შ. ქემხაძე

უმაღლესი ალგებრა

მეორე გადამუშავებული და შევსებული
გამოცემა

სასწავლო-პედაგოგიური ლიტერატურის
სახელმწიფო გამომცემლობა „ცოდნა“
თბილისი — 1962

517.1
512+[016.3]
ქ 408

წინამდებარე წიგნი, „უმაღლესი ალგებრა“, შედგენილია პედაგოგიური ინსტიტუტებისა და უნივერსიტეტების უმაღლესი ალგებრის ახალი პროგრამების მიხედვით. პირველი ათი თავი განკუთვნილია სახელმძღვანელოდ პედაგოგიური ინსტიტუტების სტუდენტთათვის, ხოლო მთლიანად—უნივერსიტეტის სტუდენტთათვის.

სახელმძღვანელო გამოადგება აგრეთვე დაუსწრებელი სწავლებისა და სხვა უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებს.

ავტორისაგან

წინამდებარე სახელმძღვანელო პირველად 1957 წელს გამოვიდა. ველი გამოცემა ძირითადად შედგენილი იყო პედაგოგიური ინსტიტუტების უმაღლესი ალგებრის პროგრამის მიხედვით. მეორე გამოცემა გრძნობლად გადამუშავდა და შეივსო.

ასე, მაგალითად, თავი I — დეტერმინანტები და წრფივ განტოლეთა სისტემები, თავი III — მატრიცთა ალგებრა, ჯგუფი, რგოლი და ველი, თითქმის ხელახლა დაიწერა. საგრძნობლად გადამუშავდა აგრეთვე ზოგიერთი სხვა თავი და პარაგრაფი, რომლებზედაც აქ დაწვრილებით არ შევჩერდებით. წიგნი შეივსო სამი ახალი თავით: თავი XI წრფივი სივრცე და წრფივი გარდაქმნები, თავი XII — ევკლიდური სივრცე და თავი XIII—მრავალწევრული, ანუ λ-მატრიცები; მატრიცთა ნორმალური სახე, სადაც განხილულია წრფივი ალგებრის ელემენტები ისეთი მოცულობით როგორც გათვალისწინებულია მისი სწავლება უნივერსიტეტის უმაღლესი ალგებრის ახალი პროგრამის მიხედვით. გამოცდილებამ დაგვარწმუნა, რომ წრფივი ალგებრის ელემენტების ამ მოცულობით სწავლება პედაგოგიური ინსტიტუტების სტუდენტთათვის მათემატიკის სპეც-სემინარებზე ძალზე სასარგებლოა.

მასალის ათვისების გაადვილების მიზნით, თითქმის ყოველ პარაგრაფში საილუსტრაციოდ ამოხსნილია სათანადო მაგალითები.

ეს წიგნი აგრეთვე სასარგებლო იქნება დაუსწრებელი სწავლებისა და სხვა უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვისაც.

ვფიქრობთ, ამ წიგნში მასალა სათანადო მაგალითებით ისეთნაირადაა გადმოცემული და გაშუქებული, რომ ყოველი მონდომებული სტუდენტი ქაღალდითა და ფანქრით ხელში უეჭველად მიაღწევს მიზანს.

გულწრფელი მადლობა მინდა მოვახსენო ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფ. ა. გ. კუროშს,

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილ წევრს პროფ. გ. ჩოლოშვილს, ამ წიგნის პირველი გამოცემის რედაქტორს, და დოც. გ. ლომაძეს იმ სასარგებლო შენიშვნებისათვის, რომლებმაც დიდი დახმარება გამიწიეს ამ წიგნის მეორე გამოცემის მომზადებაში.

წიგნის მეორე გამოცემაზე მუშაობის პერიოდში მრავალი ამხანაგისაგან მივიღე სასარგებლო რჩევა და შენიშვნა, რისთვისაც მათ დიდ მადლობას მოვახსენებ.

1962 წლის ივლისი.

ქ. ბათუმი

შესავალი

წინასწარ მოვიგონოთ რიცხვთა სიმრავლეები და განვიხილოთ მათი ზოგიერთი თვისება.

საშუალო სკოლის კურსიდან ცნობილია: 1. **მთელ დადებით (ნატურალურ) რიცხვთა** სიმრავლე, 2. **მთელ რიცხვთა** სიმრავლე, რომელშიც გაერთიანებულია ყველა მთელი დადებითი და უარყოფითი რიცხვი ნულის ჩათვლით, 3. **რაციონალურ რიცხვთა** სიმრავლე, რომელშიც გაერთიანებულია ყველა მთელი დადებითი და უარყოფითი, ყველა წილადი დადებითი და უარყოფითი რიცხვი, 4. **ნამდვილ, ანუ არს, რიცხვთა** სიმრავლე, რომელშიც გაერთიანებულია ყველა რაციონალური და ირაციონალური რიცხვი. ელემენტარული ალგებრის კურსში ისწავლება აგრეთვე 5. $a+bi$ სახის **კომპლექსურ რიცხვთა** სიმრავლე, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია; a-ს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი, ხოლო bi-ს კი წარმოსახვითი ნაწილი, ამასთანავე $i=\sqrt{-1}$, რომლის კვადრატი $i^2=-1$, ეწოდება წარმოსახვითი რიცხვის ერთეული.

ცნობილია აგრეთვე ჩამოთვლილ რიცხვთა სიმრავლეებში ნებისმიერ ორ რიცხვზე შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის მოქმედებანი. ასოებით M, Z, R, D და K აღვნიშნოთ შესაბამისად მთელ დადებით, მთელ, რაციონალურ, ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეები. შემდეგში განვიხილავთ ისეთ სიმრავლეებსაც, რომლებიც შედგება არა მარტო რიცხვებისაგან, არამედ სხვა ბუნების სიდიდეებისაგან—საგნებისაგან. სიმრავლეში შემავალ საგნებს, სიმრავლის **ელემენტებს** უწოდებენ.

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი შედის B სიმრავლეში, მაშინ იტყვიან, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე და ეს ასე აღინიშნება: $A \subseteq B$. თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი შედის B-ში და B-ში არის ერთი ელემენტი მაინც, რომელიც არ შედის A-ში, მაშინ A სიმრავლეს B სიმრავლის **წესიერი** ქვესიმრავლე ეწოდება და ეს ასე აღინიშნება: $A \subset B$. თუ რომელიმე α ელემენტი ეკუთვნის N სიმრავლეს, ამას ასე აღნიშნავენ: $\alpha \in N$, თუ არ ეკუთვნის, მაშინ $\overline{\alpha \in} N$.

ზემოთ ჩამოთვლილი რიცხვთა სიმრავლეებისათვის, ცხადია, ადგილი აქვთ დამოკიდებულებებს:

$$M \subset Z \subset R \subset D \subset K. \tag{1}$$

ვიტყვით, რომ მოცემულ სიმრავლეში რომელიმე **მოქმედება**, ანუ ოპერაცია (მაგალითად, შეკრება, გამრავლება), **სრულდება, თუ სიმრავლის ნებისმიერ ორ a და b ელემენტზე აღნიშნული მოქმედების მოხდენის შედეგად მივიღებთ ამ სიმრავლის ცალსახად განსაზღვრულ მესამე ელემენტს.** მაგალითად, კენტ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების მოქმედება არ სრულდება, აგრეთვე მთელ რიცხვთა სიმრავლეში გამრავლების შებრუნებული მოქმედება—გაყოფა არ სრულდება.

თუ სიმრავლეში განმარტებული მოქმედება სრულდება, მაშინ ვიტყვით, რომ სიმრავლეში განმარტებული მოქმედება **ალგებრულია** ან კიდევ მოცემულია სიმრავლე **ალგებრული მოქმედებით** (ოპერაციით).

აქვე შევნიშნოთ, რომ სიმრავლეში განმარტებული ალგებრული ოპერაციისათვის შეიძლება არ სრულდებოდეს გადანაცვლებისა და ასოციაციურობის კანონები. მაგალითად, მთელ რიცხვთა სიმრავლეში გამოკლების მოქმედება ალგებრულია, მაგრამ ტოლობას $a-b=b-a$ თუ $a \neq b$, ადგილი არა აქვს. აგრეთვე საზოგადოდ $(a-b)-c \neq a-(b-c)$. თუ ახლა მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეში რაიმე $*$ ოპერაციას შემოვიღებთ ისე, რომ ყოველ ორ მთელ დადებით a და b რიცხვს შევუსაბამებთ მთელ დადებით a^b რიცხვს, ე. ი. თუ $a * b = a^b$, მაშინ გვექნება ალგებრული მოქმედება განმარტებული მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეში. მაგრამ ადვილად შევამჩნევთ, რომ საზოგადოდ $a * b \neq b * a$ და $(a * b) * c \neq a * (b * c)$, ე. ი. $*$ ოპერაციისათვის გადანაცვლებისა და ასოციაციურობის კანონები არ სრულდება.

განსაზღვრა. რიცხვთა ისეთ სიმრავლეს, რომელშიც სრულდება შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების მოქმედებანი რიცხვთა რგოლი ეწოდება.

ადვილად შემოწმდება, რომ Z, R, D და K რიცხვთა სიმრავლეები ქმნიან რიცხვთა რგოლს, ხოლო M რიცხვთა სიმრავლე არ ქმნის რგოლს.

განსაზღვრა. რიცხვთა ისეთ სიმრავლეს, რომელშიც სრულდება შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის (ნულის გამორიცხვით) მოქმედებანი, ეწოდება რიცხვთა ველი. სხვაგვარად, რიცხვთა რგოლს, რომელშიც სრულდება გაყოფის მოქმედება, რიცხვთა ველი ეწოდება. როგორც განსაზღვრიდან ჩანს, ყოველი რიცხვთა ველი რიცხვთა რგოლია, მაგრამ პირიქით არაა, ყოველი რიცხვთა რგოლი არ იქნება რიცხვთა ველი. მაგალითად, ადვილად შემოწმდება, რომ R, D და K რიცხვთა სიმრავლეები ქმნიან რიცხვთა ველს, ხოლო Z რიცხვთა სიმრავლე არ ქმნის ველს.

რგოლის რომელიმე ქვესიმრავლეს ეწოდება ქვერგოლი, თუ ის, თავის მხრივ, ქმნის რგოლს.

ანალოგიურად ველის რომელიმე ქვესიმრავლეს ეწოდება ქვეველი, თუ მასში სრულდება ველში განმარტებული მოქმედებანი. მაგალითად, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე ქმნის Z რგოლის ქვერგოლს. აგრეთვე ყოველი n ნატურალური რიცხვის ყველა ჯერადი რიცხვის სიმრავლე ქმნის Z რგოლის ქვერგოლს. რაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა ველები კომპლექსურ რიცხვთა ველის ქვეველებია.

შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ $a+b\sqrt{3}$ სახის რიცხვთა $\{a+b\sqrt{3}\}$ სიმრავლე, სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია, ქმნის რიცხვთა ველს. მართლაც, თუ ავიღებთ ნებისმიერ ორ $\alpha_1=a_1+b_1\sqrt{3}$ და $\alpha_2=a_2+b_2\sqrt{3}$ რიცხვს აღნიშნული სიმრავლიდან, ვნახავთ, რომ $\alpha_1\pm\alpha_2$ და $\alpha_1\cdot\alpha_2$ ეკუთვნის $\{a+b\sqrt{3}\}$ სიმრავლეს.

განვიხილოთ შეფარდება:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{a_1+b_1\sqrt{3}}{a_2+b_2\sqrt{3}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{3})(a_2-b_2\sqrt{3})}{a_2^2-3b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}\sqrt{3}.$$

წილადის მნიშვნელისა და მრიცხველის მნიშვნელის მარაციონალებელ მამრავლზე გამრავლებით მივიღეთ, რომ $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\in\left\{a+b\sqrt{3}\right\}$, მაშასადამე, $\{a+b\sqrt{3}\}$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია, ქმნის რიცხვთა ველს.

რომელიმე P ველთან α ელემენტის გაერთიანება, ანუ P ველის α ელემენტით გაფართოება, ნიშნავს ისეთი P' სიმრავლის აგებას, რომლის ელემენტები მიიღება P ველის ელემენტებზე და α ელემენტზე შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის მოქმედებათა სასრულ რიცხვჯერ მოხდენის შედეგად. P ველთან α ელემენტის გაერთიანება აღინიშნება $P(\alpha)$ სიმბოლოთი, ე. ი. $P(\alpha)=P'$. თუ $\alpha\in P$, მაშინ $P(\alpha)=P'$. ცხადია, $R'=\{a+b\sqrt{3}\}$ რიცხვთა ველი მიიღება R რაციონალურ რიცხვთა ველთან $\alpha=\sqrt{3}$ რიცხვის გაერთიანებით. ამრიგად,

$$R(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\}, \tag{2}$$

სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია.

ანალოგიურად შემოწმდება, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც მიიღება D ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესთან $i=\sqrt{-1}$

რიცხვის გაერთიანებით, ქმნის ველს, რომელსაც K კომპლექსურ რიცხვთა ველი ეწოდება. მაშასადამე, $D(i)=K=\{a+bi\}$, სადაც $a, b\in D$. ადვილად შევამჩნევთ აგრეთვე, რომ რაციონალურ რიცხვთა ველთან $\alpha=\sqrt[3]{2}$ რიცხვის გაერთიანებით მიღებული

$$R(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\} \tag{3}$$

სიმრავლე, სადაც a, b, $c\in R$, ქმნის რგოლს. შემდეგში მრავალწევრთა გაყოფადობის შესწავლისას, ურთიერთმარტივ მრავალწევრთა თვისებების გამოყენებით დავამტკიცებთ, რომ R რაციონალურ რიცხვთა ველთან $\alpha=\sqrt[n]{\lambda}$, $\lambda\in R$ რიცხვის გაერთიანებით, მიღებული რიცხვთა $R(\sqrt[n]{\lambda})$ სიმრავლე შექმნის რიცხვთა ველს. აქედან უშუალოდ გამოვა, რომ (3) სახის რიცხვთა სიმრავლე ქმნის რიცხვთა ველს.

როგორც ვხედავთ, ყველა ეს ველი შეიცავს რაციონალურ რიცხვთა ველს, ხოლო თვითონ კი D ნამდვილ რიცხვთა ველის ქვეველები არიან. განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ ერთ გარკვეულ რიცხვთა ველს შეიძლება გააჩნდეს რამდენიმე სხვადასხვა ქვეველი.

ისეთ ველს, რომელიც შედის ყველა შესაძლო ველში, **მინიმალური** ველი ეწოდება.

დავამტკიცოთ, რომ **რიცხვთა ველებს შორის R რაციონალურ რიცხვთა ველი მინიმალური ველია.**

მართლაც, ვთქვათ, P არის ნებისმიერ რიცხვთა ველი. P ველიდან ავიღოთ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი a რიცხვი. ცხადია, $\frac{a}{a}=1$ შედის P-ში. აქედან გამოდის, რომ $1+1=2$ და ა. შ. ყველა ნატურალური რიცხვი შედის P-ში. P ველში აგრეთვე შევა $a-a=0$, ე. ი. ნული, ამიტომ P-ში შევა ნულისა და ყოველი ნატურალური რიცხვის სხვაობა, ე. ი. ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვი. საბოლოოდ, P-ში შევა მთელი რიცხვების შეფარდება — წილადი რიცხვები. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ ყოველ P რიცხვთა ველში შედის R რაციონალურ რიცხვთა ველი.

მკითხველი შემდეგ დარწმუნდება, რომ რიცხვთა რგოლისა და ველის ცოდნა, რომლებიც ძალზე მარტივია, სასარგებლოა და საჭირო.

ალგებრა მათემატიკური მეცნიერების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგია, რომელიც განსხვავდება სხვა დარგებისაგან როგორც თავისი საგნის შინაარსით, ისე კვლევის მეთოდით. ალგებრის „განმარტება“ რამდენიმე სიტყვით შეუძლებელია, რადგანაც ის მთელ მათემატიკასთან ერთად, პრაქტიკულ საქმიანობასთან დაკავშირებით, სხვადასხვა დარგის მეცნიერებათა ზეგავლენით მათთან მჭიდრო კავშირში თანდათანობით იცვლებოდა და ვითარდებოდა. როგორც ცნობილია, ალგებრულ

მოქმედებათა ქვეშ იგულისხმება შეკრების, გამოკლების, გამრავლების, გაყოფის, ახარისხებისა (მთელ დადებით ხარისხში) და ფესვის ამოღების მოქმედებანი მოხდენილი სასრულ რიცხვჯერ. ალგებრას ძირითადად საქმე აქვს ორ მოქმედებასთან — შეკრებასა და გამრავლებასთან და მათ შებრუნებულ მოქმედებებთან (გამოკლებასა და გაყოფასთან); მთელ დადებით ხარისხში აყვანა არის გამრავლების კერძო შემთხვევა, ხოლო ფესვის ამოღება არის ორწევრა ალგებრული განტოლების ამოხსნის კერძო შემთხვევა.

თანამედროვე ალგებრა სწავლობს სიმრავლეს ერთი ან რამდენიმე ალგებრული ოპერაციით. შემდეგ ჩვენ ვნახავთ, რომ **ჯგუფი** არის ნებისმიერი ბუნების ელემენტებისაგან ერთი ალგებრული ოპერაციით შედგენილი სიმრავლე, ხოლო რგოლი და ველი — ორი ალგებრული ოპერაციით შედგენილი სიმრავლეები.

ალგებრის ზოგიერთი საკითხის შესწავლისას ჩვენ გამოვიყენებთ, მაგალითად, მათემატიკური ანალიზიდან ან კიდევ გეომეტრიიდან ცნობილ დებულებებს. ალგებრასა და მათემატიკური მეცნიერების სხვადასხვა დარგს შორის არ უნდა გავავლოთ მკვეთრი ზღვარი. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ეს იქნებოდა ფორმალიზმი ალგებრაში და ხელს შეუშლიდა მის შემდგომ განვითარებას.

უმაღლესი ალგებრის კურსის შესწავლისას, სადაც ეს საჭირო იქნება საკითხის ღრმად გარკვევის მიზნით, გამოვიყენებთ დებულებებსა და მეთოდებს მათემატიკის სხვადასხვა დარგიდან.

რამდენიმე სიტყვა ალგებრის განვითარების შესახებ

უძველესი დროიდან მოყოლებული დაახლოებით XX საუკუნის დასაწყისამდე ალგებრა ძირითადად სწავლობდა ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნას და მასთან დაკავშირებულ საკითხებს.

ზოგიერთი მარტივი ალგებრული განტოლების ამოხსნა და მასთან დაკავშირებული საკითხები შეისწავლეს ბაბილონელმა და ძველმა ბერძენმა მათემატიკოსებმა. მათ შორის უეჭველად უნდა აღინიშნოს ბერძენი (ალექსანდრიელი) მათემატიკოსი **დიოფანტე** (III ს. ჩ. წ. აღრიცხვით) დიოფანტეს შრომებს შემდეგ ავითარებდნენ ინდოელი მათემატიკოსები **არიაბჰატა** (VI. ს.), **ბრამაჰუპტა** (VII ს.) და **ბჰასკარა** (XII ს.) აღსანიშნავია აგრეთვე ცნობილი ჩინელი მათემატიკოსის **ცინ ცზიუ-შაოს** (XIII ს.) შრომები ალგებრაში. ალგებრის განვითარების საქმეში დიდი წვლილი შეიტანა უზბეკეთის სწავლულის **მუჰამედ ალ-ხორეზმის** (IX ს.) შრომებმა. თვითონ სიტყვა „ალგებრა" წარმოიშვა ალ-ხორეზმის წიგნის „ალ-ჯებრ" და „ალ-მუკაბალა"-ს საფუძველზე.

მესამე და მეოთხე ხარისხის ალგებრულ განტოლებათა შესწავლასთან დაკავშირებით უნდა დავასახელოთ იტალიელი მათემატიკოსები **ფერო** (1465—1526). **ტარტალია** (1500—1557) და **ფერარი** (1522—1565). შემდეგ დაიწყო ინტენსიური მუშაობა განტოლებათა თეორიაში (მრავალწევრთა ალგებრაში), რომლის წარმომადგენლებად შეიძლება დავასახელოთ ფრანგი მათემატიკოსები **დეკარტი** (1556—1650), **დალამბე-**

რი (1717—1763), **ლაგრანჟი** (1736—1813) და ინგლისელი მათემატიკოსი **ნიუტონი** (1643—1727). გერმანელმა მათემატიკოსმა **გაუსმა** (1777—1855) თავის სადოქტორო დისერტაციაში 1799 წელს მოგვცა სრული და მკაცრი დამტკიცება ალგებრის ძირითადი თეორემისა ფესვის არსებობის შესახებ. იტალიელმა მათემატიკოსმა **რუფინიმ** (1766—1822) და შემდეგ 1826 წელს რუფინისაგან დამოუკიდებლად ნორვეგიელმა მათემატიკოსმა **აბელმა** (1802—1829) სავსებით მკაცრად დაამტკიცა, რომ ოთხზე მაღალი რიგის ზოგადი სახის ალგებრული განტოლება რადიკალებში არ ამოიხსნება*. რუფინი-აბელის თეორემა არ გამორიცხავს გარკვეული კლასის ოთხზე მაღალი რიგის ალგებრული განტოლების რადიკალებში ამოხსნადობის შესაძლებლობას. საბოლოოდ, საკითხი, თუ რომელი კლასის მაღალი რიგის ალგებრული განტოლებანი ამოიხსნება რადიკალებში, გადაწყვიტა ცნობილმა ფრანგმა ახალგაზრდა მათემატიკოსმა **ევარისტ გალუამ** (1811—1832). გალუას გამოკვლევების საფუძველზე წარმოიშვა ჯგუფთა თეორია, რომელიც ახლა დიდ როლს ასრულებს მათემატიკის ყველა დარგში. გალუას თეორიამ ბიძგი მისცა ჯგუფთა თეორიის შემდგომი განვითარების საქმეს, წარმოშვა ალგებრულ რიცხვთა და ალგებრულ ფუნქციათა ველის თეორია და მასთან დაკავშირებული იდეალთა თეორია. აღნიშნული საკითხების შემდგომ შესწავლასთან დაკავშირებით უნდა მოვიხსენიოთ გერმანელი მათემატიკოსები: **კუმერი** (1810—1893), **კრონეკერი** (1823—1891) და **დედეკინდი** (1831—1916); რუსი მათემატიკოსები: **ე. ი. ზოლოტარევი** (1847—1878), **გ. ფ. ვორონოვი** (1868—1908), **ნ. ი. ლობაჩევსკი** (1792—1856) და **ს. ო. შატუნოვსკი** (1854—1929).

საბჭოთა კავშირში პირველი მეცნიერული ალგებრული სკოლის დამაარსებელი იყო **დ. ა. გრავე** (კიევი, 1863—1939), ცნობილი რუსი მათემატიკოსის **პ. ლ. ჩებიშევის** (1821—1894) მოწაფე.

გრავეს სკოლისა და მისი გავლენის ქვეშ აღიზარდნენ გამოჩენილი მათემატიკოსები: **ნ. ი. ჩებოტარევი** (ყაზანი, 1894—1947), **ო. ი. შმიდტი** (მოსკოვი, 1891—1956). თავის მხრივ, ჩებოტარევმა და მისმა მოწაფეებმა შემდგომ განავითარეს გალუას თეორია და მასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი. ო. ი. შმიდტის წიგნმა „Абстрактная теория групп“, რომელიც პირველად 1916 წელს გამოვიდა, და მისი ხელმძღვანელობით 1930 წელს მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში დაარსებულმა სემინარმა ალგებრაში, განსაკუთრებული როლი შეასრულა როგორც ჯგუფთა თეორიის განვითარების, ისე მრავალი ახალგაზრდა მეცნიერის მომზადების საქმეში. აღნიშნული სემინარი, რომელსაც ამჟამად ცნობილი მათემატიკოსი პროფესორი **ალექსანდრე გენადის-ძე კუროში** ხელმძღვანელობს, წარმატებით განაგრძობს მუშაობას არა მარტო ჯგუფთა თეორიაში, არამედ რგოლთა და ველთა თეორიებში, რომლებსაც დიდი გამოყენება აქვს თანამედროვე ფიზიკაში, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში, ალგებრულ გეომეტრიაში და სხვა.

უნდა აღინიშნოს აგრეთვე ცნობილი ტოპოლოგის აკადემიკოს **პ. ს. ალექსანდროვის** ფართო მათემატიკური მოღვაწეობა, რომელმაც დიდი გავლენა მოახდინა ალგებრის განვითარებაზე ჩვენში.

ზემოთ აღნიშნულ მეცნიერთა გავლენითა და ხელმძღვანელობით, თავის მხრივ, წარმოიშვნენ ცნობილი საბჭოთა მათემატიკოსები (ალგებრაში)—**ა. ი. მალცევი** (მოსკოვი—ნოვოსიბირსკი), **ს. ნ. ჩერნიკოვი** (სვერდლოვსკი,) **ი. რ. შაფარევიჩი** (მოსკოვი), **ლ. ი. კულაკოვი** (ლენინგრადი) და სხვა მრავალი სპეციალისტი, რომლებიც წარმატებით მუშაობენ ჩვენი სამშობლოს სხვადასხვა კუთხეში.

---

* უნდა აღინიშნოს, რომ მათემატიკოსი ლაიბნიცი (1646—1716) დარწმუნებული იყო მე-5 ხარისხის ალგებრული განტოლების რადიკალებში ამოხსნადობაში.

თავი I

დეტერმინანტები და წრფივ განტოლებათა სისტემები

§ 1. წრფივ განტოლებათა სისტემა

საშუალო სკოლის ალგებრის კურსიდან ცნობილია ორუცნობიანი, სამუცნობიანი და, ზოგ შემთხვევაში, უფრო მეტუცნობიანი პირველი ხარისხის ან, რაც იგივეა, წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სხვადასხვა ხერხი. სასკოლო კურსისაგან განსხვავებით დეტერმინანტთა და მატრიცთა თეორიის გამოყენებით ჩვენ აქ შევისწავლით ნებისმიერ n-უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის უცნობთა რიცხვი საზოგადოდ არ უდრის განტოლებათა რიცხვს. სისტემის უცნობები აღვნიშნოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ სიმბოლოებით, კოეფიციენტები კი ორინდექსიანი a_{ij} სიმბოლოებით.

ვთქვათ, მოცემულია n-უცნობიანი s რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad&\cdot\quad\cdot\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n&=b_s. \end{aligned} \tag{1}$$

თუ სისტემის ყველა a_{ij} ($i=1, 2, \ldots, s,\ j=1, 2, \ldots, n$) კოეფიციენტი ეკუთვნის რიცხვთა P ველს, მაშინ ვიტყვით, რომ სისტემა მოცემულია რიცხვთა P ველზე. სისტემის უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილ ცხრილს:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ეწოდება მოცემული სისტემის მატრიცა, ხოლო a_{ij} რიცხვებს კი — მატრიცის ელემენტები. რადგან მატრიცის a_{ij} ელემენტები ეკუ-

თენიან რიცხვთა P ველს ვიტყვით, რომ (2) მატრიცა აღებულია რიცხვთა P ველზე. ცხადია, რომ მატრიცა შეიძლება განვიხილოთ სისტემის გარეშეც. (2) მატრიცას, რომელიც შეიცავს s სტრიქონსა და n სვეტს, საზოგადოდ უწოდებენ მართკუთხა მატრიცას. ამ შემთხვევაში a_{ij} ელემენტის პირველი ინდექსი i აღნიშნავს მატრიცის სტრიქონის ნომერს, ხოლო მეორე ინდექსი j აღნიშნავს მატრიცის სვეტის ნომერს. მაგალითად a_{35} ელემენტი მოთავსებულია მატრიცის მე-3 სტრიქონისა და მე-5 სვეტის გადაკვეთაში.

ისეთ მატრიცას, რომლის სტრიქონებისა და სვეტების რიცხვი ტოლია, ე. ი. $n=s$, ეწოდება n-ური რიგის **კვადრატული მატრიცა**. კვადრატული მატრიცის დიაგონალს, რომელიც აერთებს მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხისა და მარჯვენა ქვედა კუთხის ელემენტებს, ეწოდება **მთავარი დიაგონალი**. მთავარ დიაგონალზე დალაგებულ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ელემენტებს ეწოდებათ **მთავარი დიაგონალის ელემენტები**. მთავარი დიაგონალის მართობულ დიაგონალს, რომელიც აერთებს მატრიცის მარცხენა ქვედა კუთხისა და მარჯვენა ზედა კუთხის ელემენტებს, ეწოდება **მეორე დიაგონალი**. მეორე დიაგონალზე დალაგებულ $a_{n1}, a_{n-12}, \ldots, a_{1n}$ ელემენტებს ეწოდებათ **მეორე დიაგონალის ელემენტები**.

კვადრატულ მატრიცას ეწოდება **ერთეულოვანი მატრიცა**, თუ მისი მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი უდრის ერთს, ხოლო ყველა სხვა ელემენტი ნულია. მატრიცას ეწოდება **ნულოვანი მატრიცა**, თუ ყველა მისი ელემენტი ნულია. მოცემული სისტემის მატრიცასთან სისტემის თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი ბოლო სვეტის მიდგმით მიღებულ მატრიცას სისტემის **გაფართოებული მატრიცა** ეწოდება.

დავუბრუნდეთ ისევ (1) წრფივ განტოლებათა სისტემას. (1) სისტემის ამონახსნი ეწოდება ისეთ n რაოდენობის რიცხვთა $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ერთობლიობას*, რომელიც იგივურად აკმაყოფილებს მოცემული სისტემის ყოველ განტოლებას. ე. ი. თუ x_j უცნობს შევცვლით k_j რიცხვით, მივიღებთ:

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \ldots + a_{in}k_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება **თავსებადი**, თუ მას აქვს ერთი ამონახსნი** მაინც, წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემას ეწოდება **არათავსებადი**.

---

*უნდა ვიცოდეთ, რომ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვები არის სისტემის ერთი ამონახსნი და არა n ამონახსნი.

** შემდეგში ჩვენ ვნახავთ, რომ სისტემას შეიძლება ჰქონდეს უსასრულო რაოდენობის ამონახსნი.

საზოგადოდ, განტოლებათა ორ სისტემას ეწოდება **ტოლძალოვანი**, ანუ **ეკვივალენტური**, თუ ერთი სისტემის ყოველი ამონახსნი არის მეორე სისტემის ამონახსნი და, პირიქით, მეორე სისტემის ყოველი ამონახსნი არის პირველი სისტემის ამონახსნი.

ვთქვათ, მოცემული სისტემის რომელიმე განტოლების ყველა კოეფიციენტი ნულია. თუ ამ განტოლების თავისუფალი წევრიც ნულია, მაშინ აღნიშნული განტოლება დაკმაყოფილდება უცნობთა ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და ამიტომ ასეთი განტოლების ამოგდებით ჩვენ მივიღებთ მოცემულ განტოლებათა სისტემის ტოლძალოვან სისტემას.

პირიქით, თუ სისტემის აღნიშნული განტოლების თავისუფალი წევრი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ ის არ დაკმაყოფილდება უცნობთა არავითარი რიცხვითი მნიშვნელობებით და, მაშასადამე, მოცემულ განტოლებათა სისტემა იქნება არათავსებადი.

ადვილად შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ (1) სისტემის რომელიმე ორი განტოლების ადგილების ურთიერთშეცვლის შედეგად ან განტოლებების ნულისაგან განსხვავებულ მუდმივაზე გამრავლების შედეგად მიღებული წრფივი სისტემა იქნება მოცემული წრფივი სისტემის ტოლძალოვანი.

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. თუ (1) წრფივი სისტემის რომელიმე i-ურ განტოლებას მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ ამავე სისტემის რომელიმე j-ურ განტოლებას, გამრავლებულს λ რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლძალოვან წრფივ სისტემას.

დამტკიცება. გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ ახალ წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{i1}x_1+a'_{i2}x_2+\ldots+a'_{in}x_n=b'_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n=b_s, \end{array} \qquad (3)$$

სადაც

$a'_{i1}=a_{i1}\pm\lambda a_{j1},\ a'_{i2}=a_{i2}\pm\lambda a_{j2},\ \ldots,\ a'_{in}=a'_{i1}\pm\lambda a_{jn},\ b'_i=b_i\pm\lambda b_j.$

ვთქვათ, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ არის (1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი. ეს რიცხვები, პირობის თანახმად, აკმაყოფილებენ (3) სისტემის ყველა განტოლებას, გარდა i-ური განტოლებისა. ადვილად შემოწმდება, რომ ეს რიცხვები აკმაყოფილებენ აგრეთვე (3) სისტემის i-ურ განტოლებასაც:

$$a'_{i1}k_1+a'_{i2}k_2+\ldots+a'_{in}k_n=a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\ldots+a_{in}k_n\pm$$
$$\pm\lambda(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\ldots+a_{jn}k_n)=b_i\pm\lambda b_j=b'_i.$$

ანალოგიურად შემოწმდება აგრეთვე, რომ (3) სისტემის ყოველი ამონახსნი იქნება (1) სისტემის ამონახსნი. ცხადია, რომ (1) სისტემაზე აღნიშნული ტიპის გარდაქმნების სასრულ რიცხვჯერ მოხდენის შედეგად მიღებული სისტემა იქნება მოცემული სისტემის ტოლძალოვანი სისტემა. ჩვენ ახლა ვნახავთ, რომ მოცემული სისტემის ამონახსნი ასეთი გარდაქმნების შედეგად დაიყვანება ერთი-ან რამდენიმე უცნობიანი პირველი ხარისხის განტოლების ამონახსნამდე.

მართლაც, სიმარტივისათვის ვთქვათ, რომ მოცემული (1) სისტემის პირველ განტოლებაში x_1 უცნობის კოეფიციენტი $a_{11}\neq 0$. სისტემის ყველა განტოლებიდან, გარდა პირველისა, გამოვრიცხოთ x_1 უცნობი. ამ მიზნით პირველი განტოლების ორივე მხარე თანამიმდევრობით გავამრავლოთ $\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, \frac{a_{s1}}{a_{11}}$ რიცხვებზე და მიღებული განტოლებები შესაბამისად გამოვაკლოთ სისტემის მეორე, მესამე და ა. შ. განტოლებებს. მივიღებთ ახალ n-უცნობიან s რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3+\ldots+a'_{3n}x_n&=b'_3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a'_{s2}x_2+a'_{s3}x_3+\ldots+a'_{sn}x_n&=b'_s. \end{aligned} \tag{4}$$

როგორც უკვე ვიცით, (4) და (1) წრფივ განტოლებათა სისტემები ეკვივალენტური სისტემებია. ახლა დავაკვირდეთ $(n-1)$-უცნობიან $s-1$ რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} a'_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3+\ldots+a'_{3n}x_n&=b'_3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a'_{s2}x_2+a'_{s3}x_3+\ldots+a'_{sn}x_n&=b'_s. \end{aligned} \tag{5}$$

შესაძლებელია, რომ (5) სისტემის რომელიმე განტოლების ყველა კოეფიციენტი ნული გამოვიდეს. თუ ამ განტოლების თავისუფალი წევრიც ნულია, მაშინ ასეთი განტოლების (4) სისტემიდან ამოგდებით მიღებული სისტემა იქნება (4) სისტემის ეკვივალენტური. თუ აღნიშნული განტოლების თავისუფალი წევრი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ (4) სისტემა არათავსებადი იქნება და, რადგან (4) სისტემა მოცემული (1) სისტემის ეკვივალენტურია, ამიტომ (1) სისტემაც არათავსებადი იქნება; სისტემის გარდაქმნის პროცესი ამით დამთავრდება.

ჩვენ ვიგულისხმოთ, რომ (5) სისტემაში არ არსებობს ისეთი გან-

ტოლება, რომლის ყველა უცნობის კოეფიციენტი ნულია, ხოლო მისი თავისუფალი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან. ვთქვათ, $a'_{22}\neq 0$. (1) სისტემის ანალოგიურად გარდავქმნათ ახლა (5) სისტემა და ა. შ. საბოლოოდ, აღნიშნული პროცესის გაგრძელების შედეგად, (1) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1k}x_k+a_{1k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2k}^{(1)}x_k+a_{2k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n&=b_2^{(1)}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{kk}^{(k-1)}x_1+a_{kk+1}^{(k-1)}x_{k+1}+\ldots+a_{kn}^{(k-1)}x_n&=b_k^{(k-1)}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ცხადია, (6) და (1) სისტემები ეკვივალენტურია; აქ $k\leqslant s$, $k\leqslant n$ და $a_{11}\neq 0$, $a_{22}^{(1)}\neq 0,\ldots,$ $a_{kk}^{(k-1)}\neq 0$. ახლა ადვილად დამტკიცდება (6) სისტემის თავსებადობა.

მართლაც, როცა $k=n$, მაშინ (6) სისტემის უკანასკნელი განტოლება იქნება $a_{nn}^{(n-1)}x_n=b_n^{(n-1)}$, სადაც $a_{nn}^{(n-1)}\neq 0$. ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ x_n უცნობის გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობას, შემდეგ მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ ბოლოდან სისტემის მეორე განტოლებაში და მივიღებთ x_{n-1} უცნობისათვის გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობას და ა. შ. თუ ავყვებით ქვემოდან ზევით, მივიღებთ (6) სისტემის ერთ გარკვეულ ამონახსნს. რადგან (6) და (1) სისტემები ტოლძალოვანია, (6) სისტემის მიღებული ამონახსნი იქნება აგრეთვე (1) სისტემის გარკვეული ამონახსნი, ე. ი. (1) სისტემა თავსებადია.

ვთქვათ, ახლა $k<n$. $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ უცნობებს ვუწოდოთ სისტემის **თავისუფალი უცნობები**. (6) სისტემის ბოლო განტოლებიდან ჩანს, რომ თავისუფალ უცნობთა ყოველი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის ვღებულობთ შესაბამისად x_k უცნობის გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობას და ა. შ. თუ ავყვებით ქვემოდან ზევით, მაშინ თავისუფალ უცნობთა ყოველი გარკვეული რიცხვითი მნიშვნელობისათვის თანამიმდევრობით მივიღებთ $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1$ უცნობთა გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობებს. თავისუფალ $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ უცნობთა მნიშვნელობები და $x_1, x_2, \ldots, x_k$ უცნობთა მიღებული მნიშვნელობები ერთად ქმნიან მოცემული (6) სისტემის გარკვეულ ამონახსნს. მაშასადამე, თავისუფალ უცნობთა ყოველ გარკვეულ მნიშვნელობას უპასუხებს (6) სისტემის გარკვეული ამონახსნი*.

* წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ანალოგიური მეთოდი ადრე ჩ. წ. აღრიცხვამდე, შესწავლილი იყო ჩინელების მიერ.

აქედან გამოდის, რომ ამ შემთხვევაში (6) სისტემა ან, რაც იგივეა, მისი ტოლძალოვანი (1) სისტემა თავსებადია და გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა.

უფრო გვიან, მატრიცის რანგის გაცნობის შემდეგ, შევისწავლით წრფივ განტოლებათა სისტემის ზოგად თეორიას. ახლა განვიხილოთ აღნიშნული მეთოდით წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის რამდენიმე მაგალითი.

1. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-4x_3&=-3,\\ 3x_1-2x_2+7x_3&=2,\\ 4x_1+5x_2-2x_3&=3. \end{aligned}$$

შევადგინოთ მოცემული სისტემის გაფართოებული მატრიცა და მოვახდინოთ მისი თანამიმდევრობითი გარდაქმნა; მივიღებთ:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -4 & -3\\ 3 & -2 & 7 & 2\\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 11 & 5\\ 2 & 3 & -4 & -3\\ 0 & -1 & 6 & 9 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 11 & 5\\ 0 & 13 & -26 & -13\\ 0 & -1 & 6 & -9 \end{array}\right) \backsim$$

$$\backsim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 11 & 5\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 11 & 5\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)^{*}$$

ამრიგად, მოცემული სისტემა დაიყვანება მის ტოლძალოვან შემდეგ სისტემამდე:

$$\begin{aligned} x_1-5x_2+11x_3&=5,\\ x_2-2x_3&=-1,\\ x_3&=2, \end{aligned}$$

რომელსაც გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=2$. სისტემის აღნიშნული მეთოდით ამოხსნას „სამკუთხედის“ სქემით ამოხსნა ეწოდება.

2. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1+3x_2-4x_3+x_4&=-5,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=3,\\ x_1-2x_2+7x_3+x_4&=2,\\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4&=6. \end{aligned}$$

---

* აქ სიმბოლო „$\backsim$“ ორ მატრიცას შორის ნიშნავს იმას, რომ მათი შესაბამისი სისტემები ეკვივალენტურია. მკითხველი ადვილად შეამჩნევს, თუ როგორი გარდაქმნებით მიიღება ყოველი შემდეგი მატრიცა წინასაგან.

მოცემული სისტემის გაფართოებული მატრიცის გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 13 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

როგორც ვხედავთ, ჩვენ მივედით მოცემული სისტემის ისეთ ეკვივალენტურ სისტემაზე, რომელიც შეიცავს განტოლებას $0=6$, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, მოცემული სისტემა არათავსებადია.

3. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3-3x_4&=3, \\ 3x_1+2x_2-4x_3+2x_4&=3, \\ 2x_1-x_2-6x_3+5x_4&=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3-x_4&=6. \end{aligned}$$

მოცემული სისტემის გაფართოებული მატრიცის გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & -1 & 6 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & -10 & 11 & -6 \\ 0 & -7 & -10 & 11 & -6 \\ 0 & -7 & -10 & 11 & -6 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & -10 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

ჩვენ მივიღეთ მოცემული სისტემის ეკვივალენტური სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3-3x_4&=3, \\ -7x_2-10x_3+11x_4&=-6. \end{aligned}$$

აქ თავისუფალ უცნობებად შეიძლება მივიღოთ x_2, x_3 და x_4 უცნობთა შორის ნებისმიერი ორი უცნობი. ვთქვათ, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$. მაშინ მივიღებთ:

$$x_2=-\frac{10}{7}\alpha+\frac{11}{7}\beta+\frac{6}{7}, \qquad x_1=\frac{16}{7}\alpha-\frac{12}{7}\beta+\frac{3}{7}.$$

α და β ყოველ რიცხვით მნიშვნელობას შეესაბამება მოცემული სისტემის გარკვეული ამონახსნი. მაგალითად, თუ $\alpha=0$, $\beta=0$, მაშინ მოცემული სისტემის ერთი ამონახსნი იქნება: $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{6}{7}$, $x_3=0$, $x_4=0$, ხოლო თუ $\alpha=1$, $\beta=1$, მაშინ მოცემული სისტემის მეორე ამონახსნი იქნება: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=1$ და ა. შ. ამრიგად მივიღებთ, რომ მოცემულ სისტემას აქვს უსასრულო რიცხვი ამონახსნებისა.

4. განვიხილოთ ისეთი არაწრფივ განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნა **დაიყვანება** წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე.

ვთქვათ, მოცემულია განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{y^2}-\frac{1}{z-x}=-4,$$

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{z-x}=4,$$

$$\frac{4}{x}+\frac{3}{y^2}+\frac{5}{z-x}=11.$$

აღნიშვნებით: $\frac{1}{x}=x_1$, $\frac{1}{y^2}=x_2$, $\frac{1}{z-x}=x_3$, მოცემული სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე:

$$\begin{aligned}3x_1-2x_2-\ x_3&=-4,\\ 2x_1+\ x_2+2x_3&=\ \ 4,\\ 4x_1+3x_2+5x_3&=\ \ 11.\end{aligned}$$

მიღებული სისტემის (სამკუთხედის სქემით) ამოხსნის შედეგად გვექნება: $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=-1$. თუ დავუბრუნდებით ძველ აღნიშვნებს მივიღებთ, რომ მოცემულ არაწრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი ორი ამონახსნი:

$$x=1,\quad y=\frac{1}{2},\ z=0 \text{ და } x=1,\ y=-\frac{1}{2},\ z=0.$$

§ 2. გადანაცვლებები და ჩასმები

შემდეგ პარაგრაფში n-ური რიგის დეტერმინანტის შესწავლისას დაგვჭირდება სასრული სიმრავლის ზოგიერთი თვისება. ჩვენთვის სრულიად არ აქვს მნიშვნელობა, თუ რა ბუნების ელემენტებისაგან შედგება აღებული სასრული სიმრავლე. ამიტომ ზოგადობა არ იქნება დარღვეული, თუ განვიხილავთ პირველ n ნატურალურ 1, 2, ..., n რიცხვთა (ელემენტთა) სიმრავლეს. სიმრავლის ელემენტების დალაგებას შემდეგი სახით: 1, 2,.., n ეწოდება **სიმრავლის ნორმალური** დალაგება.

ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ აღნიშნული სიმრავლის სხვა დალაგება, რომელსაც **გადანაცვლება** ეწოდება.

მაგალითად, როცა $n=3$, მაშინ 1, 2, 3 ელემენტთა ყველა შესაძლო გადანაცვლების რიცხვი უდრის $3!=6$. ესენი იქნება: 123, 132, 213,

231, 312, 321. დავამტკიცოთ, რომ 1, 2, ..., n **ელემენტთა ყველა შესაძლო გადანაცვლების რიცხვი უდრის** $n!$.

მართლაც, დამტკიცება მოვახდინოთ ინდუქციით ელემენტთა რაოდენობის მიმართ. დებულების მართებულობა აშკარაა, როცა $n=1, 2, 3$. დავუშვათ, რომ დებულება მართებულია, როცა ელემენტთა რაოდენობა უდრის $(n-1)$-ს, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ $n-1$ რაოდენობის ელემენტისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო გადანაცვლების რიცხვი უდრის $(n-1)!$.

თანახმად დაშვებისა, 1, 2, 3,..., n სიმრავლისაგან მიღებული ყველა შესაძლო გადანაცვლების რაოდენობა, რომლებიც იწყება 1-ით, იქნება $(n-1)!$. აგრეთვე, ყველა შესაძლო გადანაცვლების რაოდენობა, რომლებიც იწყება 2-ით, იქნება $(n-1)!$ და ა. შ. ყველა შესაძლო გადანაცვლების რაოდენობა, რომლებიც იწყება n-ით, იქნება $(n-1)!$ მაშასადამე, 1, 2, ..., n სიმრავლისაგან მიღებული ყველა შესაძლო გადანაცვლების რაოდენობა იქნება:

$$(n-1)!n=1.2...(n-1).n=n!.$$

ვიტყვით, რომ მოცემულ გადანაცვლებაში α და β ელემენტები ქმნიან **ინვერსიას**, თუ $\alpha>\beta$ და გადანაცვლებაში α წინ უსწრებს β-ს. თუ გადანაცვლებაში შემავალი ინდექსების მიერ შექმნილი ყველა შესაძლო ინვერსიის რიცხვი ლუწია, მაშინ გადანაცვლებას ეწოდება **ლუწი გადანაცვლება**, წინააღმდეგ შემთხვევაში — **კენტი გადანაცვლება**. მაგალითად, დავთვალოთ ინვერსიების რიცხვი გადანაცვლებაში 3, 4, 1, 5, 6, 2,7. დათვლა დავიწყოთ უმცირესი რიცხვიდან. რიცხვი 1 ინვერსიას ქმნის ორ რიცხვთან, ეს რიცხვებია 3 და 4. რიცხვი 1 ამოვშალოთ და დავნიშნოთ მის მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი ორი. ახლა გადანაცვლებაში

$$3,\ 4,\ \cancel{1},\ 5,\ 6,\ 2,\ 7$$

2 ინვერსიას ქმნის ოთხ რიცხვთან. ეს რიცხვებია 3, 4, 5 და 6. ამოვშალოთ 2 და დავინიშნოთ მის მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი ოთხი.

$$3,\ 4,\ \cancel{1},\ 5,\ 6,\ \cancel{2},\ 7.$$

ამ გადანაცვლებაში 3 არც ერთ რიცხვთან არ ქმნის ინვერსიას, ე. ი. რიცხვი 3-ის მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი მოცემულ გადანაცვლებაში უდრის 0. ასევე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ გადანაცვლებაში სხვა დანარჩენი რიცხვების მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი უდრის 0.

მაშასადამე, მოცემულ გადანაცვლებაში ყველა შესაძლო ინვერსიის რიცხვი უდრის $2+4+0=6$. ამრიგად, მოცემული გადანაცვლება ლუწია.

ადვილად შემოწმდება, რომ, მაგალითად, გადანაცვლებაში 3, 4, 7, 5, 6, 2, 1 ინვერსიების რიცხვი უდრის 13, ამიტომ ეს გადანაცვლება კენტია. ნორმალურად დალაგებულ გადანაცვლებაში 1, 2,..., n ინვერსიების რიცხვი უდრის ნულს, ამიტომ ნორმალური გადანაცვლება ლუწია. გადანაცვლებაში ორი ინდექსის ადგილების ურთიერთშეცვლას **ტრანსპოზიცია** ეწოდება.

დავამტკიცოთ თეორემა:

ყოველი ტრანსპოზიცია გადანაცვლების ხასიათს, ანუ ლუწკენტოვნებას, ცვლის, ე. ი. ლუწ გადანაცვლებას გადაიყვანს კენტში და, პირიქით.

დამტკიცება. თეორემის დამტკიცება პირველად განვიხილოთ კერძო შემთხვევისათვის, როცა α და β ელემენტები გადანაცვლებაში ერთიმეორის გვერდითაა, ე. ი. გადანაცვლებას აქვს შემდეგი სახე: A, α, β, B, სადაც A-თი და B-თი აღნიშნულია გადანაცვლების დანარჩენი ელემენტები. α და β ელემენტთა ტრანსპოზიციის შედეგად გადანაცვლება მიიღებს შემდეგ სახეს: A, β, α, B. ცხადია, რომ α და β ელემენტების მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი A-სთან და B-სთან α და β ელემენტების ტრანსპოზიციის შედეგად არ იცვლება.

ამიტომ, თუ α და β ელემენტები, A, α, β, B გადანაცვლებაში არ ქმნიდა ინვერსიას ახალ A, β, α, B გადანაცვლებაში შექმნის ინვერსიას და გადანაცვლებაში ინვერსიების რიცხვი ერთით გაიზრდება. ახლა, თუ α და β ელემენტები ტრანსპოზიციამდე გადანაცვლებაში ქმნიდა ინვერსიას, ახალ გადანაცვლებაში ტრანსპოზიციის შემდეგ არ შექმნის ინვერსიას, ე. ი. ინვერსიის რიცხვი ერთით დაიკლებს. როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში გადანაცვლების ხასიათი იცვლება და თეორემა ამ კერძო შემთხვევისათვის დამტკიცებულია. ახლა დავამტკიცოთ თეორემა ზოგად შემთხვევაში, როცა α და β ელემენტებს შორის მოთავსებულია s რაოდენობის $k_1, k_2, \ldots, k_s$ ელემენტი, ე. ი. გადანაცვლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$A, \alpha, k_1, k_2, \ldots, k_s, \beta, B. \tag{1}$$

α ელემენტი თანამიმდევრობით გადავანაცვლოთ მარჯვნივ $k_1, k_2, \ldots, k_3$ ელემენტთან. s ტრანსპოზიციის შემდეგ მივიღებთ გადანაცვლებას:

$$A, k_1, k_2, \ldots, k_s, \alpha, \beta, B.$$

თუ ახლა მიღებულ გადანაცვლებაში β ელემენტს თანამიმდევრობით გადავანაცვლებთ მარცხნივ $\alpha, k_s, \ldots, k_2, k_1$ ელემენტებთან, $s+1$ ტრანსპოზიციის შემდეგ მივიღებთ გადანაცვლებას:

$$A, \beta, k_1, k_2, \ldots, k_s, \alpha, B. \tag{2}$$

როგორც ვხედავთ, α და β ელემენტების ტრანსპოზიციისათვის სულ დაგვჭირდა $s+1+s=2s+1$ მეზობელ ელემენტთა ტრანსპოზიცია. ახლა რადგან $2s+1$ რიცხვი კენტია და გადანაცვლებაში ყოველი ორი მეზობელი ელემენტის ტრანსპოზიციით გადანაცვლებას ეცვლება ხასიათი, ამიტომ (2) და (1) გადანაცვლებას სხვადასხვა ხასიათი ექნება, ამით თეორემა, რომელსაც გადანაცვლების ძირითადი თეორემა ეწოდება, დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

1. ლუწი რაოდენობის ტრანსპოზიციით გადანაცვლებას ხასიათი არ ეცვლება, ხოლო კენტი რაოდენობის ტრანსპოზიციით კი გადანაცვლება იცვლის ხასიათს.

ეს აშკარაა, რადგან ყოველი ტრანსპოზიცია გადანაცვლებას უცვლის ხასიათს.

2. n სიმბოლოს, როცა $n\geqslant 2$, ყველა შესაძლო ლუწი გადანაცვლების რიცხვი უდრის კენტ გადანაცვლებათა რიცხვს და უდრის $\frac{n!}{2}$.

მართლაც, როგორც ვიცით, n ელემენტისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო გადანაცვლების რიცხვი უდრის $n!$-ს. ვიგულისხმოთ, რომ ყველა გადანაცვლებას შორის ლუწ გადანაცვლებათა რიცხვი უდრის k-ს, ხოლო კენტ გადანაცვლებათა რიცხვი უდრის l-ს, ე. ი. $n!=k+l$. ლუწ გადანაცვლებაზე ერთი რომელიმე ტრანსპოზიციის მოხდენით მივიღებთ კენტ გადანაცვლებას და გვექნება $k\leqslant 1$. ანალოგიურად, თუ ახლა კენტ გადანაცვლებაზე მოვახდენთ ერთ რომელიმე ტრანსპოზიციას, მივიღებთ ლუწ გადანაცვლებას და ამიტომ $l\leqslant k$. მაშასადამე, $l=k=\frac{n!}{2}$, რ. დ. გ.

განსაზღვრა. **ვიტყვით, რომ M და N სიმრავლეების ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა ან კიდევ ორი M და N სიმრავლე ეკვივალენტურია, თუ M სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება N სიმრავლის ერთი გარკვეული ელემენტი და, პირიქით.** როგორც განმარტებიდან ჩანს, თუ ორი სასრული სიმრავლე ეკვივალენტურია, მაშინ მათი ელემენტთა რაოდენობა ტოლია.

მაგალითი 1. ვთქვათ, M არის მთელ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო N —ლუწ რიცხვთა სიმრავლე. ამ სიმრავლეთა ელემენტებს შორის თანადობით $n\leftrightarrow 2n$, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია, მყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა.

მაგალითი 2. ვთქვათ, M მთელ რიცხვთა სიმრავლეა: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ხოლო M ყველა მთელი რიცხვის კვადრატების სიმრავლეა:

$$0,\ 1,\ 4,\ 9, \ldots$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ, თუ ყოველ n მთელ რიცხვს შევუსაბამებთ მის კვადრატს n^2-ს, ეს არ იქნება ურთიერთცალსახა თანადობა ამ სიმრავლეთა შორის.

ახლა დავუბრუნდეთ ისევ $1, 2, \ldots, n$ რიცხვთა სიმრავლეს. ამ სიმრავლის თავის თავზე ყოველ ურთიერთცალსახა ასახვას n ელემენტისაგან შექმნილი **ჩასმა** ეწოდება, მას კიდევ n-ური **ხარისხის** ჩასმას უწოდებენ.

თუ განსახილველი ასახვისას ყოველი $i=1,2,\ldots,n$ ელემენტი გადადის ამავე სიმრავლის α_i, ელემენტში, მივიღებთ ჩასმას, რომელსაც ასე აღნიშნავენ:

$$a=\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

ურთიერთცალსახა ასახვის გამო, მეორე სტრიქონში ყველა ელემენტი ერთიმეორისაგან განსხვავებულია. მეორე სტრიქონი წარმოადგენს პირველი სტრიქონის ელემენტების რაღაც გადანაცვლებას. ადვილად შევამჩნევთ, რომ ჩასმის დაწერისას არ არის აუცილებელი, რომ პირველი სტრიქონის ელემენტები ნორმალურად დავალაგოთ. მაგალითად, მეოთხე ხარისხის ჩასმები:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

სხვადასხვა ფორმით წარმოდგენილი ერთი და იგივე ჩასმებია, რადგან თითოეულ მათგანში $1\to 3$, $2\to 4$, $3\to 1$ და $4\to 2$. ცხადია, რომ ყოველი ჩასმა შეიძლება დავიყვანოთ (3) სახემდე, რომელსაც ჩასმის **ნორმალურ სახეს** უწოდებენ, მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ჩასმას.

ისეთ ჩასმას, რომელიც სიმრავლის ყოველ ელემენტს უცვლელად ტოვებს, ეწოდება ერთეულოვანი ანუ იგივური, ჩასმა და იგი e ასოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$e=\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ 1, & 2, & \ldots, & n \end{pmatrix}.$$

მაგალითად, ჩასმა $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ უცვლელად ტოვებს 1, 3 და 5 ელემენტებს. ამ ჩასმას 2 გადაჰყავს 4-ში, ხოლო 4 გადაჰყავს 2-ში, ამიტომ ეს ჩასმა იგივეა, რაც ორელემენტიანი $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ჩასმა*.

* ამის შესახებ კიდევ ქვემოთ გვექნება ლაპარაკი.

ცხადია, რომ n-ხარისხიან ყოველ ორ ტოლ ჩასმას ნორმალურ სახემდე დაყვანის შემდეგ ერთი და იგივე მეორე სტრიქონები უნდა ჰქონდეს, ხოლო, სხვადასხვა ჩასმებს კი — სხვადასხვა. აქედან უშუალოდ ვღებულობთ, რომ n **ელემენტისაგან მიღებული ყველა შესაძლო ჩასმის რიცხვი ზუსტად უდრის ჩასმის მეორე სტრიქონის ელემენტთა ყველა შესაძლო გადანაცვლების რიცხვს, ე. ი.** $n!$-ს.

ჩასმას ეწოდება ლუწი, თუ მისი ორივე სტრიქონი ერთნაირი ლუწკენტოვნებისაა, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩასმას ეწოდება კენტი. ან კიდევ, ჩასმას ეწოდება ლუწი, თუ ორივე სტრიქონში ინვერსიების ჯამი ლუწია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩასმას ეწოდება კენტი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ჩასმის ლუწკენტოვნება არ იცვლება ჩასმის ნორმალურ სახემდე დაყვანით.

მართლაც, ჩასმა რომ ნორმალრ სახემდე დავიყვანოთ, ამისათვის პირველ სტრიქონში ელემენტთა შორის უნდა მოვახდინოთ რამდენიმე ტრანსპოზიცია და შესაბამის ელემენტებზე მეორე სტრიქონშიც უნდა მოვახდინოთ იმდენივე ტრანსპოზიცია. რადგან პირველ სტრიქონზე ყოველი ერთი ტრანსპოზიციის მოხდენა იწვევს მეორე სტრიქონში შესაბამის ერთ ტრანსპოზიციას, ამიტომ ჩასმის ლუწკენტოვნება არ იცვლება (ერთდროულად გვექნება ორი ტრანსპოზიცია). ასეთი პროცესის რამდენჯერმე გამეორებით, ცხადია, ჩასმის ლუწკენტოვნება უცვლელი რჩება და ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ახლა ადვილად შევნიშნავთ, რომ თუ ჩასმას დავიყვანთ ნორმალურ სახემდე, მისი ლუწკენტოვნება დაემთხვევა მეორე სტრიქონის ლუწკენტოვნებას. რადგან ნორმალურ სახემდე დაყვანილი ჩასმის ლუწკენტოვნება იგივეა, რაც მეორე სტრიქონის ლუწკენტოვნება, ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველი ჩასმის ლუწკენტოვნება იგივეა, რაც შესაბამისი ნორმალური ჩასმის მეორე სტრიქონის ლუწკენტოვნება.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მე-5 ხარისხის ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ამ ჩასმის პირველ სტრიქონში 2 ინვერსიაა, ხოლო მეორე სტრიქონში კი 9 (სტრიქონები სხვადასხვა ლუწკენტოვნებისაა). ორივე სტრიქონში ინვერსიების რიცხვი უდრის 11. ამიტომ ეს ჩასმა კენტია. მოცემული ჩასმის ნორმალურ სახემდე დაყვანის შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

პირველ სტრიქონში ინვერსიების რიცხვი უდრის 0, მეორე სტრიქონში კი 7-ს. ინვერსიების ჯამი არის 7, რომელიც აგრეთვე კენტი რიცხვია. როგორც ვხედავთ, ჩასმის სხვადასხვა სახით დაწერისას ინვერსიების ჯამი საზოგადოდ იცვლება, მაგრამ ჯამის ლუწკენტოვნება უცვლელია.

ახლა, რადგან ყოველი ჩასმა დაიყვანება ნორმალურ სახემდე და ჩასმის ლუწკენტოვნება განისაზღვრება ნორმალური ჩასმის მეორე სტრიქონის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ გადანაცვლების ლუწკენტოვნებით, მივიღებთ შემდეგ საინტერესო შედეგს: **n-ური ხარისხის ყველა ჩასმას შორის ლუწი ჩასმების რიცხვი უდრის კენტი ჩასმების რიცხვს და ამგვარად უდრის** $\frac{n!}{2}$.

ახლა დავადგინოთ ჩასმათა გამრავლების წესი. როგორც აღვნიშნეთ, n-ური ხარისხის ჩასმა არის $1, 2, \ldots, n$ სიმრავლის თავის თავზე ურთიერთცალსახა ასახვა. ცხადია, რომ თუ თანამიმდევრობით ორჯერ მოვახდენთ $1, 2, \ldots, n$ სიმრავლის თავის თავზე ურთიერთცალსახა ასახვას, ისევ მივიღებთ ამ სიმრავლის თავის თავზე ურთიერთცალსახა ასახვას. მაშასადამე, ორი n-ური ხარისხის ჩასმის თანამიმდევრობით მოხდენა მოგვცემს გარკვეულ მესამე ჩასმას, რომელსაც უწოდებენ **ნამრავლს** პირველი ჩასმისა მეორეზე. ზემოთ ნათქვამის თანახმად, თუ S ჩასმას α ინდექსი გადაჰყავს β ინდექსში, ხოლო T ჩასმას β ინდექსი გადაჰყავს γ ინდექსში, მაშინ S და T ჩასმების გამრავლების შედეგად მიღებული $S \cdot T$ ჩასმა α ინდექსს გადაიყვანს γ ინდექსში.

მაგალითად, თუ მოცემულია ორი მეხუთე ხარისხის ჩასმა:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$S \cdot T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

მართლაც, S ჩასმით 1 გადადის 5-ში, ხოლო T ჩასმით 5 გადადის 2-ში, ამიტომ $S \cdot T$ ჩასმით 1 გადავა 2-ში და ა. შ.

ადვილად შემოწმდება, რომ საზოგადოდ ჩასმების გამრავლება არაკომუტაციურია. მართლაც, განვიხილოთ ნამრავლი $T \cdot S$, მივიღებთ:

$$T \cdot S=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ცხადია, $S\cdot T\neq T\cdot S$. შესაძლებელია ზოგ შემთხვევაში ჩასმების ნამრავლი კომუტაციური გამოვიდეს. მაგალითად, ვთქვათ:

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ

$$S\cdot T=T\cdot S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ჩასმების გამრავლების მიმართ სრულდება ასოციაციურობის კანონი, ე. ი. ვაჩვენოთ, რომ თუ S, R და T n-ური ხარისხის ნებისმიერი ჩასმებია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$S(R\cdot T)=(S\cdot R)T.$$

მართლაც, ვთქვათ S ჩასმას i_1 სიმბოლო გადაჰყავს i_2-ში, R ჩასმას i_2 სიმბოლო გადაჰყავს i_3-ში, ხოლო T ჩასმას i_3 სიმბოლო გადაჰყავს i_4-ში რადგან RT ჩასმა i_2 სიმბოლოს გადაიყვანს i_4-ში, ხოლო SR ჩასმა i_1 სიმბოლოს გადაიყვანს i_3-ში, ამიტომ ორივე $S(R\cdot T)$ და $(S\cdot R)T$, ჩასმა i_1 სიმბოლოს გადაიყვანს i_4-ში, რ. დ. გ.

ადვილად შემოწმდება, რომ ნებისმიერი a ჩასმა e ერთეულოვან ჩასმაზე გამრავლებით როგორც მარცხნიდან, ისე მარჯვნიდან არ იცვლება, ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას

$$a\cdot e=e\cdot a=a.$$

ჩასმას, რომელიც მიიღება მოცემული a ჩასმისაგან სტრიქონების ადგილების ურთიერთშეცვლით, მოცემული ჩასმის **შებრუნებული ჩასმა** ეწოდება და აღინიშნება ასე: a^{-1}. როგორც განმარტებიდან ჩანს, ჩასმის შებრუნებით მისი ლუწკენტოვნება არ იცვლება. ადვილად შემოწმდება, რომ

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e.$$

მაგალითი. ვთქვათ,

$$a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix},$$

მაშინ

$$a^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

და მივიღებთ:

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=e.$$

ახლა შემოვიღოთ ციკლური, ანუ წრიული, ჩასმის ცნება, რომელიც დიდ როლს ასრულებს ჩასმათა თეორიაში. ვთქვათ, გვაქვს k რაოდენობის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ინდექსი. ამ ინდექსებისაგან შექმნილ ჩასმას ეწოდება k-წევრა **ციკლური, ანუ წრიული, ჩასმა**, თუ ყოველი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ ინდექსი გადადის მის მომდევნო ინდექსში, ხოლო უკანასკნელი α_k ინდექსი კი პირველ α_1 ინდექსში:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{k-1}, & \alpha_k, \\ \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_k, & \alpha_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ასე, მაგალითად, ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

წარმოადგენს 1, 3, 5, 7 ინდექსებისაგან შექმნილ ოთხწევრა ციკლურ ჩასმას.

(5) წრიული ჩასმა მოკლედ ასე აღინიშნება:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{k-1}, & \alpha_k \\ \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_k, & \alpha_1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k).$$

ამრიგად,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 7).$$

ყოველი α და β ელემენტის ტრანსპოზიცია ციკლური ჩასმის კერძო შემთხვევაა; ის წარმოადგენს ორწევრა ციკლს:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha, \beta).$$

ერთწევრა ციკლი (α) იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ჩასმით α ელემენტი გადადის თავის თავში, ე. ი. რჩება თავის ადგილზე.

შევნიშნოთ, რომ ციკლური ჩასმა შეიძლება დავიწყოთ მასში შემავალი ნებისმიერი ინდექსით. ასე, მაგალითად,

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) = (3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2) = (5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4) = \ldots$$

კერძოდ, ტრანსპოზიციისათვის—ორწევრა ციკლური ჩასმისათვის—გვექნება:

$$(\alpha\ \beta) = (\beta\,\alpha).$$

n-ური ხარისხის ჩასმას, რომელსაც, მაგალითად, 1 გადაჰყავს 3-ში, 3 გადაჰყავს 2-ში და 2 გადაჰყავს 1-ში, ხოლო დანარჩენ 4, 5,..., n რიცხ-

ვებს ადგილზე ტოვებს, ეწოდება n-ური ხარისხის სამწევრა (132) ციკლი და ის ჩასმის სახით ასე დაიწერება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \\ 3 & 1 & 2 & 4 \ldots n \end{pmatrix}.$$

n-ური ხარისხის ორ ($\alpha_1 \ \alpha_2 \ldots \alpha_k$) და ($\beta_1 \ \beta_2 \ldots \beta_e$) ციკლს ეწოდება **დამოუკიდებელი ციკლები,** თუ მათ არ აქვთ საერთო ელემენტი.

თეორემა. **ყოველი S ჩასმა შეიძლება დაიშალოს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი ციკლების ნამრავლად.**

დამტკიცება. ავიღოთ n-ური ხარისხის S ჩასმის რომელიმე α_1 ინდექსი; თუ S ჩასმით ეს ინდექსი უცვლელია, მივიღებთ ერთწევრა ციკლს (α_1). თუ ახლა S ჩასმას α_1 ინდექსი გადაჰყავს α_2-ში, რომელიც განსხვავებულია α_1-გან, მაშინ S ჩასმა α_2 ინდექსს გადაიყვანს ან α_1-ში, ან სხვა რომელიმე α_3-ში, პირველ შემთხვევაში მივიღებთ ორწევრა ციკლს (α_1, α_2), მეორე შემთხვევაში, თუ S ჩასმას α_3 გადაჰყავს α_1-ში, მივიღებთ სამწევრა ციკლს ($\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3$). თუ S ჩასმა α_3-ს გადაიყვანს α_4-ში, რომელიც განსხვავებულია α_1-გან, მივიღებთ უფრო მაღალი რიგის ციკლს და ა. შ. რადგან 1, 2,..., n ციფრთა სიმრავლე სასრულია ჩვენ მივალთ ისეთ α_k ინდექსზე, რომელიც მოცემული ჩასმით გადავა α_1-ში, და მივიღებთ k-წევრა ციკლს ($\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_k$), სადაც $1 \leqslant k \leqslant n$.

თუ ახლა α_1, α_2, ..., α_k ამოწურავს ყველა 1, 2, ..., n ციფრს, ე. ი. თუ $k=n$, მაშინ ჩვენი ჩასმა ასე წარმოგვიდგება ციკლის სახით:

$$S=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ldots \alpha_n).$$

თუ α_1, α_2, ..., α_k ინდექსები არ ამოწურავს 1, 2, ..., n რიცხვებს, მაშინ იარსებებს ისეთი β_1 ინდექსი, რომელიც არ შედის α_1, α_2, ..., α_k ინდექსებში. გავიმეოროთ ანალოგიური მსჯელობა β_1 ინდექსისათვის და მივიღებთ ციკლს (β_1, β_2, ..., β_e). თუ ახლა α_1, α_2, ..., α_k, β_1, β_2, ..., β_e ინდექსები ამოწურავს 1, 2, ..., n ციფრებს, მაშინ ჩვენი ჩასმა წარმოგვიდგება შემდეგი ორი ციკლის ნამრავლად:

$$S=(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_k)(\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_e);$$

თუ აღნიშნული ინდექსები არ ამოწურავს 1, 2, ..., n ციფრებს, ამ პროცესს განვაგრძობთ მანამ, სანამ არ მივიღებთ მოცემული ჩასმის სრულ დაშლას ციკლთა ნამრავლად და ამით ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია.

რადგან ყოველი ციკლი წარმოადგენს ჩასმას, ამიტომ მათი გამრავლება ხდება ჩასმების გამრავლების წესით. შევნიშნოთ, რომ ორი n-ური ხარისხის დამოუკიდებელი ციკლის ნამრავლი არ არის დამოკიდებული თანამამრავლთა რიგზე.

მაგალითები. განვიხილოთ ჩასმა

$$S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&5&3&4&7&6&1\end{pmatrix}.$$

როგორც ვხედავთ, მოცემული S ჩასმით $1\to 2\to 8\to 1$. ამრიგად ვღებულობთ ციკლს (128). ახლა ავიღოთ ციფრი, რომელიც ამ ციკლში არ შედის, მაგალითად 3. ვხედავთ, რომ მოცემული ჩასმით $3\to 5\to 4\to 3$. ამრიგად ვღებულობთ მეორე ციკლს (354).

ახლა ავიღოთ ციფრი, რომელიც მიღებულ ორ ციკლში არ შედის, მაგალითად 6. ვხედავთ, რომ მოცემული ჩასმით $6\to 7\to 6$. ამრიგად ვღებულობთ მესამე ციკლს (67). მაშასადამე, ჩვენი S ჩასმა დაიშალა შემდეგი სამი ციკლის ნამრავლად:

$$S=(128)(354)(67).$$

განვიხილოთ კიდევ ჩასმა

$$S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&1&4&6&5&7\end{pmatrix}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ის დაიშლება შემდეგი სახის ციკლების ნამრავლად:

$$S=(123)(4)(56)(7).$$

ერთეულოვანი, ანუ იგივური, ჩასმა

$$e=\begin{pmatrix}1&2&\dots n\\1&2&\dots n\end{pmatrix}$$

წარმოგვიდგება როგორც ერთწევრა ციკლების ნამრავლი:

$$e=(1)(2)\dots(n)$$

რადგან ერთწევრა ციკლები არის იგივე ერთეულოვანი ჩასმა, ამიტომ ჩასმის ციკლებად დაშლისას ერთწევრა ციკლები შეიძლება არ დავწეროთ, ე. ი.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&1&4&6&5&7\end{pmatrix}=(123)(56).$$

განვიხილოთ ახლა ციკლებად დაშლილი ჩასმების გამრავლება. ვთქვათ, საჭიროა შევადგინოთ ნამრავლი ორი ჩასმისა:

$$S=(356)(142) \text{ და } T=(17245)\ (63).$$

ვიწყებთ S ჩასმის ნებისმიერი ციფრიდან, მაგალითად 3-დან. S ჩასმით $3\to 5$, ხოლო T ჩასმით $5\to 1$. მაშასადამე, $S\cdot T$ ჩასმით $3\to 1$; ვწერთ

(31...). შემდეგ S ჩასმით $1 \to 4$, ხოლო T ჩასმით $4 \to 5$. მაშასადამე, $S \cdot T$ ჩასმით $1 \to 5$. ვწერთ (315...) შემდეგ S ჩასმით $5 \to 6$, ხოლო T ჩასმით $6 \to 3$. მაშასადამე, $S \cdot T$ ჩასმით $5 \to 3$, ე. ი. მივიღეთ ციკლი (315). შემდეგ დავიწყებთ S ჩასმის სხვა რომელიმე ციფრიდან, რომელიც არ შედის (315) ციკლში, მაგალითად 7-დან. S ჩასმით 7 გადადის ისევ 7-ში, ხოლო T ჩასმით $7 \to 2$ და ა. შ. თუ მსჯელობას ჩავატარებთ ისე, როგორც ზემოთ, და ერთწევრიან ციკლებს მხედველობაში არ მივიღებთ, გვექნება:

$$S \cdot T = (315)(27).$$

ადვილად შემოწმდება, რომ ყოველი k სიგრძის ციკლის k ხარისხი, ე. ი. თავის თავზე k-ჯერ ნამრავლი მოგვცემს ერთეულოვან ჩასმას. მაგალითად,

$$(123)^3 = (123)(123)(123) = (1)(2)(3) = e.$$

ახლა განვიხილოთ ჩასმის ლუწკენტოვნების განსაზღვრის კიდევ სხვა ხერხები.

ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ ნებისმიერი a ჩასმა ლუწკენტოვნების შეუცვლელად შეგვიძლია დავიყვანოთ ნორმალურ სახემდე

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

მიღებულ ჩასმას კი 1, 2, ..., n ინდექსების ნორმალური გადანაცვლება გადაჰყავს $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ გადანაცვლებაში. როგორც ვიცით, ყოველი ტრანსპოზიცია α და β ელემენტებისა შეიძლება დავწეროთ ჩასმის სახით:

$$\begin{pmatrix} \dots\alpha\dots\beta\dots \\ \dots\beta\dots\alpha\dots \end{pmatrix} = (\alpha\beta), \tag{7}$$

სადაც წერტილებით აღნიშნულია ადგილზე დარჩენილი ელემენტები. (6) ნორმალური ჩასმის მეორე სტრიქონზე $(\alpha\beta)$ ტრანსპოზიციის გამოყენება ტოლძალოვანია (6) ჩასმის (7) ჩასმაზე მარჯვნიდან გამრავლებისა.

ცხადია, რომ n-ელემენტიანი ყოველი გადანაცვლება შეიძლება მივიღოთ 1, 2, ..., n ნორმალური გადანაცვლებიდან სასრული რაოდენობის ტრანსპოზიციათა გარკვეული თანამიმდევრობით მოხდენის შედეგად, ამიტომ ყოველი ჩასმა შეიძლება მივიღოთ ერთეულოვანი ჩასმისაგან მის მეორე სტრიქონზე სასრული რაოდენობის ტრანსპოზიციათა გარკვეული თანამიმდევრობის მოხდენის შედეგად, ე. ი. ყოველი ჩასმა შეიძლება მივიღოთ ერთეულოვანი ჩასმისაგან (7) სახის ჩასმებზე გამრა-

ვლებით. რადგან ერთეულოვან ჩასმაზე გამრავლებით ჩასმა არ იცვლება, ზემოთ ნათქვამიდან ვღებულობთ შემდეგ საინტერესო შედეგს: **ყოველი ჩასმა შეიძლება წარმოვიდგინოთ გარკვეული რაოდენობის ტრანსპოზიციების (მეორე რიგის ციკლების) ნამრავლად.**

ახლა, ვინაიდან ყოველი ლუწი (კენტი) გადანაცვლება მიიღება შესაბამისი ნორმალური გადანაცვლებიდან ლუწი (კენტი) რაოდენობის ტრანსპოზიციის მოხდენით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **ყოველი ლუწი ჩასმა (გარდა ერთეულოვანისა) დაიშლება ლუწი რაოდენობის მეორე რიგის ციკლების ნამრავლად.**

აქედან ჩანს, რომ **ყოველი ორი ლუწი ჩასმის ნამრავლი ისევ ლუწი ჩასმაა.** თუ ახლა ვიგულისხმებთ, რომ (6) ნორმალური ჩასმის მეორე სტრიქონი მიიღება 1, 2, ..., n ნორმალური გადანაცვლებიდან თანამიმდევრობით მოხდენილი σ_1, σ_2, ..., σ_k ტრანსპოზიციების შედეგად, მაშინ (6) ჩასმა წარმოგვიდგება აღნიშნული ციკლების ნამრავლის სახით, ე. ი.

$$a=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots,\ \sigma_k. \tag{8}$$

ამრიგად, ყოველი a ჩასმის ლუწოვნება ემთხვევა k-ს ლუწოვნებას.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ მოცემული ჩასმის წარმოდგენა (8) სახით ერთადერთი არაა.

მართლაც, როგორც ვიცით, ყოველი მეორე რიგის $\sigma=(\alpha,\ \beta)$ ციკლის კვადრატი ერთეულოვანი ჩასმაა, ე. ი.

$$\sigma^2=(\sigma,\ \beta)(\alpha,\ \beta)=(\alpha)(\beta)=e.$$

და რადგან ჩასმა ერთეულოვან ჩასმაზე გამრავლებით არ იცვლება, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a=\sigma^2\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_k=(\alpha\beta)(\alpha\beta)\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_k.$$

ამრიგად, ერთი და იგივე ჩასმა შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა რაოდენობის ტრანსპოზიციების (მეორე რიგის ციკლების) ნამრავლად ისე, რომ ყოველ წარმოდგენაში მეორე რიგის ციკლების რაოდენობა ერთმანეთისაგან, შესაძლებელია, განსხვავდებოდეს მხოლოდ ლუწი რიცხვით.

განვიხილოთ მაგალითი.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

ჩასმა კენტია, ინვერსიების რიცხვი უდრის 7, ამ ჩასმის საშუალებით ჩვენ 1, 2, 3, 4, 5 გადანაცვლებიდან გადავდივართ 4, 3, 2, 5, 1 გადანაცვლებაზე. ეს გადასვლა, როგორც ამას ადვილად დავინახავთ, შეიძლება

შევასრულოთ შემდეგი სამი თანამიმდევნო (1, 4), (2, 3) და (1, 5) ტრანსპოზიციის საშუალებით. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)(1\ 5).$$

იგივე ჩასმა კიდევ შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)\ (1\ 3)\ (1\ 4)\ (4\ 3)\ (4\ 2)\ (2\ 3)\ (1\ 5).$$

ორივე შემთხვევაში ტრანსპოზიციების, ანუ მეორე რიგის ციკლების, რიცხვი კენტია მიუხედავად იმისა, რომ მათი რიცხვი სხვადასხვაა.

ციკლების გამრავლების წესით ადვილად შემოწმდება, რომ ყოველი k სიგრძის ციკლი $(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\alpha_k)$ უდრის $k-1$ რაოდენობის $(\alpha_1\ \alpha_2)$, $(\alpha_1\ \alpha_3), \ldots, (\alpha_1\ \alpha_k)$ ტრანსპოზიციების ან, რაც იგივეა, მეორე რიგის ციკლების ნამრავლს, ე. ი.

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k) = (\alpha_1\ \alpha_2)(\alpha_1\ \alpha_3)\ldots(\alpha_1\alpha_k). \tag{7}$$

აქედან გამოდის, რომ ყოველი k სიგრძის ციკლი იქნება ლუწი, როცა k კენტია და — კენტი, როცა k ლუწია.

მაგალითად: (13), (15), (18) ტრანსპოზიციების გამრავლებით მივიღებთ (1358) მეოთხე რიგის ციკლს

$$(1358) = (13)(15)(18).$$

ან, რაც იგივეა, ჩასმა $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ კენტია.

ახლა, ზემოთ დამტკიცებული თეორემისა — ყოველი ჩასმა შეიძლება დაიშალოს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი ციკლების ნამრავლად და ციკლებისათვის ახლა მიღებული თვისების გაერთიანებით მივიღებთ შემდეგ თეორემას.

თეორემა. ყოველი ჩასმა შეიძლება დაიშალოს მეორე რიგის ციკლთა ნამრავლად.

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ **ყოველი ლუწი ჩასმა დაიშლება ლუწი რაოდენობის მეორე რიგის ციკლთა ნამრავლად, ხოლო ყოველი კენტი ჩასმა — კენტი რაოდენობის მეორე რიგის ციკლთა ნამრავლად.**

ვთქვათ, მოცემულია n-ელემენტიანი ნებისმიერი a ჩასმა. r-ით აღვნიშნოთ მოცემული ჩასმის დაშლაში დამოუკიდებელი ციკლების რაოდენობის და ადგილზე მყოფ ელემენტთა რაოდენობის ჯამი. $n-r$ სხვაობას ეწოდება ჩასმის **დეკრემენტი**.

თეორემა. ჩასმის ლუწკენტოვნება ემთხვევა მოცემული ჩასმის დეკრემენტს.

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული n-ინდექსიანი ჩასმა წარმოადგენს r რაოდენობის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი $c_1, c_2, \ldots, c_r$ ციკლების ნამრავლს, ე. ი.

$$a=c_1 \cdot c_2 \ldots c_r. \tag{9}$$

ყოველ $c_i (i=1, 2, \ldots, r)$ ციკლში შემავალი ელემენტების რიცხვი აღვნიშნოთ n_i-ით; ცხადია, რომ $n_1+n_2+\ldots+n_r=n$, ვინაიდან ყოველი n_i სიგრძის ციკლი წარმოადგენს n_i-1 რაოდენობის ტრანსპოზიციათა ნამრავლს. (9) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ a ჩასმა შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_r-1)=n-r$$

რაოდენობის ტრანსპოზიციათა (მეორე რიგის ციკლთა) ნამრავლის სახით. თუ ახლა მოვიგონებთ ზემოთ დამტკიცებულ დებულებას: ჩასმის ლუწკენტოვნება თანხვდენილია მოცემული ჩასმის მეორე რიგის ციკლებად დაშლაში ციკლთა რაოდენობის ლუწკენტოვნებისა, მაშინ თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოცემულია ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}=(156)\ (38)\ (47)\ (2),$$

სადაც $n=8, r=4$, დეკრემენტი $n-r=4$ ლუწი რიცხვია. ამიტომ მოცემული ჩასმა ლუწია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ჩასმის ინვერსიების რიცხვი უდრის 18.

როგორც აღვნიშნეთ, განხილული საკითხების ნაწილს გამოვიყენებთ შემდეგ პარაგრაფში n-ური რიგის დეტერმინანტის შესწავლის დროს. საჭიროა ვიცოდეთ, რომ n-ური ხარისხის ჩასმათა სიმრავლე წარმოადგენს სასრული $n!$ რიგის ჯგუფის მაგალითს (გვ. 134), რომელიც დიდ როლს ასრულებს ჯგუფთა თეორიის — კერძოდ, მაღალი რიგის ალგებრულ განტოლებათა რადიკალებში ამოხსნადობასთან დაკავშირებული საკითხების — შესწავლის საქმეში.

§3. n-ური რიგის დეტერმინანტი და მისი ძირითადი თვისებები

ვთქვათ, მოცემულია a_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ რიცხვებისაგან შედგენილი n-ური რიგის მატრიცა

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

a_{ij} რიცხვებს ეწოდებათ მატრიცის ელემენტები. მოცემული მატრიცის ელემენტებისაგან შევადგინოთ შემდეგი სახის

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{2}$$

ყველა შესაძლო ნამრავლი (წევრი), რომელთა პირველი ინდექსები (სტრიქონების ნომრები) დალაგებულია ნორმალურად, ხოლო მეორე ინდექსები (სვეტების ნომრები) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ არის $1, 2, \ldots, n$ რიცხვთა რაიმე გადანაცვლება. რადგან n ელემენტისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო გადანაცვლების რიცხვი უდრის $n!$, ამიტომ მოცემული მატრიცისაგან მიიღება სულ $n!$ რაოდენობის (2) სახის წევრი. თუ დავაკვირდებით შევნიშნავთ, რომ (2) სახის ყველა წევრში არის მოცემული მატრიცის სხვადასხვა სტრიქონისაგან და სხვადასხვა სვეტისაგან აღებული n ელემენტის ნამრავლი. ჩასმას

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

ვუწოდოთ (2) წევრის შესაბამისი ჩასმა. ვიცით, რომ (3) ჩასმის ლუწკენტოვნება იგივეა, რაც

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{4}$$

გადანაცვლების ლუწკენტოვნება.

განვიხილოთ (2) სახის ყველა შესაძლო $n!$ რაოდენობის წევრთა ალგებრული ჯამი; ის წევრები, რომელთა შესაბამისი ჩასმა ლუწია, ავიღოთ თავისივე ნიშნით, ხოლო ის წევრები, რომელთა შესაბამისი ჩასმა კენტია, ავიღოთ შებრუნებული ნიშნით. ამ ალგებრულ ჯამს ეწოდება მოცემული მატრიცის **დეტერმინანტი**.

ამრიგად, მოცემული n-ური რიგის A მატრიცის **დეტერმინანტი ეწოდება $n!$ რაოდენობის, შესაბამისი ნიშნით აღებულ (2) სახის წევრთა ალგებრულ ჯამს.** მოცემული n-ური რიგის მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი აღინიშნება ასე:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

ამ (5) დეტერმინანტს, რომელსაც გააჩნია n სტრიქონი და n სვეტი, ეწოდება n-ური რიგის დეტერმინანტი, ხოლო (2) წევრს, რომლის ნიშანი განისაზღვრება (4) გადანაცვლების ლუწკენტოვნებით, ეწოდება (5) დეტერმინანტის ზოგადი წევრი.

შემდეგისათვის მატრიცის დეტერმინანტი აღვნიშნოთ d ასოთი. ვინაიდან n ელემენტისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო $n!$ რაოდენო-

ბის გადანაცვლების ლუწ გადანაცვლებათა რიცხვი უდრის კენტ გადანაცვლებათა რიცხვს $\left(\text{სახელდობრ } \frac{n!}{2}\right)$, ამიტომ n-ური რიგის დეტერმინანტის განსაზღვრიდან მივიღებთ, რომ (5) სახის n-ური რიგის დეტერმინანტს აქვს სულ $n!$ რაოდენობის (2) სახის წევრი, რომელთაგან ნახევარი, ე. ი. $\frac{n!}{2}$ რაოდენობის წევრი, იქნება თავისივე ნიშნით, ხოლო ნახევარი—შებრუნებული ნიშნით.

მე-2 და მე-3 რიგის დეტერმინანტები. ვთქვათ, მოცემულია მე-2 რიგის მატრიცის

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

შესაბამისი

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი. მოცემული მე-2 რიგის დეტერმინანტის ზოგადი წევრი იქნება $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2}$, ხოლო შესაბამისი გადანაცვლება კი იქნება $\alpha_1 \alpha_2$, სადაც $\alpha_1 \alpha_2$ არის 1 2 რიცხვთა რაღაც გადანაცვლება. განმარტების თანახმად, მოცემული მე-2 რიგის მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს სულ ექნება $2!=2$ წევრი. ერთ მათგანს $a_{11}a_{22}$, ვინაიდან მეორე ინდექსებისაგან შედგენილი 1 2 გადანაცვლება ლუწია, ექნება თავისივე ნიშანი, ხოლო $a_{12}a_{21}$ წევრს, რადგან მისი მეორე ინდექსებისაგან შედგენილი გადანაცვლება 2 1 კენტია, დეტერმინანტში ექნება შებრუნებული ნიშანი. მაშასადამე, $a_{11}\,a_{22}$ და $-a_{12}\,a_{21}$ წევრთა ალგებრული ჯამი იქნება მოცემული მე-2 რიგის მატრიცის დეტერმინანტი, ე. ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{6}$$

(6) ტოლობის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ მე-2 რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის შემდეგი წესი: დეტერმინანტის მნიშვნელობა ტოლია პირველი დიაგონალის ელემენტთა ნამრავლს გამოკლებული მეორე დიაგონალის ელემენტების ნამრავლი. მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 4-2(-3)=18.$$

ახლა განვიხილოთ მოცემული მე-3 რიგის $A=(a_{ij})$ $(i,\ j=1, 2, 3)$ მატრიცის შესაბამისი მე-3 რიგის დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

მოცემული მე-3 რიგის დეტერმინანტის ზოგადი წევრი იქნება

$$a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2}\ a_{3\alpha_3}, \tag{8}$$

ხოლო შესაბამისი გადანაცვლება კი იქნება α_1, α_2, α_3, სადაც $\alpha_1\ \ \alpha_2\ \alpha_3$ არის 1 2 3 რიცხვთა რაღაც გადანაცვლება. განმარტების თანახმად, მოცემულ მე-3 რიგის დეტერმინანტს ექნება სულ (8) სახის $3!=6$ წევრი, რომელთაგან 3-ს ექნება თავისივე (დადებითი) ნიშანი სამს კი შებრუნებული (უარყოფითი) ნიშანი. იმ წევრებს ექნება თავისივე ნიშნები, რომელთა შესაბამისი გადანაცვლება ლუწია, ხოლო იმ წევრებს ექნება შებრუნებული ნიშანი, რომელთა შესაბამისი გადანაცვლება კენტია. მაგალითად, მე-3 რიგის დეტერმინანტის $a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$ წევრს, ვინაიდან მეორე ინდექსებისაგან შედგენილი შესაბამისი გადანაცვლება 3 1 2 ლუწია, დეტერმინანტში ექნება თავისივე ნიშანი, ხოლო $a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$ წევრს, ვინაიდან შესაბამისი გადანაცვლება 2 1 3 კენტია, დეტერმინანტში ექნება შებრუნებული ნიშანი.

ახლა შეგვიძლია ამოვწეროთ მოცემული მე-3 რიგის დეტერმინანტის ექვსივე წევრი შესაბამისი ნიშნებით. გვექნება:

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}, \qquad a_{12}\ a_{23}\ a_{31}, \qquad a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$$

$$-a_{13}\ a_{22}\ a_{31}, \quad -a_{12}\ a_{21}\ a_{33}, \quad -a_{11}\ a_{23}\ a_{32}.$$

განმარტების თანახად, ამ წევრთა ალგებრული ჯამი იქნება მოცემული მე-3 რიგის დეტერმინანტი, ე. ი.

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

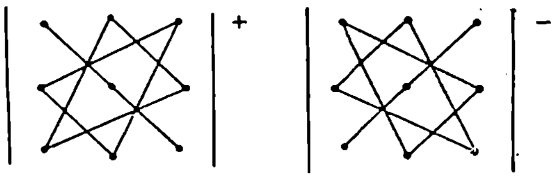
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{9}$$

ახლა გავარკვიოთ როგორ მიიღება ეს დეტერმინანტი მესამე რიგის მატრიცისაგან. როგორც ვხედავთ, (9) დეტერმინანტი შედგება ექვსი წევრისაგან; პირველ სამ წევრს აქვს დადებითი ნიშანი, ხოლო დანარჩენ სამს კი — უარყოფითი ნიშანი.

დადებითნიშნიანი სამი წევრიდან ერთი წარმოადგენს მესამე რიგის მატრიცის მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლს, დანარჩენი ორი კი მიიღება შესაბამისად მთავარი დიაგონალის პარალელზე და მოპირდაპირე წვეროზე მოთავსებული ელემენტების გამრავლებით. უარყოფითნიშნიანი დანარჩენი სამი წევრი კი მიიღება ამავე წესით მეორე დიაგონალის მეშვეობით.

მიღებული ექვსი წევრის ჯამი მოგვცემს (9) დეტერმინანტს. ამ დეტერმინანტს, რადგან მისი მიღება დაკავშირებულია მესამე რიგის მატრიცასთან, ეწოდება **მესამე რიგის დეტერმინანტი.**

მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის ზემოთ მიღებული წესის დამახსოვრებისათვის განვიხილოთ შემდეგი სქემა:



პირველი სქემით ვღებულობთ დადებითნიშნიან წევრებს, ხოლო მეორე სქემით — უარყოფითნიშნიან წევრებს. მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის ამ წესს ხშირად **სამკუთხედის წესს** უწოდებენ.

მაგალითი 1′.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot(-1)+(-1)\cdot1\cdot3+0\cdot2\cdot2-2\cdot3\cdot3-$$

$$-0\cdot(-1)\cdot(-1)-2\cdot1\cdot2=-25.$$

განვიხილოთ მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის **სარრუსის** წესი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: მესამე რიგის მატრიცას პირველი ორი სტრიქონი მივუწეროთ ქვემოთ უცვლელად, მივიღებთ:

$$\begin{array}{rccccl} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ - & a_{31} & a_{32} & a_{33} & + \\ - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \end{array}$$

სამი წევრი, რომელიც მიიღება მთავარი დიაგონალისა და მისი პარალელური ორი დიაგონალის ელემენტების გამრავლებით, ავიღოთ თავისი ნიშნით, ხოლო დანარჩენი სამი წევრი კი, რომელიც ანალოგიურად მიიღება მეორე დიაგონალის მიმართ, ავიღოთ შებრუნებული ნიშნით. მიღებული ექვსი წევრის ალგებრული ჯამი მოგვცემს მესამე რიგის დეტერმინანტს.

შეიძლებოდა მესამე რიგის მატრიცის პირველი ორი სვეტი მიგვეწერა მარჯვნით უცვლელად, მივიღებდით მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის ანალოგიურ წესს.

მაგალითი 1. გამოვითვალოთ დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

პირველი ორი სვეტის მარჯვნივ მიწერით გვექნება:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & -5 & 3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow \; \searrow & \searrow & \searrow \\ - & - & - \quad + & + & + \end{array}$$

მივიღებთ:

$$d=2\cdot3(-2)+(-5)(-5)\cdot5+3\cdot4\cdot4-5\cdot3\cdot3-4\cdot(-5)\cdot2-$$
$$-(-2)\cdot4\cdot(-5)=116.$$

მაგალითი 2. მე-5 რიგის დეტერმინანტში ვიპოვოთ $a_{31}\ a_{24}\ a_{12}\ a_{45}\ a_{54}$ წევრის ნიშანი.

სიმარტივისათვის ეს წევრი ასე გადავწეროთ:

$$a_{31}a_{24}a_{12}a_{53}a_{45}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}.$$

განვიხილოთ მეორე ინდექსებისაგან შედგენილი 2 4 1 5 3 გადანაცვლების ლუწკენტოვნება. ეს გადანაცვლება ლუწია; ინვერსიათა რიცხვი უდრის 4-ს, ამიტომ მოცემულ წევრს მე-5 რიგის დეტერმინანტში ექნება თავისივე (დადებითი) ნიშანი. მაგალითად, $a_{11}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{15}\ a_{63}$ წევრს დეტერმინანტში ექნება შებრუნებული (უარყოფითი) ნიშანი.

მაგალითი 3. ამოვწეროთ მე-4 რიგის დეტერმინანტის ყველა წევრი, რომელიც a_{21} მამრავლს შეიცავს. ამ მიზნით დავწეროთ მე-4 რიგის დეტერმინანტის ზოგადი წევრი, რომელშიც a_{21} ელემენტი მამრავლად შედის. გვექნება:

$$a_{1\alpha_1}a_{21}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4},$$

სადაც α_1, α_3, α_4 არის გარკვეული გადანაცვლება 2 3 4 რიცხვებისაგან. ვინაიდან ამ სამი ელემენტისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო გადანაცვლებაა 2 3 4, 2 4 3, 3 2 4, 3 4 2, 4 2 3, 4 3 2, ამიტომ მეოთხე რიგის დეტერმინანტში სულ იქნება შემდეგი 6 წევრი:

$$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44},\quad a_{12}a_{21}a_{34}a_{43},\quad a_{13}a_{21}a_{32}a_{44},\quad -a_{13}a_{21}a_{34}a_{42},$$
$$-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43},\quad a_{14}a_{21}a_{33}a_{42},$$

რომლებშიც მონაწილეობს a_{21} მამრავლი.

ამრიგად, ჩვენ ვიცით მე-2 და მე-3 რიგის დეტერმინანტების გამოთვლა. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ მაღალი რიგის დეტერმინანტები წინასწარ გავეცნოთ n-ური რიგის დეტერმინანტთა თვისებებს.

n-ური რიგის დეტერმინანტის თვისებები. ისეთ მატრიცას, რომელიც მიიღება მოცემული A მატრიცის სტრიქონებისა და სვეტების ადგილების ურთიერთშეცვლით, ნომრების შეუცვლელად, ეწოდება მოცემული A მატრიცის ტ რ ა ნ ს პ ო ნ ი რ ე ბ უ ლ ი მატრიცა და აღინიშნება A' სიმბოლოთი. ამრიგად, მოცემული (1) მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა იქნება:

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

ანალოგიურად განიმარტება მოცემული (5) დეტერმინანტის ტრანსპონირებული დეტერმინანტი, ე. ი.

$$d'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{10'}$$

თვისება 1. მოცემული დეტერმინანტის მნიშვნელობა ტრანსპონირების შედეგად არ იცვლება.

მ ა რ თ ლ ა ც, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული (5) დეტერმინანტის ტრანსპონირების შედეგად მისი (2) ზოგადი წევრი გადავა ტრანსპონირებული დეტერმინანტის შემდეგ წევრში:

$$a_{\alpha_1 1}\, a_{\alpha_2 2} \,\cdots\, a_{\alpha_n n}, \tag{11}$$

რომლის ნიშანი განისაზღვრება

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{12}$$

ჩასმით. ცხადია, (11) წევრი, რადგან მისი ელემენტები აღებულია მოცემული დეტერმინანტის სხვადასხვა სტრიქონიდან და სხვადასხვა სვეტიდან, იქნება ამავე დროს მოცემული (5) დეტერმინანტის გარკვეული წევრი. ახლა, ვინაიდან (11) და (2) წევრების შესაბამისი (12) და (3) ჩასმები ერთისა და იმავე ლუწკენტოვნებისაა, ამიტომ ამ წევრებს ექნებათ ერთნაირი ნიშნები. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული დეტერმინანტი და მისი ტრანსპონირებული დეტერმინანტი არის ერთნაირნიშნიანი, ერთისა და იმავე წევრების ალგებრული ჯამი, ე. ი. $d=d'$. დამტკიცებული თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ დეტერმი-

ნანტის სტრიქონები და სვეტები ტოლფასია, ე. ი. ყოველი თვისება, რომელიც მართებულია სტრიქონებისათვის, მართებული იქნება აგრეთვე სვეტებისათვისაც, ამიტომ დეტერმინანტის ყოველ თვისებას შემდეგში ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ მხოლოდ სტრიქონებისათვის.

თვისება 2. თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონის ადგილების ურთიერთშეცვლას მოვახდენთ, ამით დეტერმინანტს ნიშანი შეეცვლება.

მართლაც, თუ მოცემული (5) დეტერმინანტის i და k სტრიქონების, სადაც $i<k$, ადგილების ურთიერთშეცვლას მოვახდენთ, ადვილად შევნიშნავთ, რომ მოცემული (5) დეტერმინანტის ზოგადი წევრი

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{k\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{13}$$

რომლის ნიშანი განისაზღვრება

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & i \dots & k \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_i \dots & \alpha_k \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

ჩასმით, რადგან i და k სტრიქონების ადგილების ურთიერთშეცვლის შემდეგ სვეტები არ შეიცვლება, გადავა მოცემული დეტერმინანტის შემდეგ წევრში:

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \dots a_{k\alpha_i} \dots a_{i\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{15}$$

რომლის ნიშანი განისაზღვრება

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots k & \dots i & \dots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_i & \dots \alpha_k & \dots \alpha_n \end{pmatrix} \tag{16}$$

ჩასმით. რადგან (16) ჩასმა მიიღება (14) ჩასმიდან, მხოლოდ პირველ სტრიქონში i და k ინდექსთა ტრანსპოზიციით, ამიტომ ისინი სხვადასხვა ლუწკენტოვნებისაა; ეს იმას ნიშნავს, რომ (15) წევრს (13) წევრის შებრუნებული ნიშანი აქვს. ამრიგად, დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონის ადგილების ურთიერთშეცვლით დეტერმინანტის ყოველი წევრი იცვლის ნიშანს, ე. ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

შედეგი. თუ დეტერმინანტს ორი ერთნაირი სტრიქონი აქვს, მაშინ იგი უდრის ნულს.

მ ა რ თ ლ ა ც, მოვახდინოთ ამ ერთნაირი სტრიქონების ადგილების ურთიერთშეცვლა. მე-2 თვისების თანახმად, მოცემულ d დეტერმინანტს უნდა შეეცვალოს ნიშანი, ე. ი. მივიღებთ $-d$ დეტერმინანტს. მაგრამ, რადგან ეს სტრიქონები ერთნაირია, ამიტომ ამ სტრიქონების შეცვლით დეტერმინანტი არ შეიცვლება, ე. ი. $d=-d$, საიდანაც $2d=0$, $d=0$.

თვისება 8. თუ d დეტერმინანტის i სტრიქონის ყველა ელემენტი წარმოდგენილია ორი შესაკრების ჯამად:

$$a_{ij}=\lambda b_{ij}+\mu c_{ij} \quad (j=1,\ 2,\dots,\ n), \tag{18}$$

სადაც λ და μ გარკვეული რიცხვებია, მაშინ d დეტერმინანტი დაიშლება შემდეგი სახის ორი დეტერმინანტის ჯამად:

$$d=\lambda d_1+\mu d_2. \tag{19}$$

ამასთანავე, ამ d_1 და d_2 დეტერმინანტების ყველა სტრიქონი, გარდა i სტრიქონისა, ისეთივეა როგორიც d დეტერმინანტისა, ხოლო i სტრიქონში შესაბამისად იქნება b_{ij} და c_{ij} რიცხვები.

მ ა რ თ ლ ა ც, მოცემული (5) დეტერმინანტის (2) ზოგადი წევრი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n}=a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots(\lambda b_{i\alpha_i}+\mu c_{i\alpha_i})\dots a_{n\alpha_n}=$$
$$=\lambda a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots b_{i\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n}+\mu a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots c_{i\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n}.$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ შესაბამისი ნიშნით აღებული, პირველი შესაკრების სახის წევრთა ალგებრული ჯამი, თუ ფრჩხილებს გარეთ λ-ს გამოვიტანთ, ფრჩხილებში მოგვცემს d_1 დეტერმინანტს. ანალოგიურად, მეორე შესაკრების სახის წევრთა ალგებრული ჯამი, თუ μ-ს ფრჩხილებს გარეთ გამოვიტანთ, ფრჩხილებში მოგვცემს d_2 დეტერმინანტს, ე. ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda b_{i1}+\mu c_{i1} & \lambda b_{i2}+\mu c_{i2} & \dots & \lambda b_{in}+\mu c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ დეტერმინანტის რომელიმე i სტრიქონის ელემენტები წარმოდგენილია (18) ტოლობის სახით, მაშინ i სტრიქონის a_{ij} ელემენტს b_{ij} და c_{ij} ($j=1, 2, \dots n$) ელემენტთა **წრფივი კომბინაცია** ეწოდება. ანალოგიურად, (19) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ d' დეტერმინანტი d_1 და d_2 დეტერმინანტთა წრფივი კომბინაციაა. ამიტომ ამ თვისებას ხშირად დეტერმინანტის **წრფივობის თვისება** ეწოდება.

დეტერმინანტის ეს თვისება ადვილად მიიღება ზოგად შემთხვევაშიც, ე. ი. თუ i სტრიქონის ყოველი a_{ij} ელემენტი, შესაბამისად, წრფივი კომბინაციაა $b_{ij}, c_{ij}, \dots, d_{ij}$ ($j=1, 2, \dots, n$) ელემენტებისა, ე. ი.

$$a_{ij}=\lambda_1 b_{ij}+\lambda_2 c_{ij}+\dots+\lambda_m d_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

მაშინ

$$d=\lambda_1 d_1+\lambda_2 d_2+\dots+\lambda_m d_m. \tag{21}$$

განვიხილოთ ამ თვისებიდან გამომდინარე ზოგიერთი შედეგი.

შედეგი 1. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტი შეიცავს საერთო მამრავლს, შეიძლება ის დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ გამოვიტანოთ.

მართლაც, ვთქვათ, $a_{ij}=kb_{ij}$ ($j=1, 2 \dots n$), მაშინ (19) ტოლობიდან რადგან $\mu=0$, მივიღებთ:

$$d=kd_1.$$

შედეგი 2. თუ დეტერმინანტის რომელიმე i სტრიქონის ყველა ელემენტი ნულია, მაშინ დეტერმინანტი უდრის ნულს. მ ა რ თ ლ ა ც ვიგულისხმოთ, რომ i სტრიქონის ყველა ელემენტის საერთო მამრავლი k არის ნული. პირველი შედეგის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$d=0\cdot d_1=0.$$

შედეგი 3. თუ d დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონი პროპორციულია, მაშინ დეტერმინანტი უდრის ნულს.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემული d დეტერმინანტის i სტრიქონისა და s სტრიქონის ელემენტები პროპორციულია, ე. ი.

$$a_{ij}=ka_{sj} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

ამ შემთხვევაში, თანახმად პირველი შედეგისა, დავწერთ:

$$d=k\cdot d_1,$$

სადაც d_1 დეტერმინანტი ნულია, რადგან მას i და s სტრიქონები ერთნაირი აქვს.

შედეგი 4. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონს მივუმატებთ სხვა რომელიმე სტრიქონს გამრავლებულს რაიმე რიცხვზე, ამით დეტერმინანტი არ შეიცვლება.

მართლაც, მოცემული d დეტერმინანტის i სტრიქონს დავუმატოთ j სტრიქონი გამრავლებული k-ზე. მიღებული დეტერმინანტი აღვნიშნოთ d^*-თი. თანახმად (20) ტოლობისა, გვექნება:

$$d^* = d + kd_2.$$

აქ მეორე d_2 დეტერმინანტი, ვინაიდან მას ორი i და j სტრიქონი ერთნაირი აქვს, თანახმად მე-2 თვისების შედეგისა, იქნება ნული და მე-3 შედეგი დამტკიცებულია. (21) ტოლობის გამოყენებით შეიძლება ამ შედეგის ადვილად განზოგადება, ე. ი. დეტერმინანტი არ შეიცვლება, თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონს დავუმატებთ მოცემული დეტერმინანტის სხვა სტრიქონთა წრფივ კომბინაციას.

შედეგი 5. თუ მოცემული d დეტერმინანტის რომელიმე i სტრიქონი დანარჩენ სხვა სტრიქონთა წრფივი კომბინაციაა, ე. ი.

$$a_{ij} = k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \dots + k_{i-1} a_{i-1,j} + k_{i+1} a_{i+1,j} + \dots + k_n a_{nj} \tag{22}$$
$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

სადაც k_1, k_2, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ..., k_n გარკვეული რიცხვებია, მაშინ დეტერმინანტი უდრის ნულს.

მართლაც, თანახმად (21) და (22) ტოლობებისა, გვექნება:

$$d = k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_{i-1} d_{i-1} + k_{i+1} d_{i+1} + \dots + k_n d_n \text{ [1]},$$

სადაც d_1, d_2, ..., d_n დეტერმინანტები, ვინაიდან მათ ორი ერთნაირი სტრიქონი აქვთ, ნულია. მაშასადამე, $d = 0$.

შედეგი 6. თუ მოცემული დეტერმინანტის სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. თუ მოინახება ისეთი λ_1, λ_2, ..., λ_n რიცხვები, რომელთაგან ერთი λ_i მაინც არ უდრის ნულს და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots + \lambda_n a_{nj} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{23}$$

მაშინ დეტერმინანტი უდრის ნულს.

მართლაც, ვთქვათ, $\lambda_2 \neq 0$, მაშინ (23) ტოლობიდან გვექნება:

$$a_{2j} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) a_{1j} + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) a_{3j} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_2}\right) a_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

მივიღეთ, რომ მოცემული დეტერმინანტის მეორე სტრიქონი დანარჩენ სტრიქონთა წრფივი კომბინაციაა. ასეთი დეტერმინანტი, თანახმად მე-5 შედეგისა, უდრის ნულს.

მე-3 თვისების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მესამე რიგის დეტერმინანტი

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

---

[1] მაგალითად, d_2 დეტერმინანტი ნულია, ვინაიდან მას ორი (მეორე და i) სტრიქონი ერთნაირი აქვს.

რომლის სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია; ეს იმას ნიშნავს, რომ მოიძებნება სამი ისეთი რიცხვი k_1, k_2, k_3, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, რომ ადგილი აქვთ ტოლობებს:

$k_1a_{11}+k_2a_{21}+k_3a_{31}=0$, $k_1a_{12}+k_2a_{22}+k_3a_{32}=0$, $k_1a_{13}+k_2a_{23}+k_3a_{33}=0$.

ვიგულისხმოთ $k_1\neq 0$, მაშინ მივიღებთ:

$a_{11}=\lambda_1a_{21}+\lambda_2a_{31}$, $a_{12}=\lambda_1a_{22}+\lambda_2a_{32}$, $a_{13}=\lambda_1a_{33}+\lambda_2a_{33}$, სადაც $\lambda_1=-\dfrac{k_2}{k_1}$, $\lambda_2=-\dfrac{k_3}{k_1}$. ამრიგად, პირველი სტრიქონი წრფივი კომბინაციაა მეორე და მესამე სტრიქონებისა, ე. ი. მოცემული დეტერმინანტი ასე გადაიწერება:

$$d=\begin{vmatrix}\lambda_1a_{21}+\lambda_2a_{31} & \lambda_1a_{22}+\lambda_2a_{32} & \lambda_1a_{23}+\lambda_2a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda_1\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\lambda_2\begin{vmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0=0.$$

სასარგებლო იქნება, თუ მკითხველი, რომელიც პირველად სწავლობს უმაღლეს ალგებრას, შეამოწმებს პირველ ორ თვისებასა და შვიდივე შედეგს მე-2 და მე-3 რიგების დეტერმინანტისათვის.

§ 4. მინორები და ალგებრული დამატებანი. დეტერმინანტის დაშლა რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების მიმართ

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n-ური რიგის d დეტერმინანტი. ავიღოთ მთელი რიცხვი k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ და განვიხილოთ მოცემული d დეტერმინანტის რომელიმე k რაოდენობის სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთა. გადაკვეთაში მიღებული ელემენტები მოგვცემს k-ური რიგის მატრიცას, რომლის დეტერმინანტს ეწოდება მოცემული d დეტერმინანტის k-ური რიგის **მინორი**. ამ k სტრიქონისა და k სვეტის ამოშლის შედეგად დარჩენილი ელემენტები კი მოგვცემს $n-k$ რიგის მატრიცას, რომლის დეტერმინანტს ეწოდება მიღებული k-ური რიგის მინორის **დამატებითი მინორი**. M და M' ასოებით შესაბამისად აღვნიშნოთ მოცემული დეტერმინანტის k-ური რიგის მინორი და მისი დამატებითი $n-k$ რიგის მინორი.

შეგვიძლია, პირიქით, M'-ს ვუწოდოთ d დეტერმინანტის $(n-k)$-ური რიგის მინორი, მაშინ M იქნებოდა M'-ის k-ური რიგის დამატებითი მინორი. M და M' მინორებს ამის გამო ხშირად უწოდებენ d დეტერმინანტის ურთიერთდამატებით მინორებს.

ვიგულისხმოთ, რომ M მინორის სტრიქონების ნომრებია $i_1, i_2, \ldots, i_k$, სვეტისა კი $j_1, j_2, \ldots, j_k$. განვიხილოთ ჯამი

$$s_m=i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k. \tag{1}$$

M მინორის ალგებრული დამატება (ან ადიუნქტი) ვუწოდოთ მის M' დამატებით მინორს, აღებულს $(-1)^{s_m}$ ნიშნით, ე. ი. M მინორის ალგებრული დამატება იქნება $(-1)^{s_m}M'$.

მაგალითად, განვიხილოთ, მეხუთე რიგის დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

თუ აქ ამოვშლით სამ სტრიქონს (პირველს, მესამესა და მეხუთეს) და სამ სვეტს (პირველს, მესამესა და მეოთხეს), მივიღებთ მესამე რიგის მინორს

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix},\ \text{რომლის დამატებითი მინორია}\ M'=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

რადგან M მინორის სტრიქონებისა და სვეტების ნომრების ჯამი არის $s_m=1+3+5+1+3+4=17$, ამიტომ M მინორის ალგებრული დამატება იქნება

$$(-1)^{17}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

ლემა. n**-ური რიგის** d **დეტერმინანტის რომელიმე** k**-ური რიგის** M **მინორისა და მისი ალგებრული** $(-1)^{s_m}M'$ **დამატების ნამრავლი მოგვცემს** d **დეტერმინანტის** $k!\ (n-k)!$ **რაოდენობის წევრს ისეთი ნიშნებით, როგორიც მათ აქვთ** d **დეტერმინანტში.**

დამტკიცება. პირველად განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც k-ური რიგის M მინორი მოთავსებულია დეტერმინანტის მარცხენა ზედა კუთხეში

$$d=\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & M & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k\,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hdashline a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & M' & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n\,k+2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|.$$

ამ შემთხვევაში $s_m=(1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k)=2(1+2+\ldots+k)$ ლუწი რიცხვია, ამიტომ M მინორის ალგებრული დამატება იქნება $n-k$ რიგის M' მინორი, მოთავსებული დეტერმინანტის მარჯვენა ქვედა კუთხეში. M მინორის ზოგადი წევრი იქნება

$$a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2}\ldots a_{k\alpha_k}. \tag{3}$$

ამ წევრის ნიშანი განისაზღვრება შემდეგი ჩასმის ლუწკენტოვნებით:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots & k \\ \alpha_1, & \alpha_2\ldots & \alpha_k \end{pmatrix}. \tag{3_1}$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ არის $1, 2,\ldots, k$ ინდექსების რაიმე გადანაცვლება. M' დამატებითი მინორის ან, რაც იგივეა, M მინორის ალგებრული დამატების ზოგადი წევრი კი იქნება

$$a_{k+1\alpha_{k+1}}a_{k+2\alpha_{k+2}}\ldots a_{n\alpha_n}, \tag{4}$$

რომლის ნიშანი განისაზღვრება შემდეგი ჩასმის ლუწკენტოვნებით:

$$\begin{pmatrix} k+1, & k+2, & \ldots, & n \\ \alpha_{k+1}, & \alpha_{k+2}, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{4_1}$$

სადაც $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ არის $k+1, k+2, \ldots, n$ ინდექსების რაიმე გადანაცვლება. როგორც ვიცით, თუ (3_1) ჩასმის ინვერსიების რიცხვი უდრის l, მაშინ M მინორის (3) წევრს ექნება $(-1)^l$ ნიშანი. ანალოგიურად, თუ (4_1) ჩასმის ინვერსიების რიცხვია h, მაშინ M-ის დამატებით M' მინორის (4) წევრს ექნება $(-1)^h$ ნიშანი. თუ განვიხილავთ (3) და (4) ზოგადი წევრების ნამრავლს, მივიღებთ:

$$a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2}\ldots a_{k\alpha_k}\cdot a_{k+1\alpha_{k+1}}\ldots\ a_{n\alpha_n}. \tag{5}$$

ცხადია, რომ MM' ნამრავლში (5) წევრის ნიშანი განისაზღვრება ნამრავლით $(-1)^l(-1)^h=(-1)^{l+h}$, მეორე მხრივ, (5) წევრი წარმოადგენს d დეტერმინანტის სხვადასხვა სტრიქონისაგან და სხვადასხვა სვეტისაგან აღებული n ელემენტის ნამრავლს, ამიტომ ის იქნება მოცემული d დეტერმინანტის გარკვეული წევრი, რომელსაც ნიშანს ანიჭებს ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1, 2,\ldots k, & k+1, \ldots, n \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, & \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{5_1}$$

ვაჩვენოთ, რომ (5) წევრს d დეტერმინანტში იგივე ნიშანი აქვს, რაც MM' ნამრავლში. მართლაც, რადგან $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ გადანაცვლების ყოველი ინდექსი ნაკლებია $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ გადანაცვლების ყოველ ინდექსზე და ამ გადანაცვლებათა ინვერსიების რიცხვი შესაბამისად უდრის l და h, ამიტომ (5_1) ჩასმის ინვერსიების რიცხვი ტოლი იქნება $l+h$

და, მაშასადამე, (5) წევრს d დეტერმინანტში ექნება $(-1)^{l+h}$ ნიშანი. ახლა, რადგან k-ური რიგის M მინორში არის $k!$ წევრი, ხოლო $n-k$ რიგის M' ალგებრულ დამატებაში კი $(n-k)!$ წევრი, მივიღებთ, რომ $M \cdot M'$ ნამრავლში სულ იქნება $k!(n-k)!$ რაოდენობის (5) სახის წევრი, რომლებიც შედიან d დეტერმინანტში და მათი ნიშნები, როგორც MM' ნამრავლში და d დეტერმინანტში, ერთნაირია. ამით, ამ კერძო შემთხვევაში, ლემა დამტკიცებულია. ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, აღებული k-ური რიგის M მინორის სტრიქონების ნომრებია $i_1, i_2, \ldots, i_k$, სვეტისა კი $j_1, j_2, \ldots, j_k$. გარდა ამისა, ვთქვათ,

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

d დეტერმინანტი გარდავქმნათ ისე, რომ k-ური რიგის M მინორმა დაიკავოს დეტერმინანტში მარცხენა ზედა კუთხე დამატებითი M' მინორის შეუცვლელად. ამ მიზნით, უწინარეს ყოვლისა, i_1 სტრიქონი ავიტანოთ პირველი სტრიქონის ადგილას. რადგან i_1 სტრიქონის ზემოთ სულ i_1-1 სტრიქონია, ამიტომ მას მოუხდება i_1-1 სტრიქონთან ტრანსპოზიცია. შემდეგ i_2 სტრიქონი ავიტანოთ მეორე სტრიქონის ადგილას. რადგან i_2 სტრიქონის ზემოთ, მეორე სტრიქონის ჩათვლით, სულ არის i_2-2 რაოდენობის სტრიქონი, ამიტომ მას მოუხდება i_2-2 სტრიქონთან ტრანსპოზიციის მოხდენა და ა. შ. i_k სტრიქონი, რომ ავიტანოთ k-ური სტრიქონის ადგილას მას მოუხდება i_k-k სტრიქონთან ტრანსპოზიციის მოხდენა. ჩატარებული პროცესის, ანუ $(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)$ ტრანსპოზიციის შედეგად k-ური რიგის M მინორი მოთავსდება პირველ k სტრიქონში.

შემდეგ, ანალოგიურად საჭიროა $j_1, j_2, \ldots, j_k$ სვეტები გადავიტანოთ $(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_k-k)$ ტრანსპოზიციით პირველ k სვეტში. საბოლოოდ ორივე პროცესის ჩატარების შედეგად k-ური რიგის M მინორი,

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)+(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_k-k)=$$
$$=s_m-2(1+2+\ldots+k) \tag{6}$$

(სადაც $s_m=i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k$) რაოდენობის ტრანსპოზიციის ჩატარების შემდეგ, მოთავსდება მარცხენა ზედა კუთხეში. რადგან ყოველი სტრიქონის ან სვეტის ტრანსპოზიცია დეტერმინანტის ნიშანს ცვლის, ამიტომ k-ური რიგის M მინორის მარცხენა კუთხეში მიყვანის შედეგად d დეტერმინანტის ნაცვლად მივიღებთ ისეთ ახალ d^* დეტერმინანტს, რომელიც მოცემული d დეტერმინანტისაგან განსხვავდება მხოლოდ

$$(-1)^{s_m-2(1+2+\ldots+k)}=(-1)^{s_m}$$

ნიშნით. ვინაიდან $2(1+2+\ldots+k)$ ყოველი k-სათვის ლუწია, გვექნება:

$$d^*=(-1)^{sm}d. \tag{7}$$

დავუშვათ, რომ M' არის k-ური რიგის M მინორის დამატებითი მინორი d დეტერმინანტში. რადგან d-დან d^*-ზე გადასვლისას არ დარღვეულა M'-ში შემავალი სტრიქონებისა და სვეტების ურთიერთმდებარეობა, ამიტომ d^* დეტერმინანტშიც M' იქნება M მინორის დამატებითი მინორი, რომელიც ახლა მარჯვენა ქვედა კუთხეშია. ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად, MM' ნამრავლის ყველა $k!(n-k)!$ წევრი თავისივე ნიშნებით შევა d^* დეტერმინანტში. მაგრამ რადგან d^* დეტერმინანტის წევრები, თანახმად (7) ტოლობისა, d დეტერმინანტის შესაბამისი წევრებისაგან განსხვავდება $(-1)^{s_m}$ ნიშნით, ამიტომ ნამრავლი $(-1)^{s_m}MM'$ მოგვცემს d დეტერმინანტის $k!(n-k)!$ რაოდენობის წევრებს ისეთი ნიშნებით, როგორიც მათ აქვთ d დეტერმინანტში. ახლა, თუ შევნიშნავთ, რომ $(-1)^{s_m}M'$ წარმოადგენს M მინორის ალგებრულ დამატებას, ვნახავთ, რომ ლემა მთლიანად დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ n-ური რიგის დეტერმინანტის ყოველი a_{ij} ელემენტი შეიძლება მივიღოთ როგორც პირველი რიგის მინორი. მაშინ d დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის (ანუ პირველი რიგის მინორის) დამატებითი მინორი იქნება i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლის შემდეგ დარჩენილი $n-1$ რიგის მატრიცის დეტერმინანტი. თუ a_{ij} ელემენტის შესაბამის დამატებით მინორს აღვნიშნავთ M_{ij}, ხოლო ალგებრულ დამატებას კი A_{ij}, გვექნება:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{8}$$

თანახმად ზემოთ დამტკიცებული ლემისა, $a_{ij}A_{ij}$ ნამრავლი მოგვცემს d დეტერმინანტის $1!(n-1)!=(n-1)!$ რაოდენობის წევრს ისეთივე ნიშნებით, როგორიც მათ აქვთ მოცემულ დეტერმინანტში.

დეტერმინანტის დაშლა სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტების მიმართ. განვიხილოთ d დეტერმინანტის რომელიმე i-ური სტრიქონის ელემენტების ნამრავლი მათ ალგებრულ დამატებებზე:

$$a_{i1}A_{i1},\ a_{i2}A_{i2},\ \ldots,\ a_{in}A_{in}. \tag{9}$$

როგორც ვიცით, ყოველ $a_{i\lambda}A_{i\lambda}$ $(\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ ნამრავლი გვაძლევს $(n-1)!$ რაოდენობის d დეტერმინანტის სხვადასხვა წევრს. გარდა ამისა, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ყოველ ორ $a_{i\lambda}A_{i\lambda}$ და $a_{il}A_{il}$ $(\lambda\neq l)$ ნამრავლს არ აქვს საერთო წევრი და d დეტერმინანტის ყოველი წევრი შედის (9) ნამრავლებიდან ერთ-ერთში.

ახლა, რადგან (9) სახის ნამრავლები სულ არის n და ყოველი ნამრავლი გვაძლევს $(n-1)!$ რაოდენობის d დეტერმინანტის გარკვეულ

წევრს, ამიტომ (9) გამოთქმათა ჯამი სულ მოგვცემს $(n-1)!n=n!$ რაოდენობის d დეტერმინანტის ყველა წევრს, მაშასადამე,

$$d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}. \tag{10}$$

(10) ფორმულით მოცემულია n-ური რიგის d დეტერმინანტის დაშლა i-ური სტრიქონის ელემენტების მიმართ. მაშასადამე, დამტკიცდა

თეორემა. **d დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ელემენტების მათ შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი უდრის მოცემულ დეტერმინანტს.**

(10) ფორმულით ყოველი n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა დაიყვანება n რაოდენობის $n-1$ რიგის დეტერმინანტის გამოთვლამდე. ანალოგიურად, d დეტერმინანტი შეიძლება დაიშალოს მისი რომელიმე სვეტის ელემენტის მიმართ.

მაგალითად, მესამე რიგის დეტერმინანტის დაშლას მეორე სვეტის ელემენტების მიმართ ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=$$

$$=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

(10) ფორმულიდან ჩანს, რომ დეტერმინანტის დაშლა უმჯობესია იმ სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების მიმართ, რომელშიც მეტი ნულებია. ამიტომ ხშირად სასარგებლოა წინასწარ მოცემული დეტერმინანტი, დეტერმინანტის თვისებების საფუძველზე, გარდავქმნათ ისე, რომ რომელიმე სტრიქონში ან სვეტში მეტი ნულები გაჩნდეს. დეტერმინანტის მე-3 შედეგის მიხედვით, თუ დეტერმინანტის რომელიმე i-ური სტრიქონის ელემენტი $a_{ik}\neq 0$, მაშინ ამ სტრიქონის ყველა a_{ij} ($j\neq k$, $j=1, 2, \ldots, n$) ელემენტი შეიძლება გავხადოთ ნული. მართლაც, ამისათვის საკმარისია k-ური სვეტი გავამრავლოთ $\dfrac{a_{ij}}{a_{ik}}$ ($j=1, 2, \ldots, n$) რიცხვზე და გამოვაკლოთ შესაბამისად $j=1, 2, \ldots, n$ სვეტს. ასეთი მოქმედების შედეგად დეტერმინანტის შეუცვლელად i-ურ სტრიქონში, გარდა a_{ik} ელემენტისა, ყველა გახდება ნული.

მაგალითად, გამოვთვალოთ მე-4 რიგის დეტერმინანტი:

$$d=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

პირველ სვეტს გამოვაკლოთ მესამე სვეტი, მივიღებთ:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

ახლა მესამე სტრიქონს გამოვაკლოთ პირველი სტრიქონი გამრავლებული 2-ზე, მივიღებთ:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

თუ ახლა ამ დეტერმინანტს გავშლით პირველი სვეტის ელემენტების მიმართ, მისი გამოთვლა დაიყვანება ერთი მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლამდე:

$$d=1\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

თანახმად დეტერმინანტის თვისებისა, პირველი სვეტის საერთო მამრავლი 4 გამოვიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ. მიღებული მესამე რიგის დეტერმინანტი შეიძლება უშუალოდ გამოვთვალოთ ან კიდევ მისი გამოთვლა შეიძლება დავიყვანოთ ერთი მეორე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლამდე, ამისათვის მეორე სტრიქონი მივუმატოთ პირველ და მესამე სტრიქონებს, მივიღებთ:

$$d=4\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot(-1)4\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=4(-10+12)=8.$$

ახლა დავუბრუნდეთ ისევ (10) ფორმულას. ამ ფორმულის მიხედვით

$$c_1A_{i1}+c_2A_{i2}+\ldots+c_nA_{in} \tag{11}$$

ჯამი მოგვცემს ისეთ n-ური რიგის დეტერმინანტს, რომელიც ჩვენი d დეტერმინანტისაგან განსხვავდება მხოლოდ i-ური სტრიქონის ელემენტებით. i-ურ სტრიქონში იქნება $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ელემენტები, ე. ი.

$$c_1A_{i1}+c_2A_{i2}+\ldots+c_nA_{in}=\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ (i \text{ სტრიქონი}) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

ანალოგიურად, თუ განვიხილავთ k-ური სტრიქონის ელემენტების ნამრავლთა ჯამს i-ური სტრიქონის ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე, მივიღებთ ისეთ n-ური რიგის დეტერმინანტს, რომელსაც ორი i-ური და k-ური სტრიქონი ტოლი ექნება; თანახმად დეტერმინანტთა თვისებისა, ასეთი დეტერმინანტი უდრის ნულს, ე. ი.

$$a_{k1} A_{i1}+a_{k2} A_{i2}+\ldots+a_{kn} A_{in}=0, \text{ როცა } k \neq i \tag{12}$$

მაშასადამე, მივიღეთ

თეორემა. **დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ელემენტების სხვა რომელიმე სტრიქონის ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი უდრის ნულს.**

ამრიგად, (10) და (12) ფორმულების გაერთიანებით ვღებულობთ დეტერმინანტის რომელიმე i-ური სტრიქონის (სვეტის) მიმართ დაშლის შემდეგ ფორმულას:

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} d, & \text{როცა } k=i; \\ 0, & \text{როცა } k\neq i. \end{cases} \tag{13}$$

თეორემა. **n-ური რიგის d დეტერმინანტის რომელიმე k რაოდენობის სტრიქონის $1 \leqslant k \leqslant n$ ყველა შესაძლო k-ური რიგის მინორის შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი უდრის მოცემულ დეტერმინანტს.**

დამტკიცება. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თუ გვაქვს მატრიცა, რომელსაც გააჩნია k სტრიქონი და n სვეტი ($k \leqslant n$), ასეთი მატრიცისაგან სულ შეიძლება $\sigma=C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ რაოდენობის k-ური რიგის მინორის შედგენა.

მოცემული n-ური რიგის d დეტერმინანტისაგან გამოყოფილი რომელიმე k რაოდენობის სტრიქონისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო k-ური რიგის მინორი აღვნიშნოთ სიმბოლოებით:

$$M_1, M_2, \ldots, M_\sigma.$$

თუ მიღებული მინორების შესაბამის დამატებით მინორებს აღვნიშნავთ

$$M_1', M_2', \ldots, M_\sigma'$$

სიმბოლოებით, მაშინ

$$A_1=(-1)^{s_{m1}}M_1', \quad A_2=(-1)^{s_{m2}}M_2', \ldots, \quad A_\sigma=(-1)^{s_{m\sigma}}M_\sigma' \tag{14}$$

იქნება შესაბამისად $M_1, M_2, \ldots, M_\sigma$ მინორების ალგებრული დამატებები. ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად, ყოველი მინორის ნამრავლი მის ალგებრულ დამატებაზე, ე. ი. ყოველი შემდეგი სახის ნამრავლი

$$(-1)^{s_{mi}} M_i M_i'=M_i A_i, \tag{15}$$

სადაც $A_i=(-1)^{s_{m_i}}M_i'$ $(i=1, 2,\ldots,n)$ გვაძლევს d დეტერმინანტის $k!(n-k)!$ რაოდენობის წევრს. ახლა, რადგან ყოველი ორი M_l და M_λ მინორი, როცა $l \neq \lambda$, ერთმანეთისაგან განსხვავდება ერთი სვეტით მაინც. ამიტომ $(-1)^{s_{m_l}}M_lM_l'$ და $(-1)^{s_{m_\lambda}}M_\lambda M_\lambda'$ ნამრავლები არ შეიცავენ მსგავს (ერთნაირ) წევრებს. მაშასადამე, M_iA_i $(i=1, 2,\ldots,\sigma)$ ნამრავლთა ჯამი მოგვცემს ჩვენი n-ური რიგის d დეტერმინანტის

$$k!(n-k)!\sigma=n!$$

რაოდენობის სხვადასხვა წევრს. მაგრამ, რადგან მოცემული n-ური რიგის დეტერმინანტი შეიცავს $n!$ რაოდენობის (15) სახის წევრთა ჯამს, გვექნება:

$$d=M_1A_1+M_2A_2+\ldots+M_\sigma A_\sigma \tag{16}$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებულ თეორემას ხშირად **ლაპლასის** თეორემას უწოდებენ, ხოლო (16) ფორმულას — **ლაპლასის ფორმულას.** თუ რომელიმე k რაოდენობის სტრიქონის ნაცვლად ავიღებთ ერთ-ერთ რომელიმე i-ურ სტრიქონს, მაშინ (16) ფორმულიდან, როგორც მისი კერძო შემთხვევა, მივიღებთ (10) ფორმულას. ანალოგიურად დამტკიცდება ლაპლასის თეორემა დეტერმინანტის სვეტთა მიმართ.

დამტკიცებული თეორემის საილუსტრაციოდ მეოთხე რიგის დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

დავშალოთ პირველი ორი სტრიქონის მიმართ. პირველი **ორი სტრიქონის** გამოყოფით მივიღებთ მატრიცას:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიციდან შედგენილი ყველა შესაძლო მე-2 რიგის მინორის რიცხვი უდრის $C_4{}^2=\dfrac{4\cdot3}{1\cdot2}=6$; ამოვწეროთ ყველა ეს მინორი:

$$M_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix},$$

$$M_4=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_5=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad M_6=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

მიღებულ მინორთა შესაბამისი ალგებრული დამატებანი იქნება:

$$A_1=(-1)^{s_{m_1}}M_1'=(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_2=(-1)^{s_{m_2}}M_2'=(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$A_3=\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad A_4=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_5=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix},$$

$$A_6 - =\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

მაშასადამე, მოცემული მეოთხე რიგის დეტერმინანტის დაშლას პირველი ორი სტრიქონის მიმართ ექნება შემდეგი სახე:

$$d=M_1A_1+M_2A_2+M_3A_3+M_4A_4=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

თუ მოცემულ მეოთხე რიგის დეტერმინანტში ვიგულისხმებთ, რომ $a_{13}=a_{14}=a_{23}=a_{24}=0$, მაშინ მისი გამოთვლა ლაპლასის ფორმულით არსებითად მარტივდება. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

სხვადასხვა ტიპის n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა. n-ური რიგის დეტერმინანტის თვისებებისა და დეტერმინანტის ერთი ან რამდენიმე სტრიქონის ან სვეტის მიმართ დაშლის საშუალებით ჩვენ შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა ტიპის n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის ხერხები. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

1. ვუჩვენოთ, რომ დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

რომლის მთავარი დიაგონალის ქვემოთ ყველა ელემენტი ნულია, უდრის მთავარ დიაგონალზე დალაგებულ ელემენტთა ნამრავლს.

ასეთი სახის მეორე რიგის დეტერმინანტისათვის ჩვენი დებულება მართებულია. დავუშვათ, რომ ის მართებულია ამ სახის $n-1$ რიგის დეტერმინანტისათვის და ვუჩვენოთ მისი მართებულობა n-ური რიგის დეტერმინანტისათვის.

თუ მოცემულ დეტერმინანტს გავშლით პირველი სვეტის ელემენტების მიმართ, გვექნება:

$$d=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

რადგან დაშვების თანახმად,

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} \dots & a_{3n} \\ & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{22}\ a_{23} \dots a_{nn}$$

მივიღებთ, რომ

$$d=a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}.$$

ტრანსპონირებული დეტერმინანტის თვისების გამოყენებით ანალოგიურად მივიღებთ, რომ დეტერმინანტი, რომლის მთავარი დიაგონალის ზემოთ ყველა ელემენტი ნულია, უდრის მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლს.

2. გამოვითვალოთ დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} k(a+x_1) & ka & ka \dots & ka & a \\ ka & k(a+x_2) & ka \dots & ka & a \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot \\ ka & ka & ka \dots & k(a+x_{n-1}) & a \\ ka & ka & ka \dots & ka & a \end{vmatrix}.$$

ბოლო სვეტი გავამრავლოთ k-ზე და გამოვაკლოთ პირველ $n-1$ სვეტს, მივიღებთ დეტერმინანტს

$$d=\begin{vmatrix} kx_1 & 0 & 0 & & 0 & a \\ 0 & kx_2 & 0 & & 0 & a \\ 0 & 0 & kx_3 & & 0 & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & kx_{n-1} & a \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a \end{vmatrix}.$$

ასეთი დეტერმინანტის გამოთვლა უკვე ვიცით, ის უდრის მთავარი დია-
გონალის ელემენტების ნამრავლს, ე. ი.

$$d=ak^{n-1}x_1\ x_2\ \ldots\ x_{n-1}.$$

3. გამოვთვალოთ შემდეგი n-ური რიგის დეტერმინანტი

$$d_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & C^1_2 & C^1_3 & & C^1_n \\ 1 & C^2_3 & C^2_4 & & C^2_{n+1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \\ 1 & C_n^{n-1} & C^{n-1}_{n+1} & & C^{n-1}_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

თუ ყოველ სვეტს, დაწყებული მეორიდან, გამოვაკლებთ წინა სვეტს და გამოვიყენებთ ჯუფთების ცნობილ ფორმულას $C^k_n=C^k_{n-1}+C^{k-1}_{n-1}$, მივიღებთ:

$$d_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & C_1^0 & C_2^0 & \ldots & C^0_{n-1} \\ 1 & C^1_2 & C^1_3 & \ldots & C^1_n \\ 1 & C^2_3 & C^2_4 & \ldots & C^2_{n+1} \\ & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\ 1 & C^{n-2}_{n-1} & C^{n-2}_{n-2} & \ldots & C^{n-2}_{2n-3} \end{vmatrix}.$$

თუ ახლა ყოველ სტრიქონს, დაწყებული მეორიდან, გამოვაკლებთ წინას სტრიქონს, იმავე ჯუფთების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$d_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C^0_1 & C^0_2 & \ldots & C^0_{n-1} \\ 0 & C^1_1 & C^1_2 & \ldots & C^1_{n-1} \\ 0 & C^2_2 & C^2_3 & \ldots & C^2_n \\ \cdot & & & & \\ 0 & C^{n-2}_{n-2} & C^{n-2}_{n-1} & \ldots & C^{n-2}_{2n-4} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & C^1_2 & C^1_3 & \ldots & C^1_{n-1} \\ 1 & C^2_3 & C^2_4 & \ldots & C^2_n \\ & & & & \\ 1 & C^{n-2}_{n-1} & C^{n-2}_{n} & \ldots & C^{n-2}_{2n-4} \end{vmatrix}=d_{n-1}$$

მაშასადამე, ყოველი n-თვის $d_n=d_{n-1}$ და, ვინაიდან $d_1=1$, მივიღებთ: $d_n=1$.

4. ვთქვათ, მოცემულია დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის მიმართ გაშლით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3.$$

5. ანალოგიურად მიიღება, რომ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n.$$

6. ლაპლასის ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ შემდეგი სახის $2n$ რიგის დეტერმინანტი $d=\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}$, რომლის მარცხენა ზედა კუთხეში n-ური რიგის მინორი უდრის ნულს, მარცხენა ქვედა კუთხეში —B-ს, მარჯვენა ზედა კუთხეში — A-ს, ხოლო მარჯვენა ქვედა კუთხეში — C-ს. გავშალოთ ეს დეტერმინანტი პირველი n-სტრიქონის მიმართ, მივიღებთ:

$$d=(-1)^s A\cdot B,$$

სადაც s არის A მინორის სტრიქონებისა და სვეტების ნომრების ჯამი, ე. ი.

$$s=(1+2+\dots+n)+[(n+1)+(n+2)+\dots+2n]=n+2n^2.$$

მაშასადამე,

$$d=(-1)^n\cdot AB.$$

7. განვიხილოთ ვანდერმონდის დეტერმინანტი. n-ური რიგის ვანდერმონდის დეტერმინანტს, შედგენილს $a_1, a_2, \dots, a_n$ ელემენტებისაგან შემდეგი სახე აქვს:

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

დავამტკიცოთ, რომ ვანდერმონდის დეტერმინანტი უდრის

$\frac{1}{2}n(n-1)$ რაოდენობის a_i-a_j $(1\leqslant j<i\leqslant n)$ სახის სხვაობათა ნამრავლს. მართლაც, როცა $n=2$ ან $n=3$, შესაბამისად გვექნება:

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\end{vmatrix}=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2).$$

ვთქვათ, ჩვენი დებულება მართებულია $n-1$ რიგის ვანდერმონდის დეტერმინანტისათვის. დავამტკიცოთ მისი მართებულობა n-ური რიგის ვანდერმონდის დეტერმინანტისათვის. გარდავქმნათ V_n დეტერმინანტი შემდეგნაირად: ყველა სტრიქონს, დაწყებული მეორიდან, გამოვაკლოთ წინა სტრიქონი, გამრავლებული a_1-ზე, მივიღებთ:

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & & 1\\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & & a_n-a_1\\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \ldots & a_n^2-a_1a_n\\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

თუ ახლა ამ დეტერმინანტს გავშლით პირველი სვეტის მიმართ, მივიღებთ $n-1$ -რიგის დეტერმინანტს. შემდეგ ყველა სვეტიდან საერთო მამრავლების დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ გამოტანით მივიღებთ:

$$V_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)V_{n-1},$$

სადაც

$$V_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & & 1\\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n\\ a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2\\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

არის $n-1$ რიგის ვანდერმონდის დეტერმინანტი, შედგენილი a_2, a_3, $\ldots$, a_n ელემენტებით. დაშვების თანახმად, ის უდრის $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ რაოდენობის a_i-a_j $(2\leqslant j<i\leqslant n)$ სახის სხვაობათა ნამრავლს. რადგან V_n დეტერმინანტისათვის ჩვენ უკვე გამოყოფილი გვაქვს $n-1$ რაოდენობის $(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)$ სხვაობათა ნამრავლი, ამიტომ n-ური რიგის V_n ვანდერმონდის დეტერმინანტი ტოლი იქნება $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n-1=\frac{1}{2}n(n-1)$ რაოდენობის a_i-a_j $(1\leqslant j<i\leqslant n)$ სახის სხვაობათა ნამრავლისა. თუ ვისარგებლებთ Π სიმ-

ბოლოთი, რომელიც ნამრავლს აღნიშნავს (მაგალითად, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n$), მივიღებთ:

$$V_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}) = \prod_{1\le j<i\le n} (a_i-a_j).$$

8. **ირიბსიმეტრიული დეტერმინანტი.** დეტერმინანტს ეწოდება ირიბსიმეტრიული, თუ ყოველი i და j ინდექსისათვის $a_{ji}=-a_{ij}$. აქედან მთავარი დიაგონალის ელემენტებისათვის მივიღებთ: $a_{ii}=-a_{ii}$, $a_{ij}=0$, ე. ი. მთავარი დიაგონალის ელემენტი ნულია. მაშასადამე, ირიბსიმეტრიულ დეტერმინანტს აქვს შემდეგი სახე:

$$d=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

თუ მოცემული d დეტერმინანტის ყოველ სტრიქონს გავამრავლებთ (-1)-ზე, მივიღებთ d დეტერმინანტის ტრანსპონირებულ დეტერმინანტს, რომელიც ტოლი იქნება $(-1)^n d$. ტრანსპონირებული დეტერმინანტის თვისების თანახმად, გვექნება:

$$(-1)^n d = d.$$

კერძოდ, როცა n კენტი რიცხვია, მაშინ $-d=d$, $2d=0$ და $d=0$. მაშასადამე, ყოველი კენტი რიგის ირიბსიმეტრიული დეტერმინანტი უდრის ნულს.

დეტერმინანტთა თეორია ახლა კარგადაა განვითარებული და მას დიდი გამოყენება აქვს მეცნიერების სხვადასხვა დარგში. მაგალითად, მათემატიკურ ანალიზში ისწავლება და გამოყენებულია ე. წ. **ფუნქციონალური დეტერმინანტები***, ე. ი. ისეთი დეტერმინანტები, რომელთა ელემენტები საზოგადოდ ფუნქციებია.

აგრეთვე, მრავალი საკითხის შესწავლისას გამოყენებულია **უსასრულო რიგის** დეტერმინანტი, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად: ვთქვათ, მოცემულია

* ფუნქციონალურ დეტერმინანტთა ზოგადი თეორია განხილულია მათემატიკური ანალიზის თითქმის ყველა სახელმძღვანელოში, ხოლო ელემენტარული თვისებები მოცემულია აგრეთვე პროფ. ა. ხარაძის წიგნში: „დეტერმინანტთა თეორიის ელემენტები", ტბ., 1934.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ & & \cdots \end{pmatrix}$$

უსასრულო რიგის მატრიცა, ე. ი. ისეთი მატრიცა, რომლის სტრიქონებისა და სვეტების რაოდენობა უსასრულოა (მაგრამ თვლადი). ახლა ავიღოთ ასეთი მატრიცის პირველი n სტრიქონის და პირველი n სვეტის გადაკვეთის შედეგად შექმნილი n-ური რიგის D_n დეტერმინანტი. თუ არსებობს D_n დეტერმინანტის ზღვარი, როცა $n\to\infty$, ე. ი. თუ

$$\lim_{n\to\infty} D_n=D,$$

მაშინ მიღებულ D გამოსახულებას უწოდებენ მოცემული უსასრულო რიგის მატრიცის შესაბამის უსასრულო რიგის დეტერმინანტს და აღნიშნავენ ასე:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}.$$

§ 5. n-უცნობიანი n წრფივი განტოლების სისტემის ამოხსნა

ვთქვათ, P რიცხვთა ველზე მოცემული გვაქვს n-უცნობიანი n წრფივი განტოლების სისტემა:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

როგორც ვიცით, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვთა ისეთ ერთობლიობას, რომელიც იგივურად აკმაყოფილებს (1) სისტემის ყოველ განტოლებას, ეწოდება მოცემული სისტემის ამონახსნი. (1) სისტემას ეწოდება **თავსებადი**, თუ მას აქვს ერთი ამონახსნი მაინც. ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ როდის აქვს მოცემულ სისტემას ამონახსნი და, თუ აქვს, როგორ უნდა ვიპოვოთ ის.

დავწეროთ მოცემული სისტემის დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

მოცემული სისტემის პირველი, მეორე და ა. შ. მე-n განტოლებათა ორივე მხარე შესაბამისად გავამრავლოთ j-ური სვეტის ელემენტების

$A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ ალგებრულ დამატებებზე. მათი შეკრებით მივი-ღებთ:

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\dots+a_{n1}A_{nj})x_1+\\
+\ &(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\dots+a_{n2}A_{nj})x_2+\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
+\ &(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj})x_j+\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
+\ &(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\dots+a_{nn}A_{nj})x_n=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\dots+b_nA_{nj}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

თანახმად (გვ. 50) დამტკიცებული თეორემისა, დეტერმინანტის სვე-ტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$
a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\dots+a_{nk}A_{nj}=\begin{cases}0, & \text{როცა } k\neq j;\\ d, & \text{როცა } k=j.\end{cases}
\tag{4}
$$

ამ ტოლობის თანახმად მივიღებთ, რომ (3) განტოლებაში x_j უცნობის კოეფიციენტი უდრის სისტემის d დეტერმინანტს, ხოლო ყველა სხვა უცნობის კოეფიციენტი უდრის ნულს. ადვილად შევამჩნევთ, რომ თავისუფალი წევრი არის ისეთი n-ური რიგის დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება d-გან j-ური სვეტის (1) სისტემის თავისუფალი წევრების შე-ცვლით. თუ ამ დეტერმინანტს d_j-ით აღვნიშნავთ, ე. ი.

$$
d_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\dots+b_nA_{nj}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n}\\ \cdot & & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},
\tag{5}
$$

მაშინ (3) განტოლება ასე დაიწერება:

$$
dx_j=d_j \quad (j=1,\ 2,\ 3,\dots,\ n).
$$

მაშასადამე, მივიღეთ შემდეგ განტოლებათა სისტემა:

$$
dx_1=d_1,\ dx_2=d_2,\dots,\ dx_n=d_n.
\tag{6}
$$

მიღებულ (6) განტოლებათა სისტემას უწოდებენ მოცემული (1) სის-ტემის **შედეგობრივ სისტემას**.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ როცა სისტემის დეტერმინანტი $d\neq0$, მაშინ (1) და (6) სისტემა ეკვივალენტურია და მოცემულ (1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. (1) სისტემის ყოველი ამონახსნი რომ (6) სისტემის ამონახსნი იქნება აშკარაა, რადგან (6) სისტემა (1) სისტემის შედეგობრივი სისტემაა. როცა $d\neq0$, მაშინ (6) სისტემიდან ვღებულობთ:

$$
x_1=\frac{d_1}{d},\ x_2=\frac{d_2}{d},\ \dots,\ x_n=\frac{d_n}{d}.
\tag{7}
$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ უცნობთა (7) მნიშვნელობები აკმაყოფილებს მოცემულ (1) სისტემას. მართლაც, თუ უცნობთა ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1) სისტემის ნებისმიერ i-ურ განტოლებაში

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n), \tag{8}$$

მივიღებთ:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\frac{1}{d}(a_{i1}d_1+a_{i2}d_2+\cdots+a_{in}d_n)$$

ან, მოკლედ, თუ ვისარგებლებთ Σ სიმბოლოთი, რომელიც ჯამს აღნიშნავს (მაგალითად, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\ldots+a_n$), მაშინ გვექნება:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}d_k. \tag{9}$$

თუ ახლა d_k-ს ნაცვლად ჩავსვამთ მის მნიშვნელობას:

$$d_k=b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\ldots+b_nA_{nk},$$

მაშინ (9) ტოლობა ასე დაიწერება:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk})=$$

$$=\frac{1}{d}\left(b_1\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{1k}+b_2\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{2k}+\cdots+b_i\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}+\right.$$

$$\left.+\cdots+b_n\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{nk}\right). \tag{10}$$

თანახმად ზემოთ აღნიშნული თვისებისა, კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამებიდან მხოლოდ

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=d,$$

დანარჩენი კი უდრის ნულს. ამიტომ (10) ტოლობა ასე დაიწერება:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,x_k=\frac{1}{d}\,b_i\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\frac{1}{d}\,b_id=b_i;$$

მაშასადამე, სისტემის ყოველი $i=1, 2, \ldots, n$ განტოლებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$a_{i1}\frac{d_1}{d}+a_{i2}\frac{d_2}{d}+\cdots+a_{in}\frac{d_n}{d}=b_i.$$

ამით დამტკიცდა, რომ (6) სისტემის ამონახსნი, როცა $d\neq0$, არის აგრეთვე (1) სისტემის ამონახსნი. მაგრამ, რადგან (6) სისტემას, როცა $d\neq0$, აქვს მხოლოდ ერთადერთი (7) ამონახსნი, ამით ისიც დამტკიცდა, **რომ წრფივ განტოლებათა სისტემას, როცა მისი დეტერმინანტი $d\neq0$, აქვს ერთადერთი ამონახსნი,** რომელიც გამოისახება (7) ფორმულებით. (7) ფორმულებს **კრამერის** ფორმულებს უწოდებენ. როგორც ვხედავთ კრამერის ფორმულებს ვიყენებთ მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული სისტემის დეტერმინანტი $d\neq0$. კრამერის ფორმულებიდან ჩანს, რომ თუ მოცემული სისტემა აღებულია რიცხვთა P ველზე, ე. ი. სისტემის კოეფიციენტები ეკუთვნიან რიცხვთა P ველს, მაშინ სისტემის ამონახსნი **არის გარკვეული რიცხვები P** ველიდან. როცა $n=2$ და $n=3$, შესაბამისად მივიღებთ კრამერის ფორმულებს ორ-და სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის.

მაგალითად, ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2. \end{aligned} \tag{11}$$

კრამერის ფორმულებს ექნება სახე:

$$x_1=\frac{d_1}{d}, \qquad x_2=\frac{d_2}{d}. \tag{12}$$

ვინაიდან (11) სისტემა გეომეტრიულად წარმოადგენს ორ წრფეს სიბრტყეზე, ამიტომ მისი ამონახსნი გეომეტრიულად ნიშნავს მოცემული ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატების პოვნას.

თანახმად ზოგადი შემთხვევისა, გვექნება: 1. თუ მოცემული (11) სისტემის დეტერმინანტი $d\neq0$, მაშინ სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსნი. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ (11) სისტემით მოცემული ორი წრფე მხოლოდ ერთ წერტილში იკვეთება. 2. თუ $d=0$ და $d_1\neq0$, $d_2\neq0$, მაშინ სისტემას არ აქვს ამონახსნი, ე. ი. შესაბამისი წრფეები არ იკვეთება (პარალელურია). 3. თუ $d=0$ და $d_1=0$, $d_2=0$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა, ე. ი. მოცემული ორი წრფე ერთიმეორის თანამთხვეულია.

მაგალითი. განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2&=3,\\ 2x_1+4x_2&=10, \end{aligned}$$

რომლის დეტერმინანტი $d=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0$ და $d_1=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 10 & 4\end{vmatrix}=-8$, $d_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 10\end{vmatrix}=4$, არ აქვს ამონახსნი.

მართლაც, სისტემის მეორე განტოლება პირველი განტოლების მიხედვით ასე გადაიწერება: $2(x_1+2x_2)=10$ ან კიდევ $2\cdot 3=10$, რაც შეუძლებელია. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული წრფეები პარალელურია და ერთიმეორეს არ ემთხვევა.

ანალოგიურად მივიღებთ კრამერის ფორმულებს სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის.

ვინაიდან სამუცნობიანი სამი წრფივი განტოლების სისტემა, გეომეტრიულად წარმოადგენს სამ სიბრტყეს სივრცეში, ამიტომ მისი ამოხსნა გეომეტრიულად ნიშნავს მოცემული სამი სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატების პოვნას.

ვთქვათ, მოცემული სისტემის დეტერმინანტი $d\neq 0$, მაშინ, როგორც ვიცით, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული სამი სიბრტყე მხოლოდ ერთ წერტილში იკვეთება. ანალოგიურად მოხდება გამოკვლევა დანარჩენ შემთხვევაშიც, რომელსაც აქ არ შევეხებით, რადგან ის დაწვრილებით ისწავლება ანალიზური გეომეტრიის კურსში.

მაგალითი. კრამერის ფორმულებით ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{aligned}3x_1-x_2+3x_3+2x_4&=1,\\ 4x_1+2x_2-2x_3+4x_4&=0,\\ 5x_1-x_2+4x_3+4x_4&=-1,\\ 2x_1-3x_2+6x_3+x_4&=1.\end{aligned}$$

გამოთვლით მივიღებთ, რომ მოცემული სისტემის დეტერმინანტი $d=2\neq 0$; ამიტომ ის ამოიხსნება კრამერის ფორმულებით. d_1, d_2, d_3 და d_4 დეტერმინანტებისათვის მივიღებთ:

$$d_1=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & -2 & 4\\ -1 & -1 & 4 & 4\\ 1 & -3 & 6 & 1\end{vmatrix}=10,\quad d_2=\begin{vmatrix}3 & 1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & -2 & 4\\ 5 & -1 & 4 & 4\\ 2 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}=-28,$$

$$d_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 0 & 4\\ 5 & -1 & -1 & 4\\ 2 & -3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-16,\quad d_4=\begin{vmatrix}3 & -1 & 3 & 1\\ 4 & 2 & -2 & 0\\ 5 & -1 & 4 & -1\\ 2 & -3 & 6 & 1\end{vmatrix}=-4$$

მაშასადამე, თანახმად (7) ფორმულებისა, მოცემული სისტემის ერთადერთი ამონახსნი იქნება:

$$x_1=\frac{10}{2}=5,\quad x_2=\frac{-28}{2}=-14,\quad x_3=\frac{-16}{2}=-8,\quad x_4=\frac{-4}{2}=-2.$$

შენიშვნა. ხშირად ანალიზურ გეომეტრიასა და მექანიკაში გვხვდება ისეთ წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელთა თავისუფალი წევრები b_1, $b_2, \ldots, b_n$ ვექტორებია. კრამერის ფორმულები ამ შემთხვევაშიც მართებულია, მხოლოდ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობები იქნება არა რიცხვები, არამედ ვექტორები. მაგალითად,

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2&=2i-3j, \\ x_1-x_2&=i+5j \end{aligned}$$

სისტემის ერთადერთი ამონახსნი იქნება:

$$x_1=i+\frac{2}{3}j, \qquad x_2=-\frac{17}{3}j.$$

აქ x_1 და x_2 ვექტორების კოორდინატები შესაბამისად არის:

$$\left(1, \frac{2}{3}\right) \text{ და } \left(0, \frac{-17}{3}\right).$$

აღვნიშნოთ, რომ საზოგადოდ მოცემული წრფივ განტოლებათა სისტემა და მისი შედეგობრივი წრფივ განტოლებათა სისტემა არაა ეკვივალენტური. მაგალითად, განვიხილოთ სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-5x_3&=-1, \\ x_1+x_2+x_3&=4, \\ 2x_1+3x_2-4x_3&=3. \end{aligned} \tag{1_1}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული სისტემის დეტერმინანტი $d=0$ და აგრეთვე $d_1=d_2=d_3=0$. ამიტომ მოცემული (1) სისტემის შედეგობრივ სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$0x_1=0, \ 0x_2=0, \ 0x_3=0. \tag{6_1}$$

როგორც ჩანს, (6_1) სისტემა კმაყოფილდება x_1, x_2, და x_3 უცნობების ყოველი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის, ამას კი არ აქვს ადგილი მოცემული (1_1) სისტემისათვის. ამრიგად, ამ შემთხვევაში მოცემული სისტემა და მისი შედეგობრივი სისტემა არ არიან ეკვივალენტური.

ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა. ახლა განვიხილოთ ისეთი n-უცნობიანი n წრფივი განტოლების სისტემა, რომლის ყველა თავისუფალი წევრი ნულია. წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის ყველა თავისუფალი წევრი ნულია, უწოდებენ **ერთგვაროვან** წრფივ განტოლებათა სისტემას. მაშასადამე, n-უცნობიანი n ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=0. \end{aligned} \tag{11}$$

აშკარაა, რომ (11) სისტემას აკმაყოფილებს ნულები, ე. ი. $x_1=0$, $x_2=0,\ldots,x_n=0$ მოცემული სისტემის ამონახსნია. ერთგვაროვანი სისტემის ასეთ ამონახსნს ეწოდება **ნულოვანი**, ანუ **ტრივიალური**, ამონახსნი. თუ მოვიგონებთ სისტემის d_j ($j=1, 2, \ldots, n$) დეტერმინანტთა შედგენის წესს (გვ. 59). ადვილად შევამჩნევთ, რომ ამ შემთხვევაში ყოველი d_j დეტერმინანტის j-ურ სვეტში მხოლოდ ნულები იქნება და ამიტომ მივიღებთ, რომ ყოველი $d_j=0$. აქედან **კრამერის ფორმულების თანახმად ვღებულობთ, რომ მოცემულ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას, როცა მისი $d\neq 0$, მხოლოდ ნულოვანი (ტრივიალური) ამონახსნი აქვს.** მიღებული შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ერთგვაროვან წრფივ სისქტემას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, მაშინ სისტემის დეტერმინანტი უეჭველად უდრის ნულს. ამის დამტკიცება კიდევ ასე შეიძლება: ვთქვათ, მოცემული ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნებიდან ერთი მაინც $x_j=\alpha_j\neq 0$. მაშინ, რადგან $d_j=0$, (11) სისტემის შედეგობრივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე: $dx_j=$ $=0$ ან, რაც იგივეა, $d\alpha_j=0$. რადგან $\alpha_j\neq 0$, ვღებულობთ, რომ $d=$ $=0$. მაშასადამე, **მოცემულ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას არატრივიალური, ე.ი. არანულოვანი ამონახსნები შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დეტერმინანტი ნულია.**

შემდეგ ჩვენ დაწვრილებით შევისწავლით ისეთ წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის უცნობთა რიცხვი არ უდრის განტოლებათა რიცხვს და მაშინ განვიხილავთ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს, როცა მისი დეტერმინანტი $d=0$.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. თუ b_1, $b_2,\ldots$, b_n რიცხვთა ერთობლიობა არის (11) ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნი, მაშინ kb_1, kb_2, $\ldots$, kb_n რიცხვთა ერთობლიობაც, სადაც k ნებისმიერი რიცხვია, აგრეთვე იქნება მოცემული სისტემის ამონახსნი.

ეს თვისება უბრალოდ შემოწმდება (11) სისტემის თითოეულ განტოლებაში მათი ჩასმით.

2. თუ c_1, $c_2,\ldots$, c_n რიცხვთა ერთობლიობა მოცემული სისტემის რაიმე მეორე ამონახსნია, მაშინ $b_1\pm c_1$, $b_2\pm c_2$ $,\ldots$, $b_n\pm c_n$ რიცხვთა ერთობლიობაც მოცემული სისტემის ამონახსნი იქნება.

მართლაც, პირობის თანახმად:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}b_\lambda=0, \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}c_\lambda=0.$$

ჩავსვათ მოცემული სისტემის რომელიმე i-ურ განტოლებაში $x_\lambda=b_\lambda\pm$ $\pm c_\lambda(\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, მივიღებთ:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}\ (b_\lambda\pm c_\lambda)=\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}b_\lambda\pm\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}c_\lambda=0\pm0=0.$$

მიღებული ორი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების ყოველი წრფივი კომბინაცია აგრეთვე იქნება მოცემული სისტემის ამონახსნი.

მაშასადამე, **ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ორი ამონახსნის ჯამი და ამონახსნის ნებისმიერ რიცხვზე ნამრავლი ისევ მოცემული სისტემის ამონახსნია.**

მაგალითი. k-ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს არანულოვანი ამონახსნი

$$\begin{aligned} kx_1+\ x_2+3x_3&=0,\\ x_1+kx_2+\ x_3&=0,\\ x_1-\ x_2-\ x_3&=0 \end{aligned}$$

განტოლებათა სისტემას? როგორც ვიცით, n-უცნობიანი n ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების სისტემას მაშინ აქვს არანულოვანი ამონახსნი, როცა მისი დეტერმინანტი უდრის ნულს, ე. ი.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 3\\ 1 & k & 1\\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,\ \text{ანუ}\ \ k^2+2k+1=0.$$

აქედან მივიღებთ $k_1=k_2=-1=k$. შევამოწმოთ აქვს თუ არა მოცემულ სისტემას $k=-1$ მნიშვნელობისათვის არანულოვანი ამონახსნი. $k=-1$ მნიშვნელობისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} -x_1+x_2+3x_3&=0,\\ x_1-x_2+\ x_3&=0,\\ x_1-x_2-\ x_3&=0. \end{aligned}$$

თუ სისტემის მეორე განტოლებას გამოვაკლებთ მესამეს, გამრავლებულს 2-ზე, მივიღებთ პირველ განტოლებას. მაშასადამე, პირველი განტოლება ყოფილა მეორე და მესამე განტოლებების წრფივი კომბინაცია და ამიტომ ჩვენ სინამდვილეში გვაქვს არა სამი განტოლება, არამედ შემდეგი ორი სამუცნობიანი წრფივი განტოლების სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=0,\\ x_1-x_2-x_3&=0. \end{aligned}$$

ასეთი სისტემის ამოხსნას დაწვრილებით შემდეგ შევისწავლით. მიღებული სისტემის ამოსახსნელად გადავიტანოთ x_2 მარჯვნივ, მივიღებთ:

$$x_1+x_3=x_2,$$
$$x_1-x_3=x_2,$$

საიდანაც $x_1=x_2$, $x_3=0$. თუ, მაგალითად, ჩავსვამთ $x_2=3$, მივიღებთ: $x_1=3$, $x_2=3$, $x_3=0$ მოცემული სისტემის გარკვეულ არანულოვან ამონახსნს. $x_2=\lambda$ მნიშვნელობას, სადაც λ ნებისმიერი რიცხვია, უპასუხებს მოცემული სისტემის გარკვეული (შესაბამისი) ამონახსნი: $x_1=x_2=\lambda$, $x_3=0$. როგორც ვხედავთ, მოცემულ სისტემას აქვს არანულოვან ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა.

დასასრულს შევნიშნოთ, რომ კრამერის ფორმულებით n-უცნობიანი n წრფივი განტოლების სისტემის ამოხსნისათვის საჭიროა $n+1$ რაოდენობის n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა, რაც ზოგ შემთხვევაში პრაქტიკულად დიდ დროს მოითხოვს. ამიტომ, გარდა კრამერის ფორმულებისა და სამკუთხედის სქემისა (გვ. 18), შეიძლება განვიხილოთ კიდევ სისტემის ამოხსნის ეგრეთ წოდებული **უცნობთა გამორიცხვის მეთოდი**, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: მოცემული (1) განტოლებათა სისტემის რომელიმე განტოლებიდან ამოვხსნათ ერთ-ერთი უცნობი დანარჩენ უცნობთა მიმართ და ჩავსვათ სისტემის დანარჩენ განტოლებებში, მივიღებთ $(n-1)$-უცნობიანი $n-1$ წრფივი განტოლების სისტემას. მიღებული სისტემის რომელიმე განტოლებიდან გამოვრიცხოთ ერთ-ერთი უცნობი და ჩავსვათ სისტემის დანარჩენ განტოლებებში, მივიღებთ $(n-2)$-უცნობიანი $n-2$ წრფივი განტოლების სისტემას და ა. შ. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, როცა სისტემის $d\neq0$, მივიღებთ ერთუცნობიან ერთ წრფივ განტოლებას, რომლის ამოხსნით, შემდეგ თანამიმდევრობით ვიპოვით სისტემის დანარჩენ უცნობთა მნიშვნელობებს. ეს მეთოდი ორ-და სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის კარგადაა ცნობილი სასკოლო მათემატიკის კურსიდან.

თავი II

ვექტორული სივრცე. წრფივ განტოლებათა სისტემის ზოგადი თეორია

§ 6. წრფივი, ანუ ვექტორული, სივრცე

გარკვეული წესით დალაგებულ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვთა

$$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{1}$$

სისტემას ეწოდება n-განზომილებიანი ვექტორი. a_i რიცხვებს ეწოდებათ α ვექტორის კოორდინატები ან კიდევ α ვექტორის კომპონენტები. თუ ვექტორის კომპონენტები ეკუთვნის P რიცხვთა ველს, მაშინ ვიტყვით, რომ α ვექტორი აღებულია P ველზე. მაგალითად, n-განზომილებიან ვექტორად შეიძლება მივიღოთ n-ური რიგის მატრიცის ან კიდევ დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონი ან სვეტი, ხოლო სტრიქონის ან სვეტის ელემენტები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც შესაბამისი ვექტორის კომპონენტები.

აგრეთვე n-უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის რომელიმე ერთი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ როგორც n-განზომილებიანი ვექტორი, ხოლო ამ უცნობთა მიღებული მნიშვნელობანი კი — როგორც ვექტორის კომპონენტები.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს კიდევ მეორე n-განზომილებიანი ვექტორი

$$\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n). \tag{2}$$

α და β ვექტორებს ეწოდება ტოლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ერთნაირ ადგილზე მდგომი კომპონენტები ტოლია, ე. ი. თუ $a_i=b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. (1) და (2) ვექტორების ჯამი ეწოდება

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \tag{3}$$

ვექტორს, რომლის კომპონენტები უდრის α და β ვექტორთა შესაბამისი კომპონენტების ჯამს. ვექტორთა შეკრების წესიდან ჩანს, რომ შეიძლება შევკრიბოთ მხოლოდ ერთისა და იმავე განზომილების ვექტორები. რიცხვთა P ველიდან აღებული ნებისმიერი k რიცხვის α ვექტორზე ნამრავლი განიმარტება ასე:

$$k\alpha=(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n), \tag{4}$$

ე. ი. ვექტორის ყველა კომპონენტი უნდა გავამრავლოთ α რიცხვზე. (4) ტოლობიდან ჩანს, რომ $k\alpha$ ისევ რიცხვთა P ველზე აღებული n-განზომილებიანი ვექტორია და $k\alpha=\alpha k$. ვექტორს, რომლის ყველა კომპონენტი ნულია, ეწოდება **ნულოვანი**, ანუ **ნულვექტორი**, და აღინიშნება ნულით. ნულვექტორი, ჩვეულებრივ რიცხვ 0-გან განსხვავებით აღვნიშნოთ „მუქი" ნულით, ე. ი.

$$\mathbf{0}=(0,\ 0,\ \ldots,\ 0). \tag{5}$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ ვექტორების შეკრებისას ნულვექტორი ასრულებს ისეთივე როლს, რასაც რიცხვი 0 რიცხვების შეკრებისას. მართლაც,

$$\alpha+\mathbf{0}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)+(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=\alpha,$$

მივიღებთ:

$$\alpha+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\alpha=\alpha.$$

უბრალო შემოწმებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ განტოლებას $\alpha+x=\beta$, სადაც α და β მოცემული ვექტორებია, ყოველთვის აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი გარკვეული ამონახსნი

$$x=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ \ldots,\ b_n-a_n).$$

ამ ამონახსნს ეწოდება β და α ვექტორების სხვაობა და აღინიშნება ასე: $x=\beta-\alpha$. კერძოდ, $\alpha+x=\mathbf{0}$ ვექტორული განტოლების ამონახსნი იქნება:

$$x=(-a_1,\ -a_2,\ \ldots,\ -a_n)=(-1).\alpha$$

ვექტორი, რომელსაც α ვექტორის შებრუნებული ვექტორი ეწოდება და აღინიშნება $-\alpha$ სიმბოლოთი. ამრიგად, α ვექტორის შებრუნებული $-\alpha$ ვექტორი მიიღება α ვექტორის (-1)-ზე გამრავლებით, ე. ი. $(-1)\alpha=-\alpha$

საზოგადოდ ნებისმიერი ბუნების ელემენტთა R სიმრავლეს, რომელშიც განმარტებულია ყოველი ორი $\alpha,\ \beta\in R$ ელემენტის ჯამი და ყოველი α ელემენტის ნებისმიერ ნამდვილ k რიცხვზე ნამრავლი, ეწოდება **წრფივი**, ანუ **აფინური**, სივრცე, თუ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

I. 1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,
2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$,
3) განტოლებას $\alpha+x=\beta$ აქვს ერთი ამონახსნი მაინც.

II. 4) $1.\alpha=\alpha$.
5) $k(\lambda\alpha)=(k\lambda)\alpha$,

III. 6) $(k+\lambda)\alpha=k\alpha+\lambda\alpha$,
7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$,

სადაც α, β, γ არიან R სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები, ხოლო k, λ, ნებისმიერი რიცხვებია რიცხვთა P ველიდან, 1 კი რიცხვთა P ველის ერთეულია.

წრფივი სივრცის ელემენტებს ხშირად ვექტორებს უწოდებენ. უბრალო გასინჯვით დავრწმუნდებით, რომ n-განზომილებიან ვექტორთა სიმრავლე, ჩვენ მიერ შემოღებული ვექტორების ჯამისა და ვექტორის ნამდვილ რიცხვზე გამრავლების მიმართ, აკმაყოფილებს ყველა 1—7 პირობას. მაშასადამე, ყველა n-განზომილებიან ვექტორთა სიმრავლე ქმნის წრფივ სივრცეს.

დავასახელოთ ვექტორული სივრცის რამდენიმე მაგალითი:

1. ვთქვათ, R კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო P—ნამდვილ რიცხვთა ველი. ვიცით, რომ ყოველი კომპლექსური რიცხვი $\alpha=a+bi$ განისაზღვრება ორი თანამიმდევნო a და b ნამდვილი რიცხვით, ამიტომ α კომპლექსური რიცხვი შეიძლება აღვნიშნოთ $\alpha=(a, b)$, ისე როგორც ორგანზომილებიანი ვექტორი ნამდვილ რიცხვთა ველზე. ვიცით, რომ ყოველი ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი არის ისევ კომპლექსური რიცხვი და კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ რიცხვზე ნამრავლი ისევ კომპლექსური რიცხვია. ახლა კომპლექსურ რიცხვთა R სიმრავლისათვის ნამდვილ რიცხვთა P ველზე ადვილად შემოწმდება ყველა 1—7 პირობა. მაშასადამე, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ ქმნის ორგანზომილებიან ვექტორთა სივრცეს.

2. ადვილად შემოწმდება, რომ ვექტორები—მონაკვეთები, რომლებიც გამოდიან ორგანზომილებიანი ან სამგანზომილებიანი კოორდინანტთა სისტემის სათავიდან შესაბამისად ქმნიან ორ-და სამგანზომილებიან ვექტორთა სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ.

3. განვიხილოთ n-უცნობიან ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა R სიმრავლე. როგორც ვიცით (გვ. 65), ერთგვაროვანი წრფივი სისტემის ყოველი ორი ამონახსნის ჯამი და ყოველი ამონახსნის რიცხვზე ნამრავლი ისევ მოცემული სისტემის ამონახსნია. ადვილად შემოწმდება აგრეთვე ყველა 1—7 პირობა. ამრიგად, n-უცნობიანი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა R სიმრავლე ქმნის წრფივ, ანუ ვექტორულ, სივრცეს. ასევე ადვილად შემოწმდება, რომ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე ქმნის წრფივ სივრცეს.

საზოგადოდ, ისეთი სიდიდეები, რომელთა შეკრება და ნამდვილ რიცხვზე გამრავლება შეიძლება, გვხვდება როგორც ალგებრაში, ისე გეომეტრიასა და მათემატიკურ ანალიზში. ამიტომაა, რომ წრფივი

(აფინური) სივრცის ცნებას და მასთან დაკავშირებულ საკითხებს გან-საკუთრებული ადგილი უჭირავს თანამედროვე მათემატიკაში. დავუბ-რუნდეთ ისევ წრფივი სივრცის განსაზღვრას და განვიხილოთ წრფივი სივრცის განსაზღვრიდან გამომდინარე ზოგიერთი თვისება.

1°. წრფივ სივრცეში არსებობს **ნულოვანი ელემენტი** და ყოველი ელემენტის **შებრუნებული ელემენტი** შეკრების მიმართ. მართლაც, თანახმად მე-3 აქსიომისა, R-ში მოიძებნება ისეთი x ელემენტი, რომ $\alpha+x=\alpha$. დავამტკიცოთ, რომ სივრცის ყოველი სხვა β ელემენტი-სათვისაც

$$\beta+x=\beta. \tag{1}$$

მართლაც, მე-3 აქსიომის თანახმად, გვექნება:

$$\beta+x=(\alpha+x)+x=\alpha+x=\beta.$$

ახლა ვუჩვენოთ, რომ ასეთი თვისების x ელემენტი, რომელიც (1) ტოლობას აკმაყოფილებს, R სივრცეში ერთადერთია. დავუშვათ წი-ნააღმდეგი; ვთქვათ, არსებობს კიდევ მეორე ისეთი x^1 ელემენტი, რომ ნებისმიერ β-თვის ადგილი აქვს $\beta+x^1=\beta$. ვთქვათ, $\beta=x$ მივიღებთ: $x+x^1=x$, მეორე მხრივ, თუ (1) ტოლობაში β-ს ნაცვლად ჩავსვამთ $\beta=x^1$, გვექნება $x^1+x=x^1$.

ამ ტოლობათა შედარებით, ვინაიდან $x+x^1=x^1+x$, მივიღებთ $x=x^1$. მაშასადამე, R სივრცის ნებისმიერი β ელემენტისათვის არსე-ბობს ერთი და მხოლოდ ერთი ისეთი x ელემენტი, რომ

$$\beta+x=\beta,$$

ასეთ x ელემენტს ეწოდება R სივრცის ნულოვანი ელემენტი და აღი-ნიშნება θ სიმბოლოთი ან ჩვეულებრივი 0-ით, ე. ი.

$$\beta+\theta=\beta. \tag{2}$$

ახლა განვიხილოთ R სივრცეში მოცემული ელემენტის შებრუნებული ელემენტის მოძებნის საკითხი. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$\alpha+x=\theta, \tag{5}$$

სადაც θ არის R სივრცის ნული, ხოლო α ამ სივრცის ნებისმიერი ელე-მენტია. თანახმად მე-3 აქსიომისა, R სივრცეში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი x ელემენტი, რომელიც (3) განტოლებას აკმაყოფილებს. დავამ-ტკიცოთ, რომ (5) განტოლებას მხოლოდ ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ვთქვათ, არსებობს კიდევ ისეთი x^1 ელემენტი, რომ

$$\alpha+x^1=\theta.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს მარცხნიდან მივუმატებთ x ელემენტს, მივიღებთ:

$$x+\alpha+x^1=x+\theta=x.$$

მაგრამ, რადგან $x+\alpha=\theta$, ამიტომ გვექნება $\theta+x^1=x$, $x^1=x$. მაშასადამე, ისეთი x ელემენტი, რომელიც ნებისმიერ α-თვის (5) ტოლობას აკმაყოფილებს, წრფივ სივრცეში ერთადერთია; მას α ელემენტის შებრუნებულ ელემენტს უწოდებენ და $-\alpha$-თი აღნიშნავენ. მაშასადამე,

$$\alpha+(-\alpha)=\theta.$$

2°. ადვილად შემოწმდება, რომ

$$k\cdot 0=0.$$

მართლაც, წრფივი სივრცის ნებისმიერი α ელემენტისათვის გვექნება:

$$k\alpha=k(\alpha+0)=k\alpha+k0, \text{ ე. ი. } k\cdot 0=k\alpha-k\alpha=0.$$

3°. სივრცის ნებისმიერი α ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$0\cdot\alpha=\theta.$$

მართლაც, შეიძლება დავწეროთ:

$$\alpha=1\cdot\alpha=(0+1)\alpha=0\cdot\alpha+1\cdot\alpha=0\cdot\alpha+\alpha.$$

მაშასადამე,

$$0\cdot\alpha=\alpha-\alpha, \text{ ე. ი. } 0\cdot\alpha=\theta.$$

ახლა ადვილად დამტკიცდება, რომ, თუ

$$k\alpha=0,$$

მაშინ ან $\alpha=0$, ან $k=0$.

მართლაც, ვთქვათ $k\neq 0$. მივიღებთ:

$$\alpha=1\cdot\alpha=(k^{-1}k)\alpha=k^{-1}(k\alpha)=k^{-1}\cdot 0=0.$$

4°. R სივრცეში α ელემენტის შებრუნებული — α ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$-\alpha=(-1)\alpha.$$

მართლაც, თუ გამოვიყენებთ დამტკიცებულ მე-2° თვისებას და წრფივი სივრცის სათანადო აქსიომებს, გვექნება:

$$\alpha+(-1)\alpha=1.\alpha+(-1)\alpha=(1-1)\alpha=0.\alpha=\theta;$$

მივიღეთ $\alpha+(-1)\alpha=\theta$; ეს იმას ნიშნავს, რომ $(-1)\alpha$ ელემენტი α ელემენტის შებრუნებულია, ე. ი. $-\alpha=(-1)\alpha$. ამის შემდეგ R წრფივი სივრცის ელემენტებზე ჩვენ შეგვიძლია მოვახდინოთ გამოკლების ოპერაცია, ისე როგორც ეს არითმეტიკაშია. სახელდობრ, სხვაობა $\alpha-\beta$ განმარტებულია როგორც ჯამი $\alpha+(-\beta)$, ე. ი.

$$\alpha+(-\beta)=\alpha-\beta.$$

5°. დავამტკიცოთ, რომ წრფივი სივრცის 1) აქსიომა, ე. ი. ჯამის კომუტაციურობა, დანარჩენი აქსიომების და მე-3° თვისების შედეგია. მართლაც,

$$(\alpha+\beta)-(\beta+\alpha)=(\alpha+\beta)+(-1)(\beta+\alpha)=\alpha+\beta+(-1)\beta+(-1)\alpha=$$
$$=\alpha+(\beta-\beta)-\alpha=\alpha+\theta-\alpha=\alpha-\alpha=\theta,$$

მივიღეთ $(\alpha+\beta)-(\beta+\alpha)=\theta$. მაშასადამე, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, რ. დ. გ.

ჩვენ დავასახელეთ ვექტორული, ანუ წრფივი, სივრცის მაგალითები. განვიხილოთ კიდევ ეგრეთ წოდებული $C(a, b)$ სივრცე. ამ სივრცის ელემენტებად იგულისხმება ნებისმიერი უწყვეტი $x=x(t)$ ფუნქციები განსაზღვრული $a\leqslant t\leqslant b$ სეგმენტზე. მათემატიკური ანალიზიდან ვიცით, რომ ყოველი ორი უწყვეტი ფუნქციის ჯამი და უწყვეტი ფუნქციის ნებისმიერ რიცხვზე ნამრავლი ისევ უწყვეტი ფუნქციაა. უწყვეტი ფუნქციებისათვის ნებისმიერ რიცხვთა ველზე ადვილად შემოწმდება აგრეთვე ყველა 1—7 აქსიომის მართებულობა. ნულის როლს შეასრულებს ნულფუნქცია, ე. ი. ისეთი ფუნქცია, რომელიც არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის $=0$, მაშასადამე, $C(a, b)$ სივრცე წრფივი სივრცე ყოფილა. შევნიშნოთ, რომ $C(a, b)$ სივრცესთან დაკავშირებულია მრავალი საინტერესო საკითხი, რომლებიც **ფუნქციონალურ ანალიზში** ისწავლება.

§ 7. ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა. ძირითადი თეორემა

ამ პარაგრაფში დაწვრილებით შევისწავლით ვექტორთა, ანუ ელემენტთა, სისტემის წრფივად დამოკიდებულებასა და დამოუკიდებლობას.

განსაზღვრა. ვექტორთა სისტემას:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r \tag{1}$$

ეწოდება წრფივად დამოკიდებული რიცხვთა P ველის მიმართ, თუ ამ ველში მოიძებნება ისეთი რიცხვები: $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r$, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს და ადგილი აქვს ტოლობას

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0. \tag{2}$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში, მოცემულ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი. α ვექტორს ეწოდება $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია რიცხვთა P ველის მიმართ, თუ ამ ველში მოიძებნება ისეთი $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$ რიცხვები, რომ

$$\alpha=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s. \tag{3}$$

ადვილად დამტკიცდება შემდეგი თვისებები:

1. თუ მოცემულ ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ სისტემის ერთი ვექტორი მაინც დანარჩენების წრფივი კომბინაციაა რიცხვთა P ველის მიმართ, მაშინ მოცემულ ვექტორთა სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული აღნიშნული ველის მიმართ.

2. თუ მოცემული $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია რიცხვთა P ველის მიმართ, მაშინ მოცემულ ვექტორთა სისტემის ერთი ვექტორი მაინც იქნება დანარჩენების წრფივი კომბინაცია აღნიშნული ველის მიმართ.

3. თუ მოცემულ ვექტორთა სისტემის რომელიმე ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მთელი სისტემა წრფივად დამოკიდებული იქნება.

4. თუ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მისი ყოველი ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელი იქნება.

5. თუ α ვექტორი წრფივი კომბინაციაა მოცემულ ვექტორთა რომელიმე ქვესისტემისა, მაშინ ის წრფივი კომბინაცია იქნება მოცემულ ვექტორთა სისტემისა. ამ თვისების შემოწმება ადვილია.

მაგალითად, შევამოწმოთ მე-3 თვისება. სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $a_1, a_2, \ldots, a_h$ მოცემულ ვექტორთა სისტემის ქვესისტემა შედგენილი პირველი $h \leqslant r$ ვექტორისაგან წრფივად დამოკიდებულია; ეს იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_h a_h = 0. \tag{6}$$

ამასთან, $k_1, k_2, \ldots, k_h$ რიცხვებს შორის ერთი მაინც არ უდრის ნულს. (6) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_h a_h + 0 \cdot a_{h+1} + \ldots + 0 \cdot a_r = 0; \tag{7}$$

რადგან $k_1, k_2, \ldots, k_h$ კოეფიციენტებს შორის ერთი მაინც არ უდრის ნულს, ამიტომ ელემენტთა (1) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ყოველი ორი a და b მთელი რიცხვი რაციონალურ რიცხვთა ველზე წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, როცა a და b განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ $ax=b$ განტოლებას ერთი გარკვეული რაციონალური $x=\dfrac{b}{a}$ ამონახსნი აქვს და შეგვიძლია დავწეროთ $k_1 a + k_2 b = 0$, სადაც $k_1 = \dfrac{b}{a}$, $k_2 = -1$. თუ a და b მთელი რიცხვებიდან ერთი მაინც ნულია, მათი წრფივად დამოკიდებულება უბრალოდ შემოწმდება.

2. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ორი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრი, რომლებიც დაკავშირებულია ტოლობით

$f(x)=k.g(x)$, სადაც k ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია, ნამდვილ რიცხვთა ველზე წრფივად დამოკიდებულია.

3. რიცხვები 1 და i ნამდვილ რიცხვთა ველზე წრფივად დამოუკიდებელია.

მართლაც, არ მოიძებნება ერთდროულად ნულისაგან განსხვავებული ორი ისეთი ნამდვილი რიცხვი k_1 და k_2, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot i = 0$.

როგორც ვიცით, ამ ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $k_1 = k_2 = 0$. ადვილად შემოწმდება, რომ რიცხვები 1 და i კომპლექსურ რიცხვთა ველზე წრფივად დამოკიდებულია.

ვიტყვით, რომ ვექტორთა (1) სისტემა წრფივად გამოისახება ვექტორთა

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \tag{4}$$

სისტემის მიმართ, თუ (1) სისტემის ყოველი α_i ვექტორი წრფივი კომბინაციაა (4) სისტემისა. ადვილად შემოწმდება ამ განმარტების **ტრანზიტულობა**, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

6. თუ (1) ვექტორთა სისტემა წრფივად გამოისახება (4) ვექტორთა სისტემის მიმართ და (4) ვექტორთა სისტემა წრფივად გამოისახება ვექტორთა

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t \tag{5}$$

სისტემის მიმართ, მაშინ (1) ვექტორთა სისტემა წრფივად გამოისახება ვექტორთა (5) სისტემის მიმართ. ამ თვისებათა შემოწმებას ვანდობთ მკითხველს.

ვექტორთა სისტემის რომელიმე წრფივად დამოუკიდებელ ქვესისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი **მაქსიმალური ქვესისტემა**, თუ მასთან სისტემის ერთი ვექტორის მიერთებით უკვე ვღებულობთ წრფივად დამოკიდებულ ქვესისტემას.

ვექტორთა ორ სისტემას ეწოდება **ეკვივალენტური**, თუ პირველი სისტემის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება მეორე სისტემის მიმართ და, პირიქით. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ თუ რომელიმე α ვექტორი წრფივად გამოისახება ვექტორთა რომელიმე სისტემის მიმართ, მაშინ ის წრფივად გამოისახება მოცემულ ვექტორთა სისტემის ყოველი ეკვივალენტური ვექტორთა სისტემის მიმართ. ცხადია, რომ მოცემულ ვექტორთა სისტემის ყოველი ვექტორი მოცემული სისტემის წრფივი კომბინაციაა. ამიტომ ვექტორთა ყოველი სისტემა თავისი თავის ეკვივალენტურია.

ახლა დავამტკიცოთ ძირითადი თეორემა წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის შესახებ.

თეორემა. თუ ვექტორული სივრციდან აღებული ვექტორთა ორი

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \qquad (\alpha)$$
$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \qquad (\beta)$$

სისტემიდან პირველი (α) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია და წრფივი კომბინაციაა მეორე (β) სისტემისა, მაშინ მტკიცდება: ა) $r \leqslant s$ და ბ) მეორე სისტემაში შეიძლება შევარჩიოთ r რაოდენობის ვექტორთა ისეთი ქვესისტემა, რომ თუ მათ მაგიერ ჩავსვამთ (α) სისტემის ვექტორებს, მაშინ მივიღებთ ახალ ვექტორთა სისტემას, რომელიც ეკვივალენტური იქნება ვექტორთა (β) სისტემისა.

დამტკიცება. დამტკიცებისათვის გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი (α) სისტემის ვექტორთა რიცხვის მიმართ. როცა $r=0$ თეორემა მართებულია, რადგან ყოველი ვექტორთა სისტემა თავისი თავის ეკვივალენტურია. როცა $r=1$, ე. ი. ვექტორთა (α) სისტემა შეიცავს ერთ, მაგალითად α_1, ნულისაგან განსხვავებულ ვექტორს, მაშინ, პირობის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\alpha_1 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s. \qquad (6)$$

(6) ტოლობიდან ჩანს, რომ ერთი k_i მაინც არ უდრის ნულს. ვთქვათ, $k_2 \neq 0$, მაშინ (6) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ β_2 ვექტორი გამოისახება წრფივად $\alpha_1, \beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_s$ ვექტორებით. ახლა, თუ მეორე სისტემაში β_2 ვექტორს შევცვლით α_1 ვექტორით, მივიღებთ ახალ სისტემას

$$\beta_1, \alpha_1, \beta_3, \ldots, \beta_s, \qquad (7)$$

რომელიც იქნება მეორე, ე. ი. (β) სისტემის ეკვივალენტური.

ვიგულისხმოთ, რომ თეორემა მართებულია, როცა პირველ სისტემაში ვექტორთა რიცხვი უდრის $r-1$. რადგან წრფივად დამოუკიდებელი (α) სისტემის ყოველი ქვესისტემა, კერძოდ, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, წრფივად დამოუკიდებელია და წრფივად გამოისახება (β) სისტემის მიმართ, ამიტომ, დაშვების თანახმად მივიღებთ, რომ $r-1 \leqslant s$ და (β) სისტემის სათანადო ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ ვექტორებით ჩანაცვლებით მიიღება ახალი სისტემა

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_s, \qquad (8)$$

რომელიც ეკვივალენტურია (β) სისტემისა. ცხადია, რომ ზოგადობა არ დაირღვევა ვექტორთა ნომრების ასეთი აღებით. ახლა რადგან (8) და (β) სისტემები ეკვივალენტურია, ამიტომ α_r ვექტორი წრფივად გამოისახება ვექტორთა (8) სისტემის მიმართ, ე. ი.

$$\alpha_r = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1} + \lambda_r\beta_r + \lambda_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + \lambda_s\beta_s. \qquad (9)$$

(9) ტოლობიდან ჩანს, რომ $r-1<s$. მართლაც, თუ დავუშვებთ $r-1=s$, მაშინ (9) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ ვექტორთა (α) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $r-1<s$, ე. ი. $r\leqslant s$ და λ_r, λ_{r+1}, ..., λ_s კოეფიციენტთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ვთქვათ, $\lambda_s\neq0$, მაშინ (9) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\beta_s=\left(-\frac{k_1}{\lambda_s}\right)\alpha_1+\left(-\frac{k_2}{\lambda_s}\right)\alpha_2+\cdots+\left(-\frac{k_{r-1}}{\lambda_s}\right)\alpha_{r-1}+$$
$$+\left(-\frac{\lambda_r}{\lambda_s}\right)\beta_r+\cdots+\left(-\frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s}\right)\beta_{s-1}+\frac{1}{\lambda_s}\alpha_r, \qquad (10)$$

ე. ი. β_s ვექტორი წრფივად გამოისახება ვექტორთა

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \ldots, \beta_{s-1}, \alpha_r \qquad (11)$$

სისტემის მიმართ. თუ დავუკვირდებით (9) და (10) ტოლობებს მივიღებთ (8) და (11) სისტემათა ეკვივალენტურობას.

ახლა რადგან დაშვების თანახმად (β) სისტემა ეკვივალენტურია (8) სისტემისა და (8) სისტემა ეკვივალენტურია (11) სისტემისა, (β) და (11) სისტემები იქნება ეკვივალენტური და ამით ძირითადი თეორემა წრფივად დამოკიდებულების შესახებ მთლიანად დამტკიცებულია. დამტკიცებულ თეორემას **შტაინიცის** თეორემას უწოდებენ. დამტკიცებული თეორემიდან გამოდის მეტად მნიშვნელოვანი შედეგები. ჩვენ განვიხილავთ ზოგიერთ მათგანს.

1. ყოველ ორ წრფივად დამოუკიდებელ ეკვივალენტურ ვექტორთა სისტემაში ვექტორების რიცხვი ტოლია. ეს შედეგი უშუალოდ გამოდის თეორემის პირველი ნაწილიდან.

2. მოცემულ წრფივად დამოკიდებულ ვექტორთა

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_l, \ldots, \alpha_r \qquad (12)$$

სისტემის ყოველ ორ წრფივად დამოუკიდებელ მაქსიმალურ ქვესისტემაში ვექტორების რიცხვი ტოლია.

მართლაც, ვიგულისხმოთ, რომ (12) სისტემის რომელიმე ორი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემაა:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \qquad (13)$$

და

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l. \qquad (14)$$

რადგან (13) და (14) ცალ-ცალკე ვექტორთა (12) სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემებია, ამიტომ ვღებულობთ რომ (12), (13) და (12), (14) სისტემები ეკვივალენტური სისტემებია.

მაგალითად, (13) სისტემის ყოველი ვექტორი რომ (12) სისტემის წრფივი კომბინაციაა ეს ცხადია. ახლა (12) სისტემიდან, თუ ავიღებთ ისეთ α_i ვექტორს, რომელიც (13) სისტემაში არ შედის, და განვიხილავთ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_i$$

ვექტორთა სისტემას, მაშინ ეს სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული, ე. ი. მოიძებნება $k+1$ რაოდენობის $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_i$ ისეთი რიცხვი, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_k\alpha_k+\lambda_i\alpha_i=0. \tag{15}$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ $\lambda_i \neq 0$; წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით ვექტორთა (13) სისტემის წრფივად დამოკიდებულებას, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. რადგან $\lambda_i \neq 0$, (15) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ (12) სისტემის ისეთი α_i ვექტორებიც, რომლებიც (13) სისტემაში არ შედიან, წარმოადგენენ ამ სისტემის წრფივ კომბინაციას. მაშასადამე, **ვექტორთა (12) სისტემა, ყოველი მისი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემის ეკვივალენტურია.** აქედან კი გამოდის (13) და (14) წრფივად დამოკიდებულ მაქსიმალურ ქვესისტემათა ეკვივალენტურობა; თანახმად პირველი შედეგისა, მათი ვექტორების რიცხვი ტოლია, ე. ი. $k=l$.

3. ვთქვათ, მოცემულია ვექტორთა ორი სისტემა:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \tag{16}$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s. \tag{17}$$

თუ პირველი სისტემა წრფივად გამოისახება მეორე სისტემის მიმართ, ე. ი. (16) სისტემა (17) სისტემის წრფივი კომბინაციაა, მაშინ პირველი სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემის ვექტორების k რიცხვი არ აღემატება მეორე სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემის ვექტორების l რიცხვს, ე. ი. $k \leqslant l$.

ამ შედეგის დამტკიცება ადვილია პირველი და მეორე შედეგების მხედველობაში მიღებით. თუ (16) და (17) ეკვივალენტური სისტემებია, მაშინ მივიღებთ, რომ $k=l$.

ახლა დავუბრუნდეთ ისევ რიცხვთა P ველზე აღებულ ვექტორულ სივრცეს. ამ სივრციდან აღებულ ვექტორებს:

$$\varepsilon_1=(1, 0, \ldots, 0), \varepsilon_2=(0, 1, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n=(0, 0, \ldots, 1) \tag{18}$$

ეწოდებათ ერთეულოვანი ვექტორები. ადვილად დამტკიცდება, რომ (18) ერთეულოვანი n ვექტორის სისტემა n-განზომილებიან ვექტორ-

თა სივრცის წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემაა. მართლაც, პირველად ვუჩვენოთ, რომ ერთეულოვან ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ვთქვათ,

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\ldots+k_n\varepsilon_n=0.$$

გვექნება:

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=(k_1,\ 0,\ \cdots,\ 0)+(0,\ k_2,\ \cdots,\ 0)+\cdots+$$
$$+(0,\ 0,\ \cdots,k_n)\ =(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)=0$$

ვინაიდან ვექტორი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, როცა ყველა მისი კომპონენტი ნულია, ვღებულობთ, რომ

$$k_1=k_2=\ldots=k_n=0;$$

ამით დამტკიცდა ერთეულოვან ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა.

ახლა განვიხილოთ n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცის ნებისმიერი $\alpha=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ ვექტორი; ის შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\alpha=(a_1,\ 0,\ \ldots,\ 0)+(0,\ a_2,\ \ldots,\ 0)+\ldots+(0,\ 0,\ \ldots,\ a_n)=$$
$$=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n.$$

ამრიგად მივიღეთ. რომ სივრცის ყოველი α ვექტორი ერთეულოვან ვექტორთა წრფივი კომბინაციაა; ეს იმას ნიშნავს, რომ n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცის ერთი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემა მაინც ერთეულოვან ვექტორთა სისტემაა. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი α ვექტორის წარმოდგენა ერთეულოვან ვექტორთა საშუალებით ერთადერთია (ცალსახაა). მართლაც, ვთქვათ, იგივე α ვექტორი წარმოგვიდგება ასე:

$$\alpha=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\ldots+b_n\varepsilon_n.$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\alpha=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n),$$

ე. ი. $b_i=a_i$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). მაშასადამე, n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცის ყოველი ვექტორი წარმოადგენს ამ სივრცის ერთეულოვან ვექტორთა წრფივ კომბინაციას და ეს წარმოდგენა ერთადერთია. ადვილად დამტკიცდება, რომ n-განზომილებიანი ვექტორთა სივრცის წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალური რიცხვი უდრის n-ს. მართლაც, ვთქვათ, ვექტორული სივრცის რაიმე წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა არის

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r.$$

რადგან მოცემული სისტემის ყოველი α_i ვექტორი წარმოადგენს ერთეულოვან $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n$ ვექტორთა სისტემის წრფივ კომბინაციას,

ამიტომ შტაინიცის თეორემის პირველი ნაწილის თანახმად მივიღებთ, რომ $r \leqslant n$. ახლა, რადგან n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცის ერთეულოვან ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ვღებულობთ, რომ n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცის წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალური რიცხვი უდრის n-ს. საზოგადოდ, სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა ყოველ მაქსიმალურ ქვესისტემას სივრცის **ბაზისს** უწოდებენ, ხოლო წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემის ვექტორთა რიცხვს კი სივრცის **განზომილება** ან კიდევ **რანგი** ეწოდება. მაშასადამე, n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცისათვის ერთეულოვან ვექტორთა $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ სისტემა წარმოადგენს ამ სივრცის ერთ-ერთ ბაზისს, ხოლო ამ ერთეულოვანი ვექტორების რიცხვი n კი არის n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცის განზომილება, ანუ რანგი. რიცხვთა D ველზე აღებულ n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს აღნიშნავენ $P^{(n)}$ სიმბოლოთი.

მაგალითად, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა D ველზე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორგანზომილებიან ვექტორთა წრფივი, ანუ ვექტორული, სივრცე, რომელიც $D^{(2)}$-ით აღინიშნება. რადგან ყოველი კომპლექსური რიცხვი $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = i$ რიცხვების წრფივი კომბინაციაა და 1 და i ნამდვილ რიცხვთა ველზე ერთ-ერთი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემაა, რიცხვები 1, i იქნება $D^{(2)}$ სივრცის ერთ-ერთი ბაზისი. მაშასადამე, $D^{(2)}$ კომპლექსურ რიცხვთა სივრცის განზომილება, ანუ რანგი, ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ უდრის 2-ს.

ახლა წრფივ განტოლებათა სისტემის დახმარებით გავარკვიოთ რას ნიშნავს $P^{(n)}$ სივრცეში $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება. ვთქვათ, α_i ვექტორის კომპონენტებია:

$$a_1^{(i)},\ a_2^{(i)},\ \ldots,\ a_n^{(i)},$$

ე. ი.

$$\alpha_i = (a_1^{(i)},\ a_2^{(i)},\ \ldots,\ a_n^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

მაშინ თანახმად წრფივად დამოკიდებულების განმარტებისა, მოიძებნება ისეთი $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, და ადგილი აქვს ტოლობას

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n = 0.$$

(19) ტოლობის საფუძველზე ამ უკანასკნელი თანაფარდობიდან

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ უცნობთა მიმართ მივიღებთ შემდეგ წრფივ ერთგვაროვან სისტემას:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}k_1+a_1^{(2)}k_2+\cdots+a_1^{(n)}k_n&=0,\\ a_2^{(1)}k_1+a_2^{(2)}k_2+\ldots+a_2^{(n)}k_n&=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ a_n^{(1)}k_1+a_n^{(2)}k_2+\cdots+a_n^{(n)}k_n&=0. \end{aligned} \tag{20}$$

მაშასადამე, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულების საკითხი ზოგად შემთხვევაში დაიყვანება (20) სისტემის არანულოვანი ამონახსნის არსებობამდე. ვღებულობთ, **რომ: თუ მოცემულ ვექტორთა სისტემის შესაბამისი (20) სისტემის დეტერმინანტი ნულია, მაშინ მოცემულ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი წრფივად დამოუკიდებელია.** შემდეგ პარაგრაფში მატრიცის რანგის შესწავლისას ამ საკითხს კიდევ დავუბრუნდებით.

მაგალითი 1. ამ მეთოდით დავამტკიცოთ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ერთეულოვან ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა, ე. ი. ვაჩვენოთ, რომ

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\ldots+k_n\varepsilon_n=0$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$k_1=k_2=\ldots=k_n=0.$$

მართლაც, მოცემულ

$$\varepsilon_1=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \varepsilon_2=(0,\ 1,\ \ldots,\ 0),\ldots,\ \varepsilon_n=(0,\ 0,\ \ldots,\ 1)$$

ერთეულოვან ვექტორთა სისტემის შესაბამის ერთგვაროვან წრფივ სისტემას, ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} 1\cdot k_1+0\cdot k_2+\ldots+0\cdot k_n&=0,\\ 0\cdot k_1+1\cdot k_2+\ldots+0\cdot k_n&=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ 0\cdot k_1+0\cdot k_2+\ldots+1\cdot k_n&=0. \end{aligned}$$

მიღებული სისტემის დეტერმინანტი $d=1\neq 0$, ამიტომ მიღებულ ერთგვაროვან სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი, ანუ ტრივიალური, ამონახსნი

$$k_1=k_2=\ldots=k_n=0, \quad \text{რ. დ. გ.}$$

მაგალითი 2. გამოვარკვიოთ $P^{(3)}$ სივრცეში

$$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1),\ \alpha_2=(1,\ 2,\ 3),\ \alpha_3=(1,\ 3,\ 6)$$

ვექტორების წრფივად დამოკიდებულების საკითხი. განვიხილოთ თანაფარდობა

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0.$$

აქედან მოცემულ α_1, α_2, α_3 ვექტორთა სისტემისათვის მივიღებთ შემდეგ ერთგვაროვან სისტემას:

$$
\begin{aligned}
k_1 - k_2 + k_3 &= 0,\\
k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0,\\
k_1 + 3k_2 + 6k_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

ადვილად გაისინჯება, რომ მიღებული სისტემის დეტერმინანტი $\neq 0$, ამიტომ მოცემულ სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი $k_1 = k_2 = k_3 = 0$; მაშასადამე, მოცემულ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

მაგალითი 3. გამოვარკვიოთ $P^{(3)}$ სივრცეში

$$\alpha_1 = (1,\ 2,\ 2),\ \alpha_2 = (-2,\ 1,\ -1),\ \alpha_3 = (1,\ -3,\ -1)$$

ვექტორების წრფივად დამოკიდებულების საკითხი. გამოთვლით მივიღებთ, რომ მოცემულ ვექტორთა შესაბამისი ერთგვაროვანი

$$
\begin{aligned}
k_1 - 2k_2 + k_3 &= 0,\\
2k_1 + k_2 - 3k_3 &= 0,\\
2k_1 - k_2 - k_3 &= 0
\end{aligned}
$$

სისტემის დეტერმინანტი უდრის ნულს, ე. ი. მიღებულ ერთგვაროვან სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსნი; ამიტომ მოცემულ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. მოიძებნება სამი ისეთი k_1, k_2, k_3 რიცხვი, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს და ადგილი აქვს ტოლობას

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, მაგალითად,

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

აკმაყოფილებს მიღებულ ერთგვაროვან სისტემას. ამიტომ მოცემულ ვექტორთა სისტემისათვის ადგილი ექნება შემდეგ თანაფარდობას:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მოცემულ α_1, α_2, α_3 წრფივად დამოკიდებულ ვექტორთა სისტემის ყოველი ორვექტორიანი ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, ვთქვათ, α_1, α_2 ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$, სადაც ერთი k მაინც არ უდრის ნულს. დავუშვათ $k_1 \neq 0$, მივიღებთ: $\alpha_1 = k\alpha_2$, $k = -\frac{k_2}{k_1}$, ე. ი. α_1 ვექტორის კომპონენტები პროპორციულია α_2 ვექტორის კომპონენტებისა, რაც არაა მართალი. ანალოგიურად დამტკიცდება α_1, α_3 და α_2, α_3 ქვესისტემების წრფივად დამოუკიდებლობა. მაშასადამე, მოცემულ α_1, α_2, α_3 ვექტორთა სისტემის რანგი უდრის 2-ს.

მაგალითი 4. ადვილად შევნიშნავთ, რომ სამგანზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ორი ვექტორის წრფივად დამოკიდებულება ნიშნავს, რომ ისინი პარალელურია ერთისა და იმავე წრფისა, ხოლო სამი ვექტორის წრფივად დამოკიდებულება კი ნიშნავს, რომ ისინი პარალელურია ერთისა და იმავე სიბრტყისა.

მაგალითი 5. ადვილად შემოწმდება, რომ თუ α ვექტორი $\neq 0$ და $k\alpha = l\alpha$, მაშინ $k=l$.

§ 8. მატრიცის რანგი და მისი გამოთვლა. დეტერმინანტის ნულთან ტოლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

როგორც წინა პარაგრაფიდან ვიცით, ვექტორული სივრცის ან ვექტორთა სისტემის რანგი ეწოდება მოცემული სივრცის (ვექტორთა სისტემის) წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალურ რიცხვს. თანახმად წრფივად დამოკიდებულების ძირითადი თეორემის შედეგისა, ვექტორთა მოცემული $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ სისტემაში ყოველი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემის ვექტორთა რიცხვი ერთი და იგივეა და უდრის მოცემული სისტემის რანგს.

წრფივ განტოლებათა სისტემის თეორიის ღრმად შესწავლის მიზნით წინასწარ საჭიროა გავეცნოთ მატრიცის რანგის ცნებას და მასთან დაკავშირებულ საკითხებს.

ვთქვათ, რიცხვთა P ველზე მოცემულია s-სტრიქონიანი და n-სვეტიანი მართკუთხა მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

მოცემული A მატრიცის ყოველი სტრიქონი შეიძლება განვიხილოთ როგორც n-განზომილებიანი ვექტორი, ხოლო ყოველი სვეტი — როგორც s-განზომილებიანი ვექტორი.

განსაზღვრა. A **მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალურ რიცხვს ეწოდება** A **მატრიცის რანგი.**

ანალოგიურად კვადრატული მატრიცისა, A მართკუთხა მატრიცის რომელიმე k რაოდენობის სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაში მიღებული k-ური რიგის კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტს ვუწოდოთ A მატრიცის k-ური რიგის მინორი. r ნატურალურ რიცხვს ვუწოდოთ A მატრიცის **ბაზისური რიცხვი**, თუ A მატრიცას გააჩნია ერთი ნულისაგან განსხვავებული r რიგის მინორი მაინც, ხოლო ყველა, $r+1$ და უფრო მაღალი რიგის, მინორი ნულია. თუ A მატრიცის

ბაზისური რიცხვი უდრის r-ს, $r>0$, მაშინ მის ნულისაგან განსხვავებულ r რიგის ყოველ მინორს ეწოდება A მატრიცის **ბაზისური მინორი**. მატრიცის იმ სტრიქონებსა და სვეტებს, რომელთა გადაკვეთაზეა მოთავსებული ბაზისური მინორი, ვუწოდოთ მატრიცის **ბაზისური სტრიქონები და სვეტები**.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ თუ A **მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორი ნულია, მაშინ A მატრიცის ყველა, $k+1$ და უფრო მაღალი რიგის, მინორიც ნულია.** მართლაც, ავიღოთ A მატრიცის ნებისმიერი $k+1$ რიგის მინორი და გავშალოთ რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის მიმართ; საზოგადოდ, ის დაიშლება $k+1$ რაოდენობის k-ური რიგის მინორების ჯამად. რადგან ყველა k-ური რიგის მინორი ნულია, ამიტომ აღებული $k+1$ რიგის მინორიც იქნება ნული. მაშასადამე, მივიღეთ, რომ თუ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორი ნულია, მაშინ ყველა $k+1$ რიგის მინორიც ნულია. რადგან ყველა $k+1$ რიგის მინორი ნულია, ანალოგიურად მივიღებთ, რომ ყველა $k+2$ რიგის მინორი ნულია და ა. შ. საზოგადოდ მივიღებთ, რომ ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი ნულია.

თეორემა. **A მატრიცის ბაზისური მინორის რიგი უდრის A მატრიცის რანგს.**

დამტკიცება. ვთქვათ, A მატრიცის ბაზისური მინორის რიგი ან, რაც იგივეა, მატრიცის ბაზისური რიცხვი უდრის r-ს. ვიგულისხმოთ რომ A მატრიცის r რიგის M ბაზისური მინორი მდებარეობს მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში; ცხადია, ამ დაშვებით ზოგადობა არ იქნება დარღვეული, რადგან მატრიცის ყოველი მინორი მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში ატანით არ შეიცვლება. მაშასადამე, ვიგულისხმოთ, რომ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1r} & a_{1\,r+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots M\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\cdots a_{rr} & a_{r\,r+1}\cdots a_{rn} \\ a_{r+1\,1}\cdots a_{r+1\,r} & a_{r+1\,r+1}\cdots a_{r+1\,n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}\cdots a_{sr} & a_{s\,r+1}\cdots a_{sn} \end{pmatrix}.$$

ამ შემთხვევაში ადვილად დავრწმუნდებით, რომ A მატრიცის პირველი r სვეტი წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ პირველი r სვეტი ან, რაც იგივეა, ვექტორები:

$$\begin{aligned} \alpha_1&=(a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{r1},\ a_{r+1\,1},\ \ldots,\ a_{s1}), \\ \alpha_2&=(a_{12},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{r2},\ a_{r+1\,2},\ \ldots,\ a_{s2}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_r&=(a_{1r},\ a_{2r},\ \ldots,\ a_{rr},\ a_{r+1\,r},\ \ldots,\ a_{sr}) \end{aligned} \qquad (1)$$

წრფივად დამოკიდებულია; ეს იმას ნიშნავს, რომ ვექტორთა (1) სისტემიდან ერთი ვექტორი მაინც დანარჩენების წრფივი კომბინაციაა. ვთქვათ, მაგალითად, პირველი α_1 ვექტორი დანარჩენების წრფივი კომბინაციაა, ე. ი.

$$\alpha_1=\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\dots+\lambda_r\alpha_r.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ მოცემული მატრიცის ბაზისური მინორის პირველი სვეტი ამავე მინორის დანარჩენი სვეტების წრფივი კომბინაციაა. ასეთი მინორი-დეტერმინანტი კი, თანახმად დეტერმინანტის ერთ-ერთი თვისებისა, უდრის ნულს, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. შეიძლებოდა ამ დებულების კიდევ სხვაგვარად დამტკიცება მოცემულ (1) ვექტორთა სისტემის შესაბამის ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის განხილვით.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ A მატრიცის ყოველი λ სვეტი, $\lambda=r+1, \dots, n$. წრფივი კომბინაციაა პირველი r სვეტისა. ავიღოთ $r+1$ რიგის

$$d_i=\begin{vmatrix} & & & a_{1\lambda} \\ & M & & a_{2\lambda} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{r\lambda} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{ir} & a_{i\lambda} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი, სადაც $i=1, 2, \dots, s.$, როგორც ვხედავთ, $r+1$ რიგის d_i დეტერმინანტი შეიცავს r რიგის M ბაზისურ მინორს. დავამტკიცოთ, რომ $d_i=0$.

მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა: $i\leq r$ და $i>r$. პირველ შემთხვევაში d_i დეტერმინანტს ექნება ორი ერთნაირი სტრიქონი და ამიტომ ის უდრის ნულს; ცხადია, ამ შემთხვევაში d_i დეტერმინანტი არ წარმოადგენს მინორს, რადგან ის არ მიიღება მატრიციდან გარკვეული რაოდენობის სტრიქონებისა და სვეტების ამოშლით. მეორე შემთხვევაში d_i დეტერმინანტი იქნება $r+1$ რიგის მინორი და, რადგან ბაზისური მინორის რიგი უდრის r-ს, ამიტომ $d_i=0$. თუ ახლა d_i დეტერმინანტს გავშლით i-ური სტრიქონის ელემენტების მიმართ, რადგან $d_i=0$, მივიღებთ:

$$a_{i1}A_1+a_{i2}A_2+\dots+a_{ir}A_r+a_{i\lambda}\cdot M=0,$$

სადაც A_j არის შესაბამისად a_{ij} ($j=1, 2, \dots, r$) ელემენტის ალგებრული დამატება, M ბაზისური მინორი კი არის $a_{i\lambda}$ ელემენტის (რადგან მისი სტრიქონისა და სვეტის ნომრების ჯამი d_i დეტერმი-

ნანტში არის $2r+2$) ალგებრული დამატება. ვინაიდან $M \neq 0$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a_{i\lambda} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \cdots - \frac{A_r}{M}a_{ir}, \qquad (1')$$

(2) ტოლობა მართებულია ყოველი i ($i=1, 2, \ldots, s$) ნომრისათვის. მაშასადამე, A მატრიცის ყოველი $\lambda=r+1,\ldots,n$ სვეტის ელემენტი წრფივი კომბინაციაა პირველი r სვეტის შესაბამისი ელემენტებისა; ეს იმას ნიშნავს, რომ A მატრიცის ყოველი $\lambda=r+1, \ldots, n$ სვეტი წრფივი კომბინაციაა პირველი r სვეტისა. მაგრამ, რადგან პირველი r სვეტი წრფივად დამოუკიდებელია, მივიღებთ, რომ A მატრიცის პირველი r სვეტი არის მატრიცის სვეტთა ერთ-ერთი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემა.

ამრიგად, A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალური რიცხვი უდრის მისი ბაზისური მინორის რიგს და ამით თეორემა დამტკიცებულია. ამ თეორემას ხშირად უწოდებენ თეორემას მატრიცის რანგის შესახებ.

თუ მოვიგონებთ წრფივად დამოკიდებულების ძირითადი თეორემის შედეგს: ვექტორთა სისტემაში ყველა წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემის ვექტორთა რიცხვი ერთი და იგივეა, მივიღებთ, რომ მატრიცაში წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების ყველა მაქსიმალური ქვესისტემის ვექტორთა რიცხვიც ერთი და იგივეა, ამიტომ, როცა A მატრიცის რანგი, ე. ი. წრფივად დამოუკიდებელ სვეტთა მაქსიმალური რიცხვი უდრის r-ს, მაშინ A მატრიცის ყოველი r-ზე მეტი რაოდენობის სვეტი წრფივად დამოკიდებული იქნება. მაშასადამე, მატრიცის ყოველი r-ზე მაღალი რიგის მინორის ერთი სვეტი მაინც დანარჩენების წრფივი კომბინაციაა, ე. ი. ყოველი r-ზე მაღალი რიგის მინორი ნულია. ეს უკანასკნელი შენიშვნა პრაქტიკულად მატრიცის რანგის მოძებნას ძალზე აადვილებს. მართლაც, ვთქვათ, A მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული რომელიმე რიგის M მინორი მარცხენა ზედა კუთხეში არ მდებარეობს: ავიტანოთ ეს მინორი მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში და გავსინჯოთ M მინორის ყველა შემოარშიებული, ანუ M-ის შემცველი, $r+1$ რიგის მინორი. თუ ეს მინორები გამოვიდა ნული, სხვა დანარჩენი $r+1$ რიგის მინორების გასინჯვა არ დაგვჭირდება, რადგან, ზემოთ თქმულის თანახმად, ყველა ისინი იქნება ნული და, მაშასადამე, ბაზისური მინორის რიგი, ე. ი. მატრიცის რანგი, ტოლი იქნება r-ისა.

საზოგადოდ, s-სტრიქონიანი და n-სვეტიანი მატრიცისაგან მიღებული ყველა შესაძლო $k \leqslant$ უმც. (n, s) რიგის მინორების რაოდე-

ნობა იქნება $C_s^k \cdot C_n^k$. ზემოთ მიღებული შედეგის თანახმად, მატრიცის რანგის საპოვნელად დაგვჭირდება გაცილებით ნაკლები რაოდენობის მინორების გამოთვლა.

შევნიშნოთ, რომ მატრიცის რანგის შესახებ დამტკიცებული თეორემა საშუალებას გვაძლევს აგრეთვე მოცემულ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ვექტორთა სისტემაში ვიპოვოთ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური ქვესისტემა. ამისათვის საკმარისია შევადგინოთ მოცემულ ვექტორთა სისტემის შესაბამისი მატრიცა, ე. ი. ვექტორები მივიღოთ შესაბამისად მატრიცის სვეტებად. მატრიცის რანგის შესახებ დამტკიცებული თეორემიდან ვღებულობთ შემდეგ შედეგს: **მოცემულ ვექტორთა სისტემაში წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალური რიცხვი, ე. ი. ვექტორთა სისტემის რანგი, უდრის შესაბამის მატრიცის რანგს.**

პრაქტიკულად მატრიცის რანგის მოძებნა უნდა დავიწყოთ დაბალი რიგის მინორებიდან და მოვახდინოთ თანდათანობით მაღალი რიგის მინორებზე გადასვლა. გვახსოვდეს, რომ **მატრიცის რანგი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის r, როცა ბაზისური მინორის რიგი უდრის r, ე. ი. როცა მატრიცის ერთი r რიგის მინორი მაინც არ უდრის ნულს, ხოლო ყველა $r+1$ რიგის (მაშასადამე, უფრო მაღალი რიგის) მინორი უდრის ნულს.**

მაგალითი 1. ვიპოვოთ შემდეგი მატრიცის რანგი:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული მატრიცის ერთი მეორე რიგის მინორი მაინც, მაგალითად მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებული, არ უდრის ნულს. ამიტომ მისი რანგი $r \geqslant 2$. ახლა განვიხილოთ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ მინორის ყველა შესაძლო შემოარშიებული მესამე რიგის მინორი; მოცემული მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ სულ $C_4^3 \cdot C_5^3 = 4 \cdot 10 = 40$ მესამე რიგის მინორი. აღნიშნული მეორე რიგის მინორის ყველა შემოარშიებული მინორი იქნება სულ ექვსი, რომლებსაც შემდეგი სახე აქვთ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

უბრალო გასინჯვით დავრწმუნდებით, რომ ყველა ეს მესამე რიგის მინორი-დეტერმინანტი ნულია და ამიტომ მოცემული მატრიცის ბაზისური მინორის რიგი, ე. ი მოცემული მატრიცის რანგი $r=2$. ზემოთ აღნიშნული შენიშვნის გამო, ჩვენ არ გვჭირდება ყველა $C_4^3 \cdot C_3^3=40$ მესამე რიგის მინორის გამოთვლა.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ვექტორთა შემდეგი სისტემის რანგი:

$$\alpha_1=(2, \ -2, \ -4), \ \ \alpha_2=(1, \ 9, \ 3),$$
$$\alpha_3=(-2, \ -4, \ 1), \ \ \alpha_4=(3, \ 7, \ -1).$$

შევადგინოთ მოცემულ ვექტორთა სისტემის შესაბამისი მატრიცა

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

გამოთვლით მივიღებთ, რომ ამ მატრიცის რანგი $r=2$. მიღებული მატრიცის ერთ-ერთი ბაზისური მინორი იქნება მეორე რიგის დეტერმინანტი $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}=14\neq 0$; ამიტომ α_2 და α_3 ვექტორთა სისტემა იქნება მოცემულ ვექტორთა სისტემის ერთ-ერთი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემა.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ წრფივად დამოკიდებულება $\alpha_1=(1, \ 4, \ 1, \ 0)$, $\alpha_2=(2, \ 1, \ -1, \ -3)$, $\alpha_3=(1, 0, \ -3, \ -1)$, $\alpha_4=(0, \ 2, -6, 3)$ ვექტორთა შორის. შევადგინოთ მოცემულ ვექტორთა სისტემის შესაბამისი მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ მოცემული A მატრიცის რანგი $r=3$ და რომ მისი ერთ-ერთი ბაზისური მინორია

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

მაშასადამე, α_1, α_2 და α_3 ვექტორთა სისტემა ერთ-ერთი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემაა. ცხადია, α_4 ვექტორი უნდა იყოს α_1, α_2, α_3 ვექტორების წრფივი კომბინაცია, ვთქვათ,

$$\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3.$$

თუ ახლა ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში ჩავსვამთ α_1, α_2 და α_3 ვექტორების კოორდინატებს და შემდეგ შევკრებთ, თანახმად ვექტორთა ტოლობისა, k_1, k_2 და k_3 უცნობთა მიმართ მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} k_1+2k_2+\ k_3 &= 0, \\ 4k_1+\ k_2 \qquad &= 0, \\ k_1-\ k_2-3k_3 &= -6, \\ -3k_2-\ k_3 &= 3. \end{aligned}$$

k_1, k_2 და k_3 მუდმივთა საპოვნელად საკმარისია განვიხილოთ პირველი სამი განტოლება, რომელთა დეტერმინანტი $d \neq 0$. ადვილად მივიღებთ, რომ ამ სისტემის ერთადერთი ამონახსნი

$$k_1=1, \quad k_2=-2, \quad k_3=3.$$

მაშასადამე, $\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$, ე. ი. $\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3-\alpha_4=0$.

მატრიცის რანგის შესახებ დამკიცებული თეორემიდან ვღებულობთ კიდევ შემდეგ საინტერესო შედეგებს:

1. მოცემული მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სტრიქონების მაქსიმალური რიცხვი უდრის მისი წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალურ რიცხვს, ე. ი. უდრის მოცემული მატრიცის რანგს.

მართლაც, დამტკიცებისათვის მოვახდინოთ მოცემული მატრიცის ტრანსპონირება, ე. ი. მატრიცის სტრიქონებისა და სვეტების ადგილების ურთიერთშეცვლა მათი ნომრების შენახვით. თანახმად ტრანსპონირებული დეტერმინანტის თვისებისა, მატრიცის ტრანსპონირების შედეგად, ცხადია, ბაზისური მინორები არ შეიცვლება; ნულისაგან განსხვავებული მინორების ტრანსპონირებული მინორი ისევ ნულისაგან განსხვავებული იქნება. მაშასადამე, ტრანსპონირების შედეგად მიღებული მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალური რიცხვი უდრის პირველყოფილი მატრიცის რანგს, მაგრამ, რადგან ტრანსპონირებული მატრიცის სვეტები პირველყოფილი მატრიცის სტრიქონებია, თეორემის მეორე შედეგი დამტკიცებულია.

2. n-ური რიგის დეტერმინანტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, როცა სტრიქონები (სვეტები) წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, დეტერმინანტის თვისებების შესწავლისას დამტკიცებული იყო დეტერმინანტის ერთ-ერთი თვისების შედეგი: თუ დეტერმინანტის სტრიქონებს შორის არსებობს წრფივად დამოკიდებულება, მაშინ დეტერმინანტი ნულია. ეს შედეგი წარმოადგენს დასამტკიცებელი თვისების საკმარის პირობას. დავამტკიცოთ ახლა ამ თვისე-

ბის აუცილებლობა. ვთქვათ, მოცემული n-ური რიგის დეტერმინანტი უდრის ნულს; ეს იმას ნიშნავს, რომ შესაბამისი n-ური რიგის მატრიცის ბაზისური მინორის რიგი ან, რაც იგივეა, რანგი ნაკლებია n-ზე. მაშინ, დამტკიცებული თეორემის თანახმად, მოცემული n-ური რიგის დეტერმინანტის სვეტებს (სტრიქონებს) შორის არსებობს წრფივად დამოკიდებულება; ასეთი დეტერმინანტი კი, როგორც ვიცით, უდრის ნულს.

როგორც აღვნიშნეთ, მოცემულ ვექტორთა სისტემის რანგი უდრის შესაბამისი მატრიცის რანგს. წრფივ ალგებრაში დიდ როლს თამაშობს წრფივი სივრცის ან, რაც იგივეა, ვექტორული სივრცის რანგის ცნება. ვექტორთა სისტემის რანგის მოძებნას ხშირად აადვილებს ისეთი გარდაქმნები, რომლებიც ვექტორთა სისტემის რანგს არ ცვლიან. მოცემულ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ n-განზომილებიან ვექტორთა სისტემისათვის **ელემენტარული** გარდაქმნები ეწოდება შემდეგი სახის გარდაქმნებს:

1) ვექტორთა სისტემაში ნებისმიერი ორი ვექტორის ადგილების ურთიერთშეცვლას,

2) ვექტორთა სისტემის ნებისმიერი ვექტორის ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლებას,

3) ვექტორთა სისტემის რომელიმე ვექტორისათვის რაიმე რიცხვზე გამრავლებული ამავე სისტემის სხვა ვექტორის დამატებას.

ადვილად დამტკიცდება, რომ ელემენტარული გარდაქმნები არ ცვლის ვექტორთა სისტემის რანგს. რადგან ვექტორთა ყოველი სისტემა თავისი თავის ეკვივალენტურია, ამიტომ 1) ელემენტარული გარდაქმნა რანგს რომ არ ცვლის აშკარაა. ვთქვათ,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_s \tag{1}$$

ვექტორთა სისტემის რანგი უდრის r. განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, k\alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_s, \tag{2}$$

სადაც $k \neq 0$. რადგან $k\alpha_i$ ვექტორი წრფივად გამოისახება α_i ვექტორის საშუალებით და, პირიქით, α_i ვექტორი წრფივად გამოისახება $k\alpha_i$ ვექტორის საშუალებით:

$$\alpha_i = \frac{1}{k}(k\alpha_i) = \alpha_i,$$

ამიტომ ვღებულობთ ვექტორთა (1) და (2) სისტემების ეკვივალენტურობას. წრფივად დამოკიდებულების ძირითადი თეორემის შე-

დეგის თანახმად, (1) და (2) სისტემების წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური ქვესისტემების ვექტორთა რიცხვები, ე. ი. მათი რანგები, ტოლია. ახლა, ვექტორთა (1) სისტემის α_i ვექტორს დავუმატოთ $k\alpha_j$ ვექტორი; მივიღებთ ვექტორთა ახალ სისტემას:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i+k\alpha_j, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_s. \tag{3}$$

აღვნიშნოთ $\alpha_i'=\alpha_i+k\alpha_j$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ვექტორთა (1) და (3) სისტემები ეკვივალენტურია.

მართლაც, (3) სისტემა რომ ვექტორთა (1) სისტემის წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს აშკარაა. (1) სისტემა რომ ვექტორთა (3) სისტემის წრფივი კომბინაციაა ეს ჩანს ტოლობიდან

$$\alpha_i=\alpha_i'+(-k)\alpha_j.$$

ამგვარად, ვექტორთა (1) და (3) სისტემები ეკვივალენტურია და ამიტომ მათი რანგი ტოლია. ამით დამტკიცებულია, რომ მე-3 ელემენტარული გარდაქმნა ვექტორთა სისტემის რანგს არ ცვლის. ახლა, რადგან ვექტორთა ყოველი სისტემისა და მისი შესაბამისი მატრიცის რანგი ტოლია, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ A მატრიცის რანგი არ იცვლება, თუ:

1°. ნებისმიერ ორ სვეტს (სტრიქონს) ერთმანეთის მიმართ ადგილებს შევუცვლით,

2°. ნებისმიერ სვეტს (სტრიქონს) გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ რიცხვზე,

3°. ნებისმიერ სვეტს (სტრიქონს) მივუმატებთ (ან გამოვაკლებთ) სხვა რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ნებისმიერ რიცხვზე ნამრავლს. 1°, 2° და 3° გარდაქმნებს მატრიცის ელემენტარულ გარდაქმნებს უწოდებენ. მაშასადამე, ელემენტარული გარდაქმნებით მატრიცის რანგი არ იცვლება. ვიტყვით, რომ მართკუთხა მატრიცას, რომლის სტრიქონების რიცხვია s და სვეტების რიცხვი n, აქვს დიაგონალური სახე, თუ მისი ყველა ელემენტი ნულია, გარდა a_{11}, a_{22}, ... a_{rr}, სადაც $r\leqslant$ უმც. (n, s), ელემენტებისა, რომლებიც ერთის ტოლია. ცხადია, ასეთ მატრიცას აქვს ერთადერთი ბაზისური მინორი, რომლის რიგი$=r$, მაშასადამე, მატრიცის რანგი უდრის r-ს.

თეორემა. ყოველი არანულოვანი მატრიცა სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით შეიძლება დავიყვანოთ დიაგონალურ სახემდე.

ისეთ B მატრიცას, რომელიც მიიღება მოცემული A მატრიცისაგან სასრული რაოდენობის ელმენტარული გარდაქმნებით, ვუწოდოთ A მატრიცის **ეკვივალენტური** მატრიცა და ეს ეკვივალენტუ-

რობა ასე აღვნიშნოთ: $A \backsim B$. ახლა დავამტკიცოთ თეორემა. ვთქვათ, რიცხვთა P ველზე მოცემულია მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & . \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

ვგულისხმობთ, რომ მოცემული მატრიცის ერთი a_{ij} ელემენტი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია. ახლა ავიღოთ მატრიცის ის სვეტი, რომლის ერთი ელემენტი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია. ვთქვათ, ასეთია პირველი სვეტი, წინააღმდეგ შემთხვევაში 1° ელემენტარული გარდაქმნით ამას ყოველთვის მივაღწევთ.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ თუ პირველ სვეტში არ არის 1, მაშინ სათანადო ელემენტარული გარდაქმნის გამოყენებით პირველი სვეტის რომელიმე i-ურ სტრიქონში შეიძლება მივიღოთ 1. ახლა, ამ i-ური სტრიქონისა და პირველი სტრიქონის ადგილების ურთიერთშეცვლით რიცხვი 1, A მატრიცაში დაიკავებს a_{11} ელემენტის ადგილს. ახლა, პირველი სტრიქონის ყველა $a_{1\lambda}$ ($\lambda=2, 3, \dots, n$) ელემენტი, რომლებიც ნულისაგან განსხვავებულია, შეიძლება ვაქციოთ ნულად, თუ λ სვეტს გამოვაკლებთ პირველ სვეტს გამრავლებულს $a_{1\lambda}$ რიცხვზე. ანალოგიურად შეიძლება პირველ სვეტში ყველა ის a_{i1} ($i=2, 3, \dots, s$) ელემენტი, რომელიც არ უდრის ნულს, ვაქციოთ ნულად და ა. შ. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, სასრული რაოდენობის ნაბიჯის შემდეგ მივიღებთ A მატრიცის დიაგონალურ სახეს:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ . & . & . & . \\ 0 & a_{s2}' & \dots & a_{sn}' \end{pmatrix} \backsim$$

$$\dots \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ . & . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 \cdots 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა, რადგან A მატრიცის ყოველი ელემენტარული გარდაქმნა მოცემული მატრიცის რანგს არ ცვლის და A მატრიცის დიაგონა-

ლური სახე მივიღეთ სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით. A მატრიცის რანგი ტოლი იქნება მისი დიაგონალური სახის ბაზისური მინორის რიგისა. ადვილად შემოწმდება, რომ თუ $A \backsim B$, მაშინ $B \backsim A$. ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ თანამიმდევრობით ჩატარებული ელემენტარული გარდაქმნების შებრუნებული გარდაქმნები. დიაგონალურ სახემდე დაყვანილ მატრიცას კი აქვს მხოლოდ ერთი ნულისაგან განსხვავებული ბაზისური მინორი, რომლის რიგი ტოლია მთავარ დიაგონალზე დალაგებული ერთების რაოდენობისა. ამრიგად, იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მოცემული მატრიცის რანგი საკმარისია მოცემული მატრიცა ელემენტარული გარდაქმნებით დავიყვანოთ დიაგონალურ სახემდე. მთავარ დიაგონალზე დალაგებული ერთების რაოდენობა ტოლი იქნება მოცემული მატრიცის რანგისა. აქედან უშუალოდ ვღებულობთ, რომ ნულმატრიცის ან, რაც იგივეა, ყველა ისეთი მატრიცის რანგი, რომლებიც ელემენტარული გარდაქმნებით ნულმატრიცაზე დაიყვანებიან, უდრის ნულს.

მაგალითი. ვიპოვოთ მოცემულ ვექტორთა სისტემის:

$$\alpha_1=(0,-1,\ 3,\ 0,\ 2),\ \alpha_2=(2,\ -4,\ 1,\ 5,\ 3),$$
$$\alpha_3=(-4,\ 5,\ 7,\ -10,0)$$

ან, რაც იგივეა, მისი შესაბამისი

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი. მატრიცის მეორე სტრიქონი გავამრავლოთ (—1)-ზე და შემდეგ მოვახდინოთ პირველ და მეორე სტრიქონთა ტრანსპოზიცია, მივიღებთ:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

მიღებული A_1 მატრიცის პირველი სვეტი ჯერ გავამრავლოთ 4-ზე და მიღებული სვეტი გამოვაკლოთ მეორე სვეტს, შემდეგ იგივე სვეტი გავამრავლოთ (—5)-ზე და დავუმატოთ მესამე სვეტს, გვექნება:

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

ახლა, თუ ანალოგიურად მოვიქცევით პირველი სვეტის მიმართ, მივიღებთ:

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

თუ დავაკვირდებით, შევნიშნავთ, რომ როცა პირველ სტრიქონში (სვეტში), გარდა $a_{11}=1$ ელემენტისა, ყველა ნულია, პირველ სვეტში (სტრიქონში) ნულისაგან განსხვავებული ყოველი ელემენტი (გარდა $a_{11}=1$) შეიძლება შევცვალოთ ნულებით, მატრიცის სხვა ელემენტთა შეუცვლელად.

ახლა ცალკე ამოვწეროთ მატრიცა

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -11 & 22 \\ 5 & -10 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

თანამიმდევრობით პირველი სტრიქონისა და მეორე სვეტის ელემენტების 2-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -11 & 11 \\ 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

თუ ახლა მეორე სვეტს დავუმატებთ პირველ სვეტს და შემდეგ მხედველობაში მივიღებთ ზემოთ გაკეთებულ შენიშვნას, პირველ სვეტში —11, 5, —5 რიცხვების ნაცვლად უშუალოდ შეგვიძლია დავწეროთ ნულები და გვექნება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, მოცემული მატრიცა მიიღებს შემდეგ დიაგონალურ სახეს:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, მოცემულ ვექტორთა სისტემის ან, რაც იგივეა, შესაბამისი მატრიცის რანგი $r=2$.

განხილული მეთოდით მატრიცის რანგის მოძებნა ხშირად გაცილებით სწრაფად ხდება; გარდა ამისა, მატრიცის რანგის მოძებნის აღნიშნულ მეთოდს საზოგადოდ დიდი გამოყენება აქვს.

ამ მეთოდის ნაკლად შეიძლება ჩავთვალოთ ის, რომ მოცემულ ვექტორთა სისტემის (მატრიცის) რანგის მოძებნის შემდეგ არ შეგვიძლია გამოვყოთ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა (მატრიცის სვეტთა) მაქსიმალური ქვესისტემა.

სასარგებლოა მკითხველმა შეამოწმოს, რომ მოცემულ ვექტორთა სისტემის რანგი არ შეიცვლება: 1. თუ ვექტორთა სისტემიდან ამოვაგდებთ ისეთ ვექტორებს, რომლებიც წარმოადგენენ ამავე სისტემის დანარჩენ ვექტორთა წრფივ კომბინაციას და 2. თუ ვექტორთა სისტემიდან ნულვექტორს ამოვაგდებთ.

§ 9. n-უცნობიანი s წრფივი განტოლების სისტემა

ვთქვათ, რიცხვთა P ველზე მოცემულია n-უცნობიანი s წრფივი განტოლების სისტემა:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n&=b_s. \end{aligned} \tag{1}$$

პირველ რიგში ჩვენ უნდა განვიხილოთ საკითხი (1) სისტემის თავსებადობის შესახებ. როგორც ვიცით, (1) სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მოიძებნება უცნობების მნიშვნელობათა ერთი ისეთი

$$x_1=k_1,\ \ x_2=k_2,\ \ \ldots,\ \ x_n=k_n, \tag{2}$$

სისტემა მაინც, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემული სისტემის ყოველ განტოლებას. რიცხვთა

$$k_1,\ \ k_2,\ \ \ldots,\ \ k_n \tag{3}$$

სისტემას, ანუ ვექტორს $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, კი ეწოდება მოცემული წრფივი სისტემის ამონახსნი. ვიცით აგრეთვე, რომ მოცემული სისტემის გაფართოებული მატრიცა ეწოდება ისეთ მატრიცას, რომელიც მიიღება (1) სისტემის A მატრიცასთან სისტემის თავისუფალი წევრებისაგან შექმნილი ახალი მე-$(n+1)$ სვეტის მიერთებით. აღვნიშნოთ A მატრიცის სვეტების შესაბამისი s-განზომილებიანი ვექტორები

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ხოლო სისტემის თავისუფალი წევრების შესაბამისი ვექტორი კი β-თი. მაშინ A მატრიცის შესაბამის ვექტორთა სისტემა იქნება:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n. \tag{4}$$

A მატრიცის გაფართოებული $\overline{A}$ მატრიცის შესაბამის ვექტორთა სისტემა კი იქნება:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta. \tag{5}$$

ცხადია, რომ ვექტორთა (4) სისტემის რანგი არ აღემატება ვექტორთა (5) სისტემის რანგს. შევნიშნოთ, რომ თუ β ვექტორი წრფივი კომბინაციაა ვექტორთა (4) სისტემისა, მაშინ ვექტორთა (4) და (5) სისტემები ურთიერთეკვივალენტური სისტემებია და ამიტომ, თანახმად წრფივად დამოკიდებულების შედეგისა, მათი რანგები ტოლია. ახლა დავამტკიცოთ წრფივ განტოლებათა სისტემის ძირითადი თეორემა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს.

თეორემა. (1) წრფივ განტოლებათა სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული სისტემის A მატრიცის რანგი უდრის სისტემის გაფართოებული $\overline{A}$ მატრიცის რანგს.

დამტკიცება. A და $\overline{A}$ მატრიცების ნაცვლად განვიხილოთ მათი შესაბამისი ვექტორთა (4) და (5) სისტემები.

ვთქვათ, (1) სისტემა თავსებადია და (2) რიცხვთა ერთობლიობა არის მისი რომელიმე ამონახსნი. თუ უცნობთა ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1) სისტემაში, მივიღებთ, რომ $\overline{A}$ მატრიცის ბოლო სვეტი წარმოადგენს A მატრიცის სვეტთა წრფივ კომბინაციას; ეს იმას ნიშნავს, რომ $\overline{A}$ მატრიცის შესაბამის ვექტორთა (5) სისტემაში β ვექტორი წრფივი კომბინაციაა A მატრიცის შესაბამის ვექტორთა (4) სისტემისა. მაშასადამე, ვექტორთა (4) და (5) სისტემები ურთიერთეკვივალენტურია და ამიტომ მათი რანგები ტოლია, ე. ი. მათი შესაბამისი A და $\overline{A}$ მატრიცთა რანგები ტოლია. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ თუ წრფივი სისტემა თავსებადია, მაშინ მოცემული სისტემის მატრიცის რანგი და მისი გაფართოებული მატრიცის რანგი ტოლია. ამით დამტკიცდა თეორემის ერთი ნაწილი.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ, A და $\overline{A}$ მატრიცების რანგები ტოლია, ე. ი. მათი შესაბამისი ვექტორთა (4) და (5) სისტემების რანგები ტოლია. ცხადია, ამ შემთხვევაში ვექტორთა (4) ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემა აგრეთვე იქნება ვექტორთა (5) სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემა და β ვექტორი იქნება

ამ მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემის ან კიდევ ვექტორთა (4) სისტემის წრფივი კომბინაციაა; ეს იმას ნიშნავს, რომ მოიძებნება ისეთი k_1, k_2, ..., k_n მუდმივები, რომ

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n. \tag{6}$$

თუ (6) ტოლობას გავშლით, ე. ი ჩავსვამთ α_1, α_2, ..., α_n და β ვექტორების კომპონენტებს, ვექტორთა ტოლობის საფუძველზე, ყოველი ინდექსისათვის მივიღებთ ტოლობებს

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{in}k_n = b_i \ \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ s),$$

ამგვარად, რიცხვები k_1, k_2, ..., k_n არის მოცემული სისტემის ერთი გარკვეული ამონახსნი. მაშასადამე, როცა A მატრიცის რანგი უდრის $\overline{A}$ მატრიცის რანგს, მაშინ (1) სისტემა თავსებადია. ამით ძირითადი თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია. დამტკიცებულ თეორემას ხშირად **კრონეკერ-კაპელის** თეორემას უწოდებენ.

თავსებად წრფივ განტოლებათა სისტემას უწოდებენ განსაზღვრულს, თუ მას აქვს მხოლოდ ერთი გარკვეული ამონახსნი; წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. როცა თავსებად სისტემას აქვს რამდენიმე ამონახსნი, მას უწოდებენ **განუსაზღვრელ** სისტემას. დამტკიცებული თეორემის საშუალებით ჩვენ მხოლოდ შეგვიძლია გავიგოთ თავსებადია თუ არა მოცემული წრფივ განტოლებათა სისტემა; ეს თეორემა არ გვაძლევს მოცემული წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა მოძებნის არავითარ ხერხს. განვიხილოთ ახლა ეს საკითხი

ვთქვათ, A მატრიცის რანგი უდრის r-ს, სადაც $r \leqslant$ უმც. $(s,\ n)$. ვიგულისხმოთ, რომ A მატრიცის რომელიმე ბაზისური მინორი, რომლის რიგი უდრის r-ს, მოთავსებულია მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში. A მატრიცის რანგის პოვნის გაადვილების მიზნით საკმარისია ავიღოთ ბაზისური მინორის ის შემოარშიებული მინორები, რომლებიც მიიღება $\overline{A}$ მატრიცის ბოლო სვეტის დახმარებით. თუ ყველა ეს $r+1$ რიგის მინორი გამოვიდა ნული, მაშინ $\overline{A}$ მატრიცის რანგიც ეტოლება r-ს და დამტკიცებული თეორემის თანახმად მოცემული სისტემა თავსებადი იქნება. ვიპოვოთ ახლა მოცემული სისტემის ამონახსნი.

ვინაიდან A მატრიცის r რიგის ერთ-ერთი ბაზისური მინორი მოთავსებულია მარცხენა ზედა კუთხეში, A მატრიცის ყოველი i $(i = r+1,\ \dots,\ s)$ სტრიქონი იქნება ამ პირველი r ბაზისური სტრიქონის წრფივი კომბინაცია.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (1) სისტემის ყოველი i-ური განტოლება წარმოადგენს პირველი r განტოლების წრფივ კომბინაციას და ამიტომ მოცემული სისტემა მისი პირველი r განტოლების

სისტემის ეკვივალენტური იქნება. ამგვარად, (1) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი n-უცნობიანი r წრფივი განტოლების სისტემის ამოხსნამდე:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_r&=b_r. \end{aligned} \tag{7}$$

როგორც აღვნიშნეთ, მიღებული (7) სისტემის მატრიცის რანგი უდრის r-ს, სადაც $r\leqslant n$ (ე. ი. რანგი ნაკლებია სისტემის უცნობთა რიცხვზე).

1. ვიგულისხმოთ, რომ $r=n$. მაშინ მივიღებთ (7) განტოლებათა ისეთ სისტემას, რომლის უცნობთა რიცხვი უდრის განტოლებათა რიცხვს და დეტერმინანტი $\neq 0$. თანახმად კრამერის თეორემისა, (7) სისტემას და, მაშასადამე, მოცემულ (1) წრფივ განტოლებათა სისტემას, **აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც კრამერის ფორმულებით შეიძლება ვიპოვოთ.**

2. ვიგულისხმოთ, რომ $r<n$ და r რიგის ბაზისური მინორი შედგენილია პირველი r უცნობის კოეფიციენტებით. ამ შემთხვევაში (7) სისტემის ყოველი განტოლებიდან მარჯვენა მხარეს გადავიტანოთ x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n უცნობთა შემცველი წევრები, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r&=b_1-a_{1\,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r&=b_2-a_{2\,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r&=b_r-a_{r\,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n. \end{aligned} \tag{8}$$

მიღებულ სისტემაში x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_r უცნობები განვიხილოთ როგორც ნებისმიერი მუდმივები (პარამეტრები). რადგან x_1, x_2, …, x_r უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მინორი, ან, რაც იგივეა, (8) სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, კრამერის ფორმულების მიხედვით შეგვიძლია ამ უცნობთა მნიშვნელობანი გამოვსახოთ $n-r$ რაოდენობის x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n პარამეტრთა საშუალებით. თუ, მაგალითად, x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n ნებისმიერი მუდმივებისათვის შესაბამისად ავირჩევთ k_{r+1}, k_{r+2}, …, k_n რიცხვით მნიშვნელობებს, მაშინ კრამერის ფორმულებით მივიღებთ (8) სისტემის x_1, x_2, …, x_r უცნობთა შესაბამის გარკვეულ k_1, k_2, …, k_r რიცხვით მნიშვნელობებს. ცხადია, რომ რიცხვთა სისტემა k_1, k_2, …, k_r, k_{r+1} …, k_n იქნება (7) სისტემის და, მაშასადამე, (1) სისტემის ერთი გარკვეული ამონახსნი. თუ ახლა x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n პარამეტრებისათვის ავარჩევთ სხვა k_{r+1}', k_{r+2}', …, k_n' რიცხვით მნიშვნელობებს, მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ (7) სისტემას და, მაშასა-

დამე, (1) სისტემის მეორე გარკვეულ ამონახსნს და ა. შ. ამ შემთხვევაში მივიღებთ მოცემული სისტემის უამრავ ამონახსნს.

ამრიგად, როცა (1) სისტემის მატრიცის რანგი r ნაკლებია სისტემის უცნობთა რიცხვზე, ე. ი. $r<n$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია $n-r$ პარამეტრზე. თუ შევაჯამებთ ზემოთ მიღებულ შედეგებს გვექნება ასეთი დასკვნა:

(1) სისტემა თავსებადია, ე. ი. ერთი ამონახსნი მაინც აქვს, როცა სისტემის მატრიცის რანგი უდრის სისტემის გაფართოებული მატრიცის რანგს. (1) სისტემა განსაზღვრულია, ე. ი. ერთი გარკვეული ამონახსნი აქვს, თუ სისტემის მატრიცის რანგი უდრის უცნობთა რიცხვს. (1) სისტემა განუსაზღვრელია, ე. ი. სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა, თუ სისტემის მატრიცის რანგი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე.

მაგალითები. 1. გამოვიკვლიოთ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$
\begin{aligned}
x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5&=2,\\
3x_1-x_2+5x_3-3x_4-x_5&=6,\\
2x_1+x_2+2x_3-2x_4-3x_5&=8.
\end{aligned}
$$

გამოანგარიშებით მივიღებთ, რომ მოცემული სისტემის

$$
A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3\end{pmatrix}
$$

მატრიცის რანგი $r=2$, ხოლო სისტემის გაფართოებული

$$
\overline{A}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6\\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8\end{vmatrix}
$$

მატრიცის რანგი $\overline{r}=3$, მაშასადამე, მოცემული წრფივ განტოლებათა სისტემა არათავსებადია.

2. გამოვიკვლიოთ და ამოვხსნათ სისტემა:

$$
\begin{aligned}
2x_1+x_2&=1,\\
x_1-x_2&=2,\\
4x_1-x_2&=5.
\end{aligned}
$$

გამოანგარიშებით მივიღებთ, რომ მოცემული სისტემის მატრიცისა და მისი გაფართოებული მატრიცის რანგები ტოლია და უდრის 2-ს, ე. ი. უდრის უცნობთა რიცხვს. მაშასადამე, მოცემულ სისტემას უნდა ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი; ვიპოვოთ ეს ამონახსნი. რადგან ბაზისურ მინორად შეიძლება მივიღოთ x_1 და x_2 უცნობთა კოეფიციენტების მიერ

შედგენილი მეორე რიგის დეტერმინანტი, ამიტომ მოცემული სისტემის პირველი ორი განტოლება მოგვცემს სისტემის ერთადერთ ამონახსნს:

$$x_1=1,\ \ x_2=-1.$$

ცხადია, უცნობთა მიღებული მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ მოცემული სისტემის მესამე განტოლებასაც.

3. გამოვიკვლიოთ და ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}3x_1-\ x_2+\ x_3+4x_4+3x_5&=4,\\ x_1+\ x_2-2x_3-\ x_4+\ x_5&=1,\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+\ x_5&=0.\end{aligned}$$

გამოანგარიშებით მივიღებთ, რომ მოცემული სისტემის A მატრიცისა და მისი გაფართოებული A მატრიცის რანგები ტოლია და უდრის 2-ს, ე. ი. ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე. ამიტომ სისტემას ექნება უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. პირველი ორი განტოლების x_1 და x_2 უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მე-2 რიგის დეტერმინანტი $\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0$ შეიძლება მივიღოთ ბაზისურ მინორად. როგორც ჩანს, სისტემის მესამე განტოლება წრფივი კომბინაციაა პირველი ორი განტოლებისა და ამიტომ სისტემის ამოხსნისათვის საკმარისია განვიხილოთ პირველი ორი განტოლება. x_3, x_4, x_5 უცნობები უნდა მივიღოთ თავისუფალ უცნობებად (პარამეტრებად). ამრიგად, მოცემული სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი სისტემის ამოხსნამდე:

$$\begin{aligned}3x_1-x_2&=4-\ x_3-4x_4-3x_5,\\ x_1+x_2&=1+2x_3+\ x_4-\ x_5.\end{aligned}$$

კრამერის ფორმულების გამოყენებით ან უბრალო შეკრება-გამოკლებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}x_1&=\ \ \ \frac{5}{4}+\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4-x_5,\\ x_2&=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4.\end{aligned}$$

x_1 და x_2 უცნობთა მიღებული მნიშვნელობებით განისაზღვრება მოცემული სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

თუ x_3, x_4, x_5 თავისუფალი მუდმივების ნაცვლად ჩავსვამთ შესაბამისად 3, 0, 1, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}x_1&=\ \ \ \frac{5}{4}+\frac{3}{4}-0-1=1,\\ x_2&=-\frac{1}{4}+\frac{21}{4}+0=5.\end{aligned}$$

მაშასადამე, მოცემული სისტემის ერთი ამონახსნი იქნება (1, 5, 3, 0, 1) რიცხვთა სისტემა, ანუ ხუთგანზომილებიანი ვექტორი. ასევე შეიძლება მივიღოთ, რომ მოცემული სისტემის ამონახსნებია ვექტორები: (2, 5, 3, 0, 0); (3, 5, 2, 1, —2) და ა. შ.

მივიღებთ, რომ სისტემას აქვს უსასრულო რაოდენობა ამონახსნებისა, ე. ი. მოცემული სისტემა განუსაზღვრელია. თუ მოცემული სისტემის უცნობთა რიცხვი უდრის განტოლებათა რიცხვს და სისტემის დეტერმინანტი ნულია, მაშინ კრამერის ფორმულებს ვერ გამოვიყენებთ. საჭიროა გამოვიკვლიოთ ასეთი სისტემის თავსებადობის საკითხი და, თუ მოცემული სისტემა თავსებადი აღმოჩნდა, ის უნდა ამოვხსნათ ისე, როგორც მე-3 მაგალითი. ცხადია, ამ შემთხვევაშიც თავსებადი სისტემის მატრიცის რანგი ნაკლები იქნება უცნობთა რიცხვზე და ამიტომ მოცემულ სისტემას უამრავი ამონახსნი ექნება, ე. ი. სისტემა განუსაზღვრელი იქნება.

4. რა პირობებში გაივლის სამი მოცემული წრფე:

$$a_1x+b_1y=c_1, \quad a_2x+b_2y=c_2, \quad a_3x+b_3y=c_3$$

ერთ წერტილში? ალგებრულად ეს ნიშნავს იმის გამორკვევას, თუ განტოლებათა

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1, \\ a_2x+b_2y&=c_2, \\ a_3x+b_3y&=c_3. \end{aligned}$$

სისტემას რა შემთხვევაში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ჩვენ კი ვიცით, რომ მოცემულ სისტემას მაშინ ექნება ერთადერთი ამონახსნი, როცა სისტემის შესაბამისი მატრიცის და მისი გაფართოებული მატრიცის რანგები ტოლია და უდრის სისტემის უცნობთა რიცხვს.

ამრიგად, სამი მოცემული წრფე გაივლის ერთ წერტილში, თუ შესაბამისი სისტემის მატრიცის რანგი უდრის სისტემის გაფართოებული მატრიცის რანგს და უდრის 2-ს.

§ 10. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა და მისი ფუნდამენტალური ამონახსნები

ვთქვათ, რიცხვთა P ველზე მოცემულია n-უცნობიანი s ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების სისტემა:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n&=0. \end{aligned} \qquad (1)$$

რადგან ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრები ნულია. ამიტომ სისტემის გაფართოებული მატრიცის შესაბამისი ვექტორთა სისტემა მიიღება სისტემის მატრიცის შესაბამის ვექორთა სისტემასთან 0—ნულვექტორის შეერთებით. ჩვენ ვიცით, რომ ვექტორთა სისტემა ნულვექტორის მიერთებით ან ამოგდებით გადადის ეკვივალენტურ სისტემაში, ე. ი. მისი რანგი არ იცვლება. მაშასადამე, ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის მატრიცის და მისი გაფართოებული მატრიცის რანგები ტოლია. ამიტომ კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად, ვღებულობთ, რომ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა ყოველთვის თავსებადია. (1) ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობა აგრეთვე იქიდან ჩანს, რომ მას ტრივიალური, ე. ი. ნულოვანი, ამონახსნი ყოველთვის აქვს.

როგორც ვხედავთ, ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის კერძო შემთხვევას. ამიტომ, მიღებული შედეგების თანახმად. გვექნება: **თუ (1) სისტემის შესაბამისი მატრიცის რანგი უდრის უცნობთა რიცხვს, ე. ი. $r=n$. მაშინ (1) ერთგვაროვან სისტემას აქვს ერთადერთი და, მაშასადამე, ტრივიალური. ანუ ნულოვანი, ამონახსნი, ხოლო თუ ერთგვაროვანი სისტემის რანგი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, ე. ი. $r<n$, მაშინ (1) ერთგვაროვან სისტემას აქვს უსასრულო რაოდენობა ამონახსნებისა.** მეორე შემთხვევაში ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნებს ვიპოვით ისე. როგორც წინა პარაგრაფში არაერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნები ვიპოვეთ.

თეორემა. **n-უცნობიანი n ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, როცა სისტემის დეტერმინანტი უდრის ნულს.**

მართლაც, ჩვენ მიერ ადრე (გვ. 64) დამტკიცებული იყო ამ თეორემის ერთი ნაწილი, კერძოდ, თუ ერთგვაროვანი n-უცნობიანი n წრფივი განტოლების სისტემას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, მაშინ სისტემის დეტერმინანტი უეჭველად ნულია. დავამტკიცოთ ახლა თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ, სისტემის დეტერმინანტი ნულია; ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული სისტემის მატრიცის რანგი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, ე.ი.$r<n$; ასეთ შემთხვევაში. თანახმად ზემოთ მიღებული ზოგადი შემთხვევისა, ერთგვაროვან სისტემას, გარდა ნულოვანი ამონახსნისა, ექნება უსასრულო რაოდენობა ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნებისა.

ისე როგორც ზემოთ, n-უცნობიანი n ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების სისტემისათვის, აქაც n-უცნობიანი s ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების სისტემისათვის ადვილად შემოწმდება შემდეგი თვისებები:

1) თუ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ რიცხვთა სისტემა, ე. ი. $\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ვექტორი (1) სისტემის ერთი გარკვეული ამონახსნია, მაშინ $k\beta=(k\beta_1, k\beta_2, \ldots, k\beta_n)$ ვექტორიც, სადაც k ნებისმიერი რიცხვია, აგრეთვე იქნება მოცემული სისტემის ამონახსნი. 2) თუ $\gamma=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ვექტორი (1) სისტემის რომელიმე მორე ამონახსნია, მაშინ

$$\beta\pm\gamma=(b_1\pm c_1,\ b_2\pm c_2,\ \ldots,\ b_n\pm c_n)$$

ვექტორი აგრეთვე იქნება მოცემული სისტემის ამონახსნი.

1-ლი და მე-2 თვისებების გაერთიანებით მივიღებთ, რომ მოცემულ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ყოველი წრფივი კომბინაცია, აგრეთვე იქნება მოცემული სისტემის ამონახსნი.

(1) ერთგვაროვან სისტემას ეწოდება წინა პარაგრაფში განხილული (1) არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა. მოცემულ n-უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის და მის შესაბამის ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს შორის არსებობს შემდეგი სახის დამოკიდებულებანი:

1°. მოცემული არაერთგვაროვანი სისტემის ნებისმიერი ამონახსნის და შესაბამის ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსნის ჯამი ისევ მოცემული სისტემის ამონახსნია.

მართლაც, ვთქვათ, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ არაერთგვაროვანი სისტემის ნებისმიერი ამონახსნია, ხოლო $d_1, d_2, \ldots, d_n$ შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ნებისმიერი ამონახსნია. განვიხილოთ ჯამი

$$c_j+d_j \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

და ჩავსვათ არაერთგვაროვანი სისტემის ნებისმიერ i-ურ განტოლებაში; მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c_j+d_j)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j=b_i+0=b_i, \text{ რ. დ. გ.}$$

2°. მოცემულ არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ორი ამონახსნის სხვაობა იქნება შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნი.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია არაერთგვაროვანი სისტემის ნებისმიერი ორი ამონახსნი:

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n \text{ და } d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j=b_i \quad \text{და} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j=b_i.$$

სხვაობანი c_j-d_j $(j=1,\ 2,\dots,\ n)$ ჩავსვათ ერთგვაროვანი სისტემის რომელიმე i-ურ განტოლებაში; მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c_j-d_j)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j=b_i-b_i=0,\ \text{რ. დ. გ.}$$

დამტკიცებული თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ყველა ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ვიპოვოთ მისი რომელიმე ერთი ამონახსნი და შესაბამისი ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ყველა ამონახსნი; მაშინ აღნიშნული ერთი ამონახსნისა და შესაბამის ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების ჯამები მოგვცემს მოცემული არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ყველა ამონახსნს.

ახლა განვიხილოთ საკითხი (1) ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის **ფუნდამენტალური ამონახსნების** შესახებ. როგორც ზემოთ ვნახეთ, n-უცნობიან ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე აკმაყოფილებს n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცის ყველა პირობას, მაშასადამე, n-უცნობიან ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ქმნის ვექტორულ სივრცეს, რომლის განზომილებას ახლა გამოვარკვევთ. ვიცით, რომ n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი უდრის n; ეს იმას ნიშნავს, რომ (1) ერგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა შორის არსებობს ამონახსნების ერთი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემა მაინც, რომლის რიცხვი არ აღემატება n-ს.

განსაზღვრა. ერგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ყოველ წრფივად დამოუკიდებელ მაქსიმალურ ქვესისტემას ეწოდება ამონახსნთა ფუნდამენტალური სისტემა.

განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ვექტორთა სისტემა

$$\alpha_i=(c_1^{(i)},\ c_2^{(i)},\dots,\ c_n^{(i)})\qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ \lambda)\tag{2}$$

(1) ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტალური სისტემაა, მაშინ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_\lambda$$

ვექტორთა სისტემა (1) ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ერთ-ერთი წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემაა და ამიტომ მისი ყოველი $\alpha=(c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n)$ ამონახსნი იქნება (2) ამონახსნთა ფუნდამენტალური სისტემის წრფივი კომბინაცია, ე. ი. მოიძებნება ისეთი $k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_\lambda$ რიცხვები, რომ

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_\lambda\alpha_\lambda.$$

თეორემა. **თუ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი მატრიცის r რანგი ნაკლებია, ვიდრე სისტემის n უცნობის რიცხვი, მაშინ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ამონახსნთა ერთი ფუნდამენტალური სისტემა მაინც და ამონახსნთა ყოველ ფუნდამენტალურ სისტემაში შემავალ ამონახსნთა რიცხვი უდრის $n-r$.**

დამტკიცება. როგორც ვიცით, როცა n-უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი მატრიცის რანგი უდრის r-ს და $r<n$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა და ყოველი ამონახსნის შესაბამისი n-განზომილებიანი ვექტორი

$$\alpha=(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n) \tag{3}$$

ცალსახად განისაზღვრება $n-r$ რაოდენობის $x_{r+1}, \ldots, x_n$ თავისუფალი მუდმივების შესაბამისი $(n-r)$-განზომილებიანი

$$\alpha'=(c_{r+1}, \ldots, c_n) \tag{4}$$

ვექტორით. რადგან ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები ქმნიან ვექტორულ სივრცეს, ვღებულობთ, რომ (3) ამონახსნებისაგან შედგენილი ვექტორული სივრცისა და (4) თავისუფალი მუდმივებისაგან შედგენილი $P^{(n-r)}$ ვექტორული სივრცის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა*. აქედან გამოდის, რომ (3) ამონახსნებისაგან შედგენილი ვექტორული სივრცის ყოველ წრფივად დამოუკიდებელ მაქსიმალურ ქვესისტემას შეესაბამება (4) თავისუფალი მუდმივებისაგან შედგენილი $P^{(n-r)}$ ვექტორული სივრცის გარკვეული წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემა. რადგან $P^{(n-r)}$ ვექტორული სივრცის ყველა წრფივად დამოუკიდებელი მაქსიმალური ქვესისტემის ვექტორების რიცხვები ტოლია და უდრის $n-r$, მივიღებთ, რომ (1) სისტემის ამონახსნთა ყოველ წრფივად დამოუკიდებელ მაქსიმალურ ქვესისტემაში შემავალი ამონახსნების რაოდენობა უდრის $n-r$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თუ დავაკვირდებით თეორემის დამტკიცების მეთოდს, ჩვენ შეგვიძლია პრაქტიკულად ვიპოვოთ (1) ერთგვაროვანი წრფივ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა ერთი სისტემა მაინც. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი $n-r$ რაოდენობის $(n-r)$-განზომილებიან წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა; ეს იმას ნიშნავს, რომ აღებულ ვექტორთა სისტემის შესაბამისი მატრიცის დეტერმინანტი ნულისაგან უნდა განსხვავდებოდეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მივიღებთ

* ადვილად შევამჩნევთ, რომ (1) სისტემის ნებისმიერი ორი α_1 და α_2 ამონახსნის ჯამს შეესაბამება $P^{(n-r)}$ სივრცის შესაბამისი α_1' და α_2' ვექტორების ჯამი, ე. ი. თუ $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_1'$, და $\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_2'$, მაშინ $\alpha_1+\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_1'+\alpha_2'$; გარდა ამისა, $k\alpha \leftrightarrow k\alpha'$, სადაც k ნებისმიერი რიცხვია P ველიდან.

დეტერმინანტის სვეტებს (შესაბამის ვექტორებს) შორის წრფივად დამოკიდებულებას, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

მაგალითად, $P^{(n-r)}$ სივრცეში ყოველთვის შეიძლება ავიღოთ $(n-r)$-განზომილებიანი ერთეულოვანი ვექტორები:

$$\varepsilon_1=(1,\ 0,\ \dots,\ 0),\ \varepsilon_2=(0,\ 1,\ \dots,\ 0),\ \dots,\ \varepsilon_{n-r}=(0,\ 0,\ \dots,\ 1),$$

რომელნიც აღნიშნულ პირობას აკმაყოფილებენ. ცხადია, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-r}$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია; მისი შესაბამისი დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

შემდეგ, ყოველი ასეთი ვექტორის $n-r$ კომპონენტი მივიღოთ $n-r$ რაოდენობის $x_{r+1}, \dots, x_n$ თავისუფალ მუდმივებად და კრამერის ფორმულებით (1) სისტემიდან ვიპოვოთ პირველი r უცნობის $x_1, x_2, \dots, x_r$ მნიშვნელობები, წარმოდგენილი $x_{r+1}, \dots, x_n$ თავისუფალი უცნობებით. რადგან ჩვენ აღებული გვქონდა $n-r$ რაოდენობის $(n-r)$-განზომილებიან წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური ქვესისტემა, (1) სისტემისათვის მივიღებთ $n-r$ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა მაქსიმალურ ქვესისტემას, რომელიც მოცემული სისტემის ერთ-ერთი ფუნდამენტალური ამონახსნი იქნება. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალური ამონახსნის შესახებ დამტკიცებული თეორემა და ამონახსნთა ფუნდამენტალური სისტემის მოძებნის მიღებული პრაქტიკული წესი გავარჩიოთ შემდეგ მაგალითზე.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-4x_3+x_4+3x_5&=0,\\ x_1+x_2+2x_3-3x_4-x_5&=0,\\ 3x_1+x_2-10x_3+5x_4+7x_5&=0,\\ 3x_1+2x_2-2x_3-2x_4+2x_5&=0. \end{aligned}$$

გამოთვლით მივიღებთ, რომ მოცემული სისტემის შესაბამისი მატრიცის რანგი $r=2$. რადგან სისტემის უცნობთა რიცხვი $n=5$, ამიტომ სისტემის ამონახსნთა ყოველი ფუნდამენტალური სისტემა შედგება $5-2=3$ ამონახსნისაგან. როგორც ვხედავთ, სისტემის პირველი ორი განტოლების x_1 და x_2 უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მეორე რიგის

მინორი-დეტერმინანტი $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. ამიტომ ის შეიძლება მივიღოთ ბაზისურ მინორად და ჩვენი სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი სისტემის ამოხსნამდე:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4x_3 - x_4 - 3x_5, \\ x_1 + x_2 &= -2x_3 + 3x_4 + x_5. \end{aligned}$$

სადაც x_3, x_4, x_5 თავისუფალი მუდმივებია. x_1, x_2 უცნობთა x_3, x_4 და x_5 უცნობთა მიმართ ამოხსნით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_1 &= 6x_3 - 4x_4 - 4x_5, \\ x_2 &= -8x_3 + 7x_4 + 5x_5. \end{aligned}$$

ავიღოთ ერთეულოვანი ვექტორები:

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \ \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \ \varepsilon_3 = (0, 0, 1),$$

რომელნიც ქმნიან სამგანზომილებიანი ვექტორული სივრცის ერთ-ერთ წრფივად დამოუკიდებელ მაქსიმალურ ქვესისტემას; მისი კომპონენტები შესაბამისად მივიღოთ x_3, x_4, x_5 თავისუფალ მუდმივებად. მაშინ მოცემული სისტემისათვის:

ε_1-ის შესაბამისი ამონახსნი იქნება $\alpha_1 = (6, -8, 1, 0, 0)$,
ε_2-ის შესაბამისი ამონახსნი იქნება $\alpha_2 = (-4, 7, 0, 1, 0)$,
ε_3-ის შესაბამისი ამონახსნი იქნება $\alpha_3 = (-4, 5, 0, 0, 1)$.

მაშასადამე, მოცემულ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ერთ-ერთი ფუნდამენტალური სისტემა იქნება შემდეგი სამი ამონახსნის, ანუ ვექტორის, ერთობლიობა:

$$\alpha_1 = (6, -8, 1, 0, 0), \ \alpha_2 = (-4, 7, 0, 1, 0), \ \alpha_3 = (-4, 5, 0, 0, 1).$$

ცხადია, ყოველი $\alpha_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ვექტორი, რომელიც მიღებულ α_1, α_2, α_3 ვექტორთა წრფივი კომბინაციაა, ე. ი. $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, იქნება მოცემული ერთგვაროვანი წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი. ჩვენ შემთხვევაში მოცემული სისტემის ნებისმიერ ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$x_1 = 6k_1 - 4k_2 - 4k_3, \quad x_2 = -8k_1 + 7k_5 + 5k_3, \quad x_3 = k_1, \quad x_4 = k_2, \quad x_5 = k_3,$$

სადაც k_1, k_2 და k_3 მუდმივებს შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობანი.

თავი III

მატრიცთა ალგებრა. ჯგუფი, რგოლი და ველი

§ 11. წრფივი გარდაქმნები და მოქმედებანი მატრიცებზე

ვთქვათ, რომ რიცხვთა P ველზე $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები წარმოადგენენ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადთა წრფივ კომბინაციებს, ე. ი.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}y_k, \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}y_k, \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}y_k,
\end{aligned} \tag{1}
$$

მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ გვაქვს n ცვლადის წრფივი გარდაქმნა, სადაც ყოველ $x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n$ გამოსახულებას **წრფივი ფორმა** ეწოდება. (1) წრფივ გარდაქმნას **კვადრატული** წრფივი გარდაქმნა ეწოდება.

ცხადია, შეიძლება განვიხილოთ **არაკვადრატული** წრფივი გარდაქმნები. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილ მატრიცას

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1'}
$$

ეწოდება (1) წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი **მატრიცა**, ხოლო (1′) მატრიცის შესაბამისი წრფივი გარდაქმნა იქნება (1) წრფივი გარდაქმნა.

როგორც ვხედავთ, ყოველ წრფივ გარდაქმნას შეესაბამება გარკვეული მატრიცა და, პირიქით, ყოველი მატრიცისათვის შეიძლება ავაგოთ გარკვეული წრფივი გარდაქმნა.

ვიგულისხმოთ ახლა, რომ $y_1, y_2, \dots, y_n$ ცვლადები წარმოადგენს $z_1, z_2, \dots, z_n$ ცვლადთა წრფივ კომბინაციას:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \dots + b_{1n}z_n = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{1\lambda}z_\lambda, \\
y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \dots + b_{2n}z_n = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{2\lambda}z_\lambda, \qquad (2) \\
& \\
y_n &= b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \dots + b_{nn}z_n = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{n\lambda}z_\lambda.
\end{aligned}
$$

(2) წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა იქნება:

$$
B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2')
$$

იმისათვის, რომ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადები წარმოვადგინოთ, როგორც $z_1, z_2, \dots, z_n$ ცვლადთა წრფივი კომბინაცია, საჭიროა $y_1, y_2, \dots, y_n$ ცვლადების მნიშვნელობანი (2)-დან ჩავსვათ (1) თანაფარდობაში, მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(b_{k1}z_1 + b_{k2}z_2 + \dots + b_{kn}z_n), \\
& \\
x_i &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{k1}z_1 + b_{k2}z_2 + \dots + b_{kn}z_n), \qquad (3) \\
& \\
x_n &= \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(b_{k1}z_1 + b_{k2}z_2 + \dots + b_{kn}z_n).
\end{aligned}
$$

როგორც (3) გამოსახულებიდან ჩანს, თანამიმდევრობით მოხდენილი ორი წრფივი გარდაქმნის შედეგად მიღებული ახალი გარდაქმნა არის ისევ წრფივი გარდაქმნა. მიღებულ (3) წრფივ გარდაქმნას ეწოდება (1) და (2) წრფივ გარდაქმნათა **ნამრავლი.** მიღებული (3) წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა აღვნიშნოთ C ასოთი.

ახლა ვიპოვოთ C მატრიცა (1) და (2) გარდაქმნების შესაბამის A და B მატრიცთა საშუალებით. ამისათვის (3) ტოლობის მარჯვენა მხარეში i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაში მოთავსებული z_j ცვლადის კოეფიციენტი აღვნიშნოთ c_{ij} და ვიპოვოთ მისი მნიშვნელობა A და B მატრიცთა ელემენტებით. თუ დავაკვირდებით (3) ტოლობის i-ურ გარდაქმნას, z_j ცვლადის კოეფიციენტი იქნება:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}. \tag{4}$$

ახლა (3) თანაფარდობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} x_1&=c_{11}z_1+c_{12}z_2+\dots+c_{1n}z_n,\\ x_2&=c_{21}z_1+c_{22}z_2+\dots+c_{2n}z_n,\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ x_n&=c_{n1}z_1+c_{n2}z_2+\dots+c_{nn}z_n. \end{aligned} \tag{5}$$

5) წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

ეწოდება (1) და (2) წრფივი გარდაქმნების შესაბამისი A და B მატრიცების ნამრავლი, ე. ი $AB=C$. როგორც (4) ტოლობიდან ჩანს: A და B მატ-**რიცის გამრავლების შედეგად მიღებული მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაში მოთავსებული c_{ij} ელემენტი უდრის A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამს.**

მატრიცების გამრავლების (4) ფორმულიდან ჩანს, რომ მატრიცების გამრავლებისათვის საზოგადოდ არ სრულდება კომუტაციურობის თვისება, ე. ი.

$$AB\neq BA.$$

თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ მატრიცები.}$$

ადვილად ვიპოვით, რომ:

$$AB=\begin{pmatrix} -5 & -9 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -6 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

როგორც ვხედავთ, $AB \neq BA$.

A მატრიცის თავის თავზე n-ჯერ ნამრავლს ეწოდება A მატრიცის n ხარისხი და აღინიშნება A^n სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n} = A^n.$$

ცხადია, რომ ორი (1) და (2) წრფივი გარდაქმნის თანამიმდევრობით შესრულება შეიძლება შევცვალოთ ერთი (5) წრფივი გარდაქმნით, რომლის შესაბამისი მატრიცაა (5′) მატრიცა.

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფივი გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} x_1&=2y_1-y_2, \qquad & y_1&=2z_1+3z_2, \\ x_2&=3y_1+2y_2, \qquad & y_2&=z_1-2z_2. \end{aligned} \tag{6}$$

ვიპოვოთ ამ ორი წრფივი გარდაქმნის ნამრავლი, ე. ი. ვიპოვოთ გარდაქმნა, რომელიც x_1 და x_2 ცვლადებს გამოსახავს z_1 და z_2 ცვლადებით. ეს მაგალითი გადავწყვიტოთ ორი გზით. y_1 და y_2 მნიშვნელობათა უშუალოდ ჩასმით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_1&=2(2z_1+3z_2)-(z_1-2z_2)=3z_1+8z_2, \\ x_2&=3(2z_1+3z_2)+2(z_1-2z_2)=8z_1+5z_2. \end{aligned}$$

მაშასადამე, მოცემული (6) ორი წრფივი გარდაქმნის ნამრავლი იქნება გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} x_1&=3z_1+8z_2, \\ x_2&=8z_1+5z_2. \end{aligned} \tag{7}$$

მოცემული (6) ორი წრფივი გარდაქმნის ნამრავლის პოვნა კიდევ ასე შეიძლება. ამოვწეროთ მოცემულ (6) გარდაქმნათა შესაბამისი მატრიცები:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(4) ფორმულის მიხედვით შევადგინოთ ამ მატრიცთა ნამრავლი

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \text{ ე. ი. } C=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

A და B მატრიცების გამრავლების შედეგად მიღებული C მატრიცის შესაბამისი წრფივი გარდაქმნა კი (7) წრფივი გარდაქმნაა.

ისეთ წრფივ კვადრატულ გარდაქმნას, რომლის შესაბამისი მატრიცის დეტერმინანტი უდრის ნულს, ეწოდება **განსაკუთრებული** (ან გადაგვარებული) წრფივი გარდაქმნა, წინააღმდეგ შემთხვევაში წრფივ გარდაქმნას უწოდებენ **არაგანსაკუთრებულ** (ან გადაუგვარებელ) წრფივ გარდაქმნას. ანალოგიურად, მოცემულ მატრიცას, რომლის შესაბამისი დეტერმინანტი ნულია, ეწოდება **განსაკუთრებული** (გადაგვარებული) მატრიცა, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი არაგანსაკუთრებული (გადაუგვარებელი) მატრიცა.

ახლა განვიხილოთ საკითხი მოცემული წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული **გარდაქმნისა** და მოცემული მატრიცის **შებრუნებული** მატრიცის არსებობის შესახებ.

მოცემული (1) წრფივი გარდაქმნით $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები გამოისახება $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადების საშუალებით. ახლა დავუშვათ, რომ საჭიროა, პირიქით, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადების $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებით გამოსახვა. ამისათვის (1) წრფივი გარდაქმნა განვიხილოთ როგორც n-უცნობიანი n წრფივი განტოლების სისტემა $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადების მიმართ:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n&=x_1, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n&=x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n&=x_n. \end{aligned} \tag{8}$$

თანახმად კრამერის ფორმულებისა, როცა (8) სისტემის დეტერმინანტი $d\neq 0$, მაშინ მიღებულ სისტემას $y_1, y_2, \ldots, y_n$ უცნობთა მიმართ აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$y_j=\frac{d_j}{d} \qquad (j=1, 2,\ldots,n), \tag{9}$$

სადაც d (8) სისტემის დეტერმინანტია, ხოლო d_j-ით აღნიშნული დეტერმინანტი მიიღება d დეტერმინანტისაგან, თუ j-ური სვეტის ელემენტებს (8) სისტემის შესაბამისი თავისუფალი წევრებით შევცვლით, ე. ი.

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j-1} & x_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j-1} & x_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nj-1} & x_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამ d_j დეტერმინანტის j-ური სვეტის მიმართ დაშლის შედეგად მივიღებთ:

$$d_j = x_1 A_{1j} + x_2 A_{2j} + \dots + A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} x_k, \tag{10}$$

სადაც $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ არიან შესაბამისად d დეტერმინანტის $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ ელემენტების (ამ შემთხვევაში $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელემენტების) ალგებრული დამატებანი (ადიუნქტები). (10) ტოლობის საფუძველზე (9) ტოლობა კრამერის ფორმულებით შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{A_{11}}{d} x_1 + \frac{A_{21}}{d} x_2 + \dots + \frac{A_{n1}}{d} x_n, \\ y_2 &= \frac{A_{12}}{d} x_1 + \frac{A_{22}}{d} x_2 + \dots + \frac{A_{n2}}{d} x_n, \\ &\dots \\ y_n &= \frac{A_{1n}}{d} x_1 + \frac{A_{2n}}{d} x_2 + \dots + \frac{A_{nn}}{d} x_n. \end{aligned} \tag{11}$$

როგორც ვხედავთ, (11) თანაფარდობა წარმოადგენს წრფივ გარდაქმნას, რომელიც $y_1, y_2, \dots, y_n$ ცვლადებს გამოსახავს $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადებით; მას (1) წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული წრფივი გარდაქმნა ეწოდება.

(11) გარდაქმნის შესაბამის მატრიცას (1) წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი A მატრიცის **შებრუნებული მატრიცა** ეწოდება და მას A^{-1} სიმბოლოთი აღნიშნავენ. მაშასადამე, A მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას ან, რაც იგივეა, (11) გარდაქმნის შესაბამის მატრიცას შემდეგი სახე აქვს:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{n2}}{d} \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

შემდეგისათვის კარგად დავიხსომოთ, რომ, როგორც ეს (9) ან, რაც იგივეა, (11) თანაფარდობიდან ჩანს, განსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნას შებრუნებული გარდაქმნა არ აქვს. ანალოგიურად, (12) ტოლობიდან ჩანს, რომ განსაკუთრებულ A მატრიცას, ე. ი. ისეთ მატრიცას, რომლის დეტერმინანტი $d=0$, შებრუნებული მატრიცა არ აქვს. ვთქვათ, ახლა A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია. განვიხილოთ მოცემული A მატრიცისა და მისი შებრუნებული A^{-1} მატრიცის ნამრავლი; მატრიცის მატრიცაზე გამრავლების (4) ფორმულისა და დეტერმინანტის დაშლის (13) ფორმულის (გვ. 50) გამოყენებით, მივიღებთ:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{n2}}{d} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

სადაც

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

ერთეულოვანი მატრიცაა. ამრიგად მივიღეთ, რომ:

$$AA^{-1}=E. \tag{15}$$

(14) ერთეულოვანი მატრიცის შესაბამის წრფივ გარდაქმნას:

$$\begin{aligned} x_1&=1\cdot x_1+0\cdot x_2+\dots+0\cdot x_n=x_1, \\ x_2&=0\cdot x_1+1\cdot x_2+\dots+0\cdot x_n=x_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n&=0\cdot x_1+0\cdot x_2+\dots+1\cdot x_n=x_n \end{aligned} \tag{16}$$

იგივურ გარდაქმნას უწოდებენ. მაშასადამე, (1) და მისი შებრუნებული (11) გარდაქმნების თანამიმდევრობით შესრულების შედეგად ვღებუ-

ლობთ იგივურ გარდაქმნას. გამოთვლით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$A^{-1}A=E. \tag{17}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ A^{-1} მატრიცის შებრუნებული მატრიცა არის A მატრიცა, ე. ი.

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

(17) ტოლობიდან აგრეთვე ვღებულობთ, რომ (11) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა არის (1) გარდაქმნა. (17) და (15) ტოლობათა შედარებით ვღებულობთ:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \tag{18}$$

ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ:

$$AE=EA=A. \tag{19}$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ E ერთეულოვანი მატრიცა მატრიცების გამრავლების მიმართ ასრულებს ისეთივე როლს, როგორსაც ერთეულოვანი ჩასმა ჩასმების გამრავლების დროს და რიცხვი 1 რიცხვების გამრავლების დროს. (18) და (19) თვისებათა ანალოგიურ თვისებებს ჩვენ გავეცანით ჩასმების გამრავლების დროს.

მაგალითი 1. ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია, რომ სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავის გარშემო α კუთხით მობრუნებისას სიბრტყის $M(x, y)$ წერტილი გადავა ამავე სიბრტყის ისეთ $M'(x', y')$ წერტილში, რომელიც ძველი წერტილის კოორდინატების მიმართ ასე გამოისახება:

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\\ y'&=x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{20}$$

კოორდინატთა ასეთი გარდაქმნა, ცხადია, წარმოადგენს არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნას. მართლაც, მოცემული გარდაქმნის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

რადგან მოცემული გარდაქმნა არაგანსაკუთრებულია, ამიტომ არსებობს მისი შებრუნებული გარდაქმნა; შებრუნებული გარდაქმნის მისაღებად საკმარისია (20)-დან ამოვხსნათ x და y.

მაგალითი 2. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემული ორი წერტილი $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ სიბრტყის სათავის გარშემო α კუთხით მობრუნებით გადადის შესაბამისად $M_1'(x'_1, y'_1)$ და $M_2'(x'_2, y'_2)$ წერტილებში. მაშინ (20) გარდაქმნის მიხედვით ადვილად შემოწმდება, რომ M_1M_2 და $M'_1M'_2$ მანძილები ტოლია, ე. ი.

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x'_1-x'_2)^2+(y'_1-y'_2)^2}.$$

უბრალო გამოთვლებით შემოწმდება, რომ (20) გარდაქმნით ყოველი წრფე $ax+by+c=0$ გადავა $a'x'+b'y'+c'=0$ წრფეში, სადაც

$$a'=a\cos\alpha+b\sin\alpha,\quad b'=b\cos\alpha-a\sin\alpha,\quad c'=c.$$

ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ სიბრტყეზე აღებულ ნებისმიერ ორ წრფეს შორის კუთხე და (20) გარდაქმნის შედეგად მიღებულ შესაბამის წრფეებს შორის კუთხე ტოლია. ამგვარად, სიბრტყეზე აღებულ ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი და ნებისმიერ ორ წრფეს შორის კუთხე (20) წრფივი გარდაქმნით არ იცვლება, ე. ი **მანძილი და კუთხე ინვარიანტულია** მე-(20) გარდაქმნის მიმართ, რომელსაც **მეტრული გარდაქმნა** ეწოდება.

ანალიზურ გეომეტრიაში კიდევ განიხილავენ **აფინურ** და **გეგმილურ** გარდაქმნებს, რომლებსაც სიბრტყეზე შესაბამისად შემდეგი სახე აქვთ:

$$\left.\begin{aligned}x&=a_1x'+b_1y'+c_1\\ y&=a_2x'+b_2y'+c_2\end{aligned}\right\},\quad \text{სადაც გარდაქმნის დეტერმინანტი}\quad \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0,$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{a_3x'+b_3y'+c_3}\\ y&=\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{a_3x'+b_3y'+c_3}\end{aligned}\right\},\quad \text{სადაც გარდაქმნის დეტერმინანტი}\quad \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

ასეთი გარდაქმნები, რომლებსაც საზოგადოდ დიდი გამოყენება აქვთ, შეისწავლება გეომეტრიაში.

მატრიცებზე მოქმედებათა ზოგიერთი თვისება. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი სამი n-ური რიგის მატრიცა A, B და C. დავამტკიცოთ, რომ მატრიცთა ნამრავლისათვის მართებულია ასოციაციურობის კანონი, ე. ი.

$$A(BC)=(AB)C. \tag{1}$$

მართლაც, $A(BC)$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაში მდგომი ელემენტი აღვნიშნოთ d_{ij}-თი, მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
d_{ij}=a_{i1}(b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j}+\ldots+b_{1n}c_{nj})+\\
+a_{i2}(b_{21}c_{1j}+b_{22}c_{2j}+\ldots+b_{2n}c_{nj})+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+a_{in}(b_{n1}c_{1j}+b_{n2}c_{2j}+\ldots+b_{nn}c_{nj}).
\end{aligned}
$$

ახლა $(AB)C$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაში მდგომი ელემენტი აღვნიშნოთ d'_{ij}-თი, მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
d'_{ij}=(a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\ldots+a_{in}b_{n1})c_{1j}+\\
+(a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22}+\ldots+a_{in}b_{n2})c_{2j}+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(a_{i1}b_{1n}+a_{i2}b_{2n}+\ldots+a_{in}b_{nn})c_{nj}.
\end{aligned}
$$

თუ დავაკვირდებით ამ ორი ტოლობის მარჯვენა მხარეებს შევამჩნევთ, რომ ისინი ტოლია. მაშასადამე, $d_{ij}=d'_{ij}$ ყოველი i-სა და j-სათვის და ამით მატრიცთა გამრავლებისათვის ასოციაციურობის თვისება დამტკიცებულია.

ორი n-ური რიგის A და B მატრიცის ჯამი ეწოდება ისეთ მესამე C მატრიცას, რომლის ყოველი c_{ij} ელემენტი უდრის მოცემულ A და B მატრიცთა შესაბამისი a_{ij} და b_{ij} ელემენტების ჯამს. მაშასადამე, თუ მოცემულია ორი n-ური რიგის მატრიცა:

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},
$$

მაშინ ჯამი იქნება:

$$
A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{n1}+b_{n1} & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}.
$$

ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ მატრიცთა ჯამისათვის მართებულია კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის კანონები, ე. ი.

$$
A+B=B+A, \quad A+(B+C)=(A+B)+C.
$$

ნულოვანი მატრიცა, ე. ი. ისეთი მატრიცა, რომლის ყველა ელემენტი ნულია, მატრიცთა შეკრებისა და გამრავლების მიმართ ასრულებს იმავე როლს, რასაც რიცხვი 0 რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების მიმართ.

მართლაც, თუ $\mathbf{0}$-ით აღვნიშნავთ ნულოვან მატრიცას, მივიღებთ: $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$ და $A\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot A=\mathbf{0}$. მატრიცთა შეკრება და გამრავ-

ლება ერთიმეორესთან დაკავშირებულია **დისტრიბუტიულობის კანონით**, ე. ი. ნებისმიერი სამი A, B და C მატრიცისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ორ ტოლობას:

$$(A+B)C=AC+BC, \qquad (2)$$
$$C(A+B)=CA+CB.$$

დავამტკიცოთ პირველი. მართლაც, ვთქვათ მოცემულია სამი n-ური რიგის მატრიცა $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. აღვნიშნოთ $(A+B)C$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაში მდგომი ელემენტი d_{ij}-თი, მივიღებთ:

$$d_{ij}=(a_{i1}+b_{i1})c_{1j}+(a_{i2}+b_{i2})c_{2j}+\ldots+(a_{in}+b_{in})c_{nj}.$$

ახლა, თუ $AC+BC$ მატრიცის შესაბამის, ე. ი. i-ური სტრიქონისა j-ური სვეტის გადაკვეთაში მდგომ ელემენტს აღვნიშნავთ d'_{ij}-თი მივიღებთ:

$$d'_{ij}=a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\ldots+a_{in}c_{nj}+b_{i1}c_{1j}+b_{i2}c_{2j}+\ldots+b_{in}c_{nj}.$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ მიღებულ ტოლობათა მარჯვენა მხარეები ტოლია. მაშასადამე, $d_{ij}=d'_{ij}$. ანალოგიურად დამტკიცდება აღნიშნულ ტოლობათა მეორე ტოლობაც.

ნებისმიერი k რიცხვის n-ური რიგის A მატრიცაზე ნამრავლი ეწოდება ისეთი n-ური რიგის მატრიცას, რომელიც მიიღება A მატრიცის ყოველი a_{ij} ელემენტის k რიცხვზე გამრავლების შედეგად ე. ი.

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ . & . & . & . \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \ldots & ka_{nn} \end{pmatrix}.$$

ადვილად შემოწმდება რომ $kA=Ak$. თუ $k=1$, მაშინ $1\cdot A=A\cdot 1=A$.

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, შეკრების ოპერაციის მიმართ, ეწოდება ისეთ X მატრიცას, რომელიც A-თან მიმატების შედეგად გვაძლევს ნულოვან მატრიცას, ე. ი. $A+X=\mathbf{0}$. თუ A მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას, შეკრების ოპერაციის მიმართ, აღვნიშნავთ $-A$ სიმბოლოთი, მივიღებთ:

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & \ldots & -a_{1n} \\ . & . & . \\ -a_{n1} & \ldots & -a_{nn} \end{pmatrix}.$$

ცხადია, რომ

$$A+(-A)=0.$$

თანახმად k რიცხვის A მატრიცაზე გამრავლების წესისა, როცა $k=-1$, მივიღებთ:

$$(-1)A=A(-1)=-A.$$

n-ური რიგის ისეთ მატრიცას, რომლის მთავარი დიაგონალის ელემენტები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო სხვა დანარჩენი ელემენტები ნულია, ეწოდება **სკალარული მატრიცა.** მაგალითად, ყველა ნულოვანი და ერთეულოვანი მატრიცა სკალარული მატრიცაა.

ყოველი ნამრავლი kE, სადაც k ნებისმიერი რიცხვია და E n-ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცაა, მოგვცემს n-ური რიგის სკალარულ მატრიცას

$$kE=\begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ ყოველი ორი სკალარული მატრიცის **ჯამი და ნამრავლი** ისევ სკალარული მატრიცაა, აგრეთვე ყოველ არანულოვან სკალარულ მატრიცას აქვს **შებრუნებული** მატრიცა, რომელიც ისევ სკალარული მატრიცაა.

n-ური რიგის მატრიცა, რომლის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაშია ერთი, ხოლო ყველა სხვა ელემენტი ნულია აღვნიშნოთ E_{ij} სიმბოლოთი. რადგან $i, j=1,2,\dots,n$, ჩვენ მივიღებთ, სულ n^2 რაოდენობის სხვადასხვა E_{ij} მატრიცას, რომელთათვის ადგილი აქვს გამრავლების შემდეგ ტაბულას:

$$E_{is}E_{sj}=E_{ij} \text{ და } E_{is}E_{\lambda j}=0, \text{ როცა } \lambda\neq s.$$

kE_{ij} ისეთი მატრიცაა, რომლის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაშია k რიცხვი, ხოლო ყველა სხვა ელემენტი ნულია. საინტერესოა გამოვთვალოთ შემდეგი ორმაგი ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}E_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\{a_{i1}E_{i1}+a_{i2}E_{i2}\}=$$

$$=a_{11}E_{11}+a_{21}E_{21}+a_{12}E_{12}+a_{22}E_{22}=$$

$$=a_{11}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_{21} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, მეორე რიგის მატრიცისათვის ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}E_{ij}.$$

ანალოგიურად, ნებისმიერი n-ური რიგის მატრიცისათვის მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}. \qquad (3)$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ ყველა n-ური რიგის მატრიცს სიმრავლე რიცხვთა P ველზე ქმნის $P^{(n^2)}$ ვექტორულ სივრცეს, რომლის ბაზისი იქნება E_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) მატრიცთა ერთობლიობა.

§ 12. შებრუნებული მატრიცის მოძებნა. თეორემები მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტისა და რანგის შესახებ

ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის A მატრიცა. ისეთ A^* მატრიცას, რომლის ელემენტებია A მატრიცის a_{ij} ელემენტების A_{ij} ალგებრული დამატებანი, მოთავსებულნი j-ური სტრიქონისა და i-ური სვეტის გადაკვეთაში, ეწოდება A მატრიცის **მიერთებული** მატრიცა. მაშასადამე, A მატრიცის მიერთებულ A^* მატრიცას შემდეგი სახე აქვს:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

ახლა წინა პარაგრაფში განხილული მატრიცების გამრავლების (4) ფორმულისა და დეტერმინანტების დაშლის (13) ფორმულის (გვ. 50) გამოყენებით ადვილად მივიღებთ:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix},$$

სადაც d არის A მატრიცის დეტერმინანტი, ე. ი. $|A|=d$. როგორც მიღებული ტოლობიდან ჩანს, მოცემული A მატრიცის და მასთან მიერთებული A^* მატრიცის ნამრავლი არის სკალარული მატრიცა. ამავე ტოლობიდან ჩანს აგრეთვე, რომ

$$AA^*=A^*A=|A|E.$$

ცხადია, რომ $A \cdot A^*$ სკალარული მატრიცის და $\frac{1}{d}$-ს ნამრავლი, სადაც $d \neq 0$, ერთეულოვანი მატრიცაა, ე. ი.

$$AA^*\frac{1}{d}=A\,\frac{A^*}{d}=E.$$

ახლა განვიხილოთ A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცის მოძებნის საკითხი. თუ მოვიგონებთ წინა პარაგრაფში განხილულ A^{-1} შებრუნებული მატრიცის (12) სახეს, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$A^{-1}=\frac{1}{d}\,A^*.$$

მაშასადამე, მოცემული მატრიცის შებრუნებული მატრიცის მოსაძებნად საკმარისია ვიპოვოთ მოცემული მატრიცის მიერთებული მატრიცა და შემდეგ მიერთებული მატრიცა გავამრავლოთ $\frac{1}{d}$-ზე.

მაგალითად, მოცემულია მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის დეტერმინანტი $d=5\neq 0$. ამგვარად, მოცემული მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, ე. ი. მას შებრუნებული მატრიცა აქვს. ვიპოვოთ A მატრიცის მიერთებული მატრიცა. ადვილად მივიღებთ, რომ

$$A_{11}=5,\ A_{21}=4,\ A_{31}=-1;\ \ A_{12}=10,\ A_{22}=12,$$
$$A_{32}=-3;\ A_{13}=0,\ A_{23}=1,\ A_{33}=1.$$

ამგვარად, მოცემული A მატრიცის მიერთებული A^* მატრიცა იქნება

$$A^*=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ახლა მოცემული A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცის მისაღებად განვიხილოთ ნამრავლი $\frac{1}{5}A^{*}=A^{-1}$, მივიღებთ:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

თუ A და B მატრიცების ტრანსპონირებულ მატრიცებს შესაბამისად აღვნიშნავთ A' და B', ადვილად მივიღებთ, რომ $A\cdot B$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა იქნება B და A მატრიცთა ტრანსპონირებული მატრიცების ნამრავლი, ე. ი.

$$(AB)'=B'A'.$$

მართლაც, ამისათვის საკმარისია ავიღოთ $(AB)'$ და $B'A'$ მატრიცების i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაში მდგომი შესაბამისი d_{ij} და d'_{ij} ელემენტები. ვნახავთ, რომ ეს ელემენტები ტოლია. ანალოგიური თვისება უშუალოდ გამოდის რამდენიმე მატრიცის ნამრავლის ტრანსპონირებული მატრიცისათვის, ე. ი.

$$(A_1\cdot A_2\ldots A_n)'=A'_n\ldots A'_2\cdot A'_1.$$

აგრეთვე ადვილად შემოწმდება, რომ $A\cdot B$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა უდრის $B^{-1}A^{-1}$ მატრიცას.

მართლაც, განვიხილოთ ნამრავლი

$$AB\cdot B^{-1}A^{-1}=A\cdot E\cdot A^{-1}=AA^{-1}=E.$$

მაშასადამე,

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

უშუალოდ გამოდის, რომ

$$(A_1\cdot A_2\ldots A_n)^{-1}=A_n^{-1}\ldots A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}.$$

დავამტკიცოთ **თეორემა. ორი ან რამდენიმე მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის თანამამრავლთა დეტერმინანტების ნამრავლს.**

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ორი n-ური რიგის $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ მატრიცა. მათი ნამრავლი, ვთქვათ, არის $C=(c_{ij})$ მატრიცა. ავაგოთ დამხმარე $2n$ რიგის d დეტერმინანტი ისე, რომ მარცხენა ზედა

კუთხეში მოვათავსოთ A მატრიცა მარჯვენა ქვედა კუთხეში — B მატრიცა, მარჯვენა ზედა კუთხეში—ნულები, ხოლო მარცხენა ქვედა კუთხეში მოვათავსოთ ისეთი n-ური რიგის მატრიცა, რომლის მთავარ დიაგონალზე იქნება —1 რიცხვები და სხვა დანარჩენი ელემენტები კი — ნულები. აგებულ დამხმარე $2n$ რიგის d დეტერმინანტს ექნება შემდეგი სახე:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ მიღებულ d დეტერმინანტს ლაპლასის თეორემის მიხედვით გავშლით პირველი n სტრიქონის მიმართ, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$d=|A|\ |B|. \tag{1}$$

ახლა ეს დამხმარე d დეტერმინანტი დეტერმინანტთა თვისების საფუძველზე გარდავქმნათ ისე, რომ მარჯვენა ქვედა კუთხეში მივიღოთ ნულები. ადვილად შევამჩნევთ, რომ ამისათვის საჭიროა მე-$(n+1)$ სვეტს მივუმატოთ პირველი სვეტი გამრავლებული b_{11}-ზე, მეორე სვეტი გამრავლებული b_{21}-ზე, და ა. შ., ბოლოს მე-n სვეტი გამრავლებული b_{n1}-ზე. შემდეგ მე-$(n+2)$ სვეტს მივუმატოთ პირველი სვეტი გამრავლებული b_{12}-ზე, მეორე სვეტი გამრავლებული b_{22}-ზე და ა. შ., ბოლოს მე-n სვეტი გამრავლებული b_{n2}-ზე და ა. შ. მე-$(n+j)$ სვეტს მივუმატოთ პირველი სვეტი გამრავლებული b_{1j}-ზე, მეორე სვეტი გამრავლებული b_{2j} და ა. შ., ბოლოს მე-n სვეტი გამრავლებული b_{nj} და ა. შ. ამ პროცესის შედეგად ყველა $j=1, 2, \dots, n$ ნომრისათვის d დეტერმინანტის მარჯვენა ქვედა კუთხეში მივიღებთ ნულებს, ხოლო მარჯვენა ზედა კუთხეში, როგორც ვხედავთ, ნულების ნაცვლად მივიღებთ C მატრიცის შესაბამის ელემენტებს.

მაგალითად, d დეტერმინანტის i-ური სტრიქონისა და $(n+j)$-ური სვეტის გადაკვეთაში მდგომი C მატრიცის c_{ij} ელემენტი იქნება:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}\dots+a_{in}b_{nj}. \tag{2}$$

მაშასადამე, ჩვენი დამხმარე d დეტერმინანტი ამ გარდაქმნების შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}.$$

თუ ახლა ამ d დეტერმინანტს იმავე ლაპლასის თეორემის მიხედვით გავშლით ბოლო n სვეტის მიმართ, მივიღებთ:

$$d=(-1)^{s}\cdot(-1)^{n}\cdot|C|,$$

სადაც s არის C მინორის სტრიქონებისა და სვეტების ნომრების ჯამი

$$s=1+2+\ldots+n+(n+1)+\ldots+2n=2n^{2}+n.$$

ამიტომ გვექნება:

$$d=(-1)^{2n^{2}+2n}|C|=|C|. \tag{3}$$

(1) და (3) ტოლობათა შედარებით მივიღებთ

$$|C|=|A|\;|B|.$$

მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ **ორი მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის თანამამრავლთა დეტერმინანტების ნამრავლს.**

ანალოგიური თეორემა უშუალოდ დამტკიცდება რამდენიმე მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტისათვის.

დამტკიცებული თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

1. თუ მოცემულ n-ური რიგის მატრიცებს (წრფივ გარდაქმნებს) შორის ერთ-ერთი განსაკუთრებული მატრიცაა (წრფივი გარდაქმნაა), მაშინ მათი გამრავლების შედეგად მიღებული მატრიცა (წრფივი გარდაქმნა) აგრეთვე განსაკუთრებული იქნება.

2. თუ მოცემული n-ური რიგის A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, ე. ი. $d\neq 0$, მაშინ მისი მიერთებული A^{*} მატრიცაც არაგანსაკუთრებულია და მისი დეტერმინანტი უდრის d^{n-1}.

მართლაც, თანახმად 120-ე გვერდზე მიღებული ტოლობისა, გვექნება:

$$|A\cdot A^{*}|=d^{n},\quad |A|\,|A^{*}|=d^{n},\ \text{ე. ი.}\ |A^{*}|=d^{n-1}.$$

3. თუ A და B n-ური რიგის მატრიცების ნაცვლად ავიღებთ n-ური რიგის $|A|$ და $|B|$ დეტერმინანტებს, ანალოგიური მეთოდით მივიღებთ ორი დეტერმინანტის ნამრავლისათვის (2) ფორმულას.

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ მოცემული გვაქვს ორი n-ური რიგის დეტერმინანტი $|A|=|a_{ij}|$ და $|B|=|b_{ij}|$, მაშინ მათი ნამრავლი იქნება ისეთი n-ური რიგის $|C|=|c_{ij}|$ დეტერმინანტი, რომლის ყოველი c_{ij} ელემენტი უდრის $|A|$ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ელემენტებისა და $|B|$ დეტერმინანტის j-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}. \tag{4}$$

შევნიშნოთ, რომ რადგან ყოველი დეტერმინანტი რიცხვია, ამიტომ დეტერმინანტთა ნამრავლისათვის სრულდება კომუტაციურობის კანონი, ე. ი.

$$|A|\,|B|=|B|\,|A| \text{ ან კიდევ } |AB|=|BA|.$$

ვინაიდან დეტერმინანტი ტრანსპონირებით არ იცვლება, ამიტომ ყოველი ორი მეორე რიგის დეტერმინანტის ნამრავლი შეიძლება წარმოვადგინოთ ოთხი სხვადასხვა სახით, მაგალითად:

1)
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 16 \end{vmatrix} = 20,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 18 & 13 \end{vmatrix} = 20,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 8 & 20 \end{vmatrix} = 20,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 20 & 14 \end{vmatrix} = 20.$$

2) დეტერმინანტის დეტერმინანტზე გამრავლების წესის გამოყენებით დავამტკიცოთ იგივეობა

$$(ab_1-a_1b)^2=(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)-(aa_1+bb_1)^2.$$

განვიხილოთ $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ დეტერმინანტის კვადრატი

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & aa_1+bb_1 \\ aa_1+bb_1 & a_1^2+b_1^2 \end{vmatrix}.$$

მაშასადამე,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & aa_1+bb_1 \\ aa_1+bb_1 & a_1^2+b_1^2 \end{vmatrix}.$$

აქედან უბრალო გამოთვლით მივიღებთ დასამტკიცებელ იგივეობას.

3) A მატრიცას ეწოდება **ორთოგონალური**, თუ A მატრიცის და მისი ტრანსპონირებული A' მატრიცის ნამრავლი ერთეულოვანი მატრიცაა, ე. ი. თუ

$$A \cdot A' = E \text{ ან, რაც იგივეა, } A' = A^{-1}.$$

რადგან ტრანსპონირებული მატრიცის დეტერმინანტი უდრის მოცემული მატრიცის დეტერმინანტს, ამიტომ მივიღებთ:

$$|A\ A'| = |A^2| = 1, \quad |A| = \pm 1.$$

მაშასადამე, ორთოგონალური მატრიცის **დეტერმინანტი უდრის** ± 1. შემდეგ, თუ $A^{-1} = A'$ ტოლობის ორივე მხარეზე მოვახდენთ ტრანსპონირებას, გვექნება:

$$(A^{-1})' = (A')' = A = (A^{-1})^{-1}.$$

ამგვარად, ორთოგონალური მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ისევ ორთოგონალური მატრიცაა. ვთქვათ:

$$A' = A^{-1}, \quad B' = B^{-1}.$$

მივიღებთ:

$$(AB)' = B'A' = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

მაშასადამე, ორთოგონალურ მატრიცთა ნამრავლი ისევ ორთოგონალური მატრიცაა.

4. ვთქვათ, A არის ნებისმიერი მატრიცა კომპლექსურ რიცხვთა ველზე. თუ A მატრიცის ყოველ ელემენტს შევცვლით მისი შეუღლებული რიცხვით, მივიღებთ მატრიცას, რომელსაც A მატრიცის კომპლექსურად შეუღლებული მატრიცა ეწოდება და აღინიშნება $\overline{A}$ სიმბოლოთი. A და $\overline{A'}$ მატრიცებს ეწოდება **ჰერმიტულად** შეუღლებული მატრიცები. A მატრიცას, რომლისთვისაც მართებულია

$$A\,\overline{A}' = E$$

ტოლობა, ეწოდება **უნიტარული** მატრიცა. ორთოგონალური მატრიცების ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ უნიტარული მატრიცის შებ-

რუნებული მატრიცა ისევ უნიტარული მატრიცაა და ორი უნიტარული მატრიცის ნამრავლი ისევ უნიტარული მატრიცაა.

მაგალითად, ადვილად შემოწმდება, რომ $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ მატრიცა უნიტარული მატრიცაა.

თეორემა. ორი ან რამდენიმე მატრიცის ნამრავლის რანგი არ აღემატება თანამამრავლთა რანგს.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია ორი $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ მატრიცა და მათი ნამრავლი $A\cdot B=C$, სადაც $C=(c_{ij})$. ვიგულისხმოთ, რომ მათი რანგი შესაბამისად არის r_1, r_2, და r. დავამტკიცოთ, რომ C მატრიცის ყოველი სვეტი წრფივი კომბინაციაა როგორც A მატრიცის, ისე B მატრიცის სვეტებისა. მაგალითად, დავამტკიცოთ, რომ C მატრიცის ყოველი სვეტი წრფივი კომბინაციაა A მატრიცის სვეტებისა. ამისათვის ავიღოთ C მატრიცის j-ური სვეტის ელემენტები c_{1j}, $c_{2j}\ldots$, c_{nj}. როგორც ვიცით,

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=$$
$$=b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\ldots+b_{nj}a_{in}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ C მატრიცის ყოველი j-ური სვეტი c_{1j}, c_{2j} ,…, c_{nj} წარმოადგენს A მატრიცის სვეტების წრფივ კომბინაციას b_{1j}, b_{2j}, $\ldots b_{nj}$ კოეფიციენტებით. ამიტომ, თანახმად წრფივად დამოკიდებულების ძირითადი თეორემის შედეგისა, C მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალური რიცხვი არ აღემატება A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალურ რიცხვს. მაშასადამე, C მატრიცის რანგი არ აღემატება A მატრიცის რანგს, ე. ი. $r\leqslant r_1$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ C მატრიცის რანგი არ აღემატება B მატრიცის რანგს, ე. ი. $r\leqslant r_2$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

საინტერესოა ამ თეორემის შედეგი: თუ B მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, მაშინ AB მატრიცის რანგი$=BA$ მატრიცის რანგს და $=A$ მატრიცის რანგს.

მართლაც, ვთქვათ,

$$AB=C.$$

დამტკიცებული თეორემის მიხედვით C მატრიცის რანგი არ აღემატება A მატრიცის რანგს, ე. ი. $r\leqslant r_1$. თუ ტოლობის ორივე მხარეს მარჯვნიდან გავამრავლებთ B^{-1}-ზე, მივიღებთ:

$$A=CB^{-1}.$$

ამ ტოლობიდან, აგრეთვე, თანახმად დამტკიცებული თეორემისა, ვღებულობთ, რომ A მატრიცის რანგი არ აღემატება C მატრიცის რანგს, ე. ი. $r_1 \leqslant r$. მიღებულ უტოლობათა შედარებით გვექნება $r = r_1$, რ. დ. გ.

§ 18. მართკუთხა მატრიცების გამრავლება და მისი გამოყენება

როდესაც ჩვენ განვიხილეთ მატრიცების გამრავლება, მხედველობაში გვქონდა მხოლოდ კვადრატული მატრიცები. თუ დავაკვირდებით მატრიცის მატრიცაზე გამრავლების (4) ფორმულას (გვ. 109), ადვილათ შევამჩნევთ, რომ მისი გამოყენება შეიძლება მართკუთხა მატრიცების შემთხვევაშიც. მართლაც, როგორც მატრიცთა გამრავლების აღნიშნული ფორმულიდან ჩანს, A მატრიცა შეიძლება გავამრავლოთ B მატრიცაზე, თუ A მატრიცის ყოველი სტრიქონის ელემენტების რიცხვი უდრის B მატრიცის ყოველი სვეტის ელემენტების რიცხვს. სხვა სიტყვებით, **A მატრიცის B მატრიცაზე გამრავლება შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის სვეტების რიცხვი უდრის B მატრიცის სტრიქონების რიცხვს.**

მაგალითად, ყოველი k-სვეტიანი A მატრიცა შეიძლება გავამრავლოთ ყოველ k-სტრიქონიან B მატრიცაზე. ცხადია, A მატრიცის სტრიქონების და B მატრიცის სვეტების რიცხვს არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს.

მაგალითები:

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 1 & 5 & 8 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix},$$

3. $$(2\ \ 1\ \ 0\ \ -4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (4,0).$$

როგორც A და B მართკუთხა მატრიცების გამრავლების წესიდან ჩანს, $A \cdot B$ მატრიცის სტრიქონების რიცხვი უდრის A მატრიცის სტრიქონების რიცხვს, ხოლო სვეტების რიცხვი — B მატრიცის სვეტების რიცხვს.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ მართკუთხა მატრიცების ნამრავლისათვის ადგილი აქვს გამრავლების ასოციაციურობის წესს. ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ არაკვადრატული წრფივი გარდაქმნები ე. ი. ისეთი წრფივი გარდაქმნები, როდესაც ცვლადთა რიცხვი არ უდრის წრფივ ფორმათა რიცხვს. აგრეთვე შეგვიძლია განვიხილოთ ისეთი წრფივი გარდაქმნების ნამრავლი, რომელთა შესაბამისი მატრიცების გამრავლება შესაძლებელია.

მართკუთხა მატრიცების გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ n-უცნობიანი n წრფივი განტოლების სისტემა:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\
\vdots\quad\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული სისტემის დეტერმინანტი $d\neq 0$, ე. ი. მოცემული სისტემის შესაბამისი A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია.

თუ X ასოთი აღვნიშნავთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებისაგან შექმნილ ერთსვეტიან მატრიცას, B ასოთი კი $b_1, b_2, \ldots, b_n$ თავისუფალი წევრებისაგან შექმნილ ერთსვეტიან მატრიცას, ე. ი.

$$
X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \\ \\ x_n\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_n\end{pmatrix}.
$$

მაშინ (1) წრფივ განტოლებათა სისტემა შეიძლება დავწეროთ ერთი მატრიცული განტოლების სახით:

$$
AX=B. \tag{2}
$$

რადგან (1) სისტემის შესაბამისი A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, არსებობს მისი A^{-1} შებრუნებული მატრიცა. გავამრავლოთ (2) განტოლების ორივე მხარე მარცხნიდან A^{-1} მატრიცაზე, მივიღებთ:

$$
X=A^{-1}B. \tag{3}
$$

ადვილად შემოწმდება, რომ (3) მატრიცა წარმოადგენს (2) მატრიცული განტოლების ამონახსნს.

(3) თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში ჩვენ გვაქვს n-სტრიქონიანი

და ერთსვეტიანი მატრიცა. განვიხილოთ $A^{-1}\cdot B$ მატრიცის j-ური სტრიქონის ელემენტი. მას შემდეგი სახე აქვს:

$$\frac{A_{1j}}{d}b_1+\frac{A_{2j}}{d}b_2+\dots+\frac{A_{nj}}{d}b_n=\frac{1}{d}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\dots+b_nA_{nj}).$$

რადგან X მატრიცის j-ური სტრიქონის ელემენტია x_j, ამიტომ თანახმად (3) ტოლობისა, მივიღებთ:

$$x_j=\frac{1}{d}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\dots+b_nA_{nj}). \tag{4}$$

თუ დავაკვირდებით (4) ტოლობის მარჯვენა მხარის ფრჩხილებში მოთავსებულ ჯამს, ვნახავთ, რომ ის არის d_j დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება d დეტერმინანტისაგან j-ური სვეტის შეცვლით მოცემული სისტემის თავისუფალი წევრებით, ე. ი.

$$d_j=\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1j-1} & b_1\dots a_{1n} \\ a_{21}\dots a_{2j-1} & b_2\dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1}\dots a_{nj-1} & b_n\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

და (4) ფორმულა ასე გადაიწერება:

$$x_j=\frac{d_j}{d}\quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

მაშასადამე, (3) თანაფარდობა წარმოადგენს კრამერის ფორმულას, დაწერილს მატრიცული სახით. განვიხილოთ მაგალითები:

1. ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი განტოლებისა:

$$AX=0,\ \text{სადაც}\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

X უნდა იყოს ოთხსტრიქონიანი მატრიცა, სვეტთა რიცხვი კი ნებისმიერი შეიძლება იყოს.

მაგალითად,

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix};$$

თუ X-ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} 2x_1+\ x_2+5x_3-3x_4&=0,\\ x_1+3x_2-\ x_3+2x_4&=0,\\ 3x_1+5x_2+\ x_3+4x_4&=0. \end{aligned}$$

სრულიად ასეთივე ერთგვაროვანი წრფივ განტოლებათა სისტემა გვექნება y_1, y_2, y_3, y_4 უცნობთა მიმართ. ამოხსნის შედეგად მივიღებთ: $x_1=-20\alpha$, $x_2=7\alpha$, $x_3=9\alpha$, $x_4=4\alpha$, სადაც α ნებისმიერი პარამეტრია. y უცნობებისათვის მივიღებთ იმავე ამონახსნს მხოლოდ α პარამეტრის ნაცვლად ავიღოთ β პარამეტრი: $y_1=-20\beta$, $y_2=7\beta$, $y_3=9\beta$ $y_4=4\beta$. ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$X=\begin{pmatrix} -20\alpha & -20\beta \\ 7\alpha & 7\beta \\ 9\alpha & 9\beta \\ 4\alpha & 4\beta \end{pmatrix}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ A კვადრატული მატრიცაა, განტოლებებს: $AX=0$, $YA=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნებათ არატრივიალური, ე. ი არანულოვანი ამონახსნი, როცა A განსაკუთრებული მატრიცაა.

2. თუ $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ მატრიცას გავამრავლებთ მის ტრანსპონირებულ მატრიცაზე და განვიხილავთ გამრავლების შედეგად მიღებულ მეორე რიგის მატრიცის დეტერმინანტს გვექნება:

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2, & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2, & a_2^2+b_2^2+c_2^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1^2, & a_1a_2 \\ a_1a_2, & a_2^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1^2, & b_1b_2 \\ a_1a_2, & a_2^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1^2, & c_1c_2 \\ a_1a_2, & a_2^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1^2, & a_1a_2 \\ b_1b_2, & a_2^2 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} b_1^2, & b_1b_2 \\ b_1b_2, & b_2^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1^2, & c_1c_2 \\ b_1b_2, & b_2^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1^2, & a_1a_2 \\ c_1c_2, & c_2^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1^2, & b_1b_2 \\ c_1c_2, & c_2^2 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} c_1^2, & c_1c_2 \\ c_1c_2, & c_2^2 \end{vmatrix}=(a_1b_2-a_2b_1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+(a_1c_2-a_2c_1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}+$$

$$+(b_1c_2-b_2c_1)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

აქედან მივიღებთ ეილერის ცნობილ იგივეობას:

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2.$$

3. განვიხილოთ შემდეგი წრფივ განტოლებათა სისტემის მატრიცული ჩაწერა და ამოხსნა

$$\begin{aligned} x_1-2x_2-\ x_3&=1,\\ 3x_1+\ x_2+2x_3&=5,\\ x_1+2x_2+2x_3&=2. \end{aligned}$$

მივიღებთ:

$$AX=B,$$

სადაც

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

რადგან მოცემული სისტემის დეტერმინანტი $d=|A|=1\neq 0$, ამიტომ გვექნება:

$$X=A^{-1}\cdot B \quad \text{ან} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-1$ მოცემული სისტემის ამონახსნია.

§ 14. ჯგუფი. მაგალითები. ჯგუფთა იზომორფიზმი

თუ გადავხედავთ წინა პარაგრაფებში გავლილ მასალას, ვნახავთ, რომ რიცხვებთან ერთად ჩვენ საქმე გვქონდა სხვადასხვა ბუნების ობიექტებთან, ასეთები იყო: ჩასმები, წრფივი, ანუ ვექტორული, სივრცის ელემენტები, წრფივი გარდაქმნები და მატრიცები. ჩასმების გამრავლების დროს პირველად გავეცანით არაკომუტაციური ოპერაციის არსებობას. შემდეგ ვნახეთ, რომ, გარდა ჩასმებისა, მატრიცების გამრავლებაც არ ემორჩილება კომუტაციურობის წესს. ახლა ჩვენ გავეცნობით სპეციალური სახის სიმრავლეს, რომელსაც **ჯგუფი** ეწოდება.

ნებისმიერი ბუნების ელემენტთა G სიმრავლეს, რაიმე ოპერაციის, მაგალითად **გამრავლების**, მიმართ ეწოდება **ჯგუფი**, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. G სიმრავლის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტის $ab=c$ ნამრავლი ეკუთვნის ისევ G სიმრავლეს.

2. G სიმრავლის ნებისმიერი სამი a, b, c ელემენტისათვის გამრავლების ოპერაციის მიმართ სრულდება ასოციაციურობის წესი, ე. ი.

$$(ab)c=a(bc).$$

3. G სიმრავლის ნებისმიერი a ელემენტისათვის ამავე სიმრავლეში უნდა არსებობდეს ერთი ისეთი e ელემენტი მაინც, რომ $ae=a$. ასეთი თვისების e ელემენტს a ელემენტის მარჯვენა ერთეული ეწოდება.

4. G სიმრავლის ყოველი a ელემენტისათვის G-ში უნდა არსებობდეს ერთი ისეთი a' ელემენტი მაინც, რომ $aa'=e$. ასეთი თვისების a' ელემენტს a ელემენტის მარჯვენა შებრუნებულს უწოდებენ და მას ასე აღნიშნავენ: $a'=a^{-1}$.

გარდა ამისა, თუ G ჯგუფის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის ადგილი აქვს $ab=ba$ ტოლობას, მაშინ G ჯგუფს კომუტაციური, ანუ აბელური, ჯგუფი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში არაკომუტაციური, ანუ არააბელური, ჯგუფი ეწოდება*. ასეთი ჯგუფს აბელურს უწოდებენ იმიტომ, რომ მაღალი ხარისხის ალგებრულ განტოლებათა შესწავლისას აღნიშნული ტიპის ჯგუფები პირველად განხილული იყო ნორვეგიელი მათემატიკოსის **ნ. ჰ. აბელის** (N. H. Abel) მიერ.

ჯგუფში შემავალი სხვადასხვა ელემენტის რიცხვს — მათ რაოდენობას — **ჯგუფის რიგი** ეწოდება. თუ ჯგუფი შეიცავს ელემენტთა სასრულ რიცხვს, მაშინ მას სასრული, ანუ **სასრული რიგის**, ჯგუფი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჯგუფს უსასრულო, ანუ **უსასრულო რიგის**, ჯგუფი ეწოდება.

როგორც ვიცით, თუ G სიმრავლის ელემენტებისათვის სრულდება ჯგუფის პირველი პირობა, მაშინ ვამბობთ, რომ G სიმრავლეში მოცემულია ალგებრული ოპერაცია; კერძოდ, გამრავლების ოპერაცია G სიმრავლეში ალგებრულია.** განმარტების თანახმად, ყოველ ჯგუფში განმარტებული ოპერაცია ალგებრულია.

უმეტეს შემთხვევაში a და b ელემენტებზე მოხდენილ ჯგუფურ ოპერაციას უბრალოდ ab სახით სწერენ. ასეთ ჩაწერას ეწოდება **მულტიპლიკაციური**, ანუ გამრავლების სახით ჩაწერა.

---

* ელემენტთა ისეთ G სიმრავლეს, რომლისთვისაც სრულდება ჯგუფის განმარტების მხოლოდ პირველი ორი აქსიომა, ეწოდება ნახევარჯგუფი. ცხადია, რომ ყოველი ჯგუფი ნახევარჯგუფია, პირიქით კი არა.

** იხილეთ შესავალი.

კომუტაციური, ანუ აბელური, ჯგუფისათვის კი მეტ შემთხვევაში სარგებლობენ $a+b$ სახით ჩაწერით, რომელსაც ეწოდება ოპერაციის **ადიციური,** ანუ ჯამის სახით, ჩაწერა. ამიტომაა, რომ ხშირად ჯგუფს გამრავლების მიმართ უწოდებენ მულტიპლიკაციურ ჯგუფს, ხოლო შეკრების მიმართ **ადიციურ ჯგუფს.** ადიციურ ჯგუფში ერთეულის როლს ასრულებს ნულოვანი ელემენტი, ხოლო a ელემენტის შებრუნებული ელემენტის როლს—a ელემენტი.

განვიხილოთ ჯგუფის რამდენიმე მაგალითი.

1. ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის **უსასრულო რიგის** აბელურ, ანუ ადიციურ, ჯგუფს, სადაც e ერთეული ელემენტის როლს ასრულებს რიცხვი 0, ხოლო შებრუნებული ელემენტის როლს a რიცხვისათვის ასრულებს $-a$ რიცხვი.

2. რიცხვთა i, -1, $-i$, 1 სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის მეოთხე რიგის აბელურ ჯგუფს. მართლაც, ერთეული ელემენტის როლს ასრულებს რიცხვი 1. ამ სიმრავლიდან აღებული ყოველი ორი რიცხვის ნამრავლი, ცხადია, მასვე ეკუთვნის. ყოველ რიცხვს ამ სიმრავლეში შებრუნებული რიცხვი გააჩნია; მაგალითად, i რიცხვის შებრუნებული რიცხვი გამრავლების მიმართ იქნება $i^{-1}=\frac{1}{i}=$ $=-i$. ხოლო რაც შეეხება ასოციაციურობის წესს, ის რიცხვთა ყოველ სიმრავლეში სრულდება. ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ $x^3-1=0$ განტოლების ფესვთა სიმრავლე: $x_1=1$, $x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის ჯგუფს.

3. ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, ნულის გამოკლებით (ნულს შებრუნებული არ აქვს), გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის უსასრულო რიგის აბელურ ჯგუფს, სადაც e ერთეულის როლს ასრულებს რიცხვი 1, ხოლო შებრუნებული ელემენტის როლს a რიცხვისათვის ასრულებს რიცხვი $a^{-1}=\frac{1}{a}$.

4. ადვილად შემოწმდება, რომ ყველა ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე, ნულის გამოკლებით, გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის უსასრულო რიგის აბელურ ჯგუფს. აგრეთვე ყველა რაციონალურ, ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეები ნულთან ერთად შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის უსასრულო რიგის აბელურ ჯგუფს.

5. n-ინდექსიან, ანუ n-ხარისხიან ჩასმათა, სიმრავლე ჩასმათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის სასრული $n!$ რიგის არააბელურ ჯგუფს. მართლაც, აქ ერთეული ელემენტის როლს ასრულებს

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 \dots n \\ 1 & 2 \dots n\end{pmatrix}$$

ერთეულოვანი, ანუ იგივური, ჩასმა, ხოლო შებრუნებული ელემენტის როლს — შებრუნებული ჩასმა; მაგალითად,

$$a=\begin{pmatrix}1 & 2 \dots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_n\end{pmatrix}$$

ჩასმისათვის შებრუნებულია

$$a^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ 1 & 2 \dots n\end{pmatrix}$$

ჩასმა.

n-ხარისხიან ჩასმათა ჯგუფს აგრეთვე n-ხარისხიან **სიმეტრიულ ჯგუფს** უწოდებენ და მას S_n სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

6. n-ური რიგის ყველა მატრიცის სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის აბელურ, ანუ ადიციურ ჯგუფს. ნულის როლს ასრულებს ნულოვანი მატრიცა, ხოლო A მატრიცის შებრუნებული მატრიცის როლს ასრულებს $-A$ მატრიცა.

n-ური რიგის ყველა არასაკუთრივი მატრიცის სიმრავლე მატრიცთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის უსასრულო რიგის არააბელურ ჯგუფს, სადაც ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს E ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო მოცემული A მატრიცის შებრუნებული ელემენტის როლს ასრულებს მისი შებრუნებული A^{-1} მატრიცა.

7. არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა სიმრავლე გარდაქმნათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის უსასრულო არააბელურ ჯგუფს. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფში ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს იგივური გარდაქმნა, ხოლო მოცემული გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა ასრულებს შებრუნებული ელემენტის როლს. როგორც ვიცით, მოცემული არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა ყოველთვის არსებობს.

კერძოდ, გარდაქმნა სიბრტყეზე:

$$x=a_1x'+b_1y'+c_1,$$
$$y=a_2x'+b_2y'+c_2,$$

რომელსაც აფინური გარდაქმნა ეწოდება, როცა $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, ქმნის ჯგუფს.

მაგალითად, არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned}$$

რომელიც გამოსახავს სიბრტყის წერტილის კოორდინატების ცვლას, როცა მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა α კუთხით მობრუნდება სათავის გარშემო, გარდაქმნათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის ჯგუფს. ასეთ ბრუნთა ჯგუფში ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს იგივური გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y', \end{aligned}$$

ხოლო შებრუნებული ელემენტის როლს ასრულებს მოცემული გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა. ამ შემთხვევაში მოცემული გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა იქნება:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + y \sin\alpha, \\ y' &= -x \sin\alpha + y \cos\alpha. \end{aligned}$$

8. n-ური რიგის ორთოგონალურ მატრიცთა სიმრავლე ქმნის ჯგუფს. მართლაც, როგორც უკვე ვიცით, ყოველი ორი ორთოგონალური მატრიცის ნამრავლი და ყოველი ორთოგონალური მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ისევ ორთოგონალური მატრიცაა. ერთეულის როლს კი ასრულებს ერთეულოვანი მატრიცა $E^{-1}=E^{1}=E$, $|E|=1$. ვიცით აგრეთვე, რომ ორთოგონალურ მატრიცთა დეტერმინანტი უდრის ± 1.

ისეთ ორთოგონალურ მატრიცას, რომლის დეტერმინანტი$=1$, ეწოდება **საკუთრივ ორთოგონალური** მატრიცა, ხოლო ისეთ ორთოგონალურ მატრიცას, რომლის დეტერმინანტი$=-1$, ეწოდება **არასაკუთრივი ორთოგონალური** მატრიცა.

ისეთ წრფივ გარდაქმნებს, რომელთა შესაბამისი მატრიცა ორთოგონალურია, ეწოდება **ორთოგონალური წრფივი გარდაქმნა**. ცხადია, რომ ორთოგონალურ წრფივ გარდაქმნათა სიმრავლე წრფივ გარდაქმნათა გამრავლების მიმართ ქმნის ჯგუფს. ორთოგონალურ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფს დიდი გამოყენება აქვს გეომეტრიასა და მათემატიკურ ფიზიკაში. ორთოგონალური წრფივი გარდაქმნის ერთ-ერთ გამოყენებას ჩვენ ვნახავთ კვადრატული ფორმების შესწავლისას.

9. რაციონალურ ფუნქციათა ჯგუფი. განვიხილოთ შემდეგ ფუნქციათა სიმრავლე:

$$\varphi_0=x, \quad \varphi_1=\frac{1}{x}, \quad \varphi_2=1-x, \quad \varphi_3=\frac{x}{x-1}, \quad \varphi_4=\frac{x-1}{x}$$

$$\text{და} \quad \varphi_5=\frac{1}{1-x}.$$

ამ ფუნქციებზე მოქმედებად მივიღოთ ერთი ფუნქციის მეორეში ჩასმა x-ის ნაცვლად; ასე, მაგალითად,

$$\varphi_2\cdot\varphi_4=1-\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x}=\varphi_1.$$

ერთეულის როლს ფუნქციათა ასეთი მოქმედების მიმართ ასრულებს $\varphi_0=x$ ფუნქცია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ფუნქციათა მოცემული სიმრავლე აღნიშნული მოქმედების მიმართ ქმნის მე-6 რიგის არააბელურ ჯგუფს.

ახლა დავუბრუნდეთ ჯგუფის განმარტებას და დავამტკიცოთ მისი ზოგიერთი თვისება.

1°. a ელემენტის მარჯვენა შებრუნებული a^{-1} ელემენტი ამავე დროს არის მარცხენა შებრუნებული ელემენტიც.

მართლაც, თანახმად მე-4 პირობისა, $aa^{-1}=e$. ამ ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გავამრავლოთ a^{-1} ელემენტზე. მივიღებთ: $a^{-1}aa^{-1}=a^{-1}e=a^{-1}$ ან, რაც იგივეა,

$$a^{-1}aa^{-1}=a^{-1}. \tag{1}$$

ვთქვათ, a^{-1}-ის ელემენტის შებრუნებული b ელემენტი, ე. ი. $a^{-1}b=e$. თუ ახლა (1) ტოლობის ორივე მხარეს მარჯვნიდან გავამრავლებთ b ელემენტზე, მივიღებთ $a^{-1}ae=e$. თანახმად მე-3 პირობისა, გვექნება:

$$a^{-1}a=e. \tag{2}$$

მაშასადამე, a^{-1} ელემენტი ყოფილა აგრეთვე a ელემენტის მარცხენა შებრუნებული ელემენტი.

2°. ჯგუფის ყოველი მარჯვენა ერთეული ამავე დროს მარცხენა ერთეულია და ჯგუფს ერთადერთი ერთეული გააჩნია.

მართლაც, დამტკიცებული (2) ტოლობის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$ea=aa^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}a=ae=a.$$

ამრიგად, მივიღეთ:

$$ea=ae=a. \tag{4}$$

ამით დამტკიცდა, რომ ჯგუფის ყოველი მარჯვენა ერთეული ამავე დროს მარცხენა ერთეულია. ახლა დავუშვათ, რომ ჯგუფს გააჩნია კიდევ მეორე ერთეული e_1, სადაც $e_1 \neq e$. განვიხილოთ ee_1 ნამრავლი. თანახმად (4) ტოლობისა, მივიღებთ შემდეგ ორ ტოლობას:

$$ee_1=e, \quad ee_1=e_1. \tag{5}$$

(5) ტოლობათა მარცხენა მხარეები ტოლია, მაშასადამე, $e=e_1$ და ამით 2° თვისება მთლიანად დამტკიცებულია.

3°. ყოველ

$$ax=b \text{ და } ya=b$$

განტოლებას, სადაც a და b არიან G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტები, G ჯგუფში აქვს ამონახსნი და ეს ამონახსნი ერთადერთია.

მართლაც, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $x=a^{-1}b$ იქნება პირველი განტოლების ამონახსნი, ხოლო $y=ba^{-1}$ იქნება მეორე განტოლების ამონახსნი. შევამოწმოთ პირველი განტოლებისათვის:

$$a(a^{-1}b)=(a\cdot a^{-1}).b=eb=b.$$

ანალოგიურად შემოწმდება მეორე განტოლებისათვისაც. დავუშვათ ახლა, რომ $ax=b$ განტოლებას აქვს ორი x_1 და x_2 სხვადასხვა ამონახსნი, მაშინ $ax_1=b$ და $ax_2=b$ ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$ax_1=ax_2.$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან a^{-1} ელემენტზე, მივიღებთ:

$$ex_1=ex_2, \text{ ე. ი. } x_1=x_2.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება მეორე განტოლებისათვისაც.

დამტკიცებული თვისებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ჯგუფის ყოველ ელემენტს ერთადერთი შებრუნებული ელემენტი აქვს.

გამრავლების ასოციაციურობის წესის თანახმად, ყოველი სამი ელემენტის ნამრავლში ფრჩხილების უკუგდებით შედეგი არ იცვლება და ამიტომ ჯგუფში ყოველი სამი ელემენტის ნამრავლი შეიძლება ფრჩხილებს გარეშე დავწეროთ:

$$a_1(a_2a_3)=(a_1a_2)a_3=a_1a_2a_3, \tag{6}$$

ე. ი. ჯგუფის ყოველი სამი ელემენტის გამრავლებისათვის უნდა შევადგინოთ პირველი ორი ელემენტის ნამრავლი და მიღებული შედეგი უნდა გავამრავლოთ მესამე ელემენტზე.

სამზე მეტი ელემენტის ნამრავლი განისაზღვრება თანამიმდევრობითი „გადამრავლებით"; ასე, მაგალითად,

$$a_1a_2a_3a_4=(a_1a_2a_3)a_4\,,\ldots, a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n=(a_1a_2\ldots a_{n-1})a_n; \tag{7}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ოთხი ელემენტის ნამრავლის მისაღებად უნდა შევადგინოთ პირველი სამი ელემენტის ნამრავლი და მიღებული შედეგი გადავამრავლოთ მეოთხე ელემენტზე და ა. შ.

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ ასოციაციურობის თვისება ჯგუფის ნებისმიერ სასრულ რიცხვ ელემენტისათვის, რომელიც ასე ჩამოყალიბდება:

ელემენტთა ნებისმიერ სასრული რიცხვის ნამრავლში ფრჩხილების უკუგდებით ნამრავლის შედეგი არ იცვლება.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია ნამრავლი

$$(a_1a_2\ldots a_k)(a_{k+1}\ldots a_{k+n}).$$

დავამტკიცოთ, რომ ამ ნამრავლის წარმოდგენა ასე შეიძლება:

$$(a_1a_2\ldots a_k)(a_{k+1}\ldots a_{k+n})=a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_{k+n}. \tag{8}$$

როცა $n=1$ (8) ტოლობა, თანახმად (7) ტოლობისა, მართებულია. დავუშვათ, რომ (8) ტოლობა მართებულია n-ის გარკვეული ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის.

განვიხილოთ ახლა n-ის ნაცვლად $n+1$ მნიშვნელობა, ე. ი. განვიხილოთ ნამრავლი

$$(a_1a_2\ldots a_k)(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n}a_{k+n+1}).$$

ეს ნამრავლი მოქმედებათა რიგის შეუცვლელად შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$(a_1a_2\ldots a_k)\,[(a_{k+1}\ldots a_{k+n})\cdot a_{k+n+1}],$$

ეს კი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნამრავლი შემდეგი სამი თანამამრავლისა:

$$a_1a_2\ldots a_k=a,\quad a_{k+1}\ldots a_{k+n}=b,\quad a_{k+n+1}=c.$$

ვინაიდან ნებისმიერი სამი ელემენტისათვის ადგილი აქვს (6) ტოლობას, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(a_1a_2\ldots a_k)(a_{k+1}\ldots a_{k+n}a_{k+n+1})=a(bc)=(ab)c=$$
$$=abc=a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_{k+n}a_{k+n+1}$$

და ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ ყოველ ალგებრულოპერაციან სიმრავლეში, თუ ასოციაციურობის წესი მართებულია ნებისმიერი სამი ელემენტისათვის, ის მართებული იქნება ამ სიმრავლის ელემენტთა ნებისმიერი სასრული რიცხვისათვის.

ახლა, ვთქვათ, a არის G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. a ელემენტის ხარისხი ნატურალური n მაჩვენებლით, თანახმად (7) ტოლობისა, განისაზღვრება ასე:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n}.$$

თანახმად (8) ტოლობისა, ყოველი n და m ნატურალური რიცხვებისათვის, როცა $a_i=a$ $(i=1,\ 2,\ldots,n+m)$, მივიღებთ:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m},$$

აგრეთვე მივიღებთ, რომ

$$\underbrace{a^n\cdot a^n\cdots a^n}_{m}=(a^n)^m,\ \text{ე. ი.}\ (a^n)^m=a^{nm}.$$

თუ a და b ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტებია, ასოციაციურობის წესის გამოყენებით ადვილად შემოწმდება, რომ ab ნამრავლის შებრუნებულია $b^{-1}a^{-1}$.

მართლაც,

$$ab\cdot(b^{-1}a^{-1})=a(b\cdot b^{-1}).a^{-1}=aea^{-1}=aa^{-1}=e;$$

მაშასადამე, $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. საზოგადოდ, ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{-1}=a_n^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1^{-1}. \qquad (9)$$

ახლა ხარისხი მთელი უარყოფითი მაჩვენებლებით შეიძლება განვმარტოთ ასე:

$$a^{-n}=\underbrace{a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n}=(a^{-1})^n.$$

თუ (9) ტოლობაში ვიგულისხმებთ, რომ $a_i=a$ $(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$, მივიღებთ:

$$(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n=a^{-n},\ \text{ე. ი.}\ (a^n)^{-1}=a^{-n}.$$

ყოველი აბელური ჯგუფის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

ქვეჯგუფი. ჯგუფის ნებისმიერ H ქვესიმრავლეს, რომელიც თვითონ ქმნის ჯგუფს, ჯგუფში განმარტებული ოპერაციის მიმართ ეწოდება **ქვეჯგუფი.** იმისათვის, რომ გავიგოთ G ჯგუფის მოცემული რომელიმე H ქვესიმრავლე არის თუ არა ქვეჯგუფი, საკმარისია მხოლოდ შემოწმდეს ჯგუფის განსაზღვრის პირველ და მეოთხე პირობათა მართებულობა; თუ დავუშვებთ, რომ ეს ორი პირობა სრულდება ქვესიმრავლეში, მაშინ მეორე და მესამე პირობა ავტომატურად შესრულდება.

მართლაც, რადგან G ჯგუფის ყოველი H ქვესიმრავლის ნებისმიერი სამი ელემენტი ამავე დროს ჯგუფის ელემენტებია და ჯგუფში ასოციაციურობის კანონი სრულდება, ამიტომ თანახმად პირველი პირობისა, ჯგუფის მეორე, ე. ი. ასოციაციურობის პირობა მისი ყოველი H ქვესიმრავლისათვის სრულდება.

ახლა, რადგან H ქვესიმრავლისათვის ადგილი აქვს ჯგუფის მე-4 პირობას, ე. ი. H ქვესიმრავლე ყოველ მის a ელემენტთან ერთად შეიცავს მის შებრუნებულ a^{-1} ელემენტს, თანახმად პირველი პირობისა, მივიღებთ, რომ

$$aa^{-1} = e \in H.$$

განვიხილოთ მაგალითები.

1. რადგან ყოველი ორი ლუწი ჩასმის ნამრავლი ისევ ლუწი ჩასმაა და ყოველი ლუწი ჩასმის შებრუნებული ჩასმა ისევ ლუწი ჩასმაა, ამიტომ n-ხარისხიან S_n სიმეტრიულ ჯგუფში ლუწ ჩასმათა ქვესიმრავლე, რომელსაც A^n სიმბოლოთი აღნიშნავენ, ქმნის ქვეჯგუფს, რომლის რიგი უდრის $\frac{n!}{2}$. კერძოდ სამხარისხიანი ან, რაც იგივეა, სამინდექსიანი S_3 სიმეტრიული ჯგუფის

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ლუწი ჩასმებისაგან შექმნილი ქვეჯგუფი იქნება:

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

როგორც ვხედავთ, S_3 ჯგუფის რიგი უდრის $3!=6$, ხოლო A_3 ქვეჯგუფის რიგი კი $\frac{3!}{2}=3$. ახლა, თუ S_3 ჯგუფისა და A_3 ქვეჯგუფის ელემენტებს დავწერთ ციკლების სახით შესაბამისად გვექნება:

$S_3=\{(1),\ (2\ 3),\ (1\ 2),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 3)\}$,

$A_3=\{(1),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}$.

მკითხველმა, როგორც სავარჯიშო, სასარგებლოა ამოწეროს S_4 სიმეტრიული ჯგუფის და მისი A_4 ქვეჯგუფის ყველა ელემენტი როგორც ჩასმების, ისე ციკლების სახით.

2. ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ მთელ რიცხვთა G ჯგუფის (შეკრების ოპერაციის მიმართ) ყოველი H ქვესიმრავლე, შედგენილი მოცემული n ნატურალური რიცხვის ყველა ჯერადი რიცხვისაგან, შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის ქვეჯგუფს.

3. n-ური რიგის არაგანსაკუთრებულ მატრიცთა ჯგუფის (მატრიცთა გამრავლების მიმართ) ქვეჯგუფებია დიაგონალურ მატრიცთა ან კიდევ სკალარულ მატრიცთა ჯგუფი. ორთოგონალურ მატრიცთა ჯგუფის ქვეჯგუფად შეიძლება განვიხილოთ საკუთრივ ორთოგონალურ მატრიცთა ჯგუფი.

4. გამრავლების ოპერაციის მიმართ მეორე რიგის ჯგუფი $\{1, -1\}$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც რაციონალურ რიცხვთა ჯგუფის ქვეჯგუფი.

5. ადვილად შემოწმდება, რომ G ჯგუფის ნებისმიერი ორი A და B ქვეჯგუფის თანაკვეთა $A\cap B=D$ მოცემული ჯგუფის ქვეჯგუფია. ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ, თუ g არის მოცემული G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $gG=Gg=G$: საზოგადოდ,

$$G\cdot G=G^2=G \text{ და ა. შ. } G^n=G.$$

უნდა ვიგულისხმოთ, რომ, თუ G ჯგუფის ელემენტებია $e, g_2, g_3, \dots$, ე. ი. $G=\{e, g_2, g_3, \dots,\}$, მაშინ $gG=\{eg, gg_2, gg_3 \dots\}$. G ჯგუფის რომელიმე a ელემენტის მიერ შექმნილ ქვეჯგუფს, რომელიც $\{a\}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ეწოდება G ჯგუფის ციკლური ქვეჯგუფი. თუ ჯგუფში განმარტებულია გამრავლების ოპერაცია, მაშინ a ელემენტის მიერ შექმნილი ციკლური ქვეჯგუფი შედგება a ელემენტის ყველა ხარისხისაგან:

$$\{a\}=\{\dots,\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0=1,\ a,\ a^2,\ \dots\}.$$

ერთი ელემენტის ხარისხებისაგან (ჯერადებისაგან) შექმნილ ჯგუფს ციკლური ჯგუფი ეწოდება. ცხადია, რომ ყოველი ციკლური ჯგუფი აბელურია.

მაგალითად, $x^3-1=0$ განტოლების ფესვებისაგან შექმნილი ჯგუფი:

$$G=\left\{x_1=1,\quad x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

წარმოადგენს მესამე რიგის ციკლურ ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ეს ჯგუფი შეიქმნება როგორც x_2 ფესვის, ისე x_3 ფესვის ხარისხების მიერ. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ აგრეთვე, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს უსასრულო რიგის ციკლურ ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ, რომელიც შექმნილია რიცხვ 1-ის მიერ.

ჯგუფის რომელიმე a ელემენტს ეწოდება k **რიგის** ელემენტი, თუ k არის ისეთი უმცირესი მთელი დადებითი რიცხვი, რომლისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $a^k=e$, სადაც e არის ჯგუფის ერთეული, რომელსაც ხშირად ჩვეულებრივი 1-ით აღნიშნავენ. ადვილად შემოწმდება, რომ თუ a ელემენტის რიგი უდრის k-ს, მაშინ a-ს ყოველი a^n ხარისხი იქნება რომელიმე a-ს შემდეგ სხვადსხვა ხარისხთა შორის

$$a^0=1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{k-1}.$$

მართლაც, როცა $n\geqslant k$ შეგვიძლია დავწეროთ $n=kq+r$, სადაც $0\leqslant r<k$. აქედან $a^n=a^{kq}a^r=a^r$, რ. დ. გ.

ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი a ელემენტის რიგი ემთხვევა a ელემენტის მიერ შექმნილი ციკლური ჯგუფის რიგს. მაგალითად, თუ a ელემენტის რიგი $k=6$, ე. ი. $a^6=1$, მაშინ a ელემენტის მიერ შექმნილ მე-6 რიგის ციკლურ $A=\{a\}$ ჯგუფს ექნება შემდეგი სახე:

$$A=\{1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}.$$

A სიმრავლისათვის ადვილად შემოწმდება ჯგუფის ყველა პირობა (აქსიომა). მაგალითად, $a^3\cdot a^5=a^8=a^6\cdot a^2=a^2\epsilon A$. აქ a^2 ელემენტის შებრუნებული $(a^2)^{-1}$ ელემენტი იქნება a^4 ელემენტი. მართლაც, $a^2a^4=a^6=1$, ე. ი. $(a^2)^{-1}=a^{-2}=a^4$.

თეორემა. ციკლური ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი ციკლურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $G=\{a\}$ არის a ელემენტის მიერ შექმნილი სასრული ან უსასრულო რიგის ციკლური ჯგუფი. აღვნიშნოთ H-ით G ჯგუფის საკუთარი ქვეჯგუფი, ე. ი. ისეთი ქვეჯგუფი, რომელიც განსხვავდება ერთეულოვანი ქვეჯგუფისაგან და თვით G ჯგუფისაგან. ვიგულისხმოთ, რომ a^k არის a ელემენტის უმცირესი დადებითი ხარისხი, რომელიც შედის H-ში, ე. ი. $a^k\epsilon H$. დავამტკიცოთ, რომ H ქვეჯგუფის ყველა სხვა ელემენტი არის a^k ელემენტის ხარისხები. ვთქვათ, a^l,

სადაც $l \geqslant k$ შედის H ქვეჯგუფში. ვინაიდან $l \geqslant k$ შეგვიძლია დავწეროთ: $l = kq + r$, სადაც $0 \leqslant r < k$. რადგან $a^l \epsilon H$ და $a^k \epsilon H$, ტოლობიდან

$$a^l = (a^k)^q \cdot a^r,$$

ვღებულობთ, რომ $a^r \epsilon H$. პირობის თანახმად, ეს შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა $r = 0$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ისეთ ჯგუფს, რომლის ყველა ელემენტი სასრული რიგისაა, პერიოდული ჯგუფი ეწოდება. ცხადია, რომ ყოველი სასრული რიგის ჯგუფი პერიოდულია. ისეთ ჯგუფს, რომლის ყველა ელემენტის რიგი უდრის ერთისა და იმავე p მარტივი რიცხვის ხარისხს, p-ჯგუფი ეწოდება. როგორც განმარტებიდან ჩანს, ყოველი p-ჯგუფი პერიოდული ჯგუფია. პერიოდულ ჯგუფთა თეორიას დიდი გამოყენება აქვს თანამედროვე ფიზიკაში.

მაგალითად, ადვილად შემოწმდება, რომ ორი a და b ელემენტი, რომელთა რიგებია შესაბამისად 9 და 3, ე. ი. $a^{3^2} = 1$, $b^3 = 1$ და დაკავშირებულია $ba = a^3 b$ ტოლობით შექმნის 27-ე რიგის 3-ჯგუფს.

§ 15. ინვარიანტული ქვეჯგუფი, ცენტრი, კომუტანტი და ნორმალიზატორი

G ჯგუფის ისეთ ქვეჯგუფს, რომელიც გადანაცვლებადია G ჯგუფის ნებისმიერ g ელემენტთან, ე. ი.

$$gH = Hg, \tag{1}$$

ეწოდება G ჯგუფის **ნორმალური გამყოფი** ან კიდევ **ინვარიანტული ქვეჯგუფი**. ცხადია, რომ აბელური ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი ნორმალური გამყოფია. იმისათვის, რომ განვიხილოთ ნორმალური გამყოფის სხვა ეკვივალენტური განმარტებანი, წინასწარ შემოვიღოთ ქვეჯგუფის შეუღლებული ქვეჯგუფის და ელემენტის შეუღლებული ელემენტის ცნებები.

G ჯგუფის რომელიმე A ქვეჯგუფს ეწოდება B **ქვეჯგუფის შეუღლებული**, თუ G ჯგუფში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი g ელემენტი, რომ

$$A = g^{-1} B g. \tag{2}$$

თუ (2) ტოლობიდან ამოვხსნით B-ს, ე. ი. თუ (2) ტოლობის ორივე მხარეს მარცხნიდან გავამრავლებთ g-ზე, ხოლო მარჯვნიდან კი g^{-1}, მივიღებთ:

$$B = g A g^{-1};$$

მაშასადამე, თუ A ქვეჯგუფი შეუღლებულია B ქვეჯგუფისა, მაშინ B ქვეჯგუფიც შეუღლებულია A ქვეჯგუფისა. ანალოგიურად, G ჯგუფის

რომელიმე a ელემენტს ეწოდება b ელემენტის შეუღლებული, თუ G ჯგუფში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი g ელემენტი, რომ

$$a=g^{-1}bg. \tag{3}$$

(3) ტოლობიდან b ელემენტის ამოხსნით მივიღებთ:

$$b=g^{-1}bg:$$

ამრიგად, თუ G ჯგუფის a ელემენტი შეუღლებულია b ელემენტისა, მაშინ b ელემენტიც შეუღლებულია a ელემენტისა.

ცხადია, რომ ყოველი a ელემენტი, ვინაიდან $a=e^{-1}ae$ ან $a=a^{-1}aa$, თავისი თავის შეუღლებულია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ a ელემენტი შეუღლებულია b-სი და b ელემენტი შეუღლებულია c-სი, მაშინ a ელემენტი შეუღლებული იქნება c-სი. მართლაც, პირობის თანახმად, G ჯგუფში შესაბამისად მოინახება ისეთი ორი ელემენტი g_1 და g_2, რომ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$a=g_1{}^{-1}bg_1,\quad b=g_2{}^{-1}cg_2.$$

აქედან მივიღებთ:

$$a=g_2{}^{-1}g_1{}^{-1}cg_1g_2=(g_1g_2)^{-1}cg_1g_2,$$

რ. დ. გ. ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემული G ჯგუფი შეიძლება დავყოთ ერთმანეთის შეუღლებულ ელემენტთა თანაკვეთად კლასებად.

ახლა (1) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$H=g^{-1}Hg. \tag{4}$$

(4) თანაფარდობის მიხედვით შეიძლება ვთქვათ, რომ G ჯგუფის ისეთ H ქვეჯგუფს, რომელიც ემთხვევა ყველა მის შეუღლებულ ქვეჯგუფს, G ჯგუფის ნორმალური გამყოფი ეწოდება.

(4) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$h'=g^{-1}hg, \tag{5}$$

სადაც h, $h'\epsilon H$, ამ (5) თანაფარდობის მიხედვით შეიძლება ვთქვათ, რომ G ჯგუფის ისეთ H ქვეჯგუფს, რომელიც ყოველ $h\epsilon H$ ელემენტთან ერთად შეიცავს ყველა მის შეუღლებულ ელემენტსაც, ე. ი. $g^{-1}hg\epsilon H$, ეწოდება მოცემული G ჯგუფის ნორმალური გამყოფი.

შევნიშნოთ, რომ ნორმალური გამყოფის ამ მესამე განსაზღვრით სარგებლობა მრავალ შემთხვევაში აადვილებს საკითხის შესწავლას.

მაგალითად, ყოველი G ჯგუფისათვის ერთეულოვანი E ქვეჯგუფი და თავისი თავი, ე. ი. მთლიანად ეს ჯგუფი, ნორმალური გამყოფებია.

დავამტკიცოთ, რომ S_n **სიმეტრიული ჯგუფისათვის მისი** A_n **ლუწ ჩასმათა ქვეჯგუფი ნორმალური გამყოფია.**

მართლაც, ვთქვათ, h ნებისმიერი ელემენტია A_n ქვეჯგუფისა, $h \in A_n$, ხოლო g ნებისმიერი ელემენტია S_n ჯგუფისა, $g \in S_n$. განვიხილოთ $g^{-1}hg$ ელემენტი. თუ მოვიგონებთ, რომ მოცემულ ჩასმას და მის შებრუნებულ ჩასმას ერთი და იგივე ლუწოვნება აქვთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $g^{-1}hg \in A_n$. როცა $g \in A_n$ ეს აშკარაა, რადგან ლუწ ჩასმათა ნამრავლი ისევ ლუწი ჩასმაა, ხოლო, როცა $g \in S_n$ და არ ეკუთვნის A_n-ს, ე. ი. როცა g კენტი ჩასმაა, მაშინ რადგან კენტი და ლუწი ჩასმების ნამრავლი კენტი ჩასმაა და ყოველი ორი კენტი ჩასმის ნამრავლი ლუწი ჩასმაა, ამიტომ ამ მეორე შემთხვევაშიც $g^{-1}hg$ ჩასმა იქნება ლუწი ჩასმა, ე. ი. $g^{-1}hg \in A_n$.

ადვილად დავრწმუნდებით აგრეთვე, რომ n-ური რიგის არაგანსაკუთრებულ მატრიცთა ჯგუფში n-ური რიგის დიაგონალურ მატრიცთა ქვეჯგუფი არის მისი ნორმალური გამყოფი. ისეთ ჯგუფს, რომელსაც არ გააჩნია ნორმალური გამყოფი, გარდა ერთეულოვანი ქვეჯგუფისა და თავისი თავისა, ეწოდება **მარტივი ჯგუფი**. მაგალითად, ყოველი მარტივი რიგის ჯგუფი ციკლურია და ამავე დროს მარტივი ჯგუფია. ჯგუფთა თეორიაში მტკიცდება, რომ A_n ქვეჯგუფი, როცა $n>4$, მარტივია*.

სასურველია მკითხველმა შეამოწმოს, რომ G ჯგუფის ნებისმიერი ორი A და B ნორმალური გამყოფის თანაკვეთა $A \cap B$ და ნამრავლი AB ისევ მოცემული ჯგუფის ნორმალური გამყოფებია. იგულისხმება, რომ AB ნამრავლის ყოველ $x \in AB$ ელემენტს აქვს სახე $x=ab$, სადაც $a \in A$, $b \in B$. ადვილად შევნიშნავთ, რომ G ჯგუფის A და B ქვეჯგუფთა ნამრავლი საზოგადოდ არაა ქვეჯგუფი.

G ჯგუფის ისეთ ელემენტს, რომელიც გადანაცვლებადია G ჯგუფის ყოველ ელემენტთან, **ინვარიანტული ელემენტი** ეწოდება. G ჯგუფის ინვარიანტულ ელემენტთა ქვესიმრავლეს ეწოდება **ჯგუფის ცენტრი** და Z ასოთი აღინიშნება. ადვილად შემოწმდება, რომ ჯგუფის ცენტრი მისი ქვეჯგუფია და ამავე დროს ნორმალური გამყოფიცაა.

მართლაც, ვთქვათ, z_1 და z_2 ცენტრის ნებისმიერი ორი ელემენტია, ე. ი. $z_1, z_2 \in Z$. მაშინ, პირობის თანახმად, ჯგუფის ყოველი $g \in G$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$z_1g=gz_1 \text{ და } z_2g=gz_2.$$

ამ ორი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$z_1z_2\cdot g=z_1gz_2=g\cdot z_1z_2, \text{ ე. ი. } z_1\cdot z_2 \in Z.$$

---

* A_n ქვეჯგუფის ამ თვისების გამოყენებით მტკიცდება, რომ ზოგადი სახის ალგებრული განტოლებანი, რომელთა რიგი $n>4$, არ ამოიხსნება რადიკალებში.

ახლა ცენტრის ყოველი $z \in Z$ ელემენტისათვის, ტოლობიდან $zg=gz$, თუ ტოლობის ორივე მხარეს მარცხნიდან და მარჯვნიდან თანამიმდევრობით გავამრავლებთ z^{-1}, მივიღებთ $gz^{-1}=z^{-1}g$, ე. ი. $z^{-1} \in Z$. ამით დამტკიცდა, რომ ცენტრი ქვეჯგუფია. ვინაიდან ცენტრის ყოველი ელემენტი ინვარიანტულია, ე. ი. $zg=gz$, მივიღებთ, $gZ=Zg$; ეს იმას ნიშნავს, რომ ცენტრი ნორმალური გამყოფია. ცხადია, რომ ცენტრის ელემენტის შეუღლებული თავის თავს ემთხვევა. აქედან გამომდინარეობს, რომ: თუ G ჯგუფს დავყოფთ ერთმანეთის შეუღლებულ ელემენტთა თანაუკვეთ კლასებად, ერთელემენტიანი კლასების რიცხვი ეტოლება ცენტრის ელემენტების რიცხვს.

ჯგუფის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისაგან მიღებულ $a^{-1}b^{-1}ab$ ელემენტს ეწოდება a, b ელემენტის კომუტატორი და აღინიშნება $[a,b]$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$[a, b]=a^{-1}b^{-1}ab.$$

ცხადია, რომ აბელური ჯგუფის ყოველი ორი ელემენტის კომუტატორი $=1$, ე. ი. ერთეულია. G ჯგუფის ყოველი ორი ელემენტის კომუტატორებისაგან შექმნილ ქვეჯგუფს G ჯგუფის **კომუტანტი** ეწოდება და აღინიშნება K ასოთი. ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ **ყოველი G ჯგუფის კომუტანტი მისი ნორმალური გამყოფია.**

მართლაც, რადგან K კომუტანტის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს სასრული რაოდენობის გარკვეულ კომუტატორთა ნამრავლს, საკმარისია განვიხილოთ ნებისმიერი ორი a, b ელემენტის კომუტატორი $[a,b] \in K$ და მისი ნებისმიერი შეუღლებული $g^{-1}[ab]\,g$ ელემენტი. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$g^{-1}[a, b]g=g^{-1}a^{-1}b^{-1}abg=g^{-1}a^{-1}gg^{-1}b^{-1}gg^{-1}agg^{-1}bg=$$
$$=(g^{-1}ag)^{-1}(g^{-1}bg)^{-1}g^{-1}agg^{-1}bg=[a', b'],$$

სადაც $a'=g^{-1}ag$, $b'=g^{-1}bg$. მივიღებთ, რომ $g^{-1}[a, b]g$ ელემენტი არის a', b' ელემენტების კომუტატორი, ე. ი. $g^{-1}[a, b]\,g \in K$, რ. დ. გ.

ადვილად შემოწმდება, რომ ზემოთ მოყვანილი ორი a და b ელემენტისაგან შექმნილი 3-ჯგუფის $G=\{a, b\}$, სადაც $a^{32}=1$, $b^3=1$ და $ba=a^7b$, ცენტრი და კომუტანტი ერთნაირია, კერძოდ

$$Z=K=\{1, a^3, a^6\}.$$

G ჯგუფის რომელიმე A ქვეჯგუფთან (შესაბამისად a ელემენტთან) გადანაცვლებად ელემენტთა სიმრავლეს ეწოდება A ქვეჯგუფის (შესა-

ბამისად a ელემენტის) **ნორმალიზატორი** და N ასოთი აღინიშნება. ადვილად შემოწმდება, რომ ყოველი ქვეჯგუფის (ელემენტის) ნორმალიზატორი მოცემული ჯგუფის ქვეჯგუფია, აგრეთვე ყოველი ქვეჯგუფი თავისი ნორმალიზატორის ნორმალური გამყოფია. ვთქვათ, G ქვეჯგუფის რომელიმე H ქვეჯგუფი შედგება $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ელემენტთა სასრული რიცხვისაგან. მაშინ ჯგუფის ნებისმიერი g ელემენტის H ქვეჯგუფზე გამრავლების შედეგად მიღებული gH სიმრავლე, რომელსაც უწოდებენ ჯგუფის **მოსაზღვრე კლასს**, იქნება:

$$gH = \{gh_1, gh_2, \ldots, gh_k\}.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ თუ ორ g_iH და g_jH კლასს $(i \neq j)$ აქვთ ერთი საერთო ელემენტი მაინც, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან.

მართლაც, ვთქვათ, $g_ih_1 = g_jh_2$; მაშინ, ვინაიდან $h_1, h_2 \in H$, მივიღებთ:

$$g_iH = g_ih_1H = g_jh_2H = g_jH.$$

ამრიგად, G ჯგუფის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის ერთ და მხოლოდ ერთ გარკვეულ მოსაზღვრე კლასს H-ის მიმართ.

ჯგუფის დაშლა ქვეჯგუფის მიმართ. ფაქტორ-ჯგუფი. ვთქვათ, მოცემულია G ჯგუფი და მისი რომელიმე H ქვეჯგუფი. თუ $H = G$, მაშინ G ჯგუფის დაშლას H ქვეჯგუფის მიმართ ექნება სახე $G = H$. ვთქვათ, $H \subset G$, მაშინ, ცხადია, G ჯგუფში იარსებებს ერთი ისეთი a ელემენტი მაინც, რომელიც არ ეკუთვნის H-ს. განვიხილოთ ნამრავლი aH თუ ახლა H და aH კლასთა გაერთიანება ემთხვევა G ჯგუფს, მაშინ G ჯგუფის დაშლა H ქვეჯგუფის მიმართ დამთავრებულია და ამას ასე აღნიშნავენ:

$$G = H + aH.$$

თუ H და aH კლასთა გაერთიანება არ ემთხვევა G ჯგუფს, მაშინ G-ში იარსებებს ერთი ისეთი b ელემენტი მაინც, რომელიც არ მდებარეობს H და aH კლასთა $H + aH$ გაერთიანებაში. განვიხილოთ ნამრავლი bH. თუ ახლა H, aH და bH კლასთა გაერთიანება ემთხვევა G ჯგუფს, მაშინ G ჯგუფის დაშლა H ქვეჯგუფის მიმართ დამთავრებულია და ამას ასე აღნიშნავენ:

$$G = H + aH + bH.$$

თუ H, aH და bH კლასთა გაერთიანება არ ემთხვევა G ჯგუფს, მაშინ კიდევ იარსებებს ახალი cH კლასი, სადაც G ჯგუფის c ელემენტი არ ეკუთვნის H, aH და bH კლასთა გაერთიანებას და ა. შ. ამ პროცესს გან-

ვაგრძობთ მანამ, სანამ მიღებული $eH=H$, aH, bH კლასთა გაერთიანება არ დაემთხვევა G ჯგუფს. ამრიგად, G ჯგუფის დაშლას კლასებად H ქვეჯგუფის მიმართ ექნება სახე:

$$G=H+aH+bH+cH+\dots \qquad (6)$$

და მას უწოდებენ G ჯგუფის დაშლას H ქვეჯგუფის მიმართ მ ა რ ც ხ ე ნ ა მ ო ს ა ზ ღ ვ რ ე კლასებად. e, a, b,... ელემენტებს ეწოდება შესაბამის კლასთა წარმომადგენლები. ცხადია, შეიძლებოდა G ჯგუფი ანალოგიურად დაგვეშალა H ქვეჯგუფის მიმართ მარჯვენა მოსაზღვრე კლასებად. ამ (6) დაშლაში კლასების რიცხვს H ქვეჯგუფის მიმართ ეწოდება H ქვეჯგუფის ინდექსი G ქვეჯგუფში და აღინიშნება (G, H) სიმბოლოთი. ცხადია, რომ სასრული ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფის ინდექსი სასრულია. უსასრულო ჯგუფის შემთხვევაში შეიძლება გვქონდეს სასრულ- და უსასრულოინდექსიანი ქვეჯგუფებიც. ადვილად შემოწმდება, რომ უსასრულო რიგის ციკლური ჯგუფის ყოველი არაერთეულოვანი ქვეჯგუფი სასრულინდექსიანია. მაგალითად, a ელემენტის მიერ შექმნილი უსასრულო რიგის ციკლური $G=\{a\}$ ჯგუფის, $H=\{a^3\}$ ქვეჯგუფის ინდექსი, რომელიც შექმნილია a^3 ელემენტით, უდრის სამს. ასევე ადვილად შემოწმდება, რომ S_n ჩასმათა ჯგუფის A_n ლუწ ჩასმათა ქვეჯგუფის ინდექსი უდრის ორს.

თუ ახლა n-ით აღვნიშნავთ G ჯგუფის რიგს, k-თი — H ქვეჯგუფის რიგს, ხოლო λ-თი — H ქვეჯგუფის ინდექსს G-ს მიმართ, მაშინ (6) თანაფარდობის (დაშლის) საფუძველზე, რადგან ყოველ მოსაზღვრე კლასში ელემენტების რაოდენობა არის k და სხვადასხვა კლასების რიცხვი არის λ, მივიღებთ:

$$n=k\lambda. \qquad (7)$$

მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ: **მოცემული G ჯგუფის ყოველი H ქვეჯგუფის რიგისა და ინდექსის ნამრავლი უდრის ჯგუფის რიგს.** დამტკიცებული დებულება **ლაგრანჟის** თეორემის სახელწოდებითაა ცნობილი.

მიღებული (7) ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ მოცემული ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფის რიგი და ინდექსი გამყოფია ჯგუფის რიგისა. აგრეთვე, რადგან ჯგუფის ყოველი ელემენტი ქმნის ციკლურ ქვეჯგუფს და ელემენტის რიგი უდრის მის მიერ შექმნილი ციკლური ჯგუფის რიგს, დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ **სასრული ჯგუფის ყოველი ელემენტის რიგი გამყოფია ჯგუფის რიგისა.** დამტკიცებული თეორემისა და კოშის თეორემის (**თუ სასრული ჯგუფის რიგი იყოფა p მარტივ რიცხვზე, მაშინ მას გააჩნია p რიგის ელემენტი**)

დახმარებით მკითხველი ადვილად დაამტკიცებს, რომ ყოველი სასრული p-ჯგუფის რიგი m არის p მარტივი რიცხვის რაღაც ხარისხი, ე. ი. $m=p^n$. ლაგრანჟის თეორემა წარმოადგენს ერთ-ერთ ფუნდამენტალურ თეორემას, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს სასრულ ჯგუფთა თეორიის შესწავლის საქმეში.

ამ მიზნით დავამტკიცოთ სასრულ ჯგუფთა თეორიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი

თეორემა. G **ჯგუფის ყოველი** a **ელემენტის შეუღლებულ ელემენტთა რიცხვი უდრის** a **ელემენტის ნორმალიზატორის ინდექსს.**

დამტკიცება. მოცემული a ელემენტის ნორმალიზატორი აღვნიშნოთ N-ით. ვთქვათ, a ელემენტის შეუღლებულ ელემენტთა რიცხვი უდრის k-ს:

$$a=a_1,\ \ g_2^{-1}ag_2=a_2,\ \ g_3^{-1}ag_3=a_3,\dots,\ \ g_k^{-1}ag_k=a_k.$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ $g_2, g_3, \dots, g_k$ ელემენტები არ ეკუთვნის a ელემენტის N ნორმალიზატორს. ამიტომ G ჯგუფის დაშლაში N ქვეჯგუფის მიმართ უეჭველად იქნება შემდეგი k სხვადასხვა კლასი $N, Ng_2, Ng_3, \dots, Ng_k$.

ვაჩვენოთ, რომ G-ს დაშლაში N ქვეჯგუფის მიმართ არ არსებობს სხვა ახალი კლასი. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვქთვათ, ამ დაშლაში არსებობს კიდევ ერთი სხვა Nb კლასი მაინც. მაშინ, პირობის თანახმად, ამ კლასის ყოველი nb ელემენტი, სადაც $n\in N$, a ელემენტს გადაიყვანს მის ერთ-ერთ შეუღლებულში, მაგალითად a_2-ში. მაშინ მივიღებთ:

$$(nb)^{-1}anb=g_2^{-1}ag_2,$$

$$b^{-1}n^{-1}anb=g_2^{-1}ag_2,\quad b^{-1}ab=g_2^{-1}ag_2,$$

$$g_2\cdot b^{-1}a=ag_2b^{-1},\ \text{ე. ი. } g_2b^{-1}\in N;$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$g_2=nb,\ \text{ანუ } Ng_2=Nb,\qquad \text{რ. დ. გ.}$$

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ჯგუფის ყოველი ელემენტის შეუღლებულ ელემენტთა რიცხვი გამყოფია ჯგუფის რიგისა. თუ ახლა სასრული $m=p^n$ რიგის p-ჯგუფს დავშლით ერთმანეთის შეუღლებულ ელემენტთა თანაუკვეთ კლასებად, მკითხველს გარკვეული მოფიქრების შემდეგ ადვილად შეუძლია დაამტკიცოს p-ჯგუფთა თეორიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი

თეორემა. ყოველ სასრულ p**-ჯგუფს გააჩნია არატრივიალური ცენტრი.**

ვიგულისხმოთ, რომ H ქვეჯგუფი G ჯგუფის ინვარიანტული ქვეჯგუფია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაში, **ყოველი ორი მოსაზღვრე კლასის ნამრავლი** (G ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გამრავლების თვალსაზრისით) **იქნება აგრეთვე გარკვეული მოსაზღვრე კლასი H ნორმალური გამყოფის მიმართ.** მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი ორი aH და bH მოსაზღვრე კლასი. ვინაიდან H ნორმალური გამყოფია, გვექნება:

$$aH \cdot bH = abHH = abH. \tag{8}$$

ამ ტოლობიდან ჩანს ყოველი ორი კლასის გამრავლების წესი.

კლასთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ერთეულის როლს ასრულებს თვითონ H ნორმალური გამყოფი. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი aH კლასის ნამრავლი H ნორმალურ გამყოფზე. გვექნება:

$$aH \cdot H = aH, \ \ H \cdot aH = aHH = aH.$$

ნებისმიერი aH კლასის შებრუნებული კლასი იქნება $a^{-1}H$ კლასი. მართლაც, გვექნება:

$$aH \cdot a^{-1}H = aa^{-1}H.$$

ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ კლასთა ნამრავლისათვის სრულდება ასოციაციურობის კანონი, ე. ი. ნებისმიერი aH, bH და cH სამი კლასისათვის გვექნება: $aH \cdot (bH \cdot cH) = (aHbH)cH$. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ G ჯგუფის მოსაზღვრე H, aH, bH,... კლასთა სიმრავლე, სადაც H ნორმალური გამყოფია, კლასთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის ჯგუფს, რომელსაც ეწოდება G ჯგუფის **ფაქტორ-ჯგუფი** H ნორმალური გამყოფის მიმართ და აღინიშნება ასე G/H, ე. ი.

$$G/H = \{H, aH, bH, \ldots\}. \tag{9}$$

რადგან აბელური ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი ნორმალური გამყოფია, ამიტომ შეიძლება განვიხილოთ აბელური ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი მისი ყოველი ქვეჯგუფის მიმართ.

თუ G ჯგუფი სასრულია, მაშინ G/H ფაქტორ-ჯგუფის რიგი გამყოფი იქნება ჯგუფის რიგისა. მართლაც, G/H ფაქტორ-ჯგუფის რიგი ტოლი იქნება H ნორმალური გამყოფის ინდექსისა G ჯგუფის მიმართ. ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ, რომ G/H ფაქტორ-ჯგუფის რიგი უდრის G ჯგუფისა და H ნორმალური გამყოფის რიგების შეფარდებას. მაგალითად, ვინაიდან უსასრულო რიგის ციკლური ჯგუფის ყოველი არაერთეულოვანი ქვეჯგუფის ინდექსი სასრულია, ამიტომ უსასრულო ციკლური ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი მისი არაერთეულოვანი ქვეჯგუფის მიმართ სასრული რიგის იქნება.

ვიცით, რომ S_n ჩასმათა ქვეჯგუფისათვის A_n ლუწ ჩასმათა ქვეჯგუფის ინდექსი S_n ჯგუფში უდრის 2-ს, ამავე დროს A_n ქვეჯგუფი არის S_n ჯგუფის ნორმალური გამყოფი. მაშასადამე, S_n/A_n ფაქტორ-ჯგუფის რიგი უდრის 2.

დავამტკიცოთ, რომ ციკლური ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი ისევ ციკლური ჯგუფია. მართლაც, ვთქვათ, G ჯგუფი შექმნილია g ელემენტით ე. ი. $G=\{g\}$. განვიხილოთ მოცემული ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი მისი რომელიმე $A=\{g^k\}$ ქვეჯგუფის მიმართ. ცხადია, ამ G/A ფაქტორ-ჯგუფის რიგი უდრის k-ს და მისი ელემენტები იქნება A, gA, g^2A, ..., $g^{k-1}A$ მოსაზღვრე კლასები, რ. დ. გ.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ არააბელური ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი ცენტრის მიმართ არ შეიძლება იყოს ციკლური ჯგუფი.

მართლაც, ვთქვათ, არააბელური G ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი მისი Z ცენტრის მიმართ ციკლურია, ე. ი.

$$G/Z=\{Z,\ gZ,\ g^2Z,\dots,Z\}. \tag{10}$$

ავიღოთ G ჯგუფის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტი. (10) თანაფარდობის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a=g^kz_1,\ \ b=g^sz_2,$$

სადაც z_1 და z_2 ცენტრის ელემენტებია. გვექნება:

$$ab=g^kz_1\cdot g^sz_2=g^sg^kz_2z_1=g^sz_2\cdot g^kz_1=b\cdot a,$$

რაც პირობას ეწინააღმდეგება, რადგან G ჯგუფი არ იყო აბელური. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ყოველ სასრულ p-ჯგუფს აქვს არატრივიალური ცენტრი, მაშინ ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი p^2 რიგის ჯგუფი, სადაც p მარტივი რიცხვია, აბელურია.

განსაზღვრა. ორ G და G' ჯგუფს ვუწოდებთ იზომორფულ ჯგუფს, თუ მათ ელემენტებს შორის შეიძლება დავამყაროთ ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა, რომ თუ პირველი ჯგუფის a, b ელემენტებს შეესაბამება მეორე ჯგუფის a', b' ელემენტები, მაშინ ab ელემენტს უნდა შეესაბამებოდეს $a'b'$ ელემენტი, ე. ი. თუ

$$\begin{array}{l} a\longleftrightarrow a', \\ b\longleftrightarrow b'; \end{array} \quad \text{მაშინ} \quad ab\longleftrightarrow a'b'.$$

G და G' ჯგუფების იზომორფულობას აღნიშნავენ ასე $G\cong G'$. ყოველი ორი იზომორფული ჯგუფი, მიუხედავად იმისა, რომ მათში შეიძლება

განმარტებული იყოს სხვადასხვა ოპერაცია და მათი ელემენტებიც იყოს სხვადასხვა, ითვლება ერთნაირ ჯგუფად.

ადვილად დამტკიცდება, რომ თუ G ჯგუფი იზომორფულია G' ჯგუფისა და G' ჯგუფი იზომორფულია G'' ჯგუფისა, მაშინ G ჯგუფი იზომორფული ქნება G'' ჯგუფისა. მაშასადამე, იზომორფული დამოკიდებულება ტრანზიტულია.

განვიხილოთ იზომორფულ ჯგუფთა მაგალითები.

1. მეოთხე რიგის

$$G=\{1, \ -1, \ i, \ -1\}$$

ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ, იზომორფულია მატრიცთა

$$G'=\left\{E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

ჯგუფის, მატრიცთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ადვილად შემოწმდება, რომ მოცემულ G და G' ჯგუფთა ელემენტებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$1\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad -1\longleftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$$i\longleftrightarrow\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad -i\longleftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

2. მესამე რიგის ჯგუფი, რომელიც შედგება $x^3-1=0$ განტოლების

$$G=\left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

ფესვებისაგან, იზომორფულია S_3 ჩასმათა ჯგუფის ქვეჯგუფისა:

$$A_3=\{(1), \ (1\ 2\ 3), \ (1\ 3\ 2)\}.$$

3. მთელ რიცხვთა ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც უსასრულო რიგის ციკლური ჯგუფი, შექმნილი რიცხვი 1-ის მიერ:

$$G=\{1\}=\{\ldots, \ -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \ldots,\}$$

და $a\neq 1$ ელემენტის მიერ შექმნილი უსასრულო რიგის ციკლური ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ

$$G'=\{a\}=\{\ldots,\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0=1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\}$$

იზომორფულია. მართლაც, ყოველ n მთელ რიცხვს G ჯგუფიდან შევუსაბამოთ a^n ხარისხი მეორე G' ჯგუფიდან; მივიღებთ:

$$\begin{matrix} n_1 \longleftrightarrow a^{n_1} \\ n_2 \longleftrightarrow a^{n_2} \end{matrix},\ n_1+n_2 \longleftrightarrow a^{n_1+n_2}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, ყოველი ორი ერთისა და იმავე რიგის ციკლური ჯგუფის იზომორფულობა.

4. ადვილად დამტკიცდება აგრეთვე, რომ თუ G ჯგუფი და ალგებრულოპერაციანი G' სიმრავლე იზომორფულია, მაშინ G' სიმრავლეც ჯგუფი იქნება.

შესაძლოა ჯგუფის მის ქვეჯგუფთან იზომორფულობაც. მაგალითად, მთელ რიცხვთა ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ იზომორფულია მის ლუწ რიცხვთა ქვეჯგუფისა. ცხადია, რომ ანალოგიურ დებულებას სასრული ჯგუფებისათვის ადგილი არ აქვს. საკითხი იმის შესახებ, თუ მოცემული n რიცხვისათვის რამდენი არაიზომორფული, ე. ი. რამდენი სხვადასხვა n-ური რიგის ჯგუფი არსებობს, საზოგადოდ არაა გადაწყვეტილი.

ჰომომორფიზმი. თეორემა ჰომომორფიზმის შესახებ. G ჯგუფის G' ჯგუფზე ასახვას ეწოდება ჰ ო მ ო მ ო რ ფ უ ლ ი ასახვა, თუ G-ს ყოველ a ელემენტს ეთანადება G'-ის გარკვეული a' ელემენტი, ე. ი. $a \rightarrow a'$ და, გარდა ამისა, თანადობიდან $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$, გამოდის თანადობა $ab \rightarrow a'b'$.

თუ G ჯგუფის G' ჯგუფზე ჰომომორფულ ასახვას აღვნიშნავთ φ სიმბოლოთი, ზემოთ ნათქვამიდან მივიღებთ:

$$a\varphi=a' \text{ და } (ab)\varphi=a'b'=a\varphi\cdot b\varphi,$$

ე. ი.

$$(ab)\varphi=a\varphi\cdot b\varphi. \tag{11}$$

G' ჯგუფის a' ელემენტს ეწოდება G ჯგუფის a ელემენტის სახე, ხოლო a ელემენტს ეწოდება a' ელემენტის წ ი ნ ა ს ა ხ ე. როგორც განმარტებიდან ჩანს, ჰ ო მ ო მ ო რ ფ ი ზ მ ი ს დ რ ო ს რ ა მ დ ე ნ ი მ ე ე ლ ე მ ე ნ ტ ს შ ე ი ძ ლ ე ბ ა ჰ ქ ო ნ დ ე ს ე რ თ ი გ ა რ კ ვ ე უ ლ ი ს ა ხ ე, ხ ო ლ ო ს ა ხ ე ს შ ე ი ძ ლ ე ბ ა ჰ ქ ო ნ დ ე ს რ ა მ დ ე ნ ი მ ე წ ი ნ ა ს ა ხ ე.

როგორც ვხედავთ, G ჯგუფის G' ჯგუფზე ჰომომორფული ასახვა არაა

ურთიერთცალსახა ასახვა, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა ი ზ ო-მ ო რ ფ ი ზ მ ი.

ადვილად დამტკიცდება, რომ φ **ჰომომორფული ასახვის დროს ერთეულოვანი ელემენტი გადადის ერთეულოვან ელემენტში და შებრუნებული ელემენტი შებრუნებულ ელემენტში.**

მართლაც, ვთქვათ:

$$a\varphi=a' \quad \text{და} \quad e\varphi=x',$$

სადაც e არის G ჯგუფის ერთეული. ვაჩვენოთ, რომ $x'=e'$. (11) ტოლობის თანახმად, გვექნება:

$$a'=a\varphi=(a.e)\varphi=a\varphi.e\varphi=a'x'.$$

მაშასადამე, $x'=e'$, სადაც e' არის G' ჯგუფის ერთეული. ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ

$$a\varphi=a', \quad \text{მაშინ} \quad a^{-1}\varphi=a'^{-1}.$$

ვთქვათ, $a^{-1}\varphi=y$. გვექნება:

$$e'=e\varphi=(aa^{-1})\varphi=a\varphi\cdot a^{-1}\varphi=a'\cdot y'.$$

მაშასადამე, $y'=a'^{-1}=(a\varphi)^{-1}=a^{-1}\varphi$.

იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც G ჯგუფის G' ჯგუფზე φ ჰომომორფიზმის დროს აისახება G' ჯგუფის e' ერთეულზე, ეწოდება φ **ჰომომორფიზმის ბირთვი.**

დავამტკიცოთ, რომ **G ჯგუფის ყოველი φ ჰომომორფიზმის ბირთვი არის G ჯგუფის ნორმალური გამყოფი.**

მართლაც, G ჯგუფის G' ჯგუფზე φ ჰომომორფული ასახვის ბირთვი აღვნიშნოთ H-ით, ე. ი. H არის G ჯგუფის იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც φ ჰომომორფიზმის დროს აისახებიან G' ჯგუფის e' ერთეულზე. ავიღოთ H ქვესიმრავლის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტი. პირობის თანახმად, $a\varphi=e'$, $b\varphi=e'$. აქედან მივიღებთ:

$$(ab)\varphi=a\varphi\cdot b\varphi=e'e'=e' \quad \text{და} \quad a^{-1}\varphi=e'^{-1}=e'.$$

ამრიგად, $ab\in H$ და $a^{-1}\in H$. ამით დამტკიცდა, რომ H ქვესიმრავლე არის ქვეჯგუფი. ახლა დავამტკიცოთ, რომ H არის G ჯგუფის ნორმალური გამყოფი. ვთქვათ, h არის H ქვეჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო g კი G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი.

ვიგულისხმოთ $g\varphi=g'$, მაშინ $g^{-1}\varphi=g'^{-1}$. ვინაიდან $h\varphi=e'$, გვექნება:

$$(g^{-1}hg)\varphi=g^{-1}\varphi\cdot h\varphi\cdot g\varphi=g'^{-1}e'\cdot g'=e'.$$

მაშასადამე, $g^{-1}hg\in H$, რ. დ. გ.

თეორემა. თუ G ჯგუფის G' ჯგუფზე φ ჰომომორფული ასახვის ბირთვს აღვნიშნავთ H-ით, მაშინ ფაქტორი-ჯგუფი G/H იზომორფული იქნება G' ჯგუფისა, ე. ი. $G/H\cong G'$.

დამტკიცება. ზემოთ დამტკიცებული დებულების თანახმად, φ ჰომომორფული ასახვის ბირთვი H არის G ჯგუფის ნორმალური გამყოფი. ვთქვათ, G' ჯგუფიდან აღებული ნებისმიერი a' ელემენტის ერთ-ერთი წინასახე G-ში არის a, ე. ი. $a\varphi=a'$. ვინაიდან ყოველი $h\in H$ ელემენტისათვის $h\varphi=e'$, გვექნება:

$$(ah)\varphi=a\varphi\cdot h\varphi=a'e'=a'.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ G/H ფაქტორ-ჯგუფის aH კლასის ყველა ელემენტი φ ჰომომორფიზმის დროს აისახება a' ელემენტზე. მეორე მხრივ, ვთქვათ, c არის G ჯგუფის ისეთი ელემენტი, რომ $c\varphi=a'$. დავამტკიცოთ, რომ $c\in aH$. გვექნება:

$$(a^{-1}c)\varphi=a^{-1}\varphi\cdot c\varphi=a'^{-1}\cdot c\varphi=a'^{-1}a'=e'. \quad \text{ე. ი.} \quad a^{-1}c\in H.$$

ვთქვათ, $a^{-1}c=h'$, მივიღებთ: $c=ah'$, ე. ი. c ელემენტი ეკუთვნის aH მოსაზღვრე კლასს. მაშასადამე, თუ G ჯგუფის G' ჯგუფზე φ ჰომომორფული ასახვის ბირთვი არის H და $a\varphi=a'$, მაშინ G ჯგუფის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლე, რომლებიც φ ჰომომორფიზმის დროს აისახება G' ჯგუფის a' ელემენტზე იქნება aH. აქედან გამოდის, რომ φ ჰომომორფიზმის დროს G' ჯგუფის ყოველ a' ელემენტს უპასუხებს G/H ფაქტორ-ჯგუფის გარკვეული aH კლასი და, პირიქით, G/H ფაქტორ-ჯგუფის ყოველ aH კლასს უპასუხებს G' ჯგუფის გარკვეული a' ელემენტი; ეს იმას ნიშნავს, რომ G/H ფაქტორ-ჯგუფისა და G' ჯგუფის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $G/H\cong G'$, ამით ძირითადი თეორემა ჰომომორფიზმის შესახებ დამტკიცებულია.

§ 16. აბელური ჯგუფის დაშლა ქვეჯგუფთა პირდაპირ ჯამად და მასთან დაკავშირებული საკითხები

როგორც ვიცით, აბელურ ქვეჯგუფებში მოქმედებებისათვის ვსარგებლობთ ა დ ი ც ი უ რ ი, ანუ ჯამის სახით, ჩაწერით. ყოველი ორი a და b ელემენტის ჯამი აღინიშნება ასე: $a+b$, ნულოვანი ელემენტი—

0-ით, ხოლო მოცემული a ელემენტის შებრუნებული აღინიშნება — a-თი.

G აბელურ ჯგუფს ეწოდება თავის $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამი, თუ G ჯგუფის ყოველი $x \in G$ ელემენტი წარმოგვიდგება ასე:

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \tag{1}$$

სადაც $a_i \in A_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ და ასეთი წარმოდგენა არის ერთადერთი.

x ელემენტის (1) სახით წარმოდგენის ერთადერთობა ნიშნავს იმას, რომ თუ დავუშვებთ $x = a_1' + a_2' + \ldots + a_n'$, სადაც $a_i' \in A_i$, გვექნება: $a_i = a_i'$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

ვთქვათ, $B_1, B_2, \ldots, B_k$ მოცემული G ჯგუფის ქვეჯგუფებია. $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ G ჯგუფის ისეთი B ქვესიმრავლე, რომლის ყოველი $b \in B$ ელემენტი შეიძლება ერთი სახით მაინც ჩაიწეროს $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ელემენტების საშუალებით, ე. ი.

$$b = b_1 + b_2 + \ldots + b_k, \tag{2}$$

რომლებიც შესაბამისად აღებულია $B_1, B_2, \ldots B_k$ ქვეჯგუფებიდან. ადვილად შემოწმდება, რომ B ქვესიმრავლე G ჯგუფის ქვეჯგუფია. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ B ქვეჯგუფი შექმნილია $B_1, B_2, \ldots, B_k$ ქვეჯგუფთა მიერ, ე. ი.

$$B = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}. \tag{3}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველი B_i არის B ქვეჯგუფის ქვეჯგუფი. მართლაც, ამისათვის საკმარისია, მაგალითად, $b_2 \in B_2$ ელემენტი (2) სახით ასე წარმოვადგინოთ: $b_2 = 0 + b_2 + 0 + \ldots + 0$, სადაც ნულოვანი ელემენტები აღებულია შესაბამისად $B_1, B_3, \ldots, B_k$ ქვეჯგუფებიდან. ახლა ადვილად დამტკიცდება, რომ თუ G ჯგუფი თავის $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამია, მაშინ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფები იქნება G ჯგუფის შემქნელები, ე. ი.

$$G = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, \tag{4}$$

და ყოველი A_i ქვეჯგუფის თანაკვეთა დანარჩენ $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფთა მიერ შექმნილ ქვეჯგუფთან შეიცავს მხოლოდ ნულოვან ელემენტს, ე. ი.

$$\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\} \cap A_i = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

მართლაც, თუ G ჯგუფი არის თავის $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამი, მაშინ, პირობის თანახმად, G ჯგუფის ყოველი x ელემენ-

ტისათვის არსებობს (1) წარმოდგენა და ამიტომ ადგილი ექნება (4) თანაფარდობას. (5) თანაფარდობის მართებულობას მივიღებთ ყოველი x ელემენტის (1) წარმოდგენის ერთადერთობიდან. მართლაც, დავუშვათ, რომ (5) თანაკვეთა შეიცავს არანულოვან x ელემენტს. ვინაიდან x ელემენტი ეკუთვნის როგორც A_i, ისე $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$ ქვეჯგუფებს, (1) სახით ის შეიძლება, ერთი მხრივ, ასე წარმოვადგინოთ:

$$x=0+\ldots+0+a_i+0+\ldots+0,$$

ხოლო, მეორე მხრივ, კი ასე:

$$x=a_1+\ldots+a_{i-1}+0+a_{i+1}+\ldots+a_n.$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად, ყოველი x ელემენტის წარმოდგენა (1) სახით ერთადერთია, გვექნება: $a_1=0, \ldots, a_{i-1}=0, a_i=0, a_{i+1}==0, \ldots, a_n=0$, ე. ი. $x=0$. შეიძლება დამტკიცდეს პირიქითაც. თუ G ჯგუფი შექმნილია $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფთა მიერ და სრულდება (5) პირობა, მაშინ G ჯგუფი იქნება ამ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამი. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ G ჯგუფის ყოველი x ელემენტის წარმოდგენა (1) სახით, სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ელემენტები შესაბამისად აღებულია $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფებიდან, ერთადერთია.

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამის ახალი განსაზღვრა. G ჯგუფს ეწოდება თავის $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამი, **თუ G ჯგუფი შექმნილია ამ ქვეჯგუფთა მიერ, ე. ი. $G=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ და თუ ყოველი A_i ქვეჯგუფის თანაკვეთა დანარჩენ $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ ქვეჯგუფთა მიერ შექმნილ ქვეჯგუფთან შეიცავს მხოლოდ ნულოვან ელემენტს**, ე. ი. სრულდება (5) პირობა. ისეთ ჯგუფს, რომელიც არ შეიძლება დაიშალოს თავის ორ ან უფრო მეტ არანულოვან ქვეჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, **დაუშლადი** ჯგუფი ეწოდება.

მაგალითი 1. კომპლექსურ რიცხვთა G ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ შეიძლება განვიხილოთ როგორც პირდაპირი ჯამი A ნამდვილ რიცხვთა ჯგუფისა და B წარმოსახვით რიცხვთა ჯგუფისა შეკრების ოპერაციის მიმართ. მართლაც, ყოველი $g \in G$ კომპლექსური რიცხვის წარმოდგენა $g=a+bi$ სახით, სადაც $a \in A$ და $bi \in B$, არის ერთადერთი.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $n=pq$ რიგის ციკლური G ჯგუფი, სადაც p და q ურთიერთმარტივი რიცხვებია, შექმნილია a ელემენტით, ე. ი. $G=\{a\}$. დავამტკიცოთ, რომ G ჯგუფი დაიშლება qa და pa ელემენტების მიერ შექმნილი $A=\{qa\}$ და $B=\{pa\}$ ციკლურ ქვეჯგუფთა პირდაპირ ჯამად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, $b=qa$, მივიღებთ: $pb=pqa=na=0$. აქედან გამოდის, რომ qa ელემენტის მიერ შექმნილი A ციკლური ჯგუფის რიგი უდრის p-ს. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ pa ელემენტის მიერ შექმნილი B ციკლური ჯგუფის რიგი უდრის q-ს. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ამ ქვეჯგუფთა თანაკვეთა ნულია ე. ი. $\{qa\}\cap\{pa\}=0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ $ka=sa$, ან, რაც იგივეა, $(k-s)a=0$; ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $0<k<q$, $0<s<p$. ახლა დავამტკიცოთ, რომ G ჯგუფის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს A და B ქვეჯგუფთა ელემენტების წრფივ კომბინაციას. როგორც ელემენტარული მათემატიკის კურსიდან ვიცით, q და p ურთიერთმარტივი რიცხვებისათვის ყოველთვის მოიძებნება ორი ისეთი u და v მთელი რიცხვი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$qu+pv=1.$$

აქედან მივიღებთ:

$$a=u(qa)+v(pa).$$

მაშასადამე, $G=\{a\}$ ჯგუფის ყოველი ელემენტი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც $A=\{qa\}$ და $B=\{pa\}$ ქვეჯგუფთა ელემენტების ჯამი და ეს წარმოდგენა არის ერთადერთი.

ხშირად სასარგებლოა ვილაპარაკოთ მოცემულ ჯგუფთა პირდაპირი ჯამის შესახებ. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი ორი A_1 და A_2 აბელური ჯგუფი, შესაძლებელია ისინი ერთიმეორის იზომორფული იყვნენ. G-თი აღვნიშნოთ სიმრავლე (a_1, a_2) სახის ყველა შესაძლო სისტემისა, სადაც ყოველი პირველი და მეორე კომპონენტები შესაბამისად ელემენტებია A_1 და A_2 ჯგუფებიდან. G-დან აღებული ყოველი ორი (a_1, a_2) და (a_1', a_2') სისტემის ჯამი განვმარტოთ ასე:

$$(a_1, a_2)+(a_1', a_2')=(a_1+a_1', a_2+a_2').$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სისტემის G სიმრავლე სისტემათა შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის აბელურ ჯგუფს. მართლაც, ამ ოპერაციის კომუტატიურობა და ასოციაციურობა ადვილად მიიღება, რადგან მათ ადგილი აქვთ მოცემულ A_1 და A_2 აბელურ ჯგუფებში. აქ ნულის როლს ასრულებს სისტემა $(0_1, 0_2)$, სადაც 0_1 და 0_2 შესაბამისად A_1 და A_2 ჯგუფების ნულებია. (a_1, a_2) სისტემის შებრუნებული, ანუ მოპირდაპირე, სისტემა იქნება $(-a_1, -a_2)$ სისტემა. ასეთნაირად აგებულ G აბელურ ჯგუფს ეწოდება A_1 და A_2 აბელურ ჯგუფთა პირდაპირი ჯამი.

ამ განმარტებას აქვს თავისი გამართლება და მნიშვნელობა, რომელსაც აქ არ შევეხებით.

დავამტკიცოთ პირდაპირ ჯამთა ზოგიერთი თვისება.

1. თუ G ჯგუფი A და B ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამია, ე. ი. $G=A\dotplus B$ და, თავის მხრივ, A პირდაპირი ჯამია A_1 და A_2 ქვეჯგუფებისა, ხოლო B კი პირდაპირი ჯამია B_1, B_2 და B_3 ქვეჯგუფებისა, მაშინ G იქნება A_1, A_2, B_1, B_2 და B_3 ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამი.

მართლაც, ვინაიდან $G=A+B$, ყოველი $g\epsilon G$ ელემენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$g=a+b,$$

სადაც $a\epsilon A$, $b\epsilon B$; ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

ახლა, რადგან $A=A_1+A_2$ და $B=B_1+B_2+B_3$, შეგვიძლია დავწეროთ $a=a_1+$ $+a_2$ და $b=b_1+b_2+b_3$, სადაც $a_i\epsilon A_i$, $b_i\epsilon B_i$. a და b ელემენტების ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია.

თუ a და b ელემენტების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (6) ტოლობაში, მაშინ g ელემენტი ასე წარმოგვიდგება:

$$g=a_1+a_2+b_1+b_2+b_3, \tag{7}$$

უნდა ვაჩვენოთ, რომ g ელემენტის (7) სახით წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ, რომ

$$g=a_1'+a_2'+b_1'+b_2'+b_3', \tag{8}$$

სადაც $a_i'\epsilon A_i$ და $b'_i\epsilon B_i$. ცხადია, რომ

$$a=a_1'+a_i' \text{ და } b=b_1'+b_2'+b_3'.$$

ვინაიდან A არის A_1 და A_2 ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამი $a=a_1+a_2$ და $a=a_1'+a_2'$ ტოლობებიდან მივიღებთ: $a_1=a_1'$, $a_2=a_2'$.

ანალოგიურად მივიღებთ; $b_1=b_1'$, $b_2=b_2'$, $b_3=b_3'$.

ამით g ელემენტის (7) სახით წარმოდგენის ერთადერთობა დამტკიცებულია. ანალოგიურად დამტკიცდება ეს თვისება ზოგად შემთხვევაშიც.

2. თუ სასრულ A და B აბელურ ჯგუფთა რიგები შესაბამისად არის k და s, მაშინ ამ ჯგუფთა პირდაპირი ჯამი აგრეთვე იქნება სასრული რიგის G ჯგუფი. ჯგუფი და მისი რიგი n ეტოლება A და B ქვეჯგუფთა რიგების ნამრავლს, ე. ი. $n=k.s$.

მართლაც, G ჯგუფის ყოველი x ელემენტი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$x=a+b, \tag{9}$$

სადაც $a\epsilon A$ და $b\epsilon B$; ასეთი წარმოდგენა არის ერთადერთი. ვინაიდან A და B ჯგუფების რიგები შესაბამისად არის k და s, ე. ი. A და B ჯგუფებს აქვს შესაბამისად k და s რაოდენობის ელემენტები, ამიტომ ადვილად შევნიშნავთ, რომ ამ ელემენტთა ყველა შესაძლო ჯამი მოგვცემს (9) სახის ks რაოდენობის G ჯგუფის სხვადასხვა ელემენტს, რ. დ. გ.

3. დავამტკიცოთ, რომ p^m რიგის ციკლური ჯგუფი $G=\{a\}$, სადაც p მარტივი რიცხვია, დაუშლადია. მართლაც, მოცემული ციკლური ჯგუფის ყველა არანულოვანი ქვეჯგუფი იქნება ქვეჯგუფები შექმნილი a, pa, p^2a, ..., $p^{m-2}a$ და $p^{m-1}a$ ელემენტების მიერ. აქედან ჩანს, რომ ასეთი ჯგუფის ყოველი ორი ქვეჯგუფიდან ერთი მათგანი შეიცავს მეორეს. მაგალითად, pa ელემენტის მიერ შექმნილი ქვეჯგუფი, რომლის რიგი უდრის p^{m-1} შეიცავს p^2a, ..., $p^{m-1}a$ ელემენტების მიერ შექმნილ ქვეჯგუფებს, რომელთა რიგებია შესაბამისად p^{m-2}, ..., p.

ამრიგად, ასეთი ციკლური ჯგუფის არც ერთი ორი არანულოვანი ქვეჯგუფის თანაკვეთა არაა ნულოვანი ქვეჯგუფი; ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ციკლური ჯგუფი დაუშლადია.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ უსასრულო რიგის ციკლური ჯგუფი დაუშლადია.

ძირითადი თეორემა სასრულშემქმნელიან აბელურ ჯგუფთა შესახებ მდგომარეობს შემდეგში.

თეორემა ყოველი არანულოვანი სასრულშემქმნელიანი აბელური ჯგუფი იშლება სასრული რაოდენობის ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამად.

ცხადია, თუ მოცემული ჯგუფი უსასრულოა, მაშინ ერთი პირდაპირი შესაკრებიმაინც იქნება უსასრულო რიგის ციკლური ქვეჯგუფი.

ვინაიდან ეს თეორემა შემდეგ არსად არ ვვჭირდება, მის დამტკიცებას აქ არ მოვიყვანთ*. მკითხველს, რომელსაც სურს უფრო ღრმად გაეცნოს ჯგუფთა თეორიას, მივუთითებთ სახელმძღვანელოებს: ო. ი. შმიდტისა „Абстрактная теория групп" და ა. გ. კუროშისა „Теория групп".

§ 17. რგოლისა და ველის ზოგადი განსაზღვრა. მაგალითები. რგოლთა და ველთა იზომორფიზმი

ჩვენთვის უკვე ცნობილია რიცხვთა ველი და რგოლი. გავეცანით აგრეთვე მატრიცთა ალგებრას და ჯგუფის განსაზღვრას. ვნახეთ, რომ ჯგუფი წარმოადგენს სიმრავლეს, რომელშიც განმარტებულია ერთი ალგებრული ოპერაცია. ალგებრაში და მათემატიკის სხვადასხვა დარგში გვხვდება აგრეთვე ისეთი არარიცხვითი სიმრავლეები, რომლებშიც განმარტებულია ორი ალგებრული ოპერაცია. მაგალითად, n-ური რიგის მატრიცთა სიმრავლეში განმარტებულია ორი ალგებრული ოპერაცია: მატრიცთა შეკრება და გამრავლება, ამასთანავე მატრიცთა გამრავლება არაკომუტაციურია.

განსაზღვრა. სიმრავლეს ორი ალგებრული ოპერაციით—შეკრებითა და გამრავლებით, ე. ი. ისეთ R სიმრავლეს, რომელიც ყოველ მის ორ $a, b \in R$ ელემენტთან ერთად შეიცავს $a+b \in R$ ჯამს და $ab \in R$ ნამრავლს, ეწოდება რგოლი, თუ სრულდება შემდეგი პირობები (აქსიომები):

1°. R სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის აბელურ, ანუ ადიციურ, ჯგუფს.

2°. R სიმრავლეში გამრავლების ოპერაციის მიმართ ადგილი აქვს ასოციაციურობის კანონს, ე. ი. R სიმრავლის ნებისმიერი სამი a, b და c ელემენტისათვის:

$$(ab)c = a(bc).$$

3°. შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები ურთიერთდაკავშირებულია დისტრიბუტიულობის კანონით, ე. ი. R სიმრავლის ნებისმიერი სამი a, b და c ელემენტისათვის:

$$(a+b)c = ac+bc, \quad c(a+b) = ca+cb.$$

გარდა ამისა, თუ კიდევ ყოველი ორი a და b ელემენტისათვის $ab = ba$, ე. ი. გამრავლება ემორჩილება კომუტაციურობის კანონს, მაშინ რგოლს **კომუტაციური** ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში — არაკო-

---

* დაინტერესებულ მკითხველს ამ თეორემის დამტკიცება და მასთან დაკავშირებული საკითხები შეუძლია ნახოს პროფ. ა. კუროშის ჯგუფთა თეორიის სახელმძღვანელოში.

მუტაციური. მაგალითად, ყოველი რიცხვთა რგოლი კომუტაციურია. ადვილად შემოწმდება, რომ n-ური რიგის მატრიცთა სიმრავლე მატრიცთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ ქმნის არაკომუტაციურ რგოლს.

რადგან რგოლი, 1° პირობის თანახმად, შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის აბელურ, ანუ ადიციურ ჯგუფს, ამიტომ R რგოლში შეკრების ოპერაციისათვის მართებული უნდა იყოს კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის თვისებები. რგოლში ყოველი a ელემენტისათვის უნდა არსებობდეს ერთი და მხოლოდ ერთი ისეთი „0" ნულოვანი ელემენტი, რომ

$$a+0=0+a=a.$$

შემდეგ, რგოლში ყოველი a ელემენტისათვის უნდა არსებობდეს ერთი და მხოლოდ ერთი მისი შებრუნებული ისეთი „$-a$" ელემენტი, რომ

$$a+(-a)=0 \text{ ან } -a+a=0.$$

აქედან ვღებულობთ: $-a$ ელემენტის შებრუნებული ყოფილა a ელემენტი, ე. ი. $-(-a)=a$. ახლა, რადგან R რგოლი შეკრების ოპერაციის მიმართ აბელური ჯგუფია, მოცემულ რგოლში ყოველი ორი a და b ელემენტისათვის განტოლებას

$$a+x=b$$

ერთი გარკვეული $x=b+(-a)$ ამონახსნი აქვს, ეს ელემენტი წარმოადგენს b და a ელემენტთა სხვაობას, ე. ი.

$$b-a=b+(-a) \tag{1}$$

რგოლის ნებისმიერი a ელემენტისათვის და ნებისმიერი $n>0$ მთელი რიცხვისათვის მივიღებთ:

$$n(-a)=-na.$$

მართლაც ჯამის ასოციაციურობისა და კომუტაციურობის კანონების გამოყენებით დავწერთ:

$$na+n(-a)=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n}+\underbrace{(-a)+(-a)+\ldots+(-a)}_{n}=$$
$$=a+(-a)+a+(-a)+\ldots+a+(-a)=n[a+(-a)]=n\cdot 0=0.$$

ეს საშუალებას გვაძლევს განვმარტოთ რგოლის ნებისმიერი ელემენტის უარყოფითი ჯერადი ელემენტი; სახელდობრ, თუ $n>0$, ერთ-

მანეთის ტოლი $n(-a)$ და $-na$ ელემენტები აღინიშნება ასე: $(-n)a$, ე. ი. $n(-a)=-na=(-n)a$.

ისე როგორც ჯგუფის შემთხვევაში, ასოციაციურობის პირობის გამოყენებით მივიღეთ ელემენტის ხარისხის განსაზღვრა, რგოლისათვისაც გამრავლების ასოციაციურობის კანონის გამოყენებით ყოველი a ელემენტის მთელი $n>0$ ხარისხი ასე წარმოგვიდგება:

$$a^n=a\cdot a\cdots a.$$

ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m},\quad (a^n)^m=a^{nm}.$$

კომუტაციური რგოლის ყოველი ორი a და b ელემენტისათვის ადგილი ექნება ტოლობას:

$$(ab)^n=a^nb^n. \tag{2}$$

(2) ტოლობა შეიძლება მარტივად განზოგადდეს ნებისმიერი k თანამამრავლისათვის:

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)^n=a_1^n\ a_2^n\dots a_k^n.$$

რგოლის განმარტების 3° დისტრიბუტიულობის პირობიდან, ნებისმიერი k ელემენტისათვის ვღებულობთ:

$$(a_1+a_2+\dots+a_k)b=a_1b+a_2b+\dots+a_kb$$

და

$$b(a_1+a_2+\dots+a_k)=ba_1+ba_2+\dots+ba_k.$$

ამ ორი ტოლობის გაერთიანებით რგოლის ელემენტებისათვის ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\dots+a_k)(b_1+b_2+\dots+b_n)=\\=a_1b_1+a_1b_2+\dots+a_1b_n+a_2b_1+\dots+a_kb_n.\end{aligned} \tag{3}$$

როგორც საშუალო სკოლის კურსიდან არის ცნობილი, (3) ტოლობა გამოხატავს მრავალწევრის მრავალწევრზე გამრავლების წესს. შემდეგისათვის ვიცოდეთ: **თუ აღმოჩნდა, რომ ელემენტთა მოცემული სიმრავლე ქმნის კომუტაციურ რგოლს, მაშინ მისი ელემენტთა ჯამების ნამრავლი გამოისახება (3) ფორმულით.** ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს რომ დისტრიბუტიულობის კანონით დაკავშირებულია აგრეთვე გამოკლება და გამრავლება, ე. ი.

$$c(a-b)=ca-cb \text{ და } (a-b)c=ac-bc.$$

მართლაც, როგორც ვიცით, რგოლში ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$b+(a-b)=a.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გავამრავლოთ c-ზე, გვექნება:

$$c[b+(a-b)]=ca.$$

თანახმად ჯამისა და ნამრავლის დისტრიბუტიულობის თვისებისა, მივიღებთ:

$$cb+c(a-b)=ca.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $c(a-b)$ ელემენტი არის ca და cb ელემენტთა, სხვაობა, ე. ი.

$$c(a-b)=ca-cb. \qquad (4)$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$(a-b)c=ac-bc. \qquad (5)$$

(4) და (5) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ თუ რგოლის ნებისმიერი ორი ელემენტის ნამრავლში ერთ-ერთი თანამამრავლი ნულია, მაშინ ნამრავლი ნულია.

მართლაც, განვიხილოთ ნამრავლი $a \cdot 0$. მაშინ, თანახმად (4) თანაფარდობისა, რგოლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის შეიძლება დავწეროთ:

$$a \cdot 0=a(x-x)=ax-ax=0.$$

ანალოგიურად, (5) თანაფარდობის გამოყენებით დამტკიცდება, რომ

$$0a=0.$$

ამ თვისებათა მიხედვით რგოლისათვის დამტკიცდება გამრავლებათა შემდეგი წესები:

$$(-a)b=-ab, \quad a(-b)=-ab, \quad (-a)(-b)=ab.$$

მართლაც, დავამტკიცოთ პირველი და მესამე ტოლობები:

$$(-a)b=(0-a)\cdot b=0\cdot b-ab=0-ab=-ab,$$

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]=-[-ab]=ab.$$

როგორც ვხედავთ, რგოლის ელემენტებზე მოხდენილ ალგებრულ ოპერაციებს აქვს მრავალი ისეთი თვისება როგორიც ჩვეულებრივ

რიცხვებზე მოხდენილ ალგებრულ ოპერაციებს, მაგრამ არ შეიძლება იმის თქმა, რომ რიცხვებზე ჯამისა და გამრავლების ყველა თვისებას ადგილი აქვს ნებისმიერი რგოლისათვის.

მაგალითად, ცნობილია, რომ თუ ორი რიცხვის ნამრავლი უდრის ნულს, მაშინ ერთ-ერთი მათგანი მაინც უდრის ნულს.

ამ წესს ადგილი არ აქვს ნებისმიერი რგოლისათვის.

მართლაც, მე-2 რიგის მატრიცთა რგოლიდან, თუ ავიღებთ შემდეგი სახის ორ არანულოვან მატრიცას:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\neq 0 \text{ და } B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\neq 0,$$

მათი ნამრავლი $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$ ნულოვანი მატრიცაა. მაშასადამე, არარიცხვითი რგოლისათვის შესაძლებელია, რომ $A\neq 0$, $B\neq 0$, მაგრამ მათი ნამრავლი $AB=0$.

R რგოლის ნულისაგან განსხვავებულ ისეთ ორ A და B ელემენტს, რომელთა ნამრავლი უდრის ნულს, ეწოდება **ნულგამყოფი** ელემენტები ან ნულგამყოფი; ამასთან, A-ს ეწოდება მარცხენა ნულგამყოფი ელემენტი, ხოლო B-ს კი — მარჯვენა ნულგამყოფი ელემენტი.

თუ R რგოლში ნებისმიერი A ელემენტისათვის არსებობს ისეთი e_r ელემენტი, რომ

$$Ae_r=A,$$

მაშინ ასეთ e_r ელემენტს ეწოდება **რგოლის მარჯვენა ერთეული**. აგრეთვე, თუ R რგოლში ნებისმიერი A ელემენტისათვის არსებობს ისეთი e_l ელემენტი, რომ

$$e_l\cdot A=A,$$

მაშინ e_l ელემენტს ეწოდება რგოლის **მარცხენა ერთეული**. ცხადია, რომ კომუტაციურ რგოლში მარცხენა და მარჯვენა ერთეულები ერთმანეთის ტოლია. აგრეთვე შეიძლება რგოლში სრულიად არ არსებობდეს არც მარჯვენა და არც მარცხენა ერთეული. მაგალითად, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე ქმნის რგოლს, მაგრამ რიცხვი 1 (რგოლის ერთეული) ლუწ რიცხვთა სიმრავლეში არ შედის. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ რგოლში არსებობდეს მარჯვენა ერთეული, მაგრამ არ არსებობდეს მარცხენა ერთეული ან, პირიქით. მაგალითად, განვიხილოთ მეორე რიგის

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

სახის მატრიცთა სიმრავლე. ადვილად შემოწმდება, რომ ასეთი სახის მატრიცთა სიმრავლე ქმნის რგოლს. ამ რგოლისათვის ყოველი

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცა იქნება მხოლოდ მარცხენა ერთეული. მართლაც,

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

როგორც ამ მაგალითიდან ჩანს, რადგან c ნებისმიერი რიცხვია, რგოლს შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე მარცხენა ერთეული. ადვილად შემოწმდება, რომ განსახილველ რგოლში მარჯვენა ერთეული არ არსებობს.

თუ რგოლში ერთდროულად არსებობს მარჯვენა და მარცხენა ერთეულები, მაშინ ისინი ერთმანეთის ტოლია და ასეთ რგოლში საზოგადოდ არის მხოლოდ ერთი ერთეული.

მართლაც, განვიხილოთ რგოლის მარცხენა და მარჯვენა ერთეულთა ნამრავლი: $e_l \cdot e_r$. მივიღებთ შემდეგ ორ ტოლობას:

$$e_l \cdot e_r = e_r \text{ და } e_l \cdot e_r = e_l.$$

მაშასადამე, $e_l = e_r$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში რგოლში არის მხოლოდ ერთი ერთეული, რომელიც აღინიშნება e ასოთი.

ვთქვათ, მოცემულია რგოლი e ერთეულით. თუ რგოლის a ელემენტისათვის არსებობს ისეთი a_r ელემენტი, რომ $aa_r = e$, მაშინ a_r ელემენტს ეწოდება a ელემენტის **მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი**; ხოლო, თუ a ელემენტისათვის არსებობს ისეთი a_l ელემენტი, რომ $a_l a = e$, მაშინ a_l ელემენტს ეწოდება a ელემენტის **მარცხენა შებრუნებული ელემენტი**. ისე როგორც ჯგუფის შემთხვევაში, რგოლისათვისაც ასოციაციურობის კანონის გამოყენებით ადვილად შემოწმდება, რომ, თუ a ელემენტისათვის არსებობს როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა შებრუნებული ელემენტი, მაშინ ისინი ერთიმეორის ტოლია, ე. ი. $a_l = a_r$. ასეთ ელემენტს a ელემენტის შებრუნებულ ელემენტს უწოდებენ და მას a^{-1} სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ თუ რგოლის რომელიმე a ელემენტს გააჩნია შებრუნებული, ის მხოლოდ ერთადერთია.

თუ a არის ნულგამყოფი ელემენტი, მაშინ a-სთვის არ იარსებებს შებრუნებული ელემენტი.

მართლაც, ვთქვათ, a ელემენტს გააჩნია შებრუნებული ელემენტი

და a არის მარჯვენა ნულგამყოფი ელემენტი, მაშინ რგოლში იარსებებს ნულისაგან განსხვავებული ისეთი b ელემენტი, რომ

$$ba=0.$$

მართლაც, ტოლობის ორივე მხარე მარჯვნიდან გავამრავლოთ a^{-1}-ზე, მივიღებთ:

$$b(aa^{-1})=(ba)a^{-1}=0a^{-1}=0, \text{ ე. ი. } b=0,$$

რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

რგოლის ისეთ ქვესიმრავლეს, რომელიც თავისთავად ქმნის რგოლს რგოლში განმარტებული ოპერაციების მიმართ, **ქვერგოლი** ეწოდება. ადვილად დავამტკიცებთ, რომ R **რგოლის** M **ქვესიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ქვერგოლი, როცა** M**-დან აღებული ყოველი ორი** a, b **ელემენტის: 1) სხვაობა** $a-b$ **და 2) ნამრავლი** ab **ეკუთვნის ისევ** M **ქვესიმრავლეს,**

მართლაც, როცა $a=b$, მაშინ 1-ლი პირობის თანახმად, ვღებულობთ $a-a=0$, ე. ი. ნულოვანი ელემენტი შედის M-ში. დავუშვათ $a=0$: იმავე 1-ლი პირობის თანახმად, გვექნება: $0-b=-b\in M$, ე. ი. ყოველ b ელემენტთან ერთად M შეიცავს მის შებრუნებულსაც. ახლა 1-ლ პირობაში b შევცვალოთ $-b$-თი, გვექნება: $a-(-b)=a+b\in M$.

ამრიგად, მივიღეთ, რომ M ქვესიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის ჯგუფს. ახლა, რადგან მე-2 პირობის თანახმად M ჩაკეტილია გამრავლების ოპერაციის მიმართ, დამტკიცდა, რომ რგოლის ყოველი M ქვესიმრავლე, რომლისათვისაც სრულდება 1-ლი და მე-2 პირობები, ქმნის ქვერგოლს.

რგოლის ქვერგოლთა შორის აღსანიშნავია **იდეალი**, რომელიც ასეა განმარტებული: R რგოლის M ქვესიმრავლეს ეწოდება იდეალი, კერძოდ **მარჯვენა იდეალი**, თუ:

1°. ყოველი $a, b\in M$ ელემენტის სხვაობა $a-b\in M$ და

2°. ყოველი $a\in M$, $r\in R$ ელემენტთა ნამრავლი $ar\in M$.

M ქვესიმრავლეს ეწოდება **მარცხენა იდეალი**, თუ მე-2 პირობის ნაცვლად სრულდება: $r.a\in M$. ქვესიმრავლეს ეწოდება **ორმხრივი** იდეალი, თუ ის ერთდროულად არის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა იდეალი. ცხადია რომ კომუტაციური რგოლისათვის ყოველი მარჯვენა იდეალი ამავე დროს მარცხენა იდეალია. მაგალითად, მთელ რიცხვთა რგოლში ლუწ რიცხვთა ქვესიმრავლე ქმნის იდეალს. რგოლის ნულოვანი ელემენტი ქმნის ერთ „0“ ელემენტისაგან შემდგარ იდეალს, რომელსაც **ნულოვანი იდეალი** ეწოდება. თვითონ რგოლი წარმოადგენს იდეალს, რომელსაც **ერთეულოვან იდეალს** უწოდებენ. იდეალი რგოლთა თეო-

რიაში დიდმნიშვნელოვან როლს ასრულებს, ის შეიძლება შევადაროთ ნორმალურ გამყოფს ჯგუფთა თეორიაში.

მაგალითები.

1. ადვილად შემოწმდება რომ n-ური რიგის მატრიცთა რგოლში დიაგონალურ მატრიცთა სიმრავლე ქმნის ქვერგოლს.

2. შევამოწმოთ, რომ (a, b) სახის წყვილთა სიმრავლე, წყვილთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის მიმართ, რომლებიც შესაბამისად ასეა განმარტებული:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$
$$(a, b)\cdot(c, d)=(a, c, b, d),$$

ქმნის რგოლს, სადაც ნულის როლს ასრულებს (0, 0) ნულოვანი წყვილი, ხოლო ერთეულის როლს ასრულებს (1, 1) ერთეულოვანი წყვილი. ამ რგოლს გააჩნია ნულგამყოფი ელემენტები. მაგალითად, $(a, 0)$ და $(0, b)$ ნულგამყოფი ელემენტებია.

3. **ნაშთთა კლასი n-ის მოდულით.** მთელ რიცხვთა სიმრავლე დავყოთ, კლასებად შემდეგი წესით: პირველ კლასში მოვათავსოთ ყველა ის რიცხვი, რომლებიც უნაშთოდ იყოფა n-ზე, მეორე კლასში მოვათავსოთ ყველა ის რიცხვი, რომლებიც n-ზე გაყოფის შედეგად ნაშთში გვაძლევს 1-ს და ა. შ. სულ მივიღებთ n სხვადასხვა კლასს. მიღებული კლასები შესაბამისად აღვნიშნოთ $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}$, სიმბოლოებით. ცხადია, ყოველი მთელი რიცხვი მოთავსდება ერთ რომელიმე გარკვეულ კლასში n-ის მოდულით. მაგალითად, $n=6$ მოდულით რიცხვები 14 და 26 მოთავსდება $\overline{2}$ კლასში. კლასებზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაცია ასე განვსაზღვროთ: ყოველი ორი კლასის ჯამი ვუწოდოთ ისეთ მესამე კლასს, რომელშიც მოთავსდება შესაკრები კლასებიდან აღებული ნებისმიერი ორი რიცხვის ჯამი. ანალოგიურად განისაზღვრება ორი კლასის ნამრავლი. ადვილად შემოწმდება, რომ n-ის მოდულით ნაშთთა კლასი, კლასთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის n-ელემენტიან, ანუ n-ური რიგის **კომუტაციურ**, რგოლს, სადაც ნულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს $\overline{0}$ კლასი, ხოლო ერთეულის როლს ასრულებს $\overline{1}$ კლასი. მაგალითად, ადვილად შემოწმდება, რომ ნაშთთა კლასი 6-ის მოდულით $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$ ქმნის სასრულ ექვსელემენტიან კომუტაციურ რგოლს. კლასთა ქვესიმრავლე $\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}$ კი ქმნის მის ქვერგოლს.

ახლა განვიხილოთ ისეთი რგოლი, რომელშიც განმარტებულია გამრავლების შებრუნებული ოპერაცია — გაყოფა.

განსაზღვრა. ისეთ რგოლს, რომელშიც ყოველი მისი ორი a და $b(a\neq 0)$ ელემენტისათვის $ax=b$ და $ya=b$ განტოლებებს ერთი ამონახსნი მაინც აქვთ, ველი ეწოდება.

ველს, რომელშიც გამრავლების ოპერაცია არაკომუტაციურია, ხშირად ტანს უწოდებენ, ხოლო ველს, რომელშიც გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურია, ჩვეულებრივად ველს უწოდებენ.

განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ ველს გააჩნია ერთი ერთეული მაინც (მაგალითად, $ax=a$ განტოლების ამონახსნი) და ველის ნებისმიერ $a\neq 0$ ელემენტს გამრავლების მიმართ გააჩნია ერთი შებრუნებული ელემენტი მაინც (მაგალითად, $ax=e$ განტოლების ამონახსნი).

ცხადია, რომ ყოველი კომუტაციური ველი ამავე დროს კომუტაციური რგოლია, ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ **ველი ეწოდება ისეთ კომუტაციურ რგოლს, რომელშიც ყოველი ორი a და b ელემენტისათვის $ax=b$ განტოლებას, როცა $a\neq 0$, ერთი ამონახსნი მაინც აქვს.**

კომუტაციურ ველში გაყოფა შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც გამრავლების შებრუნებული ოპერაცია.

მართლაც, როცა $a\neq 0$, განტოლებებს:

$$ax=b \text{ და } xa=b$$

კომუტაციურ ველში აქვს ერთი და იგივე ამონახსნი

$$x=a^{-1}b=ba^{-1}.$$

ამ ამონახსნს უწოდებენ b ელემენტის a-ზე განაყოფს და აღნიშნავენ $\frac{b}{a}$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\frac{b}{a}=a^{-1}b=ba^{-1}.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველ კომუტაციურ ველს გააჩნია ერთადერთი ერთეული და ველის ყოველი $a\neq 0$ ელემენტის მარჯვენა და მარცხენა შებრუნებული ელემენტები ტოლია.

მაშასადამე, კომუტაციურ ველში შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციები სრულდება და ისიც ცალსახად.

განვიხილოთ ახლა არაკომუტაციური ველი, ანუ ტანი. ვინაიდან ყოველ ველს გააჩნია ერთეულოვანი ელემენტი, ადვილად დამტკიცდება, რომ ტანის მარჯვენა ერთეული უდრის მარცხენა ერთეულს, ე. ი. ტან-

საც გააჩნია ერთადერთი ერთეული. ამის დამტკიცება, შეიძლება ისე როგორც ეს ჩვენ რგოლის შემთხვევაში გავაკეთეთ.

ახლა, ვთქვათ, ტანის რომელიმე a ელემენტისათვის a_r არის მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი, ხოლო a_l მარცხენა შებრუნებული ელემენტი, ე. ი.

$$aa_r=e, \quad a_la=e.$$

განვიხილოთ a_laa_r ელემენტი. ასოციაციურობის თვისების გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ ორ ტოლობას:

$$a_l(aa_r)=a_le=a_l \text{ და } (a_la)a_r=ea_r=a_r.$$

ამრიგად, $a_r=a_l$; ეს იმას ნიშნავს, რომ ტანის შემთხვევაშიც ყოველი a ელემენტის მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი უდრის მარცხენა შებრუნებულ ელემენტს. ველში. ნულისაგან განსხვავებულ ყოველ ელემენტს, რომ მხოლოდ ერთი შებრუნებული ელემენტი აქვს, ცხადია.

მაშასადამე, ყოველ ველს გააჩნია მხოლოდ ერთი ერთეულოვანი ელემენტი, რომელიც e ასოთი აღინიშნება, და ველის ნებისმიერ ნულისაგან განსხვავებულ a ელემენტს, გააჩნია მხოლოდ ერთი გარკვეული შებრუნებული ელემენტი, რომელიც a^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად, თუ $a \neq 0$ ველის ნებისმიერი ელემენტია, გვექნება:

$$ea=ae=a, \quad a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=e.$$

შევნიშნოთ რომ ტანში, ე. ი. არაკომუტაციურ ველში $ax=b$ და $ya=b$ განტოლებათა ამონახსნი საზოგადოდ სხვადასხვაა.

უბრალო ჩასმით დავრწმუნდებით, რომ $a^{-1}b$ არის $ax=b$ განტოლების ამონახსნი, ხოლო ba^{-1} არის $ya=b$ განტოლების ამონახსნი. ახლა, რადგან საზოგადოდ ველი არაკომუტაციურია, ე. ი. საზოგადოდ $a^{-1}b \neq ba^{-1}$, ამიტომ არაკომუტაციურ ველში b და a ელემენტების შეფარდებისათვის არ შეიძლება ვისარგებლოთ $\frac{b}{a}$ სიმბოლოთი.

ადვილად დამტკიცდება, რომ როგორც კომუტაციურ, ისე არაკომუტაციურ ველში არ არის ნულგამყოფი ელემენტები.

მართლაც, ვთქვათ $a\cdot b=0$ და $a\neq 0$. ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გავამრავლოთ a^{-1} ელემენტზე. ერთი მხრივ, მივიღებთ $(a^{-1}a)b=$ $=eb=b$, ხოლო, მეორე მხრივ,

$$a^{-1}(ab)=a^{-1}\cdot 0=0, \text{ ე. ი. } b=0.$$

მაშასადამე, ყოველ ველში, თუ ორი ელემენტის ნამრავლი უდრის ნულს, მაშინ ერთ-ერთი მამრავლი მაინც უნდა იყოს ნული.

აქედან მივიღებთ, რომ ყოველ ველში ტოლობა შეიძლება შეიკვეცოს ნულისაგან განსხვავებულ საერთო მამრავლზე. მართლაც, ვთქვათ:

$$ac=bc \text{ და } c\neq 0, \text{ მაშინ } (a-b)c=0,$$

საიდანაც

$$a-b=0, \text{ ე. ი. } a=b.$$

ახლა, რადგან ყოველ კომუტაციურ ველში შეფარდება $\frac{a}{b}$ (სადაც $b\neq 0$) გვესმის როგორც $a\cdot b^{-1}$ სახის ნამრავლი, ადვილად შეიძლება დამტკიცება, რომ ყოველ კომუტაციურ ველში მართებულია წილადებზე მოქმედებათა ჩვეულებრივი წესები. სახელდობრ:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა } ad=bc,$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd} \text{ (შეკრების წესი)},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \text{ (გამრავლების წესი)},$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \text{ (გაყოფის წესი)},$$

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b} \text{ (ნიშნის წესი)}.$$

დავამტკიცოთ პირველ და მეორე თანაფარდობათა მართებულობა. პირველი თანაფარდობის დასამტკიცებლად გავამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე bd-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{a}{b}\cdot bd=\frac{c}{d}\cdot bd \text{ ან } \left(\frac{a}{b}\cdot b\right)d=b\left(\frac{c}{d}\cdot d\right),$$

$$(a\cdot b^{-1}b)d=b(cd^{-1}\cdot d);$$

მაშასადამე, $ad=bc$. შებრუნებით, ვთქვათ $ad=bc$, ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $b^{-1}d^{-1}$-ზე, მივიღებთ:

$$ad\cdot b^{-1}d^{-1}=bcb^{-1}d^{-1}, \quad ab^{-1}\cdot dd^{-1}=cbb^{-1}d^{-1}.$$

აქედან $ab^{-1}=cd^{-1}$. მაშასადამე, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, რ. დ. გ.

შეკრების წესის დასამტკიცებლად მეორე ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ bd-ზე და ვისარგებლოთ დისტრიბუტიულობის კანონით. მივიღებთ

$$\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\right)bd=\frac{a}{b}\,bd\pm\frac{c}{d}\,bd=ad\pm cb,$$

ე. ი.

$$\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\right)bd=ad\pm cb.$$

ახლა მიღებული ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(bd)^{-1}$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cb}{bd}.$$

ანალოგიურად, მკითხველს შეუძლია შეამოწმოს წილადებზე მოქმედების დანარჩენი წესები.

განსაზღვრა. ველის ისეთ ქვესიმრავლეს, რომელიც ველში განმარტებული ოპერაციების მიმართ ქმნის ველს, მოცემული ველის ქვეველი ეწოდება.

ჩვენთვის ცნობილია რიცხვთა ველის ზოგიერთი ქვეველი. ცხადია, რომ ველის ყოველი ქვესიმრავლე არ ქმნის ქვეველს. მაგალითად, რაციონალურ რიცხვთა ველის ქვესიმრავლე — მთელ რიცხვთა სიმრავლე — არ ქმნის ქვეველს. შესაძლებელია, რომ რგოლის ქვესიმრავლემ შექმნას ველი.

მაგალითად, კომპლექსურ რიცხვთა რგოლის ქვეველებად შეიძლება მივიღოთ რაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა ველი.

მაგალითები.

1. ყველა რიცხვთა ველი კომუტაციურია.

2. ადვილად შემოწმდება, რომ ყელა n-ური რიგის არაგანსაკუთრებულ მატრიცთა სიმრავლე ქმნის არაკომუტაციურ ველს, ე. ი. ტანს, ხოლო ყველა n-ური რიგის სკალარულ მატრიცთა სიმრავლე ქმნის კომუტაციურ ველს, რომელიც, თავის მხრივ, n-ური რიგის არაგანსაკუთრებულ მატრიცთა ველის ქვეველია.

3. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ სახის მეორე რიგის არაგანსაკუთრებულ მატრიცთა სიმრავლე, სადაც a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ქმნის კომუტაციურ ველს.

მართლაც, რომ ავიღოთ აღნიშნული სახის ნებისმიერი ორი მატრიცა

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \text{ და } \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მათი ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და შეფარდება ისევ $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ სახის მატრიცაა, ხოლო ნამრავლი კომუტაციურია. აქ ნულის როლს ასრულებს მეორე რიგის ნულოვანი მატრიცა, ხოლო ერთეულის როლს, მეორე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა:

4. როგორც უკვე ვიცით (გვ. 167), ნაშთთა კლასი n-ის მოდულით კლასების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის რგოლს. ადვილად შეიძლება შევნიშნოთ, რომ აღნიშნულ კლასთა რგოლს, როცა n შედგენილი რიცხვია, ექნება ნულგამყოფი ელემენტები და ამიტომ არ შექმნის ველს. მაგალითად, ნაშთთა კლასში 6-ის მოდულით $\overline{2}\neq\overline{0}$, $\overline{3}\neq\overline{0}$, მაგრამ $\overline{2}\cdot\overline{3}=\overline{0}$, ე. ი. $\overline{2}$ და $\overline{3}$ ნულგამყოფი ელემენტებია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ნაშთთა კლასი p მარტივი მოდულით ქმნის ველს. მაგალითად, განვიხილოთ ნაშთთა კლასი 5-ის მოდულით, მივიღებთ კლასთა შემდეგ სიმრავლეს

$$\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4}\}.$$

აქ $\overline{2}$ კლასის შებრუნებული გამრავლების ოპერაციის მიმართ არის ისეთი $\overline{x}$ კლასი, რომელთანაც $\overline{2}$-ის ნამრავლი გვაძლევს $\overline{1}$ კლასს, ე. ი. $\overline{2}\cdot\overline{x}=\overline{1}$. მივიღებთ $\overline{x}=\overline{3}$.

ორ R და R' რგოლს ეწოდება **იზომორფული**, თუ მათ ელემენტებს შორის შეიძლება დავამყაროთ ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა, რომ თუ R რგოლის a და b ელემენტებს ეთანადება შესაბამისად მეორე R' რგოლის a' და b' ელემენტები, მაშინ $(a+b)$-ს უნდა ეთანადებოდეს $a'+b'$, ხოლო ab-ს კი $a'b'$, ე. ი.

$$\text{თუ } \left.\begin{array}{l} a\longleftrightarrow a' \\ b\longleftrightarrow b' \end{array}\right\},\ \text{მაშინ } \begin{array}{l} a+b\longleftrightarrow a'+b', \\ ab\longleftrightarrow a'b'. \end{array}$$

როგორც ჯგუფის შემთხვევაში, R და R' რგოლთა იზომორფულობა ასე აღინიშნება: $R\cong R'$. ადვილად შემოწმდება, რომ რგოლთა იზომორფულობა ტრანზიტულია ე. ი.

$$\text{თუ } R\cong R' \text{ და } R'\cong R'',\ \text{მაშინ } R\cong R''.$$

ორი P და P' ველის იზომორფულობა განიმარტება ისე როგორც რგოლთა იზომორფულობა იმ განსხვავებით, რომ სიტყვა რგოლი უნდა შევცვალოთ ველით, ამიტომ ცალკე ველთა იზომორფულობას არ განვმარტავთ.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ R რგოლი იზომორფულია R' სიმრავლისა, რომელშიც განმარტებულია ჯამი და ნამრავლი, მაშინ R' სიმრავლე იქნება რგოლი. ვაჩვენოთ, რომ R რგოლის ნულს შეესაბამება R' სიმრავლის ნული და, თუ R რგოლის a ელემენტს შეესაბამება R' სიმრავლის a' ელემენტი, ე. ი. თუ $a \longleftrightarrow a'$, მაშინ $-a \longleftrightarrow -a'$.

მართლაც, ვთქვათ, R რგოლის 0 ელემენტს შეესაბამება R' სიმრავლის x' ელემენტი; რადგან $a \longleftrightarrow a'$ და $0 \longleftrightarrow x'$, ამიტომ გვექნება: $a+0 \longleftrightarrow a'+x'$. მაგრამ $a+0=a$, ამიტომ $a'+x'=a'$, ე. ი. $x'=0'$. შემდეგ, ვთქვათ, $-a$ ელემენტს შეესაბამება R' სიმრავლის y' ელემენტი. რადგან $a \longleftrightarrow a'$ და $-a \longleftrightarrow y'$, მივიღებთ $a+(-a) \longleftrightarrow a'+y'$, მაგრამ $a+(-a)=0$ და $0 \longleftrightarrow 0'$, ამიტომ $a'+y'=0'$, ე. ი. $y'=-a'$. აქედან ვღებულობთ, რომ R რგოლის ყოველი ორი ელემენტის სხვაობას შეესაბამება R'სიმრავლის შესაბამისი ელემენტების სხვაობა. R' სიმრავლისათვის რგოლის დანარჩენ თვისებათა შემოწმება ადვილია. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ R' სიმრავლე ყოფილა რგოლი.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ, თუ $R \cong R'$ და R რგოლი ერთეულის მქონეა, მაშინ R' რგოლსაც ექნება ერთეული და R რგოლის ერთეულს შეესაბამება R' რგოლის ერთეული.

ანალოგიურად დამტკიცდება ველისათვის. მაგალითად, თუ P ველის a ელემენტს შეესაბამება P' ველის a' ელემენტი, მაშინ P ველის a^{-1} ელემენტს P' ველში შეესაბამება a' ელემენტის შებრუნებული a'^{-1} ელემენტი.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ვიცით, რომ სკალარული მატრიცები $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ სახისა, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ქმნის კომუტაციურ რგოლს და აგრეთვე ველს. ახლა, თუ ყოველ a ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამებთ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ სახის მატრიცას, ე. ი.

$$a \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad b \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

მივიღებთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის რგოლი (ველი) იზომორფულია აღნიშნულ მატრიცთა რგოლისა (ველისა).

2. ვთქვათ, მოცემულია $K=\{a+bi\}$ კომპლექსურ რიცხვთა ველი და $K'=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right\}$ სახის მეორე რიგის მატრიცთა ველი.

თუ ყოველ კომპლექსურ $a+bi$ რიცხვს შევუსაბამებთ $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ სახის მეორე რიგის მატრიცას. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ აღნიშნული K და K' ველები იზომორფულია, ე. ი. $K \cong K'$.

მართლაც, ვთქვათ,

$$a+bi \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ და } c+di \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

ჯამისა და ნამრავლისათვის შესაბამისად მივიღებთ:

$$a+bi+c+di=a+c+(b+d)i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+c, & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} ac-bd, & ad+bc \\ -(ad+bc), & ac-bd \end{pmatrix}.$$

კერძოდ, წარმოსახვით $i=0+1i$ რიცხვს შეესაბამება $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ მატრიცა. რადგან $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ სახის მატრიცთა სიმრავლე საზოგადოდ მეორე რიგის მატრიცთა ველის ქვეველია, ამიტომ განხილული მაგალითის საფუძველზე შეიძლება ითქვას, **რომ მეორე რიგის მატრიცთა რგოლში მოინახება ქვეველი, რომელიც კომპლექსურ რიცხვთა ველის იზომორფულია.**

ველის მახასიათებელი. ჩვენ ვნახეთ, რომ მთელ რიცხვთა ნაშთთა კლასი მარტივი რიცხვის მოდულით ქმნის ველს, სადაც ნულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს $\overline{0}$ კლასი, ხოლო ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს $\overline{1}$ კლასი. მაგალითად, თუ განვიხილავთ ნაშთთა კლასს 3-ის მოდულით, მივიღებთ ველს, რომლის ელემენტებია $\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2}\}$. ამ ველისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}=3\cdot\overline{1}=\overline{0},$$

ე. ი. ველის ერთეულოვანი ელემენტის გარკვეული ჯერადი გვაძლევს ველის ნულოვან ელემენტს. საზოგადოდ, თუ მოცემული P ველისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი k რიცხვი, რომ მისი ველის e ერთეულთან ნამრავლი გვაძლევს ველის ნულოვან ელემენტს, მაშინ მოცემულ P ველს **სასრულმახასიათებლიანი** ველი ეწოდება, ხოლო ასეთი

თვისების უმცირეს მთელ დადებით რიცხვს ველის **მახასიათებელი ეწოდება. მაშასადამე, ვიტყვით, რომ P ველის მახასიათებელი უდრის k-ს, თუ k არის უმცირესი მთელი დადებითი რიცხვი, რომლისათვის** $ke=0$.

განვიხილოთ სასრულმახასიათებლიანი ველის ზოგიერთი თვისება.

1. თუ P ველის მახასიათებელია $k>0$ მთელი რიცხვი, მაშინ k მარტივია.

მართლაც, ვთქვათ, k შედგენილი რიცხვია, ე. ი. $k=k_1k_2$, სადაც $1<k_1<k$, $1<k_2<k$, მივიღებთ:

$$ke=(k_1\cdot k_2)e=(k_1e)\cdot(k_2e)=0.$$

რადგან ველს არ აქვს ნულგამყოფი ელემენტები, ამიტომ ტოლობიდან $(k_1e)(k_2e)=0$ ვღებულობთ, რომ ან $k_1e=0$, ან $k_2e=0$, რაც ეწინააღმდეგება ველის მახასიათებლის განმარტებას. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ, თუ ველი სასრულმახასიათებლიანია, მაშინ მისი მახასიათებელი არის p მარტივი რიცხვი.

2. თუ P ველის მახასიათებელი სასრულია და უდრის p-ს, მაშინ ველის ნებისმიერი a ელემენტისათვის $pa=0$.

მართლაც,

$$pa=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{p}=ae+ae+\cdots+ae=pae=a(pe)=a\cdot 0=0.$$

3. თუ P ველის მახასიათებელი უდრის 0, მაშინ ველის ნებისმიერი $a\neq 0$ ელემენტისა და ნებისმიერი $n>0$ მთელი რიცხვის ნამრავლი $na\neq 0$.

მართლაც, ვთქვათ, $na=0$, ე. ი. $a(ne)=0$. რადგან ველში ნულგამყოფი ელემენტები არ არის და $a\neq 0$, ვღებულობთ, რომ $n\cdot e=0$. მაგრამ, რადგან ველის მახასიათებელი უდრის ნულს, გვექნება $n=0$. ცხადია, ყოველი რიცხვთა ველის მახასიათებელი უდრის ნულს. მაგალითად, ზემოთ განხილული 3-ის მოდულით ნაშთთა კლასის ველის მახასიათებელი უდრის სამს.

ვთქვათ, P ველის მახასიათებელი უდრის p-ს და $a\neq 0$ ველის ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ ადვილად დამტკიცდება, რომ ტოლობიდან $na=ma$ ყოველთვის გამოდის, რომ $n-m$ იყოფა p-ზე და, პირიქით.

აგრეთვე, მე-2 თვისების გამოყენებით ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ, თუ ველის მახასიათებელი უდრის p-ს და $a\neq 0$, $b\neq 0$ მოცემული ველის ნებისმიერი ელემენტებია, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ორ ტოლობას:

$$(a+b)^p=a^p+b^p,$$
$$(a-b)^p=a^p-b^p.$$

პირველი იგივეობის დასამტკიცებლად მარცხენა მხარე ავახარისხოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულის მიხედვით. ადვილად შევნიშნავთ, რომ ყოველი კოეფიციენტი

$$C_p^k = \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdots k},$$

სადაც $0<k<p$, ჯერადია p-სი. მართლაც, ეს უბრალოდ გამოდის ვინაიდან p მარტივი რიცხვია.

ახლა მეორე ტოლობის დამტკიცება ადვილია. მართლაც, a ელემენტი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$a=(a-b)+b.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს ავახარისხებთ p მაჩვენებლით, თანახმად პირველი ტოლობისა, მივიღებთ:

$$a^p=(a-b)^p+b^p,\quad (a-b)^p=a^p-b^p.$$

ამით მეორე ტოლობაც დამტკიცებულია.

თავი IV

კვადრატული ფორმები

§ 18. კვადრატული ფორმა და მისი დაყვანა კანონიკურ სახემდე

კვადრატული ფორმა n ცვლადის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მიმართ ეწოდება შემდეგი სახის გამოსახულებას:

$$
\begin{aligned}
f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+ \\
+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{2n}x_2x_n+ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+a_{i1}x_ix_1+a_{i2}x_2^2+\cdots+a_{in}x_ix_n+ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\ldots+a_{nn}x_n^2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

ფორმის ცვლადთა a_{ij} კოეფიციენტებისაგან შედგენილ n-ური რიგის $A=(a_{ij})$ მატრიცას, მოცემული კვადრატული ფორმის შესაბამისი **მატრიცა** ეწოდება. კვადრატული ფორმის შესაბამისი მატრიცის d დეტერმინანტს კვადრატული ფორმის **დისკრიმინანტი** ეწოდება. თუ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი $d=0$, მაშინ ფორმას **განსაკუთრებული** (ან გადაგვარებული) კვადრატული ფორმა ეწოდება. ფორმის შესაბამისი მატრიცის რანგს **კვადრატული ფორმის რანგი** ეწოდება.

თუ კვადრატული ფორმა აღებულია D ნამდვილ რიცხვთა ველზე, ე. ი. ფორმის კოეფიციენტები ეკუთვნის ნამდვილ რიცხვთა ველს, მაშინ ფორმას **ნამდვილი** კვადრატული ფორმა ეწოდება, ხოლო, თუ კვადრატული ფორმა აღებულია K კომპლექსურ რიცხვთა ველზე, მაშინ მას **კომპლექსური** კვადრატული ფორმა ეწოდება. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ კვადრატული ფორმის შესაბამისი მატრიცა **სიმეტრიულია**, ე. ი.

$$a_{ij}=a_{ji}. \tag{2}$$

თანახმად (2) პირობისა, მოცემული კვადრატული ფორმის $a_{ij}x_ix_j$ და $a_{ji}x_jx_i$ წევრების ჯამი უდრის $2a_{ij}x_ix_j$, ე. ი.

$$a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i=2a_{ij}x_ix_j.$$

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ყოველ კვადრატულ ფორმას n ცვლადის მიმართ შეესაბამება n-ური რიგის გარკვეული სიმეტრიული მატრიცა და, პირიქით, ყოველ n-ური რიგის სიმეტრიულ მატრიცას შეესაბამება გარკვეული კვადრატული ფორმა n ცვლადის მიმართ.

თუ მოვიგონებთ მოცემული მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცის განმარტებას, ადვილად შევნიშნავთ, რომ A **მატრიცა მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება სიმეტრიული, თუ ის ემთხვევა მის ტრანსპონირებულ მატრიცას, ე. ი. თუ $A=A'$.**

მოცემული კვადრატული ფორმა შეიძლება დავწეროთ მატრიცული სახით. ამისათვის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებისაგან შედგენილი ერთსვეტიანი და n-სტრიქონიანი მატრიცა აღვნიშნოთ X ასოთი, ე. ი.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ცხადია, X მატრიცის ტრანსპონირების შედეგად მივიღებთ ერთსტრიქონიან და n-სვეტიან მატრიცას

$$X'=(x_1, \ x_2, \ \ldots \ ,x_n).$$

თუ გამოვიყენებთ მართკუთხა მატრიცების გამრავლების წესს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული (1) კვადრატული ფორმა მიიღებს შემდეგ მატრიცულ სახეს:

$$f=X'AX, \tag{3}$$

სადაც $A=(a_{ij})$ ფორმის შესაბამისი მატრიცაა. გამოვარკვიოთ რა მოუვა კვადრატულ ფორმას, თუ მოვახდენთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა წრფივ გარდაქმნას

$$x_i=c_{i1}y_1+c_{i2}y_2+\ldots+c_{in}y_n \quad (i=1, \ 2, \ldots, n), \tag{4}$$

რომლის შესაბამისი მატრიცაა $C=(c_{ij})$. აღვნიშნოთ Y ასოთი $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადებისაგან შედგენილი ერთსვეტიანი და n-სტრიქონიანი მატრიცა

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(4) წრფივი გარდაქმნა მიიღებს შემდეგ მატრიცულ სახეს:

$$X=CY. \tag{5}$$

თანახმად ორი ან რამდენიმე მატრიცის ნამრავლის ტრანსპონირებული მატრიცის თვისებისა, მივიღებთ:

$$X' = Y'C'. \tag{6}$$

(6) და (5) გამოსახულებების (3) ტოლობაში ჩასმით გვექნება:

$$f = Y'C'\ ACY \text{ ან } f = Y'BY, \text{ სადაც } B = C'AC.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ B მატრიცა სიმეტრიულია. მართლაც, განვიხილოთ B მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა და მხედველობაში მივიღოთ, რომ $A = A'$, გვექნება:

$$B' = C'A'C = C'AC = B. \tag{7}$$

მაშასადამე, თუ მოცემულ კვადრატულ ფორმაზე ან, რაც იგივეა, (3) ფორმაზე მოვახდენთ (4) წრფივ გარდაქმნას $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადთა მიმართ, მივიღებთ ახალ

$$f = Y'BY, \tag{8}$$

კვადრატულ ფორმას, რომლის შესაბამისი $B = C'AC$ მატრიცა სიმეტრიულია*. ვიგულისხმოთ ახლა, რომ (4) წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, მაშინ თანახმად (გვ. 126) ორი მატრიცის ნამრავლის რანგის შესახებ თეორემის შედეგისა, (8) ფორმის შესაბამისი B მატრიცის რანგი უდრის (3) ფორმის შესაბამის A მატრიცის რანგს. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ **არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის მოხდენის შედეგად კვადრატული ფორმის რანგი არ იცვლება.**

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ ცვლადების მიმართ კვადრატული ფორმის შემდეგ სახეს:

$$f = c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \ldots + c_n z_n^2, \tag{9}$$

სადაც ზოგიერთი c_i, რასაკვირველია, შეიძლება ნული იყოს, ეწოდება კვადრატული ფორმის **კანონიკური** სახე.

დავამტკიცოთ ძირითადი თეორემა კვადრატული ფორმის შესახებ.

თეორემა. **ყოველი კვადრატული ფორმა გარკვეულ არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა საშუალებით შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახემდე.**

დამტკიცება. თეორემის დამტკიცება ჩავატაროთ ორ საფეხურად: პირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ კოეფიციენტებს შორის ერთი მაინც არ უდრის ნულს. დამტკიცებისათვის გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი კვადრატული ფორმის ცვლადების რაო-

---

* შევნიშნოთ, რომ რადგან $|C'| = |C|$, მივიღებთ: $|B| = |A|\,|C|^2$, ე. ი. გარდაქმნილი ფორმის დეტერმინანტი უდრის საწყისი ფორმის დეტერმინანტს გამრავლებულს გარდაქმნის დეტერმინანტის კვადრატზე. თუ ვიგულისხმებთ, რომ (4) წრფივი გარდაქმნა ორთოგონალურია, ე. ი. $CC' = E$, მაშინ $|C|^2 = 1$ და გვექნება: $B = |A|$.

დენობის მიმართ. როდესაც კვადრატული ფორმა მხოლოდ ერთ x ასოს შეიცავს, მაშინ თეორემა მართებულია, რადგან ასეთ ფორმას ax^2 სახე ექნება. ვიგულისხმოთ, რომ თეორემა მართებულია ყოველი კვადრატული ფორმისათვის, რომლის ცვლადთა რიცხვი ნაკლებია n-ზე. დავამტკიცოთ მისი მართებულობა n-ცვლადიანი კვადრატული ფორმისათვის. გარკვეულობისათვის ვთქვათ, რომ $a_{11}\neq 0$, მაშინ უბრალო შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ გამოსახულება

$$a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)^2$$

x_1 ცვლადის მიმართ შეიცავს ყველა იმ და მხოლოდ იმ წევრს, რომლებსაც შეიცავს ჩვენი f კვადრატული ფორმა x_1 ცვლადის მიმართ. ამიტომ სხვაობა

$$f-a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)^2=g$$

იქნება კვადრატული ფორმა x_2, x_3, ..., x_n ცვლადების მიმართ.

შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f=a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)^2+g. \tag{10}$$

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n, \\ y_2 &= \quad x_2 \\ &\dots \\ y_n &= \quad x_n. \end{aligned} \tag{11}$$

ამ აღნიშვნების შედეგად (10) ფორმა მიიღებს სახეს

$$f=a_{11}^{-1}y_1^2+g, \tag{12}$$

სადაც g კვადრატული ფორმაა y_2, y_3, ..., y_n ცვლადების მიმართ.

ადვილად შესამჩნევია, რომ (11) წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი დეტერმინანტი უდრის a_{11}; რადგან $a_{11}\neq 0$, ეს გარდაქმნა არაგანსაკუთრებულია. განვიხილოთ (11) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}y_1-\frac{a_{11}}{a_{12}}y_2-\dots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}y_n, \\ x_2 &= \quad y_2 \quad , \\ &\cdot \quad \cdot \\ x_n &= \quad y_n. \end{aligned} \tag{13}$$

მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ თუ მოცემულ (1) კვადრატულ ფორმაზე მოვახდენთ (11) წრფივი გარდაქმნის შებრუნებულ (13) წრფივ გარდაქმნას, ის დაიყვანება (12) სახემდე. ახლა, რადგან ინდუქციური დაშვების თანახმად, $g(y_2, \dots, y_n)$ კვადრატული ფორმა, სახ-

რული რაოდენობის არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა მოხდენით დაიყვანება კანონიკურ სახემდე, ე. ი.

$$g(y_2, \ldots, y_n)=c_2z_2^2+c_3z_3^2+\ldots+c_nz_n^2,$$

ამიტომ $c_1=\dfrac{1}{a_{11}}$, $y_1=z_1$ გარდაქმნათა შემდეგ (12) გამოთქმა მიიღებს

$$f=c_1z_1^2+c_2z_2^2+\ldots+c_nz_n^2, \tag{14}$$

სახეს და ამით ამ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ყველა $a_{ii}=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, ე. ი. კვადრატულ ფორმაში ცვლადთა კვადრატის შემცველი არც ერთი წევრი არ შედის. ცხადია, ამ შემთხვევაში (1) კვადრატული ფორმის ერთი a_{ij} $(i\neq j)$ კოეფიციენტი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში დასამტკიცებელი არაფერი გვექნებოდა. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $a_{12}\neq 0$, განვიხილოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადთა შემდეგი გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} x_1&=t_1-t_2,\\ x_2&=t_1+t_2,\\ x_3&=\qquad t_3,\\ &\cdots\cdots\\ x_n&=\qquad\quad t_n. \end{aligned} \tag{15}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (14) წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, კერძოდ:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\ldots0\\ 1 & 1 & 0\ldots0\\ 0 & 0 & 1\ldots0\\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ 0 & 0 & 0\ldots1 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

ამიტომ, ის არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნაა. (14) არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის საფუძველზე (1) კვადრატული ფორმის $a_{12}x_1x_2+a_{21}x_1x_2=2a_{12}x_1x_2$ წევრი მიიღებს

$$2a_{12}x_1x_2=2a_{12}(t_1-t_2)(t_1+t_2)=2a_{12}t_1^2-2a_{12}t_2^2$$

სახეს. მაშასადამე, (14) არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის გამოყენებით კვადრატულ ფორმაში, რომელშიც სრულიად არ იყო მეორე ხარისხიანი წევრები, გაჩნდება ორი მეორეხარისხიანი წევრი. ამით მეორე შემთხვევის განხილვა დაიყვანება პირველ შემთხვევამდე, რომელიც უკვე ცნობილია ჩვენთვის. ამრიგად, ძირითადი თეორემა კვადრატულ ფორმებზე მთლიანად დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან, როგორც შედეგი, შეიძლება მივიღოთ, რომ f **კვადრატული ფორმის (14) კანონიკურ სახემდე დაყვანის შემდეგ მიღებული წევრების რიცხვი, ე. ი. ნულისაგან განსხვავებული c_i მუდმივების რიცხვი ზუსტად უდრის მოცემული f კვადრატული ფორმის რანგს.**

მართლაც, (14) კანონიკური ფორმის შესაბამის მატრიცას

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & c_2 \ldots 0 \\ . & . \quad . \\ 0 & 0 \ldots c_n \end{pmatrix} \tag{16}$$

დიაგონალური სახე აქვს. როგორც უკვე ვიცით, კვადრატული ფორმის რანგი არ იცვლება არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა შედეგად, ე. ი. მოცემული (1) ფორმის r რანგი უდრის (16) მატრიცის რანგს. ჩვენ კი ვიცით, რომ დიაგონალური სახის მატრიცის რანგი უდრის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული ნულისაგან განსხვავებული რიცხვების (ერთების) რაოდენობას.

ცხადია, რომ იმ არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა თანამიმდევრობითი ნამრავლი, რომელთა საშუალებით მოცემული კვადრატული ფორმა დავიყვანეთ კანონიკურ სახემდე, იქნება ისეთი წრფივი გარდაქმნა, რომლის საშუალებით მოცემული ფორმა უშუალოდ დაიყვანება კანონიკურ სახემდე. აგრეთვე, თუ არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა გამრავლების შედეგად მიღებული არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შებრუნებულ წრფივ გარდაქმნას მოვახდენთ მიღებულ კანონიკურ სახეზე, მივიღებთ მოცემულ კვადრატულ ფორმას. განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. დავიყვანოთ კანონიკურ სახემდე კვადრატული ფორმა

$$f=2x_1^2+6x_1x_2+x_2^2+2x_1x_3-x_3^2. \tag{17}$$

რადგან x_1^2-ის შემცველი წევრი არსებობს, ამისათვის კვადრატული ფორმიდან გამოვყოთ ყველა ის წევრი, რომლებიც x_1 ცვლადს შეიცავს და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$y_1=2x_1+3x_2+x_3, \quad y_2=x_2, \quad y_3=x_3. \tag{18}$$

ამ არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა იქნება:

$$x_1=\frac{1}{2}y_1-\frac{3}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3, \quad x_2=y_2, \quad x_3=y_3. \tag{18$_1$}$$

(17) ფორმა (18_1) წრფივი გარდაქმნის შედეგად მიიღებს

$$f=\frac{1}{2}y_1^2-\frac{7}{2}y_2^2-\frac{3}{2}y_3^2+3y_2y_3 \tag{16}$$

სახეს. როგორც ვხედავთ, ამ ფორმაში y_1^2 უკვე გამოყოფილია და დაგვრჩა g ფორმა, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს:

$$g=-\frac{7}{2}y_2^2-\frac{3}{2}y_3^2+3y_2y_3.$$

ახლა ამ ფორმიდან გამოვყოთ y_2-ის შემცველი წევრები, განვიხილოთ გარდაქმნა:

$$z_2=-\frac{7}{2}y_2+\frac{3}{2}y_3,\ z_3=y_3. \tag{20}$$

(20) არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული წრფივი გარდაქმნა იქნება:

$$y_2=-\frac{2}{7}z_2+\frac{3}{7}z_3,\ y_3=z_3. \tag{20$_1$}$$

g ფორმა (20_1) წრფივი გარდაქმნის შედეგად მიიღებს

$$g=-\frac{2}{7}z_2^2-\frac{6}{7}z_2^2$$

სახეს. საბოლოოდ f ფორმის კანონიკური სახე იქნება

$$f=\frac{1}{2}z_1^2-\frac{2}{7}z_2^2-\frac{6}{7}z_3^2,$$

სადაც $y_1=z_1$. მაშასადამე, მოცემული (17) კვადრატული ფორმა არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა საფუძველზე დავიყვანეთ კანონიკურ სახემდე. რადგან მოცემული კვადრატული ფორმის შესაბამისი კანონიკური სახე შეიცავს სამ ნულისაგან განსხვავებულ წევრს, ამიტომ მოცემული კვადრატული ფორმის რანგი $r=3$.

მაგალითი 2. დავიყვანოთ კანონიკურ სახემდე კვადრატული ფორმა

$$f=2x_1x_3-6x_2x_3+2x_1x_3.$$

არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნით: $x_1=y_1-y_2$, $x_2=y_1+y_2$, $x_3=y_3$, რომლის მატრიცაა

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

მოცემული კვადრატული ფორმა მიიღებს

$$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3-8y_2y_3, \qquad (21)$$

სახეს. (21) სახის კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახემდე უკვე გავარჩიეთ პირველ მაგალითში. განვიხილოთ გარდაქმნა:

$$z_1=2y_1-2y_3, \quad z_2=y_2, \quad z_3=y_3,$$

(21) ფორმაზე მოვახდინოთ მიღებული წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული წრფივი გარდაქმნა, რომლის შესაბამისი მატრიცაა

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

მივიღებთ:

$$f=\frac{1}{2}z_1^2-2z_2^2-2z_3^2-8z_2z_3. \qquad (22)$$

(22) კვადრატულ ფორმაში უკვე გამოყოფილია z_1^2. ახლა, რადგან z_2^2-ის კოეფიციენტი არ უდრის ნულს, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$t_1=z_1, \quad t_2=-2z_2-4z_3, \quad t_3=z_3,$$

ე. ი. (22) ფორმაზე მოვახდინოთ მოცემული წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული წრფივი გარდაქმნა, რომლის შესაბამისი მატრიცაა

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ f ფორმის შემდეგ კანონიკურ სახეს:

$$f=\frac{1}{2}t_1^2-\frac{1}{2}t_2^2+6t_3^2. \qquad (23)$$

ჩვენ მიერ ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის თანახმად A, B და C მატრიცების გამრავლების შედეგად მიღებული

$$ABC=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შესაბამისი არაგანსაკუთრებული წრფივი

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+3t_3,\\
x_2 &= \frac{1}{2}t_1-\frac{1}{2}t_2-t_3, \qquad (23_1)\\
x_3 &= \qquad\qquad\qquad t_3
\end{aligned}
$$

გარდაქმნა, მოცემულ კვადრატულ ფორმას უშუალოდ დაიყვანს (23) კანონიკურ სახემდე. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (23_1) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა (23) კანონიკურ ფორმას უშუალოდ დაიყვანს მოცემულ კვადრატულ ფორმამდე.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ იგივე კვადრატული ფორმა. არაგანსაკუთრებული წრფივი

$$
\begin{aligned}
x_1 &= t_1+3t_2+2t_3,\\
x_2 &= t_1-t_2-2t_3,\\
x_3 &= \qquad t_2
\end{aligned}
$$

გარდაქმნით დაიყვანება

$$f=2t_1^2+6t_2^2-8t_3^2$$

კანონიკურ სახემდე.

მაგალითი 3. ადვილად შემოწმდება, რომ მეორე რიგის ცენტრიანი მრუდის განტოლება

$$ax^2+2bxy+cy^2-d=0,$$

არაგანსაკუთრებული წრფივი

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\
y &= x'\sin\alpha+y'\cos\alpha
\end{aligned}
$$

გარდაქმნით (კოორდინატთა სისტემის α კუთხით მობრუნებით), დაიყვანება

$$a'x'^2+c'y'^2-d=0$$

კანონიკურ სახემდე.

§ 10. კვადრატულ ფორმათა ინერციის კანონი

როგორც წინა პარაგრაფში განხილულ მეორე მაგალითზე დავინახეთ, ერთისა და იმავე კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე, რომელზედაც დაიყვანება მოცემული კვადრატული ფორმა სხვადასხვა წრფივი გარდაქმნით, ერთადერთი არაა. ბუნებრივად ისმის კითხვა, **რა საერთო აქვთ იმ კანონიკურ კვადრატულ ფორმებს, რომლებზედაც სხვადასხვა**

წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება მოცემული f კვადრატული ფორმა? ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ ყოველი r რანგის მქონე კვადრატული ფორმა საზოგადოდ კომპლექსურკოეფიციენტებიანი სასრული რაოდენობის არაგანსაკუთრებული კომპლექსური წრფივი გარდაქმნებით დაიყვანება

$$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\ldots+b_ry_r^2 \tag{1}$$

კანონიკურ სახემდე, სადაც ყოველი $b_i\neq 0$ ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვია.

იმისათვის, რომ დასმულ კითხვაზე პასუხი გავცეთ, წინასწარ გავარჩიოთ სხვადასხვა საჭირო საკითხი. კომპლექსურ რიცხვთა ველზე განვიხილოთ შემდეგი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნა:

$$z_i=\sqrt{b_i}y_i \ (i=1,\ 2,\ldots,\ r) \text{ და } z_j=y_j \ (j=r+1,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

(2) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა f ფორმას დაიყვანს

$$f=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_r^2 \tag{3}$$

სახემდე, რომელსაც f ფორმის **ნორმალური** სახე ეწოდება. აქედან ჩანს, რომ ერთისა და იმავე რანგის ყველა კვადრატული ფორმის ნორმალური სახე ერთნაირია. მაშასადამე, თუ n-ცვლადიანი ორი მოცემული f და φ ფორმის რანგები ტოლია, მაშინ არსებობს ისეთი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნები, რომლებითაც ერთი ფორმა დაიყვანება მეორემდე. ამისათვის საკმარისია შესაბამისი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნით, მაგალითად, f ფორმა დავიყვანოთ (3) სახემდე, შემდეგ კი (3) ფორმის შესაბამისი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნით (3) დავიყვანოთ φ ფორმამდე. რადგან არც ერთი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნა არ ცვლის კვადრატული ფორმის რანგს, ვღებულობთ შემდეგ საინტერესო დასკვნას:

n-ცვლადიანი ნებისმიერი ორი კვადრატული ფორმა კომპლექსურ რიცხვთა ველზე, არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნებით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ დაიყვანება ერთიმეორემდე, თუ ამ ფორმათა რანგები ტოლია.

ამ დასკვნიდან უშუალოდ გამოდის, რომ კომპლექსურ რიცხვთა ველზე r უცნობის ყოველი ნულისაგან განსხვავებული კვადრატის ჯამი, საზოგადოდ კომპლექსური კოეფიციენტებით, იქნება r-რანგიანი კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე.

ახლა განვიხილოთ ჩვენ მიერ დაყენებული კითხვის პასუხი იმ შემთხვევაში, როდესაც კვადრატული ფორმა და შესაბამისი წრფივი გარდაქმნები აღებულია D ნამდვილ რიცხვთა ველზე. ადვილად შევნიშნავთ, რომ ამ შემთხვევაში არა ყველა კვადრატული ფორმა დაიყვანება (3) ნორმალურ სახემდე. მაგალითად, თუ (1) ფორმაში ერთი b_i ნამ-

დვილი კოეფიციენტი მაინც უარყოფითია, ცხადია, არ მოიძებნება ისეთი ნამდვილკოეფიციენტებიანი არაგანსაკუთრებული წრფივი (2) გარდაქმნა, რომელიც (1) კანონიკურ ფორმას დაიყვანს (3) ნორმალურ სახემდე. ახლა, თუ D ნამდვილ რიცხვთა ველში კვადრატული ფორმის ნორმალურ სახეს ვუწოდებთ რამდენიმე უცნობის კვადრატების ჯამს, აღებულს $+1$ და -1 კოეფიციენტებით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ: **n-ცვლადიანი ყოველი კვადრატული ფორმა, რომლის კოეფიციენტები ეკუთვნის ნამდვილ რიცხვთა ველს, ნამდვილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნებით ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ ნამდვილ რიცხვთა ველში ნორმალურ სახემდე.**

მართლაც, როგორც უკვე ვიცით, n ცვლადის r-რანგიანი ყოველი f კვადრატული ფორმა არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნებით დაიყვანება

$$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\ldots+b_ry_r^2$$

კანონიკურ სახემდე, სადაც ყოველი b_i $(b_i\neq 0)$ კოეფიციენტებიდან გარკვეული რაოდენობა შეიძლება იყოს დადებითი და გარკვეული რაოდენობა კი უარყოფითი. სიმარტივისათვის ვთქვათ,

$$b_i=c_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k),\ b_j=-c_j \quad (j=k+1,\ \ldots,\ r),$$

სადაც $c_i>0$, მივიღებთ:

$$f=c_1y_1^2+c_2y_2^2+\ldots+c_ky_k^2-c_{k+1}y^2_{k+1}-\ldots-c_ry_r^2. \tag{4}$$

ნამდვილკოეფიციენტებიანი არაგანსაკუთრებული

$$z_i=\sqrt{c_i}y_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ \ldots,r) \quad z_j=y_j \quad (j=r+1,\ \ldots,\ n),$$

გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნით (4) კანონიკური ფორმა მიიღებს

$$f=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_k^2-z^2_{k+1}-\ldots-z_r^2 \tag{5}$$

ნორმალურ სახეს, სადაც r უდრის მოცემული კვადრატული ფორმის (მატრიცის) რანგს. ამრიგად, ყოველი ნამდვილი კვადრატული ფორმისათვის ყოველთვის მოიძებნება ერთი ნამდვილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნა მაინც, რომელიც მას დაიყვანს ნორმალურ სახემდე.

ახლა საინტერესოა გამოვარკვიოთ, რა საერთო აქვთ იმ ნორმალურ კვადრატულ ფორმებს, რომლებიც სხვადასხვა ნამდვილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება მოცემულ ნამდვილ კვადრატულ ფორმამდე. ამ მიზნით დავამტკიცოთ თეორემა, რომელსაც ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმის **ინერციის კანონი** ეწოდება.

თეორემა. ნამდვილი კვადრატული ფორმის ნორმალურ სახეში დადებითი და უარყოფითი კვადრატების რაოდენობები არაა დამოკიდებუ-

ლი იმ ნამდვილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შერჩევაზე, რომელსაც მოცემული ფორმა დაჰყავს ნორმალურ სახემდე.

დამტკიცება. თუ ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული ნამდვილი f კვადრატული ფორმა ნებისმიერი ორი ნამდვილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნით შესაბამისად დაიყვანება

$$f = y_1^2 + \dots + y_\lambda^2 - y^2_{\lambda+1} - \dots - y_r^2 = z_1^2 + \dots + z_l^2 - \\ - z_{l+1}^2 - \dots - z_r^2 \tag{6}$$

ნორმალურ სახემდე, მაშინ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\lambda = l$.

დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ $\lambda < l$. ვიგულისხმოთ. რომ (6) პირველი და მეორე ნორმალური სახიდან f კვადრატულ ფორმამდე დაყვანა შესაბამისად ხდება შემდეგი არაგანსაკუთრებული ნამდვილი წრფივი გარდაქმნებით:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \tag{7}$$

და

$$z_i = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{i\lambda} x_\lambda. \tag{8}$$

განვიხილოთ n-უცნობიანი $n - l + \lambda$ რაოდენობის ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების სისტემა

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= 0, \\ &\dots \\ y_\lambda &= 0, \\ z_{l+1} &= 0, \\ &\dots\dots \\ z_r &= 0, \\ &\dots\dots \\ z_n &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

რომელთა მარცხენა მხარეები მოცემულია (7) და (8) ტოლობებით. (9) ერთგვაროვანი სისტემის განტოლებათა $n - l + \lambda$ რიცხვი ნაკლებია $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა რიცხვზე. ასეთ შემთხვევაში, როგორც წრფივ განტოლებათა სისტემის ზოგადი თეორიიდან ვიცით, (9) ერთგვაროვან სისტემას ნამდვილ რიცხვთა ველში ექნება არანულოვანი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ამონახსნი. (7) და (8) გარდაქმნათა მარჯვენა მხარეები $x_1, x_2, \dots, x_n$

უცნობთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ მნიშვნელობებით შეცვლის შემდეგ შემოკლებით აღვნიშნოთ $y_i(\alpha)$ და $z_i(\alpha)$ სიმბოლოებით შესაბამისად, ე. ი.

$$y_i(\alpha)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_k, \tag{7_1}$$

$$z_i(\alpha)=\sum_{\lambda=1}^{n} b_{i\lambda}\alpha_\lambda. \tag{8_1}$$

ახლა, თუ (6) ტოლობაში ყველა y-ს და ყველა z-ს შევცვლით შესაბამისი (7_1) და (8_1) მნიშვნელობებით, მაშინ, (9) ტოლობათა გამო, გვექნება:

$$-y_{\lambda+1}^2(\alpha)-\ldots-y_r^2(\alpha)=z_1^2(\alpha)+\ldots+z_l^2(\alpha). \tag{10}$$

(10) ტოლობიდან გამოდის, რომ მისი მარცხენა მხარის უარყოფითი რიცხვი უდრის მარჯვენა მხარის დადებით რიცხვს, მაშასადამე, თითოეული მათგანი ნულია.

მაგალითად, ტოლობიდან

$$z_1^2(\alpha)+z_2^2(\alpha)+\ldots+z_l^2(\alpha)=0,$$

ვინაიდან ყველა $z_i(\alpha)$ ნამდვილია ვღებულობთ, რომ

$$z_1(\alpha)=0,\ \ z_2(\alpha)=0,\ \ \ldots,\ \ z_l(\alpha)=0. \tag{11}$$

მაგრამ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვების არჩევისას ჩვენ გვქონდა განტოლებანი:

$$z_{l+1}(\alpha)=0,\ \ldots,\ z_r(\alpha)=0,\ \ldots,\ z_n(\alpha)=0. \tag{12}$$

ამრიგად, მივიღეთ n-უცნობიანი n ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების

$$\begin{matrix} z_1=0, \\ z_2=0, \\ \cdot\ \ \cdot \\ z_r=0, \\ \cdot \\ \ldots z_n=0 \end{matrix} \tag{13}$$

სისტემა, რომელსაც, თანახმად (11) და (12) ტოლობებისა, აქვს არანულოვანი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ამონახსნი, და ამიტომ (13) სისტემის დეტერმინანტი ტოლი უნდა იყოს ნულისა; ეს კი შეუძლებელია, რადგან (13) სისტემის დეტერმინანტი არის (8) არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი დეტერმინანტი. ასეთ წინააღმდეგობამდე ჩვენ მიგვიყვანა დაშვებამ $\lambda<l$. მაშასადამე, $\lambda=l$ და თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან აგრეთვე გამოდის, რომ მოცემული ნამდვილი კვადრატული ფორმა როგორი ნამდვილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნითაც არ უნდა დავიყვანოთ კანონიკურ სახემდე, დადებითი და უარყოფითი წევრების რაოდენობა უცვლელია. ეს უკანასკნელი კი პასუხია ამ პარაგრაფის დასაწყისში დაყენებული საკითხისა.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ კვადრატული ფორმის ინერციის კანონი არაა მართებული, თუ ნამდვილკოეფიციენტებიან კვადრატულ ფორმაზე მოვახდენთ კომპლექსურკოეფიციენტებიან არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნას.

მაგალითად, თუ კვადრატულ ფორმაზე

$$f=c_1x_1^2-c_2x_2^2,$$

სადაც c_1 და c_2 ნამდვილი რიცხვებია, მოვახდენთ

$$y_1=\sqrt{c_1}\,x_1,\ \ y_2=i\sqrt{c_2}\,x_2,\ \text{სადაც}\ i=\sqrt{-1},$$

გარდაქმნის შებრუნებულ გარდაქმნას, მივიღებთ მოცემული კვადრატული ფორმის შემდეგ ნორმალურ სახეს:

$$f=y_1^2+y_2^2,$$

სადაც ორივე წევრი დადებითი ნიშნითაა.

f ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმის ნორმალური სახის დადებითი კვადრატების რიცხვს ეწოდება კვადრატული ფორმის **ინერციის დადებითი ინდექსი**, ხოლო უარყოფითი კვადრატების რიცხვს — **კვადრატული ფორმის ინერციის უარყოფითი ინდექსი**. კვადრატული ფორმის ინერციის დადებით და უარყოფით ინდექსებს შორის სხვაობას ეწოდება f ფორმის **სიგნატურა**. თუ ახლა კვადრატული ფორმის ინერციის დადებით ინდექსს ავღნიშნავთ p-თი, უარყოფით ინდექსს — q-თი, ხოლო სიგნატურას — s-ით, მაშინ გვექნება:

$$s=p-q.$$

ცხადია, რომ $s\leqslant r$. დამტკიცებული თეორემიდან აგრეთე უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ f კვადრატული ფორმის s სიგნატურა, ისევე როგორც p და q, წარმოადგენს ფორმის ინვარიანტს ნამდვილკოეფიციენტებიან არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

შემდეგ, ადვილად დამტკიცდება, რომ **ორი ნამდვილკოეფიციენტებიანი f და φ კვადრატული ფორმა, ნამდვილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნებით მაშინ და მხოლოდ მაშინ დაიყვანება ერთიმეორემდე, როდესაც მათი რანგები და სიგნატურები შესაბამისად ერთმანეთის ტოლია.**

მართლაც, ვთქვათ, f კვადრატული ფორმა არაგანსაკუთრებული ნამდვილკოეფიციენტიანი წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება φ კვადრა-

ტულ ფორმამდე. რადგან ასეთი გარდაქმნა კვადრატული ფორმის რანგს არ ცვლის, ამიტომ f და φ კვადრატულ ფორმათა რანგები ტოლია. აგრეთვე ეს გარდაქმნა არ შეცვლის f კვადრატული ფორმის ინერციის დადებითი და უარყოფითი ინდექსების რიცხვს, ე. ი. არ ცვლის კვადრატული ფორმის სიგნატურას.

შებრუნებით, თუ f და φ კვადრატულ ფორმებს აქვთ ერთნაირი რანგი და ერთნაირი სიგნატურა, ისინი შესაბამისი გარდაქმნებით დაიყვანებიან ერთსა და იმავე ნორმალურ სახემდე და ამიტომ f და φ კვადრატული ფორმები სათანადო არაგანსაკუთრებული ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი გარდაქმნებით დაიყვანება ერთიმეორემდე.

შევნიშნოთ, რომ r-რანგიანი f კვადრატული ფორმის s სიგნატურა, რადგან $p+q=r$, შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: $s=p-(r-p)=2p-r$. აქედან ჩანს, რომ **f კვადრატული ფორმის სიგნატურა და რანგი ერთიხა და იმავე ლუწოვნებისაა.** მაგალითად, თუ f კვადრატული ფორმის რანგი $r=3$, მაშინ p-ს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობანი: 3, 2, 1, 0, ხოლო s შესაბამისად ტოლი იქნება 3, 1, —1, —3. მაშასადამე, სულ გვაქვს ოთხი სხვადასხვა კლასის ისეთი კვადრატული ფორმები, რომელთა რანგი $r=3$. ამ კლასთა წარმომადგენლებად ითვლება შემდეგი კვადრატული ფორმები:

$$x^2+y^2+z^2 \quad (s=3); \qquad x^2+y^2-z^2 \quad (s=1);$$
$$x^2-y^2-z^2 \quad (s=-1); \qquad -x-y^2-z^2 \quad (s=-3).$$

ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმების ასეთი კლასიფიკაცია დაკავშირებულია ცენტრის მქონე მეორე რიგის ზედაპირების აფინურ კლასიფიკაციასთან. მართლაც, ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი მეორე რიგის ცენტრიანი ზედაპირი (გარდა კონუსური ზედაპირისა) აფინური გარდაქმნების დახმარებით შესაძლებელია დაყვანილ იქნეს ერთ-ერთ სახემდე შემდეგი ოთხიდან:

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad x^2+y^2-z^2=1,$$
$$x^2-y^2-z^2=1, \quad -x^2-y^2-z^2=1.$$

§20. დადებითად და არადადებითად განსაზღვრული ფორმები

ნამდვილკოეფიციენტებიან f კვადრატულ ფორმას n ცვლადით ეწოდება **დადებითად განსაზღვრული**, თუ ის დაიყვანება n დადებითი კვადრატისაგან შემდგარ ნორმალურ სახემდე:

$$f=y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2, \tag{1}$$

ე. ი. თუ მისი რანგი r და ინერციის დადებითი ინდექსი p უდრის უცნობთა n რიცხვს.

ნამდვილკოეფიციენტებიან f კვადრატულ ფორმას n ცვლადით ეწოდება **უარყოფითად განსაზღვრული**, თუ ის დაიყვანება n უარყოფითი კვადრატისაგან შემდგარ შემდეგ ნორმალურ სახემდე:

$$f=-y_1^2-y_2^2-\dots-y_n^2. \tag{2}$$

ამ შემთხვევაში $r=n$, $p=0$, $q=n$, ე. ი. $s=-n$.

ვთქვათ, რომ მოცემული f კვადრატული ფორმა (1) ნორმალურ სახემდე დაიყვანება ნამდვილკოეფიციენტებიანი არაგანსაკუთრებული წრფივი

$$y_i=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{3}$$

გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნით. ადვილად დამტკიცდება, რომ **f კვადრატული ფორმა $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება დადებითად განსაზღვრული, თუ ამ ცვლადების ყოველი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, ფორმა დადებითია.**

მართლაც, პირობის თანახმად, მოცემული f კვადრატული ფორმა (3) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნით დაიყვანება (1) ნორმალურ სახემდე. იმისათვის, რომ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადთა მოცემული მნიშვნელობებისათვის გავიგოთ f კვადრატული ფორმის შესაბამისი მნიშვნელობა საჭიროა x_i ცვლადთა მნიშვნელობანი ჩავსვათ (3) გარდაქმნაში, შემდეგ კი y_i ცვლადთა მიღებული მნიშვნელობანი შევიტანოთ (1) ტოლობის მარჯვენა მხარეში.

შევნიშნოთ, რომ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადთა ყოველი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, რომელთაგან ერთი x_i მაინც არ უდრის ნულს, ყველა y_i ერთდროულად არ იქნება ნული.

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში (3) გარდაქმნიდან მივიღებდით, რომ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j=0$$

სისტემას, რომლის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, აქვს არანულოვანი ამონახსნი, რაც შეუძლებელია. მიღებული y_i ნულისაგან განსხვავებულ ნამდვილ მნიშვნელობათა (1) გამოთქმაში ჩასმით f კვადრატული ფორმა წარმოგვიდგება როგორც ნამდვილი რიცხვების კვადრატების ჯამი, რაც ცხადია, ნულზე მეტი იქნება. ვიგულისხმოთ ახლა, რომ f კვადრატული ფორმა არ არის დადებითად განსაზღვრული:

ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ ფორმის (1) ნორმალური სახე ან არ შეიცავს არც ერთ y_i ცვლადს, ან ერთი ცვლადი მაინც შედის უარყოფითი ნიშნით.

ვუჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში შეიძლება შევარჩიოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც ერთდროულად არ უდრის ნულს, და f კვადრატული ფორმა უცნობთა შერჩეული მნიშვნელობისათვის იქნება ნული ან უარყოფითი.

მართლაც, დავუშვათ,

$$y_1=0, \ \ldots, \ y_{i-1}=0, \ y_i=1, \ y_{i+1}=0, \ \ldots, \ y_n=0,$$

მაშინ (3) არაგანსაკუთრებული გარდაქმნიდან მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მიმართ, რომელსაც კრამერის ფორმულების თანახმად აქვს არანულოვანი ამონახსნი. თუ დავაკვირდებით (1) ტოლობას, შევნიშნავთ, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მიღებული არანულოვანი მნიშვნელობისათვის f კვადრატული ფორმა უდრის ნულს, თუ ამ ფორმის ნორმალური სახე y_i^2 წევრს არ შეიცავს, და უდრის — 1, თუ ამ ფორმის ნორმალური სახე — y_i^2 წევრს შეიცავს. ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ანალოგიურად, უარყოფითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმისათვის შეიძლება დამტკიცდეს, რომ **f კვადრატული ფორმა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება უარყოფითად განსაზღვრული, თუ ამ ცვლადების ყოველი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, რომელთაგან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, ფორმა იღებს უარყოფით მნიშვნელობას.**

აშკარაა როგორც დადებითად, ისე უარყოფითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, როცა $x_1=x_2=\ldots=$ $=x_n=0$. n-ცვლადიან დადებითად განსაზღვრულ განსაკუთრებულ კვადრატულ ფორმას, ე. ი. n-ცვლადიან დადებითად განსაზღვრულ ფორმას, რომლის რანგი $r<n$, ეწოდება **დადებითად ნახევრად განსაზღვრული** ფორმა. ანალოგიურად, n-ცვლადიან უარყოფითად განსაზღვრულ განსაკუთრებულ კვადრატულ ფორმას, ე. ი. ისეთ n-ცვლადიან უარყოფითად განსაზღვრულ ფორმას, რომლის რანგი $r<n$, ეწოდება **უარყოფითად ნახევრად განსაზღვრული** ფორმა. ყველა სხვა სახის კვადრატულ ფორმას, ე. ი. ისეთ, ფორმებს, რომელთა ნორმალური სახე შეიცავს როგორც დადებით, ისე უარყოფით წევრებს, ვუწოდოთ **არადადებითად განსაზღვრული** ან კიდევ **განუსაზღვრელი** კვადრატული ფორმები. ცხადია, რომ არადადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა x_i ცვლადთა ერთი გარკვეული მნიშვნელობისათვის მიიღებს დადებით მნიშვნელობას, ხოლო x_i ცვლადთა სხვა გარკვეული მნიშვნელობისათვის მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობას.

როგორც ვხედავთ, კვადრატული ფორმის ნორმალური სახის მიხედვით ჩვენ შეგვიძლია მოვახდინოთ კვადრატულ ფორმათა კლასიფიკაცია. ახლა ბუნებრივად ისმება კითხვა: არსებობს თუ არა კრიტერიუმები, რომელთა საშუალებით მოცემული კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახემდე დაყვანის გარეშე შეგვეძლება გამოვარკვიოთ, თუ რომელი ტიპისაა მოცემული კვადრატული ფორმა?

შემოვიღოთ f კვადრატული ფორმის **მთავარი მინორების** ცნება. ვთქვათ, მოცემული f კვადრატული ფორმა $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადთა მიმართ, რომლის შესაბამისი n-ური რიგის მატრიცაა $A=(a_{ij})$. ამ მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებულ $1, 2, \dots, k, \dots, n$ რიგის

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

მინორებს, რომელთაგან უკანასკნელი ემთხვევა A მატრიცის დეტერმინანტს, ვუწოდოთ მოცემული A კვადრატული ფორმის **მთავარი მინორები**.

ლემა. ნებისმიერი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შედეგად, ნამდვილკოეფიციენტებიანი f კვადრატული ფორმის შესაბამისი დეტერმინანტი ნიშანს არ იცვლის.

მართლაც, ვთქვათ, f კვადრატული ფორმის შესაბამისი მატრიცაა A, ხოლო f კვადრატულ ფორმაზე მოხდენილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა კი C. როგორც ვიცით, აღნიშნული წრფივი გარდაქმნის შედეგად მიღებული ფორმის შესაბამისი მატრიცა იქნება $C'AC$; რადგან $|C'|=|C|$, მივიღებთ:

$$|C'AC|=|C'|\,|A|\,|C|=|A|\cdot|C|^2,$$

სადაც $|C|^2>0$; რ. დ. გ.

ახლა შეიძლება დავამტკიცოთ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმის შემდეგი კრიტერიუმი:

ნამდვილკოეფიციენტებიანი f კვადრატული ფორმა მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება დადებითად განსაზღვრული, თუ მისი მთავარი მინორები მკაცრად დადებითია.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემა ინდუქციით კვადრატულ ფორმაში შემავალ ცვლადთა რაოდენობის მიმართ. როცა $n=1$ თეორემა მართებულია, რადგან $a_{11}>0$ და კვადრატული ფორმა შედგება მხოლოდ $a_{11}x_1^2$ წევრისაგან და ის x_1 ცვლადის ყოველი ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი მნიშვნელობისათვის დადებითი იქნება. ვიგულის-

ხმოთ, რომ თეორემა მართებულია ყოველი კვადრატული ფორმისათვის, რომლის უცნობების რიცხვი ნაკლებია n-ზე. დავამტკიცოთ მისი მართებულობა n-უცნობიანი კვადრატული ფორმისათვის.

ვთქვათ, მოცემულია კვადრატული ფორმა

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

თუ ახლა f კვადრატული ფორმიდან გამოვყოფთ x_n ცვლადის შემცველ წევრებს, მივიღებთ:

$$f=g\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1})+2\sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i x_n+a_{nn}x_n^2, \tag{5}$$

სადაც $g(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$ არის $(n-1)$-ცვლადიანი კვადრატული ფორმა, ინდუქციური დაშვების თანახმად ასეთი ფორმისათვის თეორემა მართებულია. პირველად დავამტკიცოთ, რომ თუ $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ ცვლადთა მიმართ მოცემული კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ მოცემული ფორმის (4) მთავარი მინორები მკაცრად დადებითია.

მართლაც, თუ მოცემული f კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ g კვადრატული ფორმაც დადებითად განსაზღვრული იქნება; წინააღმდეგ შემთხვევაში $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{n-1}$ ცვლადების იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც ერთდროულად არ უდრის ნულს და რომელზედაც g არაა მკაცრად დადებითად განსაზღვრული, შევუერთებთ $x_n=0$. როგორც (5) ტოლობიდან ჩანს, f-იც არ იქნება მკაცრად დადებითი. ინდუქციური დაშვების თანახმად ეს იმას ნიშნავს, რომ g კვადრატული ფორმის ყველა მთავარი მინორი ან, რაც იგივეა, f კვადრატული ფორმის ყველა (4) მთავარი მინორი, გარდა უკანასკნელისა, მეტია ნულზე.

ახლა, რადგან f კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, მისი (1) ნორმალური სახის შესაბამისი

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1>0$$

დეტერმინანტი დადებითია. ამიტომ. ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად, რადგან ასეთი გარდაქმნის შედეგად ფორმის დეტერმინანტი ნიშანს არ იცვლის, f კვადრატული ფორმის დეტერმინანტი ან, რაც იგივეა, მისი უკანასკნელი n-ური რიგის მთავარი მინორიც, მეტია ნულზე. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ, თუ f კვადრატული ფორმა დადებითად

განსაზღვრულია, მაშინ მისი ყველა (4) მთავარი მინორი მეტია ნულზე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ პირიქით: თუ f კვადრატული ფორმის ყველა მთავარი მინორი მეტია ნულზე, მაშინ იგი დადებითად განსაზღვრულია. მართლაც, თუ f კვადრატული ფორმის ყველა მთავარი მინორი მკაცრად დადებითია, ცხადია, რომ g კვადრატული ფორმის ყველა მთავარი მინორი მკაცრად დადებითი იქნება და ასეთი ფორმა, ინდუქციური დაშვების თანახმად, დადებითად განსაზღვრული იქნება. მაშასადამე, g კვადრატული ფორმისათვის არსებობს ისეთი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნა, რომელიც მას დაიყვანს შემდეგ ნორმალურ სახემდე: $y_1^2+y_2^2+\ldots+y^2_{n-1}$. თუ შესაბამის გარდაქმნას შევავსებთ $x_n=y_n$ ჩასმით, მივიღებთ ყველა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადის არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნას და f კვადრატული ფორმა, როგორც (5) ტოლობიდან ჩანს, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y^2_{n-1}+2\sum_{i=1}^{n-1}b_{in}y_iy_n+b_{nn}y_n^2. \tag{6}$$

ცხადია, ყოველი $i=1, 2, \ldots, n-1$ ნორმისათვის ადგილი აქვს იგივეობას

$$y_i^2+2b_{in}y_iy_n=(y_i+b_{in}y_n)^2-b^2_{in}y^2_n.$$

ამ იგივეობათა საფუძველზე (6) თანაფარდობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}(y_i+b_{in}y_n)^2+\left(b_{nn}-\sum_{i=1}^{n-1}b^2_{in}\right)y_n^2. \tag{7}$$

ახლა არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნა

$$z_i=y_i+b_{in}y_n,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
$$z_n=y_n$$

f კვადრატულ ფორმას, როგორც (7) თანაფარდობიდან ჩანს, დაიყვანს შემდეგ სახემდე:

$$f=z_1^2+z_2^2+\ldots+z^2_{n-1}+dz_n^2, \tag{8}$$

სადაც

$$d=b_{nn}-b^2_{1n}-b^2_{2n}-\ldots-b^2_{n-1n}.$$

როგორც (8) გამოთქმიდან ჩანს f კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობის დასამტკიცებლად საკმარისია დამტკიცდეს, რომ $d>0$.

პირობის თანახმად, f კვადრატული ფორმის n-ური რიგის მთავარი მინორი ან, რაც იგივეა, ფორმის დეტერმინანტი მეტია ნულზე; ახლა

(8) გამოსახულების მარჯვენა მხარე მიიღება f კვადრატული ფორმისაგან არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნებით. ამიტომ, ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად, მისი შესაბამისი დეტერმინანტი დადებითია. ე. ი.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & d \end{vmatrix} = d > 0.$$

მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ, თუ f კვადრატული ფორმის ყველა მთავარი მინორი მკაცრად დადებითია, მაშინ f კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრული იქნება და ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

მაგალითები.

1. კვადრატული

$$f = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3^2$$

ფორმა არაა დადებითად განსაზღვრული. მართლაც, მისი ყველა მთავარი მინორი

$$2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

არაა დადებითი.

2. კვადრატული

$$f = 6x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

ფორმა დადებითად განსაზღვრულია. მართლაც, მისი ყველა მთავარი

$$6, \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2.$$

მინორი დადებითია.

შევნიშნოთ, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი ყოველი მოცემული კვადრატული ფორმა მთავარი მინორების დახმარებით შეიძლება უშუალოდ დაყვანილ იქნეს კანონიკურ სახემდე, ე. ი. ფორმის მთავარი მინორების საშუალებით შეიძლება უშუალოდ გავიგოთ, თუ რა სახისაა მოცემული ფორმა; მაგრამ ამ საკითხებს აქ არ გავარჩევთ, ვინაიდან ის სცილდება ჩვენი კურსის ფარგლებს.

თავი V

კომპლექსური რიცხვები

§ 24. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე. კომპლექსურ რიცხვთა ველი

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, საშუალო სკოლის კურსიდან ცნობილია $a+bi$ სახის (სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$) რიცხვი, რომელსაც კომპლექსური რიცხვი ეწოდება. ვიცით აგრეთვე, რომ a-ს ეწოდება მოცემული კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი, ხოლო bi-ს—წარმოსახვითი ნაწილი. ამრიგად, ყოველი $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი a ნამდვილი რიცხვისა და bi წარმოსახვითი რიცხვის ჯამი — ნაერთი. $i=\sqrt{-1}$-ს ხშირად უწოდებენ წარმოსახვით ერთეულს.

კომპლექსური რიცხვების უკეთ შესწავლის მიზნით ხელმეორედ განვიხილოთ ზოგიერთი ცნობილი საკითხი კომპლექსურ რიცხვებზე. ცხადია, რომ ყოველი ნამდვილი a რიცხვი წარმოადგენს კომპლექსური რიცხვის კერძო შემთხვევას. მართლაც, $a+bi$ კომპლექსური რიცხვიდან, როცა $b=0$. ვღებულობთ a ნამდვილ რიცხვს: $a+0i=a$.

ორ კომპლექსურ $\alpha=a+bi$ და $\beta=c+di$ რიცხვს ეწოდება ტოლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=c$ და $b=d$. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, უდრის ნულს, როცა $a=b=0$. ყოველი ორი α და β კომპლექსური რიცხვის ჯამი და ნამრავლი შესაბამისად განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i, \tag{1}$$

$$\alpha\cdot\beta=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i. \tag{2}$$

თუ განვიხილავთ ნებისმიერ სამ α, β და $\gamma=k+li$ კომპლექსურ რიცხვს, (1) და (2) თანაფარდობათა მიხედვით ადვილად შემოწმდება შემდეგ ტოლობათა მართებულობა

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha, \quad \alpha\beta=\beta\alpha, \tag{3}$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), \quad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma), \tag{4}$$

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma. \tag{5}$$

ახლა განვიხილოთ შეკრებისა და გამრავლების შებრუნებული მოქმედებანი — გამოკლება და გაყოფა. რადგან გამოკლება არის შეკრების შებრუნებული მოქმედება, ამიტომ ტოლობიდან

$$(a+bi)-(c+di)=x+yi$$

შეიძლება დავწეროთ:

$$a+bi=(c+di)+(x+yi).$$

ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამისა და ტოლობის განმარტებიდან მივიღებთ:

$$a+bi=(c+x)+(d+y)i,$$

$$a=c+x,\quad b=d+y,\quad \text{აქედან}\quad x=a-c,\quad y=b-d.$$

მაშასადამე,

$$a+bi-(c+di)=(a-c)+(b-d)i. \tag{6}$$

ცხადია, რომ $\alpha+(-\alpha)=0$, ამიტომ $-\alpha=-a-bi$ კომპლექსური რიცხვი იქნება $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის შებრუნებული შეკრების ოპერაციის მიმართ. ხშირად $-a-bi$ კომპლექსურ რიცხვს $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის მოპირდაპირე კომპლექსურ რიცხვს უწოდებენ. მკითხველი ადვილად შეამოწმებს შემდეგ ტოლობათა მართებულობას:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta),$$

$\alpha-\beta=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha=\beta$,

$$\alpha+(-\alpha)=0,\quad \alpha-0=\alpha,$$

$$(-\alpha)\cdot\beta=\alpha(-\beta)=-\alpha\beta,\quad (-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta.$$

ახლა განვიხილოთ გამრავლების შებრუნებული მოქმედება — გაყოფა.

ვთქვათ, $\dfrac{a+bi}{c+di}=x+yi$, სადაც $c+di\neq 0$.

შეიძლება დავწეროთ:

$$a+bi=(c+di)(x+yi)$$

თანახმად ნებისმიერი ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლისა და ტოლობის განმარტებისა, მივიღებთ:

$$a+bi=(cx-dy)+(dx+cy)i,\ \text{ე. ი.}$$

$$\left.\begin{aligned} cx-dy&=a\\ dx+cy&=c\end{aligned}\right\},\quad \text{აქედან}\quad x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i. \tag{7}$$

ვინაიდან $c+di\neq 0$, $c^2+d^2\neq 0$ (კერძოდ, $c^2+d^2>0$), (7) ფორმულას ყოველთვის აქვს აზრი. პირიქით, c^2+d^2, როგორც ორი c და d ნამდვილი რიცხვის კვადრატების ჯამი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, როცა $c=d=0$, ე. ი. $c+di=0$. აქედან გამოდის, რომ კომპლექსური რიცხვების გაყოფა ყოველთვის სრულდება ცალსახად, თუ გამყოფი არ უდრის ნულს.

$a-bi$ კომპლექსურ რიცხვს $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის **შეუღლებული კომპლექსური რიცხვი** ეწოდება და მას $\overline{\alpha}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ, ე. ი. $\overline{\alpha}=a-bi$. როგორც განმარტებიდან გამომდინარეობს, **ყოველი ნამდვილი რიცხვის შეუღლებული თავის თავს უდრის**, ხოლო bi წარმოსახვითი რიცხვის შეუღლებული $-bi$ წარმოსახვითი რიცხვი იქნება. აქ ბუნებრივად ასეთი კითხვა ისმება: არის თუ არა მიზანშეწონილი, რომ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ სხვაობას, სადაც a და b დადებითი ნამდვილი რიცხვებია, უწოდებენ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ჯამის შეუღლებულს? ცხადია, ეს არაა მიზანშეწონილი, ვინაიდან, როგორც აღვნიშნეთ, ყოველი ნამდვილი რიცხვის შეუღლებული თავისი თავის ტოლია. ამ გაუგებრობის თავიდან აცილების მიზნით უმჯობესია $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ სხვაობას ვუწოდოთ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ჯამის **მარაციონალებელი მამრავლი**. საზოგადოდ, მოცემული ირაციონალური გამოსახულებისათვის ყოველ ისეთ მამრავლს, რომელზედაც გამრავლებით მივიღებთ რაციონალურ გამოსახულებას, მარაციონალებელი მამრავლი ვუწოდოთ.

მაგალითად, $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ გამოსახულების ერთ-ერთი მარაციონალებელი მამრავლია $m=\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-1}}\,b+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}}$.

(2) ფორმულიდან უშუალოდ ვღებულობთ:

$$(a+bi)\,(a-bi)=a^2+b^2.$$

მაშასადამე, ყოველი ორი ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი ნამდვილი დადებითი რიცხვია; მას უწოდებენ მოცემული კომპლექსური რიცხვის **ნორმას**. მაგალითად, $-3+4i$ კომპლექსური რიცხვის ნორმა იქნება 25. ცხადია, რომ a ნამდვილი რიცხვის ნორმა იქნება a^2. ადვილად შევამჩნევთ, რომ (7) ფორმულის მარჯვენა მხარის მიღება კიდევ შეიძლება მარცხენა მხარის მრიცხველისა და მნიშვნელის, მნიშვნელის შეუღლებულზე გამრავლებით. მართლაც,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

როცა $a+bi=0$, ე. ი. $a=b=0$, მივიღებთ:

$$\frac{0}{c+di}=\frac{0+0i}{c+di}=\frac{0}{c^2+d^2}+\frac{0}{c^2+d^2}\cdot i=0.$$

მაშასადამე, ნული გაყოფილი ნულისაგან განსხვავებულ ყოველ კომპლექსურ რიცხვზე, ნულია. $c+di$ კომპლექსური რიცხვის შებრუნებულ კომპლექსურ რიცხვს გამრავლების ოპერაციის მიმართ ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{c+di}=\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}\,i.$$

ახლა განვიხილოთ შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების ზოგიერთი თვისება. ვინაიდან $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული $\overline{\alpha}=a-bi$ კომპლექსური რიცხვია, $\overline{\alpha}=a-bi$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული იქნება $\overline{\overline{\alpha}}=a+bi$ კომპლექსური რიცხვი, ე. ი.

$$\overline{\overline{\alpha}}=\alpha.$$

ადვილად დამტკიცდება შეუღლებული კომპლექსური რიცხვებისათვის შემდეგ ტოლობათა მართებულობა:

$$\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}=\overline{\alpha\pm\beta},$$

$$\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=\overline{\alpha\beta},$$

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)},\quad \beta\neq 0$$

$$(\overline{\alpha})^n=(\overline{\alpha^n}).$$

მართლაც, ვთქვათ, $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ დავამტკიცოთ მეორე ტოლობის მართებულობა

$$\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+cb)i=\overline{\alpha\beta},\quad \text{რ. დ. გ.}$$

ანალოგიურად დამტკიცდება დანარჩენ ტოლობათა მართებულობა.

$i=\sqrt{-1}$ რიცხვის ხარისხებისათვის ვღებულობთ:

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\dots$$

საზოგადოდ, k მთელი დადებითი რიცხვისათვის გვექნება:

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i. \tag{8}$$

ამრიგად, i^n ყოველი n მთელი დადებითი რიცხვისათვის, იქნება ოთხი 1, i, -1, $-i$ მნიშვნელობიდან ერთ-ერთი. მაგალითად, თუ n-ის 4-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი უდრის 3-ს, მაშინ $i^n=-i$. რადგან $\frac{1}{i}=-i$, გვექნება:

$$\frac{1}{i^n}=\left(\frac{1}{i}\right)^n=(-1)^n i^n. \tag{9}$$

თუ 0 და 1 რიცხვებს წარმოვადგენთ ასე: $0=0+0i$ და $1=1+0i$, მაშინ ყოველი $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვისათვის (1) და (2) თანაფარდობის მიხედვით ადვილად შემოწმდება, რომ:

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha,\ \ \alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0 \ \text{ და } \ \alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha.$$

როგორც ვხედავთ, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე აკმაყოფილებს კომუტაციური ველის ზოგადი განმარტებით მოთხოვნილ ყველა პირობას. ნულოვანი ელემენტის როლს აქ ასრულებს რიცხვი 0, ხოლო ერთეულის როლს—რიცხვი 1. ამით ჩვენ ერთხელ კიდევ გავუსვით ხაზი იმას, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე ქმნის ველს. $i=\sqrt{-1}$ რიცხვის ხარისხებისათვის ზემოთ მიღებულ (8) და (9) თანაფარდობათა მიხედვით ვღებულობთ, რომ D ნამდვილ რიცხვთა ველთან $i=\sqrt{-1}$ ელემენტის გაერთიანება ან, რაც იგივეა, D ნამდვილ რიცხვთა ველის $i=\sqrt{-1}$ რიცხვით გაფართოება $K=\{a+bi\}$, სადაც $a,\ b\in D$ მოგვცემს კომპლექსურ რიცხვთა ველს, ე. ი.

$$D(i)=K.$$

შეიძლება განვიხილოთ K კომპლექსურ რიცხვთა ველის სხვაგვარი კონსტრუქცია—აგება.

ასე, მაგალითად, ვთქვათ, სიბრტყეზე ამორჩეულია კოორდინატთა მართკუთხა სისტემა. სიბრტყის წერტილები აღვნიშნოთ α, β, γ,... ასოებით. ახლა საქმე გვაქვს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლესთან. α წერტილი a აბსცისით და b ორდინატით აღვნიშნოთ (a, b) სიმბოლოთი, ე. ი. $\alpha=(a,\ b)$.

სიბრტყის ყოველ ორ $\alpha=(a,\ b)$ და $\beta=(c,\ d)$ წერტილს ვუწოდოთ ტოლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=c$, $b=d$. შემოვიღოთ სიბრტყის წერტილების **ჯამისა** და **ნამრავლის** ცნება. ორი მოცემული $\alpha=(a,b)$ და $\beta=(c,\ d)$ წერტილის ჯამი ვუწოდოთ სიბრტყის ისეთ წერტილს, რომლის აბსცისა არის $a+c$, ხოლო ორდინატა კი $b+d$, ე. ი.

$$\alpha+\beta=(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d). \tag{11}$$

ამ ორი α და β წერტილის ნამრავლი ვუწოდოთ სიბრტყის ისეთ წერტილს, რომლის აბსცისა არის $ac-bd$, ხოლო ორდინატა კი $ad+bc$, ე. ი.

$$\alpha\cdot\beta=(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc). \tag{12}$$

კოორდინატთა სათავის ერთადერთ (0, 0) წერტილს ვუწოდოთ სიბრტყის **წერტილთა** ნულოვანი წერტილი; ის წერტილთა შეკრების ოპერაციის მიმართ ასრულებს ნულის როლს. სიბრტყის წერტილთა ჯამისა და ნამრავლის გამომსახველ (11) და (12) თანაფარდობათა მიხედვით, ისე როგორც

ეს ზემოთ გავაკეთეთ, ადვილად მივიღებთ ორი მოცემული $\alpha=(a, b)$ და $\beta=(c, d)$ წერტილის სხვაობისა და შეფარდების შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\alpha-\beta=(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d), \tag{13}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right), \ \beta\neq 0. \tag{14}$$

(13) თანაფარდობიდან მივიღებთ, რომ α წერტილის შებრუნებული წერტილი შეკრების ოპერაციის მიმართ იქნება $-\alpha=(-a, -b)$ წერტილი. (14) თანაფარდობის მარჯვენა მხარე, როცა $\alpha=\beta$, მოგვცემს $1=(1, 0)$ წერტილს. ეს წერტილი, რომელიც მდებარეობს აბსცისთა ღერძზე მარჯვნიდან 1-ის ტოლ მანძილზე, წერტილთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ასრულებს ერთეულის როლს. (14) თანაფარდობაში, თუ $\alpha=(1, 0)$ და $\beta\neq 0$, მივიღებთ, რომ β წერტილის შებრუნებული წერტილი იქნება $\beta^{-1}=\left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2}\right)$. (11) და (12) თანაფარდობათა მიხედვით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სიბრტყის ყოველი სამი α, β, და $\gamma=(k, e)$ წერტილისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha, \qquad \alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma,$$
$$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha, \qquad \alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma,$$
$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

ამრიგად, სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომელსაც T ასოთი აღვნიშნავთ, ქმნის **კომუტაციურ ველს.**

აბსცისთა ღერძზე მოთავსებული წერტილებისათვის, ე. ი. $(a,0)$ სახის წერტილებისათვის გვექნება:

$$(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0), \qquad (a, 0)(b,0)=(ab, 0),$$

$$(a, 0)-(b, 0)=(a-b, 0), \qquad \frac{(a, 0)}{(b, 0)}=\left(\frac{a}{b}, 0\right).$$

მიღებული ტოლობებიდან ჩანს, რომ აბსცისთა ღერძზე მოთავსებულ წერტილთა სიმრავლე ქმნის სიბრტყის წერტილთა ველის ქვეველს.

თუ ახლა აბსცისთა ღერძის ყოველ $(a,0)$ წერტილს მივიღებთ a ნამდვილი რიცხვის აბსცისის გამომსახველად, ე. ი. დავამყარებთ თანადობას $(a, 0)$ წერტილსა და a რიცხვს შორის, მაშინ აბსცისა გადაიქცევა ნამდვილ რიცხვთა ღერძად. ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ ჩვენ მიერ სიბრტყის წერტილებისაგან აგებული ველი შეიცავს ნამდვილ რიცხვთა ველს.

ასეთი რამ, ცხადია, არ შეიძლება ითქვას ორდინატთა ღერძის მიმართ. მართლაც, განვიხილოთ, მაგალითად, $(0,1)$ წერტილი, რომელიც მდე-

ბარეობს ორდინატთა ღერძზე სათავიდან ზემოთ 1-ის ტოლ მანძილზე. ეს წერტილი აღვნიშნოთ i ასოთი:

$$i=(0,\ 1).$$

თანახმად (2) თანაფარდობისა, გვექნება:

$$i^2=(0,\ 1)(0,\ 1)=(0-1,\ 0+0)=(-1,\ 0)=-1. \tag{15}$$

წერტილი $(-1, 0)=-1$ მდებარეობს აბსცისთა ღერძზე და არა ორდინატთა ღერძზე.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ჩვენ მიერ აგებული წერტილთა T ველი (სიზუსტით იზომორფულობამდე) იგივეა, რაც კომპლექსურ რიცხვთა K ველი, ე. ი. T ველი მიიღება D ნამდვილ რიცხვთა ველთან $i=(0,\ 1)$ ელემენტის მიერთებით: $T=D(i)$.

მართლაც, ყოველი (a, b) წერტილი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b).$$

$(a, 0)$ შესაკრები მდებარეობს აბსცისთა ღერძზე, ამიტომ ის არის ნამდვილი რიცხვი. მეორე შესაკრებს $(0,\ b)$ შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$(0,\ b)=(b,\ 0)(0,\ 1).$$

მარჯვენა მხარეში პირველი მამრავლი $(b, 0)$ არის b ნამდვილი რიცხვი, ხოლო მეორე მამრავლი $(0,\ 1)$ არის i. ამგვარად,

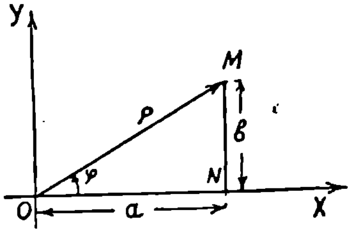
$$(a,\ b)=a+bi,$$

ე. ი. სიბრტყის ყოველი $(a,\ b)$ წერტილი წარმოვადგინეთ ჩვეულებრივ $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვად. ამით დამტკიცდა, რომ ჩვენ მიერ აგებულ წერტილთა T ველი იგივეა, რაც K კომპლექსურ რიცხვთა ველი. როგორც (15) თანაფარდობიდან ჩანს, T ველში ჩვენ ორდინატთა ღერძზე ვნახეთ ისეთი $i=(0,\ 1)$ წერტილი, რომლის კვადრატი $i^2=(-1,\ 0)=-1$, აბსცისთა ღერძზე მდებარეობს. აქედან ცხადია, რომ ორდინატთა ღერძის წერტილთა სიმრავლე წერტილთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის მიმართ არ ქმნის T ველის ქვეველს.

ახლა შეგვიძლია მივიღოთ, რომ კვადრატული ფესვი -1-დან არის i, ე. ი. $i=\sqrt{-1}$. ამ $\sqrt{-1}$-ის მეორე მნიშვნელობა იქნება $-i=(0,\ -1)$ წერტილი. შევნიშნოთ, რომ $i=(0,\ 1)=\sqrt{-1}$ წერტილი, რომელსაც ჩვეულებრივ „წარმოსახვით ერთეულს“ უწოდებენ, არის სიბრტყის სრულიად გარკვეული რეალური წერტილი.

§ 22. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე. კომპლექსური რიცხვების ახარისხება და ამოფესვა

განვიხილოთ სიბრტყეზე დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა XOY სისტემა. როგორც ვიცით, ყოველი $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს სიბრტყეზე შეესაბამება გარკვეული (a, b) წერტილი და, პირიქით, ე. ი. კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლესა და სიბრტყის წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა. რადგან ყოველი კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი X-თა ღერძზეა, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი Y-თა ღერძზე, ამიტომ X-თა ღერძს ნამდვილ ღერძს უწოდებენ, Y-თა ღერძს კი—წარმოსახვით ღერძს. ხშირად (a, b) წერტილს $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის აფიქსს უწოდებენ.



ნახ. 1.

ρ მანძილს სათავიდან აფიქსამდე ეწოდება $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის მოდული და აღინიშნება $|\alpha|$ სიმბოლოთი. მიმართულების მქონე OM მონაკვეთს $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი ვექტორი ეწოდება (ნახ. 1).

φ კუთხეს, რომელსაც $\overline{OM}$ ვექტორი ქმნის OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ეწოდება და აღინიშნება $\arg\alpha$ სიმბოლოთი. φ კუთხე შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი: დადებითი კუთხე უნდა ავთვალოთ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. ხშირად $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის ρ მოდულს და φ არგუმენტს მოცემული კომპლექსური რიცხვის აფიქსის პოლარულ კოორდინატებს უწოდებენ.

იმისათვის, რომ გეომეტრიულად მივიღოთ ორი $\alpha=a+bi$ და $\beta=c+di$ კომპლექსური რიცხვის ჯამი, საჭიროა $M(a, b)$ და $P(c, d)$ წერტილების $Q=(a+c, b+d)$ ჯამის აგება (ნახ. 2). ადვილად შევამჩნევთ, რომ $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი $\overline{OQ}$ ვექტორი წარმოადგენს $\overline{OM}$ და $\overline{OP}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის $\overline{OQ}$ დიაგონალს.

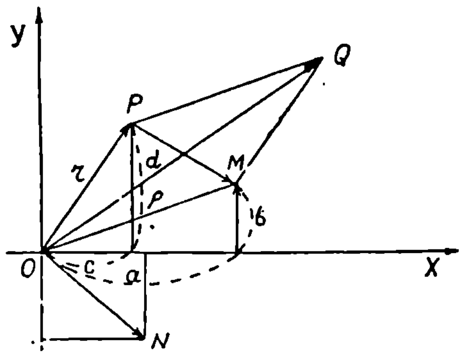
მაშასადამე, გეომეტრიულად კომპლექსური რიცხვების შეკრება სრულდება სათავიდან გამოსული ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესით. ანალოგიურად, ორი მოცემული α და β კომპლექსური რიცხვის სხვაობის გეომეტრიულად აგებისათვის, საჭიროა $M(a, b)$ და $P(c, d)$ წერტილთა სხვაობის $N=(a-c, b-d)$ აგება. ამრიგად, $\alpha-\beta=a-c+(b-d)i$ კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება $\overline{ON}$ ვექტორი ან,

რაც იგივეა, $\overline{OM}$ და $\overline{OP}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის $\overline{PM}$ მცირე დიაგონალი აღნიშნული მიმართულებით.

როგორც ნახაზიდან ჩანს, α და β კომპლექსური რიცხვების მოდულებია $|\alpha|=OM$, $|\beta|=OP$ მონაკვეთები, ხოლო მათი $\alpha+\beta$ ჯამის მოდულია $|\alpha+\beta|=OQ$ მონაკვეთი. რადგან სამკუთხედში ყოველი ორი გვერდის ჯამი მეტია მესამე გვერდზე, ხოლო სხვაობა ნაკლებია მესამე გვერდზე, მივიღებთ შემდეგ ორ თანაფარდობას:

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|,\quad |\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|.$$

აქ ტოლობას ადგილი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა α და β კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი ვექტორები მდებარეობენ კოორდინატთა სათავეში გამავალ ერთ სწორ ხაზზე.



ნახ. 2

რადგან $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ და β კომპლექსური რიცხვის მოდული იგივეა, რაც მისი მოპირდაპირე $-\beta$ რიცხვისა, ე. ი. $|-\beta|=|\beta|$, მიღებულ უტოლობათა საფუძველზე ადვილად მივიღებთ შემდეგ უტოლობას:

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

$|\alpha|\pm|\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$ უტოლობის უბრალო განზოგადებით, n რაოდენობის კომპლექსური რიცხვისათვის გვექნება:

$$|\alpha_1\pm\alpha_2\pm\cdots\pm\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|.$$

იმისათვის, რომ კომპლექსური რიცხვების გამრავლება და გაყოფა გეომეტრიულად წარმოვიდგინოთ, საჭიროა წინასწარ კომპლექსურ რიცხვს მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე. როგორც 1-ლი ნახაზიდან ჩანს, $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის ρ მოდული და φ არგუმენტი, ე. ი. M წერტილის პოლარული კოორდინატები, ამავე წერტილის დეკარტის კოორდინატებთან შემდეგი ტოლობებით არის დაკავშირებული:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad a=\rho\cos\varphi,\quad b=\rho\sin\varphi. \tag{1}$$

კომპლექსური რიცხვის ρ მოდული, როგორც მანძილი, არის ნამდვილი და დადებითი რიცხვი, ამიტომ კვადრატული $\sqrt{a^2+b^2}$ რადიკალის

წინ ავიღებთ მხოლოდ დადებით ნიშანს. (1) ტოლობათა საფუძველზე შეიძლება დავწეროთ:

$$\alpha = a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

(2) ტოლობის მარჯვენა მხარეს უწოდებენ $\alpha = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის **ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეს**, სადაც ρ მოდული და φ არგუმენტი განისაზღვრება (1) ტოლობებით. კუთხის განსაზღვრისათვის შეიძლება აგრეთვე ვისარგებლოთ თანაფარდობით

$$tg\varphi = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

აქ საჭიროა შევნიშნოთ, რომ φ არგუმენტის (3) ტოლობით, ე. ი. ტანგენსით გამოთვლისას მოსალოდნელი შეცდომის თავიდან აცილების მიზნით, საჭიროა წინასწარ ავაგოთ მოცემული კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი M აფიქსი და $\overline{OM}$ ვექტორი. მაგალითად, $-1+i$ და $1-i$ კომპლექსური რიცხვების არგუმენტი (3) თანაფარდობის თანახმად, თუ მათ აფიქსს მხედველობაში არ მივიღებთ, გამოდის ერთი და იგივე. სინამდვილეში, როგორც ეს შესაბამისი აფიქსისა და ვექტორის აგებიდან ჩანს $-1+i$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი არის $\frac{3\pi}{4}$, ხოლო $1-i$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი კი $\frac{7\pi}{4}$.

მაგალითი. დავწეროთ $-1+\sqrt{3}i$ რიცხვის ნორმალური ტრიგონომეტრიული სახე. მოცემული კომპლექსური რიცხვის მოდული $\rho=2$, აქ $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ და ამიტომ φ შეიძლება იყოს $\frac{2\pi}{3}$ და $\frac{4\pi}{3}$ მაგრამ, რადგან $-1+\sqrt{3}\,i$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი აფიქსი მეორე მეოთხედშია, ამიტომ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. მაშასადამე, მივიღებთ:

$$-1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

ვთქვათ, ახლა მოცემულია ორი α და β კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული სახით:

$$\alpha = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad \beta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

ამ ორი კომპლექსური რიცხვის გამრავლების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \rho\cdot r(\cos\varphi\cdot\cos\theta - \sin\varphi\cdot\sin\theta + i\sin\varphi\cdot\cos\theta + i\cos\varphi\cdot\sin\theta) = \\ &= \rho\cdot r\,[\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)].\end{aligned} \tag{4}$$

როგორც მიღებული (4) ტოლობიდან ჩანს, ყოველი ორი α და β კომპლექსური რიცხვის გამრავლების შედეგად მიღებული კომპლექსური რიცხვის მოდული უდრის მოცემულ α და β კომპლექსურ რიცხვთა **მოდულების ნამრავლს**, ხოლო არგუმენტი უდრის მოცემულ კომპლექსურ რიცხვთა **არგუმენტების ალგებრულ ჯამს**, ე. ი.

$$|\alpha\beta|=\rho\cdot r=|\alpha|\,|\beta|,\quad \arg(\alpha\beta)=\varphi+\theta=\arg\alpha+\arg\beta.$$

აქედან ჩანს, რომ გეომეტრიულად α კომპლექსური რიცხვის β კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლება ნიშნავს: α კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი ვექტორი მოვაბრუნოთ θ კუთხით და შემდეგ მისი ρ მოდული გავამრავლოთ β კომპლექსური რიცხვის r მოდულზე; მიღებული მონაკვეთის ბოლო წერტილი იქნება $\alpha\beta$ კომპლექსური რიცხვის აფიქსი.

ახლა განვიხილოთ გაყოფის ოპერაცია. ვთქვათ, მოცემულია $\beta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ კომპლექსური რიცხვი. β კომპლექსური რიცხვის შებრუნებული კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\beta^{-1}=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

ან კიდევ

$$\beta^{-1}=\frac{1}{r}\,[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]. \tag{5}$$

როგორც (5) თანაფარდობიდან ჩანს:

$$|\beta^{-1}|=\frac{1}{r}=r^{-1}=|\beta|^{-1},\quad \arg(\beta^{-1})=-\theta=-\arg\beta.$$

(5) თანაფარდობიდან აგრეთვე ჩანს, რომ გეომეტრიულად $\beta\neq0$ კომპლექსური რიცხვის შებრუნებული β^{-1} რიცხვის მისაღებად საჭიროა, ნამდვილი ღერძის მიმართ ავაგოთ β კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი ვექტორის სიმეტრიული ვექტორი და შემდეგ ამ ვექტორზე კოორდინატთა სათავიდან გადავზომოთ $r^{-1}=\frac{1}{r}$ მანძილი. შევნიშნოთ, რომ $|\alpha|=|\alpha^{-1}|$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|\alpha|=1$, ე. ი. როცა α წერტილი ძევს ერთეულრადიუსიან წრეზე. თუ α არის ერთეულრადიუსიანი წრის გარეთ, მაშინ α^{-1} იქნება ამ წრეში და, პირიქით. ამ გზით ჩვენ ვღებულობთ **კომპლექსური სიბრტყის ერთეულრადიუსიანი წრის გარე და ნულისაგან განსხვავებულ შიგა წერტილთა ურთიერთცალსახა თანადობას.**

ახლა ორი α და β კომპლექსური რიცხვის შეფარდება შეიძლება შევცვალოთ α და β^{-1} კომპლექსური რიცხვების ნამრავლით.

მაგალითად,

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\beta^{-1}=\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot\frac{1}{r}\,[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]=$$

$$=\frac{\rho}{r}[\cos(\varphi-\theta)+i\sin(\varphi-\theta)]. \tag{6}$$

(6) თანაფარდობიდან ვღებულობთ, რომ

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{\rho}{r}=\frac{|\alpha|}{|\beta|} \text{ და } \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta.$$

განმარტების თანახმად, $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებულ $\overline{\alpha}$ კომპლექსურ რიცხვს აქვს შემდეგი სახე: $\overline{\alpha}=\rho(\cos\varphi-$ $-i\sin\varphi)$ ან, რაც იგივეა, $\overline{\alpha}=\rho[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$. როგორც ჩანს, გეომეტრიულად α კომპლექსური რიცხვისა და მისი შეუღლებული $\overline{\alpha}$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი აფიქსები სიმეტრიულია ნამდვილი ღერძის მიმართ.

კომპლექსური რიცხვის კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების ზემოთ მიღებული წესიდან ჩანს, რომ რაიმე რიცხვის $\cos\varphi+i\sin\varphi$ მამრავლზე — ოპერატორზე გამრავლება ნიშნავს, მოცემული რიცხვის შესაბამისი ვექტორის მობრუნებას φ კუთხით.

მაგალითად, რადგან $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, ამიტომ მოცემული რიცხვის i-ზე გამრავლება ნიშნავს, რომ მოცემული რიცხვის შესაბამისი ვექტორი საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოვაბრუნოთ $\frac{\pi}{2}$ კუთხით. აქედან, რადგან $i^2=-1=\cos\pi+i\sin\pi$ ვღებულობთ, რომ

$$(-1)\cdot(-1)=1.$$

ვთქვათ, მოცემულია n კომპლექსური რიცხვი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რომელთა მოდულებია შესაბამისად $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, ხოლო არგუმენტებია $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. კომპლექსური რიცხვის კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების (4) ფორმულის უბრალო განზოგადებით მივიღებთ:

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n=\rho_1\cdot\rho_2\ldots\rho_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)]. \tag{7}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\alpha$, ე. ი. $\rho_1=\rho_2=\ldots=$

$=\rho_n=\rho$ და $\varphi_1=\varphi_2=\ldots=\varphi_n=\varphi$, მაშინ (7) ტოლობიდან მივიღებთ მუავრის (Moivre 1667—1754) შემდეგ ფორმულას:

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{8}$$

ამრიგად, α კომპლექსური რიცხვის ხარისხში ასაყვანად საჭიროა მოდული ავიყვანოთ ამავე ხარისხში, ხოლო არგუმენტი გავამრავლოთ ხარისხის მაჩვენებელზე. (7) და (8) ტოლობებიდან მოდულთა და არგუმენტთათვის შესაბამისად ვღებულობთ:

$$|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n|=\rho_1\cdot\rho_2\cdots\rho_n=|\alpha_1|\,|\alpha_2|\cdots|\alpha_n|,\ \text{კერძოდ}\ |\alpha^n|=|\alpha|^n,$$

$$\arg(\alpha_1\cdot\alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n=\arg\alpha_1+\arg\alpha_2+\ldots+\arg\alpha_n$$

კერძოდ, $\arg(n\alpha)=n\arg\alpha$. რადგან $\alpha^{-n}=(\alpha^{-1})^n$, ამიტომ, ცხადია, რომ მუავრის ფორმულა მართებული იქნება მთელი უარყოფითმაჩვენებლიანი ხარისხებისათვისაც.

განვიხილოთ (8) ფორმულის ზოგიერთი გამოყენება. როცა $\rho=1$, მივიღებთ:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi \tag{9}$$

1. გამოვთვალოთ $(\sqrt{3}+i)^{12}$.
ვინაიდან

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

გვექნება

$$(\sqrt{3}+i)^{12}=2^{12}\ (\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=4096. \tag{9'}$$

2. თუ (9) ტოლობის მარცხენა მხარეს გავშლით ნიუტონის ფორმულის მიხედვით და შემდეგ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეში მოვახდენთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების გატოლებას, მივიღებთ შემდეგ ორ თანაფარდობას:

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi+\cdots-$$

$$\sin n\varphi=n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi+C_n^5\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi-\cdots+$$

მაგალითად, როცა $n=2$, 3, მივიღებთ საშუალო სკოლიდან ცნობილ შემდეგ ფორმულებს:

$$\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cdot\cos\varphi,\qquad \sin 3\varphi=3\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi,$$

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi,\qquad \cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

3. ვთქვათ, $\alpha=\cos\varphi+i\sin\varphi$, მაშინ $\bar{\alpha}=\cos\varphi-i\sin\varphi$,

$$\alpha+\bar{\alpha}=2\cos\varphi, \qquad \alpha-\bar{\alpha}=2i\sin\varphi, \ \alpha\,\bar{\alpha}=1,$$

$$\cos\varphi=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}, \qquad \sin\varphi=\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}.$$

აგრეთვე ნებისმიერი m მთელი რიცხვისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\alpha^m=\cos m\varphi+i\sin m\varphi, \qquad \bar{\alpha}^m=\cos m\varphi-i\sin m\varphi,$$

$$\alpha^m+\bar{\alpha}^m=2\cos m\varphi, \qquad \alpha^m-\bar{\alpha}^m=2i\sin m\varphi,$$

$$\cos m\varphi=\frac{\alpha^m+\overline{\alpha^m}}{2}, \quad \sin m\varphi=\frac{\alpha^m-\overline{\alpha^m}}{2i}.$$

ამ ფორმულების დახმარებით $\sin^n\varphi$ და $\cos^n\varphi$ შესაბამისად შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც φ კუთხის ჯერადი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის წრფივი კომბინაცია. მაგალითად,

$$\sin^3\varphi=\left(\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}\right)^3=\frac{1}{-8i}\left(\alpha^3-3\alpha^2\bar{\alpha}+3\alpha\bar{\alpha}^2-\bar{\alpha}^3\right)=$$

$$=-\frac{1}{8i}\left[(\alpha^3-\alpha^3)-3(\alpha-\bar{\alpha})\right]=-\frac{1}{8i}\left(2i\sin 3\varphi-3\cdot 2i\sin\varphi\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\cos^3\varphi=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos 3\varphi.$$

ახლა განვიხილოთ კომპლექსური რიცხვიდან ფესვის ამოღების საკითხი. ცხადია, რომ ყოველი კომპლექსური რიცხვიდან ნებისმიერი ხარისხის ფესვი ისევ კომპლექსური რიცხვია. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვი არის $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ კომპლექსური რიცხვი, ე. ი.

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=r(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad (10)$$

ორივე მხარე ავიყვანოთ n ხარისხში, მივიღებთ:

$$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\rho\cos\varphi+i\sin\varphi. \qquad (11)$$

რადგან ტოლი კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი ვექტორები ტოლია, ამიტომ ტოლი კომპლექსური რიცხვების მოდულები ტოლია, ხო-

ლო არგუმენტები შეიძლება განსხვავდებოდეს 2π-ს ჯერადი შესაკრებით. ამრიგად, (11) თანაფარდობიდან ვღებულობთ

$$r^n=\rho,\ n\theta=\varphi+2k\pi,$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ე. ი.

$$r=\sqrt[n]{\rho},\qquad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

რადგან r მოდული დადებითი რიცხვია, ამიტომ ρ დადებითი რიცხვიდან n ხარისხის ფესვი უნდა ავიღოთ მხოლოდ ნამდვილი და დადებითი (ანუ არითმეტიკული ფესვი). თუ r და θ მნიშვნელობებს შევიტანთ (10) ტოლობის მარჯვენა მხარეში, მივიღებთ:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right\}.\quad(12)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\beta_k=\sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right\}\quad(k=0,\pm1,\pm2,..).$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ k-სათვის საკმარისია ავიღოთ $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1$ და ჩვენ მივიღებთ ყველა n სხვადასხვა საძიებელ $\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{n-1}$ ფესვს.

მართლაც, ვთქვათ, k-ს აბსოლუტური მნიშვნელობა მეტია ან ტოლი n-ზე, ე. ი. $|k|\geqslant n$, მაშინ k შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$k=nq+r,$$

სადაც q საზოგადოდ მთელი რიცხვია, ხოლო r $(0\leqslant r<n)$ მთელი არაუარყოფითი რიცხვია. მივიღებთ:

$$\beta_k=\sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{n}+(nq+r)\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+(nq+r)\frac{2\pi}{n}\right)\right\}=$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{n}+r\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+r\frac{2\pi}{n}\right)\right\}=\beta_r\quad(r=0,1,2,\cdots,n-1).$$

ამრიგად, ყოველი β_k არის ერთ-ერთი $\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{n-1}$ რიცხვთა შორის, მაგალითად: $\beta_n=\beta_0,\ \beta_{n+3}=\beta_3$. მივიღეთ, რომ $\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{n-1}$ კომპლექსური რიცხვები მიუხედავად იმისა, რომ მათ ერთი და იგივე მოდული აქვთ სხვადასხვაა. მაშასადამე, n-ური ხარისხის ფესვს, ყოველი ნულისაგან განსხვავებული $a+bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური

რიცხვიდან აქვს n სხვადასხვა მნიშვნელობა და ყველა ეს მნიშვნელობა მიიღება (12) ფორმულის მარჯვენა მხარიდან, თუ ავიღებთ $k=0, 1, 2,\ldots, n-1$. ახლა განვიხილოთ მიღებული n სხვადასხვა ფესვის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. შევნიშნოთ, რომ

$$\beta_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1) \quad (13)$$

მიღებული n ფესვის $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ შესაბამის ვექტორებს აქვთ ერთი და იგივე სიგრძე $\sqrt[n]{\rho}$-ს ტოლი. β_0 რიცხვის არგუმენტია $\frac{\varphi}{n}$, β_1 რიცხვის არგუმენტი კი არის $\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}$ და ა. შ. ყოველი β_k კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი მიიღება β_{k-1} კომპლექსური რიცხვის არგუმენტის $\frac{2\pi}{n}$ კუთხით გადიდებით. ამრიგად, მოცემული $\alpha=\rho(\cos\varphi+$ $+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ყველა n ფესვი დალაგდება $\sqrt[n]{\rho}$-რადიუსიან წრეზე თანაბარი მანძილებით ან, რაც იგივეა, $\sqrt[n]{\rho}$-რადიუსიან წრეში ჩახაზულ წესიერ n-გვერდა მრავალკუთხედის წვეროებზე.

განვიხილოთ $\sqrt{a+bi}$ ფესვის წარმოდგენა a და b ნამდვილი რიცხვების საშუალებით. (13) ფორმულის თანახმად დავწეროთ:

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi\right)\right\} \quad (k=0,\ 1).$$

მივიღებთ ფესვის შემდეგ ორ მნიშვნელობას:

$$\beta_0=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right), \quad \beta_1=\sqrt{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+\right.$$

$$\left.+\,i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right\}=-\beta_0.$$

ახლა, თუ მოვიგონებთ ფორმულებს:

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}, \qquad \sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

და მხედველობაში მივიღებთ, რომ:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}, \quad a=\rho\cos\varphi,$$

გვექნება:

$$\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\quad \sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

მაშასადამე,

$$\beta_0=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}. \qquad (14)$$

კვადრატული რადიკალების წინ ნიშნების განსაზღვრისათვის განვიხილოთ ნამრავლი:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}=\frac{b}{2}.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ თუ $b>0$, მაშინ ორივე რადიკალის წინ უნდა ავიღოთ ერთნაირი ნიშანი, ხოლო, როცა $b<0$, მაშინ რადიკალების წინ უნდა ავიღოთ სხვადასხვა ნიშანი. პირველ შემთხვევაში β_0 გამოისახება (14) ფორმულით, ხოლო $\beta_1=-\beta_0$. მეორე შემთხვევაში, როცა $b<0$, გვექნება:

$$\beta_0=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},\ \text{ხოლო}\ \beta_1=-\beta_0.$$

თუ გავაერთიანებთ მიღებულ შედეგებს, გვექნება:

$$\sqrt{a\pm bi}=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\}.$$

ამ ფორმულების მიღება საშუალო სკოლაში დაიყვანება მარტივი ორუცნობიანი მეორეხარისხიანი სისტემის ამოხსნამდე, ცხადია, ასეთი მეთოდით არ შეიძლება (12) ფორმულის მიღება.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sqrt{21-20i}$.

თუ გამოვიყენებთ მიღებულ ფორმულას, რადგან $b=-20<0$, გვექნება:

$$\sqrt{21-20\,i}=\pm(5-2i).$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ყველა მნიშვნელობა ფესვისა

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}.$$

ფესქვეშა გამოსახულებას მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე. $-1-i\sqrt{3}$

კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი შესაბამისად იქნება 2 და $\frac{4\pi}{3}$, მაშასადამე,

$$-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

(12) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

უბრალო გამოანგარიშებით მივიღებთ ფესვების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\beta_0=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}+\frac{\sqrt[4]{18}}{2}i,\qquad \beta_2=-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}-\frac{\sqrt[4]{18}}{2}i,$$

$$\beta_1=-\frac{\sqrt[4]{18}}{2}+\frac{\sqrt[4]{2}}{2}i,\qquad \beta_3=\frac{\sqrt[4]{18}}{2}-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}i.$$

მაგალითი 3. უტოლობა $|z+2-i|<1$, სადაც $z=x+yi$ განსაზღვრავს იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც მოთავსებულია ერთეულოვან წრეში ცენტრით $(-2,1)$ წერტილში.

მუავრის და კომპლექსური რიცხვიდან ფესვის ამოღების (12) ფორმულის გამოყენებით ადვილად შემოწმდება, რომ თუ $a+bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვის n ხარისხი არის $A+Bi$ კომპლექსური რიცხვი, მაშინ $a-bi$ კომპლექსური რიცხვის n ხარისხი იქნება $A-Bi$ კომპლექსური რიცხვი. ანალოგიურად, თუ $\sqrt[n]{a+bi}=m+ni$, მაშინ $\sqrt[n]{a-bi}=m-ni$.

§ 28. n-ური ხარისხის ფესვი 1-დან. პირველადი ფესვები. ორწევრა განტოლებანი

რადგან $1=1+0i$, ამიტომ მისი მოდული $\rho=1$, ხოლო არგუმენტი $\varphi=0$, წინა პარაგრაფის (12) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad (k=0,\ 1,\cdots,n-1).$$

აღვნიშნოთ

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1). \tag{1}$$

ცხადია, რომ $\sqrt[n]{1}$-ის ყველა n ფესვი გეომეტრიულად შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ერთეულრადიუსიან წრეში ჩახაზული წესიერი n-კუთხედის წვეროები.

(1) ფორმულის მიხედვით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ როცა n კენტი რიცხვია, მაშინ $\sqrt[n]{1}$-ს აქვს მხოლოდ ერთი ნამდვილი ფესვი $\varepsilon_0=1$ (რომელსაც $\sqrt[n]{1}$-ის არითმეტიკულ ფესვს უწოდებენ). სხვა დანარჩენი ფესვები $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ კი კომპლექსური რიცხვებია, ხოლო, როცა $n=2k$ ლუწი რიცხვია, მაშინ $\sqrt[n]{1}$-ს აქვს ორი ნამდვილი ფესვი: $\varepsilon_0=1$ და $\varepsilon_k=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, სხვა დანარჩენი $n-2$ ფესვი კი კომპლექსური რიცხვებია.

როცა $k=1$, ვღებულობთ:

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

მუავრის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\varepsilon_1{}^k=\cos k\frac{2\pi}{n}+i\sin k\frac{2\pi}{n}=\varepsilon_k,$$

ე. ი.

$$\varepsilon_1{}^k=\varepsilon_k (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{2}$$

ცხადია, რომ $\varepsilon_1{}^n=\varepsilon_n=\varepsilon_0=1$. თუ $m\geqslant n$, ე. ი. $m=nq+r$ $(0\leqslant r<n)$, მაშინ $\varepsilon_1{}^m=\varepsilon_1{}^{nq}\cdot\varepsilon_1{}^r=\varepsilon_1{}^r=\varepsilon_r$, სადაც $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. მაშასადამე, ε_1-ის ყოველი ხარისხი მოგვცემს $\sqrt[n]{1}$ ფესვთა შორის ერთ-ერთ გარკვეულ მნიშვნელობას.

ამრიგად, ε_1 ფესვს აქვს ის თვისება, რომ მისი თანამიმდევრობით 0, 1, 2, ..., $n-1$ ხარისხში აყვანით მივიღებთ $\sqrt[n]{1}$-ის ყველა n სხვადასხვა ფესვს. $\sqrt[n]{1}$-ის ყველა იმ ε_k ფესვს, რომლებიც ასეთი თვისებისაა, **პირველადი**, ანუ **პრიმიტიული**, ფესვი ეწოდება. მაგალითად, ადვილად შემოწმდება, რომ $\sqrt[3]{1}$-ის

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_1=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\qquad \varepsilon_2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

ფესვთა შორის პირველადი ფესვები იქნება ε_1 და ε_2, კერძოდ, $\varepsilon_2{}^2=\varepsilon_1$,

$\varepsilon_2^3=\varepsilon_0=1$. ვთქვათ, ε არის ერთი რომელიმე n-ური ხარისხის ფესვი ერთიდან. ადვილად დამტკიცდება, რომ ε **მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება პირველადი ფესვი, თუ მისი ხარისხები** ε^k **სხვადასხვაა.**

მართლაც, თუ ε რიცხვის ყველა ეს ხარისხი სხვადასხვაა, ისინი ამოწურავს $\sqrt[n]{1}$ ყველა ფესვს და ამიტომ ε იქნება $\sqrt[n]{1}$-ის პირველადი ფესვი. თუ, მაგალითად, $\varepsilon^k=\varepsilon^l$, სადაც $0\leqslant l<k\leqslant n-1$, მივიღებთ $\varepsilon^{k-l}=1$, და რადგან $1\leqslant k-l<n$, ცხადია, ε არ იქნება პირველადი ფესვი. როგორც მაგალითზე ვნახეთ, $\sqrt[3]{1}$ აქვს ორი ε_1 და ε_2 პირველადი ფესვი, ე. ი. საზოგადოდ $\sqrt[n]{1}$-თვის ε_1 არაა ერთადერთი პირველადი ფესვი. ცხადია, რომ თუ ε არის $\sqrt[n]{1}$-ის რომელიმე პირველადი ფესვი, $\varepsilon^k(k>0)$ მხოლოდ მაშინ უდრის ერთს, როცა l ჯერადია n-ისა.

თეორემა. **$\sqrt[n]{1}$-ის ε_k ფესვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება $\sqrt[n]{1}$-ის პირველადი ფესვი, როცა k და n ურთიერთმარტივი რიცხვებია, ე. ი. $(k,n)=1$.**

დამტკიცება. როგორც ε_k-ს

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

მნიშვნელობიდან ჩანს, თუ k და n ურთიერთმარტივი რიცხვებია, $\varepsilon_k^m=\cos\dfrac{2km\pi}{n}+i\sin\dfrac{2km\pi}{n}$, როცა $0<m<n$ არ შეიძლება იყოს ერთი.

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\dfrac{km}{n}$ უნდა იყოს ჯერადი n-ისა; ეს კი შეუძლებელია ვინაიდან k და n ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ამრიგად, დამტკიცდა, რომ როცა k და n ურთიერთმარტივი რიცხვებია, ხარისხები ε_k^m $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ მოგვცემს $\sqrt[n]{1}$-ის ყველა n ფესვს, ე. ი. ε_k იქნება პირველადი ფესვი. ახლა, თუ k და n რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი $d>1$, ე. ი. $(k,n)=d$, მივიღებთ $k=d\cdot k_1$, $n=dn_1$, სადაც k_1 და n_1 ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ε_k-ს გამარტივებით გვექნება $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k_1\pi}{n_1}+i\sin\dfrac{2k_1\pi}{n_1}$. ახლა, ვინაიდან $\varepsilon_k^{n_1}=1$ და $n_1<n$, ვღებულობთ, რომ თუ k და n არაა ε-ის ურთიერთმარტივი რიცხვები, მაშინ ε_k იქნება $\sqrt[n]{1}$-ის რომელიმე ფესვი და მისი ყველა შესაძლო ხარისხი არ მოგვცემს $\sqrt[n]{1}$-ის ყველა ფესვს, ე. ი. ε_k არ იქნება $\sqrt[n]{1}$-ის პირველადი ფესვი და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, $\sqrt[n]{1}$-ის $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ \ldots\ \varepsilon_{n-1}$ ფესვთა შორის ისინი იქნებიან პირველადი ფესვები. რომელთა შესაბამისი ინდექსი n-ის ურთი-

ერთმარტივი რიცხვია, ე. ი. $\sqrt[n]{1}$-ის პირველადი ფესვების რაოდენობა უდრის n-ზე ნაკლებ და n-ის ურთიერთმარტივი რიცხვების რაოდენობას. n-ზე ნაკლებ და მის ურთიერთ მარტივრიცხვთა რაოდენობა $\varphi(n)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. რიცხვთა თეორიაში მტკიცდება, რომ თუ $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, სადაც $p_1, p_2, \cdots, p_k$ მოცემული n რიცხვის მარტივი მამრავლებია, მაშინ

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

მაგალითად, $\sqrt[12]{1}$-ის პირველადი ფესვების რიცხვი უდრის ოთხს, მისი პირველადი ფესვები იქნება: ε_1, ε_5, ε_7 და ε_{11}.

ახლა, ვინაიდან კომპლექსური რიცხვების გამრავლებისას მოდულები მრავლდება და არგუმენტები იკრიბება, (13) თანაფარდობა (გვ. 213) შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\beta_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\beta_k=\beta_0\cdot\varepsilon_k, \tag{3}$$

სადაც

$$\beta_0=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right),\quad \varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

როგორც (3) ტოლობიდან ჩანს, ყველა β_k $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$, ფესვის საპოვნელად საკმარისია ვიპოვოთ β_0 ან რომელიმე β_k და გავამრავლოთ თანამიმდევრობით $\sqrt[n]{1}$-ის ყველა ε_0, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots,$ ε_{n-1} ფესვზე.

(3) თანაფარდობის დახმარებით ადვილად შეიძლება ამოვხსნათ ორწევრა განტოლებანი. საზოგადოდ, α კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვის ამოღება დაიყვანება შემდეგი

$$x^n-\alpha=0 \tag{4}$$

სახის ორწევრა განტოლების ამოხსნამდე. მიღებული ორწევრა განტოლების ყველა n ფესვი შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით

$$x_k=\gamma\cdot\varepsilon_k, \tag{5}$$

სადაც γ არის (4) განტოლების ერთი რომელიმე ფესვი, ე. ი. γ არის $\sqrt[n]{a}$-ს ერთი რომელიმე მნიშვნელობა, ხოლო ε_k არის $y^n-1=0$ ორ-

წევრა განტოლების ან, რაც იგივეა, $\sqrt[n]{1}$-ის ფესვები, რომლებიც მიიღება ε_k-ს გამომსახველი ფორმულიდან.

რადგან ε_k გვაძლევს n სხვადასხვა მნიშვნელობას და x_k აკმაყოფილებს (4) განტოლებას, (4) განტოლების ყველა n ფესვს მივიღებთ (5) თანაფარდობიდან ε_k მნიშვნელობათა ჩასმით. ამით დამტკიცდა აგრეთვე, **რომ ყოველ n-ური ხარისხის ორწევრა განტოლებას კომპლექსურ რიცხვთა ველში აქვს n სხვადასხვა ფესვი.**

მაგალითი 1. ამოვხსნათ ორწევრა განტოლება $x^3-8i=0$. ადვილად შემოწმდება, რომ მოცემული განტოლების ერთ-ერთი ფესვია $x=-2i$. ახლა რადგან $y^3-1=0$ განტოლების ან, რაც იგივეა, $\sqrt[3]{1}$-ის ფესვებია:

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\qquad \varepsilon_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

ამიტომ მოცემული განტოლების ფესვები იქნება:

$$x_0=-2i\varepsilon_0=-2i,$$

$$x_1=-2i\varepsilon_1=\sqrt{3}+i,$$

$$x_2=-2i\varepsilon_1^2=-\sqrt{3}+i.$$

მაგალითი 2. ადვილად შემოწმდება, რომ $x^n-1=0$ განტოლების ან, რაც იგივეა, $\sqrt[n]{1}$-ის

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \dots,\ \varepsilon_{n-1} \tag{6}$$

ფესვთა სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის n-ური რიგის ციკლურ ჯგუფს.

მართლაც, რადგან ε_1 პირველადი ფესვია, მისი თანამიმდევრობითი ახარისხებით მიიღება $\sqrt[n]{1}$-ის ყველა n ფესვი. ვთქვათ, $k<n$, $l<n$. განვიხილოთ $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l=\varepsilon_1^k\cdot\varepsilon_1^l=\varepsilon_1^{k+l}=\varepsilon_{k+l}$. თუ $k+l<n$, მაშინ $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l$ იქნება (6) ფესვთა შორის ერთ-ერთი გარკვეული მნიშვნელობა. თუ $k+$ $+l\geqslant n$, $k+l=nq+r$, $0\leqslant r<n$ მივიღებთ: $\varepsilon_1^{k+l}=\varepsilon_1^{nq}\cdot\varepsilon_1^r=\varepsilon_r$ $(r<n)$. ამ შემთხვევაშიც $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l$ იქნება (6) ფესვთა შორის ერთ-ერთი გარკვეული მნიშვნელობა. ცხადია, რომ ასოციაციურობის კანონი სრულდება. ერთეულის როლს $\varepsilon_0=1$ ფესვი ასრულებს. ε_k $(k<n)$ ფესვის შებრუნებული ელემენტის როლს ასრულებს ε_{n-k} ფესვი.

მართლაც, $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_{n-k}=\varepsilon_1^k\cdot\varepsilon_1^{n-k}=\varepsilon_1^n=1$, ხოლო ε_{n-k} მნიშვნელობა კი არის (6) ფესვთა შორის ერთ-ერთი გარკვეული ფესვი. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ (6) ფესვთა სიმრავლე ქმნის n რიგის ციკლურ ჯგუფს, რომლის შემქმნელია $\sqrt[n]{1}$-ის ყოველი პირველადი ფესვი.

განხილული მაგალითით მტკიცდება, რომ არსებობს ნებისმიერი რიგის სასრული ჯგუფი. ადვილად შემოწმდება, რომ ყოველი კომპლექსური რიცხვი, რომელიც არის რომელიმე ხარისხის ფესვი ერთიდან, გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის სასრული რიგის ციკლურ ჯგუფს; ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ **ერთიდან ყველა ხარისხის ფესვთა ჯგუფი. ასეთი ჯგუფი, ცხადია, უსასრულოა, მაგრამ ყოველი მისი ელემენტი სასრული რიგისაა.** ამით ჩვენ გავეცანით უსასრულო პერიოდული ჯგუფის კიდევ მეორე მაგალითს.

მაგალითი 3. ადვილად შემოწმდება, რომ $\cos\varphi+i\sin\varphi$ მამრავლის—ოპერატორის—გამოყენება $x+yi$ კომპლექსური რიცხვის მიმართ ტოლფასია წრფივი გარდაქმნისა, რომლის შესაბამისი მატრიცაა

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}. \tag{7}$$

მართლაც, ვთქვათ,

$$(x+yi)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x'+y'i.$$

მივიღებთ შემდეგ წრფივ გარდაქმნას:

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi,$$
$$y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$

რომლის შესაბამისი მატრიცაა (7) მატრიცა. ამრიგად, ყოველ $\cos\varphi+i\sin\varphi$ სახის კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება (7) სახის არაგანსაკუთრებული მატრიცა.

კერძოდ, $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ რიცხვს შეესაბამება

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

მატრიცა, ხოლო $1=\cos 0+i\sin 0$ რიცხვს შეესაბამება $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ მატრიცა.

მათემატიკურ ანალიზში მტკიცდება, რომ ხარისხოვანი

$$1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots \tag{8}$$

მწკრივი, სადაც $z=x+yi$, კრებადია ყოველი z-თვის, ე. ი. კრებადია მთელ კომპლექსურ სიბრტყეზე. ნამდვილ ღერძზე, ე. ი. როცა $z=x$ ეს მწკრივი იქნება ჩვეულებრივი e^x მაჩვენებლიანი ფუნქცია; ბუნებრივია მივიღოთ, რომ ყოველი z კომპლექსური მნიშვნელობისათვის (8) მწკრივი წარმოადგენს ფუნქციას, რომელსაც ვუწოდოთ მაჩვენებლიანი ფუნქცია e ფუძით, და ის e^z-ით აღვნიშნოთ, მაშასადამე, განმარტების თანახმად, გვექნება:

$$e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots \tag{9}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $x=0$, ე. ი. $z=yi$, (9) თანაფარდობიდან ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების დალაგების შემდეგ მივიღებთ:

$$e^{iy}=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\cdots\right)+i\left(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\cdots\right).$$

ვინაიდან მარჯვენა მხარის ფრჩხილებში მოთავსებული მწკრივები შესაბამისად არის $\cos y$ და $\sin y$, გვექნება:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y, \tag{10}$$

სადაც y ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. მიღებულ (10) თანაფარდობას ეილერის ფორმულა ეწოდება. ყოველი $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვი ეილერის ფორმულის მიხედვით შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ: $z=\rho e^{i\varphi}$, სადაც $\rho=|z|$, $\varphi=\arg z$ და $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. თუ (10) თანაფარდობაში y-ის ნაცვლად ჩავსვამთ ჯერ t-ს და შემდეგ $-t$-ს, მივიღებთ:

$$e^{it}=\cos t+i\sin t,\quad e^{-it}=\cos t-i\sin t.$$

ამ ორი ტოლობიდან $\cos t$ და $\sin t$ ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისათვის მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2},\qquad \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}. \tag{11}$$

მიღებულ ფორმულებს დიდი გამოყენება აქვთ ფიზიკაში, მათემატიკურ ანალიზში, გეომეტრიაში და სხვა მეცნიერებებში. (11) თანაფარდობებიდან ჩანს, რომ **კომპლექსურ სიბრტყეზე** არსებობს t არგუმენტის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის სინუსი ან კოსინუსი შესაბამისად უდრის ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $e^{\pi i}$.

თუ ეილერის (10) თანაფარდობაში ჩავსვამთ $y=\pi$, მივიღებთ:

$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

§ 24. ჰიპერკომპლექსური რიცხვები (კვატერნიონები)

ვთქვათ, D ნამდვილ რიცხვთა ველზე მოცემულია ოთხგანზომილებიანი $D^{(4)}$ ვექტორული სივრცე, რომლის 1, i, j და k საბაზისო ელემენტები დაკავშირებულია შემდეგ გამრავლებათა ცხრილით:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ საბაზისო ელემენტთა ნამრავლისათვის მართებულია ასოციაციურობის კანონი და არაა მართებული კომუტაციურობის კანონი. მაგალითად, $ij=k$ და $ji=-k$, ე. ი. $ij\neq ji$. ყოველი ოთხგანზომილებიანი $\alpha=(a, b, c, d)$ ვექტორი შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\alpha=a+bi+cj+dk. \tag{1}$$

(1) სახის ყოველ ელემენტს კვატერნიონი ან კიდევ ჰიპერკომპლექსური რიცხვი ეწოდება. მოცემული კვატერნიონის ნამდვილ ნაწილს, ე. ი. a-ს ეწოდება სკალარული ნაწილი, ხოლო $bi+cj+dk$ ეწოდება ვექტორული ნაწილი. ორ $\alpha=a+bi+cj+dk$ და $\alpha'=a'+b'i+c'j+d'k$ კვატერნიონს ეწოდება ტოლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$ და $d=d'$. აქედან გამოდის, რომ $\alpha=a+bi+cj+dk$ კვატერნიონი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, როცა $a=b=c=d=0$. შემდეგ, $a-bi-cj-dk$ კვატერნიონს ეწოდება $\alpha=a+bi+cj+dk$ კვატერნიონის შეუღლებული კვატერნიონი და აღინიშნება $\bar{\alpha}$ სიმბოლოთი. საბაზისო ელემენტთა გამრავლების ცხრილის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ:

$$\bar{\alpha}\alpha=\alpha\bar{\alpha}=(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk)=a^2+b^2+c^2+d^2, \tag{2}$$

ე. ი. ორი ურთიერთშეუღლებული კვატერნიონის ნამრავლი დადებითი ნამდვილი რიცხვია. $T=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ სიდიდეს, რომლის წინ დადებითი ნიშანია, ეწოდება მოცემული კვატერნიონის აბსოლუტური სიდიდე ან კიდევ ტენზორი.

შემდეგ, კვატერნიონთა ნამრავლისათვის გვექნება:

$$(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)=$$
$$=(aa'-bb'-cc'-dd')+(a'b+ab'+cd'+dc')i+$$
$$+(a'c+ac'+b'd-bd')j+(a'd+ad'+bc'-b'c)k. \qquad (3)$$

კვატერნიონთა გამრავლების ამ (3) თანაფარდობის მიხედვით მივიღეთ, რომ ყოველი ორი კვატერნიონის ნამრავლი ისევ კვატერნიონია. ადვილად შემოწმდება, რომ კვატერნიონთა ნამრავლისათვის სრულდება ასოციაციურობის კანონი და არ სრულდება კომუტაციურობის კანონი.

(2) თანაფარდობიდან გამოდის, რომ ყოველ ნულისაგან განსხვავებულ $a+bi+cj+dk$ კვატერნიონს შებრუნებული კვატერნიონი აქვს და ის უდრის

$$\frac{a-bi-cj-dk}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ორი კვატერნიონის შეფარდება ისევ კვატერნიონია. ამრიგად, კვატერნიონთა სიმრავლე ქმნის არაკომუტაციურ ველს ან, რაც იგივეა, ქმნის **კვატერნიონთა ტანს**. როგორც კომპლექსურ რიცხვთა ველისათვის, მეორე რიგის მატრიცთა ველში, გამოვყავით მისი იზომორფული ქვეველი, ისე კვატერნიონთა ტანისათვის მეოთხე რიგის მატრიცთა ველში შეიძლება გამოვყოთ მისი იზომორფული არაკომუტაციური ქვეველი. მართლაც, ვთქვათ:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad I=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ

$$\{aE+bI+cJ+dK\}=\left\{\begin{pmatrix}a&-b&-c&-d\\b&a&-d&c\\c&d&a&-b\\d&-c&b&d\end{pmatrix}\right\}$$

სახის მატრიცთა ტანი იზომორფულია $\{a+bi+cj+dk\}$ სახის კვატერნიონთა ტანისა. ახლა თუ:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

სადაც $i=\sqrt{-1}$, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მეორე რიგის კომპლექსურელემენტებიან მატრიცთა ტანი

$$\{aE+bI+cJ+dK\}=\left\{\begin{pmatrix} a-ci, & b+di \\ -b+di, & a+ci \end{pmatrix}\right\}$$

იზომორფულია $(a+bi+cj+dk)$ კვატერნიონთა ტანისა.

როგორც ვიცით (გვ. 160), ყოველი რგოლი შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის აბელურ ჯგუფს, რომელსაც მოცემული რგოლის ადიციური ჯგუფი ეწოდება.

ისეთ R რგოლს, რომლის ადიციური ჯგუფი არის n განზომილებიანი ვექტორული სივრცე და რომლის ნებისმიერი ორი $\alpha, \beta \in R$ ელემენტის ნამრავლი, P ველიდან აღებულ ნებისმიერ k რიცხვზე ნამრავლთან დაკავშირებულია

$$(k\alpha)\beta=\alpha(k\beta)=k(\alpha\beta)$$

თანაფარდობით, ეწოდება ალგებრა P ველზე. n რიცხვს — ალგებრის შესაბამისი ადიციური ჯგუფის, ანუ $P^{(n)}$ ვექტორული სივრცის, განზომილებას—ეწოდება **ალგებრის რანგი.** ისეთ ალგებრას, რომელიც არის არა მარტო რგოლი, არამედ ველიც, ეწოდება **ალგებრა გაყოფით** ან **გაყოფიანი ალგებრა.**

ადვილად შემოწმდება, რომ კომპლექსურ რიცხვთა ველი ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ არის ასოციაციური ალგებრა გაყოფით, რომლის რანგი უდრის 2-ს. აგრეთე ჰიპერკომპლექსურ რიცხვთა ტანი ნამდვილ რიცხვთა ველზე არის ასოციაციური ალგებრა გაყოფით, რომლის რანგი უდრის 4-ს.

ბუნებრივად ისმება კითხვა, შეიძლება თუ არა აიგოს ისეთი ველი — ალგებრა, რომლის რანგი D ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ ტოლი იქნება სამის ან აღემატება ოთხს. ამ კითხვას პასუხობს ფრობენიუსის შემდეგი

თეორემა. ნამდვილ რიცხვთა ველი, კომპლექსურ რიცხვთა ველი და კვატერნიონთა ტანი არიან ერთადერთი სასრული რანგის (ასოციაციური) ალგებრები გაყოფით ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ.

ვინაიდან აღნიშნული თეორემა შემდგომ არ გვჭირდება და გამოდის ჩვენი კურსის ფარგლებიდან, მის დამტკიცებას აქ არ მოვიყვანთ.

თ ა ვ ი VI

მრავალწევრთა რგოლი და მრავალწევრთა დაშლა

§ 25. მრავალწევრთა რგოლი ერთი ცვლადის მიმართ ნებისმიერ ველზე

უძველესი დროიდან დღემდე ალგებრის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ერთუცნობიან ალგებრულ განტოლებათა შესწავლა.

n-ური ხარისხის ყოველ განტოლებას (სადაც n რაიმე, მთელი დადებითი რიცხვია), რომლის კოეფიციენტები რიცხვთა P ველიდანაა აღებული და რომელსაც

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

სახე აქვს, ეწოდება n-ური ხარისხის ალგებრული განტოლება P ველზე. ჩვენ შემდგომ, რამდენადაც ეს შესაძლებელია უმაღლესი ალგებრის კურსის ფარგლებში, დაწვრილებით შევისწავლით ალგებრულ განტოლებათა რადიკალებში, გრაფიკულ და მიახლოებით ამოხსნადობის საკითხებს. ამ მიზნით საჭიროა პირველ რიგში შევისწავლოთ (1) ალგებრული განტოლების მარცხენა მხარე, რომელსაც ეწოდება n-ური ხარისხის **მრავალწევრი** P ველზე x-ის მიმართ.

მრავალწევრის ან, რაც იგივეა, x-ის მიმართ **მთელი რაციონალური ფუნქციის** ცნება, რომელიც დიდ როლს ასრულებს ალგებრაში, წარმოიშვა უძველესი დროიდან ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნასთან დაკავშირებით.

ვთქვათ, P ნებისმიერი რიცხვთა ველია, ხოლო x ელემენტია, რომელიც P ველში არ მდებარეობს. თუ x-ზე და P ველის რიცხვებზე მოვახდენთ სასრულ რიცხვჯერ შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების მოქმედებებს, ე. ი. P ველს **გავაფართოებთ** x ელემენტით, მაშინ გაფართოების შედეგად მიღებული სიმრავლის ყოველ **ელემენტს** ექნება შემდეგი სახე:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n, \tag{2}$$

სადაც a_0, a_1, …, $a_n \in P$. (2) გამოსახულება აგრეთვე არის x-ის ზრდადი ხარისხების მიხედვით დალაგებული n-ური ხარისხის მრავალწევრი P ველზე.

კარგად უნდა დავიხსომოთ, რომ **x ასოს მიმართ მრავალწევრი ეწოდება x უცნობის მთელი დადებითი ხარისხების ალგებრულ ჯამს, კოეფიციენტებით რიცხვთა P ველიდან.** საშუალო სკოლის კურსში მრავალწევრი განმარტებულია როგორც ერთწევრების ჯამი; ცხადია, მრავალწევრის ასეთი განმარტება არაა სწორი. მაგალითად, ერთწევრების ჯამი

$$ax^{-4}+bx^{-1}+cx+dx^3+l \text{ ან } x^{\frac{3}{4}}+2x^{-2}+5$$

არაა მრავალწევრი. შემდგომ, მრავალწევრებზე მოქმედებებისათვის ხელსაყრელია მრავალწევრის წარმოდგენა x-ის ზრდადი ხარისხების მიხედვით. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ ყველა მრავალწევრს x-ის მიმართ (2) სახე აქვს. შევნიშნოთ, რომ x-ის მიმართ მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები ეკუთვნის ნებისმიერ ერთეულის მქონე კომუტაციურ რგოლს ან P კომუტაციურ ველს, შეიძლება ამგვარადვე განიმარტოს. სიმოკლისათვის მრავალწევრები აღვნიშნოთ $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ და ა. შ. სიმბოლოებით. ვიგულისხმოთ, რომ x-ის მიმართ მრავალწევრები მოცემულია ნებისმიერ კომუტაციურ P ველზე.

ორ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრს უწოდებენ ტოლს, თუ მათი ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები ტოლია. ვიტყვით, რომ $f(x)$ მრავალწევრი იგივურად უდრის ნულს, თუ ის, x-ის ყოველი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის, უდრის ნულს; ამას ასე აღნიშნავენ: $f(x)\equiv 0$.

P ველის ნულს ვღებულობთ მრავალწევრად და მას ვუწოდებთ **ნულმრავალწევრს.** ნულმრავალწევრის ხარისხი განუსაზღვრელია. ასე, მაგალითად, $0x+0=0$, $0x^3+0x^2+0x=0$ და ა. შ. ცხადია, რომ x-ის მიმართ ნულმრავალწევრები x-ის ყოველი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის უდრიან ნულს, ე. ი. ნულმრავალწევრები იგივურად უდრიან ნულს. მრავალწევრთა ტოლობის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ **x ასოს მიმართ მრავალწევრი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულმრავალწევრს, როცა ყველა მისი კოეფიციენტი ნულია.** მრავალწევრების ნულთან ტოლობა არ უნდა ავურიოთ ალგებრულ განტოლებასთან, სადაც საძებნია ყველა ის x, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. ველის ნულისაგან განსხვავებული ყოველი c რიცხვი, შეიძლება მივიღოთ ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრად: $c=cx^0$.

ახლა შემოვიღოთ ნებისმიერი ორი მრავალწევრის ჯამისა და ნამრა-

ვლის ცნება. ვთქვათ, მოცემულია ორი მრავალწევრი:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n \quad (a_n\neq 0)$$

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_{s-1}x^{s-1}+b_sx^s \quad (b_s\neq 0).$$

თუ $n\geqslant s$, მაშინ მოცემული ორი მრავალწევრის ჯამი ვუწოდოთ ისეთ მესამე

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n=\varphi(x)$$

მრავალწევრს, რომლის კოეფიციენტები მიიღება $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა x-ის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტების შეკრებით, ე. ი.

$$c_i=a_i+b_i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ s,\ \dots,\ n), \tag{3}$$

თუ $n>s$, მაშინ $c_{s+1}=a_{s+1},\dots,\ c_n=a_n$ და ჯამის ხარისხი უდრის n-ს. მაგრამ, როცა $n=s$, მაშინ ჯამის ხარისხი შეიძლება ნაკლები გამოვიდეს n-ზე; ეს მხოლოდ მაშინაა შესაძლებელი, როცა $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უფროს წევრთა კოეფიციენტების ჯამი უდრის ნულს, ე. ი. $a_n=-b_n$.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ნამრავლი ვუწოდოთ ისეთ მესამე

$$f(x)g(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+\dots+d_{n+s-1}x^{n+s-1}+d_{n+s}x^{n+s}=t(x)$$

მრავალწევრს, რომლის d_k კოეფიციენტი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების კოეფიციენტებით განისაზღვრება ასე:

$$d_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\dots+a_{k-1}b_1+a_kb_0 \quad (k=0,\ 1,\ \dots,\ n+s). \tag{4}$$

ვინაიდან რიცხვთა P ველი არ შეიცავს ნულგამყოფ ელემენტებს, ნამრავლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი $d_{n+s}=a_nb_s$ განსხვავებულია ნულისაგან; ეს იმას ნიშნავს, რომ **ორი მრავალწევრის ნამრავლის ხარისხი უდრის თანამამრავლთა ხარისხების ჯამს.** $f(x)$ მრავალწევრის შებრუნებული მრავალწევრი შეკრების ოპერაციის მიმართ ეწოდება ისეთ მრავალწევრს, რომლის ჯამი $f(x)$-თან უდრის ნულმრავალწევრს. $f(x)$ მრავალწევრის შებრუნებულ მრავალწევრს შეკრების ოპერაციის მიმართ აქვს შემდეგი სახე:

$$-a_0-a_1x-a_2x^2-\dots-a_nx^n=-f(x).$$

ადვილად შემოწმდება, რომ x ასოს მიმართ მრავალწევრთა სიმრავლე კომუტაციურ P ველზე ქმნის **მრავალწევრთა კომუტაციურ რგოლს.**

მართლაც, რიცხვთა P ველის კომუტაციურობის გამო, ყოველი ორი მრავალწევრის ჯამისა და ნამრავლის კომუტაციურობა უშუალოდ გამოდის (3) და (4) თანაფარდობათა მიხედვით, ე. ი.

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x) \text{ და } f(x)g(x)=g(x)f(x).$$

კომუტაციურ ველზე ყოველი ორი მრავალწევრის ჯამისა და ნამრავლის განმარტების (3) და (4) ფორმულებით ადვილად შემოწმდება, რომ ყოველი სამი $f(x)$, $g(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრისათვის შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის მიმართ ადგილი აქვს ასოციაციურობის კანონს, ე. ი.

$$f(x)+[g(x)+\varphi(x)]=[f(x)+g(x)]+\varphi(x), \tag{5}$$

$$f(x)[g(x)\cdot\varphi(x)]=[f(x)g(x)]\cdot\varphi(x). \tag{6}$$

შემდეგ, მრავალწევრთა ჯამი და ნამრავლი ურთიერთდაკავშირებულია დისტრიბუტიულობის კანონით, ე. ი.

$$[f(x)+g(x)]\cdot\varphi(x)=f(x)\cdot\varphi(x)+g(x)\cdot\varphi(x). \tag{7}$$

ჩვენ შევამოწმოთ მხოლოდ (6) ტოლობის მართებულობა; ვიგულისხმოთ, რომ

$$\varphi(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_lx^l$$

და

$$g(x)\ \varphi(x)=s_0+s_1x+s_2x^2+\cdots+s_{r+l-1}x^{r+l-1}+s_{r+l}x^{r+l}=s(x),$$

სადაც

$$s_l=b_0c_l+b_1c_{l-1}+\cdots+b_{l-1}c_1+b_lc_0. \tag{8}$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ (6) ტოლობის მარცხენა მხარის $f(x)$ და $s(x)$ მრავალწევრების გამრავლების შედეგად მიღებული მრავალწევრია

$$\lambda(x)=m_0+m_1x+m_2x^2+\cdots+m_{n+r+l}x^{n+r+l},$$

ხოლო მარჯვენა მხარის გამრავლების შედეგად მიღებული მრავალწევრი კი

$$\lambda'(x)=m_0'+m_1'x+m_2'x^2+\cdots+m_{n+r+l}'x^{n+r+l}.$$

უბრალო გამოთვლებით, (3) და (4) ტოლობათა გამოყენებით, მივიღებთ, რომ

$$m_i=m_i' \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n+r+l). \tag{9}$$

სიმარტივისათვის გამოვთვალოთ m_i კოეფიციენტი, როცა $i=2$. მივიღებთ $m_2=a_0s_2+a_1s_1+a_2s_0$, თუ ჩავსვამთ s_2, s_1 და s_0-ის მნიშვნელობებს (8) ფორმულიდან, მივიღებთ:

$$m_2=a_0b_0c_2+a_0b_1c_1+a_0b_2c_0+a_1b_0c_1+a_1b_1c_0+a_2b_0c_0.$$

ანალოგიურად, თუ გამოვთვლით m_2' კოეფიციენტს, მივიღებთ, რომ $m_2'=m_2$. ამნაირად შემოწმდება (9) ტოლობის მართებულობა ყოველი i-თვის. ამრიგად, $\lambda(x)$ მრავალწევრი უდრის $\lambda'(x)$ მრავალწევრს და ამით მრავალწევრთა გამრავლების მიმართ ასოციაციურობის კანონი ნებისმიერ კომუტაციურ P ველზე დამტკიცებულია. მაშასადამე, x

ასოს მიმართ მრავალწევრთა სიმრავლე ნებისმიერ კომუტაციურ P ველზე ქმნის მრავალწევრთა რგოლს. მიღებული რგოლი აღვნიშნოთ $P[x]$ სიმბოლოთი. ვინაიდან P ველის ყოველი a ელემენტი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან, ამიტომ ცხადია, რომ P ველი შედის $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში. აქედან ჩანს, რომ P **ველი შეიძლება განვიხილოთ როგორც** $P[x]$ **რგოლის ქვეველი.** $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლის ერთეულის როლს ასრულებს P ველის ერთეული. რადგან P ველში არ არის ნულგამყოფი ელემენტები, (4) თანაფარდობის მიხედვით მივიღებთ, რომ არც $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში იქნება ნულგამყოფი ელემენტები. ვინაიდან ნულზე მაღალი ხარისხის მრავალწევრის შებრუნებული არაა მრავალწევრი, ამიტომ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლი არ ქმნის ველს.

ცხადია, რომ ერთეულის მქონე ყოველ R რგოლზე მრავალწევრთა სიმრავლე x ასოს მიმართ ქმნის მრავალწევრთა კომუტაციურ რგოლს, რომელიც აღინიშნება $R[x]$ სიმბოლოთი. ამრიგად, ყოველ რიცხვთა P ველზე და ერთეულის მქონე R რიცხვთა რგოლზე x ასოს მიმართ მრავალწევრთა სიმრავლე შესაბამისად ქმნის $P[x]$ და $R[x]$ მრავალწევრთა კომუტაციურ რგოლებს. ადვილად შევნიშნავთ, რომ, თუ P ველი $\overline{P}$ ველის საკუთარი ქვეველია, ე. ი. $P \subset \overline{P}$, მაშინ $P[x] \subset \overline{P}[x]$. სავარჯიშოს სახით სასურველია დამტკიცდეს, რომ, თუ x და y უცნობები R რგოლში არ მდებარეობს, მაშინ მრავალწევრთა $R[x]$ და $R[y]$ რგოლები ურთიერთიზომორფულია, ე. ი. $R[x] \cong R[y]$. აქედან გამომდინარეობს ერთი ასოს მიმართ მრავალწევრთა რგოლის ერთადერთობა იზომორფულობამდე სიზუსტით.

ალგებრული და ტრანსცენდენტური ელემენტების (რიცხვის) განსაზღვრა. ისეთ α რიცხვს, რომელიც შეიძლება იყოს რაციონალურ რიცხვთა ველზე აღებული ერთი რომელიმე n-ური ($n \geqslant 1$) ხარისხის ალგებრული განტოლების ფესვი მაინც, ეწოდება **ალგებრული** რიცხვი, წინააღმდეგ შემთხვევაში α-ს ეწოდება **ტრანსცენდენტური რიცხვი.**

მაგალითები. ყოველი $\alpha = \sqrt[n]{a}$ რადიკალი, სადაც a რაციონალური რიცხვია, არის ალგებრული რიცხვი. მართლაც, ის წარმოადგენს $x^n - a = 0$ რაციონალურკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ფესვს.

მაგალითად, $\alpha = i$ რიცხვი, რადგან ის წარმოადგენს $x^2 + 1 = 0$ მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ფესვს, არის ალგებრული რიცხვი. ადვილად შემოწმდება, რომ რიცხვები: $1 + \sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{1 + \sqrt{3}}$ და

ა. შ. ალგებრულია. მაგალითად, შევამოწმოთ, რომ რიცხვი $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ალგებრულია. აღვნიშნოთ:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}};$$

მივიღებთ:

$$x^6-5=2\sqrt{6}, \quad x^{12}-10x^6+1=0.$$

ამრიგად, $\alpha=\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ რიცხვი, $x^{12}-10x^6+1=0$ მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ფესვია. ამიტომ მოცემული რიცხვი ალგებრულია.

მაგალითად, π და e რიცხვებისათვის არ არსებობს რაციონალურკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლება, რომლის ერთ-ერთი ფესვი იქნება ან π, ან e, ამიტომ ეს რიცხვები ტრანსცენდენტურია. საბჭოთა კავშირის ცნობილმა მათემატიკოსმა ა. ო. გელფონდმა 25—30 წლის წინათ დაამტკიცა $m^{\sqrt{n}}$ (სადაც, $m>1$ და n მთელია, ხოლო $\sqrt{n}$ ირაციონალური) სახის რიცხვების ტრანსცენდენტურობა. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში მტკიცდება, რომ **ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, ხოლო ტრანსცენდენტურ რიცხვთა სიმრავლე კი კონტინუუმის სიმძლავრისაა;** უხეშად, რომ ვთქვათ, ტრანსცენდენტურ რიცხვთა სიმრავლე გაცილებით მეტია ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლეზე. შემდეგ დავამტკიცებთ, რომ ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე ქმნის ველს.

საზოგადოდ, P ველის შემცველი რგოლის რომელიმე α ელემენტს ეწოდება ალგებრული ელემენტი P ველის მიმართ, თუ P ველზე არსებობს ერთი n-ური, $n\geqslant 1$, ხარისხის ისეთი ალგებრული განტოლება მაინც, რომლის ფესვი არის α, წინააღმდეგ შემთხვევაში α ელემენტს ეწოდება ტრანსცედენტური ელემენტი P ველის მიმართ.

მაგალითად, მეორე რიგის დიაგონალურ მატრიცთა $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\}$ რგოლიდან აღებული $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ელემენტი, მეორე რიგის სკალარულ მატრიცთა $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right\}$ ველის მიმართ იქნება ალგებრული ელემენტი. მართლაც, $x^2-E=0$ ალგებრულ განტოლებას, სადაც $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, აკმაყოფილებს $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ელემენტი.

ვინაიდან x-ის მიმართ $n \geqslant 1$ ხარისხის მრავალწევრი მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, როცა ყველა მისი კოეფიციენტი ნულია, ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლის x ელემენტი ტრანსცენდენტურია P ველის მიმართ.

§ 26. მრავალწევრთა გაყოფადობა

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები აღებულია $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან. $g(x)$ მრავალწევრს ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის გამყოფი, თუ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში მოიძებნება ისეთი $\lambda(x)$ მრავალწევრი, რომ:

$$f(x)=g(x)\lambda(x). \tag{1}$$

თუ $g(x)$ მრავალწევრი გამყოფია $f(x)$ მრავალწევრისა, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრს $\varphi(x)$ მრავალწევრის **ჯერადი** ეწოდება. განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\lambda(x)$ მრავალწევრი აგრეთვე იქნება $f(x)$ მრავალწევრის გამყოფი. ცხადია, $g(x)$ და $\lambda(x)$ მრავალწევრების ხარისხები არ აღემატება $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხს.

მაგალითად, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან, სადაც P რაციონალურ რიცხვთა ველია, აღებული $f(x)=x^2-5x+6$ მრავალწევრისათვის $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ მრავალწევრი გამყოფია. მართლაც, რაციონალურ რიცხვთა P ველზე მოიძებნება ისეთი $\lambda(x)=2x-4$ მრავალწევრი, რომ:

$$x^2-5x+6=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\left(2x-4\right).$$

მაგალითად, $f(x)=x^2+4$ მრავალწევრს ნამდვილ რიცხვთა ველზე გამყოფები არ აქვს, ხოლო კომპლექსურ რიცხვთა ველზე მისი გამყოფებია $x+2i$ და $x-2i$.

$P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ნებისმიერი ორი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრისათვის მტკიცდება შემდეგი

თეორემა. **$P(x)$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ნებისმიერი ორი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრისათვის $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ორი $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას:**

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x), \tag{2}$$

სადაც $r(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე და ასეთი $q(x)$ და $r(x)$ ერთადერთია. $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრებს შესაბამისად ეწო-

დებათ $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული **განაყოფი და ნაშთი.**

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

და

$$g(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_{s-1}x+b_s$$

მრავალწევრები, რომელთა ხარისხია შესაბამისად n და s. თუ $n<s$, მაშინ $q(x)=0$ და $r(x)=f(x)$. ვიგულისხმოთ, რომ $n\geqslant s$. $q(x)$-ისა და $r(x)$-ის მოსაძებნად გამოვიყენოთ საშუალო სკოლიდან ცნობილი — მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული — განაყოფისა და ნაშთის მოძებნის მეთოდი. განვიხილოთ სხვაობა

$$f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}g(x)=f_1(x). \tag{3}$$

აქ $\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}g(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრი უდრის $f(x)$ მრავალწევრის უფროს წევრს, ამიტომ $f_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია, ვიდრე $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი. $f_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ავღნიშნოთ n_1-ით, ხოლო უფროსი წევრის კოეფიციენტი $a_0^{(1)}$-ით. თუ $n_1\geqslant s$, მაშინ $f_1(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის (3) ტოლობის ანალოგიურად გვექნება:

$$f_1(x)-\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-s}g(x)=f_2(x)\ , \tag{4}$$

სადაც $f_2(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია, ვიდრე $f_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხი. $f_2(x)$ მრავალწევრის ხარისხი აღვნიშნოთ n_2-ით, ხოლო უფროსი წევრის კოეფიციენტი — $a_0^{(2)}$-ით, თუ $n_2\geqslant s$, მაშინ $f_2(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის მივიღებთ:

$$f_2(x)-\frac{a_0^{(2)}}{b_0}x^{n_1-s}g(x)=f_3(x) \tag{5}$$

და ა. შ. ამ პროცესის გაგრძელების შედეგად, რადგან $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... მრავალწევრთა ხარისხები თანდათანობით კლებულობს, ე. ი. $n_1>n_2>n_3\ldots$, სასრული ნაბიჯის შემდეგ ჩვენ მივიღებთ ისეთ $f_{k+1}(x)$ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი n_{k+1} უკვე ნაკლები იქნება $g(x)$ მრავალწევრის s ხარისხზე:

$$f_k(x)-\frac{a_0^{(k)}}{b_0}x^{n_k-s}g(x)=f_{k+1}(x). \tag{6}$$

ახლა, თუ შევკრებთ (3), (4), (5) და (6) ტოლობებს, სათანადო დალაგების შემდეგ მივიღებთ;

$$f(x)=\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}+\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-s}+\cdots+\frac{a_0^{(k)}}{b_0}x^{n_k-s}\right)g(x)+f_{k+1}(x). \qquad (7)$$

აღვნიშნოთ

$$q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}+\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-s}+\ldots+\frac{a_0^{(k)}}{b_0}x^{n_k-s} \text{ და } r(x)=f_{k+1}(x).$$

ამრიგად, მიღებული $r(x)=f_{k+1}(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. ადვილად შევამჩნევთ აგრეთვე, რომ ვინაიდან $f_1(x)$, $f_2(x)$,... მრავალწევრთა კოეფიციენტები გამოისახებიან $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა კოეფიციენტებით და იმ ოპერაციებით, რომლებიც რიცხვთა P ველში სრულდება, $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრები მოთავსებული იქნება $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში. ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში მოიძებნება ორი სხვა ისეთი $q'(x)$ და $r'(x)$მრავალწევრი, რომ

$$f(x)=g(x)q'(x)+r'(x), \qquad (8)$$

სადაც $r'(x)$ მრავალწევრის (ნაშთის) ხარისხი ისევ ნაკლებია $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. განვიხილოთ (2) და (8) ტოლობათა სხვაობა, მივიღებთ:

$$g(x)[q(x)-q'(x)]=r'(x)-r(x). \qquad (9)$$

(5) ტოლობიდან ჩანს, რომ $q(x)-q'(x)=0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ (5) ტოლობის მარცხენა მხარეში უფრო მაღალი ხარისხის მრავალწევრი გვაქვს, ვიდრე მარჯვენა მხარეში, რაც შეუძლებელია. ამგვარად, $q(x)-q'(x)=0$, $r'(x)-r(x)=0$, ე. ი. $q(x)=q'(x)$, $r(x)=r'(x)$ და თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

$q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრების მოძებნის ამ მეთოდს ხშირად $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ნაშთიანი გაყოფადობის ალგორითმს უწოდებენ. ცხადია, რომ თუ $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული $r(x)$ ნაშთი ნული გამოვიდა, მაშინ $g(x)$ მრავალწევრი იქნება $f(x)$ მრავალწევრის გამყოფი. მაშასადამე, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში **$g(x)$ მრავალწევრი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება $f(x)$ მრავალწევრის გამყოფი, თუ $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი უდრის ნულს.**

ადვილად შევამჩნევთ, რომ თუ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული $g(x)$ მრავალწევრი არ არის ამავე რგოლიდან აღებული $f(x)$ მრავალწევრის გამყოფი, მაშინ $g(x)$ მრავალწევრი არ იქნება $f(x$

მრავალწევრის გამყოფი ნებისმიერი სხვა $\overline{P}[x]$ მრავალწევრთა რგოლში, სადაც $P\subset\overline{P}$.

მართლაც, ამისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული განაყოფი $q(x)$ და ნაშთი $r(x)$ ისევ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს ეკუთვნის.

ახლა განვიხილოთ მრავალწევრთა გაყოფადობის ზოგიერთი თვისება.

1. $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ყოველი $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა P ველიდან აღებულ ყოველ ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე, ანუ ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრზე.

მართლაც, ვთქვათ, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, სადაც $a_0, a_1, \ldots, a_n\in P$ რადგან $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ყოველი ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი გარკვეული c რიცხვია P ველიდან, ამიტომ, როცა $c\neq 0$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x)=c\left(\frac{a_0}{c}x^n+\frac{a_1}{c}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_n}{c}\right),$$

სადაც ფრჩხილებში მოთავსებული მრავალწევრი $\frac{1}{c}f(x)=\frac{a_0}{c}x^n+$ $+\frac{a_1}{c}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_n}{c}$ ეკუთვნის ისევ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს.

შედეგი. თუ $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე და c ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია P ველიდან, მაშინ $f(x)$ გაიყოფა $cg(x)$ მრავალწევრზე.

მართლაც, რადგან $g(x)$ გამყოფია მრავალწევრისა, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში მოიძებნება ისეთ $h(x)$ მრავალწევრი, რომ

$$f(x)=g(x)\cdot h(x).$$

აქედან ვღებულობთ $f(x)=[cg(x)]\cdot\left[\frac{1}{c}h(x)\right]$, სადაც $\frac{1}{c}$ $h(x)$ ეკუთვნის ისევ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს და ამით შედეგი დამტკიცებულია. ახლა, რადგან ყოველი $f(x)\neq 0$ მრავალწევრი იყოფა თავის თავზე, ვღებულობთ, რომ ყოველი $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $c.f(x)$ მრავალწევრზე, სადაც c არის P ველის ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვი.

2. თუ $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე და $g(x)$ იყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრი, გაიყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე.

მართლაც, განმარტების თანახმად, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში შე-

საბამისად მოიძებნება ისეთი $h(x)$ და $\lambda(x)$ მრავალწევრები, რომ

$$f(x)=g(x)h(x), \ \ g(x)=\varphi(x)\lambda(x).$$

აქედან ვღებულობთ

$$f(x)=\varphi(x)[\lambda(x)h(x)],$$

სადაც, $\lambda(x)h(x)$ მრავალწევრი ეკუთვნის ისევ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს.

ამით მე-2 თვისება დამტკიცებულია.

3. თუ $\varphi(x)$ მრავალწევრი გამყოფია როგორც $f(x)$, ისე $g(x)$ მრავალწევრებისა, მაშინ ის გამყოფი იქნება $f(x)\pm g(x)$ მრავალწევრებისაც.

მართლაც, განმარტების თანახმად, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში მოიძებნება შესაბამისად ისეთი ორი $h(x)$ და $\lambda(x)$ მრავალწევრი, რომ

$$f(x)=\varphi(x)h(x), \ \ g(x)=\varphi(x)\lambda(x).$$

აქედან ვღებულობთ:

$$f(x)\pm g(x)=\varphi(x)[h(x)\pm\lambda(x)],$$

სადაც $h(x)\pm\lambda(x)$ მრავალწევრი ეკუთვნის ისევ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს. ამრიგად, $f(x)\pm g(x)$ იყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე.

შედეგი. თუ ნებისმიერი ორი მრავალწევრის ჯამი და ერთ-ერთი შესაკრები იყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ მეორე შესაკრებიც გაიყოფა ამავე მრავალწევრზე.

4. თუ $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე და, პირიქით, $g(x)$ იყოფა $f(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ $f(x)=c.g(x)$, სადაც c ნულისაგან განსხვავებული გარკვეული რიცხვია P ველიდან.

მართლაც, რადგან $f(x)$ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე, ამიტომ $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხი s არ აღემატება $f(x)$ მრავალწევრის n ხარიხსს, ე. ი. $s\leqslant n$. მეორე მხრივ, რადგან $g(x)$ მრავალწევრი იყოფა $f(x)$ მრავალწევრზე, ამიტომ $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი არ აღემატება $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხს, ე. ი. $n\leqslant s$. ამ ორი უტოლობის შედარებიდან ვღებულობთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ხარისხები ტოლია $n=s$. მაშასადამე, $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრს, ე. ი. $f(x)=c\cdot g(x)$, სადაც c ნულისაგან განსხვავებული გარკვეული რიცხვია P ველიდან.

5. თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებიდან ერთ-ერთი იყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ მათი ნამრავლიც გაიყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე.

მართლაც, ვთქვათ, $g(x)$ იყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ, პირო-

ბის თანახმად, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში მოიძებნება ისეთი $\lambda(x)$ მრავალწევრი, რომ $g(x)=\varphi(x)\lambda(x)$. აქედან ვღებულობთ $f(x)\cdot g(x)= =\varphi(x)[f(x).\lambda(x)]$, სადაც $f(x)\lambda(x)$ ეკუთვნის $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს.

შედეგი. $f(x)$ **მრავალწევრის ყოველი გამყოფი არის** $c\cdot f(x)$ **მრავალწევრის გამყოფი და, პირიქით.**

მე-3 და მე-5 თვისებათა გაერთიანებით მივიღებთ, რომ, თუ $P(x)$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ყოველი $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots$, $f_k(x)$ მრავალწევრი იყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ ნამრავლთა ალგებრული ჯამი

$$g_1(x)f_1(x)\pm g_2(x)f_2(x)\pm\ldots\pm g_k(x)f_k(x),$$

სადაც $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_k(x)$ ეკუთვნის $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს, აგრეთვე გაიყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე.

მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები აღებულია $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან, ამავე მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულ ისეთ $\varphi(x)$ მრავალწევრს, რომელზედაც იყოფა როგორც $f(x)$, ისე $g(x)$ მრავალწევრები, ეწოდება $f(x$ და $g(x)$ მრავალწევრთა **საერთო გამყოფი.** $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების საერთო გამყოფთა შორის ისეთ საერთო გამყოფს, რომელიც იყოფა მოცემულ მრავალწევრთა ნებისმიერ საერთო გამყოფზე, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა **უდიდესი საერთო გამყოფი** ეწოდება და $[f(x), g(x)]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

როგორც ვიცით, თუ $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ ის გაიყოფა ყოველ $c\varphi(x)$ მრავალწევრზე, სადაც $c\epsilon P$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია. აქედან ის გამომდინარეობს, რომ, თუ $\varphi(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა საერთო გამყოფი, მაშინ ყოველი $c\cdot\varphi(x)$, სადაც $c\epsilon P$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია, აგრეთვე იქნება $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა საერთო გამყოფი. მაშასადამე, ყოველი ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი განმარტებულია მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით. ამის გამო, ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფის უფროსი წევრის კოეფიციენტი ყოველთვის შეიძლება მივიღოთ ერთის ტოლად.

ისეთ ორ მრავალწევრს, რომელთა უდიდესი საერთო გამყოფი მუდმივი სიდიდეა, ეწოდებათ **ურთიერთმარტივი მრავალწევრები.**

თუ $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული განაყოფი და ნაშთი შესაბამისად არის $g(x)$ და $r(x)$, ე. ი.

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

მაშინ ადვილად დამტკიცდება, რომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის $g(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრების უდიდეს საერთო გამყოფს.

მართლაც, მრავალწევრთა გაყოფადობის მე-3 თვისების თანახმად, როგორც ეს ზემოთ დაწერილი ტოლობიდან ჩანს, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ყოველი საერთო გამყოფი იქნება აგრეთვე $r(x)$ მრავალწევრის გამყოფი და ამიტომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ყოველი საერთო გამყოფი იქნება $g(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრების საერთო გამყოფთა გამყოფი. მეორე მხრივ, ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $g(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრების ყოველი საერთო გამყოფი იქნება აგრეთვე $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების საერთო გამყოფთა გამყოფი. მაშასადამე, მივიღებთ, რომ

$$[f(x),\ g(x)]=[g(x),\ r(x)]. \tag{1}$$

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი ორი მთელი რიცხვის **უდიდესი საერთო** გამყოფი უდრის ამ რიცხვებისათვის შედგენილ ევკლიდეს ალგორითმში ნულისაგან განსხვავებულ უკანასკნელ ნაშთს. ვუჩვენოთ, რომ ამ დებულებას ადგილი აქვს მრავალწევრებისათვისაც. ვთქვათ, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულია ორი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრი, რომელთა ხარისხია შესაბამისად n და m. ვიგულისხმოთ, რომ $n \geqslant m$. $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული განაყოფი და ნაშთი შესაბამისად აღვნიშნოთ $q_1(x)$ და $r_1(x)$, სადაც $r_1(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია, ვიდრე $g(x)$-ის ხარისხი. $g(x)$ მრავალწევრის $r_1(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული განაყოფი და ნაშთი შესაბამისად აღვნიშნოთ $q_2(x)$ და $r_2(x)$, სადაც $r_2(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია, ვიდრე $r_1(x)$-ის ხარისხი. ახლა $r_1(x)$ მრავალწევრის $r_2(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული განაყოფი, და ნაშთი შესაბამისად აღვნიშნოთ $q_3(x)$ და $r_3(x)$, სადაც $r_3(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $r_3(x)$-ის ხარისხზე და ა. შ. ეს პროცესი განვაგრძოთ. რადგან $r_1(x),\ r_2(x),\ldots$ ნაშთთა ხარისხით ანდათანობით კლებულობს, ასეთნაირი თანამიმდევრობითი გაყოფის შედეგად, სასრული ნაბიჯის შემდეგ (არაუმეტესი n-სა) ჩვენ უნდა მივიღოთ ისეთი $r_k(x)$ ნაშთი, რომელზედაც უნაშთოდ გაიყოფა მისი წინა $r_{k-1}(x)$ ნაშთი. ამგვარად, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის შედგენილ ალგორითმს, რომელსაც ევკლიდეს **ალგორითმს** უწოდებენ, ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
f(x)&=g(x)\,q_1(x)+r_1(x),\\
g(x)&=r_1(x)\,q_2(x)+r_2(x),\\
r_1(x)&=r_2(x)\,q_3(x)+r_3(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{k-3}(x)&=r_{k-2}(x)\,q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x),\\
r_{k-2}(x)&=r_{k-1}(x)\,q_k(x)+r_k(x),\\
r_{k-1}(x)&=r_k(x)\,q_{k+1}(x).
\end{aligned} \tag{2}$$

დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის შედგენილ ევკლიდეს ალგორითმში ნულისაგან განსხვავებული უკანასკნელი ნაშთი $r_k(x)$ არის მოცემულ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი.

მართლაც, თანახმად (1) ტოლობისა, (2) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ:

$$[f(x),\ g(x)]=[g(x),\ r_1(x)],\ [g(x),\ r_1(x)]=[r_1(x),\ r_2(x)],\ldots$$

$$[r_{k-2}(x),\ r_{k-1}(x)]=[r_{k-1}(x),\ r_k(x)],\ [r_{k-1}(x),\ r_k(x)]=r_k(x). \tag{3}$$

(3) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$[f(x),\ g(x)]=[g(x),\ r_1(x)]=[r_1(x),\ r_2(x)]=\ldots=[r_{k-1}(x),\ r_k(x)]=r_k(x),$$

მაშასადამე, $[f(x),\ g(x)]=r_k(x)$ და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

თუ დავაკვირდებით $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის შედგენილ ევკლიდეს ალგორითმს ადვილად შევამჩნევთ, რომ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი $r_k(x)$ აგრეთვე ეკუთვნის $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს. ამგვარად, **$P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნა არ არის დამოკიდებული P ველის გაფართოებაზე.** ადვილად შევნიშნავთ, რომ, თუ $\varphi(x)$ ნებისმიერი მრავალწევრია $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან, მაშინ

$$[f(x)\cdot\varphi(x),\ g(x)\cdot\varphi(x)]=[f(x),\ g(x)]\cdot\varphi(x) \tag{4}$$

მართლაც, გავამრავლოთ (2) ტოლობანი წევრ-წევრად $\varphi(x)$-ზე მივიღებთ ახალ ტოლობებს, სადაც $f(x)$, $g(x)$, $r_1(x)$, $r_2(x)$, $\ldots$, $r_k(x)$ მრავალწევრების ნაცვლად იქნება $f(x)\varphi(x)$, $g(x)\varphi(x)$, $r_1(x)\varphi(x),\ldots$, $r_k(x)\varphi(x)$ მრავალწევრები. ამიტომ $[f(x)\varphi(x),\ g(x)\varphi(x)]=r_k(x)\varphi(x)$, რ. დ. გ.

მაგალითი. ვიპოვოთ უდიდესი საერთო გამყოფი

$$f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3 \text{ და } g(x)=2x^3-5x^2-4x+3$$

მრავალწევრებისა. შევნიშნოთ, რომ რადგან ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი განმარტებულია მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით, ამიტომ მოცემული მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნისას წილადი კოეფიციენტების თავიდან აცილებისა და გაყოფადობის გაადვილების მიზნით, სათანადო მრავალწევრები შეიძლება გავამრავლოთ ან გავყოთ სათანადო რიცხვებზე.

მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფისას წილადი კოეფიციენტების თავიდან აცილების მიზნით, წინასწარ $f(x)$ მრა-

ვალწევრი გავამრავლოთ 2-ზე, გვექნება:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-4x^3-8x^2+8x-6 & 2x^3-5x^2-4x+3 \\
\underline{-2x^4\pm5x^3\pm4x^2\mp3x} & \overline{x+1} \\
x^3-4x^2+5x-6 & \text{(გავამრავლოთ 2-ზე)} \\
2x^3-8x^2+10x-12 & \\
\underline{-2x^3\pm5x^2\pm4x\mp3} & \\
-3x^2+14x-15 & .
\end{array}$$

ამგვარად, მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი, მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით, არის $r_1(x)=-3x^2+14x-15$. ახლა $g(x)$ გავყოთ $r_1(x)$-ზე, წილადი კოეფიციენტების თავიდან აცილების მიზნით $g(x)$ გავამრავლოთ 3-ზე, გვექნება:

$$\begin{array}{r|l}
6x^3-15x^2-12x+9 & -3x^2+14x-15 \\
\underline{-6x^3\pm28x^2\mp30x} & \overline{-2x-13} \\
13x^2-42x+9 & \text{(გავამრავლოთ 3-ზე)} \\
39x^2-126x+27 & \\
\underline{-39x^2\pm182x\mp195} & \\
56x-168=56(x-3). &
\end{array}$$

ამგვარად, მოცემული $g(x)$ მრავალწევრის $r_1(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი, მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით, არის $r_2(x)=x-3$.

ახლა $r_1(x)$ გავყოთ $r_2(x)$ მრავალწევრზე, მივიღებთ:

$$\begin{array}{r|l}
-3x^2+14x-15 & x-3 \\
\underline{\pm3x^2\mp9x} & \overline{-3x+5} \\
5x-15 & \\
\underline{-5x\pm15} & \\
0 & .
\end{array}$$

მაშასადამე, მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით, $r_2(x)=x-3$ არის მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი. ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფის ცნება შეიძლება განზოგადებულ იქნეს ნებისმიერი სასრული რაოდენობის მრავალწევრთათვის. $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{k-1}(x), f_k(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება მათ ისეთ საერთო $d_k(x)$ გამყოფს, რომელიც იყოფა მოცემული მრავალწევრების ნებისმიერ საერთო გამყოფზე. ადვილად დამტკიცდება, რომ

$$d_k(x)=[f_1(x),\ f_2(x),\ldots,f_{k-1}(x), f_k(x)]=[d_{k-1}(x),\ f_k(x)],$$

სადაც

$$d_{k-1}(x)=[f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_{k-1}(x)].$$

მართლაც, $k=2$ მნიშვნელობისათვის ჩვენი დებულება მართებულია. ვიგულისხმოთ, რომ დებულება მართებულია $k-1$ რაოდენობის მრავალწევრისათვის. უდიდესი საერთო გამყოფი $d_{k-1}(x)$ და $f_k(x)$ მრავალწევრისა, ე. ი. $[d_{k-1}(x), f_k(x)]$ იქნება ყველა მოცემული მრავალწევრის საერთო გამყოფი, კერძოდ $d_k(x)$-ის გამყოფიც. მეორე მხრივ, $d_k(x)$ არის $d_{k-1}(x)$ და $f_k(x)$ მრავალწევრების საერთო გამყოფი, კერძოდ, ის იქნება ამ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფის გამყოფი. ამგვარად, $[d_{k-1}(x), f_k(x)]=d_k(x)$, სადაც

$$d_{k-1}(x)=[f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_{k-1}(x)],$$ რ. დ. გ.

თეორემა. თუ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი არის $d(x)$, მაშინ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ორი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრი, რომ:

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x), \tag{5}$$

გარდა ამისა, თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ხარისხი აღემატება ნულს, მაშინ $u(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე და $v(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე.

დამტკიცება. მოვიგონოთ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის შედგენილი ევკლიდეს (2) ალგორითმი (გვ. 237), რადგან $r_k(x)=d(x)$, ამიტომ (2) ტოლობათა ბოლოს წინა ტოლობიდან მივიღებთ:

$$r_{k-2}(x)+r_{k-1}(x)[-q_k(x)]=d(x).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $u_1(x)=1$, $v_1(x)=-q_k(x)$, გვექნება: $r_{k-2}(x)\ u_1(x)+r_{k-1}(x)v_1(x)=d(x)$, ახლა აქ $r_{k-1}(x)$-ის ნაცვლად ჩავსვათ მისი $r_{k-1}(x)=r_{k-3}(x)-r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)$ მნიშვნელობა და მოვახდინოთ სათანადო გარდაქმნები, გვექნება:

$$r_{k-3}(x)v_1(x)+r_{k-2}(x)[u_1(x)-q_{k-1}(x)v_1(x)]=d(x).$$

თუ მივიღებთ $u_2(x)=v_1(x)$, $v_2(x)=u_1(x)-q_{k-1}(x)v_1(x)$, მაშინ გვექნება:

$$r_{k-3}(x)u_2(x)+r_{k-2}(x)v_2(x)=d(x).$$

ახლა აქ ჩავსვათ $r_{k-2}(x)$-ის მნიშვნელობა:

$$r_{k-2}(x)=r_{k-4}(x)-r_{k-3}(x)q_{k-2}(x).$$

და ეს პროცესი განვაგრძოთ ასე შემდეგ ქვემოდან ზემოთ, (2) ტოლობათა მიმართ. ბოლოს მივიღებთ დასამტკიცებელ (5) ტოლობას. როგორც

$u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრთა მოძებნიდან ჩანს, ისინი ეკუთვნიან $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. ვიგულისხმოთ, რომ $u(x)$ მრავალწევრის ხარისხი მეტია ან ტოლია $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$u(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

სადაც $r(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე. (5) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$f(x)r(x)+g(x)[f(x)q(x)+v(x)]=d(x).$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული $\varphi(x)=f(x)q(x)+v(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. მართლაც, რადგან $f(x)r(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $g(x)f(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე და მით უმეტეს $g(x)\varphi(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე, მივიღებთ, რომ ტოლობის მარცხენა მხარეში მიღებული მრავალწევრის ხარისხი მეტია, ვიდრე ტოლობის მარცხენა მხარის $d(x)$ მრავალწევრის ხარისხი, რაც შეუძლებელია.

ამრიგად, $q(x)=0$, ე. ი. $u(x)=r(x)$.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია ორი მრავალწევრი:

$$f(x)=x^4+x^3+2x^2-x-2 \quad \text{და} \quad g(x)=2x^3+5x^2+x-2.$$

ამ მრავალწევრებისათვის ვიპოვოთ $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები, რომლებიც (5) ტოლობას აკმაყოფილებს. რადგან $u(x)$ და $v(x)$ -ის მოძებნის დროს არსებით როლს ასრულებს არა მარტო ნაშთები, არამედ არასრული განაყოფები, ამიტომ გაყოფის პროცესი უნდა ჩავატაროთ ბუნებრივად ყოველგვარი „დამახინჯების" გარეშე. გვექნება:

$$\begin{array}{r|l}
x^4+x^3-2x^2-x-2 & 2x^3+5x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
-x^4\mp\frac{5}{2}x^3\mp\frac{1}{2}x^2\pm x & \frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2-2 & \\
\pm\frac{3}{2}x^3\pm\frac{15}{4}x^2\pm\frac{3}{4}x\mp\frac{3}{2} & \\ \cline{1-1}
\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}, &
\end{array}$$

სადაც

$$q_1(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}, \quad r_1(x)=\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}.$$

ახლა $g(x)$ გავყოთ $r_1(x)$-ზე, მივიღებთ:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3+5x^2+x-2 & \frac{5}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2} \\ \cline{2-2}
-2x^3\mp\frac{6}{5}x^2\pm\frac{28}{5}x & \frac{8}{5}x+\frac{76}{25} \\ \cline{1-1}
\frac{19}{5}x^2+\frac{33}{5}x-2 & \\
-\frac{19}{5}x^2\mp\frac{57}{25}x\pm\frac{266}{25} & \\ \cline{1-1}
\frac{108}{25}x+\frac{216}{25}=\frac{108}{25}(x+2). &
\end{array}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $r_1(x)$ უნაშთოდ იყოფა $r_2(x)$-ზე. ამრიგად, მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის შედგენილი ევკლიდეს ალგორითმიდან ავიღოთ შემდეგი ორი თანაფარდობა:

$$f(x)=g(x)\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)+r_1(x),$$

$$g(x)=r_1(x)\left(\frac{8}{5}x+\frac{76}{25}\right)+r_2(x).$$

მეორე თანაფარდობა ასე გადავწეროთ:

$$g(x)+r_1(x)\left(-\frac{8}{5}x-\frac{76}{25}\right)=r_2(x).$$

მიღებულ ტოლობაში ჩავსვათ $r_1(x)$-ის მნიშვნელობა პირველი თანაფარდობიდან. სათანადო გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$f(x)\left(-\frac{8}{5}x-\frac{76}{25}\right)+g(x)\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{8}{25}x-\frac{32}{25}\right)=r_2(x),$$

თუ ახლა აქ ჩავსვამთ $r_2(x)=\frac{108}{25}(x+2)$ მნიშვნელობას და ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $\frac{25}{108}$-ზე, გვექნება:

$$f(x)\left(-\frac{10}{27}x-\frac{19}{27}\right)+g(x)\left(\frac{5}{27}x^2+\frac{2}{27}x-\frac{8}{27}\right)=x+2.$$

ამრიგად, მივიღებთ, რომ

$$u(x)=-\frac{1}{27}(10x+19),\quad v(x)=\frac{1}{27}(5x^2+2x-8).$$

ურთიერთმარტივი მრავალწევრებისათვის ზემოთ დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე ვღებულობთ ასეთ შედეგს.

შედეგი. თუ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ორი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრი ურთიერთმარტივია, მაშინ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში შეიძლება მოვძებნოთ ორი ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრი, რომ:

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=c,$$

სადაც $c\in P$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია.

რადგან ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი განმარტებულია მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით, ამიტომ შეიძლება ურთიერთმარტივი მრავალწევრები ვუწოდოთ ისეთ ორ მრავალწევრს, რომელთა უდიდესი საერთო გამყოფი არის ერთი: $\frac{1}{c}\cdot c=1$. მაშასადამე, თუ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები ურთიერთმარტივია, მაშინ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ორი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრი, რომ:

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1. \tag{6}$$

ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ ამ **თანაფარდობის გამოყენებას მნიშვნელში ირაციონალურობის მოსპობისათვის.**

ახლა დავამტკიცოთ ურთიერთმარტივ მრავალწევრთა ზოგიერთი თვისება.

1. თუ $f(x)$ და $g(x)$ არიან $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ურთიერთმარტივი მრავალწევრები, ე. ი. $[f(x), g(x)]=1$ და $\varphi(x)$ ნებისმიერი მრავალწევრია ამავე რგოლიდან, მაშინ

$$[f(x)\cdot\varphi(x),\ g(x)]=[\varphi(x),g(x)]. \tag{7}$$

მართლაც, $[f(x)\cdot\varphi(x),\ g(x)]$ არის $f(x)\cdot\varphi(x)$ და $g(x)\cdot\varphi(x)$-ის საერთო გამყოფი და რადგან (4) ტოლობის (გვ. 238) თანახმად $[f(x)\varphi(x), g(x)\varphi(x)]=\varphi(x)$, ამიტომ $[f(x)\varphi(x), g(x)]$ უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება $[\varphi(x), g(x)]$ უდიდესი საერთო გამყოფის გამყოფი. მეორე მხრივ, $[\varphi(x), g(x)]$ უდიდესი საერთო გამყოფი არის გამყოფი $f(x)\varphi(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისა; ამიტომ ის იქნება გამყოფი $[f(x)\varphi(x), g(x)]$ უდიდესი საერთო გამყოფისა. ამრიგად, $[f(x)\varphi(x), g(x)]$ და $[\varphi(x), g(x)]$, ურთიერთგამყოფი მრავალწევრებია; თანახმად გაყოფადობის თვისებისა, ასეთი ორი მრავალწევრი ერთმანეთის ტოლია, მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით, და ამით პირველი თვისება დამტკიცებულია.

2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია და $f(x)\varphi(x)$ ნამრავლი იყოფა $g(x)$-ზე, მაშინ $\varphi(x)$ გაიყოფა $g(x)$-ზე.

მართლაც, რადგან $[f(x), g(x)]=1$, ამიტომ, თანახმად პირველი თვისებისა, გვაქვს $[f(x)\varphi(x), g(x)]=[\varphi(x), g(x)]$, მაგრამ, რადგან $f(x)\varphi(x)$ ჯერადია $g(x)$-ისა, გვექნება $[f(x)\varphi(x), g(x)]=g(x)$, ანუ $[\varphi(x), g(x)]=$ $=g(x)$. მაშასადამე, $\varphi(x)$ ჯერადია $g(x)$-ისა.

3. თუ $f(x)$ მრავალწევრი ურთიერთმარტივია ცალ-ცალკე $g(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრებთან, მაშინ ის ურთიერთმარტივი იქნება მათ ნამრავლთანაც.

მართლაც, რადგან $g(x)$ ურთიერმარტივია $f(x)$-თან, თანახმად პირველი თვისებისა, მივიღებთ:

$$[g(x)\varphi(x),\ f(x)]=[\varphi(x),\ f(x)]=1, \qquad \text{რ. დ. გ.}$$

4. თუ $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა ურთიერთმარტივ $g(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრებზე, მაშინ ის გაიყოფა მათ ნამრავლზე.

მართლაც, შეიძლება დავწეროთ $f(x)=g(x)\lambda(x)$. რადგან $g(x)\lambda(x)$ ნამრავლი იყოფა $\varphi(x)$-ზე და $[g(x), \varphi(x)]=1$, ამიტომ, თანახმად მეორე თვისებისა, $\lambda(x)$ უნდა გაიყოს $\varphi(x)$-ზე, ე. ი. $\lambda(x)=\varphi(x)\cdot t(x)$. ამრიგად,

$$f(x)=[g(x)\varphi(x)]\cdot t(x), \qquad \text{რ. დ. გ.}$$

ადვილად დამტკიცდება, რომ თუ ყოველი $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ მრავალწევრი ურთიერთმარტივია ყოველ $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_l(x)$ მრავალწევრთან, მაშინ ნამრავლი $f_1(x).f_2(x)\ldots f_k(x)$ ურთიერთმარტივი იქნება $g_1(x)\cdot g_2(x)\ldots g_l(x)$ ნამრავლთან. ეს თვისება მკითხველს შეუძლია დაამტკიცოს მე-3 თვისების მიხედვით. აქედან, როგორც შედეგი, ვღებულობთ, რომ თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები ურთიერთმარტივია, მაშინ ყოველი მათი ხარისხი $[f(x)]^k$ და $[g(x)]^l$ აგრეთვე ურთიერთმარტივი იქნება.

§ 27. რიცხვთა ველზე მრავალწევრის დაყვანადობა. მრავალწევრის დაუყვან თანამამრავლებად დაშლა

როგორც უკვე ვიცით, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ყოველი $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა P ველიდან აღებულ ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ c რიცხვზე და $c.f(x)$ მრავალწევრზე. $f(x)$ მრავალწევრის ასეთ ორ გამყოფს ტრივიალური გამყოფები ეწოდება. $f(x)$ მრავალწევრის ყოველ სხვა გამყოფს $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში ეწოდება არატრივიალური გამყოფი.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრს, რომელსაც მოცემულ რიცხვთა P ველზე გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური გამყოფები, P ველის

გაფართოებულ $\bar{\bar{P}}$ ველზე შეიძლება გაუჩნდეს არატრივიალური გამყოფები.

მაგალითად, $f(x)=x^2-3$ მრავალწევრს რაციონალურ რიცხვთა ველზე არატრივიალური გამყოფები არ აქვს. ხოლო რაციონალურ რიცხვთა P ველის გაფართოებულ $\overline{P}=P[\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3}\}$ ველზე, სადაც $a,\ b\epsilon P$, აქვს $x-\sqrt{3}$ და $x+\sqrt{3}$ არატრივიალური გამყოფები.

განსაზღვრა. $P[x]$ **მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულ** $f(x)$ **მრავალწევრს ეწოდება** P **ველზე დაყვანადი, თუ მას** $P[x]$ **მრავალწევრთა რგოლში გააჩნია ერთი არატრივიალური გამყოფი მაინც; წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. თუ** $f(x)$ **მრავალწევრს** $P[x]$ **მრავალწევრთა რგოლში არ გააჩნია ერთი არატრივიალური გამყოფი მაინც, მაშინ** $f(x)$ **მრავალწევრს** P **ველზე დაუყვანი მრავალწევრი ეწოდება.**

როგორც განსაზღვრიდან ჩანს, თუ n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი დაყვანადია P ველზე, მაშინ მრავალწევრთა რგოლში ის დაიშლება ორი მაინც n-ზე დაბალი ხარისხის, მუდმივისაგან განსხვავებული $\varphi(x)$ და $\lambda(x)$ მრავალწევრის ნამრავლად

$$f(x)=\varphi(x)\lambda(x).$$

მაგალითები.

ზემოთ განხილული $f(x)=x^2-3$ მრავალწევრი რაციონალურ რიცხვთა ველზე არის დაუყვანი, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა ველზე — დაყვანადი. ადვილად შემოწმდება, რომ $f(x)=x^4+25$ მრავალწევრი R რაციონალურ რიცხვთა ველზე დაუყვანია, ხოლო $R[\sqrt{10}]=\{a+b\sqrt{10}\}$, სადაც $a,\ b\epsilon R$, ველზე დაყვანადია.

მართლაც, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x^4+25=(x^2+5)^2-(\sqrt{10}\,x)^2=(x^2-\sqrt{10}\,x+5)\,(x^2+\sqrt{10}\,x+5).$$

მაგალითად, მრავალწევრი $f(x)=x^2+4$ როგორც რაციონალურ, ისე ნამდვილ რიცხვთა ველზე არის დაუყვანი, ხოლო კომპლექსურ რიცხვთა ველზე — დაყვანადი

$$f(x)=(x-2i)(x+2i).$$

ორწევრის ჯამისა და სხვაობის დაშლადობის მიხედვით ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ ყოველი ორი $f(x)=x^n-a$ და $g(x)=x^{2k+1}+b$ მრავალწევრი, როცა $n>1$ და $k\geq 1$ მთელი რიცხვებია და a და b ნამდვილი რიცხვებია, ნამდვილ რიცხვთა ველზე დაყვანადია.

განვიხილოთ რიცხვთა P ველზე დაუყვანი მრავალწევრის ზოგიერთი თვისება.

1. პირველი ხარისხის ყოველი $ax+b$ მრავალწევრი დაუყვანია.

მართლაც, პირველი ხარისხის მრავალწევრი დაყვანადი რომ იყოს ის უნდა დაიშალოს პირველზე დაბალი ხარისხის (ნულოვანი ხარისხის) ორი მრავალწევრის ნამრავლად მაინც. მაგრამ ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრების ნამრავლი მოგვცემს ნულოვანი ხარისხის და არა პირველი ხარისხის მრავალწევრს.

2. თუ $\varphi(x)$ მრავალწევრი არის დაუყვანი $P[x]$მრავალწევრთა რგოლში, მაშინ ამავე რგოლში დაუყვანი იქნება ყოველი $c\varphi(x)$ მრავალწევრი, სადაც $c\epsilon P$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია.

ეს უბრალოდ გამომდინარეობს მრავალწევრთა გაყოფადობის თვისებებიდან.

3. თუ რიცხვთა P ველზე $\varphi(x)$ დაუყვანი მრავალწევრია და $f(x)$ ნებისმიერი მრავალწევრია ამავე ველზე, მაშინ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შემდეგ შემთხვევებს:

ა) ან $f(x)$ უნდა გაიყოს $\varphi(x)$-ზე, ბ) ან $f(x)$ და $\varphi(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია.

მართლაც. ვთქვათ, $[f(x), \varphi(x)]=d(x)$, რადგან $\varphi(x)$ დაუყვანია რიცხვთა P ველზე და $d(x)$ მისი გამყოფია, ამიტომ $d(x)$ შეიძლება იყოს ან $c\varphi(x)$ მრავალწევრი, ან c რიცხვი. პირველ შემთხვევაში $f(x)$ გაიყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე, მეორე შემთხვევაში კი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია.

4. თუ რიცხვთა P ველზე აღებულ $f(x)=0$ განტოლებას აქვს ერთი საერთო ფესვი მაინც რიცხვთა P ველზე დაუყვან $\varphi(x)=0$ განტოლებასთან, მაშინ $\varphi(x)=0$ განტოლების ყველა ფესვი დააკმაყოფილებს აგრეთვე $f(x)=0$ განტოლებას, ე. ი. $f(x)$ გაიყოფა $\varphi(x)$-ზე.

მართლაც, ამ შემთხვევაში $f(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრები არ იქნებიან ურთიერთმარტივი, ამიტომ, თანახმად მე-3 თვისებისა, $f(x)$ მრავალწევრი უნდა გაიყოს $\varphi(x)$ მრავალწევრზე.

5. რიცხვთა P ველზე აღებულ $\varphi(x)$ დაუყვან მრავალწევრს არ შეიძლება ჰქონდეს საერთო ფესვი ამავე ველზე აღებულ დაბალი ხარისხის მრავალწევრთან. მართლაც, ეს უშუალოდ გამოდის მე-3 თვისებიდან.

6. თუ რიცხვთა P ველზე აღებული $f(x)=0$ განტოლების ყველა ფესვი აკმაყოფილებს ამავე ველზე დაუყვან $\varphi(x)=0$ განტოლებას, მაშინ $f(x)=c\varphi(x)^k$, სადაც $c\epsilon P$ ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია, ხოლო k გარკვეული მთელი დადებითი რიცხვია.

მართლაც, თანახმად მე-4 თვისებისა, $f(x)$ უნდა გაიყოს $\varphi(x)$-ზე: $f(x)=\varphi(x)\cdot f_1(x)$, ცხადია, $f_1(x)$-იც უნდა გაიყოს $\varphi(x)$-ზე, ე. ი. $f(x)=$ $=\varphi(x)^2\cdot f_2(x)$ და ა. შ.

7. თუ $g(x)$ და $f(x)$ მრავალწევრთა ნამრავლი იყოფა $\varphi(x)$ დაუყვან

მრავალწევრზე, მაშინ ერთ-ერთი თანამამრავლი მაინც იყოფა $\varphi(x)$-ზე.

მართლაც, თუ $f(x)$ არ იყოფა $\varphi(x)$-ზე, მაშინ ისინი ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, და, თანახმად გაყოფადობის თვისებისა, $g(x)$ მრავალწევრი უნდა გაიყოს $\varphi(x)$ დაუყვან მრავალწევრზე. ეს თვისება შეიძლება ადვილად განზოგადდეს ნებისმიერი სასრული რაოდენობის მრავალწევრებისათვის.

8. $P[x]$ რგოლიდან აღებული ყოველი $n>1$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრის უმცირესი ხარისხის გამყოფი მრავალწევრი დაუყვანია P ველზე.

მართლაც, ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის უმცირესი ხარისხის გამყოფი მრავალწევრია $\varphi(x)$, ე. ი. $f(x)=\varphi(x)\cdot\lambda(x)$, თუ ახლა $\varphi(x)$ მრავალწევრი დაყვანადია რიცხვთა P ველზე, მას ექნება გარკვეული $\varphi_1(x)$ მრავალწევრი გამყოფად, სადაც $\varphi_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $\varphi(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. თანახმად მრავალწევრთა გაყოფადობის თვისებისა. $f(x)$ მრავალწევრი უნდა გაიყოს $\varphi_1(x)$ მრავალწევრზე, რომლის ხარისხი ნაკლებია $\varphi(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას $\varphi(x)$ მრავალწევრის შესახებ.

თეორემა. **$P[x]$ რგოლიდან აღებული ყოველი $n>1$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი შეიძლება დაიშალოს რიცხვთა P ველზე დაუყვან მამრავლებად და ეს დაშლა არის ერთადერთი მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით.**

დამტკიცება. ჯერ ვუჩვენოთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის დაშლა დაუყვან მამრავლებად შესაძლებელია. ვიგულისხმოთ, რომ $p_1(x)$ არის $f(x)$ მრავალწევრის უმცირესი ხარისხის დაუყვანი გამყოფი. მაშინ გვექნება: $f(x)=p_1(x)f_1(x)$. თუ ახლა $f_1(x)$-ის ხარისხი მეტია ერთზე და მისი უმცირესი ხარისხის დაუყვანი გამყოფია $p_2(x)$, გვექნება: $f_1(x)=$ $=p_2(x)f_2(x)$. და ა. შ. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ სასრული $m\leqslant n$ ნაბიჯის შემდეგ (არაუმეტეს n ნაბიჯისა) მივიღებთ უმცირესი ხარისხის დაუყვან $p_m(x)$ მამრავლს, ე. ი. $f_{m-1}(x)=p_m(x)$. ამგვარად, მივიღეთ $P[x]$ რგოლიდან აღებული $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვან მამრავლებად

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\dots p_m(x) \tag{1}$$

დაშლა. ახლა დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის დაშლა (1) სახით ერთადერთია. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, არსებობს ამავე მრავალწევრის მეორე სახის დაშლა დაუყვან მამრავლებად:

$$f(x)=q_1(x)q_2(x)\dots q_k(x). \tag{2}$$

(1) და (2) ტოლობათა შედარებით მივიღებთ:

$$p_1(x)p_2(x)\dots p_m(x)=q_1(x)q_2(x)\dots q_k(x). \tag{3}$$

(3) ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა $p_1(x)$ დაუყვან მამრავლზე, მაშასადამე, ტოლობის მარჯვენა მხარეც უნდა გაიყოს $p_1(x)$-ზე. თანახ-

მად მე-7 თვისებისა, ერთ-ერთ $q_i(x)$ $(i=1, 2, \dots k)$ თანამამრავლი უნდა გაიყოს $p_1(x)$-ზე. ზოგადობა არ იქნება დარღვეული, თუ $q_i(x)$ თანამამრავლთა ახალი გადანომრვის შემდეგ, ვიტყვით, რომ $q_1(x)$ იყოფა $p_1(x)$ მრავალწევრზე. რადგან $q_1(x)$ დაუყვანი მრავალწევრია, გვექნება $q_1(x)=c_1p_1(x)$. ამ ტოლობის (3) ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ:

$$p_1(x)p_2(x)\dots p_m(x)=c_1p_1(x)q_2(x)\dots q_k(x),$$

თუ ახლა ამ ტოლობის ორივე მხარეს შევკვეცავთ $p_1(x)$-ზე (ამის უფლება გვაქვს რადგან $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლს არა აქვს ნულგამყოფი ელემენტები), მივიღებთ:

$$p_2(x)\dots p_m(x)=c_1q_2(x)\dots q_k(x). \tag{4}$$

(4) ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა $p_2(x)$ დაუყვან მრავალწევრზე, ამიტომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეც უნდა გაიყოს $p_2(x)$-ზე. ამისათვის, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ტოლობის მარჯვენა მხარეში ერთ-ერთი $q_i(x)$ დაუყვანი მამრავლი უნდა გაიყოს $p_2(x)$-ზე. ვთქვათ, ამ შემთხვევაში $q_2(x)$ იყოფა $p_2(x)$-ზე. რადგან $q_2(x)$ დაუყვანი მრავალწევრია, გვექნება $q_2(x)=c_2p_2(x)$ და ა. შ. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ m ნაბიჯის შემდეგ მივიღებთ, რომ $q_m(x)=c_mp_m(x)$ და საბოლოოდ გვექნება:

$$1=c_1c_2\dots c_mq_{m+1}(x)\dots q_k(x).$$

აქედან ვღებულობთ, რომ ნამრავლი

$$q_{m+1}(x)\dots q_k(x)=c_1{}^{-1}c_2{}^{-1}\dots c_m{}^{-1}=c\neq 0$$

არის რიცხვთა P ველიდან აღებული გარკვეული რიცხვი. ეს კი მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა თითოეული $q_{m+1}, \dots, q_k(x)$ მამრავლი რიცხვია P ველიდან. ამიტომ (2) ტოლობის მარჯვენა მხარე ასე გადაიწერება:

$$f(x)=cp_1(x)\cdot p_2(x)\dots p_m(x). \tag{5}$$

ამგვარად, დამტკიცდა (1) დაშლის ერთადერთობა მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით. ცხადია, რომ (5) დაშლაში შეიძლება ზოგიერთი დაუყვანი მამრავლი განმეორდეს რამდენჯერმე.

მაგალითად, ვთქვათ, $p_1(x)$ დაუყვანი მამრავლი მეორდება α_1-ჯერ, $p_2(x)$ მამრავლი α_2-ჯერ და ა. შ. მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის დაშლას დაუყვან მამრავლებად ექნება შემდეგი სახე:

$$f(x)=c_1p_1(x)^{\alpha_1}\cdot p_2(x)^{\alpha_2}\dots p_s(x)^{\alpha_s}, \tag{6}$$

სადაც $s\leqslant m$ და ყველა $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\dots p_s(x)$ დაუყვანი მამრავლი სხვადასხვაა.

$f(x)$ მრავალწევრის (6) სახით დაშლას, ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის

კანონიკური დაშლა. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ რიცხვებს შესაბამისად ეწოდებათ $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)$ დაუყვანი მამრავლების ჯერადობის მაჩვენებლები.

განსაზღვრა. $\varphi(x)$ **მრავალწევრს ეწოდება** $f(x)$ **მრავალწევრის** k-**ჯერადი მამრავლი, თუ** $f(x)$ **მრავალწევრი იყოფა** $\varphi(x)^k$-**ზე და არ იყოფა** $\varphi(x)^{k+1}$-**ზე.** მაგალითად, უბრალო გაყოფით ადვილად შემოწმდება, რომ $\varphi(x)=x^2-2$ მრავალწევრი არის

$$f(x)=x^7-7x^6+x^4+4x^3-4x^2+4$$

მრავალწევრის ორჯერადი მამრავლი.

მრავალწევრის წარმოებულის შესწავლის შემდეგ ჩვენ განვიხილავთ მრავალწევრის ჯერადი მამრავლების გამოყოფის საკითხს.

ახლა განვიხილოთ ურთიერთმარტივი მრავალწევრების (6) ტოლობით (გვ. 243) მოცემული თვისების ერთ-ერთი პრაქტიკული გამოყენება. კერძოდ, **განვიხილოთ მნიშვნელში ირაციონალურობის მოსპობის საკითხი.** ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი

$$\frac{A}{a_0\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}+a_1\sqrt[n]{\alpha^{n-2}}+\ldots+a_{n-2}\sqrt[n]{\alpha}+a_{n-1}} \tag{7}$$

გამოსახულება, სადაც $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ რაციონალური რიცხვებია, ხოლო α აგრეთვე რაციონალური რიცხვია, რომელიც არაა რაიმე რაციონალური რიცხვის ხარისხი. დავამტკიცოთ, რომ არსებობს მოცემული (7) გამოსახულების მნიშვნელის **მარაციონალებელი** მამრავლი; მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x=\sqrt[n]{\alpha}. \tag{8}$$

ამ აღნიშვნის საფუძველზე (7) გამოსახულების მნიშვნელი ასე წარმოგვიდგება:

$$f(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x+a_{n-1}. \tag{9}$$

(8) აღნიშვნიდან ვღებულობთ n-ური ხარისხის

$$\varphi(x)=x^n-\alpha \tag{10}$$

მრავალწევრს. რადგან α არაა რაიმე რაციონალური რიცხვის ხარისხი, ამიტომ $\varphi(x)$ მრავალწევრი რაციონალურ რიცხვთა ველზე არის დაუყვანი. დაუყვან მრავალწევრთა მე-3 თვისების თანახმად, ეს ორი მრავალწევრი ურთიერთმარტივია; ვინაიდან $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $\varphi(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. თანახმად ურთიერთმარტივ მრავალწევრთა თვისებისა მოცემული $\varphi(x)$ და $f(x)$ მრავალწევრებისათვის რაციონალურ რიცხვთა ველზე ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ორი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრი, რომ

$$\varphi(x)u(x)+f(x)v(x)=1. \tag{11}$$

თუ (11) თანაფარდობაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $x=\sqrt[n]{\alpha}$ (რადგან $\varphi(\sqrt[n]{\alpha})=0$), მივიღებთ

$$f(\sqrt[n]{\alpha})\cdot v(\sqrt[n]{\alpha})=1. \tag{12}$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ $f(\sqrt[n]{\alpha})$ არის (7) გამოსახულების მნიშვნელი, ხოლო $v(\sqrt[n]{\alpha})$, როგორც ეს (12) ტოლობიდან ჩანს, მისი მარაციონალე-ბელი მამრავლია მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით.

მაგალითი. მოვსპოთ ირაციონალურობა

$$\frac{A}{\sqrt[3]{25}+4\sqrt[3]{5}+1}$$

გამოსახულების მნიშვნელში. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=\sqrt[3]{5}$; შეგვიძლია დავწეროთ $f(x)=x^2+4x+1$ და $\varphi(x)=x^3-5$. ეს ორი მრავალწევრი, როგორც უკვე ვიცით, ურთიერთმარტივია.

ვიპოვოთ შესაბამისი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-5 & x^2+4x+1 \\ \cline{2-2}
-x^3\mp4x^2\mp x & x-4 \\ \cline{1-1}
-4x^2-x-5 & \\
\pm4x^2\pm16x\pm4 & \\ \cline{1-1}
r_1(x)=15x-1, &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^2+4x+1 & 15x-1 \\ \cline{2-2}
-x^2\pm\frac{1}{15}x & \frac{1}{15}x+\frac{61}{225} \\ \cline{1-1}
\frac{61}{15}x+1 & \\
\mp\frac{61}{15}x\pm\frac{61}{225} & \\ \cline{1-1}
r_2(x)=\frac{286}{225}. &
\end{array}$$

ამგვარად, მივიღეთ $\varphi(x)=f(x)(x-4)+r_1(x)$,

$$f(x)=r_1(x)\left(\frac{1}{15}x+\frac{61}{225}\right)+\frac{286}{225};$$

აქედან

$$f(x)-r_1(x)\left(\frac{1}{15}x+\frac{61}{225}\right)=\frac{286}{225},$$

$$f(x)-[\varphi(x)-f(x)\ (x-4)]\left(\frac{1}{15}x+\frac{61}{225}\right)=\frac{286}{225},$$

$$\varphi(x)\left[-\frac{1}{15}x-\frac{61}{225}\right]+f(x)\left[\frac{1}{15}x^2+\frac{1}{225}x-\frac{19}{225}\right]=\frac{286}{225}.$$

თუ ამ თანაფარდობაში ჩავსვამთ $x=\sqrt[3]{5}$ (რადგან $\varphi(\sqrt[3]{5})=0$), მივიღებთ:

$$f(\sqrt[3]{5})\cdot\frac{1}{225}(15\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}-19)=\frac{286}{225};$$

აქედან

$$f(\sqrt[3]{5})\cdot\frac{1}{286}\left(15\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}-19\right)=1.$$

მაშასადამე, მოცემული გამოსახულების მნიშვნელის მარაციონალებელი მამრავლია

$$m=\frac{1}{286}(15\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}-19).$$

თუ ახლა მოცემული გამოსახულების მნიშვნელსა და მრიცხველს გავამრავლებთ მიღებულ m მარაციონალებელ მამრავლზე, მნიშვნელში მივიღებთ ერთს, და ამით მნიშვნელში ირაციონალურობა მოისპობა. ცხადია, რომ მნიშვნელს გააჩნია კიდევ სხვა მარაციონალებელი მამრავლები.

$u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრების მოძებნა, კერძოდ მნიშვნელის ირაციონალურობისაგან განთავისუფლება შეიძლება **განუსაზღვრელი კოეფიციენტების** მეთოდის გამოყენებით. ჩვენს მაგალითზე განვიხილოთ მნიშვნელში ირაციონალურობის მოსპობის შედარებით მარტივი მეთოდი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს.

ვინაიდან $4\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}+1$ გამოსახულების შებრუნებული განმარტებული ცალსახად და მას საზოგადოდ $a\sqrt[3]{5}+b\sqrt[3]{5^2}+c$ სახე აქვს, სადაც a, b, c გარკვეული რაციონალური რიცხვებია, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(4\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}+1)(a\sqrt[3]{5}+b\sqrt[3]{5^2}+c)=1.$$

აქედან მივიღებთ შემდეგ წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}4a+b+c&=0,\\ a+5b+4c&=0,\\ 5a+20b+c&=1.\end{aligned}$$

ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად გვექნება:

$$a=\frac{1}{286},\quad b=\frac{15}{286},\quad c=-\frac{19}{286}.$$

ამრიგად მივიღეთ იგივე $m=\frac{1}{286}\left(\sqrt[3]{5}+15\sqrt[3]{5^2}-19\right)$ გამოსახულება,

რომელიც არის მოცემული ირაციონალური გამოსახულების შებრუნებული.

ახლა გასაგებია, რომ, თუ რაციონალურ რიცხვთა P ველთან გავაერთიანებთ, მაგალითად $\alpha=\sqrt[3]{2}$ ელემენტს, მივიღებთ $P(\sqrt[3]{2})=P'=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\}$, სადაც $a, b, c\in P$ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც ქმნის ველს.

მართლაც, როგორც ახლა აღვნიშნეთ, ყოველი $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ რიცხვისათვის მოიძებნება ამავე სახის ისეთი $v(\sqrt[3]{2})=k+e\sqrt[3]{2}+m\sqrt[3]{4}$, სადაც $k, e, m\in P$, რიცხვი, რომელთანაც ნამრავლი უდრის 1. ასეთ $v(\sqrt[3]{2})$ რიცხვს, როგორც ვიცით, $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ რიცხვის შებრუნებული რიცხვი ეწოდება. რადგან ყოველი $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ სახის რიცხვის შებრუნებული ისევ ამავე სახის რიცხვია, ასეთი რიცხვების გაყოფა შეიძლება შევცვალოთ გამრავლებით. ახლა, ვინაიდან ყოველი ორი $a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4}$ და $a_2+b_2\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}$ სახის რიცხვის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი ისევ ამავე სახის რიცხვია (შესავალი გვ. 8), ვღებულობთ, რომ იიცხვთ P' სიმრავლე, რომელიც მიიღება რაციონალურ რიცხვთა ველთან $\alpha=\sqrt[3]{2}$ ელემენტის გაერთიანებით, ე. ი. რიცხვთა სიმრავლე

$$P(\sqrt[3]{2})=P'\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\},$$

სადაც a, b, $c\in P$, ქმნის ველს.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ რაციონალურ რიცხვთა P ველთან $\alpha=\sqrt[n]{k}$ ელემენტის გაერთიანებით მიღებული სიმრავლე $P'=I(\sqrt[n]{k})$ ქმნის ველს.

... მრავალწევრის $x-a$ ორწევრზე გაყოფადობა. რაციონალურკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის რაციონალურ ფესვთა მოძებნა

ვთქვათ, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულია n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \quad (1)$$

ისეთ α რიცხვს, რომლისათვის $f(\alpha)=0$, ეწოდება $f(x)$ მრავალწვრის ან კიდევ $f(x)=0$ განტოლების ფესვი. $P[x]$ რგოლიდან ავიღოთ $x-\alpha$ ორწევრი; როგორც მრავალწევრთა გაყოფადობიდან (გვ. 233) ვიცით, $f(x)$ მრავალწევრის $x-\alpha$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული განაყოფი $q(x)$ იქნება $n-1$ ხარისხის მრავალწევრი, ხოლო ნაშთი

r იქნება ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი ან ნული, ე. ი. r იქნება რაიმე რიცხვი P ველიდან. ამგვარად, გვექნება:

$$f(x)=(x-\alpha)q(x)+r. \tag{2}$$

(2) თანაფარდობა მართებულია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, ე. ი. ის წარმოადგენს იგივეობას x-ის მიმართ. თუ ამ იგივეობაში ჩავსვამთ $x=\alpha$, მივიღებთ:

$$f(\alpha)=r. \tag{3}$$

მაშასადამე: $f(x)$ **მრავალწევრის** $x-\alpha$ **ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი** r **უდრის** $f(x)$ **მრავალწევრის მნიშვნელობას,** როცა $x=\alpha$. ამ დებულებას ხშირად უწოდებენ **ბეზუს** (Bezout) თეორემას. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი შედეგი: α **რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინაა** $f(x)$ **მრავალწევრის ფესვი, როცა** $f(x)$ **უნაშთოდ იყოფა** $x-\alpha$ **ორწევრზე.**

$f(x)$ მრავალწევრის $x-\alpha$ ორწევრზე გაყოფის პროცესი მარტივად სრულდება ეგრეთ წოდებული **ჰორნერის** სქემის საშუალებით, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის $x-\alpha$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული $n-1$ ხარისხის არასრული $q(x)$ განაყოფია

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-1},$$

მაშინ (2) ტოლობის საფუძველზე მივიღებთ:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n=b_0x^n+(b_1-\alpha b_0)x^{n-1}+$$
$$+(b_2-\alpha b_1)x^{n-2}+\dots+(b_{n-1}-\alpha b_{n-2})x+(r-\alpha b_{n-1}).$$

თანახმად ორი მრავალწევრის ტოლობისა, გვექნება:

$$b_0=a_0,\quad b_1=a_1+\alpha b_0,\quad b_2=a_2+\alpha b_1,\quad \dots,\quad b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2},$$
$$r=a_n+\alpha b_{n-1}.$$

მთელი ეს პროცესი შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგ სქემაზე, რომელსაც **ჰორნერის** სქემა ეწოდება:

α	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
	b_0	$b_1=\alpha b_0+a_1$	$b_2=ab_1+a_2$	$\dots$	$b_{n-1}=\alpha b_{n-2}+a_{n-1}$	$r=\alpha b_{n-1}+a_n$

მაგალითი 1. ჰორნერის სქემის მიხედვით ვიპოვოთ

$$f(x)=2x^4-5x-20$$

მრავალწევრის $x+3$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული განაყოფი და ნაშთი. სიმარტივისათვის მოქმედებანი შეიძლება განვიხილოთ შემდეგ სქემაზე

$$-3\left|\begin{array}{ccccc}2 & 0 & 0 & -5 & -20\\ \hline 2 & -6 & 18 & -59 & 157\end{array}\right. .$$

ამგვარად, მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის $x+3$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული $q(x)$ მრავალწევრია $q(x)=2x^3-6x^2+18x-59$, ხოლო ნაშთი $r=157$. როგორც ვიცით, მიღებული ნაშთი $r=157$, არის მოცემული მრავალწევრის მნიშვნელობა, როცა $x=-3$, ე. ი. $f(-3)=157$.

მაგალითი 2. $f(x)=x^3+(1+2i)x^2-(2+i)x-5$ მრავალწევრი გავყოთ $x-1+i$ ორწევრზე. ამ შემთხვევაში $\alpha=1-i$, გვექნება:

$$1-i\left|\begin{array}{cccc}1, & 1+2i, & -2-i, & -5\\ \hline 1, & 2+i, & 1-2i, & -2-3i\end{array}\right. .$$

მივიღეთ: $q(x)=x^2+(2+i)x+1-2i$, $r=-2-3i=f(1-i)$. როგორც ჩანს, ჰორნერის სქემა გვაძლევს $f(x)$ მრავალწევრის გამოთვლის პრაქტიკულად ხელსაყრელ მეთოდს, როცა ცნობილია x.

ახლა განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა ველზე აღებული $f(x)$ მრავალწევრის რაციონალურ ფესვთა მოძებნის საკითხი. ცხადია, რომ ყოველი რაციონალურკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ამოხსნა კოეფიციენტების საერთო მნიშვნელზე გამრავლებით, დაიყვანება მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ამოხსნამდე, ამიტომ თავიდანვე შეიძლება განვიხილოთ მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლება

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{4}$$

ადვილად დამტკიცდება, **რომ მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ყოველი მთელი ფესვი თავისუფალი წევრის გამყოფია.**

მართლაც, ვთქვათ, α მოცემული განტოლების მთელი ფესვია; მაშინ მივიღებთ:

$$a_n=\alpha(-a_0\alpha^{n-1}-a_1\alpha^{n-2}-\ldots-a_{n-1}).$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ a_n იყოფა α-ზე. მაშასადამე, თუ მთელკოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს აქვს მთელი ფესვი, ის უნდა ვეძებოთ თავისუფალი წევრის გამყოფთა შორის. ჰორნერის სქემიდან უბრალოდ ვღებულობთ, რომ ამ შემთხვევაში მთელკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის $x-\alpha$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული $q(x)$ მრავალ-

წევრიც მთელკოეფიციენტებიანი იქნება, ე. ი.

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=q(x). \tag{5}$$

(5) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $f(x)$-ის შესაბამისი მნიშვნელობა უნაშთოდ იყოფა $(x-\alpha)$-ზე ან, რაც იგივეა, $-(x-\alpha)=\alpha-x$ სხვაობაზე. თუ დავუშვებთ $x=-1$, ვღებულობთ, რომ $f(-1)$ რიცხვი უნაშთოდ იყოფა $\alpha+1$-ზე. ანალოგიურად, თუ დავუშვებთ, $x=1$, მაშინ მივიღებთ, რომ $f(1)$ უნაშთოდ იყოფა $\alpha-1$ სხვაობაზე. ამგვარად, იმისათვის, რომ α მთელი რიცხვი $f(x)$ ფუნქციის ფესვი იყოს აუცილებელია, რომ

$$\frac{f(1)}{\alpha-1} \text{ და } \frac{f(-1)}{\alpha+1} \tag{6}$$

რიცხვები იყოს მთელი; ეს არის აუცილებელი მაგრამ არასაკმარისი პირობა მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის მთელი ფესვის არსებობის შესახებ.

მაგალითად, $f(x)=x^3-2x^2-x-6$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრის -3 გამყოფისათვის გვაქვს:

$$\frac{f(1)}{-3-1}=\frac{-8}{-4}=2, \quad \frac{f(-1)}{-3+1}=\frac{-8}{-2}=4.$$

ორივე შეფარდება მთელია, მაგრამ $f(-3)=-48\neq 0$, ე. ი. $x=-3$ არაა მოცემული მრავალწევრის ფესვი. აქვე შევნიშნოთ, რომ თავისუფალი წევრის ± 1 გამყოფებისათვის საჭიროა ჰორნერის სქემით ან უშუალო ჩასმით გამოვთვალოთ $f(1)$ და $f(-1)$, თუ მაგალითად, მივიღეთ $f(-1)=0$, მაშინ $x=-1$ იქნება მოცემული მრავალწევრის ფესვი.

ამრიგად, თავისუფალი წევრის ის გამყოფები, რომელთათვის (6) პირობა არ სრულდება, არაა მოცემული განტოლების ფესვი და ამიტომ თავისუფალი წევრის ასეთი გამყოფები გასინჯვას არ საჭიროებს, ხოლო თავისუფალი წევრის ის გამყოფები, რომელთათვის (6) პირობა სრულდება, შეიძლება იყოს მოცემული განტოლების ფესვები და ამიტომ საჭიროა მხოლოდ ასეთი გამყოფების გასინჯვა.

მაგალითად, ვიპოვოთ მთელი ფესვები განტოლებისა

$$f(x)=x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0.$$

აქ თავისუფალი წევრის გამყოფებია: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. გამოთვლით მივიღებთ: $f(1)=-12$, $f(-1)=-6$. მაშასადამე, 1 და -1 არაა მოცემული განტოლების ფესვი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ± 6 და ± 3

გამყოფებისათვის რიცხვები $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ და $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ ერთდროულად მთელი არაა, ხოლო 2, —2 და —3 გამყოფებისათვის ეს რიცხვები ერთდროულად მთელია. ამგვარად, თავისუფალი წევრის გამყოფთა შორის უნდა გაისინჯოს მხოლოდ 2,—2 და —3 გამყოფები, მივიღებთ:

2	1	2	—4	—5	—6
—3	1	4	4	3	$0=f(2)$
—2	1	—1	—1	—2	$0=f(-3)$
	1	0	—4	3	$-12=f(-2)$

მაშასადამე, 2 და —3 მთელი რიცხვები მოცემული განტოლების ფესვებია და მას სხვა მთელი ფესვები არ აქვს. ამრიგად,

$$x^4+2x^3-4x^2-5x-6=(x-2)(x+3)(x^2+x+1).$$

მოცემული განტოლების დანარჩენ ორ ფესვს ვიპოვით $x^2+x+1=0$ კვადრატული განტოლების ამოხსნით.

ახლა განვიხილოთ წილადური რაციონალური ფესვის მოძებნის საკითხი. წინასწარ დავამტკიცოთ, რომ: **თუ მთელკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის ერთს, მას არ შეიძლება ჰქონდეს წილადური რაციონალური ფესვი.**

მართლაც, ვთქვათ, მთელკოეფიციენტებიან

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

მრავალწევრს, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის ერთს, აქვს $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადური ფესვი, ე. ი.

$$\frac{p^n}{q^n}+a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ q^{n-1} რიცხვზე, გვექნება:

$$\frac{p^n}{q}+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}=0.$$

მივიღეთ, რომ უკვეცი წილადის და მთელი რიცხვის ჯამი უდრის ნულს, რაც შეუძლებელია. დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს, რომ მთელკოეფიციენტებიან ალგებრულ განტოლებას, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის 1-ს, თუ აქვს რაციონალური ფესვი, ის უეჭველად მთელია. ვთქვათ, ახლა მოცემული გვაქვს მთელკოეფიციენტე-

ბიანი განტოლება

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

თუ ამ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ a_0^{n-1}-ზე და განვიხილავთ ჩასმას

$$a_0x=y, \tag{7}$$

მაშინ მოცემული განტოლება ასე გადაიწერება:

$$y^n+a_1y^{n-1}+a_0a_2y^{n-2}+\ldots+a_0^{n-2}a_{n-1}y+a_0^{n-1}a_n=0.$$

როგორც უკვე ვიცით, თუ ასეთ განტოლებას აქვს რაციონალური ფესვი, ის უნდა იყოს მთელი. ვთქვათ, $y=y_1$ მიღებული განტოლების ერთ-ერთი მთელი ფესვია. თუ ფესვის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (7) აღნიშვნაში მივიღებთ მოცემული განტოლების $x_1=\dfrac{y_1}{a_0}$ რაციონალურ ფესვს.

მაგალითი. ვიპოვოთ რაციონალური ფესვები განტოლებისა:

$$3x^4-50x^2-104x-105=0.$$

განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $3^3=27$-ზე, მივიღებთ:

$$(3x)^4-150(3x)^2-936(3x)-3^2\cdot105=0.$$

ჩავსვათ $3x=y$; გვექნება:

$$y^4-150y^2-936y-3^3\cdot105=0.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ y-ის მიმართ მიღებულ განტოლებას აკმაყოფილებს თავისუფალი — 2835 წევრის გამყოფები 15 და — 6. ახლა აღნიშვნიდან უბრალოდ მიიღება, რომ მოცემული განტოლების რაციონალური ფესვები მთელია და ისინი შესაბამისად არიან 5 და — 2. მოცემული განტოლების დანარჩენი ორი ფესვი ადვილად მოიძებნება, თუ მოცემული განტოლების მარცხენა მხარეს გავყოფთ $(x-5)(x+2)=$ $=x^2-3x-10$ მრავალწევრზე, და ვიპოვით გაყოფის შედეგად მიღებული მეორე ხარისხის მრავალწევრის ფესვებს.

ხშირად სასარგებლოა ვიცოდეთ, რომ: **თუ $\dfrac{p}{q}$ რაციონალური რიცხვი, სადაც p და q ურთიერთმარტივი რიცხვებია, არის მთელკოეფიციენტებიანი $f(x)=0$ ალგებრული განტოლების ფესვი, მაშინ p თავისუფალი წევრის გამყოფია, ხოლო q კი — უფროსი წევრის კოეფიციენტის გამყოფი.**

მართლაც, მოცემულ მთელკოეფიციენტებიან n-ური ხარისხის ალგებ-

რულ განტოლებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ მისი ფესვი $\frac{p}{q}$, მივიღებთ:

$$a_0\frac{p^n}{q^n}+a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0.$$

მიღებული ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ q^n-ზე, გვექნება:

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\dots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0.$$

რადგან მარცხენა მხარის ჯამი, ე. ი. ნული, და ჯამის ყოველი შესაკრები, გარდა უკანასკნელისა, იყოფა p-ზე, ამიტომ a_nq^n შესაკრებიც უნდა გაიყოს p-ზე. მაგრამ, ვინაიდან p და q ურთიერთმარტივი რიცხვებია, a_n უნდა გაიყოს p-ზე*. ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება, რომ a_0 იყოფა q-ზე.

განვიხილოთ **კუთხის ტრისექციის** ამოცანა. ცნობილია, რომ თუ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეიძლება $\cos\alpha$-ს აგება, მაშინ შეიძლება თვით α კუთხის აგებაც.

ვთქვათ, მოცემულია α კუთხე და გვინდა მისი სამ ტოლ ნაწილად გაყოფა. საძებნი კუთხე, აღვნიშნოთ φ-თი, ე. ი. $\alpha=3\varphi$. ვიცით, რომ

$$\cos\alpha=\cos3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi. \tag{8}$$

რადგან α კუთხე მოცემულია, მისი კოსინუსი ცნობილად შეიძლება ჩავთვალოთ. ვიგულისხმოთ, რომ $\cos\varphi=\frac{b}{2}$. მაშასადამე, (8) თანაფარდობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც მესამე ხარისხის ალგებრული განტოლება $\cos\varphi$-ის მიმართ; $4\cos^3\varphi-3\cos\varphi-\frac{b}{2}=0$. აღვნიშნოთ $\cos\varphi=$ $=\frac{x}{2}$; ეს განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$4\cdot\frac{x^3}{8}-3\frac{x}{2}-\frac{b}{2}=0 \text{ ან } x^3-3x-b=0. \tag{9}$$

შეიძლება განვიხილოთ b თავისუფალი წევრის უსასრულო რაოდენობის რაციონალური მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც (9) განტოლებას არ ექნება რაციონალური ფესვი. მაგალითად, როცა $b=1$, ამ შემთხვევაში $\alpha=\frac{\pi}{3}$ და (9) განტოლება მიიღებს სახეს

$$x^3-3x-1=0. \tag{10}$$

---

* ეს თვისება შეიძლება მივიღოთ, როგორც კერძო შემთხვევა თვისებისა: თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრები ურთიერთმარტივია და $f(x)\,g(x)$ ნამრავლი იყოფა $\varphi(x)$-ზე, მაშინ $g(x)$ უნდა გაიყოს $\varphi(x)$-ზე.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ განტოლებას არ აქვს რაციონალური ფესვი. მართლაც, როგორც უკვე ვიცით, თუ ასეთ განტოლებას აქვს რაციონალური ფესვი, ის უეჭველად უნდა იყოს მთელი—ან 1, ან —1; არც ერთი ამათგანი არ აკმაყოფილებს (10) განტოლებას. აქედან გამოდის, რომ რაციონალურ რიცხვთა ველზე ამ განტოლებას ფესვი არ აქვს, ე. ი. მისი ამოხსნა არ დაიყვანება რაციონალურკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ამოხსნამდე. ამიტომ 60°-იანი კუთხე ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით არ შეიძლება გაყოფილ იქნეს სამ ტოლ ნაწილად. მაგრამ, თუ $b=0$, ე. ი. $\varphi=\frac{\pi}{2}$, მაშინ (9) განტოლება დაიყვანება $x(x^2-3)=0$ განტოლების ამოხსნამდე, და ამიტომ 90°-იანი კუთხე ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეიძლება სამ ტოლ ნაწილად გაიყოს.

§ 20. მრავალწევრთა დაყვანადობა რაციონალურ რიცხვთა ველზე

როგორც ვიცით, რაციონალურ რიცხვთა ველი წარმოადგენს მინიმალურ რიცხვთა ველს. საინტერესოა საკითხი მრავალწევრთა დაყვანადობის შესახებ რაციონალურ რიცხვთა ველზე. ცხადია, რომ $f(x)$ და $cf(x)$ მრავალწევრებს, სადაც $c\neq 0$ ნებისმიერი რიცხვია, ერთი და იგივე ფესვები აქვთ. გარდა ამისა, როცა c რაციონალური რიცხვია, $f(x)$ და $cf(x)$ მრავალწევრები R რაციონალურ რიცხვთა ველზე ერთდროულად ორივე დაყვანადია ან დაუყვანი.

შემოვიღოთ **პრიმიტიული** მრავალწევრის ცნება. მთელკოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს ვუწოდოთ **პრიმიტიული** მრავალწევრი, თუ მისი კოეფიციენტები ურთიერთმარტივია, ე. ი. თუ კოეფიციენტების უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის ან 1, ან—1. ვთქვათ, მთელკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა საერთო უდიდესი გამყოფია δ; მაშინ შეიძლება დავწეროთ $f(x)=\delta\varphi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ იქნება პრიმიტიული მრავალწევრი.

ადვილად დამტკიცდება, რომ ყოველი რაციონალურკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი შეიძლება წარმოვადგინოთ ცალსახად ნიშნამდე სიზუსტით, როგორც ნამრავლი $\frac{k}{m}$ უკვეცი წილადისა და $\varphi(x)$ პრიმიტიული მრავალწევრისა.

მართლაც, ვთქვათ, რაციონალურკოეიფიციენტებიანი

$$f(x)=\frac{a_0}{b_0}x^n+\frac{a_1}{b_1}x^{n-1}+\dots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}x+\frac{a_n}{b_n} \qquad (1)$$

მრავალწევრის კოეფიციენტთა მნიშვნელების საერთო უმცირესი ჯერადი უდრის m-ს; მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x)=\frac{1}{m}(b_0'a_0x^n+b_1'a_1x^{n-1}+\ldots+b'_{n-1}a_{n-1}x+b'_na_n), \qquad (2)$$

სადაც b_0', b_1', ..., b_n' შესაბამისად b_0, b_1, ..., b_n მნიშვნელების დამატებითი მამრავლებია და ამიტომ ისინი ურთიერთმარტივია. თუ ახლა (2) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ფრჩხილებს გარეთ გამოვიტანთ a_0. $a_1 \ldots, a_n$ მრიცხველების საერთო უდიდეს გამყოფს k-ს, მივიღებთ:

$$f(x)=\frac{k}{m}(b_0'a_0'x^n+b_1'a_1'x^{n-1}+\ldots+b_n'a_n') \qquad (3)$$

ან, რაც იგივეა, $f(x)=\frac{k}{m}\varphi(x)$, სადაც $\varphi(x)=a_0'b_0'x^n+a_1'b_1'x^{n-1}+$ $+\ldots+a_n'b_n'$ პრიმიტიული მრავალწევრია.

ახლა, თუ დავუშვებთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის (3) სახით წარმოდგენა არა ცალსახაა, ე. ი. $f(x)=\frac{k}{m}\varphi(x)=\frac{k'}{m'}\lambda(x)$, მაშინ (რადგან $\frac{k}{m}$ და $\frac{k'}{m'}$ უკვეცი წილადებია და $\varphi(x)$, $h(x)$ მრავალწევრები პრიმიტიულია) ვღებულობთ, რომ $f(x)$-ის წარმოდგენა (3) სახით ერთადერთია სიზუსტით ნიშნამდე.

დავამტკიცოთ გაუსის შემდეგი ორი ლემა.

ლემა 1. ორი პრიმიტიული მრავალწევრის ნამრავლი ისევ პრიმიტიული მრავალწევრია.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია ორი პრიმიტიული მრავალწევრი

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_\alpha x^{k-\alpha}+\ldots+a_k,$$
$$g(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_\beta x^{s-\beta}+\ldots+b_s.$$

განვიხილოთ მათი ნამრავლი

$$F(x)=f(x)\cdot g(x)=c_0x^{k+s}+c_1x^{k+s-1}+c_2x^{k+s-2}+\ldots+$$
$$+c_{\alpha+\beta}x^{k+s-\alpha-\beta}+\ldots+c_{k+s},$$

სადაც

$$c_{\alpha+\beta}=a_0b_{\alpha+\beta}+a_1b_{\alpha+\beta-1}+\ldots+a_{\alpha-1}b_{\beta+1}+a_\alpha b_\beta+\ldots+a_{\alpha+\beta}b_0.$$

ვთქვათ, p ისეთი მარტივი რიცხვია, რომ $f(x)$ მრავალწევრის პირველი α კოეფიციენტი a_0, a_1, ..., $a_{\alpha-1}$ იყოფა p-ზე, ხოლო a_α არ იყოფა p-ზე;

ანალოგიურად, ვიგულისხმოთ, რომ $g(x)$ მრავალწევრის პირველი β კოეფიციენტი b_0, b_1, .., $b_{\beta-1}$ იყოფა p-ზე, ხოლო b_β არ იყოფა p-ზე. ცხადია, რომ რადგან $f(x)$ და $g(x)$ პრიმიტიული მრავალწევრებია ყველა მათი კოეფიციენტი არ იყოფა p-ზე. თუ დავაკვირდებით $F(x)$ მრავალწევრის $c_{\alpha+\beta}$ კოეფიციენტის მნიშვნელობას ადვილად შევამჩნევთ, რომ ვინაიდან მარჯვენა მხარის ყველა შესაკრები, გარდა $a_\alpha b_\beta$, იყოფა p-ზე, $c_{\alpha+\beta}$ კოეფიციენტი არ გაიყოფა p-ზე. ამგვარად, დამტკიცდა, რომ $F(x)$ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი არ იყოფა ერთსა და იმავე p მარტივ რიცხვზე, ე. ი. ყოველი ორი $f(x)$ და $g(x)$ პრიმიტიული მრავალწევრის ნამრავლი $F(x)$ ისევ პრიმიტიული მრავალწევრია.

ლემა 2. თუ მთელკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი დაყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველზე, მაშინ ის დაყვანადი იქნება მთელ რიცხვთა რგოლზე.

მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

სადაც $f_1(x)$ და $f_2(x)$ რაციონალურკოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია. $f_1(x)$ და $f_2(x)$ მრავალწევრები შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$f_1(x)=\frac{k_1}{m_1}\varphi_1(x), \quad f_2(x)=\frac{k_2}{m_2}\varphi_2(x),$$

სადაც $\frac{k_1}{m_1}$ და $\frac{k_2}{m_2}$ უკვეცი წილადებია, ხოლო $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ კი პრიმიტიული მრავალწევრებია. ამრიგად,

$$f(x)=\frac{k_1k_2}{m_1m_2}[\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)].$$

ვინაიდან, ამ ტოლობის მარცხენა მხარე მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია, მისი მარჯვენა მხარეც მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი უნდა იყოს. აქედან გამოდის, რომ რადგან ფრჩხილებში მოთავსებული პრიმიტიულ მრავალწევრთა ნამრავლი ისევ პრიმიტიული მრავალწევრია, k_1k_2 ნამრავლი უნდა გაიყოს m_1m_2 ნამრავლზე, მაგრამ, რადგან k_1, m_1 და k_2, m_2 შესაბამისად ურთიერთმარტივი რიცხვებია, k_1 უნდა გაიყოს m_2-ზე და k_2 უნდა გაიყოს m_1-ზე, ე. ი.

$$k_1=m_2k_1', \quad k_2=m_1k_2'.$$

მაშასადამე, მივიღებთ:

$$f(x)=k_1'k_2'\varphi_1(x)\varphi_2(x)$$

და ამით მეორე ლემა დამტკიცებულია. დამტკიცებული ლემიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ მთელკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი არის დაუყვანი მთელ რიცხვთა რგოლზე, ის დაუყვანი იქნება რაციონალურ რიცხვთა ველზე.

ახლა განვიხილოთ მთელკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის რაციონალურ რიცხვთა ველზე დაუყვანობის **აიზენშტაინის** (Eisenstein) კრიტერიუმი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

თუ მთელკოეფიციენტებიანი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

მრავალწევრის ყველა a_1, a_2, .., a_n კოეფიციენტი, გარდა a_0-სა, იყოფა რომელიმე $p>1$ მარტივ რიცხვზე და თავისუფალი წევრი a_n არ იყოფა p^2-ზე, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრი დაუყვანია რაციონალურ რიცხვთა ველზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრი არის დაყვანადი რაციონალურ რიცხვთა ველზე, მაშინ ის, დამტკიცებული ლემის თანახმად, დაიშლება ორი დაბალი ხარისხის მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ნამრავლად

$$f(x)=(b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k)(c_0x^s+c_1x^{s-1}+\ldots+c_s).$$

აქედან $f(x)$ მრავალწევრის და მარჯვენა მხარის გამრავლების შედეგად მიღებული მრავალწევრის კოეფიციენტების გატოლებით, ვინაიდან $k+s=n$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
&a_n=b_kc_s,\\
&a_{n-1}=b_kc_{s-1}+b_{k-1}c_s,\\
&a_{n-2}=b_kc_{s-2}+b_{k-1}c_{s-1}+b_{k-2}c_s\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&a_1=b_0c_1+b_1c_0,\\
&a_0=b_0c_0.
\end{aligned}\tag{4}$$

პირობის თანახმად, b_kc_s იყოფა p-ზე, მაშასადამე, ან b_k, ან c_s უნდა გაიყოს p-ზე; ცხადია, ორივე b_k და c_s ერთდროულად არ შეიძლება გაიყოს p-ზე, რადგან მაშინ a_n გაიყოფოდა p^2-ზე. ვთქვათ, b_k იყოფა p-ზე, მაშინ (4) ტოლობათა მეორე ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $b_{k-1}c_s$ იყოფა p-ზე; ვინაიდან c_s არ იყოფა p-ზე, ამიტომ b_{k-1} უნდა გაიყოს p-ზე. ანალოგიურად, (4) ტოლობათა მესამე ტოლობიდან მივიღებთ, რომ b_{k-2} იყოფა p-ზე, და ა. შ. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, მივიღებთ, რომ b_0 იყოფა p-ზე, ეს კი შეუძლებელია ვინაიდან, პირობის თანახმად, a_0 არ იყოფა p-ზე. ამით დაუყვანობის აიზენშტაინის კრიტერიუმი დამტკიცებულია.

დამტკიცებული კრიტერიუმიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი n-სათვის არსებობს n-ური ხარისხის მრავალწევრი, რომელიც დაუყვანია რაციონალურ რიცხვთა ველზე. მაგალითად, ყოველი

$$f(x)=a_0x^n+3x^{n-1}+3x^{n-2}+\ldots+3x+3$$

მრავალწევრი, სადაც a_0 ურთიერთმარტივია 3-თან, დაუყვანია რაციონალურ რიცხვთა ველზე. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ დაუყვანობის დამტკიცებული კრიტერიუმი წარმოადგენს მხოლოდ საკმარის პირობას. მაგალითად, $f(x)=x^2-5x+4$ მრავალწევრისათვის არ სრულდება აიზენშტაინის კრიტერიუმი, მაგრამ ის დაყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველზე: $f(x)=(x-1)(x+4)$. ქვემოთ დავრწმუნდებით, რომ ზოგ შემთხვევაში აღნიშნული კრიტერიუმით $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვანობის გამოსარკვევად, წინასწარ **საჭიროა მისი გარდაქმნა.** ვთქვათ, მოცემულია ორწევრა განტოლება

$$x^n-1=0,$$

რომლის ფესვია $\sqrt[n]{1}$-ის მნიშვნელობანი:

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{p}+i\sin\frac{2\pi k}{p}\quad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1).$$

მოცემული განტოლება შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)=0.$$

ცხადია, რომ $\sqrt[n]{1}$-ის ერთისაგან განსხვავებული $n-1$ რაოდენობის ყოველი $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-1}$ მნიშვნელობა აკმაყოფილებს

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=0 \tag{5}$$

განტოლებას. ამრიგად, (5) განტოლების არც ერთი ფესვი არაა ჯერადი.

განვიხილოთ მრავალწევრი

$$f_n(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=\frac{x^n-1}{x-1}\ .$$

რადგან $f_n(x)$ მრავალწევრის ფესვები 1-თან ერთად კომპლექსური სიბრტყის ერთეულრადიუსიან წრეს ყოფს n ტოლ ნაწილად, ამიტომ $f_n(x)$ მრავალწევრს **წრის დაყოფის მრავალწევრი** ეწოდება. ახლა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, როცა $n=p$ მარტივ რიცხვს, მაშინ

$$f_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=\frac{x^p-1}{x-1}$$

მრავალწევრი დაუყვანია რაციონალურ რიცხვთა ველზე. (6) მრავალწევრის მიმართ აიზენშტაინის დაუყვანობის კრიტერიუმის უშუალოდ გამოყენება შეუძლებელია. აღნიშვნით $x=y+1$, მივიღებთ

$$f_p(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{y+1-1}=\frac{1}{y}[y^p+py^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-2}+\dots+$$

$$+py]=y^{p-1}+py^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-3}+\dots+p=\varphi(y).$$

მიღებული $\varphi(y)$ მრავალწევრის ყოველი წევრის კოეფიციენტი, გარდა პირველისა, იყოფა p-ზე, ხოლო თავისუფალი წევრი კი არ იყოფა p^2-ზე. ამგვარად, თანახმად აიზენშტაინის კრიტერიუმისა $\varphi(y)=f_p(y+1)$ მრავალწევრი რაციონალურ რიცხვთა ველზე დაუყვანია. აქედან მარტივად გამოდის, რომ $f_p(x)$ მრავალწევრიც დაუყვანია რაციონალურ რიცხვთა ველზე. მართლაც, ვთქვათ,

$$f_p(x)=g(x)\cdot\lambda(x)$$

მაშინ $x=y+1$ აღნიშვნით მივიღებთ:

$$\varphi(y)=g(y+1)\cdot\lambda(y+1).$$

ეს კი, $\varphi(y)$ მრავალწევრის დაუყვანობის გამო, შეუძლებელია.

მაგალითი. განვიხილოთ მრავალწევრი

$$f(x)=x^4+2x^3+6x+1.$$

აქ აიზენშტაინის კრიტერიუმი უშუალოდ არ გამოიყენება. აღნიშვნით $x=y+1$, მივიღებთ:

$$\varphi(y)=f(y+1)=(y+1)^4+2(y+1)^3+6(y+1)+1=$$
$$=y^4+6y^3+12y^2+16y+10.$$

ცხადია, $\varphi(y)$ მრავალწევრი, რადგან მისთვის (როცა $p=2$) მართებულია აიზენშტაინის კრიტერიუმი, დაუყვანია რაციონალურ რიცხვთა ველზე. მაშასადამე, მოცემული $f(x)$ მრავალწევრიც დაუყვანი იქნება რაციონალურ რიცხვთა ველზე.

შევნიშნოთ, რომ, თუ მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი დაუყვანია მთელ რიცხვთა რგოლზე, მაშინ მისი ფესვების მოძებნა ზოგ შემთხვევაში **განუსაზღვრელი** კოეფიციენტების მეთოდით ადვილად დაიყვანება დაბალი ხარისხის მრავალწევრთა ფესვების მოძებნამდე.

მაგალითად, ვიპოვოთ

$$f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-10$$

მრავალწევრის ფესვები. ვინაიდან მოცემული მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტია 1 და თავისუფალი წევრი — 10, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ

$$x^4-x^3-3x^2+5x-10=(x^2+ax-5)(x^2+bx+2).$$

ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით, ანუ განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით, მივიღებთ შემდეგ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} a+b &=-1, \\ -3+ab &=-3, \\ 2a-5b &= \ \ 5. \end{aligned}$$

ვინაიდან სისტემა თავსებადია, კერძოდ, $a=0$, $b=-1$ მოცემული მრავალწევრის ფესვების მოძებნა დაიყვანება $x^2-5=0$ და $x^2-x+2=0$ კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნამდე.

მრავალწევრის ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულება. ვთქვათ, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულია შემდეგი n-ური ხარისხის მრავალწევრი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \tag{1}$$

ბეზუს თეორემის თანახმად, თუ მოცემული მრავალწევრის ყველა n ფესვი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მოთავსებულია რომელიმე P ველში, ე. ი. თუ P ველი წარმოადგენს $f(x)$ მრავალწევრის დაშლის ველს (გვ. 276), მაშინ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრი P ველზე დაიშლება n წრფივ მამრავლად

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n). \tag{2}$$

მიღებული თანაფარდობის მარჯვენა მხარე შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$f(x)=a_0x^n-a_0(x_1+x_2+\ldots+x_n)x^{n-1}+a_0(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+ \\ +x_{n-1}x_n)x^{n-2}+\ldots+(-1)^na_0x_1x_2\ldots x_n. \tag{3}$$

(1) და (3) თანაფარდობების მარჯვენა მხარეების შედარებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n &= -\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n &= \frac{a_2}{a_0}, \\ &\ \ \vdots \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \end{aligned} \tag{4}$$

მიღებულ (4) ფორმულებს, რომლებიც გამოხატავს დამოკიდებულებას მოცემული მრავალწევრის ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის, ეწოდება **ვიეტას განზოგადებული** ფორმულები. თუ (1) მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის ერთს, ე. ი. $a_0=1$, მაშინ ვიეტას განზოგადებული ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3\ldots+x_n &= -a_1, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n &= a_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\ldots x_n &= (-1)^n a_n. \end{aligned} \tag{5}$$

მაგალითად, თუ

$$f(x)=x^2+a_1x+a_2$$

მრავალწევრის ფესვებია x_1 და x_2, მაშინ ვიეტას ფორმულებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= -a, \\ x_1x_2 &= a_2, \end{aligned}$$

რაც კარგადაა ცნობილი საშუალო სკოლის კურსიდან. ჩვენ შემდეგ ვნახავთ, რომ ვიეტას განზოგადებულ ფორმულებს დიდი გამოყენება აქვს სიმეტრიულ მრავალწევრთა თეორიის შესწავლის საქმეში.

მაგალითი 1. ავაგოთ მინიმალური ხარისხის მრავალწევრი, რომლის ფესვებია

$$x_1=\sqrt{2},\quad x_2=-\sqrt{2},\quad x_3=-3.$$

ამ შემთხვევაში საძიებელი $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ მრავალწევრის ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -a_1, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= a_2, \\ x_1x_2x_3 &= -a_3. \end{aligned}$$

უბრალო გამოთვლით მივიღებთ: $a_1=3$, $a_2=-2$, $a_3=-6$. ამრიგად, საძიებელი მრავალწევრი იქნება:

$$f(x)=x^3+3x^2-2x-6.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

მრავალწევრის ფესვების კვადრატების ჯამი. (5) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\\+\ldots+x_{n-1}x_n)=a_1^2-2a_2.$$

§ 30. მრავალწევრის წარმოებული და ტეილორის ფორმულა

ვთქვათ, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული გვაქვს n-ური ხარისხის მრავალწევრი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \tag{1}$$

(1) ტოლობაში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ $x+h$, მივიღებთ

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(x+h)+a_n.$$

თუ ყოველ შესაკრებს გავხსნით ნიუტონის ბინომის ფორმულის საშუალებით და შემდეგ დავალაგებთ h-ის ზრდადი ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} f(x+h)&=[a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n]+\\ &=[na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}]h+ \qquad (2)\\ &+\frac{1}{2}[n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots+2a_{n-2}]h^2+\\ &\quad \cdot\ \cdot\\ &+\frac{1}{(n-1)!}[n(n-1)\ldots3\cdot2\cdot a_0x+(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot a_1]h^{n-1}+\\ &+\frac{1}{n!}n!a_0h^n. \end{aligned}$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში h-ის კოეფიციენტს ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის **წარმოებული** და აღინიშნება $f'(x)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}. \tag{3}$$

თუ (3) ტოლობას დავაკვირდებით, მივიღებთ მოცემული მრავალწევრის წარმოებულის შედგენის შემდეგ წესს: **იმისათვის, რომ მივიღოთ $f(x)$ მრავალწევრის პირველი რიგის $f'(x)$ წარმოებული, საჭიროა მოცემული მრავალწევრის ყოველი წევრი გავამრავლოთ ამ წევრის x-ის ხარისხის მაჩვენებელზე და ამის შემდეგ x-ის ხარისხი ერთით შევამციროთ.** აქედან ჩანს, რომ მუდმივის $c=cx^0$ წარმოებული ნულია.

ახლა, თუ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან ავიღებთ ნებისმიერ ორ $f(x)$ და $g[x]$ მრავალწევრს და მათზე გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ წარმოებულის განმარტებას ჯამისა და ნამრავლის წარმოებულებისათვის, მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x), \tag{4}$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x). \tag{5}$$

(4) და (5) თანაფარდობათა მართებულობის შემოწმება, (3) ტოლობის მიხედვით სასურველია მკითხველმა შეასრულოს. (5) ფორმულის განზოგადება ნებისმიერი სასრული რაოდენობის მრავალწევრთა ნამრავლისათვის მოგვცემს:

$$[f_1(x).f_2(x)\ldots f_k(x)]'=f_1'(x)f_2(x)\ldots f_k(x)+f_1(x)f'_2(x)\ldots f_k(x)+$$
$$+f_1(x)f_2(x)\ldots f'_k(x).$$

თუ მიღებულ ტოლობაში ვიგულისხმებთ $f_1(x)=f_2(x)=\ldots=f_k(x)=$ $=f(x)$, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხის წარმოებულისათვის მივიღებთ:

$$[f^k(x)]'=kf^{k-1}(x).f'(x). \tag{6}$$

ფუნქციის წარმოებულის შედგენას კიდევ უწოდებენ ფუნქციის **გაწარმოებას**. ახლა ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ $f'(x)$ მრავალწევრის (წარმოებულის) წარმოებული:

$$n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots+2a_{n-2},$$

რომელსაც $f(x)$ მრავალწევრის მეორე რიგის წარმოებული ეწოდება და აღინიშნება $f''(x)$ სიმბოლოთი, ა. შ. მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის $n-1$ რიგის წარმოებული იქნება შემდეგი პირველი ხარისხის მრავალწევრი:

$$f^{(n-1)}(x)=n(n-1)\ldots3.2a_0x+(n-1)(n-2)\ldots2.1.a_1,$$

n-ური რიგის წარმოებული კი იქნება მუდმივი სიდიდე:

$$f^{(n)}(x)=n!a_0,$$

ამიტომ $f^{(n+1)}(x)=0$, ე. ი. n-ური ხარისხის მრავალწევრის n-ზე მაღალი რიგის ყველა წარმოებული უდრის ნულს.

ახლა დავუბრუნდეთ (2) ტოლობას. ის წარმოებულების ჩასმის შემდეგ შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n. \tag{7}$$

(7) თანაფარდობას ეწოდება **ტეილორის ფორმულა** $f(x)$ მთელი რაციონალური ფუნქციისათვის. ამ ფორმულით $f(x+h)$ ფუნქცია იშლება h-ის ხარისხების მიხედვით. (7) თანაფარდობა მართებულია x-ისა და h-ის ყოველი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის. თუ x შევცვლით a-თი და შემდეგ $a+h$ აღვნიშნავთ x-ით, მაშინ h შეიცვლება $(x-a)$-თი და (4) ფორ-

მულა ასე გადაიწერება:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (8)$$

მიღებული ფორმულის საშუალებით $f(x)$ ფუნქცია (მრავალწევრი) დაიშლება $x-a$ ორწევრის ხარისხების მიხედვით.

მაგალითი. $f(x)=x^5-3x^2+x-1$ მრავალწევრი დავშალოთ $(x-1)$-ის ხარისხების მიხედვით. ადვილად მივიღებთ, რომ

$$f(1)=-2,\ f'(1)=0,\ f''(1)=14,\ f'''(1)=60,\ f^{(4)}(1)=120,\ f^{(5)}(1)=120.$$

მაშასადამე, მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის დაშლას $(x-1)$ -ის ხარისხების მიხედვით ექნება შემდეგი სახე:

$$f(x)=-2+7(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ (8) ფორმულის მიხედვით ჩვენ შეგვიძლია აღვადგინოთ $f(x)$ ფუნქცია $f(a)$, $f'(a)\ldots.f^{(n)}(a)$ მნიშვნელობათა მიხედვით-

განვიხილოთ ახლა ჰორნერის სქემის გამოყენებით

$$f(a),\ f'(a),\ \frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

მნიშვნელობების გამოანგარიშება. ამისათვის (8) თანაფარდობა ასე გადავწეროთ:

$$f(x)=f(a)+(x-a)\varphi(x), \quad (9)$$

სადაც

$$\varphi(x)=f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}. \quad (10)$$

ვიცით, რომ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=a$ წერტილზე, ე. ი. $f(a)$, უდრის $f(x)$ ფუნქციის $x-a$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებულ ნაშთს, ეს კი (9) თანაფარდობიდან უშუალოდ ჩანს.

ჰორნერის სქემით შეიძლება გამოვიანგარიშოთ $f(a)$-ს მნიშვნელობა. (9) თანაფარდობიდან ჩანს, რომ $\varphi(x)$ არის $f(x)$-ის $x-a$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული არასრული განაყოფი. (10) თანაფარდობა ასე გადავწეროთ:

$$\varphi(x)=f'(a)+(x-a)g(x), \quad (11)$$

სადაც

$$g(x)=\frac{f''(a)}{2!}+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-2}. \quad (12)$$

(11) ტოლობიდან აგრეთვე ჩანს, რომ $f'(a)$ არის $\varphi(x)$ მრავალწევრის $x-a$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი, ე. ი. $\varphi(a)=f'(a)$. ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ, რომ $\frac{f''(a)}{2!}$ არის $g(x)$ მრავალწევრის $x-a$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი და ა. შ. თუ ამ პროცესს ასე განვაგრძობთ თანამიმდევრობით, ჰორნერის სქემის გამოყენებით მივიღებთ:

$$f(a),\ f'(a),\ \frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

რიცხვით მნიშვნელობებს. მიღებულ მნიშვნელობათა საფუძველზე $f(x)$ მრავალწევრი დაიშლება $(x-a)$-ს ხარისხების მიხედვით. ამ მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი. მრავალწევრი

$$f(x)=x^4-6x^3-2x^2+5x-4$$

დავშალოთ $x-5$ ორწევრის ხარისხების მიხედვით. ჰორნერის სქემის გამოყენებით თანამიმდევრობით გამოვიანგარიშოთ $f(5)$, $f'(5)$, $\frac{f''(5)}{2!}$, $\frac{f'''(5)}{3!}$, $\frac{f^{(4)}(5)}{4!}$ მნიშვნელობანი, მივიღებთ:

$$5\left|\begin{array}{rrrrr} 1 & -6 & -2 & 5 & -4 \\ \hline 1 & -1 & -7 & -30 & -154 \end{array}\right., \quad \text{ე. ი.}\ \varphi(x)=x^3-x^2-7x-30,\quad f(5)=-154,$$

$$5\left|\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -7 & -30 \\ \hline 1 & 4 & 13 & 35 \end{array}\right., \quad \text{ე. ი.}\ \varphi_1(x)=x^2+4x+13,\qquad f'(5)=35,$$

$$5\left|\begin{array}{rrr} 1 & 4 & 13 \\ \hline 1 & 9 & 58 \end{array}\right., \qquad \text{ე. ი.}\ \varphi_2(x)=x+9,\qquad \frac{f''(5)}{2!}=58,$$

$$5\left|\begin{array}{rr} 1 & 9 \\ \hline 1 & 14 \end{array}\right., \qquad \text{ე. ი.}\ \varphi_3(x)=1,\quad \frac{f'''(5)}{3!}=14,\quad \frac{f^{(4)}(5)}{4!}=1.$$

მაშასადამე, მოცემული მრავალწევრის დაშლას $x-5$ ორწევრის ხარისხების მიხედვით ექნება შემდეგი სახე:

$$f(x)=-154+35(x-5)+58(x-5)^2+14(x-5)^3+(x-5)^4.$$

ცხადია, $f(5)$, $f'(5)$, $\frac{f''(5)}{2!}$, $\frac{f'''(5)}{3!}$, $\frac{f^{(4)}(5)}{4!}$ მნიშვნელობათა გამოთ-

ვლის პროცესი შეიძლება განვიხილოთ ერთ სქემაზე:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
5 & 1 & -6 & -2 & 5 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -7 & -30 & \underline{-154} = f(5), \\
 & 1 & 4 & 13 & \underline{35} = f'(5), & \\
 & 1 & 9 & \underline{58} = \frac{f''(5)}{2!}. & & \\
 & 1 & \underline{14} = \frac{f'''(5)}{3!}, & & & \\
 & \underline{1} = \frac{f^{(4)}(5)}{4!}. & & & &
\end{array}
$$

ამ სქემას, რომელსაც შეიძლება **ჰორნერის განზოგადებული სქემა** ვუწოდოთ, გამოვიყენებთ შემდგომ $f(x)$ მრავალწევრის ფესვის ჯერადობის დასადგენად და ზოგიერთი სხვა მნიშვნელოვანი საკითხის შესასწავლად.

§ 31. ჯერადი მამრავლები და მათი გამოყოფა

ვთქვათ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულია რომელიმე $f(x)$ მრავალწევრი. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. თუ P ველზე დაუყვანი $\varphi(x)$ მრავალწევრი არის $f(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი მამრავლი, მაშინ $f'(x)$ წარმოებულისათვის ის იქნება $(k-1)$-ჯერადი დაუყვანი მამრავლი.

დამტკიცება. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x) = \varphi^k(x) \cdot g(x), \tag{1}$$

სადაც $g(x)$ არ იყოფა $\varphi(x)$-ზე. (1) ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$f'(x) = k\varphi^{k-1}(x)\varphi'(x)g(x) + \varphi^k(x)g'(x) =$$

$$= \varphi^{k-1}(x)[k\varphi'(x) \cdot g(x) + \varphi(x)g'(x)].$$

ცხადია, კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამი არ იყოფა $\varphi(x)$-ზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მივიღებდით, რომ პირველი შესაკრები $k\varphi'(x)g(x)$ იყოფა $\varphi(x)$ დაუყვან მამრავლზე. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან არც $\varphi'(x)$ და არც $g(x)$ არ იყოფა $\varphi(x)$-ზე; ამით თეორემა დამტკიცებულია. დამტკიცებული თეორემის რამდენჯერმე გამოყენებით მივიღებთ, რომ $f(x)$ **მრავალწევრის k-ჯერადი დაუყვანი მამრავ-**

ლი მოცემული მრავალწევრის მე-s რიგის $f^{(s)}(x)$ წარმოებულისათვის ($k \geqslant s$) იქნება ($k-s$)-ჯერადი დაუყვანი მამრავლი. კერძოდ, $f(x)$ მრავალწევრის ერთჯერადი დაუყვანი მამრავლი არ შევა $f(x)$ მრავალწევრის წარმოებულის დაშლაში.

ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის დაშლას დაუყვან მამრავლებად აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=a_0p_1^{\alpha_1}(x)\cdot p_2^{\alpha_2}(x)\,\ldots\,p_k^{\alpha_k}(x). \tag{2}$$

თანახმად მრავალწევრთა ნამრავლისა და ხარისხის გაწარმოების წესისა გვექნება:

$$f'(x)=a_0p_1^{\alpha_1-1}(x)p_2^{\alpha_2-1}(x)\,\ldots\,p_k^{\alpha_k-1}(x)\cdot\varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ არ იყოფა არც ერთ $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_k(x)$ მამრავლზე, ამიტომ გვექნება:

$$[f(x),\ f'(x)]=p_1^{\alpha_1-1}(x)p_2^{\alpha_2-1}(x)\,\ldots\,p_k^{\alpha_k-1}(x). \tag{3}$$

(3) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ $f(x)$ მრავალწევრს არ გააჩნია არც ერთი ჯერადი მამრავლი, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის და მისი წარმოებულის უდიდესი საერთო გამყოფი მუდმივია, ე. ი. როცა $f(x)$ მრავალწევრს არ გააჩნია ჯერადი მამრავლი, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრი მის $f'(x)$ წარმოებულთან ურთიერთმარტივია. ამრიგად, **$f(x)$ მრავალწევრი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არ შეიცავს არც ერთ ჯერად მამრავლს, თუ $f(x)$ მრავალწევრი და მისი წარმოებული ურთიერთმარტივია.**

ახლა განვიხილოთ $f(x)$ მრავალწევრის ჯერადი მამრავლების გამოყოფის საკითხი. X_1-ით აღვნიშნოთ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ერთჯერადი დაუყვანი მამრავლის ნამრავლი, X_2-ით აღვნიშნოთ ყველა ორჯერადი დაუყვანი მამრავლის ნამრავლი და ა. შ., X_s-ით აღვნიშნოთ ყველა s-ჯერადი დაუყვანი მამრავლის ნამრავლი. თუ $f(x)$ მრავალწევრი არ შეიცავს k-ჯერად დაუყვანად მამრავლს, მაშინ დავწერთ $X_k=1$. ვთქვათ, s არის $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვანი მამრავლის ჯერადობის უდიდესი მაჩვენებელი; მაშინ (2) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$f(x)=a_0X_1\cdot X_2^2\cdot X_3^3\ldots X_s^s. \tag{4}$$

მაგალითად, ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის დაშლას, რაციონალურ რიცხვთა ველზე, დაუყვან მამრავლებად აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=5(x+3)(x+1)^2(x-2)(x^2+3)^2(x-1)^4,$$

აქ $a_0=5$, $X_1=(x+3)(x-2)$, $X_2=(x+1)(x^2+3)$, $X_3=1$, $X_4=(x-1)$, ამიტომ

$$f(x)=5X_1\cdot X_2^2\cdot X_4^4.$$

$f(x)$ მრავალწევრის ჯერადი მამრავლების გამოყოფის მიზნით გავაწარმოოთ (4) თანაფარდობა, მივიღებთ:

$$f'(x)=X_2X_3^2X_4^3\ldots X_s^{s-1}\varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ არ იყოფა არც ერთ X_1, X_2, ..., X_s დაუყვან მამრავლზე. $f(x)$ და $f'(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი აღვნიშნოთ $d_1(x)$-ით, ე. ი. $[f(x),\ f'(x)]=d_1(x)$, სადაც

$$d_1(x)=X_2X_3^2X_4^3\ldots X_s^{s-1}. \tag{5}$$

ახლა, თუ $d_2(x)$-ით აღვნიშნავთ $d_1(x)$-ის და მის $d'_1(x)$ წარმოებულის უდიდეს საერთო გამყოფს და ა. შ. $d_k(x)$-ით ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$) აღვნიშნავთ $d_{k-1}(x)$-ის და მისი $d_{k-1}'(x)$ წარმოებულის უდიდეს საერთო გამყოფს, (5) ტოლობის ანალოგიურად მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{aligned} d_2(x)&=X_3X_4^2\ldots X_s^{s-2}, \\ d_3(x)&=X_4X_5^2\ldots X_s^{s-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ d_{s-1}(x)&=X_s, \\ d_s(x)&=1. \end{aligned} \tag{6}$$

(4), (5) და (6) ტოლობათა მიხედვით შეიძლება დავწეროთ:

$$\begin{aligned} E_1&=\frac{f(x)}{d_1(x)}=a_0X_1X_2X_3\ldots X_s, \\ E_2&=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=X_2X_3\ldots X_s, \\ E_3&=\frac{d_2(x)}{d_3(x)}=X_3X_4\ldots X_s, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_s&=\frac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)}=X_s. \end{aligned}$$

აქედან ვღებულობთ:

$$X_1=\frac{E_1}{a_0E_2}\ ,\quad X_2=\frac{E_2}{E_3}\ ,\ \ldots,\quad X_{s-1}=\frac{E_{s-1}}{E_s}\ ,\qquad X_s=E_s. \tag{7}$$

ამრიგად, (7) თანაფარდობით ჩვენ ვიპოვეთ შესაბამისად $f(x)$ მრავალწევრის ერთჯერადი, ორჯერადი და ა. შ. s-ჯერადი დაუყვანი X_1, X_2, X_3, .., X_s მამრავლების ნამრავლი. აქ ყოველი $X_k\neq 1$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$) იქნება $f(x)$ მრავალწევრის k-ჯერად დაუყვან მამრავლთა ნამრავლი.

შევნიშნოთ, რომ განხილული მეთოდით, საზოგადოდ, $f(x)$ მრავალწევრი არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება დავშალოთ დაუყვან მამრავლებად, ვინაიდან, როცა $s=1$, ე. ი. როცა $f(x)$ წარმოადგენს მხოლოდ ერთჯერადი დაუყვანი მამრავლების ნამრავლს, მაშინ $f(x)=E_1$ და ამ შემთხვევაში ზემოთ მოყვანილი მეთოდით E_1-ის დაუყვანი მამრავლების მოძებნა შეუძლებელია.

მაგალითი. რაციონალურ რიცხვთა ველზე გამოვყოთ დაუყვანი ჯერადი მამრავლები მრავალწევრისა

$$f(x)=x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1.$$

$f(x)$ მრავალწევრის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$f'(x)=5x^4-12x^3+12x^2-8x+3.$$

ვიპოვოთ $f(x)$ და $f'(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი $d_1(x)$, გვექნება:

$$d_1(x)=x^2-2x+1.$$

შემდეგ, ვიპოვოთ $d_1(x)$ და $d'_1(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი $d_2(x)$, გვექნება:

$$d_2(x)=x-1.$$

ცხადია, რომ $d_2(x)$ და $d_2'(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფია $d_3(x)=1$. მოქმედებათა პირველი საფეხური ამით დამთავრდა. ახლა შევადგინოთ E_1, E_2 და E_3 მრავალწევრები. გვექნება:

$$E_1=\frac{f(x)}{d_1(x)}=\frac{x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1}{x^2-2x+1}=x^3-x^2+x-1,$$

$$E_2=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=\frac{x^2-2x+1}{x-1}=x-1,$$

$$E_3=\frac{d_2(x)}{d_3(x)}=\frac{x-1}{1}=x-1.$$

საბოლოოდ,

$$X_1=\frac{E_1}{E_2}=x^2+1,\quad X_2=\frac{E_2}{E_3}=1,\quad X_3=E_3=x-1.$$

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრს რაციონალურ რიცხვთა ველზე აქვს ერთჯერადი x^2+1 და სამჯერადი $x-1$ დაუყვანი მამრავლები. ამრიგად, მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის კანონიკურ დაშლას რაციონალურ რიცხვთა ველზე აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=(x^2+1)(x-1)^3.$$

მოცემულ ველზე მრავალწევრთა ფესვების რიცხვი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ **თუ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული $f(x)$ მრავალწევრის ერთი α ფესვი მაინც ეკუთვნის რიცხვთა P ველს, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრი დაყვანადი იქნება P ველზე.**

მართლაც, ბეზუს თეორემის შედეგის თანახმად, თუ $x=\alpha$ არის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, მაშინ ის გაიყოფა $x-\alpha$ ორწევრზე და გაყოფის შედეგად მიღებული $n-1$ ხარისხის მრავალწევრის კოეფიციენტები მიეკუთვნება რიცხვთა P ველს. შებრუნებულ დებულებას, ცხადია, ადგილი არ აქვს.

მაგალითად, როგორც ვიცით, $f(x)=x^4+1$ მრავალწევრი დაყვანადია ნამდვილ რიცხვთა ველზე:

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1).$$

მაგრამ ამ ველში მას არც ერთი ფესვი არ აქვს. რადგან $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი $x-\alpha$ პირველი ხარისხის მამრავლი დაუყვანია, ამიტომ, როცა $x=\alpha$ არის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, $x-\alpha$ ორწევრი იქნება $f(x)$ მრავალწევრის ერთ-ერთი დაუყვანი მამრავლი. თუ $x-\alpha$ ორწევრი $f(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი მამრავლია, ე. ი. **თუ $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $(x-\alpha)^k$-ზე და არ იყოფა $(x-\alpha)^{k+1}$-ზე, მაშინ $x=\alpha$ ფესვს ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი ფესვი.** ადვილად შევამჩნევთ, რომ

$$f(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x+36$$

მრავალწევრისათვის $x=3$ ორჯერადი ფესვია.

თეორემა. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ $x=\alpha$ იყოს $f(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი ფესვი მდგომარეობს შემდეგში:

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=\ldots=f^{(k-1)}(\alpha)=0,\ \text{ხოლო}\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0.$$

მართლაც, თანახმად ზემოთ დამტკიცებული თეორემისა (გვ. 271), $f(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი $x=\alpha$ ფესვი $f'(x)$ წარმოებულისათვის იქნება $(k-1)$-ჯერადი ფესვი, $f''(x)$ წარმოებულისათვის იქნება $(k-2)$-ჯერადი ფესვი და ა. შ. $f^{(k-1)}(x)$ წარმოებულისათვის — მარტივი ფესვი, ხოლო $f^{(k)}(x)$ წარმოებულისათვის ის არ იქნება ფესვი. შებრუნებით, თუ $x=\alpha$ აკმაყოფილებს განტოლებებს:

$$f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0,\ \ldots,\ f^{(k-1)}(x)=0$$

და არ აკმაყოფილებს განტოლებას $f^{(k)}(x)=0$ ვიტყვით, რომ $x=\alpha$ არის $f^{(k-1)}(x)$ წარმოებულის მარტივი ფესვი, ორჯერადი ფესვია $f^{(k-2)}(x)$ წარმოებულისა და ა. შ. $x=\alpha$ არის $(k-1)$-ჯერადი ფესვი $f'(x)$ წარმოებულისა, ხოლო საბოლოოდ $x=\alpha$ არის k-ჯერადი ფესვი $f(x)$ მრავალწევრისა.

ცხადია, რომ $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვან მამრავლებად დაშლაში წრფივი, ანუ პირველი ხარისხის მამრავლების რიცხვი არ აღემატება მოცემული მრავალწევრის ხარისხს. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ დაშლის მარჯვენა მხარეში მიღებული მრავალწევრის ხარისხი, თანახმად მრავალწევრის მრავალწევრზე გამრავლების წესისა, აღემატება $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხს, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, **n-ური ხარისხის მრავალწევრის ფესვების რიცხვი არ აღემატება n-ს.** ცხადია, რომ ეს დებულება მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა ყოველ ფესვს ავიღებთ იმდენჯერ, რამდენსაც უდრის მისი ჯერადობა. მიღებული დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს აგრეთვე $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვან მამრავლებად დაშლის ერთადერთობიდან. ვინაიდან ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრს (მუდმივ სიდიდეს) არა აქვს ფესვი, ამიტომ მიღებული შედეგი მართებულია ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრისათვისაც. მიღებული შედეგი არაა მართებული მხოლოდ ნულმრავალწევრისათვის; ნულმრავალწევრის ხარისხი განუსაზღვრელია და ის უდრის ნულს x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. ცხადია, რომ, თუ P ველის გაფართოებულ $\overline{P}$ ველში მოთავსებულია $f(x)$ მრავალწევრის ყველა n ფესვი, მაშინ $\overline{P}$ ველზე მოცემული მრავალწევრი დაიშლება n წრფივ მამრავლად. ისეთ $\overline{P}$ ველს, რომელშიც მოთავსებულია $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ფესვი, $f(x)$ მრავალწევრის **დაშლის** ველი ეწოდება.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ: **თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს, x-ის n-ზე მეტი სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ტოლია, მაშინ $f(x)\equiv g(x)$ ე. ი. $f(x)$ და $g(x)$ ტოლია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.**

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, სხვაობა $f(x)-g(x)=\varphi(x)$ არაა ნულმრავალწევრი, ე. ი. $\varphi(x)$ არ უდრის იგივურად ნულს. მაშინ ვღებულობთ, რომ $\varphi(x)$ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს, აქვს n-ზე მეტი ფესვი, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $\varphi(x)\equiv 0$ და $f(x)\equiv g(x)$. ამრიგად, თუ P ველი ნულმახასიათებლიანი ველია (კერძოდ, რიცხვთა ველია), მაშინ **ყოველი ორი სხვადასხვა $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრისათვის P ველში ყოველთვის მოიძებნება ისეთი $x=\alpha$ მნიშვნელობა, რომ $f(\alpha)\neq g(\alpha)$.** ადვილად შევნიშნავთ, რომ სასრულმახასიათებლიანი ველისათვის ეს არაა მართებული. მართლაც, განვიხილოთ ნაშთთა კლასი 3-ის მოდულით: $M_3=\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. როგორც ვიცით, M_3 სიმრავლე კლასების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ ქმნის სამელემენტიან ველს. ამ M_3 ველზე განვიხილოთ ორი სხვადასხვა მრავალწევრი $f(x)=x^3+x+1$ და $g(x)=2x+1$. შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული მრავალწევრები M_3 ველიდან აღე-

ბული x-ის $\bar{0}$, $\bar{1}$ და $\bar{2}$ სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ტოლია, ე. ი. $f(x)=g(x)$. მაგალითად,

$$f(\bar{2})=\bar{2}^3+\bar{2}+1=\bar{2},\quad g(\bar{2})=2\cdot\bar{2}+1=\bar{2},\ \text{ე. ი.}\ f(\bar{2})=g(\bar{2}).$$

განხილულ მაგალითზე ჩანს აგრეთვე, რომ ალგებრაში მიღებული განსაზღვრა მრავალწევრთა ტოლობისა: **ყოველი ორი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრი ტოლია, თუ მათი შესაბამისი კოეფიციენტები ტოლია,** და ანალიზში ცნობილი განსაზღვრა: **ყოველი ორი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქცია ტოლია, თუ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის მათი მნიშვნელობანი ტოლია,** საზოგადოდ არაა ეკვივალენტური. განვიხილოთ მაგალითები.

1. რაციონალურ რიცხვთა ველზე აღებულ მესამე ხარისხის

$$f(x)=x^3-5$$

მრავალწევრს ამ ველში სრულიად არა აქვს ფესვი, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა ველში კი აქვს ერთი $x=\sqrt[3]{5}$ ფესვი.

2. მრავალწევრს $f(x)=x^2-4$ რაციონალურ რიცხვთა ველში აქვს ორივე ფესვი 2 და -2, ამიტომ მოცემული მრავალწევრისათვის რაციონალურ რიცხვთა ველს დაშლის ველი ეწოდება. $f(x)=x^2+1$. მრავალწევრს ნამდვილ რიცხვთა ველში სრულიად არ აქვს ფესვი. განხილული მაგალითებიდანაც ჩანს, რომ რიცხვთა P ველზე აღებული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვების რიცხვი ამ P ველში არ აღემატება მოცემული მრავალწევრის ხარისხს.

ეს შედეგი, საზოგადოდ, ნებისმიერი ველისათვის არაა მართებული. მართლაც, განვიხილოთ მაგალითი.

3. ვთქვათ, მოცემულია $\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\right\}$ სახის მეორე რიგის დიაგონალურ მატრიცთა ველი. აღნიშნულ ველში ვიპოვოთ მეორე ხარისხის $f(x)=x^2-E$ მატრიცული მრავალწევრის ფესვები. ფესვის განმარტების თანახმად, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ისეთი $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ მატრიცა, რომ

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=0$$

(აქ მარჯვნივ ნული მეორე რიგის ნულოვანი მატრიცაა).

$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ მატრიცის კვადრატში აყვანის შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\alpha^2=1$, $\beta^2=1$, ე. ი. $\alpha=\pm1$, $\beta=\pm1$. ამრიგად, მოცემულ მეორე ხარისხის მრავალწევრს მეორე რიგის დიაგონალურ მატრიცთა ველში აქვს ოთხი ფესვი:

$$x_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ x_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ x_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ და } x_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. როგორც ვნახეთ (გვ. 274),

$$f(x)=x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1$$

მრავალწევრი, ჯერადი მამრავლების გამოყოფის შედეგად, მიიღებს

$$f(x)=(x^2+1)(x-1)^3$$

სახეს. ამრიგად, მოცემულ მრავალწევრს აქვს ორი მარტივი $i, -i$ ფესვი და ერთი $x=1$ სამჯერადი ფესვი.

ჰორნერის განზოგადებული სქემის გამოყენებით დავადგინოთ მრავალწევრის ფესვის ჯერადობა.

5. გავიგოთ, არის თუ არა $x=3$

$$f(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x+36$$

მრავალწევრის ფესვი და, თუ არის, ვიპოვოთ მისი ჯერადობის მაჩვენებელი. მივიღებთ

$$\begin{array}{c|ccccl}
3 & 1 & -2 & -11 & 12 & 36\\ \hline
 & 1 & 1 & -8 & -12 & 0=f(3),\\
 & 1 & 4 & 4 & 0=f'(3), & \\
 & 1 & 7 & 25=\dfrac{f''(3)}{2!}. & &
\end{array}$$

როგორც სქემიდან ჩანს, $f(3)=f'(3)=0$ და $f''(3)\neq0$. მაშასადამე, $x=3$ არის მოცემული მრავალწევრის ორჯერადი ფესვი.

თავი VII

ალგებრული განტოლებები და წილად-რაციონალური ფუნქციები

§ 89. მესამე და მეოთხე ხარისხის ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნა

როგორც ვიცით,

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

სახის განტოლებას, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო a_0, $a_1,\ldots,$ a_n კოეფიციენტები საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვებია, ეწოდება n-ური ხარისხის ალგებრული განტოლება კომპლექსურ რიცხვთა ველზე. **ვიტყვით, რომ მოცემული ალგებრული განტოლება ამოიხსნება ალგებრულად ან, რაც იგივეა, ამოხსნადია რადიკალებში, თუ მისი ფესვები გამოისახება კოეფიციენტებით, რომლებზედაც სასრულ რიცხვჯერ მოხდენილია რაციონალური მოქმედებანი (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა) და ფესვის ამოღება.** საშუალო სკოლის კურსიდან ცნობილია ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების

$$ax^2+bx+c=0$$

რადიკალებში ამოხსნილი ფორმულა

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1}$$

კომპლექსური რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღების ფორმულის (გვ. 214) გამოყენებით შეიძლება ამოვხსნათ კომპლექსურკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლებაც.

მაგალითად, ამოვხსნათ კვადრატული განტოლება

$$x^2-(4+2i)x+18-4i=0.$$

მივიღებთ:

$$x=2+i\pm\sqrt{-15+8i}.$$

ვინაიდან

$$\sqrt{-15+8i}=\pm(1+4i),$$

გვექნება:

$$x=2+i\pm(1+4i)$$

$$x_1=3+5i,\quad x_2=1-3i.$$

ანალოგიურად მივიღებთ აგრეთვე, რომ კვადრატული განტოლების

$$x^2-(3+i)x+8-i=0$$

ფესვებია $2+3i$ და $1-2i$.

ცნობილია, რომ კვადრატული განტოლების ამოხსნა იცოდნენ ძველმა ბერძნებმა ჯერ კიდევ ჩვენს წელთაღრიცხვამდე. მესამე და მეოთხე ხარისხის ალგებრულ განტოლებათა რადიკალებში ამოხსნა, რომელსაც ჩვენ ახლა შევისწავლით, აღმოჩენილ იქნა მე-16 საუკუნეში.

ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. თუ n-ური ხარისხის ($n\geqslant 2$) ნამდვილკოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს ერთი $\alpha=\beta+\gamma i$ კომპლექსური (არანამდვილი) ფესვი მაინც აქვს, ე. ი. $f(\alpha)=0$, მაშინ მას ექნება აგრეთვე α-ს შეუღლებული $\bar{\alpha}=\beta-\gamma i$ კომპლექსური ფესვი.

მართლაც, ვთქვათ, n-ური ხარისხის ($n\geqslant 2$) ნამდვილკოეფიციენტებიანი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

მრავალწევრის ფესვია $\alpha=\beta+\gamma i$ კომპლექსური რიცხვი, ე. ი.

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0.$$

ახლა, თუ მოვიგონებთ კომპლექსური რიცხვების ჯამის, ნამრავლისა და ხარისხის მოდულის თვისებებს (გვ. 206—210), გვექნება:

$$\overline{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n}=\bar{0}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$a_0\bar{\alpha}^n+a_1\bar{\alpha}^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\bar{\alpha}+a_n=0,\ \text{ე. ი. } f(\bar{\alpha})=0,\ \text{რ. დ. გ.}$$

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ლუ-

წი რაოდენობის კომპლექსური ფესვი. აქედან უშუალოდ ვღებულობთ მეტად საინტერესო შედეგს: ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან კენტი ხარისხის მრავალწევრს ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს.

მესამე ხარისხის ალგებრული განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია მესამე ხარისხის ალგებრული განტოლება კომპლექსურ რიცხვთა ველზე

$$y^3+ay^2+by+c=0. \tag{2}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$y=x-\frac{a}{3}. \tag{3}$$

თუ y-ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (2) განტოლებაში, სათანადო გარდაქმნის შემდეგ, x-ის მიმართ მივიღებთ ისეთ მესამე ხარისხის ალგებრულ განტოლებას, რომელიც არ შეიცავს x^2, ე. ი. მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$x^3+px+q=0, \tag{4}$$

სადაც

$$p=-\frac{a^2}{3}+b, \qquad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c.$$

ცხადია, რომ, თუ გვეცოდინება (4) განტოლების ფესვები, (3) აღნიშვნის საფუძველზე ადვილად განვსაზღვრავთ მოცემული (2) განტოლების ფესვებს. ამრიგად, საკმარისია შევისწავლოთ (4) განტოლების ამოხსნა.

ვთქვათ,

$$x=\alpha+\beta, \tag{5}$$

სადაც α და β ორი დამხმარე უცნობია. x-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (4) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0,$$

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0.$$

თუ ამ ტოლობაში α და β შევარჩევთ ისე, რომ

$$\alpha\beta=-\frac{p}{3}, \tag{6}$$

მაშინ გვექნება:

$$\alpha^3+\beta^3+q=0, \qquad \alpha^3+\beta^3=-q.$$

ამრიგად, ვღებულობთ შემდეგ ორ ტოლობას:

$$\alpha^3+\beta^3=-q \text{ და } \alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}.$$

ვიეტას თეორემის თანახმად α^3 და β^3 არის შემდეგი კვადრატული განტოლების ფესვები:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$

ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ:

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

სადაც

$$z_1=\alpha^3,\ z_2=\beta^3.$$

ამრიგად,

$$\alpha=\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$\beta=\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

ახლა, (5) აღნიშვნით მოცემული x-ის მნიშვნელობა რადიკალებში შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$x=\alpha+\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{7}$$

ადვილად შემოწმდება, რომ x-ის მიღებული მნიშვნელობა (6) პირობით (4) განტოლებას აკმაყოფილებს.

ამ ფორმულას უწოდებენ კარდანოს ფორმულას, თუმცა უფრო მართებული იქნებოდა მისთვის ეწოდებინათ ტარტალიას ფორმულა. სათანადო მასალების საფუძველზე დადგენილია, რომ კარდანომ ტარტალიასაგან შეიტყო ამ ფორმულის მიღება და მან შემდეგ თავისი სახელით ერთ-ერთ მათემატიკურ ჟურნალში გამოაქვეყნა იგი, ამის შემდეგ (7) ფორმულას უწოდეს კარდანოს ფორმულა.

რადგან კუბიკურ რადიკალს კომპლექსურ რიცხვთა ველში აქვს სამი სხვადასხვა მნიშვნელობა, ამიტომ (7) ფორმულა მოგვცემს სამ მნიშვნელობას α-თვის და სამ მნიშვნელობას β-თვის. ახლა, α და β ფეს-

ვების ყველა შესაძლო ჯამი მოგვცემს სულ ცხრა მნიშვნელობას. აქედან უნდა ავარჩიოთ ისინი, რომელთათვის სრულდება (6) პირობა. ვიგულისხმოთ, რომ α_1 არის α ფესვის ერთ-ერთი მნიშვნელობა. მაშინ, როგორც უკვე ვიცით, დანარჩენი ფესვები იქნება $\alpha_2=\alpha_1\varepsilon$, $\alpha_3=\alpha_1\varepsilon^2$, სადაც ε არის $\sqrt[3]{1}$-ის ერთ-ერთი პირველადი ფესვი, მაგალითად $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. ახლა ვიპოვოთ β ფესვის შესაბამისი მნიშვნელობანი (6) პირობიდან. რადგან $\varepsilon^3=1$ და $\beta_1=-\frac{p}{3\alpha_1}$, მივიღებთ:

$$\beta_2=-\frac{p}{3\alpha_1\varepsilon}=-\frac{p\varepsilon^2}{3\alpha_1}=\beta_1\varepsilon^2,$$

$$\beta_3=-\frac{p}{3\alpha_1\varepsilon^2}=-\frac{p\varepsilon}{3\alpha_1}\beta_1\varepsilon.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ როცა α_1 და β_1 აკმაყოფილებენ (6) პირობას, მაშინ სხვა მნიშვნელობანი, მაგალითად: $\alpha_1\varepsilon^2$ და $\beta_1\varepsilon^2$ არ დააკმაყოფილებენ ამ პირობას. ამრიგად, თუ განვიხილავთ α და β ფესვთა იმ ჯამებს, რომლებიც (6) პირობას აკმაყოფილებენ, მივიღებთ x-ის შემდეგ სამ მნიშვნელობას:

$$x_1=\alpha_1+\beta_1,\quad x_2=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2,\quad x_3=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon, \tag{8}$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ (4) განტოლებას, ე. ი. უცნობთა მიღებული მნიშვნელობანი (4) არასრული კუბიკური განტოლების ფესვებია.

თუ (8) განტოლებებში ε და ε^2 ნაცვლად ჩავსვამთ შესაბამისად მათ მნიშვნელობებს $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_1&=\alpha_1+\beta_1,\\ x_2&=-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)+\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1-\beta_1)i,\\ x_3&=-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)-\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1-\beta_1)i. \end{aligned} \tag{9}$$

მაგალითი 1. (7) ფორმულის მიხედვით ვიპოვოთ შემდეგი განტოლების

$$x^3-6x+6=0$$

ფესვები. აქ $p=-6$, $q=6$. მაშასადამე,

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-3+\sqrt{9-8}}=\sqrt[3]{-2}.$$

α ფესვის ერთ-ერთი α_1 მნიშვნელობად უმჯობესია ავარჩიოთ ნამდვილი $-\sqrt[3]{2}$ ფესვი, ე. ი. $\alpha_1=-\sqrt[3]{2}$. ახლა β_1 არჩევა კი უნდა მოვახდინოთ (6) პირობის მიხედვით

$$\beta_1=-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{4}.$$

ახლა (9) ფორმულებიდან მივიღებთ მოცემული განტოლების შემდეგ სამ ფესვს:

$$x_1=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\approx-2,843,$$

$$x_2=-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})i\approx1,422+0,327i.$$

$$x_3=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})-\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})i\approx1,422-0,327i.$$

რადიკალების მიახლოებით მნიშვნელობათა გამოანგარიშებისათვის საჭიროა ლოგარითმული ცხრილების გამოყენება. ზოგ შემთხვევაში, გამოანგარიშების დაჩქარების მიზნით, საჭიროა **ლოგარითმული სახაზავისა და არითმომეტრის** გამოყენება.

ახლა განვიხილოთ **ნამდვილკოეფიციენტებიანი არასრული კუბიკური განტოლების** გამოკვლევა.

$$x^3+px+q=0 \tag{10}$$

განტოლების გამოკვლევაში ძირითად როლს ასრულებს (7) ფორმულის კვადრატული რადიკალის ქვეშ მოთავსებული გამოსახულება

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

1) ვთქვათ, $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$. ამ შემთხვევაში (7) ფორმულის კუბიკური რადიკალის ქვეშ იქნება ნამდვილი რიცხვი და ამიტომ

$$\alpha_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}$$

ფესვი შეიძლება მივიღოთ ნამდვილ რიცხვად. β_1-ის მნიშვნელობას კი

ჰიპოთეზით დამოკიდებულებიდან $\beta_1 = -\frac{p}{3\alpha_1}$. მაშასადამე, (10) განტოლების ერთ-ერთი ნამდვილი ფესვი იქნება $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$, დანარჩენ ორ ფესვს, თანახმად (9) ფორმულებისა, ექნება შემდეგი სახე:

$$x_2 = -\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 - \beta_1)i,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 - \beta_1)i. \qquad (*)$$

ამრიგად, როცა $\Delta > 0$, (10) განტოლებას აქვს ერთი ნამდვილი და ორი შეუღლებული კომპლექსური ფესვი.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

აქ $p = -6$, $q = -9$, ხოლო

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} > 0, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{49}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

α ფესვის ერთ-ერთი მნიშვნელობა იქნება $\alpha_1 = 2$, ხოლო შესაბამისი $\beta_1 = -\frac{p}{2\alpha_1} = \frac{-6}{-6} = 1$. ამგვარად, $x_1 = 3$. ორ დანარჩენ ფესვს მივიღებთ (*) ფორმულებიდან

$$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

შევნიშნოთ, რომ განხილულ შემთხვევაში ზოგიერთი განტოლების რაციონალური ფესვი (7) ფორმულით არ მოიძებნება.

მაგალითად, $x^3 + 5x - 18 = 0$ განტოლებისათვის $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, ე. ი. მოცემულ განტოლებას აქვს ერთი ნამდვილი და ორი ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური ფესვი. რაციონალურ ფესვთა მოძებნის წესით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ განტოლების თავისუფალი წევრის გამყოფი $x = 2$ მოცემული განტოლების ფესვია. ამ ფესვის მიღება (7) ფორმულით კი შეუძლებელია.

მართლაც, α_1 ფესვი ასე წარმოგვიდგება:

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{9 + \frac{34}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}, \quad \text{ხოლო } \beta_1 = -\frac{5}{3\sqrt[3]{9 + \frac{34}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}.$$

როგორც ჩანს, მიღებული α_1 და β_1 ირაციონალური რიცხვების ჯამი არის 2. (7) ფორმულის სხვა ნაკლს ჩვენ ქვემოთ ვნახავთ.

2). ვთქვათ,

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

ამ შემთხვევაში

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\quad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

ვთქვათ, α_1 არის α რადიკალის ნამდვილი მნიშვნელობა, მაშინ β_1, როგორც (6) თანაფარდობიდან ჩანს, იქნება ნამდვილი მნიშვნელობა და, გარდა ამისა, $\alpha_1=\beta_1$. თუ გამოვიყენებთ ტოლობას $\varepsilon+\varepsilon^2=-1$, (8) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$x_1=2\alpha_1,\quad x_2=\alpha_1(\varepsilon+\varepsilon^2)=-\alpha_1,\quad x_3=\alpha_1(\varepsilon^2+\varepsilon)=-\alpha_1.$$

ამრიგად, როცა $\Delta=0$, მაშინ (4) განტოლების სამივე ფესვი ნამდვილია და ერთი ორჯერადი ფესვია.

3) დასასრულს ვთქვათ,

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0.$$

ამ შემთხვევაში (7) ფორმულის კვადრატული რადიკალების ქვეშ მოთავსებულია უარყოფითი რიცხვი და ამიტომ α და β კუბიკური რადიკალების ქვეშ მოთავსებული იქნება შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები. ვთქვათ, $\alpha_1=a+bi$ არის α რადიკალის ერთ-ერთი მნიშვნელობა. მაშინ, ვინაიდან მოცემულ (10) განტოლებას (როგორც ნამდვილკოეფიციენტებიანი კენტი ხარისხის) ერთი x_1 ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს, ამიტომ α_1 კომპლექსური რიცხვის და მისი შესაბამისი β_1 კომპლექსური რიცხვის ჯამი $x_1=\alpha_1+\beta_1$ ნამდვილია. აგრეთვე $\alpha_1\beta_1$ ნამრავლი (6) პირობის ძალით ნამდვილია. ამრიგად, მივიღეთ, რომ α_1 და β_1 კომპლექსური რიცხვების ჯამი და ნამრავლი ნამდვილი რიცხვებია, ე. ი. ისინი წარმოადგენენ ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ფესვებს. ამრიგად, ვინაიდან $\alpha_1=a+bi$, გვექნება $\beta_1=a-bi$. თუ α_1 და β_1 ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (9) ფორმულებში მივიღებთ:

$$x_1=\alpha_1+\beta_1=2a,$$

$$x_2=-\frac{1}{2}2a+\frac{\sqrt{3}}{2}2bi^2=-a-\sqrt{3}\,b\,, \tag{11}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}2a - \frac{\sqrt{3}}{2}2bi^2 = -a + \sqrt{3}b\ ,$$

მაშასადამე, როცა $\Delta<0$, (4) განტოლების სამივე **ფესვი ნამდვილია და ხხვადასხვა.** საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში, რადგან კუბიკური რადიკალის ქვეშ კომპლექსური რიცხვებია, განტოლების ფესვების მოძებნა, მიუხედავად იმისა, რომ სამივე ნამდვილია, (7) ფორმულით სრულიად შეუძლებელია. ამიტომ ამ შემთხვევას ხშირად დაუყვან შემთხვევას უწოდებენ.

ახლა განვიხილოთ მე-3 შემთხვევაში (10) **განტოლების ამოხსნის ეგრეთ წოდებული ტრიგონომეტრიული მეთოდი.** რადგან

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -d^2, \text{ სადაც } d>0.$$

ახლა α ფესვი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+di}$. $-\frac{q}{2}+di$ კომპლექსური რიცხვიდან კუბიკური ფესვის ამოღების მიზნით, მას მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე. მივიღებთ:

$$-\frac{q}{2}+di = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

სადაც

$$r = \sqrt{\frac{q^2}{4}+d^2} = \sqrt{\frac{-p^3}{27}}, \quad \cos\varphi = \frac{-q}{2r}, \quad \sin\varphi = \frac{d}{r}.$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ ეს მესამე შემთხვევა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $p<0$. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+di} = \sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)} =$$

$$= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right) \quad (k=0,\ 1,\ 2)$$

α ფესვის მნიშვნელობა, როცა $k=0$, მივიღოთ α_1 მნიშვნელობად, ე. ი.

$$\alpha_1=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

α_1 კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი და წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი შესაბამისად არის $a=\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}$, $b=\sqrt[3]{r}\sin\frac{\varphi}{3}$. ამიტომ თანახმად (11) ფორმულებისა მივიღებთ:

$$x_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2=-\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}-\sqrt[3]{r}\sin\frac{\varphi}{3}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$x_3=-\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt[3]{r}\sin\frac{\varphi}{3}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right). \qquad (12)$$

ამგვარად, (10) არასრული ნამდვილკოეფიციენტებიანი კუბიკური განტოლება დაუყვან შემთხვევაში ამოიხსნება (12) ფორმულებით. მიღებული ფორმულებიდან ჩანს, რომ (10) განტოლების ამოხსნა ამ მესამე შემთხვევაში დაკავშირებულია φ **კუთხის სამ ტოლ ნაწილად გაყოფადობის საკითხთან.**

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^3-6x+4=0.$$

აქ $p=-6$, $q=4$, ხოლო $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-4<0$, ამრიგად, საქმე გვაქვს მესამე დაუყვან შემთხვევასთან. გამარტივების შემდეგ α ფესვი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$\alpha=\sqrt[3]{-2+2i}.$$

$-2+2i$ კომპლექსურ რიცხვს მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე

$$-2+2i=2(-1+i)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

მაშასადამე,

$$\alpha=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right]\quad(k=0,\ 1,\ 2).$$

α რადიკალის ერთ-ერთი მნიშვნელობა (კერძოდ, როცა $k=0$) იქნება $\alpha_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$. თანახმად (11) ფორმულებისა, რადგან აქ $a=1$, $b=1$, მოცემული განტოლების ფესვები იქნება:

$$x_1=2,\ \ x_2=-1-\sqrt{3},\ \ x_3=-1+\sqrt{3}\ .$$

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^3-24x-32=0.$$

აქ

$$p=-24,\quad q=-32,\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-256<0.$$

მივიღებთ:

$$\alpha=\sqrt[3]{16+16i}\ ,\quad r=16\sqrt{2}\ ,\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

ცხადია, $\varphi=\frac{\pi}{4}$; ამრიგად, მოცემული განტოლების ფესვები, თანახმად (12) ფორმულებისა, იქნება:

$$x_1=4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\,,\quad x_2=4\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=-4,\quad x_3=4\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}\ .$$

ახლა, თუ საჭიროა, ლოგარითმების ცხრილის ან ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით შეიძლება გამოვიანგარიშოთ x_1 და x_3 ნამდვილი ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობანი.

მაგალითი 5. განვიხილოთ განტოლება

$$x^3-19x+30=0.$$

აქ

$$p=-19,\quad q=30,\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0.$$

ალგებრული განტოლების რაციონალური ფესვების მოძებნის წესით მივიღებთ, რომ მოცემული განტოლების ფესვებია: $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-5$, მაგრამ მათი მიღება (7) ფორმულით შეუძლებელია.

როგორც განხილული შემთხვევებიდან და მაგალითებიდან ჩანს, ტარტალია-კარდანოს (7) ფორმულის პრაქტიკული ღირებულება უმნიშვნელოა.

მეოთხე ხარისხის ალგებრული განტოლება. ვთქვათ, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე მოცემულია მეოთხე ხარისხის

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0 \tag{1}$$

ალგებრული განტოლება. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$y=x-\frac{a}{4} \tag{2}$$

ჩასმით (1) განტოლება დაიყვანება

$$x^4+px^2+qx+r=0 \tag{3}$$

არასრულ მეოთხე ხარისხის ალგებრულ განტოლებამდე. სასურველია მკითხველმა ამოწეროს p, q და r მუდმივების მნიშვნელობანი, გამოსახულნი a, b, c და d ასოებით. ჩვენი მიზანია (3) განტოლების ამოხსნა. λ პარამეტრის დახმარებით (3) განტოლება შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+\lambda\right)^2+qx+r-\frac{p^2}{4}-\lambda^2-2\lambda x^2-p\lambda.$$

ამრიგად,

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\lambda\right)^2-\left[2\lambda x^2-qx+\left(\lambda^2+p\lambda-r+\frac{p^2}{4}\right)\right]=0. \tag{4}$$

(4) განტოლების მარცხენა მხარის კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება შეიძლება განვიხილოთ როგორც კვადრატული სამწევრი x-ის მიმართ. შევარჩიოთ λ პარამეტრი ისე, რომ ამ კვადრატულ სამწევრს ჰქონდეს ჯერადი ფესვი. ამისათვის, როგორც ვიცით, საჭიროა მისი დისკრიმინანტი იყოს ნული, ე. ი.

$$q^2-4\cdot 2\lambda\left(\lambda^2+p\lambda-r+\frac{p^2}{4}\right)=0. \tag{5}$$

(5) განტოლება, საზოგადოდ, λ-ს მიმართ წარმოადგენს კომპლექსურკოეფიციენტებიან მესამე ხარისხის ალგებრულ განტოლებას, რომლის ამოხსნა ტარტალია-კარდანოს ფორმულით ჩვენთვის უკვე ცნობილია. (5) განტოლებას (3) განტოლების შესაბამისი კუბიკური განტოლება, ანუ **რეზოლვენტი**, ეწოდება. ვიგულისხმოთ, რომ (5) განტოლების ერთერთი ფესვია $\lambda=\lambda_0$. თუ λ-ს ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ ზემოთ ხსე-

ნებულ კვადრატულ სამწევრში, მაშინ კვადრატულ სამწევრს ექნება ჯერადი ფესვი $x_1=x_2=\frac{q}{4\lambda_0}$ და ის შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$2\lambda_0x^2-qx+\left(\lambda_0^2+p\lambda_0-r+\frac{p^2}{4}\right)=2\lambda_0\left(x-\frac{q}{4\lambda_0}\right)^2. \tag{6}$$

(6) თანაფარდობის საფუძველზე (4) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\lambda_0\right)^2-2\lambda_0\left(x-\frac{q}{4\lambda_0}\right)^2=0. \tag{7}$$

(7) განტოლების ამოხსნა კი დაიყვანება შემდეგი ორი კვადრატული განტოლების ამოხსნამდე:

$$x^2-\sqrt{2\lambda_0}\,x+\left(\frac{q}{2}+\lambda_0+\frac{q}{2\sqrt{2\lambda_0}}\right)=0,$$

$$x^2+\sqrt{2\lambda_0}\,x+\left(\frac{p}{2}+\lambda_0-\frac{q}{2\sqrt{2\lambda_0}}\right)=0. \tag{8}$$

როგორც ვხედავთ, (3) მეოთხე ხარისხის განტოლებიდან იგივური გარდაქმნებით მივედით (8) ორ კვადრატულ განტოლებამდე. ამიტომ (8) განტოლებათა ფესვები აგრეთვე იქნება (3) განტოლების ფესვები. თუ ჩვენთვის ცნობილია (3) განტოლების ფესვები, მაშინ (2) აღნიშვნის მიხედვით ადვილად მივიღებთ მოცემული (1) განტოლების ფესვებს. როგორც (8) განტოლებებიდან ჩანს, მეოთხე ხარისხის განტოლების ფესვები წარმოგვიდგება რადიკალების სახით მისი კოეფიციენტების მიმართ. ვინაიდან აღნიშნულ ფორმულებს არავითარი პრაქტიკული მნიშვნელობა არ აქვთ, ჩვენ მას არ დავწერთ.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება

$$y^4-2y^3+2y^2+4y-8=0.$$

$y=x+\frac{1}{2}$ ჩასმით მოცემული განტოლება დაიყვანება

$$x^4+\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{91}{16}=0 \tag{9}$$

სახემდე. აქ

$$p=\frac{1}{2}, \qquad q=5, \qquad r=-\frac{91}{16}.$$

შევადგინოთ (9) განტოლების შესაბამისი რეზოლვენტის განტოლება. მივიღებთ:

$$25-8\lambda\left(\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda+\frac{91}{16}+\frac{1}{16}\right)=0.$$

გამარტივების შემდეგ გვექნება:

$$8\lambda^3+4\lambda^2+46\lambda-25=0. \qquad (10)$$

(10) განტოლების ამოხსნა ტარტალია-კარდანოს ფორმულით ვერ მოგვცემს სასურველ შედეგს. თუ (10) განტოლებას ამოვხსნით რაციონალური ფესვების მოძებნის წესით, მივიღებთ $\lambda_0=\frac{1}{2}$. ახლა მოცემული (9) განტოლების ამოხსნა (8) თანაფარდობათა გამოყენებით დაიყვანება შემდეგი ორი კვადრატული განტოლების ამოხსნამდე:

$$x^2-x+\frac{13}{4}=0 \text{ და } x^2+x-\frac{7}{4}=0.$$

შესაბამისად მიღებულ კვადრატულ განტოლებათა ან, რაც იგივეა, (9) განტოლების ფესვებია $\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}\ i$ და $-\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}$; $y=x+\frac{1}{2}$ ჩასმიდან ვღებულობთ, რომ მოცემული მეოთხე ხარისხის ალგებრული განტოლების ფესვებია:

$$\pm\sqrt{2}, \qquad 1\pm\sqrt{3}\,i.$$

შევნიშნოთ, რომ, როგორც მესამე ხარისხის, ისე ზოგადი სახის მეოთხე ხარისხის ალგებრული განტოლების რადიკალებში ამოხსნადობის საკითხს დიდი თეორიული მნიშვნელობა აქვს, თუმცა მიღებული ფორმულები პრაქტიკულად ნაკლებად გამოსაყენებელია. დაწყებული მე-16 საუკუნიდან მთელი სამი საუკუნის განმავლობაში მსოფლიოს უძლიერესი მათემატიკოსები ცდილობდნენ ზოგადი სახის n ხარისხის ($n\geqslant5$) ალგებრულ განტოლებათა რადიკალებში ამოხსნას. როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, პირველად ნორვეგიელი მათემატიკოსის **აბელის** (1802—1829) მიერ მკაცრად იქნა დამტკიცებული, რომ **ზოგადი სახის ალგებრული განტოლებანი, რომელთა ხარისხი აღემატება ოთხს, რადიკალებში არ ამოიხსნება.** ეს იმას არ ნიშნავს, რომ არც ერთი კონკრეტული განტოლება, რომლის ხარისხი $n\geqslant5$, არ შეიძლება ამოხსნილ იქნეს რადიკალებში. ეს საკითხი მთლიანად გადაწყვეტილ იქნა ფრანგი

მათემატიკოსის ევარისტ გალუას (1811—1832) მიერ. გალუამ ჯგუფთა თეორიის გამოყენებით მოახდინა კლასიფიკაცია იმ მაღალი ხარისხის ალგებრული განტოლებებისა, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია რადიკალებში.

გალუას შედეგებმა, რომელიც ახლა ცნობილია **გალუას თეორიის** სახელწოდებით, დიდი გავლენა მოახდინა ალგებრის და, კერძოდ, ჯგუფთა თეორიის შემდგომ განვითარებაზე. ორიოდე სიტყვით აღვნიშნოთ გალუას შესახებ. ახალგაზრდა გალუა, მიუხედავად იმისა, რომ მას ღრმა ცოდნა ჰქონდა, გარკვეული მიზეზების გამო ორჯერ ჩაიჭრა მისაღებ გამოცდებზე პოლიტექნიკურ სკოლაში. შემდეგ ის 1829 წელს მოეწყო სხვა სასწავლებელში. გალუა აქტიურ მონაწილეობას იღებდა საფრანგეთის პოლიტიკურ ცხოვრებაში, ის რამდენჯერმე დააპატიმრეს როგორც რევოლუციონერი. შემდეგ სრულიად ახალგაზრდა გალუა, 21 წლის არც კი იყო, რომ დაიღუპა დუელში. გალუას შედეგები მაშინდელი საფრანგეთის მეცნიერებათა აკადემიის მიერ არ იქნა სათანადოდ შეფასებული. გალუას თეორიის შემდგომი განვითარების საქმეში სხვა მათემატიკოსებთან ერთად გარკვეული წვლილი შეიტანეს საბჭოთა მათემატიკოსებმაც ნ. გ. ჩებოტაროვმა, ი. რ. შაფარევიჩმა და სხვებმა. შაფარევიჩის ბრწყინვალე შედეგი გალუას თეორიაში 1959 წელს აღინიშნა ლენინური პრემიით.

§ 83. თეორემა ფესვის არსებობის შესახებ. დაშლის ველი

ვთქვათ, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულ $f(x)$ მრავალწევრს არ გააჩნია ფესვი P ველში. ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ საკითხი, **არსებობს თუ არა P ველის გაფართოებული ისეთი $\overline{P}$ ველი, რომელშიც მოთავსდება $f(x)$ მრავალწევრის ერთი ფესვი მაინც.** ცხადია, რომ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ყოველი პირველი ხარისხის მრავალწევრის ფესვი მოთავსებულია P ველში. ამიტომ ჩვენ მიერ დაყენებული საკითხი უნდა განვიხილოთ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ისეთი მრავალწევრებისათვის, რომელთა ხარისხი $n\geqslant 2$ და რომელთაც არ აქვთ ფესვი P ველში.

თეორემა. **$P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული დაუყვანი $f(x)$ მრავალწევრისათვის ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ P ველის ისეთი გაფართოებული $\overline{P}$ ველი, რომელშიც მოთავსდება $f(x)$ მრავალწევრის ერთი ფესვი მაინც.**

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ საჭიროა შევადგინოთ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლის ნაშთთა სრული სისტემა P ველში

დაუყვანი $f(x)$ მრავალწევრის მოდულით, დაახლოებით ისე როგორც ჩვენ ადრე (გვ. 167) განვიხილეთ მთელ რიცხვთა რგოლის ნაშთთა კლასები რომელიმე n ნატურალური რიცხვის მოდულით.

$P[x]$ მრავალწევრთა რგოლი, ამავე რგოლიდან აღებულ P ველზე დაუყვანი $n \geqslant 2$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრის მიმართ, დავყოთ ერთიმეორის არაგადამკვეთ კლასებად შემდეგი წესით: **ერთ კლასში მოვათავსოთ ისეთი მრავალწევრები $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან, რომლებიც $f(x)$-ზე გაყოფის შედეგად გვაძლევს ერთსა და იმავე ნაშთს.** სხვა სიტყვებით, $f(x)$ **მრავალწევრის მოდულით ერთ კლასში მოთავსდება ყოველი ისეთი ორი $\varphi(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრი, რომელთა სხვაობა უნაშთოდ იყოფა** $f(x)$-ზე. კლასებად დაყოფის ამ ორი წესის ეკვივალენტურობა ადვილად შემოწმდება.

მართლაც, თანახმად პირველი განმარტებისა, თუ $\varphi(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები ეკუთვნიან ერთსა და იმავე კლასს, $f(x)$ მრავალწევრის მოდულით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\varphi(x)=f(x)\,q_1(x)+r(x) \text{ და } g(x)=f(x)\,q_2(x)+r(x), \tag{1}$$

სადაც $r(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე ან $r(x)=0$. თუ განვიხილავთ $\varphi(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების სხვაობას, გვექნება:

$$\varphi(x)-g(x)=f(x)[q_1(x)-q_2(x)],$$

$$\varphi(x)-g(x)=f(x)\,q(x), \text{ სადაც } q(x)=q_1(x)-q_2(x). \tag{2}$$

ახლა ვუჩვენოთ, რომ მეორე განმარტებიდან გამოდის პირველი. თანახმად მეორე განმარტებისა, თუ $\varphi(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები ეკუთვნიან ერთსა და იმავე კლასს $f(x)$ მრავალწევრის მოდულით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\varphi(x)-g(x)=f(x)\,q(x) \text{ ან } \varphi(x)=g(x)+f(x)\,q(x). \tag{3}$$

$g(x)$ მრავალწევრი წარმოვადგინოთ ასე:

$$g(x)=f(x)\,q_2(x)+r(x),$$

სადაც $r(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე ან $r(x)=0$. თუ ახლა (3) ტოლობაში ჩავსვამთ $g(x)$-ის ამ მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$\varphi(x)=f(x)\,q_2(x)+r(x)+f(x)\,q(x)=f(x)\,q_1(x)+r(x),$$

ე. ი.

$$\varphi(x)=f(x)\,q_1(x)+r(x), \text{ სადაც } q_1(x)=q_2(x)+q(x).$$

ამრიგად, ამ ორი განმარტების ეკვივალენტურობა დამტკიცებულია. შევთანხმდეთ და მიღებული კლასები აღვნიშნოთ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$,... სიმბოლოებით. შემოვიღოთ კლასებზე ჯამისა და ნამრავლის ოპერაციების ცნება. ადვილად შევამჩნევთ, რომ ყოველი ორი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ კლასიდან შესაბამისად აღებული ნებისმიერი $\varphi(x)\epsilon\bar{a}$ და $g(x)\epsilon\bar{b}$ მრავალწევრების ჯამი $\varphi(x)+g(x)$ ეკუთვნის ერთსა და იმავე გარკვეულ კლასს $f(x)$ მრავალწევრის მოდულით.

მართლაც, ვთქვათ, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\epsilon\bar{a}$ და $g_1(x)$, $g_2(x)\epsilon\bar{b}$. აღვნიშნოთ:

$$\lambda_1(x)=\varphi_1(x)+g_1(x) \text{ და } \lambda_2(x)=\varphi_2(x)+g_2(x),$$

განვიხილოთ სხვაობა

$$\lambda_1(x)-\lambda_2(x)=[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+[g_1(x)-g_2(x)]=f(x)q_1(x)+$$
$$+f(x)q_2(x)=f(x)q(x), \text{ სადაც } q(x)=q_1(x)+q_2(x).$$

მივიღებთ, რომ $\lambda_1(x)-\lambda_2(x)$ სხვაობა იყოფა $f(x)$-ზე; ეს იმას ნიშნავს, რომ $\lambda_1(x)$ და $\lambda_2(x)$ ეკუთვნიან ერთსა და იმავე კლასს $f(x)$ მრავალწევრის მოდულით. ვინაიდან ყოველი ორი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ კლასიდან აღებული ნებისმიერი ორი მრავალწევრის ჯამი ეკუთვნის ერთ გარკვეულ კლასს $f(x)$-ის მოდულით, ამიტომ ბუნებრივია, ისეთ კლასს, რომელსაც ეკუთვნის $\bar{a}$ კლასიდან და $\bar{b}$ კლასიდან აღებული ნებისმიერი ორი მრავალწევრის ჯამი, ვუწოდოთ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ კლასების ჯამი:

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}. \tag{4}$$

ახლა ნებისმიერი ორი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ კლასის ნამრავლის განმარტებისათვის ვუჩვენოთ, რომ $\bar{a}$ კლასიდან და $\bar{b}$ კლასიდან აღებული ნებისმიერი ორი მრავალწევრის ნამრავლი ეკუთვნის ერთ გარკვეულ კლასს.

მართლაც, აღვნიშნოთ:

$$\theta_1(x)=\varphi_1(x)g_1(x) \text{ და } \theta_2(x)=\varphi_2(x)g_2(x),$$

განვიხილოთ სხვაობა

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=\varphi_1(x)g_1(x)-\varphi_2(x)g_2(x). \tag{5}$$

ვინაიდან $g_1(x)$, $g_2(x)\epsilon\bar{b}$ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$g_1(x)=f(x)q_1(x)+r(x), \quad g_2(x)=f(x)q_2(x)+r(x).$$

$g_1(x)$ და $g_2(x)$ ამ მნიშვნელობათა საფუძველზე (5) ტოლობის მარჯვენა მხარე შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=f(x)[\varphi_1(x)q_1(x)-\varphi_2(x)q_2(x)]+[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]r(x), \quad (6)$$

ვინაიდან $\varphi_1 \epsilon(x)$, $\varphi_2(x)\epsilon\bar{a}$, ე. ი. $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=f(x)q(x)$; (6) ტოლობიდან ჩანს, რომ სხვაობა $\theta_1(x)-\theta_2(x)$ უნაშთოდ იყოფა $f(x)$ მრავალწევრზე. ამრიგად დამტკიცდა, რომ თუ $\bar{a}$ კლასიდან ავიღებთ ნებისმიერ ორ მრავალწევრს $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\epsilon\bar{a}$ და $\bar{b}$ კლასიდან ავიღებთ ნებისმიერ ორ მრავალწევრს $g_1(x)$, $g_2(x)\epsilon\bar{b}$, მაშინ მათი შესაბამისი ნამრავლები $\theta_1(x)$ და $\theta_2(x)$ ეკუთნვის ერთსა და იმავე გარკვეულ $\bar{d}$ კლასს $f(x)$ მრავალწევრის მოდულით. ამიტომ, ბუნებრივია, ისეთ $\bar{d}$ კლასს, რომელსაც ეკუთვნის $\bar{a}$ კლასიდან და $\bar{b}$ კლასიდან აღებული ნებისმიერი ორი მრავალწევრის ნამრავლი, ვუწოდოთ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ კლასების ნამრავლი:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{d}. \quad (7)$$

$P[x]$ მრავლწევრთა რგოლიდან აღებულ ისეთ მრავალწევრთა სიმრავლეს, რომლებიც უნაშთოდ იყოფა $f(x)$-ზე, ვუწოდოთ ნულოვანი კლასი და აღვნიშნოთ $\bar{0}$ სიმბოლოთი. ადვილად შევამჩნევთ, რომ $\bar{0}$ კლასი, კლასების შეკრების ოპერაციის მიმართ იმავე როლს ასრულებს, რასაც ჩვეულებრივი რიცხვი ნული რიცხვების შეკრების ოპერაციის მიმართ, ე. ი.

$$\bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}.$$

თუ $\bar{a}$ კლასი წარმოადგენს ისეთ მრავალწევრთა სიმრავლეს, რომლებიც $f(x)$-ზე გაყოფის შედეგად გვაძლევენ $r(x)$ ნაშთს, მაშინ $\bar{a}$ კლასის შებრუნებული კლასი შეკრების ოპერაციის მიმართ ვუწოდოთ ისეთ მრავალწევრთა სიმრავლეს, რომლებიც $f(x)$-ზე გაყოფის შედეგად გვაძლევს — $r(x)$ ნაშთს. აქედან ვღებულობთ, რომ კლასთა სიმრავლეში გამოკლების ოპერაცია სრულდება ცალსახად.

$P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულ ისეთ მრავალწევრთა სიმრავლეს, რომლებიც $f(x)$-ზე გაყოფის შედეგად გვაძლევს ნაშთს 1-ს, ვუწოდოთ ერთეულოვანი კლასი და აღვნიშნოთ $\bar{1}$ სიმბოლოთი. ახლა განვმარტოთ არანულოვანი კლასის შებრუნებული კლასი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. არანულოვანი $\bar{a}$ კლასიდან ავიღოთ ნებისმიერი $\varphi(x)$ მრავალწევრი. ვინაიდან $\varphi(x)$ მრავალწევრი უნაშთოდ არ იყოფა $f(x)$ მრავალწევრზე და $f(x)$ მრავალწევრი დაუყვანია $P[x]$ მრავალწევრთა

რგოლზე, $f(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრები ურთიერთმარტივია. თანახმად ურთიერთმარტივ მრავალწევრთა თვისებისა, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლში ყოველთვის მოიძებნება ორი ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრი, რომ:

$$\varphi(x)u(x)+f(x)v(x)=1, \tag{8}$$
$$\varphi(x)u(x)=1-f(x)v(x).$$

როგორც (8) ტოლობის მარჯვენა მხარიდან ჩანს, $\varphi(x).u(x)$ ნამრავლის $f(x)$-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი უდრის 1-ს, ე. ი. $\varphi(x)u(x)$ ნამრავლი ეკუთვნის $\overline{1}$ ერთეულოვან კლასს. ახლა, თუ იმ კლასს, რომელსაც $u(x)$ მრავალწევრი ეკუთვნის, აღვნიშნავთ $\overline{d}$ სიმბოლოთი, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\overline{a}\,\overline{d}=\overline{1}, \quad \text{ე. ი.} \quad \overline{d}=\overline{a}^{-1}.$$

ამრიგად, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლის სრული ნაშთთა სისტემის ყოველ არანულოვან კლასს გააჩნია მისი შებრუნებული კლასი — ელემენტი.

ახლა, ვინაიდან კლასებზე ოპერაცია დაიყვანება $P[x]$ რგოლიდან აღებულ მრავალწევრთა ოპერაციებამდე, ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლის სრულ ნაშთთა სისტემა, შედგენილი P ველში დაუყვანი $f(x)$ მრავალწევრის მიმართ, კლასთა აღნიშნული ოპერაციების მიმართ ქმნის კომუტაციურ ველს. კლასთა ეს ველი აღვნიშნოთ $\overline{P}$ სიმბოლოთი.

ადვილად დამტკიცდება, რომ $\overline{P}$ ველი წარმოადგენს P ველის გაფართოებას.

მართლაც, P ველიდან აღებულ ყოველ a რიცხვს — ელემენტს, $\overline{P}$ ველში შევუსაბამოთ ისეთი $\overline{a}$ კლასი, რომელშიც გაერთიანებული მრავალწევრები $f(x)$-ზე გაყოფის შედეგად ნაშთში გვაძლევენ a-ს. ცხადია, რომ ყოველი a რიცხვი, როგორც ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი, ეკუთვნის $\overline{a}$ კლასს. ადვილად შემოწმდება, რომ ასეთი სპეციალური სახის კლასთა სიმრავლე შექმნის $\overline{P}$ ველის ქვეველს, რომელიც იზომორფული იქნება რიცხვთა P ველისა. ამით დამტკიცებული იქნება, რომ ჩვენ მიერ აგებული $\overline{P}$ კლასთა ველი შეიცავს P ველის იზომორფულ ქვეველს, ე. ი. $\overline{P}$ ველი წარმოადგენს P ველის გაფართოებას.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ჩვენ მიერ აგებულ ამ $\overline{P}$ ველში P ველზე

დაუყვან ყოველ $n \geqslant 2$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს აქვს ერთი ფესვი მაინც.

დამტკიცება. $\overline{P}$ კლასთა ველში $\overline{x}$-ით აღვნიშნოთ ისეთი მრავალწევრებისაგან შექმნილი კლასი, რომლებიც $f(x)$-ზე გაყოფის შედეგად ნაშთში გვაძლევენ x-ს.

ვთქვათ, $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლზე დაუყვან $n \geqslant 2$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n. \tag{9}$$

P ველიდან აღებული a_i $(i=0, 1, 2, \dots, n)$ რიცხვების შესაბამისი კლასები $\overline{P}$ ველში აღვნიშნოთ $\overline{a}$-თი. ცხადია, რომ ჯამი

$$\overline{a}_0x^n + \overline{a}_1x^{n-1} + \dots + \overline{a}_{n-1}\overline{x} + \overline{a}_n \tag{10}$$

წარმოადგენს $\overline{P}$ ველის გარკვეულ ელემენტს — კლასს. ვინაიდან ყოველი a_i და x ეკუთვნიან შესაბამისად $\overline{a}_i$ და $\overline{x}$ კლასებს, კლასების ჯამისა და ნამრავლის განმარტებით ვღებულობთ, რომ მოცემული (9) სახის $f(x)$ მრავალწევრი ეკუთვნის (10) კლასს. ახლა ვინაიდან $f(x)$ მრავალწევრი თავის თავზე იყოფა უნაშთოდ, ამიტომ (10) კლასი იქნება $\overline{0}$ ნულოვანი კლასი, ე. ი.

$$\overline{a}_0\overline{x}^n + \overline{a}_1\overline{x}^{n-1} + \dots + \overline{a}_{n-1}\overline{x} + \overline{a}_n = \overline{0}.$$

თუ ახლა $\overline{a}_i$ კლასებს შევცვლით P ველის შესაბამისი a_i ელემენტებით მივიღებთ, რომ $\overline{P}$ ველზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$a_0\overline{x}^n + a_1\overline{x}^{n-1} + \dots + a_{n-1}\overline{x} + a_n = \overline{0},$$

ამრიგად მივიღებთ, რომ $\overline{P}$ ველიდან აღებული $\overline{x}$ კლასი წარმოადგენს მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვს. ამით თეორემა ფესვის არსებობის შესახებ დამტკიცებულია.

ახლა ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $P[x]$ მრვალწევრთა რგოლიდან აღებული ყოველი n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრისათვის შეიძლება ავაგოთ ისეთი P^* ველი, რომელშიც მოთავსდება მოცემული მრავალწევრების ყველა ფესვი, ე. ი. $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ყოველი $f(x)$ მრავალწევრისათვის არსებობს P^* დაშლის ველი.

მართლაც, თუ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ყველა n ფესვი თავსდება P ველში, მაშინ $P = P^*$, ე. ი. თვითონ P ველი იქნება საძებნი ველი. ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრი P ველში არ იშლება წრფივ მამრავლებად.

ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, მოცემულ მრავალწევრს გააჩნია P ველზე დაუყვანი ერთი $n \geqslant 2$ ხარისხის $\varphi(x)$ მამრავლი მაინც, დამტკიცებული თეორემის თანახმად, $\varphi(x)$ მრავალწევრისათვის ჩვენ ავაგებთ P ველის ისეთ გაფართოებულ $\overline{P}$ ველს, რომელშიც მოთავსდება $\varphi(x)$ მრავალწევრის ერთი ფესვი მაინც. თუ ახლა $\overline{P}$ ველში არ თავსდება $\varphi(x)$ მრავალწევრის ყველა ფესვი, მაშინ $\varphi(x)$ მრავალწევრიდან გამოვყოფთ $\overline{P}$ ველზე დაუყვან რომელიმე $n \geqslant 2$ ხარისხის $\lambda(x)$ მრავლწევრს. დასამტკიცებელი თეორემის თანახმად, $\lambda(x)$ მრავალწევრისათვის ავაგებთ $\overline{P}$ ველის გაფართოებულ ისეთ $\overline{\overline{P}}$ ველს, რომელშიც თავსდება $\lambda(x)$ მრავალწევრის ერთი ფესვი მაინც და ა. შ. სასრული ნაბიჯის შემდეგ, ვინაიდან ყოველი მრავალწევრი სასრული ხარისხისაა, ჩვენ ავაგებთ ისეთ P^* ველს, რომელშიც მოთავსდება მოცემული მრავალწევრის ყველა n ფესვი. ასეთ P^* ველზე მოცემული $f(x)$ მრავალწევრი დაიშლება n წრფივ მამრავლად და ამიტომ P^* ველი იქნება $f(x)$ მრავალწევრის **მინიმალური დაშლის ველი.**

საზოგადოდ, ნებისმიერ P ველზე შეიძლება ავაგოთ რაციონალურ ფუნქციათა ველი, რომელიც $P(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მტკიცდება, რომ $P(x)$ რაციონალურ ფუნქციათა ველში არსებობს რგოლი, რომელიც $P(x)$ მრავალწევრთა რგოლის იზომორფულია. ნებისმიერ P ველზე აღებული $P(x)$ რაციონალურ ფუნქციათა ველის შესწავლა გამოდის ჩვენი კურსის ფარგლებიდან. რაციონალურ ფუნქციათა ველის ღრმად შესწავლა ხდება ველთა ზოგად თეორიაში. დაინტერესებული მკითხველისათვის მივუთითებ, მაგალითად, ვან-დერ-ვარდენის წიგნს „Современная алгебра". შევნიშნოთ, რომ მათემატიკურ ანალიზში, განსაკუთრებით რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრაციის შესწავლისას, განიხილავენ რიცხვთა P ველზე აგებულ წილად-რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც წარმოადგენს $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის $\frac{f(x)}{g(x)}$ შეფარდებას, სადაც $g(x) \neq 0$. ასეთ რაციონალურ ფუნქციებზე ალგებრული ოპერაციები ხდება იმავე წესით, როგორც რაციონალურ რიცხვებზე. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ რიცხვთა P ველზე აღებული ყველა რაციონალური ფუნქციის სიმრავლე ქმნის **ველს,** რომელიც შეიცავს როგორც $P(x)$ მრავალწევრთა რგოლს, ისე P ველს. შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი წილად-რაციონალური ფუნქციის ზოგიერთ თვისებას.

ორი $f(x)$ და $g(x)$ მთელი რაციონალური ფუნქციის შეფარდებას $\frac{f(x)}{g(x)}$, სადაც $g(x)\neq 0$, ეწოდება **რაციონალური ფუნქცია**. რაციონალურ ფუნქციას, რომლის მრიცხველი ურთიერთმარტივია მნიშვნელთან, ეწოდება **უკვეცი**. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველი რაციონალური წილადი უდრის გარკვეულ უკვეც წილადს, რომელიც განმარტებულია ცალსახად, მრიცხველისა და მნიშვნელის საერთო მუდმივი მამრავლის სიზუსტით. მართლაც, ყოველი რაციონალური ფუნქციის მრიცხველისა და მნიშვნელის უდიდეს საერთო გამყოფზე შეკვეცით მივიღებთ მის ტოლ უკვეც რაციონალურ $\frac{\varphi(x)}{\lambda(x)}$ წილადს. თუ ახლა $\frac{f(x)}{g(x)}$ და $\frac{\varphi(x)}{\lambda(x)}$ უკვეცი წილადები ტოლია, ე. ი.

$$f(x)\lambda(x)=g(x)\varphi(x), \qquad (1)$$

მაშინ, ვინაიდან $\lambda(x)$ და $\varphi(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, (1) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $f(x)$ იყოფა $\varphi(x)$-ზე. აგრეთვე, რადგან $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები ურთიერთმარტივია, ვღებულობთ, რომ $\varphi(x)$ იყოფა $f(x)$-ზე. ამრიგად, გვაქვს $f(x)=c\cdot\varphi(x)$. ახლა (1) ტოლობიდან მივიღებთ $g(x)=c\lambda(x)$. შემდეგში ვიგულისხმოთ, რომ საქმე გვაქვს უკვეც რაციონალურ ფუნქციებთან.

რაციონალურ ფუნქციას ეწოდება **წესიერი**, თუ მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე; წინააღმდეგ შემთხვევაში ფუნქციას ეწოდება **არაწესიერი** რაციონალური ფუნქცია. დავამტკიცოთ რაციონალურ ფუნქციათა ზოგიერთი თვისება.

1. **ყოველი რაციონალური ფუნქცია ერთადერთი გზით შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც მთელი ფუნქციისა და წესიერი რაციონალური ფუნქციის ჯამი.**

მართლაც, ვთქვათ, $\frac{f(x)}{g(x)}$ არაწესიერი რაციონალური ფუნქციაა, ე. ი. $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი n მეტია ან ტოლი $g(x)$ მრავალწევრის m ხარისხზე: $n\geqslant m$, მაშინ, როგორც ვიცით (გვ. 231), ადგილი აქვს $f(x)$ მრავალწევრის ერთადერთ წარმოდგენას $g(x)$ მრავალწევრის მიმართ

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x), \qquad (2)$$

სადაც $r(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. თუ (2) ტოლობის ორივე მხარეს $g(x)$-ზე გავყოფთ, მივიღებთ:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} . \tag{3}$$

ვინაიდან $q(x)$ და $r(x)$ განსაზღვრულია ცალსახად, ამიტომ ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია.

2. წესიერი რაციონალური ფუნქციების ჯამი ისევ წესიერი რაციონალური ფუნქციაა.

მართლაც, ვთქვათ, $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ და $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ წესიერი რაციონალური ფუნქციებია. შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} .$$

ვიგულისხმოთ, რომ f_1, g_1, f_2 და g_2 მრავალწევრების ხარისხი შესაბამისად არის n_1, m_1, n_2 და m_2. პირობის თანახმად, $n_1 < m_1$, $n_2 < m_2$. აგრეთვე, თუ მოვიგონებთ ორი მრავალწევრის ნამრავლის ხარისხის თვისებას, მივიღებთ: f_1g_2 მრავალწევრის ხარისხი იქნება $n_1 + m_2$, f_2g_1 მრავალწევრის ხარისხი კი $n_2 + m_1$, აგრეთვე $g_1 \cdot g_2$ მრავალწევრის ხარისხი უდრის $m_1 + m_2$. ვინაიდან $f_1g_2 + f_2g_1$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია ან ტოლი $n_1 + m_2$ და $n_2 + m_1$ რიცხვებიდან უდიდესზე და $m_2 + m_2$ მეტია როგორც $n_1 + m_2$, ისე $n_2 + m_1$, ვღებულობთ, რომ $f_1g_2 + f_2g_1$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $g_1 \cdot g_2$ მრავალწევრის ხარისხზე, რ. დ. გ.

თეორემა. **თუ $\frac{f(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x)}$ წესიერი წილადია და $g_1(x)$, $g_2(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, მაშინ ადგილი ექნება ერთადერთ წარმოდგენას:**

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} , \tag{4}$$

სადაც $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ აგრეთვე წესიერი წილადებია.

დამტკიცება. რადგან $g_1(x)$ და $g_2(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, ე. ი. $[g_1(x), \ g_2(x)] = 1$, ურთიერთმარტივი მრავალწევრების თვისების თანახმად ყოველთვის მოიძებნება ისეთი $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ მრავალწევრები, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$g_2(x)\varphi_1(x)+g_1(x)\varphi_2(x)=1.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $f(x)$ მრავალწევრზე და აღვნიშნავთ:

$$\varphi_1(x)f(x)=\Phi_1(x),\quad \varphi_2(x)f(x)=\Phi_2(x),$$

მივიღებთ:

$$g_2(x)\Phi_1(x)+g_1(x)\Phi_2(x)=f(x).$$

ამ ტოლობის ორივე მხარის $g_1(x)g_2(x)$ მრავალწევრზე გაყოფით გვექნება:

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}=\frac{\Phi_1(x)}{g_1(x)}+\frac{\Phi_2(x)}{g_2(x)},$$

სადაც $\frac{\Phi_1(x)}{g_1(x)}$ და $\frac{\Phi_2(x)}{g_2(x)}$ წესიერი წილადებია.

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა:

$$\frac{\Phi_1(x)}{g_1(x)}=\lambda_1(x)+\frac{f_1(x)}{g_1(x)},\qquad \frac{\Phi_2(x)}{g_2(x)}=\lambda_2(x)+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}=\lambda_1(x)+\lambda_2(x)+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

აქედან

$$\lambda_1(x)+\lambda_2(x)=\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}-\frac{f_1(x)}{g_1(x)}-\frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

თანახმად მე-2 თვისებისა, ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე, როგორც წესიერი წილადების ალგებრული ჯამი, წესიერი წილადია, ხოლო მარცხენა მხარე მრავალწევრია, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $\lambda_1(x)=0$, $\lambda_2(x)=0$, რ. დ. გ.

ახლა დავამტკიცოთ (4) წარმოდგენის ერთადერთობა.

ვთქვათ,

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}=\frac{\varphi_1(x)}{g_1(x)}+\frac{g_2(x)}{g_2(x)}.$$

(4) და ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეების შედარებით მივიღებთ:

$$\frac{f_1(x)-\varphi_1(x)}{g_1(x)}=\frac{\varphi_2(x)-f_2(x)}{g_2(x)}$$

ან კიდევ

$$g_2(x)[f_1(x)-\varphi_1(x)]=g_1(x)[\varphi_2(x)-f_2(x)]. \qquad (5)$$

რადგან $[g_1(x),\ g_2(x)]=1$ და (5) ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა $g_1(x)$-ზე, ამიტომ $f_1(x)-\varphi_1(x)$ უნდა გაიყოს $g_1(x)$ მრავალწევრზე, მაგრამ $f_1(x)-\varphi_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $g_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე, მაშასადამე, $f_1(x)-\varphi_1(x)=0$, ე. ი. $f_1(x)=\varphi_1(x)$. ახლა, (5) ტოლობიდან მივიღებთ: $\varphi_2(x)=f_2(x)$ და თეორემა დამტკიცებულია.

ინდუქციით დავამტკიცოთ მიღებული თეორემის განზოგადებული

თეორემა. თუ $g_1(x),\ g_2(x),\ldots,g_n(x)$ მრავალწევრები წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივია და $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x)}$ წესიერი წილადია, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}+\ldots+\frac{f_n(x)}{g_n(x)}, \qquad (6)$$

სადაც ყოველი $\dfrac{f_i(x)}{g_i(x)}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ წესიერი წილადია, და ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია.

მართლაც, ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენი დებულება მართებულია, როცა მნიშვნელშია $n-1$ რაოდენობის წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივი მრავალწევრი. რადგან $g_n(x)$ ურთიერთმარტივია $g_1(x)\cdot g_2(x)\ldots g_{n-1}(x)$ ნამრავლთან (გვ. 243) და ჩვენს დებულებას ადგილი აქვს, როცა მნიშვნელში ორი ურთიერთმარტივი მრავალწევრია, გვექნება:

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\ldots g_{n-1}(x)\cdot g_n(x)}=\frac{F(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\ldots g_{n-1}(x)}+\frac{f_n(x)}{g_n(x)}.$$

დაშვების თანახმად,

$$\frac{F(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\ldots g_{n-1}(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}+\ldots+\frac{f_{n-1}(x)}{g_{n-1}(x)}.$$

ამ თანაფარდობის წინა ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ (6) დასამტკიცებელ ტოლობას. ახლა დავამტკიცოთ (6) დაშლის ერთადერთობა. ვთქვათ, არსებობს კიდევ მეორე დაშლა, ე. ი.

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\ldots g_n(x)}=\frac{\varphi_1(x)}{g_1(x)}+\frac{\varphi_2(x)}{g_2(x)}+\ldots+\frac{\varphi_n(x)}{g_n(x)}. \qquad (7)$$

დაშვების თანახმად, $f_i(x)=\varphi_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ldots,\ n-1)$. ამიტომ (6) და (7)

ტოლობის მარჯვენა მხარეების გატოლებით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\frac{f_n(x)}{g_n(x)}=\frac{\varphi_n(x)}{g_n(x)}, \text{ ე. ი. } f_n(x)=\varphi_n(x).$$

ახლა განვიხილოთ საკითხი $\frac{F(x)}{g(x)}$ წესიერი რაციონალური ფუნქციის უმარტივეს რაციონალურ ფუნქციებად დაშლის შესახებ. $\frac{\varphi(x)}{P(x)^k}$ წესიერ რაციონალურ ფუნქციას, სადაც $P(x)$ არის დაუყვანი მრავალწევრი მოცემულ ველზე, ეწოდება უმარტივესი რაციონალური ფუნქცია, თუ $\varphi(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $P(x)$-ის ხარისხზე. ვთქვათ, $g(x)$ მრავალწევრის კანონიკურ დაშლას მოცემულ ველზე აქვს შემდეგი სახე:

$$g(x)=P_1(x)^{k_1}P_2(x)^{k_2}\ldots P_s(x)^{k_s}.$$

ვინაიდან $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_s(x)$ დაუყვანი მამრავლები და მათი ხარისხებიც (გვ. 244) წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივია, (6) ტოლობის თანახმად მივიღებთ:

$$\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{P_1(x)^{k_1}}+\frac{f_2(x)}{P_2(x)^{k_2}}+,\ldots,+\frac{f_s(x)}{P_s(x)^{k_s}}, \tag{8}$$

სადაც მარჯვენა მხარის ყოველი შესაკრები წესიერი წილადია და ასეთი დაშლა ერთადერთია. განვიხილოთ რომელიმე $\frac{f(x)}{P(x)^k}$ სახის წესიერი წილადი, სადაც $P(x)$ მოცემულ რიცხვთა ველზე დაუყვანი მრავალწევრია. თუ ახლა თანამიმდევრობით $f(x)$ გავყოფთ $P(x)^{k-1}$-ზე, მიღებულ ნაშთს გავყოფთ $P(x)^{k-2}$-ზე და ა. შ. მივიღებთ გაყოფადობის შემდეგ ალგორითმს:

$$\begin{aligned} f(x)&=P(x)^{k-1}\varphi_1(x)+r_1(x),\\ r_1(x)&=P(x)^{k-2}\varphi_2(x)+r_2(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_{k-2}(x)&=P(x)\varphi_{k-1}(x)+r_{k-1}(x). \end{aligned} \tag{9}$$

რადგან $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $P(x)^k$ მრავალწევრის ხარისხზე და ყოველი $r_i(x)$ ($i=1, 2, \ldots, k-1$) ნაშთის ხარისხი შესაბამისად ნაკლებია $P(x)^{k-i}$ გამყოფთა ხარისხზე. როგორც (9) ტოლობებიდან ჩანს, ყველა $\varphi_i(x)$ მრავალწევრის და $r_{k-1}(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $P(x)$ დაუყვანი მრავალწევრის ხარისხზე. მაგალი-

თად. (9) ტოლობათა პირველი ტოლობიდან ჩანს, რომ $\varphi_1(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $P(x)$-ის ხარისხზე. (9) ტოლობათა გაერთიანებით მივიღებთ:

$$f(x)=P(x)^{k-1}\varphi_1(x)+P(x)^{k-2}\varphi_2(x)+\ldots+P(x)\varphi_{k-1}(x)+r_{k-1}(x).$$

მიღებული ტოლობის საფუძველზე $\frac{f(x)}{P(x)^k}$ წესიერი წილადი წარმოგვიდგება უმარტივესი წილადების ჯამის სახით შემდეგნაირად:

$$\frac{f(x)}{P(x)^k}=\frac{r_{k-1}(x)}{P(x)^k}+\frac{\varphi_{k-1}(x)}{P(x)^{k-1}}+\ldots+\frac{\varphi_2(x)}{P(x)^2}+\frac{\varphi_1(x)}{P(x)}. \tag{10}$$

ასეთი წარმოდგენა (9) ტოლობათა საფუძველზე ერთადერთია.

თუ ახლა (8) ტოლობის მარჯვენა მხარის ყოველ $\frac{f_i(x)}{P_i(x)^{k_i}}$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ წესიერ წილადს ანალოგიურად წარმოვადგენთ უმარტივესი წილადების ჯამად, (10) თანაფარდობის დახმარებით მივიღებთ $\frac{F(x)}{g(x)}$ წესიერი წილადის ერთადერთ წარმოდგენას უმარტივესი წილადების ჯამად, რ. დ. გ.

უმაღლესი ალგებრის ძირითადი თეორემიდან (გვ. 327) გამომდინარეობს: ა) ყოველი n-ური ხარისხის ნამდვილ- ან კომპლექსურკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი კომპლექსურ რიცხვთა ველზე დაიშლება წრფივ მამრავლად, ბ) ყოველი ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი ნამდვილ რიცხვთა ველზე საზოგადოდ დაიშლება წრფივ და კვადრატულ მამრავლებად. ამგვარად, თუ $g(x)$ მრავალწევრი ნამდვილკოეფიციენტებიანია, ნამდვილ რიცხვთა ველზე ყოველი მისი დაუყვანი მამრავლის ხარისხი არ აღემატება ორს. კერძოდ, როგორც ვიცით, როცა ნამდვილკოეფიციენტებიან $g(x)$ მრავალწევრს ერთი კომპლექსური $\alpha+\beta i$ ფესვი მაინც აქვს, მას გამოეყოფა ერთი მეორე ხარისხის $P(x)=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ დაუყვანი მამრავლი მაინც. ასეთ შემთხვევაში (10) თანაფარდობაში მიღებული $r_{k-1}(x)$, $\varphi_{k-1}(x)$, $\varphi_{k-2}(x)$, …, $\varphi_1(x)$ მრავალწევრების ხარისხი საზოგადოდ არ აღემატება ერთს. რადგან კომპლექსურ რიცხვთა ველზე ყოველი $g(x)$ მრავალწევრი დაიშლება წრფივ დაუყვან მამრავლებად, ამიტომ კომპლექსურ რიცხვთა ველზე $g(x)$ მრავალწევრის კანონიკურ, ანუ მარტივ მამრავლებად, დაშლას ექნება

შემდეგი სახე: $g(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\dots(x-\gamma)^m$ და (8) ტოლობის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-\alpha)^k}+\frac{\varphi(x)}{(x-\beta)^l}+\dots+\frac{\lambda(x)}{(x-\gamma)^m}\,. \tag{11}$$

ახლა, თუ ავიღებთ ამ თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში რომელიმე წესიერ წილადს, მაგალითად $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^k}$, და $f(x)$ მრავალწევრს გავშლით $x-\alpha$ ხარისხების მიხედვით, რადგან $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი არ აღემატება k-ს, გვექნება:

$$f(x)=A_k+A_{k-1}(x-\alpha)+A_{k-2}(x-\alpha)^2+\dots+A_1(x-\alpha)^{k-1}.$$

აქედან (10) თანაფარდობის მსგავსად, როცა α საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვია, მივიღებთ:

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^k}=\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}+\dots+\frac{A_1}{x-\alpha}\,. \tag{12}$$

თუ ახლა (11) ტოლობის მარჯვენა მხარის სხვა დანარჩენ წესიერ წილადს წარმოვადგენთ უმარტივესი წილადების ჯამად, (12) თანაფარდობის ანალოგიურად მივიღებთ $\frac{F(x)}{g(x)}$ წესიერი წილადის წარმოდგენას შემდეგი უმარტივესი წილადების ჯამად:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{g(x)}=&\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}+\dots+\frac{A_1}{x-\alpha}+\\&+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+\frac{B_{l-1}}{(x-\beta)^{l-1}}+\dots+\frac{B_1}{x-\beta}+\\&\quad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\\&+\frac{C_m}{(x-\gamma)^m}+\frac{C_{m-1}}{(x-\gamma)^{m-1}}+\dots+\frac{C_1}{x-\alpha}\,,\end{aligned} \tag{13}$$

სადაც $A_k, A_{k-1},\dots,A_1, \dots, C_m, C_{m-1}, \dots, C_1$ კოეფიციენტები ცალსახადაა განსაზღვრული. პრაქტიკულად ეს კოეფიციენტები შეიძლება ვიპოვოთ განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით. განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. დავშალოთ უმარტივესი წილადების ჯამად შემდეგი წილადი:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+1)^3}\,.$$

მოცემული წილადი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_3}{(x+1)^3}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_1}{x+1}$$

A_2, A_1, B_3, B_2 და B_1 მუდმივების საპოვნელად განვიხილოთ შემდეგი თანაფარდობა:

$$x^2+2=A_2(x+1)^3+A_1(x-1)(x+1)^3+B_3(x-1)^2+B_2(x+1)(x-1)^2+$$
$$+B_1(x+1)^2(x-1)^2. \qquad (14)$$

x-ის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლების შედეგად ჩვენ მივიღებდით წრფივ განტოლებათა სისტემას A_2, A_1, B_3, B_2 და B_1 უცნობების მიმართ. ზემოთ დამტკიცებულიდან (ვინაიდან ასეთი დაშლა ერთადერთია) გამომდინარეობს, რომ მიღებული წრფივ განტოლებათა სისტემა თავსებადია და მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. სიმარტივისათვის აღნიშნული კოეფიციენტები ვიპოვოთ სხვა გზით. თუ (14) ტოლობაში ჩავსვამთ $x=1$ და $x=-1$, შესაბამისად მივიღებთ: $A_2=\frac{3}{8}$, $B_3=\frac{3}{4}$. ახლა x-ის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლება მოგვცემს შემდეგ სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$A_1+B_1=0,$$
$$2A_1+B_2=-\frac{3}{8},$$
$$2B_1+B_2=\frac{7}{8}.$$

პირველი განტოლებიდან $B_1=-A_1$ ჩავსვათ მესამეში, მივიღებთ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნა მოგვცემს:

$$B_2=\frac{1}{4}, \qquad A_1=-\frac{5}{16} \text{ და } \quad B_1=\frac{5}{16}.$$

მაშასადამე, მივიღეთ დაშლა:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{3}{8(x-1)^2}-\frac{5}{16(x-1)}+\frac{3}{4(x+1)^3}+$$
$$+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{5}{16(x+1)}.$$

მაგალითი 2. წესიერი რაციონალურ ფუნქცია

$$f(x)=\frac{-x^4+x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1},$$

ნამდვილ რიცხვთა ველზე დავშალოთ უმარტივესი წესიერი წილადების ჯამად. ადვილად შევამჩნევთ, რომ $x=1$ არის მნიშვნელის ფესვი. მნიშვნელის $x-1$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ:

$$x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2.$$

ამგვარად, გვექნება:

$$f(x)=\frac{-x^4+x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}.$$

(x) ფუნქციის საძიებელ დაშლას უნდა ჰქონდეს სახე:

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{(x^2+1)^2}+\frac{Qx+R}{x^2+1}.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned}-x^4+x^2+1&=A(x^2+1)^2+(Mx+N)(x-1)+(Qx+R)(x-1)(x^2+1)=\\&=(A+Q)x^4+(R-Q)x^3+(2A+M+Q-R)x^2+(-M+N+\\&+R-Q)x+A-N-R.\end{aligned}$$

ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}A+Q&=-1\\R-Q&=0,\\2A+M+Q-R&=1,\\-M+N+R-Q&=0,\\A-N-R&=1.\end{aligned}$$

მეორე და მეოთხე განტოლებებიდან მივიღებთ: $R=Q$, $N=M$. შედგენილი წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე:

$$\begin{aligned}A+Q&=-1,\\2A+N&=1,\\A-N-Q&=1.\end{aligned}$$

უბრალო შეკრება-გამოკლების ხერხით მივიღებთ: $A=\frac{1}{4}$, $Q=$ $=\frac{-5}{4}$, $N=\frac{1}{2}$, მაშასადამე, $A=\frac{1}{4}$, $M=N=\frac{1}{2}$, $Q=R=$ $=-\frac{5}{4}$. ამრიგად, მოცემული $f(x)$ ფუნქციის დაშლას უმარტივეს წესიერ წილადებად ნამდვილ რიცხვთა ველზე ექნება სახე:

$$f(x)=\frac{1}{4(x-1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}-\frac{5x+5}{4(x^2+1)}.$$

მაგალითი 3. ახლა განვიხილოთ ამავე ფუნქციის დაშლა უმარტივეს წესიერ წილადებად კომპლექსურ რიცხვთა ველზე. ვინაიდან ნამდვილ რიცხვთა ველზე $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)^2$, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე მივიღებთ შემდეგ დაშლას:

$$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=(x-1)(x-i)^2(x+i)^2.$$

თანახმად (13) თანაფარდობისა გვექნება:

$$\frac{-x^4+x^2+1}{(x-1)(x-i)^2(x+i)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-i)^2}+\frac{C}{x-i}+$$
$$+\frac{D}{(x+i)^2}+\frac{E}{x+i}.$$

მაშასადამე,

$$-x^4+x^2+1=A(x-i)^2(x+i)^2+B(x-1)(x+i)^2+c(x-1)(x-i)(x+i)^2+$$
$$+D(x-1)(x-i)^2+E(x-1)(x+i)(x-i)^2.$$

ახლა, თუ ერთნაირ ხარისხებთან მდგომ კოეფიციენტებს გავუტოლებთ, მივიღებთ კომპლექსურკოეფიციენტებიან ხუთუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას. სისტემის ამოხსნა მოგვცემს:

$$A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}i,\quad D=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}i\quad C=\frac{-5}{8}+\frac{1}{2}i,$$

$$E=\frac{-5}{8}-\frac{1}{2}i.$$

სიმარტივისათვის A, B, C, D და E მნიშვნელობათა გამოსათვლელად ასე მოვიქცეთ: (14) ტოლობაში ჩავსვათ $x=1$, მივიღებთ:

$$1=A(1-i))^2(1+i)^2,\ 1=4\cdot A,\ A=\frac{1}{4.}.$$

ახლა ჩავსვათ $x=i$, გვექნება:

$$-1=B(i-1)(i+i)^2,\quad 1=4(i-1)B,\quad B=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}i\,,$$

ხოლო $x=-i$ ჩასმით მივიღებთ:

$$-1=D(-i-1)(-i-i)^2,\quad -1=4(1+i)D,\quad D=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}i.$$

შემდეგ x^4-თან მდგომი კოეფიციენტების და თავისუფალი წევრების გატოლებით გვექნება:

$$\begin{gathered}A+C+E=-1,\\ A+B-Ci+D+Ei=1.\end{gathered}$$

თუ აქ ჩავსვამთ A, B და D მნიშვნელობებს, მივიღებთ შემდეგ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$C+E=-\frac{5}{4}\,,\qquad\qquad C=-\frac{5}{8}+\frac{1}{2}i.$$

აქედან

$$C-E=i\qquad\qquad E=-\frac{5}{8}-\frac{1}{2}i.$$

მაშასადამე, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე მოცემული $f(x)$ ფუნქციის უმარტივეს ფუნქციებად დაშლას აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1+i}{8(x-i)^2}-\frac{5-4i}{8(x-i)}-\frac{1-i}{8(x+i)^2}-\frac{5+4i}{8(x+i)}\,.$$

§ 35. საინტერპოლაციო ფორმულები

ჩვენი მიზანია ავაგოთ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს და რომელიც x-ის $n+1$ სხვადასხვა α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}$ მნიშვნელობისათვის შესაბამისად იღებს c_1, c_2, ..., c_{n+1} მნიშვნელობებს. ვთქვათ, $g(x)$ მრავალწევრს, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის ერთს, აქვს $n+1$ სხვადასხვა α_1, α_2, ..., α_{n+1} ფესვი, გვექნება:

$$g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}).$$

ახლა, თუ საძიებელ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს, აღვნიშნავთ $f(x)$-ით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_{n+1}}{x-\alpha_{n+1}}\qquad(1)$$

ყოველი A_i ($i=1, 2, \ldots, n+1$) კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის (1) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ ($x-\alpha_i$)-ზე და შემდეგ ჩავსვათ $x=\alpha_i$. ვინაიდან $g'(\alpha_1)=(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_{n+1})$, გვექნება:

$$A_i=\frac{f(\alpha_i)}{(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_{n+1})}=\frac{f(\alpha_i)}{g'(\alpha_i)}. \qquad (2)$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$A_i=\frac{f(\alpha_i)}{g'(\alpha_i)} \quad i=1,\ 2,\ldots,n+1).$$

თუ მიღებულ A_i მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1)-ში, გვექნება:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(\alpha_1)}{(x-\alpha_1)g'(\alpha_1)}+\frac{f(\alpha_2)}{(x-\alpha_2)g'(\alpha_2)}+\ldots+\frac{f(\alpha_{n+1})}{(x-\alpha_{n+1})g'(\alpha_{n+1})},$$

აქედან საძიებელი $f(x)$ მრავალწევრი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x)=\frac{g(x)f(\alpha_1)}{(x-\alpha_1)g'(\alpha_1)}+\frac{g(x)f(\alpha_2)}{(x-\alpha_2)g'(\alpha_2)}+\ldots+\frac{g(x)f(\alpha_{n+1})}{(x-\alpha_{n+1})g'(\alpha_{n+1})}.$$

მიღებულ თანაფარდობას უწოდებენ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულას. ვინაიდან ყოველი ორი მრავალწევრი, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს, იგივურად ტოლია, ე. ი. მათი ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები ტოლია, თუ ცვლადის n-ზე მეტი სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ისინი ერთმანეთის ტოლია, მივიღებთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის წარმოდგენა (3) სახით ერთადერთია.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ისეთი უმცირესი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი, რომელიც $x=0, 1, -1, 2, -2$ მნიშვნელობებისათვის შესაბამისად იღებს $f(0)=2$, $f(1)=0$, $f(-1)=4$, $f(2)=4$ და $f(-2)=0$ მნიშვნელობებს. ჩვენს შემთხვევაში დამხმარე $g(x)$ მრავალწევრი იქნება:

$$g(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

გამოთვლით მივიღებთ:

$$g'(x)=(-1)\ 1\cdot(-2)\cdot 2=4,$$

$$g'(2)=24,\ \ g'(-2)=24.$$

ანალოგიურად

$$g'(1)=-6, \quad g'(-1)=-6.$$

თუ მიღებულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (3) ფორმულაში, გვექნება:

$$f(x)=\frac{2}{4}(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)-\frac{0}{6}x(x+1)(x-2)(x+2)-$$
$$-\frac{4}{6}x(x-1)(x-2)(x+2)+\frac{4}{24}x(x-1)(x+1)(x+2)+$$
$$+\frac{0}{24}x(x-1)(x+1)(x-2).$$

გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$f(x)=x^3-3x+2.$$

ახლა განვიხილოთ ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა. ვთქვათ, საძებნი $f(x)$ მრავალწევრი წარმოდგენილია შემდეგი სახით:

$$f(x)=A_1+A_2(x-a_1)+A_3(x-a_1)(x-a_2)+\ldots+$$
$$+A_{n+1}(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n). \tag{4}$$

თუ (4) თანაფარდობაში x-ს მივცემთ $x=a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1}$ მნიშვნელობებს, ადვილად ვიპოვით $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ კოეფიციენტებს. მართლაც, როცა $x=a_1$, მივიღებთ $c_1=f(a_1)=A_1$. ახლა, როცა $x=a_2$, $c_2=f(a_2)=c_1+A_2(a_2-a_1)$, აქედან ვიპოვით A_2-ს. შემდეგ, როცა $x=a_3$, $c_3=f(a_3)=c_1+A_2(a_3-a_1)+A_3(a_3-a_1)(a_3-a_2)$. აქ A_2 ცნობილია და ვიპოვით A_3 და ა. შ. როცა $x=a_{n+1}$, ვიპოვით A_n-ს. როგორც ვხედავთ, A_1 დამოკიდებულია მხოლოდ a_1 და $c_1=f(a_1)$ მნიშვნელობებზე. A_2 დამოკიდებულია მხოლოდ a_1, a_2, $c_1=f(a_1)$ და $c_2=f(a_2)$ მნიშვნელობებზე და ა. შ. A_i საზოგადოდ დამოკიდებულია a_1, a_2 ,..., a_i, $c_1=f(a_1)$ $c_2=f(a_2)$,..., $c_i=f(a_i)$ მნიშვნელობებზე. თუ ახლა მოძებნილ A_1, $A_2,\ldots,A_n$ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (4) თანაფარდობაში, მივიღებთ საძიებელ მრავალწევრს, ე. ი. მივიღებთ ისეთი უმცირესი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს, რომელიც x-ის $n+1$ სხვადასხვა a_1, a_2, ..., a_{n+1} მნიშვნელობისათვის შესაბამისად ღებულობს c_1, $c_2,\ldots,c_{n+1}$ მნიშვნელობებს. (4) ფორმულას უწოდებენ ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულას.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ უმცირესი ხარისხის ისეთი $f(x)$ მრავალწევრი, რომელიც $x=0,\ 1,\ 2,\ -1$ მნიშვნელობებისათვის შესაბამისად უდრის $f(0)=3$, $f(1)=0$, $f(2)=7$, $f(-1)=4$.

ჩვენს შემთხვევაში:

$$f(x)=A_1+A_2x+A_3x(x-1)+A_4x(x-1)(x-2).$$

თუ ახლა აქ ჩავსვამთ თანამიმდევრობით x-ის ნაცვლად $x=0, 1, 2, -1$, მივიღებთ:

$$3=A_1, \quad 0=3+A_2, \quad A_2=-3,$$

$$7=3-3\cdot 2+A_3\cdot 2\cdot 1, \quad A_3=5,$$

$$4=3-3(-1)+5(-1)(-2)+A_4(-1)(-2)(-3), \quad A_4=2.$$

ამგვარად,

$$A_1=3, \quad A_2=-3, \quad A_3=5, \quad A_4=2.$$

მაშასადამე,

$$f(x)=3-3x+5x(x-1)+2x(x-1)(x-2),$$

განმარტების შემდეგ მივიღებთ:

$$f(x)=2x^3-x^2-4x+3.$$

ახლა, ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ ისეთი $F(x)$ უმცირესი ხარისხის მრავალწევრი, რომელიც დამატებით კიდევ $x=\alpha_{n+2}$ მნიშვნელობისათვის იღებს c_{n+2} მნიშვნელობას. ასეთი $F(x)$ მრავალწევრის მოძებნა ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულით ადვილად შეიძლება. ამისათვის საკმარისია მრავალწევრის მოძებნილ მნიშვნელობას უბრალოდ დავუმატოთ $A_{n+2}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})$ შესაკრები. შემდეგ A_{n+2} კოეფიციენტის საპოვნელად ჩავსვათ $x=\alpha_{n+2}$. ლაგრანჟის მეთოდით ასეთი $F(x)$ მრავალწევრის საპოვნელად საჭიროა თავიდან მოვახდინოთ ყველა გამოთვლა, რაც დიდ დროს მოითხოვს. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულას აგრეთვე ის უპირატესობა აქვს, რომ მისი მიღება შეიძლება წარმოებულის გარეშე. განხილული მეთოდებიდან ჩანს, რომ მინიმალური ხარისხის მრავალწევრი, რომლის შესაბამისი გრაფიკი სიბრტყის მოცემულ წერტილებზე გაივლის, ერთადერთია.

თავი VIII

მრავალწევრის უწყვეტობა და მასთან დაკავშირებული საკითხები

§ 36. მრავალწევრი კომპლექსური ცვლადის მიმართ

ვიგულისხმოთ, რომ კომპლექსურ K რიცხვთა ველზე z ცვლადის მიმართ მოცემულია n-ური ხარისხის მრავალწევრი:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n. \tag{1}$$

როგორც (1) თანაფარდობიდან ჩანს, $z=x+yi$ კომპლექსური ცვლადის ყოველ $z=z_0=x_0+y_0i$ რიცხვით მნიშვნელობას უპასუხებს $f(z)$ ფუნქციის გარკვეული $f(z_0)=w_0=u_0+v_0i$ რიცხვითი მნიშვნელობა:

$$f(z_0)=a_0z_0^n+a_1z_0^{n-1}+\dots+a_{n-1}z_0+a_n=u_0+v_0i=w_0.$$

მაგალითად, ვთქვათ, მოცემულია მრავალწევრი

$$f(z)=z^2+2iz-4+12i. \tag{2}$$

გამოთვლით ადვილად მივიღებთ, რომ z ცვლადის $z_0=2-3i$ მნიშვნელობისათვის

$$f(z_0)=f(2-3i)=(2-3i)^2+2i(2-3i)-4+12i=-3+4i=w_0.$$

რადგან კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლესა და სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა (გვ. 205), ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ როცა $z=x+yi$ იცვლება (XY) კომპლექსურ სიბრტყეზე, მაშინ $f(z)=u+vi$ იცვლება (U, V) კომპლექსურ სიბრტყეზე.

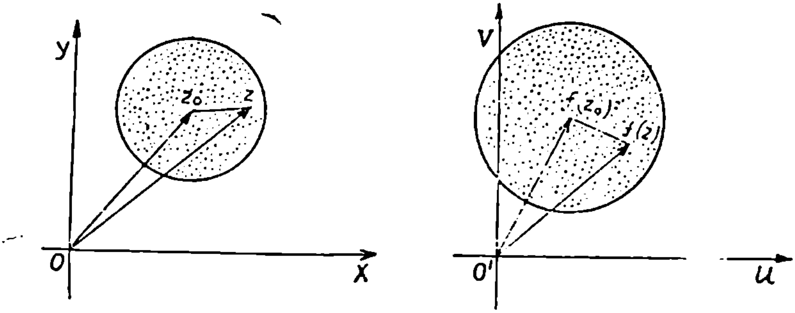
როგორც ანალიზიდან ვიცით, ნამდვილი ცვლადის $f(x)$ ფუნქციას $x=x_0$ წერტილზე ეწოდება უწყვეტი, თუ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{3}$$

სხვა სიტყვებით ეს იმას ნიშნავს, რომ წინასწარ აღებული რაგინდ მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ როცა

$$|x-x_0|<\delta, \quad \text{მაშინ} \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

ანალოგიურად განიმარტება $f(z)$ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა $z=z_0$ წერტილში. ამ შემთხვევაში **აბსოლუტური** მნიშვნელობის ნაცვლად უნდა ვიხმაროთ **მოდულის** მნიშვნელობა. ზემოთ განხილულ მაგალითში $z_0=2-3i$ რიცხვის $|z_0|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ მოდულის მნიშვნელობას შეესაბამება $f(z)$ ფუნქციის $|f(z_0)|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ მოდულის მნიშვნელობა. ამრიგად, **კომპლექსური** ცვლადის $f(z)$ **ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი სიბრტყის $z=z_0$ წერტილზე, თუ წინასწარ აღებული რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ, როცა მოდული $|z-z_0|<\delta$, მაშინ მოდული $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.** გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $z=x+yi$ იცვლება $z=z_0$ ცენტრის გარშემო შემოწერილი δ რადიუსიანი წრის შიგნით, მაშინ $f(z)$ ფუნქცია იცვლება $f(z_0)$ ცენტრის გარშემო შემოწერილი ε რადიუსიანი წრის შიგნით (ნახ. 3).



ნახ. 3.

$f(z)$ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია $z=x+yi$ ცვლადის D არის ყოველ წერტილზე, ეწოდება **უწყვეტი** მთელ D არეში.

თეორემა. $f(z)$ **მთელი რაციონალური ფუნქცია უწყვეტია** $z=x+yi$ **ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, ე. ი. დავამტკიცოთ, რომ (1) მრავალწევრი უწყვეტია** XY **სიბრტყის ყოველ წერტილზე.**

დამტკიცება. ტეილორის ფორმულის დახმარებით $f(z)$ მრავალწევრი გავშალოთ $z-z_0$ ორწევრის ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots$$
$$\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \tag{4}$$

თუ მოვიგონებთ, რომ კომპლექსური რიცხვების ჯამის მოდული ნაკლებია ან ტოლი შესაკრებთა მოდულების ჯამზე და ნამრავლის მოდული უდრის თანამამრავლთა მოდულების ნამრავლს, მაშინ (4) თანაფარდობა ასე გადაიწერება:

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant|f'(z_0)|\,|(z-z_0)|+$$
$$+\left|\frac{f''(z_0)}{2!}\right|\,|(z-z_0)^2|+\dots+\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|\,|(z-z_0)^n|.$$

სიმარტივისათვის ავღნიშნოთ $(z-z_0)=r$, მაშინ ეს უკანასკნელი თანაფარდობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant|f'(z_0)|r+\frac{|f''(z_0)|}{2!}r^2+\dots+\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}r^n. \tag{5}$$

ვიგულისხმოთ, რომ

$$H=\max\left\{|f'(z_0)|,\quad \frac{|f''(z_0)|}{2!},\dots,\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}\right\}.$$

თუ ახლა (5) თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში კოეფიციენტებს შევცვლით H-ით, მაშინ უტოლობა შეიძლება მხოლოდ გაძლიერდეს, ე. ი.

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant H(r+r^2+\dots+r^n). \tag{6}$$

(6) თანაფარდობის მარჯვენა მხარის ფრჩხილებში გვაქვს გეომეტრიული პროგრესია, რომლის პირველი წევრი და მნიშვნელი არის r, წევრთა რაოდენობა კი n. მივიღებთ:

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant\frac{H(r-r^{n+1})}{1-r}.$$

შემდეგში უნდა ავიღოთ $r=|z-z_0|$ მოდულის საკმაოდ მცირე მნიშვნელობა. ამიტომ შეიძლება დავუშვათ, რომ

$$r=|z-z_0|<1 \text{ და გვექნება: } \frac{r-r^{n+1}}{1-r}<\frac{r}{1-r}.$$

მაშასადამე,

$$|f(z)-f(z_0)|<\frac{Hr}{1-r}. \tag{7}$$

ვთქვათ, ε რიცხვი ჩვენთვის ცნობილია, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, თუ δ-ს ავირჩევთ ასე:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{H+\varepsilon}, \tag{8}$$

მივიღებთ, დასამტკიცებელ პირობას.

მართლაც, როცა $r=|z-z_0|<\delta$, სადაც (8) ტოლობის თანახმად, $\delta<1$, მივიღებთ, რომ:

$$|f(z)-f(z_0)| < \frac{H\delta}{1-\delta} = \frac{H\cdot\frac{\varepsilon}{H+\varepsilon}}{1-\frac{\varepsilon}{H+\varepsilon}} = \varepsilon.$$

ამრიგად, $|z-z_0|<\delta$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ უტოლობა, ამით $f(z)$ **ფუნქციის უწყვეტობა სიბრტყის ყოველი წერტილისათვის დამტკიცებულია.**

განხილული მეთოდის საშუალებით მოცემული ε-ით შეიძლება განვსაზღვროთ შესაბამისი δ.

მაგალითი. მოცემული

$$f(z)=z^3+(1-i)z^2+(1+i)z-2$$

მრავალწევრისათვის, ვთქვათ, $z_0=3$. განვიხილოთ მოცემული ε-ის მიხედვით შესაბამისი δ-ს განსაზღვრა. გამოთვლის შედეგად მივიღებთ:

$$f(3)=37-6i, \quad f'(3)=34-5i, \quad \frac{f''(3)}{2!}=10-i \text{ და } \frac{f'''(3)}{3!}=1.$$

როგორც ვხედავთ, $H=\sqrt{34^2+(-5)^2}=\sqrt{1181}\approx 35$, ხოლო $\delta=\frac{\varepsilon}{35+\varepsilon}$.

თუ, კერძოდ $\varepsilon=1$, მაშინ $\delta=\frac{1}{36}$ და გვექნება, რომ როცა $|z-3|<\frac{1}{36}$, მაშინ $|f(z)-f(3)|<1$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $f(z)$ **კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის მოდული $|f(z)|$ უწყვეტია მთელ სიბრტყეზე.**

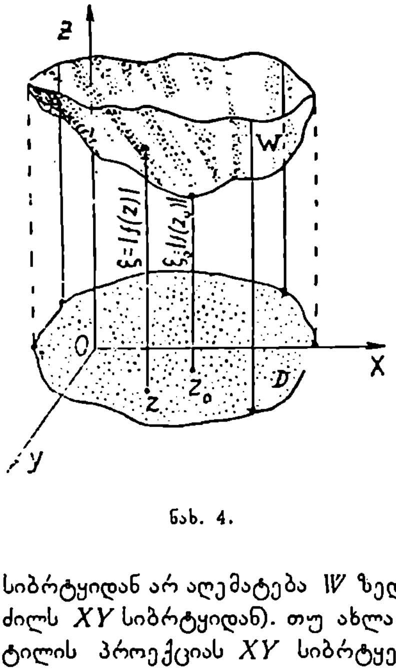
მართლაც, თანახმად კომპლექსური რიცხვების მოდულების სხვაობის თვისებისა

$$|f(z)|-|f(z_0)|\leqslant|f(z)-f(z_0)|.$$

თუ ახლა ავიღებთ ორივე მხარის მოდულს, ვინაიდან $||f(z)|-|f(z_0)||=|f(z)-f(z_0)|$, გვექნება:

$$\Big||f(z)|-|f(z_0)|\Big|\leqslant\Big|f(z)-f(z_0)\Big|<\varepsilon.$$

ამრიგად, წინასწარ აღებული რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი დადებითი რიცხვი δ, რომ როცა $|z-z_0|<\delta$, მაშინ $\big||f(z)|-|f(z_0)|\big|<\varepsilon$. ამით დამტკიცდა $f(z)$ ფუნქციის $\xi=|f(z)|$ მოდულის უწყვეტობა. მაშასადამე, z-ის საკმაოდ ახლოს მდებარე წერტილების შესაბამისი $\xi=|f(z)|$ მოდულების მნიშვნელობანი ერთიმეორისაგან განსხვავდებიან ნებისმიერად მცირე სიდიდით. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა $z=x+yi$ კომპლექსური ცვლადი XY სიბრტყის რომელიმე D არეზე იცვლება, მაშინ შესაბამისი $\xi=|f(z)|$ აპლიკატას ბოლო წერტილები ქმნის უწყვეტი ზედაპირის გარკვეულ „ნაჭერს“ (ნახ. 4). ამ ზედაპირს W ზედაპირი ვუწოდოთ. როგორც ნახაზიდან ჩანს, D არის ყველა შესაძლო z წერტილის შესაბამისი W ზედაპირის წერტილებს შორის არსებობს ერთი მინიმალური წერტილი მაინც, ე. ი. W ზედაპირის წერტილებს შორის არსებობს ერთი ისეთი წერტილი მაინც, რომელიც დანარჩენ წერტილებთან შედარებით ნაკლები მანძილითაა დაშორებული XY სიბრტყიდან (ყოველ შემთხვევაში აღნიშნული წერტილის მანძილი XY სიბრტყიდან არ აღემატება W ზედაპირის დანარჩენი წერტილების მანძილს XY სიბრტყიდან). თუ ახლა W ზედაპირის W_0 მინიმალური წერტილის პროექციას XY სიბრტყეზე აღვნიშნავთ z_0-ით, მაშინ ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობას:



ნახ. 4.

$$|f(z_0)|\leqslant|f(z)|,$$

სადაც z არის D არის ნებისმიერი წერტილი. W ზედაპირის W_0 მინიმუმის წერტილის შესაბამის z_0 წერტილს D არეში უწოდებენ $f(z)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს. ვინაიდან $f(z)$ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის $|f(z)|$ მოდული z კომპლექსური ცვლადის ნამდვილი არაუარყოფითი ფუნქციაა, ამიტომ, თუ შევაჯამებთ ზემოთ მიღებულ შედეგებს, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **კომპლექსური z ცვლადის მთელი რაციონალური ფუნქციის მოდული უწყვეტია დახურული D არის ყოველ წერ-**

ტილზე და D არეში არსებობს ისეთი $z=z_0$ წერტილი, რომ ამ არის ყველა სხვა z წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $|f(z_0)|\leqslant|f(z)|$.

$z=z_0$ წერტილი არის $\xi=f(z)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი D არეში. მიღებულ შედეგს გამოვიყენებთ უმაღლესი ალგებრის ძირითადი თეორემის დამტკიცებისას. შევნიშნოთ, რომ მათემატიკურ ანალიზში მკაცრად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა. დახურულ D არეში (ე. ი. კომპლექსური სიბრტყის ისეთი ნაწილისათვის, რომელიც შემოფარგლულია სასრული უწყვეტი ჩაკეტილი მრუდით) **კომპლექსური ცვლადის ნამდვილ უწყვეტ ფუნქციას აქვს ერთი მინიმუმის წერტილი მაინც.**

ახლა განვიხილოთ კომპლექსური ცვლადის $f(z)$ ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ დამტკიცებული თეორემის ზოგიერთი **საჭირო შედეგი.**

ვთქვათ, $f(z)$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია და $z=x+yi$ ღებულობს მხოლოდ ნამდვილ $z=x$ მნიშვნელობებს, ე. ი. კომპლექსური ცვლადის $f(z)$ ფუნქციის ნაცვლად ნამდვილ რიცხვთა ველზე განვიხილოთ ნამდვილი ცვლადის $f(x)$ ფუნქცია. მაშინ $|x-x_0|<\delta$ და $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ უტოლობები გამოხატავს ნამდვილი $f(x)$ მრავალწევრის უწყვეტობას. ვღებულობთ, რომ, როცა $-\delta<x-x_0<\delta$ ანუ $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, ე. ი. როცა x მოთავსებულია $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ შუალედში, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები მოთავსებულია $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$ შუალედში.

დაკვირვებით ადვილად შევამჩნევთ, რომ, როცა $f(x_0)\neq 0$ და $\varepsilon<|f(x_0)|$, მაშინ $f(x_0)-\varepsilon$ და $f(x_0)+\varepsilon$ რიცხვების ნიშანი იგივეა, რაც $f(x_0)$ რიცხვის ნიშანი. აქედან გამომდინარეობს

შედეგი 1. თუ $x=x_0$ არაა $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, ე. ი. $f(x_0)\neq 0$, მაშინ ყოველთვის შეიძლება გამოვყოთ x_0 წერტილის შემცველი ისეთი $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ შუალედი, რომ ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $f(x)$ ფუნქციას ექნება იგივე ნიშანი, რაც $x=x_0$ წერტილზე.

ამ შედეგს გამოვიყენებთ შემდგომ, **შტურმის** თეორემის დამტკიცებისას.

ახლა, დავუშვათ, რომ $x_0=0$. თუ $f(x)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრი $a_n\neq 0$ (ვიცით $f(0)=a_n$), მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ $(-\delta, \delta)$ შუალედის ყოველ წერტილზე $f(x)$-ს ჰქონდეს თავისუფალი წევრის ნიშანი. აქედან გამომდინარეობს

შედეგი 2. თუ $f(x)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრი $a_n\neq 0$, მაშინ ყოველთვის შეიძლება გამოვყოთ ნულის შემცველი ისეთი $(-\delta, \delta)$ შუალედი, რომ ყოველ მის წერტილზე $f(x)$ ფუნქციას ექნება თავისუფალი წევრის ნიშანი.

ამ შედეგს გამოვიყენებთ **დალამბერის** ლემის დამტკიცებისას.

§ 87. ლემა $f(z)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდულის შესახებ

n-ური რიგის კომპლექსურცვლადიანი

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n \tag{1}$$

მრავალწევრისათვის დავამტკიცოთ

ლემა 1. თუ k ნებისმიერი ნამდვილი დადებითი რიცხვია, მაშინ z-ის $|z|$ მოდულის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$|a_0z^n|>k|a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n|. \tag{2}$$

მართლაც, ვთქვათ,

$$A=\max\{|a_1|,\ |a_2|,\ldots,|a_n|\},$$

მაშინ კომპლექსურ რიცხვთა ჯამისა და ნამრავლის მოდულების თვისების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$|a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|\,|z|^{n-1}+|a_2|\,|z|^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+|a_n|\leqslant A(|z|^{n-1}+|z|^{n-2}+\ldots+1)=A\frac{|z|^n-1}{|z|-1}. \tag{3}$$

რადგან ჩვენ საქმე გვაქვს z-ის მოდულის საკმაოდ დიდ მნიშვნელობასთან, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $|z|>1$ და მივიღებთ:

$$A\frac{|z|^n-1}{|z|-1}<A\frac{|z|^n}{|z|-1}.$$

ამიტომ (3) უტოლობა მოგვცემს

$$|a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_n|<A\frac{|z|^n}{|z|-1}.$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ (2) უტოლობა შესრულდება, თუ z-ის მოდული, $|z|>1$ უტოლობასთან ერთად, აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|a_0z^n|\geqslant kA\frac{|z|^n}{|z|-1},\quad |a_0|\,|z|^n\geqslant kA\frac{|z|^n}{|z|-1},$$

ე. ი. როცა

$$|z|\geqslant\frac{kA}{|a_0|}+1, \tag{4}$$

მაშინ $f(z)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდული მეტია ნებისმიერ k-ჯერ აღებულ დანარჩენ წევრთა ჯამის მოდულზე. დამტკიცებულ ლემას ხშირად უწოდებენ **ლემას უფროსი წევრის მოდულის შესახებ**.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $f(z)$ კომპლექსურცვლადიანი მრავალწევრი ნამდვილი $f(x)$ მრავალწევრია და დავუშვებთ, რომ $k=1$, მაშინ დამტკიცებული ლემიდან მივიღებთ შემდეგ შედეგს: x-ის აბსოლუტურად საკმაოდ დიდი $|x|$ მნიშვნელობისათვის, ნამდვილკოეციეფნიტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ნიშანი ემთხვევა უფროსი წევრის ნიშანს. კერძოდ, $\left(-\dfrac{A}{|a_0|}-1,\ \dfrac{A}{|a_0|}+1\right)$ შუალედის ბოლო წერტილებზე და მის გარეთ **ლუწი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს დადებითი ნიშანი** აქვს, **ხოლო კენტი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს კი**—სხვადასხვა ნიშანი.

$-\dfrac{A}{|a_0|}-1$ წერტილზე და მის მარცხნივ უარყოფითი ნიშანი, $\dfrac{A}{|a_0|}+1$ წერტილზე და მის მარჯვნივ კი დადებითი ნიშანი. საზოგადოდ, ვინაიდან $f(z)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდული, როცა

$$|z|\geqslant\frac{A}{|a_0|}+1, \tag{*}$$

მეტია დანარჩენი წევრების ჯამის მოდულზე, ვღებულობთ, რომ z-ის ისეთი რიცხვითი მნიშვნელობანი, რომელთა მოდული აკმაყოფილებს (*) პირობას, $f(z)$ მრავალწევრს არ გახდის ნულად, ე. ი. არ გამოდგება $f(z)$ მრავალწევრის ფესვად. ამრიგად, $f(z)$ მრავალწევრის ფესვად კომპლექსურ რიცხვთა ველში შეიძლება გამოდგეს z-ის ისეთი რიცხვითი მნიშვნელობანი, რომელთა მოდული ნაკლებია, ვიდრე $\dfrac{A}{|a_0|}+1$ რიცხვი. **კერძოდ, ყოველი ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილ ფესვად შეიძლება გამოდგეს მხოლოდ ისეთი რიცხვები, რომელთა აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია, ვიდრე $\dfrac{A}{|a_0|}+1$.**

ახლა მოვიგონოთ მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილი დებულება: **თუ (a,b) შუალედში უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია შუალედის ბოლო წერტილზე სხვადასხვა ნიშნისაა, მაშინ $(a,\ b)$ შუალედში $f(x)$ მრავალწევრს ერთი ფესვი მაინც აქვს, ე. ი. $(a,\ b)$ შუალედში მოიძებნება ერთი ისეთი $x=x_0$ წერტილი მაინც, რომ $f(x_0)=0$.** ვინაიდან ყოველი მრავალწევრი უწყვეტია და ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან კენტი ხარისხის მრავალწევრს $\left(-\dfrac{A}{|a_0|}-1,\ \dfrac{A}{|a_0|}+1\right)$ შუალედის ბოლო წერტილებზე და მის გარეთ შესაბამისად უარყოფითი და დადებითი ნიშნები აქვს, მივიღებთ მეტად საინტერესო შედეგს: **ყოველ კენტი ხარისხის ნამდვილკოეფი-**

ციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს $\left(-\frac{A}{|a_0|}-1,\ \frac{A}{|a_0|}+1\right)$ შუალედში ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს.

ეს დებულება ჩვენ ადრე წმინდა ალგებრული გზით დავამტკიცეთ.

ამ შედეგს და სხვა მნიშვნელოვან შედეგებს, ჩვენ შემდგომ, $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების მიახლოებით მოძებნის შესწავლისას, მივიღებთ გეომეტრიულად, $f(x)$ მრავალწევრის შესაბამისი გრაფიკის საშუალებით.

დამტკიცებული ლემის გამოყენებით ადვილად დამტკიცდება

ლემა 2. **ყოველი კომპლექსურცვლადიანი $f(z)$ მრავალწევრისათვის და ნებისმიერად დიდი ნამდვილი M რიცხვისათვის შეიძლება შევარჩიოთ ისეთი დადებითი N რიცხვი, რომ როცა $|z|>N$, მაშინ $|f(z)|>M$.**

მართლაც, მოცემული n-ური ხარისხის $f(z)$ მრავალწევრი განვიხილოთ როგორც ორი წევრის ჯამი

$$f(z)=a_0z^n+(a_1z^{n-1}+\ldots+a_n).$$

რადგან ორი რიცხვის ჯამის მოდული მეტია ან ტოლი ამავე რიცხვების მოდულების სხვაობაზე, მივიღებთ:

$$|f(z)|=|a_0z^n+(a_1z^{n-1}+\ldots+a_n)|\geqslant|a_0z^n|-|a_1z^{n-1}+\ldots+a_n|. \qquad (5)$$

თანახმად უფროსი წევრის მოდულის შესახებ დამტკიცებული ლემისა, $k=2$ მნიშვნელობისათვის გვექნება:

როცა

$$|z|\geqslant\frac{2A}{|a_0|}+1=N_1,$$

მაშინ

$$|a_0z^n|>2|a_1z^{n-1}+\ldots+a_n|$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{1}{2}\left|a_0z^n\right|>|a_1z^{n-1}+\ldots+a_n|.$$

მაშასადამე,

$$|a_0z^n|-|a_1z^{n-1}+\ldots+a_n|>|a_0z^n|-\frac{1}{2}|a_0z^n|=\frac{1}{2}|a_0z^n|.$$

ახლა (5) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$|f(z)|>\frac{1}{2}|a_0z^n|. \qquad (6)$$

როგორც (6) უტოლობიდან ჩანს, როცა $\frac{1}{2}|a_0 z^n| \geqslant M$, ე. ი. როცა

$$|z| \geqslant \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}} = N_2, \tag{7}$$

მაშინ $|f(z)| > M$. ამრიგად, როცა $|z| \geqslant N = max\ (N_1, N_2)$ გვექნება:

$$|f(z)| > M, \text{ რ. დ. გ.}$$

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ **წინასწარ აღებული ნებისმიერად დიდი დადებითი M რიცხვისათვის კომპლექსურ სიბრტყეზე შეიძლება მოვნახოთ ისეთი N რადიუსიანი წრე (არე), რომ მის გარეთ მოთავსებული z წერტილების W ზედაპირზე შესაბამისი წერტილების მანძილები XOY სიბრტყიდან მეტია M-ზე.**

§ 38. უმაღლესი ალგებრის ძირითადი თეორემა

უმაღლესი ალგებრის ძირითადი თეორემა მდგომარეობს შემდეგში.

თეორემა. ნამდვილ ან კომპლექსურკოეფიციენტებიან ყოველ $n \geqslant 1$ ხარისხის მრავალწევრს კომპლექსურ რიცხვთა ველში აქვს ერთი ფესვი მაინც.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ საჭიროა დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

დალამბერის ლემა. **თუ $n \geqslant 1$ ხარისხის $f(z)$ მრავალწევრი $z = z_0$ წერტილზე არ უდრის ნულს, ე. ი. $f(z_0) \neq 0$, $|f(z_0)| > 0$, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი h რიცხვი, საზოგადოდ კომპლექსური, რომ**

$$|f(z_0+h)| < |f(z_0)|.$$

დამტკიცება. $f(z_0+h)$ გავშალოთ ტეილორის ფორმულის მიხედვით, მივიღებთ:

$$f(z_0+h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \frac{h^2}{2!} f''(z_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z_0). \tag{1}$$

ტოლობის მარჯვენა მხარეში პირველი წევრი, პირობის თანახმად, არ უდრის ნულს, ბოლო წევრიც, ვინაიდან $f^{(n)}(z_0) = n! a_0$, განსხვავებულია ნულისაგან. რაც შეეხება დანარჩენ წევრებს, მათ შორის ზოგიერთი შეიძლება უდრიდეს ნულს. ვიგულისხმოთ, რომ

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ და } f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

მაშინ (1) თანაფარდობა ასე გადაიწერება:

$$f(z_0+h)=f(z_0)+\frac{h^k f^{(k)}(z_0)}{k!}+\frac{h^{k+1}f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}+\ldots+\frac{h^n f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $f(z_0)$-ზე, გვექნება:

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+\frac{h^k f^{(k)}(z_0)}{k!\ f(z_0)}+\frac{h^{k+1}f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!\ f(z_0)}+\ldots+\frac{h^n f^{(n)}(z_0)}{n!\ f(z_0)}.$$

ახლა h და $\frac{f^{(\lambda)}(z_0)}{\lambda!\ f(z_0)}$ კომპლექსური რიცხვები წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული სახით:

$$h=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$\frac{f^{(\lambda)}(z_0)}{\lambda!\ f(z_0)}=R_\lambda(\cos\varphi_\lambda+i\sin\varphi_\lambda)\qquad(\lambda=k,\ k+1,\ldots,n).$$

მაშინ, კომპლექსური რიცხვის კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების წესის მიხედვით უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}=1+R_k\rho^k[\cos(\varphi_k+k\theta)+i\sin(\varphi_k+k\theta)]+R_{k+1}\rho^{k+1}[\cos(\varphi_{k+1}+ +(k+1)\theta)+i\sin(\varphi_{k+1}+(k+1)\theta)]+\ldots+R_n\rho^n[\cos(\varphi_n+n\theta)+ +i\sin(\varphi_n+n\theta)].\qquad(2)$$

h კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ავარჩიოთ ისე, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე წევრი გამოვიდეს **ნამდვილი და უარყოფითი რიცხვი.** საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვი, ნამდვილი და უარყოფითი მაშინაა, როცა მისი არგუმენტი არის π ან π რადიანის კენტი ჯერადი. ვთქვათ,

$$\varphi_k+k\theta=\pi$$

აქედან

$$\theta=\frac{\pi-\varphi_k}{k}.$$

θ არგუმენტის ასეთი არჩევისას მეორე წევრი იქნება ნამდვილი და უარყოფითი — $R_k\rho^k$ რიცხვი. თუ h კომპლექსური რიცხვის მოდულს ავარჩევთ ისე, რომ $\rho<\sqrt[k]{\frac{1}{R_k}}$, მაშინ $R_k\rho^k<1$, ე. ი. მეორე წევრის მოდული ნაკლები იქნება 1-ზე. ვინაიდან $1-R_k\rho^k>0$, გვაქვს $|1-R_k\rho^k|=1-R_k\rho^k$. ახლა კომპლექსური რიცხვის ჯამის მოდულის

თვისების გამოყენებით, (2) თანაფარდობიდან მივიღებთ:

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| \leqslant (1-R_k\rho^k)+R_{k+1}\rho^{k+1}+R_{k+2}\rho^{k+2}+\ldots+R_n\rho^n,$$

ან კიდევ ეს შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| \leqslant 1-\rho^k(R_k-R_{k+1}\rho-R_{k+2}\rho^2-\ldots-R_n\rho^{n-k}). \quad (3)$$

აქ ფრჩხილებში ρ-ს მიმართ ჩვენ გვაქვს ნამდვილკოეფიციენტებიანი $n-k$ ხარისხის მრავალწევრი, რომლის თავისუფალი წევრი დადებითია. თანახმად (გვ. 319) მიღებული მე-2 შედეგისა, ρ-სათვის შეიძლება შევარჩიოთ იმდენად მცირე შუალედი, რომ ფრჩხილებში მოთავსებულ მრავალწევრს ჰქონდეს თავისუფალი R_k წევრის ნიშანი. ამრიგად, ρ-ს მოდული შეიძლება ავიღოთ იმდენად მცირე, რომ მრავალწევრი $\varphi(\rho)=R_k-R_{k+1}\rho-\ldots-R_n\rho^{n-k}$ იქნება დადებითი ρ-ს ასეთი მნიშვნელობისათვის. ცხადია, გვექნება $1-\rho^k\varphi(\rho)<1$. ამრიგად, (3) უტოლობის მარჯვენა მხარე ნაკლები გახდა ერთზე, ე. ი.

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right|<1 \quad \text{ან} \quad |f(z_0+h)|<|f(z_0)|.$$

ამით დალამბერის ლემა დამტკიცებულია.

ახლა ადვილად დამტკიცდება ალგებრის ძირითადი თეორემა.

მართლაც, როგორც ვიცით (გვ. 318), კომპლექსური სიბრტყის ყოველ ჩაკეტილ არეში $f(z)$ კომპლექსურ ფუნქციას გააჩნია ერთი $z=z_0$, მინიმუმის წერტილი მაინც. ე. ი. $|f(z_0)|\leqslant|f(z)|$. ჩაკეტილ არედ ავირჩიოთ r რადიუსიანი წრე ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ამ არეში, როგორც ახლა ვთქვით, იარსებებს განსახილველი ფუნქციის ერთი მინიმუმის წერტილი მაინც, რომელიც მოთავსებული იქნება არეში ან მის კონტურზე. მეორე შემთხვევა r რადიუსის სათანადო შერჩევით (ლემა 2, გვ. 322) შეიძლება დაყვანილ იქნეს პირველ შემთხვევამდე. მაშასადამე, r ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ $\xi=|f(z)|$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი $z=z_0$ მოთავსდეს ამ წრის შიგნით.

ახლა, $z_1=z_1+h$ წერტილი შეიძლება იმდენად ახლოს ავიღოთ z_0-წერტილთან, რომ $z_1=z_0+h$ წერტილიც მოთავსდეს $|f(z)|$ მოდულის მინიმუმის შემცველ r რადიუსიან წრეში. დავამტკიცოთ, რომ $|f(z)|$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი $z=z_0$ არის $f(z)$ მრავალწევრის ფესვი. დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ, $f(z_0)\neq 0$, მაშინ, დალამბერის ლემის თანახმად მოიძებნება ერთი ისეთი $z_1=z_0+h$ წერტილი მაინც, რომ $|f(z_0+h)|<$ $<|f(z_0)|$, რაც ეწინააღმდეგება $z=z_0$ წერტილის მინიმალურობას. მაშა-

სადამე, დაშვება იმისი, რომ $|f(z)|$ ფუნქციის მინიმუმის $z=z_0$ წერტილზე $f(z_0)\neq 0$ შეუძლებელია, ე. ი. $|f(z)|$ ფუნქციის $z=z_0$ მინიმუმის წერტილი $f(z)$ მრავალწევრის ფესვია $f(z_0)=0$. ამით უმაღლესი ალგებრის ძირითადი თეორემა დამტკიცებულია. **გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(z)$ ფუნქციის შესაბამისი W ზედაპირი XOY სიბრტყეს შეეხება ერთ წერტილში მაინც.**

შევნიშნოთ, რომ XVIII საუკუნეში დალამბერის ლემას ალგებრის ძირითადი თეორემის ეკვივალენტურად თვლიდნენ. ლემისა და თეორემის ეკვივალენტურობას ასე ამტკიცებდნენ: თანახმად ლემისა, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $z_1, z_2, z_3, \ldots$ წერტილები, რომ $|f(z_1)|>|f(z_2)|>|f(z_3)|\ldots$ ბოლოს და ბოლოს თითქოს მივიღებთ ისეთი $z=z_n$ მნიშვნელობას, რომ $|f(z_n)|=0$. ცხადია, ასეთი მსჯელობა არაა მართებული, რადგან დადებით რიცხვთა კლებადი მიმდევრობის ზღვარი შეიძლება არ იყოს ნული. მაგალითად, რიცხვითი მიმდევრობა:

$$2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{3},\ \ldots,\quad \frac{n+1}{n},\ \ldots$$

კლებადია, მაგრამ მისი ზღვარი უდრის 1-ს და არა ნულს.

§ 39. მრავალწევრის დაშლა რიცხვთა ველზე. ალგებრის ძირითადი თეორემის შედეგები

1. ყოველი n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი, როგორც ნამდვილ-, ისე კომპლექსურკოეფიციენტებიანი, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე დაიშლება n წრფივ მამრავლთა ნამრავლად.

მართლაც, ვთქვათ, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე მოცემულია n-ური ხარისხის მრავალწევრი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \tag{1}$$

ალგებრის ძირითადი თეორემის თანახმად, ამ მრავალწევრს აქვს ერთი $x=x_1$ ფესვი მაინც ნამდვილი ან კომპლექსური. ბეზუს თეორემის თანახმად, $f(x)$ მრავალწევრი გაიყოფა $x-x_1$ ორწევრზე:

$$f(x)=(x-x_1)\varphi_1(x),$$

სადაც $\varphi_1(x)$ საზოგადოდ კომპლექსურ რიცხვთა ველზე $n-1$ ხარისხის მრავალწევრია, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის a_0

$$\varphi_1(x)=a_0x^{n-1}+\ldots$$

ალგებრის ძირთადი თეორემის თანახმად, $\varphi_1(x)$ მრავალწევრს კომპლექსურ რიცხვთა ველში აქვს ერთი $x=x_2$ ფესვი მაინც ნამდვილი ან კომპლექსური. იმავე ბეზუს თეორემის თანახმად, $\varphi_1(x)$ მრავალწევრი იყოფა $x-x_2$ ორწევრზე:

$$\varphi_1(x)=(x-x_2)\varphi_2(x),$$

სადაც $\varphi_2(x)$ საზოგადოდ კომპლექსურ რიცხვთა ველზე $n-2$ ხარისხის მრავალწევრია, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის a_0,

$$\varphi_2(x)=a_0x^{n-2}+\ldots$$

თუ იგივე მსჯელობას გამოვიყენებთ $\varphi_2(x)$ მრავალწევრის მიმართ, მივიღებთ:

$$\varphi_2(x)=(x-x_3)\varphi_3(x)$$

და ა. შ. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, მივალთ შემდეგ ტოლობამდე:

$$\varphi_{n-2}(x)=(x-x_{n-1})\varphi_{n-1}(x),$$

სადაც $\varphi_{n-1}(x)$ საზოგადოდ კომპლექსურ რიცხვთა ველზე პირველი ხარისხის მრავალწევრია, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის a_0, ე. ი.

$$\varphi_{n-1}(x)=a_0x+b.$$

თუ ამ მრავალწევრის ფესვს აღვნიშნავთ x_n-ით, ე. ი. $x_n=-\dfrac{b}{a_0}$ გვექნება:

$$\varphi_{n-1}(x)=a_0x+b=a_0\left(x+\frac{b}{a_0}\right)=a_0(x-x_n).$$

ახლა, თუ $\varphi_{n-1}(x)$-ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ $\varphi_{n-2}(x)$-ის მნიშვნელობაში, $\varphi_{n-2}(x)$-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ $\varphi_{n-3}(x)$-ის მნიშვნელობაში და ა. შ., საბოლოოდ მივიღებთ:

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \tag{2}$$

ვინაიდან ყოველი n-ური ხარისხის მრავალწევრი რიცხვთა ველში არ შეიძლება დაიშალოს n-ზე მეტი რაოდენობის წრფივ მამრავლად და ყოველი პირველი ხარისხის მრავალწევრი არის დაუყვანი, (2) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ **ყოველი n-ური ხარისხის მრავალწევრი კომპლექსურ რიცხვთა ველზე დაიშლება n წრფივ დაუყვან მამრავლად.**

ამ ტოლობიდან აგრეთვე ჩანს, რომ ყოველი x_1, x_2, ..., x_n რიცხვი არის მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი. პირიქით, დამტკიცდება, რომ $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი $x=\alpha$ ფესვი არის ერთ-ერთი x_1, x_2, ..., x_n რიცხვებს შორის.

მართლაც, პირობის თანახმად $f(\alpha)=0$; ამიტომ (2) თანაფარდობა ასე გადაიწერება:

$$a_0(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots(\alpha-x_n)=0. \qquad (3)$$

რადგან $a_0\neq 0$ და რიცხვთა ველზე არ არსებობს ნულგამყოფი ელემენტები, (3) თანაფარდობიდან ვღებულობთ, რომ ერთ-ერთი თანამამრავლი მაინც უდრის ნულს. ვთქვათ, $\alpha-x_i=0$, აქედან $x_i=\alpha$, რ. დ. გ. ამრიგად, მივიღეთ, რომ ყოველი $n\geqslant 1$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს ან, რაც იგივეა, ყოველ $n\geqslant 1$ ხარისხის $f(x)=0$ ალგებრულ განტოლებას ნამდვილი ან კომპლექსური კოეფიციენტებით, კომპლექსურ რიცხვთა ველში ზუსტად n ფესვი აქვს. ცხადია, რომ თუ $f(x)$ მრავალწევრს სულ აქვს $x_1, x_2, \ldots, x_k (k<n)$ სხვადასხვა ფესვი შესაბამისად $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ჯერადობისა, მაშინ გვექნება:

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{l_1}\cdot(x-x_2)^{l_2}\ldots(x-x_k)^{l_k}, \text{ სადაც } l_1+l_2+\ldots+l_k=n.$$

მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდულის შესახებ დამტკიცებული ლემიდან ვღებულობთ, რომ **$n\geqslant 1$ ხარისხის (1) მრავალწევრის ყველა n ფესვი როგორც ნამდვილი, ისე კომპლექსური, მოთავსებულია XOY** კომპლექსურ სიბრტყეზე $r=\dfrac{A}{|a_0|}+1$ რადიუსიანი წრის შიგნით ცენტრით სათავეში. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ საზოგადოდ n-ური ხარისხის $f(z)$ კომპლექსური მრავალწევრის $|f(z)|$ მოდულების ბოლო წერტილებისაგან შედგენილი W ზედაპირი XOY კომპლექსურ სიბრტყეს $r=\dfrac{A}{|a_0|}+1$ რადიუსიან წრეში, ცენტრით სათავეში, შეეხება ზუსტად n წერტილში; რაც შეეხება აღნიშნული წრის გარე ნაწილს, იქ $f(z)$ მრავალწევრის შესაბამისი W ზედაპირი არსად არ შეეხება XOY კომპლექსურ სიბრტყეს.

2. ყოველი ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი ნამდვილ რიცხვთა ველზე შეიძლება დაიშალოს წრფივ და კვადრატულ დაუყვან მამრავლებად.

მართლაც, ყოველი ნამდვილკოეფიციენტებიანი $n\geqslant 1$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი, თუ ყველა მისი ფესვი ნამდვილია, ნამდვილ რიცხვთა ველზე შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მოცემული მრავალწევრის ფესვებია. ჩვენთვის უკვე ცნობილია (გვ. 280), რომ ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ლუწი რაოდენობის კომპლექსური ფესვი და ეს ფესვები წყვილ-წყვილად შეუღლებულია.

ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ერთი, მაგალითად, $x=x_1$ ფესვი მაინც კომპლექსურია, ე. ი. $x_1=\alpha+\beta i$. მაშინ მას ექნება მეორე, x_1 კომპლექსური ფესვის შეუღლებული, $\overline{x_1}=\alpha-\beta i$ ფესვი. ვთქვათ, $x_2=\overline{x_1}=\alpha-\beta i$ ვინაიდან

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)(x-\overline{x_1})=x^2-(x_1+\overline{x_1})x+$$
$$+x_1\overline{x_1}=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2.$$

ამიტომ გვექნება:

$$f(x)=a_0(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)g(x).$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში $f(x)$ მრავალწევრს ნამდვილ რიცხვთა ველზე დაუყვან მამრავლად გამოეყო $\varphi(x)=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ მეორე ხარისხის მრავალწევრი. თუ $g(x)$ მრავალწევრის ყველა $n-2$ ფესვი ნამდვილია, მაშინ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრი ნამდვილ რიცხვთა ველზე დაიშლება ერთი მეორე ხარისხის და $n-2$ რაოდენობის წრფივი დაუყვანი მამრავლების ნამრავლად. ვთქვათ, $g(x)$ მრავალწევრს გააჩნია ერთი $x_3=\gamma+\delta i$ კომპლექსური ფესვი მაინც, მაშინ მას ექნება მეორე x_3 კომპლექსური ფესვის შეუღლებული $\overline{x_3}=\gamma-\delta i$ ფესვი და $g(x)$ მრავალწევრი ასე წარმოგვიდგება:

$$g(x)=(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)\lambda(x)$$

და ა. შ. მივიღებთ, რომ ყოველი ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი ნამდვილ რიცხვთა ველზე შეიძლება დაიშალოს პირველი და მეორე ხარისხის დაუყვანი მამრავლების ნამრავლად და ეს დაშლა არის ერთადერთი მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ **ყოველი $n>2$ ხარისხის, ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი ნამდვილ რიცხვთა ველზე არის დაყვანადი.** ახლა, რადგან ყოველი n-ური ხარისხის მრავალწევრი, როგორც ნამდვილ-, ისე კომპლექსურკოეფიციენტებიანი, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე იშლება n წრფივ მამრავლად, ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ **K კომპლექსურ რიცხვთა ველი არის კომპლექსურ რიცხვთა ველზე აღებული ყოველი n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრის დაშლის ველი.**

ისეთ P ველს, რომელშიც თავსდება $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ნებისმიერი $n\geqslant1$ ხარისხის მრავალწევრის ყველა ფესვი, ეწოდება **ალგებრულად ჩაკეტილი** ველი. ვინაიდან $K[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ყოველი $n\geqslant1$ ხარისხის მრავალწევრის ყველა n ფესვი მოთავსებულია K კომპლექსურ რიცხვთა ველში, მივიღეთ, **რომ, კომპლექსურ რიცხვთა ველი ალგებრულად ჩაკეტილია.**

8. ალგებრული განტოლების უსასრულო ფესვების შესახებ. ვთქვათ, მოცემულია n-ური ხარისხის ალგებრული განტოლება

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{k-1}x^{n-k+1}+a_kx^{n-k}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0. \qquad (4)$$

გავარკვიოთ ასეთი საკითხი: თუ მოცემული განტოლების k კოეფიციენტი a_0, a_1, ..., a_{k-1} მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ რა მოუვა განტოლების ფესვებს?

შემოვიღოთ ჩასმა

$$x=\frac{1}{y}. \qquad (5)$$

მოცემული (4) განტოლება (5) ჩასმით და განტოლების ორივე მხარის y^n-ზე გამრავლებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\ldots+a_ky^k+a_{k-1}y^{k-1}+\ldots+a_1y+a_0=0. \qquad (6)$$

ვინაიდან a_0, a_1, .., a_{k-1} კოეფიციენტები მიისწრაფვიან ნულისაკენ, (6) განტოლება ზღვარში მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y^k(a_ny^{n-k}+a_{n-1}y^{n-k-1}+\ldots+a_k)=0.$$

ამ უკანასკნელ განტოლებას აქვს k-ჯერადი ნულოვანი ფესვი.

ამრიგად, თუ მოცემული (4) ალგებრული განტოლების პირველი k კოეფიციენტი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ (6) ალგებრული განტოლების k რაოდენობის ფესვი მიისწრაფვის ნულისაკენ. თუ დავაკვირდებით (5) ჩასმას, შევამჩნევთ, რომ როცა $y \to 0$, მაშინ $x \to \infty$. მაშასადამე, **თუ მოცემული (4) ალგებრული განტოლების პირველი k კოეფიციენტი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ მისი k რაოდენობის ფესვი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.**

თავი IX

განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნა

§ 40. ნამდვილ ფესვთა საზღვრები

ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა ველზე მოცემულია n-ური ხარისხის ალგებრული განტოლება

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n. \qquad (1)$$

ჩვენ ახლა განვიხილავთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ან, რაც იგივეა, ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)=0$ ალგებრული განტოლების ნამდვილ ფესვთა საზღვრების მოძებნის რამდენიმე მეთოდს.

პირველი მეთოდი. როგორც უკვე ვიცით, მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდულის შესახებ დამტკიცებული ლემიდან ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი ნამდვილი x ფესვის აბსოლუტური მნიშვნელობა $|x|<\frac{A}{|a_0|}+1$, ე. ი. (1) მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი მოთავსებულია

$$-\frac{A}{|a_0|}-1<x<\frac{A}{|a_0|}+1, \qquad (2)$$

შუალედში, სადაც $A=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_n|\}$, ხოლო a_0 მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტია. დანარჩენი მეთოდებით ჩვენ ვიპოვით მოცემული ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის მხოლოდ დადებით ფესვთა ზედა საზღვარს და შემდეგ სპეციალური გარდაქმნებით ყველა განხილული მეთოდისათვის ვიპოვით მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის როგორც უარყოფითი, ისე დადებითი ფესვების ქვედა და ზედა საზღვრებს.

მეორე მეთოდი. ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი დადებითია, $a_0>0$, და a_k ($k\geq 1$) ნომრით (რიგით) არის პირველი უარყოფითი კოეფიციენტი. უარყო-

ფით კოეფიციენტებს შორის აბსოლუტურად უდიდესი მნიშვნელობა ავღნიშნოთ B-თი. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}+1 \tag{3}$$

არის $f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების ზედა საზღვარი.

მართლაც, თუ a_1, a_2, ..., a_{k-1} დადებით კოეფიციენტებს შევცვლით ნულით, ხოლო ყველა დანარჩენ a_k, a_{k+1}, ..., a_n კოეფიციენტს შევცვლით უარყოფითი B-თი, დადებითი x-თვის მივიღებთ უტოლობას

$$f(x)\geqslant a_0x^n-B(x^{n-k}+x^{n-k-1}+\ldots+x+1)=a_0x^n-B\,\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $x>1$, მაშინ $\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1}<\frac{x^{n-k+1}}{x-1}$ და შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x)>a_0x^n-B\,\frac{x^{n-k+1}}{x-1}=\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^{k-1}(x-1)-B\right].$$

რადგან $x>1$, $x^{k-1}(x-1)>(x-1)(x-1)^{k-1}=(x-1)^k$, მივიღებთ:

$$f(x)>\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0(x-1)^k-B\right]. \tag{4}$$

ამ (4) უტოლობიდან ჩანს, რომ x-ის ის მნიშვნელობანი, რომელთათვის კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არაუარყოფითია, ე. ი.

$$a_0(x-1)^k-B\geqslant 0, \tag{5}$$

არ შეიძლება იყოს $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი. (5) უტოლობიდან ვღებულობთ:

$$x-1\geqslant\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}},\quad x\geqslant\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}+1.$$

ამით დამტკიცდა, რომ $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი დადებითი ფესვი ნაკლებია, ვიდრე

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}+1,\quad \text{ე. ი.}\quad x<\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}+1.$$

მესამე მეთოდი (ნიუტონის ხერხი). ვიგულისხმოთ $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი $a_0>0$. დავამტკიცოთ, რომ თუ $x=$

$=\alpha>0$ მნიშვნელობისათვის $f(x)$ მრავალწევრი დადებითია და ყველა მისი წარმოებული $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ არაუარყოფითია, მაშინ α რიცხვი გამოდგება $f(x)$ მრავალწევრის დადებით ფესვთა ზედა საზღვრად.

მართლაც, $f(x)$ მრავალწევრი დავშალოთ $x-\alpha$ ხარისხების მიხედვით

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n. \qquad (6)$$

როცა $x\geqslant\alpha$, (6) ტოლობის მარჯვენა მხარეში, პირობის თანახმად, გვექნება მკაცრად დადებითი სიდიდე. ამიტომ x-ის ასეთი მნიშვნელობანი არ გამოდგება $f(x)$ მრავალწევრის ფესვად, ე. ი. $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი დადებითი ფესვი ნაკლები უნდა იყოს α-ზე, ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია. განვიხილოთ მოცემული მრავალწევრისათვის შესაბამისი α რიცხვის მოძებნის მეთოდი. ანალიზიდან მოვიგონოთ, რომ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $x=x_0$ წერტილზე გეომეტრიულად წარმოადგენს იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც მოცემული ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკის $[x_0, f(x_0)]$ წერტილზე გავლებული მხები ქმნის OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან. აქედან ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ რომელიმე შუალედის ყოველ წერტილზე $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული დადებითია, ე. ი. $f'(x)>0$, მაშინ ამ შუალედში $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია.

ახლა, რადგან მოცემული ფუნქციის n-ური რიგის $f^{(n)}(x)=n!a_0$ წარმოებული x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის დადებითია, $f^{(n-1)}(x)$ იქნება x-ის ზრდადი ფუნქცია. ამიტომ (როგორც ეს გრაფიკზე აშკარად ჩანს) იარსებებს ისეთი $x=\alpha$ რიცხვი, რომ $f^{(n-1)}(x)$ წარმოებული x-ის ყოველი $x\geqslant\alpha_1$ მნიშვნელობისათვის იქნება დადებითი. ახლა, რადგან $f^{(n-1)}(x)$ წარმოებული x-ის ყოველი $x\geqslant\alpha_1$ მნიშვნელობისათვის დადებითია და ასეთი x-ებისათვის $f^{(n-2)}(x)$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ იარსებებს ისეთი $x=\alpha_2\geqslant\alpha_1$ რიცხვი, რომ $f^{(n-2)}(x)$ ფუნქცია ყოველი $x\geqslant\alpha_2$ მნიშვნელობისათვის იქნება დადებითი და ა. შ. ამ პროცესის გაგრძელებით სასრული ნაბიჯის შემდეგ მივაღწევთ ისეთ $x=\alpha$ რიცხვს, რომელზედაც მოცემული $f(x)$ მრავალწევრი და ყველა მისი წარმოებული იქნება დადებითი.

ახლა ვუჩვენოთ, რომ თუ ვიცით მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის მხოლოდ დადებითი ფესვების ზედა საზღვარი, მაშინ მოცემული მრავალწევრის სათანადო გარდაქმნების საფუძველზე ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ მოცემული მრავალწევრის როგორც დადებითი ფესვების ქვედა საზღვარი, ისე უარყოფითი ფესვების ქვედა და ზედა საზღვრები.

მართლაც, განვიხილოთ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის შემდეგი სამი გარდაქმნა:

$$y^n f\left(\frac{1}{y}\right)=f_1(y),$$
$$f(-z)=f_2(z),$$
$$t^n f\left(-\frac{1}{t}\right)=f_3(t).$$

ვიგულისხმოთ, რომ ამ გარდაქმნების შედეგად მიღებული $f_1(y)$, $f_2(z)$ და $f_3(t)$ მრავალწევრების უფროსი წევრის კოეფიციენტები დადებითია. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ დადებით ფესვთა ზედა საზღვრის გამოანგარიშების რომელიმე მეთოდით n_0, n_1, n_2 და n_3 შესაბამისად არიან $f(x)$, $f_1(y)$, $f_2(z)$ და $f_3(t)$ მრავალწევრების დადებით ფესვთა ზედა საზღვრები.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ თუ α არის $f(x)$ მრავალწევრის ნებისმიერი დადებითი ფესვი, ე. ი. $f(\alpha)=0$, მაშინ $f_1(y)$-ს დააკმაყოფილებს $\frac{1}{\alpha}$. პირობის თანახმად $\frac{1}{\alpha}<n_1$, ე. ი. $\alpha>\frac{1}{n_1}$. შემდეგ, თუ $\beta<0$ არის $f(x)$ მრავალწევრის ნებისმიერი უარყოფითი ფესვი, ე. ი. $f(\beta)=0$, მაშინ $f_2(z)$-ს დააკმაყოფილებს $-\beta$; პირობის თანახმად, რადგან $-\beta>0$ დადებითია და n_2 არის $f_2(z)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების ზედა საზღვარი, გვექნება $-\beta<n_2$, ე. ი. $\beta>-n_2$.

ახლა, ადვილად შევამჩნევთ, რომ $f_3(t)$-ს აკმაყოფილებს $-\frac{1}{\beta}$. პირობის თანახმად, $-\frac{1}{\beta}<n_3$ ე. ი. $\beta<-\frac{1}{n_3}$. ამრიგად, მივიღებთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის ან, რაც იგივეა, $f(x)=0$ განტოლების ყოველი $\alpha>0$ დადებითი ფესვი მოთავსებულია $\left(\frac{1}{n_1},\, n_0\right)$ შუალედში, ხოლო ყოველი $\beta<0$ უარყოფითი ფესვი მოთავსებულია $\left(-n_2,\, -\frac{1}{n_3}\right)$ შუალედში.

მაგალითები. პირველი მეთოდით ვიპოვოთ

$$f(x)=2x^4-5x^2-8x+10 \tag{7}$$

მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა საზღვრები. აქ $a_0=2$, $A=10$. ამიტომ მისი ყოველი ნამდვილი ფესვის მოდული ნაკლებია, ვიდრე $\frac{A}{|a_0|}+1=6$. მაშასადამე, (7) მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი მოთავსე-

ბულია $(-6,\ 6)$ შუალედში. დადებით ფესვთა ქვედა საზღვრის მოსაძებნად x შევცვალოთ $\frac{1}{y}$-ით და მიღებული ფუნქცია გავამრავლოთ y^4-ზე, მივიღებთ:

$$f_1(y)=10y^4-8y^3-5y^2+2. \tag{8}$$

აქ $a_0=10$, $A=8$ და ამიტომ მისი ყოველი ნამდვილი ფესვი $|y|<\frac{9}{5}$. რადგან $y=\frac{1}{x}$, გვექნება: $\frac{1}{|x|}<\frac{9}{5}$, $|x|>\frac{5}{9}$, ე. ი. მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი ნამდვილი ფესვი მეტია $\frac{5}{9}$ და ნაკლებია $-\frac{5}{9}$. მაშასადამე, მოცემული (7) მრავალწევრის ყოველი α დადებითი ფესვი მოთავსებულია $\left(\frac{5}{9},\ 6\right)$ შუალედში, ხოლო ყოველი β უარყოფითი ფესვი მოთავსებულია $\left(-6,\ -\frac{5}{9}\right)$ შუალედში.

მეორე მეთოდით ვიპოვოთ (7) მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა საზღვრები; აქ $a_0=2$, $k=2$, $B=8$ და ჩვენ მივიღებთ

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}+1=\sqrt{\frac{8}{2}}+1=3,$$

ე. ი. დადებითი ფესვების ზედა საზღვარია 3. დადებით ფესვთა ქვედა საზღვრის მისაღებად ჩავსვათ $x=\frac{1}{y}$ და მიღებული ფუნქცია გავამრავლოთ y^4-ზე. მივიღებთ (8) მრავალწევრს. (8) მრავალწევრში $a_0=10$, $B=8$, $k=1$ და $f_1(y)$ მრავალწევრის ყოველი დადებითი ფესვი $y<0{,}8+1<2$, მაშასადამე, (7) მრავალწევრის დადებით ფესვთა ქვედა საზღვრად გამოდგება $\frac{1}{2}$.

$f(x)$ მრავალწევრის უარყოფით ფესვთა ქვედა საზღვრის საპოვნელად ჩავსვათ $x=-z$:

$$f_2(z)=2z^4-5z^2+8z+10; \tag{9}$$

აქ $a_0=2$, $k=2$, $B=5$, ამრიგად,

$$\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}+1=\sqrt{2{,}5}+1<2{,}6;$$

მაშასადამე, $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი უარყოფითი ფესვი მეტია, ვიდრე $-2{,}6$. უარყოფით ფესვთა ზედა საზღვრის საპოვნელად (7) მრავალწევრში ჩავსვათ $x=-\frac{1}{t}$ და მიღებული ფუნქციის ორივე მხარე გავამრავლოთ t^4-ზე:

$$f_3(t)=10t^4+8t^3-5t^2+2; \tag{10}$$

აქ $a_0=10$, $k=2$, $B=5$. ამიტომ $f_3(t)$ მრავალწევრის ყოველი დადებითი ფესვი ნაკლებია, ვიდრე $\sqrt{\frac{5}{10}}+1<2$; მივიღებთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი უარყოფითი ფესვი ნაკლებია, ვიდრე $-\frac{1}{2}$.

მაშასადამე, მეორე მეთოდით ამავე $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი დადებითი α ფესვი მოთავსებულია $(0{,}5;\ 3)$ შუალედში, ხოლო ყოველი უარყოფითი β ფესვი მოთავსებულია $(-2{,}6;\ -0{,}5)$ შუალედში.

ახლა მესამე მეთოდით ვიპოვოთ იმავე $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვთა საზღვრები, ამისათვის განვიხილოთ

$$f(x)=2x^4-5x^2-8x+10$$

მრავალწევრი და მისი ყველა წარმოებული:

$$f'(x)=8x^3-10x-8=2(4x^3-5x-4),$$
$$f''(x)=24x^2-10=2(12x^2-5),$$
$$f'''(x)=48.$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ $x=2$ მნიშვნელობაზე $f(x)$ და ყველა მისი წარმოებული დადებითია. მაშასადამე, რიცხვი $x=2$ შეიძლება მივიღოთ $f(x)$ მრავალწევრის დადებით ფესვთა ზედა საზღვრად. (8), (9) და (10) დამხმარე მრავალწევრების საშუალებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის დადებით ფესვთა ქვედა საზღვარია $\frac{1}{2}$. უარყოფითი ფესვი კი მოცემულ მრავალწევრს არ აქვს, რადგან ყოველი უარყოფითი ფესვი $\beta \gtrless -1$, რაც შეუძლებელია.

§ 41. გრაფიკებისა და წარმოებულების გამოყენებით მრავალწევრის ფესვთა საზღვრების დადგენა

ამ პარაგრაფში და შემდეგ ვიგულისხმოთ, რომ განსახილველ მთელ რაციონალურ $f(x)$ ფუნქციას ან, რაც იგივეა, განსახილველ $f(x)=0$ ალგებრულ განტოლებას **ჯერადი ფესვები** არ აქვს. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. თუ მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ჯერადი ფესვები, მას ად-

რევე გამოვყოფთ ცნობილი (გვ. 271) მეთოდით. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილკოეფიციენტებიანი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

მრავალწევრი. განვიხილოთ სიბრტყეზე დეკარტის XOY მართკუთხა სისტემა და ავაგოთ მრუდი, რომელიც გრაფიკულად გამოსახავს (1) ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. (1) ფუნქციის შესაბამის გრაფიკს ხშირად უწოდებენ „n-ური რიგის პარაბოლას".

თანახმად $f(x)$ ფუნქციის ფესვის განმარტებისა, ვინაიდან მოცემულ (1) მრავალწევრს არ აქვს ჯერადი ფესვები, შესაბამისი მრუდის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისები იქნება მოცემული $f(x)$ ფუნქციის ნამდვილი ფესვები. ამრიგად, OX ღერძთან (1) მრავალწევრის შესაბამისი მრუდის მიერ გადაკვეთის წერტილების რიცხვი ზუსტად უდრის მისი ნამდვილი ფესვების რიცხვს.

რადგან $f(x)$ ფუნქციას ჯერადი ფესვები არ აქვს, ამიტომ $f(x)$ და მის წარმოებულს $f'(x)$ არ აქვთ საერთო ფესვი, ე. ი. $f(x)$ მრავალწევრის ყოველ ნამდვილ ფესვზე $f'(x)\neq 0$; ეს იმას ნიშნავს, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი OX ღერძს არ შეეხება არც ერთ წერტილში.

ახლა $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე განვიხილოთ ორი წერტილი $A[a, f(a)]$ და $B[b, f(b)]$. ცხადია, რომ თუ $f(a)$ და $f(b)$ ორდინატებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, მაშინ A და B წერტილები მოთავსებული იქნებიან აბსცისთა ღერძის სხვადასხვა მხარეს. ვინაიდან ყოველი $y=f(x)$ მთელი რაციონალური ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ (a, b) შუალედში x-ის ცვალებადობის დროს $f(x)$ ფუნქცია ერთხელ მაინც გახდება ნული, ე. ი. თუ $f(x)$ **ფუნქციას** (a, b) **შუალედის ბოლო წერტილებზე სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ ამ შუალედში მოიძებნება ისეთი ერთი წერტილი** $x=x_0$ **მაინც, რომ** $f(x_0)=0$. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ (a, b) **შუალედის ბოლო წერტილებზე** $f(a)$ **და** $f(b)$ **სხვადსხვა ნიშანი აქვთ, მაშინ** $y=f(x)$ **ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი ერთხელ მაინც გადაკვეთს** OX **ღერძს.**

სიბრტყის იმ ნაწილს, რომელიც X-თა ღერძიდან მოთავსებულია OY ღერძის დადებითი მიმართულებით, ვუწოდოთ X-თა ღერძის **ზედა ნახევარსიბრტყე**; ხოლო X-თა ღერძიდან სიბრტყის იმ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია OY ღერძის უარყოფითი მიმართულებით ვუწოდოთ X-თა ღერძის **ქვედა ნახევარსიბრტყე**. ახლა მოვიგონოთ ლემა $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდულის შესახებ და მისი შედეგი ნამდვილი $f(x)$ მრავალწევრისათვის (გვ. 321). თუ ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი $a_0>0$, მაშინ მოცე-

მული $f(x)$ მრავალწევრის შესაბამისი გრაფიკის დახმარებით მივიღებთ შემდეგ ორ საინტერესო დასკვნას:

ა) ვთქვათ, $f(x)$ **მრავალწევრი ლუწი ხარისხისაა.** ამ შემთხვევაში, ვინაიდან x-ის აბსოლუტურად საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის, კერძოდ, როცა $|x| \geqslant \frac{A}{a_0}+1$ მოცემულ $f(x)$ მრავალწევრს ნიშანს ანიჭებს a_0x^n უფროსი წევრი x-ის როგორც უარყოფითი, ისე დადებითი მნიშვნელობისათვის $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი $\left(-\frac{A}{a_0}-1,\ \frac{A}{a_0}+1\right)$ შუალედს გარეთ, ყოველი x-სათვის იქნება OX ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში. სხვაგვარად ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $f(x)$ მრავალწევრის გრაფიკზე მარცხნიდან მარჯვნივ ვამოძრავებთ რაიმე M წერტილს, მოძრაობის პროცესში OX ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყიდან ის შემდეგ ისევ უნდა დაბრუნდეს OX ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში (ნახ. 5).

ამგვარად, თუ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრი ლუწი ხარისხისაა, მაშინ მისი შესაბამისი გრაფიკი OX ღერძს შეიძლება კვეთდეს მხოლოდ ლუწი რაოდენობის წერტილში, ე. ი. **ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან ლუწი ხარისხის მრავალწევრს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ლუწი რაოდენობის ნამდვილი ფესვი.**

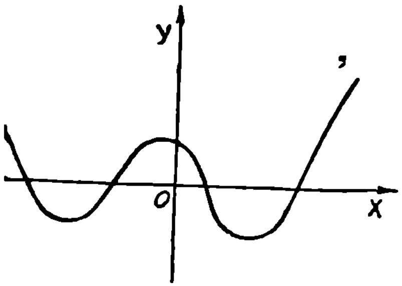
ბ) ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრი კენტი ხარისხისაა. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით (გვ. 321), $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი $\left(-\frac{A}{|a_0|}-1,\ \frac{A}{|a_0|}+1\right)$ შუალედს გარეთ ყოველი x-სათვის OY ღერძის მარცხნივ იქნება OX ღერძის ქვედა ნახევარსიბრტყეში, ხოლო OY ღერძის მარჯვნივ იქნება OX ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში. სხვაგვარად ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე მარცხნიდან მარჯვნივ ვამოძრავებთ რაიმე M წერტილს, მოძრაობის პროცესში ის OX ღერძის ქვედა ნახევარსიბრტყიდან, შემდეგ მოძრაობის დროს ბოლოს და ბოლოს უნდა დაუბრუნდეს OX ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეს. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი ერთხელ მაინც გადაკვეთს OX ღერძს (ნახ. 6).

ამგვარად, **ყოველი კენტი ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრს ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს და საზოგადოდ მას კენტი რაოდენობის ნამდვილი ფესვი აქვს.** ეს ორი შედეგი წინათ (გვ. 281) მივიღეთ წმინდა ალგებრული გზით.

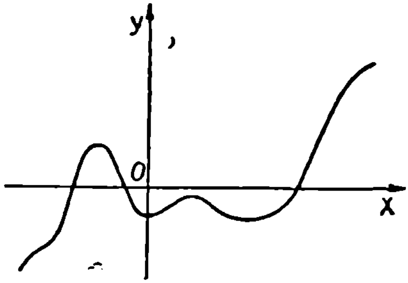
შემდეგ, თუ (1) ტოლობაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ ნულს, გვექნება:

$$f(0)=a_n.$$

მივიღეთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის თავისუფალი წევრი a_n ყოფილა იმ წერტილის ორდინატა, რომელზედაც ჩვენი ფუნქციის გრაფიკი კვეთს OY ღერძს. ცხადია, რომ როცა $a_n>0$ გრაფიკის OY ღერძთან გადაკვეთის წერტილი მდებარეობს OX ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში, ხოლო როცა $a_n<0$, მაშინ გრაფიკის OY ღერძთან გადაკვეთის წერტილი მდებარეობს OX ღერძის ქვედა ნახევარსიბრტყეში. გრაფიკის მიხედვით



ნახ. 5.



ნახ. 6.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ: 1. თუ ლუწი ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრი $a_n<0$, მაშინ მას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ კენტი რაოდენობის როგორც უარყოფითი, ისე დადებითი ნამდვილი ფესვი, ხოლო თუ $a_n>0$, მაშინ მას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ლუწი რაოდენობის როგორც უარყოფითი, ისე დადებითი ნამდვილი ფესვი. ანალოგიურად, 2. თუ კენტი ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრი $a_n<0$, მაშინ მას შეიძლება ჰქონდეს ლუწი რაოდენობის უარყოფითი ფესვი და კენტი რაოდენობის დადებითი ფესვი. ხოლო თუ $a_n<0$, მაშინ მას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ კენტი რაოდენობის უარყოფითი ფესვი და ლუწი რაოდენობის დადებითი ფესვი.

თუ შევაჯამებთ ზემოთ თქმულს, ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების რაოდენობისათვის მივიღებთ: **როგორიც არ უნდა იყოს მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი (ლუწი ან კენტი), როცა მისი თავისუფალი წევრი დადებითია, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ლუწი რაოდენობის დადებითი ფესვი, ხოლო, როცა მისი თავისუფალი წევრი უარყოფითია, მაშინ მას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ კენტი რაოდენობის დადებითი ფესვი.**

თუ ვისარგებლებთ შენიშვნით: ყოველ კენტი ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს, მაშინ სხვა გზით ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან ლუწი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს შეიძლება

ჰქონდეს მხოლოდ ლუწი რაოდენობის ნამდვილი ფესვი, ხოლო კენტი ხარისხის ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს კი — მხოლოდ კენტი რაოდენობის ნამდვილი ფესვი.

მართლაც, ვიგულისხმოთ, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიან n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს აქვს სულ s რაოდენობის ნამდვილი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ფესვი, მაშინ $f(x)$ შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_s)\varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ არის $n-s$ ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, რომელსაც არ აქვს ნამდვილი ფესვი. ცხადია, $n-s$ უნდა იყოს ლუწი რიცხვი, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\varphi(x)$ ფუნქციას ექნებოდა ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც. სხვაობა $n-s$ ლუწი რიცხვი იქნება მაშინ, როცა n და s ერთდროულად ან ლუწია, ან კენტი, ე. ი. n-ისა და s-ის ლუწკენტოვნება ერთნაირია, ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

იმისათვის, რომ მოვახდინოთ $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა საზღვრების გამოყოფა, საჭიროა განვიხილოთ საკითხი სასრულ რიცხვთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა შესახებ. ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი რიცხვთა მიმდევრობა:

$$+5,\ +1,\ -2,\ +3,\ -5,\ +6,\ -1 \tag{2}$$

აქ რიცხვების ნიშნები განლაგებულია შემდეგნაირად:

$$+ + - + - + -$$

როგორც ვხედავთ, ნიშანთა ამ განლაგებაში ხუთჯერ ხდება ნიშანცვლა. **ამიტომ ვიტყვით, რომ (2) რიცხვთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი უდრის ხუთს.** საზოგადოდ, თუ გარკვეული წესით დალაგებულ რიცხვთა მიმდევრობაში k-ჯერ ხდება ნიშანცვლა, ვიტყვით, რომ მოცემულ რიცხვთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი უდრის k-ს. ადვილად შევნიშნავთ, **რომ თუ მოცემულ რიცხვთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი ლუწია, მაშინ მიმდევრობის კიდური წევრები ერთნაირი ნიშნისაა, ხოლო, თუ ნიშანცვლათა რიცხვი კენტია, მაშინ მიმდევრობის კიდურა წევრები სხვადასხვა ნიშნისაა.**

დავუბრუნდეთ (1) მრავალწევრს და განვიხილოთ მისი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი რიცხვთა მიმდევრობა:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n. \tag{3}$$

თუ მოვიგონებთ ვიეტას განზოგადებულ ფორმულებს (გვ. 266), ადვილად შევამჩნევთ, რომ როცა მოცემული მრავალწევრის ყველა n ფესვი

დადებითია, (3) კოეფიციენტთა ნიშნები რიგრიგობით იცვლება და ამიტომ (3) კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი ზუსტად უდრის n-ს, ე. ი. უდრის დადებითი ფესვების რიცხვს.

ადვილად დამტკიცდება, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების რიცხვი არ აღემატება მის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვს.

მართლაც, ვთქვათ, $x=\alpha$ არის $f(x)$ მრავალწევრის ერთი რომელიმე დადებითი ფესვი, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x)=(x-\alpha)\varphi(x),$$

სადაც

$$\varphi(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}.$$

როგორც ჰორნერის სქემიდან ვიცით, $f(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრების კოეფიციენტები ურთიერთდაკავშირებულია შემდეგი ტოლობებით:

$$b_0=a_0,\ \ b_k=b_{k-1}\alpha+a_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

ხოლო ნაშთი

$$b_{n-1}\alpha+a_n=0. \tag{4}$$

თუ ახლა b_{k-1} კოეფიციენტიდან b_k-ზე გადასვლისას ჩვენ გვაქვს ნიშანცვლა, მაშინ ტოლობიდან

$$a_k=b_k-b_{k-1}\cdot\alpha,\ \ \text{სადაც}\ \ \alpha>0, \tag{5}$$

ვღებულობთ, რომ a_k კოეფიციენტის ნიშანი თანხვდენილია b_k კოეფიციენტის ნიშნისა. (4) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის თავისუფალ წევრს აქვს $\varphi(x)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრის მოპირდაპირე ნიშანი.

მაგალითისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული

$$f(x)=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$$

მრავალწევრის შესაბამის

$$\varphi(x)=b_0x^5+b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2+b_4x+b_5$$

მრავალწევრში ნიშანცვლა ხდება მხოლოდ b_1-დან b_2-ზე და b_4-დან b_5-ზე გადასვლისას, ე. ი. $\varphi(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი უდრის ორს. მაშინ, ზემოთ მიღებული შედეგების თანახმად, ვინაიდან $f(x)$ ფუნქციის a_2 და a_5 კოეფიციენტების ნიშნები შესაბამისად თანხვდენილია b_2 და b_5 კოეფიციენტების ნიშნებისა და a_6 ნიშანი განსხვავდება b_5 ნიშნისაგან მივიღებთ, რომ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 კოეფიციენტთა მიმდევრობაში

ნიშანცვლათა რიცხვი მეტია ან ტოლი სამისა. ამგვარად, მივიღეთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა მიმდევრობის ნიშანცვლათა რიცხვი, $\varphi(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა მიმდევრობის ნიშანცვლათა რიცხვზე მეტია ერთი ერთეულით მაინც. სხვაგვარად ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ α არის $f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვი, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის $x-\alpha$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული $\varphi(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი ერთი ერთეულით მაინც ნაკლებია, ვიდრე $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრს აქვს s დადებითი ფესვი: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, ე. ი.

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_s)g(x).$$

ცხადია, რომ $g(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი s-ით მაინც ნაკლებია, ვიდრე $f(x)$ მრავლწევრის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი. ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

თეორემა. **$f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების რიცხვი ან უდრის მის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვს, ან ლუწი რიცხვით ნაკლებია მასზე.**

მართლაც, ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის (3) კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი ლუწია, მაშინ კოეფიციენტთა მიმდევრობის კიდურა წევრებს უნდა ჰქონდეს ერთნაირი ნიშანი. ვინაიდან $a_0>0$ თავისუფალი წევრიც უნდა იყოს დადებითი, ე. ი. ასეთ შემთხვევაში, როგორც გრაფიკიდან ვიცით, $f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების რიცხვი ლუწია.

თუ ახლა $f(x)$ მრავალწევრის (3) კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი კენტია, მაშინ თავისუფალი წევრი უარყოფითი იქნება, ე. ი. $a_n<0$. ასეთ შემთხვევაში, როგორც გრაფიკიდან ვიცით, $f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების რიცხვი კენტია. ამრიგად დამტკიცდა, რომ **ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების რიცხვი არ აღემატება მოცემული მრავალწევრის კოეფიციენტთა მიმდევრობის ნიშანცვლათა რიცხვს და კოეფიციენტთა მიმდევრობის ნიშანცვლათა ლუწკენტოვნება დადებით ფესვთა რიცხვის ლუწკენტოვნებისაა.** სხვაგვარად, თუ მოცემული მრავალწევრის დადებითი ფესვების რიცხვი უდრის k-ს, ხოლო მისი კოეფიციენტების ნიშანცვლათა რიცხვი არის s, მაშინ $k\leqslant s$ და $s-k$ ლუწია. დამტკიცებულ თეორემას **დეკარტის** თეორემა ეწოდება. იმისათვის, რომ ანალოგიური შედეგი მივიღოთ უარყოფითი ფესვებისათვის, საჭიროა $f(x)$ მრავალ-

წევრში x-ის ნაცვლად ავიღოთ $-x$ და გარდაქმნის შედეგად მიღებულ მრავალწევრზე გამოვიყენოთ დეკარტის თეორემა.

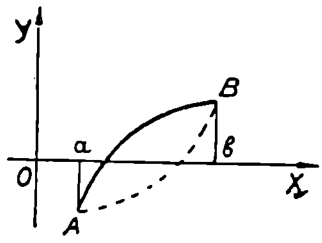
მაგალითად,

$$x^4+2x^3-5x^2-14x-14=0$$

განტოლების კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ჩვენ გვაქვს მხოლოდ ერთი ნიშანცვლა, ამიტომ მოცემულ განტოლებას ან აქვს ერთი დადებითი ფესვი, ან სრულიად არ აქვს. x შევცვალოთ $-x$-ით, მივიღებთ განტოლებას

$$x^4-2x^3-5x^2+14x-14=0,$$

რომლის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში გვაქვს სამი ნიშანცვლა, ამიტომ მიღებულ განტოლებას აქვს ან სამი, ან ერთი დადებითი ფესვი, ხოლო მოცემულ განტოლებას კი აქვს ან სამი, ან ერთი უარყოფითი ფესვი.



ნახ. 7.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ საკითხი მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ცალკეული ნამდვილი ფესვების საზღვრების გამოყოფის შესახებ. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თუ $f(x)$ მრავალწევრს (a, b) შუალედის ბოლო წერტილებზე სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ ამ შუალედში $f(x)$ მრავალწევრს ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს და საზოგადოდ ამ შუალედში ნამდვილი ფესვების რიცხვი კენტი რაოდენობის იქნება. (a, b) შუალედში ნამდვილ ფესვთა რიცხვის დაზუსტების მიზნით ვიგულისხმოთ, რომ $f(a)<0$, $f(b)>0$. თუ ამ შემთხვევაში აღმოჩნდა, რომ $f(x)$ მრავალწევრის წარმოებულს $f'(x)$ მთელ (a, b) შუალედში დადებითი ნიშანი აქვს, ე. ი. თუ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, როცა x იზრდება a-დან b-მდე, მაშინ (a, b) შუალედში მოცემულ ფუნქციას მხოლოდ ერთი ნამდვილი ფესვი აქვს (ნახ. 7). ასეთ შუალედს შესაბამისი ფესვის განცალკევების შუალედი ვუწოდოთ.

ახლა, თუ აღმოჩნდა, რომ $f(x)$ მრავალწევრი, როცა x იცვლება (a, b) შუალედში აღწევს მაქსიმუმს $x=c$ წერტილზე, შემდეგ კი (c, d) შუალედში კლებულობს და აღწევს მინიმუმს $x=d$ წერტილზე, ხოლო შემდეგ (d, b) შუალედში ისევ იზრდება და ა. შ., მაშინ უნდა გავარჩიოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

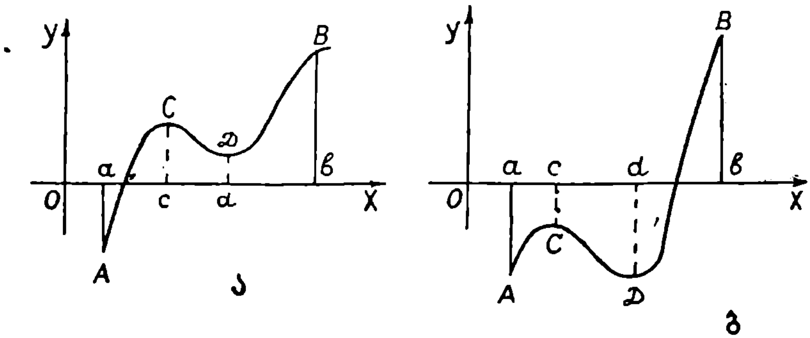
1. როცა $f(x)$ ფუნქციას მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებზე ერთნაირი ნიშნები აქვს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას მთელ (a, b) შუალედში მხოლოდ ერთი ნამდვილი ფესვი ექნება (ნახ. 8, ა, ბ).

2. როცა $f(x)$ ფუნქციას c და d წერტილებზე სხვადასხვა ნიშანი აქვს, კერძოდ, როცა

$$f(c)>0, \qquad f(d)<0,$$

მაშინ მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას (a, b) შუალედში სამი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს, რომლებიც შესაბამისად მოთავსებულია

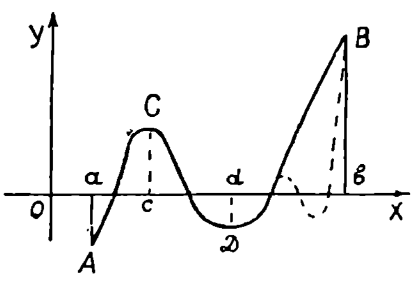
$$(a,\ c),\ (c,\ d),\ (d,\ b)$$



ნახ. 8.

შუალედებში. შევნიშნოთ, რომ პირველ ორ შუალედში თითო ფესვია, ხოლო მესამე შუალედში კი შესაძლებელია რამდენიმე ნამდვილი ფესვი აღმოჩნდეს (ნახ. 9).

როგორც ვხედავთ, $f(x)$ მრავალწევრის ყოფაქცევის გამოკვლევისას არსებით როლს ასრულებს მოცემული მრავალწევრის ფესვთა საზღვრების დადგენა და მრავალწევრის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილების მოძებნა, რომლებიც მიიღება $f'(x)=0$ განტოლების ამოხსნით.



ნახ. 9.

მაგალითი. ვიპოვოთ $f(x)=x^3-9x^2+24x-17$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების რიცხვი და გამოვყოთ ცალკეული ფესვების საზღვრები. დეკარტის თეორემის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემულ მრავალწევრს **უარყოფითი ფესვები არ აქვს**. ნიუტონის მეთოდით მივიღებთ, რომ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვების ზედა საზღვარია 5. ამრიგად, მოცემული

მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი დადებითია და მოთავსებულია (0,5) შუალედში.

$f'(x)=3x^2-18x+24=0$ განტოლების ფესვები იქნება:

$$x_1=2, \quad x_2=4.$$

ადვილად მივიღებთ, რომ $f(0)<0$, $f(2)>0$ და $f'(x)$ დადებითია მთელ (0,2) შუალედში. ამიტომ (0,2) შუალედში მოცემულ მრავალწევრს მხოლოდ ერთი დადებითი ფესვი აქვს. აგრეთვე მივიღებთ, რომ $f(4)<0$ და მთელ (2, 4) შუალედში $f'(x)$ ფუნქცია უარყოფითია. ამიტომ (2, 4) შუალედშიც მოცემულ ფუნქციას მხოლოდ ერთი ნამდვილი ფესვი აქვს. ანალოგიურად ვიპოვოთ, რომ $f(5)>0$ და ამიტომ (4, 5) შუალედშიც $f(x)$ მრავალწევრს მხოლოდ ერთი ნამდვილი ფესვი აქვს. მაშასადამე, მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის სამივე ფესვი ნამდვილია და ეს ფესვები შესაბამისად მოთავსებულია განცალკევების (1, 2), (2, 3) და (4, 5) შუალედებში.

ახლა ჩვენ განვიხილავთ შტურმის მეთოდით მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის პოვნის საკითხს, რომელიც თეორიული თვალსაზრისით სხვა მეთოდებთან შედარებით სრულია, მაგრამ ზოგ შემთხვევაში პრაქტიკულად მისი გამოყენება, რასაც შემდგომი მაგალითების გარჩევისას ადვილად შევამჩნევთ, რთულია.

§ 42. შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობა. შტურმის თეორემა

როგორც წინათ, ისე ახლაც ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია n-ური ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია ჯერადი ფესვების გარეშე. ასეთ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, $f(x)$ და მისი წარმოებული $f'(x)$ ურთიერთმარტივია, ე. ი. მათი უდიდესი საერთო გამყოფი ნულისაგან განსხვავებული გარკვეული რიცხვია ნამდვილ რიცხვთა ველიდან.

შევადგინოთ ევკლიდეს ალგორითმი $f(x)$ და $f'(x)$ მრავალწევრებისათვის, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთები შესაბამისად ავიღოთ შებრუნებული ნიშნით. გვექნება:

$$\begin{aligned}
f(x)&=f'(x)\,q(x)-f_1(x),\\
f'(x)&=f_1(x)\,q_1(x)-f_2(x),\\
f_1(x)&=f_2(x)\,q_2(x)-f_3(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{k-1}(x)&=f_k(x)\,q_k(x)-f_{k+1}(x),\\
f_{m-2}(x)&=f_{m-1}(x)\,q_{m-1}(x)-f_m(x).
\end{aligned} \tag{1}$$

პირობის თანახმად, (1) ალგორითმში მიღებული უკანასკნელი $f_m(x)$ ნაშთი ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია. განვიხილოთ ფუნქციათა შემდეგი მიმდევრობა:

$$f(x),\ f'(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_k(x)\ldots,\ f_m(x). \qquad (2)$$

(2) ფუნქციათა მიმდევრობას ხშირად **ფუნქციათა შტურმის** (Sturm 1803—1855) მიმდევრობას უწოდებენ. ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობა $x=a$ მნიშვნელობისათვის მოგვცემს შემდეგ რიცხვით მიმდევრობას:

$$f(a),\ f'(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \ldots,\ f_k(a),\ \ldots,\ f_m(a). \qquad (3)$$

რომლის ნიშანცვლათა რიცხვი გარკვეულია. თუ დავაკვირდებით, ადვილად შევამჩნევთ, რომ x-ის ცვალებადობის დროს ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი მხოლოდ მაშინ შეიცვლება, როცა (2) ფუნქციათა მიმდევრობის რომელიმე ფუნქცია ნიშანს შეიცვლის, ე. ი. როცა x გაივლის შესაბამისი ფუნქციის ფესვზე. განვიხილოთ ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობის ზოგიერთი თვისება:

1°. **ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობის არც ერთ ორ მეზობელ ფუნქციას არ აქვს საერთო ფესვი.**

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $x=x_0$, $f_{k-1}(x)$ და $f_k(x)$ ფუნქციების საერთო ფესვია, ე. ი. $f_{k-1}(x_0)=f_k(x_0)=0$, მაშინ (1) ტოლობათა მიხედვით მივიღებთ, რომ $f_{k+1}(x_0)=0$, $f_{k+2}(x)=0$ და ა. შ. $f_m(x_0)=0$, რაც შეუძლებელია, რადგან $f_m(x)$ ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია.

2°. **თუ $x=x_0$ მნიშვნელობა არის ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობის რომელიმე $f_k(x)$ ფუნქციის ფესვი, მაშინ $x=x_0$ მნიშვნელობაზე $f_{k-1}(x)$ და $f_{k+1}(x)$ ფუნქციებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ.**

მართლაც, $f_{k-1}(x)=f_k(x)\,q_k(x)-f_{k+1}(x)$ ტოლობიდან, როცა $x=x_0$, ვინაიდან $f_k(x_0)=0$, მივიღებთ:

$$f_{k-1}(x_0)=-f_{k+1}(x_0).$$

3°. **თუ x ზრდადობით გაივლის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვს, მაშინ $f(x)$ და მის $f'(x)$ წარმოებულს შორის ნიშანცვლა 1-ით მცირდება.**

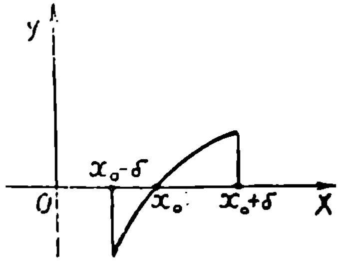
მართლაც, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის ფესვია $x=x_0$. მაშინ $f'(x_0)\neq 0$, x-ის ამ მნიშვნელობისათვის, როგორც ვიცით (გვ. 319), ამ შემთხვევაში შეიძლება გამოვყოთ ისეთი მცირე შუალედი $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, რომელშიც $f'(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს $f'(x_0)$ რიცხვის ნიშანს.

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $f'(x_0)>0$, მაშინ $f'(x)$ დადებითი იქნება მთელ $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ შუალედში (ნახ. 10) და ამიტომ $f(x)$ იქნე-

ბა ზრდადი აღნიშნულ შუალედში. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქცია თავის $x=x_0$ ფესვზე გავლისას უარყოფითი მნიშვნელობიდან გადადის დადებითზე. ამრიგად, ჩვენ გვექნება ნიშანცვლათა შემდეგი ცხრილი (ცხრ. 1)

ც ხ რ ი ლ ი 1

x	$f(x)$	$f'(x)$
$x_0-\delta$	$-$	$+$
x_0	0	$+$
$x_0+\delta$	$+$	$+$



ნახ. 10.

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ, როცა $f(x)$ ფუნქცია თავის ფესვზე გაივლის, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრსა და მის წარმოებულს შორის ნიშანცვლა 1-ით მცირდება ე. ი. ამ შემთხვევაში $f(x)$ მრავალწევრის ფესვზე გავლამდე $f(x)$ და $f'(x)$ შორის ნიშანცვლა არსებობდა, ხოლო $f(x)$-ის ფესვზე გავლის შემდეგ მათ შორის ნიშანცვლა არ იქნება.

4°. **თუ x ზრდადობით გაივლის შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობის $f(x)$-გან განსხვავებულ სხვა რომელიმე ფუნქციის ფესვზე, მაშინ შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი არ იცვლება.** ამ თვისების მართებულობა ჯერ დავამტკიცოთ მეზობლად მყოფი სამი $f_{k-1}(x)$, $f_k(x)$ და $f_{k+1}(x)$ ფუნქციებისათვის.

მართლაც, ვთქვათ, $x=x_0$ არის $f_k(x)$ ფუნქციის ფესვი, ე. ი. $f_k(x_0)=$ $=0$, მაშინ თანახმად 1° და 2° თვისებებისა მივიღებთ, რომ $f_{k-1}(x_0)$ და $f_{k+1}(x_0)$ ნულისაგან განსხვავებულია და აქვთ სხვადასხვა ნიშანი. ახლა გამოვყოთ x_0 ფესვის ისეთი მცირე მახლობლობა $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, რომელშიც $f_{k-1}(x)$ და $f_{k+1}(x)$ ფუნქციები ინარჩუნებენ შესაბამისად $f_{k-1}(x_0)$ და $f_{k+1}(x_0)$ რიცხვების ნიშნებს. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $f_{k-1}(x_0)<0$ და $f_{k+1}(x_0)>0$. გვექნება ნიშანცვლათა შემდეგი ცხრილი (ცხრ. 2):

ც ხ რ ი ლ ი 2

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$x_0-\delta$	$-$	?	$+$
x_0	$-$	0	$+$
$x_0+\delta$	$-$	?	$+$

ამ ცხრილიდან, ჩანს, რომ როგორი ნიშანიც არ უნდა იყოს უსიშნო უჯრედებში, ე. ი. როგორადაც არ უნდა გაიროს $f_k(x)$ ფუნქციამ თავისი ფესვი — ზრდადობით ან კლებადობით — ნიშანცვლათა რიცხვი $f_{k-1}(x)$, $f_k(x)$ და $f_{k+1}(x)$ ფუნქციებისა არ იცვლება.

ცხადია, ამ თვისებას ადგილი ექნება ყველა ისეთი $f_k(x)$ ფუნქციისათვის, რომლებსაც გააჩნია მარცხენა და მარჯვენა მეზობელი ფუნქციები. ახლა, რადგან შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობის იმ ნაწილებში, სადაც არც ერთი ფუნქცია არ გადის ფესვზე, ნიშანცვლათა რიცხვი არ იცვლება. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ როცა x-ის ზრდადობისას შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობის რომელიმე $f_k(x)$ ფუნქცია, გარდა $f(x)$ ფუნქციისა, გაივლის ფესვზე (2) შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი უცვლელია.

შტურმის თეორემა. **თუ a და b ნამდვილი რიცხვები, სადაც $a<b$, არაა $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები, მაშინ x-ის ცვალებადობისას a-დან b-კენ ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობაში ნიშანცვლათა დანაკარგი ზუსტად უდრის (a, b) შუალედში $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების რიცხვს.**

დამტკიცება. ვთქვათ, x იცვლება a-დან b-კენ, თანახმად 3° და 4° თვისებებისა, თუ x ზრდადობით ერთხელ გაივლის $f(x)$ მრავალწევრის $x=$ $=x_0$ ფესვს, მაშინ შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი მხოლოდ ერთით მცირდება. აქედან გამოდის, რომ როცა x იზრდება a-დან b-კენ, მაშინ შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი საზოგადოდ მცირდება და ნიშანცვლათა რიცხვი იმდენით შემცირდება, რამდენჯერაც a-დან b-კენ ცვალებადობისას x გაივლის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვს. ამით შტურმის თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $S(a)$-თი და $S(b)$-თი შესაბამისად აღვნიშნავთ $x=a$ და $x=b$ მნიშვნელობებისათვის ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვს, მაშინ, დამტკიცებული თეორემის თანახმად, (a, b) შუალედში $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების რიცხვი ზუსტად უდრის

$$S(a)—S(b)=h$$

სხვაობას, სადაც h არის $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების რიცხვი (a, b) შუალედში.

შტურმის თეორემის პრაქტიკულად უკეთ გამოყენების მიზნით საჭიროა აღვნიშნოთ ზოგიერთი რამ. შტურმის თეორემა, პირველ ყოვლისა, საშუალებას გვაძლევს ზუსტად გავიგოთ მოცემული ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების რიცხვი. შემდეგ ცნობილი მეთოდებით ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ნამდვილ ფესვთა საზღვრები. ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი (a, b) შუა-

ლედშია მოთავსებული. ახლა შტურმის თეორემის გამოყენებით, შეგვიძლია ამ შუალედის ისე დანაწილება, რომ ყოველ დანაწილებულ შუალედში მოთავსდეს მოცემული მრავალწევრის მხოლოდ ერთი ფესვი. **$f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის გამოანგარიშების გაადვილების მიზნით მოვიგონოთ ლემა უფროსი წევრის მოდულის შესახებ, რომლის თანახმად x-ის საკმაოდ დიდი აბსოლუტური მნიშვნელობისათვის ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობის ყოველ ფუნქციას ექნება თავისი უფროსი წევრის ნიშანი.** ახლა, რადგან $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი მოთავსებულია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, **სხვაობა $S(-\infty)-S(\infty)$ მოგვცემს $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვის რაოდენობას.** თუ ჩვენთვის ცნობილია, რომ $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი მოთავსებულია (a, b) შუალედში, სადაც $a<b$, მაშინ გვექნება:

$$S(-\infty)-S(\infty)=S(a)-S(b)=h.$$

ეს თანაფარდობა, როგორც ამაში მაგალითებით დავრწმუნდებით, ძალზე აადვილებს მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების რაოდენობის გამოთვლას. რადგან შტურმის თეორემაში მთავარია მხოლოდ მრავალწევრის ნიშნები და არა მათი მნიშვნელობანი, ამიტომ ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობის ნიშანცვლათა რიცხვის გამოთვლის გაადვილების მიზნით, ზოგ შემთხვევაში, ფუნქციები შეიძლება გავამრავლოთ ან გავყოთ ნებისმიერ დადებით რიცხვზე. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობის რომელიმე $f_k(x)$ ფუნქცია მთელ (a, b) შუალედში განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობა შეიძლება ამ ფუნქციით დავამთავროთ. მართლაც, რადგან $f_k(x)$ მრავალწევრი ნიშანს არ იცვლის და $f_m(x)$ ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია, ამიტომ

$$f_k(x),\ f_{k+1}(x),\ \dots,\ f_m(x)$$

ფუნქციათა მიმდევრობაში, როცა x იზრდება a-დან b-კენ, ნიშანცვლათა რიცხვი არ იცვლება.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია

$$f(x)=x^4-6x^3+8x^2+4x-4$$

მრავალწევრი. მოცემული მრავალწევრისათვის შედგენილ შტურმის ფუნქციებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{2}f'(x)=2x^3-9x^2+8x+2,$$

$$f_1(x)=11x^2-36x+10,$$
$$f_2(x)=7x-16,$$
$$f_3(x)=1.$$

ახლა, ყველა ნამდვილი როგორც უარყოფითი, ისე დადებითი ფესვების რაოდენობის საპოვნელად შევადგინოთ ცხრილი (ცხრ. 3).

ცხრილი 3

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	ნიშანცვლათა რიცხვი
$-\infty$	+	—	+	—	+	4
0	—	+	+	—	+	3
$+\infty$	+	+	+	+	+	0

აქ
$$S(-\infty)-S(+\infty)=4.$$

ცხრილი გვიჩვენებს, რომ როცა x იზრდება $-\infty$-დან 0-მდე, ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი ერთით მცირდება, ამიტომ მოცემულ მრავალწევრს აქვს მხოლოდ ერთი უარყოფითი ფესვი. შემდეგ, x-ის 0-დან $+\infty$-მდე ზრდისას ფუნქციათა შტურმის მიმდევრობაში ნიშანცვლათა რიცხვი სამით მცირდება, ამიტომ მოცემულ მრავალწევრს აქვს სამი დადებითი ფესვი. ამრიგად, მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ოთხივე ფესვი ნამდვილია. ნიუტონის მეთოდით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული მრავალწევრის უარყოფითი ფესვების ქვედა საზღვარი არის -1, ხოლო დადებითი ფესვების ზედა საზღვარი 4.

ამრიგად, მოცემული მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი მოთავსებულია $(-1,4)$ შუალედში. როცა $x=-1$, 0, 1, 2, 3, 4, ნიშანცვლათა რიცხვს გვიჩვენებს შემდეგი ცხრილი (ცხრ. 4).

ცხრილი 4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	ნიშანცვლათა რიცხვი
—1	+	—	+	—	+	4
0	—	+	+	—	+	3
1	+	+	—	—	+	2
2	+	—	—	—	+	2
3	—	—	+	+	+	1
4	+	+	+	+	+	0

როგორც ამ ცხრილიდან ჩანს, მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები შესაბამისად მოთავსებულია $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$ და $(3, 4)$ შუალედებში. ამრიგად, ჩვენ მოვახდინეთ თითოეული ფესვის განცალკევება. მკითხველი ამ მაგალითის გარჩევისას შეამჩნევს, თუ რა დიდ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობის შედგენა. ზოგ შემთხვევებში ეს გამოთვლები იმდენად დიდია, რომ შტურმის მეთოდი ნამდვილი ფესვების განცალკევებისათვის პრაქტიკულად თითქმის გამოუყენებელია.

§ 48. ნამდვილ ფესვთა მიახლოებითი გამოთვლის მეთოდები

ჩვენთვის უკვე ცნობილია, თუ როგორ უნდა ვიპოვოთ გრაფიკული მეთოდით და შტურმის თეორემის მიხედვით მოცემული ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების რაოდენობა და როგორ უნდა გამოვყოთ თითოეული ნამდვილი ფესვის საზღვრები. ცხადია, რომ ისეთ (a, b) შუალედში, რომლის ბოლო წერტილებზე $f(x)$ მრავალწევრს სხვადასხვა ნიშანი აქვს და მისი $f'(x)$ წარმოებულის ნიშანი მთელ შუალედში უცვლელია, მოთავსდება $f(x)$ მრავალწევრის მხოლოდ ერთი გარკვეული α ნამდვილი ფესვი; ასეთ (a, b) შუალედს ვუწოდოთ α ფესვის **განცალკევების შუალედი.**

მაგალითად, განვიხილოთ განტოლება

$$f(x)=x^3+1,1x^2+0,9x-1,4=0.$$

ვინაიდან x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $f'(x)=3x^2+2,2x+0,9>0$, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია მთელ X-თა ღერძზე, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი X-თა ღერძს მხოლოდ ერთხელ კვეთს. გამოთვლის შედეგად ადვილად მივიღებთ: $f(0)=-1,4$ და $f(1)=1,6$; ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული განტოლების ერთადერთი α ნამდვილი ფესვი მოთავსებულია $(0,1)$ შუალედში. ცხადია, რომ $(0,1)$ შუალედი წარმოადგენს α ფესვის განცალკევების შუალედს. შესაძლებელია α ფესვის განცალკევების შუალედში შემდგომი შემცირება. მართლაც, გამოთვლებით მივიღებთ: $f(0,5)=-0,55$ და $f(0,7)=0,112$; ეს იმას ნიშნავს, რომ α ფესვის ახალი უფრო მცირე განცალკევების შუალედი არის $(0,5;\ 0,7)$. შემდგომი უფრო რთული გამოთვლების შედეგად დავრწმუნდებით, რომ

$$f(0,67)=-0,002 \text{ და } f(0,68)=0,034.$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ α ფესვის ახალი კიდევ უფრო მცირე განცალკევების $(0,67;\ 0,68)$ შუალედი, რომელიც 100-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე პირველი განცალკევების $(0,\ 1)$ შუალედი. **ვინაიდან α ფესვის განცალკე-**

ვების (0,67; 0,68) შუალედის სიგრძე უდრის 0,68—0,67=0,01, ამიტომ 0,67 და 0,68 რიცხვები და მათ შორის მოთავსებული ყოველი რიცხვი 0,01-მდე სიზუსტით გამოდგება α ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად.

ცხადია, თუ რომელიმე ნამდვილი ფესვისათვის გამოყოფილი განცალკევების შუალედი საკმაოდ მცირეა, მაშინ შუალედში მოთავსებული ყოველი რიცხვი გარკვეული სიზუსტით გამოდგება საძებნი ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად. არსებობს ნამდვილ ფესვთა მიახლოებითი გამოთვლის სხვადასხვა მეთოდი; განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი. შევნიშნოთ, რომ ხშირად გამოთვლების დაჩქარების მიზნით, სასარგებლოა **ლოგარითმული ცხრილებით, ლოგარითმული სახაზავითა და არითმომეტრით** სარგებლობა.

1. **საშუალო არითმეტიკულის მეთოდი.** ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის რომელიმე α ნამდვილი ფესვისათვის გამოყოფილია (a, b) განცალკევების შუალედი. მაშინ, როგორც ვიცით, მოცემულ $f(x)$ მრავალწევრს (a, b) შუალედში მხოლოდ ერთი α ნამდვილი ფესვი აქვს. α ფესვის პირველ მიახლოებად შეიძლება მივიღოთ (a, b) შუალედის a და b საზღვრების საშუალო არითმეტიკული: $\alpha_1=\frac{a+b}{2}$; α ფესვის შემდეგი მიახლოებისათვის (a, b) შუალედი გავყოთ ორ (a, α_1) და (α_1, b) შუალედად. ვთქვათ, (a, α_1) შუალედის ბოლო წერტილებზე $f(x)$ მრავალწევრი ნიშანს იცვლის; მაშინ, ცხადია, საძიებელი α ფესვი მოთავსებულია ახალ, უფრო მცირე, განცალკევების (a, α_1) შუალედში და ფესვის მეორე მიახლოება იქნება: $\alpha_2=\frac{a+\alpha_1}{2}$ და ა. შ. ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ α ფესვის მიახლოება ნებისმიერი სიზუსტით.

2. **წრფივი იტერაციის, ანუ ქორდის, მეთოდი.** ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის რომელიმე α ნამდვილი ფესვისათვის გამოყოფილია (a, b) განცალკევების შუალედი (ნახ. 11). სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(a)<0$, $f(b)>0$. წრფივი იტერაციის მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ $f(x)$ მრავალწევრის შესაბამისი გრაფიკის AB რკალის ნაცვლად იღებენ AB ქორდას, ე. ი. α ჭეშმარიტი ფესვის ნაცვლად უნდა ავიღოთ AB ქორდის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილის c აბსცისა.

$\triangle caA$ და $\triangle cBb$ მსგავსებიდან, რადგან $f(a)$-სა და $f(b)$-ს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, მივიღებთ:

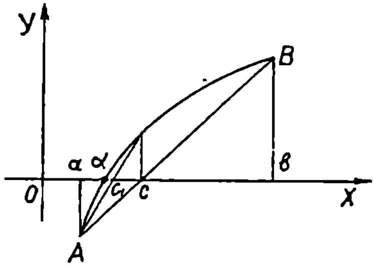
$$\frac{c-a}{b-c}=-\frac{f(c)}{f(b)},$$

აქედან გვექნება:

$$c=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{1}$$

(1) ფორმულის მიღება შეიძლება კიდევ სხვაგვარად. პირველად დავწეროთ $A[a, f(a)]$ და $B[b, f(b)]$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$



ნახ. 11.

AB წრფის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი რომ ვიპოვოთ, საჭიროა ამ განტოლებაში ჩავსვათ $y=0$ და მიღებული განტოლებიდან განვსაზღვროთ x, მივიღებთ (1) გამოსახულებას. მიღებული (1) ფორმულა გვაძლევს წრფივი იტერაციის მეთოდით ფესვის პირველ მიახლოებას. ამავე მეთოდით, რომ ვიპოვოთ ფესვის მეორე მიახლოება (a, b) შუალედი უნდა დავანაწილოთ (a, c) და (c, b) შუალედებად, თუ აღმოჩნდა, რომ $f(c)>0$, როგორც ეს ჩვენს ნახაზზეა ნაჩვენები, მაშინ α ფესვი მოთავსებული იქნება (a, c) შუალედში და მისი მეორე მიახლოება იქნება:

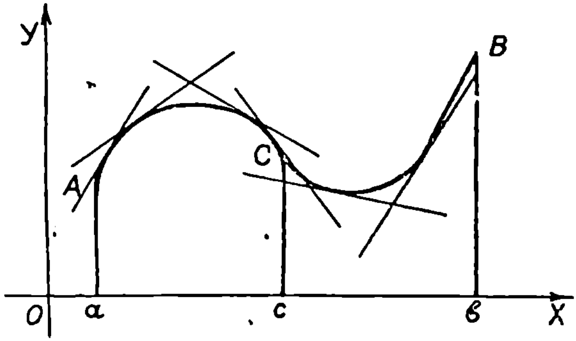
$$c_1=\frac{af(c)-cf(a)}{f(c)-f(a)}.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ α ფესვის შემდეგი მიახლოებანი. სანამ უშუალოდ შემდეგ მეთოდს განვიხილავდეთ წინასწარ საჭიროა გეომეტრიიდან და ანალიზიდან მოვიგონოთ რკალის ამოზნექილობასა და ჩაზნექილობასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი.

$y=f(x)$ **ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკის რკალს, რომელიმე შუალედში უწოდებენ ამოზნექილს, თუ ის ნებისმიერ მის ქორდასთან იკვეთება მხოლოდ ორ წერტილში.** უფრო ზუსტად, ამოზნექილ რკალს, რომელიც მდებარეობს მისი მომჭიმავი ქორდის ზემოთ, ეწოდება **ზემოდან ამოზნექილი რკალი**, ხოლო ისეთ ამოზნექილ რკალს, რომელიც მდებარეობს მისი მომჭიმავი ქორდის ქვემოთ, ეწოდება ქვემოდან **ამოზნექილი რკალი.** ზემოდან ამოზნექილ რკალს უწოდებენ **ამოზნექილ რკალს**, ხოლო ქვემოდან ამოზნექილ რკალს კი—**ჩაზნექილ რკალს.** ადვილი შესამ-

ჩნევია, რომ ამოზნექილი რკალი მდებარეობს მისი ნებისმიერი მხების ქვემოთ, ხოლო ჩაზნექილი რკალი კი მდებარეობს მისი ნებისმიერი მხების ზემოთ (ნახ. 12). როგორც აღნიშნულ ნახაზზე ჩანს, AB მრუდი არ არის არც ამოზნექილი, არც ჩაზნექილი. AC და CB რკალები კი შესაბამისად ამოზნექილი და ჩაზნექილი რკალებია.

წერტილს, რომელზედაც მრუდი ერთი მდგომარეობიდან გადადის მეორე მდგომარეობაში, ეწოდება **გადაღუნვის** წერტილი.



ნახ. 12.

როგორც ვიცით, თუ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)$ რომელიმე შუალედში დადებითია, ე. ი. $f'(x)>0$, მაშინ აღნიშნულ შუალედში $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო თუ $f'(x)<0$, მაშინ აღნიშნულ შუალედში $f(x)$ ფუნქცია კლებადია. შებრუნებით, თუ $f(x)$ ფუნქცია რომელიმე შუალედში ზრდადია, მაშინ აღნიშნულ შუალედში $f'(x)>0$, ხოლო თუ $f(x)$ კლებადია, მაშინ აღნიშნულ შუალედში $f'(x)<0$. ანალოგიურად, ამოზნექილი და ჩაზნექილი რკალებისათვის მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა. თუ $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკის რკალი რომელიმე შუალედში ამოზნექილია, მაშინ შესაბამის შუალედში $f''(x)<0$, ხოლო თუ რკალი რომელიმე შუალედში ჩაზნექილია, მაშინ შესაბამის შუალედში $f''(x)>0$.

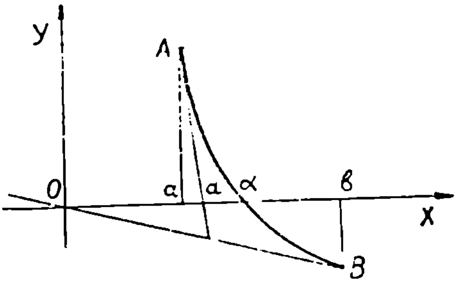
დამტკიცება. როგორც ეს გეომეტრიულად (ნახ. 12) ჩანს, თუ რკალი ამოზნექილია, ის მდებარეობს მის ნებისმიერ მხებს ქვემოთ და მხების წერტილის მარცხნიდან მარჯვნივ გადაადგილებით მხების მიერ OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან შექმნილი კუთხე კლებულობს. კუთხის შემცირებასთან ერთად მცირდება მისი ტანგენსიც, ე. ი. $f'(x)$-იც. მაშასადამე, აღნიშნულ შუალედში $f'(x)$ ფუნქცია კლებულობს და ამიტომ მისი წარმოებული $f''(x)<0$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ, თუ $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკის რკალი რომელიმე შუალედ-

ში ჩაზნექილია, მაშინ ამ შუალედში $f''(x)>0$. დამტკიცებული თეორემის შებრუნებული თეორემა იქნება:

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$ რომელიმე შუალედში უარყოფითია, ე. ი. $f''(x)<0$, მაშინ შესაბამის შუალედში მოცემული $f(x)$ ფუნქციის რკალი ამოზნექილია. ხოლო, თუ რომელიმე შუალედში $f''(x)>0$, მაშინ შესაბამის შუალედში რკალი ჩაზნექილია.

ეს დამტკიცდება პირდაპირი თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად.

მაგალითად, $y=x^3$ ფუნქციის შესაბამისი რკალი $(-\infty, 0)$ შუალედში ამოზნექილია, რადგან მისი მეორე რიგის წარმოებული $y''=6x$ ამ შუალედში უარყოფითია, ხოლო $(0, \infty)$ შუალედში ჩაზნექილია, რადგან მისი მეორე რიგის წარმოებული ამ შუალედში დადებითია. ახლა ვინაიდან გადაღუნვის წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს სხვადასხვა ნიშანი აქვს, ამიტომ გადაღუნვის c წერტილზე $f''(c)=0$.

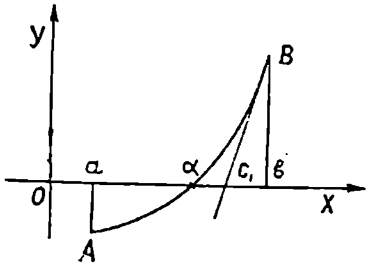


ნახ. 13.

3. ნიუტონის (ანუ მხების) მეთოდი. ისე როგორც წინა მეთოდებში, ახლაც ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის რომელიმე α ნამდვილი ფესვისათვის გამოყოფილია* (a, b) განცალკევების შუალედი (ნახ. 13). ნიუტონის მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ $f(x)$ მრავალწევრის შესაბამისი გრაფიკის AB რკალის ნაცვლად იღებენ ან A წერტილიდან ან B წერტილიდან გავლებულ მხებს, ე. ი. ჭეშმარიტი α ფესვის ნაცვლად იღებენ აღნიშნული მხების და OX ღერძის გადაკვეთის წერტილის აბსცისას. საჭიროა აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ (a, b) შუალედის ნებისმიერი $x=x_0$ წერტილისათვის $f(x_0)$ და $f''(x_0)$ ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ, მაშინ AB რკალის $[x_0, f(x_0)]$ წერტილზე გავლებული მხებისა და OX ღერძის გადაკვეთის წერტილი ყოველთვის მოთავსებულია (a, b) შუალედში.* გეომეტრიულად ამ დებულების მართებულობა აშკარაა. თუ ეს პირობა არაა დაცული, მაშინ შესაძლებელია რკალის მხებმა OX ღერძი (a, b)

* ეს დებულება შეიძლება მკაცრად დამტკიცდეს მათემატიკური ანალიზის გამოყენებით.

შუალედის გარეთ გადაკვეთოს, ისე როგორც ეს ჩვენი ნახაზის შემთხვევაშია ნაჩვენები. მაგალითად, B წერტილიდან გავლებული მხები OX ღერძს კვეთს (a, b) შუალედის გარეთ. ვინაიდან ჩვენ ნახაზზე AB რკალი (a, b) შუალედში ჩაზნექილია $f'(x)>0$ მთელ (a, b) შუალედში. ახლა, რადგან $x=a$ წერტილზე $f(x)$ და $f''(x)$ ერთნაირი ნიშანი აქვთ, კერძოდ:



ნახ. 14.

$f(a)>0$, $f''(b)>0$, ხოლო $x=b$ წერტილზე სხვადასხვა ნიშანი, კერძოდ: $f(b)<0, f''(b)>0$. ცხადია, რომ AB რკალის $fA[a, f(a)]$ წერტილიდან გავლებული მხები OX ღერძს უეჭველად (a, b) შუალედში კვეთს. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ A წერტილზე გავლებული მხების და OX ღერძის გადაკვეთის წერტილის d აბსცისა, რომელიც იქნება α ჭეშმარიტი ფესვების პირველი მიახლოება. როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან ვიცით, $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მრუდის მხების განტოლებას $A[a, f(a)]$ წერტილში ექნება შემდეგი სახე:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a),$$

თუ ამ თანაფარდობაში ჩავსვამთ მხებისა და OX ღერძთან გადაკვეთის $(d, 0)$ წერტილის კოორდინატებს, მივიღებთ:

$$0-f(a)=f'(a)(d-a),$$

საიდანაც

$$d=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{2}$$

ამრიგად, თუ (a, b) შუალედის $x=a$ წერტილზე $f(x)$ ფუნქციას და მის მეორე რიგის $f''(x)$ წარმოებულს ერთნაირი ნიშნები აქვთ, ე. ი. ან $f(a)>0$, $f''(a)>0$, ან $f(a)<0$, $f''(a)<0$. ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოსაძებნად ვისარგებლებთ (2) ფორმულით. ახლა, თუ $x=b$ წერტილზე $f(x)$ და $f''(x)$ ერთნაირი ნიშნები აქვთ (ნახ. 14), მაშინ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოსაძებნად, საჭიროა OB რკალის $B\ [b, f(b)]$ წერტილში გავლებული მხებისა და OX ღერძის გადაკვეთის წერტილის c_1 აბსცისის პოვნა. პირველი შემთხვევის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$c_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{3}$$

ამრიგად, (3) ფორმულით უნდა ვისარგებლოთ მაშინ, როცა $f(x)$ ფუნქციას და მის მეორე რიგის წარმოებულს $x=b$ წერტილზე ერთნაირი ნიშნები აქვთ. ჩვენ ყველა ოთხი შესაძლებლობიდან მე-13 და მე-14 ნახაზებზე განვიხილეთ მხოლოდ ორი შემთხვევა. დანარჩენი ორი შემთხვევის ნახაზზე განხილვა სასურველია მკითხველმა შეასრულოს. მაგალითად, პირველ შემთხვევაში α ფესვის შემდეგი მიახლოებისათვის ავიღებთ (a, c_1) შუალედს, ვინაიდან $f(c_1)>0$ და $f''(c_1)>0$. ამიტომ α ფესვის შემდეგი, ე. ი მეორე მიახლოება იქნება:

$$c_2=c_1-\frac{f(c_1)}{f'(c_1)}$$

და ა. შ. ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ α ნამდვილი ფესვის მნიშვნელობა ნებისმიერი სიზუსტით*. განვიხილოთ მაგალითები:

1. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-5=0.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (1, 2) შუალედში მოთავსებულია მოცემული განტოლების მხოლოდ ერთი α ფესვი, ე. ი. (1, 2) არის ფესვის განცალკევების შუალედი.

საშუალო არითმეტიკულის მეთოდით ამ ფესვის პირველი მიახლოება იქნება $d_1=\frac{1+2}{2}=1{,}5$. გამოთვლის შედეგად მივიღებთ $f(1{,}5)<0$. ამრიგად, α ფესვი მოთავსებულია (1,5; 2) შუალედში. ამიტომ ფესვის მეორე მიახლოება იქნება $d_2=\frac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$ და ა. შ.

გასინჯვით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ α ნამდვილი ფესვი მოთავსებულია (1,8; 1,9) შუალედში. α ფესვის ეს ახალი განცალკევების შუალედი 10-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე პირველი განცალკევების შუალედი. ამ შუალედისათვის საშუალო არითმეტიკულის მეთოდით ფესვის პირველი მიახლოება იქნება:

$$\frac{1{,}8+1{,}9}{2}=1{,}85.$$

ახლა განვიხილოთ მოცემული განტოლების იგივე α ნამდვილი ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოძებნა **წრფივი იტერაციის** მეთოდით. ვინაიდან (1,8; 1,9) შუალედი არის საძიებელი α ფესვის განცალკევების შუალედი, შეიძლება მივიღოთ $a=1{,}8$ და $b=1{,}9$. გამოთვლის შე-

---

* ამ საკითხის ზუსტად დამტკიცება შეიძლება ნახოთ Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, 1947, გვ. 366—367.

დეგად გვექნება: $f(1,8)=-0,248<0$; $f(1,9)=0,329>0$. (1) ფორმულის გამოყენება გვაძლევს

$$c_1=\frac{1,8\cdot 0,329+1,9\cdot 0,248}{0,329+0,248}\approx 1,843.$$

შემდეგ, გამოთვლის შედეგად მივიღებთ $f(1,843)=-0,00427<0$. აქედან დავასკვნით, რომ საძიებელი α ფესვი მოთავსებულია (1,843; 1,9) შუალედში. ამ შუალედისათვის (1) ფორმულის ხელმეორედ გამოყენებით მივიღებთ:

$$c_2=\frac{1,843\cdot 0,329+1,9\cdot 0,00427}{0,329+0,00427}\approx 1,84373.$$

გამოანგარიშებით გვექნება: $f(1,84373)<0$, $f(1,8438)>0$. მაშასადამე, საძიებელი α ფესვის ახალი კიდევ უფრო მცირე განცალკევების შუალედი იქნება (1,84373; 1,8438). რადგან მიღებული შუალედის სიგრძე უდრის 0,00007-ს, ამიტომ ამ α ფესვის განცალკევების შუალედის ყოველი რიცხვი 0, 00007-მდე სიზუსტით იქნება ჩვენი საძიებელი α ფესვის მნიშვნელობა. ცხადია, რომ ჩვენ მიერ მიღებული ცდომილება ნაკლებია, ვიდრე $10^{-4}=0,0001$.

2. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=x^3+3x^2-14x+7=0.$$

რადგან მოცემული კენტი რიგის განტოლების თავისუფალი წევრი დადებითია და (0,1) შუალედში ნიშანს იცვლის, დეკარტის თეორემის დახმარებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული განტოლების სამივე ფესვი ნამდვილია; ერთი უარყოფითია და ორი დადებითი. ადვილად მივიღებთ, რომ მოცემული განტოლების ერთ-ერთი α ფესვის განცალკევების შუალედია (0, 1). გამოვთვალოთ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნიუტონის მეთოდით. ამ შემთხვევაში $f(0)=7>0$, $f''(0)=6>0$ და ერთნაირი ნიშნები აქვთ.

ვისარგებლოთ (2) ფორმულით, გვექნება:

$$d_1=0-\frac{7}{-14}=0,5.$$

მეორე მიახლოებისათვის გამოვიანგარიშოთ

$$f(0,5)=\frac{7}{8},\quad f'(0,5)=-\frac{41}{4},$$

მივიღებთ:

$$d_2=0{,}5+\frac{7}{8}:\frac{41}{4}\approx 0{,}585.$$

ცხადია, რომ $f(0{,}585)>0$. თუ გვინდა გავიგოთ მიღებული მიახლოებითი ფესვის სიზუსტე $x=0{,}59$ მნიშვნელობისათვის, გამოვიანგარიშოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ $f(0{,}59)<0$; მაშასადამე, საძიებელი ფესვი მოთავსებულია (0, 585; 0,59) შუალედში. რადგან ამ შუალედის სიგრძეა 0,005, ამიტომ ჩვენ მიერ მიღებული ცდომილება ნაკლებია, ვიდრე $10^{-2}=0{,}01$.

3. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=x^3+1{,}1x+0{,}9x-1{,}4=0.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული განტოლების ერთ-ერთი დადებითი α ფესვისათვის (0, 1) შუალედი არის განცალკევების შუალედი. წრფივი იტერაციის მეთოდით ამ α ფესვის პირველი მიახლოება იქნება:

$$c_1=\frac{0\ f(1)-1f(0)}{f(1)-f(0)}\approx 0{,}467.$$

ახლა, ვინაიდან $f(1)>0$, $f''(1)>0$, ამიტომ α ფესვის პირველი მიახლოება მხების მეთოდით (ახლა უნდა ვისარგებლოთ (3) ფორმულით) იქნება:

$$d_1=1-\frac{f(1)}{f'(1)}\approx 0{,}738.$$

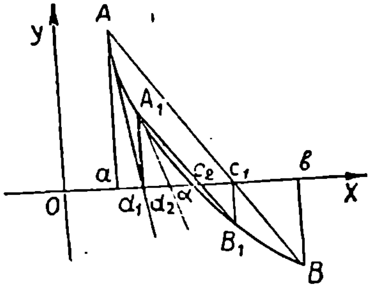
კომბინირებული მეთოდი. თუ დავაკვირდებით ნამდვილ ფესვთა მიახლოებითი მოძებნის ქორდისა და მხების მეთოდებს, ადვილად შევნიშნავთ, რომ აღნიშნული მეთოდებით ნამდვილი α ფესვის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას ვუახლოვდებით სხვადასხვა მხრიდან. ხშირად ამ ორი მეთოდის კომბინირება ძალიან კარგ შედეგს გვაძლევს. ვიგულისხმოთ, რომ (a, b) შუალედი წარმოადგენს მოცემული α მრავალწევრის რომელიმე α ფესვის განცალკევების შუალედს. ვთქვათ, $f(a)>0$, $f''(a)>0$. ამ შემთხვევაში ქორდის მეთოდით $x=\alpha$ ნამდვილი ფესვის პირველი c_1 მიახლოება α-ს მარჯვნივ იქნება, ხოლო მხების მეთოდით ამავე ფესვის პირველი მიახლოება d_1 იქნება α-ს მარცხნივ (ნახ. 15). ამით ჩვენ მივიღეთ $x=\alpha$ ფესვისათვის ახალი უფრო მცირე განცალკევების (d_1, c_1) შუალედი. ახლა, თუ ეს შუალედი არ გვაძლევს საძიებელი ფესვის მნიშვნელობას საჭირო სიზუსტით, მაშინ საჭიროა (d_1, c_1) შუალედზე კიდევ გამოვიყენოთ ორივე მეთოდი. მივიღებთ ახალ უფრო მცირე (d_2, c_2) გან-

ცალკევების შუალედს და ა. შ. ამ პროცესს განვაგრძობთ მანამ, სანამ არ მივიღებთ საძიებელ ფესვს საჭირო სიზუსტით.

4. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=x^3+2x-6=0.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული განტოლებისათვის (1, 2) შუალედი წარმოადგენს მისი ერთ-ერთი α ფესვის განცალკევების შუალედს. აგრეთვე ადვილად დავადგენთ, რომ (1, 2) შუალედში მოცემული $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი რკალი ჩაზნექილია.



ნახ. 15.

ვინაიდან $f(2)=6>0$ და $f''(2)==12>0$, ამიტომ **ქორდის** მეთოდით α ფესვს მივუახლოვდებით **მარცხნიდან, ხოლო მხების** მეთოდით—**მარჯვნიდან.** გამოანგარიშებით (სიმარტივისათვის ფუნქციის მნიშვნელობანი გამოვიანგარიშოთ ჰორნერის სქემით) მივიღებთ:

$$c_1=1,33,\ \ d_1=2-0,43=1,57,$$
$$f(c_1)=-0,9874,\ \ f(d_1)=1,0099,\ \ f'(d_1)=9,3947.$$

შემდეგი მიახლოება მოგვცემს:

$$c_2=1,4486,\ \ d_2=1,57-0,1075=1,4625,$$
$$f(c_2)=-0,062997,\ \ f(d_2)=0,05315,\ \ f(d_2)=8,41672,$$
$$c_3=1,456139,\ \ d_3=1,4625-0,006315=1,456185.$$

ამრიგად, საძიებელი α ფესვის ახალი შედარებით მცირე განცალკევების შუალედია (c_3, d_3). ვინაიდან მიღებული შუალედის სიგრძეა 0,00046, ამიტომ როგორც c_3, d_3 რიცხვები, ისე მათ შორის მოთავსებული ყოველი რიცხვი გამოდგება α ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად 10^3-0,001-ზე ნაკლები სიზუსტით.

5. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=x^3-8x+1=0.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული განტოლების ერთ-ერთი α ნამდვილი ფესვისათვის (0,1) შუალედი არის განცალკევების შუალედი. გამოთვლით მივიღებთ:

$$f(0,12)=0,041728\approx 0,04173 \text{ და } f(0,13)=-0,03780.$$

ამგვარად, α ფესვის ახალი განცალკევების შუალედია (0,12; 0,13), რომლის სიგრძე 100-ჯერ უფრო ნაკლებია, ვიდრე პირველად მიღებული შუალედის სიგრძე. ცხადია, რომ (0,12; 0,13) შუალედის ყოველი რიცხვი 0,01-მდე სიზუსტით გამოდგება მოცემული განტოლების ფესვად. გამოანგარიშებით მივიღებთ: $f'(0{,}12)\approx-7{,}9568$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $x=0{,}12$ წერტილზე $f(x)$ და $f''(x)$ ერთნაირი ნიშნები აქვთ, სახელდობრ დადებითი. აქედან გამოდის, რომ ვინაიდან $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი რკალი (0,12; 0,13) შუალედში ჩაზნექილია, მხების მეთოდით α ფესვს მივუახლოვდებით მარცხნიდან, ხოლო ქორდის მეთოდით — მარჯვნიდან. მივიღებთ:

$$d_1=0{,}12-\frac{0{,}04173}{-7{,}9568}\approx 0{,}125244 \text{ მხების მეთოდით;}$$

$$c_1=\frac{0{,}12\cdot(-0{,}03780)-0{,}13\cdot 0{,}04173}{-0{,}03780-0{,}04173}\approx 0{,}125247 \text{ ქორდის მეთოდით.}$$

ამრიგად, α ფესვი მოთავსებულია ახალი (d_1, c_1) განცალკევების შუალედში, რომლის სიგრძეა 0,000003. ეს იმას ნიშნავს, რომ α ფესვი 0,00001-მდე სიზუსტით ნაკლებობით იქნება $d_1=0{,}125244$, ხოლო მეტობით — $c_1=0{,}125247$.

არაალგებრულ განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნის შესახებ. ფუნქციათა შესაბამის ნახაზებზე დაკვირვების შედეგად ადვილად შევამჩნევთ, რომ წრფივი იტერაციის, ანუ ქორდის, მეთოდი მხოლოდ მაშინ გვაძლევს სასურველ შედეგს. როცა საძიებელი α ფესვი მარტივია. ნიუტონის მეთოდით კი შეიძლება ვიპოვოთ ნამდვილი ჯერადი ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობაც.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ როცა ჩვენ განვიხილეთ წრფივი იტერაციისა (ქორდისა) და ნიუტონის (მხების) მეთოდები, მაშინ გამოვიყენეთ $f(x)=0$ განტოლების მარცხენა მხარის — ფუნქციის — ზოგიერთი თვისება, მაგალითად, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა და მისი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების არსებობა, მაგრამ არ მიგვიღია მხედველობაში, რომ $f(x)$ მრავალწევრია x-ის მიმართ. ამიტომ ბუნებრივია, რომ ნამდვილი ფესვების მიახლოებითი მრძებნის წრფივი იტერაციისა (ქორდისა) და ნიუტონის (მხების) მეთოდები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს არა მარტო ალგებრულ განტოლებათა ნამდვილი ფესვების მიახლოებით მნიშვნელობათა მოსაძებნად, არამედ ისეთი არაალგებრული განტოლებებისათვისაც, რომელთა მარცხენა მხარე წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებით.

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოცემულია ტრანსცენდენტური განტოლება

$$f(x)=x-2\sin x=0.$$

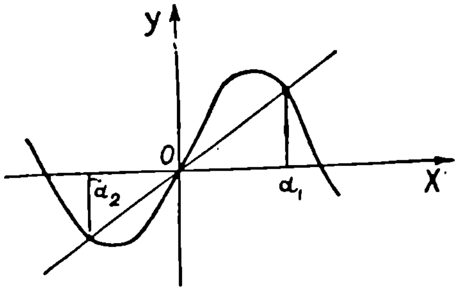
თუ ავაგებთ $y=x$ და $y=2\sin x$ ფუნქციების გრაფიკებს (ნახ. 16), ადვილად შევნიშნავთ, რომ მოცემულ განტოლებას აქვს სამი ნამდვილი ფესვი; აქედან ერთი ნულოვანი ფესვია და ორი d_1 და d_2 ფესვი აბსოლუტურად ერთმანეთის ტოლია, ხოლ ნიშნით სხვადასხვაა. გამოთვლით დავრწმუნდებით, რომ

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0, \qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლების d_1 დადებითი ფესვი მოთავსებულია შუალედში

$$\frac{\pi}{2}< d_1<\frac{3\pi}{4};$$

ეს ნახაზიდანაც ჩანს. განვიხილოთ $f'(x)=1-2\cos x$, $f''(x)=2\sin x$. ვინაიდან $f''(x)$ ფუნქცია დადებითია მთელ $(0,\pi)$ შუალედში, ამიტომ $x=$



ნახ. 16.

$=\frac{3\pi}{4}$ მნიშვნელობაზე $f(x)$ და $f''(x)$ ფუნქციებს ერთნაირი ნიშნები აქვთ, სახელდობრ დადებითი.

გამოანგარიშებით მივიღებთ:

$$b=\frac{3\pi}{4}\approx 2,3562,\ f(b)=$$
$$2,3562-1,4142=0,9420;$$
$$f'(b)=1+1,4142=2,4142.$$

ნიუტონის (მხების) (3) ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$b_1=2,3562-0,3902=1,9660=112^\circ 39'.$$
$$f(b_1)=1,9660-1,8458=0,1202;\ \ f'(b_1)=1+0,7709=1,7709.$$

შემდეგ:

$$b_2=1,9660-0,0679=1,8981=108^\circ 45',$$
$$f(b_2)=1,8981-1,8938=0,0043,\ \ f'(b_2)=1+0,6430=1,6430,$$
$$b_3=1,8981-0,0026=1,8955=108^\circ 36' 10'',\ \text{ხოლო}$$
$$f(b_3)=1,8955-1,8955=0.$$

მაშასადამე, საკმაოდ დიდი სიზუსტით საძიებელი d_1 და d_2 ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობანი შესაბამისად იქნება: $c_1=1,8955$ და $c_2=-1,8955$.

მაგალითი 2. ვთქვათ, მოცემულია ირაციონალური განტოლება

$$f(x)=x-\sqrt{x}-1=0.$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ $f(2)<0$, $f(3)>0$. ამიტომ მოცემულ განტოლებას (2, 3) შუალედში აქვს ერთი ფესვი მაინც. (2, 3) შუალედში $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ დადებითია, ე. ი. მოცემული $f(x)$ ფუნქცია აღნიშნულ შუალედში ზრდადია. ამრიგად, მივიღეთ, რომ (2,3) შუალედი წარმოადგენს მოცემული $f(x)=0$ განტოლების რომელიმე α ფესვის განცალკევების შუალედს. ავიღოთ α ფესვის პირველი მიახლოება $\alpha_1=2$ ნაკლებობით და გამოვთვალოთ

$$\alpha_2=\sqrt{2}+1\approx 2{,}4142,$$
$$\alpha_3=\sqrt{2{,}4142}+1\approx 2{,}5532,$$
$$\alpha_4=\sqrt{2{,}5532}+1\approx 2{,}5978$$

და ა. შ. მივიღებთ: $\alpha_5\approx 2{,}6117$, $\alpha_6\approx 2{,}6160$, $\alpha_7\approx 2{,}6174$, $\alpha_8\approx 2{,}6178$, $a_9\approx 2{,}6179$. ხოლო შემდეგ კი გვექნება: $\alpha_{10}=\alpha_{11}=\ldots\approx 2{,}6179$. მაშასადამე, 0,0001-მდე სიზუსტით α ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა იქნება 2,6179.

მაგალითი 3. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=x-a^x=0, \text{ სადაც } a>1.$$

$y=x$ წრფის და $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციების გრაფიკის აგებით ადვილად შევნიშნავთ, რომ მოცემულ განტოლებას ნამდვილი ფესვები არა აქვს. აგრეთვე $y=x^n$ პარაბოლის და $y=-ax-b$ წრფის გრაფიკების აგებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველი $x^n+ax+b=0$ ალგებრული განტოლების ნამდვილი ფესვების რიცხვი არ აღემატება **ორს**, **როცა** n **ლუწია**, და არ აღემატება **სამს**, **როცა** n **კენტია**. მრავალი სხვა საინტერესო მეთოდი და ხერხი ალგებრულ განტოლებათა ნამდვილი ფესვების მიახლოებითი გამოთვლებისა მოცემულია სპეციალურ სახელმძღვანელოებში და, ცხადია, მათი დეტალურად გადმოცემა უმაღლესი ალგებრის კურსში შეუძლებელია. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ალგებრულ განტოლებათა ნამდვილი და კომპლექსური ფესვების მიახლოებითი გამოთვლის ყველაზე უფრო კარგი და სრული მეთოდი მოგვცა ცნობილმა რუსმა მათემატიკოსმა **ნ. ი. ლობაჩევსკიმ**. ლობაჩევსკის მეთოდის იდეას, ჩვენ გავეცნობით სიმეტრიული მრავალწევრების შესწავლის შემდეგ.

თავი X

მრავალცვლადიანი მრავალწევრები

§ 44. მრავალცვლადიან მრავალწევრთა რგოლი

ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი რიცხვთა P ველი და $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტები — ცვლადები, რომლებიც არ ეკუთვნიან P ველს. $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ სახის სასრული რაოდენობის წევრების ჯამს, სადაც ყოველი $k_i \geqslant 0$ მთელია და $a \in P$, ეწოდება **მრავალწევრი** მოცემული n ცვლადის (ასოს) მიმართ რიცხვთა P ველზე. მოცემული n ცვლადის მიმართ მრავალწევრები აღვნიშნოთ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და ა. შ. სიმბოლოებით. მრავალწევრის ნებისმიერ ორ წევრს ეწოდება **მსგავსი**, თუ შესაბამისი ცვლადების ხარისხის მაჩვენებლები ტოლია. მრავალწევრის რომელიმე **წევრის ხარისხის მაჩვენებელი** ეწოდება მასში შემავალი ცვლადების ხარისხის მაჩვენებელთა ჯამს.

როგორც განმარტებიდან ჩანს, მრავალწევრს რამდენიმე ცვლადის მიმართ შეიძლება ჰქონდეს მსგავსი და არამსგავსი ერთისა და იმავე ხარისხის რამდენიმე წევრი. მაგალითად, სამი x_1, x_2 და x_3 ცვლადის მიმართ $f(x_1, x_2, x_3)$ მრავალწევრის შემდეგი ორი წევრი: $3x_1^2x_2x_3^4$ და $\sqrt{2}\,x_1^0x_2^3x_3^4=\sqrt{2}\,x_2^3x_3^4$ ერთისა და იმავე ხარისხისაა, მაგრამ მსგავსი არაა. ვიტყვით, რომ მრავალცვლადიანი მრავალწევრი **n-ური ხარისხისაა** (რიგისაა), თუ ის შეიცავს n-ური ხარისხის ერთ წევრს მაინც და ყველა სხვა წევრის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება n-ს. მაგალითად. n ცვლადის მიმართ წრფივი და კვადრატული ფორმები შესაბამისად პირველი ხარისხის და მეორე ხარისხის მრავალწევრებია. ყოველი $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ მრავალწევრისათვის იგულისხმება, რომ მასში არ შედის მსგავსი წევრები, ე. ი. მსგავსი წევრები შეკრებილია და ყოველი წევრის კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან. n-ცვლადიან ორ f და g მრავალწევრს ეწოდება **ტოლი**, თუ მათ მსგავს წევრებთან მდგომი კოეფიციენტები შესაბამისად ტოლია.

P ველიდან აღებული ნულისაგან განსხვავებული ყოველი a მუდმივი რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი n ცვლადის მიმართ. მართლაც, $ax_1^0\,x_2^0\ldots x_n^0=a$ ხოლო P

ველის ნული შეიძლება განვიხილოთ n-ცვლადიან ნულმრავალწევრად, ე. ი. ისეთ მრავალწევრად, რომლის ყველა კოეფიციენტი ნულია.

მრავალცვლადიანი მრავალწევრების ჯამი და ნამრავლი განმარტებულია ისე როგორც ერთცვლადიან მრავალწევრთა ჯამი და ნამრავლი. მაგალითად, ორი ერთწევრის ნამრავლი ასე განიმარტება:

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}\cdot bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}=abx_1^{k_1+l_1}x_2^{k_2+l_2}\dots x_n^{k_n+l_n}.$$

ნებისმიერი ორი $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **მრავალწევრის ნამრავლი** ეწოდება ისეთ მრავალწევრს, რომელიც მიიღება მათი წევრწევრად გადამრავლებისა და მსგავსი წევრების შეკრების შედეგად.

ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ ნებისმიერ **რიცხვთა P ველზე აღებულ n-ცვლადიან მრავალწევრთა სიმრავლე, მრავალწევრთა შეკრებისა და გამრავლების მიმართ, ქმნის მრავალწევრთა კომუტაციურ რგოლს ნულგამყოფი ელემენტების გარეშე.**

მართლაც, როცა $n=1$, გვექნება ერთ x_1 ცვლადზე დამოკიდებული მრავალწევრთა სიმრავლე რიცხვთა P ველზე.

როგორც ვიცით (გვ. 225), ასეთ მრავალწევრთა სიმრავლე რიცხვთა P ველზე ქმნის $P[x_1]$ მრავალწევრთა კომუტაციურ რგოლს ნულგამყოფი ელემენტების გარეშე. ვიგულისხმოთ, რომ P ველზე აღებული $(n-1)$-ცვლადიანი $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ სახის მრავალწევრთა სიმრავლე ქმნის მრავალწევრთა $P[x_1, x_2, \dots x_{n-1}]$ კომუტაციურ რგოლს ნულგამყოფი ელემენტების გარეშე. ყოველი n-ცვლადიანი $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მრავალწევრი $P[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ მრავალწევრთა რგოლზე შეიძლება განვიხილოთ როგორც მრავალწევრი ერთი x_n ცვლადის მიმართ. ცხადია, რომ x_n ცვლადის მიმართ მრავალწევრთა სიმრავლე $P[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ მრავალწევრთა რგოლზე, შექმნის კომუტაციურ რგოლს ნულგამყოფი ელემენტების გარეშე. მაგრამ, მეორე მხრივ, ყოველი მრავალწევრი x_n ცვლადის მიმართ, $P[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ რგოლზე შეიძლება განვიხილოთ როგორც მრავალწევრი $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ ცვლადების მიმართ რიცხვთა P ველზე და, პირიქით. როგორც ვხედავთ, $P[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ რგოლზე აღებული ერთ x_n-ცვლადიან მრავალწევრებსა და P ველზე აღებულ $x_1, x_2, \dots, x_n$-ცვლადიან მრავალწევრთა სიმრავლეს შორის შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა-იზომორფული თანადობა. ახლა, ვინაიდან პირველ მრავალწევრთა სიმრავლე $P[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ რგოლზე ქმნის კომუტაციურ რგოლს ნულგამყოფი ელემენტების გარეშე, ამიტომ მეორე n-ცვლადიან მრავალწევრთა სიმრავლე რიცხვთა P ველზე შექმნის კომუტაციურ რგოლს ნულგამყოფი ელემენტების გარეშე, სადაც ნულის როლს ასრულებს ნულმრავალწევრი, ხოლო ერთეულის როლს P ველის ერთეული და ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია. მიღე-

ბულ n-ცვლადიან მრავალწევრთა რგოლს რიცხვთა P ველზე აღვნიშნავთ $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ სიმბოლოთი. ვინაიდან P ველის ყოველი რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნულოვანი რიგის n-ცვლადიანი მრავალწევრი, ამიტომ რიცხვთა P ველი შეიძლება განვიხილოთ როგორც $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ მრავალწევრთა რგოლის ქვერგოლი.

ისეთ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრს, რომლის ყველა წევრი ერთისა და იმავე ხარისხისაა, ეწოდება **ერთგვაროვანი** მრავალწევრი.

საზოგადოდ ისეთ ფუნქციას, რომელიც შეიძლება იყოს $P[x_1, x_2, \ldots x_n]$ მრავალწევრთა რგოლზე აღებული ერთი

$$a_0y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_{n-1}y+a_n=0$$

ალგებრული განტოლების ფესვი მაინც, ეწოდება **ალგებრული** ფუნქცია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემულ ფუნქციას ეწოდება **ტრანსცენდენტური** ფუნქცია.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ალგებრული ფუნქციები ერთცვლადიან $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლზე. მიუხედავად იმისა, რომ ალგებრა ალგებრული ფუნქციების შემქმნელია, ალგებრაში ალგებრული ფუნქციების გამოკვლევა და მკაცრი შესწავლა არ ხდება. ალგებრულ ფუნქციათა თეორიას შეისწავლის მათემატიკის ერთ-ერთი დარგი, რომელსაც **ალგებრული გეომეტრია** ეწოდება. მტკიცდება, რომ ალგებრულ ფუნქციათა სიმრავლე ქმნის ველს. განვიხილოთ მაგალითები.

1. ყოველი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია, ყოველი წილად-რაციონალური ფუნქცია $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ და ყოველი ფესვი $\sqrt[n]{f(x)}$ ალგებრული ფუნქციებია.

მართლაც, ეს ფუნქციები შესაბამისად არის $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლზე აღებულ შემდეგ განტოლებათა ფესვი:

$$y-f(x)=0,\quad g(x)\cdot y-f(x)=0,\quad y^n-f(x)=0.$$

2. ყველა ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფუნქცია ტრანსცენდენტური ფუნქციაა.

რომელიმე ფიქსირებულ, P ველის გაფართოებული $\overline{P}$ ველიდან აღებულ v_0 ელემენტს ეწოდება $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ელემენტებზე **ალგებრულად დამოკიდებული**, თუ $P[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ რგოლის მიმართ v_0 ალგებრული ელემენტია, ე. ი. თუ v_0 აკმაყოფილებს ერთი ალგებრულ განტოლებას მაინც

$$a_0v^n+a_1v^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

სადაც $a_0, a_1, \ldots, a_n$ საზოგადოდ მრავალწევრებია $P[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ რგოლიდან და ერთი a_i ($i=0, 1, 2, \ldots, n$) მაინც არ უდრის ნულს. ელემენტ-

ტთა მოცემულ სისტემას ეწოდება **ალგებრულად დამოკიდებული**, თუ სისტემის ერთი ელემენტი მაინც დანარჩენებზე ალგებრულად დამოკიდებულია. მაგალითად, ცხადია, რომ ყოველი u_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ ალგებრულად დამოკიდებულია $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ელემენტთა სისტემაზე.

ელემენტთა $u_1, u_2, \ldots, u_n$ სისტემას ეწოდება **ალგებრულად დამოუკიდებელი**, თუ არც ერთი u_i არაა ალგებრულად დამოკიდებული დანარჩენების მიმართ.

თეორემა. **ელემენტთა $u_1, u_2, \ldots, u_n$ სისტემა ალგებრულად დამოუკიდებულია P რიცხვთა ველზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $P[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ რგოლიდან აღებული ყოველი $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ მრავალწევრის ნულთან ტოლობიდან გამომდინარეობს ამ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა.**

მართლაც, თუ ყოველი $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)=0$ ტოლობიდან გამოდის ყველა მისი კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა, ცხადია, არც ერთი u_i არ იქნება ალგებრულად დამოკიდებული დანარჩენი u_j-ის მიმართ. ახლა, პირიქით, ვიგულისხმოთ, რომ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ელემენტთა სისტემა ალგებრულად დამოუკიდებელია და $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)=0$. დავალაგოთ ეს მრავალწევრი u_n ასოს კლებადი ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ:

$$\overline{a_0}u_n{}^s+\overline{a_1}u_n{}^{s-1}+\ldots+\overline{a_s}=0,$$

სადაც $\overline{a_0}, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_s}$ მრავალწევრებია $P=P[u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}]$ მრავალწევრთა რგოლიდან. პირობის თანახმად, ვინაიდან $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ელემენტთა სისტემა ალგებრულად დამოუკიდებელია, ე. ი. ყოველი u_i, კერძოდ u_n, არაა დანარჩენებზე ალგებრულად დამოკიდებული, გვექნება $\overline{a_0}=\overline{a_1}=\ldots=\overline{a_s}=0$. ახლა, ყველა $\overline{a_i}=0$ $(i=0, 1, \ldots, s)$ მრავალწევრი დავალაგოთ u_{n-1} ასოს კლებადი ხარისხების მიხედვით და ა. შ. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$a_0u_1{}^k+a_1u_1{}^{k-1}+\ldots+a_k=0.$$

ვინაიდან u_1 ელემენტი არაა დანარჩენებზე ალგებრულად დამოუკიდებელი, გვექნება $a_0=a_1=\ldots=a_k=0$. ამით მტკიცდება, რომ თუ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ელემენტთა სისტემა ალგებრულად დამოუკიდებელია, მაშინ $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ მრავალწევრის ნულთან ტოლობიდან გამომდინარეობს ყველა მისი კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა. ამრიგად, თუ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ელემენტთა სისტემა ალგებრულად დამოუკიდებელია, ისინი არაა ურთიერთდაკავშირებული არავითარი ალგებრული განტოლებით.

მაგალითად, ფუნქციები

$$u_1=x_1+x_2+x_3,$$
$$u_2=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2,$$
$$u_3=x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3$$

ალგებრულად დამოკიდებულია.

მართლაც, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$u_2=u_1^2-2u_3.$$

ალგებრულად დამოუკიდებელი ფუნქციების მაგალითს გავეცნობით სიმეტრიული მრავალწევრების შესწავლის დროს.

§ 45. მრავალწევრის წევრთა ლექსიკოგრაფიული დალაგება

ჩვენ გავეცანით $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ მრავალწევრთა რგოლს. ვნახეთ, რომ მრავალცვლადიან მრავალწევრს შეიძლება გააჩნდეს ერთი და იმავე რიგის რამდენიმე სხვადასხვა წევრი. ამიტომ მისი წევრების დალაგება ზრდადი ან კლებადი ხარისხების მიხედვით, როგორც ეს ხდება ერთცვლადიან მრავალწევრთათვის, შეუძლებელია. მრავალცვლადიანი მრავალწევრის წევრების გარკვეული წესით დალაგებას, რომელსაც ახლა გავეცნობით, სიმეტრიული მრავალწევრების შესწავლისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს.

ვთქვათ, $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულია $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრი. აღებული მრავალწევრის ნებისმიერ ორ წევრს შორის ის მივიღოთ უფრო მაღალ წევრად, რომელსაც x_1 ასოს ხარისხის მაჩვენებელი მეტი აქვს. ხოლო ისეთ ორ წევრს შორის, რომელთა x_1-ის ხარისხის მაჩვენებელი ერთნაირია, ის მივიღოთ უფრო მაღალ წევრად, რომელსაც x_2 ასოს ხარისხის მაჩვენებელი მეტი აქვს და ა. შ. სხვა სიტყვებით, ნებისმიერი ორი წევრიდან:

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}, \tag{1}$$

$$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}, \tag{2}$$

(1) წევრი იქნება უფრო მაღალი, ვიდრე (2) წევრი, თუ სხვაობებისათვის:

$$k_i-l_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

არსებობს ისეთი ნომერი i $(1\leqslant i\leqslant n)$, რომ

$$k_1=l_1,\ k_2=l_2,\ \ldots,\ k_{i-1}=l_{i-1},\ \text{ხოლო}\ k_i>l_i.$$

თუ (1) და (2) წევრების x_i ასოების ხარისხის მაჩვენებელთა სხვაობა ყოველი i-თვის უდრის ნულს, მაშინ მათი სიმაღლეები ტოლია. ცხადია, რომ ყოველი ორი ერთნაირი სიმაღლის წევრი მსგავსია და ამიტომ ისინი შეიძლება შევკრიბოთ. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის ყოველი ორი სხვადასხვა, ე. ი. არამსგავსი წევრის სიმაღლე სხვადასხვაა. ვთქვათ, მოცემულია მრავალწევრის ნებისმიერი მესამე წევრი

$$cx_1^{s_1}x_2^{s_2}\ldots x_n^{s_n}. \tag{3}$$

ადვილად დამტკიცდება, რომ თუ (1) წევრი უფრო მაღალია, ვიდრე (2) წევრი და (2) წევრი უფრო მაღალია, ვიდრე (3) წევრი, მაშინ (1) წევრი უფრო მაღალი იქნება, ვიდრე (3) წევრი.

მართლაც, ვინაიდან (1) წევრი უფრო მაღალია, ვიდრე (2) წევრი არსებობს ისეთი i, რომ

$$k_1=l_1, \ k_2=l_2, \ \ldots, \ k_{n-1}=l_{i-1}, \text{ ხოლო } k_i>l_i.$$

აგრეთვე, ვინაიდან (2) წევრი უფრო მაღალია, ვიდრე (3) წევრი, არსებობს ისეთი j, რომ

$$l_1=s_2, \ l_2=s_2, \ \ldots, \ l_{j-1}=s_{j-1}, \text{ ხოლო } j_i>s_i.$$

გავარჩიოთ ორი შემთხვევა: $j<i$ და $j\geqslant i$. პირველ შემთხვევაში, როცა $j<i$, მივიღებთ:

$$k_1=s_1, \ k_2=s_2, \ \ldots, \ k_{j-1}=s_{j-1}, \text{ ხოლო } k_j>s_j;$$

მეორე შემთხვევაში, როცა $j\geqslant i$ მივიღებთ:

$$k_1=s_1, \ k_2=s_2, \ \ldots, \ k_{i-1}=S_{i-1}, \text{ ხოლო } k_i>s_i, \text{ რ. დ. გ.}$$

დამტკიცებული დებულების თანახმად, თუ მრავალწევრის ნებისმიერი ორი წევრიდან პირველად დავწერთ მაღალს, მივიღებთ მრავალწევრის წევრების დალაგებას კლებადი სიმაღლეების მიხედვით.

მაგალითად, თუ

$$f(x_1, \ x_2, \ x_3)=2x_1^2x_2^3x_3+3x_1^4x_2+\frac{1}{4} \ x_1^2x_2^3x_3^2-5x_2^4+3$$

მრავალწევრს დავალაგებთ წევრთა კლებადი სიმაღლის მიხედვით, გვექნება:

$$f(x_1, \ x_2, \ x_3)=3x_1^4x_2+\frac{1}{4}x_1^2x_2^3x_3^2+2x_1^2x_2^3x_3-5x_2^4+3.$$

როგორც ვხედავთ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის დალაგება წევრთა სიმაღლის მიხედვით ხდება ისე როგორც ლექსიკონში სიტყვების თანამიმდევრობით განლაგება. ამიტომ მრავალწევრის წევრების კლებადი სიმაღლის მიხედვით დალაგებას უწოდებენ მრავალწევრის წევრთა ლექსიკოგრაფიულ დალაგებას. ერთცვლადიან წევრთათვის ეს წესი გვაძლევს წევრთა კლებად ხარისხებად დალაგებას.

მრავალწევრის ლექსიკოგრაფიული დალაგება შესაძლებელია აგრეთვე წევრთა ზრდადი სიმაღლეების მიხედვით $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. მრავალწევრის წევრთა შორის იმ წევრს, რომლის სიმაღლე უდიდესია, ეწოდება მოცემული მრავალწევრის უმაღლესი წევრი. ცხადია, რომ

მოცემული მრავალწევრის კლებად სიმაღლეებად განლაგებისას უმაღლესი წევრი იქნება პირველი წევრი.

ლემა. $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ **მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ნებისმიერი ორი მრავალწევრის ნამრავლის უმაღლესი წევრი უდრის თანამამრავლთა უმაღლესი წევრების ნამრავლს.**

მართლაც, ვთქვათ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის უმაღლესი წევრია

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \tag{4}$$

ხოლო ამავე მრავალწევრის სხვა რომელიმე წევრია

$$bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}. \tag{5}$$

აგრეთვე, ვთქვათ, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის უმაღლესი წევრია

$$cx_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}, \tag{6}$$

ხოლო ამავე მრავალწევრის სხვა რომელიმე წევრია

$$dx_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}. \tag{7}$$

რადგან f მრავალწევრის (4) წევრი მაღალია, ვიდრე (5) წევრი; ამიტომ არსებობს ისეთი i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, რომ

$$k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ \ldots, \ k_{i-1} = l_{i-1}, \text{ ხოლო } k_i > l_i.$$

აგრეთვე, რადგან g მრავალწევრის (6) წევრი მაღალია, ვიდრე (7) წევრი ამიტომ არსებობს ისეთი j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, რომ

$$s_1 = t_1, \ s_2 = t_2, \ \ldots, \ s_{j-1} = t_{j-1}, \text{ ხოლო } s_j > t_j.$$

გადავამრავლოთ f და g მრავალწევრების (4) და (6) უმაღლესი წევრები, მივიღებთ:

$$acx_1^{k_1+s_1} \cdot x_2^{k_2+s_2} \ldots x_n^{k_n+s_n}. \tag{8}$$

ახლა, თუ განვიხილავთ f და g მრავალწევრთა სხვა რომელიმე ორი წევრის (5) და (7), (4) და (7) ან (5) და (6) წევრთა ნამრავლს, ვნახავთ, რომ ისინი უფრო დაბალია, ვიდრე (8) წევრი.

მაგალითისათვის ვუჩვენოთ, რომ (8) წევრი უფრო მაღალია, ვიდრე (4) და (7) წევრების გამრავლების შედეგად მიღებული წევრი

$$adx_1^{l_1+t_1} \cdot x_2^{l_2+t_2} \ldots x_n^{l_n+t_n}. \tag{9}$$

გავარჩიოთ ორი შემთხვევა: $j < i$ და $j \geqslant i$. როცა $j < i$, მივიღებთ:

$$k_1 + s_1 = l_1 + t_1, \ \ k_2 + s_2 = l_2 + t_2, \ \ \ldots, \ \ k_{j-1} + s_{j-1} = l_{j-1} + t_{j-1},$$

$$\text{ხოლო } k_j + s_j > l_j + t_j, \text{ სადაც } k_j = l_j, \ s_j > t_j.$$

როცა $j \geqslant i$, მივიღებთ:

$$k_1+s_1=l_1+t_1, \quad k_2+s_2=l_2+t_2, \quad \ldots, \quad k_{j-1}+s_{j-1}=l_{j-1}+t_{j-1},$$
$$\text{ხოლო } k_i+s_i>l_i+t_i, \text{ სადაც } s_i=t_i, \; k_i>l_i.$$

ანალოგიურად შემოწმდება დანარჩენი ორი შემთხვევა. მაშასადამე, დამტკიცდა, რომ f და g მრავალწევრების უმაღლეს წევრთა ნამრავლი უფრო მაღალია, ვიდრე სხვა რომელიმე ორი წევრის ნამრავლი. ახლა, რადგან $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ მრავალწევრთა რგოლი არ შეიცავს ნულგამყოფ ელემენტებს, ამიტომ (8) წევრი იქნება f და g მრავალწევრების გამრავლების შედეგად მიღებული $f \cdot g$ მრავალწევრის უმაღლესი წევრი.

§ 46. სიმეტრიული მრავალწევრები. ძირითადი თეორემა

ისეთ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრს, რომელიც უცვლელია (ინვარიანტულია) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა ნებისმიერი გადაადგილებისას, **სიმეტრიული მრავალწევრი** ეწოდება.

როგორც განმარტებიდან ჩანს, სიმეტრიულ მრავალწევრებში ყველა უცნობი უნდა შედიოდეს სიმეტრიულად; ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სიმეტრიული მრავალწევრის რომელიმე წევრი შეიცავს x_i ($i=1,2, \ldots, n$) უცნობს k მაჩვენებლით, მასში უნდა იყოს აგრეთვე ისეთი წევრი, რომელიც შეიცავს ყოველ სხვა x_j უცნობს ამავე k მაჩვენებლით. მაგალითად, მრავალწევრებიდან

$$f(x_1, \; x_2)=x_1{}^2+3x_1x_2+x_2{}^2, \quad g(x_1x_2)=x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+5,$$
$$\varphi(x_1x_2)=x_1{}^2+x_1x_2.$$

პირველი ორი სიმეტრიული მრავალწევრია x_1, x_2 უცნობების მიმართ, ხოლო მესამე მრავალწევრი არ არის სიმეტრიული ამავე უცნობების მიმართ.

ცხადია, ყოველი რიცხვი P ველიდან, ე. ი. ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი შეიძლება მივიღოთ როგორც **ნულოვანი სიმაღლის** სიმეტრიული მრავალწევრი. რიცხვი ნული შეიძლება მივიღოთ ნულსიმეტრიულ მრავალწევრად, რომლის სიმაღლე განუსაზღვრელია. სიმეტრიულ მრავალწევრში ყოველი წევრი, გარდა მუდმივი სიდიდისა, ცხადია, ერთისა და იმავე ხარისხისაა.

სიმეტრიული მრავალწევრის განმარტებიდან უშუალოდ გამოდის. **რომ n-უცნობიანი ყოველი ორი f და g სიმეტრიული მრავალწევრის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი ისევ სიმეტრიული მრავალწევრია.** მაშასადამე, $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ყველა სიმეტრიული მრავალწევრის სიმრავლე ქმნის სიმეტრიულ მრავალწევრთა **ქვერგოლს.**

ახლა განვიხილოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მიმართ შემდეგი გამოსახულებანი:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
&\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sigma_n = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

ცხადია რომ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ სიმეტრიული მრავალწევრებია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მიმართ. ამ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ სიმეტრიულ მრავალწევრებს უწოდებენ **ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრებს**. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრთა სიმრავლე **ალგებრულად დამოუკიდებელია**.

ვინაიდან ყოველი ორი სიმეტრიული მრავალწევრის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი ისევ სიმეტრიული მრავალწევრია, ამიტომ **ყოველი მრავალწევრი** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ ასოების მიმართ იქნება სიმეტრიული მრავალწევრი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **ასოების მიმართ**.

მაგალითად, როცა $n=3$, $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$, მაშინ $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$ მრავალწევრში, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ასოების შესაბამის მნიშვნელობათა ჩასმით, x_1, x_2, x_3 უცნობთა მიმართ მივიღებთ შემდეგი სახის სიმეტრიულ მრავალწევრს:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2.$$

ამ უკანასკნელი შენიშვნის შებრუნებული დებულება არის ძირითადი თეორემა სიმეტრიულ მრავალწევრებზე.

თეორემა. **რიცხვთა P ველზე აღებული ყოველი $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სიმეტრიული მრავალწევრი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მიმართ ამავე რიცხვთა P ველზე შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ მრავალწევრი $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ, ე. ი.**

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \qquad (*)$$

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ სიმეტრიული მრავალწევრი, რომლის უმაღლესი წევრია

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\ldots x_n^{k_n}, \qquad (2)$$

დალაგებულია ლექსიკოგრაფიულად. ადვილად შევამჩნევთ, რომ უმაღლესი წევრის მაჩვენებლები $k_1, k_2, \ldots, k_n$ აკმაყოფილებს უტოლობას

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n. \qquad (3)$$

მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი: ვთქვათ $k_2<k_3$. თანახმად განმარტებისა, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სიმეტრიული მრავალწევრი უნდა შეიცავდეს შემდეგ

$$bx_1^{k_1}x_2^{k_3}x_3^{k_2}\ldots x_n^{k_n} \tag{4}$$

წევრსაც. მიღებული (4) წევრის სიმაღლე უფრო მეტია, ვიდრე (2) წევრის სიმაღლე, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. მაშასადამე, თუ (2) წევრი მოცემული მრავალწევრის უმაღლესი წევრია, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს (3) თანაფარდობას.

განვიხილოთ ახლა დამხმარე სიმეტრიული მრავალწევრი

$$\varphi_1=a\sigma_1^{k_1-k_2}\cdot\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}. \tag{5}$$

რადგან $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების უმაღლესი წევრები შესაბამისად არის:

$$x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots, x_1x_2x_3\ldots x_n,$$

ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად, (5) სიმეტრიული მრავალწევრის უმაღლესი წევრი იქნება:

$$ax_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}(x_1x_2x_3)^{k_3-k_4}\ldots(x_1x_2x_3\ldots x_n)^{k_n}=ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}.$$

მივიღეთ, რომ მოცემულ f და დამხმარე φ_1 სიმეტრიულ მრავალწევრებს ერთი და იგივე უმაღლესი წევრები აქვთ. განვიხილოთ სხვაობა

$$f-\varphi_1=f_1, \tag{6}$$

ვინაიდან f და φ_1 სიმეტრიულ მრავალწევრებს ერთნაირი უმაღლესი წევრები აქვთ, სხვაობის დროს უმაღლესი წევრები გაბათილდება და ამიტომ f_1 სიმეტრიული მრავალწევრის უმაღლესი წევრი უფრო დაბალი იქნება, ვიდრე f სიმეტრიული მრავალწევრის უმაღლესი წევრი. ახლა f_1 სიმეტრიული მრავალწევრისათვის, ისე როგორც f-თვის, შევადგინოთ დამხმარე φ_2 სიმეტრიული მრავალწევრი და განვიხილოთ სხვაობა

$$f_1-\varphi_2=f_2. \tag{7}$$

ვინაიდან f_1 და φ_2 სიმეტრიული მრავალწევრების უმაღლესი წევრები ერთნაირია, ამიტომ f_2 სიმეტრიული მრავალწევრის უმაღლესი წევრები დაბალია, ვიდრე f_1-ის უმაღლესი წევრი. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, მივიღებთ $f_3, f_4, \ldots$ სიმეტრიულ მრავალწევრებს, რომელთა უფროსი წევრის სიმაღლეები თანდათანობით კლებულობს და სასრული s ნაბიჯის შემდეგ გვექნება:

$$f_{s-1}-\varphi_s=0. \tag{8}$$

მართლაც, ვთქვათ,

$$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n} \tag{9}$$

არის უმაღლესი წევრი რომელიმე f_i ($i=1, 2, 3, \ldots,$) სიმეტრიული მრავალწევრისა. ვინაიდან (2) წევრი უფრო მაღალია, ვიდრე (9) წევრი და (9) უმაღლესი წევრია f_i მრავალწევრისა, ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონდეს შემდეგ უტოლობებს:

$$k_1 \geqslant l_1 \text{ და } l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_n, \tag{10}$$

სადაც k_1 გარკვეული მთელი დადებითი რიცხვია. ამიტომ, ცხადია, რომ $l_1, l_2, \ldots, l_n$ სახის მთელი დადებითი რიცხვითი სისტემები, რომელთათვის სრულდება (10) უტოლობები, შეიძლება იყოს მხოლოდ სასრული რაოდენობის. ამგვარად, გარკვეული სასრული s ნაბიჯის შემდეგ ადგილი ექნება (8) ტოლობას.

ახლა (6), (7) და (8) ტოლობათა შეკრებით მივიღებთ:

$$f=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_s=\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \tag{11}$$

ამით ძირითადი თეორემა სიმეტრიულ მრავალწევრებზე დამტკიცებულია. დავამტკიცოთ ახლა, რომ ეს წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

განვიხილოთ სხვაობა

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)-g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=\lambda(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=0.$$

ვინაიდან $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ფუნქციები ალგებრულად დამოუკიდებელია, $\lambda(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=0$ ტოლობიდან, როგორც ვიცით (გვ. 367), გამომდინარეობს ამ მრავალწევრის იგივურად ნულთან ტოლობა $\lambda(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)\equiv 0$, ე. ი. $\lambda(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი უდრის ნულს. მაშასადამე, ვღებულობთ, რომ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)\equiv g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ და ამით ყოველი $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სიმეტრიული მრავალწევრის (11) სახით წარმოდგენის ერთადერთობა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, რიცხვთა P ველზე მოცემულია n-ური ხარისხის

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{12}$$

მრავალწევრი. თუ ვიგულისხმებთ, რომ P ველის გაფართოებულ რომელიმე $\overline{P}$ ველში $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მოცემული მრავალწევრის ფესვებია, მაშინ (1) აღნიშვნების და ვიეტას განზოგადებული ფორმულების მიხედვით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\sigma_1=-\frac{a_1}{a_0}, \quad \sigma_2=\frac{a_2}{a_0}, \ldots, \quad \sigma_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \tag{13}$$

(13) თანაფარდობებიდან ვღებულობთ მეტად საინტერესო შედეგს.

შედეგი. რიცხვთა P ველზე აღებული ყოველი n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვებისაგან შედგენილი ნებისმიერი სიმეტრიული მრავალწევრი გარკვეული რიცხვია P ველიდან.

მაგალითი 1. სიმეტრიული მრავალწევრი

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$$

წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი σ_1, σ_2 და σ_3 ასოების მიმართ. აქ უმაღლესი წევრია $x_1^2x_2$, $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=0$. ამიტომ დამხმარე φ_1 სიმეტრიული მრავალწევრი იქნება:

$$\varphi_1=\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3).$$

განვიხილოთ სხვაობა

$$f-\varphi_1=-3x_1x_2x_3,$$

ე. ი. $f_1=-3x_1x_2x_3$. აქ $k_1=k_2=k_3=1$, ამიტომ f_1-თვის დამხარე φ_2 სიმეტრიული მრავალწევრი იქნება:

$$\varphi_2=-3\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3=-3x_1x_2x_3=-3\sigma_3.$$

მივიღებთ:

$$f_1-\varphi_2=0,$$

ე. ი.

$$f=\varphi_1+\varphi_2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3.$$

შემდეგი მაგალითების განხილვამდე შევთანხმდეთ შემდეგში. თუ

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} \tag{14}$$

არის $a\neq 0$ რიცხვისა და $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა ხარისხების ნამრავლი, სადაც ზოგიერთი k_i შეიძლება იყოს ნული, მაშინ სიმბოლოთი

$$S(ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}). \tag{15}$$

აღვნიშნოთ ყველა იმ წევრის ჯამი, რომლებიც მიიღება (14) წევრიდან უცნობთა ყველა შესაძლო გადანაცვლებით. ცხადია, რომ ეს ჯამი მოგვცემს ერთგვაროვან სიმეტრიულ მრავალწევრს.

მაგალითი 2. სიმეტრიული მრავალწევრი

$$f=S(x_1^2x_2^2)=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+\dots+x_{n-1}^2x_n^2$$

წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ.

მოცემული სიმეტრიული მრავალწევრის უმაღლესი წევრია $x_1^2x_2^2$, აქ $k_1=2$, $k_2=2$, $k_3=\dots=k_n=0$. დამტკიცებული თეორემის თანახმად, $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ მრავალწევრის მისაღებად ჯერ უნდა ვიპოვოთ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ მრავალწევრები და შემდეგ ავიღოთ მათი ჯამი. ეს პროცესი

რომ შევასრულოთ, საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ წევრები, რომლებიც: 1. დაბალია ვიდრე $x_1^2 x_2^2$ წევრი. 2. უნდა იყოს შესაბამისი სიმეტრიული მრავალწევრების უმაღლესი წევრები, ე. ი. $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \dots \geqslant l_n$ და 3. $l_1, l_2, \dots, l_n$ მაჩვენებლების ჯამი ყოველთვის უნდა იყოს 4, ე. ი. $l_1+l_2+\dots+l_n=4$. ამრიგად, ვღებულობთ თანაფარდობათა შემდეგ ცხრილს:

f-ის უმაღლესი წევრის მაჩვენებლები:

$$2200, \dots, \text{ ამიტომ } \varphi_1=\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}=\sigma_2^2,$$

f_1-ის უმაღლესი წევრის მაჩვენებლები:

$$21100, \ \dots, \ \varphi_2=A\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}=A\sigma_1\sigma_3,$$

f_2-ის უმაღლესი წევრის მაჩვენებლები:

$$11110 \dots, \ \varphi_3=B\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}=B\sigma_4.$$

მაშასადამე, მოცემული f სიმეტრიული მრავალწევრი, ვინაიდან მისი უფროსი წევრის კოეფიციენტია ერთი, ხოლო f_1 და f_2 მრავალწევრების უფროსი წევრის კოეფიციენტებია შესაბამისად A და B, წარმოგვიდგება ასე:

$$f=\sigma_2^2+A\sigma_1\sigma_3+B\sigma_4. \tag{16}$$

რადგან (16) თანაფარდობა მართებულია, მასში შემავალი $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის A და B კოეფიციენტები გამოვთვალოთ განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით. შევარჩიოთ აღნიშნულ უცნობთა ისეთი მნიშვნელობანი, რომ გამოთვლები გაადვილდეს.

დავუშვათ,

$$x_1=x_2=x_3=1, \ x_4=\dots=x_n=0.$$

მივიღებთ:

$$f=3, \ \sigma_1=3, \ \sigma_2=3, \ \sigma_3=1, \ \sigma_4=0.$$
$$3=9+3A, \ A=-2.$$

ახლა დავუშვათ,

$$x_1=x_2=x_3=x_4=1, \ x_5=\dots=x_n=0.$$

მივიღებთ:

$$f=6, \ \sigma_1=4, \ \sigma_2=6, \ \sigma_3=4, \ \sigma_4=1.$$
$$6=36-32+B, \ B=2.$$

ამრიგად, საბოლოოდ f მრავალწევრი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4.$$

მაგალითი 3. სიმეტრიული მრავალწევრი $f=s(x_1^3)=x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3$ წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ელემენტარული მრავალწევრების მიმართ. წინა მაგალითში გამოყენებული მეთოდის მიხედვით f სიმეტრიული მრავალწევრი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$f=\sigma_1^3+A\sigma_1\sigma_2+B\sigma_3.$$

A და B კოეფიციენტებისათვის შესაბამისად გვექნება: $A=-3$, $B=3$, ე. ი.

$$f=x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3. \qquad (17)$$

(17) ფორმულის დახმარებით შეიძლება ვიპოვოთ, მაგალითად, რაციონალურ რიცხვთა ველზე აღებული $f(x)=3x^4+2x^2-x+\frac{1}{2}$ მრავალწევრის ფესვების კუბების ჯამი. თანახმად (13) ფორმულებისა, გვექნება:

$$\sigma_1=-\frac{0}{3}, \quad \sigma_2=\frac{2}{3}, \quad \sigma_3=-\frac{1}{3}.$$

თუ ახლა მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვებს აღვნიშნავთ x_1, x_2, x_3, x_4, მივიღებთ:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=0^3-3\cdot 0\cdot\frac{2}{3}+3\left(-\frac{1}{3}\right)=-1.$$

მაგალითი 4. სიმეტრიული მრავალწევრის

$$f=x_1^3x_2^2x_3+x_1^2x_2^3x_3+x_1^2x_2x_3^3+x_1x_2^2x_3^3+x_1^3x_2x_3^2+x_1x_2^3x_3^2+$$

$$+\frac{2}{3}(x_1^3+x_2^3+x_3^3),$$

ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრებად წარმოდგენისათვის უმჯობესია f დავშალოთ ორი φ და g სიმეტრიული მრავალწევრის ჯამად:

$$f=\varphi+g,$$

სადაც

$$\varphi=x_1^3x_2^2x_3+x_1^2x_2^3x_3+x_1^2x_2x_3^3+x_1x_2^2x_3^3+x_1^3x_2x_3^2+x_1x_2^3x_3^2$$

მეექვსე ხარისხის მრავალწევრია, ხოლო $g=\frac{2}{3}(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$ მესამე ხარისხის მრავალწევრია. φ სიმეტრიული მრავალწევრისათვის მივი-

ლებთ: $\varphi=\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_2^2$, ხოლო g სიმეტრიული მრავალწევრისათვის, თანახმად მე-3 მაგალითისა, გვექნება: $g=\frac{2}{3}\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3$. ამრიგად მოცემული f სიმეტრიული მრავალწევრი საბოლოოდ ასე წარმოგვიდგება:

$$f=\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2+\frac{2}{3}\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3.$$

§ 47. ხარისხების ჯამის რეკურენტული ფორმულები

განვიხილოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა k ხარისხების ჯამი და ის აღვნიშნოთ სიმბოლოთი

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ). \tag{1}$$

ცხადია, s_k ჯამი სიმეტრიული მრავალწევრია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მიმართ. s_k სიმეტრიული მრავალწევრი წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ არის ფესვები შემდეგი მრავალწევრისა:

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

ე. ი.

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n). \tag{2}$$

განვიხილოთ $f(x)$ მრავალწევრის წარმოებული

$$f'(x)=(x-x_2)\ldots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots+$$
$$+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}).$$

$f'(x)$ და $f(x)$ მრავალწევრთა შეფარდების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}.$$

აქედან

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-x_1}+\frac{f(x)}{x-x_2}+\cdots+\frac{f(x)}{x-x_n}. \tag{3}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $f(x)$ მრავალწევრის $x-x_1$, $x-x_2$, $\ldots$, $x-x_n$ ორწევრებზე გაყოფის შედეგად შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ $n-1$ ხარისხის მრავალწევრებს:

$$x^{n-1}+(x_1+a_1)x^{n-2}+(x_1^2+a_1x_1+a_2)x^{n-3}+\ldots+x_1^{n-1}+$$
$$+a_1x_1^{n-2}+a_2x_1^{n-3}+\ldots+a_{n-1},$$
$$x^{n-1}+(x_2+a_1)x^{n-2}+(x_2^2+a_1x_2+a_2)x^{n-3}+\ldots+x_2^{n-1}+$$
$$+a_1x_2^{n-2}+a_2x_2^{n-3}+\ldots+a_{n-1}. \tag{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{n-1}+(x_n+a_1)x^{n-2}+(x_n^2+a_1x_n+a_2)x^{n-3}+\ldots+x_n^{n-1}+$$
$$+a_1x_n^{n-2}+a_2x_n^{n-3}+\ldots+a_{n-1}.$$

(1) აღნიშვნის და (3) ტოლობის საფუძველზე (4) ტოლობათა შეკრებით მივიღებთ:

$$f'(x)=nx^{n-1}+(s_1+na_1)x^{n-2}+(s_2+a_1s_1+na_2)x^{n-3}+$$
$$+\ldots+s_{n-1}+a_1s_{n-2}+\ldots+na_{n-1}. \tag{5}$$

მეორე მხრივ,

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}. \tag{6}$$

(5) და (6) ტოლობათა შედარებით მივიღებთ:

$$\begin{gathered} s_1+na_1=na_1-a_1, \\ s_2+a_1s_1+na_2=na_2-2a_2, \\ s_3+a_1s_2+a_2s_1+na_3=na_3-3a_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{n-1}+a_1s_{n-2}+a_2s_{n-3}+\ldots+na_{n-1}=a_{n-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

თუ ახლა მხედველობაში მივიღებთ ვიეტას განზოგადებულ ფორმულებს და მოვახდენთ მარტივ გამოთვლებს (7) თანაფარდობებიდან, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} &s_1=\sigma_1 \\ &s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2 \\ &s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3 \\ &s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

ახლა, თუ $s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}$ მიღებულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (7) თანაფარდობათა უკანასკნელ ტოლობაში, გვექნება:

$$s_{n-1}+a_1s_{n-2}+a_2s_{n-3}+\ldots+(n-1)a_{n-1}=0, \tag{9}$$

აქ ადვილად გამოვთვლით s_{n-1} ჯამის მნიშვნელობას.

შევნიშნოთ, რომ (9) **ფორმულით შეიძლება s_k ჯამი წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული მრავალწევრების მიმართ მხოლოდ $k=1, 2, 3, \ldots, n-1$ მნიშვნელობებისათვის.**

ახლა განვიხილოთ (9) ფორმულის ანალოგიური ფორმულის მიღება $k=n, n+1, \ldots$ შემთხვევისათვის. ამ მიზნით $f(x)$ მრავალწევრი გავამრავლოთ x^m-ზე, სადაც m მთელი არაუარყოფითი რიცხვია, და შემ-

დეგ თანამიმდევრობით x-ის ნაცვლად ჩავსვათ $f(x)$ მრავალწევრის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ფესვები. მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$x_1^{n+m}+a_1x_1^{n+m-1}+a_2x_1^{n+m-2}+\ldots+a_nx_1^m=0,$$
$$x_2^{n+m}+a_1x_2^{n+m-2}+a_2x_2^{n+m-2}+\ldots+a_nx_2^m=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n^{n+m}+a_1x_n^{n+m-1}+a_2x_n^{n+m-2}+\ldots+a_nx_n^m=0.$$

თუ ამ ტოლობებს შევკრებთ სვეტების მიხედვით, თანახმად (1) აღნიშვნისა, გვექნება:

$$s_{n+m}+a_1s_{n+m-1}+a_2s_{n+m-2}+\ldots+a_{n-1}s_{m+1}+a_ns_m=0. \tag{10}$$

(10) **ფორმულით შეიძლება** $s_n, s_{n+1}, \ldots$ **ხარისხების ჯამები წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებისა.**

მაგალითად, თუ გვინდა ვიპოვოთ s_n, (9) ტოლობაში m-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ $m=0$, ვინაიდან $s_0=n$, გვექნება:

$$s_n+a_1s_{n-1}+a_2s_{n-2}+\ldots+a_{n-1}s_1+na_n=0. \tag{11}$$

(10) ფორმულაში თუ ჩავსვამთ $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ ნაპოვნ მნიშვნელობებს, მივიღებთ s_n-ის გამოსახვას $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ. ახლა, თუ გვინდა s_{n+1} ჯამი წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებისა, (10) ფორმულაში უნდა ჩავსვათ $m=1$ და $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ჯამების ნაპოვნი მნშვნელობანი.

ამრიგად, (9) და (10) ფორმულების საშუალებით შეიძლება წარმოვადგინოთ ყოველი s_k ჯამი როგორც მრავალწევრი ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ, თუ ცნობილია $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ ჯამები. ამ ფორმულებს ეწოდება s_k ჯამის **რეკურენტული ფორმულები**. ეს ფორმულები პირველად სხვა მიზნით მიღებულ იქნა **ნიუტონის** მიერ.

შევნიშნოთ, რომ (8) ფორმულების საშუალებით შეიძლება $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების წარმოდგენა s_k ($k=1, 2, \ldots$) ჯამების საშუალებით:

მაგალითად, (8) ტოლობებიდან $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ და σ_4 ელემენტარული სიმეტრული მრავალწევრებისათვის შესაბამისად გვექნება:

$$\sigma_1=s_1,$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2}s_1^2-\frac{1}{2}s_2=\frac{1}{2}(s_1^2-s_2),$$

$$\sigma_3=\frac{1}{6}s_1^3-\frac{1}{2}s_1s_2+\frac{1}{3}s_3=\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3),$$

$$\sigma_4=\frac{1}{24}(s_1^4-6s_1^2s_2+8s_1s_3+3s_2^2-6s_4).$$

(9) და (10) რეკურენტული ფორმულების საშუალებით შეიძლება მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვების ცოდნის გარეშე ვიპოვოთ მისი ფესვების ნებისმიერი ხარისხების s_k ჯამი. ადვილად შევნიშნავთ, რომ თუ $f(x)$ მრავალწევრი აღებულია რიცხვთა P ველზე, მაშინ ყოველი $s_k \in P$.

ახლა s_k ჯამების გამოყენებით გავეცნოთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვთა მიახლოებით მოძებნას.

ნ. ი. ლობაჩევსკის მეთოდის იდეა. ლობაჩევსკის მეთოდის საშუალებით, წინასწარ ფესვების საზღვრების გამოყოფის გარეშე შეიძლება ვიპოვოთ ყველა ფესვის (როგორც ნამდვილის, ისე კომპლექსურის) მიახლოებითი მნიშვნელობანი ნებისმიერი სიზუსტით. ლობაჩევსკის მეთოდის იდეა მდგომარეობს შემდეგში. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილკოეფიციენტებიანი n-ური ხარისხის ალგებრული განტოლება

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \qquad (1)$$

სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მისი ფესვები $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ნამდვილია და აბსოლუტური მნიშვნელობით სხვადასხვაა. ვთქვათ,

$$|x_1|>|x_2|>\ldots>|x_{n-1}|>|x_n|. \qquad (2)$$

შევადგინოთ განტოლება

$$f_1(x)=0, \qquad (3)$$

რომლის ფესვები (1) განტოლების ფესვების კვადრატებია შებრუნებული ნიშნით:

$$-x_1^2,\ -x_2^2,\ \ldots,\ -x_{n-1}^2,\ -x_n^2.$$

შემდეგ, შევადგინოთ განტოლება

$$f_2(x)=0, \qquad (4)$$

რომლის ფესვები (3) განტოლების ფესვების კვადრატებია შებრუნებული ნიშნით:

$$-x_1^4,\ -x_2^4,\ \ldots,\ -x_{n-1}^4,\ -x_n^4$$

და ა. შ. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, k საფეხურის გავლის შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$$f_k(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n, \qquad (5)$$

რომლის ფესვები იქნება:

$$-x_1^{2^k}, -x_2^{2^k}, \ldots, -x_{n-1}^{2^k}, -x_n^{2^k}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $2^k=s$; მაშინ (5) განტოლების ფესვები იქნება:

$$-x_1^s, -x_2^s, \ldots, -x_{n-1}^s, -x_n^s. \tag{6}$$

თუ ახლა მოვიგონებთ ვიეტას განზოგადებულ ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\frac{A_1}{A_0}=x_1^s+x_2^s+x_3^s+\ldots,+x_n^s=$$

$$=x_1^s\left[1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^s+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^s\right],$$

$$\frac{A_2}{A_0}=x_1^s x_2^s+x_1^s x_3^s+\ldots+x_{n-1}^s x_n^s=$$

$$=x_1^s x_2^s\left[1+\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^s+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}\,x_n}{x_1\,x_2}\right)^s\right],$$

$$\frac{A_3}{A_0}=x_1^s x_2^s x_3^s+x_1^s x_2^s x_4^s+\ldots+x_{n-2}^s x_{n-1}^s x_n^s=$$

$$=x_1^s x_2^s x_3^s\left[1+\left(\frac{x_4}{x_3}\right)^s+\cdots+\left(\frac{x_{n-2}x_{n-1}x_n}{x_1x_2x_3}\right)^s\right]. \tag{7}$$

$$\frac{A_n}{A_0}=x_1^s x_2^s x_3^s\ldots x_n^s.$$

როგორც ვხედავთ, (7) ტოლობებით მოცემული (5) განტოლების $\frac{A_1}{A_0}$, $\frac{A_2}{A_0}, \cdots, \frac{A_n}{A_0}$ კოეფიციენტთა შეფარდება სიმეტრიული მრავალწევრებია (1) განტოლების x_1, x_2, ..., x_n ფესვების მიმართ. შევნიშნავთ, რომ ეს კოეფიციენტები შეიძლება გამოვიანგარიშოთ მიცემული (1) განტოლების კოეფიციენტების მიხედვით. როცა s საკმაოდ დიდია, მაშინ თანახმად (2) პირობისა წესიერი წილადების $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_2}, \cdots, \frac{x_{n-1}x_n}{x_1x_2}, \cdots$ s ხარისხები იქნება ძალიან მცირე და (7) ტოლობებიდან მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ტოლობებს:

$$\frac{A_1}{A_0}\approx x_1^s, \frac{A_2}{A_0}\approx x_1^s x_2^s, \frac{A_3}{A_0}\approx x_1^s x_2^s x_3^s, \ldots, \frac{A_n}{A_0}=x_1^s x_2^s x_3^s\cdots x_n^s. \tag{8}$$

აქედან, მოცემული $f(x)=0$ განტოლების საძიებელი ფესვების s ხარისხების მიახლოებითი მნიშვნელობანი იქნება:

$$x_1^s \approx \frac{A_1}{A_0}, \qquad x_2^s \approx \frac{A_2}{A_1}, \qquad x_3^s \approx \frac{A_3}{A_2}, \ldots, x_n^s \approx \frac{A_n}{A_{n-1}}. \tag{9}$$

ლოგარითმების ცხრილის დახმარებით (9) რიცხვებიდან s ხარისხის ფესვის ამოღებით მივიღებთ მოცემული განტოლების ფესვების მიახლოებით მნიშვნელობებს.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0. \tag{10}$$

მისი ფესვები აღვნიშნოთ: x_1, x_2, x_3. შევადგინოთ ისეთი განტოლება, რომლის ფესვებია:

$$-x_1^2, \; -x_2^2, \; -x_3^2.$$

საძიებელი განტოლება აღვნიშნოთ ასე:

$$f_1(x)=x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0.$$

ვიეტას ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\begin{gathered}(-x_1^2)+(-x_2^2)+(-x_3^2)=-A_1, \;\; x_1^2+x_2^2+x_3^2=A_1,\\ (-x_1^2)(-x_2^2)+(-x_1^2)(-x_3^2)+(-x_2^2)(-x_3^2)=A_2,\\ x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=A_2,\\ (-x_1^2)(-x_2^2)(-x_3^2)=-A_3, \qquad x_1^2x_2^2x_3^2=A_3.\end{gathered} \tag{11}$$

ვიცით, რომ:

$$\begin{gathered}x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sigma_1^2-2\sigma_2, \;\; x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3,\\ x_1^2x_2^2x_3^2=\sigma_3^2,\end{gathered} \tag{12}$$

სადაც

$$\sigma_1=x_1+x_2+x_3, \;\; \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, \;\; \sigma_n=x_1x_2x_3$$

ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებია. იმავე ვიეტას ფორმულებით გვაქვს:

$$\sigma_1=-a_1, \;\; \sigma_2=a_2, \;\; \sigma_3=-a_3.$$

ამრიგად, საძიებელი განტოლების კოეფიციენტები (11) და (12) ტოლობათა მიხედვით იქნება:

$$A_1=a_1^2-2a_2, \;\; A_2=a_2^2-2a_1a_3, \;\; A_3=a_3^2.$$

ლობაჩევსკის მეთოდის შემდგომი ღრმად შესწავლის მიზნით მკითხველს შეუძლია გაეცნოს ა. ნ. კრილოვის ცნობილ წიგნს „ლექციები მია-

ხლოებითი გამოთვლების შესახებ“ და ელემენტარული მათემატიკის ენციკლოპედიას (ტომი II, გვ. 343—356).

ლობაჩევსკის მეთოდით განტოლების ფესვების მიახლოებითი მოძებნა დაკავშირებულია დიდ გამოთვლებთან; ამიტომ ანგარიშის გაადვილების მიზნით ახლა ლობაჩევსკის მეთოდით სარგებლობისათვის იყენებენ არითმომეტრს. ნ. ი. ლობაჩევსკის მეთოდი მის მიერ აღმოჩენილ იქნა არაუგვიანეს 1832 წლისა და გამოქვეყნდა 1834 წელს. ანალოგიური მეთოდი 1857 წელს ლობაჩევსკისაგან დამოუკიდებლად აღმოჩენილ იქნა შვეიცარიელი მათემატიკოსის — გრეფფეს მიერ. ამიტომ ეს მეთოდი დიდი ხნის მანძილზე ცნობილი იყო როგორც გრეფფეს მეთოდი.

§ 48. სიმეტრიული მრავალწევრების გამოყენებით ალგებრის ძირითადი თეორემის დამტკიცება

ჩვენთვის უკვე ცნობილია (გვ. 281), რომ ყოველ კენტი რიგის ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრს ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს. ახლა აღნიშნული შედეგისა და სიმეტრიულ მრავალწევრთა თვისებების გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ **ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს ერთი კომპლექსური ფესვი მაინც აქვს.**

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილკოეფიციენტებიანი $n = 2^k q$ (სადაც q კენტი რიცხვია) ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი. ვინაიდან, როცა $k=0$, მივიღებთ $n=q$ კენტი ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრს, რომლისათვის ჩვენი დებულება მართებულია, ამიტომ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $k>0$, ე. ი. როცა n ლუწი რიცხვია. დებულების დამტკიცებისათვის გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი k-ს მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენი დებულება მართებულია ყველა ისეთი ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრისათვის, რომელთა ხარისხი იყოფა 2^{k-1}-ზე და არ იყოფა 2^k-ზე (შესაძლებელია, რომ ასეთი მრავალწევრების ხარისხი მეტი იყოს n-ზე).

ვიგულისხმოთ, რომ K კომპლექსურ რიცხვთა ველზე მოცემული $f(x)$ მრავალწევრისათვის დაშლის ველია P ველი. საზოგადოდ $K \subseteq P$. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ დაშლის ველში $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ არის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები. ამოვირჩიოთ ნებისმიერი c ნამდვილი რიცხვი და განვიხილოთ რიცხვები

$$\beta_{ij}=\alpha_i\alpha_j+c(\alpha_i+\alpha_j) \quad (i<j). \tag{1}$$

ცხადია, რომ ყოველი $\beta_{ij} \in P$. ფიქსირებული c-თვის ყველა შესაძლო β_{ij} რიცხვი იქნება:

$$\underbrace{\beta_{12}, \beta_{13}, \ldots, \beta_{1n}}_{n-1}, \quad \underbrace{\beta_{23}, \beta_{24}, \ldots, \beta_{2n}}_{n-2}, \quad \ldots, \quad \underbrace{\beta_{n-2,\, n-1}, \beta_{n-3,\, n}}_{2}, \quad \underbrace{\beta_{n-1,\, n}}_{1}$$

მათი რაოდენობა კი უდრის:

$$1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2^k q(2^k q-1)}{2}=2^{k-1}q', \tag{2}$$

სადაც q', ვინაიდან ის წარმოადგენს ორი კენტი რიცხვის ნამრავლს, კენტია.

$2^{k-1}q'$ ხარისხის მრავალწევრი, რომლის ფესვებია ყველა β_{ij} აღვნიშნოთ $g(x)$-ით. ცხადია, რომ $g(x)$-ის ხარისხი იყოფა 2^{k-1}-ზე და არ იყოფა 2^k-ზე. რადგან ყველა $\beta_{ij}\in P$, ამიტომ ამ ველზე $g(x)$ მრავალწევრი დაიშლება წრფივ მამრავლებად

$$g(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x-\beta_{ij}). \qquad (3)$$

თუ დავაკვირდებით (3) თანაფარდობის მარჯვენა მხარეს ადვილად შევამჩნევთ, რომ x-ის კლებად ხარისხებად დალაგების შემდეგ მისი კოეფიციენტები იქნება ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები β_{ij} ასოების მიმართ. მაგრამ, ვინაიდან ყველა β_{ij}, როგორც ეს (1) თანაფარდობიდან ჩანს, სიმეტრიული მრავალწევრია α_i და α_j ასოების მიმართ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $g(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები სიმეტრიული მრავალწევრებია $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ასოების მიმართ. აქედან, სიმეტრიულ მრავალწევრთა ძირითადი თეორემის თანახმად, მივიღებთ, რომ $g(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები გარკვეული მრავალწევრებია $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტების მიმართ, ე. ი. $g(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტებიც ნამდვილი რიცხვები ყოფილა. ახლა, ვინაიდან $g(x)$ მრავალწევრი ნამდვილკოეფიციენტებიანია და მისი ხარისხი იყოფა 2^{k-1}-ზე, ხოლო არ იყოფა 2^k-ზე, ინდუქციური დაშვების თანახმად, აგებულ $g(x)$ მრავალწევრს ერთი β_{ij} კომპლექსური ფესვი მაინც აქვს, ე. ი. ერთი β_{ij} ფესვი მაინც ეკუთვნის არა მარტო $f(x)$ მრავალწევრის P დაშლის ველს, არამედ K კომპლექსურ რიცხვთა ველს. ამრიგად, c ნამდვილი რიცხვის ყოველი მნიშვნელობისათვის არსებობს ისეთი $1\le i\le n$ და $1\le j\le n$ ნომერი, რომ $\alpha_i\alpha_j+c(\alpha_i+\alpha_j)$ ელემენტი საზოგადოდ იქნება კომპლექსური რიცხვი. ცხადია, რომ c რიცხვის რომელიმე სხვა d მნიშვნელობისათვისაც არსებობს სხვა ისეთი $1\le k\le n$ და $1\le l\le n$ ნომერი, რომ $\alpha_k\alpha_l+d(\alpha_k+\alpha_l)$ ელემენტი საზოგადოდ იქნება კომპლექსური რიცხვი. ახლა, ვინაიდან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა და არსებობს მხოლოდ სასრული რაოდენობის სხვადასხვა i, j წყვილი, ჩვენ შეგვიძლია მოვნახოთ ისეთი ორი სხვადასხვა c და c' ნამდვილი რიცხვი და მათი შესაბამისი ისეთი ერთი და იგივე i, j წყვილი, რომ ელემენტები

$$\begin{aligned}\alpha_i\alpha_j+c(\alpha_i+\alpha_j)&=\beta_{ij}\\ \alpha_i\alpha_j+c'(\alpha_i+\alpha_j)&=\beta_{ij}',\end{aligned} \qquad (4)$$

საზოგადოდ იყოს კომპლექსური რიცხვები. (4) ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$\alpha_i+\alpha_j=\frac{\beta_{ij}-\beta_{ij}'}{c-c'}$$

α_i და α_j ფესვების ჯამი საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვია. მიღებული შედეგის საფუძველზე, მაგალითად, (4) ტოლობის პირველი ტოლობიდან გამოდის, რომ $\alpha_i\,\alpha_j$ ნამრავლიც აგრეთვე კომპლექსური რიცხვია. ამრიგად, ვღებულობთ, რომ α_i და α_j საზოგადოდ არის შემდეგი კომპლექსურკოეფიციენტებიანი

$$x^2-(\alpha_i+\alpha_j)x+\alpha_i\alpha_j=0$$

კვადრატული განტოლების ფესვები. როგორც ვიცით, ყოველ კომპლექსურკოეფიციენტებიან კვადრატულ განტოლებას კომპლექსურ რიცხვთა ველში ორი ფესვი აქვს.

ამრიგად, α_i და α_j საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვებია. მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ მოცემული $n\ge 2$ ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს კომპლექსურ რიცხვთა ველში ერთი კომპლექსური ფესვი მაინც აქვს.

ახლა ალგებრის ძირითადი თეორემის — კომპლექსურ რიცხვთა ველზე აღებულ ყოველ $n\geqslant 1$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს კომპლექსურ რიცხვთა ველში ერთი ფესვი მაინც აქვს — დამტკიცების მიზნით განვიხილოთ n-ური ხარისხის კომპლექსურკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი.

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n. \tag{5}$$

შევადგინოთ $\bar{f}(x)$ მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები (5) მრავალწევრის კოეფიციენტების შეუღლებულია:

$$\bar{f}(x)=\bar{a}_0x^n+\bar{a}_1x^{n-1}+\dots+\bar{a}_{n-1}x+\bar{a}_n.$$

განვიხილოთ მათი ნამრავლი, მივიღებთ:

$$\Phi(x)=f(x)\cdot\bar{f}(x)=a_0\bar{a}_0x^{2n}+(a_0\bar{a}_1+a_1\bar{a}_0)x^{2n-1}+(a_0\bar{a}_k+a_1\bar{a}_{k-1}+\dots+$$
$$\dots+a_k\bar{a}_0)x^{2n-k}+\dots+a_n\bar{a}_n.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მიღებული $\Phi(x)$ მრავალწევრის ყველა

$$b_k=a_0\bar{a}_k+a_1\bar{a}_{k-1}+\dots+a_k\bar{a}_0,\quad k=0,\ 1,\ 2\dots,$$

კოეფიციენტი ნამდვილია. მართლაც, თანახმად კომპლექსური რიცხვების ჯამისა და ნამრავლის მოდულის თვისებისა, ყოველი k-თვის გვექნება $\bar{b}_k=b_k$. ამრიგად, მოცემული კომპლექსურკოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრისათვის შედგენილი ლუწი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი ნამდვილკოეფიციენტებიანია. ზემოთ დამტკიცებული დებულების თანახმად, ასეთ $\Phi(x)$ მრავალწევრს ერთი α კომპლექსური ფესვი მაინც აქვს, ე. ი.

$$\Phi(\alpha)-f(\alpha)\cdot\bar{f}(\alpha)=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ან $f(\alpha)=0$, ან $\bar{f}(\alpha)=0$, ან ორივე უდრის ნულს. თუ $f(\alpha)=0$, მაშინ ალგებრის ძირითადი თეორემა დამტკიცებულია. განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, ე. ი. ვთქვათ,

$$\bar{f}(\alpha)=\bar{a}_0\alpha^n+\bar{a}_1\alpha^{n-1}+\dots+\bar{a}_{n-1}\alpha+\bar{a}_n=0.$$

თუ ახლა განვიხილავთ ამ ტოლობის ორივე მხარის შეუღლებულს, ვინაიდან $\bar{\bar{a}}_i=a_i$ $(i=0,\ 1,\ 2,\dots,n)$ გვექნება $\overline{\bar{f}(\alpha)}=f(\bar{\alpha})$, ე. ი.

$$f(\bar{\alpha})=a_0\bar{\alpha}^n+a_1\bar{\alpha}^{n-1}+\dots+a_{n-1}\bar{\alpha}+a_n=0.$$

ამრიგად, მეორე შემთხვევაში მივიღეთ, რომ α კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული $\bar{\alpha}$ რიცხვი არის მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი. ამით ალგებრის ძირითადი თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია. დამტკიცებული თეორემიდან, როგორც უკვე ვიცით, გამომდინარეობს, რომ კომპლექსურ რიცხვთა ველზე აღებული ყოველი $n>1$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრისათვის კომპლექსურ რიცხვთა ველი არის დაშლის ველი, ე. ი. ალგებრულად ჩაკეტილი ველი.

ორი უკვეცი $f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$ და $g(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ მრავალწევრის შეფარდება აღვნიშნოთ $\Phi(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$-ით, ე. ი.

$$\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{g(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\Phi(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

$\Phi(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ წილად-რაციონალურ ფუნქციას ეწოდება სიმეტრიული რაციონალური ფუნქცია, თუ ის არ იცვლება უცხობთა ნებისმიერი გადაადგილებისას.

თეორემა. რიცხვთა P ველზე აღებული ყოველი $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ სიმეტრიული რაციონალური ფუნქცია შეიძლება ამავე ველზე წარმოვადგინოთ როგორც რაციონალური ფუნქცია $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ უნდა ვუჩვენოთ, რომ f და g სიმეტრიული მრავალწევრებია. მაგალითად, თუ დავუშვებთ, რომ f არაა სიმეტრიული მრავალწევრი, g მრავალწევრის სიმეტრიულობა ადვილად დამტკიცდება, $\frac{f}{g}$ სიმეტრიული რაციონალური ფუნქციის მრიცხველისა და მნიშვნელის ისეთ მრავალწევრებზე გამრავლებით, რომლებიც მიიღება g-გან $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადთა ყველა არაიგივური $n!-1$ რაოდენობის ჩასმით. ამის შემდეგ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია f და g სიმეტრიული მრავალწევრები გამოვსახოთ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების საშუალებით.

შეიძლება განვიხილოთ სიმეტრიული (მთელი ან წილადი) რაციონალური ფუნქცია ასოთა რამდენიმე სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, მოცემულია ასოთა სამი სისტემა

$$x_1, x_2, \dots, x_n;\ y_1, y_2, \dots, y_r;\ z_1, z_2, \dots, z_s,$$

რომელთა გაერთიანება

$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, z_2, \dots, z_s$$

ალგებრულად დამოკიდებულია რიცხვთა P ველზე.

რიცხვთა P ველზე აღებულ $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)$ მრავალწევრს ეწოდება სიმეტრიული ასოთა სამივე სისტემის მიმართ, თუ ის სიმეტრიულია ცალ-ცალკე ასოთა სამივე სისტემის მიმართ. თუ პირველი, მეორე და მესამე ასოთა სისტემის შესაბამის ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრებს აღვნიშნავთ:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r \text{ და } \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s,$$

მაშინ ძირითადი თეორემის განზოგადება ასოთა რამდენიმე სისტემის მიმართ იქნება შემდეგი

თეორემა. რიცხვთა P ველზე აღებული ყოველი $u=f(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)$ სიმეტრიული მრავალწევრი ასოთა სამი სისტემის მიმართ, შეიძლება ამავე ველზე წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი შესაბამისი ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ, ე. ი.

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)=\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_r, \delta_1, \dots, \delta_s).$$

თეორემის დასამტკიცებლად f სიმეტრიული მრავალწევრი $P^*=P[y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s]$ მრავალწევრთა რგოლზე განვიხილოთ როგორც $F(x_1, \dots, x_n)$ სიმეტრიული მრავალწევრი. ცხადია, F სიმეტრიული მრავალწევრის კოეფიციენტები სიმეტრიული მრავალწევრებია, $y_1, \dots, y_r$ და $z_1, \dots, z_s$ ასოთა სისტემის მიმართ. შეიძლება დავწეროთ:

$$u=\Phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n, y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s),$$

სადაც Φ-ის კოეფიციენტები სიმეტრიული მრავალწევრებია $y_1, \dots, y_r$ და $z_1, \dots, z_s$ ასოთა სისტემის მიმართ, ახლა Φ-ის განვიხილავთ როგორც $y_1, \dots, y_n$ ასოთა სიმეტრიულ მრავალწევრს და ა. შ. საბოლოოდ მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ვინაიდან ზემოთ მოყვანილი ორი თეორემის განხილვა სცილდება უმაღლესი ალგებრის კურსის ფარგლებს, ამიტომ მათ მკაცრ მტკიცებას აქ არ მოვიყვანთ. დაინტერესებულ მკითხველს აღნიშნული თეორემების დამტკიცება შეუძლია ნახოს ა. კ. სუშკევიჩის უმაღლესი ალგებრის სახელმძღვანელოში.

მაგალითი 1. მრავალწევრი:

$$f=x_1^3y_1^2+x_2^3y_1^2+x_1^3y_2^2+x_2^3y_2^2+x_1^3y_3^2+x_2^3y_3^2$$

სიმეტრიულია როგორც x_1, x_2, ისე y_1, y_2, y_3 უცნობების მიმართ. უბრალო გამოთვლების შედეგად მივიღებთ:

$$f=(x_1^3+x_2^3)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)(\tau^2-2\tau_1\tau_2),$$

სადაც

$$\sigma_1=x_1+x_2,\quad \sigma_2=x_1\cdot x_2,$$
$$\tau_1=y_1+y_2+y_3,\quad \tau_2=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3,\quad \tau_3=y_1y_2y_3.$$

მაგალითი 2. სიმეტრიული წილად-რაციონალური ფუნქცია:

$$f=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}$$

გამოვსახოთ როგორც წილად-რაციონალური ფუნქცია ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ.

f სიმეტრიული ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი სიმეტრიული მრავალწევრის შეფარდება

$$f=\frac{x_1^2x_2^2\ldots x_{n-1}^2+x_1^2x_2^2\ldots x_{n-2}^2x_n^2+\ldots+x_2^2x_3^2\ldots x_n^2}{x_1^2x_2^2\ldots x_n^2}=\frac{\varphi}{g}.$$

მრიცხველში მიღებული სიმეტრიული მრავალწევრის უმაღლესი წევრია x_1^2, x_2^2, … x_{n-1}^2, ამიტომ სათანადო გარდაქმნების შედეგად გვექნება:

$$\begin{array}{llll} 2 & 2\ldots 2 & 0 & \text{———}\ \sigma_{n-1}^2, \\ 2 & 2\ldots 1 & 1 & \text{———}\ A\sigma_{n-2}\sigma_n. \end{array}$$

თუ ახლა ჩავსვამთ $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$, მაშინ A-ს გამოსათვლელად მივიღებთ $n=n^2+A\frac{n(n-1)}{2}$ განტოლებას; აქედან $A=-2$. მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$f=\frac{\sigma_{n-1}^2-2\sigma_{n-2}\sigma_n}{\sigma_n^2}.$$

§ 49. ორი მრავალწევრის რეზულტანტი

ვთქვათ, რიცხვთა P ველზე მოცემულია ორი n-ური და m-ური ხარისხის მრავალწევრი:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m.$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ მოცემული ორი მრავალწევრის საერთო ფესვის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. თუ მოვიგონებთ ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის ევკლიდეს ალგორითმს და ბეზუს თეორემას, ადვილად დავადგენთ, რომ მოცემულ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს P ველში მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ერთი

საერთო ფესვი მაინც, როცა მათი უდიდესი საერთო გამყოფი მუდმივისაგან განსხვავებულია, ე. ი. როცა მოცემული მრავალწევრები არაა ურთიერთმარტივი.

ახლა განვიხილოთ სხვა მეთოდით იგივე საკითხი. ვიგულისხმოთ, რომ P ველის გაფართოებულ $\overline{P}$ ველში $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ფესვებია შესაბამისად

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ და } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$$

განსაზღვრა. $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების რეზულტანტი აღინიშნება $R(f, g)$ სიმბოლოთი და ეწოდება გამოსახულებას

$$R(f, g) = a_0^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i). \qquad (1)$$

ახლა განვიხილოთ რეზულტანტის სხვადასხვა სახე.

$g(x)$ მრავალწევრი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$g(x) = b_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_m).$$

(1) ტოლობაში $g(\alpha_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ მნიშვნელობის ნაცვლად ჩავსვათ მისი

$$g(\alpha_i) = b_0(\alpha_i-\beta_1)(\alpha_i-\beta_2)\ldots(\alpha_i-\beta_m)$$

მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} R(f, g) = a_0^m b_0(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\ldots(\alpha_1-\beta_m)\cdot \\ b_0(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\ldots(\alpha_2-\beta_m)\cdot \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0(\alpha_n-\beta_1)(\alpha_n-\beta_2)\ldots(\alpha_n-\beta_m) \end{aligned}$$

ან, მოკლედ, f და g მრავალწევრების რეზულტანტი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i-\beta_j). \qquad (2)$$

(2) ტოლობიდან ჩანს, რომ ორ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრს მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს საერთო ფესვი, როცა მათი რეზულტანტი $R(f,g)=0$.

(2) ტოლობიდან აგრეთვე ვღებულობთ, რომ

$$R(f,g) = (-1)^{nm} a_0^m b_0^n \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j-\alpha_i) = (-1)^{nm} R(g,f).$$

მაშასადამე,

$$R(f, g)=(-1)^{nm}R(g, f), \tag{3}$$

ან კიდევ

$$R(f, g)=(-1)^{nm}b_0^n f(\beta_1)f(\beta_2)\cdots f(\beta_m).$$

(3) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ როცა nm ლუწია, მაშინ $R(f, g)=R(g, f)$. ხოლო, როცა nm კენტია, მაშინ $R(f, g)=-R(g, f)$. მაშასადამე, საზოგადოდ

$$R(f, g)\neq R(g, f).$$

განვიხილოთ რეზულტანტის წარმოდგენა დეტერმინანტის სახით. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$x_k=\alpha_i^k \ (k=0, 1, 2, \ldots, n+m-1, \ i=1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

სადაც α_i არის $f(x)$ მრავალწევრის ნულისაგან განსხვავებული რომელიმე ფესვი. $n+m$ რაოდენობის $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}$ უცნობთა მიმართ განვიხილოთ შემდეგი დამხმარე ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}
&a_0x_{n+m-1}+a_1x_{n+m-2}+\cdots+a_{n-1}x_m+a_nx_{m-1} &&=0,\\
&\qquad a_0x_{n+m-2}+a_1x_{n+m-3}+\cdots+a_{n-1}x_{m-1}+a_nx_{m-2} &&=0,\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&=0,\\
&\qquad\qquad\qquad a_0x_n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_1+a_nx_0 &&=0,\\
&b_0x_{n+m-1}+b_1x_{n+m-2}+\cdots+b_{m-1}x_n+(b_m-t)x_{n-1} &&=0,\\
&\qquad b_0x_{n+m-2}+b_1x_{n+m-3}+\cdots+b_{m-1}x_{n-1}+(b_m-t)x_{n-2} &&=0,\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&\\
&\qquad\qquad\qquad b_0x_m+b_1x_{m-1}+\cdots+b_{m-1}x_1+(b_m-t)x_0 &&=0,
\end{aligned} \tag{5}$$

სადაც t განუსაზღვრელი მუდმივაა. (5) სისტემის დეტერმინანტს აქვს შემდეგი სახე:

$$d(t)=\left|\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & a_0 & a_1 & & a_{n-1} & a_n & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & a_0 & a_1 & & a_{n-1} & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & (b_m-t) & & & \\
 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & (b_m-t) & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & b_0 & b_1 & & b_{m-1} & (b_m-t)
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ სტრიქონი}\\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ სტრიქონი}
\end{array} \tag{6}$$

(თავისუფალ ადგილებზე იგულისხმება ნული). როგორც ვხედავთ, მიღებული $d(t)$ დეტერმინანტი წარმოადგენს მრავალწევრს t-ს მიმართ. თუ მოვიგონებთ დეტერმინანტის განმარტებას (გვ. 33), ადვილად შე-

ვამჩნევთ, რომ $d(t)$ დეტერმინანტის მხოლოდ მთავარ დიაგონალზე დალაგებული ელემენტების გამრავლების შედეგად მიღებული

$$a_0^m(b_m-t)^n \tag{7}$$

წევრი შეიცავს t-ს უდიდეს ხარისხს, რომლის მაჩვენებელი უდრის n-ს. ამრიგად, $d(t)$ დეტერმინანტი წარმოადგენს n-ური ხარისხის მრავალწევრს t-ს მიმართ და მისი უფროსი წევრის კოეფიციენტი, როგორც ეს (7) გამოსახულებიდან ჩანს, უდრის $(-1)^n a_0^m$. ახლა თუ ვიგულისხმებთ

$$t=g(\alpha_i), \tag{8}$$

მაშინ (4) აღნიშვნის საფუძველზე ადვილად მივიღებთ, რომ (5) წრფივ ერთგვაროვან სისტემას აქვს ერთი შემდეგი არანულოვანი ამონახსნი მაინც:

$$\alpha_i^{n+m-1},\ \alpha_i^{n+m-2},\ \dots,\ \alpha_i^{n},\ \alpha_i^{n-1},\ \dots,\ \alpha_i,\ \alpha_i^{0}=1. \tag{9}$$

მართლაც, ვინაიდან α_i არის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, ე. ი. $f(\alpha_i)=0$, (4) აღნიშვნის საფუძველზე, (5) სისტემის პირველი m განტოლება შესაბამისად გვაძლევს:

$$\alpha_i^{m-1}f(\alpha_i)=0,\quad \alpha_i^{m-2}f(\alpha_i)=0,\quad \dots,\quad \alpha_i f(\alpha_i)=0 \quad \text{და} \quad f(\alpha_i)=0.$$

ხოლო (8) დაშვების საფუძველზე, (5) სისტემის ბოლო n განტოლება მოგვცემს:

$$\alpha_i^{n-1}[g(\alpha_i)-t]=0,\quad \alpha_i^{n-2}[g(\alpha_i)-t]=0,\quad \dots\quad \alpha_i[g(\alpha_i)-t]=0,$$
$$g(\alpha_i)-t=0.$$

ამრიგად, მივიღებთ, რომ როცა t განსაზღვრულია (8) პირობით, მაშინ (5) ერთგვაროვან სისტემას აქვს (9) არანულოვანი ამონახსნი, ე. ი. t-ს ასეთი მნიშვნელობისათვის (5) სისტემის $d(t)$ დეტერმინანტი (n-ური ხარისხის მრავალწევრი) უდრის ნულს; ეს იმას ნიშნავს, რომ $g(\alpha_1)$, $g(\alpha_2)$, ..., $(g\alpha_n)$ არის $d(t)$ მრავალწევრის ყველა n ფესვი. თუ (6) დეტერმინანტში t-ს ნაცვლად ჩავსვამთ ნულს, მივიღებთ $d(t)$ მრავალწევრის თავისუფალ წევრს. **ადვილად დამტკიცდება, რომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების რეზულტანტი უდრის $d(t)$ მრავალწევრის თავისუფალ წევრს, ე. ი.**

$$R(f,\ g)=\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & & & & \\
 & a_0 & a_1 & & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & \\
b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & & \\
 & b_0 & b_1 & & b_{m-1} & b_m & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & b_0 & b_1 & & b_{m-1} & b_m &
\end{vmatrix}=d(0). \tag{10}$$

მართლაც, ვინაიდან $d(t)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტია $(-1)^n a_0^m$ და თავისუფალი წევრი კი $d(0)$, ამიტომ, თანახმად ვიეტას განზოგადებული ფორმულებისა, $d(t)$ მრავალწევრის $g(\alpha_1)$, $g(\alpha_2)$, ..., $g(\alpha_n)$ ფესვების ნამრავლი მოგვცემს შემდეგ თანაფარდობას:

$$g(\alpha_1)\cdot g(\alpha_2)\dots g(\alpha_n)=(-1)^n\frac{d(0)}{(-1)^n a_0^m}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$d(0)=a_0^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\dots g(\alpha_n)=R(f,\ g), \qquad \text{რ. დ. გ.}$$

მაგალითი 1. შევადგინოთ რეზულტანტი

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2 \text{ და } g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$$

მრავალწევრებისა, მივიღებთ:

$$R(f,\ g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_1b_2-a_2b_1)(a_0b_1-a_1b_0).$$

მაგალითი 2. აქვს თუ არა საერთო ფესვი შემდეგ ორ

$$f(x)=x^2-5x+6 \text{ და } g(x)=x^3-3x+2$$

მრავალწევრს. გამოთვლის შედეგად მივიღებთ:

$$R(f,\ g)=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

მაშასადამე, მოცემულ ორ მრავალწევრს აქვს საერთო ფესვი. კერძოდ, $x=2$ მათი საერთო ფესვია.

ახლა განვიხილოთ f და g მრავალწევრების რეზულტანტის კიდევ ერთი სახე. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ

$$f(x)=x_n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n \text{ და } g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m$$

მრავალწევრების რეზულტანტი უდრის $g(x)$, $xg(x)$, ..., $x^{n-1}g(x)$ მრავალწევრთა $f(x)$ მრავალწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთების კოეფიციენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს (იგულისხმება, რომ ნაშთები დალაგებულია x-ის ზრდადი ხარისხების მიხედვით).

მართლაც, ვიგულისხმოთ, რომ x_1, $x_2, \dots, x_n$ დამოუკიდებელი ცვლადები $f(x)$-ის ფესვებია. ვთქვათ,

$$x^{k-1}g(x)=f(x)q_k(x)+r_k(x) \text{ და } r_k(x)=c_{k_1}x+c_{k_2}x+\dots+c_{k_n}x^{n-1} \tag{11}$$

$$(k=1,\ 2,\ \dots,n).$$

განვიხილოთ $|c_{ij}|$ დეტერმინანტისა და $f(x)$ მრავალწევრის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ფესვებისაგან შედგენილი ვანდერმონდის დეტერმინანტის ნამრავლი. (11) ტოლობის საფუძველზე გვექნება:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1(x_1) & r_1(x_2) & \cdots & r_1(x_n) \\ r_2(x_1) & r_2(x_2) & \cdots & r_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_n(x_1) & r_n(x_2) & \cdots & r_n(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_n) \\ x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) & \cdots & x_n g(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} g(x_1) & x_2^{n-1} g(x_2) & \cdots & x_n^{n-1} g(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= g(x_1)\ g(x_2) \ldots g(x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარის ვანდერმონდის დეტერმინანტზე შეკვეცის შედეგად მივიღებთ:

$$R(\varphi,\ g) = g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_n) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ ახლა მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ a_0^m-ზე, გვექნება:

$$R(f,\ g) = a_0^m \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

შევნიშნოთ, რომ f და g მრავალწევრების რეზულტანტის მოძებნა (12) ფორმულით, როცა $m > n$, ხშირად ხელსაყრელია.

მაგალითი. ვიპოვოთ $f = x^2 - x + 1$ და $g = x^4 - 2x^2 + 3$ მრავალწევრების რეზულტანტი. თუ g და $x \cdot g$ მრავალწევრებს გავყოფთ f-ზე შესაბამისად მივიღებთ: $r_1(x) = 5 - 3x$, $r_2(x) = 3 + 2x$. ამიტომ გვექნება

$$\mathrm{R}(f,\ g) = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 19.$$

§ პი. მრავალუცნობიანი მაღალი ხარისხის განტოლებათა სისტემა

ვთქვათ, $P[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებულია რომელიმე $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ მრავალწევრი. ამ მრავალწევრის **ამონახსნი** ეწოდება უცნობთა ისეთ

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$$

მნიშვნელობებს, რომლებიც f მრავალწევრს გახდის ნულად, ე. ი. $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=0$. ცხადია, ყოველ მრავალუცნობიან f მრავალწევრს, რომლის ხარისხი მეტია ნულზე, აქვს ამონახსნთა უსასრულო რიცხვი.

თუ მოცემულია n-უცნობიანი მაღალი ხარისხის განტოლებათა სისტემა, შეიძლება დავაყენოთ საკითხი ასეთი სისტემის **ამოხსნის** შესახებ, ე. ი. **უცნობთა ისეთი მნიშვნელობების მოძებნის შესახებ, რომლებიც მოცემული სისტემის ყოველ განტოლებას აკმაყოფილებენ.** საზოგადოდ მრავალუცნობიან არაწრფივ განტოლებათა სისტემა ჯერ კიდევ არაა მთლიანად დამუშავებული. ასეთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას სწავლობს **ალგებრული გეომეტრია.** ჩვენ შევისწავლით მხოლოდ ორუცნობიან მაღალი ხარისხის განტოლებათა სისტემის ამოხსნას.

ვთქვათ, მოცემულია ორუცნობიან ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$f(x, y)=0, \quad g(x, y)=0, \tag{1}$$

სადაც f და g მთელი რაციონალური ფუნქციებია x და y უცნობების მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ f-ისა და g-ს ხარისხი y-ის მიმართ შესაბამისად არის n და m.

f და g მრავალწევრები დავალაგოთ y-ის კლებადი ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ:

$$f(x, y)=a_0(x)y+a_1(x)y^{n-1}+\ldots+a_n(x)^m, \tag{2}$$
$$g(x, y)=b_0(x)y^m+b_1(x)y^{m-1}+\ldots+b_m(x),$$

რომელთა კოეფიციენტები მრავალწევრებია $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან. ვთქვათ, x_1, y_1 არის (1) განტოლებათა სისტემის ერთი რომელიმე ამონახსნი. მაშინ, ცხადია, ორ

$$f(x_1, y)=0 \text{ და } g(x_1, y)=0$$

განტოლებას y უცნობის მიმართ ექნება საერთო ფესვი $y=y_1$, ე. ი. მათი რეზულტანტი, რომელსაც აღვნიშნავთ $R_x(f, g)=R(x)$ სიმბოლოთი, $x=x_1$ მნიშვნელობისათვის იქნება ნული, ე. ი. $R(x_1)=0$. მაშასადამე, $R(x)=0$ განტოლების ერთ-ერთი ფესვი იქნება $x=x_1$.

ამრიგად, იმისათვის, რომ ამოვხსნათ (1) განტოლებათა სისტემა, პირველ რიგში საჭიროა განტოლებათა სისტემის წევრები დავალაგოთ, მაგალითად, y-ის კლებადი ხარისხების მიხედვით და x უცნობი მივაკუთვნოთ კოეფიციენტებს. მივიღებთ ორ f და g მრავალწევრს y-ის მიმართ $P[x]$ მრავალწევრთა რგოლზე. შემდეგ შევადგინოთ $R(x)$ რეზულტანტი ან, რაც იგივეა, (1) განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხოთ y

უცნობი და ამოვხსნათ განტოლება

$$R(x)=0. \tag{3}$$

ვთქვათ, $x=x_1$ არის ამ განტოლების ერთი რომელიმე ამონახსნი. მაშინ, ცხადია, $R(x_1)=0$. ამრიგად, $f(x_1, y)$ და $g(x_1, y)$ მრავალწევრების რეზულტანტი ნულია; **ეს იმას ნიშნავს, რომ აღნიშულ მრავალწევრებს y-ის მიმართ აქვს ერთი საერთო ფესვი მაინც. ან კიდევ, მიღებული $f(x_1, y)$ და $g(x_1, y)$ მრავალწევრები არაა ურთიერთმარტივი.**

ვთქვათ, $\varphi(y)$ არის $g(x_1, y)$ და $g(x_1, y)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი. $\varphi(y)=0$ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ y-ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც შეესაბამება მოძებნილ $x=x_1$ მნიშვნელობას. თუ $y=y_1$ არის $\varphi(y)=0$ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნი, მაშინ (x_1, y_1) იქნება (1) სისტემის ერთი გარკვეული ამონახსნი. ასეთივე გზით შეიძლება ვიპოვოთ (1) განტოლებათა სისტემის ყველა სხვა ამონახსნი.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$f(x_1,y)=2x^2-3xy+2y^2+5x-9=0,$$
$$g(x_1,y)=x^2-y^2+2x+3y-5=0.$$

სისტემიდან გამოვრიცხოთ y უცნობი. ამ მიზნით სისტემის მარცხენა მხარეები დავალაგოთ y-ის კლებადი ხარისხების მიხედვით

$$2y^2-3xy+(2x^2+5x-9)=0,$$
$$-y^2+3y+(x^2+2x-5)=0.$$

შევადგინოთ $R(x)$ რეზულტანტი; გვექნება:

$$R(x)=\begin{vmatrix} 2 & -3x & 2x^2+5x-9 & 0 \\ 0 & 2 & -3x & 2x^2+5x-9 \\ -1 & 3 & x^2+2x-5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & x^2+2x-5 \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტის გამოთვლის შედეგად მივიღებთ:

$$R(x)=7x^4+54x^3+x^2-261x+199.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მიღებული $R(x)=0$ განტოლების ერთ-ერთი ფესვია $x_1=1$. თუ მოცემულ სისტემაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ 1-ს, y-ის მიმართ მივიღებთ შემდეგ ორ განტოლებას:

$$f(1,\ y)=2y^2-3y-2=0,$$
$$g(1,\ y)=-y^2+3y-2=0,$$

რომელთა საერთო ფესვია $y_1=2$. ამრიგად, მოცემული სისტემის ერთ-ერთი ამონახსნია $x_1=1$, $y_1=2$.

ზოგ შემთხვევაში მოცემულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ძალზე ადვილდება, თუ მას შევცვლით მის ეკვივალენტურ განტოლებათა სისტემით. ადვილად შემოწმდება, რომ

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \ldots,\ f_n=0 \tag{1}$$

განტოლებათა სისტემა ნებისმიერ რიცხვთა ველზე ეკვივალენტურია

$$\begin{aligned} &a_{11}f_1+a_{12}f_2+\ldots+a_{1n}f_n=0,\\ &a_{21}f_1+a_{22}f_2+\ldots+a_{2n}f_n=0,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &a_{n1}f_1+a_{n2}f_2+\ldots+a_{nn}f_n=0 \end{aligned} \tag{2}$$

განტოლებათა სისტემისა, თუ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ უცნობთა მიმართ მიღებული (2) სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს.

მართლაც, (1) სისტემის ყოველი ამონახსნი რომ (2) სისტემის ამონახსნია, ეს აშკარაა. ახლა (2) სისტემა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთგვაროვანი წრფივ განტოლებათა სისტემა $f_1, f_2, \ldots, f_n$ გამოსახულებების მიმართ. ვინაიდან მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, მას აკმაყოფილებს მხოლოდ $f_1=0,\ f_2=0,\ \ldots,\ f_n=0$ მნიშვნელობანი და ამით (1) და (2) სისტემათა ეკვივალენტურობა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2. ვიეტას ფორმულებისა და სიმეტრიული მრავალწევრების გამოყენებით ვიპოვოთ რეზულტანტი შემდეგი ორი მრავალწევრისა

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2,\quad g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2.$$

განმარტების თანახმად,

$$R(f,\ g)=a_0^2g(\alpha_1)\ g(\alpha_2)$$

სადაც α_1 და α_2 არის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$R(f,\ g)=a_0^2(b_0\alpha_1^2+b_1\alpha_1+b_2)(b_0\alpha_2^2+b_1\alpha_2+b_2)=$$

$$=a_0^2[b_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2+b_0b_1\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)+b_0b_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+b_1b_2(\alpha_1+\alpha_2)+$$

$$+b_1^2\alpha_1\alpha_2+b_2^2].$$

ვინაიდან:

$$\sigma_1=\alpha_1+\alpha_2=-\frac{a_1}{a_0},\qquad \sigma_2=\alpha_1\alpha_2=\frac{a_2}{a_0}\quad \text{და}\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2=\sigma_1^2-2\sigma_2=$$

$$=\frac{1}{a_0^2}(a_1^2-2a_0a_2),$$

მივიღებთ:

$$R(f,g)=b_0^2a_2^2-b_0b_1a_1a_2+b_0b_2a_1^2-2b_0b_2a_0a_2-b_1b_2a_0a_1+$$
$$+b_1^2a_0a_2+a_0^2b_2^2.$$

როგორც ვხედავთ, მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების რეზულტანტი წარმოადგენს მეოთხე რიგის ერთგვაროვან მრავალწევრს მათი კოეფიციენტების მიმართ.

§ 51. მრავალწევრის დისკრიმინანტი

ვთქვათ, მოცემულია n-ური ხარისხის

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

მრავალწევრი, რომლის ფესვებია α, α_2, ..., α_n. გვექნება:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

გაწარმოებით მივიღებთ:

$$f'(x)=a_0(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)+a_0(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)+\ldots+$$
$$+a_0(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-1}).$$

აქ x-ის ნაცვლად ჩავსვათ $x=\alpha_i$, გვექნება:

$$f'(\alpha_i)=a_0(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_n)$$
$$(i=1,2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

ახლა განვიხილოთ რეზულტანტი $f(x)$-ის და მისი $f'(x)$ წარმოებულისა, გვექნება:

$$R(f,\ f')=a_0^{n-1}\cdot f'(\alpha_1)\cdot f'(\alpha_2)\ldots f'(\alpha_n)$$

(2) ტოლობის საფუძველზე დავწერთ

$$R(f,\ f')=a_0^{n-1}\cdot a_0^n(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots$$
$$\ldots(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)\ldots(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\ldots$$
$$\ldots(\alpha_3-\alpha_n)\ldots(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1}).$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში ყოველი სხვაობა $\alpha_i-\alpha_j$ გვხვდება ორჯერ სხვადასხვა ნიშნით. ვინაიდან მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში $\alpha_i-\alpha_j$ სახის ყველა მამრავლის რაოდენობა უდრის $n(n-1)$, ყოველი ორი $\alpha_i-\alpha_j$, $\alpha_j-\alpha_i$ სახის მამრავლის გაერთიანებით: $(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_j-\alpha_i)=-(\alpha_i-\alpha_j)^2$ მივიღებთ

$\frac{n(n-1)}{2}$ რაოდენობის სხვადასხვა კვადრატულ მამრავლს. მაშასადამე, $R(f, f')$ რეზულტანტი ასე წარმოგვიდგება:

$$R(f, f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0\cdot a_0^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2. \qquad (3)$$

(3) ტოლობაში მიღებულ $a_0^{2n-2}\prod\limits_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ გამოთქმას ეწოდება $f(x)$ **მრავალწევრის დისკრიმინანტი** და აღინიშნება D ასოთი, ე. ი.

$$D=a_0^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2. \qquad (4)$$

ჩვენთვის ცნობილია, რომ თუ $f(x)$ მრავალწევრის და მისი $f'(x)$ წარმოებულის უდიდესი საერთო გამყოფი განსხვავებულია მუდმივისაგან, ე. ი. თუ $f(x)$ და მისი წარმოებული $f'(x)$ ურთიერთმარტივი არაა, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრს ჯერადი ფესვი აქვს. $f(x)$ მრავალწევრის ჯერადი ფესვის არსებობის დადგენა შეიძლება აგრეთვე $f(x)$ მრავალწევრის D დისკრიმინანტისა და $R(f, f')$ რეზულტანტის საშუალებით. მართლაც, (4) ტოლობიდან ჩანს, რომ $f(x)$ მრავალწევრს მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ჯერადი ფესვი, როდესაც მისი დისკრიმინანტი უდრის ნულს. (3) და (4) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$R(f, f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D. \qquad (5)$$

ამ ფორმულით მოცემულია კავშირი $f(x)$ მრავალწევრის D დისკრიმინანტსა და $R(f, f')$ რეზულტანტს შორის. (5) ფორმულიდან ჩანს, რომ თუ $D=0$, მაშინ $R(f, f')=0$ და, პირიქით; ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ მრავალწევრს მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ჯერადი ფესვი, როდესაც $f(x)$ მრავალწევრის და მისი წარმოებულის რეზულტანტი უდრის ნულს.

მაგალითი. გამოვთვალოთ

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$

მრავალწევრის დისკრიმინანტი. ვისარგებლოთ (4) ფორმულით. აქ $n=3$. ამიტომ მივიღებთ:

$$D=a_0^4\prod(\alpha_i-\alpha_j)^2=a_0^4(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_i-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე სიმეტრიული მრავალწევრია $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ფესვების მიმართ. ის შეიძლება განვიხილოთ როგორც მრავალწევრი σ_1, σ_2, σ_3 ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მიმართ:

$$D=a_0^4(\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2).$$

ვინაიდან:

$$\sigma_1=-\frac{a_1}{a_0}, \quad \sigma_2=\frac{a_2}{a_0}, \quad \sigma_3=-\frac{a_3}{a_0},$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$D=-4a_1^3a_3+a_1^2a_2^2+18a_0a_1a_2a_3-4a_0a_2^3-27a_0^2a_3^2.$$

კერძოდ, $f(x)=x^3+ax+b$ არასრული მესამე ხარისხის მრავალწევრის დისკრიმინანტი იქნება:

$$D=-4a^3-27b^2=-108\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right).$$

საზოგადოდ, როგორც (4) ფორმულიდან ჩანს, ყოველი $f(x)$ მრავალწევრის დისკრიმინანტი წარმოადგენს მისი ფესვების მიმართ სიმეტრიულ მრავალწევრს, ამიტომ ის ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც მრავალწევრი a_0, a_1, ..., a_n კოეფიციენტების მიმართ.

დისკრიმინანტის გამოთვლა დეტერმინანტის გამოყენებით. $f(x)$ მრავალწევრის ფესვებისაგან შევადგინოთ ვანდერმონდის დეტერმინანტი

$$V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j).$$

ეს დეტერმინანტი გავამრავლოთ თავის ტრანსპონირებულ დეტერმინანტზე და მოვიგონოთ აღნიშვნა

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & s_{2n-2} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

თუ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ a_0^{2n-2}-ზე, მივიღებთ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის დისკრიმინანტის შემდეგ წარმოდგენას:

$$D=a_0^{2n-2}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $f(x)=ax^2+bx+c$ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი. აქ $n=2$. გვექნება:

$$D=a^2\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}=a^2(s_0s_2-s_1^2)=a^2[2(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)^2]=$$

$$=a^2[2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_1^2]=a^2(\sigma_1^2-4\sigma_2)=$$

$$=a^2\left(\frac{b^2}{a^2}-4\cdot\frac{c}{a}\right)=b^2-4ac.$$

როგორც საშუალო სკოლის კურსიდანაა ცნობილი, მიღებულ b^2-4ac გამოსახულებას ეწოდება მოცემული კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი.

თავი XI

წრფივი სივრცე და წრფივი გარდაქმნები

§ 62. წრფივი სივრცისა და ქვესივრცის საბაზისო სისტემის ზოგიერთი თვისება

ჩვენთვის უკვე ცნობილია ვექტორული, ანუ წ რ ფ ი ვ ი ს ი ვ რ ც ი ს განსაზღვრა (გვ. 67—72), განსაზღვრიდან გამომდინარე უმარტივესი თვისებები, ს ა ბ ა ზ ი ს ო ს ი ს ტ ე მ ი ს ა და ს ი ვ რ ც ი ს გ ა ნ-ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ს ცნებები.

ვიცით აგრეთვე ვექტორთა სასრული სისტემის წრფივად დამოკიდებულებისა და დამოუკიდებლობის განსაზღვრა (გვ. 72). ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოკიდებულების აღნიშნული განსაზღვრა და მისგან გამომდინარე თვისებები მართებული იქნება საზოგადოდ ყოველი წრფივი სივრცის ელემენტთა სისტემისათვის; ეს იქიდან გამოდის, რომ ნებისმიერ წრფივ სივრცეში განსაზღვრულია ყოველი ორი ელემენტის ჯამისა და ელემენტის რიცხვზე ნამრავლის ცნებები.

წრფივი სივრცის ელემენტთა უსასრულო სისტემას უწოდებენ წრფივად დამოკიდებულს, თუ მოცემულ სისტემას გააჩნია ერთი წრფივად დამოკიდებული სასრული ქვესისტემა მაინც. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ელემენტთა უსასრულო სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი. როგორც ვიცით, სივრცის ყოველ წრფივად დამოუკიდებელ მაქსიმალურ ქვესისტემას ეწოდება ბაზისი ანუ საბაზისო სისტემა. თუ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორები ქმნის სივრცის ბაზისს, მაშინ სივრცის ყოველი α ვექტორი იქნება საბაზისო ვექტორთა წრფივი კომბინაცია.

საზოგადოდ, R სივრცის ყოველი α ვექტორი (ელემენტი) წარმოადგენს მოცემული საბაზისო სისტემის წრფივ კომბინაციას, ე. ი.

$$\alpha = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots k_n e_n. \qquad (1)$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ α ვექტორის ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია, ე. ი. (1) დაშლის კოეფიციენტები ცალსახადაა განსაზღვრული.

მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი; ვთქვათ, არსებობს α ვექტორის მეორე წარმოდგენა $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორთა მიმართ, ე. ი. ვთქვათ,

$$\alpha = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n. \qquad (1)$$

განვიხილოთ (1) და (2) ტოლობათა სხვაობა, მივიღებთ:

$$(k_1-\lambda_1)e_1+(k_2-\lambda_2)e_2+\ldots+(k_n-\lambda_n)e_n=0.$$

რადგან $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ვღებულობთ, რომ

$$k_1-\lambda_1=k_2-\lambda_2=\ldots=k_n-\lambda_n=0,$$

ე. ი.

$$k_1=\lambda_1,\ k_2=\lambda_2,\ldots,\ k_n=\lambda_n.$$

აი ამ ცალსახად განსაზღვრულ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვებს ეწოდება α ვექტორის კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისის მიმართ.

როგორც განმარტებიდან ჩანს, წრფივ სივრცეს, საზოგადოდ, გააჩნია მრავალი ბაზისი და ვექტორის კოორდინატები დამოკიდებულია ბაზისის შერჩევაზე.

მაგალითი. ადვილად შემოწმდება, რომ არაერთეულოვანი

$$e_1=(1,\ 1,\ldots,\ 1),$$
$$e_2=(0,\ 1,\ldots,\ 1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,\ 0,\ldots,\ 1).$$

ვექტორთა სისტემა არის n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ერთ-ერთი ბაზისი. ვთქვათ R სივრციდან აღებული α ვექტორის კოორდინატები სხვა რომელიმე ბაზისის მიმართ არის $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ რიცხვები, ე. ი. $\alpha=(\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n)$. ვიპოვოთ α ვექტორის $\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n$ კოორდინატები $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისის მიმართ.

განმარტების თანახმად,

$$\alpha=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n,$$

ე. ი.

$$\begin{aligned}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_n)&=\xi_1(1,\ 1,\ldots,1)+\xi_2(0,\ 1,\ldots,1)+\xi_n(0,\ 0,\ldots,1)=\\&=(\xi_1,\ \xi_1,\ldots,\ \xi_1)+(0,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_2)+\ldots.+(0,\ 0,\ldots,\xi_n)=\\&=(\xi_1,\ \ \xi_1+\xi_2,\ldots,\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n).\end{aligned}$$

მაშასადამე, .

$$\xi_1=\lambda_1,$$
$$\xi_1+\xi_2=\lambda_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=\lambda_n$$

განტოლებათა სისტემიდან ვიპოვით $\xi_1, \xi_2, \ldots,\xi_n$ კოორდინატებს. მი-

ვიღებთ, რომ $\xi_1=\lambda_1$, $\xi_2=\lambda_2-\lambda_1$, ..., $\xi_n=\lambda_n-\lambda_{n-1}$ რიცხვები არის α ვექტორის კოორდინატები e_1, e_2, ..., e_n ბაზისის მიმართ.

განსაზღვრა. წრფივი სივრცის ისეთ ქვესიმრავლეს, რომელიც თავის მხრივ წრფივ სივრცეს ქმნის, წრფივი სივრცის ქვესივრცე ეწოდება.

დავამტკიცოთ, რომ თუ წრფივი სივრცის რომელიმე L ქვესიმრავლისათვის სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1°. ყოველი α, $\beta \in L$, ჯამი $\alpha+\beta \in L$,

2°. ყოველი $\alpha \in L$ და ნებისმიერი k ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი $k\alpha \in L$, მაშინ ქვესიმრავლე იქნება წრფივი სივრცის ქვესივრცე.

მართლაც, ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ L სიმრავლე თავისთავად წრფივი სივრცეა, ე. ი. მისთვის სრულდება წრფივი სივრცის ყველა 1—7 აქსიომა (გვ. 68). ცხადია, R სივრცის L ქვესიმრავლისათვის შესრულდება 1), 2), 4), 5), 6) და 7) აქსიომები, დაგვრჩენია შევამოწმოთ 3) აქსიომა. ვთქვათ, α ნებისმიერი ელემენტია L სიმრავლისა. მე-2° პირობის თანახმად, $k\alpha \in L$. ვთქვათ, $k=0$, მაშინ, იმავე პარაგრაფში დამტკიცებული თვისების თანახმად, $0\cdot\alpha=0\in L$. მაშასადამე, L სიმრავლეს გააჩნია ნულოვანი ელემენტი (ნულოვანი ვექტორი). ვთქვათ, ახლა $k=-1$; მაშინ, იმავე მე-2° პირობის თანახმად, $(-1)\,\alpha=-\alpha\in L$. მაშასადამე, L სიმრავლე ყოველ მის α ელემენტთან ერთად შეიცავს მის შებრუნებულ $-\alpha$ ელემენტს, ე. ი. ისეთ ელემენტს, რომელიც α-თან მიმატების შედეგად გვაძლევს L სიმრავლის ნულოვან ელემენტს. ვთქვათ, ახლა α, $\beta\in L$. განვიხილოთ განტოლება $\alpha+x=\beta$, თუ ამ განტოლების ორივე მხარეს დავუმატებთ α ელემენტის შებრუნებულ $-\alpha$ ელემენტს, რომელიც L-ში არსებობს, თანახმად 1° პირობისა, მივიღებთ მოცემული განტოლების $x=\beta-\alpha$ ამონახსნს. ამით 3) აქსიომის მართებულობა დამტკიცდა. მაშასადამე, R წრფივი სივრცის ყოველი 1° და 2° თვისებების მქონე L ქვესიმრავლე არის წრფივი სივრცის ქვესივრცე.

ქვესივრცის მაგალითები.

1. R წრფივი სივრცის ნულოვანი ელემენტი, ცხადია, ქმნის R სივრცის მინიმალურ ქვესივრცეს, რომელსაც ნულოვანი სივრცე ეწოდება.

2. თვით R წრფივი სივრცე შეიძლება განვიხილოთ როგორც R სივრცის მაქსიმალური ქვესივრცე.

3. $P^{(3)}$ სივრცეში იმ ვექტორთა ერთობლიობა, რომლებიც პარალელურია რომელიმე სიბრტყისა (ან წრფისა), ქმნის ქვესივრცეს.

4. თუ $P^{(n)}$ წრფივ, ანუ ვექტორულ, სივრცეში L აღნიშნავს ისეთ $\alpha=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ ვექტორთა სიმრავლეს, რომელთა კომპონენტები აკმაყოფილებენ ნებისმიერ n-უცნობიან ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას, მაშინ ამონახსნთა L სიმრავლე იქნება $P^{(n)}$ სივრცის ქვესივრცე.

5. თუ L_1 და L_2 არის R წრფივი სივრცის ნებისმიერი ორი ქვესივრცე, მაშინ ადვილად შემოწმდება, რომ R სივრცის იმ $\alpha \in L$ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნიან როგორც L_1, ისე L_2 ქვესივრცეებს, ქმნის R სივრცის ქვესივრცეს, რომელსაც L_1 და L_2 ქვესივრცეების თანაკვეთა ეწოდება და აღინიშნება $L_1 \cap L_2$ სიმბოლოთი. აგრეთვე ერთობლიობა $\alpha+\beta$ ელემენტებისა, სადაც $\alpha \in L_1$ და $\beta \in L_2$, ქმნის R სივრცის ქვესივრცეს, რომელსაც L_1 და L_2 ქვესივრცეების ჯამი, ანუ ნაერთი, ეწოდება და აღინიშნება $L_1 U L_2$ სიმბოლოთი.

ახლა განვიხილოთ ქვესივრცის ზოგიერთი თვისება. თუ R წრფივ სივრცეში ყოველი n ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ L ქვესივრცის ყოველი n ვექტორიც წრფივად დამოკიდებული იქნება. აქედან ვღებულობთ, რომ n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ყოველი L ქვესივრცის განზომილება არ აღმეტება n-ს.

საზოგადოდ, ცნობილია, R სივრცის ყოველი ქვესივრცის ბაზისის აგება. შევნიშნოთ, რომ თუ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის R წრფივი სივრცის ბაზისი, მაშინ L ქვესივრცის ბაზისში შეიძლება სრულიად არ მონაწილეობდეს $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორები. თუნდაც იმიტომ, რომ L ქვესივრცეში შეიძლება არც ერთი ამ ვექტორთაგანი არ შედიოდეს. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ R სივრცის L ქვესივრცეს, რომლის განზომილებაა $\lambda < n$, გააჩნია $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda$ ბაზისი, მაშინ შეიძლება დამატებით შევარჩიოთ R სივრცის ისეთი $n-\lambda$ რაოდენობის $\varepsilon_{\lambda+1}, \ldots, \varepsilon_n$ ვექტორი, რომ ვექტორთა სისტემა $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda, \ldots, \varepsilon_n$ იქნება R სივრცის ბაზისი.

მართლაც, ცხადია R სივრცეში უნდა არსებობდეს ერთი ისეთი ვექტორი მაინც, რომელიც არ წარმოადგენს $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda$ ვექტორთა წრფივ კომბინაციას. წინააღმდეგ შემთხვევაში, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები იქნებოდა R სივრცის ბაზისი და R სივრცის განზომილება ტოლი იქნებოდა λ-სი და არა n-ისა.

აღვნიშნოთ $\varepsilon_{\lambda+1}$-ით R სივრცის რომელიმე ერთი ვექტორი, რომელიც არ წარმოადგენს $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda$ ვექტორთა წრფივ კომბინაციას. ადვილად შემოწმდება, რომ ვექტორთა სისტემა:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_{\lambda+1}$$

წრფივად დამოუკიდებელია. თუ ახლა R სივრცის ყოველი ელემენტი წრფივად გამოისახება $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_{\lambda+1}$ ვექტორების მიმართ, მაშინ ვექტორთა ეს სისტემა შექმნიდა R სივრცის ბაზისს, მივიღებდით $\lambda+1=n$; ამით R სივრცის ბაზისის აგება დამთავრებული იქნებოდა. თუ $\lambda+1<n$, მაშინ R სივრცეში გვექნებოდა ერთი $\varepsilon_{\lambda+2}$ ვექტორი მაინც, რომელიც არ წარმოიდგინება $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_{\lambda+1}$ ვექტორთა წრფივ

კომბინაციად. ამ პროცესის გაგრძელებით, სასრული $n-r$ ნაბიჯის შემდეგ, ჩვენ ავაგებთ R სივრცის ბაზისს.

თეორემა. **მოცემული R სივრცის ყოველი ორი წრფივი ქვესივრცის ჯამის განზომილება უდრის ამ ქვესივრცეების განზომილებათა ჯამისა და მათი თანაკვეთის განზომილების სხვაობას.**

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული A და B ქვესივრცეების განზომილებანია შესაბამისად r_1 და r_2, ხოლო მათი $D=A\cap B$ თანაკვეთის განზომილება კი m. ამოვირჩიოთ B ქვესივრცეში რომელიმე $d_1, d_2, \ldots, d_m$ ბაზისი. ცხადია, $d_1, d_2, \ldots, d_m$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია და მდებარეობს A-ში. ვინაიდან ქვესივრცის ყოველი ბაზისი შეიძლება შევავსოთ სივრცის ბაზისამდე, ამიტომ A სივრცეში შეიძლება მოვნახოთ ისეთი $a_1, a_2, \ldots a_k$ ვექტორები, რომლებიც $d_1, d_2, \ldots, d_m$ ვექტორებთან ერთად მოგვცემს A-ს ბაზისს. ანალოგიურად, B სივრცეში მოინახება ისეთი $b_1, b_2, \ldots, b_s$ ვექტორები, რომლებიც $d_1, d_2, \ldots, d_m$ ვექტორებთან ერთად მოგვცემს B სივრცის ბაზისს. ვინაიდან სივრცის განზომილება უდრის ბაზისის ვექტორთა რიცხვს, გვექნება:

$$r_1=m+k,\ r_2=m+s.$$

თუ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ვექტორთა სისტემა:

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_m,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_s \tag{2}$$

არის $C=A\cup B$ ან, რაც იგივეა, $C=A+B$ სივრცის ბაზისი, მაშინ თეორემა დამტკიცებული იქნება, ვინაიდან სივრცის განზომილება ტოლი იქნება

$$m+k+s=r_1+r_2-m.$$

მართლაც, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $C=A+B$ სივრცის ყოველი $c=a+b$ ელემენტი წრფივად გამოისახება (2) სისტემის მიმართ. ამისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ყოველი $a\in A$ და $b\in B$ ელემენტი გამოისახება წრფივად შესაბამისად A და B სივრცეების ზემოთ აგებულ ბაზისთა მიმართ. ჩვენ დაგვრჩენია დასამტკიცებლად მხოლოდ (2) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა. ვთქვათ, ვექტორთა (2) სისტემისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\gamma_1 d_1+\gamma_2 d_2+\ldots+\gamma_m d_m+\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k+\beta_1 b_1+ \\ +\beta_2 b_2+\ldots+\beta_s b_s=0. \tag{3}$$

ვთქვათ,

$$b=\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\ldots+\beta_s b_s.$$

ვინაიდან b გამოისახება წრფივად B-ში შემავალ ვექტორთა მიმართ, ამიტომ $b\in B$. მეორე მხრივ, (3) ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$b=-\gamma_1 d_1-\cdots-\gamma_m d_m-\alpha_1 a_1-\cdots-\alpha_k a_k. \qquad (4)$$

ვინაიდან $d_1, d_2, .., d_m, a_1, a_2, \ldots, a_k$ ელემენტები შედის A-ში, ამიტომ $b \in A$. მაშასადამე, $b \in A \cap B$. ამრიგად, b ელემენტის (4) წარმოდგენიდან ვღებულობთ:

$$-\alpha_1 a_1-\alpha_2 a_2-\cdots-\alpha_k a_k=0, \text{ ე. ი. } \alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_k a_k=0.$$

მაგრამ, რადგან $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ელემენტთა სისტემა, როგორც წრფივად დამოუკიდებელი სისტემის ქვესისტემა, წრფივად დამოუკიდებელია და გვექნება

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$$

ამის გამო (3) თანაფარდობა ასე გადიწერება:

$$\gamma_1 d_1+\gamma_2 d_2+\cdots+\gamma_m d_m+\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\cdots+\beta_s b_s=0.$$

მაგრამ, რადგან $d_1, d_2, \cdots, d_m, b_1, \cdots b_2, ,. b_s$ სისტემა B სივრცის ბაზისია, ამიტომ იგი წრფივად დამოუკიდებელია და გვექნება:

$$\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_m=\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_s=0.$$

ამრიგად, (2) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა დამტკიცდა და ამით თეორემაც დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ R სივრცის განზომილება უდრის n და A და B ქვესივრცეების განზომილებანია შესაბამისად r_1 და r_2, მაშინ $A \cap B$ მონაკვეთის განზომილება $m \geqslant r_1+r_2-n$. მართლაც, დამტკიცებული თეორემის თანახმად, $A+B$ ჯამის განზომილება უდრის r_1+r_2-m. ცხადია $A+B$ ჯამის განზომილება არ აღემატება თვით R სივრცის განზომილებას, ე. ი. $r_1+r_2-m \leqslant n$. აქედან მივიღებთ: $m \geqslant r_1+r_2-n$. ამით შედეგი დამტკიცებულია. მაგალითად, ოთხგანზომილებიანი სივრცის ყოველი ორი სამგანზომილებიანი ქვესივრცის თანაკვეთა შეიცავს სიბრტყეს.

მაგალითი. ადვილად შემოწმდება, რომ P რიცხვთა ველზე მოცემული მრავალწევრთა სიმრავლე; λ ასოს მიმართ, ქმნის წრფივ სივრცეს.

ამ სივრცისათვის

$$1,\ x,\ x^2, \cdots, x^n, \cdots$$

ელემენტთა უსასრულო სისტემა იქნება საბაზისო სისტემა.

მართლაც, ამ სისტემის ყოველი სასრული ქვესისტემა

$$x^{m_1},\ x^{m_2}, \ldots, x^{m_s} \quad (0 \leq m_1 < m_2 <, \cdots, < m_s)$$

იქნება წრფივად დამოუკიდებელი: წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ სასრული რიგის ალგებრული განტოლების ფესვთა რაოდენობა

აღემატება განტოლების ხარისხს, რაც შეუძლებელია. მოცემული სივრცე, ცხადია, უსასრულო განზომილებისაა.

მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს, ქმნის $(n+1)$-განზომილებიან წრფივ სივრცეს. $1, x, x^2, \ldots, x^n$ იქნება ამ სივრცის საბაზისო სისტემა.

სასურველია აგრეთვე მკითხველმა შეამოწმოს, რომ n-ური რიგის სიმეტრიულ მატრიცთა სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს n-ური რიგის მატრიცთა წრფივი სივრცის ქვესივრცეს, ქმნის $C^2_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$-განზომილებიან წრფივ სივრცეს.

იზომორფიზმი. როგორც ცნობილია, წრფივი სივრცის განმარტებაში ლაპარაკია სივრცის ნებისმიერი ორი ელემენტის ჯამისა და ელემენტის რიცხვზე გამრავლებაზე და არაფერია ნათქვამი თვით ელემენტთა ბუნებაზე. შესაძლებელია, რომ მოცემული ორი წრფივი სივრცის ელემენტები თავიანთი ბუნებით ერთმანეთისაგან განსხვავებული იყვნენ, მაგრამ სივრცეში განმარტებული ოპერაციების თვალსაზრისით ისინი ერთნაირი იყვნენ.

განსაზღვრა. R და R' **წრფივ სივრცეებს ეწოდება იზომორფული, თუ მათ** $\alpha \epsilon R$ **და** $\alpha' \epsilon R'$ **ელემენტებს შორის შეიძლება ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობის დამყარება, რომ თუ** $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ **და** $\beta \longleftrightarrow \beta'$, **მაშინ**

$$1^\circ.\ \alpha+\beta \longleftrightarrow \alpha'+\beta',$$
$$2^\circ.\ k\alpha \longleftrightarrow k\alpha'.$$

პირველ რიგში ისმება კითხვა: როგორი სივრცეები შეიძლება იყოს ერთიმეორის იზომორფული და როგორი არა?

დასმულ კითხვაზე ამომწურავი პასუხი, რომ გავცეთ წინასწარ დავამტკიცოთ ზოგიერთი დებულება.

1. **იზომორფული თანადობისას ნულოვანი ელემენტი გადადის ნულოვან ელემენტში.**

მართლაც, ვთქვათ R სივრცის R' სივრცეზე იზომორფული ასახვისას R სივრცის α ელემენტი გადადის R' სივრცის α' ელემენტში, ე. ი. $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$.

მაშინ, ცხადია, $0 \cdot \alpha = 0$ ელემენტი გადავა $0 \cdot \alpha' = 0'$ ელემენტში, ე. ი. R სივრცის ნულოვანი ელემენტი გადადის R' სივრცის ნულოვან ელემენტში.

2. **იზომორფული გადასახვისას პირველი სივრცის შემქმნელთა სისტემა გადადის მეორე სივრცის შემქმნელთა სისტემაში.**

მართლაც, ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ არის პირველი სივრცის შემქნელ-

თა სისტემა და $b_1, b_2, \ldots, b_n$ კი მათი შესაბამისი ელემენტებია მეორე სივრცეში. ავიღოთ მეორე სივრცის ნებისმიერი β ელემენტი და ვიგულისხმოთ, რომ β ელემენტის შესაბამისი ელემენტი პირველ სივრცეში არის α. პირობის თანახმად, α ელემენტი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\alpha = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n.$$

იზომორფიზმის განმარტების თანახმად, $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$ ჯამი უნდა გადავიდეს $k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n$ ჯამში. მაშასადამე, $\beta = k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ არის მეორე სივრცის შემქნელთა სისტემა.

3. **იზომორფული გადასახვისას წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა გადადის წრფივად დამოუკიდებელ სისტემაში.** მართლაც, ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ პირველი სივრცის წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა გადადის მეორე სივრცის $b_1, b_2, \ldots, b_s$ ელემენტთა სისტემაში. ვიგულისხმოთ, რომ მეორე სივრცეში ადგილი აქვს

$$\lambda_1b_1 + \lambda_2b_2 + \ldots + \lambda_sb_s = 0', \tag{5}$$

სადაც $0'$ არის მეორე სივრცის ნული. თანახმად იზომორფიზმისა, (5) ტოლობას, პირველ სივრცეში, შეესაბამება ტოლობა

$$\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \ldots + \lambda_sa_s = 0.$$

ვინაიდან პირველ სივრცეში $a_1, a_2, \ldots, a_s$ ელემენტთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, გვაქვს $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$. ამით $b_1, b_2, \ldots, b_s$ ელემენტთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა დამტკიცდა. მე-2 და მე-3 თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ წრფივ სივრცეთა იზომორფიზმის დროს ბაზისი გადადის ბაზისში და, მაშასადამე, იზომორფულ სივრცეებს აქვთ ერთი და იგივე განზომილება.

თეორემა. **ყველა ორი წრფივი სივრცე, რომლებიც ერთიხა და იმავე განზომილებისაა, იზომორფულია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, R და R' ორი n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ბაზისებია შესაბამისად $l_1, l_2, \ldots, l_n$ და $l_1', l_2', \ldots, l_n'$. პირველი სივრცის

$$\alpha = k_1l_1 + k_2l_2 + \ldots + k_nl_n \tag{6}$$

ელემენტს შევუსაბამოთ მეორე სივრცის

$$\alpha' = k_1l_1' + k_2l_2' + \ldots + k_nl_n'$$

ელემენტი. ვინაიდან სივრცის ყოველი ელემენტი წარმოიდგინება წრფი-

ვად ბაზისის მიმართ და ეს წარმოდგენა არის ერთადერთი, მივიღებთ, რომ ჩვენი თანადობა ურთიერთცალსახაა. დამყარებული ურთიერთცალსახა თანადობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ და $\beta \longleftrightarrow \beta'$, მაშინ $\alpha+\beta \longleftrightarrow \alpha'+\beta'$ და $\lambda\alpha \longleftrightarrow \lambda\alpha'$. ამით R და R' სივრცეთა იზომორფულობა დამტკიცებულია. ახლა მკითხველი ადვილად მიხვდება, რომ დამტკიცებული თვისებებისა და თეორემის საშუალებით დასმულ კითხვას გავეცით ამომწურავი პასუხი.

ამის შემდეგ კარგად უნდა ავითვისოთ, რომ ყოველი n-განზომილებიანი წრფივი სივრცე, იზომორფიზმამდე სიზუსტით, იგივეა რაც n-განზომილებიან ვექტორთა სივრცე.

§ 68. საბაზისო სისტემის შეცვლით კოორდინატთა გარდაქმნა

ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ როგორ შეიცვლება ვექტორის კოორდინატები საბაზისო სისტემის შეცვლით.

ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ორი ბაზისი

$$e_1, e_2, \dots, e_n \text{ და } e_1', e_2', \dots, e_n'.$$

ცხადია, e_i' ვექტორები წრფივად გამოისახება პირველი ბაზისის ელემენტთა მიმართ. ვთქვათ,

$$\begin{aligned} e_1' &= t_{11}e_1+t_{12}e_2+\dots+t_{1n}e_n, \\ e_2' &= t_{21}e_1+t_{22}e_2+\dots+t_{2n}e_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' &= t_{n1}e_1+t_{n2}e_2+\dots+t_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{1}$$

ამ წრფივი გარდაქმნის $T=(t_{ij})$ მატრიცას ეწოდება $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისიდან $e_1', e_2', \dots, e_n'$ ბაზისზე გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს მ ა ტ რ ი ც ა. ვინაიდან $e_1', e_2', \dots, e_n'$ წრფივად დამოუკიდებელია, T მატრიცას დეტერმინანტი$\neq 0$. ვთქვათ, α ვექტორის კოორდინატები პირველ ბაზისში არის $a_1, a_2, \dots, a_n$, ხოლო მისი კოორდინატები მეორე ბაზისში კი $a_1', a_2', \dots, a_n'$.

შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_ne_n=a_1'e_1'+a_2'e_2'+\dots+a_n'e_n'.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში e_i' ნაცვლად შევიტანთ მათ მნიშვნელობებს (1) გარდაქმნიდან, მივიღებთ:

$$\alpha = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n = a_1'(t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + \ldots + t_{1n}e_n) + \\ + a_2'(t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{2n}e_n) + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_n'(t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n). \tag{2}$$

ვინაიდან α ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისის მიმართ, ტოლობის მარჯვენა მხარის სათანადო დალაგების შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_1 &= t_{11}a_1' + t_{21}a_2' + \ldots + t_{n1}a_n', \\ a_2 &= t_{12}a_1' + t_{22}a_2' + \ldots + t_{n2}a_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= t_{1n}a_1' + t_{2n}a_2' + \ldots + t_{nn}a_n'. \end{aligned} \tag{3}$$

როგორც ვხედავთ, (3) გარდაქმნის მატრიცა არის T მატრიცის ტრანსპონირებული T' მატრიცა. ამრიგად, α ვექტორის კოორდინატები ახალ მეორე ბაზისში მიიღება (3) ფორმულით.

მაგალითი. ვთქვათ, სამგანზომილებიან წრფივ სივრცეში მოცემული e_1, e_2, e_3 ბაზისის მიმართ α ვექტორი გამოისახება ასე: $\alpha = e_1 + 4e_2 - e_3$. ვიპოვოთ ამ ვექტორის კოორდინატები მეორე e_1', e_2', e_3' ბაზისის მიმართ, თუ

$$\begin{aligned} e_1' &= 5e_1 - e_2 - 2e_3, \\ e_2' &= 2e_1 + 3e_2, \\ e_3' &= -2e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned} \tag{4}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. თანახმად (3) ტოლობისა, გვექნება:

$$\begin{aligned} 1 &= 5a_1' + 2a_2' - 2a_3', \\ 4 &= -a_1' + 3a_2' + a_3', \\ -1 &= -2a_1' + a_3'. \end{aligned}$$

ვინაიდან სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, ამიტომ სისტემა შეიძლება ამოვხსნათ კრამერის ფორმულებით. გვექნება: $a_1' = -13$, $a_2' = 6$, $a_3' = -27$.

ამრიგად, α ვექტორი მეორე ბაზისში წარმოიდგინება ასე:

$$\alpha = -13e_1' + 6e_2' - 27e_3'.$$

ახლა, (3) ტოლობანი მატრიცულად შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \ldots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix}.$$

ორივე მხარის ტრანსპონირებით მივიღებთ:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)=(a_1', a_2', \ldots, a_n')=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

ან, რაც იგივეა,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)=(a_1', a_2', \ldots, a_n')\ T, \tag{5}$$

სადაც T არის e_i ბაზისიდან e_i' ბაზისზე გადასვლის მატრიცა. თუ α ვექტორის კოორდინატებს ძველ და ახალ ბაზისებში აღვნიშნავთ შესაბამისად (α) და $(\alpha)'$ სიმბოლოებით, (5) მოკლედ ასე გადაიწერება:

$$(\alpha)=(\alpha)'T. \tag{6}$$

(5) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$(a_1', a_2', \ldots, a_n')=(a_1, a_2, \ldots, a_n)T^{-1}. \tag{7}$$

(7) ფორმულის საშუალებით უშუალოდ შეიძლება მივიღოთ α ვექტორის კოორდინატები ახალ ბაზისში, თუ ცნობილია მისი კოორდინატები ძველ ბაზისში. ამოვხსნათ იგივე მაგალითი (7) ფორმულის გამოყენებით. (4) გარდაქმნის T მატრიცის შებრუნებული მატრიცა იქნება:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, ვინაიდან მოცემულ ბაზისში α ვექტორის კოორდინატებია 1, 4, —1, ე. ი. $\alpha=(1, 4, -1)$, მივიღებთ:

$$(a_1', a_2', a_3')=(1, 4, -1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}=(-13, 6, -27),$$

ე. ი. $a_1'=-13$, $a_2'=6$, $a_3'=-27$.

§ 54. წრფივი გარდაქმნები და მათი მატრიცები

ჩვენ უკვე გავეცანით ცვლადთა წრფივ გარდაქმნებს (გვ. 107). ახლა გავეცნობით წრფივი სივრცის წრფივ გარდაქმნებს, რომლებიც გარკვეულ კავშირში იმყოფება ცვლადთა წრფივ გარდაქმნებთან.

მრავალ შემთხვევაში საინტერესოა ისეთი გარდაქმნების, ე. ი. ასახვების შესწავლა, რომლებსაც სივრცის ელემენტი (წერტილი) გადაჰ-

ყავს ამავე სივრცის გარკვეულ ელემენტში (წერტილში). ასეთ გარდაქმნებს შორის უმარტივესი არის წრფივი გარდაქმნა.

ვთქვათ, n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება ამავე სივრცის y ელემენტი. $y=\varphi(x)$ ფუნქციას, რომელსაც შემდეგ აღვნიშნავთ $x\varphi$ სიმბოლოთი, ეწოდება სივრცის გარდაქმნა. $x\varphi$ ელემენტს ეწოდება x ელემენტის სახე.

განსაზღვრა. φ **გარდაქმნას ეწოდება წრფივი, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:**

$$1^\circ.\ (x_1+x_2)\varphi=x_1\varphi+x_2\varphi,$$
$$2^\circ.\ (kx)\varphi=k(x\varphi).$$

განვიხილოთ წრფივი სივრცის განსაზღვრიდან გამომდინარე ზოგიერთი თვისება.

ა). **ნებისმიერ წრფივ გარდაქმნას ნულოვანი ელემენტი გადაჰყავს ისევ ნულოვან ელემენტში.**

მართლაც, მე-2° პირობის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$0\cdot\varphi=(0x)\varphi=0(x\varphi)=0.$$

ბ) **შებრუნებული, ანუ მოპირდაპირე, ელემენტის სახე უდრის სახის შებრუნებულს, ე. ი. $(-x)\varphi=-x\varphi$.**

მართლაც, მე-2° პირობის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(-x)\varphi=(-1)x\varphi=-x\varphi.$$

გ) **წრფივი სივრცის წრფივი გარდაქმნა მოცემულ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტთა ნებისმიერ წრფივ კომბინაციას გადაიყვანს (იმავე კოეფიციენტებით) მათ სახეთა წრფივ კომბინაციაში, ე. ი.**

$$(k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_nx_n)\varphi=k_1(x_1\varphi)+k_2(x_2\varphi)+\ldots+k_n(x_n\varphi). \qquad (1)$$

ეს ტოლობა ადვილად დამტკიცდება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდისა და წრფივი სივრცის 1°-ლ და მე-2° პირობათა გამოყენებით.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ ეს თვისება ეკვივალენტურია წრფივი გარდაქმნის განსაზღვრისა.

მართლაც, თუ (1) ტოლობაში ვიგულისხმებთ, რომ $n=1$, მივიღებთ: $(k_1x_1)\varphi=k_1(x_1\varphi)$, ხოლო, როცა $n=2$ და $k_1=k_2=1$ მივიღებთ: $(x_1+x_2)\varphi=x_1\varphi+x_2\varphi$. შევთანხმდეთ და ისეთ e გარდაქმნას, რომელსაც სივრცის ყოველი ელემენტი გადაჰყავს თავის თავში, ე. ი. $xe=x$, ვუწოდოთ **ერთეულოვანი გარდაქმნა**, ხოლო ისეთ w გარდაქმნას, რომელსაც სივრცის ყოველი ელემენტი გადაჰყავს ნულოვან ელემენტში, ე. ი. $xw=0$, ვუწოდოთ **ნულოვანი გარდაქმნა.**

ადვილად შემოწმდება, რომ სივრცის ერთეულოვანი გარდაქმნა და ნულოვანი გარდაქმნა შესაბამისად არის წრფივი გარდაქმნები.

განვიხილოთ წრფივი გარდაქმნის ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ, R ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეა, ე. ი. R არის გარკვეული 0 წერტილიდან, ე. ი. კოორდინატთა სათავიდან გამოსული მიმართულების მქონე მონაკვეთების სიმრავლე. 0 წერტილზე გავატაროთ რომელიმე R' სიბრტყე. R სივრცის ყოველი x მონაკვეთის პროექცია R' სიბრტყეზე აღვნიშნოთ $x\varphi$-ით. მაშინ პროექციის ცნობილ თვისებათა (მონაკვეთების ჯამის პროექცია უდრის მათი პროექციების ჯამს $(x+y)\varphi=x\varphi+y\varphi$ და მონაკვეთის რაიმე k რიცხვზე გამრავლებით პროექციაც გამრავლდება ამავე k რიცხვზე $(kx)\varphi=k(x\varphi)$) გამოყენებით მივიღებთ, რომ მოცემული გარდაქმნა წრფივია.

მაგალითი 2. განვიხილოთ მრავალწევრთა სიმრავლე t ასოს მიმართ, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს. როგორც ვიცით, ასეთი მრავალწევრთა სიმრავლე ქმნის $(n+1)$-განზომილებიან წრფივ სივრცეს. ამ სივრციდან აღებულ ყოველ $f(t)$ მრავალწევრს შევუსაბამოთ მისი წარმოებული, ე. ი. $f(t)\varphi=f'(t)$. ადვილად შევნიშნავთ, რომ φ გარდაქმნა წრფივია.

მართლაც,

$$1^\circ.\ [f(t)+g(t)]\varphi=[f(t)+g(t)]'=f'(t)+g'(t)=f(t)\cdot\varphi+g(t)\varphi,$$

$$2^\circ.\ [kf(t)]\varphi=[kf(t)]'=kf'(t)=k[f(t)\varphi].$$

მაგალითი 3. განვიხილოთ წრფივი სივრცე, რომლის $f(t)$ ელემენტები უწყვეტი ფუნქციებია $0\leqslant t\leqslant 1$ შუალედში. ყოველ $f(t)$ ფუნქციას შევუსაბამოთ ინტეგრალი $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$, ე. ი.

$$f(t)\varphi=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ φ გარდაქმნა წრფივია.

მართლაც,

$$1^\circ.\quad (f_1+f_2)\varphi=\int\limits_0^t [f_1(\tau)+f_2(\tau)]d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau+\int\limits_0^t f_2(\tau)d\tau=f_1\varphi+f_2\varphi.$$

$$2^\circ.\ [kf(t)]\varphi=\int\limits_0^t kf(\tau)d\tau=k\int\limits_0^t f(\tau)d\tau=k[f(t)\varphi].$$

ვთქვათ, e_1, e_2, ..., e_n არის n-განზომილებიანი R წრფივი სივრცის რომელიმე ბაზისი, ხოლო φ — სივრცის წრფივი გარდაქმნა.

თეორემა. **R სივრციდან აღებული ნებისმიერი g_1, g_2, ..., g_n ვექტორებისათვის არსებობს სივრცის ერთადერთი ისეთი φ წრფივი გარდაქმნა, რომ**

$$e_1\varphi=g_1,\ e_2\varphi=g_2,\ \ldots,\ e_n\varphi=g_n.$$

დამტკიცება. იმისათვის, რომ ავაგოთ საძიებელი φ გარდაქმნა ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი x ვექტორი. ვთქვათ,

$$x=k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n. \tag{1}$$

შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x\varphi=(k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n)\varphi=k_1g_1+k_2g_2+\ldots+k_ng_n.$$

რადგან x ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება ბაზისის საშუალებით, მივიღებთ, რომ $x\varphi$ ვექტორიც ცალსახად განისაზღვრება g_1, g_2, ..., g_n ვექტორებით.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერ g_1, g_2, ..., g_n ვექტორთათვის არსებობს ისეთი φ წრფივი გარდაქმნა, რომ $e_i\varphi=g$ ($i=1$, 2, ..., n); ამისათვის ყოველ e_i ვექტორს შევუსაბამოთ g_i ვექტორი, ხოლო ნებისმიერ $x=k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n$ ვექტორს შევუსაბამოთ k_1g_1+ $+k_2g_2+\ldots+k_ng_n$ ვექტორი. ვინაიდან x ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება e_i ვექტორთა საშუალებით, ამიტომ მას ეთანადება სრულიად გარკვეული $x\varphi$ ვექტორი, ე. ი. $x\varphi=k_1g_1+k_2g_2+\ldots+k_ng_n$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასეთნაირად განმარტებული φ გარდაქმნა წრფივია.

ახლა უნდა დავამტკიცოთ, რომ ყოველი φ წრფივი გარდაქმნა, რომელიც e_1, e_2, ..., e_n საბაზისო სისტემას გადაიყვანს g_1, g_2, ..., g_n ვექტორებში, ემთხვევა φ გარდაქმნას.

მართლაც, პირობის თანახად $e_i\varphi'=g_i$. თუ x ვექტორს აქვს (1) სახე, მაშინ

$$x\varphi'=k_1e_1\varphi'+k_2e_2\varphi'+\ldots+k_ne_n\varphi'=k_1g_1+k_2g_2+\ldots+k_ng_n=x\varphi,$$

ე. ი.

$$\varphi'=\varphi$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა ვუჩვენოთ, თუ როგორ უნდა წარმოვადგინოთ რიცხვებით ყოველი წრფივი გარდაქმნა. ვთქვათ, სივრცეში ამორჩეულია რომელიმე

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი და ვიგულისხმოთ, რომ მიცემულია ამ სივრცის φ წრფივი გარდაქმნა. ცხადია, φ წრფივი გარდაქმნა $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორებს გადაიყვანს რომელიმე $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ ვექტორებში. ეს ვექტორები შეიძლება წარმოვადგინოთ წრფივად $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორთა მიმართ. ვთქვათ,

$$\begin{aligned} g_1 &= e_1\varphi = k_{11}e_1 + k_{12}e_2 + \ldots + k_{1n}e_n, \\ g_2 &= e_2\varphi = k_{21}e_1 + k_{22}e_2 + \ldots + k_{2n}e_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n &= e_n\varphi = k_{n1}e_1 + k_{n2}e_2 + \ldots + k_{nn}e_n. \end{aligned}$$

ამ გარდაქმნის

$$A = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

მატრიცას, რომლის სტრიქონებია შესაბამისად $e_i\varphi = g_i$ ვექტორის კოორდინატები, ეწოდება **φ გარდაქმნის მატრიცა** $e_1, e_2, \ldots, e_n$ საბაზისო სისტემაში. ამრიგად, სივრცის მოცემულ საბაზისო სისტემაში, **ყოველ წრფივ გარდაქმნას შეესაბამება გარკვეული მატრიცა.**

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს თანადობა არის ურთიერთცალსახა.

მართლაც, თუ ვიცით A მატრიცა, ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ვექტორები, რომ

$$\begin{aligned} g_1 &= k_{11}e_1 + k_{12}e_2 + \ldots + k_{1n}e_n, \\ g_2 &= k_{21}e_1 + k_{22}e_2 + \ldots + k_{2n}n_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n &= k_{n1}e_1 + k_{n2}e_2 + \ldots + k_{nn}e_n \end{aligned}$$

და, პირიქით, დამტკიცებული თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი წრფივი გარდაქმნა, რომელსაც $e_1, e_2, \ldots, e_n$, ვექტორები გადაჰყავს $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ვექტორებში. ასეთი გარდაქმნა, როგორც ვიცით, ერთადერთია და მისი მატრიცა, ცხადია, ემთხვევა A მატრიცას, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

გამოვარკვიოთ როგორი მატრიცები შეესაბამება სივრცის ნულოვან და იგივურ გარდაქმნებს. ვთქვათ, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის სივრცის საბაზისო სისტემა, გვექნება:

$$
\begin{array}{ll}
e_1\omega=0e_1+0e_2+\ldots+0e_n, & e_1e=1e_1+0e_2+\ldots+0e_n,\\
e_2\omega=0e_1+0e_2+\ldots+0e_n, & e_2e=0e_1+1e_2+\ldots+0e_n,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
e_n\omega=0e_1+0e_2+\ldots+0e_n, & e_ne=0e_1+0e_2+\ldots+1e_n.
\end{array}
$$

მაშასადამე, ნულოვანი გარდაქმნისა და ერთეულოვანი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცებია ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი და ერთეულოვანი მატრიცები.

ახლა განვიხილოთ კონკრეტული საკითხი: როგორ ვიპოვოთ $x\varphi$ ვექტორის კოორდინატები, თუ ცნობილია x ვექტორის კოორდინატები და φ წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი A მატრიცა.

ვთქვათ, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის სივრცის საბაზისო სისტემა და ამ ბაზისში x ვექტორის კოორდინატები არის $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ე. ი. $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, ხოლო φ გარდაქმნის მატრიცა კი იყოს (2) მატრიცა. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$
\begin{aligned}
x&=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n,\\
x\varphi&=\xi_1(e_1\varphi)+\xi_2(e_2\varphi)+\ldots+\xi_n(e_n\varphi).
\end{aligned}
$$

φ წრფივი გარდაქმნის მატრიცის განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს:

$$
e_i\varphi=k_{i1}e_1+k_{i2}e_2+\ldots+k_{in}e_n \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).
$$

ეს მნიშვნელობანი ჩავსვათ წინა ტოლობაში, მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
x\varphi=&(k_{11}\xi_1+k_{21}\xi_2+\ldots+k_{n1}\xi_n)e_1+\\
&+(k_{12}\xi_1+k_{22}\xi_2+\ldots+k_{n2}\xi_n)e_2+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(k_{1n}\xi_1+k_{2n}\xi_2+\ldots+k_{nn}\xi_n)e_n.
\end{aligned}\tag{3}
$$

ეს ტოლობა მატრიცულად ასე დაიწერება:

$$
(x\varphi)=(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_n)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn}\end{pmatrix}=(x)A
$$

ან, რაც იგივეა,

$$
(\xi_1',\ \xi_2',\ \ldots,\ \xi_n')=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)\cdot A, \tag{4}
$$

სადაც $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ არის $x\varphi$ ვექტორის კოორდინატები. ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი საინტერესო მატრიცული ტოლობა:

$$
x\varphi=xA. \tag{5}
$$

მაგალითი. ვთქვათ, სამგანზომილებიანი წრფივი სივრცის რომელიმე x ვექტორის კოორდინატები e_1, e_2, e_3 ბაზისში არის 2, —3, 1, ე. ი. $x=(2, -3, 1)=2e_1-3e_2+e_3$. ვიპოვოთ $x\varphi$ ვექტორის კოორდინატები ამავე ბაზისში, თუ φ წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი A მატრიცა არის

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ (4) ტოლობა, მივიღებთ:

$$x\varphi=(\xi_1', \xi_2', \xi_3')=(2, -3, 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}=(-5, -2, 3),$$

ე. ი. $\xi_1'=-5$, $\xi_2'=-2$, $\xi_3'=3$.

სხვადასხვა ბაზისში წრფივ გარდაქმნათა მატრიცებს შორის კავშირი. წინა პარაგრაფში დავამყარეთ ურთიერთცალსახა თანადობა n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის წრფივ გარდაქმნებსა და n-ური რიგის მატრიცებს შორის. როგორც ვიცით, ამისათვის საჭიროა წინასწარ სივრცეში ავარჩიოთ გარკვეული ბაზისი. ცხადია, რომ ბაზისის შეცვლით შეიცვლება φ წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი A მატრიცა. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ A მატრიცას და ბაზისის შეცვლის შედეგად მიღებულ B მატრიცას შორის კავშირი.

ვთქვათ, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ შესაბამისად მოცემული წრფივი სივრცის ძველი და ახალი ბაზისებია. ძველი ბაზისიდან ახალზე გადასვლის მატრიცა აღვნიშნოთ T-თი (გვ. 409). (x) და $(x)'$ სიმბოლოებით შესაბამისად აღვნიშნოთ x ვექტორის კოორდინატები ძველ და ახალ ბაზისებში, ე. ი.

$$(x)=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \text{ და } (x)'=(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'). \tag{6}$$

თანახმად მატრიცული (4) ტოლობისა, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(x\varphi)=(x)A \tag{7}$$

ძველ ბაზისში,

$$(x\varphi)'=(x)'B \tag{8}$$

ახალ ბაზისში. თუ მხედველობაში მივიღებთ (5) და (7) თანაფარდობებს (გვ. 411), გვექნება:

$$(x)=(x)'T, \ (x\varphi)=(x\varphi)'T, \ (x\varphi)'=(x\varphi)T^{-1}.$$

(7) და (8) ტოლობებიდან ჩავსვათ აქ $(x\varphi)$ და $(x\varphi)'$ მნიშვნელობანი, მივიღებთ:

$$(x)A=(x\varphi)'T=(x)'BT.$$

ახლა ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში ჩავსვათ (x)-ის მნიშვნელობა, გვექნება:

$$(x)'TA=(x)'BT,\ \text{ე. ი.}\ TA=BT.$$

ამ ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$B=TAT^{-1}. \tag{9}$$

ამრიგად, φ წრფივი გარდაქმნის B მატრიცა ახალ ბაზისში უდრის იმავე φ წრფივი გარდაქმნის A მატრიცას ძველ ბაზისში გარდაქმნილს T მატრიცით; ეს იმას ნიშნავს რომ მატრიცები, რომლებიც მოცემულია ერთსა და იმავე წრფივი გარდაქმნით სხვადასხვა ბაზისში ურთიერთმსგავსია (გვ. 423).

მოქმედებანი წრფივ გარდაქმნებზე. ვთქვათ, წრფივ სივრცეში მოცემულია ორი φ და ψ წრფივი გარდაქმნა. სივრცის ყოველ x ვექტორს შევუსაბამოთ $x\varphi+x\psi$ ვექტორი. გარდაქმნა, რომელსაც x ვექტორი გადაჰყავს $x\varphi+x\psi$ ვექტორში აღვნიშნოთ $\varphi+\psi$ სიმბოლოთი და ვუწოდოთ φ და ψ გარდაქმნათა ჯამი. ამრიგად, განმარტების თანახმად, გვაქვს:

$$x(\varphi+\psi)=x\varphi+x\psi.$$

თუ ახლა წრფივი სივრცის ნებისმიერ x ვექტორზე ჯერ მოვახდენთ φ გარდაქმნას, შემდეგ კი ψ გარდაქმნას, ჩვენ მივიღებთ გარკვეულ x' ვექტორს.

$$x'=(x\varphi)\psi$$

გარდაქმნას, რომელსაც x ვექტორი უშუალოდ გადაჰყავს x' ვექტორში, ეწოდება φ გარდაქმნის ψ-ზე ნამრავლი და აღინიშნება ასე: $\varphi\psi$, ე. ი.

$$x(\varphi\psi)=(x\varphi)\psi.$$

სასურველია მკითხველმა შეამოწმოს, რომ ყოველი ორი წრფივი გარდაქმნის ჯამი და ნამრავლი ისევ წრფივი გარდაქმნაა. აგრეთვე შეკრებისა და გამრავლების შედეგად მიღებული წრფივ გარდაქმნათა მატრიცა შესაბამისად უდრის მოცემულ წრფივ გარდაქმნათა მატრიცების ჯამსა და ნამრავლს.

ვთქვათ, φ ნებისმიერი ურთიერთცალსახა წრფივი ასახვაა. თუ φ-ის x ვექტორი გადაჰყავს y-ში, ე. ი. $x\varphi=y$, მაშინ გარდაქმნას, რომელსაც y ვექტორი გადაჰყავს x-ში, ეწოდება φ გარდაქმნის შებრუნებული და აღინიშნება φ^{-1} სიმბოლოთი. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა წრფივია.

მართლაც, ვთქვათ,

$$u\varphi^{-1}=x, \qquad v\varphi^{-1}=y,$$

სადაც u და v წრფივი სივრცის ნებისმიერი ელემენტებია. ვინაიდან φ წრფივი გარდაქმნაა, გვექნება:

$$(x+y)\varphi=x\varphi+y\varphi=u+v.$$

აქედან

$$(u+v)\varphi^{-1}=x+y=u\varphi^{-1}+v\varphi^{-1}.$$

მეორე პირობის შესამოწმებლად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(kx)\varphi=kx\varphi=ku.$$

აქედან

$$(ku)\varphi^{-1}=kx=k(u\varphi^{-1}).$$

ვიგულისხმოთ, რომ φ წრფივი გარდაქმნის მატრიცაა A. ვიპოვოთ შებრუნებული φ^{-1} წრფივი გარდაქმნის მატრიცა. φ^{-1} წრფივი გარდაქმნის მატრიცა აღვნიშნოთ X-ით.

თანაფარდობიდან $\varphi\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\varphi=e$ გამოდის $AX=XA=E$, ე. ი.

$$X=A^{-1}.$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველ წრფივ გარდაქმნას არ აქვს შებრუნებული გარდაქმნა. მაგალითად, φ გარდაქმნას, რომელიც წარმოადგენს სამგანზომილებიანი სივრცის გეგმილს XOY სიბრტყეზე, არ გააჩნია შებრუნებული გარდაქმნა. მართლაც, ბაზისად მივიღოთ e_1, e_2, e_3 ერთეულოვანი ვექტორები, რომლებიც მიმართულია კოორდინატთა ღერძების მიმართულებით. გვექნება:

$$e_1\varphi=e_1, \quad e_2\varphi=e_2, \quad e_3\varphi=0.$$

მოცემული φ გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა იქნება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ცხადია, ამ მატრიცას არ აქვს შებრუნებული მატრიცა, ამიტომ φ გარდაქმნას არ აქვს შებრუნებული გარდაქმნა.

ამრიგად, φ წრფივ გარდაქმნას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს შებრუნებული, როცა მისი A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია.

წრფივ გარდაქმნას, რომელსაც შებრუნებული გარდაქმნა აქვს, ეწოდება **არაგანსაკუთრებული**, ხოლო, რომელსაც შებრუნებული გარდაქმნა არ აქვს, ეწოდება **განსაკუთრებული**.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია წრფივი სივრცე მრავალწევრთა სიმრავლისა, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს. φ-ით აღვნიშნოთ სივრცის ისეთი გარდაქმნა, რომელსაც ყოველი $f(x)$ მრავალწევრი გადაჰყავს მის წარმოებულში.

$$\text{ე. ი.}\quad f(x)\varphi=f'(x).$$

დავამტკიცოთ რომ $\varphi^{n+1}=0$. ვიპოვოთ φ გარდაქმნის მატრიცა ამ სივრცის $1, x, x^2, \dots, x^n$ საბაზისო სისტემაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. φ გარდაქმნა, განმეორებული $(n+1)$-ჯერ, ე. ი. $\varphi^{(n+1)}$, იქნება ნულოვანი გარდაქმნა, ვინაიდან მოცემული სივრციდან აღებული ყოველი მრავალწევრის $n+1$ რიგის წარმოებული უდრის ნულს.

ვიპოვოთ φ გარდაქმნის მატრიცა $1, x, x^2, \dots, x^n$ ბაზისში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
&1\cdot\varphi=0,\\
&x\varphi=1,\\
&x^2\varphi=2x,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&x^n\varphi=nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

მაშასადამე, φ გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა იქნება:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \ \dots & 0\\ 0 & 1 & 0\ \dots & 0\\ 0 & 0 & 2x\ \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0\ \dots & nx^{n-1}\end{pmatrix}.$$

სავარჯიშოს სახით სასურველია მკითხველმა შეამოწმოს, რომ R წრფივი სივრცის წრფივ გარდაქმნათა სიმრავლე, წრფივ გარდაქმნათა ჯამისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ, თვითონ ქმნის წრფივ სივრცეს.

ინვარიანტული ქვესივრცეები. ვთქვათ, მოცემულია R წრფივი სივრცე და მისი რომელიმე წრფივი გარდაქმნა. R **სივრცის** R_1 **ქვესივრცეს ეწოდება ინვარიანტული φ წრფივი გარდაქმნის მიმართ, თუ** R_1**-დან აღებული ყოველი** x **ელემენტი φ გარდაქმნით გადადის ისევ** R_1 **ქვესივრცეში, ე. ი. თუ** $x\in R_1$, **მაშინ**

$$x\varphi\in R_1.$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ ნულოვანი ქვესივრცე და მთელი სივრცე ინვარიანტული ქვესივრცეებია. ამ ინვარიანტულ ქვესივრცეებს ეწოდება **ტრივიალური ინვარიანტული ქვესივრცეები.**

მაგალითი 1. ვთქვათ, R სამგანზომილებიანი სივრცეა. სივრცის φ წრფივ გარდაქმნად მივიღოთ სივრცის მობრუნება სათავეზე (ნულზე) გამავალი ღერძის გარშემო. მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ ამ φ გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული ქვესივრცე იქნება **ბრუნვის ღერძი** (ერთგანზომილებიანი ქვესივრცე). აგრეთვე ინვარიანტული ქვესივრცე იქნება სიბრტყე, რომელიც **გადის სათავეზე ბრუნვითი ღერძის პერპენდიკულარულად.**

მაგალითი 2. ვთქვათ, R არის იმ მრავალწევრთა წრფივი სივრცე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს. ვთქვათ, φ წრფივი გარდაქმნა ნიშნავს გაწარმოებას, ე. ი.

$$f(t)\cdot\varphi=f'(t).$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ იმ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება k-ს, სადაც $k<n$, ქმნის ინვარიანტულ ქვესივრცეს. მართლაც, ეს იქიდან ჩანს, რომ მრავალწევრის გაწარმოებით მისი ხარისხი კლებულობს.

სასურველია მკითხველმა შეამოწმოს, რომ ინვარიანტულ ქვესივრცეთა თანაკვეთა და გაერთიანება ისევ ინვარიანტული ქვესივრცეა.

§ 60. მრავალწევრი მატრიცის მიმართ

ვთქვათ, λ ასოს მიმართ მოცემულია m-ური ხარისხის მრავალწევრი

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_m\lambda^m, \tag{1}$$

სადაც a_0, a_1, a_2, ..., a_m კოეფიციენტები ეკუთვნის რომელიმე რიცხვთა P ველს. გმოსახულებას

$$a_0E+a_1A+a_2A^2+a_3A^3+\ldots+a_mA^m,$$

სადაც A კვადრატული მატრიცაა რიცხვთა P ველზე, ეწოდება **მრავალწევრი A მატრიცის მიმართ** და აღინიშნება $f(A)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_mA^m. \tag{2}$$

თუ $A=(a_{ij})$, მაშინ $f(A)$ მატრიცის ელემენტებს ექნება შემდეგი სახე:

$$a_0e_{ij}+a_1\overset{(1)}{a_{ij}}+a_2\overset{(2)}{a_{ij}}+\ldots+a_m\overset{(m)}{a_{ij}},$$

სადაც $\overset{(k)}{a_{ij}}$-თი აღნიშნულია A^k მატრიცის ელემენტები.

მაგალითად, ვთქვათ, $f(\lambda)=4-2\lambda+\lambda^2$, მაშინ $f(A)=4E-2A+A^2$. კერძოდ, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

მივიღებთ:

$$f(A)=4\cdot E-2A+A^2=\begin{pmatrix} 33 & 39 & 37 \\ 16 & 19 & -10 \\ 6 & 45 & 16 \end{pmatrix}.$$

მატრიცებზე მოქმედებათა წესების გამოყენებით ადვილად შემოწმდება, რომ თუ

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda)+t(\lambda),\quad g(\lambda)=\varphi(\lambda)\cdot t(\lambda),$$

სადაც

$$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_m\lambda^m,$$

$$t(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\ldots+b_m\lambda^m,$$

მაშინ

$$f(A)=\varphi(A)+t(A),\quad g(A)=\varphi(A)\cdot t(A).$$

გარდა ამისა, რადგან

$$\varphi(\lambda)\cdot t(\lambda)=t(\lambda)\cdot\varphi(\lambda),$$

თუ λ-ს მაგიერ ჩავსვამთ A კვადრატულ მატრიცას გვექნება

$$\varphi(A)\cdot t(A)=t(A)\cdot\varphi(A).$$

მაშასადამე, ერთისა და იმავე მატრიცის მიმართ ორი მრავალწევრის ნამრავლი გადანაცვლებადია.

შემდეგში ვიგულისხმოთ, რომ ყველა განსახილველი მატრიცა კვადრატულია და ერთისა და იმავე რიგისაა.

განსაზღვრა. A მატრიცას ეწოდება B მატრიცის მსგავსი, თუ არსებობს ისეთი არაგანსაკუთრებული X მატრიცა, რომ

$$A=X^{-1}BX. \tag{3}$$

ამ შემთხვევაში აგრეთვე ვიტყვით, რომ A მატრიცა მიიღება B მატრიცისაგან X მატრიცის გარდაქმნით. (3) ტოლობიდან ვღებულობთ თანაფარდობას:

$$B=XAX^{-1}=(X^{-1})^{-1}AX^{-1}.$$

ამრიგად, თუ A მატრიცა მსგავსია B მატრიცისა, მაშინ B მატრიცაც მსგავსია A მატრიცისა.

ვთქვათ,

$$A=X^{-1}BX \text{ და } B=Y^{-1}CY.$$

თუ პირველ ტოლობაში B-ს ნაცვლად ჩავსვამთ მის მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$A=X^{-1}Y^{-1}CYX=(YX)^{-1}C(YX).$$

მაშასადამე, თუ A მატრიცა მსგავსია B მატრიცისა და B მატრიცა მსგავსია C მატრიცისა, მაშინ A მატრიცა მსგავსი იქნება C მატრიცისა. აქედან აგრეთვე გამოდის: თუ მოცემული ორი მატრიცა ცალ-ცალკე მსგავსია მესამე მატრიცისა, მაშინ ისინი ურთიერთმსგავსი იქნება.

ცხადია, რომ ყოველი მატრიცა თავისი თავის მსგავსია. მართლაც, ამისათვის საკმარისია X მატრიცად მივიღოთ E ერთეულოვანი მატრიცა:

$$A=E^{-1}AE.$$

ზემოთ განხილული თვისებები გვიჩვენებს, რომ რიცხვთა P ველზე აღებული ყველა n-ური რიგის მატრიცის სიმრავლე შეიძლება დავყოთ თანაუკვეთ კლასებად, ისე, რომ ყოველ კლასში მოვათავსოთ ერთიმეორის მსგავსი მატრიცები. ადვილად შემოწმდება შეუღლებული მატრიცების შემდეგი ორი თვისება:

$$X^{-1}(A_1+A_2+\dots+A_k)X=X^{-1}A_1X+X^{-1}A_2X+\dots+X^{-1}A_kX, \quad (4)$$

$$X^{-1}(A_1\cdot A_2\dots A_k)X=X^{-1}A_1XX^{-1}A_2X\dots X^{-1}A_kX. \quad (5)$$

ვიგულისხმოთ, რომ $A_1=A_2=\dots=A_k=A$. მაშინ (4) და (5) თანაფარდობებიდან შესაბამისად მივიღებთ:

$$X^{-1}(kA)X=k(X^{-1}AX), \quad X^{-1}A^kX=(X^{-1}AX)^k.$$

ამ ორი თანაფარდობის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$X^{-1}f(A)X=f(X^{-1}AX).$$

ამრიგად, A მატრიცის მიმართ $f(A)$ მრავალწევრის გარდაქმნა X მატრიცით უდრის $X^{-1}AX$ გარდაქმნილი მატრიცის მიმართ მრავალწევრს. მატრიცის გარდაქმნა ხშირად აადვილებს გამოთვლას. მაგალითად, ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix};$$

გამოვთვალოთ $(X^{-1}AX)^n$. ინდუქციით ადვილად დავამტკიცებთ,

რომ $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; გამოთვლით მივიღებთ: $X^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $X^{-1}AX=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.

ახლა, ხარისხის გარდაქმნის თვისების გამოყენებით გვექნება:

$$(X^{-1}AX)^n=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}^n=X^{-1}A^nX=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{pmatrix}.$$

ამრიგად,

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{pmatrix}.$$

§ 57. მახასიათებელი მატრიცა და მახასიათებელი მრავალწევრი

ვთქვათ, რიცხვთა P ველზე მოცემულია n-ური რიგის $A=(a_{ij})$ კვადრატული მატრიცა და λ დამოუკიდებელი ცვლადი. განვიხილოთ λE სკალარული მატრიცისა და A მატრიცის სხვაობა:

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

(1) მატრიცას ეწოდება A მატრიცის **მახასიათებელი მატრიცა**, ხოლო მის დეტერმინანტს, რომელიც წარმოადგენს λ-ს მიმართ მრავალწევრს, ეწოდება A მატრიცის **მახასიათებელი მრავალწევრი**, მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვებს კი ეწოდება A მატრიცის მახასიათებელი **რიცხვები**. A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი აღვნიშნოთ $g(\lambda)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$g(\lambda)=|\lambda E-A|. \quad (2)$$

შევისწავლოთ ახლა $g(\lambda)$ მრავალწევრი; საზოგადოდ ის არის (1) მატრიცის შესაბამისი n-ური რიგის დეტერმინანტი. n-ური რიგის დეტერმინანტის განმარტების თანახმად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მხოლოდ მთავარი დიაგონალის ელემენტების გამრავლების შედეგად მიღებული წევრი

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\dots(\lambda-a_{nn}) \quad (3)$$

არის n-ური ხარისხის მრავალწევრი λ-ს მიმართ. ადვილად შევნიშნავთ,

რომ ამ დეტერმინანტის ყოველი სხვა წევრის ხარისხი λ-ს მიმართ არ აღემატება $n-2$. მართლაც, თუ დეტერმინანტის რომელიმე წევრი შეიცავს $-a_{ij}$ $(i \neq j)$ მამრავლს, მაშინ ის არ შეიცავს $\lambda-a_{ii}$ და $\lambda-a_{jj}$ მამრავლებს და ამიტომ მისი ხარისხი λ-ს მიმართ არ აღემატება $n-2$. ამრიგად, $g(\lambda)$ მრავალწევრი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$g(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\varphi(\lambda), \qquad (4)$$

სადაც $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრის ხარისხი არ აღემატება $n-2$. (4) თანაფარდობიდან ჩანს, რომ მოცემული A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრის ხარისხი უდრის მოცემული მატრიცის რიგს, ხოლო უფროსი წევრის კოეფიციენტი კი უდრის 1-ს.

$g(\lambda)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრის მისაღებად (1) ტოლობაში ან, რაც იგივეა, (2) ტოლობაში ჩავსვათ $\lambda=0$, გვექნება:

$$g(0)=|-A|=(-1)^n|A|.$$

თუ ახლა A მატრიცის მახასიათებელ რიცხვებს, ე. ი. $g(\lambda)$ მრავალწევრის ფესვებს, აღვნიშნავთ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ასოებით, მაშინ, თანახმად ვიეტას განზოგადებული ფორმულებისა, მივიღებთ:

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n=(-1)^n g(0)=|A|,$$

ე. ი. A მატრიცის მახასიათებელი რიცხვების ნამრავლი უდრის A მატრიცის დეტერმინანტს. იმავე ვიეტას ფორმულების თანახმად, როგორც ეს (4) ტოლობიდან ჩანს, A მატრიცის მახასიათებელი რიცხვების ჯამი, რომელსაც $f(A)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ, უდრის A მატრიცის მთავარი დიაგონალის ელემენტების ჯამს, ანუ კვალს, ე. ი.

$$f(A)=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}.$$

თეორემა. მსგავსი მატრიცების მახასიათებელი მრავალწევრები ტოლია.

მართლაც, ვთქვათ, A მატრიცა მსგავსია B მატრიცისა:

$$A=X^{-1}BX,$$

A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრისათვის სათანადო გარდაქმნით მივიღებთ:

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-X^{-1}BX|=|X^{-1}(\lambda E-B)X|=$$
$$=|X^{-1}|\,|\lambda E-B|\,|X|=|\lambda E-B|.$$

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მსგავსი მატრიცების კვალი და დეტერმინანტი ტოლია.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ორი მატრიცის მსგავსე-

ბისათვის მათი მახასიათებელი მრავალწევრების ტოლობა არის აუცილებელი, მაგრამ არასაკმარისი პირობა.

მაგალითად,

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცებს ერთი და იგივე მახასიათებელი მრავალწევრები აქვთ, მაგრამ ისინი არ არიან მსგავსი; ნებისმიერი არაგანსაკუთრებული X მატრიცისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$X^{-1}EX=X^{-1}X=E.$$

ახლა, თუ $g(\lambda)$ მრავალწევრი $\lambda=A$ ჩასმით მოგვცემს $f(A)=0$ ნულოვან მატრიცას, მაშინ ვიტყვით, რომ A მატრიცა ფესვია $g(\lambda)$ მრავალწევრისა.

ჰამილტონ-კელის თეორემა. ყოველი მატრიცა თავისი მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია A მატრიცა. A მატრიცის მახასიათებელი $AE—A$ მატრიცის მიერთებული მატრიცა აღვნიშნოთ B-თი. B მატრიცის ელემენტები აღვნიშნოთ β_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots n)$ სიმბოლოებით. რადგან β_{ij} ელემენტები (1) მატრიცის შესაბამისი ელემენტების ლგებრული დამატებანია, ამიტომ ყოველი β_{ij} იქნება λ-ს მიმართ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება $n—1$. ვთქვათ,

$$\beta_{ij}=\overset{(0)}{\beta}_{ij}+\overset{(1)}{\beta}_{ij}\lambda+\overset{(2)}{\beta}_{ij}\lambda^2+\ldots+\overset{(n-1)}{\beta}_{ij}\lambda^{n-1}.$$

ამ აღნიშვნის საფუძველზე B მატრიცა შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$B=B_0+B_1\lambda+B_2\lambda^2+\ldots+B_{n-1}\lambda^{n-1},$$

სადაც

$$B_k=\begin{pmatrix} \overset{(k)}{\beta}_{11} & \overset{(k)}{\beta}_{12} & \cdots & \overset{(k)}{\beta}_{1n} \\ \overset{(k)}{\beta}_{21} & \overset{(k)}{\beta}_{22} & \cdots & \overset{(k)}{\beta}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \overset{(k)}{\beta}_{n1} & \overset{(k)}{\beta}_{n2} & \cdots & \overset{(k)}{\beta}_{nn} \end{pmatrix} \quad (k=0,\ 1, \ldots,\ n—1).$$

მოცემული მატრიცის მის მიერთებულ მატრიცაზე ნამრავლის თვისების (გვ. 119) თანახმად გვექნება:

$$B\cdot(\lambda E—A)=(\lambda E—A)\cdot B=\lambda E—A|\cdot E, \tag{5}$$

სადაც $g(\lambda)=|\lambda E-A|$ არის n-ური ხარისხის მრავალწევრი λ-ს მიმართ.
ვთქვათ,

$$g(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\dots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n.$$

ახლა (5) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\begin{gathered}(B_0+B_1\lambda+B_2\lambda^2+\dots+B_{n-1}\lambda^{n-1})(\lambda E-A)=\\=(a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\dots+a_{n-1}\lambda^{n-1}).E.\end{gathered}$$

ამ თანაფარდობიდან λ-ს ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით ვღებულობთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{gathered}-B_0A=a_0E,\\-B_1A+B_0=a_1E,\\-B_2A+B_1=a_2E,\\\dots\dots\dots\dots\\-B_{n-1}A+B_{n-2}=a_{n-1}E,\\B_{n-1}=E.\end{gathered}$$

თუ მიღებულ ტოლობებს გავამრავლებთ მარჯვნიდან შესაბამისად E, A, A^2, ..., A^n მატრიცებზე და შემდეგ შევკრებთ, მივიღებთ:

$$0=a_0E+a_1A+a_2A^2+\dots+a_{n-1}A^{n+1}+A^n,$$

ე. ი. $g(A)=0$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. დამტკიცებული თეორემიდან გამოდის, რომ მატრიცები E, A, A^2, ..., A^n წრფივად დამოკიდებულია.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}$ მატრიცა. მოცემული A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი იქნება:

$$g(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^2-5\lambda+7.$$

თუ λ-ს ნაცვლად ჩავსვამთ A მატრიცის მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$\begin{gathered}g(A)=A^2-5A+7E=\begin{pmatrix}3 & 5\\-5 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & -5\\5 & -15\end{pmatrix}+\\+\begin{pmatrix}7 & 0\\0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=0.\end{gathered}$$

მინიმალური მრავალწევრი. ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად, ყოველი კვადრატული მატრიცა თავისი მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვია. უმცირესი ხარისხის არანულოვან მრავალწევრს, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის 1 და რომელსაც ფესვად A მატ-

რიცა აქვს, ეწოდება მოცემული მატრიცის **მინიმალური მრავალწევრი.**

განვიხილოთ მოცემული A მატრიცის **მინიმალური მრავალწევრის** ზოგიერთი თვისება.

1. მოცემულ A მატრიცას აქვს მხოლოდ ერთი მინიმალური მრავალწევრი.

მართლაც, ვთქვათ, A მატრიცას აქვს ორი $\varphi_1(\lambda)$ და $\varphi_2(\lambda)$ მინიმალური მრავალწევრი. განვიხილოთ $\varphi_1(\lambda)-\varphi_2(\lambda)=\varphi(\lambda)$. ცხადია, $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრის ხარისხი უფრო დაბალია და მისი ფესვი არის ისევ A მატრიცა. თუ ამ სხვაობას გავყოფთ უფროსი წევრის კოეფიციენტზე, მივიღებთ, რომ არსებობს კიდევ უფრო დაბალი ხარისხის მრავალწევრი, ვიდრე მინიმალური ხარისხის მრავალწევრი, რომლის ფესვია A მატრიცა; ეს კი ეწინააღმდეგება მინიმალური მრავალწევრის განსაზღვრას.

2. ყოველი $f(\lambda)$ მატრიცა, რომლის ფესვია A მატრიცა, უნაშთოდ იყოფა A მატრიცის $\varphi(\lambda)$ მინიმალურ მრავალწევრზე.

მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ, $f(\lambda)$ მრავალწევრი არ იყოფა უნაშთოდ $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრზე, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda)g(\lambda)+r(\lambda),$$

სადაც $r(\lambda)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრის ხარისხზე.

ამ ტოლობაში ჩავსვათ $\lambda=A$ მნიშვნელობა. პირობის თანახმად გვექნება $r(A)=0$; ეს კი პირობას ეწინააღმდეგება.

მაგალითად, A მატრიცის მინიმალური მრავალწევრი გამყოფი იქნება A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრისა.

3. მსგავს მატრიცებს ერთი და იგივე მინიმალური მრავალწევრი აქვთ.

მართლაც, ვთქვათ, A და B მატრიცები მსგავსია, ე. ი.

$$A=X^{-1}BX.$$

ახლა, თუ $f(\lambda)$ ნებისმიერი ისეთი მრავალწევრია, რომლის ფესვი არის B მატრიცა, მაშინ (გვ. 423) გვექნება:

$$f(A)=f(X^{-1}BX)=X^{-1}\ f(B)X=0.$$

ამრიგად, სიმრავლე მრავალწევრებისა, რომლებსაც ფესვად აქვს A მატრიცა, ემთხვევა იმ მრავალწევრთა სიმრავლეს, რომლებსაც ფესვად აქვს მისი მსგავსი B მატრიცა. აქედან გამომდინარეობს, რომ ამ მრავალწევრთა სიმრავლიდან უმცირესი ხარისხის მრავალწევრი, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის 1-ს, იქნება A და B მსგავს მატრიცთა მინიმალური მრავალწევრი. ამრიგად, მოცემულ A და B

მატრიცთა მინიმალური მრავალწევრების ტოლობა არის მსგავსების კიდევ ერთი აუცილებელი პირობა.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მატრიცები:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

მათი მახასიათებელი მრავალწევრები შესაბამისად უდრის:

$$(\lambda-1)(\lambda-3)^2 \quad \text{და} \quad (\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

ვინაიდან ეს მრავალწევრები სხვადასხვაა, ამიტომ მოცემული მატრიცები არაა მსგავსი. ვიცით, რომ A და B მატრიცების მინიმალური მრავალწევრები შესაბამისად გამყოფია მათი მახასიათებელი მრავალწევრებისა. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $(\lambda-1)(\lambda-3)$ მრავალწევრი იქნება ორივე A და B მატრიცის მინიმალური მრავალწევრი. ამრიგად მიცემულ A და B მატრიცთა მინიმალური მრავალწევრები ტოლია, მაგრამ ისინი არაა მსგავსი.

§ 58. საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობანი. წრფივი გარდაქმნის მახასიათებელი მრავალწევრი

წრფივ ალგებრაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ერთგანზომილებიან ინვარიანტულ ქვესივრცეებს, ამიტომ ჩვენ უფრო დაწვრილებით შევისწავლით ასეთ ქვესივრცეებს.

ვთქვათ, მოცემულია R წრფივი სივრცე და მისი φ წრფივი გარდაქმნა. λ რიცხვს ეწოდება φ წრფივი გარდაქმნის **საკუთრივი მნიშვნელობა**, თუ R სივრცეში არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ისეთი x ვექტორი, რომ

$$x\varphi=\lambda x. \tag{1}$$

ყოველ x ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს (1) თანაფარდობას, ეწოდება φ გარდაქმნის **საკუთრივი ვექტორი** λ საკუთრივი მნიშვნელობის მიმართ. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამოცანა **საკუთრივი ვექტორის და ერთგანზომილებიანი ივნარიანტული ქვესივრცის მოძებნის შესახებ ერთი და იგივეა.**

მართლაც, განვიხილოთ φ გარდაქმნის საკუთრივი $x\neq 0$ ვექტორი და მისი შესაბამისი λ საკუთრივი მნიშვნელობა. განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი R_1 ქვესივრცე, რომელიც გაჭიმულია x ვექტორზე, ე. ი. განვიხილოთ kx სახის ვექტორთა ერთობლიობა. (1) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$(kx)\varphi=k(x\varphi)=k\lambda x.$$

აქედან ჩანს, რომ R_1 ქვესივრცე ინვარიანტულია φ გარდაქმნის მიმართ. პირიქით, ვთქვათ, რომელიმე ერთგანზომილებიანი R_1 ქვესივრცე ინვარიანტულია φ გარდაქმნის მიმართ. R_1 ქვესივრცეში ავირჩიოთ ნებისმიერი $x \neq 0$ ვექტორი. ვინაიდან R_1 ქვესივრცე ერთგანზომილებიანია, ამიტომ მის ყოველ ვექტორს ექნება kx სახე.

პირობის თანახმად, $x\varphi \in R_1$, მაშასადამე,

$$x\varphi = \lambda x,$$

ე. ი. x არის φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი λ საკუთრივი მნიშვნელობის მიმართ.

თეორემა. **კომპლექსურ სივრცეში ყოველ φ წრფივ გარდაქმნას აქვს ერთი საკუთრივი ვექტორი მაინც.**

დამტკიცება. მოცემულ R სივრცეში ამოვარჩიოთ რომელიმე $e_1, e_2, \ldots, e_n$ საბაზისო სისტემა. ვთქვათ, ამ ბაზისში φ წრფივი გარდაქმნის მატრიცა არის $A=(a_{ij})$. ახლად გარდაქმნის რომელიმე არანულოვანი საკუთრივი ვექტორი აღვნიშნოთ x-ით, ხოლო შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობა კი იყოს λ; რადგან $(x\varphi)=A(x)$, სადაც $(x\varphi)$ და (x) შესაბამისად ერთსვეტიანი მატრიცებია, (1) ტოლობა მატრიცულად დაიწერება ასე:

$$A(x)=(\lambda x). \tag{2}$$

თუ x ვექტორის კოორდინატებია $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ და $A=(\alpha_{ij})$, მაშინ ეს ტოლობა გაშლილი სახით. მატრიცულად, ასე დაიწერება:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \\ \vdots \\ \lambda\xi_n \end{pmatrix}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n &= \lambda\xi_1, \\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n &= \lambda\xi_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\ldots+\alpha_{nn}\xi_n &= \lambda\xi_n \end{aligned} \tag{3}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\begin{aligned} (\lambda-\alpha_{11})\xi_1-\alpha_{12}\xi_2-\ldots-\alpha_{1n}\xi_n &= 0, \\ -\alpha_{21}\xi_1+(\lambda-\alpha_{22})\xi_2-\ldots-\alpha_{2n}\xi_n &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ -\alpha_{n1}\xi_1-\alpha_{n2}\xi_2-\ldots-(\lambda-\alpha_{nn})\xi_n &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

მიღებული ტოლობანი შეიძლება განვიხილოთ როგორც წრფივი ერთგვაროვანი სისტემა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ უცნობთა მიმართ. როგორც ვიცით, (4) ერთგვაროვან სისტემას, რომ ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი ჰქონდეს, მისი დეტერმინანტი უნდა უდრიდეს ნულს, ე. ი.

$$\begin{vmatrix} \lambda-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \lambda-\alpha_{22} & \ldots & -\alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \ldots & \lambda-\alpha_{nn} \end{vmatrix} = |\lambda E - A| = 0. \tag{5}$$

მიღებულ n-ური ხარისხის $|\lambda E - A|$ მრავალწევრს, რომელსაც A მატრიცის ან კიდევ მისი φ გარდაქმნის მახასიათებელ მრავალწევრს უწოდებენ, ერთი $\lambda = \lambda_0$ ფესვი მაინც აქვს. თუ $\lambda = \lambda_0$ ჩავსვამთ (4) სისტემაში, (5) პირობის გამო, მივიღებთ ერთგვაროვან სისტემას, რომლის დეტერმინანტი ნულია. ასეთ ერთგვაროვან სისტემას, როგორც ვიცით, ერთი ნულისაგან განსხვავებული $x_0 = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}\right)$ ამონახსნი მაინც აქვს და (3) სისტემა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$A x_0 = \lambda_0 x_0$$

ან, რაც იგივეა,

$$x_0 \varphi = \lambda_0 x_0. \tag{6}$$

ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია. $x_0 = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}\right)$ ვექტორი იქნება φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი, ხოლო $\lambda = \lambda_0$ ფესვი კი — φ გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობა. თუ სივრცის φ გარდაქმნას განვიხილავთ ინვარიანტული ქვესივრცისათვის, ცხადია, რომ თეორემა მართებული იქნება სივრცის ნებისმიერი ინვარიანტული ქვესივრცისათვისაც. ვინაიდან გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობის განსაზღვრა არაა დამოკიდებული საბაზისო სისტემაზე, ამიტომ მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვები არ იქნება დამოკიდებული საბაზისო სისტემაზე.

φ წრფივი გარდაქმნის ან, რაც იგივეა, მისი მატრიცის n-ური ხარისხის მახასიათებელი მრავალწევრის ყველა n ფესვს ეწოდება მოცემული წრფივი გარდაქმნის სპექტრი.

შედეგი. ნამდვილი წრფივი სივრცის ყოველ φ წრფივ გარდაქმნას გააჩნია ერთგანზომილებიანი ან ორგანზომილებიანი ინვარიანტული ქვესივრცე.

მართლაც, განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1. $\lambda = \lambda_0$ ფესვი ნამდვილია და 2. $\lambda = \lambda_0$ ფესვი კომპლექსურია.

პირველ შემთხვევაში $\lambda = \lambda_0$ ფესვისათვის ვღებულობთ φ გარდაქმნის სრულიად გარკვეულ $x_0 = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}\right)$ საკუთრივ ვექტორს. ეს საკუთრივი ვექტორი, როგორც (6) ტოლობიდან ჩანს, შექმნის ერთგანზომილებიან ინვარიანტულ ქვესივრცეს.

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. ვთქვათ, $\lambda_0=\alpha+\beta i$, ე. ი. $\lambda=\alpha+\beta i$ მახასიათებელი მრავალწევრის კომპლექსური ფესვია. ვთქვათ, $\xi_1^{(0)}+i\eta_1^{(0)}$, $\xi_2^{(0)}+i\eta_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}+i\eta_n^{(0)}$ არის (4) სისტემის ან, რაც იგივეა, (3) სისტემის არანულოვანი ამონახსნი. თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (3) სისტემაში და შემდეგ გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, შესაბამისად მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
a_{11}\xi_1^{(0)}+a_{12}\xi_2^{(0)}+\ldots+a_{1n}\xi_n^{(0)}&=\alpha\xi_1^{(0)}-\beta\eta_1^{(0)},\\
a_{21}\xi_1^{(0)}+a_{22}\xi_2^{(0)}+\ldots+a_{2n}\xi_n^{(0)}&=\alpha\xi_2^{(0)}-\beta\eta_2^{(0)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}\xi_1^{(0)}+a_{n2}\xi_2^{(0)}+\ldots+a_{nn}\xi_n^{(0)}&=\alpha\xi_n^{(0)}-\beta\eta_n^{(0)}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

და

$$
\begin{aligned}
a_{11}\eta_1^{(0)}+a_{12}\eta_2^{(0)}+\ldots+a_{1n}\eta_n^{(0)}&=\alpha\eta_1^{(0)}+\beta\xi_1^{(0)},\\
a_{21}\eta_1^{(0)}+a_{22}\eta_2^{(0)}+\ldots+a_{2n}\eta_n^{(0)}&=\alpha\eta_2^{(0)}+\beta\xi_2^{(0)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}\eta_1^{(0)}+a_{n2}\eta_2^{(0)}+\ldots+a_{nn}\eta_n^{(0)}&=\alpha\eta_n^{(0)}+\beta\xi_n^{(0)}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}$ და $\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots, \eta_n^{(0)}$ შესაბამისად არის x_0 და y_0 ვექტორების კოორდინატები, მაშინ (7) და (8) ტოლობები შესაბამისად ასე გადაიწერება:

$$x_0\varphi=\alpha x_0-\beta y_0,\quad y_0\varphi=\alpha y_0+\beta x_0, \tag{9}$$

ეს ტოლობები გვიჩვენებს, რომ $\lambda_0=\alpha+\beta i$ კომპლექსური ფესვის შესაბამისი ინვარიანტული ქვესივრცე φ გარდაქმნის მიმართ ორგანზომილებიანია და შექმნილია x_0 და y_0 ვექტორების მიერ.

თეორემა. თუ φ წრფივი გარდაქმნის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ საკუთრივი ვექტორების შესაბამისი $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ საკუთრივი მნიშვნელობანი სხვადასხვაა, მაშინ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ საკუთრივი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

დამტკიცება. როცა $n=1$, დებულება ცხადია. ვთქვათ, დებულება მართებულია $n-1$ ვექტორისათვის; დავამტკიცოთ მისი მართებულობა n ვექტორისათვის. დავუშვათ წინააღმდეგი, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ

$$k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n=0 \tag{10}$$

და ტოლობაში ერთი კოეფიციენტი მაინც, მაგალითად $k_1\neq0$. (10) ტოლობის ორივე მხარეზე მოვახდინოთ φ გარდაქმნა, გვექნება:

$$(k_1e_1+k_2e_2+\ldots+k_ne_n)\varphi=0\cdot\varphi=0,$$

ვინაიდან $e_i\varphi=\lambda_ie_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, მივიღებთ:

$$k_1\lambda_1e_1+k_2\lambda_2e_2+\ldots+k_n\lambda_ne_n=0.$$

ამ ტოლობას გამოვაკლოთ (10) ტოლობა გამრავლებული λ_n-ზე, მივიღებთ:

$$k_1(\lambda_1-\lambda_n)e_1+k_2(\lambda_2-\lambda_n)e_2+\ldots+k_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)e_{n-1}=0,$$

სადაც, პირობის თანახმად, რადგან $k_1\neq 0$ და $\lambda_1\neq\lambda_n$ პირველი კოეფიციენტი $k_1(\lambda_1-\lambda_n)\neq 0$; ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის შესახებ. ამ დამტკიცებული დებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ φ გარდაქმნის მახასიათებელ მრავალწევრს აქვს n სხვადასხვა ნამდვილი ფესვი, მაშინ φ გარდაქმნის მატრიცა შეიძლება დაყვანილ იქნეს დიაგონალურ სახემდე. მართლაც, მახასიათებელი განტოლების ყოველ λ_i ფესვს შეესაბამება ერთი e_i საკუთრივი ვექტორი. ვინაიდან ამ ვექტორების შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობანი, მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვები, ყველა ერთიმეორისაგან განსხვავებულია, ზემოთ დამტკიცებული დებულების თანახმად, ჩვენ გვექნება წრფივად დამოუკიდებელი n ვექტორი $e_1, e_2, \ldots, e_n$. თუ ამ ვექტორებს მივიღებთ საბაზისო სისტემად, მაშინ φ გარდაქმნის მატრიცას, ვინაიდან $e_i\varphi=\lambda_i e_i$, ექნება დიაგონალური სახე.

ამბობენ, რომ R სივრცის φ წრფივი გარდაქმნის სპექტრი მარტივია, თუ მისი ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა ნამდვილი და სხვადასხვაა.

ამრიგად, 1. **ყოველი წრფივი გარდაქმნა მარტივი სპექტრით შეიძლება მოცემულ იქნეს დიაგონალური მატრიცით** და 2. **ყოველი წრფივი გარდაქმნა მარტივი სპექტრით გვაძლევს სივრცის n რაოდენობის ერთგანზომილებიან ინვარიანტულ ქვესივრცეს.**

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ $\lambda=\lambda_0$ ნამდვილი ფესვი k-ჯერადია, მაშინ შესაბამისი ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რიცხვი არ აღემატება k-ს, ე. ი. ამ შემთხვევაში $\lambda=\lambda_0$ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ინვარიანტული ქვესივრცის განზომილება არ აღემატება k-ს.

მაგალითები:

1. ვიპოვოთ საკუთრივი რიცხვები და შესაბამისი ინვარიანტული ქვესივრცეები φ გარდაქმნისა, რომლის შესაბამისი მატრიცა არის

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი იქნება $|\lambda E-A|=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$. ამრიგად, მახასიათებელი მრავალწევრის სამივე ფესვი $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$ ნამდვილია. ვინაიდან მოცემულ φ გარდაქმნას აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული -2 და 1 საკუთრივი მნიშვნელობა, რომელთაგან $\lambda=1$ ორჯერადი ფესვია, ამიტომ

უნდა მოინახოს ამ რიცხვების შესაბამისი ორი ინვარიანტული ქვესივრცე. პირველი ინვარიანტული ქვესივრცე იქნება ერთგანზომილებიანი, ხოლო მეორე ინვარიანტული ქვესივრცის განზომილება კი არ უნდა აღემატებოდეს 2-ს. შევადგინოთ $\lambda_1=-2$ და $\lambda_2=1$ საკუთრივ მნიშვნელობათა შესაბამისი (4) ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემები, გვექნება:

$$\begin{aligned}-5\xi_1-\xi_2+0\cdot\xi_3&=0,\\ 4\xi_1-\xi_2+0\cdot\xi_3&=0,\\ -4\xi_1+8\xi_2+0\cdot\xi_3&=0,\end{aligned}\qquad \text{და}\qquad \begin{aligned}-2\xi_1-\xi_2+0\cdot\xi_3&=0,\\ 4\xi_1+2\xi_2+0\cdot\xi_3&=0,\\ -4\xi_1+8\xi_2+3\xi_3&=0.\end{aligned}$$

ორივე სისტემის შესაბამისი მატრიცის რანგი $r=2$. პირველი სისტემის ამონახსნი იქნება $\xi_1=\xi_2=0$, ξ_3 კი ნებისმიერია. ამრიგად, $\lambda_1=-2$ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი x' ვექტორი იქნება $x'=\xi_3(0, 0, 1)$, ხოლო ამ ვექტორის მიერ შექმნილი ერთგანზომილებიანი ინვარიანტული ქვესივრცე კი შეიძლება ასე აღვნიშნოთ: $c_1(0, 0, 1)$, სადაც c_1 ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. მეორე სისტემის ამოხსნით მივიღებთ: $\xi_1=\frac{3}{20}\xi_3$, $\xi_2=-\frac{3}{10}\xi_3$, სადაც ξ_3 ნებისმიერია. ამრიგად, $\lambda_2=1$ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი y' საკუთრივი ვექტორი იქნება $y'=\xi_3\left(\frac{3}{20},\ -\frac{3}{10},\ 1\right)$, ხოლო ამ ვექტორის მიერ შექმნილი ერთგანზომილებიანი ინვარიანტული ქვესივრცე კი $c_2(3, -6, 20)$, სადაც c_2 ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ საკუთრივი რიცხვები და შესაბამისი ინვარიანტული ქვესივრცეები φ გარდაქმნისა, რომლის შესაბამისი მატრიცა არის

$$A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული A მატრიცის შესაბამისი მახასიათებელი მრავალწევრი $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^3$, ე. ი. $\lambda=2$ არის მისი სამჯერადი ფესვი.

ფესვის შესაბამისი (4) ერთგვაროვანი სისტემა იქნება:

$$\begin{aligned}-3\xi_1-6\xi_2+3\xi_3&=0,\\ \xi_1+2\xi_2-\xi_3&=0,\\ -\xi_1-2\xi_2+\xi_3&=0.\end{aligned}$$

მიღებული სისტემის შესაბამისი მატრიცის რანგი $r=1$, ამიტომ სისტემის ამოხსნა დაიყვანება $\xi_1=-2\xi_2+\xi_3$ განტოლების ამოხსნამდე.

ვიპოვოთ სისტემის რომელიმე ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, ე. ი. ამონახსნთა ერთ-ერთი ფუნდამენტალური სისტემა. $\varepsilon_1 = (1, 0)$ ვექტორის შესაბამისი ამონახსნი, რადგან $\xi_1 = -2, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0$, იქნება $x_1 = (-2, 1, 0)$. ანალოგიურად $\varepsilon_2 = (0, 1)$ ვექტორის შესაბამისი ამონახსნი იქნება $x_2 = (1, 0, 1)$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში φ გარდაქმნის $\lambda = 2$ სამჯერად საკუთრივ მნიშვნელობას შეესაბამება ერთი ორგანზომილებიანი $c_1(-2, 1, 0) + c_2(1, 0, 1)$ ინვარიანტული ქვესივრცე, რომლის ყოველი ვექტორი, ანუ ელემენტი, x_1 და x_2 ვექტორთა წრფივი კომბინაციაა.

თავი XII

ევკლიდური სივრცე

§ ჰი. სკალარული ნამრავლი და ევკლიდური სივრცე

ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია, რომ ვექტორის სიგრძესა და ვექტორთა შორის კუთხის ცნებების დახმარებით სიბრტყეზე და სამგანზომილებიან სივრცეში შემოღებულია ვექტორთა სკალარული ნამრავლის ცნება. ცნობილია აგრეთვე, რომ ვექტორის სიგრძე და ვექტორთა შორის კუთხე, თავის მხრივ, შეიძლება გამოსახულ იქნეს სკალარული ნამრავლის საშუალებით.

განსაზღვრა. **ნამდვილ** R **წრფივ სივრცეს ეწოდება ევკლიდური სივრცე, თუ ყოველ ორ** x, $y \in R$ **ვექტორს შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ** (x, y) **სიმბოლოთი და ვუწოდებთ** x **და** y **ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს. გარდა ამისა, ეს თანადობა უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს** (აქსიომებს):

1°. $(x,y)=(y,x)$, ე. ი. სკალარული ნამრავლი სიმეტრიულია,

2°. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$, სადაც λ ნამდვილი რიცხვია.

3°. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ სკალარული ნამრავლის დისტრიბუტიულობის კანონი.

4°. $(x,x)>0$, როცა $x \neq 0$, და $(x,x)=0$, როცა $x=0$.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ნულოვანი ვექტორის და ნებისმიერი სხვა ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის ნულს.

მართლაც, მე-2° პირობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$(0,\ y)=(0\cdot x,\ y)=0(x,\ y)=0.$$

ახლა განვიხილოთ ევკლიდური სივრცის რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ, R არის სამგანზომილებიან ვექტორთა სივრცე. ისე როგორც გეომეტრიაში, ნებისმიერი ორი x და y ვექტორის სკალარული ნამრავლი ვუწოდოთ მათ სიდიდეებსა და მათ შორის α კუთხის კოსინუსის ნამრავლს, ე. ი.

$$(x,\ y)=|x|\,|y|\cos\alpha.$$

ადვილად შემოწმდება 1°—4° აქსიომათა მართებულობა.

მაგალითი 2. ვთქვათ, R არის n განზომილებიან ვექტორთა წრფივი სივრცე. ნებისმიერი ორი $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი განვსაზღვროთ ფორმულით

$$(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\dots+\xi_n\eta_n. \tag{1}$$

მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ 1°—4° აქსიომები სრულდება. მაგალითად, $(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2>0$, თუ ერთი $\xi_i\neq 0$ მაინც, ე. ი. $x\neq 0$, ხოლო $(x, x)=0$, თუ ყველა ξ_i უდრის ნულს, ე. ი. $x=0$.

მაგალითი 3. ვთქვათ, R არის $C(a, b)$ სივრცე, ე. ი. $a\leqslant t\leqslant b$ შუალედში უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. ნებისმიერი ორი $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციის სკალარული ნამრავლი განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\ y(t)dt. \tag{2}$$

მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ სკალარული ნამრავლის ასეთნაირად განსაზღვრისას სრულდება 1°—4° აქსიომები.

ვექტორის სიგრძე. კუთხე ორ ვექტორს შორის. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის მიხედვით, შეიძლება შემოვიღოთ ძირითადი მეტრიკული ცნებები, ვექტორის სიგრძისა და ორ ვექტორს შორის კუთხის ცნება.

განსაზღვრა 1. ევკლიდური სივრცის x ვექტორის სიგრძე ეწოდება რიცხვს

$$|x|=\sqrt{(x,\ x)}\,; \tag{3}$$

მაგალითად, მე-2 მაგალითში განხილულ ევკლიდურ სივრცეში ყოველი

$$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_n)$$

ვექტორის სიგრძე იქნება:

$$|x|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2},$$

ხოლო მე-3 მაგალითში განხილულ ევკლიდურ სივრცეში $x=x(t)$ ვექტორის (ფუნქციის) სიგრძე იქნება:

$$|x(t)|=\sqrt{[x(t),\ x(t)]}=\sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}.$$

ვინაიდან გამოთქმა „ფუნქციის სიგრძე“ უხერხულია, ამიტომ ამ

სიდიდეს უწოდებენ $x(t)$ ფუნქციის **ნორმას** და აღნიშნავენ $\|x(t)\|$ სიმბოლოთი.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ **რიცხვითი მამრავლის აბსოლუტური მნიშვნელობა შეიძლება გამოვიტანოთ ვექტორის სიგრძის ნიშნის გარეთ.**

მართლაც, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$|k\cdot x|=\sqrt{(kx,\ kx)}=\sqrt{k^2(x,x)}=|k|\sqrt{(x,x)}=|k|\,|x|. \tag{4}$$

ისეთ ვექტორს, რომლის სიგრძე უდრის 1-ს, ეწოდება **ნორმირებული ვექტორი.** ყოველი არანულოვანი ვექტორი შეიძლება ვაქციოთ ნორმირებულად, ე. ი. გავამრავლოთ ისეთ რიცხვზე, რომ მივიღოთ ნორმირებული ვექტორი.

მართლაც, ვთქვათ, x ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან და არაა ნორმირებული, ე. ი. $x\neq 0$ და $|x|\neq 1$. (4) ტოლობის გამოყენებით შევნიშნავთ, რომ თუ x ვექტორს გავამრავლებთ k რიცხვზე, სადაც $k=\dfrac{1}{|x|}$, ვნახავთ, რომ kx ვექტორი იქნება ნორმირებული.

განსაზღვრა 2. სივრცის ნებისმიერ ორ x და y ვექტორს შორის კუთხე α ეწოდება

$$\alpha=\arccos\frac{(x,\ y)}{|x|\,|y|}$$

რიცხვს.

სხვაგვარად, ეს არის ისეთი კუთხე, რომლის კოსინუსი უდრის $\dfrac{(x,\ y)}{|x|\,|y|}$, ე. ი.

$$\cos\alpha=\frac{(x,\ y)}{|x|\,|y|}. \tag{5}$$

როგორც განსაზღვრიდან ჩანს, ორ ვექტორს შორის კუთხე აღებულია 0-დან π-მდე.

მაგალითი. m-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ვიპოვოთ კუთხის კოსინუსი $x=(\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_n)$, სადაც $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_n=\xi_0$, ვექტორსა და სივრცის კოორდინატთა ღერძებს შორის.

ამოხსნა. ეს მაგალითი იგივეა, რაც ვიპოვოთ კუთხის კოსინუსები $x=(\xi_0, \xi_0, \ldots, \xi_0)$ ვექტორსა და $(\xi_0, 0, \ldots, 0)$, $(0,\ \xi_0, \ldots, 0), \ldots,$ $(0, 0, \ldots,\ \xi_0)$ ვექტორებს შორის.

თუ ვისარგებლებთ ფორმულებით:

$$\cos\alpha=\frac{(x,\ y)}{|x|\,|y|},$$

$$(x, y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n \text{ და } |x|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2},$$

მივიღებთ

$$\frac{\xi_0^2}{\sqrt{n\xi_0^2}\sqrt{\xi_0^2}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა. იმისათვის, რომ ზემოთ მოყვანილი ორ ვექტორს შორის კუთხის განსაზღვრა გამოვიყენოთ ზოგად ევკლიდურ სივრცეში, აუცილებელია დავამტკიცოთ, რომ $-1\leqslant\frac{(x, y)}{|x||y|}\leqslant 1$ ან, რაც იგივეა, $\frac{(x, y)^2}{|x|^2|y|^2}\leqslant 1$, ე. ი.

$$(x, y)^2\leqslant(x, x)(y, y), \tag{6}$$

რომელსაც კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა ეწოდება. ამ უტოლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ვექტორი $\lambda x-y$, სადაც λ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. თანახმად მე-4° აქსიომისა, გვექნება:

$$(\lambda x-y, \lambda x-y)\geqslant 0.$$

აქედან მე-2° და მე-3° თვისებათა გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lambda^2(x, x)-2\lambda(x, y)+(y, y)\geqslant 0. \tag{7}$$

მიღებული უტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ნამდვილკოეფიციენტებიან კვადრატულ სამწევრს λ ასოს მიმართ. ამასთან დაკავშირებით, თუ მოვიგონებთ საშუალო სკოლიდან კვადრატული სამწევრის გამოკვლევას, მივიღებთ, რომ (7) უტოლობას ადგილი ექნება ყოველი λ-თვის, თუ მარცხენა მხარის დისკრიმინანტი არადადებითია, ე. ი.

$$(x,y)^2-(x,x)(y, y)\leqslant 0,$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ (7) თანაფარდობაში ტოლობის ნიშანს მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როცა x და y ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია.

მაგალითად, მე-2 მაგალითში განხილული ევკლიდური სივრცისათვის, რადგან

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i, \quad (x,x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \text{ და } (y,y)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2;$$

ამიტომ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას ექნება სახე:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\right). \tag{8}$$

ასევე დავრწმუნდებით, რომ მე-3 მაგალითში განხილული ევკლიდური სივრცისათვის კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას ექნება სახე:

$$\left(\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt$$

ან, რაც იგივეა,

$$\left|\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}\cdot\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,dt}. \tag{9}$$

ამ უტოლობას დიდი გამოყენება აქვს მათემატიკურ ანალიზში*.

კომპლექსური ევკლიდური სივრცე. წრფივ სივრცეს, რომელიც განიხილება კომპლექსურ რიცხვთა ველზე, ეწოდება კომპლექსური წრფივი სივრცე. კომპლექსურ წრფივ სივრცეს ეწოდება კომპლექსური ევკლიდური (უნიტარული) სივრცე, თუ შემოღებულია სკალარული ნამრავლის ცნება, ე. ი. ყოველ ორ x და y ვექტორს ეთანადება გარკვეული კომპლექსური რიცხვი, რომელიც აღინიშნება (x, y) სიმბოლოთი, და სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1°. $(x, y)=\overline{(y, x)}$,

2°. $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$,

3°. $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$

4°. $(x, x)\geqslant 0$, არის ნამდვილი დადებითი რიცხვი, როცა $x\neq 0$, ხოლო უდრის ნულს როცა $x=0$.

აქ $\overline{(y, x)}$ არის (y, x) კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული, ხოლო λ საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვია.

1°-ლ და მე-2° აქსიომათა გამოყენებით მტკიცდება, რომ $(x, \lambda y)=\bar{\lambda}(x, y)$

მართლაც,

$$(x, \lambda y)=\overline{(\lambda y, x)}=\bar{\lambda}\overline{(y, x)}=\bar{\lambda}(x, y).$$

აგრეთვე 1° და მე-3° თვისებების გამოყენებით ადვილად დამტკიცდება, რომ

$$(x, y+z)=(x, y)+(x, z);$$

---

* ამ სახით ეს უტოლობა მიღებული იქნა 1859 წელს რუსი მათემატიკოსის ვ. ი. ბუნიაკოვსკის მიერ. საზღვარგარეთულ ლიტერატურაში ზოგიერთი ავტორი (8) და (9) უტოლობებს შეცდომით უწოდებს შვარცის უტოლობებს, მიუხედავად იმისა, რომ შვარცმა ამ უტოლობებთან დაკავშირებით შრომა გამოაქვეყნა 1885 წელს.

მაგალითად, ადვილად შემოწმდება, რომ ჩვეულებრივი n-განზომილებიან ვექტორთა სიმრავლე, რომლის კომპონენტები საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვებია, სადაც ყოველი ორი $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი განმარტებულია ასე:

$$(x, y)=\xi_1\overline{\eta}_1+\xi_2\overline{\eta}_2+\ldots+\xi_n\overline{\eta}_n$$

ქმნის კომპლექსურ ევკლიდურ სივრცეს.

ჩვენ არ შევეხებით კომპლექსურ ევკლიდურ სივრცესთან დაკავშირებულ თვისებებსა და თეორემებს, ვინაიდან ის სცილდება როგორც საუნივერსიტეტო, ისე პედაგოგიური ინსტიტუტების საპროგრამო მასალას.

შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ კომპლექსური სივრცის შესწავლით დაინტერესებული მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ ვექტორთა სისტემის ორთოგონალურობა და მასთან დაკავშირებული მრავალი საკითხი შეიძლება დამტკიცებულ იქნეს კომპლექსური ევკლიდური სივრცეებისათვის.

§ 80. ორთოგონალური ვექტორები და მათთან დაკავშირებული საკითხები

ორ x და y ვექტორს ეწოდება ორთოგონალური, თუ მათი სკალარული ნამრავლი უდრის ნულს, ე. ი.

$$(x, y)=0. \tag{1}$$

წინა პარაგრაფის (5) ტოლობიდან ჩანს, რომ თუ $x\neq 0$, $y\neq 0$ და ვექტორები ორთოგონალურია, მაშინ მათ შორის კუთხე უდრის $\frac{\pi}{2}$. ვექტორთა სისტემას ეწოდება ორთოგონალური, თუ ამ სისტემის ყველა ვექტორი წყვილ-წყვილად ორთოგონალურია. დავამტკიცოთ რამდენიმე თვისება ორთოგონალურ სისტემასთან დაკავშირებით.

1. **ორთოგონალურ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.**

მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ, ორთოგონალურ ვექტორთა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ, ცხადია, ადგილი ექნება ტოლობას

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n=0,$$

სადაც ერთი c_i მაინც, მაგალითად $c_1\neq 0$. ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ სკალარულად x_1-ზე, მივიღებთ:

$$c_1(x_1, x_1)+c_2(x_2, x_1)+\ldots+c_n(x_n, x_1)=0.$$

რადგან, პირობის თანახმად $(x_2, x_1)=\ldots=(x_n, x_1)=0$, ამ ტოლობიდან გვექნება: $c_1(x_1, x_1)=0$. რადგან $(x_1, x_1)\neq 0$, მივიღებთ: $c_1=0$, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება და ამით თვისება დამტკიცებულია.

2. **თუ** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **ვექტორები ორთოგონალურია** x **ვექტორის მიმართ, მაშინ ამ ვექტორთა ყოველი წრფივი კომბინაცია** $x' = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, **აგრეთვე იქნება** x **ვექტორის ორთოგონალური.**

მართლაც, ტოლობიდან

$$(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \; x) = c_1(x_1, x) + c_2(x_2, x) + \ldots + c_n(x_n, x).$$

რადგან $(x_1, x) = (x_2, x) = \ldots = (x_n, x) = 0$, გვექნება $(x', x) = 0$, რ. დ. გ. x ვექტორს ეწოდება რომელიმე F **ქვესივრცის ორთოგონალური, თუ ის ორთოგონალურია ამ ქვესივრცის ყოველი ვექტორისა.** მე-2 თვისებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ R სივრცის რაიმე F ქვესივრცის მიმართ ყველა ორთოგონალური ვექტორის M სიმრავლე თავისთავად ქმნის R სივრცის ქვესივრცეს. ასეთ შემთხვევაში ხშირად M ქვესივრცეს უწოდებენ F ქვესივრცის **ორთოგონალურ დამატებას.**

ზემოთ დამტკიცებული მე-2 თვისებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს: იმისათვის, რომ x ვექტორი ორთოგონალური იყოს F ქვესივრცის მიმართ საკმარისია ის იყოს ორთოგონალური F ქვესივრცის საბაზისო სისტემის ვექტორების მიმართ.

ახლა განვიხილოთ ორთოგონალურ ვექტორთა ზოგიერთი მაგალითი. ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილი ზოგიერთი თვისება დავამტკიცოთ ევკლიდური სივრცისათვის.

მაგალითი 1. ადვილად შემოწმდება, რომ n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ ვექტორთა სისტემა ორთოგონალურია.

მაგალითი 2. ვუჩვენოთ, რომ $c(-\pi, \pi)$ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში ვექტორთა (ანუ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა) სისტემა

$$1, \; \cos t, \; \sin t, \; \cos 2t, \; \sin 2t, \; \ldots, \; \cos nt, \; \sin nt, \ldots$$

ორთოგონალურია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც ვიცით აღნიშნულ სივრცეში ყოველი ორი $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქცია ორთოგონალურია, თუ

$$(x(t), \; y(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt = 0. \tag{10}$$

მკითხველი, განსაზღვრული ინტეგრალების უბრალო გამოთვლით ადვილად შეამოწმებს (10) ტოლობის მართებულობას.

მაგალითი 3. პითაგორას თეორემის განზოგადება. ვთქვათ, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ვექტორთა სისტემა ორთოგონალურია და $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. დავამტკიცოთ, რომ

$$|y|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან $(x_i, x_j)=0$, როცა $i\neq j$, და $(x_i, x_i)=|x_i|^2$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$|y|^2=(x_1+x_2+\ldots+x_n,\ x_1+x_2+\ldots+x_n)=|x_1|^2+$$
$$+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2.$$

შედეგი. როცა $n=2$ მივიღებთ საშუალო სკოლიდან ცნობილ პითაგორას თეორემას:

$$|x_1+x_2|^2=|x_1|^2+|x_2|^2.$$

შემდეგისათვის ვიცოდეთ, რომ, ისე როგორც გეომეტრიაში, d მანძილი n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ნებისმიერ ორ x და y ვექტორს შორის განმარტებულია ასე:

$$d=|x-y|. \tag{11}$$

მაგალითი 4. კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით მივიღოთ „სამკუთხედის უტოლობანი", ე. ი. თუ x და y ნებისმიერი ვექტორებია ნამდვილი ევკლიდური სივრცისა, მაშინ

$$|x+y|\leqslant|x|+|y| \text{ და } |x+y|\geqslant|x|-|y|.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყვანოთ მეორე უტოლობა, გვექნება:

$$|x+y|^2=(x+y,\ x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y).$$

ვინაიდან კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის თანახმად, $2(x,y)\leqslant 2|x|\,|y|$ და $-2(x,y)\geqslant-2|x|\,|y|$, მივიღებთ:

$$|x+y|^2\geqslant|x|^2-2|x|\,|y|+|y|^2=(|x|-|y|)^2, \text{ ე. ი.}$$
$$|x+y|\geqslant|x|-|y|.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება პირველი უტოლობაც. ამ უტოლობათა გეომეტრიული შინაარსი ისაა, რომ ნებისმიერი სამკუთხედის ყოველი გვერდის სიგრძე არ აღემატება დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეების ჯამს და მეტია ან ტოლი ამ გვერდების სიგრძეების სხვაობაზე.

§ 61. ვექტორთა სისტემის ორთოგონალიზაცია. ორთოგონალური საბაზისო სისტემა

ჩვენ წინა პარაგრაფში დავამტკიცეთ, **რომ არანულოვან ვექტორთა ყოველი ორთოგონალური სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.** ახლა ჩვენ განვიხილავთ მეთოდს, რომლითაც შესაძლებელია ნებისმიერ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემიდან ორთოგონალურ ვექტორთა სისტემაზე გადასვლა. ვთქვათ, n-განზომილებიან ვექტორულ

სივრცეში მოცემულია წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n. \tag{1}$$

ამ ვექტორების მიმართ ორთოგონალიზაციის პროცესით ავაგოთ y_1, y_2, ..., y_n ორთოგონალურ ვექტორთა სისტემა. დავუშვათ $y_1=x_1$. შემდეგ დავუშვათ, რომ $y_2=\alpha y_1+x_2$. ვინაიდან x_1 და x_2, როგორც (1) სისტემის ქვესისტემა, წრფივად დამოუკიდებელია და $x_1=y_1$, ამიტომ y_2 ვექტორი განსხვავებული იქნება ნულისაგან როგორიც არ უნდა იყოს α. ახლა ეს α რიცხვი ავარჩიოთ ისე, რომ y_2 ვექტორი ორთოგონალური იყოს y_1 ვექტორისა, ე. ი.

$$(y_1,\ y_2)=(y_1,\ \alpha y_1+x_2)=\alpha(y_1,\ y_1)+(y_1,\ x_2)=0,$$

აქედან მივიღებთ:

$$\alpha=-\frac{(y_1,\ x_2)}{(y_1,\ y_1)}. \tag{2}$$

ახლა დავუშვათ, რომ

$$y_3=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+x_3.$$

ვინაიდან y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელია და $x_3\neq 0$, ამიტომ y_3 ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან. შევარჩიოთ α_1 და α_2 ისე, რომ y_3 ვექტორი ორთოგონალური იყოს y_1 და y_2 ვექტორებისა, ე. ი.

$$(y_1,\ y_3)=(y_1,\ \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+x_3)=0,$$

$$(y_2,\ y_3)=(y_2,\ \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+x_3)=0.$$

ვინაიდან y_1 და y_2 ვექტორები ურთიერთმართობულია, ამ ტოლობებიდან შესაბამისად მივიღებთ:

$$\alpha_1(y_1,\ y_1)+(y_1,\ x_3)=0 \text{ და } \alpha_2(y_2,\ y_2)+(y_2,\ x_3)=0,$$

ე. ი.

$$\alpha_1=-\frac{(y_1,\ x_3)}{(y_1,\ y_1)},\quad \alpha_2=-\frac{(y_2,\ x_3)}{(y_2,\ y_2)}. \tag{3}$$

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ y_1, y_2, y_3 ვექტორთა ორთოგონალური ქვესისტემა. თუ ამ პროცესს ასე განვაგრძობთ, ავაგებთ საძიებელ y_1, y_2, ..., y_n ვექტორთა ორთოგონალურ სისტემას.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ **ყოველ არანულოვან წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემიდან შეიძლება ავაგოთ არანულოვან ვექტორთა ორთოგონალური სისტემა.** თუ ახლა დამტკიცებულ დებულებას გამოვიყენებთ ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცის საბაზისო ვექტორთა სისტემისათვის, მივიღებთ შემდეგ დებულებას: **ყოველ ევკ-**

ლიდურ სივრცეს გააჩნია ერთი ორთოგონალური საბაზისო სისტემა მაინც.

მართლაც, ყოველ n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეს გააჩნია ერთი საბაზისო სისტემა მაინც, ე. ი. წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური ქვესისტემა, ხოლო ვექტორთა რომელიმე $e_1, e_2, \ldots, e_n$ საბაზისო სისტემიდან კი ზემოთ გამოყენებული ორთოგონალიზაციის პროცესით, ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ სივრცის ორთოგონალური $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ სისტემა. ჩვენ უკვე ვიცით (გვ. 438), რომ ვექტორს, რომლის სიდიდე $|x|=1$, ეწოდება ნორმირებული და რომ ყოველი $x \neq 0$ ვექტორი $\frac{1}{|x|}$ რიცხვზე გამრავლებით დაიყვანება ნორმირებულ ვექტორამდე.

ახლა, თუ $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ ორთოგონალური საბაზისო სისტემის ყოველ e_i' ვექტორს შევცვლით $f_i=\frac{e_i'}{|e_i'|}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ ვექტორებით, მივიღებთ ვექტორთა $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ორთოგონალურ საბაზისო სისტემას, რომლის ყოველი f_i ვექტორის სიგრძე $|f_i|=1$. ასეთ ორთოგონალურ საბაზისო სისტემას **ორთოგონალური ნორმირებული**, ანუ მოკლედ, ორთონორმირებული საბაზისო სისტემა ეწოდება. მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ, მაგალითად, ერთეულოვანი ვექტორთა სისტემა:

$$e_1=(1, 0, \ldots 0),\ e_2=(0, 1, \ldots 0),\ \ldots,\ e_n=(0, 0, \ldots, 1)$$

არის ორთონორმირებული საბაზისო სისტემა.

ვთქვათ, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის ორთოგონალური საბაზისო სისტემა n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცისა, ხოლო ამ ბაზისში x და y ვექტორის კოორდინატებია შესაბამისად $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ და $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, ე. ი.

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\cdots+\xi_n e_n, \quad y=\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+\cdots+\eta_n e_n.$$

განვიხილოთ ამ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

$$(x,y)=(\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\cdots+\xi_n e_n,\ \eta_1 e_1+\eta_2 e_2+\cdots+\eta_n e_n). \tag{4}$$

ვინაიდან $e_1, e_2, \ldots, e_n$ საბაზისო სისტემა ორთოგონალურია, ე. ი. $(e_i, e_j)=0$, როცა $i \neq j$, და $(e_i, e_i)=|e_i|$, (4) ტოლობიდან სათანადო გამრავლების შემდეგ მივიღებთ:

$$|x,y|=|e_1|\xi_1\eta_1+|e_2|\xi_2\eta_2+\cdots+|e_n|\xi_n\eta_n. \tag{5}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული $e_1, e_2, \ldots, e_n$ სისტემა არის ორ-

თონორმირებული საბაზისო სისტემა, ე. ი. $(e_i,e_j)=0$, როცა $i\neq j$, და $(e_i, e_i)=|e_i|=1$, მივიღებთ:

$$(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n. \tag{6}$$

ამრიგად, თუ n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ორთოგონალური საბაზისო სისტემის მიმართ x და y ვექტორების კოორდინატები შესაბამისად არის $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ და $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი კოორდინატების საშუალებით გამოისახება (5) ფორმულით, ხოლო, თუ x და y ვექტორთა კოორდინატები მოცემულია ორთონორმირებული საბაზისო სისტემის მიმართ, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი კოორდინატების საშუალებით გამოისახება (6) ფორმულით.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ორთოგონალიზაციის პროცესი ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში. მოცემულ სივრცეში ორთოგონალიზაციის პროცესი ნიშნავს შემდეგს: ვთქვათ, x_1, x_2, x_3 სივრცის წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია. დავუშვათ $y_1=x_1$. შემდეგ y_1 და x_2 ვექტორებზე გავავლოთ სიბრტყე; ამ სიბრტყეზე ავირჩიოთ ისეთი y_2 ვექტორი, რომელიც ორთოგონალური იქნება y_1 ვექტორისა. ახლა y_1 და y_2 ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა და x_3 ვექტორის საშუალებით ავაგოთ სამგანზომილებიანი სივრცე. ამ სივრცეში ამოვირჩიოთ ისეთი y_3 ვექტორი, რომელიც ორთოგონალური იქნება y_1 და y_2 ვექტორებისა, ე. ი. რომელიც ორთოგონალური იქნება წინათ აგებული სიბრტყისა.

მაგალითი 2. ვთქვათ, R არის t ასოს მიმართ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება 3-ს. როგორც ვიცით, ეს სიმრავლე ქმნის ოთხგანზომილებიან სივრცეს. ვიცით აგრეთვე, რომ ამ სივრცისათვის $1, t, t^2, t^3$ არის ერთ-ერთი საბაზისო სისტემა. ამ საბაზისო სისტემაზე გამოვიყენოთ ორთოგონალიზაციის პროცესი, ე. ი. ავაგოთ e_1, e_2, e_3 ორთოგონალური საბაზისო სისტემა. ვთქვათ, სკალარული ნამრავლი განმარტებულია ასე:

$$(f, g)=\int_{-1}^{1}(f(t)g(t))dt.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, $e_1=1$. ვექტორი e_2 ვეძიოთ $e_2=\alpha 1+t$ სახით. შევარჩიოთ α ისე, რომ e_2 იყოს e_1-ის ორთოგონალური, ე. ი.

$$(1, \alpha\cdot 1+t)=\int_{-1}^{+1}(\alpha+t)dt=2\alpha=0.$$

მივიღებთ $\alpha=0$. ამრიგად, $e_2=t$. ახლა e_3 ვექტორი ვეძიოთ $e_3=\alpha_1\cdot 1+\alpha_2 t+t^2$ სახით. შევარჩიოთ α_1 და α_2 ისე, რომ e_3 იყოს $e_1=1$ და $e_2=t$ ვექტორების ორთოგონალური, ე. ი.

$$(1,\ e_3)=\int_{-1}^{+1}(\alpha_1+\alpha_2 t+t^2)dt=0 \quad \text{და} \quad (t, e_3)=\int_{-1}^{+1}(\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+t^3)dt=0.$$

ამ ინტეგრალების გამოთვლის შედეგად შესაბამისად მივიღებთ:

$$2\alpha_1+\frac{2}{3}=0 \quad \text{და} \quad \frac{2\alpha_2}{3}=0, \text{ ე. ი. } \alpha_1=-\frac{1}{3},\quad \alpha_2=0.$$

მაშასადამე, $e_3=t^2-\frac{1}{3}$. დასასრულს, e_4 ვექტორი ვეძიოთ $e_4=\beta_1\cdot 1+ +\beta_2 t+\beta_3\left(t^2-\frac{1}{3}\right)+t^3$ სახით.

ახლა შევარჩიოთ β_1, β_2, და β_3 ისე, რომ e_4 ვექტორი ორთოგონალური იყოს e_1, e_2 და e_3 ვექტორებისა. უბრალო ინტეგრალების გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ, რომ $e_4=t^3-\frac{3}{5}t$. ამრიგად, მოცემულ მრავალწევრთა ევკლიდური სივრცისათვის მრავალწევრთა სისტემა:

$$e_1=1,\ e_2=t,\ e_3=t^2-\frac{1}{3},\quad e_4=t^3-\frac{3}{5}t$$

იქნება ორთოგონალური საბაზისო სისტემა.

§ 62. ევკლიდურ სივრცეთა იზომორფიზმი

ჩვენ უკვე გავეცანით n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის რამდენიმე მაგალითს. ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ რა აქვთ საერთო n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეებს. ამ მიზნით უნდა შემოვიღოთ ევკლიდურ სივრცეთა იზომორფიზმის ცნება.

განსაზღვრა. **ორ R და R' ევკლიდურ სივრცეს ეწოდება იზომორფული, თუ მათ ელემენტებს შორის შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა ისეთი, რომ:**

1. თუ R სივრცის x და y ვექტორებს ეთანადება შესაბამისად R' სივრცის x' და y' ვექტორები, მაშინ $x+y$ ჯამს უნდა ეთანადებოდეს

$x'+y'$ ჯამი და αx ვექტორს, ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისათვის, უნდა ეთანადებოდეს $\alpha x'$ ვექტორი.

2. იმავე პირობებში (x, y) რიცხვი უნდა უდრიდეს (x', y') რიცხვს, ე. ი. თუ $x \leftrightarrow x'$ და $y \leftrightarrow y'$, მაშინ $(x,y)=(x',y')$. სხვაგვარად, **ორ** R **და** R' **ევკლიდურ სივრცეს ეწოდება იზომორფული, თუ ისინი, როგორც წრფივი სივრცეები, იზომორფულია და შესაბამისი ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლები ტოლია.**

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველი თეორემა ან თვისება, რომელიც მართებულია რომელიმე n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში, მართებული იქნება აგრეთვე R სივრცის ყოველ იზომორფულ სივრცეშიც.

მართლაც, ვიცით, რომ ყოველი თეორემის ან თვისების მტკიცებისათვის მოცემულ R ევკლიდურ სივრცეში ვიყენებთ ვექტორთა ჯამის, ვექტორის რიცხვზე გამრავლების და ვექტორთა სკალარული ნამრავლის მოქმედებებს. ახლა, თუ სივრცის იმ ელემენტებს, რომლებიც მონაწილეობს თეორემაში ან თვისებაში, შევცვლით მისი იზომორფული R' სივრცის შესაბამისი ელემენტებით, მაშინ იზომორფიზმის 1°-ლ და მე-2° თვისებათა გამოყენებით დავრწმუნდებით, რომ ყველა მსჯელობა მართებული იქნება R' სივრცის შესაბამისი ელემენტებისათვის, ე. ი. შესაბამისი თეორემა ან თვისება მართებული იქნება R' სივრცისათვისაც.

თეორემა. **ყველა** n**-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე იზომორფულია.**

დამტკიცება. როგორც უკვე ვიცით, ჩვეულებრივი n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე ქმნის n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეს, თუ ყოველი ორი $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ და $y=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი მოცემულია ფორმულით

$$(x, y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\dots+\xi_n\eta_n. \tag{1}$$

ამ n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეს ვუწოდოთ **ძირითადი** n**-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე.**

ვთქვათ, მოცემულია რომელიმე n-განზომილებიანი R' ევკლიდური სივრცე. ამოვირჩიოთ ამ სივრცეში $e_1, e_2, \dots, e_n$ ორთონორმირებული საბაზისო სისტემა. ცხადია, რომ ყოველი $x' \in R'$ ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$x'=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\dots+\xi_n e_n$$

და ეს წარმოდგენა არის ერთადერთი. ყოველ x' ვექტორს შევუსაბამოთ n რიცხვის ერთობლიობა $\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_n$, ე. ი. ყოველ x' ელემენტს

R'-დან შევუსაბამოთ $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ვექტორი R-დან. ადვილად შევნიშნავთ, რომ ეს თანადობა არის ურთიერთცალსახა და იზომორფული. ცხადია, პირველი პირობა სრულდება. ახლა შევამოწმოთ მეორე პირობის მართებულობა.

ვინაიდან R' სივრცის საბაზისო სისტემა ორთონორმირებულია, ამიტომ, როგორც ვიცით, x' და $y'=\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+\ldots+\eta_n e_n$ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(x', y')=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n. \tag{2}$$

თუ შევადარებთ (1) და (2) ტოლობებს, გვექნება:

$$(x, y)=(x', y').$$

ამრიგად, სკალარულ ნამრავლთა ტოლობა დამტკიცებულია და ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

§ 68. ორთოგონალური გარდაქმნები და ორთოგონალური მატრიცები

ჩვენ უკვე ვიცით, თუ რა წესით იცვლება n-განზომილებიანი სივრცის ვექტორის კოორდინატები ერთი საბაზისო სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ევკლიდურ სივრცეში მნიშვნელოვანია ისეთი φ გარდაქმნების შესწავლა, რომლებიც მოცემულ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ორთონორმირებულ საბაზისო სისტემას გადაიყვანს მეორე $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ ორთონორმირებულ საბაზისო სისტემაში. ვთქვათ, მეორე საბაზისო სისტემის e_i' ვექტორები პირველი e_i საბაზისო სისტემის ვექტორების საშუალებით გამოისახება ასე:

$$\begin{aligned} e_1\varphi=e_1'&=q_{11}e_1+q_{12}e_2+\ldots+q_{1n}e_n, \\ e_2\varphi=e_2'&=q_{21}e_1+q_{22}e_2+\ldots+q_{2n}e_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n\varphi=e_n'&=q_{n1}e_1+q_{n2}e_2+\ldots+q_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{1}$$

ვინაიდან e_i ვექტორთა სისტემა ორთონორმირებულია, მივიღებთ სკალარული გამრავლების შემდეგ ფორმულას:

$$(e_i\varphi, e_j\varphi)=(e_i', e_j')=(q_{i1}e_1+q_{i2}e_2+\ldots+q_{in}e_n, \quad q_{j1}e_1+$$

$$+q_{j2}e_2+\ldots+q_{jn}e_n)=q_{i1}q_{j1}+q_{i2}q_{j2}+\ldots+q_{in}q_{jn}=\sum_{k=1}^{n}q_{ik}q_{jk}.$$

ახლა რადგან e_i' ვექტორთა სისტემაც ორთონორმირებულია, გვექნება

$$(e_i\varphi,\ e_j\varphi)=(e_i',\ e_j')=\sum_{k=1}^{n} q_{ik}q_{jk}=\begin{cases}0, & \text{როცა } i\neq j,\\ 1, & \text{როცა } i=j.\end{cases} \tag{2}$$

საზოგადოდ ისეთ წრფივ გარდაქმნას, რომლის q_{ij} კოეფიციენტების ნამრავლთა ჯამისათვის სრულდება (2) პირობა, ეწოდება **ორთოგონალური გარდაქმნა**, ხოლო ამ გარდაქმნის $Q=(q_{ij})$ მატრიცას ეწოდება ორთოგონალური მატრიცა. მაშასადამე, (1) გარდაქმნა, რომელიც აკავშირებს ორ ორთონორმირებულ საბაზისო სისტემას არის ორთოგონალური გარდაქმნა. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ e_i ვექტორთა სისტემა ორთონორმირებულია და (1) გარდაქმნის $Q=(q_{ij})$ მატრიცა ორთოგონალურია, მაშინ e_i' ვექტორთა სისტემაც იქნება ორთონორმირებული. მაშასადამე, **ყოველი ორთოგონალური მატრიცა არის ისეთი φ გარდაქმნის მატრიცა, რომელსაც მოცემული ორთონორმირებულ ვექტორთა სისტემა გადაჰყავს სხვა ორთონორმირებულ ვექტორთა სისტემაში.**

ორთოგონალური მატრიცის ზოგიერთ განმარტებას და მის ელემენტარულ თვისებებს ჩვენ გავეცანით ადრე (გვ. 125). ახლა განვიხილოთ ორთოგონალურ მატრიცთა სხვადასხვა განსაზღვრისა და თვისებების ეკვივალენტურობის საკითხი.

როგორც (2) ფორმულიდან ჩანს, ორთოგონალური $Q=(q_{ij})$ მატრიცის ელემენტების ნამრავლთა ჯამისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$q_{i1}q_{j1}+q_{i2}q_{j2}+\cdots+q_{in}q_{jn}=\begin{cases}0, & \text{როცა } i\neq j,\\ 1, & \text{როცა } i=j.\end{cases} \tag{3}$$

ამ ფორმულის მიხედვით Q კვადრატული მატრიცა **მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება ორთოგონალური, თუ მისი ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტთა კვადრატების ჯამი უდრის ერთს, ხოლო ყოველი ორი სხვადასხვა სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამი უდრის ნულს.**

მკითხველი (3) ფორმულის გამოყენებით ადვილად შეამოწმებს, რომ Q ორთოგონალური მატრიცისა და მისი Q' ტრანსპონირებული მატრიცის ნამრავლი არის E ერთეულოვანი მატრიცა, ე. ი.

$$Q\cdot Q'=E. \tag{4}$$

ვინაიდან ტრანსპონირებით მატრიცის დეტერმინანტი არ იცვლება, ამ ტოლობიდან მივიღებთ:

$$|QQ'|=1,\ |Q|^2=1,\quad \text{ე. ი. } |Q|=\pm 1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ორთოგონალური მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, კერძოდ მისი დეტერმინანტი უდრის ± 1. აგრეთვე (4) ფორმულიდან ვღებულობთ

$$Q' = Q^{-1},$$

ე. ი. ორთოგონალური მატრიცის შებრუნებული უდრის მის ტრანსპონირებულ მატრიცას.

ვთქვათ, მოცემულია წრფივი გარდაქმნა

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

ვიგულისხმოთ, რომ (5) გარდაქმნის $Q=(q_{ij})$ მატრიცა ორთოგონალურია. მაშინ (3) ფორმულის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (5) გარდაქმნით x_i ცვლადების კვადრატების ჯამი გადავა y_i ცვლადების კვადრატების ჯამში, ე. ი. ადგილი ექნება ტოლობას:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2. \tag{6}$$

ასევე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ ადგილი აქვს (6) ტოლობას, მაშინ მისი შესაბამისი (5) გარდაქმნის მატრიცა ორთოგონალური იქნება.

როგორც ვიცით, (1) გარდაქმნა, რომელსაც φ ასოთი აღვნიშნავთ, მატრიცულად შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$e' = Qe, \tag{7}$$

სადაც e' და e არის შესაბამისად e_i' და e_i ვექტორებისაგან შედგენილი ერთსვეტიანი მატრიცები, ხოლო Q არის φ გარდაქმნის მატრიცა. (7) მატრიცული ტოლობიდან ვღებულობთ შემდეგ მატრიცულ ტოლობებს:

$$e_i' = Qe_i \text{ ან, რაც იგივეა, } e_i' = e_i\varphi. \tag{8}$$

ადვილად შემოწმდება, რომ φ ორთოგონალური გარდაქმნა არ ცვლის ევკლიდური სივრცის მეტრიკას, ე. ი. $x\varphi$ და $y\varphi$ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი იგივეა, რაც x და y ვექტორთა სკალარული ნამრავლი.

მართლაც, ვთქვათ,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

აქედან მივიღებთ:

$$x\varphi = \xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' + \ldots + \xi_n e_n', \quad y\varphi = \eta_1 e_1' + \eta_2 e_2' + \ldots + \eta_n e_n'.$$

ვინაიდან $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ ორთონორმირებული საბაზისო სისტემაა, მივიღებთ:

$$(x\varphi, y\varphi) = (\xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' + \ldots + \xi_n e_n',\ \eta_1 e'_1 + \eta_2 e_2' + \ldots + \eta_n e_n') =$$

$$= \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \ldots + \xi_n \eta_n = (x, y), \text{ ე. ი.}$$

$$(x\varphi,\ y\varphi) = (x, y). \tag{9}$$

მიღებულ (9) ფორმულას დიდი გამოყენება აქვს ევკლიდურ სივრცეთა შემდგომი შესწავლის საქმეში, რომელსაც ჩვენ აქ არ შევეხებით. შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ ეს (9) თვისება დამახასიათებელია ევკლიდური სივრცისათვის. ამიტომაა, რომ ზოგიერთი ავტორი ევკლიდური სივრცის ისეთ φ გარდაქმნას, რომლისთვისაც სრულდება (9) პირობა, უწოდებს ორთოგონალურ გარდაქმნას, ხოლო მის მატრიცას ორთოგონალურ მატრიცას. (9) ფორმულიდან ადვილად ჩანს, რომ ყოველი φ ორთოგონალური გარდაქმნა ევკლიდური სივრცის ყოველ ორთონორმირებულ საბაზისო სისტემას გადაიყვანს ამავე სივრცის ორთონორმირებულ საბაზისო სისტემაში. ისეთ გარდაქმნებს, რომელთათვისაც სრულდება (9) ტოლობა, აგრეთვე უწოდებენ იზომეტრულ გარდაქმნებს.

§ 64. სიმეტრიული გარდაქმნები და სიმეტრიული მატრიცები

განსაზღვრა. ნამდვილი ევკლიდური R სივრცის φ გარდაქმნას ეწოდება სიმეტრიული (ანუ თავისი თავის შეუღლებული), თუ ნებისმიერი ორი x და y ვექტორისათვის

$$(x\varphi, y) = (x, y\varphi). \tag{1}$$

ყოველი სიმეტრიული გარდაქმნა გარკვეულად დაკავშირებულია მის მატრიცასთან და სივრცის ორთონორმირებულ საბაზისო სისტემასთან.

თეორემა. **წრფივი გარდაქმნა მაშინ და მხოლოდ მაშინაა სიმეტრიული, როცა მისი მატრიცა ორთონორმირებულ საბაზისო სისტემაში სიმეტრიულია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის R სივრცის ორთონორმირებული საბაზისო სისტემა. ვიგულისხმოთ, რომ ამ საბაზისო სისტემაში x და y ვექტორების კოორდინატებია შესაბამისად $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ და $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, ე. ი.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \quad \text{და} \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$

ხოლო $x\varphi$ ვექტორის კოორდინატები კი არის $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$, გვექნება:

$$\xi_i'=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_k, \tag{2}$$

სადაც $A=(a_{ik})$ არის φ გარდაქმნის მატრიცა $e_1, e_2, .., e_n$ საბაზისო სისტემაში. თუ მხედველობაში მივიღებთ ორთონორმირებული საბაზისო სისტემის თვისებას $(e_i, e_k)=0$, როცა $i\neq k$, და $(e_i, e_i)=1$ $(i=1, 2,\ldots n)$, მივიღებთ:

$$(x\varphi, y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i'\eta_i=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_k\eta_i,$$

ანალოგიურად გვექნება:

$$(x, y\varphi)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\eta_k=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ki}\xi_k\eta_i.$$

ვინაიდან ამ ტოლობათა მარცხენა მხარეები ტოლია, საბოლოოდ მივიღებთ $a_{ik}=a_{ki}$, ე. ი. გარდაქმნის მატრიცა ყოფილა სიმეტრიული, რ. დ. გ.

მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ სიმეტრიულ გარდაქმნათა უმარტივესი მაგალითებია სივრცის იგივური და ნულოვანი გარდაქმნები. მაგალითად, შევამოწმოთ, რომ ევკლიდური სივრცის ისეთი გარდაქმნა, როცა ყოველი x ვექტორი მრავლდება გარკვეულ k რიცხვზე, ე. ი. $x\varphi=kx$ გარდაქმნა, სიმეტრიულია.

მართლაც, მივიღებთ:

$$(x\varphi, y)=(kx, y)=k(x, y)=(x, ky)=(x, y\varphi).$$

ადვილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ ყოველი ორი სიმეტრიული გარდაქმნის ჯამი და სიმეტრიული გარდაქმნის რიცხვზე ნამრავლი ისევ სიმეტრიული გარდაქმნაა.

თეორემა. სიმეტრიული გარდაქმნის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია.

დამტკიცება. როგორც ვიცით, (გვ. 431) ნამდვილი სივრცის გარდაქმნის მახასიათებელი მრავალწევრის ყოველ ნამდვილ λ ფესვს შეესაბამება სივრცის გარკვეული ერთგანზომილებიანი ინვარიანტული ქვესივრცე, ხოლო თუ λ კომპლექსური ფესვია, მაშინ მას შეესაბამება გარკვეული ორგანზომილებიანი ინვარიანტული ქვესივრცე. ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ სიმეტრიუ-

ლი გარდაქმნის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, φ სიმეტრიული გარდაქმნის მახასიათებელი მრავალწევრის ერთი λ ფესვი მაინც კომპლექსურია, ე. ი. $\lambda=\alpha+\beta i$. ასეთ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, მოინახება ისეთი ორი x და y ვექტორი, რომ

$$x\varphi=\alpha x-\beta y, \quad y\varphi=\beta x+\alpha y.$$

ამ ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$(x\varphi, \ y)=(\alpha x-\beta y, \ y)=\alpha(x, \ y)-\beta(y, \ y),$$

$$(x, \ y\varphi)=(x, \ \beta x+\alpha y)=\beta(x, \ x)+\alpha(x, \ y).$$

მეორე ტოლობას გამოვაკლოთ პირველი, რადგან $(x\varphi, \ y)=(x, \ y\varphi)$, მივიღებთ:

$$\beta[(x, \ x)]+(y, \ y)]=0.$$

რადგან $(x, \ x)+(y, \ y)\neq 0$, მივიღებთ $\beta=0$. ამით დამტკიცდა, რომ φ სიმეტრიული გარდაქმნის მახასიათებელი მრავალწევრის ყველა ფესვი, ე. ი. φ სიმეტრიული გარდაქმნის ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა, ნამდვილია. თეორემა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ სიმეტრიული გარდაქმნების რამდენიმე თვისება.

1. სიმეტრიული გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც გარდაქმნის სხვადასხვა საკუთრივ მნიშვნელობებს შეესაბამება, ურთიერთორთოგონალურია.

მართლაც, ვთქვათ, φ სიმეტრიული გარდაქმნის სხვადასხვა k და λ საკუთრივ მნიშვნელობებს შეესაბამება x და y საკუთრივი ვექტორები, ე. ი.

$$x\varphi=kx \text{ და } y\varphi=\lambda y.$$

აქედან მივიღებთ:

$$(x\varphi, \ y)=(kx, \ y)=k(x, \ y),$$

$$(x, \ y\varphi)=(x, \ \lambda y)=\lambda(x, \ y).$$

გამოვაკლოთ პირველ ტოლობას მეორე. რადგან $(x\varphi, \ y)=(x, \ y\varphi)$, მივიღებთ:

$$(k-\lambda)(x, \ y)=0,$$

ვინაიდან $k\neq\lambda$, გვექნება: $(x, \ y)=0$, ე. ი. x და y ვექტორები ორთოგონალურია.

2. ვთქვათ, e_1 არის n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის სი-

მეტრიული გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი, მაშინ e_1 ვექტორის ორთოგონალურ ვექტორთა R_1 ქვესიმრავლე ქმნის $(n-1)$-განზომილებიან ინვარიანტულ ქვესივრცეს.

მართლაც, ვინაიდან e_1 ვექტორი არ შედის R_1 ქვესივრცეში, ადვილად შემოწმდება, რომ R_1 ქვესიმრავლე, ქმნის $(n-1)$-განზომილებიან წრფივ ქვესივრცეს. დავამტკიცოთ, რომ R_1 ინვარიანტული ქვესივრცეა.

ვთქვათ, $x \in R_1$, ე. ი. $(x, e_1)=0$. რადგან e_1 საკუთრივი ვექტორია, ამიტომ არსებობს ისეთი λ რიცხვი, რომ $x\varphi=\lambda x$. ახლა, φ გარდაქმნის სიმეტრიულობის გამო, გვექნება:

$$(x\varphi, e_1)=(x, e_1\varphi)=(x, \lambda e_1)=\lambda(x, e_1)=\lambda\cdot 0=0, \text{ ე. ი. } x\varphi \in R_1, \text{ რ. დ. გ.}$$

3. n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში ყოველთვის არსებობს სიმეტრიული გარდაქმნის n რაოდენობის საკუთრივ ვექტორთა ორთონორმირებული სისტემა.

მართლაც, როგორც უკვე ვიცით, ნამდვილი R სივრცის ყოველი φ სიმეტრიული გარდაქმნისათვის არსებობს ერთი საკუთრივი e_1 ვექტორი მაინც. მე-2 თვისების თანახმად, e_1 ვექტორის ორთოგონალურ ვექტორთა R_1 ქვესიმრავლე φ გარდაქმნის მიმართ ქმნის $(n-1)$-განზომილებიან ინვარიანტულ ქვესივრცეს. ახლა φ გარდაქმნა განვიხილოთ R_1 ინვარიანტულ ქვესივრცეზე. ცხადია, φ გარდაქმნის მიმართ R_1 ქვესივრცეშიც იარსებებს ერთი e_2 საკუთრივი ვექტორი მაინც. შემდეგ R_1 ქვესივრცეში განვიხილოთ e_2 ვექტორის ორთოგონალურ ვექტორთა R_2 ქვესიმრავლე. ცხადია, ეს R_2 ქვესიმრავლე φ გარდაქმნის მიმართ იქნება $(n-2)$-განზომილებიანი, რომელიც R_1 სივრცის ინვარიანტული ქვესივრცეა და ა. შ. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში, მივიღებთ φ გარდაქმნის e_1, e_2, $\ldots$, e_n საკუთრივ ვექტორთა ორთოგონალურ სისტემას. შევნიშნოთ, რომ, რადგან საკუთრივი ვექტორის ნამრავლი ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე ისევ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორია, ამიტომ e_i საკუთრივ ვექტორთა ორთოგონალური სისტემა შეიძლება ავარჩიოთ ისე, რომ მათი სიგრძეები უდრიდეს 1. ამრიგად, n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეს φ სიმეტრიული გარდაქმნის მიმართ გააჩნია ერთი საკუთრივ ვექტორთა ორთონორმირებული სისტემა მაინც.

4. n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში არსებობს ისეთი e_1, e_2, $\ldots$, e_n ორთონორმირებული საბაზისო სისტემა, რომლის მიმართ φ სიმეტრიული გარდაქმნის მატრიცას დიაგონალური სახე აქვს.

თანახმად მე-3 თვისებისა, n-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში არსებობს φ სიმეტრიული გარდაქმნის საკუთრივ ვექტორთა e_1, e_2,

..., e_n ორთონორმირებული სისტემა. ვექტორთა ეს სისტემა ამოვირჩიოთ R სივრცის საბაზისო სისტემად. მაშინ, ცხადია, არსებობს φ გარდაქმნის ისეთი საკუთრივი λ_i მნიშვნელობანი, რომ

$$e_i\varphi=\lambda_i e_i \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

ცხადია, φ გარდაქმნის A მატრიცას ამ საბაზისო სისტემაში აქვს სახე:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

ამით მე-4 თვისება დამტკიცებულია.

§ 66. კვადრატული ფორმის დაყვანა მთავარ ღერძებამდე

ჩვენ უკვე გავეცანით (გვ. 179) კვადრატული ფორმის დაყვანას კანონიკურ სახემდე, არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნების გამოყენებით. ამ პარაგრაფში გავეცნობით ნამდვილი კვადრატული ფორმის ნორმალურ სახემდე დაყვანის კიდევ ერთ-ერთ მეთოდს, რომელიც დაკავშირებულია მოცემული კვადრატული ფორმის შესაბამისი მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვებთან და n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის წრფივი გარდაქმნის ზოგიერთ თვისებასთან.

ვთქვათ, $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ ცვლადთა მიმართ მოცემულია კვადრატული ფორმა

$$f=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k, \tag{1}$$

რომლის შესაბამისი სიმეტრიული მატრიცა არის

$$A=(a_{ik}). \tag{2}$$

ჩვენი მიზანია მოვნახოთ ისეთი წრფივი გარდაქმნა, რომლის საშუალებით მოცემული კვადრატული ფორმა უშუალოდ დაიყვანება კანონიკურ სახემდე.

თეორემა. ნებისმიერი სიმეტრიული A მატრიცისათვის ყოველთვის მოინახება ისეთი არაგანსაკუთრებული Q მატრიცა, რომ $B=Q^{-1}AQ$ მატრიცა (რომელიც მიიღება A მატრიცის ტრანსპონირებით Q მატრიცის საშუალებით), იქნება დიაგონალური მატრიცა.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიანი ევკლიდური

სივრცის რომელიმე e_1, $e_2, \ldots$, e_n ვექტორთა ორთონორმირებული საბაზისო სისტემა. მაშინ, როგორც ცნობილია (გვ. 452), ყოველი n-ური რიგის A სიმეტრიული მატრიცის შესაბამისი φ წრფივი გარდაქმნა მოცემული ორთონორმირებული საბაზისო სისტემის მიმართ იქნება სიმეტრიული. შემდეგ, ცნობილია აგრეთვე (გვ. 455), რომ თუ φ არის n-განზომილებიანი ნამდვილი ევკლიდური სივრცის წრფივი გარდაქმნა, მაშინ ამ სივრცეში არსებობს φ გარდაქმნის n რაოდენობის ისეთ e_1', e_2', ..., e_n' საკუთრივ ვექტორთა სისტემა, რომელიც ამავე დროს არის მოცემული ევკლიდური სივრცის ორთონორმირებულ ვექტორთა სისტემა. თუ ახლა e_i' ორთონორმირებული საბაზისო სისტემის e_i ორთონორმირებულ საბაზისო სისტემაში გადასვლის მატრიცას, რომელიც ორთოგონალური მატრიცაა, აღვნიშნავთ Q-თი, ე. ი.

$$e = Qe', \tag{3}$$

მაშინ, თანახმად (გვ. 456) მიღებული ფორმულისა, გვექნება

$$B = Q^{-1}AQ. \tag{4}$$

ამით, წინა პარაგრაფის მე-4 თვისების თანახმად, თეორემა დამტკიცებულია.

როგორც ვნახეთ, საძიებელი Q მატრიცა ორთოგონალურია და ამიტომ არაგანსაკუთრებულიცაა.

თუ ახლა მხედველობაში მივიღებთ იმას, რომ ორთოგონალური მატრიცის შებრუნებული უდრის მის ტრანსპონირებულ მატრიცას, ე. ი.

$$Q^{-1} = Q',$$

მაშინ (4) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$B = Q'AQ. \tag{5}$$

როგორც ვიცით (გვ. 179), მოცემული კვადრატული ფორმის სიმეტრიული მატრიცის გარდაქმნა სრულდება Q ორთოგონალური მატრიცით (5) ფორმულის მიხედვით. თუ მხედველობაში მივიღებთ იმას, რომ უცნობთა წრფივი გარდაქმნა ორთოგონალური მატრიცით არის ორთოგონალური გარდაქმნა და რომ დიაგონალური მატრიცის

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

შესაბამის კვადრატულ ფორმას აქვს

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\dots+\lambda_n y_n^2$$

კანონიკური სახე, მაშინ დამტკიცებული თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ **ყოველი ნამდვილი კვადრატული ფორმა** $x_1, x_2, \dots, x_n$ **უცნობთა მიმართ შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახემდე მთავარი ღერძების მიმართ.**

ახლა, დავამტკიცოთ ერთადერთობა, ე. ი. დავამტკიცოთ, **რომ მოცემული კვადრატული ფორმა ნებისმიერი ორთოგონალური გარდაქმნით დაიყვანება ერთსა და იმავე კანონიკურ სახემდე, რომლის კოეფიციენტები იქნება მოცემული კვადრატული ფორმის მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრის ყველა** n **ფესვი.**

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული f კვადრატული ფორმა, რომლის მატრიცაა $A=(a_{ij})$, რომელიმე ორთოგონალური გარდაქმნით დაყვანილია კანონიკურ სახემდე

$$f=c_1 y_1^2+c_2 y_2^2+\dots+c_n y_n^2. \tag{6}$$

ვინაიდან ყოველი ორთოგონალური გარდაქმნა უცნობთა კვადრატების ჯამს არ ცვლის (გვ. 187), ყოველი λ-თვის გვექნება:

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^2-f=\lambda\sum_{i=1}^{n} y_i^2-\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^2. \tag{7}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (გვ. 179) იმას, რომ კვადრატული ფორმის მატრიცის დეტერმინანტი წრფივი გარდაქმნის შემდეგ მრავლდება გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტის კვადრატზე და ორთოგონალური მატრიცის დეტერმინანტის კვადრატი უდრის 1, მაშინ (7) კვადრატული ფორმის დეტერმინანტი ან, რაც იგივეა, მახასიათებელი მრავალწევრი იქნება:

$$|\lambda\cdot E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-c_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-c_2 & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots\lambda-c_n\end{vmatrix}=(\lambda-c_1)(\lambda-c_2)\dots(\lambda-c_n).$$

მიღებული მრავალწევრის ფესვებია

$$\lambda_1=c_1,\ \lambda_2=c_2,\ \dots,\ \lambda_n=c_n, \qquad \text{რ. დ. გ.}$$

მაგალითი. ორთოგონალური გარდაქმნით კვადრატული ფორმა

$$f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3 \tag{1}$$

დავიყვანოთ მთავარ ღერძებამდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავწეროთ მოცემული ფორმის შესაბამისი მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი, გვექნება:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8).$$

რადგან მიღებული მრავალწევრის ფესვებია $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=-2$, ჩვენ შეგვიძლია პირდაპირ დავწეროთ მოცემული კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე

$$f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2, \tag{2}$$

აგრეთვე შეგვიძლია ვთქვათ რას უდრის ფორმის სიგნატურა. ახლა მოვნახოთ ორთოგონალური გარდაქმნა, რომლითაც მოცემული (1) კვადრატული ფორმა დაიყვანება (2) კანონიკურ სახემდე. მოცემული კვადრატული ფორმის მატრიცის მახასიათებელი მატრიცის მიხედვით შევადგინოთ $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=-2$ რიცხვების შესაბამისი ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემები, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+0x_3&=0 \\ 2x_1+0x_2+2x_3&=0, \\ 0x_1+2x_2+x_3&=0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1+2x_2+0x_3&=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3&=0, \\ 0x_1+2x_2+4x_3&=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x_1+2x_2+0x_3&=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3&=0, \\ 0x_1+2x_2-2x_3&=0. \end{aligned}$$

ადვილად შემოწმდება, რომ პირველი, მეორე და მესამე სისტემების მატრიცას რანგები შესაბამისად არის 2, 2, 2. ამიტომ ყოველი სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტალური სისტემა შედგება თითო ამონახსნისაგან. მაგალითად, ესენი იქნებიან შესაბამისად ვექტორები:

$$\alpha_1=(-2,\ -1,\ 2),\ \alpha_2=(2,\ -2,\ 1) \text{ და } \alpha_3=(1,\ 2,\ 2). \tag{3}$$

სასარგებლოა აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ რომელიმე φ წრფივი გარდაქმნის მატრიცა უდრის მოცემული კვადრატული ფორმის A მატრიცას, მაშინ ეს α_1, α_2, α_3 ვექტორები იქნება გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც ქმნიან სამგანზომილებიანი ვექტორული სივრცის ერთგანზომილებიან ინვარიანტულ ქვესივრცეებს.

ვინაიდან A მატრიცის მახასიათებელ მრავალწევრს არ ჰქონდა ჯერადი ფესვები, (3) ვექტორთა სისტემა ორთოგონალურია და ამიტომ არ გვჭირდება ვექტორთა სისტემის ორთოგონალიზაცია. ახლა მოვახდინოთ (3) ვექტორთა სისტემის ნორმირება, მივიღებთ ორთონორმირებულ ვექტორთა სისტემას:

$$\alpha_1'=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),$$

$$\alpha_2'=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),$$

$$\alpha_3'=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

ამრიგად, ერთ-ერთი ორთონორმირებული გარდაქმნა, რომელიც მოცემულ კვადრატულ ფორმას დაიყვანს მთავარ ღერძებამდე, იქნება:

$$y_1=-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$

$$y_2=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,$$

$$y_3=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3.$$

თავი XIII.

მრავალწევრული, ანუ λ-მატრიცები; მატრიცთა ნორმალური სახე

§ 66. λ -მატრიცა და მისი ელემენტარული გარდაქმნები

აქამდე ჩვენ ძირითადად განვიხილავდით მატრიცას გარკვეულ რიცხვთა P ველზე. ახლა ჩვენ განვიხილავთ მატრიცებს $P[\lambda]$ მრავალწევრთა რგოლზე, ე. ი. განვიხილავთ ისეთ მატრიცებს, რომელთა ელემენტები λ ასოს მიმართ მრავალწევრებია რიცხვთა P ველზე. ასეთ მატრიცებს უწოდებენ λ ასოს მიმართ მრავალწევრულ ან უბრალოდ λ-მატრიცებს.

ვთქვათ, $P[\lambda]$ მრავალწევრთა რგოლზე მოცემულია n-ური რიგის λ-მატრიცა:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & & f_{1n}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & & f_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) & f_{n2}(\lambda) & & f_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

ცხადია, რომ ყოველი რიცხვითი მატრიცა λ-მატრიცის კერძო შემთხვევაა. λ-მატრიცას ვუწოდოთ უნიმოდულარული, თუ მისი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია P ველიდან.

ადვილად დამტკიცდება, რომ თუ A არის λ-მატრიცა, A^{-1} **მაშინ და მხოლოდ მაშინ** იქნება λ-მატრიცა, როცა $A(\lambda)$ მატრიცა უნიმოდულარულია. მართლაც, თუ $A(\lambda)$ და $A(\lambda)^{-1}$ ორივე λ-მატრიცაა, მაშინ $|A(\lambda)|$ და $|A(\lambda)^{-1}|=\dfrac{1}{|A(\lambda)|}$ დეტერმინანტები მრავალწევრები უნდა იყოს $P[\lambda]$ რგოლიდან, რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $A(\lambda)$ უნიმოდულარული λ-მატრიცაა, ე. ი. როცა $|A(\lambda)|=c\neq 0$. შებრუნებით, თუ $|A(\lambda)|=c\neq 0$, მაშინ $A(\lambda)^{-1}$ მატრიცა, როგორც ეს მოცემული მატრიცის შებრუნებული მატრიცის თანაფარდობიდან (გვ. 112) ჩანს, იქნება λ-მატრიცა. აქედან გამოდის, რომ $A(\lambda)^{-1}$ მატრიცა აგრეთვე უნიმოდულარული λ-მატრიცაა. ისეთ λ მატრიცას, რომლის ყველა წევ-

რის უდიდესი საერთო გამყოფია გარკვეული რიცხვი, ვუწოდოთ პრიმიტიული λ-მატრიცა.

ვიცით, რომ λ მატრიცის ყოველი k-ური რიგის მინორი გარკვეული მრავალწევრია λ-ს მიმართ. $d_k(\lambda)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ λ-მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორის უდიდესი საერთო გამყოფი*. მაშინ, ცხადია, $d_1(\lambda)$ იქნება λ-მატრიცის ყველა წევრის უდიდესი საერთო გამყოფი, ხოლო $d_n(\lambda)$ კი იქნება მოცემული λ-მატრიცის დეტერმინანტი. გაყოფილი მისი უფროსი წევრის კოეფიციენტზე. ქვემოთ ვნახავთ, რომ λ-მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა მოძებნა ფაქტიურად დაიყვანება $d_k(\lambda)$ მრავალწევრების მოძებნამდე. ცხადია. რომ, როგორც ეს მატრიცის რაიმე სიდიდეზე გამრავლების წესიდან ჩანს. ყოველი $A(\lambda)$ მატრიცა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$A(\lambda)=d_1(\lambda)\cdot A_0(\lambda),$$

სადაც $A_0(\lambda)$ არის პრიმიტიული λ-მატრიცა. რიცხვითი მატრიცების ანალოგიურად λ-მატრიცთა ელემენტარული გარდაქმნები ეწოდება λ-მატრიცთა შემდეგ სამ გარდაქმნას:

1. ნებისმიერი ორი სვეტის (სტრიქონის) ადგილების ურთიერთშეცვლას,

2. ნებისმიერი სვეტის (სტრიქონის) გამრავლებას P ველიდან აღებულ ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ რიცხვზე,

3. ნებისმიერი სვეტისათვის (სტრიქონისათვის) სხვა რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ნებისმიერ მრავალწევრზე ნამრავლის მიმატებას ან გამოკლებას.

ადვილად დამტკიცდება, რომ მე-2 და მე-3 ელემენტარული გარდაქმნებისაგან მიიღება 1-ლი ელემენტარული გარდაქმნა.

აღნიშნული დებულების დამტკიცება განვიხილოთ შემდეგ სქემაზე

$$\begin{matrix} i & i+j & i+j & j & j, \\ j & j & -i & -i & i. \end{matrix}$$

ამ სქემით i-ურ და j-ურ სტრიქონებს ერთმანეთის მიმართ შეეცვალათ ადგილები მე-2 და მე-3 ელემენტარული გარდაქმნების თანამიმდევრო გამოყენებით:

1) i-ურ სტრიქონს დავუმატეთ j-ური სტრიქონი, 2) j-ურ სტრიქონს გამოვაკლეთ მიღებული i-ური სტრიქონი, 3) i-ურ სტრიქონს დავუმა-

---

* შევთანხმდეთ, რომ უდიდესი საერთო გამყოფი ვუწოდოთ უდიდესი ხარისხის საერთო გამყოფს, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტია 1.

ტეთ მიღებული j-ური სტრიქონი და 4) j-ური სტრიქონი გავამრავლეთ (—1)-ზე.

ამის შემდეგ ჩვენ საქმე გვექნება მე-2 და მე-3 ელემენტარულ გარდამქნებთან. ცხადია, რომ, თუ λ-მატრიცაზე მოვახდენთ ელემენტარულ გარდაქმნას, მივიღებთ ისევ λ მატრიცას. $B(\lambda)$ მატრიცას ეწოდება $A(\lambda)$ მატრიცის **ეკვივალენტური**, თუ $B(\lambda)$ მატრიცა მიიღება $A(\lambda)$ მატრიცისაგან სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით. $A(\lambda)$მატრიცის ეკვივალენტურობას $B(\lambda)$ მატრიცასთან აღნიშნავენ ასე: $A(\lambda)\sim B(\lambda)$. ეკვივალენტურ λ მატრიცთა განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თვისებები:

1. თუ $A(\lambda)\sim B(\lambda)$ და $B(\lambda)\sim C(\lambda)$, მაშინ $A(\lambda)\sim C(\lambda)$; ესაა **ტრანზიტულობის** თვისება,

2. თუ $A(\lambda)\sim B(\lambda)$, მაშინ $B(\lambda)\sim A(\lambda)$; ესაა **სიმეტრიულობის** თვისება.

3. $A(\lambda)\sim A(\lambda)$, ყოველი λ მატრიცა თავისი თავის ეკვივალენტურია; ესაა **რეფლექსურობის** თვისება.

დავამტკიცოთ მე-2 და მე-3 თვისებები. ვთქვათ, რომ $B(\lambda)$ მიიღება $A(\lambda)$-გან მე-2 ელემენტარული გარდაქმნით, ე. ი. $A(\lambda)$ მატრიცის რომელიმე i-ური სტრიქონის $k\neq 0$ რიცხვზე გამრავლებით. მაშინ. ცხადია რომ $B(\lambda)$ მატრიცის i-ური სტრიქონის $k^{-1}=\frac{1}{k}$ რიცხვზე გამრავლებით მივიღებთ $A(\lambda)$ მატრიცას. ახლა ვთქვათ, რომ $B(\lambda)$ მიიღება $A(\lambda)$-გან მე-3 ელემენტარული გარდაქმნით, ე. ი. $A(\lambda)$ მატრიცის რომელიმე i-ურ სტრიქონს მიმატებული j-ური სტრიქონისა და $f(\lambda)$-ს ნამრავლი. ამ შემთხვევაში $B(\lambda)$ მატრიცის i-ურ სტრიქონს $i+f(\lambda)j$ დავუმატოთ, j-ური სტრიქონი გამრავლებული $-f(\lambda)$-ზე; მივიღებთ ისევ $A(\lambda)$ მატრიცას, რ. დ. გ. ახლა, რადგან ყოველი ელემენტარული გარდაქმნისათვის არსებობს მისი შებრუნებული ელემენტარული გარდაქმნა, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ თუ $B(\lambda)$ მიიღება $A(\lambda)$-გან სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით, მაშინ $A(\lambda)$ მიიღება $B(\lambda)$-გან, თუ შებრუნებული თანამიმდევრობით განვიხილავთ ჩატარებული ელემენტარული გარდაქმნების შებრუნებულ გარდაქმნებს. რაც შეეხება ეკვივალენტურ მატრიცთა პირველ თვისებას, იგი ადვილად მიიღება. რადგან ეკვივალენტური λ მატრიცებისათვის მართებულია ტრანზიტულობის, სიმეტრიულობისა და რეფლექსურობის თვისებები, λ მატრიცთა **სიმრავლე შეიძლება დავყოთ კლასებად ისე, რომ ყოველ კლასში მოვათავსოთ ერთიმეორის ეკვივალენტური λ-მატრიცები.**

განსაზღვრა. დიაგონალურ λ მატრიცას

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

ეწოდება კანონიკური დიაგონალური მატრიცა, თუ ყოველი დიაგონალური $f_i(\lambda)$ მრავალწევრი არის შემდეგი $f_{i+1}(\lambda)$ მრავალწევრის გამყოფი და თუ ყველა არანულოვანი $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots f_n(\lambda)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიცენტები უდრის 1.

ახლა, თუ კანონიკური დიაგონალური λ-მატრიცის $f_i(\lambda)$ დიაგონალურ წევრებს შორის არის ნულები და ნულისაგან განსხვავებული რიცხვები, რომლებიც უნდა უდრიდეს 1-ს, მაშინ, ვინაიდან ნულისაგან განსხვავებული ყოველი $f_i(\lambda)$ დიაგონალური წევრი გამყოფია შემდეგი $f_{i+1}(\lambda)$ წევრისა, კანონიკური დიაგონალური λ-მატრიცის მთავარ დიაგონალზე პირველად უნდა დალაგდეს ერთები 1, ..., 1. შემდეგ ისეთი $f_{k+1}(\lambda)$, $f_{k+2}(\lambda)$, ..., $f_m(\lambda)$ მრავალწევრები, რომელთაგან ყოველი $f_i(\lambda)$ $(i=k+1, \dots, m)$ დიაგონალური წევრი გამყოფია შემდეგი $f_{i+1}(\lambda)$ დიაგონალური წევრისა და, ბოლოს, უნდა მოვათავსოთ ნულები. ისე, როგორც რიცხვითი მატრიცის შემთხვევაში, λ-მატრიცებისათვისაც მტკიცდება

თეორემა. **ყოველი λ-მატრიცა სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ დიაგონალურ სახემდე.**

დამტკიცება. თუ λ-მატრიცა ნულოვანი ან ერთეულოვანია, მაშინ დასამტკიცებელი არაფერია, რადგან მათ უკვე აქვთ კანონიკური დიაგონალური სახე. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია არანულოვანი და არაერთეულოვანი $A(\lambda)$ მატრიცა. $A(\lambda)$ მატრიცის ეკვივალენტურ მატრიცათა შორის ავარჩიოთ ისეთი, რომლის მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებულია ნულისაგან განსხვავებული უმცირესი შესაძლებელი ხარისხის მრავალწევრი. ვთქვათ, $A(\lambda)$ მატრიცის ეკვივალენტურ მატრიცათა შორის ასეთია $B(\lambda)$ მატრიცა:

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} g_{11}(\lambda) & g_{12}(\lambda) & & g_{1n}(\lambda) \\ g_{21}(\lambda) & g_{22}(\lambda) & \dots & g_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(\lambda) & g_{n2}(\lambda) & \dots & g_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

დავამტკიცოთ, რომ $B(\lambda)$ მატრიცის **პირველი სტრიქონის ყველა წევრი უნაშთოდ იყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე.**

მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ,

$$g_{1i}(\lambda)=g_{11}(\lambda)q_{1i}(\lambda)+r_{1i}(\lambda) \qquad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

სადაც გაყოფის შედეგად მიღებული $r_{1i}(\lambda)\neq 0$ მრავალწევრის (ნაშთის) ხარისხი ნაკლებია, ვიდრე $g_{11}(\lambda)$ მრავალწევრის ხარისხი. $B(\lambda)$ მატრიცაზე მოვახდინოთ შემდეგი ელემენტარული გარდაქმნა: i-ურ სვეტს გამოვაკლოთ პირველი სვეტის $q_{1i}(\lambda)$ მრავალწევრზე ნამრავლი, მაშინ მიღებული მატრიცის პირველი სტრიქონის და i-ური სვეტის ელემენტი იქნება $r_{1i}(\lambda)$ მრავალწევრი. ახლა პირველი და i-ური სვეტების ადგილების ურთიერთშეცვლით მივიღებთ $B(\lambda)$ მატრიცის ისეთ ეკვივალენტურ მატრიცას, რომლის მარცხენა ზედა კუთხეში იქნება უფრო დაბალი ხარისხის $r_{1i}(\lambda)$მრავალწევრი, ვიდრე $g_{11}(\lambda)$ მრავალწევრია, ეს კი ეწინააღმდეგება $B(\lambda)$ მატრიცის არჩევას. მაშასადამე, იმის დაშვებამ, რომ $B(\lambda)$ მატრიცის პირველი სტრიქონის ყოველი წევრი უნაშთოდ არ იყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე, მიგვიყვანა წინააღმდეგობამდე; ამრიგად, (1) ტოლობაში ყოველი $r_{1i}(\lambda)=0$ $(i=2,\ \ldots,\ n)$ და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $B(\lambda)$ მატრიცის პირველი სვეტის ყოველი წევრი უნაშთოდ იყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე. ახლა, თუ $B(\lambda)$ მატრიცაზე მოვახდენთ შემდეგ ელემენტარულ გარდაქმნას: ყოველ $=2,\ 3,\ \ldots,n$ სვეტს გამოვაკლებთ შესაბამისად პირველი სვეტისა და $q_{1i}(\lambda)$ მრავალწევრის ნამრავლს, პირველი სტრიქონის ყველა წევრი, გარდა $g_{11}(\lambda)$ წევრისა, გადაიქცევა ნულად. ანალოგიურად შეიძლება $B(\lambda)$ მატრიცის პირველი სვეტის ყველა წევრი, გარდა $g_{11}(\lambda)$ წევრისა, გადავაქციოთ ნულად. ამ ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად $B(\lambda)$ მატრიცა შეიცვლება მისი ეკვივალენტური

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix} g_{11}(\lambda) & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(\lambda) & \varphi_{23}(\lambda) & & \varphi_{2n}(\lambda) \\ 0 & \varphi_{32}(\lambda) & \varphi_{33}(\lambda) & & \varphi_{3n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \varphi_{n2}(\lambda) & \varphi_{n3}(\lambda) & \cdots & \varphi_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

მატრიცით, სადაც $\varphi_{ij}(\lambda)$ $(i,\ j=2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ მრავალწევრებია $P[\lambda]$ მრავალწევრთა რგოლიდან.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ **მიღებული** $C(\lambda)$ **მატრიცის ყოველი** $\varphi_{ij}(\lambda)$ **წევრი უნაშთოდ იყოფა** $g_{11}(\lambda)$**-ზე.**

მართლაც, თუ, მაგალითად, $C(\lambda)$ მატრიცის რომელიმე $\varphi_{ij}(\lambda)$ არ იყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე, მაშინ პირველ სტრიქონს მივუმატოთ მისივე i-ური სტრიქონი; მივიღებთ $A(\lambda)$ მატრიცის ისეთ ეკვივალენტურ მატრიცას,

რომელსაც მარცხენა ზედა კუთხეში აქვს ნულისაგან განსხვავებული უმცირესი ხარისხის $g_{11}(\lambda)$ წევრი და რომლის პირველი სტრიქონის $\varphi_{ij}(\lambda)$ წევრი არ იყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე, რაც, როგორც ზემოთ ვნახეთ, შეუძლებელია.

ამრიგად, დამტკიცდა, რომ $C(\lambda)$ მატრიცის ყოველი $\varphi_{ij}(\lambda)$ წევრი უნაშთოდ იყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე. ახლა სიმარტივისათვის ელემენტარული გარდაქმნა მოვახდინოთ მატრიცაზე:

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix} \varphi_{22}(\lambda) & \varphi_{23}(\lambda) & & \varphi_{2n}(\lambda) \\ \varphi_{32}(\lambda) & \varphi_{33}(\lambda) & \ldots & \varphi_{3n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n2}(\lambda) & \varphi_{n3}(\lambda) & & \varphi_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

ვინაიდან $D(\lambda)$ მატრიცის ყოველი $\varphi_{ij}(\lambda)$ წევრი უნაშთოდ იყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე. ამიტომ $D(\lambda)$ მატრიცის ყოველი ეკვივალენტური მატრიცის ყველა წევრი უნაშთოდ გაიყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე. თუ ახლა $D(\lambda)$ მატრიცისათვის გამოვიყენებთ ზემოთ დამტკიცებულ დებულებებს, $D(\lambda)$მატრიცას სათანადო ელემენტარული გარდაქმნებით შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix} \varphi_{22}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & t_{33}(\lambda) & t_{3n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & t_{n3}(\lambda) & t_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

სადაც ყოველი $t_{ij}(\lambda)$ $(i,\ j=3,\ \ldots,n)$ წევრი უნაშთოდ იყოფა $\varphi_{22}(\lambda)$-ზე.

ახლა, ვინაიდან $D(\lambda)$ მატრიცის ყოველი ელემენტარული გარდაქმნა ამავე დროს $C(\lambda)$ მატრიცის შესაბამისი ელემენტარული გარდაქმნაა და $D(\lambda)$ მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნა არ ცვლის $C(\lambda)$ მატრიცის პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის ელემენტებს, $D(\lambda)$ მატრიცის აღნიშნული გარდაქმნის შედეგად $B(\lambda)$ მატრიცა მიიღებს სახეს:

$$N(\lambda)=\begin{pmatrix} g_{11}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33}(\lambda) & t_{3n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & t_{n3}(\lambda) & t_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

სადაც ყოველი $t_{ij}(\lambda)$ იყოფა $\varphi_{22}(\lambda)$-ზე და $\varphi_{22}(\lambda)$ იყოფა $g_{11}(\lambda)$-ზე. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, სასრული რაოდენობის ელემენტარულ გარდაქმნათა შემდეგ მივიღებთ მოცემული $A(\lambda)$ მატრიცის ნორმა-

ლურ დიაგონალურ სახეს. ადვილად შევნიშნავთ, რომ λ-მატრიცის ნორმალურ დიაგონალურ სახემდე დაყვანის მტკიცების ეს მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს პრაქტიკულად λ-მატრიცის კანონიკურ დიაგონალურ სახემდე დასაყვანად. დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი მეტად საინტერესო შედეგი: **ეკვივალენტურ λ-მატრიცთა ყოველი კლასი ერთ კანონიკური დიაგონალური სახის λ-მატრიცას მაინც შეიცავს.**

შემდეგ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ერთისა და იმავე კლასის ყველა λ-მატრიცა, ე. ი ყოველი ორი ეკვივალენტური λ-მატრიცა, როგორი ელემენტარული გარდაქმნებითაც არ უნდა დავიყვანოთ კანონიკურ დიაგონალურ სახემდე, შედეგი ერთი და იგივე იქნება.

§ 67. λ-მატრიცის ინვარიანტული მამრავლები და ინვარიანტული გამყოფები

თეორემა. თუ $A(\lambda)$ **მატრიცის ყველა** k-**ური რიგის დეტერმინანტის საერთო მამრავლია** $\varphi(\lambda)$, **მაშინ ის იქნება აგრეთვე საერთო მამრავლი** $A(\lambda)$ **მატრიცის ნებისმიერი ეკვივალენტური მატრიცის ყველა** k-**ური რიგის დეტერმინანტისა.**

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ იმ შემთხვევისათვის, როცა $A(\lambda)$ მატრიცის ეკვივალენტური მატრიცა მიიღება $A(\lambda)$-გან ერთი რომელიმე ელემენტარული გარდაქმნით. თუ $A(\lambda)$ მატრიცის ეკვივალენტური მატრიცა მიიღება პირველი ან მეორე ელემენტარული გარდაქმნით, მაშინ თეორემის მართებულობა აშკარაა. განვიხილოთ მე-3 ელემენტარული გარდაქმნა. ვთქვათ, რომ $A(\lambda)$ მატრიცის i-ურ სტრიქონს მივუმატეთ j-ური სტრიქონი $f(\lambda)$ მრავალწევრზე გამრავლებული. ადვილად შევამჩნევთ, რომ ასეთი გარდაქმნის შედეგად მიღებული მატრიცის k-ური რიგის ის მინორები, რომლებიც არ შეიცავს i-ურ სტრიქონს და რომლებიც შეიცავს ორივე i-ურ და j-ურ სტრიქონს, უცვლელი დარჩება. k-ური რიგის ის მინორები, რომლებიც შეიცავს i-ურ სტრიქონს, მაგრამ არ შეიცავს j-ურ სტრიქონს, ამ გარდაქმნის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$M \pm N \cdot f(\lambda),$$

სადაც M და N არიან $A(\lambda)$ მატრიცის k-ური რიგის მინორები. აქედან უშუალოდ გამოდის თეორემის მართებულობა ამ შემთხვევაშიც. მაშასადამე, თეორემა მართებულია ისეთი მატრიცებისათვის, რომლებიც მიიღება $A(\lambda)$ მატრიცისაგან ერთი რომელიმე ელემენტარული გარდაქმნით. ახლა, რადგან $A(\lambda)$ მატრიცის ყოველი ეკვივალენტური მატრიცა მი-

ილება $A(\lambda)$ მატრიცისაგან გარკვეული სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით, თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

ანალოგიურად რიცხვითი მატრიცისა, λ-მატრიცისათვისაც მტკიცდება, რომ: **არც ერთი ელემენტარული გარდაქმნა არ ცვლის λ-მატრიცის რანგს, ე. ი. ეკვივალენტურ λ-მატრიცთა რანგი ტოლია.** თუ $A(\lambda)$ მატრიცის რანგი უდრის r-ს, სადაც $r\leqslant n$, მაშინ, ცხადია, რომ ყოველი r-ზე მაღალი რიგის დეტერმინანტი იქნება ნული და გვექნება $d_{r+1}(\lambda)=\ldots=d_n(\lambda)=0$. ზემოთ დამტკიცებული თეორემიდან ადვილად მივიღებთ, რომ: **ყოველი ორი ეკვივალენტური λ-მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორის უდიდესი საერთო გამყოფი ტოლია.**

მართლაც, ვთქვათ, $d_k(\lambda)$ არის რომელიმე $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორის უდიდესი საერთო გამყოფი. მაშინ დამტკიცებული თეორემის თანახმად $d_k(\lambda)$ იქნება $A(\lambda)$ მატრიცის ყოველი ეკვივალენტური მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორის საერთო გამყოფი. ახლა $A(\lambda)$ მატრიცის ეკვივალენტური მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორს რომ ჰქონოდა $d_k(\lambda)$-ზე უფრო მაღალი რიგის საერთო მამრავლი, მაშინ, დამტკცებული თეორემის თანახმად, $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორს უნდა ჰქონოდა იგივე საერთო მამრავლი, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. ამრიგად, r-რანგიანი λ-მატრიცის ყველა k-ური რიგის ($k=1, 2,\ldots,r$) მინორის უდიდესი საერთო გამყოფები: $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, ..., $d_n(\lambda)$ **უცვლელია (ინვარიანტულია) λ-მატრიცის ყოველი სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნების მიმართ** და ამიტომ მათ მოცემული λ-მატრიცის ინვარიანტულ მამრავლებს უწოდებენ.

ახლა, გამოვთვალოთ $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, ..., $d_n(\lambda)$ ინვარიანტული მამრავლები კანონიკური დიაგონალური სახის შემდეგი λ მატრიცისათვის:

$$E(\lambda)=\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e_n(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

სადაც ყოველი $e_i(\lambda)$ ($i=1, 2, \ldots, n$) წევრი გამყოფია შემდეგი $e_{i+1}(\lambda)$ წევრისა. რომელიმე k-ური რიგის მინორის მისაღებად, როგორც ვიცით, საჭიროა $E(\lambda)$-დან ამოვშალოთ $n-k$ რაოდენობის შესაბამისი სტრიქონი და ამავე რაოდენობის სვეტი. ადვილად შევნიშნავთ, რომ ნულისაგან განსხვავებული მინორების მისაღებად უნდა ამოვშალოთ $E(\lambda)$ მატრიცის ყველა ის სვეტი, რომლის ნომრები უდრის ამოშლილი სტრიქონების ნომრებს. ამრიგად, ნულისაგან განსხვავებული k-ური რიგის

მინორებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{vmatrix} e_{i1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & e_{i2}(\lambda) \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots e_{ik}(\lambda) \end{vmatrix} = e_{i1}(\lambda)e_{i2}(\lambda)\ldots e_{ik}(\lambda). \qquad (2)$$

თუ $E(\lambda)$ არის მოცემული $A(\lambda)$ მატრიცის კანონიკური დიაგონალური სახე, მაშინ, ცხადია, მისი k-ური რიგის მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება $d_k(\lambda)$. კერძოდ, $d_k(\lambda)$ იქნება (2) სახის k-ური რიგის მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი. ვინაიდან

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n \text{ და } i_1 \geqslant 1, \; i_2 \geqslant 2, \; \ldots, \; i_k \geqslant k,$$

გღებულობთ, რომ $e_{i1}(\lambda)$, $e_{i2}(\lambda)$, ..., $e_{ik}(\lambda)$ წევრები შესაბამისად იყოფა $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, ..., $e_k(\lambda)$ წევრებზე. მაშასადამე, ნამრავლი $e_{i1}(\lambda)e_{i2}(\lambda) \ldots e_{ik}(\lambda)$ იყოფა $e_1(\lambda)$ $e_2(\lambda) \ldots e_k(\lambda)$·ნამრავლზე; ეს იმას ნიშნავს, რომ $E(\lambda)$ მატრიცის (2) სახის ყველა k-ური რიგის მინორი იყოფა k-ური რიგის შემდეგ მინორზე

$$\begin{vmatrix} e_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots e_k(\lambda) \end{vmatrix} = e_1(\lambda)\, e_2(\lambda)\ldots e_k(\lambda). \qquad (3)$$

ვინაიდან, $E(\lambda)$ მატრიცის ყოველი (2) სახის k-ური რიგის მინორი (მრავალწევრი) იყოფა ამავე მატრიცის (3) სახის k-ური რიგის მინორზე (მრავალწევრზე), რომელთა უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის 1-ს, ამიტომ მივიღებთ, რომ $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორთა უდიდესი საერთო გამყოფი $d_k(\lambda)$ ემთხვევა (3) k-ური რიგის მინორს, ე. ი.

$$d_k(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots.e_k(\lambda) \quad (k=1, \; 2, \; \ldots, \; n). \qquad (4)$$

ამრიგად, თუ $A(\lambda)$ მატრიცა გარკვეული სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით დაიყვანება (1) კანონიკურ დიაგონალურ სახემდე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ როგორც $A(\lambda)$ მატრიცის, ისე ყველა მისი ეკვივალენტური მატრიცის $d_k(\lambda)$ მრავალწევრი $E(\lambda)$ კანონიკური დიაგონალური მატრიცის დიაგონალურ ელემენტებთან დაკავშირებულია (4) ტოლობით. თუ ვიგულისხმებთ $d_0(\lambda)=1$, მაშინ (4) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$e_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)} \qquad (k=1, \; 2, \; \ldots, \; r). \qquad (5)$$

მაშასადამე, r რანგის მქონე λ-მატრიცის k-ური რიგის $d_k(\lambda)$ მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი ყოველთვის იყოფა ამავე მატრიცის $k-1$ რიგის მინორების $d_{k-1}(\lambda)$ უდიდეს საერთო გამყოფზე და განაყოფი უდრის მოცემული მატრიცის კანონიკური დიაგონალური სახის $e_k(\lambda)$ წევრს.

$e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_r(\lambda)$ მრავალწევრებს, ვინაიდან ისინი დაკავშირებულია ინვარიანტულ მამრავლებთან, უწოდებენ მოცემული λ-მატრიცის ინვარიანტულ გამყოფებს.

ცხადია, რომ თუ λ-მატრიცის რანგი, ე. ი. ნულისაგან განსხვავებული მინორის უმაღლესი რიგი უდრის r-ს, მაშინ $d_r(\lambda)\neq 0$, ხოლო $d_{r+1}(\lambda)=0$. პირიქით, თუ $d_r(\lambda)\neq 0$ და $d_{r+1}(\lambda)=0$, მაშინ λ-მატრიცის ერთი r რიგის მინორი მაინც არ უდრის ნულს და სხვა ყველა $r+1$ რიგის მინორი უდრის ნულს, ე. ი. $E(\lambda)$ მატრიცის რანგი უდრის r-ს.

ახლა, ვინაიდან ყოველი ორი ეკვივალენტური λ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორის უდიდესი საერთო გამყოფი ტოლია $d_k(\lambda)$ მრავალწევრისა, (5) ტოლობიდან გამოდის, რომ ყოველ ორ ეკვივალენტურ λ-მატრიცას ერთნაირი ინვარიანტული გამყოფები აქვს, ე. ი. ყოველ ორ ეკვივალენტურ λ-მატრიცას ერთი და იგივე კანონიკური დიაგონალური სახე აქვს. პირიქით, ყოველი ორი მატრიცა, რომლებსაც ერთი და იგივე კანონიკური დიაგონალური სახე აქვთ, ერთმანეთის *ეკვივალენტურია*. ეს იქიდან გამოდის, რომ ორი მატრიცა, თუ ცალ-ცალკე ეკვივალენტურია მესამესი, მაშინ ისინი ურთიერთეკვივალენტურია. ამრიგად, მივიღეთ ორი λ-მატრიცის ეკვივალენტურობის შემდეგი პირობა: **ორი ერთისა და იმავე რიგის λ-მატრიცა ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი შესაბამისი ინვარიანტული გამყოფები ტოლია.**

§ 68. λ-მატრიცის ელემენტარული გამყოფები

ვთქვათ. $P(\lambda)$ მრავალწევრთა რგოლზე, სადაც P საზოგადოდ შეიძლება იყოს კომპლექსურ რიცხვთა ველი, მოცემულია n-ური რიგის λ-მატრიცა. ვიგულისხმოთ. რომ $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_n(\lambda)$ მრავალწევრები მოცემული λ-მატრიცის ინვარიანტული გამყოფებია. თუ მოცემული მატრიცის რანგი $r<n$, მაშინ, როგორც ვიცით, ინვარიანტულ გამყოფთა $n-r$ რაოდენობა, ეტოლება ნულს. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_r(\lambda)$ ინვარიანტული გამყოფები არ უდრის ნულს, ხოლო $e_{r+1}(\lambda)=\dots=e_n(\lambda)=0$. ყოველი $e_k(\lambda)$ მრავალწევრი P რიცხვთა ველზე დავშალოთ დაუყვან მამრავლებად. ვთქვათ,

$$e_k(\lambda)=[\varepsilon_1(\lambda)]^{\alpha_1}[\varepsilon_2(\lambda)]^{\alpha_2}\cdots[\varepsilon_s(\lambda)]^{\alpha_s},$$

სადაც $\varepsilon_1(\lambda)$, $\varepsilon_2(\lambda)$, ..., $\varepsilon_s(\lambda)$ არის P ველზე სხვადასხვა დაუყვანი მამრავლი, რომელთა უფროსი წევრის კოეფიციენტები უდრის 1-ს. $[\varepsilon_1(\lambda)]^{\alpha_1}$, $[\varepsilon_2(\lambda)]^{\alpha_2}$, ..., $[\varepsilon_s(\lambda)]^{\gamma_s}$ მრავალწევრებს ეწოდებათ $e_k(\lambda)$ ინვარიანტული გამყოფის ელემენტარული გამყოფები P ველზე. აგრეთვე ხშირად ამბობენ, რომ $[\varepsilon_i(\lambda)]^{\gamma_i}$ $(i=1, 2, ..., s)$ ელემენტარული გამყოფი ეკუთვნის $\varepsilon_i(\lambda)$ დაუყვან მამრავლს.

λ-მატრიცის ყველა, მუდმივისაგან განსხვავებულ, $e_k(\lambda)$ ინვარიანტული გამყოფის ელემენტარული გამყოფების ერთობლიობას ეწოდება მოცემული λ-მატრიცის ელემენტარული გამყოფები P ველზე. მაგალითად, ვთქვათ, $A(\lambda)$ მატრიცის ინვარიანტული გამყოფებია: 1, 1, λ, $\lambda^2(\lambda^2+1)$, $\lambda^2(\lambda^2+1)^2$; მაშინ მისი ელემენტარული გამყოფები D ნამდვილ რიცხვთა ველზე იქნება λ, λ^2, λ^2, λ^2+1 და $(\lambda^2+1)^2$, ხოლო K კომპლექსურ რიცხვთა ველზე კი იქნება λ, λ^2, λ^2, $(\lambda+i)$, $(\lambda+i)^2$, $(\lambda-i)$ და $(\lambda-i)^2$.

ახლა, თუ ავიღებთ რომელიმე $A(\lambda)$ მატრიცას და ამოვწერთ მის ყველა ელემენტარულ გამყოფს იმდენჯერ, რამდენ ინვარიანტულ მამრავლშიც ის შედის, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასეთნაირად მიღებული ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა მთლიანად განსაზღვრავს მოცემული $A(\lambda)$ მატრიცის მუდმივისაგან განსხვავებულ ყველა ინვარიანტულ გამყოფს. გარდა ამისა, თუ დამატებით მხედველობაში მივიღებთ $A(\lambda)$ მატრიცის n რიგს და r რანგს, მაშინ მთლიანად განისაზღვრება $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა ინვარიანტული გამყოფი. მაშასადამე, მტკიცდება, რომ: **$A(\lambda)$ მატრიცის რიგი, რანგი და ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა სრულიად განსაზღვრავს $A(\lambda)$ მატრიცის ინვარიანტულ გამყოფთა სისტემას.** ახლა, ვინაიდან ყოველი ორი ერთისა და იმავე რიგის λ-მატრიცა ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ შესაბამისი ინვარიანტული მამრავლები ტოლია, ე. ი. როცა მათი ინვარიანტული გამყოფები ტოლია, მივიღებთ შემდეგ თეორემას: **ერთისა და იმავე რიგის ყოველი ორი λ-მატრიცა ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა კომპლექსურ რიცხვთა ველზე ერთი და იგივეა.**

მიღებული თეორემის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია $A(\lambda)$ მატრიცა, რომლის ელემენტარული გამყოფებია: λ, λ^2, λ^2, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^3$, $\lambda-1$, $\lambda-1$, რიგი $n=6$ და რანგი $r=4$.

რადგან $A(\lambda)$ მატრიცის რიგი $n=6$, ამიტომ $A(\lambda)$ მატრიცას აქვს ექვსი ინვარიანტული გამყოფი $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, $e_3(\lambda)$, $e_4(\lambda)$, $e_5(\lambda)$ და $e_6(\lambda)$. ახლა, რადგან რანგი $r=4$, ამიტომ $d_5(\lambda)=d_6(\lambda)=0$. მოცემულ $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, $e_3(\lambda)$, $e_4(\lambda)$ ინვარიანტული გამყოფების დაშლით უნდა მივიღოთ შვიდი ელემენტარული გამყოფი. ვინაიდან $e_4(\lambda)$ იყოფა $e_3(\lambda)$, $e_2(\lambda)$ და

$e_1(\lambda)$ ინვარიანტულ გამყოფებზე, ამიტომ $e_4(\lambda)$ უნდა შეიცავდეს იმ ელემენტარულ გამყოფებს, რომლებიც ეკუთვნის ყველა დაუყვან მამრავლს უდიდესი ხარისხით, ე. ი. $e_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^3(\lambda-1)$. დარჩენილი λ, λ^2, $\lambda+1$, $\lambda-1$ ელემენტარული გამყოფებიდან უდიდესი გამყოფები უნდა იყოს $e_3(\lambda)$-ის მამრავლები, ე. ი. $e_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)$. დარჩა მხოლოდ λ ელემენტარული გამყოფი; ამიტომ $e_2(\lambda)=\lambda$. ვინაიდან ყველა ელემენტარული გამყოფი უკვე ამოწურულია, გვექნება $e_1(\lambda)=1$. ცხადია, განხილული მეთოდი გამოდგება ზოგად შემთხვევაშიც, რომლის დაწვრილებით განხილვა დაინტერესებულ მკითხველსაც შეუძლია.

იმისათვის, რომ პრაქტიკულად გამოვთვალოთ λ-მატრიცის ინვარიანტული და ელემენტარული გამყოფები, საჭიროა **შესაფერისი ელემენტარული გარდაქმნების თანამიმდევრობითი გამოყენებით მოცემული λ-მატრიცა დავიყვანოთ კანონიკურ დიაგონალურ სახემდე. მიღებული კანონიკური დიაგონალური სახიდან უშუალოდ მიიღება ინვარიანტული გამყოფები, ხოლო მიღებულ ინვარიანტულ გამყოფთა საშუალებით გამოვთვლით მოცემული λ-მატრიცის ელემენტარულ გამყოფებს.**

ინვარიანტული გამყოფებიდან ელემენტარული გამყოფების მოძებნისათვის, ზოგ შემთხვევაში, ჯერადი მამრავლების გამოყოფის მეთოდის დახმარებით მოგვიხდება მაღალი ხარისხის ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნა.

მაგალითი 1. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შემდეგი λ-მატრიცა

$$\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$$

ელემენტარული გარდაქმნებით დაიყვანება შემდეგ კანონიკურ დიაგონალურ სახემდე:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [(\lambda-\alpha)^2+\beta^2]^3 \end{pmatrix}.$$

ამიტომ მოცემული მატრიცის ინვარიანტული გამყოფები იქნება:

$$e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=e_3(\lambda)=e_4(\lambda)=e_5(\lambda)=1 \text{ და } e_6(\lambda)=[(\lambda-\alpha)^2+\beta^2]^3.$$

აქედან მისი ელემენტარული გამყოფები კომპლექსურ რიცხვთა ველზე იქნება:

$$[\lambda-(\alpha+\beta_i)]^3 \text{ და } [\lambda-(\alpha-\beta_i)]^3.$$

ზოგიერთი λ მატრიცის ინვარიანტული და ელემენტარული გამყოფების მოძებნა ძალიან ადვილდება, თუ ვისარგებლებთ $d_k(\lambda)$ ინვარიანტული მამრავლით, ე. ი. მოცემული მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორის უდიდესი საერთო გამყოფის ცნებით.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ინვარიანტული მამრავლები და ელემენტარული გამყოფები შემდეგი λ-მატრიცისა:

$$\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}.$$

ვინაიდან მოცემული მატრიცის დეტერმინანტია $(\alpha-\lambda)^n$, ამიტომ $d_n(\lambda)$ ინვარიანტული მამრავლი იქნება:

$$d_n(\lambda)=\frac{(\alpha-\lambda)^n}{(-1)^n}=(\lambda-\alpha)^n.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული მატრიცის ყოველი დაბალი რიგის ერთი დეტერმინანტი მაინც ნულისაგან განსხვავებული მუდმივი სიდიდეა. მაგალითად, პირველი სვეტის და მე-n სტრიქონის ამოშლის შედეგად მიღებული მინორი იქნება $a_1 \; a_2 \dots a_{n-1}$ ნამრავლი, ამიტომ

$$d_{n-1}(\lambda)=1, \; e_n(\lambda)=\frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)}=(\lambda-\alpha)^n.$$

მივიღებთ $\varepsilon_n(\lambda)=(\lambda-\alpha)^n$. ამრიგად, ვინაიდან $d_n(\lambda)=(\lambda-\alpha)^n$ ინვარიანტული მამრავლის გარდა ყველა სხვა ინვარიანტული მამრავლი უდრის 1, მივიღებთ, რომ მოცემული მატრიცისათვის $(\lambda-\alpha)^n$ ერთადერთი ელემენტარული გამყოფია.

დიაგონალური λ-მატრიცის ელემენტარული გამყოფები. როგორც ვიცით, კანონიკურ ნორმალურ სახემდე დაყვანილი λ-მატრიცის ელემენ-

ტარულ გამყოფთა მისაღებად, საკმარისია ავიღოთ მისი დიაგონალურ წევრთა ყველა ელემენტარული გამყოფი. დავამტკიცოთ, რომ ეს წესი მართებულია ნებისმიერი დიაგონალური λ-მატრიცებისათვის.

ლემა. ნებისმიერი F დიაგონალური λ-მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა უდრის მის დიაგონალურ წევრთა ელემენტარულ გამყოფთა ერთობლიობას.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$ მრავალწევრები F დიაგონალური მატრიცის წევრებია. ზოგადობა არ იქნება დარღვეული, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ყველა ეს მრავალწევრი განსხვავებულია ნულისაგან და მათი უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის 1-ს. მოცემული F მატრიცის k-ური რიგის მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი აღვნიშნოთ $d_k(\lambda)$-თი. ვინაიდან $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$ მრავალწევრების უფროსი წევრების კოეფიციენტები უდრის 1-ს, ამიტომ F მატრიცის დეტერმინანტი ეტოლება $d_n(\lambda)$, ე. ი.

$$d_n(\lambda)=f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\dots f_n(\lambda). \tag{1}$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით

$$d_n(\lambda)=e_1(\lambda)\cdot e_2(\lambda)\dots e_n(\lambda), \tag{2}$$

სადაც $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, ..., $e_n(\lambda)$ არის მოცემული F მატრიცის ინვარიანტული გამყოფები. $\varepsilon_1(\lambda)$, $\varepsilon_2(\lambda)$, ..., $\varepsilon_s(\lambda)$ სიმბოლოებით აღვნიშნოთ $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$ მრავალწევრთა სხვადასხვა დაუყვანი მამრავლი. როგორც ვხედავთ, F მატრიცის ყოველი ელემენტარული გამყოფი იქნება $\varepsilon_1(\lambda)$, $\varepsilon_2(\lambda)$, ..., $\varepsilon_s(\lambda)$ მრავალწევრებიდან ერთ-ერთის ხარისხი. ახლა $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$ მრავალწევრებიდან გამოვყოთ $\varepsilon_1(\lambda)$ მამრავლის უდიდესი ხარისხი, რომელზედაც ეს მრავალწევრები იყოფა. ვთქვათ,

$$f_i(\lambda)=[\varepsilon_1(\lambda)]^{s_i}\, g_i(\lambda) \qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ n) \tag{3}$$

სადაც $g_i(\lambda)$ არ იყოფა $\varepsilon_1(\lambda)$-ზე, დავამტკიცოთ, რომ $[\varepsilon_1(\lambda)]^{s_1}$, ..., $[\varepsilon_1(\lambda)]^{s_n}$ არის F მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა, რომელიც ეკუთვნის $\varepsilon_1(\lambda)$ დაუყვან მამრავლს. ვინაიდან F მატრიცის ელემენტარული გამყოფები არაა დამოკიდებული მისი სტრიქონებისა და სვეტების რიგზე, ჩვენ სტრიქონები და სვეტები დავალაგოთ ასე:

$$s_1\leqslant s_2\leqslant \dots \leqslant s_n. \tag{4}$$

ვიპოვოთ $\varepsilon_1(\lambda)$ დაუყვანი მამრავლის უმცირესი ხარისხი, რომელიც $d_k(\lambda)$-ში შედის. განსაზღვრის თანახმად, $d_k(\lambda)$ არის შემდეგი სახის

$$f_{v_1}(\lambda)\cdot f_{v_2}(\lambda)\dots f_{v_k}(\lambda)=[\varepsilon_1(\lambda)]^{s_{v_1}+s_{v_2}+\dots+s_{v_k}}g_{v_1}(\lambda)g_{v_2}(\lambda)\dots g_{v_k}(\lambda)$$

მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი. (4) უტოლობის თანახმად, დაუყვანი მამრავლის უმცირესი ხარისხი შედის

$$f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\dots f_k(\lambda)=[\varepsilon_1(\lambda)]^{s_1+s_2+\dots+s_k}g_1(\lambda)g_2(\lambda)\dots g_k(\lambda)$$

მინორში. ცხადია აქ $g_1(\lambda)\cdot g_2(\lambda)\dots g_k(\lambda)$ არ იყოფა $\varepsilon_1(\lambda)$-ზე. მაშასადამე, $d_k(\lambda)$ შეიცავს $\varepsilon_1(\lambda)$ მამრავლს $s_1+s_2+\dots+s_k$ ხარისხში. ასევე მივიღებთ, რომ $d_{k-1}(\lambda)$ შეიცავს $\varepsilon_1(\lambda)$ მამრავლს $s_1+s_2+\dots+s_{k-1}$ ხარისხში. მაგრამ ვიცით, რომ

$$e_k(\lambda)=\frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}.$$

ამიტომ $e_k(\lambda)$ შეიცავს $\varepsilon_1(\lambda)$ მამრავლს ზუსტად s_k ხარისხში. ამრიგად, F მატრიცის ელემენტარული გამყოფები, რომლებიც $\varepsilon_1(\lambda)$ დაუყვან მამრავლს ეკუთვნის, ემთხვევა F მატრიცის დიაგონალურ ელემენტთა ელემენტარულ გამყოფებს, რომლებიც ეკუთვნის $\varepsilon_1(\lambda)$ მამრავლს. ვინაიდან ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა გამოდგება დანარჩენი $\varepsilon_2(\lambda), \dots, \varepsilon_s(\lambda)$ დაუყვანი მამრავლებისათვის, ამიტომ ლემა დამტკიცებულად ჩაითვლება. ხშირად ამ ლემის გამოყენებით ძალზე ადვილდება მოცემული λ-მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა მოძებნა.

კერძოდ, ამ ლემის გამოყენებით ძალზე მარტივდება უჯრედოვან-დიაგონალური λ-მატრიცების ელემენტარულ გამყოფთა მოძებნა.

§ 61. ეკვივალენტურ და მსგავს მატრიცთა ზოგიერთი თვისება. ძირითადი თეორემა მატრიცთა მსგავსებაზე

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ორი λ-მატრიცის ეკვივალენტურობას უნიმოდულარულ მატრიცთა გამოყენებით და დავამტკიცებთ ძირითად თეორემას მატრიცთა მსგავსებაზე

თეორემა 1. ორი $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ მატრიცა ურთიერთეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოინახება ისეთი ორი $P(\lambda)$ და $Q(\lambda)$ უნიმოდულარული λ-მატრიცა, რომ

$$A(\lambda)=P(\lambda)\cdot B(\lambda)\cdot Q(\lambda). \tag{1}$$

დამტკიცება. პირველად შევნიშნოთ, რომ $A(\lambda)$ მატრიცის ყოველი ელემენტარული გარდაქმნა შეიძლება განვიხილოთ როგორც $A(\lambda)$ მატ-

რიცის გამრავლება, მარცხნიდან ან მარჯვნიდან, რომელიმე უნიმოდულარულ λ-მატრიცაზე.

ვაჩვენოთ ეს სამივე ტიპის ელემენტარული გარდაქმნისათვის. ვთქვათ, მოცემულია $A(\lambda)$ მატრიცა

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \ldots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

ა) იმისათვის, რომ $A(\lambda)$ მატრიცის რომელიმე ორ სვეტს (შესაბამისად სტრიქონებს), მაგალითად პირველ და მეორე სვეტებს, ერთმანეთის მიმართ შევუცვალოთ ადგილი, საჭიროა მოცემული მატრიცა მარჯვნიდან გავამრავლოთ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

მატრიცაზე, რომელიც მიიღება ერთეულოვანი მატრიციდან იმავე ოპერაციით.

ბ) იმისათვის, რომ $A(\lambda)$მატრიცის მეორე სვეტი (შესაბამისად სტრიქონი) გავამრავლოთ α რიცხვზე, ამისათვის მოცემული მატრიცა მარჯვნიდან (შესაბამისად მარცხნიდან) გავამრავლოთ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

მატრიცაზე, რომელიც მიიღება ერთეულოვანი მატრიციდან იმავე ოპერაციით.

გ) დასასრულს, $A(\lambda)$ მატრიცის პირველ სვეტს, რომ მივუმატოთ მეორე სვეტი გამრავლებული $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრზე, ამისათვის $A(\lambda)$ მატრიცა მარჯვნიდან გავამრავლოთ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi(\lambda) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

მატრიცაზე, რომელიც მიიღება ერთეულოვანი მატრიციდან იმავე ოპერაციით. პირველ სტრიქონს რომ მივუმატოთ მეორე სტრიქონი გამრავლებული $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრზე, ამისათვის $A(\lambda)$ მატრიცა მარცხნიდან გავამრავლოთ

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi(\lambda) & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

მატრიცაზე, რომელიც აგრეთვე მიიღება ერთეულოვანი მატრიციდან იმავე ოპერაციით.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (2)—(5) მატრიცთა დეტერმინანტები ნულისაგან განსხვავებული რიცხვებია, ე. ი. ყველა ეს მატრიცა უნიმოდულარულია. ამ მატრიცებს, რადგან ისინი დაკავშირებულია ელემენტარულ გარდაქმნებთან, ხშირად **ელემენტარულ გარდაქმნათა მატრიცებს** უწოდებენ.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ მატრიცები ეკვივალენტურია, ე. ი. $A(\lambda)$ მატრიცა მიიღება $B(\lambda)$ მატრიცისაგან სასრული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნებით, ე. ი. $B(\lambda)$ მატრიცის გამრავლებით მარცხნიდან და მარჯვნიდან სასრული რაოდენობის ელემენტარულ გარდაქმნათა მატრიცებზე. ვინაიდან ელემენტარულ გარდაქმნათა მატრიცა უნიმოდულარულია და უნიმოდულარულ მატრიცთა ნამრავლი ისევ უნიმოდულარულია, თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

შედეგი. ყოველი უნიმოდულარული λ-მატრიცა არის ელემენტარულ გარდაქმნათა მატრიცების ნამრავლი.

მართლაც, ყოველი უნიმოდულარული მატრიცა ეკვივალენტურია ერთეულოვანი მატრიცისა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$D(\lambda)=P_1(\lambda)\cdot E\cdot P_2(\lambda),$$

სადაც $P_1(\lambda)$ და $P_2(\lambda)$ არის ელემენტარულ გარდაქმნათა მატრიცების ნამრავლი. ვინაიდან $D(\lambda)=P_1(\lambda)\cdot P_2(\lambda)$, ეს იმას ნიშნავს, რომ $D(\lambda)$ თვითონ არის ელემენტარულ გარდაქმნათა მატრიცების ნამრავლი. ამის დახმარებით ადვილად დამტკიცდება თეორემის მეორე ნაწილი.

მართლაც, ვთქვათ, $A(\lambda)=P(\lambda)\cdot B(\lambda)\cdot Q(\lambda)$, სადაც $P(\lambda)$ და $Q(\lambda)$ უნიმოდულარული მატრიცებია. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, $B(\lambda)$ მატრიცის მარცხნიდან და მარჯვნიდან შესაბამისად $P(\lambda)$ და $Q(\lambda)$ მატრიცებზე გამრავლება ეკვივალენტურია $B(\lambda)$ მატრიცაზე გარკვეული რაოდენობის ელემენტარული გარდაქმნების მოხდენისა. მაშასადამე,

$A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ მატრიცები ეკვივალენტურია და თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

2. ადვილად დამტკიცდება, რომ თუ A და B მატრიცები **მსგავსია, ე. ი. თუ არსებობს ისეთი არაგანსაკუთრებული** C მატრიცა, რომ $B=C^{-1}AC$, მაშინ $\lambda E-A$ და $\lambda E-B$ მატრიცები ეკვივალენტურია.

მართლაც, $B=C^{-1}AC$ თანაფარდობიდან მივიღებთ:

$$\lambda E-B=C^{-1}(\lambda E-A)C.$$

ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად, ეს თვისებაც დამტკიცებულია, ვინაიდან C მატრიცა უნიმოდულარული მატრიცის კერძო შემთხვევაა.

3. **ბეზუს თეორემის განზოგადება** (ანუ ნაშთით გაყოფის ალგორითმი). ვთქვათ, λ ასოს მიმართ მოცემულია მატრიცული მრავალწევრი

$$f(\lambda)=A_0\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\ldots+A_{n-1}\lambda+A_n, \tag{6}$$

ე. ი. ისეთი $f(\lambda)$ მატრიცა, რომლის კოეფიციენტები A_0, A_1, ..., A_n არის n-ური რიგის მატრიცები რიცხვთა P ველზე.

დავამტკიცოთ, რომ $f(\lambda)$ მატრიცული მრავალწევრი მარცხნიდან შეიძლება გავყოთ $\lambda E-A$ მატრიცაზე, ე. ი. შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი $S(\lambda)$ მატრიცა და R რიცხვითი მატრიცა, რომ

$$f(\lambda)=(\lambda E-A)\,S(\lambda)+R. \tag{7}$$

გაყოფის ან გამრავლების შესრულების დროს მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ მატრიცების ნამრავლი არაკომუტაციურია. ადვილად, შემოწმდება, რომ λ-მატრიცის $f(\lambda)-(\lambda E-A)A_0\lambda^{n-1}$ ხარისხი არ აღემატება $n-1$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(\lambda)-(\lambda E-A)A_0\lambda^{n-1}=A_0^{(1)}\lambda^{n-1}+A_1^{(1)}\lambda^{n-2}+\ldots+A_{n-1}^{(1)}=$$
$$=f_1(\lambda), \tag{8}$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$f_1(\lambda)-(\lambda E-A)A_1^{(1)}\lambda^{n-2}=f_2(\lambda), \tag{9}$$

სადაც $f_2(\lambda)$ მრავალწევრის ხარისხი არ აღემატება $n-2$. თუ ამ პროცესს ასე გავაგრძელებთ, n საფეხურის შემდეგ მივიღებთ:

$$f_{n-1}(\lambda)-(\lambda E-A)A_0^{(n-1)}=f_n(\lambda). \tag{10}$$

მრავალწევრს, რომლის ხარისხი არ აღემატება ნულს, ე. ი. $f_n(\lambda)$ არის λ-გან დამოუკიდებელი რიცხვითი მატრიცა. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (8), (9) და (10) ტოლობებიდან მიიღება:

$$f(\lambda)=(\lambda E-A)A_0\lambda^{n-1}+(\lambda E-A)\overset{(1)}{\underset{0}{A}}\lambda^{n-2}+\ldots.+ \\ +(\lambda E-A)\overset{(n-1)}{\underset{0}{A}}+R,$$

ე. ი.

$$f(\lambda)=(\lambda E-A)\left[A_0\lambda^{n-1}+\overset{(1)}{\underset{0}{A}}\lambda^{n-2}+\ldots+\overset{(n-1)}{\underset{0}{A}}\right]+f_n(\lambda).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$S(\lambda)=A_0\lambda^{n-1}+\overset{(1)}{\underset{0}{A}}\lambda^{n-2}+\ldots+\overset{(n-1)}{\underset{0}{A}},\quad R=f_n(\lambda),$$

მივიღებთ (7) ტოლობას, რ. დ. გ.

სრულიად ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ მოცემული $f(\lambda)$ მრავალწევრი მარჯვნიდან შეიძლება გავყოთ $\lambda E-A$ მატრიცაზე. ე. ი. არსებობს ისეთი $S_1(\lambda)$ და R_1 მატრიცები, რომ

$$f(A)=S_1(\lambda)(\lambda E-A)+R_1. \tag{11}$$

როგორც ბეზუს თეორემის შემთხვევაში, შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ

$$f(A)=R_1=R. \tag{12}$$

4. ძირითადი თეორემა მატრიცთა მსგავსებაზე. *A და B რიცხვითი მატრიცები, ე. ი. მატრიცები, რომელთა ელემენტები ეკუთვნის რიცხვთა P ველს მაშინ და მხოლოდ მაშინაა მსგავსი, როცა მათი მახასიათებელი $\lambda E-A$ და $\lambda E-B$ მატრიცები ურთიერთეკვივალენტურია.*

დამტკიცება. ამ თეორემის აუცილებელი პირობა ჩვენ მე-2 პუნქტში დავამტკიცეთ. დავამტკიცოთ ახლა საკმარისი პირობა, ე. ი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ თუ $\lambda E-A$ და $\lambda E-B$ მატრიცები ეკვივალენტურია, მაშინ A და B მატრიცები მსგავსია.

დავუშვათ, რომ $\lambda E-A$ და $\lambda E-B$ მატრიცები ეკვივალენტურია, მაშინ, პირველ პუნქტში დამტკიცებული დებულების თანახმად, არსებობს ისეთი ორთოგონალური $P(\lambda)$ და $Q(\lambda)$ მატრიცები, რომ

$$\lambda E-B=P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda). \tag{13}$$

ჩვენ ახლა ვაჩვენოთ, რომ $P(\lambda)$ და $Q(\lambda)$ ორთოგონალური მატრი-

ცები შეიძლება შევცვალოთ არაგანსაკუთრებული რიცხვითი მატრიცებით. ამ მიზნით $P(\lambda)$ მარცხნიდან გავყოთ $(\lambda E-B)$-ზე, ხოლო $Q(\lambda)$ კი მარჯვნიდან გავყოთ ამავე მატრიცაზე. მაშინ ბეზუს განზოგადებული თეორემის (7) და (11) ფორმულების საფუძველზე მივიღებთ:

$$P(\lambda)=(\lambda E-B)P_1(\lambda)+P_0,\quad Q(\lambda)=Q_1(\lambda)(\lambda E-B)+Q_0, \tag{14}$$

სადაც P_0 და Q_0 რიცხვითი მატრიცებია. $P(\lambda)$ და $Q(\lambda)$ ეს მნიშვნელობანი ჩავსვათ (13) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\lambda E-B=(\lambda E-B)P_1(\lambda)(\lambda E-A)Q_1(\lambda)(\lambda E-B)+\\+(\lambda E-B)P_1(\lambda)(\lambda E-A)Q_0+P_0(\lambda E-A)Q_1(\lambda)(\lambda E-B)+\\+P_0(\lambda E-A)Q_0.\end{aligned} \tag{15}$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე, გარდა $P_0(\lambda E-A)Q_0$ წევრისა, აღვნიშნოთ $D(\lambda)$-თი, ე. ი.

$$\begin{aligned}D(\lambda)=(\lambda E-B)P_1(\lambda)(\lambda E-A)Q_1(\lambda)(\lambda E-B)+\\+(\lambda E-B)P_1(\lambda)(\lambda E-A)Q_0+\\+P_0(\lambda E-A)Q_1(\lambda)(\lambda E-B).\end{aligned} \tag{16}$$

ამ აღნიშვნის საფუძველზე (15) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\lambda E-B-P_0(\lambda E-A)Q_0=D(\lambda). \tag{17}$$

აქედან ჩანს, რომ $D(\lambda)$ მრავალწევრის ხარისხი λ-ს მიმართ არ აღემატება ერთს. ახლა ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $D(\lambda)=0$. ვინაიდან უნიმოდულარული მატრიცის შებრუნებული ისევ უნიმოდულარულია, (13) ტოლობიდან მივიღებთ შემდეგ ორ ტოლობას:

$$\begin{aligned}P^{-1}(\lambda)(\lambda E-B)=(\lambda E-A)Q(\lambda),\\(\lambda E-B)Q^{-1}(\lambda)=P(\lambda)(\lambda E-A).\end{aligned} \tag{18}$$

(14) და (18) ტოლობათა გამოყენებით (16) ტოლობის მარჯვენა მხარე, ე. ი. $D(\lambda)$ შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\begin{aligned}D(\lambda)=(\lambda E-B)[P_1(\lambda)P^{-1}(\lambda)+Q^{-1}(\lambda)Q_1(\lambda)+\\+P_1(\lambda)(\lambda E-A)Q_1(\lambda)](\lambda E-B).\end{aligned} \tag{18'}$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება, ცხადია, იქნება მატრიცული მრავალწევრი λ-ს მიმართ. დავუშვათ, რომ ეს მრავალწევრი განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ (18') ტოლობის მარჯვენა მხარეში იქნება მრავალწევრი არანაკლებ მე-2 ხარისხისა, ეს კი შეუძ-

ლებელია, რადგან მარცხენა მხარეში მოთავსებული $D(\lambda)$ მრავალწევრის ხარისხი, თანახმად (17) ტოლობისა, არ აღემატება 1-ს. ამრიგად, კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული მრავალწევრი უდრის ნულს, ამიტომ $D(\lambda)=0$ და (17) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\lambda E-B=P_0(\lambda E-A)Q_0. \tag{19}$$

ამრიგად, დამტკიცდა, რომ $P(\lambda)$ და $Q(\lambda)$ უნიმოდულარული მატრიცების შეცვლა შეიძლება P_0 და Q_0 უნიმოდულარული რიცხვითი მატრიცებით. მიღებული (19) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$E\lambda-B=P_0Q_0\lambda-PA_0Q_0.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$P_0Q_0=E, \quad P_0AQ_0=B.$$

ვინაიდან $P_0=Q_0^{-1}$, გვექნება: $B=Q_0^{-1}AQ_0$, ე. ი. B და A მატრიცები მსგავსია. ამით ძირითადი თეორემა მატრიცთა მსგავსებაზე დამტკიცებულია.

ახლა, ვინაიდან λ მატრიცთა ეკვივალენტურობიდან გამომდინარეობს მათი ინვარიანტულ მამრავლთა თანამთხვევა, დამტკიცებული ძირითადი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ A და B რიცხვითი მატრიცების მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისია $\lambda E-A$ და $\lambda E-B$ მატრიცების ინვარიანტულ მამრავლთა თანამთხვევა.

§ 70. უჯრედოვან-დიაგონალურ და დიაგონალურ მატრიცთა ზოგიერთი თვისება

წინა პარაგრაფში დამტკიცებული იყო, რომ A და B რიცხვითი მატრიცები მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ $\lambda E-A$ და $\lambda E-B$ მახასიათებელ მატრიცთა ინვარიანტული მამრავლები ტოლია.

ჟორდანის მატრიცებისა და მასთან დაკავშირებული საკითხების შესწავლისათვის წინასწარ განვიხილოთ უჯრედოვან-დიაგონალურ მატრიცთა რამდენიმე თვისება.

უჯრედოვან-დიაგონალური მატრიცა. შემდეგი სახის მატრიცას

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \tag{1}$$

სადაც $A_1, A_2, \ldots, A_s$ კვადრატული უჯრედებია, ხოლო 0-ები შესაბამისი რიგის ნულოვანი მატრიცები, ეწოდება **უჯრედოვან-დიაგონალური** მატრიცა. ხშირად ასეთი A მატრიცისათვის ამბობენ, რომ ის იშლება $A_1, A_2, \ldots, A_s$ ნაწილებად ან კიდევ A მატრიცა არის $A_1, A_2, \ldots, A_s$ მატრიცთა პირდაპირი ჯამი, რომელსაც სიმბოლურად ასე აღნიშნავენ:

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \cdots \dot{+} A_s. \tag{2}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასეთ უჯრედოვან-დიაგონალურ მატრიცაზე ოპერაციები დაიყვანება მათ დიაგონალურ უჯრედთა ოპერაციებამდე. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(\lambda)$ რომელიმე მრავალწევრი და A არის (1) სახის უჯრედოვან-დიაგონალური მატრიცა, მაშინ

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(A_2) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & f(A_s) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

უჯრედოვან-დიაგონალური მატრიცებისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი თვისებები.

1. უჯრედოვან-დიაგონალური მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი უდრის მის დიაგონალურ უჯრედთა მახასიათებელი მრავალწევრების ნამრავლს.

მართლაც, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ A მატრიცის მახასიათებელ მრავალწევრს აქვს სახე

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda E_1 - A_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda E_2 - A_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda E_s - A_s \end{vmatrix},$$

სადაც $E_1, E_2, \ldots, E_s$ შესაბამისი რიგის ერთეულოვანი მატრიცებია. ვინაიდან უჯრედოვან-დიაგონალური მატრიცის დეტერმინანტი უდრის დიაგონალურ უჯრედთა დეტერმინანტების ნამრავლს, მივიღებთ:

$$|\lambda E - A| = |\lambda E_1 - A_1| \cdot |\lambda E_2 - A_2| \ldots |\lambda E_s - A_s|, \qquad \text{რ. დ. გ.}$$

2. უჯრედოვან-დიაგონალური მატრიცის მინიმალური მრავალწევრი უდრის მის დიაგონალურ უჯრედთა მინიმალური მრავალწევრების უმცირეს საერთო ჯერადს.

მართლაც, ვთქვათ, $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_s(\lambda)$ შესაბამისად არის $A_1, A_2, \ldots, A_s$ მატრიცთა მინიმალური მრავალწევრები. განვიხილოთ ნე-

ბისმიერი $f(\lambda)$ მრავალწევრი. თუ A მატრიცა მისი ფესვია, ე. ი. $f(A)=0$, მაშინ (3) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $f(A_1)=0$, $f(A_2)=0$, ..., $f(A_s)=0$. მაგრამ ყოველი მრავალწევრი, რომლის ფესვი არის A_i მატრიცა, უნდა იყოფოდეს $\varphi_i(\lambda)$ მრავალწევრზე. მაშასადამე, $f(\lambda)$ არის $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$, ..., $\varphi_s(\lambda)$ მრავალწევრთა საერთო ჯერადი. პირიქით, თუ რომელიმე $f(\lambda)$ მრავალწევრი არის საერთო ჯერადი $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$, ..., $\varphi_s(\lambda)$ მრავალწევრებისა, მაშინ, ცხადია, $f(A)=0$, რ. დ. გ.

3. ახლა განვიხილოთ უჯრედოვან-დიაგონალური λ-მატრიცა და დავამტკიცოთ, რომ **უჯრედოვან-დიაგონალური λ-მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა უდრის მისი უჯრედების ელემენტარულ გამყოფთა გაერთიანებას.**

მართლაც, ვთქვათ, F λ-მატრიცას აქვს უჯრედოვან-დიაგონალური სახე

$$F=\begin{pmatrix} F_1 & 0 & & 0 \\ 0 & F_2 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{pmatrix}.$$

ყოველი F_i უჯრედის ელემენტარული გარდაქმნები შეიძლება განვიხილოთ როგორც თვით F მატრიცის შესაბამისი ელემენტარული გარდაქმნები. ცალკეულ F_i უჯრედზე მოხდენილი ელემენტარული გარდაქმნები არ შეცვლის არც ერთი სხვა უჯრედის სახეს. ამიტომ ყოველი F λ-მატრიცა ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით შეიძლება დავიყვანოთ უჯრედოვან დიაგონალურ სახემდე. დამტკიცებული ლემის (გვ. 474) გამოყენებით მივიღებთ, რომ F **მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა უდრის მის დიაგონალურ მრავალწევრთა ელემენტარულ გამყოფთა ერთობლიობას ე. ი. ყველა უჯრედის ელემენტარულ გამყოფთა ერთობლიობას,** რ. დ. გ.

§ 71. ჟორდანის მატრიცები და მათთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი

შემდეგი სახის n-ური რიგის მატრიცას

$$A=\begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \rho & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \rho & 1 \\ & & & & & \rho \end{pmatrix} \quad (1)$$

ეწოდება n-ური რიგის **ჟორდანის უჯრედი** ρ რიცხვის მიმართ.

ასე, მაგალითად, პირველი მეორე და მესამე რიგის ჟორდანის უჯრედები შესაბამისად იქნება:

$$(\rho), \quad \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 \\ 0 & \rho & 1 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

შემდეგი სახის n-ური რიგის მატრიცას

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_s} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

სადაც პირველი დიაგონალის გასწვრივ არის საზოგადოდ სხვადასხვა რიგის $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_s$ ჟორდანის უჯრედები, ეწოდება **ჟორდანის n-ური რიგის მატრიცა**, ანუ მატრიცა, რომელსაც აქვს **ჟორდანის მატრიცის ნორმალური ფორმა**. ცხადია, $1 \leqslant s \leqslant n$; აქედან გამოდის, რომ ჟორდანის ყოველი უჯრედი ამავე დროს ჟორდანის მატრიცაა. ადვილად შევნიშნავთ, **რომ ყოველი დიაგონალური მატრიცა არის ჟორდანის მატრიცის კერძო შემთხვევა.**

მართლაც, დიაგონალური მატრიცები არის სწორედ ისეთი ჟორდანის მატრიცები, რომელთა ჟორდანის ყველა უჯრედი პირველი რიგისაა.

დავამტკიცოთ ჟორდანის უჯრედისა და ჟორდანის მატრიცის ზოგიერთი თვისება.

ლემა 1. m-ური რიგის ჟორდანის უჯრედის მახასიათებელ მატრიცას აქვს მხოლოდ ერთი $(\lambda - \rho)^m$ ელემენტარული გამყოფი.

მართლაც, ჟორდანის უჯრედის მახასიათებელ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-\rho & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \lambda-\rho & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \lambda-\rho & -1 \\ & & & & & \lambda-\rho \end{pmatrix},$$

ხოლო ჟორდანის უჯრედის მახასიათებელი მრავალწევრი იქნება:

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \rho)^m. \tag{3}$$

აქედან აგრეთვე მივიღებთ, რომ m-ური რიგის ჟორდანის უჯრედის მახასიათებელ მრავალწევრს აქვს ერთადერთი m-ჯერადი $\lambda = \rho$ ფესვი.

გამოვთვალოთ $\lambda E-A$ მახასიათებელი მატრიცის k-ური რიგის $d_k(\lambda)$ მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი. შევნიშნოთ, რომ $d_m(\lambda)=(\lambda-\rho)^m$. ახლა გამოვთვალოთ $m-1$ რიგის მინორების $d_{m-1}(\lambda)$ უდიდესი საერთო გამყოფი. ცხადია, ყველა შესაძლო $n-1$ რიგის მინორს შორის აგრეთვე არის მინორი

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & & 0 & 0 \\ \lambda-\rho & -1 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \lambda-\rho & -1 \\ & & & & \lambda-\rho \end{vmatrix}=(-1)^{m-1},$$

რომელიც მიიღება $\lambda E-A$ მატრიციდან პირველი სვეტისა და ბოლო სტრიქონის ამოშლით. ვინაიდან ეს მინორი არის ან $+1$, ან -1, ამიტომ $d_{m-1}(\lambda)=1$. ახლა, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\lambda E-A$ მატრიცის ინვარიანტული მამრავლები შესაბამისად არის $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$ ... $,e_m(\lambda)$, ე. ი.

$$d_m(\lambda)=e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_{m-1}(\lambda)e_m(\lambda),$$
$$d_{m-1}(\lambda)=e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_{m-1}(\lambda).$$

ვინაიდან $d_m(\lambda)=(\lambda-\rho)^m$ და $d_{m-1}(\lambda)=1$ მივიღებთ, რომ

$$e_1(\lambda)=e_2(\lambda)\ldots=e_{m-1}(\lambda)=1 \quad \text{და} \quad e_m(\lambda)=(\lambda-\rho)^m,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

დამტკიცებული თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ჟორდანის უჯრედის მახასიათებელი $\lambda E-A$ მატრიცის კანონიკური სახე იქნება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (\lambda-\rho)^m \end{pmatrix}.$$

ახლა განვიხილოთ ჟორდანის მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი. ცხადია, მას ექნება შემდეგი სახე:

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \boxed{J\lambda E_1-J_1} & & & \\ & \boxed{\lambda E_2-J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda E_s-J_s} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

სადაც $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_s$ შესაბამისად არის $J_1, J_2, \ldots J_s$, ჟორდანის უჯრედების რიგის მქონე ერთეულოვანი მატრიცები.

ლემა 2. ჟორდანის მატრიცის მახასიათებელი მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა უდრის მისი ჟორდანის უჯრედების ელემენტარულ გამყოფთა ერთობლიობას და ჟორდანის მატრიცა ამ ელემენტარული გამყოფებით განისაზღვრება ცალსახად, პირველ დიაგონალზე ჟორდანის უჯრედების განლაგების სიზუსტით.

მართლაც, როგორც (4) ტოლობიდან ჩანს, ჟორდანის მატრიცის მახასიათებელი მატრიცა ნაწილდება ჟორდანის ცალკეული უჯრედების მახასიათებელ მატრიცებად. დიაგონალურ λ-მატრიცთა ელემენტარული გამყოფების შესახებ ლემის თანახმად (გვ. 474), მივიღებთ, რომ ჟორდანის მატრიცის მახასიათებელი მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა უდრის ჟორდანის ცალკეული უჯრედების მახასიათებელ მატრიცთა ელემენტარულ გამყოფთა ერთობლიობას.

ამრიგად, ჟორდანის მატრიცის მახასიათებელი მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა განსაზღვრავს თვით მატრიცის სახეს, პირველ დიაგონალზე ჟორდანის უჯრედების განლაგების სიზუსტით.

ახლა, ვინაიდან მსგავსი მატრიცების მახასიათებელი მატრიცები მსგავსია, ე. ი. აქვთ ელემენტარულ გამყოფთა ერთნაირი სისტემა, ამიტომ ყოველ მატრიცას, რომლებიც ჟორდანის მატრიცის მსგავსია, უნდა ჰქონდეს ერთნაირი ჟორდანის უჯრედები.

ახლა განვიხილოთ ძირითადი საკითხი: თუ როგორ პირობებში მოცემული წრფივი გარდაქმნის მატრიცა შეიძლება დავიყვანოთ ჟორდანის ფორმამდე. ამასთან დაკავშირებით დავამტკიცოთ.

თეორემა. რიცხვთა P ველზე აღებული ყოველი კვადრატული მატრიცა, რომლის მახასიათებელი მრავალწევრის ყველა ფესვი მოთავსებულია P ველში, მსგავსია ჟორდანის რაიმე მატრიცისა. აგრეთვე, ჟორდანის ორი მატრიცა მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ ერთი და იგივე ჟორდანის უჯრედები აქვთ; ეს მატრიცები შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდნენ მხოლოდ უჯრედთა განლაგებით პირველ დიაგონალზე.

დამტკიცება. ზემოთ დამტკიცებულ თეორემათა გამო, თეორემის დასამტკიცებლად დაგვრჩენია მხოლოდ ის, რომ ყოველი მოცემული მატრიცისათვის შევძლოთ მისი მსგავსი ჟორდანის მატრიცის აგება.

ვთქვათ,

$$(\lambda-\rho_1)^{n_1}, \quad (\lambda-\rho_2)^{n_2}, \ldots, (\lambda-\rho_s)^{n_s}$$

არის $\lambda E-A$ მახასიათებელი მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სრული სისტემა. B-თი აღვნიშნოთ უჯრედოვან-დიაგონალური მატრიცა, რომლის დიაგონალური უჯრედები არის ჟორდანის უჯრედები აღნიშნული ელემენტარული გამყოფებით. მაშასადამე, $\lambda E-B$ მატრიცას

აქვს იგივე ელემენტარული გამყოფები, რაც $\lambda E-A$ მატრიცას; ეს იმას ნიშნავს (გვ. 479), რომ $\lambda E-A$ და $\lambda E-B$ მატრიცები ეკვივალენტურია. აქედან გამოდის, რომ A მატრიცა მსგავსია ჟორდანის B მატრიცისა; ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ თქმულის მიხედვით, მოცემული A მატრიცის მსგავსი ჟორდანის მატრიცის ასაგებად ასე უნდა მოვიქცეთ. პირველად ავაგოთ მოცემული A მატრიცის $\lambda E-A$ მახასიათებელი მატრიცა. ელემენტარული გარდაქმნებით მახასიათებელი მატრიცა დავიყვანოთ კანონიკურ დიაგონალურ სახემდე; დიაგონალური მრავალწევრები დავშალოთ და ვიპოვოთ ელემენტარული გამყოფები; შემდეგ, მიღებული ელემენტარული გამყოფებით შევადგინოთ ჟორდანის მატრიცა.

შევნიშნავთ, რომ თუ A მატრიცის მახასიათებელი $\lambda E-A$ მატრიცის ელემენტარული გამყოფები გამოვიდა პირველი ხარისხის მრავალწევრები, მაშინ ჟორდანის უჯრედები მოთავსებული იქნება პირველი რიგის შესაბამის B ჟორდანის მატრიცაში, ე. ი. B მატრიცა იქნება დიაგონალური. პირიქით, თუ შესაბამისი ჟორდანის მატრიცა დიაგონალურია, მაშინ ელემენტარული გამყოფები იქნება პირველი ხარისხისა.

ამრიგად, მოცემული მატრიცისა და დიაგონალური მატრიცის მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მოცემული მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრის ყველა ელემენტარული გამყოფი იყოს პირველი ხარისხისა.

მაგალითი 1. ავაგოთ მოცემული

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

მატრიცის მ ს გ ა ვ ს ი B მატრიცა.

ა ხ ს ნ ა. შევადგინოთ A მატრიცის მახასიათებელი მატრიცა, გვექნება:

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 3 \\ 7 & \lambda+2 & +9 \\ 2 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}.$$

დავიყვანოთ ეს მატრიცა ნორმალურ დიაგონალურ სახემდე და ამოვწეროთ მისი ინვარიანტული მამრავლები, გვექნება:

$$1, \quad 1, \ (\lambda-1) \ (\lambda-2)^2.$$

მაშასადამე, $\lambda E-A$ მატრიცის ელემენტარული გამყოფები იქნება:

$$\lambda-1 \text{ და } (\lambda-2)^2.$$

ვინაიდან $\lambda=1$ და $\lambda=2$ შესაბამისად ელემენტარულ გამყოფთა ერთჯერადი და ორჯერადი ფესვებია, ჟორდანის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$J=\begin{pmatrix} \boxed{1} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

ახლა შევადგინოთ ჟორდანის მატრიცა ინვარიანტული გამყოფების საშუალებით

მაგალითი 2. ვთქვათ, $\lambda E—J$ მახასიათებელი მატრიცის ინვარიანტული მამრავლებია:

$$e_9(\lambda)=(\lambda—4)^3(\lambda—3)^2,$$

$$e_8(\lambda)=(\lambda—4)(\lambda—3)^2,$$

$$e_7(\lambda)=\lambda—4 \quad \text{და} \quad d_6(\lambda)=\ldots=d_1(\lambda)=1.$$

ვიპოვოთ შესაბამისი J ჟორდანის მატრიცის სახე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირობის მიხედვით საძიებელი ჟორდანის მატრიცა მე-9 რიგისაა. მოცემულ $\lambda E—J$ მახასიათებელი მატრიცის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა იქნება:

$$(\lambda—4)^3,\ (\lambda—4),\ (\lambda—4),$$

$$(\lambda—3)^2,\ (\lambda—3)^2.$$

თუ დააკვირდებით მიღებულ ელემენტარულ გამყოფთა ფესვების ჯერადობას შეგვიძლია ვთქვათ, რომ საძიებელ ჟორდანის მატრიცას აქვს ერთი მესამე რიგის, ხოლო ორი მეორე და პირველი რიგის ჟორდანის უჯრედები. ვინაიდან ამ ჟორდანის უჯრედების შესაბამის ელემენტარულ გამყოფთა ფესვებია $\lambda=4$ და $\lambda=3$, ამიტომ საძიებელ ჟორდანის მატრიცას ექნება სახე:

$$J=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{4} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \\ & & & & \boxed{4} \end{pmatrix}.$$

იგულისხმება, რომ ყველა ელემენტი უჯრედების გარეთ ნულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ცხადია, რომ ჟორდანის მატრიცის რიგისა და მისი $\lambda E-J$ მახასიათებელი მრავალწევრის ელემენტარული გამყოფების მიხედვით ყოველთვის შეგვიძლია შევადგინოთ $\lambda E-J$ მატრიცის კანონიკური დიაგონალური სახე.

მაგალითად, ვთქვათ, ცნობილია, რომ მე-5 რიგის ჟორდანის J მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრის ელემენტარულ გამყოფთა სისტემა არის: $(\lambda-4)^3$, $(\lambda-3)^2$, $(\lambda-3)^2$, $(\lambda-4)$, $(\lambda-4)$; ამ შემთხვევაში $\lambda E-J$ მახასიათებელი მატრიცის ერთისაგან განსხვავებული ინვარიანტული მამრავლები იქნება:

$$e_5(\lambda)=(\lambda-4)^3(\lambda-3)^2,\quad e_4(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda-4),\quad e_3(\lambda)=(\lambda-4),$$

ხოლო დანარჩენი ორი ინვარიანტული მამრავლი $e_2(\lambda)=e_1(\lambda)=1$.

ამრიგად, მოცემული ჟორდანის მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრის საძიებელი კანონიკური დიაგონალური სახე იქნება:

$$\lambda E-J\sim\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & e_3(\lambda) & & \\ & & & e_4(\lambda) & \\ 0 & & & & e_5(\lambda) \end{pmatrix}.$$

გამოყენებული ლიტერატურა

Курош А. Г., Курс высшей алгебры, изд. 6, Гостехиздат, 1959.

Курош А. Г., Теория групп, изд. 2, Гостехиздат, 1953.

Окунев Л. Я., Высшая алгебра, изд. 4, Гостехиздат, 1949.

შაპირო გ. მ., უმაღლესი ალგებრა. თარგმ. მეოთხე რუსული შევსებული გამოცემიდან პროფ. ვ. ჭელიძის მიერ, 1949.

Ляпин Е. С., Курс высшей алгебры, Учпедгиз, 1953.

Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, изд. 6, Гостехиздат, 1960.

Виноградов С. П., Основания теории детерминантов, изд. 4, ОНТИ, 1935.

Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 2, Гостехиздат, 1951.

Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, изд. 2, Гостехиздат, 1956.

Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, изд. 2, Гостехиздат, 1956.

Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. I и II, Гостехиздат, 1947.

Млодзеевский Б. К., Основы высшей алгебры, Госиздат, 1931.

ჭელიძე ვლ., უმაღლესი ალგებრა (ხელნაწერის უფლებით), თბ., 1940.

ხარაძე არჩილ, დეტერმინანტთა თეორიის საფუძვლები, თბ., 1936.

Каган В. Ф., Основания теории определителей, Госиздат, Одесса, 1922.

მუსხელიშვილი ნ. ი., ანალიზური გეომეტრია, თბ., 1951.

ქემხაძე შ., მრავალწევრის უწყვეტობა და მასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხის სწავლება, თბ., 1961.

ფადეევი დ., სომინსკი ი., უმაღლესი ალგებრის ამოცანათა კრებული, თარგ. გ. მანიას მიერ. თბ., 1950.

Смирнов В. Н., Курс высшей математики, т. III, 1-й полутом, изд. 2, Гостехиздат, 1952.

Граве Д. А., Элементы высшей алгебры, Киев, 1914

Лобачевский Н. И., Алгебра, 1846.

Haupt Otto, Einführung in die Algebra, erster teil, Leipzig, 1956.

Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, Гостехиздат, 1957.

Фадеева В. Н, Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, 1950.

Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1953.

Александров П. С., Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1938.

შინაარსი

თავი I

დეტერმინანტები და წრფივ განტოლებათა სისტემები

თავი II

ვექტორული სივრცე. წრფივ განტოლებათა სისტემის ზოგადი თეორია

თავი III

მატრიცთა ალგებრა. ჯგუფი, რგოლი და ველი

თავი IV

კვადრატული ფორმები

თავი V

X კომპლექსური რიცხვები

თავი VI

მრავალწევრთა რგოლი და მრავალწევრთა დაშლა

თავი VII

ალგებრული განტოლებები და წილად-რაციონალური ფუნქციები

თავი VIII

მრავალწევრის უწყვეტობა და მასთან დაკავშირებული საკითხები

თავი IX

განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნა

თავი X

მრავალცვლადიანი მრავალწევრები

თავი XI

წრფივი სივრცე და წრფივი გარდაქმნები

თავი XII

ევკლიდური სივრცე

თავი XIII

მრავალწევრული, ანუ λ-მატრიცები; მატრიცთა ნორმალური სახე

გამომც. რედაქტორი მ. გელიტაშვილი
ტექრედაქტორი მ. ახათიანი
კორექტორი ე. ნევეროვსკაია
გამომშვები ნ. ბიბილური

გადაეცა წარმოებას 21/III-62 წ., ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10/VIII-62 წ., ანაწყობის ზომა $6^1/_4 \times 10$, ქაღალდის ზომა 60×90, ნაბეჭდი თაბახი 31, საავტორო თაბახი 25,87, სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 26,56.

ტირაჟი 2 000 შეკვ. № 318.
ფასი 00 კაპ.

საქ. სსრ კულტურის სამინისტროს
მთავარპოლიგრაფგამომცემლობის № 1 სტამბა,
თბილისი, ორჯონიკიძის ქ., № 50.

I-я типография Главполиграфиздата
Министерства культуры Грузинской ССР.
Тбилиси, ул. Орджоникидзе, 50.