\partial x}$ და $\frac{\partial w}{\partial y}$ გამოხატულებებს, რომელიც ზემოთაა დაწერილი, (ა) ინტეგრალისათვის შემდეგ მნიშვნელობას მივიღებთ:

$$\int_{x_1}^{x_2}[f\,(x, \bar{y}, p\,(x, \bar{y}))-p\,(x, \bar{y})\,f_y'\,(x, \bar{y}, p\,(x, \bar{y}))+$$

$$+\bar{y}'\,(x)\,f_{y'}'\,(x, \bar{y}, p\,(x, \bar{y}))]\,dx.$$

ეს არის ინტეგრალი J აღებული $მ_0$ მრუდზე ე. ი. $J_{მ_0}$.

ΔJ შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2}[f(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))-f(x,\bar{y},p(x,\bar{y}))-$$
$$-(\bar{y}'(x)-p(x,\bar{y}))\,f_{y'}'(x,\bar{y},p(x,\bar{y}))]\,dx$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ΔJ გამოხატულია ერთი ინტეგრალით, რომელიც აღებულია მ მრუდზე.

ახლა ადვილად შევამჩნევთ, რომ ინტეგრალის ქვეშ მყოფი გამოხატულება წარმოადგენს ფუნქციას $E[x,\bar{y}(x),\ p(x,\bar{y}),\ \bar{y}'(x)]$.

ამგვარად დავწერთ:

$$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2}E[x,\bar{y}(x),p(x,\bar{y}),\bar{y}'(x)]\,dx.$$

ეს ფორმულა კიდევ ასე დაიწერება:

$$\Delta J=\int_{მ}E(x,y,p(x,y),y')\,dx.$$

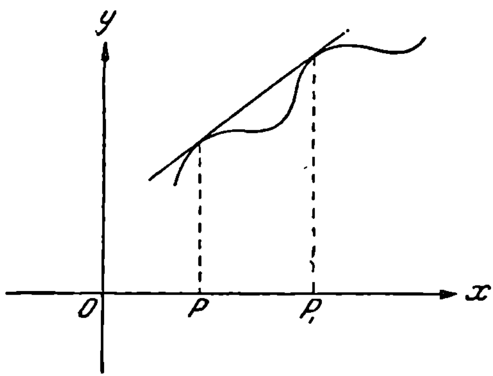
დავუბრუნდეთ ახლა ისევ ფუნქციას:

$$E(x,y,p,\bar{p})=f(x,y,\bar{p})-f(x,y,p)-(\bar{p}-p)f_{y'}'(x,y,p).$$

როცა $\bar{p}=p$, მაშინ $E(x,y,p,\bar{p})=0$, როგორიც არ უნდა იყოს x და y.

E ფუნქციის ასეთ მოსპობას ჩვეულებრივი მოსპობა ეწოდება.

მაგრამ შესაძლებელია E ფუნქცია მოისპოს რომელიმე მნიშვნელობისათვის p_1, რომელიც p-გან განსხვავდება.



ნახ. 25.

მაშინ ამბობენ, რომ E ფუნქციის მოსპობა არ არის ჩვეულებრივი. ამ არაჩვეულებრივ მოსპობას შემდეგი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს.

გავიყვანოთ ფიგურატივი და ამ ფიგურატივიზე ავიღოთ რომელიმე წერტილი აბსცისით p. ვთქვათ ახლა არსებობს ფიგურატივის მეორე წერტილი აბსცისით p_1, ისეთი რომ ფიგურატივის მხები გაყვანილი პირველ წერტილზე ეხება ფიგურატივის მეორე წერტილზედაც.

ამ მეორე წერტილზეც ფუნქცია იქნება ნული.

ამგვარად იმისათვის, რომ არსებობდეს არა ჩვეულებრივი მოსპობა, საჭიროა რომ ფიგურატივის მხები ორჯერ მაინც ეხებოდეს მრუდს.

გამოვიყვანოთ ახლა ძლიერი ვარიაციის საკმარისი პირობა. ჩვენ ზემოთ მივიღეთ:

$$\Delta J=\int_a^b E(x, y, p(x, y), y')\, dx.$$

თუ ფუნქცია $E(x, y, p(x, y)\, y')$ არის მეტი ნულზე, მაშინ ინტეგრალიც იქნება დადებითი და დადებითი იქნება აგრეთვე ΔJ.

ჩვენ ვხედავთ, რომ პირობა, ფუნქცია $E(x, y, p(x, y), y')$ ველის ყოველი წერტილისათვის და y'-ის ყოველი სასრული მნიშვნელობისათვის იყოს დადებითი, წარმოადგენს საკმარის პირობას ექსტრემუმისათვის.

თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ ΔJ იქნება ყოველთვის დადებითი და მაშასადამე, გვექნება ექსტრემუმი. მაგრამ ეს პირობა სრულებით არ არის აუცილებელი. შესაძლებელია ექსტრემუმი იყოს და ამავე დროს ეს პირობა შესრულებული არ იყოს.

ეს ცხადია იქიდან, რომ იმისათვის, რომ ინტეგრალი იყოს დადებითი არ არის აუცილებელი, რომ ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქცია ყოველთვის იყოს დადებითი.

ახლა ისმება საკითხი ექსტრემუმის ისეთი პირობის შესახებ, რომელიც ერთსა და იმავე დროს ექსტრემუმის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს.

ასეთი პირობა ჯერჯერობით გამოყვანილი არ არის. თვით ის საკმარისი პირობა, რომელიც ჩვენ ზემოთ გამოვიყვანეთ და რომელიც ჯერჯერობით ერთადერთი ცნობილი საკმარისი პირობაა, დიდ ნაკლს შეიცავს. ის, თუ შეიძლება ასე ითქვას, არის მეტად საკმარისი პირობა. უდიდესი ნაწილი იმ შემთხვევებისა, როდესაც არსებობს ექსტრემუმი, ამ პირობის გარეშე რჩება.

პირობა $E[x, y, p[x, y), y']>O$ კიდევ სხვა სახით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ.

ჩვენ ვიცით რომ:

$$E[x, y, p(x, y), \bar{p}]=\frac{(\bar{p}-p)^2}{2} f_{y'y'}(x, y, p^*).$$

$E[x, y, p(x, y), \bar{p})$ იქნება დადებითი, თუ დადებითია $f_{y'y'}(x, y, p^*)$.

ამ გზით ჩვენ მივიღებთ შემდეგ ექსტრემუმის საკმარის პირობას:

$$f_{y'y'}(x, y, \bar{p})$$

მთელ ველში უნდა იყოს დადებითი.

განვიხილოთ ახლა მაგალითი.

ავიღოთ პრობლემა ბრუნვითი ზედაპირის უმცირესი არისა.

როგორც ვიცით, ეს პრობლემა მიიყვანება ინტეგრალის

$$\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

მინიმუმის ძიებნაზე (y არის დადებითი).

ვნახოთ არის თუ არა ამ შემთხვევაში დაცული ექსტრემუმის საკმარისი პირობა: $f_{y'y'}(x, y, \bar{p}) > O$.

გვექნება:

$$f_{y'}=\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$f_{y'y'}=\frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ამგვარად, მივიღებთ:

$$f_{y'y'}(x, y, \bar{p})=\frac{y}{(1+\bar{p}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

რადგან y არის დადებითი, ამიტომ $f_{y'y'}(x, y, \bar{p})$ იქნება დადებითი როგორიც არ უნდა იყოს $\bar{p}$.

მაშასადამე, ექსტრემუმის საკმარისი პირობა შესრულებულია.

ჩვენ წინათ დავინახეთ, რომ თუ არსებობს ინტეგრალის მინიმუმი, ამ მინიმუმს ინტეგრალს მიანიჭებს ჯაჭვის მრუდი, რომელიც აერთებს A და B წერტილებს (A და B შორის ჯაჭვის მრუდზე არ უნდა იყოს A-ს შეუღლებული წერტილი).

რადგან ასეთი მინიმუმის არსებობა დამტკიცებულია, ამიტომ დამტკიცებულია აგრეთვე, ის, რომ ჯაჭვის მრუდი ნამდვილად ანიჭებს ჩვენს ინტეგრალს მინიმუმს. ამგვარად, ის ზედაპირი, რომელსაც მივიღებთ ჯაჭვის მრუდის ბრუნვით X ღერძის გარშემო, წარმოადგენს უმცირესი არის ზედაპირს.

ახლა მოვიყვანთ ექსტრემუმის ყველა იმ აუცილებელ და საკმარის პირობებს, რომელნიც წინათ გამოვიყვანეთ. მოვიყვანთ ჯერ აუცილებელ პირობებს.

I. უნდა შესრულდეს Euler-ის დიფერენციალური განტოლება:

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0.$$

II. უნდა იყოს დაკმაყოფილებული შემდეგი Legednre-ის პირობა:

$$f_1(x)=f_{y'y'}[x,\ y_0(x),\ y_0'(x)]$$

არის დადებითი.

III. A და B წერტილს შორის ექსტრემალზე არ უნდა მოთავსდეს A წერტილის შეუღლებული წერტილი.

IV. უნდა ჰქონდეს ადგილი უტოლობას:

$$E[x,\ y_0(x),\ y'_0\ (x),\ \bar{p}] \geqslant 0$$

$\bar{p}$ რიცხვის ყოველ სასრულო მნიშვნელობისათვის.

ეს არის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობანი.

ექსტრემუმის საკმარისი პირობებიდან ჩვენ ვიცნობთ შემდეგს:

$$E[x,\ y,\ p(x,\ y),\ \bar{p}] > 0$$

ველის ყოველი წერტილისათვის და ყოველი სასრულო $\bar{p}$-თვის.

თავი II.

ლექცია XIII

ვარიაციათა აღრიცხვის პარამეტრული პრობლემა. ინტეგრალის დამოუკიდებლობა პარამეტრის არჩევისაგან.

ამ თავში ჩვენ გვექნება ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემის სრულიად ახალი დაყენება.

წინათ ვიხილავდით ინტეგრალის

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx.$$

მინიმუმს.

რადგან მრუდის განტოლება გვქონდა $y=y(x)$ სახით, ამიტომ გამორიცხული იყო ისეთი შემთხვევა, როდესაც Y ღერძის პარალელური სწორი მრუდს კვეთდა ერთზე უფრო მეტ წერტილში. ამის გარდა ის შემთხვევაც გამორიცხული იყო, როდესაც მრუდს, რომელიც A და B წერტილს აერთებდა, რომელიმე წერტილში აქვს Y ღერძის პარალელური მხები, რადგან ასეთ პირობებში y' გახდებოდა უსასრულო.

მაგრამ შესადარებელი მ მრუდის ასეთი შეზღუდვები არ არის სასურველი ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემის დამოუკიდებლად დაყენების დროს. ის გზა, რომლითაც ჩვენ წინათ ვსარგებლობდით, პრობლემას ძალიან ვიწრო ჩარჩოებში აყენებს. ამიტომ ჩვენ აქ მივმართავთ ახალ გზას.

იმ პრობლემას, რომელსაც ამ შემთხვევაში დავსვამთ, ეწოდება ვარიაციათა აღრიცხვის პრობლემა პარამეტრალური სახით ან მოკლედ „t პრობლემა". .

ვთქვათ მრუდი არის წარმოდგენილი პარამეტრალური სახით $x=x(t)$, $y=y(t)$. როცა პარამეტრი t იცვლება t_1-დან t_2-მდე, მაშინ ვთქვათ წერტილი (x, y) გაივლის გარკვეულ მრუდს A-დან B-მდე.

ამ შემთხვევაში ჩვენს წინაშე დგას პრობლემა ინტეგრალის:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

მინიმუმის მოძებნისა.

x და y არის აღებული ისეთ გარკვეულ არეში, სადაც F ფუნქციას ყოველი ცვალებადის მიმართ აქვს პირველი სამი რიგის განუწყვეტელი წარმოებული.

ამის გარდა $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციების შესახებ ვიგულისხმოთ, რომ ისინი არიან განუწყვეტელი და აქვთ პირველი რიგის წარმოებულები, რომელნიც აგრეთვე განუწყვეტელნი არიან.

დავუშვათ აგრეთვე, რომ ჩვენ მრუდს არ აქვს განსაკუთრებული წერტილები, ე. ი. შეუძლებელია, თომ x' და y' ერთდროულად მოისპოს, ანუ, შეუძლებელია, რომ $x'^2+y'^2=0$

ცხადია, რომ ვარიაციათა აღრიცხვის პარამეტრალური პრობლემის დაყენების დროს უკვე საჭირო არ არის შემოვიტანოთ ის პირობა, რომ Y ღერძის პარალელური სწორი მრუდს ერთზე მეტ წერტილში არ კვეთდეს, ან და ის, რომ მრუდის მხები Y ღერძის პარალელური არ იყოს.

ცხადია, რომ მრუდის წარმოდგენა პარამეტრალური სახით სხვადასხვანაირად შეიძლება.

მაგალითად, ელიპსის განტოლება ჩვენ შემდეგი სახით შეგვიძლია გამოვხატოთ: $x=a\cos t \quad y=b\sin t$, ან,

$$x=\frac{2a\tau}{1+\tau^2} \qquad y=\frac{b(1-\tau^2)}{1+\tau^2}$$

ამიტომ, საერთოდ მრუდის პარამეტრული სახით წარმოდგენის დროს სხვადასხვა შესაძლებლობას შეგვიძლია მივმართოთ.

თუ $x(t)$ არის t მონოტონური ფუნქცია, მაშინ შეიძლება ამ ფუნქციის გარდაწყვეტა t შესახებ. გვექნება $t=\varphi(x)$. როცა ჩავსვამთ t მაგივრად $\varphi(x)$-ს $y=y(t)$ განტოლებაში მივიღებთ

$$y=y[\varphi(x)]=\psi(x).$$

ამ შემთხვევაში t პრობლემა x პრობლემაზე მიიყვანება.

ავიღოთ ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x,\ y,\ x',\ y')\,dt \qquad (1)$$

და განვიხილოთ რომელიმე მრუდი, რომელიც A და B წერტილებს აერთებს. აღვნიშნოთ ეს მრუდი მ. ვთქვათ, მრუდის განტოლება არის $x=x(t)$ და $y=y(t)$. შევცვალოთ პარამეტრი t ამნაირად: ვთქვათ $t=\theta(\tau)$. ამგვარად t პარამეტრის მაგივრად ვღებულობთ ახლა პარამეტრს τ. მაშინ x და y იქნებიან τ-ს ფუნქციები: $x=\varphi(\tau)$, $y=\psi(\tau)$.

ინტეგრალი (I), აღებული მ მრუდზე, თუ ეს მრუდი $x=x(t)$ $y=y(t)$ განტოლებებით არის გამოთქმული, იქნება:

$$\int_{t_1}^{t_2} F[x(t),\ y(t),\ x'(t),\ y'(t)]\,dt \qquad \text{(II)}$$

იგივე ინტეგრალი აღებული იმავე მრუდზე, მაგრამ გამოთქმული τ პარამეტრის საშუალებით, იქნება:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} F\Big(\varphi(\tau),\ \psi(\tau),\ \varphi'(\tau),\ \psi'(\tau)\Big)\,d\tau \qquad .\text{(III)}$$

ინტეგრალი, აღებული მრუდზე, რომელიც გამოთქმულია t პარამეტრის შესახებ, საზოგადოდ არ ეტოლება ინტეგრალს, აღებულს იმავე მრუდზე, გამოთქმულს τ პარამეტრის შესახებ. ინტეგრალი აღებული რომელიმე მრუდზე დამოკიდებულია პარამეტრისაგან, რომელსაც ჩვენ ავიღებთ ამ მრუდის გამოსახატავად. მაგრამ ეს არ არის სასურველი, რადგან მაშინ იძულებული ვიქნებით თავშივე შევზღუდოთ ჩვენი თავი პარამეტრის არჩევით.

ჩვენ გვინდა, რომ ინტეგრალს, აღებულს რომელიმე მრუდზე, ჰქონდეს ერთი გარკვეული მნიშვნელობა, დამოუკიდებელი პარამეტრის არჩევისაგან.

ვნახოთ რა პირობის დაცვაა საჭირო იმისათვის, რომ ამ გარემოებას ადგილი ჰქონდეს.

აღვნიშნოთ II და III ინტეგრალი შესაბამისად J_1 და J_2. ჩვენ გვინდა, რომ

$$J_1=J_2$$

ჩვენ გვაქვს:

$$\varphi(\tau)=x\Big(\theta(\tau)\Big), \quad \psi(\tau)=y\Big(\theta(\tau)\Big).$$

აქედან მივიღებთ:

$$\varphi'(\tau)=x'\Big(\theta(\tau)\Big)\,\theta'(\tau), \quad \psi'(\tau)=y'\Big(\theta(\tau)\Big)\,\theta'(\tau),$$

ანუ,

$$x'(t)=\varphi'(\tau)\,\frac{1}{\theta'(\tau)} \qquad \text{და} \qquad y'(t)=\psi'(\tau)\,\frac{1}{\theta'(\tau)}$$

ამგვარად, ჩვენ ვიპოვეთ $x'(t)$ და $y'(t)$ გამოხატულება τ საშუალებით. ახლა თუ II ინტეგრალში t მაგივრად ჩავსვამთ $\theta(\tau)$, ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ცვლადის გარდაქმნის დებულების ძალით, მივიღებთ:

$$J_1=\int_{t_1}^{t_2} F(x(t),\ y(t),\ x'(t),\ y'(t))\ dt=$$

$$=\int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta' F\Big(\varphi(\tau),\psi(\tau),\ \varphi'(\tau)\frac{1}{\theta'},\ \ \psi'(\tau)\frac{1}{\theta'}\Big)\,d\tau.$$

ახლა ვნახოთ როდის ექნება ადგილი ტოლობას: $J_1=J_2$, ანუ,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta' F\Big(\varphi(\tau),\psi(\tau),\ \varphi'(\tau)\frac{1}{\theta'},\ \psi'(\tau)\frac{1}{\theta'}\Big)\,d\tau=$$

$$=\int_{\tau_1}^{\tau_2} F\Big(\varphi(\tau),\ \psi(\tau),\ \varphi'(\tau),\ \psi'(\tau)\Big)d\tau.$$

საზოგადოთ ასეთ ტოლობას ადგილი არ ექნება, მაგრამ ის ყოველთვის შესრულდება, თუ რომ ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქციები ტოლი არის, ე. ი.

$$F\Big(\varphi(\tau),\ \psi(\tau),\ \varphi'(\tau),\ \psi'(\tau)\Big)=$$
$$=\theta' F\Big(\varphi(\tau),\ \psi(\tau),\ \varphi'(\tau)\frac{1}{\theta'},\ \psi'(\tau)\frac{1}{\theta'}\Big) \qquad \text{(IV)}$$

(IV) პირობა შესრულებული იქნება, თუ შესრულებულია პირობა:

$$F(x,\ y,\ x',\ y')=F(x,\ y,\ kx',\ ky')\cdot\frac{1}{k},$$

ანუ,

$$F(x,\ y,\ kx',\ ky')=k\ F(x,\ y,\ x',\ y') \qquad \text{(V)}$$

ეს არის ის პირობა, რომლის შესრულება საკმარისია იმისათვის, რომ ინტეგრალი დამოუკიდებელი იყოს პარამეტრის არჩევისაგან.

(V) ტოლობა გამოხატავს იმას, რომ F ფუნქცია უნდა იყოს ერთგვაროვანი პირველი რიგისა ორი უკანასკნელი $x',\ y'$ ცვლადის შესახებ.

$F(x,\ y,\ x',\ y')$ ფუნქციიდან ვითხოვთ იმას, რომ ის (V) პირობას აკმაყოფილებდეს.

ავიღოთ ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2} (xy'-yx'+\sqrt{x'^2+y'^2}\ )\ dt$$

ვნახოთ, დაცულია თუ არა (V) პირობა.

ჩავსვათ x' მაგივრად $x'k$ და y'-ის მაგივრად $y'k$. გვექნება:

$$xky'-ykx'+\sqrt{k^2x'^2+k^2y'^2}=k\ (xy'-yx'+\sqrt{x'^2+y'^2})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ (V) პირობა დაცულია.

ამგვარად, აღებული ინტეგრალი დამოუკიდებელია პარამეტრის არჩევისაგან.

გავაწარმოოთ $F(x,\ y,\ kx',\ ky')=k\ F(x,\ y,\ x',\ y')$ ტოლობის ორივე მხარე k-ს მიმართ. მივიღებთ:

$$x'F_{x'}(x,\ y,\ kx',\ ky')+y'F_{y'}(x,\ y,\ kx',\ ky')=F(x,\ y,\ x',\ y').$$

ამ ტოლობას ადგილი უნდა ჰქონდეს კერძოდ მაშინ, როცა $k=1$. ჩვენ მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$F=x'F_{x'}'+y'F_{y'}'. \qquad \text{(VI)}$$

განვაწარმოოთ ეს ტოლობა x' შესახებ. გვექნება:

$$F_{x'}'=F_{x'}'+x'F_{x'x'}''+y'F_{x'y'}''$$

აქედან

$$x' F_{x'x'} + y' F_{x'y'} = 0 \qquad \text{(VII)}$$

განვაწარმოოთ (VI) ტოლობა y' შესახებ. დავწერთ:

$$F_{y'} = F_{y'} + x' F_{x'y'} + y' F_{y'y'}$$

აქედან

$$x' F_{x'y'} + y' F_{y'y'} = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

(VII) და (VIII) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2} = \frac{F_{x'y'}}{-x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2}$$

ამ საერთო შეფარდებას აღნიშნავენ

$$F_1 (x, y, x', y').$$

განვაწარმოოთ ახლა (VI) x შესახებ, მივიღებთ

$$F_x = x' F_{x'x} + y' F_{y'x} \qquad \text{(IX)}$$

(VI) განწარმოება y შესახებ მოგვცემს

$$F_y = x' F_{x'y} + y' F_{y'y} \qquad \text{(X)}$$

(VII) (VIII), (IX) (X) ტოლობებს ექნებათ ჩვენთვის, შემდეგისათვის, დიდი მნიშვნელობა.

ლექცია XIV.

პირველი ვარიაცია.

გვაქვს ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2} F (x, y, x', y') \, dt.$$

ავიღოთ ორი წერტილი A და B.

ამბობენ, რომ ე მრუდი მინიმუმს ანიჭებს ინტეგრალს, თუ არსებობს ისეთი δ რიცხვი, რომ ინტეგრალი აღებული ე მრუდზე $\geqslant$ ვიდრე ინტეგრალი აღებული ყოველ სხვა მრუდზე, რომლის წერტილები დაშორებული არიან ე მრუდიდან δ-ზე ნაკლები მანძილით, ასევე განსაზღვრული იქნება მაქსიმუმი.

ვიპოვოთ პირველი აუცილებელი პირობა ექსტრემუმისა.

ვთქვათ ე მრუდის განტოლება არის $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$.

ავიღოთ ახლა რომელიმე შესადარებელი მ მრუდი. ვთქვათ მისი განტოლება არის: $x = x\,(t) + \varepsilon\, h\,(t)$, $y = y\,(t) + \varepsilon\, g\,(t)$, ($h\,(t)$ და $g\,(t)$ აკმაყოფილებენ პირობას $h\,(t_1) = h\,(t_2) = 0$, $g\,(t_1) = g\,(t_2) = 0$, რადგან მ მრუდი გადის A და B წერტილებზე).

განვიხილოთ შესადარებელი მრუდების კერძო კლასი, რომელთათვისაც ε t-გან დამოუკიდებელი მუდმივი პარამეტრია.

ჩავსვათ ეს ფუნქციები ჩვენს ინტეგრალში.

$$\int_{t_1}^{t_2} F\Big(x(t)+\varepsilon\, h(t),\ y(t)+\varepsilon\, g(t),\ x'(t)+\varepsilon\, h'(t),\ y'(t)+\varepsilon\, g'(t)\Big)\, dt$$

ეს ინტეგრალი წარმოადგენს ε-ს ფუნქციას; აღვნიშნოთ იგი $J(\varepsilon)$. სრული ვარიაციისათვის ΔJ ჩვენ მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\Delta J=\int_{t_1}^{t_2} F\Big(x(t)+\varepsilon\, h(t),\ y(t)+\varepsilon\, g(t),\ x'(t)+\varepsilon\, h'(t),\ y'(t)+\varepsilon\, g'(t)\Big)dt-$$

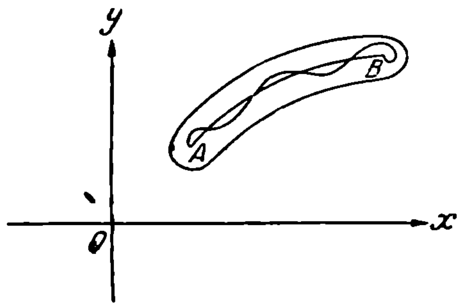
$$-\int_{t_1}^{t_2} F\Big(x(t),\ y(t),\ x'(t),\ y'(t)\Big)\, dt$$

გამოსახულება, რომელიც იმყოფება ინტეგრალის ქვეშ, დავშალოთ Taylor-ის ფორმულით.

მივიღებთ:

$$\Delta J=\varepsilon \int_{t_1}^{t_2}\Big(F_x\, h(t)+F_y\, g(t)+F_{x'}\, h'(t)+F_{y'}\, g'(t)\Big)\, dt+\varepsilon^2 k$$

თუ ε მოთავსებულია საკმაოდ მცირე ფარგლებში, მაშინ როცა ε შეიცვლის ნიშანს, ΔJ აგრეთვე შეიცვლის ნიშანს, თუ ინტეგრალი,



ნახ. 26.

რომელზედაც მრავლდება ε, ნულისაგან განსხვავდება. აქედან გამომდინარეობს მინიმუმის შემდეგი აუცილებელი პირობა:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(F_x\, h(t)+F_y\, g(t)+F_{x'}\, h'(t)+F_{y'}\, g'(t)\Big)\, dt=0 \qquad (1)$$

კერძოთ შეგვიძლია ისეთი შესადარებელი მრუდი ავიღოთ, რომ $h(t)=0$, ე. ი. $x=x(t)$, $y=y(t)+\varepsilon g(t)$.

რადგან ჩვენი პირობა ამ შემთხვევაშიაც უნდა იყოს დაცული, ამიტომ უნდა გვქონდეს:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(F_y\, g(t)+F_{y'}\, g'(t)\Big)dt=0 \qquad \text{(II)}$$

ახლა თუ ისეთ შესადარებელ მრუდს ავიღებთ, რომ $g(t)=0$, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(F_x\, h(t)+F_{x'}\, h'(t)\Big)dt=0 \qquad \text{(III)}$$

პირობა (I) ექვივალენტურია (II) და (III) პირობის, რადგან ეს პირობები მიიღება (I) პირობიდან და პირიქით (I) პირობა იქნება დაცული, თუ დაცულია (II) და (III).

გამოვიყენოთ ახლა ლემა, რომელიც წინათ დამტკიცებული გვქონდა.

თუ ინტეგრალი $\int_{x_1}^{x_2}\Big(M(x)\,y+N(x)\,y'\Big)dx$ ნულის ტოლია და ფუნქცია y ისეთი თვისებისაა, რომ $y(x_1)=y(x_2)=0$, მაშინ $\frac{dN}{dx}=M(x)$.

ამ ლემის ძალით (II) და (III)-დან მივიღებთ შესაბამისად:

$$F_x=\frac{d}{dt}F_{x'}.$$

$$F_y=\frac{d}{dt}F_{y'}$$

ეს არის ის პირობები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ის მრუდი, რომელიც ინტეგრალს ექსტრემუმს უნდა ანიჭებდეს.

ერთი განტოლების მაგივრად, რომელიც გვქონდა x პრობლემისათვის, აქ გვაქვს ორი განტოლება. მაგრამ აქაც საქმე შეგვიძლია ერთ განტოლებაზე დავიყვანოთ.

ჩვენ გვაქვს ტოლობა

$$F_x=x'\,F_{x'x}+y'\,F_{y'x} \quad \text{(იხ. 78 გვ).}$$

ვიპოვოთ $\frac{d}{dt}F_{x'}$

დავწეროთ:

$$\frac{d}{dt}F_{x'}=x'\,F_{x'x}+y'\,F_{x'y}+x''\,F_{x'x'}+y''\,F_{x'y'}$$

ამგვარად გვექნება:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=x'F_{x'x}+y'F_{y'x}-x'F_{x'x}-y'F_{x'y}-x''F_{x'x'}-y''F_{x'y'}=0$$

ეს განტოლება ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$y'(F_{y'x}-F_{x'y})-x''F_{x'x'}-y''F_{x'y'}=0$$

ახლა თუ ამ ტოლობებში $F_{x'x'}$ და $F_{x'y'}$ მაგივრად ჩავსვამთ მათ გამოხატულებებს $F_{x'x'}=y'^2 F_1$, $F_{x'y'}=-x'y' F_1$, რომლებსაც მივიღებთ ტოლობებიდან

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2}=\frac{F_{x'y'}}{-x'y'}=\frac{F_{y'y'}}{x'^2}=F_1,$$

დავწერთ:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=y'\left[(F_{y'x}-F_{x'y})+F_1(y''x'-x''y')\right]=0$$

სრულებით ამავე წესით მივიღებთ,

$$F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=x'\left[(F_{x'y}-F_{y'x})+F_1(y'x''-x'y'')\right]=0.$$

$(F_{y'x}-F_{x'y})+F_1(y''x'-x''y')$ აღვნიშნოთ T-თი. ამგვარად გვექნება:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=y'T=0;$$

$$F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=-x'T=0$$

ახლა რადგან ჩვენი პირობის ძალით x' და y' ერთდროულად არ შეიძლება მოისპოს, ამიტომ იმისათვის, რომ უკანასკნელი ტოლობანი შესრულდეს, საჭიროა, რომ $T=0$, ანუ,

$$(F_{y'x}-F_{x'y})+F_1(y''x'-x''y')=0$$

ეს არის ის განტოლება, რომელზედაც დაიყვანება Eeuler-ის ორი განტოლებანი:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0 \qquad F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=0$$

ამ განტოლებას Weierstrass-ის განტოლება ეწოდება.

მაგრამ მარტო $T=0$ განტოლება არ არის კიდევ საკმარისი. ამასთან უნდა გვქონდეს მეორე განტოლება, რომელიც გვაძლევს t პარამეტრის დამოკიდებულებას x და y-თან. იგი ჩვენ გვიჩვენებს, თუ რას წარმოადგენს პარამეტრი t.

თუ, მაგალითად, პარამეტრი t არის მხების კუთხე, მაშინ

$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\cos t$, ან და, $\frac{y'}{x'}=\operatorname{tg} t$.

როგორიც ჟარ უნდა იყოს ეს განტოლება, $T=0$ მაინც უნდა იყოს დაკმაყოფილებული.

ვთქვათ, ამგვარად, განტოლებასთან $T=0$ ერთად არის მოცემული მეორე განტოლება, და $x=\varphi(t, \alpha, \beta)$ $y=\psi(t, \alpha, \beta)$ არის მათი ინტეგრალი. α და β არიან ნებსითი მუდმივები. მივიღებთ მრუდთა

მთელ ოჯახს. ამ ოჯახიდან უნდა ავიღოთ ის მრუდი, რომელიც აერთებს წერტილებს A და B. ამისათვის უნდა იყოს დაკმაყოფილებული შემდეგი პირობანი:

$$x_1=\varphi(t_1,\ \alpha,\ \beta)$$
$$y_1=\psi(t_1,\ \alpha,\ \beta)$$
$$x_2=\varphi(t_2,\ \alpha,\ \beta)$$
$$y_2=\psi(t_2,\ \alpha,\ \beta)$$

მივიღეთ ოთხი განტოლება, რომელნიც ოთხ უცნობს შეიცავს α, β, t_1, t_2. (t_1 და t_2 მნიშვნელობა თავიდანვე არ არის ცნობილი. ჩვენ ვიცით მხოლოდ ორი წერტილი A და B, რომლებზედაც მრუდმა უნდა გაიაროს). ამ ოთხი განტოლებიდან მივიღებთ უცნობებია α, β, t_1, t_2 მნიშვნელობებს, ერთს ან რამდენიმეს.

ვთქვათ, რომ ჩვენ მივიღეთ ასეთი გარდაწყვეტის ერთი სისტემა: α_0, β_0, t_{10}, t_{20}.

მრუდი $x=\varphi(t,\ \alpha_0,\ \beta_0)$, $y=\psi(t,\ \alpha_0,\ \beta_0)$ არის ისეთი თვისების, რომ არც ერთ მრუდს მის გარდა არ შეუძლია მიანიჭოს მინიმუმი ჩვენს ინტეგრალს. ამ მრუდს ეწოდება ექსტრემალი.

მრუდი, რომელიც ექსტრემალიდან განსხვავდება, ვერ მიანიჭებს ინტეგრალს მინიმუმს, მაგრამ შესაძლებელია, რომ თვით ექსტრემალმაც არ მიანიჭოს ინტეგრალს ექსტრემუმი.

განვიხილოთ ახლა ერთი მაგალითი.

ვთქვათ გვაქვს ორი წერტილი $A(x_1,\ y_1)$ და $B(x_2,\ y_2)$. შევაერთოთ ეს ორი წერტილი ისეთი მრუდით, რომ მატერიალური სხეული, რომელიც ამ მრუდით იმოძრავებს სიმძიმის ძალის გავლენით, უმოკლესი დროის განმავლობაში გაივლის მანძილს A-დან B-მდე.

როგორც ვიცით, ამ პრობლემას ბრაქისტოქრონის პრობლემა ეწოდება.

აღვნიშნოთ სხეულის მასა m და სხეულის პირველდაწყებითი სიჩქარე, ე. ი. სიჩქარე A წერტილში v_1, ცვლადი C წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x, y და მისი სიჩქარე v.

თანახმად მექანიკის ცნობილი ფორმულისა ცხოველი ძალების შესახებ, დავწერთ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=mgh$$

ცხადია, რომ $h=y-y_1$ (ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ Y ღერძი ვერტიკალურად არის გაყვანილი, მხოლოდ X ღერძი კი ჰორიზონტალურად). უკანასკნელი ფორმულიდან გვექნება:

$$v^2=2g(y-y_1)+v_1^2.$$

აქედან

$$v=\sqrt{2g(y-y_1)+v_1^2}=\sqrt{2g}\sqrt{(y-y_1)+\frac{v_1^2}{2g}}$$

აღვნიშნოთ $\frac{v_1^2}{2g}=k$. დავწეროთ:

$$v=\sqrt{2g}\sqrt{(y-y_1)+k}$$

მაგრამ $v=\frac{dS}{dt}$. მაშასადამე,

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{2g}\sqrt{(y-y_1)+k}.$$

აქედან

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{(A)}^{(B)}\frac{dS}{\sqrt{(y-y_1)+k}}$$

საკითხი მიიყვანება შემდეგი ინტეგრალის მინიმუმის მოძებნაზე:

$J=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\sqrt{(y-y_1)+k}}$ (აქ t არის პარამეტრის მნიშვნელობა და არა დრო). ვიპოვოთ ამ ინტეგრალის მინიმუმი.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ინტეგრალის $J=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\sqrt{(y-y_1)+k}}$ მინიმუმი, საჭიროა მივმართოთ ერთს რომელიმეს განტოლებათა $F_x-\frac{d}{dt}F_x'=0$, $F_y-\frac{d}{dt}F_y'=0$, $T=0$ შორის.

ჩვენი პრობლემა ყველაზე უფრო მარტივად გადაწყდება, თუ მივმართავთ განტოლებას: $F_x-\frac{d}{dt}F_x'=0$.

ჩვენს შემთხვევაში $F_x=0$. ამიტომ გვექნება: $\frac{d}{dt}F_x'=0$. აქედან $F_x'=a$. ეს არის ბრაქისტოქრონის დიფერენციალური განტოლება. ვნახოთ ახლა რა არის F_x'. დავწეროთ:

$$F_x'=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{y-y_1+k}}$$

ამგვარად, გვექნება

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{y-y_1+k}}=a.$$

ახლა საჭიროა ამოვარჩიოთ პარამეტრი t. ასეთ პარამეტრად ავიღოთ კუთხე, რომელსაც ბრაქისტოქრონი შეადგენს X ღერძთან. მაშინ $\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\cos t$. გვექნება:

$$\sqrt{y-y_1+k}=\frac{\cos t}{a}$$

აქედან

$$y-y_1+k=\frac{\cos^2 t}{a^2}.$$

მაგრამ $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$. ამგვარად

$$y-y_1+k=\frac{1}{2a^2}(1+\cos 2t)$$

აღვნიშნოთ $\frac{1}{2a^2}=\alpha$. გვექნება:

$$y-y_1+k=\alpha(1+\cos 2t).$$

α იქნება დადებითი.

მოვძებნოთ ახლა x-ის გამოსახულება. რადგან t არის კუთხე, რომელსაც ბრახისტოხრონი X ღერძთან შეადგენს, ამიტომ დავწერთ $\frac{y'}{x'}=\operatorname{tg} t$, საიდანაც $x'=\frac{y'}{\operatorname{tg} t}=y'\operatorname{ctg} t$. y' ვიპოვოთ ზემოთმიღებული ტოლობიდან:

$$y-y_1+k=\alpha(1+\cos 2t).$$

გვექნება:

$$y'=-2\alpha\sin 2t$$

x'-თვის ამგვარად მივიღებთ:

$$x'=-2\alpha\sin 2t\cdot\operatorname{ctg} t=-2\alpha\frac{2\sin t\cos t\cos t}{\sin t}=-4\alpha\cos^2 t.$$

აქედან

$$x=-4\alpha\int\cos^2 t\,dt=-4\alpha\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=-4\alpha\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C=-\alpha(2t+\sin 2t)+C$$

ნებსით მუდმივს C მივცეთ სახე x_1-l. გვექნება

$$x-x_1+l=-\alpha(2t+\sin 2t).$$

ჩვენ ამგვარად მივიღეთ:

$$x-x_1+l=-\alpha(2t+\sin 2t),$$
$$y-y_1+k=\alpha(1+\cos 2t).$$

ეს ორი განტოლება გამოხატავს ციკლოიდას.

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ მოვახდენთ გარდაქმნას $2t=\pi-\tau$. მაშინ $\cos 2t=-\cos\tau$, $\sin 2t=\sin\tau$. გვექნება:

$$x-x_1+l=-\alpha(\pi-\tau+\sin\tau)=-\alpha\pi+\alpha(\tau-\sin\tau)$$
$$y-y_1+k=\alpha(1-\cos\tau)$$

$-x_1+l+\alpha\pi$ წარმოადგენს ნებსით მუდმივს.

აღვნიშნოთ იგი კვლავ x_1+l.

დავწერთ

$$x-x_1+l=\alpha(\tau-\sin\tau),$$
$$y-y_1+k=\alpha(1-\cos\tau).$$

ეს არის ციკლოიდის განტოლება, რომლის პარამეტრი არის τ; $\alpha=\frac{1}{2a^2}$ არის რადიუსი იმ წრისა, რომელიც მოგვცემს ციკლოიდს. ინტეგრაციის მუდმივი a ისე უნდა მოვძებნოთ, რომ ციკლოიდამ A და B წერტილებზე გაიაროს.

თუ a ნულის ტოლია, მაშინ უკვე ციკლოიდი არ გვექნება.

დავამტკიცოთ, რომ როცა $a=0$, გვექნება სწორი პარალელური Y ღერძისა. ამ შემთხვევაში B წერტილი იმყოფება ვერტიკალურ სწორზე, რომელიც A წერტილიდან არის ჩამოშვებული.

მართლაც, როდესაც $a=0$, მაშინ უნდა დაკმაყოფილდეს შემდეგი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{(y-y_1)+k}}=0$$

აქედან $x'=0$, ანუ, $x=c$. ეს კი გამოხატავს სწორს, რომელიც პარალელურია Y ღერძისა და ამით ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

ჩვენ ზემოთ ვიპოვეთ ჯერ ჯერობით მხოლოდ ბრაქისტოქრონის პრობლემის ფორმალური გარდაწყვეტა.

ჩვენ მხოლოდ ის დავამტკიცეთ, რომ ციკლოიდა ერთადერთი მრუდია, რომელსაც შეუძლია ის თვისება ჰქონდეს, რასაც ბრაქისტოქრინის პრობლემა მოითხოვს.

დავუბრუნდეთ ახლა ისევ ზოგად თეორიას.

განვიხილოთ პირველი ვარიაცია.

$$\delta J=\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}[F_x h(t)+F_y g(t)+F_x' h'(t)+F_y' g'(t)]\,dt$$

ეს პირველი ვარიაცია წარმოვადგინოთ იმ სახით, რომელიც მას პირველად Weierstrass—მა მისცა.

ინტეგრალები $\int_{t_1}^{t_2}F_x' h'(t)\,dt$ და $\int_{t_1}^{t_2}F_y' g'(t)\,dt$ ნაწილობრივ ინტეგრაციის წესის საშუალებით შემდეგნაირად შეგვიძლია გამოვხატოთ:

$$\int_{t_1}^{t_2}F_x' h'(t)\,dt=\Big[F_x' h(t)\Big]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}h(t)\frac{d}{dt}F_x'\,dt.$$

$$\int_{t_1}^{t_2}F_y' g'(t)\,dt=\Big[F_y' g(t)\Big]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}g(t)\frac{d}{dt}F_y'\,dt.$$

ამ ტოლობების მიხედვით. პირველი ვარიაცია δJ შემდეგი სახით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\delta J=\varepsilon\Big[hF_x'+gF_y'\Big]_{t_1}^{t_2}+\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\Big[\Big(F_x-\frac{d}{dt}F_x'\Big)h(t)+$$
$$+\Big(F_y-\frac{d}{dt}F_y'\Big)g(t)\Big]dt.$$

მაგრამ $\left[hF_x' + gF_y' \right]_{t_1}^{t_2} = 0$, რადგან $h(t_1) = h(t_2) = 0$ და $g(t_1) = g(t_2) = 0$.

ამგვარად

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(F_x - \frac{d}{dt} F_x' \right) h(t) + \left(F_y - \frac{d}{dt} F_y' \right) g(t) \right] dt.$$

მაგრამ

$$F_x - \frac{d}{dt} F_x' = y'T \quad \text{და}$$

$$F_y - \frac{d}{dt} F_y' = -x'T.$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} (y'h - x'g)\, T\, dt$$

ასეთია პირველი ვარიაციის ის სახე, რომელიც მას Weierstrass-მა მისცა.

$h(t)$ არის x-ის ვარიაცია და $g(t)$ არის y-ის ვარიაცია და ამიტომ მათ ხშირად აღნიშნავენ შესაბამისად δx და δy. პირველი ვარიაცია δJ შეგვიძლია შემდეგი სახითაც დავწეროთ:

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} (y'\delta x - x'\delta y)\, T dt$$

$y'h - x'g$-ს აღვნიშნოთ w-თი. პირველი ვარიაცია საბოლოოდ შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} w\, T\, dt.$$

ლექცია XV.

მეორე ვარიაციის სხვადასხვა სახე.

გადავიდეთ მეორე ვარიაციის განხილვაზე.

მეორე ვარიაციას $\delta^2 J$ შემდეგი სახე ექნება:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} [F_{xx} h^2 + 2F_{xy} hg + F_{yy} g^2 + 2F_{xx'} hh' + 2F_{xy'} hg' + $$
$$+ 2F_{yx'} h'g + 2F_{yy'} gg' + F_{x'x'} h'^2 + 2F_{x'y'} h'g' + F_{y'y'} g'^2]\, dt \qquad (I)$$

ამ მეორე ვარიაციას შეგვიძლია სხვა სახე მივცეთ. ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად: შემოვიტანოთ Weierstrass-ის შემდეგი აღნიშვნები:

$$L = F_{xx'} - y'y''F_1, \quad M = F_{xy'} + x'y''F_1 = F_{yx'} + y'x''F_1$$

($F_{xy'} + x'y''F_1 = F_{yx'} + y'x''F_1$ ტოლობას ექნება ადგილი $T = 0$ განტოლების ძალით), $N = F_{yy'} - x'x''F_1$ (II)

უკანასკნელი ფორმულებიდან გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} 2F_{xx'}\,hh' &= 2Lhh' + 2y'y''\,hh'F_1 \\ 2F_{xy'}\,hg' &= 2Mhg' - 2x'y''hg'F_1 \\ 2F_{yx'}\,h'g &= 2Mh'g - 2y'x''h'gF_1 \\ 2F_{y'y}\,gg' &= 2Ngg' + 2x'x''gg'F_1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში ამ ტოლობებს (III) და აგრეთვე ტოლობებს $F_{x'x'}=y'^2F_1$, $F_{x'y'}=-x'y'F_1$, $F_{y'y'}=x'^2F_1$, რომელნიც წინა ლექციაზე გამოვიყვანეთ, (I) შემდეგნაირად შეგვიძლია გარდავქმნათ:

$$\delta^2J=\varepsilon^2\int^{t_2}[F_{xx}h^2+2F_{xy}hg+F_{yy}g^2+2Lhh'+2y'y''hh'F_1+2Mhg'-$$

$$-2x'y''hg'F_1+2Mh'g-2y'x''h'gF_1+2Ngg'+2x'x''gg'F_1+y'^2h'^2F_1-$$

$$-2x'y'h'g'F_1+x'^2g'^2F_1]\,dt. \qquad \text{(IV)}$$

წინა ლექციაზე ჩვენ ავღნიშნეთ $w=y'h-x'g$.

განვაწარმოოთ ახლა უკანასკნელი ტოლობა.

მივიღებთ

$$\frac{dw}{dt}=y''h-x''g+y'h'-x'g'.$$

მიღებული ტოლობის ორივე მხარე ავამაღლოთ მეორე ხარისხში. დავწეროთ:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2=y''^2h^2+x''^2g^2+y'^2h'^2+x'^2g'^2-2x''y''hg+2y'y''hh'-2x'y''hg'-$$

$$-2x''y'gh'+2x'x''gg'-2x'y'h'g'.$$

თუ უკანასკნელ გამოხატულებას შევადარებთ (IV), შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\delta^2J=\varepsilon^2\int_{t_1}^{t_2}\Big[F_{xx}h^2+F_{xy}hg+F_{yy}g^2+2Lhh'+2M(hg'+h'g)+$$

$$+2Ngg'+F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2-y''^2h^2F_1-x''^2g^2F_1+2x''y''hgF_1\Big]\,dt.$$

ეს ტოლობა შემდეგნაირად გადმოვწეროთ:

$$\delta^2J=\varepsilon^2\int_{t_1}^{t_2}\Big[F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+2Lhh'+2M(hg'+h'g)+2Ngg'+$$

$$+(F_{xx}-y''^2F_1)h^2+2(F_{xy}+x''y''F_1)hg+(F_{yy}-x''^2F_1)g^2\Big]\,dt \qquad \text{(V)}$$

მეორე ვარიაციის ეს უკანასკნელი სახე ჩვენ კიდევ შეგვიძლია გარდავქმნათ.

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2}[2Lhh'+2M(hg'+h'g)+2Ngg']\,dt.$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფი გამოხატულება ჩვენ შემდეგი სახით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$2Lhh'+2M(hg'+h'g)+2Ngg'=\frac{d}{dt}\left[Lh^2+2Mhg+Ng^2\right]-$$

$$-\left[h^2\frac{dL}{dt}+2hg\frac{dM}{dt}+g^2\frac{dN}{dt}\right].$$

ამგვარად, გვექნება

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[2Lhh'+2M(hg'+h'g)+2Ngg'\right]dt=$$

$$=\left[Lh^2+2Mhg+Ng^2\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left[h^2\frac{dL}{dt}+2hg\frac{dM}{dt}+g^2\frac{dN}{dt}\right]dt$$

მაგრამ $\left[Lh^2+2Mhg+Ng^2\right]_{t_1}^{t_2}=0$, რადგან

$$h(t_1)=h(t_2)=g(t_1)=g(t_2)=0.$$

მაშასადამე,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[2Lhh'+2M(hg'+h'g)+2Ngg'\right]dt=$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\left[h^2\cdot\frac{dL}{dt}+2hg\frac{dM}{dt}+g^2\frac{dN}{dt}\right]dt.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში უკანასკნელ ტოლობას, (V) შემდეგნაირად შეგვიძლია გარდავქმნათ:

$$\delta^2J=\varepsilon^2\int_{t_1}^{t_2}\left[F_1\left(\frac{dW}{dt}\right)^2+\left(F_{xx}-y''^2F_1-\frac{dL}{dt}\right)h^2+\right.$$

$$\left.+2\left(F_{xy}+x''y''F_1-\frac{dM}{dt}\right)hg+\left(F_{yy}-x''^2F_1-\frac{dN}{dt}\right)g^2\right]dt.$$

აღვნიშნოთ:

$$L_1=F_{xx}-y''^2F_1-\frac{dL}{dt}.$$

$$M_1=F_{xy}+x''y''F_1-\frac{dM}{dt}.$$

$$N_1=F_{yy}-x''^2F_1-\frac{dN}{dt}$$

დავწერთ:

$$\delta^2J=\varepsilon^2\int_{t_1}^{t_2}\left[F_1\left(\frac{dW}{dt}\right)+L_1h^2+2M_1hg+N_1g^2\right]dt \qquad \text{(VI)}$$

ვნახოთ ახლა რა დამოკიდებულება არსებობს სიდიდეებს L_1, M_1, N_1 შორის.

გამოვიყვანოთ ჯერ შემდეგი მეტად მნიშვნელოვანი ფორმულა: $Lx'+My'=F_x$. ამისათვის გავამრავლოთ $L=F_{xx}'-y'y''F_1$ და $M=$ $=F_{xy}'+x'y''F_1$ შესაბამისად x' და y' და შემდეგ მიღებული ტოლობანი შევკრიბოთ.

გვექნება:

$$Lx'+My'=x'F_{xx}'+y'F_{xy}'.$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ $x'F_{xx}'+y'F_{xy}'=F_x$

ამგვარად, დამტკიცებულია, რომ

$$Lx'+My'=F_x$$

სრულებით ამავე წესით დავამტკიცებთ, რომ $Mx'+Ny'=F_y$. განვაწარმოოთ ტოლობა $Lx'+My'=F_x$ t-ს შესახებ

მივიღებთ:

$$\frac{dL}{dt}x'+\frac{dM}{dt}y'+Lx''+My''=F_{xx}x'+F_{xy}y'+F_{xx}'x''+F_{xy}'y''$$

უკანასკნელი ტოლობა ასე გადმოვწეროთ:

$$\left(F_{xx}-\frac{dL}{dt}\right)x'+\left(F_{xy}-\frac{dM}{dt}\right)y'=Lx''+My''-F_{xx}'x''-F_{xy}'y''.$$

ახლა ამ ტოლობაში L და M მაგივრად ჩავსვათ მათი გამოსახულებანი:

$$L=F_{xx}'-y'y''F_1,\quad M=F_{xy}'+y''x'F_1$$

მივიღებთ:

$$\left(F_{xx}-\frac{dL}{dt}\right)x'+\left(F_{xy}-\frac{dM}{dt}\right)y'=x''F_{xx}'+y''F_{xy}'-y'x''y''F_1+x'y''^2F_1-$$
$$-F_{xx}'x''-F_{xy}'y'',$$

ანუ,

$$\left(F_{xx}-\frac{dL}{dt}\right)x'+\left(F_{xy}-\frac{dM}{dt}\right)y'=-y'x''y''F_1+x'y''^2F_1.$$

აქედან

$$\left(F_{xx}-\frac{dL}{dt}-y''^2F_1\right)x'+\left(F_{xy}-\frac{dM}{dt}+x''y''F_1\right)y'=0.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ x' და y'-ის კოეფიციენტები წარმოადგენენ შესაბამისად L_1 და M_1, ამგვარად

$$L_1x'+M_1y'=0.$$

სრულებით ამავე წესით დავამტკიცებთ:

$$M_1x'+N_1y'=0.$$

ორი უკანასკნელი ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\frac{L_1}{y'^2}=\frac{M_1}{-x'y'}=\frac{N_1}{x'^2}$$

ეს საერთო შეფარდება აღვნიშნოთ F_2.

მაშინ $L_1=y'^2F_2$, $M_1=-x'y'F_2$, $N_1=x'^2F_2$.

(VI) შემდეგნაირად გადმოიწერება:

$$\delta^2J=\varepsilon^2\int_{t_1}^{t_2}\left[F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+(y'^2h^2-2x'y'hg+x'^2g^2)F_2\right]dt.$$

ანუ,

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int^{t_2} \left[F_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + (y'h - x'g)^2 F_2 \right] dt$$

საბოლოოდ, დავწერთ:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \left[F_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + w^2 F_2 \right] dt.$$

ეს არის მეორე ვარიაციის უკანასკნელი სახე.

ასეთი სახით ვარიაცია პირველად წარმოადგინა Weierstrass-მა.

ლ ე ქ ც ი ა XVI.

შეუღლებული წერტილი.

წინა ლექციაზე ჩვენ დავინახეთ, რომ მეორე ვარიაციას შეგვიძლია შემდეგი სახე მივცეთ:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \left[F_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + F_2 w^2 \right] dt$$

ახლა მოვიქცეთ ისევე, როგორც x პრობლემისათვის.

ჯერ სრულებით ისეთნაირადვე, როგორც x პრობლემისათვის, დავამტკიცებთ, რომ იმისათვის, რომ ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[F_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + F_2 w^2 \right] dt$$

იყოს დადებითი, აუცილებელია რომ $F_1 \geqslant 0$.

ამით დამტკიცდება, რომ პირობა $F_1 \geqslant 0$ წარმოადგენს მინიმუმის აუცილებელ პირობას. ამ პირობას Legendre-ის პირობა ეწოდება.

ისევე, როგორც x პრობლემისათვის, დავამტკიცებთ შემდეგს: აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ მეორე ვარიაცია დადებითი იყოს F_1 ფუნქციასთან ერთად, იმაში მდგომარეობს, რომ აღებულ შუალედში არ არსებობდეს t_1-ის შეუღლებული ფესვი, ან თუ ეს შეუღლებული ფესვი t_1^* არსებობს, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას: $t_2 < t_1^*$ (t_1-ის შეუღლებული ფესვი არის t_1-ის უახლოესი ფესვი დიფერენციალური განტოლების:

$$F_2 w - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{dw}{dt} \right) = 0$$

(ამ განტოლებას შემდეგში მოკლედ აღვნიშნავთ $\psi(w) = 0$) იმ ინტეგრალის $u(t_1, t)$, რომელიც ისპობა t_1 წერტილზე).

პირობა: t_1-ის შეუღლებული ფესვი ან არ არსებობს, ან თუ არსებობს t_2-ზე მეტია, წარმოადგენს მინიმუმის მესამე აუცილებელ პირობას.

ამ პირობას ეწოდება Jacobi-ს პირობა.

ეს პირობა კიდევ შემდეგნაირად შეგვიძლია გამოვსახოთ. ვთქვათ პარამეტრის t მნიშვნელობებს t_1, t_1^*, t_2 ჩვენს ექსტრემალზე შეესაბამებიან წერტილები A, A^*, B.

მინიმუმისათვის აუცილებელია, რომ წერტილი A^* არ იმყოფებოდეს A და B წერტილებს შორის.

ახლა ვნახოთ როგორი სახე ექნება $\theta(t_1, t)$.

ვთქვათ $u(t)$ და $v(t)$ არის განტოლების $\psi(w)=0$ ორი ერთმანეთისაგან ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ინტეგრალები.

ფუნქცია $u(t)\,v(t_1)-v(t)\,u(t_1)$ აგრეთვე წარმოადგენს ამავე განტოლების ინტეგრალს. ეს ინტეგრალი მოისპობა t_1 წერტილზე.

ამგვარად, $\theta(t_1, t)$-თვის შეგვიძლია ავიღოთ $u(t)\,v(t_1)-v(t)\,u(t_1)$.

ჩვენი უახლოესი მიზანია მოვძებნოთ $\psi(w)=0$ განტოლების ორი კერძო ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ინტეგრალი $u(t)$ და $v(t)$.

როცა ვიცით ექსტრემალის ოჯახის განტოლება, მაშინ $u(t)$ და $v(t)$ მოძებნა ძნელ საქმეს არ წარმოადგენს.

დავწეროთ Euler-ის დიფერენციალური განტოლებანი:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_x'=0 \qquad \text{(II)}$$

$$F_y-\frac{d}{dt}F_y'=0 \qquad \text{(III)}$$

ვთქვათ, რომ ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი არის:

$$x=\varphi(t,\ \alpha,\ \beta) \qquad y=\psi(t,\ \alpha,\ \beta),$$

ჩავსვათ ეს გარდაწყვეტა (II) განტოლებაში.

მივიღებთ შემდეგ იგივეობას:

$$F_x[\varphi(t,\alpha,\beta),\ \psi(t,\alpha,\beta),\ \varphi_t(t,\alpha,\beta),\ \psi_t(t,\alpha,\beta)]-$$
$$-\frac{d}{dt}F_x'[\varphi(t,\alpha,\beta),\ \psi(t,\alpha,\beta),\ \varphi_t(t,\alpha,\beta),\ \psi_t(t,\alpha,\beta)]=0$$

განვაწარმოვოთ ეს იგივეობა α შესახებ: დავწეროთ:

$$(F_{xx}\varphi_\alpha+F_{xy}\psi_\alpha+F_{xx'}\varphi_{t\alpha}+F_{xy'}\psi_{t\alpha})-\frac{d}{dt}(F_{x'x}'\varphi_\alpha+$$
$$+F_{x'y}'\psi_\alpha+F_{x'x'}\varphi_{t\alpha}+F_{x'y'}'\psi_{t\alpha})=0 \qquad \text{(ა)}$$

აღვნიშნოთ:

$$A=F_{xx}\varphi_\alpha+F_{xy}\psi_\alpha+F_{xx'}\varphi_{t\alpha}+F_{xy'}\psi_{t\alpha}$$
$$B=F_{x'x}\varphi_\alpha+F_{x'y}'\psi_\alpha+F_{x'x'}\varphi_{t\alpha}+F_{x'y'}'\psi_{t\alpha}.$$

გავიხსენოთ ახლა ფორმულები:

$$L = F_{xx}' - y'y'' F_1, \quad M = F_{xy}' + x'y'' F_1 = F_{yx}' + x''y' F_1,$$

$$N = F_{yy}' - x'x'' F_1, \quad F_{x'x'}' = y'^2 F_1, \quad F_{x'y'}' = -x'y' F_1, \quad F_{y'y'}' = x'^2 F_1 \qquad \text{(III)}.$$

ამ ფორმულების ძალით B შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$B = (L + \psi_t\psi_u F_1)\ \varphi_\alpha + (M - \varphi_u\psi_t F_1)\ \psi_\alpha + F_1\psi_t^2\varphi_{t\alpha} - F_1\varphi_t\psi_t\psi_{t\alpha},$$

ანუ,

$$B = L\varphi_\alpha + M\psi_\alpha - F_1\psi_t(\varphi_u\psi_\alpha - \psi_u\varphi_\alpha - \psi_t\varphi_{t\alpha} + \varphi_t\psi_{t\alpha})$$

აღვნიშნოთ ახლა

$$\Delta = \varphi_t\psi_\alpha - \psi_t\varphi_\alpha .$$

ვიპოვოთ Δ_t. დავწერთ

$$\Delta_t = \varphi_{tt}\psi_\alpha - \psi_{tt}\varphi_\alpha + \varphi_t\psi_{\alpha t} - \psi_t\varphi_{\alpha t}$$

თუ შევადარებთ ამ ტოლობას ზემოთმიღებულ B-ს გამოხატულებას, დავწერთ

$$B = L\varphi_\alpha + M\psi_\alpha - F_1\psi_t\Delta_t .$$

ვნახოთ რა არის $\frac{dB}{dt}$.

$$\frac{dB}{dt} = \varphi_\alpha \frac{dL}{dt} + \psi_\alpha \frac{dM}{dt} + L\varphi_{\alpha t} + M\psi_{\alpha t} - \psi_{tt} F_1\Delta_t - \psi_t \frac{d}{dt}(F_1\Delta_t).$$

$\left(\frac{d}{dt}(F_1\psi_t\Delta_t)\right.$ ჩვენ ასე წარმოვადგინოთ: $\left.\psi_t \frac{d}{dt}(F_1\Delta_t) + F_1\Delta_t\psi_{tt}\right)$.

ახლა (III) ფორმულების ძალით A შემდეგნაირად შეგვიძლია გარდავქმნათ:

$$A = F_{xx}\varphi_\alpha + F_{xy}\psi_\alpha + (L + \psi_t\psi_{tt} F_1)\ \varphi_{\alpha t} + (M - \varphi_t\psi_{tt} F_1)\ \psi_{t\alpha}.$$

რა არის ახლა $A - \frac{dB}{dt}$. დავწერთ

$$A - \frac{dB}{dt} = F_{xx}\varphi_\alpha + F_{xy}\psi_\alpha + L\varphi_{\alpha t} + \varphi_{\alpha t}\psi_t\psi_{tt}F_1 + M\psi_{t\alpha} -$$

$$- \varphi_t\psi_{tt}\psi_{t\alpha} F_1 - \varphi_\alpha \frac{dL}{dt} - \psi_\alpha \frac{dM}{dt} - L\varphi_{\alpha t} - M\psi_{\alpha t} + \psi_{tt} F_1(\varphi_{tt}\psi_\alpha +$$

$$+ \varphi_t\psi_{\alpha t} - \psi_{tt}\varphi_\alpha - \psi_t\varphi_{\alpha t}) + \psi_t \frac{d}{dt}(F_1\Delta_t) = \left(F_{xx} - \frac{dL}{dt} - \psi_{tt}^2 F_1\right)\varphi_\alpha +$$

$$+ \left(F_{xy} - \frac{dM}{dt} + \varphi_{tt}\psi_{tt}F_1\right)\psi_\alpha + \psi_t \frac{d}{dt}(F_1\Delta_t).$$

იგივეობა (ა) ჩვენ ახლა შემდეგნაირად შეგვიძლია გადმოვწეროთ:

$$\left(F_{xx} - \frac{dL}{dt} - \psi_{tt}^2 F_1\right)\varphi_\alpha + \left(F_{xy} - \frac{dM}{dt} + \varphi_{tt}\psi_{tt} F_1\right)\psi_\alpha +$$

$$+ \psi_t \frac{d}{dt}(F_1\Delta_t) = 0$$

მაგრამ, როგორც ვიცით,

$$F_{xx} - \frac{dL}{dt} - \psi_{tt}^2 F_1 = L_1 = \psi_t^2 F_2,$$

და,

$$F_{xy} - \frac{dM}{dt} + \varphi_{tt}\psi_{tt}F_1 = M_1 = -\varphi_t\psi_t\psi_{tt}F_2.$$

ამგვარად, გვექნება:

$$F_2(\psi_t^2 \varphi_\alpha - \varphi_t\psi_t\psi_\alpha) + \psi_t \frac{d}{dt}(F_1 \Delta_t) = 0,$$

ანუ,

$$-\psi_t \left[(\varphi_t\psi_\alpha - \psi_t\varphi_\alpha) F_2 - \frac{d}{dt}(F_1\Delta_t)\right] = 0$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$-\psi_t \left[F_2 \Delta - \frac{d}{dt}(F_1 \Delta_t)\right] = 0 \qquad \text{(IV)}$$

ასეთი ტოლობა მივიღეთ, როცა გამოვედით განტოლებიდან

$$F_x - \frac{d}{dt} F_x' = 0.$$

თუ ავიღებთ ახლა განტოლებას,

$$F_y - \frac{d}{dt} F_y' = 0,$$

სრულებით იმავე წესით, როგორც წინათ, გამოვიყვანთ შემდეგ ტოლობას

$$-\varphi_t \left[F_2\Delta - \frac{d}{dt}(F_1 \Delta_t)\right] = 0 \qquad \text{(V)}$$

რადგანაც თანახმად ჩვენი პირობისა ψ_t და φ_t არ შეიძლება ორივე ერთდროულად ეტოლებოდეს ნულს, ამიტომ (IV), (V) ტოლობებიდან გვექნება:

$$F_2 \Delta - \frac{d}{dt}(F_1 \Delta_t) = 0$$

ეს ტოლობა, რასაკვირველია, წარმოადგენს იგივეობას. შევადაროთ იგი Jacobi-ს დიფერენციალურ განტოლებას

$$F_2 w - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{dw}{dt}\right) = 0$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ $\Delta = \varphi_t\psi_\alpha - \psi_t\varphi_\alpha$ არის ამ განტოლების ინტეგრალი.

სრულებით ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $\varphi_t\psi_\beta - \psi_t\varphi_\beta$ არის Jacobi-ის განტოლების მეორე ინტეგრალი.

$\varphi_t\psi_\alpha - \psi_t\varphi_\alpha$ და $\varphi_t\psi_\beta - \psi_t\varphi_\beta$ წარმოადგენს t, α და β ფუნქციებს.

ჩავსვათ ამ ფუნქციებში α და β მაგივრად ამ პარამეტრების ის მნიშვნელობანი α_0 და β_0, რომელნიც ჩვენ AB ექსტრემალს ეთანადება. მაშინ მივიღებთ ერთი ცვალებადის t ფუნქციებს. აღვნიშნოთ ეს ფუნქციები შესაბამისად $u(t)$ და $v(t)$. დავწეროთ:

$$u(t) = \varphi_t(t, \alpha_0, \beta_0)\,\psi_\alpha(t, \alpha_0, \beta_0) - \psi_t(t, \alpha_0, \beta_0)\,\varphi_\alpha(t, \alpha_0, \beta_0),$$

$$v(t) = \varphi_t(t, \alpha_0, \beta_0)\,\psi_\beta(t, \alpha_0, \beta_0) - \psi_t(t, \alpha_0, \beta_0)\,\varphi_\beta(t, \alpha_0, \beta_0).$$

$u(t)$ და $v(t)$ წარმოადგენენ Jacobi-ს დიფერენციალურ განტოლების კერძო ინტეგრალებს. შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ ეს ინტეგრალები ხაზოვნურად დამოუკიდებელია. ამ დამტკიცებაზე აქ ჩვენ არ შევჩერდებით (ამის შესახებ იხ. მაგ. Bolza. Vorlesungen über Variationsrechnung. 1909. 233 s.).

$u(t)$ და $v(t)$ ფუნქციების საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ ფუნქცია $\theta(t_1, t)$. დავწეროთ:

$$\theta(t_1, t) = u(t)\, v(t_1) - v(t)\, u(t_1)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ექსტრემალთა ოჯახის განტოლების საშუალებით შეგვიძლია შევადგინოთ ფუნქცია $\theta(t_1, t)$.

იმისათვის რომ ვიპოვოთ t_1-ის შეუღლებული t_1^* წერტილი, $\theta(t_1, t)$ უნდა გავუტოლოთ ნულს და t_1-ის შემდგომი ფესვი $\theta(t_1, t) = 0$ განტოლებისა იქნება სწორედ შეუღლებული წერტილი t_1^*.

მოვიყვანოთ ახლა შეუღლებული წერტილის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას. წერტილზე A გავიყვანოთ ექსტრემალთა ოჯახი, რომელიც, როგორც კერძო წევრს, შეიცავს ჩვენ AB ექსტრემალს. ასეთი ოჯახის განტოლება შეიცავს მხოლოდ ერთ პარამეტრს. იმისათვის, რომ გამოვხატოთ ასეთი ოჯახი, განტოლებას: $x = \varphi(t, \alpha, \beta)$ $y = \psi(t, \alpha, \beta)$, რომელიც იძლევა საერთოდ ექსტრემალთა ოჯახის განტოლებას, უნდა მივუმატოთ ორი განტოლება: $x_1 = \varphi(t_1, \alpha, \beta)$ $y_1 = \psi(t_1, \alpha, \beta)$, რომელიც გამოხატავს იმას, რომ ჩვენი ოჯახი გადის A წერტილზე.

საერთოდ უნდა გვახსოვდეს, რომ t_1-ს, რომელიც წარმოადგენს პარამეტრის t მნიშვნელობას A წერტილისათვის, ყოველი ექსტრემალისათვის ერთიდაიგივე მნიშვნელობა არა აქვს. მაგალითად, თუ პარამეტრად t ავიღებთ მრუდის მხების tg, ყოველ ექსტრემალს წერტილში A ექნება თავისი მხები და, მაშასადამე, ყოველ ექსტრემალს ეთანადება თავისი გარკვეული მნიშვნელობა t_1-ის.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ განტოლებათა $x_1 = \varphi(t_1, \alpha, \beta)$, $y_1 = \psi(t_1, \alpha, \beta)$ საშუალებით შესაძლებელია გამორიცხვა t_1 და α-სი t ან და t_1 და β-სი. მართლაც, გამტოლებებს $x_1 = \varphi(t_1, \alpha, \beta)$, $y_1 = \psi(t_1, \alpha, \beta)$ აკმაყოფილებს t_1, α, β-ის მნიშვნელობანი, რომელნიც AB ექსტრემალს ეთანადება. მეორე მხრივ ამავე მნიშვნელობათათვის Jacobi-ს დეტერმინანტები:

$$\begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_\alpha \\ \psi_t & \psi_\alpha \end{vmatrix} \quad \text{და} \quad \begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_\beta \\ \psi_t & \psi_\beta \end{vmatrix}$$

არ შეიძლება რომ ერთდროულად იყოს ნულები. მართლაც, ეს დეტერმინანტები შესაბამისად უტოლდებიან $u(t)$ და $v(t)$, მხოლოდ

$u(t)$ და $v(t)$ ერთდროულად ვერ მოისპობიან (ეს გამომდინარეობს Abel'-ის ფორმულიდან. რადგან $c \neq 0$ (იხ. გვ.), ამიტომ შეუძლებელია რომ $u(t)$ და $v(t)$ ერთდროულად მოისპოს).

გარკვეულობისათვის ვთქვათ, რომ მეორე დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება. მაშინ შეგვიძლია გამოვრიცხოთ t_1 და β, ისე რომ დაგვრჩება მხოლოდ α პარამეტრი. განტოლებას ექსტრემალთა ოჯახისა, რომელიც გადის A წერტილზე, ექნება სახე:

$$x = x(t, \alpha), \quad y = y(t, \alpha).$$

სრულებით იმავე წესით, როგორც წინათ, დავამტკიცებთ, რომ ფუნქცია: $x_t y_\alpha - y_t x_\alpha = \theta(t_1, \alpha)$ არის Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $\theta(t_1, \alpha_0) = 0$.
მართლაც ჩვენ გვაქვს:

$$x(t_1, \alpha) = x_1, \quad y = (t_1, \alpha) = y_1$$

მოვახდინოთ უკანასკნელი ტოლობათა დიფერენციაცია.
მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_t dt_1 + x_\alpha d\alpha &= 0 \\ y_t dt_1 - y_\alpha d\alpha &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(VI)}$$

ამ განტოლებებში α მაგივრად ჩავსვათ α_0.

სისტემა (VI) მხოლოდ მაშინ იქნება დაკმაყოფილებული, როცა

$$\begin{vmatrix} x_t, x_\alpha \\ y_t, y_\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

რაც იმას გამოხატავს, რომ $\theta(t_1, \alpha_0) = 0$, და ამით ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ფუნქცია $\theta(t, \alpha_0)$ ერთის მხრივ წარმოადგენს Jacobi-ს განტოლების ინტეგრალს, ხოლო მეორე მხრივ ისპობა, როცა $t = t_1$, ისევე როგორც $\theta(t_1, t)$ ფუნქცია. მაგრამ საკმარისია იაკობის დიფერენციალურ განტოლების ორ ინტეგრალს საერთო ფესვი ჰქონდეთ, რომ ისინი მუდმივი მამრავლით განსხვავდებოდნენ. ამიტომ გვექნება:

$$\theta(t, \alpha_0) = c\, \theta(t_1, t)$$

ვიპოვოთ ახლა ოჯახის $x = x(t, \alpha)$, $y = y(t, \alpha)$ მომვლების განტოლება.

ცხადია, რომ ამ მომვლების კოორდინატები წარმოადგენს α პარამეტრის ფუნქციებს. მართლაც, მომვლების რომელიმე წერტილი წარმოადგენს ექსტრემალთა ოჯახის ერთ რომელიმე მრუდის წერტილს და მისი კოორდინატები წარმოადგენს ფუნქციებს პარამეტრის α,

რომელიც ექსტრემალთა ოჯახის მრუდებს ახასიათებს. მომვლების განტოლებისათვის დავწერთ:

$$x=\bar{x}(\alpha),\quad y=\bar{y}(\alpha).$$

მეორე მხრივ მომვლების განტოლება ჩვენ შეგვიძლია გამოვთქვათ ჩვენი ოჯახის განტოლების საშუალებით, თუ ცვლადად მივიღებთ α-ს და t-ს კი განვიხილავთ, როგორც α-ს ფუნქციას: $t=t(\alpha)$. ამ ფუნქციას განვსაზღვრავთ განტოლებებიდან $x(t,\alpha)=\bar{x}(\alpha)$, $y(t,\alpha)=\bar{y}(\alpha)$. ამგვარად, მომვლების განტოლება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სახით:

$$x=x(t(\alpha),\alpha),\quad y=y(t(\alpha),\alpha).$$

ახლა მომვლების მხების tg რომელიმე წერტილზე, რომელიც ეთანადება α ერთ გარკვეულ მნიშვნელობას, იქნება:

$$\frac{\bar{y}'(\alpha)}{\bar{x}'(\alpha)}=\frac{y_\alpha(t(\alpha),\alpha)}{x_\alpha(t(\alpha),\alpha)}=\frac{y_t\frac{dt}{d\alpha}+y_\alpha}{x_t\frac{dt}{d\alpha}+x_\alpha}.$$

მეორე მხრივ, იგივე მხები წარმოადგენს აგრეთვე ექსტრემალთა ოჯახის ერთი მრუდის მხებს, რომელიც α იმავე მნიშვნელობით დახასიათდება, და ეს მხები გაივლის მრუდის იმ წერტილზე, რომელიც შეესაბამება t მნიშვნელობას $t=t(\alpha)$. ამიტომ იმავე მხების კუთხის tg ჩვენ შემდეგნაირად შეგვიძლია გამოვხატოთ: $\frac{y_t}{x_t}$. გვექნება:

$$\frac{y_t}{x_t}=\frac{y_t\frac{dt}{d\alpha}+y_\alpha}{x_t\frac{dt}{d\alpha}+x_\alpha}.$$

მაგრამ ასეთი ტოლობა მხოლოდ მაშინ არის შესაძლო, როცა $y_t x_\alpha - x_t y_\alpha = 0$. (საერთოდ, თუ გვაქვს $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$ ეს მხოლოდ მაშინ არის შესაძლო როცა $ad-bc=0$).

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ $D(t(\alpha),\alpha)=0$, ე. ი. $D(t,\alpha)$ მომვლების მიმართ ყოველთვის ნულის ტოლია. ვთქვათ კერძოდ $\alpha=\alpha_0$. აღვნიშნოთ t-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მომვლები ჩვენს ექსტრემალს შეეხება t^*-ით. მაშინ თანახმად ზემოთ ნათქვამისა $D(t^*,\alpha_0)=0$ და, მაშასადამე, $D(t^*,\alpha_0)=0$.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, *რომ A წერტილის შეუღლებული წერტილი ყოფილა ის წერტილი, რომელზედაც ექსტრემალთა ოჯახის მომვლები ექსტრემალს შეეხება.*

ჩვენ გამოვიყვანეთ მინიმუმის Legendre-ის და Jacobi-ს პირობა. ვნახოთ ახლა, დაცულია თუ არა ეს პირობები ბრაქისტოქრონის პრობლემისათვის. დავიწყოთ Legendre-ის პირობიდან: F_1 უნდა იყოს დადებითი.

ჩვენ ვიცით, რომ $F_1=\frac{F_{x'x'}}{y'^2}$. ვიპოვოთ $F_{x'x'}$. ჩვენ გვქონდა ინტეგრალი.

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\sqrt{y-y_1+k}},\quad \text{ამიტომ}\quad F=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{y-y_1+k}},\quad \text{აქედან}$$

$$F'_{x'}=\frac{1}{\sqrt{y-y_1+k}}\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

$$F_{x'x'}=\frac{1}{\sqrt{y-y_1+k}}\;\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}-x'\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}}{x'^2+y'^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y-y_1+k}}\;\frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ამგვარად,

$$F_1=\frac{1}{\sqrt{y-y_1+k}}\;\frac{1}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

აქედან ვხედავთ, რომ F_1 იქნება ყოველთვის დადებითი და, ამგვარად, Legendre-ის პირობა დაცულია.

ვნახოთ ახლა დაცულია თუ არა Jacobi-ს პირობა. ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ t_1 წერტილის შეუღლებული წერტილი t_1^*. როგორც ვიცით, ამ შეუღლებულ წერტილს ვიპოვით განტოლებიდან:

$$u(t)\,v(t_1)-v(t)\,u(t_1)=0,$$

სადაც

$$u(t)=\varphi_t\psi_\alpha-\psi_t\varphi_\alpha \quad \text{და}\quad v(t)=\varphi_t\psi_\beta-\psi_t\varphi_\beta\,.$$

წინათ ჩვენ გამოვიყვანეთ ექსტრემალის განტოლება ბრაქისტოქრონის პრობლემისათვის. ეს განტოლება არის:

$$x-x_0+\beta_0=\alpha_0(t-\sin t),\quad y-y_0+k=\alpha_0(1-\cos t)$$

ამგვარად,

$$\varphi(t,\alpha_0,\beta_0)\quad \text{და}\quad \psi(t,\alpha_0,\beta_0)$$

იქნება შესაბამისად

$$x_0-\beta_0+\alpha_0(t-\sin t)\quad \text{და}\quad y_0-k+\alpha_0(1-\cos t).$$

დავწეროთ:

$$u(t)=\alpha_0(1-\cos t)^2-\alpha_0\sin t\,(t-\sin t)=\alpha_0(1-2\cos t+$$
$$+\cos^2 t-t\sin t+\sin^2 t)=\alpha_0(1-2\cos t+1-t\sin t)=$$
$$=\alpha_0[2(1-\cos t)-t\sin t]=-\alpha_0\sin t\left(t-2\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)=$$
$$=-\alpha_0\sin t\left(t-2\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right)=-\alpha_0\sin t\left(t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right).$$
$$v(t)=\alpha_0\sin t$$

ამგვარად, გვექნება:

$$\theta(t_1,t)=u(t)\,v(t_1)-v(t)\,u(t_1)=$$
$$=-\alpha_0\sin t\sin t_1\left(t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}-t_1+2\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}\right)$$

დავწეროთ ახლა განტოლება, საიდანაც მივიღებთ შეუღლებულ წერტილს:

$$\alpha_0\sin t\sin t_1\left(t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}-t_1+2\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}\right)=0.$$

$\sin t$ და $\sin t_1$ შეუძლებელია, რომ ნული იყოს, რადგან ჩვენ თავიდანვე ვგულისხმობთ, t და t_1 არის მოთავსებული 0 და π შორის.

ამგვარად, გვექნება

$$t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}-t_1+2\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}=0,$$

ანუ,

$$t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}=t_1-2\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}.$$

ასეთ განტოლებას, რასაკვირველია, აკმაყოფილებს ფესვი t_1. ვნახოთ ახლა არსებობს თუ არა ამ განტოლების მეორე ფესვი.

ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია $t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}$. როცა t იცვლება 0-დან π-მდე, მაშინ $t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ იცვლება მონოტონურად 0-დან $-\infty$-მდე. ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ როცა t იცვლება 0-დან π-მდე ფუნქცია $t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ თავის რომელიმე მნიშვნელობას გაივლის მხოლოდ ერთხელ.

აქედან ჩანს, რომ $(0,\pi)$ შუალედში t_1-ის გარდა არ არსებობს t ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებას.

$$t-2\operatorname{tg}\frac{t}{2}=t_1-2\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}$$

მაშასადამე, t_1-ის შეუღლებული ფესვი t_1^* საზოგადოთ არ არსებობს.

აქედან ცხადია, რომ ბრაქისტოქრონის პრობლემისათვის Jacobi-ს პირობა დაკმაყოფილებულია. ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ბრაქისტოქრონის პრობლემისათვის დაკმაყოფილებულია მინიმუმის სამივე აუცილებელი პირობა·

ლექცია XVII. ექსტრემალის ველი. ექსტრემალური მანძილი.

სრულებით ისევე, როგორც x პრობლემისათვის, დავამტკიცებთ, რომ მინიმუმის სამი აუცილებელი პირობა სუსტი ვარიაციისათვის წარმოადგენენ აგრეთვე საკმარის პირობებსაც. მაგრამ მძლავრი ვარიაციისათვის ისინი უკვე საკმარის პირობებს არ წარმოადგენენ.

გადავიდეთ ეხლა მძლავრი ვარიაციის შესწავლაზე.

როგორც x პრობლემისათვის, აქაც დავაყენოთ შემდეგი კითხვა: ვთქვათ, რომელიმე ორ წერტილზე A და B გაყვანილია ექსტრემალი.

ავიღოთ A წერტილის მახლობლობაში რომელიმე წერტილი P_1 და B წერტილის მახლობლობაში—წერტილი P_2. აღვნიშნოთ, A, B, P_1, P_2 წერტილების კოორდინატებისა და პარამეტრის მნიშვნელობანი შესაბამისად:

$$a_1, b_1, \tau_1; a_2, b_2, \tau_2; x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2;$$

ისმება საკითხი შეიძლება თუ არა წერტილების P_1 და P_2 შეერთება ექსტრემალით და თუ ეს შესაძლებელია რა პირობებში.

დავწეროთ ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება: $x=\varphi(t, \alpha, \beta)$, $y=\psi(t, \alpha, \beta)$. ვთქვათ α_0 და β_0 არის α და β-ის მნიშვნელობანი, რომელიც AB ექსტრემალს ეთანადება. ჩვენი ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ გამოვარკვიოთ არსებობს თუ არა α და β ისეთი მნიშვნელობა, რომ ექსტრემალმა გაიაროს P_1 და P_2 შორის, ე. ი. ჩვენ უნდა გამოვარკვიოთ არსებობს თუ არა ისეთი α და β, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებებს:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t_1, \alpha, \beta)-x_1&=0\\ \psi(t_1, \alpha, \beta)-y_1&=0\\ \varphi(t_2, \alpha, \beta)-x_2&=0\\ \psi(t_2, \alpha, \beta)-y_2&=0 \end{aligned}\right\} \text{ა}$$

აქ გვაქვს ოთხი განტოლება ოთხი უცნობით t_1, t_2, α, β. საჭიროა გამოვარკვიოთ, შესაძლებელია თუ არა ამ განტოლების გარდაწყვეტა ამ უცნობების შესახებ.

ცხადია, რომ ჩვენს სისტემას აკმაყოფილებენ შემდეგი მნიშვნელობანი: $t_1=\tau_1$, $t_2=\tau_2$, $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$, $x_1=a_1$, $y_1=a_1$, $x_2=a_2$, $y_2=a_2$.

ამიტომ ჩვენი სისტემა შეგვიძლია გარდავწყვიტოთ მნიშვნელობათა a_1, b_1, a_2, b_2 მახლობლობაში, თუ რომ დაკმაყოფილებულია შემდეგი პირობა: ფუნქციონალური დეტერმინანტი $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)}{\partial(t_1, t_2, \alpha, \beta)}$ მნიშვნელობათათვის τ_1, τ_2, α_0, β_0, a_1, b_1, a_2, b_2 არ უნდა იყოს ნული (Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 აღნიშნავენ შესაბამისად $\varphi(t_1, \alpha, \beta)-x_1$, $\psi(t_1, \alpha, \beta)-y_1$, $\varphi(t_2, \alpha, \beta)-x_2$, $\psi(t_2, \alpha, \beta)-y_2$).

შევადგინოთ ახლა ეს დეტერმინანტი. დავწერთ:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{t_1}, & 0, & \varphi_\alpha, & \varphi_\beta \\ \psi_{t_1}, & 0, & \psi_\alpha, & \psi_\beta \\ 0, & \bar{\varphi}_{t_2}, & \bar{\varphi}_\alpha, & \bar{\varphi}_\beta \\ 0, & \bar{\psi}_{t_2}, & \bar{\psi}_\alpha, & \bar{\psi}_\beta \end{vmatrix}$$

(მესამე და მეოთხე სტრიქონში ხაზს φ და ψ ზემოთ ვწერთ იმისათვის, რომ გავარჩიოთ ერთმანეთისაგან ფუნქციები $\varphi(t_1, \alpha, \beta)$, $\psi(t_1, \alpha, \beta)$ და $\varphi(t_2, \alpha, \beta)$, $\psi t_2, \alpha, \beta)$.

ახლა თუ გავხსნით ამ დეტერმინანტს, მივიღებთ მისთვის შემდეგ გამოხატულებას:

$$\bar{u}(t_2)\,\bar{v}(t_1)-\bar{u}(t_1)\,\bar{v}(t_2).\text{ ეს კი არის } \bar{\theta}(t_2, t_1).$$

(ხაზები u, v და θ-ზე აღნიშნავენ იმას, რომ ჩვენ ჯერ-ჯერობით არ გვაქვს ჩასმული t_1, t_2, α, და β მაგივრად τ_1, τ_2, α_0, β_0).

ჩავსვათ ახლა მიღებულ გამოხატულებაში t_1, t_2, α და β მაგივრად τ_1, τ_2, α_0, β_0, მაშინ მივიღებთ $\theta(\tau_2, \tau_1)$. ეს გამოხატულება მხოლოდ მაშინ შეიძლება იყოს ნული როცა B წერტილი არის A წერტილის შეუღლებული წერტილი, მაგრამ ასეთი შემთხვევა ჩვენ თავიდანვე გვაქვს გამორიცხული. ჩვენ, ამგვარად, ვხედავთ, რომ შესაძლებელია (ა) სისტემის გარდაწყვეტა t_1, t_2, α, β შესახებ წერტილების a_1, b_1, a_2, b_2 მახლობლობაში, ამით დამტკიცებულია, რომ შესაძლებელია შევაერთოთ წერტილები P_1 და P_2 ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალით.

გადავწყვიტოთ (ა) სისტემა t_1, t_2, α და β შესახებ. მივიღებთ

$$t_1=t_1(x_1, y_1, x_2, y_2),\quad t_2=t_2(x_1, y_1, x_2, y_2)$$
$$\alpha=\alpha(x_1, y_1, x_2, y_2),\quad \beta=\beta(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

დავწეროთ ახლა ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება $x=\varphi(t, \alpha, \beta)$ $y=\psi(t, \alpha, \beta)$ და ჩავსვათ α და β მაგივრად მათი ზემოთდაწერილი გამოხატულებანი. მივიღებთ:

$$x=\Phi(t, x_1, y_1, x_2, y_2),\quad y=\psi(t, x_1, y_1, x_2, y_2) \qquad (\text{ბ})$$

ეს არის განტოლება ექსტრემალისა, რომელიც აერთებს P_1 და P_2 წერტილებს. x და y გამოხატულებაში შედის პარამეტრები x_1, y_1, x_2, y_2. ცხადია, რომ ეს პარამეტრები იქნება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი.

საინტერესოა ახლა გამოვარკვიოთ (ბ) ფუნქციების თვისებანი. ჩავსვათ t მაგივრად t_1 და t_2.

მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1;\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2) &= x_1 \\
\Phi(t_2;\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2) &= x_2. \\
\psi(t_1;\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2) &= y_1. \\
\psi(t_2;\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2) &= y_2.
\end{aligned}$$

ცხადია, რომ ეს ტოლობანი წარმოადგენენ იგივეობებს. შეგვიძლია ისინი განვაწარმოოთ x_1, x_2, y_1, y_2 შესახებ. დავწეროთ:

$$\begin{array}{llll}
\Phi_{x_1}=1, & \Phi_{x_2}=0, & \Phi_{y_1}=0, & \Phi_{y_2}=0, \\
\overline{\Phi}_{x_1}=0, & \overline{\Phi}_{x_2}=1, & \overline{\Phi}_{y_1}=0, & \overline{\Phi}_{y_2}=0 \\
\psi_{x_1}=0, & \psi_{x_2}=0, & \psi_{y_1}=1, & \psi_{y_2}=0 \\
\overline{\psi}_{x_1}=0, & \overline{\psi}_{x_2}=0, & \overline{\psi}_{y_1}=0, & \overline{\psi}_{y_2}=1
\end{array}$$

აღვნიშნოთ $\Phi_t=p_1$, $\overline{\Phi}_t=P_2$, $\psi_t=q_1$, $\overline{\psi}_t=q_2$.

იმ შემთხვევაში, როცა ექსტრემალს ისეთი თვისება აქვს, რომ ის მოთავსებულია არეში, რომლის ყოველი ორი წერტილი შეგვიძლია შევაერთოთ ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალით, ამბობენ, რომ ექსტრემალი არის გარშემორტყმული ველით. ისევე, როგორც x პრობლემისათვის, შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ზემოთ მოთხოვნილ პირობებში ექსტრემალი ნამდვილად გარშემორტყმული იქნება ველით.

განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი აღებული ველში მდებარე ერთ ასეთ ექსტრემალზე:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(\Phi,\ \psi,\ \Phi_t,\ \psi_t)\,dt.$$

რადგან ჩვენ თავიდანვე F ფუნქცია ისეთნაირად შევზღუდეთ, რომ ინტეგრალი დამოკიდებულია მხოლოდ მრუდის სახისგან და არა პარამეტრის არჩევისაგან, ამიტომ ზემოთ მიღებულის მიხედვით, უკანასკნელი ინტეგრალი არის ფუნქცია x_1, y_1, x_2, y_2. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $J(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)$.

ვიპოვოთ ახლა ნაწილობითი წარმოებული J-დან x_1 შესახებ.

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}=\int_{t_1}^{t_2}\left[F_x\,\Phi_{x_1}+F_y'\,\psi_{x_1}+F_{x'}\,\Phi_{tx_1}+F_{y'}\,\psi_{tx_1}\right]dt.$$

მოვახდინოთ ასეთნაირი გარდაქმნა:

$$\int F_x'\,\Phi_{tx_1}dt = F_x'\,\Phi_{x_1} - \int \Phi_{x_1}\frac{d}{dt}(F_x')\,dt$$

$$\int F_y'\,\psi_{tx_1}dt = F_y'\psi_{x_1} - \int \psi_{x_1}\frac{d}{dt}(F_y')\,dt$$

ამის და მიხედვით $\frac{\partial J}{\partial x_1}$ შემდეგნაირად შეგვიძლიან წარმოვადგინოთ:

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = [F_x'\,\Phi_{x_1} + F_y'\,\psi_{x_1}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\Phi_{x_1}(F_x - \frac{d}{dt}F_x')\,dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2}\psi_{x_1}(F_y - \frac{d}{dt}\,F_y')\,dt.$$

მაგრამ

$$F_x - \frac{d}{dt}F_x' = 0 \quad \text{და} \quad F_y - \frac{d}{dt}F_y' = 0,$$

რადგან ექსტრემალის განტოლება სწორედ ის განტოლებაა, რომელიც აკმაყოფილებს Euler-ის დიფერენციალურ განტოლებას.

ამგვარად, მივიღებთ:

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = [F_x'\,\Phi_{x_1} + F_y'\,\psi_{x_1}]_{t_1}^{t_2}$$

ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში (გ) ფორმულებს, გვექნება;

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = -F_x'(x_1,\ y_1,\ p_1,\ q_1)$$

სრულებით ამავე წესით გამოვიყვანთ:

$$\frac{\partial J}{\partial y_1} = -F_y'(x_1,\ y_1,\ p_1,\ q_1)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_2} = F_x'(x_2,\ y_2,\ p_2,\ q_2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_2} = F_y'(x_2,\ y_2,\ p_2,\ q_2).$$

განვიხილოთ ახლა ექსტრემალთა კონა, რომელიც A წერტილზე გადის. ვთქვათ ამ კონის განტოლება არის $x = x(t,\alpha)$, $y = y(t,\alpha)$. რადგან AB ექსტრემალი გარშემორტყმულია ველით, ამიტომ ამ ველის ყოველ წერტილზე გაივლის ჩვენი კონის ერთი ექსტრემალი.

ამგვარად, ველის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთი გარკვეული ექსტრემალი და, მაშასადამე, ველის ყოველი წერტილისათვის გვექნება α პარამეტრის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა, რომელიც ამ ექსტრემალს ახასიათებს. α იქნება ექსტრემალის ბოლო წერტილების კოორდინატების ფუნქცია.

რადგან A წერტილის კოორდინატები x_1 და y_1 იქნება მუდმივი, ამიტომ ფუნქცია $J(x_1, y_1, x_2, y_2)$ დამოკიდებულია მხოლოდ ბოლო წერტილის კოორდინატებისაგან. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $J(x, y)$. (x_2 და y_2 მაგივრად ჩვენ ვწერთ x და y).

როგორი იქნება $\frac{\partial J}{\partial x}$. დავწერთ:

$$\frac{\partial J}{\partial x}=F_x'(x, y, p, q).$$

p და q არის x და y ფუნქციები. მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ ყოველ ბოლო წერტილს შეესაბამება ერთი გარკვეული ექსტრემალი და, მაშასადამე, α-ს გარკვეული მნიშვნელობა.

ამგვარად ყოველ x და y-ს ეთანადება თავისი გარკვეული α. იგივე შეგვიძლია ვთქვათ t-ს შესახებ.

მაშასადამე შეგვიძლია განტოლების $x=x(t, \alpha)$, $y=y(t, \alpha)$ გარდაწყვეტა α და t შესახებ. მივიღებთ: $\alpha=\alpha(x, y)$, $t=t(x, y)$.

ჩავსვათ x_t და y_t-ში t და α-ს მაგივრად ეს გამოსახულებანი. მიღებული ფუნქციები:

$$x_t=x_t(t(x, y), \alpha(x, y))$$
$$y_t=y_t(t(x, y), \alpha(x, y)).$$

ჩვენ ვიღებთ p და q-ს, როგორც x და y-ის ფუნქციას: $p=p(x\ y)$, $q=q(x, y)$.

$\frac{\partial J}{\partial x}$ და $\frac{\partial J}{\partial y}$ შემდეგი სახით დავწერთ:

$$\frac{\partial J}{\partial x}=F_x'(x, y, p(x, y), q(x, y))$$
$$\frac{\partial J}{\partial y}=F_y'(x, y, p(x, y), q(x, y)).$$

ლექცია XVIII

Weierstrass-ის ფუნქცია.

ავიღოთ ექსტრემალი A-დან B-მდე და ვთქვათ, რომ ექსტრემუმის სამივე აუცილებელი პირობები დაცულია. გავიყვანოთ A წერტილიდან ექსტრემალთა კონა. რადგან ექსტრემალი AB გარშემორტყმულია ველით, ამიტომ ველის ყოველ წერტილზე გაივლის ჩვენი კონის ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალი.

აღვნიშნოთ ექსტრემალთა კონის განტოლება $x=x(t, \alpha)$, $y=y(t,\alpha)$. α და t შეგვიძლია თავის მხრივ განვიხილოთ როგორც x და y-ის ფუნქციები: $\alpha=\alpha(x, y)$, $t=t(x, y)$.

ჩვენ, აგრეთვე, ვიცით, რომ $p(x, y)=x_t(t(x, y), \alpha(x, y))$, $q(x, y)=y_t(t(x, y), \alpha(x, y))$.

შევადგინოთ ახლა ექსტრემალური მანძილი, რომელიც წარმოადგენს ორი ცვლადის x და y ფუნქციას. დავწერთ:

$$J(x, y)=\int_{t_1}^{t_2} F(x(t, \alpha), y(t, \alpha), x_t(t, \alpha), y_t(t, \alpha))dt.$$

აღვნიშნოთ $მ_0$-ით ექსტრემალი AB და მისი განტოლება:

$$x=x_0(t), \; y=y_0(t).$$

ავიღოთ აგრეთვე ველში რომელიმე შესადარებელი მ მრუდი განტოლებით:

$$x=\overline{x}(t), y=\overline{y}(t).$$

სრული ვარიაცია ΔJ შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\Delta J=Jმ-Jმ_0=\int_{t_1}^{t_2} F(\overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{x}'(t), \overline{y}'(t))dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} F(x_0(t), y_0(t), x_0'(t), y_0'(t))dt.$$

განვიხილოთ ახლა $Jმ_0$. დავწერთ:

$$Jმ_0=J(x_2, y_2)=J(x_2, y_2)-J(x_1, y_1)=\int_{t_1}^{t_2} dJ(x, y)=\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial J}{\partial x}dx+\frac{\partial J}{\partial y}dy.$$

ჩავსვათ ახლა $\frac{\partial J}{\partial x}$ და $\frac{\partial J}{\partial y}$ მაგივრად მათი გამოხატულებანი, რომელიც წარსულ ლექციაზე გამოვიყვანეთ. მივიღებთ:

$$Jმ_0=\int_{t_1}^{t_2} F_x'(x, y, p(x, y) \; q(x, y))dx+F_y'(x, y, p(x, y), q(x, y))dy$$

მეორე მხრივ $Jმ_0$ წარმოადგენს ინტეგრალს სრული დიფერენციალიდან ($Jმ_0=\int_{t_1}^{t_2} dJ(x, y)$), და იგი სრულებით არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ რა გზით ავიღებთ ინტეგრალის მნიშვნელობას. ასეთ გზად შეგვიძლია ავიღოთ მრუდი მ.

დავწერთ:

$$Jმ_0=\int_{t_1}^{t_2}\{F_x'(\overline{x}, \overline{y}, p(\overline{x}, \overline{y}), q(\overline{x}, \overline{y}))\overline{x}'+F_y'(\overline{x}, \overline{y}, p(\overline{x}, \overline{y}), q(\overline{x}, \overline{y}))\overline{y}'\}dt$$

ჩვენ, ამგვარად, $Jმ_0$ გამოვხატეთ ინტეგრალის საშუალებით, რომელიც აღებულია მ მრუდზე.

ახლა ΔJ შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\Delta J=\int_{t_1}^{t_2}[F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{x}', \overline{y}')-F_x'(\overline{x}, \overline{y}, p(\overline{x}, \overline{y}), q(\overline{x}, \overline{y}))\overline{x}'-$$

$$-F_y'(\overline{x}, \overline{y}, p(\overline{x}, \overline{y}), q(\overline{x}, \overline{y}))\overline{y}']dt.$$

ΔJ გამოხატულია ერთი ინტეგრალის საშუალებით, რომელიც აღებულია შესადარებელ მ მრუდზე.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$E(x, y; p, q; \bar{p}, \bar{q}) = F(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - \bar{p}\, F_p'(x, y, p, q) - \bar{q}\, F_q'(x, y, p, q)$ - ასეთ ფუნქციას Weierstrass-ის ფუნქცია ეწოდება.

ახლა ΔJ შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\Delta J=\int_{t_1}^{t_2} E(\bar{x}, \bar{y}, p(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}, \bar{y}), \bar{x}', \bar{y}')dt,$$

ანუ $$\Delta J=\int_{\text{მ}} E(x, y, p(x, y), q(x, y)\, x', y')\, dt.$$

ΔJ-ს მიღებული გამოხატულება მეტად მნიშვნელოვანი და ღირსშესანიშნავია. ორი ინტეგრალის სხვაობის მაგივრად, რომელთაგან პირველი იყო აღებული შესადარებელ მრუდზე და მეორე ექსტრემალზე, ΔJ გამოსახატავად ჩვენ მივიღეთ მხოლოდ ერთი ინტეგრალი, რომელიც შესადარებელ მრუდზე არის აღებული.

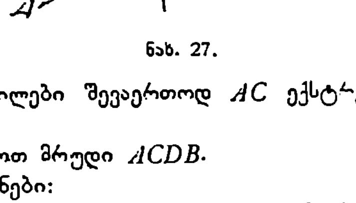
ლ ე ქ ც ი ა XIX.

მინიმუმის მეოთხე აუცილებელი პირობა. მინიმუმის საკმარისი პირობა.

გამოვიყვანოთ ახლა მინიმუმის მეოთხე აუცილებელი პირობა.

განვიხილოთ AB ექსტრემალზე რომელიმე D წერტილი, მოთავსებული A და B შორის.

ამ D წერტილზე გავიყვანოთ ნებსითი K მრუდი, რომლის განტოლება აღვნიშნოთ $x=\bar{x}(\tau)$, $y=\bar{y}(\tau)$. τ მნიშვნელობა D წერტილისათვის აღვნიშნით τ_0. ავიღოთ K მრუდზე რომელიმე C წერტილი ისე რომ ის ველიდან არ გამოვიდეს და მისთვის τ-ს მნიშვნელობა იყოს τ_0-ზე ნაკლები. აღვნიშნოთ ეს მნიშვნელობა $\tau_0-\varepsilon$. ε იქნება დადებითი რიცხვი.



ნახ. 27.

რადგან C წერტილი იმყოფება ველში, შეგვიძლია A და C წერტილები შევაერთოდ AC ექსტრემალით.

შესადარებელ მრუდად ავიღოთ მრუდი $ACDB$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

D წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_0, y_0. წარმოებულების მნიშვნელობა D წერტილზე AB მრუდის მიმართ აღვნიშნოთ x'_0, y'_0 და CD მრუდის მიმართ $\bar{x}'_0$, $\bar{y}'_0$.

ΔJ შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\Delta J = J_{AC} + J_{CD} + J_{DB} - J_{AB} = J_{AC} + J_{CD} - J_{AD}. \qquad (\mathrm{I})$$

გამოვიყვანოთ ახლა მინიმუმის მეოთხე აუცილებელი პირობა.

წინა ლექციაზე ჩვენ დავინახეთ, რომ საერთოდ სრულ ვარიაციის ΔJ შემდეგი სახე აქვს:

$$\Delta J = \int_{t_1}^{t_2} E\,[\bar{x}, \bar{y}, p\,(\bar{x}, \bar{y}), q\,(\bar{x}, \bar{y}), \bar{x}', \bar{y}']\,dt \qquad (\mathrm{II})$$

სადაც $\bar{x}\,(t)$ და $\bar{y}\,(t)$ შესადარებელი მრუდის კოორდინატებია.

ცხადია, რომ E ფუნქციის მნიშვნელობა AC მრუდის მიმართ იქნება ნული.

მართლაც, თუ მივიღებთ მხედველობაში ტოლობას

$$F = \bar{x}'\,F_{x'} + \bar{y}'\,F_{y'},$$

E ფუნქციას შემდეგი სახე შეგვიძლია მივცეთ:

$$E = \bar{x}'\,F_{x'}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}') + \bar{y}'.F_{y'}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}') -$$

$$- \bar{x}'\,F_{x'}\,[\bar{x}, \bar{y}, p\,(\bar{x}, \bar{y}), q\,(\bar{x}, \bar{y})] - \bar{y}'\,F_{y'}\,(\bar{x}, \bar{y}, p\,(\bar{x}, \bar{y}), q\,(\bar{x}, \bar{y})].$$

რადგან AC წარმოადგენს ექსტრემალს, ამიტომ მისთვის $p\,(\bar{x}, \bar{y})$ და $q\,(\bar{x}, \bar{y})$ იქნება სწორედ $\bar{x}'$ და $\bar{y}'$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ AC მრუდის მიმართ E ფუნქცია იქნება ნული.

სრულებით ასევე მივიღებთ, რომ E ფუნქცია იქნება ნული აგრეთვე AD მრუდის მიმართ.

ვარიაცია ΔJ შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\Delta J = \int_{\tau_0-\varepsilon}^{\tau_0} E\,(\bar{x}\,(\tau), \bar{y}\,(\tau), p\,(\bar{x}, \bar{y}), q\,(\bar{x}, \bar{y}), \bar{x}', \bar{y}')\,d\tau. \qquad (\mathrm{III})$$

უკანასკნელი ინტეგრალი წარმოადგენს ε-ის გარკვეულ ფუნქციას $\Phi\,(\varepsilon)$.

დავშალოთ იგი ε ხარისხების მიხედვით Taylor-ის ფორმულის ძალით. უშუალოთ სჩანს რომ $\Phi\,(0)$ იქნება ნული.

ვიპოვოთ ახლა $\Phi'\,(0)$. თუ მოვახდენთ (III) ინტეგრალის გაწარმოებას პარამეტრის შესახებ (ამ შემთხვევაში პარამეტრი ε შედის მხოლოდ ქვედა საზღვარში) და შემდეგ ε მაგივრად ჩავსვამთ ნულს მივიღებთ:

$$\Phi'\,(0) = E\,[\bar{x}\,(\tau_0), \bar{y}\,(\tau_0), p\,(\bar{x}\,(\tau_0), \bar{y}\,(\tau_0)), q\,(\bar{x}\,(\tau_0), \bar{y}\,(\tau_0)), \bar{x}'\,(\tau_0), \bar{y}'\,(\tau_0)],$$

ანუ, ჩვენი აღნიშვნების თანახმად.

$$\Phi'\,(0) = E\,(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0)$$

ΔJ შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\Delta J = \varepsilon\,E\,(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0) + \varepsilon^2 K$$

ΔI უნდა იყოს $\geqq 0$. (IV)-დან ჩვენ ვხედავთ (ε არის დადებითი), რომ ეს შეიძლება იყოს მხოლოდ მაშინ, როცა

$$E(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \overline{x'_0}, \overline{y'_0}) \geqq 0 \qquad (V)$$

ეს უტოლობა უნდა იყოს შესრულებული სადაც არ უნდა იყოს აღებული D, A და B შორის, x'_0 და y'_0 ყოველი მნიშვნელობისათვის.

ეს არის მძლავრი ვარიაციის მეოთხე აუცილებელი პირობა.

დავუბრუნდეთ ისევ (V) პირობას. დავწეროთ იგი გაშლილი სახით:

$$F(x_0, y_0, \overline{x'_0}, \overline{y'_0}) - \overline{x'_0}\, F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) - \overline{y'_0}\, F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) \geqq 0 \quad (VI)$$

ჩვენ ვიცით, რომ ფუნქცია F, რანაირიც არ უნდა იყოს მისი არგუმენტები, ყოველთვის შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$F = x' F_{x'} + y' F_{y'}$$

ამის და მიხედვით (VI) ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\overline{x'_0}\,[F_{x'}(x_0, y_0, \overline{x'_0}, \overline{y'_0}) - F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)] +$$
$$+ \overline{y'_0}\,[F_{y'}(x_0, y_0, \overline{x'_0}, \overline{y'_0}) - F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)] \geqq 0 \qquad (VII)$$

ჩვენ მიღებული გვქონდა, რომ F ფუნქცია პირველი რიგის ერთგვაროვანია x' და y' შესახებ, ე. ი.

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y') \qquad (VII')$$

დავამტკიცოთ, რომ $F_{x'}$ და $F_{y'}$ არის იმავე არგუმენტების მიმართ ერთგვაროვანი ფუნქციები ნულოვანი რიგისა ე. ი.

$$F_{x'}(x, y, kx', ky') = F_{x'}(x, y, x', y') \qquad (VIII)$$
$$F_{y'}(x, y, kx', ky') = F_{y'}(x, y, x', y') \qquad (IX).$$

VII'-დან განწარმოებით მივიღებთ:

$$kF_{x'}(x, y, kx', ky') = kF_{x'}(x, y, x', y')$$
$$kF_{y'}(x, y, kx', ky') = kF_{y'}(x, y, x', y')$$

აქედან კი გამომდინარეობს ტოლობანი (VIII), (IX).

დამტკიცებული დებულების ძალით, (VII)

ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ

$$\sqrt{\overline{x'^2_0} + \overline{y'^2_0}}\left\{\frac{\overline{x'_0}}{\sqrt{\overline{x'^2_0} + \overline{y'^2_0}}}\left[F_{x'}\left(x_0, y_0, \frac{\overline{x'_0}}{\sqrt{\overline{x'^2_0} + \overline{y'^2_0}}}, \frac{\overline{y'_0}}{\sqrt{\overline{x'^2_0} + \overline{y'^2_0}}}\right) -\right.\right.$$
$$\left. - F_{x'}\left(x_0, y_0, \frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}}, \frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\overline{y'_0}}{\sqrt{\overline{x'^2_0} + \overline{y'^2_0}}}\left[F_{y'}\left(x_0, y_0, \frac{\overline{x'_0}}{\sqrt{\overline{x'^2_0} + \overline{y'^2_0}}}, \frac{\overline{y'_0}}{\sqrt{\overline{x'^2_0} + \overline{y'^2_0}}}\right) -\right.$$
$$\left.\left. - F_{y'}\left(x_0, y_0, \frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}}, \frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}}\right)\right]\right\} \geqq 0$$

ანუ, თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{\overline{x}'_0}{\sqrt{\overline{x}'^2_0+\overline{y}'^2_0}}=\cos\overline{\theta}_0,\ \frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0+y'^2_0}}=\cos\theta_0,\ \frac{\overline{y}'_0}{\sqrt{\overline{x}'^2_0+\overline{y}'^2_0}}=\sin\overline{\theta}_0,$$

$$\frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0+y'^2_0}}=\sin\theta_0,$$

$$\sqrt{\overline{x}'^2_0+\overline{y}'^2_0}\,\{\cos\overline{\theta}_0\,[F_{x'}(x_0,y_0,\cos\overline{\theta}_0,\sin\overline{\theta}_0)-F_{x'}(x_0,y_0,\cos\theta_0,\sin\theta_0)]+$$
$$+\sin\overline{\theta}_0\,[F_{y'}(x_0,y_0,\cos\overline{\theta}_0,\sin\overline{\theta}_0)-F_{y'}(x_0,y_0,\cos\theta_0,\sin\theta_0)]\}\geqq 0 \qquad (X)$$

(X) უტოლობა მოკლედ შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\sqrt{\overline{x}'^2_0+\overline{y}'^2_0}\,[\overline{p}_0(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\overline{q}_0(\overline{F}_{y'}-F_{y'})]\geqq 0 \qquad (XI)$$

საინტერესოა ახლა გამოვიყვანოთ დამოკიდებულება E და F_1 ფუნქციათა შორის.

$$F_{x'}(x_0,y_0,\cos\overline{\theta}_0,\sin\overline{\theta}_0)-F_{x'}(x_0,y_0,\cos\theta_0,\sin\theta_0)$$

შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\int_0^{\overline{\theta}_0-\theta_0}\frac{d}{d\tau}[F_{x'}(x_0,y_0,\cos(\theta_0+\tau),\sin(\theta_0+\tau))]\,d\tau.$$

ეს ინტეგრალი ტოლია

$$\int_0^{\varphi_0}[-F_{x'x'}\sin(\theta_0+\tau)+F_{x'y'}\cos(\theta_0+\tau)]\,d\tau.$$

(φ_0-ით აღნიშნულია $\overline{\theta}_0-\theta$).

ამგვარად,

$$\overline{F}_{x'}-F_{x'}=\int_0^{\varphi_0}[-F_{x'x'}\sin(\theta_0+\tau)-F_{x'y'}\cos(\theta_0+\tau)]\,d\tau.$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ $F_{x'x'}=y'^2F_1$ და $F_{x'y'}=-x'y'F_1$. დავწეროთ:

$$\overline{F}_{x'}-F_{x'}=\int_0^{\varphi_0}[-\sin^3(\theta_0+\tau)-\sin(\theta_0+\tau)\cos^2(\theta_0+$$
$$+\tau)]\cdot F_1(x_0,y_0,\cos(\theta_0+\tau)\sin(\theta_0+\tau))\,d\tau=$$
$$=\int_0^{\varphi_0}-\sin(\theta_0+\tau)\,F_1(x_0,y_0,\cos(\theta_0+\tau),\sin(\theta_0+\tau))\,d\tau.$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\overline{F}_{y'}-F_{y'}=\int_0^{\varphi_0}\cos(\theta_0+\tau)\,F_1(x_0,y_0,\cos(\theta_0+\tau),\sin(\theta_0+\tau))\,d\tau.$$

(XI) უტოლობის მარცხენა მხარე შემდეგნაირად შეგვიძლია გარდავქმნათ.

$$\sqrt{\overline{x}'^2_0+\overline{y}'^2_0}\,[\cos\overline{\theta}_0(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\sin\overline{\theta}_0(\overline{F}_{y'}-F_{y'})]=$$
$$=\sqrt{\overline{x}'^2_0+\overline{y}'^2_0}\,[\cos\overline{\theta}_0\int_0^{\varphi_0}-\sin(\theta_0+\tau)\,F_1\,d\tau+$$
$$+\sin\overline{\theta}_0\int_0^{\varphi_0}\cos(\theta_0+\tau)\,F_1\,d\tau]=\sqrt{\overline{x}'^2_0+\overline{y}'^2_0}\int_0^{\varphi_0}[(-\cos\overline{\theta}_0\sin(\theta_0+\tau)+$$
$$+\sin\overline{\theta}_0\cos(\theta_0+\tau)]\,F_1\,d\tau=$$
$$=\sqrt{\overline{x}'^2_0+\overline{y}'^2_0}\int_0^{\varphi_0}\sin(\overline{\theta}_0-\theta_0-\tau)\,F_1(x_0,y_0,\cos(\theta_0+\tau),\sin(\theta_0+\tau))\,d\tau.$$

ასეთ სახეზე მივიყვანეთ $E(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \overline{x'_0}, \overline{y'_0})$ ფუნქცია. დავწეროთ:

$$E(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \overline{x'_0}, \overline{y'_0}) =$$

$$= \sqrt{\overline{x'_0}^2 + \overline{y'_0}^2} \int_0^{\varphi_0} \sin(\varphi_0 - \tau) F_1(x_0, y_0, \cos(\theta_0 + \tau), \sin(\theta_0 + \tau)) d\tau.$$

გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა. მივიღებთ:

$$E(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \overline{x'_0}, \overline{y'_0}) =$$

$$= \sqrt{\overline{x'_0}^2 + \overline{y'_0}^2} F_1(x_0, y_0, \cos\theta_0^*, \sin\theta_0^*) \int_0^{\varphi_0} \sin(\varphi_0 - \tau) d\tau =$$

$$= \sqrt{\overline{x'_0}^2 + \overline{y'_0}^2} F_1(x_0, y_0, \cos\theta_0^*, \sin\theta_0^*) [1 - \cos\varphi_0].$$

(θ_0^* არის საშუალო მნიშვნელობა θ_0 და $\overline{\theta_0}$ შორის).

Weierstrass-ის პირობა (V) შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\sqrt{\overline{x'_0}^2 + \overline{y'_0}^2} F_1(x_0, y_0, \cos\theta_0^*, \sin\theta_0^*) [1 - \cos\varphi_0] \geq 0. \quad \text{(XII)}$$

(XI) გვაძლევს დამოკიდებულებას E და F_1 ფუნქციებს შორის. $\sqrt{\overline{x'_0}^2 + \overline{y'_0}^2}$ დადებითია, $1 - \cos\varphi_0$ აგრეთვე დადებითია, ან ყოველშემთხვევაში, ნულზე ნაკლები არ გახდება. ამიტომ (XII) უტოლობა მოგვცემს:

$$F_1(x_0, y_0, \cos\theta^*, \sin\theta^*) \geq 0 \quad \text{(XIII)}$$

პირობა: $F_1(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta) \geq 0$, ყოველთვის როცა θ მოთავსებულია 0 და 2π შორის, წარმოადგენს საკმარის პირობას Weierstrass-ის პირობის შესრულებისათვის, მაგრამ ის ამასთანავე აუცილებელი პირობა არ არის. მართლაც, უტოლობა

$$F_1(x_0, y_0, \cos\theta^*, \sin\theta^*) \geq 0$$

ყოველთვის შესრულდება, თუ შესრულებულია საზოგადოდ უტოლობა $F_1(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta) \geq 0$, რადგან θ^* არის რომელიმე რიცხვი 0 და 2π შორის, მაგრამ უტოლობის $F_1(x_0, y_0, \cos\theta^*, \sin\theta^*) \geq 0$ შესრულება კიდევ არ მოასწავებს უტოლობის $F_1(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta) \geq 0$ შესრულებას, რადგან ჩვენ არავითარი გარანტია არ გვაქვს იმისა, რომ, როცა $\overline{\theta}$ გაივლის შუალედს 0-დან 2π-მდე, θ^* აგრეთვე მიიღებს ყველა მნიშვნელობებს 0 და 2π შორის.

ახლა თუ რომ $\overline{\theta}$ და θ^* შორის ისეთი დამოკიდებულება არის, რომ θ^* დაფარავს მთელ შუალედს $(0, 2\pi)$ როცა $\overline{\theta}$ გაივლის ყველა მნიშვნელობას 0-დან 2π-მდე. (ამისათვის, რასაკვირველია, არ არის აუცილებელი, რომ θ და θ^* შორის ორივე მხრივ ცალსახა დამოკიდებულება იყოს), $F_1(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta) \geq 0$ წარმოადგენს Weierstrass-ის პირობის აუცილებელ პირობასაც და ეს ორი პირობა იქნება უკვე ექვივალენტური.

ვნახოთ ახლა აკმაყოფილებს თუ არა ბრაქისტოქრინის პრობლემა მინიმუმის შეოთხე აუცილებელ პირობას.
როგორც ვიცით, ბრაქისტოქრინის პრობლემა მიიყვანება ინტეგრალის:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\sqrt{y-y_1+k}}$$

მინიმუმის მოძებნაზე.

E ფუნქციის შედგენა ამ შემთხვევაში რთულ საქმეს წარმოადგენს.

შევადგინოთ F_1 ფუნქცია.
დავწეროთ:

$$F_{x'}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{y-y_1+k}},$$

$$F_{x'x'}=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}-x'\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}}{\sqrt{y-y_1+k}\,(x'^2+y'^2)}=\frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)\sqrt{y-y_1+k}}$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ:

$$F_1=\frac{1}{(x'^2+y'^2)\sqrt{y-y_1+k}},$$

აქედან

$$F_1(x,y,\cos\theta,\sin\theta)=\frac{1}{\sqrt{y-y_1+k}}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ $F_1(x,y,\cos\theta,\sin\theta)$ იქნება მეტი ნულზე θ ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $(0,2\pi)$ შუალედში და, მაშასადამე, შესაბამისი E ფუნქცია იქნება დადებითი. ამგვარად, ბრაქისტოქრინის პრობლემისათვის მინიმუმის მეოთხე აუცილებელი პირობა შესრულებულია.

გადავიდეთ ახლა მინიმუმის საკმარის პირობაზე.

შეგვიძლია მინიმუმის შემდეგი საკმარისი პირობა ასე გამოვთქვათ: ფუნქცია, რომელიც (II) ინტეგრალის ქვეშ იმყოფება, უნდა იყოს დადებითი.
ე. ი.

$$E(x,y,p(x,y),q(x,y),x',y')\geq 0 \qquad \text{(XIV)}$$

ამ პირობას შეგვიძლია ცოტა სხვანაირი სახე მივცეთ.

ამისათვის გარდავქმნათ ფუნქცია

$E(x,y,p(x,y),q(x,y),x',y')$ შემდეგნაირად

$$E(x,y,p(x,y),q(x,y),x',y') = x'[F_x'(x,y,x',y') - F_x'(x,y,p(x,y),$$
$$q(x,y))] + y'[F_y'(x,y,x',y') - F_y'(x,y,p(x,y),q(x,y))] =$$
$$= \sqrt{x'^2+y'^2}\{\cos\theta[F_x'(x,y,\cos\theta,\sin\theta) -$$
$$- F_x'(x,y,p(x,y),q(x,y))] + \sin\theta[F_y'(x,y,\cos\theta\,\sin\theta) -$$
$$- F_y'(x,y,p(x,y),q(x,y)] = \sqrt{x'^2+y'^2}\,E(x,y,p(x,y),q(x,y),$$
$$\cos\theta,\sin\theta);$$

პირობა (XIV) შემდეგნაირად გადაიწერება:

$E(x,y,p(x,y),q(x,y),\cos\theta,\sin\theta) \geqq 0$

ეს პირობა უნდა იყოს შესრულებული θ ყოველი მნიშვნელობისათვის 0 და 2π შორის.

ცხადია, რომ ბრაქისტოქრონის პრობლემისათვის მინიმუმის საკმარისი პირობა შესრულებულია.

გადავიდეთ ეხლა E ფუნქციის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე. განვიხილოთ მრუდი

$$F(x,y,\xi,\eta) = 1$$

სადაც x და y არის პარამეტრი და ξ,η ცვლადები. ამ მრუდს ინდიკატრიქს უწოდებენ.

ეს მრუდი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ პოლიარული კოორდინატების საშუალებით:

ამისათვის უნდა მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$\xi = \rho\cos\theta,\ \eta = \rho\sin\theta.$$

მივიღებთ

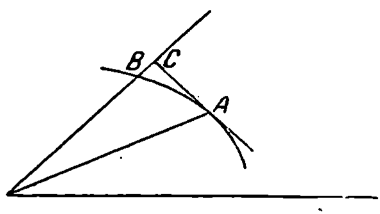
$$F(x,y,\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = 1$$

F ფუნქციის თვისების ძალით დავწეროთ:

$$\rho F(x,y,\cos\theta,\sin\theta) = 1$$

აქედან

$$\rho = \frac{1}{F(x,y,\cos\theta,\sin\theta)}$$



ნახ. 28.

გავიყვანოთ მხები ინდიკატრიქსის რომელიმე A წერტილზე. θ, ρ კოორდინატებით საერთოდ მხების განტოლება პოლარულ კოორდინატებში შემდეგნაირად გამოიხატება:

$$\eta = \frac{\rho^2}{\rho\cos(\alpha-\theta) - \frac{d\rho}{d\theta}\sin(\alpha-\theta)}$$

η და α არის წარმდინარე პოლარული კოორდინატები. ჩვენ შემთხვევაში $\frac{d\rho}{d\theta}$ იქნება:

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{1}{[F(x,y,\cos\theta,\sin\theta)]^2}[-F_x'(x,y,\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta+$$
$$+F_y'(x,y,\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta]$$

ამგვარად ინდიკატრიქსის მხების განტოლება პოლარულ კოორდინატებში შემდეგნაირად დაიწერება:

$$r\left\{\frac{1}{F}\cos(\alpha-\theta)+\frac{1}{F^2}\sin(\alpha-\theta)[-F_x'\sin\theta+F_y'\cos\theta]\right\}=\frac{1}{F^2}$$

აქედან,

$$\cos(\alpha-\theta)F-\sin\theta\sin(\alpha-\theta)F_x'+\cos\theta\sin(\alpha-\theta)F_y'=\frac{1}{r}$$

ახლა, თანახმად F ფუნქციის ცნობილი თვისებისა, გვექნება:

$$F(x,y,\cos\theta,\sin\theta)=\cos\theta F_x'+\sin\theta F_y'$$

ამისდამიხედვით უკანასკნელი ტოლობა შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$[\cos\theta\cos(\alpha-\theta)-\sin\theta\sin(\alpha-\theta)]F_x'+[\sin\theta\cos(\alpha-\theta)+$$
$$+\sin(\alpha-\theta)\cos\theta]F_y'=\frac{1}{r},$$

ანუ

$$\cos\alpha F_x'(x,y,\cos\theta,\sin\theta)+\sin\alpha F_y'(x,y,\cos\theta,\sin\theta)=\frac{1}{r}$$

ასეთია ინდიკატრიქსის მხები (θ,ρ) წერტილზე.

ავიღოთ ახლა ინდიკატრიქსის რომელიმე სხვა წერტილი B, პოლარული კოორდინატებით $(\overline{\theta},\overline{\rho})$. გვექნება:

$$\overline{\rho}=\frac{1}{F(x,y,\cos\overline{\theta},\sin\overline{\theta})},$$

ანუ

$$F(x,y,\cos\overline{\theta},\sin\overline{\theta})=\frac{1}{\overline{\rho}} \qquad (\text{ა}).$$

ვთქვათ ამ წერტილის რადიუს—ვექტორი გადაკვეთს ჩვენ მხებს წერტილში, რომლის რადიუს—ვექტორი აღვნიშნოთ $\overline{r}$ გვექნება

$$\cos\overline{\theta}\,F_x'(x,y,\cos\theta,\sin\theta)+\sin\overline{\theta}\,F_y'(x,y,\cos\theta,\sin\theta)=\frac{1}{\overline{r}} \qquad (\text{ბ}).$$

გამოვაკლოთ (ა)—ს (ბ). მივიღებთ:

$$F(x,y,\cos\overline{\theta},\sin\overline{\theta})-\cos\overline{\theta}F_x'(x,y,\cos\theta,\sin\theta)-\sin\overline{\theta}F_y'(x,y,$$
$$\cos\theta,\sin\theta)=\frac{1}{\overline{\rho}}-\frac{1}{\overline{r}}=\frac{\overline{r}-\overline{\rho}}{\overline{\rho}\,\overline{r}}.$$

მარცხენა მხარეზე მყოფი გამოხატულება წარმოადგენს სწორედ
$E(x, y, \cos\theta, \sin\theta, \cos\bar\theta, \sin\bar\theta)$.

ამგვარად, გვექნება

$$E(x, y, \cos\theta, \sin\theta, \cos\bar\theta, \sin\bar\theta) = \frac{\bar r}{\bar\rho} - \frac{\bar\rho}{\bar r}\cdot$$

გადავიდეთ ახლა ისევ დეკარტის კოორდინატებზე.

ამისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ ავღნიშნოთ (θ, ρ) და $(\bar\theta, \bar\rho)$ წერტილების დეკარტის კოორდინატები შესაბამისად (ξ, η) და $(\bar\xi, \bar\eta)$, და ფუნქცია $E(x, y, \cos\theta, \sin\theta, \cos\bar\theta, \sin\bar\theta)$ შემდეგნაირად გარდავქმნათ:

$$E(x, y, \cos\theta, \sin\theta, \cos\bar\theta, \sin\bar\theta) = F(x, y, \cos\bar\theta, \sin\bar\theta) -$$

$$-\cos\bar\theta\, F_x'(x, y, \cos\theta, \sin\theta) - \sin\bar\theta\, F_y'(x, y, \cos\theta, \sin\theta) =$$

$$= \frac{1}{\bar\rho}[F(x, y, \bar\rho\cos\bar\theta, \bar\rho\sin\bar\theta) - \bar\rho\cos\bar\theta\, F_x'(x, y, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta) -$$

$$- \bar\rho\sin\bar\theta\, F_y'(x, y, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta)] = \frac{1}{\bar\rho}[F(x, y, \bar\xi, \bar\eta) -$$

$$- \bar\xi\, F_x'(x, y, \xi, \eta) - \bar\eta\, F_y'(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\bar\rho} E(x, y, \xi, \eta, \bar\xi, \bar\eta)$$

ამგვარად ჩვენ გვექნება:

$$\frac{1}{\bar\rho} E(x, y, \xi, \eta, \bar\xi, \bar\eta) = \frac{\bar r}{\bar\rho} - \frac{\bar\rho}{\bar r},$$

ანუ

$$E(x, y, \xi, \eta, \bar\xi, \bar\eta) = \frac{\bar r - \bar\rho}{\bar r}.$$

უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს E ფუნქციის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას.

ეს ფუნქცია გამოხატავს შეფარდებას მონაკვეთის, რომელიც მოთავსებულია $(\bar\xi, \bar\eta)$ წერტილის რადიუს-ვექტორზე მისი ინდიკატრიქსის და ამ ინდიკატრიქსის (ξ, η) წერტილზე გაყვანილი მხების გადაკვეთის წერტილებს შორის, მონაკვეთთან, რომელიც აერთებს ამ მხების გადაკვეთის წერტილს კოორდინატთა სათავესთან.

ლექცია XXV

Dresden-ის ფორმულები.

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით ძირითად პრობლემას: აღებულია ორი წერტილი A და B
და მოცემულია ინტეგრალი:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt.$$

უნდა მოვძებნოთ მინიმუმი ამ ინტეგრალისა იმ მრუდების შესახებ, რომელნიც A და B წერტილებს აერთებენ. ჩვენ ნაგულისხმევი გვქონდა, რომ A და B წერტილები არის უძრავი. რა თქმა უნდა, ეს არის უმარტივესი შემთხვევა ინტეგრალის მინიმუმის პრობლემისა.

მაგრამ საჭიროა ისეთი შემთხვევაც განვიხილოთ, როცა ეს წერტილები არ არის უძრავი: შესაძლებელია ერთი, ან ორივე ერთად მოძრაობდეს მრუდზე. ან შეიძლება კიდევ ერთი მათგანი იყოს სრულებით თავისუფალი. ასეთი შემთხვევის განხილვაზე ახლა გადავდივართ. ამისათვის საჭიროა წინასწარ გამოვიყვანოთ რამდენიმე ფორმულა. ჩვენ ვიცით რომ თუ ავიღებთ სადმე $P_1(x_1, y_1)$ წერტილს A წერტილის მახლობლობაში და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილს B წერტილის მახლობლობაში, მაშინ, თუ დაცულია Legendre-ის და Jacobi-ს პირობები, შეგვიძლია შევაერთოთ P_1 და P_2 წერტილები ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალით.

ეს ექსტრემალი შეგვიძლია გამოვხატოთ შემდეგნაირად:

$$x = X(t, x_1, y_1, x_2, y_2), \quad y = Y(t, x_1, y_1, x_2, y_2)$$

ინტეგრალს აღებულს $P_1 P_2$ მრუდის მიმართ,

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x_t, y_t)\, dt,$$

როგორც ვიცით, ექსტრემალური მანძილი ეწოდება. ეს ექსტრემალური მანძილი არის ოთხი ცვლადის x_1, y_1, x_2, y_2 ფუნქცია $J(x_1, y_1, x_2, y_2)$.

J ფუნქციის წარმოებულები x_1, y_1, x_2, y_2 შესახებ შემდეგნაირად გამოიხატებიან:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial x_1} &= -F_x'(x_1, y_1, p_1, q_1) \\
\frac{\partial J}{\partial y_1} &= -F_{y_1}(x_1, y_1, p_1, q_1) \\
\frac{\partial J}{\partial x_2} &= F_x'(x_2, y_2, p_2, q_2) \\
\frac{\partial J}{\partial y_2} &= F_y'(x_2, y_2, p_2 q_2)
\end{aligned} \qquad (I)$$

ვიპოვოთ ახლა J ფუნქციის მეორე წარმოებულები:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial y_1}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial y_1^2}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x_2 \partial y_2}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial y_2^2}.$$

ამისათვის მივმართოთ ასეთ გზას.

AB ექსტრემალის ველის რომელიმე წერტილზე გავიყვანოთ ექსტრემალთა კონა. ვთქვათ ეს წერტილი იმყოფება AB ექსტრემალზე ან მის გაგრძელებაზე. აღვნიშნოთ ექსტრემალთა ამ ოჯახის განტოლება შემდეგნაირად:

$$x = x(t, \alpha), \quad y = y(t, \alpha) \qquad (II)$$

ცხადია, რომ ველის ყოველ წერტილზე ჩვენი კონის მხოლოდ ერთი ექსტრემალი გაივლის. ამიტომ ყოველ წყვილ მნიშვნელობას x და y გარკვეული α ეთანადება. ასევე გვექნება t შესახებ. ამიტომ შესაძლებელია (II) განტოლებათა გარდაწყვეტა α და t შესახებ. გვექნება $t=t(x,y)$, $\alpha=\alpha(x,y)$. ჩავსვათ t და α ეს გამოხატულებანი (II)-ში, მივიღებთ ორ იგივეობას

$$\begin{aligned} x&=x\,(t(x,y),\,\alpha\,(x,y)) \\ y&=y\,(t\,(x,y),\,\alpha\,(x,y)) \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

განვაწარმოოთ ეს ორი იგივეობა x-ის შესახებ. გვექნება:

$$1=x_t\frac{\partial t}{\partial x}+x_\alpha\,\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,,\quad 0=y_t\,\frac{\partial t}{\partial x}+y_\alpha\,\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

მივიღეთ სისტემა ორი უცნობით $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$. გარდავწყვიტოთ ეს სისტემა $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ შესახებ.

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{y_\alpha}{x_t y_\alpha - y_t x_\alpha}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}=\frac{-y_t}{x_t y_\alpha - y_t x_\alpha}$$

ჩვენ წინათ $x_t\,y_\alpha - y_t\cdot x_\alpha$ აღვნიშნეთ $\Delta\ (t,\alpha)$. ამგვარად,

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{y_\alpha}{\Delta}\,,\quad \frac{\partial \alpha}{\partial x}=\frac{-y_t}{\Delta} \qquad \text{(IV)}$$

თუ (III) განვაწარმოებთ y შესახებ, სრულებით ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{-x_\alpha}{\Delta}\,,\quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}=\frac{x_t}{\Delta} \qquad \text{(V)}$$

განვიხილოთ ახლა შემდეგი გამოხატულება:

$$q\,\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x} \qquad \text{(VI)}$$

როგორც ვიცით, p არის $x\ (t,\alpha)$ ფუნქციის წარმოებული t შესახებ, და $q\ y\,(t,\alpha)$-ის წარმოებული t შესახებ:

$$p=x_t\,(t,\alpha),\ \ q=y_t\,(t,\alpha).$$

უნდა გვახსოვდეს, რომ აქ t და α განხილულია როგორც x და y ფუნქცია).

ვნახოთ რა არის $\frac{\partial p}{\partial x}$. დავწეროთ:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=x_{tt}\,\frac{\partial t}{\partial x}+x_{t\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (IV) ფორმულებს, გვექნება:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=x_{tt}\,\frac{y_\alpha}{\Delta}-x_{t\alpha}\,\frac{y_t}{\Delta}=\frac{x_{tt}y_\alpha - x_{t\alpha}\,y_t}{\Delta}\,.$$

ვიპოვოთ ახლა $\frac{\partial q}{\partial x}$. დავწეროთ:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=y_{t t}\frac{\partial t}{\partial x}+y_{t\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}=y_{tt}\frac{y_\alpha}{\Delta}-y_{t\alpha}\frac{y_t}{\Delta}=\frac{x_{tt}y_\alpha-y_{t\alpha}y_t}{\Delta}$$

გამოხატულება (VI) შეგვიძლია შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{x_{tt}y_\alpha y_t-x_{t\alpha}y_t^2-y_{tt}y_\alpha x_t+y_{t\alpha}y_{t\alpha}y_tx_t}{\Delta} \qquad \text{(VII)}$$

ვიპოვოთ ახლა Δ წარმოებული t შესახებ.

$$\Delta_t=x_{tt}y_\alpha+x_ty_{\alpha t}-y_{tt}x^\alpha-y_tx_{\alpha t}$$

თუ შევადარებთ ახლა Δ_t გამოხატულებას (VII) მრიცხველის გამოხატულებას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{y_t\Delta_t+y_{tt}x_\alpha y_t-x_ty_{tt}y_\alpha}{\Delta}=\frac{y_t\Delta_t-y_{tt}\Delta}{\Delta}=q\frac{\Delta_t}{\Delta}-q'$$

ამგვარად ჩვენ მივიღებთ

$$q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}=q\frac{\Delta_t}{\Delta}-q'$$

შევადგინოთ (VI) ანალოგიური გამოხატულება:

$$q\frac{\partial p}{\partial y}-p\frac{\partial q}{\partial y} \qquad \text{(VIII)}$$

ვიპოვოთ ჯერ $\frac{\partial p}{\partial y}$ და $\frac{\partial q}{\partial y}$. დავწეროთ:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-x_{tt}\frac{x_\alpha}{\Delta}+x_{t\alpha}\frac{x_t}{\Delta}=\frac{x_tx_{t\alpha}-x_\alpha x_{tt}}{\Delta}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y}=-y_{tt}\frac{x_\alpha}{\Delta}+y_{t\alpha}\frac{x_t}{\Delta}=\frac{x_ty_{t\alpha}-x_\alpha y_{tt}}{\Delta}$$

გამოხატულება (VIII) შეგვიძლია შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$q\frac{\partial p}{\partial y}-p\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{x_tx_{t\alpha}y_t-x_\alpha x_{tt}y_t-x_t^2y_{t\alpha}+x_\alpha y_{tt}x_t}{\Delta}=$$

$$=\frac{-\Delta_tx_t+x_{tt}y_\alpha x_t-x_\alpha y_tx_{tt}}{\Delta}=\frac{-\Delta_tx_t+x_{tt}\Delta}{\Delta},$$

ანუ

$$q\frac{\partial p}{\partial y}-p\frac{\partial q}{\partial x}=-p\frac{\Delta_t}{\Delta}+p'$$

ზემოთ ჩვენ მივიღეთ შემდეგი ორი ფორმულა:

$$q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}=q\frac{\Delta_t}{\Delta}-q' \qquad \text{(IX)}$$

$$q\frac{\partial p}{\partial y}-p\frac{\partial q}{\partial y}=-p\frac{\Delta_t}{\Delta}+p' \qquad \text{(X)}$$

სრულებით ანალოგიურად შეგვიძლია შემდეგი მესამე ფორმულა გამოვიყვანოთ:

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\Delta_t}{\Delta} \qquad \text{(XI)}$$

სამივე ჩვენს ფორმულაში შედის $\frac{\Delta_t}{\Delta}$. ვნახოთ რას წარმოადგენს იგი:

$\Delta(t, \alpha)$, როგორც ვიცით, შემდეგნაირად გამოიხატება:

$\Delta(t, \alpha) = x_t(t, \alpha)\, y_\alpha(t, \alpha) - y_t(t, \alpha)\, x_\alpha(t, \alpha)$. აქ ჩვენ უნდა გვახსოვდეს, რომ t და α განხილული არის, როგორც x და y ფუნქციები: $t = t(x, y)$, $\alpha = \alpha(x, y)$.

აღვნიშნოთ ახლა t პარამეტრის მნიშვნელობა იმ წერტილისათვის, რომლიდანაც გამოდის ჩვენი კონა τ. ვთქვათ აგრეთვე, რომ α_0 ის მნიშვნელობაა α-სი, რომელიც AB ექსტრემალს ეთანადება.

იმ დამოკიდებულების ძალით, რომელიც Δ და θ ფუნქციებს შორის არსებობს (95 გვ.), შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Delta(t, \alpha_0) = C\theta(t, \tau).$$

განვაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობა t შესახებ. მივიღებთ:

$$\Delta_t(t, \alpha_0) = C\theta_t(t, \tau).$$

შეფარდება $\frac{\Delta_t}{\Delta}$ შემდეგნაირად შეგვიძლია გამოვხატოთ: $\frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{\theta_t(t, \tau)}{\theta(t, \tau)}$.

ტოლობანი (IX) და (X) ასე გადმოიწერება:

$$q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x} = q\frac{\theta_t(t, \tau)}{\theta(t, \tau)} - q' \qquad \text{(XII)}$$

$$q\frac{\partial p}{\partial y} - p\frac{\partial q}{\partial y} = -p\frac{\theta_t(t, \tau)}{\theta(t, \tau)} + p' \qquad \text{(XIII)}$$

გამოყვანილი ფორმულები საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ ფუნქციის $J(x_1, y_1, x_2, y_2)$ მეორე წარმოებული. ამისათვის განვაწარმოოთ ტოლობა

$\frac{\partial J}{\partial x} = -F_x'(x_1, y_1, p_1, q_1)$. მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = -F_x'{}_x - F_x'{}_{x'}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} - F_x'{}_{y'}\frac{\partial q_1}{\partial x_1}.$$

ახლა, თუ მივიღებთ მხედველობაში ფუნქციების $F_x'{}_{x'}$, $F_y'{}_{x'}$ დამოკიდებულებას F_1 ფუნქციასთან, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} = -F_x'{}_x - (F_1)_1 q_1^2\frac{\partial p}{\partial x_1} + (F_1)\,p_1 q_1\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = -F_{xx}' - (F_1)_1\, q_1\Big(q_1\frac{\partial p}{\partial x_1} - p_1\frac{\partial q}{\partial x_1}\Big)$$

$(F_1)_1$ ნიშნავს, რომ ფუნქცია F_1 არის აღებული P_1 წერტილისათვის).

(XII) ძალით გვექნება:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} = -F_{xx}' - (F_1)_1\, q_1^2\frac{\theta_t(t_1, t)}{\theta(t_1, t)} + q_1 q'_1 F_1$$

თუ გავიხსენებთ Weierstrass-ის ფუნქციის გამოხატულებას, უკანასკნელი ფორმულა შემდეგნაირად შეგვიძლია გადმოვწეროთ:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} = -L_1 - (F_1)_1 q_1^2 \frac{\theta\, \iota(t_1,\tau)}{\theta\, (t_1,\tau)} \qquad \text{(XIV)}.$$

(L_1 ნიშნავს, რომ L ფუნქცია აღებულია P_1 წერტილისათვის) (XIV) ფორმულა პირველად მიიღო ამერიკელმა მათემატიკოსმა Dresden-მა.

ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ $\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y}$-ის გამოხატულება. ამისათვის განვაწარმოოთ იგივე ტოლობა $\frac{\partial J}{\partial x_1} = -F_x'(x_1, y_1, p_1, q_1)$ y_1-ის შესახებ. დავწერთ:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial y_1} = -F_{xy}' - F_{x}'{}_{y}' \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - F_{y}'{}_{y}' \frac{\partial q_1}{\partial y_1}$$

$$= -F_{xy}' - (F_1)_1\, q_1 \left(q_1 \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y_1} \right) =$$

$$= -F_{xy}' + p_1 q_1 (F_1)_1 \frac{\theta\, \iota(t_1,\tau)}{\theta\, (t_1,\tau)} - p_1 q'_1 (F_1)_1 =$$

$$= -M_1 + p_1 q_1 (F_1)_1 \frac{\theta\, \iota(t_1,\tau)}{\theta\, (t_1,\tau)}$$

ამგვარად ჩვენ მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial y_1} = -M_1 + p_1 q_1 (F_1)_1 \frac{\theta\, \iota(t_1,\tau)}{\theta\, (t_1,\tau)} \qquad \text{(XV)}.$$

ეს არის Dresden-ის მეორე ფორმულა. ვიპოვოთ ახლა $\frac{\partial^2 J}{\partial y_1^2}$. ამისათვის განვაწარმოოთ ტოლობა $\frac{\partial J}{\partial y_1} = -F_y'(x_1, y_1, p_1, q_1)$

გვექნება:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y_1^2} = -F_{yy}' - F_{y}'{}_{x}' \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - F_{y}'{}_{y}' \frac{\partial q_1}{\partial y_1} = -F_{yy}' + (F_1)_1 p_1 q_1 \frac{\partial p_1}{\partial y_1} -$$

$$-(F_1)_1 p_1^2 \frac{\partial q_1}{\partial y_1} = -F_{yy}' + (F_1)_1 p_1 \left(q_1 \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y_1} \right) = -F_{yy}' -$$

$$-p_1^2 (F_1)_1 \frac{\theta\iota(t_1,\tau)}{\theta\, (t_1,\tau)} + p_1 p'_1 (F_1)_1 = -N_1 - p_1^2 (F_1)_1 \frac{\theta\iota(t_1,\tau)}{\theta(t_1,\tau)}.$$

ამგვარად მივიღეთ

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y_1^2} = -N_1 - p_1^2 (F_1)_1 \frac{\theta\, \iota(t,\tau)}{\theta\, (t_1,\tau)} \qquad \text{(XV)}$$

ეს არის Dresden-ის მესამე ფორმულა.

ახლა სრულებით ანალოგიურად მივიღებთ Dresden-ის სამ და-ნარჩენ ფორმულას:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_2^2}=L_2+(F_1)_2 q_2^2\,\frac{\theta_t(t_2,\tau)}{\theta\,(t_2,\tau)}\,. \qquad \text{(XVII)}.$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_2 \partial y_2}=M_2-(F_1)_2 q_2\,p_2\,\frac{\theta\,t(t_2,\tau)}{\theta\,(t_2,\tau)} \qquad \text{(XVIII)}.$$

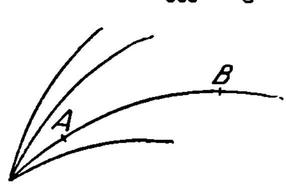
$$\frac{\partial^2 J}{\partial y_2^2}=N_2+(F_1)_2\,p_2^2\,\frac{\theta\,t(t_2,\tau)}{\theta\,(t_2,\tau)} \qquad \text{(XIX)}$$

ლ ე ქ ც ი ა XXI

ტრანსვერსალი

წინა ლექციაზე ჩვენ გამოვიყვანეთ Dresden-ის ექვსი ფორ-მულა. გავიხსენოთ რას წარმოად-გენდა τ, რომელიც ყველა ამ ფორ-მულებში შედიოდა.

ავიღოთ ექსტრემალი AB და ამ ექსტრემალის რომელიმე წერტილი-დან გავიყვანოთ ექსტრემალთა კონა. J პარამეტრის მნიშვნელობა იმ წერ-ტილისათვის, რომლიდანაც კონა გა-მოდის, არის სწორედ τ.



ნახ. 29.

განვიხილოთ ახლა შეფარდება $\dfrac{\theta\,t(t_1,\tau)}{\theta\,(t_1,\tau)}$. ეს შეფარდება წარმოად-გენს τ-ს ფუნქციას. დავამტკიცოთ რომ ის არის τ ზრდადი ფუნქ-ცია. ამისათვის მოვძებნოთ წარმოებული $W'(\tau)$.

დავწერთ:

$$W'(\tau)=\frac{\theta_{t\tau}\theta-\theta_t\theta_\tau}{\theta^2} \qquad \text{(I)}$$

გარდავქმნათ მრიცხველში მყოფი გამოხატულება. ჩვენ ვიცით, რომ $\theta\,(t,\tau)$ ასეთი სახე აქვს: $\theta\,(t,\tau)=u(t)\,v\,(\tau)-v\,(t)\,u\,(\tau)$, სადაც u და v წარმოადგენს ხაზოვნურად დამოუკიდებელ ინტეგრალებს Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლებისა:

$$F_2 y-\frac{d}{dt}(F_1 y')=O$$

ეს განტოლება კიდევ შემდეგნაირად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$F_1\frac{d^2y}{dt^2}+F_1'\,\frac{dy}{dt}-F_2 y=0,$$

ან და,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{F_1'}{F_1}\frac{dy}{dt}-\frac{F_2}{F_1}y=0 \qquad \text{(II)}$$

ჩვენ ვიცით, საერთოდ, რომ თუ გვაქვს დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=0 \text{ სახისა}$$

და u და v არის ორი ხაზოვნურად დამოუკიდებელი ინტეგრალები ამ განტოლებისა, მაშინ გვექნება:

$$uv'-vu'=ce^{-\int pdt}$$

(II) განტოლებისათვის p და q იქნება $\frac{F_1'}{F_1}$ და $-\frac{F_2}{F_1}$, ამიტომ $\int pdt$ არის $\int\frac{F_1'}{F_1}dt$, ანუ, Lg $F_1(t)$ და ამგვარად დავწერთ:

$$uv'-vu'=ce^{-\lg F_1(t)}=\frac{c}{F_1(t)} \qquad \text{(III)}$$

ვიპოვოთ ახლა

$$\theta_t(t_1,\tau),\ \theta_\tau(t_1,\tau),\ \theta_{t\tau}(t_1,\tau).$$

დავწეროთ $\theta_t(t_1,\tau)=u'(t_1)v(\tau)-u(\tau)v'(t_1)$

$$\theta_\tau(t_1,\tau)=u(t_1)v^1(\tau)-u'(\tau)v(t_1)$$

$$\theta_{t\tau}(t_1,\tau)=u'(t_1)v'(\tau)-u'(\tau)v^1(t_1)$$

ამგვარად, გვექნება:

$$\theta_{t\tau}\theta-\theta_t\theta_\tau=[u'(t_1)v'(\tau)-u'(\tau)v'(t_1)][u(t_1)v(\tau)-v(t_1)u(\tau)]-$$
$$-[u'(t_1)v(\tau)-u(\tau)v'(t_1)][u(t_1)v'(\tau)-u'(\tau)v(t_1)]=$$
$$=[u(t_1)v'(t_1)-u'(t_1)v(t_1)][u(\tau)v'(\tau)-u'(\tau)v(\tau)],$$

ანუ, (III) ძალით,

$$\theta_{t\tau}\theta-\theta_t\theta_\tau=\frac{c}{F_1(t_1)}\cdot\frac{c}{F_1(\tau)}=\frac{c^2}{F_1(t_1)F_1(\tau)}$$

(I) შემდეგნაირად დაიწერება:

$$W'(\tau)=\frac{c^2}{\theta^2F_1(t_1)F_1(\tau)}$$

თანახმად Legendre-ის პირობისა F_1 t ყოველი მნიშვნელობისათვის უნდა იყოს დადებითი (მაქსიმუმის პრობლემისათვის — უარყოფითი), ამიტომ $F_1(t_1)F_1(\tau)$ იქნება დადებითი და, მაშასადამე, დადებითი იქნება, აგრეთვე, $W'(\tau)$.

ამგვარად ჩვენი დებულება შესახებ იმისა, რომ $\frac{\theta_t(t_1,\tau)}{\theta(t_1,\tau)}$ წარმოადგენს τ ზრდად ფუნქციას, დამტკიცებულია.

შევუდგეთ ახლა შემდეგი პრობლემის გარდაწყვეტას:

ვთქვათ აღებული გვაქვს გარკვეული A წერტილი და გარკვეული K მრუდი.

უნდა გავიყვანოთ A წერტილიდან ამ მრუდზე ისეთი AB მრუდი, რომ ყოველ სხვა მრუდთან შედარებით, რომელიც A წერტილს და K მრუდის რომელიმე წერტილს აერთებს, იგი მინიმუმს ანიჭებდეს ინტეგრალს

ნახ. 30.

$$J=\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

ასეთნაირი პრობლემის განხილვა დაგვჭირდება, მაგალითად, მაშინ, როდესაც ვეძებთ უმოკლეს მანძილს რომელიმე წერტილიდან რომელიმე მრუდამდე.

რით განსხვავდება ზემოთდასახული პრობლემა წინათგანხილული პრობლემისაგან.

წინათ ორივე წერტილი A და B იყო დამაგრებული.

ახლა კი ამ ორ წერტილთა შორის მხოლოდ ერთი წერტილი A არის დამაგრებული, ხოლო მეორე მოძრაობს მრუდზე. ეს ორი პრობლემა არსებითად განსხვავდება ერთი მეორისაგან.

ჩვენი პრობლემის გარდასაწყვეტად უნდა მოვძებნოთ წერტილი B და მრუდი AB.

მრუდი AB უეჭველად უნდა აკმაყოფილებდეს Euler-ის დიფერენციალურ განტოლებას

$$F_x-\frac{d}{dt}F_x'=0 \text{ ან და, } F_y-\frac{d}{dt}F_y'=0 \qquad \text{(IV)}$$

მართლაც, ჩვენი მრუდი AB მინიმუმს უნდა ანიჭებდეს ინტეგრალს ყველა იმ მრუდთა შესახებაც, რომელიც A და B წერტილებს აერთებს. ამიტომ უკვე აქ ჩვეულებრივ პრობლემასთან გვექნება საქმე.

ვთქვათ (IV)-ს გარდაწყვეტა არის

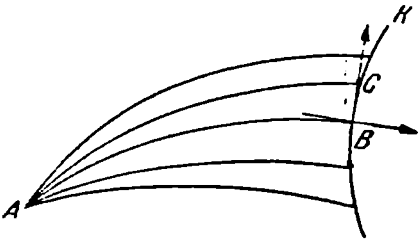
$$x=\varphi(t, \alpha, \beta),\ y=\psi(t, \alpha, \beta) \qquad \text{(V)}$$

მრუდი AB არის ერთი იმ მრუდთაგანი, რომელიც V ოჯახს ეკუთვნის. მრუდი AB მოკლედ აღვნიშნოთ $მ_0$.

ჯერჯერობით ჩვენთვის კიდევ გამოურკვეველი რჩება თვით B წერტილის მდებარეობა. ამის გამოსარკვევად მივმართოთ ექსტრემალური მანძილის თეორიას.

გავიყვანოთ A წერტილიდან ექსტრემალთა კონა. ავიღოთ ერთი ასეთი მრუდთაგანი AC.

ვთქვათ K მრუდის განტოლება არის $y=\overline{y}\,(x)$. A და B წერტილების კოორდინატები აღვნიშნოთ შესაბამისად (x_1, y_1) და (x_0, y_0) C წერტილის აბსცისა აღვნიშნოთ x.



ნახ. 31.

ვნახოთ ახლა რას წარმოადგენს J, აღებული AC მრუდზე.

ეს იქნება ექსტრემალური ინტეგრალი:

$$J\,(x_1, y_1, x, \overline{y}\,(x)) \qquad \text{(VI)}.$$

x_1 და y_1 არის მუდმივი. ცვლადია აქ მხოლოდ x. ჩვენ ამგვარად გვაქვს ფუნქცია ერთი x ცვლადის. მას მინიმუმი უნდა ჰქონდეს წერტილზე $B\ (x_0, y_0)$.

ამისათვის, როგორც ვიცით ჩვეულებრივი extremum-ის თეორიიდან, აუცილებელია, რომ (VI) ფუნქციის წარმოებული x-ის შესახებ იყოს ნული, როდესაც x მაგივრად ჩავსვამთ x_0, ე. ი.

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x_2}\right)_{x=x_0}+\left(\frac{\partial J}{\partial y_2}\right)_{x=x_0}\overline{y'}\,(x_0)=0,$$

ანუ,

$$F_x'\,(x_0, y_0, p_0, q_0)+F_y'\,(x_0, y_0, p_0, q_0)\,\overline{y'}_0=0, \qquad \text{(VII)}$$

($\overline{y_0}'$-ით მოკლედ აღვნიშნავთ $\overline{y'}\,(x_0)$, ხოლო p_0 და q_0 წარმოადგენს p და q მნიშვნელობას B წერტილზე).

(VII) კიდევ ასე შეგვიძლია გადმოვწეროთ

$$F_x'\,(x_0, y_0, p_0, q_0)\cos\overline{\vartheta}_0+F_y'(x_0, y_0, p_0, q_0)\sin\overline{\vartheta}_0=0 \quad \text{(VIII)}$$

სადაც $\overline{\vartheta}$ არის K მრუდის მხების კუთხე B წერტილში.

(VII) ან (VIII) პირობას უწოდებენ ტრანსვერსალობის პირობას. თუ ეს პირობა შესრულებულია ამბობენ, რომ მრუდი AB ტრანსვერსალურად კვეთს მრუდს K.

განვიხილოთ ახლა მაგალითი.

უნდა მოვძებნოთ უმოკლესი მანძილი A წერტილიდან K მრუდამდე. ეს პრობლემა, როგორც ვიცით, მიიყვანება ინტეგრალის $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ მინიმუმის მოძებნაზე. ტრანსვერსალობის პირობა (VIII) შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\frac{x_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}}\cos\overline{\vartheta}_0+\frac{y_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}}\sin\overline{\vartheta}_0=0$$

მაგრამ

$$\frac{x_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}}=\cos\vartheta_0 \text{ და } \frac{y_0'}{\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}}=\sin\vartheta_0.$$

ამგვარად,

$$\cos\vartheta_0\cos\overline{\vartheta}_0+\sin\vartheta_0\sin\overline{\vartheta}_0=0,$$

ანუ,

$$\cos(\vartheta_0-\overline{\vartheta}_0)=0$$

ეს გვიჩვენებს იმას, რომ ორი მიმართულება ϑ_0 და $\overline{\vartheta}_0$ უნდა იყოს ურთიერთ პერპენდიკულარი, და ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ უმოკლესი მანძილი A წერტილიდან K მრუდამდე არის სწორი, რომელიც ნორმალურად გადაკვეთს K მრუდს.

საზოგადო შემთხვევაში B წერტილის განსაზღვრა ასე ადვილი არ არის. საქმე შემდეგნაირად უნდა წარმოვიდგინოთ:

ჩვენთვის არის უცნობი B წერტილის კოორდინატები x_0, y_0, α და β ის მნიშვნელობანი α_0 და β_0, რომელნიც M_0-ს ეთანადება და t პარამეტრის მნიშვნელობანი t_1 და t_0 წერტილისათვის A და B. ამ ექვს უცნობს ჩვენ ვიპოვით შემდეგი ექვსი განტოლებიდან:

$$x_1=\varphi(t_1,\alpha_0,\beta_0)$$
$$y_1=\psi(t_1,\alpha_0,\beta_0)$$
$$x_0=\varphi(t_0,\alpha_0,\beta_0)$$
$$y_0=\ (t_0,\alpha_0,\beta_0)$$
$$y_0=\overline{y}(x_0)$$
$$F_x'(x_0,y_0,\varphi_t(t_0,\alpha_0,\beta_0),\psi_t(t_0,\alpha_0,\beta_0))+F_y'(x_0,y_0,\varphi_t(t_0,\alpha_0\beta_0),\psi_t(t_0,\alpha_0,\beta_0))\overline{y}_0'=0$$

ამ ექვსი განტოლებიდან ჩვენ ვიპოვით x_0, y_0, α_0, β_0, t_0, t_1 და ამგვარად, იქნება განსაზღვრული B წერტილის მდებარეობა. ექსტრემალის M_0 განტოლებაც უკვე მოძებნილი იქნება და შემდეგნაირად გამოიხატება:

$$x=\varphi(t,\alpha_0,\beta_0)\quad y=\psi(t,\alpha_0,\beta_0) \qquad \text{(IX)}$$

პირობა (VII) არის მხოლოდ აუცილებელი პირობა. ამით პრობლემა არ არის საბოლოოდ გარდაწყვეტილი და ჩვენ კიდევ არ შეგვიძლია ვთქვათ ნამდვილად ანიჭებს თუ არა AB მრუდი მინიმუმს ჩვენს ინტეგრალს.

თურმე აქ დიდი მნიშვნელობა აქვს A წერტილის მდებარეობას. იგი გარკვეულ პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს იმისათვის, რომ AB მრუდი ნამდვილად ანიჭებდეს მინიმუმს ჩვენს ინტეგრალს.

წარმოვადგინოთ K მრუდის განტოლება პარამეტრალური სახით:

$x=\overline{x}(a)$, $y=\overline{y}(a)$ და ავიღოთ ისევ ექსტრემალური ინტეგრალი $J=J(x_1,y_1,\overline{x}(a),\overline{y}(a))$.

იგი წარმოადგენს ერთი a ცვლადის ფუნქციას, მას უნდა ჰქონდეს მინიმალური მნიშვნელობა B წერტილზე. ვთქვათ a პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომელიც B წერტილს ეთანადება არის a_0, ე. ი. $x_0=\overline{x}(a_0)$, $y_0=\overline{y}(a_0)$. ამგვარად J უნდა ჰქონდეს მინიმალური მნიშვნელობა, როცა $a=a_0$. ამისათვის, როგორც ვიცით, ჩვეულებრივ extremum-ის თეორიიდან, საჭიროა რომ J-ს პირველი წარმოებული a შესახებ იყოს ნული, როცა a მაგივრად ჩავსვამთ a_0, და მეორე წარმოებული a-ს იმავე მნიშვნელობისათვის იყოს $\geqq 0$.

პირველი პირობა, როგორც დავინახეთ ზემოთ, მიგვიყვანს ტრანსვერსალობის პირობაზე, რომელიც ამ შემთხვევაში შემდეგნაირად დაიწერება:

$$F_x'(x_0,y_0,p_0,q_0)\,\overline{x}'(a_0)+F_y'(x_0,y_0,p_0,q_0)\,\overline{y}'(a_0)=0.$$

გადავიდეთ ახლა მეორე პირობის განხილვაზე; იგი შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x_2}\right)_{a=a_0}\overline{x}''(a_0)+\left(\frac{\partial J}{\partial y_2}\right)_{a=a_0}\overline{y}''(a_0)+\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_2^2}\right)_{a=a_0}\overline{x}'(a_0)+$$
$$+2\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_2\partial y_2}\right)_{a=a_0}\overline{x}'(a_0)\,\overline{y}'(a_0)+\left(\frac{\partial^2 J}{\partial y_2^2}\right)_{a=a_0}\overline{y}'(a_0)^2\geqq 0$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში Dresden-ის ფორმულებს, უკანასკნელი უტოლობა შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$F_x'(x_0,y_0,p_0,q_0)\,\overline{x}''(a_0)+F_y'(x_0,y_0,p_0,q_0)\,\overline{y}''(a_0)+$$
$$\left[L_0+F_1q_0^2\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}\right]\overline{x}'^2(a_0)-2\left[M_0-F_1p_0q_0\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}\right]\overline{x}'(a_0)\,\overline{y}_0'(a_0)+$$
$$+\left[N_0+F_1p_0^2\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}\right]\overline{y}'^2(a_0)\geqq 0$$

უკანასკნელი უტოლობა შეგვიძლია შემდეგნაირად გარდავქმნათ (ძირს ჩვენ $\overline{x}(a_0)$და $\overline{y}(a_0)$ მოკლედ აღვნიშნავთ $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$):

$$F_x'(x_0,y_0,p_0,q_0)\,\overline{x}''(a_0)+F_y'(x_0,y_0,p_0,q_0)\,\overline{y}''(a_0)+L_0\overline{x}_0'^2+$$
$$+2M_0\overline{x}_0'\,\overline{y}_0'+N_{0y}'^2+F_1(q_0\overline{x}_0'-p_0\overline{y}_0')^2\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}\geqq 0 \qquad (X)$$

მარცხენა მხარეზე მყოფი ჯამის ის ნაწილი, რომელიც შეიცავს ყველა წევრებს უკანასკნელის გარდა, არის დამოუკიდებელი A წერტილის მდებარეობიდან, აღვნიშნოთ იგი A_0.

$F_1(q_0\overline{x}_0'-p_0\overline{y}_0')^2$ აღვნიშნოთ B_0.

პირობა (X) შემდეგნაირად დაიწერება:

$$A_0+B_0\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}\geqq 0$$

დავამტკიცოთ, რომ B_0 არის დადებითი. მართლაც, F_1 არის დადებითი (თანახმად Legendre-ის პირობისა), $(q_0\overline{x}_0'-p_0\overline{y}_0')^2$ შეიძლება იყოს ან დადებითი, ან ნული.

წარმოვიდგინოთ, რომ იგი ნულია. მაშინ ნული იქნება აგრეთვე $q_0\overline{x}'_0-p_0\overline{y}'_0$.

უკანასკნელი გამოხატულება ჩვენ შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$q_0\overline{x}'_0-p_0\overline{y}'_0=$$
$$=\sqrt{\overline{x}_0'^2+\overline{y}_0'^2}\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}\left(\sin\vartheta_0\cos\overline{\vartheta}_0-\cos\vartheta_0\sin\overline{\vartheta}_0\right)$$
$$=\sqrt{\overline{x}_0'^2+\overline{y}_0'^2}\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}\sin\left(\overline{\vartheta}_0-\vartheta_0\right)$$

რადგან $q_0\overline{x}'_0-p_0\overline{y}'_0$ არის ნული, ნული უნდა იყოს აგრეთვე $\sin(\overline{\vartheta}_0-\vartheta_0)$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ K მრუდი შეეხება ექსტრემალს. მაგრამ ჩვენ იმ თავითვე გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევას, როცა K მრუდი ისეთია, რომ ის ექსტრემალს შეეხება. ასეთ პირობებში B_0 იქნება დადებითი.

მოვიქცეთ ახლა შემდეგნაირად:

ვთქვათ τ იზრდება. მაშინ ზემოთ დამტკიცებულის ძალით იზრდება აგრეთვე, $\frac{\theta_t(t_0\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$. მასთან ერთად იზრდება ფუნქციაც:

$$A_0+B_0\ \frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)},$$

რადგან B_0 დადებითია.

დავამტკიცოთ, რომ ექსტრემალზე არსებობს ისეთი H_0, წერტილი, რომელზედაც ეს ფუნქცია მოისპობა, ე. ი.

$$A_0+B_0\ \frac{\theta_t(t_0,h_0)}{\theta(t_0,h_0)}=0$$

(h_0 არის τ მნიშვნელობა H_0 წერტილზე).

ამისათვის განვიხილოთ გამოხატულება $\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ $\theta_t(t_0,\tau)$ და $\theta(t_0,\tau)$ ერთდროულად არასდროს არ მოისპობა. მართლაც, წარმოვიდგინოთ, რომ τ რომელიმე მნიშვნელობისათვის $\theta_t(t_0,\tau)$ და $\theta(t_0,\tau)$ ორივე მოისპობა, ე. ი.

$$\theta(t_0,\tau)=u(t_0)\,v(\tau)-u(\tau)\,v(t_0)=0$$
$$\theta_t(t_0,\tau)=u'(t_0)v(\tau)-u(\tau)\,v'(t_0)=0$$

უკანასკნელი ორი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{u(t_0)}{v(t_0)}=\frac{u'(t_0)}{v'(t_0)},$$

ანუ,

$$u(t_0)\,v'(t_0)-u'(t_0)v(t_0)=0.$$

მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგან $u(t_0)\,v'(t_0)-u'(t_0)\,v(t_0)$, როგორც ვიცით, არის $\frac{C}{F_1(t_0)}$, რაც ნულს არ ეტოლება, რადგან C ნულისაგან განსხვავდება.

ამგვარად ჩვენ ვხედავთ, რომ $\theta(t_0,\tau)$ და $\theta_t(t_0,\tau)$ არც ერთი მნიშვნელობისათვის ერთდროულად არ მოისპობა.

ახლა, როცა $\tau=t_0$ და $\tau=t_0^*$, $\theta(t_0,\tau)$ მოისპობა.

მაშასადამე, ამ მნიშვნელობათა მახლობლად $\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$ უნდა იყოს უსასრულოდ დიდი.

ახლა რადგან $\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$ არის τ ზრდადი ფუნქცია, ამიტომ პირველ მნიშვნელობასთან ის იქნება უსასრულოდ დიდი უარყოფითი ნიშნით, მეორე მნიშვნელობასთან უსასრულოდ დიდი დადებითი ნიშნით.

ამგვარად ჩვენ ვხედავთ, რომ $\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$ გაივლის $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, მაშასადამე, $A_0+B_0\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$ აგრეთვე გაივლის $-\infty$-დან $+\infty$-მდე. ამიტომ არსებობს τ ისეთი მნიშვნელობა h_0, რომ

$$A_0+B_0\frac{\theta_t(t_0,h_0)}{\theta(t_0,h_0)}=0$$

ამის შემდეგ უკვე $A_0+B_0\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$ იქნება დადებითი, ხოლო სანამ τ არის h_0-ზე ნაკლები, $A_0+B_0\frac{\theta_t(t_0,\tau)}{\theta(t_0,\tau)}$ იქნება უარყოფითი. ეს გვიჩვენებს, რომ მინიმუმისათვის აუცილებელია შემდეგი პირობის დაცვა: $\tau>h_0$. ავნიშნოთ H_0-ით ექსტრემალის ის წერტილი, რომელიც h_0-ს ეთანადება. ზემოთ მიღებული შედეგის მიხედვით მინიმუმისათვის აუცილებელია, რომ H_0 **წერტილი** A **და** B **წერტილებს შორის მოთავსებული არ იყოს.**

განვიხილოთ ახლა კერძო მაგალითი.

ავიღოთ ისევ პრობლემა უმოკლესი მანძილისა. ვნახოთ როგორ არის განსაზღვრული ამ შემთხვევაში H_0 წერტილის მდებარეობა. ამისათვის მოვძებნოთ h_0.

ექსტრემალი იქნება სწორი ხაზი. ვთქვათ მისი განტოლება არის $x=t, y=\alpha t+\beta$. შევადგინოთ $\theta(t,\tau)$. იგი იქნება $t-\tau$. ამგვარად,

$$\frac{\theta_t}{\theta}=\frac{1}{t-\tau}$$

დავწეროთ F_x' და F_y' გამოხატულება:

$$F_x' = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \cos \vartheta_0, F_y' = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \sin \vartheta_0.$$

ამის გარდა გვექნება $L_0 = -y'y''F_1$ (რადგან $F_x'_x = 0$) და აგრეთვე $M_0 = x'y''F_1$, $N_0 = -x'x''F_1$.

h_0-ს ვიპოვით განტოლებიდან:

$$\cos \vartheta_0 x''(a_0) + \sin \vartheta_0 y''(a_0) - (y'_0 y''_0 \overline{x}'_0 - 2x'_0 y''_0 \overline{x}'_0 \overline{y}'_0 + $$
$$+ x'_0 x''_0 \overline{y}'^2_0) F_1 +$$
$$+ F(q_0 \overline{x}'_0 - p_0 \overline{y}'_0)^2 \quad \frac{1}{t_0 - h_0} = 0.$$

ეს განტოლება მოკლედ შემდეგნაირად დაიწერება:

$$A_0 + B_0 \frac{1}{t_0 - h_0} = 0.$$

აქედან

$$h_0 = \frac{B_0}{A_0} + t_0$$

ამგვარად, ჩვენ მოვძებნეთ τ-ს მნიშვნელობა იმ წერტილზე, რომელიც H_0 წერტილს ეთანადება.

მოვიყვანთ ახლა H_0 წერტილის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას. მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

K მრუდის ყოველი წერტილიდან გავიყვანოთ ექსტრემალები, რომელნიც ამ მრუდს ტრანსვერსალურად კვეთენ.

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ყოველთვის შეგვიძლია მოვახდინოთ ასეთი ექსტრემალების გაყვანა.

ამისათვის საჭიროა აღმოვაჩინოთ, რომ მთელი K მრუდის მიმართ შეგვიძლია განვსაზღვროთ კუთხე ϑ, როგორც a-ს ფუნქცია ისე, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებდეს ტრანსვერსალობის პირობას:

$$F_x'(x(a), y(a), \cos \vartheta, \sin \vartheta) \overline{x}'(a) + F_y'(x(a), y(a), \cos \vartheta, \sin \vartheta) \overline{y}'(a) = 0$$

ე. ი. შესაძლებელია უკანასკნელი განტოლება გარდავწყვიტოთ ϑ შესახებ. ცხადია, რომ ეს განტოლება დაკმაყოფილებული იქნება, როცა $a = a_0$ და $\vartheta = \vartheta_0$. ამიტომ ამ განტოლების გარდაწყვეტა ϑ შესახებ ყოველთვის შესაძლო იქნება, თუ აღმოვაჩენთ, რომ ნაწილობითი წარმოებული ჩვენი ტოლობის მარცხენა მხარეში მყოფი ფუნქციისა ϑ შესახებ არ მოისპობა, როცა $a = a_0$ და $\vartheta = \vartheta_0$ ე. ი.

$$[-F_x'_x' \sin \vartheta + F_x'_y' \cos \vartheta] \overline{x}'(a) + [-F_y'_x' \sin \vartheta + F_y'_y' \cos \vartheta] \overline{y}'(a) \quad (\text{ა})$$

არ უნდა მოისპოს, როდესაც $a = a_0$, $\vartheta = \vartheta_0$.

(ა) შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$-\sin \vartheta F_1 \overline{x}'(a) + \cos \vartheta F_1 \overline{y}'(a),$$

ანუ,

$$\sqrt{x'^2+y'^2}\,(\sin\bar{\vartheta}\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}\sin\vartheta)F_i$$

როდესაც $a=a_0$, $\vartheta=\vartheta_0$ იგი ტოლია

$$\sqrt{x_0'^2+y_0'^2}\,\sin(\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0).$$

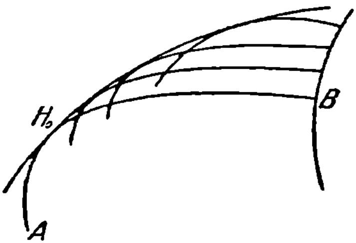
ეს გამოხატულება შეიძლება იყოს ნული მხოლოდ მაშინ, როცა ექსტრემალი შეეხება K მრუდს, მაგრამ ასეთი შემთხვევა ჩვენ მიერ იმთავითვე გამორიცხულია.

ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ შეიძლება K მრუდის წერტილებზე გავიყვანოთ ექსტრემალები, რომელნიც მას ტრანსვერსალურად გადაკვეთენ.

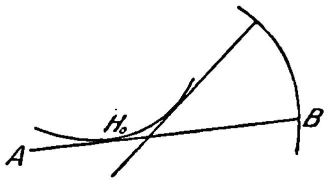
თუ განვიხილავთ ახლა ამ ექსტრემალთა მომვლებს,

იმის მსგავსად, როგორც ჩვენ წინათ მოვიქეცით (94-96 გვ.) დავამტკიცებთ, რომ H_0 ამ მომვლების ის წერტილია, რომელზედაც ის AB ექსტრემალს შეეხება.

უმოკლესი მანძილის პრობლემისათვის ჩვენ ადვილად მოვძებნით H_0 წერტილს. ეს იქნება K მრუდის ევოლუტის ის წერტილი, რომელიც AB ექსტრემალზე მდებარეობს ე. ი. B წერტილის სიმრუდის ცენტრი.

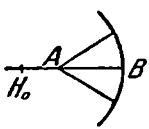


ნახ. 32.

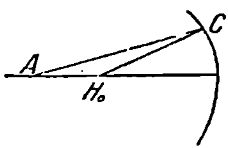


ნახ. 33.

როცა K მრუდი წარმოადგენს წრეხაზს, ეს სიმრუდის ცენტრი მოთავსდება წრის ცენტრში.



ნახ. 34.



ნახ. 35.

თუ წრის ცენტრი H_0 იმყოფება AB სწორზე A და B წერტილებს შორის მდებარე მონაკვეთის გარეთ, მაშინ AB ნამდვილად იქნება უმცირესი მანძილი A წერტილის და წრის შორის, მხოლოდ თუ

H_0 მოთავსებულია A და B წერტილებს შორის, AB უკვე უმცირესი მანძილი არ იქნება.

უკვე AC ნაკლები იქნება, ვიდრე AB. ეს გეომეტრიულადაც შეგვიძლია ადვილად შევამოწმოთ. გავიყვანოთ რადიუსი H_0C. თანახმად სამკუთხედის თვისებისა $AH_0+H_0C<AC$ მაგრამ $AH_0+H_0C=$ $=AH_0+H_0B=AB$ ამგვარად, $AB<AC$.

ლექცია XXII

შეწყვეტილი ექსტრემუმი

განვიხილოთ შემდეგი პრობლემა:

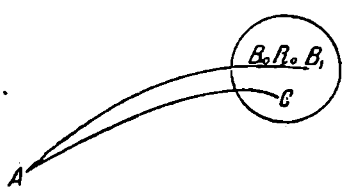
ვთქვათ რომელიმე A წერტილიდან გაყვანილია სხვადასხვა მრუდები, რომელთა ბოლო წერტილები იმყოფება ერთ გარკვეულ არეში. უნდა მოვძებნოთ ამათთგან ისეთი მრუდი, რომელიც ინტეგრალს

$$J=\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

მინიმუმს ანიჭებს.

ამ პრობლემის ზედმიწევნითი ჩამოყალიბება ასეთია: ვეძებთ ისეთ AR_0 მრუდს რომელიც შემდეგ პირობას აკმაყოფილებს: არსებობს ისეთი დადებითი ε რიცხვი, რომ ყოველ C წერტილისათვის იმ წრის შიგნით, რომლის რადიუსი ε-ის ტოლია, ადგილი აქვს უტოლობას $J_{AC}>J_{AR_0}$ (I).

ჩვენ უნდა მოვძებნოთ მრუდი AR_0 და წერტილი R_0, რომელზედაც იგი წყდება. წერტილს R_0 შეწყვეტის წერტილი, ხოლო დასახელებულ ტიპის ექსტრემუმს შეწყვეტილი ექსტრემუმი ვუწოდეთ.



ნახ. 36.

ახლა ერთი რამ ცხადია: შეწყვეტილი ექსტრემუმი იქნება ექსტრემუმი თვით თავის შესახებაც, ე. ი. თუ ამ ექსტრემუმზე ავიღებთ B და B_1 წერტილებს R_0 წერტილის ერთი და მეორე მხრივ, გვექნება

$$J_{AB} \geqq J_{AR_0},\ J_{AB_1} \geqq J_{AR_0} \qquad \text{(II)}$$

ცხადია, რომ AR_0 მრუდი დააკმაყოფილებს Euler-ის დიფერენციალურ განტოლებას, ე. ი. იქნება ექსტრემალი ამ სიტყვის ჩვეულებრივი აზრით.

გავიყვანოთ ახლა R_0 წერტილზე რომელიმე ნებსითი მრუდი. რადგან ამ მრუდის წერტილების მიმართ (1) პირობა შესრულებულია, ამიტომ AR_0 კვეთს ამ მრუდს ტრანსვერსალურად, მხოლოდ, რადგან ჩვენი მრუდი არის სრულებით ნებსითი, ტრანსვერსალობის პირობა უნდა დაკმაყოფილდეს $\overline{\vartheta}_0$ ყოველი მნიშვნელობისათვის (R_0 წერტილის კოორდინატებს ჩვენ აღვნიშნავთ x_0, y_0; ექსტრემალის მხების კუთხეს ამ წერტილში ჩვენ აღვნიშნავთ ϑ_0, მხოლოდ კუთხეს, რომელსაც ამ წერტილში შეადგენს ნებსითი მრუდი, $\overline{\vartheta}_0$).

ამგვარად, უნდა იყოს შესრულებული პირობა:

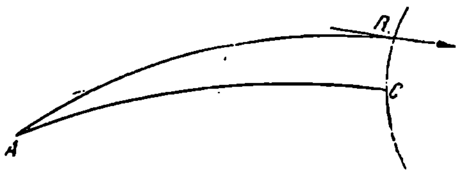
$$F_x'(x_0, y_0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0)\cos\overline{\vartheta}_0 + F_y'(x_0, y_0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0)\sin\overline{\vartheta}_0 = 0$$

$\overline{\vartheta}$ ყოველი მნიშვნელობისათვის.

მაგრამ ეს ტოლობა შესაძლო ხდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\left.\begin{array}{l} F_y'(x_0, y_0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) = 0 \\ F_x'(x_0, y_0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(III)}.$$

მართლაც, საკმარისია ავიღოთ $\overline{\vartheta}$ ორი კერძო მნიშვნელობა $\overline{\vartheta}_0 = 0$ და $\overline{\vartheta}_0 = \frac{\pi}{2}$, რომ დავრწმუნდეთ ამაში. ასეთია ის პირობები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს R_0 წერტილის კოორდინატები და კუთხე, რომელსაც შეადგენს X ღერძთან ექსტრემალის მხები R_0 წერტილში.



ნახ. 37.

დავწეროთ საზოგადო სახე ექსტრემალთა ოჯახისა:

$$x = \varphi(t, \alpha, \beta), \quad y = \psi(t, \alpha, \beta).$$

ჩვენ გვექნება სულ 6 უცნობი $\alpha_0, \beta_0; t_1, t_0, x_0, y_0$ (t_1 და t_0 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობანი, რომელიც წერტილებს A და B ეთანადება).

ამ ექვს უცნობს ვიპოვით შემდეგი ექვსი განტოლების საშუალებით:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(t_1, \alpha_0, \beta_0) \\ y_1 &= \psi(t_1, \alpha_0, \beta_0) \\ x_0 &= \varphi(t_0, \alpha_0, \beta_0) \\ y_0 &= \psi(t_0, \alpha_0, \beta_0) \end{aligned}$$

$$F_x'[\varphi(t_0,\alpha_0,\beta_0),\psi(t_0,\alpha_0,\beta_0),\varphi_t(t_0,\alpha_0,\beta_0),\psi_t(t_0,\alpha_0,\beta_0)]=0$$
$$F_y'[\varphi(t_0,\alpha_0,\beta_0),\psi(t_0,\alpha_0,\beta_0),\varphi_t(t_0,\alpha_0,\beta_0),\psi_t(t_0,\alpha_0,\beta_0)]=0$$

შეწყვეტილი ექსტრემუმი ამ ექვსი განტოლების საშუალებით იქნება განსაზღვრული.

ვნახოთ ახლა რას გვაძლევს (II) პირობა $J_{AB}\geqslant J_{AR_0}$, $J_{BB_1}\geqslant J_{AR_0}$.

ვთქვათ ექსტრემალის განტოლება არის $x=x_0(t)$, $y=y_0(t)$.

განვიხილოთ შემდეგი ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t} F[x_0(t),y_0(t),x_0'(t),y_0'(t)]\,dt$$

ეს ინტეგრალი წარმოადგენს t ფუნქციას.

აღვნიშნოთ იგი $J(t)$.

ამ შემთხვევაში ინტეგრალი იქნება აღებული შეწყვეტილ ექსტრემალზე, მაგრამ მისი ბოლო წერტილი განსაზღვრული არ იქნება. იმისათვის, რომ დაკმაყოფილდეს (II) პირობა, საჭიროა ამ ინტეგრალს ჰქონდეს მინიმუმი t_0 წერტილზე. ამისათვის, როგორც ვიცით, შემდეგი პირობები უნდა დაკმაყოფილდეს.

$$J'(t_0)=0\quad J''(t_0)\geqslant 0$$

ვიპოვოთ ჯერ $J'(t)$ დავწეროთ:

$$J'(t)=F[x_0(t),y_0(t),x_0'(t),y_0'(t)]$$

თუ ჩავსვამთ t მაგივრად t_0, მივიღებთ:

$$J'(t_0)=F[x_0(t_0),y_0(t_0),x_0'(t_0),y_0'(t_0)],$$

მაგრამ

$$F[x_0(t_0),y_0(t_0),x_0'(t_0),y_0'(t_0)]$$

იმ პირობის ძალით, რომელსაც F ფუნქცია დავუმორჩილეთ შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$F=x_0'(t_0)F_x'+y_0'(t_0)F_y'$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (III) პირობას, დავრწმუნდებით, რომ $J'(t_0)$ იქნება ნული უკვე ჩვენ მიერ წინათ გამოყვანილი პირობების ძალით.

ვნახოთ ახლა რას გვაძლევს $J''(t_0)$.

ვიპოვოთ $J''(t)$. დავწეროთ:

$$J''(t)=x_0'(t)F_x+y_0'(t)F_y+x_0''(t)F_x'+y_0''(t)F_y'$$

ჩავსვათ $t=t_0$, მაშინ (III) ძალით

($F_x'=0$, $F_y'=0$), მივიღებთ:

$$J''(t_0)=F_x(x_0,y_0,x_0',y_0')x_0'+F_y(x_0,y_0,x_0',y_0')y_0'$$

(x_0,y_0,x_0' და y_0' აღნიშნავენ $x_0(t_0)$, $y_0(t_0)$ x_0', (t_0) $y_0'(t_0)$)

პირობა $J''(t_0)\geqslant 0$ შემდეგნაირად დაიწერება:

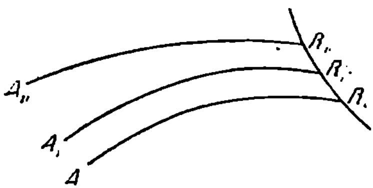
$$F_x(x_0,y_0,x_0',y_0')x_0'+F_y(x_0,y_0,x_0',y_0')y_0'\geqslant 0$$

ასეთია პირობა მეორე რიგისა შეწყვეტილი ექსტრემუმისათვის.

დავწეროთ ახლა (III) განტოლებანი ასეთი სახით:

$$F_x'(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta)=0 \qquad (IV)$$
$$F_y'(x, y, \cos\vartheta, \text{siu}\,\vartheta)=0$$

ვთქვათ თუ ავიღებთ A წერტილს, ექსტრემუმი შეწყდება R_0 წერტილში, თუ ავიღებთ სხვა A_1 წერტილს ექსტრემუმი შეწყდება სხვა R_1 წერტილში და ასე შემდეგ.



ნახ. 38.

გეომეტრიული ადგილი ამ წერტილებისა არის შეწყვეტის წერტილთა მრუდი. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ეს მრუდი, საჭიროა (IV)-დან გამოვრიცხოთ ϑ. მივიღებთ გარკვეულ განტოლებას: $R(x, y)=0$. სწორედ ეს განტოლება გამოხატავს შეწყვეტილ წერტილთა მრუდს.

შეგვიძლია ადვილად მოვძებნოთ ამ მრუდის მხების კუთხის tg. ამისათვის მოვიქცეთ ასე:

(IV)-ის მეორე განტოლება გარდავწყვიტოთ ϑ შესახებ. მივიღებთ: $\vartheta=\vartheta(x, y)$ და ϑ ეს გამოხატულება ჩავსვათ (IV) პირველ განტოლებაში. გვექნება:

$$F_x'[x, y, \cos\vartheta(x, y), \sin\vartheta(x, y)]=0 \qquad (V)$$

ეს იქნება შეწყვეტილ წერტილთა მრუდის განტოლება $R(x, y)=0$.

მოვძებნოთ ახლა $\frac{dy}{dx}$; ამისათვის განვაწარმოოთ (V) x-ის შესახებ. დავწეროთ:

$$F_x'{}_x+F_x'{}_y\frac{dy}{dx}-F_x'{}_x'\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dx}+F_x'{}_y'\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dx}=0$$

სრულებით ასეთნაირადვე მივიღებთ

$$F_y'{}_x+F_y'{}_y\frac{dy}{dx}-F_y'{}_x'\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dx}+F_y'{}_y'\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dx}=0$$

ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში დამოკიდებულებას ფუნქციების $F_x'{}_x'$, $F_x'{}_y'$ და $F_y'{}_y'$ და ფუნქციის F_1 შორის, უკანასკნელი ორი ტოლობა შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$F_x'{}_x+F_x'{}_y\frac{dy}{dx}-\sin\vartheta\,F_1\frac{d\vartheta}{dx}=0$$
$$F_y'{}_x+F_y'{}_y\frac{dy}{dx}+\cos\vartheta\,F\frac{d\vartheta}{dx}=0$$

გავამრავლოთ პირველი ტოლობა $\cos\vartheta$, მეორე $\sin\vartheta$ და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\cos\vartheta\, F'_{x'x}+\sin\vartheta\, F'_{y'x}+\frac{dy}{dx}\,(\cos\vartheta\, F'_{x'y}+\sin\vartheta\, F'_{y'y})=0,$$

მაგრამ

$$\cos\vartheta\, F'_{x'x}+\sin\vartheta\, F'_{y'x}=F_x \text{ და } \cos\vartheta F'_{x'y}+\sin\vartheta\, F'_{y'y}=F_y.$$

ამგვარად

$$F_x+\frac{dy}{dx}F_y=0$$

აქედან:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

ასეთია tg იმ კუთხისა, რომელსაც შეწყვეტის წერტილთა მრუდი შეადგენს X ღერძთან.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა:

ვთქვათ, პირველად, რომ $F(x, y, x', y')$ არ შეიცავს x. მაშინ $F_x=0$ და $\frac{dy}{dx}$ იქნება ნული. y იქნება მუდმივი. ამ შემთხვევაში შეწყვეტის წერტილთა მრუდი წარმოადგენს სწორს, რომელიც X ღერძის პარალელურია. ვთქვათ ახლა $F(x, y, x', y')$ არ შეიცავს y. მაშინ $F_y=0$ და $\frac{dy}{dx}$ იქნება უსასრულობა და შეწყვეტის წერტილთა მრუდი იქნება აგრეთვე სწორი, რომელიც Y ღერძის პარალელურია. თუ $F(x, y, x, y')$ არც x და არც y არ შეიცავს, მაშინ $\frac{dy}{dx}$ იქნება უკვე განუსაზღვრელობა $\frac{0}{0}$.

განვიხილოთ კერძო მაგალითი:

მოვძებნოთ შეწყვეტის წერტილთა მრუდი ასეთი ინტეგრალისათვის:

$$\int_{t_1}^{t_2}[bxy'-ayx')+ab\sqrt{x'^2+y'^2}]\,dt \qquad \text{(VI)}$$

ჯერ მოვძებნოთ ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება.

ამისათვის უნდა მოვძებნოთ ინტეგრალი განტოლებებისა:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_x'=0, F_y-\frac{d}{dt}F_y'=0$$

ამ განტოლებების მაგივრად შეგვიძლიან ავიღოთ განტოლება:

$$F'_{x'y}-F_{xy}'-F_1(x'y''-y'x'')=0$$

ვიპოვოთ $F'_{x'y}$ და F_{xy}', გვექნება:

$$F'_{x'y}=-a, F_{xy}'=b$$

მოვძებნოთ $F_1=\frac{F_{x'x'}'}{y'^2}$,

დავწერთ:

$$F_x' = -ay + ab \cdot \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$F_{x'x'}' = ab \frac{\sqrt{x'^2+y'^2} - \frac{x'x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}}{x'^2+y'^2} = ab \frac{y'^2}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_1 = ab \frac{1}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ამგვარად ჩვენ უნდა გარდავწყვიტოთ ვანტოლება:

$$-a-b-ab\frac{x'y''-y'x''}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

ანუ

$$a+b+ab\frac{x'y''-y'x''}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ $\frac{x'y''-y'x''}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ არის სიმრუდე $\frac{1}{R}$.

ამგვარად გვექნება:

$$a+b+ab\frac{1}{R}=0$$

აქედან

$$\frac{1}{R} = -\frac{a+b}{ab}.$$

ჩვენს მრუდს, ამგვარად, უნდა ჰქონდეს მუდმივი სიმრუდე, მაგრამ ასეთი მრუდი არის მხოლოდ ერთი. ას არის წრეხაზი.

ამგვარად, ექსტრემალთა ოჯახი წარმოადგენს წრეხაზებს, რომელთა რადიუსი $= -\frac{ab}{a+b}$. ეს ექსტრემალთა ოჯახი გამოიხატება განტოლებებით:

$$x-\alpha=R\sin t,\ y-\beta=R\cos t.$$

იგი შეიცავს ორ პარამეტრს α და β.

ვიპოვოთ ახლა შეწყვეტის წერტილთა მრუდი.

ამ მრუდს ვიპოვით განტოლებებიდან

$$F_x'(x, y, x', y')=0,$$

$$F_y'(x, y, x' y')=0$$

ვიპოვოთ F_x' და F_y' დავწერთ:

$$F_x' = -ay + ab\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$F_y' = ax + ab\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

ამგვარად, გვექნება შემდეგი ორი განტოლება, საიდანაც უნდა ვიპოვოთ შეწყვეტის წერტილთა მრუდი:

$$-y+b\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=0,$$

$$x+a\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=0,$$

ანუ

$$\frac{x}{a}=-\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

$$\frac{y}{b}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

ავამაღლოთ ეს ორი ტოლობა კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ამგვარად შეწყვეტის წერტილთა მრუდი ყოფილა ელიპსი.

ზემოთ ჩვენ დავინახეთ, რომ ექსტრემალები წარმოადგენს წრეხაზებს. საინტერესოა ვიცოდეთ, სად დალაგდება ამ წრეხაზების ცენტრები. რადგან ჩვენი წრეხაზები წარმოადგენენ შეწყვეტილ ექსტრემალებს, უნდა დაკმაყოფილდეს პირობა:

$$F'_{x'}=0,\ F'_{y'}=0,$$

ანუ,

$$-y+b\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=0$$

$$x+a\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=0.$$

ჩავსვათ ამ განტოლებაში x და y-ის მაგივრად მათი გამოხატულებანი: $x=\alpha+R\sin t$, $y=\beta+R\cos t$ გვექნება:

$$-\beta-R\cos t+b\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=0,$$

$$\alpha+R\sin t+a\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=0.$$

ახლა,

$x'=R\cos t, y'=-R\sin t, \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$ და $\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$ იქნება $\cos t$ და $-\sin t$.

ჩვენი ორი განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$-\beta-R\cos t+b\cos t=0,$$

$$\alpha+R\sin t-a\sin t=0$$

ანუ

$$\beta = -(R-b)\cos t,$$
$$\alpha = -(R-a)\sin t.$$

აქედან:

$$\frac{\alpha}{-(R-a)} = \sin t, \quad \frac{\beta}{-(R-b)} = \cos t.$$

ეს ორი განტოლება მოგვცემს:

$$\frac{\alpha^2}{(R-a)^2} + \frac{\beta^2}{(R-b)^2} = 1.$$

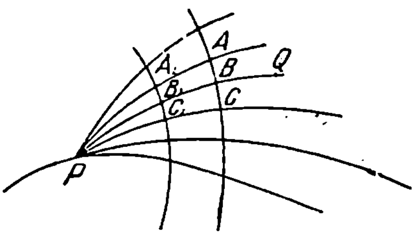
ჩვენ ვხედავთ რომ გეომეტრიული ადგილი ექსტრემალთა ცენტრებისა წარმოადგენს ისევ ელიპსს.

ლ ე ქ ც ი ა XXIII.

Kneser-ის თეორემა.

გადავდივართ Kneser-ის თეორემის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ ავიღეთ ექსტრემალი და მის რომელიმე P წერტილიდან გავიყვანეთ ექსტრემალთა კონა.



ნახ. 39.

აღვნიშნოთ განტოლება ასეთი ოჯახისა $x = \varphi(t, \alpha), y = \psi(t, \alpha)$. ჩვენ ვიცით, რომ J ინტეგრალის მნიშვნელობა აღებული რომელიმე ექსტრემალზე, რომელიც გაივლის Q წერტილზე, იქნება ამ Q წერტილის კოორდინატების: x და y ფუნქცია. აღვნიშნოთ იგი $W(x, y)$.

ნაწილობითი წარმოებულნი ამ ფუნქციისა x და y შესახებ იქნება:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= F_x'(x, y, p, q), \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= F_y'(x, y, p, q) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}).$$

ვნახოთ ახლა რას წარმოადგენს მრუდი, რომლის განტოლება არის $W(x, y) = C$ (C მუდმივია).

ვთქვათ ეს მრუდი დაწერილი გვაქვს პარამეტრული სახით: $x=\overline{x}(a)$, $y=\overline{y}(a)$.

$W[\overline{x}(a), \overline{y}(a)]=C$ იქნება იგივეობა. განვაწარმოოთ იგი a-ს შესახებ, მივიღებთ:

$$\frac{\partial W}{\partial x}\overline{x'}(a)+\frac{\partial W}{\partial y}\overline{y'}(a)=0$$

ჩავსვათ $\frac{\partial W}{\partial x}$ და $\frac{\partial W}{\partial y}$ მაგივრად მათი მნიშვნელობანი (I)-დან, მივიღებთ;

$$F_{x'}(x, y, p, q)\,x'(a)+F_{y'}(x, y, p, q)\,y'(a)=0 \qquad \text{(II)}$$

სადაც x და y მაგივრად უნდა ვიგულისხმოთ $x=\overline{x}(a)$, $y=\overline{y}(a)$.

(II) ტოლობა წარმოადგენს ტრანსვერსალობის პირობას, და, ამგვარად, $W(x, y)=C$ მრუდი ისეთი მრუდია, რომელიც ტრანსვერსალურად გადაკვეთს ჩვენს ექსტრემალს. აღვნიშნოთ A, B, C . . . ის წერტილები, რომლებშიაც ეს ტრანსვერსალი გადაკვეთს ჩვენს ექსტრემალებს. ჩვენ ვხედავთ შემდეგ საინტერესო მოვლენას: ინტეგრალი J, აღებული P-დან A-მდე, ეტოლება ინტეგრალს P-დან B-მდე და ასე შემდეგ. ე. ი.

$$J_{PA}=J_{PB}=J_{PC}=\cdot\cdot \qquad \text{(III)}$$

გავიყვანოთ ახლა მეორე ტრანსვერსალი და აღვნიშნოთ: A_1, B_1, C_1, . . .-ის წერტილები, რომლებშიაც იგი გადაკვეთს ჩვენს ექსტრემალებს, გვექნება:

$$J_{PA_1}=J_{PB_1}=J_{PC_1}=\cdot \qquad \text{(IV)}$$

(III) და (IV) ძალით დავწერთ:

$$J_{A_1A}=J_{B_1B}=J_{C_1C},$$

ე. ი. ექსტრემალური მანძილი ორ ტრანსვერსალთა შორის ერთიდაიგივე ყოფილა.

განვიხილოთ ექსტრემალთა ოჯახის მომქლები და მისი თვისებანი ვარიაციათა აღრიცხვის თვალსაზრისით.

ვთქვათ, რომ x და y იცვლება არა იმ მრუდის მიმართ, რომელიც $W(x, y)$ მუდმივად აქცევს, არამედ საზოგადოდ რომელიმე სხვა მრუდის მიმართ: $x=\overline{x}(\tau)$, $y=\overline{y}(\tau)$. ვთქვათ, გვაქვს ექსტრემალთა ოჯახი, გაყვანილი P წერტილიდან. ინტეგრალი აღებული იმ ექსტრემალის შესახებ, რომელიც P წერტილს $x=\overline{x}(\tau)$, $y=\overline{y}(\tau)$ მრუდის რომელიმე წერტილთან აერთებს, იქნება $W[\overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau)]$.

მოვძებნოთ ახლა ამ ფუნქციის წარმოებული τ შესახებ.

გვექნება:

$$\frac{dW[\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)]}{d\tau} = \frac{\partial W}{\partial x}\bar{x}'(\tau) + \frac{\partial W}{\partial y}\bar{y}'(\tau).$$

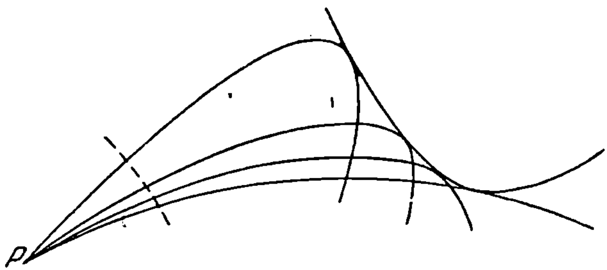
(I) ძალით დავწერთ:

$$\frac{dW[\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)]}{d\tau} = F_{x'}[\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), p, q]\,\bar{x}'(\tau) +$$

$$+ F_{y'}[\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), p, q]\,\bar{y}'(\tau). \qquad \text{(V)}$$

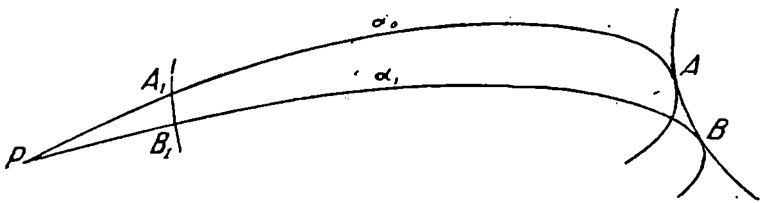
p და q იქნებიან τ ფუნქციები.

ვთქვათ, რომ ის მრუდი, რომელიც ჩვენ ავიღეთ, არის ექსტრემალთა მომვლები. ავიღოთ ჩვენი ოჯახის მხოლოდ ორი ექსტრემალი.



ნახ. 40.

აღვნიშნოთ წერტილები, რომლებშიაც მომვლები: $x=\bar{x}(\tau)$, $y=\bar{y}(\tau)$ შეეხება ჩვენს ორ ექსტრემალს შესაბამისად A და B.



ნახ. 41.

ვთქვათ τ-ს მნიშვნელობა A წერტილზე არის τ_0 და B წერტილზე τ_1. პარამეტრის α მნიშვნელობა PA და PB ექსტრემალებისათვის აღვნიშნოთ შესაბამისად α_0 და α_1. მომვლების მიმართ ექსტრემალს და თვით მომვლებს საერთო მხები აქვთ, ე. ი.

$$\frac{\bar{y}'}{\bar{x}'} = \frac{\psi_t}{\varphi_t}$$

ამიტომ მომვლების მიმართ გვექნება:

$$\bar{x}'(\tau)=\lambda\varphi_t(t,\alpha),\ \bar{y}'(\tau)=\lambda\psi_t(t,\alpha).$$

(ცხადია, რომ $\lambda \neq 0$).

ვნახოთ ახლა რას წარმოადგენს J ინტეგრალი, აღებული PA და PB ექსტრემალების მიმართ. (t მნიშვნელობას წერტილებზე P, A, B აღვნიშნავთ t_1, t_2, t_3).

დავწერთ:

$$J_{PA}=\int_{t_1}^{t_2}F[\varphi(t,\alpha_0),\ \psi(t,\alpha_0),\ \varphi_t(t,\alpha_0),\psi_t(t,\alpha_0)]\,dt.$$

მეორე მხრივ, J_{PA} არის ექსტრემალური მანძილი $W[\bar{x}(\tau_0),\ \bar{y}(\tau_0)]$. ამგვარად,

$$J_{PA}=\int_{t_1}^{t_2}F[\varphi(t,\alpha_0),\ \psi(t,\alpha_0),\ \varphi_t(t,\alpha_0),\ \psi_t(t,\alpha_0)]=W[\bar{x}(\tau_0),\ \bar{y}(\tau_0)].$$

J_{PB}-თვის გვექნება:

$$J_{PB}=\int_{t_1}^{t_3}F[\varphi(t,\alpha_1),\ \psi(t,\alpha_1),\ \varphi_t(t,\alpha_1),\ \psi_t(t,\alpha_1)]\,dt=W[\bar{x}(\tau_1),\bar{y}(\tau_1)]$$

მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

ჩვენ ვიცით, რომ მომვლების ყოველ წერტილზე ექსტრემალს და მომვლებს ყოველთვის ერთიდაიგივე მხები აქვს და, მაშასადამე, ერთიდაიგივე იქნება აგრეთვე მათი სინუსი და კოსინუსი. ამიტომ (V) ტოლობის მარჯვენა მხარე შემდეგნაირად შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$F_{x'}[\bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ x'(\tau),\ y'(\tau)]\,\bar{x}'(\tau)+F_{y'}[x(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ \bar{x}'(\tau),\ \bar{y}'(\tau)]\,\bar{y}'(\tau).$$

მაგრამ ეს, როგორც ვიცით, ეტოლება $F[\bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ \bar{x}'(\tau),\ \bar{y}'(\tau)]$.

ამგვარად, გვექნება:

$$\frac{dW[\bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau)]}{d\tau}=F[\bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ \bar{x}'(\tau),\ \bar{y}'(\tau)].$$

მოვახდინოთ ახლა უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრაცია τ_0-დან τ_1-მდე, მივიღებთ:

$$W[\bar{x}(\tau_1),\ \bar{y}(\tau_1)]-W[\bar{x}(\tau_0),\ \bar{y}(\tau_0)]=$$
$$=\int_{\tau_0}^{\tau_1}F[\bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ \bar{x}'(\tau),\ \bar{y}'(\tau)]\,d\tau.$$

მაგრამ

$$W[\bar{x}(\tau_1),\ \bar{y}(\tau_1)]=J_{PB},\ \ W[\bar{x}(\tau_0),\ \bar{y}(\tau_0)]=J_{PA};$$

$\int_{\tau_0}^{\tau_1}F[\bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ \bar{x}'(\tau),\ \bar{y}'(\tau)]\,d\tau$ არის ინტეგრალი J აღებული მომვლების მიმართ A-დან B-მდე. ამგვარად,

$$J_{PB}-J_{PA}=J_{AB},$$

ანუ,

$$J_{PB}=J_{PA}+J_{AB}. \qquad \text{(VI)}$$

უკანასკნელი ტოლობა გამოხატავს Kneser-ის თეორემას.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ინტეგრალი J აღებული PB მიმართ = ინტეგრალს აღებულს PA მიმართ + ინტეგრალი აღებული AB მომვლების მიმართ.

ვთქვათ, რომ გავიყვანეთ რომელიმე ტრანსვერსალი. აღვნიშნოთ A_1 და B_1 ის წერტილები, რომლებშიაც ეს ტრანსვერსალი გადაკვეთს PA და PB ექსტრემალებს.

ჩვენ წინათ დავამტკიცეთ, რომ

$$J_{PA_1}=J_{PB_1}. \qquad \text{(VII)}$$

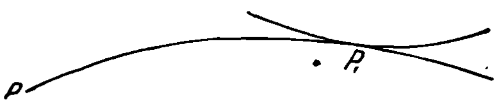
(VI) და (VII) ფორმულების ძალით მივიღებთ:

$$J_{B_1B}=J_{A_1A}+J_{AB}.$$

ზემოთმიღებული შედეგები გვიჩვენებს თუ რა განსაკუთრებული მნიშვნელობა ჰქონია ექსტრემალთა ოჯახის მომვლებს.

ვთქვათ, გვაქვს ექსტრემალთა ოჯახი $x=\varphi(t, \alpha)$, $y=\psi(t, \alpha)$. ავიღოთ ამ ოჯახის ერთი რომელიმე ექსტრემალი (α პარამეტრის მნიშვნელობა ამ ექსტრემალისათვის აღვნიშნოთ α_0) და ვთქვათ, რომ P_1 არის წერტილი, რომელშიაც ექსტრემალთა მომვლები შეეხება ჩვენ ექსტრემალს.

ვთქვათ t მნიშვნელობა P_1 წერტილისათვის არის t'_1.



ნახ. 42

შევადგინოთ ფუნქცია $\Delta(t, \alpha_0)$:

$$\Delta(t, \alpha_0)=\varphi_t(t, \alpha_0)\,\psi_\alpha(t'_1, \alpha_0)-\psi_t(t, \alpha_0)\,\varphi_\alpha(t'_1, \alpha_0).$$

ფუნქცია $\Delta(t, \alpha_0)$ მოისპობა P_1 წერტილზე, ე. ი.

$$\Delta(t'_1, \alpha_0)=\varphi_t(t'_1, \alpha_0)\,\psi_\alpha(t'_1, \alpha)_0-\psi_t(t'_1, \alpha_0)\,\varphi_\alpha(t'_1, \alpha_0)=0.$$

ამის გარდა Jacobi-ს დიფერენციალური განტოლების თეორიიდან ვიცით, რომ $\Delta(t, \alpha_0)$ წარმოებული t შესახებ t'_1 წერტილზე ნული არ იქნება, ე. ი. $\Delta_t(t'_1, \alpha_0)\neq 0$.

შევადგინოთ ახლა შემდეგნაირი განტოლება: $\Delta(t, \alpha)=0$.

ამ ტოლობას აკმაყოფილებს t და α მნიშვნელობანი $t=t'_1$, $\alpha=\alpha_0$ და ამასთანავე ტოლობის მარცხენა მხარის წარმოებული t შესახებ ამ წერტილებისათვის არ იქნება ნული. ამიტომ შესაძლებელია განტოლების $\Delta(t, \alpha)=0$ გარდაწყვეტა t შესახებ: $t=t(\alpha)$.

თუ ახლა $\Delta(t, \alpha)=0$ განტოლებაში t მაგივრად ჩავსვამთ მის მნიშვნელობას $t=t(\alpha)$, მივიღებთ იგივეობას: $\Delta[t(\alpha), \alpha]=0$.

მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

ჩავსვათ განტოლებებში $x=\varphi(t, \alpha)$, $y=\psi(t, \alpha)$ t მაგივრად $t=t(\alpha)$, მივიღებთ განტოლებებს:

$$x=\varphi[t(\alpha), \alpha], \quad y=\psi[t(\alpha), \alpha], \qquad \text{(VIII)}$$

რომელნიც გამოხატავს ერთ გარკვეულ მრუდს.

დავამტკიცოთ, რომ ეს მრუდი წარმოადგენს სწორედ მომვლებს ჩვენი ექსტრემალთა ოჯახისა. აღვნიშნოთ მოკლედ $\varphi[t(\alpha), \alpha]=\bar{x}(\alpha)$ და $\psi[t(\alpha), \alpha]=\bar{y}(\alpha)$. ვიპოვოთ $\bar{x}'(\alpha)$ და $\bar{y}'(\alpha)$. დავწეროთ:

$$\bar{x}'(\alpha)=\varphi_t \frac{dt}{d\alpha}+\varphi_\alpha,$$

$$\bar{y}'(\alpha)=\psi_t \frac{dt}{d\alpha}+\psi_\alpha.$$

ამ ტოლობებში პირველი გავამრავლოთ ψ_t-ზე, მეორე φ_t-ზე და მეორეს პირველი გამოვაკლოთ; მივიღებთ:

$$\bar{y}'(\alpha)\varphi_t-\bar{x}'(\alpha)\psi_t=\varphi_t\psi_\alpha-\varphi_\alpha\psi_t,$$

სადაც t მაგივრად ჩასმულია ყოველთვის $t(\alpha)$.

მაგრამ $\varphi_t\psi_\alpha-\varphi_\alpha\psi_t$ არის $\Delta[t(\alpha), \alpha]$, რომელიც იგივეობურად ნულია. ამგვარად გვექნება:

$$\bar{y}'(\alpha)\varphi_t-\bar{x}'(\alpha)\psi_t=0.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\frac{\bar{y}'(\alpha)}{\bar{x}'(\alpha)}=\frac{\psi_t[t(\alpha), \alpha]}{\varphi_t[t(\alpha), \alpha]}.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ მომვლები ექსტრემალისა შეეხება აგრეთვე (VIII) მრუდს და ამით ზემოთგამოთქმული დებულება სავსებით დამტკიცებულია.

მომვლების განტოლება იქნება ამგვარად: $x=\bar{x}(\alpha)$, $y=\bar{y}(\alpha)$.

ლექცია XXIV.

კუთხისებური ექსტრემუმი.

დავუბრუნდეთ ისევ ჩვენს ძირითად პრობლემას:

გვაქვს ინტეგრალი:

$$J=\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\,dt.$$

და ორი წერტილი A და B.

უნდა შევაერთოდ ეს ორი წერტილი ისეთი მრუდით, რომელიც მეზობელ მრუდთა შორის უმცირეს მნიშვნელობას ანიჭებდეს J ინტეგრალს.

თუ პრობლემას განუწყვეტელ მხებიან მრუდთა შორის არ აქვს გარდაწყვეტა, ვეცადოთ ეს გარდაწყვეტა ისეთი მრუდის საშუალებით გამოვხატოთ, რომელსაც ერთი კუთხიანი წერტილი აქვს A და B შორის.

ამ შემთხვევაში გვექნება საქმე კუთხისებრ ექსტრემუმთან.

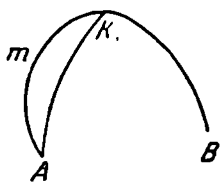
ჩვენს წინაშე ორი საკითხი არის წარმომდგარი:

1) უნდა მოვძებნოთ წერტილი K_0, რომელიც არის საძიებელ ექსტრემუმის კუთხითი წერტილი.

2) უნდა მოვძებნოთ მრუდი AK_0 და K_0B, რომლებიდანაც შედგება კუთხისებრი ექსტრემალი.

დავამტკიცოთ, რომ მრუდი AK_0 და K_0B წარმოადგენს ჩვეულებრივ განუწყვეტელ მხებიან ექსტრემალებს, ე. ი. ისეთებს, რომელნიც Euler-ის დიფერენციალურ განტოლებას აკმაყოფილებენ.

მართლაც, განვიხილოთ ისეთი შესადარებელი მრუდი: AmK_0B, რომელსაც კუთხისებრ ექსტრემუმთან AK_0B საერთო აქვს მრუდი K_0B.



ნახ. 43.

თანახმად კუთხისებრ ექსტრემუმის განმარტებისა გვექნება:

$$J_{AK_0B} \leqq J_{AmK_0B},$$

ანუ,

$$J_{AK_0} + J_{K_0B} \leqq J_{AmK_0} + J_{K_0B}:$$

აქედან გვექნება:

$$J_{AK_0} \leqq J_{AmK_0}.$$

ეს კი ამტკიცებს ჩვენ დებულებას.

სრულებით ამავე წესით დავამტკიცებთ ჩვენ დებულებას K_0B მრუდის შესახებ. ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ კუთხისებრ ექსტრემუმის ორივე შტო წარმოადგენს ინტეგრალებს Euler-ის დიფერენციალური განტოლებისა.

ვთქვათ, Euler-ის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი არის $x = \varphi(t, \alpha, \beta)$, $y = \psi(t, \alpha, \beta)$, და α და β ის მნიშვნელობანი, რომელნიც AK_0 და K_0B ექსტრემალს ეთანადება, აღვნიშნოთ შესაბამისად α_0, β_0, და $\overline{\alpha}_0$, და $\overline{\beta}_0$.

აღვნიშნოთ მოკლედ:

$$\varphi(t, \alpha_0, \beta_0) = x_0(t), \quad \psi(t, \alpha_0, \beta_0) = y_0(t),$$
$$\varphi(t, \overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0) = \overline{x}_0(t), \quad \psi(t, \overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0) = \overline{y}_0(t).$$

ვთქვათ, t პარამეტრის მნიშვნელობანი AK_0 მრუდისათვის წერტილებზე A და K_0 არის t_1 და t_0, და K_0B მრუდისათვის წერტილებზე K_0 და B არის $\bar{t}_0$ და t_2, (t_0 და $\bar{t}_0$ შესაძლებელია ერთიდაიგივე არ იყოს. თუ, მაგალითად, პარამეტრად t მივიღებთ მხების კუთხის tg t_0 განსხვავდება $\bar{t}_0$-გან).

აღვნიშნოთ AK_0B ექსტრემალი მოკლედ ϑ_0.

დავწერთ:

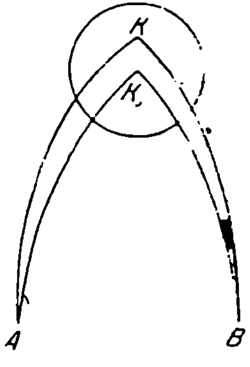
$$J_{\vartheta_0} = \int_{t_1}^{t_0} F[x_0(t), y_0(t), x'_0(t), y'_0(t)]\,dt +$$

$$+ \int_{\bar{t}_0}^{t_2} F[\bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t), \bar{x}'_0(t), \bar{y}'_0(t)]\,dt.$$

მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

K_0 წერტილის გარშემო შემოვწეროთ მცირე წრე და ამ წრის შიგ ავიღოთ რომელიმე K წერტილი. ჩვენ იმ თავითვე უნდა ვიგულისხმოთ შემდეგი: K_0 და A შორის არ არის შეუღლებული წერტილი K_0 წერტილისა შესახებ K_0A ექსტრემალისა და აგრეთვე K_0 და B შორის არ არის K_0 წერტილის შეუღლებული წერტილი შესახებ K_0B ექსტრემალისა.

შევაერთოთ ახლა წერტილები K და A ექსტრემალით და, აგრეთვე, წერტილები K და B.



ნახ. 44.

აშკარაა, რომ თუ ϑ_0 ანიჭებს მინიმუმს ინტეგრალს J, მაშინ გვექნება:

$$J_{AKB} \geqslant J_{AK_0B} \tag{1}$$

აღვნიშნოთ ცვალებად K წერტილის კოორდინატები x და y და A და B წერტილების კოორდინატები აღვნიშნოთ შესაბამისად x_1, y_1 და x_2, y_2.

ინტეგრალი J აღებული A-დან K-მდე იქნება ექსტრემალური მანძილი $J(x_1, y_1, x, y)$ და ინტეგრალი J აღებული K-დან B-მდე იქნება ექსტრემალური მანძილი $J(x, y, x_2, y_2)$.

ამგვარად

$$J_{AKB} = J(x_1, y_1, x, y) + J(x, y, x_2, y_2).$$

მარჯვენა მხარეზე მყოფი გამოხატულება წარმოადგენს ორ ცვალებადის x და y ფუნქციას. აღვნიშნოთ იგი $Y(x, y)$. (1) პირო-

ბის ძალით ამ ფუნქციას უნდა ჰქონდეს მინიმუმი წერტილზე $x=x_0$, $y=y_0$.

ამისათვის კი საჭიროა, რომ $Y(x, y)$ ფუნქციის ნაწილობითი წარმოებულები x და y შესახებ წერტილებზე $x=x_0$ და $y=y_0$ იყვნენ ნულის ტოლი, ე. ი.

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0=0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0=0 \tag{II}$$

აღვნიშნოთ AK მრუდის მხების კუთხის cos და sin p და q-ით, მხოლოდ p და q მნიშვნელობა წერტილზე K_0 აღვნიშნოთ p_0 და q_0.

KB მრუდის მხების კუთხის cos და sin აღვნიშნოთ $\bar{p}$ და $\bar{q}$, და $\bar{p}$ და $\bar{q}$ მნიშვნელობანი წერტილზე K_0 აღვნიშნოთ $\bar{p}_0$, და $\bar{q}_0$.

ვიპოვოთ ახლა $\frac{\partial Y}{\partial x}$ და $\frac{\partial Y}{\partial y}$.

დავწეროთ:

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{\partial \bar{J}}{\partial x}$$

(J და $\bar{J}$ მოკლედ გამოხატავენ $J(x_1, y_1, x, y)$ და $J(x, y, x_2, y_2)$). მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ

$$\frac{\partial J}{\partial x}=F_{x'}(x, y, p, q) \quad \text{და} \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}=-F_{x'}(x, y, \bar{p}, \bar{q}).$$

ამგვარად

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=F_{x'}(x, y, p, q)-F_{x'}(x, y, \bar{p}, \bar{q}).$$

ასევე მივიღებთ:

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial J}{\partial y}+\frac{\partial \bar{J}}{\partial y}=F_{y'}(x, y, p, q)-F_{y'}(x, y, \bar{p}, \bar{q}).$$

ჩავსვათ ახლა $x=x_0$ და $y=y_0$,
მივიღებთ:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0=F_{x'}(x_0, y_0, p_0, q_0)-F_{x'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0=F_{y'}(x_0, y_0, p_0, q_0)-F_{y'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)$$

(II) ძალით დავწერთ:

$$F_{x'}(x_0, y_0, p_0, q_0)=F_{x'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0).$$

$$F_{y'}(x_0, y_0, p_0, q_0)=F_{y'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0).$$

უკანასკნელ ტოლობებს ეწოდებათ Erdmann-Weierstrass-ის პირობები. ეს არის ის პირობანი, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს K_0

წერტილის (ე. ი. კუთხისებრი ექსტრემუმის კუთხითი წერტილის) კოორდინატები.

ვნახოთ ახლა, როგორ უნდა მოვძებნოთ კუთხითი ექსტრემალი, რომელიც აერთებს A და B წერტილებს.

ჩვენოვის უცნობია შემდეგი რვა სიდიდე: t_1, t_2, t_0, $\bar{t}_0$, α_0, β_0, $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\beta}_0$. ამ რვა უცნობს ვიპოვით შემდეგი რვა განტოლებიდან:

$$\varphi(t_1, \alpha_0, \beta_0)=x_1$$
$$\psi(t_1, \alpha_0, \beta_0)=y_1$$
$$\varphi(t_2, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0)=x_2$$
$$\psi(t_2, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0)=y_2$$
$$\varphi(t_0, \alpha_0, \beta_0)=\varphi(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0)$$
$$\psi(t_0, \alpha_0, \beta_0)=\psi(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0)$$

$$F_{x'}[\varphi(t_0, \alpha_0, \beta_0), \psi(t_0, \alpha_0, \beta_0), \varphi_t(t_0, \alpha_0, \beta_0), \psi_t(t_0, \alpha_0, \beta_0)] =$$
$$=F_{x'}[\varphi(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \psi(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \varphi_t(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \psi_t(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0)]$$

$$F_{y'}[\varphi(t_0, \alpha_0, \beta_0), \psi(t_0, \alpha_0, \beta_0), \varphi_t(t_0, \alpha_0, \beta_0), \psi_t(t_0, \alpha_0, \beta_0)]=$$
$$=F_{y'}[\varphi(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \psi(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \varphi_t(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \psi_t(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0)]$$

ამ რვა განტოლებიდან ვიპოვით რვა უცნობს t_1, t_2, t_0, $\bar{t}_0$, α_0, β_0, $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\beta}_0$ და ამით კუთხითი ექსტრემუმი იქნება განსაზღვრული. იქნება ცნობილი როგორც K წერტილი, ისე AK და KB ექსტრემალები.

ვთქვათ ახლა რომ ვიპოვეთ ეს კუთხითი ექსტრემუმი.

დავსვათ შემდეგი პრობლემა: არსებობს თუ არა ამ კუთხითი ექსტრემალის მახლობლობაში სხვა კუთხითი ექსტრემალები.

ამისათვის ჯერ უნდა გამოვარკვიოთ შემდეგი: შეგვიძლია თუ არა K_0 წერტილის მახლობლობაში აღებულ რომელიმე K წერტილისათვის ვიპოვოთ ისეთი მიმართულებანი, რომლებიც შეადგენს X ღერძთან კუთხეებს ϑ და $\bar{\vartheta}$, ისე რომ Erdmann-Weierstrass-ის პირობები დაკმაყოფილდეს. ვიგულისხმოთ, რომ მთელ AK_0 და K_0B ექსტრემუმების მიმართ Legendre-ის პირობა შესრულებულია, ე. ი. F_1 ფუნქცია როგორც AK, ისე KB ექსტრემალისათვის დადებითია.

ავნიშნოთ K წერტილის კოორდინატები x, y. იმისათვის, რომ K იყოს კუთხისებრ ექსტრემალის კუთხითი წერტილი, უნდა იყოს შესრულებული პირობები:

$$\left.\begin{aligned} F_{x'}(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta)&=F_{x'}(x, y, \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}). \\ F_{y'}(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta)&=F_{y'}(x, y, \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}). \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

თუ შესაძლებელია ამ ორი განტოლების გარდაწყვეტა ϑ და $\bar{\vartheta}$ შესახებ, ე. ი. ϑ და $\bar{\vartheta}$ გამოხატვა x და y საშუალებით ისე, რომ განტოლებანი (III) დაკმაყოფილდეს, მაშინ ზემოთდასმული პრობლემაც დადებითად გარდაწყდება.

ცხადია, რომ (III) განტოლებებს აკმაყოფილებს მნიშვნელობანი $x=x_0$, $y=y_0$, $\vartheta=\vartheta_0$, $\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}_0$ ($\bar{\vartheta}_0$ და ϑ_0 არის AK_0 და K_0B ექსტრემალების მხების კუთხეები K_0 წერტილში).

ამიტომ (III) გარდაწყვეტა შესაძლებელი იქნება ყოველთვის, თუ დავამტკიცებთ, რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტის

$$\Delta=\frac{D(F_{x'}-\bar{F}_{x'},\,F_{y'}-\bar{F}_{y'})}{D(\vartheta,\,\bar{\vartheta})}$$

($F_{x'}$ და $\bar{F}_{x'}$-თი მოკლედ აღვნიშნავთ $F_{x'}(x,\ y,\ \cos\vartheta,\ \sin\vartheta)$ და $F_{x'}(x,\ y,\ \cos\bar{\vartheta},\ \sin\bar{\vartheta})$, აგრეთვე $F_{y'}$ და $\bar{F}_{y'}$-თი აღვნიშნავთ $F_{y'}(x,\ y,\ \cos\vartheta,\ \sin\vartheta)$ და $F_{y'}(x,\ y,\ \cos\bar{\vartheta},\ \sin\bar{\vartheta})$) მნიშვნელობა სისტემისათვის: $\vartheta=\vartheta_0$, $\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}_0$, $x=x_0$, $y=y_0$ ნული არ არის.

ვიპოვოთ ჩვენი ფუნქციონალური დეტერმინანტი Δ. დავწეროთ

$$\Delta=\begin{vmatrix} -F_{x'x'}\sin\vartheta+F_{x'y'}\cos\vartheta, & -F_{y'x'}\sin\vartheta+F_{y'y'}\cos\vartheta \\ \bar{F}_{x'x'}\sin\bar{\vartheta}-\bar{F}_{x'y'}\cos\bar{\vartheta}, & \bar{F}_{y'x'}\sin\bar{\vartheta}-\bar{F}_{y'y'}\cos\bar{\vartheta} \end{vmatrix}$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში დამოკიდებულებას F_1 ფუნქციის და $F_{x'x'}$, $F_{x'y'}$, $F_{y'y'}$ ფუნქციებს შორის, გვექნება

$$\Delta=\begin{vmatrix} -F_1\sin^3\vartheta-F_1\sin\vartheta\cos^2\vartheta, & F_1\sin^2\vartheta\cos\vartheta+F_1\cos^3\vartheta \\ \bar{F}\sin^3\bar{\vartheta}+\bar{F}_1\sin\bar{\vartheta}\cos^2\bar{\vartheta}, & -\bar{F}_1\sin^2\bar{\vartheta}\cos\bar{\vartheta}-\bar{F}_1\cos^3\bar{\vartheta} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -F_1\sin\vartheta, & F_1\cos\vartheta \\ \bar{F}_1\sin\bar{\vartheta}, & -\bar{F}_1\cos\bar{\vartheta} \end{vmatrix}=F_1\bar{F}_1(\sin\vartheta\cos\bar{\vartheta}-\cos\vartheta\sin\bar{\vartheta})=$$

$$=F_1\bar{F}_1\sin(\vartheta-\bar{\vartheta}).$$

მნიშვნელობა Δ- სი სისტემისათვის $x=x_0$, $y=y_0$, $\vartheta=\vartheta_0$, $\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}_0$ იქნება $(F_1)_0(\bar{F}_1)_0\sin(\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0)$.

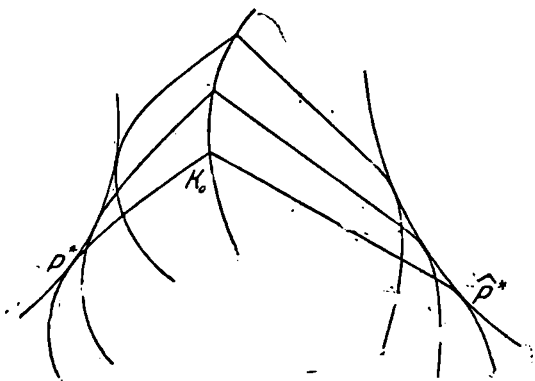
$(F_1)_0$ და $(\bar{F}_1)_0$ ნული არ არის. აგრეთვე ნული არ იქნება $\sin(\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0)$.

ამგვარად $(F_1)_0(\bar{F}_1)_0\sin(\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0)$ ნულისაგან განსხვავდება და ამით დამტკიცებულია, რომ შესაძლებელია (III) სისტემის გარდაწყვეტა ϑ და $\bar{\vartheta}$ შესახებ.

ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ϑ და $\bar{\vartheta}$, როგორც x და y ფუნქციები: $\vartheta = \vartheta(x, y)$, $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(x, y)$, რომელნიც აკმაყოფილებენ სისტემას (III). ეს ამტკიცებს, რომ ყოველ წერტილზე K, რომელიც იმყოფება K_0 წერტილის მახლობლობაში, შეგვიძლია გავიყვანოთ კუთხისებური ექსტრემალი, რომლის გარდატეხის წერტილიც იქნება K წერტილი.

გავიყვანოთ ახლა K_0 წერტილზე რომელიმე მრუდი და ამ მრუდზე ავიღოთ წერტილი K, რომელიც ახლოს იმყოფება K_0 წერტილთან. თანახმად ზემოთ დამტკიცებულისა ამ K წერტილისათვის არსებობს ორი მიმართულება (რომელიც შეადგენს X ღერძთან კუთხეებს ϑ და $\bar{\vartheta}$), რომლითაც შეიძლება კუთხისებრი ექსტრემალის გაყვანა.

თუ ვამოძრავებთ K წერტილს ჩვენს მრუდზე, მივიღებთ კუთხისებრ ექსტრემალთა მთელ ოჯახს, რომელნიც შეიცავს AK_0B ექსტრემუმს, როგორც კერძო შემთხვევას.



ნახ. 45.

მივიღებთ ორ მომვლებს: ერთი არის მომვლები ექსტრემალთა მარცხენა შტოების და მეორე—ექსტრემალთა მარჯვენა შტოების.

ვთქვათ პირველი მომვლები შეეხება ექსტრემალის მარცხენა შტოს წერტილში p^* და მეორე მომვლები კი შეეხება ექსტრემალის მარჯვენა შტოს წერტილში $\hat{p}^*$.

წერტილებს p^* და $\hat{p}^*$ ეწოდება შეუღლებული წერტილი კუთხითი ექსტრემალისა.

მოვიყვანთ ახლა კუთხითი ექსტრემუმის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას. დავწეროთ Weierstrass-Erdmann-ის პირობები:

$$F_{x'}(x_0, y_0, p_0, q_0) - F_{x'}(x_0, y_0, \overline{p_0}, \overline{q_0}) = 0,$$

$$F_{y'}(x_0, y_0, p_0, q_0) - F_{y'}(x_0, y_0, \overline{p_0}, \overline{q_0}) = 0.$$

ავიღოთ Weierstrass-ის ფუნქცია

$$E(x_0, y_0, p_0, q_0, \overline{p_0}, \overline{q_0}) = \overline{p_0}(\overline{F}_{x'} - F_{x'}) + \overline{q_0}(\overline{F}_{y'} - F_{y'})$$

რადგან $\overline{F}_{x'} - F_{x'}$ და $\overline{F}_{y'} - F_{y'}$ ეტოლებიან ნულს, თანახმად Weierstrass—Erdmann-ის პირობისა, ამიტომ:

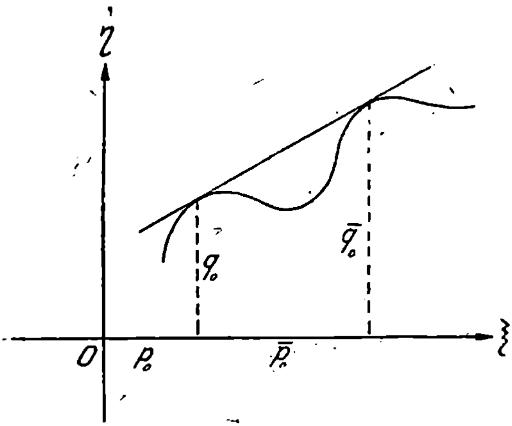
$$E(x_0, y_0, p_0, q_0, \overline{p_0}, \overline{q_0}) = 0 \qquad \text{(IV)}$$

ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ უკანასკნელი ტოლობით, რომ მოვახდინოთ შესაფერისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ავიღოთ მრუდი:

$$F(x_0, y_0, \xi, \eta) = 1$$

სადაც x_0, y_0 განხილულია როგორც პარამეტრები. ამ მრუდს, როგორც ვიცით, ეწოდება ინდიკატრიქსი.

E ფუნქციის ნულთან ტოლობა დაკავშირებულია იმ გეომეტრიულ ფაქტთან, რომ (p_0, q_0) წერტილზე გაყვანილი ინდიკატრიქის მხები გადაკვეთს ინდიკატრიქსს $(\overline{p_0}, \overline{q_0})$ წერტილზე (იხ. XIX-ლექცია).



ნახ. 46.

დავამტკიცოთ, რომ ინდიკატრიქსი არა მარტო გადაკვეთს ამ მხებს, არამედ შეეხება მას. მართლაც ავიღოთ Weierstrass-ის ფუნქცია: $E(x_0, y_0, p_0, q_0, \overline{p_0}, \overline{q_0})$. სრულებით ისევე, როგორც ზემოთ, დავამტკიცებთ, რომ იგი ეტოლება ნულს. ეს კი გვიჩვენებს, რომ

ინდიკატრიქსის მხები წერტილში $\overline{p_0}$, $\overline{q_0}$ გადაკვეთს ინდიკატრიქსს წერტილში p_0, q_0.

ჩვენ კი ზემოთ მივიღეთ, რომ ინდიკატრიქსის მხები p_0, q_0 წერტილში გადაკვეთს ინდიკატრიქსს წერტილში $\overline{p_0}$, $\overline{q_0}$.

ამ ორი შედეგის დაპირისპირება დაგვარწმუნებს, რომ ინდიკატრიქსის მხები p_0, q_0 წერტილში არის აგრეთვე მისი მხები $\overline{p_0}$, $\overline{q_0}$ წერტილში.

ამგვარად, ინდიკატრიქსს ჰქონია ორმაგი მხები. ამ გარემოებას ყოველთვის ექნება ადგილი, როცა გვაქვს კუთხისებრი ექსტრემალი.

ავიღოთ ახლა ფუნქცია $E(x_0, y_0, p_0, q_0, \cos\overline{\vartheta}, \sin\overline{\vartheta})$, აღვნიშნოთ იგი მოკლედ $E(\overline{\vartheta})$. ვიპოვოთ $E(\overline{\vartheta})$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $\overline{\vartheta}=\overline{\vartheta}_0$ წერტილზე. ვიპოვოთ ჯერ $E(\overline{\vartheta})$. ამისათვის უნდა განვაწარმოოთ

$$E(\overline{\vartheta})=\cos\overline{\vartheta}(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\sin\overline{\vartheta}(\overline{F}_{y'}-F_{y'})\ \overline{\vartheta}\text{ შესახებ.}$$

დავწერთ:

$$E'(\overline{\vartheta})=-\sin\overline{\vartheta}(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\cos\overline{\vartheta}(\overline{F}_{y'}-E_{y'})+$$

$$+\cos\overline{\vartheta}(-F_{x'x'}\sin\overline{\vartheta}+F_{x'y'}\cos\overline{\vartheta})+\sin\overline{\vartheta}(-F_{y'x'}\sin\overline{\vartheta}+F_{y'y'}\cos\overline{\vartheta})$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში დამოკიდებულებას F_1 ფუნქციის და $F_{x'x'}$, $F_{x'y'}$, $F_{y'y'}$ ფუნქციებს შორის, დავწერთ:

$$E'(\overline{\vartheta})=-\sin\overline{\vartheta}(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\cos\overline{\vartheta}(\overline{F}_{y'}-F_{y'})+\cos\overline{\vartheta}(-F_1\sin^3\overline{\vartheta}-$$

$$-F_1\sin\overline{\vartheta}\cos^2\overline{\vartheta})+\sin\overline{\vartheta}(F_1\sin^2\overline{\vartheta}\cos\overline{\vartheta}+F_1\cos^3\overline{\vartheta})=$$

$$=-\sin\overline{\vartheta}(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\cos\overline{\vartheta}(\overline{F}_{y'}-F_{y'})-\cos\overline{\vartheta}\sin\overline{\vartheta}F_1+$$

$$+\sin\overline{\vartheta}\cos\overline{\vartheta}F_1=-\sin\overline{\vartheta}(\overline{F}_{x'}-F_{x'})+\cos\overline{\vartheta}(\overline{F}_{y'}-F_{y'}).$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ:

$$E'(\overline{\vartheta})=-\sin\overline{\vartheta}(\overline{F}_x'-F_x')+\cos\overline{\vartheta}(\overline{F}_y'-F_y')$$

ჩავსვათ ახლა $\overline{\vartheta}$ მაგივრად $\overline{\vartheta}_0$, მაშინ $\overline{F}_x'-F_x'=0$ და $\overline{F}_y'-F_y'=0$ და, მაშასადამე, $E'(\overline{\vartheta}_0)=0$.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ არა მარტო $E(\overline{\vartheta}_0)=0$, არამედ აგრეთვე $E'(\overline{\vartheta}_0)=0$. ჩვენ ვიცით, რომ

$$E(\overline{\vartheta}_0)=[1-\cos(\overline{\vartheta}_0-\vartheta_0)]\ F_1(x_0, y_0, \cos\overline{\vartheta}_0, \sin\overline{\vartheta}_0)$$

რადგან $1-\cos(\overline{\vartheta}_0-\vartheta_0)$ ნული არ არის, ამიტომ $F_1(x_0, y_0, \cos\overline{\vartheta}_0, \sin\overline{\vartheta}_0)$ უნდა იყოს ნული.

ამგვარად უნდა არსებობდეს ისეთი მიმართულება, რომ

$$F_1(x_0, y_0, \cos\lambda, \sin\lambda)=0$$

თუ ეს არ არის რომელიმე გარკვეულ არეში, კუთხითი ექსტრემუმის არსებობას ადგილი არ ექნება.

ლექცია XXV.

იზოპერიმეტრული პრობლემა.

განვიხილოთ ეგრეთ წოდებული იზოპერიმეტრული პრობლემა. მოვიყვანთ ჯერ კერძო მაგალითს, სადაც ასეთ პრობლემასთან გვაქვს საქმე:

ყველა მრუდთა შორის, რომელთაც ერთიდაიგივე სიგრძე აქვთ, მოვძებნოთ ისეთი, რომელიც უმეტეს არეს შეიცავს.

ამ შემთხვევაში საქმე ასე წარმოგვიდგება:

ჩვენ ვიცით, რომ არე გამოიხატება ინტეგრალით

$$J=\frac{1}{2}\int_{c} x\,dy-y\,dx,$$

ან, თუ t პარამეტრს შემოვიტანთ, ინტეგრალით:

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(xy'-yx')\,dt.$$

უნდა მოვძებნოთ მინიმუმი ამ J ინტეგრალისა ყველა იმ მრუდეებს შორის, რომელთაც მინაცემი სიგრძე აქვთ, ე. ი. რომელთათვის ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt \text{ არის მუდმივი } l\text{: } \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=l.$$

დავაყენოთ ახლა საზოგადო პრობლემა:

ვთქვათ საჭიროა მოვძებნოთ მინიმუმი ინტეგრალისა

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x,y,x',y')\,dt \quad \text{(I) იმ პირობით, რომ ინტეგრალი}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} G(x,y,x',y')\,dt \quad \text{(II) იყოს მუდმივი. } l$$

ამისათვის ჯერ უნდა შევადგინოთ ის მრუდეები, რომელნიც გაივლიან წერტილებზე P_1 და P_2 და რომელთათვის (II) ინტეგრალი არის მუდმივი და ამ მრუდთა შორის ისეთი მრუდი უნდა მოვძებნოთ, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს (I) ინტეგრალს.

ავიღოთ ორი წყვილი ფუნქცია:

$h(t)$, $g(t)$ ერთი მხრივ, და $h_1(t)$, $g_1(t)$ მეორე მხრივ ისეთები, რომ:

$$h(t_1)=h(t_2)=0,\ g(t_1)=g(t_2)=0,\ h_1(t_1)=h_1(t_2)=0,$$
$$g_1(t_1)=g_1(t_2)=0.$$

ვთქვათ, რომ მოვძებნეთ ექსტრემუმი ჩვენი პრობლემისა და ვიპოვეთ მრუდი $x=x_0(t)$, $y=y_0(t)$ (სადაც t იცვლება t_1 და t_2 შორის), რომელიც ერთი მხრივ აკმაყოფილებს პირობას:

$$\int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y')\, dt = l \quad \text{(III)}$$

და მეორე მხრივ ამგვარ მრუდთა შორის მინიმუმს ანიჭებს ინტეგრალს

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt.$$

შევადგინოთ შესადარებელ მრუდთა ოჯახი შემდეგნაირად:

$$x=x_0(t)+\alpha\, h(t)+\alpha_1\, h_1(t),$$
$$y=y_0(t)+\alpha\, g(t)+\alpha_1\, g_1(t) \qquad \text{(IV)}$$

აქ გვექნება ორი პარამეტრი α და α_1.

ეს ოჯახი ისეთი თვისების არის, რომ ყოველი მრუდი ამ ოჯახისა გაივლის P_1, P_2 წერტილებზე.

ვეცადოთ ახლა გამოვხატოთ α_1 α-ს საშუალებით ისე, რომ (III) დაკმაყოფილდეს.

აღვნიშნოთ მოკლედ

$$x_0(t)+\alpha\, h(t)+\alpha_1\, h_1(t)=x \text{ და } y_0(t)+\alpha\, g(t)+\alpha_1\, g_1(t)=y.$$

ჩვენ გვინდა α_1 გამოვხატოთ α საშუალებით ისე, რომ დაკმაყოფილდეს ტოლობა:

$$\int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y')\, dt = l.$$

ინტეგრალი $\int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y')\, dt$ იქნება α და α_1 ფუნქცია. აღვნიშნოთ იგი მოკლედ $\Phi(\alpha, \alpha_1)$.

უნდა მოვძებნოთ α_1, როგორც α ფუნქცია ისე, რომ დაკმაყოფილდეს განტოლება $\Phi(\alpha, \alpha_1)=l$.

უკანასკნელ განტოლებას აკმაყოფილებენ α და α_1 მნიშვნელობანი $\alpha=0$, $\alpha_1=0$. ამიტომ იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს ვიპოვოთ α_1, როგორც α ფუნქცია, ისე, რომ დაკმაყოფილდეს განტოლება $\Phi(\alpha, \alpha_1)=l$, საჭიროა, რომ Φ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა α_1 შესახებ: Φ_{α_1} წერტილებზე $\alpha=0$, $\alpha_1=0$ ნული არ იყოს ე. ი. $\Phi_{\alpha_1}(0, 0) \neq 0$.

ვიპოვოთ $\Phi\alpha_1$, დავწერთ:

$$\Phi\alpha_1 = \int_{t_1}^{t_2} [G_x h_1(t) + G_y g_1(t) + G_x' h'_1(t) + G_y' g'_1(t)]\, dt \tag{V}$$

როდესაც ჩავსვამთ α და α_1-ის მაგივრად ნულს, ე. ი. G_x, G_y, G_x', G_y' ფუნქციების არგუმენტები იქნებიან $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $x' = x'_0(t)$, $y' = y'_0(t)$, მაშინ (V) ინტეგრალი არ უნდა იყოს ნული.

ფუნქციები $h_1(t)$, $g_1(t)$ ჯერჯერობით სრულებით ნებსითი არიან. ახლა ჩვენ ისე ამოვარჩევთ ამ ფუნქციებს, რომ (V) ნული არ იყოს.

თუ ასეთი $h_1(t)$ და $g_1(t)$ ფუნქციები არ არსებობს, ეს იმის მომასწავებელი იქნება, რომ მრუდი $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ წარმოადგენს ინტეგრალის

$$\int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y')\, dt$$

ექსტრემალს. ასეთ შემთხვევას კი ჩვენ თავიდანვე გამოვრიცხავთ.

ამგვარად, ჩვენ ისე ამოვარჩევთ ფუნქციებს $h_1(t)$ და $g_1(t)$, რომ (V) არ გახდეს ნული, როცა $\alpha = 0$ და $\alpha_1 = 0$.

მაშინ შესაძლებელი იქნება განტოლების $\Phi(\alpha, \alpha_1) = l$ გარდაწყვეტა α_1 შესახებ.

ვთქვათ, ეს გარდაწყვეტა მოგვცემს $\alpha_1 = \varphi(\alpha)$. (როცა $\alpha = 0$, მაშინ $\varphi(\alpha)$ იქნება 0).

ჩვენ გვექნება იგივეობურად:

$$\Phi[\alpha, \varphi(\alpha)] = l \tag{VI}$$

თუ (IV)-ში α_1 მაგივრად ჩავსვამთ $\alpha_1 = \varphi(\alpha)$, მივიღებთ ერთ პარამეტრისაგან დამოკიდებულ მრუდთა ოჯახს, რომელიც (III) პირობას აკმაყოფილებს.

ვიპოვოთ ახლა წარმოებული α_1-დან α შესახებ. ამისათვის განვაწარმოვოთ (VI) იგივეობა, დავწერთ:

$$\Phi\alpha + \Phi\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\alpha} = 0 \tag{VII}$$

ზემოთ ჩვენ ვიპოვეთ $\Phi\alpha_1$, ვიპოვოთ ახლა $\Phi\alpha$.

$$\Phi\alpha = \int_{t_1}^{t_2} [G_x h(t) + G_y g(t) + G_x' h'(t) + G_y' g'(t)]\, dt \tag{VIII}$$

ჩავსვათ α მაგივრად ნული. მაშინ, როგორც ვიცით, α_1 გახდება ნულის ტოლი და ფუნქციების G_x, G_y, G_x', G_y', არგუმენტები იქნებიან:

$$x = x_0(t),\ y = y_0(t),\ x' = x'_0(t),\ y' = y'_0(t).$$

ავღნიშნოთ ინტეგრალების (V) და (VIII) მნიშვნელობანი ამ შემთხვევაში შესაბამისად N_1 და N_0. (VII) ძალით გვექნება:

$$N_0+N_1\left(\frac{d\alpha_1}{d\alpha}\right)_0=0$$

$\left[\left(\frac{d\alpha_1}{d\alpha}\right)_0\right.$ ნიშნავს წარმოებულის $\frac{d\alpha_1}{d\alpha}$ მნიშვნელობას წერტილზე $\left.\alpha=0\right]$.
აქედან

$$\left(\frac{d\alpha_1}{d\alpha}\right)_0=-\frac{N_0}{N_1}$$

მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

როდესაც α_1 მაგივრად ჩავსვამთ $\varphi(\alpha)$, მაშინ $x_0(t)+\alpha h(t)+$ $+\alpha_1 h_1(t)$ და $y_0(t)+\alpha g(t)+\alpha_1 g_1(t)$ გახდებიან t და α ფუნქციები. ავღნიშნოთ ეს ფუნქციები შესაბამისად $x(t, \alpha)$ და $y(t, \alpha)$.

დავშალოთ ფუნქციები $x(t, \alpha)$ და $y(t, \alpha)$ Taylor-ის ფორმულით α-ს მიხედვით 0 წერტილის მახლობლობაში. გვექნება:

$x(t, \alpha)=x(t, 0)+\alpha x_\alpha(t, 0)+$ უსასრულოდ მცირე უმაღლეს რიგისა. მაგრამ $x(t, 0)=x_0(t)$.

ვიპოვოთ ახლა $x_\alpha(t, 0)$. ამისათვის მოვძებნოთ $x_\alpha(t, \alpha)$. დავწეროთ:

$$x_\alpha(t, \alpha)=h(t)+h_1(t)\frac{d\alpha_1}{d\alpha}$$

$$x_\alpha(t, 0)=h(t)+h_1(t)\left(\frac{d\alpha_1}{d\alpha}\right)_0=h(t)-h_1(t)\frac{N_0}{N_1}$$

ამგვარად,

$$x(t, \alpha)=x_0(t)+\alpha\left[h(t)-h_1(t)\frac{N_0}{N_1}\right]+\ldots$$

სრულებით ამგვარადვე მივიღებთ

$$y(t, \alpha)=y_0(t)+\alpha\left[g(t)-g_1(t)\frac{N_0}{N_1}\right]+$$

ჩვენი შესადარებელი მრუდის პირველი ვარიაცია იქნება:

$$\delta x=\alpha\left[h(t)-h_1(t)\frac{N_0}{N_1}\right]$$

$$\delta y=\alpha\left[g(t)-g_1(t)\frac{N_0}{N_1}\right].$$

რადგან ჩვენი შესადარებელი მრუდები აკმაყოფილებს განტოლებას (III), ამიტომ ცხადია, რომ ინტეგრალის

$$\int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y')\, dt$$

(ავღნიშნოთ ეს ინტეგრალი N) პირველი ვარიაცია δN იქნება ნული

ჩვენ მოვძებნეთ მრუდთა ოჯახი, რომელნიც აკმაყოფილებენ (III) განტოლებას და რომელთა შორის უნდა მოვძებნოთ ინტეგრალის

$$J=\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt \quad \text{ექსტრემუმი.}$$

გადავიდეთ ახლა თვით ამ ექსტრემუმის მოძებნაზე. ამისათვის განვიხილოთ J ინტეგრალის პირველი ვარიაცია δJ.

$$\delta J=\int_{t_1}^{t_2}[F_x \delta_x + F_y \delta_y + F_x' \delta_x' + F_y' \delta_y']\, dt$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში δx და δy გამოხატულებებს, გვექნება:

$$\delta J=\alpha\int_{t_1}^{t_2}[F_x h(t)+F_y g(t)+F_x' h'(t)+F_y' g'(t)]\, dt-$$

$$-\alpha\frac{N_0}{N_1}\int_{t_1}^{t_2}[F_x h_1(t)+F_y g_1(t)+F_x' h'_1(t)+F_y' g'_1(t)]\, dt.$$

შემოვიყვანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$J_0=\int_{t_1}^{t_2}[F_x h(t)+F_y g(t)+F_x' h'(t)+F_y' g'(t)]\, dt.$$

$$J_1=\int_{t_1}^{t_2}[F_x h_1(t)+F_y g_1(t)+F_x' h'_1(t)+F_y' g'_1(t)]\, dt.$$

დავწეროთ:

$$\delta J=\alpha\left(J_0-\frac{N_0}{N_1}J_1\right).$$

იმისათვის რომ მრუდი წარმოადგენდეს J ინტეგრალის ექსტრემუმს, იგი უნდა აკმაყოფილებდეს ტოლობას:

$$J_0-\frac{N_0}{N_1}J_1=0$$

ეს ტოლობა შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\frac{J_0}{N_0}=\frac{J_1}{N_1} \tag{IX}$$

მარცხენა შეფარდების მნიშვნელში და მრიცხველში შედის ორი ფუნქცია $h(t)$ და $g(t)$, მარჯვენა შეფარდების მნიშვნელში და მრიცხველში შედის ორი ფუნქცია $h_1(t)$ და $g_1(t)$. ფუნქციები $h_1(t)$ და $g_1(t)$ აღებულია გარკვეულნაირად, იმ მიზნით, რომ (V) ინტეგრალი ნულისაგან განსხვავებული იყოს. ასეთ პირობებში შეფარდება $\frac{J_1}{N_1}$ ერთ გარკვეულ

რიცხვს წარმოადგენს, რომელიც $h(t)$ და $g(t)$ ფუნქციებიდან სრულებით დამოუკიდებელია. აღვნიშნოთ ეს მუდმივი $-\lambda$.
გვექნება:

$$\frac{J_0}{N_0}=-\lambda$$
$$J_0+\lambda N_0=0.$$

ეს ტოლობა მოგვცემს საშუალებას გამოვიყვანოთ Euler-ის დიფერენციალური განტოლება.

აღვნიშნოთ $F(x, y, x', y')+\lambda G(x, y, x', y')=H(x, y, x', y', \lambda)$.
ვნახოთ რას გამოხატავს ტოლობა $J_0+\lambda N_0=0$. ეს არის

$$\int_{t_1}^{t_2}[H_x h(t)+H_y g(t)+H_x' h'(t)+H_y' g'(t)]\,dt=0. \tag{X}$$

ასეთია ის ტოლობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ექსტრემუმი. $h(t)$ და $g(t)$, როგორც ვიცით, არიან სრულებით ნებსითი ფუნქციები, რომელნიც მხოლოდ აკმაყოფილებენ პირობას $h(t_1)=h(t_2)=0$, $g(t_1)=g(t_2)=0$.

გამოვიყენოთ ახლა ჩვეულებრივი წესი. მივიღოთ ჯერ, რომ $g(t)$ იგივეობურად ნულია, მაშინ (X) ასე დაიწერება:

$$\int^{t_2}[H_x h(t)+H_x' h'(t)]\,dt=0.$$

როგორც ჩვენ ვიცით ასეთი ტოლობა ($h(t)$ ნებსითი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $h(t_1)=h(t_2)=0$) მხოლოდ მაშინ არის შესაძლო, როდესაც

$$H_x=\frac{d}{dt}H_x' \tag{XI}$$

თუ მივიღებთ, რომ $h(t)$ არის იგივეობურად ნული, სრულებით იმავე წესით გამოვიყვანთ,

$$H_y=\frac{d}{dt}H_y' \tag{XII}$$

(XI) და (XII) არის ის დიფერენციალური განტოლებანი, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდეს ექსტრემალი.

სრულებით ისევე, როგორც წინათ (XIV ლექცია), შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ (XI) და (XII) განტოლებების მაგივრად შეიძლება ავიღოთ განტოლება:

$$H_{xy}'-H_{yx}'+H_1(x'y''-y'x'')=0 \tag{XIII}$$

(H_1 არის მნიშვნელობა საერთო შეფარდებისა

$$\frac{H_{x'x'}}{y'^2}=\frac{-H_{x'y'}}{x'y'}=\frac{H_{y'y'}}{x'^2}\Big).$$

ჩვენი პრობლემისათვის ექსტრემუმს ჩვენ მოვძებნით განტოლებიდან (XI), (XII), ან (XIII). მეორე მხრივ ეს განტოლებანი მოგვცემენ ექსტრემალს ინტეგრალისა

$$\int_{t_1}^{t_2} H(x, y, x', y', \lambda)\,dt.$$

ამგვარად იმ მრუდის მოსაძებნათ, რომელიც ექსტრემუმს მიანიჭებს ინტეგრალს

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\,dt$$

იმ პირობით, რომ

$$\int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y')\,dt$$

იყოს მუდმივი, უნდა შევადგინოთ ფუნქცია:

$$H(x, y, x', y', \lambda)=F(x, y, x', y')+\lambda\, G(x, y, x', y')$$

და მოვძებნოთ ექსტრემალი ინტეგრალისა

$$\int_{t_1}^{t_2} H(x, y, x', y')\,dt.$$

ვთქვათ ახლა, რომ (XIII) განტოლების ინტეგრაცია მოგვცემს

$$x=\varphi(t, \alpha, \beta, \lambda), \quad y=\psi(t, \alpha, \beta, \lambda).$$

ისმება საკითხი მუდმივების α, β, λ მოძებნის, ისე რომ ჩვენმა ექსტრემალმა გაიაროს წერტილებზე $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$.

ავღნიშნოთ მუდმივების α, β, λ ის მნიშვნელობანი, რომელნიც ჩვენ ექსტრემალს ეთანადებიან α_0, β_0, λ_0.

ამ მუდმივებს მოვძებნით განტოლებებიდან:

$$\varphi(t_1, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0)=x_1$$
$$\psi(t_1, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0)=y_1$$
$$\varphi(t_2, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0)=x_2$$
$$\psi(t_2, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0)=y_2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} G[\varphi(t, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0), \psi(t, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0), \varphi_t(t, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0),$$
$$\psi_t(t, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0)]\,dt=l.$$

ჩვენ გვაქვს სულ ხუთი განტოლება. უცნობთა რიცხვიც აგრეთვე არის ხუთი (t_1, t_2, α_0, β_0, λ_0). ამ ხუთი განტოლებიდან ვიპოვით ხუთ უცნობს და ამით ექსტრემალის განტოლება სავსებით იქნება განსაზღვრული.

ეს, რასაკვირველია, იქნება ჯერჯერობით პრობლემის მხოლოდ ფორმალური გარდაწყვეტა. ჩვენ გამოვიყვანეთ მხოლოდ პირველი რიგის პირობა, რომელიც გვაძლევს ექსტრემალის განტოლებას, მაგრამ ჩვენთვის ღია რჩება კიდევ საკითხი იმის შესახებ ანიჭებს თუ არა ნამდვილად ეს ექსტრემალი ჩვენ ინტეგრალს ექსტრემუმს.

განვიხილოთ ახლა ეს მაგალითი, რომელიც იყო მოყვანილი ამ ლექციის თავში: ყველა იმ მრუდეებს შორის, რომელთაც მინაცემი სიგრძე აქვთ, მოვძებნოთ ისეთი, რომელიც უმეტეს არეს შეიცავს.

ამისათვის უნდა მოვძებნოთ მაქსიმუმი ინტეგრალისა

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}(xy' - yx')\, dt$$

იმ პირობით, რომ ინტეგრალი

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

იყოს მუდმივი.

H ფუნქცია ჩვენი პრობლემისათვის იქნება

$$\frac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

ამგვარად, ჩვენ უნდა მოვძებნოთ მაქსიმუმი ინტეგრალისა:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2} \right] dt \tag{XVI}$$

შევადგინოთ განტოლება (XIII).

მოვძებნოთ ამისათვის H_1.

$$H'_{x'} = -\frac{1}{2} y + \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,;$$

$$H'_{x'x'} = \lambda \frac{\sqrt{x'^2+y'^2} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}}{x'^2+y'^2} = \lambda \frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

$$H_1 = \lambda \frac{1}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

(XIII) განტოლებას ექნება სახე:

$$1+\lambda\frac{(x'y''-y'x'')}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

მაგრამ $\dfrac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ არის სიმრუდე $\frac{1}{R}$. ამგვარად,

$$1+\frac{\lambda}{R}=0,\ \text{აქედან}\ R=-\lambda.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ექსტრემალი ისეთი მრუდია, რომ მისი სიმრუდის რადიუსი არის მუდმივი. ეს იქნება წრე ხაზი:

ამგვარად, ყველა იმ მრუდთა შორის, რომელთაც მინაცემი სიგრძე აქვთ, წრეხაზი არის ისეთი, რომელიც უმეტეს არეს შეიცავს.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი.

გვაქვს ორი წერტილი A და B.

ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ X ღერძს ჰქონდეს ჰორიზონტალური მიმართულება და Y ღერძს—ვერტიკალური.

დავსვათ შემდეგი პრობლემა: ყველა იმ მრუდთა შორის, რომელიც A და B წერტილს აერთებს და რომელთაც მინაცემი სიგრძე აქვს, მოვძებნოთ ისეთი, რომლის სიმძიმის ცენტრი ყველაზე უფრო დაბლაა.

როგორც ვიცით, სიმძიმის ცენტრის სიმაღლე გამოიხატება ინტეგრალით

$$\frac{1}{k}\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

სადაც k მრუდის სიგრძეა. ამგვარად, უნდა მოვძებნოთ ისეთი მრუდი, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს ინტეგრალს

$$\frac{1}{k}\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

იმ პირობით, რომ მრუდის სიგრძე, ე. ი.

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

იყოს მუდმივი. რადგან მრუდის სიგრძე მუდმივია, $\frac{1}{k}$ იქნება მუდმივი და მრუდი, რომელიც მინიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს

$$\frac{1}{k}\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

აგრეთვე მინიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს

$$\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

ამგვარად, უნდა მოვძებნოთ მრუდი, რომელიც მინიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს

$$\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

იმ პირობით, რომ

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

იყოს მუდმივი. H ფუნქცია ჩვენი პრობლემისათვის იქნება:

$$y\sqrt{x'^2+y'^2}+\lambda\sqrt{x'^2+y'^2}=(y+\lambda)\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

ამგვარად, ჩვენ უნდა მოვძებნოთ მინიმუმი ინტეგრალისა

$$\int_{t_1}^{t_2} (y+\lambda)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

პარამეტრად t ავიღოთ კოორდინატი x; მაშინ ჩვენი ინტეგრალი ასე დაიწერება:

$$\int_{x_1}^{x_2} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

ეს ინტეგრალი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\int_{x_1}^{x_2} (y+\lambda)\sqrt{1+(y+\lambda)'^2}\,dx$$

ანუ, თუ ფუნქციას $y+\lambda$ აღვნიშნავთ z:

$$\int_{x}^{x_2} z\sqrt{1+z'^2}\,dx$$

ასეთი ინტეგრალი ჩვენ უკვე გვაქვს განხილული (III ლექცია). მისი ექსტრემალი იქნება: $z=\alpha\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\beta}{\alpha}$. აქედან $y=-\lambda+\alpha\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\beta}{\alpha}$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ყველა მრუდთა შორის, რომელთაც ერთიდაიგივე სიგრძე აქვთ, ჯაჭვის მრუდის სიმძიმის ცენტრი ყველაზე უფრო დაბალ მდებარეობას დაიჭერს.

ლექცია XXVI.

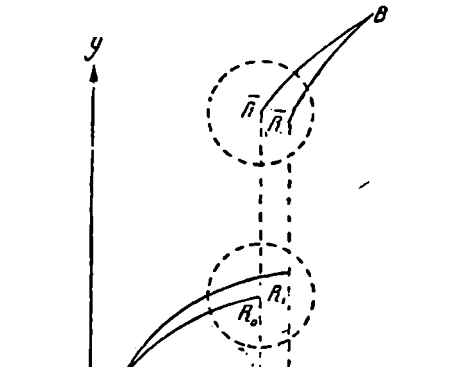
წყვეტილი ექსტრემუმები.

ჩვენ დაგვრჩა განსახილველად კიდევ ერთი პრობლემა.

ვთქვათ გვაქვს ინტეგრალი

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

და ორი წერტილი A და B. მაშინ, თუ საქმე ეხება ინტეგრალის ექსტრემუმის მოძებნას, პირველად უნდა გარდავწყვიტოთ Euler-ის დიფერენციალური განტოლება: $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$, ე. ი. უნდა მოვძებნოთ ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება $y = \varphi(x, \alpha, \beta)$. შემდეგ უნდა მოვძებნოთ α და β მნიშვნელობა ისე, რომ მრუდმა გაიაროს წერტილებზე $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.



ნახ. 47.

თუ ასეთი მნიშვნელობანი α და β არსებობს, მივიღებთ მრუდებს, რომელთაც შეუძლიან მიანიჭონ ინტეგრალს ექსტრემუმი. მაგრამ შესაძლებელია, რომ ასეთი მრუდი არ არსებობდეს. მაშინ ისეთ მრუდს, რომელიც ექსტრემუმს ანიჭებს ჩვენ ინტეგრალს, ვეძებთ კუთხითი მრუდებს შორის.

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როდესაც ისეთი მრუდი, რომელიც ანიჭებს ინტეგრალს ექსტრემუმს, არ მოიძებნება არც ჩვეუ-

ლებრივ შესადარებელ მრუდთა შორის, არც კუთხითი მრუდთა შორის.

მაშინ ასეთი მრუდი უნდა ვეძებოთ არა განუწყვეტელ, არამედ წყვეტილ მრუდთა შორის.

ასეთ ექსტრემალებს ჩვენ წყვეტილი ექსტრემალებს ვუწოდებთ.

ვეძებოთ ექსტრემუმი ისეთ წყვეტილ მრუდთა შორის, რომელიც შედგება ორი განუწყვეტელი AR_0 და $\overline{R_0}B$ მრუდისაგან.

ცხადია, რომ AR_0 და $\overline{R_0}B$ არიან ჩვეულებრივი ექსტრემალები, ე. ი. Euler-ის დიფერენციალური განტოლების $f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0$ ინტეგრალები.

უპირველესად ყოვლისა უნდა მოვძებნოთ წერტილები R_0 და $\overline{R_0}$. ვთქვათ ეს წერტილები მოძებნილია. შემოვწეროთ R_0 და $\overline{R_0}$ წერტილების გარშემო მცირე წრეები და ამ წრეების შიგ ავიღოთ წერტილები R_1 და $\overline{R_1}$ ისე, რომ ეს წერტილები იყვენ ერთსადაიმავე ორდინატზე.

აღვნიშნოთ R_0 და $\overline{R_0}$ კოორდინატები და წარმოებულის მნიშვნელობანი ამ წერტილებზე შესაბამისად x_0, y_0, y'_0 და $x_0, \overline{y_0}, \overline{y'_0}$.

R_1 და $\overline{R_1}$ წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x, y და $x, \overline{y}$.

შევაერთოთ წერტილები A, R_1 და აგრეთვე წერტილები $\overline{R_1}$, B, ჩვეულებრივი ექსტრემალებით. რადგან მრუდი $AR_0\overline{R_0}B$ მინიმუმს ანიჭებს ინტეგრალს, ამიტომ გვექნება:

$$J_{A_1R_1\overline{R}_1B} \geqslant J_{AR_0\overline{R}_0B} \tag{XV}$$

ინტეგრალი J_{AR_1} არის ექსტრემალური მანძილი $J(x_1, y_1, x, y)$. ინტეგრალი $J_{\overline{R_1}B}$ არის ექსტრემალური მანძილი $J(x, \overline{y}, x_2, y_2)$.

ამიტომ

$$J_{AR_1\overline{R}_1B}=J(x_1, y_1, x, y)+J(x, \overline{y}, x_2, y_2).$$

აღვნიშნოთ მოკლედ $J(x_1, y_1, x, y)=J$ და $J(x, \overline{y}, x_2, y_2)=\overline{J}$.

ფუნქცია $\overline{J}+J$ წარმოადგენს სამი ცვლადის x, y, $\overline{y}$ ფუნქციას. (XV) ძალით ამ ფუნქციას უნდა ჰქონდეს მინიმუმი წერტილზე

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad \overline{y}=\overline{y_0}.$$

ამისათვის კი საჭიროა, რომ ამ ფუნქციის წარმოებულები x-ის, y-ის და $\overline{y}$-ის შესახებ, ე. ი.

$$\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{\partial \overline{J}}{\partial x},\quad \frac{\partial J}{\partial y},\quad \frac{\partial \overline{J}}{\partial \overline{y}}$$

წერტილებზე $x=x_0$, $y=y_0$, $\overline{y}=\overline{y_0}$ ეტოლებოდეს ნულს.

ცნობილი ფორმულების ძალით, ამ სამ პირობას ასე დავწერთ

$$f(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 f_{y}'(x_0, y_0, y'_0) = f(x_0, \overline{y_0}, \overline{y'_0}) -$$
$$- \overline{y'_0} f_{y}'(x_0, \overline{y_0}, \overline{y'_0}). \qquad (XVI)$$
$$f_y'(x_0, y_0, y_0') = 0 \qquad (XVII)$$
$$f_y'(x_0, \overline{y_0}, \overline{y'_0}) = 0 \qquad (XVIII)$$

(XVII) და (XVIII) ძალით (XVI) ასე გადმოიწერება:

$$f(x_0, y_0, y'_0) = f(x_0, \overline{y_0}, \overline{y'_0}) \qquad (XVIII)$$

ამგვარად, საბოლოოდ გვექნება შემდეგი სამი პირობა:

$$f(x_0, y_0, y_0') = f(x_0, \overline{y_0}, \overline{y'_0}),\ f_y'(x_0, \overline{y_0}, \overline{y_0}') = 0,\ f_y'(x_0, y_0, y'_0) = 0.$$

უპირველესად ყოვლისა უნდა მოვძებნოთ წერტილები R_0 და $\overline{R_0}$. ვთქვათ ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება არის $y = \varphi(x, \alpha, \beta)$ და პარამეტრების α, β მნიშვნელობა AR_0 ექსტრემალისათვის არის α_0, β_0, მხოლოდ $\overline{R_0}\,B$ ექსტრემალისათვის $\overline{\alpha_0}$, $\overline{\beta_0}$.

გვექნება სულ ხუთი უცნობი α_0, β_0, $\overline{\alpha_0}$, $\overline{\beta_0}$, x_0. ამ ხუთ უცნობს მოვძებნით შემდეგი ხუთი განტოლებიდან:

$$\varphi(x_1, \alpha_0, \beta_0) = y_1$$
$$\varphi(x_2, \overline{\alpha_0}, \overline{\beta_0}) = y_2$$
$$f[x_0, \varphi(x_0, \alpha_0, \beta_0)\ \varphi_x(x_0, \alpha_0, \beta_0)] =$$
$$= f[x_0, \varphi(x_0, \overline{\alpha_0}, \overline{\beta_0}), \varphi_x(x_0, \overline{\alpha_0}, \overline{\beta_0})]$$
$$f_y'[x_0, \varphi(x_0, \alpha_0, \beta_0), \varphi_x(x_0, \alpha_0, \beta_0)] = 0.$$
$$f_y'[x_0, \varphi(x_0, \overline{\alpha_0}, \overline{\beta_0}), \varphi_x(x_0, \overline{\alpha_0}, \overline{\beta_0})] = 0.$$

ამ ხუთი განტოლებიდან ვიპოვით ხუთ უცნობს α_0, $\overline{\beta_0}$, $\overline{\alpha_0}$, β_0, x_0. ამით წყვეტილი ექსტრემალი იქნება განსაზღვრული.