საქართველოს სსრ განათლების სამინისტრო

პროფ. გ. მ. შაპირო

უმაღლესი ალგებრა

უმაღლესი პედაგოგიური სასწავლებლების სახელმძღვანელო

თარგმანი მეოთხე რუსული შევსებული გამოცემიდან
დოც. ვ. ჭელიძის მიერ

სამეცნიერო-მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა
თბილისი 1949

რედაქტორი პროფ. ა. ხარაძე

შესავალი

ისტორიული მიმოხილვა

1. მათემატიკაში შეგვიძლია დავასახელოთ მთელი რიგი ძირითადი ცნებები, რომლებიც გვხვდება გამოკვლევის ყოველ დარგში; ასეთებია პირველ რიგში **სიმრავლისა და ფუნქციონალური დამოკიდებულების** ცნებები. მაგრამ სხვადასხვა მათემატიკურ დისციპლინებში, მაგალითად, ალგებრაში და ანალიზში, ეს ცნებები სხვადასხვა თვალსაზრისით შეისწავლება.

შევჩერდეთ უფრო დაწვრილებით ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნებაზე.

თუ ორი x და y ცვლადი სიდიდე დაკავშირებულია ერთმანეთთან იმგვარად, რომ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის განსაზღვრული მნიშვნელობა, მაშინ y წარმოადგენს x-ის ფუნქციას:

$$y = f(x).$$

ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნების რაობა ა ნ ა ლ ი ზ ი ს თვალსაზრისით მდგომარეობს x და y ცვლადებს შორის თანადობის დამყარების იდეაში. ეს თანადობა ფაქტიურად შეიძლება განხორციელდეს სხვადასხვაგვარი წესით.

ა ლ გ ე ბ რ ა შ ი პირველ რიგში საქმე გვაქვს იმ ო პ ე რ ა ც ი ე ბ თ ა ნ, რომლებიც საჭიროა იმისათვის, რომ x ცვლადი სიდიდის მოცემული მნიშვნელობის მიხედვით მივიღოთ y ცვლადი სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობა. თუ ეს ოპერაციები დაიყვანება იმ ძირითად მოქმედებათა (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა) სასრულ რიცხვამდე, რომლებსაც ვახდენთ x-ის მოცემული მნიშვნელობის და მუდმივი კოეფიციენტების მიმართ, მაშინ ფუნქციას რაციონალური ეწოდება. ანალოგიურად განისაზღვრება რამდენიმე ცვლადი სიდიდის რაციონალური ფუნქცია. რაციონალური ფუნქცია შეიძლება იყოს **მთელი** (როცა ცვლადი სიდიდენი არ შედის გამყოფის სახით) და **წილადი**. ასე მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x) = x^3 + px + q,$$

სადაც q და p — მუდმივი კოეფიციენტებია, წარმოადგენს x-ის მთელი რაციონალური ფუნქციის მაგალითს; ფუნქცია

$$F(x) = \frac{x^3 - ax + b}{x^2 + ab},$$

სადაც a და b — მუდმივი სიდიდეებია, წარმოადგენს x-ის წილადი რაციონალური ფუნქციის მაგალითს.

შეიძლება ითქვას, რომ მთელი რაციონალური ფუნქციების შესწავლა შეადგენს უმაღლესი ალგებრის ერთერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას.

მაგრამ ალგებრის განვითარება, განსაკუთრებით უკანასკნელ ხანებში, საგრძნობლად სცილდება ამ ამოცანის ფარგლებს. თანამედროვე ალგებრა დიდ ყურადღებას აქცევს ძირითადი ოპერაციების აბსტრაქტულ შესწავლას; ამასთან არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება რგოლისა და ველის ცნებებს, რომლებსაც გავეცნობით პირველ თავში (§ 4).

ერთერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხი, რომელიც შეიძლება დაისვას მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მიმართ შემდეგში მდგომარეობს: შეიძლება თუ არა ამ ფუნქციამ x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის მიიღოს წინასწარ მოცემული α მნიშვნელობა?

ამ საკითხს მივყევართ განტოლებამდე

$$f(x) = \alpha, \text{ ანუ } f(x) - \alpha = 0. \tag{1}$$

ამგვარად დასმული ამოცანა იგივეა, რაც განტოლების ფესვების არსების საკითხი. ამ ფესვების მოძებნა ნიშნავს (1) განტოლების ამოხსნას.

ალგებრაში განიხილება ამოხსნა (1) სახის განტოლებისა, რომელიც წარმოშობილია მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის საშუალებით. ამ ამოცანით გამოწვეულმა გამოკვლევებმა განსაზღვრული როლი ითამაშა ალგებრის ცნებების და მეთოდების ჩამოყალიბების პროცესში.

2. უკვე შორეულ წარსულში ვხდებით ამოცანის ამოხსნას, რომელიც შეესაბამება — ჩვენი ტერმინოლოგიით — დაბალ ხარისხის განტოლებათა ამოხსნას.

ასურეთ-ბაბილონის კულტურის ძეგლები გვიჩვენებს, რომ ძველ ბაბილონში (1900 — 2000 წ. ჩვენს ერამდე) იცოდნენ იმ ამოცანების

ამოხსნა, რომლებიც კვადრატულ განტოლებამდე დაიყვანებიან. ამასთან გამოთვლების მსვლელობა არ განსხვავდებოდა ახლანდელისაგან.

კიდევ მეტი, ძველი ბაბილონის ძეგლებში არის აგრეთვე ისეთი ამოცანათა ამოხსნა, რომელნიც მესამე ხარისხის განტოლებებს შეიცავს*. ეს ამოცანები გამოითქმოდა გეომეტრიული სახით, მათი ამოხსნა კი ხდებოდა ცხრილების საშუალებით.

მოვიყვანოთ ერთი ამ ამოცანათაგანი. უცნობებს წარმოადგენს გეომეტრიული სხეულის სამი განზომილება: სიგრძე, სიგანე და სიღრმე. თუ ვისარგებლებთ თანამედროვე აღნიშვნებით და უცნობებს აღვნიშნავთ x, y და z-ით, მაშინ ამოცანის პირობები შეიძლება დაიწეროს ასეთი სახით:

$$v = xyz = \frac{7}{4}, \ y = x, \ z = 12x + 1. \tag{2}$$

ამოხსნა წარმოებს შემდეგნაირად. მე-(2) თანაფარდობებიდან უშუალოდ მივიღებთ:

$$4x^2(12x + 1) = 7,$$

ანუ, ტოლობის ორივე მხარეს თუ გავამრავლებთ 36-ზე, მივიღებთ:

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252.$$

მარცხენა ნაწილში გვაქვს $n^3 + n^2$ სახის რიცხვი. ბაბილონში შედგენილი იქნა ასეთი რიცხვების ცხრილი. ეს ცხრილი გვიჩვენებს, რომ ტოლობას $n^3 + n^2 = 252$ ადგილი აქვს მაშინ, როცა $n = 6$.

მაშასადამე,

$$12x = 6;$$

საიდანაც

$$x = \frac{1}{2}.$$

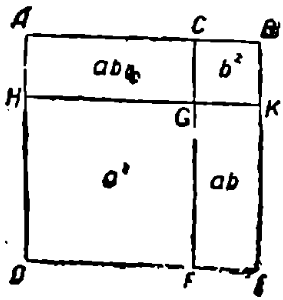
ეს ხერხი უშუალოდ შეიძლება იქნეს გამოყენებული მხოლოდ შემდეგი სახის კუბური განტოლებისათვის:

$$x^3 + x^2 = a. \tag{3}$$

* იხ. О. Нейгебауэр, Лекции по истории античных математических наук, ОНТИ, 1937, ტ. I, თავი V.

მაგრამ შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ ყოველი კუბური განტოლება მარტივ გარდაქმნათა საშუალებით დაიყვანება აღნიშნულ სახემდე (იხ. თავი V, § 2). აღსანიშნავია, რომ ამოხსნის „ცხრილის" მეთოდი არსებითად ადვილდება იმით, რომ (3) განტოლება შეიცავს მხოლოდ ერთ პარამეტრს — ნებსით a კოეფიციენტს.

3. მათემატიკურ დისციპლინათა შორის ძველს საბერძნეთში განსაკუთრებით ვითარდებოდა გეომეტრია, რომელიც აქ პირველად გადაიქცა მწყობრ ლოგიკურ სისტემად. ბერძენი გეომეტრები ცდილობდნენ, თეორიულ გამოკვლევებში მაინც არ გამოეყენებიათ სიდიდეთა რიცხვობრივი გამოსახულება. შეიძლება ეს აიხსნება იმით, რომ მათ იცოდნენ სიგრძის ერთეულისადმი უთანაზომო მონაკვეთების არსებობა. ამგვარად, ისინი მივიდნენ თავისებურ გეომეტრიულ აღრიცხვამდე, რომელსაც შეიძლება ვუწოდოთ „გეომეტრიული ალგებრა" *. ამ აღრიცხვაში a და b მონაკვეთებით შედგენილი მართკუთხედი განიხილება როგორც მათი ნამრავლი. დამოკიდებულებანი ფართობებს შორის ასრულებს ალგებრული ფორმულების როლს. ასე, მაგალითად, თანაფარდობა



ნახ. 1.

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

გამოისახება ევკლიდეს „გეომეტრიის საწყისებში" შემდეგნაირად:

„თუ მონაკვეთი გაყოფილია ორ ნებისმიერ ნაწილად, მაშინ კვადრატი მთელიდან უდრის კვადრატს მონაკვეთებიდან და ორჯერ აღებულ ამ მონაკვეთებს შორის მყოფ მართკუთხედს.

---

* იხ. Г. Цейтен, История Математики в древности и в средние века, М. Л. 1932, გვ. 43—48. ტერმინი „გეომეტრიული ალგებრა" პირველად ხვდება XVI საუკუნის იტალიელ მათემატიკოს Paolo Bonasoni-სთან; შეად. E. Bortolotti, Primordi della geometria analitica. L'algebra geometrica di Paolo Bonasoni, „Rendiconto d. Sessioni d. Accad. delle Scienze dell, Istituto di Bologna". 1924—1925.

დავუშვათ, რომ AB მონაკვეთი ნებსითად გაკვეთილია C წერტილში. ვამბობ, რომ კვადრატი AB-დან ეტოლება* კვადრატებს AC-დან, CB-დან და ერთად ორჯერ აღებული AC და CB მონაკვეთებს შორის მყოფ მართკუთხედს".

„საწყისების" X წიგნში ევკლიდე იყენებს გეომეტრიული ალგებრის მეთოდს შემდეგი სახის კვადრატული ირაციონალობის ასაგებად

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}},\quad \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}.$$

ევკლიდეს „საწყისებში" და მისი სხვა თხზულებებში „მონაცემებში", ჩვენ ვპოულობთ მთელ რიგ დებულებებს, რომლებიც შეიცავს კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნას გეომეტრიული სახით. მაგალითის სახით მოგვყავს „მონაცემთა" წიგნის LXXXV დებულება*.

თუ ორი წრფე შეიცავს მოცემულ სივრცეს მოცემულ კუთხეში და მოცემულია მათი ჯამი, მაშინ მოცემული იქნება ყოველი მათგანი ცალცალკე.

ამგვარად, საუბარია ორ x და y მონაკვეთზე, რომლებიც ერთმანეთისადმი დახრილია მოცემული კუთხით. სიმარტივისათვის ეს კუთხე ჩავთვალოთ მართ კუთხედ. x და y მონაკვეთების ჯამი, პირობის თანახმად, მოცემული a მონაკვეთის ტოლია. გარდა ამისა, ეს მონაკვეთები „შეიცავს მოცემულ სივრცეს", სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამ მონაკვეთებზე აგებული მართკუთხედის ფართობი მოცემულად ითვლება. შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ეს ფართობი მოცემულია (b^2) კვადრატის სახით.

ამგვარად, გვაქვს

$$x + y = a,\quad xy = b^2,$$

საიდანაც

$$x^2 - ax + b^2 = 0. \tag{4}$$

ახლა საჭიროა a და b მოცემული მონაკვეთების მიხედვით ავაგოთ x მონაკვეთი. ეს აგება ადვილად შეიძლება შევასრულოთ სახაზავისა და ფარგლის საშუალებით, ე. ი. წრეებისა და წრფე-

* Euclidis data, გამოც. Menge-სი, MDCCCXCVI, გვ. 166.

ების გავლების მეოხებით. საერთოდ, თუ მონაკვეთი მიიღება მოცემული მონაკვეთებიდან ძირითადი ოპერაციების სასრული რიცხვების (შეკრების, გამოკლების, გამრავლების და გაყოფის ოპერაციების) და კვადრატული ფესვების ამოღების მეოხებით, ეს მონაკვეთი შეიძლება ავაგოთ ფარგალისა და სახაზავის საშუალებით. პირიქით, თუ მონაკვეთი შეიძლება აიგოს ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით, მაშინ ის გამოისახება მონაცემებით აღნიშნული ოპერაციების საშუალებით*.

ამ დებულების დასამტკიცებლად შეიძლება გამოვიყენოთ მარტივი მოსაზრებანი ანალიზური გეომეტრიიდან. სიბრტყეზე ავარჩიოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. პირობის თანახმად, საძიებელი მონაკვეთი შეიძლება მივიღოთ მოცემული მონაკვეთებიდან მხოლოდ წრფეებისა და წრეწირების გავლების გზით. ამიტომ, რომ განვსაზღვროთ მოცემული მონაკვეთის ბოლოების კოორდინატები, უნდა მოიძებნოს მხოლოდ

a) წრფეთა გადაკვეთის წერტილები, *b*) წრფეთა და წრეწირების გადაკვეთის წერტილები, *c*) წრეწირთა გადაკვეთის წერტილები.

პირველი ამოცანა გვაძლევს პირველ ხარისხის ორი განტოლების სისტემის ამოხსნას, მეორე და მესამე — კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნას. ამით მტკიცდება, რომ საძებნი მონაკვეთის ბოლოების კოორდინატები გამოისახება მოცემული წერტილების კოორდინატებით ოთხი ძირითადი ოპერაციისა და კვადრატული ფესვის ამოღების საშუალებით**.

4. მაგრამ უკვე ძველს ხანაში ცნობილი იყო ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნას ვერ ახერხებდნენ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით. ასეთია, მაგალითად, კუბის გაორკეცებისა და კუთხის ტრისექციის ამოცანები (ე. ი. კუთხის სამ ტოლ ნაწილად გაყოფის შესახებ); ეს ამოცანები ბერძენი გეომეტრების ყურადღებას იქცევდა ჯერ კიდევ ოთხი საუკუნის წინათ ჩვენს ერამდე. კუბის გაორკეცების ამოცანაში საჭიროა ისეთი კუბის აგება, რომლის

---

* საჭიროდ მივაჩნია ეს გარემოება აღვნიშნოთ აქ, თუმცა ისტორიულად ეს საკითხი გაცილებით გვიან გამოირკვა.

** შეად. С. О. Шатуновский, Об измерении прямолинейных отрезков и построении их помощью циркуля и линейки, Одесса. 1925.

მოცულობა ორჯერ მეტია მოცემული კუბის მოცულობაზე. თუ მოცემული კუბის წიბოს აღვნიშნავთ a-თი ხოლო საძიებელი კუბის წიბოს კი x-ით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$x^3 - 2a^3 = 0; \tag{5}$$

ამგვარად კუბის გაორკეცების ამოცანის ამოხსნა ტოლფასია (5) განტოლების ამოხსნისა *.

მე-(5) განტოლების ამოხსნა, რომ შეგვეძლოს კვადრატულ რადიკალებში, მაშინ საძებნი მონაკვეთის აგება შეიძლებოდა ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით. შემდეგში დავამტკიცებთ, რომ (5) განტოლება არ შეიძლება ამოიხსნას კვადრატულ რადიკალებში; ამით დამტკიცდება, რომ კუბის გაორკეცების ამოცანა არ შეიძლება ამოიხსნას ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით.

ამიტომ ამ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო იყო მიგვემართა სხვა საშუალებებს. ეს სწორედ გააკეთეს ბერძენ გეომეტრებმა (ალგებრული ხასიათის ის მოსაზრებანი, რომლებიც ჩვენ ზემოთ მოვიყვანეთ, მათთვის იყო უცნობი). უპირველეს ყოვლისა მათ შენიშნეს, რომ ჩვენი ამოცანა წარმოადგენს **„ორი საშუალო პროპორციის"** ამოცანის კერძო შემთხვევას.

მოცემულია a და b მონაკვეთი, საჭიროა აიგოს მათი ორი საშუალო პროპორციული, ე. ი. ორი მონაკვეთი x და y, რომელთათვისაც

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \tag{6}$$

---

* ერთერთი ლეგენდა ამ ამოცანას უკავშირებს ორაკულის მოთხოვნას კუნძულ დელოსზე: „გაორკეცდეს კუბური ფორმის საკურთხეველი". ამიტომ კუბის გაორკეცების ამოცანებს ხშირად უწოდებენ დელოსის ამოცანას.

მ. ი. ვიგოდსკი აღნიშნავს, რომ ამ ამოცანის წარმოშობა შეიძლება დაკავშირებული ყოფილიყო სამხედრო საქმის მოთხოვნილებებთან: „სატყორცნი იარაღების დამზადების დროს ლარის ზომის გამოსაანგარიშებლად ქვის ყუმბარის წონის მიხედვით, მათ უხდებოდათ კუბური ფესვის ამოღება რიცხვიდან (დაახლოებით, რასაკვირველია და ძალიან უხეშად). შეიძლება ითქვას, რომ განთქმული „დელოსის" ამოცანა კუბის გაორკეცების შესახებ წარმოიშვა როგორც „საარტილერიო" ამოცანა: მოიძებნოს ლარის ზომა „ყუმბარის" წონის გაორკეცების შემთხვევაში".

М. Выгодский, „Платон как математик". Сборник „На борьбу за материалистическую диалектику в математике", ГНТИ, 1931. გვ. 164.

დავამტკიცოთ, რომ კუბის გაორკეცების ამოცანა მართლაც წარმოადგენს უკანასკნელი ამოცანის კერძო შემთხვევას.

(6) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს

$$ay = x^2, \qquad xy = ab.$$

თუ გამოვრიცხავთ ამ განტოლებებიდან y-ს, მივიღებთ

$$x^3 = a^2b. \tag{7}$$

ახლა თუ დავუშვებთ $b = 2a$, კვლავ მივიღებთ (5) განტოლებას.

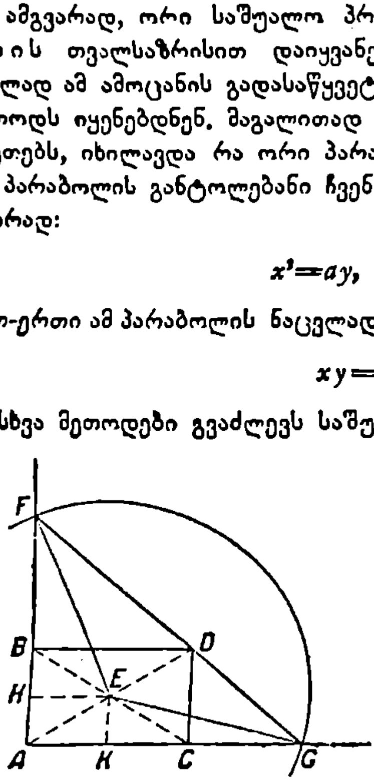
ამგვარად, ორი საშუალო პროპორციულის ამოცანად ალგებრის თვალსაზრისით დაიყვანება (7) განტოლების ამოხსნამდე. ძველად ამ ამოცანის გადასაწყვეტად სხვადასხვა გეომეტრიულ მეთოდს იყენებდნენ. მაგალითად მენეხმი იღებდა x და y მონაკვეთებს, იხილავდა რა ორი პარაბოლის გადაკვეთის წერტილებს; ამ პარაბოლის განტოლებანი ჩვენი სიმბოლიკაში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx.$$

ერთ-ერთი ამ პარაბოლის ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ ჰიპერბოლი

$$xy = ab.$$

სხვა მეთოდები გვაძლევს საშუალებას მოვძებნოთ ამოცანის დაახლოებითი ამოხსნა თანამიმდევრობითი გასინჯვათა მეოხებით. მოვიყვანოთ ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც აპოლონიუსს მიაწერენ.



ნახ. 2.

მოცემული მონაკვეთებ $AC = a$ და $AB = b$ გადავზომოთ მართი კუთხის გვერდებზე (ნახ. 2), და ავაგოთ $ACDB$ მართკუთხედი. დავუშვათ, რომ E არის ამ მართკუთხედის ცენტრი. წარმოვიდგინოთ, რომ E ცენტრიდან r რადიუსით ($r > AE$) გავლებული წრეწირი. ეს წრეწირი AB და AC ნახევარ წრფეებს გადაკვეთს

შესაბამისად F და G წერტილებში. ახლა შევეცადოთ r რადიუსი შევარჩიოთ იმგვარად, რომ FG, ქორდამ ჩვენი მართკუთხედის D წვეროზე გაიაროს. ასეთი r რადიუსის აგება ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეუძლებელია, მაგრამ თანამიმდევრობითი გასინჯვათა მეოხებით ადვილია მისი განსაზღვრა საკმაო სიზუსტით. მე-2 ნახაზზე გამოსახულია წრეწირი, რომელზედაც გავლებულია ახეთი r რადიუსი. თუ F და G არის ამ წრეწირის გადაკვეთის წერტილები AB და AC გვერდების გაგრძელებასთან, მაშინ მონაკვეთები

$$x = BF \text{ და } y = CG$$

იქნება საძიებელი მონაკვეთები. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ პითაგორის თეორემას HFE და EKG სამკუთხედებზე მივიღებთ.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 = r^2, \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 = r^2.$$

შევადაროთ მარცხენა ნაწილები და მოვახდინოთ გამარტივებანი, მივიღებთ

$$bx + x^2 = ay + y^2,$$
$$x(b + x) = y(a + y),$$

ანუ პროპორციის სახით:

$$\frac{a + y}{b + x} = \frac{x}{y}.$$

მეორეს მხრივ, BFD და AFG სამკუთხედების მსგავსებიდან დავასკვნით:

$$\frac{a + y}{b + x} = \frac{a}{x},$$

ხოლო AFG და CDG სამკუთხედების მსგავსებიდან დავასკვნით:

$$\frac{a + y}{b + x} = \frac{y}{b}.$$

ამგვარად,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

მივიღეთ ის, რაც უნდა დაგვემტკიცებია. კუბის გაორკეცების ამოცანის გადასაწყვეტად საკმარისია დავუშვათ $b = 2a$, სადაც a — მოცემული კუბის წიბოა; მაშინ x მონაკვეთი წარმოადგენს საძიებელი კუბის წიბოს. ამასთან ერთად მივიღებთ (5) **განტოლების გეომეტრიული ამოხსნას.**

5. განვიხილოთ **კუთხის ტრისექციის** ამოცანა. წინასწარ აღვნიშნოთ შემდეგი: თუ სიგრძის ერთეული ამორჩეულია, ყოველი კუთხის კოსინუსი შეიძლება წარმოვიდგინოთ განსაზღვრული მონაკვეთით. თუ ფარგალისა და სახაზავის საშუალებით შეიძლება $\cos a$-ს აგება, მაშინ შეიძლება თვით a კუთხის აგებაც.

ახლა დავუშვათ, რომ მოცემულია ω კუთხე; საჭიროა ეს კუთხე გაიყოს სამ თანატოლ ნაწილად. აღვნიშნოთ საძებნი კუთხე φ-თი, მივიღებთ

$$\varphi = \frac{\omega}{3}, \quad \omega = 3\varphi,$$

მაშასადამე,

$$\cos\omega = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

გავამრავლებთ რა ამ ტოლობის ორივე ნაწილს 2-ზე, მას წარმოვიდგენთ შემდეგი სახით:

$$(2\cos\varphi)^3 - 3(2\cos\varphi) - 2\cos\omega = 0. \tag{8}$$

ω კუთხე მოცემულია, მისი კოსინუსი შეიძლება ჩავთვალოთ ცნობილად; მაშასადამე, ტოლობა (8) შეიძლება განვიხილოთ, როგორც განტოლება $\cos\varphi$-სგან საზღვრისათვის. თუ დავუშვებთ

$$2\cos\varphi = x, \quad 2\cos\omega = b, \tag{9}$$

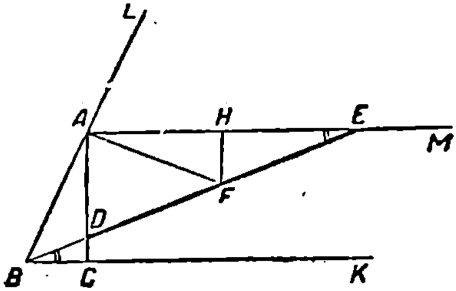
ეს განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$x^3 - 3x - b = 0. \tag{10}$$

ამგვარად, კუთხის ტრისექციის ამოცანა დაიყვანება აგრეთვე მესამე ხარისხის განტოლებამდე. შემდეგში დავინახავთ, რომ განტოლება (10) კვადრატულ რადიკალებში შეიძლება ამოიხსნას b მუდმივის მხოლოდ ზოგიერთ კერძო მნიშვნელობისათვის. კუთხის ტრისექციის ამოცანა ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეიძლება ამოიხსნას მხოლოდ იმ კუთხეებისათვის, რომლებიც ამ b-ს კერძო მნიშვნელობებს შეესაბამება. ზოგად შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნა ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეუძლებელია.

მაგრამ, თუ არ დავკმაყოფილდებით აგების ამ საშუალებით, შეიძლება ამოცანის ზოგადი ამოხსნაც (ნებსითი კუთხისათვის); მოვიყვანოთ ამოხსნის ერთ-ერთი ხერხი; ც ე ი ტ ე ნ ი ს აზრით ეს ხერხი „შეიძლება ეკუთვნოდეს V საუკუნეს ჩვენს ერამდე“.

დავუშვათ, რომ KBL არის მოცემული კუთხე (ნახ. 3). ერთ-ერთ მის გვერდზე ავიღოთ ნებსითი A წერტილი და მეორე გვერდზე დავუშვათ AC მართობი. შემდეგ, იმავე A წერტილზე გავატაროთ BK-ს პარალელური AM წრფე.



ნახ. 3.

თუ მოცემული კუთხის B წვეროს შევაერთებთ AC მონაკვეთის რომელიმე D წერტილს, მაშინ BD წრფე გადაკვეთს AM-ს რომელიმე E წერტილში. ახლა შევეცადოთ D წერტილი შევარჩიოთ იმგვარად, რომ DE მონაკვეთი (ე. ი. BD წრფის მონაკვეთი AC და AM-ს შორის) ტოლი იყოს $2\,AB$-სი. სხვანაირად რომ ვსთქვათ, AC და AM-ს შორის შევეცადოთ „ჩ ა ვ უ რ თ ო თ“ DE მონაკვეთი, $2\,AB$-სი ტოლი, ისე, რომ მის გაგრძელებამ B წერტილზე გაიაროს (ამის შესაბამისად თვით ხერხს ხშირად „ჩართვის ხერხს“ უწოდებენ).

ამგვარი ჩართვის შესრულება ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეუძლებელია; მაგრამ ეს ადვილად შეიძლება განვახორციელოთ სხვაგვარი ხერხებით; მაგალითად, შეიძლება ვისარგებლოთ ზოლიანი ქაღალდით, რომელზედაც გავლებულია მონაკვეთი $PQ = 2\,AB$. საჭიროა მხოლოდ ეს ხაზები დავალაგოთ ისე, რომ P და Q წერტილები მოხვდეს შესაბამისად AC და AM-ზე, ხოლო ზოლის კიდემ გაიაროს B წერტილზე.

თუ D წერტილი აკმაყოფილებს დასახულ მოთხოვნას (ე. ი. $DE=2\,AB$), მაშინ KBD კუთხე არის ის კუთხე, რომელიც მოსაძებნი იყო. მართლაც, დავუშვათ, რომ F არის DE მონაკვეთის შუა წერტილი:

$$DF=FE=AB;$$

A წერტილი შევაერთოთ F-თან და გავატაროთ $FH \parallel AC$. მაშინ $AH=HE$; მაშასადამე,

$$AF=FE=AB.$$

ამგვარად, BAF სამკუთხედი ტოლფერდაა და ჩვენ მივიღებთ

$$\angle ABD=\angle AFD.$$

მაგრამ $\angle AFD$ — გარეგანია AFE სამკუთხედის მიმართ, ასე რომ

$$\angle AFD=2\angle AEF=2\angle DBK.$$

თუ შევადარებთ უკანასკნელ ორ თანაფარდობას, მივიღებთ

$$\angle ABD=2\angle DBK,$$

ე. ი. $\angle DBK$ შეადგენს მოცემული KBL კუთხის მესამედს:

$$\angle DBK=\frac{1}{3}\angle KBL.$$

ამგვარად, კუთხის ტრისექციის ამოცანა ამოხსნილია; ამასთან ერთად მივიღეთ (10) განტოლების ამოხსნის გეომეტრიული ხერხი.

6. განვიხილოთ კიდევ ერთი გეომეტრიული ამოცანა, რომელიც, ალგებრის ენით რომ ვთქვათ, მიგვიყვანს მესამე ხარისხის განტოლებამდე. ეს ამოცანა არქიმედმა დასვა თავისი თხზულების მეორე წიგნში, რომელიც შეეხება სფეროსა და ცილინდრს:

„საჭიროა სფერო გადაიკვეთოს სიბრტყით იმგვარად, რომ მიღებული სეგმენტების მოცულობანი იმყოფებოდეს მოცემულს შეფარდებაში".

არქიმედი არ გვაძლევს ამ ამოცანის ამოხსნას, მაგრამ აღნიშნავს, რომ იგი დაიყვანება ისეთი მონაკვეთის აგებაზე, რომლისათვისაც შესრულებული უნდა იქნეს განსაზღვრული პროპორცია. მართლაც, a-თი აღვნიშნოთ სფეროს რადიუსი, x-ით ერთ-ერთი სეგმენტის სიმაღლე; თუ ერთი სეგმენტის მოცულობა მეორეს მოცულობას შეესაბამება, როგორც $m:n$, მაშინ

$$\frac{\pi x^2\left(a-\frac{x}{3}\right)}{\pi(2a-x)^2\left(a-\frac{2a-x}{3}\right)}=\frac{m}{n},$$

ანუ

$$\frac{x^2(3a-x)}{(2a-x)^2(a+x)}=\frac{m}{n}. \tag{11}$$

მე-(11) პროპორციის ნაცვლად ავიღოთ წარმოებული პროპორცია

$$\frac{x^2(3a-x)}{x^2(3a-x)+(2a-x)^2(a+x)}=\frac{m}{m+n},$$

ანუ გამარტივებათა შემდეგ,

$$\frac{x^2(3a-x)}{4a^3}=\frac{ma}{m+n}. \tag{12}$$

დავუშვებთ რა

$$\frac{ma}{m+n}=b,$$

(12) შეფარდება წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$$x^2:4a^2=b:(3a-x).$$

სწორედ ეს არის ის პროპორცია, რომელიც არქიმედმა მიიღო, ჩაწერილი მხოლოდ ასოითი აღვნიშნებში; ცხადია, რომ ეს პროპორცია ტოლფასია განტოლების:

$$x^3-3ax^2+4a^2b=0. \tag{13}$$

არქიმედეს ამ ამოცანამ მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა არაბ მათემატიკოსთა შემდგომ გამოკვლევებში.

ბერძენ გეომეტრებს უხდებოდათ ისეთი ამოცანების გადაწყვეტაც, რომლებიც ჩვენს აღვნიშნებში გამოისახებიან მეოთხე ხარისხის განტოლებით. ასეთი ამოცანებისაკენ ბუნებრივად მივყევართ კონუსურ კვეთების თეორიის განვითარებას. აპოლონიუსი პერიგიდან თავისი ტრაქტატის მეხუთე წიგნში კონუსურ კვეთების შესახებ განიხილავს ამოცანას მოცემულ წერტილიდან ნორმალის აგების შესახებ კონუსურ კვეთისადმი. ეს ამოცანა ალგებრის ენით გამოიხატება მეოთხე ხარისხის განტოლებით. აპოლონი გვაძლევს ამოცანის ღრმა გამოკვლევას, ამასთან ის სარგებლობს მხოლოდ გეომეტრიულ ხერხებით.

7. განტოლებათა ამოხსნის საკითხების მეცნიერული სისტემატიზაციის პირველ ცდას ვპოულობთ დიოფანტეს* ნაწარმოებში. თავის შრომაში — „არითმეტიკა“ (რომელმაც ჩვენამდე არასრულად

---

* დიოფანტე ცხოვრობდა და მუშაობდა ალექსანდრიაში III—IV საუკუნეში ჩ. ე.

მოაღწია) დიოფანტე განიხილავს იმ ამოცანების ამოხსნას, რომლებსაც მივყევართ რიცხვით განტოლებამდე, განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ განტოლებამდე; ამასთან, დიოფანტე განიხილავს მხოლოდ და მხოლოდ დადებით რაციონალურ რიცხვებს (ე. ი. მთელ რიცხვებსა და $\frac{m}{n}$ სახის წილადებს, სადაც m და n — მთელი რიცხვებია). მოკლე შესავალმა უნდა გააცნოს მკითხველი ძირითად ცნებებსა და აღნიშვნებს. აქ შემოღებულია თავისებური სახელწოდებანი რიცხვების თანამიმდევრობითი ხარისხებისათვის; ჩვეულებრივი კვადრატისა და კუბის შემდეგ მოსდევს კვადრატ-კვადრატი (მეოთხე ხარისხი), კუბ-კვადრატი (მეხუთე ხარისხი), კუბ-კუბი (მეექვსე ხარისხი). სხვათა შორის, დიოფანტე ამ ტერმინოლოგიით სარგებლობს მხოლოდ იქ, სადაც ლაპარაკია უცნობი სიდიდის ხარისხებზე. ამ ხარისხებისათვის ის იყენებს შემოკლებულ აღნიშვნებს; უცნობი სიდიდეც სპეციალური სიმბოლოთია აღნიშნული. დაბოლოს განსაკუთრებული აღნიშვნებია შემოღებული წილადებისათვის. ეს გვაძლევს შესაძლებლობას შედარებით რთული გამოსახულებანი ჩავსწეროთ საკმაოდ მარტივ ფორმით. დიოფანტე ურჩევს მკითხველს შეიძინოს საკმაო ჩვევა ასეთი გამოსახულებათა შეკრებისა, გამოკლებისა და გამრავლებისათვის; ის განსაკუთრებულ ყურადღებას აქცევს რამდენიმე საკრების ან მაკლებისაგან შემდგარ გამოსახვას. ზოგად რიცხვით გამოსახულებათა განხილვა, ამბობს ის, ფართო გზას გვიხსნის ამოცანების ამოხსნისათვის.

განტოლებათა ამოხსნის დროს დიოფანტე გვირჩევს გამოვიყენოთ შემდეგი მითითებანი: „თუ ამოცანის ამოხსნის დროს მივედით განტოლებამდე (ტოლობამდე) რომლის ორთავე ნაწილი შეიცავს ერთნაირ წევრებს (საერთო გამოსახულებებს), მაგრამ მათი კოეფიციენტები სხვადასხვანაირია, მსგავსი უნდა ვაკლოთ მსგავსს მანამ, სანამ ყოველ ნაწილში არ დარჩება მხოლოდ ერთი წევრი. ხოლო თუ ერთ ან ორთავე ნაწილში გვაქვს მაკლები სიდიდენი, მაშინ ეს სიდიდენი უნდა მივუმატოთ ორთავე ნაწილს, რათა ყოველ ნაწილში გვექნეს მხოლოდ სამატი. შემდეგ მსგავსს კვლავ უნდა ვაკლოთ მსგავსი, სანამ ყოველ ნაწილში არ დაგვრჩება მხოლოდ ერთი წევრი*.

* მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ დიოფანტე არ იცნობდა უარყოფით რიცხვებს. ამიტომ განტოლებათა საბოლოო სახით არ შეიცავდა „მაკლებ" წევრებს, ე. ი. წევრებს უარყოფითი კოეფიციენტებით.

ეს მითითებანი საკმარისია პირველი ხარისხის განტოლებათა გადასაწყვეტად, აგრეთვე იმ განტოლებათა გადასაწყვეტად, რომლებმაც შეიძლება მიიღოს ასეთი სახე:

$$ax^m=bx^n.$$

„შემდგომ — ამბობს დიოფანტე — გიჩვენებ აგრეთვე, თუ როგორ სწყდება ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა ბოლოში ორწევრა გამოსახულება ეტოლება ერთწევრას".

დიოფანტეს აქ მხედველობაში აქვს, ალბად, სრულ კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნა. დიოფანტეს მიერ მითითებულ ოპერაციების მეოხებით კვადრატულ განტოლებას შეიძლება მივცეთ ერთ-ერთი სახე ამ სამ ფორმათაგან:

$$ax^2+bx=c,\ ax^2=bx+c,\ ax^2+c=bx,$$

სადაც a, b, c — დადებითი კოეფიციენტებია.

მისი ნაწარმოების იმ ნაწილში, რომელმაც ჩვენამდე მოაღწია, ვერ ვპოულობთ წესს კვადრატულ განტოლებათა გადასაწყვეტად; მაგრამ ზოგიერთი ამოცანების ამოხსნის დროს ეს წესი უკვე ცნობილად იგულისხმება; ამგვარად, შეგვიძლია ვიფიქროთ, რომ ეს წესი დასაბუთებული იყო მისი ნაწარმოების დაკარგულ ნაწილში. დიდ ყურადღებას აქცევს დიოფანტე განუსაზღვრელ განტოლებათა ამოხსნას რაციონალურ რიცხვებში; მის გამოკვლევათა ამ ნაწილს აქ არ შევეხებით.

დიოფანტეს თავის შემდეგ არ დაუტოვებია უშუალო მოწაფე ან მისი საქმის გამაგრძელებელი; მაგრამ გავლენა, რომელიც მან მოახდინა მათემატიკის შემდგომ განვითარებაზე, უდიდესი იყო; ამ გავლენის აშკარა კვალი ემჩნევა საშუალო საუკუნეების არაბ ავტორებს და აღორძინების ეპოქის ევროპიელ ავტორებს.

8. ძველ საბერძნეთის მათემატიკის ისტორიაში დიოფანტეს შემოქმედება წარმოგვიდგება ერთ-ერთ უკანასკნელ ბრწყინვალე ფურცლად. მათემატიკური კულტურის განვითარება საშუალო საუკუნოებში გადადის ინდოელებისა და არაბების ხელში. ინდოელების მათემატიკა ვითარდებოდა ასტრონომიის მოთხოვნებთან მჭიდრო კავშირში; ეს აიძულებდა ინდოელებს განსაკუთრებული ყურადღება მიექციათ გამოთვლების ხელოვნებისათვის. ინდოელ მეცნიერებმა არიაბხატტამ (დაიბადა 476 წელს), ბრაჰმაგუპტა (დაბ-

ბადა 598 წელს), ბ ხ ა ს კ ა რ მ ა (დაიბადა 1114 წელს) ასტრონომიული შინაარსის დიდი თხზულებანი დაგვიტოვეს, რომლებშიაც ცალკეული თავები მიძღვნილია მათემატიკისადმი. არითმეტიკის საკითხებთან ერთად ამ თხზულებებში არის პირველი და მეორე ხარისხის რიცხვითი განტოლებათა ამოხსნა. დიოფანტთან შედარებით უფრო არსებითი წარმატება მდგომარეობს იმაში, რომ ინდოელებმა შემოიღეს უარყოფით სიდიდეთა განხილვა. დადებითი და უარყოფითი სიდიდეთა აღსანიშნავად ისინი სარგებლობენ ტერმინებით „ქონება“ და „ვალი“. შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ინდოელი ავტორები, კერძოდ უკვე არიაბხატი, სწორედ აფასებდნენ უარყოფითი რიცხვების მნიშვნელობას იმ შემთხვევაში, როცა ლაპარაკია ორი მოპირდაპირე მიმართულების შესახებ. უფრო ახლო პერიოდის ავტორი, ბხასკარა აღნიშნავს, რომ კვადრატულ ფესვს დადებითი რიცხვიდან ორნაირი მნიშვნელობა აქვს, დადებითი და უარყოფითი, მაშინ როდესაც კვადრატული ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან ა რ ა რ ს ე ბ ო ბ ს ო. მაგრამ კვადრატული განტოლების ამოხსნის დროს ის კმაყოფილდება დადებითი ფესვებით იმის გამო, რომ „აბსოლუტური (ე. ი. განყენებული) უარყოფითი რიცხვები არ მოსწონს ხალხსო“. უნდა აღვნიშნოთ კიდევ, რომ ინდოელი ავტორები, დიოფანტესაგან განსხვავებით, დასაშვებად მიაჩნდათ ირაციონალური ფესვები კვადრატული განტოლებათა ამოხსნის დროს.

9. გადავდივართ არაბებზე, რომლებმაც საშუალო საუკუნეებში მნიშვნელოვანი როლი ითამაშეს მათემატიკის განვითარებაში.

არაბების პოლიტიკურმა წარმატებებმა VII — VIII საუკუნეებში შექმნა წინამძღვრები კულტურის სწრაფი აღმავლობისათვის. მოკლე ხანში არაბებმა თავიანთი ბატონობის ქვეშ გააერთიანეს უდიდესი ტერიტორია, მიაღწია რა ინდოეთამდე აღმოსავლეთში და ატლანტიის ოკეანემდე დასავლეთში. მათი ბატონობა გავრცელდა ეგვიპტეზედაც ალექსანდრიითურთ, სადაც ყველაზე დიდხანს დარჩა ბერძნული გეომეტრიის ტრადიციები.

ამგვარად, მათ მიეცა შესაძლებლობა შეეთვისებიათ ბერძენ გეომეტრთა მათემატიკური მემკვიდრეობა და შეეხამებიათ იგი ინდოელების არითმეტიკულ ხელოვნებასთან. არაბ მეცნიერთა შორის, რომელნიც ასტრონომიისა და მათემატიკის დარგში მუშაობდნენ, უნდა მოვიხსენიოთ უწინარეს ყოვლისა მ უ ჰ ა მ ე დ ი ი ბ ნ მ უ ს ა ა ლ-

ჰ ო ვ ა რ ე ზ მ ი (VIII საუკუნის დამლევი — IX საუკუნის დასაწყისი)*. მას ეკუთვნის თხზულება, რომლის სათაურში პირველად ვხვდებით სიტყვას „ალგებრა". უფრო სწორედ რომ ვთქვათ, ამ თხზულების სათაურში გაერთიანებულია ორი ტერმინი „ალ-ჯებრ" და „ალ-მუკაბალა" (aldschebr, almukâbala); ამ ტერმინების ახსნას ალჰოვარეზმი არ გვაძლევს, ალბად, იმიტომ, რომ ცნობილად მიაჩნია. სხვა წყაროებით ირკვევა, რომ ეს ტერმინები ეკუთვნის ორ ოპერაციას, რომლებიც უკვე დიოფანტესაც აქვს მოხსენებული: სიტყვა „ჯებრი" ნიშნავს განტოლების ისეთს გარდასახვას, რომლის შედეგად ორთავე ნაწილში რჩება მხოლოდ დადებითი წევრები (იხ. დიოფანტეს თხზულება: „...ორთავე ნაწილში რომ გვექნეს მხოლოდ სამატი"); სიტყვა „მუკაბალა" ნიშნავს იმ ოპერაციას, რომელსაც დიოფანტე (იხ. 16 გვ.) ახასიათებს მითითებით: „...მსგავსს ვაკლოთ მსგავსი, სანამ ყოველ ნაწილში არ დარჩება მხოლოდ ერთი წევრი".

თვით თხზულებაში ალჰოვარეზმი მთავარ ყურადღებას აქცევს კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნას; ის ცალ-ცალკე იხილავს სრულ კვადრატულ განტოლებათა სამ ტიპს (იხ. ზევით, პუნქტი 7) და გვაძლევს მათი გადაწყვეტის ზოგად წესებს.

ალჰოვარეზმი გვაძლევს ამ წესების გეომეტრიულ დამტკიცებებს. ასე, მაგალითად,

$$x^2 + 10x = 39$$

განტოლების ამოხსნას

ის აშუქებს „გნომონის"** საშუალებით.

---

* ალჰოვარეზმი ნიშნავს „ხოვარეზმიდან". ე. ი. ხივიდან. სახელი ალჰოვარეზმი გვხვდება სხვადასხვა ტრანსკრიპციებში: al-Hovaresmi (შეადარეთ H a n k e l, Zur Geschichte der Mathematik, 1874, გვ. 230), Al-khârismi (Rodet), Alchwarismi (Cantor). ალხოვარეზმის ერთ-ერთი თხზულების ლათინური თარგმანი, რომელშიაც დალაგებული იყო თვლის წესები პოზიციური სისტემით, იწყებოდა სიტყვებით „Dixit Algorithmi..."

აქედან წარმოიშვა სიტყვა „ალგორითმი", რომლითაც შემდეგში აღნიშნავდნენ განსაზღვრული კანონით შესრულებული მათემატიკური ოპერაციების ყოველგვარ თანმიმდევრობას. შეად. ც ე ი ტ ე ნ ი, მათემატიკის ისტორია ძველს ხანაში და საშუალო საუკუნეებში, გვ. 200. რუს. გამოც.

** სიტყვა „გნომონი" ძველს ხანაში ჯერ ნიშნავდა ვერტიკალურ ლატანს, რომელსაც ხმარობდნენ დროის განსაზღვრისათვის. შემდეგში სიტყვა „გნომონის" ქვეშ ჰგულისხმობდნენ ფიგურას, რომელიც მართკუთხედს (ან პარალელოგრამს) ავსებდა მსგავს მართკუთხედამდე, რომელსაც პირველთან საერთო წვერო ჰქონდა; ნახაზზე 4 დაშტრიხული ნაწილი წარმოადგენს „გნომონს". შეად. Ц е й т е н, История математики в древности и в средние века.

თუ წარმოვიდგენთ კვადრატს, რომლის გვერდი x-ის ტოლია და მის ორ გვერდს ცალ-ცალკე მივადებთ ორ მართკუთხედს, რომელსაც აქვს გვერდი x და 5, მაშინ მიღებული ფიგურა შეიძლება შევავსოთ კვადრატამდე გვერდი 5-ის დამატების საშუალებით.

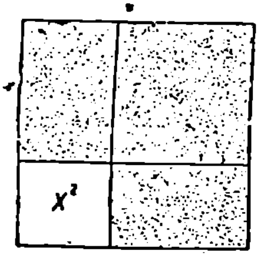
ამგვარად, მივიღებთ კვადრატს, რომლის ფართობია

$$x^2 + 10x + 5^2 = 39 + 25 = 64.$$

მაშასადამე, კვადრატის გვერდი ტოლია

$$x + 5 = 8, \text{ საიდანაც } x = 3\,^*$$

ჩვენ ვიცით, რომ მეორე ხარისხის რიცხვითი განტოლებების ამოხსნა მაშინდელ ხანაში არ წარმოადგენდა ახალ რამეს; სწორედ ასევე, ისეთი გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა, რომლებსაც მივყევართ კვადრატულ განტოლებებზე, ცნობილი იყო ძველად, მაგრამ არსებითია ის, რომ ალხოვარეზმის თხზულებაში ჩვენ ვნახულობთ ორთავე მომენტის მკაფიოდ გამოსახულ სინთეზს: ისმება ამოცანა რიცხვითი განტოლების ამოხსნის შესახებ, ხოლო ამ ამოცანის ამოხსნა საბუთდება გეომეტრიულად. არითმეტიკული და გეომეტრიული მომენტების ამ სინთეზმა მნიშვნელოვანი როლი შეასრულა ალგებრის შემდგომ განვითარებაში.



ნახ. 4.

ალხოვარეზმი თავის „ალგებრაში“ კმაყოფილდება მეორე ხარისხის განტოლებებით. მაგრამ მის შემდეგ არაბი მეცნიერები მალე გადავიდნენ მესამე ხარისხის განტოლებებზე. ამასთან, გამოსავალი პუნქტი გახდა არქიმედეს ამოცანა სფეროს გაყოფის შესახებ (იხ. ზევით, პუნქტი 6). შემდეგ, მათ გამოარკვიეს, რომ სწორი ცხრაკუთხედის აგების ამოცანა (კუთხის ტრისექციის ამოცანის კერძო შემთხვევა) დაიყვანება მესამე ხარისხის განტოლებამდე**.

---

* ალხოვარეზმს მოჰყავს კიდევ სხვა გეომეტრიული დასკვნა ამ განტოლების გადასაწყვეტად; ეს დასკვნა შეიძლება ვნახოთ გილეიტნერის წიგნში „Хрестоматия по истории математики, 1935, გვ. 27.

** ეს შესრულებულ იქნა ალბირუნის (Albirouni) და აბულ-ჯუდის (Aboûl-Djoûd) მიერ XI საუკუნეში. შეად. F. Woepcke, L'Algebre d'Omar Alkhayyâmi, გვ. 125).

არაბი მეცნიერები პირველნი იყვნენ, რომლებმაც გამოიკვლიეს მესამე ხარისხის განტოლებათა სხვადასხვა ტიპები. თუმცა მათ ვერ მონახეს ალგებრული გადაწყვეტა; ამ განტოლებებს ისინი სწყვეტდნენ გეომეტრიულ გზით, კონუსურ კვეთების მეოხებით.

ამ მხრივ განსაკუთრებით საინტერესოა ო მ ა რ ხ ა ი ა მ ა ს (ალ-ხაიამის)* ალგებრა; ეს არის პირველი თხზულება, რომელშიაც ჩვენ ვპოულობთ სისტემატურ, მკაცრად მოფიქრებულ გამოკვლევას მესამე ხარისხის განტოლებისა; ამაზე მეტიც, ალხაიამის ალგებრა არის პირველი თხზულება, რომელშიაც ალგებრა განიხილება, როგორც დამოუკიდებელი მათემატიკური დისციპლინა, რომელსაც აქვს ზოგადი თეორიული მნიშვნელობა. ის ამბობს ამის შესახებ შემდეგნაირად:

„ერთ-ერთი მათემატიკური თეორია, რომელიც აუცილებელია მათემატიკურ მეცნიერებათათვის, რაც შეადგენს ფილოსოფიურ მეცნიერებათა ნაწილს, — ეს არის ალგებრის მეცნიერება, რომელსაც მიზნად აქვს განსაზღვრა რიცხვობრივი ანუ გეომეტრიული უცნობებისა“.

„ალგებრა, — ამბობს შემდეგ ომარი, — არის ხელოვნება, რომელიც ეკუთვნის შემეცნების დარგს (ფრ. art scientifique). მისი საგანია — აბსოლუტური (ე. ი. განყენებული) რიცხვი და ზომადი სიდიდეები... ზომადი სიდიდეების ქვეშ მესმის უწყვეტი ოდენობანი, რომელთა ოთხი გვარი არსებობს: წირი, ზედაპირი, სხეული და დრო...“ აქ ომარი ეყრდნობა არისტოტელეს. იგი აღნიშნავს შემდეგ, რომ ჩვეულებრივ, დრო არ შემოიყვანება ალგებრულ გამოკვლევებში. „მაგრამ ასე რომ ყოფილიყო გაკეთებული, ეს იქნებოდა სავსებით დასაშვები“.

„ალგებრაისტები ჩვეულებრივ უწოდებენ თავის ხელოვნებაში უცნობს, რომელიც საძიებელია, „საგანს“, ხოლო მის ნამრავლს თავისთავზე — „კვადრატს“, მისი კვადრატის ნამრავლს საგანზე — „კუბს“, მისი კვადრატის ნამრავლი თავისთავზე — “კვადრატ-კვადრატს“, მისი კუბის ნამრავლი მის კვადრატზე — „კვადრატ-კუბს“, მისი კუბის ნამრავლს თავის თავზე — „კუბ-კუბს“, და ასე შემდეგ, დაუსრულებლივ“.

* ო მ ა რ ბ ე ნ-ი ბ რ ა ჰ ი მ ა ლ ხ ა ი ა მ ი ნიშაპურიდან (გარდაიც. 1123 წელს) იყო განთქმული ასტრონომი, მათემატიკოსი და პოეტი; თავის სამეცნიერო თხზულებებს სწერდა არაბულ ენაზე, ლექსებს — სპარსულზე; ის არის განთქმული ლექსების „რუბაის“ ავტორი.

„ალგებრული გამოკვლევა სრულდება მხოლოდ განტოლებათა საშუალებით, ე. ი. ამ ხარისხების ერთმანეთთან გატოლებით, როგორც ეს კარგად ცნობილია“.

„თუ ალგებრაისტი გაზომვასთან დაკავშირებულ ამოცანებში ხმარობს კვადრატ-კვადრატს, ეს უნდა გვესმოდეს მეტაფორულად, და არა საკუთარი აზრით, იმიტომ რომ შეუსაბამობაა იმის თქმა, რომ კვადრატ-კვადრატი ეკუთვნის ზომად სიდიდეთა რიცხვს“.

ამგვარად, არსებობს ოთხგვარი სიდიდე, რომელთა შორის შეიძლება შეიქმნას განტოლებანი: აბსოლუტური რიცხვები, გვერდები (ე. ი. წრფივი სიდიდენი), კვადრატები და კუბები. შემდეგ ომარი აღნიშნავს, რომ დღემდე ალგებრაისტები თავიანთ თხზულებებში იხილავდნენ განტოლებებს, რომლებიც შეიცავს მხოლოდ რიცხვს, გვერდებს და კვადრატებსო, და ამბობს:

„ჩვენ მხედველობაში გვაქვს, პირიქით, მოვიყვანოთ მეთოდები, რომელთა მეოხებით შეიძლება უცნობი განვსაზღვროთ იმ განტოლებიდან, რომელიც შეიცავს ოთხ ხარისხს, რომლებიც, როგორც ახლა ვთქვით, მხოლოდ და მხოლოდ შეიძლება შედიოდეს ზომად სიდიდეთა რიცხვში, სახელდობრ: რიცხვი, ნივთი, კვადრატი და კუბი“.

ომარი თავის გამოკვლევას კვადრატული განტოლებებიდან იწყებს, ამასთან რიცხვითი ამოხსნას აქ, ისევე როგორც ალხოვარეზმის თხზულებაში, თან სდევს გეომეტრიული დამტკიცებანი. ის გვაძლევს აგრეთვე ფესვების ა გ ე ბ ი ს ხერხებს.

შემდეგ ომარი გადადის კუბურ განტოლებებზე, განიხილავს ამ განტოლებათა სხვადასხვა სახეებს და გვიჩვენებს ფესვების აგებას. ამასთან ის სარგებლობს მეორე რიგის მრუდეების გადაკვეთით. ომარი საზოგადოდ არ სცნობს უარყოფითი ფესვებს. მაგრამ ზოგიერთ შემთხვევაში დადებითი ფესვებიც მხედველობიდან ეპარება, რადგან ის ყოველთვის იხილავს მრუდის მხოლოდ ერთ შტოს. ამ გარემოებამ მას ხელი შეუშალა შეემჩნია რომ კუბურ განტოლებას შეიძლება ექნეს სამი დადებითი ფესვი.

10. საშუალო საუკუნეების მეორე ნახევარში არაბული კულტურის გავლენა ვრცელდება ევროპაში. ევროპაში თანდათან შემოიჭრა მათემატიკური ცოდნა, რომელიც არაბებს ჰქონდათ. ყველაზე უფრო ხელსაყრელი ნიადაგი მათი გავრცელებისათვის, სავაჭრო ურთიერთობის განვითარების მეოხებით, შეიქმნა იტალიაში. აქ XII საუკუ-

ნეში მიმდინარეობს საშუალო საუკუნეების უდიდესი ევროპიელი მათემატიკოსის ლ ე ო ნ ა რ დ ო პიზელის (რომელსაც ფ ი ბ ო ნ ა ჩ ი ს უწოდებენ) მოღვაწეობა. ლეონარდოს თხზულება „Liber abaci" (აბაკის წიგნი)*, რომელიც 1202 წელს გამოვიდა, დიდხანს წარმოადგენდა მათემატიკური განათლების ძირითად წყაროს ევროპაში. ლეონარდო ამ თხზულებაში მთავარ ყურადღებას აქცევს არითმეტიკულ ამოცანათა ამოხსნას. რაც შეეხება ალგებრას, ლეონარდო კმაყოფილდება პირველი და მეორე ხარისხის განტოლებებით. მაგრამ ის მთელ განტოლებას უძღვნის კვადრატული და კუბური ფესვების ამოღებას და მათ მიმართ მოქმედებებს. აქ ლეონარდო დაწვრილებით განიხილავს ოპერაციებს კვადრატულ რადიკალებზე, გადმოგვცემს რა არითმეტიკის ენით ევკლიდეს მეათე წიგნის გეომეტრიულ აგებებს. ამის შემდეგ ის გადადის კუბურ რადიკალებზე. ორი მსგავსი რადიკალის ჯამის განსაზღვრისათვის

$$x = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{4},$$

უშუალო ამაღლებით კუბში გვიჩვენებს, რომ $x^3 = 108$. ამასთან ის იყენებს ფორმულას

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2,$$

სადაც

$$x = u + v\,^{**}$$

ამ თანაფართობებმა, როგორც შემდეგში დავინახავთ, შეიძლება მიგვიყვანოს კუბურ განტოლებათა ამოხსნამდე. მაგრამ ლეონარდო არ ეხება ამ საკითხს.

ლეონარდოს სხვა შრომებს შორის უნდა მოვიხსენიოთ პატარა თხზულება, რომელიც ცნობილია სახელწოდებით „Flos" („ყვავილი"). ამ თხზულებაში ლეონარდო იკვლევს მესამე ხარისხის განტოლებას:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20, \tag{14}$$

რომელიც მას წარუდგინა იმპერატორი ფრიდრიხ II-ის სასახლის

---

* სიტყვა „აბაკი", საკუთრივ, ნიშნავს საანგარიშო ხელსაწყოს; აქ კი ეს სიტყვა ნახმარია გამოთვლის ხელოვნების აზრით.

** შეად. „Scritti di Leonardo Pisano", pubbl. da B. Boncompagni, Roma, 1857 — 1862, I, გვ. 384 — 386; შეად. აგრეთვე II, 156 — 158.

ერთ-ერთმა მეცნიერმა. ლეონარდო ჯერ ამტკიცებს, რომ ამ განტოლების ფესვი არ შეიძლება იყოს რაციონალური რიცხვი (ე. ი. $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვი, სადაც m და n — მთელი რიცხვებია). შემდეგ ის განიხილავს ევკლიდეს მიერ X წიგნში („საწყისებში“) აგებულ გამოსახულებებს:

$$\sqrt{a},\ \sqrt{\sqrt{b}},\ a+\sqrt{b},\ \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{a+\sqrt{b}},$$
$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

(a და b — რაციონალური რიცხვებია), და ამტკიცებს, რომ ამ სახის არც ერთი გამოსახულება არ შეიძლება იყოს მოცემული განტოლების ფესვი. ამის შემდეგ ლეონარდო გვაძლევს ფესვის შემდეგ დაახლოებით მნიშვნელობას (იგი გამოსახულია აღრიცხვის სამოცობითი სისტემით):

$$x \approx 1 \cdot 22^{I}\,7^{II}\,42^{III}\,33^{IV}\,4^{V}\,40^{VI}.$$

თუ რა მეთოდებითაა მიღებული ეს მიახლოვება, ლეონარდო არ აღნიშნავს. ფრანგმა მეცნიერმა F. Woepcke-მ იმავე განტოლების ფესვი გამოითვალა თანამედროვე მეთოდებით და მიიღო

$$x \approx 1{,}368808107821 = 1 \cdot 22^{I}7^{II}42^{III}33^{IV}4^{V}38^{VI},\ 5^{*}.$$

მე-(14) განტოლების გადასაწყვეტად ლეონარდოს რომ გამოეყენებია კუბური ირაციონალები, ის მივიდოდა მესამე ხარისხის განტოლების ალგებრულ ამოხსნამდე. მაგრამ მან ეს არ გააკეთა. მესამე ხარისხის განტოლების ალგებრული ამოხსნა აღმოჩენილ იქნა მხოლოდ სამი საუკუნის შემდეგ.

11. XVI საუკუნის დასაწყისში იტალიელმა მეცნიერმა ფ ე რ ო მ ** შეძლო შემდეგი სახის არასრულ კუბურ განტოლებათა ალგებრული ამოხსნა:

$$x^3 + px = q.$$

* F. Woepcke-ს შრომა მოთავსებულია „Journal de Mathém. pures et appl...“ 1854 წ. ტ. 19, გვ. 401.

** ს ც ი პ ი ო ნ დ ე ლ - ფ ე რ ო (1465 — 1526) იყო პროფესორი ბოლონიაში და მას განთქმული მათემატიკოსის სახელი ჰქონდა მოხვეჭილი. მესამე ხარის-

მაგრამ ფეროს არ გამოუქვეყნებია თავისი ამოხსნა. იმ დროს ჩვეულებად იყო საჯარო დისპუტები და შეჯიბრება მეცნიერებს შორის. ამ დისპუტებზე მონაწილენი ერთმანეთს უდგენდნენ ამოცანებს, რომელნიც განსაზღვრული ვადის განმავლობაში უნდა ამოხსნილიყო. ამ დისპუტების შედეგზე იყო დამოკიდებული არა მარტო პატივცემის მოხვეჭა, არამედ ზოგჯერ კათედრის მიღებაც. ფეროს აღმოჩენა უძლიერესი იარაღი იქნებოდა ასეთი შეჯიბრების შემთხვევაში. ამიტომ გასაგებია, რომ ის ამ აღმოჩენას ზედმიწევნით საიდუმლოდ ინახავდა; დიდი ხნის განმავლობაში ის ცნობილი იყო პიროვნებათა მხოლოდ მცირე წრისათვის. შემდეგში, ფეროს გარდაცვალების შემდეგ საიდუმლოს ერთ-ერთი მცოდნე ფიორ ფლორიდუსი (Antonio Maria del Fiore) დისპუტზე შეხვდა იმ დროს ერთ-ერთ უდიდეს მათემატიკოსს ნიკოლო ტარტალიას*.

იმის შესახებ, თუ როგორ სწარმოებდა დისპუტი, ჩვენ ვიცით ტარტალიას გადმოცემით. ყოველ მოწინააღმდეგეთაგანს დისპუტის მონაწილეთათვის უნდა დაესვა 30 ამოცანა; ფიორის ყველა ამოცანა შეეხებოდა შემდეგი სახის განტოლების ამოხსნას:

(15) $$x^3+px=q.$$

ტარტალიამ გაიგო, რომ ფიორმა „ერთ-ერთი დიდი მათემატიკოსისაგან“ მიიღო ზოგადი წესი ასეთი განტოლებათა ამოხსნისათვის. ტარტალიამ მიზნად დაისახა თვითონ მოენახა ეს წესი და „კეთილი ბედის წყალობით“ მიაღწია თავის მიზანს 1535 წ. 12 თებერვალს, 8 დღით ადრე დანიშნულ ვადაზე. ტარტალია შემდეგ გვიამბობს, რომ მან მოწინააღმდეგის ყველა ამოცანა ამოხსნა ორ საათში, მაშინ როდესაც მოწინააღმდეგემ აღიარა თავი დამარცხებულად.

ხის განტოლებათა ამოხსნის აღმოჩენის შესახებ შეად. Ettore Bortolotti: L'Algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI (Periodico di Matem., 1925, vol. V). მისივე: I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferari, e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica dello equazioni cubiche (Studi e memorie per la storia dell'Università di Bologna, vol. IX, 1926).

* ნიკოლო ტარტალია (Tartaglia) დაიბადა 1500 წელს. მეცნიერული განათლება ტარტალიამ უმთავრესად თავისი მტკიცე ნებისყოფითა და შრომით შეიძინა. „მკაცრ ბრძოლას არსებობისათვის და საპელის მოხვეჭისათვის, რის ღირსიც იყო მისი გენია, იგი ყოველთვის როდი აწარმოებდა ღირსეული საშუალებების გამოყენებით“ (ცეიტენი). გარდაიცვალა 1557 წელს ვენეციაში.

ისევე როგორც ფერომ, ტარტალიამაც არ გამოაქვეყნა თავისი ამოხსნა, მაგრამ ცნობამ იმის შესახებ, რომ ტარტალიამ გადასწყვიტა

$$x^3 + px = q \tag{15}$$

განტოლება, მიაღწია იმ ეპოქის მეორე გამოჩენილ მეცნიერამდე — კ ა რ დ ა ნ ო მ დ ე *.

კარდანო თვითონაც უკვე ცდილობდა მესამე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნას, მაგრამ მან ვერ მოძებნა „ზოგადი წესი“. 1539 წელს მან სთხოვა ტარტალიას ეცნობებია მისთვის აღმოჩენის საიდუმლოება. ტარტალია დაეთანხმა მხოლოდ მას შემდეგ, როცა კარდანომ „სამღვთო ფიცი“ დასდო, რომ საიდუმლოს არ გამოამჟღავნებდა. მაშინ ტარტალიამ თავისი ამოხსნა დაალაგა დანტეს „ღვთაებრივი კომედიის“ ზომით დაწერილ ლექსად. მისი ნაწერის შინაარსი თანამედროვე აღნიშვნებით მდგომარეობს შემდეგში:

თუ გვსურს ამოვხსნათ განტოლება

$$x^3 + px = q\,^{**}, \tag{15}$$

უნდა მოვძებნოთ ორი რიცხვი α და β, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$\alpha - \beta = q, \quad \alpha \cdot \beta = \left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{16}$$

მაშინ x-ის მნიშვნელობა იქნება

$$x = \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}. \tag{17}$$

---

* Hieronimo Cardano (ლათინური ტრანსკრიპციით — Cardanus) დაიბადა 1501 წელს. 22 წლისა იყო, როცა უკვე კითხულობდა პავიაში ლექციებს მათემატიკაში; სამი წლის შემდეგ გახდა მედიცინის დოქტორი პადუაში. შემდეგში იყო პროფესორი მილანსა და ბოლონიაში.

მიუხედავად იმისა, რომ კარდანოს, როგორც ფილოსოფოსს მედიკსა და მათემატიკოსს დიდი სახელი ჰქონდა მოხვეჭილი, ის მატერიალურ გაჭირვებას განიცდიდა ღრმა მოხუცებულებამდე. გარდაიცვალა რომში 1576 წელს.

** დიოფანტესა და არაბი ავტორების წაბაძვით, ტარტალია განტოლებას სწერდა ისეთი სახით, რომ ყველა კოეფიციენტი დადებითი ყოფილიყო.

თუ მოცემულია განტოლება

(18) $$x^3=px+q,$$

მაშინ ამოცანა მდგომარეობს ისეთი ორი რიცხვის α და β-ს განსაზღვრაში, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს

(19) $$\alpha+\beta=q,\ \ \alpha\cdot\beta=\left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

რის შემდეგაც x-სი მოიძებნება ფორმულით

(20) $$x=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\,.$$

დასასრულს ნაჩვენებია, რომ განტოლება

(21) $$x^3+q=px$$

შეიძლება ამოვხსნათ (18) განტოლების საშუალებით. ეს მოსაზრებანი არ შეიცავს პირდაპირ მითითებებს მეთოდზე, რომლის საშუალებით მიღებული იყო ამოხსნა, მაგრამ აქედან ჩანს, რომ უცნობი უნდა ვეძებოთ ჯამის ან სხვაობის სახით. შემდეგში თავის თხზულებაში — „რიცხვთა და ზომათა ზოგადი გამოკვლევა“ (General Trattato di numeri et misure, 1556 — 1560) ტარტალია აღნიშნავდა, რომ მან აღმოაჩინა კუბურ განტოლებათა ამოხსნა ჯამის კუბის ფორმულის საშუალებით. იმ α და β რიცხვების მოძებნა, რომლებიც (16) ან (19) პირობებს აკმაყოფილებენ, დაიყვანება კვადრატულ განტოლების ამოხსნამდე. მართლაც, (16) თანაფარდობებიდან ვპოულობთ

$$\alpha^2-q\alpha-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0.$$

ამოვხსნით რა ამ განტოლებას, მივიღებთ

(22) $$\alpha=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3};$$

ახლა (16)-დან ვპოულობთ

$$\beta=\alpha-q=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}.$$

ანალოგიურად (18) შემთხვევისათვის ვიპოვით

$$(23)\quad \alpha=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3},\quad \beta=\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

მაგრამ კვადრატული ფესვის ნიშნის ქვეშ შეიძლება აღმოჩნდეს უარყოფითი რიცხვი. განვიხილოთ, მაგალითად, განტოლება

$$(23')\qquad x^3=15x+4.$$

ამ განტოლებას, როგორც ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, აქვს დადებითი ფესვი, რომელიც 4-ს ეტოლება. მეორეს მხრივ, თუ (23)-ში დავუშვებთ $p=15$, $q=4$, მივიღებთ

$$\alpha=2+\sqrt{-121},\quad \beta=2-\sqrt{-121}.$$

თანახმად (20) ფორმულისა გვექნება

$$4=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

ამგვარად, დ ა დ ე ბ ი თ ი რიცხვი 4 წარმოდგენილია ისეთი გამოსახულების სახით, რომელიც შეიცავს კვადრატულ ფესვებს უარყოფითი რიცხვიდან. მაგრამ იმ დროს შეუძლებლად ითვლებოდა კვადრატული ფესვის ამოღება უარყოფითი რიცხვიდან. მესამე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნამ დღის წესრიგში დასვა უარყოფითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღების ოპერაციის „ლეგალიზაციის" საკითხი *.

---

* М. Выгодский, Понятие числа в его развитии (На борьбу за материалистическую диалектику в математике, 1931), კვადრატული ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან შეიძლება მივიღოთ კვადრატული განტოლების ამოხსნის დროსაც. მაგრამ ამ შემთხვევაში ყოველთვის შეიძლება გამოვიდეთ მდგომარეობიდან და ამოცანა გამოვაცხადოთ „ამოუხსნელად". პირიქით (23′) განტოლების შემთხვევაში წინასწარ ვიცით, რომ გამოსახულება, რომელიც „შეუძლებელი" ოპერაციის მეოხებით არის შედგენილი, უნდა ეტოლებოდეს „ნამდვილ" რიცხვს 4-ს.

როცა კარდანო წააწყდა ამ სიძნელეს, მან ტარტალიას მისწერა წერილი, რომელშიაც აღნიშნავს, რომ (18) განტოლება, მისი აზრით არ შეიძლება ამოიხსნას (20) ფორმულით, თუ

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3 * , \tag{24}$$

და სთხოვს ტარტალიას ამოხსნას განტოლება $x^3 = 9x + 10$, რომლისათვისაც ადგილი აქვს (24) უტოლობას.

ტარტალია, რომლისათვისაც აგრეთვე გაურკვეველი იყო საკითხი, შეეცადა გზაკვალი აებნია კარდანოსათვის არასწორი მითითებებით; მაგრამ ეს მან ვერ მოახერხა.

ამავე დროს, 1542 წელს კარდანო ჩავიდა ბოლონიაში, გაეცნო ფეროს ხელთნაწერს, რომელშიაც ამ უკანასკნელს გადმოცემული აქვს თავისი აღმოჩენა. 1545 წელს გამოქვეყნდა კარდანოს თხზულება: „Artis magnae sive de rebus algebraicis liber unus" („დიადი ხელოვნების, ანუ ალგებრული ნივთიერების შესახებ, ერთ წიგნში").

ამ თხზულებაში ცენტრალური ადგილი უჭირავს მოძღვრებას მესამე ხარისხის განტოლებათა შესახებ. მესამე ხარისხის განტოლებათა ალგებრული ამოხსნა პირველად გამოქვეყნდა ამ თხზულებაში. ამასთან, კარდანო აღნიშნავს, რომ (15) სახის განტოლებათა ამოხსნა მას აცნობა „მრავალი ხვეწნის შემდეგ მისმა მეგობარმა ტარტალიამ". იმის შესახებ, რომ ტარტალიას ნათქვამი შეეხებოდა აგრეთვე (18) ან (21) სახის განტოლებებსაც, ის არაფერს ამბობს.

კარდანოს გადმოცემაში ბევრია არსებითი დამატებანი იმაზე, რაც გააკეთეს ფერომ და ტარტალიამ.

მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნის წესს კარდანო გეომეტრიულად ამტკიცებს. ასე, მაგალითად, განიხილავდა რა განტოლებას:

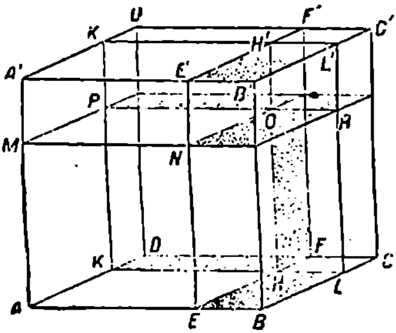
$$x^3 + 6x = 20, \tag{25}$$

ის მსჯელობს შემდეგნაირად. წარმოვიდგინოთ (იხ. ნახ. 5) ორი კუბი $ABC'D'$ და $AEOP$, რომლებსაც აქვთ საერთო წვერო და საერთო სამწახნაგოვანი კუთხე ამ წვეროსთან („გნომონი" სივრცე-

---

* კუბურ განტოლებათა ამოხსნისას ამ შემთხვევაში შემდეგში მიიღო სახელწოდება „დაუყვანადობისა".

ში). დავუშვათ, რომ ამ კუბების მოცულობათა სხვაობა ეტოლება 20-ს (ე. ი. მოცემული განტოლების თავისუფალ წევრს), ხოლო მათი წიბოების ნამრავლი ეტოლება 2-ს (ე. ი. x-ის კოეფიციენტის ერთ მესამედს).



ნახ. 5.

მაშინ, ამბობს კარდანო, მოცემული კუბების წიბოების სხვაობა წარმოადგენს განტოლების საძიებელ ფესვს.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ u-თი და v-თი აღვნიშნავთ შესაბამისად კუბის AB და AE წიბოებს, მაშინ სხვაობა

$$x = u - v$$

აკმაყოფილებს (25) განტოლებას.

მართლაც, ჩვენ გვაქვს

(26) $$u^3 - v^3 = 20, \quad u \cdot v = 2.$$

პირველი ამ თანაფარდობათაგანი გამოხატავს, რომ სხვაობა ორთავე კუბის მოცულობებს შორის 20-ის ტოლია. ეს სხვაობა, როგორც ადვილად შეიძლება დავინახოთ მე-5 ნახაზზე, შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$V + 3W,$$

სადაც V არის $ORC'F'$ კუბის მოცულობა, W არის $BLH'F'$ პარალელოპიპედის მოცულობა. ამგვარად,

(27) $$V + 3W = 20.$$

მაგრამ $ORS'F'$ კუბის წიბოები ტოლია სხვაობის $u - v = x$, მაშასადამე, $V = x^3$, $W = u \cdot v \cdot x = 2x$.

ჩავსვამთ რა ამ მნიშვნელობებს (27)-ში, მივიღებთ:

$$x^3 + 6x = 20.$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$u^3 = \alpha, \ v^3 = \beta,$$

მაშინ (26) თანაფარდობანი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\alpha - \beta = 20, \ \alpha \cdot \beta = 8.$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ (16) თანაფარდობებს, რომლებიც აღნიშნულია ტარტალიას მიერ. ამ თანაფარდობებიდან მივიღებთ

$$\alpha = \sqrt{108} + 10\,, \quad \beta = \sqrt{108} - 10\,,$$

მაშასადამე,

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}\,, \quad v = \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}\,;$$

$$x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}. \tag{28}$$

თუ განტოლების ამოხსნა დაიყვანება ოთხი ძირითადი ოპერაციის (შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის) და *ფესვის ამოღების* ოპერაციის გამოყენებაზე, მაშინ ამბობენ, რომ **განტოლება ამოხსნილია რადიკალებში.** ფორმულა (28) იძლევა ასეთს ამოხსნას (25) განტოლებისათვის.

განიხილავს რა იმ კუბურ განტოლებათა სხვადასხვა შემთხვევებს, რომლებიც არ შეიცავს უცნობი სიდიდის კვადრატს, კარდანო გვიჩვენებს, რომ ზოგადი სახის კუბური განტოლება მარტივი გარდაქმნის საშუალებით შეიძლება დაყვანილ იქნას ერთერთ ამ შემთხვევამდე. ამით ირკვევა, რომ **მესამე ხარისხის განტოლება ყოველთვის შეიძლება ამოიხსნას რადიკალებში.**

კარდანოს წიგნში არის კიდევ ერთი პირველხარისხოვანი მნიშვნელობის აღმოჩენა: მხედველობაში გვაქვს **მეოთხე ხარისხის განტოლებათა ალგებრული ამოხსნა.** კარდანოს მოწაფემ, *ლუიჯი ფერარიმ* (1522 — 1565), გვიჩვენა, რომ მეოთხე ხარისხის განტოლების

$$x^4 + ax^2 + bx = c \tag{29}$$

ამოხსნა დაიყვანება მეორე და მესამე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნამდე. შემდეგში დავინახავთ, რომ მეოთხე ხარისხის ზ ო გ ა დ ი განტოლება ადვილად შეიძლება დავიყვანოთ (29) განტოლებამდე. ამგვარად, ფერარის ხერხი საშუალებას გვაძლევს რადიკალებში გადავწყვიტოთ მეოთხე ხარისხის ყოველგვარი განტოლება.

ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ რომ მესამე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნამ დღის წესრიგში დასვა კვადრატული ფესვების ამოღება უარყოფითი რიცხვებიდან. პირველი ნაბიჯები ამ მიმართულებით გადაიდგა კარდანოს იმავე თხზულებაში. ამასთან, ის გამოსავალ წერტილად იღებს ამოცანას: რიცხვი 10 გაიყოს ორ ნაწილად, რომელთა ნამრავლი ეტოლებოდეს 40-ს. სწყვეტს რა ამ „შეუძლებელ" ამოცანას, კარდანო ღებულობს რიცხვებს

$$5+\sqrt{-15} \text{ და } 5-\sqrt{-15}.$$

შემდეგ ის გვიჩვენებს, რომ ეს რიცხვები მართლაც აკმაყოფილებს წაყენებულ მოთხოვნილებებს:

„გადავამრავლოთ

$$5+\sqrt{-15}$$

და

$$5-\sqrt{-15}.$$

„ჯვარედინად" შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ 25-ს მინუს —15, ანუ 25+15. მაშასადამე, ნამრავლი იქნება 40."

კარდანო აქ ფარულად გულისხმობს, რომ კომპლექსური* რიცხვებისათვის $5+\sqrt{-15}$ და $5-\sqrt{-15}$ სამართლიანია მოქმედებათა იგივე წესები რაც ნამდვილი რიცხვებისათვის.

კომპლექსური რიცხვების თეორიის აგების პირველი ცდა მოახდინა იტალიელმა მათემატიკოსმა ბ ო მ ბ ე ლ ი მ თავის ალგებრაში, რომელიც 1572 წელს გამოვიდა. ეს თეორია ფორმალური თვალსაზრისით თითქმის არ იწვევს არსებითს დავას. რაც შეეხება კომპლექსური რიცხვების კონკრეტულ ინტერპრეტაციას მას დასჭირდა ორ საუკუნეზე მეტი.

---

* კომპლექსური ეწოდება $a+b\sqrt{-1}$ სახის რიცხვებს, სადაც a და b — ნამდვილი რიცხვებია.

ბომბელიმ გამოარკვია, თუ რაში მდგომარეობს დაუყვანადი შემთხვევის შინაარსი მესამე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნის დროს; მან მიგვითითა ამ შემთხვევის კავშირზე კუთხის ტრისექციასთან. დაბოლოს, გამოიყენა რა ფერარის აზრი მან დაწვრილებით დაამუშავა მეოთხე ხარისხის განტოლებათა ალგებრული ამოხსნა, განიხილა რა ამ განტოლებათა სხვადასხვა ტიპების შესაბამი ცალკეული შემთხვევები.

კარდანოს და ბომბელის დალაგება გარეგანი ფორმით თანამედროვე დალაგებისაგან განსხვავდება იმით, რომ ის განტოლების კოეფიციენტებისათვის არ სარგებლობს ასოითი აღნიშვნებით. ეს გარემოება აბრკოლებდა მათ, რომ მესამე ხარისხის ზოგადი განტოლების ამოხსნისათვის ანალიზიური გამოყვანა მოეცათ. ეს გამოკვლევები ასოების სიმბოლიკაში პირველად ახსნა ვიეტმა* XVI საუკუნის გამოჩენილმა ფრანგმა მათემატიკოსმა.

ვიეტას უმნიშვნელოვანესი აღმოჩენა მდგომარეობს იმაში, რომ მან კავშირი დაამყარა განტოლების კოეფიციენტებსა და მის ფესვებს შორის; მართალია, ამასთან, ის დაკმაყოფილდა იმ შემთხვევით, როცა განტოლების ყველა ფესვი დადებითია; უარყოფით ფესვებს ვიეტა საერთოდ არ ცნობდა. მაგრამ ეს შედეგი მალე გაანაზოგადა ჟირარმა თავის თხზულებაში „Invention nouvelle en l'algébre" („ახალი აღმოჩენა ალგებრაში", 1629). ჟირარმა უკვე იცის, რომ განტოლების ნამდვილი და კომპლექსური ფესვების საერთო რიცხვი ეტოლება მის ხარისხს. ამ შედეგის მტკიცედ დასაბუთებისათვის საჭირო იყო იმის დამტკიცება, რომ ყოველ ალგებრულ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი მაინც, ნამდვილი ან კომპლექსური. მაგრამ ეს იქნა დამტკიცებული უფრო გვიან.

12. ახალი ეტაპი ალგებრის განვითარებაში დაკავშირებულია ტექნიკური კულტურის საერთო განვითარებასთან XVII საუკუნის მიჯნაზე.

ახალი ტექნიკის განვითარებამ წარმოშვა ღრმა გამოკვლევები მექანიკის საფუძვლების დარგში. XVII საუკუნის დასაწყისში გამოქვეყნდა გალილეის შრომები. მათემატიკას უნდა აესახა მოძრაო-

---

* François Viète, ლათინური ტრანსკრიფციით, Vieta (1540—1603), ეწეოდა ვექილობას, შემდეგ მას თვალსაჩინო თანამდებობა ეჭირა მეფის სასახლეში, მას ეკუთვნის მნიშვნელოვანი შრომები მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

ბის თვისებები, ცვლად სიდიდეთა თვისებები. ეს უნდა მომხდარიყო ანალიზური გეომეტრიის განვითარების გზით.

მართლაც, ანალიზურ გეომეტრიაში მრუდი ხასიათდება მისი წერტილების კოორდინატებს შორის გარკვეული დამოკიდებულებით. ეს კოორდინატები წარმოადგენს **ცვლად სიდიდეებს**, რომელნიც დაკავშირებული არიან ფუნქციონალური დამოკიდებულებით. ცვლადი სიდიდის იდეა ამ დროიდან უპირატეს როლს თამაშობს მათემატიკაში. ამასთან ერთად, იცვლება თვით თვალსაზრისი განტოლების შესახებ. მართლაც, თუ x და y-ს განვიხილავთ როგორც უცნობ (მაგრამ მუდმივ) რიცხვებს, მაშინ განტოლება

$$ax + by = c \tag{30}$$

განუსაზღვრელი იქნება, რადგანაც მას აკმაყოფილებს უსასრულო სიმრავლე x და y-ის მნიშვნელობებისა. თუ კი x და y-ს განვიხილავთ როგორც ცვლად სიდიდეებს, მაშინ თანაფარდობა (30) იქნება იმ განსაზღვრული ფუნქციონალური დამოკიდებულების გამოსახულება, რომელიც დეკარტის კოორდინატებში ახასიათებს წრფეს.

მას შემდეგ, რაც მათემატიკაში ცვლადი სიდიდეები შემოიღეს, ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნებამ ღრმა ევოლუცია განიცადა. XVII საუკუნეში სიტყვა ფუნქციის ქვეშ ჰგულისხმობდნენ ისეთ გამოსახულებას, რომელიც შედგენილია ცვლადი სიდიდისა და რამდენიმე მუდმივი სიდიდისაგან (იოან ბერნული, ეილერი).

თანამედროვე ანალიზის თვალსაზრისით, ცვლადი y წარმოადგეს x-ის ფუნქციას, თუ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის განსაზღვრული მნიშვნელობა.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ალგებრაში არსებითს როლს თამაშობს ის ოპერაციები, რომლის საშუალებითაც x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ვღებულობთ y-ის შესაბამ მნიშვნელობას. მთელი რაციონალური ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი სახის გამოსახულებას:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \tag{31}$$

რომელიც შედგენილია x ცვლადისა და მუდმივი $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ კოეფიციენტებისაგან შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების საშუალებით. ამგვარად, თანამედროვე ალგებრა ანალიზისაგან განსხვავებით, გარკვეული თვალსაზრისით უბრუნდება ბერნულ-ეილერის განსაზღვრას.

მთელი რაციონალური ფუნქციის გამოკვლევის დროს არსებით როლს თამაშობს x-ის ის მნიშვნელობანი, რომელთა დროს ეს ფუნქცია ნულად იქცევა. ამ მნიშვნელობებს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფესვები. (31) ფუნქციის ფესვების მოძებნის ამოცანა დაიყვანება შემდეგი განტოლების ამოხსნამდე:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{32}$$

შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ ყოველ მთელ რაციონალურ ფუნქციას (ყოველ განტოლებას) აქვს ერთი ფესვი მაინც? პასუხი ამ კითხვაზე დამოკიდებულია იმაზე, თუ რიცხვთა რა მარაგი გვაქვს. თუ ვკმაყოფილდებით მხოლოდ ნამდვილ რიცხვთა არით, მაშინ ფუნქციას

$$f(x) = x^2 + 1$$

უკვე აღარ აქვს ფესვები. სხვაგვარი მდგომარეობა იქმნება, თუ გადავალთ ყველა $a + b\sqrt{-1}$ კომპლექსურ რიცხვთა არეში; 1746 წელს ფრანგი მეცნიერი დალამბერი შეეცადა დაემტკიცებია, რომ **კომპლექსურ რიცხვთა არეში (32) განტოლებას აქვს ერთი ფესვი მაინც** (თეორემა მთელი რაციონალური ფუნქციის ფესვის არსებობის შესახებ). მაგრამ დალამბერის მსჯელობაში იყო არსებითი ნაკლოვანებანი, და თვით საკითხის დასმაც არ იყო სავსებით ნათელი. დალამბერის შრომას მოჰყვა ე ი ლ ე რ ი ს, ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს ა და სხვების შემდგომი ცდები, მაგრამ მხოლოდ გ ა უ ს მ ა თავის დისერტაციაში (1799) საკითხი ბოლომდე გამოარკვია. მხოლოდ ამის შემდეგ წარმოიშვა ფესვის არსებობის თეორემის ბევრი სხვა დამტკიცება; თვით გაუსი შემდეგში კიდევ სამჯერ დაუბრუნდა ამ თეორემას.

13. ფესვის არსებობის საკითხთან ერთად მათემატიკოსების ყურადღებას ყოველთვის იპყრობდა განტოლებათა ალგებრული ამოხსნის საკითხი. მრავალი ცდა მეხუთე ხარისხის განტოლებათა ალგებრული ამოხსნისათვის უშედეგოთ დამთავრდა. 1770—1771 წლებში განთქმულმა მათემატიკოსმა ლაგრანჟმა გამოაქვეყნა დიდი შრომა „Réflexions sur la résolution algébrique des équations".

ამ შრომაში ლაგრანჟმა ღრმა ანალიზი გაუკეთა მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდებს. მან გამოარკვია, რომ ყველა ეს მეთოდი დაიყვანება გარკვეული დამხმარე განტოლების (რეზოლვენტის) შედგენამდე, ამასთან ამ განტო-

ლების ფესვები წარმოადგენენ მოცემული განტოლების ფესვების ფუნქციებს. თუ მოცემულია მესამე ან მეოთხე ხარისხის განტოლება, მაშინ შეიძლება შევადგინოთ უფრო დაბალი ხარისხის განტოლება, ვიდრე მოცემული. მაგრამ იგივე მეთოდების გამოყენება მეხუთე ხარისხის განტოლებისათვის შედეგს ვერ იძლევა; ამ შემთხვევაში უფრო დაბალი ხარისხის დამხმარე განტოლების მიღება ვერ ხერხდება. ახლა ბუნებრივია დაისვას საკითხი: შეიძლება თუ არა საზოგადოდ მეხუთე ხარისხის ზოგადი განტოლების ამოხსნა რადიკალებში?

1799 წელს იტალიელი მეცნიერი რუფინი* პირველი შეეცადა დაემტკიცებია, რომ მეოთხეზე მაღალი ხარისხის ზოგადი განტოლება არ შეიძლება ამოიხსნას რადიკალებში. მაგრამ რუფინის დამტკიცება არ იყო სავსებით მკაცრი. 1826 წელს ნორვეგიელმა მათემატიკოსმა აბელმა (Niels Henrik Abel, 1802 — 1829), რუფინისაგან დამოუკიდებლად, მოგვცა ამ თეორემის მკაცრი დამტკიცება.

რუფინი - აბელის თეორემა ამტკიცებს, რომ მეოთხეზე მაღალი ხარისხის ზოგადი სახის განტოლება არ შეიძლება ამოიხსნას რადიკალებში; მაგრამ ეს თეორემა არ უარყოფს ალგებრული ამოცანის შესაძლებლობას მაღალი ხარისხის განტოლებათა ცალკეული კლასებისათვის. ფართო კლასი განტოლებებისა, რომლებიც რადიკალებში ამოიხსნებიან, აბელის მიერ იყო ნაჩვენები.

გადასაწყვეტი დარჩა კიდევ საკითხი იმის შესახებ, თუ რა პირობებში შეიძლება კერძო სახის მოცემული განტოლების ამოხსნა რადიკალებში. ეს საკითხი მთლიანად ამოხსნა გამოჩენილმა მკვლევარმა გალუამ (დაახლოებით 1830 წელს)**. ამ გამოკვლევებმა მოგვცა ცნება ჯგუფის შესახებ; ეს ცნება ამჟამად ფუნდამენტალურ როლს თამაშობს მათემატიკის ყველა დარგში.

ალგებრის განვითარება უკანასკნელ ათწლეულებში ხასიათდება, პირველ რიგში იმ ობიექტთა არეს გაფართოვებით, რომელთა მიმართ იყენებენ ძირითად ოპერაციებს: ასეთი ობიექტები შეიძლება იყოს არა მარტო რიცხვები, არამედ აგრეთვე ვექტორები, მატრიცები, წრფივი გარდაქმნებიც. ძირითადი ოპერაციების ზოგადი თვისებების შესწავლა ამ გაფართოვებულ არეში, შეადგენს ეგრეთ წოდებულ **აბსტრაქტული ალგებრის** საგანს.

---

* Paolo Ruffini (1766—1822) მუშაობდა მედიცინასა და მათემატიკაში. 1799 წელს გამოსცა სახელმძღვანელო სათაურით: „განტოლებათა ზოგადი თეორია; რომელშიაც მტკიცდება მეოთხეზე მაღალი ხარისხის განტოლებების ალგებრული ამოხსნის შეუძლებლობა“. შემდეგში რუფინიმ ამ საკითხის ირგვლივ კიდევ მთელი რიგი შრომები გამოაქვეყნა.

** Evariste Galois, დაიბადა 1811 წელს, მოკლულ იქნა დუელის დროს 1832 წელს. ის იყო აქტიური რესპუბლიკანელი და ორჯერ ჩასვეს ციხეში პოლიტიკური გამოსვლებისათვის.

თავი I

რიცხვები და რიცხვთა არეები

§ 1. რიცხვის ცნების განვითარება

1. მთელი დადებითი (ნატურალური) რიცხვის ცნება დაკავშირებულია საგნების უბრალო დათვლასთან. ამასთან, აქ საუბარია მრავალ ცალკეულ ერთიმეორისაგან განცალკევებულ ობიექტთა სიმრავლეზე. შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებს აქ ნათლად გამოსახული კონკრეტული შინაარსი აქვს. იგივე შეიძლება ითქვას გამოკლების ოპერაციაზე, სანამ საკლები მეტია მაკლებზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოკლების ოპერაცია მოკლებულია შინაარსიან აზრს. გაყოფის ოპერაცია ყოველთვის როდია შესაძლებელი, რამდენადაც თვლის ყოველი ცალკეული ობიექტი განიხილება როგორც განუყოფელი.

მაგრამ უკვე კულტურის ადრინდელ საფეხურებზე წარმოიშვა წარმოდგენა უმარტივეს წილადებზე. ეს წარმოდგენა დაკავშირებული იყო ცალკეული ობიექტის (რომელიც წინეთ თვლის ერთეულს წარმოადგენდა) განუყოფელობის პრინციპის უარყოფასთან. მაგრამ პირველ ხანებში იმ როლს, რომელსაც წინეთ ერთეული თამაშობდა, ასრულებს ამ ერთეულის განსაზღვრული ნაწილი. ხდება რიცხვის ცნებაში ასახულ მოვლენათა არეს პირველი გაფართოება. წილადების შესახებ მოძღვრების შემდგომი გაფართოება დაკავშირებულია გაზომვის პროცესთან. ამ პროცესს მივყევართ წილადების მიმართ ოპერაციების ზოგად განსაზღვრამდე. გაზომვის მეთოდების გაუმჯობესებისდა მიხედვით იქმნება წარმოდგენა სიდიდის განუსაზღვრელი გაყოფადობის შესახებ. შემდეგ წარმოიშობა წარმოდგენა იმის შესახებ, რომ გაზომვის სიზუსტის ხარისხი განუსაზღვრელად შეიძლება გაუმჯობესდეს. ამას მივყევართ ცნებამდე უწყვეტი სიდიდისა, რომლის სახეს წრფეწირი წარმოადგენს: უწყვეტი სიდიდის ორი მნიშვნელობის შეფარდება შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც წრფის ორი მონაკვეთის შეფარდება. მაგრამ აქ წარმოიშობა არ-

სებითი დაბრკოლება: როცა მოცემულია სიგრძის განსაზღვრული ერთეული, მაშინ ყოველ რიცხვს, მთელს ან წილადს, $\frac{m}{n}$. სახისას, სადაც m და n — მთელი რიცხვებია, შეესაბამება წრფეზე განსაზღვრული მონაკვეთი; მაგრამ პირიქით არაა სწორი: ორი მონაკვეთის შეფარდება ყოველთვის როდი შეიძლება გამოიხატოს ორი მთელი რიცხვის შეფარდებით. ასე, მაგალითად, კვადრატის დიაგონალის შეფარდება მის გვერდთან არ შეიძლება გამოისახოს არც მთელი რიცხვით, არც წილადით $\frac{m}{n}$ სახისა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ კვადრატის გვერდი მივიჩნიეთ სიგრძის ერთეულად, მისი დიაგონალი არ შეიძლება ზუსტად გამოისახოს არც მთელი რიცხვით, არც $\frac{m}{n}$ წილადით. ბერძენი გეომეტრები გამოსავალს ამ წინააღმდეგობიდან ეძებენ იმაში, რომ მკვეთრ ზღვარს ავლებდნენ რიცხვსა და სიდიდეს შორის. ასეთი თვალსაზრისი ნიშნავდა ხელის აღებას უწყვეტ სიდიდეთა არითმეტიკულ შესწავლაზე; ეს თვალსაზრისი მალე იქნა უკუგდებული მათემატიკისა და მისი გამოყენებათა განვითარების მსვლელობით. ამასთან ერთად თანდათან ჩამოყალიბდა მეორე გამოსავალი შექმნილი წინააღმდეგობიდან. ეს გამოსავალი მდგომარეობდა რიცხვის ცნების ახალ განზოგადოებაში. აღორძინების ეპოქის მათემატიკოსები, ზოგი ნაკლების, ზოგი მეტის სიმტკიცით, მიდიან ამ გზით. XV საუკუნის ფრანგმა მათემატიკოსმა შ ი უ კ ე მ მკაფიოდ ჩამოაყალიბა ეს თვალსაზრისი:

„რიცხვი, რამდენადაც ის არის ჩვენთვის სასარგებლო საშუალება, აიღება აქ ფართო აზრით... ყოველი რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც რიცხვი უწყვეტი ოდენობისა, რომელსაც სხვანაირად წრფივი რიცხვი ეწოდება".

შემდეგში ნ ი უ ტ ო ნ მ ა თავის შრომაში „Arithmetica Universalis" ეს თვალსაზრისი გამოსთქვა შემდეგნაირად:

„რიცხვის ქვეშ ვგულისხმობთ არა იმდენად სიმრავლეს ერთეულებისას, რამდენადაც აბსტრაქტულ შეფარდებას ერთი სიდიდისას იმავე გვარის მეორე სიდიდესთან, რომელიც მიღებულია ერთეულად".

ახლა, თუ არჩეულია სიგრძის ერთეული, მაშინ ყოველ მონაკვეთს შეესაბამება განსაზღვრული რიცხვი, რომელიც გამოსახავს ამ მო-

ნაკვეთის შეფარდებას არჩეული ერთეულის მიმართ. თუ მონაკვეთი სიგრძის ერთეულის თანაზომადია, მაშინ მას შეესაბამება $\frac{m}{n}$ სახის წილადი, წინააღმდეგ შემთხვევაში მონაკვეთის ზომას წარმოადგენს ირაციონალური რიცხვი. ირაციონალური რიცხვი არითმეტიკული თვალსაზრისით შეიძლება დახასიათდეს სიჭარბის ან ნაკლებობის მიხედვით აღებული მიახლოებითი მნიშვნელობის უსასრულო თანმიმდევრობის საშუალებით. სხვათა შორის, ირაციონალური რიცხვის არითმეტიკული სტრუქტურის გამოაშკარავება გაცილებით გვიან მოხდა (XIX საუკუნის მეორე ნახევარი, ვ ე ი ე რ შ ტ რ ა ს ი, დ ე დ ე კ ი ნ დ ი, კ ა ნ ტ ო რ ი).

2. აქამდე ვლაპარაკობდით მხოლოდ და მხოლოდ დადებით რიცხვებზე, რაციონალურ (ე. ი. $\frac{m}{n}$ სახის) და ირაციონალურ რიცხვებზე. ახლა შევეხოთ უარყოფით რიცხვს. უარყოფითმა რიცხვმა თავისი განვითარების ძირითადი ეტაპები ისტორიულად გაიარა თითქმის ერთდროულად ირაციონალურ რიცხვთან. ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ინდოელები ჯერ კიდევ VI საუკუნეში მიუახლოვდნენ უარყოფითი რიცხვების კონკრეტულ განმარტებას. ამგვარი განმარტების ცდებს ვხვდებით აღორძინების ეპოქის ზოგიერთ ევროპიელ მათემატიკოსებს შორის (შიუკე). მეორეს მხრით, ჯერ კიდევ XVI საუკუნეში უარყოფითი რიცხვები ჩვეულებრივ მიჩნეული იყო „აბსურდულ“ და „ყალბ“ რიცხვებად. უარყოფითი რიცხვების მიმართ ოპერაციების დადგენის დროს ფორმალური ხასიათის მოსაზრებით ხელმძღვანელობდნენ ხოლმე. ასე, მაგალითად, გამრავლების წესს ასაბუთებდნენ შემდეგნაირად. განიხილავდნენ თანაფარდობას

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd,$$

რომლის სამართლიანობაში შეიძლება ადვილად დავრწმუნდეთ, როცა

$$a>b,\ c>d.$$

ფარულად ღებულობდნენ, რომ ამ თანაფარდობას ადგილი უნდა ჰქონდეს ყოველგვარი a, b, c და d სიდიდეებისათვის და ამგვარად ღებულობდნენ

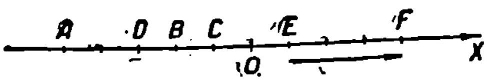
$$(-b)(-d)=+bd.$$

უარყოფითი რიცხვების კონკრეტული ახსნა-განმარტება უფრო ფართოდ გავრცელდა მხოლოდ XVII საუკუნეში. ჟირარის შრომაში „Invention nouvelle en l'algébre“, რომელიც 1629 წელს გამოქვეყნდა, ვპოულობთ შემდეგ მითითებებს:

„ამოხსნა მინუსის გზით აიხსნება გეომეტრიაში, თუ მივდივართ უკუ და დავიხევთ იქ, სადაც პლუსი მიდის წინ“.

უარყოფითი რიცხვების ეს გეომეტრიული ახსნა-განმარტება საბოლოოდ განმტკიცდა ანალიზური გეომეტრიის განვითარებით.

რამდენიმე დაწვრილებით შევჩერდებით უარყოფით რიცხვებზე ოპერაციების კონკრეტულ შინაარსზე. თუ წრფეზე ავირჩევთ O სათავეს, დავადგენთ დადებით მიმართულებას და სიგრძის ერთეულს (ასეთს წრფეს ვუწოდოთ ღ ე რ ძ ი), მაშინ ყოველ P წერტილს შეესაბამება განსაზღვრული რიცხვი, დადებითი ან უარყოფითი (P წერტილის ა ბ ს ც ი ს ი). ასეთ შესაბამისობას შეფარდებით (დადებითი და უარყოფითი) რიცხვებსა და წრფის წერტილებს შორის თავისთავად ჯერ კიდევ არ მივყევართ ამ რიცხვებზე ოპერაციების კონკრეტულ განმარტებამდე. ამისათვის საჭიროა კიდევ ერთი ნაბიჯი: შემოვიღოთ ცნება ერთი წერტილიდან მეორეში „გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს ა“. თუ A და B არის ორი ნებსითი წერტილი OX ღერძზე, მაშინ A-დან Bში გადასვლა (აღნიშვნა $\overline{AB}$) სავსებით შეიძლება იქნას დახასიათებული შეფარდებითი რიცხვით: ამ რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე გვიჩვენებს გადაადგილების აბსოლუტურ სიდიდეს, ხოლო ნიშანი კი მის მიმართულებას. ასე, მაგალითად, ნახაზზე 6, გადასვლა $\overline{AB}$-ს შეესაბამება რიცხვი $+3$, გადასვლას $\overline{CD}$ შეეფარდება რიცხვი -2. იმის მაგივრად, რომ ვილაპარაკოთ გ ა დ ა ს ვ ლ ა ზ ე, შეგვეძლო გველაპარაკნა მონაკვეთზე, რომელსაც გარკვეული მიმართულება აქვს, ანუ ვექტორზე. ამასთან მონაკვეთის დასაწყისი წერტილი შეიძლება მოცემულ წრფეზე ნებისმიერად ავარჩიოთ. არსებით როლს თამაშობს მხოლოდ მონაკვეთის სიგრძე და მისი მიმართულება. მაგალითად, ყოველ $\overline{AB}$ და $\overline{EF}$ ვექტორთაგანს (იხ. ნახ. 6) შეესაბამება ერთიდაიგივე რიცხვი $+3$. ამგვარად, ყოველ



ნახ. 6.

რიცხვს, დადებითს თუ უარყოფითს, შეესაბამება წრფეზე განსაზღვრული გ ა დ ა ს ვ ლ ა ანუ ვ ე ქ ტ ო რ ი. პირიქით, ყოველი გადასვლა (ვექტორი) შეიძლება დავახასიათოთ განსაზღვრული შეფარდებითი რიცხვით.

შეფარდებითი რიცხვების შეკრების და გამოკლების ოპერაციები ახლა ღებულობენ მარტივ კონკრეტულ განმარტებას; ასე, მაგალითად, თანაფარდობა $(+3)+(-4)=-1$, განიმარტება შემდეგნაირად: თუ შევასრულებთ გადასვლას სიგრძის სამს ერთეულზე მარჯვნივ (OX ღერძის დადებითი მიმართულებით), ხოლო შემდეგ ოთხ ერთეულზე მარცხნივ (OX ღერძის უარყოფითი მიმართულებით) შედეგად მივიღებთ გადაადგილებას ერთ ერთეულზე მარცხნივ.

მეორეს მხრივ, **შეფარდების** ცნებას ახლა უფრო ღრმა აზრი ენიჭება. ორი გადასვლის (ვექტორის) შეფარდება გამოხატავს არა მარტო მათი აბსოლუტური ზომების შეფარდებას: ის გვიჩვენებს აგრეთვე, იქნება ეს ვექტორები მიმართული ერთი და იმავე, თუ მოპირდაპირე მხარისაკენ. ასე, მაგალითად, დავუშვათ, რომ გვაქვს ორი გადასვლა a და b, რომელთაგან ერთს ახასიათებს რიცხვი -3, მეორეს—რიცხვი $+6$; მაშინ თანაფარდობა

$$\frac{b}{a}=\frac{+6}{-3}=-2 \tag{1}$$

ნიშნავს შემდეგს: 1) რომ b გადასვლა აბსოლუტური სიდიდით ერთიორად მეტია a-ზე, 2) რომ ორთავე გადასვლა მიმართულია მოპირდაპირე მხარისაკენ. იგივე აზრი შეიძლება გამოვთქვათ კიდევ ამგვარად: თუ a გადასვლას აბსოლუტური სიდიდით გავადიდებთ ერთიორად და შევცვლით მის მიმართულებას მოპირდაპირე მხარისაკენ, მივიღებთ b გადასვლას; ამასთან ერთად ბუნებრივი იქნება (1) თანაფარდობიდან გადავიდეთ თანაფარდობაზე

$$+6=(-2)\cdot(-3). \tag{2}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში თანამამრავლებს აქვთ არაერთგვარი კონკრეტული აზრი: სამრავლს (-3) ახასიათებს გ ა დ ა ს ვ ლ ა (a); მამრავლს (-2) ახასიათებს ი ს ო პ ე რ ა ც ი ა, რომელსაც ვახდენთ ამ გადასვლის მიმართ: **გაჭიმულობა** (ამ შემთხვევაში აბსოლუტური სიდიდის გადიდება ერთიორად) და **მიმართულების შეცვლა მოპირდაპირე მხარისაკენ**. ამ ოპერაციის შედეგად მივიღებთ

(b) გადასვლას, რომელიც შეესაბამება რიცხვს $+6$. რამდენადაც მამრავლი -2 ამ შემთხვევაში გამოდის როგორც ოპერაციის წარმომადგენელი, მას შეიძლება ვუწოდოთ **ოპერატორი**. მაშინ თანაფარდობა (2) შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად: b გადასვლას ვიღებთ მაშინ, როცა ოპერატორს -2-ს ვიყენებთ a-ზე გადასვლისათვის.

სიმბოლურად ეს შეიძლება დავწეროთ შემდეგნაირად:

$$b=(-2)\cdot a.$$

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ b გადასვლის მიმართ კვლავ ვახდენთ იმავე ტიპის ოპერაციას, მაგალითად, ოპერაციას, რომელსაც ახასიათებს რიცხვი -5. ამით მივიღებთ ახალ c გადასვლას, ასე რომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$c=(-5)\cdot b.$$

ცხადია, რომ c გადასვლას ექნება იგივე მიმართულება, რაც აქვს a გადასვლას, ხოლო მისი აბსოლუტური სიდიდე ერთიათად აღემატება a-ს აბსოლუტურ სიდიდეს:

$$c=(-5)\cdot b=(-5)\cdot(-2)\cdot a,$$

ანუ

$$c=10\cdot a.$$

იმის მაგივრად, რომ a გადასვლისადმი გამოვიყენოთ ოპერაცია, რომელსაც ახასიათებს რიცხვი -2, ხოლო შემდეგ ოპერაცია, რომელსაც ახასიათებს რიცხვი -5, საკმარისია გამოვიყენოთ ერთი ოპერაცია, რომელსაც ახასიათებს რიცხვი $+10$:

$$(3)\qquad (-5)\cdot(-2)=+10.$$

ამ შემთხვევაში ორთავე თ ა ნ ა მ ა მ რ ა ვ ლ ი და თვით ნამრავლი წარმოადგენენ ო პ ე რ ა ტ ო რ ე ბ ს: ტოლობიდან (3) ჩანს, რომ ო პ ე რ ა ტ ო რ ე ბ ი ს -2 და -5-ს **თანმიმდევრობით გამოყენება იგივეა, რაც ერთი ოპერატორის ($+10$) გამოყენება.**

ჩვენ რამდენადმე დაწვრილებით შევჩერდებით ამ მოსაზრებებზე, რადგან ისინი არსებითს როლს ასრულებენ — კომპლექსური რიცხვების კონკრეტული განმარტების საკითხშიაც. ამ რიცხვებს ჩვენ ახლა განვიხილავთ.

§ 2. კომპლექსური რიცხვები და მათი გეომეტრული ინტერპრეტაცია

1. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ მესამე ხარისხის განტოლების ალგებრულ ამოხსნამ გვაიძულა მივსულიყავით უარყოფითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღების საკითხთან. გამოთვლებში ასეთი ფესვების შემოყვანა რომ დაიწყეს ფარულად გულისხმობდნენ, რომ ესენი ემორჩილებიან მოქმედებათა ჩვეულებრივ წესებს. თანაფარდობა

$$\sqrt{-p}=\sqrt{p}\,\sqrt{-1}\quad(p>0)$$

გვიჩვენებს, რომ საკმარისია განსახილველად შემოვიღოთ რიცხვი $\sqrt{-1}$. ეილერმა ეს რიცხვი i ასოთი აღნიშნა (ლათინური სიტყვის imaginarius-ის პირველი ასოთი). კვადრატული ფესვის განსაზღვრის თანახმად ეს ნიშნავს, რომ „წარმოსახვითი" i რიცხვის კვადრატი უნდა ეტოლებოდეს -1-ს:

$$i^2=-1. \tag{4}$$

ვსარგებლობთ რა ამით, ადვილად შევნიშნავთ, რომ შედეგი ნებისმიერი გაანგარიშებისა, რომელიც მდგომარეობს ძირითად ოპერაციების გამოყენებაში ნამდვილ რიცხვებისა და წარმოსახვით i რიცხვის მიმართ, შეიძლება დაყვანილ იქნას სახეზე

$$a+bi.$$

გაუსმა უწოდა ამ სახის რიცხვებს კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი რიცხვები. კომპლექსურ რიცხვთა ისტორიაში შეიძლება აღნიშნულ იქნეს ორი ძირითადი ეტაპი. განვითარების პირველ სტადიაში მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე ატარებდა ფორმალურ ხასიათს, და თვით ამ რიცხვებს თვლიდნენ ფიქტიურად, „წარმოსახვითად". მეორე სტადია ხასიათდება კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული ინტერპრეტაციით. ამ საკითხისადმი მიძღვნილი პირველი შრომები გამოჩნდა XVIII საუკუნის ბოლოსა და XIX საუკუნის დასაწყისში. 1797 წელს ნორვეგიელ მიწათმზომელ ვ ე ს ე ლ მ ა (Caaspar Wessel, 1745—1818) წარადგინა დანიის აკადემიაში შრომა სათაურით „მიმართულების ანალიზური წარმოდგენა". ეს შრომა დაიბეჭდა 1799 წელს. 1896 წელს გამოჩნდა ფრანგი ავტორის არგანის (Argand)

შრომაში „წარმოსახვით ოდენობათა წარმოდგენის ერთი ხერხი გეომეტრიულ აგებაში".

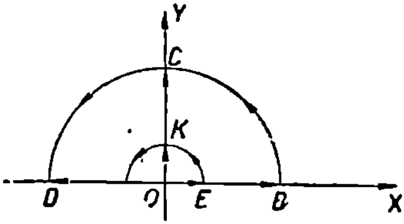
ეს შრომები დიდხანს დარჩა შეუმჩნევლად. შემდეგში სხვა მეცნიერებმა (Mourey საფრანგეთში, Warren ინგლისში) მივიდნენ იმავე აზრამდე ვესელისა და არგანის დამოუკიდებლად. მხოლოდ გაუსისა და ჰამილტონის შრომების შემდეგ ამ აზრებმა მიიღეს უფრო ფართო გავრცელება. ჩვენთვის არგანის შრომა წარმოადგენს განსაკუთრებულ ინტერესს ჯერ კიდევ იმიტომ, რომ მასში ავტორი აყენებს იმ მოსაზრებებს, რომლებსაც ბუნებრივად მივყევართ კომპლექსურ რიცხვების კონკრეტულ განმარტებამდე. ამ იდეებმა შემდეგში ღრმა განვითარება მიიღო ჰამილტონის შრომებში.

2. ჩვენ ზევით დავინახეთ, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი, დადებითი თუ უარყოფითი, შეიძლება განვიხილოთ როგორც ო პ ე რ ა ტ ო რ ი: ამ თვალსაზრისით ტოლობა

$$-b=(-1)\cdot b$$

შეიძლება განმარტებულ იქნას შემდეგნაირად: b რიცხვს შეესაბამება რაიმე გადასვლა (ვექტორი) რიცხვითი OX ღერძზე (ვექტორი $\overline{OB}$, ნახ. 7); თუ ამ გადასვლას შევუცვლით მიმართულებას მოპირდაპირეზე, მაშინ მივიღებთ გადასვლას, რომელიც $-b$ რიცხვს შეესაბამება ($\overline{OD}$, ნახ. 7). შეიძლება ითქვას, რომ $\overline{OD}$ ვექტორი, რომელიც $-b$ რიცხვს შეესაბამება, მიიღება $\overline{OB}$ ვექტორიდან 180°-ზე მ ო ბ რ უ ნ ე ბ ი თ.

ამგვარად, **რიცხვის — 1-ზე გამრავლება ტოლფასია შესაბამისი ვექტორის 180°-ზე მობრუნების.** ახლა დავუბრუნდეთ (4) ტოლობას, რომელსაც გადავწერთ შემდეგნაირად.



ნახ. 7.

$$(5)\qquad -1=i.i.$$

შევეცადოთ განვმარტოთ ეს ტოლობა, განვიხილავთ რა ყოველ თანამამრავლთაგანს როგორც ო პ ე რ ა ტ ო რ ს, იმის მაგვარად როგორც ჩვენ ზევით განვმარტეთ ტოლობა (3).

ჩვენ ვამბობდით მაშინ ოპერაციების თანმიმდევრობითი გამოყენებაზე, რომელნიც შეესაბამება თითოეულ თანამამრავლთაგანს. მაგრამ (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ჩვენ გვაქვს ორი ერთნაირი თანამამრავლი: ამიტომ აქ მოგვიხდება ლაპარაკი ერთი და იმავე i ოპერატორის ორკეცად გამოყენების შესახებ.

ტოლობა (5) გამოხატავს, რომ ამ ოპერატორის ორკეცად გამოყენება ტოლფასია —1 ოპერატორის; სხვანაირად რომ ვთქვათ, i ოპერატორის ორკეცად გამოყენება ნიშნავს 180°-ზე გაბრუნებას.

მაგრამ მაშინ ბუნებრივია მივიღოთ, რომ ოპერატორი i ნიშნავს 90°-ზე მობრუნებას. ამასთან ერთად დავუშვებთ, რომ მობრუნება ხდება დადებითი მიმართულებით (საათის ისრის საწინააღმდეგოდ). ამრიგად, ჩვენ მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე: i რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც 90°-ზე მობრუნების ოპერატორი. მე-(5) ტოლობა ღებულობს ახლა ნათელ, კონკრეტულ აზრს: ის გამოხატავს იმას, რომ თანმიმდევრობით შესრულებული ორი მობრუნება 90°-ზე (დადებითი მიმართულებით) ტოლფასია 180°-ზე ერთი მობრუნებისა (იმავე მიმართულებით).

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ვექტორებს, რომლებიც გარკვეულ ღერძზე მდებარეობდნენ. მაგრამ, გამოვიყენებთ რა i ოპერაციას ერთეულის მქონე სიგრძის $\overline{OE}$ ვექტორზე (ნახ. 7), მივიღებთ $\overline{OK}$ ვექტორს, რომელიც ჩვენი ღერძის მართობია. სქემატურად

$$\overline{OK}=i\cdot OE.$$

თანახმად ზემოთქმულისა, $\overline{OE}$ ვექტორს შეესაბამება რიცხვი $+1$. $\overline{OK}$ ვექტორს, რომელიც მივიღეთ $\overline{OE}$-დან i ოპერატორის გამოყენებით, უნდა შეესაბამებოდეს რიცხვი

$$i=i\cdot 1.$$

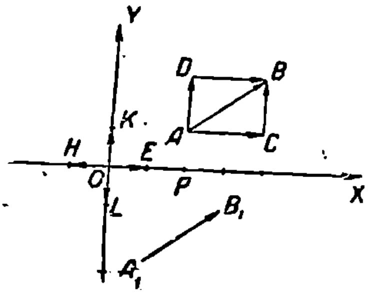
მარჯვენა ნაწილში სამრავლი $+1$ ახასიათებს $\overline{OE}$ ვექტორს, i მამრავლი ახასიათებს ოპერატორს [შეად. ზემო ტოლობა (2)]. ამ ოპერაციის შედეგად ვღებულობთ $\overline{OK}$ ვექტორს, რომელსაც i რიცხვი შეესაბამება. ამრიგად, რიცხვი i შეესაბამება $\overline{OK}$ ვექტორს, რომელიც მიიღება $\overline{OE}$-დან 90°-ზე დადებითი მიმართულებით მობრუნებით.

ის გარემოება, რომ $\overline{OE}$ ვექტორის სიგრძე ერთეულის ტოლია, არსებით როლს არ თამაშობს. ჩვენ შეგვეძლო ნებისმიერი $\overline{OB}$ ვექტორის აღება OX ღერძზე. ამ ვექტორს შეესაბამება რაიმე ნამდვილი რიცხვი: ვთქვათ ეს არის რიცხვი $b>0$. $\overline{OB}$ ვექტორის დადებითი მიმართულებით 90°-ზე მობრუნებით, მივიღებთ $\overline{OC}$ ვექტორს, რომელსაც შეესაბამება რიცხვი $i\cdot b$.

იგივე ვექტორი შეგვიძლია მივიღოთ, თუ i რიცხვის გამომსახველ ვექტორზე გამოვიყენებთ b ჯერ გ ა ჭ ი მ ვ ი ს * ოპერაციას

$$i\cdot b=b\cdot i.$$

ამ მოსაზრებებს მივყევართ იმისაკენ, რომ OX ღერძთან ერთად შემოღებული იქნეს განსახილველად OY ღერძი. მაშინ ერთეულ OE ვექტორს შეესაბამება OX ღერძზე (ნახ. 8) რიცხვი $+1$, ერთეულ $\overline{OK}$ ვექტორს OY ღერძზე — რიცხვი i; $\overline{OH}$ ვექტორს, რომელიც მიიღება $\overline{OK}$-დან i ოპერაციის გამოყენებით, შეესაბამება რიცხვი $-1=i\cdot i$; დაბოლოს OL ვექტორს შეესაბამება რიცხვი $-i$. საზოგადოდ ყოველ ვექტორს, რომელიც OX ღერძზე ძევს (ან პარალელურ ღერძზე), შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი; ყოველ ვექტორს, რომელიც OY ღერძზე ძევს (ან პარალელურ ღერძზე) შეესაბამება bi სახის რიცხვი. ასე. მაგალითად, თითოეულს OP და $\overline{AC}$ ვექტორთაგანს რიცხვი $+2$; ეს ვექტორები ურთიერთ ტოლია. ორ ვექტორს ვთვლით ურთიერთ ტოლად, თუ ისინი: *a*) ძევს ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეზე, *b*) აბსოლუტური სიდიდით ტოლნი არიან, *c*) ერთი და იმავე მხრისაკენ არიან მიმართული.



ნახ. 8.

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი ვექტორი $\overline{AB}$, რომელიც XOY სიბრტყეზე ძევს. ეს ვექტორი შეიძლება დაიშალოს ორ მდგენელად, რო-

* ან კუმშვა, როცა $b<1$.

შელნიც OX და OY ღერძების პარალელური არიან შესაბამისად

$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{AD}.$$

$\overline{AC}$ ვექტორს შეესაბამება წინანდელივით რაიმე ნამდვილი რიცხვი a; $\overline{AD}$ ვექტორს შეესაბამება bi სახის რიცხვი. ბუნებრივია მივიღოთ, რომ $\overline{AB}$ ვექტორს, რომელიც $\overline{AC}$ და $\overline{AD}$ ვექტორების შეკრებით მიიღება (ვექტორების შეკრება წარმოებს პარალელოგრამის წესით, როგორც ძალების ან სიჩქარეების შეკრება ფიზიკაში), შეესაბამება რიცხვი $a+bi$. ვექტორთა ჯამს აქვს გ ა დ ა ნ ა ც ვ ლ ა დ ო ბ ი ს (კომუტატიურობის) თვისება. ამის მიხედვით

$$a+bi=bi+a.$$

შევნიშნავთ, რომ a ($a+bi$ რიცხვის „ნამდვილი ნაწილი") და b (კოეფიციენტი i-სთან) წარმოადგენენ $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილებს შესაბამისად OX და OY ღერძებზე.

ამრიგად, ყოველ ვექტორს XOY სიბრტყეზე შეესაბამება გარკვეული კომპლექსური რიცხვი.

დავუშვათ, რომ $\overline{AB}$ ვექტორს შეესაბამება რიცხვი $a+bi$, ხოლო $\overline{A_1B_1}$ ვექტორს — რიცხვი $c+di$; თუ $\overline{AB}$ და $\overline{A_1B_1}$ ვექტორები ურთიერთ ტოლია, მაშინ ტოლი იქნება მათი გეგმილებიც OX და OY ღერძებზე:

$$a=c,\ b=d;$$

მხოლოდ და მხოლოდ ამ შემთხვევაში ჩვენ ჩავთვლით კომპლექსურ რიცხვებს $a+bi$ და $c+di$ ურთიერთ ტოლად:

$$a+bi=c+di.$$

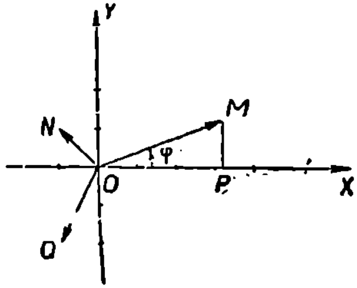
კერძოდ,

$$a+bi=0$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=0$, $b=0$.

თუ მოცემულია კომპლექსური რიცხვი $a+bi$, მაშინ ადვილად შეიძლება ამ რიცხვის შესაბამისი ვექტორის აგება. ამასთან ვექტორის საწყისი წერტილის არჩევა ნებისმიერად შეიძლება. ჩვეულებრივად საწყის წერტილად ირჩევენ კოორდინატთა

O-სათავეს. პირველად ავაგებთ $\overline{OP}$ ვექტორს, რომელსაც შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი a, შემდეგ $\overline{PM}$ ვექტორს, რომელსაც შეესაბამება რიცხვი bi ($\overline{PM}$ ვექტორის სიგრძე $|b|$-ს ტოლია; ნახ. 9). წინანდებურად, $\overline{OM}$ ვექტორს შეესაბამება რიცხვი $a+bi$.



ნახ. 9.

M წერტილს ($\overline{OM}$ ვექტორის ბოლოს) აქვს, ცხადია, a და b კოორდინატები. ამრიგად, რომ მივიღოთ $a+bi$ რიცხვის შესაბამისი ვექტორი, საკმარისია ავაგოთ M წერტილი, კოორდინატებით a და b და გავიყვანოთ ვექტორი, რომელიც აერთებს კოორდინატთა O საწყისს ამ წერტილთან. ზოგჯერ თვით M წერტილს $a+bi$ რიცხვის აფიქსს უწოდებენ. სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი M წერტილი შეიძლება დახასიათებულ იქნას შესაბამისი $a+bi$ რიცხვით. ეს კომპლექსური რიცხვი სიბრტყეზე მდებარე წერტილის მიმართ იმავე როლს ასრულებს, რომელსაც აბსცისი ასრულებს OX ღერძზე მდებარე წერტილის მიმართ. ნახ. 9 ზე N წერტილი შეესაბამება $-1+i$ რიცხვს. Q წერტილი შეესაბამება $-1-2i$ რიცხვს.

თუ $b=0$, მივიღებთ ნამდვილ რიცხვს

$$a=a+0i;$$

მისი შესაბამისი წერტილი OX ღერძზე ძევს.

3. $\alpha=a+ib$ რიცხვის შესაბამისი M წერტილის მდებარეობა შეიძლება სავსებით დახასიათდეს შემდეგი ორი სიდიდით (M წერტილის პოლარი კოორდინატები): 1) φ კუთხით, რომელიც მდებარეობს OX ღერძსა და $\overline{OM}$ ვექტორს შორის; 2) $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის ρ სიგრძით.

M წერტილის დეკარტის კოორდინატები შებმულნი არიან ამავე წერტილის პოლარ კოორდინატებთან შემდეგი თანაფარდობებით:

$$a=\rho\cos\varphi;\quad b=\rho\sin\varphi. \tag{6}$$

OM სხივზე ავიღოთ M_0 წერტილი, რომლის მანძილი O სათავიდან ერთეულის ტოლია. M_0 წერტილის შესაბამისი კომპლექსური რიცხვი აღვნიშნოთ

$$\alpha_0 = a_0 + bi_0$$

სიმბოლოთი.

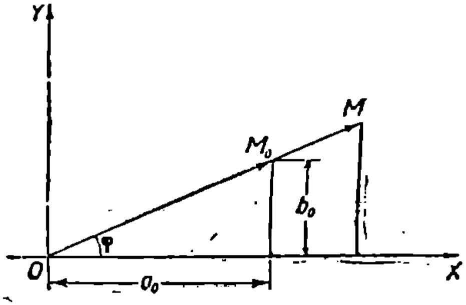
ვინაიდან OM_0 მონაკვეთის სიგრძე ერთეულის ტოლია, ამიტომ გვაქვს (ნახ. 10):

$$(6a) \qquad a_0 = \cos\varphi, \ b_0 = \sin\varphi.$$

მაშასადამე,

$$\alpha_0 = a^0 + bi_0 = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

$\overline{OM_0}$ ვექტორიდან, რომ მივიღოთ $\overline{OM}$ ვექტორი, საკმარისია $\overline{OM_0}$ ვექტორის სიგრძე შევცვალოთ ფარდობით: $1 : \rho$; სხვანაირად რომ ვთქვათ $\overline{OM}$ ვექტორის სიგრძე, რომ მივიღოთ საკმარისია $\overline{OM_0}$ ვექტორზე გამოვიყენოთ გაჭიმვის (თუ $\rho > 1$) ან კუმშვის (როცა $\rho < 1$) ოპერაცია. ამიტომ $\overline{OM}$ ვექტორის შესაბამისი α რიცხვი



ნახ. 10.

შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც შედეგი $\overline{OM_0}$ ვექტორის შესაბამისი α_0 რიცხვზე ρ ოპერატორის გამოყენებისა:

$$\alpha = \rho\alpha_0,$$

ანუ

$$a + bi = \rho(a_0 + b_0 i).$$

მივიღებთ რა მხედველობაში (6a) ტოლობებს, უკანასკნელ თანაფარდობას შემდეგი სახით გადავწერთ:

$$\boxed{a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).}$$

აქ მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს კომპლექსური რიცხვის ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეს. φ კუთხეს ეწოდება

არგუმენტი (ან ფაზა, ან ამპლიტუდა), ρ რიცხვს (რადიუს-ვექტორის სიგრძეს)—კომპლექსური რიცხვის მოდული. $a+bi$ რიცხვის მოდული აღინიშნება $|a+bi|$ სიმბოლოთი; თუ რიცხვი ნულისაგან განსხვავებულია, ე. ი. M წერტილი არ ემთხვევა O-ს, მაშინ მოდული წარმოადგენს არსებითად დადებით რიცხვს:

$$\boxed{\rho=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.}$$

თუ $b=0$, მაშინ ჩვენ საქმე გვაქვს ნამდვილ $a+0i=a$ რიცხვთან; ამ შემთხვევაში

$$\rho=\sqrt{a^2}=|a|,$$

ე. ი. ნამდვილი რიცხვის მოდული მისი აბსოლუტური სიდიდეა.

φ კუთხის განსაზღვრისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ მე-(6) თანაფარდობებით ერთერთით ან თანაფარდობით:

$$tg\,\varphi=\frac{b}{a}.$$

ამასთან უნდა ვიქონიოთ მხედველობაში, რომ ერთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციითაგანის მნიშვნელობით კუთხე არა სავსებით განისაზღვრება: ასე, მაგალითად, თუ კუთხეს ანგარიშობენ ტანგენსით, აუცილებელია სინუსის ან კოსინუსის ნიშნის მიღება მხედველობაში. ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვისათვის φ არგუმენტი, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, მოიძებნება სიზუსტით 2π-ს ჯერადად; თუ $a+bi=0$, მაშინ ის ნებისმიერი რჩება.

თუ მოცემულია $a+bi$ რიცხვი და საჭიროა მისი დაყვანა ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეზე, პირველად ყოვლისა აუცილებელია წარმოვიდგინოთ ჩვენთვის $M(a, b)$ წერტილი და მისი რადიუს-ვექტორი; არგუმენტის გამორკვევის დროს ეს დაგვეხმარება შეცთომის თავიდან აცილებაში, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში უცბად მოგვცემს კითხვაზე პასუხს. ყოველ ნამდვილ a რიცხვისათვის (უმარტივესი) არგუმენტი ნულის ტოლია (როდესაც $a>0$) ან π-ს (როდესაც $a<0$); bi სახის რიცხვისათვის ის ტოლია $\frac{\pi}{2}$-ს (როდესაც $b>0$) ან $\frac{3\pi}{2}$ (როდესაც $b<0$).

მაგალითები.

1. რიცხვი 1-ს შესაბამისი $\overline{OE}$ ვექტორი (ნახ. 8) ჰქმნის OX ღერძთან კუთხეს ნულის ტოლს (ან $2\pi k$, სადაც k მთელი რიცხვია); მოდული $\rho = 1$:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0, \tag{7}$$

ან

$$1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k,$$

სადაც k ნებსითი მთელი რიცხვია; -1 რიცხვის შესაბამისი ვექტორი $\overline{OH}$ ჰქმნის OX ღერძთან π-ს ტოლ კუთხეს (ან $\pi + 2\pi k$); მოდული $+1$-ს ტოლია:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = \cos (2k+1)\pi + i \sin (2k+1)\pi.$$

2. დასაყვანია ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეზე რიცხვი $-1 + i$. შესაბამისი $\overline{ON}$ ვექტორი (ნახ. 9) ჰქმნის OX ღერძთან $\frac{3\pi}{4}$ კუთხეს, ასე რომ

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right).$$

3. დასაყვანია ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეზე რიცხვი $-1 + i\sqrt{3}$. ამ შემთხვევაში $\rho = 2$,

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2};$$

კოსინუსის ეს მნიშვნელობა შეიძლება შეესაბამებოდეს $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ან $\frac{4\pi}{3}$. ცხადია, რომ $-1 + i\sqrt{3}$ რიცხვის შესაბამისი ვექტორი ძევს მეორე მეოთხედში, ასე რომ

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right).$$

4. დასაყვანია ნორმალურ სახეზე რიცხვი $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$. პირველად ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ

$$1 + \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right). \tag{a}$$

ახლა შეიძლება ორი შემთხვევა წარმოგვიდგეს:

1) თუ $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, მაშინ (a) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილი გვაძლევს საძიებელ ტრიგონომეტრიულ ფორმას, ასე რომ

$$\rho = 2 \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi = \frac{\alpha}{2};$$

2) თუ $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$, მაშინ ჩვენ გადავწერთ (a) გამოსახვას ასე:

$$1 + \cos \alpha + i \sin \alpha = -2 \cos \frac{\alpha}{2}\left\{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)\right\};$$

ამ შემთხვევაში

$$-\cos\frac{\alpha}{2}>0,$$

ასე რომ შეიძლება ვიგულისხმოთ

$$\rho=-2\cos\frac{\alpha}{2},\quad \varphi=\frac{\alpha}{2}+\pi.$$

სავარჯიშოები.

1. წარმოადგინეთ ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ ფორმით შემდეგი რიცხვები:

$a)$ $i,\ -i$; $b)$ $-2,\ -3i$; $c)$ $-1-i,\ 1-i$; $d)$ $1-i\sqrt{3},\ -1-i\sqrt{3}$.

2. დაიყვანეთ ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეზე ცხრილების საშუალებით:

$$2+3i,\ -12+5i,\ -2-7i,\ 4-3i.$$

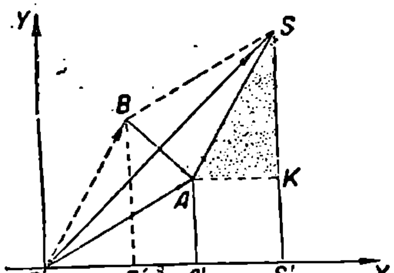
3. წარმოადგინეთ ნორმალურ ტრიგონომეტრიული ფორმით რიცხვი

$$1-a^2+2ia,$$

სადაც $a=tg\alpha$.

§ 8. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე

1. კომპლექსურ რიცხვების შეკრების ერთ კერძო შემთხვევასთან ჩვენ უკვე გვქონდა საქმე: ჩვენ მხედველობაში გვაქვს ის შემთხვევა, როდესაც ნამდვილ a რიცხვს ვკრებთ bi სახის რიცხვთან. ამ კერძო შემთხვევაში, ჩვენ დავამყარეთ, რომ $a+bi$ ჯამის შესაბამისი ვექტორი, იმ ვექტორების ჯამის ტოლია, რომელნიც ცალკე შესაკრებებს შეესაბამება.



ნახ. 11.

ახლა ჩვენ ვისარგებლოთ იმავე პრინციპით, რომ ზოგადად დავამყაროთ ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამის განსაზღვრა.

ვთქვათ მოცემულია ორი კომპლექსური რიცხვი:

$$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di.$$

ავაგოთ ამ რიცხვების შესაბამისი $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორები (ნახ. 11),

თანახმად წინანდელისა A წერტილს აქვს კოორდინატები a და b, B წერტილს — კოორდინატები c და d. ავაგოთ ახლა $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორების ჯამი.

$$\overline{OS}=\overline{OA}+\overline{OB}.$$

S წერტილის კოორდინატები იქნება $a+c$ და $b+d$. ამრიგად, $\overline{OS}$ ვექტორს შეესაბამება კომპლექსური რიცხვი $(a+c)+(b+d)i$. ამის გამო ჩვენ ვღებულობთ, როგორც განსაზღვრას,

$$(8) \qquad \alpha+\beta=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}.$$

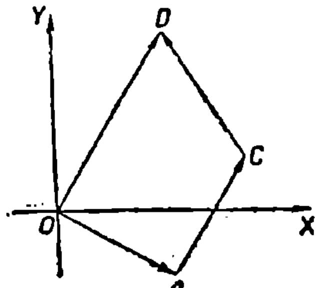
რომ შევკრიბოთ ორი კომპლექსური რიცხვი, საკმარისია ცალკე შევკრიბოთ მათი ნამდვილი ნაწილები და კოეფიციენტები i-სთან.

(8) თანაფარდობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ კომპლექსური რიცხვების შეკრებას აქვს გადანაცვლადობის (კომუტატივობის) თვისება:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha;$$

ანალოგიურად წარმოებს რამდენიმე კომპლექსური რიცხვის შეკრება. ნახ. 12-ზე გამოსახულია სამი α, β, γ შესაკრების შემთხვევა; შესაბამისი ვექტორები იქნება: $\overline{OA}, \overline{AC}, \overline{CD}$. ჯამის შესაბამისი ვექტორი წარმოადგენს $OACD$ ტეხილი წირის შემკვრელს. არაა ძნელი დარწმუნება შემდეგი თანაფარდობის ჭეშმარიტებაში:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma,$$



ნახ. 12.

რომელიც გამოხატავს კომპლექსურ რიცხვთა შეკრების ჯუფთებადობის (ასოციატივობის) თვისებას.

გამოკლება წარმოადგენს შეკრების შებრუნებულ ოპერაციას; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სხვაობა $\alpha-\beta$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$(\alpha-\beta)+\beta=\alpha.$$

თუ $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, მაშინ, ცხადია

$$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i.$$

თუ $\alpha=a+bi$ რიცხვს ეთანადება $\overline{OA}$ ვექტორი (ნახ. 11), $\beta=c+$ $+di$ რიცხვს — $\overline{OB}$ ვექტორი, მაშინ

$$\overline{OA}=\overline{OB}+\overline{BA},\ \overline{BA}=\overline{OA}-\overline{OB},$$

ე. ი. $\overline{BA}$ ვექტორი შეესაბამება $\alpha-\beta$ სხვაობას. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ შედეგს:

ორი კომპლექსური რიცხვის სხვაობის შესაბამისი ვექტორის მისაღებად საკმარისია მაკლების შესაბამისი ($\overline{OB}$) ვექტორის ბოლო შევუერთოთ საკლების შესაბამის ($\overline{OA}$) ვექტორის ბოლოს.

ამასთან არსებითია, რომ $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორებს აქვთ საერთო ბოლო.

2. ახლა ჩვენ დავადგენთ კომპლექსური რიცხვების ჯამისა და სხვაობის მოდულებისათვის მეტად საგულისხმო უტოლობებს.

განვიხილავთ რა OAS სამკუთხედს (ნახ. 11) ვაჩჩნევთ, რომ მისი OA, AS, OS გვერდების სიგრძეები წარმოადგენენ შესაბამისად α, β, $\alpha+\beta$ რიცხვების მოდულებს:

სიგრძე $OA=|\alpha|$; სიგრძე $AS=|\beta|$; სიგრძე $OS=|\alpha+\beta|$.

ამ სამკუთხედის მიმართ გამოვიყენოთ თეორემა: **სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძე დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამზე ნაკლებია, ხოლო მათი სხვაობაზე მეტია**; თავისთავად იგულისხმება, რომ სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეთა სხვაობა უნდა იქნეს აღებული აბსოლუტური სიდიდით.

ჩვენ შეგვიძლია ამ თეორემის ჩაწერა შემდეგი სახის უტოლობებით:

$$|\text{სიგრ. } OA-\text{სიგრ. } AS|<\text{სიგრ. } OS<\text{სიგრ. } OA+\text{სიგრ. } AS,$$

ანუ

$$||\alpha|-|\beta||<|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|.$$

ეს მსჯელობა კარგავს აზრს, თუ α და β რიცხვების შესაბამისი $\overline{OA}$ და $\overline{AS}$ ვექტორები ერთ წრფეზე მდებარეობენ. ჯერ დავუშვათ, რომ $\overline{OA}$ და $\overline{AS}$ ვექტორები ერთ წრფეზე მდებარეობენ და აქვთ ერთნაირი გეზი (ნახ. 13); ამ შემთხვევაში

$$\text{სიგრ. } OA+\text{სიგრ. } AS=\text{სიგრ. } OS,$$

მაშასადამე,

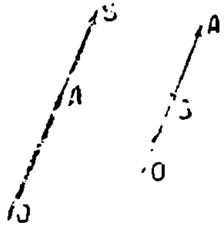
$$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|.$$

თუ $\overline{OA}$ და $\overline{AS}$ ვექტორებს აქვთ ურთიერთ მოპირდაპირე გეზი (ნახ. 13), მაშინ $\alpha+\beta$ ჯამის მოდული $|\alpha+\beta|$ შესაკრებთა მოდულების სხვაობის ტოლია, მასთან თვით ეს სხვაობა უნდა იქნეს აღებული აბსოლუტური სიდიდით:

$$|\alpha+\beta|=||\alpha|-|\beta||.$$

ამ შემთხვევაში, ცხადია,

$$|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|.$$



ნახ. 13.

ამრიგად, ვექტორების ნებისმიერი დალაგებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$||\alpha|-|\beta||\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|. \tag{9}$$

მე-(9) თანაფარდობათა შესახებ უნდა შევნიშნოთ შემდეგი: უტოლობა

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

გამოსახავს, რომ ჯამის მოდული არ აღემატება შესაკრებთა მოდულების ჯამს. ადვილად დავინახავთ, რომ ეს დებულება ძალაში რჩება შესაკრებების ნებისმიერ რაოდენობის შემთხვევაშიაც:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\dots+|\alpha_n|.$$

ნახ. 12 აშუქებს ამ თანაფარდობას სამი შესაკრების შემთხვევისათვის.

განვიხილოთ ახლა OAB სამკუთხედი (ნახ. 11); ამ სამკუთხედში

$$\text{სიგრ. } OA=|\alpha|, \text{ სიგრ. } OB=|\beta|, \text{ სიგრ. } BA=|\alpha-\beta|.$$

ვისარგებლებთ რა იმავე თეორემით ამ სამკუთხედის მიმართ, შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$|\text{სიგრ. } OA-\text{სიგრ. } OB|<\text{სიგრ. } BA<\text{სიგრ. } OA+\text{სიგრ. } OB,$$

ან

$$||\alpha|-|\beta||<|\alpha-\beta|<|\alpha|+|\beta|.$$

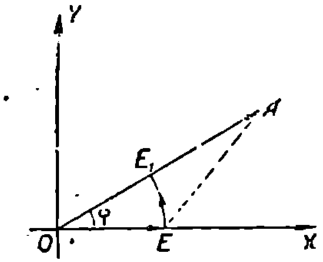
ის შემთხვევა, როდესაც $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, უნდა განვიხილოთ ცალკე, იმის მსგავსად, როგორც ჩვენ მოვიქეცით ჯამის მოდულის განხილვისას. ამგვარად, ჩვენ მივალთ შემდეგ თანაფარდობებამდე, რომელნიც სამართლიანია ვექტორების ნებისმიერი დალაგებისათვის:

(9a) $$||\alpha|-\beta||\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

3. ჩვენ დავინახეთ, რომ i რიცხვი შეიძლება განხილულ იქნას როგორც 90°-ზე მობრუნების ოპერატორი. ვთქვათ ახლა, α ნებსითი კომპლექსური რიცხვია. შეიძლება თუ არა მისი განხილვა როგორც ოპერატორის? რომელი ოპერაცია იქნება მისი შესაბამისი? რომ პასუხი გავცეთ ამ კითხვას, α რიცხვი დავიყვანოთ ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეზე:

$$\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

ვთქვათ $\overline{OA}$ (ნახ. 14) არის α რიცხვის შესაბამისი ვექტორი.



ნახ. 14.

შევადაროთ ეს ვექტორი $\overline{OE}$ ვექტორის შესაბამის $+1$ რიცხვს. თუ $\overline{OE}$ ვექტორს მოვაბრუნებთ φ კუთხით, მივიღებთ $\overline{OE_1}$ ვექტორს, რომელსაც აქვს $\overline{OA}$ ვექტორის გეზი. ახლა უნდა შევცვალოთ $\overline{OE_1}$ ვექტორის სიგრძე $1:\rho$ შეფარდებით, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ის უნდა *გავჭიმოთ* ρ-ჯერ*, რომ მივიღოთ $\overline{OA}$ ვექტორი. ამრიგად ტოლობა

$$\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot(+1)$$

ნიშნავს, რომ α რიცხვის შესაბამისი $\overline{OA}$ ვექტორი მიიღება OE ($+1$-ის შესაბამის) ვექტორიდან შემდეგი ორი ოპერაციის გამოყენებით:

1) φ *კუთხეზე მობრუნებით* (ამას ვაღწევთ $\cos\varphi+i\sin\varphi$-ზე გამრავლებით);

---

* თუ $\rho<1$, გვექნება *შეკუმშვა*. შემდეგში ჩვენ ვისარგებლებთ ტერმინით „გაჭიმვა", გვექნება რა მხედველობაში ორივე შემთხვევა.

2) *გაჭიმვით* $1:\rho$ შეფარდებით (ან შეკუმშვით, თუ $\rho<1$).

სხვა სიტყვებით, **α რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც φ კუთხეზე მობრუნების ოპერატორი მიმდევნო გაჭიმვით ρ-ჯერ.** თავისთავად მამრავლი $\cos\varphi+i\sin\varphi$ არის φ კუთხეზე მობრუნების ოპერატორი. $\varphi=\frac{\pi}{2}$ შემთხვევაში ვღებულობთ i რიცხვს, ე. ი. 90°-ზე მობრუნების ოპერატორს.

ვთქვათ ახლა, მოცემულია ორი კომპლექსური რიცხვი:

$$\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad \beta=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

ჩვენ შეგვიძლია თითოეული ამ რიცხვთაგანის როგორც ოპერატორის განხილვა: $\alpha\cdot\beta$ ნამრავლის ქვეშ ჩვენ გვესმის ოპერატორი, რომელიც თანმიმდევრობით გამოყენებულ β და α ოპერატორების ტოლფასია. რომელიმე ვექტორის მიმართ β ოპერატორის გამოყენების დროს, ჩვენ ვახდენთ θ კუთხით მობრუნებას და r-ჯერ გაჭიმვას; გამოვიყენებთ რა შემდეგ α ოპერატორს, შევასრულებთ მობრუნებას კიდევ φ კუთხით და გაჭიმვას ρ-ჯერ; შედეგად ვღებულობთ მობრუნებას $\varphi+\theta$ კუთხით და გაჭიმვას ρr-ჯერ. ამრიგად,

$$\boxed{\alpha\cdot\beta=\rho r\{\cos(\varphi+\theta)+i\sin(\varphi+\theta)\}.}\tag{10}$$

მაშასადამე, **$\alpha\cdot\beta$ ნამრავლი წარმოადგენს კომპლექსურ რიცხვს, რომლის მოდული ეტოლება მამრავლთა მოდულების ნამრავლს, არგუმენტი კი — მამრავლთა არგუმენტების ჯამს.**

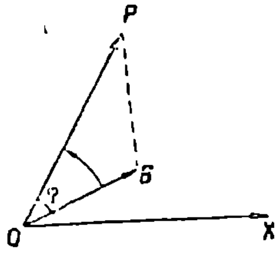
თუ გვაქვს n მამრავლი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, მაშინ აღვნიშნავთ რა ρ_k და φ_k-თი შესაბამისად α_k რიცხვის მოდულსა და არგუმენტს, გვექნება:

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\{\cos(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)+\\ +i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)\}.$$

შენიშვნა 1. წინანდელ მსჯელობას საფუძვლად უდევს შემდეგი ფაქტი: თუ განიხილება ოპერაციათა სისტემა, მასთან თითოეული დაიყვანება გაჭიმვაზე და მობრუნებაზე, მაშინ **ამ სისტემის ორი ოპერაციის თანმიმდევრობითი შესრულება ყოველთვის შეიძლება შევცვალოთ ამავე სისტემის ერთი ოპერაციით.** ამიტომ ამბობენ, რომ **ჩვენ მიერ განხილული ოპერაციათა სისტემა ჰქმნის ოპერაციათა ჯგუფს.** ჯგუფის ცნების ზუსტი განმარტება მოცემუ-

ლი იქნება ქვევით; ის შეიცავს კიდევ დამატებითი მოთხოვნილებებს, რომელნიც სრულდება აგრეთვე მოცემულ შემთხვევაშიაც.

2. თანაფარდობა (10) შეიძლება კიდევ შემდეგნაირად იქნეს გაშუქებული: ვთქვათ, $\overline{OB}$ (ნახ. 15) არის კომპლექსური β რიცხვის შესაბამისი ვექტორი; გამოვიყენოთ მის მიმართ α ოპერაცია, ე. ი. φ კუთხეზე მობრუნება და ρ-ჯერ გაჭიმვა; ეს მოგვცემს ახალ $\overline{OP}$ ვექტორს, რომელსაც შეესაბამება რიცხვი $\alpha\beta$.



ნახ. 15.

3. ჩვენ დავადგინეთ, რომ ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს მ ო დ უ ლ ი ე ტ ო ლ ე ბ ა მ ა მ რ ა ვ ლ თ ა მ ო დ უ ლ ე ბ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ს. ამ თვისების ჩაწერა შეიძლება შემდეგნაირად:

(11) $$|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|.$$

თუ თანაფარდობაში (10) α და β მამრავლებს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ შედეგი არ შეიცვლება, რადგანაც

$$\rho r = r\rho \text{ და } \varphi + \theta = \theta + \varphi;$$

მაშასადამე, კომპლექსურ რიცხვთა ნამრავლს აქვს გადანაცვლებითი (კომუტატივობითი) თვისება:

(12) $$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

შემდგომ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ადგილი აქვს აგრეთვე ჯგუფთებადობითი (ასოციატივობითი) თვისებას:

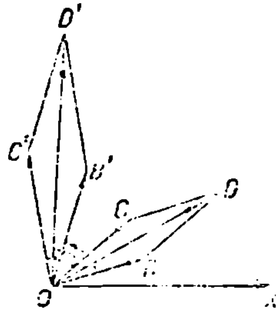
(13) $$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

გამრავლების განრიგადობითი (დისტრიბუტივობითი) თვისება შეკრების მიმართ გამოიხატება ტოლობით:

(14) $$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

ამ თანაფარდობის შინაარსი შეგვიძლია გავხსნათ შემდეგნაირად: წარმოვიდგინოთ, რომ $\overline{OB}$ და $\overline{OC}$ არიან β და γ რიცხვების შესაბამისი ვექტორები. ვთქვათ, ვექტორი $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{OC}$ შეესაბამება $\beta + \gamma$ რიცხვს.

მამრავლი α განვიხილოთ როგორც გაჭიმვისა და მობრუნების ოპერატორი. მაშინ თანაფარდობა (14) გამოხატავს შემდეგს: იმის მაგივრად, რომ $\beta+\gamma$ რიცხვის შესაბამისი $\overline{OD}$ ვექტორი მოვაბრუნოთ φ კუთხეზე და მოვახდინოთ მისი ρ ·ჯერ გაჭიმვა, შეგვიძლია ვაწარმოოთ იგივე ოპერაციები თითოეული $\overline{OB}$ და $\overline{OC}$ ვექტორთაგანზე ცალ-ცალკე, ხოლო შემდგომ მიღებული ვექტორები შევკრიბოთ.



ნახ. 16.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ გამრავლების კომუტატივობის თვისების ძალით, შეგვიძლია გადავწეროთ (14) ტოლობა აგრეთვე შემდეგნაირად:

(14a) $$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha.$$

იმის გამო, რომ განრიგადობითი თვისება ინარჩუნებს ძალას კომპლექსურ რიცხვებისათვის, ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ მრავალწევრთა გამრავლების წესებით; ასე, მაგალითად,

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta.$$

ვისარგებლებთ რა ამით, ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ ნამრავლი ორი კომპლექსური რიცხვისა, რომლებიც მოცემულია არა ტრიგონომეტრიული სახით:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2,$$

ან, რადგანაც $i^2=-1$,

(15) $$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i.$$

ეს გვიჩვენებს იმას, რომ კომპლექსური რიცხვების გადამრავლება შეიძლება ისე, როგორც ჩვეულებრივი მრავალწევრების, შემდეგ კი i^2 შევცვალოთ -1-ით. i რიცხვის თანმიმდევრობითი ხარისხებისათვის ვღებულობთ

$$i^3=-i,\ i^4=-1,\ i^5=i,\ldots$$

საზოგადოდ

$$i^{4k}=+1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$$

სადაც k მთელი დადებითი რიცხვია.

უნდა აღინიშნოს მე-(15) ფორმულის ერთი კერძო შემთხვევა:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2. \tag{16}$$

$a+bi$ და $a-bi$ რიცხვებს ეწოდება შეუღლებული. მათ აქვს ის თვისება, რომ მათი ჯამი და ნამრავლი ნამდვილი რიცხვებია. შებრუნებით, თუ ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი და ნამრავლი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ეს რიცხვები შეუღლებული იქნება. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ორი ასეთი რიცხვი წარმოადგენს ნამდვილი კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ფესვებს.

აღვნიშნოთ კიდევ გამრავლების ოპერაციასთან დაკავშირებული ზოგიერთი თვისება.

a) თუ ერთი მამრავლთაგანი ნულის ტოლია, მაშინ თვით ნამრავლიც ნულად იქცევა; შებრუნებით, თუ აქვს ადგილი ტოლობას:

$$\alpha\cdot\beta=0,$$

მაშინ ან $\alpha=0$, ან $\beta=0$.

მართლაც, მე-(10) ფორმულიდან ჩანს, რომ ნულიდან განსხვავებული მამრავლების შემთხვევაში ნამრავლი ნულად ვერ გადაიქცევა.

b) თუ $\alpha=\beta$ და γ არის ნებსითი კომპლექსური რიცხვი, მაშინ

$$\alpha\gamma=\beta\gamma; \tag{17}$$

შებრუნებით, მე-(17) ტოლობიდან გამომდინარეობს $\alpha=\beta$, თუ კი $\gamma\neq0$.

შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციათა ძირითადი თვისებანი მოგვყავს შემდეგ ცხრილში *.

თვისება	შეკრება	გამრავლება
გადანაცვლებადობა (კომუტატიურობა)	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
შეჯგუფებადობა (ასოციატიურობა	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
განრიგადობა (დისტრიბუტივობა)	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$	

* ეს თვისებები ადვილად შეიძლება გავრცელდეს შესაკრებებისა და მამრავლების ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაზე.

4. განვიხილოთ ახლა გაყოფის ოპერაცია. ვთქვათ, მოცემულია ორი კომპლექსური რიცხვი:

$$\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \beta=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

რადგანაც გაყოფის ოპერაცია გამრავლების ოპერაციის შებრუნებულია, ამიტომ მივიღებთ:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\rho}{r}\{\cos(\varphi-\theta)+i\sin(\varphi-\theta)\}, \tag{18}$$

ე. ი. ორი კომპლექსური რიცხვის განაყოფის მისაღებად, საკმარისია გასაყოფის მოდულის გაყოფა გამყოფის მოდულზე, ხოლო გასაყოფის არგუმენტიდან გამოვაკლოთ გამყოფის არგუმენტი. ის გარემოება, რომ განაყოფის მოდული მიიღება გასაყოფის მოდულის გაყოფით გამყოფის მოდულზე, შეიძლება გამოვსახოთ ფორმულით:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}. \tag{19}$$

აღვნიშნოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც $\alpha=1$:

$$\frac{1}{\beta}=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}. \tag{20}$$

ზევით დადგენილ b) თვისებიდან გამომდინარეობს:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}.$$

ვთქვათ ახლა, გამოსათვლელია არატრიგონომეტრიული სახით მოცემული ორი კომპლექსური რიცხვის განაყოფი:

$$\frac{a+bi}{c+di}.$$

გავამრავლებთ რა მრიცხველსა და მნიშვნელს $(c-di)$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

5. მთელი დადებითი მაჩვენებლით ხარისხში აყვანა გამრავლებაზე დაიყვანება. ჩვენ ვიცით, რომ კომპლექსური რიცხვების ნამრავლის განხილვა შეიძლება როგორც ოპერატორის, რომელიც შესაბამის მამრავლთა ოპერატორების თანმიმდევრობითი გამოყენების ტოლფასია. ამიტომ, თუ კომპლექსური რიცხვი $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ნიშნავს ρ-ჯერ გაჭიმვას და φ კუთხეზე მობრუნებას, მაშინ რიცხვი $\alpha^2=\alpha\cdot\alpha$ შეესაბამება ოპერატორს, რომელიც ტოლფასია α ოპერატორის ორჯეცად გამოყენებისა, ე. ი. $\rho\cdot\rho=\rho^2$-ჯერ გაჭიმვისა და 2φ კუთხეზე მობრუნების. ანალოგიურად, α^n რიცხვს (n მთელი დადებითი მაჩვენებლის დროს) შეესაბამება ოპერაცია, რომელიც α ოპერატორის n-ჯერადად გამოყენების ტოლფასია, ე. ი. სიგრძის შეცვლა $1:\rho^n$ შეფარდებით და $n\varphi$ კუთხეზე მობრუნება; ამრიგად,

$$\alpha^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

ან

$$\boxed{\{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\}^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).} \tag{22}$$

კერძოდ $\cos\varphi+i\sin\varphi$ რიცხვისათვის, რომელიც შეესაბამება φ კუთხეზე მობრუნებას, ვღებულობთ:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \tag{22a}$$

ეს თანაფარდობა ცნობილია **მუავრის** (Moivre)* ფორმულის სახელწოდებით. ჩვენ ეს ფორმულა გამოვიყვანეთ მთელი დადებითი n მაჩვენებლისათვის. გამოვიყენებთ რა წინა პუნქტის (20) ფორმულას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თანაფარდობანი (22) და (22a) სამართლიანი არიან მთელი უარყოფითი მაჩვენებლებისათვისაც. წილადი მაჩვენებლით ხარისხად ამაღლება დაიყვანება ფესვის ამოღებაზე; ამ მოქმედებას ჩვენ შევეხებით შემდეგ პუნქტში.

(22) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ მთელი მაჩვენებლიანი ხარისხის მოდული ეტოლება მოდულის ისეთივე ხარისხს:

$$|\alpha^n|=\rho^n=|\alpha|^n. \tag{23}$$

---

* Abraham de Moivre (1667—1754). რომ მუავრი სარგებლობდა (22a) ფორმულით, ამის შესახებ ჩვენ შეგვიძლია ვიმჯელოთ გამოთვლებით, რომელნიც მას აქვს მოყვანილი. მაგრამ იმ სახით, როგორც ის ახლა იწერება, ეს ფორმულა პირველად მოგვცა ეილერმა 1748 წ

მუავრის ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია მივიღოთ $\cos n\varphi$ და $\sin n\varphi$-თვის გამოსახულებანი $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$ საშუალებით. მართლაც, თუ ნიუტონის ბინომით გავშლით (22a) ტოლობის მარცხენა ნაწილს და შემდეგ ორივე ნაწილში შევადარებთ ნამდვილ ნაწილებს და კოეფიციენტებს i-სთან, მაშინ მივიღებთ

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\dots,$$

$$\sin n\varphi=n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\dots,$$

სადაც სიმბოლო $\binom{n}{m}$ ნიშნავს შეჯუფთებათა რიცხვს n-დან m-ით:

$$\binom{n}{m}=C_n^m=\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\dots m}.$$

კერძოდ, როცა $n=3$, გვაქვს თანაფარდობა

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

რომელიც დაკავშირებულია, როგორც ისტორიულ მიმოხილვაში დავინახეთ, კუთხის ტრისექციის საკითხთან.

6. გადავიდეთ კომპლექსური რიცხვიდან ფესვის ამოღების საკითხზე. ვთქვათ უნდა ამოვიღოთ n ხარისხის ფესვი $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ რიცხვიდან.

აღვნიშნოთ r და θ-თი შესაბამისად საძიებელი ფესვის მოდული და არგუმენტი, მაშინ

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=r(\cos\theta+i\sin\theta), \tag{25}$$

მაშასადამე, უნდა იქნეს

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

ანუ, თანახმად (22) ფორმულისა, გვაქვს:

$$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

თუ ორი კომპლექსური რიცხვი ტოლია, მაშინ მათი შესაბამისი

ვექტორებიც ტოლია; მაშასადამე მოდულები ტოლი უნდა იქნეს, ხოლო არგუმენტები შეიძლება განირჩეოდნენ 2π-ს ჯერადად:

$$r^n=\rho,\ n\theta=\varphi+2\pi k,$$

სადაც k — მთელი რიცხვია. ამ თანაფარდობებიდან ვპოულობთ:

$$r=\sqrt[n]{\rho},\ \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}.$$

აქ დადებითი რიცხვიდან n ხარისხის ფესვი აიღება არითმეტიკული აზრით, რადგანაც r მოდული უნდა იქნეს დადებითი რიცხვი. პირველი შეხედვით შეიძლება გვეჩვენოს, რომ ჩვენ მივიღეთ უსასრულო სიმრავლე ფესვის სხვადასხვა მნიშვნელობებისა. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს ასე არ არის. მართლაც, თანაფარდობიდან

$$\theta=\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}$$

ჩანს, რომ θ-ს სხვადასხვა მნიშვნელობანი მიიღება $\frac{\varphi}{n}$ მნიშვნელობიდან $\frac{2\pi}{n}$-ის (სრული მობრუნების n-ური ნაწილის) მიმატების (ან გამოკლების) გზით; მაგრამ n — ჯერადად $\frac{2\pi}{n}$ კუთხის მიმატება სრული მობრუნების მიმატების ტოლფასია. აქედან გამომდინარეობს, რომ θ არგუმენტის ყველა ერთმანეთისაგან განსხვავებული მნიშვნელობანი შეიძლება მივიღოთ, თუ მივანიჭებთ k-ს შემდეგ მნიშვნელობებს: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. ეს იქნება შემდეგი მნიშვნელობანი:

k	0	1	2	$\ldots$	$n-1$
θ	$\frac{\varphi}{n}$	$\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}$	$\frac{\varphi}{n}+2\frac{2\pi}{n}$	$\ldots$	$\frac{\varphi}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}$

k-ს სხვა მნიშვნელობებისათვის ჩვენ მივიღებთ არგუმენტების მნიშვნელობებს, რომლებიც ზემოთ მოყვანილიდან განსხვავდებიან

2 π-ს ჯერადით. მაგალითად, θ-ს მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $k=n$, იქნება

$$\frac{\varphi}{n}+n\frac{2\pi}{n}=\frac{\varphi}{n}+2\pi;$$

იგი 2π-ით განსხვავდება იმ მნიშვნელობიდან, რომელიც შეესაბამება $k=0$ მნიშვნელობას.

ჩავსვამთ რა ნაპოვნ r და θ მნიშვნელობებს (25) თანაფარდობაში, მივიღებთ:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right\}(k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-1). \tag{26}$$

ამრიგად, n ხარისხის ფესვს კომპლექსურ რიცხვიდან აქვს n სხვადასხვა მნიშვნელობა. ეს მნიშვნელობანი მიიღება (26) ფორმულიდან, როცა $k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$.

ამ n მნიშვნელობას ადვილად გამოვსახავთ ნახაზზე. დავუშვათ

$$\beta_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

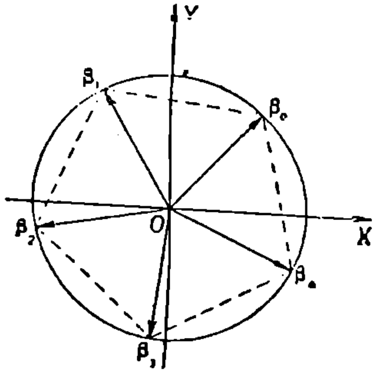
შესაბამის ვექტორებს უნდა ჰქონდეს ერთი და იგივე სიგრძე, $\sqrt[n]{\rho}$-ის ტოლი. β_0 რიცხვის არგუმენტი ეტოლება $\frac{\varphi}{n}$, დანარჩენი არგუმენტები მიიღება $\frac{2\pi}{n}$-ის თანმიმდევრობითი მიმატებით. ამრიგად, რომ მივიღოთ

$$\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\dots,\ \beta_{n-1},$$

რიცხვების შესაბამისი ვექტორები, საკმარისია ავაგოთ ვექტორი, შესაბამისი β_0 რიცხვისა, ხოლო შემდეგ ის თანმიმდევრობით მოვაბრუნოთ $\frac{2\pi}{n}$ კუთხეზე. ადვილად მივხვდებით, რომ ამ ვექტორების, ბოლოები წესიერ n-კუთხედის წვეროებზე დალაგდება.

ნახ. 17 შეესაბამება შემთხვევას $n=5$. მაგალითის სახით ვიპოვოთ ყველა მნიშვნელობანი $\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}$. უპირველესად ფესვქვეშა გამოთქმა დავიყვანოთ ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეზე:

$$-2-2i\sqrt{3}=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$



ნახ. 17.

ამ შემთხვევაში

$$\rho=4,\ \varphi=\frac{4\pi}{3};$$

მაშასადამე,

$$\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

ფესვის მნიშვნელობანი იქნება:

$$\beta_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\beta_1=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\beta_2=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right\}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\beta_3=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

წინანდელი შედეგები შეგვიძლია გამოვიყენოთ კომპლექსურ რიცხვებიდან კვადრატული ფესვის ამოღებისათვის. დავუშვათ, რომ საჭიროა

$$a+bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

კომპლექსური რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღება. (26) ზოგადი ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+k\pi\right)\right\}.$$

დავუშვებთ რა $k=0$ და $k=1$, მივიღებთ ფესვის ორ მნიშვნელობას:

$$\beta_0=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\beta_1=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\Big\}=$$

$$=-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)=-\beta_0.$$

ადვილად გამოვსახავთ ფესვის მნიშვნელობებს a და b-თი. მართლაც, გვაქვს:

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}},\ \sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},$$

$$\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\rho+\rho\cos\varphi}{2}},\quad \sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\rho-\rho\cos\varphi}{2}}.$$

მივიღებთ რა მხედველობაში, რომ $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$, $\rho\cos\varphi=a$, მივიღებთ:

$$\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\ \sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

მაშასადამე,

$$\beta_0=\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+i\sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

ამასთან ფესვების ნიშნები განისაზღვრებიან თანაფარდობით:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}=$$

$$=\rho\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\rho\sin\varphi}{2}=\frac{b}{2}.$$

ამრიგად, ორივე რადიკალის ნამრავლს უნდა ჰქონდეს იგივე ნიშანი, რაც b რიცხვს. თუ $b>0$, მაშინ ჩავთვლით რა

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\quad\text{და}\quad\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

დადებითად, შეგვიძლიან დავწეროთ:

$$\beta_0=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},\quad \beta_1=-\beta_0.$$

თუ $b<0$, მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ

$$\beta_0=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},\ \beta_1=-\beta_0.$$

ვთქვათ, მაგალითად, საძიებელია $\sqrt{2-i}$. აქ $a=2$, $b=-1$; რადგანაც $b<0$, გვექნება:

$$\beta_0=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}=1{,}45537-i\ 0{,}34357;$$

$$\beta_1=-\beta_0=-1{,}45537+i.0{,}34357.$$

7. საჭიროა დაწვრილებით შევჩერდეთ ფესვის ამოღების ერთ კერძო შემთხვევაზე. ჩვენ გვაქვს მხედველობაში n ხარისხის ფესვის ამოღება ერთიდან. წარმოვადგინოთ რიცხვი 1 ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახით:

$$1=\cos 0+i\sin 0.$$

ამ შემთხვევაში $\rho=1$, $\varphi=0$; მაშასადამე,

$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n};$$

მივანიჭებთ რა k-ს 0, 1, ..., $n-1$ მნიშვნელობებს, მივიღებთ ერთიდან n ხარისხის ფესვის n სხვადასხვა მნიშვნელობას; ვიგულისხმებთ რა

(27) $$\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\ (k=0,\ 1,\ ...,\ n-1),$$

გვექნება

$$\varepsilon_0=1$$

(27a) $$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

მუავრის ფორმულით

$$\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k,$$

ან

(28) $$\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k,\ (k=0,\ 1,\ ...,\ n-1).$$

ამრიგად, ε_1 ფესვს აქვს ის თვისება, რომ ავამაღლებთ რა თანმიმდევრობით სხვადასხვა ხარისხში, მივიღებთ n ხარისხის ყველა ფესვს ერთიდან. ყოველ ფესვს ერთიდან, რომელსაც მსგავსი თვისება აქვს **პირველადი** (ანუ პრიმიტიული) **ფესვი** ეწოდება.

გეომეტრიულად წერტილები, რომელნიც შეესაბამება ერთიდან n ხარისხის ფესვის სხვადასხვა მნიშვნელობას, დალაგდებიან წესიერი n-კუთხედის n წვეროში, მასთან ამ მრავალკუთხედის ერთი წვეროთაგანი შეესაბამება $+1$ რიცხვს.

მოვძებნოთ ყველა მნიშვნელობა მესამე ხარისხის ფესვებისა ერთიდან:

$$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}.$$

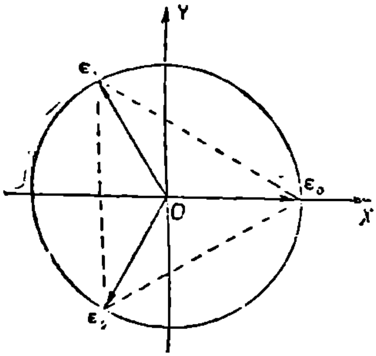
მივანიჭებთ რა k-ს მნიშვნელობებს 0, 1, 2, მივიღებთ:

(29) $$\left\{\begin{aligned}&\varepsilon_0=\cos 0+i\sin 0=1,\\&\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\\&\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\right.$$

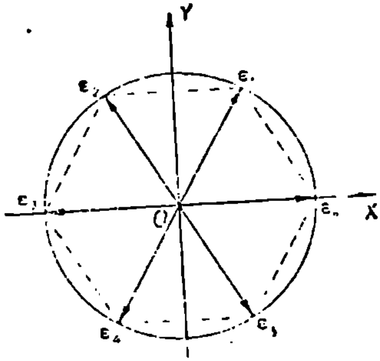
ამ შემთხვევაში

(30) $$\varepsilon_2 = (\varepsilon_1)^2, \quad \varepsilon_1 = (\varepsilon_2)^2,$$

ასე, რომ თითოეული ε_1 და ε_2 ფესვთაგანი იქნება პირველადი. გეომეტრიულად ε_0; ε_1, ε_2 მნიშვნელობებს შეესაბამება წერტილები, რომლებიც ძევს წესიერი სამკუთხედის წვეროებში (ნახ. 18).



ნახ. 18.



ნახ. 19.

განვიხილოთ კიდევ

$$\sqrt[6]{1} = \cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}.$$

აქ

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

მოცემულ შემთხვევაში ε_1 და ε_5 იქნება პირველადი ფესვები. რომ ამაში დავრწმუნდეთ, საკმარისია მივიღოთ მხედველობაში, რომ n ხარისხში ამაღლება (ერთეულის ტოლი მოდულის შემთხვევაში) შეესაბამება არგუმენტის n-ზე გამრავლებას; ფესვი ε_3 არ იქნება პირველადი, რადგანაც, ავამაღლებთ რა მას სხვადასხვა ხარისხში, ჩვენ მივიღებთ ყოველთვის $\frac{2\pi}{3}$-ის ჯერად არგუმენტს; ასეთი არგუმენტი შეიძლება შეესაბამებოდეს ε_0, ε_2, ε_4 ფესვებიდან მხოლოდ ერთ-ერთს (შეად. ნახ. 19).

დავუბრუნდეთ ახლა (26) თანაფარდობას. ვსარგებლობთ რა იმით, რომ კომპლექსურ რიცხვების გამრავლების დროს მათი არგუმენტები შეიკრიბება, ჩვენ გადავწეროთ ეს თანაფარდობა შემდეგი სახით:

$$(31)\quad \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right).$$

აქ მამრავლი

$$(32)\qquad \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

წარმოადგენს მოცემულ რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის ერთ-ერთ მნიშვნელობას; გამოთქმა $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = \varepsilon_k$, როცა $k = 0, 1, \ldots, n-1$, გაირბენს ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს n ხარისხის ფესვისას ერთიდან. რომ მივიღოთ (31) ფესვის ყველა მნიშვნელობა, საკმარისია გავამრაველოთ (32) გამოსახულება თანმიმდევრობით $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$-ზე.

ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ დასკვნას:

კომპლექსური რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის ყველა მნიშვნელობა შეიძლება მივიღოთ ერთ-ერთი მისი მნიშვნელობათაგანის გამრავლებით ერთეულიდან იმავე ხარისხის ფესვის სხვადასხვა მნიშვნელობაზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: გამოსახულება (32) შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მოცემული რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის ნებსითი მნიშვნელობა, რადგანაც თვით φ არგუმენტის მნიშვნელობა ყოველთვის შეგვიძლია გავადიდოთ ან შევამციროთ 2π-ს ჯერადით.

მაგალითი. ვიპოვოთ $\sqrt[3]{-2+2i}$. დავიყვანთ რა ფესვქვეშა გამოთქმას ნორმალურ ტრიგონომეტრიულ სახეზე, მივიღებთ:

$$-2+2i=\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

ფესვის ერთ-ერთი მნიშვნელობა იქნება

$$\beta_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i.$$

სხვა ორი მნიშვნელობა მიიღება ერთეულიდან მესამე ხარისხის ფესვებზე გამრავლებით:

$$\beta_1=(1+i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\beta_2=(1+i)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

სავარჯიშო.

1. იპოვეთ ფესვის ყველა მნიშვნელობა და ააგეთ შესაბამისი წერტილები:

$a)\ \sqrt[3]{i}$, $\quad b)\ \sqrt[5]{-1-i}$, $c)\ \sqrt[4]{-1}$, $\quad d)\ \sqrt[3]{2+3i}$ (ისარგებლეთ ცხრილებით).

2. უშუალო გამოთვლებით შეამოწმეთ, რომ ε_1 და ε_2 მნიშვნელობისათვის, რომლებიც წარმოადგენენ ერთეულიდან მესამე ხარისხის ფესვის მნიშვნელობებს, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$(\varepsilon_i)^2+\varepsilon_i+1=0,\ \ (i=1,2).$$

3. დაამტკიცეთ, რომ

$$(\varepsilon_1)^k+(\varepsilon_1)^{-k}=2\cos\frac{2\pi k}{n}$$

სადაც ε_1 განისაზღვრება (27a) ტოლობით.

4. დაამტკიცეთ გეომეტრიულად, რომ $n=4$ შემთხვევისათვის პირველადი ფესვები ერთეულიდან არის ε_1 და ε_3.

5. დაამტკიცეთ გეომეტრიულად, რომ $n=5$ შემთხვევისათვის ყველა ფესვი ერთეულიდან, გარდა ε_0-ისა, არის პირველადი.

6. დაამტკიცეთ, რომ ერთეულიდან n ხარისხის ფესვი ε_m არის პირველადი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა რიცხვები m და n არიან ურთიერთ მარტივი.

8. განვიხილოთ ახალი ამოცანა, რომელიც გვიჩვენებს თუ რა კავშირია კომპლექსური რიცხვის ცნება წრფივი გარდაქმნის ცნებასთან.

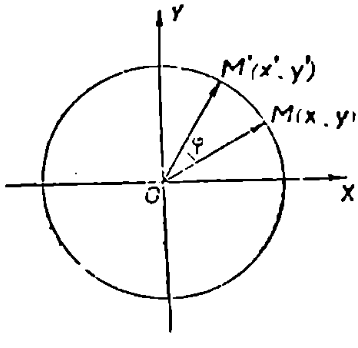
XOY სიბრტყეზე მოთავსებულია წრიული დისკო, ცენტრით O-ში. დისკოზე აღნიშნულია წერტილი M, კოორდინატებით x, y. დისკო მობრუნებულია O-ს გარშემო φ კუთხით. ვიპოვოთ დისკოზე აღნიშნული წერტილის კოორდინატები დისკოს მობრუნების შემდეგ (კოორდინატთა სისტემა იგულისხმება უძრავად).

წერტილის მობრუნების მდებარეობა მობრუნებამდე განისაზღვრება $\overline{OM}$ ვექტორით; ამ ვექტორს შეესაბამება კომპლექსური რიცხვი

$$\alpha = x + yi.$$

მობრუნების შემდეგ წერტილით M დაიკავებს მდებარეობას M (ნახ. 20), ხოლო რადიუს-ვექტორი $\overline{OM}$ გადავა $\overline{OM}'$-ში. თუ x' და y'-ით აღვნიშნავთ M' წერტილის კოორდინატებს, მაშინ მას შეესაბამება კომპლექსური რიცხვი

$$\alpha' = x' + y'i.$$



ნახ. 20.

$\overline{OM}'$ ვექტორი მიიღება $\overline{OM}$ ვექტორიდან φ კუთხეზე მობრუნებით; მაშასადამე, კომპლექსური რიცხვი $x'+y'i$ მიიღება $x+yi$ რიცხვისადმი $\cos\varphi + i\sin\varphi$ ოპერატორის გამოყენების საშუალებით:

$$x' + y'i = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(x + yi),$$

საიდანაც

$$(33) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

ამრიგად, x' და y' კოორდინატები წარმოადგენენ პირველი

ხარისხის ფუნქციებს (წრფივ ფუნქციებს) x და y კოორდინატებისა. შეიძლება ითქვას, რომ ფორმულები (33) განსაზღვრავს წრფივ გარდაქმნას, რომელიც x და y მნიშვნელობებს მიაკუთვნებს x' და y მნიშვნელობებს.

ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ დასკვნას: $\cos\varphi + i\sin\varphi$ ოპერატორის გამოყენება $x + yi$ რიცხვის მიმართ ტოლფასია (33) წრფივ გარდაქმნისა, კოეფიციენტებით

$$(34) \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi. \end{pmatrix}$$

ამრიგად, ყოველ $\cos\varphi + i\sin\varphi$ სახის კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება (34) სახის განსაზღვრული ცხრილი (მატრიცი). კერძოდ, კომპლექსურ რიცხვს

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

შეესაბამება მატრიცი

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \text{ ანუ } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

რიცხვს 1-ს შეესაბამება მატრიცი

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}, \text{ ანუ } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

დისკოს ბრუნვასთან ერთად, რომ განვიხილოთ გაჭიმვა, მაშინ ჩვენ მივიღებთ წრფივ გადაქმნას

$$x' = x\rho\cos\varphi - y\rho\sin\varphi$$

$$(33a) \qquad y' = x\rho\sin\varphi + y\rho\cos\varphi,$$

რომლის კოეფიციენტები შეადგენს მატრიცს

$$(34a) \qquad \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

შემდეგში ჩვენ დავინახავთ, რომ მატრიცებისათვის შეგვიძლია დავადგინოთ შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციები და ამრიგად განვავითაროთ თავისებური „მატრიცების არითმეტიკა". ამასთან ($34a$) სახის მატრიცებს ეს არითმეტიკა სავსებით შეესაბამება კომპლექსურ რიცხვების არითმეტიკას. ამრიგად, **კომპლექსურ რიცხვების არითმეტიკა წარმოადგენს მატრიცების ზოგადი არითმეტიკის კერძო შემთხვევას.**

§ 4. რიცხვული არეები (რგოლი და ველი)

1. ჩვენ ზევით გამოვიკვლიეთ რიცხვის ცნების განვითარების ძირითადი ეტაპები. ამასთან ჩვენ უკვე მოგვიხდა, არსებითად, განგვეხილა სხვადასხვა რიცხვითი არეები. ასე, მაგალითად, ჩვენ განვიხილეთ ყველა მთელი დადებითი რიცხვების არე, შემდეგ არე ყველა დადებითი რაციონალური რიცხვებისა და ა. შ. საზოგადოდ, რომ ვთქვათ, რ ი ც ხ ვ ი თ ი არის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ რიცხვთა ნებისმიერ სიმრავლეს (რიცხვთა ერთობლიობას). ალგებრაში რიცხვითი არეები (რიცხვთა სიმრავლენი) განიხილებიან განსაკუთრებული, თავისებური თვალსაზრისით. პირველ რიგში აქ ისმება საკითხი მოცემული არეს რიცხვთა ყოფაქცევის შესახებ ოთხი ძირითადი ოპერაციის მიმართ (შეკრების, გამოკლების, გამრავლების და გაყოფის). მაგრამ საჭიროა გავარჩიოთ, თუ რა აზრით ვლაპარაკობთ მოცემული სიმრავლის რიცხვთა ყ ო ფ ა ქ ც ე ვ ი ს შესახებ ამა თუ იმ ოპერაციის მიმართ.

ვთქვათ მოცემულია რიცხვთა რაიმე სიმრავლე; აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე M-თი (ამრიგად, აღნიშვნა M ეხება არა რაიმე ცალკეულ რიცხვს, ა რ ა მ ე დ მ თ ე ლ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს). აღებული M სიმრავლის ორი ნებისმიერი რიცხვის ჯამი თუ ეკუთვნის აგრეთვე თვით ამ სიმრავლეს, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, **რომ შეკრების ოპერაცია არ გამოგვიყვანს M სიმრავლიდან.** აქ ჩვენ ავიღეთ შეკრების ოპერაცია მხოლოდ მაგალითისათვის: განმარტება ძალაში რჩება ნებისმიერი სხვა ოპერაციისათვისაც. განვიხილოთ, მაგალითად, სიმრავლე ყველა მთელი დადებითი რიცხვებსა,

$$1, 2, 3, \ldots;$$

ცხადია, რომ შ ე კ რ ე ბ ი ს ა და გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ი ს ოპერაციები არ გამოგვიყვანს ამ სიმრავლის ფარგლებიდან; პირიქით, გამოკლე-

ბის ოპერაცია გამოგვიყვანს აქ სიმრავლის ფარგლებიდან (ვინაიდან სხვაობა $m-n$, როცა $m<n$, არ იქნება დადებითი რიცხვი). ახლა თუ განვიხილავთ სიმრავლეს *ყველა მთელ რიცხვებისას*

$$\ldots, -3, -2, -1, 0 +1, +2, +3, \ldots,$$

მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციები არ გამოგვიყვანს მის ფარგლებიდან. სიმრავლეს, რომელსაც მსგავსი თვისება აქვს, **რიცხვითი რგოლი** ეწოდება. ამრიგად, **რიცხვთა სიმრავლეს რიცხვითი რგოლი ეწოდება, თუ შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციები არ გამოგვიყვანს ამ სიმრავლის ფარგლებიდან.** რიცხვებს, რომლებიც რგოლს ეკუთვნიან, მისი **ელემენტები** ეწოდება.

მაგალითები.

a) სიმრავლე ყველა *ლუწ* რიცხვებისა

$$\ldots, -4, -2, 0, +2, +4, +6, \ldots$$

ჰქმნის რგოლს: ლუწი რიცხვების ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი წარმოადგენენ ისევ ლუწ რიცხვებს.

სიმრავლე ყველა *კენტ* რიცხვებისა

$$\ldots, -3, -1, +1, +3, +5, \ldots$$

არ ქმნის რგოლს. უკვე შეკრების ოპერაცია გამოგვიყვანს ამ სიმრავლის ფარგლებიდან.

b) განვიხილოთ სიმრავლე ყველა მთელი რიცხვებისა, რომლებიც q-ს ჯერადია, სადაც q გარკვეული (ფიქსირებული) მთელი რიცხვია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ ვიხილავთ nq სახის ყველა რიცხვთა სიმრავლეს (სადაც n — ნებისმიერი მთელი რიცხვია). ეს სიმრავლე წარმოადგენს რგოლს, ვინაიდან

$$mq \pm nq = (m \pm n)\, q,$$

$$mq \cdot nq = (mnq)\, q;$$

თუ m და n მთელი რიცხვებია, მაშინ $m \pm n$ და mnq რიცხვებიც არიან აგრეთვე მთელი რიცხვები.

c) რიცხვი ნული თავისთავად ჰქმნის რგოლს:

$$0+0=0,\ 0-0=0,\ 0 \cdot 0=0.$$

შენიშვნა: რიცხვი ნული შედის ნებისმიერ რგოლში Q; მართლაც, თუ a არის Q-ს ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $a-a=0$.

2. განვიხილოთ ყველა $m+n\sqrt{2}$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც m და n მთელი რიცხვებია: თანაფარდობანი

$$(m+n\sqrt{2})\pm(m_1+n_1\sqrt{2})=(m\pm m_1)+(n\pm n_1)\sqrt{2},$$

$$(m+n\sqrt{2})(m_1+n_1\sqrt{2})=mm_1+2nn_1+(mn_1+nm_1)\sqrt{2}$$

გვიჩვენებს, რომ ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი $m+n\sqrt{2}$ სახის რიცხვებისა წარმოადგენენ იმავე სახის რიცხვებს.

მაშასადამე, განსახილველი სიმრავლე ჰქმნის რგოლს. ამბობენ, რომ ეს რგოლი მიიღება $\sqrt{2}$ რიცხვის ჩართვით ყველა მთელ რიცხვთა რგოლისადმი. აქ ჩვენ ვხმარობთ ტერმინს „ჩართვა“ იმისათვის, რათა ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ აქ ლაპარაკია $\sqrt{2}$ რიცხვის მთელი რიცხვების რგოლთან არა მექანიკურ შემოერთებაზე. მართლაც, თუ $\sqrt{2}$ რიცხვს უბრალოდ შევუერთებთ ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლეს, ჩვენ ჯერ კიდევ ვერ მივიღებთ რგოლს. რგოლის მისაღებად საჭიროა $\sqrt{2}$ რიცხვთან ერთად შევუერთოთ $n\sqrt{2}$ (n — მთელია) სახის ყველა ნამრავლი, რადგანაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში გამრავლების ოპერაცია ვერ შესრულდება ჩვენი სიმრავლის ფარგლებში. შემდეგ, უნდა შევუერთოთ $m+n\sqrt{2}$ სახის ყველა რიცხვი; წინააღმდეგ შემთხვევაში შეკრების ოპერაცია გამოგვიყვანს სიმრავლის ფარგლებიდან. ამით მაინც შეიძლება დავკმაყოფილდეთ: ყველა $m+n\sqrt{2}$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, როგორც ვიცით, მართლაც ჰქმნის რგოლს. ეს რგოლი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\{m+n\sqrt{2}\}$. ნაკვთური ბრჩხილები აქ ასრულებენ შემდეგი სიტყვების მაგივრობას: „ყველა სახის რიცხვთა ერთობლიობა“. G-თი აღვნიშნოთ ყველა მთელი რიცხვების რგოლი. ახლა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ რგოლი $\{m+n\sqrt{2}\}$ **მიღებულია G რგოლისადმი $\sqrt{2}$ რიცხვის ჩართვით.** ეს შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$G[\sqrt{2}]=\{m+n\sqrt{2}\}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ამგვარადვე შეიძლება რგოლს ჩა-

ვურთოთ ნებისმიერი კვადრატული რადიკალი $\sqrt{a}$, სადაც a არის მთელი რიცხვი:

$$G[\sqrt{a}] = \{m + n\sqrt{a}\}.$$

უფრო რთული მდგომარეობაა კუბური რადიკალის მიმართ. დავუშვათ, მაგალითად, რომ საჭიროა G რგოლისადმი $\sqrt[3]{2}$ რადიკალის ჩართვა. აქ არ შეიძლება დავკმაყოფილდეთ $m + n\sqrt[3]{2}$ სახის რიცხვებით, რადგან $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$ უკვე არ იმყოფება ამ რიცხვებს შორის. ამიტომ უნდა შემოვიყვანოთ რიცხვები შემდეგი სახისა:

$$m + n\sqrt[3]{2} + p\left(\sqrt[3]{2}\right)^2. \tag{35}$$

(m, n და p მთელი რიცხვებია).

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყველა (35) სახის რიცხვთა სიმრავლე ჰქმნის რგოლს. ამგვარად,

$$G[\sqrt[3]{2}] = \{m + n\sqrt[3]{2} + p\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\}.$$

ჩართვის საკითხი ახლა განვიხილოთ ზოგადად. დავუშვათ, რომ მოცემულია Q რგოლი და რიცხვი λ, რომელიც არ ეკუთვნის ამ რგოლს. საჭიროა აიგოს ახალი, გაფართოებული Q_1 რგოლი, რომელიც შეიცავს Q რგოლის ყველა რიცხვს და მოცემულ λ — რიცხვს; ასეთი რგოლი უნდა შეიცავდეს აგრეთვე ყველა რიცხვს, რომლებსაც მივიღებთ შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციების გამოყენებით Q რგოლის რიცხვებისა და λ რიცხვისადმი.

თუ Q_1 რგოლი შეიცავს ყველა რიცხვს, რომლებსაც მივიღებთ Q რგოლიდან და λ-დან შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების მოქმედებათა საშუალებით, და მხოლოდ ამ რიცხვებს, მაშინ ვიტყვით;

Q_1 რგოლი წარმოადგენს შედეგს λ რიცხვის ჩართვისა Q რგოლისადმი და ჩავწერთ:

$$Q[\lambda] = Q_1.$$

ასე, მაგალითად, ყველა $m+n\sqrt{2}$ სახის რიცხვთა რგოლი G რგოლის რიცხვებთან და $\sqrt{2}$ რიცხვთან ერთად შეიცავს მხოლოდ და მხოლოდ ყველა იმ რიცხვებს, რომლებსაც მივიღებთ შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციების გამოყენებით G რგოლის რიცხვებისა და $\sqrt{2}$ რიცხვისადმი.

3. თუ ვამბობთ, რომ M სიმრავლე ჰქმნის რგოლს, ეს იმას ნიშნავს, რომ შეკრების, გამრავლებისა და გამოკლების ოპერაციები არ გამოგვიყვანს M სიმრავლის ფარგლებიდან. აქამდე არ შევეხებივართ გაყოფის ოპერაციას.

ახლა განვიხილოთ სიმრავლე ყველა რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ რიცხვებისა, ე. ი. ყველა $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვები, სადაც m და n მთელი რიცხვებია. ეს სიმრავლე აღვნიშნოთ R-ით. ცხადია, რომ R შეიცავს ყველა მთელ რიცხვს (ყოველი მთელი რიცხვი შეიძლება ჩავწეროთ $\frac{m}{n}$ სახით). ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ G **სიმრავლე შეადგენს** R **სიმრავლის ნაწილს.** ეს შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით.

$$G \subset R.$$

($\subset$ — ჩართვის ნიშანია).

R სიმრავლე ჰქმნის აგრეთვე რგოლს, მაგრამ შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციებს აქ უნდა შევუერთოთ გ ა ყ ო ფ ა ც. მართლაც, ყოველი ორი რაციონალური რიცხვის განაყოფი იქნება რაციონალური რიცხვი, თუ კი გამყოფი განსხვავებულია ნულისაგან. რაც შეეხება ნულზე გაყოფას, ეს ოპერაცია არის ან მრავალსახა (თუ გასაყოფიც ნულია) ან არ შეიძლება იქნეს შესრულებული (თუ გამყოფი განსხვავდება ნულისაგან). ამიტომ შემდეგში ყოველთვის დავუშვებთ, რომ **გამყოფი განსხვავდება ნულისაგან.**

თუ რიცხვთა სიმრავლეს აქვს ის თვისება, რომ შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციები არ გამოგვიყვანს მის ფარგლებიდან, მაშინ ამბობენ, რომ ეს სიმრავლე ჰქმნის რიცხვთა ველს (ფრანგულად champ, გერმანულად Körper; რუსულად поле, тело, корпус)*.

* ზოგჯერ ამბობენ აგრეთვე „რაციონალობის" (Rationalitätsbereich); არ უნდა აურიოთ რაციონალობის არე (ველი) რაციონალურ რიცხვთა არესთან (მაგალითად, ყველა ნამდვილ რიცხვთა არეს ამ აზრით შეიძლება ვუწოდოთ „რაციონალობის არე).

ამგვარად, ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს რიცხვთა ველის მაგალითს. ყველა ნამდვილ (რაციონალური და ირაციონალური) რიცხვთა სიმრავლე ქმნის აგრეთვე ველს.

თუ მოცემულია რიცხვთა ველი P და λ რიცხვი, რომელიც არ ეკუთვნის ამ ველს, მაშინ შეიძლება დავსვათ საკითხი λ რიცხვის ჩართვის შესახებ P ველისადმი (იმავე აზრით, რა აზრითაც ზევით ვლაპარაკობდით რგოლისადმი ჩართვის შესახებ). რიცხვის ჩართვა P ველისადმი ნიშნავს ახალი გაფართოებული P_1 ველის აგებას, რომელიც P ველის რიცხვებთან და λ რიცხვთან ერთად შეიცავს მხოლოდ და მხოლოდ ყველა იმ რიცხვებს, რომლებსაც მივიღებთ შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციების გამოყენებით P ველის რიცხვებისადმი და λ რიცხვის მიმართ.

P_1 ველი, რომელიც მიიღება λ რიცხვის ჩართვით P-სთან, აღინიშნება $P(\lambda)$-თი:*

$$P_1 = P(\lambda).$$

მაგალითად, დავუშვათ, რომ ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველს უნდა ჩავურთოთ $\sqrt{2}$ რიცხვი. ამისათვის საჭიროა R-ს შევუერთოთ ყოველგვარი რიცხვი, რომლებსაც მივიღებთ ოთხი ძირითადი ოპერაციის გამოყენებით რაციონალური რიცხვებისა და $\sqrt{2}$ რიცხვისადმი; ამგვარად, მივიღებთ სიმრავლეს შემდეგი სახის რიცხვებისას:

$$r + s\sqrt{2}, \tag{36}$$

სადაც r და s რაციონალური რიცხვებია. მაგრამ შეიძლება ამით დავკმაყოფილდეთ: ყველა (36) სახის რიცხვთა სიმრავლე უკვე ქმნის ველს. მართლაც, თუ მოცემულია ორი რიცხვი $r+s\sqrt{2}$ და $r_1 + s_1\sqrt{2}$, სადაც r, s, r_1, s_1 რაციონალურია, მაშინ

$$(r+s\sqrt{2}) \pm (r_1 + s_1\sqrt{2}) = (r \pm r_1) + (s \pm s_1)\sqrt{2},$$

$$(r+s\sqrt{2})(r_1+s_1\sqrt{2}) = (rr_1 + 2ss_1) + (rs_1 + rs_1)\sqrt{2},$$

დაბოლოს, გაყოფის ოპერაციისათვის

$$\frac{r+s\sqrt{2}}{r_1+s_1\sqrt{2}} = \frac{(r+s\sqrt{2})(r_1 - s_1\sqrt{2})}{r_1^2 - 2s_1^2} = a + b\sqrt{2},$$

* მრგვალი ფრჩხილები ტოლობის მარცხენა ნაწილში აქ ნახმარია კვადრატული ფრჩხილებისაგან განსხვავებით, რომლებიც ზევით გამოვიყენეთ, როცა ვლაპარაკობდით რგოლის შესახებ.

სადაც

$$a=\frac{rr_1-2ss_1}{r_1^2-2s_1^2} \text{ და } b=\frac{sr_1-rs_1}{r_1^2-2s_1^2}$$

რაციონალური რიცხვებია.

ამგვარად, შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციები არ გამოგვიყვანს (36) სიმრავლის ფარგლებიდან; ეს სიმრავლე ქმნის ველს. ველი $\{r+s\sqrt{2}\}$ რომ მიღებულია R ველისადმი $\sqrt{2}$ რიცხვის ჩართვით ასე ჩავწერთ:

$$R(\sqrt{2})=\{r+s\sqrt{2}\}.$$

ჩართვის ცნება არსებით როლს ასრულებს განტოლებათა შესწავლის დროს. შევეცადოთ გავარკვიოთ ეს უბრალო მაგალითზე. დავუშვათ, რომ მოცემულია რაციონალური კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლება $ax^2+bx+c=0$; თუ ამ განტოლების დისკრიმინანტი b^2-4ac არ არის მთელი რიცხვის კვადრატი, მაშინ განტოლების ფესვებს არ შეიცავს R ველი. მაგრამ მათ შეიცავს ველი $R(\sqrt{b^2-4ac})$, რომელსაც მივიღებთ R ველისადმი $\sqrt{b^2-4ac}$ რადიკალის ჩართვით. საერთოდ, რომ ვთქვათ, თუ მოცემულია განტოლება, რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნის P ველს, მაშინ ამ განტოლების ამოხსნა ნიშნავს ისეთი P_1 ველის აგებას, რომელიც შეიცავს მოცემული განტოლების ყველა ფესვს.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რომელ რიცხვებს ეწოდება რაციონალური? ნამდვილი?
2. კომპლექსური რიცხვი $a+bi$ რა შემთხვევაში იქნება ნამდვილი?
3. რომელი ოპერაცია შეესაბამება i რიცხვს?
4. როგორ ავაგოთ ვექტორი, რომელიც შეესაბამება კომპლექსურ რიცხვს $a+bi$?
5. რას ნიშნავს „კომპლექსური რიცხვის წარმოდგენა ნორმალური ტრიგონომეტრიული სახით?
6. როგორ უნდა განვსაზღვროთ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი?
7. როგორ უნდა ავაგოთ ვექტორი, რომელიც შეესაბამება ორი მოცემული კომპლექსური რიცხვის სხვაობას?
8. რომელ უტოლობებს აქვს ადგილი კომპლექსური რიცხვების ჯამისა და სხვაობის მოდულისათვის?
9. რომელი ოპერაცია შეესაბამება კომპლექსურ რიცხვს $\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$?

10. როგორ უნდა მივიღოთ ყველა მნიშვნელობა n—ხარისხის ფესვისა კომპლექსური რიცხვიდან, თუ ცნობილია ერთ-ერთი მნიშვნელობათაგანი?

11. როგორაა განლაგებული ნახაზზე წერტილები, რომლებიც შეესაბამება n—ხარისხის ფესვის სხვადასხვა მნიშვნელობებს?

12. რა არის პირველადი ფესვი ერთეულიდან?

13. რა არის რიცხვითი რგოლი? რიცხვითი ველი?

14. რას ნიშნავს λ რიცხვის ჩართვა P ველისადმი?

თავი II

მთელი რაციონალური ფუნქციები და მათზე მოქმედებანი

§ 1. მოქმედებანი მთელ რაციონალურ ფუნქციებზე

1. რიცხვებისა და რიცხვითი არეების იმ თვისებებზე დაყრდნობით, რომლებსაც წინა თავში გავეცანით, გადავიდეთ მთელი რაციონალური ფუნქციების სისტემატურ შესწავლაზე. უწინარეს ყოვლისა გავიხსენოთ მთელი რაციონალური ფუნქციის ის განსაზღვრა, რომელიც მოცემულია შესავალის 1 პუნქტში: თუ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა მიიღება x-ის შესაბამი მნიშვნელობიდან და მოცემული (მუდმივი) რიცხვებიდან ოთხი ძირითადი ოპერაციის საშუალებით, მაშინ $f(x)$ არის x-ის რაციონალური ფუნქცია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, x-ის რაციონალური ფუნქცია წარმოადგენს გამოსახულებას, რომელიც შედგენილია x-დან და მოცემული (მუდმივი) რიცხვებიდან ოთხი ძირითადი ოპერაციის საშუალებით. თუ ეს გამოსახულება x-ს არ შეიცავს მნიშვნელში, მაშინ ფუნქციას ეწოდება მთელი რაციონალური.

ყოველი მთელი რაციონალური ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ მრავალწევრის (პოლინომის) სახით, რომელიც განლაგებულია x ასოს ხარისხების მიხედვით:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_n$ — მუდმივი კოეფიციენტებია. ზოგიერთი ამ კოეფიციენტთაგანი (ან შეიძლება ყველაც კი) შეიძლება ეტოლებოდეს ნულს; თუ $a_0 \neq 0$, მაშინ n რიცხვი წარმოადგენს ფუნქციის **ხარისხს**.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ნულისაგან განსხვავებული ყოველი c რიცხვი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნულოვანი ხარისხის ფუნქცია $cx^0=c$; რიცხვი **ნულიც** აგრეთვე შეიძლება განვიხილოთ როგორც მთელი რაციონალური ფუნქცია; მაგრამ ეს ფუნქცია ბევრ შემთხვევაში უნდა გამოირიცხოს განხილვიდან.

მაგალითები.

1. $f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{3}{8}x^3-\frac{4}{5}x+11.$

აქ ჩვენ გვაქვს შემდეგი კოეფიციენტების მქონე მეოთხე ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქცია:

$$a_0=\frac{1}{3},\ a_1=-\frac{3}{8},\ \ a_2=0,\ \ a_3=-\frac{4}{5},\ a_4=11.$$

2. $f(x)=x^3-(2-3i)x^2+\frac{2-i}{5}x-\frac{1}{2+i}.$

წარმოადგენს მესამე ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციას. აქ

$$a_0=1,\ a_1=-2+3i,\ a_2=\frac{2-i}{5},\ a_3=-\frac{1}{2+i}.$$

3. $f(x)=0{,}76x^3+0{,}34x^2+3{,}7$

არის მესამე ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქცია აქ

$$a_0=0{,}76,\ a_1=0{,}34,\ a_2=0,\ a_3=3{,}7.$$

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქცია

$$w=f(x,\ y,\ \ldots,\ v).$$

$x,\ y,\ \ldots,\ v$ მნიშვნელობათა ყოველ სისტემას შეესაბამება w ფუნქციის განსაზღვრული მნიშვნელობა.

თუ w მნიშვნელობა მიიღება $x,\ y,\ \ldots,\ v$ სიდიდეთა შესაბამ მნიშვნელობათაგან და მოცემული (მუდმივი) რიცხვებიდან *ოთხი ძირითადი ოპერაციის* საშუალებით, მაშინ $w=f(x,\ y,\ldots,v)$ არის $x,\ y,\ \ldots,\ v$ ცვლადების რაციონალური ფუნქცია.

თუ ამასთან $f(x,\ y,\ \ldots,\ v)$ არ შეიცავს ცვლადებს მნიშვნელში, მაშინ მას ეწოდება მთელი რაციონალური ფუნქცია $x,\ y,\ \ldots,\ v$ ცვლადებისა.

ასე, მაგალითად, გამოსახულება

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},$$

სადაც a და b მოცემული რიცხვებია, წარმოადგენს x და y ცვლადების მთელ რაციონალურ ფუნქციას.

გამოსახულება

$$\frac{x^2 - 2xy + z^2}{x + z}$$

არის წილადი რაციონალური ფუნქცია x, y, z ცვლადების.

$x, y, \dots, v$ ცვლადების ყოველი მთელი რაციონალური ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც შემდეგი სახის წევრთა ჯამი:

$$Ax^p y^q \dots v^t,$$

სადაც A არის მუდმივი კოეფიციენტი, $p, q, \dots, t$ — მთელი რიცხვებისა, რომლებიც დადებითია ან ნულის ტოლი. მაჩვენებელთა ჯამს $p + q + \dots + t$ ეწოდება მოცემული წევრის **ხარისხი**. მთელი რაციონალური $f(x, y, \dots, v)$ ფუნქციის **ხარისხი** ეწოდება მის წევრთა **უდიდეს ხარისხთაგანს**. ასე, მაგალითად, გამოსახულება

$$ax + by + c,$$

სადაც a, b, c მუდმივი კოეფიციენტებია, წარმოადგენს ორი x და y ცვლადის ზოგადი სახის *პირველი* ხარისხის ფუნქციას (წრფივ ფუნქციას). ამგვარადვე, გამოსახვა

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

სადაც $a, b, \dots, f$ მუდმივი კოეფიციენტებია, წარმოადგენს მეორე ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქციის ზოგად სახეს.

$x, y, \dots, v$ ცვლადების მთელ რაციონალურ ფუნქციას **ერთგვაროვანი** ეწოდება, თუ ყველა მისი წევრის ხარისხი $x, y, \dots, v$-ის მიმართ თანატოლია. ერთგვაროვან მთელ რაციონალურ ფუნქციებს სხვანაირად **ფორმები** ეწოდება. ასე, მაგალითად, გამოსახულება

$$ax + by$$

წარმოადგენს x და y ცვლადების **პირველი ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას**, ანუ **წრფივ ფორმას**. გამოსახულება

$$x^2 - y^2 - 3xy$$

წარმოადგენს x და y ცვლადების **მეორე ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციის** მაგალითს, ანუ კვადრატულ ფორმას. გამოსახულება

$$x^3 + y^3 + 2x^2y + z^3 + 4xyz$$

არის მაგალითი მესამე ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციისა x, y, z ცვლადების მიმართ, ანუ კუბური ფორმისა.

კურსის პირველ ნაწილში განვიხილავთ უმთავრესად ერთი ცვლადის ფუნქციას.

2. კვლავ განვიხილოთ მთელი რაციონალური ფუნქცია

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_n$ მუდმივი კოეფიციენტებია. ბევრ შემთხვევაში არსებით როლს ასრულებს საკითხი იმის შესახებ, თუ რომელ რიცხვით არეს ეკუთვნის ეს კოეფიციენტები.

თუ, მაგალითად, ლაპარაკია ფუნქციაზე

$$f(x)=x^4-\frac{2}{5}x^3-2x+\frac{3}{2},$$

შეიძლება ვთქვათ, რომ მისი კოეფიციენტები ეკუთვნის ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველს (იხ. თავი I, § 4). პირიქით,

$$x^3-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{1-2\sqrt{2}}{5}x-1,$$

ფუნქციის კოეფიციენტები ეკუთვნის $R(\sqrt{2})$ ველს, რომელიც მიღებულია $\sqrt{2}$ რიცხვის ჩართვით R ველისადმი (თავი I, § 4).

დავუშვათ, რომ მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

რომლის კოეფიციენტები

$$a_0,\ a_1, \dots, a_{n-1},\ a_n$$

ეკუთვნის P ველს; მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(x)$ **არის x-ის მთელი რაციონალური ფუნქცია** P ველის მიმართ (ანუ P ველში). ამგვარად, **x-ის მთელი რაციონალური ფუნქცია P ველის მიმართ წარმოადგენს გამოსახვას, რომელიც შედგენილია P ველის ელემენტებისაგან და x ელემენტისაგან შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციების საშუალებით.**

საერთოდ, ყოველი გამოსახვა, რომელიც შედგენილია P ველის ელემენტებისაგან და x ელემენტისაგან ოთხი ძირითადი ოპერაციის

საშუალებით (ნულზე გაყოფის გამოკლებით), წარმოადგენს x-ის რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ (მთელ ან წილად) ფუნქციას P ველის მიმართ.

ეს მოსაზრებანი უშუალოდ ვრცელდება რამდენიმე ცვლადზე დამოკიდებულ რაციონალურ ფუნქციებზედაც.

ასე, მაგალითად, გამოსახულება

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{x + y}$$

სადაც a, b და c არის P ველის ელემენტები, წარმოადგენს x და y-ის რაციონალურ (წილად) ფუნქციას P ველის მიმართ.

3. მთელი რაციონალური ფუნქციების შეკრება, გამოკლება და გამრავლება შესრულდება მრავალწევრებზე მოქმედებათა ჩვეულებრივი წესებით; ამასთან შედეგად ვღებულობთ კვლავ მთელ რაციონალურ ფუნქციას.

დავუშვათ, რომ

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \\ \varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m \end{cases}$$

არიან ფუნქციები კოეფიციენტებით, რომლებიც ეკუთვნის P ველს, ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ (1) ფუნქციების ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი წარმოადგენენ რაციონალურ ფუნქციებს, რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე ველს.

განვიხილოთ, მაგალითად, (1) ფუნქციების ნამრავლი:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = a_0b_0x^{n+m} + (a_1b_0 + a_0b_1)x^{n+m-1} + \dots + a_nb_m.$$

კოეფიციენტთა ნამრავლნი

$$a_0b_0, \ a_1b_0 + a_0b_1, \ \dots, \ a_nb_m$$

მიიღება მოცემული ფუნქციების კოეფიციენტებისაგან შეკრებისა და გამრავლების მოქმედებათა საშუალებით; ამიტომ თუ (1) ფუნქციების კოეფიციენტები ეკუთვნის P ველს, მაშინ ნამრავლის კოეფიციენტებიც ეკუთვნის იმავე ველს.

ახლა განვიხილოთ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ყ ვ ე ლ ა მ თ ე ლ ი რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს ა, რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე ველს; წინანდელისაგან გამომდინარეობს, რომ ამ სიმრავლის

ფუნქციათა ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი წარმოადგენენ ამავე სიმრავლის ფუნქციებს; სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, **შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების მოქმედებანი არ გამოგვიყვანს ჩვენი სიმრავლის ფარგლებიდან.**

ამიტომ ვიტყვით, რომ სიმრავლე ყველა მთელი რაციონალური ფუნქციებისა, რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს, ჰქმნის **ალგებრულ რგოლს** (შეად. თავი I, § 4). ჩვენ აქ ვლაპარაკობთ *ალგებრულ* რგოლზე, რათა ხაზგასმით აღვნიშნოთ ის გარემოება, რომ რგოლის *ელემენტები* წარმოადგენენ მთელ რაციონალურ *ფუნქციებს*; მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი არ ექნება გაუგებრობას, ჩვენ ვილაპარაკებთ უბრალოდ „რგოლზე“.

ყოველი წილადი რაციონალური ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის განაყოფი. P_x-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე x-ზე დამოკიდებული ყველა რაციონალური (მთელი ან წილადი) ფუნქციებისა, რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუნქციათა P_x სიმრავლე წარმოადგენს *ალგებრულ ველს*, ან უბრალოდ ველს იმ აზრით, რომ **შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის მოქმედებანი არ გამოგვიყვანს მის ფარგლებიდან.**

არსებითია იმის აღნიშვნა, რომ რიცხვითი P ველი წარმოადგენს P_x ველის ნაწილს:

$$P \subset P_x,$$

რადგან P ველის ყოველი ელემენტი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნულოვანი ხარისხის ფუნქცია. P_x ველი შეიცავს P ველის ელემენტებთან და x ელემენტთან ერთად ყველა ელემენტს, რომლებიც მათგან შეიძლება მივიღოთ ოთხი ძირითადი ოპერაციის საშუალებით. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ (შეად. თავი I, § 4), რომ P_x ველი მივიღეთ P ველისაგან x ელემენტის ჩართვით:

$$P_x = P(x).$$

4. განვიხილოთ ახლა მთელი რაციონალური ფუნქციების გაყოფის ოპერაცია. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ორი მთელი რაციონალური ფუნქციაა, მაშინ საზოგადოდ არ არსებობს ისეთი მთელი რაციონალური ფუნქცია $q(x)$ რომ

$$f(x)=\varphi(x)\,q(x).$$

მაგრამ ყოველთვის შეიძლება განვსაზღვროთ ორი ისეთი ფუნქცია, $q(x)$ და $r(x)$, განაყოფი და ნაშთი, რომ

1) $f(x)=\varphi(x)\,q(x)+r(x)$;

2) $r(x)$ ნაშთის ხარისხი დაბალია $\varphi(x)$ გამყოფის ხარისხზე.

$q(x)$ და $r(x)$ ფუნქციების მოსაძებნად შეიძლება გამოვიყენოთ მრავალწევრების გაყოფის ჩვეულებრივი პროცესი. ყოველი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციათაგანი განვალაგოთ x-ის კლებად ხარისხებად:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

$$\varphi(x)=b_0x^m+b_2x^{m-1}+\ldots+b_m.$$

დავუშვათ, რომ $n>m$*. $f(x)$ ფუნქციის უფროსი წევრი გავყოთ $\varphi(x)$-ის უფროს წევრზე; ეს გვაძლევს განაყოფის უფროს წევრს; თუ გასაყოფს გამოვაკლებთ გამყოფის ნამრავლს განაყოფის უფროს წევრზე, მივიღებთ პირველ ნაშთს, რომლის ხარისხი დაბალია n-ზე და ა. შ. პროცესის არსი მდგომარეობს სწორედ თანმიმდევრობით მიღებული ნაშთების ხარისხის შემცირებაში. პროცესი შეწყდება იმ მომენტში, როცა მიღებული ნაშთის ხარისხი აღმოჩნდება გამყოფის ხარისხზე დაბალი.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ $q(x)$ და $r(x)$ ფუნქციების კოეფიციენტებს მივიღებთ მოცემული $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების კოეფიციენტებისაგან მხოლოდ ძირითადი ოპერაციების საშუალებით. ამიტომ, თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს, **მაშინ $q(x)$ და $r(x)$ ფუნქციების კოეფიციენტებიც ეკუთვნიან იმავე ველს.**

შენიშვნა. ელემენტარული ალგებრის სახელმძღვანელოებში ხშირად აღნიშნავენ, რომ მრავალწევრთა გაყოფის პროცესი შეიძლება ვაწარმოოთ ერთ-ერთი შემდეგი სქემის გამოყენებით:

ა) გასაყოფი და გამყოფი განვალაგოთ მთავარი ასოს კლებად ხარისხებად, გასაყოფის უფროსი წევრი გავყოთ გამყოფის უფროს წევრზე და ა. შ.

* თუ $n<m$, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ 1) და 2) მოთხოვნები, თუ დავუშვებთ, რომ

$$q(x)=0,\ r(x)=f(x).$$

ბ) გასაყოფი და გამყოფი განვალაგოთ მთავარი ასოს ზრდად ხარისხებად, გასაყოფის დაბალი წევრი გავყოთ გამყოფის დაბალ წევრზე და ა. შ.

ხაზგასმით უნდა აღვნიშნოთ ის გარემოება, რომ გაყოფის პროცესი, რომელიც შეესაბამება ბ) სქემას, პრინციპულად განსხვავდება ა) პროცესისაგან. მართლაც, ბ) პროცესს, განსხვავებით ა)-საგან, თან ახლავს თანმიმდევრად მიღებული ნაშთების ხარისხის ა მ ა ღ ლ ე ბ ა. ამ პროცესს მივყევართ $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ განაყოფის დაშლამდე უსასრულო მწკრივად. ამგვარად, აქ გადავდივართ უსასრულო პროცესების არეში, ანალიზის არეში.

5. თუ $f(x)$ ფუნქციის* $\varphi(x)$-ზე გაყოფის დროს აღმოჩნდება, რომ $r(x)$ ნაშთი ნულის ტოლია, მაშინ გვექნება:

$$f(x)=\varphi(x)\,q(x); \tag{2}$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $f(x)$ იყოფა $\varphi(x)$-ზე, ან $\varphi(x)$ წარმოადგენს $f(x)$-ის გამყოფს.

იმისათვის, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია იყოს $f(x)$ ფუნქციის გამყოფი, აუცილებელია და საკმარისია, რომ არსებობდეს მთელი რაციონალური $q(x)$ ფუნქცია, რომლისათვისაც შესრულდება (2) ტოლობა.

ახლა განვიხილოთ ზოგიერთი თვისებანი, რომლებიც დაკავშირებულია მთელი რაციონალური ფუნქციების გაყოფადობასთან.

I. **თუ $f(x)$ იყოფა $\varphi(x)$-ზე, ხოლო $\varphi(x)$ თავის მხრივ იყოფა $\lambda(x)$-ზე, მაშინ $f(x)$-იც იყოფა $\lambda(x)$-ზე.**

პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $q(x)$ და $q_1(x)$ მთელი ფუნქციები, რომლებისთვისაც

$$f(x)=\varphi(x)\,q(x),\quad \varphi(x)=\lambda(x)\,q_1(x).$$

ჩავსვამთ რა $\varphi(x)$-ის გამოსახვას მეორე ტოლობიდან პირველში, მივიღებთ:

$$f(x)=\lambda(x)\,q(x)\,q_1(x);$$

მაგრამ ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის ნამრავლი $q(x)\,q_1(x)$

* შემდეგში სიტყვა „ფუნქციის" ქვეშ (თუ საწინააღმდეგო არ იქნება აღნიშნული) ვიგულისხმებთ მ თ ე ლ რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს, რომლის კოეფიციენტები ეკუთვნის P ველს.

წარმოადგენს კვლავ x-ის მთელ რაციონალურ ფუნქციას. აღვნიშნავთ რა ამ ფუნქციას $Q(x)$-ით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x)=\lambda(x)\,Q(x);$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ იყოფა $\lambda(x)$-ზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თვისება I შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: **თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოდგენილია ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით: $f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)$ და თუ ერთი ამ ფუნქციათაგანი, მაგალითად, $\varphi(x)$ იყოფა $\lambda(x)$-ზე, მაშინ $f(x)$-ც იყოფა $\lambda(x)$-ზე.**

II. **თუ თითოეული $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციათაგანი იყოფა $\lambda(x)$-ზე, მაშინ მათი ჯამიც ან სხვაობაც $f_1(x)\pm f_2(x)$ აგრეთვე იყოფა $\lambda(x)$-ზე.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც თითოეული $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციათაგანი იყოფა $\lambda(x)$-ზე, ამიტომ

$$f_1(x)=\lambda(x)Q_1(x),\quad f_2(x)=\lambda(x)Q_2(x),$$

სადაც $Q_1(x)$ და $Q_2(x)$ მთელი რაციონალური ფუნქციებია. ამ თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს:

$$f_1(x)\pm f_2(x)=\lambda(x)\{Q_1(x)\pm Q_2(x)\}.$$

აქ $Q_1(x)\pm Q_2(x)$ არის x-ის მთელი რაციონალური ფუნქცია; მაშასადამე, $f_1(x)\pm f_2(x)$ იყოფა $\lambda(x)$-ზე.

შედეგი. თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ იყოფა $\lambda(x)$-ზე და $\alpha(x)$, $\beta(x)$ მთელი რაციონალური ფუნქციებია, მაშინ $\alpha(x)\,f_1(x)+\beta_1(x)\,f_2(x)$ ჯამიც აგრეთვე იყოფა $\lambda(x)$-ზე.

მართლაც, ყოველი შესაკრები იყოფა $\lambda(x)$-ზე (თვისება I, შენიშვნა), მაშასადამე, იყოფა ჯამიც (თვისება II).

III. **ყოველი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია იყოფა ნულოვანი ხარისხის ყოველ ფუნქციაზე, ე. ი. ყოველ c მუდმივზე, ნულის გარდა.**

მართლაც, დავუშვათ, რომ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n;$$

ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x)=c\cdot\left\{\frac{1}{c}\,f(x)\right\},$$

სადაც

$$\frac{1}{c} f(x) = \frac{a_0}{c} x^n + \frac{a_1}{c} x^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{c} \qquad (3)$$

არის x-ის მთელი რაციონალური ფუნქცია. თუ $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები და c რიცხვი ეკუთვნის P ველს, მაშინ $\frac{a_0}{c}$, $\frac{a_1}{c}$,... ...,$\frac{a_n}{c}$ კოეფიციენტებიც ეკუთვნის იმავე ველს. ამგვარად, $f(x)$ ფუნქცია წარმოდგენილია ნულოვანი ხარისხის c ფუნქციისა და მთელი რაციონალური $\frac{1}{c} f(x)$ ფუნქციის ნამრავლის სახით, ე. ი. იყოფა c-ზე.

IV. თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია არის $f(x)$ ის გამყოფი, მაშინ $c\varphi(x)$ ფუნქცია (სადაც c არის ნულისაგან განსხვავებული მუდმივი), აგრეთვე იქნება $f(x)$-ის გამყოფი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის თანახმად, არსებობს მთელი რაციონალური $q(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$f(x) = \varphi(x)\, q(x).$$

ეს ტოლობა შეგვიძლია შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$f(x) = c\varphi(x) \left\{ \frac{1}{c}\, q(x) \right\}.$$

ნაკვთურ ბრჩხილებში მოქცეული გამოსახულება წარმოადგენს მთელ რაციონალურ ფუნქციას (თვისება III); მაშასადამე, $f(x)$ იყოფა $c\varphi(x)$-ზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თვისება IV გვიჩვენებს, რომ მთელი რაციონალური ფუნქციების გაყოფადობასთან დაკავშირებულ საკითხებში მუდმივი მამრავლები არ თამაშობს არსებით როლს: თუ $f(x)$ ფუნქცია იყოფა $\varphi(x)$-ზე, მაშინ რომელიმე ამ ფუნქციათაგანის გამრავლებით მუდმივ მამრავლზე მდგომარეობა არ შეიცვლება.

სავარჯიშო.

დაამტკიცეთ: 1) თუ n ხარისხის $f(x)$ ფუნქცია იყოფა იმავე ხარისხის $\varphi(x)$ ფუნქციაზე, მაშინ $f(x)$ მხოლოდ მუდმივი მამრავლით განსხვავდება $\varphi(x)$-საგან.

2) თუ $f(x)$ ფუნქცია იყოფა $\varphi(x)$-ზე, ხოლო $\varphi(x)$ თავის მხრივ იყოფა $f(x)$-ზე, მაშინ $f(x)$ მხოლოდ მუდმივი მამრავლით განსხვავდება $\varphi(x)$ საგან.

§ 2. უდიდესი საერთო გამყოფი

1. განვიხილოთ ორი ფუნქციის საერთო გამყოფების მოძებნის საკითხი. თუ თითოეული $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციათაგანი იყოფა $\lambda(x)$-ზე, მაშინ $\lambda(x)$-ს ეწოდება $f(x)$ და $\varphi(x)$-ის **საერთო გამყოფი**. $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების **უდიდესი საერთო გამყოფი** ეწოდება **უმაღლესი ხარისხის საერთო გამყოფს**. უდიდესი საერთო გამყოფის მოსაძებნად უნდა მივმართოთ თანმიმდევრად გაყოფის პროცესს, რომელიც ანალოგიურია იმ პროცესისა, რომელსაც იყენებენ არითმეტიკაში ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის მოსაძებნად. ამ პროცესს ზოგჯერ უწოდებენ **ევკლიდეს ალგორითმს**, რადგან ევკლიდე იყენებს ამ პროცესს თავის „საწყისებში“.

ვთქვათ, რომ საძიებელია $f(x)$ ფუნქციის (n ხარისხის) და $\varphi(x)$ ფუნქციის (m ხარისხის) უდიდესი საერთო გამყოფი. დავუშვათ, რომ $n \geqq m$. თუ $f(x)$ ფუნქცია იყოფა $\varphi(x)$-ზე, მაშინ $\varphi(x)$ იქნება უდიდესი საერთო გამყოფი. ვთქვათ, რომ $f(x)$ არ იყოფა $\varphi(x)$-ზე; აღვნიშნავთ რა განაყოფს $q_1(x)$ და $r_1(x)$-ით ნაშთს $f(x)$-ის გაყოფისა $\varphi(x)$-ზე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x) = \varphi(x)\, q_1(x) + r_1(x), \tag{4}$$

ამასთან $r_1(x)$-ის ხარისხი დაბალია $\varphi(x)$ ხარისხზე (იხ. პუნქ. 4).

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ყოველი საერთო $\lambda(x)$ გამყოფი აგრეთვე იქნება $r_1(x)$ ფუნქციის გამყოფიც. მართლაც, თანაფარდობა (4) შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$r_1(x) = f(x) - \varphi(x)\, q_1(x).$$

თუ დავუშვებთ, რომ თითოეული $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციათაგანი იყოფა $\lambda(x)$-ზე, მაშინ გამოვიყენებთ რა თვისებას II (შედეგი, § 1, პუნქ. 5 ამასთან უნდა დავუშვათ, რომ $\alpha(x) = 1$, $\beta(x) = -q_1(x)$), ვიპოვით, რომ $r_1(x)$ აგრეთვე იყოფა $\lambda(x)$-ზე. ამგვარად, $\lambda(x)$ ფუნქცია აგრეთვე იქნება საერთო გამყოფი ფუნქციებისა

$$\varphi(x) \text{ და } r_1(x).$$

პირიქით, $\varphi(x)$ და $r_1(x)$ ფუნქციების ყოველი საერთო გამყოფი იქნება $f(x)$-ის გამყოფი. რომ დავრწმუნდეთ ამაში, საკმარისია გა-

მოვიყენოთ II თვისება (შედეგი) (4) თანაფარდობებისადმი. ამგვარად,

(5) $$f(x) \text{ და } \varphi(x)$$

ფუნქციების საერთო გამყოფი არის აგრეთვე

(6) $$\varphi(x) \text{ და } r_1(x)$$

ფუნქციების საერთო გამყოფიც, და პირიქით; სხვა სიტყვებით, **საერთო გამყოფები ორთავე წყვილი ფუნქციებისათვის** *ერთი და იგივე იქნება*; ამიტომ იმის ნაცვლად, რომ ვიპოვოთ (5) ფუნქციების უდიდესი საერთო გამყოფი, შეიძლება ვიპოვოთ (6) ფუნქციების უდიდესი საერთო გამყოფი.

თუ აღმოჩნდება, რომ $\varphi(x)$ უნაშთოდ იყოფა $r_1(x)$-ზე, მაშინ $r_1(x)$ იქნება $f(x)$ და $\varphi(x)$-ის უდიდესი საერთო გამყოფი. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ $q_2(x)$ და $r_2(x)$-ით აღვნიშნავთ განაყოფს და ნაშთს $\varphi(x)$-ის გაყოფისა $r_1(x)$-ზე, გვექნება:

$$\varphi(x)=r_1(x)\,q_2(x)+r_2(x),$$

და მაშინ საჭირო იქნება მხოლოდ $r_1(x)$ და $r_2(x)$ ფუნქციების უდიდესი საერთო გამყოფის მონახვა. თუ $r_1(x)$ არ იყოფა $r_2(x)$-ზე, მაშინ გადავალთ $r_2(x)$ და $r_3(x)$ წყვილ ფუნქციაზე და ა. შ. ეს პროცესი შეიძლება განვაგრძოთ მანამ, სანამ არ მივიღებთ ნულის ტოლ ნაშთს. ასეთ ნაშთამდე აუცილებლად მივალთ, რადგან თანმიმდევრად მიღებული ნაშთების ხარისხები განუწყვეტლივ კლებულობს. დავუშვათ, რომ $r_{p+1}(x)$ არის *უკანასკნელი ნაშთი, რომელიც არაა ნულის ტოლი*; მაშინ *გვექნება შემდეგი ტოლობათა მიმდევრობა*:

(7) $$\begin{cases} f(x)=\varphi(x)\,q_1(x)+r_1(x), \\ \varphi(x)=r_1(x)\,q_2(x)+r_2(x), \\ r_1(x)=r_2(x)\,q_3(x)+r_3(x), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_{p-2}(x)=r_{p-1}(x)\,q_p(x)+r_p(x), \\ r_{p-1}(x)=r_p(x\ \ q_{p+1}(x)+r_{p+1}(x). \end{cases}$$

$r_p(x)$ ფუნქცია უნაშთოდ იყოფა $r_{p+1}(x)$-ზე:

(7a) $$r_p(x)=r_{p+1}(x)\,q_{p+2}(x).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $r_p(x)$ და $r_{p+1}(x)$ წყვილი ფუნქციისათვის უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება $r_{p+1}(x)$. წინანდელის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $r_{p+1}(x)$ აგრეთვე უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება $r_{p-1}(x)$, $r_p(x)$ წყვილი ფუნქციისათვის. მაშასადამე, $r_{p-2}(x)$, $r_{p-1}(x)$-სათვის და ა. შ. და ბოლოს, $f(x)$ და $\varphi(x)$-სათვის.

ამგვარად, ნულისაგან განსხვავებული უკანასკნელი ნაშთი, რომელიც მიღებულია თანმიმდევრობითი გაყოფის პროცესში, წარმოადგენს $f(x)$ და $\varphi(x)$-ის უდიდეს საერთო გამყოფს.

შენიშვნები: ა) $q_1(x)$, $q_2(x)$, . . . ფუნქციების, აგრეთვე $r_1(x)$ $r_2(x)$ . . . ფუნქციების კოეფიციენტებს, $f(x)$ და $\varphi(x)$ კოეფიციენტებისაგან მივიღებთ ოთხი ძირითადი ოპერაციის საშუალებით; ამიტომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების კოეფიციენტები ეკუთვნის P ველს, მაშინ **ყველა ფუნქციის კოეფიციენტები, რომლებსაც მივიღებთ თანმიმდევრობითი გაყოფის პროცესში, ეკუთვნის იმავე ველს.** კერძოდ $r_{p+1}(x)$ **უდიდესი საერთო გამყოფის კოეფიციენტები აგრეთვე P ველს ეკუთვნის.**

ბ) ზევით დავინახეთ, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ყოველი $\lambda(x)$ საერთო გამყოფი იქნება აგრეთვე $r_1(x)$ ნაშთის გამყოფი; ამ შენიშვნას თანმიმდევრობით გამოვიყენებთ რა ყოველ (7) ტოლობათაგანის მიმართ, დავასკვნით, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ყოველი საერთო გამყოფი აგრეთვე იქნება $r_{p+1}(x)$ ფუნქციის. საერთო გამყოფი. ამგვარად, $r_{p+1}(x)$ ფუნქცია (უდიდესი საერთო გამყოფი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ისა) **უნაშთოდ იყოფა მოცემულ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ყოველ საერთო გამყოფზე.**

გ) ჩვენ უკვე ვიცით (იხ. პუნქტ. 5), რომ მთელი რაციონალური ფუნქციების გაყოფადობის საკითხებში მუდმივი მამრავლები არ თამაშობს არსებით როლს; ამიტომ, თუ c არის ნულისაგან განსხვავებული ნებსითი მუდმივი, მაშინ $cr_{+1}(x)$ ფუნქციაც შეიძლება ჩაითვალოს $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების უდიდეს საერთო გამყოფად.

პირიქით, თუ რომელიმე $\rho(x)$ ფუნქციას აქვს $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების უდიდესი საერთო გამყოფის თვისებები, მაშინ $r_{p+1}(x)$-საგან ის შეიძლება განსხვავდებოდეს მხოლოდ მუდმივი მამრავლით. მართლაც, წინა შენიშვნის საფუძველზე $r_{p+1}(x)$ ფუნქცია იყოფა $\rho(x)$ ზე; აღვნიშნავთ რა $\sigma(x)$-ით ამ განაყოფს, გვექნება:

$$r_{p+1}=\rho(x).\ \sigma(x);$$

თუ დავუშვებთ, რომ მთელი რაციონალური $\sigma(x)$ ფუნქციის ხარისხი ნულზე მეტია, მაშინ $\rho(x)$-ის ხარისხი ნაკლები იქნება $r_{p+1}(x)$-ის ხარისხზე, ე. ი. $\rho(x)$ არ იქნება უდიდესი საერთო გამყოფი. ამიტომ $\sigma(x)$ არის ნულოვანი ხარისხის ფუნქცია და შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\sigma(x)=k,$$

სადაც k არის მუდმივი; მაგრამ მაშინ

$$r_{p+1}(x)=k\rho(x),$$

ე. ი. $\rho(x)$ განსხვავდება $r_{p+1}(x)$-საგან მუდმივი მამრავლით.

ამგვარად, $f(x)$ და $\varphi(x)$-ის **უდიდესი საერთო გამყოფი წარმოადგენს ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია სიზუსტით მუდმივ მამრავლამდე.** $D(x)$-ით აღვნიშნოთ უდიდესი საერთო გამყოფი; მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$D(x)=cr_{p+1}(x), \tag{8}$$

სადაც მუდმივი c მამრავლი ნებსითი რჩება; ეს მამრავლი ყოველთვის შეგვიძლია ავარჩიოთ ისე, რომ $D(x)$ ფუნქციის უფროსი წევრის კოეფიციენტი ერთეულის ტოლი იყოს.

დ) შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $D(x)$ — უდიდესი საერთო გამყოფი — იყოს ნულოვანი ხარისხის ფუნქცია. ამ შემთხვევაში $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს არ აქვთ x-ზე დამოკიდებული საერთო გამყოფები.

$f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს, რომლებსაც არ აქვთ x-ზე დამოკიდებული საერთო გამყოფი, ეწოდება ურთიერთ მარტივი.

თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ურთიერთ მარტივია, მაშინ ყოველი მუდმივი შეიძლება ჩავთვალოთ მათ უდიდეს საერთო გამყოფად; კერძოდ, უდიდეს საერთო გამყოფად შეიძლება მივიჩნიოთ ერთეული.

ე) ზევით დავინახეთ, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება აგრეთვე უდიდესი საერთო გამყოფი ყოველი შემდეგი წყვილი ფუნქციებისათვისაც:

$$\begin{array}{c} \varphi(x),\ r_1(x); \\ r_1(x),\ r_2(x); \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_p(x),\ r_{p+1}(x). \end{array} \tag{9}$$

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება აგრეთვე უდიდესი საერთო გამყოფი ყოველი ორი ერთიმეორის გვერდით მდგომი ფუნქციისა მიმდევრობაში:

$$f(x),\ \varphi(x),\ r_1(x),\ \ldots,\ r_p(x),\ r_{p+1}(x). \tag{10}$$

კერძოდ, თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ურთიერთ მარტივია, მაშინ $D(x)=1$. ამ შემთხვევაში უდიდესი საერთო გამყოფი (9) სისტემიდან აღებულ ფუნქციათა ყოველი წყვილისათვის აგრეთვე ერთეულის ტოლია; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (9) სისტემიდან აღებულ ფუნქციათა ყოველი წყვილი წარმოადგენს ურთიერთ მარტივი ფუნქციების წყვილს. ამგვარად, თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ **ფუნქციები ურთიერთ მარტივია, მაშინ ყოველი ორი ერთიმეორის გვერდით მდგომი ფუნქცია (10) მიმდევრობაში აგრეთვე იქნება ურთიერთ მარტივი.**

ვ) ფუნქციები, რომლებთანაც საქმე გვაქვს თანმიმდევრობით გაყოფის პროცესში, შეიძლება გავამრავლოთ შესაფერის რიცხვით მამრავლებზე, რომ ავიცილოთ წილადი კოეფიციენტები. თუ ამოცანად ვისახავთ მხოლოდ უდიდესი საერთო გამყოფის მონახვას, მაშინ განაყოფები

$$q_1(x),\ q_2(x), \ldots$$

არ თამაშობს არსებით როლს; ამ შემთხვევაში შეიძლება მუდმივ მამრავლებზე გავამრავლოთ საშუალედო ნაშთებიც, ე. ი. ერთი განსაზღვრული გაყოფის პროცესში მიღებული ნაშთები. ამასთან განაყოფი არსებითად მახინჯდება; რაც შეეხება ნაშთს, მას შეუძლია შეიძინოს მხოლოდ მუდმივი მამრავლი.

მაგალითი.

ვთქვათ, საძიებელია უდიდესი საერთო გამყოფი ფუნქციებისა

$$f(x)=x^4+x^3-2x^2-x-2,\ \varphi(x)=2x^3+5x^2+x-2.$$

ჩვენ მოგვიწევს $f(x)$-ის $\varphi(x)$-ზე გაყოფა. ამ გაყოფის დროს რომ ავიცილოთ წილადები, $f(x)$ ფუნქცია თავიდან 2-ზე გავამრავლოთ:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+2x^3-4x^2-2x-4 & 2x^3+5x^2+x-2 \\ \cline{2-2} 2x^4+5x^3+x^2-2x & x \\ \cline{1-1} -3x^3-5x^2\qquad -4 & \end{array}$$

$f(x)$-ის გაყოფა $\varphi(x)$-ზე ჯერ კიდევ არაა დამთავრებული: აქ გვაქვს საშუალედო ნაშთი

$$(*) \qquad -3x^3-5x^2-4;$$

თუ გაყოფას განვაგრძობთ ჩვეულებრივი გზით, მაშინ საჭირო შეიქნება წილადი კოეფიციენტების შემოყვანა; რომ ეს ავიცილოთ, ფუნქცია (*) გავამრავლოთ 2-ზე. სწორედ ამით ვ ა მ ა ხ ი ნ ჯ ე ბ თ განაყოფის მეორე წევრს; რომ აღვნიშნოთ ეს, პირველი წევრისაგან მას ვაშორებთ ორი ხაზით:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4+2x^3-4x^2-2x-4 & 2x^3+5x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
2x^4+5x^3+x^2-2x & x \parallel -3. \\ \cline{1-1}
-3x^3-5x^2\qquad -4 & \\ \cline{1-1}
-6x^3-10x^2\qquad -8 & \\
-6x^3-15x^2-3x+6 & \\ \cline{1-1}
5x^2+3x-14. &
\end{array}$$

მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით, ფუნქცია

$$(11) \qquad r_1(x)=5x^2+3x-14$$

წარმოადგენს ნაშთს, რომელიც მიიღება $f(x)$ ფუნქციის $\varphi(x)$-ზე გაყოფის დროს. ახლა $\varphi(x)$ გავყოთ ამ ნაშთზე; $\varphi(x)$ ფუნქცია წინასწარ შეიძლება გავამრავლოთ 5-ზე;

$$\begin{array}{r|l}
10x^3+25x^2+5x-10 & 5x^2+3x-14 \\ \cline{2-2}
10x^3+6x^2-28x & 2x \parallel +19 \\ \cline{1-1}
19x^2+33x-10 &
\end{array}$$

(გავამრავლებთ 5-ზე)

$$\begin{array}{r}
95x^2+165x-50 \\
95x^2+57x-266 \\ \hline
108x+216
\end{array}$$

ნაშთში მივიღეთ ფუნქცია

$$(12) \qquad r_2(x)=108\,x+216=108\,(x+2);$$

ახლა $r_1(x)$ ფუნქცია უნდა გავყოთ $r_2(x)$ ფუნქციაზე; ამასთანავე, მუდმივი მამრავლი 108 შეიძლება უკუვაგდოთ:

$$\begin{array}{r|l}
5x^2+3x-14 & x+2 \\ \cline{2-2}
5x^2+10x & 5x-7 \\ \cline{1-1}
-7x-14 & \\
-7x-14 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

გაყოფა მოხდა მთლიანად — ნაშთი ნულის ტოლია. უკანასკნელი ნაშთი, განსხვავებული ნულისაგან — ე. ი. სიზუსტით მუდმივ მამრავლამდე, ფუნქცია (17) — იქნება $f(x)$ და $\varphi(x)$-ის უ დ ი დ ე ს ი ს ა ე რ თ ო გ ა მ ყ ო ფ ი:

$$D(x) = x + 2.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: რომ თავიდან ავიცილოთ განაყოფის დამახინჯება $f(x)$-ის გაყოფისას $\varphi(x)$-ზე, საკმარისი იყო ჩვენს მაგალითში $f(x)$ ერთბაშად გაგვემრავლებია 4-ზე. მაშინ განაყოფში მივიღებთ $2x - 3$, ასე, რომ შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\underbrace{4(x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 2)}_{f(x)} =$$

$$= \underbrace{(2x^3 + 5x^2 + x - 2)}_{\varphi(x)} \underbrace{(2x - 3)}_{q_1(x)} + \underbrace{5x^2 + 3x - 14}_{r_1(x)}. \tag{13}$$

მეორე გაყოფის შედეგი ამგვარადვე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$25\underbrace{(2x^3 + 5x^2 + x - 2)}_{\varphi(x)} = \underbrace{(5x^2 + 3x - 14)}_{r_1(x)} \underbrace{(10x + 19)}_{q_2(x)} + \underbrace{108(x + 2)}_{r_2(x)}. \tag{14}$$

დავუშვებთ რა $D(x) = x + 2$,
გვექნება:

$$D(x) = \frac{1}{108}\, r_2(x).$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო.

იპოვეთ უდიდესი საერთო გამყოფი შემდეგი ფუნქციებისა:

ა) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ და $2x^3 - 5x^2 - 4 + 3$;
ბ) $x^5 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1$ და $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$;
გ) $2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ და $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;
დ) $x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1$ და $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2$;
ე) $2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2$ და $x^3 - 3x^2 - x + 2$.

2. თეორემა. თუ $D(x)$ არის $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების უდიდესი საერთო გამყოფი, მაშინ ყოველთვის შეიძლება განვსაზღვროთ ისეთი ორი $F(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქცია, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(x)f(x) + \Phi(x)\varphi(x) = D(x). \tag{15}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. წარმოვიდგინოთ, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებისათვის შესრულებულია თანმიმდევრობითი გაყოფის პროცესი; თუ $r_{p+1}(x)$ არის ნულისაგან განსხვავებული უკანასკნელი ნაშთი, მაშინ

$$D(x) = c\,r_{p+1}(x).$$

ახლა განვიხილოთ სისტემა (7) ტოლობებისა, რომლებსაც ვღებულობთ თანმიმდევრობითი გაყოფის გზით; ეს ტოლობანი შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(16)\qquad \begin{cases} r_1(x)=f(x)-\varphi(x)q_1(x), \\ r_2(x)=\varphi(x)-r_1(x)q_2(x), \\ r_3(x)=r_1(x)-r_2(x)q_3(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_p(x)=r_{p-2}(x)-r_{p-1}(x)\,q_p(x), \\ r_{p+1}(x)=r_{p+1}(x)-r_p(x)\,q_{p+1}(x). \end{cases}$$

პირველი ამ თანაფარდობათაგანი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$(17)\qquad r_1(x)=A_1 f(x)+B_1\varphi(x),$$

სადაც

$$A_1=1,\ B_1=-q_1(x).$$

ჩავსვამთ რა გამოსახულებას $r_1(x)$-სათვის (16) სისტემის მეორე ტოლობაში, ვიპოვით

$$(18)\qquad r_2(x)=A_2 f(x)+B_2\varphi(x),$$

სადაც

$$A_2=-q_2(x),\ B_2=1+q_1(x)\,q_2(x).$$

თუ (17) და (18) გამოსახულებებს $r_1(x)$ და $r_2(x)$-სათვის ჩავსვამთ (16) სისტემის მესამე ტოლობაში, მივიღებთ შემდეგი სახის თანაფარდობას:

$$r_3(x)=A_3 f(x)+B_3\varphi(x),$$

სადაც A_3 და B_3 მთელი რაციონალური ფუნქციებია.

ამ პროცესს განვაგრძობთ მანამ, სანამ არ მივალთ (16) სისტემის უკანასკნელ ტოლობამდე. ამგვარად, მივალთ შემდეგი სახის თანაფარდობამდე

$$r_{p+1}(x)=A_{p+1} f(x)+B_{p+1}\varphi(x),$$

სადაც A_{p+1} და B_{p+1} არიან x-ის მთელი რაციონალური ფუნქციები.

თუ უკანასკნელ ტოლობის ორთავე ნაწილს გავამრავლებთ c მუდმივზე და დავუშვებთ, რომ

$$cA_{p+1}=F(x),\ \ cB_{p+1}=\Phi(x),$$

მივიღებთ (15) თანაფარდობას.

შედეგი. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ *ფუნქციები ურთიერთ მარტივია, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია ორი* $F(x)$ *და* $\Phi(x)$ *ფუნქცია განვსაზღვროთ იმგვარად, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას*

$$F(x)f(x)+\Phi(x)\varphi(x)=1. \tag{19}$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$D(x)=1$$

შენიშვნა. $F(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციების მოძებნის დროს არსებით როლს თამაშობს არა მარტო ნაშთები, არამედ განაყოფებიც, რომლებსაც ვღებულობთ თანმიმდევრობითი გაყოფის პროცესში; ამ შემთხვევაში დაუშვებელია განაყოფის დამახინჯება.

მაგალითი. *განვიხილოთ ფუნქცია.*

$$f(x)=x^4+x^3-2x^2-x-2,\ \ \varphi(x)=2x^3+5x^2+x-2,$$

რომლებთანაც საქმე გვქონდა მე-6 პუნქტში, და ვუჩვენოთ, თუ როგორ განვსაზღვროთ ამ ფუნქციებისათვის $F(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებს (15) თანაფარდობას. რომ ავიცილოთ განაყოფთა დამახინჯება, ჩავატაროთ თანმიმდევრობითი გაყოფის პროცესი, როგორც ეს აღნიშნულია წინა პუნქტის შენიშვნაში. (13) და (14) ტოლობანი გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left|\begin{aligned} r_1(x)&=5x^2+3x-14=4(x^4+x^3-2x^2-x-2)-\\ &\qquad -(2x-3)(2x^3+5x^2+x-2);\\ r_2(x)&=108(x+2)=25(2x^3+5x^2+x-2)-\\ &\qquad -(10x+19)(5x^2+3x-14).\end{aligned}\right. \tag{20}$$

ეს ტოლობანი ასრულებენ (16) თანაფარდობათა როლს.

პირველი ამ ტოლობათაგანი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით

$$r_1(x)=5x^2+3x+14=$$
$$=A_1(x^4+x^3-2x^2-x-2)+B_1(2x^3+5x^2+x-2),$$

სადაც

$$A_1=4,\ B_1=-(2x-3).$$

ჩავსვამთ რა (20) თანაფარდობის მეორე ტოლობაში $r_1(x)$ ფუნქციის ნაცვლად მის გამოსახულებას პირველიდან, მივიღებთ:

$$r_3(x) = A_2(x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 2) + B_2(2x^3 + 5x^2 + x - 2),$$

სადაც

$$A_2 = -4(10x+19),\ B_2 = 25 + (10x + 19)(2x - 3).$$

ახლა, თუ გვსურს, შეგვიძლია გადავიდეთ ფუნქციაზე

$$D(x) = x + 2 = \frac{1}{108}\, r_3(x);$$

ჩვენ მივიღებთ თანაფარდობას

$$x + 2 = -\frac{1}{27}(10x + 19)(x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 2) +$$

$$+\frac{1}{27}(5x^2 + 2x - 8)(2x^3 + 5x^2 + x - 2),$$

რომელიც ადვილად შემოწმდება უშუალო გამოთვლით. ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში გვაქვს:

$$F(x) = -\frac{1}{27}(10x+19),\quad \Phi(x) = \frac{1}{27}(5x^2 + 2x - 8).$$

§ 3. გაყოფა $x - a$-ზე. რაციონალური ფესვების მონახვა

1. უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ გაყოფის ერთი კერძო შემთხვევა: დავუშვათ, რომ საჭიროა $f(x)$ მთელი რაციონალური ფუნქციის გაყოფა ორწევრზე $x - a$. რადგან გამყოფი წარმოადგენს პირველი ხარისხის ფუნქციას, ამიტომ ნაშთი იქნება ნულოვანი ხარისხის ფუნქცია, ე. ი. მუდმივი. ამგვარად, გვექნება:

$$f(x) = (x - a)\, q(x) + r, \tag{21}$$

სადაც $q(x)$ არის განაყოფი, r — ნაშთია (მუდმივი). თანაფარდობა (21) წარმოადგენს იგივობას x-ის მიმართ: ის სამართლიანია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. თუ ამ იგივობაში დავუშვებთ $x = a$, მივიღებთ:

$$f(a) = r. \tag{22}$$

აქ $f(a)$ არის $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $x=a$ მნიშვნელობას, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის გამოსახულებაში $x=a$ მნიშვნელობის ჩასმის შედეგია.

ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ დასკვნას:

$f(x)$ ფუნქციის $x-a$ ორწევრზე გაყოფით მიღებული ნაშთი r ტოლია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობისა, როცა $x=a$.

ამ დებულებას ზოგჯერ უწოდებენ ბ ე ზ უ ს (Bézout) თეორემას. აღვნიშნოთ ამ თეორემის ორი შედეგი:

I. ყოველი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციისათვის $f(x)-f(a)$ სხვაობა უნაშთოდ იყოფა $x-a$-ზე.

მართლაც, ჩავსვამთ რა (21) ტოლობაში r ნაშთის გამოსახულებას, მიღებულს (22) ტოლობით, გვექნება:

$$f(x)=(x-a)\,q(x)+f(a),$$

ანუ

$$f(x)-f(a)=(x-a)\,q(x),$$

ე. ი.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=q(x),$$

სადაც $q(x)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია.

II. თუ $f(x)$ ი ყ ო ფ ა $x-a$-ზე, ე. ი. r ნაშთი იქცევა ნულად, მაშინ ტოლობა (21) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x)=(x-a)\,q(x),$$

ხოლო ტოლობა (22) გვაძლევს

$$f(a)=0.$$

ამგვარად, ამ შემთხვევაში a რიცხვი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$f(x)=0; \tag{23}$$

შეიძლება ვთქვათ, რომ a რიცხვი წარმოადგენს 23 განტოლების ფესვს, ან $f(x)$ ფუნქციის ფესვს.

a რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფესვი, თუ მას შეესაბამება ფუნქციის $f(a)$ მნიშვნელობა, რომელიც ნულის ტოლია.

ამგვარად, თუ $f(x)$ იყოფა $x-a$-ზე, მაშინ a რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვი.

პირიქით, თუ a რიცხვი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს, მაშინ $f(x)$ უნაშთოდ იყოფა $x-a$-ზე. მართლაც, ამ შემთხვევაში

$$r=f(a)=0.$$

$f(x)$ ფუნქციის $x-a$-ზე გაყოფის პროცესი მეტად მარტივად შესრულდება ეგრეთ წოდებული ჰ ო რ ნ ე რ ი ს სქემის საშუალებით.

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ საუბარია მეოთხე ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციაზე:

$$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4.$$

განაყოფი, მიღებული $f(x)$ ფუნქციის $x-a$-ზე გაყოფით, იქნება მესამე ხარისხის ფუნქცია

$$q(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3.$$

ამ შემთხვევაში (21) თანაფარდობა შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x-a)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)+r.$$

შევასრულებთ რა ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში აღნიშნულ ოპერაციებს, მივიღებთ:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=$$

$$=b_0x^4+(b_1-ab_0)x^3+(b_2-ab_1)x^2+(b_3-ab_2)x+r-ab_3.$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილში უნდა გვექნეს იგივე ფ უ ნ ქ ც ი ა, რაც მარჯვენა ნაწილში, მაშასადამე, უნდა იყოს:

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-ab_0,\ a_2=b_2-ab_1,$$

$$a_3=b_3-ab_2,\ a_4=r-ab_3.$$

ამ ტოლობებიდან ადვილად ვიპოვით განაყოფის კოეფიციენტებს და ნაშთს:

$$b_0=a_0,\ b_1=b_0a+a_1,\ b_2=b_1a+a_2,\ b_3=b_2a+a_3;$$

$$r=b_3a+a_4.$$

მსგავსი მსჯელობა შეგვიძლია ჩავატაროთ ზოგადი სახით. თუ მოცემულია n ხარისხის მრავალწევრი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის გაყოფით $x-a$-ზე განაყოფში მივიღებთ $n-1$ ხარისხის მრავალწევრს:

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-1},$$

სადაც

(24) $b_0=a_0;\ b_1=b_0a+a_1,\ b_2=b_1a+a_2,\ \dots,\ b_{n-1}=b_{n-2}a+a_{n-1}.$

ნაშთი იქნება

(25) $$r=b_{n-1}a+a_n.$$

ამგვარად, განაყოფის ყველა კოეფიციენტი, დაწყებული b_1-დან, მიიღება ერთი და იგივე კანონის მიხედვით: რომ მივიღოთ განაყოფის რომელიმე b_k კოეფიციენტი, საკმარისია განაყოფის წინა (b_{k-1}) კოეფიციენტი გავამრავლოთ a-ზე და მივუმატოთ გასაყოფის შესაბამი (ე. ი. იმავე ინდექსით) კოეფიციენტი. რომ მივიღოთ r ნაშთი, საკმარისია განაყოფის უკანასკნელი კოეფიციენტი (თავისუფალი წევრი) გავამრავლოთ a-ზე და მივუმატოთ გასაყოფის თავისუფალი წევრი.

მთელი პროცესი შეგვიძლია განვალაგოთ შემდეგი სქემის მიხედვით (ჰორნერის სქემა):

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a	$a_0(=b_0)$	b_0a+a_1 $(=b_1)$	b_1a+a_2 $(=b_2)$	$\dots$	$b_{n-2}a+a_{n-1}$ $(=b_{n-1})$	$b_{n-1}a+a_n$ $(=r)$

ზედა სტრიქონში განვალაგებთ გასაყოფის კოეფიციენტებს, ქვედაში — განაყოფის თანმიმდევრობით მიღებულ კოეფიციენტებს და ნაშთს.

მაგალითები.

1. ვთქვათ გასაყოფია

$$3x^4+2x^3-6x^2+x-7 \text{ პოლინომი } x-2\text{-ზე};$$

მოქმედებას განვალაგებთ შემდეგნაირად:

	3	2	−6	1	−7
2	3	8	10	21	35

ამგვარად განაყოფი იქნება

$$3x^3+8x^2+10x+21,$$

ნაშთი უდრის 35-ს; ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს რიცხვი წარმოადგენს მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობას, როცა $x=2$.

2. $f(x)=x^5-x^4+3x^2-6x+4$ გავყოთ $x+1$-ზე.
განსახილველ შემთხვევაში, ცხადია, $a=-1$.
გაყოფას შევასრულებთ ჰორნერის სქემით:

	1	−1	0	3	−6	4
−1	1	−2	2	1	−7	11

განაყოფი არის

$$q(x)=x^4-2x^3+2x^2+x-7;$$

ნაშთი კი

$$r=f(-1)=11.$$

3. პოლინომი $F(x)=2x^4-(1-2i)\,x^3-(2+3i)\,x-4$ გავყოთ $x-1-i$-ზე. მოცემულ შემთხვევაში $a=1+i$ და ჩვენ გვაქვს:

	2	$-1+2i$	0	$-2-3i$	-4
$1+i$	2	$1+4i$	$-3+5i$	$-10-i$	$-13-11i$

განაყოფი არის

$$2x^3+(1+4i)x^2+(-3+5i)x-(10+i);$$

ნაშთი კი

$$r=-13-11i=F(1+i).$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ბეზუს თეორემის თანახმად, ნაშთი $f(x)$ ფუნქციის გაყოფისა $x-a$-ზე უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას, როცა $x=a$.

ამგვარად, ჰორნერის სქემა გვაძლევს პრაქტიკულად ხელსაყრელ საშუალებას $f(a)$ მნიშვნელობის გამოთვლისათვის.

სავარჯიშო.

შეასრულეთ გაყოფა, ისარგებლებთ რა ჰორნერის სქემით:

1. $2x^4-3x^3+x^2-x+7$-ის $x-4$-ზე.
2. $x^6+4x^3-2x^2-6x+3$-ის $x+3$-ზე.
3. $3x^4-5x^3+(1-2i)x^2-(1+i)x-8$-ს $x-i$-ზე.
4. $x^5-2x^3+2x^2-(1-i)x+6$-ის $x+3-2i$-ზე.

2. წინა პუნქტის შედეგები ახლა გამოვიყენოთ $f(x)$ ფუნქციის რაციონალური ფესვების მოძებნისათვის, ანუ რაც იგივეა,

$$f(x)=0. \tag{26}$$

განტოლების რაციონალური ფესვების მოძებნისათვის.

დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები წარმოადგენენ რაციონალურ რიცხვებს, მთელ ან წილად რიცხვებს; უკანასკნელ შემთხვევაში შეიძლება (26) განტოლების ორივე ნაწილი გამრავლდეს ყველა კოეფიციენტის საერთო მნიშვნელზე და ამგვარად, ამოცანა დავიყვანოთ მთელი კოეფიციენტების შემთხვევამდე. ამიტომ შეიძლება თავიდანვე დავუშვათ, რომ მოცემული ფუნქციის კოეფიციენტები წარმოადგენენ მთელ რიცხვებს; ამგვარად,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_n$ მთელი რიცხვებია. ჯერ განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის მთელი ფესვების მოძებნის საკითხი. დავუშვათ, რომ მთელი a რიცხვი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს. მაშინ $f(x)$ უნდა იყოფოდეს $x-a$-ზე:

$$f(x)=(x-a)\,q(x),$$

ამასთან $q(x)$ განაყოფის კოეფიციენტები განისაზღვრება ფორმულებით (24). რადგანაც ყველა $a_0, a_1, \dots, a_n$ კოეფიციენტი და a რიცხვი წარმოადგენენ მ თ ე ლ რიცხვებს, ამიტომ (24) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $q(x)$ განაყოფის კოეფიციენტებიც მთელი რიცხვებია.

პირველ პუნქტში ვნახეთ, რომ ნაშთი, მიღებული $f(x)$-ის გაყოფით $x-a$-ზე, გამოისახება შემდეგნაირად:

$$r = b_{n-1}a + a_n.$$

იმ შემთხვევაში, რომელსაც ახლა ვიხილავთ, ნაშთი უნდა იყოს ნულის ტოლი:

$$b_{n-1}a + a_n = 0,$$

ანუ

(27) $$a_n = -ab_{n-1}.$$

რადგანაც a_n, a, b_{n-1} მთელი რიცხვებია, (27) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ a რიცხვი უნდა იყოს a_n რიცხვის, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის თავისუფალი წევრის გამყოფი.

ამგვარად, თუ მთელი a რიცხვი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს, მაშინ ის უნდა იყოს მისი თავისუფალი წევრის გამყოფი.

მაშასადამე, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს მთელი ფესვები, მაშინ ეს ფესვები უნდა ვეძებოთ თავისუფალი წევრის გამყოფთა შორის. ყოველი ამ გამყოფთაგანი უნდა გავსინჯოთ, რათა გავიგოთ, წარმოადგენს თუ არა ის ფუნქციის ფესვს. თუ გამოირკვევა, რომ თავისუფალი წევრის არც ერთი გამყოფი არ გადააქცევს ფუნქციას ნულად, ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ ფუნქციას არ აქვს მთელი ფესვები.

შენიშვნა. თუ მთელი a რიცხვი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს, მაშინ განაყოფი

$$\frac{f(x)}{x-a} = q(x)$$

წარმოადგენს, როგორც დავინახეთ, მთელი კოეფიციენტების მქონე მთელ რაციონალურ ფუნქციას. აქედან გამომდინარეობს, რომ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $f(x)$-ის შესაბამისი მნიშვნელობა უნაშთოდ უნდა გაიყოს $x-a$-ზე (ან $a-x$-ზე: გამყოფის ნიშანი არ თამაშობს როლს). თუ დავუშვებთ, კერძოდ, რომ $x=-1$, მოვნახავთ, რომ $f(-1)$ რიცხვი უნაშთოდ იყოფა $a+1$-ზე.

ამგვარად, იმისათვის, რომ მთელი a რიცხვი იყოს $f(x)$ ფუნქციის ფესვი, აუცილებელია, რომ ყოველი რიცხვთაგანი

(28) $$\frac{f(1)}{a-1} \text{ და } \frac{f(-1)}{a+1}$$

იყოს მთელი რიცხვი.

ეს პირობა აუცილებელია; მაგრამ ეს არას გზით არაა საკმარისი. თავისუფალი წევრის გამყოფები, რომლებისთვისაც ეს პირობა არ სრულდება, შეიძლება ერთბაშად უკუვაგდოთ; გამყოფები, რომლებისთვისაც ის სრულდება, კიდევ უნდა შემოწმდეს.

მაგალითი. $f(x) = 2x^3 + 7x^3 + 5x + 6.$

თავისუფალი წევრის გამყოფებია: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.
აქ

$$f(1) = 20, \; f(-1) = 6.$$

თუ $a = 2$, მაშინ

$$\frac{f(1)}{a-1} = \frac{20}{1}, \quad \frac{f(-1)}{a+1} = \frac{6}{3}.$$

არიან მთელი რიცხვები; ამგვარად, გამყოფი 2 უნდა გავსინჯოთ. რომ გამოვიანგარიშოთ $f(2)$, უნდა შევნიშნოთ, რომ ეს რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნაშთი $f(x)$-ის გაყოფისა $x-2$ ორწევრზე. გაყოფა შეიძლება შევასრულოთ ჰორნერის სქემის გამოყენებით:

	2	7	5	6
2				
	2	11	27	60

ნაშთი $f(2) = 60$; რიცხვი 2 არ წარმოადგენს ფესვს. ახლა დავუშვათ, რომ $a = -2$; ამ შემთხვევაში

$$\frac{f(1)}{a-1} = \frac{20}{-3}$$

წილადი რიცხვია. აუცილებელი პირობა არ სრულდება — ამ გამყოფს უკუვაგდებთ. დავუშვათ, რომ $a = 3$; ამ შემთხვევაში

$$\frac{f(-1)}{a+1} = \frac{6}{4}.$$

წილადი რიცხვია: ამ გამყოფსაც უკუვაგდებთ.

თუ $a = -3$, მაშინ

$$\frac{f(1)}{a-1} = \frac{20}{-4} \quad \text{და} \quad \frac{f(-1)}{a+1} = \frac{6}{-2}.$$

მთელი რიცხვებია. გავსინჯოთ ეს გამყოფი:

	2	7	5	6
-3				
	2	1	2	0

ამგვარად, $f(-3)=0$; რიცხვი -3 არის ჩვენი ფუნქციის ფესვი. ამასთან ერთად მოვნახეთ განაყოფი $f(x)$ ფუნქციის გაყოფისა $x+3$-ზე:

$$q(x)=2x^2+x+2.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$2x^3+7x^2+5x+6=(x+3)(2x^2+x+2).$$

ახლა განტოლება

(*) $$2x^3+7x^2+5x+6=0$$

იყოფა ორად

$$x+3=0 \text{ და } 2x^2+x+2=0.$$

მეორე განტოლებას აქვს ფესვები

$$\frac{-1+i\sqrt{15}}{4},\quad \frac{-1-i\sqrt{15}}{4}.$$

მაშასადამე, (*) განტოლების ფესვები იქნება,

$$x_1=-3,\ x_2=\frac{-1+i\sqrt{15}}{4},\ x_3=\frac{-1-i\sqrt{15}}{4}.$$

3. შევეხოთ ახლა *წილადი* რაციონალური ფესვების მოძებნის საკითხს. უწინარეს ყოვლისა დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

თუ $f(x)$ ფუნქციის უფროსი წევრის კოეფიციენტი ერთეულის ტოლია, ხოლო ყველა დანარჩენი კოეფიციენტი მთელი რიცხვებია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას არ აქვს წილადი რაციონალური ფესვები.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

გამოვიყენოთ დამტკიცების წინააღმდეგობის მეთოდი. დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წილადი რაციონალური ფესვი $\frac{p}{q}$, სადაც p და q მთელი რიცხვებია. მაშინ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\frac{p}{q}$ *უკვეცი* წილადია, ე. ი. p და q რიცხვები ურთიერთ მარტივია (მათ არ აქვთ ერთეულისაგან განსხვავებული საერთო გამყოფები). თუ $\frac{p}{q}$ წილადი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს, მაშინ

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0.$$

გავამრავლებთ რა ამ ტოლობის ორივე ნაწილს q^{n-1}-ზე, მივიღებთ:

(29) $$\frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \ldots + a_n q^{n-1} = 0.$$

p და q რიცხვები, დაშვების თანახმად, ურთიერთ მარტივია; მაგრამ მაშინ p^n და q რიცხვებიც ურთიერთ მარტივი უნდა იყოს, ე. ი. $\frac{p^n}{q}$ უკვეცი წილადია. ტოლობა (29) მოითხოვს, რომ უკვეცი წილადის ან მთელი რიცხვების ჯამი უდრიდეს ნულს, რაც შეუძლებელია. ამგვარად, დაშვება იმისა, რომ მოცემულ ფუნქციას აქვს წილადი რაციონალური ფესვი, მიგვიყვანს წინააღმდეგობამდე.

მაგალითის სახით განვიხილოთ კუთხის ტრისექციის განტოლება (იხ. შესავალი, პუნქტი 5):

(30) $$x^3 - 3x - b = 0.$$

აქ

$$b = 2\cos\omega,$$

სადაც ω არის კუთხე, რომელიც უნდა გაიყოს სამ ტოლ ნაწილად; თუ ავიღებთ 60°-იან კუთხეს, ე. ი.

$$\omega = \frac{\pi}{3},$$

მაშინ

$$b = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1,$$

რადგან განტოლება (30) ღებულობს ასეთ სახეს:

(30a) $$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

აქვს თუ არა ამ განტოლებას რაციონალური ფესვები? თავისუფალი წევრის გამყოფები იქნება $+1$ და -1; არც ერთი მათგანი არ აკმაყოფილებს განტოლებას. მაშასადამე, ამ განტოლებას არ აქვს **მთელი** რაციონალური ფესვები. მეორეს მხრივ, წილადი რაციონალური ფესვები მას არ შეიძლება ჰქონდეს ახლახან დამტკიცებული თეორემის ძალით. ამგვარად, (30a) განტოლებას არ აქვს რაციონალური ფესვები.

აქედან გამომდინარეობს, როგორც შემდეგში დავინახავთ (იხ. თავი X, § 2), რომ განტოლება (30ა) არ შეიძლება ამოიხსნას კვადრატულ რადიკალებში: 60°-იან კუთხის სამ ტოლ ნაწილად გაყოფის ამოცანა არ შეიძლება ამოიხსნას ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $f(x)$ ფუნქციის უფროსი წევრის კოეფიციენტი განსხვავებულია ერთეულისაგან:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 1.$$

დავუშვათ წინანდელივით, რომ $a_0, a_1, \dots, a_n$ მთელი რიცხვებია.

რომ გამოვიკვლიოთ $f(x)$ ფუნქციის რაციონალური ფესვების საკითხი, ანუ, რაც იგივეა,

(31) $$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a^2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

განტოლების რაციონალური ფესვების საკითხი, შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი ხერხი: (31) განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $a_0{}^{n-1}$-ზე. მიღებული განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(a_0x)^n+a_1(a_0x)^{n-1}+a_2a_0(a_0x)^{n-2}+\dots+a_{n-1}a_0{}^{n-2}(a_0x)+a_0{}^{n-1}a_n=0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ

(32) $$a_0x=y,$$

გვექნება:

(33) $$y^n+a_1y^{n-1}+a_2a_0y^{n-2}+\dots+a_{n-1}a_0{}^{n-2}y+a_0{}^{n-1}a_n=0.$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ განტოლება y-ის მიმართ, რომელშიაც უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის ერთეულს. ამ განტოლებას, წინანდელის მიხედვით, წილადი რაციონალური ფესვები არ შეიძლება ექნეს. მაგრამ შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ მას აქვს მთელი რაციონალური ფესვები. y-ის ყოველ მთელ მნიშვნელობას, რომელიც აკმაყოფილებს (33) განტოლებას, შეესაბამება, (32)-ს ძალით, რაციონალური მნიშვნელობა

$$x=\frac{y}{a_0},$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირვანდელ განტოლებას. ეს მნიშვნელობა შეიძლება იყოს წილადი ან მთელი (მთელი იმ შემთხვევაში, როცა მნიშვნელობა y იყოფა a_0-ზე).

თუ აღმოჩნდება, რომ (33) განტოლებას არ აქვს მთელი ფესვები, ეს იმას ნიშნავს, რომ პირვანდელ (31) განტოლებას არ აქვს **რაციონალური** ფესვები.

მაგალითი. განვიხილოთ განტოლება

$$4x^3 - 7x^2 - x + 3 = 0. \tag{a}$$

თავისუფალი წევრის $+1$, -1, $+3$, -3 გამყოფები არ აკმაყოფილებენ განტოლებას. მაშასადამე, ამ განტოლებას არ აქვს მთელი ფესვები. რომ გავიგოთ, აქვს თუ არა მას წილადი რაციონალური ფესვები, ორივე ნაწილი გავამრავლოთ 4^2-ზე:

$$(4x)^3 - 7(4x)^2 - 4(4x) + 3 \cdot 4^2 = 0.$$

თუ დავუშვებთ

$$4x = y, \tag{b}$$

გვექნება

$$y^3 - 7y^3 - 4y + 48 = 0. \tag{c}$$

ახლა ვნახოთ, აქვს თუ არა მიღებულ განტოლებას მთელი ფესვები. აღვნიშნოთ

$$\varphi(y) = y^3 - 7y^2 - 4y + 48,$$

მაშინ

$$\varphi(1) = 38, \; \varphi(-1) = 44.$$

გამოვიკვლიოთ თავისუფალი წევრის გამყოფები. $a = 2$-სათვის

$$\frac{\varphi(-1)}{a+1} = \frac{44}{3}$$

არის წილადი: ამ გამყოფს უკუვაგდებთ. $a = -2$-სათვის

$$\frac{\varphi(1)}{a-1} = \frac{38}{-3}$$

არის წილადი: უკუვაგდებთ ამ გამყოფსაც. $a = 3$-სათვის

$$\frac{\varphi(1)}{a-1} = \frac{38}{2} \quad \text{და} \quad \frac{\varphi(-1)}{a+1} = \frac{44}{4}$$

არის მთელი რიცხვები. გავსინჯოთ ეს გამყოფი: $\varphi(3)$ გამოვიანგარიშოთ ჰორნერის მეთოდით:

3	1	−7	−4	48
	1	−4	−16	0

ამგვარად, $\varphi(3) = 0$; რიცხვი 3 არის $\varphi(y)$ ფუნქციის ფესვი. ამასთან ერთად ვღებულობთ განაყოფს $\varphi(y)$-ის გაყოფით $y - 3$-ზე:

$$q(y) = y^2 - 4y - 16.$$

ამგვარად,

$$y^3 - 7y^2 - 4y + 48 = (y - 3)(y^2 - 4y - 16).$$

ახლა ადვილად მოვნახავთ (c) განტოლების ყველა ფესვს:

$$y_1 = 3,\ y_2 = 2+2\sqrt{5},\ y_3 = 2 - 2\sqrt{5}.$$

თუ გამოვიყენებთ (ბ) თანაფარდობას, მივიღებთ x-ის შესაბამის მნიშვნელობებს, ე. ი. (a) განტოლების ფესვებს:

$$x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

სავარჯიშო.

ყოველი ქვემოთ მოყვანილი განტოლებისათვის გამოარკვიეთ არსებობს თუ არა რაციონალური ფესვები, და თუ არსებობს, ისინი მოძებნეთ:

1. $x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$
2. $3x^3 + 14x^2 - 2x + 15 = 0.$
3. $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 13x - 6 = 0.$
4. $3x^4 - 4x^3 - x^2 - 13x - 10 = 0.$
5. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0.$

6. განსაზღვრეთ შემდეგი განტოლებათა სისტემის რაციონალური ამონახსნები:

$$x^2 + y = 7,\ x + y^2 = 11.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირველი განტოლებიდან მოვნახავთ:

$$y = 7 - x^2,\ y^2 = 49 - 14x^2 + x^4.$$

ჩავსვამთ რა მეორე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$x^4 - 14x^2 + x + 38 = 0.$$

დავუშვათ, რომ

$$f(x) = x^4 - 14^2 + x + 38.$$

თავისუფალი წევრის გამყოფებია: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 19.\ \pm 38;$

$$f(1)=26,\ f(-1)=24.$$

თუ $a=2$, მაშინ

$$\frac{f(1)}{a-1} \quad \text{და} \quad \frac{f(-1)}{a+1}$$

მთელი რიცხვებია. $f(2)$ გამოვიანგარიშოთ ჰორნერის მეთოდით:

2	1	0	−14	1	38
	1	2	−10	−19	0

მაშასადამე, რიცხვი 2 არის $f(x)$-ის ფესვი. ამასთან ერთად ვღებულობთ

$$x^4-14x^2+x+38=(x-2)(x^3+2x^2-10x-19).$$

ფუნქციას

$$x^3+2x^2-10x-19$$

რაციონალური ფესვები არ აქვს. ამგვარად, x-ის ერთად-ერთი რაციონალური მნიშვნელობა უდრის 2-ს. y-ის შესაბამ მნიშვნელობას მოვნახავთ სისტემის პირველი განტოლებიდან:

$$y=7-x^2=3.$$

§ 4. ტეილორის ფორმულა

დავუშვათ, რომ $f(x)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია. შემდეგში საქმე გვექნება $f(x+h)$ გამოსახულებასთან, რომელსაც მივიღებთ $f(x)$-დან x-ის $x+h$-ით შეცვლით. ახლა ჩვენ გამოვიყვანთ ფორმულას, რომელიც იძლევა $f(x+h)$-ის დაშლას h ხარისხებად.

დავუშვათ, რომ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n.$$

x-ის ნაცვლად აქ ავიღოთ $x+h$, მივიღებთ;

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\dots+a_{n-2}(x+h)^2+$$
$$+a_{n-1}(x+h)+a_n.$$

ყოველი საკრები შეიძლება გავხსნათ ნიუტონის ბინომის ფორმულით:

$$a_0(x+h)^n = a_0x^n + na_0x^{n-1}h +$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_0x^{n-2}h^2 + \ldots + na_0xh^{n-1} + a_0h^n;$$
$$a_1(x+h)^{n-1} = a_1x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2}h +$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}a_1x^{n-3}h^2 + \ldots + a_1h^{n-1};$$

. . . .

$$a_{n-2}(x+h)^2 = a_{n-2}x^2 + 2a_{n-2}xh + a_{n-2}h^2;$$
$$a_{n-1}(x+h) = a_{n-1}x + a_{n-1}h;$$
$$a_n = a_n.$$

შევკრიბოთ ყველა ეს ტოლობა წევრობრივ და განვალაგოთ h-ის ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ:

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} f(x+h) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n + \\ &+ \{na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \ldots + 2\,a_{n-2}x + a_{n-1}\}h + \\ &+ \frac{1}{2!}\{n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)\,(n-2)a_1x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}\}h^2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\{n\,(n-1)\ldots 3\cdot 2\,.\,a_0x + (n-1)\,(n-2)\ldots 3\,.\,2\,\cdot \\ &\qquad \cdot a_1\}\ h^{n-1} + a_0h^n. \end{aligned}\right.$$

მარჯვენა ნაწილში იმ წევრთა ჯამი, რომლებიც არაა დამოკიდებული h-ზე, გვაძლევს $f(x)$-ის გამოსახულებას; კოეფიციენტი h-თან წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულს და აღინიშნება $f'(x)$-ით:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}\,x + a_{n-1}.$$

ამგვარად, n ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქციის წარმოებული წარმოადგენს $n-1$ ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციას. რომ მივიღოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული, საკმარისია ყოველი $f(x)$ წევრის კოეფიციენტი გავამრავლოთ x-თან მყოფ მაჩვენებელზე ამ წევრში,

ხოლო თვით მაჩვენებელი შევამციროთ ერთეულით. წარმოებულის შედგენას სხვანაირად გაწარმოება ეწოდება. ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს რომ წარმოებულის ცნებამდე აქ მივედით ელემენტარულ ალგებრულ გარდაქმნათა საფუძველზე.

ახლა შეგვიძლია შევადგინოთ წარმოებული ფუნქცია $f'(x)$ დან, ანუ მეორე წარმოებული $f(x)$-დან:

$$f''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\dots+2a_{n-2}.$$

ამგვარადვე შეგვიძლია შევადგინოთ მესამე წარმოებული და ა. შ. $n-1$ რიგის წარმოებული წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას:

$$f^{(n-1)}(x)=n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot a_0x+(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\cdot a_1.$$

დაბოლოს, n რიგის წარმოებული დაიყვანება მუდმივამდე:

(35) $$f^{(n)}(x)=n!a_0.$$

ახლა თანაფარდობა (34) შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

(36) $$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\dots+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n.$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ ტეილორის ფორმულა მთელი რაციონალური ფუნქციისათვის. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ფორმულა (36) მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციისათვის წარმოადგენს მარტივ ალგებრულ იგივობას: ეს ფორმულა სამართლიანია x და h-ის ყოველგვარი მნიშვნელობისათვის (ნამდვილი თუ კომპლექსური).

მკითხველს ურჩევთ ვარჯიშობის სახით აღადგინოს ყველა წინანდელი მსჯელობა მესამე და მეოთხე ხარისხის ფუნქციების შემთხვევისათვის.

2. x ცვლადის ყველა a მნიშვნელობას შეესაბამება თვით ფუნქციის და მის თანმიმდევრობითი წარმოებულთა განსაზღვრული მნიშვნელობანი:

(37) $$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \dots,\ f^{(n)}(a).$$

ტეილორის ფორმულა მთელი რაციონალური ფუნქციისათვის საშუალებას გვაძლევს $f(a+h)$ მნიშვნელობა გამოვსახოთ მნიშვნელობებით (37):

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+ \\ +\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n. \tag{38}$$

ჩვენ ვიცით, რომ $f(a)$ მნიშვნელობა წარმოადგენს ნაშთს $f(x)$ ფუნქციის გაყოფიდან $x-a$ ორწევრზე; ეს ნაშთი შეიძლება გამოვიანგარიშოთ ჰორნერის სქემის გამოყენებით. ახლა ვუჩვენოთ, თუ როგორ უნდა გამოვიყენოთ ჰორნერის სქემა

$$f'(a),\ f''(a),\ \dots,\ f^{(n)}(a)$$

მნიშვნელობათა გამოანგარიშებისათვის.

თუ დავუშვებთ, რომ

$$a+h=x,\ h=x-a,$$

(38) თანაფარდობას გადავწერთ შემდეგი სახით:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+ \\ +\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{39}$$

ანუ

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,Q(x), \tag{40}$$

სადაც

$$Q(x)=f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}.$$

თანაფარდობა (40) გვიჩვენებს, რომ $Q(x)$ წარმოადგენს განაყოფს $f(x)$-ის გაყოფისა $x-a$ ორწევრზე; მეორე მხრივ ეს ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$Q(x)=f'(a)+(x-a)Q_1(x), \tag{41}$$

სადაც

$$Q_1(x)=\frac{f''(a)}{2!}+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-2}.$$

(41) ტოლობიდან უშუალოდ ვხედავთ, რომ $f'(a)$ მნიშვნელობა არის ნ ა შ თ ი $Q(x)$ ფუნქციის $x-a$-ზე გაყოფიდან; $Q_1(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს განაყოფს ამ განაყოფიდან. მსგავსივე მსჯელობით მოვნახავთ, რომ $\frac{f''(a)}{2!}$ წარმოადგენს ნაშთს $Q_1(x)$-ის გაყოფისა $x-a$-ზე და ა. შ.

ამგვარად,

$$f(a),\ f'(a),\frac{f''(a)}{2!},\ldots,\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

მნიშვნელობათა გამოანგარიშების პროცესი შეიძლება ჩატარდეს შემდეგნაირად:

ა) $f(x)$-ს ვყოფთ $x-a$-ზე; განაყოფი და ნაშთი შესაბამისად იქნება $Q(x)$ და $f(a)$;

ბ) $Q(x)$-ს ვყოფთ $x-a$-ზე; განაყოფი და ნაშთი შესაბამისად იქნება $Q_1(x)$ და $f'(a)$;

გ) $Q_1(x)$-ს ვყოფთ $x-a$-ზე; განაყოფი და ნაშთი იქნება $Q_2(x)$ და $\frac{f''(a)}{2!}$.

ადვილი შესამჩნევია, თუ რაში მდგომარეობს ამ პროცესის არსი: განაყოფი, რომელიც მიღებულია ყოველ განსაზღვრულ ეტაპზე, უკვე გ ა ს ა ყ ო ფ ი ს როლს ასრულებს შემდეგ ეტაპზე. $Q(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებს ვღებულობთ $f(x)$ კოეფიციენტისაგან ჰორნერის სქემით: $Q_1(x)$ კოეფიციენტებს ვღებულობთ იმავე სქემით $Q(x)$ კოეფიციენტებისაგან და ა. შ. მთელი გამოანგარიშება შეიძლება განვალაგოთ ერთ სქემაში: პირველ სტრიქონში დავწერთ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებს; მათ ქვევით, მეორე სტრიქონში მივუწერთ $Q(x)$ ფუნქციის შესაბამის კოეფიციენტებს და $f(a)$ ნაშთს; მესამე სტრიქონში განვალაგებთ $Q_1(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებს და $f'(a)$ ნაშთს და ა. შ.

მაგალითი. $f(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 5x - 4$.

გამოიანგარიშეთ $f(x)$ ფუნქციის და მის წარმოებულთა მნიშვნელობანი, როცა $x = 5$.

5	1	-6	-2	5	-4	
	1	-1	-7	-30	$-154 = f(a)$	$\{Q(x) = x^3 - x^2 - 7x - 30\}$
	1	4	13	$35 = f'(a)$		$\{Q_1(x) = x^2 + 4x + 13\}$
	1	9	$58 = \frac{f''(a)}{2!}$			$\{Q_2(x) = x + 9\}$
	1	$14 = \frac{f'''(a)}{3!}$				$\{Q_3(x) = 1\}$
	$1 = \frac{f^{(IV)}(a)}{4!}$					

ახლა შეგვიძლია დავწეროთ $f(x)$ ფუნქციის დაშლა $x - 5$ ორწევრის ხარისხებად [შეად. ტოლობა (39)]:

$$x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = -154 + 35(x-5) + 58(x-5)^2 +$$
$$+ 14(x-5)^3 + (x-5)^4.$$

სავარჯიშო.

1. $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ ფუნქცია დაშალეთ $x - 4$ ორწევრის ხარისხებად.
2. მოცემულია $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$ ფუნქცია. გამოიანგარიშეთ ფუნქციის და მისი წარმოებულთა მნიშვნელობანი, როცა $x = -3$.
3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ფუნქცია დაშალეთ $x + 1$ ორწევრის ხარისხებად.
4. $x^4 + (2+i)x^3 + x^2 - ix + 1$ ფუნქცია დაშალეთ $x - i$ ხარისხებად.
5. მოცემულია $3x^3 + (2-3i)x^2 - (1+i)x + 5$ ფუნქცია. გამოიანგარიშეთ ფუნქციის და მის წარმოებულთა მნიშვნელობანი, თუ $x = 1 + i$.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. როგორ უნდა გამოვსახოთ ტოლობის სახით, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოფა $\varphi(x)$-ზე?
2. მუდმივი მამრავლები რატომ არ ასრულებენ არავითარ როლს მთელი რაციონალური ფუნქციის გაყოფადობასთან დაკავშირებულ საკითხში?

3. როგორ განვსაზღვროთ ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის უდიდესი საერთო გამყოფი?

4. რას უდრის ნაშთი მთელი რაციონალური ფუნქციის გაყოფისა $x-a$-ზე?

5 როგორ უნდა მოინახოს $f(x)$ ფუნქციის მთელი ფესვები (თუ ისინი არსებობს)?

6. რა შეიძლება ითქვას $f(x)$ ფუნქციის მთელ რაციონალურ ფესვებზე, თუ უფროსი წევრის კოეფიციენტი უდრის ერთეულს, ხოლო დანარჩენი კოეფიციენტები—მთელ რიცხვებს?

7. როგორ ვიპოვოთ ფუნქციის წილადი რაციონალური ფესვები (თუ ისინი არსებობს)?

8. რას უდრის n რიგის წარმოებული n ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქციისა?

9. რაში მდგომარეობს ჰორნერის წესი $f(a)$, $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ სიდიდეთა გამოთვლების შესახებ?

თავი III

მთელი რაციონალური ფუნქციის უწყვეტობა. ფესვების არსებობა

§ 1. მთელი რაციონალური ფუნქციის უწყვეტობა

1. დავუშვათ, რომ $y=f(x)$ არის x ცვლადის რაიმე ფუნქცია. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა x ცვლადი და $f(x)$ ფუნქცია მხოლოდ *ნამდვილ* მნიშვნელობებს ღებულობენ.

$f(x)$ ფუნქციას *უწყვეტი* ეწოდება $x=a$ მნიშვნელობისათვის, თუ

(1) $$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

(1) თანაფარდობის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ $f(x)$-ის მნიშვნელობა რაგინდ მცირედ განსხვავდება $f(a)$-საგან, თუ კი x-ის მნიშვნელობა საკმაო მცირედ განსხვავდება a-საგან.

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის (რა გინდ მცირეც იყოს იგი) არსებობს ისეთი რიცხვი $\delta>0$, რომ უტოლობიდან

$$|x-a|<\delta$$

გამომდინარეობს უტოლობა (აქ ორი ვერტიკალური ხაზები აბსოლუტური სიდიდის ნიშანია),

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

ე. ი. x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირველ უტოლობას, $f(x)$-ის შესაბამი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს მეორე უტოლობას. როცა დავუშვით, რომ x ცვლადი და $f(x)$ ფუნქცია ღებულობენ ნამდვილ მნიშვნელობებს, თითოეული სხვაობა $x-a$ და $f(x)-f(a)$ ავიღეთ აბსოლუტური სიდიდით. მაგრამ წინანდელი განსაზღვრა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიაც, როცა x ცვლადი და $f(x)$ ფუნქცია ღებულობენ კომპლექსურ მნიშვნელობებს: საჭიროა

მხოლოდ ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი სიდიდის ნაცვლად ავიღოთ შესაბამისი სსვაობის მ ო დ უ ლ ი.

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციას უ წ ყ ვ ე ტ ი ეწოდება $x=a$ მნიშვნელობისათვის, თუ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|x-a|<\delta \tag{2}$$

ფუნქციის შესაბამი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \tag{3}$$

(აქ ორი ვერტიკალური ხაზი მოდულის ნიშანია).

2. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მკითხველი იცნობს ფუნქციონალური დამოკიდებულების გრაფიკული გამოსახვის ჩვეულებრივ ხერხს (ნამდვილი ცვლადებისათვის).

ახლა დავუშვათ, რომ x ცვლადი და $f(x)$ ფუნქცია ღებულობენ კომპლექსურ მნიშვნელობებს; მაშინ შეიძლება დავუშვათ

$$x=\xi+i\eta,\ f(x)=u+iv.$$

გეომეტრიული წარმოდგენა ამ შემთხვევაში უფრო რთულია. განხილვაში შევიტანოთ ორი კოორდინატული სიბრტყე: ξ, η სიბრტყე (ნახ. 21) რომელზედაც გამოვსახავთ დამოუკიდებელი x ცვლადის მნიშვნელობებს და u, v სიბრტყე, რომელზედაც გამოვსახავთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს.

x ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას

$$x=\xi+i\eta$$

შეესაბამება ξ, η სიბრტყეზე M წერტილი ξ, η კოორდინატებით ან OM ვექტორი, რომელიც კოორდინატთა სათავეს აერთებს ამ წერტილთან. შემდეგში წერტილს ზოგჯერ იმავე სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, რითაც აღნიშნულია მისი შესაბამი კომპლექსური რიცხვი; ჩვენ ვიტყვით აგრეთვე „x წერტილი“ ნაცვლად გამოთქმისა: „x კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი წერტილი“.

ანალოგიურად

$$f(x)=u+iv$$

ფუნქციის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება u, v სიბრტყეზე $P(u, v)$ წერტილი ან ვექტორი, რომელიც კოორდინატთა სათავეს აერთებს

ამ წერტილთან; ამ შემთხვევაში, ისე როგორც ზევით, ჩვენ ვიტყვით „$f(x)$ წერტილი“ ნაცვლად გამოთქმისა: „კომპლექსური $f(x)$ რიცხვის გამომსახველი წერტილი“.

ვთქვათ, მაგალითად,

$$f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

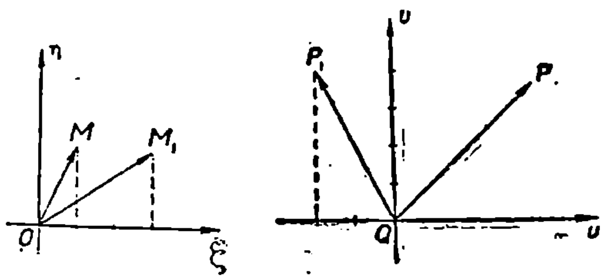
ξ, η სიბრტყეზე განვიხილოთ წერტილი

$$x = 3 + 2i$$

(M_1 წერტილი, ნახ. 21). ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა იქნება

$$f(3+2i) = (3+2i)^2 - 4(3+2i) + 5 = -2 + 4i;$$

ეს მნიშვნელობა გამოისახება P_1 წერტილით u, v სიბრტყეზე.



ნახ. 21.

ამგვარად, თუ მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია, მაშინ ξ, η სიბრტყეზე მდებარე ყოველი x წერტილისათვის შეიძლება ავაგოთ u, v სიბრტყეზე შესაბამისი $f(x)$ წერტილი. $f(x)$ წერტილს ეწოდება x წერტილის **ანასახი.**

ახლა ადვილია (2) და (3) უტოლობათა გეომეტრიული შინაარსის გაგება. ξ, η სიბრტყეზე წარმოვიდგინოთ (ნახ. 22) ვექტორები, რომლებიც O წერტილს აერთებს a და x წერტილებთან. რომ მივიღოთ $x - a$ სხვაობის შესაბამისი ვექტორი, საკმარისია a წერტილი შევაერთოთ x წერტილთან (თავი I, § 3. პუნქ. 1)

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x - a$ სხვაობის მოდული იმ მონაკვეთის სიგრძის ტოლია, რომელიც a წერტილს აერთებს x წერ-

ტილთან, ე. ი. a და x წერტილებს შორის მანძილის ტოლია. თუ x სიდიდე აკმაყოფილებს უტოლობას

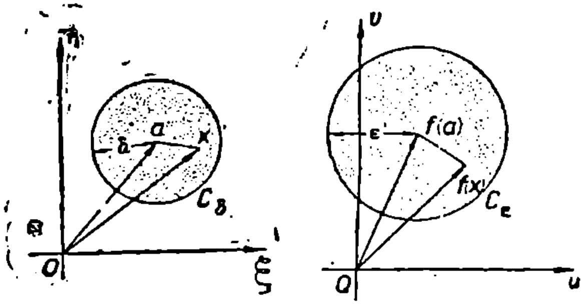
(2) $$|x-a|<\delta,$$

მაშინ ეს იმას ნიშნავს, რომ x წერტილის მანძილი a-დან ნაკლებია δ-ზე, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ x მნიშვნელობა აკმაყოფილებს (2) უტოლობას, მაშინ ξ, η სიბრტყეზე შესაბამისი წერტილი მდებარეობს იმ წრეწირის შიგნით, რომელიც შემოხაზულია a ცენტრიდან δ რადიუსით. ეს წრეწირი აღვნიშნოთ C_δ-თი.

თანაგვარადვე შეგვიძლია გამოვამჟღავნოთ გეომეტრიული აზრი უტოლობისა

(3) $$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

წარმოვიდგინოთ, რომ u, v სიბრტყეზე მდებარეობს $f(a)$ და $f(x)$ წერტილები; (3) უტოლობა გამოხატავს, რომ მანძილი ამ წერტილებს შორის ნაკლებია ε-ზე, ე. ი. რომ $f(x)$ წერტილი მდებარეობს



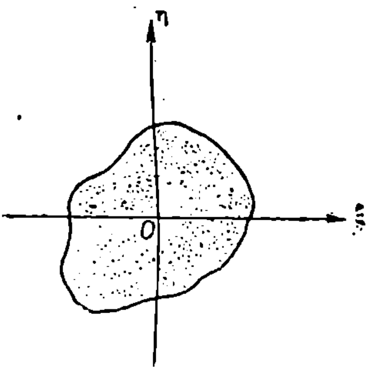
ნახ. 22.

იმ წრეწირის შიგნით, რომელსაც აქვს ცენტრი $f(a)$ წერტილში და ε რადიუსი. ეს წრეწირი აღვნიშნოთ C_ε-ით.

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის პირობა a წერტილში ახლა შეგვიძლია გამოვსახოთ გეომეტრიული ფორმით. დავუშვათ, რომ u, v სიბრტყეზე (ნახ. 22) $f(a)$ წერტილის გარშემო, რაგინდ მცირე ε რადიუსით აღწერილია C_ε წრეწირი. თუ $f(x)$ უწყვეტია, მაშინ, ξ, η სიბრტყეზე ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ C_δ წრეწირი, რომელსაც შემდეგი თვისება აქვს: ყოველი x წერტილისათვის, რომლებიც

მდებარეობს a წერტილის გარშემო შემოხაზული საკმაოდ მცირე წრეწირის შიგნით, შესაბამისი $f(x)$ წერტილი იქნება $f(a)$-ს გარშემო შემოხაზული რაგინდ მცირე წრეწირის შიგნით. იგივე აზრი კიდევ შემდეგნაირად შეიძლება გამოვსახოთ: $f(x)$ წერტილი რაგინდ ახლოა $f(a)$-სთან, თუ x წერტილი საკმაოდ ახლოა a წერტილთან.

ჩვენ ვიცით, რომ $x=\xi+i\eta$ ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ξ, η სიბრტყეზე განსაზღვრული წერტილი. პირიქით, ξ, η სიბრტყის ყოველ წერტილს შეგვიძლია შევუსაბამოთ x-ით განსაზღვრული მნიშვნელობა.



ნ.ხ. 23.

ზოგიერთ შემთხვევაში არსებითია ξ, η სიბრტყის განსაზღვრული არეს გამოყოფა და მხოლოდ იმ x წერტილების განხილვა, რომლებიც ამ არეს ეკუთვნის. აქ არეს ქვეშ გვესმის ξ, η სიბრტყის ნაწილი, რომელიც შემოსაზღვრულია უწყვეტი შეკრული მრუდით* (იხ. ნახ. 23). ამ მრუდს ვუწოდებთ არეს კონტურს, ანუ საზღვარს. არის წერტილებს, რომლებიც არ მდებარეობს კონტურზე, შიგა წერტილები ეწოდება. კონტურის წერტილები შეიძლება მივაკუთვნოთ ან არ მივაკუთვნოთ არეს.

თუ კონტურის წერტილები არეს ეკუთვნის, მაშინ არეს დახურული ეწოდება.

ამგვარად, დახურული არე შედგება შიგა წერტილებისაგან და კონტურის წერტილებისაგან.

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია არეს ყოველ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ის უწყვეტია არეში. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია სიბრტყის ყოველ წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია ყოველ არეში.

---

* იმისათვის, რომ მრუდი ნამდვილად შემოსაზღვრავდეს რომელიმე არეს, საჭიროა ის აკმაყოფილებდეს განსაზღვრულ პირობებს, რომელთა შესახებ ჩვენ აქ არ ვილაპარაკებთ.

3. დავამტკიცოთ, რომ მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ყოველი $x=a$ მნიშვნელობისათვის, ე. ი. უწყვეტია სიბრტყის ყოველ წერტილში.

ჩვენ უნდა ვუჩვენოთ, რომ $f(x)-f(a)$ სხვაობის მოდული შეიძლება ნაკლები გავხადოთ ყოველ ε რიცხვზე, რისთვისაც x წერტილი უნდა ავარჩიოთ საკმაოდ ახლოს a წერტილთან. ამ მიზნით წინასწარ შევაფასოთ $f(x)-f(a)$ სხვაობის მოდული. ტეილორის ფორმულის თანახმად,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

საიდანაც

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+ \tag{4}$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

მაშასადამე, $f(x)-f(a)$ სხვაობის მოდული ეტოლება (4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ჯამის მოდულს. ჯამის მოდულის თეორემის გამოყენებით (ჯამის მოდული არ აღემატება საკრებთა მოდულების ჯამს, თავი I, § 3), ვიპოვით:

$$|f(x)-f(a)|\leq|f'(a)(x-a)|+\left|\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\right|+$$
$$+\ldots+\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|.$$

თუ მოვიგონებთ, რომ ნამრავლის მოდული თანამამრავლთა მოდულების ნამრავლის ტოლია (თავი I, § 3) და სიმარტივისათვის დავუშვებთ, რომ $|x-a|=r$, მაშინ უკანასკნელი თანაფარდობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$|f(x)-f(a)|\leq|f'(a)|r+\frac{|f''(a)|}{2!}r^2+\ldots+ \tag{5}$$
$$+\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}r^n.$$

კოეფიციენტები

$$(6)\qquad |f'(a)|,\ \frac{|f''(a)|}{2!},\ \ldots,\ \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$$

წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვებს, ზოგიერთი მათგანი შეიძლება ნულს ეტოლებოდეს, დანარჩენი კი იყოს დადებითი. ამ რიცხვებს შორის ყოველთვის შეიძლება ავარჩიოთ უდიდესი (ან ყოველ შემთხვევაში ისეთი, რომელიც არაა ნაკლები დანარჩენებზე); ეს უდიდესი რიცხვი აღვნიშნოთ H-ით. თუ (5) თანაფარდობის მარჯვენა ნაწილის ყოველ კოეფიციენტთაგანს შევცვლით H-ით, მაშინ უტოლობა შეიძლება მხოლოდ გაძლიერდეს; მაშასადამე,

$$|f(x)-f(a)| \leq Hr + Hr^2 + \cdots + Hr^n;$$

მარჯვენა ნაწილში გვაქვს გეომეტრიული პროგრესია; თუ შევაჯამებთ ამ პროგრესიას, ვიპოვით

$$(7)\qquad |f(x)-f(a)| \leq \frac{Hr-Hr^{n+1}}{1-r}.$$

ახლა გავიხსენოთ, რომ r-ით აღვნიშნეთ $x-a$ სხვაობის მოდული. შემდეგში ჩვენ უნდა ავიღოთ ამ მოდულის საკმაოდ მცირე მნიშვნელობანი. ამიტომ ახლავე დავუშვათ, რომ

$$r=|x-a|<1.$$

მაშინ გვექნება

$$(8)\qquad \frac{Hr-Hr^{n+1}}{1-r} < \frac{Hr}{1-r}.$$

შევადარებთ რა ერთმანეთს (7) და (8) უტოლობებს, ვიპოვით

$$(9)\qquad |f(x)-f(a)| < \frac{Hr}{1-r}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ მოცემულია ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. თუ მივაღწევთ, რომ

$$(10)\qquad \frac{Hr}{1-r} < \varepsilon,$$

მაშინ $f(x)-f(a)$ სხვაობის მოდულიც ნაკლები იქნება ε-ზე. ახლა

უნდა ამოვხსნათ (10) უტოლობა r-ის მიმართ. გავამრავლებთ რა (10) უტოლობის ორივე ნაწილს დადებით $1-r$ რიცხვზე, გვექნება:

$$Hr < \varepsilon - \varepsilon r,$$

ანუ

$$(H+\varepsilon)r < \varepsilon.$$

(11) $$r < \frac{\varepsilon}{H+\varepsilon}.$$

ამგვარად, თუ შესრულებულია (11) უტოლობა, მაშინ შესრულდება ყოველი (10) და (9) უტოლობათაგანი და, მაშასადამე, გვექნება

(12) $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, (11) უტოლობას თან მოსდევს (12) უტოლობა. მივიღებთ რა მხედველობაში, რომ $r = |x-a|$, შეგვიძლია ვთქვათ: უტოლობას

$$|x-a| < \frac{\varepsilon}{H+\varepsilon}$$

თან მოსდევს უტოლობა:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

ამგვარად, $\frac{\varepsilon}{H+\varepsilon}$ რიცხვი ამ შემთხვევაში თამაშობს δ რიცხვის როლს. თუ დავუშვებთ, რომ

$$\delta = \frac{\varepsilon}{H+\varepsilon},$$

გვექნება: x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებს $|x-a| < \delta$ უტოლობას, სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

ამით დამტკიცებულია $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა.

მაგალითი.

მოცემულია ფუნქცია

$$f(x) = x^3 + (1-i)x^2 + (1+i)x - 2.$$

დავუშვათ, რომ $a=3$; ვუჩვენოთ, თუ როგორ უნდა განვსაზღვროთ მოცემული ε-ით შესაბამისი δ. უწინარეს ყოვლისა $f(x)$ დავშალოთ $x-3$ ხარისხებად (იხ. თავი II, § 4):

$$f(x)=37-6i+(34-5i)(x-3)+(10-i)(x-3)^2+(x-3)^3.$$

აქ

$$f(a)=37-6i;$$

ამგვარად,

$$f(x)-f(a)=f(x)-(37-6i)=(34-5i)(x-3)+$$
$$+(10-i)(x-3)^2+(x-3)^3.$$

მოცემულ შემთხვევაში

$$f'(a)=34-5i,\ \frac{f''(a)}{2!}=10-i,\quad \frac{f'''(a)}{3!}=1.$$

რიცხვი H ამ შემთხვევაში არის

$$\sqrt{34^2+5^2}\approx 35.$$

მაშასადამე,

$$\delta=\frac{\varepsilon}{35+\varepsilon}.$$

თუ, მაგალითად, $\varepsilon=1$, მაშინ δ შეგვიძლია მივიღოთ $\frac{1}{36}$-ის ტოლი. ამგვარად, როცა

$$|x-3|<\frac{1}{36}$$

გვექნება

$$|f(x)-(37-6i)|<1.$$

კვლავ განვიხილოთ ნებსითი მთელი რაციონალური ფუნქცია

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

ჩვენ ვიცით, რომ $f(x)$ უწყვეტია ყოველი $x=a$ მნიშვნელობისათვის. დავუშვათ, რომ კერძოდ, $a=0$; მაშინ

$$f(a)=f(0)=a_n,$$

$$|x-a|=|x|,\ |f(x)-f(a)|=|f(x)-a_n|.$$

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის პირობა 0 წერტილში შეიძლება გამოისახოს შემდეგნაირად: ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი დადებითი δ, რომ უტოლობიდან

$$|x|<\delta$$

გამომდინარეობს უტოლობა

$$|f(x) - a_n| < \varepsilon.$$

თუ $f(x)$ ფუნქციის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია ($a_n = 0$), მაშინ უკანასკნელი უტოლობა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

ამგვარად, ამ შემთხვევაში x-ის საკმაოდ მცირე (მოდულით) მნიშვნელობებს შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის რაგინდ მცირე (მოდულით) მნიშვნელობები.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის მოდული $|f(x)|$ წარმოადგენს აგრეთვე უწყვეტ ფუნქციას. მართლაც, დავუშვათ, რომ მოცემულია ნებსითი რიცხვი $\varepsilon > 0$. წინანდელივით ამ რიცხვისათვის მოვძებნით ისეთ δ-ს, რომ უტოლობიდან

(13) $$|x - a| < \delta$$

გამომდინარეობდეს უტოლობა

(14) $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

მაგრამ

$$\big|\,|f(x)| - |f(a)|\,\big| \leqslant |f(x) - f(a)|$$

(თავი I, § 3); მაშასადამე, x-ის მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებს (13) უტოლობას გვექნება უტოლობა

(15) $$\big|\,|f(x)| - |f(a)|\,\big| < \varepsilon,$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $|f(x)|$ არის უწყვეტი ფუნქცია. შევნიშნავთ კიდევ, რომ (14) და (15) უტოლობანი თავიანთი გეომეტრიული მნიშვნელობით არსებითად სხვადასხვაა. მართლაც, უტოლობა (14) ნიშნავს, რომ $f(x)$ წერტილის მანძილი $f(a)$ წერტილიდან ნაკლებია ε-ზე; უტოლობა (15) ნიშნავს, რომ $f(x)$ ვექტორის სიგრძე* $f(a)$ ვექტორის სიგრძისაგან ε-ზე ნაკლები სიდიდით განსხვავდება.

4. ახლა დავუშვათ, რომ x ცვლადი ღებულობს მხოლოდ ნამდვილ მნიშვნელობებს; ამ შემთხვევაში უტოლობა $|x - a| < \delta$ გა-

---

* ე. ი. იმ ვექტორის სიგრძე, რომელიც კოორდინატთა სათავეს $f(x)$ წერტილთან აერთებს.

მოხატავს იმას, რომ $x-a$ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია δ-ზე, ე. ი. ამ სხვაობის მნიშვნელობა მოთავსებულია $(-\delta, +\delta)$ შუალედის შიგნით:

$$-\delta<x-a<\delta,$$

ანუ

$$a-\delta<x<a+\delta.$$

მაშასადამე x-ის მნიშვნელობა მოთავსებულია $(a-\delta, a+\delta)$ შუალედის შიგნით.

დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები ნამდვილია; მაშინ (14) უტოლობა გამოხატავს იმას, რომ $f(x)-f(a)$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია ε-ზე, ე. ი.

$$-\varepsilon<f(x)-f(a)<\varepsilon,$$

ანუ

$$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon.$$

ამგვარად, ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც მოთავსებულია $(a-\delta, a+\delta)$ შუალედის შიგნით $f(x)$-ის შესაბამი მნიშვნელობები იმყოფება $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ შუალედის შიგნით.

თუ $f(a)\neq 0$ და $\varepsilon<|f(a)|$, მაშინ $f(a)-\varepsilon$ და $f(a)+\varepsilon$ რიცხვებს აქვს იგივე ნიშანი, რაც $f(a)$ რიცხვს. ამ შემთხვევაში $f(x)$-ის მნიშვნელობასაც, რომელიც $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, შუალედის შიგნით იმყოფება, იგივე ნიშანი ექნება.

ამგვარად, თუ $f(a)\neq 0$, მაშინ ყოველთვის შეიძლება განსაზღვრა $(a-\delta, a+\delta)$ შუალედისა, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც ამ შუალედის შიგნით მდებარეობს, $f(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს იმ ნიშანს, რომელიც მას აქვს $x=a$ მნიშვნელობისათვის.

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, **საკმაოდ მცირე შუალედში, რომელიც შეიცავს a რიცხვს, მთელი რაციონალური ფუნქცია ინარჩუნებს იმ ნიშანს, რომელიც მას აქვს $x=a$ მნიშვნელობისათვის.**

კერძოდ, როცა $a=0$, გვაქვს $f(0)=a_n$. ამგვარად, თუ ამ ფუნქციის თავისუფალი a_n წევრი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ

$(-\delta, +\delta)$ შუალედის შიგნით $f(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს მისი თავისუფალი წევრის ნიშანი.

სხვანაირად, რომ ვთქვათ, x-ის საკმაოდ მცირე (აბსოლუტური სიდიდით) მნიშვნელობისათვის, მთელ რაციონალურ ფუნქციას აქვს მისი თავისუფალი წევრის ნიშანი.

§ 2. თეორემა უფროსი წევრის მოდულის შესახებ

1. ახლა ვნახოთ, თუ რა შეიძლება ითქვას მთელი რაციონალური ფუნქციის ყოფაქცევის შესახებ $|x|$ მოდულის საკმაოდ დიდ მნიშვნელობებისათვის. თუ x ღებულობს თანმიმდევრობით ზრდად (მოდულით) მნიშვნელობებს, მაშინ მთელი რაციონალური ფუნქციის ყოველი წევრის მოდულიც დაიწყებს ზრდას, და მასთან, მით უფრო სწრაფად, რაც უფრო მაღალია მოცემული წევრის ხარისხი. ყველაზე სწრაფად დაიწყებს ზრდას უფროსი წევრის მოდული. თუ ავიღებთ $|x|$ მოდულის საკმაოდ დიდ მნიშვნელობებს, მაშინ **მთელი რაციონალური ფუნქციის უფროსი წევრის მოდული მეტი იქნება დანარჩენი წევრის ჯამის მოდულზე.** სხვა სიტყვებით, მთელი რაციონალური ფუნქციისათვის

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თუ M **არის ნებისმიერად მოცემული დადებითი რიცხვი მაშინ x-ის საკმაოდ დიდი (მოდულით) მნიშვნელობებისათვის, ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:**

$$|a_0x^n|>M|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n|.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ჩვენ ახლა შევაფასოთ მოდული $f(x)$ ფუნქციის ყველა წევრის ჯამის, გარდა პირველისა; ჩვენ ვიცით (თავი I), რომ ჯამის მოდული არ აღემატება საკრებთა მოდულების ჯამს:

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n|\leqq|a_1||x|^{n-1}+|a_2||x|^{n-2}+\dots+|a_n|.$$

დავუშვათ, რომ $|x|=\rho$, უკანასკნელი თანაფარდობა გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$(16)\quad |a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n|\leqq|a_1|\rho^{n-1}+|a_2|\rho^{n-2}+\dots+|a_n|.$$

აქ კოეფიციენტები

(17) $$|a_1|, \quad |a_2|, \ldots, |a_n|$$

წარმოადგენს ნამდვილ არაუარყოფით რიცხვებს; აღვნიშნოთ A-თი უდიდესი მათგანი (ან ყოველ შემთხვევაში ისეთი, რომელიც არაა ნაკლები დანარჩენზე); თუ ყოველ (17) კოეფიციენტთაგანს შევცვლით A-თი, მაშინ (16) ტოლობა მხოლოდ შეიძლება გაძლიერდეს; მაშასადამე, გვექნება

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n| \leqq A\rho^{n-1}+A\rho^{n-2}+\ldots+A,$$

ანუ

(18) $$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n| \leq \frac{A\rho^n-A}{\rho-1}.$$

რადგანაც შემდეგში საუბარი გვექნება $|x|=\rho$ მოდულის დიდ მნიშვნელობებზე, ამიტომ ახლავე დავუშვათ, რომ

$$\rho>1;$$

მაშინ გვექნება

$$\frac{A\rho^n-A}{\rho-1}<\frac{A\rho^n}{\rho-1}.$$

თუ შევადარებთ (18), მივიღებთ:

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n|<\frac{A\rho^n}{\rho-1},$$

ან თუ ორივე ნაწილს გავამრავლებთ M-ზე, გვექნება:

(19) $$M\,|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n|<\frac{MA\rho^n}{\rho-1}.$$

თუ ახლა $f(x)$ ფუნქციის უფროსი წევრის მოდული მეტია ან ტოლი (19) უტოლობის მარჯვენა ნაწილზე, მაშინ ჩვენი მიზანი მიღწეულია; სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, $|x|=\rho$ უნდა ავარჩიოთ იმგვარად, რომ

(20) $$\frac{MA\rho^n}{\rho-1}\leq|a_0x^n|,$$

ანუ

(20′) $$|a_0|\,\rho^n\geq\frac{MA\rho^n}{\rho-1}.$$

ახლა უნდა ამოვხსნათ უტოლობა (20′) ρ-ს მიმართ. შევკვეცავთ რა ρ^n-ზე და გავამრავლებთ $\rho-1$-ზე, მივიღებთ

$$|a_0|\rho-|a_0|\geq MA,$$

ანუ

$$\rho\geq\frac{MA}{|a_0|}+1. \tag{21}$$

თუ შესრულდება უკანასკნელი უტოლობა, მაშინ შესრულდება (20) უტოლობაც; მაგრამ (19) და (20) უტოლობებიდან მივიღებთ:

$$M|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n|<|a_0x^n|. \tag{22}$$

ამგვარად, თუ $|x|=\rho$ მნიშვნელობა აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|x|\geq\frac{MA}{|a_0|}+1, \tag{21a}$$

მაშინ ადგილი აქვს (22) უტოლობას. ამით ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია.

2. ვისარგებლებთ რა წინა პუნქტში მიღებულ შედეგებით, ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი დებულება:

$|x|$-ის საკმაოდ დიდ მნიშვნელობებისათვის მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის მოდული $|f(x)|$ მეტი იქნება ყოველ წინასწარ მოცემულ რიცხვზე.

მართლაც, განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია როგორც ორი საკრების ჯამი:

$$f(x)=a_0x^n+(a_1x^{n-1}+\dots+a_n).$$

თუ გავიხსენებთ, რომ ჯამის მოდული მეტია ან ტოლი მოდულთა სხვაობაზე (თავი I, § 3), გვექნება:

$$|f(x)|=|a_0x^n+(a_1x^{n-1}+\dots+a_n)|\geq|a_0x^n|-$$
$$-|a_1x^{n-1}+\dots+a_n|. \tag{23}$$

ახლა გამოვიყენოთ წინა პუნქტის თეორემა, დავუშვებთ რა $M=2$: თუ x-ის მნიშვნელობა აკმაყოფილებს პირობას

$$|x|\geq\frac{2A}{|a_0|}+1, \tag{24}$$

მაშინ ადგილი ექნება უტოლობას

$$2\,|\,a_1x^{n-1}+\dots+a_n\,| < |\,a_0x^n\,|\,,$$

ანუ

$$|\,a_1x^{n-1}+\dots+a_n\,| < \frac{1}{2}\,|\,a_0x^n\,|\,,$$

და, მაშასადამე,

$$|\,c_0x^n\,| - |\,a_1x^{n-1}+\dots+a_n\,| > \frac{1}{2}\,|\,a_0x^n\,|\,.$$

შევადარებთ რა (23) უტოლობასთან, მივიღებთ:

$$|\,f(x)\,| > \frac{1}{2}\,|\,a_0x^n\,|\,. \tag{25}$$

ამგვარად, (24) უტოლობას თან მოსდევს (25) უტოლობა.

ახლა დავუშვათ, რომ მოცემულია ნებისმიერ (რაგინდ დიდი) P რიცხვი; ადვილი შესამჩნევია, რომ x-ის მნიშვნელობა ყოველთვის შეგვიძლია ავარჩიოთ ისე, რომ მივიღოთ

$$\frac{1}{2}\,|\,a_0x^n\,| > P. \tag{26}$$

მართლაც, თუ ამოვხსნით უკანასკნელ უტოლობას $|\,x\,|$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$|\,x\,| > \sqrt[n]{\frac{2P}{|\,a_0\,|}}. \tag{27}$$

თუ ახლა $|\,x\,|$ მნიშვნელობას ავიღებთ იმდენად დიდს, რომ შესრულდეს ყოველი (24) და (27) უტოლობათაგანი, მაშინ ადგილი ექნება აგრეთვე (25) და (26) უტოლობებსაც და, მაშასადამე, მივიღებთ:

$$|\,f(x)\,| > P.$$

ამგვარად, დამტკიცებულია, რომ $|\,x\,|$-ის საკმაოდ დიდ მნიშვნელობებისათვის მთელი რაციონალური ფუნქციის მოდული შეიძლება გავხადოთ მეტი ყოველ წინასწარ მოცემულ რიცხვზე.

§ 3. თეორემა ფესვის არსებობის შესახებ

1. ახლა ჩვენ მოგვიხდება უფრო დაწვრილებით შევისწავლოთ $|f(x)|$ ფუნქცია, ე. ი. მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის მოდული.

ცხადია, $|f(x)|$ ფუნქცია მხოლოდ ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობს; ამასთან მას არ შეუძლია მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობანი. $|f(x)|$ ფუნქცია შეიძლება გეომეტრიულად გამოვსახოთ შემდეგნაირად. განვიხილოთ სივრცეში ξ, η, ζ კოორდინატთა მართკუთხა სისტემა. ყოველ $x=\xi+i\eta$ მნიშვნელობას ξ, η სიბრტყეზე შეესაბამება რაიმე წერტილი. ახლა x წერტილში ავმართოთ პერპენდიკულარი ξ, η სიბრტყისადმი და მასზე გადავზომოთ ζ მონაკვეთი, რომელიც ტოლია შესაბამი $|f(x)|$ მნიშვნელობისა:

$$\zeta=|f(x)|=|f(\xi+i\eta)|.$$

ამგვარად, ყოველ $x=\xi+i\eta$ წერტილს შეგვიძლია შევუსაბამოთ გარკვეული ζ „აპლიკატი“.

მაგალითი.

ვთქვათ $f(x)=x^2-x+1$.

ვიგულისხმებთ რა $x=\xi+i\eta$, გვექნება

$$f(x)=f(\xi+i\eta)=(\xi+i\eta)^2-(\xi+i\eta)+1=\xi^2-\eta^2-\xi+1+i(2\xi\eta-\eta).$$

მაშასადამე,

$$\zeta=|f(\xi+i\eta)|=\sqrt{(\xi^2-\eta^2-\xi+1)^2+(2\xi\eta-\eta)^2}.$$

ავიღოთ მაგალითად, წერტილი

$$x=\xi+i\eta=1-2i;$$

შესაბამი აპლიკატი იქნება

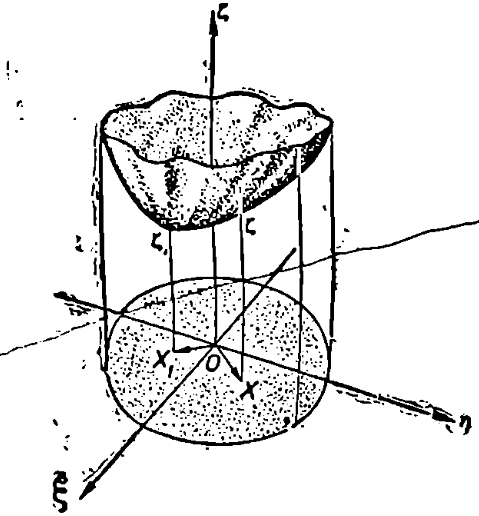
$$\zeta=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}.$$

წარმოვიდგინოთ, რომ ξ, η სიბრტყეზე გამოყოფილია რაიმე D არე; ამ არეს განვიხილავთ როგორც დახურულს; მაშასადამე, კონტურის წერტილები მიეკუთვნება ამ არეს. D არეს ყოველ წერტილს შეესაბამება განსაზღვრული აპლიკატი

$$\zeta=|f(x)|.$$

თანახმად პირველი პარაგრაფისა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ζ არის x-ის *უწყვეტი* ფუნქცია; ეს იმას ნიშნავს, რომ ζ-ს მნიშვნელო-

ბები, რომლებიც შეესაბამება x-ის საკმაოდ მახლობელ წერტილებს, განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან რაგინდ მცირე სიდიდით. გეომეტრიულად ζ აპლიკატების ბოლოები, რომლებიც შეესაბამება D არის ყოველგვარ წერტილებს, შეადგენენ უწყვეტი ზედაპირის (საზოგადოდ რომ ვთქვათ არა ბრტყელს) ნაჭერს, რომელიც „ქუდის" სახით მდებარეობს D არის ზევით. ამ ზედაპირს ვუწოდოთ „ζ ზედაპირი".



ნახ. 24.

გეომეტრიულად ცხადია, რომ ζ ზედაპირის წერტილებს შორის, რომელნიც შეესაბამება D არის ყოველ წერტილს (იხ. ნახაზი 24), არსებობს ერთი მაინც უმდაბლესი წერტილი, ე. ი. ისეთი წერტილი, რომელიც დანარჩენებთან შედარებით უფრო დაბლა (ყოველ შემთხვევაში არა უფრო მაღლა) მდებარეობს ξ, η სიბრტყის დონეზე *. თუ ζ_1-ით აღვნიშნავთ ამ წერტილის აპლიკატს, ხოლო x_1-ით ξ, η სიბრტყის შესაბამის წერტილს, მაშინ გვექნება

$$\zeta_1 = | f(x_1) | .$$

წინანდელის მიხედვით ζ_1 აპლიკატი ნაკლები (ყოველ შემთხვევაში არა მეტი) უნდა იყოს ყველა დანარჩენ ζ აპლიკატზე, რომლებიც შეესაბამება D არის სხვადასხვა წერტილებს. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, D არის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი უნდა ჰქონდეს თანაფარდობას:

$$| f(x_1) | \leq | f(x) | .$$

* ეს შედეგი შეიძლება აგრეთვე მკაცრად მივიღოთ არითმეტიკული გზითაც.

მოკლედ შეიძლება ვთქვათ: **დახურულ D არეში ყოველთვის არსებობს ისეთი x_1 წერტილი, რომელსაც შეესაბამება $f(x)$-ის მოდულის მინიმალური მნიშვნელობა.**

2. ახლა ჩვენ უახლოვდებით მთელი რაციონალური ფუნქციის ფესვის არსებობის საკითხს. ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ (შესავალი, პუნქტი 12), რომ ამ საკითხის გადაწყვეტას პირველად შეეცადა დალამბერი (1746). მართალია, დალამბერის მსჯელობა არ იყო სავსებით მკაცრი, მაგრამ მან პირველმა დაამყარა მნიშვნელოვანი დებულება, რომელიც შეიძლება საფუძვლად დაედოს მკაცრ დამტკიცებას. ამ დებულებას ზოგჯერ „დალამბერის ლემას" * უწოდებენ; ის შემდეგში მდგომარეობს:

დავუშვათ, რომ $f(x)$ არის $n \geqq 1$ ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქცია; შემდეგ დავუშვათ, რომ x_0 არის ξ, η სიბრტყის ნებსითი წერტილი.

თუ $f(x_0)$ მნიშვნელობა განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი x_0+h წერტილი, რაგინდ მახლობელი x_0 წერტილთან, რომლისთვისაც ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$|f(x_0+h)| < |f(x_0)| \,.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $f(x_0+h)$ გავშალოთ ტეილორის ფორმულით:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n.$$

დაშვების თანახმად, $f(x_0) \neq 0$; ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი შეგვიძლია გავყოთ $f(x_0)$-ზე:

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}=1+\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}h+\frac{f''(x_0)}{2!f(x_0)}h^2+\dots+ \qquad (28)$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!f(x_0)}h^n.$$

---

* D'A l e m b e r t, Recherches sur le calcul intégral, „Histoire de l'Académie de Berlin", 1746. ეს დებულება აღდგენილია გ ა უ ს ი ს დისერტაციაში (1799). ის კვლავ მონახა ა რ გ ა ნ მ ა და გამოაქვეყნა 1860 წელს თავის Essai"-ში. ზოგიერთი ავტორი ამ „ლემას" აკუთვნებს კ ო შ ი ს; მაგრამ თვით კოში ნათლად აღნიშნავს, რომ მან ეს ლემა გადმოიღო ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს ა გ ა ნ. ლეჟანდრი ალბად იცნობდა ა რ გ ა ნ ი ს ნაშრომს.

შემდეგი მსჯელობის დედააზრი შემდეგში მდგომარეობს: ჩვენ შევეცდებით შევარჩიოთ h იმგვარად, რომ მარჯვენა ნაწილის მოდული ერთეულზე ნაკლები გახდეს. x_0 წერტილს ფიქსირებულად ვთვლით; მაშასადამე, კოეფიციენტები $h, h^2, \ldots$ -სთან მარჯვენა ნაწილში წარმოადგენენ მ უ დ მ ი ვ რიცხვებს (ნამდვილ ანუ კომპლექსურს); აღვნიშნოთ

$$c_1 = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}, \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!\, f(x_0)}, \ \ldots, \ c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!\, f(x_0)}.$$

მაშინ (28) ტოლობის ნაცვლად გვექნება

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = 1 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_n h^n. \tag{29}$$

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ზოგიერთი $c_1, c_2, \ldots, c_n$ კოეფიციენტთაგანი ნულს ეტოლებოდეს; მაგრამ მათ შორის ერთი მაინც უნდა იყოს ნულისაგან განსხვავებული *.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ კოეფიციენტები გადავარჩიოთ ინდექსების ზრდის მიხედვით, და დავუშვათ, რომ c_m არის პირველი მათგანი, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან; ამგვარად, დავუშვათ, რომ

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0,$$

$$c_m \neq 0.$$

ასეთი დაშვება ყველაზე ზოგადია; კერძოდ, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $c_1 \neq 0$; ეს შემთხვევა შეესაბამება $m = 1$ მნიშვნელობას. ახლა (29) თანაფარდობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = 1 + c_m h^m + c_{m+1} h^{m+1} + \ldots + c_n h^n, \quad c_m \neq 0. \tag{30}$$

---

* წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = 1.$$

ე. ი.

$$f(x_0+h) = f(x_0) = \text{const},$$

და $f(x)$ ფუნქცია ნულოვანი ხარისხის იქნებოდა, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ადვილი დასანახია, რომ h მნიშვნელობა ყოველთვის შეიძლება ამოვარჩიოთ ისე, რომ გამოსახულება $c_m h^m$ იყოს ნ ა მ დ ვ ი ლ ი და უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი; ამაში, რომ დავრწმუნდეთ, c_m და h წარმოვიდგინოთ ნორმალური ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$c_m = R_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m).$$

$$h = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

აქ R_m და θ_m (მოდული და არგუმენტი c_m კოეფიციენტისა) სავსებით გარკვეულ რიცხვებს წარმოადგენენ; პირიქით, ρ და φ რიცხვები ჩვენს განკარგულებაშია. გვაქვს:

(31) $$c_m h^m = R_m \rho^m \{\cos(\theta_m + m\varphi) + i\sin(\theta_m + m\varphi)\}.$$

φ არგუმენტი ისე შევარჩიოთ, რომ

$$\theta_m + m\varphi = \pi,$$

ე. ი. დავუშვათ, რომ

(32) $$\varphi = \frac{\pi - \theta_m}{m}.$$

მაშინ მივიღებთ

$$\cos(\theta_m + m\varphi) + i\sin(\theta_m + m\varphi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

ასე, რომ ტოლობა (31) მიიღებს ასეთ სახეს:

(33) $$c_m h^m = -R_m \rho^m.$$

ვინაიდან R_m და ρ დადებითი რიცხვებია, ამიტომ ზემოთ შერჩეული φ-თვის, გამოსახულება $c_m h^m$ იქნება უარყოფითი რიცხვი.

ახლა ჩვენს განკარგულებაში რჩება კიდევ ρ მოდული; ის დაუქვემდებაროთ პირობას

(34) $$R_m \rho^m < 1;$$

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, დავუშვათ:

(35) $$\rho < \sqrt[m]{\frac{1}{R_m}}.$$

ამგვარად, ρ მოდულს ვზღუდავთ მხოლოდ ზემოდან; ეს არ შეგვიშლის ხელს შემდეგში ρ შევამციროთ, თუ ეს საჭირო იქნება. თა-

ნახმად (33) და (34) თანაფარდობებისა ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

(36) $$1+c_m h^m = 1 - R_m \rho^m > 0.$$

ახლა დავუბრუნდეთ (30) თანაფარდობას; მივიღებთ რა მხედველობაში განაყოფის მოდულისა და ჯამის მოდულის თვისებებს (თავი I) გვექნება:

(37) $$\frac{|f(x_0+h)|}{|f(x_0)|} \leqq |1+c_m h^m| + |c_{m+1} h^{m+1}| + \dots + |c_n h^n|.$$

თანახმად (36) თანაფარდობისა გვაქვს:

$$|1+c_m h^m| = 1 - R_m \rho^m;$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ

$$|c_i| = R_i \, (i=m+1, \dots, n),$$

მაშინ (37) თანაფარდობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{|f(x_0+h)|}{|f(x_0)|} \leqq 1 - R_m \rho^m + R_{m+1} \rho^{m+1} + \dots + R_n \rho^n,$$

ანუ

(38) $$\frac{|f(x_0+h)|}{|f(x_0)|} \leq 1 - \rho^m (R_m - R_{m+1}\rho - \dots - R_n \rho^{n-m}).$$

ფრჩხილებში ჩასმული გამოსახულება წარმოადგენს მთელ რაციონალურ ფუნქციას ρ-დან; დავუშვათ, რომ

$$Q(\rho) = R_m - R_{m+1}\rho - \dots - R_n \rho^{n-m}.$$

აქ თავისუფალი წევრი

$$R_m = |c_m|$$

დაშვების თანახმად განსხვავებულია ნულისაგან; ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ (იხ. § 1), რომ $Q(\rho)$ ფუნქციას ρ-ს საკმაოდ მცირე მნიშვნელობისათვის ექნება თავისი თავისუფალი წევრის ნიშანი; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეიძლება განვსაზღვროთ ისეთი δ რიცხვი, რომ ρ-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას

(39) $$\rho < \delta,$$

იქნება

$$Q(\rho) > 0;$$

ახლა (38) უტოლობა გვაძლევს:

$$\frac{|f(x_0+h)|}{|f(x_0)|} \leqq 1-\rho^m Q(p) < 1,$$

აქედან

$$|f(x_0+h)| < |f(x_0)|.$$

ახლა გავიხსენოთ ის დაშვებანი, რომლებიც ჩვენ გავაკეთეთ h რიცხვის მიმართ; ჩვენ დავუშვით, რომ მისი φ არგუმენტი განისაზღვრება (32) ტოლობით, ρ მოდული აკმაყოფილებს (35) და (39) უტოლობებს. ორივე ეს უტოლობა ρ-ს ზევიდან ზღუდავენ. ისინი ხელს არ შეგვიშლის, თუ საჭირო იქნება, ρ-ს მნიშვნელობა ამოვარჩიოთ რაგინდ მცირე. მაგრამ მნიშვნელობა

$$\rho = |h| = |(x_0+h)-x_0|$$

წარმოადგენს, როგორც ეს ადვილად შეიძლება მოვისაზროთ, მანძილს x_0 და x_0+h წერტილებს შორის. როცა ვამცირებთ ρ-ს ამით x_0+h წერტილს ვაახლოვებთ x_0 წერტილთან. ამიტომ x_0+h წერტილი შეიძლება ჩავთვალოთ რაგინდ ახლოს x_0 წერტილთან.

3. ახლა შეგვიძლია დავამტკიცოთ თეორემა მთელი რაციონალური ფუნქციის ფესვის არსებობის შესახებ:

ყოველ მთელ რაციონალურ ფუნქციას აქვს ერთი ფესვი მაინც (ნამდვილი ან კომპლექსური).

პირველ პუნქტში დავინახეთ, რომ დახურულ არეში ყოველთვის არსებობს ისეთი x_1 წერტილი, რომელსაც შეესაბამება მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის მოდულის მინიმალური მნიშვნელობა. არეთ ავირჩიოთ წრე, რომელსაც ცენტრი კოორდინატთა სათავეში აქვს. თუ წრის r რადიუსს ამოვარჩევთ საკმაოდ დიდს, მაშინ x_1 წერტილი, რომელსაც შეესაბამება $|f(x)|$ მოდულის მინიმალური მნიშვნელობა, იქნება წრის შიგა წერტილი. მართლაც, ჯერ ავიღოთ განსაზღვრული r რადიუსის წრე და P-თი აღვნიშნოთ $|f(x)|$-ის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ამ წრის ნებსითი x_a წერტილს:

$$P = |f(x_a)|.$$

თუ x წერტილი მდებარეობს წრის კონტურზე, მაშინ $|x| = r$, სადაც r არის რადიუსი; r რადიუსის გადიდებით ყოველთვის შეგვიძლია (იხ. § 2) მივაღწიოთ იმას, რომ კონტურის წერტილებისათვის გვექნეს:

ანუ $$|f(x)| > P,$$
$$|f(x)| > |f(x_0)|$$

და მაშასადამე, მინიმალური მნიშვნელობა უკვე აღარ შეესაბამება კონტურის წერტილს.

ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ x_1 წერტილი რომელსაც შეესაბამება $|f(x)|$-ის მინიმალური (მოცემული წრისათვის) მნიშვნელობა, მდებარეობს წრის შიგნით. თვით x_1 წერტილის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$|f(x_1)| \leq |f(x)|,$$

სადაც x არის ნებისმიერი წერტილი, რომელიც ეკუთვნის განსახილველ წრეს. ახლა ვუჩვენოთ, რომ $f(x_1)$ მნიშვნელობა ნულის ტოლია. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით წინააღმდეგობის მეთოდით. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $f(x_1)$ განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ დალამბერის ლემა. ამ ლემის თანახმად არსებობს ისეთი x_1+h წერტილი რომლისთვისაც

(40) $$|f(x_1+h)| < |f(x_1)|.$$

ამასთან x_1+h წერტილი შეიძლება ამოვარჩიოთ რაგინდ ახლოს x_1 წერტილთან; მაშასადამე, შეიძლება ვთქვათ, რომ x_1+h წერტილი აგრეთვე მდებარეობს განსახილველი წრის შიგნით. მაგრამ, მაშინ (40) უტოლობა ეწინააღმდეგება დაშვებას იმის შესახებ, რომ $|f(x_1)|$-ის მნიშვნელობა მინიმალურია მოცემული წრისათვის. ამგვარად, ვიგულისხმეთ რა, რომ $f(x_1)$ მნიშვნელობა განსხვავებულია ნულისაგან, ჩვენ მივედით წინააღმდეგობამდე. მაშასადამე, ეს მნიშვნელობა ნულს უნდა ეტოლებოდეს:

$$f(x_1) = 0,$$

ე. ი. x_1 არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვი. ამრიგად, ფესვის არსებობა დამტკიცებულია.

§ 4. მთელი რაციონალური ფუნქციის მამრავლებად დაშლა

1. ფესვის არსებობის თეორემის გამოყენებით დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

n ხარისხის ყოველი მთელი რაციონალური ფუნქცია წარმოადგენს n წრფივი მამრავლის (ე. ი. პირველი ხარისხის მამრავლთა) ნამრავლს.

მართლაც, განვიხილოთ მთელი რაციონალური ფუნქცია

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

ფესვის არსებობის თეორემის თანახმად, ამ ფუნქციას აქვს ერთი ფესვი მაინც. დავუშვათ, რომ x_1 არის ეს ფესვი; მაშინ $f(x)$ ფუნქცია უნდა გაიყოს $x-x_1$-ზე (თავი II, § 3). განაყოფს, რომელიც მიიღება $f(x)$ პოლინომის $(x-x_1)$-ზე გაყოფით, აღვნიშნავთ რა $\varphi_1(x)$-ით, გვექნება

$$f(x)=(x-x_1)\,\varphi_1(x).$$

$\varphi_1(x)$ ფუნქცია იქნება $n-1$ ხარისხის, ხოლო მისი უფროსი წევრის კოეფიციენტი a_0-ის ტოლია (რადგანაც გამყოფის უფროსი წევრის კოეფიციენტი ერთეულის ტოლია):

$$\varphi_1(x)=a_0x^{n-1}+\ldots$$

ფესვის არსებობის თეორემის თანახმად, $\varphi_1(x)$ ფუნქციას აქვს ერთი ფესვი მაინც; აღვნიშნავთ რა ამ ფესვს x_2-ით, გვექნება:

$$\varphi_1(x)=(x_1-x_2)\,\varphi_2(x),$$

სადაც $\varphi_2(x)$ არის $n-2$ ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქცია:

$$\varphi_2(x)=a_0x^{n-2}+\ldots$$

თუ იგივე მსჯელობას გამოვიყენებთ $\varphi_2(x)$ ფუნქციის მიმართ, მივიღებთ:

$$\varphi_2(x)=(x-x_3)\,\varphi_3(x),$$

და ა. შ.

(41) $$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ldots$$

ფუნქციების ხარისხები შესაბამისად იქნება

$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ldots$$

განვაგრძობთ რა ამ პროცესს, ჩვენ მივალთ შემდეგ ტოლობამდე:

$$\varphi_{n-2}(x)=(x-x_{n-1})\varphi_{n-1}(x),$$

სადაც $\varphi_{n-1}(x)$ არის პირველი ხარისხის ფუნქცია; რადგანაც უფროსი წევრის კოეფიციენტი ყოველი ფუნქციისათვის, რომელიც აღ-

ბულია (41)-დან, a_0-ის ტოლია, ამიტომ $\varphi_{n-1}(x)$ ფუნქციას უნდა ჰქონდეს სახე:

$$\varphi_{n-1}(x)=a_0x+b, \tag{42}$$

სადაც b არის მუდმივი. აღვნიშნავთ რა (42) ფუნქციის ფესვს x_n-ით, გვექნება:

$$x_n=-\frac{b}{a_0},$$

ასე, რომ

$$\varphi_{n-1}(x)=a_0\left(x+\frac{b}{a_0}\right)=a_0(x-x_n).$$

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-x_1)\,\varphi_1(x),\\ \varphi_1(x)&=(x-x_2)\,\varphi_2(x),\\ \varphi_2(x)&=(x-x_3)\,\varphi_3(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_{n-2}(x)&=(x-x_{n-1})\,\varphi_{n-1}(x),\\ \varphi_{n-1}(x)&=a_0(x-x_n). \end{aligned}$$

გადავამრავლებთ რა ტოლობებს, ვიპოვით

$$\boxed{f(x)=a_0\,(x-x_1)\,(x-x_2)\dots(x-x_n).} \tag{43}$$

(43) ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველი

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \tag{44}$$

რიცხვთაგანი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს. ახლა ვუჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს სხვა ფესვები, განსხვავებული (44)-საგან, მართლაც, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს კიდევ x_{n+1} ფესვი, მაშინ

$$f(x_{n+1})=0.$$

მაგრამ თანახმად (43) ტოლობისა

$$f(x_{n+1})=a_0(x_{+1}-x_1)\,(x_{n+1}-x_2)\dots(x_{n+1}-x_n);$$

მაშასადამე, უნდა იყოს:

$$a_0(x_{n+1}-x_1)\,(x_{n+1}-x_2)\dots(x_{n+1}-x_n)=0.$$

რადგანაც ნამრავლი ნულის ტოლია, ამიტომ ნულს უნდა ეტოლებოდეს ერთ-ერთი თანამამრავლი მაინც (თავი I, § 3, პუნქ. 2). თუ $f(x)$ ფუნქცია არ გარდაიქცევა ნულად იგივურად, მაშინ a_0 კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან (თავი II, პუნქ. 1). მაშასადამე, სხვაობებიდან

$$x_{n+1}-x_1,\ x_{n+1}-x_2, \ldots,\ x_{n+1}-x_n$$

ერთ-ერთი მაინც უნდა ეტოლებოდეს ნულს, ე. ი. x_{n+1} უნდა ეტოლებოდეს ერთ-ერთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ რიცხვთაგანს.

ამგვარად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ n ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს არა უმეტესი, ვიდრე n ფესვისა, თუ იგი იგივურად არ გადაიქცევა ნულად.

არსებითია ის, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ფესვებს შორის შეიძლება ერთმანეთის ტოლიც იყოს. განვიხილოთ, მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x)=x^3-5x^2+3x+9. \tag{45}$$

ამ ფუნქციისათვის (43) დაშლას ასეთი სახე აქვს:

$$f(x)=(x-3)(x-3)(x+1)=(x-3)^2(x+1).$$

ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავუშვათ

$$x_1=3,\ x_2=3,\ x_3=-1.$$

$x-3$ მამრავლი $f(x)$ ფუნქციის დაშლაში მონაწილეობს ორჯერ: ეს არის $f(x)$ ფუნქციის ჯერადი მამრავლი (ხშირად ამბობენ: ჯერადი გამყოფი). ამის შესაბამისად ფესვი 3-იც იქნება $f(x)$ ფუნქციის ჯერადი ფესვი, სახელდობრ, ორჯერადი ფესვი. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (45) ფუნქციას აქვს სამი ფესვი, თუ ფესვს 3-ს ჩავთვლით ორჯერ.

კვლავ განვიხილოთ n ხარისხის მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია; ჩვენ ვიცით, რომ ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს n წრფივ მამრავლთა ნამრავლს; დავუშვათ, რომ რომელიმე ამ მამრავლთაგანი დაშლაში k ჯერ მეორდება, მაშინ ვიტყვით, რომ მას k ჯერადი ფესვი შეესაბამება. თუ ყოველ ფესვს ჩავთვლით იმდენჯერ, როგორიცაა მისი ჯერადობა, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ფესვთა რიცხვი წრფივ მამრავლთა რიცხვის ტოლია, ე. ი. n-ის ტოლია. ამგვარად, ვღებულობთ შემდეგ დასკვნას:

n ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციას აქვს ზუსტად n ფესვი, თუ ყოველ ფესვს ჩავთვლით იმდენჯერ, როგორიცაა მისი ჯერადობა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის მიმართ ცნობილია, რომ

ა) მისი ხარისხი არ აღემატება n-ს;

ბ) დამოუკიდებელი ცვლადის იმ სხვადასხვა მნიშვნელობათა რიცხვი, რომელთათვის $f(x)$ ნულად იქცევა, აღემატება n-ს, მაშინ ასეთი ფუნქცია იგივურად ნულად უნდა გადაიქცეს, ე. ი. ყველა მისი კოეფიციენტი უნდა იყოს ნულის ტოლი.

დავუშვათ ახლა, რომ მოცემულია ორი მთელი რაციონალური ფუნქცია $f(x)$ და $\varphi(x)$, რომელთა მიმართ ცნობილია:

ა) ყოველი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციათაგანის ხარისხი არ აღემატება n-ს;

ბ) x-ის იმ სხვადასხვა მნიშვნელობათა რიცხვი, რომელთათვის ადგილი აქვს ტოლობას $f(x)=\varphi(x)$, აღემატება n-ს.

მაშინ $f(x)$ და $\varphi(x)$ **ფუნქციები ერთი და იგივე ხარისხის უნდა იყოს, და დამოუკიდებელი x ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები უნდა იყვნენ ერთმანეთის ტოლი.**

მართლაც, ამ შემთხვევაში $f(x)-\varphi(x)$ სხვაობა იგივურად უნდა გადაიქცეს ნულად, ე. ი. ნულს უნდა ეტოლებოდეს ყველა მისი კოეფიციენტი.

2) მესამე ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციისათვის

$$f(x)=x^3+p_1x^2+p_2x+p_3 \tag{46}$$

(43) თანაფარდობა შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

სადაც x_1, x_2, x_3 არიან $f(x)$ ფუნქციის ფესვები. უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილი გადამრავლების შემდეგ უნდა ემთხვეოდეს (46) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს; მაშასადამე, უნდა იყოს:

$$\left\{\begin{aligned} p_1&=-(x_1+x_2+x_3),\\ p_2&=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\\ p_3&=-x_1x_2x_3.\end{aligned}\right. \tag{47}$$

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები გამოისახება მისი ფესვებით.

ახლა განვიხილოთ n ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქცია

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_{n-1}x+p_n. \tag{48}$$

თუ $x_1, x_2, \dots, x_n$ არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვები, მაშინ

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n). \tag{49}$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ორწევრთა ნამრავლმა უნდა მოგვცეს (48) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი; მაგრამ კოეფიციენტი x^{n-1}-თან ამ ნამრავლში წარმოადგენს ყველა $x_1, \dots, x_n$ ფესვის ჯამს, აღებულს შებრუნებული ნიშნით; კოეფიციენტი x^{n-2}-თან წარმოადგენს ორ-ორი ფესვის ყოველნაირ ნამრავლთა ჯამს და ა. შ. დაბოლოს, თავისუფალი წევრი წარმოადგენს ყველა ფესვის ნამრავლს, აღებულს ნიშნით — ან + იმისდა მიხედვით, იქნება n კენტი თუ ლუწი. ამგვარად, გვაქვს შემდეგი თანაფარდობები:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1=-(x_1+x_2+\dots+x_n), \\ p_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n, \\ p_3=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n=(-1)^nx_1x_2\dots x_n. \end{array}\right. \tag{50}$$

ეს თანაფარდობანი გვაძლევს საშუალებას ადვილად ავაგოთ განტოლება, თუ ცნობილია მისი ფესვები. დავუშვათ, მაგალითად, რომ საჭიროა ავაგოთ განტოლება, რომელსაც ექნება ფესვები

$$x_1=\sqrt{3},\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=3,\ x_4=-2.$$

გამოვიყენებთ რა (50) ფორმულებს, ადვილად ვიპოვით

$$p_1=-1,\ p_2=-9,\ p_3=3,\ p_4=18,$$

ასე, რომ საძიებელი განტოლება იქნება

$$x^4-x^3-9x^2+3x+18=0.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი. 1°. მეორე ხარისხის

$$f(x)=x^2+p_1x+p_2$$

ფუნქციისათვის (50) ტოლობები მიგვიყვანს კვადრატული განტოლების კოეფიციენტებსა და ფესვებს შორის ცნობილ დამოკიდებულებამდე:

$$p_1 = -(x_1 + x_2),$$
$$p_2 = x_1 x_2.$$

2° რომ მივიღოთ დამოკიდებულებანი

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \tag{51}$$

ფუნქციის ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ განტოლება

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ეკვივალენტურია

$$x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

განტოლებისა, სადაც

$$p_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad p_2 = \frac{a_2}{a_0}, \ \dots, \ p_n = \frac{a_n}{a_0}.$$

ამგვარად (51) ფუნქციისათვის

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{a_0} = -(x_1 + x_2 \dots + x_n), \\ \dfrac{a_1}{a_0} = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_n}{a_0} = (-1)^n x_1x_2 \dots x_n. \end{array}\right. \tag{50'}$$

3. თუ ნამდვილ კოეფიციენტებიან კვადრატულ განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები *, ეს ფესვები აუცილებლად შეუღლებული იქნება.

ვუჩვენოთ, რომ ეს თვისება შეიძლება გავავრცელოთ ნამდვილ კოეფიციენტებიან ნებისმიერი ხარისხის განტოლებებზე: თუ ასეთ

---

* კომპლექსური ფესვის ქვეშ ჩვენ გვესმის აქაც და შემდეგშიაც $a+bi$ სახის ფესვები, სადაც $b \neq 0$.

განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები, ეს ფესვები წყვილ-წყვილად შეუღლებულია.

წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

თუ $f(x)$ არის ფუნქცია ნამდვილი კოეფიციენტებით, მაშინ დამოუკიდებელ x ცვლადის შეუღლებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება ფუნქციის შეუღლებული მნიშვნელობანი.

დამტკიცება. $f(x)$ ფუნქციისათვის დავწეროთ ტეილორის დაშლა:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n. \tag{52}$$

ჩვენ ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია; თუ a რიცხვიც ნამდვილია, მაშინ (52) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში h-ის სხვადასხვა ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები აგრეთვე იქნება ნამდვილი; სიმარტივისათვის აღვნიშნოთ

$$f(a)=A_0,\ f'(a)=A_1,\ \frac{f''(a)}{2!}=A_2,\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}=A_n.$$

მაშინ (52) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$f(a+h)=A_0+A_1h+A_2h\ +\ldots+A_nh^n.$$

ახლა მარჯვენა ნაწილში გადავაჯგუფოთ წევრები, ერთ ჯგუფში მოვათავსოთ ყველა წევრი, რომლებიც შეიცავენ h-ის ლუწ ხარისხს, ხოლო მეორე ჯგუფში — ის წევრები, რომლებიც შეიცავენ h-ის კენტ ხარისხებს:

$$f(a+h)=A_0+A_2h^2+A_4h^4+\ldots+A_1h+A_3h^3+A_5h^5+\ldots,$$

ანუ

$$f(a+h)=A_0+A_2h^2+A_4h^4+\ldots+\ldots h(A_1+A_3h^2+A_5h^4+\ldots) \tag{53}$$

უკანასკნელი ტოლობა იგივობას წარმოადგენს h-ის მიმართ. თუ ამ იგივობაში დავუშვებთ $h=bi$ (b — ნამდვილი რიცხვია) გვექნება.

$$f(a+bi)=A_0-A_2b^2+A_4b^4-\ldots+bi(A_1-A_3b^2+A_5b^4\ldots),$$

ანუ

$$f(a+bi)=M+ibN, \tag{54}$$

სადაც

$$\begin{cases} M=A_0-A_2b^2+A_4b^4-\ldots \\ N=A_1-A_3b^2+A_5b^4-\ldots \end{cases} \tag{55}$$

ცხადია, რომ

(56) $$f(a-bi)=M-ibN,$$

სადაც M და N-ს აქვთ იგივე (55) მნიშვნელობანი. ამგვარად, x ცვლადის $a+bi$ და $a-bi$ შეუღლებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის შეუღლებული მნიშვნელობანი (54) და (56).

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს:

თუ ნამდვილ კოეფიციენტებიან მთელ რაციონალურ $f(x)$ ფუნქციას აქვს $a+bi$ კომპლექსური ფესვი, მაშინ მას აქვს $a-bi$ შეუღლებული ფესვიც.

მართლაც, თუ $a+bi$ რიცხვი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს, მაშინ უნდა იყოს

$$f(a+bi)=M+ibN=0,$$

მაშასადამე,

$$M=0,\ N=0.$$

მაგრამ, მაშინ აგრეთვე

$$f(a-bi)=M-ibN=0,$$

ე. ი. $a-bi$ რიცხვი აგრეთვე იქნება $f(x)$ ფუნქციის ფესვი.

ამ დებულებიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ მთელი რიგი შედეგებისა. უწინარეს ყოვლისა, თუ $f(x)$ არის ნამდვილი კოეფიციენტებიანი ფუნქცია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის კომპლექსურ ფესვთა რიცხვი ლ უ წ ი უ ნ დ ა ი ყ ო ს. რადგანაც ყველა ფესვის (ნამდვილი და კომპლექსური) რიცხვი ეტოლება $f(x)$ ფუნქციის ხარისხს, ამიტომ:

ა) **ლუწი ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციას აქვს ლუწი რიცხვი ნამდვილი ფესვებისა** (შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ეს ლუწი რიცხვი ეტოლებოდეს 0-ს, ე. ი. რომ ფუნქციას სრულებით არ აქვს ნამდვილი ფესვები);

ბ) **კენტი ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციას აქვს კენტი რიცხვი ნამდვილი ფესვებისა**; მაშასადამე, მას აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი.

ასე მაგალითად, ნამდვილ კოეფიციენტებიან მესამე ხარისხის განტოლებას ყოველთვის აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი.

4. წინა შედეგები შეიძლება გამოვიყენოთ მთელი რაციონალური ფუნქციის მამრავლებად დაშლის საკითხისათვის.

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

ნამდვილი კოეფიციენტებიანი ყოველი მთელი რაციონალური ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ ნამდვილი კოეფიციენტებიანი პირველი და მეორე ხარისხის მამრავლთა ნამრავლის სახით.

დამტკიცება. ჩვენ ვიცით, რომ ყოველი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს დაშლას n წრფივ მამრავლებად (43). მაგრამ ამ მამრავლებს შორის ნამდვილი იქნება მხოლოდ ისინი, რომლებიც შეესაბამება ნამდვილ ფესვებს. შეუღლებულ კომპლექსურ ფესვების ყოველ წყვილს შეესაბამება კომპლექსურ მამრავლთა წყვილი. განვიხილოთ კომპლექსური წევრთა რომელიმე წყვილი; დავუშვათ, მაგალითად

$$x_1=a+bi,\ x_2=a-bi;$$

მაშინ

$$(x-x_1)(x-x_2)=(x-a-bi)(x-a+bi)=x^2-2ax+a^2+b^2.$$

ეს თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ იმ ორი წრფივი მამრავლის ნამრავლი, რომლებიც შეესაბამება შეუღლებული ფესვების წყვილს, შეიძლება შევცვალოთ ნამდვილი კოეფიციენტებიანი მეორე ხარისხის მამრავლად. ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციის ყოველ ნამდვილ ფესვს შეესაბამება წრფივი მამრავლი, შეუღლებულ კომპლექსურ ფესვების ყოველ წყვილს — ნამდვილი კოეფიციენტებიანი მეორე ხარისხის მამრავლი.

მაგალითის სახით განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=x^4+1.$$

განვსაზღვროთ $f(x)$ ფუნქციის ფესვები:

$$x=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi};$$

$$x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\ x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};\quad x_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(43) თანაფარდობას, ამ შემთხვევაში, აქვს ასეთი სახე:

$$f(x)=x^4+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

შეუღლებული ფესვების შესაბამისი მამრავლების წყვილ-წყვილად შეერთება გვაძლევს

$$(x-x_1)(x-x_2)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$
$$=x^2-\sqrt{2}\,x+1;$$

$$(x-x_3)(x-x_4)=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$
$$=x^2+\sqrt{2}\,x+1;$$

ამრიგად

$$f(x)=x^4+1=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1).$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ x^4+1 ფუნქცია შეიძლება დავშალოთ მამრავლებად, რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან ნამდვილ რიცხვთა არეს. შევნიშნოთ ახლა, რომ აღებულ შემთხვევაში შეიძლება დავკმაყოფილდეთ რიცხვთა უფრო ვიწრო არეთი. მართლაც, აღვნიშნოთ R-ით ყველა რაციონალურ რიცხვთა ველი (თავი I, § 4); მაშინ შეიძლება ვთქვათ, რომ ყოველი

$$x^2-\sqrt{2}\,x+1,\quad x^2+\sqrt{2}\,x+1$$

მამრავლთაგანი წარმოადგენს მთელ რაციონალურ ფუნქციას $R(\sqrt{2})$ ველის მიმართ, მასთან $R(\sqrt{2})$ მიიღება R-დან $\sqrt{2}$ რადიკალის ჩართვით. ამრიგად, x^4+1 ფუნქცია შეიძლება დავშალოთ მამრავლებად, რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან $R(\sqrt{2})$ ველს. მოკლედ შეიძლება ვთქვათ: $^4+1$ ფუნქცია იშლება მამრავლებად $R\ (\sqrt{2})$ ველში.

საზოგადოდ, ფუნქციის მამრავლებად დაშლის საკითხს აქვს გარკვეული შინაარსი მხოლოდ მაშინ, როცა დასახელებულია რიცხვთა ის არე (ველი ანუ რგოლი), რომელსაც შეიძლება ეკუთვნოდეს ამ თანამამრავლთა კოეფიციენტები.

თუ მთელი რაციონალური ფუნქცია $f(x)$ შეიძლება დავშალოთ მამრავლებად (რომლებიც x-ზეა დამოკიდებული), რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია დაყვანადია P ველში.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია რომ იყოს დაყვანილი P ველში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ არიან მთელი რაციონალური ფუნქციები (არანულოვანი ხარისხისა), რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს.

წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება დაუყვანადი P ველში.

უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას, რომლის კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს, **ეწოდება დაუყვანადი ამ ველში, თუ იგი არ შეიძლება დაიშალოს თანამამრავლებლად (რომლებიც x-ზეა დამოკიდებული), რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე ველს.**

თუ განვიხილავთ ყველა კომპლექსურ რიცხვთა ველს, მაშინ ამ ველში ყოველი მთელი რაციონალური ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ წრფივ მამრავლთა ნამრავლის სახით (პ. 1). მაშასადამე, **ყველა კომპლექსურ რიცხვთა ველში ყოველი მთელი ალგებრული ფუნქცია, რომლის ხარისხი ერთზე მეტია, დაყვანადია.**

ყველა ნამდვილ რიცხვთა არეში ყოველი ფუნქცია შეიძლება დავშალოთ პირველი და მეორე ხარისხის თანამამრავლებლად. მაშასადამე, **ყველა ნამდვილ რიცხვთა ველში ყოველი ფუნქცია, რომლის ხარისხი ორზე მეტია, დაყვანადია.** მეორე ხარისხის ფუნქცია, რომელსაც კომპლექსური ფესვები აქვს, ყველა ნამდვილ რიცხვთა ველში დაუყვანადია.

ფუნქცია $x^4 + 1$ დაუყვანადია ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველში; იგი დაყვანადი იქნება, თუ ამ ველს ჩავურთავთ რადიკალს $\sqrt{2}$-დან.

სავარჯიშო.

1. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1$$

დაყვანადია $R(\sqrt{3})$ ველში.

2. დაშალეთ თანამამრავლებლად ნამდვილი კოეფიციენტებიანი ფუნქცია

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 4.$$

3. მოძებნეთ ისეთი ფუნქცია * ნამდვილი კოეფიციენტებით, რომელსაც ფესვებად აქვს:

$$1-i\sqrt{2},\ i, \ldots$$

4. იპოვეთ ისეთი ფუნქცია * რაციონალური კოეფიციენტებით, რომელსაც ფესვებად აქვს:

$$1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{3}, \ldots$$

§ 5. მთელი რაციონალური ფუნქციის R ველში დაუყვანადობის ნიშნები

1. თუ მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები ეკუთვნიან ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველს, მაშინ ბუნებრივია დაისვას საკითხი $f(x)$ ფუნქციის ამ ველში დაყვანადობის შესახებ.

უპირველესად შევნიშნოთ, რომ მოცემული რაციონალური კოეფიციენტებიანი ფუნქცია შეგვიძლია შევცვალოთ მთელი კოეფიციენტებიანი ფუნქციით, რომელიც მოცემული ფუნქციიდან მუდმივი მამრავლით განსხვავდება.

მართლაც, თუ მოცემული $f(x)$ ფუნქციას გავამრავლებთ მისი კოეფიციენტების მნიშვნელთა უმცირეს λ ჯერადზე, მაშინ მივიღებთ $\lambda f(x)$ ფუნქციას, რომელსაც აქვს მთელი კოეფიციენტები, და $f(x)$ ფუნქციის დაყვანადობის საკითხი დაიყვანება $\lambda f(x)$ ფუნქციის დაყვანადობის საკითხზე.

ამრიგად, გამოკვლევის ზოგადობის შეუმცირებლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ განსახილავი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები ეკუთვნის **მთელ რიცხვთა რგოლს**.

ასეთ $f(x)$ ფუნქციას შემდეგში ჩვენ ვუწოდებთ **მთელ რიცხოვან** ფუნქციას.

ამრიგად, ვთქვათ, $f(x)$ არის მთელრიცხოვანი ფუნქცია. აღვნიშნოთ δ-თი $f(x)$ ფუნქციის ყველა კოეფიციენტთა უდიდესი საერთო გამყოფი. თუ $\delta=1$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას **პრიმიტიული ეწოდება**.

თუ $\delta \neq 1$, მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$f(x)=\delta f_1(x),$$

სადაც $f_1(x)$ არის უკვე პრიმიტიული ფუნქცია.

---

* უმაღლესი ხარისხისა.

თუ $\varphi(x)$ არის რაციონალური კოეფიციენტებიანი მთელი რაციონალური ფუნქცია, მაშინ, გავამრავლებთ რა $\varphi(x)$ ფუნქციას მისი კოეფიციენტების მნიშვნელების უმცირეს γ ჯერადზე, მივიღებთ მთელრიცხოვან $\gamma\varphi(x)$ ფუნქციას. აღვნიშნავთ რა ε-ით ამ მთელრიცხოვანი ფუნქციის კოეფიციენტების უდიდეს საერთო გამყოფს, გვექნება:

$$\gamma\varphi(x)=\varepsilon\varphi_1(x),$$

ანუ

$$\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{\gamma}\varphi_1(x),$$

სადაც $\varphi_1(x)$ არის პრიმიტიული ფუნქცია.

დავამტკიცოთ შემდეგი.

დებულება. ორი პრიმიტიული ფუნქციის ნამრავლი არის ისევ პრიმიტიული ფუნქცია.

მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ არიან პრიმიტიული ფუნქციები. ეს ფუნქციები დავწეროთ ასე:

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_rx^r,$$
$$\psi(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_sx^s.$$

ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ არის აგრეთვე პრიმიტიული. დავუშვათ წინააღმდეგ, ე. ი. დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყველა კოეფიციენტს აქვთ ნულისაგან განსხვავებული საერთო q გამყოფი. ვთქვათ, $p \neq 1$ არის q რიცხვის რაიმე მარტივი გამყოფი. რადგანაც $\varphi(x)$ ფუნქცია პრიმიტიულია, ამიტომ $b_0, b_1, \ldots, b_r$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არ გაიყოფა p-ზე. აღვნიშნოთ b_k-თი პირველი ამ კოეფიციენტებიდან, რომელიც p-ზე არ იყოფა. თანაგვარად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\psi(x)$ ფუნქციის კოეფიცინტებიდან $c_0, c_1, \ldots, c_s$ ერთი მაინც არ გაიყოფა p-ზე. ვთქვათ, c_l არის პირველი მათგანი რომელიც p-ზე არ გაიყოფა.

განვიხილოთ ახლა კოეფიციენტი x^{k+l}-თან ნამრავლში $f(x)=\varphi(x)\varphi(x)$. ეს კოეფიციენტი შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი სახით:

(57) $$b_kc_l+b_{k-1}c_{l+1}+b_{k-2}c_{l+2}+\ldots+b_{k+1}c_{l-1}+b_{k+2}c_{l-2}+\ldots$$

აქ ნამრავლი $b_k c_l$ არ იყოფა მარტივ p რიცხვზე, ვინაიდან b_k და c_l არ იყოფა p-ზე.

მეორეს მხრივ, რადგანაც b_k არის პირველი ელემენტი b კოეფიციენტებიდან, რომელიც p-ზე არ იყოფა, ამიტომ $b_0, \ldots, b_{k-1}$ კოეფიციენტები p-ზე იყოფა. თანაგვარად, $c_0, \ldots, c_{l-1}$ კოეფიციენტები იყოფა p-ზე. ამიტომ (57) ჯამი შეიცავს მხოლოდ ერთ წევრს, რომელიც p-ზე არ იყოფა. მაშასადამე, მთელი ჯამი p-ზე არ იყოფა.

ამრიგად, კოეფიციენტი x^{k+l}-თან ნამრავლში $\varphi(x)\psi(x)$ (ე. ი. კოეფიციენტი x^{k+l}-თან $f(x)$ ფუნქციისა) p-ზე არ იყოფა, მაშასადამე, არ იყოფა q-ზედაც. უკანასკნელი დასკვნა ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას.

ამრიგად, ვიგულისხმებთ რა, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყველა კოეფიციენტს აქვთ ნულისაგან განსხვავებული საერთო გამყოფი, ჩვენ მივდივართ წინააღმდეგობამდე. მაშასადამე, $f(x)$ არის პრიმიტიული ფუნქცია.

მიღებული შედეგი საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. *თუ მთელრიცხოვანი $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება დაიშალოს მამრავლებად (არა ნულოვანი ხარისხის) რაციონალური კოეფიციენტებით, მაშინ იგი შეიძლება დაიშალის აგრეთვე მთელ კოეფიციენტებიან მამრავლებად.*

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ $f(x)$ ფუნქცია *დაყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველში, მაშინ იგი დაყვანადია მთელ რიცხვთა რგოლში**.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია წარმოდგენილია რაციონალური კოეფიციენტებიანი ორი $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციის ნამრავლის სახით:

(58)
$$f(x)=\varphi(x)\,\psi(x).$$

ამ პუნქტის დასაწყისში გაკეთებული შენიშვნის თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ,

$$\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{\gamma}\,\varphi_1(x),$$

$$\psi(x)=\frac{\lambda}{\mu}\,\psi_1(x),$$

---

* ზემოთ დამყარებული ცნება მთელი რაციონალური ფუნქციის ველში დაყვანადობის შესახებ სიტყვა სიტყვით გადაიტანება რგოლზე.

სადაც $\varphi_1(x)$ და $\psi_1(x)$ არიან მთელრიცხოვანი პრიმიტიული ფუნქციები, ხოლო ε, γ, λ, μ — მთელი რიცხვებია.

მეორე მხრით, $f(x)$ ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასე:

$$f(x)=\delta f_1(x),$$

სადაც δ — მთელი რიცხვია, ხოლო $f_1(x)$ არის პრიმიტიული ფუნქცია. (58) თანაფარდობა ახლა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\delta f_1(x)=\frac{\varepsilon\lambda}{\gamma\mu}\varphi_1(x)\psi_1(x)$$

ანუ

$$\frac{\delta\gamma\mu}{\varepsilon\lambda}f_1(x)=\varphi_1(x)\psi_1(x).$$

წილადი $\frac{\delta\gamma\mu}{\varepsilon\lambda}$ შეიძლება აღმოჩნდეს შ ე კ ვ ე ც ა დ ი; აღვნიშნოთ $\frac{\alpha}{\beta}$-თი უკვეცი წილადი, ტოლი $\frac{\delta\gamma\mu}{\varepsilon\lambda}$ წილადისა; მაშინ გვექნება

$$\frac{\alpha}{\beta}f_1(x)=\varphi_1(x)\psi_1(x), \tag{59}$$

სადაც α და β ურთიერთ მარტივი რიცხვებია. დავამტკიცოთ, რომ $\beta=1$.

მართლაც, თუ $\beta\neq1$, მაშინ პრიმიტიული $f_1(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არ გაიყოფა β-ზე. მაშასადამე, მარცხენა ნაწილში მივიღებთ ფუნქციას წილადი კოეფიციენტებით, იმ დროს როცა მარჯვენა ნაწილში ჩვენ გვაქვს მთელი კოეფიციენტებიანი ფუნქცია. ამრიგად, უნდა იყოს $\beta=1$, ასე რომ (59) ტოლობა ღებულობს სახეს:

$$\alpha f_1(x)=\varphi_1(x)\psi_1(x).$$

ფუნქციები $\varphi_1(x)$ და $\psi_1(x)$ არიან პრიმიტიული. მაშასადამე, მათი ნამრავლიც უნდა წარმოადგენდეს პრიმიტიულ ფუნქციას. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\alpha=1$, ე. ი.

$$f_1(x)=\varphi_1(x)\psi_1(x),$$

საიდანაც

$$\delta f_1(x)=\delta\varphi_1(x)\psi_1(x),$$

ანუ

$$f(x)=\theta(x)\psi_1(x),$$

სადაც $$\theta(x) = 8\varphi_1(x) \text{ და } \psi(x)$$

არიან მთელრიცხოვანი ფუნქციები.

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ დაყვანადია მთელ რიცხვთა რგოლში.

2. განვიხილოთ ახლა ზოგიერთი ნიშნები, რომლებიც საშუალებებს მოგვცემს გამოვარკვიოთ მთელი რაციონალური ფუნქციის დაყვანადობის შესახებ მთელ რიცხვთა რგოლში.

მთელრიცხოვანი $f(x)$ ფუნქცია დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

დავუშვათ, რომ კოეფიციენტები $a_0, a_1, \ldots, a_r \left(r \geqslant \frac{n}{2}\right)$ იყოფა რაიმე მარტივ p რიცხვზე, მასთან a_0 კოეფიციენტი p^2-ზე არ იყოფა. ამ პირობებში შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

დებულება. თუ მთელრიცხოვანი $f(x)$ ფუნქციას აქვს h ხარისხის გამყოფი (მთელ კოეფიციენტებში), სადაც

$$n - r \leqslant h \leqslant r,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ყველა კოეფიციენტი იყოფა p-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს h ხარისხის $\varphi(x)$ გამყოფი:

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_hx^h,$$

სადაც $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_h$ — მთელი რიცხვებია; მაშინ

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

სადაც $\psi(x)$ არის $h_1 = n - h$ ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქცია:

$$\psi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{h_1}x^{h_1}.$$

თანაფარდობიდან $n - r \leqslant h$ გამომდინარეობს $n - h \leqslant r$, ე. ი. $h_1 \leqslant r$.

გვაქვს:

$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x) = b_0c_0 + (b_1c_0 + b_0c_1)x + (b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2)x^2 + \cdots$

მეორეს მხრივ,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

შევადარებთ რა x-ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტებს, მივიღებთ:

$$a_0 = b_0c_0$$
$$a_1 = b_1c_0 + b_0c_1$$
$$a_2 = b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_h = b_hc_0 + b_{h-1}c_1 + \ldots + b_0c_h.$$

ამ თანაფარდობიდან განვიხილოთ პირველი:

$$a_0 = b_0c_0,$$

პირობების თანახმად, a_0 კოეფიციენტი იყოფა მარტივ p რიცხვზე, მაგრამ არ იყოფა p^2-ზე. მაშასადამე, b_0 და c_0 რიცხვებიდან ერთი და მხოლოდ ერთი მათგანი p-ზე იყოფა. დავუშვათ, მაგალითად, რომ b_0 იყოფა p-ზე, ხოლო c_0 არ იყოფა p-ზე. მაშინ გადავიდეთ ტოლობაზე: $a_1 = b_1c_0 + c_1b_0$, ანუ

$$b_1c_0 = a_1 - c_1b_0;$$

აქ მარჯვენა ნაწილი p-ზე იყოფა (a_1 კოეფიციენტი იყოფა p-ზე, პირობის თანახმად, b_0-იც p-ზე იყოფა). მაშასადამე, b_1c_0 ნამრავლი p-ზე იყოფა. რადგანაც c_0, პირობის თანახმად, p-ზე არ იყოფა, ამიტომ b_1 იყოფა p-ზე. ანალოგიურად, თანაფარდობიდან

$$b_2c_0 = a_2 - b_1c_1 - b_0c_2$$

ვიპოვით, რომ b_2 იყოფა p-ზე და ა. შ.; დაბოლოს, თანაფარდობიდან

$$b_hc_0 = a_h - b_{h-1}c_1 - b_{h-2}c_2 - \ldots - b_0c_h$$

ვიპოვით, რომ b_h იყოფა p-ზე; აქ არსებითია, რომ $h \leqslant r$, ამიტომ a_h კიდევ p-ზე იყოფა.

ამრიგად, $\varphi(x)$ ფუნქციის ყველა კოეფიციენტი უნდა იყოფოდეს p-ზე; მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ

$$\varphi(x) = p\varphi_1(x),$$

სადაც $\varphi_1(x)$ არის მთელრიცხოვანი ფუნქცია; ახლა ცხადია,

$$f(x) = p\varphi_1(x)\,\psi(x);$$

საიდანაც ჩანს, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყველა კოეფიციენტი უნდა იყოფოდეს მარტივ p რიცხვზე.

ზემოთ ჩვენ დავუშვით, რომ b_0 იყოფა p-ზე. ჩვენ რომ დაგვეშვა, პირიქით, რომ c_0 იყოფა p-ზე, ხოლო b_0 არ იყოფა p-ზე, მაშინ ანალოგიურად დავამტკიცებდით, რომ $\psi(x)$ ფუნქციის ყველა კოეფიციენტი $c_0, c_1, \ldots, c_{h_1}$ იყოფა p-ზე (ამასთან არსებითია, რომ $h_1 \leqslant r$). მაშასადამე, ამ შემთხვევაშიაც ჩვენ მივიდოდით იმ დასკვნამდე, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყველა კოეფიციენტი იყოფა p-ზე. ამგვარად, ჩვენი წინადადება სავსებით დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ მთელრიცხოვანი ფუნქცია

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს.

a) კოეფიციენტები $a_0, a_1, \ldots, a_r$ $\left(\text{სადაც } r \geqslant \frac{n}{2}\right)$ იყოფა p-ზე, ხოლო a_0 არ იყოფა p^2-ზე;

b) a_{r+1} კოეფიციენტი p-ზე არ იყოფა,

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს h ხარისხის გამყოფი (მთელ კოეფიციენტებით), სადაც

$$n-r \leqslant h \leqslant r.$$

მართლაც, ასეთი გამყოფი რომ არსებობდეს, მაშინ ყველა კოეფიციენტი $a_0, a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n$ უნდა გაიყოს p-ზე.

განვიხილოთ ახლა ზოგიერთი კერძო შემთხვევა.

1. დავუშვათ, რომ $f(x)$ აკმაყოფილებს a) და b) პირობებს, როცა $r=n-1$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, დავუშვათ, რომ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ კოეფიციენტები იყოფა მარტივ p რიცხვზე, ხოლო a_0 არ იყოფა p^2-ზე, უფროსი წევრის a_n კოეფიციენტი p-ზე არ იყოფა. მაშინ $f(x)$ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს h ხარისხის გამყოფები მთელი კოეფიციენტებით, სადაც

$$1 \leqslant h \leqslant n-1.$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქცია საზოგადოდ დაუყვანადია მთელ რიცხვთა რგოლში და, მაშასადამე, რაციონალურ რიცხვთა ველშიაც (იხ. პ. 1). ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ დაყვანადობის შემდეგი კრიტერიუმი, რომელიც ე ი ზ ე ნ შ ტ ე ი ნ ი ს (Eisenstein) მიერ იყო მოცემული 1850 წელს.

2. თუ მთელრიცხოვანი ფუნქცია

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ კოეფიციენტები იყოფა მარტივ p რიცხვზე, ხოლო a_0 (თავისუფალი წევრი) არ იყოფა p^2-ზე,

2) უფროსი წევრის a_n კოეფიციენტი p-ზე არ იყოფა,

მაშინ $f(x)$ დაუყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველში.

მაგალითები.

1. ფუნქცია $x^4 - 3x^2 + 6x - 15$ დაუყვანადია R ველში (აქ $p = 3$).
2. ფუნქცია $x^4 - 4x^3 + 6$ დაყვანადია R ველში (აქ $p = 2$).
3. ფუნქცია $x^n - p$, სადაც p — მარტივი რიცხვია ($p \neq 1$), დაუყვანადია R ველში.
4. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x + 1.$$

აქ ეიზენშტეინის კრიტერიუმი უშუალოდ ვერ გამოიყენება. ვისარგებლოთ შემდეგი ცხადი შენიშვნით: $f(x)$ ფუნქცია რომ იყოს დაყვანადი R ველში, მაშინ $\varphi(y) = f(y+1)$ ფუნქციაც იქნება დაყვანადი.

გვაქვს:

$$f(y+1)=(y+1)^4 + 2(y+1)^3 + 6(y+1) + 1 = y^4 + 6y^3 + 12y^2 + 16y + 10.$$

მიღებული ფუნქცია დაუყვანადია, ვინაიდან აკმაყოფილებს ეიზენშტეინის პირობას (როცა $p = 2$). მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციაც დაუყვანადია R ველში.

3. ვიგულისხმოთ ახლა, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს a) და b) პირობებს, როცა $r = n - 2$ (ამასთან ჩვენ ვიგულისხმოთ $n \geqslant 4$), ე. ი. დავუშვათ, რომ:

$a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$ კოეფიციენტები p-ზე იყოფა, ხოლო a_0 არ იყოფა p^2-ზე.

a_{n-1} კოეფიციენტი p-ზე არ იყოფა.

ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს h ხარისხის გამყოფი მთელი კოეფიციენტებით, სადაც

$$2 \leqslant h \leqslant n-2.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს მხოლოდ ისეთი დაშლა, რომ ერთ-ერთი თანამამრავლის ხარისხი 1-ის ტოლია, ხოლო მეორე თანამამრავლის ხარისხი $(n-1)$-ის ტოლია;

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციისათვის შეიძლება არსებობდეს შემდეგი სახის დაშლა:

$$f(x) = (ax + b)\psi(x),$$

სადაც a და b მთელი რიცხვებია, ხოლო $\psi(x)$ არის $n-1$ ხარისხის მთელრიცხოვანი ფუნქცია. თუ ასეთი სახის დაშლა ნამდვილად არსებობს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას აქვს რაციონალური ფესვი $x = -\frac{b}{a}$.

თუ კი $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს რაციონალური ფესვები, მაშინ $f(x)$ დაუყვანადია R ველში.

ამრიგად ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ რეზულტატს:

თუ მთელრიცხოვანი ფუნქცია

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

კოეფიციენტები $a_0, a_1, \dots a_{n-2}$ იყოფა მარტივ p რიცხვზე, ხოლო a_0 არ იყოფა p^2-ზე;

კოეფიციენტი a_{n-1} არ იყოფა p-ზე,

მაშინ $f(x)$ ან დაუყვანადია R ველში, ან აქვს რაციონალური ფესვი.

მაგალითი.

ვთქვათ, $f(x) = x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 3x + 6$.

აქ $a_0=6$, $a_1=3$, $a_2=9$ იყოფა 3-ზე ($r=2$), a_0 არ იყოფა 3^2-ზე, a_3 არ იყოფა 3-ზე. მაშასადამე, $f(x)$ ან დაყვანადია R ველში ან აქვს რაციონალური ფესვი. გამოვაკლებთ რა $f(x)$ ფუნქციას რაციონალურ ფესვებზე (თავი II, § 3. პ. 2), გამოვარკვევთ რომ რაციონალური ფესვები არაა; მაშასადამე, $f(x)$ დაუყვანადია R ველში.

4. განვიხილოთ განტოლება

$$x^p - 1 = 0,$$

რომელსაც აკმაყოფილებენ 1-დან p-ური ხარისხის ფესვის სხვადასხვა მნიშვნელობანი; ეს განტოლება შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$(x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots x + 1) = 0.$$

1-დან p-ური ხარისხის ფესვის მნიშვნელობანი, განსხვავებული 1-დან, აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0. \quad (60)$$

I თავში § 3, 3. 7 ჩვენ დავინახეთ, რომ 1-დან p-ური ხარისხის ფესვის სხვადასხვა მნიშვნელობებს შეესაბამება სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც მდებარეობენ წესიერი მრავალკუთხედის წვეროებში. თუ (60) განტოლების ამოხსნა შეიძლება კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ რადიკალებში, მაშინ მისი ფესვები შეიძლება აგებულ იქნეს ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით; ამგვარად, ამ შემთხვევაში შეიძლება ავაგოთ წესიერი p — კუთხედი ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით, ე. ი. გავყოთ წრეწირი p ტოლ ნაწილად. ამიტომ (60) განტოლებას ზოგჯერ უწოდებენ წ რ ი ს გ ა ყ ო ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს; სხვათა შორის, ზოგიერთი ავტორი ამ ტერმინით სხვა აზრით სარგებლობს.

(60) განტოლების კვადრატულ რადიკალებში ამოხსნის საკითხი დაკავშირებულია, როგორც ამას შემდეგში დავინახავთ (თ. X),

$$F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1$$

ფუნქციის დაუყვანადობის საკითხთან.

დავამტკიცოთ შემდეგი

დებულება. თუ p არის მარტივი რიცხვი, მაშინ $F_p(x)$ ფუნქცია დაუყვანადია ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველში.

ჩვენ უნდა ვუჩვენოთ, რომ ფუნქცია

$$F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1=\frac{x^p-1}{x-1}$$

დაუყვანადია R ველში. ამის დასამტკიცებლად მივიღოთ $x=y+1$; მაშინ ჩვენ მივიღებთ y-ის ფუნქციას, რომელიც იქნება დაყვანადი ან დაუყვანადი $F_p(x)$-სთან ერთად:

$$F_p(y+1)=(y+1)^{p-1}+(y+1)^{p-2}+\dots+(y+1)+1=\frac{(y+1)^p-1}{y},$$

ანუ

$$F_p(y+1)=\frac{1}{y}\{(y+1)^p-1\}=$$

$$=y^{p-1}+py^{p-2}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}y^{p-3}+\dots+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}y+p.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მიღებული ფუნქცია აკმაყოფილებს ეიზენშტეინის თეორემის ყველა პირობას. მართლაც, ყველა კოეფიციენტი, გარდა პირველისა, იყოფა p-ზე, ხოლო თავისუფალი წევრი არ იყოფა p^2-ზე. მაშასადამე, დაუყვანადია $F_p(x)$ ფუნქციაც.

5. განვიხილოთ ახლა დაყვანადობის ნიშანი, მოცემული პოლიას (G. Polya) მიერ. წინასწარ დავამტკიცოთ ერთი დამხმარე დებულება.

ვთქვათ,

$$\varphi(x)=a_0x^m+ax^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

არის მთელრიცხოვანი ფუნქცია; ვიგულისხმოთ, რომ

$$a_0>0.$$

ვთქვათ, $\alpha=a+bi$ არის $f(x)$ ფუნქციის ერთი ფესვი. α რიცხვის ნამდვილ ნაწილს აღვნიშნავთ $R(\alpha)$ სიმბოლოთი:

$$R(\alpha)=a.$$

ლემა. თუ $\varphi(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი ფესვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$R(\alpha)<k-\frac{1}{2},$$

სადაც k არის გარკვეული რიცხვი, მაშინ

$$|\varphi(k-1)|<|\varphi(k)|.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ არიან $\varphi(x)$ ფუნქციის ფესვები. მაშინ, როგორც ვიცით,

$$\varphi(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m).$$

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის ყველა ფესვი ნამდვილია. მაშინ ნებისმიერი x_h ფესვისათვის

$$R(x_h)=x_h.$$

მაშასადამე, პირობის თანახმად,

$$x_h<k-\frac{1}{2},$$

ანუ

(61)
$$k-x_h>\frac{1}{2}.$$

განვიხილოთ ახლა სხვაობა $k-1-x_h$.

თუ $k-1-x_h<0$, მაშინ, მივიღებთ რა მხედველობაში (61) უტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$0>k-1-x_h>-\frac{1}{2}.$$

მაშასადამე,

$$|k-1-x_h|<\frac{1}{2}.$$

ვინაიდან $|k-x_h|=k-x_h>\frac{1}{2}$, ამიტომ ამ შემთხვევაშიაც

$$|k-x_h|>|k-1-x_h|.$$

თუ ამ უტოლობებში მივიღებთ $h=1, 2, \ldots, m$ და გავამრავლებთ რა წევრობრივ შესაბამის უტოლობებს, ვიპოვით:

$$|(k-x_1)(k-x_2)\ldots(k-x_m)|>$$
$$>|(k-1-x_1)(k-1-x_2)\ldots(k-1-x_m)|.$$

მაშასადამე,

$$|\varphi(k)|>|\varphi(k-1)|.$$

ამრიგად, იმ შემთხვევისათვის, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის ყველა ფესვი ნამდვილია, ლემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა $\varphi(x)$ ფუნქციას აქვს მხოლოდ კომპლექსური ფესვები.

ყოველ წყვილს კომპლექსურ ფესვებისას $\alpha=a+bi$ და $\overline{\alpha}=a-bi$ შეესაბამება მამრავლი

$$Q(x)=(x-a-bi)(x-a+bi)=(x-a)^2+b^2.$$

$\varphi(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს (სიზუსტით a_0 კოეფიციენტამდე) ნამრავლს ამ სახის მამრავლებისას.

შევადაროთ $Q(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები, როცა $x=k$ და როცა $x=k-1$:

$$Q(k)=(k-a)^2+b^2,$$

$$Q(k-1)=(k-a-1)^2+b^2=(k-a)^2-2(k-a)+1+b^2.$$

მაშასადამე,

$$Q(k)-Q(k-1)=2(k-a)-1. \tag{62}$$

მეორეს მხრივ, თანახმად პირობისა,

$$a = R(\alpha) < k - \frac{1}{2},$$

ე. ი.

$$k - a > \frac{1}{2},$$

ანუ

$$2(k - a) - 1 > 0.$$

შევადარებთ რა (62) ტოლობასთან, მივიღებთ:

$$Q(k) - Q(k-1) > 0,$$

$$Q(k) > Q(k-1).$$

რადგანაც $Q(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ყოველთვის დადებითია, ამიტომ უკანასკნელი თანაფარდობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$|\, Q(k) \,| > |\, Q(k-1) \,| \,.$$

რადგანაც ეს უტოლობა სამართლიანია თვითეული თანამამრავლისათვის, რომლებზედაც $\varphi(x)$ ფუნქცია იშლება, ამიტომ

$$|\, \varphi(k) \,| > |\, \varphi(k-1) \,| \,.$$

დაბოლოს, ვთქვათ, $\varphi(x)$ ფუნქციას აქვს როგორც ნამდვილი, ისე კომპლექსური ფესვები. მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ნამრავლი ორი ფუნქციისა $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$, რომლებიდან ერთს აქვს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები, ხოლო მეორეს — კომპლექსური:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(x).$$

თანახმად დამტკიცებულისა

$$|\, \varphi_1(k) \,| > |\, \varphi_1(k-1) \,| \,,$$

$$|\, \varphi_2(k) \,| > |\, \varphi_2(k-1) \,|$$

და ამიტომაც

$$|\, \varphi(k) \,| > |\, \varphi(k-1) \,| \,.$$

ლემა სავსებით დამტკიცებულია.

ახლა ადვილად შეგვიძლია დავამტკიცოთ პ ო ლ ი ა ს შემდეგი

თეორემა. თუ მთელრიცხოვანი $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს მთელი k რიცხვი, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:

1) $f(x)$ უნქციის ნებისმიერი α ფესვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$R(\alpha) < k - \frac{1}{2};$$

2) $f(k-1) \neq 0$;

3) $f(k)$ — მარტივი რიცხვია,

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია R ველში დაუყვანადია.

დამტკიცება. თუ $f(x)$ ფუნქცია დაყვანადია R ველში, მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$(x) = \varphi(x)\,\psi(x), \tag{63}$$

სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ — მთელრიცხოვანი ფუნქციებია, მასთან თვითეული მათგანის ხარისხი ნულზე მეტია. რადგანაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციების ფესვები არიან ამავე დროს $f(x)$ ფუნქციის ფესვები, ამიტომ ყოველი ამ ფუნქციათათვის სრულდება 1) პირობა. მაშ თითოეული $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციებისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზემოთ დამტკიცებული ლემა; იგი გვაძლევს:

$$|\varphi(k)| > |\varphi(k-1)|$$
$$|\psi(k)| > |\psi(k-1)|.$$

შევნიშნოთ ახლა, რომ $|\varphi(k-1)|$ და $|\psi(k-1)|$ რიცხვები ნულისაგან განსხვავებულია; მართლაც,

$$|\varphi(k-1)|\,|\psi(k-1)| = |f(k-1)| \neq 0.$$

ვინაიდან $|\varphi(k-1)|$ და $|\psi(k-1)|$ არიან მთელი დადებითი რიცხვები, ამიტომ

$$|\varphi(k-1)| \geqslant 1 \text{ და } |\psi(k-1)| \geqslant 1.$$

მაშასადამე,

$$|\varphi(k)| > 1 \text{ და } |\psi(k)| > 1,$$

ე. ი. $\varphi(k)$ და $\psi(k)$ რიცხვები განსხვავდებიან 1-სგან.

მეორეს მხრივ, (63) ტოლობაში თუ დავუშვებთ $x = k$, ვიპოვით

$$f(k) = \varphi(k)\,\psi(k).$$

ამრიგად, $f(k)$ რიცხვი წარმოდგენილია ერთეულისაგან განსხვავე-

ბული ორი მთელი რიცხვის ნამრავლის სახით, ე. ი. იგი არ შეიძლება იყოს მარტივი რიცხვი.

მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ ფუნქცია არ შეიძლება იყოს დაყვანადი R ველში.

ვნახოთ ახლა, თუ როგორ უნდა ვისარგებლოთ დამტკიცებული თეორემით. თუ რაიმე k რიცხვის მიმართ ცნობილია, რომ იგი 1) პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, აკმაყოფილებს თუ არა ეს რიცხვი 2) და 3) პირობებს. ამრიგად, დასამტკიცებლად რჩება, თუ როგორ უნდა მოიძებნოს მთელი k რიცხვი რომელიც 1) პირობას აკმაყოფილებს.

ამ მიზნით შევნიშნოთ შემდეგი: თუ ჩვენ შევძლებთ ვიპოვოთ ისეთი ნამდვილი l რიცხვი, რომელსაც აქვს ის თვისება, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყოველი α ფესვისათვის შესრულებულია პირობა

$$R(\alpha)<l, \tag{64}$$

მაშინ ნებისმიერი მთელი k რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$k\geqslant l+\frac{1}{2},$$

ამასთანავე დააკმაყოფილებს წინა თეორემის 1) პირობას.

ამრიგად, ამოცანა დაიყვანება იმაზე, რომ მოიძებნოს ერთი მაინც l რიცხვი, რომლისთვისაც შესრულებულია (64) პირობა.

ყოველ l რიცხვს, რომელსაც ეს თვისება აქვს, შეიძლება ვუწოდოთ $R(\alpha)$ რიცხვების ზედა საზღვარი (ეს ტერმინი არ უნდა ავურიოთ ტერმინს „ზუსტი ზედა საზღვარი“, რომელიც ანალიზში იხმარება).

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ ორ ხერხს, რომლებიც მიგვიყვანს დასმულ ამოცანის ამოხსნამდე).

6. ვთქვათ, მოცემულია მთელრიცხოვანი ფუნქცია

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

სადაც $a_0>0$, $|a_1|$, $|a_2|$, ..., $|a_{n-1}|$, $|a_n|$ რიცხვებს შორის უდიდესი მათგანი A-თი აღვნიშნოთ. მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი α ფესვისათვის უნდა იყოს

$$|\alpha|<\frac{A}{a_0}+1. \tag{65}$$

მართლაც, თუ α არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვი, მაშინ $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

მაშასადამე,

(66)
$$-a_0\alpha^n = a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$|a_0\alpha^n| = |a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n|.$$

თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ (65) უტოლობა არ სრულდება, მაშინ

$$|\alpha| \geqslant \frac{A}{a_0} + 1,$$

და მაშასადამე, თანახმად თეორემისა უფროსი წევრის მოდულის შესახებ, უნდა იყოს:

$$|a_0\alpha^n| > |a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n|,$$

რაც ეწინააღმდეგება (66) თანაფარდობას.

თუ $\alpha = a + bi$, მაშინ $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

გვაქვს

$$a \leqslant \sqrt{a^2 + b^2},$$

ანუ

$$R(\alpha) \leqslant |\alpha|.$$

ამ უკანასკნელ უტოლობიდან და (65)-დან გამომდინარეობს:

(67)
$$R(\alpha) < \frac{A}{a_0} + 1$$

$f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი α ფესვისათვის.

ახლა ვთქვათ, რომ k არის ნებისმიერი მთელი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს თანაფარდობას:

(68)
$$k \geqslant \frac{A}{a_0} + \frac{3}{2},$$

მაშინ გვექნება:

$$\frac{A}{a_0} + 1 \leqslant k - \frac{1}{2}.$$

შევადარებთ რა ამ უკანასკნელ უტოლობას (67)-თან, ვპოულობთ:

$$R(\alpha) < -\frac{1}{2}.$$

ამრიგად, პოლიას თეორემის 1) პირობა შესრულებულია ყოვე-

ლი მთელი k რიცხვისათვის, რომელიც (68) უტოლობას აკმაყოფილებს. თუ აღმოჩნდება რომ, ამ k რიცხვისათვის სრულდება კიდევ 2) და 3) პირობები, მაშინ ეს იქნება იმის მაჩვენებელი, რომ $f(x)$ ფუნქცია დაუყვანადია R ველში. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ შედეგს:

თუ მთელრიცხოვანი ფუნქციისათვის

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0>0,$$

შეიძლება მოიძებნოს ისეთი მთელი k რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$1)\ k \geqslant \frac{A}{a_0}+\frac{3}{2},$$

$$2)\ f(k-1) \neq 0,$$

$$3)\ f(k)\ \text{მარტივი რიცხვია,}$$

მაშინ $f(x)$ დაუყვანადია R ველში.

რომ შევამოწმოთ, შესრულებულია თუ არა 3) პირობა, შეიძლება ვისარგებლოთ მარტივ რიცხვთა ცხრილით, ან რიცხვთა გამყოფების ცხრილით.

მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=x^4+5x^3-4x^2+3x-2.$$

აქ $A=5$; მაშასადამე, k რიცხვისათვის ვღებულობთ უტოლობას.

$$k \geqslant 5+\frac{3}{2};$$

რადგანაც k—მთელი რიცხვია, ამიტომ უნდა იყოს

$$k \geqslant 7.$$

ჩავსვამთ რა ჩვენს ფუნქციაში $k=7$ და $k=8$, მივიღებთ არა მარტივ რიცხვებს. როცა $k=9$, ვღებულობთ

$$f(9)=9907.$$

ეს კი არის მარტივი რიცხვი; ამასთანავე $f(8) \neq 0$. ამრიგად, რიცხვი 9 აკმაყოფილებს უკანასკნელი თეორემის ყველა პირობას. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია დაუყვანადია R ველში.

7. მოვიყვანოთ კიდევ მეორე ხერხი $R(\alpha)$ რიცხვების ზედა საზღვრის მოძებნისათვის.

ვთქვათ, მოცემულია მთელ რაციონალური ფუნქცია

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

დავუშვათ, რომ ამ ფუნქციის კოეფიციენტები არიან ნამდვილი რიცხვები, რომლებიც შემდეგ სამ პირობას აკმაყოფილებენ:

$$1)\ a_0 \geqslant 1,$$
$$2)\ a_1 \geqslant 0,$$
$$3)\ |a_i| \leqslant c \qquad (i = 2, 3, \dots, n),$$

სადაც c — გარკვეული დადებითი რიცხვია.

ამ პირობებში $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი α ფესვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$R(\alpha) < \frac{1 + \sqrt{4c + 1}}{2}. \tag{69}$$

დამტკიცება*. დავუშვათ, რომ მნიშვნელობა $x = \xi + i\eta$ შერჩეულია ისე, რომ.

$$\xi = R(x) > 0, \quad |x| > 1. \tag{a}$$

პირველი უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$R\left(\frac{1}{x}\right) = R\left(\frac{1}{\xi + i\eta}\right) = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} > 0. \tag{70}$$

განვიხილოთ ახლა $f(x)$ მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება მოცემულ x მნიშვნელობას. ჩვენ გვაქვს:

$$|f(x)| = |(a_0 x^n + a_1 x^{n-1}) + (a_2 x^{n-2} + \dots + a_n)| \geqslant$$
$$\geqslant |a_0 x^n + a_1 x^{n-1}| - |a_2 x^{n-2} + \dots + a_n|.$$

მაკლისი მარჯვენა ნაწილში წარმოადგენს ჯამის მოდულს; თუ მას შევცვლით მოდულთა ჯამით, მაშინ მაკლისი შეიძლება მხოლოდ გადიდდეს; ამიტომ ახლა თუ შევცვლით $|a_2|, \dots, |a_n|$ რიცხვებს c-თი, მაშინ თანახმად 3) პირობისა უტოლობა შეიძლება მხოლოდ გაძლიერდეს. მაშასადამე,

$$|f(x)| \geqslant |a_0 x^n + a_1 x^{n-1}| - c\{|x|^{n-2} + \dots + 1\}.$$

---

* შეად. Г. Полиа და Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, ч. I, განყ. III, ამოცანა № 24.

სიმოკლისათვის ალვნიშნოთ $|x| = \rho$; მაშინ უკანასკნელი თანაფარდობას გადავწერთ ასე:

$$|f(x)| \geqslant \rho^{n-1} \, |a_0 x + a_1| - c\,(\rho^{n-2} + \rho^{n-3} + \ . \ . \ . + 1),$$

ანუ

$$|f(x)| \geqslant \rho^{n-1} \, |a_0 x + a_1| - \frac{c\,\rho^{n-1}}{\rho - 1} + \frac{c}{\rho - 1}.$$

ჩვენ დავუშვათ, რომ $|x| > 1$, ე. ი. $\rho > 1$. მარჯვენა ნაწილში ჩამოვაცილებთ რა უკანასკნელ წევრს, ამით ჩვენ გავაძლიერებთ უტოლობას. ამრიგად,

$$|f(x)| > \rho^{n-1} \left\{ \ |a_0 x + a_1| - \frac{c}{\rho - 1} \right\},$$

ანუ

$$|f(x)| > A\rho^{n-1}, \tag{71}$$

სადაც

$$A = |a_0 x + a_1| - \frac{c}{\rho - 1}.$$

უკანასკნელი გამოსახულება შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$A = \rho \left| a_0 + \frac{a_1}{x} \right| - \frac{c}{\rho - 1}.$$

თუ შევცვლით $a_0 + \dfrac{a_1}{x}$ რიცხვის მოდულს ამ რიცხვის ნამდვილი ნაწილით, და მივიღებთ რა მხედველობაში, რომ ნამდვილი ნაწილი არ აღემატება მოდულს, გვექნება:

$$A \geqslant \rho\, R\!\left(a_0 + \frac{a_1}{x} \right) - \frac{c}{\rho - 1}. \tag{72}$$

მაგრამ ნამდვილი ნაწილი ჯამისა ტოლია შესაკრებთა ნაწილების ჯამისა:

$$R\left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) = R(a_0) + R\left(\frac{a_1}{x}\right),$$

ანუ, რადგანაც a_0 და a_1— ნამდვილი რიცხვებია, ამიტომ

$$R\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)=a_0+a_1R\left(\frac{1}{x}\right).$$

მივიღოთ ახლა მხედველობაში, რომ პირობის თანახმად

$$a_0\geqslant 1,\ a_1\geqslant 0.$$

შემდგომ, (70) თანაფარდობის ძალით

$$R\left(\frac{1}{x}\right)>0.$$

მაშასადამე,

$$R\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)=a_0+a_1R\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant a_0\geqslant 1. \tag{73}$$

(72) და (73) თანაფარდობიდან გვაქვს:

$$A\geqslant \rho-\frac{c}{\rho-1},$$

ანუ

$$A\geqslant\frac{\rho^2-\rho-c}{\rho-1}.$$

გვაქვს

$$\rho^2-\rho-c=(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2),$$

სადაც

$$\rho_1=\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2},\ \rho_2=\frac{1-\sqrt{4c+1}}{2}.$$

ამიტომ, თუ შესრულებულია უტოლობა

$$\rho\geqslant\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2},$$

მაშინ $\rho^2-\rho-c\geqslant 0$ და მაშასადამე,

$$A\geqslant 0.$$

მაგრამ, მაშინ თანახმად (71) თანაფარდობისა

$$|f(x)|>0.$$

ამრიგად, თუ x მნიშვნელობა აკმაყოფილებს (a) პირობებს და უტოლობას:

$$|x| \geqslant \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2},$$

მაშინ ამ x მნიშვნელობისათვის გვაქვს

$$|f(x)|>0.$$

ვთქვათ ახლა, რომ α არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვი. თუ

$$R(\alpha) \leqslant 0,$$

მაშინ (69) უტოლობა შესრულდება α ფესვისათვის როგორიც არ უნდა იყოს c რიცხვი. თუ, ამას გარდა,

$$|\alpha| \leqslant 1,$$

მაშინ $R(\alpha) \leqslant |\alpha| \leqslant 1$; (69) უტოლობა ამ შემთხვევაშიაც სრულდება α ფესვისათვის როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი c რიცხვი.

ვიგულისხმოთ ახლა, რომ

$$R(\alpha)>0 \text{ და } |\alpha|>1.$$

თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ

$$R(\alpha) \geqslant \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}, \tag{74}$$

მაშინ მით უმეტეს გვექნება

$$|\alpha| \geqslant \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2},$$

და მაშასადამე,

$$|f(\alpha)>0,$$

რაც შეუძლებელია, ვინაიდან α არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვი.

ამრიგად, (74) დაშვებას მივყევართ წინააღმდეგობამდე. მაშასადამე,

$$R(\alpha) < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}.$$

ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. ვთქვათ ახლა,

რომ k არის ნებისმიერი მთელი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$k \geqslant 1 + \frac{1}{2} \sqrt{4c+1}.$$

მაშინ

$$\frac{1 + \sqrt{4c+1}}{2} \leqslant k - \frac{1}{2};$$

მაშასადამე,

$$R(\alpha) < k - \frac{1}{2},$$

ე. ი. k რიცხვისათვის შესრულებულია პოლიას თეორემის 1) პირობა. ამას მივყევართ ასეთ შედეგამდე:

ვთქვათ,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

არის მთელრიცხოვანი ფუნქცია, ამასთან

$$a_0 \geqslant 1,$$

$$a_1 \geqslant 0; \ |a_i| \leqslant c \quad (i = 2, 3, \dots n).$$

თუ $f(x)$ ფუნქციისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი მთელი k რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1) $k \geqslant 1 + \frac{1}{2} \sqrt{4c+1}$

2) $f(k-1) \neq 0$,

3) $f(k)$ — მარტივი რიცხვია,

მაშინ $f(x)$ დაყვანადია R ველში.

მაგალითი.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 7.$$

აქ შეიძლება მივიღოთ $c = 7$; მაშასადამე, k რიცხვისათვის ვღებულობთ პირობას:

$$k \geq 1 + \frac{1}{2} \sqrt{29}.$$

გავსინჯავთ რა მნიშვნელობებს $k = 4$, $k = 5$, ვპოულობთ, რომ შესაბამისი $f(k)$ მნიშვნელობები არიან არა მარტივი რიცხვები. როცა $k = 6$, ვღებულობთ: $f(6) = 1871$; ეს კი არის მარტივი რიცხვი. ამრიგად, $x=6$ მნიშვნელობა აკმაყოფილებს წინა თეორემის ყველა პირობას. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია დაუყვანადია R ველში.

დაბოლოს დავამტკიცოთ კონის (A. Cohn) შემდეგი თეორემა.

ვთქვათ,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

არის მთელრიცხოვანი ფუნქცია, მასთან

$$0\leqslant a_i\leqslant 9 \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

ვთქვათ N არის მთელი რიცხვი, რომელსაც ათობითი ჩაწერაში აქვს ციფრები (მარცხნიდან მარჯვნივ): $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n$, ე. ი.

$$N=a_0 10^n+a_1 10^{n-1}+\dots+a_{n-1}10+a_n.$$

თუ N — მარტივი რიცხვია, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია დაუყვანადია R ველში.

დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს წინა თეორემის ყველა პირობას და მისთვის შეიძლება ავიღოთ $c=9$. ამრიგად, მთელი k რიცხვი უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას $k\geqslant 1+\frac{1}{2}\sqrt{37}$. ამ პირობას აკმაყოფილებს, კერძოდ მნიშვნელობა $k=10$; ვინაიდან $N=f(10)$, თანახმად პირობისა, არის მარტივი რიცხვი, ხოლო $f(9)\neq 0$, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია დაუყვანადია R ველში.

ამრიგად, ყოველი მარტივი N რიცხვისათვის შეიძლება დაიწეროს შესაბამისი ფუნქცია, რომელიც იქნება დაყვანადი R ველში.

მაგალითები:

1. $2x^4+x^3+5x^2+6x+3$, $N=21563$.
2. $x^5+7x^3+6x^2+9x+9$, $N=107699$.

§ 6. საერთო ფესვები ორი მთელი რაციონალური ფუნქციისა. ჯერადი ფესვები მთელი რაციონალური ფუნქციისა

1. ვთქვათ, მოცემულია ორი მთელი რაციონალური ფუნქცია $f(x)$ და $g(x)$. გამოსარკვევია, აქვთ თუ არა ამ ფუნქციებს საერთო ფესვები. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, გამოსარკვევია, არსებობს თუ არა x-ის ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას

$$f(x)=0,\quad g(x)=0. \tag{75}$$

ამ საკითხის ამოხსნისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ საერთო უდიდესი გამყოფის თვისებებით. სახელდობრ, ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ დებულებას:

იმისათვის რომ a რიცხვი იყოს საერთო ფესვი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს ფესვი მათი საერთო უდიდესი $D(x)$ გამყოფისა.

მართლაც, თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვთ საერთო ფესვი a, მაშინ მათ აქვთ საერთო $x-a$ გამყოფიც. თუ $D(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების საერთო უდიდესი გამყოფი, მაშინ $D(x)$ იყოფა ამ ფუნქციების ყოველ საერთო გამყოფზე (თ. II, § 2, პ. 1, შენიშვნა b); მაშასადამე, $D(x)$ იყოფა $x-a$-ზე, ე. ი. a არის $D(x)$ ფუნქციის ფესვი.

პირიქით, დავუშვათ რომ a არის $D(x)$ ფუნქციის ფესვი; მაშინ $D(x)$ იყოფა $x-a$-ზე. მაგრამ თითოეული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციათაგანი იყოფა $D(x)$-ზე, და ამიტომაც იყოფა $x-a$-ზედაც; მაშასადამე, a არის საერთო ფესვი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებისა.

ამრიგად, $D(x)$ ფუნქციის ფესვები არის საერთო ფესვები $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებისა.

ჩვენ შეგვიძლია ახლა ვთქვათ, რომ (75) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დაიყვანება

$$D(x)=0$$

განტოლების ამოხსნამდე.

ზემოდამტკიცებული დებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

იმისათვის რომ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს არ ჰქონდეთ საერთო ფესვები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ისინი იყვნენ ურთიერთ მარტივი.

მხოლოდ ამ შემთხვევაში საერთო უდიდესი გამყოფი $D(x)$ იქნება ნულოვანი ხარისხის ფუნქცია.

დავუბრუნდეთ ახლა ზოგად შემთხვევას და დავუშვათ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს.

II თავში (§ 2, პ. 1) ჩვენ ვნახეთ, რომ უდიდესი საერთო $D(x)$ გამყოფის კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე ველს. თუ ამით ვისარგებლებთ, ადვილად დავამტკიცებთ შემდეგ დებულებას:

თუ $g(x)$ ფუნქციას, რომლის კოეფიციენტები P ველს ეკუთვ-

ნიან, აქვს საერთო ფესვი $f(x)$ ფუნქციასთან, რომელიც დაუყვანადია P ველში,* მაშინ $g(x)$ უნაშთოდ იყოფა $f(x)$-ზე.

მართლაც, თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვთ საერთო ფესვი a, მაშინ მათი საერთო უდიდესი $D(x)$ გამყოფი იყოფა $x-a$-ზე; მაშასადამე, $D(x)$ ფუნქციის ხარისხი ნულისაგან განსხვავებულია. ამ ფუნქციის კოეფიციენტები P ველს ეკუთვნის.

მეორე მხრით, $f(x)$ ფუნქცია უნდა იყოფოდეს $D(x)$ ფუნქციაზე, ე. ი. უნდა იყოს

(76) $$f(x)=q(x)\,D(x),$$

სადაც $q(x)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია, რომლის კოეფიციენტები ეკუთვნის P ველს. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $q(x)$ ფუნქციის ხარისხი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ გამოვა, რომ $f(x)$ ფუნქცია *დაყვანადია* P ველში, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება. ამიტომ $q(x)$ ფუნქცია უნდა იყოს ნულოვანი ხარისხისა:

$$q(x)=c,$$

ასე რომ (76) თანაფარდობა შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$f(x)=c\,D(x);$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია განსხვავდება $D(x)$-საგან მხოლოდ მუდმივი მამრავლით.

მაგრამ $D(x)$ არის $g(x)$-ის გამყოფი; მაშასადამე, $f(x)=c\,D(x)$ ფუნქციაც უნდა იყოს $g(x)$ ფუნქციის გამყოფი (თავი II, § 1, მუხლი 5, თვისება IV).

მაგალითი.

თუ $g(x)$ ფუნქციას რაციონალური კოეფიციენტებით აქვას ფესვი $x_1=\sqrt[3]{2}$, მაშინ იგი იყოფა x^3-2-ზე.

შედეგი. **თუ P ველში დაუყვანად ორს $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციას აქვთ ერთი მაინც საერთო ფესვი, მაშინ ისინი განსხვავდებიან მხოლოდ მუდმივი მამრავლით.**

მართლაც, წინა თეორემის ძალით $g(x)$ ფუნქცია იყოფა $f(x)$-ზე, ხოლო $f(x)$, თავის მხრივ, იყოფა $g(x)$ ზე. ამ პირობებში $g(x)$ შეიძლება განსხვავდებოდეს $f(x)$-საგან მხოლოდ მუდმივი მამრავლით.

---

* თუ ჩვენ ვამბობთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია დაუყვანადია P ველში, ამით ნათქვამია, რომ აღნიშნული ფუნქციის კოეფიციენტები ეკუთვნის P ველს.

2. განვიხილოთ მთელი რაციონალური ფუნქციის ჯერადი ფესვების საკითხი.

ვთქვათ, a არის $f(x)$ ფუნქციის k ჯერადი ფესვი; ეს ნიშნავს განმარტების თანახმად, რომ $f(x)$ იყოფა $(x-a)^k$-ზე, მაგრამ არ იყოფა ამ ორწევრის უფრო მაღალ ხარისხზე. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ:

$$f(x)=(x-a)^k\varphi(x), \tag{77}$$

სადაც $\varphi(x)$ უკვე არ იყოფა $x-a$-ზე. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $k\geqslant 1$; ამრიგად ჩვენ განვიხილავთ მარტივი ფესვის შემთხვევასაც ($k=1$). თუ გავაწარმოებთ (77) ტოლობას, ვიპოვით:

$$\begin{aligned} f'(x)&=k(x-a)^{k-1}\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)=\\ &=(x-a)^{k-1}\{k\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)\}, \end{aligned}$$

ანუ

$$f'(x)=(x-a)^{k-1}\psi(x), \tag{78}$$

სადაც

$$\psi(x)=k\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x).$$

დავამტკიცოთ, რომ ფუნქცია $\psi(x)$ იყოფა $x-a$-ზე; მართლაც, დავუშვათ, რომ $\psi(x)$ იყოფა $x-a$-ზე; მაშინ ფუნქცია

$$\varphi(x)=\frac{1}{k}\psi(x)-\frac{1}{k}(x-a)\varphi'(x),$$

თანახმად II თვისებისა (თ. II, § 1, მუხლი 5), უნდა გაიყოს აგრეთვე $x-a$-ზე, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას.

ამრიგად, $\psi(x)$ არ იყოფა $x-a$-ზე; მაგრამ მაშინ (78) გვიჩვენებს, რომ $f'(x)$ ფუნქციისათვის a არის $(k-1)$ ჯერადობის ფესვი.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

თუ a არის $f(x)$ ფუნქციის k ჯერადი ფესვი, მაშინ ეს რიცხვი a არის $f'(x)$ ფუნქციის $k-1$ ჯერადი ფესვი.

კერძოდ, თუ $k=1$, მაშინ a არის $f(x)$ ფუნქციის მარტივი ფესვი; ამ შემთხვევაში იგი არ იქნება წარმოებულის ფესვი.

თუ $k>1$, მაშინ a არის $f(x)$ ფუნქციის ჯერადი ფესვი; ამ შემთხვევაში a იქნება $f(x)$ და მისი $f'(x)$ წარმოებულის საერთო ფესვი.

პირიქით, თუ a არის $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციების საერთო ფესვი, მაშინ იგი არის $f(x)$ ფუნქციის ჯერადი ფესვი.

მართლაც, a რომ ყოფილიყო $f(x)$ ფუნქციის მარტივი ფესვი, მაშინ იგი არ იქნებოდა წარმოებულის ფესვი.

ამრიგად, $f(x)$ *ფუნქციის ჯერადი ფესვები წარმოადგენენ* $f(x)$ *და მისი* $f'(x)$ *წარმოებულის საერთო ფესვებს.*

თუ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ჯერადი ფესვები, მაშინ $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციებს არა აქვთ საერთო ფესვები; მაშ ეს ფუნქციები არიან ურთიერთ მარტივი. პირიქით, თუ $f(x)$ და $f'(x)$ ურთიერთ მარტივი არიან, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ჯერადი ფესვები. მაშასადამე,

იმისათვის რომ $f(x)$ ფუნქციას არ ჰქონდეს ჯერადი ფესვები აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციები, იყვნენ ურთიერთ მარტივი.

3. წინა მუხლში ჩვენ დავადგინეთ პირობა, რომლის მიხედვით $f(x)$ ფუნქციას აქვს ჯერადი ფესვები. ვნახოთ ახლა, თუ როგორ განვთავისუფლდეთ ჯერადი ფესვებისაგან.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს k ჯერადი ფესვი a, მაშინ იგი იყოფა $(x-a)^k$-ზე. ზემოთ იყო ნაჩვენები, რომ $f'(x)$ წარმოებული იყოფა ამ შემთხვევაში $(x-a)^{k-1}$-ზე. ამრიგად, $(x-a)^{k-1}$ არის $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციების საერთო გამყოფი.

თუ $D(x)$-ით აღვნიშნავთ $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციების საერთო უდიდეს გამყოფს, მაშინ $D(x)$ გაიყოფა $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციების ყოველ საერთო გამყოფზე. მაშასადამე, $D(x)$ იყოფა $(x-a)^{k-1}$-ზე.

ამრიგად, თუ $f(x)$ ფუნქციისათვის $x-a$ არის k ჯერადი გამყოფი, მაშინ $x-a$ იქნება $D(x)$ ფუნქციისათვის $k-1$ ჯერადი გამყოფი. მეორე მხრით, $f(x)$ იყოფა $D(x)$-ზე; მაშასადამე, $D(x)$ ფუნქციის ყოველი გამყოფი უნდა იყოს აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის გამყოფიც. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ:

$D(x)$ ფუნქცია შეიცავს იმავე წრფივ მამრავლებს, რაც $f(x)$, მხოლოდ ერთი ერთეულით დაბალი ხარისხით.

ასე, მაგალითად, თუ

$$f(x)=(x-a)^5(x-b)^2(x-c),$$

მაშინ

$$D(x)=(x-a)^4(x-b).$$

განვიხილოთ ახლა მთელი რაციონალური ფუნქცია

$$Q(x)=\frac{f(x)}{D(x)}.$$

თუ $f(x)$ ფუნქციის შემადგენლობაში შედის $(x-a)^k$ მამრავლი, მაშინ $D(x)$ ფუნქციის შემადგენლობაში შევა $(x-a)^{k-1}$; მაშასადამე, $Q(x)$ ფუნქციის შემადგენლობაში შევა $x-a$ პირველ ხარისხში.

მაშასადამე, $Q(x)$ შეიცავს იმავე წრფივ მამრავლებს, რაც $f(x)$; მაგრამ ყველა ეს მამრავლები $Q(x)$ ფუნქციისათვის არიან 1 ჯერადობისა.

სხვა სიტყვებით, $Q(x)$ ფუნქციას აქვს იგივე ფესვები, რაც $f(x)$ ფუნქციას, მხოლოდ ყველა ეს ფესვი $Q(x)$-თვის იქნება მარტივი.

ზემოგანხილულ მაგალითში,

$$Q(x)=\frac{f(x)}{D(x)}=(x-a)(x-b)(x-c).$$

ამრიგად, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ჯერადი ფესვები, მაშინ ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ ფუნქცია $Q(x)$, რომელსაც აქვს იგივე ფესვები, როცა $f(x)$ ფუნქციას, მხოლოდ ეს ფესვები არიან მარტივი. ამისათვის საკმარისია:

a) ვიპოვოთ $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციების საერთო უდიდესი გამყოფი $D(x)$.

ფუნქციას $Q(x)=\frac{f(x)}{D(x)}$ აქვს მოთხოვნილი თვისებები. შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევებში, როცა განტოლებას

$$f(x)=0$$

აქვს ჯერადი ფესვები, მათგან განთავისუფლება ჩვენ მიგვიყვანს განტოლების სრულ ამოხსნამდე. ამასთან სასარგებლოა მივიღოთ მხედველობაში, რომ $D(x)$ ფუნქციის ყოველი წრფივი მამრავლი შედის $f(x)$ ფუნქციის შემადგენლობაში, მხოლოდ ერთზე მეტი ჯერადობით.

თავი IV

სიმეტრიული ფუნქციები

§ 1. ნებისმიერი სიმეტრიული ფუნქციების გამოსახვა ძირითადი ფუნქციების მიხედვით

1. III თავში (§ 84, პუნქ. 2) გამოვიყვანეთ დამოკიდებულებანი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებსა და მის x_1, x_2, x_3, ..., x_n ფესვებს შორის. ამასთანავე არ მიგვითითებია, თუ სახელდობრ რომელი ფესვი აღინიშნება x_1-ით, რომელი x_2-ით და ა. შ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, x_1, x_2, ..., x_n ასოები აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის ფესვებს, აღებულს ნებისმიერი რიგით; მაშასადამე, III თავის (50) თანაფარდობებს ადგილი უნდა ექნეს $x_1, \ldots, x_n$ ასოების ნებისმიერი დალაგებისათვის. მართლაც, თუ (50) თანაფარდობების მარჯვენა ნაწილებს განვიხილავთ როგორც მთელ რაციონალურ ფუნქციებს x_1, x_2, ..., x_n ელემენტებისას, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ამ ფუნქციებს აქვთ შემდეგი თვისებები: x_1, x_2, ..., x_n ელემენტების ნებისმიერი გარდანაცვლებისას ისინი *უცვლელი* (*ინვარიანტული*) რჩება.

თუ ფუნქცია

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

უცვლელი (ინვარიანტული) რჩება x_1, x_2, ..., x_n ელემენტების ნებისმიერი გარდანაცვლებისას, მაშინ მას ეწოდება x_1, x_2, ..., x_n ელემენტების სიმეტრიული ფუნქცია*.

შეიძლება აგრეთვე ითქვას, რომ x_1, x_2, ..., x_n ელემენტების სიმეტრიული ფუნქცია თავის თავში გადადის ამ ელემენტების ნებისმიერი გარდანაცვლებისას.

ასეთია მაგალითად, ფუნქცია $x_1^a + x_1^a + \ldots + x_n^a$.

---

* შემდეგში, თუ აღნიშნული არ იქნება საწინააღმდეგო, განვიხილავთ მხოლოდ რაციონალურ ფუნქციებს x_1, x_2, ..., x_n ელემენტებისას.

ან ფუნქცია $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k$. სწორედ ასევე (50) ტოლობათა მარჯვენა ნაწილები არიან $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების სიმეტრიული ფუნქციები: ამ ფუნქციებს

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -p_1, \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = p_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_n &= x_1x_2 \ldots = (-1)^n p_n
\end{aligned}
$$

ეწოდება ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციები.

შემდეგში დავუშვებთ, რომ განსახილველი ფუნქციების კოეფიციენტები ეკუთვნიან განსაზღვრულ რიცხვით P ველს.

თუ

$$\varphi = \varphi(x_1,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \psi = \psi(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$$

არიან $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების სიმეტრიული ფუნქციები, მაშინ ამ ფუნქციების ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი აგრეთვე სიმეტრიულ ფუნქციებს წარმოადგენს.

ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების ყველა ისეთ სიმეტრიულ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთა კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს ჰქმნის ალგებრულ რგოლს (თავი II, § 1 პუნქ. 3). ეს რგოლი აღვნიშნოთ S-ით.

აქედან გამომდინარეობს: თუ $\varphi, \psi, \ldots, \omega$ სიმეტრიული ფუნქციებია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისა, მაშინ ყოველი მთელი რაციონალური ფუნქცია

$$(2) \qquad F(\varphi,\ \psi,\ \ldots,\ \omega)$$

იქნება აგრეთვე სიმეტრიული ფუნქცია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისა.

მართლაც, პირობის თანახმად: $\varphi, \psi, \ldots, \omega$ ფუნქციები წარმოადგენენ S რგოლის ელემენტებს. F ფუნქცია მიიღება ამ ელემენტებისაგან (და რიცხვითი P ველის ელემენტებისაგან) შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციების საშუალებით. რადგან ეს ოპერაციები არ გამოგვიყვანს S რგოლიდან, ამიტომ F ფუნქციაც მოთავსებულია S-ში, ე. ი. წარმოადგენს სიმეტრიულ ფუნქციას $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისას.

კერძოდ, ძირითადი სიმეტრიული $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ფუნქციების ყოველი მთელი რაციონალური ფუნქცია

$$F(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n)$$

იქნება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების სიმეტრიული ფუნქცია. ასეთია, მაგალითად, ფუნქცია

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^2 - 3\sigma_2 + 2\sigma_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \\
+ x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 2(x_1x_2x_3 + \\
+ x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტებზე დამოკიდებული ყველა მთელი რაციონალური ფუნქციათა (რომელთა კოეფიციენტები P ველს ეკუთვნის) სიმრავლე შეადგენს ალგებრულ რგოლს (შეად. თავი III, § 1, პ. 3). ეს რგოლი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი

$$P[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]. \tag{4}$$

(4) რგოლის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს სიმეტრიულ ფუნქციებს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისას, ე. ი. იმყოფება S რგოლში. ამგვარად, S რგოლი შეიცავს (4) რგოლს:

$$P[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n] \subset S.$$

ბუნებრივად ისმება საკითხი: არსებობს თუ არა S-ში ისეთი ელემენტები, რომლებიც არ ეკუთვნიან (4) რგოლს? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არსებობს თუ არა ისეთი სიმეტრიული ფუნქციები, რომლებიც ვერ გამოისახებიან $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტებით შეკრების გამოკლების და გამრავლების ოპერაციების საშუალებით? პასუხი ამ კითხვაზე თურმე უარყოფითია. სახელდობრ ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ დებულებას:

თუ $$\varphi = \varphi(x_1 x_2, \ldots, x_n)$$
არის სიმეტრიული ფუნქცია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისა, მაშინ იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც მთელი რაციონალური ფუნქცია ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციებისა $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$:

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, S რგოლის ყოველ ელემენტს შეიცავს $P[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$ რგოლიც ე. ი. ორივე რგოლი თანემთხვევა ერთმანეთს,

ამ თეორემის დასამტკიცებლად შემოვიღოთ შეთანხმებანი ყოველი სიმეტრიული ფუნქციის წევრების დალაგების შესახებ. ამ მიზნით ავიღოთ განსახილავი ფუნქციის რაიმე ორი წევრი

$$A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \text{ და } B x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}, \tag{5}$$

სადაც A და B მუდმივი კოეფიციენტებია. ჩვენ ვიწყებთ x_1 ასოთი. ჯერ დავუშვათ, რომ x_1-ის α_1 და β_1 მაჩვენებლები არ არიან ტოლნი:

$$\alpha_1 \neq \beta_1,$$

მაშინ ჩვენ ჩავთვლით, რომ ორი წევრთაგან (5) ის არის უფრო მაღალი, რომლის მაჩვენებელი x_1-თან მეტია. ამავე დროს მაჩვენებლები x_2, x_3, ...თან არ მიიღება მხედველობაში.

ახლა დავუშვათ რომ x_1-ის მაჩვენებელნი ერთმანეთის ტოლია:

$$\alpha_1 = \beta_1.$$

ამ შემთხვევაში მივმართავთ x_2 ასოს. თუ მაჩვენებლები x_2-თან არ არიან ერთმანეთის ტოლი, მაშინ მოცემული ორი წევრიდან ის არის უფრო მაღალი, რომელსაც მაჩვენებელი x_2-თან მეტი აქვს.

თუ მაჩვენებლები x_2-თან აგრეთვე ერთმანეთის ტოლია, ე. ი. თუ

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2,$$

მაშინ მივმართავთ x_3-ს და ა. შ. საერთოდ, თუ

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_k = \beta_k,$$

მაგრამ

$$\alpha_{k+1} > \beta_{k+1}$$

მაშინ პირველი წევრი უფრო მაღალია, ვიდრე მეორე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, იმისათვის რომ (5) წევრიდან პირველი იყოს მეორეზე მაღალი აუცილებელია და საკმარისი, რომ სხვაობებიდან $\alpha_i - \beta_i$ პირველი, რომელიც ნულად არ იქცევა, დადებითი იყოს. ასე მაგალითად, შემდეგი ორი წევრიდან:

$$x_1^5 x_2^8 x_3^4 \text{ და } x_1^5 x_2^2 x_3^8,$$

პირველი მაღალია მეორეზე; ორი წევრიდან

$$x_1^2 x_2^5 x_3^4 \text{ და } x_1^8 x_2 x_3,$$

მეორე მაღალია პირველზე. ამგვარად, ყოველი წევრისათვის

$$Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

მისი სიმაღლე განისაზღვრება მაჩვენებელთა სისტემით:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

რომლებიც აღებულია განსაზღვრული რიგით (შესაბამისად x_1,

$x_2, \ldots, x_n$ ასოების რიგისა); ამასთან შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ზოგიერთი მაჩვენებელი ნულის ტოლია. მაგალითად, $n=4$ შემთხვევისათვის განვიხილოთ შემდეგი ორი წევრი:

$$x_1x_2=x_1x_2x_3^0x_4^0 \text{ და } x_1x_3x_4=x_1x_2^0x_3x_4.$$

ამ წევრების სიმაღლეებია შესაბამისად

$$(1,\ 1,\ 0,\ 0) \text{ და } (1,\ 0,\ 1,\ 1);$$

მაშასადამე, პირველი წევრი მაღალია მეორეზე.

ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციებისათვის უმაღლესი წევრები არიან შესაბამისად

$$x_1,\ x_1x_2,\ \ldots,\ x_1x_2\ldots x_n.$$

სიმეტრიული ფუნქციებისათვის (3) გვექნება წევრების შემდეგი დალაგება მათი სიმაღლეების მიხედვით:

$$x_1^2+2x_1x_2x_3+2x_1x_2x_4-x_1x_2+2x_1x_3x_4-x_1x_3-$$
$$-x_1x_4+x_2^2+2x_2x_3x_4-x_2x_3-x_2x_4+x_3^2-x_3x_4+x_4^2.$$

ამგვარად, ყოველი მთელი რაციონალური ფუნქციისათვის

$$\varphi=\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

შეიძლება დავაწესოთ წევრების განსაზღვრული დალაგება მათი სიმაღლეების მიხედვით*.

თუ $\varphi=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციის უმაღლესი წევრი მაღალია $\psi=\psi(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციის უმაღლეს წევრზე, მაშინ ვიტყვით რომ φ ფუნქცია მაღალია ψ-ზე, ან რომ ψ არის უფრო დაბალი რიგის ფუნქცია, ვიდრე φ.

ადვილი დასანახია, რომ ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის გადამრავლების დროს ნამრავლის უმაღლესი წევრი უდრის თანამამრავლეების უმაღლეს წევრთა ნამრავლს.

მართლაც, დავუშვათ, რომ

$$\varphi=\varphi(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$$

ფუნქციის შემადგენლობაში შედიან (5) წევრები და რომ პირველი ამ წევრთაგანი მაღალია მეორეზე. ეს იმას ნიშნავს რომ $\alpha_i-\beta_i$

* მთელი რაციონალური ფუნქციის წევრთა ასეთ დალაგებას ეწოდება ლექსიკოგრაფიული, რადგანაც იმავე პრინციპის მიხედვით განალაგებენ სიტყვებს, სიტყვარებში (ლექსიკონი — სიტყვარი).

სხვაობებიდან პირველი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია, დადებითი უნდა იყოს. შემდეგ დავუშვათ, რომ

$$\psi=\psi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

ფუნქციის შემადგენლობაში შედის წევრები:

(6) $$Lx_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n} \text{ და } Mx_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}$$

(L და M მუდმივი კოეფიციენტებია), ამასთან პირველი წევრი მაღალია მეორეზე; მაშასადამე, $\lambda_i-\mu_i$ სხვაობებიდან პირველი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია, დადებითი იქნება. (5)-დან და (6)-დან პირველი წევრების ნამრავლი იქნება:

(7) $$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\cdot Lx_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}=ALx^{\alpha_1+\lambda_1}x_2^{\alpha_2+\lambda_2}\ldots x_n^{\alpha_n+\lambda_n};$$

მეორე წევრთა ნამრავლი იქნება:

(8) $$Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2},\ \ldots,\ x_n^{\beta_n}Mx_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{n}=BMx_1^{\beta_1+\mu_1}x_2^{\beta_2+\mu_2}\ldots x_n^{\beta_n+\mu_n}.$$

შესაბამ მაჩვენებელთა სხვაობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$(\alpha_i+\lambda_i)-(\beta_i+\mu_i)=(\alpha_i-\beta_i)+(\lambda_i-\mu_i).$$

აქედან ადვილი შესამჩნევია, რომ პირველი ამ სხვაობათაგანი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია, დადებითი უნდა იყოს (რადგანაც $\alpha_i-\beta_i$ და $\lambda_i-\mu_i$ სხვაობებს ცალ-ცალკე აქვს ეს თვისება); ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ნამრავლი (7) უფრო მაღალია, ვიდრე ნამრავლი (8). ანალოგიურად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ ნამრავლი (5)-ს პირველი წევრისა (5)-ს მეორე წევრზე.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის ნამრავლის უმაღლეს წევრს მივიღებთ მათი უმაღლესი წევრების გადამრავლებით.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$\varphi=\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

არის სიმეტრიული ფუნქცია $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$-დან და დავუშვათ, რომ

(9) $$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

არის მისი უმაღლესი წევრი; მაშინ მაჩვენებლები $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_3\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n.$$

მართლაც, რომ იყოს, მაგალითად $\alpha_1 < \alpha_2$, მაშინ წევრი (9) არ იქნებოდა უმაღლესი; მართლაც, სიმეტრიული φ ფუნქცია უნდა შეიცავდეს (9) წევრთან ერთად ყველა წევრს, რომლებსაც მისგან მივიღებთ ასოების გადანაცვლებით, კერძოდ, წევრს

$$Ax_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}.$$

მაგრამ ეს წევრი უფრო მაღალია ვიდრე წევრი (9), როცა $\alpha_1 < \alpha_2$. ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ $\alpha_2 \geqslant \alpha_3$ და ა. შ.

ახლა მივმართოთ უშუალოდ ჩვენს ამოცანას: ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ სიმეტრიული ფუნქცია

$$\varphi = \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

შეიძლება გამოისახოს ძირითადი სიმეტრიული $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ფუნქციებით. ამ მიზნით განვიხილოთ შემდეგი სახის ნამრავლი:

(10)
$$A\sigma_1^{\nu_1}\sigma_2^{\nu_2}\ldots\sigma_n^{\nu_n}$$

და შევეცადოთ შევარჩიოთ $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ მაჩვენებლები ისე, რომ (10) ნამრავლის უმაღლესი წევრი დაემთხვეს φ ფუნქციის უფროს (9) წევრს. (10) ნამრავლის უმაღლესი წევრი ეტოლება თანამამრავლთა უმაღლესი წევრების ნამრავლს:

$$Ax_1^{\nu_1}(x_1x_2)^{\nu_2}(x_1x_2x_3)^{\nu_3}\ldots(x_1x_2\ldots x_n)^{\nu_n} =$$
$$= Ax_1^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n}x_2^{\nu_2+\nu_3+\cdots+\nu_n}\ldots x_{n-1}^{\nu_{n-1}+\nu_n}x_n^{\nu_n}.$$

იმისათვის რომ ეს გამოსახულება დაემთხვეს (9)-ს უნდა იყოს.

(11)
$$\left\{\begin{aligned} \nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n &= \alpha_1,\\ \nu_2+\cdots+\nu_n &= \alpha_2,\\ \cdots\cdots\cdots&\\ \nu_{n-1}+\nu_n &= \alpha_{n-1},\\ \nu_n &= \alpha_n. \end{aligned}\right.$$

ამ თანაფარდობებიდან განვსაზღვრავთ მაჩვენებლებს $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$:

$$\nu_1 = \alpha_1 - \alpha_2,\ \nu_2 = \alpha_2 - \alpha_3,\ \ldots,\ \nu_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n,$$

$\nu_n = \alpha_n$; ამგვარად, თუ შევადგენთ ნამრავლს:

(12)
$$P = A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n},$$

მაშინ ამ ნამრავლის უმაღლესი წევრი ტოლი იქნება მოცემული φ ფუნქციის უმაღლესი წევრისა. მაშასადამე, სხვაობა:

$$\psi = \varphi - P.$$

იქნება უფრო დაბალი რიგის სიმეტრიული ფუნქცია, ვიდრე φ. ამგვარად, გვექნება:

$$\varphi = P + \psi = A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n} + \psi,$$

ე. ი. სიმეტრიული φ ფუნქცია გამოსახულია ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციებისა და სიმეტრიული ψ ფუნქციის საშუალებით, მასთან ψ უფრო დაბალი რიგისაა. თავის მხრივ ψ ფუნქცია ამგვარადვე შეიძლება გამოისახოს $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ფუნქციებისა და უფრო დაბალი რიგის მქონე რომელიმე სიმეტრიული ფუნქციით. რიგის დადაბლების ეს პროცესი შეიძლება განვაგრძოთ მანამ, სანამ φ ფუნქცია სავსებით არ გამოისახება $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ფუნქციებით. ადვილი დასანახია, რომ ამისათვის საჭირო იქნება ნაბიჯების სასრული რიცხვი.

მართლაც, განვიხილოთ ψ ფუნქციის უმაღლესი წევრი; დავუშვათ, რომ:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

არის მისი სიმაღლე. რადგანაც ფუნქციის უმაღლესი წევრი უნდა იყოს φ ფუნქციის უმაღლეს წევრზე დაბალი, ამიტომ

$$\alpha_1 \geqslant \beta_1. \tag{13}$$

მეორე მხრივ გვაქვს:

$$\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n. \tag{14}$$

(13) და (14) თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ ყოველი β_i მაჩვენებლისათვის შესაძლოა მხოლოდ სასრული რიცხვი მნიშვნელობებისა.

ამგვარად, თუ სიმეტრიული ψ ფუნქციის რიგი დაბალია φ ფუნქციის რიგზე, მაშინ ψ ფუნქციის უმაღლესი წევრისათვის გვაქვს მაჩვენებელთა შესაძლო სისტემების მხოლოდ სასრული რიცხვი.

აქედან გამომდინარეობს, რომ აღნიშნული პროცესი უნდა დამთავრდეს ოპერაციების სასრული რიცხვის შემდეგ. როცა შევასრულებთ ამ ოპერაციებს, მივიღებთ თანაფარდობას

$$\varphi = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

არსებითია შევნიშნოთ, რომ, როგორც ეს გამომდინარეობს თვით

გამოთვლის პროცესიდან, — $F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქციის კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე რიცხვით P ველს, რომელსაც ეკუთვნის მოცემული $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციის კოეფიციენტები

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

ამგვარად, არა მარტო დავამტკიცეთ თეორემა, არამედ აგრეთვე მივიღეთ განსაზღვრული მეთოდი, რომელიც გვაძლევს საშუალებას ნებისმიერი სიმეტრიული ფუნქცია გამოვსახოთ ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციებით. ამ მეთოდს ახლა გავაშუქებთ მაგალითზე:

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (12) ნამრავლის ხარისხი $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტების მიმართ ტოლია α_1-ის, ე. ი. φ ფუნქციის უფროსი წევრის x_1-ის მაჩვენებლის ტოლია. ადვილი დასანახავია, რომ $F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქციის ყოველი წევრის ხარისხი $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ელემენტთა მიმართ არ აღემატება α_1-ს.

მართლაც, დავუშვათ რომ $F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქციის შემადგენლობაში შედის ნამრავლი:

$$C\sigma_1^{\rho_1}\sigma_2^{\rho_2} \ldots \sigma_n^{\rho_n}.$$

ეს ნამრავლი შეიცავს წევრს

$$C x_1^{\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_n} x_2^{\rho_2+\cdots+\rho_n} \ldots x_n^{\rho_n}. \tag{15}$$

რომ ყოფილიყო $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n > \alpha_1$, მაშინ წევრი (15) მაღალი იქნებოდა (9)-ზე, რაც შეუძლებელია, რადგანაც (9) არის φ ფუნქციის უმაღლესი წევრი.

მაგალითი.

ალგებრის მრავალ საკითხში გვხვდება ხარისხოვანი ჯამები, ე. ი. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებძს ერთნაირი ხარისხების ჯამები:

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k.$$

ცხადია

$$S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sigma. \tag{16}$$

რომ გამოვსახოთ კვადრატების ჯამი

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \tag{17}$$

ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციებით, შევნიშნოთ, რომ ჩვენი ფუნქციის უმაღლესი (x_1^2) წევრისათვის

$$\alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0.$$

მაჩვენებელთა ამ მნიშვნელობებს შეესაბამება გამოსახულება.

$$P = \sigma_1^{\alpha_1 - \alpha_2} = \sigma_1^2.$$

ზოგადი მეთოდის მიხედვით შევადგინოთ სხვაობა

$$S_2 - P = S_2 - \sigma_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 -$$
$$-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) = -2\sigma_2.$$

ამგვარად

$$S_2 - \sigma_1^2 = -2\sigma_2.$$

საიდანაც

(18) $$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

2. დავუშვათ, რომ მოცემული სიმეტრიული ფუნქცია

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ერთგვაროვანია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების მიმართ (იხ. თავი II, § 1); ამ შემთხვევაში ფუნქცია

$$\psi = \varphi - P = \varphi - A\sigma_1^{\alpha_1 - \alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2 - \alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n}$$

აგრეთვე ერთგვაროვანი ფუნქციაა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისა და მასთან იმავე ხარისხისაა როგორიც φ ფუნქცია.

მართლაც, P ფუნქცია ერთგვაროვანია, ვინაიდან ის წარმოადგენს ერთგვაროვან $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ფუნქციების ხარისხების ნამრავლს. P ფუნქციის ხარისხი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების მიმართ ტოლია φ ფუნქციის ხარისხისა, რადგანაც ამ ფუნქციების უმაღლესი წევრები ერთნაირია. ამგვარად, გადავდივართ რა φ ფუნქციებიდან უფრო დაბალი რიგის მქონე ψ ფუნქციისაკენ, ჩვენ არ ვცვლით ერთგვაროვნობის მაჩვენებელს.

ახლა დავუშვათ, რომ φ ფუნქცია მთლიანად გამოსახულია ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციების საშუალებით:

$$\varphi = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

განვიხილოთ მარჯვენა ნაწილის რომელიმე წევრი

(19) $$C\sigma_1^{\nu_1}\sigma_2^{\nu_2}\ldots\sigma_n^{\nu_n}.$$

თანახმად ზემოთ თქმულისა, (19) ნამრავლის ხარისხი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების მიმართ უნდა ეტოლებოდეს φ ფუნქციის ხარისხს. მეორეს მხრივ σ_k ფუნქციის ხარისხი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების მიმართ ტოლია k მაჩვენებლისა. მაშასადამე, (19) ნამრავლის ხარისხი ტოლია:

(20) $$\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + k\nu_k + \ldots + n\nu_n.$$

ჩვენს მიერ დაშვებათა მიხედვით უნდა იყოს

$$(21)\qquad \nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + k\nu_k + \ldots + n\nu_n = p,$$

სადაც p არის φ ფუნქციის ხარისხი.

(20) ჯამს ეწოდება (19) ნამრავლის წონა. ამგვარად, რომ მივიღოთ (19) ნამრავლის წონა საჭიროა ყოველი მამრავლის ინდექსი გავამრავლოთ ხარისხის მაჩვენებელზე და ყველა მიღებული ნამრავლი შევკრიბოთ. ასე მაგალითად,

$$\sigma_1^2\sigma_2^3\sigma_3^3(\nu_1=2,\ \nu_2=3,\ \nu_3=3)$$

ნამრავლის წონა არის $2+2\cdot3+3\cdot3=17$; წონა ფუნქციისა $\sigma_k(\nu_k=1,\ \nu_h=0,$ როცა $h\neq k)$ ეტოლება k მაჩვენებელს.

ახლა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ განსახილველ შემთხვევაში $F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქციის ყველა წევრს ერთნაირი წონა უნდა ჰქონდეს. ამგვარი თვისების მქონე ფუნქციას იზობარული ეწოდება.

ამგვარად, თუ სიმეტრიული $\varphi=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია ერთგვაროვანია და მისი ხარისხი p-ს ტოლია, მაშინ $F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ არის p წონის იზობარული ფუნქცია.

ამ თვისების გამოყენებით წინასწარ შეგვიძლია ვთქვათ, თუ რომელი წევრები უნდა შევიდეს $F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქციის შემადგენლობაში.

ამ წევრების კოეფიციენტები შეგვიძლია გამოვითვალოთ, თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ განსაზღვრულ რიცხვით მნიშვნელობებს.

მაგალითი.

ნამრავლი

$$(22)\qquad \Delta=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$$

(x_1, x_2, x_3 ელემენტების დისკრიმინანტი) ცხადია, წარმოადგენს სიმეტრიულ ფუნქციას x_1, x_2, x_3 ელემენტების მიმართ, ამასთან ეს ფუნქცია არის მე-6 ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია. მაშასადამე, შესაბამისი $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ფუნქცია უნდა იყოს იზობარული, რომლის წონა არის **6.** ამიტომ პირობა (21) ღებულობს ასეთ სახეს

$$(23)\qquad \nu_1+2\nu_2+3\nu_3=6.$$

შემდეგ, (22) ფუნქციის უმაღლესი წევრის ხარისხი x_1-ის მიმართ 4-ის ტოლია; მაშასადამე (იხ. პუნქ. 1, შენიშვნა), $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ფუნქციის ყოველი წევრის ხარისხი $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ელემენტების მიმართ არ აღემატება 4-ს:

$$(24)\qquad \nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant 4.$$

ადვილად განვსაზღვრავთ ν_1 ν_2, ν_3 მნიშვნელობების ყველა სისტემას, რომლებიც აკმაყოფილებენ (23) და (24) პირობებს; ასეთი სისტემა იქნება ხუთი.

ν_1	ν_2	ν_3
3	0	1
2	2	0
1	1	1
0	3	0
0	0	2

ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ, ჯერ განუსაზღვრელი კოეფიციენტებით

(25) $$\Delta = A\sigma_1^3\sigma_3 + B\sigma_1^2\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + D\sigma_2^3 + E\sigma_3^2.$$

ეს ტოლობა იგივურად უნდა შესრულდეს x_1, x_2, x_3 ელემენტების მიმართ. რომ განვსაზღვროთ A, B, C, D, E კოეფიციენტები, ჯერ დავუშვათ:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,$$

ამ x_1, x_2, x_3 მნიშვნელობებისათვის გვექნება

$$\Delta = 2^2,\ \sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = -1,\ \sigma_3 = 0.$$

თუ ჩავსვამთ (25)-ში, მივიღებთ:

(26) $$4 = -D.$$

ახლა დავუშვათ, რომ

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0.$$

ეს გვაძლევს

$$\Delta = 0,\ \sigma_1 = 2,\ \sigma_3 = 0.$$

ჩავსვათ (25)-ში:

$$0 = 4B + D,$$

საიდანაც, მივიღებთ რა მხედველობაში (26) ტოლობას, გვექნება:

(27) $$B = 1.$$

თუ დავუშვებთ

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = -1,$$

ვპოულობთ:

$$\Delta = 0,\ \sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = -3,\ \sigma_3 = 2;$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (25)-ში, მივიღებთ:

$$0 = -27\,D + 4E;$$

შევადარებთ რა (26)-ს, მივიღებთ:

(28) $$E = -27.$$

თუ დავუშვებთ

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -2,$$

გვექნება

$$\Delta = 0,\ \sigma_1 = -8,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = 4;$$

ამ შემთხვევაში იგივობა (25) გვაძლევს:

$$0 = -3^3 \cdot 4A + 4^3 E,$$

ანუ (28)-ის მიხედვით

$$A = -4.$$

ახლა უნდა განვსაზღვროთ C კოეფიციენტი; ამ მიზნით შეიძლება ავიღოთ

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1;$$

ეს გვაძლევს

$$\Delta = 0,\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = -1,\ \sigma_3 = -1.$$

ეს მნიშვნელობანი შევიტანოთ (25) იგივობაში:

$$0 = -A + B + C - D + E.$$

A, B, D, E-ს ნაცვლად ჩავსვათ მათი მნიშვნელობანი, მივიღებთ:

$$C = A - B + D - E = 18.$$

ამგვარად ყველა კოეფიციენტის მნიშვნელობები მოძებნილია, და (25) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\Delta = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2. \tag{29}$$

3. სიმეტრიული ფუნქცია ზევით განვსაზღვრეთ როგორც ისეთი ფუნქცია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისა, რომელიც უცვლელი რჩება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების ყოველნაირი გადასმის დროს. ამასთან „უცვლელობა" გვესმოდა იმ აზრით, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების ყოველგვარი გადასმის დროს მივიღებთ ფუნქციას, რომელიც იგივურად ტოლია პირვანდელი ფუნქციისა (ე. ი. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების ნებსითი მნიშვნელობებისათვის). ამის შესაბამისად წინანდელ მსჯელობაში $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტები განვიხილეთ როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები.

$x_1, \ldots, x_n$ ცვლადებთან ერთად განვიხილოთ ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი და შევადგინოთ ნამრავლი:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \tag{30}$$

ნამრავლი (30) წარმოადგენს ფუნქციას $x, x_1, \ldots, x_n$ ცვლადებისა, რომელთა რიცხვი არის $n+1$, მაგრამ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მიმართ ეს ნამრავლი სიმეტრიულია, ამავე დროს კი x ცვლადი განსა-

კუთრებულ როლს თამაშობს მასში; ამ გარემოებას ხაზგასმული აქვს $f(x)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. თუ (30) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს განვალაგებთ x ასოს ხარისხების მიხედვით, მაშინ კოეფიციენტები იქნება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციები:

$$f(x)=x^n-\sigma_1 x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\sigma_n. \tag{31}$$

ახლა შეგვიძლია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტები განვიხილოთ როგორც (31) ფუნქციის ფესვები, ან როგორც ფესვები განტოლებისა:

$$x^n-\sigma_1 x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\sigma_n=0. \tag{31'}$$

ამ განტოლების $\sigma_1\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ კოეფიციენტები გამოისახებიან $x_1, \ldots, x_n$-ით (50) ფორმულით (თავი III). ეს კოეფიციენტებიც შეგვიძლია აგრეთვე ჩავთვალოთ „დამოუკიდებელ ცვლადებად“ იმ აზრით, რომ ისინი ერთმანეთთან არაა დაკავშირებული არავითარი თანაფარდობით *

მართლაც, დავუშვათ, რომ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტებს შორის არსებობს თანაფარდობა

$$G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=0, \tag{a}$$

სადაც $G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტებისა. ასეთ სახემდე შეგვიძლია მივიყვანოთ ყოველი თანაფარდობა, რომელიც რაციონალურია $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტების მიმართ.

თუ G ფუნქციაში $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ელემენტების მაგივრად ჩავსვამთ მათ გამოსახულებებს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების საშუალებით, მაშინ მივიღებთ სიმეტრიულ ფუნქციას $\Upsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. მაშასადამე,

$$G_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=\Upsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0.$$

თუ $G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქცია იგივურად ნულს არ ეტოლება, მაშინ $\Upsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სიმეტრიულ ფუნქციას ექნება მაღალი წევრი.

$$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \qquad (A\neq 0).$$

ამ წევრს მივიღებთ $G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქციის განსაზღვრული წევრიდან (შეად. პუნქ. 1)

$$A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\sigma_n^{\alpha_n}.$$

ამგვარად, გამოდის რომ დამოუკიდებელი $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადები დაკავშირებული არიან თანაფარდობით

$$\Upsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

* გარდა იმ თანაფარდობათა, რომელნიც შესრულდება იგივურად, როგორც მაგალითად

$$\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1,\ \sigma_1(\sigma_2-\sigma_3)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_3;$$

სადაც $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია, რომელიც იგივურად არ ეტოლება ნულს. მიღებული წინაალმდეგობა გვიჩვენებს, რომ (a) სახის თანაფარდობა შეუძლებელია.

ამგვარად, თუ მოცემულია ნებსითი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების სისტემა, მაშინ შეიძლება აიგოს (31') განტოლება, რომლისთვისაც ეს ელემენტები წარმოადგენენ ფესვებს. შებრუნებულად, თუ მოცემულია ზოგადი სახის n ხარისხის განტოლება

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{32}$$

რომელშიაც $a_0, a_1, \ldots, a_n$ კოეფიციენტები ერთმანეთთან არაა შებმულნი არავითარი თანაფარდობით *, მაშინ ამ განტოლების $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ფესვები შეიძლება განვიხილოთ როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები.

სხვაგვარი მდგომარეობაა იმ შემთხვევაში, როცა განტოლების კოეფიციენტები წარმოადგენენ განსაზღვრულ რიცხვებს, ან როცა ისინი შებმულნი არიან რაიმე თანაფარდობებით (რომლებიც არ კმაყოფილდება იგივურად). ამგვარ განტოლებას შეიძლება ვუწოდოთ „კერძო სახის" განტოლება, განსხვავებით ზოგადი სახის განტოლებებისაგან, რომელთა შესახებ ზევით ვილაპარაკეთ. კერძო სახის განტოლების ფესვები, თავისთავად ცხადია, უკვე აღარ იქნება ნებსითი ელემენტები.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ფესვების სიმეტრიული $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციის ქვეშ აქაც გვესმის ისეთი ფუნქცია, რომელიც უცვლელი რჩება ფესვების ყოველგვარი გადანაცვლებისას, მაგრამ ამ შემთხვევაში „ფუნქციის უცვლელობა" შეიძლება გავიგოთ სხვა აზრით. სახელდობრ, აქ არაა საჭირო მოთხოვნა, რომ გადანაცვლების შედეგად მიღებულ იქნეს ფუნქცია, რომელიც იგივურად ტოლია პირვანდელის. საკმარისია, რომ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობა უცვლელი დარჩეს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ფესვების ყოველნაირი გადანაცვლების დროს. $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციას, რომელსაც ამნაირი თვისება აქვს, ზოგჯერ უწოდებენ „მნიშვნელობით სიმეტრიულს".

მაგალითის სახით განვიხილოთ განტოლება:

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0. \tag{33}$$

თუ x_1, x_2, x_3 არის ამ განტოლების ფესვები, მაშინ ფუნქცია

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2$$

---

* ისეთების გარდა, რომლებიც იგივურად კმაყოფილდება.

იქნება მნიშვნელობით სიმეტრიული. მართლაც, (33) განტოლების ყოველი ფესვისათვის უნდა იყოს:

$$x_i^3 - x_i^2 + 2x_i - 1 = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

ანუ

$$x_i^3 = (x_i - 1)^2.$$

მაშასადამე,

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^3 + x_2^3 + (x_3 - 1)^2 - x_1^2 + x_2^3 + x_3^3.$$

უკანასკნელი ტოლობა სამართლიანია მხოლოდ იმ პირობით, რომ თუ x_1, x_2, x_3 არიან მოცემული განტოლების ფესვები; ის გვიჩვენებს, რომ φ ფუნქციის მნიშვნელობა (აღნიშნული პირობის დროს) არ იცვლება x_1, x_2, x_3-ის გადანაცვლების დროს. მაშასადამე, $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ არის ფუნქცია, რომელიც მნიშვნელობით სიმეტრიულია.

იმ ფუნქციების შესწავლა, რომლებიც მნიშვნელობით სიმეტრიულია შეგვიძლია დავიყვანოთ სიმეტრიული ფუნქციების (ამ სიტყვის ჩვეულებრივი აზრით) შესწავლამდე შემდეგი ხერხის საშუალებით.

განვიხილოთ „კერძო სახის" განტოლება

$$f(x) = 0 \tag{34}$$

და დავუშვათ, რომ x_1, x_2, ..., x_n არის მისი ფესვები. დავუშვათ, რომ

$$\varphi = \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

არის ფუნქცია, რომელიც მნიშვნელობით სიმეტრიულია. შევადგინოთ ყველა შესაძლო გამოსახულებანი, რომლებიც მიიღება φ-დან x_1, x_2, ..., x_n ელემენტების $n!$ გადანაცვლებით.

$$\varphi_1 (= \varphi),\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{n!}\ .$$

ეს გამოსახულებანი წარმოადგენენ, საერთოდ რომ ვთქვათ, x_1, x_2, ..., x_n ელემენტების სხვადასხვა ფუნქციებს, თუ x_1, x_2, ..., x_n-ს განვიხილავთ როგორც დამოუკიდებელ ცვლადებს. ახლა დავუშვათ

$$\Phi = \Phi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \frac{1}{n!}(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{n!}). \tag{35}$$

ადვილი დასანახავია, რომ (35) ფუნქცია იქნება სიმეტრიული ამ სიტყვის ჩვეულებრივი აზრით. მართლაც, x_1, ..., x_n ელემენტების ყოველნაირი გადანაცვლება იწვევს მხოლოდ საკრებთა გადანაცვლებას (35) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში. თუ ახლა x_1, x_2, ..., x_n-ის ქვეშ ვიგულისხმებთ მოცემული (34) განტოლების ფესვებს, მაშინ

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_{n!} = \varphi,$$

რადგანაც φ ფუნქცია არის მნიშვნელობით სიმეტრიული. ახლა (35) ტოლობა გვაძლევს.

$$\Phi=\varphi; \tag{36}$$

ამგვარად, ნაცვლად φ ფუნქციისა, რომელიც მნიშვნელობით სიმეტრიულია, შეგვიძლია განვიხილოთ Φ ფუნქცია, რომელიც სიმეტრიულია ამ სიტყვის ჩვეულებრივი აზრით.

$\Phi=\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქცია, როგორც ყოველი სიმეტრიული ფუნქცია, შეიძლება გამოვსახოთ ძირითადი სიმეტრიული $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ფუნქციებით:

$$\Phi=F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \tag{37}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (36) თანაფარდობას, (37) გამოსახულება შეგვიძლია გადავწეროთ ასეთი სახით

$$\varphi=F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

ამ თანაფარდობას ადგილი ექნება იმ პირობით, თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ წარმოადგენენ მოცემული განტოლების ფესვებს.

4. განვიხილოთ მთელი რაციონალური ფუნქცია:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \tag{38}$$

რომლის კოეფიციენტების შესახებ არ გავაკეთებთ არავითარ შეზღუდვას. თუ $x_1, \ldots, x_n$ არის (38) ფუნქციის ფესვები, ან, რაც იგივეა, ფესვები განტოლებისა

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0, \tag{38'}$$

მაშინ, როგორც ვიცით (თავი III), ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_1=x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_n=x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{array}\right. \tag{39}$$

ახლა, თუ $\varphi=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ არის სიმეტრიული ფუნქცია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისა, მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც მთელი რაციონალური ფუნქცია $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ელემენტებისა:

$$\varphi=F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

თანახმად (39) თანაფარდობისა, უკანასკნელი ტოლობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\varphi=F\left(-\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \pm\frac{a_n}{a_0}\right). \tag{40}$$

მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს $a_0, a_1, \ldots, a_n$ კოეფიციენტების რაციონალურ ფუნქციას. ამგვარად, შეგვიძლია გამოვთქვათ შემდეგი *დებულება*:

*განტოლების ფესვების ყოველი სიმეტრიული ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს რაციონალურად მისი კოეფიციენტების საშუალებით**. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს:

თუ განტოლების კოეფიციენტები ეკუთვნის P ველს, მაშინ განტოლების ფესვების ყოველი სიმეტრიული ფუნქცია იმყოფება ამ ველში.

ზევით (შეად. პუნქ. 1 შენიშვნა) დავინახეთ, რომ $F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქციის ხარისხი $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტების მიმართ ტოლია α_1-ის, სადაც α_1 არის φ ფუნქციის უმაღლესი წევრის x_1 ელემენტის ხარისხის მაჩვენებელი.

ამიტომ თუ (40) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყველა წევრს გავაერთმნიშვნელიანებთ, მაშინ მივიღებთ

$$\varphi=\frac{\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{a_0^{\alpha_1}}, \tag{41}$$

სადაც $\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია (38) განტოლების კოეფიციენტებისა.

---

* ტექსტში ჩვენ ვიხილავთ განსაკუთრებით $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების მთელ რაციონალურ ფუნქციებს; მაგრამ ეს უკანასკნელი თეორემა სამართლიანია (არა აუცილებლად მთელი) რაციონალური სიმეტრიული ფუნქციისათვის. მართლაც, ყოველი წილადი რაციონალური სიმეტრიული ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც განაყოფი ორი მთელი სიმეტრიული ფუნქციისა,რომლებისათვისაც სამართლიანია თეორემა; მაშასადამე, იგი სამართლიანია მათი განაყოფისათვისაც.

ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ დებულებას:

(38') **განტოლების (x_1, x_2, $\ldots$, x_n) ელემენტების ყოველი $\varphi=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ მთელი რაციონალური ფუნქცია შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ მისი კოეფიციენტების საშუალებით:**

$$\varphi=\frac{\psi(a_0, \ldots, a_n)}{a_0^{\alpha_1}},$$

სადაც $\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია $a_0, \ldots, a_n$ კოეფიციენტებისა, ხოლო α_1 წარმოადგენს φ ფუნქციის უმაღლესი წევრის x_1 ელემენტის ხარისხის მაჩვენებელს.

§ 2. გამორიცხვის პრობლემა. რეზულტანტი

1. სიმეტრიული ფუნქციათა თეორია პოულობს გამოყენებას ალგებრის სხვადასხვა საკითხში. ჩვენ აქ განვიხილავთ საკითხს ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის რეზულტანტის შესახებ. დავუშვათ, რომ გამოსარკვევია, თუ რა პირობებში ორ მთელ რაციონალურ ფუნქციას

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$$

აქვთ საერთო ფესვები. ჩვენ დავინახეთ III თავში (§ 5), რომ ეს საკითხი შეიძლება გადავწყვიტოთ უდიდესი საერთო გამყოფის თვისებათა გამოყენებით.

იმავე საკითხის ამოხსნას ახლა მივუდგეთ სხვა თვალსაზრისით. დავუშვათ, რომ $x_1, \ldots, x_n$ არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვები. შევადგინოთ ნამრავლი

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} & g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)=\prod_{i=1}^{n} g(x_i)= \\ & =(b_0x_1^m+b_1x_1^{m-1}+\ldots+b_m)(b_0x_2^m+b_1x_2^{m-1}+\ldots+b_m)\ldots \\ & \qquad \ldots(b_0x_n^m+b_1x_n^{m-1}+\ldots+b_m)^*. \end{aligned}\right.$$

ეს ნამრავლი შეიძლება გადაიქცეს ნულად მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე x_1, x_2, $\ldots$, x_n ფესვთა-

---

* სიმბოლო Π აღნიშნავს ნამრავლს.

განი იქნება აგრეთვე $g(x)$ ფუნქციის ფესვი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ნამრავლი (43) გადაიქცევა ნულად მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს საერთო ფესვი აქვთ.

(43) ნამრავლის ყოველი

$$g(x_i)=b_0x_i^m+b_1x_i^{m-1}+\ldots+b_m$$

მამრავლი შეიძლება განვიხილოთ როგორც პირველი ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია b_0, b_1, ..., b_m კოეფიციენტებისა. მაშასადამე, n ასეთი მამრავლის ნამრავლი იქნება b_0, ..., b_m კოეფიციენტების n ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია.

მეორეს მხრივ ნამრავლი (43) წარმოადგენს სიმეტრიულ ფუნქციას $f(x)$ ფუნქციის x_1, x_2, ..., x_n ფესვებისა, რადგან x_1, x_2, ..., x_n ფესვების გარდანაცვლება დაიყვანება ამ ნამრავლის მამრავლთა უბრალო გარდანაცვლებამდე.

ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ნამრავლი (43) იქნება რაციონალური ფუნქცია $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებისა; ეს რაციონალური ფუნქცია შეიძლება (§ 1, პუნქ. 4) წარმოვადგინოთ წილადის სახით მნიშვნელით $a_0^{\alpha_1}$, სადაც α_1 არის (43) ნამრავლის უმაღლესი წევრის x_1 ელემენტის ხარისხის მაჩვენებელი. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს უმაღლესი წევრი იქნება.

$$b_0^n x_1^m x_2^m \ldots x_n^m.$$

მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში $\alpha_1=m$, ასე რომ მნიშვნელი, რომელიც ჩვენ გვაინტერესებს არის a_0^m. ამიტომ, გავამრავლებთ რა (43) მამრავლს a_0^m-ზე მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც წარმოადგენს მთელ რაციონალურ ფუნქციას როგორც $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებისა, ისე $g(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებისა; ამ გამოსახულებას ეწოდება $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების რეზულტანტი და აღინიშნება $R(f, g)$ სიმბოლოთი. ამგვარად.

$$R(f,\ g)=a_0^m\prod g(x_i). \tag{44}$$

წინანდელ საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ: **იმისათვის, რომ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს ჰქონდეთ ერთი საერთო ფესვი მაინც, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი რეზულტანტი იყოს ნულის ტოლი:**

$$R(f,\ g)=0. \tag{45}$$

ახლა განვიხილოთ რეზულტანტის მთავარი თვისებები. თუ, განვიხილავთ $g(x)$ ფუნქციის $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ ფესვებს, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$g(x)=b_0(x-x'_1)(x-x'_2)\ldots(x-x'_m).$$

მაშასადამე,

$$g(x_i)=b_0(x_i-x'_1)(x_i-x'_2)\ldots(x_i-x'_m).$$

ჩავსვამთ რა (44)-ში, ვიპოვით:

$$(46)\quad \begin{cases} R(f,\ g)=a_0{}^m b_0{}^n \prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-x'_1)(x_i-x'_2)\ldots(x_i-x'_m)= \\ \qquad =a_0{}^m b_0{}^n \prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{m}(x_i-x'_k). \end{cases}$$

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს გადავანაცვლებთ, მაშინ მარჯვენა ნაწილის mn სხვაობიდან ყოველი მათგანი ნიშანს იცვლის და ამიტომაც გვექნება:

$$(47)\qquad R(g,f)=(-1)^{mn}R(f,g).$$

ამგვარად, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების გადასმის დროს **რეზულტანტს შეუძლია მხოლოდ ნიშნის შეცვლა.**

მეორეს მხრივ, ანალოგიურად შეგვიძლია დავწეროთ

$$R(g,f)=b_0{}^n\prod_{k=1}^{m}f(x'_k)=b^n_0\prod_{k=1}^{m}(a_0x_k'^n+a_1x_k'^{n-1}+\ldots+a_n);$$

საიდანაც ჩანს, რომ რეზულტანტი წარმოადგენს m ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტების მიმართ.

ამგვარად, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციის რეზულტანტი $f(x)$ ფუნქციის $a_0, a_1, \ldots, a_n$ კოეფიციენტების მიმართ წარმოადგენს m ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას, ხოლო $g(x)$ ფუნქციის $b_0, b_1, \ldots, b_m$ კოეფიციენტების მიმართ n ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას.

ამგვარად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$(48)\qquad R(f,g)=\sum Ca_0{}^{\alpha_0}a_1{}^{\alpha_1}\ldots a_n{}^{\alpha_n}b_0{}^{\beta_0}b_1{}^{\beta_1}\ldots b_m{}^{\beta_m},$$

სადაც

$$(49) \qquad \begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m, \\ \beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_m=n. \end{cases}$$

(48) და (49) ტოლობათა შედარება გვაძლევს:

$$a_0{}^m b_0{}^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (x_i - x'_k) = \sum C a_0{}^{\alpha_0} a_1{}^{\alpha_1} \ldots a_n{}^{\alpha_n} b_0{}^{\beta_0} \ldots b_m{}^{\beta_m}).$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (49) თანაფარდობებს, უკანასკნელი ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (x_i - x'_k) = \frac{1}{a_0{}^m b_0{}^n} \sum C a_0{}^{\sigma_0} a_1{}^{\alpha_1} \ldots a_n{}^{\alpha_n} b_0{}^{\beta_0} b_1{}^{\beta_1} \ldots b_m{}^{\beta_m} =$$

$$= \sum C \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\alpha_n} \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{b_m}{b_0}\right)^{\beta_n}.$$

ახლა გავიხსენოთ, რომ

$$\frac{a_i}{a_0} = \pm \sigma_i, \quad \frac{b_k}{b_0} = \pm \sigma'_k, \quad \begin{cases} i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ k=1,\ 2,\ .\ .,\ m. \end{cases}$$

$\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ არიან ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციები $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტებისა და შესაბამისად $\sigma'_2, \ldots, \sigma'_m$ არიან ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციები $x'_1, \ldots, x'_m$ ელემენტებისა.
მაშასადამე,

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (x_i - x'_k) = \sum \pm C \sigma_1{}^{\alpha_1} \ldots \sigma_n{}^{\alpha_n} \sigma'_1{}^{\beta_1} \ldots \sigma'_m{}^{\beta_m}.$$

მარცხენა ნაწილში გვაქვს ნამრავლი mn მამრავლა, რომლებიც წრფივია x_i, x'_k ფესვების მიმართ. მაშასადამე, მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს mn ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას ყველა $x_1, \ldots x_n$, $x'_1, \ldots, x'_m$ ფესვების მიმართ.

მარჯვენა ნაწილში $x_1, \ldots x_n$ ელემენტების ყოველი σ_i ფუნქციათაგანის ხარისხი ტოლია მისი i მაჩვენებლისა. სრულიად ასევე, ყოველი ფუნქციის ხარისხი $x'_1, \ldots, x'_m$ ელემენტების მიმართ ტოლია k

მაჩვენებლისა. მაშასადამე, მარჯვენა ნაწილის ყოველი წევრის ხარისხი ყველა $x_1 \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_m$ ცვლადების მიმართ იქნება:

(50) $$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n + \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + m\beta_m.$$

ეს ხარისხი, როგორც ახლა დავინახეთ, mn-ის ტოლია:

(51) $$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n + \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + m\beta_m = mn.$$

ამგვარად, ყოველი წევრისათვის

(52) $$Ca_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} b_0^{\beta_0} b_1^{\beta_1} \ldots b_m^{\beta_m},$$

რომელიც შედის $R(f, g)$ რეზულტანტის შემადგენლობაში, ადგილი აქვს (51) ტოლობას. ჯამს (50) ეწოდება (52) წევრის წონა.

ჩვენ დავამტკიცეთ ამგვარად, შემდეგი დებულება:

$R(f, g)$ რეზულტანტის ყველა წევრს აქვს ერთი და იგივე წონა, რომელიც $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ხარისხების ნამრავლის ტოლია.

მაგალითის სახით მოვძებნოთ რეზულტანტი მეორე ხარისხის ორი ფუნქციისა:

(53) $$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2.$$

განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$R(f, g) = a_0^2\, g(x_1)\, g(x_2),$$

სადაც x_1 და x_2 არიან $f(x)$ ფუნქციის ფესვები. ჩავსვამთ რა $g(x_1)$ და $g(x_2)$-ის ნაცვლად მათ მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$R(f, g) = a_0^2(b_0 x_1^2 + b_1 x_1 + b_2)(b_0 x_2^2 + b_1 x_2 + b_2).$$

გავხსნით რა ფრჩხილებს და x_1, x_2 ელემენტების სიმეტრიულ ფუნქციებს შევცვლით მათი გამოსახულებებით:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad x_1x_2 = \frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2},$$

მივიღებთ:

$$R(f,\ g)=b_0^2\,a_2^2-b_0\,b_1\,a_1\,a_2+b_0\,b_2\,a_1^2-2b_0\,b_2\,a_0\,a_2-$$
$$-b_1\,b_2\,a_0\,a_1+b_1^2\,a_0\,a_2+b_2^2\,a_0^2.$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, ჩვენ მივიღეთ ფუნქცია, რომლის ყველა წევრს აქვს წონა 4; ეს ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

(54) $$R(f,\ g)=(a_0\,b_2-a_2\,b_0)^2+(a_1\,b_0-a_0\,b_1)\,(a_1\,b_2-a_2\,b_1).$$

ამგვარად, იმისათვის რომ ორ ფუნქციას (53), ან ორ შესაბამ კვადრატულ განტოლებას ექნეს ერთი საერთო ფესვი მაინც, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$(a_0\,b_2-a_2\,b_0)^2+(a_1\,b_0-a_0\,b_1)\,(a_1\,b_2-a_2\,b_1)=0.$$

2. რეზულტანტის ცნება გამოვიყენოთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის, დავუშვათ, რომ მოცემულია ორი განტოლება:

(55) $$f(x,\ y)=0,\ \ g(x,\ y)=0,$$

სადაც $f(x, y)$ და $g(x,\ y)$ არიან x და y ცვლადების მთელი რაციონალური ფუნქციები. $f(x,\ y)$ ფუნქციის ხარისხი x და y-ის მიმართ აღვნიშნოთ n-ით, $g(x,\ y)$ ფუნქციის ხარისხი კი m-ით. განვალაგებთ რა $f(x,\ y)$ და $g(x,\ y)$ ფუნქციებს x და y ცვლადების ხარისხების მიხედვით, შეგვიძლია დავწეროთ;

(56) $$\begin{cases} f(x,\ y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n, \\ g(x,y)=b_0\,x^m+b_1\,x^{m-1}+\dots+b_{m-1}\,x+b_n, \end{cases}$$

სადაც $a_0, \dots, a_n,\ b_0, \dots, b_n$ არიან y-ის ფუნქციები. ამასთან a_i კოეფიციენტის ხარისხი y-ის მიმართ არ აღემატება i მაჩვენებელს, რადგან $f(x,\ y)$ ფუნქციის ხარისხი ორივე x და y ცვლადის მიმართ არ აღემატება n-ს; სწორედ ასევე b_k ფუნქციის ხარისხი y-ის მიმართ არ აღემატება k-ს.

ახლა დავუშვათ, რომ სისტემა (55) განტოლებებისა კმაყოფილდება $x=x_1,\ y=y_1$ მნიშვნელობებისათვის:

$$f(x_1,\ y_1)=0,\quad g(x_1,\ y_1)=0.$$

თუ (56) ფუნქციაში ჩავსვამთ მნიშვნელობას $y=y_1$ და x დავტოვებთ ცვლადად, მივიღებთ x-ის ორ ფუნქციას; ამ ორ ფუნქციას

უნდა ჰქონდეს საერთო ფესვი $x=x_1$. ჩვენ ვიცით რომ ორ ფუნქციას საერთო ფესვი შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მათი რეზულტანტი ნულად იქცევა. შევადგინოთ (56) ფუნქციების რეზულტანტი, ამასთან ეს ფუნქციები განვიხილოთ როგორც ფუნქციები ერთი x ცვლადისა. ამგვარად მიღებული რეზულტანტი იქნება მთელი რაციონალური ფუნქცია $a_0, \dots, a_n$, $b_0, \dots, b_m$ კოეფიციენტებისა:

(57) $$R=\sum Ca_0^{\alpha_0}a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n}b_0^{\beta_0}b_1^{\beta_1}\dots b_m^{\beta_n};$$

მაგრამ ეს კოეფიციენტები თავის მხრივ არიან y-ის მთელი რაციონალური ფუნქციები; მაშასადამე, (57) რეზულტანტიც იქნება y-ის მთელი რაციონალური ფუნქცია:

(57') $$R=R(y).$$

რადგანაც $y=y_1$ არის (56) ფუნქციების საერთო ფესვი, ამიტომ R რეზულტანტი ნულად იქცევა, როცა $y=y_1$; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, y_1 მნიშვნელობა უნდა იყოს ფესვი განტოლებისა:

(58) $$R(y)=0.$$

პირიქით დავუშვათ, რომ y_1 მნიშვნელობა წარმოადგენს (58) განტოლების ფესვს, ამასთან a_0 და b_0 კოეფიციენტები ნულად არ იქცევიან ამ მნიშვნელობისათვის. რადგანაც $R(y)$ რეზულტანტი ნულის ტოლია, როცა $y=y_1$, ამიტომ $y=y_1$ არის (56) ფუნქციების საერთო ფესვი *

თუ x_1 არის საერთო ფესვი, მაშინ x_1, y_1 მნიშვნელობები აკმაყოფილებს (55) განტოლებათა სისტემას.

ამგვარად, (55) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება (58) განტოლების ამოხსნამდე. ამბობენ, რომ (58) განტოლება წარმოადგენს (55) განტოლებებიდან x ცვლადის გამორიცხვის (ელიმინაციის) შედეგს.

ახლა ვნახოთ, რა შეიძლება ითქვას (58) განტოლების ხარისხის, ან რაც იგივეა $R(y)$ ფუნქციის ხარისხის შესახებ.

---

* ეს ფესვი ერთადერთია, თუ y_1 არის (58) განტოლების მარტივი ფესვი, ხოლო თუ y_1 არის ჯერადი ფესვი, მაშინ მას შეესაბამება იმდენი x_1 მნიშვნელობა, როგორიცაა მისი ჯერადობა.

ჩვენ ვიცით, რომ ყოველი a_k, b_k კოეფიციენტთაგანის ხარისხი y-ის მიმართ არ აღემატება k მაჩვენებელს. ამიტომ (57) რეზულტანტის ყოველი წევრის ხარისხი y-ის მიმართ არ აღემატება

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n + \beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m$$

ჯამს. ეს ჯამი წარმოადგენს განსახილველი წევრის წ ო ნ ა ს; მაგრამ ზევით დავინახეთ, რომ რეზულტანტის ყველა წევრს აქვს ერთიდაიგივე წონა, რომელიც mn-ის ტოლია. მაშასადამე, R რეზულტანტის ხარისხი და მასთან ერთად (58) განტოლების ხარისხიც y-ის მიმართ არ აღემატება mn-ს.

ამგვარად გვაქვს შემდეგი დებულება:

თუ მოცემულია სისტემა ორი განტოლებისა ორი უცნობით, მაშინ ერთ-ერთი უცნობის გამორიცხვა გვაძლევს განტოლებას, რომლის ხარისხი არ აღემატება მოცემულ განტოლებათა ხარისხების ნამრავლს.

გეომეტრიული თვალსაზრისით ეს დებულება შეესაბამება იმ ფაქტს, რომ იმ ორი ალგებრული მრუდის გადაკვეთის* წერტილთა რიცხვი, რომელთა რიგები შესაბამისად უდრის m და n-ს, არ აღემატება mn-ს.

3. წინანდელი შედეგები გამოვიყენოთ ფუნქციის ჯერადი ფესვების საკითხისათვის. III თავში დავინახეთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ჯერადი ფესვები ამავე დროს იქნება $f(x)$ ფუნქციის და მისი $f'(x)$ წარმოებულის საერთო ფესვები.

მაგრამ იმისათვის რომ $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციებს ჰქონდეთ საერთო ფესვები აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ფუნქციების რეზულტანტი ნულის ტოლი იყოს.

$f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციების რეზულტანტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით [შეად. ზევით (44)-ს]:

$$R(f, f') = a_0^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f'(x_i). \tag{59}$$

მეორეს მხრივ, დავშლით რა $f(x)$ ფუნქციას წრფივ მამრავლებად

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

* აქ ლაპარაკია იმ გადაკვეთის წერტილებზე, რომლებიც სიბრტყის სასრული ნაწილშია მოთავსებული.

ნამრავლის გაწარმოების წესის მიხედვით გვექნება:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_0(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)+\\ &+a_0(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)+\dots\\ &\dots+a_0(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)+\dots\\ &\dots+a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $x=x_i$, მაშინ მარჯვენა ნაწილის ყველა ნამრავლი, რომლებიც შეიცავენ $x-x_i$ მამრავლს გადაიქცევა ნულად, და მივიღებთ:

$$f'(x_i)=a_0(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})\dots(x_i-x_n). \tag{60}$$

თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ (59)-ში, ვიპოვით:

$$R(f,f')=a_0{}^{n-1}a_0{}^n\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots$$

$$\dots(x_i-x_n)=a_0{}^{n-1}a_0{}^n(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)(x_2-x_1)\dots$$

$$\dots(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1}).$$

მარჯვენა ნაწილში გვაქვს x_i-x_k სახის სხვაობათა ნამრავლი; ადვილი დასანახია, რომ ყოველი სხვაობა ამ ნამრავლში შეგვხვდება ორჯერ: ერთხელ ნიშნით (+), მეორეთ ნიშნით (—). რადგანაც x_i-x_k სხვაობათა სხვადასხვა რიცხვი ტოლია $\frac{n(n-1)}{2}$-სა, ამიტომ გვექნება

$$R(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0{}^{n-1}a_0{}^n\prod_{(i,k)}(x_i-x_k)^2, \tag{61}$$

ამასთან ნამრავლი მარჯვენა ნაწილში ვრცელდება ყველა (i,k) შეერთებაზე. ადვილი დასანახია რომ ნამრავლი

$$\begin{aligned} \prod_{i,k}(x_i-x_k)^2 &= (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\dots(x_1-x_n)^2\\ &\cdot(x_2-x_3)^2\dots(x_2-x_n)^2\cdot\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &\cdot(x_{n-1}-x_n)^2 \end{aligned} \tag{62}$$

წარმოადგენს სიმეტრიულ ფუნქციას $x_1, \ldots, x_n$ ელემენტებისას; ფესვების ნებისმიერ გადანაცვლებამ შეიძლება შესცვალოს (62) ნამრავლის მხოლოდ თანამამრავლთა რიგი. აქედან გამომდინარეობს, რომ ეს ნამრავლი გამოისახება რაციონალურად $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებით; თანახმად § 1-ისა ჩვენ მივიღებთ ამასთან წილად გამოსახვას, რომლის მნიშვნელი ტოლია $a_0^{\alpha_1}$-ისა, სადაც α_1 არის x_1-ის მაჩვენებელი (62) ფუნქციის უმაღლეს წევრში. ადვილად გამოსარკვევია, თუ რას ეტოლება ამ შემთხვევაში ეს მაჩვენებელი. მართლაც, (62) ნამრავლი შეიცავს $(x_1 - x_i)^2$ სახის $n-1$ მამრავლს, მაშინ როდესაც დანარჩენი მამრავლები არ შეიცავენ x_1 ელემენტს. ამიტომ (62) ნამრავლის უმაღლესი წევრი შეიცავს $x_1^{2(n-1)}$ მამრავლს. მაშასადამე, საძიებელი მნიშვნელი იქნება a_0^{2n-2}; თუ (62) ნამრავლს გავამრავლებთ a_0^{2n-2}-ზე, მივიღებთ გამოსახვას, რომელიც წარმოადგენს მთელ რაციონალურ ფუნქციას $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებისას; ამ გამოსახვას

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{(i,k)} (x_i - x_k)^2 \tag{63}$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის, ანუ $f(x)=0$ განტოლების **დისკრიმინანტი.**

შევნიშნოთ ახლა, რომ (61) თანაფარდობა შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_0 a_0^{2n-2} \prod_{(i,k)} (x_i - x_k)^2;$$

ან, მივიღებთ რა მხედველობაში (63)-ს,

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D. \tag{64}$$

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციის და მისი $f'(x)$ წარმოებულის რეზულტანტი $f(x)$ ფუნქციის დისკრიმინანტისაგან განსხვავდება მხოლოდ $\pm a_0$ მამრავლით.

თუ $f(x)$ არ გადაიქცევა იგივურად ნულად, მაშინ ეს მამრავლი განსხვავებულია ნულისაგან.

წინანდელისაგან გამომდინარეობს: იმისათვის, რომ f(x) ფუნქციას ჰქონდეს ჯერადი ფესვები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი დისკრიმინანტი ეტოლებოდეს ნულს:

$$D = 0.$$

სავარჯიშო.

გამოვთვალოთ დისკრიმინანტი მესამე ხარისხის ზოგადი განტოლებისა

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

მოცემულ შემთხვევაში

$$D = a_0^4 \prod_{(i,k)} (x_i - x_k)^2 =$$

$$= a_0^4(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2.$$

ახლა უნდა გამოვიყენოთ (29) თანაფარდობა და σ_1, σ_2, σ_3 ელემენტები შევცვალოთ მათი გამოსახვებით განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით.

ეს მოგვცემს ასეთ შედეგს:

(65) $$D = -4a_1^3a_3 + a_1^2a_2^2 + 18a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_2^3 - 27a_0^2a_3^2.$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რა არის სიმეტრიული ფუნქცია?

2. რომელ სიმეტრიულ ფუნქციებს ეწოდება სიმეტრიული?

3. რაში მდგომარეობს სიმეტრიული ფუნქციების ძირითადი თეორემა? მისი დამტკიცების გეგმა.

4. რა შეიძლება ითქვას იმ $F(\sigma_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ფუნქციის ხარისხის შესახებ $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ელემენტების მიმართ, რომელიც გვაძლევს სიმეტრიული φ ფუნქციის გამოსახვას $\sigma_3, \sigma_1, \ldots \sigma_n$ ელემენტების საშუალებით?

5. რა არის „ფუნქცია სიმეტრიული მნიშვნელობით?

6. როგორ გამოისახება განტოლების ფესვების მთელი სიმეტრიული ფუნქცია იმავე განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით?

7. რა არის ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის რეზულტანტი?

8. როგორია $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების რეზულტანტის ხარისხი ამ ფუნქციიის კოეფიციენტების მიმართ?

9. როგორია $R(y)=0$ განტოლების ხარისხი, რომელსაც მივიღებთ ორი მოცემული $f(x, y)=0$ და $g(x, y)=0$ განტოლებებიდან გამორიცხვის გზით?

10. რას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის დისკრიმინანტი?

თავი V

დაბალი ხარისხის განტოლებათა ალგებრული ამოხსნა

§ 1. პრობლემის დასმა

1. III თავში გამოვარკვიეთ, რომ მთელ რაციონალურ ფუნქციას

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_{n-1}x+a_n$$

აქვს ზუსტად n ფესვი; ახლა ჩვენ შევისწავლით ამ ფესვების მოძებნის საკითხს, ე. ი.

$$(1)\qquad a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$$

განტოლების ამოხსნის საკითხს.

ამოცანა (1) განტოლების ამოხსნის შესახებ შეიძლება დაისვას სხვადასხვანაირად. თუ განტოლების კოეფიციენტები წარმოადგენენ გარკვეულ რიცხვებს, მაშინ შეიძლება ლაპარაკი რიცხვითი ამოხსნის შესახებ, ე. ი. ფესვების გამოთვლის შესახებ ნებისმიერი მოცემული სიზუსტით. ამ ამოცანას ჩვენ შევეხებით შემდეგ თავში.

თუ მოცემულია ზოგადი სახის განტოლება, მაშინ რიცხვითი ამოხსნაზე საუბარი უაზრო იქნებოდა, საკითხის მეორენაირი დასმა მდგომარეობს იმაში, რომ განტოლების ფესვები გამოვსახოთ მისი კოეფიციენტებით განსაზღვრული ოპერაციების საშუალებით; თუ ეს ოპერაციები დაიყვანება ძირითად მოქმედებათა (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა) და ფესვების ამოღების სასრული რიცხვამდე, მაშინ ამბობენ **განტოლების ალგებრულ ამოხსნის შესახებ**. ვინაიდან რაციონალურ მოქმედებებთან ერთად გვაქვს ფესვის ამოღებაც (ნებისმიერი ხარისხისა), ამიტომ ამბობენ აგრეთვე **განტოლების რადიკალებში ამოხსნის შესახებ**.

ამგვარად, ამოვხსნათ განტოლება რადიკალებში, ეს იმას ნიშნავს რომ ფესვები გამოვსახოთ კოეფიციენტებით რაციონალურ

მოქმედებათა და ფესვების ამოღების სასრული რიცხვის საშუალებით.

თუ გამოვიყენებთ $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებზე, ე. ი. a_0, $a_1, \ldots, a_n$-ზე მხოლოდ რაციონალურ მოქმედებებს (შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას და გაყოფას), მაშინ ჩვენ მივიღებთ შემდეგი სახის გამოსახვებს:

(2) $$\frac{\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)},$$

სადაც $\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$ და $\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ არიან მთელი რაციონალური ფუნქციები $a_0, \ldots, a_n$ ელემენტებისა, ამასთანავე ამ ფუნქციების კოეფიციენტები რაციონალური რიცხვებია. ცხადია, რომ (2) სახის ყველა ფუნქციათა სიმრავლე ჰქმნის ველს. ეს ველი აღვნიშნოთ P-თი. ადვილი დასანახია, რომ P — ველი შეიძლება მიღებული იქნეს ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველისაგან $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ელემენტების ჩართვით (იხ. თავი I)

$$P = R(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ (1) განტოლების ზოგიერთი ფესვი უკვე P ველში იმყოფება, ე. ი. რაციონალურად გამოისახებიან a_0, $a_1, \ldots, a_n$ კოეფიციენტებით. ამას ადგილი ექნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)$ ფუნქცია შეიცავს პირველი ხარისხის მამრავლებს, რომელთა კოეფიციენტები P ველს ეკუთვნის. საერთოდ რომ ვთქვათ, (1) განტოლების ფესვები არ იმყოფება P ველში.

განტოლებათა ალგებრული ამოხსნის ამოცანა ახლა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

(1) განტოლების ამოხსნა ალგებრულად ნიშნავს იმას, რომ რადიკალების თანმიმდევრობით P ველისადმი ჩართვით შეიძლება აიგოს ისეთი P_1 ველი, რომელიც შეიცავს მოცემული განტოლების ყველა ფესვს.

ახლა შევნიშნოთ, რომ ყოველი რადიკალი

$$\xi = \sqrt[n]{\alpha},$$

თავის მხრივ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფესვი განტოლებისა:

(3) $$\xi^n - \alpha = 0;$$

ასეთი სახის განტოლებას ეწოდება **ორწევრა**. ორწევრა (3) განტოლების ამოხსნა ტოლფასია a რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის ამოღებისა.

ამგვარად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამოვხსნათ განტოლება რადიკალებში, ეს იმას ნიშნავს, რომ მისი **ამოხსნა დავიყვანოთ მთელი წყება ორწევრა განტოლებათა მიმდევრობითი ამოხსნამდე.**

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, განტოლების ამოხსნა რადიკალებში იმას ნიშნავს, რომ **მისი ფესვები რაციონალურად გამოვსახოთ მთელი რიგი ორწევრა განტოლებათა ფესვების საშუალებით.**

შემდეგში დავინახავთ, რომ ამოცანის ამგვარი დასმით მივაღწევთ არსებით განზოგადოებებს. ახლა განვიხილოთ დაბალი ხარისხის განტოლებათა ალგებრული ამოხსნის საკითხი.

2. განვიხილოთ მეორე ხარისხის ფუნქცია

$$f(x)=x^2+px+q.$$

თუ დავუშვებთ რომ

$$y=x^2+px+q \tag{4}$$

და x და y-ს განვიხილავთ, როგორც სიბრტყეზე მდებარე წერტილის მართკუთხა კოორდინატებს, მაშინ (4) იქნება პარაბოლის განტოლება. ეს განტოლება შეიძლება გავამარტივოთ კოორდინატების გარდაქმნის საშუალებით:

$$x=a+x' \qquad y=b+y'$$

იგივე გარდაქმნით მივაღწევთ კვადრატული განტოლების

$$x^2+px+q=0 \tag{5}$$

ამოხსნას.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ:

$$x=a+x',$$

მაშინ განტოლება (5) მიიღებს სახეს:

$$x'^2+(2a+p)x'+a^2+pa+q=0. \tag{6}$$

მუდმივი a შევარჩიოთ ისე, რომ კოეფიციენტები x'-თან გადაიქცეს ნულად:

$$2a+p=0;$$

ეს გვაძლევს

(7) $$a=-\frac{p}{2}.$$

ჩავსვამთ რა a მნიშვნელობას (7)-დან (6) განტოლებაში, მივიღებთ ო რ წ ე ვ რ ა განტოლებას.

(8) $$x'^2-\frac{p^2}{4}+q=0,$$

საიდანაც

$$x'=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

და მაშასადამე,

(9) $$x=a+x'=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

ამგვარად, იმ ველის მისაღებად, რომელიც (5) განტოლების ფესვებს შეიცავს, საკმარისია $P=k(p, q)$ ველს ჩავურთოთ ორწევრა (8) განტოლების ერთ-ერთი ფესვი, ე. ი. $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ რადიკალის ერთ-ერთი მნიშვნელობათაგანი.

თუ შემდეგში ვილაპარაკებთ რადიკალის ჩართვაზე ამით ჩვენ მხედველობაში გვექნება, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, რომ ხდება ჩართვა ამ რადიკალის ე რ თ - ე რ თ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს ა, ე. ი. შესაბამი ორწევრა განტოლების ე რ თ - ე რ თ ი ფესვისა.

§ 2. მესამე ხარისხის განტოლება

1. მესამე ხარისხის ზოგადი განტოლება შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

(10) $$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0.$$

მოვახდინოთ გარდაქმნა

(11) $$x=a+x'.$$

თუ (10) განტოლებაში x-ის ნაცვლად შევიტანთ (11) გამოსახვას და განვალაგებთ x' ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ:

(12) $$\left\{\begin{aligned}&x'^3+(3a+p_1)x'^2+(3a^2+2p_1a+p_2)x'+\\&\quad+a^3+p_1a^2+p_2a+p_3=0.\end{aligned}\right.$$

შევარჩევთ რა სათანადოდ a მუდმივის მნიშვნელობას, აქ შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ ნულად იქცეს ან კოეფიციენტი x'^2-თან, ან კოეფიციენტი x'-თან. პირველ შემთხვევაში a-ს განსაზღვრისათვის გვექნება წრფივი განტოლება, მეორე შემთხვევაში — კვადრატული განტოლება. შევჩერდეთ პირველზე:

$$3a + p_1 = 0,$$

საიდანაც

$$a = p_1 \frac{p_1}{3}.$$

ჩავსვამთ რა ამ მნიშვნელობებს (12)-ში გვექნება:

(13)
$$x'^3 + px' + q = 0,$$

სადაც

(14)
$$p = -\frac{p_1^2}{3} + p_2, \quad q = \frac{2p_1^3}{27} - \frac{p_1 p_2}{3} + p_3.$$

ამგვარად, მოცემული (10) განტოლების ამოხსნა დაიყვანება „არასრული" (13) განტოლების ამოხსნამდე. თუ უკანასკნელი განტოლება ამოიხსნება, მაშინ მოცემული განტოლების ფესვები მოიძებნება თანაფარდობიდან:

(15)
$$x = -\frac{p_1}{3} + x'.$$

გადასვლა (10) განტოლებიდან (13) განტოლებაზე შეიძლება მოხდეს შემდეგნაირად. თუ დავუშვებთ, რომ

$$f(x) = x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3,$$

მაშინ (12) განტოლების მარცხენა ნაწილი უნდა ემთხვეოდეს $f(a + x')$-ის დაშლას x' ხარისხებად; ეს დაშლა შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$f(a + x') = f(a) + f'(a)x' + \frac{f''(a)}{2!}x'^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x'^3;$$

ამასთან

$$\frac{f'''(a)}{3!} = 1.$$

ამგვარად, (12) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x'^3+\frac{f''(a)}{2!}x'^2+f'(a)x'+f(a)=0.$$

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით უშუალოდაც. თუ $a=-\frac{p_1}{3}$, მაშინ

$$\frac{f''(a)}{2!}=3a+p_1=0,$$

$$f'(a)=p,\ f(a)=q\ [\text{შეად. } (14)];$$

რომ განვსაზღვროთ p და q კოეფიციენტების მნიშვნელობანი შეიძლება ვისარგებლოთ ჰორნერის სქემით.

მაგალითის სახით განვიხილოთ განტოლება

$$x^3-9x^2+21x-5=0.$$

აქ $a=-\frac{p_1}{3}=3$, და (12) თანაფარდობა მიიღებს ასეთ სახეს: $x=x'+3$; ჰორნერის სქემით მოვნახავთ $p=f'(3)$ და $q=f(3)$;

$$\begin{array}{c|c|c|c|l}
3 & 1 & -9 & 21 & -5 \\ \hline
 & 1 & -6 & 3 & 4=f(3)=q \\ \hline
 & 1 & -3 & -6=f'(3)=p. &
\end{array}$$

ამ შემთხვევაში (13) განტოლება იქნება:

$$x'^3-6x'+4=0.$$

შენიშვნები: ა) გარდაქმნა (11) გვაძლევს საშუალებას a მუდმივის სათანადო არჩევით კვადრატული განტოლება დავიყვანოთ (8) სახის განტოლებამდე, რომელიც არ შეიცავს x' ცვლადის პირველ ხარისხს, ხოლო მესამე ხარისხის განტოლება—(13) სახის განტოლებამდე, რომელიც არ შეიცავს x'^2-ს.

ახლა განვიხილოთ n ხარისხის განტოლება:

(16) $$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_n=0,$$

რომელსაც აქვს x_1, x_2, ..., x_n ფესვები; თუ აქ დავუშვებთ, რომ:

$$x = a + x' \tag{17}$$

და განვალაგებთ x^1 ხარისხების მიხედვით, მაშინ მივიღებთ ასეთი სახის განტოლებას:

$$x'^n + p'_1 x'^{n-1} + p_2'^{n-2} + \dots + p'_n = 0. \tag{16'}$$

(16′) განტოლების ფესვები აღვნიშნოთ x'_1, $x'_1 x'_2$, ..., x'_n-ით.
(17)-ის ძალით გვექნება:

$$x_i = a + x'_i.$$

მეორეს მხრივ

$$p_1 = -(r_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

$$p'_1 = -(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n) = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + na.$$

მაშასადამე,

$$p'_1 = p_1 + na.$$

ახლა დავუშვათ, რომ a მუდმივი აკმაყოფილებს პირობას

$$p_1 + na = 0,$$

ანუ

$$a = -\frac{p_1}{n};$$

მაშინ გვექნება

$$p'_1 = 0$$

და (16′) განტოლება არ შეიცავს x'^{n-1}-ს.

ამგვარად, რომ (16) განტოლება გარდავქმნათ ისეთი სახის განტოლებად, რომელიც არ შეიცავს ცვლადს $n-1$ ხარისხში, საკმარისია დავუშვათ, რომ

$$x = -\frac{p_1}{n} + x', \tag{18}$$

სადაც p_1 არის კოეფიციენტი x^{n-1}-თან მოცემულ განტოლებაში.

ბ) თუ (12) ფორმულაში მდგომ a მუდმივს შევარჩევთ ისე, რომ კოეფიციენტი x'-თან გადაიქცეს ნულად, მაშინ მივიღებთ ასეთი სახის განტოლებას:

$$x'^3 + ex'^2 + f = 0.$$

გავყოფთ რა ორივე ნაწილს e^3-ზე გვექნება:

$$\left(\frac{x'}{e}\right)^3+\left(\frac{x'}{e}\right)^2+\frac{f}{e^3}=0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ:

$$\frac{x'}{e}=\xi,\quad \frac{f}{e^3}=-m.$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$\xi^3+\xi^2=m;$$

ასეთი სახის განტოლებებს იხილავდნენ ძველს ბაბილონში (იხ. შესავალი).

2. ახლა ამოვხსნათ მესამე ხარისხის „არასრული“ განტოლება:

(19) $$x^3+px+q=0.$$

თუ გავყვებით ტარტალიას მიერ ნაჩვენებ გზას, x-ს წარმოვადგენთ ორი საკრების ჯამის სახით:

$$x=u+v.$$

ორივე ნაწილი ავამაღლოთ კუბში:

$$x^3=u^3+v^3+3uv(u+v).$$

შევცვლით რა $u+v$-ს x-ით მივიღებთ:

(20) $$x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0.$$

თუ u და v-ს ქვეშ ვიგულისხმებთ განსაზღვრულ რიცხვებს, მაშინ თანაფარდობა (20) შეიძლება განვიხილოთ როგორც განტოლება x-ის მიმართ. ამ განტოლებას აკმაყოფილებს $x=u+v$ მნიშვნელობა.

შევადაროთ (20) განტოლება მოცემულ (19) განტოლებას. თუ მოვახერხებთ u და v-ს შერჩევას ისე, რომ შესრულდეს თანაფარდობანი

(21a) $$-3uv=p,$$

(21b) $$-(u^3+v^3)=q,$$

მაშინ (19) და (20) განტოლებანი ერთმანეთს ემთხვევა. მაშასადამე,

$x = u + v$ მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს (20)-ს, დააკმაყოფილებს (19)-საც.

ახლა უნდა ვიპოვოთ u და v მნიშვნელობანი, რომლებისათვისაც სრულდება პირობა (21). თუ ავამაღლებთ (21 a) განტოლების ორივე ნაწილს კუბში, გვექნება:

$$u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \tag{22a}$$

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{22b}$$

ეს თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ u^3 და v^3 წარმოადგენენ შემდეგი კვადრატული განტოლების ფესვებს:

$$y^2 + qy - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0. \tag{23}$$

რადგანაც (22) თანაფარდობანი სიმეტრიულია u^3 და v^3-ის მიმართ, ამიტომ სულერთია (23) განტოლების რომელი ფესვთაგანი უნდა მივიჩნიოთ u^3-ად. ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

აქედან მოვნახავთ u და v-ს მნიშვნელობებს:

$$\left|\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

(24) რადიკალებიდან ყოველ მათგანს აქვს სამი მნიშვნელობა.

ამ მნიშვნელობათა კომბინირებით ერთმანეთთან მივიღებთ (u, v) მნიშვნელობათა ცხრა სისტემას, რომლებიც აკმაყოფილებენ (22, a და b) განტოლებებს. ამ მნიშვნელობებს შორის უნდა გამოვყოთ ისინი, რომლებიც აკმაყოფილებენ (21 a) განტოლებას.

ამგვარად, იმისათვის, რომ (20) განტოლება ემთხვეოდეს მოცემულ (19) განტოლებას აუცილებელია და საკმარისი, რომ u და v რადიკალების მნიშვნელობანი აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$(21a) \qquad uv = -\frac{p}{3}.$$

ამ პირობებში $x = u + v$ მნიშვნელობა იქნება მოცემული განტოლების ფესვი. u და v-ს ნაცვლად ჩავსვამთ რა მათ მნიშვნელობებს, მივიღებთ ეგრეთ წოდებულ კარდანოს ფორმულას:

$$(25) \qquad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

ერთ-ერთი რადიკალის მნიშვნელობა ამ ფორმულაში შეიძლება შევარჩიოთ ნებისმიერად; მაშინ მეორე რადიკალის შესაბამისი მნიშვნელობა განისაზღვრება (21 a)-დან. ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ მოცემულ განტოლების სამივე ფესვს. თუ u_1-ით აღვნიშნავთ u რადიკალის ერთ-ერთ მნიშვნელობას, მაშინ იმავე რადიკალის ორი სხვა მნიშვნელობა იქნება $u_1\varepsilon_1$ და $u_1\varepsilon_2$, სადაც

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

არის მესამე ხარისხის ფესვი ერთეულიდან (თავი I, § 3).

v რადიკალის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება u რადიკალის u_1 მნიშვნელობას მოიძებნება (21a) თანაფარდობიდან:

$$(26) \qquad v_1 = -\frac{p}{3u_1}.$$

v რადიკალის ორი დანარჩენი მნიშვნელობა იქნება $v_1\varepsilon_1$ და $v_1\varepsilon_2$. ადვილად დასანახია, რომ u რადიკალის $u_1\varepsilon_2$ მნიშვნელობას შეესაბამება v რადიკალის $v_1\varepsilon_1$ მნიშვნელობა. რომ დავრწმუნდეთ ამაში,

საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ ამ მნიშვნელობათა ნამრავლი აკმაყოფილებს (21a) პირობას:

$$(u_1\varepsilon_1)(v_1\varepsilon_2)=(u_1v_1)(\varepsilon_1\varepsilon_2)=u_1v_1=-\frac{p}{3}.$$

ამგვარადვე დავადგენთ, რომ u რადიკალის $u_1\varepsilon_2$ მნიშვნელობას შეესაბამება v რადიკალის $v_1\varepsilon_1$ მნიშვნელობას.

შევკრიბავთ რა u რადიკალის ყოველ მნიშვნელობას v-ს შესაბამის მნიშვნელობასთან, მივიღებთ (19) განტოლების სამ ფესვს:

$$(27)\qquad \begin{cases} x_1=u_1+v_1,\\ x_2=u_1\varepsilon_1+v_1\varepsilon_2,\\ x_3=u_1\varepsilon_2+v_1\varepsilon_1. \end{cases}$$

ახლა შეგვიძლია ავაგოთ ველი, რომელიც შეიცავს მესამე ხარისხის (19) განტოლების ყველა ფესვს; ამ მიზნით უწინარეს ყოვლისა $P=R(p, q)$ ველს ჩავურთავთ რადიკალს:

$$w=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

$P(w)$ველს ჩვენ ჩავურთავთ მესამე ხარისხის ერთ-ერთ წარმოსახვით ფესვს ერთეულიდან, მაგალითად ε_1-ს. დაბოლოს $P(w, \varepsilon_1)$ ველს ჩავურთავთ რადიკალს:

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+w}.$$

(27) და (26) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ ამგვარად მიღებული ველი შეიცავს (19) განტოლების ყველა x_1, x_2, x_3 ფესვს.

3. ახლა დავუშვათ, რომ

$$(19)\qquad x^3+px+q=0$$

განტოლების კოეფიციენტები წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვებს; ვნახოთ, რა შეიძლება ითქვას ასეთ განტოლების ფესვებზე. აქ შეიძლება ადგილი ექნეს სამ სხვადასხვა შემთხვევას იმისდა მიხედვით. გამოსახულება $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ იქნება დადებითი, უარყოფითი თუ ნულის ტოლი.

1) $\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$. ამ შემთხვევაში (25) ფორმულაში ყოველი კუბური ფესვის ნიშნის ქვეშ იქნება *ნამდვილი რიცხვები*. მაშასადამე, აღნიშნულ ყოველ კუბურ რადიკალს ექნება ერთი ნამდვილი მნიშვნელობა და ორი წარმოსახვითი შეუღლებული. u_1-ით აღვნიშნოთ u რადიკალის ნამდვილი მნიშვნელობა; მაშინ v_1 მნიშვნელობა, რომელსაც ვიპოვით (26) ფომულით აგრეთვე იქნება ნამდვილი (რადგანაც p ნამდვილი რიცხვია). ამგვარად, (19) განტოლების ფესვი

$$x_1=u_1+v_1 \tag{28}$$

იქნება ნამდვილი. რომ მივიღოთ გამოსახულებანი x_2 და x_3-სათვის, (27)-ში ε_1 და ε_2 რიცხვების მაგიერ ჩავსვათ მათი მნიშვნელობები:

$$x_2=u_1\varepsilon_1+v_1\varepsilon_2=u_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+v_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$x_3=u_1\varepsilon_2+v_1\varepsilon_1=u_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+v_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

მაშასადამე,

$$\left\{\begin{aligned} x_2&=-\frac{u_1+v_1}{2}+i\sqrt{3}\,\frac{u_1-v_1}{2},\\ x_3&=-\frac{u_1+v_1}{2}-i\sqrt{3}\,\frac{u_1-v_1}{2}.\end{aligned}\right. \tag{28b}$$

რადგანაც განსახილველ შემთხვევაში u_1+v_1 და u_1-v_1 არიან ნამდვილი რიცხვები, ამიტომ x_2 და x_3-სათვის (28b) მნიშვნელობები წარმოადგენს *შეუღლებულ კომპლექსურ რიცხვებს*.

ამგვარად, ამ შემთხვევაში (19) განტოლებას აქვს ერთი ნამდვილი ფესვი და ორი შეუღლებული კომპლექსური.

2) $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$. ამ შემთხვევაში კუბური რადიკალების ფესქვეშა გამოსახულებები წარმოადგენენ წარმოსახვით რიცხვებს; მაშასადამე, ამ რადიკალების მნიშვნელობანიც წარმოსახვითი იქნება. რადგანაც განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილია, ამიტომ მას აქვს ერთი მაინც *ნამდვილი* ფესვი (თავი III, § 4, პუნქ. 3). u_1-ით

აღვნიშნოთ u რადიკალის ის მნიშვნელობა, რომელიც v-ს შესაბამ მნიშვნელობასთან შეკრებით გვაძლევს (19) განტოლების ნამდვილ ფესვს. ამგვარად, ჯამი

$$u_1+v_1=x_1$$

იქნება ნამდვილი რიცხვი. მეორეს მხრივ, u_1v_1 ნამრავლი ნამდვილი რიცხვია (21a) თანაფარდობის ძალით. ამგვარად, u_1 და v_1 წარმოადგენენ კომპლექსურ რიცხვებს, რომელთა ჯამი და ნამრავლი ნამდვილია. აქედან გამომდინარეობს, რომ u_1 და v_1 წარმოადგენს ნამდვილ კოეფიციენტებიან კვადრატულ განტოლების ფესვებს, ე. ი. u_1 და v_1 არიან შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები. ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ

(29) $$u_1=a+bi,\quad v_1=a-bi.$$

ჩავსვამთ რა ამ მნიშვნელობებს (27) ფორმულაში ვიპოვით:

(30) $$\begin{cases} x_1=u_1+v_1=2a, \\ x_2=u_1\varepsilon_1+v_1\varepsilon_2=(a+bi)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+ \\ +(a-bi)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-a-b\sqrt{3}, \\ x_3=u_1\varepsilon_2+v_1\varepsilon_1=(a+bi)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+ \\ +(a-bi)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-a+b\sqrt{3}. \end{cases}$$

ეს თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ განსახილავ შემთხვევაში (19) განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია, ამავე დროს კი კარდანოს ფორმულა ამ ფესვებს გამოსახავს წარმოსახვითი რადიკალების საშუალებით. შეიძლება იმის ჩვენება, რომ ამ შემთხვევაში ფესვების გამოსახვა მხოლოდ ნამდვილი რადიკალების საშუალებით შეუძლებელია. ამიტომ განსახილავ შემთხვევამ მიიღო „დაუყვანადობის“ სახელწოდება (ტერმინი დაუყვანადი მისი ამ მნიშვნელობით არ უნდა აურიოთ დაუყვანადი ფუნქციის ცნებასთან).

აქ უნდა აღინიშნოს კიდევ ერთი არსებითი მომენტი. u_1-ით ჩვენ აღვნიშნეთ u რადიკალის ის მნიშვნელობა, რომელიც v_1-ის შესაბამ

მნიშვნელობასთან შეკრებისას გვაძლევს (19) განტოლების ნამდვილ ფესვს. მაგრამ ამავე დროს ვუჩვენეთ, რომ მოცემულ შემთხვევაში განტოლების ყ ვ ე ლ ა ფესვი ნამდვილია. ამგვარად u_1-ის ქვეშ შეიძლება ვიგულისხმოთ u რადიკალის ნებისმიერი მნიშვნელობა; აქედან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ მოცემულ შემთხვევაში რ ა დ ი კ ა ლ ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ს შ ე ე ს ა ბ ა მ ე ბ ა v რ ა დ ი კ ა ლ ი ს შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა.

ახლა ვუჩვენოთ რომ

(19) **განტოლების ამოხსნა დაუყვანადი შემთხვევისათვის დაკავშირებულია რომელიმე კუთხის ტრისექციასთან.**

მართლაც, რადგანაც განსახილავ შემთხვევაში

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0, \tag{31}$$

ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=-A^2,$$

სადაც A არის ნამდვილი რიცხვი, რომელიც შეიძლება ჩაითვალოს დადებითად. მაშინ გვექნება:

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-\frac{q}{2}\pm Ai,$$

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+Ai},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-Ai}.$$

რომ მივიღოთ u და v რადიკალების მნიშვნელობები, ამისათვის $-\frac{q}{2}+Ai$ და $-\frac{q}{2}-Ai$ რიცხვები დავიყვანოთ ტრიგონომეტრიულ სახეზე:

$$-\frac{q}{2}+Ai=\rho(\cos\omega+i\sin\omega),\ -\frac{q}{2}-Ai=\rho\{\cos(-\omega)+$$
$$+i\sin(-\omega)\},$$

სადაც

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+A^2}=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}\text{*},$$

(32) $$\text{(a) } \cos\omega=-\frac{q}{2\rho},\ \text{(b) } \sin\omega=\frac{A}{\rho}.$$

ახლა

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+Ai}=\sqrt[3]{\rho\cos\omega+i\sin\omega}$$

რადიკალის მნიშვნელობები შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით

$$u_1=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\omega}{3}+i\sin\omega\right),$$

$$u_1\varepsilon_1=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\omega+2\pi}{3}+i\sin\frac{\omega+2\pi}{3}\right),$$

$$u_1\varepsilon_2=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\omega+4\pi}{3}+i\sin\frac{\omega+4\pi}{3}\right).$$

v რადიკალისათვის გვექნება შესაბამისად

$$v=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\omega}{3}-i\sin\frac{\omega}{3}\right),$$

$$v_1\varepsilon_2=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\omega+2\pi}{3}-i\sin\frac{\omega+2\pi}{3}\right),\text{**}$$

$$v_1\varepsilon_1=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\omega+4\pi}{3}-i\sin\frac{\omega+4\pi}{3}\right).$$

---

* p რიცხვი უნდა იყოს უარყოფითი, თანახმად (31) თანაფარდობისა.

** მართლაც,

$$v_1\varepsilon_2=\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\left(-\frac{\omega}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\omega}{3}\right)\right\}\cdot\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}=$$

$$=\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\left(-\frac{\omega+2\pi}{3}+i\sin\left(-\frac{\omega+2\pi}{3}\right)\right\}=$$

$$=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\omega+2\pi}{3}-i\sin\frac{\omega+2\pi}{2}\right).$$

მაშასადამე, (19) განტოლების ფესვები იქნება:

$$
(33)\qquad
\begin{cases}
x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\dfrac{\omega}{3},\\
x_2 = u_1\varepsilon_1 + v_1\varepsilon_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\dfrac{\omega+2\pi}{3},\\
x_3 = u_1\varepsilon_2 + v_1\varepsilon_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\dfrac{\omega+4\pi}{3}.
\end{cases}
$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებს, რომ მოცემული განტოლების ამოხსნა მიიყვანება ω ან $\omega+2\pi k$ კუთხის გაყოფამდე სამ ტოლ ნაწილად.

უნდა შევნიშნოთ კიდევ, რომ განტოლების სამი ფესვის (33) მნიშვნელობანი განსხვავდება ერთმანეთისაგან. მართლაც, მაგალითად, ადგილი რომ ჰქონდეს ტოლობას

$$\cos\frac{\omega}{3} = \cos\frac{\omega+2\pi}{3},$$

მაშინ შესრულებული უნდა იყოს თანაფარდობა

$$\frac{\omega}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi k - \frac{\omega}{3},$$

ანუ

$$\omega = (3k-1)\pi,$$

სადაც k არის მთელი რიცხვი. მაგრამ ω კუთხე არ შეიძლება იყოს π-ს ჯერადი, რადგანაც (32b) თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ $\sin w \neq 0$.

3) $$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$(34)\qquad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \text{ და } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

ასე რომ

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

მაგრამ ჩვენ რომ მექანიკურად შეგვესრულებია შეკრება, და დაგვეწერა:

$$x=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

ეს შეცდომაში შეგვიყვანდა. მართლაც, ორთავე (34) რადიკალის ფესქვეშა გამოსახულებანი ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ აუცილებლად უნდა განვასხვაოთ ამ რადიკალების მნიშვნელობანი. ეს მნიშვნელობანი უნდა ავარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს (21) პირობა, ე. ი. რომ მათი ნამრავლი ტოლი იყოს $-\frac{p}{3}$-ს. რადგანაც $-\frac{q}{2}$ ნამდვილი რიცხვია, ამიტომ $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ რადიკალის ერთ-ერთი მნიშვნელობა ნამდვილი იქნება. თუ ამ მნიშვნელობას აღვნიშნავთ u_1-ით, მაშინ v_1-ის შესაბამი მნიშვნელობა აგრეთვე ნამდვილი უნდა იყოს. მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში v_1 იქნება იმავე $\sqrt[3]{-\frac{q}{3}}$ რადიკალის მნიშვნელობა. რადგანაც ამ რადიკალს აქვს მხოლოდ ერთი ნამდვილი მნიშვნელობა, უნდა გვქონდეს

$$v_1=u_1.$$

ახლა რომ მივიღოთ მოცემული განტოლების სამივე ფესვი საკმარისია (27) ფორმულაში დავუშვათ, რომ $v_1=u_1$. ეს გვაძლევს:

$$\begin{aligned} x_1&=2u_1,\\ x_2&=u_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-u_1,\\ x_3&=u_2(\varepsilon_2+\varepsilon_1)=-u_1. \end{aligned} \tag{35}$$

ამგვარად, განსახილავ შემთხვევაში განტოლების სამივე ფესვი არის ნამდვილი და ორი მათგანი ერთმანეთის ტოლია

$$x_2=x_3.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: წინანდელი შედეგები (რომლებიც მივიღეთ იმის დაშვებით, რომ p და q ნამდვილი რიცხვებია) გვიჩვენებს, რომ (19)

განტოლებას ჯერადი ფესვები აქვს მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0.$$

უკანასკნელი დასკვნა ძალაშია იმ შემთხვევაშიაც, როცა p, q კოეფიციენტები წარმოადგენს ნებსით კომპლექსურ რიცხვებს. რომ დავრწმუნდეთ ამაში, მოვძებნოთ (19) განტოლების დისკრიმინანტი. ამისათვის საკმარისია (65) ფორმულაში (თავი IV) დავუშვათ, რომ

$$a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=p,\ a_3=q;$$

ამის შემდეგ მივიღებთ

(36) $$D=-(4p^3+27q^2)=-4\cdot 27\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$

ამგვარად, (19) განტოლების დისკრიმინანტი უარყოფითი რიცხვითი მამრავლით განსხვავდება

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

გამოსახულებისაგან, რომელიც იმყოფება კვადრატული ფესვის ქვეშ კარდანოს ფორმულაში.

აქედან და IV თავის § 2-ის 3 პუნქტიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

იმისათვის, რომ 19 განტოლებას ჰქონდეს ჯერადი ფესვები, აუცილებელია და საკმარისი რომ

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0.$$

უნდა შევნიშნოთ კიდევ, რომ

(37) $$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$$

განტოლების დისკრიმინანტი უდრის დისკრიმინანტს შესაბამი „არასრული“ განტოლებისა:

(37′) $$x'^3+px'+q=0.$$

მართლაც, გადასვლა (37) განტოლებიდან (37′) განტოლებაზე ხდება

$$x = -\frac{p_1}{3} + x'$$

გარდაქმნათა საშუალებით.

ამიტომ, თუ x_1, x_2, x_3 არის (37) განტოლების ფესვები, ხოლო x'_1, x'_2, x'_3 (37′) განტოლების ფესვებია, მაშინ

$$x_i = -\frac{p_1}{3} + x'_i, \ (i = 1, 2, 3),$$

$$x_i - x_k = x'_i - x'_k.$$

მაშასადამე,

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = (x'_1 - x'_2)^2(x'_1 - x'_3)^2(x'_2 - x'_3)^2,$$

ე. ი. ორთავე განტოლების დისკრიმინანტები ერთმანეთის ტოლია (შეად. თავი IV, § 2).

მაგალითები

1. ჩვენ ზევით დავინახეთ, რომ

(38) $$x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$$

განტოლება $x = 3 + x'$ გარდაქმნის საშუალებით მიიყვანება შემდეგი სახის განტოლებამდე:

(38′) $$x'^3 - 6x' + 4 = 0.$$

აქ $p = -6$, $q = 4$. მაშასადამე,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -4 < 0.$$

ამრიგად, საქმე გვაქვს დაუყვანად შემთხვევასთან. რომ მივიღოთ

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-2 + 2i}$$

რადიკალის მნიშვნელობა, საჭიროა ფესქვეშა გამოსახულება დავიყვანოთ ტრიგონომეტრიულ სახეზე. ეს გვაძლევს:

$$-2 + 2i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

მაშასადამე, u რადიკალის ერთ-ერთი მნიშვნელობა იქნება:

$$u_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i.$$

შევადარებთ რა (29)-სთან, ვიპოვით, რომ ამ შემთხვევაში

$$a=1,\ b=1.$$

ამგვარად (38′) განტოლების ფესვები იქნება:

$$x'_2=-a-b\sqrt{3}=-1-\sqrt{3};\quad x'_3=-a+b\sqrt{3}=-1+\sqrt{3}.$$

ახლა $x=3+x'$ თანაფარდობიდან მოვნახავთ (38) განტოლების ფესვებს:

$$x_1=5\quad x_2=2-\sqrt{3}\qquad x_3=2+\sqrt{3}.$$

2. მოცემულია განტოლება

$$x^3+1{,}25\,x-3{,}72=0.$$

აქ $p=1{,}25$, $q=-3{,}72$,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0.$$

მაშასადამე, მოცემულ განტოლებას აქვს ერთი ნამდვილი და ორი წარმოსახვითი შეუღლებული ფესვი.

რომ გამოვითვალოთ ეს ფესვები, უწინარეს ყოვლისა ჩვენ ვიპოვოთ ნამდვილი მნიშვნელობა რადიკალისა

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}=\sqrt[3]{3{,}7396}.$$

ეს მნიშვნელობა იქნება *

$$u_1=1{,}55218.$$

v_1-ის შესაბამის მნიშვნელობას ვიპოვით (26) დან:

$$v_1=-\frac{p}{3u_1}=-0{,}27059.$$

ახლა ($28a$) და ($28b$) ფორმულებით ვიპოვით მოცემული განტოლების ფესვებს:

$$x_1=u_1+v_1=1{,}28159,$$

$$x_2=-\frac{u_1+v_1}{2}+i\sqrt{3}\,\frac{u_1-v_1}{2}=-0{,}6408+1{,}5786\,i,$$

$$x_3=-\frac{u_1+v_1}{2}-i\sqrt{3}\,\frac{u_1-v_1}{2}=-0{,}6408-1{,}5786\,i.$$

სავარჯიშო

ამოხსენით შემდეგი განტოლებანი:

1. $x^3+6x^2+3x-4=0.$
2. $x^3-8{,}14\,x+3{,}25=0.$
3. $x^3+0{,}5858x^2+0{,}1716x-4{,}243=0.$

---

* გამოანგარიშებანი შესრულებულია ხუთნიშნა ლოგარითმული ცხრილების საშუალებით.

§ 3. მეოთხე ხარისხის განტოლება

1. ახლა განვიხილოთ მეოთხე ხარისხის განტოლება. მეოთხე ხარისხის ზოგადი განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0. \tag{39}$$

ეილერმა დაამტკიცა,* რომ მეოთხე ხარისხის განტოლების ამოხსნა შეიძლება მივიღოთ ისეთივე ხერხით, რომელიც ანალოგიურია იმ ხერხისა, რომელიც გამოვიყენეთ მესამე ხარისხის განტოლების ამოსახსნელად. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ გარდაქმნა

$$x=-\frac{p_1}{4}+x'$$

მიგვიყვანს (39) განტოლებას ისეთ განტოლებამდე, რომელიც არ შეიცავს ცვლადის მესამე ხარისხს. ამიტომ დასაწყისშივე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია მეოთხე ხარისხის „არასრული“ განტოლება:

$$x^4+px^2+qx+r=0. \tag{40}$$

ახლა x წარმოვადგინოთ სამი საკრების ჯამის სახით:

$$x=u+v+w. \tag{41}$$

ავამაღლებთ რა ორივე ნაწილს კვადრატში, მივიღებთ:

$$x^2-(u^2+v^2+w^2)=2(uv+uw+vw).$$

კვადრატში მეორეჯერ ამაღლება გვაძლევს:

$$x^4-2(u^2+v^2+w^2)x^2+(u^2+v^2+w)^2=4(uv+uw+vw)^2. \tag{42}$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ

$$(uv+uw+uw)^2=u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2+2uvw(u+v+w),$$

ანუ (41)-ის ძალით:

$$(uv+uw+vw)^2=2uvwx+u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2.$$

---

* L. Euler. Vollständige Anleitung zur Algebra. St. Petersburg, 1802, zweiter Teil, Cap. 15, S. 181.

ჩავსვამთ რა გამოსახულებას (42)-ში, მივიღებთ:

$$x^4 - 2(u^2+v^2+w^2)x^2 - 8uvwx + (u^2+v^2+w^2)^2 - \\ - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = 0. \tag{43}$$

თუ u, v, w წარმოადგენენ განსაზღვრულ რიცხვებს, მაშინ (43) შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მეოთხე ხარისხის განტოლება x-ის მიმართ. ეს განტოლება შევადაროთ მოცემულ (40) განტოლებას. შევეცადოთ u, v, w მნიშვნელობანი შევარჩიოთ ისე, რომ ორივე განტოლება ერთმანეთს დაემთხვეს. ამისათვის საჭიროა

$$\left\{\begin{aligned} -2(u^2+v^2+w^2) &= p, \\ -8uvw &= q, \\ (u^2+v^2+w^2) - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) &= r. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

უკანასკნელი განტოლება შეიძლება კიდევ გავამარტივოთ, თუ $(u^2+v^2+w^2)^2$-ის ნაცვლად ავიღებთ მის გამოსახულებას პირველი ტოლობიდან. ჩვენ მივიღებთ:

$$-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = r - \frac{p^2}{4}.$$

ახლა თანაფარდობანი (44) შეიძლება გადავსწეროთ ასეთი სახით.

$$\left\{\begin{aligned} &2(u^2+v^2+w^2) = -p, \\ &16(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = p^2 - 4r, \\ &64\,u^2v^2w^2 = q^2. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$4u^2 = z_1, \quad 4v^2 = z_2, \quad 4w^2 = z_3, \tag{46}$$

მაშინ თანაფარდობანი (45) მიიღებს სახეს:

$$\left\{\begin{aligned} &z_1 + z_2 + z_3 = -2p \\ &z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = p^2 - 4r, \\ &z_1 z_2 z_3 = q^2. \end{aligned}\right. \tag{47}$$

ეს თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ z_1, z_2, z_3 წარმოადგენენ ფესვებს კუბური განტოლებისა

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0. \tag{48}$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას, მაშინ u, v, w მნიშვნელობანი მოიძებნება (46)-დან:

(49) $$u=\frac{1}{2}\sqrt{z_1},\quad v=\frac{1}{2}\sqrt{z_2},\quad w=\frac{1}{2}\sqrt{z_3},$$

ამასთან რადიკალების ნიშნები უნდა ავარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს თანაფარდობა [იხ. (44)]:

(50) $$8uvw=-q,$$

ანუ

(50′) $$\sqrt{z_1}\ \sqrt{z_2}\ \sqrt{z_3}=-q.$$

თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ u, v, w-ს სათანადო მნიშვნელობები დააკმაყოფილებენ (44) განტოლებებს; ამ შემთხვევაში (43) განტოლება ემთხვევა მოცემულ (40) განტოლებას, და მნიშვნელობა

(51) $$x=u+v+w=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3})$$

იქნება მოცემული განტოლების ამონახსენი.

თუ $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$-ით აღვნიშნავთ რადიკალების მნიშვნელობათა განსაზღვრულ სისტემას, რომელთათვისაც შესრულებულია პირობა (50′), მაშინ ის შესრულდება აგრეთვე სისტემებისათვისაც:

$$\sqrt{z_1},\ -\sqrt{z_2},\ -\sqrt{z_3};\ -\sqrt{z_1},\ \sqrt{z_2},\ -\sqrt{z_3};$$
$$-\sqrt{z_1},\ -\sqrt{z_2},\ \sqrt{z_3}.$$

ამგვარად, შესაძლოა რადიკალების მნიშვნელობათა ოთხი სისტემა, რომლებიც აკმაყოფილებენ (50′) პირობას. მათ შეესაბამება (40) განტოლების ოთხი ფესვი:

(52) $$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}),\\ x_2=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}),\\ x_3=\frac{1}{2}(-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}),\\ x_4=\frac{1}{2}(-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}).\end{cases}$$

ამგვარად, მოცემული მეოთხე ხარისხის განტოლების ამოხსნა დაიყვანება კუბური (48) განტოლების ამოხსნამდე.

ამ განტოლებას ეწოდება (40) განტოლების კუბური რეზოლვენტი.

კუბური რეზოლვენტი (48) ახლა მივიყვანოთ ისეთ სახემდე, რომელიც არ შეიცავს ცვლადის მეორე ხარისხს; აღვნიშნოთ რა

(53) $$z = -\frac{2p}{3} + z',$$

z'-სათვის მივიღებთ განტოლებას

(54) $$z'^3 + Pz' + Q = 0,$$

სადაც (შეად. § 2, პუნქ. 1)

(55) $$\begin{cases} P = -\dfrac{4p^2}{3} + p^2 - 4r = -\dfrac{p^2}{3} - 4r. \\ Q = \dfrac{16p^3}{27} - \dfrac{2p^3 - 8pr}{3} - q^2 = -\dfrac{2p^3}{27} + \dfrac{8pr}{3} - q^2. \end{cases}$$

უკანასკნელი თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ P და Q კოეფიციენტები იმყოფება

$$R^* = R(p, q, r),$$

ველში, რომელიც მიღებულია ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველისაგან p, q, r ელემენტების ჩართვით.

თუ R^* ველს ჩავურთავთ რადიკალებს

$$\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}, \quad \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}},$$

და აგრეთვე ერთეულიდან მესამე ხარისხის ერთ-ერთ წარმოსახვით ფესვს, მაგალითად ε_1-ს, მაშინ მივიღებთ ველს, რომელიც შეიცავს (48) განტოლების z_1, z_2, z_3 ფესვებს. მიღებულ ველს კიდევ ჩავურთოთ რადიკალები $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$ ($\sqrt{z_3}$ რადიკალი თანახმად (50′) თანაფარდობისა გამოისახება რაციონალურად $\sqrt{z_1}$ და $\sqrt{z_2}$-ის საშუალებით). ამგვარად, მივიღებთ ველს, რომელიც შეიცავს (40) განტოლების ყველა ფესვს.

2. თუ (40) განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ (48) და (54) განტოლებათა კოეფიციენტები აგრეთვე იქნება ნამდვილი. როცა ვიცით თუ რა თვისებები აქვთ (48) და (54) განტოლების ფესვებს, ჩვენ შეგვიძლია ვიქონიოთ მსჯელობა მოცემული (40) განტოლების ფესვებზე. განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები, რომლებიც აქ შეიძლება შეგვხვდეს.

1) $\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3>0$. ამ შემთხვევაში (54) განტოლებას აქვს ერთი ნამდვილი ფესვი და ორი წარმოსახვითი შეუღლებული. (53) თანაფარდობა გვიჩვენებს რომ (48) განტოლებას იგივე თვისება ექნება. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ z_1 არის ნამდვილი რიცხვი, ხოლო z_2, z_3 — კომპლექსური შეუღლებული; მაშინ z_2. z_3 ნამრავლი დადებითი რიცხვი იქნება. ახლა მივიღოთ მხედველობაში, რომ z_1, z_2, z_3 ფესვები არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული თანაფარდობით [იხ. ზევით (47)]:

(56)
$$z_1z_2z_3=q^2.$$

რადგანაც q ნამდვილი რიცხვია, ამიტომ ნამრავლი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. ამიტომ ჩვენს შემთხვევაში უნდა იყოს $z_1\geqslant 0$. მაშასადამე, $\sqrt{z_1}$ იქნება ნამდვილი რიცხვი. რაც შეეხება $\sqrt{z_2}$ და $\sqrt{z_3}$ რადიკალებს, ნიშნების სათანადო შერჩევით ისინი იქნება შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები. ამ პირობებში (52) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ (40) განტოლების x_1 და x_2 ფესვები არიან ნამდვილი, მაშინ როდესაც x_3 და x_4 არიან კომპლექსური შეუღლებული.

ამგვარად, თუ შესრულებულია 1) პირობა, მაშინ მეოთხე ხარისხის (40) განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი და ორი კომპლექსური შეუღლებული ფესვი.

2) $\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3<0$. ამ შემთხვევაში (54) განტოლების z'_1, z'_2, z'_3 ფესვები წარმოადგენენ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ნამდვილ რიცხვებს. (53) თანაფარდობის ძალით, (48) განტოლების z_1, z_2, z_3 ფესვებიც აგრეთვე არიან ნამდვილი და ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. მეორე მხრივ, ამ ფესვებისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას

(56)
$$z_1z_2z_3=q^2.$$

ჯერ დავუშვათ, რომ $q \neq 0$. მაშინ შესაძლოა ორი შემთხვევა: ან ყველა z_1, z_2, z_3 ფესვი დადებითია, ან ერთი მათგანი დადებითია, ხოლო ორი დანარჩენი უარყოფითია.

ა) თუ ყველა ფესვი z_1, z_2, z_3 დადებითია, **მაშინ მეოთხე ხარისხის (40) განტოლების ყველა ფესვი წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვებს.**

ბ) თუ ერთი ფესვთაგანი, მაგალითად, z_1 დადებითია, ხოლო დანარჩენი ორი — უარყოფითია, **მაშინ მეოთხე ხარისხის განტოლების ყველა ფესვი წარმოსახვითია.**

მართლაც, ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

(57) $$\sqrt{z_1}=a,\ \sqrt{z_2}=bi,\ \sqrt{z_3}=ci,$$

სადაც a, b, c ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან b და c არაა ერთმანეთის ტოლი აბსოლუტური სიდიდით.

ჩავსვამთ რა (57) მნიშვნელობებს (52) ფორმულაში, მივიღებთ:

(58) $$\begin{cases} x_1=\dfrac{a+(b+c)i}{2}, & x_2=\dfrac{a-(b+c)i}{2}, \\ x_3=\dfrac{-a+(b-c)i}{2}, & x_4=\dfrac{-a-(b-c)i}{2}. \end{cases}$$

ამგვარად, (40) **განტოლებას ამ შემთხვევაში აქვს შეუღლებული კომპლექსური ფესვების ორი წყვილი.**

ახლა ვნახოთ, როგორ უნდა განვასხვაოთ ა) შემთხვევა ბ) შემთხვევისაგან.

რადგანაც ა) შემთხვევაში (48) განტოლების z_1, z_2, z_3 ფესვები დადებითია, ამიტომ, გვექნება:

$$z_1+z_2+z_3=-2p>0,$$
$$z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=p^2-4r>0.$$

მაშასადამე, ა) შემთხვევაში უნდა შესრულდეს უტოლობა

(59) $$p<0,\ p^2-4r>0.$$

შებრუნებულად, თუ შესრულებულია ეს უტოლობანი, მაშინ ადგილი აქვს ა) შემთხვევას. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით წინააღმდეგობის დაშვებით. მართლაც, თუ ადგილი აქვს ბ) შემთხვევას, მაშინ (57) თანაფარდობანი გვაძლევს:

(60) $$z_1=a^2,\ z_2=-b^2,\ z_3=-c^2.$$

მაშასადამე,

$$-2p = z_1 + z_2 + z_3 = a^2 - (b^2 + c^2).$$

თუ შესრულებულია (59) პირობა, მაშინ

$$a^2 - (b^2 + c^2) > 0,$$

ანუ

(61) $$a^2 > b^2 + c^2.$$

შემდეგ (60) თანაფარდობებიდან მივიღებთ

$$p^2 - 4r = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2.$$

თუ შესრულებულია (59) პირობა, მაშინ

$$-a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 > 0$$

ანუ

(61′) $$b^2c^2 > a^2(b^2 + c^2).$$

(61) და (61′)-დან გამომდინარეობს

$$b^2c^2 > (b^2 + c^2)^2,$$

ე. ი.

$$b^2c^2 > b^4 + 2b^2c^2 + c^4,$$

რაც შეუძლებელია.

ამგვარად, ა) შემთხვევას ახასიათებს (59) უტოლობანი. თუ არაა შესრულებული თუნდაც ერთი ამ უტოლობებიდან, მაშინ საქმე გვაქვს ბ) შემთხვევასთან. ხაზგასმით უნდა აღვნიშნოთ, რომ ამასთან შესრულებულად ნავარაუდევია 2) პირობა.

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $q \neq 0$. თუ $q = 0$, მაშინ z_1, z_2, z_3 ფესვებიდან ერთი (და მხოლოდ ერთი) ნულის ტოლია; მხოლოდ ერთი, რადგან 2) შემთხვევაში (48) განტოლებას არ აქვს ჯერადი ფესვები.

თუ z_1, z_2, z_3 რიცხვებს შორის არაა არც ერთი უარყოფითი, მაშინ ჩვენ მივალთ იმავე დასკვნამდე, როგორიცაა ა) შემთხვევაში. (40) განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია.

თუ z_1, z_2, z_3 რიცხვთაგან მხოლოდ ერთი მათგანი უარყოფითია, მაშინ გვექნება ბ) შემთხვევა, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ a, b, c რიცხვებიდან ერთი ნულის ტოლია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ პირობები, რომლებიც ახასიათებს ა) შემთხვევას ძალაში რჩება მაშინაც, თუ $q=0$.

3) $\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{2}\right)^3=0$. ამ შემთხვევაში (54) განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია, მხოლოდ მათ შორის არიან ერთმანეთის ტოლი. (53) თანაფარდობის ძალით იგივე შეიძლება ითქვას (48) განტოლების z_1, z_2, z_3 ფესვებზე. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $z_2=z_3$, მაშინ

$$\sqrt{z_2}=\pm\sqrt{z_3}.$$

(52) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში მეოთხე ხარისხის (40) განტოლებას აქვს ორი მაინც ტოლი ფესვი.

განვიხილოთ ცალკეული შემთხვევები, რომლებიც აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს.

ა) თუ z_1, z_2, z_3 ფესვებს შორის არაა არც ერთი უარყოფითი, მაშინ (40) განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია.

ეს შემთხვევა ხასიათდება უტოლობებით:

$$p \le 0,\quad p^2-4r \ge 0. \tag{62}$$

ბ) თუ z_1, z_2, z_3 რიცხვებს შორის ერთი მაინც უარყოფითია, მაშინ შესაძლოა ორი შემთხვევა.

ბ$_1$) $z_2=z_3<0$, $z_1\ge 0$; (40) განტოლებას აქვს ორი, ერთმანეთის ტოლი ნამდვილი ფესვი და ორი კომპლექსური *შეუღლებული*.

ბ$_2$) $z_2=z_3=0$, $z_1=0$; (40) განტოლებას აქვს *ორი წყვილი კომპლექსური შეუღლებული ფესვები ასეთი სახისა*.

$$x_1=x_2=ai, \qquad x_3=x_4=-ai.$$

ორივე შემთხვევა, (ბ$_1$) და (ბ$_2$), განსხვავდება (ა)-საგან იმით, რომ (62) თანაფარდობებიდან ერთი მაინც არაა შესრულებული. (ბ$_2$) შემთხვევა განსხვავებით (ბ$_1$)-საგან ხასიათდება პირობებით:

$$p^2-4r=0, \qquad q=0.$$

შენიშვნა. ზევით დავინახეთ, რომ მეოთხე ხარისხის (40) განტოლებას 3) შემთხვევაში აქვს ჯერადი ფესვები. ადვილი შესამჩნევია, რომ სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: თუ (40) განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, მაშინ სრულდება 3) პირობა.

მართლაც, დავუშვათ, მაგალითად, რომ

$$x_1=x_2;$$

მაშინ (52)-ის ძალით გვექნება

$$\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}=\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3},$$

ანუ

$$2(\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3})=0,$$

$$\sqrt{z_2}=-\sqrt{z_3},$$

საიდანაც $z_2=z_3$. ამგვარად, ამ შემთხვევაში (48) განტოლებას და მაშასადამე, (54) განტოლებასაც აქვს ჯერადი ფესვები. ამიტომ სრულდება 3) პირობა:

ამგვარად, იმისათვის, რომ მეოთხე ხარისხის განტოლებას ჰქონდეს ჯერადი ფესვები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს 8) პირობა.

უკანასკნელი დასკვნა ძალაში რჩება იმისდა მიუხედავად, განტოლების კოეფიციენტები იქნება თუ არა ნ ა მ დ ვ ი ლ ი. იგივე შედეგი შეიძლება მივიღოთ სხვა ხერხითაც. მართლაც, განვიხილოთ (40) განტოლების დისკრიმინანტი:

$$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2\cdot(x_3-x_4)^2.$$

მივიღებთ რა მხედველობაში (52) თანაფარდობებს, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_1-x_2=\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3},\quad x_3-x_4=\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3},$$

$$x_1-x_3=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_3},\quad x_2-x_4=\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3},$$

$$x_1-x_4=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2},\quad x_2-x_3=\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}.$$

ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს:

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)^2=$$
$$=(z_1-z_2)(z_1-z_2)(z_2-z_3),$$

საიდანაც

$$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\ldots(x_3-x_4)^2=$$
$$=(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2.$$

უკანასკნელი ტოლობა გამოსახავს, რომ მეოთხე ხარისხის (40) განტოლების დისკრიმინანტი (48) განტოლების დისკრიმინანტის ტოლია.

მეორეს მხრივ, უკანასკნელი განტოლების დისკრიმინანტი ტოლია (§ 2, პუნქ. 3) (54) განტოლების დისკრიმინანტისა, ე. ი. უდრის

$$-27\cdot 4\left(\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}\right)\text{-ს.}$$

ამრიგად გვაქვს

$$D=-27\cdot 4\left(\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}\right), \tag{63}$$

სადაც D არის მეოთხე ხარისხის (40) განტოლების დისკრიმინანტი.

(63)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს: **იმისათვის, რომ (40) განტოლებას ჰქონდეს ჯერადი ფესვები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას**

$$\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3=0.$$

იმისათვის რომ გამოვსახოთ დისკრიმინანტი მეოთხე ხარისხის განტოლებისა მისი კოეფიციენტებით, საკმარისია (63)-ში P და Q-ს ნაცვლად ჩავსვათ მათი (55) გამოსახულებანი. ეს გვაძლევს:

$$D=-128p^2r^2-27q^4-4p^3q^2+19p^4r+144pq^2r+256r^3. \tag{64}$$

მაგალითი. განვიხილოთ განტოლება:

$$x^4-3x^2+6x-2=0; \tag{65}$$

აქ $p=-3$, $q=6$, $r=-2$, ასე რომ (48)-ის კუბური რეზოლვენტი იქნება

$$z^3-6z^2+11z-36=0. \tag{66}$$

უწინარეს ყოვლისა ვნახოთ, რომ ამ განტოლებას არა აქვს რაციონალური ფესვები. თუ შევამოწმებთ თავისუფალი წევრის გამყოფებს (იხ. თავი III, § 3. პ. 2), მოვნახავთ, რომ (66) განტოლებას აქვს ფესვი

$$z_1=4.$$

ორ დანარჩენ ფესვს ვიპოვით თანაფარდობიდან:

$$z_1+z_2+z_3=6,$$
$$z_1z_2z_3=36.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $z_1=4$, ვიპოვით:

$$z_2=1+i\sqrt{8},\quad z_3=1-i\sqrt{8}.$$

ამგვარად,

$$\sqrt{z_1}=\pm 2,\quad \sqrt{z_2}=\sqrt{1+\sqrt{-8}},\quad \sqrt{z_3}=\sqrt{1-\sqrt{-8}}.$$

თუ გამოვიყენებთ ფორმულას

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

მივიღებთ

$$\sqrt{z_2}=\pm(\sqrt{2}+i),\ \sqrt{z_3}=\pm(\sqrt{2}-i).$$

ახლა მხედველობაში მივიღოთ პირობა (50′); რადგანაც ჩვენს შემთხვევაში $q=6>0$, ამიტომ რადიკალების მნიშვნელობანი უნდა ავარჩიოთ ისე, რომ $\sqrt{z_1}\cdot\sqrt{z_2}\cdot\sqrt{z_3}$ ნამრავლი იყოს უარყოფითი. ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ:

$$\sqrt{z_1}=-2,\quad \sqrt{z_2}=\sqrt{2}+i,\quad \sqrt{z_3}=\sqrt{2}-i.$$

(65) განტოლების ფესვებს ახლა ვიპოვით (52) ფორმულებით:

$$x_1=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3})=-1+\sqrt{2},$$

$$x_2=\frac{1}{2}(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3})=-1-\sqrt{2},$$

$$x_3=\frac{1}{2}(-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3})=-1+i,$$

$$x_4=\frac{1}{2}(-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3})=1-i.$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ მეოთხე ხარისხის განტოლების ამოხსნა, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, დაკავშირებულია კუბური რადიკალების ჩართვასთან ძირითადი ველისადმი (იხ. ზევით, პ. 1). ამავე დროს, (65) განტოლების ფესვები გამოისახება მხოლოდ კვადრატული რადიკალების საშუალებით. ეს აიხსნება იმით, რომ ფუნქცია

$$f(x)=x^4-3x^2+6x-2$$

დაყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველში. მართლაც, გვაქვს:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში

$$(x-x_1)(x-x_2)=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})=x^2+2x-1;$$
$$(x-x_3)(x-x_4)=(x-1-i)(x-1+i)=x^2-2x+2.$$

მაშასადამე,

$$f(x)=(x^2+2x-1)(x^2-2x+2).$$

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ მეოთხე ხარისხის განტოლება შესაძლოა ამოვხსნათ კვადრატულ რადიკალებში მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა შესაბამ კუბურ რეზოლვენტს აქვს რაციონალური ფესვი.

სავარჯიშო.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებანი.

1. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 1 = 0.$
2. $2x^4 + 6x^3 + 4x + 3 = 0.$
3. $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 1 = 0.$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რაში მდგომარეობს რადიკალებში განტოლების ამოხსნის ამოცანა?

2. რა თანაფარდობითაა დაკავშირებული კუბური რადიკალების მნიშვნელობანი კარდანოს ფორმულაში?

3. დაასახელეთ სამი ძირითადი შემთხვევა, რომლებიც შეიძლება წარმოგვიდგეს $x^3 + px + q = 0$ განტოლების ამოხსნის დროს, სადაც p და q ნამდვილი რიცხვებია.

4. რაში მდგომარეობს კავშირი დაუყვანად შემთხვევაში მესამე ხარისხის განტოლების ამოხსნასა და კუთხის ტრისექციის ამოცანას შორის?

5. როგორაა დაკავშირებული მეოთხე ხარისხის განტოლების ფესვები მისი კუბური რეზოლვენტის ფესვებთან?

თ ა ვ ი VI

მთელი რაციონალური ფუნქციის გამოკვლევა ნამდვილ რიცხვთა არეში. ფესვების განცალება და გამოთვლა

§ 1. ფესვების საზღვრები

1. წარმოვიდგინოთ, რომ განიხილება ნამდვილი კოეფიციენტებიანი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია და საჭიროა განვსაზღვროთ მისი ფესვები, ე. ი. ამოვხსნათ განტოლება

$$f(x)=0.$$

წინა თავში ჩვენ გავეცანით განტოლების ამოხსნის ალგებრულ მეთოდებს. ამ მეთოდებს, იმ შემთხვევებში, როდესაც მათი გამოყენება შეიძლება, მივყევართ ამასთანავე რიცხვით ამოხსნამდე. მაგრამ ჩვენ უკვე ვიცით შესავლიდან, რომ ალგებრული ამოხსნა ყოველთვის არაა შესაძლებელი. იმ შემთხვევაშიაც კი, როდესაც მოცემული განტოლება ამოიხსნება რადიკალებში, ფესვების ამოხსნის ასეთი გზა პრაქტიკაში ყოველთვის არაა გამართლებული. ეს მოსაზრებანი იმას გვიკარნახებს, რომ აუცილებელია ვიპოვოთ პრაქტიკულად გამოსადეგი მეთოდები, რომლებსაც მივყევართ ფესვების უშუალო გამოთვლამდე. აქ ჩვენ განვიხილოთ საკითხი მთელი რაციონალური ფუნქციის ნამდვილი ფესვების გამოთვლის შესახებ. ეს საკითხი მჭიდროთ არის დაკავშირებული სხვა საკითხებთან, რომლებიც შეეხება მთელი რაციონალური ფუნქციის ყოფაქცევას ნამდვილ რიცხვთა არეში. ასეთია მაგალითად, საკითხი ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შესახებ ან საკითხი მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნის შესახებ.

სანამ ნამდვილი ფესვების უშუალო გამოთვლას შევუდგებოდეთ, ხშირად საჭიროა წინასწარ განვსაზღვროთ, თუ რა საზღვრებში იმყოფებიან ისინი.

პირველი ნაბიჯი იმაში მდგომარეობს, რომ განვსაზღვროთ ფესვების საზღვრები, ე. ი. ვიპოვოთ ისეთი რიცხვები a და b, რომელთა შიგნით მოთავსდება ფუნქციის ყველა ნამდვილი ფესვი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, საძიებელია ისეთი შუალედი, რომელიც შეიცავს ყველა ნამდვილ ფესვს. თავისთავად ცხადია, რომ ამ ამოცანის ამოხსნა გვაძლევს მხოლოდ პირველ ორიენტირებას იმის შესახებ, თუ სად უნდა ვეძებოთ ფუნქციის ფესვები.

შემდეგი ნაბიჯი მდგომარეობს იმაში, რომ განვაცალოთ ფესვები ერთი მეორისაგან, ე. ი. თითოეული ფესვისათვის დავასახელოთ შუალედი, რომელშიაც ეს ფესვი იმყოფება და არ იმყოფება მოცემული ფუნქციის სხვა ფესვები.

2. ვნახოთ პირველად, როგორ განვსაზღვროთ ფესვების საზღვრები. ამ მიზნისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ თეორემით მთელი რაციონალური ფუნქციის უფროსი წევრის მოდულის შესახებ (თავი III, § 2). იმ შემთხვევაში, როდესაც $M=1$, ეს თეორემა გვაძლევს:

თუ x მნიშვნელობა აკმაყოფილებს პირობას

$$|x| \geqq \frac{A}{|a_0|}+1, \tag{1}$$

მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|^*. \tag{2}$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ x-ის მნიშვნელობისათვის, რომლებიც (1) უტოლობას აკმაყოფილებენ, $f(x)$ ფუნქცია არ შეიძლება ნულად გადაიქცეს. მართლაც, თანაფარდობიდან

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

გვაქვს

$$a_0x^n=-(a_1x^{n-1}+\ldots+a_n),$$

$$|a_0x^n|=|a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|,$$

რაც (2) უტოლობას ეწინააღმდეგება.

---

* ჩვენ ვინარჩუნებთ III თავის აღნიშვნებს; ამრიგად, A-თი აღვნიშნავთ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ კოეფიციენტების მოდულთა შორის უდიდესს.

ამრიგად, თუ x-ის მნიშვნელობები (1) პირობას აკმაყოფილებენ, მაშინ არ შეიძლება ის იყოს $f(x)$ ფუნქციის ფესვი. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი ფესვისათვის უნდა იყოს

$$|x|<\frac{A}{|a_0|}+1;$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი ფესვის, ნამდვილის ან კომპლექსურის, მოდული ნაკლები უნდა იყოს $\frac{A}{|a_0|}+1$ რიცხვზე.

ამრიგად, ეს რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფესვების მოდულების ზედა საზღვარი.

ნამდვილი ფესვების მიმართ ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ნამდვილი ფესვის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები უნდა იყოს $\frac{A}{|a_0|}+1$ რიცხვზე; სხვანაირად რომ ვთქვათ, ყველა ნამდვილი ფესვი უნდა იმყოფებოდეს

$$-\left(\frac{A}{|a_0|}+1\right),\quad \frac{A}{|a_0|}+1$$

რიცხვებს შორის.

მაშასადამე, ეს რიცხვები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნამდვილი ფესვების საზღვრები.

განვიხილოთ, მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x)=2x^4-5x^3-8x+10.$$

აქ

$$A=10;\ \frac{A}{|a_0|}+1=6.$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის ნამდვილი ფესვები, თუ ისინი არსებობენ $(-6, +6)$ შუალედის შიგნით იმყოფებიან.

3. სანამ შევუდგებოდეთ ფესვების საზღვრების განსაზღვრის სხვა ხერხების გადმოცემას გავაკეთოთ შემდეგი შენიშვნები.

ა) წარმოვიდგინოთ რომ ჩვენ მოვნახეთ ხერხი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერად მოცემული

$$f(x)=0$$

განტოლების დადებითი ფესვების ზედა საზღვარი ვიპოვოთ.

თუ მოცემულ განტოლებაში ჩავსვამთ $x=\frac{1}{y}$ და შემდეგ ორთავე ნაწილს გავამრავლებთ y^n-ზე, მივიღებთ

$$\varphi(y)=0$$

განტოლებას, სადაც $\varphi(y)=y^n f\left(\frac{1}{y}\right)$ არის y-ის მთელი რაციონალური ფუნქცია. ვინაიდან $x=\frac{1}{y}$, ამიტომ თანაფარდობიდან $y<b$ გამომდინარეობს $x>\frac{1}{b}$. მაშ, თუ b არის ზედა საზღვარი $\varphi(y)$ ფუნქციის დადებითი ფესვებისა, მაშინ $\frac{1}{b}$ იქნება ქვედა საზღვარი $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვებისა.

ბ) თუ (2) განტოლებაში x-ს შევცვლით $-t$-თი, მივიღებთ:

$$f(-t)=0. \tag{4}$$

ცხადია, რომ (3) განტოლების ნებისმიერ უარყოფით ფესვს შესაბამება (4) განტოლების დადებითი ფესვი, რომელსაც იგივე აბსოლუტური სიდიდე აქვს. თუ ახლა a არის ზედა (ან შესაბამად ქვედა) საზღვარი (4) განტოლების დადებითი ფესვებისა, მაშინ $-a$ იქნება ქვედა (შესაბამად ზედა) საზღვარი იგივე განტოლების უარყოფითი ფესვების.

ამრიგად, ყველაფერი დაიყვანება დადებითი ფესვების ზედა საზღვრის განსაზღვრაზე. ახლა განვიხილოთ სხვადასხვა ხერხი, რომელთაც ამ მიზნამდის მივყევართ.

1) თუ მოცემულია ნამდვილი კოეფიციენტებიანი განტოლება

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0, \tag{5}$$

მაშინ უფროსი წევრის კოეფიციენტი a_0 შეიძლება ზოგადობის შეუმცირებლად ჩავთვალოთ დადებითად, თუ განტოლების ყველა კოეფიციენტი დადებითია, მაშინ მას არა აქვს არც ერთი დადებითი ფესვი, ვინაიდან დადებითი შესაკრებთა ჯამი არ შეიძლება ნულს ეტოლებოდეს. ამიტომ ჩვენთვის საინტერესოა ის შემთხვევა, როდესაც a_0, a_1, ..., a_n კოეფიციენტებს შორის არის უარყოფითიც. ვთქვათ, a_k არის რიგით პირველი უარყოფითი კოეფიციენტი. შემ-

დეგ ვთქვათ, უარყოფით კოეფიციენტთა შორის a არის ის, რომელსაც აქვს უდიდესი აბსოლუტური სიდიდე. ჩვენ თუ თითოეულ a_0, $a_2, \ldots, a_{k-1}$ კოეფიციენტთაგანს შევცვლით ნულით, ხოლო თითოეულ a_k, $a_{k-1}, \ldots, a_n$ კოეფიციენტთაგანს შევცვლით ნულით, ხოლო თითოეულ a_k, $a_{k+1}, \ldots, a_n$ კოეფიციენტთაგანს შევცვლით $-|a|$-თი, მაშინ $f(x)$-ის მნიშვნელობა (როდესად $x>0$) შეიძლება მხოლოდ შემცირდეს. ამრიგად, x-ის დადებით მნიშვნელობისათვის ჩვენ გვექნება

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+a_{k-1}x^{n-k+1}+\ldots+$$
$$+a_{n-1}x+a_n\geqslant a_0x^n-|a|(x^{n-k}+x^{n-k+1}+\ldots+x+1).$$

თუ შევაჯამებთ ფრჩხილების შიგნით მყოფ გეომეტრიულ პროგრესიას, მივიღებთ:

$$f(x)\geqq a_0x^n-|a|\,\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1}.$$

აქედან გამოდის, რომ; როდესაც $x>1$,

$$f(x)>a_0x^n-\frac{|a|\,x^{n-k+1}}{x-1},$$

ანუ

$$f(x)>\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\,\{a_0(x-1)x^{k-1}-|a|\}.$$

ჩვენ თუ ფიგურულ ფრჩხილებში x^{k-1} შევცვლით $(x-1)^{k-1}$-ით, მაშინ უტოლობა გაძლიერდება:

$$f(x)>\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\{a_0(x-1)^k-|a|\}. \tag{6}$$

იმისათვის რომ $f(x)$ მნიშვნელობა იყოს დადებითი, საკმარისია შესრულდეს პირობა:

$$a_0(x-1)^k-|a|\geqslant 0. \tag{7}$$

ამოვხსნით რა ამ უტოლობას x-ის მიმართ მივიღებთ:

$$(x-1)^k\geqslant\frac{|a|}{a_0},\quad x-1\geqslant\sqrt[k]{\frac{|a|}{a}}.$$

აქ ფესვი აიღება არითმეტიკული აზრით. ამრიგად,

$$x \geqslant \sqrt[k]{\frac{|a|}{a_0}} + 1.$$

თუ შესრულებულია უკანასკნელი თანაფარდობა, მაშინ თანახმად (6) და (7) თანაფარდობებისა, $f(x)$-ის მნიშვნელობა ნულისაგან განსხვავდება. მაშასადამე, რიცხვი

$$\sqrt[k]{\frac{|a|}{a_0}} + 1$$

შეიძლება მივიჩნიოთ დადებითი ფესვების ზედა საზღვრად.

გამოვიყენოთ ეს ხერხი

(8) $$f(x)=2x^4-5x^2-8x+10$$

ფუნქციისათვის, რომელიც ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ. აქ

$$a_0=2,\ a_1=0,\ a_2=-5,\ a=a_3=-8.$$

ამრიგად, მოცემულ შემთხვევაში $k=2$ და ჩვენ ვღებულობთ:

$$\sqrt[k]{\frac{|a|}{a_0}}+1=\sqrt{\frac{8}{2}}+1=3$$

როგორც დადებითი ფესვების ზედა საზღვარს.

დადებითი ფესვების ქვედა საზღვარი რომ მოვნახოთ, ამისათვის x ცვლადი შევცვალოთ $\frac{1}{y}$-ით და მიღებული ფუნქცია გავამრავლოთ y^4-ზე:

$$\varphi(y)=y^4 f\left(\frac{1}{y}\right)=10y^4-8y^3-5y^2+2.$$

აქ $k=1$, $a=-8$, და ჩვენ გვაქვს:

$$\sqrt[k]{\frac{|a|}{a_0}}+1=0{,}8+1<2.$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვების ქვედა საზღვრად შეიძლება მივიჩნიოთ $\frac{1}{2}$.

ახლა ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის უარყოფითი ფესვების ქვედა საზღვარი. ამ მიზნისათვის x შევცვალოთ $-t$-თი:

$$f(-t)=2t^4-5t^2+8t+10. \tag{9}$$

ახლა $k=2$, $a=-5$.

ამრიგად

$$\sqrt[k]{\frac{|a|}{a_0}}+1=\sqrt{2{,}5}+1<2{,}6.$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის უარყოფითი ფესვების ქვედა საზღვრად შეიძლება მივიღოთ რიცხვი $-2{,}6$.

რომ ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის უარყოფითი ფესვების ზედა საზღვარი, ჩვენ განვსაზღვროთ (9) ფუნქციის დადებითი ფესვების ქვედა საზღვარი; აღვნიშნავთ რა $t=\frac{1}{u}$, მივიღებთ ფუნქციას

$$\psi(u)=10u^4+8u^3-5u^2+2.$$

ამ ფუნქციისათვის $k=2$, $a=-5$,

$$\sqrt[k]{\frac{|a|}{a_0}}+1=\sqrt{0{,}5}+1<3.$$

მაშასადამე, (9) ფუნქციის დადებითი ფესვების ქვედა საზღვრად შეიძლება მივიჩნიოთ $\frac{1}{3}$; ამის შესაბამისად, რიცხვი $-\frac{1}{3}$ შეიძლება მივიჩნიოთ $f(x)$ ფუნქციის უარყოფითი ფესვების ზედა საზღვრად.

2) **ნიუტონის ხერხი.** ამ ხერხს საფუძვლად უდევს შემდეგი დებულება:

თუ x-ის რომელიმე $x=a$ მნიშვნელობისათვის $f(x)$ ფუნქცია და ყველა მისი წარმოებული $f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ დადებითია, მაშინ a რიცხვი შეიძლება მივიჩნიოთ დადებითი ფესვების ზედა საზღვრად.

მართლაც განვიხილოთ, ტეილორის ფორმულა

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

თუ ყველა რიცხვი $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$ დადებითია *, მაშინ, როდესაც $x \geqslant a$, მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს არსებითად დადებით რიცხვს. მაშასადამე, როდესაც $x \geqslant a$, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა არ შეიძლება ნულად იქცეს. ამიტომ, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს დადებითი ფესვები, მაშინ ისინი უნდა იყვნენ a-ზე ნაკლები.

ნიუტონის ხერხის პრაქტიკაში გამოყენების დროს სასარგებლოა ვიქონიოთ მხედველობაში შემდეგი: წარმოებული $f^{(n)}(a)=n!\,a_0$ დადებით რიცხვს წარმოადგენს. მაშასადამე, $f^{(n-1)}(x)$ ფუნქცია იზრდება x-ის ზრდის დროს. თუ $f(x)$ ფუნქცია დადებით მნიშვნელობას ღებულობს, როდესაც $x=h_1$, მაშინ იგი დადებითი იქნება, როდესაც $x>h_1$; მაშასადამე, $f^{(n-2)}(x)$ ფუნქცია, როდესაც $x>h_1$ იზრდება x-თან ერთად. ამიტომ, თუ იგი დადებით მნიშვნელობას ღებულობს, როდესაც $x=h_2$, სადაც $h_2 \geqslant h_1$, მაშინ დადებითი იქნება, როდესაც $x>h_2$ და ა. შ. ვისარგებლებთ რა ამ შენიშვნით, ძნელი არ არის განვსაზღვროთ a მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ყველა წარმოებული და თვით ფუნქცია დადებითია.

გამოვიყენოთ ეს ხერხი იმავე

$$f(x)=2x^4-5x^3-8x+10$$

ფუნქციაზე.

აქ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3-10x-8, \\ f''(x) &= 24x^2-10, \\ f'''(x) &= 48x. \end{aligned}$$

როდესაც $x=1$, მნიშვნელობანი $f'''(x)$ და $f''(x)$ დადებითია, მაგრამ $f'(x)$ ჯერ კიდევ უარყოფითია. როდესაც $x=2$, ყველა ფუნქცია დადებითია. მაშასადამე, რიცხვი 2 შეიძლება მივიჩნიოთ დადებითი ფესვების ზედა საზღვრად. რაც შეეხება დადებითი ფესვების ქვედა საზღვარს ამ მაგალითში ჩვენ ვერ მივიღებთ არსებით გაუმჯობესებას წინა ხერხებთან შედარებით.

საკითხი $f(x)$ ფუნქციის ფესვების შესახებ, როგორც ვიცით, (9) ფუნქციის დადებითი ფესვების საკითხზე დაიყვანება. გამოვიყენებთ

---

* თუ ზოგი რიცხვთაგანი $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$ ნულის ტოლია, მაშინ დასკვნა ძალაში რჩება.

რა ნიუტონის ხერხს ამ ფუნქციაზე, ვიპოვით, რომ მისი დადებითი ფესვების ზედა საზღვარი 1-ის ტოლია. მეორეს მხრივ ვივარაუდებთ რა $t=\frac{1}{u}$, ვიპოვით, რომ დადებითი ფესვების ქვედა საზღვარი აგრეთვე 1-ის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ (9) ფუნქციას დადებითი ფესვები არა აქვს. მაშასადამე, მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს უარყოფითი ფესვები.

3) წარმოვიდგინოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციაში, რომელიც დალაგებულია x-ის კლებადი ხარისხების მიხედვით, პირველად მიდის დადებითი კოეფიციენტებიანი წევრები, შემდეგ კი—მხოლოდ უარყოფითი კოეფიციენტებიანი წევრები:

(10) $$f(x)=b_0x^n+\dots+b_px^{n-p}-b_{p+1}x^{n-p-1}-\dots-b_n,$$

სადაც $bi\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$. ასეთი სახის ფუნქციისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულება:

თუ $f(x)$ ფუნქცია დადებითია, როდესაც $x=a$, სადაც $a>0$, მაშინ ის დადებითი რჩება, როცა $x>a$. მართლაც, ფუნქცია (10) შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$f(x)=x^{n-p}\left\{(b_0x^p+\dots+b_p)-\left(\frac{b_{p+1}}{x}+\dots+\frac{b_n}{x^{n-p}}\right)\right\}.$$

თუ x ღებულობს თანმიმდევრობით ზრდად დადებით მნიშვნელობებს, მაშინ ფიგურულ ფრჩხილებში საკლები იზრდება, ხოლო მაკლები კლებულობს.

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია იზრდება. ამიტომ, თუ $x=a$ $(a>0)$ მნიშვნელობისათვის იგი დადებით მნიშვნელობას მიიღებს, მაშინ ის დადებითი იქნება, როცა $x>a$. აქედან გამომდინარეობს, რომ როდესაც $x>a$, ფუნქცია $f(x)$ ნულად არ გადაიქცევა, ე. ი. a შეიძლება მივიჩნიოთ დადებითი ფესვების ზედა საზღვრად.

თუ მოცემულია ნებისმიერი მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია, მაშინ ყოველთვის შეიძლება (წევრების გადაუსმელად) მისი წარმოდგენა ასეთი სახით:

$$f(x)=\Phi_1(x)+\Phi_2(x)+\dots+\Phi_n(x),$$

სადაც

(11) $$\Phi_1(x),\ \dots,\ \Phi_n(x)$$

წარმოადგენს (10) სახის ფუნქციებს. ჩვენ თუ შევძლებთ შევარჩიოთ x-ის ისეთი მნიშვნელობა a, რომლისთვისაც ყველა (11) ფუნქცია დადებითია, მაშინ ისინი დადებითი იქნებიან, როდესაც $x>a$. მაშასადამე, რიცხვი a შეიძლება მივიჩნიოთ $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვების ზედა საზღვრად.

ასე მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x)=x^5+3x^4-12x^3+4x^2-9x+4$$

შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს სახით:

$$f(x)=\Phi_1(x)+\Phi_2(x)+\Phi_3(x),$$

სადაც

$$(11')\qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi_1(x)=x^5+3x^4-12x^3, \\ \Phi_2(x)=4x^2-9x, \\ \Phi_3(x)=4. \end{array}\right.$$

შევნიშნოთ რომ, როდესაც $x=3$, ფუნქციები (11′) დადებითია. მაშასადამე, რიცხვი 3 შეიძლება მივიჩნიოთ დადებითი ფესვების ზედა საზღვრად.

ხავარჯიშო.

განსაზღვრეთ ნამდვილი ფესვების საზღვრები შემდეგი ფუნქციებისათვის:

1. x^4+12x^2-x-4,
2. x^3-8x^2+3x-7,
3. $x^6+3x^5-2x^4+4x^3+9x^2-7x-11$,
4. $x^3-1{,}7x^2+2{,}3x-3{,}5$.

§ 2. ფესვების განცალება. მთელი რაციონალური ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლა

1. ახლა შევეხოთ ფესვების განცალების საკითხს. ამ ამოცანის ამოსახსნელად შეიძლება ვისარგებლოთ შტურმის თეორემით, რომელსაც § 3-ში გავეცნობით, მაგრამ მრავალ შემთხვევაში ამოცანა ფესვების განცალების შესახებ შეიძლება ამოხსნილი იქნეს უფრო მარტივ მოსაზრებათა დახმარებით, რომლებიც დაკავშირებულია ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობასთან. ეს მოსაზრებანი თვალსაჩინოდ ცხადი ხდებიან, თუ ვისარგებლებთ გრაფიკული გამოსახვის მეთოდით.

განვიხილოთ სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა XOY და ავაგოთ მრუდი, რომელიც წარმოადგენს

$$(12) \qquad y=f(x)$$

ფუნქციონალური დამოკიდებულების გრაფიკულ გამოსახვას.

თუ $f(x)$ ფუნქცია არის n ხარისხის მთელი რაციონალური ფუნქცია

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

მაშინ შესაბამ მრუდს „n **რიგის პარაბოლი**" ეწოდება.

M წერტილი, რომელსაც a აბსცისი აქვს, ძევს (12) მრუდზე მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც მისი ორდინატი $f(a)$-ს ეტოლება.

(12) მრუდის გადაკვეთის წერტილები OX ღერძთან $f(x)$ ფუნქციის ფესვებს შეესაბამება.

მართლაც, თუ a არის გადაკვეთის წერტილის აბსცისი, მაშინ შესაბამი $f(a)$ ორდინატი ნულის ტოლი უნდა იქნეს:

$$f(a)=0,$$

ე. ი. a—არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვი.

ამრიგად, (12) მრუდის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რიცხვი $f(x)$ ფუნქციის ნამდვილი ფესვების რიცხვის ტოლია.

$f(x)$ ფუნქციის ჯერადი ფესვები შეესაბამება (12) მრუდის OX ღერძთან შეხების წერტილებს. მართლაც, თუ a არის $f(x)$ ფუნქციის ჯერადი ფესვი, მაშინ როგორც ჩვენ ვნახეთ III თავში, a იქნება $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციების საერთო ფესვი:

$$f(a)=0, \ f'(a)=0.$$

მაშასადამე, განსახილავ შემთხვევაში (12) მრუდზე აღებულ a აბსცისიან წერტილზე გატარებულ მხების კუთხური კოეფიციენტი ნულს ეტოლება, ე. ი. მხები OX ღერძს ემთხვევა.

მრუდის მხები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მკვეთის ზღვრული მდებარეობა. ამის შესაბამად თითოეული ჯერადი ფესვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც შედეგი ზღვრული პროცესისა, რომლის საშუალებით ხდება დამთხვევა ერთმანეთზე ორის ან რამდენიმე სხვადასხვა ფესვისა. გავაშუქოთ ეს მაგალითით. წარმოვიდგინოთ, რომ

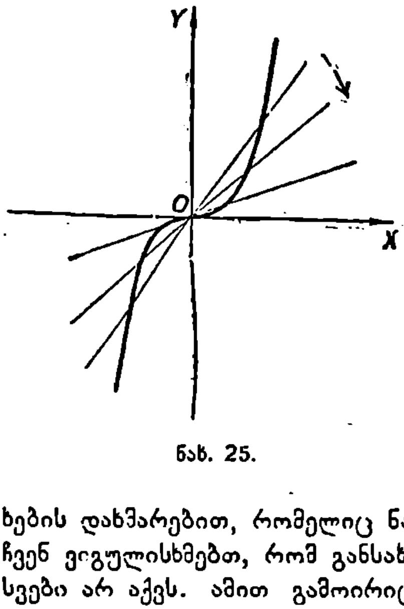
უნდა განვსაზღვროთ გადაკვეთის წერტილები კუბური $y=x^3$ პარაბოლისა და $y=mx$ წრფისა, სადაც $m>0$ (ნახ. 25). გადაკვეთის წერტილის აბსცისა უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას

$$x^3-mx=0. \tag{13}$$

ამ განტოლებას აქვს სამი ფესვი:

$$x_1=0,\ x_2=+\sqrt{m},\quad x_3=-\sqrt{m},$$

რომელთაც პარაბოლისა და წრფის გადაკვეთის სამი წერტილი შეესაბამება. თუ ახლა წარმოვიდგენთ, რომ m კოეფიციენტი, რჩება რა დადებითი, მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ $y=mx$ წრფე მიისწრაფვის OX ღერძისაკენ. გადაკვეთის სამივე წერტილი ზღვარში ერთმანეთს დაემთხვევიან. ამის შესაბამად (13) განტოლებას, როდესაც $m=0$, სამჯერადი ფესვი აქვს:



ნახ. 25.

$$x_1=x_2=x_3=0.$$

თუ მოცემულ ფუნქციას ჯერადი ფესვები აქვს, მაშინ მათგან განთავისუფლება შეიძლება იმ ხერხების დახმარებით, რომელიც ნაჩვენებია III თავის § 5-ში. ამიტომ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ განსახილველ $f(x)$ ფუნქციას ჯერადი ფესვები არ აქვს. ამით გამოირიცხება შესაძლებლობა $y=f(x)$ მრუდის შეხებისა OX ღერძთან.

განვიხილოთ $y=f(x)$ მრუდზე ორი წერტილი

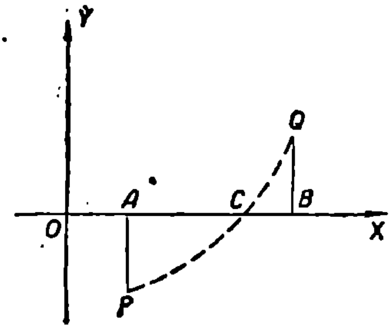
$$P\{a, f(a)\},\ Q\{b, f(b)\}$$

და ვთქვათ, რომ A და B არიან მათი გეგმილები აბსცისათა ღერძზე (ნახ. 26). თუ $f(a)$ და $f(b)$ ორდინატები სხვადასხვა ნიშნის არის, მაშინ P და Q წერტილები აბსცისათა ღერძის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს. ამ შემთხვევაში მრუდი, არის რა იგი უწყვეტი, აბს-

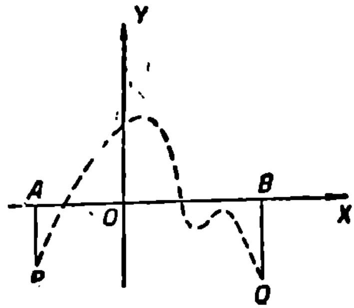
ცისთა ღერძს გადაკვეთს ერთ C წერტილში მაინც, რომელიც A-სა და B-ს შორის ძევს. ეს არის გამოთქმა იმ გეომეტრიული ფაქტისა, რომ უწყვეტ ფუნქციას არ შეუძლია უარყოფითი მნიშვნელობიდან დადებითზე გადავიდეს (ან შებრუნებულად) ნულის გაუვლელად. გადაკვეთის C წერტილი შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის ფესვს, რომელიც (a, b) შუალედში ძევს.

ამრიგად, **თუ $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობები სხვადასხვა ნიშნის არიან, მაშინ (a, b) შუალედი $f(x)$ ფუნქციის ერთ ფესვს მაინც შეიცავს.**

ძნელი არ არის მივიღოთ უფრო სრული შედეგი. მართლაც, აბსცისთა ღერძი ყოფს XOY სიბრტყეს ორ „ზედა“ და „ქვედა“ ნახევარსიბრტყედ. თუ $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობები ერთნაირი ნიშ-



ნახ. 26.



ნახ. 27.

ნის არიან, მაშინ P და Q წერტილები ერთსა და იმავე ნახევარ სიბრტყეზე მდებარეობენ. თუ ეს მნიშვნელობები სხვადასხვა ნიშნის არიან, მაშინ P და Q წერტილები სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეზე მდებარეობენ.

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ $y=f(x)$ მრუდზე ვამოძრავებთ P წერტილიდან Q წერტილისაკენ (ნახ. 27) მრუდის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის ყოველ წერტილს. ჩვენ გადავყევართ ერთ ნახევარსიბრტყიდან მეორეზე. მაშასადამე, რომ დავბრუნდეთ იმ ნახევარსიბრტყეში, სადაც P წერტილი ძევს, ჩვენ უნდა გავიაროთ გადაკვეთის წერტილთა ლუწი რაოდენობა *. მეორე ნახევარსიბრტყეზე რომ მო-

* უნდა გვახსოვდეს, რომ ლუწ რიცხვთა შორის რიცხვი ნულიც იმყოფება.

ვხვდეთ, ჩვენ უნდა გავიაროთ გადაკვეთის წერტილთა კენტი რიცხვი. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ რეზულტატს:

თუ $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობანი ერთნაირი ნიშნის არიან, მაშინ (a, b) შუალედში იმყოფება $f(x)$ ფუნქციის ფესვები, რომელთა რიცხვი ლუწია. ეს ლუწი რიცხვი შეიძლება იყოს ნულის ტოლიც.

თუ $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობანი ხხვადასხვა ნიშნის არიან, მაშინ (a, b) შუალედში იმყოფება $f(x)$ ფუნქციის ფესვები, რომელთა რიცხვი კენტია.

2. თანახმად III თავის მე-2 პარაგრაფისა, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ x-ის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც საკმაოდ დიდია აბსოლუტური სიდიდით, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა აბსოლუტური სიდიდით რაგინდ დიდი იქნება. მეორის მხრივ I პარაგრაფის მე-2 პუნქტში ჩვენ ვნახეთ, რომ x-ის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$|x| \geqq \frac{A}{|a_0|}+1,$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$|a_0x^n| > |a_1x^{n-1}+\dots+a_n|,$$

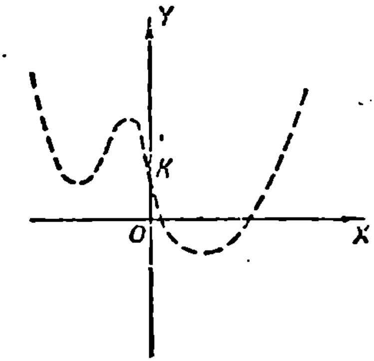
ე. ი. უფროსი წევრის აბსოლუტური სიდიდე აღემატება ყველა დანარჩენი წევრის ჯამის აბსოლუტურ სიდიდეს. აქედან გამომდინარეობს, **რომ x-ის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც საკმაოდ დიდია აბსოლუტური სიდიდით, მთელ რაციონალურ ფუნქციას აქვს თავისი უფროსი წევრის ნიშანი.**

წარმოვიდგინოთ, რომ უფროსი წევრის კოეფიციენტი a_0 დადებითი რიცხვია, მაშინ შესაძლოა ორი შემთხვევა წარმოგვიდგეს:

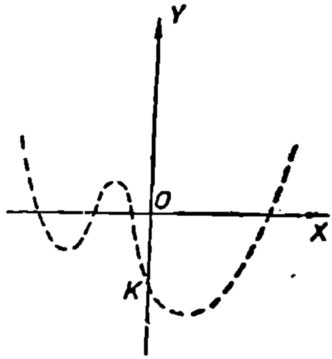
ა) თუ n ლუწი რიცხვია, მაშინ უფროსი წევრი a_0x^n ყოველთვის დადებითია. მაშასადამე, x-ის როგორც დადებითი ისე უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აბსოლუტური სიდიდით საკმაოდ დიდია, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა დადებითი იქნება. ამ შემთხვევაში $y=f(x)$ მრუდს ისეთი სახე აქვს, რომელიც ნაჩვენებია 28 ნახაზზე (a ან b).

ჩვენ თუ წარმოვიდგენთ მრუდზე მდებარე M წერტილს, როგორც მოძრავს მარცხნიდან მარჯვნივ, მაშინ ეს წერტილი, დაიწყო რა მოძრაობა ზედა ნახევარ სიბრტყეზე, ბოლოს და ბოლოს იმავე ნა-

ხევარ სიბრტყეზე უნდა დაბრუნდეს. მაშასადამე, მას შეუძლია OX ღერძი ლუწ რიცხვჯერ გადაკვეთოს; (x) ფუნქციას შეიძლება ექნეს ნამდვილი ფესვების ლუწი რიცხვი. ეს შედეგი ჩვენ უკვე ზემოთ მივიღეთ (თავი III § 4) სხვა მოსაზრებებიდან გამოსვლით. ახლა ვნა-



ნახ. 28 *a*.



ნახ. 28 *b*.

ხოთ, მრუდი რომელ წერტილში ჰკვეთს OY ღერძს; ამ წერტილის ორდინატი $f(x)$ ფუნციის თავისუფალი წევრის ტოლია:

$$f(0)=a_n.$$

თუ $a_n>0$ (ნახ. 28 *a*), მაშინ გადაკვეთის წერტილი (K) ზედა ნახევარ სიბრტყეზე ძევს. ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ **ლუწი რიცხვი უარყოფითი ფესვებისა და ლუწი რიცხვი დადებითი ფესვებისა.**

ეს შედეგები შეიძლება გამოვიყენოთ კვადრატული განტოლებისათვის:

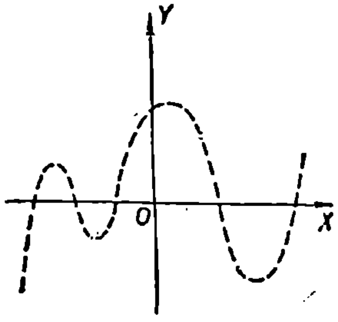
$$ax^2+bx+c=0,\ a>0.$$

თუ $c>0$, მაშინ ამ განტოლებას აქვს ერთნაირი ორი ნამდვილი ფესვი, ანდა სულ არა აქვს ნამდვილი ფესვები; თუ $c<0$, მაშინ მას აქვს ერთი დადებითი ფესვი და ერთი უარყოფითი.

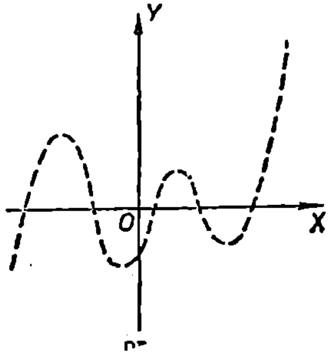
ბ) თუ $f(x)$ ფუნქციის ხარისხი n არის კენტი რიცხვი, მაშინ მისი უფროსი წევრი a_0x^n დადებითი იქნება, როდესაც $x>0$ და უარყოფითი, როდესაც $x<0$. მაშასადამე, თუ x-ის აბსოლუტური სიდიდე საკმაოდ დიდია, მაშინ $f(x)$-ის მნიშვნელობა აგრეთვე დადებითი იქნება, როდესაც $x>0$ და უარყოფითია, როდესაც $x<0$.

ახლა $y=f(x)$ მრუდს აქვს 29 ნახაზზე (a ან b) მოცემული სახე. M წერტილი, რომელიც მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობს, ქვედა ნახევარ სიბრტყიდან ზედაზე გადადის. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციას აქვს კენტი რიცხვი ნამდვილი ფესვებისა.

ახლა თუ $a_n>0$ (ნახ. 29), მაშინ ჩვენი წერტილი, სანამ OY ღერძს გადაკვეთს, ზედა სიბრტყეზე უნდა გადავიდეს. ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას აქვს კენტი რიცხვი უარყოფითი ფესვებისა.



ნახ. 29 a.



ნახ. 29 b.

მას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ლუწი რიცხვი დადებითი ფესვებისა.

თუ $a_n<0$ (ნახ. 29 b), მაშინ ანალოგიური მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ლუწი რიცხვი უარყოფითი ფესვებისა; მას აქვს კენტი რიცხვი დადებითი ფესვებისა.

ასე მაგალითად, კუბურ განტოლებას

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0, \quad (a_0>0)$$

ერთი უარყოფითი ფესვი მაინც აქვს, როდესაც $a_3>0$; ხოლო როდესაც $a_3<0$, მას აქვს ერთი მაინც დადებითი ფესვი.

შევნიშნოთ, რომ ორივე შემთხვევაში ჩვენ მივდივართ ერთსა და იმავე დასკვნამდის დადებითი ფესვების რიცხვის შესახებ: სახელდობრ, თუ $a_n>0$, მაშინ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ლუწი რიცხვი დადებითი ფესვებისა, ხოლო თუ $a_n<0$, მაშინ ფუნქციას აქვს კენტი რიცხვი დადებითი ფესვებისა.

3. უფრო ძლიერი შედეგი რომ მივიღოთ მთელი რაციონალური ფუნქციის დადებითი ფესვების რიცხვის შესახებ, ჩვენ წინასწარ ზოგიერთი ახსნა-განმარტება გავაკეთოთ რიცხვთა მწკრივში ნიშნის შეცვლათა შესახებ.

ვთქვათ მოცემულია სასრული სიმრავლე რიცხვებისა, რომლებიც გარკვეული რიგით არიან დალაგებული.

მაგალითად,

$$(*) \qquad +7,\ +1,\ -2,\ -3,\ -5,\ +6,\ -1.$$

თუ ამ რიცხვების ნიშნებს დავალაგებთ იმ რიგით, როგორც თვით მოცემული რიცხვები არიან დალაგებული

$$+,\ +,\ \ ,\ -,\ -,\ +,\ -,$$

მაშინ ჩვენ სამჯერ მოგვიხდება ერთი ნიშნიდან მეორეზე გადასვლა. ამიტომ ჩვენ ვიტყვით, რომ რიცხვთა (*) მწკრივში არის ნიშნის სამი შეცვლა.

საზოგადოდ, თუ განსაზღვრული რიგით დალაგებულ რიცხვთა მწკრივში არის k გადასვლა ერთი რიცხვიდან მეორეზე, მაშინ ჩვენ ვამბობთ, რომ, ამ მწკრივში არის ნიშნის k შეცვლა.

თუ k ლუწი რიცხვია, მაშინ განსახილავ რიცხვებიდან უკანასკნელს იგივე ნიშანი ექნება, რაც პირველს; თუ k კენტია, მაშინ კიდური რიცხვების ნიშნები მოპირდაპირეა.

ახლა განვიხილოთ მთელი რაციონალური ფუნქციის კოეფიციენტთა მწკრივში

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

შეცვლათა რიცხვი.

პირველად კერძო შემთხვევაზე შევჩერდეთ, როდესაც $f(x)$ ფუნქციის ფესვები $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ყველა დადებითია. III თავის (50′) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში კოეფიციენტების ნიშნები რიგრიგობით იცვლება; მაშასადამე, კოეფიციენტთა მწკრივში შეცვლათა რიცხვი n-ის ტოლია, ე. ი. დადებითი ფესვების რიცხვის ტოლია.

ზოგად შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას:

$f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვების რიცხვი არ აღემატება შეცვლათა რიცხვს მის კოეფიციენტთა მწკრივში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ α არის $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვი, მაშინ

$$f(x)=(x-\alpha)\varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ მთელი რაციონალური ფუნქციაა. დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტების მწკრივში შეცვლათა რიცხვი ერთით მაინც ნაკლებია $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტთა მწკრივში შეცვლათა რიცხვზე. ვთქვათ,

$$\varphi(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-1}.$$

$\varphi(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები დაკავშირებულია $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებთან II თავის (24) თანაფარდობით

$$b_0=a_0,$$

$$b_k=b_{k-1}\alpha+a_k \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n-1).$$

გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი უნდა იყოს ნულის ტოლი

$$b_{k-1}\alpha+a_k=0. \tag{14}$$

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ b_{k-1}-დან b_k-ზე გადასვლისას ჩვენ გვაქვს ნიშნის შეცვლა; მაშინ ტოლობა

$$a_k=b_k-b_{k-1}\alpha \qquad (\alpha>0)$$

გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში a_k კოეფიციენტს იგივე ნიშანი აქვს, რაც b_k-ს. ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტებს აქვს შემდეგი ნიშნები

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	q_5
+	+	—	—	+	+

ჩვენ აქ გვაქვს ნიშნის შეცვლა b_1-დან b_2-ზე გადასვლისას და b_3-დან b_4-ზე გადასვლისას. წინანდელივით ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ a_2 კოეფიციენტს იგივე ნიშანი აქვს, რაც b_2-ს, ხოლო a_4 კოეფიციენტს იგივე ნიშანი, რაც b_4-ს; მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციისათვის გვექნება:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
+		+		+		

ამრიგად, თუ $\varphi(x)$-ის წევრებს (მათი რიგის შეუცვლელად) დავყოფთ ისეთ წევრთა ჯგუფებად, რომელთაც აქვთ ერთნაირი ნიშნები, მაშინ თითოეული ამ ჯგუფთაგანს შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის იმავე ნიშნის წევრთა ჯგუფი. ახლა მხედველობაში მივიღოთ, რომ (14) თანაფარდობის ძალით $f(x)$ ფუნქციის თავისუფალ წევრს აქვს $\varphi(x)$ ფუნქციის უკანასკნელი ჯგუფის ნიშნის მოპირდაპირე ნიშანი. აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$-სათვის ერთნაირ ნიშნიანი წევრთა ჯგუფების რიცხვი ერთით მაინც მეტია, ვიდრე $f(x)$-სათვის. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $f(x)$-ის კოეფიციენტების მწკრივში ნიშნის შეცვლათა რიცხვი ერთით მაინც მეტია, ვიდრე $\varphi(x)$-ს კოეფიციენტების მწკრივში შეცვლათა რიცხვი.

ამრიგად, თუ a არის $f(x)$-ის დადებითი ფესვი, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის $(x-\alpha)$-ზე გაყოფისას კოეფიციენტების მწკრივში შეცვლათა რიცხვი ერთით მაინც მცირდება. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს n დადებითი ფესვი:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

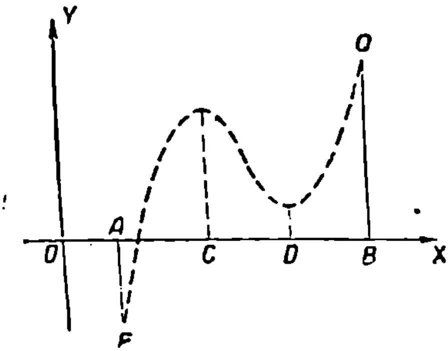
მაშინ, $f(x)$ რომ გავყოთ $x-\alpha_1$, შემდეგ $x-\alpha_2$-ზე და ა. შ. და ბოლოს $x-\alpha_n$-ზე, ჩვენ მივიღებთ ფუნქციას, რომლისთვისაც შეცვლათა რიცხვი h-ით მაინც ნაკლები იქნება $f(x)$-ის შეცვლათა რიცხვზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ h, ე. ი. $f(x)$-ის დადებითი ფესვების რიცხვი არ აღემატება შეცვლათა რიცხვს $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტების მწკრივში.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტთა მწკრივში **შეცვლათა რიცხვი შეიძლება განსხვავდებოდეს დადებითი ფესვების რიცხვისაგან მხოლოდ ლუწი რიცხვით.**

მართლაც, ვიგულისხმოთ რომ, უფროსი წევრის კოეფიციენტი დადებითია. თუ კოეფიციენტების მწკრივში $a_0, \ldots, a_n$ შეცვლათა რიცხვი ლუწია, მაშინ თავისუფალი წევრი აგრეთვე დადებითი იქნება. ამ შემთხვევაში, როგორც ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვების რიცხვი ლუწი იქნება.

თუ კოეფიციენტთა მწკრივში შეცვლათა რიცხვი კენტია, მაშინ თავისუფალი წევრი a_n უარყოფითი იქნება; ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვების რიცხვი კენტია. ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტთა მწკრივში შეცვლათა რიცხვი და დადებითი ფესვების რიცხვი ან ორთავე ლუწი, ან ორთავე კენტი იქნება; მაშასადამე, მათ შორის სხვაობა შეიძლება იყოს მხოლოდ ლუწი რიცხვი.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვების რიცხვი ტოლია მისი კოეფიციენტთა მწკრივში შეცვლათა რიცხვისა ან მასზე ნაკლებია ლუწი რიცხვით (დეკარტის თეორემა).



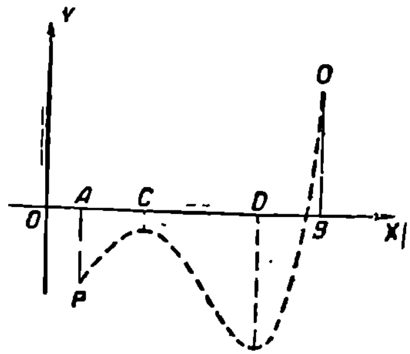
ნახ. 30 ა.

4. თუ $f(x)$ ფუნქცია (a, b) შუალედის ბოლოებში სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობებს ღებულობს, მაშინ ამ შუალედში, როგორც ჩვენ ვნახეთ, იმყოფება $f(x)$ ფუნქციის კენტი რიცხვი ფესვებისა. ვიკვლევთ რა $f(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევას (a, b) შუალედში, შევეცადოთ უფრო ზუსტად განვსაზღვროთ, რამდენი ფესვი არის ამ შუალედში.

წარმოვიდგინოთ გარკვეულობისათვის, რომ

$$f(a)<0,\quad f(b)>0.$$

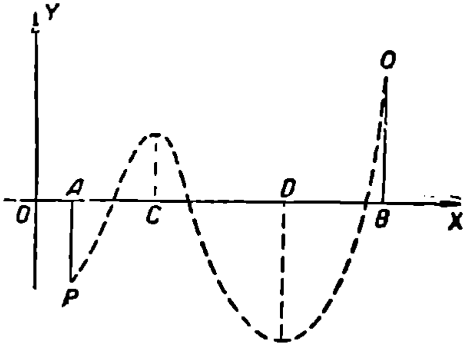
თუ აღმოჩნდება, რომ $f(x)$ ფუნქცია მუდამ იზრდება, როდესაც x იზრდება a-დან b-მდის, მაშინ შუალედში არის ფუნქციის მხოლოდ ერთი ფესვი (შეად. 26 ნახ.).



ნახ. 30 ხ.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია იზრდება (a, b) შუალედში, რათა მიაღწიოს თავის მაქსიმუმს $x=c$ წერტილზე; შემდეგ

(c, d) შუალედში კლებულობს და მიაღწევს თავის მინიმუმს $x=d$ წერტილზე და ბოლოს, (d, b) შუალედში ხელახლა იზრდება, მაშინ შეიძლება წარმოგვიდგეს ორი სხვადასხვა შემთხვევა.



ნახ. 31.

1. $f(x)$ (მაქსიმალურ) და $f(x)$ მინიმალურ მნიშვნელობებს ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ (ნახ. 30 a და 30b). ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას (a, b) შუალედში მხოლოდ ერთი ფესვი აქვს.

2. $f(c)$ და $f(d)$ მნიშვნელობები სხვადასხვა ნიშნის არიან (ნახ. 31); მაშინ უნდა იყოს

$$f(c)>0,\ f(d)<0.$$

ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას (a, b) შუალედში სამი ნამდვილი ფესვი აქვს; ეს ფესვები იმყოფებიან შუალედში.

$$(a, c),\ (c, d),\ (d, b).$$

ანალოგიურად შეიძლება გამოვიკვლიოთ $f(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევა უფრო რთულ შემთხვევებში. ამასთან არსებით როლს თამაშობს ის წერტილები, რომლებზედაც ფუნქცია მაქსიმუმს ან მინიმუმს აღწევს. ამ წერტილების მოძებნა დაიყვანება $f'(x)$ წარმოებულის ფესვების განსაზღვრაზე. შევნიშნოთ, რომ მესამე ხარისხის ფუნქციისათვის ფესვების განცალების ამოცანა ადვილად ამოიხსნება აღნიშნული ხერხით.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=x^3-9x^2+24x-17.$$

აქ

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24.$$

$f(x)$ ფუნქციის ფესვებია

$$x_1 = 2, \; x_2 = 4.$$

როდესაც $x < 2$, $f'(x)$ ფუნქცია დადებითია; მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია იზრდება x-თან ერთად. ამასთანავე ის ნულს გაივლის 0-სა და 2-ს შორის, ვინაიდან

$$f(0) < 0, \; f(2) > 0.$$

(2,4) შუალედში $f(x)$ ფუნქცია უარყოფითია; ამ შუალედში $f(x)$ ფუნქცია კლებულობს. ამასთანავე ის მეორეჯერ გადადის ნულზე, ვინაიდან $f(4) < 0$. როდესაც $x > 4$, $f(x)$ ფუნქცია ხელახლა დადებითია. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ხელახლა იზრდება. თუ დავუშვებთ $x = 5$, მაშინ ვიპოვით $f(5) > 0$. მაშასადამე, (4,5) შუალედში $f(x)$ ფუნქცია მესამეჯერ გადადის ნულზე.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის ფესვები იმყოფება შუალედებში

$$(0, 2), \; (2, 4), \; (4, 5).$$

§ 3. შტურმის მეთოდი

1. ვთქვათ, $f(x)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია, რომელსაც ჯერადი ფესვები არ აქვს. მაშინ, როგორც ვიცით, $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციები ურთიერთმარტივი არიან. მაშასადამე, მათი საერთო უდიდესი გამყოფი ნულისაგან განსხვავებულ მუდმივ რიცხვს წარმოადგენს. ახლა $f(x)$ და $f'(x)$-თვის ავაგოთ ალგორითმი თანმიმდევრობითი გაყოფისა. შეიძლება გავამრავლოთ ნებსითი რიცხვით მამრავლზე. ვისარგებლებთ რა ამით, ჩვენ შეგვიძლია ნებსითი მიღებული ნაშთთაგანი — 1-ზე გავამრავლოთ, ე. ი. მის წინ ნიშანი შევცვალოთ. როდესაც $f(x)$ ფუნქციას $f'(x)$-ზე გავყოფთ, მივიღებთ:

$$f(x) = f'(x) q_1(x) + r_1(x); \tag{15}$$

$r_1(x)$ ნაშთი, აღებული შებრუნებული ნიშნით, $f_1(x)$-ით აღვნიშნოთ:

$$f_1(x) = -r_1(x).$$

ახლა (15) თანაფარდობა ასე გადავწეროთ:

$$f(x)=f'(x)\,q_1(x)-f_1(x).$$

შემდეგ $f'(x)$ ფუნქცია $f_1(x)$-ზე გავყოთ. ვთქვათ, რომ ამ გაყოფის შედეგად მიღებული ნაწილადი არის $q_2(x)$, ხოლო ნაშთი შებრუნებული ნიშნით აღებული $f_2(x)$-ით აღვნიშნოთ. მაშინ გვექნება:

$$f'(x)=f_1(x)\,q_2(x)-f_2(x).$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$(16)\qquad \begin{cases} f_1(x)=f_2(x)\,q_3(x)-f_3(x), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_{k-1}(x)=f_k(x)\,q_{k+1}(x)-f_{k+1}(x), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

ვინაიდან $f'(x)$ ფუნქციის ხარისხი $(n-1)$-ის ტოლია, ამიტომ $f_1(x)$ ფუნქციის ხარისხი არ აღემატება $n-2$-ს, ..., $f_{k-1}(x)$ ფუნქციის ხარისხი $n-k$-ს არ აღემატება; ამიტომ ზოგად შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ ფუნქციათა მწკრივს:

$$(17)\qquad f(x),\ f'(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_{n-1}(x).$$

ამასთანავე უკანასკნელი ფუნქცია ამ მწკრივში იქნება ნულისაგან განსხვავებული მუდმივი რიცხვი. ამრიგად, ჩვენ შევადგინეთ $f(x)$ ფუნქციისათვის შტურმის ფუნქციათა მწკრივი. აღვნიშნოთ ამ ფუნქციების ზოგიერთი თვისება.

ა) **შტურმის ორი მეზობლად მდგომი ფუნქცია არ შეიძლება ნულად გადაიქცეს x-ის ერთიდაიგივე მნიშვნელობისათვის.**

მართლაც, თანახმად დაშვებისა $f(x)$ და $f'(x)$ ფუნქციები არიან ურთიერთ მარტივი; მაშასადამე (თავი II, § 2, შენიშვნა), ურთიერთ მეზობლად მდგომი ორი ნებსითი ფუნქცია (17) მწკრივიდან აგრეთვე მარტივი უნდა იყვნენ, ამასთანავე ისინი ნულად რომ იქცეოდეს ერთი და იგივე $x=a$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ მათ ექნებოდათ საერთო გამყოფი $x-a$.

ბ) **თუ x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის (17) ფუნქციიდან ერთი ფუნქციათაგანი ნულად იქცევა, მაშინ ორი მისი მეზობელი ფუნქცია x-ის იმავე მნიშვნელობისათვის მოპირდაპირე ნიშნებს ღებულობს.**

ვთქვათ მაგალითად, $f_k(x)$ ფუნქცია ნულად იქცევა, როდესაც $x = a$.

$$f_{k-1}(x) = f_k(x)\, q_{k+1}(x) - f_{k+1}(x)$$

თანაფარდობაში დავუშვათ $x = c$, მაშინ მივიღებთ:

$$f_{k-1}(a) = -f_{k+1}(a).$$

თუ (17)-დან აღებულ ყოველ ფუნქციაში ვიგულისხმებთ $x = a$, მაშინ მივიღებთ რიცხვთა განსაზღვრულ სისტემას

(18) $$f(a),\ f'(a),\ f_1(a),\ \ldots,\ f_{n-1}(a).$$

შემდეგში არსებითი მნიშვნელობა ექნება ნიშნის შეცვლათა რიცხვს (18) მწკრივში. ჩვენ ამ რიცხვს $S(a)$-თი აღვნიშნავთ.

სანამ შტურმის თეორემის ჩამოყალიბებაზე გადავიდოდეთ, ვუჩვენოთ მაგალითზე, თუ როგორ მიიღება შტურმის ფუნქციათა მწკრივი. წინასწარ შევნიშნოთ რომ შტურმის ფუნქციათა შედგენისას დადებითი მუდმივი მამრავლები როლს არ თამაშობს; გამოთვლების გამარტივებისათვის ასეთი მამრავლები შეიძლება შემოვიყვანოთ ან უკუვაგდოთ,

ავაგოთ შტურმის ფუნქციათა მწკრივი შემდეგი ფუნქციისათვის;

(19) $$f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 2.$$

აქ

(19') $$\frac{1}{2} f'(x) = 2x^3 - 3x + 3;$$

ფუნქცია (19) გავყოთ (19')-ზე, მივიღებთ ნაშთს:

$$r_1(x) = -3x^2 + 9x = 4.$$

მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

(20) $$f_1(x) = 3x^2 - 9x + 4.$$

ახლა (19') ფუნქციას გავყოფთ (20)-ზე; ამ გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი, შებრუნებული ნიშნით აღებული, იქნება

$$f_2(x) = -37x + 15.$$

$f_1(x)$-ის $f_2(x)$-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი ნიშნის შეცვლის შემდეგ უარყოფით რიცხვს გვაძლევს. ამ რიცხვის აბსოლუ-

ტური სიდიდე ჩვენთვის როლს არ თამაშობს; ამიტომ ჩვენ ვივარაუდოთ

$$f_3(x) = -1.$$

ამრიგად, შტურმის ფუნქციათა მწკრივი იქნება:

$$\begin{cases} f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 2, \\ \dfrac{1}{2} f'(x) = 2x^3 - 3x + 3, \\ f_1(x) = 3x^2 - 9x + 4, \\ f_2(x) = -37x + 15, \\ f_3(x) = -1. \end{cases}$$

ვიპოვოთ შტურმის მწკრივში ნიშნის შეცვლათა რიცხვი, როდესაც $x = 0$; ამ მიზნისათვის შტურმის თითოეულ ფუნქციათაგანში ვივარაუდოთ $x = 0$ და ნიშნების ცხრილი შევადგინოთ.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	შეცვ. რიცხვი
$x=0$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2

ამრიგად, მოცემულ შემთხვევაში $S(0) = 2$. ახლა ვიპოვოთ შეცვლათა რიცხვი, როდესაც $x = 1$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	შეცვლათა რიცხვი
$x=1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1

ამრიგად, $S(1) = 1$; მაშასადამე, როდესაც ჩვენ გადავდივართ $x = 0$ მნიშვნელობიდან $x = 1$ მნიშვნელობაზე შტურმის მწკრივში შეცვლათა რიცხვი ერთით მცირდება. V თავის § 3-ში ჩვენ ვიპოვეთ (19) ფუნქციის ფესვები; მათ შორის ერთი და მხოლოდ ერთი (0,1) შუალედში იმყოფება. შტურმის თეორემა გვიჩვენებს, რომ ეს თანამთხვევა შემთხვევითი არ არის.

2. შტურმის* თეორემა საშუალებას გვაძლევს გამოვარკვიოთ

* Charles Sturm-ი დაიბადა 1803 წელს, გარდაიცვალა 1885 წელს. იყო პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი. მისი შრომები ეხება უმთავრესად დიფერენციალურ განტოლებებს და მათემატიკურ ფიზიკას. იმ თეორემის შესახებ, რომელსაც ჩვენ ახლა შევისწავლით მოხსენება გააკეთა პარიზის აკადემიაში 1829 წელს.

$f(x)$ ფუნქციის იმ ფესვთა ზუსტი რიცხვი, რომლებიც (a, b) შუალედში იმყოფება. მისი ფორმულირება ასეთია:

თუ $a<b$, მაშინ შტურმის მწკრივში შეცვლათა რიცხვი a მნიშვნელობიდან b მნიშვნელობაზე გადასვლისას შეიძლება მხოლოდ შემცირდეს; სხვანაირად რომ ვთქვათ, a დან b-ზე გადასვლისას შეიძლება დაიკარგოს შეცვლათა გარკვეული რიცხვი. **ამასთანავე დაკარგული შეცვლათა რიცხვი ზუსტად ეტოლება $f(x)$ ფუნქციის ფესვების რიცხვს (a, b) შუალედში*.**

დამტკიცება: როდესაც $x=a$, შტურმის მწკრივში არის შეცვლათა განსაზღვრული რიცხვი. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ x იწყებს ზრდას. როგორ პირობებში შეიძლება შეიცვალოს შეცვლათა რიცხვი შტურმის მწკრივში?

ცხადია, ის შეიძლება შეიცვალოს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც რომელიმე ფუნქციათაგანი (17)-დან აღებული თავის ნიშანს შეიცვლის, ე. ი. ნულს გაივლის. მაგრამ შტურმის ფუნქციებიდან უკანასკნელი საზოგადოდ არ შეიძლება ნულად გადაიქცეს, ვინაიდან ის წარმოადგენს ნულისაგან განსხვავებულ მუდმივ რიცხვს. ამიტომ საკითხი შეიძლება დაისვას ან $f(x)$ ფუნქციის შესახებ. ან (17) მწკრივის რომელიმე შუალედური ფუნქციების შესახებ.

პირველად განვიხილოთ, თუ რა ხდება იმ შემთხვევაში, როდესაც ერთი შუალედური ფუნქციათაგანი ნულს გადის. ვივარაუდოთ, მაგალითად, რომ $f_k(x)$ ფუნქცია, როდესაც $x=c$, ნულად იქცევა:

$$f_k(c)=0.$$

ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ ამ შემთხვევაში $f_{k-1}(x)$ და $f_{k+1}(x)$ ფუნქციები $x=c$ მნიშვნელობისათვის ნულისაგან განსხვავებული არიან და მათი ნიშნები მოპირდაპირეა.

მეორეს მხრივ ჩვენ ვიცით (თავი III, § 1, პ. 4), რომ c-ს საკმაოდ მცირე მიდამოში მთელი რაციონალური ფუნქციები $f_{k-1}(x)$ და $f_{k+1}(x)$ ინარჩუნებენ იმ ნიშანს, რომელიც მათ აქვთ $x=c$ მნიშვნელობაზე. ვთქვათ, ასეთი მიდამო არის $(c-\delta, c+\delta)$. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ ამ მიდამოში (ბოლოების

---

* ჩვენ აქ განვიხილავთ ღია (a, b) შუალედს, მაგრამ თეორემა ძალაში რჩება ნახევრად ჩაკეტილ შუალედისათვისაც $a < x \le b$.

ჩათვლით) $f_{k-1}(x)$ ფუნქცია დადებითია, ხოლო $f_{k+1}(x)$ უარყოფითი. მაშინ ჩვენ გვექნება ნიშნების შემდეგი ცხრილი:

	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$c-\delta$	$+$	*	$-$
c	$+$	0	$-$
$c+\delta$	$+$	*	$-$

განვიხილავთ რა ამ ცხრილს, ძნელი არ არის შევამჩნიოთ, რომ როგორი ნიშნებიც არ უნდა აღმოჩნდეს ვარსკვლავით აღნიშნული უჯრედში, ჩვენ ყოველთვის გვექნება ნიშნის ერთი შეცვლა. ზედა სტრიქონში (როდესაც $x=c-\delta$) და ერთი შეცვლა ქვედა სტრიქონში (როდესაც $x=c+\delta$).

მაშასადამე, **როდესაც შუალედური ფუნქცია ნულზე გაივლის, მაშინ შეცვლათა რიცხვი არ შეიცვლება.** მართლაც, ჩვენ აქ განვიხილეთ შტურმის მწკრივის მხოლოდ ის უბანი, რომელიც ის უშუალოდ ეკვრის ნულზე გამავალ ფუნქციას, მაგრამ შტურმის მწკრივის იმ ნაწილებში, სადაც არც ერთი ფუქცია ნულზე არ გაივლის შეცვლათა რიცხვი არ შეიძლება შეიცვალოს.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც თვით $f(x)$ ფუნქცია ნულზე გაივლის. თუ $f(x)$ ფუნქცია ნულად იქცევა $x=c$ მნიშვნელობაზე, მაშინ $f'(x)$ წარმოებული ამ მნიშვნელობისათვის ნულისაგან განსხვავდება: $f'(c)\neq 0$. ამიტომ შესაძლებელი იქნება გამოვყოთ $(c-\delta,\ c+\delta)$ შუალედი, სადაც $f'(x)$ ფუნქცია იგივე ნიშანს ინარჩუნებს, როგორიც მას აქვს $x=c$ მნიშვნელობაზე. აზრის გარკვეულობისათვის ვივარაუდოთ, რომ $f'(x)$. ეს ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია იზრდება $(c-\delta,\ c+\delta)$ შუალედში და მაშასადამე, უარყოფითი მნიშვნელობიდან დადებითზე გადადის. ამრიგად, ჩვენ გვექნება ნიშნების შემდეგი ცხრილი:

	$f(x)$	$f'(x)$
$c-\delta$	$-$	$+$
c	0	$+$
$c+\delta$	$+$	$+$

ზედა სტრიქონში ჩვენ გვაქვს ნიშნის შეცვლა; ქვედა სტრიქონში ეს შეცვლა იკარგება.

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ როდესაც $f(x)$ ფუნქცია ნულზე გაივლის, მაშინ მას და მის წარმოებულს შორის შეცვლათა რიცხვი იკარგება.

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს შემდეგი:

შტურმის მწკრივში შეცვლათა რიცხვი შეიძლება შეიცვალოს მხოლოდ მაშინ, როდესაც რომელიმე ფუნქციათაგანი ნულზე გაივლის.

ბ) თუ რომელიმე შუალედური ფუნქციათაგანი ნულზე გაივლის, მაშინ შეცვლათა რიცხვი შტურმის მწკრივში არ იცვლება.

გ) ყოველთვის, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია **ნულზე გაივლის, შტურმის მწკრივში ერთი შეცვლა იკარგება.**

ამ დებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ, როდესაც x იცვლება a-დან b-მდის, შტურმის მწკრივში იმდენი შეცვლა დაიკარგება, რამდენჯერაც $f(x)$ ფუნქცია ნულზე გაივლის. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის ფესვების რიცხვი (a, b) შუალედში ტოლია a-დან b-ზე გადასვლისას დაკარგული შეცვლათა რიცხვისა.

ჩვენ ზემოთ შეცვლათა რიცხვი შტურმის მწკრივში $x=a$ მნიშვნელობისათვის $S(a)$-თი აღვნიშნეთ; ვისარგებლებთ რა ამ აღნიშვნებით, ჩვენ შეგვიძლია შტურმის თეორემა გამოვთქვათ

$$S(a) - S(b) = h$$

ტოლობის სახით, სადაც h არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვების რიცხვი (a, b) შუალედში.

შენიშვნა. თუ რომელიმე შუალედური ფუნქციათაგანი ინარჩუნებს თავის ნიშანს (a, b) შუალედში, მაშინ შტურმის მწკრივი შეიძლება ამ ფუნქციით დავამთავროთ. მართლაც, დამტკიცებისათვის არსებითი მნიშვნელობა აქვს $f_{n-1}(x)$ ფუნქციის მხოლოდ იმ თვისებას, რომ ის (a, b) შუალედში ნიშანს არ იცვლის.

3. შტურმის თეორემის საშუალებით ყოველთვის შეიძლება მთელი რაციონალური ფუნქციის ფესვების განცალების შესახებ ამოცანის ამოხსნა. შტურმის თეორემა პირველ ყოვლისა საშუალებას გვაძლევს ადვილად განვსაზღვროთ ყველა ნამდვილ ფესვთა რიცხვი.

მართლაც, x-ის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც საკმაოდ დიდია აბსოლუტური სიდიდით, შტურმის თითოეული ფუნქციათაგანს აქვს თავისი უფროსი წევრის ნიშანი. ვსარგებლობთ რა ამით, ჩვენ

შევვიძლია ვიპოვოთ შეცვლათა რიცხვი შტურმის მწკრივში x-ის საკმაოდ დიდ* დადებით მნიშვნელობებისათვის; ჩვენ ეს რიცხვი $S(+\infty)$-ით აღვნიშნოთ. ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ შეცვლათა რიცხვი უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის, რომელთა აბსოლუტური სიდიდეები საკმაოდ დიდი რიცხვებია; ეს რიცხვი შეიძლება $S(-\infty)$-ით აღვნიშნოთ. სხვაობა $S(-\infty)-S(+\infty)$ ჩვენ მოგვცემს $f(x)$ ფუნქციის ყველა ნამდვილ ფესვთა რიცხვს.

წარმოვიდგინოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყველა ნამდვილი ფესვი (a, b) შუალედში იმყოფება. დავყოფთ რა ამ შუალედს უფრო მცირე შუალედებად ჩვენ შევვიძლია შტურმის თეორემის დახმარებით განვსაზღვროთ იმ ფესვთა რაოდენობა, რომლებიც თითოეულ მათგანში იმყოფება. თუ რომელიმე შუალედში ერთზე მეტი ფესვი იმყოფება, მაშინ შეიძლება მისი დაყოფა უფრო მცირე შუალედებად. ამ პროცესს ჩვენ მანამდის განვაგრძობთ, სანამ თითოეული ფესვი არ აღმოჩნდება ცალკე შუალედში მოთავსებული.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=x^4-6x^3+8x^2+4x-4.$$

ვადგენთ შტურმის ფუნქციებს:

$$\frac{1}{2}f'(x)=2x^3-9x^2+8x+2,$$

$$f_1(x)=11x^2-36x+10,$$

$$f_2(x)=7x-16,$$

$$f_3(x)=+1.$$

რომ ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის ყველა ნამდვილი ფესვი, განვიხილოთ შტურმის ფუნქციების ნიშნები, რომლებიც შეესაბამება x-ის იმ მნიშვნელობებს, რომელნიც აბსოლუტური სიდიდით არიან საკმაოდ დიდი.

---

* ტერმინი „საკმაოდ დიდი მნიშვნელობანი“ აქ ნიშნავს: „იმდენად დიდს, რომ თითოეულ განსახილავ ფუნქციათაგანს ჰქონდეს თავისი უფროსი წევრის ნიშანი“.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	შეცვლათა რიცხვი
$-\infty$	+	—	+	—	+	4
$+\infty$	+	+	+	+	+	0

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციას აქვს ოთხი ნამდვილი ფესვი. ახლა შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვების ზედა საზღვარი 4-ს ეტოლება (ნიუტონის ხერხი). მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვები (0, 4) შუალედში იმყოფება. შემდეგ, ცხრილი გვიჩვენებს შტურმის ფუნქციების ნიშნების შეცვლათა რიცხვს, როდესაც $x=0$, 1, 2, 3, 4.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	შეცვლათა რიცხვი
$x=0$	—	+	+	—	+	3
1	+	+	—	—	+	2
2	+	—	—	—	+	2
3	—	—	+	+	+	1
4	+	+	+	+	+	0

ამ ცხრილიდან ვამჩნევთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სამი დადებითი და ერთი უარყოფითი ფესვი; დადებითი ფესვები იმყოფება

$$(0,1),\ (2,3),\ (3,4)$$

შუალედებში.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის ფესვების განცალების ამოცანა სავსებით ამოხსნილია.

სავარჯიშო.

შემდეგი განტოლებათა ფესვები განაცალეთ (გამოყავით)

1. $x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0.$
2. $x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 8x - 5 = 0.$
3. $x^4 - 2x^3 + 4x - 6 = 0.$

§ 4. ფესვების გამოთვლა

1. თუ განტოლების ნამდვილი ფესვები განცალებულია, მაშინ მათი გამოთვლა პრინციპული თვალსაზრისით დაიყვანება იმ შუალედების შემდგომ შემცირებაზე, რომლებშიაც მოთავსებულია ეს ფესვები. არსებობს სხვადასხვა მეთოდი, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს ავარჩიოთ შუალედების შემცირების ეს პროცესი. თუმცა ეს მეთოდები ეკუთვნის მიახლოებითი გამოთვლების თეორიას, მაგრამ ჩვენ აქ ზოგიერთ მათგანს განვიხილავთ.

რ უ ფ ი ნ ი - ჰ ო რ ნ ე რ ი ს   მ ე თ ო დ ი*. თუ გარკვეულ შუალედში იმყოფება $f(x)=0$ განტოლების ერთი და მხოლოდ ერთი ფესვი, მაშინ ძნელი არ არის ვიპოვოთ ორი ერთმანეთის მომდევნო მთელი რიცხვი k და $k+1$, რომელთა შორის ეს ფესვი იმყოფება. k რიცხვი წარმოადგენს ფესვის მთელ ნაწილს. შემდეგ, თუ $(k, k+1)$ შუალედს გავყოფთ ათ ტოლ ნაწილად, გამოვარკვევთ რომელ მიღებულ შუალედში იმყოფება საძიებელი ფესვი, მაშინ ჩვენ ვიპოვით ამ ფესვის პირველ ათწილად ნიშანს. შემდგომ მსგავსადვე შეიძლება ვიპოვოთ მეორე ათწილადი ნიშანი და ა. შ. ეს პროცესი პრაქტიკაში მოითხოვდა მეტად უხერხულ გამოთვლებს: რუფინი-ჰორნერის მეთოდი, ინარჩუნებს რა იმავე დედა-აზრს, გვაძლევს შედარებით მარტივ სქემას ფესვის ათწილადი ნიშნების თანმიმდევრობითი გამოთვლისათვის.

ჩვენ ვგულისხმობთ რომ:

$$f(x)=0 \tag{21}$$

განტოლების საძიებელი ფესვი მოთავსებულია $(k, k+1)$ შუალედში. ახლა შევადგინოთ განტოლება, რომლის ფესვები მიიღება (21) განტოლების ფესვებიდან k რიცხვის გამოკლებით. ამ მიზნისათვის საკმარისია დავუშვათ $y=x-k$; მაშინ გვექნება: $f(x)=f(k+y)$. ვისარგებლოთ ჰორნერის სქემით და მარჯვენა ნაწილი დავალაგოთ y-ის ხარისხების მიხედვით. ამრიგად, მივიღებთ განტოლებას

$$\varphi(y)=0.$$

ამ განტოლებას აქვს 0-სა და 1-ს შორის მოთავსებული ფესვი.

---

* ისტორიული მითითებანი შეიძლება ვნახოთ წიგნში: **Уиттекер и Робинсон**, Математическая обработка результатов наблюдений, თ. VI.

დავუშვებთ რა $10\,y = y'$, მივიღებთ:

$$\psi(y') = 0 \tag{22}$$

განტოლებას, რომლის ფესვი იმყოფება 0-სა და 10-ს შორის. თუ l ამ ფესვის მთელი ნაწილია, მაშინ l იქნება გამოსავალი განტოლების ფესვის პირველი ათწილადი ნიშანი.

ფესვის შემდეგი ციფრი რომ ვიპოვოთ, გამოვიყენებთ იმავე გარდაქმნას (22) განტოლების მიმართ: დავუშვათ $z = y' - l$; ამას მივყევართ განტოლებამდის, რომელსაც აქვს ფესვი 0-სა და 1-ს შორის, და ა. შ. ამ პროცესს მანამდის განვაგრძობთ, სანამ საჭირო სიზუსტეს არ მივაღწევთ *.

მაგალითისათვის განვიხილოთ

$$x^3 - 2x - 2 = 0 \tag{23}$$

განტოლება.

დეკარტის თეორემა (§ 2 3. 3) გვიჩვენებს, რომ ამ განტოლებას ერთი დადებითი ფესვი აქვს. ვინაიდან $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, ამიტომ ეს ფესვი 1-სა და 2-ს შორის იმყოფება. აღვნიშნოთ $x = 1 + y$ და განტოლების წევრები დავალაგოთ y-ის ხარისხების მიხედვით:

1	1	0	−2	−2
	1	1	−1	−3
	1	2	1	
	1	3		
	1			

მაშასადამე, ჩვენ ვღებულობთ:

$$y^3 + 3y^2 + y - 3 = 0 \tag{24}$$

განტოლებას.

---

* თუ $k < 0$, მაშინ აღწერილი პროცესი წესიერ დადებით წილადს გვაძლევს, რომელიც უნდა მივუმატოთ უარყოფით k რიცხვს. ასე, მაგალითად, თუ $k = -4$ და $\varphi(y) = 0$ განტოლების ფესვი 0,725-ს ეტოლება, მაშინ თავდაპირველი განტოლების ფესვი იქნება $x = k + y = -4 + 0,725 = -3,275$.

ახლა დავუშვათ $y=\frac{y'}{10}$ და ორივე ნაწილი ერთდროულად 10^3-ზე გავამრავლოთ:

(24') $$y'^3+30y'^2+100y'-3000=0.$$

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი განტოლება (24)-დან მიიღება მისი კოეფიციენტების გამრავლებით შესაბამად 1-ზე, 10-ზე, 100-ზე 1000-ზე; ამიტომ მივიღებთ რა ჰორნერის წესის მიხედვით კოეფიციენტებს 1, 3, 1, —3-ს, ჩვენ სწრაფად შეგვიძლია დავწეროთ (24) განტოლება.

(24') განტოლებას აქვს 7-სა და 8-ს შორის მოთავსებული ფესვი. დავუშვათ $y'=z+7$:

7	1	30	100	—3000
	1	37	359	—487
	1	44	667	
	1	51		
	1			

$$z^3+51z^2+667z-487=0.$$

აღვნიშნავთ რა $z=\frac{z'}{10}$, მივიღებთ

$$z^3+510z^2+66700z-487000=0$$

განტოლებას (' ნიშანს მოვაცილეთ).

ამ განტოლებას აქვს ფესვი, რომელიც 6-სა და 7-ს შორის იმყოფება. განვაგრძობთ რა გამოთვლას შევადგენთ სქემას.

6	1	510	66700	— 487000
	1	516	69796	— 68224
	1	522	72928	
	1	528		
	1			

ვლებულობთ განტოლებას:

$$u^3+5280\,u^2+7292800\,u-68224000=0,$$

რომლის ფესვი 9-სა და 10-ს შორის იმყოფება.

ამრიგად, მოცემული განტოლების ფესვი, გამოთვლილი ერთი მეათასედის სიზუსტით იქნება $x=1{,}769$.

2. **ყალბი დებულების მეთოდი (Regula falsi).** ჯერ კიდევ უძველეს დროში სარგებლობდნენ ამოცანების ამოხსნის ეგრეთ წოდებული ყალბი დებულების წესით. დავუშვათ, რომ საჭიროა განვსაზღვროთ რომელიმე x სიდიდის მნიშვნელობა, ამასთანავე ცნობილია, რომ ამ სიდიდეზე შესრულებული გარკვეული ოპერაციები მოცემულ A რიცხვს გვაძლევს. მაშინ ასე მოქმედებენ: საძიებელი x სიდიდის მნიშვნელობას შეცვლიან ნებსითი a რიცხვით; ამ რიცხვზე იმ ოპერაციებს აწარმოებენ, რომლებსაც ამოცანის პირობით საძიებელი სიდიდე ექვემდებარება. ვთქვათ, ამ ოპერაციების შედეგი არის $f(a)$. ამის შემდეგ საძიებელი სიდიდე განისაზღვრება შემდეგი პროპორციიდან:

$$\frac{x}{a}=\frac{A}{f(a)}.$$

თავისთავად ცხადია, რომ ეს წესი გვაძლევს სწორ პასუხს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი პროპორციულია x სიდიდის, ე. ი. როდესაც ამოცანა დაიყვანება პირველ ხარისხის ასეთი სახის განტოლებამდე:

$$px=A.$$

თუ ჩვენ ორ ნებსით a და b რიცხვს ავიღებთ და მათზე შევასრულებთ ამოცანის პირობებში მითითებულ ოპერაციებს, მაშინ შედეგში $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობებს მივიღებთ. ახლა დავუშვათ, რომ $f(x)$-ის ნაზრდი პროპორციულია x სიდიდის ნაზრდისა; მაშინ შესაძლებელი იქნება („ორი ყალბი დებულების წესი“) x სიდიდის განსაზღვრა პროპორციიდან:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{A-f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{25}$$

დაშვება რომლიდანაც ჩვენ გამოვდივართ, სინამდვილეში იმ

შემთხვევაში სრულდება, როდესაც $f(x)$ არის $px+q$ სახის ფუნქცია, ე. ი. ამოცანა დაიყვანება

$$px+q=A$$

განტოლებამდე.

სხვა შემთხვევაში (25) ფორმულამ შეიძლება მხოლოდ მიახლოებითი შედეგი მოგვცეს.

თუ საჭიროა ვიპოვოთ x-ის მნიშვნელობამ, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$f(x)=0,$$

მაშინ შეიძლება (25) ფორმულის გამოყენება, თუ დავუშვებთ $A=0$.

ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)},$$

საიდანაც

$$x=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a). \tag{26}$$

ამ ფორმულის გეომეტრიული აზრი რომ გამოვარკვიოთ განვიხილოთ მრუდი

$$y=f(x). \tag{27}$$

ამ მრუდზე ავიღოთ P და Q წერტილები, რომელთა აბსცისები a და b-ს ტოლია. ამ წერტილების ორდინატები არის შესაბამად $f(a)$ და $f(b)$. ჩვენი ამოცანის მიზანია ვიპოვოთ (27) მრუდის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისი. ამის ნაცვლად ჩვენ მოვძებნით PQ ქორდის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილს; ამ წერტილის აბსცისას ჩვენ მივიჩნევთ საძიებელი სიდიდის მიახლოებით მნიშვნელობად.

თუ ვიცით P და Q წერტილების კოორდინატები, ძნელი არ არის PQ წრფის განტოლების დაწერა:

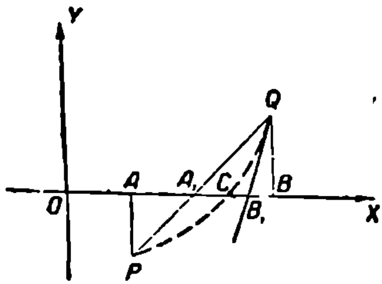
$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

PQ წრფის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი რომ ვიპოვოთ, საჭიროა ამ განტოლებაში დავუშვათ $y=0$ და განვსაზღვროთ x-ის

შესაბამი მნიშვნელობა; შევასრულებთ რა ამას, ჩვენ მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც ემთხვევა (26)-ს.

ამრიგად, თუ ჩვენ (26) გამოსახულებით ვსარგებლობთ როგორც საძიებელი სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა, მაშინ ჩვენ ფაქტიურად მრუდს ვცვლით მისი ქორდით.

3. ხელახლა განვიხილოთ მთელი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია და ვიგულისხმოთ, რომ (a, b) შუალედში იმყოფება ამ ფუნქციის ერთი მარტივი ფესვი. მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f'(x)$ წარმოებული (a, b) შუალედში ნულისაგან განსხვავდება. თუ (a, b) შუალედში $f(x)>0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია იზრდება, როდესაც x იცვლება a-დან b-მდის. გავავლოთ ქორდა, რომელიც აერთებს $P\{a, f(a)\}$ და $Q\{b, f(b)\}$ წერტილებს. ეს ქორდა გადაკვეთს OX ღერძს A_1 წერტილში, რომლის a' აბსცისი, როგორც ვნახეთ, ეტოლება



ნახ. 32.

$$a' = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a). \tag{28}$$

თუ $f'(a')<0$, როგორც ამას ადგილი აქვს მე-32 ნახაზზე გამოსახულ მრუდისათვის, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ფესვი მოთავსებულია (a', b) შუალედში. მეორე მიახლოება რომ მივიღოთ, შეიძლება (a', b) შუალედის მიმართ იგივე ხერხი გამოვიყენოთ:

$$a'' = a' - \frac{b-a'}{f(b)-f(a')} f(a').$$

მაგალითისათვის ხელახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = x^3 - 2x - 2.$$

ამ ფუნქციას როგორც ვნახეთ, აქვს (1, 2) შუალედში მოთავსებული ფესვი. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (28) ფორმულა. დავუშვებთ რა $a=1$, $b=2$, ეს გვაძლევს

$$a' = 1 - \frac{2-1}{2+3} \cdot (-3) = 1{,}6.$$

მოცემულ შემთხვევაში $f'(x)<0$, ასე რომ ფესვი იმყოფება

(1,6; 2) შუალედში. ეს გასაგებიც არის: განსახილავ შემთხვევაში ქორდის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი ძევს საძიებელი წერტილის მარცხნივ, ვინაიდან $y=f(x)$ მრუდი ამოზნექილობით მიმართულია ქვევით. (1,6; 2) შუალედის მიმართ შეიძლება იმავე ხერხის გამოყენება:

$$a''=1,6+\frac{2-1,6}{2+1,104}\cdot 1,104\approx 174.$$

მაშასადამე, საძიებელი ფესვი იმყოფება 1,74 ს და 2-ს შორის. ამრიგად, ვსარგებლობთ რა ყალბი დებულების მეთოდით, ჩვენ ვუახლოვდებით განტოლების ფესვს მხოლოდ ერთი მხრიდან.

4. **ნიუტონის ხერხი.** დავუშვათ, რომ ჩვენ შევძელით a რიცხვის პოვნა, რომელიც $f(x)$ ფუნქციის x_1 ფესვის მახლობელია. h-ით ის შესწორება აღვნიშნოთ, რომელიც a-ს უნდა დავუმატოთ, რომ მივიღოთ საძიებელი ფესვი:

$$h=x_1-a;$$

მაშინ გვექნება

$$f(a+h)=f(x_1)=0; \tag{29}$$

მაგრამ ტეილორის ფორმულის მიხედვით

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n. \tag{30}$$

თუ შესწორება h იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მისი კვადრატი მხედველობაში არ მივიღოთ, მაშინ (29) და (30) ძალით გვექნება:

$$f(a)+f'(a)h=0,$$

საიდანაც [ვარაუდით, რომ $f'(a)\neq 0$]

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობას.

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{31}$$

გამოვიყენებთ რა იგივე მსჯელობას ამ მნიშვნელობისათვის მივიღებთ შემდეგ მიახლოებას:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} \text{ და ა. შ.}$$

შევნიშნოთ, რომ ნიუტონის ხერხის გადმოცემა შეიძლება სრულიად ელემენტარულად, წარმოებულის ცნების გამოუყენებლად. მართლაც, ჩვენ გვაქვს განტოლების საძიებელი ფესვის მახლობელი a მნიშვნელობა, უნდა განვსაზღვროთ ამ მნიშვნელობის h შესწორება. ამ მიზნისათვის მოცემულ განტოლებაში x სიდიდეს ვცვლით $a+h$-ით, ვალაგებთ h-ის ხარისხების მიხედვით და მხედველობაში არ ვღებულობთ h-ის პირველზე მეტ ხარისხში შემცველ წევრებს. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ პირველი ხარისხის განტოლებას h-ის მიმართ. ამოვხსნით რა ამ განტოლებას, ვპოულობთ საძიებელ შესწორებას.

ძნელი არ არის გამოვარკვიოთ (31) ფორმულის გეომეტრიული აზრი. მართლაც, განვიხილოთ $P[a, f(a)]$ წერტილი, რომელიც მდებარეობს

$$y = f(x) \tag{32}$$

მრუდზე. გავავლოთ (32) მრუდის მხები P წერტილზე (ნახ. 33a). მხების კუთხური კოეფიციენტი $f(a)$-ს ტოლია; მაშასადამე, მისი განტოლება არის

$$y - f(x) = f'(a)(x - a).$$

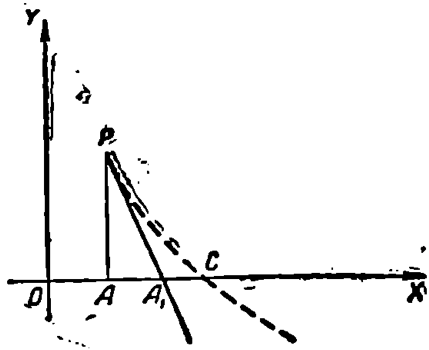
დავუშვებთ რა ამ განტოლებაში $y = 0$, ჩვენ ვიპოვით მხების გადაკვეთის წერტილს OX ღერძთან. x-ის შესაბამი მნიშვნელობა იქნება

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

ამრიგად, (31) ფორმულა განსაზღვრავს მხეხების OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისას. მივიჩნევთ რა ამ აბსცისას ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად, ჩვენ არსებითად ვცვლით მრუდწირულ რკალს მხებით.

შენიშვნა: თუ $y = f(x)$ მრუდი P წერტილში ამოზნექილობით მიმართულია OX ღერძისაკენ, მაშინ a_1 მნიშვნელობა, რომელიც (31)

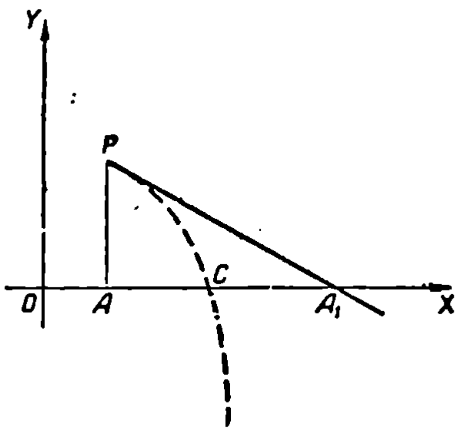
ფორმულით მიიღება, ყოველთვის განტოლების ფესვთან უფრო ახლო. იმყოფება, ვიდრე a-ს თავდაპირველი მნიშვნელობა. თუ ეს პირობა დაცული არ არის, მაშინ შეიძლება მოხდეს, რომ (31) ფორმულის გამოყენება ჩვენ დაგვაშორებს ფესვის ნამდვილ მნიშვნელობას. ასეთი შემთხვევა გამოსახულია (33b ნახაზზე). იმისათვის რომ მრუდი P წერტილში იყოს მიმართული ამოზნექილობით OX ღერძისაკენ, ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მეორე რიგის წარმოებული $f''(a)$ ერთდროულად $f(a)$ ორდინატთან დადებითი და უარყოფითი იყოს; სხვა სიტყვებით, აუცილებელია და საკმარისი რომ იყოს



ნახ. 33 a.

(33) $$\frac{f(a)}{f''(a)}>0.$$

ამრიგად, ნიუტონის მეთოდი იმ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ, როდესაც (33) პირობა შესრულებულია.



ნახ. 33 b.

მაგალითი.

განვიხილოთ განტოლება

$$f(x)=x^3+3x-14x+7=0.$$

ამ განტოლებას აქვს ორი დადებითი ფესვი, რომელთაგანაც ერთი (0,1) შუალედში იმყოფება. ამ ფესვის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ნიუტონის ხერხი. აქ

$$f(0) > 0;\ f''(0) > 0;$$

მაშასადამე, როდესაც $a=0$ პირობა (33) კმაყოფილდება. გამოვიყენებთ რა (31) ფორმულას, ვღებულობთ:

$$a_1 = a - \frac{f'(a)}{f'(a)} = 0 - \frac{2}{14} = \frac{1}{2}.$$

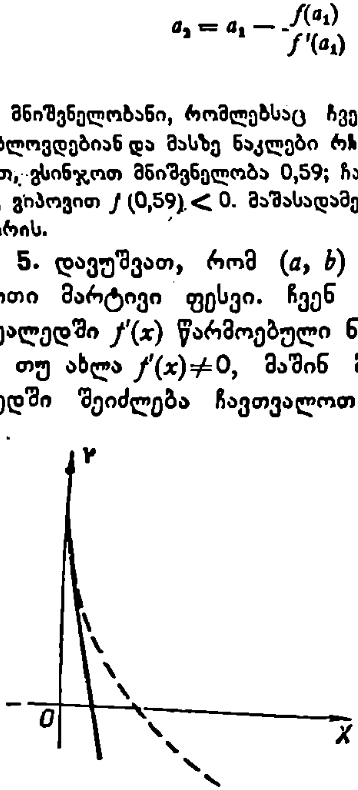
შემდეგი მიახლოება იქნება:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{7}{8}}{\frac{41}{4}} \approx 0{,}585.$$

მნიშვნელობანი, რომლებსაც ჩვენ ამრიგად ვღებულობთ, საძიებელ ფესვს უახლოვდებიან და მასზე ნაკლები რჩებიან. მიახლოების ცდომილება რომ შევაფასოთ, ვსინჯოთ მნიშვნელობა 0,59; ჩავსვამთ რა ამ მნიშვნელობას $f(x)$ ფუნქციაში, ვიპოვით $f(0{,}59) < 0$. მაშასადამე, საძიებელი ფესვი ძევს 0,585-სა და 0,9-ს შორის.

5. დავუშვათ, რომ (a, b) შუალედში იმყოფება $f(x)$ ფუნქციის ერთი მარტივი ფესვი. ჩვენ შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ (a, b) შუალედში $f'(x)$ წარმოებული ნულისაგან განსხვავდება.

თუ ახლა $f'(x) \neq 0$, მაშინ მეორე წარმოებულიც (a, b) შუალედში შეიძლება ჩავთვალოთ ნულისაგან განსხვავებული. მაშინ $y=f(x)$ მრუდს განსახილავ ნაწილში არა აქვს გადაღუნვის წერტილები. ამ შემთხვევაში x_1 ფესვის გამოთვლისას სასარგებლოა ნიუტონის მეთოდისა და „ყალბი დებულების“ მეთოდის კომბინირება.



ნახ. 34.

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ (a, b)-ში $f'(x) > 0$ და $f''(x) > 0$. ამრიგად მრუდს აქვს მე-32 ნახაზზე მოცემული სახე. ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ C წერტილის x_1 აბსცისი. $Q\,[b, f(b)]$ წერტილში მრუდი მიმართულია ამოზნექილობით OX ღერძისაკენ. თუ ჩვენ ამ წერტილზე მხებს გავავლებთ, მაშინ ის გადაკვეთს OX ღერძს B_1

წერტილში, რომელიც C-ს მარჯვნით ძევს. პირიქით PQ ქორდა OX ღერძს გადაკვეთს C-ს მარცხნით მდებარე A_1 წერტილში. A_1 წერტილის აბსცისას ვიპოვით ფორმულით

$$a_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a).$$

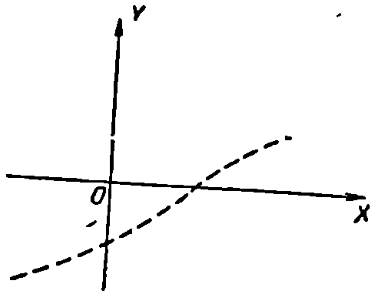
B_1 წერტილის აბსცისი იქნება

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

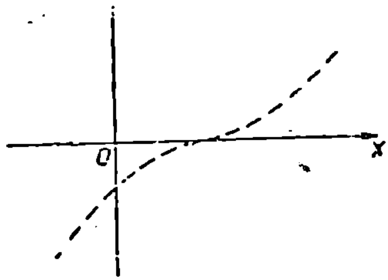
ამრიგად, x_1 ფესვი ჩვენ მოვათავსეთ უფრო ვიწრო $(a_1,\ b_1)$ შუალედში. თუ ჩვენ მივიჩნევთ, როგორც მიახლოებით მნიშვნელობას

$$x \approx \frac{a_1 + b_1}{2},$$

მაშინ შეცდომა $\frac{1}{2}\,(b_1 - a_1)$-ზე ნაკლები იქნება.



ნახ. 35*a*.



ნახ. 35 *b*.

$(a_1,\ b_1)$ შუალედის მიმართ შესაძლო იქნება იგივე ხერხი გამოვიყენოთ. განვაგრძობთ რა ამ პროცესს, ჩვენ შეგვიძლია განტოლების ფესვი გამოვითვალოთ ნებსითი სიზუსტით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენ ზემოთ ვიგულისხმეთ, რომ $f''(x) \neq 0$. თუ $f''(x)=0$, მაშინ მრუდის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი იქნება ამავე დროს გადაღუნვის წერტილიც. მაშასადამე, მრუდს შეუძლია ჰქონდეს 35 *a* ან 35 *b* ნახაზზე მითითებული სახე. ამ შემთხვევაში-

x_1 უფრო მარტივად შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც ფესვი $\delta(x)=0$ განტოლებისა, სადაც $\delta(x)$ არის $f(x)$ და $f''(x)$ ფუნქციების უდიდესი საერთო გამყოფი.

მაგალითი: განვიხილოთ განტოლება:

$$x^3 - 2x - 2 = 0,$$

რომელიც ზემოთ განვიხილეთ. გამოვიყენებთ რა თავიდან ჰორნერის ხერხს, ადვილად ვიპოვით, რომ ამ განტოლების ფესვი (1,7; 1,8) შუალედში იმყოფება.

ამ შუალედში,

$$f'(x) < 0,\ f''(x) > 0.$$

მაშასადამე, მრუდი მიმართულია ამოზნექილობით ქვემოთ. ჯერ გამოვიყენოთ „ყალბი დებულების“ მეთოდი, დავუშვებთ რა $a = 1{,}7$, $b = 1{,}8$ ეს გვაძლევს $a_1=1{,}766\ldots$ (მნიშვნელობა ნაკლებობით).

ფესვს რომ დაუახლოვდეთ b მნიშვნელობიდან გამოვიყენოთ ნიუტონის მეთოდი; პირობა

$$\frac{f(b)}{f''(b)} > 0$$

აქ სრულდება. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ

$b_1 = 1{,}77$ (მნიშვნელობა ჭარბობით).

მაშასადამე, განტოლების ფესვი იმყოფება (a_1, b_1) შუალედში. ამ შუალედის მიმართ იგივე მეთოდი გამოვიყენოთ. ახლა „ყალბი დებულების“ ხერხი გვაძლევს

$$a_2=1{,}769293.$$

მეორე მხრივ, ნიუტონის ხერხის მიხედვით ვღებულობთ

$$b_2 = 1{,}769293.$$

თუ დავუშვებთ

$$x=\frac{a_2 + b_2}{2} = 1{,}769291,$$

მაშინ ცდომილება უკანასკნელი განრიგის ორერთეულს არ აღემატება.

სავარჯიშო.

1. ისარგებლებთ რა „ყალბი დებულების“ მეთოდით და ნიუტონის მეთოდით, გამოთვალეთ

$$x^3+1{,}25x-3{,}72 = 0$$

განტოლების ნამდვილი ფესვები ერთი მესამედის სიზუსტით (შედ. თ. V).

2. გამოთვალეთ

$$x^3 - 9x + 6 = 0$$

განტოლების ფესვები ოთხი სწორი ნიშნით (ეს ნიშნავს იმას, რომ ცდომილება არ უნდა აღემატებოდეს მეოთხე განრიგის ერთ ერთეულს, პირველი ნიშნადი ციფრიდან ათვლით).

3. გამოთვალეთ.

$$x^4-4x^3+x^2-3x+2=0$$

განტოლების ნამდვილი ფესვები ოთხი სწორი ნიშნით.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რა აზრით ამბობენ განტოლების ნამდვილი ფესვების საზღვრების შესახებ? როგორ უნდა ვიპოვოთ ეს საზღვრები?

2. რაში მდგომარეობს ფესვების განცალების ამოცანა?

3. რა შეიძლება ითქვას $f(x)$ ფუნქციის ფესვების შესახებ (a, b) შუალედში, თუ $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობანი სხვადასხვა ნიშნის არიან?

4. რა შეიძლება ითქვას ფუნქციის დადებითი და უარყოფითი ფესვების რიცხვის შესახებ ამ ფუნქციის თავისუფალი წევრის ნიშნის მიხედვით?

5. როგორ მიიღება შტურმის ფუნქციები? რა თვისებები აქვთ მათ?

6. შტურმის თეორემის დამტკიცების გეგმა?

7. რა საშიშროებას იწვევს ნიუტონის მეთოდით სარგებლობა ფესვების მიახლოებითი გამოთვლისათვის? რა პირობით შეიძლება ამ მეთოდით სარგებლობა?

თავი VII

დეტერმინანტების ძირითადი თვისებანი

§ 1. წრფივ განტოლებათა სისტემები

მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები

1. რამდენიმე განტოლებიდან ცვლადთა გამორიცხვის პრობლემას, უკვე უმარტივეს შემთხვევებში (შეად. თ. IV), მივყევართ საკმაოდ რთულ გამოთვლებამდე. მაგრამ არსებობს შემთხვევა, როდესაც ეს გამოთვლები ძალზე მარტივდება, — ეს არის შემთხვევა წრფივ განტოლებათა სისტემისა (ე. ი. პირველი ხარისხის განტოლებათა). იმავე დროს წრფივ განტოლებათა (და წრფივ ფუნქციათა) შესწავლა ფრიად მნიშვნელოვანია თავისი გამოყენებებით მათემატიკის სხვადასხვა დარგში. ჩვენ ვიცით, რომ სიბრტყეზე წრფის განტოლება დეკარტის კოორდინატებში არის წრფივი განტოლება:

$$ax+by=c.$$

სიბრტყეზე მდებარე ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი რომ ვიპოვოთ, ამისათვის საჭიროა ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$a_1x+b_1y=c_1,$$
$$a_2x+b_2y=c_2.$$

ანალოგიურად, სივრცეში სამი სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის მოძებნას მივყევართ სამ სამუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე.

შემდეგ, სიბრტყეზე მდებარე ხუთ მოცემულ წერტილზე გამავალი მეორე რიგის მრუდი რომ განვსაზღვროთ, საჭიროა ამოვხსნათ ხუთი ხუთუცნობიანი წრფივი განტოლება.

ჩვენ დავკმაყოფილდებით ამ მაგალითებით, თუმცა ადვილად შეიძლებოდა მათი რიცხვის გადიდება.

2. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას მივყევართ დეტერმინანტის ცნებამდე. ჯერ განვიხილოთ სისტემა ორი განტოლებისა ორი უცნობით:

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1,\\ a_2x+b_2y&=c_2. \end{aligned}$$

თუ პირველ განტოლებას b_2-ზე გავამრავლებთ, მეორეს — b_1-ზე და პირველ განტოლებას მეორეს გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$(2)\qquad (a_1b_2-a_2b_1)\,x=c_1b_2-c_2b_1.$$

ანალოგიურად ვიპოვით

$$(2')\qquad (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1).$$

(2) და (2') განტოლებანი წარმოადგენენ (1) განტოლებათა შედეგს; ეს ნიშნავს, რომ x-სა და y-ის იმ მნიშვნელობათა ყოველი წყვილი, რომლებიც (1) განტოლებებს აკმაყოფილებენ, აგრეთვე (2) და (2') განტოლებებსაც აკმაყოფილებენ. შებრუნებული დასკვნა ყოველთვის არაა სამართლიანი (შეად. ქვემოთ).

თუ $a_1b_2-a_2b_1$ გამოსახულება ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ (2) და (2') განტოლებებიდან ვღებულობთ

$$(3)\qquad x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

x-სა და y-ის ეს მნიშვნელობანი (2) და (2') განტოლებებს აკმაყოფილებენ; უშუალო ჩასმით შეიძლება შემოწმება, რომ ისინი აგრეთვე (1) განტოლებებსაც აკმაყოფილებენ.

ძნელი არაა იმის შემჩნევა, თუ რა კანონის მიხედვით არიან შედგენილი (3) გამოსახულებანი მოცემულ განტოლებათა კოეფიციენტებისაგან.

თუ ამოვიწერთ კოეფიციენტთა ცხრილს

$$A:\ \begin{matrix} a_1 & & b_1\\ & \times & \\ a_2 & & b_2, \end{matrix}$$

შევადგენთ ორ ნამრავლს „ჯვარედინად“ (a_1b_2 და a_2b_1) და პირველიდან მეორეს გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$a_1b_2 - a_2b_1$$

გამოსახულებას, რომელიც წარმოადგენს (3) წილადების საერთო მნიშვნელს. ამ გამოსახულებას ეწოდება A ცხრილიდან შედგენილი დეტერმინანტი (მეორე რიგის) და ასე აღინიშნება:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{4}$$

ანალოგიურად შეიძლება დავწეროთ

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

ახლა (3) ფორმულები შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{3'}$$

აღვნიშნოთ მეორე რიგის დეტერმინანტების ზოგიერთი თვისებანი.

1) თუ დეტერმინანტის სვეტებს ერთმანეთს შორის გადავანაცვლებთ, მაშინ ის ნიშანს შეიცვლის:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1),$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2) თუ რომელიმე სვეტის ელემენტები საერთო მამრავლს შეიცავს, მაშინ ეს მამრავლი შეიძლება დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ გავიტანოთ:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - ka_2b_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1).$$

კერძოდ, როდესაც $k=-1$ ვღებულობთ:

$$\begin{vmatrix} -a_1 & b_1 \\ -a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

3. ახლა განვიხილოთ სამუცნობიანი წრფივი სამი განტოლების სისტემა:

$$(5)\qquad \begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3. \end{aligned}$$

ეს სისტემა რომ ამოვხსნათ, გამოვიყენოთ განუსაზღვრელი მამრავლების ხერხი. (5) განტოლებანი გავამრავლოთ შესაბამად m_1-ზე, m_2-ზე, m_3-ზე და შევკრიბოთ:

$$(6)\qquad (a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3)x+(b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3)y+ \\ +(c_1m_1+c_2m_2+c_3m_3)z=d_1m_1+d_2m_2+d_3m_3.$$

m_1, m_2, m_3 მამრავლები ისე შევარჩიოთ, რომ y-სა და z-ის კოეფიციენტები უკანასკნელ ტოლობაში ნულად გადაიქცეს:

$$(7)\qquad \begin{aligned} b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3&=0, \\ c_1m_1+c_2m_2+c_3m_3&=0. \end{aligned}$$

დავუშვათ, რომ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია; მაშინ (7) განტოლებებიდან შესაძლებელი იქნება განვსაზღვროთ m_1 და m_2-ის შეფარდებანი m_3-თან:

$$(7')\qquad b_1\frac{m_1}{m_3}+b_2\frac{m_2}{m_3}+b_3=0,$$

$$c_1\frac{m_1}{m_3}+c_2\frac{m_2}{m_3}+c_3=0.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$(8)\qquad \frac{m_1}{m_3}=u, \qquad \frac{m_2}{m_3}=v,$$

მაშინ (7′) თანაფარდობანი მიიღებენ სახეს

$$b_1 u + b_2 v = -b_3,$$
$$c_1 u + c_2 v = -c_3.$$

ამ განტოლებებიდან ვპოულობთ (შეად. პ. 2):

$$u = \frac{\begin{vmatrix} -b_3 & b_2 \\ -c_3 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}},$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & -b_3 \\ c_1 & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}.$$

ამრიგად,

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{m_2}{m_3} = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}},$$

ანუ

$$\frac{m_1}{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{m_3}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{m_2}{-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{m_3}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}.$$

ამ ფარდობათა საერთო მნიშვნელობას k-თი თუ აღვნიშნავთ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{m_1}{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = -\frac{m_2}{\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{m_3}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = k,$$

ანუ

$$m_1 = k\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad m_2 = -k\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad m_3 = k\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

ამასთანავე k კოეფიციენტი სრულიად ნებსითი რჩება. თუ დავუშვებთ $k=1$, გვექნება:

$$m_1=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix},\quad m_2=-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix},\quad m_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (6)-ში ჩავსვამთ, მაშინ y-სა და z-ის კოეფიციენტები ნულად გადაიქცევა, და ჩვენ მივიღებთ:

(9) $$\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}\,x=$$
$$=d_1(b_2c_3-b_3c_2)-d_2(b_1c_3-b_3c_1)+d_3(b_1c_2-b_2c_1).$$

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ განტოლებანი y-სა და z-სათვის. თითოეული ამ განტოლებათაგანი წარმოადგენს (5) განტოლებათა შედეგს.

თუ x-ის კოეფიციენტი (9) განტოლებაში ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ ეს განტოლება შეიძლება x-ის მიმართ ამოვხსნათ:

(10) $$x=\frac{d_1b_2c_3-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1}.$$

განვიხილოთ ამ წილადის მნიშვნელი

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1.$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება დეტერმინანტი (მესამე რიგის), შედგენილი შემდეგი ცხრილიდან („მატრიციდან“):

(B) $$\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix}.$$

მაგრამ აუცილებელია განვასხვავოთ თვით ცხრილი და მისგან მიღებული დეტერმინანტი; უკანასკნელი აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

ამრიგად, თანახმად განმარტებისა, გვაქვს

$$(11)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

შევნიშნოთ, რო (10) წილადის მრიცხველი განსხვავდება მნიშვნელისაგან მხოლოდ მით, რომ კოეფიციენტები a_1, a_2, a_3 შეცვლილია შესაბამისად თავისუფალი d_1, d_2, d_3 წევრებით; ეს მრიცხველი აგრეთვე შეიძლება წარმოვიდგინოთ დეტერმინანტის სახით

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1.$$

ამრიგად, (10) თანაფარდობა შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

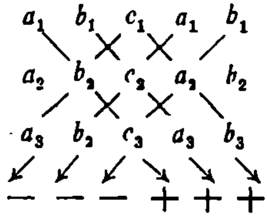
თანაგვარად მივიღებთ გამოსახვებს y-სა და z-სათვის:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

აუცილებელია აგრეთვე შევამოწმოთ, რომ ეს მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ გამოსავალ განტოლებათა სისტემას. ამ შემოწმებას ჩვენ შემდეგში შევასრულებთ ზოგადი შემთხვევისათვის.

მესამე რიგის დეტერმინანტის შესადგენად შეიძლება სარრუსის წესით ვისარგებლოთ. (B) ცხრილში შეიძლება ორი დიაგონა-

ლის გავლება, მთავარის ($a_1 \rightarrow b_2 \rightarrow c_3$) და არამთავარის ($a_3 \rightarrow b_2 \rightarrow c_1$). ახლა ($B$) ცხრილს მივუწეროთ მარჯვენიდან პირველი ორი სვეტი:

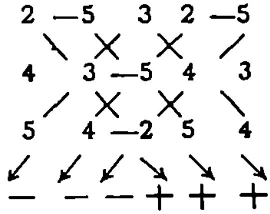


სქემა I.

ვადგენთ ელემენტების ნამრავლებს დიაგონალების მიხედვით; სამი ნამრავლი, რომლებიც მთავარი დიაგონალისა და მისი პარალელურის შესაბამისია, თავის ნიშნით აიღება, დანარჩენი სამი — შებრუნებული ნიშნით.

ჯამი ყველა ნამრავლისა, რომლებიც შესაბამისი ნიშნებით არის აღებული, გვაძლევს დეტერმინანტის მნიშვნელობას (შეად. ფორმულა 11); ასე მაგალითად, დეტერმინანტისათვის

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

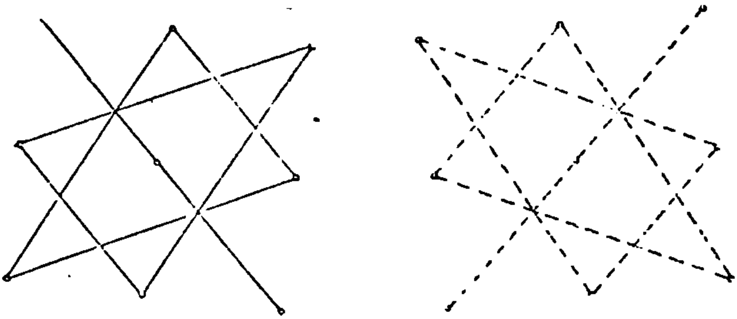


ვღებულობთ

$$D=2\cdot 3(-2)+(-5)\cdot(-5)\cdot 5+3\cdot 4\cdot 4-$$
$$-5\cdot 3\cdot 3-4(-5)\cdot 2-(-2)\cdot 4\cdot(-5)=$$
$$=-12+125+48-45+40-40=116.$$

შეიძლება მოვიყვანოთ კიდევ ერთი ხერხი, რომელიც არ მოითხოვს დამატებითი სვეტების მიწერას. აღვნიშნავთ (B) ცხრილში მთავარ დიაგონალთან ერთად ორ სამკუთხედს (იხ. სქემა II), რომელთა ფუძეები მისი (მთავარი დიაგონალის) პარალელურია; შესაბამისი ნამრავლები თავ-თავისი ნიშნით აიღება. მსგავსადვე არამთა-

ვარი დიაგონალი და ორი სამკუთხედი, რომელთა ფუძეები არამთავარი დიაგონალის პარალელურია, მოგვცემს იმ ნამრავლებს, რომლებიც შებრუნებული ნიშნით უნდა ავიღოთ.



სქემა II.

სავარჯიშო.

1. გამოითვალეთ დეტერმინანტები:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & b & -a \\ a & 0 & -b \end{vmatrix}$.

2. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

a) $3x + 2y - 4z = 8,$
$2x + 4y - 5z = 11,$
$4x - 3y + 2z = 1.$

ბ) $7x - 5y + 3z = 4,$
$4x + 3y - 5z = 2,$
$5x + 4y - 2z = 18.$

§ 2. მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების სტრუქტურის გამოკვლევა. დეტერმინანტის ზოგადი განმარტება

1. ჩვენ ახლა გამოვიკვლევთ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების სტრუქტურას, რათა შესაფერისი განზოგადების გზით მივიღოთ ნებისმიერი რიგის დეტერმინანტის განმარტება.

ჩვენ მოგვიხდება ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ საკითხებს:

a) რა ტიპის წევრები შედის დეტერმინანტის შემადგენლობაში?

b) რა წესის მიხედვით დაისმება ნიშანი ამ წევრების წინ?

პირველად განვიხილოთ მეორე რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

ეს დეტერმინანტი ორ წევრს შეიცავს:

(12) $$+a_1b_2 \text{ და } -a_2b_1.$$

თითოეული წევრი ორი ელემენტის ნამრავლს წარმოადგენს; ასეთი ნამრავლის ზოგადი სახე იქნება $a_\alpha b_\beta$.

a_α ელემენტი აღებულია პირველი სვეტიდან, b_β ელემენტი — მეორიდან. ჩვენ ყოველთვის დავწერთ ამ ელემენტებს **სვეტების მიყოლის რიგის მიხედვით.**

α და β ინდექსები სტრიქონების ნომერზე მიგვითითებს; ამ ინდექსებს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობანი: $\alpha=1$, $\beta=2$, ან $\alpha=2$, $\beta=1$. მეორე რიგის დეტერმინანტი ორ წევრს შეიცავს იმის გამო, რომ ორი ინდექსიდან შესაძლებელია ორი გადანაცვლება.

ახლა ყურადღება მივაქციოთ (12) წევრების ნიშნებს. ის წევრი, რომელშიაც 1 და 2 ინდექსები ერთმანეთს მიყვება ბუნებრივი რიგით, თავის ნიშნით აიღება. ის წევრი, რომელშიაც 1 და 2 ინდექსები მიდის შებრუნებული რიგით ანუ „ინვერსიას ჰქმნიან“ (სიტყვა „ინვერსია“ ნიშნავს შებრუნებას), შებრუნებული ნიშნით აიღება.

განვიხილოთ ახლა მესამე რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

ამ დეტერმინანტის თითოეული წევრი წარმოადგენს სამი ელემენტის ნამრავლს

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma.$$

ჩვენ ვწერთ ამ ელემენტებს **სვეტების მიყოლის რიგის მიხედვით.** α, β, γ ინდექსები ჰქმნიან ყოველგვარ გადანაცვლებას 1, 2, 3-დან. ამ გადანაცვლებათა რიცხვი ტოლია $3!=1\cdot2\cdot3=6$. ამის მიხედვით მესამე რიგის დეტერმინანტი ექვს წევრს შეიცავს.

ახლა ვნახოთ, რით განისაზღვრება ამ წევრების ნიშნები. დავიწყოთ მთავარი დიაგონალის ელემენტებით შედგენილ წევრიდან (მთავარი წევრი):

$$a_1b_2c_3.$$

ეს ნამრავლი დეტერმინანტში თავის ნიშნით შედის; მისი ინდექ-

სები ჩვეულებრივი რიგით მიდის, არ ჰქმნიან არც ერთ ინვერსიას. ავიღოთ რომელიმე სხვა წევრი, რომლის წინ „+“ ნიშანი არის; მაგალითად,

$$a_2b_3c_1.$$

აქ უკვე ინდექსები ჰქმნიან ინვერსიებს და ჩვენ შეგვიძლია დავითვალოთ, თუ რამდენია მათი რიცხვი. ამ მიზნისათვის განვიხილოთ სხვადასხვა წყვილი ინდექსებისა, შევინარჩუნებთ რა მათ დალაგებას:

2, 3 — რიგი
2, 1 — ინვერსია
3, 1 — ინვერსია.

ამრიგად, ინვერსიების რიცხვი 2-ის ტოლია. თუ განვიხილავთ $+ a_3b_1c_2$ წევრს, აქაც ინვერსიების რიცხვი 2-ის ტოლია.

ახლა ავიღოთ რომელიმე წევრთაგანი, რომლის წინ დგას ნიშანი „—“, მაგალითად,

$$- a_1b_3c_2.$$

აქ

$$\left.\begin{matrix} 1,\ 3 - \text{რიგი} \\ 1,\ 2 - \text{რიგი} \\ 3,\ 2 - \text{ინვერსია} \end{matrix}\right\} \text{ერთი ინვერსია გვაქვს.}$$

მსგავსადვე ვიპოვით, რომ $a_2b_1c_3$ წევრისათვის ინვერსიების რიცხვი 1-ის ტოლია, $a_3b_2c_1$ წევრისათვის იგი 3-ის ტოლია.

ახლა შევადგინოთ ცხრილი, რომელიც მიგვითითებს თითოეული წევრისათვის ინვერსიების რიცხვზე:

	ინვერსიების რიცხვი		ინვერსიების რიცხვი
$+ a_1b_2c_3$	0	$- a_1b_3c_2$	1
$+ a_2b_3c_1$	2	$- a_2b_1c_3$	1
$+ a_3b_1c_2$	2	$- a_3b_2c_1$	3

ჩვენ ვხედავთ, რომ, როდესაც ინვერსიების რიცხვი ლუწია, წევრის წინ „+“ ნიშანი დგას, ხოლო, როდესაც ინვერსიების რიცხვი კენტია, მაშინ „—“ ნიშანია.

ამრიგად,

(13) $$\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma$$

წევრის წინ მყოფი ნიშანი განისაზღვრება მისი α, β, γ ინდექსების გადანაცვლებით. თუ ეს გადანაცვლება ინვერსიების ლუწ რიცხვს შეიცავს, მაშინ წევრის წინ „$+$“ ნიშანის ასალები, წინააღმდეგ შემთხვევაში „$-$“ ნიშანი.

მესამე რიგის დეტერმინანტი წარმოადგენს (13) სახის ყველა იმ წევრთა ჯამს, რომლებიც აღებულია შესაფერი ნიშნებით:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_\alpha b_\beta c_\gamma.$$

2. ახლა ზოგად შემთხვევაზე გადასვლა ძნელი არ იქნება. დავუშვათ, რომ მოცემულია ცხრილი (მატრიცი) n^2 ელემენტისაგან:

(14) $$\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ . & . & . & . \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{Bmatrix}$$

ამ მატრიციდან დეტერმინანტი რომ შევადგინოთ, ჩვენ შევადგენთ ყოველგვარ სახის ნამრავლებს,

(15) $$\pm a_\alpha b_\beta \dots l_\lambda,$$

სადაც

(16) $$\alpha, \beta, \dots, \lambda$$

არის 1, 2, ..., n ინდექსების ნებსითი გადანაცვლება. თუ ეს გადანაცვლება ინვერსიების ლუწ რიცხვს შეიცავს, მაშინ წევრის წინ „$+$“ ნიშანი დაისმება, წინააღმდეგ შემთხვევაში „$-$“ ნიშანი. სხვა სიტყვებით, თუ (16) გადანაცვლება ინვერსიების ლუწ რიცხვს შეიცავს, მაშინ შესაბამისი ნამრავლი თავის ნიშნით აიღება, წინააღმდეგ შემთხვევაში—შებრუნებული ნიშნით. ამასთანავე არსებითია, რომ (15) ნამრავლის მამრავლები დალაგებულია სვეტების თანმიმდევრობის მიხედვით.

(15) სახის იმ წევრთა ჯამი, რომლებიც აღებულია სათანადო

ნიშნებით, წარმოადგენს, თანახმად განმარტებისა, (14) ცხრილის ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს:

$$
(17)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_\alpha\, b_\beta \dots l_\lambda\,*.
$$

a_1, b_2, ..., l_n ელემენტები დეტერმინანტის მთავარ დიაგონალს შეადგენს. ამ ელემენტების ნამრავლს a_1, b_2, ... l_n მთავარი წევრი ეწოდება.

n რიგის დეტერმინანტის წევრთა რიცხვი ტოლია n ელემენტიდან ყველა შესაძლებელ გადანაცვლებათა რიცხვისა, ე. ი. ტოლია $n!$-ისა. ამრიგად, მეოთხე რიგის დეტერმინანტი 24 წევრს შეიცავს, მეხუთე რიგის დეტერმინანტი — 120 წევრს და ა. შ. ასეთ „გამოსახულებათა" უშუალო გამოთვლა იქნებოდა ფრიად უსიამოვნო საქმე.

თეორიის ერთ-ერთი ამოცანათაგანი ის არის, რომ მოგვცეს პრაქტიკულად ვარგისი მეთოდები დეტერმინანტების გამოსათვლელად.

3. თუ საჭიროა განვსაზღვროთ დეტერმინანტის წევრის წინ მყოფი ნიშანი, მაშინ უნდა დავითვალოთ ინვერსიების რიცხვი მისი ინდექსების გადანაცვლებაში. ამ საკითხზე რამდენადმე ვრცლად შევჩერდეთ. თუ ჩვენ ვამბობთ, რომ (α, β) ინდექსები ინვერსიას ჰქმნიან. ეს იმას ნიშნავს, რომ ისინი დალაგებული არიან „შებრუნებული რიგით". ამასთანავე იგულისხმება, რომ ინდექსების რომელიმე განსაზღვრული დალაგება მიჩნეულია ნ ო რ მ ა ლ უ რ დალაგებად. თუ საუბარია დეტერმინანტის წევრების შესახებ, მაშინ ინდექსების ნორმალური დალაგება მთავარი წევრით განისაზღვრება. ამ-

---

* ამასთანავე უნდა გვახსოვდეს, რომ ჯამის ყოველი წევრის წინ მყოფი ნიშანი განისაზღვრება ინვერსიების რიცხვით ინდექსების გადანაცვლებაში. ამას ხაზი რომ გაუსვან, ზოგჯერ სარგებლობენ შემდეგი ჩაწერით:

$$D = \Sigma\, (-1)^{\sigma} a_\alpha\, b_\beta \dots l_\lambda,$$

სადაც σ ინვერსიების რიცხვია α, β, .., λ გადანაცვლებაში. მაშასადამე, თანამამრავლი $(-1)^{\sigma}$ ტოლია $+1$-ის ან -1 იმისდა მიხედვით, ინვერსიების რიცხვი ლუწია, თუ კენტი.

რიგად, (17) დეტერმინანტისათვის ინდექსების ნორმალური დალაგება იქნება

$$1, 2, 3, \ldots n^*.$$

ახლა განვიხილოთ იმავე α, β, ..., λ ინდექსების რომელიმე გადანაცვლება. ინვერსიის ცნება ყოველთვის შეეხება ორ ინდექსს, რომლებსაც მოცემულ გადანაცვლებაში გარკვეული ადგილი უკავიათ. ინვერსიების რიცხვი რომ დავითვალოთ, საჭიროა განვიხილოთ იმ ინდექსთა ყველა შესაძლო წყვილი, რომლებიც მოცემულ გადანაცვლებაში მონაწილეობს.

მაგალითად, გადანაცვლებაში

(18) $$4, 5, 1, 3, 2$$

ინდექსთა შემდეგი წყვილები ჰქმნიან ინვერსიას:

4,1	4,2	4,3
5,1	5,2	5,3.
	3,2	

ამრიგად, (18) გადანაცვლება 7 ინვერსიას შეიცავს.

ინვერსიების რიცხვის დათვლა უფრო მარტივად ასე სრულდება: ვიწყებთ ინდექსიდან 1. თუ a ინდექსი დგას 1-ის წინ, მაშინ წყვილი (a, 1) ინვერსიას ჰქმნის; ამიტომ იმ ინვერსიათა რიცხვი, რომლებიც შექმნილია სხვადასხვა ინდექსებით 1-თან, ტოლია იმ ინდექსთა რიცხვისა, რომლებიც დგანან მოცემულ გადანაცვლებაში ერთეულის წინ; ეს რიცხვი დავინიშნოთ და მოცემულ გადანაცვლებაში რიცხვი 1 ამოვშალოთ.

ახლა პირველ ინდექსად რიგის მიხედვით იქნება 2; თითოეული ინდექსთაგანი (რომლებიც დარჩა), ორიანის წინ მყოფი, მასთან ინვერსიას ჰქმნის; დავითვლით რა ამ ინდექსების რიცხვს, ამოვშლით 2-ს; ამის შემდეგ 3-ზე გადავდივართ და ა. შ.

ვთქვათ მაგალითად, გამოსათვლელია ინვერსიების რიცხვი გადანაცვლებაში

(19) $$2, 4, 5, 3, 1, 6, 7.$$

---

* შემდეგში (თუ საწინააღმდეგო ნათქვამი არ არის) დალაგება 1, 2, ..., n მიჩნეული იქნება ნორმალურ დალაგებად.

იმ ინდექსების რიცხვი, რომლების 1-ის წინ არის, 4-ის ტოლია. დავინიშნავთ რა ამ რიცხვს, ერთეულს ამოვშლით:

2, 4, 5, 3, 1, 6, 7.

ორიანის წინ არც ერთი ინდექსი არ არის; შეიძლება მისი ამოშლა:

2, 4, 5, 3, 1, 6, 7.

ახლა 3-ის წინ ორი ინდექსი არის, ამ რიცხვს დავინიშნავთ და 3-ს ამოვშლით. დანარჩენი ინდექსი ინვერსიას არ ჰქმნის. მაშასადამე, მოცემულ გადანაცვლებაში ინვერსიების საერთო რიცხვი ტოლია $4+2=6$.

სავარჯიშო.

განსაზღვრეთ ინვერსიების რიცხვი თითოეულ შემდეგ გადანაცვლებაში:

1) 9, 1, 8, 2, 7, 3, 6, 4, 5; 2) 8, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3; 3) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 4) $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$.

4. ყველა გადანაცვლება n ინდექსიდან შეიძლება დავყოთ ორ კლასად იმისდა მიხედვით, ინვერსიების რიცხვი ლუწია, თუ კენტი.

თუ გადანაცვლება ინვერსიების ლუწ რიცხვს შეიცავს, მაშინ მას ლუწოვანი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში — კენტოვანი.

ასე, მაგალითად, გადანაცვლება (19) — ლუწოვანია, ვინაიდან იგი 6 ინვერსიას შეიცავს; გადანაცვლება (18) — კენტოვანია (7 ინვერსია).

ვნახოთ, რა დაემართება გადანაცვლებას, თუ რომელიმე ორ ინდექსს ერთმანეთის ადგილზე გადავსვამთ. პირველად კერძო შემთხვევა განვიხილოთ; ავიღოთ გადანაცვლება (კენტოვანი)

(18) 4, 5, 1, 3, 2

და ერთმანეთის ადგილზე გადავსვათ 5 და 3; მაშინ ჩვენ მივიღებთ გადანაცვლებას:

4, 3, 1, 5, 2,

რომელიც 6 ინვერსიას შეიცავს. ეს გადანაცვლება ლუწოვანია. ამრიგად, კენტოვანი გადანაცვლება ლუწოვანად გადაიქცა: მან „ხასიათი შეიცვალა“. დავამტკიცოთ, რომ ეს შედეგი შემთხვევითი არაა. წინასწარ შემოვიღოთ კიდევ ახალი ტერმინი.

იმ ოპერაციას, რომლის საშუალებით ვახდენთ ორი ინდექსის ურთიერთ გადანაცვლებას, **ტრანსპოზიცია*** ეწოდება.

ახლა ჩვენ შემდეგი დებულება დავამტკიცოთ:

ყოველი ტრანსპოზიცია გადანაცვლების ხასიათს ცვლის, ე. ი. ლუწოვანი გადანაცვლება გადაყავს კენტოვანში და პირიქით.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია გადანაცვლება

$$\alpha, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots, \rho, \sigma, \tau, \ldots, \omega. \tag{20}$$

შევასრულოთ ტრანსპოზიცია (μ, σ), ე. ი. ურთიერთ გადავსვათ ინდექსები μ და σ:

$$\alpha, \ldots, \lambda, \sigma, \nu, \ldots, \rho, \mu, \tau, \ldots, \omega. \tag{21}$$

ვნახოთ, თუ როგორ შეიცვლება ინვერსიების რიცხვი ამ დროს.

ყველა განსახილავი ინდექსი შეიძლება დავყოთ ორ ჯგუფად:

1) μ-სა და σ-ს შორის დალაგებული ინდექსები (შუალედური ინდექსები),

2) (20) გადანაცვლებაში მყოფი ინდექსები σ-დან მარჯვნით ან μ-დან მარცხნით.

თუ μ და σ ინდექსებს ურთიერთ გადავსვამთ, მაშინ იმ ინვერსიების რიცხვი, რომლებსაც რომელიმე ამ ინდექსთაგანი ჰქმნის მეორე ჯგუფის ინდექსებთან, არ შეიცვლება.

ამის თქმა არ შეიძლება იმ ინვერსიების შესახებ, რომელსაც μ და σ ჰქმნის შუალედური ჯგუფის ინდექსებთან. ტრანსპოზიციის შედეგად შეიცვალა μ ინდექსისა (ან σ-ს) და შუალედური ინდექსების ურთიერთ მდებარეობა. ამიტომ შუალედურ ინდექსებს შორის ის ინდექსები, რომლებმაც (20) გადანაცვლებაში შექმნეს ინვერსია μ ინდექსთან (ან σ-სთან), (21) გადანაცვლებაში უკვე არ იძლევა ინვერსიებს იმავე ინდექსთან და პირიქით.

შუალედური ინდექსების რიცხვი აღვნიშნოთ k-თი. თუ ამათგან p ინდექსმა ტრანსპოზიციამდის μ ინდექსთან ინვერსიები შექმნა, მაშინ ტრანსპოზიციის შემდეგ ისინი უკვე არ ჰქმნიან ინვერსიებს იმავე ინდექსთან; პირიქით, დანარჩენი $k-p$ ინდექსი ტრანსპოზიციის შემდეგ ჰქმნის ინვერსიებს μ-სთან, ე. ი. (21) გადანაცვლებაში.

---

* აუცილებელია გარკვეულად განვასხვაოთ ტრანსპოზიცია ინვერსიისაგან. ინვერსიები ინდექსების დალაგებით განისაზღვრებიან; ტრანსპოზიცია ოპერაციაა, რომელსაც ჩვენ ვასრულებთ ამ ინდექსებზე.

თანაგვარადვე, თუ აღვნიშნავთ q-თი იმ შუალედურ ინდექსთა რიცხვს, რომლებმაც (20) გადანაცვლებაში μ ინდექსთან ინვერსიები შექმნა, მაშინ ტრანსპოზიციის შემდეგ (21) გადანაცვლებაში ინვერსიების რიცხვი შუალედურ ინდექსთა და σ იდექსს შორის იქნება $k-q$.

ამრიგად ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

	μ ინდექსის ინვერსიების რიცხვი შუალედურ ინდექსებთან	σ ინდექსის ინვერსიების რიცხვი შუალედურ ინდექსებთან	μ-სა σ-ს ინვერსიების რიცხვი შუალედურ ინდექსებთან
ტრანსპოზიციამდის	p	q	$p+q$
ტრანსპოზიციის შემდეგ	$k-p$	$k-q$	$2k-(p+q)$

ეს ცხრილი გვიჩვენებს, რომ იმ ინვერსიათა რიცხვი, რომლებსაც გვაძლევს μ და σ ინდექსები შუალედურ ინდექსებთან ტრანსპოზიციის შემდეგ შეიცვალა

$$[2k-(p+q)]-(p+q)=2(k-p-q)$$

რიცხვით.

ახლა უნდა გავითვალისწინოთ μ და σ ინდექსების ერთმანეთთან დამოკიდებულება. თუ ტრანსპოზიციამდის ისინი ინვერსიას ჰქმნიდენ, მაშინ ტრანსპოზიციის შემდეგ ისინი მას არ ჰქმნიან, და პირიქით. ამიტომ ინვერსიების რიცხვი ტრანსპოზიციის შემდეგ კიდევ გადიდდება ან შემცირდება ერთით.

რაც შეეხება ინვერსიებს, რომლებშიაც μ და σ არ მონაწილეობს, მათი რიცხვი უცვლელი დარჩება.

მივიღებთ რა მხედველობაში ყველა ზემოთქმულს, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ტრანსპოზიციის შემდეგ იგი კენტი (შესაბამისად ლუწი) გახდება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ (20) გადანაცვლება ლუწოვანი იყო, მაშინ (21) გადანაცვლება კენტოვანი იქნება და პირიქით.

სწორედ ეს ნიშნავს, რომ ტრანსპოზიციის შედეგად გადანაცვლება თავის ხასიათს იცვლის.

ჩვენ მკითხველს ვურჩევთ ვარჯიშობის სახით ჩაატაროს წინა დამტკიცება კონკრეტულ მაგალითზე.

აღვნიშნოთ ზოგიერთი შედეგი დამტკიცებული თეორემიდან.

ტრანსპოზიციის წყვილი რიცხვი არ ცვლის გადანაცვლების ხასიათს; ტრანსპოზიციის კენტი რიცხვი ცვლის გადანაცვლების ხასიათს.

მართლაც, შევასრულებთ რა ტრანსპოზიციის ლუწ რიცხვს, ჩვენ ლუწ რიცხვჯერ ვცვლით გადანაცვლების ხასიათს, ე. ი. მას უცვლელად ვტოვებთ.

ერთი გადანაცვლებიდან იმავე ხასიათის მეორე გადანაცვლებაზე რომ გადავიდეთ, საჭიროა ტრანსპოზიციების ლუწი რიცხვი; სხვა ხასიათის გადანაცვლებაზე რომ გადავიდეთ, საჭიროა ტრანსპოზიციების კენტი რიცხვი.

ვინაიდან ბუნებრივი დალაგება

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

ლ უ წ ო ვ ა ნ გადანაცვლებათა რიცხვს ეკუთვნის (0 ინვერსია), ამიტომ წინანდელიდან გამომდინარეობს:

$\frac{\text{წყვილი}}{\text{კენტი}}$ გადანაცვლებიდან ბუნებრივ დალაგებაზე (ან შებრუნებულად) რომ გადავიდეთ, საჭიროა ტრანსპოზიციების $\frac{\text{ლუწი}}{\text{კენტი}}$ რიცხვი.

გავაშუქოთ ეს მაგალითზე. ლუწოვანი გადანაცვლებიდან

$$5,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4, \tag{22}$$

რომელიც 6 ინვერსიას შეიცავს, ნორმალურ გადანაცვლებაზე რომ გადავიდეთ, საჭიროა ტრანსპოზიციების ლუწი რიცხვი. თვით გადასვლა შემდეგნაირად შეიძლება განვახორციელოთ.

უპირველეს ყოვლისა 1-ს პირველ ადგილზე გადავიტანთ (1,5) ტრანსპოზიციის საშუალებით:

$$1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 4.$$

ახლა 2-ს თავის ადგილზე გადავიტანთ; ამ მიზნისათვის (2, 3) ტრანსპოზიციას შევასრულებთ:

$$1,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4.$$

შემდეგი ნაბიჯი (3, 5) გვაძლევს:

1, 2, 3, 5, 4.

გვრჩება შევასრულოთ (4, 5) ტრანსპოზიცია და ჩვენ ბუნებრივ დალაგებას მივიღებთ. ამრიგად, (22) გადანაცვლებიდან ბუნებრივ დალაგებაზე გადავედით ოთხი ტრანსპოზიციით.

სავარჯიშო.

1. ტრანსპოზიციების დახმარებით შეასრულეთ გადასვლა ბუნებრივ დალაგებაზე შემდეგ გადანაცვლებიდან:

a) 6, 1, 5, 2, 4, 3; *b*) 2, 4, 5, 3, 1, 6, 7.

2. ტრანსპოზიციების საშუალებით შეასრულეთ გადასვლა ნატურალური დალაგებიდან გადანაცვლებებზე:

a) 4, 5, 1, 3, 2; *b*) 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

5. ჩვენ ვიცით, რომ, როდესაც $n = 3$, ლუწოვანი გადანაცვლებათა რიცხვი კენტოვან გადანაცვლებათა რიცხვის ტოლია (შეად. ცხრილი 1 პ.). ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს თვისება უცვლელი რჩება ინდექსების ნებისმიერი რიცხვისათვის.

n ინდექსიდან ყველა ლუწოვან გადანაცვლებათა რიცხვი ტოლია ყველა კენტოვან გადანაცვლებათა რიცხვისა (მაშასადამე, ტოლია $\frac{n!}{2}$ რიცხვისა).

დამტკიცება. დავამტკიცოთ, რომ ლუწოვან გადანაცვლებათა რიცხვი არ შეიძლება მეტი იყოს ვიდრე კენტოვან გადანაცვლებათა რიცხვი. ვთქვათ,

(23) $$P_1, P_2, \ldots, P_k$$

არის ყველა სხვადასხვა ლუწოვანი გადანაცვლებანი. თითოეულ ამ გადანაცვლებათაგანში ერთი და იგივე ტრანსპოზიცია შევასრულოთ, მაგალითად (1, 2). მაშინ (23)-დან აღებული თითოეული გადანაცვლებათაგანი თავის ხასიათს შეცვლის, და ჩვენ k კენტოვან გადანაცვლებას მივიღებთ:

(23′) $$P'_1, P'_2, \ldots, P'_k.$$

ძნელი არ არის იმის შემჩნევა, რომ ყველა ეს გადანაცვლებანი სხვადასხვა არის. მართლაც, რომელიმე ორი გადანაცვლება (23′) მწკრივში

ერთნაირი რომ ყოფილიყო, მაშინ (23) მწკრივში შესაბამი გადანაცვლებები ერთნაირი იქნებოდა ვინაიდან ყველა (23′) გადანაცვლებანი მიიღება (23)-დან ერთი და იგივე ტრანსპოზიციის საშუალებით; ჩვენ კი დავუშვით, რომ (23)-ის ყველა გადანაცვლება სხვადასხვაა.

ამრიგად, (23′) მწკრივში k სხვადასხვა კენტოვანი გადანაცვლებანი გვაქვს. აქედან გამომდინარეობს, რომ კენტოვან გადანაცვლებათა რიცხვი არ შეიძლება ნაკლები იყოს ლუწოვან გადანაცვლებათა რიცხვზე. თანაგვარად დავამტკიცებთ, რომ კენტოვან გადანაცვლებათა რიცხვი არ შეიძლება მეტი იყოს ლუწოვან გადანაცვლებათა რიცხვზე. მაშასადამე, ორივე რიცხვი ერთმანეთის ტოლია.

§ 3. ჩასმები. ციკლებად დაშლა

1. განვიხილოთ რაიმე ორი წევრი, რომლებიც შედიან მესამე რიგის დეტერმინანტის შემადგენლობაში, მაგალითად,

$$a_1\ b_2\ c_3 \text{ და } a_2\ b_3\ c_1.$$

პირველი წევრიდან მეორეზე რომ გადავიდეთ, საკმარისია შევცვალოთ

ინდექსი 1 ინდექსით 2,
ინდექსი 2 ინდექსით 3,
ინდექსი 3 ინდექსით 1.

ეს შეცვლა სქემატურად შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$1 \longrightarrow 2,\ 2 \longrightarrow 3,\ 3 \longrightarrow 1.$$

ამბობენ, რომ ჩვენ ვახდენთ **ჩასმას**, რომელიც ცვლის ინდექს 1-ს ინდექსით 2, ინდექს 2-ს ინდექსით 3 და ინდექს 3-ს ინდექსით 1. ასეთი ჩასმა შეიძლება შემდეგი სიმბოლოთი გამოვსახოთ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

აქ თითოეული ინდექსის ქვევით დაწერილია ის ინდექსი, რომელიც მას ცვლის.

განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, საჭიროა გადავიდეთ

$$a_\alpha\ b_\beta\ c_\gamma\ \ldots\ l_\lambda$$

ნამრავლიდან, სადაც $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ არის რაიმე გადანაცვლება 1, 2, 3, ..., n ინდექსებისა, ნამრავლზე

$$a_{\alpha'}, b_{\beta'}, c_{\gamma'}, \ldots, l_{\lambda'},$$

სადაც $\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda'$ — იმავე ინდექსების გადანაცვლებაა.

ამ მიზნისათვის საკმარისია შევცვალოთ α ინდექსი α' ინდექსით, β ინდექსი β' ინდექსით, და ა. შ., რაც სქემატურად ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\alpha \to \alpha', \ \beta \to \beta', \ \gamma \to \gamma', \ldots, \lambda \to \lambda'.$$

ოპერაციას, რომლის საშუალებით ჩვენ ვახდენთ ამ შეცვლას, **ჩასმა** ეწოდება.

ამრიგად, **ჩასმას უწოდებენ ოპერაციას, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ სისტემის ყოველი ინდექსი უნდა შეიცვალოს იმავე სისტემის გარკვეული ინდექსით, მასთან ერთმანეთისაგან განსხვავებული ინდექსები უნდა იქნეს შეცვლილი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ინდექსებით.**

ჩასმა, რომელიც ცვლის α ინდექსს α' ინდექსით, β ინდექსს β' ინდექსით, ..., λ ინდექსს λ' ინდექსით, შეიძლება გამოსახული იქნეს შემდეგი სიმბოლოთი:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

აუცილებელია აქვე აღვნიშნოთ, რომ ერთი და იგივე ჩასმა შეიძლება სხვადასხვა წესით ჩაიწეროს. მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

სიმბოლოები ერთსა და იმავე ჩასმას გამოსახავენ, სახელდობრ ჩასმას, რომელიც ცვლის ინდექს 1-ს ინდექსით 4, ინდექს 2-ს ინდექსით 3, ინდექს 3-ს ინდექსით 2, ხოლო ინდექს 4-ს ინდექსით 1:

$$1 \to 4, \ 2 \to 3, \ 3 \to 2, \ 4 \to 1.$$

იგივე ჩასმა შეგვიძლია გამოვსახოთ სიმბოლოთი:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

საზოგადოდ, ჩასმა

$$\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma \ldots \lambda \\ \alpha'\ \beta'\ \gamma' \ldots \lambda' \end{pmatrix}$$

შეიძლება ჩაწერილი იქნეს შემდეგ თანაფარდობათა საშუალებით:

$$\alpha \to \alpha', \ \beta \to \beta', \ \gamma \to \gamma', \ \ldots, \ \lambda \to \lambda'.$$

ცხადია, რომ რიგს, რომლის მიხედვით ჩაწერილია ეს თანაფარდობანი, არ აქვს მნიშვნელობა. ამიტომ მნიშვნელობა არ აქვს ჩვეტების რიგსაც სიმბოლოში:

$$\begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma \ldots \lambda \\ \alpha'\ \beta'\ \gamma' \ldots \lambda' \end{pmatrix}.$$

ვისარგებლებთ რა ამით, ჩვენ შეგვიძლია ერთი სტრიქონის ინდექსები, მაგალითად ზედასი, ჩავწეროთ ნებისმიერი რიგით. თავისთავად ცხადია, რომ ქვედა სტრიქონების ინდექსების რიგი ამით უკვე სავსებით განისაზღვრება. კერძოდ, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ჩასმა ისე დავწეროთ, რომ ზედა სტრიქონის ინდექსები დალაგებული იყოს ბუნებრივი რიგით.

ჩაწერის ასეთ ფორმას ვუწოდოთ ჩასმის ნორმალური სახე. მაგალითად, ჩასმისათვის

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ნორმალური სახე არის

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ არის რაიმე გადანაცვლება $1, 2, \ldots, n$ ინდექსებისა. ამ გადანაცვლებას შევუსაბამოთ გარკვეული ჩასმა, სახელდობრ ის, რომელსაც ნორმალური სახე აქვს:

(24)
$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots n \\ \alpha\ \beta\ \gamma \ldots \lambda \end{pmatrix}.$$

პირიქით, თუ მოცემულია (24) ჩასმა, მაშინ სავსებით განსაზღვ-

რული იქნება $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ გადანაცვლება. ამრიგად, გადანაცვლებათა და ჩასმათა შორის შეგვიძლია დავამყაროთ ურთიერთ ცალსახა თანადობა.

აქედან გამომდინარეობს, რომ n **ინდექსის ერთმანეთისაგან განსხვავებული ჩასმათა რიცხვი $n!$-ის ტოლია.**

ჩასმამ შეიძლება დატოვოს ზოგიერთი ინდექსები თავიანთ ადგილებზე. მაგალითად, ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ტოვებს 2, 4 ინდექსებს თავიანთ ადგილებზე. ჩასმის ჩაწერის დროს ასეთ ინდექსებს ხშირად არ სწერენ. მაგალითად, წინა ჩასმა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

თავისთავად ცხადია, რომ ასეთი ჩაწერა არ იქნება ჩასმის ნორმალური სახე. მოვიყვანოთ კიდევ მაგალითი. ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

თავის ადგილზე ტოვებს 1, 3, 5 ინდექსებს. ეს ჩასმა ტოლფასია ორი ინდექსის ტრანსპოზიციისა:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, ტრანსპოზიცია წარმოადგენს ჩასმის კერძო შემთხვევას.

ჩასმას

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

რომელიც ყველა ინდექსს თავიანთ ადგილზე სტოვებს, **იგივური ანუ ერთეული ჩასმა** ეწოდება.

2. თუ მოცემულია $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ინდექსებზე დამოკიდებული რაიმე გამოსახულება

$$A_{\alpha\beta\ldots\lambda},$$

მაშინ ამ გამოსახვისადმი $S=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \dots & \lambda\\ \alpha' & \beta' & \dots & \lambda'\end{pmatrix}$ ჩასმის გამოყენება ნიშნავს $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ ინდექსების შეცვლას შესაბამისად $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$ ინდექსებით. შედეგად მივიღებთ

$$A_{\alpha'\beta'\dots\lambda'}$$

გამოსახვას.

მაგალითად, გამოვიყენებთ რა

$$a_1b_2c_3 - a_2b_3c_1$$

გამოსახვისადმი $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\ 3\,1\,2\end{pmatrix}$ ჩასმას, მივიღებთ გამოსახულებას:

$$a_3b_1c_2 - a_1b_2c_3.$$

თუ

(I) $$a_\alpha b_\beta c_\gamma \dots l_\lambda$$

ნამრავლისადმი გამოვიყენებთ

$$S=\begin{pmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\dots\lambda\\ \alpha'\,\beta'\,\gamma'\dots\lambda'\end{pmatrix}$$

ჩასმას, მივიღებთ

(II) $$a_{\alpha'}b_{\beta'}c_{\gamma'}\dots l_{\lambda'}$$

ნამრავლს.

ახლა, თუ ამ ნამრავლისადმი გამოვიყენებთ

$$T=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' & \gamma'\dots\lambda'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\dots\lambda''\end{pmatrix}$$

ჩასმას, მივიღებთ

(III) $$a_{\alpha''}b_{\beta''}c_{\gamma''}\dots l_{\lambda''}$$

ნამრავლს.

ამრიგად, (III) ნამრავლი მიიღება (I)-დან S და T ჩასმათა მიმდევრობითი გამოყენებით. ადვილი შესამჩნევია, რომ (III) ნამრავლი შეიძლება მივიღოთ (I)-დან უშუალოდ, თუ (I) ნამრავლისადმი გამოვიყენებთ ჩასმას:

$$P=\begin{pmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\dots\lambda\\ \alpha''\beta'\gamma''\dots\lambda''\end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, S და T ჩასმათა მიმდევრობითი გამოყენება ტოლფასია ერთი P ჩასმის გამოყენებისა.

ამრიგად, ნებისმიერ ორ S და T ჩასმას, რომლებიც გარკვეული რიგით არიან აღებული, შეგვიძლია შევუსაბამოთ გარკვეული მესამე ჩასმა, რომლის შესრულება ტოლფასია ორი წინა ჩასმის მიმდევრობით შესრულებისა (მოცემულ რიგით). ამას მივყევართ ორი ჩასმის ნამრავლის ცნებამდე.

P ჩასმას ეწოდება ნამრავლი S ჩასმისა T ჩასმაზე და აღინიშნება ST სიმბოლოთი („მამრავლთა" რიგს აქ არსებითი მნიშვნელობა აქვს), თუ P ჩასმის შესრულება ტოლფასია S და T ჩასმათა თანმიმდევრობითი შესრულებისა (სახელდობრ ამ რიგით).

ამრიგად, თუ

$$S=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots & \lambda' \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots & \lambda' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \dots & \lambda'' \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$ST=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots & \lambda \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \dots & \lambda'' \end{pmatrix}.$$

ზემონათქვამის თანახმად, ST **ჩასმა მიიღება S და T ჩასმებიდან შემდეგნაირად: თუ S ჩასმა ცვლის რაიმე α ინდექსს α' ინდექსით, ხოლო T ჩასმა ცვლის ამ α' ინდექსს α'' ინდექსით, მაშინ ST ჩასმა ცვლის α ინდექსს α'' ინდექსით.**

ჩასმათა ნამრავლის ცნება მაგალითზე გავაშუქოთ. ვთქვათ,

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

S ჩასმა ცვლის ინდექს 1-ს ინდექსით 5, ხოლო T ჩასმა ცვლის ინდექს 5-ს ინდექსით 2. მაშასადამე, ST ჩასმა ცვლის ინდექს 1-ს ინდექსით 2; შემდეგ, S ჩასმა ცვლის ინდექს 2-ს ინდექსით 3, ხოლო T ჩასმა ცვლის ინდექს 3-ს ინდექსით 4. მაშასადამე, ST ცვლის ინდექს 2-ს ინდექსით 4 და ა. შ. ამგვარად ვღებულობთ:

$$ST=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

ST ჩასმის შედგენა შეგვიძლია გავამარტივოთ, თუ ვისარგებლებთ შემდეგი შენიშვნებით: რადგანაც ჩასმის სიმბოლოში სვეტების რიგს

მნიშვნელობა არ აქვს, ამიტომ T ჩასმის სვეტები ყოველთვის შეგვიძლია დავალაგოთ ისე, რომ ამ ჩასმის ზედა სტრიქონის ინდექსები დაემთხვეს S ჩასმის ქვედა სტრიქონის ინდექსების რიგს. გავაკეთოთ ეს წინა მაგალითისათვის:

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

ახლა ST ჩასმა უშუალოდ მიიღება, თუ S-ის ზედა სტრიქონის ქვეშ მივუწერთ T ჩასმის ქვედა სტრიქონს:

$$ST=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

ვნახოთ ახლა, თუ რა შეიძლება ითქვას ჩასმათა „ნამრავლის“ თვისებათა შესახებ.

1. კომუტატივობის თვისება ჩასმათა ნამრავლისათვის, საზოგადოდ, **არ სრულდება.**

ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია შევადგინოთ ზემოთ განხილული ორი ჩასმის ნამრავლი, მხოლოდ თანამამრავლთა რიგი შევცვალოთ:

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3\end{pmatrix},$$

$$TS=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ TS ჩასმა განსხვავებულია ST ჩასმისაგან.

მაგრამ შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ რაიმე ორი ჩასმის ნამრავლი უცვლელი დარჩეს თანამამრავლთა რიგის შეცვლის დროს. მაგალითად, ვთქვათ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

შევადგენთ რა AB და BA ნამრავლებს, მივიღებთ:

$$AB=BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

ორი A და B ჩასმას, რომელთათვის ადგილი აქვს $AB=BA$ თანატოლობას, ეწოდებათ კომუტატიური.

2. ჩასმათა ნამრავლს აქვს ასოციატივობის თვისება. მართლაც, განვიხილოთ სამი ნებისმიერი ჩასმა A, B და C. ეს ჩასმები ყოველთვის შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha & \beta & \dots & \lambda\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \dots & \lambda\\ \alpha' & \beta' & \dots & \lambda'\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' & \dots & \lambda'\\ \alpha'' & \beta'' & \dots & \lambda''\end{pmatrix}.$$

შევადგინოთ ახლა ნამრავლები $(AB)C$ და $A(BC)$:

$$(AB)C=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha' & \beta' & \dots & \lambda'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' & \dots & \lambda'\\ \alpha'' & \beta'' & \dots & \lambda''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha'' & \beta'' & \dots & \lambda''\end{pmatrix},$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha & \beta & \dots & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \dots & \lambda\\ \alpha'' & \beta'' & \dots & \lambda''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha'' & \beta'' & \dots & \lambda''\end{pmatrix}.$$

ამრიგად, $A(BC)$ ჩასმა ემთხვევა $(AB)C$ ჩასმას:

$$A(BC)=(AB)C.$$

რამდენიმე ჩასმათა ნამრავლი განისაზღვრება თანმიმდევრობითი გადამრავლებით:

$$ABC=(AB)C,$$
$$ABCD=(ABC)D.$$

შეიძლება ჩვენება იმისა, რომ ასოციატივობის თვისება ძალაში რჩება თანამამრავლთა ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაშიაც. ჩვენ ამას აქ არ გავაკეთებთ, ვინაიდან შემდეგში ჩვენ მოვიყვანთ დამტკიცებას უფრო ზოგად შემთხვევისათვის (თავი VIII, § 4, მაგალითი 4, პ. 1, აგრეთვე პ. 2).

ახლა ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ჩასმის ხარისხი ნატურალური მაჩვენებლით: A^m სიმბოლოს ქვეშ, სადაც m — ნატურალური რიცხვია, ჩვენ გვესმის, ნამრავლი A-ს ტოლი m თანამამრავლისა.

მაშინ, როგორც ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, გვექნება:

$$A^kA^l=A^lA^k=A^{k+l}.$$

მაშასადამე, ერთი და იგივე ჩასმის ხარისხები ყოველთვის კომუტატიურია.

3. თუ E არის იგივური ჩასმა, მაშინ ნებისმიერი A ჩასმისათვის გვაქვს:

$$AE = EA = A.$$

მართლაც, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \end{pmatrix} = A$$

თუ ახლა იგივურ E ჩასმას ჩავწერთ

$$E = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \lambda \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

სახით, მაშინ ვიპოვით:

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \lambda \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \end{pmatrix} = A.$$

4. ყოველი A ჩასმისათვის არსებობს ეგრეთ წოდებული შექცეული ჩასმა, რომელიც აღინიშნება A^{-1}-ით; ეს ჩასმა აკმაყოფილებს თანაფარდობებს:

$$AA^{-1} = E, \quad A^{-1}A = E.$$

ვთქვათ, მოცემულია ჩასმა

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \dots & \lambda' \end{pmatrix}.$$

დავუშვათ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \dots & \lambda' \\ \alpha & \beta & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

თუ A ჩასმა ცვლის რაიმე α ინდექსს α' ინდექსით, მაშინ ჩასმა A^{-1}, პირიქით, α' ინდექსს ცვლის α ინდექსით.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ AA^{-1} ნამრავლი ინარჩუნებს თავის ადგილზე ყველა ინდექსს, ე. ი. ეს ნამრავლი წარმოადგენს იგივურ ჩასმას:

$$AA^{-1}=E.$$

A^{-1} ჩასმის შებრუნებული ჩასმა არის A:

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

მაშასადამე,

$$A^{-1}A=E.$$

მაგალითი.

თუ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. შემოვიღოთ მნიშვნელოვანი ცნება ციკლური ანუ წრიული ჩასმის შესახებ. ვთქვათ, გვაქვს k ინდექსი, რომლებიც მოცემულია გარკვეული რიგით:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k.$$

ამ ინდექსების წრიული ჩასმა ეწოდება ისეთ ჩასმას, რომელიც ცვლის ყოველ $\alpha_1, \ldots \alpha_{k-1}$ ინდექსს მათი მომდევნოთი, ხოლო უკანასკნელ α_k ინდექსს — პირველი α_1 ინდექსით:

$$C=\begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1} \alpha_k \\ \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_k \alpha_1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

ასე მაგალითად, ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

წარმოადგენს წრიულ ჩასმას 1, 3, 5 ინდექსებისას.

ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

წარმოადგენს წრიულ ჩასმას 2, 4, 6, 3 ინდექსებისას.

წრიული ჩასმა (25) მოკლედ ასე აღინიშნება:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1} \alpha_k).$$

ამრიგად:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5),$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 6\ 3).$$

წრიული ჩასმა k ინდექსებისა იწოდება სხვანაირად k წევრა-ციკლად ან k — წ ე ვ რ ა წ რ ე დ ა დ.

ასე, მაგალითად, ჩასმა (1 3 5) წარმოადგენს სამწევრა ციკლს. ორწევრა ციკლი, ე. ი. ორი ინდექსის წრიული ჩასმა წარმოადგენს უბრალოდ ამ ინდექსების ტრანსპოზიციას:

$$(\alpha_1\ \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

ერთწევრა ციკლი (α_1) ნიშნავს იმას, რომ α_1 ელემენტი რჩება თავის ადგილზე.

შევნიშნოთ, რომ წრიული ჩასმა

$$C = (\alpha_1\,\alpha_2\ \ldots\ \alpha_{k-1}\,\alpha_k) = \begin{pmatrix} \alpha_1\,\alpha_2 & \ldots & \alpha_{h-1}\,\alpha_h & \ldots & \alpha_{k-1}\,\alpha_k \\ \alpha_2\,\alpha_3 & \ldots & \alpha_h\,\alpha_{h+1} & \ldots & \alpha_k\,\alpha_1 \end{pmatrix}$$

შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_h\alpha_{h+1} \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{h-1} \\ \alpha_{h+1}\alpha_{h+2} \ldots \alpha_k\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_h \end{pmatrix}.$$

აქედან ჩანს, რომ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \alpha_{h+1}, \ldots \alpha_{k-1}, \alpha_k$ ინდექსების წრიული ჩასმა იქნება ამავე დროს $\alpha_h, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}$ ინდექსების წრიული ჩასმაც.

მაშასადამე,

$$C = (\alpha_1\,\alpha_2\ \ldots\ \alpha_{k-1}\,\alpha_k) = (\alpha_h\alpha_{h+1}\ \ldots\ \alpha_k\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_{h-1}).$$

ამრიგად, ციკლი შეიძლება დავიწყოთ მასში შემავალი ნებისმიერი ინდექსით. ასე, მაგალითად,

$$(2\ 5\ 4\ 7\ 6) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (4\ 7\ 6\ 2\ 5).$$

კერძოდ, ტრანსპოზიციისათვის (ორწევრა ციკლისათვის) გვაქვს:

$$(\alpha_1\alpha_2) = (\alpha_2\alpha_1).$$

ტერმინი „წრიული“ გადანაცვლება იმით აიხსნება, რომ ეს ჩასმები დაკავშირებული არიან წრეწირის ბრუნვასთან სიბრტყეზე მის ცენტრის გარშემო. წრეწირზე ავიღოთ k წერტილი, რომლებიც მოთავსებული არიან წესიერი k — კუთხედის წვეროებში და ეს წერტილები აღვნიშნოთ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ინდექსებით. თუ ამ წრეწირს მოვაბრუნებთ მის ცენტრის გარშემო $\frac{2\pi}{k}$ კუთხით საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ ინდექსების ადგილზე იქნება შესაბამისად $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, \alpha_1$ ინდექსები, ე. ი. მოხდება წრიული ჩასმა $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k)$.

4. დავამტკიცოთ, რომ ყოველი არა წრიული ჩასმა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ წრიული ჩასმათა ნამრავლის სახით. ვთქვათ, მოცემულია A ჩასმა. ვთქვათ, α_0 არის ერთ-ერთი $1, 2, \ldots, n$ ინდექსებს შორის. თუ A ჩასმა სტოვებს α_0 ინდექსს თავის ადგილზე, მაშინ ეს ინდექსი შეადგენს ერთწევრა ციკლს (α_0). დავუშვათ ახლა, რომ A ჩასმა ცვლის α_0 ინდექსს α_1 ინდექსით, რომელიც განსხვავებულია α_0-საგან. ვნახოთ, თუ რომელი ინდექსით ცვლის A ჩასმა α_1 ინდექსს. დავუშვათ, რომ α_1 ინდექსი იცვლება α_0 ინდექსით.

შემდგომ, ვთქვათ, რომ α_2 ინდექსი იცვლება α_3 ინდექსით და ა. შ. ვინაიდან ყველა ინდექსთა რიცხვი სასრულია, ამიტომ, გადავალთ რა ამგვარად ერთი ინდექსიდან მეორეზე, ჩვენ აუცილებლად დავუბრუნდებით ერთ-ერთ ინდექსს, რომლებიც უწინ შეგვხვდა დავუშვათ, რომ ინდექსები

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$$

ჯიდევ ერთმანეთისაგან განსხვავებული არიან, ხოლო α_{k-1} ინდექსი შეცვლილია ერთ-ერთი ინდექსით, რომლებიც უწინ შეგვხვდა, ე. ი. ერთ-ერთი ინდექსით (26)-დან. დავუშვათ, რომ α_{k-1} ინდექსი იცვლება α_h ინდექსით, სადაც $h \leqslant k-1$. თუ ახლა $h \neq 0$, მაშინ α_h ინდექსის წინა წევრი არის α_{h-1}, $\alpha_{h-1} \to \alpha_h$. მაგრამ, მაშინ α_{k-1} და α_{h-1} ინდექსები შეცვლილია ერთი და იგივე α_h ინდექსით; ამიტომ უნდა იყოს $\alpha_{h-1} = \alpha_{k-1}$, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან (26) ინდექსები, დაშვების თანახმად, ერთმანეთისაგან განსხვავებული არიან. მაშასადამე, უნდა იყოს $h=0$, ე. ი. α_{k-1} ინდექსი იცვლება α_0 ინდექსით.

ამრიგად, α_0, α_1, . . ., α_{k-1} ინდექსები ჰქმნიან ციკლს:

(27) $$(\alpha_0, \alpha_1 \ . \ . \ . \ \alpha_{k-1}).$$

თუ ეს ციკლი შეიცავს ყველა 1, 2, . . . , n ინდექსს, მაშინ მოცემული ჩასმა არის წრიული. თუ კი ზოგიერთი ინდექსი არ შევიდა (27) ციკლში, მაშინ შეგვიძლია გამოვყოთ ახალი ციკლი, თუ დავიწყებთ ნებისმიერი ელემენტიდან, **რომელიც არ შედის პირველში.** ეს პროცესი შეგვიძლია მანამდე განვაგრძოთ, სანამ არ ამოიწურება ყველა 1, 2, . . , n ინდექსი. მოცემული A ჩასმა ტოლია ამრიგად მიღებულ ციკლების ნამრავლისა, ვინაიდან ამ ციკლებს არა აქვთ საერთო ელემენტები, და მათი თანმიმდევრობითი გამოყენება ტოლფასია A ჩასმის შესრულებისა.

ციკლების მიღების თვით პროცესიდან ჩანს, რომ ეს ციკლები, რომლებზედაც A ჩასმა იყოფა, ცალსახად განისაზღვრებიან. მაგრამ ამ ციკლების რიგი როლს არ თამაშობს: ციკლები, რომლებსაც საერთო ელემენტები არა აქვთ, შეიძლება ერთმანეთს შორის გადავანაცვლოთ.

აღწერილი პროცესი გავაშუქოთ მაგალითზე.

ვთქვათ, მოცემულია ჩასმა:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 1 & 8 & 9 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

ვიწყებთ ინდექსი 1-დან: იგი იცვლება ინდექსით 7; ინდექსი 7 იცვლება ინდექსით 4, ხოლო ეს ინდექსი იცვლება ინდექსით 1; ჩვენ ვღებულობთ პირველ ციკლს:

$$(1 \ 7 \ 4).$$

ავილოთ ახლა რომელიმე ინდექსთაგანი, რომელიც ამ ციკლში არ შესულა, მაგალითად, ინდექსი 2; ეს ინდექსი იცვლება ინდექსით 3: $2 \rightarrow 3$; შემდეგ $3 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 8$, $8 \rightarrow 2$; ჩვენ ვღებულობთ მეორე ციკლს:

$$(2 \ 3 \ 5 \ 8).$$

ახლა გვრჩება ინდექსები 6 და 9; ისინი შეადგენენ ორწევრა ციკლს: (69). ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს:

$$A = (1 \ 7 \ 4)(2 \ 3 \ 5 \ 8)(6 \ 9).$$

ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ციკლები, რომლებსაც საერთო ელემენტი არა აქვთ, შეგვიძლია ურთიერთ გადავანაცვლოთ; მაგალითად, ჩასმა შეგვიძლია ჩავწეროთ ასედაც:

$$A=(2\ 3\ 5\ 8)(1\ 7\ 4)(6\ 9).$$

განვიხილოთ კიდევ ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

აქ ინდექსი 1, 3 შეადგენენ ორწევრა ციკლს (13). ინდექსი 2 რჩება თავის ადგილზე, იგი შეადგენს ერთწევრა ციკლს (2). სხვა ინდექსები შეადგენენ ოთხწევრა ციკლს (4 7 5 6). ამრიგად,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}=(1\ 3)(\ )(4\ 7\ 5\ 6).$$

იგივური ჩასმა

$$E=\begin{pmatrix} 1\, 2 & . & . & . & n \\ 1\, 2 & . & . & . & n \end{pmatrix}$$

წარმოადგენს ნამრავლს n ერთწევრა ციკლებისას:

$$E=(1)(2)\ .\ .\ .\ (n).$$

ვნახოთ ახლა, თუ როგორ შეიძლება შევადგინოთ ნამრავლი ციკლებისა, რომლებიც დაშლილია ციკლებად. ვთქვათ, საჭიროა შევადგინოთ ნამრავლი ორი ჩასმისა:

$$S=(1\ 5\ 2)(3\ 7\ 4\ 6) \text{ და } T=(1\ 7)(2\ 4\ 5\ 6)(3).$$

ვიწყებთ ინდექსი 1-დან; S ჩასმა ცვლის მას ინდექსით 5, ხოლო T ცვლის 5-ს ინდექსით 6. მაშასადამე, ST ცვლის 1-ს ინდექსით 6. ვიღებთ ახლა ინდექსს 6-ს; S ჩასმა ცვლის ამ ინდექსს ინდექსით 3, ხოლო T სტოვებს 3-ს თავის ადგილზე. მაშასადამე, ST ცვლის ინდექს 6-ს ინდექსით 3. თანაგვარად ვიპოვით, რომ ST ცვლის ინდექს 3-ს ინდექსით 1. ჩვენ მივიღებთ ST ჩასმის პირველი ციკლი (1 6 3).

ავიღოთ რომელიმე ინდექსთაგანი, რომელიც არ შესულა ამ ციკლში, მაგალითად, ინდექსი 2. თუ მსჯელობას ჩავატარებთ ისე

როგორც ზემოთ, ჩვენ ვიპოვით ST ჩასმის მეორე ციკლს: (2 7 5 4). ახლა ჩვენ ამოვწურეთ ყველა ინდექსი. მაშასადამე,

$$ST = (1\ 6\ 3)(2\ 7\ 5\ 4).$$

სავარჯიშო.

1. ციკლებად დაშალეთ შემდეგი ჩასმები:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

შეადგინეთ AB ნამრავლი ციკლებში.

2. შეადგინეთ (ციკლებში) ნამრავლი ჩასმებისა:

$$P = (1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6),\ Q = (1\ 3)\ (2\ 4)\ (5\ 6).$$

3. შეადგინეთ კვადრატი წრიული ჩასმისა (1 2 3 4 5 6 7).

4. შეადგინეთ კვადრატი წრიული ჩასმისა $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1} \alpha_k)$:

a) როცა k ლუწია, b) როცა k კენტია.

5. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ტრანსპოზიციის კვადრატი ტოლია E-სი (იგივური ჩასმისა).

6. დაამტკიცეთ $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^3 = E$. განაზოგადეთ.

5. ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ ნებისმიერი A ჩასმა შეგვიძლია დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ \alpha & \beta & . & . & . & \lambda \end{pmatrix}.$$

A ჩასმას გადაჰყავს 1, 2, . . . , n ინდექსების ნორმალური დალაგება α, β, . . . , λ დალაგებაში. მეორე მხრით, გადასვლა ინდექსთა ერთი დალაგებიდან მეორეზე ყოველთვის შეგვიძლია განვახორციელოთ თანმიმდევრობითი ტრანსპოზიციების საშუალებით (შეად. § 2, პ. 5). დავუშვათ, რომ გადასვლა ინდექსთა ნორმალური დალაგებიდან α, β, . . . , λ დალაგებაზე შეიძლება შესრულებულ იქნეს თანმიმდევრობითი

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$$

ტრანსპოზიციების საშუალებით

მაშინ თანმიმდევრობითი გამოყენება ტრანსპოზიციებისა τ_1, τ_2, . . . , τ_h ტოლფასია A ჩასმის გამოყენებისა; მაშასადამე, A ჩასმა ტოლია ამ ტრანსპოზიციების ნამრავლისა:

$$A = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_h.$$

ამრიგად, ყოველი ჩასმა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით.

განვიხილოთ, მაგალითად, ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

ამ ჩასმის საშუალებით ჩვენ გადავდივართ ნორმალურ $1, 2, \ldots, n$ დალაგებიდან $4, 3, 2, 5, 1$ დალაგებაზე. იგივე გადასვლა, როგორც ამას ადვილად დავინახავთ, შეიძლება შევასრულოთ სამი თანმიმდევნო $(1, 4), (2, 3), (1, 5)$ ტრანსპოზიციის საშუალებით. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)(1\ 5).$$

შევნიშნოთ ახლა, რომ იგივე ჩასმა შეიძლება წარმოვიდგინოთ ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით სხვა ხერხებითაც. მაგალითად:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(4\ 3)(4\ 2)(2\ 3)(1\ 5).$$

დავუშვათ საზოგადოდ, რომ A ჩასმა წარმოდგენილია ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით:

(28) $$\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_h.$$

ვთქვათ ახლა $\tau = (\alpha\beta)$ არის ნებისმიერი ტრანსპოზიცია. გვაქვს:

$$\tau^2 = \tau\tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \beta \end{pmatrix} = E.$$

ამიტომ (28) თანაფარდობა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$A = \tau^2 \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_h.$$

ამრიგად, ერთი და იგივე ჩასმა შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით სხვადასხვა ხერხით.

მაგრამ ამ ტრანსპოზიციათა რიცხვი რჩება ყოველთვის **ლუწი ან კენტი.**

ამაში რომ დავრწმუნდეთ, წარმოვადგინოთ A ჩასმა ნორმალური სახით:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & . & . & . & n\\ \alpha & \beta & . & . & . & \lambda\end{pmatrix}.$$

აქ α, β, . . . , λ არის 1, 2, . . . , n ინდექსების გარკვეული გადანაცვლება, რომელიც არის ან ლუწი, ან კენტი. თუ $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ გადანაცვლება ლუწია, მაშინ გადასვლა ნატურალური დალაგებიდან $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ დალაგებაზე ხორციელდება ყოველთვის ლუწი რიცხვი ტრანსპოზიციათა საშუალებით. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში A **ჩასმა წარმოადგენს ნამრავლს ტრანსპოზიციათა ლუწი რიცხვისა.**

თუ α, β, . . . , λ ჩასმა კენტია, მაშინ გადასვლა ნორმალური დალაგებიდან α, β, . . . , λ დალაგებაზე საჭიროებს კენტ რიცხვს ტრანსპოზიციებისას. მაშასადამე, ამ **შემთხვევაში A ჩასმა წარმოიდგინება კენტი რიცხვი ტრანსპოზიციათა სახით.**

ამრიგად, ყველა ჩასმა n ინდექსისა ბუნებრივად იყოფა ორ კლასად.

A ჩასმას ეწოდება **ლუწოვანი**, თუ იგი წარმოიდგინება ლუწი რიცხვი ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით.

წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. თუ A ჩასმა წარმოიდგინება კენტი რიცხვი ტრანსპოზიციათა სახით, მას **კენტოვანი** ეწოდება.

ისევ დავუშვათ, რომ ჩასმა წარმოდგენილია ნორმალური სახით:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & . & . & . & n\\ \alpha & \beta & . & . & . & \lambda\end{pmatrix}.$$

წინანდელიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ A ჩასმა იქნება ლუწოვანი მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ გადანაცვლება არის ლუწოვანი, ხოლო იგი კენტოვანია, თუ α, β, . . . , λ გადანაცვლება არის კენტოვანი.

განვიხილოთ, კერძოდ, α_1, α_2, . . . , α_k ინდექსთა წრიული ჩასმა:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & . & . & \alpha_{k-1} & \alpha_k\\ \alpha_2 & \alpha_3 & . & . & \alpha_k & \alpha_1\end{pmatrix}.$$

რომ გადავიდეთ ინდექსთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ დალაგებიდან $\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_k\alpha_1$ დალაგებაზე, საკმარისია α_1 ინდექსი გადავანაცვლოთ თანმიმდევრობით თითოეულ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ ინდექსთან, ე. ი. შევასრულოთ თანმიმდევრობით ტრანსპოზიციები: $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\alpha_1\alpha_3)$, $\ldots$, $(\alpha_1\alpha_k)$.

მაშასადამე, მოცემული ჩასმა ტოლია ამ ტრანსპოზიციათა ნამრავლის:

$$(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k) = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3) \ldots (\alpha_1\alpha_k).$$

ამრიგად, k—წევრა ციკლი ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ $k-1$ ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს: k—წ ე ვ რ ა ც ი კ ლ ი წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს ლ უ წ ო ვ ა ნ ჩ ა ს მ ა ს, თ უ k კ ე ნ ტ ი ა, ხ ო ლ ო ი გ ი წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს კ ე ნ ტ ო ვ ა ნ ჩ ა ს მ ა ს, თ უ k ლ უ წ ი ა.

ასე, მაგალითად, სამწევრა ციკლი (1, 3, 5) წარმოადგენს ლუწოვან ჩასმას:

$$(1\ 3\ 5) = (1\ 3)(1\ 5).$$

ოთხწევრა ციკლი

$$(2\ 7\ 1\ 4) = (2\ 7)(2\ 1)(2\ 4)$$

წარმოადგენს კენტოვან ჩასმას.

სავარჯიშო.

1. წარმოადგინეთ ჩასმა $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 8 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით.

2. ჩასმისათვის $P = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\lambda\mu)$ იპოვეთ შექცეული ჩასმა. მიღებული შედეგი განაზოგადეთ.

3. იპოვეთ შექცეული ჩასმა $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k)$ ციკლისათვის.

4. დაამტკიცეთ, რომ ლუწოვანი ჩასმის შექცეული ჩასმა არის ლუწოვანი, ხოლო კენტოვანი ჩასმის შექცეული ჩასმა კენტოვანია.

5. დაამტკიცეთ, რომ ლუწოვანი ჩასმათა ნამრავლი წარმოადგენს ლუწოვან ჩასმას.

6. ვთქვათ, A არის n ინდექსთა ნებისმიერი ჩასმა.

A ჩასმა წარმოვადგინოთ ისეთ $C_1, C_2, \ldots, C_r$ ციკლების ნამრავლის სახით, რომლებსაც არა აქვთ საერთო ელემენტები:

$$A = C_1C_2 \ldots C_r.$$

C_i ციკლში შემავალი ინდექსთა რიცხვი აღვნიშნოთ n_i-ით ($i=1, 2, \ldots, r$). მაშინ

$$1 \leqslant n_i \leqslant n,$$
$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n,$$

ვინაიდან თითოეული ინდექსი შედის მხოლოდ ერთ ციკლში, ხოლო ინდექსთა საერთო რიცხვი n-ის ტოლია (შევნიშნოთ, რომ ჩასმის ციკლებად დაშლისას მხედველობაში უნდა მივიღოთ ერთწევრა ციკლებიც).

ვინაიდან C_i ციკლში შემავალ ინდექსთა რიცხვი n_i-ის ტოლია, ამიტომ ეს ციკლი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ $n_i - 1$ ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით. მაშასადამე, A ჩასმა შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_r - 1) = n - r$$

ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით.

$n - r$ რიცხვს, ე. ი. ყველა განსახილავ ინდექსების რიცხვსა და A ჩასმის ციკლების რიცხვს შორის სხვაობას ეწოდება ამ ჩასმის დეკრემენტი.

წინანდელიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

A ჩასმა იქნება ლუწოვანი (კენტოვანი) მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მისი დეკრემენტი $n - r$ არის ლუწი (შესაბამად კენტი) რიცხვი.

ასე, მაგალითად, ჩასმისათვის

$$(1\ 7\ 4)(2\ 3\ 5\ 8)(6\ 9)$$

ინდექსთა რიცხვი $n = 9$, ციკლების რიცხვი $r=3$, $n - r=6$; მაშასადამე , ჩასმა ლუწოვანია.

ჩასმისათვის

$$(1\ 2\ 7\ 8)(3\ 5\ 6)(4)$$

ინდექსთა რიცხვი $n=8$, ციკლების რიცხვი $r=3$, $n-r=5$; ეს ჩასმა კენტოვანია.

იგივური ჩასმა E უდრის n ერთწევრა ციკლების ნამრავლს: $E=(1)(2)\ldots(n)$. აქ $r=n$, $n-r=0$; მაშასადამე, ჩასმა ლუწოვანია.

წინანდელიდან მიიღება აგრეთვე კრიტერიუმი ჩასმის ხასიათის განსაზღვრისათვის.

მართლაც, ჩვენ ზემოთ დავინახეთ, რომ გადანაცვლება $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ იქნება ლუწოვანი ან კენტოვანი, თუ შესაბამისი ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ \alpha & \beta & . & . & . & \lambda \end{pmatrix}$$

ლუწოვანია თუ კენტოვანი.

თუ ამ ჩასმას ციკლებად დავყოფთ და მის დეკრემენტს განვსაზღვრავთ, ჩვენ ამასთან ერთად განვსაზღვრავთ მოცემული ჩასმის ხასიათს.

ვთქვათ, მაგალითად, საძიებელია 8 ინდექსისაგან

$$7,\ 4,\ 1,\ 6,\ 5,\ 2,\ 3,\ 8$$

შედგენილი გადანაცვლების ხასიათი.

ვადგენთ შესაბამის ჩასმას და მას ციკლებად ვყოფთ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} = (1\ 7\ 3)\,(2\ 4\ 6)\,(5)\,(8).$$

აქ $n=8$, $r=4$, $n-r=4$; ჩასმა ლუწოვანია; მაშასადამე, მოცემული ჩასმა აგრეთვე ლუწოვანია.

§ 4. დეტერმინანტში სვეტების გადანაცვლება. ორმაგ ინდექსთა სისტემა. სტრიქონებისა და სვეტების ტოლუფლებიანობა

1. გავეცანით რა ჩასმათა იმ თვისებებს, რომლითაც შემდეგში მუდამ ვისარგებლებთ, დავუბრუნდეთ ახლა დეტერმინანტებს.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & . & . & l_1 \\ a_2 & b_2 & . & . & . & l_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & . & . & l_n \end{vmatrix}$$

შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ:

$$D=\Sigma \pm a_\alpha\, b_\beta\ .\ .\ .\ l_\lambda,$$

მასთან ნიშანი, რომელიც დგას თითოეული წევრის წინ, განისაზღვრება ინვერსიათა რიცხვით $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ინდექსთა გადანაცვლება-

ში. ჩვენ შეგვიძლია ახლა ვთქვათ, რომ „+“ ნიშანი შეესაბამება ინდექსთა ლ უ წ ო ვ ა ნ გადანაცვლებას, ხოლო „—“ ნიშანი შეესაბამება კ ე ნ ტ ო ვ ა ნ გადანაცვლებას. რადგანაც ლუწოვან გადანაცვლებათა რიცხვი კენტოვან გადანაცვლებათა რიცხვის ტოლია, ამიტომ დეტერმინანტის იმ წევრთა რიცხვი, რომელთა წინ დგას „+“ ნიშანი უდრის იმ წევრთა რიცხვს, რომელთა წინ დგას „—“ ნიშანი $\left(\text{ე. ი. ეტოლება } \frac{n!}{2}\right)$.

ის წევრები, რომელთა წინ დგას „+“ ნიშანი, შეიძლება მივიღოთ მთავარი წევრიდან $a_1 b_2 \ldots l_n$ ინდექსთა ლუწი რიცხვი ტრანსპოზიციების საშუალებით; ის წევრები, რომელთა წინ დგას „—“ ნიშანი, შეიძლება მივიღოთ მთავარი წევრიდან ტრანსპოზიციათა კენტი რიცხვით.

ჩვენ ზემოთ დავინახეთ, რომ მეორე რიგის დეტერმინანტი ნიშანს იცვლის ორი სვეტის გადანაცვლების დროს. დავამტკიცოთ, რომ ეს თვისება ძალაში რჩება ნებისმიერი რიგის დეტერმინანტისათვის.

თუ დეტერმინანტში მოვახდენთ ორი სვეტის ურთიერთ გადანაცვლებას მაშინ დეტერმინანტი ნიშანს შეიცვლის, ხოლო მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა უცვლელი რჩება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}.$$

ჩვენ ვიცით, რომ ამ დეტერმინანტის ყოველი წევრი წარმოადგენს ნამრავლს მამრავლებისას, რომლებიც აღებულია თითო-თითო ყოველ სვეტიდან; გამოვყოთ ამ წევრებიდან რომელიმე მათგანი, მაგალითად

(29) $$\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots l_\lambda.$$

ამ წევრის ნიშანი განისაზღვრება ინდექსთა

(30) $$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$$

გადანაცვლებით.

მასთან არსებითია, რომ (29) ნამრავლის თანამამრავლები დალაგებულია სვეტების მიყოლების რიგით. ახლა D დეტერმინანტში გადავაადგილოთ ორი სვეტი, მაგალითად, პირველი სვეტი მესამე სვეტთან: მაშინ ჩვენ მივიღებთ ახალ დეტერმინანტს:

$$D=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & . & . & . & l_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & . & . & . & l_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_n & b_n & a_n & . & . & . & l_n \end{vmatrix}.$$

D დეტერმინანტის ის წევრი, რომელიც ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ, შევა D_1-ის შემადგენლობაში; მაგრამ რომ განვსაზღვროთ ამ წევრის ნიშანი D_1 დეტერმინანტის შემადგენლობაში, ჩვენ უნდა დავალაგოთ თანამამრავლები იმ რიგით, რა რიგითაც დალაგებული არიან D_1 დეტერმინანტის სვეტები, ე. ი.

$$c_\gamma\, b_\beta\, a_\alpha \; . \; . \; . \; , l_\lambda$$

რიგით.

მაშასადამე, განსახილავი წევრის ნიშანი D_1 დეტერმინანტში განისაზღვრება

$$(31) \qquad \gamma,\ \beta,\ \alpha,\ .\ .\ .\ ,\ \lambda$$

გადანაცვლების ხასიათით.

ეს გადანაცვლება მიღებულია (30)-დან (γ, α) ტრანსპოზიციის საშუალებით; თუ (30) გადანაცვლება ლუწოვანია, მაშინ (31) გადანაცვლება კენტოვანია და პირიქით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ (29) წევრი შედის პლუსით D-ს შემადგენლობაში, მაშინ D_1-ის შემადგენლობაში იგი შევა მინუსით. ამრიგად, D დეტერმინანტის ყოველი წევრი განსხვავდება მხოლოდ ნიშნით D_1 დეტერმინანტის შესაბამისი წევრიდან. მაშასადამე, $D_1=-D$.

შედეგი. თუ დეტერმინანტში არის ორი ერთნაირი სვეტი, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

მართლაც, თუ D დეტერმინანტში არის ორი ერთნაირი სვეტი, მაშინ D_1 დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება ამ სვეტების გადანაცვლებით, არ განსხვავდება D-საგან:

$$D_1=D.$$

მეორეს მხრით, წინა თეორემის ძალით, უნდა იყოს

$$D_1 = -D.$$

ამრიგად, უნდა იყოს

$$D = -D,$$

მაშასადამე,

$$D = 0.$$

2. აღნიშვნათა ის სისტემა, რომლითაც ჩვენ აქამდე ვსარგებლობდით, არ არის სიმეტრიული დეტერმინანტის სტრიქონებისა და სვეტების მიმართ: სტრიქონები ჩვენ აღვნიშნეთ ნომრებით, იმ დროს როცა სვეტები — სხვადასხვა ასოებით. ჩვენ შემდეგში დავინახავთ, რომ დეტერმინანტის სვეტები და სტრიქონები ტოლუფლებიანი არიან; ამიტომ უფრო მიზანშეწონილია აღნიშვნათა ისეთი სისტემა, რომელშიაც სტრიქონები და სვეტები იქნება ჩაყენებული ერთნაირ პირობებში. ამას მივაღწევთ ი ნ დ ე ქ ს თ ა ო რ მ ა გ ი ს ი ს ტ ე მ ი ს მეშვეობით.

ჩვენ აღვნიშნავთ დეტერმინანტის ნებისმიერ ელემენტს ერთი და იგივე ასოთი, რომელსაც აქვს ორი ინდექსი, რომლებიდან პირველი გვიჩვენებს სტრიქონის ნომერს, ხოლო მეორე — სვეტის ნომერს. ამრიგად, ელემენტს, რომელიც დგას i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის გადაკვეთაში, ჩვენ აღვნიშნავთ a_{ik}-თი. მეორე რიგის დეტერმინანტი ახლა ჩაიწერება ასე:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

n რიგის დეტერმინანტი მიიღებს სახეს.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

დეტერმინანტის ზოგად წევრს წინათ ვწერდით ასეთი სახით

$$\pm\, a_\alpha b_\beta \,.\,.\,.\, l_\lambda. \tag{32}$$

აქ a_α აღნიშნავს პირველი სვეტის და α სტრიქონის ელემენტს; b_β — მეორე სვეტის და β სტრიქონის ელემენტს, და ა. შ. აღნიშ-

ნათა ახალ სისტემაში ეს იქნება შესაბამისად:

$$a_{\alpha_1}, a_{\beta_2}, \ldots, a_{\lambda_n}.$$

ამგვარად, ნამრავლი (32) დაიწერება ასეთი სახით

$$\pm a_{\alpha_1} a_{\beta_2} \ldots a_{\lambda_n}. \qquad (32')$$

მეორე ინდექსები (სვეტების ინდექსები) აქ დალაგებულია ნატურალური რიგით. პირველი ინდექსები (სტრიქონთა ინდექსები) ჰქმნიან გადანაცვლებას $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, რომლითაც განისაზღვრება (32) წევრის ნიშანი.

ამგვარად, თუ დეტერმინანტის ელემენტები აღნიშნულია ორმაგ ინდექსთა სისტემის მიხედვით, მაშინ ყოველი წევრის ნიშანი შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგი წესის მიხედვით:

წესი I. მოცემული წევრის მამრავლები დავალაგოთ ისე, რომ მეორე ინდექსები (სვეტების ინდექსები) დალაგდნენ ნატურალური რიგით. ამასთან, თუ პირველი ინდექსები ჰქმნიან ლუწოვან გადანაცვლებას, მაშინ წევრის წინ ვიღებთ ნიშანს „+", წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ნიშანს „—".

ვნახოთ, მაგალითად, რა ნიშნით შედის მეხუთე რიგის დეტერმინანტის შემადგენლობაში ნამრავლი

$$a_{35} a_{14} a_{43} a_{51} a_{22}. \qquad (33)$$

ამ მიზნით ნამრავლის მამრავლებს უწინარეს ყოვლისა დავალაგებთ ისე, რომ მეორე ინდექსები მიდიოდეს ნატურალური რიგით:

$$a_{51} a_{22} a_{43} a_{14} a_{35}.$$

ახლა პირველი ინდექსები ჰქმნიან გადანაცვლებას

$$5, 2, 4, 1, 3.$$

ეს გადანაცვლება კენტოვანია; მაშასადამე, (33) ნამრავლის წინ უნდა ავიღოთ ნიშანი „—".

სავარჯიშო.

1. რა ნიშნით შედის მეხუთე რიგის დეტერმინანტის შემადგენლობაში ნამრავლი

$$a_{41} a_{34} a_{32} a_{15} a_{43}?$$

2. რა ნიშნით შედის მეშვიდე რიგის დეტერმინანტის შემადგენლობაში წევრი

$$a_{14} a_{15} a_{26} a_{43} a_{61} a_{52} a_{77}?$$

3. რა ნიშნით შედის n რიგის დეტერმინანტის შემადგენლობაში არა მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლი?

3. ადვილი შესამჩნევია, რომ 1-ლი წესის ჩამოყალიბებაში **პირველი ინდექსები** (სტრიქონთა ინდექსები) და მეორე ინდექსები (სვეტების ინდექსები) სხვადასხვანაირ როლს თამაშობენ. ბუნებრივია დავსვათ საკითხი: შეიძლება თუ არა ამ წესის ჩამოყალიბებაში შევცვალოთ პირველი და მეორე ინდექსების როლები? ამ კითხვაზე პასუხი რომ გავცეთ, ამისათვის განვიხილოთ დეტერმინანტის რომელიმე წევრი:

(34) $$\pm a_{\alpha 1} a_{\beta 2} a_{\gamma 3} \dots a_{\lambda n}.$$

1-ლი წესის თანახმად, ამ წევრის ნიშანი განისაზღვრება პირველი ინდექსების

(35) $$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

გადანაცვლების ხასიათით.

(34) ნამრავლის მამრავლები ახლა გადავსვათ ისე, რომ პირველი ინდექსები დალაგდეს ნატურალური რიგით. მაშინ მეორე ინდექსები შექმნიან ერთგვარ გადანაცვლებას $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \lambda'$, ასე რომ (34) ნამრავლი მიიღებს ასეთ სახეს

(34′) $$\pm a_{1\alpha'} a_{2\beta'} a_{3\gamma'} \dots a_{n\lambda'}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ გადანაცვლება

(35) $$\alpha', \beta', \gamma', \dots, \lambda'$$

ი ს ე თ ი ვ ე ხ ა ს ი ა თ ი ს ა იქნება, როგორიცაა (35) გადანაცვლება.

მართლაც, (34′) ნამრავლი მიღებულია (34)-დან მამრავლთა გადანაცვლებით; ეს გადანაცვლება შეიძლება განვახორციელოთ თანმიმდევრობითი ტრანსპოზიციების საშუალებით; ამასთან, ტრანსპოზიციის ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობთ ორი მამრავლის (მაგალითად, $a_{1\alpha}$ და $a_{2\beta}$) გ ა დ ა ნ ა ც ვ ლ ე ბ ი ს ო პ ე რ ა ც ი ა ს.

ის ტრანსპოზიციათა რიცხვი, რომლებიც უნდა შევასრულოთ (34)-დან (34′)-ზე გადასვლისათვის, აღვნიშნოთ σ-თი.

რადგანაც ყოველ მამრავლს აქვს ორი ინდექსი, ამიტომ მამრავლთა ყოველი ტრანსპოზიცია ერთდროულად გამოიწვევს პირველი ინ-

დექსების ტრანსპოზიციას და მეორე ინდექსების ტრანსპოზიციას.

რა მოხდება ამ ტრანსპოზიციების შედეგად? პირველი ინდექსებისათვის გადანაცვლება $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ შეიცვლება ნატურალური განლაგებით. მეორე ინდექსებისათვის, პირიქით, ნატურალური განლაგება შეიცვლება $\alpha', \beta', \ldots, \lambda'$ გადანაცვლებით.

სქემატურად ეს გამოისახება შემდეგნაირად:

პირველი ინდექსები	მეორე ინდექსები
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$	$1, 2, 3, \ldots n$
$\downarrow$ σ ტრანსპოზიციები	$\downarrow$
$1, 2, 3, \ldots, n$	$\alpha', \beta', \gamma', \ldots \lambda'$.

მე-2 პარაგრაფის მე-4 პუნქტში დავინახეთ, რომ გადასვლა $\frac{\text{ლუწი}}{\text{კენტი}}$ გადანაცვლებიდან ნატურალურ დალაგებაზე სრულდება ყოველთვის $\frac{\text{ლუწი}}{\text{კენტი}}$ რიცხვი ტრანსპოზიციათა საშუალებით. მაშასადამე, თუ გადანაცვლება $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ ლუწოვანია, მაშინ ტრანსპოზიციათა რიცხვი σ ლუწი უნდა იყოს. მაგრამ მაშინ გადანაცვლება $\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda'$, რომელიც მიიღება ნატურალური დალაგებიდან ტრანსპოზიციათა σ რიცხვით, ლუწი უნდა იყოს.

თანაგვარადვე, თუ გადანაცვლება $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ კენტოვანია, მაშინ σ რიცხვი კენტი უნდა იყოს; ამ შემთხვევაში გადანაცვლებაც $\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda'$ კენტოვანი იქნება.

ამგვარად, გადანაცვლება

$$\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda' \tag{35'}$$

იქნება ლუწოვანი ან კენტოვანი იმისდა მიხედვით, გადანაცვლება

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda \tag{35}$$

კენტოვანია თუ ლუწოვანი.

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს რომ ინვერსიათა რიცხვი (35′) გადანაცვლებაში შეიძლება განსხვავდებოდეს (35) გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვისაგან მხოლოდ ლუწი რიცხვით. მაგრამ შეიძლე-

ბა უშუალოდ ვუჩვენოთ, რომ ინვერსიათა რიცხვი (35′) გადანაცვლებაში ზუსტად ეტოლება (35) გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვს. ამ მიზნისათვის წინასწარ შემოვიღოთ ელემენტების *კენტოვანი* და *ლუწოვანი* წყვილების ცნება.

ვთქვათ,

(36) $$a_{ik}, \ a_{pq}$$

ორი ელემენტია, რომლებიც შედიან დეტერმინანტის რომელიმე წევრის შემადგენლობაში. აქ გვაქვს ინდექსთა ორი წყვილი:

პირველი ინდექსები: i, p,

მეორე ინდექსები: k, q.

(36) ელემენტები განვიხილოთ იმ რიგით, როგორც დაწერილია; ამასთან შეიძლება ადგილი ექნეს ორ არსებითად განსხვავებულ შემთხვევას.

1. პირველი და მეორე ინდექსები არიან ერთნაირი ყოფაქცევის. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ პირველი ინდექსები დალაგებულია ნატურალური რიგით, მაშინ მეორე ინდექსებიც დალაგებულია ნატურალური რიგით; თუ პირველი ინდექსები ჰქმნიან ინვერსიას, მაშინ მეორე ინდექსებიც ჰქმნიან ინვერსიას.

ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ (36) ელემენტები ჰქმნიან *ლუწოვან წყვილს*.

ასეთია, მაგალითად, წყვილი

(37) $$a_{21}, \ a_{35}.$$

აქ

პირველი ინდექსებია: 2, 3;

მეორე ინდექსებია: 1, 5.

პირველი და მეორე ინდექსები დალაგებულია ნატურალური რიგით. მაგრამ შეგვიძლია (37) ელემენტები გადავანაცვლოთ ერთმანეთს შორის:

$$a_{35}, \ a_{21}.$$

ახლა

პირველი ინდექსებია: 3, 2;

მეორე ინდექსებია: 5, 1.

პირველი და მეორე ინდექსებიც ჰქმნიან ინვერსიას.

მაშასადამე, ლუწოვანი წყვილის ცნება არაა დამოკიდებული ელემენტების რიგზე.

2. პირველი და მეორე ინდექსები არიან სხვადასხვა ყოფაქცევის. ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ პირველი ინდექსები დალაგებულია ნატურალური რიგით, მაშინ მეორე ინდექსები ჰქმნიან ინვერსიას, და პირიქით. მაშინ ვამბობთ, რომ ჩვენი ელემენტები ჰქმნიან კენტოვან წყვილს.

მაგალითი.

(38) $$a_{21},\ a_{15}.$$

აქ

პირველი ინდექსებია: 2,1 (ინვერსია),
მეორე ინდექსებია: 1, 5 (რიგი).

თუ გადავანაცვლებთ (38) ელემენტებს ერთმანეთს შორის:

$$a_{15},\ a_{21},$$

მაშინ

პირველი ინდექსებია: 1, 2 (რიგი),
მეორე ინდექსებია: 5, 1 (ინვერსია).

კენტოვანი წყვილის ცნება აგრეთვე არაა დამოკიდებული ელემენტების რიგზე.

კვლავ განვიხილოთ ნამრავლი

(34) $$\pm a_{\alpha_1} a_{\beta_2} a_{\gamma_3} \ldots a_{\lambda_n}$$

რომელშიაც მეორე ინდექსები დალაგებული არიან ნატურალური რიგით; ამოვწეროთ პირველი ინდექსების გადანაცვლება.

(35) $$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \lambda.$$

დავუშვათ, რომ β და γ ინდექსები ჰქმნიან ინვერსიას; ამ შემთხვევაში შესაბამისი ელემენტები

$$a_{\beta_2},\ a_{\gamma_3}$$

ჰქმნიან კენტოვან წყვილს (რადგან მეორე ინდექსები დალაგებული არიან ნატურალური რიგით).

ამგვარად, თუ რომელიმე ორი ინდექსი (35) გადანაცვლებაში ჰქმნის ინვერსიას, მაშინ შესაბამისი ელემენტები ჰქმნიან კენტოვან წყვილს.

მაშასადამე, **ინვერსიების რიცხვი (35) გადანაცვლებაში ეტოლება (34) ნამრავლის შემადგენლობაში შემავალ კენტოვან წყვილების რიცხვს.**

კენტოვანი წყვილის ცნება, როგორც ვიცით, არაა დამოკიდებული ელემენტების რიგზე. მაშასადამე, (34) ნამრავლის შემადგენლობაში შემავალ კენტოვან წყვილების რიცხვიც არაა დამოკიდებული მამრავლთა რიგზე.

დავუშვათ, რომ (34) ნამრავლის მამრავლები გადანაცვლებულია ისე, რომ პირველი ინდექსები (სტრიქონების ინდექსები) დალაგდნენ ნატურალური რიგით:

(34′) $$\pm a_{1\alpha'},\ a_{2\beta'},\ a_{3\gamma'}\ \cdots\ a_{n\lambda'}.$$

მეორე ინდექსები ჰქმნიან ახლა გადანაცვლებას:

(35′) $$\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \ldots,\ \lambda'.$$

თუ ვიმსჯელებთ ისევე, როგორც ზემოთ, აღმოვაჩენთ, რომ ყოველი ინვერსია (35′) გადანაცვლებაში შეესაბამება ელემენტთა კენტოვან წყვილს. ამგვარად, **ინვერსიების რიცხვი (35′) გადანაცვლებაში ეტოლება (34′) ნამრავლის შემადგენლობაში შემავალ კენტოვან წყვილების რიცხვს**; შეგვეძლო გვეთქვა აგრეთვე — (34) ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს შ ე მ ა დ გ ე ნ ლ ო ბ ა შ ი, რადგანაც ეს ნამრავლები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ მამრავლთა რიგით. მაგრამ წინათ დავინახეთ, რომ ინვერსიების რიცხვი (35) გადანაცვლებაში ეტოლება კენტოვან წყვილების რიცხვს ი მ ა ვ ე ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს შემადგენლობაში.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ინვერსიების რიცხვი (35′) გადანაცვლებაში ეტოლება ინვერსიების რიცხვს (35) გადანაცვლებაში *.

ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (34′) წევრის ნიშანი განისაზღვრება (35′) გადანაცვლების ხასიათით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, 1-ლ წესთან ერთად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

წესი II. **რომ განვსაზღვროთ დეტერმინანტის წევრის წინ მყოფი ნიშანი, მოცემული წევრის მამრავლები უნდა დავალაგოთ ისე, რომ პირველი ინდექსები (სტრიქონების ინდექსები) მიიმართებოდეს ნატურალური რიგით. თუ, ამასთან, მეორე ინდექსები ჰქმნიან ლუ-**

* ამ დამტკიცების დედა-აზრი მაცნობა პროფ. პ. კ. რ ა შ ე ვ ს კ ი მ.

წოვან გადანაცვლებას, მაშინ წევრის წინ დაისმის ნიშანი პლუსი, წინააღმდეგ შემთხვევაში — მინუსი.

ეს წესი I-ლი წესისაგან განსხვავდება იმით, რომ პირველმა ინდექსებმა (სტრიქონების ინდექსებმა) და მეორე ინდექსებმა (სვეტების ინდექსებმა) როლები შეიცვალეს. არსებითად აქ უკვე იჩენს თავს დეტერმინანტის სვეტებისა და სტრიქონების ტოლუფლებიანობა.

წინა შედეგები გვაძლევს საშუალებას ადვილად დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც გამოხატავს დეტერმინანტის ერთ-ერთ ძირითად თვისებას.

დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მის სტრიქონებს გავხდით სვეტებად (და, მაშასადამე, სვეტებს — სტრიქონებად).

დავუშვათ, რომ მოცემულია დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdot & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

შევადგინოთ ახალი დეტერმინანტი, რომლის სვეტებს შეადგენს დეტერმინანტის სტრიქონები, ხოლო სტრიქონებს — სვეტები:

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ D' დეტერმინანტში პირველი ინდექსები შეადგენენ სვეტების ინდექსებს, ხოლო მეორე ინდექსები — სტრიქონების ინდექსებს.

ახლა უნდა დავამტკიცოთ, რომ $D'=D$. უწინარეს ყოვლისა, დეტერმინანტის გამოსახულება ჩავწეროთ ჯამის სახით; ამასთან გამოვიყენოთ I-ლი წესი და მამრავლები ყოველ წევრში დავალაგოთ ისე, რომ სვეტების ინდექსები მიიმართებოდეს ნატურალური რიგით:

$$D=\Sigma \pm a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2} \cdot \cdot \cdot a_{\lambda n}. \tag{39}$$

ყოველი წევრის ნიშანი აქ განისაზღვრება პირველი ინდექსების $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ გადანაცვლების ხასიათით.

ახლა ჩავწეროთ D' დეტერმინანტის გამოსახულება; ამ შემთხვევაში გამოვიყენოთ II წესი, ე. ი. მამრავლები ყოველ წევრში დავალაგოთ ისე, რომ სტრიქონების ინდექსები მიიმართებოდეს ნატურალური რიგით. მაგრამ D' დეტერმინანტისათვის სტრიქონების ინდექსებს შეადგენს მეორე ინდექსები. დავალაგოთ ეს ინდექსები ნატურალური რიგით, D'-სათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$D' = \Sigma \pm a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \ldots a_{\lambda n}. \tag{39'}$$

აქ ისევე, როგორც (39) გამოსახულებაში, ყოველი წევრის ნიშანი განისაზღვრება $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ გადანაცვლების ხასიათით. ამგვარად, (39′) გამოსახვა D'-სათვის ემთხვევა (39) გამოსახულებას D-სათვის, ე. ი.

$$D' = D.$$

ახლა შეგვიძლია დამტკიცებულად ჩავთვალოთ, რომ დეტერმინანტის სვეტები და სტრიქონები ტოლუფლებიანია, ყოველი დებულება, დამტკიცებული სვეტებისათვის, სამართლიანია სტრიქონებისათვისაც.

ზევით დავინახეთ, რომ დეტერმინანტი ნიშანს იცვლის რომელიმე ორი სვეტის გადანაცვლების დროს. ახლა შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ეს შედეგი სამართლიანია სტრიქონებისათვისაც. მაშასადამე,

თუ დეტერმინანტში ადგილებს გადაუნაცვლებთ ორ სვეტს ან ორ სტრიქონს, მაშინ დეტერმინანტის ნიშანი შეიცვლება *.

ასევე შეგვიძლია შევავსოთ შედეგი ამ თეორემიდან (იხ. § 4, პ. 1).

თუ დეტერმინანტში არის ორი ერთნაირი სვეტი ან ორი ერთნაირი სტრიქონი, მაშინ ახეთი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

4. ისტორიული ცნობები **. ჯერ კიდევ XVII საუკუნეში ლეიბნიცი, როცა ის იხილავდა n უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამოცანას, მჭიდროდ მიუახლოვდა დეტერმინანტის ცნებას. ასეთი სისტემის ამოხსნადობის პირობა, როგორც

---

* სხვანაირად რომ ვთქვათ: დეტერმინანტის ნიშანი იცვლება, თუ ადგილებს გადაუნაცვლებთ ორ პარალელურ მწკრივს.

** ძირითადი წყარო: Th. Muir, The theory of determinants in the historikal order of development, vol. I — IV, 1906—1923.

ამას შემდეგში დავამტკიცებთ, შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

(40) $$D = 0,$$

სადაც D არის დეტერმინანტი, რომელიც შედგენილია მოცემულ განტოლებათა კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრებისაგან. ლეიბნიცი იძლევა D-ს შემადგენლობაში შემავალი წევრების შედგების კანონს და გვაძლევს ნიშნების შემდეგ წესს:

a) დეტერმინანტში შემავალი ერთ-ერთ ხამრავლს ნიშანი მიეწერება ნებისმიერად (ეს დასაშვებია იმის გამო, რომ (40) განტოლების ორთავე ნაწილი შეიძლება გამრავლდეს (—1)-ზე);

b) თუ D-ს შემადგენლობაში შემავალი ორი ნამრავლი განსხვავდება მხოლოდ ორი მამრავლით, მაშინ ისინი იღებენ მოპირდაპირე ნიშნებს.

ასე, მაგალითად, თუ ნამრაელს

$$a_1 b_2 c_3 d_4$$

მიწერილი აქვს ნიშანი +, მაშინ ნამრაველს

$$a_1 b_2 c_4 d_3$$

უნდა მივუწეროთ ნიშანი —; ნამრაველს

$$a_4 b_2 c_1 d_3$$

უნდა მივუწეროთ ნიშანი +, რადგან ის ორი მამრავლით განსხვავდება

$a_1 b_2 c_4 d_3$-საგან, და ა. შ.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ ეს წესი ისეთივეა, როგორიცაა ნიშნის განსაზღვრის ის ხერხი (ტრანსპოზიციების საშუალებით), რომელიც აღვნიშნეთ 1-ლ პუნქტში.

თავისი ეს მოსაზრებანი ლეიბნიცმა აცნობა ლოპიტალს (De l'Hospitae) წერილში 1693 წ. 28 აპრილის თარიღით. ის დიდ მნიშვნელობას აძლევდა თავის აღმოჩენას. მაგრამ მან ეს აღმოჩენა არ გამოაქვეყნა პრესაში, და მას არავითარი გავლენა არ მოუხდენია შემდეგ მკვლევარებზე *.

---

* უნდა აღინიშნოს, რომ ლეიბნიცი სარგებლობდა განტოლებათა კოეფიციენტების თავისებური აღნიშვნით, რომელიც უახლოვდება ორმაგი ინდექსების

1750 წელს ჟენევაში გამოქვეყნდა გამოჩენილი შვეიცარიელი მათემატიკოსის კ რ ა მ ე რ ი ს (Gabriel Cramer 1704 — 1752) დიდი თხზულება: „შესავალი ალგებრულ მრუდთა შესწავლისათვის". ამ თხზულების მესამე თავი ეხება **ალგებრულ წირების სხვადასხვა რიგებს**; აქ კრამერი ამტკიცებს, რომ n რიგის მრუდი შეიძლება განვსაზღვროთ, თუ ცნობილია მისი $\frac{n(n+3)}{2}$ წერტილი.

მაგალითის სახით ის განიხილავს 5 წერტილზე გამავალი მეორე რიგის მრუდის მოძებნის ამოცანას.

მრუდის განტოლებას ის იღებს ასეთი სახით:

$$A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$$

და ჩაწერს ხუთ პირობას, რომელნიც გამოხატავს იმას, რომ ამ მრუდმა უნდა გაიაროს მოცემულ 5 წერტილზე.

ამგვარად, A, B, C, D, E კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის ის ღებულობს ხუთ უცნობიან ხუთ წრფივ განტოლებას.

კრამერი აღნიშნავს, რომ ასეთი სისტემის უშუალოდ ამოხსნა იწვევს ხანგრძლივ გამოთვლებს და მკითხველს მიუთითებს წიგნის ბოლოში დამატებაზე, სადაც ეს საკითხია გარჩეული.

აი, რა არის ნათქვამი ამ დამატებაში:

„დავუშვათ, რომ გვაქვს რამდენიმე უცნობი z, y, x, v და ა. შ. და ამდენივე განტოლება:

სისტემას: ყოველ კოეფიციენტს ის აღნიშნავდა ორი ნომრით, რომლებიც მიგვითითებს, თუ რომელი განტოლებიდანაა იგი აღებული და რომელ უცნობთაგანს ეკუთვნის; ასე, მაგალითად, განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} a_{10} + a_{11}x + a_{12}y &= 0, \\ a_{20} + a_{21}x + a_{22}y &= 0, \\ a_{30} + a_{31}x + a_{32}y &= 0, \end{aligned}$$

ლეიბნიცი სწერდა ასეთი სახით:

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0, \\ 20 + 21x + 22y &= 0, \\ 30 + 31x + 32y &= 0. \end{aligned}$$

აღნიშვნათა ეს ხერხი ლეიბნიცმა გამოაქვეყნა 1770 წელს. წერილში ლოპიტალისადმი ლეიბნიცი ამბობს, რომ ამ აღნიშვნებმა მას დახმარება გაუწია ალმოეჩინა „ნიშნების წესი".

$$A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \text{და ა. შ.}$$
$$A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \text{და ა. შ.}$$
$$A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \text{და ა. შ.}$$
$$A^4 = Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \text{და ა. შ.}$$

და ა. შ.,

სადაც A^1, A^2, A^3, A^4 და ა. შ. ასოები აღნიშნავენ არა A-ს ხარისხებს, როგორც ჩვეულებრივ, არამედ ცნობილად მიჩნეულ პირველ, მეორე, მესამე, მეოთხე და ა. შ. განტოლებათა მარცხენა ნაწილს“.

ამის შემდეგ კრამერს მოჰყავს ფორმულები, რომლებიც გვაძლევს ამოცანის ამოხსნას ერთი, ორი, სამი უცნობის კერძო შემთხვევაში.

„ამ ფორმულების გამოკვლევას, — განაგრძობს ის, — მივყევართ შემდეგ ზოგად წესამდე. თუ განტოლებათა და უცნობთა რიცხვი n-ის ტოლია, მაშინ ყოველი უცნობის მნიშვნელობა მოინახება n წილადის შედგენით, რომელთა საერთო მნიშვნელს აქვს იმდენი წევრი, რამდენიც სხვადასხვა გადანაცვლებანი არსებობს n სხვადასხვა საგნიდან. ყოველი წევრი შედგენილია Z, Y, X, V და ა. შ. ასოებისაგან, რომლებიც ყოველთვის დაწერილია იმავე რიგით, მაგრამ რომლებსაც უერთებენ მაჩვენებელთა სახით პირველ n ციფრს, რომელნიც დალაგებულია ყველა შესაძლო წესით. ასე, მაგალითად, როცა გვაქვს სამი უცნობი, მნიშვნელს აქვს [1·2·3=] 6 წევრი, რომლებიც შედგენილია სამი Z, Y, X ასოსაგან, რომლებსაც თანმიმდევრობით იღებენ მაჩვენებლები 123, 132, 213, 231, 312, 321. ამ წევრებს ნიშანი + ან — ენიჭებათ შემდეგი წესის თანახმად: როცა რომელიმე მაჩვენებელს იმავე წევრში, უშუალოდ ან განსაზღვრული შუალედის შემდეგ, თან სდევს მასზე ნაკლები მაჩვენებელი, მე ამას ვუწოდებ უწესრიგობას (dérangement*). ყოველი წევრისათვის უნდა დავითვალოთ უწესრიგობათა რიცხვი: თუ ეს რიცხვი იქნება ლუწი ან ნული, მაშინ წევრი მიიღებს ნიშანს „+“; თუ ეს რიცხვი იქნება კენტი, წევრი მიიღებს ნიშანს „—“; მაგალითად, $Z^1 Y^2 X^3$ წევრში არაა არც ერთი უწესრიგობა; მაშასადამე, ეს წევრი მიიღებს ნიშანს „+“. $Z^3 Y^1 X^2$ წევრი აგრეთვე მიიღებს ნიშანს „+“, რადგანაც მას აქვს ორი უწესრიგობა, 3 არის 1-ის წინ და 3 არის 2 ის

* ჩვენი ტერმინოლოგიით — ი ნ ვ ე რ ს ი ა.

წინ. მაგრამ $Z^3 Y^2 X^1$ წევრს, რომელსაც აქვს სამი უწესრიგობა, 3 არის 2-ის წინ, 3 არის 1-ის წინ და 2 არის 1-ის წინ, ექნება ნიშანი „ — “.

„შევადგენთ რა ამგვარად საერთო მნიშვნელს, მივიღებთ z-ის მნიშვნელობას; ავიღებთ რა მრიცხველად გამოსახულებას, რომელსაც მივიღებთ Z-ის A-თი შეცვლით ყველა მის წევრში... ასეთივე ხერხით მოინახება დანარჩენ უცნობთა მნიშვნელობები“.

ეს „საერთო წესი“ n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის მალე გავრცელდა. ამ წესმა მათემატიკოსების ყურადღება მიიქცია იმ გამოსახულებათა **შედგენის კანონისადმი**, რომლებსაც შემდეგში **დეტერმინანტები** უწოდეს. შემდეგი ნაბიჯი მდგომარეობდა, იმაში რომ დეტერმინანტის ცნება გამოყოფილიყო წრფივ განტოლებათა ამოცანისაგან და ის გამხდარიყო დამოუკიდებელი შესწავლის საგანი. ეს ნაბიჯი გადადგა ფრანგმა მათემატიკოსმა ვანდერმონდმა (Alexandre Théophile Vandermonde 1735—1796) თავის შრომაში „გამორიცხვის შესახებ,“ რომელიც მოახსენა პარიზის აკადემიას 1771 წელს. დეტერმინანტის ცნება ამ შრომაში პირველად იყო განმარტებული სხვა საკითხებთან მისი კავშირის დამოუკიდებლად, და დამყარებულ იქნა დეტერმინანტების ძირითადი თვისებანი. ვანდერმონდმა შემოიღო აგრეთვე განსაკუთრებული აღნიშვნა დეტერმინანტებისათვის, მაგრამ იგი არ დარჩა ლიტერატურაში.

დეტერმინანტის ელემენტების დალაგება კვადრატულ სქემაში პირველად იხმარა კოშიმ თავის შრომაში, რომელიც გამოქვეყნებულია 1812 წელს. კოში განიხილავს შემდეგ ელემენტთა სისტემას:

$$\left|\begin{matrix} a_{1\cdot1} & a_{1\cdot2} & a_{1\cdot3} & \ldots & a_{1\cdot n} \\ a_{2\cdot1} & a_{2\cdot2} & a_{2\cdot3} & \ldots & a_{2\cdot n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\cdot1} & a_{n\cdot2} & a_{n\cdot3} & \ldots & a_{n\cdot n} \end{matrix}\right.$$

და ლაპარაკობს ამ სისტემის „დეტერმინანტის“ შესახებ. აქ პირველად იქნა ხმარებული თვით ტერმინი **დეტერმინანტი** იმ აზრით, როგორც ის ახლა გვესმის (უფრო ვიწრო აზრით ეს ტერმინი შემოიღო ადრე გაუსმა თავის გამოკვლევებში რიცხვთა თეორიაში). ორი ვერტიკალური ხაზი დეტერმინანტის აღსანიშნავად შემოიღო კ ე ლ ი მ (Arthur Cayley), გამოჩენილმა ინგლისელმა მათემატიკოსმა (1821—1895).

§ 5. მინორები და ადიუნქტები

1. დეტერმინანტთა გამოანგარიშების მეთოდების ძირითადი აზრი მდგომარეობს იმაში, რომ მოცემული დეტერმინანტის გამოანგარიშება დაიყვანება უფრო დაბალი რიგის დეტერმინანტების, ეგრეთ წოდებული მ ი ნ ო რ ე ბ ი ს გამოანგარიშებაზე. რომ გავარკვიოთ ეს აზრი ჯერ მარტივ მაგალითზე, განვიხილოთ მესამე რიგის დეტერმინანტი:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+ \\ +a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}.$$

ყურადღება მივაქციოთ პირველი სვეტის ელემენტებს: a_{11}, a_{21}, a_{31}. ყოველი ამ ელემენტთაგანი მამრავლის სახით იღებს მონაწილეობას დეტერმინანტის ორ წევრში; ეს მამრავლები გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ, მივიღებთ

(41) $$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31},$$

სადაც

(42) $A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$, $A_{21}=a_{32}a_{13}-a_{12}a_{33}$, $A_{31}=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}$.

ამ გამოსახვებს ეწოდება a_{11}, a_{21}, a_{31} ელემენტების ა დ ი უ ნ ქ ტ ე ბ ი.

რომ მივიღოთ რომელიმე ელემენტის, მაგალითად a_{11}-ის ადიუნქტი, ამისათვის საკმარისია გამოვყოთ დეტერმინანტის ის წევრები, რომლებიც მამრავლად შეიცავს a_{11} ელემენტს, და ეს ელემენტი გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ; ფრჩხილებში დარჩენილი გამოსახულება იქნება მოცემული ელემენტის ადიუნქტი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (42) გამოსახულებანი შეიძლება წარმოვიდგინოთ მეორე რიგის დეტერმინანტების სახით. ასე, მაგალითად, A_{11} ადიუნქტისათვის გვაქვს:

(43) $$A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ახლა შევნიშნავთ, რომ მეორე რიგის ეს დეტერმინანტი შეიძლება მივიღოთ D დეტერმინანტიდან, ამოვშლით რა მასში პირველ

სვეტს და პირველ სტრიქონს*. საერთოდ, თუ D დეტერმინანტიდან ამოვშლით განსაზღვრულ სტრიქონს და სვეტს, და დარჩენილი ელემენტებისაგან შევადგენთ დეტერმინანტს, ამ დეტერმინანტს ეწოდება D დეტერმინანტის მ ი ნ ო რ ი. თუ ამოვშლით i-ურ სტრიქონს და k-ურ სვეტს, მაშინ მინორი, რომელსაც აქ მივიღებთ, აღინიშნება M_{ik}-თი. ამგვარად, A_{11} ადიუნქტი ეტოლება შესაბამ მინორს:

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

A_{21} ადიუნქტისათვის მივიღებთ:

$$A_{21}=a_{32}a_{13}-a_{12}a_{33}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{44}$$

ამგვარად, ადიუნქტი აქ შესაბამი მინორისაგან ნიშნით განსხვავდება:

$$A_{21}=-M_{21}.$$

დაბოლოს, A_{31} ადიუნქტისათვის მივიღებთ:

$$A_{31}=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \tag{45}$$

ასე რომ

$$A_{31}=M_{31}.$$

თუ (41)-ში A_{11}, A_{21}, A_{31}-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობებს (43), (44) და (45), მივიღებთ

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს D დეტერმინანტის დაშლას პირველი სვეტის ელემენტებით. ამგვარად, მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა დაიყვანება მეორე რიგის სამი დეტერმინანტის გამოთვლამდე.

ეს მოსაზრებანი ახლა უნდა განვაზოგადოთ ნებისმიერი რიგის დეტერმინანტისათვის, უნდა გავარკვიოთ ურთიერთდამოკიდებულე-

---

* სტრიქონი და სვეტი ამოიშლება, რასაკვირველია, მატრიციდან და არა დეტერმინანტიდან. მაგრამ ტერმინოლოგიის ეს უსწორობა არ გამოიწვევს გაუგებრობას.

ბანი ადიუნქტისა და მინორის ცნებებს შორის და ზოგადი სახით უნდა დავაწესოთ დეტერმინანტის დაშლა ყოველი სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებით.

2. განვიხილოთ n რიგის დეტერმინანტი

$$(46)\qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Sigma\pm a_{\alpha 1}a_{\beta 2}\ldots a_{\lambda n}.$$

თუ გამოვყოფთ დეტერმინანტის იმ წევრებს, რომლებიც მამრავლის სახით შეიცავს განსაზღვრულ a_{ik} ელემენტს, და ამ მამრავლს გავიტანთ ფრჩხილებს გარეთ, მაშინ ფრჩხილებში დარჩენილ გამოსახულებას ეწოდება a_{ik} ელემენტის ადიუნქტი.

a_{ik} ელემენტის ადიუნქტი აღინიშნება A_{ik} სიმბოლოთი. თუ D დეტერმინანტის მატრიციდან ამოვშლით i-ურ სტრიქონს და k-ურ სვეტს და დარჩენილი ელემენტებისაგან, მათი განლაგების შენარჩუნებით, შევადგენთ $n-1$ რიგის დეტერმინანტს, მაშინ ასეთ დეტერმინანტს ეწოდება D დეტერმინანტის მინორი და აღინიშნება M_{ik}-თი.

ჩვენ უნდა მოვნახოთ ისეთი თანაფარდობა, რომელიც A_{ik} ადიუნქტს აკავშირებს M_{ik} შესაბამ მინორთან. დავიწყოთ A_{11} ადიუნქტით, ე. ი. ელემენტის ადიუნქტით, რომელიც მდებარეობს პირველი სვეტისა და პირველი სტრიქონის გადაკვეთაში. ვუჩვენოთ, რომ ეს ადიუნქტი ყოველთვის ეტოლება შესაბამ მინორს. რომ მივიღოთ ადიუნქტი, უწინარეს ყოვლისა უნდა გამოვყოთ დეტერმინანტის ის წევრები, რომლებიც მამრავლის სახით შეიცავს a_{11} ელემენტს. ამ მიზნისათვის აღვნიშნოთ, რომ დეტერმინანტის წევრი

$$\pm a_{\alpha_1}a_{\beta_2}a_{\gamma 3}\ldots a_{\lambda n}$$

შეიცავს მხოლოდ ერთ მამრავლს პირველი სვეტიდან, სახელდობრ a_{α_1}-ს. იმისათვის, რომ ეს ელემენტი ეკუთვნოდეს იმავე დროს პირველ სტრიქონს, საჭიროა $\alpha=1$. რაც შეეხება β, γ, $\ldots$ λ ინდექსებს, მათ შეუძლია მიიღონ სხვადასხვა მნიშვნელობანი 2-დან n-დე. ამგვარად, ჩვენთვის საინტერესო წევრებს ასეთი სახე აქვს

$$(47)\qquad \pm a_{11}a_{\beta_2}a_{\gamma 3}\ldots a_{\lambda n},$$

სადაც ნიშანი განისაზღვრება პირველი ინდექსების

(48) $$1, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

გადანაცვლების ხასიათით, ანუ

(48') $$\beta, \gamma, \dots, \lambda$$

გადანაცვლების ხასიათით, რადგანაც ინდექსი 1 არ ჰქმნის არც ერთ ინვერსიას ამ ინდექსის შემდეგ მდებარე ინდექსებთან.

ადიუნქტის განმარტების თანახმად, უნდა ავიღოთ (47) სახის ყველა წევრის ჯამი და a_{11} ელემენტი გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ (ან ჯამის ნიშნის გარეთ):

$$\Sigma \pm a_{11} a_{\beta 2} a_{\gamma 3} \dots a_{\lambda n} = a_{11} \Sigma \pm a_{\beta 2} a_{\gamma 3} \dots a_{\lambda n}.$$

გამოსახულება, რომელიც დარჩა ჯამის ნიშნის ქვეშ, წარმოადგენს საძიებელ ადიუნქტს:

(49) $$A_{11} = \Sigma \pm a_{\beta 2} a_{\gamma 3} \dots a_{\lambda n}.$$

$\beta, \gamma, \dots, \lambda$ ინდექსებმა აქ შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა მნიშვნელობანი 2 დან n-მდე, ხოლო ყოველი წევრის ნიშანი განისაზღვრება $\beta, \gamma, \dots, \lambda$ გადანაცვლების ხასიათით.

A_{11} ადიუნქტი ახლა შევადაროთ M_{11} მინორს. რომ მივიღოთ ეს მინორი, განსაზღვრის თანახმად, D დეტერმინანტის მატრიციდან პირველ სვეტს და პირველ სტრიქონს და დარჩენილი ელემენტებიდან, ვტოვებთ რა მათ დალაგებას, შევადგენთ დეტერმინანტს:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

გავხსნით რა ამ დეტერმინანტს, მივიღებთ

(50) $$M_{11} = \Sigma \pm a_{\beta 2} a_{\lambda 3} \dots a_{\lambda n},$$

სადაც $\beta, \gamma, \dots, \lambda$-მ, როგორც ზევით, შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა მნიშვნელობა 2-დან n-მდე. ყოველი წევრის ნიშანი პირველს ნაწილში განისაზღვრება $\beta, \gamma, \dots, \lambda$ გადანაცვლების ხასიათით. ამგვარად, (50) გამოსახულება ემთხვევა (49)-ს, ე. ი.

$$M_{11} = A_{11}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენს მიერ მიღებული შედეგი შეეხება ადიუნქტის იმ ელემენტს, რომელსაც განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს (პირველი სვეტის და პირველი სტრიქონის გადაკვეთაში); ამასთან სავსებით განურჩეველია, თუ რა სიმბოლოთია აღნიშნული ეს ელემენტი. ასე მაგალითად, დეტერმინანტში

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს p ელემენტს; ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამ დეტერმინანტში p ელემენტის ადიუნქტი ტოლია

$$\begin{vmatrix} b & c \\ m & n \end{vmatrix}$$

მინორისა, რაშიაც ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ უშუალო გამოთვლით.

3. ახლა განვიხილოთ ადიუნქტი a_{21} ელემენტისა, რომელიც იმყოფება (46) დეტერმინანტის პირველი სვეტისა და მეორე სტრიქონის გადაკვეთის ადგილას. საქმე რომ დავიყვანოთ წინა შემთხვევამდე, დეტერმინანტის მეორე სტრიქონი შეგვიძლია გადავანაცვლოთ პირველ სტრიქონთან; ამგვარად მივიღებთ ახალ დეტერმინანტს:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D.$$

a_{21} ელემენტის ადიუნქტი D' დეტერმინანტში აღვნიშნოთ A'_{21}-ით. რომ მივიღოთ ეს ადიუნქტი, ჩვენ, განსაზღვრის თანახმად, უნდა გამოვყოთ D' დეტერმინანტის ყველა ის წევრი, რომლებიც მამრავლის სახით შეიცავს a_{21} ელემენტს, და ეს ელემენტი უნდა გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ; გამოსახულება, რომელიც დარჩება ფრჩხილებში, მოგვცემს A'_{21} ადიუნქტს. რადგან D დეტერმინანტის ყოველი წევრი D დეტერმინანტის შესაბამ წევრისაგან ნიშნით განსხვავდება, ამიტომ A'_{21} ადიუნქტიც იმავე ელემენტის A_{21} ადიუნქტისაგან D დეტერმინანტში განსხვავდება ნიშნით:

(51) $$A'_{21} = -A_{21}.$$

მაგრამ D' დეტერმინანტში a_{21} ელემენტი იმყოფება პირველი სვეტისა და პირველი სტრიქონის გადაკვეთის ადგილას. მაშასადამე, A'_{21} ადიუნქტი ეტოლება მინორს, რომელსაც მივიღებთ პირველი სვეტის და პირველი სტრიქონის ამოშლით D' მატრიციდან. მაგრამ ადვილად შეიძლება შევამჩნიოთ, რომ ეს მინორი ემთხვევა D დეტერმინანტის M_{21} მინორს. ამგვარად, მივიღებთ:

$$A'_{21} = M_{21}. \tag{52}$$

თუ შევადარებთ ამ თანაფარდობას (51)-თან, მივიღებთ:

$$A_{21} = -M_{21}.$$

ანალოგიური მსჯელობა შეიძლება ჩავატაროთ a_{ik} ელემენტისათვის, რომელიც იმყოფება ჩვენი დეტერმინანტის i-ურ სტრიქონის და k-ურ სვეტის გადაკვეთის ადგილას; დავწეროთ ეს დეტერმინანტი უფრო ვრცლად:

$$D = \left|\begin{array}{cccc|c|ccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{2k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{1k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
\hline
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{ik} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{in} \\
\hline
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right|$$

a_{ik} ელემენტმა რომ დაიკავოს პირველი სვეტის და პირველი სტრიქონის გადაკვეთის ადგილი, ამისათვის საჭიროა i-რი სტრიქონი გადავიტანოთ პირველი სტრიქონის ადგილას, ხოლო k-რი სვეტი — პირველი სვეტის ადგილას. მაგრამ ამასთან უნდა ვიმოქმედოთ ისე, რომ არ დავარღვიოთ ცალკე სტრიქონებისა და სვეტების ურთიერთმდებარეობა. ჯერ გადავაადგილოთ i-ური სტრიქონი თანმიმდევრობით ყოველი წინა სტრიქონთან, დაწყებული $(i-1)$-დან; მაშასადამე, $(i-1)$-ჯერ უნდა მოვახდინოთ ორი სტრიქონის გადანაცვლების ოპერაცია. ამის შედეგად i-რი სტრიქონი იქნება პირველი სტრიქონის ადგილას. ახლა k-რი სვეტი ამგვარადვე უნდა გადავიტანოთ პირველი სვეტის ადგილას. ამისათვის კიდევ $(k-1)$-ჯერ უნ-

და შევასრულოთ ორი სვეტის გადანაცვლების ოპერაცია. დეტერმინანტის ორი სტრიქონის ან ორი სვეტის ყოველ გადანაცვლებას თან სდევს მისი ნიშნის შეცვლა, ე. ი. გამრავლება -1-ზე. რადგანაც ამ ოპერაციას ვიმეორებთ სულ $(i-1)+(k-1)$-ჯერ, ამიტომ მივალთ, ამგვარად, D^* დეტერმინანტამდე, რომელიც D-საგან განსხვავდება მამრავლით:

$$(-1)^{i+k-2}, \text{ ანუ } (-1)^{i+k}.$$

D^* დეტერმინანტში a_{ik} ელემენტი მოთავსდება პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის გადაკვეთაში:

$$D^*=\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \ldots & a_{in} \\ a_{1k} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nc} & a_{nk} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{+,+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

დავუშვათ, რომ A^*_{ik} არის a_{ik} ელემენტის ადიუნქტი D^* დეტერმინანტში. რადგანაც D^* დეტერმინანტის ყოველი წევრი D დეტერმინანტის შესაბამი წევრისაგან განსხვავდება მამრავლით $(-1)^{i+k}$, ამიტომ A^*_{ik} ადიუნქტი A_{ik}-საგან განსხვავდება იმავე მამრავლით:

(53) $$A^*_{ik}=(-1)^{i+k}A_{ik}.$$

ეს თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ ადიუნქტი მინორისაგან განსხვავდება მხოლოდ მამრავლით ± 1. თუ $i+k$ ლუწი რიცხვია, ეს მამრავლი $+1$-ის ტოლია, წინააღმდეგ შემთხვევაში ის ტოლია -1-ს.

მივიღოთ ახლა მხედველობაში, რომ D^* დეტერმინანტში a_{ik} ელემენტი იმყოფება პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის გადაკვეთაში. მაშასადამე, A^*_{ik} ადიუნქტი იმ მინორის ტოლია, რომელიც მიიღება D^* დეტერმინანტიდან პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის ამოშლით. მაგრამ D^* დეტერმინანტის პირველი სტრიქონი შედგება D დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ელემენტებისაგან, ხოლო D^* დეტერმინანტის პირველი სვეტი შედგება D დეტერმინანტის k-ური სვეტის ელემენტებისაკან. რაც შეეხება და-

ნარჩენ სტრიქონებსა და სვეტებს, მათი ურთიერთ განლაგება უცვლელი დარჩა. ამიტომ D^* დეტერმინანტში პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის ამოშლა გვაძლევს იმავე შედეგს, რაც D დეტერმინანტში i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის ამოშლა. მინორი, რომელსაც ამგვარად მივიღებთ, ეტოლება D დეტერმინანტის M_{ik} მინორს. მაშასადამე, უნდა იყოს

$$A^*_{ik}=M_{ik}.$$

თუ შევადარებთ (53)-თან, მივიღებთ:

$$(-1)^{i+k}A_{ik}=M_{ik}.$$

თუ ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $(-1)^{i+k}$-ზე და გავითვალისწინებთ იმას, რომ $(-1)^{2(i+k)}=+1$, უკანასკნელი თანაფარდობა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}. \tag{54}$$

ამგვარად, თუ ინდექსების ჯამი $i+k$ ლუწი რიცხვია, მაშინ ადიუნქტი შესაბამი მინორის ტოლია.

თუ $i+k$ კენტი რიცხვია, მაშინ ადიუნქტი შესაბამი მინორისაგან ნიშნით განსხვავდება.

ასე, მაგალითად, ადიუნქტისათვის, რომელნიც შეესაბამება მეორე სვეტის ელემენტებს, მივიღებთ:

$$A_{12}=-M_{12},\ A_{22}=M_{22},\ A_{32}=-M_{32},\ \ldots,\ A_{n2}=(-1)^{n+2}M_{n2}.$$

§ 6. დაშლა სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებით. დეტერმინანტების გამოთვლა

1. განვიხილოთ საკითხი n რიგის დეტერმინანტის დაშლის შესახებ სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებით. გარკვეულობისათვის ვილაპარაკოთ დეტერმინანტის პირველ სვეტზე. ჩვენ ვიცით, რომ D დეტერმინანტი წარმოადგენს შემდეგი სახის წევრების ჯამს:

$$\pm a_{\alpha 1}a_{\beta 2}\ldots a_{\lambda n}.$$

ყოველი ამ წევრთაგანი მამრავლის სახით შეიცავს პირველი სვეტის ერთ და მხოლოდ ერთ ელემენტს ($a_{\alpha 1}$). თუ ერთ ჯგუფში გავაერთიანებთ დეტერმინანტის იმ წევრებს, რომლებიც მამრავლად

შეიცავს პირველი სვეტის ერთსა და იმავე ელემენტს და ამ ელემენტს გავიტანთ ფრჩხილებს გარეთ, მაშინ ფრჩხილებში დარჩება ამ ელემენტის ადიუნქტი. ამგვარად, ყველა იმ წევრთა ჯამს, რომლებიც შეიცავენ a_{11} მამრავლს, წარმოვადგენთ $a_{11}\ A_{11}$-ის სახით; იმ წევრების ჯამს, რომლებიც შეიცავენ a_{21} მამრავლს, წარმოვადგენთ $a_{21}A_{21}$ სახით და ა. შ.; დაბოლოს იმ წევრთა ჯამს, რომლებიც შეიცავენ a_{n1} მამრავლს, წარმოვადგენთ $a_{n1}\ A_{n1}$ სახით. ამასთან ჩვენ ამოვწურავთ დეტერმინანტის ყველა წევრს, რადგანაც ყოველი წევრი მოხვდება ერთ-ერთ ზემოჩამოთვლილ ჯგუფში. მაშასადამე,

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\dots+a_{n1}A_{n1}. \tag{55}$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს D დეტერმინანტის დაშლას პირველი სვეტის ელემენტებით. ამგვარადვე შეგვიძლია მივიღოთ D დეტერმინანტის დაშლა ყოველი სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებით.

k-ური სვეტის ელემენტებით დაშლა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\dots+a_{nk}A_{nk}. \tag{56}$$

i-ური სტრიქონის ელემენტებით დაშლა იქნება:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}. \tag{57}$$

ეს შედეგები შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი წინადადების სახით:

თუ განსაზღვრული სვეტის (ან განსაზღვრული სტრიქონის) ყოველ ელემენტს გავამრავლებთ შესაბამ ადიუნქტზე და მიღებულ ნამრავლთა ჯამს ავიღებთ, მაშინ აღნიშნული ჯამი დეტერმინანტის ტოლია.

რადგან ყოველი ადიუნქტი მხოლოდ ± 1 მამრავლით განსხვავდება შესაბამი მინორისაგან, ამიტომ D დეტერმინანტის გამოთვლა დაიყვანება მისი მინორების, ე. ი. $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტების გამოთვლამდე.

ასე, მაგალითად, (55) თანაფარდობა, რომელიც გამოხატავს დეტერმინანტის დაშლას პირველი სვეტის ელემენტებით, შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$D=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}+\dots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

ვისარგებლებთ რა სვეტის (ან სტრიქონის) ელემენტების დაშლით, დეტერმინანტის გამოთვლას დავიყვანთ მისი n მინორის გა-

მოთვლამდე, მაგრამ თუ არჩეული სვეტის (ან სტრიქონის) ზოგიერთი ელემენტი იქცევა ნულად, მაშინ შესაბამი წევრები ამოვარდება და გამოთვლა გამარტივდება. შემდეგში დავინახავთ, რომ დეტერმინანტი ყოველთვის შეიძლება გარდავქმნათ იმგვარად, რომ განსაზღვრულ სვეტში ყველა ელემენტი, გარდა ერთისა, გადაიქცეს ნულად. მაშინ n რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა დაიყვანება $(n-1)$ რიგის ერთი დეტერმინანტის გამოთვლამდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, გამოსათვლელია მეოთხე რიგის დეტერმინანტი:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

ვისარგებლოთ, მეორე სვეტის ელემენტებით დაშლით:

$$D=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42}=$$
$$=-a_{12}M_{12}+a_{22}M_{22}-a_{32}M_{32}+a_{42}M_{42}.$$

ჯამის მეორე წევრი იქცევა ნულად, რადგანაც $a_{22}=0$; ამგვარად,

$$D=-1\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=$$
$$=(-1)(-30)+(-3)(-3)+1\cdot 4=43.$$

სავარჯიშო.

გამოვთვალოთ შემდეგი დეტერმინანტები:

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & b \\ -a & 0 & a & b \\ -b & -a & 0 & a \\ -b & -b & -a & 0 \end{vmatrix}$

2. კვლავ განვიხილოთ დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{58}$$

თუ ნებისმიერად შევცვლით D დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს, მაშინ ამ ელემენტების ადიუნქტები უცვლელი დარჩება.

მართლაც, ადიუნქტის გამოთვლა დაიყვანება მინორის გამოთვლამდე, მაგრამ იმ მინორების შედგენის დროს, რომლებიც განსაზღვრული სვეტის ელემენტებს შეესაბამება, თვით ეს ელემენტები ამოიშლება. ამიტომ ამ ელემენტების შეცვლა სხვა ელემენტებით არ იქონიებს გავლენას მინორებზე.

წარმოვიდგინოთ, რომ (58) დეტერმინანტში პირველი სვეტის ელემენტები შეცვლილია შესაბამისად $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ელემენტებით:

$$(59)\qquad D_b=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

როგორც ახლახან დავინახეთ, პირველი სვეტის ელემენტების ადიუნქტები ამასთან უცვლელი დარჩება; ამგვარად, გვექნება

$$(60)\qquad D_b=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}.$$

პირიქით, თუ მოცემულია ასეთი სახის გამოსახულება

$$(61)\qquad b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1},$$

სადაც $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ნებისმიერი ელემენტებია, მაშინ ეს გამოსახულება შეიძლება წარმოვიდგინოთ (59) დეტერმინანტის სახით, რომელსაც მივიღებთ D დეტერმინანტიდან პირველი სვეტის ელემენტების $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ელემენტებით შეცვლის შედეგად.

თავისთავად ცხადია, რომ ყოველივე ზემონათქვამი შეიძლება მივაკუთვნოთ დეტერმინანტის ყოველ სვეტს (ან ყოველ სტრიქონს).

კერძოდ, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ელემენტების სახით შეიძლება ავიღოთ D დეტერმინანტის ყოველი (k-რი) სვეტის ელემენტები:

$$a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk};$$

მაშინ (61) გამოსახულება მიიღებს ასეთ სახეს:

(62) $$a_{1k} A_{11} + a_{2k} A_{21} + \ldots + a_{nk} A_{n1}.$$

თუ $k=1$, მაშინ ეს ჯამი D დეტერმინანტის ტოლია.

ახლა დავუშვათ, რომ $k \neq 1$. წინანდელის მიხედვით, (62) გამოსახულება შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი დეტერმინანტის სახით:

$$a_{1k}A_{11} + a_{2k}A_{21} + \cdots + a_{nk}A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{nk} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ჩვენ ვღებულობთ დეტერმინანტს, რომელშიაც ერთი და იგივე k-რი სვეტი მეორდება ორჯერ: ერთხელ თავის ადგილას, ხოლო მეორეჯერ პირველი სვეტის ადგილას.

ასეთი დეტერმინანტი, როგორც ვიცით, ნულის ტოლია (§ 4, პ. 1). ამგვარად, გვაქვს (თუ $k \neq 1$):

(63) $$a_{1k}A_{11} + a_{2k}A_{21} + \ldots + a_{nk}A_{n1} = 0,$$

ე. ი. თუ k-ურ სვეტის ელემენტებს ($k \neq 1$) პირველი სვეტის ელემენტების ადიუნქტებზე გავამრავლებთ და ჯამს ავიღებთ, მაშინ ამ გამოსახულების მნიშვნელობა ნულს ეტოლება. თანაგვარი მსჯელობით შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ

(64) $$a_{1k}A_{1i} + a_{2k}A_{2i} + \ldots + a_{nk}A_{ni} = 0,$$

თუ კი $k \neq i$.

ამგვარად, თუ რომელიმე სვეტის ელემენტებს გავამრავლებთ შესაბამისად მეორე სვეტის ელემენტების ადიუნქტებზე და ჯამს ავიღებთ, მაშინ ამ გამოსახულების მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

ეს დებულება სწორია, რასაკვირველია, სტრიქონებისათვისაც.

3. დეტერმინანტების კიდევ ზოგიერთი არსებითი თვისებების გამოსაყვანად გამოვიყენოთ დეტერმინანტის დაშლა სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებით *.

---

* ეს თვისებები შეიძლება გამოვიყენოთ უშუალოდ თვით დეტერმინანტის განსაზღვრიდან.

1. თუ რაიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტი შეიცავს საერთო მამრავლს, მაშინ ეს მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

მართლაც, ვთქვათ, პირველი სვეტის ელემენტები შეიცავს საერთო λ მამრავლს:

$$a_{11}=\lambda b_1,\ a_{21}=\lambda b_2, \ . \ . \ . \ , a_{n1}=\lambda b_n;$$

მაშინ

$$D=\begin{vmatrix} \lambda b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda b_1 A_{11}+\lambda b_2 A_{21}+\ .\ .\ .\ +\lambda b_n A_{n1}=$$

$$=\lambda(b_1 A_{11}+b_2 A_{21}+\ .\ .\ .\ +b_n A_{n1})=\lambda\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მაგალითი.

$$\begin{vmatrix} a & \lambda b & \mu \\ b & \lambda & \mu a \\ 1 & \lambda a & \mu b \end{vmatrix}=\lambda\,\mu\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}.$$

შ ე დ ე გ ი. დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ ერთი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტები შესაბამად პროპორციულია სხვა სვეტის ელემენტებისა.

მართლაც, თუ ორი სვეტის ელემენტები შესაბამად პროპორციულია, მაშინ ერთი სვეტის ელემენტებს მივიღებთ მეორე სვეტის შესაბამი ელემენტებისაგან რომელიმე μ მამრავლზე გამრავლებით. თუ ამ მამრავლს გავიტანთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ, დარჩება დეტერმინანტი ორი ერთნაირი სვეტით, ხოლო ასეთი დეტერმინანტი, როგორც ვიცით, ნულის ტოლია.

2. თუ D დეტერმინანტის რაიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტი წარმოდგენილია ორი შესაკრების ჯამის სახით, მაშინ თვით დეტერმინანტი შეიძლება დავყოთ ორი დეტერმინანტის ჯამად; ეს ორი დეტერმინანტი D-საგან განსხვავდება იმით, რომ ჯამის სახით წარმოდგენილი ყოველი ელემენტთაგანის მაგიერ აღებულია ერთ-ერთი შესაკრები.

დავუშვათ, მაგალითად, რომ D დეტერმინანტის პირველი სვეტის ყოველი ელემენტი წარმოდგენილია ორი შესაკრების ჯამის სახით.

მაშასადამე, D დეტერმინანტს ასეთი სახე ექნება:

$$D=\begin{vmatrix} b_1+c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2+c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n+c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=(b_1+c_1)A_{11}+(b_2+c_2)A_{21}+\dots+(b_n+c_n)A_{n1}=$$
$$=(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1})+(c_1A_{11}+c_2A_{21}+\dots+c_nA_{n1}).$$

წინა პუნქტის თანახმად, ფრჩხილებში ჩასმული გამოსახულებანი შეიძლება წარმოვიდგინოთ დეტერმინანტების სახით, რომლებსაც მივიღებთ D-საგან პირველი სვეტის ელემენტების შეცვლით შესაბამისად $b_1, b_2, \dots, b_n$-ით (პირველ შემთხვევაში) და $c_1, c_2, \dots, c_n$-ით (მეორე შემთხვევაში); მაშასადამე,

$$\begin{vmatrix} b_1+c_2 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2+c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n+c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

შენიშვნა: თუ D დეტერმინანტის რაიმე სვეტის ყოველი ელემენტი წარმოდგენილია m შესაკრებთა ჯამის სახით, მაშინ თვით D დეტერმინანტი ანალოგიურად დაიშლება m დეტერმინანტის ჯამად.

ვ. თუ რაიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს მივუმატებთ მეორე სვეტის (სტრიქონის) შესაბამ ელემენტებს, გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე, მაშინ დეტერმინანტი არ შეიცვლება *.

თუ მაგალითად, (58) D დეტერმინანტის მესამე სვეტის ელემენტებს მივუმატებთ პირველი სვეტის ელემენტებს გამრავლებულს λ-ზე, მაშინ მივიღებთ დეტერმინანტს **:

---

* ეს თვისება დადგენილი იყო 1804 წელს ი ა კ ო ბ ი ს მიერ (1804 — 1851).

** ხაზგასმით უნდა აღვნიშნოთ, რომ როცა მესამე სვეტის ელემენტებს მივუმატებთ პირველი სვეტის ელემენტებს, გამრავლებულს 1-ზე, ჩვენ ამავე დროს თავის ადგილას ვტოვებთ პირველი სვეტის ელემენტებს.

$$(65)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\lambda a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\lambda a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+\lambda a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თანახმად მე-2 თვისებისა, ეს დეტერმინანტი დაიშლება ორი დეტერმინანტის ჯამად:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \lambda a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მაგრამ მეორე დეტერმინანტი ნულის ტოლია, რადგანაც მისი მესამე სვეტის ელემენტები პროპორციულია პირველი სვეტის ელემენტებისა. მაშასადამე, (65) დეტერმინანტი ტოლია D დეტერმინანტისა.

კერძოდ, თუ დავუშვებთ, რომ $\lambda=+1$, ან $\lambda=-1$, მივიღებთ:

თუ რომელიმე მწკრივის ელემენტებს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ პარალელური მწკრივის შესაბამ ელემენტებს, მაშინ დეტერმინანტი არ შეიცვლება.

იმავე თვისების განმეორებითი გამოყენებით შეგვიძლია რაიმე სვეტის ელემენტებს მივუმატოთ მეორე სვეტის ელემენტები, გამრავლებული რომელიმე λ რიცხვზე, შემდეგ მესამე სვეტის ელემენტებს, გამრავლებულს μ-ზე და ა. შ.

მე-3 თვისება ძირითად როლს თამაშობს პრაქტიკაში დეტერმინანტების გამოთვლის დროს. ამ თვისების გამოყენებით დეტერმინანტს დავიყვანთ ისეთ სახემდე, როცა რაიმე სვეტში (სტრიქონში) ყველა ელემენტი, გარდა ერთისა, ნულის ტოლია. თუ რა გზით შეიძლება მივაღწიოთ ამას, ვუჩვენოთ მაგალითზე.

მაგალითები.

1. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

თუ პირველი სვეტის ელემენტებს გამოვაკლებთ მესამე სვეტის შესაბამ ელემენტებს (მოკლედ: პირველ სვეტს გამოვაკლებთ მესამეს), პირველ სვეტში მივიღებთ ორ ნულს:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

რომ მივიღოთ კიდევ ერთი ნული, მესამე სტრიქონს გამოვაკლოთ პირველი სტრიქონი, გამრავლებული 2-ზე:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

ახლა ავიღოთ დეტერმინანტის დაშლა პირველი სვეტის ელემენტებით:

$$D = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41}.$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0,$$

ასე რომ

$$D=a_{11}M_{11}=1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

ამოცანა დაყვანილია მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლამდე; უწინარეს ყოვლისა, პირველი სვეტის ელემენტებიდან გავიტანოთ საერთო მამრავლი:

$$D = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

მეორე სტრიქონს ახლა მივუმატოთ პირველი, ხოლო მესამე სტრიქონს გამოვაკლოთ პირველი:

$$D = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4(-2+4) = 8.$$

2. გამოვითვალოთ დეტერმინანტი:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

გამოვაკლოთ მეოთხე სვეტს მესამე, მივიღებთ ერთ ნულს მეოთხე სვეტში

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

მეოთხე სვეტი მივუმატოთ მესამეს; ამის შემდეგ პირველ სტრიქონს გამოვაკლოთ გასამკეცებული მეოთხე სტრიქონი, ხოლო მესამე სტრიქონს მივუმატოთ მეოთხე სტრიქონი, მივიღებთ:

$$D=\begin{vmatrix} -10 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

მეოთხე სვეტით დაშლა გვაძლევს

$$D=\begin{vmatrix} -10 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

თუ გამოვთვლით ამ მესამე რიგის დეტერმინანტს, მივიღებთ:

$$D=-5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -7 & 3 & 6 \end{vmatrix}=-5(-3+28)=-125.$$

3. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

რომ გამოთვლა გავამარტივოთ, ჯერ მესამე სტრიქონს გამოვაკლოთ პირველი, შემდეგ პირველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მეორე; ამ გარდაქმნათა შემდეგ დეტერმინანტი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

პირველ სტრიქონს ახლა გამოვაკლოთ მესამე:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

პირველი სტრიქონის ელემენტებით დაშლა მოგვცემს:

$$D=3\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

დაგვრჩა გამოსათვლელი მესამე რიგის დეტერმინანტი:

$$D=3\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & -1 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 13 & -1 \end{vmatrix}=141.$$

4. რომ გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & c & 0 & a \\ c & 0 & a & b \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix},$$

პირველი სვეტის ელემენტებს მივუმატოთ მეორე, მესამე და მეოთხე სვეტების შესაბამი ელემენტები:

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & 0 & a & b \\ a+b+c & a & b & c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix}=(a+b+c)\,\Delta,$$

სადაც

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix}.$$

რომ გამოვთვალოთ ეს დეტერმინანტი, მეოთხე სტრიქონს გამოვაკლოთ მესამე, მესამეს—მეორე, მეორეს—პირველი:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 0 & c-b & -c & a \\ 0 & -c & a & b-a \\ 0 & a & b-a & c-b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c-b & -c & a \\ -c & a & b-a \\ a & b-a & c-b \end{vmatrix}.$$

პირველ სვეტს მივუმატოთ მესამე:

$$\begin{vmatrix} c-b+a-c & a \\ -c+b-a & a & b-a \\ a+c-b & b-a & c-b \end{vmatrix} = (a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & -c & a \\ -1 & a & b-a \\ 1 & b-a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$=(a-b+c)\begin{vmatrix} 0 & a-c & b \\ -1 & a & b-a \\ 0 & b & c-a \end{vmatrix} = -(a-b+c)\left\{(a-c)^2+b^2\right\}$$

ახლა დავუბრუნდეთ D დეტერმინანტს:

$$D=(a+b+c)\Delta=-(a+b+c)(a-b+c)\left\{(a-c)^2+b^2\right\}.$$

4. განვიხილოთ ვ ა ნ დ ე რ მ ო ნ დ ი ს დეტერმინანტი x_1 x_2, x_3, x_4 ელემენტებისათვის:

$$(66)\qquad V_{(4)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}.$$

მეოთხე სვეტის ელემენტები გამოვაკლოთ პირველი, მეორე და მესამე სვეტის შესაბამ ელემენტებს, მივიღებთ:

$$V_{(4)}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1-x_4 & x_2-x_4 & x_3-x_4 & x_4 \\ x_1^2-x_4^2 & x_2^2-x_4^2 & x_3^2-x_4^2 & x_4^2 \\ x_1^3-x_4^3 & x_2^3-x_4^3 & x_3^3-x_4^3 & x_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$=-\begin{vmatrix} x_1-x_4 & x_2-x_4 & x_3-x_4 \\ x_1^2-x_4^2 & x_2^2-x_4^2 & x_3^2-x_4^2 \\ x_1^3-x_4^3 & x_2^3-x_4^3 & x_3^3-x_4^3 \end{vmatrix}.$$

ახლა მეორე სტრიქონს გამოვაკლოთ პირველი, გამრავლებული x_4-ზე, მესამეს — მეორე, გამრავლებული x_4-ზე:

$$(67)\qquad V_{(4)}=-\begin{vmatrix} x_1-x_4 & x_2-x_4 & x_3-x_4 \\ x_1^2-x_1x_4 & x_2^2-x_2x_4 & x_3^2-x_3x_4 \\ x_1^3-x_1^2x_4 & x_2^3-x_2^2x_4 & x_3^3-x_3^2x_4 \end{vmatrix}=$$

$$=-(x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_3-x_4)V_{(3)},$$

სადაც

$$V_{(3)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

არის x_1, x_2, x_3, ელემენტების ვანდერმონდის დეტერმინანტი.

(67) თანაფარდობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

(67′) $$V_{(4)}=(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\ V_{(3)}.$$

$V_{(3)}$ დეტერმინანტი შეიძლება გარდავქმნათ ამგვარადვე. ეს მოგვცემს

(68) $$V_{(3)}=(x_3-x_1)(x_3-x_2)\,V_{(2)},$$

სადაც:

(69) $$V_{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1.$$

(67), (68) და (69)-დან მივიღებთ:

(70) $$V_{(4)}=(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1).$$

მოვიყვანოთ ვანდერმონდის დეტერმინანტის გამოთვლის კიდევ მეორე ხერხი.

$V_{(4)}$ განვიხილოთ როგორც x_4 ცვლადის ფუნქცია; x_1, x_2, x_3, ელემენტები ჩავთვალოთ პარამეტრებად ანუ განუსაზღვრელ მუდმივებად. მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

(71) $$V_{(4)}=V_{(4)}(x_4).$$

თუ ვიგულისხმებთ, $x_4=x_1$, მაშინ (71) ფუნქცია გადაიქცევა ნულად, რადგან (66) დეტერმინანტს, როცა $x_4=x_1$ აქვს ორი ერთნაირი სვეტი. სწორედ ასევე, როცა $x_4=x_2$ და $x_4=x_3$, (71) ფუნქცია გადაიქცევა ნულად. მაშასადამე, ეს ფუნქცია გაიყოფა სხვაობებზე: x_4-x_1, x_4-x_2, x_4-x_3.

ასევე შეგვიძლია აღმოვაჩინოთ, რომ $V_{(4)}$ იყოფა x_3-x_1, x_3-x_2, x_2-x_1 სხვაობებზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ $V_{(4)}$ იყოფა ნამრავლზე:

(72) $$(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1).$$

ამ გაყოფის შედეგად მიღებულ განაყოფს თუ λ-თი აღვნიშნოთ, მივიღებთ

(73) $V_{(4)} = \lambda(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$.

მარჯვენა ნაწილში უნდა გვექნეს იგივე წევრები, როგორიც მარცხენაში, და იმავე კოეფიციენტებით. $V_{(4)}$ დეტერმინანტის ყოველი წევრი წარმოადგენს იმ მამრავლთა ნამრავლს, რომლებიც თითოთითოდ არის აღებული ყოველი სტრიქონიდან, ე. ი. ასეთი სახის ნამრავლს:

$$x_i x_j^2 x^3_k.$$

მაშასადამე, $V_{(4)}$ დეტერმინანტის ყოველი წევრი არის მეექვსე ხარისხის x_1, x_2, x_3, x_4 ელემენტების მიმართ. მეორეს მხრით, (72) ნამრავლის ხარისხი $x_1, \ldots, x_4$ ელემენტების მიმართ აგრეთვე 6-ის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ λ კოეფიციენტი (73) თანაფარდობაში არაა დამოკიდებული $x_1, \ldots, x_4$ ელემენტებზე.

ახლა მივიღოთ მხედველობაში, რომ მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლი

$$x_2\, x_3^2\, x_4^3$$

შედის $V_{(4)}$ დეტერმინანტში $+1$ კოეფიციენტით. ამავე დროს (73) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში შესაბამი წევრი მიიღება λ-ის გამრავლებით ყველა სხვაობის პირველ წევრთა ნამრავლზე; მისი კოეფიციენტი იქნება λ. ამგვარად უნდა იყოს $\lambda = 1$, და ჩვენ კვლავ (70) თანაფარდობას მივიღებთ.

სწორედ ასევე შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ ვანდერმონდის n რიგის დეტერმინანტი ეტოლება შემდეგ სხვაობათა ნამრავლს:

$$V_{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{cases} (x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}) \cdot \\ \cdot (x_{n-1} - x_1)\ldots(x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot \\ \cdot (x_2 - x_1), \end{cases}$$

რომელთა რიცხვი არის $\dfrac{1}{2}n(n-1)$. ვანდერმონდის დეტერმინანტი წარმოადგენს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების ნიშანცვლად ფუნქციას; რომელიმე ორი ელემენტის ტრანსპოზიციის დროს ეს ფუნქცია ნიშანს იცვლის.

ვანდერმონდის დეტერმინანტის კვადრატი წარმოადგენს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ელემენტების სიმეტრიულ ფუნქციას. თუ $x_1, \ldots, x_n$ არის

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$$ ფუნქციის ფესვები,

მაშინ $V_{(n)}^2$ წარმოადგენს ამ ფუნქციის (თავი IV) დისკრიმინანტს.

სავარჯიშო.

გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

$$1.\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 2.\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad 3.\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$4.\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad 5.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 6.\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$7.\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 8.\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & x \\ x & 2 & x & 0 \end{vmatrix} \quad 9.\ \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 0 & b \\ b & 0 & 1 & a \\ 1 & b & a & 1 \end{vmatrix} \quad 10.\ \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & a \\ b & 0 & a & b \\ a & 1 & 0 & b \\ a & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

§ 7. ლაპლასის თეორემა*

1. მე-6 პარაგრაფში ჩვენ გავეცანით დეტერმინანტის დაშლას სვეტის ან სტრიქონის ელემენტებით. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ უფრო ზოგად დაშლას, რომელიც გამოხატავს n რიგის დეტერმინანტს დაბალი რიგის დეტერმინანტებით. ჩვენ უნდა დავიწყოთ *მინორის ცნების* განზოგადებიდან. განვიხილოთ დეტერმინანტი:

* ეს თეორემა მოთავსებულია ლაპლასის თხზულებაში „Recherches sur le calcul intégral et sur le systême du monde" (1772 წ.); ამ თეორემის ზოგიერთ კერძო შემთხვევებს იცნობდა ვანდერმონდიც (1771 წ.), მაგრამ მკაფიო ჩამოყალიბება და დამტკიცება პირველად მოგვცა კოშიმ თავის ნაშრომში (1812 წ.), რომელიც ზევით მოვიხსენიეთ.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{74}$$

დეტერმინანტის მინორის ქვეშ ჩვენ აქამდე გვესმოდა $n-1$ რიგის დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება სვეტის ან სტრიქონის ამოშლით D დეტერმინანტიდან, უფრო სწორად რომ ვთქვათ, შესაბამი მატრიციდან. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ იმავე მატრიციდან ამოვშალეთ k სვეტი, და k სტრიქონი, მაშინ მივიღებთ მატრიცს, რომელიც შეიცავს $n-k$ სვეტს და $n-k$ სტრიქონს; ამ მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ $n-k$ რიგის დეტერმინანტი. ასეთ დეტერმინანტს აგრეთვე ვუწოდოთ D დეტერმინანტის მინორი, სახელდობრ—მინორი $n-k$ რიგისა. ამგვარად, ის მინორები, რომლებთანაც აქამდე გვქონდა საქმე, წარმოადგენს $n-1$ რიგის მინორებს.

განვიხილოთ, მაგალითად, დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}. \tag{75}$$

თუ აქ ამოვშლით მესამე და მეხუთე სვეტს, მეორე და მეოთხ სტრიქონს, მივიღებთ მესამე რიგის მინორს

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}. \tag{76}$$

იგივე მინორი შეიძლება კიდევ სხვანაირადაც დავახასიათოთ — სახელდობრ, შეიძლება მივუთითოთ, რომ ეს შედგენილია ელემენტებისაგან, რომლებიც მდებარეობს პირველი, მეორე და მეოთხე სვეტის, პირველი, მესამე და მეხუთე სტრიქონის გადაკვეთაში.

ახლა შემოვიყვანოთ ურთიერთ დამატებითი მინორების ცნება. ეს ცნება გავარკვიოთ ჯერ მაგალითზე. ჩვენ დავინახეთ, რომ (76) მინორი შეიძლება მივიღოთ (75) დეტერმინანტიდან ორი სვეტის და ორი სტრიქონის ამოშლით. თუ განვიხილავთ ა მ ო შ ლ ი ლ ი სვე-

ტებისა და სტრიქონების გადაკვეთის ადგილას მყოფ ელემენტებს, მაშინ მათგან შეიძლება შევადგინოთ მეორე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}. \tag{76'}$$

ამ მინორს დამატებითი ეწოდება (76) მინორის მიმართ. ცხადია, რომ (76) მინორი თავის მხრით დამატებითი იქნება (76') მინორისათვის; ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ (76) და (76') წარმოადგენენ **ურთიერთ დამატებითი მინორებს.**

საზოგადოდ, თუ n რიგის (74) დეტერმინანტიდან ამოვშლით k სტრიქონს და k სვეტს, მაშინ დარჩენილი ელემენტები შეადგენენ მატრიცს, რომლიდანაც შეიძლება შევადგინოთ $n-k$ რიგის Δ მინორი. პირიქით, ამოშლილი სვეტებისა და სტრიქონების გადაკვეთაში მდებარე ელემენტებისაგან შეიძლება შევადგინოთ k რიგის Δ' მინორი. ასეთ ორ Δ და Δ' მინორს ვუწოდოთ **ურთიერთ დამატებითი მინორები.**

2. კვლავ განვიხილოთ n რიგის D დეტერმინანტი და გამოვყოთ მასში პირველი h სტრიქონი და პირველი h სვეტი:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \cdots & a_{1h} & a_{1,h+1} & a_{1,h+2} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2h} & a_{2,h+1} & a_{2,h+2} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} \cdots & a_{hh} & a_{h,h+1} & a_{h,h+2} \cdots & a_{hn} \\ a_{h+1,1} & a_{h+1,2} \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+1} & a_{h+1,h+2} \cdots & a_{h+1,n} \\ a_{h+2,1} & a_{h+2,2} \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+1} & a_{h+2,h+2} \cdots & a_{h+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nh} & a_{n,h+1} & a_{n,h+2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

პირველი h სვეტისა და პირველი h სტრიქონის გადაკვეთაში მდებარე ელემენტებისაგან შეიძლება შევადგინოთ h რიგის მინორი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}.$$

Δ ს მიმართ დამატებითი იქნება მინორი

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{h+1,\,h+1} & a_{h+1,\,h+2} & \dots & a_{h+1,\,n} \\ a_{h+2,\,h+1} & a_{h+2,\,h+2} & \dots & a_{h+2,\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\,h+1} & a_{n,\,h+2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ვუჩვენოთ, რომ $\Delta\Delta'$ ნამრავლი შედის D დეტერმინანტის გაშლილი გამოსახულების შემადგენლობაში (ე. ი. $\Delta\Delta'$ ნამრავლის ყოველი წევრი შედის D დეტერმინანტის წევრთა რიცხვში). მართლაც, Δ მინორის ზოგადი წევრი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით

$$(77)\qquad (-1)^{\sigma} a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \dots a_{h\varkappa},$$

სადაც $\alpha, \beta, \dots, \varkappa$ არის $1, 2, \dots, h$ ინდექსების რაიმე გადანაცვლება, ხოლო σ — ინვერსიათა რიცხვია ამ გადანაცვლებაში.

ამგვარადვე Δ' მინორის ზოგადი წევრი იქნება

$$(78)\qquad (-1)^{\tau} a_{h+1,\lambda}\, a_{h+2,\mu} \dots a_{n\omega},$$

სადაც $\lambda, \mu, \dots, \omega$ არის $h+1, h+2, \dots, n$ ინდექსების რაიმე გადანაცვლება, ხოლო τ — ინვერსიათა რიცხვია ამ გადანაცვლებაში. თუ გადავამრავლებთ (77) და (78) წევრებს მივიღებთ:

$$(79)\qquad (-1)^{\sigma+\tau} a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \dots a_{h\varkappa}\, a_{h+1,\lambda}\, a_{h+2,\mu} \dots a_{n\omega}.$$

რადგანაც ინდექსები

$$(80)\qquad \alpha, \beta, \dots, \varkappa, \lambda, \mu, \dots, \omega$$

ჰქმნიან $1, 2, \dots, n$ ინდექსების გარკვეულ გადანაცვლებას, ამიტომ (79) ნამრავლი ამა თუ იმ ნიშნით უნდა შევიდეს D დეტერმინანტის შემადგენლობაში. ახლა მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\alpha, \beta, \dots, \varkappa$ ინდექსების მნიშვნელობანი არ აღემატება h-ს, მაშინ როდესაც $\lambda, \mu, \dots, \omega$ ინდექსები ღებულობენ h-ზე მეტ მნიშვნელობებს. აქედან გამომდინარეობს, რომ (80) გადანაცვლებაში არც ერთი $\alpha, \beta, \dots, \varkappa$ ინდექსი არ ჰქმნის ინვერსიებს $\lambda, \mu, \dots, \omega$ ინდექსებთან. ამიტომ ინვერსიათა საერთო რიცხვი (80) გადანაცვლებაში ეტოლება ინვერსიათა რიცხვს $\alpha, \beta, \dots, \varkappa$ ინდექსებს შორის, მიმატებულს ინვერსიათა რიცხვთან $\lambda, \mu, \dots, \omega$ ინდექსებს შორის, ე. ი. $\sigma+\tau$-ის ტოლია. ამგვარად, $(-1)^{\sigma+\tau}$ მამრავლი

(79) ნამრავლს ანიჭებს სწორედ იმ ნიშანს, რომლითაც ის უნდა შევიდეს D დეტერმინანტის შემადგენლობაში.

ამით ჩვენ ვუჩვენეთ, რომ $\Delta\Delta'$ ნამრავლის ყოველი წევრი შედის D დეტერმინანტის შემადგენლობაში.

3. თუ ავიღებთ D დეტერმინანტის h რიგის ნებსით Δ მინორს, მაშინ ყოველთვის შეიძლება D დეტერმინანტი გარდავქმნათ იმგვარად, რომ Δ მინორმა დაიჭიროს პირველი h სტრიქონის და პირველი h სვეტის გადაკვეთის ადგილი. ამისათვის საჭირო იქნება D დეტერმინანტის სვეტებისა და სტრიქონების გარკვეული გადანაცვლება.

დავუშვათ, რომ Δ მინორი შექმნილია ელემენტებით, რომლებიც მდებარეობენ $i_1, i_2, \ldots, i_h$ ნომრებით აღნიშნული სტრიქონების და $k_1, k_2, \ldots, k_h$ ნომრებით აღნიშნული სვეტების გადაკვეთაში:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_h} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \ldots & a_{i_2 k_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_h k_1} & a_{i_h k_2} & \ldots & a_{i_h k_h} \end{vmatrix}.$$

D დეტერმინანტი უნდა გარდავქმნათ იმგვარად, რომ Δ მინორის შემადგენლობაში შემავალმა სტრიქონებმა და სვეტებმა დაიკავოს პირველი h სტრიქონის და პირველი h სვეტის ადგილი; ამასთან თვალყური უნდა ვადევნოთ იმას, რომ არ დაირღვეს დანარჩენი სტრიქონებისა და სვეტების ურთიერთ მდებარეობა.

უწინარეს ყოვლისა i_1 სტრიქონი გადავიყვანოთ პირველი სტრიქონის ადგილას. ამ მიზნისათვის გადავანაცვლოთ იგი თანმიმდევრობით ყოველი i_1-1 წინა სტრიქონთაგან; ამგვარად i_1-1 ჯერ მოვახდენთ ორ სტრიქონის გადანაცვლების ოპერაციას; სხვანაირად რომ ვთქვათ, მოვახდენთ სტრიქონების i_1-1 ტრანსპოზიციას.

მოვათავსეთ რა i_1 სტრიქონი პირველი სტრიქონის ადგილას, ჩვენ შევეხოთ i_2 სტრიქონს. i_2 სტრიქონი რომ გადავიყვანოთ მეორე ადგილას, ის უნდა გადავსვათ ყოველ წინა სტრიქონთან, გარდა i_1 სტრიქონისა, რომელიც უკვე მდებარეობს პირველ ადგილას. მაშასადამე, კიდევ უნდა შევასრულოთ i_2-2 ტრანსპოზიცია.

ამგვარადვე, i_3 სტრიქონი რომ გადავიყვანოთ მესამე ადგილას, უნდა შევასრულოთ i_3-3 ტრანსპოზიცია, და ა. შ. დაბოლოს, i_h სტრიქონი რომ გადავიყვანოთ h-ურ ადგილას, საჭირო იქნება i_h-h ტრანსპოზიცია. ამგვარად, სულ უნდა შევასრულოთ სტრიქონების

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_h-h)=i_1+i_2+\ldots+i_h-(1+2+\\+\ldots+h)$$

ტრანსპოზიცია.

ახლა შევეხოთ სვეტებს. k_1 სვეტი ამგვარადვე უნდა გადავიყვანოთ პირველი სვეტის ადგილას, k_2 სვეტი—მეორე სვეტის ადგილას და ა. შ., დაბოლოს, k_h სვეტი—h-რ სვეტის ადგილას. მაშასადამე, უნდა შევასრულოთ სვეტების

$$(k_1-1)+(k_2-2)+\ldots+(k_h-h)=k_1+k_2+\ldots+k_h-(1+2+\\+\ldots+h)$$

ტრანსპოზიცია.

სტრიქონებისა და სვეტების იმ ტრანსპოზიციათა საერთო რიცხვი, რომლებიც შევასრულეთ, არის

$$i_1+i_2+\ldots+i_h+k_1+k_2+\ldots+k_h-2(1+2+\ldots+h)=\\=s-2(1+2+\ldots+h),$$

სადაც

$$s=i_1+i_2+\ldots+i_h+k_1+k_2+\ldots+k_h. \tag{81}$$

ყოველი ამ ტრანსპოზიციათაგანი ცვლის დეტერმინანტის ნიშანს; ამგვარად, შედეგად მივიღებთ D^* დეტერმინანტს, რომელიც D საგან განსხვავდება მამრავლით:

$$(-1)^{s-2(1+2+\ldots+h)} \text{ ანუ } (-1)^s.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$D=(-1)^s D^*.$$

D^* დეტერმინანტში მინორს უჭირავს პირველი h სტრიქონისა და პირველი h სვეტის გადაკვეთის ადგილი. მე-2 პუნქტის მიხედვით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ Δ მინორის ნამრავლი მის დამატებით მინორზე შედის D^* დეტერმინანტის შემადგენლობაში. დავუშვათ, რომ Δ' არის დამატებითი მინორი Δ მინორის მიმართ D დეტერმინანტში;

რადგან D-დან D^*-ზე გადასვლისას არ დარღვეულა Δ'-ში შემავალი სტრიქონებისა და სვეტების ურთიერთ მდებარეობა, ამიტომ Δ' იქნება დამატებითი მინორი Δ-სათვის D^* დეტერმინანტშიაც. მაშასადამე, D^* დეტერმინანტში შედის $\Delta\Delta'$ ნამრავლი. მაგრამ D დეტერმინანტი D^* დეტერმინანტისაგან განსხვავდება $(-1)^s$ მამრავლით; მაშასადამე, D *დეტერმინანტის შემადგენლობაში შევა* $(-1)^s\Delta\Delta'$ *ნამრავლი*.

ახლა შემოვიღოთ Δ მინორის ალგებრული დამატების ცნება. მინორის *ალგებრულ დამატებად* (ანუ *ადიუნქტად*) ჩვენ ვუესმის მისი დამატებითი მინორი, გამრავლებული $(-1)^s$-ზე, სადაც მაჩვენებელი განისაზღვრება (81) ტოლობით.

ზევით მიღებული შედეგი ახლა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ამგვარად:

D დეტერმინანტის შემადგენლობაში შედის ყოველი Δ მინორის ნამრავლი მის ალგებრულ დამატებაზე, ე. ი. $(-1)^s\Delta'$-ზე.

4. თუ n რიგის დეტერმინანტში გამოვყოფთ რომელიმე h სტრიქონს, ხოლო დანარჩენ სტრიქონებს გამოვტოვებთ, მაშინ მივიღებთ ცხრილს (მართკუთხა მატრიცს), რომელიც შეიცავს h სტრიქონსა და n სვეტს. მაგალითად, თუ დეტერმინანტში

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

გამოვყოფთ *მეორე* და *მეოთხე* სტრიქონებს, ხოლო დანარჩენს გამოვტოვებთ, მივიღებთ მართკუთხა მატრიცს

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}. \tag{82}$$

ასეთი მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ მეორე რიგის სხვადასხვა მინორები, რომელიმე ორი სვეტის გამოყოფით (ამ სვეტების ურთიერთმდებარეობა უნდა იყოს იგივე, როგორც მატრიცშია). ასეთია, მაგალითად, მინორები

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{25} \\ a_{41} & a_{45} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

ცხადია, რომ მეორე რიგის მინორების საერთო რიცხვი, რომლებიც ამგვარად შეიძლება შევადგინოთ (82) მატრიციდან, ეტოლება ჯუფთებათა რიცხვს ხუთი სვეტიდან ორ-ორით, ე. ი. ეტოლება

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

ამგვარადვე, თუ n რიგის დეტერმინანტში გამოვყოფთ $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ნომრებით აღნიშნულ h სტრიქონს, მივიღებთ მართკუთხა მატრიცს:

(83)
$$\begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 1} & \ldots & a_{i_1 h} & a_{i_1, h+1} & \ldots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \ldots & a_{i_2 h} & a_{i_2, h+1} & \ldots & a_{i_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_h 1} & a_{i_h 2} & \ldots & a_{i_h h} & a_{i_h, h+1} & \ldots & a_{i_h n} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ h რიგის სხვადასხვაგვარი მინორები, რომელიმე h სვეტის გამოყოფით. რიცხვი ყველა

(84) $$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$$

მინორებისა, რომლებიც ამგვარად შეიძლება მივიღოთ, ტოლია ჯუფთებათა რიცხვისა n სვეტიდან h-ით:

$$\nu = C_n^h = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-h+1)}{h!},$$

ანუ

(81) $$\nu = \frac{n!}{h!(n-h)}.$$

დავუშვათ, რომ $(-1)^{s_i}\Delta'$ არის Δ_i მინორის ალგებრული დამატება; წინანდელის მიხედვით, ყოველი მინორის ნამრავლი მის ალგებრულ დამატებაზე

$$(-1)^{s_i} \Delta_i \Delta'_i$$

შედის D დეტერმინანტის შემადგენლობაში. ამიტომ თუ შევადგენთ ასეთ ნამრავლთა ჯამს:

(86) $$(-1)^{s_1}\Delta_1\Delta_1' + (-1)^{s_2}\Delta_2\Delta'_2 + \ldots + (-1)^{s_\nu}\Delta_\nu\Delta_\nu',$$

მაშინ ამ ჯამის ყოველი წევრი შევა D დეტერმინანტის შემადგენლობაში. ახლა დავთვალოთ იმ წევრთა რიცხვი, რომლებიც ამ ჯამ-

ში შედის. ყოველი Δi მინორთაგანი წარმოადგენს h რიგის დეტერმინანტს, რომელიც შეიცავს $h!$ წევრს; ყოველი დამატებითი $\Delta' i$ მინორთაგანი წარმოადგენს $n-h$ რიგის დეტერმინანტს, რომელიც შეიცავს $(n-h)!$ წევრს. მაშასადამე, $(-1)^{s_i} \Delta i \Delta' i$ ნამრავლი შეიცავს $h!(n-h)!$ წევრს. მეორეს მხრით, ნამრავლები

$$(-1)^{s_i} \Delta_i \Delta'_i \text{ და } (-1)^{s_j} \Delta_j \Delta'_j,$$

როცა $i \neq j$, არ შეიცავენ მსგავს წევრებს, რადგანაც Δ_i და Δ_j მინორები ერთმანეთისაგან განსხვავდება ერთი სვეტით მაინც. აქედან გამომდინარეობს, რომ (86) ჯამი შეიცავს $h!\,(n-h)!\,\nu$ სხვადასხვა წევრს. მაგრამ თანახმად (85) ტოლობისა, გვაქვს:

$$h!\,(n-h)!\,\nu = n!,$$

ე. ი. (86) ჯამის წევრთა რიცხვი D დეტერმინანტის წევრთა რიცხვის ტოლია. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (86) ჯამი შეიცავს ყველა იმ და მხოლოდ იმ წევრს, რომლებსაც D დეტერმინანტი შეიცავს, ე. ი.

$$(87) \qquad D=(-1)^{s_1} \Delta_1 \Delta'_1 + (-1)^{s_2} \Delta_2 \Delta'_2 + \ldots + (-1)^{s_\nu} \Delta_\nu \Delta'_\nu.$$

ეს უკანასკნელი თანაფარდობა გამოხატავს ლაპლასის თეორემას:

თუ გამოვყოფთ მატრიცს, რომელიც შეიცავს D დეტერმინანტის h სტრიქონს (ან სვეტებს) და მისგან შევადგენთ h რიგის ყველა შესაძლო მინორს, მაშინ ჯამი ამ მინორების ნამრავლთა მათ ალგებრულ დამატებებზე ტოლია D დეტერმინანტისა.

მაგალითის სახით განვიხილოთ მეოთხე რიგის დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

გამოვყოფთ რა პირველ ორ სტრიქონს, მივიღებთ მატრიცს

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ მეორე რიგის მინორები:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_5=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad \Delta_6=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

შესაბამი ალგებრული დამატებანი იქნება:

$$(-1)^{s_1}\Delta_1'=(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$(-1)^{s_2}\Delta_2'=(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$(-1)^{s_3}\Delta_3'=(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix},$$

$$(-1)^{s_4}\Delta_4'=(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$(-1)^{s_5}\Delta_5'=(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

$$(-1)^{s_6}\Delta_6'=(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

მაშასადამე, დაშლა (87) ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებს:

$$D=\Delta_1\Delta_1'-\Delta_2\Delta_2'+\Delta_3\Delta_3'+\Delta_4\Delta_4'-\Delta_5\Delta_5'+\Delta_6\Delta_6'=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

შენიშვნა: თუ დეტერმინანტის ორ ან რამდენიმე სტრიქონში შესაბამ ადგილებზე (ე. ი. ერთსა და იმავე სვეტებში) აღმოჩნდება ელემენტები, რომლებიც ნულის ტოლია, მაშინ ლაპლასის დაშლა არსებითად მარტივდება. განვიხილოთ, მაგალითად დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} & b_{11} & b_{12} \\ p_{21} & p_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \tag{88}$$

აქ პირველი ორი სტრიქონი

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

შეიცავს მეორე რიგის მხოლოდ ერთ მინორს, განსხვავებულს ნულისაგან. მაშასადამე, ლაპლასის დაშლა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} & b_{11} & b_{12} \\ p_{21} & p_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

ამგვარად, (88) დეტერმინანტის მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული

$$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$$

ელემენტებზე.

სავარჯიშო.

1. დეტერმინანტისათვის

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

დაწერეთ დაშლა მინორებად, რომლებიც შედგენილია პირველი ორი სტრიქონისაგან.

2. წარმოადგინეთ ორი დეტერმინანტის ნამრავლი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

მეხუთე რიგის ერთი დეტერმინანტის სახით.

3. გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

იმ მინორებად დაშლის საშუალებით, რომლებიც შედგენილია მეორე და მესამე სტრიქონებისაგან.

4. ლაპლასის დაშლის გამოყენებით გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რა არის ინვერსია?

2. რა არის ტრანსპოზიცია? რა გავლენას ახდენს ის გადანაცვლებაზე?

3. რომელ ტიპს ეკუთვნის გადანაცვლება, თუ ცნობილია, რომ ის მიღებულია ნატურალური დალაგებით ტრანსპოზიციების ლუწი (კენტი) რიცხვით?

4. n რიგის დეტერმინანტის ზუსტი განმარტება.

5. რით არის გამოწვეული I და II წესების ტოლფასობა დეტერმინანტის წევრის წინ მყოფი ნიშნის განსაზღვრისათვის?

6. როგორ შეიძლება მივიღოთ დეტერმინანტის განსაზღვრული ელემენტის ადიუნქტი?

7. რამდენ წევრს შეიცავს ადიუნქტი, თუ დეტერმინანტის რიგი n-ის ტოლია.

8. დავუშვათ, რომ დეტერმინანტში შეცვლილია განსაზღვრული სვეტის ელემენტები; რა გავლენას იქონიებს ეს ამ ელემენტების ადიუნქტებზე?

9. რას ეტოლება ჯამი რომელიმე სვეტის ელემენტების ნამრავლთა მეორე სვეტის ელემენტების ადიუნქტებზე?

10. როგორ უნდა მივიღოთ მოცემული მინორის მიმართ დამატებითი მინორი.

11. როგორ უნდა მივიღოთ მოცემული მინორის ალგებრული დამატება?

თ ა ვ ი VIII

წრფივი განტოლებანი და წრფივი გარდაქმნები

§ 1. წრფივ განტოლებათა სისტემები

1. წრფივ განტოლებათა სისტემების შესწავლისათვის განვიხილოთ ჯერ ის შემთხვევა, როცა განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვის ტოლია; ეს უცნობები აღვნიშნოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ით, ხოლო თვით განტოლებანი ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

თუ რაიმე სისტემა მნიშვნელობებისა აკმაყოფილებს (1) სისტემის ყოველ განტოლებას, მაშინ ეს მნიშვნელობანი ჰქმნიან მოცემულ განტოლებათა სისტემის ა მ ო ხ ს ნ ა ს. ჩვენი ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ გამოვარკვიოთ, აქვს თუ არა ამოხსნები განტოლებათა მოცემულ სისტემას, და თუ აქვს, სახელდობრ როგორი.

(1) განტოლებათა კოეფიციენტები ჰქმნიან კვადრატულ ცხრილს (მატრიცს), რომლიდანაც შეიძლება შევადგინოთ დეტერმინანტი

$$(2)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტს ვუწოდოთ მოცემულ **განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი.** (1) სისტემის ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ **განუსაზღვრელ მამრავლთა** მეთოდი, რომელიც გამოვიყენეთ VII თავში სამი წრფივი განტოლების სისტემის ამოსახსნელად. თუ (1)

განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად $m_1, m_2, \ldots, m_n$-ზე და წევრობრივ შევკრებთ, მივიღებთ:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
&(a_{11}m_1 + a_{21}m_2 + \ldots + a_{n1}m_n)x_1 + \\
&+(a_{12}m_1 + a_{22}m_2 + \ldots + a_{n2}m_n)x_2 + \\
&+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \\
&+(a_{1n}m_1 + a_{2n}m_2 + \ldots + a_{nn}m_n)x_n = \\
&= b_1m_1 + b_2m_2 + \ldots + b_nm_n.
\end{aligned}
$$

ახლა $m_1, m_2, \ldots, m_n$ მამრავლები ისე შევარჩიოთ, რომ კოეფიციენტები $x_1, x_2, \ldots, x_n$-თან გადაიქცეს ნულად; ამისათვის უნდა იყოს

$$a_{1k}m_1 + a_{2k}m_2 + \ldots + a_{nk}m_n = 0,$$

როცა $k \geqslant 1$;

თუ უკანასკნელ თანაფარდობას შევადარებთ VII თავის (58) ტოლობასთან, შევნიშნავთ, რომ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ სიდიდეებად შეიძლება მივიღოთ D დეტერმინანტის პირველი სვეტის ელემენტების ადიუნქტები:

$$m_1 = A_{11},\ m_2 = A_{21}, \ldots, m_n = A_{n1}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (3) განტოლებაში, მაშინ წევრები, რომლებიც $x_2, \ldots, x_n$-ს შეიცავენ, მოისპობა, და ჩვენ მივიღებთ

$$(4) \quad (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1})\,x_1 = b_1A_{11} + b_{21}A_{21} + \ldots + b_{n1}A_{n1}.$$

ტოლობის მარცხენა ნაწილში კოეფიციენტი x_1-თან D დეტერმინანტს ეტოლება; მარჯვენა ნაწილიც შეიძლება წარმოვადგინოთ დეტერმინანტის სახით, რომელსაც მივიღებთ D-დან პირველი სვეტის ელემენტების შეცვლით თავისუფალი $b_1, b_2, \ldots, b_n$ წევრებით (შეად. თავი VII, § 6, პუნქტი 2). ეს დეტერმინანტი აღვნიშნოთ D_1-ით:

$$D_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

განტოლება (4) ახლა ასეთ სახეს მიიღებს

$$Dx_1 = D_1.$$

რომ მივიღოთ განტოლება, რომელიც მხოლოდ x_2-ს შეიცავს, საკმარისია $m_1, m_2, \ldots, m_n$ სიდიდეებად მივიღოთ D დეტერმინანტის მეორე სვეტის ელემენტების ადიუნქტები:

$$m_1 = A_{12},\ m_2 = A_{22},\ \ldots,\ m_n = A_{n2}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (3) განტოლებაში, მაშინ კოეფიციენტები

$$x_1,\ x_3,\ \ldots,\ x_n\text{-თან}$$

გადაიქცევა ნულად და ჩვენ გვექნება

$$(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{n2})x_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots b_nA_{n2}$$

ანუ

$$Dx_2 = D_2,$$

სადაც

$$D_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თანაგვარი მსჯელობა შეიძლება ჩავატაროთ ყოველი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობისათვის. ამგვარად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

(5) $$Dx_1 = D_1,\ Dx_2 = D_2,\ \ldots,\ Dx_n = D_n,$$

სადაც D_h-ით აღვნიშნავთ დეტერმინანტს, რომელსაც მივიღებთ D-დან h-ურ სვეტის ელემენტების შეცვლით თავისუფალი წევრებით:

(6) $$D_h = b_1A_{1h} + b_2A_{2h} + \ldots + b_nA_{nh} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,h-1} & b_1 & a_{1,h+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,h-1} & b_2 & a_{2,h+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,h-1} & b_n & a_{n,h+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

განტოლებათა (5) სისტემა წარმოადგენს გამოსავალი (1) განტოლებათა სისტემის შ ე დ ე გ ს.

ამიტომ (1) სისტემის ყოველი ამოხსნა იქნება აგრეთვე (5) სისტემის ამოხსნა, მაგრამ შებრუნებული ყოველთვის როდია სამართლიანი: (5) სისტემა ყ ო ვ ე ლ თ ვ ი ს რ ო დ ი ა პირვანდელი (1) სისტემის ე ქ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ ი.

მართლაც, განვიხილოთ, მაგალითად, სისტემა

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} 2x_1+3x_2-4x_3&=3,\\ 3x_1+4x_2-3x_3&=7,\\ x_1+2x_2-5x_3&=-1. \end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=0.$$

შემდეგ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ D_1, D_2, D_3 დეტერმინანტები აგრეთვე ნულს ეტოლება. მაშასადამე, განტოლებანი (5) მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$(5^*)\qquad 0\cdot x_1=0,\ 0\cdot x_2=0,\ 0\cdot x_3=0.$$

ეს თანაფარდობანი სრულდება x_1, x_2, x_3-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ცხადია, რომ (1*) განტოლებებზე ამის თქმა არ შეიძლება: სისტემა (5*) არაა (1*) სისტემის ექვივალენტური.

ახლა დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას, და დავუშვათ, რომ (1) დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან:

$$D\neq 0.$$

ამ შემთხვევაში (5) განტოლებებს აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამოხსნა:

$$(7)\qquad x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

ეს $x_1, \ldots, x_n$ მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ აგრეთვე გამოსავალ (1) განტოლებათა სისტემას. ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ, თუ მე-(7) მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1) სისტემის რომელიმე განტოლებათაგანში. ავიღოთ, მაგალითად სისტემის პირველი განტოლება:

$$(8)\qquad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ .\ .\ .\ +a_{1n}x_n=b_1.$$

თუ მარცხენა ნაწილში ჩავსვამთ მე-(7) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=\frac{1}{D}(a_{11}D_1+a_{12}D_2+\ldots+a_{1n}D_n)$$

ანუ

$$\sum_{h=1}^{n} a_{1h} x_h = \frac{1}{D} \sum_{h=1}^{n} a_{1h} D_h.$$

აქ D_h შევცვალოთ მისი გამოსახულებით (6), მაშინ გვექნება

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{n} a_{1h} x_h = \frac{1}{D} \sum_{h=1}^{n} a_{1h}(b_1 A_{1h} + b_2 A_{2h} + \ldots + b_n A_{nh}) = \\ &= \frac{1}{D} \left\{ b_1 \sum_{h=1}^{n} a_{1h} A_{1h} + b_2 \sum_{h=1}^{n} a_{1h} A_{2h} + \ldots + b_n \sum_{h=1}^{n} a_{1h} A_{nh} \right\} \end{aligned}\right.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\sum_{h=1}^{n} a_{1h} A_{1h} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n} = D,$$

$$\sum_{h=1}^{n} a_{1h} A_{kh} = a_{11} A_{k1} + a_{12} A_{k2} + \ldots + a_{1n} A_{kn} = 0,$$

$$(k \neq 1),$$

მაშინ (9) თანაფარდობის ნაცვლად მივიღებთ:

$$\sum_{h=1}^{n} a_{1h} x_h = \frac{1}{D} b_1 D = b_1,$$

ე. ი. მნიშვნელობანი (7) ნამდვილად აკმაყოფილებენ (8) განტოლებას.

ამგვარად, ფორმულები (7) გვაძლევენ განტოლებათა (1) სისტემის ამოხსნას. ამ სისტემას სხვა ამოხსნები არ შეიძლება ექნეს; მართლაც, (1) სისტემის ყოველი ამოხსნა აკმაყოფილებს აგრეთვე (5) სისტემას, ხოლო ამ სისტემას, როცა $D \neq 0$ ცხადია, აქვს ერთადერთი ამოხსნა, რომელიც გამოისახება (7) ფორმულებით.

ამგვარად, თუ (1) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ ამ სისტემას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამოხსნა; ჩვენ გვაქვს განტოლებათა განსაზღვრული სისტემა.

ახლა ვნახოთ, თუ რა შეიძლება ითქვას (1) სისტემის ამოხსნაზე იმ შემთხვევაში, როცა დეტერმინანტი ნულის ტოლია: $D=0$. თუ ამასთანავე D_1, $D_2, \ldots, D_n$ დეტერმინანტებს შორის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ არ არსებობს $x, \ldots, x_n$-ის ისეთი მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ (5) განტოლებას. აქედან გამომდინარეობს, რომ (1) სისტემას აგრეთვე არ აქვს ამოხსნები, რადგან (1) სისტემის ყოველი ამოხსნა უნდა აკმაყოფილებდეს (5) განტოლებებსაც. ამგვარად, ამ შემთხვევაში (1) განტოლებანი უ თ ა ვ ს ე ბ ა დ ი ა. ხოლო თუ ყველა $D_1, \ldots, D_n$ დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ თანაფარდობანი (5) გადაიქცევა იგივობად; რაც შეეხება (1) სისტემას, მის შესახებ ვერ ვიქონიებთ მსჯელობას დამატებითი გამოკვლევის გარეშე ასეთ გამოკვლევას ჩავატარებთ შემდეგ (მე-4 პუნქტში) n უცნობიან m განტოლებათა სისტემის ყველაზე უფრო ზოგადი შემთხვევისათვის.

მაგალითი. განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1,\\
4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0.\\
5x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= -1,\\
2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

სისტემის დეტერმინანტი არის:

$$
D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2.
$$

ამგვარად, $D \neq 0$; ჩვენ გვაქვს გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი სისტემა. გამოვიანგარიშოთ D_1, D_2, D_3, D_4 დეტერმინანტები:

$$
D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 10, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -28,
$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-16,\quad D_4=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

ახლა (7) ფორმულებით მოვნახოთ უცნობთა მნიშვნელობანი:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=5,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-14,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-8,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=-2.$$

სავარჯიშო.

ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

1. $2x_1+3x_2+5x_3+3x_4=2;$
$x_1+2x_2+4x_3+3x_4=-1;$
$3x_1+3x_2+6x_3+5x_4=-1;$
$4x_1+x_2+2x_3+2x_4=2;$

2. $3x+4y-2z+5t=10,$
$2x+3y+5z-4t=-2,$
$4x+5y-4z-3t=-7,$
$5x+3y+2z-5t=-1.$

3. $(a+1)x+y+az+at=a^2,$
$bx+ay+(a+b)z+bt=-a^2,$
$x+(1-b)y-az+(b-a)t=(a+b)b,$
$ax+by+(a+b)z+at=a^2-ab-b^2.$

2. ჩვენ აქამდე ვგულისხმობდით, რომ სისტემის განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვის ტოლია. ამ შემთხვევაში განტოლებათა კოეფიციენტები ჰქმნიან კვადრატულ სქემას, რომლიდანაც შეიძლება შევადგინოთ დეტერმინანტი. სხვაგვარი მდგომარეობაა იმ შემთხვევაში, როცა განტოლებათა რიცხვი არ ეტოლება უცნობთა რიცხვს. განვიხილოთ, მაგალითად, სისტემა

$$(10)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=b_1,\\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4&=b_2,\\ a_{31}x_3+a_{32}x_3+a_{33}x_3+a_{34}x_4&=b_3. \end{aligned}$$

კოეფიციენტები აქ ჰქმნიან მართკუთხოვან (არა კვადრატულ) მატრიცს

$$(11)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

რომ საქმე დავიყვანოთ იმ შემთხვევამდე, როცა განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვის ტოლია, შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი

ხერხი: ერთ-ერთ უცნობს, მაგალითად x_4-ს, მივანიჭოთ ნებსითი მნიშვნელობა. მაშინ გვექნება განტოლებათა სისტემა სამი უცნობით:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 - a_{14}x_4,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{24}x_4,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{34}x_4.$$

თუ ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ იგი შეიძლება ამოიხსნას. მნიშვნელობანი, რომლებსაც ჩვენ ამ შემთხვევაში მივიღებთ x_1, x_2, x_3-სათვის, დამოკიდებული იქნება x_4-ზე. x_4-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება x_1, x_2, x_3 მნიშვნელობათა განსაზღვრული სისტემა. თუ x_4-ს მივცემთ ნებსით მნიშვნელობებს, მივიღებთ (10) სისტემის უამრავ ამოხსნას.

ჩვენს მიზანს მივაღწიეთ იმ წევრების გადატანით მარჯვენა ნაწილში, რომლებიც x_4-ს შეიცავს; ამგვარადვე შეგვეძლო მოვქცეულიყავით ყოველი სხვა უცნობის მიმართ; მაგრამ ამასთან არსებითია ის, რომ დეტერმინანტი, რომელიც შედგენილია კოეფიციენტებისაგან მარცხენა ნაწილში, განსხვავდებოდეს ნულისაგან.

მესამე რიგის (12) დეტერმინანტს მივიღებთ (11) მატრიციდან ერთი სვეტის (მეოთხის) ამოშლით. ამგვარადვე (ამა თუ იმ სვეტის ამოშლით) შეიძლება მივიღოთ ამ მატრიციდან დეტერმინანტები:

$$(12') \qquad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

მაშასადამე, (11) მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ მესამე რიგის ოთხი (12) და (12′) დეტერმინანტი*. თუ ერთი მაინც ამ დეტერმინანტთაგანი განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ სისტემა (10) შე-

---

* ამბობენ აგრეთვე, რომ მატრიცი (11) ჰ ქ მ ნ ი ს დეტერმინანტებს (12) და (12′).

იძლება ამოიხსნას აღნიშნული ხერხით*. იმ შემთხვევაში, როცა მესამე რიგის დეტერმინანტი, შედგენილი (11) მატრიციდან ნულის ტოლია, საჭიროა შემდგომი გამოკვლევა.

ამ მოსაზრებებს მივყევართ მნიშვნელოვან ცნებამდე — მატრიცის რანგის ცნებამდე. *მატრიცის რანგი ეწოდება ნულისაგან განსხვავებულ იმ დეტერმინანტის უმაღლეს რიგს, რომელიც მისგან შეიძლება შესდგეს.* ამგვარად, თუ (11) მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ ნულისაგან განსხვავებული მესამე რიგის ერთი მაინც დეტერმინანტი, მაშინ ამ მატრიცის რანგი 3-ის ტოლია. თუ მესამე რიგის ყველა დეტერმინანტი, შექმნილი ამ მატრიცით, ეტოლება ნულს, მაშინ ვიხილავთ მეორე რიგის დეტერმინანტებს.

რომ მივიღოთ მე-(11) მატრიცის რომელიმე მეორე რიგის დეტერმინანტი, საკმარისია ამ მატრიციდან გამოვყოთ ნებისმიერი ორი სვეტი და ორი სტრიქონი: ამ სვეტებისა და სტრიქონების გადაკვეთის ადგილას მდებარე ელემენტები ჰქმნიან კვადრატულ მატრიცს, რომლიდანაც შეიძლება შევადგინოთ დეტერმინანტი. ასეთია, მაგალითად, დეტერმინანტები:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ და ა. შ.}$$

მეორე რიგის ყველა იმ დეტერმინანტთა რიცხვი, რომლებიც შეიძლება მივიღოთ (11) მატრიციდან, არის $C_4^2 \cdot C_3^2 = 18$.

თუ (11) მატრიცის ყველა მესამე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ხოლო მეორე რიგის დეტერმინანტებს შორის არის ერთი მაინც ისეთი დეტერმინანტი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მატრიცის რანგი ტოლია 2-ის.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია ნებისმიერი მატრიცი

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

* ასე, მაგალითად, თუ ნულისაგან განსხვავებულია დეტერმინანტი, შედგენილი კოეფიციენტებისაგან x_2, x_3, x_4-თან, მაშინ ეს უცნობები შეიძლება გამოვხატოთ x_1-ით.

(13) მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ დეტერმინანტები, რომელთა რიგი არ აღემატება უმცირესს m და n რიცხვებიდან.

რომ მივიღოთ რომელიმე ამ დეტერმინანტთაგანი, საკმარისია გამოვყოთ ნებისმიერად მატრიცის h სვეტი და h სტრიქონი. ამ სვეტებისა და სტრიქონების გადაკვეთაში მდებარე ელემენტები ჰქმნიან კვადრატულ სქემას, რომლიდანაც შეიძლება შევადგინოთ h რიგის დეტერმინანტი.

თუ (13) მატრიცის r-ზე მაღალი რიგის ყველა დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ხოლო r რიგის დეტერმინანტებს შორის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ (13) მატრიცის რანგი ეტოლება r-ს.

განვიხილოთ, მაგალითად, მატრიცი:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიციდან შეგვიძლია შევადგინოთ მესამე რიგის ათი დეტერმინანტი. ძნელი არაა იმის შემოწმება, რომ ყველა ისინი ნულის ტოლია. რაც შეეხება მეორე რიგის დეტერმინანტს, უკვე დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია. მაშასადამე, მატრიცის რანგი ეტოლება 2-ს.

დავუბრუნდეთ (10) განტოლებათა სისტემას. მათ შესახებ შეიძლება ვთქვათ: თუ კოეფიციენტების მატრიცის რანგი ეტოლება 3-ს (ე. ი. განტოლებათა რიცხვს ეტოლება), მაშინ (10) სისტემას აქვს უამრავი ამოხსნა. წინააღმდეგ შემთხვევაში საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა.

3. ახლა ზოგადი სახით განვიხილოთ სისტემა m წრფივი განტოლებისა n უცნობით:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ .\ .\ .\ +a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ .\ .\ .\ +a_{2n}x_n=b_2, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ .\ .\ .\ +a_{mn}x_n=b_m. \end{array} \tag{14}$$

ამ სისტემის კოეფიციენტები ჰქმნიან მატრიცს

$$(15)\qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

ჯერ დავუშვათ, რომ ამ მატრიცის რანგი ეტოლება m-ს, ე. ი. ეტოლება (14) განტოლებათა რიცხვს. ამით ჩვენ ვუშვებთ, რომ მატრიცი (15) შეიცავს m სვეტს მაინც, ე. ი. რომ $m \leqslant n$. თუ $m=n$, მაშინ გვექნება განსაზღვრული სისტემა (პუნქტი 1); ამიტომ ჩვენთვის საინტერესოა მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა $m<n$.

თუ ვამბობთ, რომ (15) მატრიცის რანგი ეტოლება m-ს, ეს იმას ნიშნავს, რომ მისგან შეიძლება შევადგინოთ ნულისაგან განსხვავებული m რიგის ერთი დეტერმინანტი მაინც. დავუშვათ გარკვეულობისათვის, რომ ეს დეტერმინანტი შექმნილია პ ი რ ვ ე ლ ი m სვეტის ელემენტებისაგან:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

ასეთი დაშვება არ არღვევს გამოკვლევის ზოგადობას, რადგანაც ჩვენზეა დამოკიდებული, თუ რომელ უცნობებს დავწერთ პირველ ადგილებზე და აღვნიშნავთ ნომრებით $1, \dots, m$.

ახლა გადავწეროთ განტოლება (14), გადავიტანთ რა მარჯვენით წევრებს, რომლებიც შეიცავს $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$-ს:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1m}x_m &= b_1-a_{1,m+1}x_{m+1}-\dots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2m}x_m &= b_2-a_{2,m+1}x_{m+1}-\dots-a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mm}x_m &= b_m-a_{m,m+1}x_{m+1}-\dots-a_{mn}x_n. \end{aligned}$$

ამ სისტემას ამოვხსნით $x_1, x_2, \dots, x_m$-ის მიმართ, ამასთან, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$-ს განვიხილავთ როგორც ნებისმიერ მუდმივებს. ამასთან მარჯვენა ნაწილები:

$$\begin{gathered} b_1 - a_{1, m+1} x_{m+1} - \dots - a_{1n} x_n, \\ b_2 - a_{2, m+1} x_{m+1} - \dots - a_{2n} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_m - a_{m, m+1} x_{m+1} - \dots - a_{mn} x_n. \end{gathered}$$

თავისუფალი წევრების როლს შეასრულებენ.

რადგანაც დეტერმინანტი, შედგენილი კოეფიციენტებისაგან $x_1, \dots, x_m$-თან, განსხვავდება ნულისაგან, ამიტომ $x_1, x_2, \dots, x_m$ სათვის მივიღებთ განსაზღვრულ გამოსახულებებს, რომლებიც დამოკიდებულია $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$-ზე. ეს გამოსახულებანი დააკმაყოფილებენ (14) განტოლებებს. $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ მნიშვნელობანი ამასთან სავსებით ნებსითი რჩება. ამიტომ ამბობენ, რომ (14) სისტემის ამოხსნის დროს $x_{m+1}, \dots, x_n$ სიდიდენი **ნებისმიერი პარამეტრების** როლს თამაშობენ. ამგვარად, თუ (15) **მატრიცის რანგი ეტოლება** m-ს, **მაშინ (14) სისტემას აქვს უამრავი ამოხსნა; ეს ამოხსნები დამოკიდებულია** $n-m$ ნებისმიერ პარამეტრზე. ამ უკანასკნელს ზოგჯერ შემდეგნაირად გამოხატავენ: (14) **სისტემას** აქვს ამოხსნები, რომელთა რიცხვი არის ∞^{n-m}. ამით სურთ აღნიშნონ, რომ შეგვიძლია ნებისმიერი კომბინირება $n-m$ ცვლადთა მნიშვნელობებისა, რომლებსაც შეუძლიათ მიიღონ უამრავი მნიშვნელობა.

მაგალითი.

$$(14') \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 6x_4 + x_5 &= -1. \end{aligned}$$

თუ გამოვიკვლევთ კოეფიციენტების მატრიცს

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

აღმოვაჩენთ, რომ მისი რანგი 3-ის ტოლია, ე. ი. ეტოლება სისტემის განტოლებათა რიცხვს. ამ შემთხვევაში დეტერმინანტი, შედგენილი კოეფიციენტებისაგან x_1, x_2, x_3-თან, ეტოლება ნულს, მაშინ როდესაც დეტერმინანტი, შექმნილი კოეფიციენტებისაგან x_2, x_3, x_4-თან, განსხვავებულია ნულისაგან:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 5.$$

ამიტომ მარჯვნით გადავიტანოთ წევრები, რომლებიც შეიცავს x_1 და x_5-ს და მოცემული სისტემა ამოვხსნათ $x_2\ x_3\ x_4$-ის მიმართ:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1 - 3x_1 + 2x_5, \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 - 2x_1 + 3x_5, \\ 5x_2 - 5x_3 - 6x_4 &= -1 - 4x_1 - x_5. \end{aligned}$$

თავისუფალი წევრების როლს აქ თამაშობენ გამოსახულებანი

$$\begin{aligned} b'_1 &= 1 - 3x_1 + 2x_5, \\ b'_2 &= 2 - 2x_1 + 3x_5, \\ b'_3 &= -1 - 4x_1 - x_5. \end{aligned}$$

ამგვარად, მივიღებთ

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} b'_1 & -1 & -3 \\ b'_2 & 3 & 1 \\ b'_3 & -5 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} b'_1 & -1 & -3 \\ b'_2 & 3 & 1 \\ b'_3 & -5 & -6 \end{vmatrix}$$

ანუ

$$x_2 = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 - 3x_1 + 2x_5, & -1, & -3 \\ 2 - 2x_1 + 3x_5, & 3, & 1 \\ -1 - 4x_1 - x_5, & -5, & -6 \end{vmatrix}.$$

დეტერმინანტი მარჯვენა ნაწილში წარმოვადგინოთ სამი დეტერმინანტის ჯამად (თავი VII, § 6); ამის შემდეგ x_1 და x_5 მამრავლები შეიძლება გავიტანოთ შესაბამ დეტერმინანტების ნიშნის გარეთ:

$$x_2 = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} - \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} x_1 + \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} x_5 =$$

$$= -\frac{3}{5} - \frac{11}{5} x_1 - \frac{7}{5} x_5.$$

ამგვარად განვსაზღვრავთ x_3 და x_4-ს, და ჩვენ მივიღებთ სისტემის ამოხსნას ასეთი სახით

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{3}{5} - \frac{11}{5} x_1 - \frac{7}{5} x_5, \\ x_3 &= \frac{4}{5} - \frac{7}{5} x_1 + \frac{6}{5} x_5, \\ x_4 &= -1 - 2x_5. \end{aligned}$$

ადვილია იმის შემოწმება, რომ ეს გამოსახულებანი იგივურად აკმაყოფილებენ მოცემული სისტემის ყველა განტოლებას. ამასთან x_1 და x_5 მნიშვნელობანი სავსებით ნებისმიერი რჩებიან. ჩვენ შეგვიძლია, მაგალითად, დავუშვათ:

$$x_1 = 2,\quad x_5 = 0.$$

ეს გვაძლევს

$$x_2 = -5,\quad x_3 = -2,\quad x_4 = -1.$$

მაშასადამე, მნიშვნელობათა სისტემა:

$$x_1 = 2,\quad x_2 = -5,\quad x_3 = -2,\quad x_4 = 1,\quad x_5 = 0.$$

ჰქმნის (14') სისტემის ერთ-ერთ ამოხსნას. ამგვარად, როცა x_1 და x_5 ცვლადებს ვაძლევთ ნებსით მნიშვნელობებს, შეგვიძლია მივიღოთ მოცემული სისტემის უამრავი ამოხსნა.

სავარჯიშო.

იპოვეთ შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები:

1. $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1,$
   $9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1.$

2. $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1,$
   $6x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2.$

3. $6x + 7y + 7z + 2t + 4u = 3,$
   $2x + 5y + 3z + 5t - 3u = 4.$
   $5x + 2y + 5z - 3t - 5u = 0.$

4. წინანდელივით განვიხილოთ სისტემა m წრფივი განტოლებისა n უცნობით.

$$
(14)\qquad
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{array}
$$

ზემოთ გავარჩიეთ ის შემთხვევა, როცა

$$
(15)\qquad
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

მატრიცის რანგი m-ს ტოლია, ე. ი. განტოლებათა რიცხვს ეტოლება. ახლა დავუშვათ, რომ (15) მატრიცის რანგი ნაკლებია m ზე. თუ ამ მატრიცის რანგი ეტოლება r-ს ($r < m$), მაშინ მისგან შეიძლება გამოვყოთ ნულისაგან განსხვავებული r რიგის დეტერმინანტი; ასეთ

დეტერმინანტს ვუწოდოთ **სისტემის მთავარი დეტერმინანტი.** დავუშვათ, რომ ის შექმნილია ელემენტებით, რომლებიც მდებარეობს პირველი სვეტისა და პირველი r სტრიქონის გადაკვეთაში *:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{16}$$

ამოვწეროთ ცალკე ის განტოლებანი, რომლის კოეფიციენტები შედიან ამ დეტერმინანტში:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n &= b_r. \end{aligned} \tag{17}$$

ამ სისტემისათვის კოეფიციენტთა მატრიცის რანგი ეტოლება განტოლებათა რიცხვს; ამასთან $r \leqslant n$. თუ აღმოჩნდება, რომ $r=n$, მაშინ (17) სისტემას აქვს **ერთი განსაზღვრული ამოხსნა** (პუნქტი 1); თუ $r<n$, მაშინ სისტემას აქვს უამრავი (∞^{n-r}) ამონახსნი (პუნქ. 3). ორთავე შემთხვევაში (17) განტოლებანი თავსებადი არიან. საკითხი მდგომარეობს იმაში, აკმაყოფილებს თუ არა (17) განტოლებათა ამოხსნები (14) სისტემის ყველა დანარჩენ განტოლებას.

რომ გავცეთ პასუხი ამ კითხვაზე განვიხილოთ (14) სისტემის რომელიმე განტოლება, რომელიც არ ეკუთვნის პირველ r განტოლებათა რიცხვს:.

$$a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qn}x_n = b_q. \tag{18}$$

აქ q-ს ქვეშ შეიძლება ვიგულისხმოთ ერთ-ერთი რიცხვი $r+1$, $r+2, \ldots, n$ რიცხვებიდან.

ჩვენ უნდა გამოვარკვიოთ, თუ რა პირობებში (17) სისტემის ნებისმიერი ამოხსნა იქნება აგრეთვე (18) განტოლების ამოხსნა.

---

* ასეთი დაშვება არ არღვევს გამოკვლევის ზოგადობას, რადგანაც ჩვენზეა დამოკიდებული, თუ რომელ განტოლებებს დავწერთ პირველ ადგილებზე და რომელ უცნობებს აღვნიშნავთ ნომრებით $1, 2, \ldots, m$.

ამ მიზნისათვის გამოვიყვანოთ თანაფარდობა, რომელიც დააკავშირებს (17) და 18) განტოლებათა მარცხენა ნაწილებს.

ჩვენ განვიხილოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები. (17) და (18) განტოლებათა მარცხენა ნაწილები წარმოადგენენ ამ ცვლადების წრფივ ერთგვაროვან ფუნქციებს (წრფივ ფორმებს, შეად. თავი II, § 1):

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \sum_{h=1}^{n} a_{1h}x_h,\\
f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \sum_{h=1}^{n} a_{2h}x_h,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_r &= a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = \sum_{h=1}^{n} a_{rh}x_h,\\
f_q &= a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qn}x_n = \sum_{h=1}^{n} a_{qh}x_h.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს ფორმები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან წრფივი თანაფარდობით. მართლაც, (15) მატრიცის რანგი, დაშვების თანახმად, r-ს ტოლია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ მატრიცის $r+1$ რიგის ყველა დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ შემდეგი სახის ყოველი დეტერმინანტი

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1h}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2h}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{r1} & a_{rq} & \ldots & a_{rr} & a_{rh}\\
a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qr} & a_{qh}
\end{vmatrix}
\tag{20}
$$

ნულის ტოლია, ამასთან h ნიშნავს ერთ-ერთ რიცხვს $1, 2, \ldots, n$. მართლაც, თუ $h \leqslant r$, მაშინ (20) დეტერმინანტი ეტოლება ნულს, რადგან იგი შეიცავს ორ ერთნაირ სვეტს; ხოლო თუ $h > r$, მაშინ ის ეტოლება ნულს, რადგან იგი წარმოადგენს (15) მატრიცის $r+1$ რიგის დე-

ნანტს. თუ შევცვლით h მნიშვნელობას, მაშინ (20) დეტერმინანტის უკანასკნელი სვეტის ელემენტებიც შეიცვლება, მაგრამ ამ ელემენტების ადიუნქტები უცვლელი დარჩება (თავი VII, § 6, პუნქტი 2). ეს ადიუნქტები აღვნიშნოთ $A_1, A_2, \ldots, A_p, A_q$-თი. შევნიშნოთ, რომ A_q ადიუნქტი ეტოლება ჩვენი სისტემის მთავარ დეტერმინანტს:

$$A_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{21}$$

დეტერმინანტი (20), როგორც დავინახეთ, ეტოლება ნულს. თუ მას დავშლით უკანასკნელი სვეტის ელემენტებით, მივიღებთ:

$$a_{1h}A_1 + a_{2h}A_2 + \ldots + A_{rh}A_r + A_{qh}A_q = 0, \quad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

გავამრავლოთ ახლა (19) ფორმები შესაბამისად $A_1, A_2, \ldots, A_p, A_q$ ადიუნქტებზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ:

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots + A_r f_r + A_r f_r = \sum_{h=1}^{n} A_1 a_{1h} x_h +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n} A_2 a_{2h} x_h + \ldots + \sum_{h=1}^{n} A_r a_{rh} x_h + \sum_{h=1}^{n} A_q a_{qh} x_h =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \{ A_1 a_{1h} + A_2 a_{2h} + \ldots + A_r a_{rh} + A_q a_{qh} \} x_h.$$

(22) თანაფარდობის ძალით მარჯვენა ნაწილი იგივურად იქცევა ნულად, და ჩვენ მივიღებთ

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots A_r f_r + A_q f_q = 0. \tag{23}$$

ეს თანაფარდობა იგივეობას წარმოადგენს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების მიმართ; ის გვიჩვენებს, რომ $f_1, f_2, \ldots, f_r, f_q$ ფორმები შებმული არიან წრფივი დამოკიდებულებით*; ამასთან არსებითია,

* ჩვენ ვლაპარაკობთ წრფივ დამოკიდებულებაზე, რადგან მარცხენა ნაწილი (23) წრფივია $f_1, f_2, \ldots, f_r, f_q$-ს მიმართ.

რომ $A_1, A_2, \ldots, A_r, A_q$ მუდმივ კოეფიციენტებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულა ნულისაგან. მაგალითად.

$$A_q \neq 0.$$

თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებს მივაწერთ იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც აკმაყოფილებს (17) განტოლებებს, მაშინ $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ფუნქციები გადაიქცევა შესაბამისად $b_1, b_2, \ldots, b_r$-ად. თუ აღმოჩნდება, რომ ეს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ აგრეთვე (18) განტოლებას, მაშინ f_q ფუნქციაც მიიღებს b_q მნიშვნელობას; ამ შემთხვევაში (23) თანაფარდობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots + A_r b_r + A_q b_q = 0. \tag{24}$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ განტოლებათა (17) სისტემის ყოველი ამოხსნა იყოს (18) განტოლების ამოხსნაც, საჭიროა თავისუფალ $b_1, b_2, \ldots, b_r, b_q$ წევრებს შორის არსებობდეს იგივე დამოკიდებულება როგორც $f_1, f_2, \ldots, f_r, f_q$ ფორმებს შორის არსებობს.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ეს პირობა საკმარისიც იქნება. მართლაც, დავუშვათ, რომ თანაფარდობა (24) სრულდება.

თუ (23)-ს გამოვაკლებთ (24)-ს, მივიღებთ

$$A_1(f_1 - b_1) + A_2(f_2 - b_2) + \ldots + A_r(f_r - b_r) + A_q(f_q - b_q) = 0. \tag{25}$$

$x_1, \ldots, x_n$ ცვლადებს ახლა მივაწეროთ მნიშვნელობანი, რომელნიც აკმაყოფილებენ (17) განტოლებებს; მაშინ $f_1 - b_1, \ldots f_r - b_r$ სხვაობანი იქცევა ნულად, და ჩვენ გვექნება

$$A_q(f_q - b_q) = 0$$

ან, რადგანაც

$$A_q \neq 0,$$

$$f_q - b_q = 0,$$

ე. ი. (18) განტოლებაც დაკმაყოფილებულია.

ამგვარად, თანაფარდობა (24) გამოხატავს პირობას, რომელიც აუცილებელია და საკმარისი იმისათვის, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობებმა, რომლებიც აკმაყოფილებენ (17) განტოლებებს, დააკმაყოფილოს აგრეთვე (18) განტოლებაც.

ახლა შევნიშნავთ, რომ (24) ტოლობის მარცხენა ნაწილი შეიძლება წარმოვადგინოთ დეტერმინანტის სახით (თავი VII, § 6, პუნქტი 2), რომელიც (20) დეტერმინანტისაგან განსხვავდება იმით, რომ უკანასკნელი სვეტის $a_{1h}, a_{2h}, \ldots, a_{qh}$ ელემენტები შეცვლილია შესაბამისად $b_1, b_2, \ldots, b_q$ ელემენტებით; ამგვარად, (24) პირობა შეიძლება ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$
(24) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qr} & b_q \end{vmatrix} = 0.
$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის დეტერმინანტი მიიღება მთავარი (16) დეტერმინანტიდან, თუ მას შევავსებთ ქვევიდან სტრიქონით, რომელიც შედგენილია (18) ტოლობის, $a_{q1}, \ldots, a_{qr}$ კოეფიციენტებისაგან, ხოლო მარჯვენით — შესაბამი თავისუფალი წევრების სვეტებით. ამ სახის დეტერმინანტს ეწოდება (14) განტოლებათა სისტემის დამახასიათებელი დეტერმინანტი.

(14) სისტემის ყოველ განტოლებას, რომელიც არაა შესული (17) სისტემის შემადგენლობაში, ე. ი. შემდეგი სახის ყოველ განტოლებას:

$$
a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qn}x_n = b_q \qquad (q = r+1,\ r+2, \ldots, m)
$$

შეესაბამება მისი დამახასიათებელი დეტერმინანტი:

$$
(26) \qquad \delta_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qr} & b_q \end{vmatrix}.
$$

რადგანაც q ინდექსმა შეიძლება მიიღოს $r+1, r+2, \ldots, m$ მნიშვნელობანი, ამიტომ (14) სისტემისათვის შეიძლება შევადგინოთ $m-r$ დამახასიათებელი დეტერმინანტი.

იმისათვის, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობანი, რომლებიც ჰქმნიან (17) სისტემის ამოხსნას, აკმაყოფილებდეს (14) სისტემის რომელიმე განტოლებას, რომელიც არაა შესული (17) სის-

ტემის შემადგენლობაში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესაბამი დამახასიათებელი დეტერმინანტი ეტოლებოდეს ნულს; იმისათვის, რომ ეს $x_1, \ldots, x_n$ მნიშვნელობანი აკმაყოფილებდეს (14) სისტემის ყველა დანარჩენ პირობას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა დამახასიათებელი დეტერმინანტი ეტოლებოდეს ნულს.

თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ (14) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება (17) სისტემის ამოხსნამდე. უკანასკნელს, როგორც დავინახეთ, აქვს ერთი განსაზღვრული ამოხსნა, როცა $r=n$ ხოლო, როცა $r<n$, მაშინ მას აქვს უამრავი ამოხსნა. ორთავე შემთხვევაში (14) სისტემა შეიძლება ამოიხსნას.

თუ ერთ-ერთი დამახასიათებელი დეტერმინანტთაგანი განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ (17) სისტემის არც ერთი ამოხსნა არ დააკმაყოფილებს შესაბამ (18) განტოლებას. ამგვარად, ამ შემთხვევაში არ არსებობს ისეთი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებდეს ერთდროულად ყველა (14) განტოლებას; ეს განტოლებები უთავსებადოა.

ამგვარად მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე:

იმისათვის, რომ (14) განტოლებათა სისტემას ჰქონდეს ამოხსნები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა დამახასიათებელი დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი.

თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ (14) სისტემას აქვს ერთი განსაზღვრული ამოხსნა, თუ $r=n$, ხოლო, თუ $r<n$, მაშინ მას აქვს უამრავი (∞^{n-r}) ამოხსნა.

შენიშვნები. (14) სისტემის თავსებადობის პირობა სხვა სახითაც შეიძლება გამოვხატოთ. ეს სახე მოგვცა კაპელიმ. ამ მიზნით (15) მატრიცთან ერთად, რომელიც შედგენილია (14) განტოლებათა კოეფიციენტებისაგან, განვიხილოთ მატრიცი, რომელსაც მივიღებთ (15)-დან თავისუფალ წევრთა სვეტის შემოერთებით:

$$(27) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \right\|.$$

ამ „გაფართოებული" მატრიცის რანგი ყოველ შემთხვევაში არაა r-ზე ნაკლები; მეორეს მხრივ, ადვილად შეიძლება დავინახოთ, რომ ის არ შეიძლება $r+1$-ზე მეტი იყოს.

მართლაც, დავუშვათ, რომ (27) მატრიცი ჰქმნის ნულისაგან განსხვავებულ $r+2$ რიგის დეტერმინანტს. ასეთი დეტერმინანტი აუცილებლად უნდა შეიცავდეს თავისუფალ წევრთა სვეტს, რადგან კოეფიციენტთა (15) მატრიცის რანგი ეტოლება r-ს. თუ ამ დეტერმინანტს დავშლით უკანასკნელი სვეტის ელემენტებით, მაშინ კოეფიციენტები იქნება $r+1$ რიგის მინორები, შედგენილი (15) მატრიციდან. ყველა ეს მინორი ეტოლება ნულს, მაშასადამე, თვით დეტერმინანტი არ შეიძლება განსხვავდებოდეს ნულისაგან.

ამგვარად, (27) მატრიცის რანგი შეიძლება ეტოლებოდეს ან r-ს, ან $r+1$-ს. თუ რანგი ეტოლება r-ს, მაშინ ყველა დამახასიათებელი დეტერმინანტი ნულია, რადგან ისინი წარმოადგენენ $r+1$ რიგის დეტერმინანტებს, რომლებიც შექმნილია (27) მატრიცით. ამ შემთხვევაში (14) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ამოიხსნას.

თუ (27) მატრიცის რანგი ეტოლება $r+1$-ს, მაშინ (14) სისტემა უთავსებადოა; მართლაც, ამ შემთხვევაში (27) მატრიციდან შეიძლება შევადგინოთ ნულისაგან განსხვავებული $r+1$ რიგის დეტერმინანტი. ეს დეტერმინანტი (აღვნიშნოთ იგი Δ-თი) უნდა შეიცავდეს თავისუფალ წევრთა სვეტს. Δ დეტერმინანტის მინორებს შორის, რომელნიც შეესაბამება ამ სვეტის ელემენტებს, ერთი მაინც უნდა იყოს განსხვავებული ნულისაგან (წინააღმდეგ შემთხვევაში $\Delta=0$). თუ ამ მინორს (r რიგისა) მივიჩნევთ (14) სისტემის მთავარ დეტერმინანტად, მაშინ Δ დეტერმინანტი იქნება ერთ-ერთი დამახასიათებელი დეტერმინანტი. რადგანაც $\Delta\neq 0$, ამიტომ (14) განტოლებანი უთავსებადო არიან.

ა მ გ ვ ა რ ა დ, გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა თ ა (14) ს ი ს ტ ე მ ა შ ე ი ძ ლ ე ბ ა ა მ ო ხ ს ნ ი ლ ი ქ ნ ე ს მ ხ ო ლ ო დ დ ა მ ხ ო ლ ო დ ი მ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი, რ ო ც ა „გ ა ფ ა რ თ ო ე ბ უ ლ ი" (27) მ ა ტ რ ი ც ი ს რ ა ნ გ ი (15) მ ა ტ რ ი ც ი ს რ ა ნ გ ს ე ტ ო ლ ე ბ ა. ხ ო ლ ო თ უ (15) მ ა ტ რ ი ც ი დ ა ნ (27) მ ა ტ რ ი ც ზ ე გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს ა ს ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს რ ა ნ გ ი ს ა წ ე ვ ა ს, მ ა შ ი ნ (14) გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა თ ა ს ი ს ტ ე მ ა უ თ ა ვ ს ე ბ ა დ ო ა.

2. თუ მატრიცის გამოკვლევის დროს ჩვენ აღმოვაჩენთ, რომ ამ მატრიცის რაიმე r რიგის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავე-

ბულია, მაშინ შეიძლება დავასკვნათ, რომ მატრიცის რანგი r-ზე დაბალი არაა. რომ დავადგინოთ, არის თუ არა რანგი მაღალი ვიდრე r, ამისათვის საჭიროა განვიხილოთ $r+1$ რიგის დეტერმინანტები და გამოვარკვიოთ არიან თუ არა ისინი ნულის ტოლი. მატრიცის რანგის გამოსარკვევად შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი დებულებით:

თუ მატრიცის გამოკვლევის დროს გამოირკვა, რომ

a) ამ მატრიცის გარკვეული r რიგის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია,

b) $r+1$ რიგის ყველა დეტერმინანტი, რომელთათვისაც ეს დეტერმინანტი წარმოადგენს მინორს, ნულის ტოლია, მაშინ მატრიცის რანგი r-ის ტოლია.

ამგვარად, აუცილებელი არაა განვიხილოთ ყველა $r+1$ რიგის დეტერმინანტი: საკმარისია გამოვითვალოთ მხოლოდ ის დეტერმინანტი, რომელთათვის გარკვეული r რიგის დეტერმინანტი წარმოადგენს მინორს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აღვნიშნოთ n-ით განსახილავი მატრიცის სვეტის რიცხვი. თუ $n=r$, მაშინ ამ მატრიციდან არ შეიძლება შევადგინოთ r-ზე მაღალი რიგის დეტერმინანტები. თუ ასეთი მატრიცისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ ნულისაგან განსხვავებული ერთი მაინც r რიგის დეტერმინანტი, მაშინ ამ მატრიცის რანგი r-ის ტოლია.

ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $n=r$ შემთხვევისათვის თეორემა სამართლიანია.

ახლა დავუშვათ, რომ n-ის გარკვეული მნიშვნელობისათვის თეორემა სამართლიანია; დავამტკიცოთ, რომ იგი სამართლიანია $n+1$ მნიშვნელობისათვისაც.

ვთქვათ, მოცემულია მატრიცი, რომელიც $n+1$ სვეტს შეიცავს:

$$(27a)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

ზოგადობის შეუმცირებლად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ r რიგის დეტერმინანტი:

$$
(27b) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2r} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & . & . & a_{rr} \end{vmatrix}
$$

ნულისაგან განსხვავებულია, ხოლო $r+1$ რიგის ყველა დეტერმინანტი, რომელთათვის (27) დეტერმინანტი არის მინორი, ნულის ტოლია.

დაშვების თანახმად,

$$
\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{Vmatrix}
$$

მატრიცისათვის, რომელსაც აქვს n სვეტი, თეორემა სამართლიანია.

რადგანაც ამ მატრიცისათვის თეორემის პირობა შესრულებულია, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მისი რანგი r-ის ტოლია,

ახლა განვიხილოთ შემდეგ განტოლებათა სისტემა:

$$
(27c) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; . \; . \; . + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \; . \; . \; . + a_{2n}x_n &= b_2, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . &\; . \; . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \; . \; . \; . + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}
$$

ამ განტოლებათა სისტემისათვის მ თ ა ვ ა რ დეტერმინანტად შეგვიძლია მივიღოთ (27) დეტერმინანტი. მაშინ დამახასიათებელი დეტერმინანტები იქნება $r+1$ რიგის დეტერმინანტები, რომელთათვის (27) დეტერმინანტი არის მინორი. მაგრამ, პირობის თანახმად, ასეთი დეტერმინანტები ყველა ნულის ტოლია.

მაშასადამე, (27c) სისტემა ამოხსნადია და ამიტომ, 1-ლი შენიშვნის ძალით, რანგი (27) მატრიცისა, რომელსაც აქვს $n+1$ სვეტი, უტოლობა r-ს.

მაშინ ამ მატრიცისათვის თეორემა სამართლიანია. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ

a) $n=r$ შემთხვევისათვის თეორემა სამართლიანია;

b) თუ თეორემა სამართლიანია n-ის გარკვეული მნიშვნელობისათვის, მაშინ იგი სამართლიანია $n+1$ მნიშვნელობისათვისაც.

ამით დადგენილია, რომ თეორემა სამართლიანია n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

მაგალითი.

განვიხილოთ სისტემა:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 3, \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -5. \end{aligned}$$

რომ განვსაზღვროთ რანგი კოეფიციენტთა მატრიცისა:

$$\text{(I)} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

უწინარეს ყოვლისა უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ მატრიცის მეორე რიგის დეტერმინანტები, ყველა როდია ნულის ტოლი; მაშასადამე, მატრიცის რანგი არაა 2-ზე ნაკლები. რომ განვსაზღვროთ, ეტოლება თუ არა ის 2-ს ან 3-ს, მატრიციდან გამოვყოთ მეორე რიგის განსაზღვრული დეტერმინანტი, რომელიც არ ეტოლება ნულს. ავიღოთ, მაგალითად, დეტერმინანტი.

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

რომელიც შექმნილია კოეფიციენტებისაგან x_2 და x_3-თან პირველ ორ განტოლებაში. ეს დეტერმინანტი წარმოადგენს მინორს მესამე რიგის ორი დეტერმინანტისათვის:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}.$$

ორთავე ეს დეტერმინანტი არის ნულის ტოლი. მაშასადამე, (I) მატრიცის რანგი ეტოლება 2-ს. ახლა შეგვიძლია (II) დეტერმინანტი მივიჩნიოთ სისტემის მთავარ დეტერმინანტად. დამახასიათებელი დეტერმინანტი (ამ შემთხვევაში — ერთ-ერთი) იქნება

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix}.$$

ეს დეტერმინანტიც ნულს ეტოლება; მაშასადამე, სისტემას აქვს ამოხსნები. რომ ვიპოვოთ ისინი, ავიღოთ ის განტოლებანი, რომელთა კოეფიციენტები შედიან მთავარ დეტერმინანტში (II):

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 3; \end{aligned}$$

გვაქვს რა მხედველობაში, რომ მთავარი დეტერმინანტი შექმნილია x_2 და x_3-ის კოეფიციენტებისაგან, წევრები x_1 და x_4-ით გადაგვაქვს მარჯვნით:

$$\begin{aligned} -x_2+3x_3&=1-2x_1+x_4,\\ -2x_2+5x_3&=3-4x_1+3x_4. \end{aligned}$$

ამოვხსნათ ეს განტოლებანი x_2 და x_3-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$x_3=-1-x_4;\ x_2=-4+2x_1-4x_4.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ სამივე განტოლებას.

სავარჯიშო.

გამოიკვლიეთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

1. $$\begin{aligned} 11x_1+2x_2+5x_3+4x_4&=13,\\ 9x_1-13x_2+2x_3-3x_4&=-4,\\ 4x_1+9x_2+3x_3+5x_4&=13. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x_1+11x_2+4x_3+5x_4&=3,\\ 5x_1+3x_2+3x_3+2x_4&=4,\\ 9x_1+4x_2+5x_3+3x_4&=8. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 8x_1-5x_2-2x_3-4x_4&=-3,\\ 2x_1+3x_2+2x_3+6x_4&=-11,\\ 5x_1+2x_2-3x_3-2x_4&=8,\\ 4x_1-4x_2+5x_3+7x_4&=-30. \end{aligned}$$

5. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის საკითხი, როგორც დავინახეთ, დაკავშირებულია ფორმების წრფივად დამოკიდებულების საკითხთან. შევჩერდეთ ამაზე უფრო დაწვრილებით.

განვიხილოთ წრფივ ფორმათა სისტემა

$$(28)\qquad \begin{cases} f_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n,\\ f_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$f_1, f_2, \dots, f_m$ ფორმებს ეწოდებათ **წრფივად დამოკიდებული**, თუ არსებობს $c_1, c_2, \dots, c_m$ რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ პირობას:

1) ადგილი აქვს ტოლობას

$$(29)\qquad c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_mf_m=0,$$

2) $c_1, c_2, \dots, c_m$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

თუ კი c_i რიცხვები, რომლებიც ამ პირობებს აკმაყოფილებენ, არ არსებობს, მაშინ ფორმებს ეწოდებათ წრფივად დამოუკიდებელი.

აქ აღვნიშნოთ შემდეგი თვისება, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს განსაზღვრიდან: თუ (28) ფორმებს შორის არის h ფორმა წრფივად — დამოკიდებული ($h<m$), მაშინ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმებიც წრფივად დამოკიდებულია.

დავუშვათ, რომ ფორმები

$$f_1, f_2, \ldots, f_h, \ (h<m)$$

წრფივად—დამოკიდებულია; ეს იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს ტოლობას.

$$(30) \qquad c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots c_h f_h = 0$$

ამასთან $c_1, c_2, \ldots, c_h$ რიცხვებს შორის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ტოლობა (30) შეიძლება ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$(30) \quad c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_h f_h + c_{h+1} f_{h+1} + \cdots + c_m f_m = 0,$$

სადაც $c_{h+1}, \ldots, c_m$ არიან ნულის ტოლი. რადგან $c_1, c_2, \ldots, c_m$ კოეფიციენტებს შორის ერთი მაინკ არის განსხვავებული ნულისაგან, ამიტომ $f_1, \ldots, f_m$ ფორმები წრფივად დამოკიდებულია.

ამგვარად, თუ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმები წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათ შორის ყოველი h ფორმა წრფივად დამოუკიდებულია.

თუ (29) თანაფარდობაში c_m კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ეს თანაფარდობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$f_m = \frac{c_1}{c_m} f_1 - \frac{c_2}{c_m} f_2 - \cdots - \frac{c_{m-1}}{c_m} f_{m-1}.$$

ანუ

$$(31) \qquad f_m = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_{m-1} f_{m-1},$$

სადაც

$$\mu_i = -\frac{c_i}{c_m}, \ (i=1, 2, \ldots, m-1).$$

ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ f_m ფორმა დამოკიდებულია $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$-ზე. ამგვარად f_m ფორმა დამოკიდებულია $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$-ზე, თუ არსებობს ისეთი $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ რიცხვები, რომლებისათვისაც ადგილი აქვს (31) ტო-

ლობას. რა პირობებშია $f_1, \ldots, f_m$ ფორმები წრფივად დამოუკიდებელი? პასუხი რომ გავცეთ ამ კითხვაზე, განვიხილოთ ამ ფორმების კოეფიციენტებისაგან შემდგარი მატრიცი:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

იმისათვის, რომ ფორმები (28) წრფივად დამოუკიდებელი იყოს აუცილებელია და საკმარისი, რომ (32) მატრიცის რანგი ეტოლებოდეს m-ს, ე. ი. ტოლი იყოს ფორმების რიცხვისა.

დამტკიცება. 1. პირობის საკმარისობა. დავუშვათ, რომ (32) მატრიცის რანგი m-ის ტოლია; დავამტკიცოთ, რომ ფორმები წრფივად—დამოუკიდებელია. ამ მიზნისათვის ამოვარჩიოთ ნებსითად m რიცხვი $b_1, \ldots, b_m$ და განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$f_1 = b_1, \; f_2 = b_2, \; \ldots, \; f_m = b_m;$$

რადგანაც მატრიცის რანგი m-ის ტოლია, ამიტომ ამ სისტემას აქვს ამოხსნები. ამგვარად, შეგვიძლია განვსაზღვროთ $x_1, \ldots, x_n$ ისე, რომ (28) ფორმებმა მიიღოს ნებსითად მოცემული მნიშვნელობანი. ამავე დროს კი, ფორმები რომ შებმული ყოფილიყო (29) სახის დამოკიდებულებით, მაშინ მათი მნიშვნელობანი არ შეიძლებოდა ნებსითი ყოფილიყო.

2. პირობის აუცილებლობა. თუ (28) ფორმები წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ (32) მატრიცის რანგი ეტოლება m-ს. დავუშვათ რომ (32) მატრიცის რანგი ტოლია r-ის, ამასთან $r < m$; ეს იმას ნიშნავს, რომ (32) მატრიციდან შეიძლება გამოვყოთ ნულისაგან განსხვავებული r — რიგის დეტერმინანტი, მაშინ, როდესაც ამ მატრიცის ყველა $r+1$ რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. ზოგადობის შეუმცირებლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ნულისაგან განსხვავებული r რიგის დეტერმინანტი შექმნილია $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ფორმების კოეფიციენტებისაგან. ეს ფორმები წრფივად დამოუკიდებელი არიან, რადგანაც მათი კოეფიციენტები ჰქმნიან r რანგის მატრიცს. თუ ამ ფორმებს შევუერთებთ რომელიმე დარჩენილს, მაგალითად, f_q-ს, მაშინ $f_1, f_2, \ldots, f_r, \; f_q$ ფორმები შებმული იქნება

წრფივი დამოკიდებულებით, როგორც ეს წინა პუნქტში დავინახეთ. მაგრამ მაშინ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმებიც წრფივად დამოუკიდებელია (იხ. თვისება, აღნიშნული ამ პუნქტის დასაწყისში), რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ (32) მატრიცის რანგი r-ის ტოლია, მაშინ, როგორც ზემოთ დავინახეთ, (28) ფორმებს შორის შეიძლება ავარჩიოთ r წრფივად დამოუკიდებელი ფორმა. პირიქით, (28) ფორმებიდან ყოველი $r+1$ ფორმა შებმულია წრფივი დამოკიდებულებით, რადგანაც კოეფიციენტების მატრიცის რანგი ნაკლებია ფორმების რიცხვზე.

ამგვარად, r **რანგი წარმოადგენს წრფივად დამოუკიდებელ ფორმათა მაქსიმალურ რიცხვს (28) სისტემაში.**

6. მე-4 პუნქტში მიღებული შედეგები გამოვიყენოთ n უცნობიანი $(n+1)$ განტოლებათა სისტემის გამოკვლევისათვის:

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n,\\
a_{n+1,1}x_1+a_{n+1,2}x_2+\cdots+a_{n+1,n}x_n&=b_{n+1}.
\end{aligned}
$$

უნდა გამოვარკვიოთ, რა პირობებში აქვს ამ სისტემას ამოხსნა. მე-4 პუნქტის 1 შენიშვნის ძალით, ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მატრიცებს:

$$
(34)\qquad
\begin{Vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\\
a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n}
\end{Vmatrix}
\quad\text{და}\quad
\begin{Vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n\\
a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1}
\end{Vmatrix}
$$

ჰქონდეთ ერთი და იგივე რანგი. მაგრამ პირველი ამ მატრიცთაგანის რანგი არ აღემატება n-ს, რადგანაც ის შეიცავს სულ n სვეტს. ამიტომ იმისათვის, რომ (33) სისტემა იყოს ამოხსნადი, აუცილებელია, რომ მეორე (გაფართოებული) მატრიცის რანგი იყოს აგრეთვე არა უმეტესი ვიდრე n, ე. ი. რომ $n+1$ რიგის დეტერმინანტი

$$
(35) \qquad \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\
a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & b_{n+1}
\end{vmatrix}
$$

ეტოლებოდეს ნულს.

ამგვარად, იმისათვის, რომ n უცნობიან $(n+1)$ განტოლებათა (33) სისტემას ჰქონდეს ამოხსნა, აუცილებელია, რომ (35) დეტერმინანტი, შედგენილი კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრებისაგან, იყოს ნულის ტოლი.

ეს პირობა საკმარისიც იქნება, თუ (34-დან აღებული პირველი მატრიცის რანგი n-ის ტოლია (ე. ი. უცნობთა რიცხვისა). მართლაც, თუ (35) დეტერმინანტი ეტოლება ნულს, მაშინ (34-დან აღებული მეორე მატრიცის რანგიც ეტოლება n-ს, ე. ი. ორთავე მატრიცს აქვს ერთი და იგივე რანგი; მაშასადამე, (33) სისტემა ამოხსნადია.

მიღებული შედეგი შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი საკითხის ამოსახსნელად: რა პირობებში გადაიკვეთება ერთ წერტილში სიბრტყეზე მდებარე სამი წრფე.

დავუშვათ, რომ

$$
(36) \qquad \begin{aligned}
a_1x + b_1y &= c_1, \\
a_2x + b_2y &= c_2, \\
a_3x + b_3y &= c_3,
\end{aligned}
$$

არის მოცემული წრფეთა განტოლებანი. თუ ეს წრფეები გადაიკვეთება ერთ წერტილში, მაშინ (36) განტოლებანი თავსებადი უნდა იყოს. წინანდელის მიხედვით, ამისათვის აუცილებელია, რომ დეტერმინანტი

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 \\
a_3 & b_3 & c_3
\end{vmatrix},
$$

შედგენილი მოცემული განტოლებათა კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრებისაგან, ტოლი იყოს ნულისა.

ანალოგიურად სწყდება სივრცეში სამი სიბრტყის გადაკვეთის საკითხი.

7. შევეხოთ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებებს. ასე ეწოდება წრფივ განტოლებებს, რომელთა თავისუფალი წევრები არიან ნულის ტოლი. n უცნობიან ერთგვაროვან m განტოლებათა სისტემას აქვს ასეთი სახე:

$$
(37)\qquad
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0.
\end{aligned}
$$

ასეთ სისტემას ყოველთვის აქვს ერთი ამოხსნა მაინც:

$$
(38)\qquad x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0
$$

(„ნულოვანი ამოხსნა“). ამიტომ (37) სისტემა არ შეიძლება იყოს უთავსებადი. ამოხსნადობის პირობა (პუნქტი 4) ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემისათვის ყოველთვის სრულდება. თუ კოეფიციენტების მატრიცის რანგი ეტოლება უცნობთა რიცხვს ($r = n$), მაშინ (37) სისტემას აქვს ერთი ამოხსნა, სახელდობრ ნულოვანი ამოხსნა (38). თუ მატრიცის რანგი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე ($r < n$), მაშინ სისტემას აქვს უამრავი ამოხსნა.

განვიხილოთ, კერძოდ, n უცნობიანი ერთგვაროვანი n განტოლებათა სისტემა:

$$
(39)\qquad
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0.
\end{aligned}
$$

თუ ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$
(40)\qquad D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (39) სისტემას აქვს ერთად-ერთი ამოხსნა — ნულოვანი ამოხსნა. თუ ეს დეტერმინანტი ეტოლება ნულს, მაშინ (39) სისტემას აქვს უამრავი ამოხსნა.

იმისათვის, რომ n უცნობიან ერთგვაროვან n განტოლებათა სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამოხსნა, აუცილებელია და საკმარისი რომ მისი დეტერმინანტი ეტოლებოდეს ნულს. ამასთან არა-

ნულოვან ამოხსნად ჩვენ მიგვაჩნია ყოველგვარი ამოხსნა, განსხვავებული (38)-საგან.

ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ეს თვისება არსებით როლს თამაშობს სხვადასხვა საკითხებში. თუ რომელიმე ხერხით აღმოვაჩენთ, რომ (39) სისტემას აქვს ამოხსნა, რომელშიაც ერთი უცნობი მაინც ღებულობს ნულისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობას, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ **სისტემის დეტერმინანტი ტოლია ნულისა.**

(39) სისტემის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა დეტერმინანტი ტოლია ნულისა, ე. ი. როცა კოეფიციენტების მატრიცის რანგი n-ზე ნაკლებია, სრულდება ჩვეულებრივი, მე-4 პუნქტში აღნიშნული ხერხით.

შევჩერდებით იმ შემთხვევაზე, როცა კოეფიციენტების მატრიცის რანგი ტოლია $n-1$. ამ შემთხვევაში (40) დეტერმინანტის იმ ადიუნქტებს შორის, რომლებსაც წარმოადგენს $n-1$ რიგის დეტერმინანტები, იქნება ისეთები, რომლებიც არიან ნულისაგან განსხვავებული. დავუშვათ გარკვეულობისათვის, რომ

$$A_{nn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{41}$$

პირველი $n-1$ განტოლებანი (39)-დან გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,n-1}x_{n-1} &= -a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2,n-1}x_{n-1} &= -a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\ldots+a_{n-1,n-1}x_{n-1} &= -a_{n-1,n}x_n \end{aligned} \tag{42}$$

ანუ

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{x_1}{x_n}+a_{12}\frac{x_2}{x_n}+\ldots+a_{1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} &= -a_{1n}, \\ a_{21}\frac{x_1}{x_n}+a_{22}\frac{x_2}{x_n}+\ldots+a_{2,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} &= -a_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n-1,1}\frac{x_1}{x_n}+a_{n-1,2}\frac{x_2}{x_n}+\ldots+a_{n-1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} &= -a_{n-1,n}. \end{aligned} \tag{42'}$$

რადგანაც (41) დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამოხსნა; მაშასადამე, განტოლებანი (42) განსაზღვრავს უცნობთა შეფარდებებს:

$$\frac{x_1}{x_n}, \ \frac{x_2}{x_n}, \ . \ . \ . \ , \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

თუ ვიპოვით რომელიმე მნიშვნელობათა ერთ სისტემას

$$x_1 = \alpha_1, \ . \ . \ . \ , x_n = \alpha_n,$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ (39) ან (42) განტოლებებს, მაშინ ამ განტოლებათა ყველა დანარჩენი ამოხსნა მოიძებნება ტოლობებიდან

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \ \frac{x_2}{x_n} = \frac{\alpha_2}{\alpha_n}, \ . \ . \ . \ , \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n},$$

რომლებიც შეიძლება ჩავწეროთ ასეთი სახით

$$x_1 : x_2 : \ . \ . \ . \ : x_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \ . \ . \ . \ : \alpha_n.$$

მაშასადამე, რომ მივიღოთ (39) სისტემის ყ ვ ე ლ ა ამოხსნა, საკმარისია ვიცოდეთ ე რ თ ი ამ ამოხსნათაგანი. ასეთ ამოხსნას ჰქმნიან (40) დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი ს რ ო მ ე ლ ი მ ე ს ტ რ ი ქ ო ნ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი ს ა დ ი უ ნ ქ ტ ე ბ ი. მაგალითად, უკანასკნელი სტრიქონისა

(43) $$A_{n1}, A_{n2}, \ . \ . \ . \ , A_{nn}.$$

მართლაც, თუ რომელიმე სხვა $(i-h)$-ურ სტრიქონის ელემენტებს გავამრავლებთ შესაბამად (43) ადიუნქტებზე და მიღებულ ნამრავლებს შევკრებთ, მაშინ ჯამი ნულის ტოლია (თავი VII, § 5):

(44) $$a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \ldots + a_{in}A_{nn} = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

მეორეს მხრივ, (40) დეტერმინანტი, დაშვების თანახმად, ტოლია ნულისა; თუ დავშლით მას უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტებით, მივიღებთ:

(45) $$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ . \ . \ . \ + a_{nn}A_{nn} = 0.$$

(44) და (45) თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ (43) ადიუნქტები აკმაყოფილებენ ყველა განტოლებას (39)-დან.

ამგვარად, (39) სისტემის ერთი ამოხსნათაგანი იქნება

$$x_1=A_{n1},\ x_2=A_{n2},\ .\ .\ .\ ,x_n=A_{nn},$$

ხოლო ყველა დანარჩენი ამოხსნა მოიძებნება ტოლობებიდან

(46)
$$x_1:x_2:\ .\ .\ .\ :x_n=A_{n1}:A_{n2}:\ .\ .\ .\ A_{nn}.$$

აქ შეგვიძლია რომელიმე უცნობთაგანს (x_k) მივაწეროთ ნებსითი მნიშვნელობა და შემდეგ განვსაზღვროთ დანარჩენთა მნიშვნელობანი. ამასთან, თვალყური უნდა ვადევნოთ, რომ ადიუნქტი (A_{nk}), რომელიც შეესაბამება ამორჩეულ უცნობს, განსხვავდებოდეს ნულისაგან.

თუ რომელიმე ადიუნქტთაგანი გადაიქცევა ნულად, ეს გვიჩვენებს, რომ შესაბამი უცნობის მნიშვნელობა *ნულის ტოლია*.

ზემოთ შევჩერდით უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების ადიუნქტებზე. მაგრამ ჩვენ შეგვეძლო აგვეღო დეტერმინანტის ყოველი (i) სტრიქონის ადიუნქტები, თუ ისინი ყველა არ ეტოლება ნულს; მაშინ (46)-ის ნაცვლად გვექნებოდა:

(46′)
$$x_1:x_2:\ .\ .\ .\ :x_n=A_{i1}:A_{i2}:\ .\ .\ .\ :A_{in}.$$

მაგალითის სახით განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}2x_1-3x_2-2x_3+\ x_4&=0,\\4x_1+2x_2+5x_3-4x_4&=0,\\3x_1-\ x_2+4x_3+5x_4&=0,\\x_1+2x_2+2x_3-2x_4&=0.\end{aligned}$$

კოეფიციენტთა მატრიცის რანგი ეტოლება 3-ს. ადიუნქტები, რომლებიც შეესაბამება მეოთხე სტრიქონის ელემენტებს, არის:

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}-3&-2&1\\2&5&-4\\-1&4&5\end{vmatrix}=98;\quad A_{42}=\begin{vmatrix}2&-2&1\\4&5&-4\\3&4&5\end{vmatrix}=147;$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix}2&-3&1\\4&2&-4\\3&-1&5\end{vmatrix}=-98;\quad A_{44}=\begin{vmatrix}2&-3&-2\\4&2&5\\3&-1&4\end{vmatrix}=49.$$

უცნობთა მნიშვნელობანი განისაზღვრება ტოლობებიდან

$$x_1:x_2:x_3:x_4=98:147:-98:49$$

ანუ

$$x_1:x_2:x_3:x_4=2:3:-2:1.$$

ახლა შეგვიძლია რომელიმე უცნობთაგანს მივანიჭოთ ნებსითი მნიშვნელობა და განვსაზღვროთ დანარჩენთა მნიშვნელობანი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი . 1. თუ ამოვარჩევთ (40) დეტერმინანტის რომელიმე ორ სტრიქონს, მაგალითად, i-ურ და k-ურს, მაშინ წინანდელივით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n : A_{i1} : A_{i2} : \ldots : A_{in} \tag{47}$$

და ერთდროულად

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{k1} : A_{k2} : \ldots : A_{kn},$$

საიდანაც

$$A_{i1} : A_{i2} : \ldots : A_{in} = A_{k1} : A_{k2} : \ldots : A_{kn}. \tag{48}$$

თანაფარდობებს (47)-დან (47') ადგილი აქვს იმ პირობით, რომ (40) დეტერმინანტი ტოლია ნულისა. ამგვარად, **თუ დეტერმინანტი ეტოლება ნულს, მაშინ ორი სტრიქონის ელემენტების ადიუნქტები შესაბამისად პროპორციულია.**

ეს დებულება ძალაში რჩება დეტერმინანტის სვეტებისათვისაც.

2. თუ მოცემულია ერთგვაროვანი $(n-1)$ განტოლებათა (42) სისტემა და თუ კოეფიციენტების მატრიცის რანგი ტოლია $(n-1)$-ს, მაშინ ეს სისტემა შეიძლება ამოიხსნას აღნიშნული ხერხით. მართლაც, ადიუნქტები (43) არაა დამოკიდებული (40) დეტერმინანტის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტებზე, ე. ი. უკანასკნელი განტოლების კოეფიციენტებზე. ეს ადიუნქტები წარმოადგენენ $n-1$ რიგის დეტერმინანტებს, რომლებიც შედგენილია მატრიციდან:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{Vmatrix}$$

და რომლებიც აღებულია რიგრიგობით ცვალებადი ნიშნებით.

ამგვარად, თუ მოცემულია n უცნობიანი ერთგვაროვანი $n-1$ განტოლებათა სისტემა და თუ კოეფიციენტების მატრიცის რანგი $n-1$-ს ტოლია, მაშინ უცნობთა მნიშვნელობანი პროპორციულია $n-1$ რიგის დეტერმინანტებისა, რომლებიც მიღებულია ამ მატრიციდან და აღებულია რიგრიგობითი ნიშნებით.

მოვიყვანოთ მაგალითი ანალიზური გეომეტრიიდან. სივრცეში აღებული წრფე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი სიბრტყის

გადაკვეთა. ჯერ დავუშვათ, რომ ლაპარაკია იმ წრფეზე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში; მაშინ ორთავე სიბრტყე აგრეთვე გადის კოორდინატთა სათავეში, ასე რომ მათი განტოლებანი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{array}\right. \tag{49}$$

წრფეზე აღებული ყოველი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს (49) განტოლებებს და პირიქით, x, y, z მნიშვნელობათა ყოველ სისტემას, რომელიც აკმაყოფილებს (49) განტოლებებს, შესაბამება წერტილი L წრფეზე.

წინანდელივით x, y, z მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ (49) განტოლებებს, პროპორციულია

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

მატრიცის მინორებისა, რომლებიც აღებულია რიგრიგობით ცვალებადი ნიშნებით:

$$x:y:z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{50}$$

აღვნიშნავთ რა

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = l, \quad -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = m, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = n, \tag{51}$$

(50) თანაფარდობას გადავწერთ ასეთი სახით:

$$x:y:z = l:m:n$$

ანუ

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}. \tag{50'}$$

თუ L წრფე არ გადის კოორდინატთა სათავეში, მაშინ ავიღებთ რომელიმე x_1, y_1, z_1 წერტილს, რომელიც მდებარეობს მოცემულ წრფეზე. იმ სიბრტყეთა განტოლებანი, რომლებიც განსაზღვრავს L-ს, შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$a_1(x - x_1) + b_1(y - y_1) + c_1(z - z_1) = 0,$$
$$a_2(x - x_1) + b_2(y - y_1) + c_2(z - z_1) = 0.$$

ამ განტოლებებიდან ვიპოვით, ისე როგორც ზემოთ:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$$

სადაც l, m და n განისაზღვრებიან (51) ტოლობებით.

სავარჯიშო.

1. მოძებნეთ x, y, z, t-ს მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ სისტემას:

$$\begin{aligned} 2x+y+3z-t&=0,\\ 3x-2y+z+2t&=0,\\ 4x+3y+2z-8t&=0,\\ -3x+4y+3z-2t&=0. \end{aligned}$$

2. მოძებნეთ x_1, x_2, x_3 x_4-ის მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებებს:

a) $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2-4x_3+5x_4&=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3+6x_4&=0,\\ 4x_1-5x_2-3x_3-4x_4&=0. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+2x_2-4x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1-4x_2-2x_3+5x_4&=0,\\ 2x_1-3x_2-x_3+2x_4&=0. \end{aligned}$$

§ 2. წრფივ განტოლებათა შესახებ ამოცანის გეომეტრიული ჩამოყალიბება

1. წრფივ განტოლებათა პრობლემა შეიძლება გაშუქებული იქნეს გეომეტრიულად; ეს პრობლემა დაკავშირებულია ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ცნებასთან. ეს ცნება უკვე შეხვდა 1-ლ თავში, მაგრამ იქ განვიხილეთ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ვექტორები. ახლა საქმე გვექნება სივრცეში: ჩვენ მოკლედ შევჩერდებით მათ მიმართ ძირითად მოქმედებებზე. ვექტორს აღვნიშნავთ ერთი ასოთი, მაგალითად $\overline{a}$-თი, ან ორი ასოთი, რომლებიც აღნიშნავენ მის სათავეს და ბოლოს. $\overline{a}$ ვექტორის სიგრძე აღინიშნება ჩვეულებრივ იმავე a ასოთი, მხოლოდ უხაზოთ. თუ ვექტორის სიგრძე ერთეულის ტოლია, მაშინ ვექტორს ეწოდება ო რ ტ ი.

1-ლ თავში დავადგინეთ ვექტორთა ტოლობის ცნება. იქ ნათქვამია ძალაში რჩება ვექტორებისათვისაც სივრცეში. თუ მოცემულია $\overline{a}$ ვექტორი და ნებსითი O წერტილი, მაშინ ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ OA ვექტორი, რომელიც a ვექტორის ტოლია:

$$\overline{OA}=\overline{a}.$$

თუ მოცემულია სამი a, b, c ვექტორი, მაშინ შეიძლება მივიღოთ·

$$\overline{OA}=\overline{a},\ \overline{AB}=\overline{b},\ \overline{AC}=\overline{c}.$$

$\overline{OC}$ ვექტორი წარმოადგენს a, b, c ვექტორების ჯამს:

$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{OC}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ავაგოთ ჯამი ვექტორებისა, რომელთა რიცხვი ნებისმიერია. შევნიშნოთ, რომ ორი ვექტორის ჯამი შეიძლება მივიღოთ პარალელოგრამის წესის მიხედვით; სამი ვექტორის ჯამი შეიძლება მივიღოთ პარალელეპიპედის წესის მიხედვით; ასე, მაგალითად, მე-37 ნახაზზე $\overline{OD}$ ვექტორი წარმოადგენს $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$, $\overline{OC_1}$ ვექტორების ჯამს.

არსებითია ხაზი გავუსვათ იმას, რომ ვექტორების შეკრებას აქვს კომუტატივობის და ასოციატივობის თვისებანი:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned}&\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},\\ &\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}.\end{aligned}$$

ორი ვექტორის სხვაობას $\overline{a}-\overline{b}$ მივიღებთ $\overline{a}$ ვექტორის შეკრებით $-\overline{b}$ ვექტორთან, რომელიც $\overline{b}$ ვექტორის მოპირდაპირეა. $\overline{a}-\overline{a}$ სხვაობა წარმოადგენს ვექტორს, რომლის თავი და ბოლო ემთხვევა ერთმანეთს; ასეთ ვექტორს ნულ-ვექტორი (0) ეწოდება.

ახლა განვიხილოთ რიცხვზე ვექტორის გამრავლების ოპერაცია. $\overline{a}$ ვექტორის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება ვექტორს, რომლის სიგრძე ტოლია λ რიცხვისა და $\overline{a}$ ვექტორის სიგრძის ნამრავლისა, ხოლო მიმართულება ემთხვევა $\overline{a}$-ს მიმართულებას ან მის მოპირდაპირეს იმისდა მიხედვით, იქნება λ რიცხვი დადებითი თუ უარყოფითი. $\overline{a}$ ვექტორის ნამრავლი λ რიცხვზე აღინიშნება $\lambda\overline{a}$ ან $\overline{a}\lambda$-თი.

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ რიცხვზე ვექტორის გამრავლების დროს რჩება ჩვეულებრივი თვისებანი:

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned}&\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a},\\ &(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a},\\ &\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}.\end{aligned}$$

ორ ვექტორს კოლინეარული ეწოდება, თუ ისინი მდებარეობენ ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზე. ცხადია, რომ $\bar{a}$ და $\lambda\bar{a}$ ვექტორები ყოველთვის კოლინეარულია.

შებრუნებით თუ $\bar{b}$ და $\bar{a}$ ვექტორები კოლინეარულია, მაშინ შეიძლება მოვნახოთ ისეთი λ რიცხვი, რომ შესრულდეს ტოლობა:

$$\bar{b}=\lambda\bar{a}$$

ანუ

$$\lambda\bar{a}-b=0.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ კოლინეარული ვექტორები ყოველთვის შებმული არიან წრფივი დამოკიდებულებით.

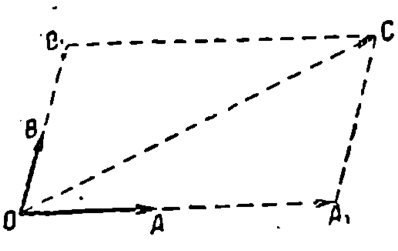
საზოგადოდ, ვექტორებს

$$\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \ldots, \bar{a}^{(k)}$$

წრფივად დამოკიდებული ეწოდებათ, თუ არსებობს α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\alpha_1\bar{a}^{(1)}+\alpha_2\bar{a}^{(2)}+\ldots+\alpha_k\bar{a}^{(k)}=0,$$

ამასთან, ერთი მაინც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ რიცხვებს შორის განსხვავებულია ნულისაგან. თუ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ რიცხვები, რომლებიც ამ მოთხოვნებს აკმაყოფილებს, არ არსებობს, მაშინ $\bar{a}^{(1)}, \ldots, \bar{a}^{(k)}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.



ნახ. 36.

ორი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ისინი კოლინეარულია.

თუ ვექტორები

$$\bar{a}=\overline{AO} \text{ და } \bar{b}=\overline{OB}\ .$$

წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ ისინი განსაზღვრავენ სიბრტყეს, რომელიც O წერტილზე გადის. ყოველი $\bar{c}$ ვექტორი, რომელიც ამ

სიბრტყეზე მდებარეობს, შეიძლება დაიშალოს $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების მიხედვით:

(52) $$\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$$

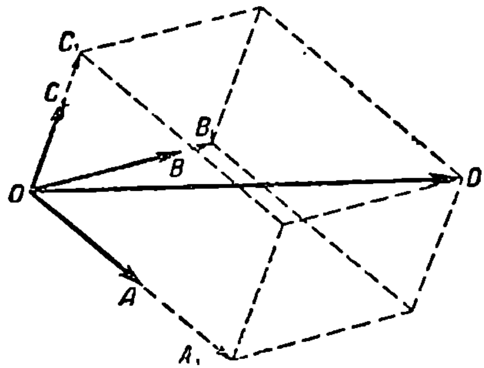
(შეად. მე-36 ნახაზს, სადაც $\overline{OA_1} = \alpha\overline{a}$ $\overline{OB_1} = \beta\overline{b}$).

თანაფარდობა (52), რომელიც შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} - \overline{c} = 0,$$

გვიჩვენებს, რომ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ვექტორები შებმული არიან წრფივი დამოკიდებულებით.

თუ სამი a, b, c ვექტორი მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე (ან მისი პარალელურია) *, მაშინ ისინი წრფივად დამოუკიდებელია. ერთ სიბრტყეზე მდებარე წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი ორის ტოლია.



ნახ. 37.

პირიქით, თუ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ისინი ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურია (კომპლანარულია).

დავუშვათ ახლა, რომ ვექტორები

$$\overline{a} = \overline{OA}, \ \overline{b} = \overline{OB}, \ \overline{c} = \overline{OC}$$

წრფივად დამოუკიდებელია (ნახაზი 37).

$\overline{c}$ ვექტორი ამ შემთხვევაში უკვე აღარ მდებარეობს OAB სიბრტყეზე. ახლა ყოველი $\overline{d}$ ვექტორი შეიძლება დავშალოთ $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ვექტორების მიხედვით, ე. ი. წარმოვადგინოთ იგი ასეთი სახით

(53) $$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$$

* ასეთ სამ ვექტორს კომპლანარული ეწოდება.

(შეად. მე-37 ნახაზს), სადაც $\overline{OA_1}=\alpha\overline{a}, \overline{OB_1}=\beta\overline{b}, \overline{OC_1}=\gamma\overline{c}$).

თანაფარდობა (53) შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით

$$\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}-\gamma\overline{c}-\overline{d}=0.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ ვექტორები შებმული არიან წ რ ფ ი ვ ი დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ი თ.

ამგვარად სამგანზომილებიან სივრცეში აღებული ყოველი ოთხი ვექტორი შებმულია წრფივი დამოკიდებულებით. სამგანზომილებიან სივრცეში მდებარე წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი ეტოლება ს ა მ ს. მკითხველი შენიშნავს, რომ წრფივად დამოკიდებულ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი ახასიათებს სივრცის გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ა თ ა რ ი ც ხ ვ ს.

2. ავარჩიოთ სივრცეში სამი ურთიერთ მართობი ორტი:

(54) $$\overline{i_1}\quad \overline{i_2}\quad \overline{i_3}$$

(„კოორდინატული ვექტორები“). მაშინ ყოველი a ვექტორი შეიძლება დავშალოთ ამ ვექტორების მიხედვით, ე. ი. წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით

(55) $$\overline{a}=a_1\overline{i_1}+a_2\overline{i_2}+a_3\overline{i_3}.$$

a_1, a_2, a_3 რიცხვებს $\overline{a}$ ვექტორის კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ეწოდება საკოორდინატო (54) ვექტორების მიმართ. $\overline{a}$ ვექტორი სავსებით განისაზღვრება თავისი a_1, a_2, a_3 კოორდინატებით.

(55)-ის მაგივრად ზოგჯერ სარგებლობენ შემდეგი ჩანაწერით:

(55′) $$\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3).$$

ასეთი ჩანაწერი არ გამოიწვევს გაუგებრობას, თუ საკოორდინატო ვექტორთა სისტემა გარკვეულია.

კერძოდ, როცა $a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=0$, ფორმულა (55) გვაძლევს: $\overline{a}=\overline{i_1}$; ამგვარად, $\overline{i_1}$ ვექტორი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით

$$\overline{i_1}=(1,\ 0,\ 0).$$

ანალოგიურად

$$\overline{i_2}=(0,\ 1,\ 0),\ \overline{i_3}=(0,\ 0,\ 1).$$

ვექტორთა შეკრების და რიცხვზე ვექტორის გამრავლების ოპერაცია შეიძლება გამოისახოს ვექტორების კოორდინატებით. მართლაც, თუ მოცემულია ორი ვექტორი

$$\overline{a}=a_1\overline{i_1}+a_2\overline{i_2}+a_3\overline{i_3},\ \overline{b}=b_1\overline{i_1}+b_2\overline{i_2}+b_3\overline{i_3},$$

მაშინ, გამოვიყენებთ რა წინა პუნქტის (I) და (II) თვისებებს, მივიღებთ

(56) $$\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1)\overline{i_1}+(a_2+b_2)\overline{i_2}+(a_3+b_3)\overline{i_3}$$

ანუ

(56′) $$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}+(b_1+b_2+b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3).$$

ამგვარად, ვექტორთა შეკრების დროს შეიკრიბება მათი შესაბამი კოორდინატები.

თუ გავამრავლებთ $\overline{a}$ ვექტორს λ რიცხვზე, მივიღებთ

(57) $$\lambda\,\overline{a}=\lambda a_1\overline{i_1}+\lambda a_2\overline{i_2}+\lambda a_3\overline{i_3}$$

ანუ

(57′) $$\lambda\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\}.$$

რომ გავამრავლოთ ვექტორი რიცხვზე, საკმარისია ამ რიცხვზე გავამრავლოთ ყოველი მისი კოორდინატი.

3. აქამდე ჩვენ ვიხილავდით მხოლოდ რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლს. ახლა გამოვიყენოთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ცნება.

წინასწარ უნდა ვთქვათ რამდენიმე სიტყვა გეგმილებზე. თუ $\overline{a}$ ვექტორს ვაგეგმილებთ რომელიმე ღერძზე, მაშინ გეგმილი ეტოლება $\overline{a}$ ვექტორის სიგრძისა და იმ კუთხის კოსინუსის ნამრავლს, რომელიც მდებარეობს $\overline{a}$ ვექტორის მიმართულებასა და ღერძის მიმართულების შორის.

თუ ღერძის მიმართულება ემთხვევა $\overline{b}$ ვექტორის მიმართულებას, მაშინ $\overline{a}$ ვექტორის გეგმილი ამ ღერძზე აღინიშნება გეგ$_{\overline{b}}\,\overline{a}$. ამ შემთხვევაში გეგმილი უდრის $\overline{a}$ ვექტორის სიგრძის ნამრავლს იმ კუთხის კოსინუსზე, რომელიც შედგენილია $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორებით:

(58) $$\text{გეგ}_{\overline{b}}\,\overline{a}=a\cos(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}}).$$

თუ როლებს შევუცვლით $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორებს, მაშინ მივიღებთ:

(59) $$\text{გეგ}_{\overline{a}}\,\overline{b}=b\cos(\widehat{\overline{b},\ \overline{a}}).$$

(58) და (59)-დან გამომდინარეობს:

(60) $$b \text{ გეგ}_{\bar{b}}\, \bar{a} = a = a \text{ გეგ}_{\bar{a}}\, \bar{b} = ab \cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

$\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების სიგრძეთა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს ეწოდება სკალარული ნამრავლი $\bar{a}$ ვექტორისა $\bar{b}$ ვექტორზე და აღინიშნება $\bar{a}\cdot\bar{b}$-თი:

(61) $$\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

ამ განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სკალარულ ნამრავლს აქვს კომუტატივობის თვისება:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}.$$

ძნელი არაა იმის შემოწმება, რომ ორი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორისათვის და ნებსითი λ რიცხვისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობებს

$$(\lambda\bar{a})\bar{b} = \bar{a}\cdot(\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})^{*}.$$

შემდეგ, (61) ფორმულიდან გამომდინარეობს:

$$\bar{a}\cdot\bar{a} = aa\cos(\bar{a}, \bar{a}) = a^2.$$

თუ $\bar{a} \neq 0$ და $\bar{b} \neq 0$, მაშინ $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos(\bar{a}, \bar{b})$ შეიძლება გადაიქცეს ნულად მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში როცა $\cos(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, ე. ი. $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები ურთიერთ მართობია.

მაშასადამე, თანაფარდობა

(62) $$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$$

გამოხატავს $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების მართობობის პირობას.

კერძოდ, $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$, $\bar{i}_3$ საკოორდინატო ვექტორებისათვის გვაქვს:

(63) $$\begin{gathered} \bar{i}_1\bar{i}_1 = \bar{i}_2\bar{i}_2 = \bar{i}_3\bar{i}_3 = 1, \\ \bar{i}_1\bar{i}_2 = \bar{i}_2\bar{i}_3 = \bar{i}_3\bar{i}_1 = 0. \end{gathered}$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ სკალარულ გამრავლებას აქვს დისტრიბუტივობის თვისება შეკრების მიმართ.

მართლაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ (60) თანაფარდობებს, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\bar{c}\cdot(\bar{a}+\bar{b}) = c \text{ გეგ}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b});$$

---

* ჩანაწერი $(\lambda\bar{a})\bar{b}$ ნიშნავს $\lambda\bar{a}$ ვექტორისა და $\bar{b}$ ვექტორის სკალარულ ნამრავლს.

მაგრამ ჯამის გეგმილი ყოველ მიმართულებაზე ეტოლება მათი გეგმილების ჯამს; მაშასადამე,

$$\bar{c}\cdot(\bar{a}+\bar{b})=c(\text{გეგ}_{\bar{c}}\,\bar{a}+\text{გეგ}_{\bar{c}}\,\bar{b})=c\,\text{გეგ}_{\bar{c}}\,\bar{a}+c\,\text{გეგ}_{\bar{c}}\,\bar{b}$$

ან თანახმად (60) თანაფარდობისა გვაქვს:

$$\bar{c}\cdot(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{c}\cdot\bar{b}.$$

ეს თვისება ძალაში რჩება შესაკრებთა ნებისმიერ რიცხვის შემთხვევაში.

ახლა ძნელი არაა $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის გამოსახვა მათი კოორდინატების საშუალებით:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(a_1\bar{i}_1+a_2\bar{i}_2+a_3\bar{i}_3)(b_1\bar{i}_1+b_2\bar{i}_2+b_3\bar{i}_3).$$

თუ შევასრულებთ გამრავლებას და მხედველობაში მივიღებთ (63) თანაფარდობებს, მაშინ გვექნება:

(64) $$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

ამგვარად $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების ორთოგონალობის პირობა შეიძლება ჩავწეროთ ასეთი სახით:

(61′) $$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

4. რომ გვექნეს კოორდინატთა სისტემა სივრცეში, საკმარისია ავირჩიოთ O სათავე და დავასახელოთ ღერძთა მიმართულებანი. დავუშვათ, რომ ეს მიმართულებანი განისაზღვრება $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$, $\bar{i}_3$ ვექტორებით (პუნქტი 2). ამის შესაბამისად წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x_1, x_2, x_3-ით, ჩვეულებრივი x, y, z-ის მაგივრად. თუ განვიხილავთ ვექტორს, რომელიც კოორდინატთა O სათავეს აერთებს ნებსითი M წერტილთან

$$OM=\bar{r}$$

(M წერტილის რადიუს-ვექტორს), მაშინ ამ ვექტორის კოორდინატები ემთხვევა M წერტილის x_1, x_2, x_3 კოორდინატებს; ამგვარად

$$\bar{r}=\overline{OM}=x_1\bar{i}_1+x_2\bar{i}_2+x_3\bar{i}_3.$$

M წერტილის გადაადგილების დროს r რადიუს-ვექტორი იცვლება; მისი x_1, x_2, x_3 კოორდინატები შეიძლება განვიხილოთ როგორც ცვლადი სიდიდენი.

თუ შევადგენთ მუდმივი $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ ვექტორისა და $\bar{r}=\{x_1, x_2, x_3\}$ რადიუს-ვექტორის სკალარულ ნამრავლს, მაშინ მივიღებთ წრფივ ფორმას

$$\bar{a}\cdot\bar{r}=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3. \tag{65}$$

ამგვარად, ყოველ $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ ვექტორს შეესაბამება წრფივი ფორმა (65).

პირიქით, თუ მოცემულია წრფივი ფორმა

$$f=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3,$$

მაშინ მისი კოეფიციენტები შეიძლება განვიხილოთ როგორც განსაზღვრული (a_1, a_2, a_3) ვექტორის კოორდინატები.

ამით ხამგანზომილებიან ხივრცის ვექტორებსა და სამი ცვლადის წრფივ ფორმებს შორის მყარდება ურთიერთ ცალსახა თანადობა.

ეს თანადობა რჩება **რიცხვზე გამრავლების** და **შეკრების** დროს

1°. თუ $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ ვექტორს შეესაბამება ფორმა

$$f=\bar{a}\cdot\bar{r}=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3,$$

მაშინ $\lambda\bar{a}$ ვექტორს შეესაბამება λf ფორმა:

$$\lambda f=\lambda\,\bar{a}\cdot\bar{r}=\lambda\, a_1x_1+\lambda\, a_2x_2\, x+\lambda\, a_3x_3.$$

2°. თუ $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3,$ და $\bar{b}=(b_1, b_2, b_3)$ ვექტორებს შეესაბამება ფორმები

$$f=\bar{a}\;\bar{r}=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \text{ და } g=\bar{b}\;\bar{r}=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3,$$

მაშინ $\bar{a}+\bar{b}$ ვექტორს შეესაბამება $f+g$ ფორმა:

$$f+g=\bar{a}\;\bar{r}+\bar{b}\;\bar{r}=(\bar{a}+\bar{b})\bar{r}$$

ან

$$f+g=(a_1+b_1)x_1+(a_2+b_2)x_2+(a_3+b_3)x_3.$$

თუ ორი ვექტორი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ შესაბამი ფორმები იგივურად ტოლია. პირიქით, თუ ორი ფორმა იგივურად ერთმანეთის ტოლია, მაშინ შესაბამი ვექტორებიც ტოლია.

თუ ვექტორი ნულის ტოლია, ე. ი. მისი ყველა კოორდინატი ტოლია ნულისა, მაშინ შესაბამი ფორმა იგივურად ნულის ტოლია, ე. ი. ნულს ეტოლება მისი ყველა კოეფიციენტი), და პირიქით.

ახლა დავუშვათ, რომ მოცემულია ვექტორთა სისტემა

$$
(66) \qquad \begin{cases} \overline{a^{(1)}} = a_{11}\overline{i_1} + a_{12}\overline{i_2} + a_{13}\overline{i_3}, \\ \overline{a^{(2)}} = a_{21}\overline{i_1} + a_{22}\overline{i_2} + a_{23}\overline{i_3}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{a^{(k)}} = a_{k1}\overline{i_1} + a_{k2}\overline{i_2} + a_{k3}\overline{i_3}. \end{cases}
$$

დავუშვათ, რომ

$$
(67) \qquad \begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_k &= a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 \end{aligned}
$$

შესაბამი წრფივი ფორმებია.

ვექტორები (66) წრფივად დამოკიდებული არიან მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა შესაბამი ფორმები (67) წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, თანაფარდობას

$$\lambda_1\overline{a}^{(1)} + \lambda_2\overline{a}^{(2)} + \ldots + \lambda_k\overline{a}^{(k)} = 0$$

თან მოსდევს იგივური ტოლობა

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0,$$

და პირიქით.

1-ელ პარაგრაფში ვნახეთ, რომ (67) ფორმებს შორის წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი ეტოლება შემდეგი მატრიცის რანგს:

$$
(68) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{pmatrix}
$$

წინანდელის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (66) ვექტორებს შორის წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი ეტოლება (68) მატრიცის რანგს.

5. განვიხილოთ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \tag{69}$$

თუ x_1, x_2, x_3 მნიშვნელობათა სისტემა აკმაყოფილებს (69) განტოლებას, მაშინ ვიტყვით, რომ ვექტორი

$$\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

შეადგენს ამ განტოლების ამოხსნას.

(69) განტოლების მარცხენა ნაწილი შეგვიძლია ვანვიხილოთ როგორც $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ და $\bar{r}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი. ამგვარად, (69) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით.

$$\bar{a} \cdot \bar{r} = 0. \tag{69'}$$

უკანასკნელი განტოლება გამოსახავს იმას, რომ $\bar{r}$ და $\bar{a}$ ვექტორები **ორთოგონალურია**. მაშასადამე, თუ M **წერტილის** $\bar{r}$ რადიუს-ვექტორი შეადგენს (69) განტოლების ამოხსნას, მაშინ ის მართობია $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ვექტორისა.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, M წერტილის $\bar{r}$ რადიუს-ვექტორი (და მაშასადამე თვით M წერტილი) მდებარეობს Π სიბრტყეზე, **რომელიც გადის** O **წერტილზე და მართობია** $\bar{a}$ **ვექტორისა.**

შებრუნებით, თუ M წერტილი მდებარეობს Π სიბრტყეზე, მაშინ მისი რადიუს-ვექტორი აკმაყოფილებს (69') პირობას, და, მაშასადამე (69) ტოლობასაც.

ამგვარად, განტოლება (69) არის Π **სიბრტყის განტოლება.**

ავიღოთ Π სიბრტყეზე ნებისმიერი ორი M_1 და M_2 წერტილი და დავუშვათ, რომ

$$\overline{OM_1} = \bar{r}^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\}, \ \overline{OM_2} = \bar{r}^{(2)} = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2}, x_3^{(2)}\}$$

შესაბამი რადიუს-ვექტორებია; ყოველი ამ ვექტორთაგანი, წინანდელის მიხედვით, შეადგენს განტოლებათა ამოხსნას. თუ M_1, M_2, და O წერტილები არ მდებარეობენ ერთ წრფეზე, მაშინ ვექტორები $\bar{r}^{(1)}$ და $\bar{r}^{(2)}$ წრფივად **დამოუკიდებელია** (იხ. პუნქტი 1). მაშასადამე, ეს ვექტორები გვაძლევს (69) განტოლების ორ **წრფივად** დამოუკიდებელ ამოხსნას.

(69) განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნა, რადგან — სიბრტყეზე მდებარე წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი ეტოლება 2-ს. თუ M არის ნებისითი წერტილი Π სიბრტყეზე, მაშინ მისი $\overline{r}=(x_1, x_2, x_3)$ რადიუს-ვექტორი შეიძლება დავშალოთ $\overline{r}^{(1)}$ და $\overline{r}^{(2)}$ ვექტორებად:

$$\overline{r}=\lambda_1\overline{r}^{(1)}+\lambda_2\overline{r}^{(2)}.$$

ამგვარად, (69) განტოლების ნებისმიერი ამოხსნა წრფივად გამოისახება ორი $\overline{r}^{(1)}$ და $\overline{r}^{(2)}$ წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნის საშუალებით.

ახლა ავიღოთ ორი წრფივი განტოლების სისტემა:

$$(70)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0. \end{aligned}$$

დავუშვებთ რა $\overline{a}^{(1)}=(a_{11}, a_{12}, a_{13}), \overline{a}^{(2)}=(a_{21}, a_{22}, a_{23})$, ამ განტოლებებს გადავწერთ ასეთი სახით:

$$(70')\qquad \overline{a}^{(1)}\cdot\overline{r}=0,\ \overline{a}^{(2)}\cdot\overline{r}=0.$$

ეს თანაფარდობანი იმას გამოსახავს, რომ საძიებელი $\overline{r}$ ვექტორი ორთოგონალური უნდა იყოს ორთავე $\overline{a}^{(1)}$ და $\overline{a}^{(2)}$ ვექტორისადმი. აქ შეიძლება ადგილი ექნეს ორ სხვადასხვა შემთხვევას, იმისდამიხედვით, $\overline{a}^{(1)}$ და $\overline{a}^{(2)}$ ვექტორები არიან წრფივად დამოკიდებული თუ არა.

თუ $\overline{a}^{(1)}$ და $\overline{a}^{(2)}$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ისინი კოლინეარულია; ამ შემთხვევაში a_{21}, a_{22}, a_{23} კოეფიციენტები a_{11}, a_{12}, a_{13} კოეფიციენტების პროპორციულია, რადგან ორი (70) განტოლებიდან ერთი იქნება მეორის შედეგი. ამგვარად, საკითხი დაიყვანება ერთი განტოლების ამოხსნამდე, ე. ი. ამოცანამდე, რომელიც უკვე განვიხილეთ.

ახლა დავუშვათ, რომ $\overline{a}^{(1)}$ და $\overline{a}^{(2)}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. თუ ამ ორ ვექტორს დავიყვანთ საერთო O საწყისამდე, მაშინ მათზე შეიძლება გავავლოთ მხოლოდ და მხოლოდ ერთი A სიბრტყე. თუ M წერტილის კოორდინატები x_1, x_2, x_3 აკმაყოფილებს (70) განტოლებებს, მაშინ ამ წერტილის $\overline{r}$ რადიუს-ვექტორი ორთოგონალურია თითოეული $\overline{a}^{(1)}$ და $\overline{a}^{(2)}$ ვექტორისადმი, ე. ი.

ორთოგონალურია A სიბრტყისა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $\overline{r}$ რადიუს-ვექტორი (და მასთან ერთად M წერტილიც) მდებარეობს L წრფეზე, რომელიც გადის O წერტილზე და მართობია A სიბრტყისადმი.

შებრუნებულად, თუ M წერტილი მდებარეობს L წრფეზე, მაშინ მისი რადიუს-ვექტორი, ცხადია, აკმაყოფილებს (70′) პირობებს, და მაშასადამე, (70)-საც.

ამგვარად, (70) განტოლებანი წარმოადგენენ წრფის განტოლებებს.

L წრფეზე ავიღოთ რომელიმე M_1 წერტილი და დავუშვათ, რომ

$$\overline{r}^{(1)} = (x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)})$$

არის მისი რადიუს-ვექტორი. მაშინ ყოველი M წერტილის რადიუს-ვექტორი L წრფეზე შეიძლება განსხვავდებოდეს $\overline{r}^{(1)}$-საგან მხოლოდ სკალარული მამრავლით:

$$\overline{r} = \lambda\,\overline{r}^{(1)}.$$

ამგვარად, (70) სისტემის ყოველი ამოხსნა $\overline{r}^{(1)}$-დან შეიძლება მივიღოთ რიცხვით მამრავლზე გამრავლებით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (70) სისტემას აქვს მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი ამოხსნა.

განვიხილოთ, დაბოლოს, სამი წრფივი განტოლების სისტემა

$$(71)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0,\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

ეს განტოლებანი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$(71')\qquad \overline{a}^{(1)}\cdot\overline{r} = 0,\quad \overline{a}^{(2)}\cdot\overline{r} = 0,\quad \overline{a}^{(3)}\cdot\overline{r} = 0,$$

სადაც

$$\overline{a}^{(1)} = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13}),\quad \overline{a}^{(2)} = (a_{21},\ a_{22},\ a_{23}),\quad \overline{a}^{(3)} = (a_{31},\ a_{32},\ a_{33}).$$

ამ ვექტორებს შორის წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი ეტოლება შემდეგი მატრიცის რანგს

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

თუ ამ მატრიცის რანგი 1-ის ტოლია, მაშინ $\overline{a}^{(1)}$, $\overline{a}^{(2)}$, $\overline{a}^{(3)}$ ვექტორებს შორის წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი ეტოლება 1-ს; მაშასადამე, ყველა ეს ვექტორი კოლინეარულია. ამ შემთხვევაში (71) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება ერთი განტოლების ამოხსნამდე. ამასთან ჩვენ მივიღებთ, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ორ წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნას.

თუ (72) მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია, მაშინ $\overline{a}^{(1)}$, $\overline{a}^{(1)}$, $\overline{a}^{(3)}$ ვექტორებს შორის იქნება ორი წრფივად დამოუკიდებელი. (71) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება ო რ ი განტოლების ამოხსნამდე; ზემოთ დავინახეთ, რომ ამ შემთხვევაში მივიღებთ ერთ დამოუკიდებელ ამოხსნას.

თუ დაბოლოს, (72) მატრიცის რანგი ეტოლება 3-ს, მაშინ $\overline{a}^{(1)}$, $\overline{a}^{(2)}$, $\overline{a}^{(3)}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. ამ შემთხვევაში (71) სისტემას არ აქვს ა რ ც ე რ თ ი ა მ ო ხ ს ნ ა, გ ა რ და ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი ს ა.

ამგვარად, თუ ნულოვან ამოხსნას გამოვრიცხავთ განხილვიდან, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

კოეფიციენტთა მატრიცის რანგი	წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნათა რიცხვი
1	2
2	1
3	0

აქედან ჩანს, რომ (71) სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნათა რიცხვი ავსებს მატრიცის რანგს 3-მდე, ე. ი. სივრცის განზომილებათა რიცხვამდე.

6. სივრცეში აღებული ყოველი წერტილი ხასიათდება თავისი სამი x_1, x_2, x_3 კოორდინატით.

დავუშვათ, რომ გვაქვს საგანთა ნებისმიერი სიმრავლე, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ ამ სიმრავლის ყოველი საგანი შეიძლება დახასიათდეს სამი რიცხვით; ასეთი სიმრავლე განსაზღვრული აზრით შეიძლება განვიხილოთ როგორც სამგანზომილებიანი სივრცე. ასე, მაგალითად, სამი ცვლადის ყოველგვარ წრფივ ფორმათა სიმრავლე ჰქმნის ამ აზრით სამგანზომილებიან სივრცეს.

ამ თვალსაზრისით სამგანზომილებიან სივრციდან n განზომილებიან სივრცეზე გადასვლა არ წარმოადგენს სიძნელეს. თუ საგანთა

სიმრავლეს აქვს ის თვისება, რომ ყოველი მისი ელემენტი შეიძლება დახასიათდეს n რიცხვთა სისტემით, მაშინ ეს სიმრავლე შეიძლება განვიხილოთ როგორც n განზომილებიანი სივრცე. მოცემული სიმრავლის ელემენტები წარმოადგენენ სივრცის „წერტილებს". ყოველ წერტილს ახასიათებს თავისი n კოორდინატი: x_1, x_2, ..., x_n. წერტილი, რომელსაც აქვს კოორდინატები | 0, 0, 0, ..., 0 |, კოორდინატთა სათავის როლს თამაშობს. ისევე როგორც სამგანზომილებიან სივრცეში, x_1, x_2, ..., x_n რიცხვები შეიძლება განვიხილოთ როგორც წერტილის კოორდინატები ან როგორც ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის კოორდინატები*,

ზემოთ დავინახეთ, რომ სამი ცვლადის ყოველ წრფივ ფორმას

$$f=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$$

შეესაბამება სამგანზომილებიან სივრცის ვექტორი

$$\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3).$$

ამგვარადვე, n ცვლადის წრფივ ფორმას

$$f=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

შეესაბამება „n—განზომილების სივრცის ვექტორი"

$$\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n).$$

ორი ასეთი ვექტორი

$$\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\ \text{და}\ \overline{b}=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$$

თანატოლად ითვლება მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots,\ a_n=b_n.$$

თუ ვექტორის ყველა კოორდინატი ნულის ტოლია, მაშინ საქმე გვაქვს ნ უ ლ - ვ ე ქ ტ ო რ თ ა ნ (0).

$\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების ჯამი ეწოდება ვექტორს

$$\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1,\ \ldots,\ a_n+b_n).$$

ამგვარადვე განისაზღვრება ვექტორთა სხვაობა.

---

* წერტილის (ან ვექტორის) კოორდინატები ყოველთვის ჩავთვალოთ ნამდვილ რიცხვებად.

ძნელი არაა იმის შემოწმება, რომ შეკრების ამგვარი განსაზღვრის დროს რჩება კომუტატივობის და ასოციატივობის თვისებანი.

$$\overline{a}=\{a_1, \ldots, a_n\}$$

ვექტორის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება ვექტორს

$$\lambda\overline{a}=\{\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n\}.$$

(II) თვისებანი ძალაში რჩება; რჩება აგრეთვე ის თვისებანი, რომლებიც შეეხება შესაბამობას ვექტორებსა და ფორმებს შორის. თუ $\overline{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ და $\overline{b}=(b_1, \ldots, b_n)$ ვექტორებს შეესაბამება ფორმები

$$f=a_1x_1+\ldots+a_nx_n, \quad g=b_1x_1+\ldots+b_nx_n,$$

მაშინ $\overline{a}+\overline{b}$ ვექტორს შეესაბამება ფორმა

$$f+g=(a_1+b_1)x_1+\ldots+(a_n+b_n)x_n,$$

ხოლო $\overline{a}$ ვექტორს შეესაბამება ფორმა

$$\lambda f=\lambda a_1x_1+\ldots+\lambda a_nx_n.$$

ტოლ ვექტორებს შეესაბამება იგივურად ტოლი ფორმები, ხოლო ნულ ვექტორს შეესაბამება ისეთი ფორმა, რომლის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

წრფივი დამოკიდებულების განსაზღვრა, რომელიც ზემოთ დავაწესეთ სამგანზომილებიან სივრცის ვექტორებისათვის, ძალაში რჩება ზოგადი შემთხვევისათვისაც. თუ მოცემულია m ვექტორთა სისტემა:

$$\begin{aligned}\overline{a}^{(1)}&=\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\},\\ \overline{a}^{(2)}&=\{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overline{a}^{(m)}&=\{a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}\},\end{aligned}\tag{73}$$

მაშინ ავაგებთ შესაბამ ფორმებს.

$$\begin{aligned}f_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ f_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n.\end{aligned}\tag{74}$$

(73) ვექტორებს შორის წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი ეტოლება წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვს (74) სისტემაში, ე. ი. ეტოლება შემდეგი მატრიცის რანგს:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

რადგანაც ამ მატრიცის რანგი არ აღემატება n-ს, ამიტომ წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი $\overline{a}^{(1)}, \ldots, \overline{a}^{(m)}$ ვექტორებს შორის არ შეიძლება აღემატებოდეს n-ს. ამგვარად, თუ n განზომილებიან სივრცეში მოცემულია ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა, მაშინ ამ ვექტორებს შორის წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი არ შეიძლება აღემატებოდეს n-ს.

თუ ავიღებთ n—განზომილებიან სივრცის n ვექტორთა რომელიმე სისტემას, მაშინ ამ ვექტორთა კოორდინატებიდან შესაძლო იქნება n რიგის დეტერმინანტის შედგენა. თუ ეს დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მოცემული ვექტორები არიან წრფივად დამოუკიდებელი. ამგვარად, n — განზომილებიან სივრცეში ყოველთვის შეიძლება შევარჩიოთ n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი. ხოლო ყოველი $n+1$ ვექტორი, წინანდელის მიხედვით, შებმული არიან წრფივი დამოკიდებულებით. აქედან გამომდინარეობს, რომ n—განზომილებიან სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი n-ის ტოლია, ე. ი. უდრის სივრცის განზომილებათა რიცხვს.

განვიხილოთ, მაგალითად, ვექტორთა შემდეგი სისტემა

$$\begin{aligned} \overline{i}_1 &= \{1,\ 0,\ 0, \ldots, 0\}, \\ \overline{i}_2 &= \{0,\ 1,\ 0, \ldots, 0\}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{i}_n &= \{0,\ 0,\ 0 \ldots, 1\}. \end{aligned}$$

n რიგის დეტერმინანტი, შედგენილი ამ ვექტორთა კოორდინატებისაგან, განსხვავებულია ნულისაგან:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

მაშასადამე, $\overline{i}_1, \overline{i}_2, \dots, \overline{i}_n$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. თუ ახლა ავიღებთ ნებისმიერ ვექტორს

$$\overline{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

$$\overline{a} = a_1\overline{i}_1 + a_2\overline{i}_2 + \dots + a_n\overline{i}_n.$$

მართლაც, თუ $\overline{i}_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$ ვექტორს გავამრავლებთ a_1 რიცხვზე, მივიღებთ: $a_1\overline{i}_1 = \{a_1, 0, 0, \dots, 0\}$.

ანალოგიურად:

$$a_2\overline{i}_2 = (0, a_2, 0, \dots, 0),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n\overline{i}_n = (0, 0, \dots, a_n)$$

თუ შევკრებთ ამ ტოლობებს, მივიღებთ:

$$a_1\overline{i}_1 + a_2\overline{i}_2 + \dots + a_n\overline{i}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \overline{a}.$$

ახლა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვები წარმოადგენენ $\overline{a}$ ვექტორის კოორდინატებს $\overline{i}_1, \overline{i}_2, \dots \overline{i}_n$ **საკოორდინატო ვექტორთა სისტემის მიმართ.**

7. ორი

$$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ და } \overline{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$$

ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება გამოსახულებას:

$$\overline{a}\,\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n. \tag{76}$$

სკალარული ნამრავლისათვის ადგილი აქვს შემდეგი თვისებებს:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a},$$

(77) $$(\lambda\bar{a})\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}),$$

$$\bar{c}\cdot(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{c}\cdot\bar{b}.$$

ამ თვისებათა სამართლიანობაში შეიძლება დავრწმუნდეთ, თუ უშუალოდ გამოვიყენებთ (76) ფორმულას.

თუ (76) ფორმულაში დავუშვებთ $\bar{b}=\bar{a}$, ვიპოვით:

(78) $$\bar{a}\cdot\bar{a}=a_1^2+a_2^2+\ .\ .\ .\ +a_n^2.$$

რადგან $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვები პირობის თანახმად, ნამდვილი რიცხვებია, ამიტომ გამოსახულება (78) არ შეიძლება უარყოფითი იყოს. ამ გამოსახულებიდან კვადრატული ფესვის დადებით მნიშვნელობას ეწოდება $\bar{a}$ ვექტორის სიგრძე:

$$\bar{a}=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}.$$

ამგვარად,

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2.$$

(78)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ a ვექტორის სიგრძე ეტოლება ნულს მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მისი ყველა კოორდინატი ნულის ტოლია.

ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ყოველი $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \ldots, \bar{i}_n$ ვექტორის სიგრძე ერთეულის ტოლია.

თუ ორი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

(79) $$\bar{a}\ \bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ .\ .\ .\ +a_nb_n=0,$$

მაშინ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებს ორთოგონალური ეწოდება.

ასე, მაგალითად, $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \ldots, \bar{i}_n$ ვექტორები წყვილ-წყვილად ორთოგონალურია.

დავუშვათ, რომ გვაქვს სისტემა $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(1)}, \ldots, \bar{a}^{(r)}$ ვექტორებისა და მასთან ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი ამ ვექტორთაგანი ორთოგონალურია $\bar{b}$ ვექტორისადმი:

$$\bar{a}^{(1)}\bar{b}=0,\ \bar{a}^{(2)}\bar{b}=0,\ \ldots,\ \bar{a}^{(r)}\bar{b}=0;$$

მაშინ შემდეგი სახის ყოველი ვექტორი

$$\lambda_1\overline{a^{(1)}}+\lambda_2\overline{a^{(2)}}+\ldots+\lambda_r\overline{a^{(r)}}$$

აგრეთვე ორთოგონალურია $\overline{b}$ სადმი, რადგანაც

$$(\lambda\overline{a}^{(1)}+\ldots+\lambda\overline{a^{(r)}}\cdot\overline{b}=\lambda\overline{a^{(1)}}b+\ldots+\lambda\overline{a^{(r)}}b=0.$$

ახლა განვიხილოთ ვექტორთა ორი სისტემა

(A) $$\overline{a^{(1)}}, \overline{a^{(2)}}, \ldots, \overline{a^{(r)}},$$

(B) $$\overline{b^{(1)}}, \overline{b^{(2)}}, \ldots, \overline{b^{(s)}}.$$

დავუშვათ, რომ (A) ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია ისევე როგორც (B) ვექტორები.

თუ ამასთან (B) სისტემის ყოველი ვექტორი ორთოგონალურია ყოველი (A) ვექტორისა, მაშინ ვექტორები

(80) $$\overline{a}^{(1)}, \ldots, \overline{a^{(r)}}, \overline{b^{(1)}}, \ldots, \overline{b^{(s)}}$$

ერთად განხილული, აგრეთვე წრფივად დამოუკიდებელი იქნება.

დავამტკიცოთ ეს წინააღმდეგობის დაშვების მეთოდით. დავუშვათ, რომ (80) ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვები

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \; \beta_1, \ldots, \beta_s,$$

რომელთათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

(81) $$\alpha_1\overline{a^{(1)}}+\ldots+\alpha_r\overline{a^{(r)}}+\beta_1\overline{b}^{(1)}+\ldots+\beta_s\overline{b^{(s)}}=0,$$

ამასთან, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ რიცხვებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. თუ დავუშვებთ

$$\overline{a}=\alpha_1\overline{a}^{(1)}+\ldots+\alpha_r\overline{a}^{(r)},\quad \overline{b}=\beta_1\overline{b}^{(1)}+\ldots+\beta_s\overline{b}^{(s)},$$

მაშინ ტოლობა (81) მიიღებს ისეთ სახეს:

(81′) $$\overline{a}+\overline{b}=0.$$

მეორეს მხრით, ჩვენ დავუშვით, რომ ყოველი ვექტორი (A)-დან ორთოგონალურია ყოველი ვექტორისა (B)-დან აღებული. წინანდელი შენიშვნის თანახმად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\overline{a}=\alpha_1\overline{a}^{(1)}+\ldots+\alpha_r\overline{a}^{(r)}$ ვექტორი ორთოგონალურია ყოველი $\overline{b}^{(1)}, \ldots, \overline{b}^{(s)}$ ვექტორისადმი.

მაშასადამე, $\bar{b}=\beta_1\bar{b}^{(1)}+\ .\ .\ +\beta_s\bar{b}^{(s)}$ ვექტორისადმიც; ამგვარად,

(82) $$\bar{a}\cdot\bar{b}=0.$$

ახლა (81') ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ სკალარულად $\bar{a}$-ზე:

$$\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}=0.$$

ანუ, (82)-ის ძალით,

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=0.$$

მაშასადამე, $\bar{a}$ ვექტორი უნდა ეტოლებოდეს ნულს, ე. ი.

$$\alpha_1\bar{a}^{(1)}+\ .\ .\ .\ +\alpha_r\bar{a}^{(r)}=0.$$

$\alpha_1,\ .\ .\ ,\alpha_2$ რიცხვებს შორის რომ ერთი მაინც იყოს განსხვავებული ნულისაგან, მაშინ $\bar{a}^{(1)},\ .\ .\ .\ ,\bar{a}^{(r)}$ ვექტორები იქნებოდა წრფივად დამოკიდებული. მაშასადამე, უნდა იყოს

$$\alpha_1=\ .\ .\ .\ =\alpha_r=0.$$

მაგრამ მაშინ, (81)-ის ძალით, გამოვიდოდა, რომ $\bar{b}^{(1)}\ .\ .\ .\ \bar{b}^{(s)}$ ვექტორები არიან წრფივად დამოკიდებული, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას. ჩვენი დებულება ამგვარად, დამტკიცებულია.

მიღებული შედეგი შეიძლება შევავსოთ შემდეგი შენიშვნით: რადგან წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი n-ის ტოლია, ამიტომ

$$r+s\leqslant n$$

ანუ

$$s\leqslant n-r.$$

ამგვარად, წრფივად დამოუკიდებელ $\bar{b}^{(1)},\ .\ .\ .\ ,\bar{b}^{(s)}$ ვექტორთა რიცხვი, რომლებიც ორთოგონალურია ყოველი $\bar{a}^{(1)},\ .\ .\ .\ ,\bar{a}^{(r)}$ ვექტორისადმი, არ აღემატება $n-r$-ს. ამასთან დაშვებულია, რომ თვით $\bar{a}^{(1)},\ .\ .\ .\ ,\bar{a}^{(r)}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

ასე, მაგალითად, თუ $n=3$, მაშინ ყველა ვექტორი, რომლებიც მართობია მოცემული $\bar{a}$ ვექტორისა, კომპლანარულია (ე. ი. ერთიდაიმავე სიბრტყის პარალელურია). მათ შორის შეიძლება ავირჩიოთ მხოლოდ ორი წრფივად დამოუკიდებელი.

8. ახლა გავარჩიოთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა.

$$
(83)\qquad
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0.
\end{aligned}
$$

თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობათა სისტემა აკმაყოფილებს (83) სისტემის ყოველ განტოლებას, მაშინ ამბობენ, რომ ვექტორი

$$\bar{r}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

წარმოადგენს განტოლებათა (83) სისტემის ამოხსნას. თუ დავუშვებთ

$$
(84)\qquad
\begin{aligned}
&\bar{a}^{(1)}=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\\
&\bar{a}^{(2)}=(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\bar{a}^{(m)}=(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}),
\end{aligned}
$$

მაშინ განტოლებანი (83) შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით

$$(83').\qquad \bar{a}^{(1)}\cdot\bar{r}=0,\ \bar{a}^{(2)}\cdot\bar{r}=0, \ldots, \bar{a}^{(m)}\cdot\bar{r}=0.$$

ეს განტოლებანი გამოსახავს, რომ $\bar{r}$ ვექტორი ორთოგონალური უნდა იყოს (84) სისტემის ყოველი ვექტორისა. ამგვარად, (83) განტოლებათა [ან (83')] **სისტემის ამოხსნა ნიშნავს, განისაზღვროს ყველა $\bar{r}$ ვექტორი, რომლებიც ორთოგონალურია ყოველი $\bar{a}^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ ვექტორისადმი.**

ჯერ დავუშვათ, რომ $\bar{a}^{(1)}, \ldots, \bar{a}^{(m)}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ე. ი.

$$
(85)\qquad
\begin{Vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{Vmatrix}
$$

მატრიცის რანგი: ეტოლება m-ს (მაშასადამე, $m \leqslant n$).

შევნიშნოთ, რომ ნულ-ვექტორი $(0, 0, \ldots, 0)$ ყოველთვის აკმაყოფილებს (83) განტოლებებს (ნულოვანი ამოხსნა). ამ ამოხსნას გამოვრიცხავთ განხილვიდან. თუ $m=n$, მაშინ არანულოვანი ამოხსნები არ არსებობს (§ 1, პუნქ. 7).

დავუშვათ, რომ $m<n$. წინა პუნქტის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ იმ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა რიცხვი, რომლებიც ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი ა ყოველი $\bar{a}^{(1)}, \ldots, \bar{a}^{(m)}$ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ა დ მ ი, არ აღემატება $n-m-1$-ს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სისტემის (83) ან (83') წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნათა რიცხვი არ აღემატება $n-m-1$-ს. დავამტკიცოთ რომ ეს რიცხვი ზუსტად ეტოლება $n-m-1$-ს.

რადგანაც (85) მატრიცის რანგი $m-n$-ის ტოლია, ამიტომ სისტემა (83) არ შეიძლება ამოიხსნას § 1-ის მე-3 პუნქტში აღნიშნული ხერხით. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია. მაშინ შეიძლება მარჯვნით გადავიტანოთ წევრები, რომლებიც შეიცავს $x_{m+1}, \ldots, x_n$-ს და განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

უცნობების მიმართ. ამასთან, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ მნიშვნელობანი სავსებით ნებსითი რჩება.

ამგვარად, შეგვიძლია მივიღოთ უამრავი ვექტორი, რომლებიც აკმაყოფილებენ (83) განტოლებებს. ძნელი არაა იმის ჩვენება, რომ ამ ვექტორებს შორის ყოველთვის შეიძლება ამოვარჩიოთ $n-m$ წრფივად დამოუკიდებელი.

მართლაც, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ მნიშვნელობანი ჩვენს განკარგულებაში იმყოფება. თუ დავუშვებთ, მაგალითად,

$$x_{m+1}=1, \; x_{m+2}=0, \ldots, x_n=0,$$

მაშინ $x_1, x_2, \ldots, x_m$-სათვის ჩვენ მივიღებთ სავსებით განსაზღვრულ მნიშვნელობებს. ეს მნიშვნელობანი აღვნიშნოთ $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}$-ით.

მაშასადამე, მნიშვნელობათა სისტემა

$$x_1 = x_1^{(1)}, \ . \ . \ . \ , x_m = x_m^{(1)}, \ x_{m+1} = 1, \ x_{m+2} = 0, \ . \ . \ . \ , x_n = 0$$

აკმაყოფილებს ყველა (83) განტოლებას; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ვექტორი

$$\overline{r}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ . \ . \ . \ , x_m^{(1)}, \ 1, \ 0, \ 0)$$

წარმოადგენს (83) განტოლებათა ამოხსნას.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$x_{m+1} = 0, \ x_{m+2} = 1, \ x_{m+3} = 0, \ . \ . \ . \ , x_n = 0;$$

ვთქვათ, $x_1, \ x_2, \ . \ . \ . \ , x_m$-ის შესაბამი მნიშვნელობანი არის

$$x_1^{(2)}, \ . \ . \ . \ , x_m^{(2)}.$$

მაშინ ვექტორი

$$\overline{r}^{(2)} = (x_1^{(2)}, \ . \ . \ . \ , x_m^{(2)}, \ 0, \ 1, \ 0, \ . \ . \ . \ , 0)$$

აგრეთვე არის (83) განტოლებათა ამოხსნა.

ამგვარადვე შეიძლება დავუშვათ

$$x_{m+1} = \ldots = x_{m+k-1} = 0, \ x_{m+k} = 1, \ x_{m+k+1} = \ldots = x_n = 0.$$

თუ $x_1, \ x_2, \ . \ . \ . \ , x_m$ მნიშვნელობათა შესაბამ მნიშვნელობებს აღვნიშნავთ $x_1^{(k)}, \ x_2^{(k)}, \ . \ . \ . \ , x_m^{(k)}$, მაშინ ვექტორი

$$\overline{r}(k) = (x_1^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)}, \ 0, \ldots, 0, \ 1, \ 0, \ldots, 0)$$

იქნება (83) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.

თუ k-ს მივცემთ მნიშვნელობებს $1, \ 2, \ . \ . \ . \ , n-m$, მაშინ მივიღებთ $n-m$ ვექტორს:

$$\overline{r}^{(1)}, \overline{r}^{(2)}, \ . \ . \ . \ , \overline{r}^{(n-m)}, \tag{86}$$

რომლებიც აკმაყოფილებს განტოლებებს (83) ან (83'). ამ ვექტორთა კოორდინატები ჰქმნიან მატრიცს:

$$
(87)\qquad
\begin{array}{c}
\phantom{x^{(1)}_1\; x^{(1)}_2 \ldots x^{(1)}_m \ldots} \overbrace{}^{n-m} \\
\begin{pmatrix}
x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_m^{(1)} & \ldots 1 & 0 & \ldots & 0 \\
x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_m^{(2)} & \ldots 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_1^{(n-m)} & x_2^{(n-m)} & \ldots & x_m^{(n-m)} & \ldots 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

თუ აქ გამოვყოფთ უკანასკნელ $n-m$ სვეტს, მივიღებთ კვადრატულ სქემას, რომლიდანაც შეიძლება შევადგინოთ $n-m$ რიგის დეტერმინანტი

$$
\begin{vmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & \ldots & 1
\end{vmatrix} = 1.
$$

რადგანაც ეს დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ (87) მატრიცის რანგი $n-m$-ის ტოლია. მაშასადამე, (86) ვექტორები არიან **წრფივად დამოუკიდებელი**.

ყოველი $\bar{r}^{(1)}, \ldots, \bar{r}^{(n-m)}$ ვექტორთაგანი **წარმოადგენს** (83') **სისტემის ამოხსნას**, ე. ი. ყოველი მათგანი ორთოგონალურია ყოველი $\bar{a}^{(1)}, \ldots, \bar{a}^{(m)}$ ვექტორისადმი.

მე-7 პუნქტში ნათქვამის მიხედვით ყოველი შემდეგი სახის ვექტორი

$$
(88)\qquad \lambda_1\bar{r}^{(1)} + \ldots + \lambda_{n-m}\bar{r}^{(n-m)},
$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-m}$ არიან ნებსითი რიცხვები, აგრეთვე ორთოგონალურია ყოველი $\bar{a}^{(1)}, \ldots, \bar{a}^{(m)}$ ვექტორისადმი; მაშასადამე, (88) ვექტორიც აგრეთვე აკმაყოფილებს (83) განტოლებებს.

ახლა განვიხილოთ ნებსითი ვექტორი $\bar{r}$, რომელიც აკმაყოფილებს (83) განტოლებებს. რადგან (83) სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნათა მაქსიმალური რიცხვი ეტოლება $n-m$-ს, ამიტომ $\bar{r}, \bar{r}^{(1)}, \ldots, \bar{r}^{(n-m)}$ ვექტორები **წრფივად დამოკიდებული უნდა იყოს**; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არსებობს ისეთი $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{n-m}$ რიცხვები, რომლებისათვისაც

$$
(89)\qquad \mu\bar{r} + \mu_1\bar{r}^{(1)} + \ldots \mu_{n-m}\bar{r}^{(n-m)} = 0,
$$

ამასთან, μ, $\mu_1, \ldots, \mu_{n-m}$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებული უნდა იყოს ნულისაგან. μ კოეფიციენტი რომ ეტოლებოდეს ნულს, მაშინ გამოვიდოდა, რომ $\bar{r}^{(1)}, \ldots, \bar{r}^{(n-m)}$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. მაშასადამე, $\mu \neq 0$ და (89) შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ

$$\bar{r} = -\frac{\mu_1}{\mu}\bar{r}^{(1)} - \ldots - \frac{\mu_{n-m}}{\mu}\bar{r}^{(n-m)}. \tag{90}$$

თუ აღვნიშნავთ

$$-\frac{\mu_i}{\mu} = \lambda_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(90) ტოლობას გადავწერთ ისეთი სახით:

$$\bar{r} = \lambda_1\bar{r}^{(1)} + \lambda_2\bar{r}^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-m}\bar{r}^{(n-m)}. \tag{90'}$$

ამგვარად, (83) **სისტემის ყოველი $\bar{r}$ ამოხსნა წრფივად გამოიხატება $n-m$ წრფივად დამოუკიდებელ $\bar{r}^{(1)}, \ldots, \bar{r}^{(n-m)}$ ამოხსნათა საშუალებით.**

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ (85) მატრიცის რანგი m-ის ტოლია.

ახლა დავუშვათ, რომ (85) მატრიცის რანგი ეტოლება p-ს, სადაც $p<m$; მაშინ წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი $\bar{a}^{(1)}, \ldots, \bar{a}^{(n)}$ ვექტორებს შორის ეტოლება p-ს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, იმ წრფივ ფორმებს შორის, რომლებიც შეადგენენ (83) ტოლობათა მარცხენა ნაწილებს, იქნება p წრფივად დამოუკიდებელი. (83) სისტემის ამოხსნა ამ შემთხვევაში დაიყვანება იმ p განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე, რომელსაც აქვს $n-p$ წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნები:

სავარჯიშო

1. განსაზღვრეთ შემდეგ განტოლებათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნები.

$$\begin{aligned} 2x + y + z + 3t &= 0, \\ 3x + 2y + 2z + 5t &= 0. \end{aligned}$$

2. განსაზღვრეთ შემდეგ განტოლებათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნები:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0. \end{aligned}$$

9. ახლა დავუშვათ, რომ მოცემულია არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა.

$$
(91)\qquad
\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ .\ .\ .+a_{1n}x_n=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ .\ .\ .+a_{2n}x_n=b_2,\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ .\ .\ .+a_{mn}x_n=b_m.
\end{array}
$$

ვიგულისხმებთ რა

$$
\{a_{i1}, a_{i1}, \ .\ .\ .\ .\ , a_{in}\}=\bar{a}^{(i)}, \qquad (i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,m)
$$
$$
\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ .\ .\ .\ ,x_n\}=\bar{r},
$$

ამ სისტემას გადავწერთ ასეთი სახით

$$
(91')\qquad \bar{a}^{(1)}\bar{r}=b_1,\ \bar{a}^{(2)}\bar{r}=b_2\ .\ .\ .\ ,\ \bar{a}^{(m)}\bar{r}=b_m.
$$

(91) სისტემასთან ერთად განვიხილოთ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა, რომლებსაც მივიღებთ (91)-დან თავისუფალი წევრების ნულებად შეცვლით:

$$
(92)\qquad
\begin{array}{l}
a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ .\ .\ .+a_{1n}X_n=0,\\
a_{21}X_1+a_{22}X_2+\ .\ .\ .+a_{2n}X_n=0,\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+\ .\ .\ .+a_{mn}X_n=0.
\end{array}
$$

განტოლებათა ეს სისტემა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$
(92')\qquad \bar{a}^{(1)}\bar{R}=0,\ \bar{a}^{(2)}\bar{R}=0,\ .\ .\ .\ ,\ \bar{a}^{(m)}\bar{R}=0,
$$

სადაც

$$
\bar{R}=(X_1,\ X_2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ X_n).
$$

დავუშვათ, რომ (91) განტოლებათა სისტემა ამოხსნადია, და ვექტორი

$$
\bar{r}^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ .\ .\ .\ x_n^{(0)})
$$

წარმოადგენს ერთ-ერთ მის ამოხსნას:

$$
(93)\qquad \bar{a}^{(1)}\bar{r}^{(0)}=b_1,\ \bar{a}^{(2)}\bar{r}\ =b_2,\ .\ .\ .,\ \bar{a}^{(m)}\bar{r}^{(0)}=b_m.
$$

მეორეს მხრით, თუ $\bar{R}$ ვექტორი წარმოადგენს ერთგვაროვან განტოლებათა (92) სისტემის ნებისმიერ ამოხსნას, მაშინ, როგორც დავინახეთ,

$$(94)\qquad \bar{a}^{(1)}\bar{R}=0,\ \bar{a}^{(2)}\bar{R}=0,\ .\ .\ .\ ,\ \bar{a}^{(m)}\bar{R}=0.$$

თუ შევკრებთ წევრობრივ ყოველს (93) განტოლებიდან შესაბამ განტოლებასთან (94)-დან, ვიპოვით:

$$\bar{a}^{(1)}\cdot(\bar{r}^{(0)}+\bar{R})=b_1\quad \bar{a}^{(2)}\cdot(\bar{r}^{(0)}+\bar{R})=b_2,\ .\ .\ .\ ,\ \bar{a}^{(m)}(\bar{r}^{(0)}+\bar{R})=b_m.$$

ეს თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ ვექტორი

$$(95)\qquad \bar{r}=\bar{r}^{(0)}+\bar{R}$$

აგრეთვე წარმოადგენს (91′) განტოლებათა სისტემის ამოხსნას.

ამგვარად, თუ განტოლებათა (91) სისტემის განსაზღვრულ ამოხსნას შევკრებთ შესაბამ ერთგვაროვან განტოლებათა (92) სისტემის ნებსით ამოხსნასთან, კვლავ მივიღებთ (91) სისტემის ამოხსნას.

შებრუნებით, ყოველი $\bar{r}$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებათა (91′) სისტემას, შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ჯამი იმავე სისტემის განსაზღვრული r ამოხსნისა და ერთგვაროვანი განტოლებათა (91′) სისტემის გარკვეული ამოხსნისა.

მართლაც, თუ (91′) განტოლებებს გამოვაკლებთ შესაბამ (93) განტოლებებს, მოვნახავთ:

$$\bar{a}^{(1)}(\bar{r}-\bar{r}^{(0)})=0,\ \bar{a}^{(2)}(\bar{r}-\bar{r}^{(0)})=0,\ .\ .\ .\ ,\ \bar{a}^{(m)}(\bar{r}-\bar{r}^{(0)})=0.$$

ეს თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ $\bar{r}-\bar{r}^{(0)}$ ვექტორი აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებათა (92) სისტემას; თუ დავუშვებთ

$$\bar{r}-\bar{r}^{(0)}=\bar{R},$$

გვექნება

$$\bar{r}=\bar{r}^{(0)}+\bar{R}.$$

§ 3. წრფივი გარდაქმნები და მატრიცები

1. რომ გავარკვიოთ წრფივი გარდაქმნის ცნება, დავიწყოთ მაგალითიდან, რომელიც მკითხველისათვის ცნობილია ანალიზური გეომეტრიიდან. თუ სიბრტყეზე გადავდივართ მართკუთხა ერთ XOY

კოორდინატთა სისტემიდან მეორე $X'O'Y'$ სისტემაზე, მაშინ x და y კოორდინატები გამოისახებიან x' და y'-ით შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b.$$

კოორდინატთა ეს გარდაქმნა იქნება წრფივი, რადგანაც x და y ცვლადები წარმოადგენენ x და y-ის წრფივ ფუნქციებს, მაგრამ ჩვენ აქ გვაქვს წრფივი გარდაქმნის მხოლოდ კერძო შემთხვევა. წრფივი გარდაქმნის ზოგადი სახე, რომელიც გამოხატავს x და y ცვლადებს x' და y'-ის საშუალებით, იქნება

$$x = a_1x' + b_1y' + c_1,$$
$$y = a_2x' + b_2y' + c_2,$$

სადაც a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 არიან ნებისმიერი მუდმივი კოეფიციენტები; თუ $c_1 = c_2 = 0$, მაშინ საქმე გვაქვს ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ წრფივ გადაქმნასთან:

$$x = a_1x' + b_1y', \quad y = a_2x' + b_2y'. \tag{96}$$

დაწვრილებით შევჩერდეთ ასეთ გარდაქმნათა თვისებებზე.

(96) გარდაქმნათა კოეფიციენტები შეადგენენ კვადრატულ მატრიცს

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{I}$$

ეს მატრიცი სავსებით განსაზღვრავს მოცემულ გარდაქმნას. (96) გარდაქმნასთან ერთად განვიხილოთ გარდაქმნა

$$x' = c_1x'' + d_1y'', \quad y' = c_2x'' + d_2y'', \tag{93}$$

რომელიც გამოსახავს x', y' ცვლადებს x'', y''-ის საშუალებით; ამ გარდაქმნის მატრიცი იქნება

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}. \tag{II}$$

ახლა დავუშვათ, რომ საჭიროა x, y ცვლადებიდან x'', y''-ზე. გადასვლა. ცხადია, ამისათვის საკმარისია შევასრულოთ *თანმიმდევრობით* (96) და (97) გარდაქმნები. (96)-ში x' და y'-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მათ გამოსახულებებს (97), მივიღებთ:

$$x=(a_1c_1+b_1c_2)x''+(a_1d_1+b_1d_2)y'', \tag{98}$$
$$y=(a_2c_1+b_2c_2)x''+(a_2d_1+b_2d_2)y''.$$

შესაბამისი მატრიცი იქნება

$$\begin{pmatrix} a_1c_1+b_1c_2 & a_1d_1+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2c_2 & a_2d_1+b_2d_2 \end{pmatrix}. \tag{III}$$

მაშასადამე, **ორი (96) და (97) წრფივი გარდაქმნათა თანმიმდევრობითი შესრულება იგივეა, რაც ერთი წრფივი (98) გარდაქმნის შესრულება.**

ამ აზრით (98) გარდაქმნას შეიძლება ვუწოდოთ *ნამრავლი* (90) გარდაქმნისა (97) გარდაქმნაზე.

ამგვარადვე (III) მატრიცს, რომელიც შეესაბამება (98) გარდაქმნას, ეწოდება ნამრავლი (I) მატრიცისა (II) მატრიცზე:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1+b_1c_2 & a_1d_1+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2c_2 & a_2d_1+b_2d_2 \end{pmatrix}.$$

ძნელი არაა იმ კანონის აღმოჩენა, რომლის მიხედვითაც ხდება „მატრიცი—ნამრავლის“ შედგენა. რომ მივიღოთ ამ მატრიცის პირველი სვეტის და პირველი სტრიქონის ელემენტი, ე. ი.

$$a_1c_1+b_1c_2,$$

საკმარისია (I) მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები (ე. ი. a_1, b_1) გავამრავლოთ შესაბამისად (II) მატრიცის პირველი სვეტის ელემენტებზე (ე. ი. c_1 და c_2-ზე) და მიღებული ნამრავლნი შევკრიბოთ. იმ ელემენტს, რომელიც მდებარეობს მატრიცი — ნამრავლის i-ურ სტრიქონის და k-ურ სვეტის გადაკვეთაში, ამგვარადვე მივიღებთ (I) მატრიცის i-ურ სტრიქონიდან და (II) მატრიცის k-ურ სვეტიდან. **ამიტომ ამბობენ, რომ (III) მატრიცი მიიღება (I) მატრიცის სტრიქონების გამრავლებით (II) მატრიცის სვეტებზე.**

მაგალითი. მოცემულია წრფივი გარდაქმნები

$$x = 2x' + y', \qquad x' = x'' - 3y'',$$
$$y = 3x' + 2y'. \qquad y' = 2x'' - 4y''.$$

ამოვწეროთ შესაბამი მატრიცები:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

შევადგენთ რა ამ მატრიცების ნამრავლს, მივიღებთ:

(99) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}.$$

მიღებული მატრიცი შეესაბამება გარდაქმნას:

$$x = 4x'' - 10y'',$$
$$y = 7x'' - 17y''.$$

ძნელი არაა იმის შემოწმება, რომ იგივე გარდაქმნა შეიძლებოდა მიგვეღო x' და y' მნიშვნელობათა ჩასმით გამოსახულებებში x და y-სათვის.

სავარჯიშო.

1. მოცემულია ორი წრფივი გარდაქმნა:

$$x = 3x' - 2y', \qquad x' = 5x'' + y'',$$
$$y = 2x' + 4y'. \qquad y' = 2x'' - 3y''.$$

იპოვეთ გარდაქმნა, რომელიც გამოსახავს x და y-ს x'' და y''-ის საშუალებით:

a) x' და y' მნიშვნელობათა უშუალოდ ჩასმით გამოსახულებებში x და y-სათვის;

b) მატრიცების გადამრავლების გზით.

2. იგივე საკითხი შემდეგი გარდაქმნებისათვის:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \qquad x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta,$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi; \qquad y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta.$$

2. კვლავ დავუბრუნდეთ წინა პუნქტის (99) ტოლობას. თუ შევადგენთ სხვა რიგით აღებულ იმავე მატრიცების ნამრავლს, მაშინ მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -15 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

ჩვენ მივიღეთ ნამრავლი, განსხვავებული (99)-დან. მატრიცების ნამრავლი **დამოკიდებულია თანამამრავლთა რიგზე.**

საზოგადოდ დავუშვათ, რომ მოცემულია ორი მატრიცი

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

შევადგენთ რა ამ მატრიცების AB ნამრავლს, ვიპოვით:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix};$$

იმავე მატრიცების BA ნამრავლი იქნება:

$$BA=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

ამგვარად, ზოგად შემთხვევაში $AB \neq BA$. მატრიცების ნამრავლს არა აქვს კომუტატიურობის თვისება*.

პირიქით ასოციატივობის თვისებას ყოველთვის აქვს ადგილი მატრიცების გადამრავლებისას. ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ შემდეგნაირად. განვიხილოთ სამი თანამომდევნო გარდაქმნა:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y'; \end{cases}$$

(100)
$$\begin{cases} x' = b_{11}x'' + b_{12}y'', \\ y' = b_{21}x'' + b_{22}y''; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = c_{11}x''' + c_{12}y''', \\ y'' = c_{21}x''' + c_{22}y'''. \end{cases}$$

შესაბამი მატრიცები იქნება:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

ცალკე შემთხვევებში ეს თვისება შეიძლება დარჩეს. ასე მაგალითად:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 37 & 18 \\ 36 & 19 \end{pmatrix}$$

და

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 37 & 18 \\ 36 & 19 \end{pmatrix}.$$

ისეთ ორ A და B მატრიცს, რომლებისთვისაც $AB = BA$ ეწოდება კომუტატიური.

ყოველ გარდაქმნათაგანს (100)-დან აღვნიშნავთ იმავე ასოთი, რომლითაც აღნიშნულია შესაბამი მატრიცი.

თუ საჭიროა x, y ცვლადებიდან x''', y'''-ზე გადასვლა, ეს შეიძლება მოხდეს ორი გზით:

a. ჯერ x, y-დან x'', y''-ზე გადავდივართ AB გარდაქმნის საშუალებით, შემდეგ x'', y''-დან x''', y'''-ზე გადავდივართ C გარდაქმნის საშუალებით. ამგვარად, x, y-დან x''', y'''-ზე გადასვლა ხორციელდება $(AB)C$ გარდაქმნის საშუალებით.

სქემატურად ეს ამგვარად შეიძლება წარმოვიდგინოთ:

$$(x, y) \xrightarrow{AB} (x'', y'') \xrightarrow{C} (x''', y''')$$

$$(x, y) \xrightarrow{(AB)C} (x''', y''')$$

b. ჯერ გადავდივართ x, y-დან x', y'-ზე (გარდაქმნა A), ხოლო შემდეგ x', y'-ს გამოვსახავთ x''', y'''-ს საშუალებით, რისთვისაც უნდა შევასრულოთ BC გარდაქმნა. ამ შემთხვევაში გადასვლა x, y-დან x', y-ზე ხორციელდება $A(BC)$ გარდაქმნის საშუალებით. სქემატურად:

$$(x, y) \xrightarrow{A} (x', y') \xrightarrow{BC} (x''', y''')$$

$$(x, y) \xrightarrow{A(BC)} (x''', y''').$$

რადგანაც ორთავე „*a*" და „*b*" ხერხმა უნდა მოგვცეს ერთი და იგივე შედეგი, ამიტომ

$$(AB)C = A(BC).$$

სავარჯიშო.

შეამოწმეთ $(AB)\,C = A(BC)$ თანაფარდობა უშუალო გამოანგარიშების გზით.

3. კვლავ განვიხილოთ ორი მატრიცი

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

და მათი ნამრავლი

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{pmatrix}.$$

ყოველი A, B, AB მატრიცთაგანი ჰქმნის მეორე რიგის დეტერმინანტს. ეს დეტერმინანტები აღვნიშნოთ შესაბამისად D_A, D_B, D_{AB}

და შევეცადოთ გამოვარკვიოთ თუ როგორ არიან ისინი დაკავშირებული ერთმანეთთან. დავიწყოთ დეტერმინანტით, რომელიც შეესაბამება AB მატრიცს:

$$D_{AB}=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

გამოვიყენებთ რა VII თავის მე-6 პარაგრაფის მე-3 პუნქტის მე-2 თვისებას, ჩვენ ამ დეტერმინანტს წარმოვიდგენთ ჯამის სახით

$$D_{AB}=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

ამ ჯამში, როგორც ვხედავთ, პირველი და უკანასკნელი შესაკრები იქცევა ნულად. მაშასადამე,

$$D_{AB}=b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

თუ მეორე წევრში გადავსვამთ სვეტებს, მივიღებთ.

$$D_{AB}=b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}-b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

ანუ

$$D_{AB}=D_A\cdot D_B.$$

ამგვარად, AB „მატრიცი — ნამრავლის“ დეტერმინანტი ეტოლება A მატრიცის დეტერმინანტისა და B მატრიცის დეტერმინანტის ნამრავლს.

ასე, მაგალითად, შემდეგი მატრიცების ნამრავლი

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

როგორც დავინახეთ, იქნება

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -17 \end{pmatrix}.$$

ახლა გამოვიანგარიშოთ შესაბამი დეტერმინანტები:

$$D_A=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1, \; D_B=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=2; \quad D_{AB}=\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 7 & -17 \end{vmatrix}=2,$$

ე. ი. $D_{AB}=D_A \cdot D_B$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: მკაფიოდ უნდა განვასხვავოთ დეტერმინანტების ნამრავლი მატრიცების ნამრავლისაგან. AB **მატრიცი — ნამრავლი,** განსაზღვრის თანახმად, მივიღებთ A მატრიცის სტრიქონების გამრავლებით B მატრიცის ს ვ ე ტ ე ბ ზ ე. მეორეს მხრით, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ A მატრიცის დეტერმინანტის ნამრავლი B მატრიცის დეტერმინანტზე ეტოლება AB მატრიცის დეტერმინანტს:

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

A და B მატრიცებთან ერთად ახლა განვიხილოთ მატრიცები:

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ და } B'=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

რომლებსაც მივიღებთ A და B-დან ს ტ რ ი ქ ო ნ ე ბ ი ს ნაცვლად ს ვ ე ტ ე ბ ი ს აღებით. A' მატრიცის ნამრავლი B' მატრიცზე იქნება:

$$A'B'=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21} & a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

$A'B'$ მატრიცი, საერთოდ რომ ვთქვათ, გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი ა AB მატრიცისაგან. მაგრამ ამ მატრიცებიდან შედგენილი **დეტერმინანტები ერთმანეთის** ტოლია. მართლაც, $A'B'$ მატრიცებიდან შედ-

გენილი $D_{A'B'}$ დეტერმინანტი ეტოლება A' და D' მატრიცებისაგან შედგენილ $D_{A'}$ და $D_{B'}$ დეტერმინანტთა ნამრავლს:

$$D_{A'B'}=D_{A'}\cdot D_{B'};$$

მაგრამ

$$D_{A'}=D_{A},\ D_{B'}=D_{B}.$$

მაშასადამე,

$$D_{A'B'}=D_{A}\cdot D_{B}=D_{AB}.$$

უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$D_{A}D_{B}=D_{A'B'}$$

ან

2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}, & a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12}, & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

ეს თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ D_A და D_B დეტერმინანტების ნამრავლი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი დეტერმინანტის სახით:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix},$$

რომელსაც მივიღებთ D_A დეტერმინანტის სვეტების გამრავლებით D_B დეტერმინანტის სტრიქონებზე. თუ $A'B'$ მატრიცის მაგივრად განვიხილავთ მატრიცს

$$AB'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

მაშინ მივიღებთ, ისე, როგორც ზევით,

$$D_{A}D_{B}=D_{AB'}$$

ან

3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

დეტერმინანტს მარჯვენა ნაწილში მივიღებთ D_A დეტერმინანტის სტრიქონების გამრავლებით D_B დეტერმინანტის სტრიქონებზე.

დასასრულს, თუ განვიხილავთ, მატრიცს

$$A'B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{22} & a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

მაშინ მივიღებთ თანაფარდობას

$$D_AD_B=D_{A'B}$$

ან

4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

დეტერმინანტი მარჯვენა ნაწილში შეიძლება მივიღოთ D_A სვეტების გამრავლებით D_B სვეტებზე.

1, 2, 3, 4 თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ D_A და D_B დეტერმინანტების ნამრავლი შეიძლება შევადგინოთ ოთხი სხვადასხვა ხერხით. სახელდობრ, შეიძლება გავამრავლოთ:

1) D_A დეტერმინანტის სტრიქონები D_B დეტერმინანტის სვეტებზე,
2) D_A დეტერმინანტის სვეტები D_B დეტერმინანტის სტრიქონებზე,
3) D_A დეტერმინანტის სტრიქონები D_B დეტერმინანტის სტრიქონებზე,
4) D_A დეტერმინანტის სვეტები D_B დეტერმინანტის სვეტებზე.

მაგალითის სახით ყველა აღნიშნული ხერხით შევადგინოთ შემდეგი ორი დეტერმინანტის ნამრავლი:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=5,\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2.$$

1. (სტრიქონები სვეტებზე):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 21 & 16 \\ 23 & 18 \end{vmatrix}=10.$$

2. (სვეტები სტრიქონებზე):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 14 \\ 17 & 31 \end{vmatrix} = 10.$$

3. (სტრიქონები სტრიქონებზე):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 22 \\ 11 & 21 \end{vmatrix} = 10.$$

4. (სვეტები სვეტებზე):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 8 \\ 29 & 22 \end{vmatrix} = 10.$$

სავარჯიშო.

1 შეადგინეთ სხვადასხვა ხერხით შემდეგი ორი დეტერმინანტის ნამრავლი:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{vmatrix}.$$

2. იგივე საკითხი შემდეგი დეტერმინანტებისათვის:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix}.$$

3. დაამტკიცეთ, რომ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2 & x_1+x_2 \\ x_1+x_2 & x_1^2+x_2^2 \end{vmatrix}.$$

4. წრფივ გარდაქმნათა ის თვისებანი, რომლებსაც გავეცანით 1—2 პუნქტებში, ადვილად განზოგადდება ცვლადთა ნებისმიერ რიცხვის შემთხვევისათვის. დავუშვათ, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები წარმოადგენენ $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ის წრფივ ერთგვაროვან ფუნქციებს:

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = \sum_{h=1}^{n} a_{1h}\, y_h,$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = \sum_{h=1}^{n} a_{2h}\, y_h,$$

$$(101) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = \sum_{h=1}^{n} a_{nh}\, y_h.$$

აქ ჩვენ გვაქვს n ცვლადის წრფივი გარდაქმნა. ამ გარდაქმნას შეესაბამება მატრიცი

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თვით გარდაქმნას შემდეგში აღვნიშნავთ იმავე ასოთი, რაც შესაბამ A მატრიცს; A გარდაქმნასთან ერთად განვიხილავთ გარდაქმნას, რომელიც გამოსახავს $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ს $z_1, z_2, \ldots, z_n$-ის საშუალებით:

$$(102) \qquad \begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1n}z_n, \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n. \end{aligned}$$

ამ გარდაქმნას შეესაბამება მატრიცი

$$\begin{vmatrix} b_{11} b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = (b_{ik}).$$

რომ გადავიდეთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებიდან $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ცვლადებზე, ამისათვის საკმარისია თანმიმდევრად შევასრულოთ A და B გარდაქმნები.

მაგრამ ძნელი არაა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები უშუალოდ გამოვსახოთ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ცვლადებით. მართლაც, საკმარისია (102) მნიშვნელობანი $y_1, y_2, \ldots, y_2$-სათვის ჩავსვათ (101) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$
(103) \qquad \begin{cases}
x_1 = \sum\limits_{h=1}^{n} a_{1h}(b_{h1} z_1 + b_{h2} z_2 + \ldots + b_{hn} z_n), \\
x_2 = \sum\limits_{h=1}^{n} a_{2h}(b_{h1} z_1 + b_{h2} z_2 + \ldots + b_{hn} z_n), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = \sum\limits_{h=1}^{n} a_{nh}(b_{h1} z_1 + b_{h2} z_2 + \ldots + b_{hn} z_n).
\end{cases}
$$

თუ აღვნიშნავთ

$$
(104) \qquad c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},
$$

მაშინ თანაფარდობანი (103) შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + \ldots + c_{1n} z_n, \\
x_2 &= c_{21} z_1 + c_{22} z_2 + \ldots + c_{2n} z_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= c_{n1} z_1 + c_{n2} z_2 + \ldots + c_{nn} z_n.
\end{aligned}
$$

ამგვარად, ორი A და B წრფივი გარდაქმნის თანმიმდევრობით შესრულება შეიძლება შევცვალოთ ერთი წრფივი გარდაქმნით, რომელსაც აქვს შემდეგი მატრიცი:

$$
C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{Vmatrix},
$$

სადაც c_{ik} განისაზღვრება თანაფარდობით (104)*.

---

* C მატრიცი რომელიც წარმოიშობა ორი წრფივი გარდაქმნის თანმიმდევრობით შესრულების დროს, განიხილა უკვე გაუსმა თავის განთქმულ თხზულებაში „Disquisitiones Arithmeticae“ (1801 წ.).

ამბობენ, რომ წრფივი C გარდაქმნა წარმოადგენს ნამრავლს A გარდაქმნისა B გარდაქმნაზე. ამის შესაბამისად C მატრიცს ეწოდება ნამრავლი A მატრიცისა B მატრიცზე *:

$$C = AB.$$

ძნელი არაა მოინახოს კანონი, რომლის მიხედვითაც აიგება C მატრიცის ელემენტები. მართლაც, ტოლობა (104) შეიძლება გადაიწეროს ასეთი სახით:

$$(140') \qquad c_{ik} = \sum_{h-1}^{n} a_{ih} b_{hk} = a_{i_1} b_{1k} + a_{i_2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს: რომ მივიღოთ c_{ik} ელემენტი, რომელიც მდებარეობს C მატრიცის $i-h$ სტრიქონისა და $k-h$ სვეტის გადაკვეთაში, საკმარისია A მატრიცის i-რი სტრიქონის ელემენტები (ე. ი. $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{in}$) გავამრავლოთ შესაბამისად B მატრიცის k-რი სვეტის ელემენტებზე (ე. ი. $b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}$-ზე) და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ.

თუ n განზომილებიან სივრცეში განვიხილავთ ვექტორებს

$$\bar{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{in}),$$

$$\bar{b}^*_k = (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}),$$

მაშინ ტოლობა (104) შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით

$$c_{ik} = \bar{a}_{(i)} \cdot \bar{b}^*_{(k)}$$

(* ნიშანი გვიჩვენებს, რომ $\bar{b}^*_k$ ვექტორი შედგენილია B მატრიცის k-რი სვეტის ელემენტებისაგან), ე. ი. c_{ik} ელემენტი წარმოადგენს $\bar{a}_i$ და $\bar{b}^*_k$ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს.

ამგვარად, C მატრიცი-ნამრავლი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

---

* ამბობენ აგრეთვე, რომ C წარმოადგენს A და B მატრიცების კომპოზიციის შედეგს.

$$C=AB=\begin{vmatrix} \bar{a}_1\cdot\bar{b}_1^* & \ldots & \ldots & \bar{a}_1\cdot\bar{b}_n^* \\ \bar{a}_2\cdot\bar{b}_1^* & \bar{a}_2\cdot\bar{b}_2^* & \ldots & \bar{a}_2\cdot\bar{b}_n^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}_n\cdot\bar{b}_1^* & \ldots & \ldots & \bar{a}_n\cdot\bar{b}_n^* \end{vmatrix}$$

მაგალითის სახით განვიხილოთ შემდეგი მატრიცები:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

შევადგენთ რა ნამრავლს, ვიპოვით:

$$AB=\begin{pmatrix} -5 & -9 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -6 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

ახლა შევადგინოთ შებრუნებული რიგით აღებული იმავე მატრიცების ნამრავლი

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ეს შედეგი ერთხელ კიდევ ადასტურებს (შეად. მე-2 პუნქტი), რომ მატრიცების ნამრავლს, საერთოდ რომ ვთქვათ, არ აქვს კომუტატივობის თვისება.

ასოციატივობის თვისება მატრიცების გადამრავლების დროს ძალაში რჩება:

$$A(BC)=(AB)C.$$

ამ დებულების დამტკიცება ზოგად შემთხვევაში შეიძლება ჩავატაროთ სწორედ ისევე, როგორც მე-2 პუნქტში.

სავარჯიშო.

1. დაწერეთ მატრიცი, რომელიც შეესაბამება გარდაქმნას

$$\begin{aligned} x_1 &= -\zeta_3, \\ x_2 &= -\zeta_2, \\ x_3 &= \zeta_1. \end{aligned}$$

2. დაწერეთ წრფივი გარდაქმნა, რომელიც შეესაბამება მატრიცს

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. შეადგინეთ შემდეგი წრფივი გარდაქმნათა ნამრავლი:

$a)$ $x_1 = 2y_1 - y_2 + 3y_3,\quad y_1 = 3z_1 - 2z_2 + z_3,$
$x_2 = 3y_1 - 2y_2 + y_3,\quad y_2 = 2z_1 - z_2 + 3z_3,$
$x_3 = 4y_1 - 3y_2 - 2y_3,\quad y_3 = z_1 - z_2 - 3z_3.$

$b)$ $x_1 = y_1,\quad y_1 = 2z_1,$
$x_2 = 2y_1 - y_2,\quad y_2 = 3z_1 + z_2,$
$x_3 = y_1 - 3y_2 + y_3.\quad y_3 = 2z_1 + z_2 - z_3.$

4. შეადგინეთ შემდეგი მატრიცების ნამრავლი:

$$a)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ e & b & 0 \\ g & l & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ e_1 & b_1 & 0 \\ g_1 & f_1 & c_1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. მე-3 პუნქტში განვიხილეთ მეორე რიგის დეტერმინანტების გამრავლების საკითხი; ახლა გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე.

თუ მოცემულია ორი A და B მატრიცი, მათთვის შეიძლება ავაგოთ AB მატრიცი-ნამრავლი. ამ მატრიცის ელემენტები განისაზღვრება (104) თანაფარდობით. ისე, როგორც მე-3 პუნქტი, D_A, D_B, D_{AB}-თი აღვნიშნოთ დეტერმინანტები, რომლებიც შექმნილია A, B, AB მატრიცებისაგან. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

AB მატრიცის D_{AB} დეტერმინანტი ეტოლება A მატრიცის D_A დეტერმინანტისა და B მატრიცის D_B დეტერმინანტის ნამრავლს*.

დამტკიცება. AB მატრიცის D_{AB} დეტერმინანტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ (იხ. მე-4 პუნქტი) ასეთი სახით:

$$D_{AB} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

* ეს თეორემა ერთდროულად მიიღეს კოშიმ და ბინემ (1812 წ.) (Cauchy და Binet).

სადაც (იხ. 104′)

$$c_{ik}=a_{i_1}\,b_{1k}+a_{i_2}\,b_{2k}+\,.\;.\;.\,+c_{in}\,b_{nk}.$$

ამგვარად, D_{AB} დეტერმინანტის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს n შესაკრებთა ჯამს. გარდავქმნათ ეს დეტერმინანტი, VII თავის მე-6 პარაგრაფის 2 თვისების გამოყენებით. თუ ამ თვისებას გამოვიყენებთ ჯერ პირველი სვეტის ელემენტების მიმართ

$$\begin{aligned}
c_{11}&=a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}+\,.\;.\;.\,+a_{1n}\,b_{n1},\\
c_{21}&=a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}+\,.\;.\;.\,+a_{2n}\,b_{n1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_{n1}&=a_{n1}\,b_{11}+a_{n2}\,b_{21}+\,.\;.\;.\,+a_{nn}\,b_{n1},
\end{aligned}$$

მაშინ D_{AB} დეტერმინანტი დაიყოფა n დეტერმინანტად; ყოველი მათგანის პირველი სვეტი შექმნილი იქნება შემდეგი სახის ელემენტებით:

$$\begin{matrix}
a_{1\alpha}b_{\alpha 1},\\
a_{2\alpha}b_{\alpha 1},\\
.\;.\;.\\
a_{n\alpha}b_{\alpha 1},
\end{matrix} \tag{105}$$

სადაც α არის განსაზღვრული ინდექსი 1, 2, . . . , n მწკრივიდან. ყოველი ამ n დეტერმინანტთაგანი შეიძლება თავის მხრით დავყოთ n შესაკრებთა ჯამად, თუ გამოვიყენებთ იგივე თვისებას მეორე სვეტის ელემენტების მიმართ. ამგვარად, მივიღებთ დეტერმინანტებს, რომელთა რიცხვი არის n^2 და რომელთა პირველი სვეტი შექმნილია (105) სახის ელემენტებით, ხოლო მეორე სვეტი — შემდეგი სახის ელემენტებით:

$$\begin{matrix}
a_{1\beta}\,b_{\beta 2},\\
a_{2\beta}\,b_{\beta 2},\\
.\;.\;.\\
a_{n\beta}\,b_{\beta 2},
\end{matrix}$$

სადაც β არის რაიმე ინდექსი 1, 2, . . . , n მწკრივიდან. ეს პროცესი შეიძლება გავაგრძელოთ, სანამ არ მივალთ n-ურ სვეტამ-

დე. ამის შადეგად D_{AB} დეტერმინანტი დაიშლება შემდეგი სახის დეტერმინანტების ჯამად:

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda}=\begin{vmatrix} a_{1\alpha}b_{\alpha_1} & a_{1\beta}b_{\beta_2} & a_{1\gamma}b_{\gamma_3} & \ldots & a_{1\lambda}b_{\lambda_n} \\ a_{2\alpha}b_{\alpha_1} & a_{2\beta}b_{\beta_2} & a_{2\gamma}b_{\gamma_3} & \ldots & a_{2\lambda}b_{\lambda_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha}b_{\alpha_1} & a_{n\beta}b_{\beta_2} & a_{n\gamma}b_{\gamma_3} & \ldots & a_{n\lambda}b_{\lambda_n} \end{vmatrix},$$

სადაც შესაკრებთა რიცხვი n^n-ის ტოლია.

ამგვარად, გვექნება:

$$D_{AB}=\sum_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda}\Delta_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda}, \tag{106}$$

სადაც α, β, . . . , λ ინდექსები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად იღებს 1, 2, . . . , n მნიშვნელობებს, ხოლო ჯამი მარჯვენა ნაწილში ვრცელდება ამ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო კომბინაციაზე.

უფრო ახლო განვიხილოთ $\Delta_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda}$ გამოსახულება. დეტერმინანტის სვეტებიდან საერთო მამრავლების გამოტანის შემდეგ ეს გამოსახულება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda}=b_{\alpha_1}b_{\beta_2}b_{\gamma_3}\ldots b_{\lambda_n}\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & a_{1\gamma} & \ldots & a_{1\lambda} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & a_{2\gamma} & \ldots & a_{2\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\gamma} & \ldots & a_{n\lambda} \end{vmatrix}. \tag{107}$$

თუ α, β, γ, . . . , λ ინდექსებს შორის იქნება ერთმანეთის ტოლი, მაშინ დეტერმინანტი მარჯვენა ნაწილში იქცევა ნულად. ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ α, β, γ, . . . , λ ინდექსები სხვადასხვაა, ე. ი. ქმნიან 1, 2, . . . , n ინდექსების გარკვეულ გადანაცვლებას. მაგრამ მაშინ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & a_{1\gamma} & \ldots & a_{1\lambda} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & a_{2\gamma} & \ldots & a_{2\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\gamma} & \ldots & a_{n\lambda} \end{vmatrix} \tag{108}$$

მხოლოდ სვეტების რიგით განსხვავდება დეტერმინანტისაგან

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{109}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (108) დეტერმინანტი შეიძლება მივიღოთ (109)-დან სვეტების გადანაცვლებით. ეს გადანაცვლება შეიძლება განვახორციელოთ თანმიმდევნო ტრანსპოზიციებით, სახელდობრ იმ ტრანსპოზიციებით, რომლებსაც მივყევართ 1, 2, . . ., n ნატურალური განლაგებიდან α, β, . . . , λ განლაგებამდე. ამ ტრანსპოზიციების რიცხვი ლუწი ან კენტი იქნება α, β, γ, . . ., λ გადანაცვლების ხასიათის მიხედვით. რადგან სვეტების ყოველი ტრანსპოზიცია ცვლის დეტერმინანტის ნიშანს, ამიტომ გვექნება

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & a_{1\gamma} & \dots & a_{1\lambda} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & a_{2\gamma} & \dots & a_{2\lambda} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\gamma} & \dots & a_{n\lambda} \end{vmatrix} = \pm D_A,$$

ამასთან ნიშანი „პლუს“ შეესაბამება α, β, γ, . . . , λ ლუწოვანი გადანაცვლების შემთხვევას, ნიშანი „მინუსი“ — კენტოვანი გადანაცვლების შემთხვევას.

ახლა (107) გამოსახულება $\Delta_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}$-სათვის მიიღებს ასეთ სახეს

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda} = \pm b_{\alpha_1} b_{\beta_2} b_{\gamma_3} \dots b_{\lambda_n} D_A.$$

თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ (106) გამოსახულებაში და ყველა წევრიდან გამოვიტანთ საერთო D მამრავლს, მივიღებთ

$$D_{AB} = D_A \sum \pm b_{\alpha_1} b_{\beta_2} \dots b_{\lambda_n}.$$

მარჯვენა ნაწილში გვაქვს ნამრავლი D_A დეტერმინანტისა $\pm b_{\alpha_1} b_{\beta_2} \dots b_{\lambda_n}$ სახის ყველა წევრის ჯამზე, ამასთან ნიშანი პლუსი ან მინუსი განისაზღვრება α, β, γ, . . . , λ გადანაცვლების ხასიათით; ეს ჯამი წარმოადგენს სხვას არაფერს, თუ არა დეტერმინანტს, შედგენილს B მატრიცისაგან:

$$D_B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm b_{\alpha_1} b_{\beta_2} \dots b_{\lambda n}.$$

მაშასადამე,

$$D_{AB} = D_A D_B ,$$

ეს კი არის სწორედ ის შედეგი, რომლის მიღებაც გვსურდა.

შენიშვნა: მე-3 პუნქტში უკვე აღვნიშნეთ, რომ დეტერმინანტების ნამრავლი უნდა განვასხვაოთ მატრიცების ნამრავლისაგან; ჩვენ დავინახეთ, რომ მეორე რიგის დეტერმინანტების ნამრავლი შეიძლება შევადგინოთ ოთხი სხვადასხვანაირი ხერხით:

1) D_A-ს სტრიქონები D_B-ს სვეტებზე,
2) D_A-ს სვეტები D_B-ს სტრიქონებზე,
3) D_A-ს სტრიქონები D_B-ს სტრიქონებზე,
4) D_A-ს სვეტები D_B-ს სვეტებზე.

ეს შენიშვნა ძალაში რჩება ზოგად შემთხვევაშიაც. განვიხილოთ, მაგალითად დეტერმინანტები

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9.$$

დეტერმინანტი, რომელიც მათ ნამრავლის ტოლია, შევადგინოთ D_A-ს სტრიქონების გამრავლებით D_B-ს სტრიქონებზე:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 162 = 18 \cdot 9.$$

სავარჯიშო.

1. შეადგინეთ შემდეგი დეტერმინანტების ნამრავლი

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$b)\begin{vmatrix} 2a & b & a \\ b+1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2a & -b & a \\ b+1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$c)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. შეადგინეთ სხვადასხვა ხერხით კვადრატი შემდეგი დეტერმინანტებისა:

$$a)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad b)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. დაამტკიცეთ, რომ

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$$

განტოლების დისკრიმინანტი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$D=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix},$$

სადაც s_k არის განტოლების ფესვთა k ხარისხების ჯამი:

$$s_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განტოლების დისკრიმინანტი წარმოადგენს ვანდერმონდის დეტერმინანტის კვადრატს (იხ. თავი VII, § 6).

6. წრფივი გარდაქმნა

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\,y_1+a_{12}\,y_2+\ .\ .\ .+a_{1n}\,y_n, \\ x_2 &= a_{21}\,y_1+a_{22}\,y_2+\ .\ .\ .+a_{2n}\,y_n, \\ &\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ x_n &= a_{n1}\,y_1+a_{n2}\,y_2+\ .\ .\ .+a_{nn}\,y_n. \end{aligned} \tag{110}$$

გამოსახავს $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადებს $y_1, \ldots, y_n$ ცვლადების საშუალებით ახლა დავუშვათ, რომ საჭიროა, პ ი რ ი ქ ი თ, $y_1, \ldots, y_n$ ცვლადები გამოვსახოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ით. ამისათვის საჭირო იქნება (110) განტოლების ამოხსნა $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ის მიმართ. თუ დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ (110) სისტემას აქვს ერთადერთი ამოხსნა $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ის მიმართ. ამ შემთხვევაში

$$y_i=\frac{D_i}{D}, \qquad (i=1, 2 \ldots, n), \tag{111}$$

სადაც D_i-თი აღვნიშნავთ დეტერმინანტს, რომელსაც მივიღებთ D-დან i-რ სვეტის ელემენტების შეცვლით თავისუფალი წევრებით. რადგანაც თავისუფალი წევრების როლს ამ შემთხვევაში თამაშობს $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ამიტომ

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & x_1 a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & x_2 a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & x_n a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ ამ დეტერმინანტს დავშლით i-რ სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ:

$$D_i=A_{1i}x_1+A_{2i}x_2+\ldots+A_{ni}x_n,$$

სადაც $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ni}$ არის i-რი სვეტის ელემენტების ადიუნქტები D დეტერმინანტში; ჩავსვამთ რა ამ გამოსახულებას (111)-ში, ვიპოვით:

$$y_i=\frac{A_{1i}x_1+A_{2i}x_2+\ldots+A_{ni}x_n}{D}.$$

მაშასადამე, გამოსახულება, რომელიც $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადებს გამოსახავს $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} y_1&=\frac{A_{11}}{D}x_1+\frac{A_{21}}{D}x_2+\ldots+\frac{A_{n1}}{D}x_n, \\ y_2&=\frac{A_{12}}{D}x_1+\frac{A_{22}}{D}x_2+\ldots+\frac{A_{n2}}{D}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n&=\frac{A_{1n}}{D}x_1+\frac{A_{2n}}{D}x_2+\ldots+\frac{A_{nn}}{D}x_n. \end{aligned} \tag{112}$$

ამ გარდაქმნას ეწოდება **შებრუნებული გარდაქმნა** (110) გარდაქმნის მიმართ.

ხაზგასმით უნდა აღვნიშნოთ, რომ (112) ფორმულა კარგავს აზრს იმ შემთხვევაში, როცა $D=0$. ამ შემთხვევაში (110) გარდაქმნას ეწოდება **განსაკუთრებული**, ხოლო A მატრიცს— **განსაკუთრებული მატრიცი**. ამგვარად შებრუნებული გარდაქმნა არსებობს მხოლოდ არა განსაკუთრებული A გარდაქმნისათვის.

შებრუნებული გარდაქმნის მატრიცი აღინიშნება A^{-1} სიმბოლოთი:

$$A^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{vmatrix}.$$

წინანდელიდან გამომდინარეობს, რომ A^{-1} მატრიცი არსებობს მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა A მატრიცი არ არის განსაკუთრებული.

რომ მივიღოთ q_{ik} ელემენტი, რომელიც მდებარეობს A^{-1} მატრიცის k-ურ სტრიქონისა და i-რ სვეტის გადაკვეთაში, საკმარისია A_{ki} (და არა A_{ik}!) ადიუნქტი გავყოთ D დეტერმინანტზე:

$$q_{ik}=\frac{A_{ki}}{D}.$$

თუ $x_1, x_2, \dots, x_n$-დან $y_1, y_2, \dots, y_n$-ზე გადავალთ A გარდაქმნის საშუალებით, ხოლო შემდეგ, პირიქით, $y_1, y_2, \dots, y_n$-დან $x_1, x_2, \dots, x_n$-ზე გადავალთ A^{-1}-ის საშუალებით, მაშინ მივიღებთ ეგრეთ წოდებულ „იგივურ" გარდაქმნას:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ x_2 &= x_2, \\ &\;\vdots \\ x_n &= x_n. \end{aligned}$$

ამ გარდაქმნას შეესაბამება მატრიცი

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

რადგან იგივური გარდაქმნა ნიშნავს A და A^{-1} გარდაქმნათა თანმიმდევრობით შესრულებას, ამიტომ E მატრიცი ეტოლება A და A^{-1} მატრიცების ნამრავლს:

$$AA^{-1}=E.$$

ამის სამართლიანობაში შეიძლება დავრწმუნდეთ უშუალო გამოანგარიშებითაც.

მართლაც დავუშვათ, რომ c_{ik} არის ელემენტი, რომელიც მდებარეობს AA^{-1} მატრიცის i-რი სტრიქონისა და k-რი სვეტის გადაკვეთაში; ამ ელემენტს მივიღებთ (იხ. მე-4 პუნქტი) A მატრიცის i-რ სტრიქონიდან და A^{-1} მატრიცის k-რ სვეტიდან:

$$c_{ik}=a_{i1}\frac{A_{1k}}{D}+a_{i2}\frac{A_{2k}}{D}+\ .\ .\ .+a_{in}\frac{A_{nk}}{D}.$$

მეორე მხრივ, ჩვენ ვიცით, რომ:

$$a_{i1}A_{1k}+a_{i2}A_{2k}+\ .\ .\ .+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D, \text{როცა } i=k, \\ 0, \text{როცა } i\neq k. \end{cases}$$

მაშასადამე,

$$c_{ik}=\begin{cases} 1, \text{ როცა } i=k, \\ 0, \text{ როცა } i\neq k. \end{cases}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,

$$c_{11}=c_{22}=\ .\ .\ .=c_{nn}=1,$$
$$c_{12}=c_{13}=\ .\ .\ .=c_{23}=\ .\ .\ .=0.$$

ამგვარად, მატრიცი—ნამრავლს ასეთი სახე აქვს:

$$AA^{-1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{vmatrix}$$

ანუ

$$AA^{-1}=E.$$

ანალოგიურად ვიპოვით:

$$A^{-1}A=E.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ A^{-1} გარდაქმნისათვის შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი გარდაქმნა იქნება A:

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: შემდეგში გაუგებრობათა ასაცილებლად ყურადღება უნდა მივაქციოთ ერთ გარემოებას: ერთი და იგივე გარდაქმნა შეიძლება ჩავატაროთ სხვადასხვანაირი ნიშნების გამოყენებით ცვლადებისათვის. ასე, მაგალითად, A გარდაქმნა შეიძლება ჩავწეროთ (110)-ის ნაცვლად ასეთი სახით:

$$\begin{aligned}
z_1&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ .\ .\ .\ +a_{1n}y_n,\\
z_2&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ .\ .\ .\ +a_{2n}y_n,\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
z_{n1}&=a_{n1}y_2+a_{n2}y_2+\ .\ .\ .\ +a_{nn}y_n.
\end{aligned}$$

ამგვარად, აქ A გარდაქმნის საშუალებით გადავდივართ $z_1, \dots, z_n$ ცვლადებიდან $y_1, \ .\ .\ .\ , y_n$ ცვლადებზე.

თუ შემდეგ $y_1, \dots, y_n$-დან $x_1, \dots, x_n$-ზე გადავალთ (112)-ის სახით ჩაწერილ A^{-1} გარდაქმნის საშუალებით, მაშინ კვლავ მივიღებთ იგივურ E გარდაქმნას; მაგრამ ახლა ეს გარდაქმნა უნდა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
z_1&=x_1,\\
z_2&=\qquad x_2,\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
z_n&=\qquad\qquad x_n.
\end{aligned}$$

სავარჯიშო.

შემდეგი გარდაქმნებისათვის შეადგინეთ შებრუნებული გარდაქმნები:

1. $x_1=2y_1+3y_2,$
   $x_2=3y_1+4y_2;$
2. $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$
   $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;$
3. $x_1=2v_1,$
   $x_2=y_1-y_2$
   $x_3=2y_1+2y_2-y_3;$
4. $x_1=2y_1+y_2+y_3,$
   $x_2=3y_1+2y_2+y_3,$
   $x_3=4y_1+2y_2+2y_3;$

7. თუ შევასრულებთ რომელიმე A გარდაქმნას, ხოლო შემდეგ იგივურ გარდაქმნას, მივიღებთ ისეთივე შედეგს, როგორც მივიღებდით იმ შემთხვევაში, რომ შეგვესრულებია მხოლოდ A გარდაქმნა.

მაშასადამე A მატრიცის ნამრავლი E მატრიცზე ეტოლება A-ს. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით უშუალო გადამრავლებით:

$$AE = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}.$$

რომ მივიღოთ მატრიცი-ნამრავლის ელემენტი, რომელიც მდებარეობს i-რ სტრიქონისა და k-რ სვეტის გადაკვეთაში, უნდა შევადგინოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$a_{i1} \cdot 0 a_{i2} \cdot 0 + \cdot \cdot \cdot + a_{ik} \cdot 1 + \cdot \cdot \cdot + a_{in} \cdot 0 = a_{ik}.$$

ამგვარად მატრიცი-ნამრავლი ემთხვევა A მატრიცს:

$$AE = A.$$

ანალოგიურად მოვნახავთ:

$$EA = A.$$

მაშასადამე, მატრიცების გადამრავლების დროს E მატრიცი ასრულებს ისეთივე როლს, როგორსაც ჩვეულებრივი გამრავლების დროს ერთეული ასრულებს.

შევადაროთ ახლა მატრიცების გამრავლების ის თვისებანი, რომლებიც ჩვენ აქამდე დავადგინეთ:

a) მატრიცების გამრავლებას აქვს ასოციატივობის თვისება;

b) მატრიცების გამრავლების დროს E მატრიცი თამაშობს „ერთეულის" როლს;

c) ყოველ არაგანსაკუთრებულ A მატრიცს შეესაბამება შექცეული A^{-1} მატრიცი, რომლისთვისაც

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

VII თავის მე-3 პარაგრაფში ჩვენ დავინახეთ, რომ ანალოგიური თვისებები აქვს ჩასმათა გამრავლების ოპერაციებს.

თუ ჩვენ მხედველობაში მივიღებთ ოპერაციების ამ ზოგად თვისებებს, მასთან მხედველობის გარეშე დავტოვებთ განსახილავი ელემენტების სპეციალურ ბუნებას, მაშინ მივალთ ჯგუფის ძირითად ცნებამდე.

§ 4. ჯგუფის განმარტება და მისი ძირითადი თვისებანი

1. ვთქვათ, განიხილება $\mathfrak{G}$ სიმრავლე, რომელიც შედგება რაიმე ელემენტებისაგან A, B C, . . . კერძოდ, ამ ელემენტებად შეიძლება იყვნენ რიცხვები, მატრიცები, გარდაქმნები და სხვა. დავუშვათ, რომ ამ ელემენტებისათვის შემოღებულია რაიმე Φ ოპერაცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნილებებს:

1) **$\mathfrak{G}$ სიმრავლის ნებისმიერი ორ A და B ელემენტს Φ ოპერაცია შეუსაბამებს ამ სიმრავლის გარკვეულ P ელემენტს.**

ამას ჩვენ ჩავწერთ შემდეგნაირად:

(113) $$A*B=P.$$

ამასთანავე A და B ელემენტების რიგს აქვს არსებითი მნიშვნელობა, ე. ი. $A*B$ ელემენტი, საზოგადოდ, განსხვავდება $B*A$ ელემენტისაგან).

2) **Φ ოპერაციას აქვს ასოციატივობის თვისება:**

(114) $$A*(B*C)=(A*B)*C.$$

3) არსებობს $\mathfrak{G}$-ში ელემენტი I, რომელსაც აქვს ის თვისება, რომ

(115) $$A*I=A$$

$\mathfrak{G}$ სიმრავლის ყოველი A ელემენტისათვის.

4) $\mathfrak{G}$ სიმრავლის ყოველი A ელემენტისათვის არსებობს $\mathfrak{G}$-ში ელემენტი $\overline{A}$, რომლისთვისაც

(116) $$A*\overline{A}=I.$$

თუ შესრულებულია ეს ოთხი მოთხოვნილება, მაშინ ამბობენ, რომ $\mathfrak{G}$ სიმრავლე შემდეგ *ჯგუფს* Φ ოპერაციის მიმართ.

თუ აღმოჩნდება, რომ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის A და B ელემენტისათვის

(A) $$A*B=B*A,$$

მაშინ ამ ელემენტებს ეწოდებათ კომუტატიური. თუ (A) თანაფარდობას ადგილი აქვს $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნებისმიერი ორი ელემენტისათვის, მაშინ ამ ჯგუფს ეწოდება *კომუტატიური*, ანუ *აბელის* (N. H. Abel-ის სახელის მიხედვით).

თუ ჯგუფი შეიცავს ელემენტების სასრულ რიცხვს, მაშინ მას **სასრული ჯგუფი** ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჯგუფს **უსასრულო** ეწოდება. სასრული ჯგუფის ელემენტთა რიცხვს ეწოდება **მისი რიგი**.

ზემოთ ჩვენ აღვნიშნეთ ჯგუფური ოპერაცია განსაკუთრებული ნიშნით (*). მაგრამ ჯგუფთა თეორიაში ჩვეულებრივ სწერენ ჯგუფური ოპერაციის შედეგს, როგორც ნამრავლს, ე. ი. $A*B$-ს ნაცვლად სწერენ უბრალოდ AB; ასეთ ჩაწერას ეწოდება **მულტიპლიკატიური** (multiplicatio—გამრავლება, ლათ.).

მულტიპლიკატიური ჩაწერის შემთხვევაში სარგებლობენ შესაბამისი ტერმინებით: AB ელემენტს ეწოდება „ნამრავლი", ხოლო A და B ელემენტებს კი — „თანამამრავლები".

კომუტატიური ჯგუფებისათვის სარგებლობენ აგრეთვე **ადიტიური** ჩაწერით (additio—შეკრება), ე. ი. $A*B$-ს ნაცვლად წერენ $A+B$

ჩვენ შემდეგში ვისარგებლებთ მულტიპლიკატიური ტერმინოლოგიით და ჩაწერით. კერძოდ თანაფარდობა (115) ჩვენ გადავწეროთ ასე:

$$AI=A.$$

ამ თანაფარდობას ადგილი აქვს $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყოველი A ელემენტისათვის. შევნიშნოთ, რომ მარცხენა ნაწილში თანამამრავლების გადანაცვლების უფლება ჯერ-ჯერობით არა გვაქვს. I ელემენტს ეწოდება ჯგუფის „მარჯვენა ერთეული".

(116) თანაფარდობა გადავწეროთ ახლა ასე:

$$A\overline{A}=I.$$

$\overline{A}$ ელემენტს შეიძლება ვუწოდოთ A ელემენტის მიმართ „მარჯვენა შექცეული".

ამრიგად, ჯგუფის განმარტების **მესამე პუნქტში** პოსტულირებულია **მარჯვენა ერთეულის არსებობა**, ხოლო მეოთხე პუნქტში — **მარჯვენა შექცეული ელემენტის არსებობა**.

განვიხილოთ ახლა უმარტივესი შედეგები, რომლებიც გამომდინარეობს ჯგუფის განმარტებიდან. წინასწარ შევნიშნოთ შემდეგი. თუ ჩვენ ვწერთ ჯგუფის ელემენტებისათვის ტოლობას

(117) $$X=Y,$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ X და Y ელემენტები იგივური არიან. ამიტომ, (117) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს

$$AX=AY \text{ და } XA=YA \tag{118}$$

$\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყოველი A ელემენტისათვის. ამრიგად, ტოლობის ორივე მხარე შეიძლება გავამრავლოთ „მარცხნიდან" და მარჯვნიდან ერთდაიგივე ელემენტზე.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი დებულება:

ჯგუფში მარჯვენა ერთეული არის ამავე დროს მარცხენა ერთეულიც.

დამტკიცება. ვთქვათ, I არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის მარჯვენა ერთეული; ეს ნიშნავს, რომ

$$AI=A$$

$\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყოველი ელემენტისათვის. განვიხილოთ ახლა IA ელემენტი; ეს ნამრავლი წარმოადგენს $\mathfrak{G}$ ჯგუფის გარკვეულ ელემენტს; იგი აღვნიშნოთ B-თი:

$$IA=B. \tag{119}$$

$\mathfrak{G}$ ჯგუფის A ელემენტისათვის არსებობს მარჯვენა შექცეული $\widetilde{A}$ ელემენტი; თუ გავამრავლებთ მარჯვნიდან $\widetilde{A}$-ზე (119) ტოლობის ორივე ნაწილს, მივიღებთ

$$(IA)\widetilde{A}=B\widetilde{A}.$$

გარდავქმნათ მარცხენა ნაწილი:

$$(IA)\widetilde{A}=I(A\widetilde{A})=I\cdot I=I;$$

მაშასადამე,

$$B\widetilde{A}=I:$$

ანუ

$$B\widetilde{A}=A\widetilde{A}. \tag{120}$$

მაგრამ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის $\widetilde{A}$ ელემენტისათვის არსებობს მარჯვენა შექცეული ელემენტი; აღვნიშნავთ რა მას Q-თი, გვაქვს:

$$\widetilde{A}Q=I.$$

თუ (120) თანაფარდობის ორივე ნაწილს მარჯვნიდან Q-ზე გავამრავლებთ და მხედველობაში მივიღებთ ჯგუფური გამრავლების ასოციატივობას, მივიღებთ

$$B(\tilde{A}Q)=A(\tilde{A}Q)$$

ანუ

$$BI=AI,$$

ე. ი.

$$B=A.$$

ახლა (119) თანაფარდობა მიიღებს სახეს:

$$IA=A.$$

რადგანაც უკანასკნელი თანაფარდობას ადგილი აქვს 𝔊 ჯგუფის ყოველი A ელემენტისათვის, ამიტომ I არის *მარცხენა ერთეული* 𝔊 ჯგუფისათვის.

შემდეგში I ელემენტს ვუწოდებთ *ჯგუფურ ერთეულს*. დავამტკიცოთ ახლა ჯგუფური ერთეულის *ერთადობა*.

ჯგუფში არსებობს მხოლოდ ერთი I ელემენტი, რომელსაც აქვს „ჯგუფური ერთეულის“ თვისება.

მართლაც, დავუშვათ, რომ I ელემენტსაც აქვს ერთეულის თვისება, მაშინ ყოველი A ელემენტისათვის გვაქვს

$$I'A=A;$$

კერძოდ, უნდა იყოს

$$I'I=I.$$

მაგრამ I არის ჯგუფის ერთეული; მაშასადამე,

$$I'I=I'.$$

უკანასკნელ ორ თანაფარდობიდან ჯგუფური გამრავლების ცალსახობის ძალით გამომდინარეობს:

$$I'=I.$$

ჩვენ გვაქვს

(121) $$AI=IA=A$$

𝔊 ჯგუფის ნებისმიერი A ელემენტისათვის. ადიტიურ ჩაწერაში იგივე თანაფარდობები მიიღებენ სახეს:

(121 *a*) $$A+I=I+A=A.$$

ამრიგად, ჯგუფური I ერთეული თამაშობს ჯგუფური ოპერაციის მიმართ იმ როლს, რომელსაც თამაშობს რიცხვი 1 ჩვეულებრივი გამრავლების მიმართ ან რიცხვი ნული ჩვეულებრივი შეკრების მიმართ.

ჯგუფის განმარტების თანახმად, $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყოველი $\tilde{A}$ ელემენტისათვის არსებობს $\mathfrak{G}$-ში მარჯვენა შექცეული $\tilde{A}$ ელემენტი, რომელით აკმაყოფილებს თანაფარდობას:

$$A\tilde{A} = I.$$

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყოველი A ელემენტისათვის მარჯვენა შექცეული ელემენტი არის მარცხენა შექცეული ელემენტიც.

მართლაც, $\mathfrak{G}$ ჯგუფის $\tilde{A}$ ელემენტისათვის უნდა არსებობდეს მარჯვენა შექცეული ელემენტი; აღვნიშნოთ ეს ელემენტი Q-თი, მაშინ

$$\tilde{A}Q = I. \tag{122}$$

თუ ტოლობის ორივე ნაწილს A-ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$(A\tilde{A})Q = AI,$$

ე. ი.

$$IQ = AI;$$

მაგრამ I არის ჯგუფის ერთეული; მაშასადამე, $Q = A$. შევცვლით რა (122) ტოლობაში Q-ს A-თი მივიღებთ

$$\tilde{A}A = I,$$

ე. ი. A ელემენტი არის **მარცხენა** შექცეული A-თვის.

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = I. \tag{123}$$

ადიტიურ ჩაწერაში იგივე თანაფარდობანი ღებულობენ სახეს:

$$A + \tilde{A} = \tilde{A} + A. \tag{123a}$$

ვისარგებლებთ რა მულტიპლიკატიური ტერმინოლოგიით და ჩაწერით, ჩვენ ვუწოდებთ $\tilde{A}$ ელემენტს A ელემენტის შექცეულ ელემენტს და მას აღვნიშნავთ A^{-1}-ით (ადიტიურ ჩაწერაში ტერმინი

„შექცეული ელემენტი“ და A^{-1} აღნიშვნა უნდა შევცვალოთ შესაბამისად ტერმინით „მოპირდაპირე ელემენტი“ და $-A$ აღნიშვნით). მაშასადამე, მულტიპლიკატიურ ჩაწერაში

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

ჩვენ ზემოთ დავინახეთ, რომ $X=Y$ თანაფარდობას თან მოსდევს თანაფარდობანი:

$$AX=AY \text{ და } XA=YA. \tag{124}$$

ჩვენ ახლა შეგვიძლია დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება: **თითოეულ (124) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს თანაფარდობა:**

$$X=Y.$$

ვთქვათ, მაგალითად, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$AX=AY,$$

ე. ი. AX და AY ელემენტები არიან იგივური. მაშინ

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}(AY)$$

ანუ, ნამრავლის ასოციატივობის ძალით,

$$(A^{-1}A)X=(A^{-1}A)Y.$$

მაგრამ

$$A^{-1}A=I,\ IX=X,\ IY=Y,$$

მაშასადამე,

$$X=Y.$$

ახლახან დამტკიცებული თვისებიდან შემდეგი უშუალო შედეგი გვაქვს:

Ⓖ **ჯგუფის ყოველი A ელემენტისათვის არსებობს მხოლოდ ერთი „შექცეული“ ელემენტი A^{-1}.**

„შექცეული“ ელემენტის განმარტების თანახმად გვაქვს: $AA^{-1}=I$.

ვიგულისხმოთ ახლა, რომ A^{-1} ელემენტთან ერთად არსებობს კიდევ A' ელემენტი, რომლისთვისაც

$$AA'=I.$$

მაშინ

$$AA^{-1}=AA',$$

საიდანაც წინანდელივით

$$A'=A^{-1}.$$

მაგალითები.

1. ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ნულის გამოკლებით, შეადგენს აბელის ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ. I ელემენტის როლს თამაშობს რიცხვი ერთეული, ხოლო a რიცხვის „შექცეული" ელემენტის როლს თამაშობს რიცხვი $\frac{1}{a}=a^{-1}$.

იგივე შეიძლება ითქვას ყველა ნამდვილ ან კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეზე (ნული გამოირიცხება).

2. n ხარისხის (ე. ი. n სტრიქონისა და n სვეტის მქონე) ყველა არასაკუთრივი მატრიცთა სიმრავლე შეადგენს ჯგუფს მატრიცთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ. I ელემენტის როლს თამაშობს E მატრიცი (იგივური გარდაქმნის მატრიცი), ხოლო „შექცეული" ელემენტის როლს A მატრიცისათვის თამაშობს A^{-1} მატრიცი (შებრუნებული გარდაქმნის მატრიცი).

3. ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეადგენს აბელის ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ; ამასთან I ელემენტის როლს თამაშობს რიცხვი ნული, ხოლო „შექცეული" (აქ უკეთესია ვთქვათ მოპირდაპირე) ელემენტის როლს თამაშობს a რიცხვისათვის რიცხვი $-a$.

4. n ინდექსისაგან შედგენილ ყველა ჩასმათა სიმრავლე შეადგენს $n!$ რიგის სასრულ ჯგუფს ჩასმათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ. I ელემენტის როლს თამაშობს იგივური ჩასმა, ხოლო შექცეული ელემენტის როლს თამაშობს შექცეული ჩასმა.

5. განვიხილოთ n მნიშვნელობა n ხარისხის ფესვისა 1-დან: $\varepsilon_0=1$, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. ეს n მნიშვნელობა შეადგენს n რიგის ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ. გვაქვს $\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k$; მაშასადამე, $\varepsilon_k\varepsilon_{n-k}=1$, ასე რომ ε_{n-k} არის შექცეული ელემენტი ε_k-სათვის.

2. ჯგუფის განმარტების თანახმად (პოსტულატი 2) ასოციატიურობის თვისებას ადგილი აქვს ჯგუფის სამი ელემენტისათვის. დავამტკიცოთ ახლა, რომ ეს თვისება ძალაში რჩება ელემენტთა ნებისმიერი რიცხვისათვის. ამასთან ვისარგებლებთ მულტიპლიკატიური ტერმინოლოგიით და ჩაწერით.

პირობის თანახმად, $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ორი ელემენტის ნამრავლი წარმოადგენს ამავე ჯგუფის გარკვეულ ელემენტს. რამდენიმე ელემენ-

ტის ნამრავლი განისაზღვრება თანმიმდევრობითი „გადამრავლებით“; ასე მაგალითად,

$$A_1A_2A_3=(A_1A_2)A_3,$$

$$A_1A_2A_3A_4=(A_1A_2A_3)A_4;$$

საზოგადოდ, თუ n ელემენტის ნამრავლი უკვე შედგენილია, მაშინ ნამრავლი $n+1$ ელემენტისა განისაზღვრება ტოლობით

(125) $$A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}=(A_1A_2\ldots A_n)A_{n+1}.$$

ამით მყარდება მოქმედებათა „ნორმალური“ რიგი ნამრავლის შედგენის დროს. ახლა ასოციატივობის თვისება (114) შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$A_1(A_2A_3)=A_1A_2A_3.$$

ასოციატივობის თვისება ელემენტთა ნებისმიერი რიცხვისათვის შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

ნამრავლში ყოველთვის შეიძლება უკუვაგდოთ ნებისმიერი ფრჩხილები, შედეგის შეუცვლელად.

დავამტკიცოთ ეს დებულება.

ვთქვათ, მოცემულია ნამრავლი

$$(A_1A_2\ldots A_n)(A_{n+1}\ldots A_{n+m}).$$

დასამტკიცებელია, რომ ამ ნამრავლში შეიძლება ფრჩხილების უკუგდება, ე. ი.

(126) $$(A_1A_2\ldots A_n)(A_{n+1}\ldots A_{n+m})=A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}\ldots A_{n+m}.$$

დამტკიცება ჩავატაროთ სრული ინდუქციის მეთოდით. $m=1$ შემთხვევაში (126) ტოლობა სამართლიანია, ვინაიდან იგი დაიყვანება (125)-ზე. დავუშვათ ახლა, რომ (126) თანაფარდობას ადგილი აქვს m-ის რაიმე ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის; განვიხილოთ მაშინ ნამრავლი

$$(A_1A_2\ldots A_n)(A_{n+1}\ldots A_{n+m}A_{n+m+1}).$$

ეს ნამრავლი, მოქმედებათა რიგის შეუცვლელად, შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

(127)
$$(A_1A_2 \ldots A_n)(A_{n+1} \ldots A_{n+m}A_{n+m+1}) = \\ =(A_1A_2 \ldots A_n)\{(A_{n+1} \ldots A_{n+m})A_{n+m+1}\}.$$

მარჯვენა ნაწილი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნამრავლი სამი თანამამრავლისა

$$A_1A_2 \ldots A_n,\ A_{n+1} \ldots A_{n+m},\ A_{n+m+1}.$$

რადგანაც თანამამრავლისათვის ასოციატიურობის თვისება სრულდება, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

(127a)
$$(A_1A_2 \ldots A_n)\{(A_{n+1} \ldots A_{n+m})A_{n+m+1}\} = \\ =\{(A_1A_2 \ldots A_n)(A_{n+1} \ldots A_{n+m})\}A_{n+m+1}.$$

დაშვების თანახმად უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილი შეიძლება გადავწეროთ ასე:

(127b)
$$(A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1} \ldots A_{n+m})A_{n+m+1} = \\ =A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1} \ldots A_{n+m}A_{n+m+1}.$$

თანაფარდობებიდან (127), (127a) და (127b) გამომდინარეობს:

$$(A_1A_2 \ldots A_n)(A_{n+1} \ldots A_{n+m}A_{n+m+1}) = \\ =A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1} \ldots A_{n+m}A_{n+m+1}.$$

ამრიგად, თუ (126) თვისება სრულდება m-ის გარკვეული მნიშვნელობისათვის, მაშინ იგი სრულდება $m+1$ მნიშვნელობისათვისაც. რადგანაც $m=1$-თვის იგი სამართლიანია, ამიტომ იგი ძალაში რჩება m-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ამით დადგენილია, რომ ნებისმიერ რიცხვ ელემენტთა ნამრავლში ფრჩხილები შეიძლება იქნეს უკუგდებული.

ამრიგად, იმიდან, რომ ასოციატიურობის თვისება სამართლიანია სამი ელემენტისათვის, გამომდინარეობს, რომ იგი ძალაში რჩება ელემენტთა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

განვიხილოთ ერთი მარტივი გამოყენება.

თუ A და B არიან $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ელემენტები, მაშინ, ვისარგებლებთ რა ასოციატივობის თვისებით, უშუალოდ ვღებულობთ:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

მაშასადამე, $B^{-1}A^{-1}$ არის შექცეული ელემენტი AB ნამრავლისათვის,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{128}$$

საზოგადოდ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$(A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}. \tag{129}$$

მაგალითი.

შევამოწმოთ (128) თანაფარდობა ჩასმებისათვის. ვთქვათ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

გვაქვს:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

შევადგინოთ ახლა B^{-1}, A^{-1} და ვიპოვოთ მათი ნამრავლი:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ეს ჩასმა არის შებრუნებული ჩასმა AB-თვის.

3. გამრავლების ოპერაციისათვის რიცხვების შემთხვევაში არსებობს შექცეული ოპერაცია — გაყოფა. რიცხვების გაყოფის შესაძლებლობა დამყარებულია შემდეგ ფაქტზე: თუ a და b ნებისმიერი რიცხვებია, მასთან $a \neq 0$, მაშინ ყოველთვის არსებობს ერთად ერთი რიცხვი x, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას $ax = b$.

ჯგუფის ელემენტებისათვის ჯგუფური გამრავლების შ ე ქ ც ე ვ ა დ ო ბ ი ს საკითხი რთულდება იმის გამო, რომ ეს გამრავლება, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, კომუტატიური არ არის; ამრიგად, უნდა განვასხვაოთ $AX = B$ და $YA = B$ ტოლობები.

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

განტოლებები

$$AX=B \text{ და } YA=B,$$

სადაც A და B არიან $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტები, ყოველთვის ცალსახად ამოხსნადია $\mathfrak{G}$ ჯგუფში.

განვიხილოთ, მაგალითად, განტოლება

$$AX=B. \tag{130}$$

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ ელემენტი X, რომელიც აკმაყოფილებს ამ განტოლებას, არსებობს. ამის შემდეგ (130) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ მარცხნიდან A^{-1} ელემენტზე:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B.$$

მაგრამ

$$A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=IX=A;$$

მაშასადამე,

$$X=A^{-1}B.$$

ამრიგად, თუ X ელემენტი არსებობს, მაშინ იგი უნდა ემთხვეოდეს $A^{-1}B$ ელემენტს; მაგრამ ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ ელემენტი $A^{-1}B$ მართლაც აკმაყოფილებს (130) განტოლებას; ეს ელემენტი წარმოადგენს (130) განტოლების ერთადერთ ამონახსენს.

ანალოგიურად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ

$$YA=B$$

განტოლებას აკმაყოფილებს მხოლოდ

$$Y=BA^{-1}$$

ელემენტი.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ ელემენტი BA^{-1} ტოლია $A^{-1}B$ ელემენტისა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა A და B ელემენტები კომუტატიური არიან.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენ განვმარტეთ ჯგუფი, როგორც სიმრავლე ელემენტებისა, რომელიც აკმაყოფილებს ოთხ მოთხოვნილებას. ეს სისტემა აქსიომებისა, რომლებიც ჯგუფს განსაზღვრავენ, არ არის ერთად ერთი შესაძლო; იგი შეიძლება შეცვლილი იქნეს რაიმე სხვა

ექვივალენტური აქსიომათა სისტემით. ასე, მაგალითად, 3) და 4) მოთხოვნილებათა ნაცვლად, რომლებიც განმარტებაშია მოცემული, შეიძლება მივიღოთ შემდეგი დაშვება:

3') **განტოლებანი**

$$AX=B \text{ და } YA=B$$

ყოველთვის ამოხსნადია $\mathfrak{G}$-ში.

ჩვენ ზემოთ დავინახეთ, რომ ჯგუფში პოსტულატი 3') ყოველთვის სრულდება; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეს პოსტულატი წარმოადგენს 1)—4) პოსტულატთა შედეგს. დავამტკიცოთ ახლა, რომ 1), 2) და 3') პოსტულატებიდან გამომდინარეობს 3) და 4) პოსტულატების სამართლიანობა (ე. ი. არსებობა მარჯვენა შექცეული ელემენტისა და მარჯვენა ერთეულისა).

მართლაც, ვთქვათ $\mathfrak{G}$ არის ელემენტთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს 1), 2) და 3') მოთხოვნილებებს. ვთქვათ A_0 არის რაიმე ელემენტი $\mathfrak{G}$-დან. თანახმად 3'), $\mathfrak{G}$-ში უნდა არსებობდეს ელემენტი X_0, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$A_0X_0=A_0. \tag{131}$$

თუ ახლა A არის ნებისმიერი ელემენტი $\mathfrak{G}$-დან, მაშინ $\mathfrak{G}$-ში (ისევ თანახმად 3') ტოლობებისა, არსებობს ელემენტი Y_0, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$Y_0A_0=A.$$

გავამრავლებთ რა (131) ტოლობის ორივე ნაწილს მარცხნიდან Y_0-ზე, მივიღებთ:

$$(Y_0A_0)X_0=Y_0A_0$$

ანუ

$$AX_0=A.$$

უკანასკნელი ტოლობა სრულდება $\mathfrak{G}$ სიმრავლის ნებისმიერი A ელემენტისათვის. მაშასადამე, ელემენტი X_0 არის მარჯვენა ერთეული $\mathfrak{G}$-თვის; ძველი ჩვენი აღნიშვნების შესაბამისად, მივიღოთ

$$X_0=I.$$

თუ A არის ნებისმიერი ელემენტი $\mathfrak{G}$-დან, მაშინ თანახმად 3′) ტოლობებისა $\mathfrak{G}$-ში მოიძებნება ელემენტი Z, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$AZ = I.$$

ელემენტი Z არის **მარჯვენა შექცეული ელემენტი** A-თვის.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\mathfrak{G}$-ში არსებობს მარჯვენა ერთეული და მარჯვენა შექცეული ელემენტი ნებისმიერი ელემენტისათვის. ამით ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\mathfrak{G}$ აკმაყოფილებს 3) და 4) პოსტულატებს.

ამრიგად, 1), 2) და 3′) პოსტულატთა სისტემა ტოლფასია 1), 2), 3) და 4) პოსტულატთა სისტემისა.

4. ვთქვათ $\mathfrak{H}$ არის რაიმე სიმრავლე ელემენტებისა, რომლებიც $\mathfrak{G}$ ჯგუფში შედიან:

$$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}.$$

თუ $\mathfrak{H}$ სიმრავლე თვითონ შეადგენს ჯგუფს, მაშინ ამბობენ რომ $\mathfrak{H}$ არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის **ქვეჯგუფი**.

მაგალითები.

1. ყოველ $\mathfrak{G}$ ჯგუფში ელემენტი I — ჯგუფის ერთეული — თვითონ ქმნის ჯგუფს, $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს.

2. ნულისაგან განსხვავებული ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე შეადგენს ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ნულისაგან განსხვავებული ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე შეადგენს ამ ჯგუფის ქვეჯგუფს.
ნულისაგან განსხვავებული ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე შეადგენს ამ ჯგუფის ქვეჯგუფს.

3. ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეადგენს ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ; სიმრავლე ყველა მთელი რიცხვებისა, რომლებიც იყოფა p-ზე, სადაც p არის გარკვეული მთელი რიცხვი, შეადგენს ამ ჯგუფის ქვეჯგუფს.

4. სისტემა რიცხვებისა $(1, -1, i, -i)$ შეადგენს გამრავლების ოპერაციის მიმართ მეოთხე რიგის ჯგუფს; ამ ჯგუფს აქვს მეორე რიგის ქვეჯგუფი $(1, -1)$.

რა პირობებში შეიძლება ვთქვათ, რომ $\mathfrak{G}$ ჯგუფში შემავალი ელემენტთა სიმრავლე $\mathfrak{H}$, შეადგენს $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს?

პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი თეორემა:

თუ სიმრავლე $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნილებებს:

1) $\mathfrak{H}$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი A და B ელემენტის ნამრავლი ეკუთვნის $\mathfrak{H}$-ს;

2) $\mathfrak{H}$ სიმრავლის ნებისმიერი A ელემენტის შექცეული ელემენტი ეკუთვნის $\mathfrak{H}$-ს;

მაშინ $\mathfrak{H}$ არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფი.

(შემდეგში ჩვენ დავინახავთ, რომ სასრული ჯგუფებისათვის პირობა 2) შეიძლება უკუვაგდოთ).

დამტკიცება. ოთხი პირობიდან, რომლებიც ჯგუფის განმარტებაშია მოცემული, პირველი და უკანასკნელი სრულდება $\mathfrak{H}$ სიმრავლისათვის პირობის თანახმად. ასოციატივობის მოთხოვნილება აგრეთვე სრულდება $\mathfrak{H}$ სიმრავლისათვის იმის გამო, რომ $\mathfrak{H}$ შეადგენს $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნაწილს. გვრჩება დასამტკიცებელი, რომ $\mathfrak{H}$-ში არსებობს ერთეული. ვთქვათ A არის ნებისმიერი ელემენტი $\mathfrak{H}$-დან. 2) ის ძალით, ელემენტი A^{-1} ეკუთვნის $\mathfrak{H}$-ს. მაგრამ მაშინ, თანახმად 1)-სა, $\mathfrak{H}$-ში იმყოფება AA^{-1} ნამრავლიც, ე. ი. I. მაშასადამე, $\mathfrak{H}$ სიმრავლე აკმაყოფილებს ყველა პირობას, რომელიც ჯგუფის განმარტებაშია მოცემული.

მაგალითი.

განვიხილოთ n ხარისხის ყველა არასაკუთრივ მატრიცთა $\mathfrak{A}$ ჯგუფი. n ხარისხის ყველა ისეთ მატრიცთა $\mathfrak{C}$ სიმრავლე, რომელთა დეტერმინანტები ± 1-ის ტოლია, შეადგენს $\mathfrak{A}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს. იმავე ხარისხის ყველა ისეთ მატრიცთა სიმრავლე, რომელთა დეტერმინანტი $+1$-ის ტოლია, შეადგენს თავის მხრით, $\mathfrak{C}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს.

ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია გავიხსენოთ, რომ ორი მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის ამ მატრიცების დეტერმინანტების ნამრავლს. აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ A^{-1} მატრიცის დეტერმინანტი უდრის $\frac{1}{D_A}$-ს, სადაც D_A არის A მატრიცის დეტერმინანტი.

ვთქვათ A არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. A ელემენტის ხარისხი ნატურალური m მაჩვენებლით განისაზღვრება, როგორც ჩვეულებრივ, ტოლობით

$$A^m = A \cdot A \cdots A \ (m\text{-ჯერ}).$$

თუ (126) თანაფარდობაში, ჩვენ ვიგულისხმებთ

$$A_i = A \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+m),$$

მაშინ მივიღებთ:

(132) $$A^n A^m = A^{n+m};$$

აქ n და m — ნატურალური რიცხვებია. შემდეგ, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში:

(133) $$(A^n)^m = A^{nm}.$$

ახლა ჩვენ განვმარტავთ ხარისხს მთელი უარყოფითი მაჩვენებლით — n, ვიგულისხმებთ რა

$$A^{-n}=(A^{-1})^{n}.$$

თუ (129) თანაფარდობაში დავუშვებთ $A_i=A (i=1, 2, \ldots n)$, მაშინ ვიპოვით:

$$(A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}=A^{-n}.$$

A^0-ს ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ I ელემენტს (ჯგუფის ერთეულს). ამრიგად, ხარისხის ცნება განმარტებულია ნებისმიერი მთელი მაჩვენებლისათვის. ადვილად შევამოწმებთ, რომ (132) და (133) თანაფარდობები ძალაში რჩება ნებისმიერი მთელი მნიშვნელობებისათვის m და n.

წინანდელიდან გამომდინარეობს, რომ A^n ელემენტი ნებისმიერი მთელი მნიშვნელობისათვის n იმყოფება $\mathfrak{G}$ ჯგუფში.

A^n სახის ელემენტთა სიმრავლე, სადაც A არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის გარკვეული ელემენტი, ხოლო n — ნებისმიერი მთელი რიცხვი, შეადგენს ჯგუფს ($\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს).

მართლაც,

1) A^n და A^m ელემენტთა ნამრავლი არის A^{n+m} ელემენტი, ე. ი. განსახილავი სიმრავლის ელემენტი;

2) A^n ელემენტის შექცეული ელემენტი არის A^{-n} და იგი ეკუთვნის აგრეთვე განსახილავ სიმრავლეს.

მაშასადამე, ეს სიმრავლე შეადგენს ჯგუფს — $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს.

ჯგუფს, რომელიც შედგენილია ერთი A ელემენტის ხარისხებისაგან, ეწოდება ციკლური ჯგუფი; ამბობენ, რომ ეს ჯგუფი შექმნილია A ელემენტის მიერ.

კერძოდ შევჩერდეთ იმ შემთხვევაზე, როცა $\mathfrak{G}$ არის სასრული ჯგუფი. ვთქვათ A არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. რადგანაც ჯგუფის ელემენტთა რიცხვი სასრულია, ამიტომ ელემენტები

$$A^{0}=I,\ A,\ A^{2},\ A^{3},\ \ldots$$

ყველა არ შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავებული იყვნენ. დავუშვათ, რომ ელემენტები

(134) $$I,\ A,\ A^{2},\ \ldots,\ A^{\mu-1}$$

ჯერ კიდევ ერთმანეთისაგან განსხვავებული არიან, იმ დროს როცა A^{μ} ელემენტი ეტოლება ერთ-ერთს წინამორბედ ელემენტებიდან; მაშასადამე,

$$A^{\mu}=A^{\nu},$$

სადაც

$$0\leqslant\nu<\mu.$$

უკანასკნელ ტოლობის ორთავე ნაწილს თუ გავამრავლებთ $A^{-\nu}$-ზე, ვიპოვით:

$$A^{\mu-\nu}=I.$$

ახლა თუ $\nu>0$, მაშინ გამოვა, რომ (134) ელემენტები ყველა არ არის ერთმანეთისაგან განსხვავებული; მაშასადამე, უნდა იყოს $\nu=0$, ე. ი.

$$A^{\mu}=A^{0}=I.$$

რიცხვი μ არის უმცირესი დადებითი მაჩვენებელი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას $A^{\mu}=I$; ამ რიცხვს ეწოდება A ელემენტის რიგი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი ხარისხი A^{m}, სადაც m მთელი რიცხვია, იმყოფება (134) ელემენტთა შორის. მართლაც, ნებისმიერი მთელი რიცხვი m, დადებითი ან უარყოფითი, შეიძლება წარმოვიდგინოთ სახით:

$$m=\mu q+r,$$

სადაც q და r—მთელი რიცხვებია, მასთან $0\leqslant r<\mu$. მაშინ

$$A^{m}=A^{\mu q}A^{r}=(A^{\mu})^{q}A^{r}=IA^{r}=A^{r}.$$

კერძოდ,

$$A^{-1}=A^{\mu-1}. \tag{135}$$

მაშასადამე, მთელი ციკლური ჯგუფი, რომელიც A ელემენტის მიერ არის შექმნილი, შედგება μ სხვადასხვა ელემენტებისაგან: $I, A, A^{2}, \ldots, A^{\mu-1}$.

ამ ჯგუფის რიგი უდრის, ამრიგად, რიცხვს μ, ე. ი. A ელემენტის რიგს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ სიმრავლე $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}$ ჰქმნის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს, თუ

1) $\mathfrak{H}$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი A და B ელემენტების ნამრავლი არის ამავე სიმრავლის ელემენტი;

2) $\mathfrak{H}$ სიმრავლის A ელემენტის შექცეული ელემენტი A^{-1} ეკუთვნის აგრეთვე $\mathfrak{H}$-ს.

ჩვენ შეგვიძლია ახლა ვაჩვენოთ, რომ *სასრული* $\mathfrak{G}$ ჯგუფის შემთხვევაში მეორე მოთხოვნილება ზედმეტია, ვინაიდან იგი უკვე პირველშია მოთავსებული.

მართლაც, ვთქვათ $\mathfrak{H}$ არის *სასრული* $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ელემენტთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს 1) პირობას.

თუ A არის ნებისმიერი ელემენტი $\mathfrak{H}$-დან, მაშინ ელემენტი $A^{\mu-1}$, სადაც μ არის A ელემენტის რიგი, იმყოფება $\mathfrak{H}$-ში 1)-ის თანახმად. მაგრამ $A^{-1}=A^{\mu-1}$; მაშასადამე, ელემენტი A^{-1} იმყოფება აგრეთვე $\mathfrak{H}$-ში.

მიღებული შედეგი შეიძლება გამოვიყენოთ ჩასმათა ჯგუფებისათვის. რადგანაც n ინდექსებიან ყველა ჩასმათა ჯგუფი $\mathfrak{S}_n$ არის სასრული, ამიტომ ჩვენ მივიღებთ შემდეგ დებულებას:

ვთქვათ $\mathfrak{M}_n$ არის n ინდექსიან ჩასმათა რაიმე სისტემა. თუ $\mathfrak{M}_n$-დან აღებული ორი ნებისმიერი ჩასმათა ნამრავლი $\mathfrak{M}_n$-ს ეკუთვნის, მაშინ $\mathfrak{M}_n$ არის ჩასმათა ჯგუფი.

განვიხილოთ, კერძოდ, n ინდექსიანი ყველა ლუწოვან ჩასმათა $\mathfrak{A}_n$ სიმრავლე. რადგანაც ორი ლუწოვანი ჩასმათა ნამრავლი არის ლუწოვანი ჩასმა, ამიტომ $\mathfrak{A}_n$ არის ჯგუფი. ამ ჯგუფს ეწოდება ნიშანცვლადი ჯგუფი; იგი თამაშობს მნიშვნელოვან როლს განტოლებების ალგებრულ ამოხსნათა თეორიაში.

5. ვთქვათ $\mathfrak{A}$ არის რაიმე სიმრავლე ელემენტებისა, რომლებიც ეკუთვნიან $\mathfrak{G}$ ჯგუფს; შემდეგ, ვთქვათ X არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რაიმე ელემენტი.

$\mathfrak{A}$ სიმრავლის X ელემენტზე $\mathfrak{A}X$ ნამრავლის ქვეშ ჩვენ გვესმის ყველა AX სახის ელემენტთა სიმრავლე, სადაც A არის ნებისმიერი ელემენტი $\mathfrak{A}$-დან. ანალოგიურად განისაზღვრება $X\mathfrak{A}$ ნამრავლი.

თუ $\mathfrak{A}$ სიმრავლე შედგება

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

ელემენტთა სასრული რიცხვისაგან, მაშინ $\mathfrak{A}X$ სიმრავლე შედგება შემდეგი ელემენტებისაგან:

$$A_1X, A_2X, \ldots, A_nX.$$

$\mathfrak{A}$ სიმრავლის ყოველ A_i ელემენტს შეესაბამება $\mathfrak{A}X$ სიმრავლის გარკვეული ელემენტი A_iX; ამასთან $\mathfrak{A}$ სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტებს შეესაბამება $\mathfrak{A}X$ სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტები. მართლაც, თანაფარდობიდან

$$A_iX = A_jX$$

გამომდინარეობს

$$A_i = A_j$$

ამგვარად, $\mathfrak{A}X$ სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტთა რიცხვი ტოლია $\mathfrak{A}$ სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტთა რიცხვისა.

თუ X და Y არიან $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ელემენტები, მაშინ, როგორც ადვილად დავრწმუნდებით,

$$(\mathfrak{A}X)Y = \mathfrak{A}(XY).$$

მართლაც, თუ A არის $\mathfrak{A}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ

$$(AX)Y = A(XY);$$

მაშასადამე, $(AX)Y$ სახის ყოველი ელემენტი უდრის $A(XY)$ სახის ელემენტს, და პირიქით.

განვიხილოთ ახლა $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რაიმე ქვეჯგუფი $\mathfrak{H}$. ვთქვათ H_1 არის ამ ქვეჯგუფის რაიმე ელემენტი. დავამტკიცოთ, რომ $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ნამრავლი H_1 ელემენტზე, რომელიც ამ ქვეჯგუფს ეკუთვნის, უდრის $\mathfrak{H}$ ჯგუფს, ე. ი.

$$\mathfrak{H}H = \mathfrak{H}.$$

მართლაც, $\mathfrak{H}H_1$ სიმრავლე შედგება HH_1 სახის ელემენტისაგან, სადაც H არის $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუბის ნებისმიერი ელემენტი. მაგრამ იმ ელემენტთა ნამრავლი HH_1, რომლებიც $\mathfrak{H}$-ს ეკუთვნიან, იმყოფება $\mathfrak{H}$-ში, ვინაიდან $\mathfrak{H}$ არის ჯგუფი. მაშასადამე, $\mathfrak{H}H_1$ სიმრავლე იმყოფება $\mathfrak{H}$-ში:

(a) $$\mathfrak{H}H \subset \mathfrak{H}.$$

ახლა ადვილი საჩვენებელია, რომ, პირიქითაც, $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ყოველი ელემენტი არის ამავე დროს $\mathfrak{H}H_1$ სიმრავლის ელემენტიც. მართლაც, $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი H შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$H = (HH_1^{-1})H_1,$$

ანუ

$$H=H'H_1,$$

სადაც $H'=HH_1^{-1}$. ელემენტი H' ეკუთვნის $\mathfrak{H}$ ჯგუფს; მაშასადამე, $H'H$ ელემენტი ეკუთვნის $\mathfrak{H}H_1$ სიმრავლეს. ამრიგად, ნებისმიერი ელემენტი $\mathfrak{H}$-დან იმყოფება $\mathfrak{H}H$-–ში, ე. ი.

(b) $$\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}H_1.$$

(a) და (b) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathfrak{H}H_1$ სიმრავლე ემთხვევა $\mathfrak{H}$-ს.

ანალოგიურად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $H_1\mathfrak{H}$ სახის ნამრავლი ემთხვევა $\mathfrak{H}$-ს.

დავუშვათ ახლა, რომ $\mathfrak{H}$ არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფი, ხოლო X და Y არიან $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რაიმე ელემენტები.

დავამტკიცოთ, რომ $\mathfrak{H}Y$ სიმრავლე ან ემთხვევა $\mathfrak{H}X$ სიმრავლეს, ან მასთან არა აქვს არც ერთი საერთო ელემენტი.

ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია ვაჩვენოთ შემდეგი: **თუ $\mathfrak{H}Y$ სიმრავლეს აქვს ერთი მაინც საერთო ელემენტი $\mathfrak{H}X$ სიმრავლესთან, მაშინ ეს სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევიან.**

ამრიგად, ვიგულისხმოთ, რომ $\mathfrak{H}X$ და $\mathfrak{H}Y$ სიმრავლეებს აქვთ საერთო ელემენტი K. ვინაიდან ეს ელემენტი ეკუთვნის $\mathfrak{H}X$ სიმრავლეს, ამიტომ იგი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასე:

$$K=H_1X,$$

სადაც H_1 არის $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის რაიმე ელემენტი; მეორეს მხრივ, რადგანაც K ელემენტი იმყოფება $\mathfrak{H}Y$-ში, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$K=H_2Y,$$

სადაც H_1 არის $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ელემენტი. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს:

$$H_1X=H_2Y;$$

მაშასადამე,

$$(\mathfrak{H}H_1X)=\mathfrak{H}(H_2Y)$$

ანუ

$$(\mathfrak{H}H_1)X=(\mathfrak{H}H_2)Y.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\mathfrak{H}H_1=\mathfrak{H}H_2=\mathfrak{H},$$

გვაქვს:

$$\mathfrak{H}X = \mathfrak{H}Y.$$

აღვნიშნოთ ზოგიერთი შედეგი მიღებული შედეგიდან.

1. თუ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის X ელემენტი არ ეკუთვნის $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფს, მაშინ $\mathfrak{H}X$ სისტემას არა აქვს საერთო ელემენტი $\mathfrak{H}$-თან.

უპირველესად შევნიშნოთ, რომ $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}I$, სადაც I არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ერთეული. $\mathfrak{H}X$ სისტემას რომ ჰქონდეს ერთი მაინც საერთო ელემენტი $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}I$ სისტემასთან, მაშინ, წინანდელივით, უნდა იყოს: $\mathfrak{H}X = \mathfrak{H}$. მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან X ელემენტი იმყოფება $\mathfrak{H}X$-ში და არ იმყოფება $\mathfrak{H}$-ში.

2. თუ X ელემენტი არ იმყოფება $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფში, მაშინ $\mathfrak{H}X$ სისტემა არ შეიძლება იყოს ჯგუფი.

მართლაც, 1 შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathfrak{H}X$ სისტემა არ შეიცავს ჯგუფურ I ერთეულს.

ვთქვათ $\mathfrak{H}$ არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რაიმე ქვეჯგუფი. თუ X არის ნებისმიერი ელემენტი $\mathfrak{G}$-დან, მაშინ $\mathfrak{H}X$ სიმრავლეს ეწოდება **მოსაზღვრე სისტემა** $\mathfrak{H}$-ს მიმართ (და სახელდობრ „მარჯვენა მოსაზღვრე სისტემა", განსხვავებით „მარცხენა" $X\mathfrak{H}$ სისტემისა).

მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ერთი და იგივე მოსაზღვრე სისტემა შეიძლება ჩაწერილი იქნეს სხვადასხვა ხერხებით. ასე, თუ

$$X' = HX,$$

სადაც $H \subset \mathfrak{H}$, მაშინ

$$\mathfrak{H}X' = \mathfrak{H}X.$$

$\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყოველი X ელემენტი ეკუთვნის ერთ-ერთს მოსაზღვრე სისტემიდან $\mathfrak{H}$-ს მიმართ, სახელდობრ, იმ სისტემას, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს $\mathfrak{H}X$ სახით.

ორი მოსაზღვრე სისტემები $\mathfrak{H}X$ და $\mathfrak{H}Y$, წინანდელივით, ან იგივური არიან, ან არა აქვთ არც ერთი საერთო ელემენტი.

ამრიგად, $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის ერთს და მხოლოდ ერთს მოსაზღვრე სისტემებიდან $\mathfrak{H}$-ის მიმართ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყველა ელემენტი განლაგებული არიან მოსაზღვრე სისტემებით, რომლებსაც საერთო ელემენტები არა აქვთ.

ვთქვათ,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}I,\ \mathfrak{H}A,\ \mathfrak{H}B,\ .\ .\ .\ ,\ \mathfrak{H}U$$

არიან ყველა ერთმანეთისაგან განსხვავებული ყველა სხვადასხვა მოსაზღვრე სისტემები $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის მიმართ. თუ ჩვენ გავაერთიანებთ ყველა ამ სისტემათა ელემენტებს ერთ სიმრავლეში, მივიღებთ მთელ $\mathfrak{G}$ ჯგუფს; ამას ჩვენ ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$\mathfrak{G}=(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}A, \mathfrak{H}B, \ldots, \mathfrak{H}U).$$

ამბობენ, რომ $\mathfrak{G}$ ჯგუფი დაშლილია მოსაზღვრე სისტემებად $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}A$, $\mathfrak{H}B$, . . . , $\mathfrak{H}U$.

შევჩერდეთ იმ შემთხვევაზე, როცა $\mathfrak{G}$ არის სასრული ჯგუფი. ამ შემთხვევაში $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფიც იქნება აგრეთვე სასრული. აღვნიშნოთ n-ით $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რიგი ხოლო m-ით — $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის რიგი. სხვადასხვა ელემენტთა რიცხვი თითოეულ მოსაზღვრე სისტემებიდან $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}A$, . . . ეტოლება სხვადასხვა ელემენტთა რიცხვს $\mathfrak{H}$-ში, ე. ი. უდრის $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის m რიგს.

მეორეს მხრივ, სხვადასხვა მოსაზღვრე სისტემათა $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}A$, . . . რიცხვი განსახილავ შემთხვევაში აგრეთვე უნდა იყოს სასრული. ამ რიცხვს ეწოდება $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ინდექსი $\mathfrak{G}$ ჯგუფის მიმართ.

$\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ინდექსი $\mathfrak{G}$ ჯგუფის მიმართ (ე. ი. სხვადასხვა მოსაზღვრე სისტემათა $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}A$, . . . , $\mathfrak{H}U$ რიცხვი) აღვნიშნოთ i-თ.

ჩვენ შეგვიძლია ახლა ვთქვათ, რომ $\mathfrak{G}$ ჯგუფი იშლება სისტემად, რომლებსაც არა აქვთ საერთო ელემენტები. ვინაიდან სხვადასხვა ელემენტთა რიცხვი თითოეულ ამ სისტემებიდან უდრის m-ს, ამიტომ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რიგი უდრის im ნამრავლს, ე. ი. $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის რიგის ნამრავლს მის ინდექსზე:

$$n=im.$$

აქედან (სასრული ჯგუფებისათვის) უშუალოდ გამომდინარეობს: **ნებისმიერი ქვეჯგუფის რიგი წარმოადგენს ჯგუფის რიგის გამყოფს***.

ვთქვათ A არის სასრული $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. აღვნიშნოთ μ-თი ამ ელემენტის რიგი. ჩვენ ზემოთ დავინახეთ, რომ A ელემენტი ჰქმნის μ რიგის ციკლურ ჯგუფს; ეს ჯგუფი იქნება $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფი. მაშასადამე, ახლახან დამტკიცებულ თეორემის ძალით, რიცხვი μ უნდა იყოს გამყოფი $\mathfrak{G}$ ჯგუფის n რიგისა; ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ შედეგს:

* ჩასმათა ჯგუფისათვის ეს შედეგი ჯერ კიდევ ლაგრანჟის მიერ იყო მიღებული.

სასრული ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტის რიგი წარმოადგენს ჯგუფის რიგის გამყოფს.

აღვნიშნოთ ამ შედეგიდან გამომდინარე ერთი შედეგი. თუ A ელემენტის რიგი უდრის μ-ს, მაშინ

$$A^{\mu}=I,$$

სადაც I არის ჯგუფის ერთეული

მეორეს მხრივ, წინანდელივით, რიცხვი μ უნდა იყო $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რიგი n-ის გამყოფი, ამრიგად, $n=\mu q$, სადაც q მთელი რიცხვია. მაშასადამე,

$$A^{n}=A^{\mu q}=I^{q}=I.$$

ამრიგად, თუ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რიგი უდრის n-ს, მაშინ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნებისმიერი A ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$A^{n}=I,$$

სადაც I არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ერთეული.

უკანასკნელი შედეგი შეიძლება გამოვიყენოთ რიცხვთა თეორიის ზოგიერთ საკითხებზე: მისგან უშუალოდ მიიღება ეგრეთწოდებული ფ ე რ მ ა ს მცირე თეორემა და მისი განზოგადება — ე ი ლ ე რ ი ს თეორემა.

6. ვთქვათ A და B არიან $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ელემენტები. თუ ეს ელემენტები გადანაცვლებადი არიან, მაშინ ტოლობიდან $AB=BA$ გვაქვს:

$$B^{-1}AB=A.$$

პირიქით, უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს $AB=BA$. თუ A და B ელემენტები გადანაცვლებადი არ არიან, მაშინ ელემენტი

$$A'=B^{-1}AB$$

განსხვავებულია A-გან; ჩვენ ვიტყვით, რომ A' ელემენტი მიღებულია A ელემენტის **გარდაქმნით** B-**ს საშუალებით.**

თუ A' ელემენტი მიიღება A-დან გარდაქმნით B ელემენტის საშუალებით, მაშინ A მიიღება A'-დან გარდაქმნით B^{-1}-ის საშუალებით.

მართლაც, ტოლობიდან $A' = B^{-1}AB$ გამომდინარეობს:

$$A = BA'B^{-1} = (B^{-1})^{-1}A'B^{-1}.$$

თუ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის A, A' ელემენტებიდან ერთი მათგანი შეიძლება მიღებული იქნეს მეორიდან გარდაქმნით $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რაიმე ელემენტის საშუალებით, **მაშინ** A **და** A' **ელემენტებს ეწოდებათ შეუღლებული, ანუ მსგავსი** $\mathfrak{G}$ **ჯგუფში.**

შეუღლებლობის დამოკიდებულება, როგორც ადვილი დასანახავია, **ტრანზიტიულია:**

თუ A'' ელემენტი შეუღლებულია A' ელემენტთან, ხოლო A' შეუღლებულია A-სთან, მაშინ A'' და A შეუღლებული არიან ერთმანეთთან.

მართლაც, ვთქვათ, რომ A' ელემენტი მიიღება A-დან გარდაქმნით B ელემენტის საშუალებით, ხოლო A'' მიიღება A'-დან გარდაქმნით C-ს საშუალებით:

$$A' = B^{-1}AB, \quad A'' = C^{-1}A'C.$$

მაშინ

$$A'' = C^{-1}B^{-1}ABC = (BC)^{-1}A(BC),$$

ე. ი. ელემენტი A'' მიიღება A-დან გარდაქმნით BC ელემენტის საშუალებით.

სავარჯიშო.

ვთქვათ A არის ციკლებში მოცემული ჩასმა:

$$A = (1, 2, 5)(3, 4).$$

დაამტკიცეთ, რომ, თუ

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma & \lambda & \mu \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$B^{-1}AB = (\alpha, \beta, \mu)(\gamma, \lambda).$$

თუ მიღებულ შედეგს განვაზოგადებთ, შეიძლება დავამტკიცოთ: იმისათვის, რომ ციკლებში მოცემული A ჩასმა გარდავქმნათ B ჩასმის საშუალებით, საკმარისია A ჩასმის ყოველ ციკლში მოვახდინოთ ის შეცვლანი, რომლებსაც გვიჩვენებს B ჩასმა.

ვთქვათ ახლა $\mathfrak{H}$ არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რაიმე ქვეჯგუფი, და ვთქვათ X არის $\mathfrak{G}$-ს რაიმე ელემენტი. განვიხილოთ სიმრავლე ყველა ელე-

მენტთა, რომლებიც მიიღებიან $\mathfrak{H}$ ჯგუფის ელემენტებისაგან გარდაქმნით X ელემენტის საშუალებით, ე. ი. ყველა

$$X^{-1}HX$$

სახის ელემენტთა სიმრავლე, სადაც H არის ნებისმიერი ელემენტი $\mathfrak{H}$-დან; ეს სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ნამრავლის სახით $X^{-1}(\mathfrak{H}X)$ ანუ $(X^{-1}\mathfrak{H})X$ სახით.

ჩვენ ამას მარტივად დავწერთ: $X^{-1}\mathfrak{H}X$.

დავამტკიცოთ, რომ სიმრავლე $\mathfrak{H}' = X^{-1}\mathfrak{H}X$ წარმოადგენს ჯგუფს ($\mathfrak{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს).

ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

a) $\mathfrak{H}'$ სიმრავლის ორი ელემენტის ნამრავლი ეკუთვნის იმავე სიმრავლეს;

b) $\mathfrak{H}'$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტის შებრუნებული ელემენტი ეკუთვნის იმავე სიმრავლეს.

ვთქვათ

$$H'_1 = X^{-1}H_1X, \ H'_2 = X^{-1}H_2X$$

არიან $\mathfrak{H}'$ სიმრავლის ელემენტები (ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ H_1 და H_2 ელემენტები ეკუთვნიან $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფს); შევადგინოთ მათი ნამრავლი:

$$H'_1H'_2 = (X^{-1}H_1X)(X^{-1}H_2X) = X^{-1}(H_1H_2)X;$$

რადგანაც H_1H_2 არის $\mathfrak{H}$ ჯგუფის ელემენტი, ამიტომ $H'_1H'_2$ ნამრავლი კუთვნის $\mathfrak{H} = X^{-1}\mathfrak{H}X$ სიმრავლეს.

შემდეგ, ნებისმიერი $X^{-1}HX$ ელემენტისათვის გვაქვს:

$$(X^{-1}HX)^{-1} = X^{-1}H^{-1}X.$$

თუ H ელემენტი ეკუთვნის $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფს, მაშინ H^{-1} ელემენტიც ეკუთვნის $\mathfrak{H}$-ს. მაშასადამე, $X^{-1}H^{-1}X$ ელემენტი ეკუთვნის $X^{-1}\mathfrak{H}X$ სიმრავლეს.

ამრიგად, $\mathfrak{H}' = X^{-1}\mathfrak{H}X$ სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს.

ამბობენ, რომ $\mathfrak{H}' = X^{-1}\mathfrak{H}X$ ჯგუფი მიიღება $\mathfrak{H}$ ჯგუფიდან გარდაქმნით X ელემენტის საშუალებით. $\mathfrak{H}' = X^{-1}\mathfrak{H}X$ ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$\mathfrak{H} = X\mathfrak{H}'X^{-1}$$

ანუ

$$\mathfrak{H} = (X^{-1})^{-1}\mathfrak{H}'X^{-1}.$$

ამრიგად, თუ $\mathfrak{H}'$ ქვეჯგუფი მიიღება $\mathfrak{H}$-დან გარდაქმნით X ელემენტის საშუალებით, მაშინ $\mathfrak{H}$ მიიღება $\mathfrak{H}'$-დან გარდაქმნით X^{-1} ელემენტის საშუალებით.

თუ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის $\mathfrak{H}$ და $\mathfrak{H}'$ ქვეჯგუფებიდან ერთი მათგანი შეიძლება მიღებული იქნეს მეორიდან გარდაქმნით $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რაიმე ელემენტის საშუალებით, მაშინ $\mathfrak{H}$ და $\mathfrak{H}'$ ქვეჯგუფებს ეწოდებათ შეუღლებული, ანუ მსგავსი, $\mathfrak{G}$ ჯგუფში.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შეუღლებლობის დამოკიდებულება ქვეჯგუფებისათვის **ტრანზიტიულია.**

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $\mathfrak{H}'$ ჯგუფი, რომელიც მიღებულია $\mathfrak{H}$-დან გარდაქმნით რაიმე X ელემენტის საშუალებით, ემთხვევა $\mathfrak{H}$ ს; ამას ადგილი ექნება იმ შემთხვევაში, როცა $X^{-1}\mathfrak{H}X = \mathfrak{H}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ უკანასკნელი დამოკიდებულება ტოლფასია თანაფარდობის

$$\mathfrak{H}X = X\mathfrak{H},$$

რომელიც გამოხატავს, რომ $\mathfrak{H}$ ჯგუფი გადანაცვლებადია X ელემენტთან.

ეს იმას არ ნიშნავს, რომ $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ყოველი ელემენტი გადანაცვლებადია X-თან; ეს ნიშნავს მხოლოდ იმას, რომ HX სახის ყოველი ნამრავლი, სადაც H არის ქვეჯგუფის ელემენტი, უდრის რაიმე XH' სახის ნამრავლს, სადაც $H' \subset \mathfrak{H}$, და პირიქით.

თუ $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფი გადანაცვლებადია $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნებისმიერ X ელემენტთან, მაშინ დამოკიდებულება

$$X^{-1}\mathfrak{H}X = \mathfrak{H}$$

სრულდება $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ყოველი X ელემენტისათვის; მაშასადამე, $\mathfrak{H}$-თან შეუღლებული ნებისმიერი ჯგუფი ემთხვევა $\mathfrak{H}$-ს.

ამ შემთხვევაში $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფს ეწოდება „ინვარიანტული ქვეჯგუფი“ ანუ „ნორმალური გამყოფი“ $\mathfrak{G}$ ჯგუფისა.

თუ $\mathfrak{G}$ ჯგუფი კომუტატიურია, მაშინ ნებისმიერი ქვეჯგუფი იქნება მისი ნორმალური გამყოფი.

სავარჯიშო.

1. თუ $\mathfrak{S}_n$ არის n ინდექსიანი ყველა ჩასმათა ჯგუფი, ხოლო $\mathfrak{A}_n$ არის ქვეჯგუფი ყველა ლუწოვან ჩასმათა, მაშინ $\mathfrak{A}_n$ არის $\mathfrak{S}_n$-ის ნორმალური გამყოფი.

2. დაამტკიცეთ, რომ მეოთხე რიგის ჯგუფი, რომელიც შედგება ჩასმებისაგან

$$I;\ (1,\ 2)\,(3\ 4);\ (1,\ 3)\,(2,\ 4);\ (1,\ 4)\,(2,\ 3),$$

წარმოადგენს $\mathfrak{A}_4$ ჯგუფის ნორმალურ გამყოფს ($\mathfrak{A}_4$ არის ოთხ ინდექსიანი ყველა ლუწოვან ჩასმათა ჯგუფი).

ვთქვათ $\mathfrak{N}$ არის $\mathfrak{G}$ ჯგუფის რაიმე ქვეჯგუფი; განვიხილოთ მისი შეუღლებული ქვეჯგუფი

$$\mathfrak{H}' = X^{-1}NX.$$

$\mathfrak{H}$ და $\mathfrak{H}'$ ქვეჯგუფების ელემენტებს შორის დავამყაროთ თანადობა შემდეგნაირად: $\mathfrak{H}$ ჯგუფის H ელემენტს შევუსაბამოთ $\mathfrak{H}'$ ჯგუფის ელემენტი

$$H' = X^{-1}HX.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამრიგად დამყარებული თანადობა იქნება ურთიერთცალსახა; ჩვენ ვისარგებლებთ შემდეგი ჩაწერით:

$$H \longleftrightarrow H'.$$

ვთქვათ ახლა, H_1 და H_2 არიან $\mathfrak{H}$ ჯგუფის ელემენტები, ხოლო H'_1 და H'_2 წარმოადგენენ $\mathfrak{H}'$ ქვეჯგუფის შესაბამის ელემენტებს:

$$H_1 \longleftrightarrow H'_1,\ \ H_2 \longleftrightarrow H'_2.$$

H_1H_2 ნამრავლი წარმოადგენს $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ელემენტს; მას შეესაბამება $\mathfrak{H}'$ ქვეჯგუფის ელემენტი

$$(H_1H_2)' = X^{-1}(H_1H_2)X.$$

ეს ელემენტები შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასე:

$$X^{-1}(H_1H_2)X = (X^{-1}H_1X)\,(X^{-1}H_2X) = H'_1H'_2.$$

ამრიგად

$$(H_1H_2)' = H'_1H'_2,$$

ე. ი. $\mathfrak{H}$ ქვეჯგუფის ელემენტთა H_1H_2 ნამრავლს შეესაბამება $\mathfrak{H}'$ ჯგუფის შესაბამის ელემენტთა $H'_1H'_2$ ნამრავლი.

სხვანაირად რომ ვთქვათ,

$$H_1 \longleftrightarrow H'_1,\ \ H_1 \longleftrightarrow H'_1$$

დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს თანაფარდობა

$$H_1H_2 \longleftrightarrow H'_1H'_2.$$

ამრიგად თანადობას, რომელიც ჩვენ დავამყარეთ $\mathfrak{H}$ და $\mathfrak{H}'$ ჯგუფების ელემენტებს შორის აქვს შემდეგი ორი თვისება:

1) ეს თანადობა **ურთიერთ ცალსახაა;**

2) ჯგუფის ორი ნებისმიერი ელემენტების ნამრავლს შეესაბამება **მეორე ჯგუფის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლი.**

თუ ორი ჯგუფის ელემენტებს შორის შეიძლება დავამყაროთ ისეთი თანადობა, რომელსაც აქვს 1) და 2) თვისებები, მაშინ ამ ჯგუფებს ეწოდებათ **იზომორფული.**

ამრიგად, **შეუღლებული ქვეჯგუფები ყოველთვის იზომორფული არიან ერთმანეთთან.**

მაგრამ იმიდან, რომ ორი ჯგუფი $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ არიან იზომორფული, კიდევ არ გამომდინარეობს, რომ ისინი არიან ერთი და იგივე ჯგუფის ქვეჯგუფები.

პირიქით, ორი იზომორფული ჯგუფი შეიძლება შედგებოდეს საზოგადოდ სრულიად სხვადასხვა ბუნების ელემენტებისაგან.

სწორედ ამიტომ იზომორფიზმის ცნება თამაშობს მნიშვნელოვან როლს მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

იზომორფიზმის დამოკიდებულება **ტრანზიტიულია;** თუ $\mathfrak{A}$ ჯგუფი იზომორფულია $\mathfrak{A}'$ ჯგუფთან, ხოლო $\mathfrak{A}'$ იზომორფულია $\mathfrak{A}''$-თან, მაშინ $\mathfrak{A}$ ჯგუფი იზომორფულია $\mathfrak{A}''$-თან. ამ დებულების დამტკიცებას ჩვენ ვანდობთ მკითხველს.

განვიხილოთ ახლა იზომორფული ჯგუფების მაგალითები.

1. მეოთხე რიგის ჯგუფი, რომელიც შედგება

$$1, -1, i, -i$$

რიცხვებისაგან (გამრავლების ოპერაციის მიმართ), იზომორფულია მატრიცთა ჯგუფისა:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. მესამე რიგის ჯგუფი (გამრავლების ოპერაციის მიმართ), რომელიც შედგება

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2$$

რიცხვებისაგან, სადაც ε არის პრიმიტიული ფესვი მესამე ხარისხის ფესვისა 1-დან, იზომორფულია ჩასმათა ჯგუფისა

$$E = (1)\,(2)\,(3),\ (1, 2, 3),\ (1, 3, 2).$$

ამ მაგალითის განზოგადება ადვილად შეიძლება.

3. განვიხილოთ ბრტყელი ფიგურის მის სიბრტყეში ბრუნვა უძრავი O წერტილის გარშემო. თუ ჩვენ შევასრულებთ ჯერ A მობრუნებას φ კუთხეზე, ხოლო შემდეგ B მობრუნებას ψ კუთხეზე, მაშინ თანმიმდევრობითი შესრულება A და B მობრუნებისა შეიძლება შეიცვალოს ერთი მობრუნებით, სახელდობრ, $\varphi+\psi$ კუთხეზე მობრუნებით. ამ მობრუნებას ვუწოდოთ A და B მობრუნებათა „ნამრავლი". ადვილი შესამჩნევია, რომ ბრტყელი ფიგურის ყველა ბრუნვათა სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს ამგვარად განმარტების მიმართ.

ამასთან ჯგუფური ერთეულის როლს თამაშობს O კუთხეზე მობრუნება ხოლო შებრუნებული ელემენტის როლს φ კუთხეზე მობრუნების მიმართ თამაშობს $-\varphi$ კუთხეზე მობრუნება. მობრუნებები, რომლებიც განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 2π-ს ჯერადით, ითვლებიან იგივურად.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ *ბრტყელი ფიგურის მის სიბრტყეში O ცენტრის გარშემო ყველა ბრუნვათა ჯგუფი იზომორფულია ერთეულის მოდულის მქონე კომპლექსურ რიცხვთა ნამრავლის ჯგუფისა*, ე. ი. $\cos\varphi+i\sin\varphi$ სახის კომპლექსურ რიცხვთა ნამრავლის ჯგუფისა.

განვიხილოთ, კერძოდ, წესიერი მრავალკუთხედის ის ბრუნვები მისი ცენტრის გარშემო, რომელთაც მოჰყავთ იგი დასამთხვევად საწყის მდგომარეობასთან. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს იქნება ბრუნვები კუთხეზე, რომლებიც ჯერადია $\frac{2\pi}{n}$ წილადისა, სადაც n არის მრავალკუთხედის წვეროთა რიცხვი. ეს ბრუნვები შეადგენენ n რიგის ჯგუფს, რომელიც იზომორფულია 1-დან n ხარისხის ფესვის ჯგუფისა.

ეს ჯგუფი იზომორფულია აგრეთვე ჩასმათა ციკლური ჯგუფისა, რომელიც შედგენილია წრიული $(1, 2, \ldots, n)$ ჩასმის ხარისხებით.

სავარჯიშო.

თუ $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ ჯგუფები იზომორფულია, მაშინ

1) $\mathfrak{A}$ ჯგუფის ერთეულს შეესაბამება $\mathfrak{B}$ ჯგუფის ერთეული;

2) თუ $A \longleftrightarrow B$, მაშინ $A^{-1} \longleftrightarrow B^{-1}$.

§ 5. მატრიცთა რგოლი. რგოლისა და ველის ზოგადი განმარტება

1. მე-2 პარაგრაფში დავინახეთ, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობათა სისტემა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ვექტორი

$$\bar{x}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

n განზომილებიან სივრცეში. ახლა განვიხილოთ წრფივი გარდაქმნა

$$
(136)\quad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}
$$

ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ წრფივი A გარდაქმნა ამყარებს დამოკიდებულებას ორი ვექტორის კოორდინატებს შორის:

$$
\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ და } \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n);
$$

ამას მოკლედ სწერენ შემდეგნაირად:

$$
(137)\qquad \overline{y} = A\overline{x}.
$$

ამბობენ, რომ $\overline{y}$ ვექტორი მიიღება $\overline{x}$ ვექტორისაგან წრფივი გარდაქმნის საშუალებით.

(136) წრფივ გარდაქმნასთან ერთად განვიხილოთ კიდევ გარდაქმნა:

$$
(138)\quad \begin{aligned} z_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n, \\ z_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n. \end{aligned} \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}
$$

ეს გარდაქმნა $\overline{x}$ ვექტორს შეუსაბამებს $\overline{z}$ ვექტორს;

თუ წევრობრივ შევკრებთ ყოველ (136) ტოლობათაგანს შესაბამ (138) ტოლობასთან, მაშინ მივიღებთ:

$$
(139)\quad \begin{aligned} y_1 + z_1 &= (a_{11}+b_{11})x_1 + (a_{12}+b_{12})x_2 + \ldots + (a_{1n}+b_{1n})x_n \\ y_2 + z_2 &= (a_{21}+b_{21})x_1 + (a_{22}+b_{22})x_2 + \ldots + (a_{2n}+b_{2n})x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n + z_n &= (a_{n1}+b_{n1})x_1 + (a_{n2}+b_{n2})x_2 + \ldots + (a_{nn}+b_{nn})x_n. \end{aligned}
$$

მაშასადამე,

$$
\overline{y} + \overline{z} = A\overline{x} + B\overline{x}
$$

ვექტორი მიიღება $\overline{x}$ ვექტორისაგან (139) გარდაქმნის საშუალებით. ამ გარდაქმნის მატრიცი, ბუნებრივია, განვიხილოთ როგორც A და B მატრიცების ჯამი:

$$A+B=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}=(a_{ik}+b_{ik}).$$

გამოვიყენებთ რა ამ აღნიშვნას, შეგვიძლია (139) დავწეროთ ასეთი სახით

$$\overline{y}+\overline{z}=(A+B)\,\overline{x}$$

ანუ

(140) $$A\overline{x}+B\overline{x}=(A+B)\,\overline{x}.$$

ამგვარად, მატრიცისათვის დაწესებულია შეკრების ოპერაცია. ამ ოპერაციას აქვს კომუტატივობის და ასოციატივობის თვისება, რადგან მატრიცების შეკრება დაიყვანება შესაბამ ელემენტთა შეკრებამდე, ხოლო ამ უკანასკნელთათვის ეს თვისება სამართლიანია. დისტრიბუტივობის თვისებაც ძალაში რჩება მატრიცებისათვისაც:

$$(A+B)C=AC+BC,\quad C(A+B)=CA+CB.$$

რომ დავამტკიცოთ, მაგალითად, პირველი ამ თანაფარდობათა გან, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$\sum_{h=1}^{n}(a_{ih}+b_{ih})\,c_{hk}=\sum_{h=1}^{n}a_{ih}\,c_{hk}+\sum_{h=1}^{n}b_{ih}\,c_{hk}.$$

მარცხნით გვაქვს $(A+B)C$ მატრიცის i—რ სტრიქონისა და k—რ სვეტის გადაკვეთაში მდებარე ელემენტი, მარჯვნით კი — $AC+BC$ მატრიცის შესაბამი ელემენტი.

მატრიციბის გამოკლების ოპერაცია განისაზღვრება როგორც შეკრების შებრუნებული ოპერაცია; მაშასადამე,

$$A-B=(a_{ik}-b_{ik}).$$

$A-A$ სხვაობა წარმოადგენს ნულოვან მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია. ეს მატრიცი აღინიშნება 0 სიმბოლოლი:

$$A-A=0.$$

მატრიცი $0-B$ აღინიშნება სიმბოლოთი: $-B$:

$$-B=-(b_{ik})=(-b_{ik}).$$

ცხადია,

$$B+(-B)=0.$$

წინანდელიდან გამომდინარეობს, რომ განსაზღვრული ხარისხის ყველა მატრიცის სიმრავლე ჰქმნის აბელის ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ. I ელემენტის როლს ამ ჯგუფში თამაშობს ნულოვანი მატრიცი, ხოლო „შებრუნებული" ელემენტის როლს A მატრიცისათვის თამაშობს $-A$ მატრიცი.

არსებითია შევნიშნოთ, რომ ორი მატრიცის ნამრავლი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს (ე. ი. ტოლი ნულოვანი მატრიცისა) იმ შემთხვევაშიაც, როცა ორთავე თანამამრავლი განსხვავებულია ნულისაგან.

ამგვარად,

(141) $$A\cdot B=0$$

თანაფარდობიდან არ შეიძლება დავასკვნათ ისე, როგორც ჩვეულებრივ არითმეტიკაში, რომ ან $A=0$, ან $B=0$. თუ A და B მატრიცები, განსხვავებული ნულოვანი მატრიცისაგან, აკმაყოფილებენ (141) პირობას, მაშინ მათ ეწოდება ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი გ ა მ ყ ო ფ ე ბ ი.

თუ განვიხილავთ განსაზღვრული ხარისხის ყველა მატრიცთა სიმრავლეს, მაშინ შეიძლება ვთქვათ, რომ ეს სიმრავლე ჰქმნის რ გ ო ლ ს იმ აზრით, რომ შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციები არ გამოგვიყვანს მისი ფარგლებიდან.

ორი მომენტი არსებითად ანსხვავებს მატრიცების რგოლს რიცხვითი რგოლებისაგან, რომლებიც განვიხილეთ I თავში: 1) გამრავლების ოპერაცია მატრიცთა რგოლში, საერთოდ რომ ვთქვათ, არაკომუტატიურია; 2) მატრიცთა რგოლში არსებობს ნულის გამყოფები.

2. კვლავ განვიხილოთ წრფივი გარდაქმნა.

(142)
$$\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n,\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n \end{aligned}$$

ანუ

(142′) $$y=A\overline{x}.$$

(142′) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ ნებსითი λ რიცხვზე:

(143) $$\lambda\overline{y}=\lambda(A\overline{x}).$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა იგივეა, რაც შემდეგი n თანაფარდობანი:

(144) $$\begin{aligned} \lambda y_1 &= \lambda a_{11}x_1+\lambda a_{12}x_2+\ldots+\lambda a_{1n}x_n, \\ \lambda y_2 &= \lambda a_{21}x_1+\lambda a_{22}x_2+\ldots+\lambda a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda y_n &= \lambda a_{n1}x_1+\lambda a_{n2}x_2+\ldots+\lambda a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

ეს თანაფარდობანი გვიჩვენებს, რომ $\lambda\overline{y}=(\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n)$ ვექტორი შეიძლება მივიღოთ $\overline{x}$ ვექტორიდან წრფივი გარდაქმნით, რომელსაც აქვს მატრიცი

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცს განვიხილავთ როგორც λ რიცხვის ნამრავლს A მატრიცზე;ამ ნამრავლს აღვნიშნავთ λA-თი ან $A\lambda$-თი.

(145) $$\lambda A=A\lambda=(\lambda a_{ik}).$$

ახლა (144) თანაფარდობანი შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$\lambda\overline{y}=(\lambda A)\overline{x}.$$

ამგვარად, ჩვენ დავადგინეთ რიცხვზე მატრიცის გამრავლების ოპერაცია; ამ ოპერაციას, როგორც ადვილად დავრწმუნდებით, შემდეგი თვისებები აქვს:

1) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$,

2) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$,

3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$,

4) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,

(ბერძნული ასოები ნიშნავს რიცხვებს, ლათინური ასოები — მატრიცებს).

რომ დავამტკიცოთ რომელიმე ამ თანაფარდობათაგანი, საკმარისია ერთმანეთს შევადაროთ მატრიცების შესაბამი ელემენტები მარცხენა და მარჯვენა ნაწილში; ასე მაგალითად, $\lambda(AB)$ და $\lambda A)B)$ მატრიცებისათვის გვაქვს:

$$\lambda \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk} = \sum_{h=1}^{u} (\lambda a_{ih}) b_{hk},$$

საიდანაც

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B.$$

აღვნიშნოთ კიდევ შემდეგი თვისება

(146) $$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB).$$

ეს თვისება, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, წარმოადგენს შედეგს 1) და 2)-დან.

განვიხილოდ კერძოდ λ რიცხვის ნამრავლი იგივურ გარდაქმნის E მატრიცზე:

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & 0 \\ & . & . & . & . & \\ 0 & . & . & . & & \lambda \end{pmatrix}.$$

ასეთ მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი მოთავსებული მთავარ დიაგონალზე ტოლია ერთსა და იმავე λ რიცხვის, ხოლო ყველა დანარჩენი ელემენტი ნულის ტოლია, ეწოდება სკალარული მატრიცი. სკალარული მატრიცების ჯამი და ნამრავლი წარმოადგენს აგრეთვე სკალარულ მატრიცებს:

(147) $$\begin{aligned} \lambda E + \mu E &= (\lambda + \mu) E, \\ (\lambda E)(\mu E) &= (\lambda\mu)E^2 = \lambda\mu E. \end{aligned}$$

თუ გვაქვს რიცხვთა რაიმე Δ რგოლი, მაშინ, ამ რგოლის ყოველი λ ელემენტს შეგვიძლია შევუსაბამოთ სკალარული მატრიცი λE. სიმრავლე ყველა λE სკალარულ მატრიცებისა, რომლებიც შეესაბამება Δ რგოლის სხვადასხვა ელემენტებს, თავის მხრით ჰქმნის რგოლს; ეს რგოლი აღვნიშნოთ L-ით.

ამგვარად, რიცხვთა Λ რგოლსა და L მატრიცების რგოლს შორის დამყარებულია **ურთიერთ ცალსახა თანადობა;** ამასთან, Λ-დან აღებული ორი ელემენტის **ჯამი** და **ნამრავლი** შეესაბამება L-დან აღებულ სათანადო ელემენტების ჯამსა და ნამრავლს. ორ რგოლს, რომელთა შორის შეიძლება ასეთი თანადობა დამყარდეს, ეწოდება იზომორფული. მაშასადამე, სკალარულ მატრიცთა L რგოლი იზომორფულია რიცხვთა Λ რგოლისა.

მატრიცთა აღრიცხვა პირველად განავითარა **ჰამილტონმა** 1853 წელს (Lectures on quaternions). ჰამილტონისაგან დამოუკიდებლად მატრიცთა აღრიცხვამდე მივიდა **კელი** (Cayley). **კელის** შრომები, რომლებშიაც გაშლილია მატრიცთა თეორიის ძირითადი დებულებანი, ეკუთვნის 1854—1858 წლეებს. ისტორიული ცნობები მატრიცთა თეორიის შესახებ და ვრცელი ბიბლიოგრაფია შეიძლება ვნახოთ წიგნში J. H. M. Wedderburn—Lectures on matrices, New-York 1934.

3. I თავის მე-4 პარაგრაფში ჩვენ შემოვიყვანეთ რიცხვული რგოლის ცნება. შემდეგ, II თავის 1-ლ პარაგრაფში ჩვენ შევხვდით მთელ რაციონალურ ფუნქციათა რგოლს. დაბოლოს, ამ პარაგრაფში ჩვენ გავეცანით მატრიცთა რგოლს. ამრიგად, ჩვენ საქმე გვქონდა რგოლებთან, რომლებიც შედგებიან სხვადასხვა ბუნების ელემენტებისაგან. მაგრამ მათ ჰქონდათ ზოგიერთი საერთო თვისებები, რომლებიც ეხებიან **შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებს.** თუ ჩვენ ყურადღებას მივაქცევთ ამ ზოგად თვისებებს და განსახილავი ობიექტების დანარჩენ სპეციალურ თვისებებს მხედველობაში არ მივიღებთ, მაშინ მივალთ **რგოლის** ზოგად განმარტებამდე.

ვთქვათ, რომ განიხილება რაიმე სიმრავლე ელემენტებისა A, B, . . . , რომელთათვის დადგენილია ორი ოპერაცია „შეკრება" და „გამრავლება"; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ A და B არიან მოცემული სიმრავლის ელემენტები, მაშინ მათთვის განმარტებულია $A+B$ „**ჯამი**" და AB „**ნამრავლი**".

ვიგულისხმოთ, რომ განსახილავ სიმრავლეში შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები აკმაყოფილებენ შემდეგ მოთხოვნილებებს:

1) K სიმრავლის ორი A და B ელემენტების ჯამი წარმოადგენს იმავე სიმრავლის გარკვეულ ელემენტს.

2) შეკრების ოპერაციას აქვს კომუტატივობის თვისება:

$$A+B=B+A.$$

3) შეკრების ოპერაციას აქვს ასოციატივობის თვისება:

$$A+(B+C)=(A+B)+C.$$

4) შეკრების ოპერაცია შექცევადია, ე. ი. K სიმრავლის ორი ნებისმიერი A და B ელემენტებისათვის არსებობს ელემენტი X, რომელიც ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის და რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$A+X=B.$$

5) გარკვეული რიგით აღებული K სიმრავლის ორი A და B ელემენტების ნამრავლი წარმოადგენს იმავე სიმრავლის გარკვეულ ელემენტს.

6) გამრავლების ოპერაციას აქვს ასოციატივობის თვისება:

$$A(BC)=(AB)C.$$

7) გამრავლების ოპერაციას აქვს დისტრიბუტივობის თვისება შეკრების მიმართ:

$$A(B+C)=AB+AC, \quad (A+B)C=AC+BC.$$

ელემენტთა ყოველ სიმრავლეს, რომელშიაც დადგენილია შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები და რომლებიც აკმაყოფილებენ ზემოთ აღნიშნულ თვისებებს, **რგოლი** ეწოდება.

თუ გამრავლების ოპერაციას რგოლში აქვს კომუტატივობის თვისება, ე. ი. რგოლის ნებისმიერი ორი ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$AB=BA,$$

მაშინ რგოლს **კომუტატიური** ეწოდება.

ცხადია, რომ ყოველი **რიცხვული რგოლი**, როგორც იგი I თავში განვმარტეთ, წარმოადგენს *კომუტატიურ* რგოლს.

სიმრავლე ყველა მთელ რაციონალურ ფუნქციებისა $f(x)$, რომელთა კოეფიციენტები რიცხვთა P ველს ეკუთვნის, წარმოადგენს აგრეთვე კომუტატიურ რგოლს (შეად. თავი II).

n ხარისხის ყველა მატრიცთა სიმრავლე წარმოადგენს არაკომუტატიურ რგოლს.

შვიდი პოსტულატიდან, რომლებიც რგოლს განსაზღვრავენ, პირველი ოთხი ეხება შეკრების ოპერაციას. ეს ოპერაციები გამოსთქვამენ, რომ შეკრების ოპერაციის მიმართ რგოლი წარმოადგენს აბელის ჯგუფს (იხ. პ. 3, § 4, შენიშვნა).

ავღნიშნოთ 0 სიმბოლოთი ჯგუფური ერთეული ამ აბელის ჯგუფისა; მაშინ K რგოლის ნებისმიერი A ელემენტისათვის გვაქვს [შეად. § 4, დამოკიდებულებანი (121 a)]:

$$A+0=0+A=A.$$

0 ელემენტს ვუწოდოთ K რგოლის ნული. მე-4 პარაგრაფის პუნქტი 1-დან გამომდინარეობს, რომ რგოლში არსებობს მხოლოდ ერთი ნული.

ჩვენ ვნახეთ მე-4 პარაგრაფში, რომ ჯგუფში ყოველი ელემენტისათვის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი შექცეული ანუ—ადიტიური ტერმინოლოგიით — მოპირდაპირე ელემენტი; რადგანაც K წარმოადგენს ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ, ამიტომ K რგოლის ყოველი A ელემენტისათვის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი მოპირდაპირე ელემენტი, რომელსაც ჩვენ ავღნიშნავთ — A-თი:

$$A+(-A)=(-A)+A=0.$$

თუ A და B არიან რგოლის ნებისმიერი ელემენტები, მაშინ განტოლებას

$$A+X=B$$

დააკმაყოფილებს რგოლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი

$$X=B+(-A).$$

ამრიგად, ეს ელემენტი წარმოადგენს B და A ელემენტებს შორის სხვაობას:

$$B-A=B+(-A).$$

თუ დავუშვებთ, კერძოდ, $B=A$, მაშინ გვაქვს:

$$A-A=A+(-A)=0.$$

ვთქვათ ახლა A, B და C არიან რგოლის ნებისმიერი ელემენტები.

ვისარგებლებთ რა დისტრიბუტივობის თვისებით (პოსტულატი 7), მივიღებთ:

$$AC + (B - A)C = [A + (B - A)]C = BC,$$

საიდანაც

(148) $$(B - A)C = BC - AC.$$

ანალოგიურად ვიპოვით

(149) $$C(B - A) = CB - CA.$$

ამრიგად, გამოკლების დროს ძალაში რჩება დისტრიბუტივობის თვისება.

თუ დავუშვებთ (148) ტოლობაში $B = A$, მივიღებთ:

$$(A - A)C = AC - AC$$

ანუ

$$0C = 0.$$

ანალოგიურად, (149)-დან მივიღებთ

$$C0 = 0.$$

ამრიგად, თუ ერთ-ერთი თანამამრავლი ნულის ტოლია, მაშინ ნამრავლიც ნულის ტოლია.

შებრუნებულ დებულებას რგოლში, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, **ადგილი არა აქვს:** რგოლის ელემენტის ნამრავლი AB შეიძლება ნულის ტოლი იყოს იმ შემთხვევაშიაც, როცა A და B არიან ნულისაგან განსხვავებული. ასე, მაგალითად, ზემოთ ჩვენ დავინახეთ, რომ 0-საგან განსხვავებული ორი მატრიცის ნამრავლი შეიძლება 0 მატრიცს ეტოლებოდეს.

თუ K რგოლის ნულისაგან განსხვავებული A და B ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$AB = 0,$$

მაშინ A და B ელემენტებს ეწოდებათ **ნულის გამყოფები**; ამასთან A-ს ეწოდება **ნულის მარცხენა გამყოფი**, ხოლო B-ს — **ნულის მარჯვენა გამყოფი**.

თუ A არის ნულის მარცხენა გამყოფი ხოლო C არ არის ნულის მარცხენა გამყოფი, მაშინ განტოლებას

(150) $$XA = C$$

არა აქვს ამონახსენი K რგოლში. მართლაც, ვინაიდან A არის ნულის მარცხენა გამყოფი, ამიტომ რგოლში არსებობს ელემენტი B, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $AB=0$. ახლა თუ არსებობს ელემენტი X, რომელიც აკმაყოფილებს (150) განტოლებას, მაშინ, გავამრავლებთ რა ამ განტოლების ორივე ნაწილს მარჯვნიდან B-ზე, მივიღებთ:

$$X(AB)=CB$$

ანუ

$$0=CB,$$

რაც შეუძლებელია, ვინაიდან C არ წარმოადგენს ნულის მარცხენა გამყოფს.

ანალოგიურად, თუ B არის მარჯვენა გამყოფი, ხოლო C არ არის ნულის მარჯვენა გამყოფი, მაშინ განტოლებას

$$BY=C$$

არა აქვს ამონახსენი K-ში.

თუ K ველში არსებობს ელემენტი I_r, რომელსაც აქვს ის თვისება, რომ K რგოლის ყოველი A ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$AI_r=A,$$

მაშინ I_r-ს ეწოდება რგოლის მარჯვენა ერთეული.

თუ რგოლში არსებობს ისეთი I_l ელემენტი, რომ

$$I_lA=A$$

K რგოლის ყოველი A ელემენტისათვის, მაშინ I_l-ს ეწოდება რგოლის მარცხენა ერთეული.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ რგოლში არსებობს მარჯვენა ერთეული, მაგრამ არ არსებობს მარცხენა ერთეული ან პირიქით.

განვიხილოთ, მაგალითად, ყველა

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

სახის მატრიცთა სიმრავლე.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს სიმრავლე წარმოადგენს რგოლს.

ამ რგოლისათვის ნებისმიერი

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

სახის მატრიცი იქნება მარცხენა ერთეული, ვინაიდან

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

განსახილავ რგოლში არ არსებობს მარჯვენა ერთეულები.

თუ რგოლში არსებობს მარჯვენა I_r ერთეული და მარცხენა I_l ერთეულიც, მაშინ ისინი ერთმანეთის ტოლია.

მართლაც, ვინაიდან I_l არის მარცხენა ერთეული, ამიტომ გვაქვს:

$$I_l I_r = I_r.$$

მეორეს მხრივ, ვინაიდან I_r არის მარჯვენა ერთეული, ამიტომ გვაქვს:

$$I_l I_r = I_l.$$

მაშასადამე, $I_l = I_r$. ამ შემთხვევაში რგოლში საზოგადოდ არსებობს მხოლოდ ერთი ერთეული. რგოლის ამ ერთეულს ჩვენ აღვნიშნავთ I-თი.

ვთქვათ, რომ K-ში არსებობს I ერთეული. თუ K რგოლის A ელემენტისათვის არსებობს $\widetilde{A}_r$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$A\widetilde{A}_r = I, \tag{151}$$

მაშინ A_r ელემენტს ეწოდება მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი A-თვის.

თუ A ელემენტისათვის არსებობს $\widetilde{A}_l$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$A_l\widetilde{A} = I, \tag{152}$$

მაშინ $\widetilde{A}_l$ ელემენტს ეწოდება მარცხენა შებრუნებული ელემენტი A-თვის.

დავუშვათ, რომ $\widetilde{A}$ ელემენტისათვის არსებობს როგორც მარჯვენა შებრუნებული $\widetilde{A}_r$ ელემენტი, ისე მარცხენა შებრუნებული $\widetilde{A}_r$

ელემენტი; მაშინ გავამრავლებთ რა (151) ტოლობის ორივე ნაწილს მარცხნიდან $\widetilde{A}_l$-ზე, მივიღებთ:

$$\widetilde{A}_l(A\widetilde{A}_r)=\widetilde{A}_l I=\widetilde{A}_l. \tag{153}$$

მეორეს მხრივ, გავამრავლებთ რა (151) ტოლობის ორივე ნაწილს მარჯვნიდან $\widetilde{A}_r$, მივიღებთ:

$$(\widetilde{A}_l A)\widetilde{A}_r=I\widetilde{A}_r=\widetilde{A}_r. \tag{154}$$

(153) და (154) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\widetilde{A}_l=\widetilde{A}_r.$$

მაშასადამე, თუ A ელემენტისათვის არსებობს როგორც მარჯვენა შებრუნებული A_r ელემენტი, ისე მარცხენა შებრუნებული A_l ელემენტი, მაშინ მარცხენა შებრუნებული ელემენტი უდრის მარჯვენა შებრუნებულ ელემენტს. ამ შემთხვევაში ჩვენ აღვნიშნავთ

$$A_l=A_r=A^{-1}.$$

A^{-1} ელემენტს ეწოდება შებრუნებული A-ს მიმართ.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ A ელემენტისათვის არსებობს შებრუნებული ელემენტი, მაშინ იგი არის მხოლოდ ერთი.

თუ A ელემენტი არის ნულის გამყოფი, მაშინ A-თვის არ არსებობს შებრუნებული ელემენტი. მართლაც, დავუშვათ, მაგალითად, რომ A არის ნულის მარჯვენა გამყოფი, ე. ი. რომ არსებობს რგოლში ნულისაგან განსხვავებული B ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$AB=0.$$

თუ გავამრავლებთ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილს მარცხნიდან A^{-1}-ზე, მივიღებთ

$$(A^{-1}A)B=0$$

ანუ

$$B=0,$$

რაც შეუძლებელია.

კერძოდ, 0 ელემენტისათვის არ არსებობს შებრუნებული ელემენტი.

განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენენ ის რგოლები, რომლებშიაც **არსებობს ერთეული** I და ნულისაგან განსხვავებული ყოველი ელემენტისათვის **არსებობს შებრუნებული ელემენტი**. ასეთ რგოლს ეწოდება **ველი ანუ სხეული***.

ველის ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტთა სიმრავლე წარმოადგენს **ჯგუფს გამრავლების** ოპერაციის მიმართ.

პირიქით, თუ K რგოლს ნულისაგან განსხვავებული ელემენტთა სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ, მაშინ K არის ველი.

მივიღებთ რა მხედველობაში მე-4 პარაგრაფის მე-4 მუხლის შენიშვნას, უშუალოდ ვღებულობთ:

იმისათვის რომ K რგოლი იყოს ველი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ განტოლებანი

$$AX=B \quad \text{და} \quad YA=B,$$

სადაც $A \neq 0$, იყვნენ ამოხსნადი K ველში.

თუ გამრავლების ოპერაცია ველში კომუტატიურია, მაშინ ველს ეწოდება **კომუტატიური**; უნდა აღვნიშნოთ, რომ ზოგიერთი ავტორები ინარჩუნებენ ტერმინს „ველი" მხოლოდ კომუტატიური ველებისათვის.

რიცხვითი ველი (თავი I) ყოველთვის კომუტატიურია.

კომუტატიურ ველში შეიძლება განვსაზღვროთ გაყოფა, როგორც გამრავლების შებრუნებული ოპერაცია. თუ A და B არიან კომუტატიური K ველის ელემენტები და $A \neq 0$, მაშინ განტოლება

$$AX=B$$

ემთხვევა განტოლებას

$$XA=B;$$

ამ განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსენი:

$$X=BA^{-1}=A^{-1}B.$$

X ელემენტს ჩვენ ვუწოდებთ **განაყოფს** B ელემენტისა A-ზე და აღვნიშნავთ $\frac{B}{A}$-თი:

$$\frac{B}{A}=BA^{-1}=A^{-1}B.$$

* რუს. тело, корпус.

ამრიგად, კომუტატიურ ველში შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციები (გარდა 0-ზე გაყოფისა) **ყოველთვის სრულდება და არიან ცალსახა.**

ველისათვის, ისე როგორც რგოლებისათვის, შეიძლება შემოვიღოთ **იზომორფიზმის** ცნება: ორ ველს K და K' ეწოდებათ **იზომორფული**, თუ მათ ელემენტთა შორის შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთ ცალსახა თანადობა ისე, რომ K ველის ორი ელემენტის ჯამსა და ნამრავლს ეთანადებოდეს K' ველის სათანადო ელემენტების ჯამი და ნამრავლი,

ასე, მაგალითად.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

სახის ყველა მატრიცთა სიმრავლე, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, წარმოადგენს, როგორც ადვილად დავრწმუნდებით, ველს, რომელიც იზომორფულია $a+bi$ სახის ყველა კომპლექსურ რიცხვთა ველისა. ეს შედეგი შეიძლება დავუკავშიროთ კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას (შეად. თ. I, § 3, მუხ. 8).

აბსტრაქტიული რგოლებისა და ველების ვრცელი შესწავლა გამოდის ამ წიგნის ფარგლებიდან; ჩვენ მივუთითებთ მკითხველს ლიტერატურას, რომელიც ამ წიგნის ბოლოშია ნაჩვენები (იხ. განსაკუთრებით: Вавдер-Варден, Современная алгебра, ნაწ. I და II).

კითხვები თვით შემოწმებისათვის

1. n უცნობიან წრფივ n განტოლებათა სისტემას რა შემთხვევაში აქვს ერთი განსაზღვრული ამონახსენი? როგორ მიიღება ეს ამონახსენი?

2. რა არის მატრიცის რანგი?

3. როგორ უნდა მივიღოთ n უცნობიანი m წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, თუ კოეფიციენტების მატრიცის რანგი m-ის ტოლია? შეიძლება თუ არა ასეთი სისტემის ამოხსნა ყოველი m უცნობის მიმართ?

4. რა არის სისტემის მთავარი დეტერმინანტი?

5. თუ სისტემის განტოლებათა რიცხვი უდრის m-ს, ხოლო კოეფიციენტების მატრიცის რანგი r-ის ტოლია, მაშინ რამდენი იქნება მახასიათებელი დეტერმინანტი?

6. რაში მდგომარეობს წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის აუცილებელი საკმარისი პირობები?

7. რა პირობებში აქვს n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემას ერთი განსაზღვრული ამოხსნა?

8. თუ მოცემულია წრფივ ფორმათა სისტემა, მაშინ როგორ განვსაზღვროთ წრფივად დამოუკიდებელ ფორმათა მაქსიმალური რიცხვი ამ სისტემაში?

9. რაში მდგომარეობს n უცნობიან $n+1$ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის აუცილებელი პირობა? რა შემთხვევაში იქნება ეს პირობა საკმარისიც?

10. რა პირობებში აქვს n უცნობიან n ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას არანულოვანი ამოხსნები?

11. როგორ მიიღება n უცნობიან n ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა კოეფიციენტების მატრიცის რანგი $(n-1)$-ის ტოლია?

12. როგორ შეიძლება განვსაზღვროთ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა რიცხვი ვექტორების სისტემაში?

13. როგორ გამოისახება გეომეტრიულად ამოცანა წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შესახებ?

14. რამდენი წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნა შეიძლება ჰქონდეს წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას?

15. როგორ სდგება ორი მატრიცის ნამრავლი?

16. რას ეტოლება „ნამრავლი-მატრიცის“ დეტერმინანტი?

17. როგორ სდგება შებრუნებული გადაქმნის მატრიცი?

18. მოიყვანეთ ჯგუფის ზუსტი განმარტება.

19. რა პირობებში ჯგუფში შემავალი ელემენტთა სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფის ქვეჯგუფს?

20. რა არის ჯგუფის ელემენტის რიგი?

21. რას ეწოდება მოსაზღვრე კლასი?

21. როგორ ელემენტებს ეწოდებათ შეუღლებული?

23. რა არის ნორმალური გამყოფი?

24. როგორ ჯგუფებს ეწოდებათ იზომორფული?

25. მოიყვანეთ რგოლის ზოგადი განმარტება.

26. რა არის „ნულის გამყოფი“?

27. რა არის ველი?

28. რა პირობებში ორ ველს ეწოდებათ იზომორფული? მოიყვანეთ მაგალითები.

თავი IX

კვადრატული ფორმები

§ 1. კვადრატული ფორმების მიყვანა კვადრატების ჯამის სახემდე (ლაგრანჟის ხერხი)

1. II თავის, I პარაგრაფში ჩვენ ვსარგებლობდით კვადრატული ფორმის ცნობით. გავიხსენოთ, რომ $x, y, \ldots, v$ ცვლადების კვადრატული ფორმა ეწოდება ამ ცვლადთა ერთგვაროვან მეორე ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციას, ასე მაგალითად ორ ცვლადზე დამოკიდებულ კვადრატულ ფორმას (ბინარულ კვადრატულ ფორმას) აქვს შემდეგი სახე:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

სადაც a, b, c მუდმივი კოეფიციენტებია.

სამ ცვლადზე დამოკიდებული კვადრატული ფორმა (ტერნალური კვადრატული ფორმა) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$a_{11}x + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx,$$

სადაც a_{ik} — მუდმივი კოეფიციენტებია.

კვადრატულ ფორმებს ვხვდებით მათემატიკისა და ტექნიკის ბევრ საკითხებში. მაგალითად ვექტორის სიგრძის კვადრატი წარმოადგენს მისი კოორდინატების კვადრატულ ფორმას. ანალიზურ გეომეტრიაში მეორე რიგის მრუდთა და მეორე რიგის ზედაპირთა თეორია მჭიდროთ არის დაკავშირებული კვადრატული ფორმების თეორიასთან.

მეორე რიგის ცენტრალური მრუდის განტოლებას (თუ კოორდინატთა სათავე იმყოფება მრუდის ცენტრში) აქვს შემდეგი სახე:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = h,$$

სადაც a, b, c, h — მუდმივი კოეფიციენტებია (ნამდვილნი), აქ მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს x, y კოორდინატების კვადრატულ

ფორმას. კოორდინატთა ღერძების სათანადო შემობრუნებით ე. ი. შემდეგი სახის გარდაქმნით:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
(a)
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

მრუდის განტოლება შეიძლება მივიყვანოთ სახეზე:

$$a'x'^2 + c'y'^2 = h,$$

სადაც a', c' — ახალი მუდმივი კოეფიციენტებია. ამ გარდაქმნებს ანალიზურ გეომეტრიაში მივყევართ ელიპსისა ჰიპრბოლის მარტივ განტოლებამდე. ალგებრული თვალსაზრისით ჩვენ აქ გვაქვს კვადრატული ფორმის დაყვანა წრფივი გარდაქმნის საშუალებით „კანონიკურ სახეზე", რომელიც შეიცავს მხოლოდ ცვლადების კვადრატებს.

(a) წრფივი გარდაქმნა წარმოადგენს კერძო შემთხვევას შემდეგი სახის ერთგვაროვანი წრფივი გარდაქმნისა:

$$x = b_{11}x' + b_{12}y',$$
(b)
$$y = b_{21}x' + b_{22}y'.$$

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ერთგვაროვან წრფივ გარდაქმნებს.

თუ კვადრატულ ფორმაზე

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

მოვახდენთ (b) წრფივ გარდაქმნას ე. ი. x, y ცვლადების ნაცვლად ჩავსვამთ x'-თა და y'-ით გამოსახულ მათ მნიშვნელობებს, მაშინ მოცემული ფორმა გადავა ახალ ფორმაში

$$H = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

რომლის კოეფიციენტები (a', b', c') დამოკიდებულნი არიან F ფორმისა და (b) გარდაქმნის კოეფიციენტებზე.

თუ (b) გარდაქმნა არაგანკუთრია, მაშინ ცვლადები x', y' შეიძლება გამოვსახოთ x და y-ით. თუ ჩავსვამთ ამ გამოსახულებებს H ფორმაში, ჩვენ მივიღებთ კვლავ F ფორმას.

(b) სახის ყველა არაგანკუთრ გარდაქმნათა სიმრავლე ნამდვილი კოეფიციენტებით ქმნიან ჯგუფს. (a) სახის გარდაქმნები ქმნიან ამ

ჯგუფის ქვეჯგუფს. თუ H კვადრატული ფორმა მიიღება F ფორმისაგან რომელიმე ჯგუფისადმი კუთვნილი გარდაქმნით მაშინ F მიიღება H-გან შებრუნებული გარდაქმნით, რომელიც ეკუთვნის იმავე ჯგუფს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფორმები F და H ექვივალენტურნი არიან ამ ჯგუფის მიმართ (იხ. ქვემოთ § 2, მუხ. 2). ამგვარად ჩვენ მივედით გარკვეული ჯგუფების მიმართ ფორმების კლასიფიკაციამდე. მეორე რიგის მრუდთა (ელიპსები, ჰიპერბოლები, პარაბოლები) ჩვეულებრივი კლასიფიკაცია დაკავშირებულია (b) სახის ნამდვილი კოეფიციენტებიანი არაგანკუთრი გარდაქმნის მიმართ ნამდვილი კვადრატული ფორმების კლასიფიკაციასთან. ასეთ კლასიფიკაციას ჩვენ მოვიყვანთ ამ თავის მეორე პარაგრაფში.

ნამდვილი კვადრატული ფორმების ამ კლასიფიკაციას აქვს დიდი მნიშვნელობა ანალიზშიც, მრავალ ცვლადის ფუნქციათა მაქსიმუმების და მინიმუმების თეორიაშიც. აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ სწორედ ამ ამოცანასთან დაკავშირებით 1759 წელს ლაგრანჟმა მოგვცა კვადრატული ფორმების კანონიკურ სახეზე გარდაქმნის ის მეთოდი, რომელსაც ჩვენ ქვემოდ გავეცნობით, ლაგრანჟმა ეს ხერხი გამოაქვეყნა მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობათა თეორიისადმი მიძღვნილ დიდ შრომაში („Recherches sur la methode de maximis et minimis").

2. განვიხილოთ $x_1, x_2, \ldots x_n$, n ცვლადზე დამოკიდებული კვადრატული ფორმა. შეიძლება ჩაწერილ იქნას შემდეგი სახით:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 +$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 +$$
$$+ \ldots + 2a_{n-1,n}\,x_{n-1}\,x_n,$$

სადაც კოეფიციენტები $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{n-1,n}$ ნებისმიერი ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია. ჩვენ ჩვეულებრივ ვისარგებლებთ შემოკლებული ჩაწერით:

$$F = \sum_{i,k} a_{ik}\,x_i\,x_k;$$

აქ მარჯვენა ნაწილში ჯამი ვრცელდება i და k ინდექსების ყველა მნიშვნელობებზე 1-დან n-დე. ამასთანავე ჩვენ ვიგულისხმებთ

$$a_{ik} = a_{ki},$$

ყოველი ნამრავლი $x_i x_k$ როცა $k \neq i$ გვხვდება $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$ ჯამში ორჯერ; მაგალითად, როცა $i=1$, $k=2$, ვღებულობთ წევრს $a_{12} x_1 x_2$; როცა $i=2$, $k=1$, ვღებულობთ $a_{21} x_2 x_1 = a_{12} x_1 x_2$. ამის შემდეგ ნამრავლი $x_i x_k$ ღებულობს კოეფიციენტს $2a_{ik}$, თუ $i \neq k$.

კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისაგან შეიძლება შევადგინოთ მატრიცი

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამ მატრიცს ეწოდება კვადრატული ფორმის მატრიცი, ხოლო მისგან შედგენილ D_A დეტერმინანტს კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტს კვადრატული მატრიცი აკმაყოფილებს სიმეტრიულობის პირობას: $a_{ik} = a_{ki}$. ასეთ მატრიცს ეწოდება სიმეტრიული.

თუ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი უდრის ნულს, მაშინ ფორმას ეწოდება განსაკუთრებული ანუ გადაგვარებული.

ვნახოთ როგორ გარდაიქმნება კვადრატული ფორმა ცვლადთა წრფივი გარდაქმნის დროს. წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ გადავდივართ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადებიდან ახალ $x'_1, x'_2, \dots x'_n$ ცვლადებზე არაგანკუთრი წრფივი გარდაქმნების საშუალებით

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11} x'_1 + b_{12} x'_2 + \dots + b_{1n} x'_n, \\ x_2 &= b_{21} x'_1 + b_{22} x'_2 + \dots + b_{2n} x'_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= b_{n1} x'_1 + b_{n2} x'_2 + \dots + b_{nn} x'_n. \end{aligned}$$

ანუ

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x'_k \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

გარდაქმნის კოეფიციენტები ქმნიან მატრიცს $B=(b_{ij})$ ამ მატრიციდან შედგენილი დეტერმინანტი D_B განსხვავებულია ნულისაგან. ამ დეტერმინანტს ხშირად გარდაქმნის მოდულს უწოდებენ.

თუ F ფორმაში ჩავსვამთ $x_1, \ldots, x_n$-ის ნაცვლად მათს გამოსახულებებს $x'_1, \ldots x'_n$, მაშინ ვიპოვით

$$F = \sum_{i,\ k} a_{ik}(b_{i_1}x'_1 + b_{i_2}x'_2 + \ldots + b_{in}x'_n)(b_{k_1}x'_1 + b_2 x'_2 + \ldots + b_{kn}x'_n).$$

მაგრამ

$$(b_{i_1}x'_1 + b_{i_2}x'_2 + \ldots + b_{in}x'_n)(b_{k_1}x'_1 + b_{h_2}x'_2 + \ldots + b_{kn}x'_n) = \sum_{h,\ l} b_{ih}b_{kl}x'_h x'_l,$$

ამიტომ

$$F = \sum_{i,\ k} a_{ik} \sum_{h,\ l} b_{ih}\, b_{kl}\, x'_k\, x'_l.$$

თუ ჩვენ აღვნიშნავთ a_{hl}-ით კოეფიციენტს $x_h'x'$-სა მარჯვენა ნაწილში, მაშინ გვექნება

$$a'_{hl} = \sum_{i,\ k} a_{ik}\ b_{ih}\ b_{kl}\,. \tag{1}$$

ამგვარად ახალ $x'_1, \ldots, x'_n$ ცვლადებში ფორმა ღებულობს სახეს:

$$F = \sum_{h,\ l} a'_{hl}\, x'_h\, x'_l\ ,$$

სადაც კოეფიციენტები a'_{hl} განისაზღვრებიან (1) ფორმულით.

აღვნიშნოთ A'-ით ახალი, a'_{hl} კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცი: $A' = (a'_{hl})$. მატრიცი A' სიმეტრიულია. მართლაც ჩვენ გვაქვს:

$$a'_{lh} = \sum_{i,\ k} a_{ik}\, b_{il}\, b_{kh};$$

მაგრამ ჯამის მნიშვნელობა არ იცვლება თუ აღვნიშნავთ აჯამვის ინდექსებს სხვა ასოებით; ამიტომ ჩვენ უფლება გვაქვს აჯამვის ინდექსი i შევცვალოთ k-თი, ხოლო k i-თ. მაშინ მივიღებთ

$$a'_{lh} = \sum_{i,\ k} a_{ki}\, b_{kl}\, b_{ih}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ მატრიცი $A=(a'_{ik})$ სიმეტრიულია, გვექნება

$$a'_{lh}=\sum_{i,k} a_{ik}\, b_{kl}\, b_{ih}.$$

თუ შევადარებთ ამ გამოსახულებას (1)-ს ვიპოვით $a'_{lh}=a_{hl}$. A' მატრიცი შეიძლება მარტივად გამოვსახოთ A მატრიცისაგან, გარდაქმნის მატრიცი B და მატრიცი B^*, რომელიც მიღებულია B-გან სტრიქონების სვეტების შეცვლით. მართლაც (1) გამოსახულება a'_{hl}-თვის შედგენილია ორი i და k ინდექსებით აჯამვის საშუალებით. მოვახდინოთ ჯერ აჯამვა k ინდექსით (i-ს ვთვლით ფიქსირებულად), ხოლო შემდეგ i-თ. ანუ სხვანაირად: წარმოვიდგინოთ (1) გამოსახულება შემდეგი სახით:

$$a'_{hl}=\sum_{i,k} a_{ik}\, b_{kl}\, b_{ih}=\sum_{i}\Big(\sum_{k} a_{ik}\, b_{kl}\Big)\, b_{ih}.$$

დავუშვათ

$$c_{il}=\sum_{k} a_{ik}\, b_{kl}:$$

აქ A მატრიცის i-ური სტრიქონის ელემენტი მრავლდება B მატრიცის k-ური სვეტის ელემენტზე. მაშასადამე მატრიცი $c=(c_{il})$ უდრის A მატრიცის ნამრავლს B მატრიცზე:

$$C=A\cdot B$$

მეორე მხრივ გამოსახულება a'_{hl}-თვის ღებულობს სახეს:

$$a'_{hl}=\sum_{i} b_{ih}\, c_{il}.$$

განვიხილოთ მატრიცი B^* ტრანსპორნირებული B-ს მიმართ. მაშინ

$$b_{ih}=b^*_{hi},$$

და მაშასადამე

$$a'_{hl}=\sum_{i} b^*_{hi}\, c_{il}.$$

მარჯვენა ნაწილში B^* მატრიცის h-ური სტრიქონის ელემენტი მრავლდება c მატრიცის l-ურ სვეტის ელემენტზე. მაშასადამე.

$$A' = B^* C$$

ანუ, რადგან $C = AB$, ამიტომ

$$A' = B^* AB. \tag{2}$$

ეს ძირითადი თანაფარდობა გამოსახავს გარდაქმნილი ფორმის მატრიცს საწყისი ფორმის მატრიცისა და გარდაქმნის მატრიცის საშუალებით. (2) თანაფარდობიდან VIII § 3, 5 თეორემის ძალით უშუალოდ გამომდინარეობს შესაბამისი თანაფარდობა დეტერმინანტებისათვის:

$$D_{A'} = D_{B^*} D_A D_B.$$

მაგრამ $D_{B^*} = D_B$, მაშასადამე,

$$D_{A'} = D_A D_B^2. \tag{3}$$

ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ წინადადებას:

გარდაქმნილი ფორმის დეტერმინანტი უდრის საწყისი ფორმის დეტერმინანტს გამრავლებულს გარდაქმნის მოდულის კვადრატზე.

ვინაიდან $D_B \neq 0$, ამიტომ (3) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს: თუ საწყისი ფორმა იყო არაგანკუთრი, მაშინ გარდაქმნილი ფორმაც არაგანკუთრი იქნება. ან სხვანაირად: თუ A მატრიცის რანგი უდრის n-ს, მაშინ A' მატრიცის რანგიც n-ის ტოლია. ჩვენ ვნახავთ, რომ A' მატრიცის რანგი ყოველთვის უდრის A მატრიცის რანგს.

3. დავუშვათ, რომ A და B იყვნენ ნებისმიერი მატრიცები. აღვნიშნოთ $C = (c_{ik})$-თ A მატრიცის ნამრავლი B მატრიცზე:

$$C = AB,$$

განვიხილოთ c — მატრიცისაგან მიღებული რაიმე დეტერმინანტი. ამისათვის c მატრიციდან ავარჩიოთ რომელიმე k სტრიქონი (ვთქვათ

ამ სტრიქონების ნომრები იყოს $i_1, i_2, \ldots, i_k$) და k სვეტი (ნომრებით $j_1, j_2, \ldots, j_k$):

$$\Delta_{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k} = \begin{vmatrix} c_{i_1 j_1} & c_{i_1 j_2} & \ldots & c_{i_1 j_k} \\ c_{i_2 j_1} & c_{i_2 j_2} & \ldots & c_{i_2 j_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i_k j_1} & c_{i_k j_2} & \ldots & c_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ დეტერმინანტი $\Delta i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k$ (სიმოკლისათვის მას ვუწოდოთ უბრალოდ Δ) შეიძლება წარმოვადგინოთ შესაბამისად A და B მატრიციდან შედგენილ რაიმე დეტერმინანტების ნამრავლის ჯამის სახით. აქ ჩვენ ვისარგებლებთ იმავე მეთოდით, რომელიც მოცემულია VIII თავის § 3 5-ში, მხოლოდ რამდენადმე გართულებული სახით.

C მატრიცის ყოველი c_{ik} ელემენტი შედგება A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის k-ური სვეტის ელემენტებისაგან VIII თავის მე-3 პარაგრაფის მე-4 პუნქტის (104′) ფორმულის თანახმად. კერძოდ Δ დეტერმინანტის $c_{i_r j_s}$ ელემენტისათვის ვღებულობთ:

$$c_{i_r j_s} = a_{i_r 1} b_{1 j_s} + a_{i_r 2} b_{2 j_s} + \ldots + a_{i_r n} b_{n j_s}.$$

ამრიგად Δ დეტერმინანტის ყოველი ელემენტი წარმოგვიდგება n შესაკრებთა ჯამის სახით. ვინაიდან Δ დეტერმინანტის სვეტების რიცხვი უდრის k-ს, ამიტომ იგი შეგვიძლია დავშალოთ n^k დეტერმინანტების ჯამად, რომელსაც ექნება შემდეგი სახე (შეად. VIII თავის § 3 მუხ. 5):

$$\Delta_{\alpha\beta \ldots \chi} = \begin{vmatrix} a_{i_1 \alpha} b_{\alpha j_1} & a_{i_1 \beta} b_{\beta j_1} & \ldots & a_{i_1 \chi} b_{\chi j_k} \\ a_{i_2 \alpha} b_{\alpha j_2} & a_{i_2 \beta} b_{\beta j_2} & \ldots & a_{i_2 \chi} b_{\chi j_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_k \alpha} b_{\alpha j_1} & a_{i_k \beta} b_{\beta j_2} & \ldots & a_{i_k \chi} b_{\chi j_k} \end{vmatrix},$$

მაშასადამე, ჩვენ გვექნება:

$$\Delta = \sum_{\alpha\beta \ldots \varkappa} \Delta_{\alpha\beta \ldots \chi},$$

სადაც k ინდექსებიდან ყოველს $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობა 1-დან n-დე. თუ $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ ინდექსებიდან ორი

რომელიმე მათგანი ტოლია, მაშინ სათანადო დეტერმინანტი $\Delta_{\alpha\beta\ldots\chi}$ იქცევა ნულად, ვინაიდან მას ექნება ორი ისეთი სვეტი, რომლის ელემენტები პროპორციულნი იქნებიან. ამიტომ ნულისაგან განსხვავებულნი იქნებიან $\Delta_{\alpha\beta}\ldots\varkappa$-ის დეტერმინანტები, რომლებშიაც $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ წარმოადგენენ $1, 2, \ldots, n$ ინდექსთა რიცხვიდან k განსხვავებულ ინდექსთა რაიმე განლაგებას. ამგვარად, Δ დეტერმინანტი წარმოადგენს ყველა $\Delta_{\alpha\beta}\ldots\varkappa$ დეტერმინანტების ჯამს, რომლებიც ეთანადებიან $1, 2, \ldots, n$ ინდექსებიდან სხვადასხვა განლაგებას k-ს მიხედვით. ეს ჯამი შეიძლება დავყოთ შესაკრებთა ჯგუფებად, თუ გავაერთიანებთ ერთ ჯგუფში იმ შესაკრებებს, რომლებიც ეთანადებიან ინდექსთა ერთსა და იგივე შერჩევას (ე. ი. განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან მხოლოდ ინდექსთა რიგით). გამოვყოთ შესაკრებთა ასეთი ერთი ჯგუფი და განვიხილოთ იგი ცალკე. ამ მიზნისათვის ავირჩიოთ k ინდექსთა რაიმე გარკვეული განლაგება. ვთქვათ, ეს ინდექსები, განლაგებული ზრდადი წესით, არიან

$$h_1, h_2, \ldots, h_k.$$

$\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ იყოს ამ ინდექსთა რაიმე გადანაცვლება. შესაბამისი დეტერმინანტი $\Delta_{\alpha\beta}\ldots\varkappa$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta_{\alpha\beta}\ldots\varkappa = \begin{vmatrix} a_{i_1\alpha} & a_{i_1\beta} & \ldots & a_{i_1\varkappa} \\ a_{i_2\alpha} & a_{i_2\beta} & \ldots & a_{i_2\varkappa} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_k\alpha} & a_{i_k\beta} & \ldots & a_{i_k\varkappa} \end{vmatrix}.$$

მაგრამ მარჯვენა ნაწილში მდგომი დეტერმინანტი განსხვავდება მხოლოდ სვეტების რიგით შემდეგი დეტერმინანტისაგან:

$$A_{(i_r, h_s)} = \begin{vmatrix} a_{i_1h_1} & a_{i_1h_2} & \ldots & a_{i_1h_k} \\ a_{i_2h_1} & a_{i_2h_2} & \ldots & a_{i_2h_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_kh_1} & a_{i_kh_2} & \ldots & a_{i_kh_k} \end{vmatrix}$$

ამიტომ

$$\begin{vmatrix} a_{i_1\alpha} & a_{i_1\beta} & \ldots & a_{i_1\varkappa} \\ a_{i_2\alpha} & a_{i_2\beta} & \ldots & a_{i_2\varkappa} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_k\alpha} & a_{i_k\beta} & \ldots & a_{i_k\varkappa} \end{vmatrix} = \pm A_{(i_r, h_s)},$$

სადაც ნიშანი „პლუსი“ შეესაბამება $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$, წყვილ გარდანაცვლებას, ხოლო „მინუსი“ კენტს. მაშასადამე, $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ ყოველგვარი გარდანაცვლების დროს $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ინდექსებისათვის გვექნება

$$\Delta_{\alpha\beta\ldots\varkappa} = \pm b_{\alpha j_1} b_{\beta j_2} \ldots b_{\varkappa j_k} A_{(i_r, h_s)}.$$

განვიხილოთ ახლა ჯამი $S_{(h_1 h_2 \ldots h_k)}$ ყველა $\Delta_{\alpha\beta\ldots\varkappa}$ დეტერმინანტებისა, რომლებიც ეთანადებიან $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ინდექსების სხვადასხვა გარდანაცვლებას $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$. ეს ჯამი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$S_{(h_1 h_2 \ldots h_k)} = \sum \pm b_{\alpha j_1} b_{\beta j_2} \ldots b_{\varkappa j_k} A_{(i_r, h_s)},$$

ან

$$S_{(h_1 h_2 \ldots h_k)} = A_{(i_r, h_k)} \sum \pm b_{\alpha j_1} b_{\beta j_2} \ldots b_{\varkappa j_k},$$

სადაც შეჯამება მარჯვენა ნაწილში ვრცელდება $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ ყველა გარდანაცვლებებზე h_1, h_2, h_k ინდექსებისათვის. ჯამი $\Sigma \pm b_{\alpha j_1} b_{\beta j_2} \ldots b_{\varkappa j_k}$ სხვა არაფერს არ წარმოადგენს გარდა შემდეგი სახის დეტერმინანტისა:

$$B_{(h_s, j_t)} = \begin{vmatrix} b_{h_1 j_1} & b_{h_1 j_2} & \ldots & b_{h_1 j_k} \\ b_{h_2 j_1} & b_{h_2 j_2} & \ldots & b_{h_2 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h_k j_1} & b_{h_k j_2} & \ldots & b_{h_k j_k} \end{vmatrix}.$$

მაშასადამე

$$S_{(h_1 h_2 \ldots h_k)} = A_{(i_r, h_s)} B_{(h_s, j_t)}$$

ან

$$S_{(h_1 h_2 \ldots h_k)} = \begin{vmatrix} a_{i_1 h_1} & a_{i_1 h_2} & \ldots & a_{i_1 h_k} \\ a_{i_2 h_1} & a_{i_2 h_2} & \ldots & a_{i_2 h_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k h_1} & a_{i_k h_2} & \ldots & a_{i_k h_k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{h_1 j_1} & b_{h_1 j_2} & \ldots & b_{h_1 j_k} \\ b_{h_2 j_1} & b_{h_2 j_2} & \ldots & b_{h_2 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h_k j_1} & b_{h_k j_2} & \ldots & b_{h_k j_k} \end{vmatrix}.$$

ჩვენ $S_{(h_1 h_2 \ldots h_k)}$-თი აღვნიშნეთ $\Delta_{\alpha\beta\ldots\varkappa}$ დეტერმინანტების ჯამი, რომლებიც შეესაბამებიან k განსაზღვრულ $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ინდექსებისაგან შედგენილ $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ გარდანაცვლებებს.

ეხლა გავიხსენოთ, რომ Δ დეტერმინანტი წარმოადგენს ყველა იმ $\Delta_{\alpha\beta} \ldots \varkappa$-ს ჯამს, რომლებიც შეესაბამებიან n ინდექსებიდან k-ს მიხედვით ყოველგვარ განლაგებას. თუ ჩვენ გავაერთიანებთ ერთ ჯგუფში იმ $\Delta_{\alpha\beta} \ldots \varkappa$ შესაკრებებს, რომელთათვისაც $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ ინდექსები განსხვავდებიან გარკვეული ჯუფთებისაგან $h_1, h_2, \ldots, h_k$ მხოლოდ რიგით, მაშინ ჯამი ამ წევრებისა შეადგენს სწორედ $S_{(h_1 h_2 \cdots h_k)}$-ს. რომ მივიღოთ Δ დეტერმინანტი, საჭიროა შევადგინოთ ყველა $S_{(h_1 h_2 \ldots h_k)}$ გამოსახულების ჯამი, რომლებიც ეთანადებიან $1, 2, \ldots, n$ ინდექსებიდან k-ს მიხედვით სხვადასხვა ჯუფთებას. ამგვარად

$$\Delta = \sum_{h_1 \ldots h_k} S_{(h_1 h_2 \cdots h_k)}$$

ან

$$(4) \quad \begin{vmatrix} c_{i_1 j_1} & c_{i_1 j_2} & \ldots & c_{i_1 j_k} \\ c_{i_2 j_1} & c_{i_2 j_2} & \ldots & c_{i_2 j_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i_k j_1} & c_{i_k j_2} & \ldots & c_{i_k j_k} \end{vmatrix} = \sum_{h_1 \cdots h_k} \begin{vmatrix} a_{i_1 h_1} & a_{i_1 h_2} & \ldots & a_{i_1 h_k} \\ a_{i_2 h_1} & a_{i_2 h_2} & \ldots & a_{i_2 h_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_k h_1} & a_{i_k h_2} & \ldots & a_{i_k h_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{h_1 j_1} & b_{h_1 j_2} & \ldots & b_{h_1 j_k} \\ b_{h_2 j_1} & b_{h_2 j_2} & \ldots & b_{h_2 j_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{h_k j_1} & \cdot & \ldots & b_{h_k j_k} \end{vmatrix}.$$

ჯამი მარჯვენა ნაწილში ვრცელდება $1, 2, \ldots, n$ ინდექსთან ყველა სხვადასხვა ჯუფთებაზე $h_1, h_2, \ldots, h_k$ k-თი. ამ ფორმულით სარგებლობა ჩვენ მოგვიხდება შემდეგშიც.

ამრიგად, ყოველი k რიგის დეტერმინანტი შედგენილი C მატრიცისაგან უდრის A და B მატრიცებისაგან შედგენილ იმავე რიგის დეტერმინანტთა ნამრავლის ჯამს.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ A მატრიცისაგან (ან შესაბამისად B მატრიცისაგან) შედგენილი ყველა k რიგის დეტერმინანტი უდრის ნულს, მაშინ C დეტერმინანტისაგან შედგენილი ყველა k რიგის დეტერმინანტები აგრეთვე ნულის ტოლი იქნებიან. ან სხვანაირად, თუ A მატრიცის (ან B მატრიცის) რანგი k-ზე დაბალია, მაშინ C-ს რანგიც იქნება k-ზე დაბალი. მაშასადამე, C მატრიცის რანგი არ აღემატება A და B მატრიცების რანგს.

ამრიგად ჩვენ ვღებულობთ შედეგს:

თუ C მატრიცი უდრის A და B მატრიცების ნამრავლს, მაშინ C მატრიცის რანგი არ აღემატება თითოეულ A და B მატრიცების რანგს.

შევნიშნავთ, რომ იგივე შედეგი შეგვეძლო მიგვეღო დამოუკიდებლად, თუ ვისარგებლებდით ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობით. მართლაც, განვიხილოთ ვექტორები

$$\overline{c_i}=\{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{in}\}, \quad \overline{b_i}=\{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{in}\};$$

თუ თანაფარდობაში:

$$(i) \qquad c_{ik}=a_{i_1}b_{ik}+a_{i_2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

ჩავთვლით i-ს ფიქსირებულად და დავუშვებთ, რომ $k=1, 2, \ldots, n$, მაშინ მივიღებთ n თანაფარდობას, რომლებიც შეიძლება ჩაიწეროს ვექტორული ტოლობის სახით

$$\overline{c_i}=a_{i_1}\overline{b_1}+a_{i_2}\overline{b_2}+\ldots+a_{in}b_n.$$

მაშასადამე, ვექტორები $\overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_n}$ წრფივად გამოისახებიან $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n}$ ვექტორებით. აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა რიცხვი $\overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_n}$ შორის არ აღემატება წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა რიცხვს $\overline{b_1}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ შორის, ე. ი. c მატრიცის რანგი არ აღემატება B-ს რანგს.

მეორეს მხრივ (i) თანაფარდობიდან ძნელი არ არის შევამჩნიოთ რომ რიცხვი წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორებისა $c_1, c_2, \ldots, c_n$, შორის არ აღემატება A მატრიცის რანგს ე. ი. C მატრიცის რანგი არ აღემატება A-ს რანგს.

აქამდე ჩვენ არ გაგვიკეთებია არავითარი კერძო შეზღუდვა A და B მატრიცების მიმართ. ეხლა დავუშვათ, რომ B არაგანსაკუთრებული მატრიცაა. მაშინ თანაფარდობა

$$C=AB$$

შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$A=CB^{-1}.$$

პირველი თანაფარდობიდან ჩვენ დავასკვენით, რომ C მატრიცის რანგი არ აღემატება A-ს რანგს, ხოლო მეორედან, რომ A-ს რანგი არ აღემატება C-ს რანგს. მაშასადამე, C-ს რანგი უნდა უდრიდეს A-ს რანგს.

ამრიგად, თუ C მატრიცი უდრის A მატრიცის ნამრავლს არაგანსაკუთრებულ B მატრიცზე, მაშინ C-ს რანგი უდრის A-ს რანგს.

ანალოგიურად, თუ A მატრიცი არაგანსაკუთრებულია, მაშინ C მატრიცის რანგი უდრის B-ს რანგს.

დავუბრუნდეთ ახლა საკითხს კვადრატული ფორმის გარდაქმნის შესახებ. ჩვენ დავინახეთ, რომ გარდაქმნილი ფორმის მატრიცი განისაზღვრება ტოლობით

$$A' = B^* AB,$$

სადაც A საწყისი ფორმის მატრიცია, ხოლო B—გარდაქმნის მატრიცი. იმის გამო, რომ მატრიცი B არაგანსაკუთრებულია, AB მატრიცის რანგი უდრის A-ს რანგს; მაგრამ B^*—აგრეთვე არაგანსაკუთრებული მატრიცია; მაშასადამე, A' მატრიცის რანგიც უდრის A მატრიცის რანგს. ამგვარად ჩვენ ვღებულობთ შემდეგს:

გარდაქმნილი ფორმის A' მატრიცს აქვს იგივე რანგი რაც A მატრიცს.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ განმარტება:

$$F = \sum_{i,\, k} a_{ik} x_i x_k$$

კვადრატული ფორმის რანგი ეწოდება ამ ფორმის კოეფიციენტებით შედგენილ $A = (a_{ik})$ მატრიცის რანგს. ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს:

ცვლადთა არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის დროს კვადრატული ფორმის რანგი უცვლელი რჩება.

უკანასკნელ შედეგს ჩვენ მივყავართ ინვარიანტის მნიშვნელოვან ცნებამდე.

ვთქვათ, $\varphi = \varphi(a_{11}, \ a_{12}, \ . \ . \ . \ , a_{nn})$ არის F კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების რაციონალური ფუნქცია. ჩვენ ვიტყვით, რომ φ ფუნქცია ინვარიანტულია B წრფივი გარდაქმნის მიმართ, თუ

$$\text{(I)} \qquad \varphi(a_{11}, \ a_{12}, \ . \ . \ . \ , a_{nn}) = \varphi(a'_{11}, \ a'_{12}, \ . \ . \ . \ , a'_{nn}),$$

სადაც $a'_{11}, \ a'_{12}, \ . \ . \ . \ , a'_{nn}$ — F ფორმისაგან B გარდაქმნის საშუალებით მიღებული ფორმის კოეფიციენტებია.

თუ φ ფუნქცია ინვარიანტია B_1 და B_2 გარდაქმნების მიმართ, მაშინ იგი დარჩება ინვარიანტი $B_1 B_2$ გარდაქმნის დროს, რომლის

შესრულება ტოლფასია B_1 და B_2 გარდაქმნების თანმიმდევრობით შესრულებისა. შემდეგ, თუ ფუნქცია φ ინვარიანტულია B გარდაქმნის მიმართ, მაშინ იგი აგრეთვე ინვარიანტულია B^{-1} გარდაქმნის მიმართ. რომ დავრწმუნდეთ ამაში, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (I) თანაფარდობა შეიძლება წავიკითხოთ მარჯვნიდან მარცხნითაც.

ამგვარად, ყველა არაგანსაკუთრებული გარდაქმნათა სიმრავლეს, რომელთა მიმართ φ ფუნქცია რჩება ინვარიანტული, აქვს შემდეგი თვისებები:

1) ამ სიმრავლის ორი, B_1B_2 გარდაქმნის ნამრავლი ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის.

2) განხილული სიმრავლის ყოველი ნებისმიერი B გარდაქმნისათვის შებრუნებული B^{-1} გარდაქმნა აგრეთვე იმავე სიმრავლეს ეკუთვნის.

VIII თავის § 4, მუხ. 4 თეორემის მიხედვით აქედან გამომდინარეობს, რომ **ყველა არაგანსაკუთრებულ გარდაქმნათა სიმრავლე, რომელთა მიმართ მოცემული φ ფუნქცია რჩება ინვარიანტული, წარმოადგენს ყველა არაგანსაკუთრებული გადაქმნის ჯგუფის ქვეჯგუფს.**

$\varphi=\varphi(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$ ფუნქციას ეწოდება F კვადრატული ფორმის **ინვარიანტი** $\mathfrak{G}$ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ, თუ იგი ინვარიანტია ჯგუფის ნებისმიერი გარდაქმნის მიმართ.

თუ ინვარიანტი წარმოადგენს მთელ რიცხვს, მაშინ მას **არითმეტიკული ინვარიანტი** ეწოდება!

ზემოთ აღნიშნული შედეგი გამოვთქვათ შემდეგნაირად:

კვადრატული ფორმის რანგი წარმოადგენს არითმეტიკულ ინვარიანტს ყველა არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფების მიმართ.

თუ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის გარდაქმნის შედეგად φ ფუნქცია არ რჩება ინვარიანტული, ხოლო მრავლდება D^{μ}-ზე, სადაც D გარდაქმნის მოდულია, ე. ი., თუ $\mathfrak{G}$ ჯგუფის ნებისმიერი გარდაქმნისათვის $\varphi(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{nn})=D^{\mu}\varphi(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$, მაშინ ამბობენ, რომ φ წარმოადგენს μ **წონის ფარდობით ინვარიანტს** $\mathfrak{G}$ ჯგუფის მიმართ.

მუხ. 2 (3) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ **კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი წარმოადგენს 2 წონის ფარდობით ინვარიანტს ყველა არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფების მიმართ.**

4. გამოვიყენოთ § 3-ის (4) ფორმულა ერთი კერძო შემთხვევისათვის. შემდგომში ჩვენ გვექნება საქმე ე. წ. „სამკუთხა“ მატრიცებთან. მატრიცს ეწოდება სამკუთხა, თუ მისი მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, ხოლო მთავარი დიაგონალის მარცხნივ მდგომი ყველა ელემენტი უდრის ნულს, ე. ი. აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

სადაც $b_{12}, b_{13} \dots$ — ნებისმიერი რიცხვებია. ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ იმაში, რომ **ორი სამკუთხა მატრიცის ნამრავლი აგრეთვე სამკუთხა მატრიცაა.**

შემდეგ, სამკუთხა მატრიცის შებრუნებული მატრიცი აგრეთვე სამკუთხა მატრიცია.

ამაში მარტივად დავრწმუნდებით შემდეგნაირად. განვიხილოთ სამკუთხა მატრიცის შესაბამისი წრფივი გარდაქმნა (**„სამკუთხა გარდაქმნა“**):

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 + \dots + b_{1,\,n-1}\,x'_{n-1} + b_{1n}x'_n, \\ x_2 &= \qquad\quad x'_2 + b_{23}x'_3 + \dots + b_{2,\,n-1}\,x'_{n-1} + b_{2n}x'_n, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x'_{n-1} + b_{n-1,\,n}\,x'_n \\ x_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x'_n. \end{aligned}$$

ამ თანაფარდობიდან ჩვენ თანმიმდევრობით განვსაზღვრავთ $x'_n, x'_{n-1}, \dots, x'_1$. ვინაიდან სხვაობა $x'_k - x_k$ წრფივად გამოისახება $x'_{k+1}, \dots, x'_n$-ის მიმართ, ხოლო ეს უკანასკნელნი თავის მხრივ წრფივად გამოისახება $x'_{k+1}, \dots, x_n$-ის მიმართ, ამიტომ x'_k-სთვის ჩვენ მივიღებთ შემდეგი სახის გამოსახულებას:

$$x'_k = x_k + l_{k,\,k+1}x_{k+1} + \dots + l_{k,\,n}\,x_n,$$

სადაც $l_{k,\,k+1} \dots l_{k,\,n}$ — მუდმივი კოეფიციენტებია; აქედან ჩანს რომ შებრუნებული გარდაქმნა აგრეთვე სამკუთხა იქნება.

ამგვარად ჩვენ დავადგინეთ რომ

1) ორი სამკუთხა გარდაქმნის ნამრავლი არის სამკუთხა გარდაქმნა.

2) სამკუთხა გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა თვით იქნება სამკუთხა.

მეორეს მხრივ n ცვლადიანი ყველა სამკუთხა გარდაქმნების სიმრავლე თავსდება ყველა არაგანსაკუთრებულ გარდაქმნათა ჯგუფში. VIII თავის § 4, მე-3 ქვ. თავის თეორემის ძალით აქედან გამომდინარეობს, რომ n ცვლადიანი ყველა სამკუთხა გარდაქმნების (n ხარისხის ყველა სამკუთხა მატრიცების) სიმრავლე ქმნიან გარდაქმნათა ჯგუფს (შესაბამისად, მატრიცების ჯგუფს).

წარმოვიდგინოთ, რომ მატრიცი $C=(c_{ij})$ წარმოადგენს ნებისმიერი $A=(a_{ij})$ მატრიცის ნამრავლს B სამკუთხა მატრიცზე. აქედან გამოვთვალოთ $C_{(k)}$ დეტერმინანტი შედგენილი C მატრიცის პირველი k სტრიქონის და k სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან:

$$C_{(k)}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{kk} \end{vmatrix}.$$

მე-3 ქვეთავის (4) ზოგადი ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$C_{(k)}=\sum_{h_1\ldots h_k}\begin{vmatrix} a_{1h_1} & a_{1h_2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1h_k} \\ a_{2h_1} & a_{2h_2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2h_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{kh_1} & a_{kh_2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{kh_k} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{h_11} & b_{h_12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{h_1k} \\ b_{h_21} & b_{h_22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{h_2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{h_k1} & b_{h_k2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{h_kk} \end{vmatrix},$$

სადაც ჯამი მარჯვენა ნაწილში ვრცელდება $1, 2, \ldots, n$ ინდექსიდან შედგენილ ყველა ჯუფთებაზე $h_1, h_2, \ldots, h_k$ k-თი. $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ინდექსებს ჩავთვლით ზრდადობის მიხედვით განლაგებულად, ამიტომ $h_i \geqslant i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$.

თუ B სამკუთხა მატრიცაა, მაშინ $b_{ij}=0$ როცა $i>j$; მაშასადამე, წინა ტოლობა შესაძლებელია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$C_{(k)}=\sum_{h_1\ldots h_k}\begin{vmatrix} a_{1h_1} & a_{1h_2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1h_k} \\ a_{2h_1} & a_{2h_2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2h_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{kh_1} & a_{kh_2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{kh_k} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{h_11} & b_{h_12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{h_1k} \\ 0 & b_{h_22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{h_2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{h_kk} \end{vmatrix}.$$

თუ i-ს ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც $h_i > i$, მაშინ $b_{h_i i} = 0$, ე. ი. ნულად გადაიქცევა მარჯვენა ნაწილშიც სათანადო დეტერმინანტი. მაშასადამე, Σ-ში შემავალი ყველა შესაკრებიდან შენარჩუნებული იქნება ის, რომელთათვის $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, . . . , $h_k = k$ და ჩვენ გვექნება:

$$C_{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

ანუ

$$C_{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

ამრიგად, თუ მატრიცი C უდრის A მატრიცის ნამრავლს B სამკუთხა მატრიცზე, მაშინ

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

სადაც k შეიძლება უდრიდეს 1, 2, 3, . . . , n-ს. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ:

B თუ მატრიცი **სამკუთხაა, ხოლო მატრიცი** D **ტოლია** B^* **მატრიცის** (ტრანსპონირებული B მატრიციდან) A **მატრიცზე ნამრავლისა** ($D = B^*A$), მაშინ

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

როცა $k = 1, 2, \dots, n$.

ამ ორი უკანასკნელი გამოთქმებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს: თუ $A' = B^*AB$, სადაც B **სამკუთხა მატრიცია**, მაშინ

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{1k} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{kk} \end{vmatrix},$$

როცა $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

დავუშვათ ახლა, რომ მოცემული გვაქვს კვადრატული ფორმა $F=\Sigma a_{ik}x_ix_k$ მატრიცით $A=(a_{ik})$. თუ ცვლადები $x_1, x_2, \ldots, x_n$ განიცდიან B წრფივ გარდაქმნას, მაშინ გარდაქმნილი ფორმის მატრიცი იქნება $A'=B^*AB$. ზემოთქმულის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ: **თუ B მატრიცი სამკუთხაა, მაშინ ადგილი აქვს (5) თანაფარდობას.**

თუ მივიღებთ მხედველობაში ზევით დადგენილ განმარტებებს, ჩვენ ეს შედეგი შეგვიძლია ასე გამოვთქვათ:

თითოეული დეტერმინანტთაგანი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

წარმოადგენს F კვადრატული ფორმის ინვარიანტს სამკუთხა გარდაქმნების ჯგუფის მიმართ.

ამ შედეგს ჩვენ გამოვიყენებთ ქვევით § 2-ში.

5. შევუდგეთ $F=\Sigma a_{ik}x_ix_k$ კვადრატული ფორმის იმ სახემდე მიყვანის საკითხს, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ცვლადთა კვადრატებს. ამ მიზნის მისაღწევად შეიძლება გამოვიყენოთ მარტივი ხერხი, რომლის არსი მდგომარეობს კვადრატების თანმიმდევრობით გამოყოფაში.

წარმოვიდგინოთ თავიდან, რომ F ფორმაში ცვლადთა კვადრატების ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. აზრის გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $a_{11}\neq 0$. თუ გამოვყოფთ F ფორმის იმ წევრებს, რომლებიც შეიცავენ x_1 ცვლადს, ამ ფორმას ჩვენ წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:

$$F=a_{11}\left(x_1^2+2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2+2\frac{a_{13}}{a_{11}}x_1x_3+\ldots+2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right)+$$
$$+\psi(x_2, \ldots, x_n)$$

ანუ

$$F=a_{11}\left(x_1^2+2x_1\frac{a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)+\psi(x_2,\dots,x_n),$$

სადაც $\psi(x_2,\dots,x_n)$ არის $x_2,\dots,x_n$-ის კვადრატული ფორმა. შევავსებთ რა ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებას სრულ კვადრატამდე, F ფორმა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2-\frac{(a_{12}x_2+\dots+a_{12}x_n)^2}{a_{11}}+$$
$$+\psi(x_2,\dots,x_n).$$

თუ დავუშვებთ:

$$F_1(x_2,\dots,x_n)=-\frac{(a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}+\psi(x_2,\dots,x_n),$$

გვექნება:

$$F=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\dots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+F_1(x_2,\dots,x_n),$$

სადაც F_1 არის $x_2,\dots,x_n$-ის კვადრატული ფორმა. შემოვიყვანოთ ახლა ახალი $x'_1, x'_2,\dots,x'_n$ ცვლადები. დავუშვათ

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\dots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n=x'_1, \\ x_2=x'_2,\dots,x_n=x'_n; \end{cases}$$

მაშინ F ფორმა მიიღებს სახეს:

$$F=a_{11}x_1'^2+F_1(x'_2,\dots,x'_n).$$

შევნიშნოთ, რომ (6) თანაფარდობათაგან პირველი შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x_1=x'_1-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\dots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n=x'_1-\frac{a_{12}}{a_{11}}x'_2-\dots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x'_n;$$

ამგვარად, ძველი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების ახალი $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ ცვლადებით გამომსახველი გარდაქმნა იქნება:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x'_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x'_2 - \ . \ . \ . - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n . \\
x_2 &= \qquad x'_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad x'_n.
\end{aligned}
$$

ეს კი **სამკუთხა გარდაქმნაა.**

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ამ გარდაქმნის კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე რიცხვით ველს, რასაც ეკუთვნიან მოცემული F კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები. კერძოდ, თუ F ფორმა **ნამდვილი კოეფიციენტებიანია**, მაშინ გარდაქმნის კოეფიციენტებიც **ნამდვილი** რიცხვებია.

ჩვენ დავინახეთ, რომ ახალ $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ ცვლადებში F ფორმას აქვს სახე:

$$F = a_{11}x'^2_1 + F_1(x'_2, \ldots, x'_n),$$

სადაც F_1 არის $x'_2, \ldots, x'_n$ ცვლადთა კვადრატული ფორმა; F_1 ფორმის კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე რიცხვითი ველს, რასაც F ფორმის კოეფიციენტები.

ახლა, თუ $F_1(x'_2, \ldots, x'_n)$ ფორმის ცვლადთა კვადრატების ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ მის მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ იგივე ხერხი. დავუშვათ, რომ კოეფიციენტი x'^2_2-სა F ფორმაში განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ F_1 ფორმა $x'_2, \ldots, x'_n$ ცვლადთა სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით მიიყვანება სახეზე:

$$F_1 = a'_{22}x''^2_2 + F_2(x''_3, \ldots, x''_n).$$

თუ დავუშვებთ, რომ $x'_1 = x''_1$, მაშინ გვექნება ყველა $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ ცვლადის სამკუთხა გარდაქმნა. ახალ ცვლადებში F ფორმას აქვს სახე

$$F = a_{11}x''^2_1 + a'_{22}x''^2_2 + F_2(x''_3, \ldots, x''_n).$$

შევნიშნოთ, რომ გარდაქმნა, რომელიც გამოსახავს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების უშუალოდ $x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$ ცვლადებით, აგრეთვე სამ-

ქუთხაა (რადგანაც იგი წარმოადგენს ორი სამკუთხა გარდაქმნის ნამრავლს).

იმავე ხერხის თანდათანობითი გამოყენებით ჩვენ კვადრატულ ფორმას მივიყვანთ ან მხოლოდ ცვლადთა კვადრატების შემცველ სახეზე, ან (თუ გამოვყოფთ კვადრატთა ცნობილ რიცხვს) მივალთ ფორმამდე, რომელიც სრულიად არ შეიცავს ცვლადთა კვადრატებს. ამგვარად, ჩვენ დაგვრჩა განსახილველად მხოლოდ ის შემთხვევა, როდესაც კვადრატული ფორმა არ შეიცავს ცვლადთა კვადრატებს.

დავუშვათ, რომ თავიდან მოცემული გვაქვს კვადრატული ფორმა

$$F=\Sigma a_{ik} x_i x_k,$$

რომელშიაც x_1^2 და x_2^2-ის კოეფიციენტები ნულის ტოლია ($a_{11}=$ $=a_{22}=0$), მაგრამ $x_1 x_2$-ის კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან ($a_{12} \neq 0$). მაშინ ჩვენ გადავალთ ახალ $x_1', \ldots, x'_n$ ცვლადებზე

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + x'_2, \\ x_2 &= x'_1 - x'_2, \\ x_3 &= \qquad\quad x'_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \qquad\quad x'_n \end{aligned}$$

გარდაქმნის საშუალებით.

ამ გარდაქმნის (ცხადია არა განსაკუთრებული) შედეგად წევრი $2a_{12} x_1 \ x_2$ გადავა $2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$-ში. მაშასადამე, ჩვენ მივიღებთ ფორმას, რომელშიაც $x_1'^2$-ის კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან. ამ ფორმისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნას ზემოთ მითითებული ხერხი.

ამგვარად, ყოველი კვადრატული ფორმა არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა სასრული რიცხვისსაშუალებით შეგვიძლია მივიყვანოთ „კანონიკურ სახეზე", ე. ი. მხოლოდ ცვლადთა კვადრატების შემცველ სახეზე. ყველა ამ გარდაქმნების კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე რიცხვით ველს, რასაც მოცემული ფორმის კოეფიციენტები. რადგანაც არაგანსაკუთრებულ წრფივ $B_1 \ldots B_\nu$ გარდაქმნათა თანამიმდევრობითი შესრულება ტოლფასია ერთი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის გამოყენებისა, რომელიც ტოლია $B_1 B_2 \ldots B_\nu$ ნამრავლისა, ამიტომ ჩვენ საბოლოოდ მივალთ შემდეგ დასკვნამდე:

ყოველი კვადრატული ფორმა ცვლადთა არაგანსაკუთრებული წრფივი გარაქმნების საშუალებით შეიძლება მიყვანილ იქნას მხოლოდ ცვლადთა კვადრატების შემცველ სახეზე.

ამ გარდაქმნის კოეფიციენტები ეკუთვნიან იმავე რიცხვით ველს, რასაც მოცემული ფორმის კოეფიციენტები. კერძოდ, თუ მოცემული ფორმის კოეფიციენტები ნამდვილია, მაშინ გარდაქმნის კოეფიციენტებიც შეიძლება ჩავთვალოთ ნამდვილ რიცხვებად.

თუ აღვნიშნავთ $u_1, u_2, \ldots, u_n$-ით იმ ცვლადებს, რომლებსაც მივიღებთ აღნიშნული არაგანსაკუთრებული გარდაქმნის შედეგად, მაშინ ჩვენ გვექნება:

$$F=\lambda_1 u_1^2+\lambda_2 u_2^2+\ldots+\lambda_n u_n^2,$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$—მუდმივი კოეფიციენტებია, რომელთა შორისაც შეიძლება ზოგიერთი ნულის ტოლიც იყოს.

F ფორმის მატრიცს $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადების მიმართ ექნება სახე:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

დავუშვათ, რომ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ კოეფიციენტებს შორის r ისეთი მოიპოვება, რომლებიც განსხვავებულია ნულისაგან ($r \leqslant n$). მაშინ ზოგადობის შეუმცირებლად შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ, რომ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ როდესაც $\lambda_{r+1}=\ldots=\lambda_n - 0$.

ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ F ფორმის შემდეგ „კანონიკურ“ გამოსახულებას:

$$F=\lambda_1 u_1^2+\lambda_2 u_2^2+\ldots+\lambda_r u_r^2.$$

შესაბამისად ამისა, ფორმის მატრიცს აქვს სახე:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

F კვადრატული ფორმის რანგი უდრის მისი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგს. ჩვენ ვიცით, რომ ფორმის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი წარმოადგენს ინვარიანტს არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა მიმართ.

ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ F ფორმის რანგი უდრის (7) მატრიცის რანგს. მაგრამ ამ მატრიცის რანგი, ცხადია, არის r, ე. ი. უდრის F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში შემავალ კვადრატების რიცხვს.

ამრიგად, F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში შემავალი კვადრატების რიცხვი უდრის ამ ფორმის რანგს.

მაგალითი 1.

მივიყვანოთ კანონიკურ სახეზე ფორმა:

$$F = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3^2.$$

გამოვყოფთ რა x_1-ს შემცველ წევრებს, F ფორმას გადავწერთ სახით:

$$F = 2\left(x_1^2 + 2x_1\frac{3x_2 + x_3}{2}\right) + x_2^2 - x_3^2.$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება შევავსოთ სრულ კვადრატამდე:

$$F = 2\left(x_1 + \frac{3x_2 + x_3}{2}\right)^2 - \frac{(3x_2 + x_3)^2}{2} + x_2^2 - x_3^2$$

ანუ

$$F = 2\left(x_1 + \frac{3x_2 + x_3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}x_2^2 - 3x_2x_3 - \frac{3}{2}x_3^2.$$

თუ წარმოვიდგენთ, რომ

$$
\text{(a)} \qquad \begin{cases} x'_1 = x_1 + \frac{3}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3, \\ x'_2 = \qquad x_2, \\ x'_3 = \qquad\qquad x_3, \end{cases}
$$

გვექნება:

$$
F = 2x'^2_1 + F_1,
$$

სადაც

$$
F_1 = -\frac{7}{2} x'^2_2 - 3x'_2 x'_3 - \frac{3}{2} x'^2_3,
$$

(a) თანაფარდობანი განსაზღვრავენ სამკუთხა გარდაქმნას, რომელიც გამოსახავს x_1, x_2, x_3 ცვლადებს x'_1, x'_2, x'_3 ცვლადებით:

$$
\text{(b)} \qquad \begin{cases} x_1 = x'_1 - \frac{3}{2} x'_2 - \frac{1}{2} x'_3, \\ x_2 = \qquad x'_2, \\ x_3 = \qquad\qquad x'_3. \end{cases}
$$

გარდავქმნათ ახლა ფორმა F_1:

$$
F_1 = -\frac{7}{2}\left(x_2'^2 + 2\cdot\frac{3}{7}\, x'_2\, x'_3\right) - \frac{3}{2} x'^2_3
$$

ანუ

$$
F_1 = -\frac{7}{2}\left(x'_2 + \frac{3}{7} x'_3\right)^3 + \frac{7}{2}\left(\frac{3}{7} x'_3\right)^2 - \frac{3}{2} x'^2_3,
$$

$$
F_1 = -\frac{7}{2}\left(x'_2 + \frac{3}{7} x_3'\right)^2 - \frac{6}{7} x'^2_3.
$$

ახლა წარმოვიდგინოთ:

$$
x'_1 = x''_1,\ x'_2 + \frac{3}{7} x'_3 = x''_2,\ x'_3 = x''_3.
$$

ეს თანაფარდობანი განსაზღვრავენ სამკუთხა გარდაქმნას:

$$
\text{(c)} \qquad \begin{cases} x'_1 = x''_1, \\ x'_2 = \qquad x''_2 - \frac{3}{7} x''_3, \\ x'_3 = \qquad\qquad x''_3; \end{cases}
$$

გვაქვს:

$$
F_1 = -\frac{7}{2} x''^2_2 - \frac{6}{7} x_3''^2
$$

და მაშასადამე,

$$
F = 2x''^2_1 - \frac{7}{2} x_2''^2 - \frac{6}{7} x_3''^2.
$$

(b) და (c)-ს დახმარებით ძნელი არ არის დავწეროთ ის გარდაქმნები, რომლებიც უშუალოდ გამოსახავს x_1, x_2, x_3-ს x_1'', x_2'', x_3''-ით.

მაგალითი 2.

მივიყვანოთ კანონიკურ სახეზე ფორმა:

$$F = x^2 - 2xy + y^2 + 4xz + 4z^2 + 2yz.$$

თუ დავაჯგუფებთ x-ის შემცველ წევრებს, მივიღებთ:

$$F = x^2 - 2x(y - 2z) + y^2 + 4z^2 + 2yz$$

ანუ

(d) $$F = (x - y + 2z)^2 + 6yz.$$

დავუშვათ:

$$x - y + 2z = x', \; y = y', \; z = z';$$

ეს თანაფარდობანი განსაზღვრავენ სამკუთხა გარდაქმნას

(e) $$\begin{cases} x = x' + y' - 2z', \\ y = \quad\;\; y', \\ z = \qquad\quad z'. \end{cases}$$

ახალ ცვლადებში F ფორმა მიიღებს სახეს

$$F = x'^2 + 6y'z';$$

მარჯვენა ნაწილი არ შეიცავს y' და z'-ის კვადრატებს. რომ თავიდან ავიშოროთ ნამრავლი $y'z'$, დავუშვათ:

(f) $$\begin{cases} x' = x'', \\ y' = y'' + z'', \\ z' = y'' - z''. \end{cases}$$

ამის შედეგად F ფორმა მიიღებს კანონიკურ სახეს:

$$F = x''^2 + 6y''^2 + 6z''^2.$$

რომ გამოვსახოთ x, y, z უშუალოდ x'', y'', z''-ით, საკმარისია შევადგინოთ (e) და (f) გარდაქმნათა ნამრავლი.

მაგალითი 3.

განვიხილოთ ფორმა

$$E = 2x^2 + y^2 + 10z^2 + 2xy + 4xz + 6yz.$$

ამ ფორმის დისკრიმინანტი ნულის ტოლია

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

ფორმის რანგი უდრის 2-ს მაშასადამე, კანონიკური გამოსახულება უნდა შეიცავდეს ორ კვადრატს. მართლაც, თუ შევაჯგუფებთ x-ის შემცველ წევრებს, მივიღებთ:

$$F = 2\left(x^2 + 2x\frac{y+2z}{2}\right) + y^2 + 10z^2 + 6yz$$

ანუ

$$F = 2\left(x + \frac{y+2z}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} + 8z^2 + 4yz,$$

$$F = 2\left(x + \frac{y+2z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(y+4z)^2,$$

დავუშვათ

$$(g) \qquad x + \frac{y+2z}{2} = x', \; y + 4z = y', \; z = z'.$$

მივიღებთ F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებას შემდეგი სახით:

$$F = 2x'^2 + \frac{1}{2}y'^2.$$

(g) თანაფარდობიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{y'}{2} + z', \\ y &= \phantom{x' -{}} y' - 4z', \\ z &= \phantom{x' - y' - 4{}} z', \end{aligned}$$

სავარჯიშო.

1. რამდენ კვადრატს შეიცავს კანონიკური გამოსახულება ფორმისა:

$$F = ax^2 + cy^2 + (a+2b+c)z^2 + 2bxy + 2(a+b)xz + 2(b+c)yz.$$

2. მიიყვანეთ კანონიკურ სახეზე:

a) $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$,

b) $x^2 + \lambda y^2 + z^2 + 2\lambda xy + 2\lambda xz + 2yz$,

c) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz - 3yz$,

d) $2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

3. აჩვენეთ, რომ კვადრატული ფორმა რანგით 2 შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ორი წრფივი ფორმის ნამრავლის სახით (ნამდვილი ან კომპლექსური კოეფიციენტებით); სამართლიანია თუ არა შებრუნებული თეორემა?

4. აჩვენეთ, რომ ფორმა:

$$F = 3x^2 - 8y^2 - 7z^2 + 10xy - 20xz + 18yz$$

შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ორი წრფივი ფორმის ნამრავლის სახით; იპოვეთ ეს წრფივი ფორმა (F ფორმის კანონიკურ სახეზე მიყვანის საშუალებით).

§ 2. კვადრატული ფორმები ნამდვილი კოეფიციენტებით. ინერციის კანონი

1. წინა პარაგრაფში ჩვენ გავეცანით კვადრატული ფორმის მხოლოდ ცვლადთა კვადრატების შემცველ სახეზე მიყვანის ერთ-ერთ მეთოდს. ასეთი მიყვანა შეიძლება შევასრულოთ სხვა მეთოდითაც, მაგრამ მიღებულ კვადრატთა რიცხვი რჩება უცვლელი: იგი კვადრატული ფორმის რანგის ტოლია. ჩვენ ვიცით, რომ კვადრატული ფორმის რანგი წარმოადგენს არითმეტიკულ ინვარიანტს ყველა არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის ჯგუფების მიმართ. თუ ლაპარაკია *ნამდვილ კოეფიციენტებიან* კვადრატულ ფორმაზე, მაშინ ბუნებრივად ვიწროვდება გარდაქმნათა განსახილველი ჯგუფი, რომელიც განისაზღვრება *ნამდვილ კოეფიციენტებიანი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით*.

გარდაქმნათა ამ ჯგუფის მიმართ შეიძლება კიდევ მივუთითოთ კვადრატული ფორმის ორ არითმეტიკულ ინვარიანტზე: ასეთებს წარმოადგენს *დადებითი* და *უარყოფითი* კოეფიციენტების რიცხვი კვადრატული ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში. ამაში მდგომარეობს სილვესტრისა და იაკობის მიერ აღმოჩენილი, ეგრეთ წოდებული, კვადრატულ ფორმათა **ინერციის კანონი**.

დავამტკიცოთ ეს კანონი. თავიდან დავუშვათ, რომ ნამდვილი კოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმა $F=\sum\limits_{i,k} a_{ik}x_ix_k$, არაგანსაკუთრებული გარდაქმნის საშუალებით

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}u_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

მიიყვანება სახეზე:

$$(9) \qquad F = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_r u_r^2 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k^2,$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ კოეფიციენტები ნულისაგან განსხვავებულია. ეს ნიშნავს, რომ გამოსახულება

$$\sum_{i, k} a_{ik} x_i x_k,$$

გარდაიქმნება $\sum_k \lambda_k u_k^2$-ით, თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ (8) გამოსახულებას. ანუ სხვანაირად, ტოლობა

$$(10) \qquad \sum_{i, k} a_{ik} x_i x_k = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_r u_r^2$$

წარმოადგენს იგივობას $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადების მიმართ, თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ს ჩათვლით $u_1, u_2, \ldots, u_n$-ის ფუნქციებად, თანახმად (8) გამოსახულებისა. ამავე ტოლობას ჩვენ შეგვიძლია შევხედოთ სხვა თვალსაზრისითაც. მართლაც, (8) გარდაქმნა, პირობის თანახმად, არაგანსაკუთრებულია; მაშასადამე, არსებობს შებრუნებული გარდაქმნაც, რომელიც გამოსახავს $u_1, u_2, \ldots, u_n$-ს $x_1, x_2, \ldots x_n$-ის საშუალებით:

$$(11) \qquad u_i = \sum_{k=1}^{h} \beta_{ik} x_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ეს გარდაქმნაც აგრეთვე არაგანსაკუთრებულია. დეტერმინანტი, შედგენილი β_{ik} კოეფიციენტებისგან ნულისაგან განსხვავებულია, ე. ი. (β_{ik}) მატრიცის რანგი უდრის n-ს. მაშასადამე, $u_1, \ldots, u_n$ არის $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის წრფივად დამოუკიდებელი n ფორმების სისტემა (იხ. თ. VIII, § 1, მ. 5). ჩვენ ახლა შეგვიძლია (10) თანაფარდობა განვიხილოთ, როგორც იგივობა $x_1, \ldots, x_n$ — ცვლადების მიმართ, თუ ჩავთვლით, რომ $u_1, \ldots, u_n$ გამოსახული არიან $x_1, \ldots, x_n$-ის საშუალებით (11) გამოსახულების მიხედვით.

ეხლა დავუშვათ, რომ იგივე F კვადრატული ფორმა სხვა არა-განსაკუთრებული ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი გარდაქმნის დახმარებით

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} z_k \tag{12}$$

მიყვანილია სახეზე:

$$F = \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \ldots + \mu_r z_r^2,$$

სადაც $\mu_1, \ldots, \mu_r$ კოეფიციენტები განსხვავებულია ნულისაგან. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ შორის დადებითი კოეფი-ციენტების რიცხვი უდრის უარყოფითი კოეფიციენტების რიცხვს $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ შორის.

ვთქვათ,

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} x_k \tag{13}$$

გარდაქმნა შებრუნებულია (12) გარდაქმნის მიმართ. ეს გარდაქმნაც არაგანსაკუთრებული იქნება. γ_{ik} კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავებული იქნება ნულისაგან. ის, რაც ზემოთ იყო თქმული (10) თანაფარდობის მიმართ, შესაძლებელია განმეორებული იქნას შემდეგი თანაფარდობის მიმართაც:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \ldots \mu_r z_r^2. \tag{14}$$

ეს თანაფარდობა შესაძლებელია განვიხილოთ, როგორც იგივობა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების მიმართ, თუ ჩავთვლით, რომ $z_1, z_2, \ldots, z_r$ გამოსახულია $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის საშუალებით (13) გამოსახულების მიხედვით.

(10) და (14) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს:

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_r u_r^2 = \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \ldots + \mu_r z_r^2. \tag{15}$$

ჩვენ აქ $u_1, u_2, \ldots, u_r$-ს განვიხილავთ როგორც $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ფუნქციებს, რომლებიც სათანადოდ განსაზღვრულნი არიან (11) და (13)-დან. (15) თანაფარდობა ისევე, როგორც (10) და (14)

თანაფარდობანი, რომელთაგანაც მიღებულია იგი, წარმოადგენს იგივობას $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების მიმართ.

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ (15) იგივობის მარცხენა ნაწილში დადებითი კოეფიციენტების რიცხვი უდრის ამავე იგივობის მარჯვენა ნაწილის უარყოფითი კოეფიციენტების რიცხვს. ზოგადობის დაურღვევლად ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ კოეფიციენტები $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ დადებითნი არიან, ხოლო დანარჩენი $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r$ კოეფიციენტები უარყოფითნი. მსგავსადვე წარმოვიდგინოთ, რომ კოეფიციენტები $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p'}$ დადებითებია; მაშინ $\mu_{p'+1}, \ldots, \mu_r$ უარყოფითნი იქნებიან. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $p' = p$. დამტკიცებას ვაწარმოებთ საწინააღმდეგოს დაშვებით. ვთქვათ, რომ $p' \neq p$. განსაზღვრულობისათვის დავუშვათ, რომ $p' > p$.

განვიხილოთ მაშინ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მიმართ შემდეგ განტოლებათა სისტემა:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{k=1}^{n} \beta_{1k} x_k = 0,\\
u_2 &= \sum_{k=1}^{n} \beta_{2k} x_k = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
u_p &= \sum_{k=1}^{n} \beta_{pk} x_k = 0, \qquad (16)\\
z_{p'+1} &= \sum_{k=1}^{n} \gamma_{p'+1,k} x_k = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
z_n &= \sum_{k=1}^{n} \gamma_{n,k} x_k = 0.
\end{aligned}
$$

ჩვენ აქ გვაქვს $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მიმართ სისტემა ერთგვაროვანი განტოლებებისა, რომელთა რიცხვია: $p + (n - p') = n - (p' - p)$. რადგანაც პირობის ძალით $p' > p$, ამიტომ ამ განტოლებათა რიცხვი

ნაკლებია n-ზე. მაშასადამე, არსებობს $x_1, \ldots, x_n$ მნიშვნელობათა არანულოვანი სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს ამ განტოლებებს. $x_1, \ldots, x_n$ ეს მნიშვნელობანი იქნება ნამდვილი, ვინაიდან (16) განტოლებათა ყველა კოეფიციენტი ნამდვილია. ასეთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობათათვის გვექნება:

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_p = 0, \ z_{p'+1} = z_{p'+2} = \ldots = z_r = 0;$$

ამ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობათა (15) იგივობაში ჩასმით მივიღებთ:

$$\lambda_{p+1} u^2_{p+1} + \ldots + \lambda_r u_r^2 = \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \ldots + \mu_{p'} z^2_{p'},$$

სადაც $u_{p+1}, \ldots, u_r, z_1, \ldots, z_{p'}$ ნამდვილი რიცხვებია. რამდენადაც $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r$ რიცხვები, პირობის თანახმად, უარყოფითია, ხოლო $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p'}$ კი დადებითია, უკანასკნელი ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის განსახილველ მნიშვნელობათათვის

$$z_1 = 0, \ z_2 = 0, \ldots, z_{p'} = 0.$$

აქედან და (16)-დან ჩვენ დავასკვნით, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობათა განსახილველი სისტემა აკმაყოფილებს n ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$z_1 = 0, \ z_2 = 0, \ldots, z_{p'} = 0, \ z_{p'+1} = 0, \ldots, z_n = 0,$$

სადაც

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} x_k.$$

მაგრამ განტოლებათა ამ სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, იმიტომ რომ იგი ემთხვევა (13) გარდაქმნის დეტერმინანტს.

მაშასადამე, ამ სისტემას არ შეიძლება ჰქონდეს ნულოვანი ამონახსნი. ამგვარად, დაშვებით $p' > p$ ჩვენ მივედით წინააღმდეგობამდე.

ამისვე მსგავსად წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანს იმის დაშვება, რომ $p > p'$. მაშასადამე $p' = p$.

ამრიგად ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ

F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში დადებით კოეფიციენტების რიცხვი ყოველთვის იქნება ერთი და იგივე, დამოუკიდებლად იმაზე როგორი ნამდვილ კოეფიციენტებიანი წრფივი გარდაქმნით არის მიყვანილი ფორმა კანონიკურ სახეზე. სწორედ ამაში მდგომარეობს ინერციის კანონი.

კერძოდ, თავიდან შესაძლებელია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ საწყისი ცვლადებიდან ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ნებისმიერი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნის დახმარებით გადავიდეთ ახალ $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ ცვლადებზე, ხოლო შემდეგ $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ ცვლადებიდან (რასაკვირველია ისევ არაგანსაკუთრებული ნამდვილი გარდაქმნის საშუალებით) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადებზე, რომლებშიაც ფორმა მიიღებს კანონიკურ სახეს, ამასთანავე ჩვენ მივიღებთ კანონიკურ გამოსახულებაში p დადებით კოეფიციენტთა იგივე რიცხვს.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში დადებით კოეფიციენტთა p რიცხვი წარმოადგენს არითმეტიკულ ინვარიანტს ნამდვილკოეფიციენტებიანი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნების ჯგუფის მიმართ.

თუ q-თი აღვნიშნავთ F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში უარყოფითი კოეფიციენტების რიცხვს, მაშინ $q=r-p$, სადაც r არის F ფორმის რანგი.

ცხადია q რიცხვიც წარმოადგენს F ფორმის არითმეტიკულ ინვარიანტს ნამდვილ კოეფიციენტებიანი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნების მიმართ.

სხვაობას $p-q$ კვადრატული ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში დადებითი კოეფიციენტების და უარყოფითი კოეფიციენტების რიცხვს შორის ეწოდება ფორმის **სიგნატურა**; ჩვენ მას აღვნიშნავთ s-ით:

$$p-q=s.$$

ცხადია, რომ $s \leqslant r$; სიგნატურა s, ისევე როგორც p და q წარმოადგენს კვადრატული ფორმის ინვარიანტს ნამდვილ კოეფიციენტებიანი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნების ჯგუფის მიმართ.

2. ზემოაღნიშნულ მოსაზრებებს ჩვენ მივყევართ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმების კლასიფიკაციამდე. ვთქვათ, L არის წრფივი გარდაქმნების რაიმე ჯგუფი. ჩვენ ვიტყვით, რომ კვადრატული ფორმა F ექვივალენტურია Φ კვადრატული ფორმისა

L ჯგუფის მიმართ, თუ F ფორმა შესაძლებელია გადაყვანილ იქნას Φ ფორმაში L ჯგუფის გარდაქმნის საშუალებით.

ცხადია, რომ თუ F ფორმა ექვივალენტურია Φ ფორმისა L ჯგუფის მიმართ, მაშინ Φ ფორმაც ექვივალენტურია F ფორმისა იმავე L ჯგუფის მიმართ.

მართლაც, თუ Φ ფორმა მიიღება F ფორმისაგან B გარდაქმნის საშუალებით, რომელიც ეკუთვნის L ჯგუფს, მაშინ F ფორმაც მიიღება Φ ფორმიდან შებრუნებული გარდაქმნის მეშვეობით, რომელიც აგრეთვე L ჯგუფს მიეკუთვნება.

შემდეგ, თუ ფორმა F_1 ექვივალენტურია F_2 ფორმისა L ჯგუფის მიმართ, ხოლო F_2 ექვივალენტურია F_3-სა L ჯგუფის მიმართ, მაშინ F_1 ექვივალენტურია F_3-სა ამავე L ჯგუფის მიმართ (ტრანზიტულობის თვისება).

მართლაც, თუ F_2 ფორმა მიიღება F_1 ფორმისაგან B_1 გარდაქმნის საშუალებით, ხოლო F_3 ფორმა მიიღება F_2 ფორმისაგან B_2 გარდაქმნის საშუალებით, მაშინ ფორმა F_3 მიიღება F_1 ფორმისაგან B_1B_2 გარდაქმნის საშუალებით. თუ B_1 და B_2 გარდაქმნები ეკუთვნიან L ჯგუფს, მაშინ მათი ნამრავლიც $B_1 \cdot B_2$ ამავე ჯგუფს მიეკუთვნება.

წინამდებარე პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ კვადრატულ ფორმათა ექვივალენტობას ნამდვილ კოეფიციენტებიან ყველა არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. ყველა იმ შემთხვევებში, რომლებშიაც მოსალოდნელი არ იქნება გაუგებრობა, ჩვენ ასეთიჯგუფის მიმართ ექვივალენტურ ფორმებს ვუწოდებთ უბრალოდ ექვივალენტურს.

ნამდვილ კოეფიციენტებიან ყველა კვადრატულ ფორმას ჩვენ დავანაწილებთ კლასებად, მივაკუთვნებთ რა ერთ კლასს ერთმანეთს შორის ექვივალენტურ ფორმებს.

ახლა დავადგინოთ ნიშანი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ, ეკუთვნის თუ არა რომელიმე ორი ფორმა ერთსა და იგივე კლასს:

იმისათვის რომ ორი კვადრატული ფორმა იყოს ექვივალენტური ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ყველა არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნების ჯგუფის მიმართ აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათ ჰქონდეთ ერთი და იგივე რანგი და ერთი და იგივე სიგნატურა.

პირობის აუცილებლობა გამომდინარეობს იქედან, რომ კვადრატული ფორმის სიგნატურა და რანგი წარმოადგენენ ინვარიანტებს ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ყველა არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის მიმართ. ამიტომ თუ კვადრატული ფორმები F და Φ ექვივალენტურნი არიან ამ ჯგუფის მიმართ, მაშინ F ფორმის რანგი და სიგნატურა შესაბამისად უდრის Φ ფორმის რანგის სიგნატურას.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. დავუშვათ, რომ მოცემულია F კვადრატული ფორმა, რომლის რანგი არის r და სიგნატურა s. ასეთი ფორმა არაგანსაკუთრებული ნამდვილი გარდაქმნის საშუალებით შეიძლება მიყვანილ იქნას სახეზე:

$$F=\lambda_1 u_1^2+\lambda_2 u_2^2+\ldots+\lambda_r u_r^2.$$

თუ p და q-თი აღვნიშნავთ შესაბამისად დადებით და უარყოფით კოეფიციენტების რიცხვს მარჯვენა ნაწილში, მაშინ

$$p+q=r,\ p-q=s;$$

მაშასადამე

$$p=\frac{r+s}{2}, \qquad q=\frac{r-s}{2}.$$

ზოგადობის დაურღვევლად შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ, რომ დადებითნი არიან $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ კოეფიციენტები. მაშინ

$$F=\lambda_1 u_1^2+\lambda_2 u_2^2+\ldots+\lambda_p u_p^2-|\lambda_{p+1}|\,u_{p+1}^2-\ldots-|\lambda_r|\,u_r^2.$$

შემოვიყვანოთ ახალი ცვლადები $v_1, v_2, \ldots, v_r$ შემდეგი პირობით:

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}v_1,\ \ldots,\ u_p=\frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}v_p,$$

$$u_{p+1}=\frac{1}{\sqrt{|\lambda_{p+1}|}}v_{p+1},\ \ldots,\ u_r=\frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}}v_r.$$

ამ ნამდვილი არაგანსაკუთრებული წრფივი გარდაქმნის შედეგად F ფორმა მიიღებს „ნორმალურ“ სახეს:

$$v_1^2+\ldots+v_p^2-v_{p+1}^2-\ldots-v_r^2. \tag{17}$$

ამრიგად, ყოველი ფორმა, რომლის რანგი არის r და სიგნატურა s, ექვივალენტურია (17) ფორმისა, სადაც $p=\frac{r+s}{2}$.

თუ ორ ფორმას აქვს ერთი და იგივე რანგი და ერთი და იგივე სიგნატურა, მაშინ ისინი ექვივალენტურნი არიან ერთი და იგივე (17) სახის ფორმისა. მაშასადამე, **ექვივალენტურნი არიან ერთმანეთს შორის.** ამგვარად, პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

შევნიშნავთ, რომ კვადრატული ფორმის სიგნატურა s შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $s = p - (r - p) = 2p - r$. აქედან გამოდის, რომ სიგნატურა s და რანგი r უნდა იყვნენ ერთდროულად წყვილი ან ერთდროულად კენტი. თუ მაგალითად, $r=3$, მაშინ p-ს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობა 3, 2, 1, 0 და s შესაბამისად ტოლი იქნება 3, 1, —1, —3. ამგვარად, არსებობს ოთხი კლასი ფორმისა რანგით 3. ამ კლასების წარმომადგენლებად ითვლებიან შემდეგი ფორმები:

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad (s=3); \qquad x^2 + y^2 - z^2, \quad (s=1);$$
$$x^2 - y^2 - z^2, \quad (s=-1); \quad -x^2 - y^2 - z^2, \quad (s=-3);$$

ნამდვილი ფორმების ეს კლასიფიკაცია დაკავშირებულია განსაზღვრული ცენტრის მქონე მეორე რიგის ზედაპირების აფინურ კლასიფიკაციასთან (შეადარეთ ვ. ი. კომარნიცკი — ანალიზური გეომეტრიის საფუძვლები 1931 წ. თ. XV, § 93).

მართლაც, ადვილად დავინახავთ, რომ ნებისმიერი მეორე რიგის ცენტრალური ზედაპირი (გარდა კონუსური ზედაპირისა) აფინური გარდაქმნის დახმარებით შესაძლებელია მიყვანილ იქნას ერთ-ერთ სახეზე შემდეგ ოთხთაგან:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$
$$x^2 - y^2 - z^2 = 1, \qquad -x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

3. თუ კვადრატული ფორმის რანგი ცვლადთა რიცხვს უდრის ($r=n$), მაშინ კვადრატულ ფორმას **ეწოდება არაგანსაკუთრებული.** წინააღმდეგ შემთხვევაში ($r<n$) ფორმას ეწოდება **განსაკუთრებული** ანუ **გადაგვარებული.** წარმოვიდგინოთ, რომ კვადრატული ფორმა $F=\Sigma a_{ik}x_ix_k$ არ გადაგვარდება. განვიხილოდ კერძოდ ის შემთხვევა, როცა

$$s = r = n.$$

ამ შემთხვევაში $p=\frac{r+s}{2}=n$, $q=0$, ასე რომ F ფორმა შესაძლებელია მიყვანილ იქნას სახეზე:

$$F=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2. \tag{18}$$

n ცვლადთა ყოველ კვადრატულ ფორმას, რომელიც ექვივალენტურია (18) ფორმისა, ეწოდება დადებითად განსაზღვრული.

ამგვარად, დადებითად განსაზღვრული ფორმა ხასიათდება თანაფარდობებით $r=n$ და $s=n$.

(18) ფორმა იქცევა ნულად მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $u_1=u_2=\ldots=u_n=0$.

ყოველი დადებითად განსაზღვრული ფორმა $F=\sum\limits_{i,k} a_{ik}x_i x_k$ შესაძლებელია მიყვანილ იქნას (18) სახეზე არაგანსაკუთრებული გარდაქმნის საშუალებით:

$$x_i=\sum_k b_{ik}u_k.$$

მაშასადამე, $u_1=u_2=\ldots=n=0$ მნიშვნელობათა სისტემას ეთანადება $x_1=\ldots=x_n=0$ მნიშვნელობათა სისტემა და მხოლოდ ეს სისტემა. აქედან გამომდინარეობს:

დადებითად განსაზღვრული ფორმა $F=\sum\limits_{i,k} a_{ik}x_i x_k$ შეიძლება იქცეს ნულად მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

x_i ცვლადთა ყველა დანარჩენ მნიშვნელობათათვის დადებითად განსაზღვრული ფორმა ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს.

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როდესაც კვადრატული ფორმის რანგი უდრის n-ს, ხოლო სიგნატურა $s=-n$. ამ შემთხვევაში $p=\frac{r+s}{2}=0$, $q=\frac{r-s}{2}=n$, ე. ი. ფორმა მიიყვანება სახეზე:

$$F=-u_1^2-u_2^2-\ldots-u_n^2. \tag{19}$$

n ცვლადთა ყოველ კვადრატულ ფორმას, რომელიც ექვივალენტურია (19) ფორმისა ეწოდება უარყოფითად განსაზღვრული.

უარყოფითად განსაზღვრული ფორმა ხასიათდება, მაშასადამე, თანაფარდობებით $r=n$, $s=-n$.

უარყოფითად განსაზღვრული ფორმა (ისევე როგორც დადებითად განსაზღვრული) **შეიძლება იქცეს ნულად მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ყველა ცვლადის მნიშვნელობანი ნულის ტოლია.**

თუ კი ცვლადთაგან თუნდაც ერთი ღებულობს ნულისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობას, მაშინ უარყოფითად განსაზღვრული ფორმა ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობას.

არაგანსაკუთრებულ კვადრატულ ფორმას, რომლისთვისაც ადგილი არ აქვს ზემოაღნიშნულ ორ შემთხვევათაგან არც ერთს (ე. ი. არაგანსაკუთრებული ფორმა, რომლისთვისაც $0<p<n$), შეუძლია მიიღოს ცვლადთა ერთი მნიშვნელობისათვის *დადებითი* მნიშვნელობა, ხოლო სხვა მნიშვნელობისათვის *უარყოფითი* მნიშვნელობა; ასეთ კვადრატულ ფორმას ეწოდება **განუსაზღვრელი**.

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ კვადრატული ფორმის $F(x_1, \ldots, x_n)$ რანგი r ნაკლებია n-ზე. სიგნატურისათვის გვექნება ყოველ შემთხვევაში $-r \leqslant s \leqslant r$. თუ $s=r$, მაშინ $p=\frac{r+s}{2}=r$, $q=0$. ამ შემთხვევაში ფორმა შესაძლებელია მიყვანილ იქნას სახეზე:

$$F=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_r^2. \tag{20}$$

n ცვლადთა ყოველ კვადრატულ ფორმას ($n>r$), რომელიც ეკვივალენტურია (20)-სა, ეწოდება დადებითად — ნახევრადგანსაზღვრული.

ნახევრადგანსაზღვრულ უარყოფით ფორმას არ შეუძლია მიიღოს დადებითი მნიშვნელობანი, მაგრამ შეუძლია იქცეს ნულად ცვლადთა მნიშვნელობებისათვის, რომელთაგანაც ყველა არ უდრის ნულს.

აქ მოყვანილი კლასიფიკაცია ნამდვილი კვადრატული ფორმებისა თამაშობს უდიდეს როლს ალგებრის, გეომეტრიისა და ანალიზის მრავალ საკითხებში. ანალიზში, მაგალითად, ეს კლასიფიკაცია გამოყენებულია მრავალ ცვლადის ფუნქციათა გამოკვლევისათვის მაქსიმუმისა და მინიმუმზე.

ბუნებრივად ისმება საკითხი იმ **ნიშნების** შესახებ, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ *კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე მიყვანის გარეშე* ვიმსჯელოთ იმის შესახებ, ეკუთ-

ვნის თუ არა ეს ფორმა რომელიმეს მოყვანილ ტიპებიდან და სახელდობრ რომელს. ამ ნიშნების დადგენას ჩვენ ეხლა შევუდგებით.

4. ვთქვათ $F=\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k$ არის კვადრატული ფორმა, რომელშიაც ცვლადთა კვადრატების ყველა კოეფიციენტი არ უდრის ნულს. ჩვენ, მაშინ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ x_1^2-ის კოეფიციენტი a_{11} განსხვავებულია ნულისაგან. ასეთი დაშვება არ არღვევს ზოგადობას: თუ x_1^2-ის კოეფიციენტი აღმოჩნდება ნულის ტოლი, მაშინ ჩვენ გადავნომრავთ ცვლადებს სათანადოდ.

ამრიგად, დავუშვათ $a_{11}\neq 0$; მაშინ, როგორც ეს ვნახეთ § 1-ში, F ფორმა სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით შეგვიძლია მივიყვანოთ სახეზე:

$$F=a_{11}x_1'^2+F_1,$$

სადაც F_1 არის $x'_2,\ldots, x'_n$ ცვლადების კვადრატული ფორმა. თუ F_1 ფორმაში ცვლადთა კვადრატების ყველა კოეფიციენტი ნულს არ უდრის, მაშინ მისთვის შესაძლებელია გამოვიყენოთ იგივე ხერხი. ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ

$$F=a_{11}x_1''^2+a'_{22}x_2''^2+F_2,$$

სადაც F_2 არის $x''_3,\ldots, x''_n$ ცვლადების კვადრატული ფორმა. ამიტომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებიდან $x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$ ცვლადებზე გადასვლა ხდება აგრეთვე სამკუთხა გარდაქმნის მეშვეობით. კოეფიციენტი a'_{22} უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ადვილად გამოისახება საწყისი ფორმის a_{ik} კოეფი იენტით, მხოლოდ ჩვენ არ შევჩერდებით ამაზე, რადგანაც ჩვენ ახლავე მივიღებთ უფრო ზოგად შედეგს.

საზოგადოდ დავუშვათ, რომ ფორმა $F=\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k$ B სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით მიყვანილია სახეზე

$$F=\lambda_1u_1^2+\ldots+\lambda_hu_h^2+F_h, \tag{22}$$

სადაც F_h არის $u_{h+1},\ldots, u_n$ ცვლადების კვადრატული ფორმა:

$$F_h=\sum_{i,j} l_{ij}\,u_i\,u_j,\ (i=h+1,\ldots, n;\ j=h+1,\ldots, n).$$

მაშინ კოეფიციენტები $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ განისაზღვრებიან თანაფარდობით:

$$(23)\qquad \lambda_i = \frac{A_i}{A_{i-1}},\ (i=1, 2, \ldots, h),$$

სადაც, $$A_0 = 1,$$

$$(24)\qquad A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix},\ (i=1, 2, \ldots, h).$$

მართლაც, ვინაიდან $u_1, \ldots, u_h$ ცვლადები შედიან F ფორმაში მხოლოდ თავისი კვადრატებით, ამიტომ $u_i u_j$ $(i \neq j)$ ნამრავლის კოეფიციენტი, სადაც თუნდაც ერთი i ან j ინდექსებიდან არ აღემატება h-ს, ნულის ტოლია. ამიტომ F ფორმის მატრიცს $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადების მიმართ აქვს სახე:

$$L = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_h & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & l_{h+1, h+1} & l_{h+1, h+2} & \ldots & l_{h+1, n} \\ 0 & 0 & \ldots & & l_{h+2, h+1} & l_{h+2, h+2} & \ldots & l_{h+2, n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & l_{n, h+1} & l_{n, h+2} & \ldots & l_{n, n} \end{vmatrix}$$

პირობის თანახმად F ფორმა მიყვანილია (22) სახეზე სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით. ჩვენ ვიცით, რომ (24) სახის დეტერმინანტი წარმოადგენს ინვარიანტს სამკუთხა გარდაქმნის მიმართ (§ 1, მ. 4). ამიტომ თუ აღვნიშნავთ L_i-თ დეტერმინანტს, რომელიც შედგენილია L მატრიცის პირველი i სტრიქონისა და i სვეტის გადაკვეთაზე მდგარი ელემენტებისაგან, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(25)\qquad L_i = A_i,\ (i=1, 2, \ldots, n).$$

თუ ვიგულისხმებთ აქ რომ i თანმიმდევრობით უდრის 1, 2, . . . , n-ს, გვექნება:

$$\lambda_1 = a_{11},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0, & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

ანუ

$$\lambda_1 = a_{11}, \ \lambda_1\lambda_2 = A_2, \ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = A_3, \ldots, \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_h = A_h.$$

თუ რიცხვები $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ $a_{11}, A_1, \ldots, A_h$ აგრეთვე ნულისაგან განსხვავებული არიან და ჩვენ ვღებულობთ:

$$\lambda_1 = a_{11}, \ \lambda_2 = \frac{A_2}{a_{11}}, \quad \lambda_3 = \frac{A_3}{A_2}, \ldots, \ \lambda_h = \frac{A_h}{A_{h-1}}.$$

ამგვარად ჩვენი მტკიცება დამთავრებულია.

თუ $h<n$, მაშინ (25)-დან შეგვიძლია მივიღოთ კიდევ ერთი არსებითი დასკვნა. სახელდობრ, თუ დავუშვებთ, რომ $i=h+1$, მივიღებთ

$$L_{h+1} = A_{h+1}$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_h & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{h+1,h+1} \end{vmatrix} = A_{h+1}$$

ან, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_h = A_h$,

$$A_h l_{h+1,h+1} = A_{h+1},$$

საიდანაც

(26) $$l_{h+1,h+1} = \frac{A_{h+1}}{A_h}.$$

ახლა, თუ $A_{h+1} \neq 0$, მაშინ $l_{h+1, h+1} \neq 0$ და ჩვენ ვღებულობთ შედეგს:

თუ ფორმა $F=\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k$ სამკუთხა გარდაქმნის შედეგად მიყვანილია სახეზე

$$F=\lambda_1 u_1^2+\lambda_2 u_2^2+\ldots+\lambda_h u_h^2+F_h(u_{h+1},\ldots,u_n)$$

და, თუ $A_{h+1} \neq 0$, მაშინ F_h ფორმაში $u^2{}_{k+1}$-ის კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან.

ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია F ფორმისაგან სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით გამოვყოთ კიდევ ერთი კვადრატი.

თუ ვისარგებლებთ ამ შემთხვევით, შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თუ $F=\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k$ კვადრატული ფორმისათვის ყველა დეტერმინანტები $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ნულისაგან განსხვავებულნი არიან, მაშინ ფორმა სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით შეიძლება მიყვანილ იქნას სახეზე

$$F=\lambda_1 u_1^2+\lambda_2 u_2^2+\ldots+\lambda_n u^2{}_n,$$

სადაც

$$\lambda_i=\frac{A_i}{A_{i-1}}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $a_{11}=A_1 \neq 0$, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ლაგრანჟის მეთოდით გამოვყოთ პირველი კვადრატი, ე. ი. სამკუთხა გარდაქმნით F ფორმა მივიყვანოთ სახეზე:

$$F=a_{11}x'_1{}^2+F_1(x'_2,\ldots,x'_n).$$

ვინაიდან $A_2 \neq 0$, ზემოაღნიშნული შენიშვნის ძალით F_1 ფორმაში $x_2'^2$-ის კოეფი იენტი განსხვავებულია ნულისაგან და ჩვენ შეგვიძლია სამკუთხა გარდაქმნის დახმარებით გამოვყოთ მეორე კვადრატი. დავუშვათ, რომ ჩვენ უკვე შევძელით h კვადრატის გამოყოფა, ე. ი. F ფორმა სამკუთხა გარდაქმნით მიყვანილია სახეზე:

$$F=\lambda_1 u_1^2+\ldots+\lambda_h u_h^2+F_h(u_{h+1},\ldots,u_n).$$

რადგან $A_{h+1} \neq 0$, ამიტომ შესაძლებელია სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით გამოვყოთ კიდევ ერთი კვადრატი.

ამგვარად, სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით კვადრატთა თანმიმდევრობით გამოყოფის პროცესი შესაძლებელია გაგრძელდეს მანამდე, სანამ ფორმა არ მიიყვანება კანონიკურ სახეზე. დაგვრჩა შევნიშნოთ, რომ რამდენიმე სამკუთხა გარდაქმნების თანმიმდევრულად შესრულება შესაძლებელია შევცვალოთ ერთი სამკუთხა გარდაქმნით.

რაც შეეხება $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ კოეფიციენტებს, ისინი განისაზღვრებიან (22) ფორმულის მიხედვით, რომელშიაც ახლა საჭირო იქნება $h=n$. მაშასადამე,

$$\lambda_i = \frac{A_i}{A_{i-1}} (i=1, 2, \ldots, n).$$

ეს თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ λ_i კოეფიციენტი იქნება **დადებითი**, **თუ** A_i და A_{i-1}-ს აქვთ **ერთნაირი** ნიშნები და **უარყოფითი** თუ A_i და A_{i-1}-ს აქვთ სხვადასხვა ნიშანი. მაშასადამე $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ კოეფიციენტებს შორის იქნება იმდენი **უარყოფითი**, რამდენი ნიშნის შეცვლაც ხდება $A_0=1, A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვთა მწკრივში. ჩვენ მივედით შემდეგ დასკვნამდე:

თუ $A_i \neq 0$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, მაშინ F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში უარყოფით კოეფიციენტთა რიცხვი უდრის

$$1, A_1, A_2, \ldots, A_n$$

რიცხვთა მწკრივში ნიშანთა ცვლის რიცხვს *.

შევჩერდეთ განსაკუთრებით ორ კერძო შემთხვევაზე:

1. თუ **ყველა** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **რიცხვი დადებითია**, მაშინ ყველა λ_i კოეფიციენტიც აგრეთვე დადებითებია. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში F ფორმა იქნება **დადებითად განსაზღვრული**.

2. თუ მწკრივში $1, A_1, A_2, \ldots A_n$ **ნიშნები იცვლება**, მაშინ ყველა λ_i კოეფიციენტი **უარყოფითნი** არიან. ამ შემთხვევაში F ფორმა იქნება **უარყოფითად განსაზღვრული**.

---

* ეს თეორემა ინარჩუნებს თავის ძალას იმ შემთხვევაშიაც, როცა $A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვებიდან ზოგიერთი ნულის ტოლია. თუ მხოლოდ ორი ერთმანეთის გვერდით მდგომი წევრი ამ მწკრივში ნულად არ იქცევა, ცვლადთა ნუმერაციის შეცვლის გზით ყოველთვის შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ უკანასკნელი პირობა დაკმაყოფილდეს.

ამგვარად, იმისათვის, რომ F ფორმა იყოს დადებითად განსაზღვრული, საკმარისია, რომ ყველა $A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვი იყოს დადებითი.

ანალოგიურად, იმისათვის, რომ ფორმა F იყოს უარყოფითად განსაზღვრული, საკმარისია, რომ $1, A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვთა მწკრივში ნიშნები იცვლებოდეს.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ეს პირობები არა თუ მარტო საკმარისია, არამედ აუცილებელიცაა.

დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს დადებითად განსაზღვრული ფორმა $F=\sum\limits_{i,k} a_{ik}\, x_i x_k$. პირველ ყოვლისა ძნელი არ არის შევნიშნოთ რომ ცვლადთა კვადრატების კოეფიციენტები (ე. ი. a_{ii} კოეფიციენტები) უნდა იყვნენ ნულისაგან განსხვავებულნი. მართლაც, დავუშვათ, მაგალითად, რომ კოეფიციენტი $a_{11}=0$; თუ ჩვენ დავუშვებთ მაშინ $x_1=1$, $x_i=0$, როცა $i\neq 1$, მაშინ F ფორმა იქცევა ნულად; მაშასადამე, F ფორმას შეუძლია ნულად იქცეს ცვლადთა არანულოვანი მნიშვნელობის დროსაც, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ამრიგად, $a_{11}\neq 0$; მაშასადამე, სამკუთხა გარდაქმნის საშუალებით შეგვიძლია გამოვყოთ ჩვენი ფორმიდან პირველი კვადრატი. რადგან $a_{11}=A_1$, მაშინ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვთა მწკრივში პირველი განსხვავებულია ნულისაგან. დავუშვათ ახლა, რომ $A_1, A_2, \ldots, A_h$ $(h<n)$ განსხვავებულია ნულისაგან და ვაჩვენოთ, რომ, მაშინ $A_{h+1}\neq 0$.

რადგან $A_1, A_2, \ldots, A_h$ რიცხვები ნულისაგან განსხვავებულია, შეგვიძლია თანამიმდევრობითი სამკუთხა გარდაქმნების საშუალებით გამოვყოთ ჩვენი ფორმიდან h კვადრატი, ე. ი. მივიყვანოთ იგი სახეზე:

$$F=\lambda_1 u_1^2+\ldots+\lambda_h u_h^2+F_h(u_{h+1},\ldots,u_n),$$

სადაც

$$F_h(u_{h+1},\ldots,u_n)=\sum_{i,j} l_{ij}\, u_i u_j\ (i=h+1,\ldots,n;\ j=h+1,\ldots,n).$$

ამ შემთხვევაში u^2_{h+1}-ის კოეფიციენტი $l_{h+1,\,h+1}$ განისაზღვრება (26) თანაფარდობით.

ვინაიდან, თანახმად პირობისა, F არის დადებითად განსაზღვრული (უარყოფითად განსაზღვრული) ფორმა, მაშინ ფორმაც F_h

უნდა იყოს დადებითად განსაზღვრული (შესაბამისად უარყოფითად განსაზღვრული). მართლაც, ფორმა F_h რომ იყოს განუსაზღვრელი ანუ მისი რანგი რომ ნაკლები იყოს ცვლადთა რიცხვზე, მაშინ F_h ფორმას შეეძლო ქცეულიყო ნულად $u_{h+1}, \ldots, u_n$ ცვლადთა არანულოვანი მნიშვნელობის დროს, მაგრამ, მაშინ F ფორმასაც შეეძლო ქცეულიყო ნულად $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადთა არანულოვანი მნიშვნელობების დროს. ამრიგად, ფორმა F_h უნდა იყოს დადებითად განსაზღვრული (უარყოფითად განსაზღვრული), ხოლო მაშინ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად u^2_{h+1}-ის კოეფიციენტი $l_{h+1, h+1}$ უნდა იყოს ნულისაგან განსხვავებული. მაგრამ $l_{h+1,h+1} \neq 0$ უტოლობიდან (26) თანაფარდობის მიხედვით გამომდინარეობს: $A_{h+1} \neq 0$.

აქით დამტკიცებულია, რომ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვთა შორის არ იქნება ნულები. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში, როგორც ჩვენ ეს ზევით დავინახეთ, $1, A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვთა მწკრივში ნიშანთა ცვლის რიცხვი უდრის F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში უარყოფითი კოეფიციენტების რიცხვს. მაშასადამე, დადებითად განსაზღვრული ფორმისათვის $A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვები უნდა იყვნენ დადებითნი, ხოლო უარყოფითად განსაზღვრული ფორმისათვის $1, A_1, A_2, \ldots, A_n$ რიცხვთა მწკრივში ნიშნები უნდა იცვლებოდეს.

ყველა ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს:

იმისათვის, რომ ფორმა $F = \sum\limits_{i,k} a_{ik} x_i x_k$ იყოს დადებითად განსაზღვრული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

იმისათვის, რომ ფორმა $F = \sum\limits_{i,k} a_{ik} x_i x_k$ იყოს უარყოფითად — განსაზღვრული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$1, \; a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

რიცხვთა მწკრივში ნიშნები იცვლებოდეს.

მაგალითები.

1. განვიხილოთ ფორმა

$$F = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3^2.$$

ამ ფორმის მატრიცს აქვს სახე:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{აქ } A_1 = 2 \; A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, \; A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6.$$

1, 2, —7, 6 რიცხვთა მწკრივში არის 2 ნიშნის შეცვლა. მაშასადამე, F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებაში უარყოფით კოეფიციენტთა რიცხვი უდრის 2-ს § 1-ში ჩვენ ვიპოვეთ ეს კანონიკური გამოსახულება:

$$F = 2x''^2_1 - \frac{7}{2} x''^2_1 - \frac{6}{7} x_3''^2.$$

2. ფორმისათვის

$$F = x^2 - 2xy + y^2 - 4xz + 4z^2 + 2yz$$

გვექნება

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = 1, \; A_2 = 0, \; A_3 = -1.$$

რიცხვთა მწკრივში 1, 1, 0, —1 არის ერთი ნიშანცვლა. ის გარემოება, რომ $A_2 = 0$, არ თამაშობს არსებით როლს (იხ. ხაზქვეშა შენიშვნა). შესაძლებელია ისე შევცვალოთ ცვლადთა ნუმერაცია, რომ ყველა A_i იყოს ნულისაგან განსხვავებული. მართლაც, დავუშვათ $x_1 = y$, $x_2 = z$, $x_3 = x$. F მაშინ ფორმა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

ახლა მატრიცი ჩაიწერება სახით:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

და ჩვენ გვექნება:

$$A_1 = 1, \; A_2 = 1, \; A_3 = -1.$$

რიცხვთა მწკრივში 1, 1, 1, —1 არის ისევ ერთი ნიშანცვლა. F ფორმის კანონიკურ გამოსახულებას აქვს სახე (იხ. § 1):

$$F = x''^2 + 6y''^2 - 6z''^2.$$

სავარჯიშო.

განსაზღვრეთ A_i რიცხვები § 1-ის სავარჯიშო 2-ში მოყვანილ ყოველი ფორმისათვის.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რა შემთხვევაში ეწოდება კვადრატულ ფორმას განსაკუთრებული?

2. რა პირობას ექვემდებარება კვადრატული ფორმის მატრიცი?

3. როგორ გამოისახება გარდაქმნილი ფორმის მატრიცი?

4. რა შეიძლება ითქვას AB მატრიცის რანგის შესახებ?

4. რა არის კვადრატული ფორმის ინვარიანტი? მოიყვანეთ ინვარიანტთა მაგალითები.

5. რა არის კვადრატული ფორმის ინვარიანტი? მოიყვანეთ ინვარიანტთა მაგალითები.

6. რამდენ კვადრატს შეიცავს კვადრატული ფორმის კანონიკური გამოსახულება.

7. რაში მდგომარეობს კვადრატულ ფორმათა ინერციის კანონი?

8. რა პირობებში არის ორი კვადრატული ფორმა ექვივალენტური ნამდვილ კოეფიციენტებიან არაგანსაკუთრებულ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ?

9. რა არის დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა? უარყოფითად განსაზღვრული?

10. როგორია აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ კვადრატული ფორმა იყოს დადებითად განსაზღვრული? უარყოფითად — განსაზღვრული?

თავი X

ალგებრული გაფართოებანი

§ 1. ალგებრული გაფართოებანი. სასრული გაფართოებანი

1. ზემოთ დავინახეთ (თავი V, § 1), რომ განტოლებათა ალგებრული ამოხსნის დროს ისმება საკითხი მოცემული რიცხვითი ველის გაფართოების შესახებ რადიკალების, ე. ი. ორწევრა განტოლებათა ფესვების, ჩართვის საშუალებით. საზოგადოდ რომ ვთქვათ, P_1 ველს ეწოდება P ველის გაფართოება, თუ P ველის ყოველი ელემენტი იმყოფება P_1-ში:

$$P \subset P_1.$$

α ელემენტს, რომელიც ეკუთვნის P_1 ველს ეწოდება ალგებრული ელემენტი P ველის მიმართ, თუ ის წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ფესვს:

$$f(x)=0, \tag{1}$$

სადაც $f(x)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია ველის მიმართ. წინააღმდეგ შემთხვევაში α ელემენტს ეწოდება ტრანსცენდენტული P ველის მიმართ.

ასე მაგალითად, i რიცხვი ალგებრულ ელემენტს წარმოადგენს ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველის მიმართ, რადგანაც ის აკმაყოფილებს განტოლებას

$$x^2+1=0. \tag{2}$$

პირიქით, π და e წარმოადგენს ტრანსცენდენტულ ელემენტებს R ველის მიმართ.

(1) განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს α ელემენტი, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ცალსახად არ განისაზღვრება. ასე, მაგალითად, i რიცხვი (2) განტოლებასთან ერთად აკმაყოფილებს აგრეთვე განტოლებას

$$x^4-1=0.$$

მაგრამ თუ მოვითხოვთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს P ველში დაუყვანადი (შეად. თავი (III), § 4), მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ამით სავსებით განისაზღვრება (სიზუსტით მუდმივ მამრავლამდე).

მართლაც, დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციასთან ერთად არსებობს P-ს მიმართ დაუყვანადი კიდევ მეორე $g(x)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს α ფესვი.

ამ შემთხვევაში $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვს საერთო ფესვი, და ისინი ორთავე დაუყვანადია P ველში. III თავის მე 6 პარაგრაფის ძალით (შედეგი) $g(x)$ ფუნქცია $f(x)$ ფუნქციისაგან შეიძლება განსხვავდებოდეს მხოლოდ მუდმივი მამრავლით.

დავუშვათ, რომ

(3) $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

არის P-ს მიმართ დაუყვანადი ფუნქცია, რომლისათვისაც α ელემენტი წარმოადგენს ფესვს.

$f(x)$ ფუნქციის n ხარისხს ეწოდება α ელემენტის ხარისხი P ველის მიმართ და აღინიშნება სიმბოლოთი:

(4) $$n=[\alpha:P].$$

ასე, მაგალითად, i რიცხვის ხარისხი ყველა რაციონალურ რიცხვთა P ველის მიმართ 2-ის ტოლია:

$$[i:R]=2.$$

(*) $$\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

რიცხვის ხარისხი P ველის მიმართ 4-ის ტოლია, რადგანაც იგი წარმოადგენს

(5) $$f(x)=x^4+1$$

ფუნქციის ფესვს, რომელიც დაუყვანადია R-ის მიმართ (შეად. თავი III, § 4, პუნქ. 4).

თუ R ველს ჩავურთავთ რიცხვს $\sqrt{2}$, მაშინ მივიღებთ $R(\sqrt{2})$ ველს, რომელშიაც (5) ფუნქცია იქნება უკვე დ ა უ ყ ვ ა ნ ა დ ი (იხ. თავი III):

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

(*) რიცხვი (იხ. ზევით) იქნება ფესვი მეორე ხარისხის ფუნქციისა:

$$x^2 - \sqrt{2}x + 1,$$

რომელიც დაუყვანადია $R(\sqrt{2})$ველში. მაშასადამე, ამ რიცხვის ხარისხი $R(\sqrt{2})$ ველის მიმართ 2-ის ტოლია,

საზოგადოდ, თუ P, ველიდან გადავდივართ მის P^* გაფართოებაზე,

$$P^* \supset P,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც დაუყვანადია P-ს მიმართ, შეიძლება დაყვანადი აღმოჩნდეს P^*-ს მიმართ. ამ შემთხვევაში α ელემენტი იქნება ფესვი უფრო დაბალი ხარისხის ფუნქციისა, კოეფიციენტებით, რომლებიც ეკუთვნიან P^* ველს. ამგვარად, P ველიდან P^* გაფართოებაზე გადასვლის დროს α ელემენტის ხარისხი შეიძლება შემცირდეს; სიმბოლურად ეს შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

თუ $P^* \supset P$ მაშინ $[\alpha : P^*] \leqslant [\alpha : P]$.,

2. α ელემენტის ხარისხი P ველის მიმართ შეიძლება დავახასიათოთ კიდევ სხვანაირად. მართლაც, ჩავწეროთ, რომ α ელემენტი წარმოადგენს ფესვს (3) ფუნქციისა:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

ეს თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ ელემენტები

$$\alpha^n, \alpha^{n-1}, \dots, \alpha, \alpha^0$$

შებმულია წრფივი დამოკიდებულებით ისეთი კოეფიციენტების საშუალებით, რომლებიც ეკუთვნიან P ველს.

საზოგადოდ, დავუშვათ, რომ განვიხილავთ ნებსით m ელემენტთა სისტემას

(6) $$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m.$$

ამ ელემენტებს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული P-ს მიმართ, თუ ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_m\xi_m = 0,$$

სადაც $c_1, c_2, \dots, c_m$ არიან ველის ელემენტები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ხოლო თუ c_i ელემენტები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამ პირობებს, არ არსებობს, მაშინ $\xi_1, \dots, \xi_m$ წრფივად დამოუკიდებელია P-ს მიმართ.

ამ განსაზღვრიდან უშუალოდ მივიღებთ:

თუ (6) ელემენტებს შორის არიან $h (h<m)$ წრფივად დამოკიდებული ელემენტები, მაშინ (6) ელემენტებიც წრფივად დამოკიდებულია.

თუ $\xi_1, \ldots, \xi_m$ ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათ შორის ყოველი ერთობლიობა h ელემენტისა წრფივად დამოუკიდებელია (შეად. თავი VIII, § 1).

ის დასკვნა, რომელიც ზემოთ მივიღეთ, ახლა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

თუ α არის n ხარისხის ელემენტი P-ს მიმართ, მაშინ ელემენტები

$$\alpha^n, \alpha^{n-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha^0 (=1) \tag{7}$$

წრფივად დამოკიდებულია P-ს მიმართ.

შებრუნებით, თუ (7) ელემენტები წრფივად დამოკიდებულია P-ს მიმართ, მაშინ არსებობს ისეთი $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ელემენტები P ველში, რომ

$$c_0\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\alpha + c_n = 0,$$

ამასთან, $c_0, \ldots, c_n$ ელემენტებს შორის ერთი ელემენტი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ამგვარად α აკმაყოფილებს ისეთ განტოლებას, რომლის ხარისხი არის არა უმეტესი ვიდრე n, ხოლო კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს. მაშასადამე, α არის ალგებრული ელემენტი P-ს მიმართ, და $[\alpha : p]$ ხარისხი არ აღემატება n-ს

თუ ამასთანავე

$$\alpha^{n-1}, \ldots, \alpha, \alpha^0 \tag{8}$$

ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია P-ს მიმართ, მაშინ α ელემენტის ხარისხი P-ს მიმართ ზუსტად n-ის ტოლია.

მართლაც, თუ $[\alpha : p]$ ხარისხი n-ზე დაბალია, მაშინ α აკმაყოფილებს $h < n$ ხარისხის განტოლებას P-ში, ე. ი. $\alpha^h, \ldots, \alpha, \alpha^0$ ელემენტები წრფივად დამოკიდებულია P-ს მიმართ. მაგრამ მაშინ (8) ელემენტებიც წრფივად დამოკიდებული უნდა იყოს.

შებრუნებულად, **თუ $[\alpha : p]$ ხარისხი n-ის ტოლია, მაშინ (8) ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია P-ს მიმართ.**

შევაერთებთ რა წინანდელ შედეგებს, მივიღებთ:

α ელემენტის ხარისხი P-ს მიმართ n-ის ტოლია მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა

$$\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \ldots, \alpha, \alpha^0$$

ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია P-ს მიმართ, მაშინ როდესაც

$$\alpha^n, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \ldots, \alpha, \alpha^0$$

შებმულნი არიან წრფივი დამოკიდებულებით.

3. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \xi_m$ ელემენტები წრფივად დამოკიდებულია P ველის მიმართ:

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{m-1}\xi_{m-1} + c_m\xi_m = 0$$

და თუ $c_m \neq 0$, მაშინ ξ_m ელემენტი შეიძლება გამოვსახოთ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$-ით.

$$\xi_m = -\frac{c_1}{c_m}\xi_1 - \frac{c_2}{c_m}\xi_2 - \ldots - \frac{c_{m-1}}{c_m}\xi_{m-1}$$

ანუ

$$(9) \qquad \xi_m = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_{m-1}\xi_{m-1},$$

სადაც

$$b_1 = -\frac{c_1}{c_m}, \; b = -\frac{c_2}{c_m}, \ldots, \; b_{m-1} = \frac{-c_{m-1}}{c_m}$$

კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს.

თუ ადგილი აქვს (9) სახის თანაფარდობას, სადაც $b_1, \ldots, b_{m-1}$ **არიან P ველის ელემენტები,** მაშინ **ამბობენ, რომ ξ_m წრფივად დამოკიდებულია $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$-ზე P ველში.**

შევნიშნოთ, რომ ყოველი ξ_i ელემენტი, როცა $i < m$, თვით განსაზღვრის თანახმად, წრფივად დამოკიდებულია $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$-საგან, რადგანაც

$$\xi_i = e_1\xi_1 + e_2\xi_2 + \ldots + e_i\xi_i + \ldots + e_{m-1}\xi_{m-1},$$

სადაც

$$e_1 = \ldots = e_{i-1} = e_{i+1} = \ldots = e_{m-1} = 0,$$

მაშინ როდესაც

$$e_i = 1.$$

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

თუ ω ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$-ზე P ველში, ხოლო ყოველი η ელემენტთაგანი თავის მხრივ წრფივად დამოკიდებულია $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$-ზე P ველში, მაშინ ω ც წრფივად დამოკიდებულია $\xi_1, \ldots, \xi_m$-ზე P ველში.

მართლაც, ჯერ ჩავწეროთ, რომ η_i ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$-ზე:

$$\eta_i = a_{i_1}\xi_1 + a_{i_2}\xi_2 + \ldots + a_{im}\xi_m = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\xi_k \, (i = 1, 2, \ldots, r),$$

სადაც $a_{i_1}, \ldots, a_{im}$ კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს. ω ელემენტები, პირობის თანახმად, წრფივად დამოკიდებულია $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$-ზე:

$$\omega = b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \ldots + b_r\eta_r = \sum_{i=1}^{r} b_i\eta_i,$$

სადაც $b_1, b_2, \ldots, b_r$ არიან P ველის ელემენტები.

ჩავსვამთ რა აქ η_i-ს ნაცვლად მის გამოსახულებას, ვიპოვით:

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} b_i(a_{i_1}\xi_1 + a_{i_2}\xi_2 + \ldots + a_{im}\xi_m),$$

ან

$$\omega = B_1\xi_1 + B_2\xi_2 + \ldots + B_m\xi_m,$$

სადაც კოეფიციენტები

$$B_1 = \sum_{i=1}^{r} b_i a_{i_1}, \ldots, B_m = \sum_{i=1}^{r} b_i a_{im}$$

ეკუთვნიან P-ს (რადგან ეს მიღებულია a_{ik} და b_i კოეფიციენტებისაგან შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების საშუალებით).

4. კვლავ დავუშვათ, რომ α ელემენტი წარმოადგენს ფესვს

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

ფუნქციისა, რომელიც დაუყვანადია P ველში. დავუშვათ შემდეგ, რომ P_1 ველი მიღებულია P-საგან α ელემენტის ჩართვით: ეს იმას ნიშნავს (შეად. თავი I, § 4, პუნქ. 3), რომ P_1 ველი შეიცავს P ველის ყველა ელემენტებისა და α ელემენტის გარდა ყველა იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებს, რომლებსაც მივიღებთ ოთხი ძირითადი ოპერაციის გამოყენებით P ველის ელემენტებისა და α რიცხვს მიმართ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, P_1 ველის ელემენტები წარმოადგენენ α-ს რაციონალურ ფუნქციებს P ველის მიმართ (იხ. თავი II, § I, პუნქ. 2).

ამიტომ, თუ β არის P_1 ველის ელემენტი, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\beta=\frac{\psi(\alpha)}{\varphi(\alpha)}, \tag{10}$$

სადაც $\psi(x)$ და $\varphi(x)$ წარმოადგენენ მთელ რაციონალურ ფუნქციებს P ველის მიმართ. თავისთავად ცხადია, რომ (10) გამოსახულების მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან:

$$\varphi(\alpha)\neq 0.$$

ძნელი არაა იმის დანახვა, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია ურთიერთ მარტივი უნდა იყოს $f(x)$ თან. მართლაც, $\varphi(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს; $f(x)$ ფუნქცია ამ ველში დაუყვანადია. დავუშვათ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას აქვს ერთი მაინც საერთო ფესვი $f(x)$-თან, მაშინ, III თავის მე-6 პარაგრაფის 1-ლი პუნქტის ძალით, $\varphi(x)$ ფუნქცია უნდა გაიყოს $f(x)$-ზე, ე. ი. უნდა იყოს

$$\varphi(x)=f(x)\,q(x),$$

სადაც $q(x)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია P-ს მიმართ. თუ აქ დავუშვებთ, რომ $x=a$ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ α არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვი, მივიღებთ $\varphi(\alpha)=0$, რაც შეუძლებელია.

ამგვარად, თუ დავუშვებთ, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$-ს აქვთ საერთო ფესვი, ჩვენ ვღებულობთ წინააღმდეგობას. მაშასადამე, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ს არ აქვთ საერთო ფესვები, ე. ი. ისინი ურთიერთ მარტივია (თავი III, § 6, პუნქტი 1).

თავის დროზე ჩვენ დავამტკიცეთ (თავი II, § 2), რომ ორი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ურთიერთ მარტივი ფუნქციისათვის ყოველთვის შეიძლება ორი $F(x)$ და $\Phi(x)$ მთელი რაციონალური ფუნქციის განსაზღვრა ისე, რომ შესრულდეს თანაფარდობა

$$f(x)\,F(x)+\varphi(x)\,\Phi(x)=1.$$

თუ აქ დავუშვებთ $x=\alpha$ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $f(\alpha)=0$, მაშინ მივიღებთ:

$$\varphi(\alpha)\,\Phi(\alpha)=1.$$

ამ ტოლობით შეიძლება ვისარგებლოთ იმისათვის, რომ წილადი ფუნქცია (10) შევცვალოთ მთელი ფუნქციით. მართლაც, თუ (10)-ის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ $\Phi(\alpha)$-ზე, მივიღებთ.

$$(10') \qquad \beta=\frac{\psi(\alpha)\,\Phi(\alpha)}{\varphi(\alpha)\,\Phi(\alpha)}=\psi(\alpha)\,\Phi(\alpha);$$

$\psi(x)\,\Phi(x)$ ნამრავლი წარმოადგენს მთელ რაციონალურ ფუნქციას P ველის მიმართ; თუ დავუშვებთ, რომ

$$\psi(x)\,\Phi(x)=g(x),$$

მაშინ (10′) თანაფარდობას გადავწერთ ასეთი სახით:

$$\beta=g(\alpha).$$

ამგვარად, $P_1=P(\alpha)$ ველის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც α ელემენტის მთელი რაციონალური ფუნქცია P-ს მიმართ.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ P_1 ველის ყოველი ელემენტი შეიძლება წრფივად გამოვსახოთ შემდეგი ელემენტებით:

$$(11) \qquad \alpha^{n-1},\ \alpha^{n-2},\ .\ .\ .\ ,\ \alpha,\ 1.$$

უწინარეს ყოვლისა, ადვილი დასანახია, რომ α^k სახის ყოველი ელემენტი, სადაც k ნებსითი მთელი დადებითი რიცხვია, წრფივად დამოკიდებულია (11) ელემენტებზე. როცა $k<n$, ეს გამომდინარეობს წრფივად დამოუკიდებლობის განსაზღვრიდან. ამიტომ დავუშვათ, რომ $k \geqslant n$.

ჩავწეროთ, რომ α ელემენტი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფესვს:

$$(12) \qquad a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ .\ .\ .\ +a_{n-1}\,\alpha+a_n=0.$$

რადგანაც $a_0 \neq 0$, ამიტომ α^n ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია $\alpha^{n-1},\ .\ .\ .\ ,\alpha,\ 1$ ელემენტებზე. ახლა დავუშვათ, რომ $k>n$; გავამრავლებთ რა (12) ტოლობის ორთავე ნაწილს α^{k-n}-ზე, მივიღებთ:

$$a_0\alpha^k+a_1\alpha^{k-1}+\ .\ .\ .\ +a_{n-1}\,\alpha^{k-n+1}+a_n\alpha^{k-n}=0.$$

ეს თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ როცა $k>n$, მაშინ α^k ელემენტი წრფივად გამოისახება α ელემენტის უფრო დაბალი ხარისხების საშუალებით. აქედან და მე-3 პუნქტიდან გამომდინარეობს, რომ α^k *შეიძლება გამოვსახოთ წრფივად* (11) *ელემენტების საშუალებით*.

ზევით დავინახეთ, რომ P ველის ყოველი β ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც მთელი რაციონალური ფუნქცია α-სი:

(13) $$\beta=b_0\alpha^m+b_1\alpha^{m-1}+\dots+b_m;$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, β ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია $\alpha^m, \alpha^{m-1}, \dots, 1$ ელემენტებზე. თუ $m<n$, მაშინ უკვე (13) თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ β წრფივად დამოკიდებულია (11) ელემენტებზე. თუ $m\geqslant n$, მაშინ წინანდელი შენიშვნისა და მე-3 პუნქტის ძალით იმავე დასკვნამდე მივალთ.

ამგვარად, **თუ α არის ალგებრული ელემენტი n ხარისხისა P ველის მიმართ, მაშინ $P_1=P(\alpha)$ ველის ყოველი ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია**

(11) $$\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \dots, \alpha, 1$$

ელემენტებზე.

ამიტომ ამბობენ, რომ (11) ელემენტები ჰქმნიან *წრფივ ბაზისს* (ან უბრალოდ ბაზისს) P_1 გაფართოებისა P ველის მიმართ. წრფივი ბაზისის ცნება ეკუთვნის თანამედროვე ალგებრის უმნიშვნელოვანეს ცნებათა რიცხვს.

5. საზოგადოდ დავუშვათ, რომ P ველის P^* გაფართოებას აქვს შემდეგი თვისება:

P^*-ში არსებობს სისტემა ისეთი

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$$

ელემენტებისა, რომ P^* ველის ყოველი ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$b_1\zeta_1+b_2\zeta_2+\dots+b_n\zeta_n,$$

სადაც $b_1, b_2, \dots, b_n$ კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს.

მაშინ ამბობენ, რომ $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ **ელემენტები ჰქმნიან P^* გაფართოების ბაზისს P ველის მიმართ**. თვით P^* გაფართოებას ამ შემთხვევაში ეწოდება **P ველის სასრული გაფართოება**.

ბაზისის ელემენტები $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, შეიძლება, ზოგადობის დაურღვევლად, ჩავთვალოთ წრფივად დამოუკიდებლად P-ს მიმართ. მართლაც, ზოგიერთი მათგანი რომ დამოკიდებული ყოფილიყო სხვა ელემენტებისაგან, ისინი შეგვეძლო უკუგვეგდო.

ბაზისის წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა n რიცხვს ეწოდება P^* გაფართოების ხარისხი P-ს მიმართ და აღინიშნება $[P^*:P]$ სიმბოლოთი:

$$[P^*:P]=n.$$

თუ გვაქვს სისტემა $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ელემენტებისა, რომლებიც ეკუთვნიან P^* ველს, მაშინ ყოველი ამ ელემენტთაგანი შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ელემენტების წრფივი ფორმის სახით:

$$\begin{cases} \beta_1 = b_{11}\zeta_1 + b_{12}\zeta_2 + \ldots + b_{1n}\zeta_n, \\ \beta_2 = b_{21}\zeta_1 + b_{22}\zeta_2 + \ldots + b_{2n}\zeta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_m = b_{m1}\zeta_1 + b_{m2}\zeta_2 + \ldots + b_{mn}\zeta_n. \end{cases}$$

წრფივად დამოუკიდებელთა რიცხვი ამ ფორმებს შორის (და, მაშასადამე, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ ელემენტებს შორისაც) ეტოლება კოეფიციენტთა მატრიცის რანგს (თავი VIII). ეს რანგი ყოველ შემთხვევაში არ აღემატება n-ს. ამგვარად, **თუ P^* ველი არის P ველის სასრული გაფართოება და P^*-ს ხარისხი P-ს მიმართ n-ის ტოლია, მაშინ P^* ველის წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა მაქსიმალური რიცხვი P-ს მიმართ ეტოლება n-ს.**

P^* გაფართოების ყოველი $n+1$ ელემენტი შებმული არის წრფივი დამოკიდებულებით P-ს მიმართ.

შებრუნებულად, თუ P^* გაფართოების წრფივად დამოუკიდებელ (P-ს მიმართ) ელემენტთა მაქსიმალური რიცხვი n-ის ტოლია, მაშინ P^* არის P ველის სასრული გაფართოება და P^*-ს ხარისხი P-ს მიმართ ეტოლება n-ს.

მართლაც, დაშვების თანახმად, P^* ველში არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტი*, ეს ელემენტები აღვნიშნოთ $\zeta_1, \zeta_2,$

* ასეთი ელემენტები რომ არ არსებულიყო, წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა მაქსიმალური რიცხვი n-ზე ნაკლები იქნებოდა.

. . . , ζ_n-ით. მეორეს მხრივ, თუ ამ ელემენტებს შევუერთებთ P^* ველის ნებსით ζ ელემენტს, მაშინ მივიღებთ $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ ელემენტებს, რომელთა რიცხვი არის $n+1$. ეს ელემენტები უნდა იყოს წრფივად დამოკიდებული (P-ს მიმართ); ამიტომ უნდა არსებობდეს შემდეგი სახის ტოლობა:

$$a\zeta + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + \ldots + a_n\zeta_n = 0,$$

სადაც $a, a_1, \ldots, a_n$ არიან P ველის ელემენტები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

a კოეფიციენტი რომ ნულს ეტოლებოდეს, მაშინ გამოვიდოდა, რომ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ელემენტები შებმული არიან წრფივი დამოკიდებულებით. მაშასადამე, $a \neq 0$, ე. ი. ζ ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$-ზე.

ამგვარად, P^* ველის ყოველი ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$-ზე P ველში. ეს სწორედ იმას ნიშნავს, რომ P^* არის n ხარისხის P ველის სასრული გაფართოება.

შენიშვნა. თუ P^* არის სასრული გაფართოება (n ხარისხისა) P-ს მიმართ და თუ T ველი აკმაყოფილებს თანაფარდობებს

$$P^* \supseteq T \supseteq P,$$

მაშინ P^*-არის T-ს სასრული გაფართოება, ხოლო T კი P-ს სასრული გაფართოება.

დავამტკიცოთ, მაგალითად, რომ P^* არის T-ს სასრული გაფართოება. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ P^* ველის ყოველი $n+1$ ელემენტი შებმულია წრფივი დამოკიდებულებით P-ს მიმართ, და მაშასადამე, T-ს მიმართაც, რადგან P ველის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის T ველს; მაშასადამე, P^* ველის წრფივად დამოუკიდებელ (T ველის მიმართ) ელემენტთა მაქსიმალური რიცხვი არ აღემატება n-ს. თუ ეს რიცხვი ეტოლება r-ს ($r \leqslant n$), მაშინ P^* არის r ხარისხის სასრული გაფართოება T-ს მიმართ.

6. დავუშვათ კვლავ, რომ P^* არის P ველის სასრული გაფართოება (n ხარისხისა), და დავუშვათ, რომ β არის P^* ველის ნებსითი ელემენტი.

ახლა განვიხილოთ ელემენტები

$$\beta^n, \beta^{n-1}, \ldots, \beta, 1;$$

რადგან ამ ელემენტების რიცხვი ($n+1$)-ის ტოლია, ამიტომ ისინი წრფივი დამოკიდებულებით არიან შებმული P-ს მიმართ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, P-ში არსებობს ისეთი c_0, c_1, . . . , c_{n-1} ელემენტები, რომ

$$c_0\beta^n + c_1\beta^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\beta + c_n = 0;$$

ამასთან c_0, c_1, . . . , c_n ელემენტებიდან ერთი ელემენტი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია. უკანასკნელი თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ β ელემენტი წარმოადგენს ფესვს განტოლებისა, რომლის ხარისხი არის არა უმეტესი ვიდრე n და რომლის კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, β არის ალგებრული ელემენტი P-ს მიმართ, და მისი ხარისხი არ აღემატება n-ს.

ამგვარად, თუ P^* არის n **ხარისხის სასრული გაფართოება** P-ს **მიმართ, მაშინ** P^* **გაფართოების ყოველი ელემენტი წარმოადგენს ალგებრულ ელემენტს** P-ს **მიმართ, რომლის ხარისხი არ აღემატება** n-ს.

ამ შედეგს მივყევართ **ალგებრული გაფართოების** ცნებამდე.

P^* ($P^* \supset P$) **ველს ეწოდება** P **ველის ალგებრული გაფართოება**, თუ P^* ველის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს ალგებრულ ელემენტს P-ს მიმართ.

წინა შედეგი ახლა შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

ველის ყოველი სასრული გაფართოება არის ალგებრული გაფართოება.

ახლა დავუბრუნდეთ გაფართოებას

$$P_1 = P(\alpha), \tag{14}$$

რომელიც შექმნილია α ელემენტის ჩართვით. დავუშვათ, ისე როგორც ზემოთ, რომ α არის n ხარისხის ალგებრული ელემენტი P-ს მიმართ. ჩვენ დავინახეთ, რომ ამ შემთხვევაში ელემენტები

$$\alpha^{n-1},\ \alpha^{n-2},\ \ldots,\ \alpha,\ 1$$

ჰქმნიან P_1 გაფართოების ბაზისს P-ს მიმართ. მეორეს მხრივ, ეს ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია P-ს მიმართ. მაშასადამე, (14) გაფართოება არის P ველის სასრული გაფართოება, და მისი ხარისხი n-ის ტოლია.

ამგვარად, თუ α არის n ხარისხის ალგებრული ელემენტი P-ს მიმართ, მაშინ $P_1=P(\alpha)$ ველი წარმოადგენს P ველის სასრულო გაფართოებას, და ამ გაფართოების ხარისხი n-ის ტოლია.

7. სასრული გაფართოებათათვის ადგილი აქვს შემდეგ ძირითად თვისებას:

დავუშვათ, რომ P_1 ველი წარმოადგენს P_0 ველის სასრული გაფართოებას, ამასთან $[P:P_0]$ ხარისხი n_1-ის ტოლია.

დავუშვათ შემდეგ, რომ P_2 არის P_1 ველის სასრული გაფართოება, და ამ გაფართოების ხარისხი $[P_2:P_1]$ არის n-ის ტოლი.

მაშინ P_2 ველი იქნება აგრეთვე P_0 ველის სასრული გაფართოება, და მისი ხარისხი განისაზღვრება ტოლობით:

$$[P_2:P_0]=[P_2:P_1]\cdot[P_1:P_0[\tag{15}$$

ან

$$[P_2:P_0]=n_1n_2.$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ ელემენტები

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n_1}$$

ქმნიან P_1 ველის ბაზისს P_0-ს მიმართ, ხოლო ელემენტები

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n_2}$$

წარმოადგენენ P_2 ველის ბაზისს P_1-ის მიმართ. თუ γ არის P_2 ველის ნებისმითი ელემენტი, მაშინ ის შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\gamma=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_{n_2}u_{n_2}=\sum_{i=1}^{n_2}\beta_iu_i, \tag{16}$$

სადაც $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_2}$ არის P_1 ველის ელემენტები. მეორეს მხრივ, P_1 ველის ყოველი ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც წრფივი ფორმა $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n_1}$ ელემენტებისა, რომლებიც ბაზისს წარმოადგენენ. ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\beta_i=b_{1i}\zeta_1+b_{2i}\zeta_2+\ldots+b_{n_1i}\zeta_{n_1},$$

სადაც $b_{1i}, \ldots, b_{1i}$ კოეფიციენტები ეკუთვნიან P_0 ველს. ჩავსვამთ რა (16)-ში, ვიპოვით:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n_2} (b_{1i}\zeta_1 u_i + b_{2i}\zeta_2 u_i + \ldots + b_{n_1 i}\zeta_{n_1} u_i)$$

ან

(17) $b_{11}\zeta_1u_1 + b_{12}\zeta_1u_2 + \ldots + b_{1n_2}\zeta_1u_{n_2} + b_{21}\zeta_2u_1 + \ldots + b_{n_1n_2}\zeta_{n_1}u_{n_2}$.

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ P_2 ველის ყოველი ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია P_0-ის შემდეგ ელემენტებზე:

(18) $\zeta_1u_1, \zeta_1u_2, \ldots, \zeta_1u_{n_2}, \zeta_2u_1, \ldots, \zeta_{n_1}u_{n_2}$,

რომელთა რიცხვი არის n_1n_2.

ახლა უნდა დავამტკიცოთ, რომ ეს ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია P_0-ს მიმართ. დავუშვათ წინააღმდეგი, ე. ი. დავუშვათ, რომ P_0-ში არსებობს სისტემა $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{n_1n_2}$ ელემენტებისა, რომლებისათვისაც ადგილი აქვს ტოლობას:

(19)
$$\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{i=1}^{n_2} c_{ki}\zeta_k u_i = 0;$$

ამასთან c_{ki} ელემენტებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. (19) თანაფარდობა შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით

$$\left(\sum_{k=1}^{n_1} c_{k1}\zeta_k\right)u_1 + \left(\sum_{k=1}^{n_1} c_{k2}\zeta_k\right)u_2 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n_1} c_{kn_2}\zeta_k\right)u_{n_2} = 0.$$

აქ რომ რომელიმე კოეფიციენტი $u_1, u_2, \ldots, u_{n_2}$ — ელემენტებთან განსხვავებული იყოს ნულისაგან, მაშინ ჩვენ გვექნებოდა წრფივი დამოკიდებულება $u_1, u_2, \ldots, u_{n_2}$ ელემენტებს შორის P_1-ს მიმართ. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_{ki}\zeta_k = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_2).$$

თუ ახლა ერთი c_{ki} კოეფიციენტთაგანი მაინც აღმოჩნდება ნულისაგან განსხვავებული, მაშინ გამოვა, რომ $z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}$ ელემენტები წრფივად დამოკიდებულია P_0-ს მიმართ. მაშასადამე, ყველა c_{ki} კოეფიციენტი უნდა ეტოლებოდეს ნულს.

ამგვარად, (18) ელემენტები არ შეიძლება იყოს წრფივად დამოკიდებული.

მაშასადამე, (18) ელემენტები წრფივად — დამოუკიდებელია P_0-ის მიმართ; ისინი ჰქმნიან P_2 ველის ბაზისს P_0-ის მიმართ.

ამიტომ

$$[P_2 : P_0] = n_1 n_2.$$

ახლახან დამტკიცებული თეორემის გამოყენებით მივალთ ასეთ შედეგამდე;

თუ მწკრივში

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_r$$

ყოველი ველი წარმოადგენს წინანდელის სასრულ გაფართოებას, ამასთან

$$[P_i : P_{i-1}] = n_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

მაშინ P ველი იქნება P_0-ის სასრული გაფართოება, ამასთან მისი ხარისხი განისაზღვრება ტოლობით:

$$(20) \qquad [P_r : P_0) = n_1 \cdot n_2 \ldots n_r.$$

დავუშვათ, კერძოდ, რომ P_1 ველი მიიღება P_0-დან ალგებრული α_1 ელემენტის ჩართვით, P_2 ველი მიიღება P_1-დან ალგებრული α_2 ელემენტის ჩართვით, და ა. შ., დაბოლოს, P_r ველი მიიღება P_{r-1}-დან α_r ალგებრული ელემენტის ჩართვით.

n_i-ით აღვნიშნოთ α_i ელემენტის ხარისხი P_{i-1}-ის მიმართ:

$$[\alpha_i : P_{i-1}] = n_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

მე-6 პუნქტის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ყოველი P_i ველი წარმოადგენს n_i ხარისხის სასრულ გაფართოებას P_{i-1}-ის მიმართ. მაგრამ მაშინ, წინანდელის მიხედვით, P_r ველი იქნება P_0 ველის სასრული გაფართოება და ამ გაფართოების ხარისხი იქნება

$$[P_r : P_0] = n_1 n_2 \ldots n_r.$$

§ 2. გამოყენება განტოლებათა თეორიისადმი*

1. განტოლებათა ალგებრული ამოხსნის პრობლემა, როგორც ვიცით (იხ. თავი V, § 1, პუნქ. 1), შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: განტოლების ამოხსნა რადიკალებში ნიშნავს მისი ფესვების გამოსახვას რაციონალურად გარკვეულ ორწევრა განტოლებათა ფესვებით. ამით ორწევრა განტოლებანი გამოიყოფა განსაკუთრებულ კლასად დამხმარე განტოლებებისა, რომლებზედაც დაგვყავს (ან ვცდილობთ დავიყვანოთ) დანარჩენი განტოლებანი. თუ მოცემული განტოლების ამოხსნა დაყვანილია ასეთ დამხმარე განტოლებათა ამოხსნამდე, მაშინ ამოცანა ამოწურულად ითვლება.

თუ განვაზოგადებთ საკითხის ამ დასმას, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ მოცემულია რაიმე კლასი დამხმარე განტოლებებისა (არა აუცილებლად ორწევრა განტოლებებისა), რომელთა საშუალებით უნდა ამოიხსნას მოცემული განტოლება. ამ თვალსაზრისით

$$f(x)=0 \tag{21}$$

განტოლების ამოხსნა დამხმარე

$$H_1(x)=0,\ H_2(x)=0,\ .\ .\ .\ .\ ,\ H_r(x)=0 \tag{22}$$

განტოლებათა საშუალებით ნიშნავს (21) **განტოლების ფესვების გამოსახვას რაციონალურად** (22) **განტოლებათა ფესვებით.** დავუშვათ, რომ ყველა განსახილავ განტოლებათა კოეფიციენტები ეკუთვნიან P ველს.

აღვნიშნოთ α_i-თი $H_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ r)$ ფუნქციის რომელიმე ფესვი. თუ მოვახერხებთ (21) განტოლების x_1 ფესვის წარმოდგენას ასეთი სახით:

$$x_1=F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_r),$$

სადაც $F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_r)$ არის მთელი რაციონალური ფუნქცია $\alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_r$ ელემენტებისა P ველში, მაშინ ვიტყვით, რომ (21) **განტოლება ამოხსნადია** (ყოველ შემთხვევაში x_1 ფესვის მიმართ) (22) **დამხმარე განტოლებათა საშუალებით.**

ამ შემთხვევაში x_1 ფესვი ეკუთვნის ველს:

$$P_r=P(\alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_r).$$

---

* იხ. Otto Haupt, Einführung in die Algebra B. II, Leipzig 1929, გვ. 439 და შემდეგი.

ეს ველი შეიძლება მივიღოთ P-დან $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ელემენტების თანმიმდევრობითი ჩართვით. α_1 ელემენტი წარმოადგენს $H_1(x)$ ფუნქციის ფესვს; მაგრამ ეს ფუნქცია შეიძლება აღმოჩნდეს დაყვანადი P-ს მიმართ.

დავუშვათ, რომ $A_1(x)$ არის ის დაუყვანადი ფუნქცია P-ს მიმართ, რომლის ფესვსაც წარმოადგენს α_1 ელემენტი; $A_1(x)$ ფუნქციის ხარისხი აღვნიშნოთ k_1-ით. $P_1=P(\alpha_1)$ ველი იქნება k_1 ხარისხის სასრული გაფართოება P-ს მიმართ:

$$[P_1:P]=k_1.$$

დავუშვათ ახლა, რომ $A_2(x)$ არის ის დაყვანადი ფუნქცია P_1 ველში, რომლის ფესვსაც წარმოადგენს α_2 ელემენტი; $A_2(x)$ ფუნქციის ხარისხი აღვნიშნოთ k_2-თ. თუ გადავალთ ველზე:

$$P_2=P_1(\alpha_2)=P(\alpha_1, \alpha_2),$$

მაშინ გვექნება (§ 1, პუნქ. 7):

$$[P_2:P]=k_1k_2.$$

საზოგადოდ, დავუშვებთ რა

$$P_i=P_{i-1}(\alpha_i), \qquad (i=1, 2, \ldots, r)$$

გვექნება

$$P_1=P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i).$$

დავუშვათ, რომ $A_i(x)$ არის ის დაყვანადი ფუნქცია P_{i-1}-ს მიმართ, რომლის ფესვს წარმოადგენს α_i ელემენტი; თუ ამ ფუნქციის ხარისხს აღვნიშნავთ k_i სიმბოლოთი, მაშინ გვექნება

$$[P_i:P_{i-1}]=k_i$$

და, მაშასადამე (§ 1, პუნქ. 7),

$$[P_r:P]=k_1\cdot k_2 \ldots k_r. \tag{23}$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ ფუნქციები

$$A_1(x), A_2(x), \ldots, A_r(x) \tag{24}$$

ჰქმნიან **ამომხსნელ ჯაჭვს** $f(x)$ ფუნქციის x_1 ფესვისათვის*. მხედვე-

* O. Haupt ციტირებული თხზულ., გვ. 439.

ლობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ ამომხსნელი ჯაჭვის ცნება დაკავშირებულია განსაზღვრულ P ველთან, რომელსაც ეკუთვნის $f(x)$ ფუნქციის კოეფიციენტები.

2. დავუშვათ, რომ $f(x)$ არის n ხარისხის დაუყვანადი ფუნქცია P ველში. თუ x_1 არის $f(x)$ ფუნქციის ფესვი, მაშინ $P(x_1)$ ველი იქნება P ველის n ხარისხის სასრული გაფართოება:

(25) $$[P(x_1):P]=n.$$

მეორეს მხრივ, თუ (24) ფუნქციები ჰქმნიან ამომხსნელ ჯაჭვს x_1 ფესვისათვის, მაშინ ეს ფესვი იმყოფება ველში:

$$P_r=P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r).$$

მაშასადამე, P_r ველი წარმოადგენს $P(x_1)$ ველის გაფართოებას. ამგვარად, გვაქვს

$$P_r \supseteq P(x_1) \supset P.$$

P_r ველი წარმოადგენს P ველის და, მაშასადამე, $P(x_1)$ ველის სასრულ გაფართოებას (იხ. § 1, პუნქ. 5, შენიშვნა). აღვნიშნოთ q-თი P_r-ის ხარისხი $P(x_1)$-ის მიმართ:

(26) $$[P_r:P(x_1)]=q.$$

§ 1-ის მე-7 პუნქტის ძალით გვაქვს:

$$[P_r:P]=[P_r:P(x_1)]\,;[P(x_1):P]$$

ანუ (23), (25), (26) თანაფარდობათა ძალით

(27) $$k_1 k_2 \ldots k_r=q^n.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $k_1k_2\ldots k_r$ ნამრავლი იყოფა n-ზე.

ამგვარად, თუ (24) ფუნქციები ჰქმნიან ამომხსნელ ჯაჭვს დაუყვანად $f(x)$ ფუნქციის x_1 ფესვისათვის, მაშინ ამ ფუნქციათა ხარისხების ნამრავლი იყოფა $f(x)$-ის ხარისხზე.

გამოვიყენოთ ეს შედეგი კვადრატულ რადიკალებში განტოლების ამოხსნის საკითხისათვის. ამ საკითხამდე, როგორც ვიცით, მივყევართ ამოცანების ამოხსნას ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით. იმისათვის, რომ განტოლება

(28) $$f(x)=0,$$

სადაც $f(x)$ არის დაუყვანადი ფუნქცია P ველში, ამოიხსნას კვადრატულ რადიკალებში საჭიროა, რომ ამ განტოლების ხარისხი იყოს 2^k სახის რიცხვი:

$$n=2^k.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ (28) განტოლება შეიძლება ამოიხსნას კვადრატულ რადიკალებში, ეს იმას ნიშნავს, რომ მისთვის არსებობს ამომხსნელი ჯაჭვი, რომელიც შედგება მეორე ხარისხის ორწევრა განტოლებებისაგან. ასეთი ჯაჭვისათვის უნდა იყოს

$$k_1=k_2=\ .\ .\ .=k_r=2.$$

მაშასადამე,

(29) $$k_1\cdot k_2\ .\ .\ .\ k_r=2^r.$$

რადგან n რიცხვი უნდა იყოს (29) რიცხვის გამყოფი, ამიტომ ის თვითონ უნდა იყოს 2^k სახის რიცხვი.

შედეგი. **თუ $f(x)$ არის P ველში დაუყვანადი მესამე ხარისხის ფუნქცია, მაშინ $f(x)=0$ განტოლება არ შეიძლება ამოიხსნას.** 1) ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ ეს აუცილებელი პირობა სრულებითაც არაა საკმარისი ამოხსნადობისათვის კვადრატულ რადიკალებში.

კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ რ ა დ ი კ ა ლ ე ბ შ ი.

ახლა შევნიშნოთ, რომ მესამე ხარისხის ფუნქცია დაყვანადი იქნება P-ს მიმართ მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მას აქვს ფესვი, რომელიც ეკუთვნის P ველს.

მართლაც, თუ მესამე ხარისხის ფუნქცია დაიშლება მამრავლებად, მაშინ ერთი მამრავლთაგანი მაინც უნდა იყოს პირველი ხარისხის ფუნქცია, ე. ი. $ax+b$ სახის ფუნქცია, a და b არის P ველის ელემენტები. ამ $-\dfrac{b}{a}$ მამრავლის ფესვი ეკუთვნის P ველს.

კერძოდ, თუ განიხილება მესამე ხარისხის ფუნქცია მოცემულ ყველა რაციონალურ რიცხვთა R ველში, მაშინ ეს ფუნქცია დაყვანადი იქნება P ველის მიმართ მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მას აქვს რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი ფ ე ს ვ ი.

3. შესავალში დავინახეთ (პუნქ. 4), რომ კუბის გ ა ო რ კ ე ც ე ბ ი ს ამოცანა დაიყვანება

(30) $$x^3-2=0$$

განტოლების ამოხსნამდე (მოცემული კუბის წიბოს ვთვლით ერთეულად). x^3-2 ფუნქციას არ აქვს რაციონალური ფესვები. მაშასადამე, (30) განტოლება არ შეიძლება ამოიხსნას კვადრატულ რადიკალებში. **კუბის გაორკეცების ამოცანა არ ამოიხსნება ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით.**

კუთხის ტრისექციის ამოცანა დაიყვანება

(31) $$x^3-3x-b=0$$

განტოლების ამოხსნამდე,
სადაც

$$b=2\cos\omega.$$

თუ b — რაციონალური რიცხვია, მაშინ (31) განტოლების კოეფიციენტები ეკუთვნიან R ველს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ არსებობს რაციონალური b მნიშვნელობანი, რომელთათვის (31) განტოლებას აქვს რაციონალური ფესვი. ასე მაგალითად, თუ დავუშვებთ, რომ $b=0$, რაც შეესაბამება $\omega=\frac{\pi}{2}$, მაშინ (31) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x^3-3x=0;$$

ამ განტოლებას კი აქვს რაციონალური ფესვი $x_1=0$.

მაგრამ ძნელი არაა დავასახელოთ ისეთი b რაციონალური მნიშვნელობანიც, რომელთათვის (31) განტოლებას არ აქვს რაციონალური ფესვები; ასეთია, მაგალითად, $b=1$ მნიშვნელობა რომელიც შეესაბამება $\omega=\frac{\pi}{3}$-ს (შეად. თავი II, § 3, პუნქ. 3). ასეთი b მნიშვნელობებისათვის (31) განტოლება არ შეიძლება ამოიხსნას კვადრატულ რადიკალებში.

ზოგად შემთხვევაში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (31) განტოლების კოეფიციენტები ეკუთვნიან $R(b)$ ველს, რომელსაც მივიღებთ R-დან b ელემენტების ჩართვით.

იმისათვის, რომ

(32) $$f(x)=x^3-3x-b$$

ფუნქცია დაყვანადი იყოს $R(b)$ ველში, მას უნდა ჰქონდეს ფესვი, რომელიც რაციონალურად გამოისახება b-თი. დავუშვათ, რომ ამას

-სინამდვილეში აქვს ადგილი; მაშინ b-ს ყოველი რაციონალური მნიშვნელობისათვის (32) ფუნქციას უნდა ჰქონდეს რაციონალური ფესვი. მაგრამ ჩვენ ზემოთ დავინახეთ, რომ ეს ასე არაა.

ამგვარად, (31) განტოლება ზოგადი სახით არ შეიძლება ამოიხსნას კვადრატულ რადიკალებში; მაშასადამე, **კუთხის ტრისექციის ამოცანა ზოგად შემთხვევაში (ე. ი. ნებისმიერი კუთხისათვის) არ შეიძლება ამოიხსნას ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით.**

4. დასასრულს განვიხილოთ საკითხი წესიერი მრავალკუთხედების აგების შესახებ. ჩვენ ვნახეთ III თავის მე-5 პარაგრაფის მე-3 პუნქტში, რომ საკითხი წესიერი p კუთხედის აგების შესახებ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით დაიყვანება იმაზე, ამოხსნადია თუ არა კვადრატულ რადიკალებში შემდეგი განტოლება

$$F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ .\ .\ .\ +x+1=0.$$

შემდეგ ჩვენ დავამტკიცეთ იქვე, რომ $F_p(x)$ ფუნქცია დაუყვანადია R ველში, თუ p მარტივი რიცხვია. მე-2 პუნქტის თეორემის თანახმად ჩვენ შეგვიძლია ახლა ვთქვათ:

იმისათვის რომ განტოლება

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ .\ .\ .\ +x+1=0,$$

სადაც p არის მარტივი რიცხვი, იყოს ამოხსნადი რადიკალებში, აუცილებელია, რომ ამ განტოლების ხარისხს ჰქონდეს სახე 2^k;

$$p-1=2^k,\ p=2^k+1.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს: **იმისათვის, რომ წესიერი p—კუთხედის (p მარტივი რიცხვია) აგება შეიძლებოდეს ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით, აუცილებელია, რომ p რიცხვს ჰქონდეს სახე 2^k+1.**

გაუსმა დაამტკიცა, რომ ეს პირობა არის **საკმარისიც.** ამიტომ წესიერი 17 — გვერდა შეიძლება ავაგოთ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ($27=2^4+1$).

პირიქით, **წესიერი 7—კუთხედი, 11—კუთხედი, 13—კუთხედი არ შეიძლება აიგოს სახაზავისა და და ფარგლის საშუალებით.**

კითხვები განმეორებისათვის

1. მოცემული ველის მიმართ რომელ ელემენტებს ეწოდებათ ალგებრული?

2. რას ეწოდება ელემენტის ხარისხი მოცემული ველის მიმართ?

3. რა შეიძლება შეემთხვეს ელემენტის ხარისხს, როცა მოცემული ველიდან გადავალთ მის გაფართოებაზე?

4. როგორ დავახასიათოთ ელემენტის ხარისხი წრფივად დამოუკიდებლობის ცნების საშუალებით?

5. რა არის ბაზისი?

6. რა არის სასრული გაფართოების ხარისხი?

7. რომელი ელემენტები შეადგენენ P—ველის მიმართ $P(\alpha)$ გაფართოების ბაზისს, თუ $[\alpha : P] = n$?

8. განმარტეთ ალგებრული გაფართოების ცნება.

9. რას ეწოდება ამომხსნელი ჯაჭვი?

10. რაში მდგომარეობს განტოლების კვადრატულ რადიკალებში ამოხსნადობის აუცილებელი პირობა?

პ ა ს უ ხ ე ბ ი*

თავი I

§ 2, 1. $a) -i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

$b) -2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$; $c) -1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$,

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\};\quad d) -1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

2. φ არგუმენტის მნიშვნელობებია: 56°18′36″, 157°22′48″, 254°3′17″, — 36°52′12″.

3. $\rho=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\varphi=2(\alpha+k\pi)$.

§ 3, 1. $b)\ \beta_0=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=0{,}75787(1+i)$.

$\beta_k=\beta_0(\varepsilon_1)^k$, სადაც $\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$;

$d)\ \beta_0=\sqrt[6]{13}\,(\cos 18°46'12''+i\sin 18°46'12'')=1{,}45183+0{,}49339\,i$.

თავი II

§ 2, $a)\ x-3$; $b)\ x^2+1$; $c)\ 2x-1$; $d)\ x-1$; $e)\ 1$.

§ 3, 3. ორი რაციონალური ფესვი: $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$.

4. რაც. ფესვი $x=-\frac{2}{3}$. 5. რაციონ. ფესვები არაა.

---

* გამოთვლები ჩატარებულია ხუთნიშნა ცხრილების საშუალებით

§ 4, 2. $f(-3)=256$, $f'(-3)=-304$, $f''(-3)=272$, $f'''(-3)=-162$, $f^{IV}(-3)=48$. 5. $f(1+i)=5+8i$. $f'(1+i)=9+15i$, $f''(1+i)=22+12i$, $f'''(1+i)=18$.

თავი III

§ 4, 1. $x^4-x^2+1=(x^2-\sqrt{3}\,x+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)$.

§ 6, 2. a) $f(x)=(x^2+x+1)^2(x^2-2x+2)$;
b) $f(x)=(x^2-2x+2)^2(x^2+4x+6)$; c) ჯერადი ფესვები არაა.

თავი V

§ 2, 1. $x_1=0{,}5842$, $x_2=-5{,}2899$, $x_3=-1{,}2943$.
2. $x_1=2{,}674$, $x_2=-3{,}0349$, $x_3=0{,}4075$ 3. $x_1=1{,}4142$, $x_2=-1+1{,}4142i$, $x_3=-1-1{,}4142i$.

§ 3, 1. $x_1=1{,}8734+1{,}1555i$, $x_2=1{,}87334-1{,}1555i$, $x_3=0{,}1266+0{,}4364i$, $x_4=0{,}1266-0{,}4364i$.

2. $x_1=0{,}38216+1{,}7188i$, $x_2=0{,}38216-1{,}7188i$, $x_3=-0{,}38216+0{,}5812i$, $x_4=-0{,}38216-0{,}5812i$.
3. $x_1=4{,}2769$, $x_2=1{,}1381$, $x_3=0{,}1327$, $x_4=-1{,}5477$.

თავი VI

§ 3, ფესვები მოთავსებულია შუალედებში:
1. (0,1) და (3,4). 2. (—9, —8) და (0,1). 3. (—2, —3) და (1,2).

§ 4, 2. $x_1=2{,}5842$, $x_2=-3{,}2899$, $x_3=0{,}7057$.
3. $x_1=3{,}9042$, $x_2=0{,}5632$.

თავი VII

§ 1, 2. a) $x=2$, $y=3$, $z=1$; б) $x=3$, $y=\frac{5}{2}$, $z=\frac{7}{2}$.

§ 5, 1. 3. 2. 1. 3. —15. 4. $(a^2+ab-b^2)^2$.

§ 6, 1. —81. 2. 30. 3. —446. 4. —130. 5. 4. 6. 11. 7. $x^2(x^2-4)$. 8. $16(1-x)$. 9. $(a-b)^2\{2-(a+b)^2\}$. 10. $(a-b)\cdot(a^2-b^2)$.

თავი VIII

§ 1, 1. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=-2$. 2. $x=2$, $y=-1$, $z=1$, $t=2$. 3. $x=a$, $y=-a$, $z=-b$, $t=b$.

1. $x_1 = x_3 + 7x_4 + 1$, $x_2 = -4x_3 - \frac{33}{2}x_4 - 2$.

2. $x_2 = -19x_4 + 2x_1 + 1$, $x_3 = -11x_4 + 1$.

1. სისტემა ამოხსნადია. 2. სისტემა უთავსებადია. 3. სისტემა ამოხსნადია, $r = 3$. ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს სახით: $= 2x_1 + 3$, $x_3 = 5x_1 + 2$, $x_4 = -3x_1 - 4$.

1. $x : y : z : t = 1 : 2 : -1 : 1$. 2. a) $: x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 3 : 2 : 2 : -1$.
c) $x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 1 : 1$; $x_4 = 0$.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

თ ა ვ ი IV

სიმეტრიული ფუნქციები

თ ა ვ ი V

დაბალი ხარისხის განტოლებათა ალგებრული ამოხსნა

თ ა ვ ი VI

მთელი რაციონალური ფუნქციის გამოკვლევა ნამდვილ რიცხვთა არეში. ფესვების განცალება და გამოთვლა

თ ა ვ ი VII

დეტერმინანტების ძირითადი თვისებანი

თ ა ვ ი VIII

წრფივი განტოლებანი და წრფივი გარდაქმნები

თ ა ვ ი IX

კვადრატული ფორმები

თ ა ვ ი X

ალგებრული გაფართოება

ტექრედაქტორი გ. ნადარეიშვილი

***

გადაეცა წარმოებას 1949 წ. 13/I. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 1949 წ. 9/IX. ქაღალდის ზომა 84 × 120. წიგნის ანაწყობის ზომა 6×9,5. ტირაჟი 2000. სტამბის შეკვ. № 124. გამ. შეკვ. № 8. უე 05462.

***

საავტორო საღრ. ფორმათა რაოდენობა 31,96.
სასტამბო ფორმათა რაოდენობა 36,2 .

***

საქ. სსრ მინისტრთა საბჭოსთან არსებული პოლიგრაფიისა და გამომცემლობის საქმეთა სამმართველოს 1-ლი სტამბა. თბილისი, ორჯონიკიძის ქ № 50.