დაკარგულ ფესვთა ძიებაში

გიორგი ხიმშიაშვილი

ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

თბილისი - 2009

რეცენზენტები:

პროფ. თ. ალიაშვილი

პროფ. მ. სვანაძე

ISBN 978-9941-9085-5-2

შინაარსი

შესავალი

წინამდებარე ნაშრომში წარმოდგენილია ალგებრულ განტოლებათა თეორიის ერთ-ერთი კლასიკური საკითხი. ამგვარ განტოლებათა ამოხსნის აუცილებლობა ჯერ კიდევ მათემატიკის განვითარების ადრეულ ეტაპზე წარმოიშვა. აღსანიშნავია, რომ პირველი და მეორე ხარისხის ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნის წესები ანტიკურ ხანაშიც კი იყო ცნობილი. ასოით გამოსახულებათა აღმოჩენასთან ერთად მიღწეულ იქნა უდიდესი პროგრესი, რასაც თან მოჰყვა ალგებრულ გამოკვლევათა სწრაფი განვითარება, რამაც თავის მხრივ, გასული საუკუნის ბოლოსთვის ერთუცნობიან ალგებრულ განტოლებათა კლასიკური თეორია წარმოშვა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ადრეულ ეტაპზე მათემატიკოსები ისეთ ალგებრულ ფორმულებს იკვლევდნენ, რომელთა საშუალებით განტოლების ფესვი მისივე კოეფიციენტებით იქნებოდა გამოსახული, მაგრამ რუფინის, აბელის და გალუას შესანიშნავმა გამოკვლევებმა გვიჩვენეს, რომ ზოგად შემთხვევაში ასეთი ფორმულები არ არსებობს, თუ განტოლების ხარისხი ოთხს აღემატება. ამგვარ განტოლებათა შესწავლის საქმეში მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა ანალიზური და გეომეტრიული მეთოდების როლი, რომელთა გამოყენებით შესაძლებელი გახდა მრავალუცნობიან ალგებრულ განტოლებათა სისტემების შესწავლა.

ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლებების ნამდვილი ამონახსნები განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევდა და საკითხმა მათი არსებობისა და რაოდენობის შესახებ ბევრი ცნობილი მათემატიკოსის ყურადღება მიიქცია.

ამ გამოკვლევებს შედეგად მოჰყვა მეტად საინტერესო მიღწევები, რომლებიც სხვადასხვა ზოგადი მეთოდის სახით იქნა გაფორმებული. კერძოდ, ცნობილი გახდა შტურმის, ერმიტის და იაკობის მიერ შემუშავებული ზოგადი და ეფექტური მეთოდები ერთცვლადიანი პოლინომის ნამდვილ ფესვთა

რიცხვის გამოთვლის შესახებ [12], [13].

მიუხედავად ამისა, აღნიშნული საკითხის კვლევისას წარმოდგენილი ყველა სიძნელის გადალახვა შეუძლებელი აღმოჩნდა მხოლოდ კლასიკური ანალიზის მეთოდების საშუალებით. ასე მაგალითად, ბოლო დრომდე არ იყო ცნობილი ზოგადი მეთოდი ნებისმიერი მრავალუცნობიანი ნამდვილი ალგებრული სისტემის ნამდვილ ამონახსნთა რიცხვის პოვნისა განტოლებების კოეფიციენტებზე ალგებრულ ოპერაციათა სასრული რაოდენობის საშუალებით.

1997 წელს ავტორმა აჩვენა, რომ ალგებრულ განტოლებათა თეორიაში არსებული ეს ხარვეზი შესაძლებელია გადალახული იქნას დიფერენციალური ტოპოლოგიისა და დიფერენცირებადი ასახვების განსაკუთრებულობათა თეორიის თანამედროვე მიღწევების საშუალებით [16], [17]. წინამდებარე ნაშრომში ჩვენ მოგვყავს აღნიშნული კლასიკური ამოცანის ამოხსნა ამ გზით. ამასთან, ყველა გამოყენებული ტოპოლოგიური ცნებისა და მეთოდის აღწერა მოცემულია პოლინომებისა და მათ მიერ განსაზღვრული გეომეტრიული ობიექტების ენაზე, რაც ჩვენ თხრობას მოკლესა და ელემენტარულს ხდის.

თავის დროზე ქართული ტოპოლოგიის სკოლის ფუძემდებელმა, აწ განსვენებულ აკადემიკოსმა გიორგი ჭოღოშვილმა, ავტორს შესთავაზა გადმოეცა ეს შედეგები პოპულარულ წიგნში. წიგნზე მუშაობის პერიოდში ავტორი შეხვდა და ესაუბრა ბევრ მეცნიერს, რომლებმაც მიიღეს მონაწილეობა წიგნში მოყვანილი იდეებისა და შედეგების შემუშავებაში.

ყველა ამ პიროვნებას ავტორი გულწრფელ მადლობას უხდის, განსაკუთრებით აკადემიკოს რ. გამყრელიძეს, რომელიც ხელნაწერ ტექსტს გაეცნო და რამდენიმე მნიშვნელოვანი მოსაზრება გამოთქვა. აგრეთვე, ავტორი მადლობას უხდის ქალბატონ ლუბა ბიბილეიშვილს და ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობის თანამშრომლებს ტექსტის დასაბეჭდად მომზადებისათვის.

თავი I
ნამდვილი ფესვები და კვადრატული ფორმები

ამ თავში თავდაპირველად მოვიყვანთ ზოგიერთ ელემენტარულ შედეგს პოლინომურ განტოლებათა სისტემებისათვის. აქვე ჩამოვაყალიბებთ პირობებს, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ განსახილველი განტოლებები. ბოლო პარაგრაფში კი აღვწერთ ერმიტის კლასიკურ სიგნატურულ მეთოდს, რომელიც არის ბოლო ორ თავში მოყვანილი ძირითადი შედეგების საფუძველი და პროტოტიპი.

§ 1. პოლინომები და მათი ფესვები

ვინაიდან შემდგომში მთავარ მოქმედ პირებად პოლინომები მოგვევლინება, ამიტომ ჩვენც მათი ძირითადი თვისებების აღწერით დავიწყებთ. ვვარაუდობთ, რომ მკითხველი იცნობს კომპლექსურ რიცხვთა თვისებებს და სტანდარტულ სიმრავლურ-თეორიულ აღნიშვნებს [1], [2].

როგორც ცნობილია, კომპლექსური რიცხვები ქმნიან $\mathbf{C}$ ველს, რომელიც შეიცავს ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ ქვეველს. ამასთან, ყოველი $z \in \mathbf{C}$ შესაძლებელია ცალსახად ჩაიწეროს $z = a + ib$ სახით, სადაც $a,b \in \mathbf{R}$, ხოლო $i = \sqrt{-1}$ წარმოსახვითი ერთეულია.

შევახსენებთ, რომ ერთცვლადიან პოლინომად იწოდება გამოსახულება

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \tag{1.1}$$

სადაც $a_j \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$.

ნატურალურ n რიცხვს ვუწოდებთ პოლინომის ხარისხს, ხოლო a_j-ებს მის კოეფიციენტებს. ამასთან, a_0-ს ვუწოდებთ თავისუფალ წევრს, ხოლო a_n-ს — უფროს კოეფიციენტს.

თითოეული პოლინომი იძლევა $\mathbf{C}$ ველის ასახვას თავის თავში შემდეგი თანაფარდობით:

$$\mathbf{C} \ni z \mapsto \sum a_j z^j \in \mathbf{C}. \tag{1.2}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, პოლინომი წარმოშობს კომპლექსური ცვლადის ფუნქციას [3]. (1.2) ასახვა ცალსახად განსაზღვრავს საწყის პოლინომს. ამიტომ ჩვენ მას ზოგჯერ აღვნიშნავთ (1.1) პოლინომის გამომსახველი სიმბოლოთი. ამგვარად, პოლინომის ქვეშ ჩვენ გვესმის ან გამოსახულება (1.1) ან ფუნქცია (1.2).

პოლინომს ეწოდება ნამდვილი, თუ მისი ყველა a_j კოეფიციენტი ნამდვილია. ამ შემთხვევაში შესაბამის ასახვას გააჩნია

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \tag{1.3}$$

თვისება, სადაც ხაზი აღნიშნავს კომპლექსური შეუღლების ოპერაციას:

$$\overline{a + ib} = a - ib.$$

შესაბამისად, ნამდვილი პოლინომი იძლევა ნამდვილ

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

ფუნქციას.

ყველა (1.1) სახის პოლინომთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}[x]$-ით. სასკოლო ალგებრის კურსიდან ცნობილია პოლინომთა შეკრების და გამრავლების წესები. თანამედროვე ენაზე ამას გამოხატავენ სიტყვებით: „პოლინომები ქმნიან კომუტაციურ $\mathbf{C}_1$ რგოლს"[2]. ამასთან, ზემოხსენებული ოპერაციები ზუსტად შეესაბამებიან ოპერაციებს პოლინომებზე, თუკი მათ განვიხილავთ როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციებს.

შეიძლება ჩავთვალოთ აგრეთვე, რომ $\mathbf{C}$ ველი ჩადგმულია $\mathbf{C}_1$-ში, თუ გავაიგივებთ $\lambda \in \mathbf{C}$ რიცხვს ისეთი ნულოვანი ხარისხის პოლინომთან, რომელიც შედგება მხოლოდ თავისუფალი λ წევრისაგან. ასეთ სიტუაციას ალგებრაში გამოხატავენ ხოლმე სიტყვებით: „პოლინომები ქმნიან $\mathbf{C}$-ალგებრას"[2]. ხაზი გვინდა გავუსვათ, რომ ამ სიტყვებს არავითარი დამატებითი მნიშვნელობა ან სიღრმე არ გააჩნია.

ცხადია, რომ იგივე სამართლიანია ნამდვილი პოლინომებისათვისაც. ასე რომ ისინი წარმოქმნიან $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}[x]$ ალგებრას, რომელიც არის $\mathbf{C}_1$ ალგებრის ქვეალგებრა.

განსაზღვრება 1.1. კომპლექსურ z_0 რიცხვს ეწოდება $f \in \mathbf{C}_1$ პოლინომის ფესვი, ანუ ნული, თუ

$$f(z_0) = 0. \tag{1.4}$$

ალგებრის ძირითადი თეორემა გვამცნობს, რომ ყოველ კომპლექსურ პოლინომს გააჩნია ფესვი $\mathbf{C}$ ველში და, უფრო მეტიც, პოლინომი შეიძლება ცალსახად ჩაიწეროს

$$f(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}...(z - z_m)^{k_m} \tag{1.5}$$

სახით, სადაც $z_i \in \mathbf{C}$ კომპლექსური რიცხვებია, ხოლო k_i ნატურალური რიცხვები [2].

f პოლინომის ასეთ დაშლას ეწოდება ფაქტორიზაცია. აქ, ცხადია, ყველა z_j რიცხვი f პოლინომის ფესვია. ნატურალურ k_j რიცხვს z_j ფესვის ჯერადობას უწოდებენ. თუ $k_j = 1$, z_j ფესვს ეწოდება მარტივი ფესვი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — ჯერადი ფესვი.

ნამდვილ პოლინომთა შემთხვევაში, (1.3) ტოლობის გამო, ნათელი ხდება, რომ თუ z_0 რიცხვი $f \in \mathbf{R}_1$ პოლინომის ფესვია, მაშინ $\overline{z_0}$ რიცხვიც მისი ფესვია. ამრიგად, ნამდვილ პო-

ლინომთა არანამდვილი ფესვები ყოველთვის კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილებს ქმნიან. ამდენად გვეძლევა შესაძლებლობა დავაზუსტოთ (1.5) ფაქტორიზაცია ნამდვილი პოლინომისათვის, თუკი ფესვებს გადავნომრავთ ისე, რომ $z_1,...,z_r \in \mathbf{R}$; $z_{r+j} = \bar{z}_{r+j+s} \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, $j = 1,...,s$, სადაც $r + 2s = n$. ამ ჩანაწერში შესაძლებელია z_k-ების განმეორება. უფრო მოსახერხებელი რომ იყოს, ნამდვილი ფესვები აღვნიშნოთ $x_1,...,x_r$ -თა საშუალებით და ჩავწეროთ $z_{r+j} = u_j + iv_j$, $j = 1,...,s$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, მივიღებთ f პოლინომის ნამდვილ

$$f(x) = a_n(x - x_1)...(x - x_r)(x^2 + p_1x + q_1)...(x^2 + p_sx + q_s) \tag{1.6}$$

ფაქტორიზაციას, სადაც $p_j = -2u_j$, $q_j = u_j^2 + v_j^2 \in \mathbf{R}$. ამასთან კვადრატულ სამწევრთაგან არც ერთ $(x^2 + p_jx + q_j)$-ს არ გააჩნიათ ნამდვილი ფესვები.

(1.6)-დან ნათელია, რომ ნამდვილი პოლინომის ნამდვილ ფესვთა რიცხვი შეიძლება უდრიდეს ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება n-ს და n-თან ერთნაირი ლუწკენტოვნება აქვს.

ახლა კი უპრიანია დავსვათ კითხვა, თუ როგორ შეიძლება ალგებრულად გამოვთვალოთ მოცემული $f \in \mathbf{R}_1$ ნამდვილი პოლინომის ნამდვილ ფესვთა ზუსტი რაოდენობა? ტრადიციის თანახმად, ალგებრული გამოთვლის ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობთ ნებისმიერ პროცედურას, რომელიც შეიცავს f პოლინომის კოეფიციენტებზე ალგებრულ და ლოგიკურ ოპერაციათა სასრულ რაოდენობას [2].

ეს ბუნებრივი და პრაქტიკული გამოყენებისათვის მნიშვნელოვანი ამოცანა 1829 წელს სრულად იქნა ამოხსნილი ჟ. შტურმის მიერ. მან ამ მიზნით კლასიკური პროცედურა შეიმუშავა,

რომელიც შტურმის ალგორითმის სახელწოდებითაა ცნობილი [2]. საგულისხმოა, რომ ალგორითმმა დღემდე შეინარჩუნა პრაქტიკული ღირებულება თავისი სიმარტივისა და ეფექტურობის წყალობით. შტურმის შედეგების აღწერას ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ, რადგან ისინი უმაღლესი ალგებრის ყველა სახელმძღვანელოშია მოცემული [2]. მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ შტურმის ალგორითმი წარმოადგენს ალგებრული გამოთვლის მაგალითს ზემოხსენებული აზრით, რომელიც ამასთანავე საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა ნებისმიერ $(a,b) \subset \mathbf{R}$ ინტერვალში. ეს განსაკუთრებით სასარგებლოა იმდენად, რამდენადაც გამოყენებით ამოცანებში მთავარია ვიცოდეთ პოლინომის იმ ფესვთა რიცხვი, რომლებიც მოცემულ ქვესიმრავლეში ხვდებიან. აქ საკმარისია გავიხსენოთ ჯ. მაქსველის ცნობილი ამოცანა იმ პოლინომთა აღწერის შესახებ, რომელთა ყველა ფესვი $\{\mathrm{Re}\, z < 0\}$ მარცხენა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს (ასეთ პოლინომებს მდგრადი ეწოდებათ და ისინი მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ავტომატური მართვის შესწავლისას [37]).

თუკი შესაძლებელია ამ ამოცანის ამოხსნა ზოგიერთი კლასის ყველა ქვესიმრავლისათვის (მაგალითად, წრეებისა ან ნახევარსიბრტყეებისათვის), ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ამ კლასისათვის ფესვთა განაწილების ამოცანა ამოხსნადია [37]. კერძოდ, თუკი ეს სამართლიანია ნებისმიერი წრისათვის, ამბობენ, რომ შესაძლებელია პოლინომთა ფესვების დაცალკევება. ასე, მაგალითად, შტურმის ალგორითმი საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ერთცვლადიანი პოლინომის ნამდვილი ფესვების დაცალკევების ამოცანა. ცნობილია აგრეთვე ჯ. რაუსის და ა. ჰურვიცის შედეგები ფესვთა განაწილების ამოცანის ამოხსნადობის შესახებ ნახევარსიბრტყეების კლასისათვის [37].

მეტი სიცხადისა და ლაკონურობისათვის, პოლინომის

(ან პოლინომურ განტოლებათა სისტემის) ნამდვილ ფესვთა რიცხვის ალგებრული გამოთვლის ამოცანას ქვემოთ ჩვენ ***შტურმის ამოცანის*** სახელწოდებით მოვიხსენიებთ.

მაშასადამე, პოლინომის ფესვთა ლოკალიზაციის (დაცალკევების) ამოცანას გააჩნია სრული და ეფექტური ამოხსნა შტურმის ალგორითმის სახით. მაგრამ როგორია მდგომარეობა ალგებრულ განტოლებათა სისტემის შემთხვევაში? აქ, თურმე, ყველაფერი ბევრად უფრო რთულია და ამიტომ ჩვენ ამ საკითხს დაწვრილებით განვიხილავთ, მითუმეტეს რომ ამ გამოკვლევის პროცესში ბუნებრივად წარმოიშვება ყველა ჩვენთვის საჭირო ძირითადი ცნება და მეთოდი. თვალსაჩინოებისათვის შემოვიფარგლებით ორუცნობიანი სისტემებით.

ამისათვის, უწინარეს ყოვლისა, უნდა შემოვიტანოთ ზოგიერთი განსაზღვრება და აღნიშვნა, რომლებიც უკვე სრულიად ბუნებრივად უნდა გამოიყურებოდნენ ერთი ცვლადის შემთხვევასთან სრული ანალოგიის გამო.

ამგვარად, ორი ცვლადის n-ური ხარისხის პოლინომი ეწოდება

$$f(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \ldots + a_{n0}x^n + \ldots + a_{0n}y^n = \sum_{k+l=0}^{n} a_{kl}x^k y^l \tag{1.7}$$

გამოსახულებას, სადაც $a_{kl} \in \mathbf{C}$, და აგრეთვე მის შესაბამის $f:\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ ფუნქციას. f პოლინომის ხარისხი აღინიშნება $\operatorname{ord} f$-ით.

$ax^k y^l$ სახის პოლინომს ეწოდება $k + l$ ხარისხის მონომი. ამგვარად, ნებისმიერი პოლინომი წარმოადგენს მონომთა სასრულ ჯამს. თუკი ყველა მონომს ამ ჯამში გააჩნია ერთნაირი d ხარისხი, მაშინ პოლინომს d-ერთგვაროვან ან d ხარისხის

ფორმა [24] ეწოდება.

უდიდესი ხარისხის მონომთა ჯამს ეწოდება პოლინომის უფროსი ფორმა (ან ლიდერი) და f^*-ით აღინიშნება.

(1.7) სახის ყველა პოლინომთა სიმრავლე კვლავ წარმოადგენს კომუტაციურ $\mathbf{C}$-ალგებრას, რომელიც $\mathbf{C}_2$-ით აღინიშნება. $\mathbf{C}_2$ შეიცავს $\mathbf{R}_2$ ქვეალგებრას, რომელიც ნამდვილკოეფიციენტებიანი (1.7) სახის პოლინომებისგან შედგება.

(1.7) სახის პოლინომის ფესვი (ან ნული) ეწოდება $(u,v) \in \mathbf{C}^2$ რიცხვთა წყვილს, რომლისათვისაც $f(u,v) = 0$. თუ u და v ნამდვილია, მაშინ (u,v) ნამდვილ ფესვად იწოდება.

მარტივი მაგალითები გვაჩვენებენ, რომ ორცვლადიან პოლინომის კომპლექსურ ფესვთა სიმრავლე უსასრულო უნდა იყოს, რისი დამტკიცებაც ადვილია.

შენიშვნა 1. თუ შემოვისაზღვრებით ნამდვილი ფესვებით მაშინ სიტუაცია შეიცვლება და ფესვთა რიცხვი შესაძლებელია სასრული აღმოჩნდეს. მაგალითად, $x^2 + y^2$ პოლინომს გააჩნია მხოლოდ ერთი ნამდვილი (0,0) ფესვი, ხოლო $x^2 + y^2 + 1$ პოლინომს ნამდვილი ფესვები საერთოდ არ გააჩნია.

დავიმახსოვროთ ეს გარემოება, რომელიც ერთი შეხედვით მხოლოდ არასასიამოვნო პარადოქსად შეიძლება მოგვეჩვენოს, სინამდვილეში კი იგი ფრიად საგულისხმოა და მან შეიძლება კეთილი სამსახური გაგვიწიოს. ჯერჯერობით კი გავითვალისწინოთ, რომ ამ შემთხვევაში შტურმის ამოცანას აზრი გააჩნია, და თან არ არის ცხადი, თუ როგორ უნდა შევუდგეთ მის ამოხსნას. საქმეში ჩახედულთათვის აღვნიშნავთ, რომ ჩვენ აქ უნებურად შევიჭრებით ჰილბერტის XVII პრობლემის მეტად ფაქიზ თემატიკაში [24], მაგრამ იმედია, რომ ჩვენ მას ღირსეულად დავაღწევთ თავს!

დავუბრუნდეთ შტურმის ამოცანას. ინტუიცია და საშუალო სკოლის კურსის შესწავლისას მიღებული გამოცდილება გვკარნახობს, რომ ამონახსნთა სასრული რიცხვი უნდა

გააჩნდეს ორგანტოლებიან სისტემებს, რომლებსაც ამ შემთხვევაში აქვთ ასეთი სახე:

$$\{f(z,w) = 0, g(z,w) = 0\} \tag{1.8}$$

სადაც $f,g \in \mathbf{C}_2$, $z,w \in \mathbf{C}$.

მართლაც, ასეთი სისტემის შემთხვევაში საინტერესო და ფრიად არატრივიალურ ამოცანებს ვხვდებით. ვიდრე მათ კვლევას ჩავუღრმავდებოდეთ, უნდა აღვნიშნოთ, რომ (1.8) სისტემა, ანუ (f,g) წყვილი, განსაზღვრავს ბუნებრივ ასახვას

$$F : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2, \quad (z,w) \mapsto (f(z,w), g(z,w))$$

და ამ სიტუაციაში დავწერთ $F \in (\mathbf{C}_2)^2$.

ასეთ ასახვას ჩვენ სიბრტყის პოლინომურ ენდომორფიზმს ვუწოდებთ. თუ f და g პოლინომები ნამდვილია, მაშინ გვაქვს ნამდვილი პოლინომური ენდომორფიზმი. (1.8) სისტემის ამოხსნა ამ ტერმინებში მოითხოვს ნულის $F^{-1}(0)$ სრული წინასახის აღწერას. დავძენთ, რომ $Z_f = \{f(z,w) = 0\}$ სახის $\mathbf{C}^2$-ის ქვესიმრავლე ინოდება ბრტყელ ალგებრულ წირად და რომ (1.8) სისტემის ამოხსნა აგრეთვე ნიშნავს Z_f და Z_g წირთა თანაკვეთის წერტილების პოვნას.

აქედან დაწყებული, ელემენტთა რაოდენობის აღსანიშნავად ჩვენ შემოვიტანთ # სიმბოლოს. ლაკონურობისათვის, $\#F_{\mathbf{R}}^{-1}(0) = \#\{Z_f \cap Z_g \cap \mathbf{R}^2\}$ რიცხვს ვუწოდებთ მოცემულ პოლინომთა წყვილის შტურმის რიცხვს. ტერმინოლოგიის ამგვარად დაზუსტების შემდეგ შეგვიძლია ჩვენი მთავარი ამოცანა მოკლედ ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: მოვახდინოთ (1.8) სახის სისტემის შტურმის რიცხვის ალგებრული გამოთვლა.

ცხადია, რომ აქაც ნამდვილი ენდომორფიზმის არანამდვი-

ლი ფესვები ქმნიან კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილებს, მაგრამ ანალოგია ერთგანზომილებიან შემთხვევასთან ამით მთავრდება. ამიტომ ჯერ როგორღაც უნდა გამოვყოთ სიტუაციები, რომლებშიც შტურმის ამოცანა აზრს ინარჩუნებს. ამაზე შემდეგ პარაგრაფში გვექნება საუბარი.

ჩვენ დაგვჭირდება კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ტექნიკური ცნება. შეგახსენებთ, რომ $f(x) = a_n x^n + ... + a_0$, $g(x) = b_m x^m + ... + b_0$ პოლინომების რეზულტანტი ეწოდება $(m+n)\times(m+n)$— მატრიცის

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-m} & a_{n-m-1} & a_{n-m-2} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \end{array} \qquad (1.9)$$

დეტერმინანტს [24].

რეზულტანტის მნიშვნელობა პოლინომურ განტოლებათა სისტემების თეორიაში აიხსნება მისი სპეციფიური თვისებებით, რომელთაგან ჩვენ მხოლოდ ყველაზე ფუნდამენტურს მოვიყვანთ.

თეორემა 1.1 (რეზულტანტის ძირითადი თვისება). ვთქვათ $f,g \in \mathbf{C}_1$ კომპლექსური პოლინომებია. f და g პოლინომებს გააჩნიათ საერთო ფესვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მათი რეზულტანტი ნულოვანია:

$$R(f,g) = 0.$$

დამტკიცება ძნელი არ არის. იგი მოყვანილია უმაღლესი ალგებრის ყველა სტანდარტულ სახელმძღვანელოში (იხ., მაგალითად, [2]).

ცნობილია აგრეთვე, რომ სამართლიანია რეზულტანტის ფაქტორიზაცია:

$$R(f,g) = a_n^m b_m^n \prod (x_j - y_k),$$

$$\{x_1,\ldots,x_n\} = f^{-1}(0), \qquad (1.10)$$

$$\{y_1,\ldots,y_m\} = g^{-1}(0).$$

აქედან, ცხადია, გამომდინარეობს მოყვანილი თეორემაც, ხოლო თვით (1.10) ტოლობა მარტივად მიიღება მისი სიმეტრიულობის თვისებიდან [24]. ნათქვამიდან ნათელია, რომ f პოლინომი სეპარაბელურია ანუ მისი ყველა ფესვი მარტივია [24] მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $R(f,f') \neq 0$, სადაც f' — პოლინომის წარმოებულია.

შევნიშნავთ, რომ იგივე (1.9) დეტერმინანტი შეიძლება გამოვიყენოთ, როდესაც

$$f(x,y) = a_n x^n + \ldots + a_k x^k y^{n-k} + \ldots + a_0 y^n,$$

$$g(x,y) = b_m x^m + \ldots + b_0 y^m$$

ორი ცვლადის ორი ერთგავაროვანი ფორმა. ამ შემთხვევაშიც (1.9) დეტერმინანტს უწოდებენ ამ ფორმების რეზულტანტს. 1.1 თეორემიდან ადვილად მიიღება, რომ ორი ფორმის რეზულტანტი ნულოვანია, $R(f,g) = 0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მათ გააჩნიათ საერთო წრფივი თანამამრავლი [24].

§ 2. საკუთრივობა — წესრიგის საფუძველია

ყოველგვარი გადაგვარებული და ტრივიალური შემთხვევების უაზრო და მოსაბეზრებელი განხილვის თავიდან აცილების მიზნით აქვე უნდა განვაცხადოთ, რომ ამ თვალსაზრისით უდიდეს საფრთხეს ქმნის ფუნქციონალური დამოკიდებულება f და g პოლინომთა შორის. მაგალითად, თუ $f = g^2$, მაშინ ცხადია რომ g პოლინომის ყოველი ფესვი იქნება (1.8) სისტემის ფესვი და ამიტომ სისტემის ფესვების რაოდენობა უსასრულო იქნება. ადვილი შესამჩნევია, რომ იგივეს აქვს ადგილი, თუ $f = \varphi(h)$ და $g = \psi(h)$, სადაც $h \in \mathbf{C}_2, \varphi, \psi \ni \mathbf{C}_1$.

ასეთი სიტუაციები კარგად აღიწერება შემდეგი ცნების საშუალებით: ამბობენ, რომ f და g პოლინომები ალგებრულად დამოკიდებულნი არიან, თუ არსებობს ისეთი $P \in \mathbf{C}_2$ პოლინომი, რომ $P(f,g) = 0$.

მაგალითად, თუ $f = x^2, g = x^3$, შეგვიძლია ავიღოთ $P(u,v) = u^3 - v^2$. საგულისხმოა, რომ ასეთი ტიპის დამოკიდებულება ყოველთვის არსებობს აგრეთვე $(\varphi(h),\psi(h))$ სახის პოლინომთა წყვილისათვის, თუმცა ამის დამტკიცება ადვილი არ არის. სამართლიანია შებრუნებული წინადადებაც, ე.ი. ყველა ალგებრულად დამოკიდებულ პოლინომთა წყვილს ასეთი სახე აქვს. ეს უკვე საკმაოდ ღრმა და მნიშვნელოვანი თეორემაა, რომლის დამტკიცება დაინტერესებულმა მკითხველმა შეიძლება ნახოს ს. ლენგის ცნობილი სახელმძღვანელოს მეათე თავში [24]. ამგვარად, ჩვენს განკარგულებაშია ალგებრული დამოკიდებულების კრიტერიუმი, მაგრამ მისი პრაქტიკული გამოყენება ვერ არის მაინც და მაინც მოსახერხებელი და ამიტომ სასურველია უფრო ეფექტური კრიტერიუმის გამონახვა.

ასეთი კრიტერიუმი მართლაც არსებობს და ამასთან საკმაოდ მარტივიც, მაგრამ იგი რატომღაც არ არის სათანადოდ

ცნობილი და არ შედის სტანდარტულ სახელმძღვანელოებში. ამიტომ ჩვენ მას დაწვრილებით განვიხილავთ, მითუმეტეს, რომ ამით გვეძლევა კარგი შესაძლებლობა წინასწარ გავეცნოთ იაკობიანის ცნებას, რომელიც უდიდეს როლს ითამაშებს შემდგომში.

შეგახსენებთ, რომ $f,g \in \mathbf{C}_2$, პოლინომთა იაკობიანი ეწოდება $J(f,g)$ პოლინომს, რომელიც მიიღება როგორც მათი იაკობის მატრიცის დეტერმინანტი

$$J(f,g) = \det\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = f_x g_y - f_y g_x \in \mathbf{C}_2,$$

სადაც ინდექსით აღნიშნულია კერძო წარმოებულები სათანადო ცვლადის მიმართ[3], ასე რომ, f_x ნიშნავს f პოლინომის კერძო წარმოებულს x-ით და ასე შემდეგ.

თეორემა 2.1 (ალგებრულად დამოუკიდებლობის კრიტერიუმი). f და g ორი ცვლადის პოლინომები ალგებრულად დამოუკიდებელნი არიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი იაკობიანი $J(f,g)$ არ არის იგივურად ნული.

თეორემის დამტკიცება ფრიად ყურადსაღებია. ვიდრე მას მოვიყვანდეთ, საჭიროა გავიხსენოთ უმაღლესი ალგებრის ზოგიერთი სტანდარტული ფაქტი.

უწინარეს ყოვლისა, ნათელია, რომ ალგებრული დამოკიდებულების ცნებას აზრი აქვს აგრეთვე მრავალცვლადიანი პოლინომების ნებისმიერი სასრული სისტემისათვის.

მაგალითად, ნებისმიერი ორი ერთცვლადიანი პოლინომი ალგებრულად დამოკიდებულია, რასაც ჩვენ მარტივი სავარჯიშოს სახით გთავაზობთ. უფრო მეტიც, თუ $\mathbf{C}_n$ -ით აღვნიშნავთ n ცვლადიან კომპლექსურ პოლინომთა ალგებრას, მაშინ ნებისმიერი $f_1,\dots,f_{n+1} \in \mathbf{C}_n$ ალგებრულად დამოკიდებულნი აღმოჩნდებიან. ეს სტანდარტული ფაქტი გახლავთ, რომლის დამტკიცებაც ალგებრის ყველა კურსშია

მოცემული (იხ. [24], თავი X).

შეგახსენებთ, რომ რამდენადაც პოლინომები ქმნიან ალგებრას, წრფივ განტოლებათა სისტემები, რომელთა კოეფიციენტებსაც პოლინომები წარმოადგენენ, შეიძლება განხილული და ამოხსნილი იქნან შესაბამისი პოლინომური მატრიცის შებრუნების საშუალებით. ამის გათვალისწინებით მოყვანილი კრიტერიუმის დამტკიცება სწრაფად შეგვიძლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ დავუშვათ, რომ f და g პოლინომები ალგებრულად დამოკიდებულნი არიან, ანუ არსებობს ისეთი $P \in \mathbf{C}_2$, რომ $P(f,g) \equiv 0$. ჩავთვალოთ, რომ არჩეულ P პოლინომს გააჩნია უმცირესი შესაძლებელი ხარისხი, ანუ ნებისმიერი ისეთი $Q \in \mathbf{C}_2$ პოლინომისათვის, რომლისთვისაც $\operatorname{ord} Q < \operatorname{ord} P$, გვაქვს $Q(f,g) \not\equiv 0$.

ახლა მოვახდინოთ ამ დამოკიდებულების დიფერენცირება თითოეული ცვლადით, რთულ ფუნქციათა დიფერენცირების წესის გათვალისწინებით. მაშინ მივიღებთ ტოლობებს

$$\begin{cases} P_x(f,g)f_x + P_y(f,g)g_x = 0 \\ P_x(f,g)f_y + P_y(f,g)g_y = 0 \end{cases}$$

ეს ტოლობები განვიხილოთ როგორც წრფივ განტოლებათა სისტემა $Z_1 = P_x(f,g)$, $Z_2 = P_y(f,g)$ უცნობთა მიმართ. მივაქციოთ ყურადღება, რომ ამ სისტემის მატრიცი ზუსტად ემთხვევა f და g პოლინომთა წყვილის იაკობის მატრიცას. აგრეთვე აღვნიშნავთ, რომ $P_x(f,g)$ და $P_y(f,g)$ პოლინომთაგან ერთი მაინც უსათუოდ არანულოვანია, რამდენადაც $\operatorname{ord} P_x < \operatorname{ord} P$ ან კიდევ $\operatorname{ord} P_y < \operatorname{ord} P$.

ამგვარად, ჩვენს სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი, ხოლო ეს, აღნიშნულის თანახმად, მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია. ამდენად, $J(f,g) \equiv 0$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ჩვენს შემთხვევაში ამ ფაქტის უშუალო შემოწმება ადვილია. დავუშვათ, რომ $P_x(f,g) \neq 0$. პირველი განტოლება გავამრავლოთ g_y-ზე, ხოლო მეორე g_x-ზე და შევკრიბოთ ისინი. მივიღებთ ტოლობას $P_x(f,g)J(f,g) = 0$, საიდანაც $J(f,g) = 0$, რადგანაც პოლინომთა ალგებრაში არ არიან ნულის გამყოფები. ასე რომ, კრიტერიუმი ერთი მიმართულებით დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ f და g ალგებრულად დამოუკიდებელნი არიან. რამდენადაც პოლინომთა ორივე სამეული x, f, g და y, f, g ალგებრულად დამოკიდებულია, ამიტომ არსებობენ ისეთი $P(x,z_1,z_2)$ და $Q(y,z_1,z_2)$ პოლინომები, რომლებსაც გააჩნიათ მინიმალური შესაძლებელი ხარისხი, შესაბამისად, x-ის და y-ის მიმართ და $P(x,f,g) = 0$ და $Q(y,f,g) = 0$. ამასთან, P პოლინომში ფაქტობრივად x ცვლადი უნდა მონაწილეობდეს, ხოლო Q პოლინომში — y ცვლადი, რადგანაც სხვანაირად ჩვენ თვით f და g პოლინომთა შორის დამოკიდებულებას მივიღებდით. ამიტომ, თუკი პოლინომის ხარისხს x უცნობის მიმართ $x - \mathrm{ord}$-ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ:

$$0 \leq x - \mathrm{ord}P_x < x - \mathrm{ord}P$$

$$0 \leq y - \mathrm{ord}Q_y < y - \mathrm{ord}Q.$$

მართლაც, ხარისხის დიფერენცირების ფორმულიდან ნათელია, რომ $x - \mathrm{ord}$-ის სიდიდე ერთით მცირდება x-ით დიფერენცირების შედეგად.

ახლა მოვახდინოთ თითოეული ამ ტოლობის დიფერენცირება ორივე ცვლადით, რაც მოგვცემს ოთხ თანაფარდობას. მარტივია (მაგრამ აუცილებელი) შევამოწმოთ, რომ შესაძლებელია მათი მატრიცული სახით ჩაწერა

$$\begin{pmatrix} P_x P_y \\ Q_x Q_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_x f_y \\ g_x g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_x & 0 \\ 0 & -Q_y \end{pmatrix}.$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ მარჯვენა მხარეში მდგომი მატრიცის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, რადგანაც P და Q დამოკიდებულებებს გააჩნდათ უმცირესი შესაძლებელი ხარისხები პირველი ცვლადის მიმართ, ასე რომ $P_x(x,f,g) \neq 0$ და $Q_y(y,f,g) \neq 0$. რადგანაც ნამრავლის დეტერმინანტი ტოლია დეტერმინანტთა ნამრავლისა, ხოლო $\mathbf{C}_2$ ალგებრაში არ არსებობენ ნულის გამყოფები, დავასკვნით, რომ $J(f,g) \neq 0$, რაც საჭირო იყო დამტკიცების დასასრულებლად.

ამგვარად, ჩვენ უკვე თავს დავაღწევთ ბევრ გადაგვარებულ შემთხვევას, თუკი მოვითხოვთ, რომ $J(f,g) \neq 0$.

სამწუხაროდ, ეს არ არის საკმარისი იმისათვის რომ უზრუნველვყოთ ფესვთა სიმრავლის სასრულობა. მაგალითად, განვიხილოთ სისტემა $\{x^2 - y^2 = 0, x^3 - y^3 = 0\}$. დამტკიცებული კრიტერიუმი გვიჩვენებს, რომ განტოლებები ალგებრულად დამოუკიდებელნი არიან, რადგანაც $J(f,g) = 6xy(x - y)$. მაგრამ ამ სისტემას გააჩნია ფესვთა უსასრულო რაოდენობა, კერძოდ მთელი $\{x = y\}$ წრფე.

რა თქმა უნდა, აქ უსიამოვნების მიზეზი ცხადია, რადგანაც სისტემის ორივე განტოლება იყოფა $(x - y)$-ზე და შესაძლებელია ვცადოთ ვიპოვოთ პირობა, რომელიც გამორიცხავს ამგვარ შემთხვევებსაც. ასეთი პირობები არსებობს, მაგრამ მათ უფრო სპეციალური სახე გააჩნიათ და ჩვენ მათზე დროს არ დავხარჯავთ, რადგან არსებობს კიდევ ერთი წინააღმდეგობა რომლის დაძლევის შემდეგ შესაძლებლობა მოგვეცემა ვიპოვოთ უფრო მარტივი და სასარგებლო პირობები.

ზემოთ ხსენებული უსიამოვნება რამდენადმე სხვა ხასიათისაა და დაკავშირებულია არა ფესვთა სიუხვესთან, არამედ მათ უკმარისობასთან. შემდგომი მსჯელობის გასაადვილებლ

ად,შევთანხმდეთ გამონათქვამში, რომ (1.8) სისტემას გააჩნია ბიხარისხი (m,n), თუკი $\operatorname{ord} f = m, \operatorname{ord} g = n$. ინტუიცია და წესრიგის მოყვარულობა გვიკარნახებს, რომ (m,n) ბიხარისხის „მართებულ" სისტემას უნდა გააჩნდეს $m \cdot n = N$ ფესვი $\mathbf{C}^2$-ში. ლაკონურობისათვის N რიცხვს ვუწოდებთ (1.8) სისტემის ბეზუს რიცხვს, ბეზუს ცნობილი თეორემისათვის პატივის მისაგებად, რომლის შესახებ მალე ვისაუბრებთ.

როგორც ერთგანზომილებიანი შემთხვევა გვიჩვენებს, აუცილებელია ფესვების ჯერადობაც გავითვალისწინოთ, რაც არც თუ ისე იოლი საქმეა. თუმცაღა, ამის გაკეთება კიდეც რომ შევძლოთ, რჩება კიდევ $\{x = 0, xy = 1\}$ სისტემის მსგავსი მაგალითები, სადაც ვერავითარი ჯერადობებიც ვერ გვიშველის, რადგანაც $\mathbf{C}^2$-ში არც ერთი ფესვი არ გააჩნია. სწორედ ასეთი სისტემები უდიდეს საშიშროებას წარმოადგენენ, რაც ძირშივე უნდა აღიკვეთოს; ამისათვის კი საჭიროა მათი აღწერა.

გასაღებს ასეთი სისტემების დასახასიათებლად იძლევა შემდეგი დაკვირვება. მოდით, განვიხილოთ ახლა სისტემა $\{x = \varepsilon, xy = 1\}$, სადაც $\varepsilon, |\varepsilon| \ll 1$ — მცირე ნამდილი რიცხვია. ახალ სისტემას უკვე გააჩნია $(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$ ფესვი, რომელიც მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, როცა ε მიისწრაფვის ნულისკენ. ამასთან ინტუიციურად გასაგები ხდება, რომ ეს ფესვი თითქოსდა „მიცურავს" $\{x = 0\}$ ღერძის გასწვრივ. აქ შესაძლებელია დანახულ იქნეს ანალოგია ასიმპტოტის ცნობილ ცნებასთან, მითუფრო, რომ საწყისი სისტემის განტოლებათაგან პირველი სწორედ რომ იძლევა ასიმპტოტას მეორესათვის. ეს ანალოგია მართლაც რომ ძალზე მნიშვნელოვანია და სასარგებლოა, მაგრამ მისი სრული აღწერისათვის საჭიროა პროექციული სივრცის ცნების შემოტანა, რასაც ალგებრული გეომეტრიის სიღრმეებში შევყავართ[11]. ჩვენი მიზნის მისაღწევად კი შეიძლება უფრო მარტივად ვიმოქმედოთ, რისთვი-

საც საჭიროა განტოლებათა განხილვის ნაცვლად შესაბამისი ასახვები განვიხილოთ. უკვე აღინიშნა, რომ $f,g \in \mathbf{C}_2$ პოლინომთა ყოველი წყვილი იძლევა გარკვეულ ასახვას $F\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, ხოლო თუ $f,g \in \mathbf{R}_2$, მაშინ $F_{\mathbf{R}}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. ირკვევა, რომ ჩვენს სიტუაციაში აზრი აქვს საკუთრივი ასახვის ცნებას, რომელიც კარგადაა ცნობილი ტოპოლოგიაში[25].

შევახსენებთ, რომ F ასახვას ეწოდება საკუთრივი, თუკი ნებისმიერი K კომპაქტის $F^{-1}(K)$ წინასახე კომპაქტურია[25].

ჩვენს შემთხვევაში პოლინომური ასახვა საკუთრივია ზუსტად მაშინ, როდესაც ნებისმიერი შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი სიმრავლის სრული წინასახე აგრეთვე შემოსაზღვრული და ჩაკეტილია. ამასთან ცხადია, რომ საკმარისია ამ პირობის შესრულება ყველა ჩაკეტილი სფეროსთვის, სინამდვილეში კი - ისეთი ჩაკეტილი კონცენტრული სფეროების რაღაც მიმდევრობისათვის, რომელთა რადიუსები შემოუსაზღვრელად იზრდება.

აღვნიშნავთ, რომ ახლახან განხილული (x,xy) პოლინომთა წყვილი იძლევა არასაკუთრივ ასახვას $\mathbf{R}^2$-შიც და $\mathbf{C}^2$-შიც. ამასთან $(x^2 - y^2, x^3 - y^3)$ წყვილიც არ არის საკუთრივი, ასე რომ საკუთრივობის პირობის გარეშე ფესვთა სიმრავლეს შეიძლება სხვადასხვანაირი პათოლოგიები გააჩნდეს.

სინამდვილეში, საკუთრივობის პირობა „მართებულია" პოლინომურ სისტემათა ამოხსნის თვალსაზრისით, რითაც აიხსნება ამ პარაგრაფის დასათაურება. ხატოვნად რომ ვთქვათ, საკუთრივობის პირობა კრძალავს ნულების უსასრულობაში გადასვლას და გვაძლევს საშუალებას თავი ავარიდოთ პროექციულ სივრცეს. ხაზი უნდა გაესვას შესაბამისი $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ ასახვის საკუთრივობას, რასაც ჩვენ ზოგჯერ აღვნიშნავთ ტერმინით „$\mathbf{C}$-საკუთრივობა". ახლა კი ჩვენ ბოლოსდაბოლოს შეგვიძლია გამოვყოთ „მართებულ" სისტემათა კლასი იმით, რომ $\mathbf{C}$-საკუთრივობის პირობა ვიგულისხმოთ შესრულებუ-

ლად. რასაკვირველია, ახლა სასურველია გვქონდეს ამ პირობის პრაქტიკული შემოწმების საშუალება.

შემდეგი მარტივი წინადადება საშუალებას გვაძლევს გადავდგათ ნაბიჯი სასურველი მიმართულებით.

ლემა. $(f,g): \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ ასახვა საკუთრივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $|f(z)|+|g(z)| \to \infty$, თუ $|z| \to \infty$.

დამტკიცება თამამად შეიძლება მივანდოთ მკითხველს. მხოლოდ დავსძენთ, რომ მოყვანილ პირობას ხშირად ადამარის პირობად იხსენიებენ[23]. ოდნავ უფრო რთული სავარჯიშოს სახით გვინდა შემოგთავაზოთ იმის დამტკიცება, რომ ადამარის პირობა საკმარისია შემოწმდეს ნებისმიერი ნამდვილი წრფისთვის, რომელიც $\mathbf{C}^2 \cong \mathbf{R}^4$ სივრცის კოორდინატთა სათავეს შეიცავს.

ვიდრე საკუთრივობის ეფექტური საკმარისი პირობის ფორმულირებას შემოგთავაზებთ, აღვნიშნავთ, რომ ყოველი ერთგვაროვანი ფორმის ფესვთა სიმრავლე შედგება კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეებისაგან, რადგან თითოეულ (u,v) წყვილთან ერთად ის უნდა შეიცავდეს $(\lambda u,\lambda v)$ წყვილსაც ნებისმიერი კომპლექსური λ-თვის. ამ წრფეებს ფორმის ნულ-წრფეებს უწოდებენ. თუ ფორმა არატრივიალურია, მაშინ მათი სიმრავლე სასრულია.

შეგახსენებთ აგრეთვე, რომ პირველ პარაგრაფში შემოტანილი იყო პოლინომის ლიდერის ცნება, რომელიც ქვემოთ იქნება გამოყენებული.

თეორემა 2.2 (საკუთრივობის საკმარისი პირობა). $(f,g) \in (\mathbf{C}_2)^2$ პოლინომთა წყვილით მოცემული $F: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ ასახვა საკუთრივია, თუ f^* და g^* ლიდერებს არ გააჩნიათ საერთო ნულ-წრფეები $\mathbf{C}^2$-ში.

ამ შედეგის დამტკიცება ძნელი არ არის[23], მაგრამ მისი სრულად გადმოცემა დიდ ადგილს დაიჭერს. ამიტომ ჩვენ არ მოვიყვანთ ყველა დეტალს და შემოვიფარგლებით იმ

განმარტებებით, რომლებიც მკითხველს საშუალებას მისცემს მიიღოს იგი დამოუკიდებლად.

მოყვანილი ლემის საფუძველზე საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $|f(z)|+|g(z)|\to\infty$, როცა $z\in\mathbf{C}^2$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ რომელიმე წრფის გასწვრივ. უწინარეს ყოვლისა აღვნიშნავთ, რომ თუ ეს წრფე ერთ-ერთი f^* და g^* ლიდერთაგანის ნულ-წრფეს არ წარმოადგენს, მაშინ იმ ლიდერის მოდული განუსაზღვრელად იზრდება ამ წრფეზე. ამასთან, მარტივი შეფასებებიდან ცხადია, რომ მცირე ხარისხის მქონე წევრებს არ შეუძლიათ „მისდიონ" ლიდერს, ანუ მოახდინონ მისი ზრდის კომპენსაცია; ასე რომ მთელი პოლინომის მოდულიც მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ როცა $z\in\mathbf{C}^2$ მიისწრაფვის უსასრულობისკენ ამ წრფის გასწვრივ. რამდენადაც ლიდერების საერთო ნულ-წრფეები არ არსებობენ, ნათელია რომ ადამარის პირობა სრულდება თითოეული წრფისათვის, საიდანაც გამომდინარეობს სასურველი დასკვნა.

მალე ვნახავთ, რომ მიღებული პირობის სრულიად ეფექტური შემოწმება შესაძლებელია ჩვენთვის უკვე ცნობილი რეზულტანტის ცნების სათანადო მოდიფიკაციის საშუალებით.

§ 3. ჯერადი ფესვები როგორც განსაკუთრებულობები

საკითხები ჯერადი ფესვების შესახებ ყველაზე უფრო მოსახერხებელია განვიხილოთ დიფერენცირებადი ასახვების განსაკუთრებულობათა თეორიის ზოგადი პოზიციიდან[6]. ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, მოვიყვანოთ ზოგიერთი განსაზღვრება იმ ფორმით, რომელიც ჩვენ მიზნებს შეესაბამება.

როგორც უკვე ზემოთ იყო თქმული, $\mathbf{C}_n$-ით აღვნიშნავთ ყველა n ცვლადიან კომპლექსურ პოლონომთა სიმრავლეს. ვთქვათ, ახლა მოცემული გვაქვს რაღაც m პოლინომი

$f_1,...,f_m \in \mathbf{C}_n$. მაშინ ნათელია, რომ ისინი განსაზღვრავენ გარკვეულ ასახვას $F:\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$. ჩაწერის გასამარტივებლად ჩვენ მას ხშირად შემდეგი სახით ჩავწერთ: $F = (f_i) \in (\mathbf{C}_n)^m$. ანალოგიური აზრი ეძლევა ჩაწერასაც $F \in (\mathbf{R}_n)^m$. ამასთან, თუ $m = n$, ვიტყვით, რომ მოცემულია $\mathbf{C}^n$-ის პოლინომური ენდომორფიზმი, ისე, რომ $\mathbf{C}^n$-ის ყველა პოლინომური ენდომორფიზმების სიმრავლე $(\mathbf{C}_n)^n$-ით აღინიშნება.

$F \in (\mathbf{C}_n)^m$ასახვის იაკობის მატრიცა x წერტილში ენოდება $F'(x)$ მატრიცას, რომლის სტრიქონებია $\left((f_j)_{x_1},...(f_j)_{x_n}\right), j = 1,...,m$. თუ $m = n$, მაშინ მის $J(F) = J_F$ დეტერმინანტს ეწოდება Fასახვის იაკობიანი. წრფივ ასახვას $DF(x):\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$, რომელიც იაკობის მატრიცა იძლევა, ეწოდება F ასახვის დიფერენციალი x წერტილში.

შებრუნებული ასახვის თეორემა (ხშირად მის შებრუნებული ფუნქციის თეორემას უწოდებენ[3]) გვამცნობს, რომ თუ x წერტილში ენდომორფიზმის იაკობიანი არანულოვანია, $JF(x) \neq 0$, მაშინ $F \in (\mathbf{C}_n)^n$ ენდომორფიზმს გააჩნია შებრუნებული ასახვა ამ წერტილის რაიმე მცირე მიდამოში[3]. ამ თეორემისათვის, რა თქმა უნდა, არ არის აუცილებელი, რომ ასახვა პოლინომური იყოს და თუკი ეს მაინც ასეა, შებრუნებული ასახვა, როგორც წესი, პოლინომებით არ არის მოცემული. შემდგომში ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $n \geq m$.

განსაზღვრება 3.1. ([6], [10]) ვთქვათ მოცემული გვაქვს ასახვა $F \in (\mathbf{C}_n)^m$. $x \in \mathbf{C}^n$ წერტილს ეწოდება F ასახვის რეგულარული წერტილი, თუკი $F'(x)$ იაკობის მატრიცის რანგი m-ის ტოლია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ეწოდება ასახვის განსაკუთრებული წერტილი ან განსაკუთრებულობა, ხოლო $n-m$ სხვაობას ეწოდება განსაკუთრებულობის კორანგი.

განსაკუთრებულ წერტილთა სიმრავლე აღინიშნება $S(F)$ -ით. $F(S(F))$ სიმრავლეს ეწოდება განსაკუთრებულ მნიშვნელობათა სიმრავლე, ხოლო მის $\mathbf{C}^2 - F(S(F))$ დამატებას

ეწოდება რეგულარულ მნიშვნელობათა სიმრავლე [6].

უფრო ადვილად რომ გავერკვეთ ამ ტერმინებში, ჯერ დავუშვათ, რომ $m = 1$. მაშინ განსაკუთრებულობა უბრალოდ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი იქნება, ამ ცნებას კი მათემატიკური ანალიზის კურსის დასაწყისში ეცნობიან ექსტრემუმთა, ანუ განსაკუთრებულ მნიშვნელობათა ძიებასთან დაკავშირებით [3], [6].

თუ $m = n$, მაშინ განსაკუთრებული წერტილები მოცემულია $JF(x) = 0$ განტოლებით. შეგახსენებთ, რომ (1.8) სისტემის ფესვს ვუწოდეთ ჯერადი, თუკი მასში J_F აკობიანი ნულოვანია. მასაშადამე, (1.8) სისტემის ჯერადი ფესვები ზუსტად ემთხვევა შესაბამისი პოლინომური ენდომორფიზმის განსაკუთრებულობებს [6].

უკვე თვით სახელწოდება „განსაკუთრებულობა" მიუთითებს, რომ იგი რაღაც არაჩვეულებრივი, ნაკლებ გავრცელებული, დამატებითი სირთულეების შემცველია. რაც შეეხება სიძნელეებს, ყველაფერი გასაგებია იმდენად, რამდენადაც განსაკუთრებული წერტილის ირგვლივ ასახვის ქცევა უფრო რთულია. ასე, მაგალითად რეგულარული წერტილის ახლოს ფუნქცია ლოკალურად დაიყვანება თავის დიფერენციალზე, ხოლო კრიტიკულ წერტილში საჭიროა მხედველობაში მიღებულ იქნეს უფროსი წარმოებულებიც [6]. რაც შეეხება განსაკუთრებულობათა ნაკლებად გავრცელებას რეგულარულ წერტილებთან შედარებით, ეს საკითხი უფრო შინაარსიანია და იგი საფუძვლიანად არის დამუშავებული განსაკუთრებულობათა თეორიაში და ასახვას პოულობს კონკრეტულ შედეგებში.

კერძოდ, უდიდეს როლს თამაშობს სარდის ცნობილი ლემა [28], რომელიც გარანტიას გვაძლევს, რომ უსასრულოდ დიფერენცირებადი (გლუვი) F ასახვის განსაკუთრებულ მნიშვნელობათა სიმრავლეს გააჩნია ლებეგის ნულოვანი ზომა.

სხვა სიტყვებით, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ მცირე რიცხვისათვის არსებობს $F(S(F))$ სიმრავლის ისეთი დაფარვა პარალელეპიპედებით, რომ მათი მოცულობათა ჯამი ε-ზე ნაკლებია [14].

კერძოდ, აქედან ადვილად გამომდინარეობს, რომ რეგულარულ მნიშვნელობათა სიმრავლე ღიაა და ყველგან მკვრივია. ეს ტოპოლოგიაში ძალზე მნიშვნელოვანია, ვინაიდან, როგორც ძნელი არ არის დავასკვნათ, შებრუნებული ფუნქციის თეორემიდან, რეგულარული მნიშვნელობის წინასახე წარმოადგენს გლუვ ზედაპირს, ანუ მას თითოეულ წერტილში გააჩნია ცალსახად განსაზღვრული მხები სიბრტყე [14]. თანამედროვე დიფერენციალური ტოპოლოგიის ენაზე ამას გამოხატავენ სიტყვებით: „რეგულარული მნიშვნელობის წინასახე გლუვი მრავალნაირობაა" [14]. ყველა ხსენებული ფაქტი სტანდარტულია და ისინი მათემატიკური ანალიზის ბევრ კურსშია მოცემული (იხ. [6] ან [26]).

ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დასკვნა აქედან ის არის, რომ თუკი აუცილებელია ზოგიერთ განსაკუთრებულობასთან დაკავშირებული მოვლენის გამოკვლევა, მაშინ შეიძლება ცოტათი შევცვალოთ ასახვის კოეფიციენტები ისე, რომ განსაკუთრებულობა გაქრეს და შევისწავლოთ წარმოქმნილი ახალი ობიექტების თვისებები. რა თქმა უნდა, ამ სიტყვების მიხედვით ძნელია მეთოდის არსის წარმოდგენა, მაგრამ ჩვენ გვექნება საშუალება დავინახოთ იგი პრაქტიკაში, ჯერჯერობით კი მხოლოდ მისი არსებობის შესახებ გვინდოდა მიგვენიშნებინა. ასეთ მცირე ცვლილებებს, მცირე შეშფოთებას ასახვის დეფორმაცია ეწოდება [6] და შემდგომში ისინი ხშირად შეგვხვდება ხოლმე. ჩვენ გვსურს, მათთან შეხვედრა აღქმული იქნეს არა როგორც ფანდი, არამედ როგორც ზოგად მოსაზრებებთან ზიარება.

დავუბრუნდეთ პოლინომურ ენდომორფიზმებს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია თავი ავარიდოთ ზემოხსენებული ზოგადი

შედეგების ხსენებას, რადგან პოლინიმებისთვის სარდის ლემა მტკიცდება ელემენტარულად.

სარდის ლემა პოლინომებისათვის. საკუთრივი კომპლექსური პოლინომური $F \in (\mathbf{C}_1)^2$ ენდომორფიზმის რეგულარული მნიშვნელობების RegF სიმრავლე წარმოადგენს ღია, ყველგან მკვრივ და ბმულ ქვესიმრავლეს $\mathbf{C}^2$-ში.

მართლაც, განსაზღვრების თანახმად განსაკუთრებული სიმრავლე მოიცემა პოლინომური განტოლებით $J_F(x,y) = 0$, ესე იგი წარმოადგენს ალგებრულ ჰიპერზედაპირს $\mathbf{C}^2$-ში. ამასთან, იაკობიანი არანულოვანი პოლინომია, რადგან წინაალმდეგ შემთხვევაში, მოყვანილი კრიტერიუმის თანახმად, f და g პოლინომები ალგებრულად დამოკიდებულნი იქნებობდნენ, რაც ეწინააღმდეგება ენდომორფიზმის საკუთრივობას. ამიტომ $J_F(x,y) = 0$ განტოლება განსაზღვრავს საკუთრივ ალგებრულ წირს $\mathbf{C}^2$-ში. კარგადაა ცნობილი (და საკმაოდ ცხადია), რომ ასეთ წირს, როგორც ტოპოლოგიურ სივრცეს, აქვს განზომილება ორი. აგრეთვე ცნობილია, რომ დიფერენცირებადი ასახვის დროს სიმრავლის ანასახის განზომილება არ შეიძლება გაიზარდოს, ასე რომ $S(F)$ სიმრავლის განზომილება არ შეიძლება აღემატებოდეს ორს. ახლა კი უკვე ცხადია, რომ განზომილების თეორიის მარტივი მოსაზრებებიდან გამომდინარე ჩაკეტილი ორგანზომილებიანი $S(F)$ ქვესიმრავლის დამატება ოთხგანზომილებიან სივრცეში უნდა იყოს ყველგან მკვრივი და ბმული, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ რეგულარული მნიშვნელობის წინასახეთა რაოდენობა არ არის დამოკიდებული რეგულარული მნიშვნელობის არჩევანზე, თუკი საუბარი ყველა კომპლექსურ წინასახეს ეხება. მართლაც, რეგულარული მნიშვნელობის მცირე შეშფოთების შემთხვევაში ყველა მისი წინასახე ოდნავ იცვლება, ასე რომ ეს რიცხვი ლოკალუ-

რად მუდმივია. რამდენადაც რეგულარულ მნიშვნელობათა სიმრავლე, სარდის ლემიდან გამომდინარე, ბმულია, ვღებულობთ სასურველ შედეგს.

ამგვარად, ყოველი მოცემული (1.8) ტიპის სისტემისათვის ვღებულობთ „რეგულარული მნიშვნელობის წინასახეთა რიცხვს", ინვარიანტს და გვებადება მისი გამოთვლის სურვილი. წინა პარაგრაფის დაკვირვებიდან გამომდინარე, უპრიანი იქნება შემოვიფარგლოთ მხოლოდ საკუთრივი სისტემებით და ასეთ შემთხვევაში ჩვენ აღმოვჩნდებით შემდეგი საგულისხმო შედეგის წინაშე [2].

თეორემა 3.1 (ბეზუს თეორემის ვარიანტი). ვთქვათ მოცემულია (m,n) ბიხარისხის საკუთრივი ენდომორფიზმი $(\mathbf{C}_2)^2$-დან. მაშინ ამ ასახვის რეგულარული მნიშვნელობის წინასახეთა რიცხვი $N = mn$ ბეზუს რიცხვის ტოლია.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, განტოლებათა „მართებულ" სისტემას გააჩნია კომპლექსური ფესვების მოსალოდნელი რიცხვი.

რამდენადმე მოულოდნელია კიდევაც, რომ ამ ფაქტის დამტკიცება ადვილად მიიღება აღწერილი მოსაზრებიდან. სიმარტივისათვის განვიხილავთ მხოლოდ სისტემებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ საკუთრივობის მოყვანილ საკმარის პირობას. ადვილი დასანახია, რომ ყველა ასეთ სისტემათა სიმრავლე ბმულია ყველა (1.8) ტიპის სისტემათა სივრცეში. ამასთან, ვლაპარაკობთ რა სისტემათა სივრცეზე, ჩვენ მხედველობაში გვაქვს, რომ $\mathbf{C}_n^{(d)}$ წარმოადგენს სასრულგანზომილებიან ვექტორულ სივრცეს, რომელთა კოორდინატებად განტოლებათა კოეფიციენტები შეიძლება ჩაითვალოს [6]. ეს გვაძლევს ბუნებრივ (ევკლიდურ) ტოპოლოგიას სისტემათა სივრცეზე. საკუთრივი სისტემები შეადგენენ ქვესიმრავლეს, რომელიც გამოიყოფა, ზემოაღნიშნულის თანახმად, მათი ლიდერების რეზულტანტის არანულოვანობით. ამ რე-

ზულტანტის ნულთან ტოლობის პირობა, თვით რეზულტანტის განსაზღვრების თანახმად, გამოიხატება ალგებრული განტოლებით, რომელშიც მონაწილეობენ საწყისი სისტემის კოეფიციენტები; მაშასადამე, ამ განტოლების ფესვები იძლევა რაღაც ჰიპერზედაპირს სისტემათა $(\mathbf{C}_n^{(d)})^k$ სივრცეში. ეს ზედაპირი საკუთრივია, რადგან არსებობს ამ ტიპის საკუთრივი სისტემებიც, ხოლო ჩვენ უკვე ვიცით, რომ დამატება ალგებრულ ზედაპირთან კომპლექსურ სივრცეში ბმულია [11]. ცხადია, აგრეთვე, რომ ჩვენი ინვარიანტი ლოკალურად მუდმივია სისტემათა სივრცეში, რადგან განტოლებათა კოეფიციენტების მცირე შეშფოთების დროს მარტივი ფესვები (ანუ რეგულარული მნიშვნელობის წინასახეები) არც ქრება და არც წარმოიქმნება. აქედან გამომდინარეობს, რომ ეს ინვარიანტი ერთნაირია ყველა ასეთი სისტემისათვის და მსჯელობის დასასრულებლად გვრჩება გამოვთვალოთ იგი, მაგალითად, $\{x^m = 1, y^n = 1\}$ სისტემისთვის, რასაც, დარწმუნებული ვართ, მკითხველი თვითონაც შესძლებს.

ხაზი უნდა გავუსვათ იმას, რომ ჩვენს მსჯელობას საფუძვლად ედო წმინდა ტოპოლოგიური მოსაზრებები ბმულობის და საკუთრივობის ასპექტში. ეს მეტად სასარგებლო მეთოდია კომპლექსურ პოლინომთა თეორიაში [11] და მას ჩვენ ახლა ფესვის ჯერადობის ცნების შესასწავლად გამოვიყენებთ.

ერთგანზომილებიანი შემთხვევის გამოცდილება გვკარნახობს, რომ ჯერადი ფესვები არამდგრადნი არიან იმ გაგებით, რომ განტოლებათა მარჯვენა ნაწილების ან კოეფიციენტების მცირე შეშფოთების შემთხვევაში ჯერადი ფესვი იშლება რამდენიმე მარტივ ფესვად, რომლებიც მისკენ მიისწრაფიან შეშფოთების შემცირებისთანავე [6]. ამიტომ ბუნებრივია განვსაზღვროთ ფესვის ჯერადობა, როგორც წარმოქმნილ მარტივ ფესვთა რაოდენობა, მაგრამ ჯერ უნდა შევამოწმოთ ასეთი მიდგომის კორექტულობა.

აღვნიშნავთ, რომ მარჯვენა ნაწილების შეშფოთებასთან დაკავშირებით ჩვენ ეს, ფაქტობრივად, უკვე შევასრულეთ გლობალურად. რომ მივიღოთ შესაბამისი ლოკალური ფაქტიც, ამისათვის საჭიროა წინასწარ მოვახდინოთ მოცემული ჯერადი ფესვის საკმაოდ მცირე მიდამოს ფიქსაცია, სადაც ვერ „შეძვრებიან" ის მარტივი ფესვები, რომლებიც სხვა ჯერადი ფესვებისგან წარმოიქმნებიან, და გავიმეოროთ ძირითადი მსჯელობა, რომელშიც რეგულარულ მნიშვნელობათა სიმრავლის ბმულობა გამოიყენება. ფაქტობრივად, ეს სწორია თვით განტოლებათა შეშფოთებისთვისაც, მაგრამ ჩვენ ეს არც დაგვჭირდება. შესაბამისად, ჩვენ შემოვიტანთ ახლა განსაზღვრებას, რომელიც განსაკუთრებულობათა თეორიის ძირითად კალაპოტში ჯდება [6].

განსაზღვრება 3.2. (1.8) სახის სისტემის z_0 ფესვის ჯერადობა ეწოდება მარტივ კომპლექსურ ფესვთა რაოდენობას, რომელიც გააჩნია $\{f=\varepsilon, g=\delta\}$ სისტემას საკმაოდ მცირე $U \ni z_0$ მიდამოში საკმაოდ მცირე $\varepsilon,\delta \in \mathbf{C}$ რიცხვებისათვის.

ამ განსაზღვრების გამოყენებით დიდ გარჯას არ მოითხოვს ბეზუს თეორემის უფრო ზუსტი და უფრო ჩვეული ფორმით მიღება.

თეორემა 3.2 (ბეზუს აფინური თეორემა). საკუთრივი პოლინომური სისტემის ფესვთა რიცხვი, ჯერადობის გათვალისწინებით, ბეზუს რიცხვის ტოლია.

დამტკიცებას სავარჯიშოდ ვთავაზობთ დაინტერესებულ მკითხველს, რომელიც კვლავაც აპირებს ჩვენი ერთგული დარჩეს. აღვნიშნავთ, რომ ბეზუს თეორემას ასეთი სიტყვიერი ფორმულირება საგანგებოდ მივეცით, რადგან იგი უცვლელი რჩება მრავალუცნობიან განტოლებათა სისტემისთვისაც [2].

რაც შეეხება მრავალ უცნობთა შემთხვევას, იქ ჯერ კიდევ ზოგიერთი დამატებითი სამუშაოა ჩასატარებელი, ალგებრის ძირითად თეორემას კი მოულოდნელად მივიღებთ დანართის

სახით, როგორც რეგულარულ მნიშვნელობათა ტოპოლოგიურ განმარტებას.

მართლაც, განვიხილოთ $\{f(x)=0, g(y)=0\}$ სახის სისტემის კერძო შემთხვევა. ასეთ სისტემებს ზოგჯერ დაშლადს უწოდებენ, რადგან შესაძლებელია ამ განტოლებათა ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ამოხსნა. აქ სრულიად თვალსაჩინოდაა შესრულებული საკუთრივობის საკმარისი პირობა, ასე რომ, ბეზუს თეორემის თანახმად, დავასკვნით, რომ მისი ამოხსნათა რიცხვი $\operatorname{ord} f \cdot \operatorname{ord} g$-ს ტოლია. რაც შეეხება ჯერადობას, განსაზღვრებიდან ნათელია, რომ ამ სისტემის ნებისმიერი $(x_0, 0)$ ფესვის ჯერადობა ტოლია x_0-ის ჯერადობისა, როგორც $f(x)=0$ განტოლების ფესვისა, რადგან მეორე განტოლების ფესვი მარტივია და მცირე შეშფოთების შემთხვევაში ასეთად რჩება.

როგორც ჩანს, ალგებრის ძირითადი თეორემის ზემოთ მოყვანილ დამტკიცებას გააჩნია წმინდა ტოპოლოგიური ბუნება და, ჩვენი შეხედულებით, იგი ახდენს განსაკუთრებულობის თეორიის მეთოდების ძალის ილუსტრაციას. ხაზგასმით აღვნიშნავთ, რომ ჩვენი მსჯელობა ეფუძნება მხოლოდ სტანდარტულ და ადვილად შესამოწმებელ ზოგად ფაქტებს, ასე რომ შეიძლება იმედი ვიქონიოთ, რომ ისინი მომავალშიც გამოგვადგებიან.

სურათი რომ ნათელი იყოს საჭიროა გავიგოთ პრაქტიკულად როგორ გამოვთვალოთ ფესვთა ჯერადობები. ერთი ცვლადის შემთხვევაში ამისათვის საკმარისი იყო გამოგვეთვალა პოლინომის წარმოებულთა მნიშვნელობები მოცემულ ფესვში, ვიდრე არ გაჩნდება არანულოვანი მნიშვნელობა. ამასთან აშკარად საკმარისია გამოვთვალოთ არაუმეტეს $\operatorname{ord} f$ წარმოებულისა. სასურველია რაღაც მსგავსი გაგვაჩნდეს მრავალი ცვლადისთვისაც. ამ ამოცანის ამოსახსნელად განსაკუთრებულობათა თეორიაში შემოაქვთ განსაკუთრებულო-

ბის ლოკალური ალგებრის ფუნდამენტური ცნება [6]. ლოკალური ალგებრა იძლევა განსაკუთრებულობის მნიშვნელოვანი თვისებების წმინდა ალგებრულ აღწერას. კერძოდ, ჯერადობა ამ ალგებრის განზომილების ტოლი აღმოჩნდება, რაც იძლევა ჯერადობის გამოთვლის საკმაოდ ეფექტურ გზას [30]. ამგვარად, ჯერად ფესვებთან დაკავშირებული ძირითადი საკითხები საკმაოდ ნათელი ხდება: ჩვენ შეგვიძლია ჯერადი ფესვების აღმოჩენა, ვიცით მათი გეომეტრიული არსი და მათი ჯერადობების გამოთვლის ხერხი.

ლოკალური ალგებრების გაცნობას ჩვენ შემდეგ თავამდე გადავდებთ, სადაც მათ გარეშე ფონს ვერაფრით გავალთ. თანაც მათთან მუშაობისათვის სპეციალური ტექნიკური ცნებებია საჭირო, რომლებსაც ჩვენ თანდათან გავეცნობით. მიუხედავად ამისა, უკმარისობის გრძნობა რომ არ დაგვრჩეს, წარმოგიდგენთ თუ როგორ შეიძლება გამოითვალოს ჯერადობა ელემენტალური საშუალებებით $F \in (\mathbf{C}_2)^2$ პოლინომთა წყვილისთვის.

ამისათვის ჩვენ მარტივ ხერხს გამოვიყენებთ, რომელიც შემდეგ პარაგრაფში დაგვჭირდება. ჯერ აღვნიშნოთ, რომ პოლინომი ორი ცვლადისგან ორი ბუნებრივი გზით შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ერთცვლადიანი პოლინომი, რომლის კოეფიციენტებსაც წარმოადგენენ პოლინომები მეორე ცვლადისგან. მაგალითად:

$$f(x,y) = \sum_{k+l=0}^{n} a_{kl}x^k y^l = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n-k} a_{kl}y^l\right)x^k = \sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-l} a_{kl}x^k\right)y^l.$$

ამასთან დაკავშირებით ჩვენ ვიტყვით ხოლმე: „განვიხილოთ პოლინომი, როგორც x ცვლადის პოლინომი კოეფიციენტებით $\mathbf{C}[y]$-ში“.

ამის გათვალისწინებით, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ რეზულტანტის უკვე ცნობილი ცნება, შევცვლით რა (1.9) მა-

ტრიცის ელემენტებს სათანადო პოლინომური კოეფიციენტებით. შედეგად მივიღებთ რაღაც პოლინომს y-ის მიმართ, რომელსაც ჩვენ $R_x(f,g)(y)$-ით აღვნიშნავთ. ანალოგიურად ვღებულობთ აგრეთვე $R_y(f,g)(x)$ პოლინომს. ამ პოლინომებს კერძო რეზულტანტები დავარქვათ. მათი როლი ჩანს შემდეგი შედეგებიდან.

წინადადება 3.1. y_0 რიცხვი წარმოადგენს $R_x(f,g)$ რეზულტანტის ფესვს ზუსტად მაშინ, როდესაც (1.8) სისტემას გააჩნია (x_0,y_0) სახის ფესვი.

მართლაც, ეს უშუალოდ გამოდის რეზულტანტის მახასიათებელი თვისებებიდან, რაშიც მკითხველი თვითონ უნდა დარწმუნდეს.

მაშასადამე, აგებულ კერძო რეზულტანტებს ფესვად გააჩნია (1.8) სისტემის ფესვთა შესაბამისი კოორდინატები. ამგვარად, გარკვეული აზრით რეზულტანტები საშუალებას გვაძლევენ სისტემის ამოხსნა დავიყვანოთ ერთუცნობიანი პოლინომური განტოლების ამოხსნამდე. თუმცა, ამ დროს თავს იჩენს გარკვეული სიძნელეები პირველი და მეორე კოორდინატის მნიშვნელობათა სწორი შეთავსების შერჩევასთან დაკავშირებით, მაგრამ ისინი არ არიან დაუძლეველნი. ბოლოს ვღებულობთ პოლინიმურ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის რაღაც მეთოდს, რომელმაც მიიღო გამორიცხვის მეთოდის სახელწოდება [2]. ის მართებულია ორი უცნობის შემთხვევაში, მაგრამ კარგავს ეფექტურობას უცნობთა რაოდენობის გაზრდის შემთხვევაში, განსაკუთრებით ზოგად სისტემათა ტოპოლოგიური თვისებების განხილვისას.

ამასთან დაკავშირებით აღვნიშნავთ, რომ ბევრი ქვემოთ მოყვანილი შედეგი შეიძლება აღქმული იქნეს როგორც უფრო ეფექტური მიდგომების შემუშავება, ვიდრე ეს კლასიკური მეთოდებით შესაძლო იყო.

ყოველივე ზემოთქმულის შემდეგ მკითხველს არ გააკვირვებს შემდეგი წინადადება, რომლის დამტკიცებასაც აგ-

რეთვე სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ.

წინადადება 3.2. (1.8) სახის საკუთრივი სისტემის ფესვის ჯერადობა ტოლია მის კოორდინატთა ჯერადობების ნამრავლისა, როგორც სათანადო კერძო რეზულტანტების ფესვებისა.

პარაგრაფის დასასრულს გვინდა შემოგთავაზოთ გამოიყენოთ ეს შედეგები რამდენიმე მარტივ მაგალითში.

§ 4. ერმიტის სიგნატურული მეთოდი

ამ თავში ჩვენ აღვწერთ ალგებრულ განტოლებათა ნამდვილი ფესვებისა და კვადრატული ფორმების სიგნატურათა შორის არსებულ საგულისხმო კავშირს, რომელიც XIX საუკუნის შუა ხანებში იქნა აღმოჩენილი. მეთოდის გაფორმებაში უდიდესი წვლილი მიუძღვის შ. ერმიტს [12], [13] რომელმაც არსებითად გამოიყენა ჟ. შტურმის, ჯ. სილვესტრის და კ. იაკობის ადრინდელი გამოკვლევები. კერძოდ, მთავარი როლი ითამაშა ინერციის განთქმულმა კანონმა კვადრატული ფორმებისათვის, რომელიც 1852 წელს აღმოჩენილი იქნა ჯ.სილვესტრის მიერ [2]. შემდგომში ჩვენ დავინახავთ, რომ იდეებმა, რომლებიც ამ მეთოდს საფუძვლად უდევს, ჩვენს დღეებამდე შეინარჩუნეს აქტუალობა და მათმა თანამედროვე განვითარებამ განსაკუთრებულობათა თეორიის ფარგლებში შესაძლებელი გახადა მთელი რიგი მნიშვნელოვანი კლასიკური ამოცანის ამოხსნა [16], [17]. კვადრატული ფორმების ინერციის კანონის პირველი გამოყენება ერთუცნობიან ალგებრულ განტოლებათა ნამდვილი ფესვების შესასწავლად ნაპოვნი იქნა კ. იაკობის მიერ იმ თვალსაზრისით, რათა სრულყოფილი და ეფექტური გაეხადა შტურმის განთქმული ალგორითმი. იდეის ჩასახვა და განვითარება უფრო ნათელი რომ გახდეს, დავიწყებთ მისი შედეგების გადმოცემით, რასაც წინ აუცილებელ ცნებებს წავუმძღვარებთ.

შეგახსენებთ, რომ კვადრატული ფორმა ეწოდება მეორე ხარისხის ერთგვაროვან ფორმას, ანუ

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{4.1}$$

სახის გამოსახულებას.

უნდა ავღნიშნოთ, რომ ჩვენ აქ უკვე დაგვჭირდება ფორმები ცვლადთა ნებისმიერი რაოდენობისთვის, რამდენადაც ისინი ბუნებრივად წარმოიქმნებიან ერთცვლადიან პოლინომთა შესწავლის დროს. კარგადაა ცნობილი [2], რომ ყოველი ისეთი ფორმა უცნობთა გადაუგვარებელი $y = Tx$ სახით გარდაქმნით, შეიძლება მიყვანილ იქნას დიაგონალურ სახეზე:

$$Q(y) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_{k-l}^2. \tag{4.2}$$

ეს, ცხადია, შესაძლებელია გაკეთდეს სხვადასხვა გადაუგვარებელ გარდაქმნათა საშუალებით, მაგრამ კვადრატული ფორმების ინერციის კანონი გვამცნობს, რომ არანულოვან კვადრატთა რიცხვი, ისე როგორც დადებით და უარყოფით კვადრატთა რაოდენობის სხვაობა, იმ დიაგონალური ფორმისათვის გარდაქმნის არჩევანზე არ არის დამოკიდებული [2]. ამ რიცხვებს, შესაბამისად, რანგი და კვადრატული ფორმის სიგნატურა ეწოდება. კვადრატულ ფორმას ეწოდება არაგადაგვარებული, თუ მისი რანგი უცნობთა რიცხვის ტოლია, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $\mathrm{rk}A = n$, სადაც $A = (a_{ij})$ ფორმის მარტიცაა.

ხაზს გავუსვამთ იმას, რომ აქ არსებითია მხოლოდ ნამდვილკოეფიციენტებიანი ფორმის განხილვა, ხოლო თუ დავუშვებთ კომპლექსურ გარდაქმნებს, მაშინ ყველა დიაგონალური ფორმის კვადრატი შეიძლება დადებითი გავხადოთ, ასე რომ რჩება მხოლოდ ერთი ინვარიანტი — რანგი.

გარდა ამისა, ჩვენ მოგვიწევს გავიხსენოთ ზოგიერთი რამ

შორეული წარსულიდან; კერძოდ ვიეტის ფორმულები და ნიუტონის ჯამები (იხ. [2]).

შეგახსენებთ, რომ (1.1) სახის პოლინომის ნიუტონის ჯამები ეწოდება

$$S_k = x_1^k + \ldots + x_n^k,\ \{x_1, \ldots, x_n\} = f^{-1}(0) \qquad (4.3)$$

სახის ჯამებს, სადაც $k \in \mathbf{N}$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. სიმარტივისთვის ვიგულისხმებთ, რომ $a_n = 1$.

$x_1, \ldots, x_n$ ცვლადთა ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციები ეწოდება შემდეგ ფუნქციებს:

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n,$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n, \ldots, \sigma_n = x_1 \ldots x_n \qquad (4.4)$$

ვიეტის ფორმულები გამოხატავენ იმ გარემოებას, რომ პოლინომის ფესვების ელემენტარული სიმეტრიული (4.4) ფუნქციები მარტივად არიან დაკავშირებული მის კოეფიციენტებთან [2]:

$$\sigma_1 = -a_{n-1}, \ldots, \sigma_n = (-1)^n a_0. \qquad (4.5)$$

ეს კავშირი განსაკუთრებით სასარგებლოა, რადგან იგი საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ ძირითადი თეორემა სიმეტრიულ პოლინომთა შესახებ. შეგახსენებთ, რომ $f \in \mathbf{C}_n$ პოლინომს ეწოდება სიმეტრიული, თუ ის არ იცვლის თავის მნიშვნელობას ცვლადთა ნებისმიერი გადანაცვლებისას, ანუ

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x), \qquad (4.6)$$

სადაც $\sigma \in S_n$, ხოლო S_n სიმეტრიული ჯგუფია, რომელიც შედგება n ელემენტებიანი სიმრავლის ყველა გადანაცვლები-

საგან [2]. ძირითადი თეორემა სიმეტრიული ფუნქციების შესახებ გვამცნობს, რომ თითოეული სიმეტრიული პოლინომი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას როგორც პოლინომი ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციებისაგან [2].

ვინაიდან ნიუტონის ჯამები ფესვთა ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციებია, ვასკვნით, რომ ისინი წარმოდგებიან, როგორც პოლინომები საწყისი პოლინომის კოეფიციენტებისაგან. შესაბამის ფორმულებს ვარინგის ფორმულები ეწოდება [2]. ისინი შეიძლება იოლად იქნან მიღებული ნიუტონის რეკურენტული ფორმულებიდან, რომლებიც ემსახურებიან ნიუტონის ჯამების გამოთვლას.

მოვიყვანთ ვარინგის რამდენიმე ფორმულას კვადრატული პოლინომისათვის:

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1^2 + x_2^2 = b^2 - 2c, \quad x_1^3 + x_2^3 = b^3 + 3bc.$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ ყოველთვის სრულდება ტოლობები:

$$x_1 + ... + x_n = -a_{n-1}, \quad x_1^2 + ... + x_n^2 = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}.$$

როგორც ირკვევა, სიგნატურული მეთოდის გადმოსაცემად საკმარისია ეს რამდენიმე კლასიკური ფაქტი.

მეთოდი პირველად გაჩნდა $f(x) = 0$ განტოლებასთან დაკავშირებით, რომლისთვის იაკობიმ შემოგვთავაზა დამხმარე კვადრატული ფორმის შემოტანა

$$Q_f(\xi_0, ..., \xi_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\xi_0 + x_k \xi_1 + x_k^2 \xi_2 + ... + x_k^{n-1} \xi_{n-1})^2, \tag{4.7}$$

სადაც $x_1, ..., x_n$ - განტოლების ყველა ფესვია.

მსგავს წევრთა უბრალო დაყვანა გვიჩვენებს, რომ

$$Q_f(\xi) = \sum_{k,l=0}^{n-1} s_{k+l}\xi_k\xi_l, \tag{4.8}$$

ასე რომ, ზემოთაღნიშნულის თანახმად, ამ ფორმის კოეფიციენტები გამოისახებიან საწყისი f პოლინომის კოეფიციენტთა საშუალებით.

იაკობიმ შენიშნა, რომ ყოველი ორი კვადრატი, რომელიც შეესაბამება ორ კომპლესურ-შეუღლებულ ფესვს, მარტივი გარდაქმნის შემდეგ იძლევა

$$(P+Qi)^2 + (P-Qi)^2 = 2P^2 - 2Q^2$$

სახის ჯამს, სადაც P და Q წარმოადგენენ წრფივ ნამდვილ ფუნქციებს $\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}$ ცვლადებისგან. ამრიგად, თუკი ფესვთა შორის არის p სხვადასხვა ნამდვილი ფესვი და q კომპლექსურ-შეუღლებული ფესვთა წყვილი, Q_f ფორმის დიაგონალური სახის დადებით კვადრატთა რიცხვი არის $p+q$, ხოლო უარყოფით კვადრატთა რიცხვი არის q. აქედან გამომდინარე, მისი სიგნატურა ტოლია განტოლების ნამდვილ ფესვთა რაოდენობას.

ამ დაკვირვების სიმარტივის მიუხედავად, მას გააჩნია ფუნდამენტური მნიშვნელობა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, იგი ერმიტის მიერ იქნა დამოუკიდებლად აღმოჩენილი, თანაც ცოტა უფრო ზოგადი სახითაც. ამის გათვალისწინებით, შტურმის რიცხვი ხდება ალგებრულად გამოთვლილი, რადგან ამისათვის, სილვესტრის ცნობილი თეორემის თანახმად, საკმარისია უბრალოდ გამოვთვალოთ აგებული ფორმის მატრიცის კუთხური მინორები [2].

აქ თავიდანვე ჩანს ამ კონსტრუქციის ნაკლი. თუკი ფესვთა შორის არიან ჯერადები, მაშინ ფორმის რანგი ეცემა და გაუგებარი ხდება, რითაც გამოწვეულია სიგნატურის შესაბამისი ცვლილება. თუ საკითხს უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ, შეიძლება ნათელი მოვფინოთ ზოგიერთ გადაგვარებულ შემ-

თხვევას, მაგრამ ეს სპეციფიკურია ერთუცნობიანი შემთხვევისათვის. რამდენიმე უცნობის შემთხვევაში ამ ნაკლის დაძლევა კლასიკური მეთოდებით ვერ მოხერხდა და საჭირო გახდა განსაკუთრებულობათა თეორიის შედეგების გამოყენება.

ახლა კი ვნახოთ იაკობის კონსტუქციის გამოყენება რაიმე მაგალითისთვის. ჯერ განვიხილოთ $x^2+px+q=0$ სახის კვადრატული განტოლება. ამ განტოლებისათვის კარგადაა ცნობილი ნამდვილი ფესვების არსებობის საკმარისი პირობა: $p^2-4q\geq 0$. სასარგებლოა ეს შედეგი მივილოთ იაკობის კონსტრუქციის საშუალებით, რასაც ჩვენ მარტივ სავარჯიშოს სახით ვთავაზობთ მკითხველს. საინტერესოა აგრეთვე ანალოგიური გამოკვლევა $x^3+px+q=0$ სახის კუბური განტოლებისათვის. ცხადია, აქ იგულისხმება, რომ p და q ნამდვილი რიცხვებია.

ახლა უკვე შეგვიძლია გადავიდეთ ერმიტის ძირითადი შედეგის აღწერაზე (იაკობის განხილული არ ჰქონდა სისტემების შემთხვევა).

ამისათვის საჭიროა ვიგულისხმოთ, რომ (1.8) სისტემა საკუთრივია, ასე რომ, ბეზუს თეორემის თანახმად, მას გააჩნია ზუსტად $N=m\cdot n$ ფესვი ჯერადობის გათვალისწინებით. გადმოსაცემი მეთოდისათვის არსებითია დაშვება, რომ ყველა ფესვი მარტივია. ასეთ სისტემებს, ერთცვლადიანი პოლინომის შემთხვევის ანალოგიით, სეპარაბელურს ვუწოდებთ. ამ შემთხვევაში სისტემას გააჩნია N სხვადასხვა ფესვი, რომლებსაც ჩვენ აღვნიშნავთ $z_1,\ldots,z_N$, $z_j=(\alpha_j,\beta_j)$.

დაგვჭირდება კიდევ ერთი დაშვება, რომლის მოტივირებასაც თავიდან გავაკეთებთ. რამდენადაც z_j ფესვები ერთმანეთისგან განსხვავებულნი არიან, ძნელი არ არის მივხვდეთ, რომ აუცილებლობის შემთხვევაში მოვახდენთ რა კოორდინატთა სისტემის მობრუნებას, მივიღებთ რომ, მაგალითად, ფესვთა

მეორე კოორდინატები წყვილ-წყვილად განსხვავებულია. 3.1 წინადადების მიხედვით, ეს შეესაბამება იმას, რომ $R_x(f,g)(y)$ კერძო რეზულტანტი სეპარაბელურია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამ ერთცვლადიან პოლინომს არ უნდა გააჩნდეს საერთო ფესვები თავის წარმოებულთან. თანახმად ამ დაკვირვებისა, ეს პირობა ყოველთვის ალგებრულად შეიძლება შემოწმდეს. გარდა ამისა ძნელი არ არის მივხვდეთ, რომ ამ პირობის შესრულების უზრუნველსაყოფად საჭიროა კოორდინატთ სისტემის არაუმეტეს $N(N-1)$ -ჯერ მობრუნება (რატომ?)

ამგვარად, ამ პირობის შესრულებას არ ახლავს ზოგადობის რეალური დაკარგვა, ასე რომ, ჩვენ მას ყოველთვის შესრულებულად ვივარაუდებთ, ხოლო ამ შემთხვევაში საწყის სისტემას y-სეპარაბელურს ვუწოდებთ.

რა თქმა უნდა, ასეთი ვარაუდი ხელოვნურ შთაბეჭდილებას ტოვებს, მარტო მისი არასიმეტრიულობის გამო, მაგრამ ერმიტის მეთოდის ერთ-ერთი ორგანული ნაკლი ზუსტად იმაში მდგომარეობს, რომ არ შეიძლება თავიდან ავიცილოთ რაღაც ამის მსგავსი ვარაუდი. სამართლიანობისათვის უნდა დავასკვნათ, რომ „ტიპიური" სისტემა უსათუოდ სეპარაბელურია და ამასთან ორივე ცვლადის მიმართ, ასე რომ პრაქტიკულად ყველაფერი ეს არც ისე საშიშია.

ასეთი y - სეპარაბელური სისტემისთვის ერმიტმა შემოიტანა დამხმარე კვადრატულ ფორმათა მთელი სისტემა. თითოეულ ასეთ კვადრატულ Q_F^χ ფორმას

$$Q_F^\chi(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \chi(\alpha_j,\beta_j)\left[\xi_0 + \beta_j\xi_1 + \beta_j^2\xi_2 + \ldots + \beta_j^{N-1}\xi_{N-1}\right]^2$$

(4.9)

სახე აქვს, სადაც $\chi \in \mathbf{C}_2$.

ასეთ ფორმას ჩვენ ვუწოდებთ ერმიტის ფორმას χ დეტექ-

ტორით. ფორმას, რომელიც მიიღება, როცა $\chi \equiv 1$, და რომელიც თამაშობს განსაკუთრებულად მნიშვნელოვან როლს, ჩვენ დამთვლელ ფორმას ვუწოდებთ და Q_F-ით აღვნიშნავთ.

ერმიტმა ამ ფორმების გამოყენებით შეძლო არა მარტო შტურმის ამოცანის ამოხსნა, არამედ სისტემის კომპლექსურ ფესვთა დაცალკევების ამოცანის ამოხსნაც. ჩვენ მისი შესანიშნავი ნაღვაწიდან გამოვარჩევთ მხოლოდ იმ შედეგებს, რომლებიც უშუალოდ არიან დაკავშირებული შტურმის ამოცანასთან. ამ მიმართულებით პრინციპული მნიშვნელობა გააჩნია შემდეგ თეორემას.

თეორემა 4.1 (ერმიტის სიგნატურული ფორმულა) [13] (1.8) სახის y- სეპარაბელური სისტემის დამთვლელი კვადრატული Q_F ფორმა გადაუგვარებელია და მისი სიგნატურა სისტემის ყველა ნამდვილ ფესვთა რიცხვის ტოლია. ამასთან, დამთვლელი ფორმის კოეფიციენტები შეიძლება პოლინომურად გამოსახულნი იქნან მოცემულ განტოლებათა კოეფიციენტების საშუალებით.

ჩვენ ვხედავთ, რომ შტურმის რიცხვის გამოთვლა დაიყვანება ეფექტურად გამოთვლად კვადრატული ფორმის სიგნატურის გამოთვლამდე, ასე რომ ამ შემთხვევაში შტურმის ამოცანა სრულად ამოხსნადია.

ერმიტის თეორემის დამტკიცება რთული არაა და შეიძლება მიღებულ იქნას იაკობის თეორემის შემთხვევის ანალოგიურად. ამისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ რეზულტანტის ძირითადი თვისება და შემდეგი ფაქტები.

უპირველეს ყოვლისა, აუცილებელია გვახსოვდეს კვადრატული ფორმის მატრიცის გარდაქმნის ფორმულა $A_y = T^* A_x T$, სადაც $y = Tx$ კოორდინატთა არაგადაგვარებული გარდაქმნაა [2]. მეორე — ის, რომ მატრიცთა ნამრავლის რანგი არ აღემატება თითოეულ თანამამრავლთა რანგს. კერძოდ, თუ ორი მატრიცის ნამრავლი გადაუგვარებელია, მაშინ თითოეული მათგანი გადაუგვარებელია (ცხადია, ეს პირდაპირ

გამომდინარეობს დეტერმინანტის მულტიპლიკაციურობის თვისებებიდანაც) [2].

საჭიროა აგრეთვე ვანდერმონდის $V(x_1,\dots x_n)$ მატრიცის განსაზღვრება, რომლის სტრიქონებიც არის $(x_1^k,\dots,x_n^k)$, $k=0,\dots,n-1$. შეგახსენებთ, რომ $V(x_1,\dots x_n)$ მატრიცის დეტერმინანტი უდრის $\prod_{j\neq k}(x_j-x_k)$ ნამრავლს.

დამტკიცების დეტალები მოყვანილია [19] წიგნში. აღვნიშნოთ, რომ ერმიტის მეთოდის უეჭველ ღირებულებას წარმოადგენს ძირითად კონსტრუქციათა სიმარტივე და მიღებული შედეგების ზოგადობა, ხოლო მთავარ პრინციპულ ნაკლს წარმოადგენს სეპარაბელურობის პირობის აუცილებლობა და შტურმის ამოცანის სეპარაბელური სისტემის შემთხვევამდე დაყვანის ზოგადი წესის უქონლობა. ამასთან დაკავშირებით ჩვენ ვიგულისხმებთ შემდეგს.

ერმიტის კონსტრუქციის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ჯერადი ფესვების შემთხვევაში უკვე არ შეიძლება ფორმალურად გავიმეოროთ (4.9) სახის ფორმის სიგნატურის გამოთვლა, რადგანაც ამას არასწორ პასუხებამდე მივყავართ. მაშასადამე, საჭიროა დამთვლელი ფორმის კონსტრუქციის შეცვლა, რასაც ჯერ კიდევ ერმიტი მიმართავდა, მაგრამ ვერც ერთი ასეთი მოდიფიკაცია ვერ იქნა ნაპოვნი. ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელი აღმოჩნდა სრულიად სხვა მოსაზრებით და მხოლოდ მერე გამოირკვა, რომ იგი შეიცავს ერმიტის კონსტრუქციის მოდიფიკაციას.

პრინციპში შესაძლებელია მდგომარეობის გამოსწორების სხვა გზაც მოისინჯოს, რომელიც საწყისი სისტემის დეფორმაციის იდეას ემყარება. ამისთვის საჭიროა სისტემის ისეთი დეფორმაციის მოფიქრება, რომლის დროსაც არც ერთი ნამდვილი ჯერადი ფესვიდან არ წარმოიქმნება კომპლექსურ-შეუღლებულ ფესვთა წყვილები. მაგრამ წარმატება ვერც ამ გზით იქნა მიღწეული, თუმცა მან წამოჭრა რამდენიმე საინტერესო და აქტუალური ამოცანა განსაკუთრებულობათა დეფორმაციების თეორიაში [19]. მოგვიანებით ჩვენ კიდევ გან-

ვიხილავთ ზოგიერთ ასეთ ამოცანას, ახლა მხოლოდ გაკვრით შევეხეთ მათ, რათა წარმოვაჩინოთ ის, თუ რა სტიმული მისცა ერმიტის მეთოდმა ბევრ მიმართულებას.

დღევანდელ პრაქტიკაში, მართლაც, უფრო სწრაფად და მარტივად ხერხდება მიახლოებითი გამოთვლის მეთოდების გამოყენება, მაგრამ უხერხულიც კი იქნება არ გამოვიყენოთ ასეთი შესანიშნავი მეთოდი თუნდაც ერთი მარტივი მაგალითის შემთხვევაში. ამიტომ პარაგრაფის დასასრულს გთავაზობთ ამ მეთოდის გამოყენებით გამოიკვლიოთ შტურმის ამოცანა $\{x^2 - y^2 - \varepsilon x = 0, 2xy + \varepsilon y = 0\}$ სისტემისათვის, მით უფრო, რომ იგი ჩვენ კიდევ შეგვხდება.

თავი II
„ნაშალე შემთხვევითი ნიშნები“

ამ თავში ჩვენ უნდა ჩავუღრმავდეთ განსაკუთრებულობათა თეორიის იდეათა სამყაროში. მისი ერთი უმნიშვნელოვანესი მიმართულებათაგანი დაკავშირებულია კლასიკოსის მოწოდებასთან, რომელიც სათაურშია გამოტანილი. სინამდვილეში განსაკუთრებულობათა თეორია ისწრაფვის გამოყოს განსახილველი ობიექტების ტიპიური, ზოგადი ნიშნები და გამოიმუშაოს გადაგვარებული არამდგრადი სიტუაციებისაგან თავის დაღწევის მეთოდები [6]. ბუნებისმეტყველების თვალსაზრისით ასეთი მიდგომის დასაბუთება იმაში მდგომარეობს, რომ ბუნებაში არ შეიძლება არსებობდნენ სტრუქტურულად არამდგრადი ობიექტები და პროცესები, თუმცა შემთხვევით ფლუქტუაციებისა და ხელოვნური ფაქტორების ზემოქმედებას შეუძლიათ მიგვიყვანოს არამდგრად მოვლენებთან. ამიტომ მყარი ობიექტების ძიებამ და შესწავლამ შეიძლება ხელი შეუწყოს ბუნების კანონების უფრო ღრმა გაგებას.

ამ პრინციპს, გარდა ფილოსოფიურისა, პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია. იგი რამდენადმე საშუალებას იძლევა

შევიმუშაოთ ნებისმიერი ობიექტების შესწავლის მეთოდიკა ახლებურ ობიექტთა განხილვის გზით, რასაც მივყავართ ახალი ტიპის კონკრეტული შედეგების დიდი რაოდენობით მიღებასთან, საბოლოოს კი მრავალი კლასიკური შედეგების დაზუსტებასთან და განზოგადებასთან [6]. კერძოდ, წინამდებარე წიგნში ჩვენ ვცდილობთ მინიატურაში ავსახოთ მათემატიკური ანალიზის ტოპოლოგიური მეთოდების განვითარების ეს ხაზი.

განსაკუთრებულობათა თეორიას, რომელიც უკვე სრულიად სამართლიანად გაფორმდა როგორც მათემატიკური ანალიზის დამოუკიდებელი დარგი, საფუძველი ჩაეყარა 1955 წელს გამოქვეყნებული ჰასლერ უიტნის სახელგანთქმული ნაშრომით, რომელშიც მთლიანადაა ამოხსნილი სიბრტყის მდგრადი ენდომორფიზმების კლასიფიკაციის ამოცანა (იხ. [10]). ამ მიმართულებით უიტნის უშუალო წინამორბედი იყო მარსტონ მორსი, რომელმაც ააგო უკვე კლასიკურად ქცეული თეორია გლუვ ფუნქციათა კრიტიკული წერტილების შესახებ [27], რაც, არსებითად, ფუნქციათა მდგრად განსაკუთრებულობათა თეორიას წარმოადგენს, მაგრამ მეთოდურად მისი გამოკვლევები ტარდებოდა ვარიაციული აღრიცხვის ფარგლებში.

ორივე ეს შესანიშნავი თეორია მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ჩვენს მიდგომაში შტურმის ამოცანისადმი. ამიტომ ჩვენ ვსარგებლობთ შემთხვევით თუნდაც მოკლედ გადმოვცეთ ისინი სათანადო კომენტარით. გარდა ამისა, უიტნის შედეგები საშუალებას გვაძლევს უფრო მოკლედ და თვალსაჩინოდ გადმოვცეთ ასახვის ხარისხის თეორია, ვიდრე საყოველთაოდაა მიღებული. ამის გარდა, ამ შედეგების გადმოცემის პროცესში ბუნებრივად იჩენს თავს ზოგიერთი ისეთი ცნება, რომელიც არსებითია ძირითადი პრობლემების ამოხსნისათვის ჩვენი მიდგომის გასაგებად.

რაღაც გაგებით ამ საკითხებში ტოპოლოგია გვეხმარება

უვნებელვყოთ მრავალი ანალიზური პათოლოგია, რაზეც მიუთითებს პარაგრაფის სათაური.

§ 5. ტოპოლოგია პათოლოგიის წინააღმდეგ

ჩვენ ახლა აღვწერთ განსაკუთრებულობათა თეორიის მნიშვნელოვან ტოპოლოგიურ პრინციპს, რომლის თანახმადაც გადაგვარებულ ობიექტის როგორადაც გნებავთ ახლოს მოიძებნება ანალოგიური, მაგრამ უკვე მდგრადი ობიექტი სიტყვის ჩვეულებრივი გაგებით. მაგალითად, ჯერად ფესვებიან პოლინომთან ნებისმიერად ახლოს არიან სეპარაბელური პოლინომები. ჩვენ დავინახეთ აგრეთვე, რომ თითქმის ყველა კოორდინატთა სისტემაში, გარდა ასეთი სისტემათა სასრული სიმრავლისა, სეპარაბელურ სისტემათა ფესვები წარმოადგენენ y-ის სეპარაბელურ სისტემას. ამგვარი მაგალითების რიცხვი უსასრულოდ შეიძლება გავზარდოთ, მაგრამ ამ დაკვირვებათა განზოგადების მცდელობა მოითხოვს ძირითად ცნებათა წინასწარ ანალიზს.

უწინარეს ყოვლისა, ჯერ საჭიროა ზუსტი მნიშვნელობა მივანიჭოთ მდგრადი ობიექტის ცნებას, მოცემულ შემთხვევაში — ევკლიდეს სივრცის მდგრად პოლინომურ ენდომორფიზმის ცნებას. არსებობს მდგრადობის რამდენიმე სასარგებლო განმარტება, მაგრამ ჩვენ ჩვენი მიზნისათვის უფრო შესაფერისი და ყველაზე მარტივი განმარტებით შემოვიფარგლებით. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მდგრადობის ცნება ასახვათა სივრცეში რაღაც ტოპოლოგიას გულისხმობს იმდენად, რამდენადაც ჩვენ მცირე შეშფოთებათა განხილვა გვსურს. საკუთარი ენდომორფიზმების შესწავლის დროს ჩვენ უკვე შევხვდით მოცემული ხარისხის პოლინომთა სივრცეში ბუნებრივ ტოპოლოგიას. იქ ჩვენ პოლინომი უბრალოდ გავაიგივეთ მის კოეფიციენტთა მიმდევრობასთან, ხოლო ასეთი მიმდევ-

რობები წარმოქმნიან სასრულგანზომილებიან ვექტორულ სივრცეს. სათანადო ტოპოლოგიას ეწოდება კოეფიციენტური ტოპოლოგია. იგი კარგად გაოიყენება, როცა განსახილველი პოლინომების ხარისხი შეზღუდულია ამოცანის პირობებით, მაგრამ უიტნის თეორიაში ასეთი პირობა უადგილოა და მთელ საქმეს აფუჭებს. ამიტომაც უნდა განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივები, რომელთაგან თითოეულში შეიძლება იყოს არანულოვან წევრთა უსასრულო რაოდენობა. მართლაც, ბევრ შემთხვევაში ხარისხოვანი მწკრივი „უსასრულო ხარისხის" პოლინომს გვაგონებს, ხოლო პოლინომი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც „ფინიტური" ხარისხოვანი მწკრივი. მაგრამ ამ დროს იქმნება ზოგიერთი უხერხულობა. როგორც ჩანს, გაცილებით მოსახერხებელია გადავდგათ კიდევ ერთი ნაბიჯი და განვიხილოთ არა უბრალო მწკრივები, არამედ წარმოვიდგინოთ ისინი რაღაც ფუნქციათა ტეილორის მწკრივებად, სათანადო კლასს წარმოადგენენ უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციები, რომელსაც უძახიან აგრეთვე გლუვ ანუ C^∞ კლასის ფუნქციებს [3]. ასეთი ფუნქციების საშუალებით გაცილებით თავისუფლად შეიძლება სხვადასხვანაირი ტოპოლოგიურ კონსტრუქციათა წარმოება, ასე რომ გლუვ ასახვათა კლასი განსაკუთრებულობათა თეორიისათვის ბუნებრივ ჩარჩოებს იძლევა. ამიტომ ჩვენ შევუდგებით ამ კლასში ჩვენთვის საჭირო ტოპოლოგიის ზუსტ აღწერას.

გამოვიყენებთ სტანდარტულ შემოკლებულ აღნიშვნებს ფუნქციის კერძო წარმოებულებისათვის. სახელდობრ, ყოველი მთელრიცხვოვანი ერთობლიობისათვის, რომელსაც ეწოდება მულტიინდექსი $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, $D_\alpha f$-თი აღვნიშნოთ კერძო წარმოებული

$$D_\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \; |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

რადგანაც ყველა გლუვი ასახვის $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ სივრცე წარ-

მოადგენს ვექტორულ სივრცეს, საკმარისია განვმარტოთ მცირე ასახვის ცნება. ამისათვის, თავის მხრივ, საკმარისია აღვწეროთ ნულოვანი ასახვის მიდამოთა ბაზა [25]. ამ ბაზის მიდამოს ინდექსად ჩვენ ავიღებთ (k,ε) წყვილებს, სადაც $k \in \mathbf{N}$, ხოლო $\varepsilon: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$- ნებისმიერი უწყვეტი მკაცრად დადებითი ფუნქციაა.

განმარტების მიხედვით $U(k,\varepsilon)$ მიდამო შედგება ყველა ისეთი $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ ასახვებისგან, რომ $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$\left| D_\alpha f_j(x) \right| < \varepsilon(x), \quad \forall j = 1,\ldots,m, \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n, \quad |\alpha| \leq k. \quad (5.1)$$

$U(k,\varepsilon)$ სახის მიდამოები ქმნიან გარკვეული ტოპოლოგიის ნულის მიდამოთა ბაზას. ამ ტოპოლოგიას უიტნის ანუ ძლიერი ტოპოლოგია ეწოდება [10]. ნებისმიერი ჩაკეტილი $K \subset \mathbf{R}^n$ ქვესიმრავლისათვის ინდუცირდება ანალოგიური ტოპოლოგია. ასახვათა სივრცეს ამ ტოპოლოგიით ჩვენ აღვნიშნავთ $C_s(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$.

უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ ε ფუნქციების მაგივრად უბრალოდ დადებით რიცხვს ავიღებთ, მაშინ მივიღებთ კიდევ ერთ ტოპოლოგიას. ამ განმარტებებს რომ შევეჩვიოთ სასარგებლოა დამოუკიდებლად დავრწმუნდეთ, რომ ახალი ტოპოლოგია უფრო სუსტია, ანუ მას აქვს ნაკლები ღია სიმრავლეები, ვიდრე უიტნის ტოპოლოგიას [10].

აგრეთვე შევახსენებთ, რომ გლუვი ასახვების მნიშვნელოვან კლასს წარმოადგენენ ეგრეთწოდებული ფინიტური ასახვები, რომლებსაც კომპაქტური მატარებელი გააჩნიათ. გლუვი ფუნქციების პოლინომებისაგან განსხვავებული ნიშანი სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ გლუვი მცირე შეშფოთებები შეიძლება ამორჩეული იქნეს ფინიტური, რაც საშუალებას გვაძლევს შესწორება შევიტანოთ ასახვის ქცევაში ჩვენთვის საინტერესო მიდამოში ისე, რომ თითქმის არავითარი ზემოქ-

მედება არ მოვახდინოთ მის ქცევაში მოშორებულ წერტილებში. პოლინომთა კლასში, ცხადია, ეს შეუძლებელია, ვინაიდან პოლინომი, რომელიც ნულის ტოლია არატრივიალურ ღია სიმრავლეზე არის ყველგან ნული.

ამასთან დაკავშირებით ძალიან სასარგებლოა გავიხსენოთ ანალიზის კურსიდან ცნობილი გლუვი ფინიტური ფუნქციების კონსტრუქცია და ერთეულის დაყოფის ცნება [14].

შეგახსენებთ, რომ დიფეომორფიზმი ეწოდება ისეთ გლუვ ასახვას, რომელსაც გააჩნია შებრუნებული ასახვა, და ეს უკანასკნელი გლუვი ასახვაა.

ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ ყველა გლუვი ჰომეომორფიზმი როდი წარმოადგენს დიფეორმმორფიზმს. მაგალითად, ასახვა $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$, ცხადია, ჰომეომორფოზმია, მაგრამ შებრუნებული ასახვა $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ უკვე არ არის უსასრულოდ გლუვი ნულის მიდამოში. როგორც ვხედავთ, იმ წერტილში ასახვის იაკობიანი ნულოვანია. შეამოწმეთ, რომ გლუვი ჰომეომორფიზმი, რომლის იაკობიანი ყველგან განსხვავებულია ნულისგან, დიფეომორფიზმს წარმოადგენს [10]. აღვნიშნოთ, რომ ეს დიფეომორფიზმთა აგების ძირითადი ხერხია.

განსაკუთრებულობათა თეორიის მნიშვნელოვანი ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ ასახვის ლოკალური შესწავლის დროს წინასწარ ცდილობენ მისი კომპონენტების ანალიზური გამოხატულების მაქსიმალურად გამარტივებას. ამ ხერხს სასკოლო მათემატიკაშიც ვხვდებით განტოლებათა გამარტივებისას ახალ უცნობთა შემოტანის საშუალებით, ხოლო წრფივ ალგებრაში, მაგალითად, კვადრატული ფორმის დიაგონალიზაციის ან მატრიცის ჟორდანული ნორმალური ფორმის პოვნის დროს [2]. ამასთან დასაშვებად შეიძლება ჩაითვალოს უცნობთა გარდაქმნა, ანუ კოორდინატთა შეცვლის, სხვადასხვა კლასები. მაგალითად, წრფივ ალგებრაში დასაშვებია მხოლოდ შებრუნებადი წრფივი გარდაქმნები, რომლის

დროს კოორდინატთა შეცვლა მოცემულია გადაუგვარებელი მატრიცით. სრულიად ბუნებრივია, რომ განსაკუთრებულობათა თეორიაში ასეთ გარდაქმნებად გამოდიან ლოკალური დიფეომორფიზმები, ანუ კოორდინატთა ლოკალური შეცვლები. კოორდინატთა შეცვლები მნიშვნელოვანია კიდევ იმიტომ, რომ საშუალებას გვაძლევს ზუსტი აზრი მივანიჭოთ მდგრადობის ცნებას.

მართლაც, მდგრადობა ინტუიციურად გამოხატავს, რომ მცირე შეშფოთების შემთხვევაში (ჩვენ უკვე გაგვაჩნია მცირე შეშფოთების განსაზღვრება) ობიექტმა უნდა შეინარჩუნოს ყველა თავისი არსებითი თვისებები. მაგალითად, თუ საქმე გვაქვს ასახვასთან, მაშინ შეშფოთებული ასახვა ზუსტად ისევე უნდა გამოიყურებოდეს. კერძოდ, ტიპიურ წერტილებს უნდა გააჩნდეთ წინასახეთა იგივე რიცხვი, უნდა ინარჩუნებდნენ გრადიენტული ვექტორული ველის ტრაექტორიების ქცევას და ა.შ. აქედან გამომდინარე, ძალზე მნიშვნელოვანია ზუსტად და სწორად განვსაზღვროთ, თუ როგორ ობიექტებს მივიჩნევთ ჩვენ ერთნაირად. ამ მიზნით განსაკუთრებულობათა თეორიაში შემოაქვთ შემდეგი ძირითადი განსაზღვრებები.

განსაზღვრება 5.1. $f_0, f_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ორ გლუვ ასახვას ეწოდება გლუვად ეკვივალენტური, თუკი არსებობენ ისეთი დიფერმორფიზმები $h : \mathbf{R}^n \circlearrowleft$, $k : \mathbf{R}^m \circlearrowleft$, რომ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f_0} & \mathbf{R}^m \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{R}^m \end{array} \qquad (5.2)$$

ანუ $k \cdot f_0 = f_1 \cdot h$.

ასახვებს ეწოდებათ C^∞-ეკვივალენტურები p წერტილში, თუკი არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო U და ისეთი დი-

ფეომორფიზმები $h:U \to U$ და $k:k(U)$ ⮌, რომ $k \cdot f_0 = f_1 \cdot h$, ანუ ადგილი აქვს მოყვანილი კომუტაციური დიაგრამის ანალოგს.

განსაზღვრება 5.2. გლუვ ასახვას $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ეწოდება მდგრადი, თუკი არსებობს ნულოვანი ასახვის ისეთი $U(k,\varepsilon)$ მიდამო უიტნის ტოპოლოგიაში, რომ ნებისმიერი $h \in U(k,\varepsilon)$ ასახვისათვის $f+h$ და f ასახვები გლუვად ეკვივალენტურია. ასახვას ეწოდება მდგრადი p წერტილში, თუ ეს სამართლიანია მისი $f\big|U$ შეზღუდვისათვის რაღაც $U \ni p$ მიდამოზე (მაშინ ამბობენ აგრეთვე, რომ მისი ყლორტი ამ წერტილში მდგრადია).

ამ განსაკუთრებულობათა დიდი ღირსება იმაში მდგომარეობს, რომ მდგრადი ასახვების სიმრავლე ღიაა უიტნის ტოპოლოგიაში, რაც ნათელია პირდაპირ განსაზღვრებიდან. უფრო მეტი, ბევრ საინტერესო შემთხვევაში მდგრად ასახვათა ქვესიმრავლე ყველგან მკვრივია $C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$-ში. ასეთ შემთხვევაში საკმარისი საფუძველი გაგვაჩნია ჩავთვალოთ, რომ მდგრადი ასახვები ტიპიურია, ხოლო სხვა დანარჩენი-გადაგვარებული, გარკვეული აზრით — პათოლოგიური. შესაბამისად ამისა, აღწერილი ტოპოლოგიური მოსაზრებები ნებას გვაძლევენ დავასკვნათ, რომ პათოლოგიური შემთხვევა ცოტაა და მათგან იოლად შეიძლება განთავისუფლება, თუ ცოტათი შევაშფოთებთ ასახვის კომპონენტებს. თუკი ჩვენ თავიდან გვაინტერესებდა ასახვის რაღაც ინვარიანტი, რომელიც მდგრადია მცირე შეშფოთებასთან მიმართებაში (მაგალითად, ჰომოტოპიურად ინვარიანტული), ნათელია, რომ საკმარისია შევისწავლოთ იგი მხოლოდ მდგრადი ასახვებისათვის. შემდეგ თავში ჩვენ გამოვიყენებთ ასეთ ხერხს ასახვის ტოპოლოგიური ხარისხის ძირითად თვისებათა დასადგენად, რომელიც, როგორც ცნობილია, ჰომოტოპიურად ინვარიანტულია [23].

ამ იდეათა სხვა ღირსება მდგომარეობს იმაში, რომ ისინი

საშუალებას გვაძლევენ ჩამოვაყალიბოთ და ამოვხსნათ ახალ კონკრეტულ ამოცანათა დიდი რიცხვი. მაგალითად, როგორია ასახვის მდგრადობის ეფექტური კრიტერიუმები? მართალია, თუ არა, რომ ყოველთვის არსებობს მდგრადი ყლორტების ტიპების მხოლოდ სასრული რიცხვი? როგორია მდგრად ყლორტთა ძირითადი ტოპოლოგიური ინვარიანტები და როგორ შეიძლება მათი გამოთვლა შესაბამისი განტოლების კოეფიციენტებით?

ყველა ეს საკითხი ფრიად მნიშვნელოვანია და შეეხება განსაკუთრებულობათა თეორიის ძირითად იდეებს. ჩვენ არ შეგვიძლია მათი დეტალურად განხილვა, მაგრამ შევეცდებით ავხსნათ ამ მიმართებაში უმარტივესი შედეგები, რადგან ისინი სრულიად აუცილებელია შტურმის ამოცანის ჩვენეული ამოხსნის ნათელი აღწერისათვის. გზადაგზა შევნიშნავთ, რომ ამ საკითხებში ტერმინი „განსაკუთრებულობა“ დამოუკიდებლად ფიგურირებს ასახვის მოხსენიების გარეშე. ეს შემთხვევითი როდია, რადგან განსაკუთრებულობა — ლოკალური ცნებაა და საკმარისია ვიცოდეთ ასახვა თუნდაც მცირე მიდამოში. ამასთან, აუცილებელი არ არის, რომ ეს ასახვა განსაზღვრული იყოს ამ მიდამოს გარეთ. ამ გარემოების გამოსახატავად ხელსაყრელია შემოვიტანოთ სპეციალური განსაზღვრება [6].

განსაზღვრება 5.3. ვთქვათ, $x \in \mathbf{R}^n$ და $\mathcal{F}$ იყოს ყველა (U,f) სახის წყვილების სიმრავლე, სადაც $U - x$ წერტილის მიდამოა, ხოლო $f: U \to \mathbf{R}^m$- რაღაც გლუვი ასახვაა. შემოვიტანოთ $\mathcal{F}$-ში ეკვივალენტობის შემდეგი მიმართება: $(U_1,f_1) \sim (U_2,f_2)$ ზუსტად მაშინ, როდესაც არსებობს x წერტილის ისეთი V მიდამო, $V \subset U_1 \cap U_2$, რომელზეც მოცემულ ასახვათა შეზღუდვები ერთმანეთს ემთხვევა: $f_1 \big| V = f_2 \big| V$. ეკვივალენტობის კლასებს ეწოდება ყლორტები x წერტილში. მათი სიმრავლე აღინიშნება $C_x^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$, ასე რომ ყოველ $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ასახვას გააჩნია ყლორტი $\widetilde{f_x}$. იმის ხაზგასასმე-

ლად, რომ საქმე გვაქვს ასახვის ყლორტთან წერენ $\tilde{f}$ ან კიდევ $\tilde{f}_x$. გლუვ ფუნქციათა ყველა ყლორტები სიმრავლე აღინიშნება აგრეთვე $\mathcal{E}_x$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ყლორტებთან შეიძლება შესრულდეს ყველა ჩვეულებრივი ალგებრული ოპერაცია, ასე რომ $\mathcal{E}_x$ წარმოადგენს კომუტაციურ $\mathbf{R}$-ალგებრას.

შეგახსენებთ, რომ ალგებრაში იმ რგოლს, რომელიც შეიცავს ერთ-ერთ საკუთრივ მაქსიმალურ იდეალს, ეწოდება ლოკალური. ნათელია, რომ $m_x = \{\tilde{f} \in \mathcal{E}_x : f(x) = 0\}$ არის მაქსიმალური იდეალი და ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს მაქსიმალური იდეალი ერთადერთია. ამგვარად $\mathcal{E}_x$ წარმოადგენს ლოკალურ $\mathbf{R}$-ალგებრას [10].

შემდეგ, როგორც ეს საკუთრივ განმარტებიდან გამომდინარეობს, ყლორტებისათვის სამართლიანია ანალიზის ბევრი ლოკალური შედეგი, მაგალითად, თეორემა შებრუნებული ასახვის და ტეილორის მწკრივის არსებობის შესახებ [6]. ამიტომ შესაძლოა ლაპარაკი განსაკუთრებულობაზეც.

სახელდობრ, ყლორტს ეწოდება განსაკუთრებული, თუ ამ კლასის რომელიმე წარმომადგენელს გააჩნია განსაკუთრებულობა მოცემულ წერტილში. შესაბამისად, როდესაც ჩვენ ზემოთ მდგრად განსაკუთრებულობათა კლასიფიკაციაზე ვსაუბრობდით, მხედველობაში გვქონდა სათანადო ყლორტთა კლასიფიკაცია C^∞- ეკვივალემტობამდე სიზუსტით. ეს განსაზღვრება მსგავსია (5.1) განსაზღვრების, მხოლოდ h -ის და k-ს როლებში უნდა ავიღოთ დიფეომორფიზმების ყლორტები.

აქ შეგვიძლია მკითხველს სიამოვნებით ვაუწყოთ, რომ ახლა უკვე ჩვენს განკარგულებაშია განსაკუთრებულობათა თეორიის ყველა ძირითადი განსაზღვრება და დაგვრჩენია მხოლოდ უკეთ გავერკვეთ მათში. ამისათვის არსებობს ნაცადი და ერთადერთი არსებითად გონივრული მეთოდი-

მაგალითების განხილვა, რაც კიდევ გვსურს შემოგთავაზოთ. ამასთან, ძირითადი ყურადღება დაეთმობა ამოცანის ტოპოლოგიურ მხარეს, ასე რომ გვერდზე დაგვრჩება ბევრი საინტერესო ასპექტი, რომელთა განსახილველად საჭირო იქნებოდა ბევრად უფრო რთული ტექნიკური საშუალებების მოხმობა.

მოდით, შევუდგეთ საქმეს მდგრადი ფუნქციების განხილვით. მათ შესახებ ამომწურავი შედეგები იქნა მიღებული ჯერ კიდევ 30-იან წლებში მ. მორსის მიერ [27].

აღმოჩნდა, რომ მდგრადი ფუნქციების სიმრავლე ღიაა და ყველგან მკვრივია უიტნის ტოპოლოგიაში. ამასთან მათ განსაკუთრებულობებს მხოლოდ ეგრეთწოდებული უნაგირები ან გადაუგვარებელი კრიტიკული წერტილები წარმოადგენენ.

შეგახსენებთ, რომ $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ გლუვი ფუნქციის ჰესეს მატრიცა ეწოდება $H(f) = (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ მატრიცას. მის დეტერმინანტს $h(f)$ ფუნქციის ჰესიანი ეწოდება. კრიტიკულ წერტილს ეწოდება გადაუგვარებელი, თუ ამ წერტილში ფუნქციის ჰესიანი ნულისგან განსხვავებულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის მეორე დიფერენციალი წარმოადგენს გადაუგვარებელ კვადრატულ ფორმას. ამ ფორმის დიაგონალიზაციაში შემავალ უარყოფით კვადრატთა რიცხვს ეწოდება კრიტიკული წერტილის ინდექსი, ამასთან იგი გადაუგვარებელი კრიტიკული წერტილის ერთადერთი ინვარიანტია [27].

აქ უნდა აღვნიშნოთ, რომ მორსის შედეგები პასუხობენ ზემოთ დასმულ ყველა კითხვას მდგრად ასახვათა კლასიფიკაციის შესახებ, ასე რომ, მორსის თეორია ნიმუშია ყველა დანარჩენი ნაშრომისათვის განსაკუთრებულობათა თეორიის დარგში. დღეს ეს თეორია გადმოცემულია ბევრ მონოგრაფიაში და სახელმძღვანელოში (იხ. [6], [10]), ამდენად აზრი არა აქვს იქ მოყვანილი დამტკიცებების გამეორებას. ნაცვლად ამისა, მიღებული წესის თანახმად, მოვიყვანოთ კომენტარ-

ები, რომლებიც სასარგებლო სამსახურს გაგვიწევენ შემდგომ გამოკვლევაში.

მორსის გამოკვლევათა ამოსავალი პუნქტი იყო მის მიერ დამტკიცებული შესანიშნავი ლემა ფუნქციის ნორმალური ფორმის შესახებ უნაგირის მახლობლობაში. იგი შეიცავს დებულებას, რომ k ინდექსის გადაუგვარებელი კრიტიკული წერტილის მიდამოში არსებობს კოორდინატთა ისეთი სისტემა, რომ f ფუნქცია ღებულობს სახეს

$$f(x) = -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2. \tag{5.3}$$

ამ ლემის დამტკიცება ახდენს კვადრატული ფორმის დიაგონალიზაციის ცნობილი პროცესის კოპირებას, მხოლოდ აქ ფორმის კოეფიციენტებში შეიძლება შედიოდნენ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე წევრები [27]. როგორც ირკვევა, ეს არაფერს არ ცვლის და ძალიან სასარგებლო იქნება მკითხველისთვის ერთხელ თვითონ დარწმუნდეს ამ მარტივ გამოთვლაში. ხაზი უნდა გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ჩვენი ტერმინოლოგიის მიხედვით იგი გამოხატავს, რომ ფუნქცია უნაგირის მიდამოში სტანდარტული კვადრატული ფორმის C^∞-ეკვივალენტურია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ასეთი კრიტიკული წერტილი მდგრადია, რადგანაც მცირე შეშფოთებები ოდნავ ცვლიან ფუნქციის მეორე წარმოებულებს, ასე რომ, ჰესიანი არანულოვანი რჩება და არ ცვლის ინდექსს. ამიტომ შეშფოთებული ფუნქცია ასეთივე კვადრატული ფორმის C^∞-ეკვივალენტური რჩება, საიდანაც ნათელი ხდება, რომ იგი საწყისი ფუნქციის C^∞-ეკვივალენტურია.

ამგვარად, აქ მდგრადი ფუნქციების ტიპების რიცხვის სასრულობა გამომდინარეობს კვადრატული ფორმების დიაგონალური ფორმების სასრულობისაგან. რაც ეხება გადაუგვარებელი ფუნქციების სიმკვრივეს, მისი დამტკიცება ხდება

სარდის ლემის საშუალებით, რომელიც უკვე ჩვენს მიერ გამოყენებული იყო ბეზუს თეორემის დამტკიცების დროს.

აღვადგინოთ მორსის ეს მსჯელობა, რამეთუ იგი მეტად მნიშვნელოვანია ასახვის ხარისხის შემდგომი შესწავლისათვის.

$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ფუნქციასთან ერთად განვიხილოთ მისი გრადიენტული ასახვა $f':\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, f'(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$. ეს გლუვი ენდომორფიზმია $\mathbf{R}^n$-ში, და განსაკუთრებულობის ზოგადი განსაზღვრებიდან დავასკვნით, რომ მისი ნულები ემთხვევიან f ფუნქციის გადაგვარებულ კრიტიკულ წერტილებს, ვინაიდან გრადიენტული ასახვის იაკობიანის მატრიცა, ნათელია, ტოლია f ფუნქციის ჰესეს მატრიცისა.

სარდის ლემის თანახმად, არსებობენ f' ასახვის ნებისმიერად მცირე რეგულარული მნიშვნელობები. ავიღოთ ასეთი $y \in \mathrm{Reg}\ f'$ და ავაგოთ ჩვენი ფუნქციის შემდეგი მცირე შეშფოთება მცირეკოეფიციენტებიანი წრფივი ფუნქციის საშუალებით

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n. \tag{5.4}$$

განსაზღვრებიდან უშუალოდ ჩანს, რომ ეს მართლაც მცირე შეშფოთებაა უიტნის ტოპოლოგიის აზრით და $\widetilde{f}$-ს გააჩნია მხოლოდ გადაუგვარებელი კრიტიკული წერტილები (შეამოწმეთ დამოუკიდებლად).

მიუხედავად უკიდურესი სიმარტივისა, ეს მსჯელობა სასარგებლოა იმით, რომ მიუთითებს „კარგი" შეშფოთების აგების ზოგად გზას სარდის ლემის დახმარებით, რომელიც წარმოადგენს მთავარ ტოპოლოგიურ საშუალებას ფუნქციათა პათოლოგიების წინააღმდეგ ბრძოლაში. ამგვარად, ჩვენ დავინახეთ ეს საშუალება მოქმედებაში უმარტივესი სიტუაციის პირობებში და დავრწმუნდით, რომ მას სრული წარმატება ხვდა წილად. ამ მაჟორულ ნოტაზე გვინდა დავამთავროთ

ამ პარაგრაფის შინაარსობრივი ნაწილი, მაგრამ დასასრულს უპრიანი იქნებოდა გაგვეკეთებინა რამდენიმე შენიშვნა.

უწინარეს ყოვლისა, საჭიროა საგანგებოდ გამოვყოთ მდგრადი კრიტიკული წერტილების კლასიფიკაციის ლოკალური ასპექტი. ვსარგებლობთ რა ყლორტთა ენით, შესაძლებელია ვთქვათ, რომ გლუვი ფუნქციის ნებისმიერი იზოლირებული განსაკუთრებულობა ამ ფუნქციის მცირე "რხევის" დროს დაიშლება რამდენიმე გადაუგვარებელ კრიტიკულ წერტილად.

რამდენადაც მორსის ლემის დამტკიცება წმინდა ალგებრულია, იგი გამოდგება კომპლექსური პოლინომებისათვისაც. მხოლოდ, ამ შემთხვევაში ყველა გადაუგვარებელი კრიტიკული წერტილი ერთნაირადაა მოწყობილი — მათში პოლინომი კვადრატთა ჯამის C^{∞}-ეკვივალენტურია. სამაგიეროდ, ჩვენთვის უკვე ცნობილი მსჯელობა კომპლექსურ პოლინომთა რეგულარული მნიშვნელობების ბმულობის შესახებ გვიჩვენებს, რომ აღმოცენებადი გადაუგვარებელი კრიტიკული წერტილების რაოდენობა არ არის დამოკიდებული მდგრადი შეშფოთების არჩევანზე (ასეთ შეშფოთებას, ჩვეულებრივ, უბრალოდ მორსოვიზაციას უწოდებენ [6]). ამგვარად, წარმოიქმნება კომპლექური პოლინომის კრიტიკული წერტილის გარკვეული რიცხვობრივი ინვარიანტი - ახლო მორსოვიზაციების განსაკუთრებულობათა რიცხვი. ეს ინვარიანტი უდიდეს როლს თამაშობს განსაკუთრებულობათა ტოპოლოგიის შესწავლაში და მას გააჩნია სპეციალური სახელი - განსაკუთრებულობის მილნორის რიცხვი [29], [31]. ხაზგასმით აღვნიშნავთ, რომ იგი, რა თქმა უნდა, განსაზღვრულია ნამდვილი პოლინომებისათვისაც, მხოლოდ საჭიროა გათვალისწინებული იქნეს ახლო მორსოვიზაციების ყველა კომპლექსური კრიტიკული წერტილები, ანუ მორსოვიზაციები უნდა აგებული იქნეს, როგორც კომპლექსური პოლინომი-

სათვის. ამასთან, მარტივ მაგალითებზე ადვილია დავინახოთ, რომ ნამდვილი მორსოვიზაციის ნამდვილი კრიტიკული წერტილების რაოდენობა შეიძლება შეიცვალოს მორსოვიზაციის არჩევასთან დაკავშირებით (შეამოწმეთ ეს დამოუკიდებლად განსაკუთრებულობის $f(x) + a(x)$ მორსოვიზაციისათვის).

გთავაზობთ აგრეთვე შეისწავლოთ ეს მოვლენა კრიტიკული წერტილის მაგალითებზე რომლებიც მოცემულია კოორდინატთა სათავეში $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3 + tx$ ასახვის ყლორტით. გარდა ამისა, გთავაზობთ ზოგადი მოსაზრებიდან გამოიცნოთ ნამდვილ მორსოვიზაციების კრიტიკულ წერტილთა რიცხვის შესაძლებელი მნიშვნელობები.

საქმის გასაადვილებლად მიგანიშნებთ, რომ პოლინომის მილნორის რიცხვი ემთხვევა გრადიენტული ასახვის იზოლირებული განსაკუთრებულობის ჯერადობას (ეს თითქმის ტავტოლოგიაა, მაგრამ საჭიროა მისი გათავისება) [31]. ყველა ეს დაკვირვება ჩვენ გამოგვადგება მაშინ, როდესაც მივუბრუნდებით შტურმის ამოცანის გამოკვლევას.

§ 6. უიტნის აღმოჩენა

ჰასლერ უიტნიმ შესძლო აღეწერა ნამდვილი სიბრტყის მდგრადი ენდომორფიზმები. მისი შედეგები კლასიკური გახდა ამ დარგის შემდგომი გამოკვლევებისათვის. ამასთან მათში პირველად იქნენ გამოვლენილი განსაკუთრებულობათა თეორიის ისეთი დამახასიათებელი ნიშნები, რომლებიც არაა არსებითი ან საერთოდ შეუმჩნეველი დარჩნენ მორსის თეორიაში.

მისი შედეგების გადმოცემა ყველაზე მარტივი იქნება, თუ დავიწყებთ სიბრტყის მდგრადი ენდომორფოზმის ლოკალური სურათის აღწერას. ამ სურათზე კარგ ინტუციურ წარმოდგენას გვაძლევს მკვრივი ქსოვილის დაჭმუჭნული ნაჭერი,

რომელიც სწორ ზედაპირზე დევს (იგულისხმევა, რომ ქსოვილი თავის დრეკადობის გამო თავად დააღწევს თავს იმ არამდგრად და არატიპიურ ფორმებს, რომლებიც მოჭმუჭვნის შედეგად წარმოიშვა; სწორედ ამ წინამძღვარში მდგომარეობს ის ბუნებრივი მეცნიერული სიმართლე, რომელიც ჩვენ უკვე ვახსენეთ განსაკუთრებულობათა თეორიის ფილოსოფიასთან დაკავშირებით). ყველა ჩვენთაგანისათვის, მითუმეტეს მანდილოსნებისთვის, რომლებიც შესაძლოა ჩვენი მკითხველები არიან, ცნობილია სიტყვები „ნაოჭი" და „ნაკეცი" და მათი ნიმუშები ჩვენს ტანსაცმელზე. როგორც ირკვევა, ამ შემთხვევაში ყოველდღიური გამოცდილება ზუსტ მეცნიერებასთანაა შეთანხმებული: ესაა ასახვის ლოკალური ქცევის არსებობის მხოლოდ ზემოთ მოყვანილი სამი ტიპი.

უფრო ზუსტი რომ ვიყოთ, განვიხილოთ ენდომორფიზმის სამი უმარტივესი ლოკალური მოდელი:

$$
\begin{aligned}
&(x,y) \mapsto (x,y)\\
&(x,y) \mapsto (x,y^2) \qquad\qquad (6.1)\\
&(x,y) \mapsto (x,y^3 - xy).
\end{aligned}
$$

მათ, შესაბამისად, რეგულარული წერტილი, ნაკეცი და ნაოჭი ეწოდება [6]. შემდგომისათვის სასარგებლოა კარგად წარმოვიდგინოთ შესაბამისი გეომეტრიული სურათი აღნიშნული ზედაპირის ნაჭრის მაგალითზე, ანუ დავხაზოთ ამ ასახვათა ლოკალური გრაფიკები. ამისთვის არ არის საჭირო არავითარი სპეციალური ცოდნა, რომელიც სასკოლო პროგრამის ფარგლებს სცილდება, ხოლო იმათ, ვისაც ხაზვა არ უყვართ (ავტორს კარგად შეუძლია გაუგოს მათ), სასარგებლოა ჩაიხედონ განსაკუთრებულობათა თეორიის რომელიმე სტანდარტულ წიგნში, მაგალითად, [6] ან [10].

კერძოდ, მთავარია კარგად გავიგოთ, რომ ნაკეცი წარ-

მოადგენს არაიზოლირებულ განსაკუთრებულობის მაგალითს; მის გვერდით განლაგებულია რაღაც წირის მთელი მონაკვეთი, რომელიც ნაკეცის წერტილებისგან შედგება. პირიქით, ნაოჭი — იზოლირებულია ნაოჭთა სიმრავლეში, — მასში თითქმის ერთმანეთს ხვდება ორ ნაკეცთა წირი. ძალზე მნიშვნელოვანია აგრეთვე იმის შემოწმება, რომ ნაოჭის სიახლოვეს განსაკუთრებული სიმრავლის სახეს გააჩნია მახვილის ტიპის განსაკუთრებულობა, რომელსაც იძლევა ნახევარკუბური პარაბოლა $\{x^3 = y^2\}$. ინგლისურენოვან ლიტერატურაში ასეთ განსაკუთრებულობას მახვილს („კასპი") უწოდებენ, მაგრამ ჩვენ მას ზოგჯერ „ნისკარტად" მოვიხსენიებთ [10].

უიტნიმ დაამტკიცა, რომ სიბრტყის მდგრადი ენდომორფიზმი თითოეული წერტილის მიდამოში ამ სამი ყლორტისაგან ერთერთის C^∞-ექვივალენტურია. სხვა სიტყვებით, მდგრადი ენდომორფიზმების განსაკუთრებულობები შეიძლება მხოლოდ ნაკეცი და ნაოჭი იყოს. ხსენებული ლოკალურ მოდელების თანახმად, მდგრადი ასახვის განსაკუთრებული სიმრავლის სახე უნდა შედგებოდეს გლუვი წირების მონაკვეთებისაგან, რომლის სიგლუვე მხოლოდ ნისკარტის ტიპის წერტილებში ირღვევა. სინამდვილეში ასახვის გლობალური მდგრადობისათვის აუცილებელია კიდევ შემდეგი სამი პირობის შესრულება:

1) ორი ნაკეცის სახეების გადაკვეთის წერტილებში ამ სახეებს არ უნდა გააჩნდეთ თანმხვდომი მხები წრფეები;

2) თითოეულ წერტილში შეიძლება ხდებოდეს მხოლოდ ორი ნაკეცის თანაკვეთა;

3) ნაოჭის ორ წერტილს, აგრეთვე ნაოჭის წერტილს და ნაკეცის წერტილს არ უნდა გააჩნდეთ ერთი და იგივე ანასახი.

მოყვანილ ლოკალურ პირობებთან ერთად ეს გვაძლევს სიბრტყის გლუვი ენდომორფიზმის მდგრადობის კრიტერიუმს.

უიტნის თეორემის დამტკიცება საკმაოდ რთულია და მოითხოვს სპეციალური ანალიტიკური ტექნიკის განვითარებას, ამდენად ჩვენ მას არ შევუდგებით. აღვნიშნავთ, რომ აქ მდგრადი ლოკალური ფორმების აღწერისას უკვე საჭიროა ვისარგებლოთ ეკვივალენტურობის სრული განსაზღვრებით, იმდენად რამდენადაც გვიხდება ანასახში კოორდინატების შეცვლაც (რომელიც შეესაბამება არატრივიალურ k-ს ჩვენს (5.1) დიაგრამაში). მორსის თეორიაში არ იყო ამის საჭიროება — საკმარისი იყო მხოლოდ ცვლადთა შეცვლა განსაზღვრის არეში. გარდა ამისა, მდგრადი ენდომორფიზმების სიმკვრივის დასამტკიცებლად საჭიროა სპეციალური პროცესი, რომელიც არსებითად გამოიყენებს ძლიერი ტოპოლოგიის მიერ მიღებული განსაზღვრების ძირითად თვისებებს. ერთი სიტყვით, აქ ჩვენ საქმე გვაქვს უკვე სერიოზულ მათემატიკურ მსჯელობასთან, რომელიც მოითხოვს საგანგებო მომზადებას და ჩვევებს მის ასათვისებლად (აქ საკითხის არსის გასაგებად ცალკეული დეტალების შემოწმება საკმარისი არ არის). ამასთან იგი ძალიან მახვილგონიერია და ლამაზიცაა, რაც შეიძლება სტიმული გახდეს განსაკუთრებულობათა თეორიის საფუძვლების უფრო ღრმა გაცნობისათვის. ეს დამტკიცება შესანიშნავადაა დაწერილი (გადმოცემული) ჩვენს მიერ უკვე მოხსენებულ წიგნში [10].

უიტნის თეორიისადმი ჩვენი ინტერესი იმითაა გამოწვეული, რომ იგი საშუალებას გვაძლევს შევიქმნათ გარკვეული წარმოდგენა მდგრადი ენდომორფიზმის გლობალური სტრუქტურის შესახებ, რაც კარგი შესაძლებლობაა უკეთესად გავიგოთ შესაბამის განტოლებათა სისტემის ნამდვილ ფესვთა ქცევა.

მაგალითად, ახლა უკვე ადვილია გავიგოთ ნამდვილ ფესვთა რიცხვის ცვლილებების მიზეზი და მექანიზმი. მართლაც, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ეს რიცხვი ლოკალურად მუდმივია და

ამიტომ იგი მუდმივია რეგულარულ მნიშვნელობათა $\mathrm{Reg}F$ სიმრავლის ბმულ კომპონენტებზე. რადგანაც ამ შემთხვევაში $F(S(F))$ წარმოადგენს უბან-უბან გლუვ წირს, ნათელია, რომ იგი ყოფს $F(S(F))$ სიმრავლის დამატების სხვადასხვა კომპონენტებს, ასე რომ შესაძლებელი ნახტომები მხოლოდ იმ შემთხვევაშია მოსალოდნელი, როდესაც $F(x)=y$ განტოლების მარჯვენა მხარე ერთი კომპონენტიდან მეორეში გადადის, გადაკვეთს რა ნაკეცის ანასახს. ამ მიმართებაში საკმარისია განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც იგი ამ წირს გლუვ წერტილში გადაკვეთს ანუ ნაოჭის წერტილის გარეთ. უნდა შევნიშნოთ, რომ როდესაც მარჯვენა მხარე ძალზე ახლოს არის ნაოჭის ანასახთან, ჩვენ შეგვიძლია ნაკეცის ლოკალური მოდელით ვისარგებლოთ. ამ მოდელის მიხედვით ერთბაშად ნათელი ხდება, რომ ან წერტილი მდგომარეობდა ანასახის გარეთ და ნაკეცის ანასახის გადაკვეთის შემდეგ შეიძინა ორი წინასახე განსაკუთრებული სიმრავლის ახლოს, ან პირიქით — ორი წინასახე ერთმანეთს შეერწყა და დაიკარგა. ამგვარად, ნახტომები შესაძლებელია მხოლოდ ლუწ სიდიდეებზე, ამასთან გეომეტრიული სურათი ასეთია. ან ორი წინასახე გადაიქცევა ჯერად ფესვად, რომელიც შემდეგ გაიხლიჩება ორ კომპლექსურ-შეუღლებულ ფესვად, ან პირიქით, $\mathbf{C}^2$ სივრცის სიღრმიდან ამოდის ორი კომპლექსურ-შეუღლებული წინასახე, რომლებიც ნაკეცის წერტილში შეერთების შემდეგ გაიხლიჩებიან ორ ნამდვილ წინასახედ. მოყვანილი მექანიზმის აღწერა მარტივია, მაგრამ ძალზე მნიშვნელოვანია, რამდენადაც ჩვენ ვიცით, რომ ტოპოლოგიური მოვლენები საკმარისია შევისწავლოთ მდგრადი ასახვებისათვის. შემდგომში ჩვენ უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ ამ მოვლენას, ჯერჯერობით კი განვაგრძოთ მდგრადი ენდომორფიზმის გლობალური სტრუქტურის განხილვა.

განვიხილოთ ნამდვილ ფესვთა განაწილების გლობალური

სურათი იმ ასახვისთვის, რომელიც მოცემულია მესამე ნორმალური ფორმის განტოლებებით. ადვილი დასანახია, რომ წერტილებს ნახევარკუბური პარაბოლის გარეთ გააჩნიათ ერთი ნამდვილი წინასახე, წერტილებს ამ პარაბოლის შიგნით — სამი რეგულარული წინასახე, ხოლო პარაბოლის წერტილებს გააჩნიათ ორი წინასახე, რომელთაგანაც მხოლოდ ერთია რეგულარული. ამასთან თუ ამ ასახვის გრაფიკს $\mathbf{R}^2$ სიბრტყის ზემოთ მოვათავსებთ, შეიძლება შევამჩნიოთ, რომ გადაგვარებული წინასახე „გადახტება" გრაფიკის ქვედა ფურცლიდან ზედა ფურცელზე ნაკეცის ანასახის გავლის დროს.

ეს მოულოდნელი ნახტომი ეგრეთ წოდებული კატასტროფის მაგალითს წარმოადგენს [6]. ასეთ მოვლენებს შეისწავლის კატასტროფათა თეორია, რომელიც განსაკუთრებულობათა თეორიის გამოყენებაში მთავარ როლს თამაშობს [32]. კატასტროფათა თეორია იძლევა ფიზიკისა და ტექნიკის ბევრი ცნობილი მოვლენების თვალსაჩინო ახსნას და ძალზე პოპულარული გახდა ამ ბოლო დროს გამოყენებითი სპეციალობების მეცნიერთა შორის. მკითხველმა მხედველობაში იქონიოს ეს გარემოებაც, რომელიც მას კიდევ ერთ მიზეზს და საშუალებას მისცემს უფრო ღრმად გაეცნოს განსაკუთრებულობათა თეორიას.

§7. განსაკუთრებულობათა მიკრო-მასაჟი

მკითხველს შეიძლება იმედი გაუცრუვდა იმის გამო, რომ ჩვენ მდგრად ასახვათა ანალიზის დროს მაგალითისთვის ძალზე მარტივი შემთხვევებით შემოვიფარგლეთ. გვინდა იგი დავარწმუნოთ, რომ ეს საინტერესო მასალის უკმარისობის გამო არ მომხდარა. საქმე იმაშია, რომ ოდნავ მაინც საინტერესო მაგალითები უფრო რთულია და მათი გეომეტრიული სურათის გაგება ყოველთვის როდი ხერხდება. მიზეზი,

როგორც ყოველთვის, ერთია — ჩვენი ადამიანური არასრულყოფილება, რაც მოცემულ შემთხვევაში იმაში გამოიხატება, რომ არ ძალგვიძს წარმოვიდგინოთ მრავალგანზომილებიანი ობიექტები. კერძოდ, არ შეგვიძლია თუნდაც წარმოსახვაში დავხაზოთ სიბრტყის მდგრადი ენდომირფიზმის ნამდვილი გრაფიკი, რომელიც წარმოადგენს ორგანზომილებიან ზედაპირს ოთხგანზომილებიან სივრცეში. თუკი ჩვენ მოვინდომებთ ორცვლადიან პოლინომთა ფესვთა სრული სურათის დანახვას, საჭირო იქნება გავიდეთ კომპლექსურ არეში, რასაც უკვე მივყავართ ოთხგანზომილებიან ზედაპირზე რვაგანზომილებიან სივრცეში.

ასე რომ, ენდომორფიზმთან ხუმრობა არ გამოდის. უიტნის შედეგი აღმოჩენად იმიტომაც ითვლება, რომ მან შეძლო წმინდა ანალიტიკურად გაეანალიზებინა ზოგიერთი ისეთი მოვლენა, რომელიც მიუწვდომელია ჩვენი გეომეტრიული წარმოსახვისთვის. ის, რასაც ჩვენ რეალურად შეგვიძლია დავაკვირდეთ, სინამდვილის მხოლოდ საკმაოდ მახინჯი, სხვადასხვა პროექტირებებით მრავალგზის დეფორმირებული მკრთალი სურათია. მიუხედავად ამისა, ტოპოლოგიის განვითარება საჭიროა და ამიტომაც გვიხდება ბრძოლა ჩვენს ბუნებრივ შესაძლებლობათა შეზღუდულობის დასაძლევად. მაგალითად, შეგვიძლია ვხაზოთ მრავალგანზომილებიანი გრაფიკების სხვადასხვანაირი ორგანზომილებიანი კვეთები და მათი დინამიკის მიხედვით გამოვიცნოთ სინამდვილის არსებითი ნიშნები. დღევანდელ დღეს ეს განსაკუთრებულობათა თეორიის ერთ-ერთი პოპულარული და სწრაფად განვითარებადი მიმართულებაა [6]. ერთ დროს ტოპოლოგები სწორედ რომ გასაქანს არ აძლევდნენ გამოთვლითი მათემატიკის სპეციალისტებს და თხოვდნენ აეძულებინათ კომპიუტერი დაეხატა უთვალავი რაოდენობით ზემოთხსენებული კვეთები, შემდეგ კი გონებადაძაბულნი ფიქრობდნენ, თუ რაში შეიძლე-

ბოდა მათი გამოყენება. ბოლოსდაბოლოს დაგროვილი იქნა დიდძალი ფაქტობრივი და გრაფიკული მასალა, რომელმაც ღირსეული ასახვა ჰპოვა, მაგალითად, ტ. პოსტონის და ი. სტიუარტის ფუნდამენტურ წიგნში [32]. ამ ნაშრომის ავტორს შეზღუდული კომპიუტერული და ტიპოგრაფიული შესაძლებლობების გამო არ ძალუძს შეეჯიბროს ასეთ გამოცემებს, ხოლო მათი საილუსტრაციო მასალის განმეორება ნიშნავს ზედმეტი შრომა დავაკისროთ პოლიგრაფისტებს ყოველგვარი ობიექტური აუცილებლობის გარეშე. ასე რომ, დაინტერესებულ მკითხველს (რომელთა არსებობაც ავტორი დიდ ჯილდოდ მიიჩნევს) დაბეჯითებით ვთხოვთ ჩაიხედოს [6], [32] ან [36]-ში და აღგითქვამთ, რომ მათი ცნობისწადილი და ესტეტიკური გრძნობა ღირსეულად იქნება დაკმაყოფილებული.

ჩვენ კი უფრო მარტივ და თვალსაჩინო ასპექტებს მივადგეთ. გავიხსენოთ, რომ სიბრტყის პოლინომურ ენდომორფიზმთა დიდ მარაგს იძლევიან ჩვენი ძველი ნაცნობები — ერთცვლადიანი პოლინომები. სამწუხაროდ, წრფივ პოლინომთა გამოკლებით, ისინი ყველაზე არამდგრად ენდომორფიზმებს წარმოადგენენ. მიუხედავად ამისა, ისინი გამოგვადგებიან ზემოთაღწერილი იდეების ილუსტრირებისათვის.

მართლაც, უიტნის თეორემის თანახმად, ნებისმიერი ასეთი ასახვა სათანადო მცირე შეშფოთებით შეგვიძლია მდგრად ენდომორფიზმად გადავაქციოთ. ამასთან, ადვილი მისახვედრია, რომ ეს მდგრადი შეშფოთება ყოველთვის შეიძლება პოლინომურად ავირჩიოთ, რადგანაც პოლინომები მკვრივი არიან გლუვ ფუნქციათა სივრცეში, თანახმად ვაიერშტრასის ცნობილი თეორემისა [3]. ამგვარად, უიტნის თეორემა პოლინომურ ენდომორფიზმთა კლასის ფარგლებშიც სრულდება.

შემდეგ, განსაკუთრებულობათა თეორიის ზოგადი მეთოდოლოგიის მიხედვით, საჭიროა დადგინდეს კავშირი ასახვის განსაკუთრებულობების ინვარიანტებსა და მისი მდგრადი

შეშფოთების ინვარიანტებს შორის. მაგრამ როგორი შეიძლება იყოს პოლინომის, როგორც სიბრტყის ენდომორფიზმის, განსაკუთრებულობები? პასუხი ამაზე კარგად არის ცნობილი კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა ელემენტარული თეორიიდან — ესენი ეგრეთწოდებული სასრული რიგის განშტოების წერტილები არიან. აღნიშნულიდან გამომდინარე, ჩვენ მოვდივართ სასრულო რიგის განშტოების წერტილის მდგრადი შეშფოთების შესწავლის ამოცანამდე.

დავუშვათ $f \in \mathbf{C}_1$ კომპლექსური პოლიმონია. $(f)_{\mathbf{R}}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ აღვნიშნოთ სიბრტყის ენდომორფიზმი, რომელიც მიიღება f-დან $\mathbf{C}$-სა და $\mathbf{R}^2$-ის გაიგივების შედეგად. ეს ენდომორმიზმი უსათუოდ საკუთრივია, რადგან პოლინომის მოდული შეუზღუდავად იზრდება უსასრულობაში [2].

კერძოდ, განვიხილოთ მონომი $f = z^n$. ნულში მას გააჩნია n რიგის განშტოების წერტილი. ამასთან, თუ $n \geq 2$ იგი განსაზღვრავს არამდგრად ასახვას, ასე რომ გვაძლევს არამდგრად განსაკუთრებულობას ნულში. ჩვენ გვსურს, რომ ეს განსაკუთრებულობა მდგრადად გადავაქციოთ განტოლების მცირე შეშფოთებით. ხატოვნად რომ ვთქვათ, ნულ წერტილში სახეზეა განსაკუთრებულობათა რაღაც „შესქელება", „გამყარება" და ჩვენ გვინდა მისი „განდევნა", „განკურნალება" მსუბუქი ზემოქმედებით, რომელიც ლოკალურია და გარკვეული აზრით წააგავს სამკურნალო მიკრომასაჟს. ზოგად თეორიაში მოქმედების ასეთ ხერხს განსაკუთრებულობის დეფორმაცია ეწოდება, მაგრამ ამ წიგნის ავტორს მისი მიკრომასაჟის სახით წარმოდგენა უფრო თვალსაჩინოდ ესახება.

ჩვენს შემთხვევაში $(z^2)_{\mathbf{R}}$ ასახვა მოცემულია $(x^2 - y^2, 2xy)$ პოლინომთა წყვილით. საერთოდ, მდგრადი დეფორმაციების ძიებისას ცდილობენ რაც შეიძლება მარტივი დამატების გამონახვა.

როგორც ვნახეთ, მორსის თეორიაში საკმარისი აღმოჩნდა

მცირე წრფივი ფუნქციის დამატება. ამიტომ აქაც წრფივი ფუნქციებიდან უნდა დავიწყოთ. ამასთან ნათელია, რომ (εz)-ს უბრალო დამატება არ გამოგვივა, რადგან მიღებული ასახვა ისევ კომპლექსურ-ანალიზური იქნება, ხოლო ისინი, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არამდგრადნი არიან. აღნიშნულის შემდეგ, ნათელია, რომ დამატება $\varepsilon\bar{z}$ სახით უნდა ავიღოთ, სადაც ε მცირე ნამდვილი რიცხვია. შედეგად მივიღებთ პოლინომთა წყვილს $\{x^2 - y^2 - \varepsilon x, 2xy + \varepsilon y\}$. ყურადღებიან მკითხველს გაახსენდება, რომ მეოთხე პარაგრაფში ამ წყვილისათვის ჩვენ უკვე შევთავაზეთ ეპოვნათ ნამდვილი ფესვების განაწილება ერმიტის მეთოდით. იმათ, ვინც ეს სამუშაო შეასრულა, ყველაფერი შემდგომში სრულიად მარტივად მოეჩვენება.

შევეცადოთ თავიდან ვიპოვოთ განსაკუთრებულობათა სიმრავლე. გამოვთვლით რა J_f იაკობიანს და გავუტოლებთ მას ნულს, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას $\{4x^2 + 4y^2 - \varepsilon^2 = 0\}$. ამგვარად, ყველა განსაკუთრებული წერტილი განლაგდება წრეწირზე. რომ დავრწმუნდეთ, რომ ეს დეფორმაცია მდგრადია, საჭიროა შევამოწმოთ, რომ ამ წრეწირის ყველა წერტილი ნაკეცის წერტილია, ნაოჭის სასრულო რაოდენობა წერტილების გამოკლებით.

თანახმად ჩვენი კომენტარისა უიტნის თეორემის შესახებ, ამისთვის ყოველ განსაკუთრებულ წერტილში გამოვთვალოთ დიფერენციალის ბირთვი და ვნახოთ, თუ სად განსხვავდება იგი განსაკუთრებული სიმრავლის მხები წრფისაგან, რომელიც მოცემულ შემთხვევაში უბრალოდ პერპენდიკულარულია განსაკუთრებული წერტილის რადიუს-ვექტორისა. $\bar{f}$ ასახვის დიფერენციალი $\xi \in \mathbf{C}$ რიცხვზე უდრის $d\bar{f}(\xi) = 2z\xi + \varepsilon\bar{\xi}$. z წერტილი კრიტიკულია თუ $2z\xi + \varepsilon\bar{\xi} = 0$ განტოლებას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი ξ. აქედან

$$z = -\frac{\epsilon\bar{\xi}}{2\xi},$$

ანუ $|z| = \frac{\varepsilon}{2}$. აქედან ადვილად ვპოულობთ, რომ ეს წრფე ყველგან განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, გარდა სამი წერტილისა, სადაც დიფერენციალის ბირთვი ეხება ამ წრეს.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, იმის დასამტკიცებლად, რომ ისინი ნამდვილად ნაოჭის წერტილები არიან, საჭიროა შევამოწმოთ, რომ ჩვენი ასახვის განსაკუთრებულ წირზე შეზღუდვის რანგი ამ წერტილებში ზუსტად ერთით ეცემა, რაც ჩვენს შემთხვევაში ნათელია.

ამგვარად, მართლაც მივიღეთ მდგრადი შეშფოთება ნაკეცთა მთელი წრით, რომელზეც არის ნაოჭის სამი წერტილი წესიერი სამკუთხედის წვეროებში.

ამრიგად, ჩვენმა მიკრომასაჟმა წარმატება მოიპოვა. მაგრამ როგორ წარმოვიდგინოთ დეფორმაციის მოქმედება გეომეტრიულად?

მკითხველმა, რომ უკეთ იგრძნოს ამის არატრივიალურობა, ჩვენ არ ვიტვირთებთ გეომეტრიული სურათის დეტალურ აღწერას. არადა, მასში გარკვევა ძალზე მნიშვნელოვანია იმისთვის, რომ საბოლოოდ ვეზიაროთ განსაკუთრებულობათა სამყაროს. ეს, ასე ვთქვათ, აუცილებელი გამოცდაა იმათთვის, ვისაც სურს წინ იაროს ამ მიმართულებით.

ჩვენ მხოლოდ ზოგიერთ მითითებას ვიძლევით. უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა გვახსოვდეს, რომ აგებული მდგრადი დეფორმაციის გრაფიკი წარმოადგენს გლუვ ზედაპირს თავისი არსებობის ბუნებრივ არეში. ამრიგად, ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ იგი იქედან გამოვიტანოთ და მოხერხებულად მოვათავსოთ სიბრტყის ზევით, რათა პროექტირებამ მოგვცეს ასახვის სურათი, როგორადაც ეს ნაოჭის ლოკალური მოდელის შემთხვევაში იყო. აღვნიშნავთ, რომ ამის გაკეთება შეუძლებელია ისე, თუ $\mathbf{R}^2$-ში მოთავსებულ ზედაპირზე არ გაჩნდნენ თვითთანაკვეთები ან სხვა გეომეტრიული განსაკუთრებულობები. მსგავსი მაგალითები კარგადაა ცნობილი

ტოპოლოგიაში. მაგალითად, პროექციული სიბრტყე $\mathbf{R}P^2$, ანუ S^2 სფერო გაიგივებული საპირისპირო წერტილებით, შეუძლებელია მოვათავსოთ $\mathbf{R}^3$-ში თვითთანაკვეთების გარეშე [1]. ამ სახის ყველაზე ცნობილ განლაგებას ეწოდება „შეჯვარებული ჩაჩი" და მას გარდა თვითთანაკვეთებისა გააჩნია კიდევ ერთი ძალზე ცუდი განსაკუთრებულობა. შეიძლება $\mathbf{R}P^2$ მოვათავსოთ $\mathbf{R}^3$-ში ისე, რომ ჩნდებოდნენ მარტივი თვითთანაკვეთები — ამის მაგალითებს იძლევიან ბოის ზედაპირი და რომაული ზედაპირი [1]. აღნიშნულის შესახებ ძალზე ნათლად და საინტერესოდაა გადმოცემული წიგნებში [1] და [32].

ამგვარად, საჭიროა მზად ვიყოთ იმისათვის, რომ ჩვენ ზედაპირს ექნება თვითგადაკვეთები.

მეორე მითითება იმაში მდგომარეობს, რომ ასეთი ზედაპირის დახატვისას წინა პარაგრაფის ბოლოს მოყვანილი შენიშვნის თანახმად, საკმარისია მხოლოდ ნაკეცების და ნაოჭების გრაფიკების ბრტყელი სურათების გამოყენება, ასე რომ, საბოლოო ნახაზი თითქოსდა აიგება ამ უმარტივესი ბლოკებისაგან.

ბოლოს, მესამე მითითება იმაში მდგომარეობს, რომ ჯერ საჭიროა დაიხატოს განსაკუთრებული სიმრავლის სახე და გაგებული იქნეს რამდენი წინასახე გააჩნიათ წერტილებს $\mathbf{R}^2 \backslash F(S(F))$ დამატების ბმულობის სხვადასხვა კომპონენტებიდან. ეს საშუალებას მოგვცემს გავიგოთ, თუ გრაფიკის რამდენი ფურცელი შეიძლება მოვათავსოთ ამა თუ იმ არეს ზემოთ. ჩვენს შემთხვევაში განსაკუთრებული სიმრავლის სახე იქნება სამნისკარტიანი ასტროიდა [32]. ამასთან ნათელია, რომ წერტილებს ასტროიდის გარეთ უნდა გააჩნდეს ორ-ორი წინასახე, რადგანაც დეფორმაცია მცირე იყო და კოორდინატთა სათავიდან დიდ მანძილზე საწყისი ასახვა, რომელიც იქ ორფურცლიან დამფარავს წარმოადგენდა, თითქმის არ შეცვლილა.

მთელი ამ ინფორმაციის გათვალისწინებით, დაგვრჩენია შესაბამისი ნახაზის შექმნა, რაც შეუჩვეველობის გამო შეიძლება მკითხველს მძიმედ მოეჩვენოს. ვინც ამ საქმეს მაინც გაუმკლავდება, ვთავაზობთ შემდეგ შემოწმების საშუალებას, რომელიც დაადასტურებს, სწორია თუ არა მიღებული შედეგი. თუ თქვენი ნახატი ამ გამოცდას გაუძლებს, შეგიძლიათ საკუთარ თავს წარმატება მიულოცოთ — თქვენ განსაკუთრებულობათა თეორია ხელგენიფებათ.

ზემოაღნიშნული შემოწმება დაკავშირებულია კლასიკურ გეომეტრიულ მოვლენასთან, რომლისგანაც გამომდინარეობს მთელი მრავალნაირობათა თეორია — რიმანის ზედაპირის უკვდავ კონსრუქციასთან [1]. სინამდვილეში ბერნჰარდი რიმანი პირველი იყო, რომელმაც შესძლო ჩაეხედა ოთხგანზომილებიან სივრცეში და ამოეძრო იქედან პოლინომების და კომპლექსური ცვლადის სხვა ანალიზური ფუნქციების გრაფიკები. მანვე აღმოაჩინა, რომ ამ გრაფიკების ბუნებრივ მოთავსებას $\mathbf{R}^3$-ში გააჩნიათ თვითთანაკვეთები და შესძლო ბევრი ასეთი ზედაპირის გლუვი მოდელების შექმნა.

ძნელია სათანადოდ შევაფასოთ რიმანის ამ აღმოჩენათა მნიშვნელობა და სილამაზე, ამიტომ ჩვენ არ გვინდოდა ხელიდან გაგვეშვა შესაძლებლობა ოდნავ მაინც არ შევხებოდით ამ კლასიკურ მემკვიდრეობას.

მოცემულ შემთხვევაში ყველაფერი უკიდურესად მარტივია. z^2 ფუნქცია იძლევა კომპლექსური სიბრტყის ორფურცლიან განშტოებულ გადაფარვას. აქ შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეს დამატებული აქვს უსასრულოდ შორი წერტილი $\{\infty\}$, დღეს დღეობით უსასრულოდ შორი წერტილის დამატების ოპერაცია შესაბამისი ტოპოლოგიის შემოტანასთან ერთად განსაზღვრულია ნებისმიერი ლოკალურად კომპაქტური სივრცისათვის და ატარებს პ. ს. ალექსანდროვის ერთწერტილიან კომპაქტიფიკაციის ამაყ სახელს [25]. შეამოწ-

მეთ, რომ $\mathbf{R}^2$ სიბრტყის ერთწერტილიანი კომპაქტიფიკაცია S^2 სფეროს ჰომეომორფულია, რომელსაც ამ კონტექსტში რიმანის სფერო ეწოდება. კლასიკურად ამ ერთწერტილიანი კომპაქტიფიკაციის რეალიზაცია მიიღწეოდა სტანდარტული S^2 სფეროს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე სტერეოგრაფიული პროექციის საშუალებით [1].

z^2 ფუნქციის განშტოების წერტილებია კოორდინატთა სათავე და $\{\infty\}$, ამასთან ორივე ამ წერტილში განშტოების რიგი ორის ტოლია. გადამფარავი ზედაპირიც აგრეთვე S^2 სფეროს წარმოადგენს, ხოლო ასახვა მოქმედებს როგორც ამ სფეროს ვერტიკალური ღერძის ირგვლივ ორჯერადი გადახვევა (იგულისხმევა, რომ აღნიშნული ღერძი (0, 0, — 1) და (0, 0, 1) წერტილებს აერთებს). $\mathbf{R}^3$-ში ასეთი გრაფიკის რეალიზაცია შესაძლებელია მხოლოდ თვითგადაკვეთებით, რომლის აღწერა კარგადაა ცნობილი: საჭიროა გაკეთდეს $\mathbf{R}^2$ სიბრტყის ჭრილი რომელიმე სხივის $\{0\}$-დან $\{\infty\}$-ში გასწვრივ, აგებულ იქნეს ასეთი გაჭრილი სიბრტყის ორი ეგზემპლარი და მოხდეს ჭრილების ნაპირების ჯვარედინად შეერთება. ნულის ახლოს ამ ზედაპირს გააჩნია თვითგადაკვეთების წრფე და ავტორს იგი მოაგონებდა ხოლმე სასკოლო კალმისსაწმენდს, რომელსაც არ იცნობენ ბურთულებიანი კალმისტრების ეპოქის მოსწავლეები (პროგრესის ჩრდილოვანი მხარეების კურიოზული მაგალითი). ყოველ შემთხვევაში, მისი გაკეთება ადვილად შეიძლება ქაღალდისგან თუ სქელი ქსოვილისაგან, იმის მიუხედავად ვიცით თუ არა როგორი იყო კალმისსაწმენდები.

ასეთი მოდელით წარმოსახვაში გავითვალისწინოთ, რომ მცირე ნევრის დამატება მას სერიოზულად ვერ შეცვლის ნულისაგან დაშორებულ ნაწილში, ასე რომ ორფურცლიანობა შესანარჩუნებელი უნდა იქნეს. საერთოდ, ახალმა გრაფიკმა ასეთი განლაგება უნდა დაუშვას $\mathbf{R}^3$-ში როდესაც ის ძალზე

მიახლოებულია რიმანის ამ ზედაპირის მოდელს. შეეცადეთ დააკმაყოფილოთ ეს მოთხოვნა თქვენს მიერ დახატული ზედაპირისათვის.

დასასრულს, დაგვრჩენია დავარწმუნოთ მკითხველი, რომ ყველაფერი ეს სრულიად შესაძლებელია და შესრულება მივანდოთ მისი გამომგონებლობის უნარს.

§ 8. ჯერადი ფესვის ალგებრული დოსიე

მივიღეთ რა გარკვეული წარმოდგენა განსაკუთრებულობათა გეომეტრიის შესახებ, დროა ჩვენს ძირითად ამოცანას მივუბრუნდეთ. ახლა, როდესაც უკვე ვიცით თუ რამდენად რთული შეიძლება იყოს ენდომორფიზმისა და მისი ნამდვილი ფესვების ქცევა, სწორედ რომ დროა შევეცადოთ ვიპოვოთ სიტუაციის კონტროლისათვის საჭირო ალგებრული საშუალებები. საბედნიეროდ, ასეთი საშუალებები არსებობენ, მაგრამ, რასაკვირველია, ისინი უკვე უფრო დახვეწილ ტექნიკას უნდა იყენებდნენ. ჩვენი მიზნებისთვის შესაძლებელია მხოლოდ ერთი ისეთი ცნებით დავკმაყოფილდეთ, რომელსაც ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს. იგი სათავეს იღებს სივრცეთა და ფუნქციებს შორის არსებულ ფუნდამენტურ ორადობაში [25]. როგორც ირკვევა, იმ სივრცეებისათვის, რომლებიც პოლინომური განტოლებებით არიან მოცემული, ეს ორადობა იძლევა ძალზე სრულ და ნათელ სურათს. კერძოდ, თითოეულ განსაკუთრებულობას შეიძლება შევუსაბამოთ გარკვეული სასრულგანზომილებიანი $\mathbf{R}$-ალგებრა, რომლის მიხედვით შეიძლება დადგენილ იქნეს მისი ძირითადი თვისებები, ასე, რომ ეს ალგებრა შეიძლება განსაკუთრებულობის ალგებრულ დოსიედ ჩაითვალოს. ეს მთელი სისრულით განეკუთვნება წინასახეების განაწილებისა და მდგრად დეფორმაციათა აგების საკითხებს. ჩვენთვის საინტერესო ამოცანის ამოხსნის შესაძ-

ლებლობა სწორედ ამ ახალი ინვარიანტის ტერმინებში გვე-
ძლევა. ამდენად თავი არ უნდა ავარიდოთ და მოვახდინოთ მთელი ჩვენი შესაძლებლობების მობილიზება.

შეგახსენებთ, რომ ჩვენ უკვე გვქონდა იმის საჭიროება, რომ ჩვეულებრივი პოლინომებიდან გადავსულიყავით უსასრულო პოლინომებზე, ანუ ფორმალურ ხარისხოვან მწკრივებზე. მათი განსაზღვრება სრულიად მარტივი და ბუნებრივია.

n- ცვლადიანი ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივი კოეფიციენტებით $\mathbf{C}$-ში (ან $\mathbf{R}$-ში) ეწოდება

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha\ z^\alpha,\ z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$$

სახის გამოსახულებას, სადაც ყველა $a_\alpha \in \mathbf{C}$, ან $a_\alpha \in \mathbf{R}$, შესაბამისად, ხოლო α მულტიინდექსია.

ასეთ მწკრივებისათვის ბუნებრივად განისაზღვრება შეკრება და გამრავლება, ასე რომ მათი ერთობლიობა $\mathbf{C}_n\{z\}$ გადაიქცევა ალგებრად შესაბამის ველზე. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ნამრავლის გამოთვლის დროს ყოველ ნაბიჯზე უნდა გამოვიყენოთ თანამამრავლთა კოეფიციენტების სასრული რიცხვი, ასე რომ ყველა გამოთვლა სრულიად ეფექტურია. ძნელი არ არის მივხვდეთ, რომ ფორმალური მწკრივები ნულოვანი თავისუფალი წევრით წარმოქმნიან ერთადერთ მაქსიმალურ $\mathfrak{m}_n$ იდეალს მწკრივთა $\mathbf{C}_n\{z\}$ ალგებრაში, ასე რომ $\mathbf{C}_n\{z\}$ წარმოადგენს ლოკალურ $\mathbf{C}$-ალგებრას. ამასთან, $\mathbf{C}_n\{z\}$ შეიცავს $\mathbf{C}_n$ პოლინომთა ალგებრას ქვეალგებრის სახით [11].

ახლა აღვნიშნოთ, რომ ყოველ ასეთ მწკრივს არანულოვანი თავისუფალი წევრით გააჩნია შებრუნებულიც, რომლის კოეფიციენტებისთვისაც ადვილად შეიძლება დაიწეროს რეკურენტული ფორმულები [11]. აქედან გამომდინარე, ასეთი მწკრივების გაყოფა შეიძლება, რაშიც მდგომარეობს

პოლინომების წინა ფორმალური მწკრივების ერთ-ერთი უმთავრესი უპირატესობა. მართლაც, ლოკალურ განტოლებათა გამარტივების დროს შესაძლებელი ხდება გაყოფა არანულოვან ელემენტებზე, რაც ძალიან აფართოებს გარდაქმნების საშუალებას. გარდა ამისა, $\mathbf{R}_n\{x\}$ ალგებრა მჭიდროდაა დაკავშირებული გლუვ ფუნქციათა ყლორტების $\mathcal{E}_n$ ალგებრასთან, რადგან ყოველ ასეთ ყლორტს შეიძლება შევუსაბამოთ მისი ტეილორის მწკრივი. ეს შესაბამისობა გვაძლევს იზომორფიზმს, თუ უგულვებელვყოფთ ე. წ. ბრტყელ ფუნქციებს, რომლებსაც გააჩნია ნულოვანი ტეილორის მწკრივი (ასეთი არანულოვანი ფუნქციების აგება შეიძლება ანალიზის კურსიდან ცნობილი $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ფუნქციის მაგალითის საშუალებით). ეს უკანასკნელი ანალიზურად „უხილავნი“ არიან და ისინი შეიძლება უგულებელყოფილნი იქნენ ძირითადი გეომეტრიული საკითხების განხილვისას. ამგვარად, ჩვენ შევძელით ობიექტების მარაგის გაფართოება, გადავედით რა პოლინომებიდან ფუნქციებისმაგვარ ცნებებზე.

სინამდვილეში, ჩვენ გვაინტერესებს არა თვით $\mathbf{R}_n\{x\}$ ალგებრა, არამედ სხვადასხვა სასრულგანზომილებიანი $\mathbf{R}_n\{x\}/I$ სახის ფაქტორ-ალგებრები, სადაც I — რაღაც სასრულწარმოქმნილი იდეალია $\mathbf{R}_{(n)}$-ში. განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ყოველი ასეთი იდეალი შედგება $\sum_{j=1}^{k} g_j f_j$ სახის ყველა მწკრივებისაგან, სადაც $f_1,\dots,f_k$ რაღაც მწკრივების ფიქსირებული ნაკრებია, ხოლო g_j — ნებისმიერი ელემენტები $\mathbf{R}_{(n)}$-დან. ასეთი ფაქტორ-ალგებრები მართლაც ხშირად სასრულგანზომილებიანი არიან. მაგალითისათვის საკმარისია ავიღოთ მაქსიმალური იდეალის $\mathfrak{m}_n^N$ ნებისმიერი ხარისხი, ანუ იდეალი, რომელიც წარმოქმნილია ყველა $\varphi_1\cdots\varphi_N$ სახის მწკრივებით, სადაც $\varphi_j \in \mathfrak{m}_n$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ასეთი ფაქტორ-ალგებრა წარმოადგენს სასრულგანზომილებიან ვექტორულ სივრც-

ეს $\mathbf{R}$ ველზე, მის განზომილებას ჩვენ აღვნიშნავთ μ_R-ით. ყველაფერი ეს უცვლელად შეიძლება იყოს გამოყენებული $\mathbf{C}_{(n)}$ ალგებრისათვის.

ახლა ვთქვათ მოცემული გვაქვს $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$, $f_j \in \mathbf{C}_n$ სახის პოლინომიალური ასახვა. დავუშვათ, რომ ჩვენ გვინდა შევისწავლოთ მისი ქცევა $\mathbf{C}^n$-ის კოორდინატთა სათავის მიდამოებში. თითოეული f_j კომპონენტის ტეილორის მწკრივს აღვნიშნავთ $\hat{f}_j$-ით, ხოლო $(f) = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_m)$-ით აღვნიშნავთ მათ მიერ წარმოქმნილ იდეალს $\mathbf{C}_n\{x\}$-ში. სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ $f(0) = 0$, ე. ი. $f_j(0) = 0$ ყველა j-თვის.

განსაზღვრება 8.1. ფაქტორ-ალგებრას $A_0(f) = \mathbf{C}_n\{x\}/(f)$ ეწოდება f ასახვის ლოკალური ალგებრა კოორდინატთა სათავეში.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ თუ f_j ფუნქციათა შორის თუნდაც ერთი ნულისგან განსხვავებულია კოორდინატთა სათავეში, მაშინ ეს ფაქტორ-ალგებრა ნულოვანი იქნებოდა, რადგანაც (f) იდეალი დაემთხვეოდა მთელ ალგებრას. თუ f ასახვა ნამდვილია, ე. ი. $f_j \in \mathbf{R}_n$, მაშინ განსაზღვრულია აგრეთვე ფაქტორ-ალგებრა $\mathbf{R}_n\{x\}/(f)$, რომელსაც ჩვენ ვუწოდებთ f ასახვის ლოკალურ $\mathbf{R}$-ალგებრას. ამგვარად ნამდვილი ასახვისთვის განსაზღვრულია ორი ლოკალური ალგებრა და ორივეს აქვს დიდი მნიშვნელობა ასახვის შესწავლისათვის.

ვინაიდან ჩვენ საბოლოოდ მხოლოდ ენდომორფიზმის შემთხვევა გვაინტერესებს, შემდგომში ყოველთვის ვივარაუდებთ, რომ $m = n$. ამ შემთხვევაში ასეთი სახის ტიპიური ფაქტორ-ალგებრა სასრულგანზომილებიანია და კარგად აღწერს ასახვის ლოკალურ სურათს, ასე რომ იგი შეიძლება ჩაითვალოს ასახვის ყლორტის დოსიედ მოცემულ წერტილში, უფრო ზუსტად სათანადო ყლორტის ალგებრულ დოსიედ.

განვიხილოთ, მაგალითად, $x \mapsto (x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n})$ სახის „წმინდა ხარისხების“ ასახვა. მისი ლოკალური ალგებრის კოორდი-

ნატთა სათავეში აღწერისათვის გამოვიყენოთ შემდეგი გეომეტრიული ხერხი, რომელიც კიდევ ბევრჯერ გამოგვადგება.

განვიხილოთ მთელრიცხოვანი მესერი სიბრტყეზე $\mathbf{Z}^2 \subset \mathbf{R}^2$ და დავხატოთ მისი პირველი კვადრანტი, ანუ ყველა $(k,l) \in \mathbf{Z}_+^2$ სახის წერტილთა სიმრავლე, სადაც $k,l \in \mathbf{Z}_+$. ყოველ $\varepsilon_{kl} = x^k y^l$ სახის მონომს შევუსაბამოთ (k,l) წერტილი და პატარა წრეებით აღვნიშნოთ მონომები, რომლებიც მოხვდნენ (f) იდეალში. მაშინ, ნათელია, ლოკალური ალგებრა, როგორც ვექტორული სივრცე, წარმოქნილი იქნება იმ მონომებით, რომელთა ირგვლივაც წრე არ არის, და იგი სასრულგანზომილებიანი იქნება ზუსტად მაშინ, როდესაც ასეთ მონომთა სიმრავლე სასრულია.

მოცემულ შემთხვევაში ამას ერთბაშად მივყავართ მიზნამდე. მართლაც, აღვნიშნოთ $(k_1,0)$ და $(0,k_2)$ წერტილები, მაშინვე შევნიშნავთ, რომ მესერის ყველა წერტილი, რომლებიც $\{y = k_2\}$ წრფის ზევით ან $\{x = k_1\}$ წრფის მარჯვენივ დევს, მოხვდება (f) იდეალში ტრივიალური მიზეზის გამო, რადგან შესაბამისი მონომები იყოფიან ან x^{k_1}-ზე, ან y^{k_2}-ზე. ამგვარად, ნიშნის გარეშე დარჩა მონომთა სასრული რიცხვი იმ მართკუთხედის შიგნით, რომელიც შემოსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებითა და მითითებული წრფეებით. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ლოკალური ალგებრა აშკარად სასრულგანზომილებიანია. სინამდვილეში, ამ მართკუთხედში მდებარე მონომები არიან წრფივად დამოუკიდებელნი ლოკალურ ალგებრაში. ეს, ცხადია, უბრალოდ ნიშნავს, რომ მათ არავითარ წრფივ კომბინაციას არ შეუძლია მოხვდეს (f) იდეალში, რაც ნათელია კიდევაც, რადგან ასეთ წრფივ კომბინაციას, როგორც პოლინომს, გააჩნია მეტად დაბალი ხარისხი. აქედან გამომდინარე, ხაზგასმით უნდა აღვნიშნოთ, რომ ზოგადად, იმ მონომთა კლასებს შორის, რომლებიც არ ხვდებიან (f) იდეალში, შეიძლება არსებობდეს წრფივი დამოკიდებულება,

ასე რომ საჭიროა კიდევ გულმოდგინედ შევარჩიოთ მათგან ნამდვილი ბაზისი $A_0(f)$-თვის. ასეთ ბაზისს მონომიალური ეწოდება [6]. იგი ყოველთვის არსებობს და მისი ელემენტები ჩვენს დიაგრამაზე მოსახერხებელია ჯვრებით აღვნიშნოთ. მივანიშნებთ, რომ მოცემულ შემთხვევაში $\dim_{\mathbb{R}} A_0(f)$ დაემთხვა კოორდინატთა სათავის ჯერადობას, როგორც $\{f(x) = 0\}$ სისტემის ფესვს. ეს შემთხვევითი არ არის და ამიტომ განსაკუთრებულობათა თეორიაში შემოაქვთ შემდეგი განსაზღვრებები [10].

განსაზღვრება 8.2. დავუშვათ, რომ $m = n$. f ასახვას ეწოდება სასრულჯერადი ნულ წერტილი (ამბობენ აგრეთვე, რომ მისი ყლორტი ამ წერტილში სასრულჯერადია), თუ ლოკალური ალგებრა $A_0(f)$ სასრულგანზომილებიანია. მის განზომილებას ეწოდება ასახვის ალგებრული ჯერადობა ნულ წერტილში და აღინიშნება $\mu_0(f)$.

საინტერესოა შევხედოთ ამას განტოლებათა ფესვების თვალსაზრისით. მართლაც, ამ შემთხვევაში ნულ წერტილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\{f(x) = 0\}$ განტოლებათა სისტემის ფესვი. შეგახსენებთ, რომ 0-თან ახლო რეგულარული მნიშვნელობის მცირე წინასახეთა რიცხვი ზემოთ წოდებული იქნა ამ ფესვის ჯერადობად. ასეთი ტერმინები შემთხვევით როდი გამოიყენებიან და მართლაც, არსებობს მნიშვნელოვანი შედეგი ამ მიმართულებით.

თეორემა 8.1. სასრულჯერადოვანი ყლორტის ალგებრული ჯერადობა უდრის სათანადო ფესვის ჯერადობას.

როგორც [6] წიგნშია აღნიშნული, ეს შედეგი ჯერ კიდევ კლასიკოსებისთვის ცნობილი იყო, მაგრამ სრული ზოგადი დამტკიცება მიღებული იქნა ვ. პ. პალამოდოვის მიერ [31]. მასში გამოყენებული ტექნიკა ფრიად რთულია ამ მოცულობის წიგნში აღსაწერად. ამიტომ, ჩვენ, როგორც ყოველთვის, უმჯობესია შევეცადოთ გავიგოთ ამ თეორემის აზრი და

სარგებლიანობა.

პირველი დასკვნა ასეთია: მცირე კომპლექსურ წინასახეთა რიცხვი შეიძლება გამოვთვალოთ წმინდა ალგებრულად ასახვის კომპონენტთა ტეილორის მწკრივების მიხედვით. მართლაც, თუ ჩავუფიქრდებით ლოკალურ ალგებრაში მონომური ბაზისის აგების აღწერის პროცედურას, ნათელი გახდება მისი ალგორითმულობა. სხვა სიტყვებით, ჩვენ შეგვიძლია ვიმოქმედოთ ფორმალურად ან გადავაბაროთ ეს გამოთვლა კომპიუტერს. ჩვენ არ შევუდგებით ამ შენიშვნის განვითარებას, რადგან არსებობენ მზა კომპიუტერული ალგორითმები ალგებრული ჯერადობის გამოსათვლელად, რაც დამაჯერებლად ადასტურებს ნათქვამს [41].

მეორე დასკვნა: ჩვენ ბოლოსდაბოლოს მივიღეთ ზოგადი და წმინდა ალგებრული განსაზღვრება ფესვის ჯერადობისა, რომლის მონაწილეობით ბეზუს თეორემა საკუთარი პოლინომური სისტემისათვის დასრულებულ სახეს ღებულობს.

ბოლოს, ნამდვილ ფესვებთან დაკავშირებით ეს ყველაფერი ნიშნავს, რომ მათი რიცხვი ყოველთვის ნაკლებია ასახვის ალგებრულ ჯერადობაზე და მათი სხვაობა ლუწი რიცხვია. ეს მაშინვე გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ფესვებს შეუძლიათ კომპლექსურ არეში გადასვლა მხოლოდ წყვილებად. ქვემოთ ჩვენ კიდევ განვავითარებთ ამ დაკვირვებას და იგი მნიშვნელოვან როლს შეასრულებს საკითხებისადმი ჩვენს მიდგომაში.

შესაძლებელია, სასრულჯერადობის პირობა ცოტა ხელოვნურად გამოიყურება, მაგრამ სინამდვილეში ამის შესამოწმებლად არსებობს მარტივი და თვალსაჩინო კრიტერიუმი, რომელიც ადვილად გამომდინარეობს ჰილბერტის სახელგანთქმული თეორემიდან პოლინომთა ნულების შესახებ (Nullstellensatz, იხ. მაგალითად, [11]).

ვთქვათ კოორდინატთა სათავე წარმოადგენს C-იზოლი-

რებულ წინასახეს. ბუნებრივად ისმის კითხვა: არსებობს მისი ისეთი $U \subset \mathbf{C}^n$ მიდამო, რომ მასში არ არის ენდომორფიზმის სხვა ფესვები?

თეორემა 8.2. (სასრულჯერადობის კრიტერიუმი). პოლინომური ენდომორფიზმი სასრულჯერადია ნულ წერტილში ზუსტად მაშინ, როდესაც ნული წარმოადგენს $\mathbf{C}$-იზოლირებულ წინასახეს.

ხაზი უნდა გავუსვათ იმას, რომ ნულის იზოლირება ნამდვილ ფესვთა სიმრავლეში არ არის საკმარისი, როგორც მკითხველი ადვილად შეამოწმებს.

ამრიგად, ჩვენ დავრწმუნდით, რომ ლოკალური ალგებრა მართლაც აღწერს ასახვის ზოგიერთ საინტერესო თვისებას, სინამდვილეში, ლოკალური ალგებრა გვაძლევს გაცილებით უფრო სრულ ინფორმაციას განსაკუთრებულობის შესახებ. ილუსტრაციისათვის მოვიყვანთ ჟ.მაზერის ერთ მნიშვნელოვან შედეგს, რომელიც საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ მდგრად ასახვათა კლასიფიკაცია და კერძოდ, უიტნის თეორემის უფრო მოკლე და მარტივი დამტკიცება [10].

თეორემა 8.3. მდგრადი ნამდვილი ყლორტები C^∞ ეკვივალენტურნი არიან ზუსტად მაშინ, როდესაც მათი ლოკალური $\mathbf{R}$-ალგებრები იზომორფულები არიან როგორც $\mathbf{R}$-ალგებრები.

ეს შედეგი ძალზე არატრივიალურია. იგი იმითაც არის საინტერესო, რომ ასახვების დიფერენციალურ კლასიფიკაციას დაიყვანს წმინდა ალგებრულ ამოცანამდე სასრულგანზომილებიანი $\mathbf{R}$-ალგებრების შესახებ, რომლებთანაც მუშაობაც გაცილებით უფრო ადვილია. ამასთან, სასრულჯერად ენდომორფიზმთა ლოკალურ ალგებრებს გააჩნიათ მთელი რიგი შესანიშნავი თვისებები, ასე რომ მათი გამოკვლევისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ სხვადასხვა ალგებრული მეთოდები [10].

კერძოდ, ასეთ ალგებრებზე არსებობენ საინტერესო კვადრატული ფორმები, რომლებიც გამრავლების ოპერაციასთან და ალგებრის სხვა სტრუქტურულ თვისებებთან მჭიდროდაა დაკავშირებული. სწორედ ამ პუნქტში ხდება ერმიტის კლასიკური მეთოდისა და განსაკუთრებულობათა თანამედროვე თეორიის თანხვედრა. ჩვენ ამ კავშირს დაწვრილებით განვიხილავთ შემდეგ თავში, რამდენადაც იგი უშუალოდაა დამოკიდებული ნამდვილ ფესვთა რიცხვის გამოთვლასთან. მანამდე კი მოვიყვანოთ კიდევ რამდენიმე სასარგებლი ცნება ლოკალურ ალგებრებზე.

ნებისმიერი $\varphi \in \mathbf{R}_n$ პოლინომისათვის (თუნდაც $\varphi \in \mathcal{E}_n$ ყლორტისათვის) $\overline{\varphi}$-ით ალვნიშნოთ მისი ეკვივალენტობის კლასი როგორც $\mathbf{R}_n\{x\}/(f)$ ფაქტორ-ალგებრის ელემენტი. ასეთ კლასებთან მუშაობა შეიძლება როგორც უბრალო პოლინომებთან. თუმცა საჭიროა გამოთვლების დროს დროულად უკუვაგდოთ წევრები, რომლებიც იდეალში არიან მოხვედრილი. ასეთი რჩევა ძალზე მნიშვნელოვანია ლოკალური ალგებრების შესწავლის დროს და ჩვენ გირჩევთ ახლავე ივარჯიშოთ ამ ხერხზე, რისთვისაც სასარგებლოა შეადგინოთ გამრავლების სრული ტაბულა შემდეგი ასახვების ლოკალურ ალგებრებში:

$$(z^3)_{\mathbf{R}}, \{x^2 - y^2,\ x^2 + xy^3\}, \{x^4 - y^3,\ xy + x^2\}.$$

რა თქმა უნდა, წინასწარ უნდა გამოითვალოს მონომური ბაზისები, შემდეგ კი უნდა განლაგდეს ბაზისის ელემენტების წყვილ-წყვილი ნამრავლები თვით ამ ბაზისის მიხედვით, რაც მოგვცემს სასურველ ტაბულას. პრინციპული მომენტი იმაში მდგომარეობს, რომ ასეთ ალგებრებში არსებობს ბევრი ნილპოტენტური ელემენტი და სხვა ნულის გამყოფები. ასეთი ალგებრების სტრუქტურაში დიდ როლს თამაშობს ასახვის იაკო-

ბიანი. ამიტომ, რეკომენდაციას ვიძლევით ყოველ მოყვანილ შემთხვევისათვის გამოვთვალოთ იაკობიანი J_F და დავრწმუნდეთ, რომ იგი ყოველთვის არანულოვან კლასს გვაძლევს ლოკალურ ალგებრაში.

ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ $\overline{J_F}$ კლასის ნამრავლი ნებისმიერი არამუდმივი პოლინომის კლასთან ყოველთვის ხვდება (f) იდეალში, ასე რომ $\overline{J_F}\cdot \mathfrak{m}_n \subset (f)$.

შეეცადეთ აგრეთვე განიხილოთ უფრო რთული მაგალითები თქვენი შეხედულების მიხედვით. ამისათვის შეიძლება გამოიყენოთ პოლინომთა წყვილები [6] წიგნის ცხრილებიდან.

განსაკუთრებით მარტივი და ლამაზია სურათი ერთგვაროვან (f,g) პოლინომთა წყვილის შემთხვევაში. იმავე [6] წიგნში მოყვანილია საკმაოდ დახვეწილი ინფორმაცია მათი ლიკალური ალგებრების სტრუქტურის შესახებ.

თავი III
ხარისხის ნიშნით

ამ თავში ჩვენ ალვწერთ პოლინომური ასახვის ხარისხის ალგებრული გამოთვლის ხერხს. მივიღებთ აგრეთვე პოლინომური ენდომირფიზმის ფესვთა ალგებრული რიცხვის გამოთვლის მეთოდს, რომელსაც არ სჭირდება ფესვთა მარტივობის დაშვება, რაც პირველი წინგადადგმული ნაბიჯი იქნება ერმიტის შედეგების განზოგადოების მიმართულებით. შემდეგ ჩვენ ისევ ახალი ტოპოლოგიური ცნებების გამოყენება დაგვჭირდება. მანამდე კი ყურადღების ცენტრში იქნება პოლინომური ენდომორფიზმის ტოპოლოგიური ხარისხი, რომლის გაცნობასაც ჩვენ ახლა ვიწყებთ.

§ 9. ქამანდი სიბრტყეზე

ასახვის ხარისხის თანამედროვე ზოგადი განსაზღვრება ჰომოლოგიის თეორიას ან ალგებრული ტოპოლოგიის რაიმე სხვა საშუალებებს იყენებს [40]. პოლინომური ენდომორფიზმის შემთხვევაში ყველაფერი მარტივია და შეიძლება მათემატიკური ანალიზის ჩვეულებრივი საშუალებებით დავკმაყოფილდეთ. ისტორიულად ასახვის ხარისხის ცნება ზუსტად ასე წარმოიშვა — იგი 1882 წელს შემოიტანა ლეიპოლდ კრონეკერმა არაწრფივ განტოლებათა ამონახსნთა გამოსაკვლევად, რისთვისაც გამოიყენა მის მიერ სპეციალურად შემუშავებული ინტეგრირების პროცესი. დღეს უკვე საკმარისია მხოლოდ იაკობიანების გამოყენება, მაგრამ სამაგიეროდ საჭიროა მეტი ტოპოლოგიური მოსაზრებებით მანიპულირება, რაც სწორედ რომ შეესაბამება ჩვენს მიზანს. ამასთან საშუალება გვექნება პრაქტიკულად გავეცნოთ ჰომოტოპიის ცნებას და ანალიზში მისი გამოყენების მეთოდებს.

მეტი სიცხადისათვის დავიწყოთ ასახვის ხარისხის ცნების ისტორიული წინამძღვრებით.

პირველი მათგანი დაკავშირებულია ალგებრის ძირითადი თეორემის კარლ გაუსის მიერ მიღებულ დამტკიცებასთან. მასში ჩვენ პირველად ვხვდებით შეკრული ბრტყელი წირების ტოპოლოგიური თვისებების გამოყენებას. თანამედროვე ენაზე სათანადო ტოპოლოგიურ ვარიანტს უწოდებენ შეკრული წირის ინდექსს მოცემული წერტილის მიმართ და ჩვენ ახლა შევუდგებით მის შესწავლას [23]. სიმარტივისთვის ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ პარამეტრიზებულ (გლუვ) წირებს.

განსაზღვრება 9.1. პარამეტრიზებულ გლუვ ბრტყელ Γ წირს უწოდებენ დიფერენცირებადი ფუნქციების (φ,ψ) წყვილს, სადაც $\varphi,\psi:[0,1]\to\mathbf{R}$. თუ $\Gamma(0)=\Gamma(1)$ მაშინ წირს ეწოდება შეკრული, ანუ მარყუჟი. პარამეტრიზებული

Γ წირის γ ანასახს ეწოდება ბრტყელი წირი. თუ Γ ასახვა განსაზღვრავს ჰომეომორფიზმს S^1 და $\gamma = \Gamma(I)$ მარყუჟს შორის, მაშინ γ მარყუჟს ეწოდება მარტივი შეკრული წირი ანუ მარტივი მარყუჟი [40].

ჩვენთვის საინტერესო ინვარიანტი განაზოგადებს წირთა იმ ტოპოლოგიურ თვისებას, რომელიც გამოსახულია ჟორდანის ცნობილ თეორემაში [40]. იგი გვამცნობს, რომ მარტივი მარყუჟი სიბრტყეზე ყოფს სიბრტყეს ორ ნაწილად, მხოლოდ ერთი მათგანი არის შემოსაზღვრული და ორივე არის ბმული, ასე რომ $\mathbf{R}^2\backslash\gamma$ სიმრავლეს გააჩნია ორი ბმულობის კომპონენტი.

ცხადია, რომ თუ მარყუჟი არ არის მარტივი (მაგალითად, მას გააჩნია თვითგადაკვეთები), მაშინ $\mathbf{R}^2\backslash\gamma$ დამატება უფრო რთული სტრუქტურის შეიძლება იყოს. მაგალითად, „რვიანი" წირის დამატებას გააჩნია სამი ბმულობის კომპონენტი. როგორც ირკვევა, ჩვენ მაინც შეგვიძლია $\mathbf{R}^2\backslash\gamma$ სიმრავლის ბმულობის კომპონენტების გარკვეული დახასიათება. ვიდრე ზუსტ განმარტებას მოვიყვანდეთ, შევეცადოთ თვალსაჩინოდ აღვწეროთ კონსტრუქციის შინაარსი.

ამისათვის წარმოვიდგინოთ ნებისმიერი მარყუჟი როგორც კოვბოური ლასო (ქამანდი), რომელიც ძევს სიბრტყეში. წარმოვიდგინოთ აგრეთვე, მოცემულ წერტილში დამაგრებულია პატარა ვერტიკალური ღერძი და ჩვენ გვაინტერესებს, ეს ღერძი არის თუ არა „დაჭერილი" ამ ლასოს საშუალებით. ინტუიციურად ცხადია, რომ ამისათვის საკმარისია მოვქაჩოთ ლასოს „კუდი" და თუ წერტილი „დაჭერილია", ჩვენი ლასო ვერ დაბრუნდება ხელში. ამასთან, ზოგიერთ შემთხვევაში ლასო მოეხვევა დაჭერილ ღერძს რამდენიმეჯერ და ჩვენ გვინდა ყველა ასეთი შესაძლებლობა ზუსტად დავახასიათოთ.

ამისათვის შეიძლება ასე მოვიქცეთ: ავიღოთ მოცემულ p წერტილიდან $q - p$ რადიუს-ვექტორის Γ წირის რაღაც q

წერტილში, რომელიც ვთქვათ, არის ნულის ანასახი: $q = \Gamma(0)$ და ვაიძულოთ t პარამეტრი გაიაროს მთელი $I = [0,1]$ მონაკვეთი. ამასთან გამოვთვალოთ $q - p$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ისე, რომ მივიღოთ უწყვეტი ფუნქცია $I \to \mathbf{R}$ მონაკვეთზე (მეცნიერულ ენაზე ამას ჰქვია „გამოვყოთ არგუმენტის უწყვეტი შტო" [23]). მაშინ ცხადია, რომ მონაკვეთის „ბოლო" 1 წერტილში რადიუს-ვექტორი დაბრუნდება თავის საწყის მდგომარეობასთან, ასე რომ ზემოთ ხსენებული არგუმენტის ნაზარდი იქნება 2π-ს მთელრიცხოვანი ჯერადის ტოლი:

$$\arg(1) - \arg(0) = 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ ეს k რიცხვი გვიჩვენებს მარყუჟის ბრუნვათა რაოდენობას მოცემული p წერტილის ირგვლივ და ეს ასეც არის. რა თქმა უნდა, კიდევ საჭიროა შევამოწმოთ, რომ ეს მთელი რიცხვი არ არის დამოკიდებული საწყისი წერტილის და არგუმენტის შტოს არჩევანზე. ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით, რადგან ამ დროისათვის ეს სრულიად სტანდარტული და თვალსაჩინო მსჯელობაა, რომელიც ბევრ პოპულარულ წიგნში არის გადმოცემული (იხ., მაგალითად, [28]).

ამ შემოწმების შედეგად შესაძლებელი ხდება შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება 9.2. ვთქვათ $\Gamma : I \to \mathbf{R}^2$ გლუვი მარყუჟია $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეში. მაშინ $\mathbf{R}^2 \backslash \gamma$ დამატების ყოველი $p \in \mathbf{R}^2 \backslash \gamma$ წერტილისათვის განსაზღვრულია მთელი რიცხვი $\mathrm{ind}(\Gamma, p)$, რომელსაც ეწოდება Γ წირის ინდექსი p წერტილის მიმართ.

ზემოთ ჩვენ აღვწერეთ ინდექსის გამოთვლა პარამეტრიზებული მარყუჟის შემთხვევაში, მაგრამ ადვილი დასანახია, რომ სინამდვილეში საკმარისია ფიქსირებული იყოს მარყუჟის

ორიენტაცია, ანუ მარყუჟის გავლის მიმართულება. ამგვარად, $\mathrm{ind}(\Gamma, p)$ არის ორიენტირებული მარყუჟის ინვარიანტი.

ცხადია, რომ ორიენტაციის შეცვლის შედეგად იგი იცვლის ნიშანს, რასაც ზოგჯერ გამოხატავენ ფორმულით:

$$\mathrm{ind}(\Gamma, p) = -\,\mathrm{ind}(-\Gamma, p).$$

ამ ინვარიანტს გააჩნია რამდენიმე მნიშვნელოვანი თვისება, რომლებსაც ჩვენ ახლა მოვიყვანთ დამტკიცების გარეშე.

შევნიშნავთ, რომ შემოტანილ ინდექსს შეიძლება ვუყუროთ როგორც „ორცვლადიან" ფუნქციას, რომლის პირველი „არგუმენტი" Γ წირია, ხოლო მეორე „არგუმენტი"- p წერტილი წირის ანასახის დამატებიდან. ამასთან, თვით განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ინდექსი უნდა იყოს უწყვეტი როგორც ამ ორი არგუმენტის ფუნქცია. მეორე მხრივ, ინდექსის მნიშვნელობა ყოველთვის მთელი რიცხვია, ასე რომ იგი საერთოდ არ შეიძლება შეიცვალოს არგუმენტების მცირე ცვლილებების დროს და აქედან გამომდინარეობენ ინდექსის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი „მდგრადობის თვისებები". აღვნიშნავთ აგრეთვე, რომ ჩვენ აქ ვხვდებით ალგებრული ტოპოლოგიის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ხერხს, როდესაც შემოიტანება მთელრიცხოვანი ინვარიანტები, რომლებიც აღმოჩნდებიან მდგრადები ზუსტად ამ მთელრიცხოვნობის გამო.

ჩვენს შემთხვევაში, რაც ეხება უწყვეტობის მეორე არგუმენტის მიმართ, აქ ყველაფერი ნათელია. მართლაც, თუ ავიღებთ p წერტილთან საკმაოდ ახლო სხვა p' წერტილს, მაშინ ყველა რადიუს-ვექტორები $q - p'$, სადაც $q - \gamma$ მარყუჟის ცვალებადი წერტილია, განიცდიან მცირე ცვლილებებს, ასე რომ მათი არგუმენტების სრული ნაზარდი განიცდის მცირე ცვლილებას. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეს ნიშნავს, რომ არგუმენტის სრული ნაზარდი საერთოდ არ იცვლება, ასე რომ

$\operatorname{ind}(\Gamma,p)$ ლოკალურად მუდმივია როგორც p წერტილის ფუნქცია. ამგვარად, ინდექსი მუდმივია $\mathbf{R}^2\setminus\gamma$ სიმრავლის ბმულობის კომპონენტებზე, ასე რომ ყოველ ასეთ კომპონენტს შეესაბამება ცალსახად განსაზღვრული მთელი რიცხვი.

მოდით დავრწმუნდეთ, რომ ეს ნამდვილად განაზოგადებს ჟორდანის ზემოხსენებულ თეორემას. მარტივი γ მარყუჟის შემთხვევაში ნათელია, რომ $\operatorname{ind}(\gamma,p)=0$ $\mathbf{R}^2\setminus\gamma$ დამატების შემოუსაზღვრელ კომპონენტზე. მართლაც, საკმაოდ შორი p წერტილიდან მთელი γ მარყუჟი სჩანს ნებისმიერად მცირე კუთხის ფარგლებში, ასე რომ არგუმენტის ნაზარდმაც არ შეიძლება მიაღწიოს სრულ ბრუნვას p წერტილის ირგვლივ. უმარტივეს შემთხვევაში, როდესაც $\gamma=S^1$ წრეწირია, პირდაპირ განსაზღვრებიდან ნათელია, რომ $\operatorname{ind}(S^1,p)=1$ ნებისმიერი p წერტილისათვის ამ წრეწირის შიგნით. სინამდვილეში, იგივე სამართლიანია ყოველი მარტივი მარყუჟისათვის, ე.ი. $\left|\operatorname{ind}(\gamma,p)\right|=1$ მისი დამატების შემოსაზღვრულ კომპონენტებზე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, დამატების კომპონენტები შეიძლება გამორჩეულ იქნეს ინდექსის მნიშვნელობის მიხედვით.

როგორც დავინახეთ ქამანდის მაგალითის განხილვის დროს, მოსალოდნელოა, რომ ინდექსი არ იცვლებოდეს თვით Γ მარყუჟის მცირე ცვლილებების დროს. ეს ასეც არის, თანაც ჩვენ შეგვიძლია ეს თვისება ზუსტად ჩამოვაყალიბოთ უიტნის ტოპოლოგიის დახმარებით. სინამდვილეში, ინდექსს გააჩნია ბევრად უფრო ძლიერი „მდგრადობის თვისება" პირველი არგუმენტის მიმართ, რომლის ჩამოყალიბებისათვის ჩვენ დაგვჭირდება ჰომოტოპიის ძალზე სასარგებლო ცნება [40].

განსაზღვრება 9.3. $\Gamma,\Gamma':I\to\mathbf{R}^2$ ბრტყელი მარყუჟების ჰომოტოპია ეწოდება $I\times I$ კვადრატის ისეთ უწყვეტ ასახვას $F:I\times I\to\mathbf{R}^2$, რომ სრულდება ტოლობები:

$$F(t,0) = \Gamma(t), \;\; F(t,1) = \Gamma'(t)$$

ყოველი $t \in I$ რიცხვისათვის. ჰომოტოპია ეწოდება დასაშვები სიბრტყის რაღაც p წერტილის მიმართ, თუ p წერტილი არ ეკუთვნის მის $F(I \times I)$ ანასახს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ Γ და Γ' მარყუჟები ჰომოტოპურია p წერტილის მიმართ.

შეკრული წირის ინდექსის ფუნდამენტური თვისება შეიძლება ჩამოყალიბებულ იქნეს შემდეგი თეორემის სახით.

თეორემა 9.1. თუ Γ და Γ' მარყუჟები ჰომოტოპურია p წერტილის მიმართ, მაშინ

$$\operatorname{ind}(\Gamma,p) = \operatorname{ind}(\Gamma',p).$$

დამტკიცების იდეა სრულიად ნათელია უკვე გაკეთებული შენიშვნების გათვალისწინებით. მართლაც, საკმარისია დავშალოთ არსებული ჰომოტოპია საკმაოდ მცირე ნაბიჯებად, რომლების დროსაც ინდექსი არ იცვლება ზემოთ აღნიშნული მდგრადობის გამო. რა თქმა უნდა, ამ იდეის დაზუსტებისათვის კიდევ ბევრი ტექნიკური სამუშაოა საჭირო და ჩვენ ვტოვებთ ამას მკითხველისათვის ძალზე სასარგებლო სავარჯიშოდ. გართულებების შემთხვევაში შესაძლებელია ყველა დეტალის ნახვა იმავე წიგნში [40].

სინამდვილეში, სამართლიანია აგრეთვე შებრუნებული თეორემაც, ე.ი. ორი მარყუჟი ჰომოტოპურია რაღაც წერტილის მიმართ ზუსტად მაშინ, როდესაც მათ გააჩნიათ ერთნაირი ინდექსები ამ წერტილის მიმართ [40]. ამ შედეგის დამტკიცება გაცილებით უფრო რთულია და მასზე არ შევჩერდებით.

ამ შედეგებს აქვთ უშუალო გამოყენება ალგებრულ განტოლებათა თეორიაში. ამისათვის საჭიროა განვიხილოთ ენდომორფიზმთა ქცევა გარკვეული შეკრული წირების მიმართ. მაგალითად, იყოს $F = (f,g) \in (\mathbf{R}_2)^2$ სიბრტყის პოლინომური

ენდომორფიზმი და $D\subset \mathbf{R}^2$ — რაღაც წრე, ანუ სხვა ბმული არე, რომლის γ საზღვარი ჰომეომორფულია ერთეულრადიუსიანი S^1 წრეწირის. ცხადია, F ენდომორფიზმის შეზღუდვა γ საზღვარზე განსაზღვრავს პარამეტრიზებულ Γ მარყუჟს სიბრტყეში. ამიტომ ნებისმიერი p წერტილისათვის $\mathbf{R}^2\backslash F(\gamma)$ დამატებიდან განსაზღვრულია $\operatorname{ind}(\Gamma,p)$ ინდექსი, რომელსაც ჩვენ ასეთ შემთხვევაში $\operatorname{ind}(F,D,p)$ აღვნიშნავთ და ვუწოდებთ $F\,|\,D$ შეზღუდვის ხარისხს p წერტილის მიმართ.

წინადადება 9.1. (არგუმენტის პრინციპი) [23]. თუ $\operatorname{ind}(F,D,p)\neq 0$, მაშინ p ეკუთვნის ამ D არეს ანასახს: $p\in F(D)$.

დამტკიცებისათვის საკმარისია დავუშვათ, რომ $p\notin F(D)$ და $D=\{|z|<1\}$. ამ შემთხვევაში ადვილია ავაგოთ ჰომოტოპია Γ მარყუჟსა და მუდმივ $c:I\to F(0)$ მარყუჟს შორის. იგი შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს, მაგალითად, რადიალური ჰომოტოპიის საშუალებით, რომელიც მოჭიმავს γ საზღვარს წრის ცენტრში, რასაც შემდეგი ფორმულები შეესაბამება:

$$T(t,s)=F(se^{it}).$$

იმ დაშვებიდან გამომდინარე, რომ $p\notin F(D)$, ეს ჰომოტოპია იქნება დასაშვები p წერტილის მიმართ, ასე რომ $\operatorname{ind}(F,D,p)$ უნდა იყოს მითითებული მუდმივი მარყუჟის $\operatorname{ind}(c,D,p)$ ინდექსის ტოლი, რომელიც, ცხადია, ნულოვანია. მიღებული წინააღმდეგობა გვაძლევს სასურველ დასკვნას.

აღვნიშნავთ, რომ ეს წინადადება გვაძლევს რაღაც ტოპოლოგიურ საკმარის პირობას $\{F(x)=0\}$ განტოლების ამონახსნთა არსებობის შესახებ, რაც უკვე აშკარადაა დაკავშირებული ჩვენ ძირითად ამოცანასთან. გარდა ამისა, ჩვენ დაგვჭირდება კიდევ ერთი მარტივი შედეგი.

წინადადება 9.2. (რუშეს თეორემა). თუ $F,G\in(\mathbf{R}_2)^2$ ორი

ენდომორფიზმია და D არეს საზღვარზე შესრულებულია უტოლობა $|G| < |F|$, მაშინ

$$\operatorname{ind}(F,D,0) = \operatorname{ind}(F+G,D,0).$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$T(t,s) = F(t) + sG(t)$$

ჰომოტოპია ამ შემთხვევაში იქნება დასაშვები ნულ წერტილის მიმართ.

ეს მარტივი შედეგი ფართოდაა ცნობილი მათემატიკურ ფოლკლორში სახელწოდებით „ლემა მანდილოსნისა და ფინიას შესახებ". ეს სახუმარო სახელი აიხსნება იმით, რომ ლემის პირობებში შეიძლება წარმოვიდგინოთ მანდილოსანი რომელიმე სახლის ირგვლივ რამდენჯერმე შემოუვლის, საბმელის სიგრძეზე უფრო მეტი მანძილის დაშორებით, მაშინ ფინიაც, რომელსაც თავისი სურვილისამებრ შეუძლია იტრიალოს მანდილოსნის გარშემო, იმდენივე შემოვლას შეასრულებს ამ სახლის ირგვლივ. საინტერესოა, რომ ეს სიუჟეტი მათემატიკური ანალიზის სხვა „სახელოვან" ლემას გვახსენებს — „ლემა ორი მილიციელის შესახებ". ორივე ამ წინადადებაში საუბარი ეხება რაღაც იძულებას, და მართლაც, პირველი მათგანი წარმოადგენს ბუნებრივ კომპლექსურ განზოგადებას იმ იდეისა, რომელიც გამოხატულია მეორეში.

ახლა კი ადვილად შეგვიძლია გადმოვცეთ გაუსის თეორემის დამტკიცება. ვთქვათ

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

კომპლექსური პოლინომია, რომელსაც განვიხილავთ როგორც

$\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ სიბრტყის ენდომორფიზმს.

განვიხილოთ დიდი

$$S_R = \{z \in \mathbf{C} : |z| = R\}, \ R \gg 1,$$

წრეწირის ანასახი $f(S_R)$. ნათელია, რომ საკმარისად დიდი $R > 0$ შემთხვევაში მივიღებთ შეკრულ წირს, რომელიც შიგნით შეიცავს კოორდინატთა სათავეს. ამიტომ განსაზღვრულია

$$\operatorname{ind}(f \mid S_R, 0) = \operatorname{ind}(f, D_R, 0)$$

ინდექსი. შევნიშნოთ ახლა, რომ საკმარისად დიდი $R > 0$ რიცხვისათვის S_R წრეწირზე შესრულებულია $|g(z)| < |z|^n$ უტოლობა, სადაც $g(z) = f(z) - z^n$. ამრიგად, „ფინიას" როლში აქ გამოდის $g(z)$ პოლინომი, ასე რომ $\operatorname{ind}(f, D_R, 0) = \operatorname{ind}(z^n, D_R, 0)$. გამოვთვალოთ $\operatorname{ind}(z^n, D_R, 0)$ პირდაპირ განსაზღვრების მიხედვით, ცხადია მივიღებთ, რომ $\operatorname{ind}(z^n, D_R, 0) = n$ ამიტომ $\operatorname{ind}(f, D_R, 0) = n$, ასე რომ წინადადება 9.1 მიხედვით $0 \in f(D_R)$, ე. ი. $\{f(z) = 0\}$ განტოლებას გააჩნია ფესვი, რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

ეს დამტკიცება იმითაც არის აღსანიშნავი, რომ აქ პირველად ასეთი თვალსაჩინო ეფექტით იქნა გამოყენებული შეკრულ ბრტყელ წირთა ტოპოლოგიური თვისებები, კერძოთ, ამ მსჯელობიდან ნათელი ხდება, რომ $\operatorname{ind}(F \mid S_R, 0)$ მუდმივია თითოეული საკმაოდ დიდი $\mathbf{R} \gg 1$ რიცხვისათვის ნებისმიერი საკუთრივი F ენდომორფიზმის შემთხვევაში, რაც გვაძლევს ასეთ ენდომორფიზმების გარკვეულ ტოპოლოგიურ მახასიათებელს. როგორც ჩვენ მალე დავინახავთ, აქ საქმე გვაქვს ასახვის უმნიშვნელოვანეს ტოპოლოგიურ ინვარიანტთან, რომლის შესწავლასაც ახლა შევუდგებით.

§ 10. პოლინომური ასახვის ხარისხი

დავუშვათ, რომ $F(f,g) \in (\mathbf{R}_2)^2$ სიბრტყის საკუთრივი პოლინომური ენდომორფიზმია. თითოეულ ასეთ F ენდომორფიზმს ჩვენ ახლა შევუსაბამებთ გარკვეულ მთელ რიცხვს, რომელიც მჭიდროდ არის დაკავშიებული ახლახან განხილულ ტოპოლოგიურ ინვარიანტთან.

განსაზღვრება 10.1. F ასახვის ხარისხი ეწოდება შემდეგ ჯამს

$$\deg F = \sum_{x \in F^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_F(x), \qquad (10.1)$$

გამოთვლილს F ასახვის ნებისმიერი $y \in \operatorname{Reg} F$ რეგულარული მნიშვნელობისათვის.

ეს განსაზღვრება დამატებით ახსნას მოითხოვს. უწინარეს ყოვლისა, (10.1) ჯამს გააჩნია აზრი, რამდენადაც რეგულარული მნიშვნელობის ყველა წინასახეში იაკობიანი არანულოვანია, $J_F(x) \neq 0$. ამის გარდა, ჩვენ უნდა შევამოწმოთ ასეთი განსაზღვრების კორექტულობა, ე.ი. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ამ ჯამის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული რეგულარული მნიშვნელობის არჩევანზე. ჩვეულებრივად ციტირებული დამტკიცება საკმაოდ დელიკატურია და შედარებით მეტ ტოპოლოგიურ მომზადებას მოითხოვს, მაგრამ ჩვენ ახლა საქმეს ძალზე გავამარტივებთ უიტნის თეორემის დახმარებით.

ამისათვის ჯერ დავუშვათ, რომ F ასახვა მდგრადია. მაშინ, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ამ რიცხვის ლუწკენტობა (ანუ ნაშთი მოდულით ორი) არ არის დამოკიდებული რეგულარული მნიშვნელობის არჩევანზე, როგორც ეს § 6-ში იყო დადგენილი, მდგრად ასახვათა გეომეტრიის შესწავლასთან დაკავშირებით. იქ ჩვენ ვსარგებლობდით იმით, რომ ნაკეცის წირთა ანასახებმა სიბრტყეს შლიან ისეთ ნაწილებად, რომელთა შიგნითაც რეგულარული მნიშვნელობის წინასახეთა რიცხვი მუდმივია.

ახლა კი დავრწმუნდებით იმაში რომ ასეთ არეებში მუდმივია აგრეთვე (10.1) ჯამის მნიშვნელობაც.

მართლაც ნათელია, რომ რეგულარული მნიშვნელობის მცირე ცვლილებების დროს იაკობიანმა არ შეიძლება შეიცვალოს თავისი ნიშანი არცერთ წინასახეში. ამრიგად, (10.1) ჯამი ლოკალურად მუდმივია, ასე, რომ იგი მუდმივია ყოველი მითითებული არის შიგნით.

ახლა ვნახოთ რა ხდება მაშინ, როდესაც რეგულარული მნიშვნელობა გადადის ერთი არედან მეორეში. ცხადია, ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ ის შემთხვევაც, როდესაც y წერტილი გადაკვეთს ნაკეცის წირის $F(S(F))$ სახეს არაგანსაკუთრებულ (რეგულარულ) წერტილში. როგორც იმავე § 6- ში ვნახეთ, ამ დროს შეიძლება გაჩნდეს ან გაქრეს ზუსტად ორი წინასახე, რადგან სწორედ ასეა საქმე ნაკეცის ლოკალური მოდელისათვის. ახლა მხედველობაში მივიღოთ, რომ ნაკეცის წირის ერთ მხარეს ასახვას აქვს დადებითი იაკობიანი (ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ასახვა ინარჩუნებს ორიენტაციას), მეორე მხარეს კი — პირიქით, იაკობიანი უარყოფითია (ასახვა იცვლის ორიენტაციას). ეს ნათელია ლოკალური მოდელის განხილვიდან. გამომდინარე აქედან, ნაკეცთა წირის ანასახის გადაკვეთის დროს (10.1) არ იცვლება, ვინაიდან მას ემატება ან აკლდება ასეთი სახის შესაკრებთა წყვილი. ამრიგად, მდგრადი ასახვის შემთხვევაში ეს ჯამი მართლაც არ არის დამოკიდებული რეგულარული მნიშვნელობის არჩევაზე.

აქედან უკვე გამომდინარეობს კორექტულობა ზოგად შემთხვევაშიც. მართლაც, (10.1) ჯამის მნიშვნელობა ყოველთვის მთელი რიცხვია, ასე რომ იგი არ შეიძლება შეიცვალოს თვით ასახვის ისეთი მცირე შეშფოთების დროს, როდესაც y წერტილი რჩება რეგულარულ მნიშვნელობად ახალი ასახვისათვისაც. ახლა დავუშვათ ჩვენ გვინდა შევადაროთ ერთმანეთს (10.1) ჯამის მნიშვნელობები F ასახვის ორი სხვადასხვა y

და y' რეგულარული მნიშვნელობისათვის. უიტნის თეორემის თანახმად, არსებობს F ასახვის ისეთი მცირე მდგრადი შეშფოთება $\widetilde{F}$, რომ y და y' წერტილები რჩებიან რეგულარული მნიშვნელობებად ახალი ასახვისათვისაც. ამიტომ ვღებულობთ ტოლობების შემდეგ ჯაჭვს, საიდანაც გამომდინარეობს სასურველი დასკვნა:

$$\deg(F,y)=\deg(\widetilde{F},y)=\deg(\widetilde{F},y')=\deg(F,y').$$

ამგვარად, ხარისხი კორექტულადაა განსაზღვრული. შევნიშნოთ, რომ ამისი დამტკიცება მივიღეთ სრულიად მარტივი და ბუნებრივი ტოპოლოგიური მსჯელობის დახმარებით, რომელშიც მთავარ როლს ასრულებენ უიტნის ლოკალური მოდელები. ეს გარემოება ტიპიურია მდგრად ასახვებთან მუშაობის დროს და მოყვანილი მსჯელობა ნათლად გვიჩვენებს მდგრადი ასახვების ღირსებებს და პრაქტიკულ მნიშვნელობას.

უფრო მეტიც, უიტნის შედეგებიდან შეგვიძლია უშუალოდ მივიღოთ ასახვის ხარისხის ძირითადი თვისებებიც. მსურველებს შეუძლიათ შეადარონ ჩვენი მიდგომა სრულიად ანალიზურ, მაგრამ ბევრად უფრო რთულ და გრძელ მსჯელობებს [23] წიგნიდან.

აღვნიშნოთ, რომ ხარისხის განმარტების კორექტულობის დამტკიცება მიგვანიშნებს, რომ ასახვის ხარისხის მნიშვნელობა ერთნაირია თვით ასახვისთვის და მისი ნებისმიერი საკმაოდ მცირე მდგრადი შეშფოთებისათვის, უკანასკნელი კი იმავე დროს "მოიმსახურებს" ყველა საკმაოდ ახლო ასახვას. აქედან უკვე ადვილია დავასკვნათ, რომ ხარისხს გააჩნია კიდევ უფრო ძლიერი ტიპის მდგრადობის თვისება, რომლის ჩამოსაყალიბებლად უნდა მივმართოთ ჰომოტოპიის ცნებას. ჩვენ არ მოვიყვანთ ასახვათა ჰომოტოპიის ზოგად განსაზ-

ღვრებას არამედ პირდაპირ მივცემთ მას ასეთ ფორმას, რომელიც საჭიროა ჩვენი მიზნებისათვის.

განსაზღვრება 10.2. ვთქვათ $F, \widetilde{F} \in (\mathbf{R}_2)^2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ორი ნამდვილი პოლინომური ენდომორფიზმია. ამბობენ, რომ F და $\widetilde{F}$ ენდომორფიზმები ჰომოტპიურები არიან, თუ არსებობს ისეთი $T : \mathbf{R}^2 \times [0,1] \to \mathbf{R}^2$ უწყვეტი ასახვა, რომ $T(X,0) = F(x)$ და $T(x,1) = \widetilde{F}(x)$ ნებისმიერი $x \in \mathbf{R}^2$ წერტილისათვის. ამასთან, T ასახვას უწოდებენ ჰომოტოპიას F და $\widetilde{F}$ შორის. თუ ყოველი $t \in I$ რიცხვისათვის $T(\cdot, t)$ ასახვა არის გლუვი, მაშინ T ასახვას გლუვ ჰომოტოპიას უწოდებენ, ხოლო თუ ყოველი $t \in I$ რიცხვისათვის $T(\cdot, t)$ ასახვა საკუთრივია, მაშინ T ასახვას საკუთრივ ჰომოტოპიას.

აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ საქმე გვექნება ძირითადად საკუთრივ გლუვ ჰომოტოპიებთან საკუთრივ პოლინომურ ენდომორფიზმთა შორის. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ენდომორფიზმები საკუთრივად ჰომოტოპურნი არიან. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ ხარისხის მოყვანილი განსაზღვრება ყოველგვარი ცვლილებების გარეშე ნარჩუნდება გლუვი ენდომორფიზმებისათვის, რადგან ჩვენ გამოვიყენეთ მხოლოდ უიტნის თეორემა და ასახვის საკუთრივობა.

ახლა მხედველობაში მივიღოთ, რომ გლუვი საკუთრივი ჰომოტოპია შეიძლება ჩავატაროთ იმდენად მცირე ნაბიჯებით, რომ თითოეულ მათგანზე ენდომორფიზმის $\deg T(\cdot, t)$ ხარისხი არ შეიცვლება ზემოთ აღნიშნული მდგრადობის თვისების თანახმად. აქედან ნათელი ხდება, რომ ასეთი ჰომოტოპიის დროს ხარისხი არ შეიძლება შეიცვალოს, რასაც მივყავართ ხარისხის უმნიშვნელოვანესი თვისების ჩამოყალიბებამდე.

თეორემა 10.1. თუ F და $\widetilde{F}$ არიან საკუთრივად ჰომოტოპური სიბრტყის საკუთრივი ენდომორფიზმები, მაშინ

$$\deg F = \deg \widetilde{F}.$$

აღვნიშნავთ, რომ გლუვი ჰომოტოპიის შემთხვევაში ჩვენ ეს უკვე დავადგინეთ (თუმცა დაჟინებით ვთავაზობთ მკითხველს დაამუშაოს ყველა დეტალი დამოუკიდებლად). მოყვანილი ზოგადი ფორმულირება ჩვენ არ დაგვჭირდება, მაგრამ მაინც დავსძენთ, რომ სიბრტყის ჰომოტოპური ენდომორფიზმები არიან იმავე დროს გლუვად ჰომოტოპურები, ასე რომ არავითარი სპეციალური დამტკიცება აქ არ გვჭირდება.

შემდგომში ჩვენ ბევრჯერ გამოვიყენებთ ხარისხის ჰომოტოპურ ინვარიანტობას, ახლა კი აღვნიშნავთ მხოლოდ ერთ მარტივ შედეგს.

წინადადება 10.1. ვთქვათ $F = (f, g) \in (\mathbf{R}_2)^2$ სიბრტყის საკუთრივი ენდომორფიზმია. მაშინ ნებისმიერი φ, ψ დადებითი გლუვი ფუნქციებისათვის

$$\deg(\varphi f, \psi g) = \deg F.$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია ავაგოთ ბუნებრივი ჰომოტოპია

$$T(x,t) = \big((t + (1-t)\varphi(x))f(x), (t + (1-t)\psi(x))g(x)\big).$$

ხარისხის სხვა მნიშვნელოვანი თვისება გამოხატულია შემდეგ თეორემაში, რომელიც ჯერ კიდევ ლ. კრონეკერის მიერ იქნა მიღებული [23].

თეორემა 10.2. თუ სიბრტყის საკუთარი პოლინომური ენდომორფიზმის ხარისხი განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ ეს ენდომორფიზმი სიურექციულია, ე. ი. მისი ანასახი მთელ სიბრტყეს ემთხვევა.

ეს შედეგები თითქმის ტავტოლოგიური ხდება ჩვენს მიდგომაში, რადგან ნებისმიერი p წერტილი $F(\mathbf{R}^2)$-ის ანასახის $\mathbf{R}^2 \setminus F(\mathbf{R}^2)$ დამატებიდან, იქნება რეგულარული მნიშვნელობა

და მისთვის, ცხადია, (10.1) ჯამი ნულოვანია.

ნათელია, რომ ეს თეორემა $\{F(x)=0\}$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა არსებობის საკმარის პირობას იძლევა, რომელიც ძალზე ხშირად ერთობ სასარგებლოა. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ ენდომორფიზმის ხარისხი აშკარადაა დაკავშირებული შტურმის ამოცანასთან, რადგან იგი გამოსახავს $\{F(x)=0\}$ განტოლების ფესვთა „ალგებრულ რაოდენობას", ანუ ფესვთა ალგებრულ რიცხვს. ასეთი ტერმინი მიუთითებს იმაზე, რომ ხარისხის დათვლის დროს თითოეული ფესვი ითვლება გარკვეული ნიშნით, რომელიც შეესაბამება ასახვის ქცევას ორიენტაციის მიმართ. ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, ფესვთა ალგებრული რიცხვი აღმოჩნდა უფრო მდგრადი და მოხერხებული ინვარიანტი, ასე რომ მისი გამოთვლა უფრო ადვილი უნდა იყოს.

ეს მართლაც ასეა და გვაძლევს საშუალებას გადავდგათ ნაბიჯი შტურმის ამოცანის ამოხსნის მიმართულებით. ხარისხის გამოთვლისას ჩვენ შეგვიძლია წმინდა გეომეტრიულად გავამარტივოთ ასახვა, სანამ მისი ანალიტიკური გამოსახულება არ გამარტივდება. გავეცნოთ ამ მეთოდს საკუთრივი ერთგვაროვანი ენდომორფიზმის მაგალითზე.

შევახსენებთ, რომ ერთგვაროვანი (m,n) ბიხარისხის $(f,g):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ ენდომორფიზმი საკუთრივია ზუსტად მაშინ, როდესაც მის კომპონენტებს არა აქვთ საერთო ნულ-წრფეები. როგორც ცნობილია, ყოველი ორცვლადიანი ფორმა იშლება პირველი რიგის თანამამრავლად, რომლის რაოდენობა ფორმის ხარისხის ტოლია. ეს გამომდინარეობს პირდაპირ ალგებრის ძირითადი თეორემიდან. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია გავყოთ მოცემული ფორმა y-ზე, შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $t=x/y$ და საქმე დავიყვანოთ მიღებული ერთცვლადიანი პოლინომის, რომელიც იწოდება ფორმის დეჰომოგენიზაციად, დაშლამდე. ასეა თუ ისე, შეგვიძლია დავხაზოთ

სიბრტყეზე ორივე კომპონენტის ნულ-წრფეთა სისტემა. ამასთან, გავაფერადოთ ეს ორი სისტემა ორი სხვადასხვა ფერით, ვთქვათ ლურჯით და წითლით. საკუთრივობის გამო, სხვადასხვა ფერების ორი წრფე ერთმანეთს არასდროს ემთხვევა.

დავიწყოთ ერთეული წრეწირის შემოვლა დადებით მიმართულებაში (საათის ისრის წინააღმდეგ) და ამასთან ჩავატაროთ შემდეგი ოპერაციები: თუ ამ შემოვლის დროს ორ ლურჯ წრფეს შორის არ აღმოჩნდა წითელი წრფე, ჩვენ ამოვაგდებთ ლურჯ წრფეთა ამ წყვილს და განვაგრძობთ შემოვლას. ცხადია, იგივე ეხება წითელი წრფეების წყვილებსაც. როგორც ჩანს, შემოვლის დამთავრების შემდეგ მოხდება სხვადასხვა ოჯახის წრფეების "შენაცვლება", ე.ი. ორი ერთნაირ ფერის წრფეს შორის ყოველთვის არის სხვა ფერის წრფე, ან საერთოდ, ყველა წრფე ამოიშლება. ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ საწყისი ასახვის ხარისხი ტოლია დარჩენილი ერთი ფერის წრფეთა რიცხვისა.

მართლაც, ერთი ფერის წრფეთა წყვილის ამოგდება ჩვენი წესის მიხედვით არ ცვლის ხარისხს შემდეგი მიზეზის გამო. ჩვენ შეგვიძლია, თურმე, გავაკეთოთ ასახვის ისეთი საკუთრივი ჰომოტოპია, რომლის შედეგად ეს ორი წრფე ერთმანეთს დაემთხვევა. ამისათვის საკმარისია მოვაწყოთ წრფივი ჰომოტოპია, რომლის შედეგად ეს ორი წრფე ერთმანეთს დაემთხვევა. ამისათვის საკმარისია მოვაწყოთ წრფივი ჰომოტოპია ამ წრფეთა კუთხურ კოეფიციენტებს შორის და შევიტანოთ იგი შესაბამისი კომპონენტის სათანადო წრფივ თანამამრავლთან გამოსახულებაში, ხოლო დანარჩენი წევრები არ შევცვალოთ (დაწერეთ ასეთი ჰომოტოპიის ცხადი ფორმულები). საბოლოოდ, ახალ ასახვაში გაჩნდება რაღაც წრფივი ფორმის კვადრატი, ანუ არაუარყოფითი კვადრატული სამწევრი. როგორც ვიცით, წინადადება 10.1-ის თანახმად, ასეთი თანამა-

მრავლი შეიძლება ამოვაგდოთ, საიდანაც გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

ამრიგად, ასეთი ენდომორფიზმის ხარისხი შეიძლება ადვილად გამოითვალოს ამ ფორმალური პროცედურის საშუალებით. სინამდვილეში, იმავე ხერხით შეგვიძლია გამოვთვალოთ ხარისხი ნებისმიერი გადაუგვარებელი ენდომორფიზმისათვის. შეგახსენებთ, რომ ენდომორფიზმს უწოდებენ გადაუგვარებელს, თუ მისი კომპონენტების ლიდერები განსაზღვრავენ აგრეთვე საკუთრივ ენდომორფიზმს. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი მარტივი წინადადებიდან.

წინადადება 10.2. თუ $(f,g):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ გადაუგვარებელი პოლინომური ენდომორფიზმია, მაშინ

$$\deg(f,g)=\deg(f^*,g^*).$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია ჩავწეროთ

$$f=f^*+f_\bullet,\ \ g=g^*+g_\bullet$$

და მოვახდინოთ საკუთრივი ჰომოტოპია $F^*+tF_\bullet$ მოცემული ენდომორფიზმის და მის ლიდერთა წყვილს შორის (ჰომოტოპიის საკუთრივობა გამომდინარეობს ჩვენთვის უკვე ცნობილი საკუთრივობის საკმარისი პირობიდან).

ამგვარად, ჩვენ ვისწავლეთ ხარისხის გამოთვლა სიბრტყის ენდომორფიზმების ფართო კლასისათვის, მაგრამ სასურველია, რა თქმა უნდა, შევიმუშავოთ ხარისხის გამოთვლის უნივერსალური მეთოდი.

როგორც ჩვენ მალე ვნახავთ, პრინციპში, ეს შესაძლებელია ერმიტის სიგნატურული მეთოდის ფარგლებში, მაგრამ... მხოლოდ პრინციპში. შეგახსენებთ, რომ ყოველი $\chi\in\mathbf{R}_2$ პოლინომისათვის ერმიტმა შემოიტანა განზოგადებული დამთვ-

ლელი Q_F^χ ფორმა χ დეტექტორით (4.9) ფორმულით. აქ, რა საკვირველია, ჩვენ ისევ ვვარაუდობთ, რომ ენდომორფიზმი y სეპარაბელურია, რაც როგორც უკვე ვნახეთ, არ წარმოადგენს ძალიან დიდ შეზღუდვას.

ვიმეორებთ რა ყოველგვარი ცვლილებების გარეშე ამ ფორმის დიაგონალიზაციის პროცედურას §4-დან, ვნახავთ, რომ წევრებს, რომლებიც შეესაბამებიან კომპლექსურშეუღლებულ ფესვებს, ამჯერად გააჩნიათ სახე

$$(\chi(a+bi))(P+Qi)^2+(\chi(a-bi))(P-Qi)^2.$$

შეიძლება შევამოწმოთ, რომ ასეთი ორცვლადიანი კვადრატული ფორმის სიგნატურა ნულის ტოლია მიუხედავად დამატებითი $\chi(a \pm bi)$ მამრავლთა არსებობისა. ეს არ არის გასაკვირი, რადგან ეს მამრავლებიც კომპლექსურად შეუღლბულნი არიან χ პოლინომის ნამდვილობის გამო. მკითხველს ვთავაზობთ იპოვოს გარდაქმნა, რომელიც პირდაპირ გადაიყვანს ამ ფორმას დიაგონალურ სახეში.

ამგვარად, სიგნატურა მთლიანად განისაზღვრება წევრებით, რომლებიც შეესაბამებიან ნამდვილ ფესვებს. მოცემულ შემთხვევაში დადებითი კვადრატები პასუხობენ იმ ფესვებს, სადაც $\chi(x)>0$, ხოლო უარყოფითი კვადრატები შეესაბამებიან იმ x ფესვებს, სადაც $\chi(x)<0$. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი წინადადება ერმიტის მეთოდის ფარგლებში.

თეორემა 10.3. Q_F^χ ფორმის სიგნატურა ტოლია სხვაობისა

$$\#\left(F^{-1}(0)\cap\{\chi>0\}\right)-\#\left(F^{-1}(0)\cap\{\chi<0\}\right). \qquad (10.2)$$

შევნიშნოთ, რომ ამნაირად შეიძლება მოვახერხოთ ფესვთა ალგებრული რიცხვის გამოთვლას. მართლაც, ავიღებთ რა

χ დეტექტორის როლში J_F იაკობიანს, (10.2)-დან მივიღებთ სასურველ ფორმულას. ამგვარად, ერმიტის მეთოდი ვარგისიანია ხარისხის გამოსათვლელადაც. თუ შევძლებთ Q_F^χ ფორმის კოეფიციენტების ალგებრულ გამოთვლას.

ამისათვის ცხადია, უნდა ვიცოდეთ § 4- ში წარმოდგენილი მსჯელობის გამეორება. კვლავ ძნელი არ არის დავრნმუნდეთ, რომ Q_F^χ ფორმის კოეფიციენტები ადვილად გამოისახებიან

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^i \beta_j^l$$

სახის ფესვთა სპეციალური გამოსახულებების დახმარებით. ერთგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგით მათ ფესვთა შერეული ნიუტონური ჯამები ენოდება. ამგვარად, საქმე მივიდა ამ ჯამების ალგებრულ გამოთვლასთან (1.8) სისტემის კოეფიციენტთა საშუალებით. სამწუხაროდ, აღმოჩნდა, რომ ეს სრულიად არატრივიალური ამოცანაა.

საკმარისია ითქვას, რომ ვერც ერმიტმა და ვერც მისმა მიმდევრებმა იგი ზოგადად ვერ ამოხსნეს. საგულისხმოა, რომ მათ მიერ მიღებული კერძო შედეგები არ იძლევიან ამ ამოცანის ამოხსნას იმ შემთხვევაში, როცა დეტექტორის როლში გამოდის იაკობიანი, ასე რომ ხარისხის ეფექტური გამოთვლა ამ მეთოდით ვერ ხერხდება. სინამდვილეში, ამ ცოტა ხნის წინ გამოირკვა, რომ ეს მაინც შესაძლებელია, მაგრამ ამისათვის საჭიროა ანალიზურ ფუნქციათა ნაშთების გამოყენება, რაც ძალიან შორს არის ჩვენი თემიდან.

ამგვარად, სიგნატურული მეთოდის უშუალოდ გამოყენების მცდელობა წინააღმდეგობას აწყდება. ეს არც არის გასაკვირი, რადგან პოლინომური ასახვა - საკმაოდ რთული ობიექტია, მის ფესვებს შეუძლიათ განლაგდნენ მთელ სიბრტყეზე და მათთვის თვალის მიდევნება ძნელია. მეორეს მხრივ, ეს ამოცანა თითქოს ამოხსნადი უნდა იყოს - მართლაც, ჩვენ ხომ

ძალზე მარტივად დავთვალეთ ხარისხი ენდომორფიზმთა საკმაოდ ფართო კლასისათვის. ამასთან, მარყუჟის წესრიგი წერტილის მიმართ გვეჩვენება, როგორც ფრიად თვალსაჩინო ინვარიანტი. მიუხედავად ამისა, არავითარი პირდაპირი შეტევა საქმეს არ შველის. საბოლოოდ კი, გამოირკვა, რომ გზა ამოხსნისკენ გაცილებით უფრო დახლართული და არატრივიალურია.

სინამდვილეში, აქ შეიძლება მივყვეთ ცნობილ წესს: თუ ამოცანა არ გამოდის, საჭიროა ვცადოთ უფრო ღრმად ჩავნდეთ მონათესავე, მაგრამ შედარებით მარტივ სიტუაციებს და მიღებული პასუხებიდან შევეცადოთ გამოვიყვანოთ რაც შეიძლება ზოგადი დასკვნები. ამასთან, ვცადოთ უფრო გულისყურით დავაკვირდეთ არაგადაგვარებულ შემთხვევას.

ჩვენ ხომ ფაქტობრივად საკმაოდ დიდი რეგულარული მნიშვნელობის წინასახეთა ალგებრულ რიცხვს გამოვთვალეთ. იგი საკმაოდ დიდი უნდა აგველო, რათა შეგვძლებოდა უმცირესი რიგის წევრების ზემოქმედების უგულვებელყოფა და ყურადღების გადატანა მხოლოდ ლიდერებზე. ლიდერების შემთხვევაში კი უკვე სულერთია როგორ რეგულარულ მნიშვნელობას ავილებთ — დიდს თუ მცირეს. ენდომორფიზმის ერთგვაროვნებიდან ხომ მაშინვე გამომდინერეობს, რომ თუ z არის $F=(f,g)$ ასახვის რეგულარული მნიშვნელობაა, მაშინ λz-ც მისი რეგულარული მნიშვნელობა. გარდა ამისა, ტრივიალური შემოწმება გვიჩვენებს, რომ ყველა მის წინასახეს გააჩნია სახე $(\lambda^{1/m}u,\lambda^{1/n}v)$, სადაც $m=\operatorname{ord} f$, $n=\operatorname{ord} g$. ამასთან, J_F იაკობიანის ნიშნები (u,v) და $(\lambda^{1/m}u,\lambda^{1/n}v)$ წერტილში, ცხადია, ერთნაირია. ამგვარად, ჩვენ სინამდვილეში გამოვთვალეთ (f,g) ასახვის მცირე რეგულარული მნიშვნელობის მცირე წინასახეთა ალგებრული რიცხვი.

აქედან შგვიძლია დავასკვნათ, რომ შეიძლება არ გამოვეკიდოთ ნებისმიერი რეგულარული მნიშვნელობის გაქცეულ

წინასახეებს, არამედ ვიმუშაოთ კოორდინატთა საწყისის საკმაოდ მცირე მიდამოში. ამას მივყავართ ამ დაკვირვების განზოგადების იდეამდე, რომელშიც მთავარ როლს თამაშობს ასახვის ხარისხის ლოკალური ანალოგი - ე.წ. ასახვის ლოკალური ხარისხი რაღაც წერტილში. ეს ძალიან მნიშვნელოვანი და პრაქტიკულად სასარგებლო ცნებაა, რომელიც შემდეგ პარაგრაფში იქნება დაწვრილებით შესწავლილი.

ამის გათვალისწინებით, ჩვენ ახლა მოვიყვანთ ხარისხის კიდევ ერთ თვისებას, რომელიც გაადვილებს ლოკალური ხარისხის შესწავლას. მოდით მხედველობაში მივიღოთ ის გარემოება, რომ საკუთრივი პოლინომური ენდომორფიზმისათვის ხარისხის გარდა არსებობს კიდევ ერთი ბუნებრივი ტოპოლოგიური ინვარიანტი, რომელიც მიიიღება შემდეგნაირად.

განვიხილოთ შეკრული წირი $F(S_R)$ (ანუ მარყუჟი), სადაც $R \gg 1$ საკმაოდ დიდი დადებითი რიცხვია, და აღვნიშნოთ $\mathrm{ind}(F,0)$-ით ამ წირის ინდექსი კოორდინათთა სათავეს მიმართ. ენდომორფიზმის საკუთრივობიდან გამომდინარეობს, რომ S_R და $S_{R'}$ წირები არიან დასაშვებად ჰომოტოპურები კოორდინატთა სათავის მიმართ, თუკი $R' \gg 1$ საკმაოდ დიდია, ასე რომ

$$\mathrm{ind}(S_{R,}0) = \mathrm{ind}(S_{R'},0).$$

ამ ინდექსის მნიშვნელობას ჩვენ $\mathrm{ind}(F,0)$-ით აღვნიშნავთ.

წინადადება 10.3. $\mathrm{ind}(F,0) = \deg F$.

გადაუგვარებელ შემთხვევაში ის გამომდინარეობს აღწერილი ალგორითმიდან და იმ გარემოებიდან, რომ ეს ტოლობა სამართლიანია $(z^n)_R$ ასახვის შემთხვევაში. მსჯელობის დეტალებს ვტოვებთ მკითხველისათვის.

§ 11. ენდომორფიზმის ლოკალური ხარისხი

ვთქვათ $F=(f,g)\in(\mathbf{R}_2)^2$ საკუთრივი პოლინომური ენდომორფიზმია. როგორც ვნახეთ, ზოგჯერ სასარგებლოა მოცემული y წერტილის იმ წინასახეთა განხილვა, რომლებიც ხვდებიან ერთ-ერთ $x\in F^{-1}(y)$ წინასახეს მცირე მიდამოში. მაგალითად თუ დავთვლით ყველა წინასახეს, მივიღებთ F ენდომორფიზმის ჯერადობას x წერტილში, ხოლო თუ დავთვლით ასეთ წინასახეთა ალგებრულ რიცხვს ერთგვაროვანი ენდომორფიზმის შემთხვევაში, მივიღებთ ენდომორფიზმის ხარისხს. იმისათვის, რომ განვაზოგადოთ უკანასკნელი დაკვირვება, სასარგებლოა შემდეგი

განსაზღვრება 11.1. ვთქვათ $F\in(\mathbf{R}_2)^2$ პოლინომური ენდომორფიზმია და x წერტილი იზოლირებულია $F(x)$ წერტილის სრულ $F^{-1}(F(x))$ წინასახეში. აღვნიშნოთ $D_r(x)$-ით მცირე წრეწირი ცენტრით x წერტილში და ამოვირჩიოთ იმდენად მცირე $\varepsilon>0$ დადებითი რიცხვი, რომ $D_r(x)$ წრეწირის შიგნით არ იყოს სხვა წერტილები $F^{-1}(F(x))$ წინასახიდან, თუკი $r<\varepsilon$.

F ენდომორფიზმის ლოკალური ხარისხი x წერტილში ეწოდება $F(S_r(x))$ შეკრული წირის (მარყუჟის) ინდექსს O წერტილის მიმართ:

$$\deg_x F = ind(F\,|\,S_r(x),0), \tag{11.1}$$

სადაც $S_r(x)=\partial D_r(x)$ და $r\in(o,\varepsilon)$.

უპირველეს ყოვლისა უნდა დავრწმუნდეთ ამ განსაზღვრების კორექტულობაში. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ჩვენი დაშვების თანახმად, ნებისმიერი ორი $r',r>0$ რიცხვებისათვის მარყუჟები $F\,|\,S_r$ და $F\,|\,S_{r'}$ არიან ჰომოტოპურები $\mathbf{R}^2\backslash F(x)$ ქვესიმრავლეში. ეს იქედან გამომდინარეობს, რომ მათი $F(S_R)$

და $F(S_{r'})$ წინასახეები არიან ტრივიალურად ჰომოტოპიურები რადიუსების გასწვრივ, ხოლო ასეთი ჰომოტოპიის ანასახი $\varepsilon > 0$ რიცხვის შერჩევის თანახმად $F(x)$ წერტილს არ ფარავს. რადგან მარყუჟის ინდექსი ჰომოტოპიური ინვარიანტია, ვღებულობთ სასურველ დასკვნას.

როგორც ვნახეთ, ენდომორფიზმის $\deg F$ გლობალური ხარისხის შემთხვევაში S_R წრეწირთა ინდექსები ხარისხთან მჭიდროდაა დაკავშირებული, ამიტომ, ბუნებრივია, რომ იგივე კავშირს აქვს ადგილი ლოკალური ხარისხისთვისაც.

წინადადება 11.1. თუ $y \in \operatorname{Reg} F$ რეგულარული მნიშვნელობაა, რომელიც საკმაოდ ახლოსაა $F(x)$ წერტილთან, მაშინ

$$\deg_x F = \sum_{x \in F^{-1}(F(x)) \cap V} \operatorname{sgn} J_F(x), \tag{11.2}$$

სადაც V არის $F(x)$ წერტილის საკმაოდ მცირე მიდამო.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ზოგადობის რეალური შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $x = 0$ და $F(x) = 0$. საქმის გაადვილებისათვის სასარგებლოა დავიყვანოთ ამოცანა უფრო მარტივი სახის ასახვამდე. ეს შესაძლებელია, რადგან ცხადია, რომ მაღალი ხარისხების მონომებმა არ უნდა შეიტანონ ცვლილება დასამტკიცებელი ტოლობის ორივე მხარეში. ამასთან აღვნიშნოთ, რომ ორივე მხარე ჰომოტოპიურად ინვარიანტულია, ასე რომ შეგვიძლია მათი მცირე მოდიფიცირება.

ამ მიზნით და ლიდერის ცნებასთან ანალოგიით დავარქვათ f პოლინომის დილერი ნულ წერტილში f პოლინომში შემავალი უმცირესი ხარისხის მონომთა ჯამს და აღვნიშნოთ იგი f_*-ით. შესაბამისად, ენდომორფიზმის F_* დილერი დავარქვათ (f_*, g_*) პოლინომთა წყვილს. როგორც ირკვევა, „ტიპიურ“ შემთხვევაში F_* დილერი მართლაც არის ენდომორფიზმის სრულუფლებიანი წარმომადგენელი და მისი შემცველელი

ლოკალურ საკითხებში. უფრო ზუსტად, თუ $F_\bullet$ არაერთგვაროვანი ასახვა საკუთრივია (ანუ $f_\bullet$ და $g_\bullet$ ფორმებს არ გააჩნიათ საერთო ნულ-წრფეები), მაშინ (11.2) ტოლობის ორივე მხარე არ იცვლება როდესაც გადავდივართ საწყისი ასახვიდან დილერამდე. ამისი მიზეზი ის არის, რომ დანარჩენი წევრები ხდებიან $F_\bullet$ დილერზე ბევრად უფრო მცირენი ნულ წერტილის საკმაოდ მცირე მიდამოში, ასე რომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ რუშეს პრინციპი ან პირდაპირ შევამოწმოთ, რომ $T(x,t) = F_\bullet(x) + t(F - F_\bullet)$ ჰომოტოპია, რომელიც აკავშირებს F ასახვას მის დილერთან, დასაშვებია.

ამგვარად „ტიპიურ" შემთხვევაში საკმარისია ვიმუშაოთ მხოლოდ დილერებთან, ეს უკანასკნელები კი ერთგვაროვანი პოლინომებია, ასე რომ მათთვის (11.2) ტოლობა უკვე დადგენილია §10-ში ჩვენი გეომეტრიული ალგორითმის აღწერის დროს. მართლაც, ერთგვაროვანი ასახვისათვის (11.2) ტოლობის ორივე მხარე შეიძლება გამოვთვალოთ არა მარტო მცირე, არამედ ყველა წინასახეთა გათვალისწინებით, ხოლო S_r წრეწირის ნაცვლად ავიღოთ ნებისმიერი რადიუსის S_R წრეწირი, ასე რომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინადადება 10.3. ამგვარად, „ტიპიურ" შემთხვევაში წინადადება დამტკიცებულია.

რაც შეეხება „არატიპიურ" შემთხვევებს, ჩვენ უკვე ვიცით მათთან ბრძოლის ძირითადი ხერხი - მცირე შეშფოთებები. მართლაც, ადვილი დასანახია, რომ „ტიპიური" ენდომორფიზმები ყველგან მკვრივია უიტნის ტოპოლოგიაში. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ამოვირჩიოთ მოცემული ასახვის იმდენად მცირე „ტიპიური" შეშფოთება, რომ (11.2) ტოლობის ორივე მხარე, რომლებიც როგორც აღვნიშნეთ, მდგრადია მცირე შეშფოთების მიმართ არ შეიცვლება, ასე რომ (11.2) ტოლობის სამართლიანობა ნათელი ხდება ზოგად შემთხვევაშიც.

ახლა კი ადვილად მივიღებთ ხარისხის ე.წ. „ადიციურობის

თვისებას".

წინადადება 11.2. თუ $F \in (\mathbf{R}_2)^2$ საკუთრივი პოლინომური ენდომორფიზმია და $y \in \mathbf{R}_2$ ისეთი წერტილია, რომ თითოეული $x \in F^{-1}(y)$ წინასახე იზოლირებულია $F^{-1}(y)$ სიმრავლეში, მაშინ

$$\deg F = \sum_{x \in F^{-1}(y)} \deg_x F. \tag{11.3}$$

დასამტკიცებლად საკმარისია ავიღოთ y რეგულარული მნიშვნელობა O წერტილთან საკმაოდ ახლოს და შევადაროთ განსაზღვრება 10.1 წინადადება 11.1-ს.

ცხადია, რომ (11.3) ტოლობა $\deg F$ ხარისხის განსაზღვრების ბუნებრივი განზოგადება - ჩვენ, თურმე შეგვიძლია ავიღოთ არა მარტო რეგულარული მნიშვნელობა, არამედ ნებისმიერი წერტილი და შევაჯამოთ ლოკალური ხარისხები მის წინასახეებში. აქედან, კერძოდ, ნათელი ხდება, რომ ენდომორფიზმის ხარისხის გამოსათვლელად საკმარისია ვიცოდეთ სასრულჯერადი გლუვი ასახვის ლოკალური ხარისხის გამოთვლის მეთოდი, რასაც ჩვენ შემდეგ პარაგრაფში გავაკეთებთ.

მაგრამ, მკითხველმა შეიძლება იკითხოს, როგორ უნდა გამოვიყენოთ (11.3) ტოლობა, როდესაც ჩვენ არ ვიცით $\{F(x) = y\}$ განტოლების ფესვთა ზუსტი მნიშვნელობები და ეს ხომ ძირითადი დაბრკოლებაა მთელ ჩვენს გამოკვლევაში? და მართლაც, ეს გზა არაეფექტურია და (11.3) ტოლობის მნიშვნელობა იმაშია, რომ იგი მიუთითებს ასეთი გამოთვლის პრინციპულ შესაძლებლობას, ხოლო პრაქტიკაში უნდა ვიმოქმედოთ უფრო გონივრულად. ამისათვის არსებობს სპეციალური ხერხი, რომელიც „ასახვის" ყლორტის უსასრულობაში „განხილვაში" მდგომარეობს.

ეს იმასთანაა დაკავშირებული, რომ მთელი საქმე შესაძლებელია დავიყვანოთ უსასრულობაზე ქცევის გამოკვლევამდე. რადგანაც შესაძლებელია საკუთრივი ასახვის გაფართოება S^2

სფეროზე, ჩნდება იდეა დავაკვირდეთ გაფართოებული ასახვის ქცევას „რიმანის სფეროს ჩრდილოეთ პოლუსის" მახლობლად, რაც საშუალებას მოგვცემს სათანადოდ ჩამოვაყალიბოთ ჩვენი ინტუიციური წარმოდგენები. მართლაც, სფერო ხომ ყოველი თავისი წერტილის ახლოს ერთნაირადაა მოწყობილი, ასე რომ „ჩრდილოეთ პოლუსის" მიდამო შეიძლება ასახულ იქნეს მცირე წრეზე და შემდეგ გამოკვლეული იქნეს მიღებული ასახვის ყლორტი, როგორც სიბრტყის ენდომორფიზმის ყლორტი. ეს ზუსტად ის იქნება, რასაც პროფესიონალურ ენაზე „უსასრულობაში ყლორტის განხილვა" ჰქვია.

იმათთვის ვინც მრავალნაირობის განსაზღვრებას იცნობს, ეს სრულიად ბუნებრივია და სტანდარტული მანიპულაციაა, მაგრამ დანარჩენებისათვის ჩვენ შევეცდებით სიტუაცია მაქსიმალურად თვალსაჩინოდ ავხსნათ, რადგან ეს ერთ-ერთი საკვანძო მომენტია ჩვენს მიდგომაში.

უწინარეს ყოვლისა დავიწყოთ ერთცვლადიანი პოლინომებიდან, მოვამზადოთ გეომეტრიული ნიადაგი. ამისათვის განვიხილოთ ერთეულოვანი S^2 სფერო $\mathbf{R}^3$ სივრცეში და სტერეოგრაფიული პროექცია

$$h_+ : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbf{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$$

სფეროს „ჩრდილოეთ პოლუსიდან" $\mathbf{R}^2$ სიბტყეზე, რომელსაც ჩვენ კომპლექსური რიცხვების $\mathbf{C}$ ველთან ვაიგივებთ.

შევნიშნავთ, რომ პოლინომურ ენდომორფიზმს, რომელსაც $f \in \mathbf{C}_1$ პოლინომი იძლევა, შეიძლება შევუსაბამოთ შემდეგი $(\widehat{f})_{\mathbf{R}} = H$ ასახვა S^2 სფეროსი თავის თავში:

$$H(x) = h_+^{-1} \circ f \circ h_+(x), \qquad x \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\},$$

$$H(0,0,1) = (0,0,1).$$

ნათელია, რომ ასახვა უწყვეტია. შევნიშნავთ, რომ ამით ჩვენ მივაღწევთ სიბრტყის ერთწერტილოვანი კომპაქტიფიკაციის რეალიზაციას და საკუთრივი ენდომორფიზმის შესატყვის გაფართოებას, რომლებზეც უკვე გვქონდა საუბარი §2-ში. მოცემულ შემთხვევაში, რა თქმა უნდა, ყოველი f პოლინომი იძლევა სიბრტყის საკუთრივ ენდომორფიზმს.

სინამდვილეში, მიღებულ ასახვას გაცილებით უკეთესი თვისებები გააჩნია „ჩრდილოეთ პოლუსის" მიდამოში. აზრის უფრო ზუსტად, ამასთან ახალი ცნებების მოშველიების გარეშე გამოსახატავად მოვიქცეთ ოდნავ „კუსტარულად". შემოვიტანოთ ანალოგიური სტერეოგრაფიული პროექცია h — „სამხრეთ პოლუსიდან" (0, 0, -1). მაშინ თვალსაჩინო ხდება, რომ მცირე S_r წრე S^2 სფეროზე (0,0,1) წერტილის ირგვლივ აისახება წრეწირზე $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეში, ცენტრით ნულში. h_+ პროექციის სიმარტივის გამო, ინტუიციურად ნათელია, რომ H ასახვის ყველა ლოკალური თვისება „ჩრდილოეთ პოლუსის" ახლოს შეიძლება გამოკვლეულ იქნეს, თუ ამ ასახვის გადავიტანთ წრეზე $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეში შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$Q(z) = h_- \circ H \circ h_-^{-1}(z).$$

მოდით, ახლა გამოვიკვლიოთ Q ასახვის ლოკალური ქცევა. ელემენტარული გეომეტრიიდან გამომდინარეობს, რომ

$$h_+ \circ h_-^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2} = 1/\bar{z}.$$

ამიტომ, თუ

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

მაშინ ელემენტარული გამოთვლით მივიღებთ, რომ

$$Q(z) = \frac{z^n}{(\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}z + \cdots + \bar{a}_0 z^n)}.$$

აქედან უკვე ნათელია, რომ Q ასახვა უსასრულოდ დიფე-რენცირებადია (გლუვია) (0, 0, -1) წერტილის მიდამოში, ასე რომ H ასახვაც არის გლუვი „ჩრდილოეთ პოლუსის" მიდა-მოში. სწორედ ეს გახლავთ მოცემული ასახვის ყლორტი უსას-რულობაში.

ახლა ვნახოთ რას გვაძლევს ეს ფესვთა რიცხვის ამოცანის თვალსაზრისით. წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ ავიღეთ $(f)_R$ ასახ-ვის ძალზე დიდი რეგულარული y მნიშვნელობა და ვიპოვეთ მისი წინასახე. მაშინ საკუთრივობიდან ე.ი. $\{\infty\}$ წერტილში უწყვეტობიდან ნათელია, რომ y საკმარისად დიდი მოდულის შემთხვევაში ყველა წინასახე აღმოჩნდება მოცემული მცირე წრეში ცენტრით $\{\infty\}$ წერტილში. აქედან გამომდინარე, საქმე ეხება უბრალოდ Q ასახვის მცირე რეგულარული მნიშვნელო-ბის მცირე წინასახეებს, სხვა სიტყვებით, ჩვენი ასახვის უსას-რულობაში H ყლორტის გეომეტრიულ ჯერადობას. იგივე, რა თქმა უნდა, სამართლიანია ნამდვილი ფესვებისათვის.

კერძოდ, ნათელი ხდება, რომ ხარისხის გამოთვლა დაიყვანება სათანადო გლუვი სასრულჯერადი ყლორტის ლო-კალური ხარისხის გამოთვლაზე. ამიტომ ჩვენ ახლა ამ უკანასკ-ნელ ამოცანაზე გადავიტანთ ყურადღებას.

§ 12. ლოკალური ხარისხი როგორც სიგნატურა

ახლა მოვახდინოთ გლუვი ასახვის ლოკალური ხარისხის გამოთვლის ძირითადი შედეგის ფორმულირება. როგორც შემდგომში დავინახავთ, იგი აგრეთვე საშუალებას მოგვცემს მთელი სისრულით ამოვხსნათ შტურმის ამოცანა, რომლის გა-მოც იქნა შემუშავებული ერმიტის სიგნატურული მეთოდი. სა-გულისხმოა, რომ თანამედროვე ფორმულირებაში ცოტა რამ

დარჩა ერმიტის კონსტრუქციის მახასიათებელი ნიშნებიდან, მაგრამ ბუნებით ეს იგივე კანონზომიერებაა, რაც კლასიკურ მიდგომაში.

დავიწყოთ გლუვი სასრულჯერადი ნაშთის ლოკალური ალგებრის სტრუქტურის დაზუსტებით. ჩვენ გვჭირდება მისი ორი მნიშვნელოვანი თვისება, რომლებიც დაკავშირებულია $\tilde{J}_F$ იაკობიანის კლასთან $A_0(F)$ ლოკალურ ალგებრაში.

წინადადება 12.1. $\tilde{J}_F \neq 0$, $J_F m_A = 0$.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არ არსებობს $J_F = \varphi f + \psi g$ სახის წარმოდგენა, სადაც $\varphi, \psi \in \mathbf{R}_2$. გარდა ამისა, $J_F \varphi \in (F)$, სადაც $\varphi \in \mathrm{m}_2$.

საკვირველია, მაგრამ ეს ფაქტი, რომელსაც ასეთი მარტივი ფორმულირება გააჩნია ძალიან ძნელი დასამტკიცებელია. ავტორისათვის ცნობილი ყველა დამტკიცება იყენებს კომუტაციურ რგოლთა თეორიას, მაგრამ იგი გარკვეული აზრით არაბუნებრივია, რადგან თვითონ ფაქტი წმინდა ალგებრულია. ამიტომ ძალზე საინტერესო იქნებოდა მივიღოთ წმინდა ალგებრული დამტკიცება ორი ცვლადის შემთხვევაში მაინც, რაზედაც დაფიქრებას ვურჩევთ დაინტერესებულ მკითხველს.

მეორე თვისების ფორმულირება უფრო ვრცელია. დავიწყოთ იმ შენიშვნით, რომ თუ რაიმე ალგებრაზე მოცემულია წრფივი ფუნქციონალი $\chi : A \to \mathbf{C}$, მაშინ იგი ამ ალგებრაზე განსაზღვრავს ბიწრფივ $B_\chi : A \times A \to \mathbf{C}$ ფორმას ფორმულით $B_\chi(a,b) = \chi(ab)$ და კვადრატულ ფორმას $Q_\chi(a) = \chi(a^2)$. შევახსენებთ, რომ ასეთი სახის ფორმა გადაუგვარებელი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნებისმიერი $a \neq 0$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $b \in A$, რომ $\chi(ab) \neq 0$.

გამოვიყენოთ ეს კონსტრუქცია ლოკალური ალგებრის შემთხვევაში. აქ განსაკუთრებულ როლს თამაშობენ ისეთი ფუნქციონალები, რომლებიც არ არიან ნულის ტოლები იაკო-

ბიანის კლასზე: $\chi(\overline{J}_F) \neq 0$. ზემოხსენებული თვისება ასევე არატრივიალურია. იგი მიღებული იქნა როგორც მთელი სპეციალური თეორიის შედეგი და დაიმსახურა სპეციალური სახელწოდება.

წინადადება 12.2. (გროტენდიკის ლოკალური ორადობის თეორემა) [11]. თუ $\chi(\overline{J}_F) \neq 0$, მაშინ B_χ ფორმა გადაუგვარებელია.

ჩვენ, ადვილად დამახსოვრების მიზნით, საგანგებოდ მოვიყვანეთ ამ თვისების მაქსიმალურად მოკლე ფორმულირება. თვალსაჩინო ხდება აგრეთვე ამ შედეგის აბსტრაქტულობა და ელეგანტურობა. ამასთან, თუ აღვნიშნავთ იმასაც, რომ იგი სიტუაციის ულრმეს არსსაც წარმოადგენს, მაშინ ნათელი ხდება რომ ეს მართლაც შესანიშნავი შედეგია. თავის დროზე სწორად ამ თეორემის ფ.გრიფიტსის მიერ მიღებულმა დამტკაცებამ [11] ავტორს საშუალება მისცა გაეგო სიგნატურული ფორმულის წარმოქმნის მექანიზმი.

ვიდრე წინ წავიწევდეთ, უპრიანი იქნება უკეთ გავეცნოთ ამ შედეგებს. პირველი თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ იაკობიანის კლასი იძლევა რაღაც წრფეს $A_0(F)$-ში, რომელიც განიხილება, როგორც ნამდვილი ვექტორული სივრცე. ამიტომ შეიძლება შემოტანილ იქნეს სპეციალური წრფივი ფუნქციონალი $A_0(F)$-ზე, მთელი ალგებრის ამ წრფეზე უბრალო პროექტირებით. შესაბამისად, $\chi(a)$ ამ შემთხვევაში გამოითვლება a პროექციის ამ წრფეზე აღებით.

რომ გავიგოთ ასეთი ფორმის გადაუგვარებლობის პირობის აზრი, დავუშვათ, რომ საწყისი პოლინომები ერთგვაროვანია და $\operatorname{ord} f = m$, $\operatorname{ord} g = n$, მაშინ შეიძლება ხარისხი მიეწეროს აგრეთვე ლოკალური ალგებრის თითოეულ ელემენტს. ამასთან იაკობიანი იქნება $m+n-2$ ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომი. რადგან $\overline{J}_F \neq 0$ და $\overline{Jm}_A = 0$ ნათელია, რომ იაკობიანის კლასს გააჩნია უდიდესი შესაძლებელი ხარისხი

$A_0(F)$ ალგებრის არანულოვან ელემენტებს შორის. კერძოდ, ყველა მონომი, რომელთა ხარისხი აღემატება $(m+n-2)$ -ს უკვე ხვდებიან იდეალში. ამიტომ, თუ ჩვენს დიაგრამას გამოვიყენებთ $A_0(F)$ ალგებრის მონომიალური ბაზისის ასასახავად, მაშინ მასზე იაკობიანის $\widetilde{J}_F$ კლასი ყველაზე დაშორებული იქნება საწყისიდან. თუ კოორდინატთა ღერძებს ლოკალური ალგებრის „ზედაპირად" ჩავთვლით, მაშინ იაკობიანი, გარკვეული აზრით, წარმოადგენს $A_0(F)$ ალგებრის ყველაზე „ღრმა"ელემენტს. ამ თვისების ასეთ ფორმულირებას გააჩნია აზრი ზოგად შემთხვევაშიც და საშუალებას გვაძლევს უფრო თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ სიტუაცია.

ამ ენაზე გროტენდიკის ორადობის თეორემა ნიშნავს, რომ ყოველი $a \neq 0$ ელემენტისათვის შეიძლება ნაპოვნი იქნას ასეთი $b \in A_0(F)$ ელემენტი, რომ $ab = \widetilde{J}_F$. ამგვარად, იაკობიანის კლასი $A_0(F)$ ალგებრაში „იყოფა" ნებისმიერ სხვა არანულოვან კლასზე, რაც საკმაოდ უცნაურად ჟღერს, მაგრამ გაცილებით აადვილებს გროტენდიკის თეორემის აზრის დამახსოვრებას.

რა თქმა უნდა, ძალზე სასარგებლოა ეს შედეგები შევამოწმოთ კონკრეტულ მაგალითებში. ვთქვათ, „წმინდა ხარისხების" $\{f = x^m, g = y^n\}$ ენდომორფიზმისათვის ყველაფერი ნათელია, მაგრამ $(z^n)_R$ ასახვისათვის სურათი არატრივიალური და ძალზე საინტერესო ხდება. უფრო მოგვიანებით ჩვენ მოვიყვანთ ამ ტიპის მაგალითს, მაგრამ სასურველია, რომ მკითხველმა ეს ახლავე შეასრულოს.

შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება კიდევ ანულატორის ცნება. შევახსენებთ, რომ ნებისმიერ A ალგებრაში $X \subset A$ ქვესიმრავლის ანულატორი ეწოდება $\operatorname{ann}_A X = \{a \in A : aX = 0\}$ სიმრავლეს. იგი, ცხადია, იდეალს წარმოადგენს. თუ A ალგებრაზე მოცემულია B ბინრფივი ფორმა, მაშინ $V \subset A$ ქვესივრცის ანულატორი B ფორმის მიმართ ეწოდება

$\operatorname{ann}_B V = \{a \in A : B(a,V) = 0\}$ სიმრავლეს. B_χ სახის ფორმის შემთხვევაში $\operatorname{ann}_B X$ სიმრავლე იდეალი იქნება.

ჩვენთვის კიდევ საჭიროა განვიხილოთ იდეალები ნულოვანი კვადრატებით. ამან არ უნდა გაგვაკვირვოს, რამდენადაც $A_0(F)$ ალგებრაში ძალზე ბევრი ნულის გამყოფია. უფრო მეტიც, სწორედ ასეთი იდეალები განსაკუთრებით საინტერესოა, რადგან ისინი ხაზგასმით აღნიშნავენ ლოკალური ალგებრის თავისებურებას. ცხადია, რომ $I^2 = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $ab = 0$ ნებისმიერი $a, b \in I$ ელემენტებისათვის. მაგალითად, ასეთი იქნება მთავარი იდეალი $A \cdot \widetilde{J}_F$, რომელიც წარმოქმნილია იაკობიანის $\widetilde{J}_F$ კლასის მიერ.

აღვნიშნოთ $N(A)$-ით მაქსიმალური ნულკვადრატიანი იდეალების ერთობლიობა, სადაც მაქსიმალურობა იგულისხმება ჩართვის მიმართ. ამგვარად, $I \in N(A)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $I^2 = 0$ და არ არსებობს ისეთი J იდეალი, რომ $J^2 = 0$ და $J \supsetneq I$.

ყოველი ასეთი $I \in N(A)$ იდეალისათვის განვიხილოთ აგრეთვე $\operatorname{ann} I$ იდეალი. მაშინ ადვილია გავიგოთ, რომ ყველა ელემენტს $\operatorname{ann} I \backslash I$ სიმრავლიდან გააჩნია არანულოვანი კვადრატი, ვინაიდან სხვანაირად I არ იქნებოდა მაქსიმალური „თავის მსგავსთა შორის". ამასთან, მათი კვადრატები, განსაზღვრებებიდან გამომდინარე, მაქსიმალურად ახლოს უნდა იყვნენ $(\widetilde{J}_F)$ იდეალთან, ასე რომ ძნელი არ არის შევამოწმოთ, რომ ისინი სინამდვილეში მთავარ $(\widetilde{J}_F)$ იდეალში ხვდებიან. ეს უკანასკნელი, ადვილი მისახვედრია, იაკობიანის კლასის ნამდვილი ჯერადებისაგან შედგება, რადგან $A_0(F) = \mathbf{R} \oplus \mathfrak{m}_A$ და $\mathfrak{m}_A \widetilde{J}_F = 0$. აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი $a \in \operatorname{ann} I \backslash I$ ელემენტისათვის არსებობს ერთადერთი $a^2 = \lambda \widetilde{J}_F$ სახის წარმოდგენა, და ჩვენ აღვნიშნავთ ამ λ რიცხვს (a^2/J)-თი.

ახლა უკვე მზად ვართ ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი შედეგი.

თეორემა 12.1 ([8], [16]). სასრულჯერადი გლუვი $F:(\mathbf{R}^n,0)\to(\mathbf{R}^n,0)$ასახვის ყლორტისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$\begin{aligned}\deg_0 F &= \operatorname{sgn}\left(\frac{a^2}{J}\right)(\dim_{\mathbf{R}}\operatorname{ann} I-\dim_{\mathbf{R}} I)= \\ &=\operatorname{sgn}\left(\frac{a^2}{J}\right)(\mu-2\dim_{\mathbf{R}} I),\end{aligned}\tag{12.1}$$

სადაც $\mu=\dim_{\mathbf{R}} A_0(F)$ და $I\in N(A)$ – ნებისმიერი მაქსიმალური ნულკვადრატიანი იდეალია $A_0(F)$ ალგებრაში, ხოლო $a\in\operatorname{ann} I\backslash I$-ის ნებისმიერი ელემენტია. ამასთან, ნებისმიერი ასეთი $\chi:A_0(F)\to\mathbf{R}$ წრფივი ფუნქციონალისათვის რომ $\chi(\bar{J}_F)>0$, Q_χ კვადრატული ფორმა, $Q_\chi(a)=\chi(a^2)$, გადაუგვარებელია და მისი $\operatorname{sig} Q_\chi$ სიგნატურა F ყლორტის ხარისხის ტოლია.

ამ თეორემის ძირითადი დებულებები მცირე განსხვავებით მიღებულნი იქნენ დ. აიზენბუდის და ჰ. ლევინის მიერ [8] და აგრეთვე ავტორის მიერ [16]. თავის დროზე ამოცანა ლოკალური ხარისხის ლოკალური ალგებრის ტერმინებში გამოთვლის შესახებ იყო ჩამოყალიბებული ვ. არნოლდის მიერ, მის მიერ ორგანიზებულ განსაკუთრებულობათა თეორიის მიძღვნილ სემინარზე. არსებითი წინასწარი შედეგები ამ ამოცანის შესახებ მიღებული იქნენ ვ. პალამოდოვის [31] და ვ. ზაკალიუკინს [46] მიერ. ამგვარად, მოყვანილმა თეორემამ მოგვცა არნლოდის ამოცანის ამოხსნა და ის წარმოადგენს ბოლო რგოლს მრავალი ავტორის გამოკვლევათა ჯაჭვში. სამწუხაროდ, მისი დამტკიცება საკმაოდ ვრცელია და ბევრ არატრივიალურ ტექნიკურ საშუალებას იყენებს, ამდენად აზრი არ აქვს მის მთლიანად გადმოცემას ასეთი სახის და მოცულობის წიგნში. ამიტომ ძირითად ტექსტში ჩვენ მხოლოდ შედეგის გარჩევით დავკმაყოფილდებით. მიუხედავად ამისა,

იმ შემთხვევისათვის, თუ მკითხველთა შორის აღმოჩნდებიან დამტკიცებით დაინტერესებულნი, ჩვენ ორ დამატებით წყაროს მივუთითებთ, სადაც დამტკიცებულია ძირითადი ტექნიკური შედეგები. ეს, რა თქმა უნდა, ნახევარზომაა, მაგრამ მას გარკვეული აზრი გააჩნია, რადგან პირველი დამტკიცებები [8] და [16] ნაშრომებიდან პრაქტიკულად შეუძლებელია გასაგები იყოს არასპეციალისტებისათვის. ორიგინალური ნაშრომების შემდეგ გაჩნდნენ ახალი უფრო მარტივი დამტკიცებებიც, რომლებიც მოყვანილია წიგნებში [6] და [11].

მხედველობაში გვაქვს რა, რომ მოცემულ ნაშრომში ჩვენთვის მთავარია ფესვთა რიცხვის ეფექტური გამოთვლა, გადავიდეთ ამ თეორემის პრაქტიკული გამოყენების შესაძლებლობების ახსნაზე. პირველი ტოლობა (12.1) ფორმულიდან გვიჩვენებს, რომ საჭიროა ნულკვადრატიანი მაქსიმალური იდეალების აგება, და გვსურს ვაჩვენოთ, რომ ამის გაკეთება ეფექტურად შეიძლება.

მართლაც §8-ში აღწერილი ალგორითმიდან ჩანს, რომ ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ეფექტურად ავაგოთ მონომური ბაზისი $A_0(F)$ ლოკალურ ალგებრაში. გარდა ამისა, საჭიროა გამოვთვალოთ $\widetilde{J}_F$ იაკობიანის კლასი და მაქსიმალურად გავამარტივოთ მისი გამოსახულება აგებულ ბაზისში. ხშირად, მაგალითად, არსებობს ისეთი $x^i y^j$ მონომი, რომელიც უდრის იაკობიანის კლასს ლოკალურ ალგებრაში, ხოლო ნებისმიერ შემთხვევაში შეგვიძლია ამოვაგდოთ იაკობიანის გამოსახულებიდან ის მონომები, რომლებიც შევიდნენ აგებულ ბაზისში (იხ. ქვემოთ მოყვანილი მაგალითი).

შემდგომ საჭიროა შევუდგეთ გამორკვევას, თუ რომელი ბაზისური მონომების კვადრატები ხვდებიან (f, g) იდეალში, ე.ი. ნულის ტოლ ლოკალურ ალგებრაში. ასეთი მონომებიდან უნდა ამოვირჩიოთ ისეთი მაქსიმალური ქვესისტემა, რომლის ელემენტების წყვილ-წყვილი ნამრავლები ნულის ტოლია

$A_0(F)$ ალგებრაში. მათი რაოდენობა $\dim I$ განზომილების ტოლია, სადაც $I \in N(A)$ (თვით თეორემიდან ნათელია, რომ ეს განზომილება ერთნაირია ყველა $I \in N(A)$ იდეალებისათვის). შევნიშნოთ, რომ თეორემის მეორე ფორმულა უკვე საშუალებას იძლევა გამოითვალოს ლოკალური ხარისხის მოდული, ასე რომ საპოვნელი რჩება მხოლოდ მისი ნიშანი. პირველი ფორმულის თანახმად, საჭიროა განვიხილოთ იმ მონომების კვადრატები, რომლებიც ესაზღვრებიან ამორჩეული ქვესისტემის ელემენტებს (მოსაზღვრე ეწოდება მონომებს, რომლებიც მთელრიცხვოვანი ბადის ერთ მხარეთაგანს მიეკუთვნებიან). თუ ხარისხის მოდული არანულოვანია, მათ შორის აუცილებლად იქნება არანულოვანი კვადრატებიც. ერთ-ერთი ასეთი კვადრატისათვის საჭიროა გამოვთვალოთ λ კოეფიციენტი $a^2 = \lambda \tilde{J}_F$ წარმოდგენიდან, რომელიც ცალსახადაა განსაზღვრული. $\operatorname{sgn} \lambda$ გვაძლევს ხარისხის ნიშანს და ამით ლოკალური ხარისხის გამოთვლა მთავრდება.

თუ თითოეულ ნაბიჯს ჩავუფიქრდებით, გასაგები გახდება, რომ შესაძლებელია ყველა მათგანის ფორმალიზება. მკითხველს, რომელსაც უნარი შესწევს გამოიყენოს კომპიუტერი, ავტორი დაბეჯითებით ურჩევს შეეცადოს გამოიმუშაოს ლოკალური ხარისხის გამოთვლის კომპიუტერული ალგორითმი, რომელიც აღწერილ პროცედურაზეა დაფუძნებული. ერთ-ერთი ასეთი ალგორითმი ავტორისთვის არის ცნობილი, მაგრამ ის ოდნავადაც არ არის დარწმუნებული რომ იგი ოპტიმალური ან თუნდაც საკმარისად ეკონომიურია. ასე რომ ნებისმიერი ახალი ალგორითმი უსათუოდ ავტორის განსაკუთრებული დაინტერესების საგანი გახდება და წარმატების შემთხვევაში იგი შემმუშავებლის ინტელექტუალური საკუთრება იქნება.

ახლა კი დროა მოვახდინოთ ყველა ნათქვამის ილუსტრირება. მოდელური ასახვისთვის

$$f = x^2 - y^2, \quad g = 2xy, \quad F = (z^2)_{\mathbf{R}}$$

თანამიმდევრობით გამოვთვალოთ მონომიალური ბაზისი, იაკობიანის კლასი და მაქსიმალური ნულკვადრატიანი იდეალი. ამისათვის სიბრტყეზე მთელრიცხვოვან ბადეს დავხატავთ და კომპონენტებში შემავალი მონომების თანაფარდობებს აღვნიშნავთ წრეებით და მათი შემაერთებელი მონაკვეთებით. მოცემულ შემთხვევაში ერთგვაროვნობის გამო მოსალოდნელია, რომ ყველა ბაზისური მონომების ხარისხი ნაკლებია ვიდრე $2+2-2=2$. მასაშადამე, ყველა მესამე ხარისხის მქონე სამი მონომი იდეალში უნდა მოხვდეს და ჩვენ ახლა ამას ელემენტარულად შევამოწმებთ. ეჭვი შეიძლება მხოლოდ x^3 და y^3 მონომების მიმართ გაჩნდეს.

სინამდვილეში ორივე განტოლების x და y ცვლადზე გამრავლებისას ვღებულობთ ოთხ თანაფარდობას მესამე რიგის ოთხი მონომისათვის, საიდანაც ტრივიალური წრფივი ოპერაციებით ვღებულობთ ტოლობებს:

$$x^3 = x(x^2-y^2)+\frac{1}{2}y(2xy),\ \ y^3 = -\,y(x^2-y^2)+\frac{1}{2}x(2xy).$$

ამგვარად, მესამე რიგის ყველა მონომი მართლაც ხვდება (F) იდეალში, ასე რომ მთელი $A_0(F)$ ფაქტორ-ალგებრა წარმოქმნილია $\{1,x,y,x^2\}$ კლასებით. ადვილი დასანახია, ერთგვაროვნობის მოსაზრებიდან გამომდინარე, რომ ეს კლასები ნამდვილად წრფივად დამოუკიდებელნი არიან (F) იდეალის მოდულით. $\widetilde{J}_F$ იაკობიანის კლასი, ნათელია, ტოლია $4x^2$ მონომის კლასისა $A_0(F)$ ალგებრაში. ნათელია აგრეთვე, რომ $\widetilde{J}_F^2=0$, მაგრამ $\overline{x}^2\neq 0,\ \overline{y}^2\neq 0$. ამიტომ მთავარი $(\widetilde{J}_F)$ იდეალი წარმოადგენს ნულკვადრატიან მაქსიმალურ იდეალს, ასე რომ აქ $\dim_{\mathbb{R}} I=1$. თვალსაჩინოა აგრეთვე, რომ მის ანულატორში შედის მთელი მაქსიმალური $\mathfrak{m}_A$ იდეალი და $\widetilde{J}_F$, ასე რომ

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{ann} I - \dim_{\mathbb{R}} I = 2.$$

$\tilde{x}^2$ და $\tilde{y}^2$ კლასების იაკობიანის კლასთან შედარებისას ვხედავთ რომ ამ შემთხვევაში $\operatorname{sgn}(a^2/J) = 1$, ასე რომ ლოკალური ხარისხი 2-ის ტოლია: $\deg(z^2)_{\mathbb{R}} = 2$, რაც როგორც უკვე ვიცით, სწორ პასუხს წარმოადგენს.

სრულიად ანალოგიურ გამოთვლებს მივყავართ მიზანთან $(z^3)_{\mathbb{R}}$ ენდომორფიზმისათვისაც. ჩვენ არ მოვიყვანთ სათანადო გამოთვლებს, რომ მკითხველს არ წავართვათ ხელსაყრელი შემთხვევა - ეს გამოთვლები ძალზე სასარგებლოა შინაგანი ლოკალური სტრუქტურის გაგებისათვის. საქმე კიდევ იმაშია, რომ მომდევნო ამგვარი შემთხვევა — $(x^4)_{\mathbb{R}}$ ენდომორფიზმი უკვე საკმაოდ დიდ გამოთვლებს მოითხოვს და უმჯობესია საერთო კანონზმიერების გაგება $(x^n)_{\mathbb{R}}$ სახის ენდომორფიზმებისათვის $n = 3$ შემთხვევაში.

რა თქმა უნდა, არაფერი არ გვაიძულებს მხოლოდ ერთგვაროვანი ენდომორფიზმების შემთხვევა განვიხილოთ. ავიღოთ, მაგალითად, $f = y^2 - xy$, $g = xy - x^3$ პოლინომთა წყვილი. f და g კვლავ გამოვსახოთ ჩვენს დიაგრამაზე. ამ თანაფარდობათა x და y ხარისხებზე გამრავლებისას და მიღებულ თანაფარდობათა მონაკვეთებით გამოხატვისას, რომ

$$x^2y^2 \in (f,g), \qquad xy^2 \in (f,g) \qquad \text{(დაამტკიცეთ!)}$$

მათთან ერთად იქ ხვდება x^4, y^3 და x^2y. თანაფარდობათა შემდეგი მწკრივებიდან გამომდინარეობს, რომ $x^3 \notin (F)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ბაზისს ქმნიან $\{1, x, x^2, x^3, y\}$ მონომები, ასე რომ $\mu(F) = 5$. დანარჩენ გამოთვლებს სრულიად ფორმალური ხასიათი გააჩნია, ასე რომ ჩვენ მათ მკითხველს მივანდობთ. მხოლოდ აღვნიშნავთ, რომ საბოლოოდ $\deg_0 F$ მნიშვნელობა უნდა გამოვიდეს 1-ის ტოლი (შეადარეთ ეს $\deg F$

მნიშვნელობას).

საინტერესო მაგალითების რიცხვი შეგვიძლია უსასრულოდ გავზარდოთ. გარდა ამისა, ამ ფორმულებიდან შეიძლება ძალზე საინტერესო ზოგადი დასკვნების გაკეთება გლუვ ყლორტთა ლოკალური ხარისხის შესახებ. ამასთან დაკავშირებით რამდენიმე ბუნებრივი და მნიშვნელოვანი ამოცანა წამოიჭრა, რომელთა ნაწილი დღემდე არ არის ამოხსნილი. ამის შესახებ ჩვენ ბოლო პარაგრაფში ვისაუბრებთ, ახლა კი ვნახოთ რა საშუალებას იძლევა მოყვანილი თეორემა საკუთრივი ენდომორფიზმის ხარისხის გამოსათვლელად.

როგორც უკვე აღინიშნა, ამისათვის საჭიროა განვიხილოთ ასახვის ქცევა უსასრულობაში. ტექნიკურად ამის განხორციელება შეიძლება ერთგანზომილებიან შემთხვევასთან ანალოგიით. შევნიშნოთ, რომ თუ ჩვენ საქმე გვექნება ერთგვაროვან ენდომორფიზმთან, მაშინ შეიძლება ხელახლა პირდაპირ გამოვიყენოთ სტერეოგრაფიული პროექცია.

მართლაც, დავუშვათ $F \in (\mathbf{R}_2)^2 - (m,n)$ ბიხარისხის ერთგვაროვანი ენდომორფიზმია. მაშინ შემდეგი ფორმულებიდან ნათელია, რომ ასახვის ქცევა უსასრულობაში აღიწერება ასეთ ფუნქციათა წყვილით:

$$P(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right),$$
$$Q(x,y) = g\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

სამწუხაროდ, ზოგად შემთხვევაში, ეს ფორმულები არ გვაძლევს გლუვ ყლორტს უსასრულობაში, ასე რომ საჭიროა როგორღაც გადავიდეთ გლუვ ასახვაზე. შევნიშნოთ, რომ მთელი სირთულე დაკავშირებულია იმასთან, რომ ახალი ასახვის კომპონენტები არიან რაციონალური ფუნქციები x^2+y^2 ფუნქციის ხარისხებით მნიშვნელში. ამასთან, x^2+y^2 არაუ-

არყოფითი ფუნქციაა, ასე რომ წინადადება 10.2 თანახმად, შეიძლება მისი ხარისხებზე გამრავლება F ენდომორფიზმის ხარისხის შეუცვლელად. ამის შემდეგ ნათელი ხდება, რომ შეგვიძლია მოვახდინოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

და განვსაზღვროთ ახალი პოლინომები $\widetilde{P}, \widetilde{Q} \in \mathbf{R}_2$ ფორმულებით:

$$\widetilde{P}(x,y) = (x^2 + y^2)^{\operatorname{ord} f} P(u,v),$$

$$\widetilde{Q}(x,y) = (x^2 + y^2)^{\operatorname{ord} g} Q(u,v). \tag{12.2}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ვღებულობთ ნამდვილ პოლინომებს. ამასთან (x,y) ცვლადთა სიბრტყეში უსასრულობის მიდამოს შეესაბამება ნულის მიდამო (u,v) სიბრტყეში. აქედან გამომდინარე ნათელი ხდება, რომ კოორდინატთა სანყისი (u,v) სიბრტყეში არის $(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ ასახვის იზოლირებული წინასახე, ასე რომ განსაზღვრულია $\deg_0(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ ლოკალური ხარისხი.

თეორემა 12.2. საკუთრივი პოლინომური F ენდომორფიზმის ტოპოლოგიური ხარისხი ტოლია (12.2) ფორმულებით განსაზღვრული გლუვი ყლორტის $\deg_0(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ ლოკალური ხარისხისა.

დამტკიცება მიიღება განსაზღვრების უბრალო შედარების საშუალებით. ამგვარად, საკუთრივი პოლინომური ენდომორფიზმის ტოპოლოგიური ხარისხის გამოთვლა ჩვენ დავიყვანეთ დამხმარე, ცხადად მოცემული გლუვი ყლორტის ლოკალური ხარისხის გამოთვლამდე, რომელიც შეიძლება გამოითვალოს სიგნატურული ფორმულის დახმარებით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჩვენ შევძელით ენდომორფიზმის ფესვთა ალგე-

ბრული რიცხვის ეფექტური გამოთვლა. დარჩა მხოლოდ ერთი ნაბიჯი შტურმის ამოცანის სრულ ამოხსნამდე.

§ 13. ზოგადი ფორმულა ნამდვილ ფესვთა რიცხვისათვის

სინამდვილეში ჩვენ უკვე შეგვიძლია მოვიყვანოთ (მაგრამ არა დავამტკიცოთ) ფორმულა, რომელიც შტურმის ამოცანის ამოხსნას იძლევა.

ვთქვათ, ისევ, $F \in (\mathbf{R}_2)^2$ საკუთრივი პოლინომური ენდომორფიზმია. კერძოდ, ფესვთა $F^{-1}(0)$ სიმრავლე სასრულია და ჩვენი მიზანია — გამოვთვალოთ მისი ელემენტების $\#F^{-1}(0)$ რიცხვი.

შემოვიტანოთ სამცვლადიანი დამხმარე პოლინომები ჩვენთვის უკვე ცნობილი ჰომოგენიზაციის ფორმულების მიხედვით:

$$\widetilde{f}(x,y,z) = z^{d+1}f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right), \quad \widetilde{g}(x,y,z) = z^{d+1}g\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right),$$

სადაც m და n არიან შესაბამისად f და g პოლინომთა ხარისხები, ხოლო $d = \max(m,n)$. შემოვიტანოთ აგრეთვე H პოლინომი ფორმულით:

$$H = \widetilde{f}^2 + \widetilde{g}^2 - (x^{2d+4} + y^{2d+4} + z^{2d+4})$$

და მისი გრადიენტული ასახვა

$$H' = (H_x, H_y, H_z) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3.$$

თეორემა 13.1. (ნამდვილ ფესვთა რიცხვის შესახებ)[19]. გრადიენტულ H' ასახვას გააჩნია იზოლირებული სას-

რულჯერადი ფესვი კოორდინატთა სათავეში და ადგილი აქვს ფორმულას:

$$\#F^{-1}(0) = \frac{1}{2}(1 - \deg_0 H').$$

მორჩა და გათავდა! როგორც ირკვევა, შტურმის ამოცანის ამოსახსნელადაც საკმარისი ყოფილა ყლორტის ლოკალური ხარისხის გამოთვლის ცოდნა. ამასთან, ჩვენი პირობის თანახმად ენდომორფიზმის ფესვთა შესახებ არავითარი ვარაუდი არ დაგვიშვია, ხოლო საბოლოო ფორმულა, ზემოთ მოყვანილ შენიშვნათა გათვალისწინებით სრულიად ეფექტურია. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ ზემოთ ხსენებული კლასიკური შედეგების ჭეშმარიტი განზოგადება და, აღნიშნული ისტორიული პერსპექტივის მიხედვით, ამას მართლაც შეიძლება შევხედოთ როგორც სიგნატურული მეთოდის საბოლოო ტრიუმფს.

საგულისხმოა აგრეთვე, რომ ამ შედეგების მიღების შემდეგ მოხდა სიგნატურული მეთოდის ბუნებრივი გამოცოცხლება, რაზედაც გვექნება საუბარი უკანასკნელ პარაგრაფში.

როგორც ვხედავთ, მიღებული ფორმულა მარტივია, მაგრამ მისკენ მიმავალი გზა მთლად პირდაპირი და მოკლე არ გახლავთ, ამისათვის საჭიროა კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ტოპოლოგიური ინვარიანტის, ეილერის მახასიათებლის გამოყენება. ამიტომ ჩვენ ამ შედეგის ვრცელ აღწერას და განხილვას გადავდებთ, ახლა კი, როგორც ყოველთვის, მოვახდენთ მიღებული შედეგების ილუსტრირებას კონკრეტული მაგალითებით.

ამისათვის ვთავაზობთ მკითხველს დათვალოს თეორემა 12.2-ის გამოყენებით შემდეგ ენდომორფიზმთა ხარისხები:

$$\{f = y^2 - xy, g = xy - x^3\}, \quad \{f = x^4 - y^4, g = xy + yx^2\}.$$

მკითხველს ვთავაზობთ აგრეთვე დათვალოს შემდეგი

მარტივი სისტემის ფესვთა რიცხვი:

$$\{x^2 - y^2 - \varepsilon x = 0,\ xy + \varepsilon y = 0\}.$$

აღვნიშნოთ, რომ თეორემა 13.1-ის მიხედვით, საჭიროა ვიპოვოთ მონომური ბაზისი H პოლინომის გრადიენტული ასახვის ლოკალურ $A_0(H')$ ალგებრაში. ამას გარკვეული სიმამაცე და მოთმენა სჭირდება, მაგრამ გარწმუნებთ, რომ ეს სავსებით შესაძლებელია და ამასთან ძალიან სასარგებლოა.

ბოლოსიტყვაობა

ამგვარად, ჩვენ გავეცანით შტურმის ამოცანის სრულ ამოხსნას. მიუხედავად ელემენტარული ფორმულირებისა, მისი ამონახსნისათვის მოგვიხდა ტოპოლოგიისა და განსაკუთრებულობათა თეორიის საკმაოდ მრავალფეროვანი და ფაქიზი საშუალებების გამოყენება, რომელთა შორის მთავარი იყო ასახვის ხარისხი.

ამასთან, როგორც ეს ხშირად ხდება ხოლმე, გამოყენებული საშუალებები დამოუკიდებელი შესწავლის ობიექტები ხდება და ახალ საინტერესო ამოცანებს წამოჭრიან. საერთოდ, ჭეშმარიტად ღრმა ამოცანები, შტურმის ამოცანა კი სწორედ ამ რიგს მიეკუთვნება, აქტუალობას იმის შემდეგაც ინარჩუნებენ, როცა უკვე ნაპოვნია მათი ამოხსნა, რადგან შესაძლებელია მათი სხვადასხვა სახის განზოგადება და მოდიფიკაცია. ამიტომ ნაადრევი და დასანანი იქნებოდა წერტილი დაგვესვა ამ საუკუნენახევარი სიძველის პრობლემატიკისათვის, მითუმეტეს, რომ ამ წიგნის ერთ-ერთი მიზანი იმაში მდგომარეობს, რომ მკითხველი უმოკლესი გზით დამოუკიდებელი კვლევის შესაძლებლობამდე მივიყვანოთ. აღნიშნულის შესაბამისად, დასკვნაში გვსურს მკითხველს აღვუწეროთ ამ დარგში არსე-

ბული ზოგიერთი პერსპექტივა და ამოუხსნელი ამოცანა, რაც შეიძლება ბუნებრივ და ელემენტარულ ასპექტებში.

პირველ რიგში ეს არის პოლინომური ასახვის ხარისხის და ნამდვილ ფესვთა რიცხვის გამოთვლის ალგორითმიზაცია. ამის თაობაზე ტექსტში რამდენიმე ადგილას იყო აღნიშნული, ამიტომ, აქ მხოლოდ გავიმეორებთ, რომ გასაკეთებელი კიდევ ბევრია. კერძოდ, არ არსებობს მიღებული პროცედურების გამოთვლითი სირთულის შეფასებები, ანუ ოპერაციათა აუცილებელი რიცხვის აპრიორული შეფასებები ამ ინვარიანტთა გამოთვლისათვის ფიქსირებული ხარისხის პოლინომთა შემთხვევაში (იხ. [41]).

გარდა იმისა, რომ ეს ძალზე საინტერესოა, არსებობს კიდევ ერთი ასპექტი. საქმე იმაშია, რომ სასურველი იყო თვალსაჩინოდ გვეჩვენებინა თუ რამდენად სასარგებლოა პრაქტიკაში ჩვენი შედეგები. მაგალითად, ყოველთვის არსებობს ფესვთა რიცხვის პოვნის ტრივიალური ხერხი - უბრალოდ გამოვთვალოთ ისინი ამა თუ იმ მიახლოებითი მეთოდის დახმარებით [41]. დღეისათვის ასეთ ძალზე უფრო ეფექტურ ხერხად ითვლება ს. სმეილისა და მისი მოწაფეების უახლესი ალგორითმები, რომლებიც აღწერილია ს. სმეილის მოხსენებაში 1986 წელს ბერკლში გამართულ საერთაშორისო მათემატიკურ კონგრესზე [39]. ამდენად, სრულიად ბუნებრივია სურვილი შედარებულ იქნეს მათი ალგორითმების და სიგნატურული მეთოდის გამოთვლითი სირთულე. ავტორი სრულიად დარწმუნებულია, რომ სიგნატურულმა მეთოდმა უნდა მოგვცეს გარკვეული მოგება, საქმე მხოლოდ ცხად შეფასებებზეა დამოკიდებული. ხაზგასმით უნდა აღვნიშნოთ, რომ ასეთი შეფასებების მიღება არ მოითხოვს წინასწარ დიდ ცოდნას, საჭიროა მხოლოდ მოყვანილი ალგორითმების ყველა ნაბიჯის ბეჯითი სწავლა.

უნდა აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ შტურმის ამოცანა შეიძ-

ლება განხილულ იქნეს როგორც ნახევრადალგებრული სიმრავლის წერტილთა რაოდენობის გამოთვლის კერძო შემთხვევა. ზოგად შემთხვევაში ჩვენ გვაინტერესებს ნებისმიერი ნულგანზომილებიანი ნახევარ-ალგებრული სიმრავლის წერტილთა რიცხვის ეფექტური გამოთვლა. ჯ. მაქსველის ხსენებული პრობლემა მდგრად პოლინომთა შესახებ ასეთი სახის ამოცანების ტიპიურ მაგალითს წარმოადგენს [37]. აგრეთვე სინტერესოა ამოცანა ფესვთა დაცალკევების შესახებ.

როგორც უკვე აღინიშნა, ყველა ეს ამოცანა პრინციპში შეიძლება ამოხსნილ იქნეს განზოგადებული დამთვლელი კვადრატული ფორმების შემოყვანით. ეს ამოხსნა სრულიად ეფექტური იქნება, თუ ჩვენ შევძლებთ ენდომორფიზმის ფესვთა შერეული ნიუტონური ჯამების გამოთვლას მისი კოეფიციენტების საშუალებით. ასეთი გამოთვლის პრინციპული შესაძლებლობა გამომდინარეობს ინვარიანტების თეორიიდან, მაგრამ რეალური ალგორითმის აგება ძალიან ძნელია. ზოგადად ეს ამოცანა ვერ დაძლია ვერც ერმიტმა და ვერც მისმა მრავალრიცხოვანმა მიმდევრებმა, თუმცაღა მათ შეძლეს განეხილათ პრაქტიკისათვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევები, კერძოდ, ფესვთა დაცალკევების ამოცანა და მაქსველის ამოცანა [24], [37]. ავტორმა შეძლო ასეთი ალგორითმის აგება [18] ე.წ. გროტენდიკის გლობალური ნაშთის დახმარებით [45]. ორგანზომილებიან შემთხვევაში თ. ალიაშვილმა განავითარა და დააზუსტა ეს იდეა ა. ციხის ახლანდელი შედეგების დახმარებით [44]. მიუხედავად ამისა, კვლავინდებურად ძალზე საინტერესო იქნებოდა ნიუტონის შერეული ჯამების გამოთვლის ელემენტარული ხერხის მოფიქრება.

საკითხთა იმავე წრეს მიეკუთვნება ამოცანა სიბრტყის ენდომორფიზმის ნაოჭთა რიცხვის შესახებ. კომპლექსური პოლინომური ენდომორფიზმის შემთხვევაში ასეთი შეფასება მიიღება განსაკუთრებულობათა თეორიის ზოგადი შედეგები-

დან [10], მაგრამ ნამდვილ პოლინომთა შემთხვევაში იგი მეტისმეტად უხეშია. მისი დაზუსტებისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნას თ. ალიაშვილის მიერ მიღებული ფორმულები ნაოჭთა რიცხვისთვის [4]. ძალზე საინტერესოა ბოლომდე შესწავლილი იქნეს ერთგვაროვანი ენდომორფიზმის შემთხვევა, როდესაც საძიებელი შეფასება ჩაწერილ იქნეს პირდაპირ ენდომორფიზმის კომპონენტთა ხარისხების დახმარებით (შეადარეთ [5]- თან). შემდეგ კი უსათუოდ უნდა იქნეს გამოკვლეული მათი სიზუსტე კონკრეტული მაგალითების შემოწმების საშუალებით. ამისათვის სასარგებლო იქნება ა. ხოვანსკის მიერ მოფიქრებული კონსტრუქციის გამოყენება [21].

არსებობს კიდევ ამოცანები ნამდვილ ფესვთა რიცხვის შესახებ, რომელთა განსახილველად უფრო სპეციალური მომზადებაა საჭირო. მოგაწოდებთ მათ შორის მხოლოდ ყველაზე მოკლე ფორმულირებას, რომლის ამოსახსნელად წინამდებარე წიგნში მოცემული მეთოდები გარკვეულ დახმარებას უზრუნველყოფს.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ნამდვილი გლუვი ფუნქციის (ან თუნდაც პოლინომის) ყლორტი. დავუშვათ, რომ მას ნულში სასრული μ ჯერადობის კრიტიკული წერტილი გააჩნია. განვიხილოთ $\tilde{f}_0$ ყლორტის ყველა მცირე დეფორმაცია უიტნის ტოპოლოგიის გაგებით [10]. მართალია თუ არა, რომ მათ შორის ყოველთვის მოიპოვება მორსის ფუნქციები ზუსტად μ ნამდვილი კრიტიკული წერტილებით?

ფაქტობრივად აქ საუბარი ეხება f გრადიენტული ასახვის მცირე შეშფოთების ნამდვილ ფესვთა რიცხვს. ამიტომ ამ ამოცანის უფრო ადვილი ვარიანტიც არსებობს: შეიძლება თუ არა μ ჯერადობის ფესვი განტოლების მცირე შეშფოთებით გადავაქციოთ μ მარტივ ნამდვილ ფესვებად? მიუხედავად მარტივი ფორმულირებისა, ზოგადი ამოხსნა არ არის ცნობილი.

არსებული კერძო შედეგებისგან ერთ-ერთი, განსაკუთრებით საინტერესო, ნ. აკამპოსა და ს. ჰუსეინ-ზადეს ეკუთვნის, რომლებმაც დაამტკიცეს, რომ ასეთი დეფორმაციები ყოველთვის არსებობს ორცვლადიანი პოლინომებისათვის (იხ. [6]). სრულიად შესაძლებელია, რომ ზოგად შემთხვევაში ეს ასე არ იყოს, ასე რომ კონტრმაგალითების ძებნას აზრი აქვს. ამისათვის კი, ბუნებრივია დეფორმაციის ნამდვილ ფესვთა რიცხვის გამოთვლის ცოდნაა საჭირო; ამგვარად, ჩვენი შედეგები ამ შემთხვევისთვის შეიძლება გამოსადეგი იყოს.

საკითხთა დიდი წრე დაკავშირებულია ასახვის ხარისხის ცნებასთან. მივმართოთ ჩვენი ყურადღება პოლინომური ასახვის ხარისხისადმი. განსაკუთრებით ბუნებრივი საკითხი, რომელიც ამასთან საინტერესო შედეგების მიღებას გვპირდება, მიმართულია პოლინომური ასახვის ხარისხის მოდულის შეფასებაზე. საქმის არსის გამოსარკვევად, დავიწყოთ ყველაზე მარტივი შედეგების განხილვით.

დავუშვათ, რომ $(f,g)\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ სიბრტყის პოლინომური ერთგვაროვანი (m,n) ბიხარისხის ენდომორფიზმია. ავტორმა აჩვენა, რომ ამ შემთხვევაში $\deg F \leq \min(m,n)$ [16]. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს §10- ში მოყვანილი ასახვის ხარისხის გამოთვლის გეომეტრიული ალგორითმიდან. რა თქმა უნდა, ეს შეფასება მიიღწევა $(z^n)_{\mathbf{R}}$ ასახვაზე. ამიტომ ბუნებრივია ანალოგიური შეფასებების მიღება ვცადოთ $\mathbf{R}^n$ სივრცის ერთგვაროვანი ენდომორფიზმისათვის.

ეს გაკეთებული იქნა ვ.ი. არნოლდის მიერ [5], რომელმაც შეძლო ხარისხის მოდული ზევიდან შეეფასებინა ე.წ. „პეტროვსკის რიცხვით" [34] და ეჩვენებინა, რომ მას მივყავართ ჰილბერტის XVI პრობლემასთან დაკავშირებულ ახალ შედეგამდე, რომელიც ბრტყელი ალგებრული წირების ტოპოლოგიას ეხება [35]. ამ შეფასებების სიზუსტე დადგენილი იქნა ა.გ ხოვანსკის მიერ [21], რომელმაც მოიფიქრა სათანადო მაგალითების მახ-

ვილგონიერი კონსტრუქცია. მიუხედავად ამ მნიშვნელოვანი მიღწევებისა აქ კიდევ რჩება რამდენიმე საინტერესო საკითხი.

მათ შორის საინტერესოა, თუ რამდენად ზუსტია ეს შეფასებები გრადიენტული ასახვის შემთხვევაში. როცა $n = 3$, იგი დაკავშირებულია პეტროვსკი-ოლეინიკის ცნობილ უტოლობებთან, რომლებიც გვაძლევს შეზღუდვას ალგებრულ წირთა ოვალების განლაგებაზე [35].

გარდა ამისა, არსებობს ბ.ტესიეს უტოლობა, რომელიც გლუვი ყლორტის ხარისხის მოდულის შეფასებას გვაძლევს მისი μ ჯერადობის ტერმინებში [8]. ცნობილია, რომ ეს შეფასება ზუსტი არ არის [21], ასე რომ დღის წესრიგში დგება შედარებით უფრო ზუსტი შეფასებების მიღება. ამ შემთხვევაში შეიძლება გამოყენებული იქნეს ა. კუშნირენკოს და ა. ხოვანსკის შედეგები განსაკუთრებულობათა ინვარიანტების გამოთვლის შესახებ, რომლებიც იყენებენ ნიუტონის მრავალწახნაგის კომბინატორულ ინვარიანტებს [21], [22].

ამ დარგში არსებულ ამოცანათაგან ჯერ-ჯერობით ჩვენ მხოლოდ ისეთები ჩამოვთვალეთ, რომლებსაც ალგებრული ან გამოთვლითი ხასიათი გააჩნიათ, მაგრამ ამათ გარდა არსებობს საკმაოდ ბევრი ტოპოლოგიური ხასიათის ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია მდგრად ასახვებთან და ასახვის ხარისხთან.

ერთი, განსაკუთრებით საინტერესო ამოცანა, დაკავშირებულია მდგრადი ენდომორფიზმების უმარტივესი შესაძლებელი განსაკუთრებულობებით აღწერასთან. მაგალითად, ჩვენ ვიცით, რომ $\mathbf{R}^2$ სიბრტყის ყოველი ენდომორფიზმი ჰომოტოპიურია ზოგიერთი მდგრადი ენდომორფიზმისა, რომელსაც, ცხადია, გააჩნია იგივე ხარისხი (ასეთი სიტუაციის მაგალითი დაწვრილებით იქნა შესწავლილი §7- ში). ბუნებრივად იბადება კითხვა - როგორი შეიძლება იყოს მისი განსაკუთრებული სიმრავლე? ეს, რა თქმა უნდა, დაკავშირებულია იმ საკითხთან,

თუ როგორ შეიძლება გავამარტივოთ ნაკეცები და ნაოჭები ჰომოტოპიის საშუალებით.

მაგალითად, ადვილი დასანახია, რომ მცირე შეშფოთების საშუალებით შესაძლებელია შევქმნათ ნაკეცთა მთელი წირი, რომელზეც მდებარეობს ნაოჭთა ლუწი რიცხვი [10]. ამასთან, ახალი ასახვა, რა თქმა უნდა, ძველის ჰომოტოპიური იქნება, ასე რომ ჰომოტოპიებს შეუძლია ძლიერ შეცვალონ განსაკუთრებული სიმრავლის სტრუქტურა. მიუხედავად ამისა, საკმაოდ ნათელია, რომ განსაკუთრებულობათა სრული მოსპობა ასეთი გზით შეუძლებელია, თუ ასახვის ხარისხი არ უდრის ±1. მართლაც, თუ ყველა წერტილი რეგულარულია, მაშინ ასახვა ლოკალურად დიფეომორფიზმს წარმოადგენს, ხოლო არანულოვანი ხარისხის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ იგი წარმოადგენს „ზე" ასახვას. კარგადაა ცნობილი, რომ სიბრტყის ასეთი ენდომორფიზმი აუცილებლად დიფეომორფიზმს უნდა წარმოადგენდეს [23] (შეამოწმეთ ეს დამოუკიდებლად). ასე რომ განსაკუთრებულობათა სრული მოსპობა ბევრ შემთხვევაში შეუძლებელია.

ვინაიდან ეს ასეა, შეიძლება დავინტერესდეთ, არის თუ არა ყოველთვის შესაძლებელი საქმის დაყვანა ბმულ განსაკუთრებულ სიმრავლეზე, რომელზეც ძალაუნებურად რამდენიმე ნაოჭი მდებარეობს. ცნობილია, რომ მართლაც ყოველთვის შეგვიძლია განსაკუთრებული სიმრავლე ჰომოტოპიის საშუალებით ვაქციოთ ბმულ წირედ [36]. დაგვრჩა გავიგოთ, ნაოჭთა როგორი მინიმალური რიცხვი შეიძლება ჰქონდეს ასეთ „გამოსწორებულ" ასახვას ბმული განსაკუთრებული სიმრავლით. მაგალითად, არსებობს თუ არა მდგრადი ენდომორფიზმი, რომლის ხარისხი ორის ტოლია და რომელსაც გააჩნია მხოლოდ ერთი ნაოჭი? ჩვენ ვნახეთ, რომ სამი ნაოჭის მოწყობა შეიძლეება, მაგრამ არ არის ნათელი შეიძლება თუ არა მათი რიცხვის კიდევ შემცირება.

როგორც ჩანს, აქ მეტად საინტერესო კანონზომიერებებს აქვს ადგილი. ასე მაგალითად, ნაოჭები შეიძლება წყვილ-წყვილად იქნეს განადგურებული, მაგრამ არ შეიძლება მათი რიცხვის ლუწობის შეცვლა ჰომოტოპიის საშუალებით. სინამდვილეში არსებობს ზუსტი ფორმულა, რომელიც ამ კანონზომიერებას გამოხატავს [19]; აგრეთვე გამოირკვა, რომ იგი იძლევა განსაკუთრებული სიმრავლის შესაძლებელი ტიპის ერთადერთ შეზღუდვას, ასე რომ სიბრტის შემთხვევაში ამ საკითხს გააჩნია სრული ამოხსნა [36]. ანალოგიური კითხვები არსებობს ზედაპირთა მდგრადი ასახვებისათვის და აქ უკვე ვხვდებით ბევრ ამოუხსნელ ამოცანას, რომელთა გაცნობაც შეიძლება [9] და [36] ნაშრომების მიხედვით.

ამ შედეგებთან დაკავშირებით განსაკუთრებით საინტერესოა გავარკვიოთ, შესაძლებელია თუ არა „გამამარტივებელი" ჰომოტოპიების მდგრადი ენდომორფიზმების კლასში ჩატარება? მაგალითად, ცნობილია, რომ განსაკუთრებული სიმრავლის ერთ კომპონენტზე განლაგებული ორი ნაოჭის მოსპობა შეიძლება მდგრადი ჰომოტოპიის საშუალებით, ანუ ისეთ ჰომოტოპიით, სადაც ყველა F_t ასახვა მდგრადია [6]. მაგრამ აქ საკითხი ბოლომდე ნათელი არ არის, განსაკუთრებით ზედაპირთა ასახვის შემთხვევაში [36].

ანალოგიური საკითხები ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში კიდევ უფრო ნაკლებადაა გამოკვლეული, ასე რომ მკითხველს თავად შეუძლია რამდენიმე ასეთი ამოცანის ფორმულირება და გამოკვლევა. განსაკუთრებით საინტერესოა ე.წ. „მერცხლის კუდების" [6] რიცხვის შეფასება სამგანზომილებიანი მდგრადი ენდომორფიზმისათვის. კიდევ აღვნიშნავთ, რომ ოთხგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში არსებობს „კვატერნიონულ ხარისხში აყვანის" $(z^n)_Q$ ასახვები და ძალზე საინტერესო იქნებოდა მათთვის უმარტივესი მდგრადი დეფორმაციები გვეპოვა. ავტორს შეუძლია აღნე-

როს განსაკუთრებული სიმრავლე $z^n - \varepsilon \bar{z}$ ტიპის დეფორმაციისათვის, მაგრამ არ არის დარწმუნებული, რომ ეს ოპტიმალური არჩევანია (იხ. [43]).

ახლა მთელი ყურადღება თვით სიგნატურულ ფორმულაზე გავამახვილოთ. თურმე შესაძლებელია იგი სხვადასხვანაირად განვაზოგადოთ. მაგალითად, არსებობს განზოგადება $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ასახვისათვის, სადაც $n > m$ [32], [19]. შესაძლებელია აგრეთვე ეს ფორმულა გადავიტანოთ იმ სიტუაციაში, როდესაც მოცემულია ენდომორფიზმი გარკვეული ტიპის სხვა ველზე [15]. ჩვენი აზრით, არსებული გამოყენებები უფრო გეომეტრიულ ხასიათს ატარებს ეკვივარიანტულ შემთხვევაში.

შევახსენებთ, რომ G ჯგუფის X ტოპოლოგიურ სივრცეში წარმოდგენა განიმარტება როგორც მისი $\gamma: G \rightarrow \mathrm{Homeo}X$ ჰომომორფიზმი ამ სივრცის ჰომეომორფიზმთა ჯგუფში [25]. თუ X სივრცე ევკლიდურია, ხოლო წარმოდგენის ანასახი ხვდება წრფივ ავტომორფიზმთა $GL(X)$ ქვეჯგუფში, მაშინ წარმოდგენას წრფივი ეწოდება.

წრფივ წარმოდგენებს ჩვენ უკვე შევხვდით ნიუტონის ჯამთა გამოთვლის დროს. ჩვენ იქ საქმე სიმეტრიულ პოლინომებთან გვქონდა, რომლებიც სიმეტრიული S_n ჯგუფის ბუნებრივი წარმოდგენის ინვარიანტებია $\mathbf{C}_n$ სივრცეში [2]. ახლა გვსურს განვიხილოთ ეკვივარიანტობის თვისება ციკლური ჯგუფების [2] წარმოდგენების შემთხვევაში. შევახსენებთ, რომ ასეთი ჯგუფის წრფივი წარმოდგენა მოიცემა რაღაც უნიპოტენტური მატრიცით, რომლის უნიპოტენტურობის ხარისხი ჯგუფის რიგის ტოლია [24]. შევახსენებთ აგრეთვე, რომ თუ მოცემულია G ჯგუფის ორი γ და γ^1 წარმოდგენა, მაშინ $f: X \rightarrow X^1$ ასახვას ეკვივარიანტული ეწოდება თუ ნებისმიერი $g \in G$ ელემენტისათვის სამართლიანია $f \circ \gamma(g) = \gamma^1(g) \circ f$ თანაფარდობა ანუ ასახვა კომუტირებს ჯგუფის მოქმედებასთან.

როგორც ირკვევა, ეკვივარიანტული ასახვის ხარისხს დამატებითი თვისებები გააჩნია. მაგალითად, თუ F ენდომორფიზმი ეკვივარიანტულია მარტივი p რიგის ციკლური $\mathbf{Z}_p$ ჯგუფის მიმართ, მაშინ $\deg F = 1 \bmod(p)$ [23], ე.ი. $\deg F = kp + 1$ სადაც k რაღაც მთელი რიცხვია. ეს ადვილად გამომდინარეობს ჩვენი სიგნატურული ფორმულიდან, რადგან შესაბამისი „დამთვლელი" ფორმა ამ შემთხვევაში იქნება ეკვივარიანტული $\mathbf{Z}_p$ ჯგუფის ბუნებრივი წარმოდგენის ლოკალურ ალგებრაში, საიდანაც გამომდინარეობს სათანადო შეფარდება სიგნატურისათვის.

ამ შედეგს აქვს საინტერესო გამოყენება რადემახერის ცნობილ ამოცანაში, რომლის ფორმულირება ასე შეიძლება: მოცემულია რაღაც V ამოზნექილი სხეული $\mathbf{R}^n$ სივრცეში, რომლის Γ საზღვარი გლუვ ზედაპირს წარმოადგენს. საჭიროა მის გარშემო ავღნეროთ კუბი, ანუ ვიპოვოთ ისეთი $K \subset \mathbf{R}^n$ კუბი, რომ თითოეული მისი წახნაგი ეხებოდეს V სხეულის Γ ზედაპირს. აღვნიშნოთ, რომ ეს არატრივიალურია უკვე $n = 3$ შემთხვევაში. რადემახერის ამოცანა ამოხსნილი იქნა შ. კაკუტანის მიერ 1948 წელს ტოპოლოგიური მეთოდების გამოყენებით [23]. ეს შედეგი სხვადასხვანაირად იქნა განზოგადებული და დაზუსტებული. კერძოდ, 1986 წელს ს. ბოგატიმ და ამ წიგნის ავტორმა ერთობლივად დაამტკიცეს, რომ ყოველთვის არსებობს ასეთი კუბების არატრივიალური კონტინუუმი [7]. ამასთან $n = 3$ შემთხვევაში ეს შედეგი მიღებული იქნა $\mathbf{Z}_3$ ეკვივარიანტული ასახვის ხარისხის მოყვანილი თვისებიდან. ამ შედეგთან დაკავშირებით გაჩნდა გეომეტრიულ ამოცანათა მთელი რიგი, რომელთა დიდი ნაწილი დაკავშირებულია გამოყენებით ამოცანებთან სფეროს ოპტიმალური დაფარვების შესახებ. ამ ამოცანათა გამოკვლევაში მოსალოდნელია, რომ არსებით როლს ითამაშებს ასახვის ხარისხის ზემოთ აღნიშნული თვისებები.

სინამდვილეში, ამ ტიპის კიდევ ბევრი საინტერესო ამოცანა არსებობს, მაგრამ შეპერეზადას მაგალითის მხედველობაში მიღებით ავტორს ურჩევნია ისინი გადადოს მომავალ წიგნამდე სავარაუდო სათაურით „ახალი შეხვედრები ასახვის ხარისხთან".

ლიტერატურა

1. რ. კურანტი, ჰ. რობინსი. რა არის მათემატიკა? განათლება, თბილისი, 1965.
2. ა. კუროში. უმაღლესი ალგებრა. განათლება, თბილისი, 1972.
3. ა. ხარაძე, ვ. ჭელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე. მათემატიკური ანალიზის კურსი. ტ.1, განათლება, თბილისი, 1962.
4. T. Aliashvili. Signature method for counting points in semi-algebraic subsets. Bull. Georgian Acad. Sci. 154 (1996), 34-36.
5. V. Arnol'd. Index of a singular point of a vector field, the Petrovsky-Oleynik inequality, and mixed Hodge structures. (Russian) Funk. Anal. Appl. 12(1978), 1-14.
6. V. Arnol'd, A.Varchenko, S.Gusein-Zade, Singularities of differentiable mappings. (Russian) Nauka, Moscow, 2004.
7. S.Bogaty, G.Khimshiashvili. Generalization of Borsuk-Ulam theorem and Knaster problem. Bull. Acad. Sci. Georgian SSR 123(1986), 477-480.
8. D.Eisenbud, H.Levine. An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ. Annals of Mathematics 106 (1977), 19-44.
9. S.Demoto. On stable mappings of surfaces with a connected singular set. Hiroshima Math. J. 35(2005), 93-113.
10. M. Golubitsky, V.Guillemin. Stable mappings and their singularities. Springer, Berlin, 1975.
11. P. Griffiths, J. Harris. Principles of algebraic geometry, J.Wiley, New York, 1978.
12. C.Hermite. Remarques sur le theoreme de Sturm. C.r.Acad. Sci. Paris 36 (1853), 52-54.

13. C.Hermite. Sur l'extension du theoreme de M.Sturm a un systeme d'equations simultanees. Oeuvres de Charles Hermite. Tome 3, 1969, 1-34.
14. M.Hirsch. Differential topology. Springer, Berlin, 1976.
15. D.Grigor'ev, N.Ivanov. On the Eisenbud-Levine formula over a perfect field. (Russian) Doklady AN SSSR 252(1980), 94-97.
16. G.Khimshiashvili. On the local degree of smooth mapping. (Russian) Bull. Acad. Sci. Georgian SSR 85(1977), 309-312.
17. G.Khimshiashvili. The local degree of a smooth mapping. (Russian) A. Razmadze Math. Inst. Proc. 64 (1980), 105-124.
18. G.Khimshiashvili. On the cardinality of finite semi-algebraic subset. Georgian Math. J. 1(1994), 311-321.
19. G.Khimshiashvili. Signature formulae for topological invariants. A. Razmadze Math. Inst. Proc. 125 (2001), 1-121.
20. G. Khimshiashvili. New applications of algebraic formulae for topological invariants. Georgian Math. J. 11(2004), 759-770.
21. A.Khovansky. The index of a polynomial vector field. (Russian) Funk. Anal. Pril. 13 (1979), 49-58.
22. A. Kouchnirenko. Polyedres de Newton et nombres de Milnor. Invent. Math. 32(1976), 1-31.
23. M. Krasnoselsky, P.Zabrejko. Geometric methods of non-linear analysis. (Russian) Nauka, Moscow, 1975.
24. S. Lang. Algebra. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
25. J. Kelley, General Topology, Academic Press, 1965.
26. B.Malgrange. Ideals of differentiable functions. Tata Inst., Bombay, 1964.
27. J.Milnor. Morse theory. Ann. Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, Princeton, 1963.
28. J.Milnor. Topology from the differentiable viewpoint. Virginia Univ. Press, Charlottesville, 1965.
29. J. Milnor. Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, Princeton, 1968.
30. P. Orlik. The multiplicity of a holomorphic mapping at an isolated critical point. In: "Real and complex singularities. Proc. Nordic Summer School", Oslo, 1977, 409-460.

31. V. Palamodov. On the multiplicity of a holomorphic mapping. (Russian) Funk. Anal. Pril. 1(1967), 54-65.
32. T.Poston, I.Stuart. Catastrophe theory and its applications. Pitman, 1978.
33. P.Pedersen, M.-F. Roy, A. Szpirglas. Counting real zeros in the multivariate case. Progr. Math. 109 (1993) , 203-223.
34. I. Petrovsky. On the topology of real plane curves. Annals of Mathematics 39(1938), 187-209.
35. I. Petrovsky, O.Oleynik. On the topology of real algebraic curves. (Russian) Izv. AN SSSR 13 (1949), 389-402.
36. R.Pignoni. Stable projections of surfaces with a connected fold curve . Top. Appl. 49 (1993), 55-74.
37. M. Postnikov. Stable polynomials. (Russian) Nauka, Moscow, 1982.
38. M. Proust, A la recherche du temps perdue. Gallimard, Paris, 1999.
39. M.Shub, S.Smale. Complexity of Bezout's theorem II: Volumes and Probablities. Progr. Math. 109 (1993), 267-285.
40. E.Spanier, Algebraic topology. McGraw-Hill, New York, 1966.
41. B.Sturmfels. Solving systems of polynomial equations. AMS, Providence, R.I., 2002.
42. Z.Szafraniec. On the Euler characteristic of analytic and algebraic sets. Topology 25 (1986), 411-414.
43. N.Topuridze. On the roots of polynomials over division algebras. Georgian Math. Journal 10(2003), 745-762.
44. A.Tsikh. Multidimensional residues and their applications. (Russian) Nauka, Novosibirsk, 1988.
45. A. Yuzhakov. On the computation of the complete sum of residues relative to a polynomial mapping in C^n, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 275(1984), 817-820.
46. V.Zakaljukin. On the algebraic computability of the index of a vector field. (Russian) Funk. Anal. Pril. 6(1972), 77-78.