საქართველოს სსრ განათლების სამინისტროს
პედაგოგიკურ მეცნიერებათა სამეცნიერო-საკვლევი ინსტიტუტი

გ. გ. გორგოძე

აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლება საშუალო სკოლაში

ინსტიტუტის გამომცემლობა
თბილისი — 1957

თ ა ვ ი I

საშუალო სკოლაში აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების პრობლემა

§ 1. საშუალო სკოლაში აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მნიშვნელობა

საშუალო სკოლაში გეომეტრიის სწავლების მიზანი მათემატიკის პროგრამის განმარტებით ბარათში ჩამოყალიბებულია ასე: „გეომეტრიის სწავლების მიზანია სიბრტყეზე და სივრცეში ნაკვთების თვისებათა სისტემატური შესწავლა და ამ თვისებათა გამოყენება გამოანგარიშებისა და კონსტრუქციული ხასიათის ამოცანების ამოსახსნელად, განავითაროს მოსწავლეებში ლოგიკური აზროვნება, სივრცითი წარმოდგენა და მიღებული ცოდნის გამოყენების ჩვევები პრაქტიკულ სამუშაოთა შესასრულებლად. როგორიცაა გაზომვები მინდორზე, სხვადასხვა ნაგებობათა პირეულისა და მოცულობის განსაზღვრა, უმარტივესი გაზომვანი, რომლებიც გამოიყენება ტოპოგრაფიაში და სხვ."[1].

ამრიგად, გეომეტრიის და, კერძოდ, სტერეომეტრიის სწავლების ერთ-ერთ მთავარ ამოცანას წარმოადგენს მოსწავლეთა სივრცითი წარმოდგენების განვითარება. მოსწავლეთა შეიარაღება კარგად განვითარებული სივრცითი წარმოდგენებით განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ჩვენს თანამედროვე პირობებში, როცა ჩვენს ქვეყანაში ტექნიკა გიგანტური სისწრაფით ვითარდება, ხოლო ახალგაზრდობის მნიშვნელოვანი ნაწილი საშუალო სკოლის დამთავრების შემდეგ სურვილს გამოთქვამს იმუშაოს წარმოებაში. მაგრამ იმისათვის, რომ ახალგაზრდა ჯეროვნად გაერკვეს თანამედროვე ტექნიკის ელემენტარულ საკითხებში საჭიროა მას ჰქონდეს კარგად განვითარებული სივრცითი წარმოდგენები. სივრცითი წარმოდგენების განსაზღვრული დონე საჭიროა ყოველი პროფესიის ადამიანი-

[1] საშუალო სკოლის პროგრამები, მათემატიკა, სახელგამი 1955, გვ. 20—21.

სათვის. აი რას ამბობს პროფ. ნ. ფ. ჩეტვერუხინი ამის შესახებ: „Нетрудно понять, что определённый уровень развития пространственных представлений и способности пространственного воображения совершенно необходимы для лиц самых разнообразных профессий и специальностей. Вернее было бы сказать, что он необходим всем. Если приходится всё-же особенно подчеркнуть необходимость очень хорошего пространственного воображения для деятелей, посвятивших себя инженерно-техническим специальностям (что является совершенно очевидным), то при более внимательном отношении к этому вопросу—и для художников, скульпторов, педагогов, медиков (в частности хирургов) и других специалистов, пространственное воображение оказывается так же весьма необходимым"[1].

მაშასადამე, გეომეტრიის სწავლება სკოლაში ისე უნდა იქნეს დაყენებული, რომ წარმატებით გადაიჭრას მოსწავლეთა სივრცითი წარმოდგენების განვითარების ამოცანა. ამ ამოცანის წარმატებით გადაჭრა თავის მხრივ კი ხელს შეუწყობს სტერეომეტრიის მთელი კურსის შეგნებულად და უფრო მტკიცედ შეთვისებას. ამ საქმეში დიდი როლი ეკუთვნის სტერეომეტრიულ აგებებს. ჩვენ აქ მხედველობაში გვაქვს ნამდვილი სტერეომეტრიული აგებანი, ე. ი. აგებანი საპროექციო ნახაზზე.

სტერეომეტრიული ამოცანები აგებაზე, რომლებიც ამოიხსნებიან ეფექტურად, ე. ი. აგებანი საპროექციო ნახაზზე, უნდა გახდეს სტერეომეტრიის სასკოლო კურსის განუყოფელი ნაწილი.

ასეთი ამოცანების ჭეშმარიტად დიდი მნიშვნელობა ნათელია შემდეგიდან:

1. აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ავითარებს მოსწავლეთა სივრცით წარმოდგენებს. მართლაც, მათი ამოხსნისას, მოსწავლემ თავდაპირველად უნდა წარმოიდგინოს იმ გეომეტრიული კონფიგურაციის ორიგინალი, რომელიც გამოსახულია ნახაზზე და შეასრულოს საჭირო აგება გონებაში, წარმოსახვაში, ხოლო შემდეგ განახორციელოს ეს აგებები ნახაზზე. ამ გარემოებამ კი არ შეიძლება ხელი არ შეუწყოს მოსწავლეთა სივრცითი წარმოდგენების განვითარებას.

[1] Н. Ф. Четверухин. Опыт исследования пространственных представлений и пространственного воображения учащихся, Известия АПН РСФСР, вып. 21, 1949, стр. 5.

2. აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას მოსწავლეები იძენენ აგებათა წარმოების კონსტრუქციულ ჩვევებს, რაც ხელს უწყობს მოსწავლეებში ასეთი ჩვევების განვითარებას.

3. ცნობილია, რომ ყველა იმ ამოცანებიდან, რომლებიც საშუალო სკოლის გეომეტრიის კურსში გვხვდება (ამოცანები გამოანგარიშებაზე, დამტკიცებაზე და აგებაზე), წმინდა გეომეტრიული შინაარსის მატარებელია მხოლოდ ამოცანები აგებაზე. ამიტომ აგებაზე ამოცანების ამოხსნა დიდად უწყობს ხელს მოსწავლეთა გეომეტრიული ცოდნის ჰორიზონტის გაფართოებას და გაღრმავებას.

4. აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ხელს უწყობს სტერეომეტრიის კურსის უფრო მტკიცედ შეთვისებას. ეს ფაქტი, კერძოდ, თავს იჩენს როგორც თეორემების დამტკიცებისას, ისე გამოანგარიშებაზე იმ სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას, რომლებიც მოცემულია ამოცანების სტაბილურ კრებულში.

5. აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ხელს უწყობს მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების უნარის განვითარებას. ეს გარემოება განსაკუთრებით შესამჩნევი გახდება, თუ ჩვენ მოსწავლეებისაგან ყოველი ამოცანის ამოხსნისას მოვითხოვთ ჩატარებული აგებების გადმოცემას ზუსტი ახსნა-განმარტებებით.

6. აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა მოსწავლეებს შესაძლებლობას აძლევს უფრო კარგად გაერკვენ სივრცითი ნაკვთების გამოსახვათა აგებაში.

7. ცოდნა-ჩვევები, რომელსაც მოსწავლეები ასეთი ამოცანების ამოხსნისას იძენენ, სასარგებლოა მათი მომავალი პრაქტიკული საქმიანობისათვის. პირველ რიგში ეს ითქმის იმ მოსწავლეებზე, რომლებიც საშუალო სკოლის დამთავრების შემდეგ სამუშაოდ წავლენ წარმოებაში, ხოლო შემდეგ მათზე, რომლებიც სწავლას გააგრძელებენ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში. ამ უკანასკნელებს გაუადვილდებათ მხაზველობითი გეომეტრიისა და აგრეთვე ზოგიერთი სხვა საგნების შესწავლა.

ამაში და ყოველივე ზემოთ ნათქვამში მდგომარეობს აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების პოლიტექნიკური მნიშვნელობა.

აღსანიშნავია, რომ ყველა აქ ჩამოთვლილ ფაქტორებს არ შეიძლება არ ჰქონდეთ დიდი მნიშვნელობა ჩვენი მოსწავლე ახალგაზრდობის — კომუნიზმის მომავალი აქტიური მშენებლების წარმატებით მომზადების საქმეში, რაც საბჭოთა სკოლის საპატიო ამოცანას წარმოადგენს.

მომდევნო §-ში ჩვენ დაწვრილებით ვილაპარაკებთ იმ ნაკლოვანებებზე, რომლებიც სტერეომეტრიის სასკოლო კურსის სწავლებაში არის დამახასიათებელი. მასთან, ჩვენ შევეხებით მხოლოდ იმ ნაკლოვანებებს, რომლებიც შეეხება როგორც აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლებას, ისე გეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგებას.

§ 2. საშუალო სკოლაში აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მდგომარეობა

ნათელი წარმოდგენა რომ ვიქონიოთ იმაზე, თუ რა განსხვავება არსებობს პლანიმეტრიულ და სტერეომეტრიულ აგებებს შორის, საკითხის განხილვა დავიწყოთ პლანიმეტრიული აგებებიდან.

პლანიმეტრიაში ყველა გეომეტრიული აგებანი არიან ეფექტიური, ე. ი. ისეთნი, რომლებიც შეიძლება ფაქტიურად განვახორციელოთ სიბრტყეზე სახაზავის, ფარგლის და მკუთხავის გამოყენებით. მასთან ეს ხელსაწყოები შეიცავენ სათანადო გეომეტრიულ სახეობათა აგების შესაძლებლობას: სწორი ხაზი (სახაზავი), წრეხაზი (ფარგალი) და პერპენდიკულარული სწორები (მკუთხავი მართი კუთხით) და ა. შ.

თეორიულად პლანიმეტრიულ აგებათა შესრულების შესაძლებლობა ჩამოთვლილი სახაზავი ხელსაწყოების საშუალებით საბუთდება რიგი ფორმალურ-ლოგიკური განმარტებებით. ეს განმარტებები შემდეგია:

კონსტრუქციული შემდეგი ელემენტებია:

1) აგების ამოცანაში მოცემული ყველა ელემენტი და აგრეთვე სიბრტყის ნებისმიერი წერტილები (რომლებიც აუცილებელია აგებისათვის, როგორც დამხმარე ელემენტები);

2) სწორი ხაზი, თუ ის განსაზღვრულია ორი კონსტრუქციული წერტილით;

3) წრეხაზი, თუ ის განსაზღვრულია კონსტრუქციული ცენტრით და რადიუსით;

4) ორი კონსტრუქციული სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილი[1].

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ პლანიმეტრიული ამოცანა აგებაზე ამოხსნადია ან ამოუხსნადი იმის მიხედვით, შედის

[1] იხ. ეს განმარტებები ნ. ჩეტვერუხინის სტატიაში—Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии, Известия АПН РСФСР, 6-й вып., 1946.

თუ არა საძებნი ელემენტი განსაზღვრული კლასის კონსტრუქციულ ელემენტებში[1].

ახლა გადავიდეთ სტერეომეტრიულ აგებებზე. ცნობილია, რომ ნაკვთების ხაზვა სახაზავი იარაღების გამოყენებით შესაძლებელია მხოლოდ სიბრტყეზე, ხოლო ეს კი სივრცეში შეუძლებელია; არკვევს რა საკითხს იმ მეთოდოლოგიურ მიმართულებათა შესახებ, რომლებიც შეიძლება გამოყენებულ იქნან სტერეომეტრიულ აგებათა შესრულებაში პროფ. ნ. ფ. ჩეტვერუხინი აღნიშნავს:

„Возможны два методологических направления в решении вопроса о геометрических построениях в пространстве: либо 1) по аналогии с построениями на плоскости развить формально-логический метод построений в пространстве с отказом от реальных построений при помощи инструментов, либо 2) рассматривать и выполнять пространственные построения на проекционном чертеже, т. е. на отображении пространства, полученном по способу проектирования"[2].

როგორ მდგომარეობაშია ამჟამად საშუალო სკოლაში აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლება?

ამჟამად, საშუალო სკოლაში აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა თითქმის არ ისწავლება, ხოლო ის რამდენიმე ამოცანა აგებაზე, რომლებიც მოცემულია სტაბილურ სახელმძღვანელოში და რომელთა დასწავლას მოსწავლეები ახდენენ, მოკლებულია ძირითად დანიშნულებას, რადგან ასეთი აგებები სინამდვილეში შეუძლებელია.

გამოთქმული მოსაზრების ნათელსაყოფად მივმართოთ ფაქტებს. ჩვენს სასკოლო სახელმძღვანელოში (ა. კისელევი, გეომეტრია, ნაწ. II) აგებაზე ამოცანების შესახებ ლაპარაკია მხოლოდ პირველ თავში. შემდეგ თავებში კი მათ შესახებ არაფერი არ არის ნათქვამი, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ მეორე თავს, რომელიც მიძღვნილია მონჟის ეპიურისადმი, ეპიურის გამოყენებას კი სახელმძღვანელოს შემდეგ თავებში ვერსად ვერ ვხვდებით. ნ. ბესკინის სიტყვებით რომ ვთქვათ, „თუ ა. პ. კისელევის სახელმძღვანელოდან ამოვიღებთ მეორე თავს, მიძღვნილს მონჟის ეპიურისადმი, ამით სტერეომეტრიის შენობა არ შეირხევა და შემდგომ თავებში არავითარი ცვლილებები არ დაგვჭირდება"[3]. ეს ამონაწერი გვიჩვენებს,

[1] ჩვენ აქ მხედველობაში გვაქვს ხელსაწყოები: სახაზავი და ფარგალი;

[2] იხ. აქვე შენიშვნა, გვ. 6.

[3] Н. БЕСКИН, Методика геометрии, Учпедгиз, 1947, стр. 213.

რომ ა. პ. კისელევის სახელმძღვანელოს მეორე თავი არავითარ კავშირში არ იმყოფება წიგნის დანარჩენ თავებთან. ამიტომ შეგვიძლიან ვთქვათ, რომ მონჟის ეპიურის შეტანა სახელმძღვანელოში არავითარ საჭიროებით არ არის გამოწვეული.

მეთოდოლოგიური თვალსაზრისით აგებაზე ამოცანების ამოხსნის საკითხის გარჩევა მიყვება პირველ მიმართულებას. სახელდობრ, გვეძლევა გაფრთხილება, რომ აგებებისათვის სივრცეში სახაზავი იარაღები გამოუსადეგარია, რადგანაც სივრცეში ნაკვთების ხაზვა შეუძლებელია. სახელმძღვანელოში მოცემულია ე. წ. ფორმალურ-ლოგიკური კონცეფცია, რომელიც ანალოგიურია აგებებისა სიბრტყეზე და ამ კონცეფციის მიხედვით ხდება აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის (და არა აგების) შესაძლებლობის თეორიული დასაბუთება. ეს კონცეფცია შემდეგში მდგომარეობს:

„სივრცეში ყოველგვარი აგების დროს ჩვენ ვგულისხმობთ:

1) რომ სიბრტყის აგება შეიძლება, თუ ნაპოვნია ის ელემენტები, რომლებიც განსაზღვრავენ სიბრტყის მდებარეობას სივრცეში, ე. ი. თუ ჩვენ შეგვიძლია აგება სიბრტყისა, რომელიც გადის სამ მოცემულ წერტილზე ან სწორ ხაზსა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე ან ორ გადამკვეთ ან ორ პარალელურ სწორ ხაზზე;

2) თუ მოცემულია ორი გადამკვეთი სიბრტყე, მაშინ მოცემულია მათი გადაკვეთის ხაზიც. ე. ი. რომ ჩვენ ვიცით ორი სიბრტყის გადაკვეთის ხაზის მონახვა;

3) თუ სივრცეში მოცემულია სიბრტყე, მასზე ჩვენ შეგვიძლია შევასრულოთ ყველა ის აგება, რასაც პლანიმეტრიაში ვასრულებთ.

სივრცეში რომელიმე აგების შესრულება ნიშნავს, დავიყვანოთ იგი ზემოაღნიშნულ აგებათა სასრულო რიცხვზე“[1].

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ეს კონცეფცია ანალოგიურია იმ ფორმალურ-ლოგიკური კონცეფციისა, რომელიც მოცემული იყო პლანიმეტრიული აგებებისათვის, უფრო სწორად რომ ვთქვათ, იგი წარმოადგენს მის შემდგომ განვითარებას სივრცისათვის. იმ დროს, როცა პლანიმეტრიული აგებებისათვის ჩამოყალიბებული მეორე პოსტულატი აბსტრაქტულ ფორმაში ნამდვილად გამოხატავს სახაზავის თვისებას, მისი ანალოგიური პოსტულატი სივრცითი აგებები-

---

[1] ა. კისელევი, გეომეტრია, ნაწ. II, გვ. 5.

სათვის გამოხატავს წარმოსახვითი[1] ხელსაწყოს თვისებას, რომლის საშუალებითაც შეიძლება სიბრტყის აგება. ასეთ წარმოსახვით ხელსაწყოს პროფ. ნ. ჩეტვერუხინი „ფირფიტას" უწოდებს. ამ წარმოსახვითი ხელსაწყოს თვისებები და ის ოპერაციები, რომლებიც შეიძლება შევასრულოთ მისი დახმარებით, ჩამოყალიბებულია სტაბილური სახელმძღვანელოს ზემოთმოტანილ სამ პოსტულატში.

აგებანი შესრულებული მოტანილი ფორმალურ-ლოგიკური კონცეფციის შესაბამისად არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნამდვილი აგებანი, ე. ი. ეფექტური აგებანი, არამედ ისინი უნდა განვიხილოთ, როგორც აგებანი წაროსახვაში.

მარტო წარმოდგენათა გაადვილების მიზნით ჩვეულებრივ სარგებლობენ ნახაზებით, რომლებიც მხოლოდ წარმოსახვაში ჩატარებული აგებების თვალსაჩინო ილუსტრაციებს წარმოადგენენ. ასეთ ნახაზებს, რომელთაც უმთავრესად ხელით ასრულებენ, პროფ. ნ. ჩეტვერუხინი ნახაზ-ნახატებს ანუ ნახაზ-სურათებს უწოდებს.

სტაბილურ სახელმძღვანელოში მოცემულია აგებაზე რამდენიმე ამოცანის ამოხსნის ნიმუში ზემოთ ჩამოყალიბებული ფორმალურ-ლოგიკური კონცეფციის მიხედვით. მათი ამოხსნის აქ მოტანა საჭირო არ არის, რადგანაც ისინი საყოველთაოდ ცნობილია. შევნიშნავთ მხოლოდ. რომ აგებაზე ამოცანების ეს ნიმუშები უფრო მეტად წარმოადგენენ თეორემებს სათანადო გეომეტრიულ სახეობათა აგების შესაძლებლობისა და ერთადერთობის შესახებ, ვიდრე ამოცანებს აგებაზე. მართლაც, ამ ამოცანების ამოხსნის დროს უმთავრესი ყურადღება ექცევა საძებნი გეომეტრიული ელემენტის აგების შესაძლებლობისა და მისი არსებობის დამტკიცებას. რაც შეეხება თვით ამ გეომეტრიული ელემენტის განსაზღვრისათვის ჩატარებულ აგებებს, ისინი აქ მეორე ხარისხოვან როლს თამაშობენ, რადგანაც ეს აგებები ფაქტიურად არ ხორციელდებიან.

მაშასადამე, ა. კისელევის სტაბილური სახელმძღვანელოთი სარგებლობა ვერ წყვეტს აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების სათანადო სიმაღლეზე დაყენების საკითხს. დაახლოებით ასეთივე მდგომარეობაშია ნ. რიბკინის გეომეტრიულ ამოცანათა კრებული (ნაწ. II), რომელშიც თითქმის ვერ შევხვდებით ამოცანებს აგებაზე.

---

[1] გამოთქმა „წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი" იხმარება იმ გაგებით, რომ ასეთი ხელსაწყო რეალურად არ არსებობს.

ყოველივე ნათქვამის შემდეგ გაუგებრობას იწვევს საშუალო სკოლის მათემატიკის პროგრამების განმარტებითი ბარათის ის ადგილი, სადაც ნათქვამია, რომ: „აგების ძირითადი ამოცანები (კისელევის „გეომეტრია“ ნაწ. II) განხილული უნდა იქნას, როგორც თეორემები სათანადო-გეომეტრიული სახეების აგების შესაძლებლობისა და ერთადერთობის შესახებ. **მაგრამ ეს არ კმარა და მასწავლებელმა მთელი კურსის მანძილზე უნდა ამოახსნევინოს მოსწავლეებს ამოცანები აგებაზე სივრცეში**“[1].

ამ ამონაწერის პირველ ნაწილს უდაოდ უნდა დავეთანხმოთ, ხოლო მეორე ნაწილი ერთგვარ გაუგებრობას იწვევს, რადგანაც ჯერ ერთი, რომ სავარჯიშო მასალა აგების ამოცანებზე სივრცეში არ არის მოცემული არც სტაბილურ სახელმძღვანელოში და არც ამოცანების სტაბილურ კრებულში; ამიტომ საჭიროა განმარტებითი ბარათი მიუთითებდეს ერთის მხრივ იმაზე, თუ საიდან უნდა აიღოს საჭირო სავარჯიშო მასალა მასწავლებელმა და, მეორეს მხრივ, გარკვეული უნდა იყოს საკითხი: ამოცანები აგებაზე სივრცეში, რომლებიც მასწავლებელმა უნდა ამოახსნევინოს მოსწავლეებს მთელი კურსის მანძილზე უნდა განიხილებოდეს, როგორც ამოცანები აგებაზე წარმოსახვაში თუ განმარტებითი ბარათი გულისხმობს ნამდვილ აგებებს, ე. ი. აგებებს საპროექციო ნახაზზე?

განმარტებითი ბარათი დასმულ საკითხზე პასუხს არ იძლევა, ხოლო ეს პასუხი აუცილებელია გარკვეულობისათვის.

საშუალო სკოლაში აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლება თითქმის რომ უგულებელყოფილია, ამას ის ფაქტიც მოწმობს, რომ მოსწავლეები ხშირად ვერ ახერხებენ გამოანგარიშებაზე ისეთი ამოცანების ამოხსნას, რომლებშიაც ლაპარაკია რაიმე კვეთების აგებაზე.

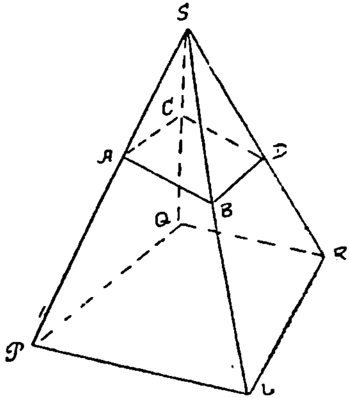
განვიხილოთ სათანადო მაგალითები.

მაგალითი 1. ავაგოთ მოცემული ოთხკუთხა პირამიდის კვეთა სიბრტყით, რომელიც გაივლის გვერდით წიბოებზე მდებარე A, B და C წერტილებზე.

ამოხსნა. ვთქვათ, რომ $SPQRL$ (ნახ. 1) არის ის ოთხკუთხა პირამიდა, რომელზეც ლაპარაკია ამოცანაში. A, B და C წერტილებით განსაზღვრული სიბრტყე კვეთაში მოგვცემს ოთხკუთხედს. ამ ოთხკუთხედის აგებას მოსწავლეები სრულიად არასწორად

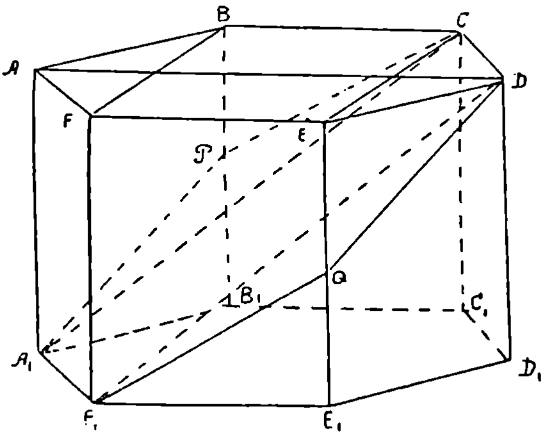
[1] საშუალო სკოლის პროგრამები, მათემატიკა, გვ. 22, 1955 წ.

აწარმოებენ. სახელდობრ, SR წიბოზე მდებარე ნებისმიერ D წერტილს თვლიან ABC სიბრტყისა და ამ წიბოს შეხვედრის წერტილად და კვეთას $ACDB$ ოთხკუთხედის სახით წარმოადგენენ. დაშვებული შეცდომა აშკარაა: D წერტილის მდებარეობა SR წიბოზე სავსებით განისაზღვრება მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი A, B და C წერტილების მოცემით და მისი ნებისმიერად აღება, როგორც ამას აკეთებენ, შეუძლებელია.



ნახ. 1.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. (ამოცანა № 24, § 7, ნ. რიბკინი). გვაქვს წესიერი ექვსკუთხა პრიზმა, რომლის გვერდითი წახნაგები კვადრატებია. მის შიგნით ქვედა ფუძის ერთ გვერდსა და ზედა ფუძის მის მოპირდაპირე გვერდზე გაავლეთ სიბრტყე. პრიზმის ფუძის გვერდი უდრის a-ს. გაიგეთ კვეთის ფართობი (ნახ. 2). თავი დავანებოთ თვით წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გამოსახვის აგებას;



ნახ. 2.

რომელსაც თითქმის ყოველთვის არასწორად აგებენ[1] და შევჩერდეთ მხოლოდ იმაზე, თუ როგორ აგებენ ხსენებულ კვეთას მოსწავლეები.

გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ აქ შეიძლება ადგილი ექნეს შემდეგს:

1) მოსწავლეთა ნაწილისათვის სავსებით გაუგებარი იყოს ის, თუ რას წარმოადგენს საძებნი კვეთა ან როგორ იქნება იგი განლაგებული. მოსწავლეთა ამ კატეგორიას მიაჩნია, რომ ასეთი ამოცანა მათთვის დაუძლეველია და ისინი ან თავს ანებებენ მუშაობას, ან მთელი საათის განმავლობაში დაჰყურებენ ნახაზს და ფიქრობენ, თუ როგორ შეიძლება საძებნი კვეთის აგება.

2) მოსწავლეთა მეორე ნაწილს საძებნი კვეთა წარმოდგენილი აქვს A_1CDF_1 ოთხკუთხედის (მართკუთხედის) სახით, რაც არ არის სწორი.

3) მოსწავლეთა დანარჩენი ნაწილი საძებნ კვეთას იძლევიან A_1PCDQF_1 ექვსკუთხედის სახით და მასთან ამ ექვსკუთხედის P და Q წვეროებს ნებისმიერად იღებენ პრიზმის BB_1 და EE_1 გვერდით წიბოებზე, რაც არ არის სწორი; მართლაც, $A_1F_1 \parallel CD$ სწორები განსაზღვრავენ ერთადერთ მკვეთ სიბრტყეს, რომელსაც პრიზმის ხსენებულ გვერდით წიბოებთან ექნება შეხვედრის სრულიად გარკვეული წერტილები და მათი ნებისმიერად აღება მიუღებელია.

დაუსაბუთებელი აგებების მაგალითებს შეიძლება შევხვდეთ თვით სახელმძღვანელოებშიც. განვიხილოთ სათანადო მაგალითი.

ა მ ო ც ა ნ ა (ნ. რიბკინი, § 3, № 26). წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის თითოეული წიბო უდრის a-ს. გაავლეთ კვეთი პირამიდის ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდისა და პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილზე და იპოვეთ ამ კვეთის ფართობი.

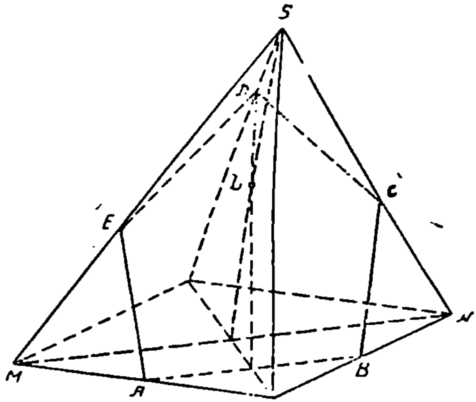
კრებულში ამოცანას თან ერთვის ნახაზი (ნახ. 3). ამ ნახაზზე წარმოდგენილია კვეთაში მიღებული ხუთკუთხედი. ამ ხუთკუთხედის ორი წვერო (A და B) მოცემულია, მესამე წვეროს (D) აგება ნაჩვენებია, ხოლო დანარჩენი ორი წვეროს (C და E) აგება ნების-

---

[1] პრიზმის ფუძეს, წესიერ ექვსკუთხედს, თითქმის ყოველთვის ნებისმიერი $ABCDEF$ ექვსკუთხედის სახით გამოსახავენ, რაც არ არის სწორი. უკეთეს შემთხვევაში კი იცავენ მოპირდაპირე გვერდების პარალელობის პირობას ექვსკუთხედში. მაგრამ ეს პირობა არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ ასეთნაირად აგებული ექვსკუთხედი ნამდვილად წესიერი ექვსკუთხედის გამოსახვა იყოს.

მიერადაა შესრულებული. აქ თვალსაჩინოდ ვხედავთ იმ გაუგებრობას, რომელზეც ზემოთ მივუთითეთ[1].

მოტანილი მაგალითები გვიჩვენებენ, რომ სივრცეში აგებაზე ამოცანების ამოხსნის სწავლების არადამაკმაყოფილებელი მდგომა-



ნახ. 3.

რეობა წარმოადგენს მიზეზს იმ უსაფუძვლო აგებებისა, რომელთაც ვხვდებით მოსწავლეთა ნამუშევრებში. მკითხველი, ალბათ, ხედავს იმ შეუსაბამობას, რომელიც არსებობს, ერთის მხრივ, თეორემების დამტკიცებათა სწავლებასა და, მეორეს მხრივ, სხვადასხვა აგებათა შესრულებას შორის. მართლაც, პირველ შემთხვევაში ჩვენ მოსწავლეებისაგან მოვითხოვთ თანმიმდევრულ ლოგიკურ მსჯელობას, ხოლო მეორე შემთხვევაში მათ საფუძველს ვაძლევთ აწარმოონ ისეთი აგებანი, რომლებიც არ შეესაბამებიან არც სინამდვილეს, არც ლოგიკას და არც მათ ცოდნას.

ყოველივე ნათქვამიდან ის დასკვნა გამომდინარეობს, რომ აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის თანამედროვე სასკოლო პრაქტიკა არადამაკმაყოფილებელია და იგი სტერეომეტრიის სწავლების მნიშვნელოვან ხარვეზად უნდა ჩაითვალოს.

[1] მართალია ამ კერძო შემთხვევაში C და E წერტილების ასაგებად საკმარისია L წერტილზე გავავლოთ MN-ის პარალელური სწორი MS და NS გვერდითი წიბოების გადაკვეთამდე, მაგრამ ნახაზზე არც ეს არის ნაჩვენები.

ზოგიერთი ავტორი იზიარებს აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის პირველ მეთოდოლოგიურ მიმართულებას. მაგალითად, ე. ს. კოჩეტკოვა თავის სტატიაში „Обоснование геометрических построений в пространстве"[1], სივრცეში აგებების წარმოებას იძლევა შემდეგი ფორმალურ-ლოგიკური პრინციპის საფუძველზე:

„კონსტრუქციულია შემდეგი ელემენტები:

1) აგების ამოცანაში მოცემული ყველა ელემენტები, აგრეთვე სივრცის ნებისმიერი წერტილები (რომლებიც აუცილებელია აგებებისათვის როგორც დამხმარე ელემენტები).

2) სიბრტყე, თუ ის განსაზღვრულია სამი კონსტრუქციული წერტილით;

3) ორი კონსტრუქციული სიბრტყის გადაკვეთის ხაზი;

4) კონსტრუქციული სიბრტყეების ყველა ელემენტები, რომლებიც შედიან ამ სიბრტყის კონსტრუქციულ ელემენტებში (გეომეტრიულ აგებათა თეორიის განსაზღვრები სიბრტყეზე)";

ე. ს. კოჩეტკოვა აღნიშნავს, რომ თუ ვისარგებლებთ ამ აბსტრაქტულ-ინსტრუმენტალური სქემით სივრცეში, ყველა ძირითადი ამოცანა შეიძლება ამოხსნილი იქნას.

შევნიშნავთ, რომ ავტორის მიერ მიღებული ეს ფორმალურ-ლოგიკური კონცეპცია ანალოგიურია იმისა, რაც სტაბილური სახელმძღვანელოდან მოვიტანეთ, განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ეს უკანასკნელი შედგენილია სახელმძღვანელოს ენით.

ამ მეთოდოლოგიური მიმართულების ნაკლოვანებათა უფრო ცხადად წარმოდგენისათვის განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანის ამოხსნა აგებაზე ე. ს. კოჩეტკოვას ხსენებული სტატიიდან.

ამოცანა 1. ავაგოთ მოცემული (l) სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილი მოცემულ P სიბრტყესთან.

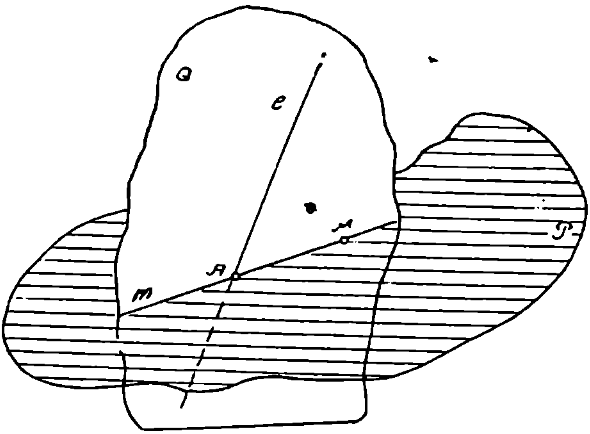
ამოხსნა. Q სიბრტყე, რომელიც განსაზღვრულია მოცემული l სწორითა და მოცემული P სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილით არის კონსტრუქციული (1, 2 და 4 განმარტებებიდან გამომდინარე შედეგების თანახმად).

P და Q სიბრტყეების გადაკვეთის m სწორი ხაზი არის კონსტრუქციული (განმარტება 3). Q სიბრტყის l და m სწორების გადაკვეთის A წერტილი არის კონსტრუქციული (განმარტება 4).

A წერტილი—საძებნია, რადგანაც იგი ეკუთვნის მოცემულ სწორს და მოცემულ სიბრტყეს (ნახ. 4).

[1] Математика в школе, № 2, 1949.

ამ ამოცანაში გვაქვს შემდეგი კონსტრუქციული ელემენტები: P სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილი, Q სიბრტყე განსაზღვრული მოცემული l სწორითა და M წერტილით, m სწორი განსაზღვრული კონსტრუქციული Q სიბრტყითა და მოცემული P სიბრტყით, A წერტილი განსაზღვრული მოცემული l სწორითა და კონსტრუქციული m სწორით.



ნახ. 4.

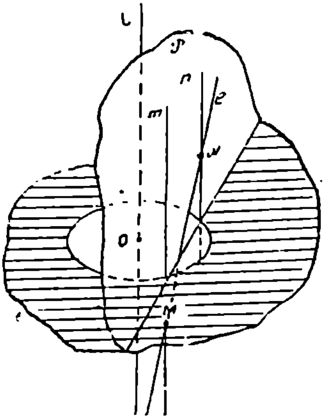
ყველა ჩამოთვლილი კონსტრუქციული ელემენტების აგება შესაძლებელია მხოლოდ წარმოსახვაში. ამიტომ საძებნი A წერტილის აგებაც შესაძლებელია მხოლოდ წარმოსახვაში, რადგანაც იგი შედის ჩამოთვლილი კონსტრუქციული ელემენტების უკანასკნელ კლასში.

აღსანიშნავია, რომ შემდგომი ამოცანების ამოხსნით ფართოვდება კონსტრუქციული ელემენტების კლასი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამოცანა, რომელიც ჩვენ ამოვხსენით სწორი ხაზისა და სიბრტყის შეხვედრის წერტილის აგებაზე ამიერიდან უნდა განვიხილოთ, როგორც კონსტრუქციული, ე. ი. სწორი ხაზისა და სიბრტყის შეხვედრის წერტილი უნდა შევიტანოთ კონსტრუქციული ელემენტების კლასში.

განვიხილოთ ნათქვამზე მაგალითი:

ა მ ო ც ა ნ ა 2. ვიპოვოთ მოცემული l სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილი მოცემულ ცილინდრულ ზედაპირთან (ნახ. 5).

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავუშვათ, რომ ცილინდრული ზედაპირის i ღერძი და l სწორი არიან აცდენილი სწორები.



ნახ. 5.

P სიბრტყე გავლებული l სწორზე i ღერძის პარალელურად აოის კონსტრუქციული (რადგანაც ამ ამოცანას წინ უსწრებს შემდეგი ამოცანის ამოხსნა: l სწორზე გაავლეთ სიბრტყე მოცემული m სწორის პარალელურად). P სიბრტყისა და მოცემული ცილინდრული ზედაპირის გადაკვეთის m და n ხაზები არიან კონსტრუქციული (შემდეგი ამოცანის თანახმად: იპოვეთ მოცემული ცილინდრული ზედაპირის გადაკვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის მოცემული M წერტილზე ამ ზედაპირის i ღერძის პარალელურად).

m და n სწორების გადაკვეთის M და N წერტილები l სწორთან (ყველა ეს სწორები მოთავსებულია P სიბრტყეზე და სწორი l არ არის პარალელური m-ის და n-ის, პირობის თანახმად) არიან კონსტრუქციული (განმარტება 4).

წერტილები M და N—საძებნია, რადგანაც ეკუთვნიან მოცემულ სწორსა და ზედაპირს.

ამ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ M და N წერტილები უკვე უნდა შევიტანოთ კონსტრუქციული ელემენტების კლასში და ა. შ.

ყოველივე ზემონათქვამიდან შეიძლება შემდეგი დასკვნები გავაკეთოთ.

საშუალო სკოლაში სტერეომეტრიის სწავლებაში აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლება თავმინებებულ, მიტოვებულ უბანს წარმოადგენს. ამ ფაქტის არასასურველი შედეგი თავს იჩენს ყოველთვის, როცა სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნის დროს მოსწავლეები ვალდებული არიან ჩაატარონ რაიმე აგებები გამოსახვაზე (ნახაზზე); ეს გარემოება ადვილად შესამჩნევი ხდება გამო-

ანგარიშებაზე ისეთი ამოცანების ამოხსნისას, როცა მოსწავლეებს მოეთხოვებათ ააგონ მრავალწახნაგა ან მრგვალი სხეულების სხვადასხვა კვეთები.

რაც შეეხება იმ მეთოდოლოგიურ მიმართულებას სივრცეში აგებაზე ამოცანების ამოხსნის გადაწყვეტის საკითხში, რომელზეც ჩვენ აქამდე ვლაპარაკობდით, იგი, ეს მეთოდოლოგიური მიმართულება შემდეგი ნაკლოვანებებით ხასიათდება.

1) იგი არ იძლევა შესაძლებლობას ფაქტიურად შევასრულოთ საძებნი ობიექტის აგება, ე. ი. აგების ასეთი მეთოდი არ ასახავს ცხოვრების გამოცდილებას, რომელიც საჭირო აგებათა განხორციელებას მოითხოვს არა წარმოსახვაში, არამედ სინამდვილეში სახაზავი ხელსაწყოების გამოყენებით. ასეთ პირობებში კი ამოცანა აგებაზე კარგავს უფლებას თავისი სახელწოდება ატაროს, რადგან სინამდვილეში იგი მაინც არ სრულდება.

2) აგებანი წარმოსახვაში ძნელად მისაწვდომია მოსწავლეთათვის, რადგან ეს აგებები წმინდა პირობითია და ამით არსებითად განსხვავდებიან მათთვის ცნობილი პლანიმეტრიული აგებებისაგან.

საინტერესოა ბ. ა. მარკოვიჩის აზრი ამ საკითხის შესახებ.[1] იგი აღნიშნავს: „Отсутствие определённых указаний на различие между условными стереометрическими построениями и действительными ставит в очень затруднительное положение ученика, который захотел бы самостоятельно решать задачи на построение. В планиметрических задачах он привык вычерчивать всякий угол, всякий отрезок и притом в настоящую величину (или в данном масштабе). При первой же стереометрической задаче он не знает, что ему делать. — Как изобразить хотя бы пересечение прямой с плоскостью? или провести параллель и т. д. Он смотрит в „ответы", а ещё чаще в готовыя решения, и опять безпомощен. Если даже усилиями воображения он представит себе, что нужно „провести" такую-то плоскость и в этой плоскости начертить такую-то линию,—то опять настанет мучительный вопрос: как же всё это изобразить „на чертеже" ясно и „точно"?"

[1] МАРКОВИЧ Б. А.—Геометрия пространства, ч. I, курс старших классов средней школы, М., 1910.

ასეთი საკმაოდ ვრცელი ამონაწერი მხოლოდ იმიტომ მოვიტანეთ, რომ მკითხველისათვის, რაც შეიძლება, ნათელი გაგვეხადა თეზისი: აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა წარმოსახვაში მოსწავლეთათვის ძნელად მისაწვდომია.

აქამდე ჩვენ ვლაპარაკობდით საშუალო სკოლაში აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების შესახებ და აღვნიშნეთ, რომ სტერეომეტრიის სწავლების ეს უბანი თითქმის მივიწყებულია. ამასთან ძლიერ საჭიროა აგრეთვე ვილაპარაკოთ გეომეტრიის სასკოლო კურსში სივრცითი ფიგურების გამოსახვათა (ნახაზების) აგების სწავლებისა და მათი გამოყენების შესახებ. ცხადია, რომ საშუალო სკოლაში სტერეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგების სწავლება გეომეტრიის სწავლების მეტად მნიშვნელოვან უბანს წარმოადგენს. ეს იმიტომ, რომ ჩვენს თანამედროვე პირობებში, როცა ტექნიკურ პროგრესზე ძირითადად დამოკიდებულია სოფლის მეურნეობისა და წარმოების წინაშე პარტიის მიერ დასახულ ამოცანათა წარმატებით გადაჭრა, ნახაზების მნიშვნელობა განსაკუთრებით იზრდება. მართლაც, ინჟინერი იქნება იგი, თუ რომელიმე მუშა-რაციონალიზატორი, იმისათვის, რომ მან სინამდვილედ აქციოს თავისი თეორიული შთანაფიქრი, საჭიროა ჯერ ის განახორციელოს ქაღალდზე ნახაზის სახით და შემდეგ ნახაზის მიხედვით მოახდინოს გამოგონების რეალიზაცია (დეტალების, თუ მანქანების დამზადება და სხვ.). ამასთან მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის ფაქტი, რომ ადამიანთა ძირითადი მასა სხვადასხვა ნახაზების აგების ცოდნა-ჩვევებს უმთავრესად საშუალო სკოლაში იძენს. ეს განსაკუთრებით ითქმის ახალგაზრდობის იმ ნაწილზე, რომელიც საშუალო სკოლის დამთავრების შემდეგ სამუშაოდ წარმოებაში მიდის.

გარდა აღნიშნულისა თვით სტერეომეტრიის სწავლების სათანადო სიმაღლეზე დაყენების ამოცანა მოითხოვს ნახაზების აგების წესების ცოდნას. მართლაც, მასწავლებელი გაკვეთილის პროცესში (ამოცანის ამოხსნის ან თეორემის დამტკიცების დროს) ფართოდ იყენებს სტერეომეტრიულ ფიგურათა ნახაზებს. ნახაზების დანიშნულება პედაგოგიურ პროცესში ის არის, რომ შეუქმნას მოსწავლეებს შესაფერისი სივრცითი წარმოდგენები განსახილავ გეომეტრიულ ფიგურაზე და ამით ხელი შეუწყოს მასალის შეგნებულად და მტკიცედ შეთვისებას.

გაკვეთილის პროცესში ნახაზებს, არა მარტო უნდა ვიყენებდეთ,

არამედ კიდევაც უნდა ვასწავლიდეთ მოსწავლეებს იმას, თუ როგორ ააგონ ისინი.

როგორია საერთოდ ნახაზების შესრულებისა და მათი აგების სწავლების მდგომარეობა?

მასწავლებლის მიერ შესრულებული ნახაზები დაფაზე ხშირად არასწორია[1], უკეთეს შემთხვევაში, ეს ნახაზები წარმოადგენენ სახელმძღვანელოში მოთავსებული ნახაზების ასლებს. მაგრამ რა შეგვიძლია ჩვენ ვთქვათ ამ ასლების შესახებ, როცა თვით დედანი ხშირად სწორი არ არის?[2]

პასუხი აშკარაა.

მასწავლებელი განსაკუთრებით მძიმე მდგომარეობაში ვარდება სტერეომეტრიის პირველ გაკვეთილებზე, როცა იგი მოსწავლეებს ამოსახსნელად აძლევს ამოცანებს გამოანგარიშებაზე, თუნდაც ნ. რიბკინის გეომეტრიულ ამოცანათა კრებულის პირველი §§-დან. ვის არ სმენია, მაგალითად, მოსწავლეთა შემდეგი თხოვნა: „მასწავლებელო, ნახაზი მოგვეცით, თორემ ჩვენ ვერ შევასრულებთ".

მასწავლებელი იძულებულია მისცეს მათ ნახაზი, მაგრამ ეს სრულიადაც არ არის გამოსავალი შექმნილი მდგომარეობიდან. რადგან ამოცანა უამრავია და ყველა მათი ნახაზების მიცემა შეუძლებელია; მეორეს მხრივ კი, მოსწავლეებმა ხომ უნდა მიიღონ დამოუკიდებელი მუშაობის ჩვევები? ასეთი ჩვევების მიღება კი მათ შეუძლიათ მხოლოდ მაშინ, როცა შეისწავლიან ნახაზების აგების გარკვეულ წესებს.

თითქმის ასეთივე მდგომარეობასთან გვაქვს საქმე სწავლების შემდგომ საფეხურზეც. აქ ხშირად საკმაოდ ძლიერი მოსწავლეებიც კი ვერ ახერხებენ გამოანგარიშებაზე ამოცანების ამოხსნას იმის გამო, რომ მათ არ შეუძლიათ ააგონ სათანადო ნახაზი, ან აგებენ არასწორ ნახაზს, რომელიც მოსწავლეს უმრავლეს შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნის მცდარ გზაზე აყენებს. ნათქვამი განსაკუთრებით შესამჩნევი ხდება, როცა მოსწავლეებს ეძლევათ ამოცანები მრავალწახნაგა და მრგვალი სხეულების სხვადასხვა კომბინაციებზე.

აღნიშნული სიძნელეები სტერეომეტრიის სწავლებაში შედეგია

---

[1] ამ ცნების განმარტება იხ. თავი II, § 1-ში, გვ. 26.

[2] აღსანიშნავია, რომ სტაბილური სახელმძღვანელოც ზოგი ნახაზი სწორი არ არის. სათანადო მაგალითებს მკითხველი იპოვის ა. კისელევის სახელმძღვანელოში (ნაწ. II). მაგალითად, ნახ. 140 არასწორია.

იმისა, რომ მოსწავლეებს არ ეძლევათ სტერეომეტრიულ ფიგურათა გამოსახვების აგების ჩვევები, ხოლო ეს უკანასკნელი გარემოება იმის შედეგია, რომ სტერეომეტრიულ ფიგურათა გამოსახვების აგების სწავლების მეთოდიკა არადამაკმაყოფილებელია.

ახლა მოკლედ შევჩერდეთ იმაზე, თუ როგორ დგას სტერეომეტრიულ ფიგურათა გამოსახვების აგების საკითხი ჩვენს სასწავლო-მეთოდიკურ ლიტერატურაში.

იმისათვის, რომ სწორად შევაფასოთ სივრცითი ფიგურების გამოსახვათა აგების ამა თუ იმ მეთოდის ვარგისიანობა მისი პედაგოგიურ პროცესში გამოყენების თვალსაზრისით, საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ შემდეგი: გაკვეთილის პროცესი არ შეიძლება დატვირთულ იქნას ისეთი საკითხებით, რომელთაც შესასწავლ მასალასთან უშუალო კავშირი არა აქვთ. აქედან გამომდინარეობს, რომ პედაგოგიურ პროცესში სტერეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა ასაგებად არ შეიძლება ვისარგებლოთ მხაზველობითი გეომეტრიის კარგად დამუშავებული მეთოდებით, რადგან ამ მეთოდებით სარგებლობის დროს საჭირო ხდება სხვადასხვა გრაფიკული ოპერაციების ჩატარება, რომლებიც შეესაბამებიან ამორჩეულ პროექციას. ეს ოპერაციები კი გაუგებარი იქნება მოსწავლეთათვის (რადგან ისინი არ იცნობენ მხაზველობითი გეომეტრიის მეთოდებს) და გარდა ამისა მათი ჩატარება მოითხოვს გარკვეულ დამატებით დროს, რაც გამოიწვევს შესასწავლი საკითხისათვის განკუთვნილი დროის მნიშვნელოვანი ნაწილის უსარგებლოდ დაკარგვას. ორივე ეს გარემოება კი პედაგოგიური თვალსაზრისით ხელშემშლელია.

სტერეომეტრიულ გამოსახვათა აგების უმნიშვნელოვანეს საკითხებს მიძღვნილი აქვს პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის შრომა[1] და გ. ნაზარევსკის ვრცელი სტატია[2].

აღნიშნულ შრომებში ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული შეხედულებები შეიმჩნევა.

გ. ნაზარევსკი სტერეომეტრიული ფიგურების გამოსახვებს აგებს

---

[1] Н. Ф. Чэтверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946.

[2] Математика в школе, № 5, за 1951 г. и № 3, за 1953 г. „О развитии пространственного представления на уроках геометрии“.

კაბინეტურ (ფრონტალურ) პროექციაში. ამ თვალსაზრისზე დგას მეთოდისტების უმრავლესობა. მაგრამ, როგორც მეორე თავის § 2-ში ვნახავთ, გამოსახვათა აგების ეს მეთოდი არ არის ხელსაყრელი საშუალო სკოლაში.

პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის შეხედულებანი გამომდინარეობენ სასწავლო პროცესის ღრმა ანალიზიდან. ეს შეხედულებანი მთელი სისრულით გადმოცემულია მის ახლახან ციტირებულ შრომაში. ამ ნაშრომში დასმულია და გადაწყვეტილია საკითხი სტერეომეტრიულ ფიგურათა გამოსახვების აგებისა გაკვეთილებზე, ეს პრობლემა გადაწყვეტილია მთელი თავისი მოცულობით. ამიტომ უნდა ვიფიქროთ რომ, ამ შრომაში გადმოცემული თეორიის მთლიანად გამოყენება საშუალო სკოლაში შეუძლებელია. გარდა აღნიშნულისა, წიგნის ძირითად დებულებათა გაგება გეომეტრიული განათლების საკმაოდ მაღალ დონეს მოითხოვს. ეს გარემოებები გვაფიქრებინებენ, რომ ავტორის მიზანი არ ყოფილა მოეცა სახელმძღვანელო საკუთრივ საშუალო სკოლის მასწავლებელთათვის, არამედ მისი მიზანი იყო უფრო ზოგადი, სახელდობრ, მოეცა დასმული პრობლემის გადაწყვეტა მთლიანად.

მიუხედავად აღნიშნულისა, ჩვენი აზრით, პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის ეს შრომა წარმოადგენს იმ თეორიულ საფუძველს, რომელზედაც დაყრდნობით შეიძლება დამუშავებულ იქნეს სივრცითი ფიგურების გამოსახვათა აგების მეთოდიკის საკითხები საშუალო სკოლისათვის.

ყოველივე ზემონათქვამიდან ის დასკვნა შეიძლება გავაკეთოთ, რომ სტერეომეტრიის სასკოლო კურსის სწავლება გარკვეული ნაკლოვანებებით ხასიათდება. ეს ნაკლოვანებები კი იმას იწვევენ, რომ მოსწავლეები სტერეომეტრიის კურსს ვერ ითვისებენ ისე მტკიცედ, შეგნებულად და ნაყოფიერად, როგორც ეს საჭიროა. გარდა ამისა მოსწავლეთა ისედაც სუსტი სივრცითი წარმოდგენები საკმაოდ ვერ ვითარდება. ამაზე საკმაოდ ხშირად საყვედურს გამოთქვამენ როგორც საშუალო სკოლის, ისე უმაღლესი სკოლის მასწავლებლები. მაგალითად, პროფ. ნ. ჩეტვერუხინი აღნიშნავს: „Как неоднократно отмечалось, одним из наиболее существенных дефектов математического образования учащихся в средней школе является отсутствие у них хорошо развитых пространственных представлений"[1].

[1] იხ. აქვე შენიშვნა, გვ. 6,

ვ. წანამდებარე შრომის ამოცანები

§ 2-ში ჩვენ ლაპარაკი გვქონდა იმ ნაკლოვანებებზე, რომლებიც ახასიათებს სტერეომეტრიის კურსის სწავლებას საშუალო სკოლაში. აქედან ერთ-ერთი არსებითი ნაკლოვანება არის ის, რომ სწავლებაში სავსებით უგულებელყოფილია ისეთი ამოცანები აგებაზე, რომლებიც ამოიხსნებიან ეფექტურად, ე. ი. საძებნი ელემენტის ფაქტიური აგებით სახაზავი ხელსაწყოების გამოყენებით. ამის ნაცვლად და ისიც უმნიშვნელო რაოდენობით განიხილება აგებები წარმოსახვაში. მაგრამ აქაც დიდი ნაკლია. სახელდობრ, ის აგებები, რომლებიც სკოლაში განიხილება, შემთხვევით ხასიათს ატარებს, რადგან მუშაობა ამ მიმართულებით დაიყვანება ა. კისელევის გეომეტრიის სტაბილურ სახელმძღვანელოში მოცემული ამოხსნილი ამოცანების დასწავლაზე. გარდა ამისა სასკოლო სახელმძღვანელოში განხილული „ამოცანები აგებაზე“ საქმის შინაარსს არ გამოხატავს.

ცნობილია, რომ თვით ცხოვრება საჭირო აგებების ჩატარებას მოითხოვს არა გონებაში, არამედ სინამდვილეში. ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის თანამედროვე მეთოდიკა მოწყვეტილია ცხოვრებისაგან, პრაქტიკისაგან.

ეს ნაკლი სტერეომეტრიის სწავლებაში შეიძლება აღმოიფხვრას, თუ ჩვენ ამოცანებს აგებაზე განვიხილავთ და შევასრულებთ საპროექციო ნახაზზე. საპროექციო ნახაზის დიდი მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ მასზე შესაძლებელია საჭირო აგებანი განვახორციელოთ სინამდვილეში და იმავე სახაზავი ხელსაწყოების გამოყენებით, რომლებსაც პლანიმეტრიაში ვიყენებდით. ეხება რა ამ საკითხს, პროფ. ნ. ჩეტვერუხინი აღნიშნავს: „... Особенно большое преимущество проекционных чертежей заключается в том, что на таких чертежах можно „эффективно“ решать задачи с пространственными фигурами, фактически строя на чертеже искомые элементы и производя необходимые операции, почти совсем так, как это должно было бы выполняться в самом пространстве“[1].

საშუალო სკოლაში საპროექციო ნახაზის შემოტანის აუცილებლობისა და მიზანშეწონილობის თეორიული დასაბუთება მოცემუ-

[1] Проф. Н. Ф. Четверухин, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, Учпедгиз, 1952, стр. 6.

ლია პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის ზემოთ ციტირებულ შრომაში. მეთოდიკის თვალსაზრისით კი, ამ საკითხს ჯერ კიდევ არ მიუღია საბოლოო გადაწყვეტა. საჭიროა განისაზღვროს საშუალო სკოლისათვის სავალდებულო სავარჯიშოთა გარკვეული სისტემა, მუშაობის ფორმა და შინაარსი; დასასრულ, მოცემულ იქნას ამ სავარჯიშოების დამუშავების მეთოდიკა.

წინამდებარე შრომის ავტორი მიზნად ისახავს, შესაძლებლობის მიხედვით, გადაწყვიტოს ეს საკითხი.

ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ საპროექციო ნახაზზე შეიძლება დაისვას ორგვარი ამოცანა: პოზიციური და მეტრიკული. შრომაში განხილულ იქნება ორივე სახის ამოცანები.

მეორე დიდი ნაკლი სტერეომეტრიის სწავლებაში, რომელზეც აგრეთვე ლაპარაკი იყო § 2-ში, გამოიხატება სტერეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგების სწავლების მნიშვნელობის შეუფასებლობაში. ცნობილია, რომ სტერეომეტრიაში არ არსებობს ნახაზი—ორიგინალი, მიღებული ფანქრისა და სახაზავი ხელსაწყოების საშუალებით. მართლაც, ჩვენ არ შეგვიძლია აღვნიშნოთ წერტილები, გამოვსახოთ სწორები, ავაგოთ სიბრტყეები და სხვა უშუალოდ სივრცეში, როგორც ეს ხდება პლანიმეტრიაში ფანქრისა და სახაზავი ხელსაწყოების გამოყენებით. ამ მიზეზის გამო სტერეომეტრიულ ფიგურათა გამოსახვების (ნახაზების) აგებას საფუძვლად უდევს პროექციის პრინციპი, რომლის შესახებ უნდა ითქვას, რომ მასზე მოსწავლეებს საერთოდ თითქმის არაფერს არ ეუბნებიან; არ ასწავლიან მათ ნახაზების აგების წესებს. ამის გამო მოსწავლეებს უჭირთ საერთოდ სტერეომეტრიული ნახაზების აგება ან უშვებენ შეცდომებს მათი აგების დროს.

აღსანიშნავია, რომ მეთოდურ ლიტერატურაში გაბატონებულია თვალსაზრისი, რომ საშუალო სკოლაში გეომეტრიული ნაკვთების გამოსახვათა აგება უნდა სრულდებოდეს კაბინეტურ (ფრონტალურ პროექციაში. მაგრამ პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის შესანიშნავი წიგნის[1]) შესწავლით მივდივართ იმ დასკვნამდე, რომ საშუალო სკოლაში გეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგებისათვის ყველაზე უფრო ხელსაყრელ პროექციას წარმოადგენს ნებისმიერი პარალელური პროექცია[2] და არა კაბინეტური (ფრონტალური) პროექცია, რომელიც პარალელური პროექციის ერთ-ერთი სახეობაა.

---

[1] Проф. Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946.

[2] ჩვენ აქ მხედველობაში არ გვაქვს სფერო, რომლის თვალსაჩინო გამოსახვა შეიძლება მივიღოთ მხოლოდ ორთოგონალურ პროექციაში.

პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის უკვე ციტირებულ წიგნში დასმულია და გადაწყვეტილია მნიშვნელოვანი პრობლემა: გეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგება პედაგოგიურ პროცესში. ეს წიგნი არ არის მეთოდური სახელმძღვანელო საკუთრივ საშუალო სკოლისათვის. ამიტომ წინამდებარე ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ ზოგიერთ ძირითად საკითხებს, რომლებიც დაკავშირებულია გეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგებასთან. ეს საკითხი ორგანულად დაკავშირებულია აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნასთან, რადგან შეუძლებელია ეს უკანასკნელი კარგად აითვისონ მოსწავლეებმა ისე, თუ მათთვის უცნობია გეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგება (საპროექციო ნახაზიც ძირითადი სიბრტყის მიმართ მოცემული რომელიმე გეომეტრიული კონფიგურაციის გამოსახვას წარმოადგენს).

დასასრულ შევნიშნოთ შემდეგი: ის გარემოება, რომ წინამდებარე ნაშრომში განხილულია მხოლოდ ისეთი ამოცანები აგებაზე, რომლებიც ამოიხსნებიან ეფექტურად, არ ნიშნავს, რომ საშუალო სკოლიდან სავსებით განიდევნოს აგებები წარმოსახვაში, არამედ პირიქით, ხშირად საპროექციო ნახაზზე სხვადასხვა აგებების ჩასატარებლად საჭირო იქნება მივიშველიოთ აგებები წარმოსახვაში, ე. ი. აგებები საილუსტრაციო ნახაზზე.

თ ა ვ ი II

ძირითადი ცნობები სივრცითი ფიგურების გამოსახვათა აგების შესახებ

§ 1. სტერეომეტრიული ნაკვთების გამოსახვათა მნიშვნელობა პედაგოგიურ პროცესში

გეომეტრიის გაკვეთილებზე თეორემის დამტკიცებისა თუ ამოცანების ამოხსნის დროს მასწავლებელი ფართოდ იყენებს განსახილავი ნაკვთების ნახაზებს. მასთან, პლანიმეტრიული ნახაზები შესამჩნევად განსხვავდება სტერეომეტრიულისაგან. მართლაც, პლანიმეტრიაში ყოველი გეომეტრიული ფიგურა ჩვენ შეგვიძლია გამოვსახოთ დაუმახინჯებლად, ხოლო სტერეომეტრიაში ამ გარემოებას საზოგადოდ ადგილი არ აქვს. ეს განსხვავება გამოწვეულია იმით, რომ პლანიმეტრიული ფიგურის ყველა ელემენტი ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს, ხოლო სტერეომეტრიულისა კი არა. ამიტომ სტერეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგების დროს საქმე გვაქვს გარკვეულ სიძნელეებთან. ამ სიძნელეების ნაწილობრივ დაძლევა შესაძლებელი იქნებოდა ყოველ განსახილავ საკითხში მოდელების გამოყენებით, მაგრამ მოდელების დამზადების შესაძლებლობა ერთობ შეზღუდულია, ხოლო მეორეს მხრივ კი, ნახაზები უკვე დამკვიდრებულია ადამიანთა პრაქტიკულ საქმიანობაში და ამიტომ მათი აგების ჩვევების შეძენა თავისთავად დიდი პედაგოგიური ღირებულების მატარებელია.

სივრცითი ფიგურების გამოსახვებმა ხელი უნდა შეუწყონ იმ ხარვეზის შევსებას, რომელიც არსებობს ერთის მხრივ ასეთი ფიგურის მოდელსა და მეორეს მხრივ მის აბსტრაქტულ წარმოდგენას შორის. ასეთი როლი შეიძლება შეასრულოს მხოლოდ თვალსაჩინო ნახაზებმა, ე. ი. ისეთმა ნახაზებმა, რომლებიც იძლევიან წარმოდგენას თავიანთი ორიგინალების შესახებ. თვალსაჩინო ნახაზი ხელს შეუწყობს შესასწავლი მასალის შეგნებულად და მტკიცედ შეთვი-

სებას. ეჭვი არ არის, რომ სწორი ნახაზი ეხმარება მოსწავლეს ამოცანის ამოხსნის სწორი გზის მოძებნაში და, პირიქით, არასწორმა ნახაზმა შეიძლება იგი დააყენოს ამოცანის ამოხსნის მცდარ გზაზე.

განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს ნახაზების აგების საკითხი პ ე დ ა გ ო გ ი უ რ პ რ ო ც ე ს შ ი. როგორც უკვე იყო აღნიშნული (თავი I, § 2), ნახაზების აგება პედაგოგიურ პროცესში გარკვეული თავისებურებით ხასიათდება. ეს თავისებურება გამომდინარეობს თვით პედაგოგიური პროცესის ბუნებრივი მოთხოვნიდან: იგი არ შეიძლება დატვირთული იქნას ისეთი საკითხებით, რომელთაც შესასწავლ მასალასთან უშუალო კავშირი არ აქვთ.

სტერეომეტრიული ფიგურების გამოსახვები გარკვეულ მოთხოვნებს უნდა აკმაყოფილებდნენ. ეს მოთხოვნები ჩამოყალიბებულია პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის შრომაში[1]. ისინი შემდეგია:

1) გამოსახვა უნდა იყოს ს წ ო რ ი, ე. ი. იგი უნდა წარმოადგენდეს გამოსასახავი ფიგურის (ორიგინალის) ან მისი მსგავსი რომელიმე ფიგურის ერთ-ერთ პროექციას, პარალელურს ან ცენტრალურს[2].

2) გამოსახვა უნდა იყოს თ ვ ა ლ ს ა ჩ ი ნ ო, ე. ი. იგი უნდა იწვევდეს წარმოდგენას ორიგინალზე—გამოსასახავ ფიგურაზე.

3) გამოსახვა უნდა იყოს თ ა ვ ი ს უ ფ ლ ა დ შ ე ს ა ს რ უ ლ ე ბ ე ლ ი, ე. ი. ის არ უნდა შეიცავდეს ისეთ აგებებს, რომლებიც უშუალოდ არ არიან დაკავშირებული განსახილავ საკითხთან. კერძოდ, ის თავისუფალი უნდა იყოს იმ კონსტრუქციული აგებებისაგან, რომლებიც დაკავშირებულია მაგეგმილებელი აპარატის არჩევასთან.

განვიხილოთ თითოეული ამ მოთხოვნილებათაგანი ცალ-ცალკე.

1) მოთხოვნა გამოსახვის სისწორის შესახებ აუცილებელია, ე. ი. ამ მოთხოვნას უნდა აკმაყოფილებდეს ყველა გამოსახვა, სადაც არ უნდა განიხილებოდეს იგი. განსხვავება შეიძლება მდგომარეობდეს მხოლოდ და მხოლოდ სისწორის სიზუსტეში. ასე, მაგალითად, ტექნიკაში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება გამოსახვის ზუსტად აგებას ამა თუ იმ პროექციაში, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში შეუძლებელია ორიგინალის ზუსტად დამზადება გამოსახვის საშუალებით. რაც შეეხება პედაგოგიურ პროცესს, აქ შეიძლება დავკმაყოფილდეთ

---

[1] Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946.

[2] პროექციის განსაზღვრა მოცემულია მომდევნო პარაგრაფში.

გამოსახვის პრინციპიალური სისწორით. გამოსახვის აგების სისწორეს დიდი მნიშვნელობა ენიჭება მაშინაც, თუ მისი აგების მიზანია მივცეთ მოსწავლეებს გამოსახვათა აგების ჩვევები.

მაშასადამე, საშუალო სკოლის გეომეტრიის კურსში გამოსახვის სისწორის ხარისხს განსაზღვრავს ის მიზნები და ამოცანები, რომელიც დგას ამ გამოსახვის წინაშე. მაგალითად, თუ გამოსახვა გამოყენებული უნდა იქნას გამოანგარიშებაზე ამოცანის ამოხსნის დროს ან რომელიმე თეორემის დამტკიცების დროს, აქ შეიძლება დავკმაყოფილდეთ მისი პრინციპიალური სისწორით, ე. ი. მიახლოებითი სისწორით. ხოლო თუ გამოსახვის დანიშნულება მდგომარეობს მისი აგების ჩვევის შეძენაში, მაშინ აგებებში უნდა დავიცვათ მაქსიმალური სიზუსტე.

გამოთქმულ მოსაზრებათა ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი.

ა მ ო ც ა ნ ა. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძე და სიმაღლე ოთხოთხი სმ-ია. მანძილი მოცემული წერტილიდან ამ სამკუთხედის სიბრტყემდის უდრის 6 სმ, და ეს წერტილი თანასწორი მანძილითაა დაშორებული ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებიდან. იპოვეთ ეს მანძილი.

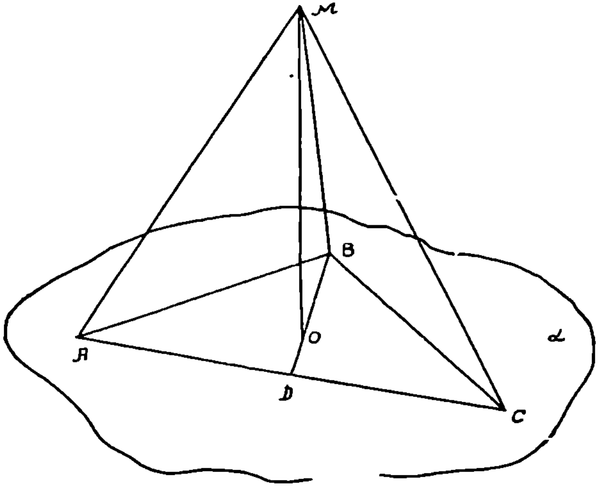
ამოცანის ამოხსნისას მოსწავლეები იყენებენ ნახაზს. შევჩერდეთ ამ ნახაზის აგებაზე.

მივიღოთ მხედველობაში, რომ სამკუთხედის სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილი ტოლი მანძილითაა დაშორებული სამკუთხედის წვეროებიდან; ცხადია, რომ ამ წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყეზე დაშვებული პერპენდიკულიარის ფუძე იქნება სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრი. ამრიგად, ნახაზის ასაგებად საჭიროა ავაგოთ სამკუთხედის გამოსახვა და ვიპოვოთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის მდებარეობა ნახაზზე. შევნიშნოთ, რომ შემოხაზული წრის ცენტრი უნდა მდებარეობდეს სამკუთხედის ფუძის მედიანაზე, რადგან ეს სამკუთხედი ტოლფერდაა.

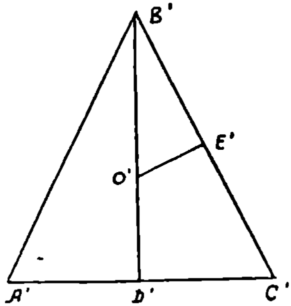
გამოვსახოთ ჰორიზონტალურ α სიბრტყეზე ნებისმიერი ABC სამკუთხედი (ნახ. 6 ა). ეს სამკუთხედი შეიძლება მივიღოთ ამოცანაში მოცემული ტოლფერდა სამკუთხედის გამოსახვად, შემდეგი თეორემის თანახმად: „გამოსახვათა α სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ABC სამკუთხედი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ნებისმიერი ორიგინალური $A'B'C'$ სამკუთხედის გამოსახვა“[1].

[1] იხ. ამ თეორემის დამტკიცება ამავე თავის § 5-ში.

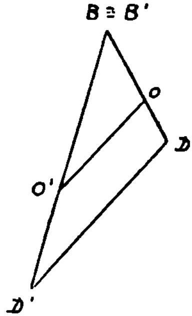
ამის შემდეგ ვიპოვოთ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის მდებარეობა BD მედიანაზე. ამისათვის ჯერ ვიპოვოთ



ნახ. 6 ა



ნახ. 6 ბ



ნახ. 6 გ

ეს წერტილი ორიგინალში. ავაგოთ ტოლფერდა $A'B'C'$ სამკუთხედი (ნახ. 6 ბ), რომელშიაც $A'C'=B'D'=4$ სმ, მაშინ ეს სამკუთხედი იქნება ABC სამკუთხედის ორიგინალი. ვიპოვოთ $A'B'C'$

სამკუთხედზე შემოხაზული წრის O' ცენტრი.[1] ამისათვის საკმარისია სამკუთხედის $B'C'$ გვერდის E' შუაწერტილზე გავავლოთ $O'E' \perp \perp B'C'$, მაშინ O' წერტილი წარმოადგენს $A'B'C'$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრს.

ვიპოვოთ ახლა O' წერტილის მდებარეობა ABC სამკუთხედის BD მედიანაზე. ამისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ პარალელურ პროექციაში ერთსა და იმავე სწორზე მდებარე მონაკვეთების შეფარდება უდრის გამოსახვის შესაბამი მონაკვეთების შეფარდებას;[2] ამიტომ ადგილი ექნება პროპორციას: $B'O' : D'O' = BO : DO$; ამის მიხედვით ჩვენ განვსაზღვრავთ O' წერტილის გამოსახვის მდებარეობას BD-ზე. ეს აგება ცალკეა შესრულებული (ნახ. 6 გ).

მიღებულ O წერტილიდან (ნახ. 6 ა) გავავლებთ ვერტიკალურ OM სწორს და მივიღებთ მას α სიბრტყის პერპენდიკულარულ მიმართულებად. M წერტილს შევაერთებთ A, B და C წერტილებთან. ამნაირად ჩვენ ავაგებთ ჩვენთვის საინტერესო ნახაზს. ასეთია ნახაზის ზუსტად შესრულების საკითხი პარალელურ პროექციაში.

ცხადია, რომ გაკვეთილის პროცესში, მოტანილი ამოცანის ამოხსნისას არ არის შესაძლებლობა შევასრულოთ ყველა ნაჩვენები აგებები, რადგან ისინი ბევრ დროს წაგვართმევენ. ამ შემთხვევაში შეიძლება დავკმაყოფილდეთ პრინციპიალურად სწორი ნახაზით, ასეთ ნახაზს შეიძლება მიახლოებით სწორიც ვუწოდოთ. ცხადია, რომ ჩვენს მაგალითში ნახაზის სიზუსტის ხარისხი დამოკიდებულია O წერტილის მდებარეობაზე. ასეთი ნახაზის ასაგებად წინასწარ გავაკეთოთ შემდეგი შენიშვნა: ნებისმიერ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის არსებობის არეა ნახ. 7-ზე დაშტრიხული სიბრტყის ნაწილი, სადაც A_1, B_1 და C_1 წერტილები შესაბამად წარმოადგენენ ABC სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებს. აღსანიშნავია, რომ A_1B_1, B_1C_1 და A_1C_1 სწორები არ შედიან არეს შემადგენლობაში, მაშინ, როცა A_1, B_1 და C_1 წერტილები უნდა იყვნენ ჩათვლილი ამ არეში[3].

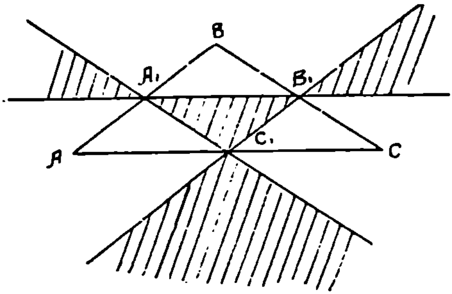
ჩვენს მაგალითში ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა, ამიტომ მასზე შემოხაზული წრის ცენტრი მდებარეობს ფუძის მედიანაზე. გარდა

[1] საერთოდ მიღებულია, რომ ორიგინალი აღინიშნოს იმავე ასოებით, რომლებითაც აღნიშნულია გამოსახვა, მხოლოდ მათ უნდა დაემატოთ შტრიხები. ამ აღნიშვნებით ვისარგებლებთ ჩვენც ამ შრომაში.

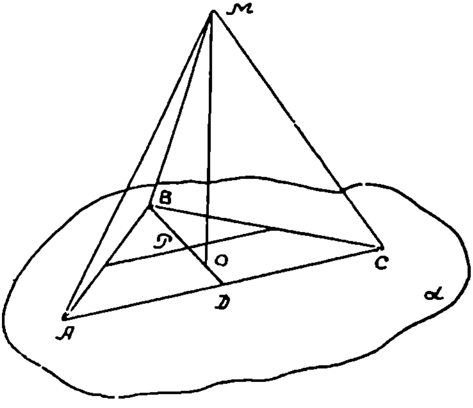
[2] იხ. ამ თვისების დამტკიცება ამავე თავის § 3-ში—(იხ. თვისება 4).

[3] იხ. ამის შესახებ Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, стр. 100—101.

ამისა ეს სამკუთხედი მახვილკუთხაა და, მაშასადამე, მასზე შემოხაზული წრის ცენტრი სამკუთხედის შიგნით მდებარეობს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრი მდებარეობს BD მედიანის PD ნაწილზე (ნახ. 8). ავიღოთ O წერტილი PD მონაკვეთზე ნებისმიერად და ჩავატაროთ იგივე აგებები, რაც ზემოთ იყო ნაჩვენები.



ნახ. 7.



ნახ. 8.

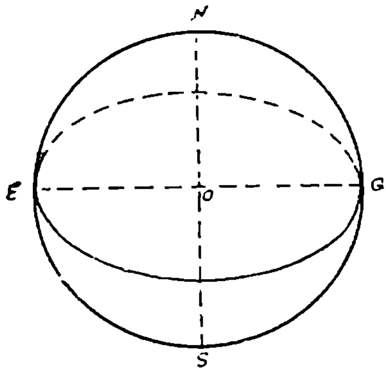
მიღებული გამოსახვა იმდენად არის მიახლოებითი, რამდენადაც მიახლოებითაა აღებული O წერტილი. ყოველივე ნათქვამის შემდეგ ცხადია, იმ მოსწავლის შეცდომა, რომელიც OM პერპენდიკულარის O ფუძეს ABC სამკუთხედის BD მედიანის BP ნაწილზე აიღებს.

2) გამოსახვების თვალსაჩინოებას დიდი მნიშვნელობა ენიჭება

პედაგოგიურ პროცესში, რადგან, როგორც უკვე ითქვა, ამ გამოსახვების მიზანია შეუქმნას მოსწავლეებს ნათელი სივრცითი წარმოდგენა შესასწავლ გეომეტრიულ ნაკვთზე და ამით ხელი შეუწყოს მასალის შეგნებულად და მტკიცედ შეთვისებას. გამოსახვების თვალსაჩინოება, რასაკვირველია, ტექნიკურ ნახაზებშიც სასურველია, მაგრამ იგი აუცილებლობით არ არის ნაკარნახევი. აქ უფრო მეტი მნიშვნელობა ენიჭება იმას, რომ გამოსახვა ღლჭურვილი იყოს ზომილობის თვისებით, ე. ი. ამ გამოსახვის საშუალებით შესაძლებელი იყოს ორიგინალის ზ უ ს ტ ა დ დ ა მ ზ ა დ ე ბ ა.

გამოსახვათა სისწორისა და თვასაჩინოების მოთხოვნის დაცვას ხშირად ყურადღებას არ აქცევენ არა მარტო მასწავლებლები, არამედ თვით სახელმძღვანელოებისა და მეთოდური წერილების ავტორებიც. განვიხილოთ მაგალითი.

ა) სკოლაში ჩვეულებრივად სფეროს გამოსახვას ეკვატორით ასრულებენ ისე, როგორც ეს მოცემულია ნახაზზე (ნახ. 9), სადაც EQ ელიფსი ეკვატორს გამოსახავს.

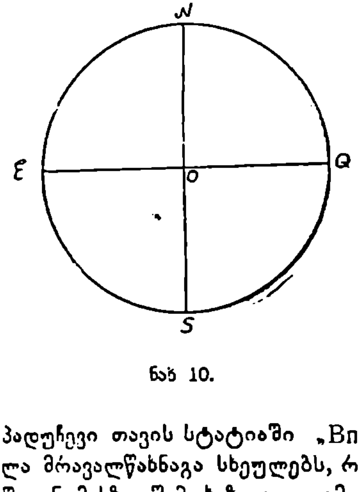


ნახ. 9.

შევნიშნავთ, რომ სფეროს გამოსახვა წრეხაზს წარმოადგენს მხოლოდ და მხოლოდ ორთოგონალურ პროექციაში (პარალელურ პროექციას ეწოდება ორთოგონალური თუ მაგეგმილებელი სხივები გამოსახვათა სიბრტყის პერპენდიკულარებია). სფეროს პოლუსები (N და S) ნახაზზე მოცემულ წრეხაზზე მოთავსდებიან მხოლოდ მაშინ, როცა NS დიამეტრი გამოსახვათა სიბრტყის პარალელურია. ასეთ პირობებში კი, ამ დიამეტრის პერპენდიკულარული კვეთა EQ, გამოსახვაზე წარმოგვიდგება NS დიამეტრის პერპენდიკულარული EQ დიამეტრის სახით და არა ელიფსის სახით, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე.

მაშასადამე, განხილული გამოსახვა სწორი არ არის, ამიტომ მას არც თვალსაჩინო შეიძლება ეწოდოს. სწორი გამოსახვა მოცემულია ნახაზ 10-ზე.

რით აიხსნება სფეროს გამოსახვაში დაშვებული შეცდომა? სფეროს გამოსახვაში დაშვებული შეცდომა აიხსნება იმით, რომ სფეროსა და მისი ეკვატორის გამოსასახავად გამოყენებულია სხვადასხვა პროექცია. სახელდობრ, სფეროს გამოსახვა (ანუ როგორც მას კიდევ უწოდებენ, სფეროს შემონახაზი) მოცემულია ორთოგონალურ პროექციაში, ხოლო ეკვატორისა ფრონტალურ (კაბინეტურ)[1] პროექციაში. ნათქვამიდან შეიძლება გამოვიტანოთ შემდეგი დასკვნა: გეომეტრიული სხეულების გამოსახვათა აგება შესაძლებელია და სასურველიცაა მოვახდინოთ სხვადასხვა პროექციაში, მაგრამ ერთი და იგივე სხეულის გამოსახვის აგებისათვის დაუშვებელია მისი ერთი ნაწილი გამოსახული იქნეს ერთ პროექციაში და მეორე კიდევ სხვა პროექციაში.



ნახ 10.

ამ გარემოების გაუთვალისწინებლობას მივყევართ ე. წ. მცდარ გამოსახვებამდე. აშკარაა, რომ ამ დებულებას არ ითვალისწინებს ზოგიერთი ავტორი, როცა ისინი სფეროსა და მრავალწახნაგა სხეულების კომბინაციების გამოსახვათა აგებისას მრავალწახნაგა სხეულების გამოსახვებს იძლევიან კაბინეტურ პროექციაში, ხოლო სფეროსას ორთოგონალურ პროექციაში. მაგალითად, ვ. პადუჩევი თავის სტატიაში „Вписанный и описанный шар"[2] ყველა მრავალწახნაგა სხეულებს, რომლებიც ჩახაზული არიან სფეროში ან მასზე შემოხაზული, გამოსახავს კაბინეტურ პროექციაში იმ დროს, როცა სფეროს გამოსახვას იძლევა ორთოგონალურ პროექციაში.[3] ამრიგად, ავტორის მიერ მოცემული ნახაზები არასწორად უნდა ჩაითვალოს. შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ავტორმა სფეროც კაბინეტურ პროექციაში გამოსახა?, მაშინ მას მაინც შეცდომა

[1] კაბინეტურ პროექციაზე ლაპარაკი იქნება ქვემოთ, § 2-ში.

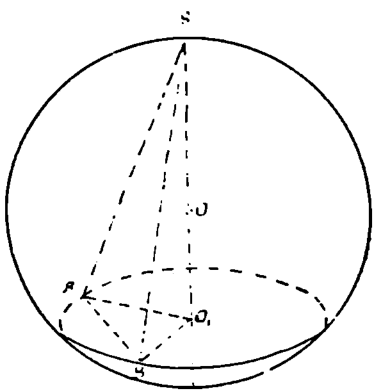
[2] Математика в школе, № 6, за 1940 г.

[3] სფეროს შემონახაზი ყოველთვის მოცემულია წრეხაზის სახით.

დაუშვეია, რადგან კაბინეტურ პროექციაში სფეროს გამოსახვა მიილება არა წრეხაზის სახით, არამედ ელიფსის სახით.

ბ) სფეროს გამოსახვა, რომელიც წარმოდგენილია მე-10 ნახაზზე სწორია, მაგრამ ის არ არის თვალსაჩინო, რადგანაც წრე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული დიამეტრით ვერავითარ შემთხვევაში ვერ მოგვცემს წარმოდგენას სფეროს შესახებ.

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ არასწორ გამოსახვებს ხშირად ვხვდებით მოსწავლეთა საგამოცდო ნამუშევრებში, რომლებიც უმრავლეს შემთხვევაში შეუნიშნავი რჩება. საკმარისია დავასახელოთ საქ. სსრ სკოლებში 1954/55 სასწავლო წელს XI კლასში გამოსაშვებ გამოცდებზე მიცემული ამოცანის შესაბამი ნახაზები. ამ ამოცანაში ლაპარაკი იყო სფეროში ჩახაზული წესიერი რვაკუთხა პირამიდის შესახებ. მოსწავლეთა უმრავლეს ობამ საჭირო ნახაზები შეასრულა ნახ. 11 სახით. ეს გამოსახვა კი, როგორც ზემოთ ითქვა, სწორი არ არის.



ნახ. 11

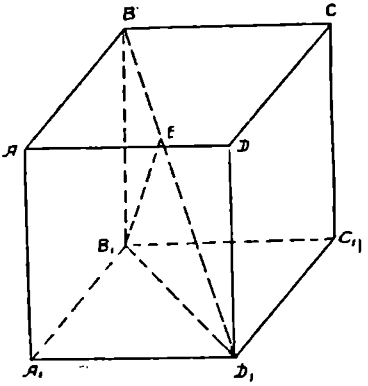
ნახ. 10 შესახებ ითქვა, რომ იგი სწორია, მაგრამ არათვალსაჩინო. შეიძლება დავასახელოთ სწორ გამოსახვათა სხვა მაგალითებიც, რომლებიც თვალსაჩინოებას გავსებით მოკლებული არიან. მაგალითად, სამკუთხედის ან რომელიმე მრავალკუთხედის ორთოგონალური პროექცია ამ სამკუთხედის ან მრავალკუთხედის სიბრტყის პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე იქნება მონაკვეთი, რომელიც ვერავითარ თვალსაჩინო წარმოდგენას ვერ მოგვცემს თავისი ორიგინალის შესახებ.

3) მოთხოვნა იმის შესახებ, რომ გამოსახვა იყოს თავისუფლად შესასრულებელი, ე. ი. რომ იგი არ შეიცავდეს არავითარ გარეშე აგებებს, წარმოადგენს სპეციფიკურ მოთხოვნას, რომელსაც მხოლოდ პედაგოგიური მიზნებით გამოყენებული გამოსახვები უნდა აკმაყოფილებდნენ. სწორედ ამ მოთხოვნის დაცვის საჭიროება გვა-

იძულებს, რომ პედაგოგიურ პროცესში გამოსახვების აგების დროს ხელი ავიღოთ მხაზველობითი გეომეტრიის მეთოდების გამოყენებაზე. ამ მეთოდებით სარგებლობის დროს გამოსახვის შესრულება გვიხდება სპეციალურ პროექციებში, რაც, თავის მხრივ, მოითხოვს გარკვეული დამატებითი აგებების ჩატარებას. მაგრამ ეს აგებები ჯერ-ერთი, რომ გაუგებარი იქნება მოსწავლეთათვის და მეორეც, რომ მათი შესრულება მოითხოვს დამატებით დროს, რაც აშკარაა, სასწავლო პროცესის გადატვირთვას გამოიწვევს.

მიუხედავად იმ დიდი პედაგოგიური ღირებულებისა, რომელიც ამ მოთხოვნილების დაცვას აქვს, ჩვენ არ შეგვიძლია ის ყოველთვის დავიცვათ. ეს მოხდება იმ შემთხვევაში, როცა გვიხდება რაიმე აგებების ჩატარება მეტრიკულად განსაზღვრულ გამოსახვებზე, რომლებზედაც რაიმე თავისუფლება აგებების ჩატარებაში დაუშვებელია.[1]

განვიხილოთ მაგალითი, რომელიც ნათელ წარმოდგენას მოგვცემს გამოთქმულ საკითხზე.



ნახ. 12.

ა მ ო ც ა ნ ა (რიბკინი, § 7, №7). კუბის წიბო უდრის a-ს. გაიგეთ მანძილი კუბის წვეროდან მის დიაგონალამდის.

კუბის გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრულია, ამიტომ მანძილი B_1 წვეროდან BD_1 დიაგონალამდე არ შეიძლება ნებისმიერად გამოვსახოთ. ამ პერპენდიკულარის გამოსახვა შეიძლება აგებულ იქნას ნახაზზე (ნახ. 12). ამ აგების ერთ-ერთი ვარიანტი შეიძლება იყოს ასეთი: $B_1'B'D_1'$[2] სამკუთხედი მართკუთხაა, რომლის გვერდებია: a, $a\sqrt{2}$ და $a\sqrt{3}$. წარმოვიდგინოთ, რომ საძებნი პერპენდიკულარი გავლებულია ორიგინალში, მაშინ ცნობილი

[1] მეტრიკულად განსაზღვრული გამოსახვა ისეთი გამოსახვაა, რომლის ორიგინალი განსაზღვრულია მსგავსებამდე. ასეთია, მაგალითად, კუბის გამოსახვა. დაწვრილებით ამის შესახებ იხ. ამავე თავის § 4.

[2] ვიმეორებთ აქ, რომ $B_1'\,B'\,D_1'$ აღნიშნავს ორიგინალს და არა მის $B_1\,B\,D_1$ გამოსახვას.

თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ: $B'E' \cdot B'D_1' = a^2$ და $D_1'E' \cdot B'D_1' = 2a^2$, საიდანაც $B'E' : D_1'E' = 1 : 2$; ამის შემდეგ ვისარგებლოთ პროპორციით: $B'E' : D_1'E' = BE : D_1E$[1], რაც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ E' წერტილის გამოსახვის მდებარეობა BD_1 დიაგონალზე. საძებნი მანძილის გამოსახვაა B_1E მონაკვეთი.

მივიღებთ რა მხედველობაში განხილულ მაგალითს, შეიძლება გამოვიტანოთ დასკვნა: თუ გამოსახვის აგების დროს შეიძლება გამოვიყენოთ რამდენიმე ხერხი, მაშინ მათგან შეიძლება ამოვარჩიოთ ისეთი, რომელიც ყველაზე მარტივად მიგვიყვანს საბოლოო მიზნამდე. ასეთ პირობებში შესაძლებელია დავიცვათ გამოსახვათა აგების ზემოხსენებული მოთხოვნილება. იმ შემთხვევაში კი, როცა გამოსახვის აგება ან მასზე რაიმე აგებების ჩატარება შეიძლება მხოლოდ ერთი გზით, მაშინ ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული მოთხოვნა თავისთავად იხსნება, რადგანაც აგების ეს ერთადერთი გზა შეიძლება საკმაოდ ბევრ გრაფიკულ ოპერაციათა ჩატარებას მოითხოვდეს.

§ 2. პარალელური დაგეგმილება და მისი მნიშვნელობა გამოსახვათა აგებისათვის

გეომეტრიული სხეულების გამოსახვათა აგებას საფუძვლად უდევს პროექციის პრინციპი. ეს იმას ნიშნავს, რომ გეომეტრიული ფიგურის გამოსახვა სიბრტყეზე შეიძლება მივიღოთ დაგეგმილების გზით. არსებობს ორი სახის პროექცია: ცენტრალური და პარალელური. გავეცნოთ მათ მოკლედ.

განვიხილოთ სივრცის ნებისმიერი P წერტილი და M სიბრტყე. P წერტილის პროექცია მოცემულ M სიბრტყეზე ეწოდება ამ წერტილზე გავლებული ნებისმიერი სწორის შეხვედრის P_1 წერტილს M სიბრტყესთან (ნახ. 13). PP_1 სწორს მაგეგმილებელი სწორი ან კიდევ მაგეგმილებელი სხივი ეწოდება. M სიბრტყეს გეგმილთა სიბრტყე ან კიდევ გამოსახვათა სიბრტყე ეწოდება.

თუ ჩვენ გვსურს მივიღოთ რომელიმე ფიგურის პროექცია M სიბრტყეზე, ამისათვის საჭიროა ავაგოთ M სიბრტყეზე ამ ფიგურის ზოგიერთი წერტილების პროექციები. მაგალითად, რომ ავაგოთ ოთხკუთხედის გეგმილი მოცემულ M სიბრტყეზე, ამისათვის საკ-

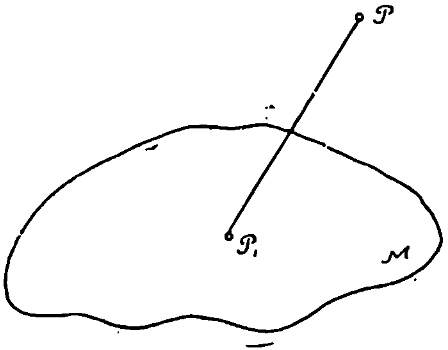
---

[1] ვგულისხმობთ, რომ კუბის გამოსახვა მოცემულია პარალელურ პროექციაში. ამიტომ ადგილი ექნება დაწერილ პროპორციას. მართლაც, როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი პარალელურ პროექციაში ერთსა და იმავე სწორზე მდებარე მონაკვეთების შეფარდება უდრის გამოსახვის შესაბამი მონაკვეთების შეფარდებას.

მარისი იქნება ამ ოთხკუთხედის წვეროების გეგმილთა აგება M სიბრტყეზე და მიღებული წერტილების შეერთება გარკვეული თანამიმდევრობით.

მაგეგმილებელი სხივები საჭიროა აკმაყოფილებდნენ შემდეგი ორი პირობიდან ერთ-ერთს: ან 1) ყველა მაგეგმილებელი სხივი გადიოდეს მოცემულ S წერტილში, ან 2) ყველა მაგეგმილებელი სხივი ნებისმიერად აღებული მიმართულების პარალელური იყოს, ე. ი. ყველა მაგეგმილებელი სხივი ერთმანეთის პარალელური იყოს.

დაგეგმილებას, როცა მაგეგმილებელი სხივები პირველ პირობას აკმაყოფილებენ, ეწოდება ცენტრალური, ხოლო S წერტილს—გეგმილთა ცენტრი. საგნის გამოსახვას, რომელიც მიღებულია ცენ-



ნახ. 13.

ტრალურ პროექციაში ამ საგნის პერსპექტივას უწოდებენ.

დაგეგმილებას უწოდებენ პარალელურს, თუ მაგეგმილებელი სხივები აკმაყოფილებენ მეორე პირობას. შევნიშნავთ, რომ პარალელური პროექცია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ცენტრალური პროექციის ზღვრული შემთხვევა, როცა პროექციის ცენტრი მოთავსებულია უსასრულოდ-შორეულ წერტილში. მაგალითად, პრაქტიკულად მზე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც უსასრულოდ შორეული წერტილი, ამიტომ საგნის გამოსახვას ეკრანზე, რომელიც მიიღება მზის სხივების საშუალებით, შეიძლება ამ საგნის პარალელური პროექცია ვუწოდოთ.

პარალელური პროექციის ორ სახეს ასხვავებენ: ა) ირიბკუთხოვანს—როცა მაგეგმილებელი სხივები დახრილია გეგმილთა სიბრტყის

მიმართ და ბ) მართკუთხოვანს — როცა მაგეგმილებელი სხივები გეგმილთა სიბრტყის პერპენდიკულარებია. ამ უკანასკნელს ხშირად ორთოგონალურ პროექციას უწოდებენ.

ირიბკუთხოვანი პარალელური პროექციის ერთ-ერთი სახე არის ე. წ. კაბინეტური პროექცია. სასწავლო-მეთოდური ლიტერატურის ავტორების უმრავლესობა იზიარებს იმ შეხედულებას, რომ საშუალო სკოლაში გეომეტრიული სხეულების გამოსახვათა აგება შესრულებული უნდა იქნას კაბინეტურ პროექციაში.[1]

უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ ავტორების თვალსაზრისი არ შეიძლება გავიზიაროთ იმდენად, რამდენადაც გეომეტრიული სხეულების გამოსახვათა აგება ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში გაცილებით მარტივია და უფრო მისაწვდომი საშუალო სკოლის მოსწავლეთათვის, ვიდრე იგივე აგებანი კაბინეტურ პროექციაში. აქვე აღვნიშნავთ, რომ აქ ჩვენ მხედველობაში არ ვღებულობთ სფეროს გამოსახვის საკითხს, რომლის გამოსასახავად ერთადერთ მისაღებ პროექციას ორთოგონალური პროექცია წარმოადგენს.

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი გამოსახვების აგებაზე კაბინეტურ პროექციაში. ამ მაგალითების შედარება იმ აგებებთან, რომლებიც შეიძლება შევასრულოთ ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში, საშუალებას მოგვცემს დავრწმუნდეთ ზემოთ გამოთქმული შენიშვნის სამართლიანობაში.

სანამ უშუალოდ მაგალითებზე გადავიდოდეთ, მოვიტანოთ ზოგიერთი ცნობები კაბინეტური პროექციის შესახებ.

კაბინეტური პროექციით სარგებლობის დროს, ჩვეულებრივ, ნახაზის სიბრტყედ მიღებულია ფრონტალური სიბრტყე (წინა ხედი), რომლის პარალელურად განლაგებულია კოორდინატთა $O'X'Y'Z'$ სისტემის $O'Y'$ და $O'Z'$ ღერძები, ხოლო, რაც შეეხება $O'X'$ ღერძს, იგი ნახაზზე გამოსახულია $Y'O'Z'$ კუთხის ბისექტრისის სახით. მონაკვეთები, რომლებიც განლაგებულია $O'Y'$ და $O'Z'$ ღერძებზე ან მათ პარალელურად ან კიდევ $Y'O'Z'$ სიბრტყეზე, ან მის პარალელურად გამოსახვაზე წარმოგვიდგებიან დაუმახინჯებლად, ხოლო

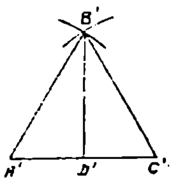
[1] იხ. მაგალითად, Гангнус и Гурвиц, Геометрия (методическое пособие) Ч. II (стереометрия). М. 1936. Г. А. Назаревский, о развитии пространственного представления на уроках геометрии. Математика в школе, № 5, 1951.

$O'X'$ ღერძის პარალელური ან მასზე მდებარე მონაკვეთები ნახაზზე ორჯერ შემცირებულად წარმოგვიდგებიან.[1]

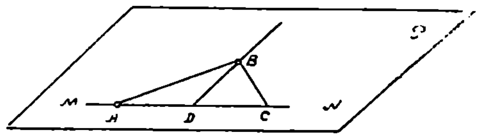
ამის შემდეგ გადავიდეთ მაგალითების განხილვაზე.

მაგალითი 1. ავაგოთ წესიერი $A'B'C'$ სამკუთხედის გამოსახვა ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე.

ა გ ე ბ ა. ავაგოთ ჯერ წესიერი სამკუთხედის გამოსახვა ფრონტალურ სიბრტყეში (ნახ. 14). შემდეგ, ჰორიზონტალურ P სიბრტყეზე გავავლოთ ჰორიზონტალური MN სწორი და მოვზომოთ მასზე $AC = A'C'$ მონაკვეთი (ნახ. 15). ამ მონაკვეთის შუაწერტილზე გავიყვანოთ სხივი, რომელიც AC-თან შექმნის $45°$-იან (ან $135°$)



ნახ. 14.



ნახ. 15.

კუთხეს და გადავზომოთ მასზე $DB = \frac{B'D'}{2}$, სადაც $B'D'$ არის მოცემული წესიერი სამკუთხედის სიმაღლე. B წერტილი შევაერთოთ A და C წერტილებთან, მივიღებთ ABC სამკუთხედს, რომელიც მოცემული $A'B'C'$ სამკუთხედის გამოსახვაა P სიბრტყეზე.

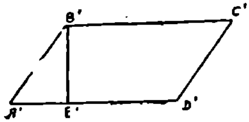
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $A'B'C'$ სამკუთხედის მდებარეობა ჩვენ ისე შევარჩიეთ, რომ მისი $A'C'$ გვერდის გამოსახვა მიგვეღო ნატურალური სიდიდით.

მაგალითი 2. ავაგოთ $A'B'C'D'$ პარალელოგრამის გამოსახვა ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე.

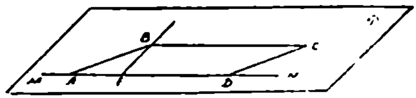
ა გ ე ბ ა. პარალელოგრამის გამოსახვა ავაგოთ ჯერ ფრონტალურ სიბრტყეზე და გავიყვანოთ მასში $B'E'$ სიმაღლე, მასთან ორიგინალის მდებარეობა ისე შევარჩიოთ, რომ მისი ერთ-ერთი გვერდი ჰორიზონტალური იყოს (ნახ. 16).

[1] შევნიშნავთ, რომ ჩვენ ავიღეთ ის შემთხვევა, როცა შემცირების კუთხე უდრის $45°$-ს ($135°$-ს), რომელსაც შეესაბამება შემცირების კოეფიციენტი $K = \frac{1}{2}$; შეიძლება შემცირების კუთხეებად მივიღოთ $30°$-იანი ($150°$) კუთხე, ან კიდევ $60°$-იანი ($120°$) კუთხე, მაშინ შემცირების კოეფიციენტებს ჩვეულებრივად $\frac{1}{3}$-სა და $\frac{2}{3}$-ის ტოლად ღებულობენ.

შემდეგ, გავავლოთ P სიბრტყეზე ჰორიზონტალური MN სწორი და მოვზომოთ მასზე $AD=A'D'$ მონაკვეთი. ამის შემდეგ ამ მონაკვეთზე მოვზომოთ A წერტილიდან $AE=A'E'$ მონაკვეთი და E წერტილზე გავიყვანოთ AD-სადმი 45°-ით (ან 135°) დახრილი სხივი, რომელზედაც მოვზომოთ $EB=\frac{1}{2}E'B'$ მონაკვეთი. დანარჩენი ნათელია (ნახ. 17).



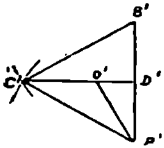
ნახ. 16.



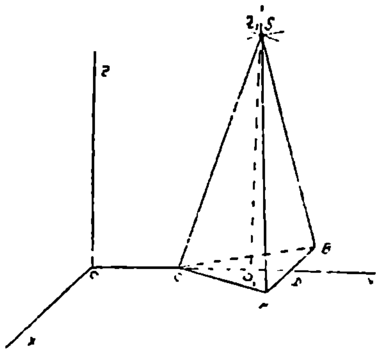
ნახ. 17.

მაგალითი 3. ავაგოთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გამოსახვა, თუ მისი გვერდითი წიბო ორჯერ მეტია ფუძის გვერდზე.

აგება. ფრონტალურ სიბრტყეში ავაგოთ წესიერი $A'B'C'$ სამკუთხედის გამოსახვა ისე, რომ მისი $C'D'$ სიმაღლე კოორდინატთა სისტემის OY ღერძის პარალელური იყოს (ნახ. 18). ეს სამკუთხედი მივიღოთ ამოცანაში ხსენებული პირამიდის ფუძედ. შემდეგ ავაგოთ



ნახ. 18.



ნახ. 19.

ამ სამკუთხედის გამოსახვა ჰორიზონტალურ P სიბრტყეზე (ნახ. 19). ერთი-ერთი ვარიანტი ამ აგებისა იქნება ასეთი: OY ღერძზე მოვზომოთ $CD=C'D'$ მონაკვეთი და ამ მონაკვეთის D ბოლოზე გავავლოთ $AB \parallel OX$ მონაკვეთი ისე, რომ $AD=BD$ და $AB=\frac{1}{2}A'B'$.

ამნაირად ჩვენ მივიღებთ $A'B'C'$ სამკუთხედის ABC გამოსახვას ჰორიზონტალურ P სიბრტყეზე. ამ სამკუთხედის CD სიმაღლეზე გადავზომოთ $CO_1=C'O'$ და O_1 წერტილზე გავიყვანოთ $O_1Z_1 \parallel OZ$ მიმართულება, ეს მიმართულება წარმოადგენს პირამიდის სიმაღლის მიმართულებას. ამის შემდეგ C წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან $CS=2A'B'$ რადიუსით მოვხაზოთ რკალი, რომელიც O_1Z_1 მიმართულებას გადაკვეთს S წერტილში, ამ წერტილის შეერთება A, B და C წერტილებთან მოგვცემს პირამიდის გამოსახვას.

როგორც მოტანილი მაგალითები გვიჩვენებენ, გეომეტრიული სხეულების გამოსახვათა აგება კაბინეტურ პროექციაში დაკავშირებულია გარკვეულ გრაფიკულ ოპერაციებთან, რომლებიც ამ პროექციას შეესაბამებიან.

როგორც შემდეგში დავინახავთ, ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში სამკუთხედი შეიძლება გამოვსახოთ ნებისმიერი ფორმის სამკუთხედის საშუალებით, ხოლო პარალელოგრამი—ნებისმიერი პარალელოგრამის სახით, ე. ი. ამ გამოსახვების აგება არ მოითხოვს არავითარ სხვა გრაფიკულ (კონსტრუქციულ) ოპერაციათა ჩატარებას. მართალია, ყველა ბრტყელი ნაკვეთების გამოსახვათა აგება ასე მარტივად არ შეიძლება ჩავატაროთ, მაგრამ ისინი მაინც გაცილებით ადვილად ჩასატარებელია ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში, ვიდრე კაბინეტურ პროექციაში.

რაც შეეხება სამკუთხა პირამიდის გამოსახვის აგებას, იგი შეიძლება სავსებით მარტივად გადავწყვიტოთ პოლკე-შვარცის თეორემის თანახმად, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: „ყოველი არაგადაგვარებული[1] სრული[2] ოთხკუთხედი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც წინასწარ მოცემული ნებისმიერი ფორმის ტეტრაედრის პარალელური პროექცია“[3].

ყოველივე ნათქვამიდან ჩანს, რომ გამოსახვების აგება ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში გაცილებით მარტივია, ვიდრე მათი აგება კაბინეტურ პროექციაში, რომელიც პარალელური პროექციის ერთ-ერთი სახეობაა.

შევნიშნავთ, რომ კაბინეტურ პროექციაში აგებულ გამოსახვებს აქვთ ერთი დიდი უპირატესობა ნებისმიერ პარალელურ პროექცი-

[1] ოთხკუთხედს, რომლის წვეროები არ მდებარეობენ ერთ სწორზე არაგადაგვარებული ეწოდება.

[2] ოთხკუთხედს მის დიაგონალებთან ერთად სრული ოთხკუთხედი ეწოდება.

[3] იხ. ეს თეორემა, Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, გვ. 39, აგრეთვე ამ შრომის მეორე თავში, § 6.

აში შესრულებულ გამოსახვებთან შედარებით, სახელდობრ, ეს გამოსახვები აღჭურვილი არიან ზომილობის თვისებით, ე. ი. გამოსახვების საშუალებით შეიძლება ზუსტად აღვადგინოთ ორიგინალი. მაგრამ გამოსახვების ეს თვისება საშუალო სკოლაში თითქმის არავითარ როლს არ თამაშობს, რადგანაც ასეთი სახის ამოცანა საშუალო სკოლაში არ გვხვდება.

ჩვენი საბოლოო დასკვნა ასეთია. საშუალო სკოლაში გეომეტრიული ნაკვთების გამოსახვათა აგება უმჯობესია შევასრულოთ ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში, გარდა სფეროს გამოსახვისა, რომლის თვალსაჩინო გამოსახვა შეიძლება მივიღოთ მხოლოდ და მხოლოდ ორთოგონალურ პროექციაში.

აგებების ჩატარებაში დიდი მნიშვნელობა აქვს პარალელური დაგეგმილების თვისებების ცოდნას, რომელთაც ჩვენ მომდევნო პარაგრაფში შევეხებით.

§ 3. პარალელური დაგეგმილებისა და მისი თვისებების გაცნობა სტერეომეტრიის გაკვეთილებზე

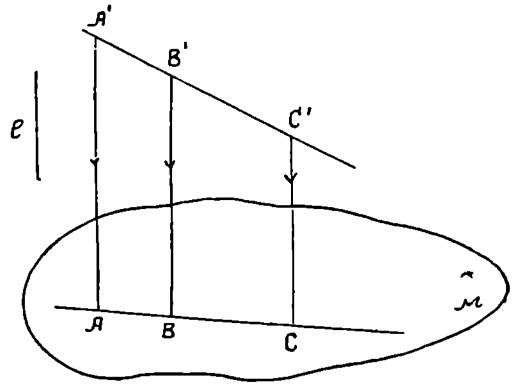
სტერეომეტრიის პირველ გაკვეთილებზე სივრცეში სწორი ხაზების პარალელობის გაცნობასთან დაკავშირებით შესაძლებელია მოსწავლეებს მივცეთ ცნება პარალელური დაგეგმილების შესახებ და გავაცნოთ ამ დაგეგმილების თვისებები. უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ საფეხურზე ნახაზებით სარგებლობა ნაადრევია და ამიტომ სათანადო განმარტებები: პარალელური დაგეგმილების განსაზღვრა, მაგეგმილებელი სხივები, ძირითადი სიბრტყე და სხვა საჭირო იქნება ვაჩვენოთ მოდელებზე. პარალელური დაგეგმილების თვისებები ტგრეთვე უნდა გავაცნოთ მოსწავლეებს ამისათვის სპეციალურად დამზადებულ მოდელებზე. იმ ნახაზების მიხედვით, რომლებიც ჩვენ ქვემოთ გვექნება მოცემული ადვილად შეიძლება მოდელების დამზადება. მოდელების დასამზადებლად დიდი დახმარება შეიძლება გაგვიწიოს სტერეომეტრიულმა ყუთმა, რომლის შემწეობით შეიძლება სახელდახელოდ შევქმნათ ის მარტივი კონსტრუქციის მოდელები, რომლებიც ჩვენ აქ დაგვჭირდება. იმ შემთხვევაში, თუ სტერეომეტრიული ყუთი არ გვაქვს, წინასწარ უნდა დავამზადოთ სხვადასხვა სიგრძის მავთულის ჩხირები, რომელთაც ექნებათ წამწვეტებული ბოლოები, ეს მავთულები შეიძლება გამოვიყენოთ სწორი ხაზების მოდელებად, მაგეგმილებელ სხივებად და სხვ. გეგმილთა სიბრტყედ კი შეიძლება გამოვიყენოთ მუყაოს ნებისმიერი

ფორმის ნაჭერი. სასურველია მხოლოდ, რომ ამ ნაჭერს არ ჰქონდეს რაიმე ოთხკუთხედის ფორმა.[1]

ამ შენიშვნების შემდეგ გადავიდეთ ხსენებულ თვისებათა განხილვაზე.

თ ვ ი ს ე ბ ა 1. სწორი ხაზის პროექცია არის სწორი ხაზი.

სწორი ხაზის პროექცია მოცემულ სიბრტყეზე ეწოდება ამ სწორის წერტილთა გეგმილების გეომეტრიულ ადგილს ამ სიბრტყეზე. ამრიგად, რომ მივიღოთ $A'B'$ სწორის პროექცია M სიბრტყეზე საჭიროა ამ სწორის ყველა წერტილიდან გავავლოთ მოცემული l მიმართულების პარალელური სხივები M სიბრტყის შეხვედრამდე; შეხვედრის წერტილთა გეომეტრიული ადგილი მოგვცემს $A'B'$ სწორის გეგმილს. რათა დავრწმუნდეთ იმაში, რომ წერტილების ეს გეომეტრიული ადგილი სწორს წარმოადგენს, ვიმსჯელოთ ასე:



ნახ. 20.

A' და B' წერტილებიდან l მიმართულების პარალელურად გაყვანილი სხივები განსაზღვრავენ მაგეგმილებელ სიბრტყეს[2], რომელზეც $A'B'$ სწორთან ერთად მოთავსდება მისი ყველა სხვა წერტილების მაგეგმილებელი სხივები. ამ მაგეგმილებელი სიბრტყის გადაკვეთა გეგმილთა M სიბრტყესთან მოგვცემს AB სწორს, რომელიც $A'B'$ სწორის გეგმილს წარმოადგენს (ნახ. 20).

თ ვ ი ს ე ბ ა 2. თუ C' წერტილი მდებარეობს $A'B'$ სწორზე, მაშინ მისი C გეგმილი AB სწორზე მდებარეობს.

---

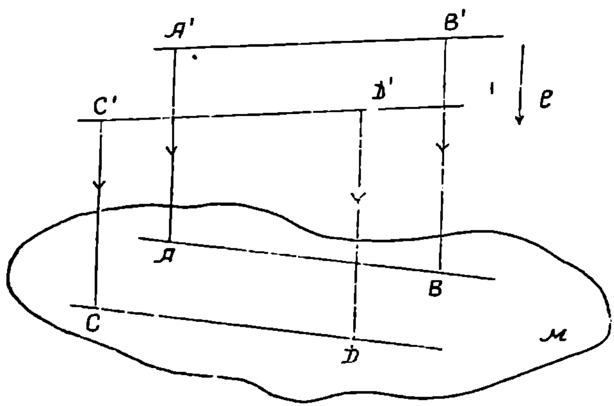
[1] იხ. სათანადო ნახაზები ქვემოთ.

[2] სიბრტყეს, რომელიც გადის მოცემულ მაგეგმილებელ სხივზე ან მისი პარალელურია, მაგეგმილებელი სიბრტყე ეწოდება.

ეს თვისება აშკარაა (ნახ. 20).

შევნიშნავთ, რომ ეს თვისება ცნობილია ინციდენტობის კანონის სახელწოდებით. მაშასადამე, ინციდენტობის კანონი ინვარიანტულია (უცვლელია) პარალელური დაგეგმილების მიმართ.

თ ვ ი ს ე ბ ა 3. პარალელური სწორების გეგმილები პარალელურია. ვთქვათ, რომ $A'B' \parallel C'D'$ (ნახ. 21). დავამტკიცოთ, რომ $AB \parallel CD$; დამტკიცება. $AA' \parallel CC'$, რადგანაც $AA' \parallel l$ და $CC' \parallel l$; ამიტომ $A'B'$ სწორის მაგეგმილებელი $AA'B'$ სიბრტყე პარალელური



ნახ. 21.

იქნება $C'D'$ სწორის მაგეგმილებელი $CC'D'$ სიბრტყისა (სიბრტყეების პარალელობის ნიშანი). მაგრამ, თუ ორი პარალელური სიბრტყე ($AA'B'$ და $CC'D'$) გადაკვეთილია მესამე M სიბრტყით, მაშინ გადაკვეთის (AB და CD) სწორები პარალელურია, რაც ამტკიცებს გამოთქმულ თვისებას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ამ თვისების განხილვა შეიძლება მას შემდეგ, რაც მოსწავლეთათვის ცნობილი გახდება სიბრტყეების პარალელობის ნიშანი.

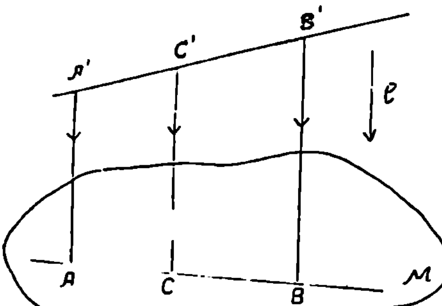
თ ვ ი ს ე ბ ა 4. მოცემულ სწორზე მდებარე მონაკვეთების შეფარდება უდრის ამ სწორის გეგმილის შესაბამისი მონაკვეთების შეფარდებას.

ეს თვისება გვიჩვენებს, რომ პარალელური დაგეგმილებისას

ერთსა და იმავე სწორზე მდებარე მონაკვეთების შეფარდება არ იცვლება. ეს გარემოება კი ასე უნდა გვესმოდეს: თუ A', B' და C' არიან სივრცეში მოცემული სწორის წერტილები, ხოლო A, B და C შესაბამად მათი გეგმილებია სიბრტყეზე, მაშინ (ნახ. 22)

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$$

დამტკიცება. თუ $AB \parallel A'B'$, მაშინ გამოთქმული თვისება ცხადია; თუ AB არ არის $A'B'$-ის პარალელური, მაშინ ისინი რომელიმე წერტილში გადაიკვეთებიან, რადგანაც ორივე ეს სწორი ერთსა და იმავე მაგეგმილებელ $AA'C'$ სიბრტყეზე არიან მოთავსებული; ამრიგად, ამ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ კუთხეს, რომლის



ნახ. 22.

გვერდები გადაკვეთილია AA', BB' და CC' პარალელური სწორებით, რომლებითაც ისინი პროპორციულ ნაწილებად იყოფიან, რაც ამტკიცებს გამოთქმული თვისების სამართლიანობას.

თუ დამტკიცებულ პროპორციაში კიდურ წევრებს გადავსვამთ, მივიღებთ: $BC : B'C' = AB : A'B'$; ეს პროპორცია გვიჩვენებს, რომ მოცემული სწორის მონაკვეთების შეფარდება შესაბამის პროექციებთან ამ სწორის მონაკვეთებისათვის მუდმივი სიდიდეა. ამ მუდმივ სიდიდეს, დამახინჯების კოეფიციენტი ეწოდება.

მაშასადამე, ერთსა და იმავე სწორზე მდებარე მონაკვეთებს ერთნაირი დამახინჯების კოეფიციენტი აქვთ; თუ კერძოდ მოცემული მონაკვეთი გეგმილთა სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მისი

დამახინჯების კოეფიციენტი უდრის 1-ს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს მონაკვეთი გეგმილდება სიბრტყეზე ნატურალური სიდიდით.

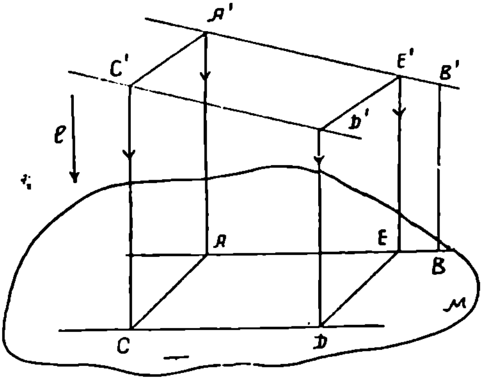
დამტკიცებული თვისება შეიძლება განზოგადოვდეს პარალელურ სწორებზე მდებარე მონაკვეთებისათვის, ე. ი. ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას:

თ ვ ი ს ე ბ ა 5. პარალელური მონაკვეთებისათვის დამახინჯების კოეფიციენტი ერთნაირია.

დამტკიცება. განვიხილოთ ორი $A'B'$ და $C'D'$ მონაკვეთი. ვიპოვოთ მათი პროექციები M სიბრტყეზე მოცემული l მიმართულების პარალელურად (ნახ. 23). უნდა ვაჩვენოთ, რომ:

$$CD : C'D' = AB : A'B';$$

ამისათვის A' წერტილიდან $A'B'$ მონაკვეთზე მოვზომოთ $A'E' = C'D'$ მონაკვეთი და ავაგოთ მისი AE გეგმილი. წინა თვისების



ნახ. 23.

ძალით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ: $AE : A'E' = AB : A'B'$; დავამტკიცოთ, რომ $AE = CD$. განვიხილოთ $ACDE$ ოთხკუთხედი. ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, რადგან $AE \parallel CD$ (როგორც პარალელური მონაკვეთების გეგმილები), ხოლო $AC \parallel DE$, რადგანაც ეს მონაკვეთები შესაბამად $A'C'$ და $D'E'$ მონაკვეთების გეგმილებია, მაგრამ ეს მონაკვეთები პარალელურია როგორც $A'C'D'E'$ პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები.

ამრიგად, $ACDE$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია და $AE=CD$-

თუ წინა პროპორციაში AE-ს და $A'E'$-ს შესაბამად CD და $C'D'$-ით შევცვლით, მივიღებთ დასამტკიცებელ პროპორციას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: პირველი და მესამე თვისების გაცნობისას მოსწავლეთა ყურადღება უნდა მივაქციოთ შემდეგს: 1) სწორი ხაზის პროექცია იქნება წერტილი, თუ ეს სწორი ხაზი მაგეგმილებელი სხივების პარალელურია. 2) პარალელური სწორი ხაზების გეგმილები ერთმანეთს დაემთხვევიან და, მაშასადამე, პარალელური არ იქნებიან, თუ ისინი მოთავსებული არიან ერთსა და იმავე მაგეგმილებელ სიბრტყეზე.

§ 4. გამოსახვათა სისრულისა და მეტრიკული განსაზღვრულობის შესახებ

I. გამოსახვათა სისრულის შესახებ

1. გამოსახვაზე სრულად მოცემული ელემენტის ცნება.

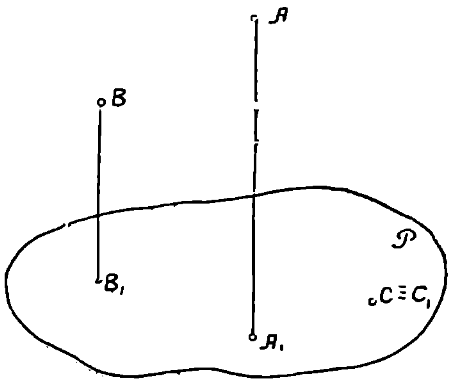
გეომეტრიული ნაკვთების გამოსახვები წარმოადგენენ წერტილების, სწორებისა და სიბრტყეების გამოსახვათა ერთობლიობას. რომ ვიმსჯელოთ ამ გამოსახვების სისრულეზე საჭიროა წინასწარ გავერკვეთ იმაში, თუ რას უნდა ნიშნავდეს გამოსახვაზე სრულად მოცემული წერტილი, სწორი და სიბრტყე?

განვიხილოთ სივრცეში ნებისმიერი P' სიბრტყე და A' წერტილი და მათი გამოსახვები შესაბამად P და A-თი აღვნიშნოთ. გავიყვანოთ A წერტილზე ნებისმიერი მიმართულების მაგეგმილებელი სწორი და A წერტილის გეგმილი P სიბრტყეზე A_1-ით აღვნიშნოთ (ნახ. 24). ამით მოცემულ A წერტილს ჩვენ დავუკავშირებთ P სიბრტყეს. A_1 წერტილს A წერტილის ფუძეს უწოდებენ. წერტილების ასეთნაირი მოცემის ხერხი ეკუთვნის პროფ. ნ. ჩეტვერუხინს[1] და ხასიათდება იმით, რომ ჩვენ შესაძლებლობა გვეძლევა წარმოდგენა ვიქონიოთ A წერტილის შედარებით მდებარეობაზე P სიბრტყის მიმართ. მაგალითად, მე-24 ნახაზიდან ჩანს, რომ A წერტილი უფრო ახლოსაა ჩვენთან, ვიდრე B წერტილი (მაგეგმილებელი სხივები პარალელურია). გარდა ამისა, ჩანს აგრეთვე, რომ A წერტილი უფრო მეტი მანძილითაა დაშორებული P სიბრტყეს, ვიდრე B წერტილი. თუ წერტილი P სიბრტყეზე მდებარეობს, რო-

[1] იხ. Н. Ф. Четверухин, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, Учпедгиз 1952, стр. 14-16.

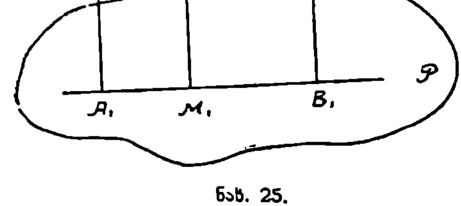
შელსაც, როგორც ვიცით, ძირითად სიბრტყეს უწოდებენ, მაშინ ამ წერტილის ფუძე და თვით ეს წერტილი ერთმანეთს ემთხვევიან, რაც აღინიშნება ასე: $C \equiv C_1$; სივრცის ყოველი წერტილის გამოსახვას ეწოდება სრულად მოცემული ძირითადი სიბრტყის მიმართ, თუ გამოსახვაზე ამ წერტილთან ერთად ნაჩვენებია მისი ფუძეც.

სრულად მოცემული წერტილების საშუალებით შეიძლება განმარტებული იქნას სრულად მოცემულ სწორები და სიბრტყეები.



ნახ. 24.

სწორი ხაზის გამოსახვას ეწოდება სრული, თუ ის განსაზღვრულია ორი სრულად მოცემული წერტილით (ნახ. 25). აქ ჩვენ მოცემული გვაქვს ორი წერტილი, რომლებიც განსაზღვრავენ სწორ ხაზს (წერტილები A და B, მათი ფუძეებია A_1 და B_1). A_1B_1 სწორი AB სწორის პროექციას წარმოადგენს. გამოსახვაზე შეიძლება ავაგოთ AB სწორის ნებისმიერი წერტილის ფუძე.



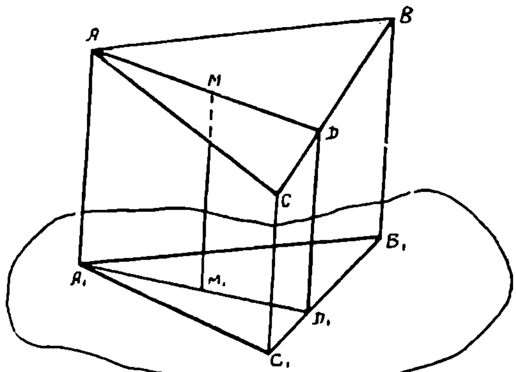
ნახ. 25.

მაგალითად, ნახ. 25 ნაჩვენებია AB სწორის M წერტილის M_1 ფუძის აგება. ამისათვის საკმარისია გავავლოთ MM_1 მაგეგმილებელი სწორი, პარალელურად AA_1-სა, მაშინ $M_1=A_1B_1\times MM_1$[1] იქნება საძებნი წერტილი. ამგვარადვე შეიძლება ავაგოთ AB სწორის ნებისმიერი წერტილის ფუძე, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს სწორი სრულად მოცემულია.

[1] $M_1 = A_1B_1 \times MM_1$ ნიშნავს შემდეგს: M_1 არის A_1B_1 და MM_1 სწორების გადაკვეთის წერტილი.

სიბრტყის გამოსახვას ეწოდება სრული, თუ მისი განმსაზღვრელი ელემენტები სრულად მოცემულია გამოსახვაზე.

მაგალითად, თუ სიბრტყე განსაზღვრულია სამი A, B და C წერტილებით, რომლებიც ერთ სწორზე არ მდებარეობენ (ნახ. 26), მაშინ სიბრტყეს გამოსახავენ სამკუთხედის სახით, რომელიც აგებულია ამ წერტილებზე. (ნახ. 26-ზე A, B და C წერტილები მოცემულია სრულად (ნაჩვენებია მათი A_1, B_1 და C_1 ფუძეები), ამიტომ ABC სიბრტყეც იქნება სრულად მოცემული. გამოსახვაზე შეიძლება ავაგოთ ამ სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილის M_1 ფუძე. ამისათვის მოვიქცეთ ასე: გავავლოთ AM სწორი, მაშინ ჩვენ



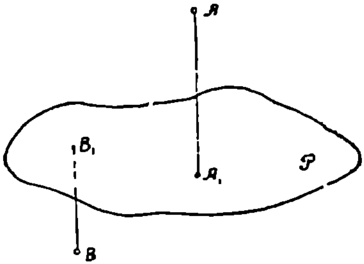
ნახ. 26.

ავაგებთ $D=BC\times AM$ წერტილს. ამის შემდეგ ავაგოთ D წერტილის D_1 ფუძე და გავიყვანოთ $MM_1 \parallel AA_1$, რომელიც მოგვცემს $M_1=A_1D_1\times MM_1$ წერტილს. M_1 წერტილი M წერტილის ფუძეს (პროექციას) წარმოადგენს.

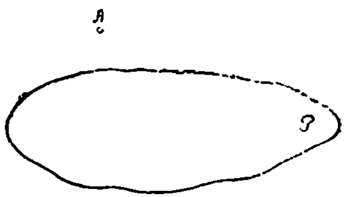
2. *ცნება სრული გამოსახვის შესახებ.* დავუშვათ, რომ გვაქვს გამოსახვა, რომლის ყველა ელემენტი (წვეროები, წიბოები, წახნაგები და სხვა) სრულად მოცემულია ძირითადი სიბრტყის მიმართ. ასეთ გამოსახვებს ეწოდება სრული, ე. ი. ისეთ გამოსახვას, რომლის ყველა ელემენტი სრულად მოცემულია, ეწოდება სრული.

სრული გამოსახვები განსაზღვრავენ ორიგინალის მხოლოდ პო-

ზიციურ თვისებებს. პოზიციურ თვისებებს მიეკუთვნება გეომეტრიული ფიგურის ელემენტების (წახნაგების, წიბოების და სხვა) ურთიერთგანლეგება. მაგალითად, ნახ. 27 პოზიციურად სრული გამოსახვაა და იგი შესაძლებლობას გვაძლევს ვილაპარაკოთ მისი ორიგინალის პოზიციურ თვისებებზე. სახელდობრ, A და B წერტილების ურთიერთგანლაგებაზე. მართლაც, ნახაზიდან ჩანს, რომ A და B წერტილები მდებარეობენ P სიბრტყის სხვადასხვა მხარეს (B წერტილი P სიბრტყის ქვემოთ, ხოლო A წერტილი მის ზემოთ). ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ B წერტილის მაგეგმილებელი სხივის ნაწილი პუნქტირითაა გამოსახული, ხოლო A წერტილისა კი მთლიანით. გარდა ამისა A წერტილი უფრო ახლოსაა ჩვენთან, ვიდრე B წერტილი. ნახ. 28-კი არაფერს გვეუბნება იმის შესახებ, თუ რა ურთიერთმდებარეობა აქვს A და B წერტილებს.



ნახ. 27.



ნახ. 28.

II. გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობის შესახებ.

1. **მეტრიკულად განსაზღვრული გამოსახვის ცნება.** სანამ უშუალოდ საკითხის განხილვას შევუდგებოდეთ, დავაზუსტოთ გამოსახვის ცნების საკითხი, სახელდობრ, გამოვარკვიოთ, თუ რა განსხვავება არსებობს რომელიმე გეომეტრიული ფიგურის პროექციასა და მის გამოსახვას შორის. გამოსახვის ცნების დაზუსტება მეტად საჭიროა, რადგან, ჯერ ერთი, რომ ამ თავში ჩვენ ლაპარაკი გვექნება გეომეტრიული ფიგურების გამოსახვათა აგების შესახებ და გარდა ამისა, იმიტომ, რომ ხშირად ადგილი აქვს გეომეტრიული ფიგურის გამოსახვისა და იმავე ფიგურის პროექციის ცნებების ერთმანეთში აღრევას.

გამოსახვის ცნება. **გეომეტრიული ფიგურის გამოსახვა ეწოდება ისეთი ორიგინალის პროექციას, რომელიც მოცემული გეომეტრიული ფიგურის მსგავსია.**

ამ განსაზღვრის თანახმად პროექცია არის გამოსახვა როგორც დასაგეგმილებელი ორიგინალისა, ისე ყველა მისი მსგავსი ფიგურებისა. მასთან გამოსახვა ყოველთვის არ არის კონკრეტული ორიგინალის პროექცია, რომლის მიხედვითაც იგი აიგება. მაგალითად, რომელიმე შენობის გამოსახვა ქაღალდის ფურცელზე არის არა თვით შენობის პროექცია, არამედ იგი არის პროექცია ამ შენობის მსგავსი შენობისა.

ჩვენ ზემოთ გავეცანით გამოსახვათა სისრულის ცნებას და აღვნიშნეთ, რომ სრული გამოსახვები განსაზღვრავენ თავიანთი ორიგინალების მხოლოდ პოზიციურ თვისებებს, ე. ი. ორიგინალის ელემენტების ურთიერთ განლაგებას. მაგრამ სრული გამოსახვა კიდევ არ განსაზღვრავს ორიგინალის მეტრიკულ თვისებებს, ე. ი. ეს გამოსახვები არაფერს გვეუბნებიან ორიგინალის ელემენტების სიდიდეთა შესახებ. მაგალითად, პარალელოგრამი შეიძლება იყოს როგორც ნებისმიერი პარალელოგრამის, ისე რომბის, მართკუთხედის და კვადრატის გამოსახვა.[1] რომ გადმოვცეთ გამოსახვის მეტრიკული თვისებები, რომლებიც დადებულია მის ორიგინალზე, საჭიროა გამოსახვაზეც დავადოთ იგივე პირობები. ეს იმას ნიშნავს, რომ გამოსახვას თან დავურთოთ ახსნა-განმარტებანი, მაგალითად, ასეთი: გამოსახვაზე მოცემული პარალელოგრამი წარმოადგენს კვადრატის ან რომბის გამოსახვას და სხვა. ასეთ გამოსახვებს პირობით გამოსახვებს უწოდებენ, ე. ი. გამოსახვას, რომელსაც თან ერთვის ახსნა-განმარტებანი მის ორიგინალზე დადებული მეტრიკული პირობების შესახებ, პირობითი გამოსახვა ეწოდება. ამრიგად, პირობითი გამოსახვები მათ ორიგინალებზე დადებული მეტრიკული პირობების გადმოცემის ერთ-ერთ საშუალებას წარმოადგენენ. არსებობს კიდევ გამოსახვის მეტრიკული თვისებების გადმოცემის ე. წ. კოორდინატული მეთოდი[2], რომელსაც ფართო გამოყენება აქვს ტექნიკურ გამოსახვებში.

გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობის ვრცელი თეორია, მოცემულია პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის წიგნში[3]. განვიხილოთ ზოგიერთი ძირითადი დებულება.

---

[1] პარალელოგრამის, რომბის, მართკუთხედისა და კვადრატის გამოსახვათა აგების შესახებ, იხ. ქვემოთ, § 5 (თავი II).

[2] იხ. მაგალითად, Владимирский и Калецкий, Черчение, Учпедгиз, 1952, стр. 140-146.

[3] Проф. Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946, თავები IV და VI.

განსაზღვრა: *ისეთ გამოსახვას, რომლის ორიგინალი განსაზღვრულია მსგავსებამდე ეწოდება მეტრიკულად განსაზღვრული.*

ეს განსაზღვრა იმაზე მიუთითებს, რომ თუ გამოსახვაზე დადებული პირობები საშუალებას გვაძლევს აღვადგინოთ ორიგინალი, რომელიც გამოსახვაზე მოცემული ორიგინალის მსგავსია, მაშინ ის მეტრიკულად განსაზღვრული იქნება. მაგალითად, თუ გამოსახვაზე მოცემული ნებისმიერი ABC სამკუთხედი წარმოადგენს წესიერი სამკუთხედის გამოსახვას, მაშინ ეს გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრულია. მართლაც, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ავაგოთ ნებისმიერი წესიერი სამკუთხედი, რომელიც გამოსახვაზე მოცემული სამკუთხედის ორიგინალის მსგავსი იქნება, რადგანაც ყველა წესიერი სამკუთხედები ერთმანეთის მსგავსია.

აგებანი, რომლებიც სრულდება მეტრიკულად განსაზღვრულ გამოსახვებზე არ შეიძლება შეიცავდეს არავითარ თავისუფლებას, რადგან მათ შეესაბამებიან სრულიად განსაზღვრული აგებანი ორიგინალში. სწორედ ამ მიზეზის გამო მეტრიკულად განსაზღვრულ გამოსახვებს სხვანაირად კიდევ განმარტავენ როგორც ისეთ გამოსახვებს, რომლებზეც აგებებში არ შეიძლება დაშვებული იქნას რაიმე თავისუფლება.

ნათელვყოთ მეტრიკულად განსაზღვრული გამოსახვების ეს თვისება მაგალითზე. 29-ე ნახაზზე მოცემულია წესიერი სამკუთხედის გამოსახვა ABC, აგრეთვე $R'S'$ სწორისა და M' წერტილის გამოსახვანი. მოითხოვება M წერტილზე გამავალი RS-ის შეუღლებული მიმართულების აგება.[1]

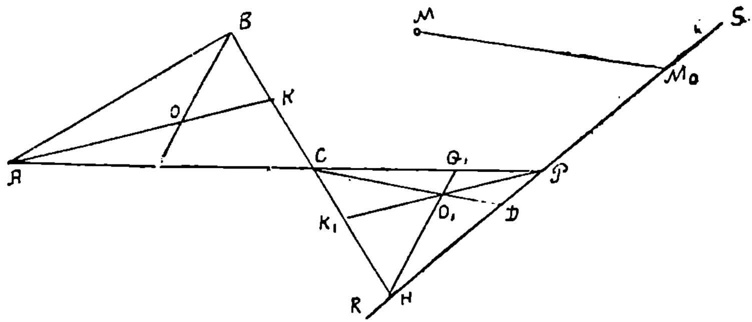
აგება. საძებნი მიმართულების ასაგებად ვიპოვოთ წერტილები $H=RS\times BC$ და $P=RS\times AC$. მაშინ გამოსახვაზე მივიღებთ CPH სამკუთხედს. გავავლოთ ამ სამკუთხედში $HQ_1 \parallel BQ$ და $PK_1 \parallel AK$, სადაც BQ და AK წარმოადგენენ ABC სამკუთხედის სიმაღლეების გამოსახვებს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ HQ_1 და PK_1 წარმოადგენენ CPH სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვებს, ხოლო O_1 წერტილი მისი ორთოცენტრის გამოსახვა იქნება. ამიტომ CD იქნება იმავე სამკუთხედის მესამე სიმაღლის გამოსახვა, რაც იმას ნიშნავს რომ, CD და RS ხაზების მიმართულებანი შეუღლებულ წყვილს წარმო-

[1] ორ მიმართულებას ეწოდება შეუღლებული, თუ ისინი ორიგინალში ურთიერთპერპენდიკულარულნი არიან.

ადგენს; ახლა გავავლოთ $MM_0 \parallel CD$; MM_0 საძებნი მიმართულება იქნება.

ამრიგად, MM_0 მიმართულების ნებისმიერად აღება მიუღებელია, არამედ იგი შეიძლება აგებულ იქნას გამოსახვაზე.

სრულ გამოსახვებზე მათ მეტრიკულ განსაზღვრულობამდე, მეტრიკული ოპერაციები შეიძლება შესრულებულ იქნას ნებისმიერად, ხოლო მას შემდეგ, რაც სრული გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღ-



ნახ. 29.

ვრული გახდება, ასეთი შესაძლებლობა გამორიცხულია. ამ მიზეზების გამო სასარგებლოა მოკლედ შევეხოთ გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობის ზოგიერთ საკითხს.

2. ბრტყელი ფიგურების გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობის შესახებ. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, გამოსახვას ეწოდება მეტრიკულად განსაზღვრული, თუ მასზე დადებული პირობები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ (აღვადგინოთ) მისი ორიგინალის ნამდვილი ფორმა. ბრტყელი ფიგურის გამოსახვა იქნება მეტრიკულად განსაზღვრული, თუ მასზე დადებული პირობები განსაზღვრავენ რომელიმე სამკუთხედ—ორიგინალის ნამდვილ ფორმას. ეს პირობა გამოსახვის მეტრიკული განსაზღვრულობის აუცილებელ პირობასაც წარმოადგენს. მართლაც, თუ ორიგინალი მეტრიკულად განსაზღვრულია, მაშინ ის აუცილებლად შეიცავს ისეთ $M'N'P'$ სამკუთხედს, რომელსაც გამოსახვაზე MNP სამკუთხედი შეესაბამება.

ამრიგად, ბრტყელი ფიგურის გამოსახვის მეტრიკული განსაზღვრულობის კრიტერიუმი არის ის, რომ ამ გამოსახვაზე დადებული პირობები შესაძლებლობას იძლეოდეს განვსაზღვროთ რომელიმე სამკუთხედ-გამოსახვის ორიგინალის ნამდვილი ფორმა.

პროფ. ნ. ჩეტვერუხინი იძლევა ბრტყელი ფიგურების გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობის ათ პირობას.[1] საჭიროდ მივაჩნია მოვიტანოთ ზოგიერთი მათგანი.[2]

ა) თუ პირობის თანახმად გამოსახვაზე მოცემული $ABCD$ პარალელოგრამის ორიგინალს წარმოადგენს კვადრატი, მაშინ გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრულია;

ბ) პირობა მიმართებათა ორი წყვილის შეუღლებულობის შესახებ (რაც ნიშნავს მათ პერპენდიკულარობას ორიგინალში) გამოსახვას ხდის მეტრიკულად განსაზღვრულს.

გ) თუ პირობები განსაზღვრავენ გამოსახვაზე მოცემული ორი კუთხის ნამდვილ სიდიდეს, მაშინ გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრულია.

დ) თუ გამოსახვაზე მოცემულია ორი რომელიმე მონაკვეთის ნამდვილ სიგრძეთა შეფარდება და, გარდა ამისა, ცნობილია რომელიმე კუთხის ნამდვილი სიდიდე, მაშინ გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრულია.

ე) $A'B'C'$ სამკუთხედის ABC გამოხაზვაზე O წერტილის ამორჩევა, რომელიც წარმოადგენს O' ორთოცენტრის გამოსახვას (მისი არსებობის არეში) გამოსახვას ხდის მეტრიკულად განსაზღვრულს.

სამკუთხედის ორთოცენტრის არსებობის არე დაშტრიხულია ნახ. 30-ზე, მასთან ამ არეს შემომსაზღვრელი სწორები არ შედიან არეს შემადგენლობაში.

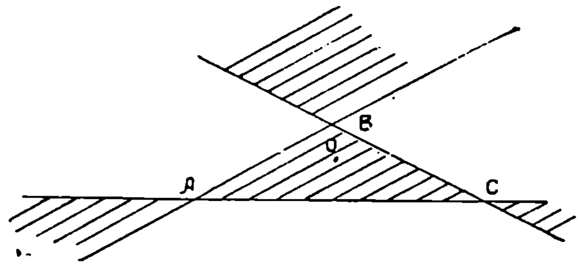
ვ) $A'B'C'$ სამკუთხედის ABC გამოსახვაზე P წერტილის ამორჩევა (მისი არსებობის არეში), რომელიც ორიგინალში ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის P' ცენტრს წარმოადგენს, გამოსახვას ხდის მეტრიკულად განსაზღვრულს.

---

[1] Проф. Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946, стр. 93—105.

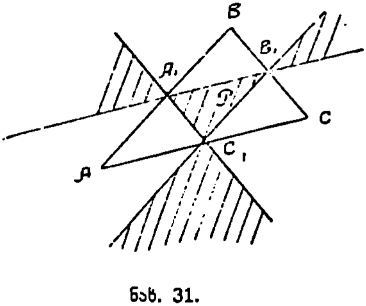
[2] ამ პირობების ავტორის რედაქციაში, ზოგ შემთხვევაში, ჩვენს მიერ შეტანილია მცირეოდენი ცვლილებები, რაც გამოწვეულია იმით, რომ ჩვენ არ გვსურდა გვეხმარა ე. წ. პარამეტრები, რომელთაც ფართოდ იყენებს ავტორი ხსენებული პირობების ფორმულირებათა დროს.

სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის არსებობის არე წარმოადგენს ამ სამკუთხედის შუახაზებით შექმნილი $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის ორთოცენტრის არსებობის არეს. P წერტილის არსებობის არეს ABC გამოსახვისათვის ექნება ნახ. 31 წარმოდგენილი დაშტრიხული არეს სახე. შევნიშნავთ, რომ A_1, B_1 და C_1 წერტილები ჩათვლილია არსებობის არეში, იმ დროს როცა A_1B_1, B_1C_1 და A_1C_1 სწორების სხვა წერტილები გამორიცხულია არედან.



ნახ. 30.

ზ) $A'B'C'$ სამკუთხედის ABC გამოსახვაზე Q წერტილის ამორჩევა (მისი არსებობის არეში), რომელიც ორიგინალში სამკუთხედში ჩახაზული წრის Q' ცენტრს წარმოადგენს მთელ გამოსახვას ხდის მეტრიკულად განსაზღვრულს. სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრის არსებობის არე წარმოადგენს ამ სამკუთხედის შუახაზებით შექმნილი $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის შიგა არეს, ეს არე დაშტრიხულია გამოსახვაზე (ნახ. 32).



ნახ. 31.

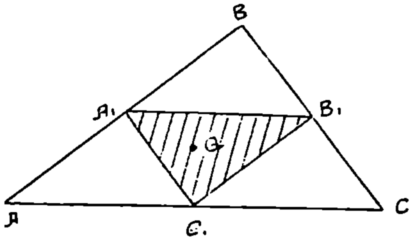
თ) პირობა, რომ გამოსახვაზე ნებისმიერად აღებული ელიფსი ორიგინალში წარმოადგენს წრეხაზს, გამოსახვას ხდის მეტრიკულად განსაზღვრულს.

ჩვენ მიერ მოტანილ დებულებათა დამტკიცებას მკითხველი ნახავს პროფ. ნ ჩეტვერუხინის ზემოთ ციტირებულ წიგნში.

3. სივრცითი ფიგურების გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობის შესახებ. მეტრიკულად განსა-

ზღვრული გამოსახვები ჩვენ ვუწოდეთ ისეთ გამოსახვებს, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ აღვადგინოთ ორიგინალი მსგავსებამდე, ე. ი. აღვადგინოთ მისი ნამდვილი ფორმა. მასთან, ბრტყელი ფიგურების გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობისათვის საკმარისია გამოსახვაზე დადებული პირობები განსაზღვრავდნენ რომელიმე სამკუთხედ-გამოსახვის ორიგინალის ნამდვილ ფორმას. სივრცითი ფიგურების გამოსახვებისათვის კი ადგილი აქვს შემდეგს:

პარალელურ პროექციაში სივრცითი ფიგურის გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრული იქნება, თუ ამ გამოსახვაზე დადებული პირობები შესაძლებლობას იძლევიან აღვადგინოთ გამოსახვაზე მოცემული რომელიმე ტეტრაედრის ორიგინალი მსგავსებამდე, ე. ი. აღვადგინოთ მისი ნამდვილი ფორმა.



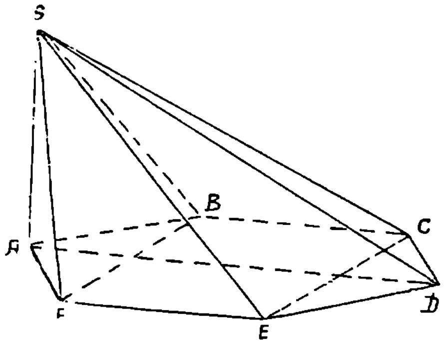
ნახ. 32.

გავარკვიოთ ახლა მაგალითზე ის, თუ როგორ შეიძლება გამოსახვის ნამდვილი ფორმის აღდგენა, თუ მასზე დადებული პირობები განსაზღვრავენ გამოსახვის რომელიმე ტეტრაედრის ორიგინალის ნამდვილ ფორმას.

მაგალითი. პირამიდას ფუძედ აქვს წესიერი ექვსკუთხედი, ამ პირამიდის ერთ-ერთი გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია და უდრის წესიერი ექვსკუთხედის გვერდს. ვაჩვენოთ, რომ ეს პირამიდა მეტრიკულად განსაზღვრულია.

პირამიდის გამოსახვას ექნება ნახ. 33-ზე წარმოდგენილი სახე. ამ გამოსახვაზე დადებული პირობები განსაზღვრავენ $SABF$ ტეტრაედრის ნამდვილ ფორმას. მართლაც, ABF სამკუთხედის ნამდვილი ფორმა განსაზღრულია, რადგანაც $A'F' : A'B' = 1$ და $\angle F'A'B' = 120°$ (როგორც წესიერი ექვსკუთხედის კუთხე); პირამიდის წიბო $A'S' = A'F'$ პერპენდიკულარულია $A'B'F'$ სიბრტყისა, ე. ი. $A'S' \perp A'B'$

და $A'S'\perp F'A'$. ამრიგად, მოცემული პირობები ნამდვილად განსაზღვრავენ $S'A'B'F'$ ტეტრაედრის ფორმას. აშკარაა, რომ ამით მთელი პირამიდაც მეტრიკულად განსაზღვრულია, რადგანაც $A'B'F'$ სამკუთხედის შევსება წესიერ $A'B'C'D'E'F'$ ექვსკუთხედამდე შესაძლებელია.



ნახ. 33.

§ 5. ბრტყელი ფიგურების გამოსახვათა აგება

ბრტყელი ფიგურების გამოსახვათა აგება ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში სავსებით მარტივად შეიძლება გადავწყვიტოთ პარალელური დაგეგმილების თვისებებისა (იხ. ეს თვისებები § 3-ში) და იმ ძირითადი თეორემის შემწეობით, რომელზედაც ქვემოთ გვექნება ლაპარაკი*. სანამ უშუალოდ საკითხის განხილვაზე გადავიდოდეთ შევნიშნოთ შემდეგი: სტერეომეტრიის ამჟამად მომქმედი სასკოლო პროგრამა მოითხოვს, რომ პარალელობა სივრცეში გავლილი იქნას სიბრტყისა და სწორის პერპენდიკულარობის გავლამდე. მასალის ასეთნაირი დალაგების საწინააღმდეგოდ საკმაოდ ბევრი აზრი იქნა გამოთქმული; ამ აზრის მომხრენი მოითხოვენ, რომ პერპენდიკულარობა სივრცეში გავლილი იქნას პარალელობის გავლამდე. მათი ძირითადი მოტივებია: ა) სივრცეში პერპენდიკულარობის განყოფილების გავლამდე ჩვენ არ შეგვიძლია ამოვხსნათ ამოცანები გამოანგარიშებაზე და ბ) ზოგი თეორემის დამტკიცება შედარებით რთულად გამოიყურება მაშინ, როცა მათი დამტკიცება უფრო

* ეს თეორემა დაუმტკიცებლად ჩამოყალიბებული იყო ამავე თავის § 1-ში.

მარტივდება, თუ გამოვიყენებთ სწორისა და სიბრტყის პერპენდიკულარობის ცნებას.

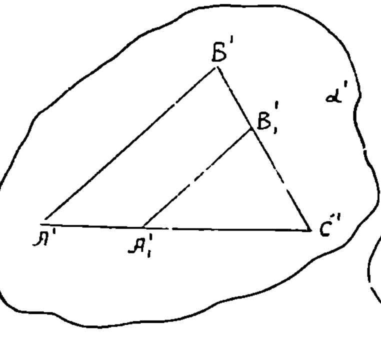
მიუხედავად ამ სწორი მოტივებისა ჩვენ მაინც არ ვიზიარებთ ამ შეხედულებას. ამის მთავარი მიზეზები შემდეგია: 1) პარალელური დაგეგმილებისა და მისი თვისებების გაცნობა შეუძლებელია ისე, თუ მოსწავლეები არ იცნობენ პარალელობას სივრცეში. დაგეგმილების თვისებების გარეშე კი ჩვენ მოსწავლეებს ვერ მივცემთ სტერეომეტრიული ფიგურების (კერძოდ, ბრტყელი ფიგურების) გამოსახვათა აგების ჩვევებს, რაც შეგვიქმნის დიდ სიძნელეს როგორც გამოანგარიშებაზე ამოცანების ამოხსნის დროს, ისე მთელი კურსის სწავლებაში; 2) სიბრტყის თვისებებისა და სივრცეში პარალელობის შესწავლას დაახლოებით ეთმობა 12 საათი. დროის ამ მონაკვეთში გამოანგარიშებაზე ამოცანების ამოხსნას არ ვაწარმოებთ, რადგანაც სტაბილურ კრებულში მოცემული ამოცანების ამოხსნა მოითხოვს სწორისა და სიბრტყის პერპენდიკულარობის ცნებას, რაც ჯერ კიდევ არ მიგვიცია მოსწავლეებისათვის. ამით ჩვენს განკარგულებაში იქნება გარკვეული დრო; ეს დრო სავსებით საკმარისია იმისათვის, რომ მოსწავლეებს გავაცნოთ პარალელური დაგეგმილება, მისი თვისებები და ის ძირითადი თეორემა, რომელზეც აქ იქნება ლაპარაკი. ეს თეორემა და პარალელური დაგეგმილების თვისებები საშუალებას მოგვცემენ მოსწავლეები ვავარჯიშოთ ბრტყელი ფიგურების გამოსახვათა აგებაზე. ყოველივე ამით ჩვენ შევქმნით კარგ წინაპირობებს როგორც გამოანგარიშებაზე ამოცანების ამოხსნისათვის, ისე სტერეომეტრიის მთელი კურსის სწავლების სათანადო სიმაღლეზე დაყენებისათვის. 3) დროის ამ მონაკვეთში მოსწავლეებს მივცემთ წარმოდგენას საპროექციო ნახაზზე და განვიხილავთ პირველი ამოცანების ამოხსნას მასზე (იხ. ამის შესახებ თავი III).

ამ შენიშვნების შემდეგ გადავიდეთ თვით საკითხის განხილვაზე.

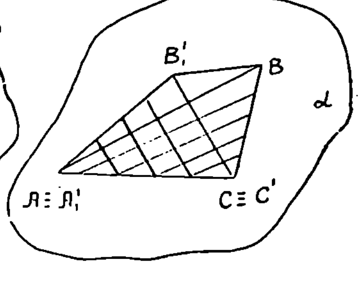
პარალელური დაგეგმილებისა და მისი თვისებების გაცნობის შემდეგ მოსწავლეებს მივცემთ გამოსახვის განსაზღვრას: **გეომეტრიული ფიგურის გამოსახვა ეწოდება ორიგინალის პროექციას, რომელიც მოცემული გეომეტრიული ფიგურის მსგავსია.** ამ განსაზღვრის მიცემის დროს მოსწავლეებს კარგად უნდა გავურკვიოთ ყოველივე ის, რაც პროექციის და გამოსახვის შესახებ იყო ნათქვამი წინა პარაგრაფში. სახელდობრ, მოსწავლეებს კარგად უნდა ჰქონდეთ წარმოდგენილი, რომ პროექ-

ცია არის გამოსახვა არა მარტო დასაგეგმილებელი ორიგინალისა, არამედ იგი ამასთანავე წარმოადგენს გამოსახვას მოცემული ორიგინალის ყველა მსგავსი ორიგინალისას. შემდეგ გავაცნობთ ძირითად თეორემას: გამოსახვათა α სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ABC სამკუთხედი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ნებისმიერი ორიგინალური $A'B'C'$ სამკუთხედის გამოსახვა.

სანამ თეორემის დამტკიცებას შევუდგებოდეთ, საჭიროა მოსწავლეებს კიდევ ხაზგასმით მივუთითოთ, რომ თეორემა დამტკი-



ნახ. 34 ა.



ნახ. 34 ბ.

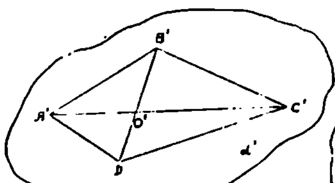
ცებული იქნება, თუ ჩვენ ავაგებთ ისეთ სამკუთხედს, რომელიც $A'B'C'$ სამკუთხედის მსგავსი იქნება და რომლის პროექცია α სიბრტყეზე იქნება ჩვენს მიერ წინასწარ ნებისმიერად აღებული ABC სამკუთხედი. თუ ყოველივე ეს მოსწავლეს ნათლად ექნება წარმოდგენილი, მაშინ თეორემის დამტკიცება მისთვის სავსებით გასაგები იქნება. ჩავატაროთ ეს დამტკიცება. ორიგინალის $A'C'$ გვერდზე (ნახ. 34 ა). C' წვეროდან მოვზომოთ გამოსახვის AC მონაკვეთი (ნახ. 34 ბ), ე. ი. $A'_1C'=AC$ და A'_1 წერტილზე გავიყვანოთ $A'_1B'_1 \parallel A'B'$, მაშინ $\triangle A'_1B'_1C' \backsim \triangle A'B'C'$. თეორემა დამტკიცებული იქნება თუ ვაჩვენებთ, რომ ABC სამკუთხედი არის $A'_1B'_1C'$ სამკუთხედის პროექცია. ამის დასამტკიცებლად მოვიქცეთ ასე: გამოსახვათა სიბრტყეზე მდებარე ABC სამკუთხედის AC გვერდზე ($AC=A'_1C'$ მოზომვის თანახმად) ავაგოთ $A'_1B'_1C'$ სამკუთხედის ტოლი სამკუთხედი ისე, რომ მისმა B'_1 წვერომ დაიკავოს

სივრცეში რაიმე მდებარეობა და B'_1 წერტილი B წერტილთან შევაერთოთ, მაშინ ABC სამკუთხედი იქნება $A'_1B'_1C'$ სამკუთხედის პროექცია B'_1B-ს მიმართულებით. ამით გამოთქმული თეორემა დამტკიცებულია.

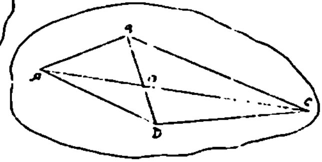
დამტკიცებული თეორემა და პარალელური დაგეგმილების თვისებები საშუალებას იძლევიან ავაგოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი მრავალკუთხედის გამოსახვა, თუ მისი ორიგინალი ცნობილია.

1. ოთხკუთხედის გამოსახვა. ავაგოთ ნებისმიერი $A'B'C'D'$ ოთკუთხედის (ნახ. 35 ა) გამოსახვა.

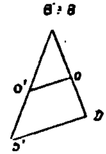
აგება. გავავლოთ $A'B'C'D'$ ოთკუთხედში რომელიმე დიაგონალი, მაგალითად $B'D'$, მაშინ ზემოთ დამტკიცებული ძირითადი თეორემის თანახმად $A'B'D'$ ან $B'C'D'$ სამკუთხედებიდან ერთ-ერთის გამოსახვად ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ გამოსახვათა სიბრტყის ნებისმიერი სამკუთხედი. გამოვსახოთ, მაგალითად, $A'B'D'$ სამკუთხედი ABD სამკუთხედის სახით (ნახ. 35 ბ). შემდეგ გავიყვანოთ $A'B'C'D'$ ოთკუთხედში $A'C'$ დიაგონალი, მაშინ პარალელუ-



ნახ. 35 ა.



ნახ. 35 ბ.



ნახ. 35 გ.

რი დაგეგმილების მე-4 თვისების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ: $B'O':O'D'=BO:OD$; ამ პროპორციის გამოყენებით განვსაზღვრავთ O წერტილის მდებარეობას BD სწორზე. ამისათვის $B'D'$ და BD მონაკვეთები გავიყვანოთ ერთმანეთისადმი კუთხით ისე, რომ მათი ბოლოები, მაგალითად, B' და B ბოლოები ერთმანეთს შეუთავსდეს (ნახ. 35 გ); შემდეგ შევაერთოთ D' და D წერტილები და O' წერტილზე გავიყვანოთ $O'O \parallel D'D$; BO მონაკვეთი მოვზომოთ BD ზე B წერტილიდან, ამით ჩვენ ავაგებთ O წერტილის გამოსახვას BD-ზე, რომელიც $B'D'$ დიაგონალის გამოსახვას წარმოადგენს. ამის შემდეგ მივმართოთ პროპორციას:

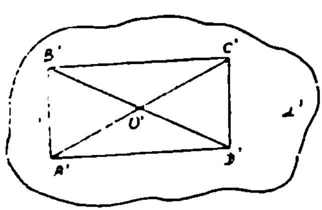
$A'O':O'C'=AO:OC$ და AO მონაკვეთის გაგრძელებაზე მოვზომოთ

OC მონაკვეთი, რომელიც დაწერილ პროპორციაში შემავალი დანარჩენი სამი მონაკვეთის მეოთხე პროპორციულს წარმოადგენს. ამით ჩვენ ვიპოვით ოთკუთხედის გამოსახვის მეოთხე წვეროს და დავამთავრებთ ოთკუთხედის გამოსახვის აგებას.

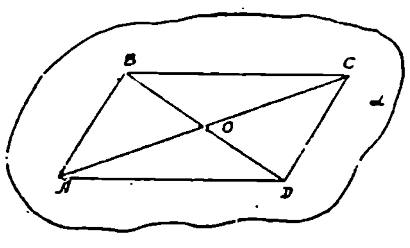
ნებისმიერი ოთკუთხედის გამოსახვის აგების ეს ხერხი საშუალებას გვაძლევს ეფექტური დაგეგმილების გარეშე ავაგოთ ოთკუთხედის გამოსახვა, მასთან ჩვენთვის აქ არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს არც ორიგინალის მდებარეობას სივრცეში და არც მაგეგმილებელი სხივების მიმართულებას. ჩვენ შესაძლებლობა გვაქვს ვთქვათ მხოლოდ, რომ არსებობს ორიგინალის ისეთნაირი მდებარეობა და დაგეგმილების ისეთნაირი მიმართულება, რომლის დროსაც $A'B'C'D'$ ოთხკუთხედის გამოსახვა იქნება $ABCD$ ოთხკუთხედი.

გამოსახვის აგების ეს მეთოდი ბრტყელი ფიგურებისათვის ზოგადია. იგი შესაძლებლობას გვაძლევს ორიგინალის ნებისმიერი სამი წვეროს გამოსახვა ავილოთ ნებისმიერად, ხოლო დანარჩენი მისი წვეროების გამოსახვათა ასაგებად უნდა გამოვიყენოთ პარალელური დაგეგმილების თვისებები (1—5).

ნებისმიერი ოთხკუთხედის გამოსახვის აგების გამოყენებული მეთოდი საშუალებას გვაძლევს სრულიად მარტივად გადავწყვიტოთ პარალელოგრამის, რომბის, მართკუთხედის და კვადრატის გამოსახვათა აგების საკითხი. ვაჩვენოთ, რომ თითოეულ ამ ოთხკუთხედთაგანის გამოსახვად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი პარალელოგრამი. მაგალითისათვის განვიხილოთ მართკუთხედი.



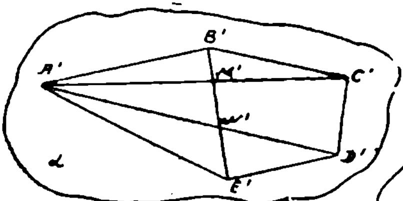
ნახ. 36 ა.



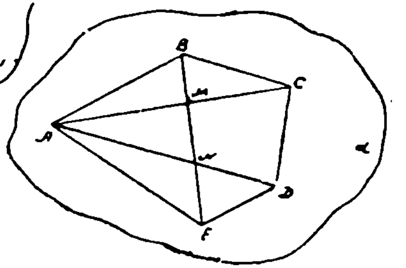
ნახ. 36 ბ.

$A'B'D'$ სამკუთხედის გამოსახვად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი ABD სამკუთხედი (ნახ. 36 ა და ნახ. 36 ბ). C' წერტილის გამოსახვის ასაგებად BD უნდა გავყოთ იმავე შეფარდებით, როგორი შეფარდებითაც $B'D'$-ს ყოფს $A'C'$; მაგრამ ეს უკანასკნელნი ერთ-

მანეთს ყოფენ შუაზე. ამიტომ: გავყოთ BD შუაზე O წერტილში, გავავლოთ AO და მის გაგრძელებაზე O წერტილიდან მოვზომოთ $AO=OC$; C წერტილი შევაერთოთ B და D წერტილებთან. მივიღებთ $ABCD$ ნაკვთს, რომელიც პარალელოგრამია, რადგან იგი წარმოადგენს ამოზნექილ ოთხკუთხედს, რომლის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფენ.



ნახ. 37 ა.



ნახ. 37 ბ.

ანალოგიურად ჩავატარებთ დამტკიცებას პარალელოგრამის, რომბის და კვადრატის შემთხვევაში.

ამრიგად, პარალელოგრამის, რომბის, მართკუთხედისა და კვადრატის გამოსახვად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი პარალელოგრამი.

2. ხუთკუთხედის გამოსახვა. ავაგოთ ნებისმიერი $A'B'C'D'E'$ ხუთკუთხედის გამოსახვა (ნახ. 37 ა).

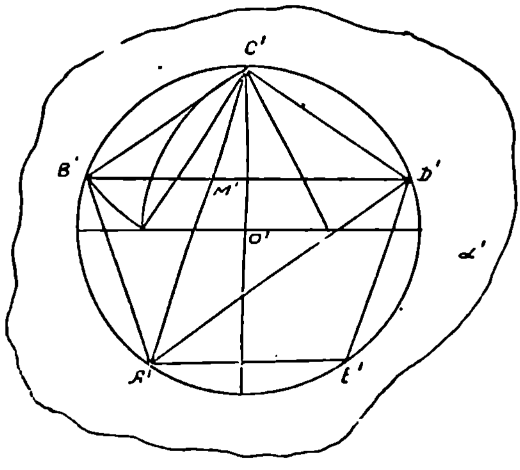
გამოსახვათა α სიბრტყეზე ავიღოთ ნებისმიერი ABE სამკუთხედი (ნახ. 37 ბ). ეს სამკუთხედი შეიძლება მივიღოთ $A'B'E'$ სამკუთხედის გამოსახვად. შემდეგი აგებები დამყარებულია პარალელური დაგეგმილების თვისებებზე. გავავლოთ $A'C'$ და $A'D'$ დიაგონალები, მაშინ $B'M':M'N':N'E'=BM:MN:NE$. ვისარგებლებთ რა ამ პროპორციებით, ჩვენ ვიპოვით M' და N' წერტილების გამოსახვებს BE სწორზე, რომელიც $B'E'$ სწორის გამოსახვას წარმოადგენს. შემდეგ გავიყვანთ AM და AN მონაკვეთებს და მათზე შესაბამად გადავზომავთ MC და ND მონაკვეთებს, რომელთაგან თითოეული შესაბამად $A'M':M'C'=AM:MC$ და $A'N':N'D'=$

$=AN:ND$ პროპორციებში შემავალი დანარჩენი სამი მონაკვეთის მეოთხე პროპორციულს წარმოადგენს. აშკარაა, რომ ეს აგებები მოსწავლემ ცალკე უნდა შეასრულოს. ჩვენს ნახაზზე აგებების სიზუსტე დაცულია, მხოლოდ დამხმარე აგებები, მათი სიმარტივის გამო, ნაჩვენები არ არის.

ანალოგიურად შეიძლება ავაგოთ ნებისმიერი მრავალკუთხედის გამოსახვა. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ წესიერი მრავალკუთხედების გამოსახვებისათვის ხსენებული ხერხი შეიძლება ერთგვარად გავამარტივოთ. შევჩერდეთ ამ საკითხზე დაწვრილებით.

3. წესიერი ხუთკუთხედი. ავაგოთ წესიერი ხუთკუთხედის გამოსახვა.

$A'B'C'D'E'$ წესიერი ხუთკუთხედის გამოსახვის ასაგებად გავავლოთ მისი $B'D'$ და $A'C'$ დიაგონალები (ნახ. 38 ა). მივიღოთ მხედველობაში, რომ წესიერი ხუთკუთხედის დიაგონალები მათი მოპირდაპირე გვერდების პარალელურია, მაშინ $A'M'D'E'$ ოთხკუთხედი



ნახ. 38 ა.

პარალელოგრამს წარმოადგენს, რომელიც გამოსახვათა სიბრტყეზე ნებისმიერი $AMDE$ პარალელოგრამის სახით წარმოგვიდგება (ნახ. 38 ბ).

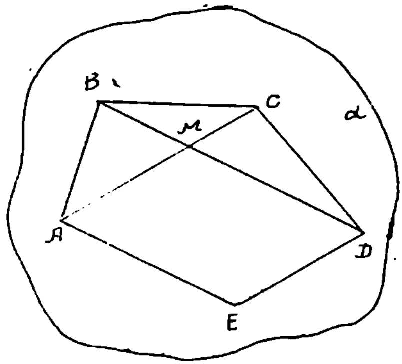
დაგვრჩენია ავაგოთ B' და C' წერტილების გამოსახვები. ამისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ $\triangle A'M'D' \backsim \triangle B'M'C'$, რაც სა-

შუალებას გვაძლევს დავწეროთ: $B'M' : M'D' = B'C' : A'D'$ ან $(B'D' - M'D') : M'A' = B'C' : A'D'$; შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $B'C' = A'E' = M'D' = a, B'D' = A'D' = d$, მაშინ მივიღებთ $(d-a) : a = a : d$; ამოვხსნით რა მიღებულ განტოლებას d-ს მიმართ მივიღებთ ერთ დადებით ფესვს: $d = a(1+\sqrt{5}) : 2$; ახლა შევადგინოთ შემდეგი შეფარდება:

$$B'D' : M'D' = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} : a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{3}{2};$$

მიღებული შედეგი იმის მაჩვენებელია, რომ თუ $M'D'$ მონაკვეთი მიღებულია მასშტაბის ერთეულად, მაშინ $B'D' \approx \frac{3}{2}$, ე. ი. $B'D'$-ის სიგრძე დაახლოებით 1,5-ჯერ აღემატება $M'D'$-ის სიგრძეს. შევნიშნავთ, რომ ასეთი თანაფარდობა იარსებებს BD და MD მონაკვეთებს შორისაც (იხ. პარალელური დაგეგმილების თვისებები § 3-ში).

ამრიგად, ვღებულობთ წესიერი ხუთკუთხედის გამოსახვის აგების შემდეგ წესს: გამოვსახავთ $AMDE$ პარალელოგრამს და მის AM და DM გვერდების გაგრძელებაზე გადავზომავთ თითოეული ამ გვერდთაგანის ნახევარს (ნახ. 38 ბ), მაშინ ჩვენ ავაგებთ წესიერი ხუთკუთხედის გამოსახვას. ვიმეორებთ, რომ მიღებული გამოსახვა მიახლოებითია.



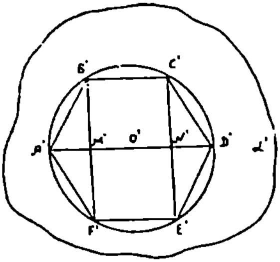
ნახ. 38 ბ.

4. **წესიერი ექვსკუთხედი.** ავაგოთ წესიერი ექვსკუთხედის გამოსახვა. განვიხილოთ წესიერი ექვსკუთხედის გამოსახვის აგების შემდეგი ხერხი[1]:

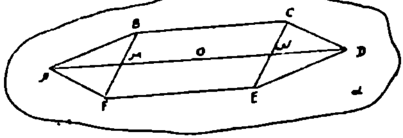
გავავლოთ $A'B'C'D'E'F'$ ექვსკუთხედში $A'D', B'F'$ და $C'E'$ დიაგონალები (ნახ. 39 ა). ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $A'M' = M'O' = O'N' = N'D'$. გარდა ამისა $F'B'C'E'$ ოთხკუთხედი მართ-

[1] არსებობს წესიერი ექვსკუთხედის აგების სხვა ხერხებიც, რომლებსაც აქ არ შევეხებით.

კუთხედს წარმოადგენს. აქედან გამომდინარეობს წესიერი ექვს-კუთხედის გამოსახვის აგების შემდეგი ხერხი: გამოვსახოთ α სიბრტყეზე ნებისმიერი $BCEF$ პარალელოგრამი და მივიღოთ იგი $B'C'E'F'$ მართკუთხედის გამოსახვად. გავიყვანოთ ამ პარალელო-გრამში MN შუახაზი, გავყოთ იგი შუაზე და გადავზომოთ $AM=ND=MO$; ამით ჩვენ ვიპოვით წესიერი ექვსკუთხედის A და D წვეროებს (ნახ .39 ბ) და დავამთავრებთ საძებნი გამოსა-ხვის აგებას.



ნახ. 39 ა.



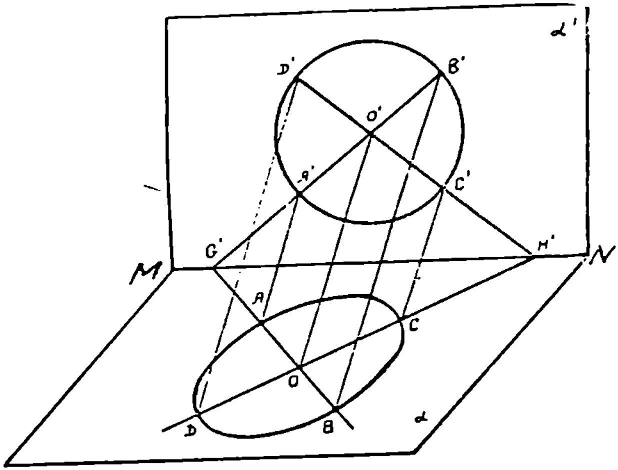
ნახ. 39 ბ.

5. **წრეხაზის გამოსახვა.** წრეხაზის პროექცია იქნება გამოსახ-ვათა სიბრტყისა და მაგეგმილებელი ცილინდრის ზედაპირის გა-დაკვეთის ხაზი, თუ მაგეგმილებელი ცილინდრის მსახველები გა-დიან წრეხაზის წერტილებზე. ამ ხაზს უწოდებენ ელიფსს. ამრი-გად, წრეხაზის ნებისმიერი პარალელური პროექცია არის ელიფსი.

განვიხილოთ წრეხაზის დაგეგმილების საკითხი უფრო დაწვრი-ლებით. ვთქვათ, რომ ორიგინალის α' სიბრტყე და გამოსახვათა α სიბრტყე იკვეთებიან ნებისმიერ MN სწორზე (ნახ. 40). განვი-ხილოთ α' სიბრტყეზე ნებისმიერი O' წრეხაზი. α სიბრტყის ნების-მიერი O წერტილი მივიღოთ O' წერტილის გეგმილად, ამით ჩვენ განვსაზღვრავთ α' სიბრტყის α სიბრტყეზე დაგეგმილების $O'O$ მი-მართულებას. განვიხილოთ O' წრეხაზის ნებისმიერი დიამეტრები და ავაგოთ მათი პროექციები α სიბრტყეზე.

მაგალითად, რომ ავაგოთ $A'B'$ და $C'D'$ დიამეტრების პროექ-ციები, ამისათვის თითოეული მათგანი გავაგრძელოთ MN-ის გა-დაკვეთამდე G' და H' წერტილებში და გავავლოთ $G'O$ და $H'O$ სწორები α სიბრტყეზე. A', B', C' და D' წერტილების პროექციე-ბის აგება შეიძლება, თუ ამ წერტილებზე გავავლებთ OO'-ის პა-

რალელურ სწორებს $G'O$ და $H'O$ სწორების გადაკვეთამდე. ასეთნაირად შეიძლება ავაგოთ წრეხაზის ნებისმიერი დიამეტრის პროექცია, ამით ჩვენ მივიღებთ წერტილების საკმაო რაოდენობას α სიბრტყეზე, რომელთა შეერთება გლუვი მრუდით მოგვცემს ელიფსს.



ნახ. 40.

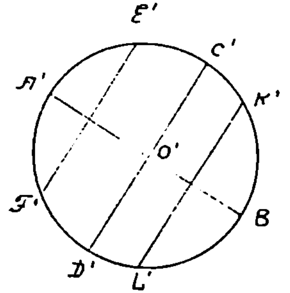
პარალელური დაგეგმილების თვისებების მიხედვით შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ელიფსის როგორც წრეხაზის გამოსახვის თვისებები.

1) რადგან O' წერტილი წარმოადგენს წრეხაზის ყოველი დიამეტრის შუაწერტილს, ამიტომ O წერტილი, როგორც O' წერტილის პროექცია, შუაზე გაყოფს ნებისმიერ AB, CD და ა. შ. მონაკვეთებს, რომლებიც წრეხაზის $A'B'$, $C'D'$ და ა. შ. დიამეტრების პროექციებს წარმოადგენენ. ამ მიზეზის გამო O წერტილს ელიფსის ცენტრს უწოდებენ, ხოლო O წერტილზე გამავალ ნებისმიერ ქორდას— ელიფსის დიამეტრს. ნახაზიდან აშკარაა, რომ ელიფსის დიამეტრები ტოლი არ არიან.

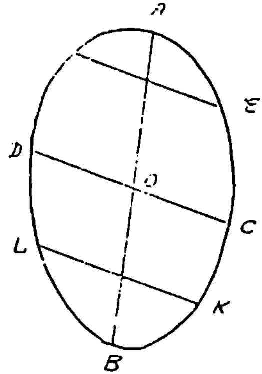
2) ელიფსის იმ დიამეტრებს, რომლებიც წრეხაზის ურთიერთპერპენდიკულარულ დიამეტრებს შეესაბამებიან ელიფსის შეუღლებული დიამეტრები ეწოდება. ცნობილია, რომ წრეხაზის ორი ქორ-

და $K'L'$ და $E'F'$, რომლებიც პარალელურია $C'D'$ დიამეტრისა, იყოფიან შუაზე იმ $A'B'$ დიამეტრით, რომელიც $C'D'$-ის პერპენდიკულარულია (ნახ. 41 ა). აქედან გამომდინარეობს, რომ ელიფსის შეუღლებული დიამეტრებისათვის ადგილი ექნება შემდეგ დებულებას:

ელიფსის ქორდები (EF და KL), რომლებიც ორი შეუღლებული დიამეტრებიდან ერთ-ერთის პარალელურია ($EF \parallel CD$, $KL \parallel CD$), მეორე დიამეტრით (AB) შუაზე იყოფიან (ნახ. 41 ბ).



ნახ. 41. ა.



ნახ. 41, ბ.

3) წრეხაზის რომელიმე წერტილზე გავლებული მხები ამ წერტილიდან გავლებული დიამეტრის პერპენდიკულარულია. რადგან წრეხაზის გამოსახვად შეიძლება მივიღოთ ელიფსი, ამიტომ ელიფსის რომელიმე დიამეტრის ბოლოზე გავლებული მხები ამ დიამეტრის შეუღლებული დიამეტრის პარალელურია.

ელიფსის გამოსასახავად მოსწავლეებს თავიანთ განკარგულებაში უნდა ჰქონდეთ სხვადასხვა ზომის ელიფსის შაბლონები. ასეთი შაბლონები განსაკუთრებით საჭიროა სფეროსთან დაკავშირებული გამოსახვების აგების დროს.

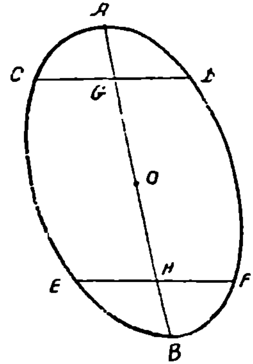
ამოვხსნათ ახლა შემდეგი ამოცანები:

ა) ვიპოვოთ ელიფსის ცენტრი (ნახ. 42).

გავავლოთ ელიფსის ორი ქორდა $CD \parallel EF$; ვიპოვოთ ამ ქორდების G და H შუაწერტილები და გავავლოთ GH სწორი. AB

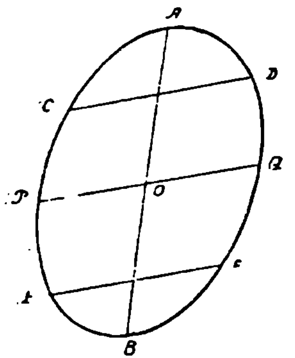
ქორდა ელიფსის დიამეტრს წარმოადგენს, ხოლო AB დიამეტრის O შუაწერტილი მისი ცენტრს.

ბ) ავაგოთ ელიფსის ორი შეუღლებული დიამეტრი (ნახ. 43). წინა ამოცანაში გამოყენებული ხერხით ვიპოვით ელიფსის O ცენტრს და ამ ცენტრზე გავავლებთ $PQ \parallel CD$; PQ და AB ელიფსის შეუღლებულ დიამეტრებს წარმოადგენენ. თუ ელიფსის ცენტრი მოცემულია, მაშინ საკმარისია დიამეტრისა და მისი პარალელური რომელიმე ქორდის შუაწერტილების შემაერთებელი დიამეტრის გავლება.

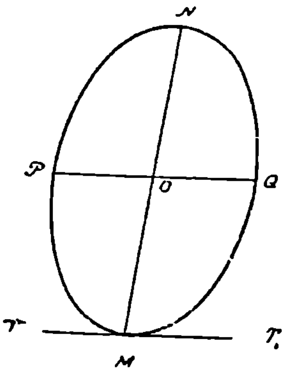


ნახ. 42.

გ) ავაგოთ ელიფსის მხები მის მოცემულ წერტილზე (ნახ. 44). ელიფსის მოცემულ M წერტილზე გავიყვანოთ მისი MN დიამეტრი. შემდეგ გავავლოთ ამ დიამეტრის შეუღლებული დიამეტრი. ბოლოს M წერტილზე გავიყვანოთ $TT_1 \parallel PQ$; TT_1 იქნება საძებნი მხები.



ნახ. 43.



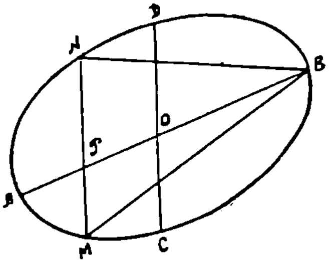
ნახ. 44.

ცილინდრზე (აგრეთვე კონუსზე) შემოხაზული და მასში ჩახაზული მრავალწახნაგა სხეულების გამოსახვათა აგების დროს დიდი მნიშვნელობა აქვს იმის ცოდნას, თუ როგორ უნდა ჩავხაზოთ ან

როგორ შემოვხაზოთ მრავალწახნაგა სხეულის ფუძე ცილინდრისფუძის გამოსახვაზე, ე. ი. ელიფსზე. განვიხილოთ ასეთი აგების ზოგიერთი შემთხვევა:

ა) გამოვსახოთ სიბრტყეზე წრე და მასში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედი.

წრეხაზის გამოსახვად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი ელიფსი (ნახ. 45). ამ ელიფსში არ შეიძლება წესიერი სამკუთხედის გამოსახვა ნებისმიერად ჩავხაზოთ, არამედ იგი უნდა ავაგოთ. აგება შეიძლება ჩავატაროთ ასე: გავიყვანოთ ელიფსში ნებისმიერი ორი შეუღლებული AB და CD დიამეტრები. რომელიმე მათგანის, მაგალითად, AB დიამეტრის AO ნახევარი გავყოთ შუაზე და მიღებული P წერტილზე გავავლოთ $MN \parallel CD$; მიღებული M და N წერტილები შევაერთოთ B-თან. MNB იქნება წესიერი სამკუთხედის გამოსახვა.



ნახ. 45.

ბ) გამოვსახოთ სიბრტყეზე წრე და მასში ჩახაზული კვადრატი.

გამოვსახოთ სიბრტყეზე წრე ელიფსის სახით და გავიყვანოთ ელიფსის ორი AB და CD შეუღლებული დიამეტრები. დიამეტრების ბოლოების შეერთება მოგვცემს $ACBD$ პარალელოგრამს, რომელიც კვადრატის გამოსახვას წარმოადგენს (ნახ. 46).

გ) გამოვსახოთ სიბრტყეზე წრე და მასში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედი.

გამოვსახოთ წრე ელიფსის სახით და გავავლოთ ელიფსის AE და CG შეუღლებული დიამეტრები (ნახ. 47). AO და OE მონაკვეთები გავყოთ შუაზე და გავავლოთ $BH \parallel DF \parallel CG$.

$ABDEFH$ იქნება წესიერი ექვსკუთხედის გამოსახვა, რომელიც ჩახაზულია წრეხაზში.

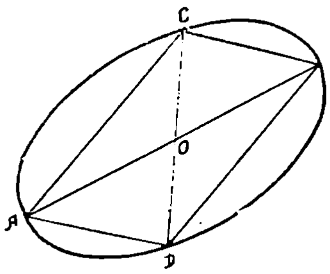
დ) გამოვსახოთ სიბრტყეზე წრე და მასზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხედი.

გამოვსახოთ A_1B_1N წესიერი სამკუთხედი, რომელიც ჩახაზულია ელიფსში და ავაგოთ ამ სამკუთხედის A_1E და B_1F სიმა-

ღლეები. M, E და F წერტილებზე გავავლოთ $BC \parallel B_1N$; $AC \parallel A_1N$ და $AB \parallel A_1B_1$;

ABC წრეხაზზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხედის გამოსახვას წარმოადგენს (ნახ. 48).

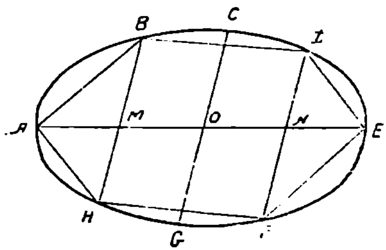
ე) გამოვსახოთ წრე მასზე შემოხაზული მართკუთხა სამკუთხედით.



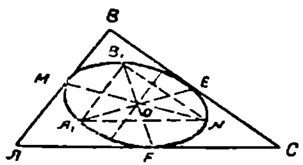
ნახ. 46.

გამოვსახოთ ელიფსი და მასში გავიყვანოთ MN და PQ შეუღლებული დიამეტრები (ნახ. 49). M და Q წერტილებზე გავავლოთ შესაბამად PQ და MN შეუღლებული დიამეტრების პარალელური სწორები (ეს სწორები ელიფსის მხებებს წარმოადგენენ). შემდეგ ელიფსის ნებისმიერ K წერტილზე გავავლოთ მხები. მივიღებთ ABC სამკუთხედს, რომელიც შემოხაზულია ელიფსზე და ორიგინალში წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედს.

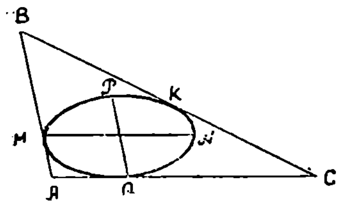
ვ) გამოვსახოთ წრე და მასზე შემოხაზული კვადრატი.



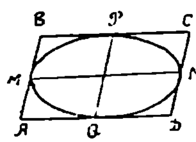
ნახ. 47.



ნახ 48



ნახ. 49.



ნახ. 50.

გამოვსახოთ წრე ელიფსის სახით და გავავლოთ ელიფსის MN და PQ შეუღლებული დიამეტრები. ბოლოს M, P, N და Q წერტილებზე გავიყვანოთ $AB \parallel PQ$; $BC \parallel MN$; $CD \parallel PQ$ და $AD \parallel MN$ (ნახ. 50). $ABCD$ პარალელოგრამი გამოსახავს წრეხაზზე შემოხაზულ კვადრატს.

§ 6. მრავალწახნაგა სხეულების, ცილინდრისა და კონუსის გამოსახვათა აგება

1. პოლკე-შვარცის თეორემა. ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში მრავალწახნაგა სხეულების გამოსახვათა აგება დამყარებულია პოლკე-შვარცის თეორემაზე და პარალელური დაგეგმილების თვისებებზე. ეს თეორემა პირველად გამოთქმული იყო პოლკეს მიერ შემდეგნაირად: ნებისმიერი ოთხკუთხედი თავის დიაგონალებთან ერთად წარმოადგენს ტეტრაედრის პარალელურ გეგმილს, რომელსაც ერთ-ერთ წვეროში მართი სამწახნაგა კუთხე აქვს და ამ წვეროში თავმოყრილი წიბოები თანატოლი.

ეს დებულება შემდეგ ა. შვარცის მიერ იყო განზოგადებული. მან დაამტკიცა, რომ სიბრტყეზე ნებისმიერად აღებული ოთხკუთხედი წარმოადგენს ნებისმიერად აღებული ტეტრაედრის მსგავსი ტეტრაედრის პარალელურ გეგმილს[1].

თუ მხედველობაში მივიღებთ გამოსახვის განსაზღვრას[2] მაშინ ეს თეორემა ასე ჩამოყალიბდება: გამოსახვათა სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი არაგადაგვარებული $SACB$ ოთხკუთხედი თავის (SC და AB) დიაგონალებთან ერთად შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ნებისმიერი წინასწარ მოცემული $S'A'B'C'$ ტეტრაედრის გამოსახვა (ნახ. 51 ა და ნახ. 51 ბ).

პოლკე-შვარცის თეორემის დამტკიცება მოცემული აქვს ნ. ჩეტვერუხინს[3], აგრეთვე ნ. ა. გლაგოლევს[4]. ეს დამტკიცებები დამყარებულია მონათესავე თანადობის ცნებაზე. ამ ხიზეზის გამო ეს დამ—

[1] იხ. ნ. ა. გლაგოლევი, მხაზველობითი გეომეტრია, თბილისი, 1952, გვ. 132.

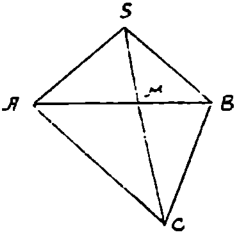
[2] იხ. ეს განსაზღვრა წინა პარაგრაფში.

[3] Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, учпедгиз, 1946, стр. 39

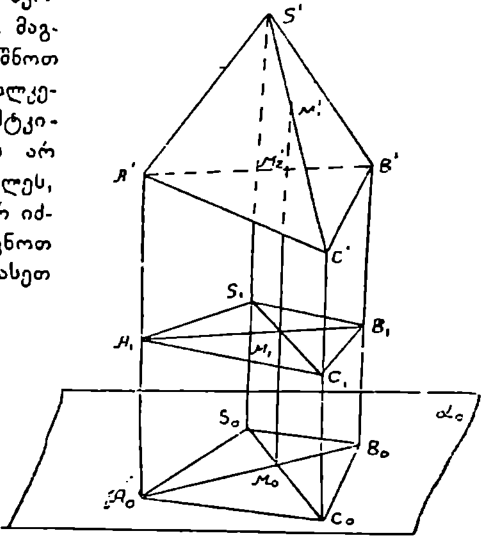
[4] ნ. ა. გლაგოლევი, მხაზველობითი გეომეტრია, გვ. 133.

ტკიცება არ შეიძლება მივცეთ სკოლაში (მოსწავლეები მონათესავე თანადობას არ იცნობენ).

ჩვენ განვიხილავთ ამ თეორემის სხვაგვარ დამტკიცებას, რომელიც დამყარებულია გამოსახვის ცნებაზე[1]. ეს დამტკიცება სავსებით მისაწვდომია საშუალო სკოლის მოსწავლეთათვის. მაგრამ აქ საჭიროა შევნიშნოთ შემდეგი: თუმცა პოლკე-შვარცის თეორემის დამტკიცება მოსწავლეთათვის არ წარმოადგენს დიდ სიძნელეს, მაგრამ ხშირად დრო არ იძლევა საშუალებას გავაცნოთ მათ ეს დამტკიცება. ასეთ შემთხვევაში თეორემას ვაძლევთ დაუმტკიცებლად, ან დავამტკიცებთ მას მათემატიკურ წრეში.



ნახ. 51 ა.



ნახ. 51 ბ.

ჩავატაროთ ახლა პოლკე-შვარცის თეორემის დამტკიცება. გამოსახვის განსაზღვრის მიხედვით თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს მოცემული $S'A'B'C'$ ტეტრაედრის მსგავსი ისეთი ტეტრაედრი, მისი ისეთნაირი მდებარეობა გამოსახვათა სიბრტყის მიმართ და დაგეგმილების ისეთი მიმართულება, რომ მოცემული ტეტრაედრის მსგავსი

[1] ასეთი დამტკიცება მოცემული აქვს А. Д. Семушин-ს „Построение и применение изображений в курсе стереометрии средней школы", диссертация, М., 1955.

ტეტრაედრის პროექცია იქნება $SACB$ ოთხკუთხედი AB და CS დიაგონალებთან ერთად.

თეორემის დასამტკიცებლად $S'C'$ და $A'B'$ წიბოებზე განვსაზღვროთ M'_1 და M'_2 წერტილების მდებარეობა ისე, რომ $S'M'_1 : M'_1C' = SM : MC$ და $A'M'_2 : M'_2B' = AM : MB$; ამის შემდეგ $M'_1M'_2$ სწორი მივიღოთ დაგეგმილების მიმართულებად და $S'A'B'C'$ პირამიდა დავაგეგმილოთ ნებისმიერ α_0 სიბრტყეზე (ნახ. 51 ბ).

პირამიდის წვეროების გეგმილები იქნებიან A_0, B_0, C_0 და S_0 წერტილები, რომელთაგან არც ერთი სამეული ერთ სწორ ხაზზე არ მდებარეობს. მართლაც, რომელიმე სამეულის ერთ სწორ ხაზზე მდებარეობა იმის მაჩვენებელი იქნებოდა, რომ პირამიდის სამი წვერო მდებარეობს ერთ მაგეგმილებელ სიბრტყეში და ეს სიბრტყე იქნება პირამიდის წახნაგი. ეს იმას ნიშნავს, რომ პირამიდის ეს წახნაგი გაივლიდა $M'_1M'_2$ სწორზე ან იქნებოდა მისი პარალელური. ნახაზიდან ჩანს, რომ თითოეული ამ შესაძლებლობათაგანი გამორიცხულია.

ამრიგად, პირამიდის წვეროების გეგმილები განსაზღვრავენ $S_0A_0C_0B_0$ ოთხკუთხედს. ეს ოთხკუთხედი მის დიაგონალებთან ერთად წარმოადგენს $S'A'B'C'$ ტეტრაედრის პროექციას α_0 სიბრტყეზე დაგეგმილების M'_1M_2-ის მიმართულებით. გვაქვს შემდეგი ტოლობები: ერთი მხრივ $S'M'_1 : M'_1C' = SM : MC$, $A'M'_2 : M'_2B' = AM : MB$ და მეორეს მხრივ $S'M'_1 : M'_1C' = S_0M_0 : M_0C_0$, $A'M'_2 : M'_2B' = A_0M_0 : : M_0B_0$;

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ: $SM : MC = S_0M_0 : : M_0C_0$ და $AM : MB = A_0M_0 : M_0B_0$; ეს უკანასკნელი ტოლობები იმის მაჩვენებელია, რომ $S_0A_0C_0B_0$ ოთხკუთხედი წარმოადგენს $SACB$ ოთხკუთხედის გამოსახვას ნებისმიერი დაგეგმილების მიმართულებით და მათ რიცხვში $M'_1M'_2$-ის მიმართულებითაც.

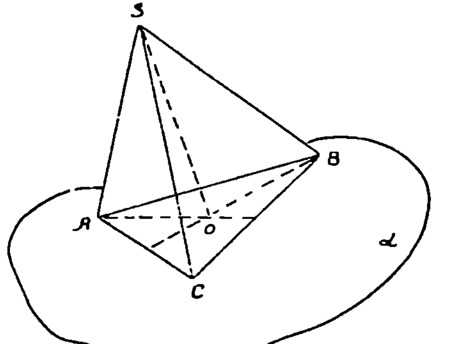
აღვნიშნოთ ნახ. 51 ბ-ზე $SACB$ ოთხკუთხედის ან მისი მსგავსი ოთხკუთხედის მდებარეობა, რომლითაც ის გეგმილდება $S_0A_0C_0B_0$ ოთხკუთხედში $S_1A_1C_1B_1$-ით. თუ $S_1A_1C_1B_1$ ოთხკუთხედი აღმოჩნდება $SACB$ ოთხკუთხედის ტოლი, მაშინ თეორემა დამტკიცებულია, რადგანაც სინამდვილეში ვიპოვეთ ორიგინალი, მისი მდებარეობა და დაგეგმილების ისეთი მიმართულება, რომ $SACB$ ოთხკუთხედის ტოლი $S_1A_1C_1B_1$ ოთხკუთხედი არის ორიგინალის პროექცია.

თუ $S_1A_1C_1B_1$ ოთხკუთხედი არ იქნება $SACB$ ოთხკუთხედის ტოლი, მაშინ ჩვენ უნდა შევასრულოთ მთელი მიღებული გეომეტრიული კონფიგურაციის მსგავსური გარდაქმნა იმ ზომამდე, რომ $S_1A_1C_1B_1$ ოთხკუთხედის მსგავსური გარდაქმნით მიღებული ოთხკუთხედი აღმოჩნდეს $SACB$ ოთხკუთხედის ტოლი. ასეთნაირად მიღებული ოთხკუთხედი დააკმაყოფილებს თეორემის პირობას, რადგანაც მსგავსური გარდაქმნის დროს არც ოთხკუთხედ-გამოსახვის და არც ტეტრაედრ-ორიგინალის ფორმა არ შეიცვლება.

დამტკიცებული თეორემიდან ჩანს, რომ არსებობს მხოლოდ ორი მიმართულება ($M'_1M'_2$ და $M'_2M'_1$), რომელშიაც $S_1A_1C_1B_1$ ოთხკუთხედი არის ორიგინალის პროექცია, ხოლო $SACB$ ოთხკუთხედი $S'A'B'C'$ ტეტრაედრის გამოსახვა.

2. წესიერი პირამიდების გამოსახვათა აგება.

ა) წესიერი სამკუთხა პირამიდის გამოსახვა. ნებისმიერი სამკუთხა პირამიდის და მათ რიცხვში წესიერი სამკუთხა

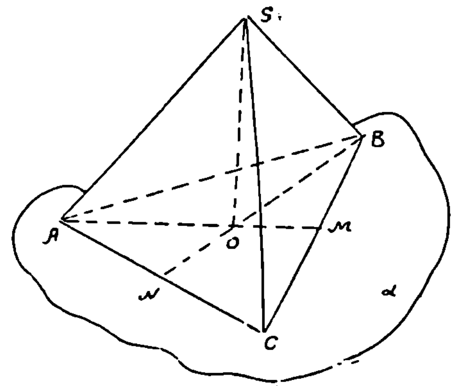


ნახ. 52.

პირამიდის გამოსახვის აგების საკითხი ნებისმიერ პარალელურ პროექციაში გადაწყვეტილია პოლკე-შვარცის თეორემით. მართლაც, წესიერი სამკუთხა პირამიდა შეიძლება გამოვსახოთ ისე, როგორც ეს მოცემულია ნახ. 52-ზე. ეს გამოსახვა სწორია, რადგან პოლკე-შვარცის თეორემის მიხედვით ნებისმიერი $SACB$ ოთხკუთხედი თავის დიაგონალებთან (SC და AB) ერთად შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ნებისმიერი ფორმის სამკუთხა პირამიდის გამო-

სახვა. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ ნახ. 52-ზე წარმოდგენილი წესიერი სამკუთხა პირამიდის გამოსახვა თვალსაჩინო არ არის. მართლაც, ჯერ ერთი, რომ ფუძის AB გვერდი დაფარულია პირამიდის გვერდით წახნაგებით, ამიტომ იგი ნახაზზე წარმოდგენილი უნდა იყოს პუნქტირით. გარდა ამისა, პირამიდის სიმაღლის გამოსახვა OS არ იძლევა თვალსაჩინო წარმოდგენას პერპენდიკულარის შესახებ, რომელიც S წერტილიდან დაშვებულია პირამიდის ფუძის სიბრტყეზე.

ყოველივე ნათქვამიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ მართალია, პოლკე-შვარცის თეორემის მიხედვით წესიერი სამკუთხა პირამიდის გამოსახვის ოთხივე წვერო შეიძლება ნებისმიერად ავიღოთ, მაგრამ ერთდროულად ყველა მათგანის აღებამ შეიძლება არათვალსაჩინო გამოსახვა მოგვცეს. იმისათვის, რომ პირამიდის გამოსახვა თვალსაჩინო იქნეს, საჭიროა ყველა მისი წვეროები ნებისმიერად არ ავიღოთ. აგება უნდა ჩავატაროთ შემდეგი თანამიმდევრობით:



ნახ. 53.

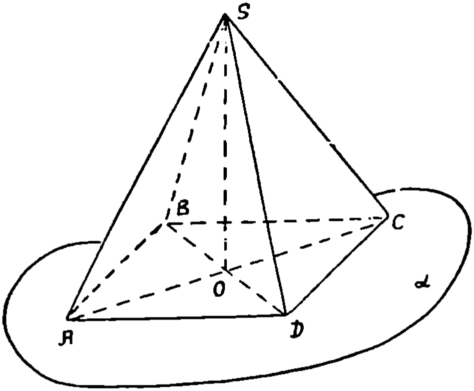
გამოვსახოთ α სიბრტყეზე ნებისმიერი ABC სამკუთხედი და მივიღოთ იგი წესიერი სამკუთხედის გამოსახვად (ნახ. 53). ამით ჩვენ სამკუთხა პირამიდის გამოსახვის სამი წვერო ნებისმიერად ავიღეთ. ამის შემდეგ კი უფლება გვრჩება ნებისმიერად ავიღოთ კიდევ ერთი წვეროს გამოსახვა; ამისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ პირამიდის სიმაღლის ვერტიკალურად გამოსახვა ყველაზე უფრო შეესაბამება იმ მხედველობით შთაბეჭდილებას, რომელსაც ეს სი-

მაღლე ახდენს ჩვენზე, როცა პარამიდა ფუძით დგას ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. ამნაირად, ნახაზის თვალსაჩინოების გაზრდის მიზნით უნდა მოვიქცეთ ასე: გავავლოთ ABC სამკუთხედის AM და BN მედიანები, მათი გადაკვეთის O წერტილი პირამიდის სიმაღლის ფუძის გამოსახვას წარმოადგენს; O წერტილზე გავავლოთ ვერტიკალური მიმართულების სწორი და ჩავთვალოთ იგი პირამიდის სიმაღლის მიმართულებად. ავიღოთ ამ ვერტიკალურ სწორზე ნებისმიერი S წერტილი და მივიღოთ იგი პირამიდის წვეროს გამოსახვად. შევაერთებთ რა S წერტილის A, B და C წერტილებთან, მივიღებთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გამოსახვას. ცხადია, რომ მიღებული გამოსახვა მის სისწორესთან ერთად საკმაოდ თვალსაჩინოც არის.

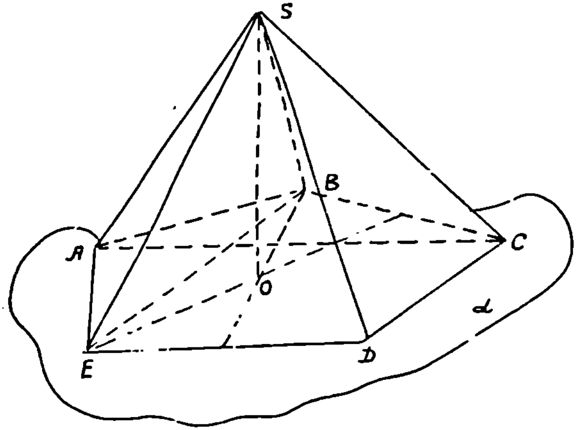
ბ) წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გამოსახვა. გამოვსახოთ α სიბრტყეზე ნებისმიერი $ABCD$ პარალელოგრამი და მივიღოთ იგი კვადრატის გამოსახვად. ამით ჩვენ დავხარჯავთ გამოსახვის სამი წერტილის ნებისმიერად აღების შესაძლებლობას. მართლაც, თუ ჩვენ ავიღებთ A, B და C წერტილებს სავსებით ნებისმიერად, მაშინ შეიძლება ფუძის მეოთხე წერტილის გამოსახვის აგებაც. ამისათვის საჭიროა AB და BC მონაკვეთებზე ავაგოთ პარალელოგრამი. ჩვენს განკარგულებაში ამის შემდეგ რჩება კიდევ გამოსახვის ერთი წნებისმერტილის იერად აღების შესაძლებლობა. ეს შესაძლებლობა გამოვიყენოთ ასე: $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე გავიყვანოთ ვერტიკალური სწორი და მივიღოთ იგი პირამიდის სიმაღლის გამოსახვის მიმართულებად. ავიღოთ ამ სწორზე ნებისმიერი S წერტილი და მივიღოთ იგი პირამიდის წვეროს გამოსახვად. ბოლოს S წერტილი შევაერთოთ A, B, C და D წერტილებთან, მივიღებთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გამოსახვას (ნახ. 54).

გ) წესიერი ხუთკუთხა პირამიდის გამოსახვა. ავიღოთ α სიბრტყეზე წესიერი ხუთკუთხა პირამიდის ფუძის გამოსახვის რომელიმე სამი წერტილი (რომლებიც ერთ სწორზე არ მდებარეობენ). ვთქვათ, მაგალითად, რომ ჩვენ ავიღეთ A, B და C წერტილები (ნახ. 55). ამ სამი წერტილის აღებით პირამიდის ფუძის გამოსახვა სავსებით განსაზღვრულია და შეიძლება მისი აგება (ეს აგება მოცემული იყო წინა პარაგრაფში). ამის შემდეგ ჩვენ უფლება გვეძლევა ნებისმიერად ავიღოთ კიდევ გამოსახვის ერთი წერტილი. ამ წერტილის აღებამდე განვსაზღვროთ პირა-

მიდის სიმაღლის ფუძე. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ წესიერი ხუთ-
კუთხედის ცენტრი ძევს იმ სწორების გადაკვეთის წერტილში, რომელთაგან თითოეული ხუთკუთხედის წვეროს აერთებს მოპირ-



ნახ. 54.

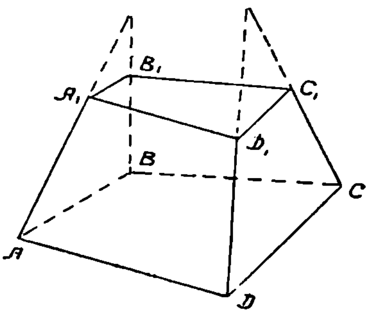


ნახ. 55.

დაპირე გვერდის შუაწერტილთან. მივიღოთ ეს გარემოება მხედველობაში და ავაგოთ წესიერი ხუთკუთხედის ცენტრის გამოსახვა O. გავიყვანოთ ამ წერტილზე ვერტიკალური მიმართულების სწორი და ავიღოთ მასზე ნებისმიერი S წერტილი. OS მივიღოთ წე-

სიერი ხუთკუთხა პირამიდის სიმაღლის გამოსახვად, დანარჩენი ნათელია.

დ) წ ა კ ვ ე თ ი ლ ი პ ი რ ა მ ი დ ი ს გ ა მ ო ს ა ხ ვ ი ს ა გ ე ბ ა. შეცდომები გეომეტრიული სხეულების გამოსახვებში არსად ისე ადვილად შესამჩნევი არ არის, როგორც ეს წაკვეთილი პირამიდის გამოსახვისათვისაა დამახასიათებელი. გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ მოსწავლეები და მასწავლებლებიც წაკვეთილ პირამიდას (მაგალითად, წაკვეთილ ოთხკუთხა პირამიდას) გამოსახავენ შემდეგნაირად (ნახ. 56). ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასეთნაირად აგებული გამოსახვა ძლიერ იშვიათ შემთხვევაში შეიძლება იყოს სწორი. ამისთვის საკმარისია გავაგრძელოთ პირამიდის გვერდითი წიბოების AA_1, BB_1 და ა. შ. გამოსახვები. გამოსახვის სისწორის საკითხი უფრო მეტად საეჭვო ხდება, თუ პირამიდის გვერდითი წახნაგების რიცხვი აღემატება ოთხს.



ნახ. 56.

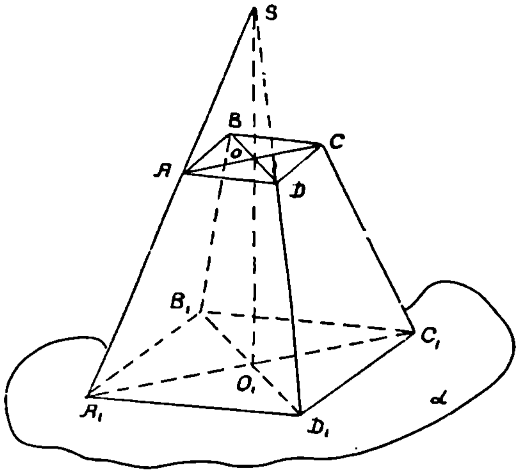
წაკვეთილი პირამიდის გამოსახვის აგება უნდა ჩავატაროთ ზოგადი მეთოდით. სახელდობრ, პოლკე-შვარცის თეორემის თანახმად აქაც ჩვენ შეგვიძლია გამოსახვის ოთხი ნებისმიერი წერტილი ავიღოთ ნებისმიერად (ისე, რომ ამ წერტილებიდან არცერთი სამეული არ მდებარეობდეს ერთ სწორზე და გარდა ამისა ოთხივე მათგანი ორიგინალში არ მდებარეობდეს ერთ სიბრტყეზე), ამის შემდეგ კი გამოსახვის დანარჩენი წერტილები განისაზღვრებიან აგებით.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ავაგოთ წესიერი წაკვეთილი ოთხკუთხა პირამიდის გამოსახვა.

გამოვსახოთ α სიბრტყეზე ნებისმიერი $A_1B_1C_1D_1$ პარალელოგრამი და მივიღოთ იგი წესიერი წაკვეთილი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გამოსახვად (ნახ. 57). ამ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის O_1 წერტილზე გავავლოთ ვერტიკალური მიმართულების სწორი, რომელიც მივიღოთ წესიერი წაკვეთილი

ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლის მიმართულებად. ავიღოთ ამ სწორზე ნებისმიერი O წერტილი და ჩავთვალოთ იგი პირამიდის ზედა ფუძის ცენტრის გამოსახვად. ამის შემდეგ ზედა ფუძის წვეროების გამოსახვათა ნებისმიერად აღება უკვე შეუძლებელია (რადგან ჩვენ გამოსახვის ოთხი წერტილის ნებისმიერად აღების შესაძლებლობა უკვე ამოვწურეთ), არამედ ეს წვეროები უნდა განისაზღვროს აგებით. ამისათვის O წერტილზე გავავლოთ A_1C_1-ის პარალელური სწორი და მასზე ავიღოთ A წერტილი ისე, რომ $AO<A_1O_1$; ამის შემდეგ ვიპოვოთ AA_1-ის და OO_1 სწორების გადაკვეთის S წერტილი. A წერტილზე გავავლოთ $AD \parallel A_1D_1$ და ვიპოვოთ მისი გა-



ნახ. 57.

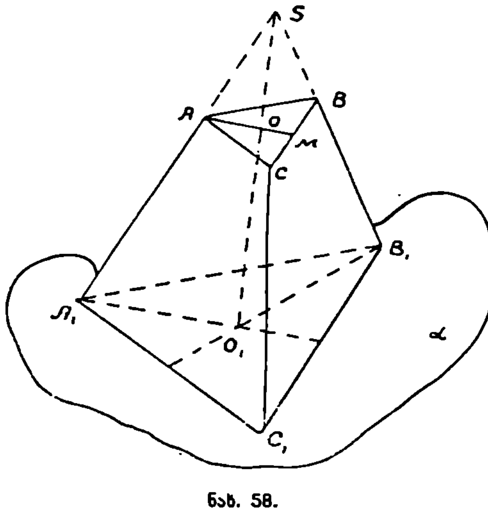
დაკვეთის წერტილი SD_1-თან. ამნაირად ჩვენ განვსაზღვრავთ წესიერი წაკვეთილი ოთხკუთხა პირამიდის ზედა ფუძის გამოსახვის ყველა წვეროს ($AO=OC$ და $OD=OB$), და დავამთავრებთ საინტერესო გამოსახვის აგებას.

შევნიშნავთ, რომ თუ პირამიდის ფორმა განსაზღვრულია, მაშინ AO უნდა განვსაზღვროთ პირობიდან: $AO : A_1O_1 = A'O' : A'_1O'_1$;

მაგალითი 2. ავაგოთ წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის გამოსახვა.

გამოვსახოთ α სიბრტყეზე ნებისმიერი $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი და

მივიღოთ იგი წაკვეთილი წესიერი სამკუთხა პირამიდის ქვედა ფუძის გამოსახვად (ნახ. 58). ვიპოვოთ ამ სამკუთხედის ცენტრის გამოსახვა O_1 და გავავლოთ მასზე ვერტიკალური მიმართულების სწორი, რომელიც ჩავთვალოთ პირამიდის სიმაღლის მიმართულებად. ავიღოთ ამ სწორზე ნებისმიერი O წერტილი და მივიღოთ იგი წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის ზედა ფუძის ცენტრის გამოსახვად. გავავლოთ ამ წერტილზე $AO \parallel A_1O_1$ და $AO<A_1O_1$; ვიპოვოთ AA_1-ის გადაკვეთის წერტილი OO_1-თან. ამის შემდეგ B წვერო განისაზღვრება, როგორც SB_1-სა და A წერტილზე გავლებული A_1B_1 სწორის პარალელური სწორის გადაკვეთის წერტილი.



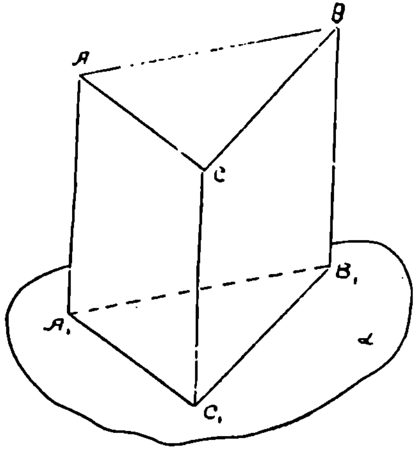
ნახ. 58.

თუ პირამიდის ფორმა განსაზღვრულია, მაშინ ვსარგებლობთ პროპორციით: $AO:A_1O_1=A'O':A'_1O'_1$, რომლითაც გამოსახვაზე აგებით განვსაზღვრავთ AO-ს სიდიდეს.

გაკვეთილის პროცესში, დაფაზე მუშაობის დროს, შეიძლება წაკვეთილი პირამიდის გამოსახვა ავაგოთ ასე: გამოვსახოთ ჯერ სრული პირამიდა და შემდეგ ფუძიდან ნებისმიერ მანძილზე გავავლოთ ფუძის პარალელური კვეთა. პირამიდის გამოსახვის ის ნაწილი, რომელიც მოქცეულია ფუძის გამოსახვასა და მკვეთი სიბრტყის გამოსახვას შორის იქნება წაკვეთილი პირამიდის გამოსახვა. გამოსახვის დანარჩენი ნაწილი უნდა წავშალოთ.

3. წესიერი პრიზმების გამოსახვათა აგება.

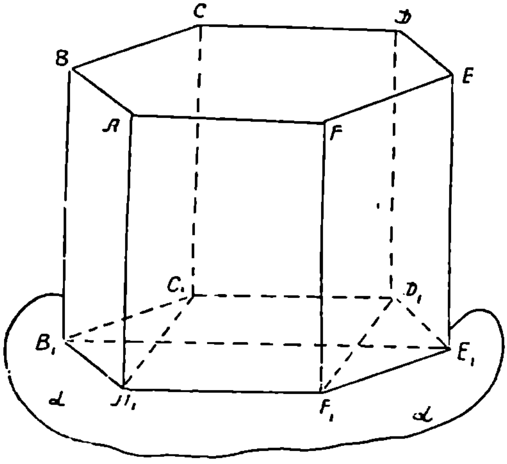
ა) წესიერი სამკუთხა პრიზმის გამოსახვა. გამოვსახოთ α სიბრტყეზე ნებისმიერი $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი და მივიღოთ იგი წესიერი სამკუთხა პრიზმის ქვედა ფუძის გამოსახვად (ნახ. 59). ამ სამკუთხედის რომელიმე წვეროზე, მაგალითად, A_1 წვეროზე გავავლოთ ვერტიკალური მიმართულების სწორი და ავიღოთ მასზე ნებისმიერი A წერტილი; ეს წერტილი მივიღოთ პრიზმის ზედა ფუძის წვეროს გამოსახვად. ამით ჩვენ ამოვწურავთ გამოსახვის



ნახ. 59.

ოთხი წერტილის ნებისმიერად აღების შესაძლებლობას, და მაშასადამე, ზედა ფუძის დანარჩენი ორი წვეროს გამოსახვა განისაზღვრება აგებით. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ პარალელური დაგეგმილებისას პარალელური და ტოლი მონაკვეთები პარალელურ და ტოლ მონაკვეთებად გეგმილდებიან და გავავლოთ პრიზმის B_1 და C_1 წვეროებზე $BB_1 \# AA_1$ და $CC_1 \# AA_1$. ამის შემდეგ დავამთავროთ პრიზმის გამოსახვის აგება. მიღებული გამოსახვა მის სისწორესთან ერთად საკმაო თვალსაჩინოებითაც ხასიათდება. გასაგებია, რომ თუ ჩვენ გამოსახვის მეოთხე A წვეროსაც ნებისმიერად ავიღებდით, მაშინ გამოსახვა შეიძლება არა თვალსაჩინო გამოსულიყო- ეს დამოკიდებული იქნებოდა AA_1 სწორის მიმართულებაზე.

ბ) წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გამოსახვა. გამოვსახოთ α სიბრტყეზე ნებისმიერი $A_1C_1D_1F_1$ პარალელოგრამი და ჩავთვალოთ იგი მართკუთხედის გამოსახვად (ნახ. 60). პარალელოგრამი სავსებით განისაზღვრება ისეთი სამი A_1, C_1 და D_1 წერტილების აღებით, რომლებიც ერთ სწორ ხაზზე არ მდებარეობენ. ამის შემდეგ პრიზმის ფუძის გამოსახვა შეიძლება განსაზღვრულ იქნას აგებით. ეს აგება ნაჩვენები იყო წინა პარაგრაფში, ამიტომ მას აქ არ გავიმეორებთ. ჩვენს განკარგულებაში არის კიდევ გამოსახვის ერთი წერტილის ნებისმიერად აღების შესაძლებ-

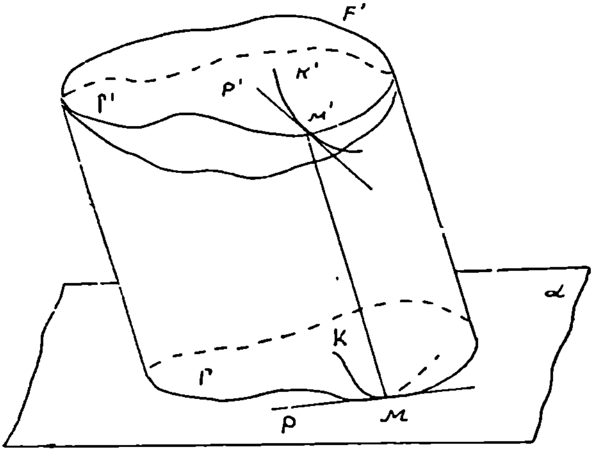


ნახ. 60.

ლობა (ეს წერტილი არ შეიძლება აღებული იქნას α სიბრტყეზე). იმისათვის, რომ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გამოსახვა თვალსაჩინო გამოვიდეს, ეს წერტილი ავიღოთ ვერტიკალურ სწორზე, რომელიც გადის პრიზმის ქვედა ფუძის გამოსახვის წვეროზე. დანარჩენი აგებები წინას ანალოგიურია.

4. სხეულის შემონახაზის ცნება. განვიხილოთ რომელიმე სხეული F'. ვთქვათ, რომ ჩვენ გვსურს ავაგოთ ამ სხეულის პროექცია გამოსახვათა α სიბრტყეზე. ამისათვის საჭიროა ამოვარჩიოთ დაგეგმილების მიმართულება და F' სხეულის ყველა წერტილზე გავიყვანოთ მაგეგმილებელი სხივები. ყველა იმ მაგეგმილებელი ხაზების გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც ეხებიან მო-

ცემული F' სხეულის ზედაპირს ქმნიან ცილინდრულ ზედაპირს. ამ ცილინდრულ ზედაპირს მაგეგმილებელ ცილინდრს უწოდებენ (ნახ. 61). ხაზი, რომელზეც მაგეგმილებელი ცილინდრი ეხება F' სხეულის ზედაპირს წოდებულია F' სხეულის ხილულ კონტურად. აღვნიშნოთ ეს ხაზი Γ'-ით.



ნახ. 61.

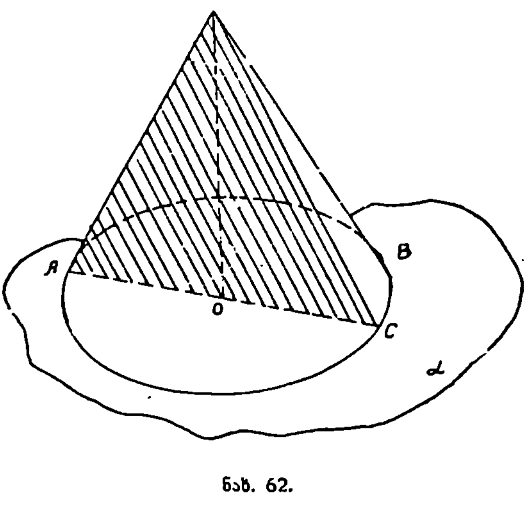
ხილული Γ' კონტური F' სხეულის ზედაპირს ყოფს ორ ნაწილად. ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია Γ' კონტურსა და გამოსახვათა α სიბრტყეს შორის ითვლება უხილავ ნაწილად, ხოლო დანარჩენი ნაწილი, თვით ხილული კონტურის ჩათვლით—ხილულ ნაწილად.

Γ' ხაზის გეგმილს გამოსახვათა α სიბრტყეზე F' სხეულის შემონახაზს უწოდებენ. ნახაზიდან ჩანს, რომ შემონახაზი არის მაგეგმილებელი ცილინდრისა და გამოსახვათა α სიბრტყის თანაკვეთის ხაზი.

სხეულის შემონახაზის უმნიშვნელოვანესი თვისება ის არის, რომ ამ სხეულის ყველა წერტილების პროექციები (როგორც ხილულის, ისე უხილავის) მოთავსდებიან შემონახაზის შიგნით ან შემონახაზზე. ეს დასკვნა გამომდინარეობს იქედან, რომ ნებისმიერი მაგეგმილებელი სხივი ან მოთავსებულია მაგეგმილებელი ცილინდრის შიგნით ან წარმოადგენს მის ერთ-ერთ მსახველს.

აღვნიშნოთ დაუმტკიცებლად ერთი მნიშვნელოვანი დებულება: თუ F' სხეულის ზედაპირზე მოთავსებული K' ხაზი კვეთს ამ სხეულის Γ' კონტურს რომელიმე M' წერტილში, მაშინ მისი გამოსახვა K ეხება ამ სხეულის შემონახაზს გამოსახვათა სიბრტყის M წერტილში, რომელიც M' წერტილის გამოსახვას წარმოადგენს. ამავე დროს M წერტილი წარმოადგენს საზღვარს K' ხაზის (მის K გამოსახვაზე) ხილულ და უხილავ ნაწილებს შორის.[1]

5. კონუსის გამოსახვა. კონუსის გამოსახვა განისაზღვრება შემონახაზით, ფუძის სრული გამოსახვით და თვალსაჩინოების გაზრდის მიზნით მისი სიმაღლის გამოსახვით. ნებისმიერი



ნახ. 62.

მართი წრიული კონუსის ფუძის გამოსახვად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი ელიფსი O (ნახ. 62). გავატაროთ ელიფსის ცენტრზე ვერტიკალური მიმართულების სწორი და ავიღოთ მასზე ნებისმიერი S წერტილი, რომელიც ჩავთვალოთ კონუსის წვეროს გამოსახვად, მაშინ OS გამოსახავს კონუსის სიმაღლეს. ნებისმიერი მონაკვეთი, რომელიც S წერტილს აერთებს ფუძის გამოსახვის ნების-

[1] Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946, стр. 143.

მიერ წერტილთან კონუსის მსახველს გამოსახავს. ასეთი გზით ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ კონუსის ნებისმიერი მსახველის გამოსახვა.

კონუსის გამოსახვის მისაღებად საჭიროა S წერტილიდან გავავლოთ O ელიფსისადმი SA და SB მხებები[1]. მასთან, მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ შეხების A და B წერტილები არ შეიძლება მდებარეობდეს ერთსა და იმავე დიამეტრზე, ე. ი. კონუსის ღერძული კვეთა არ შეიძლება ერთდროულად გადიოდეს SA და SB მსახველებზე. მართლაც, A და B წერტილები რომ ელიფსის ერთსა და იმავე დიამეტრის ბოლოებზე მდებარეობდნენ, ეს იმის მაჩვენებელი იქნებოდა, რომ წრეხაზისადმი მის გარეთ მდებარე წერტილიდან, რომელიც მის სიბრტყეში მდებარეობს, გავლებული მხებები წრეხაზს შეეხებოდნენ დიამეტრალურად საწინააღმდეგო წერტილებში, რასაც სინამდვილეში ადგილი არ აქვს.

სკოლაში კონუსის გამოსახვის აგების დროს ამ გარემოებას ხშირად ანგარიშს არ უწევენ და ამნაირად ღებულობენ არასწორ გამოსახვას. თუ საჭიროება მოითხოვს, რომ ნახაზზე კონუსის გამოსახვასთან ერთად გამოსახული იქნას მისი ღერძითი კვეთაც, მაშინ ეს კვეთა დამატებით უნდა გამოვსახოთ. მაგალითად, ნახ. 62-ზე გამოსახულია კონუსის ღერძითი კვეთა, რომელიც გადის მის SA მსახველზე.

ახლა განვიხილოთ კონუსში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული პირამიდების გამოსახვათა აგების რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. ავაგოთ კონუსისა და მასში ჩახაზული წესიერი სამკუთხა პირამიდის გამოსახვა.

ავაგოთ კონუსის გამოსახვა ისე, როგორც ეს იყო ნაჩვენები ზემოთ (ნახ. 63). გავავლოთ კონუსის ფუძეში AC დიამეტრი და ამ დიამეტრის შეუღლებელი PQ დიამეტრი. AO მონაკვეთის K შუაწერტილზე გავავლოთ ქორდა $MN \parallel PQ$; M და N წერტილები შევაერთოთ C წერტილთან, მივიღებთ MNC სამკუთხედს, რომელიც კონუსის ფუძეში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გამოსახვას წარმოადგენს. დასასრულ, ამ სამკუთხედის წვეროები S

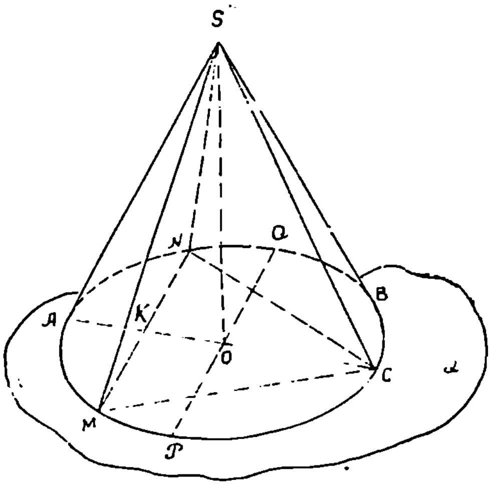
---

[1] შევნიშნავთ, რომ ჩვენ ელაპარაკობთ მხების გაყვანაზე S წერტილიდან ელიფსისადმი იმის გამო, რომ გამოსახვაზე S წერტილი და კონუსის ფუძე მდებარეობენ ერთ სიბრტყეზე. თვით ორიგინალში კი „მხების აგებაზე" ლაპარაკი უაზროა.

წერტილთან შევაერთოთ, რაც მოგვცემს კონუსში ჩახაზული პირამიდის გამოსახვას.

მაგალითი 2. ავაგოთ კონუსისა და მასში ჩახაზული წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გამოსახვა.

გამოვსახოთ კონუსი (ნახ. 64) და გავავლოთ მისი ფუძის გამოსახვაში AD და CF შეუღლებული დიამეტრები. ავაგოთ $ACDF$ პარალელოგრამი, რომელიც ორიგინალში კვადრატს გამოსახავს. C, D და F წერტილები S წერტილთან შევაერთოთ, მივიღებთ საძებნ გამოსახვას.



ნახ. 63.

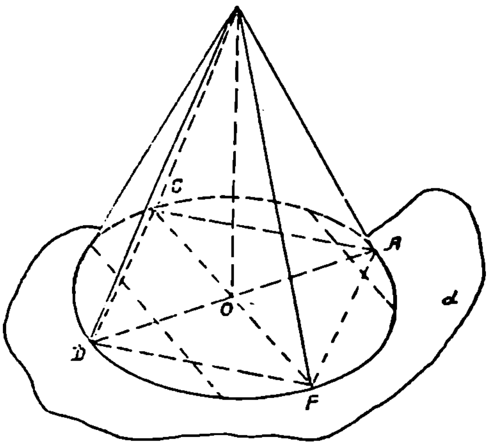
მაგალითი 3. ავაგოთ კონუსისა და მასზე შემოხაზული სამკუთხა პირამიდის გამოსახვა, თუ პირამიდას ფუძეში მართკუთხა სამკუთხედი აქვს.

ავაგოთ კონუსის გამოსახვა (ნახ. 65) და მის ფუძეზე შემოვხაზოთ მართკუთხა სამკუთხედი ისე, როგორც ეს ნაჩვენები იყო წინა პარაგრაფში. ABC სამკუთხედის წვეროები შევაერთოთ კონუსის S წვეროსთან, მივიღებთ საძებნ გამოსახვას.

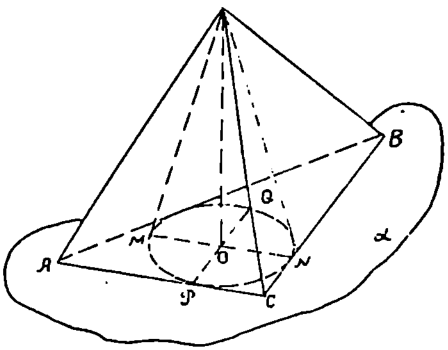
6. ცილინდრის გამოსახვა. ცილინდრის გამოსახვა განისაზღვრება შემონახაზითა და ზედა და ქვედა ფუძეების გამოსახვით.

მეტი თვალსაჩინოების მიზნით ყოველივე ამას უმატებენ ცილინდრის ღერძის გამოსახვას.

მართი წრიული ცილინდრის გამოსახვის აგება შეიძლება შემდეგი თანამიმდევრობით შევასრულოთ: გამოვსახოთ O_1 ელიფსი



ნახ. 64.

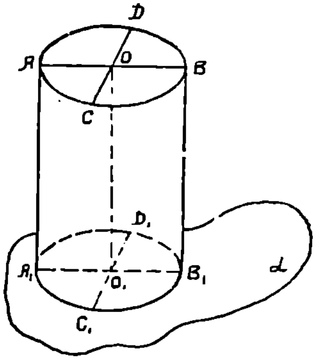


ნახ. 65.

და ავაგოთ მისი ვერტიკალური მხებების წყვილი[1]. ერთ-ერთ მხებზე ავიღოთ ნებისმიერი A წერტილი. გავზომოთ A_1A-ის ტოლი მონაკვეთი მეორე მხებზე, მივიღებთ ზედა ფუძის ერთ-ერთ AB დიამეტრს (ნახ. 66). ზედა ფუძის CD დიამეტრი ქვედა ფუძის A_1B_1 დიამეტრის შეუღლებული C_1D_1 დიამეტრის ტოლია და პარალელურია. ამნაირად, გავავლებთ $CD \upuparrows C_1D_1$. შემდეგ კი შეუღლებული AB და CD დიამეტრების საშუალებით ჩვენ ავაგებთ ზედა ფუძის ელიფსს.

ნახაზის უფრო მეტი თვალსაჩინოებისათვის გამოსახვას დავუმატოთ ცილინდრის OO_1 ღერძის გამოსახვა.

AA_1 და BB_1 მსახველები მდებარეობენ ერთსა და იმავე ღერძით კვეთაზე.



ნახ. 66.

§ 7. სფეროს გამოსახვა

1. სფეროს შემონახაზი. ვთქვათ, რომ სხეული, რომლის გამოსახვა ჩვენ უნდა ავაგოთ რომელიმე α სიბრტყეზე არის სფერო. სფეროზე შემოხაზული ცილინდრი ყოველთვის წარმოადგენს ბრუნვით ცილინდრს, ამიტომ სფეროს მაგეგმილებელი ცილინდრი იქნება ბრუნვითი ცილინდრი. ამ ცილინდრის თანახების ხაზი სფეროს ზედაპირთან კი არის წრეხაზი. ამრიგად სფეროს ხილული კონტური წარმოადგენს წრეხაზს. სხეულის შემონახაზი, როგორც ვიცით, არის ამ სხეულის ხილული კონტურის პროექცია გამოსახვათა სიბრტყეზე ან, რაც იგივეა, მაგეგმილებელი ცილინდრისა და გამოსახვათა სიბრტყის თანაკვეთის ხაზი წარმოადგენს სხეულის შემონახაზს.

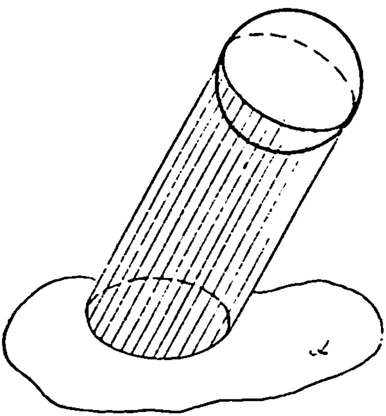
თუ ჩვენ ვსარგებლობთ ირიბკუთხოვანი პარალელური პროექციით, მაშინ მაგეგმილებელი ცილინდრის მსახველები რაიმე კუთხით დახრილი არიან გამოსახვათა α სიბრტყის მიმართ და სფეროს შემონახაზს მივიღებთ ელიფსის სახით (ნახ. 67 ა). იმ შემთხვე-

[1] იხ. შენიშვნა 84-ე გვერდზე.

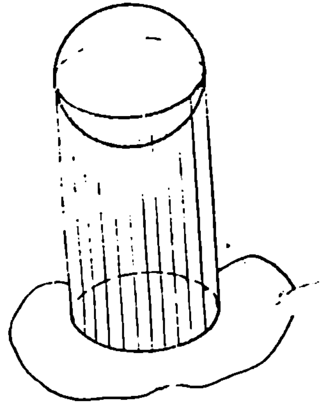
ვაში კი, როცა ვსარგებლობთ ორთოგონალური პროექციით, სფეროს შემონახაზს მივიღებთ წრეხაზის სახით (ნახ. 67 ბ). მასთან, ამ წრეხაზის დიამეტრი უდრის სფეროს ხილული კონტურის დიამეტრის ნატურალურ სიდიდეს. მაგრამ სფეროს ხილული კონტური წარმოადგენს სფეროს დიდი წრის წრეხაზს, ამიტომ სფეროს შემონახაზის დიამეტრი უდრის სფეროს დიამეტრის ნატურალურ სიდიდეს.

ამრიგად, ირიბკუთხოვან პარალელურ პროექციაში სფეროს შემონახაზი წარმოადგენს ელიფსს, ხოლო ორთოგონალურ პროექციაში—წრეხაზს.

ისმება კითხვა: მისაღებია თუ არა სფეროს გამოსახვა ელიფსის



ნახ. 67 ა.



ნახ. 67 ბ.

სახით? მიუხედავად იმისა, რომ სფეროს გამოსახვა ელიფსის სახით წარმოადგენს სწორ გამოსახვას, იგი მაინც არ შეიძლება რეკომენდირებულ იქნას, რადგან სფეროს გამოსახვა ელიფსის სახით არ შეესაბამება იმ მხედველობით შტაბეჭდილებას, რომელსაც თვით სფერო ახდენს ადამიანის თვალის ბადურაზე[1]. ამიტომ ასეთი გამოსახვა ოდნავადაც ვერ აკმაყოფილებს თვალსაჩინოების მოთხოვნას, რასაც განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა აქვს სწავლებაში.

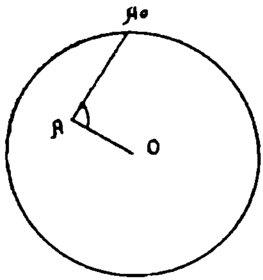
[1] იხ. ამ მოვლენის ახსნა, проф. Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946, стр. 145.

რაც შეეხება სფეროს გამოსახვას წრეხაზის სახით იგი ყველაზე უფრო თვალსაჩინოა, ამიტომ სფეროს გამოსასახავად, ერთადერთ ხელსაყრელ პროექციას ორთოგონალური პროექცია წარმოადგენს. ამ მიზეზის გამო კი, როცა საქმე გვაქვს სფეროს გამოსახვის შემცველ გამოსახვებთან, მთელი გამოსახვა შესრულებული უნდა იქნას ორთოგონალურ პროექციაში, რადგან, როგორც § 1—ში აღინიშნა, გამოსახვა არ იქნება სწორი, თუ მისი ერთი ნაწილი გამოსახულია ერთ პროექციაში და მეორე კიდევ სხვა პროექციაში.

ვეყრდნობით რა პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის აზრს, ჩვენც გარკვეულობისათვის მივიღებთ, რომ გამოსახვათა α სიბრტყე გადის სფეროს ცენტრზე. გამოსახვათა სიბრტყის ასეთნაირი ამორჩევა ხელსაყრელია, რასაც ქვემოთ დავინახავთ.

განვიხილოთ ახლა ერთი მარტივი ამოცანის ამოხსნა სფეროს გამოსახვაზე. ეს ამოცანა ამოღებული გვაქვს ნ. ჩეტვერუხინის ზემოთ ციტირებული წიგნიდან.

ამოცანა. მოცემულია სფეროსა და A' წერტილის გამოსახვა A, რომელიც სფეროს ზედაპირზე მდებარეობს. ვიპოვოთ A' წერტილის მანძილი გამოსახვათა სიბრტყემდე, თუ გამოსახვათა სიბრტყე გადის სფეროს ცენტრზე.



ნახ. 68.

ამოხსნა. წარმოვიდგინოთ მაგეგმილებელი სიბრტყე, რომელიც გადის A' და O' წერტილზე (O' სფეროს ცენტრია). ამ სიბრტყის კვალი გამოსახვათა სიბრტყეზე იქნება AO, ხოლო სფეროს ზედაპირზე—დიდი წრის წრეხაზი (ნახ. 68).

თუ ახლა ამ სიბრტყეს შევუთავსებთ გამოსახვათა სიბრტყეს, რასაც შეიძლება მივაღწიოთ მისი ბრუნვით OA კვალის გარშემო, მაშინ დიდი წრე შეუთავსდება სფეროს შემონახაზს, ხოლო A' წერტილი დაიჭერს A_0 წერტილის მდებარეობას ამ შემონახაზზე. მასთან გვექნება, რომ $A_0A \perp OA$; A_0A მონაკვეთი გამოსახავს A' წერტილის მანძილს გამოსახვათა სიბრტყემდე. ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ ამოცანის ამოხსნის მარტივ ხერხს: გავავლებთ AO კვალს და მის

A ბოლოში გავიყვანთ AO-ს პერპენდიკულარულ სწორს სფეროს შემონახაზის გადაკვეთამდე A_0 წერტილში. AA_0 იქნება საძებნი მანძილი.

A_0 წერტილს, რომელიც მიიღება $A'O'$ სწორზე გამავალი მაგეგმილებელი სიბრტყის გამოსახვათა სიბრტყესთან შეთავსების საშუალებით უწოდებენ A' წერტილის შეთავსებას. AA_0 მონაკვეთს ხშირად A' წერტილის სიმაღლეს უწოდებენ და ნაცვლად გამოთქმისა „იპოვეთ მანძილი A' წერტილიდან გამოსახვათა სიბრტყემდე", ამბობენ „იპოვეთ A' წერტილის სიმაღლე".

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ სფეროს გამოსახვა მისი შემონახაზის სახით წარმოადგენს სრულ და მეტრიკულად განსაზღვრულ გამოსახვას. მართლაც, გამოსახვის სისრულე გამომდინარეობს იქედან, რომ შემონახაზის ყველა წერტილი ძირითად სიბრტყეზე მდებარეობს, ხოლო მისი მეტრიკული განსაზღვრულობა კი იქედან, რომ სფეროს გამოსახვის მოცემა ნიშნავს მისი დიამეტრის ნატურალური სიდიდის მოცემას, რაც თავის მხრივ განსაზღვრავს თვით სფეროს, პარალელურ გადაადგილებამდე დაგეგმილების მიმართულებით.

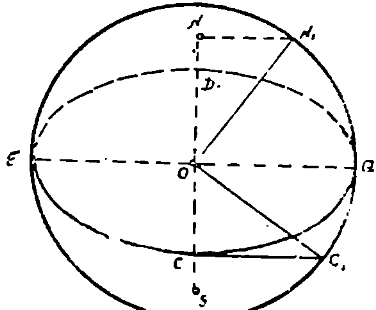
2. **სფეროს კვეთა სიბრტყით.** სფეროს გამოსახვა შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც მისი ისეთი კვეთის გამოსახვა, რომელიც სფეროს ცენტრზე გადის. ასეთ შემთხვევაში გამოსახვათა სიბრტყედ მიღებულია მკვეთი სიბრტყე.

სფეროს კვეთას ჰორიზონტალური სიბრტყით, რომელიც სფეროს ცენტრზე გადის და, მაშასადამე, კვეთაში დიდ წრეს იძლევა, სფეროს ეკვატორს უწოდებენ, ხოლო ეკვატორის პერპენდიკულარულ და სფეროს ცენტრზე გამავალ ყოველ კვეთას მერიდიანი ეწოდება. მერიდიანული სიბრტყეები ქმნიან სიბრტყეთა ძნულს, ამ ძნულის ღერძი ეკვატორის პერპენდიკულარულია და მ ა ს ს ფ ე რ ო ს ღ ე რ ძ ი ე წ ო დ ე ბ ა. ეს ღერძი სფეროს ზედაპირს გადაკვეთს ორ წერტილში, რომელსაც სფეროს პოლუსები ეწოდება. იმ პოლუსს, რომელიც ეკვატორის ზემოთაა მოთავსებული ეწოდება ჩრდილოეთ პოლუსი, ხოლო ეკვატორის ქვემოთ მოთავსებულ პოლუსს—სამხრეთ პოლუსი. ჩრდილოეთ პოლუსი აღინიშნება N ასოთი, ხოლო სამხრეთ პოლუსი—S-ით. ნახაზზე ეკვატორი და მერიდიანი გამოისახებიან ელიფსების სახით.

გამოვსახოთ ახლა სფერო მის ეკვატორთან ერთად.

თუ გამოსახვათა სიბრტყე გადის სფეროს NS დიამეტრზე, მაშინ სფეროს გამოსახვა მის ეკვატორთან ერთად იქნება წრეხაზი ორი ურთიერთ პერპენდიკულარული დიამეტრებით (ნახ. 10). მართლაც, ასეთ შემთხვევაში ეკვატორი გამოსახვათა სიბრტყის პერპენდიკულარულია და მისი ორთოგონალური გეგმილი იქნება EQ დიამეტრი. ასეთი გამოსახვა კი არათვალსაჩინოა.

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ გამოსახვათა სიბრტყე დახრილია რაიმე კუთხით NS დიამეტრისადმი (ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ N პოლუსი მოქცეულია ჩვენს მხარეს მოქცეულ ნახევარსფეროზე), მაშინ ეკვატორი გამოსახვათა სიბრტყეზე წარმოგვიდგება ელიფსის სახით, ხოლო N და S პოლუსების გამოსახვები უკვე აღარ მოთავსდებიან სფეროს შემონახაზზე (ნახ. 69). ადვილი მისახვედრია, რომ E და Q წერტილები უნდა მდებარეობდნენ სფეროს შემონახაზზე და წარმოადგენდნენ საზღვრებს სფეროს ეკვატორის გამოსახვის ხილულ და უხილავ ნაწილებს შორის. მართლაც, რადგან $E'C'Q'D'$ ეკვატორი კვეთს სფეროს ხილულ კონტურს E' და Q' წერტილებში, ამიტომ წინა §-ში მოცემული თეორემის თანახმად $E'C'Q'D'$ ხაზის გამოსახვა $ECQD$ სფეროს შემონახაზს გადაკვეთს E და Q წერტილებში, რომლებიც E' და Q' წერტილების გამოსახვებს წარმოადგენენ.



ნახ. 69

ნახაზზე წარმოდგენილ $CD \perp EQ$ მონაკვეთებს ელიფსის ღერძები ეწოდება. მასთან EQ წარმოადგენს დიდ ღერძს, ხოლო CD მცირე ღერძს. აქვე აღვნიშნავთ, რომ ელიფსის ყველა შეუღლებულ დიამეტრთა სიმრავლეში არსებობს მხოლოდ და მხოლოდ დიამეტრების ერთი წყვილი, რომლებიც ერთმანეთის პერპენდიკულარებია და მათ ელიფსის ღერძები ეწოდება[1].

წრეხაზის ცენტრიდან მისი სიბრტყისადმი ამართული პერპენდიკულარის გამოსახვა ემთხვევა ამ წრეხაზის გამოსახვის, ე. ი.

[1] იხ. ამის დამტკიცება, Проф. Н. Ф. Четверухин. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946, стр. 45.

ელიფსის, მცირე ღერძის გამოსახვას[1]. მივიღებთ რა ამ გარემოებას მხედველობაში დავრწმუნდებით, რომ სფეროს NS ღერძის გამოსახვა ემთხვევა ეკვატორის ელიფსის CD მცირე ღერძის გამოსახვას, მაშასადამე, $NS \perp EQ$.

ახლა წარმოვიდგინოთ მაგეგმილებელი სიბრტყე, რომელიც გადის $C'D'$ სწორზე. ცხადია, რომ მისი კვალი გამოსახვათა სიბრტყეზე იქნება CD. შევუთავსოთ ეს მაგეგმილებელი სიბრტყე გამოსახვათა სიბრტყეს, რასაც მივაღწევთ მისი ბრუნვით CD კვალის გარშემო; მაშინ ჩვენ მივიღებთ C' წერტილის C_1 შეთავსებას ($CC_1 \perp OC$); OC_1 კი იქნება $O'C'$ რადიუსის შეთავსება. სფეროს ღერძი $N'S' \perp C'D'$, ამიტომ $N'S'$-ის შეთავსება $O'C'$ რადიუსის შეთავსების პერპენდიკულარულია, მაშასადამე, გავავლებთ რა $ON_1 \perp OC_1$, მივიღებთ სფეროს N' პოლუსის N_1 შეთავსებას.

ამის შემდეგ განვიხილოთ NON_1 და COC_1 სამკუთხედები; ამ სამკუთხედების ტოლობიდან ($\angle NN_1O = \angle COC_1$ და $ON_1 = OC_1$) გამომდინარეობს, რომ $NO = CC_1$ და $NN_1 = OC$.

მიღებული შედეგების გამოყენებით შეიძლება ავაგოთ სფეროს გამოსახვა მის ეკვატორთან ერთად, რაც საკმაოდ თვალსაჩინო გამოსახვას მოგვცემს. აშკარაა, რომ სფეროს შემონახაზი უფრო ნაკლებ თვალსაჩინოა, ვიდრე სფეროს გამოსახვა ეკვატორით და შემონახაზით. ამ აგების დროს განსაკუთრებული ხაზგასმით უნდა იქნას აღნიშნული, რომ: 1) თუ მოცემულია სფეროს შემონახაზისა და მისი პოლუსების გამოსახვები, მაშინ ეკვატორის გამოსახვა არ შეიძლება ნებისმიერად ავიღოთ. მართლაც, რადგან $N_1N = OC = OD$ და $EQ \perp NS$, ამიტომ უნდა მოვიქცეთ ასე: გავავლოთ $EQ \perp NS$ და $NN_1 \perp NS$ და მოვზომოთ $OD = OC = NN_1$, მივიღებთ ეკვატორის გამოსახვის მცირე CD ღერძს. შემდეგ კი ელიფსის CD და EQ ღერძების საშუალებით ავაგებთ მას. ეს ელიფსი ეკვატორს გამოსახავს; 2) თუ მოცემულია სფეროს შემონახაზისა და მისი ეკვატორის გამოსახვა, მაშინ პოლუსების მდებარეობანი განისაზღვრებიან აგებით. მართლაც, გავიყვანოთ $CC_1 \perp CD$ და CD-ზე O წერტილის ორივე მხარეს მოვზომოთ $ON = OS = CC_1$, მივიღებთ პოლუსების გამოსახვებს.

აღნიშნულ გარემოებას ხშირად არ უწევენ ანგარიშს. მაგალითად, ვ. მ. ბრადისი იძლევა სფეროს გამოსახვას ეკვატორითა და

[1] დამტკიცება იხ. წინა გვერდზე დასახელებულ წიგნში, გვ. 46.

შემონახაზით, მაგრამ გამოსახვაზე არ არის დაცული პირობები $ON=OC_1$ ან $NN_1=OD$[1].

გავაცნობთ რა მოსწავლეებს იმ მონაცემებს, რომლებიც ჩვენ სფეროს გამოსახვის შესახებ მოვიტანეთ, საჭიროა მათ მივცეთ ამ გამოსახვის აგების შემდეგი ხერხი: სფეროს გამოსახვის აგება შეიძლება შევასრულოთ შემდეგი თანმიმდევრობით:

1) გამოვსახოთ ნებისმიერი ელიფსი და გავავლოთ მისი EQ და CD ღერძები. იმისათვის, რომ გამოსახვას მეტი თვალსაჩინოება მიეცეს, საჭიროა ყველა ხაზი სფეროს შიგნით საერთოდ და, კერძოდ, CD და EQ მონაკვეთები გამოსახული იქნან პუნქტირით. ელიფსის ასაგებად უნდა ვისარგებლოთ მისი შაბლონით.

2) O წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვხაზოთ $OQ=OE$ რადიუსის წრეხაზი; ეს წრეხაზი იქნება სფეროს შემონახაზი.

3) გავიყვანოთ $CC_1 \perp OC$ სფეროს შემონახაზის გადაკვეთამდე და შემდეგ CD-ს გაგრძელებაზე მოვზომოთ $ON=OS=CC_1$, მივიღებთ სფეროს N და S პოლუსების გამოსახვებს (ნახ. 69).

სფეროს გამოსახვის აგება შეიძლება შევასრულოთ ასეც:

1) ავაგოთ სფეროს შემონახაზი (წრეხაზი);

2) გავიყვანოთ შემონახაზის ცენტრზე ვერტიკალური NS მონაკვეთი და მოვზომოთ მასზე $ON=OS$ (ისე, რომ N და S წერტილები მოთავსდნენ სფეროს შემონახაზის შიგნით). NS იქნება სფეროს დიამეტრის გამოსახვა.

3) გავავლოთ NN_1 და EOQ სწორები NS-ის პერპენდიკულარულად და ამ უკანასკნელზე მოვზომოთ $OD=OC=NN_1$;

4) CD და EQ ღერძების საშუალებით ავაგებთ ეკვატორის გამოსახვას—ელიფსს (ნახ. 69).

სფეროს გამოსახვა უმჯობესია შევასრულოთ პირველი ხერხით, რადგან ამ შემთხვევაში, გამოვსახავთ რა ნებისმიერ ელიფსს (რაც განსაკუთრებით უჭირთ მოსწავლეებს) შაბლონის საშუალებით, შემდეგ მის დიდ ღერძზე, როგორც დიამეტრზე, ავაგებთ წრეხაზს, რაც მარტივია. მეორე შემთხვევაში კი საჭიროა CD და EQ ღერძების საშუალებით ელიფსის აგება, რაც უფრო რთულია, რადგან სათანადო შაბლონი შეიძლება ჩვენს განკარგულებაში არ აღმოჩნდეს.

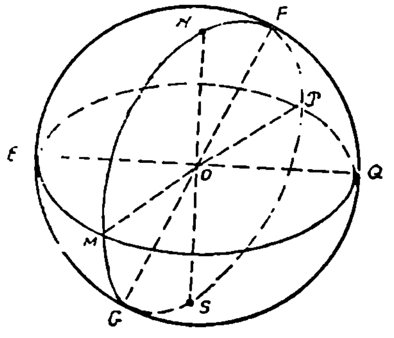
სფეროს გამოსახვა მისი ეკვატორითა და ერთ-ერთი მერიდია-

[1] В. М. Брадис, Методика преподавания математики в средней школе, Учпедгиз, 1954, стр. 384.

ნით მოცემულია ნახ. 70-ზე, სადაც MP და NS მერიდიანის შეუღლებული დიამეტრებია.

განვიხილოთ ახლა მაგალითი სფეროს კვეთის აგებაზე.

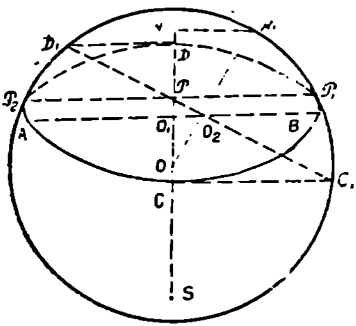
მაგალითი. მოცემულია სფეროსა და მისი ON რადიუსის გამოსახვა. ამ რადიუსზე აღებულია O_1 წერტილი. მოითხოვება სფეროს კვეთის აგება, რომელიც გადის O_1 წერტილზე ON რადიუსის პერპენდიკულარულად.



ნახ. 70.

ამოხსნა. სფეროს ყოველი კვეთა სიბრტყით წრეა, ამიტომ ჩვენ მოგვიხდება ელიფსის აგება, რისთვისაც საკმარისია ვიპოვოთ მისი დიდი და მცირე ღერძები და კიდევ ის წერტილები, რომლებიც წარმოადგენენ საზღვრებს კვეთის ხილულ და უხილავ ნაწილებს შორის. $O'N'$ მაგეგმილებელი სიბრტყე შევუთავსოთ გამოსახვათა სიბრტყეს, მაშინ ჩვენ მივიღებთ N' წერტილის N_1 შეთავსებას ($NN_1 \perp NS$) და O_1 წერტილის O_2 შეთავსებას. O_2 წერტილზე გავავლოთ $C_1D_1 \perp ON_1$. მაშინ C_1D_1 იქნება კვეთის წრის დიამეტრის ნამდვილი სიდიდე, რომელიც გამოსახვაზე წარმოგვიდგება დაუმახინჯებლად; ამიტომ ავაგოთ $AB = C_1D_1$ (ნახ. 71). კვეთის გამოსახვის მცირე ღერძის მისაღებად C_1D_1 დავაგეგმილოთ ორთოგონალურად NS ღერძზე, მივიღებთ C და D წერტილებს. CD იქნება კვეთის მცირე ღერძის გამოსახვა. მკვეთი სიბრტყის კვალი გამოსახვათა სიბრტყეზე იქნება P_1P_2. მისი აგება შეიძლება შემდეგი მოსაზრებების საფუძველზე: მკვეთი სიბრტყე პერპენდიკულარულია ON რადიუსისა. ამიტომ $P = C_1D_1 \times ON$ წერტილზე გავიყვანოთ $P_1P_2 \perp ON$; P_1 და P_2 წერტილები გამოსახავენ საზღვრებს კვეთის ხილულ და უხილავ ნაწილებს შორის. მაშასადამე, გამოსასახავი ელიფსი სფეროს შემონახაზს შეეხება P_1 და P_2 წერტილებზე. საძებნი კვეთის გამოსახვას მივიღებთ, თუ A, P_2, D, P_1, B და C წერტილებზე ავაგებთ ელიფსს (AB ამ ელიფსის დიდ ღერძს წარმოადგენს).

3. სფეროში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული გეომეტრიული სხეულების გამოსახვათა აგება. სტერეომეტრიის სასკოლო კურსში გამოანგარიშებაზე ამოცანების ამოხსნის დროს საჭირო ხდება გამოვსახოთ სფერო და სხვადასხვა გეომეტრიული სხეულები მათ კომბინაციებში. უმთავრესად კი ჩვენ საქმე გვაქვს ისეთ ამოცანებთან, რომლებშიაც ლაპარაკია სფეროში ჩახაზული ან მასზე შემოხაზული მრავალწახნაგა სხეულების ან ცილინდრისა და კონუსის შესახებ. ამ ამოცანების ამოხსნისათვის საჭიროა მოსწავლემ ააგოს საჭირო ნახაზი. ამისათვის კი ერთ-ერთ აუცილებელ პირობას წარმოადგენს იმის ცოდნა, თუ, მაგალითად, რანაირ მრავალწახნაგს ეწოდება სფეროში ჩახაზული ან მასზე შემოხაზული. უნდა აღინიშნოს, რომ მოსწავლეებს ძლიერ უჭირთ ასეთი ნახაზების აგება. ამის მთავარი მიზეზია მოსწავლეთა სუსტი სივრცითი წარმოდგენები. სტაბილური სახელმძღვანელო კი არ იძლევა შესაძლებლობას დაძლეულ იქნას არსებული სიძნელეები. მართლაც, სტაბილურ სახელმძღვანელოში ვერ ვხვდებით ვერცერთ ნიმუშს ასეთი გამოსახვების აგებისას, უფრო მეტიც, მასში განსაზღვრებიც კი არ არის მოცემული იმისა, თუ რომელ მრავალწახნაგას ეწოდება სფეროში ჩახაზული ან მასზე შემოხაზული და სხვა.



ნახ. 71.

ამის გამო ჩვენ საჭიროდ ვთვლით განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი სფეროში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული გეომეტრიული სხეულების გამოსახვათა აგებაზე.

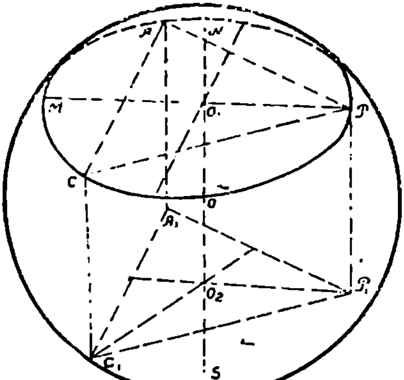
ა) სფეროში ჩახაზული მრავალწახნაგა სხეულები.

მივცემთ შემდეგ განმარტებას: სფეროს ეწოდება მრავალწახნაგაზე შემოხაზული, ხოლო მრავალწახნაგას—სფეროში ჩახაზული, თუ მრავალწახნაგას წვეროები მდებარეობენ სფეროს ზედაპირზე.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვსახოთ სფერო მასში ჩახაზული წესიერი სამკუთხა პრიზმით.

გამოვსახოთ სფერო მისი NS დიამეტრითა და ამ დიამეტრის O_1 წერტილზე გავლებული პერპენდიკულარული კვეთით (ნახ. 72). ამ კვეთის აგება იყო შესრულებული წინა პუნქტში ერთ-ერთი ხერხით. მაგრამ ყოველთვის ამ ხერხით სარგებლობა მოუხერხებელია, რადგან იგი დაკავშირებულია გარკვეულ აგებებთან, რომლებიც იმდენად ტვირთავენ ნახაზს, რომ ძნელი ხდება მის ელემენტებში გარკვევა. გარდა ამისა, ხსენებული აგებების ჩატარება გარკვეულ დამატებით დროს მოითხოვს, რაც თავის მხრივ დამატებით სიძნელეს ქმნის მუშაობის პროცესში. ამიტომ ჩვენ ვფიქრობთ, რომ შეიძლება დავკმაყოფილდეთ ამ კვეთის მიახლოებითი აგებით. მხოლოდ მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ამ კვეთის დიდ-



ნახ. 72.

ღერძის ბოლოები არ შეიძლება მდებარეობდნენ სფეროს შემონახაზზე, რადგან ამ გარემოებას ორიგინალში ადგილი არა აქვს. ამრიგად, ხსენებული კვეთა შეიძლება დაახლოებით ისე იქნას წარმოდგენილი, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 72-ზე.

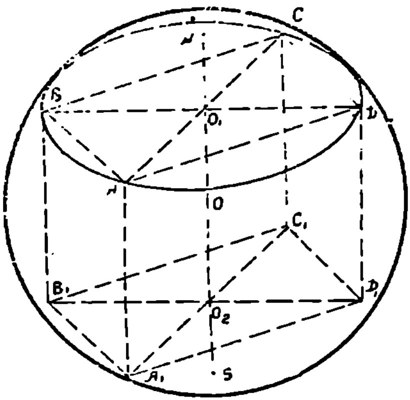
ამის შემდეგ გამოვსახოთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ზედა ფუძე. ამისათვის მხედველობაში მივიღოთ, რომ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ღერძი ემთხვევა სფეროს NS დიამეტრს და ავაგოთ წესიერი სამკუთხედის გამოსახვა, რომელიც ჩახაზულია ელიფსში (იხ. ეს აგება § 5-ში).

ბოლოს ACP სამკუთხედის წვეროებზე გავავლოთ NS-ის პარა-

ლელური მონაკვეთები ისე, რომ $AA_1=PP_1=CC_1=2CO_1$ და დავამთავროთ პრიზმის გამოსახვის აგება.

მაგალითი 7. გამოვსახოთ სფერო მასში ჩახაზული წესიერი ოთხკუთხა პრიზმით.

გამოვსახოთ სფერო NS დიამეტრით და ამ დიამეტრის O_1 წერტილზე გავლებული პერპენდიკულარული კვეთით (ნახ. 73). წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ღერძი ემთხვევა სფეროს NS ღერძს. გავიყვანოთ O_1 წერტილზე კვეთის BD და AC შეუღლებული დიამეტრები.



ნახ 73.

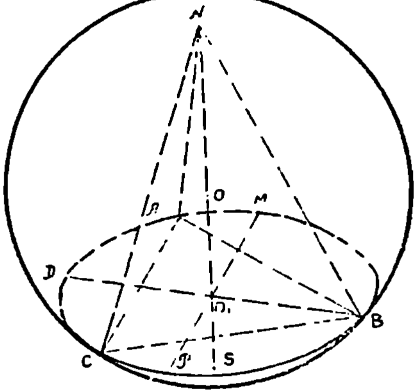
ბი. ამით ჩვენ ვიპოვით ჩახაზული წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედა ფუძის წვეროების გამოსახვებს და ამნაირად ავაგებთ ამ ფუძის გამოსახვას. შემდეგ კი A, B, C და D წერტილებზე გავავლებთ NS-ის პარალელურ სწორებს ისე, რომ თითოეული მათგანის სიგრძე იყოს $2OO_1$-ის ტოლი და დავამთავრებთ მთელი გამოსახვის აგებას.

მაგალითი 8. გამოვსახოთ სფერო მასში ჩახაზული წესიერი სამკუთხა და წესიერი ოთხკუთხა პირამიდებით (ნახ. 74 და ნახ. 75).

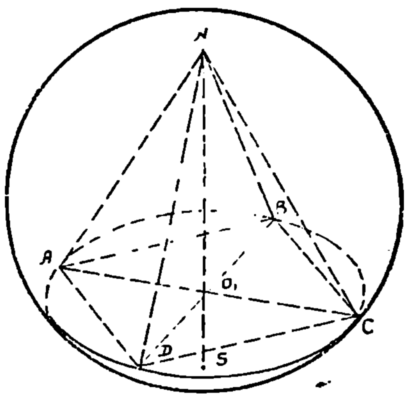
პირამიდის ფუძის გამოსახვის წვეროები მოთავსდებიან NS დიამეტრის პერპენდიკულარული კვეთის წრეხაზზე (გამოსახვაზე ელიფსი), ხოლო პირამიდის წვერო მოთავსდება სფეროს იმ დიამეტრის ბოლოზე, რომელიც პირამიდის ფუძის პერპენდიკულარუ-

ლია. თუ წესიერი პირამიდის წახნაგების რიცხვი აღემატება ოთხს, მაშინ გამოსახვაზე საკმაოა ნაჩვენები იქნას პირამიდის $\frac{1}{n}$ ნაწილი.

ბ) სფეროში ჩახაზული ცილინდრი და კონუსი.



ნახ. 74.



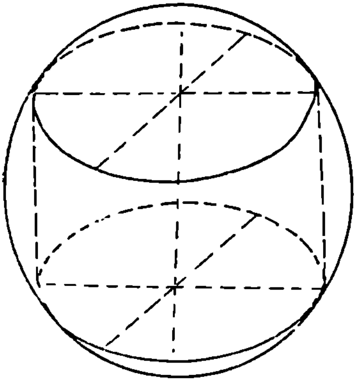
ნახ. 75.

განმარტება 1. სფეროს ეწოდება ცილინდრზე (წაკვეთილ კონუსზე) შემოხაზული, ხოლო ცილინდრს (წაკვეთილ კონუსს)—სფე-

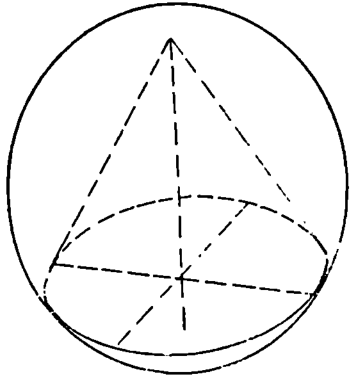
რომში ჩახაზული, თუ მათი ფუძეთა წრეხაზები მდებარეობენ სფეროს ზედაპირზე.

განმარტება 2. სფეროს ეწოდება კონუსზე შემოხაზული, ხოლო შესაბამის კონუსს—სფეროში ჩახაზული, თუ მისი ფუძის წრეხაზი და მისი წვერო მდებარეობენ სფეროს ზედაპირზე.

სფეროში ჩახაზული მართი წრიული ცილინდრისა და მართი წრიული კონუსის გამოსახვები მოცემულია ნახ. 76-ზე და ნახ. 77-ზე.



ნახ. 76.



ნახ. 77.

გ) სფეროზე შემოხაზული მრავალწახნაგები

განმარტება. მრავალწახნაგას ეწოდება სფეროზე შემოხაზული, ხოლო სფეროს—მრავალწახნაგაში ჩახაზული, თუ სფეროს ზედაპირი ეხება მრავალწახნაგას ყველა წახნაგს.

განვიხილოთ მაგალითი.

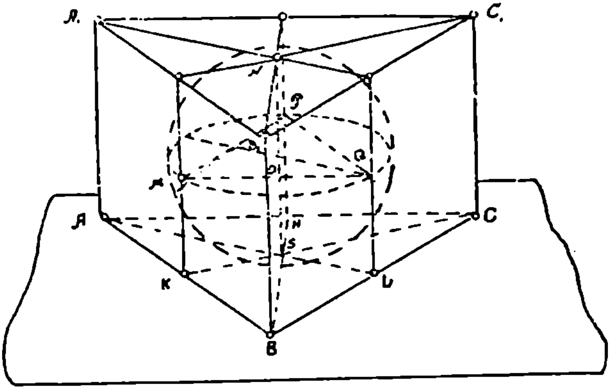
ავაგოთ სფეროსა და მასზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხა პრიზმის გამოსახვა.

აგებას შევასრულებთ შემდეგი მიმდევრობით:

1. გამოვსახოთ სფერო ეკვატორითა და NS ღერძით (ნახ. 78). ავაგოთ ეკვატორულ წრეში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გამოსახვა.

2. წესიერი სამკუთხედის M, P და Q წვეროზე გავავლოთ NS-ის პარალელური სწორები და მოვზომოთ მათზე NS-ის ტოლი მონაკვეთები ისე, რომ M, P და Q წერტილები მოზომილი მონაკვეთების შუაწერტილები იყოს. NS გამოსახავს სფეროზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხა პრიზმის ღერძს.

3. NS-ის პარალელური მონაკვეთების ბოლოები K, L და H წარმოადგენენ შემოხაზული წესიერი პრიზმის ქვედა ფუძის გვერდების შუაწერტილებს. პრიზმის ფუძის გვერდების მიმართულებანი ემთხვევიან შესაბამად ეკვატორისადმი M, P და Q წერტილებზე გავლებული მხებების მიმართულებებს; მაგრამ ამ მხებების მიმართულებანი შეუღლებულია M, P და Q წერტილებზე გავლებული



ნახ. 78.

დიამეტრებისა, ამიტომ საჭიროა K, H და L წერტილებზე გავავლოთ სწორები: $AB \parallel PQ$, $AC \parallel MQ$ და $BC \parallel MP$. ამ სწორების ერთმანეთთან გადაკვეთა მოგვცემს სამკუთხედს, რომელიც წესიერი სამკუთხა პრიზმის ქვედა ფუძის გამოსახვა იქნება. დანარჩენი აგებები ნათელია თვით ნახაზიდან.

ე) სფეროზე შემოხაზული ცილინდრი და კონუსი.

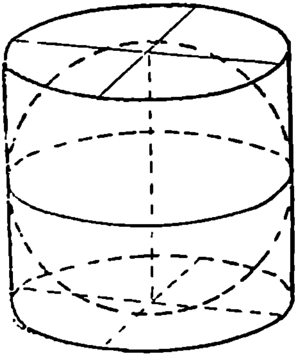
განმარტება 1. სფეროს ეწოდება ცილინდრში ჩახაზული (წაკვეთილ კონუსში), ხოლო ცილინდრს (წაკვეთილ კონუსს)—სფეროზე შემოხაზული, თუ მისი ზედაპირი ეხება ცილინდრის (წაკვეთილი კონუსის) ფუძეებს და გვერდით ზედაპირს.

განმარტება 2. სფეროს ეწოდება კონუსში ჩახაზული, ხოლო კონუსს—სფეროზე შემოხაზული, თუ მისი ზედაპირი ეხება კონუსის ფუძეს და გვერდით ზედაპირს.

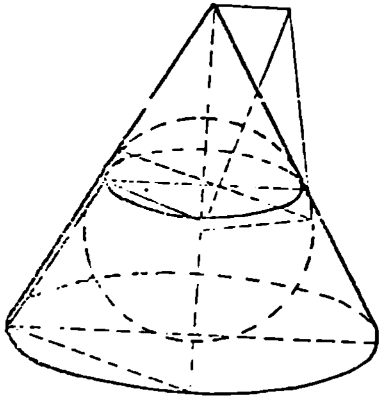
შენიშვნა 1. ამ განმარტებებში ლაპარაკია შეხების ჩაკეტილ ხაზებზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ცილინდრში მხოლოდ მაშინ შეიძლება სფეროს ჩახაზვა, როცა იგი ტოლგვერდაა (ეს იმას ნიშნავს, რომ ცილინდრის ღერძითი კვეთა წარმოადგენს კვადრატს).

ცილინდრში ჩახაზული სფერო წარმოდგენილია ნახ. 79-ზე, ბოლო კონუსში ჩახაზული სფერო—ნახ. 80-ზე.



ნახ. 79.



ნახ. 80.

თავი III

პოზიციური ამოცანების ამოხსნის სწავლება სტერეომეტრიის სასკოლო კურსში

§ 1. საპროექციო ნახაზის შემოტანა საშუალო სკოლის სტერეომეტრიის კურსში

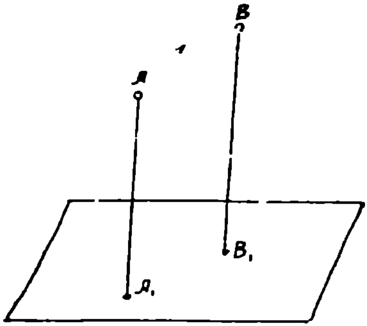
საშუალო სკოლაში საპროექციო ნახაზის შემოტანა წარმოადგენს ერთ-ერთ მეტად საპასუხისმგებლო მომენტს. ცხადია, რომ მოსწავლეთა კარგად გარკვევა საპროექციო ნახაზის არსში საუკეთესო წინაპირობაა მათი შემდგომი წარმატებითი მუშაობისათვის აგებაზე ამოცანების ამოხსნაში. ამიტომ საჭიროა დაწვრილებით შევჩერდეთ საპროექციო ნახაზის შემოტანის საკითხზე.

ცნება საპროექციო ნახაზზე მოსწავლეებს უნდა მივცეთ რაც შეიძლება ადრე. მაგრამ საპროექციო ნახაზის გაცნობა არ შეიძლება მანამ, სანამ მოსწავლეებს არ ექნებათ შესწავლილი პარალელური დაგეგმილება და მისი თვისებები. პარალელური დაგეგმილება და მისი თვისებები მოსწავლეებს შეიძლება გავაცნოთ სივრცეში სწორი ხაზების პარალელობასთან დაკავშირებით. ეს კი არსებული პროგრამის საფუძველზე შესაძლებელია სტერეომეტრიის კურსის შესწავლის დასაწყისიდან დაახლოებით მე-3 ან მე-4 გაკვეთილზე. ამრიგად, საპროექციო ნახაზზე ლაპარაკი შეიძლება სტერეომეტრიის მე-5 ან მე-6 გაკვეთილებიდან.

საპროექციო ნახაზის შემოტანაში უპირველეს ყოვლისა უნდა გვესმოდეს წერტილების, სწორების და სიბრტყეების გამოსახვის მოცემის ხერხის გაცნობა და შემდეგ რიგი პირველი ამოცანების ამოხსნა, რომლებიც ხელს შეუწყობენ საპროექციო ნახაზის უფრო მეტად გაგებას.

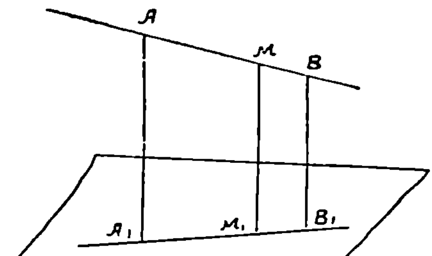
საპროექციო ნახაზზე გეომეტრიული სახეობების მოცემის ხერხი ეკუთვნის პროფ. ნ. ჩეტვერუხინს. ეს ხერხი გადმოცემულია მის წიგნში „Стереометрические задачи на проекционном чертеже". გავეცნოთ მას.

წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემულია სიბრტყის გამოსახვა, რომელსაც შემდეგისათვის ძირითადი სიბრტყე ვუწოდოთ (ნახ. 81); წარმოვიდგინოთ კიდევ, რომელიღაც სწორი AA_1, რომელიც ძირითად სიბრტყეს კვეთს A_1 წერტილში. AA_1 სწორს და აგრეთვე მის პარალელურ ყველა სწორს მაგეგმილებელი სწორი ვუწოდოთ. წერტილი A ჩავთვალოთ მოცემულად, თუ ნახაზზე A წერტილთან ერთად მოცემულია მასზე გამავალი მაგეგმილებელი სწორი და ნაჩვენებია ამ სწორის შეხვედრის A_1 წერტილი ძირითად სიბრტყესთან. A_1 წერტილს, რომელიც A წერტილის გეგმილია ძირითად სიბრტყეზე უწოდებენ A წერტილის ან კიდევ AA_1 მაგეგმილებელი სწორის ფუძეს. მაშასადამე, საპროექციო ნახაზზე წერტილი ჩაითვლება მოცემულად, თუ ნახაზზე ამ წერტილთან ერად მოცემულია მისი ფუძეც. თუ წერტილი ძირითადად სიბრტყეზე მდებარეობს, მაშინ ეს წერტილი და მისი ფუძე ერთმანეთს ემთხვევიან.



ნახ. 81.

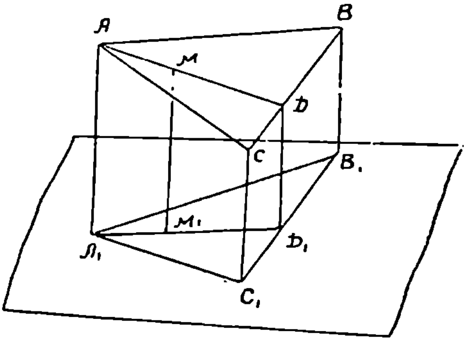
წერტილების მოცემის ეს ხერხი განსაზღვრავს უკვე სწორი ხაზისა და სიბრტყის მოცემის ხერხს. მართლაც, სწორი ხაზის მოცემისათვის საკმარისია მოცემულ იქნას მისი ორი ნებისმიერი წერტილი. ვთქვათ, მაგალითად, რომ სწორი ხაზი განსაზღვრულია A და B წერტილებით (ნახ. 82), მაშინ ნახაზზე A და B წერტილების ფუძეებიც უნდა იქნან მოცემულნი. ასეთ პირობებში ადვილად შეიძლება ავაგოთ AB სწორის ნებისმიერი M წერტილის M_1 ფუძე. ამისათვის საკმარისია M წერტილზე გავავლოთ $MM_1 \parallel AA_1$.



ნახ. 82.

მივიღებთ M წერტილის M_1 ფუძეს, რომელიც A_1B_1 სწორზე მდებარეობს.

სიბრტყე ჩაითვლება მოცემულად, თუ მოცემულია მისი განმსაზღვრელი ელემენტები: სამი წერტილი, რომლებიც ერთ სწორზე არ მდებარეობენ, ან სწორი ხაზი და მის გარეთ მდებარე წერტილი, ან ორი ურთიერთგადამკვეთი სწორი, ან ორი ურთიერთ პარალელური სწორი. სიბრტყე, რომელიც განსაზღვრულია სამი A, B და C წერტილებით გამოსახულია ნახ. 83-ზე. რომ ვიპოვოთ ამ

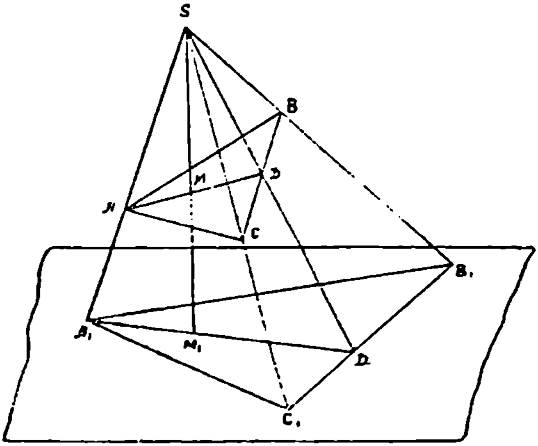


ნახ. 83.

სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილის M_1 ფუძე მოვიქცეთ ასე: ავაგოთ ჯერ $D=BC\times AM$ წერტილი და ვიპოვოთ ამ წერტილის D_1 ფუძე. ბოლოს M წერტილზე გავიყვანოთ $MM_1 \parallel AA_1$, რომელიც მოგვცემს $M_1=A_1D_1\times MM_1$ წერტილს. ანალოგიურად შეიძლება ავაგოთ ABC სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის ფუძე. მაშასადამე, ABC სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი აგრეთვე მოცემულია, რადგან მისი ფუძის აგება შესაძლებელია.

ნახაზ 83-ზე A, B და C წერტილებით განსაზღვრული სიბრტყე მოცემულია სამკუთხედის სახით. თუ საჭირო იქნება მივიღოთ წარმოდგენა მთელ სიბრტყეზე, ამისათვის A, B და C წერტილებზე და ABC სამკუთხედის ამ წერტილების მოპირდაპირე გვერდების ყველა წერტილზე გავიყვანოთ სწორები. მიღებული სწორების გეომეტრიული ადგილი მოგვცემს წარმოდგენას ABC სიბრტყეზე. აშკარაა, რომ ასეთი სწორების გავლება შეიძლება მხოლოდ წარმოვიდგინოთ, რადგან ყველა მათგანის ფაქტიურად გავლება შეუძლებელია.

წერტილების მოცემა შეიძლება მოვახდინოთ ცენტრალურ პროექციაშიც, როცა პროექციის ცენტრად აღებულია სივრცის ნებისმიერი წერტილი. მაგალითად, ნახ. 84-ზე წერტილები A, B და C მოცემულია, როცა პროექციის ცენტრად მიღებულია S წერტილი. მოცემულია აგრეთვე ამ წერტილებით განსაზღვრული სწორები AB, BC და AC და სიბრტყე ABC.



ნახ. 84.

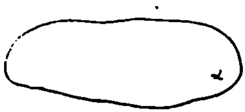
ამრიგად, ცენტრალურ პროექციაში წერტილები ჩაითვლებიან მოცემულად, თუ ნახაზზე ამ წერტილებთან ერთად ნაჩვენებია მათი მაგეგმილებელი სხივების გადაკვეთის წერტილები ძირითად სიბრტყესთან, ე. ი. მოცემულია წერტილთა ფუძეები.

ჩვენ გავეცანით სივრცის წერტილთა მოცემის ხერხს საპროექციო ნახაზზე, ეს ხერხი თავის მხრივ განსაზღვრავს სწორებისა და სიბრტყეების მოცემის ხერხს.

საპროექციო ნახაზის ცნება შეიძლება მოსწავლეებს მივცეთ შემდეგნაირად. ძირითადი სიბრტყე და მაგეგმილებელი სხივები გავიაზროთ შესაბამად, როგორც ფანერის (ან მუყაოს) ნებისმიერი ფორმის ნაჭერი, რომელშიაც ჩასობილა მავთულის ჩხირები. მიღებული გეომეტრიული კონფიგურაცია დავაგეგმილოთ რომელიმე სიბრტყეზე პარალელურად, მივიღებთ გამოსახვას, რომელსაც საპროექციო ნახაზი ეწოდება. ამრიგად, მოსწავლეს საპროექციო

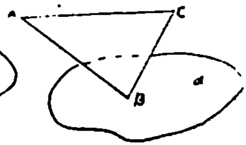
ნახაზი წარმოდგენილი უნდა ჰქონდეს, როგორც ძირითადი სიბრტყის მიმართ მოცემული მთელი გეომეტრიული კონფიგურაციის პარალელური გეგმილი ძირითად სიბრტყესთან ერთად.

საპროექციო ნახაზის გაცნობის შემდეგ შევადაროთ იგი საილუსტრაციო ნახაზს. ამით ნათელი გახდება საპროექციო ნახაზის შემოტანის მოტივი საშუალო სკოლაში.



ნახ. 85 ა.

ნახ. 85 ბ.



ნახ 85 გ.

საპროექციო ნახაზის პირველი დიდი უპირატესობა საილუსტრაციო ნახაზის მიმართ მდგომარეობს იმაში, რომ მასზე მოცემული გეომეტრიული კონფიგურაციები აღარ მოითხოვენ ზედმეტი ახსნა-განმარტებების მოცემას მათი ურთიერთგანლაგების შესახებ. მაგალითად, საპროექციო ნახაზზე მოცემული სწორი ხაზის შესახებ აღარ არის საჭიროება ითქვას, რომ იგი გადაკვეთს ძირითად სიბრტყეს, არამედ ეს გარემოება პირდაპირ ჩანს თვით ნახაზიდან. ასევე, საპროექციო ნახაზზე მოცემული წერტილი ან სიბრტყე აღარ საჭიროებენ დამატებითი განმარტებების მოცემას მათი მდებარეობის შესახებ ძირითადი სიბრტყის მიმართ.

რაც შეეხება ნახაზ-სურათს (საილუსტრაციო ნახაზს) მათ შესახებ უნდა ითქვას იმის საწინააღმდეგო, რაც საპროექციო ნახაზის სასარგებლოდ ითქვა. მართლაც, საილუსტრაციო ნახაზზე წერტილი, სწორი და სიბრტყე შეიძლება წარმოვიდგინოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახ. 85 ა, ნახ. 85 ბ და ნახ. 85 გ.

მაგრამ არცერთი მათგანი არაფერს არ ლაპარაკობს მათზე გამოსახული გეომეტრიული სახეების ურთიერთ განლაგებაზე. სახელდობრ, ნახ. 85 ა არაფერს არ გვეუბნება ჩვენ A წერტილისა და α სიბრტყის ურთიერთ მდებარეობაზე, ე. ი. იმაზე A წერტილი α სიბრტყეზეა, თუ მის გარეთ. შემდეგ ნახ. 85 ბ არაფერს გვეუბნება α სიბრტისა და a სწორის ურთიერთ მდებარეობაზე. a სწორი ხაზი შეიძლება ჩავთვალოთ α სიბრტყის პარალელურადაც, მის გადამკვეთ სწორადაც ან კიდევ მასზე მდებარე სწორადაც. იგივე შენიშ-

ვნა შეიძლება გავაკეთოთ ნახ. 85 გ შესახებაც, რომელზედაც ABC სამკუთხედის სახით ჩვენ წარმოდგენილი გვაქვს სიბრტყე.

ამრიგად, საილუსტრაციო ნახაზის წაკითხვისათვის გარდა თვით ნახაზის მოცემისა, საჭიროა გარკვეული დამატებითი პირობების მოცემა, რომლებშიც აღწერილი იქნება მასზე გამოსახული გეომეტრიული სახეების ურთიერთ განლაგებულობა. ეს ფაქტი მიუთითებს საპროექციო ნახაზის ერთ-ერთ მეტად მნიშვნელოვან უპირატესობაზე საილუსტრაციო ნახაზთან შედარებით.

საპროექციო ნახაზის მეორე დიდი უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ ასეთ ნახაზებზე შეიძლება ეფექტურად ამოვხსნათ სტერეომეტრიული ამოცანები აგებაზე. ცხადია, რომ საპროექციო ნახაზის ამ უპირატესობაში მოსწავლეები დარწმუნდებიან თანდათან შემდგომი მუშაობის პროცესში, პირველ ხანებში კი ამ საკითხზე მათთან საუბარი ნაადრევია.

დასასრულ რამდენიმე სიტყვა ვთქვათ აღნიშვნების შესახებ. საპროექციო ნახაზზე მოცემული A წერტილისათვის (რომლის ფუძეა—A_1 წერტილი) მიღებულია აღნიშვნა A (A_1), სწორი ხაზისათვის AB (A_1B_1), ხოლო სიბრტყისათვის კი—ABC $(A_1B_1C_1)$. თუ სიბრტყე ან სწორი ხაზი აღნიშნულია ერთი ასოთი, მაშინ მიღებულია აღნიშვნები: სწორი a (a_1) და სიბრტყე α (α_1) და სხვ.

საჭიროა აგრეთვე მოსწავლეები, გარდა ინციდენტობის ნიშნისა (X), იცნობდნენ მიკუთვნებულობის ნიშანს ($\in$) და მოხდენილად სარგებლობდნენ ამ ნიშნით. მაგალითად, თუ A წერტილი მდებარეობს a სწორზე, წერდნენ $A\in a$, ან კიდევ თუ A წერტილი მდებარეობს α სიბრტყეზე წერდნენ $A\in\alpha$ და სხვ.

სასარგებლოა მოსწავლეები იცნობდნენ ჩანაწერებსაც $A\overline{\in}a$ ან $A\overline{\in}\alpha$, რომლებიც A წერტილის a სწორისადმი და α სიბრტყისადმი მიუკუთვნელობის ფაქტებს აღნიშნავენ.

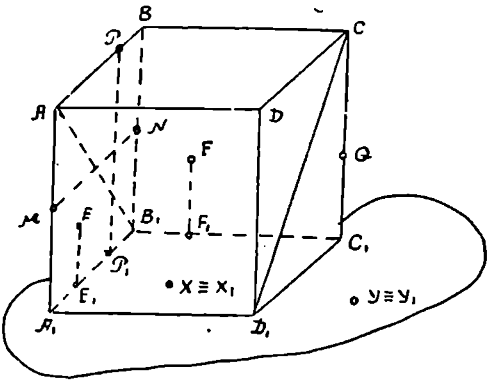
§ 2. პირველი სავარჯიშოები საპროექციო ნახაზზე

მას შემდეგ, რაც მოსწავლეებს გავაცნობთ იმ მასალას, რომელიც წინა პარაგრაფში იყო მოცემული, საჭირო და სასარგებლოა უმარტივესი სავარჯიშოების ამოხსნა. მასთან, სავარჯიშო მასალა ისე უნდა იყოს შერჩეული, რომ მან ხელი შეუწყოს საპროექციო ნახაზის არსში უფრო ნათლად გარკვევის საქმეს.

აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ისევე, როგორც პლანიმეტრიული ამოცანებისა, შეიძლება მოვახდინოთ შემდეგი სქე-

ემის მიხედვით: ანალიზი, აგება, დამტკიცება და გამოკვლევა. მასთან, ამ პარაგრაფში მოცემული ამოცანების ამოხსნის დროს, მათი სიმარტივის გამო, შეიძლება არ მივმართოთ ხსენებულ სქემას.

გადავიდეთ უშუალოდ სათანადო სავარჯიშოების განხილვაზე, პირველი სავარჯიშოები დავუკავშიროთ კუბს.



ნახ. 86.

მოცემულია კუბის გასოსახვა A_1C. ძირითადად სიბრტყედ მიღებულია კუბის ქვედა ფუძის სიბრტყე, ხოლო დაგეგმილების მიმართულებად ამ სიბრტყეზე—კუბის გვერდითი წიბო (ნახ. 86).

ამოხსენით შემდეგი ამოცანები:

1) გვაჩვენეთ კუბის ზედა ფუძის წვეროების გეგმილები (ფუძეები) ძირითად სიბრტყეზე და წაიკითხეთ მათი მაგეგმილებელი სწორები.

2) აიღეთ ორი წერტილი კუბის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე: ერთი კუბის ფუძეზე, ხოლო მეორე ფუძის გარეთ.

3) აიღეთ წერტილები კუბის AA_1B_1B და BB_1C_1C წახნაგებზე.

4) აიღეთ წერტილი კუბის ზედა ფუძის AB გვერდზე და ააგეთ ამ წერტილის ფუძე.

5) აიღეთ წერტილი კუბის CC_1 გვერდით წიბოზე და გვაჩვენეთ მისი გეგმილი (ფუძე) ძირითად სიბრტყეზე.

6) წაიკითხეთ კუბის ზედა ფუძის პარალელური გვერდები და მათი გეგმილები ძირითად სიბრტყეზე. რა შეგიძლიათ თქვათ ამ გეგმილების შესახებ? საიდან აკეთებთ ასეთ დასკვნას?

7) წაიკითხეთ ნახაზზე კუბის BC და AD წიბოებზე გამავალი მაგეგმილებელი სიბრტყეები (ყოველ სიბრტყეს, რომელიც გადის მაგეგმილებელ სწორზე ან მისი პარალელურია მაგეგმილებელი სიბრტყე ეწოდება).

8) კუბის AA_1 და BB_1 გვერდით წიბოებზე აიღეთ მათი M და N შუაწერტილები. წაიკითხეთ MN სწორის გეგმილი. რა დამოკიდებულება არსებობს MN-სა და AB-ს შორის?

9) ააგეთ კუბის ორი მოპირდაპირე გვერდითი წახნაგების დიაგონალები, რომლებიც აცდენილი ხაზებია, და გამოარკვიეთ, რა დამოკიდებულებაა მათ გეგმილებს შორის (გეგმილები ძირითად სიბრტყეზე).

10) როგორია MN და BC სწორები? წაიკითხეთ მათი გეგმილები და აღნიშნეთ მათ შორის დამოკიდებულება. გააერთიანეთ მე-6 და მე-8 სავარჯიშოებზე მოცემული პასუხები, მაშინ თქვენ შეგიძლიათ გარკვეული დასკვნა გააკეთოთ პარალელური ხაზების გეგმილების განლაგების შესახებ. ჩამოაყალიბეთ ეს დასკვნა და ჩაიწერეთ რვეულებში.

11) ჩამოაყალიბეთ დასკვნის სახით მე-9 და მე-10 კითხვებზე მოცემული პასუხები აცდენილი ხაზების გეგმილების განლაგების შესახებ და ჩაიწერეთ ეს დასკვნა რვეულებში.

12) გვიჩვენეთ კუბის ორი გადამკვეთი ზედა ფუძის გვერდები და გამოარკვიეთ დამოკიდებულება მათ გეგმილებს შორის.

13) იკვეთებიან თუ არა AB_1 და MN სწორები? როგორაა განლაგებული მათი გეგმილები?

14) ჩამოაყალიბეთ დასკვნა ორი გადამკვეთი სწორის გეგმილების განლაგების შესახებ და ჩაიწერეთ ეს დასკვნა რვეულებში (იხ. სავარჯიშოები მე-12 და მე-13).

სავარჯიშოების ამოხსნა.

1) კუბის ზედა ფუძის A, B, C და D წვეროების გეგმილებია A_1, B_1, C_1 და D_1 წერტილები. მათი მაგიგმილებელი სწორებია AA_1, BB_1, CC_1 და DD_1.

2) წერტილები $X(X_1)$ და $Y(Y_1)$ მდებარეობენ კუბის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე, რადგან მათი ფუძეები ემთხვევიან თვით წერტილებს. მასთან, პირველი მათგანი მდებარეობს კუბის ფუძეზე, ხოლო მეორე ფუძის გარეთ.

3) წერტილი $E(E_1)$ მდებარეობს კუბის AA_1B_1B წახნაგზე, ხოლო წერტილი $F(F_1)$—BB_1C_1C წახნაგზე.

4) წერტილი $P(P_1)$ მდებარეობს კუბის ზედა ფუძის AB კვერდზე.

5) წერტილი Q მდებარეობს კუბის CC_1 გვერდით წიბოზე და C_1 წარმოადგენს მის ფუძეს (გეგმილს).

6) კუბის ზედა ფუძის AB და CD, BC და AD გვერდები წყვილ-წყვილად პარალელურია. მათი გეგმილებია შესაბამად A_1B_1 და C_1D_1, B_1C_1 და A_1D_1, რომლებიც აგრეთვე წყვილ-წყვილად პარალელურია, რადგან პარალელური სწორები გეგმილდებიან პარალელურ სწორებად.

7) კუბის BC წიბოზე გადის B_1BCC_1 მაგეგმილებელი სიბრტყე, ხოლო AD წიბოზე—A_1ADD_1 მაგეგმილებელი სიბრტყე.

8) MN სწორის გეგმილია A_1B_1 სწორი. $MN \parallel AB$;

9) კუბის AA_1B_1B და D_1DCC_1 წახნაგების AB_1 და CD_1 დიაგონალები აცდენილი ხაზებია, მათი გეგმილებია A_1B_1 და C_1D_1 სწორები, რომლებიც ერთმანეთის პარალელურია.

10) MN და BC აცდენილი სწორებია. მათი გეგმილები A_1B_1 და B_1C_1 კვეთენ ერთმანეთს. პარალელური სწორების გეგმილები ან პარალელური არიან ან ემთხვევიან ერთმანეთს. მასთან, უკანასკნელ შემთხვევას ექნება ადგილი, თუ პარალელური სწორები ერთსა და იმავე მაგეგმილებელ სიბრტყეზე მდებარეობენ.

11) ორი აცდენილი სწორი ხაზის გეგმილები ან პარალელურია ან კვეთენ ერთმანეთს. პირველ შემთხვევას ექნება ადგილი, თუ აცდენილი სწორები ერთმანეთის პარალელურ მაგეგმილებელ სიბრტყეებზე მდებარეობენ.

12) კუბის ზედა ფუძის ორი გადამკვეთი გვერდებია AB და BC. მათი გეგმილები A_1B_1 და B_1C_1 იკვეთებიან.

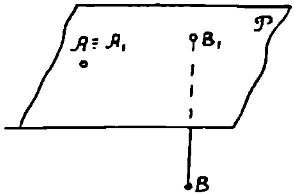
13) AB_1 და MN სწორები იკვეთებიან. რადგან ისინი მდებარეობენ ერთ სიბრტყეზე (კუბის გვერდით წახნაგზე) და ერთმანეთის პარალელური არ არიან. მათი გეგმილები ერთმანეთს ემთხვევიან და ნახაზზე წარმოგვიდგება A_1B_1 სწორის სახით.

14) ორი გადამკვეთი სწორის გეგმილები ან იკვეთებიან ან ერთმანეთს ემთხვევიან. მასთან, უკანასკნელ შემთხვევას ექნება ადგილი მაშინ, როცა გადამკვეთი სწორები მდებარეობენ ერთდაიმავე მაგეგმილებელ სიბრტყეზე.

ამ სავარჯიშოების ამოხსნის დროს, თუ საჭიროებამ მოითხოვა, უნდა მოვიშველიოთ კუბის მოდელი და მოსწავლეებს მასზე თვალსაჩინოდ ვაჩვენოთ ყოველივე ნათქვამი. ჩვენი მოსაზრება სწორედ

ასეთი იყო, როცა პირველი მაგალითების განხილვა დავუკავშირეთ კუბს, რადგანაც აქ მოსწავლე თვალსაჩინოდ ხედავს ყოველივე მას, რაზედაც ჩვენ ვესაუბრებით.

ამ სავარჯიშოების ამოხსნის შემდეგ უნდა განვიხილოთ რიგი სავარჯიშოებისა, რომლებშიაც ლაპარაკი იქნება გეომეტრიული სახეების (წერტილების, სწორების და სიბრტყეების) ურთიერთ განლაგებაზე როგორც ერთმანეთის მიმართ, ისე ძირითადი სიბრტყის მიმართ. მასთან ამ ამოცანებს უკვე აღარ ვუკავშირებთ კუბს ან რომელიმე სხვა მრავალწახნაგა სხეულს.



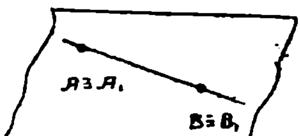
ნახ. 87.

განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

ამოცანა 1. აიღეთ წერტილი, რომელიც ძირითად სიბრტყეზე მდებარეობს (ნახ. 87). როგორც ვიცით, თუ წერტილი ძირითად სიბრტყეზე მდებარეობს, მაშინ ეს წერტილი და მისი ფუძე ერთმანეთს ემთხვევიან. ეს ფაქტი აღინიშნება ასე: $A \equiv A_1$;

ამოცანა 2. აიღეთ წერტილი ძირითადი სიბრტყის ქვემოთ (ნახ. 87). ნახაზზე მოცემული B წერტილი ძირითადი სიბრტყის ქვემოთ მდებარეობს, რადგან მისი მაგეგმილებელი ხაზის ნაწილი პუნქტირითაა გავლებული, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ეს ნაწილი დაფარულია ნახაზზე წარმოდგენილი ძირითადი სიბრტყის ნაწილით.

ამოცანა 3. აიღეთ სწორი, რომელიც ძირითად სიბრტყეზე მდებარეობს. სწორი ხაზი მდებარეობს ძირითად სიბრტყეზე, თუ მისი ორი წერტილი ამ სიბრტყეზე მდებარეობს. ავიღოთ ორი წერტილი $A(A_1) \in P$ და $B(B_1) \in P$, მაშინ $AB(A_1B_1) \in P$. ეს გარემოება გამოსახულია ნახ. 88-ზე.



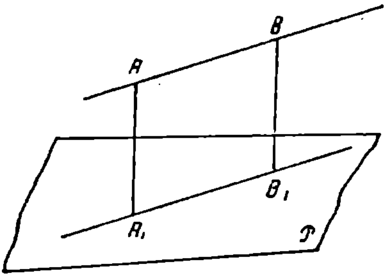
ნახ. 88.

ამოცანა 4. აიღეთ სწორი, რომელიც ძირითადი სიბრტყის პარალელურია (ნახ. 89).

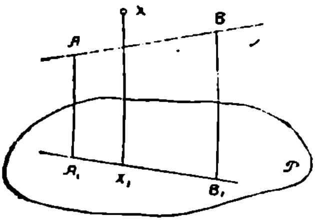
თუ სწორი ხაზი სიბრტყის პარალელურია, მაშინ იგი თავისი გეგმილის პარალელური იქნება ამ სიბრტყეზე. მართლაც, ამ სწორზე გამავალი მაგეგმილებელი სიბრტყე ძირითად სიბრტყეს გადაკვეთს ხსენებული სწორის პარალე-

ლურ სწორზე, რომელიც მოცემული სწორის გეგმილია. ამიტომ საჭიროა P სიბრტყეზე ავილოთ ნებისმიერი A_1B_1 სწორი და შემდეგ გავავლოთ $AB \parallel A_1B_1$, მაშინ $AB \parallel P$;

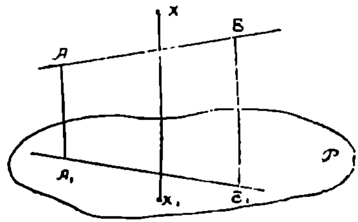
ა მ ო ც ა ნ ა 5. აიღეთ წერტილი მოცემული სწორის გარეთ (ნახ. 90 ა და 90 ბ). ნახ. 90 ა გვიჩვენებს, რომ $X(X_1)\overline{\in}AB$ (ე. ი. X წერტილი არ მდებარეობს AB-ზე) და მასთან ეს წერტილი AB სწორი ხაზის მაგეგმილებელ სიბრტყეზე მდებარეობს. ნახ. 90 ბ გამოსახავს შემთხვევას, როცა $X(X_1)\overline{\in}AB$ სწორს და ეს წერტილი AB სწორის მაგეგმილებელი სიბრტყის გარეთ მდებარეობს.



ნახ. 89.

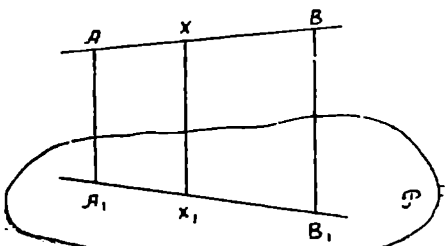


ნახ. 90. ა.



ნახ. 90 ბ.

ა მ ო ც ა ნ ა 6. აიღეთ წერტილი, რომელიც მდებარეობს $AB(A_1B_1)$სწორზე (ნახ 91).



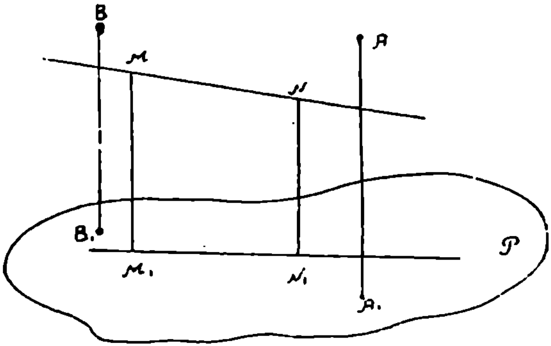
ნახ. 91.

ა მ ო ც ა ნ ა 7. გამოარკვიეთ, წერტილები $A(A_1)$ და $B(B_1)$ მდებარეობენ თუ არა MM_1N_1N სიბრტყეზე (ნახ. 92).

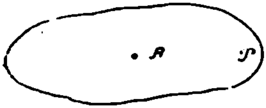
ცხადია, რომ $A(A_1)$ და $B(B_1)$ წერტილები არ

მდებარეობენ MM_1N_1N სიბრტყეზე, რადგანაც ეს წერტილები რომ მდებარეობდნენ ხსენებულ სიბრტყეზე, ამისათვის საჭიროა, რომ მათი ფუძეები $A_1 \in M_1N_1$ და $B_1 \in M_1N_1$, მაგრამ ნახაზიდან ჩანს, რომ $A_1 \overline{\in} M_1N_1$ და $B_1 \overline{\in} M_1N_1$;

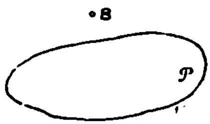
ა მ ო ც ა ნ ა 8. შეავსეთ ნახ. 93 ა, ბ, გ, შესაბამისად ისე, რომ წერტილები A, B და C მდებარეობდენ: 1) P სიბრტყეზე, 2) მის ზემოთ და 3) მის ქვემოთ.



ნახ. 92.



ნახ. 93 ა.



ნახ. 93 ბ.

ნახ. 93 გ.

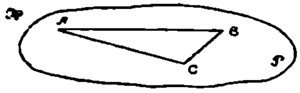
ნახ. 94 ა.

ნახ. 94 ბ.

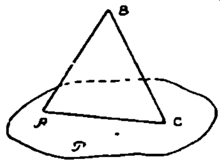
ნახ. 94 გ.

ა მ ო ც ა ნ ა 9. შევავსოთ ნახ. 94 ა, ბ, გ, შესაბამად ისე, რომ a სწორი ხაზი მდებარეობდეს 1) P სიბრტყეზე, 2) იყოს მისი პარალელური და 3) მისი გადამკვეთი.

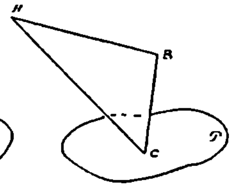
ამოცანა 10. შეავსეთ ნახ. 95 ა, ბ, გ, შესაბამისად ისე, რომ ABC სამკუთხედის სიბრტყე ემთხვეოდეს ძირითად P სიბრტყეს, იყოს მისი პარალელური და ბოლოს მისი C წერტილი მდებარეობ-



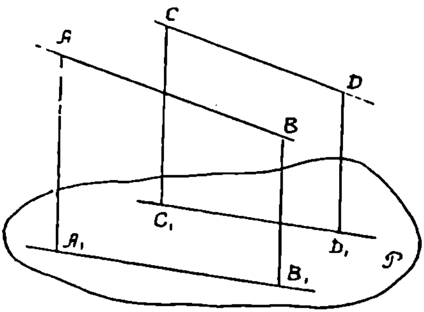
ნახ. 95 ა.



ნახ. 95 ბ.



ნახ. 95 გ.



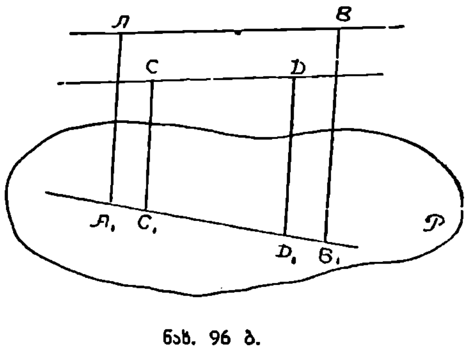
ნახ. 96 ა.

დეს P სიბრტყეზე, ხოლო AB სწორი იყოს ძირითადი სიბრტყის პარალელური.

მითითება. ნახ. 95 ბ-ს შევსების დროს მიიღეთ მხედველობაში, რომ თუ ABC სამკუთხედის რომელიმე ორი გვერდი შესაბამისად ამ გვერდების გეგმილების პარალელურია, მაშინ ABC სამკუთხედის სიბრტყე ძირითადი სიბრტყის პარალელური იქნება.

ამოცანა 11. გამოსახეთ ნახაზზე ორი პარალელური სწორი.

როგორც ვნახეთ ორი პარალელური სწორი ხაზის გეგმილები ან პარალელური არიან, ან ემთხვევიან ერთმანეთს. აქედან პირველს ექნება ადგილი მაშინ, როცა პარალელური სწორები მდებარეობენ პარალელურ მაგეგმილებელ სიბრტყეებზე, ხოლო მეორეს,— როცა ისინი ერთსა და

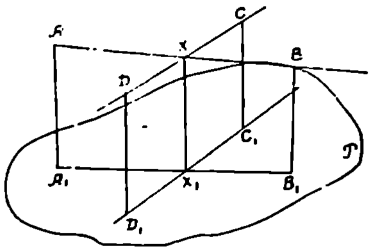


ნახ. 96 ბ.

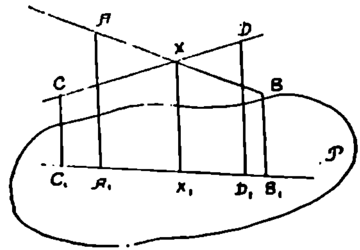
იმავე მაგეგმილებელ სიბრტყეზე მდებარეობენ.

ეს შემთხვევები შესაბამისად გამოსახულია ნახ. 96 ა და ნახ. 96 ბ.

ა მ ო ც ა ნ ა 12. გამოსახეთ ნახაზზე ორი ურთიერთ გადამკვეთი სწორი.



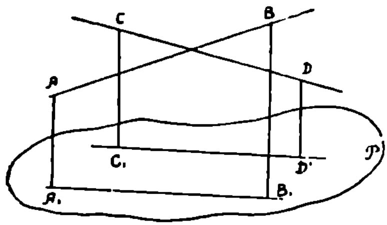
ნახ. 97 ა.



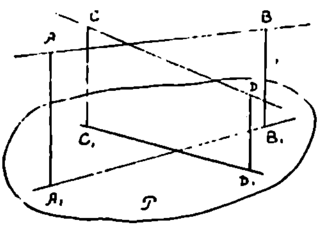
ნახ. 97 ბ.

ორი გადამკვეთი სწორის გეგმილები ან იკვეთებიან ან ემთხვევიან ერთმანეთს.

პირველ შემთხვევასთან გვექნება საქმე, როცა თანამკვეთი სწორები სხვადასხვა მაგეგმილებელ სიბრტყეებზე მდებარეობენ, ხოლო მეორე შემთხვევასთან,—როცა ისინი ერთსა და იმავე მაგეგმილებელ სიბრტყეზე მდებარეობენ. ამ შემთხვევებიდან პირველს



ნახ. 98 ა.

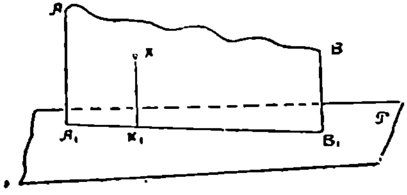


ნახ. 98 ბ.

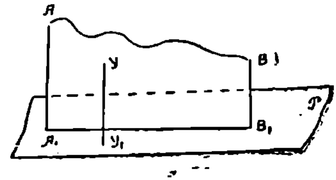
გამოსახავს ნახ. 97 ა, ხოლო მეორეს ნახ. 97 ბ. მოსწავლეებს უნდა მიეთითოს, რომ ნახ. 97 ა-ს შესრულების დროს მას შემდეგ, რაც გამოვსახავთ ორი თანამკვეთი სწორებიდან ერთ-ერთს და მეორის გეგმილს (ან თვით მას), მაშინ მისი აღება (გეგმილის) არ შეიძლება ნებისმიერად ჩავატაროთ, რადგან $xx_1 \parallel AA_1$;

ა მ ო ც ა ნ ა 13. გამოსახეთ ნახაზზე ორი აცდენილი სწორი ხაზი.

ორი აცდენილი სწორი ხაზის გეგმილები ან პარალელური არიან ან კვეთენ ერთმანეთს. პირველ შემთხვევაში აცდენილი ხაზები



ნახ. 99 ა.



ნახ. 99 ბ.

მდებარეობენ პარალელურ მაგეგმილებელ სიბრტყეებზე, მეორე შემთხვევაში კი არა. შესაბამისი ნახაზებია ნახ. 98 ა და ნახ. 98 ბ.

ამ ამოცანის განხილვის დროს, განსაკუთრებით, ნახ. 98 ბ წარმოდგენილი აცდენილი ხაზების შესახებ მოსწავლეები ფიქრობენ, რომ ისინი კვეთენ ერთმანეთს. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა მოვიმარჯვოთ მოდელი. ყველაზე მარტივად ამის ჩვენება შეიძლება კუბის მოდელზე. შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ნახ. 98 ბ-ზე წარმოდგენილი $AB(A_1B_1)$ და $CD(C_1D_1)$ სწორები მართლაც კვეთენ ერთმანეთს, რადგან თითქმის ასეთივეა ნახ. 97 ა, რომელზეც გამოსახულია ურთიერთ გადამკვეთი სწორების ისეთი მდებარეობა, როცა მათი გეგმილები იკვეთებიან. ამ ილუზიის მცდარობაში დავრწმუნდებით, თუ შევაერთებთ A_1B_1 და C_1D_1 სწორების გადაკვეთის წერტილს AB და CD სწორების მოჩვენებითი გადაკვეთის წერტილთან, ასეთი გზით მიღებული სწორი უნდა იყოს მაგეგმილებელი, რაც ნახაზზე ასე არ არის.

ა მ ო ც ა ნ ა 14. აიღეთ წერტილი: 1) მოცემულ მაგეგმილებელ სიბრტყეზე და 2) მოცემული მაგეგმილებელი სიბრტყის გარეთ. $X(X_1)$ წერტილი მდებარეობს მოცემულ მაგეგმილებელ სიბრტყეზე (ნახ. 99 ა), ხოლო წერტილი $Y(Y_1)$ მოცემული მაგეგმილებელი სიბრტყის გარეთ (99 ბ).

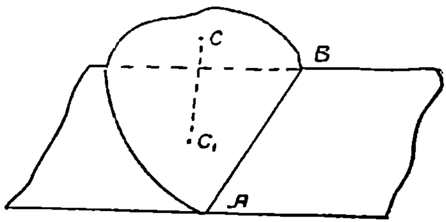
ა მ ო ც ა ნ ა 15. გამოსახეთ სიბრტყე, თუ ის მოცემულია თავისი AB კვალით ძირითად P სიბრტყეზე და $C(C_1)$ წერტილით (ნახ. 100).

ა მ ო ც ა ნ ა 16. აიღეთ წერტილი, რომელიც: 1) მოცემულ

$ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეზე მდებარეობს და 2) $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბ-რტყის გარეთ მდებარეობს.

ნახ. 101-ზე წერტილები A, B, C და X მოცემულ სიბრტყეზე მდებარეობენ, ხოლო Y წერტილი მდებარეობს ამ სიბრტყის გარეთ.

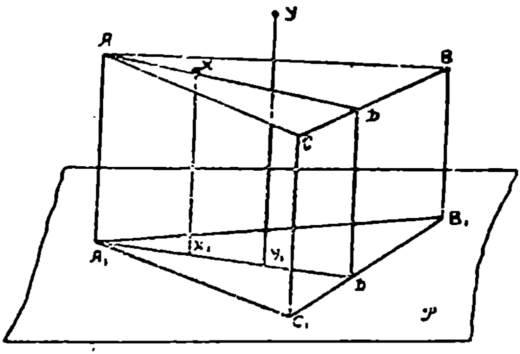
ამოცანა 17. აიღეთ სწორი, რომელიც მოცემულ $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეზე მდებარეობს.



ნახ. 100.

ასეთი სწორები უპირვე-ლეს ყოვლისა იქნებიან ABC სამკუთხედის გვერდები. სხვა სწორებიდან რომელიმე მათ-განი შეიძლება ავაგოთ, თუ ABC სამკუთხედის ორი რომელიმე გვერდის ნებისმიერ ორ წერტილს შევაერთებთ (ნახ. 101).

ამოცანა 18. გამოსახეთ რომელიმე სწორი, რომელიც ABC $(A_1B_1C_1)$ სიბრტყის პარალელურია.

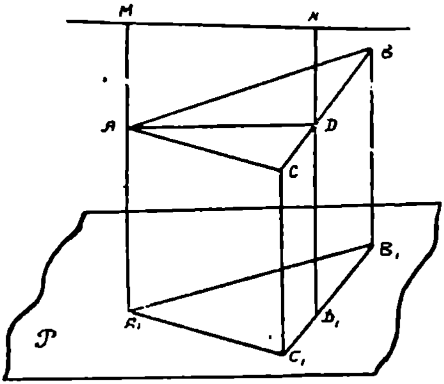


ნახ. 101.

ნახ. 102-ზე გამოსახული MN სწორი ხაზი AD-ს პარალელუ-რია, ე. ი. $MN \parallel ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყის.

პირველ ხანებში ასეთი სავარჯიშოების ამოხსნა უდაოდ დიდ დახმარებას გაგვიწევს იმაში, რომ მოსწავლეებმა შეითვისონ სა-პროექციო ნახაზის ენა და თავისუფლად იყენებდნენ მას საჭირო-ების შემთხვევაში.

იმისათვის, რომ მოსწავლეები კიდევ უფრო კარგად დარწმუნდნენ საპროექციო ნახაზის უპირატესობაში საილუსტრაციო ნახაზთან შედარებით, კარგი იქნება ყველა განხილული მაგალითების კვალდაკვალ დავხაზოთ საილუსტრაციო ნახაზიც იმავე გეომეტრიული კონფიგურაციებით, რომლებიც მოცემულია შესაბამ საპროექციო ნახაზზე და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს. შედარება უნდა მოხდეს ნახაზების წაკითხვის თვალსაზრისით, ე. ი. დაისმება კითხვები თუ რა ურთიერთ მდებარეობა უქირავთ ნახაზზე გამოსახულ გეომეტრიულ კონფიგურაციებს და კეთდება დასკვნები, რომ ასეთ საკითხზე პასუხს გვაძლევს მხოლოდ საპროექციო ნახაზი, ხოლო საილუსტრაციო ნახაზი კი ამაზე არაფერს არ გვეუბნება.



ნახ. 102.

§ 3. ძირითადი პოზიციური ამოცანები

ამოცანებს, რომლებშიც მოცემული ინციდენციების მიხედვით ხდება სხვა ინციდენციების აგება, ეწოდება პოზიციური. პოზიციურ ამოცანებში ლაპარაკია მხოლოდ გეომეტრიული ელემენტების განლაგებაზე სივრცეში, რაზედაც დამოკიდებულია ამოცანის ამოხსნა. ამოცანები ნებისმიერად განლაგებული ორი სიბრტყის გადაკვეთის ხაზის აგების შესახებ, ან სწორი ხაზისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის აგების შესახებ, პოზიციური ამოცანებია.

თეორიულად პოზიციური ამოცანების ამოხსნა ყოველთვის შესაძლებელია სრულ გამოსახვებზე[1]. როგორც ვიცით, წერტილების, სწორებისა და სიბრტყეების მოცემის ის ხერხი, რომელიც ამ თავის § 1-ში იყო აღწერილი იძლევა სრულ გამოსახვებს.

საპროექციო ნახაზი, როგორც ვიცით, წარმოადგენს ძირითადი სიბრტყის მიმართ მოცემული მთელი გეომეტრიული კონფიგურა-

[1] გამოსახვათა სისრულის შესახებ იხ. § 4, თავი II.

ციის პარალელურ[1] გეგმილს ძირითად სიბრტყესთან ერთად. თვით გეომეტრიული სახეობების მოცემა ძირითადი სიბრტყის მიმართ ხდება ან პარალელურ ან ცენტრალურ პროექციაში (იხ. § 1). განსხვავებით სწორედ იმ პროექციისა, რომლის საშუალებითაც მიიღება საპროექციო ნახაზი, ამ პროექციებს, „შიგა" პარალელურ და „შიგა" ცენტრალურ პროექციებს უწოდებენ.

ამის შემდეგ გავეცნოთ ძირითადი პოზიციური ამოცანების ამოხსნას. ეს ამოცანები შემდეგია: I. *ავაგოთ მოცემული* $AB(A_1B_1)$ *სწორის გადაკვეთის წერტილი ძირითად სიბრტყესთან*, II. *ავაგოთ მოცემული* $ABC(A_1B_1C_1)$ *სიბრტყის კვალი ძირითად სიბრტყეზე და* III. *ავაგოთ ნებისმიერი* $ABC(A_1B_1C_1)$ *სიბრტყისა და* DD_1 *მაგეგმილებელი სწორის შეხვედრის წერტილი.*

განვიხილოთ ამ ამოცანების ამოხსნა „შიგა" პარალელურ პროექციაში. „შიგა" ცენტრალურ პროექციაში ისინი ამოიხსნებიან ანალოგიურად.

I. პირველი ძირითადი ამოცანის ამოხსნა.

ამოხსნა. რადგან $AB(A_1B_1)$ სწორი ხაზისა და P სიბრტყის შეხვედრის წერტილი P სიბრტყეზე მდებარეობს, ამიტომ საძებნი წერტილი და მისი ფუძე ერთმანეთს ემთხვევიან. წინა §-ში განხილული მე-6 სავარჯიშოს მიხედვით საძებნი წერტილი ერთდროულად უნდა ეკუთვნოდეს A_1B_1 და AB სწორებს, ე. ი. $x=AB\times A_1B_1$ საძებნი წერტილია (ნახ. 103).

შენიშვნა: ამოცანას ყოველთვის ექნება ამოხსნა, თუ $AB \nparallel A_1B_1$[2].

ამ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ სასარგებლოა განვიხილოთ ისეთი ამოცანები, რომლებიც ისე ამოიხსნებიან, როგორც ძირითადი ამოცანა, მაგრამ აქ სწორი ხაზის განმსაზღვრელი წერტილები მოთავსებული არიან მრავალწახნაგა სხეულების წიბოებზე ან წახნაგებზე. ამოვხსნით ასეთი სახის რამდენიმე ამოცანას[3].

ამოცანა I. M წერტილი ძევს კუბის AA_1 წიბოზე, ხოლო N

---

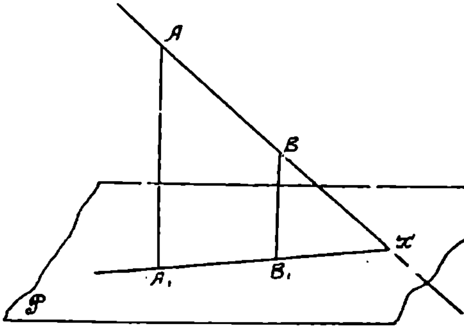
[1] საპროექციო ნახაზი შეიძლება მივიღოთ ცენტრალურ პროექციაშიაც, მაგრამ ჩვენ თავიდანვე გვქონდა აღნიშნული, რომ გამოსახვების აგებას ვაწარმოებთ პარალელურ პროექციაში, ამიტომ ამ შემთხვევაშიც ჩვენ პარალელური პროექციებით შემოვიფარგლებით.

[2] ნიშანი $\nparallel$ აღნიშნავს არაპარალელობას.

[3] ასეთი სახის ამოცანები მრავლადაა მოცემული Л. М. Лоповок-ის შრომაში: „Сборник стереометрических задач на построение", Учпедгиз, 1953, § 2.

წერტილი კი — BB_1 წიბოზე. ავაგოთ MN სწორის შეხვედრის წერტილი კუბის ქვედა ფუძის სიბრტესთან.

ამოცანა 2. M წერტილი მდებარეობს კუბის BC წიბოზე, ხოლო N წერტილი კი — AD წიბოზე. ავაგოთ MN სწორის შეხვედრის წერტილი კუბის CC_1D_1D წახნაგის სიბრტყესთან.



ნახ. 103.

ამოცანა 3. A და B წერტილები განლაგებულია პრიზმის გვერდით წახნაგებზე. ავაგოთ AB სწორის შეხვედრის წერტილები პრიზმის ფუძის სიბრტყეებთან.

ამოცანა 4. A წერტილი მოთავსებულია პრიზმის გვერდით წიბოზე, ხოლო B წერტილი კი — პრიზმის ზედა ფუძეზე. ააგეთ AB სწორის შეხვედრის წერტილი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყესთან.

ამოცანა 5. M და N წერტილები მოთავსებულია ოთხკუთხა პრიზმის მოპირდაპირე გვერდით წახნაგებზე. ავაგოთ MN სწორის შეხვედრის წერტილები დანარჩენ ორ გვერდით წახნაგის სიბრტყესთან.

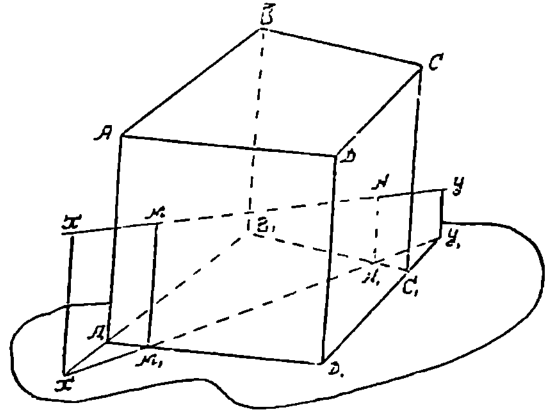
ამოცანა 6. A და B წერტილები მოთავსებულია ოთხკუთხა პირამიდის არამოსაზღვრე გვერდით წახნაგებზე. ავაგოთ AB სწორის შეხვედრის წერტილი პირამიდის ფუძის სიბრტყესთან.

ამოცანა 7. A წერტილი მოთავსებულია პირამიდის გვერდით წიბოზე, ხოლო B წერტილი კი — მის გვერდით წახნაგზე, რომელიც არ შეიცავს ამ წიბოს. ავაგოთ AB სწორის შეხვედრის წერტილი პირამიდის ფუძის სიბრტყესთნ.

ამოვხსნათ ამ ამოცანებიდან მე-5 და მე-7.

მე-5 ამოცანის ამოხსნა. პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყე მივიღოთ ძირითად სიბრტყედ, ხოლო დაგეგმილების მიმართულებად ამ სიბრტყეზე—პრიზმის გვერდითი წიბო (ნახ. 104).

ავაგოთ M და N წერტილების ფუძეები, ამისათვის უნდა გავავლოთ $MM_1 \parallel AA_1$ და $NN_1 \parallel CC_1$. ამის შემდეგ ვპოულობთ წერტი-



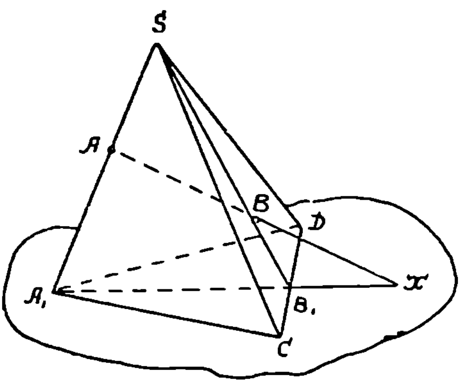
ნახ. 104.

ლებს: $X_1 = A_1B_1 \times M_1N_1$ და $Y_1 = C_1D_1 \times M_1N_1$. ბოლოს ამ წერტილებზე გავავლოთ პრიზმის გვერდითი წიბოს პარალელური სწორები MN სწორის გადაკვეთამდე X და Y წერტილებში. დავამტკიცოთ, რომ ეს წერტილები საძებნია. მართლაც, $x_1 \in A_1B_1$ და $y_1 \in C_1D_1$, მაგრამ $A_1B_1 \in AA_1B_1B$ წახნაგის სიბრტყეს, ხოლო $C_1D_1 \in CC_1D_1D$ წახნაგის სიბრტყეს; ამიტომ $x_1 \in AA_1B_1B$ წახნაგის სიბრტყეს, ხოლო $y_1 \in CC_1D_1D$ წახნაგის სიბრტყეს. $xx_1 \parallel AA_1$ და $yy_1 \parallel CC_1$, ამიტომ $xx_1 \in AA_1B_1B$ წახნაგის სიბრტყეს, ხოლო $y_1y \in CC_1D_1D$ წახნაგის სიბრტყეს, ე. ი. $x(x_1)$ და $y(y_1)$ წერტილები საძებნი წერტილებია.

მე-7 ამოცანის ამოხსნა. ვისარგებლოთ „შიგა“ ცენტრალური პროექციით. მივიღოთ პროექციის ცენტრად პირამიდის S წვერო, ხოლო ძირითად სიბრტყედ პირამიდის ფუძის სიბრტყე. მაშინ A წერტილის ფუძე იქნება A_1 წერტილი, ხოლო B წერტილის ფუძე—$B_1 = SB \times CD$ წერტილი (ნახ 105).

$x=AB\times A_1B_1$ წარმოადგენს საძებნ წერტილს. დამტკიცება მარტივია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. პრიზმების გამოსახვებზე ამოცანების ამოხსნის დროს, ჩვეულებრივ, ძირითად სიბრტყედ ღებულობენ პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეს, ხოლო დაგეგმილების მიმართულებად ამ სიბრტყეზე პრიზმის გვერდით წიბოს.



ნახ. 105.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. პირამიდების გამოსახვებზე პოზიციური ამოცანების ამოხსნისას სარგებლობენ „შიგა“ ცენტრალური პროექციით; მასთან, პროექციის ცენტრად ღებულობენ პირამიდის წვეროს, ხოლო ძირითად სიბრტყედ პირამიდის ფუძის სიბრტყეს.

II. მეორე ძირითადი ამოცანის ამოხსნა.

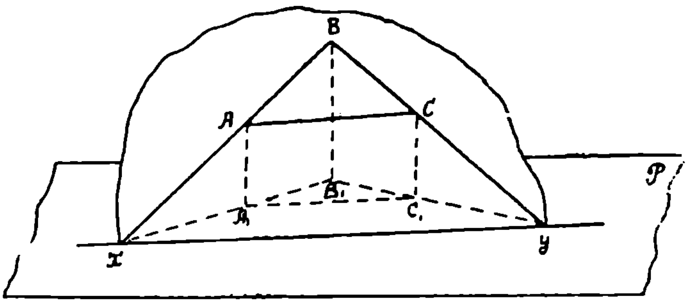
ა ნ ა ლ ი ზ ი. წარმოვიდგინოთ, რომ ამოცანა ამოხსნილია, ე. ი. აგებულია $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყის კვალი ძირითად P სიბრტყეზე. გავაგრძელოთ ABC სამკუთხედის AB გვერდი, მაშინ იგი P სიბრტყეს გადაკვეთს იმ წერტილში, რომელიც ამ კვალზე მდებარეობს. სრულიად ასევე, BC გვერდის გაგრძელება P სიბრტყეს იმავე კვალზე მდებარე წერტილში გადაკვეთს. ამრიგად, ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდების კვალთან გადაკვეთის წერტილები წარმოადგენენ იმავე დროს ამ სწორების შეხვედრის წერტილებს P სიბრტყესთან. ამ წერტილების აგება ჩვენთვის ცნობილია.

ა გ ე ბ ა. ავაგოთ $x=AB\times A_1B_1$ და $y=BC\times B_1C_1$ წერტილები, მაშინ xy სწორი ხაზი იქნება $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყის კვალი ძირითად სიბრტყეზე (ნახ. 106).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $x\in AB$ და $x\in A_1B_1$, მაგრამ $AB\in ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს და $A_1B_1\in P$ სიბრტყეს, ამიტომ $x\in ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს და $x\in P$ სიბრტყეს. ამრიგად, x წერტილი საერთოა ABC $(A_1B_1C_1)$ და P სიბრტყეებისათვის. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ Y წერტილი საერთოა იმავე სიბრტყეებისათვის. მაშასადამე,

xy სწორი ხაზი ერთდროულად ეკუთვნის $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს და P სიბრტყეს, ე. ი. იგი არის მათი გადაკვეთის სწორი ხაზი.

გამოკვლევა.* შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს სამ შემთხვევას: 1) ABC სამკუთხედის არცერთი გვერდი P სიბრტყის პარალელური არ არის, მაშინ ამოცანას ექნება ამოხსნა და საძებნი



ნახ. 106.

კვალის აგება მოხდება ისე, როგორც ეს იყო ნაჩვენები; 2) ABC სამკუთხედის ერთ-ერთი გვერდი P სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მისი კვალი ამ სიბრტყეზე სამკუთხედის ხსენებული გვერდის პარალელური იქნება (თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის პარალელურ სწორ ხაზზე და კვეთს ამ სიბრტყეს, მაშინ მათი გადაკვეთის სწორი პირველი სწორი ხაზის პარალელურია). კვალის ასაგებად საკმარისია ვიპოვოთ მისი ერთი წერტილი და ამ წერტილზე გავავლოთ სამკუთხედის იმ გვერდის პარალელური სწორი, რომელიც P სიბრტყის პარალელურია; 3) ABC სამკუთხედის ორი გვერდი P სიბრტყის პარალელურია, მაშინ საძებნი კვალი არ არსებობს, ე. ი. ამოცანას ამოხსნა არ აქვს. მართლაც, ამ შემთხვევაში $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყე პარალელურია P სიბრტყისა (სიბრტყეების პარალელობის ნიშანი).

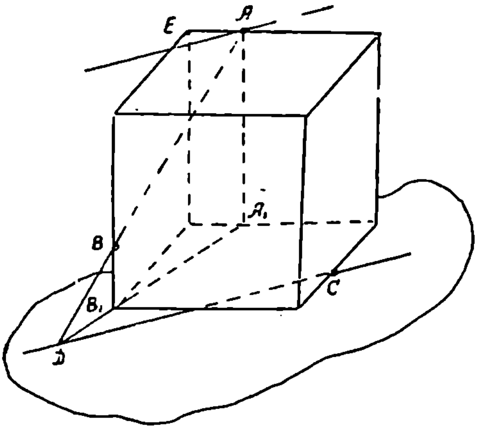
ამ ძირითადი ამოცანის მსგავსად ამოიხსნებიან ამოცანები კვალთა აგებაზე, როცა მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი წერტილები

* ვფიქრობთ, რომ ამოხსნის ყველა ამ ნაწილის ჩატარება კლასში სიძნელეს გამოიწვევს. ასეთი სამუშაო შეიძლება ჩატარდეს წრეში, ან მიეცეს მოსწავლეებს ინდივიდუალური დავალების სახით.

განლაგებულია მრავალწახნაგა სხეულების ან წიბოებზე ან წახნაგებზე, ან ფუძეებზე. ასეთია ამოცანები:

ა მ ო ც ა ნ ა 1. M, N და P წერტილები განლაგებულია კუბის გვერდით წიბოებზე. იპოვეთ MNP სიბრტყის კვალი კუბის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. M, N და P წერტილები განლაგებულია ხუთ-



ნახ. 107.

კუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებზე. ააგეთ MNP სიბრტყის კვალი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 3. M და N წერტილები მოთავსებულია პრიზმის გვერდით წახნაგებზე, ხოლო P წერტილი კი—პრიზმის ფუძის სიბრტყეზე პრიზმის გარეთ. ააგეთ MNP სიბრტყის კვალი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 4. M, N და P წერტილები განლაგებულია პირამიდის გვერდით წიბოებზე. იპოვეთ MNP სიბრტყის კვალი პირამიდის ფუძის სიბრტყეზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 5. M და N წერტილები მოთავსებულია წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდით წიბოებზე, ხოლო P წერტილი კი—პირამიდის სიმაღლეზე. ააგეთ MNP სიბრტყის კვალი პირამიდის ფუძის სიბრტყეზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 6. ავაგოთ ABC სიბრტყის კვალი პარალელეპიპედის ფუძეების სიბრტყეებზე, თუ A, B და C წერტილები განლაგებულია პარალელეპიპედის წყვილ-წყვილად აცდენილ წიბოებზე.

უკანასკნელი ამოცანის ამოხსნა ნაჩვენებია ნახ. 107-ზე. აქ საკმარისია კვალი აგებულ იქნას ფუძის ერთ-ერთ სიბრტყეზე, მაგალითად, ქვედა ფუძის სიბრტყეზე, მაშინ A წერტილზე გავავლებთ $AE \parallel CD$; AE იქნება მკვეთი სიბრტყის კვალი პარალელეპიპედის ზედა ფუძის სიბრტყეზე.

ასეთი და მსგავსი ამოცანების ამოხსნა საშუალებას მოგვცემს განვამტკიცოთ მოსწავლეებში მკვეთი სიბრტყის კვალის აგების ჩვევები, რაც დიდ დახმარებას გაგვიწევს მრავალწახნაგა სხეულების კვეთების აგებაზე ამოცანების ამოხსნის დროს. ასეთი შინაარსის ამოცანები მოცემულია ლ. მ. ლოპოვოკის ზემოთხსენებულ კრებულში, § 2, ამოცანები №№ 72—84.

III. მესამე ძირითადი ამოცანის ამოხსნა.

ა ნ ა ლ ი ზ ი. წარმოვიდგინოთ, რომ ამოცანა ამოხსნილია, ე. ი. ნაპოვნია x წერტილი, რომელიც $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყისა და DD_1 მაგეგმილებელი ხაზის შეხვედრის წერტილია. წარმოვიდგინოთ, რომ გავავლეთ AA_1D_1D მაგეგმილებელი სიბრტყე, მაშინ x წერტილი მდებარეობს როგორც ამ სიბრტყეზე, ისე მოცემულ ABC $(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეზედაც, ე. ი. x წერტილი ეკუთვნის $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყისა და AA_1D_1D მაგეგმილებელი სიბრტყის გადაკვეთის ხაზს, ხოლო მეორე მხრივ DD_1 მაგეგმილებელ სწორს. აქედან გამომდინარეობს აგება.

ა გ ე ბ ა. ავაგოთ AA_1D_1D და $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეების გადაკვეთის სწორი ხაზი. ამისათვის ავაგოთ $E_1 = A_1D_1 \times B_1C_1$ წერტილი, ამ წერტილზე გავიყვანოთ E_1E მაგეგმილებელი სწორი. AE იქნება ხსენებული სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი, ხოლო $x = AE \times \times DD_1$—საძებნი წერტილი (ნახ. 108).

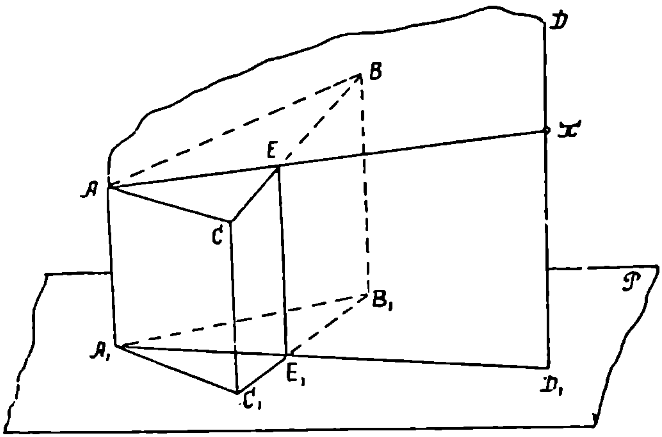
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $x \in DD_1$ და $x \in AE$, მაგრამ $AE \in ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს, ამიტომ $x \in ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს, ე. ი. x წერტილი საერთოა DD_1 მაგეგმილებელი სწორისა და $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყისათვის, რაც უნდა დაგვემტკიცებია.

გ ა მ ო კ ვ ლ ე ვ ა. ამოცანას ექნება ამონახსენი, თუ $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყე DD_1-ის პარალელური არ არის, ე. ი. თუ იგი არ წარმოადგენს მაგეგმილებელ სიბრტყეს. თუ ABC სიბრტყე მაგეგმილებელია და არ გადის DD_1-ზე ამოცანას არ ექნება ამოხსნა; თუ ეს სიბრტყე გადის DD_1 ხაზზე, მაშინ ამოცანას ექნება უამრავი ამოხსნა (DD_1-ის ყველა წერტილი მათი საერთო წერტილია).

ამ ამოცანის მსგავსად ამოიხსნებიან ამოცანები, რომლებშიც

A, B და C წერტილები განლაგებულია რომელიმე მრავალწახნაგა სხეულის წიბოებზე ან წახნაგებზე, ხოლო მაგეგმილებელ სწორად აღებულია იმავე მრავალწახნაგას წიბო. აღსანიშნავია, რომ ასეთ ამოცანებზე ვარჯიში დიდად უწყობს ხელს მოსწავლეთა ჯეროვან გარკვევას მრავალწახნაგა სხეულების კვეთების აგებაში.

აქვე ვიძლევით ასეთი შინაარსის რამდენიმე ამოცანას.



ნახ. 108.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. M, N და P წერტილები მოთავსებულია ოთხკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებზე. იპოვეთ MNP სიბრტყის შეხვედრის წერტილი პრიზმის მეოთხე გვერდით წიბოსთან.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. M, N და P წერტილები მოთავსებულია ხუთკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებზე. ავაგოთ MNP სიბრტყის შეხვედრის წერტილები პრიზმის დანარჩენ გვერდით წიბოებთან.

ა მ ო ც ა ნ ა 3. სიბრტყე განსაზღვრულია ოთხკუთხა პირამიდის გვერდით წიბოებზე მდებარე სამი წერტილით. იპოვეთ ამ სიბრტყისა და პირამიდის მეოთხე წიბოს შეხვედრის წერტილი.

ა მ ო ც ა ნ ა 4. M, N და P წერტილები მდებარეობენ ხუთკუთხა პირამიდის გვერდით წიბოებზე. იპოვეთ MNP სიბრტყის შეხვედრის წერტილები პირამიდის დანარჩენ გვერდით წიბოებთან.

ა მ ო ც ა ნ ა 5. სიბრტყე განსაზღვრულია წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ქვედა და ზედა ფუძეების მოპირდაპირე გვერდებით. იპო-

კეთ ამ სიბრტყის შეხვედრის წერტილები პრიზმის გვერდით წიბოებთან.

ა მ ო ც ა ნ ა 6. სიბრტყე განსაზღვრულია სამი წერტილით, რომელთაგან ორი მოთავსებულია წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ერთ- და იმავე წახნაგზე მდებარე გვერდით წიბოებზე, ხოლო მესამე მოთავსებულია პირამიდის სიმაღლეზე. იპოვეთ ამ სიბრტყის შეხვედრის წერტილები პირამიდის დანარჩენ გვერდით წიბოებთან.

განვიხილოთ ამ ამოცანების ამოხსნის შემდეგ კიდევ რამდენიმე პოზიციური ამოცანის ამოხსნა. ეს ამოცანები (გარდა უკანასკნელისა) ამოღებული გვაქვს პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის ზემოთ დასახელებული წიგნიდან. ამ ამოცანების ამოხსნა მოცემულია იქვე, მაგრამ მათი გამოკვლევები არ არის მოცემული. მასთან, ასეთი ხასიათის ამოცანებში გამოკვლევის ელემენტების შეტანა ნაკარნახევია მოსწავლეთა სივრცითი წარმოდგენების განვითარების მიზნით. მართლაც, გამოკვლევის დროს მოსწავლე განიხილავს საპროექციო ნახაზზე მოცემული გეომეტრიული სახეების სხვადასხვა ურთიერთ განლაგებას, რაც იწვევს ამოცანის ამოხსნის ახალი გზების მოძებნას და ამნაირად ხელს უწყობს მოსწავლის სივრცითი წარმოდგენის განვითარებას. ამიტომ გამოკვლევას უნდა მივმართოთ ყოველთვის, თუ საქმე არ გვექნება ისეთ სიძნელეებთან, რომლებიც მოსწავლეთა უმრავლესობისათვის დაუძლეველია. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში გამოკვლევები შეიძლება გადავიტანოთ მათემატიკურ წრეში ან მივცეთ ისეთ მოსწავლეებს ინდივიდუალური დავალების სახით, რომლებიც განსაკუთრებულ მიდრეკილებას გამოიჩენენ ხსენებული საკითხისადმი.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. ავაგოთ AA_1B_1B და CC_1D_1D მაგეგმილებელი სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი.

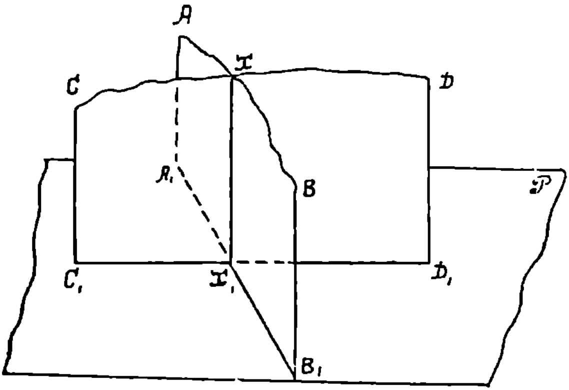
ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ $x_1=A_1B_1\times C_1D_1$ წერტილი და ამ წერტილზე გავიყვანოთ მაგეგმილებელი სწორი. ეს სწორი საძებნია (ნახ. 109). მართლაც. $x_1\in A_1B_1$ და $x_1\in C_1D_1$ მაგრამ A_1B_1 და C_1D_1 წარმოადგენენ მოცემული მაგეგმილებელი სიბრტყეების კვალებს ძირითად სიბრტყეზე და, მაშასადამე, ეკუთვნიან ამ სიბრტყეებს. ამრიგად, x_1 საერთო წერტილია მოცემული მაგეგმილებელი სიბრტყეებისათვის. გარდა ამისა $x_1x \parallel CC_1$ და $x_1x \parallel AA_1$, ამიტომ x_1x ეკუთვნის ხსენებული მაგეგმილებელი სიბრტყეებიდან ორივეს, ე. ი. წარმოადგენს მათი გადაკვეთის ხაზს.

თუ $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, მაშინ ამოცანას არ აქვს ამოხსნა, რადგან

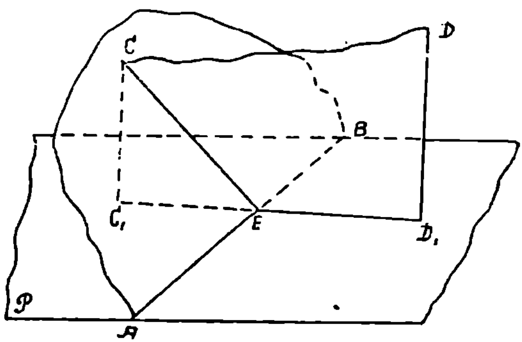
ასეთ პირობებში მოცემული მაგეგმილებელი სიბრტყეები პარალე-
ლურნი იქნებიან.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. ავაგოთ ნებისმიერი $CD(C_1D_1)$ სწორი ხაზისა და AA_1B_1B მაგეგმილებელი სიბრტყის შეხვედრის წერტილი.

ამ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება CC_1D_1D და AA_1B_1B მაგეგ-



ნახ. 109.

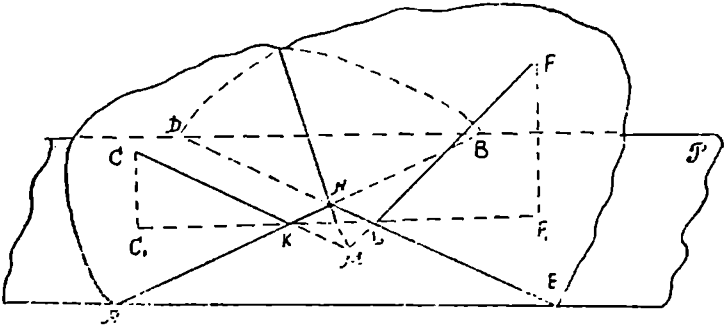


ნახ. 110.

მილებელი სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზისა (იხ. წინა ამოცანა) და CD სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილის აგებაზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 3. ავაგოთ $ABC(A_1)$ სიბრტყისა და AA_1D_1D მაგეგ-
მილებელი სიბრტყის გადაკვეთის სწორი ხაზი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ მოცემული $ABC(C_1)$ და CC_1D_1D სიბრტყეების კვალთა გადაკვეთის E წერტილი, მაშინ CE იქნება მოცემული სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი (ნახ. 110). მართლაც, $C\in ABC(C_1)$ სიბრტყეს და $C\in C_1D_1D$ სიბრტყეს. ასევე $E\in ABC(C_1)$ სიბრტყეს



ნახ. 111.

და $E\in CC_1D_1D$ სიბრტყეს, ამიტომ $CE\in ABC(C_1)$ სიბრტყეს და $CE\in CC_1D_1D$ სიბრტყეს, ე. ი. CE არის ხსენებული სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი.

თუ $C_1D_1 \parallel AB$, მაშინ მოცემული სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი გადის C წერტილზე AB-ს პარალელურად. ამის დამტკიცებას და სათანადო ნახაზის შესრულებას მოსწავლეებს მივანდობთ.

ა მ ო ც ა ნ ა 4. ავაგოთ ორი $ABC(C_1)$ და $DEF(F_1)$ სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ $K=AB\times C_1F_1$ და $L=DE\times C_1F_1$ წერტილები. CK და FL სწორები იქნებიან მოცემული სიბრტყეებისა და CC_1F_1F მაგეგმილებელი სიბრტყის გადაკვეთის ხაზები. ავაგოთ კიდევ $M=CK\times FL$ წერტილი და გავიყვანოთ MN სწორი, სადაც N მოცემული სიბრტყეების კვალების გადაკვეთის წერტილია. MN საძებნი სწორი ხაზია (ნახ. 111).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $N\in AB$ და $N\in DE$, მაგრამ $AB\in ABC(C_1)$ სიბრტყეს და $DE\in DEF(F_1)$ სიბრტყეს, ამიტომ N მოცემული სიბრტყეების საერთო წერტილია. მეორე მხრივ $M\in CK$ და $M\in FL$, მაგრამ $CK\in ABC(C_1)$ სიბრტყეს და $LF\in DEF(F_1)$ სიბრტყეს, ამი-

ტომ M წერტილი მოცემული სიბრტყეების საერთო წერტილია. ამრიგად, MN საძებნი სწორი ხაზია.

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები:

1) $AB \nparallel DE$ და $CK \nparallel FL$, ე. ი. არსებობს როგორც N წერტილი, ისე M წერტილიც. ეს შემთხვევა განხილულია ჩვენს მიერ.

2) $AB \parallel DE$, მაგრამ $CK \nparallel FL$, ე. ი. არსებობს M წერტილი, ხოლო N წერტილი არ არსებობს. ამ შემთხვევაში ამოცანას აქვს ამოხსნა. საძებნი სწორი გადის M წერტილზე AB-ს (ან DE-ს) პარალელურად. დამტკიცება მარტივია.

3) $AB \nparallel DE$ და C_1F_1 სწორი გადის N წერტილზე. ამ შემთხვევაში M და N წერტილები ერთმანეთს ემთხვევიან. საინტერესოა გადაკვეთის ხაზის აგება. ვიმსჯელოთ ასე: წარმოვიდგინოთ ნებისმიერი CC_1F_1F-ის პარალელური მაგეგმილებელი სიბრტყე, მისი კვალი ძირითად სიბრტყეზე იქნება C_1F_1-ის პარალელური. ეს კვალი გადაკვეთს AB და DE სწორებს; გადაკვეთის წერტილებზე გავიყვანოთ CN და FN სწორების პარალელური სწორები. ეს სწორები წარმოადგენენ ხსენებული მაგეგმილებელი სიბრტყისა (CC_1F_1F-ის პარალელურის) და $ABC(C_1)$ და $DEF(F_1)$ სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზებს. ამ ხაზების გადაკვეთის წერტილზე და N წერტილზე გავლებული სწორი იქნება საძებნი.

4) $AB \nparallel DE$ და $CK \parallel FL$, ე. ი. N წერტილი არსებობს, ხოლო M წერტილი არა. ამ შემთხვევაში N წერტილზე გავლებული სწორი CK (ან FL-ის) სწორის პარალელურად იქნება საძებნი.

5) $AB \parallel DE$ და $CK \parallel FL$, ე. ი. არ არსებობს არც N წერტილი და არც M წერტილი. ამოცანას ამოხსნა არ აქვს (სიბრტყეები პარალელურია). უკანასკნელ ოთხ შემთხვევაში დამტკიცებას და საჭირო ნახაზების აგებას მოსწავლეებს მივანდობთ.

ა მ ო ც ა ნ ა 5. ავაგოთ $ABC(C_1)$ სიბრტყისა და $DE(D_1E_1)$ სწორი ხაზის შეხვედრის წერტილი.

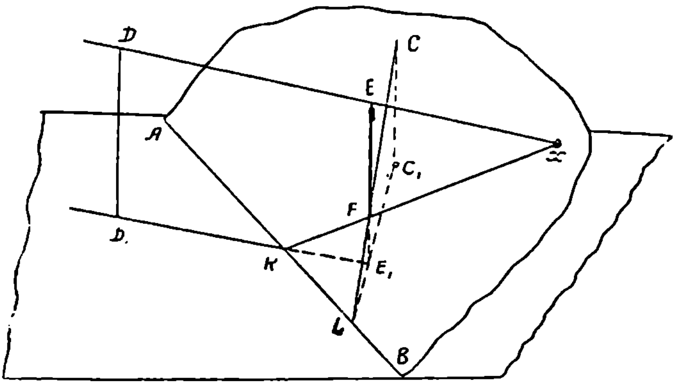
ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ $L=AB \times C_1E_1$ წერტილი და შემდეგ $F=CL \times EE_1$ წერტილი, მაშინ KF იქნება DD_1E_1E მაგეგმილებელი სიბრტყისა და $ABC(C_1)$ სიბრტყის გადაკვეთის ხაზი. ამიტომ $x=KF \times DE$ წერტილი იქნება საძებნი (ნახ. 112)

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $x \in DE$ და $x \in KF$, მაგრამ $KF \in ABC(C_1)$ სიბრტყეს, რადგან $K \in ABC(C_1)$ სიბრტყეს და $F \in ABC(C\ )$ სიბრტყეს (ვინაიდან $F \in CL$ სწორს, რომელიც $ABC(C_1)$ სიბრტყეზე მდებარეობს), ამიტომ $x \in ABC(C_1)$ სიბრტყეს, რაც უნდა დაგვემტკიცებია.

განვიხილოთ $DE(D_1E_1)$ სწორისა და $ABC(C_1)$ სიბრტყის ურთიერთგანლაგების შემდეგი შემთხვევები:

1) $D_1E_1 \nparallel AB$ და $C_1E_1 \nparallel AB$, ე. ი. არსებობს როგორც K წერტილი, ისე L წერტილი. ეს შემთხვევა განხილული იყო ჩვენს მიერ.

2) $C_1E_1 \parallel AB$ და $D_1E_1 \nparallel AB$, ე. ი. არსებობს K წერტილი, მაგ-



ნახ. 112.

რამ არ არსებობს L წერტილი. ამ შემთხვევაში C_1 წერტილზე გავავლებთ D_1E_1-ის პარალელურ C_1N სწორს AB-ს გადაკვეთამდე N წერტილში. N წერტილს შევაერთებთ C-თან, მაშინ სიბრტყე $CC_1N \parallel DD_1E_1E$ სიბრტყის, ამიტომ DD_1E_1E მაგეგმილებელი სიბრტყის კვალი $ABC(C_1)$ სიბრტყეზე CN-ის პარალელური იქნება. საძებნი x წერტილი განისაზღვრება, როგორც ამ კვალისა და DE-ს გადაკვეთის წერტილი.

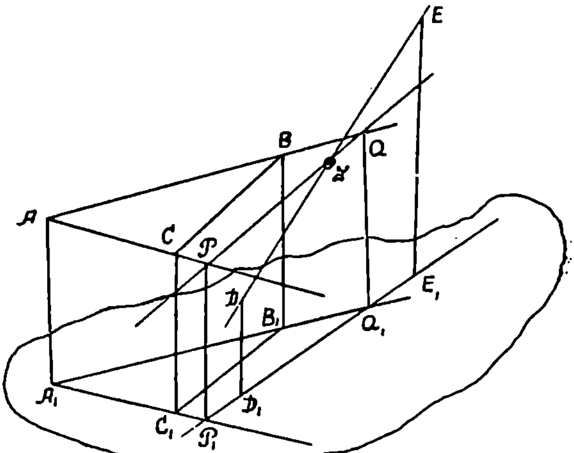
3) $D_1E_1 \nparallel AB$ და D_1E_1 გადის C_1 წერტილზე, ე. ი. K და L წერტილები ერთმანეთს უთავსდებიან. ამ შემთხვევაში საძებნი x წერტილი აიგება როგორც CK სწორისა ($K=AB\times D_1E_1$) და DE სწორის გადაკვეთის წერტილი.

4) $D_1E_1 \parallel AB$ და $C_1 \overline{\in} D_1E_1$, ე. ი. D_1E_1 არ გადის C_1 წერტილზე.

როგორც გამოცდილებამ გვიჩვენა, ამ შემთხვევაში მოსწავლეები ფიქრობენ, რომ ამოცანას არ აქვს ამოხსნა. საჭიროა განიმარტოს, რომ ამოცანას აქვს ამოხსნა და საძებნი წერტილი შეიძლება ავაგოთ ასე: ვპოულობთ $M=AB\times C_1D_1$ და $N=AB\times C_1E_1$ წერტი-

ლებს, მაშინ MC და NC სწორები შესაბამად წარმოადგენენ DD_1CC_1 და EE_1C_1C მაგეგმილებელი სიბრტყეების კვალებს $ABC(C_1)$ სიბრტყეზე. ამის შემდეგ საჭიროა ავაგოთ $G=DD_1\times MC$ და $H=EE_1\times CN$ წერტილები, მაშინ $x=GH\times DE$ იქნება საძებნი წერტილი. დამტკიცება მარტივია.

5) ვთქვათ, რომ $D_1E_1 \parallel AB$ და $C_1E_1 \parallel AB$, მაშინ ცხადია, რომ



ნახ. 113.

D_1E_1 გადის C_1 წერტილზე, და, მაშასადამე, DD_1, CC_1 და EE_1 მაგეგმილებელი სწორები მდებარეობენ ერთსადაიმავე მაგეგმილებელ სიბრტყეზე.

თუ ამასთანავე DE სწორი გადის C წერტილზე, მაშინ C იქნება საძებნი წერტილი. თუ ეს ასე არ არის, მაშინ C წერტილზე გავავლებთ AB-ს პარალელურ სწორს (ეს სწორი ერთდროულად ეკუთვნის $ABC(C_1)$ სიბრტყეს და DD_1E_1E მაგეგმილებელ სიბრტყეს) და საძებნი წერტილი აიგება როგორც ამ სწორისა და DE სწორის გადაკვეთის წერტილი.

ყველა განხილულ შემთხვევებში საჭირო ნახაზები და დამტკიცებანი შეიძლება შეასრულონ თვით მოსწავლეებმა.

ა მ ო ც ა ნ ა 6. ავაგოთ $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყისა და $DE(D_1E_1)$ სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, მოცემულ $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს და

$DE(D_1E_1)$ სწორს აქვთ ნახ. 113-ზე ნაჩვენები ურთიერთ განლაგება. ასეთ შემთხვევაში საძებნი წერტილის ასაგებად ვიქცევით ასე: ვპოულობთ $P_1 = D_1E_1 \times A_1C_1$ და $Q_1 = D_1E_1 \times A_1B_1$ წერტილებს. ამ წერტილებზე გავიყვანთ მაგეგმილებელ სწორებს შესაბამად AC და AB სწორების გადაკვეთამდე P და Q წერტილებში, მაშინ წერტილი $x = PQ \times DE$ იქნება საძებნი (PQ და DE სწორები გადაიკვეთებიან, რადგან მდებარეობენ ერთდაიმავე DD_1E_1E მაგეგმილებელ სიბრტყეზე და პარალელური არ არიან).

დამტკიცება. $x \in DE$, ვაჩვენოთ, რომ $x \in ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს. მართლაც, $x \in PQ$, მაგრამ $P \in AC$ და $Q \in AB$, ამიტომ P და Q წერტილები ეკუთვნიან $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს, ე. ი. $PQ \in ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს. მაშასადამე, $x \in ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყეს, რაც უნდა დაგვემტკიცებია.

მოსწავლეებს დავავალოთ განიხილონ ის შემთხვევა, როცა D_1E_1 სწორი კვეთს $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის გვერდებს.

§ 4. ამოცანები მრავალწახნაგა სხეულების ბრტყელი კვეთების აგებაზე

წინა ორ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ პირველი სავარჯიშოები საპროექციო ნახაზზე და სამი ძირითადი პოზიციური ამოცანა, აგრეთვე ზოგიერთი სხვა ამოცანების ამოხსნაც. ხსენებული ამოცანების ამოხსნით ჩვენ მოვამზადეთ საფუძველი მრავალწახნაგა სხეულების კვეთების აგებაზე ამოცანების ამოხსნისათვის. კვეთების აგებაზე გადასვლის წინ საჭიროა მოსწავლეებს მივცეთ კვეთის შემდეგი განსაზღვრა:

გეომეტრიული სხეულის კვეთა სიბრტყით ეწოდება მკვეთი სიბრტყისა და ამ გეომეტრიული სხეულის ზედაპირის გადაკვეთით შექმნილ ხაზს.

განსაზღვრის მიცემის შემდეგ საჭიროა ჩავატაროთ მუშაობა იმ მიმართულებით, რომ მოსწავლეები კარგად გაერკვენ კვეთის განსაზღვრაში, რადგან ხშირია შემთხვევა, რომ მოსწავლეთა მნიშვნელოვანი ნაწილი ჯეროვნად ვერ ერკვევა კვეთის რაობაში. ამისათვის საჭირო იქნება აგრეთვე ფართოდ გამოვიყენოთ მოდელები. მოდელების დამზადება უნდა დავავალოთ თვით მოსწავლეებს, ეს გარემოება სასარგებლოა აგრეთვე პოლიტექნიკური სწავლების თვალსაზრისითაც. გავარჩიოთ კლასში ასეთი მარტივი მაგალითები.

მაგალითი 1. მკვეთი სიბრტყე გადის მართკუთხა პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს ბოლო წერტილებზე. გამოსახეთ კვეთა.

მაგალითი 2. გამოსახეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალური კვეთები.

მაგალითი 3. გამოსახეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის კვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის ზედა და ქვედა ფუძეების მოპირდაპირე გვერდებზე.

რამდენი ასეთი კვეთის აგება შეიძლება?

მაგალითი 4. A, B და C წერტილები მოთავსებული არიან წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებზე. გამოსახეთ კვეთა.

ამ მაგალითების განხილვის საფუძველზე უნდა გავაკეთოთ დასკვნა, რომ კვეთის ასაგებად საჭიროა ავაგოთ მკვეთი სიბრტყისა და მრავალწახნაგა სხეულის წახნაგების გადაკვეთის ხაზები. მაგრამ მკვეთი სიბრტყე და მრავალწახნაგას წახნაგები გადაიკვეთებიან სწორ ხაზებზე, ამიტომ მრავალწახნაგა სხეულის კვეთა სიბრტყით წარმოადგენს მრავალკუთხედს.

მკვეთი სიბრტყისა და მრავალწახნაგა სხეულის წახნაგების გადაკვეთის ხაზების ასაგებად საჭიროა თითოეულ გვერდით წახნაგზე გვქონდეს გადაკვეთის ხაზის ორი წერტილი, რადგან თუ სწორი ხაზის ორი წერტილი მოცემულ სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ ეს სწორი ხაზი აღნიშნულ სიბრტყეზე მდებარეობს.

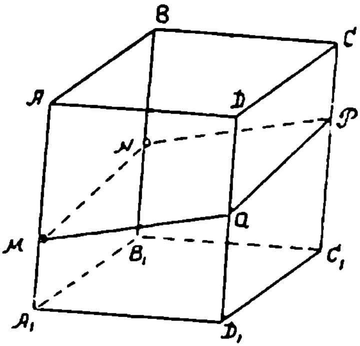
შემდეგ გავარჩიოთ ასეთი მაგალითი.

მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდით წიბოებზე განლაგებული სამი წერტილით. ავაგოთ პარალელეპიპედის კვეთა.

ამოხსნა. M და N წერტილები მდებარეობენ მკვეთ სიბრტყეზე და იმავე დროს ABB_1A_1 წახნაგზე, ამიტომ MN იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ MQ იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პარალელეპიპედის AA_1D_1D წახნაგის გადაკვეთის ხაზი (ნახ. 114).

დანარჩენ ორ წახნაგზე გადაკვეთის ხაზების მისაღებად ვისარგებლოთ თეორემით: „თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამით, მაშინ გადაკვეთის ხაზები პარალელურია“. ამიტომ საჭიროა N წერტილზე გავავლოთ $NP \parallel MQ$ და Q წერტილი P წერტილთან შევაერთოთ ($PQ \parallel MN$). მივიღებთ $MNPQ$ ოთხკუთხედს (პარალელოგრამია) რომელიც საძებნ კვეთას წარმოადგენს.

განხილული მაგალითიდან უნდა გაკეთდეს დასკვნა: კვეთების აგების დროს ზოგ შემთხვევაში შესაძლებელია ვისაგებლოთ თეორემით: „თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამით, მაშინ გადაკვეთის ხაზები პარალელურია". თუ ამ პარალელური ხაზებიდან ერთ-ერთი აგებულია და მეორე სიბრტყეზე ცნობილია წერტილი, რომელშიაც უნდა გაიაროს მრავალკუთხედის გვერდმა, მაშინ საკმარისია ამ წერტილზე გავავლოთ უკვე აგებული გვერდის პარალელური.



ნახ. 114.

ამოვხსნათ კლასში რამდენიმე ამოცანა ხსენებული თეორემის გამოყენებაზე.

ამოცანა 1. M და N წერტილები მოთავსებულია კუბის ქვედა ფუძის მოსაზღვრე გვერდებზე, ხოლო P წერტილი ზედა ფუძის ამ გვერდების პარალელურ ერთ-ერთ გვერდზე. ავაგოთ კუბის კვეთა MNP სიბრტყით.

ამოცანა 2. კუბის ქვედა ფუძის A_1B_1 გვერდსა და CC_1 გვერდით წიბოზე მდებარე M წერტილზე გაავლეთ კვეთა.

ამოცანა 3. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედა ფუძის AB და BC გვერდების შუა წერტილებზე და CC_1 გვერდითი წიბოს ნებისმიერ წერტილზე გაავლეთ კვეთა.

ამოცანა 4. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ზედა ფუძის ორ გვერდზე მდებარე ორ წერტილზე და ქვედა ფუძის ორთოცენტრზე გაავლეთ კვეთა. ანალოგიური ხასიათის ამოცანების რიცხვი შეიძლება საგრძნობლად გავადიდოთ.

ამის შემდეგ მოსწავლეებს გავაცნობთ კვეთების აგების უფრო ზოგად მეთოდს, რომელიც ცნობილია *ძირითად სიბრტყეზე მკვეთი სიბრტყის კვალის აგების მეთოდის სახელწოდებით.*

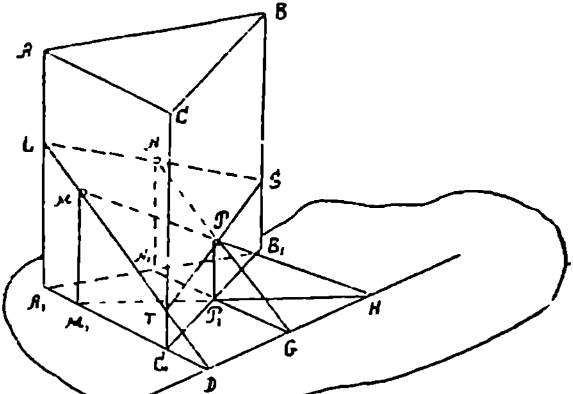
მეთოდის არსში გარკვევას ვახდენთ მაგალითებზე.

მაგალითი 1. M, N და P წერტილები განლაგებულია წესიერი

სამკუთხა პრიზმის გვერდით წახნაგებზე. ავაგოთ პრიზმის კვეთა MNP სიბრტყით.

ამოხსნა. 1) ავაგოთ $G=N_1P_1\times NP$ და $H=M_1P_1\times MP$ წერტილები, მაშინ GH იქნება მკვეთი სიბრტყის კვალი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე (ნახ. 115)[1].

2) წარმოვიდგინოთ სიბრტყე, რომელიც გადის A_1, C_1 და M



ნახ 115.

წერტილებზე. ამ სიბრტყის კვალი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე იქნება A_1C_1 სწორი. ავაგოთ $D=GH\times A_1C_1$ წერტილი. ეს წერტილი მდებარეობს პრიზმის A_1ACC_1 წახნაგის სიბრტყეზე და მკვეთ სიბრტყეზე, ამიტომ შეგვიძლია ავაგოთ $T=MD\times CC_1$ წერტილი.

3) M და T წერტილები მდებარეობენ პრიზმის AA_1C_1C წახნაგზე და იმავე დროს მიეკუთვნებიან მკვეთ სიბრტყეს, ამიტომ MT იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის ხსენებული წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

4) $L=MT\times AA_1$ წერტილი და N წერტილი მდებარეობენ პრიზმის AA_1B_1B წახნაგის სიბრტყეზე და იმავე დროს ეკუთვნიან მკვეთ სიბრტყეს, ამიტომ LN იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

5) $S=LN\times BB_1$ და P წერტილები მდებარეობენ პრიზმის BB_1C_1C

[1] ძირითად სიბრტყედ მიღებულია პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყე, ხოლო ამ სიბრტყეზე დაგეგმილების მიმართულებად—გვერდითი წიბო.

წახნაგზე და მკვეთ სიბრტყეზე, ამიტომ PS იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

LST სამკუთხედი არის საძებნი კვეთა.

ამ მაგალითის ამოხსნის შემდეგ M, N და P წერტილების განლაგება ავილოთ ისეთი, რომ მკვეთი სიბრტყე მცირედ დახრილი გამოვიდეს ძირითადი სიბრტყის მიმართ და მოსწავლეებს დავავალოთ კვეთის აგება. ისინი დარწმუნდებიან, რომ ეს მეთოდი ამ შემთხვევაში უკვე არ გამოდგება, რადგან მკვეთი სიბრტყის კვალის განმსაზღვრელი წერტილები შეიძლება ნახაზისათვის განკუთვნილ ფურცელზე არ მოთავსდეს. უნდა მიეუთითოთ, რომ ეს გარემოება მიიღონ მხედველობაში მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი წერტილების აღების დროს.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. ავაგოთ ხუთკუთხა პრიზმის კვეთა სიბრტყით, თუ მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია ქვედა ფუძის რომელიმე გვერდით და წერტილით, რომელიც მდებარეობს პრიზმის იმ გვერდით წიბოზე, რომელიც არ ეკუთვნის ხსენებული ფუძის გვერდის შემცველ წახნაგს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, რომ მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია პრიზმის ქვედა ფუძის A_1E_1 გვერდითა და CC_1 წიბოზე მდებარე M წერტილით (ნახ. 116).

1) მკვეთი სიბრტყის კვალი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე იქნება A_1E_1 სწორი ხაზი.

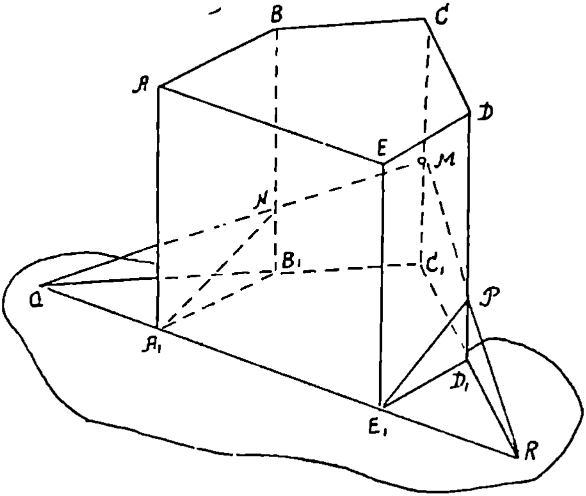
2) წარმოვიდგინოთ სიბრტყე, რომელიც გადის M, C_1 და B_1 წერტილებზე. ამ სიბრტყის კვალი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე იქნება B_1C_1 სწორი ხაზი და $Q=A_1E_1\times B_1C_1$ წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის მკვეთ სიბრტყეს და პრიზმის BB_1C_1C წახნაგის სიბრტყეს, ამიტომ შეიძლება ავაგოთ წერტილი $N=BB_1\times QM$; MN იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის ხსენებული წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

3) ანალოგიური მსჯელობით ავაგებთ $P=DD_1\times MR$ წერტილს; MP იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის CC_1D_1D წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

4) A_1 და N, E_1 და P წერტილები მდებარეობენ შესაბამად პრიზმის AA_1B_1B და DD_1E_1E წახნაგებზე და იმავე დროს ეკუთვნიან მკვეთ სიბრტყეს, ამიტომ NA_1 და PE_1 სწორები იქნებიან მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის ხსენებული გვერდითი წახნაგების გადაკვეთის ხაზები.

A_1NMPE_1 ხუთკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ამოცანა 3. წესიერი პრიზმის ფუძე წარმოადგენს ექვსკუთხედს, რომლის გვერდი უდრის 3 დმ; პრიზმის სიმაღლე 13 დმ-ია. გაიგეთ ზედა და ქვედა ფუძის ორ მოპირდაპირე გვერდზე გამავალი კვეთის ფართობი[1].



ნახ. 116.

ამოხსნა. ვთქვათ, რომ მკვეთი სიბრტყე გადის პრიზმის ქვედა ფუძის A_1F_1 და ზედა ფუძის CD გვერდებზე (ნახ. 117). ჩავატაროთ კვეთის მხოლოდ აგება.

1) მკვეთი სიბრტყის კვალი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე იქნება $A_1F'_1$ სწორი ხაზი.

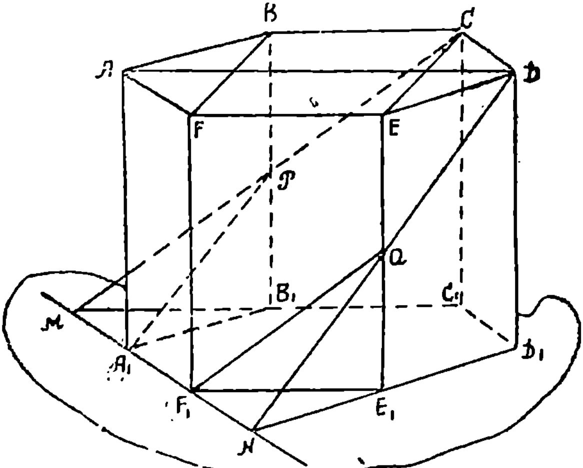
2) პრიზმის BB_1C_1C წახნაგის სიბრტყე ქვედა ფუძის სიბრტყეზე იძლევა B_1C_1 კვალს, ამიტომ $M=B_1C_1 \times A_1F_1$ წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის მკვეთ სიბრტყეს და პრიზმის ხსენებული წახნაგის სიბრტყეს. ავაგოთ $P=BB_1 \times MC$ წერტილი, მაშინ PC იქნება მკვეთი სიბრტყის და პრიზმის BB_1C_1C წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

3) ანალოგიური მსჯელობით ავაგებთ $N=D_1E_1 \times A_1F_1$ წერტილს

[1] ეს ამოცანა ამოღებულია ნ. რიბკინის გეომეტრიულ ამოცანათა კრებულიდან, ნაწ. II, § 3, № 38.

და შემდეგ $Q=ND\times EE_1$ წერტილს. QD იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის DD_1E_1E წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

4) წერტილები A_1 და P, F_1 და Q შესაბამად მდებარეობენ წესიერი პრიზმის A_1ABB_1 და EE_1F_1F წახნაგებზე, ამიტომ A_1P



ნახ. 117.

და F_1Q იქნებიან ამ წახნაგებისა და მკვეთი სიბრტყის გადაკვეთის ხაზები.

A_1PCDQF_1 ექვსკუთხედი საძებნი კვეთაა[1].

ამოცანა 4. მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია ხუთკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებზე მდებარე M, P და Q წერტილებით. ავაგოთ პრიზმის კვეთა.

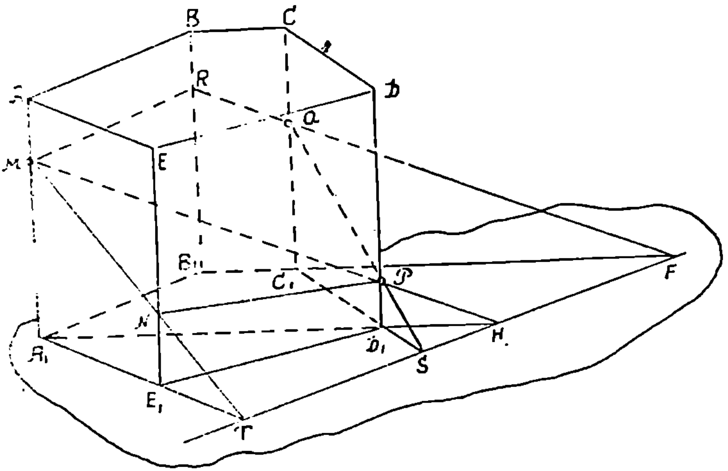
ამოხსნა. 1) ავაგოთ $H=MP\times A_1D_1$ და $S=C_1D_1\times PQ$ წერტილები, მაშინ SH იქნება მკვეთი სიბრტყის კვალი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე (ნახ. 118).

2) პრიზმის AA_1E_1E წახნაგის სიბრტყე ფუძის სიბრტყეზე იძლევა A_1E_1 კვალს, ამიტომ $T=A_1E_1\times SH$ წერტილი ერთდროუ-

[1] მკვეთი სიბრტყისა და BB_1 წიბოს გადაკვეთის წერტილის ასაგებად, მას შემდეგ, რაც აგებულია Q წერტილი, შეიძლება მოვიქცეთ ასე: Q წერტილზე გავავლოთ B_1E_1 სწორის პარალელური სწორი.

ლად ეკუთვნის მკვეთ სიბრტყეს და პრიზმის ხსენებული წახნაგის სიბრტყეს. ავაგოთ $N = EE_1 \times MT$ წერტილი, მაშინ MN იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის AA_1E_1E წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

3) პრიზმის BB_1C_1C წახნაგის სიბრტყე ფუძის სიბრტყეზე იძლევა B_1C_1 კვალს, ამიტომ $F = B_1C_1 \times SH$ წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის პრიზმის ხსენებული წახნაგის სიბრტყეს და მკვეთ



ნახ. 118.

სიბრტყეს. RQ იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის BB_1C_1C წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

4) M და R, N და P წერტილები შესაბამად მდებარეობენ პრიზმის AA_1B_1B და EE_1D_1D წახნაგებზე და იმავე დროს მიეკუთვნებიან მკვეთ სიბრტყეს, ამიტომ MR და NP იქნებიან მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის ხსენებული წახნაგების გადაკვეთის ხაზები.

$MNPQR$ ხუთკუთხედი საძებნ კვეთას გამოსახავს.

ა მ ო ც ა ნ ა 5. ავაგოთ პარალელეპიპედის კვეთა სიბრტყით, თუ მკვეთი სიბრტყე მოცემულია სამი წერტილით, რომლებიც მდებარეობენ წყვილ-წყვილად აცდენილ წიბოებზე.

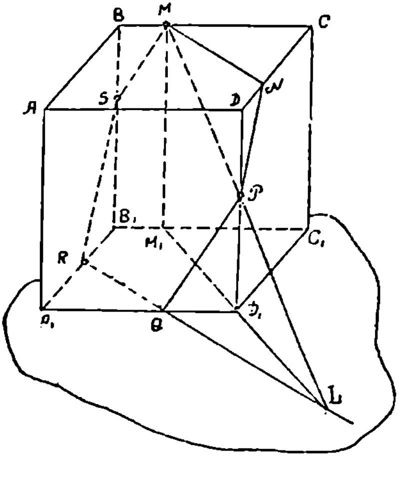
ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, რომ მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია წერტილებით M, P და R (ნახ. 119).

1) ავაგოთ $L=M_1D_1 \times MP$ წერტილი, მაშინ RL იქნება მკვეთი სიბრტყის კვალი პარალელეპიპედის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე.

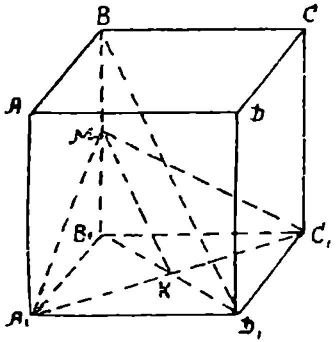
2) გავავლოთ $MN \parallel RL$, მაშინ MN იქნება მკვეთი სიბრტყის კვალი პარალელეპიპედის ზედა ფუძის სიბრტყეზე.

3) NP და PQ სწორები შესაბამისად იქნებიან მკვეთი სიბრტყისა და პარალელეპიპედის CC_1D_1D და AA_1D_1D წახნაგების გადაკვეთის ხაზები.

4) გავავლოთ $MS \parallel PQ$, მაშინ MS იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პარალელეპიპედის



ნახ. 119.



ნახ. 120.

BB_1C_1C წახნაგის გადაკვეთის ხაზი. R წერტილი შევაერთოთ S-თან. $MNPQRS$ ექვსკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე ისეთი მაგალითი პრიზმის კვეთაზე, რომლებშიაც მკვეთი სიბრტყე წინასწარ მოცემულ პირობას აკმაყოფილებს.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. ავაგოთ პარალელეპიპედის კვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის ქვედა ფუძის დიაგონალზე პარალელეპიპედის იმ დიაგონალის პარალელურად, რომელიც არ კვეთს ფუძის ხსენებულ დიაგონალს.

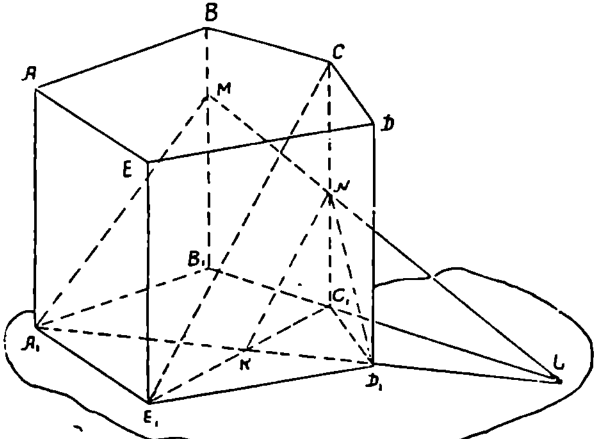
ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, რომ პარალელეპიპედის ფუძის A_1C_1 დიაგონალზე უნდა გავავლოთ BD_1-ის პარალელური კვეთა (ნახ. 120).

ცხადია, რომ BB_1D_1 სიბრტყე და მკვეთი სიბრტყე ერთმანეთს გადაკვეთენ BD_1-ის პარალელურ სწორ ხაზზე. საკმარისია ვიპო-

ვოთ ამ სწორი ხაზის ერთი $K=A_1C_1 \times B_1D_1$ წერტილი და ამ წერტილზე გავავლოთ $MK \parallel BD_1$, მაშინ A_1MC_1 სამკუთხედი იქნება საძებნი კვეთა.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ ხუთკუთხა პრიზმის ქვედა ფუძის A_1D_1 დიაგონალზე გავავლოთ პრიზმის CE_1 დიაგონალის პარალელური კვეთა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მკვეთი სიბრტყის A_1D_1 კვალი და CE_1C_1 სიბრტყის



ნახ. 121.

კვალი ერთმანეთს კვეთენ K წერტილში. ამ წერტილზე გავლებული $KN \parallel CE_1$ სწორი იქნება ხსენებული სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი (ნახ. 121).

ამნაირად, მკვეთი სიბრტყე უკვე განსაზღვრულია A_1, D_1 და N წერტილებით. დანარჩენი აგებანი ნათელია ნახაზიდან.

A_1MND_1 ოთხკუთხედი საძებნი კვეთაა.

განვიხილოთ ახლა რამდენიმე მაგალითი პირამიდის კვეთების აგებაზე.

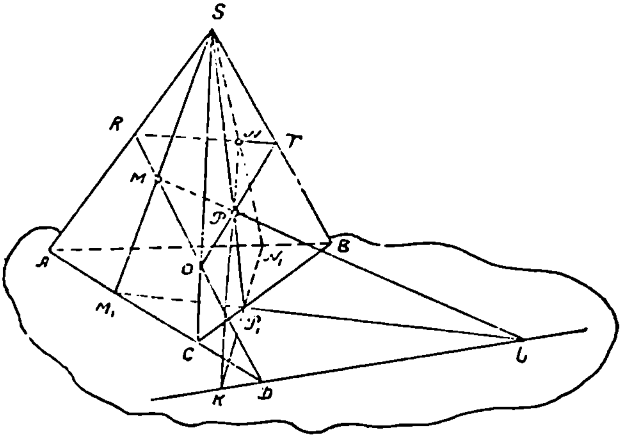
ა მ ო ც ა ნ ა 1. M, N და P წერტილები განლაგებულია სამკუთხა პირამიდის გვერდით წახნაგებზე. ავაგოთ პირამიდის კვეთა MNP სიბრტყით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ „შიგა“ ცენტრალური პროექციით.

პროექციის ცენტრად მივიღოთ პირამიდის S წვერო, ხოლო ძირითად სიბრტყედ—პირამიდის ფუძის სიბრტყე და ავაგოთ M, N და P წერტილების ფუძეები (ნახ. 122).

1) ავაგოთ $K=N_1P_1\times NP$ და $L=M_1P_1\times MP$ წერტილები, მაშინ KL იქნება მკვეთი სიბრტყის კვალი პირამიდის ფუძის სიბრტყეზე.

2) პირამიდის SAC წახნაგის სიბრტყის კვალი ფუძის სიბრტყეზე არის AC სწორი ხაზი (ამ წახნაგზე მდებარეობს M წერტილი).



ნახ. 122.

$D=AC\times KL$ წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის პირამიდის SAC წახნაგის სიბრტყეს და მკვეთ სიბრტყეს, ამიტომ შეიძლება ავაგოთ $Q=SC\times MD$ წერტილი. MQ იქნება ხსენებული სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი.

3) $R=MQ\times AS$ და N წერტილები მდებარეობენ მკვეთ სიბრტყეზე და პირამიდის SAB წახნაგზე, ამიტომ RN იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

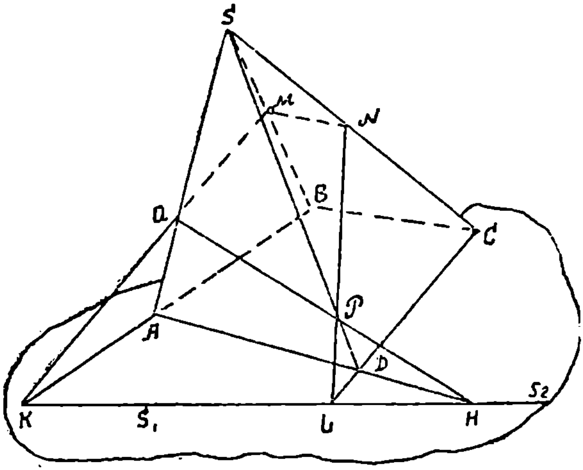
4) $T=RN\times SB$ და P წერტილები მდებარეობენ პირამიდის SCB წახნაგზე და მკვეთ სიბრტყეზე, ამიტომ PT იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

QRT სამკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. ავაგოთ ოთხკუთხა პირამიდის კვეთა სიბრტყით,

თუ მკვეთი სიბრტყე მოცემულია თავისი S_1S_2 კვალით პირამიდის ფუძის სიბრტყეზე და M წერტილით, რომელიც პირამიდის გვერდით წიბოზე მდებარეობს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირამიდის SAB წახნაგის სიბრტყე ფუძის სიბრტყეზე იძლევა AB კვალს. $K=S_1S_2\times AB$ წერტილი ერთდროულად



ნახ. 123.

ეკუთვნის მკვეთ სიბრტყეს და პირამიდის ხსენებული წახნაგის სიბრტყეს, ამიტომ შეიძლება ავაგოთ $Q=SA\times KM$ წერტილი; MQ იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პირამიდის SAB წახნაგის გადაკვეთის ხაზი (ნახ. 123).

2) პირამიდის SAD წახნაგის სიბრტყის კვალი ფუძის სიბრტყეზე იქნება AD სწორი, ამიტომ $H=AD\times S_1S_2$ წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის მკვეთ სიბრტყეს და SAD წახნაგის სიბრტყეს. ავაგოთ $P=HQ\times SD$ წერტილი, მაშინ PQ იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პირამიდის SAD წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

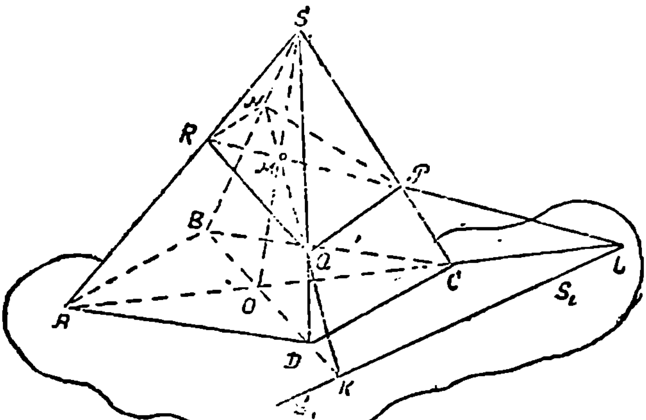
3) ანალოგიური მსჯელობით ავაგებთ $L=CD\times S_1S_2$ წერტილს და მისი დახმარებით $N=LP\times SC$ წერტილს. PN იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პირამიდის SCD წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

4) M და N წერტილები მდებარეობენ პირამიდის SAC წახ-

ნაგზე და მკვეთ სიბრტყეზე, ამიტომ MN იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

$MNPQ$ ოთხკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ა მ ო ც ა ნ ა 3. ავაგოთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის კვეთა სიბრტყით, თუ მკვეთი სიბრტყე მოცემულია S_1S_2 კვალით და წერტილით, რომელიც პირამიდის სიმაღლეზე მდებარეობს.



ნახ. 124.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) SBD დიაგონალური სიბრტყის კვალი პირამიდის ფუძეზე იქნება BD სწორი (ნახ. 124).

$K=BD\times S_1S_2$ წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის მკვეთ სიბრტყეს და ხსენებულ დიაგონალურ სიბრტყეს, ამიტომ შეიძლება ავაგოთ $Q=MK\times SD$ და $N=MK\times SB$ წერტილები.

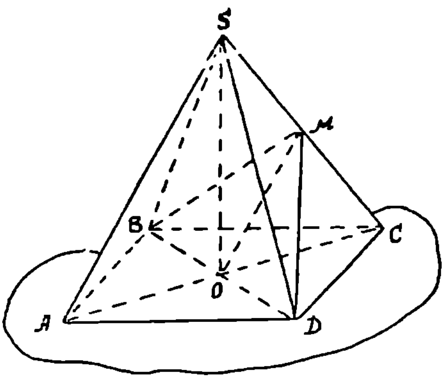
2) ანალოგიური მსჯელობით ავაგებთ $L=S_1S_2\times AC$ წერტილს; ხოლო ამ უკანასკნელის დახმარებით $P=ML\times SC$ და $R=ML\times SA$ წერტილებს.

ოთხკუთხედი $RNPQ$ საძებნი კვეთაა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: თუ $S_1S_2 \parallel AC$ ან $S_1S_2 \parallel BD$, მაშინ M წერტილზე გავავლებთ იმ დიაგონალის პარალელურ სწორს, რომელიც კვალის პარალელურია და ამნაირად ავაგებთ მკვეთი სიბრტყისა და პირამიდის შესაბამი გვერდითი წიბოების გადაკვეთის წერტილებს.

განვიხილოთ ახლა რამდენიმე ისეთი მაგალითი პირამიდის კვეთაზე, რომლებშიაც მკვეთი სიბრტყე წინასწარ მოცემულ პირობას აკმაყოფილებს.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის დიაგონალზე გაავლეთ კვეთა, თუ იგი პირამიდის იმ გვერდითი წიბოს პარალელურია, რომელიც არ კვეთს აღნიშნულ დიაგონალს.



ნახ. 125.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, რომ ფუძის BD დიაგონალზე უნდა გავავლოთ AS გვერდითი წიბოს პარალელური კვეთა (ნახ. 125). მაშინ აშკარაა, რომ მკვეთი სიბრტყე ASC სიბრტყით გადაიკვეთება AS ის პარალელურ სწორ ხაზზე. ამ სიბრტყეების კვალთა გადაკვეთის O წერტილი ცნობილია, ამიტომ საკმარისია O წერტილზე გავავლოთ AS-ის პარალელური სწორი, ეს სწორი SC წიბოს გადაკვეთს M წერტილში. AMD სამკუთხედი იქნება საძებნი კვეთა.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. $SABC$ სამკუთხა პირამიდის ფუძის AC და BC გვერდების შუა წერტილებზე გავავლოთ SC წიბოს პარალელური კვეთა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მკვეთი სიბრტყე ASC და BSC წახნაგებთან გადაიკვეთება SC-ს პარალელურ ხაზებზე, ამიტომ საჭიროა M და Q წერტილებზე გავავლოთ $MN \parallel QP \parallel SC$, მაშინ $MNPQ$ იქნება საძებნი კვეთა (ნახ. 126). $MNPQ$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. მართლაც, $MN \parallel PQ$ და $MQ \parallel NP$ (ეს უკანასკნელი გამომდინარეობს იქედან, რომ $MQ \parallel AB$).

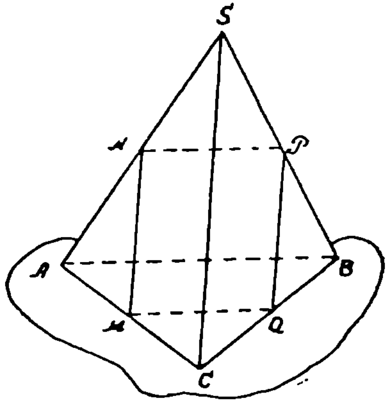
ა მ ო ც ა ნ ა 3. $SABCDE$ ხუთკუთხა პირამიდის ფუძის BE დიაგონალზე გავავლოთ AS წიბოს პარალელური კვეთა (ნახ. 127)

ა მ ო ხ ს ნ ა. მკვეთი სიბრტყე და პირამიდის ASC დიაგონალური სიბრტყე გადაიკვეთებიან AS-ის პარალელურ სწორზე. ამ სწორის ერთი წერტილი $K=BE \times AC$ ცნობილია. ანალოგიურად, მკვეთი

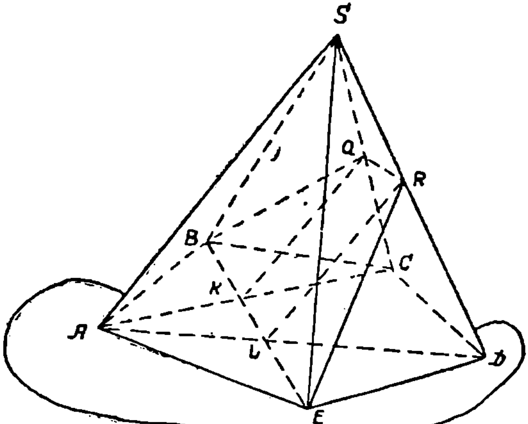
სიბრტყე და ASD დიაგონალური სიბრტყე გადაიკვეთება AS-ის პარალელურ სწორზე. ამ სწორის ერთი $L=AD\times BE$ წერტილი ცნობილია. ამრიგად, საძებნი კვეთის ასაგებად საკმარისია K და L წერტილებზე გავავლოთ AS-ის პარალელური სწორი ხაზები პირამიდის SC და SD წიბოების გადაკვეთამდე.

$BQRE$ ოთხკუთხედი საძებნი კვეთაა.

კვეთების აგების განხილული მეთოდის გაცნობისას, აგრეთვე იმ მეთოდის გაცნობისას, რომელზეც ქვემოთ იქნება ლაპარაკი, საჭირო მხედველობაში მივიღოთ შემდეგი: *მეთოდის გაცნობა ხდება მაგალითებზე*. ეს მაგალითები იხსნებიან დაფაზე მასწავლებლის ხელმძღვანელობით; ასეთ შემთხვევაში, საჭირო მოსწავლეებს მივუთი-



ნახ. 126.



ნახ. 127.

თოთ, რომ მათ თავიანთ ნახაზებზე მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი წერტილების განლაგება აიღონ ისეთივე, როგორიც მოცემულია დაფაზე. ეს აუცილებელია იმიტომ, რომ წერტილების განლაგებაზე დამოკიდებულია ასაგები კვეთის ფორმა. თუ ეს წერტილები მოსწავლეებმა ისეთნაირად აიღეს, როგორც მათ თავიანთი სურვილი უკარნახებს, მაშინ მათ მოუხდებათ ერთმანეთისაგან განსხვავებული აგებების ჩატარება, რაც გამოიწვევს სიძნელეს, რადგან მასწავლებელი იძულებული გახდება ყოველ მოსწავლეს ინდივიდუალური მითითება მისცეს. მას შემდეგ კი, რაც მოსწავლეები გაერკვევიან მეთოდის არსში და დამოუკიდებლად ახდენენ საჭირო აგებებს, ასეთი შეზღუდვა უნდა მოიხსნას. ამის შემდეგ მათ უფლება ეძლევათ მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი ელემენტები ისეთნაირად აიღონ, როგორც მათ საკუთარი წარმოდგენა უკარნახებს. ასეთი სახის მუშაობა სასარგებლო აღმოჩნდება მოსწავლეთა ინდივიდუალური მუშაობის ჩვევების განვითარების თვალსაზრისით, რადგან თითქმის ყოველი მათგანი ერთმანეთისაგან განსხვავებულ აგებებს აწარმოებენ და ამდენად მოკლებული არიან საშუალებას ისარგებლონ ერთმანეთის ნამუშევარით.

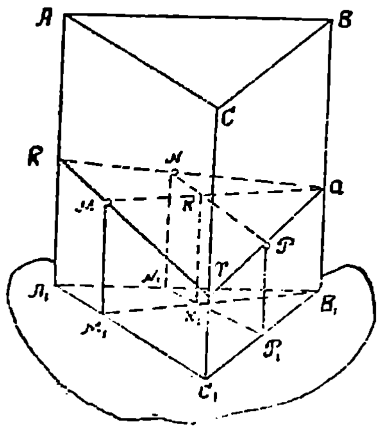
ახლა შევჩერდეთ კვეთების აგების მეორე მეთოდზე.

ავიღოთ ისევ ის მაგალითი, რომელიც ზემოთ იყო ამოხსნილი (მაგალითი სამკუთხა პრიზმის კვეთის აგებაზე) და მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი წერტილების განლაგება ახლა ისეთნაირი ავიღოთ, რომ შეუძლებელი გახდეს მკვეთი სიბრტყის კვალის აგება დაფის სიბრტყეზე. ამ გზით ადვილად დავარწმუნებთ მოსწავლეებს კვეთების აგების მათთვის ცნობილი მეთოდის არახელსაყრელობაში, და ამნაირად, მათ აღვუძრავთ ახალი მეთოდის გაცნობის ინტერესს.

ჩვენ აქ მხედველობაში გვაქვს შესაბამისობის მეთოდი ან კიდევ, როგორც მას უწოდებენ, „შიგა" დაგეგმილების გამოყენების მეთოდი.

ამ მეთოდის სასარგებლოდ უნდა ითქვას, რომ მისი გამოყენება შესაძლებელია ყოველთვის, მაგრამ მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის ფაქტიც, რომ მისი გამოყენებაც ხშირად იწვევს უხერხულობას. ეს უხერხულობა იმაში გამოიხატება, რომ კვეთე-

ბის ასაგებად საჭირო ხდება მრავალი დამატებითი ხაზების გავლება, რომელთა უმრავლესობა მოთავსებულია მრავალწახნაგა სხეულის შიგნით, ხოლო ამ ხაზების სიმრავლე ხშირად იმდენად ტვირთავს ნახაზს, რომ ძნელი ხდება მის უმნიშვნელოვანეს ელემენტებში გარკვევა. ეს გარემოება უნდა გავითვალისწინოთ და ვერიდოთ ასეთი სახის მაგალითების განხილვას საერთოდ. ხსენებული სახის მაგალითები შეიძლება მივცეთ განსაკუთრებულად დაინტერესებულ მოსწავლეებს ინდივიდუალური დავალების სახით ან განვიხილოთ მათი ამოხსნა მათემატიკურ წრეში.



ნახ. 128.

მეთოდის გაცნობისას ხაზი უნდა გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ეს მეთოდი დამყარებულია § 3-ში განხილულ მესამე ძირითად ამოცანაზე. გავიხსენოთ, რომ იქ ლაპარაკი იყო ნებისმიერი $ABC(A_1B_1C_1)$ სიბრტყისა და DD_1 მაგეგმილებელი ხაზის შეხვედრის წერტილის აგებაზე. მრავალწახნაგა სხეულის კვეთის ასაგებად კი საკმარისია ვიპოვოთ მკვეთი სიბრტყისა და ამ მრავალწახნაგა სხეულის წიბოების გადაკვეთის წერტილები. თუ მოსწავლეები ჯეროვნად გარკვეული არიან ხსენებული ამოცანის ამოხსნაში, მაშინ კვეთების აგების ეს მეთოდი, როგორც გამოცდილება გვიჩვენებს, მათთვის არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

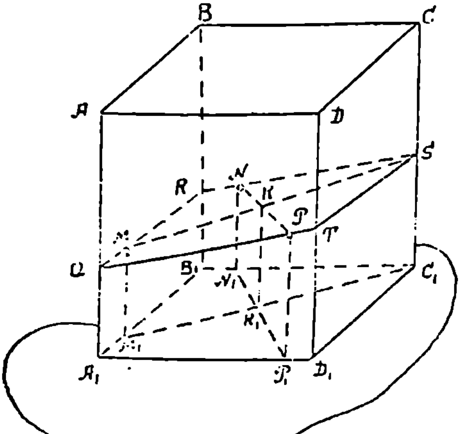
განვიხილოთ მაგალითები.

ამოცანა. 1. ავაგოთ სამკუთხა პრიზმის კვეთა სიბრტყით, თუ მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი წერტილები მდებარეობენ პრიზმის გვერდით წახნაგებზე.

ამოხსნა. 1) მივიღოთ ძირითად სიბრტყედ პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყე, ხოლო ამ სიბრტყეზე დაგეგმილების მიმართულებად პრიზმის გვერდითი წიბო. ვიპოვოთ M, N და P წერტილების ფუძეები (პროექციები) ძირითად სიბრტყეზე; ამისათვის საჭიროა ამ წერტილებზე გავავლოთ პრიზმის გვერდითი წიბოს პარალელუ-

რი სწორები. ნახ. 128-ზე M_1, N_1 და P_1 წერტილები — M, N და P წერტილების ფუძეებია.

2) ავაგოთ მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის BB_1 წიბოს გადაკვეთის წერტილი. ამისათვის ჯერ ავაგოთ MM_1B_1B და NN_1P_1P მაგეგმილებელი სიბრტყეების M_1B_1 და N_1P_1 კვალთა გადაკვეთის K_1 წერტილი. ამ წერტილზე გავიყვანოთ მაგეგმილებელი სწორი NP სწორის გადაკვეთამდე K წერტილში, მაშინ $Q = MK \times BB_1$ იქნება საძებნი წერტილი.



ნახ. 129.

3) P და Q წერტილები მდებარეობენ პრიზმის BB_1C_1C გვერდით წახნაგზე და იმავე დროს მკვეთ სიბრტყეზე, ამიტომ PQ იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი. ასევე, $T = CC_1 \times PQ$ და M წერტილები მდებარეობენ პრიზმის AA_1C_1C წახნაგზე და მკვეთ სიბრტყეზე, ამიტომ MT იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი. ბოლოს, $R = MT \times AA_1$ და N წერტილები მდებარეობენ პრიზმის AA_1B_1B წახნაგზე და მკვეთ სიბრტყეზე, ამიტომ RN იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი (ეს სწორი უსათუოდ გაივლის Q წერტილზე).

QRT სამკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ამოცანა 2. ავაგოთ პარალელეპიპედის კვეთა სიბრტყით, თუ მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია პარალელეპიპედის გვერდით წახნაგებზე მდებარე სამი წერტილით.

ამოხსნა. 1) პარალელეპიპედის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე გვერდითი წიბოს მიმართულებით M, N და P წერტილების პროექციებია M_1, N_1 და P_1 წერტილები (ნახ. 129).

2) MM_1C_1C და NN_1P_1P მაგეგმილებელი სიბრტყეების M_1C_1 და N_1P_1 კვალთა გადაკვეთის K_1 წერტილიდან გავავლოთ მაგეგმილებელი სწორი NP სწორის გადაკვეთამდე K წერტილში,

მაშინ $S=MK\times CC_1$ წერტილი იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პარალელეპიპედის CC_1 გვერდითი წიბოს გადაკვეთის წერტილი.

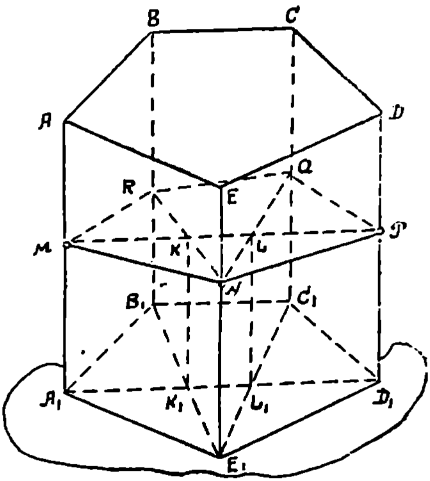
3) S და N წერტილები მდებარეობენ მკვეთ სიბრტყეზე და იმავე დროს პარალელეპიპედის BB_1C_1C წახნაგზე, ამიტომ SN იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

$R=BB_1\times SN$ და M წერტილი მდებარეობენ მკვეთ სიბრტყეზე და იმავე დროს პარალელეპიპედის AA_1B_1B წახნაგზე, ამიტომ RM იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

$Q=AA_1\times RM$ და P წერტილი მდებარეობენ მკვეთ სიბრტყეზე და იმავე დროს პარალელეპიპედის AA_1D_1D წახნაგზე, ამიტომ PQ იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

ანალოგიურად დავასაბუთებთ, რომ ST იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პარალელეპიპედის DD_1C_1C წახნაგის გადაკვეთის ხაზი.

ამრიგად, $QRST$ პარალელოგრამი საძებნი კვეთაა.



ნახ. 130.

ა მ ო ც ა ნ ა 3. ავაგოთ ხუთკუთხა პრიზმის კვეთა სიბრტყით, თუ მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია პრიზმის გვერდით წიბოებზე მდებარე სამი წერტილით.

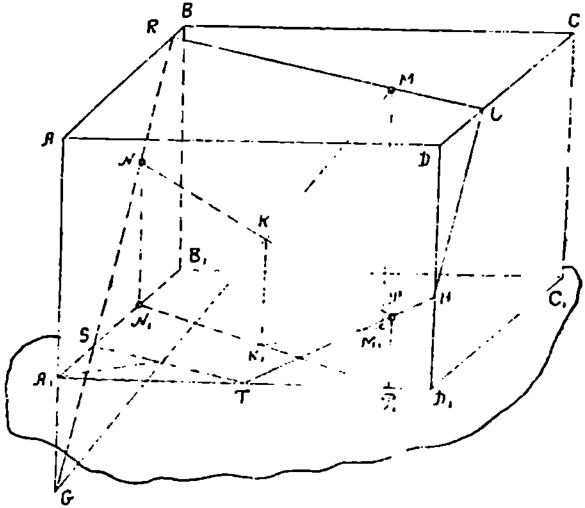
ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი M, N და P წერტილების ფუძეებია A_1, E_1 და D_1 წერტილები (ნახ. 130).

2) ვიპოვოთ MA_1D_1D მაგეგმილებელი სიბრტყისა და EE_1B_1B და EE_1C_1C მაგეგმილებელი სიბრტყეების კვალთა გადაკვეთის $K_1=A_1D_1\times B_1E_1$ და $L_1=A_1D_1\times E_1C_1$ წერტილები. ამ წერტილებზე გავავლოთ მაგეგმილებელი ხაზები MP სწორის გადაკვეთამდე K და L წერტილებში, მაშინ $R=BB_1\times NK$ და $Q=CC_1\times NL$ წერტილები—მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის BB_1 და CC_1 გვერდითი წიბოების შეხვედრის წერტილებია.

$MNPQR$ ხუთკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ა მ ო ც ა ნ ა 4. ავაგოთ პარალელეპიპედის კვეთა სიბრტყით თუ მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია სამი წერტილით, რომელთაგან ერთი მდებარეობს პარალელეპიპედის ზედა ფუძეზე, ხოლო დანარჩენი ორი-გვერდით წახნაგებზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) ვთქვათ, რომ მკვეთი სიბრტყე განსაზღვრულია M, N და P წერტილებით (ნახ. 131). ავაგოთ ამ წერტილების ფუ-



ნახ. 131.

ძეები პარალელეპიპედის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე. M წერტილის ფუძის ასაგებად საჭიროა გავავლოთ $MM_1 \#AA_1$.

2) ახლა ავაგოთ მკვეთი სიბრტყისა და პარალელეპიპედის AA_1 წიბოს გადაკვეთის წერტილი. ამისათვის ავაგოთ AA_1M_1M და NN_1P_1P მაგეგმილებელი სიბრტყეების კვალთა გადაკვეთის K_1 წერტილი. ამ წერტილზე გავავლოთ მაგეგმილებელი ხაზი NP სწორის გადაკვეთამდე K წერტილში, მაშინ $G = AA_1 \times MK$ წერტილი იქნება საძებნი წერტილი.

3) G და N წერტილები მდებარეობენ მკვეთ სიბრტყეზე დაიმავე დროს პარალელეპიპედის AA_1B_1B წახნაგის სიბრტყეზე, ამიტომ GN იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

4) $R = NG \times AB$ და M წერტილები მდებარეობენ მკვეთ სი-

ბრტყეზე და პარალელეპიპედის ზედა ფუძეზე, ამიტომ RM იქნება მათი გადაკვეთის ხაზი.

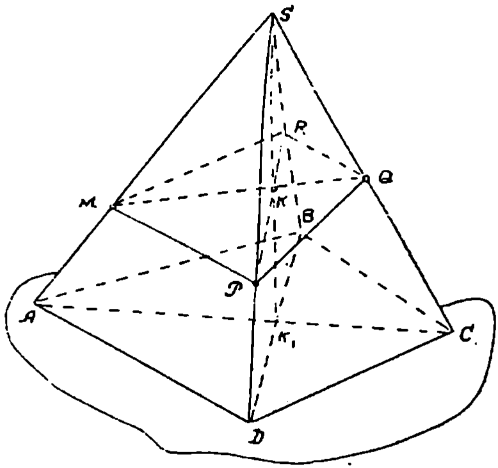
5) $S=NG\times A_1B_1$ წერტილზე გავავლოთ $ST \parallel RM$, მაშინ ST იქნება მკვეთი სიბრტყისა და პარალელეპიპედის ქვედა ფუძის გადაკვეთის ხაზი.

6) ბოლოს გავავლოთ TP და HL სწორები.

$RSTHL$ ხუთკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ა მ ო ც ა ნ ა 5. ავაგოთ ოთხკუთხა პირამიდის კვეთა სიბრტყით, თუ მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი სამი წერტილი მდებარეობს პირამიდის გვერდით წიბოებზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) გამოვიყენოთ „შიგა" ცენტრალური დაგეგმილება. ძირითად სიბრტყედ მივიღოთ პირამიდის ფუძის სიბრტყე, ხოლო პროექციის ცენტრად—პირამიდის წვერო S.



ნახ. 132.

მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი წერტილები იყოს M, P და Q, მაშინ მათი ფუძეები იქნებიან A, D და C წერტილები (ნახ. 132).

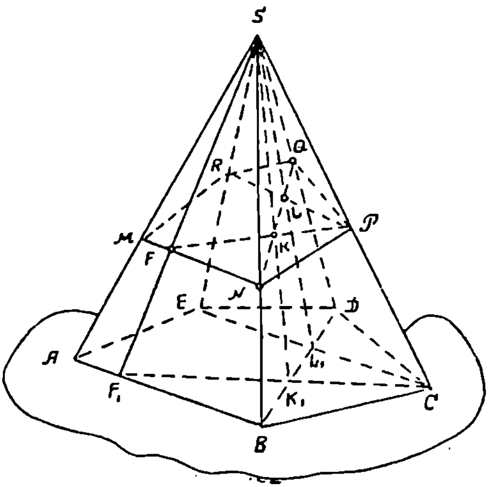
2) მკვეთი სიბრტყისა და პირამიდის SB წიბოს შეხვედრის წერტილის ასაგებად ვიქცევით ასე: ავაგოთ SAC და SBD სიბრტყეების კვალთა გადაკვეთის K_1 წერტილი. გავავლოთ ამ წერტი-

ლზე K_1S მაგეგმილებელი სწორი, მაშინ ჩვენ ავაგებთ $K=MQ\times$ $\times SK_1$ წერტილს. $R=SB\times PK$ წარმოადგენს საძებნ წერტილს.

$MPQR$ ოთხკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ა მ ო ც ა ნ ა 6. ავაგოთ ხუთკუთხა პირამიდის კვეთა სიბრტყით, თუ მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი წერტილებიდან ორი მოთავსებულია პირამიდის გვერდით წიბოებზე, ხოლო მესამე—გვერდით წახნაგზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) ვთქვათ, რომ მკვეთი სიბრტყის განმსაზღვრელი წერტილებია F, N და Q, მაშინ მათი ფუძეებია: F_1, B და D წერტილები (ნახ. 133).



ნახ. 133.

2) ავაგოთ მკვეთი სიბრტყისა და პირამიდის SC წიბოს გადაკვეთის წერტილი. ამისათვის ავაგოთ $K_1=BD\times F_1C$ წერტილი და გავიყვანოთ SK_1 მაგეგმილებელი სწორი, მაშინ ჩვენ ავაგებთ $K=NQ\times SK_1$ წერტილს. წერტილი $P=FK\times SC$ იქნება საძებნი.

3) ავაგოთ მკვეთი სიბრტყისა და პირამიდის SE წიბოს გადაკვეთის წერტილი. ამისათვის ჯერ ავაგოთ $L_1=CE\times BD$ წერტილი, შემდეგ გავავლოთ SL_1 მაგეგმილებელი სწორი, მაშინ ჩვენ ავაგებთ $L=NQ\times SL_1$ წერტილს. $R=PL\times SE$ იქნება საძებნი წერტილი.

$MNPQR$ ხუთკუთხედი საძებნი კვეთაა.

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევჩერდით მხოლოდ მრავალწახნაგა სხეულების კვეთების აგების საკითხზე. კვეთების აგების განხილული მეთოდები გამოდგება აგრეთვე ცილინდრისა და კონუსის კვეთების ასაგებადაც; მაგრამ ჩვენი შეხედულებით თავდაპირველად საკმარისია შემოვიფარგლოთ მხოლოდ მრავალწახნაგა სხეულების კვეთების აგებით. რაც შეეხება ცილინდრისა და კონუსის კვეთების აგებას ისინი შეიძლება განვიხილოთ შემდეგში, შესაფერი განყოფილების გავლის დროს.

ახლა მოკლედ შევჩერდეთ იმ შეცდომებზე, რომლებსაც ხშირად უშვებენ მოსწავლეები მრავალწახნაგა სხეულების კვეთების აგების დროს.

კვეთების აგებისას ყველაზე გავრცელებული შეცდომა გამოიხატება იმაში, რომ მოსწავლე აგებს ისეთი ხაზების გადაკვეთის წერტილს, რომლებიც ორიგინალში არ იკვეთებიან. ასეთია, მაგალითად, აცდენილი ხაზები. როგორც ცნობილია, ორი აცდენილი სწორი ხაზის გეგმილები ან პარალელურია ან კვეთენ ერთმანეთს, ამიტომ მოსწავლე ხშირად აგებს აცდენილი ხაზების მოჩვენებითი გადაკვეთის წერტილს.

იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ ხსენებული ხასიათის შეცდომა საჭიროა მოსწავლეები ხელმძღვანელობდნენ შემდეგი დებულებით: ორი სწორი ხაზი გადაიკვეთება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ერთ სიბრტყეზე მდებარეობენ და ერთმანეთის პარალელური არ არიან.

ამ დებულებაში გარკვევისათვის საჭიროა მოსწავლეებთან ჩატარებულ იქნას სათანადო ვარჯიში. მასთან, ამ სავარჯიშოების ამოხსნა წინ უნდა უსწრებდეს მრავალწახნაგა სხეულების კვეთების აგებაზე გადასვლას.

მოვიტანოთ რამდენიმე მაგალითი.

მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედის გამოსახვა

$$ABCDA_1B_1C_1D_1.$$

1) იკვეთებიან თუ არა პარალელეპიპედის BD_1 დიაგონალი და ზედა ფუძის AC დიაგონალი?

2) წერტილი $M \in DD_1$, ხოლო წერტილი $N \in CC_1$; $NC_1 < MD_1$. გადაიკვეთებიან, თუ არა MN და A_1C_1 სწორები?

3) წერტილი $M \in BC$, წერტილი $N \in A_1D_1$; $MB < NA_1$; გადაიკვეთებიან თუ არა BB_1 და MN სწორები?

4) გადაიკვეთებიან თუ არა პარალელეპიპედის A_1C და AC_1 დიაგონალები?

5) წერტილი $M\in AA_1$ და წერტილი $N\in CC_1$; $MA_1<NC_1$; გადაიკვეთებიან თუ არა MN და A_1C_1 სწორები?

6) წერტილი $P\in B_1D_1$; გადაიკვეთებიან თუ არა BP და DD_1 სწორები?

7) რომელ სიბრტყეზე მდებარეობენ BB_1 და KL სწორები, თუ $K\in BC$ და $L\in B_1C_1$ და შეიძლება თუ არა გადაიკვეთონ ისინი?

ანალოგიური ხასიათის სავარჯიშოთა რიცხვი შეიძლება საგრძნობლად გავადიდოთ.

მეორე შეცდომა, რომელიც აგრეთვე გავრცელებულია, ის არის რომ მოსწავლეები კვეთაში მიღებული მრავალკუთხედის უხილავ ნაწილებს გამოსახავენ მთლიანი ხაზებით პუნქტირული ხაზების ნაცვლად.

ასეთი შეცდომების თავიდან აცილებისათვის საჭიროა მოსწავლეებს მოვთხოვოთ, რომ ხაზები, რომლებიც განლაგებულია მრავალწახნაგას შიგნით ან მდებარეობენ მის უხილავ ნაწილზე ან კიდევ დაფარული არიან თვით მრავალწახნაგა სხეულით, ნახაზზე პუნქტირული ხაზებით იქნეს გამოსახული.

თავი IV

მეტრიკული ამოცანების ადგილი და მათი ამოხსნის სწავლება სტერეომეტრიის სასკოლო კურსში

§ 1. წინასწარი შენიშვნები

მეტრიკული ამოცანები—ისეთი ამოცანებია, რომლებშიც მოთხოვნილია სხვადასხვა მეტრიკული აგებების ჩატარება (პერპენდიკულარების გავლება, მრავალწახნაგა სხეულების ორწახნაგა კუთხეების ხაზოვანი კუთხეების აგება, მრავალწახნაგა სხეულების სიმაღლეების აგება და სხვ.).

პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ მოსწავლეები ასეთი ამოცანების ამოხსნას უფრო მძიმედ ითვისებენ, ვიდრე პოზიციური ამოცანების ამოხსნას, მაგრამ მეტრიკული ამოცანების ამოხსნის სწავლების აუცილებლობას გვიკარნახებს თვით სტერეომეტრიის კურსის სწავლების სათანადო სიმაღლეზე დაყენების ინტერესები, ვინაიდან მეტრიკული აგებების ჩატარების ჩვევები საჭიროა როგორც კონსტრუქციული, ისე გამოანგარიშებითი ხასიათის ამოცანების ამოსახსნელად. ავიღოთ, მაგალითად, შემდეგი ამოცანა გამოანგარიშებაზე: „ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები უდრის 15 მ და 20 მ. მართი კუთხის C წვეროდან ამ სამკუთხედის სიბრტყისადმი ამართულია პერპენდიკულარი $CD=35$ მ. იპოვეთ მანძილი D წერტილიდან AB ჰიპოტენუზამდის“.[1]

ამოცანის ამოხსნა მოითხოვს მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვას. მაგრამ ამ პერპენდიკულარის გამოსახვა არ შეიძლება ნებისმიერად ავიღოთ, რადგან ABC სამკუთხედი მასზე დადებული პირობებით სავსებით განსაზღვრულია და, მაშასადამე, სავსებით განსაზღვრულია ხსენებული პერპენდიკულარის ფუძეც AB ჰიპოტენუზაზე.

---

[1] ნ. რიბკინი, გეომეტრიულ ამოცანათა კრებული, ნაწ. II, § 1, № 22/2.

ეს გარემოება კარგად უნდა ესმოდეს მოსწავლეს, თუმცა მან ამოცანის ამოხსნის დროს შეიძლება გამოიყენოს მიახლოებით სწორი ნახაზი. ეს ნახაზი შეიძლება შევასრულოთ ასე: რადგან მოცემული სამკუთხედის ერთი კათეტი მეტია მეორეზე, ამიტომ პირველი მათგანის პროექცია ჰიპოტენუზაზე მეტია მეორის პროექციაზე. ამ გარემოების გათვალისწინებით ავიღებთ ჰიპოტენუზაზე გამოსასახავი სიმაღლის ფუძეს. მიღებული ნახაზი მიახლოებით სწორი იქნება.

მეორე თავში განხილული მაგალითები, რომლებიც დაკავშირებული იყო შემოხაზული და ჩახაზული სხეულების გამოსახვების აგებასთან, მოითხოვდნენ საჭირო აგებების ზუსტად ჩატარებას. მაგალითად, კონუსში ჩახაზული წესიერი სამკუთხა პირამიდის გამოსახვის აგებისათვის საჭიროა კონუსის ფუძის გამოსახვაში, ელიფსში, ჩაიხაზოს წესიერი სამკუთხედის გამოსახვა. როგორც იყო ნაჩვენები (თავი II, § 6, პ. 5, მაგალითი 1) ასეთი აგება ზუსტად უნდა იქნას შესრულებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოსახვა არასწორი იქნება. არასწორი გამოსახვა კი მანკიერია მოსწავლეთა სივრცითი წარმოდგენების განვითარებისათვის.

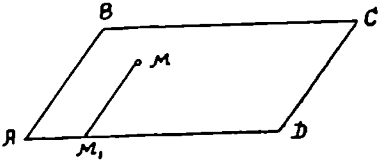
მეორე თავის § 4-ში, პ. 2, ჩვენ ლაპარაკი გვქონდა გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობის შესახებ. იქვე იყო აღნიშნული, რომ თუ გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრულია, მაშინ რაიმე თავისუფლება აგებებში ასეთ გამოსახვებზე დაუშვებელია. მართლაც, მეტრიკულად განსაზღვრული გამოსახვა თავის ორიგინალს განსაზღვრავს მსგავსებამდე, ამიტომ მეტრიკული აგებები განსაზღვრულია როგორც ორიგინალში, ისე გამოსახვაზეც, რაც საშუალებას გვაძლევს ეფექტურად ვაწარმოოთ მეტრიკული აგებები გამოსახვაზე.

მეტრიკულად განსაზღვრული გამოსახვის ცნება მოსწავლეებს უნდა მივცეთ მაგალითების განხილვის საფუძველზე. ასე, მაგალითად, გავაცნობთ რა მოსწავლეებს კვადრატის გამოსახვას პარალელოგრამის სახით, აქვე ვუჩვენებთ, რომ კვადრატის გამოსახვაზე უკვე აღარ შეიძლება მეტრიკული აგებების თავისუფლად ჩატარება. ამ ფაქტის საილუსტრაციოდ შემდეგ მარტივ მაგალითს განვიხილავთ:

ABCD პარალელოგრამი წარმოადგენს კვადრატის გამოსახვას; ამ კვადრატზე აღებულია წერტილი, რომელიც გამოსახვაზე აღ-

ნიშნულია M ასოთი. ავაგოთ M წერტილიდან კვადრატის გვერდზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვა.

თუ გვსურს, მაგალითად, ავაგოთ AD გვერდზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვა, ამისათვის საკმარისია გავიყვანოთ $MM_1 \parallel AB$ (ნახ. 134). MM_1 საძებნი პერპენდიკულარის გამოსახვა იქნება. მართლაც, $A'B' \perp A'D'$, ამიტომ M' წერტილიდან $A'D'$ გვერდზე დაშვებული პერპენდიკულარი $A'B'$-ის პარალელური იქნება. მაგრამ პარალელურ პროექციაში (რომელშიაც აგებულია ჩვენი გამოსახვები) შენარჩუნებულია სწორების პარალელობის პირობა, ამიტომ გამოსახვაზე უნდა გავავლოთ $MM_1 \parallel AB$;



ნახ. 134.

განხილული მაგალითი მიუთითებს სწორედ იმაზე, რომ *მეტრიკულად განსაზღვრულ გამოსახვაზე აგებები არ შეიძლება ნებისმიერად ჩავატაროთ.*

როგორც ვიცით (თავი II, § 4, პ. 2) ბრტყელი ფიგურის გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრულია, თუ გამოსახვაზე დადებული პირობები განსაზღვრავენ რომელიმე სამკუთხედ—გამოსახვის ორიგინალის ნამდვილ ფორმას. ბრტყელი ფიგურების გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობის რამდენიმე პირობა მოცემული იყო იქვე; (ისინი ამოღებული გვაქვს პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის წიგნიდან.).

ზემოთგანხილულ მაგალითში გამოსახვის მეტრიკული განსაზღვრულობა უზრუნველყოფილი იყო პირობით: „ნახაზზე მოცემული $ABCD$ პარალელოგრამი კვადრატის გამოსახვაა“. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ აგრეთვე ასე: პირობა, რომ ნახაზზე მოცემული პარალელოგრამი წარმოადგენს კვადრატის გამოსახვას, *ადგენს გამოსახვის მეტრიკას*. გამოსახვის მეტრიკა შეიძლება დადგენილ იქნეს სხვა პირობითაც. ყველა ეს პირობები გამოსახვაზე მეტრიკის დადგენის თვალსაზრისით ტოლფასია.

სივრცითი ფიგურების გამოსახვათა მეტრიკული განსაზღვრულობისათვის საჭიროა, რომ გამოსახვაზე დადებული პირობები განსაზღვრავდენ რომელიმე ტეტრაედრ—ორიგინალის ნამდვილ ფორმას (იხ. თავი II, § 4, II პ. 3). ასეთ გამოსახვებზეც, რა თქმა უნდა, რაიმე თავისუფლება აგებებში დაუშვებელია. თუ ჩვენ მეტ-

რიკულ აგებებს ნებისმიერად ჩავატარებთ ისე, რომ ანგარიშს არ გავუწევთ გამოსახვის მეტრიკულ განსაზღვრულობას, მაშინ მოსალოდნელია უხეში შეცდომები.

მაგალითად, ამოცანის—„პირამიდას ფუძედ აქვს სამკუთხედი, რომლის გვერდებია: 9 სმ, 17 სმ და 28 სმ; თითოეული გვერდითი წიბო უდრის 22,9 სმ. გაიგეთ ამ პირამიდის მოცულობა“[1]—ამოხსნა მოითხოვს პირამიდის სიმაღლის აგებას, მაგრამ მისი აგებისას უნდა გავითვალისწინოთ, რომ სიმაღლის ფუძე ორიგინალში, პირამიდის ფუძეზე შემოხაზული წრის ცენტრს წარმოადგენს. ამ გარემოებას ადგილი ექნება გამოსახვაზეც, ამიტომ თავიდან რომ ავიცილოთ შეცდომა, საჭიროა პირამიდის ფუძის გამოსახვისათვის მოიძებნოს (აგებული იქნას) ფუძეზე შემოხაზული წრის ცენტრის გამოსახვა.

როგორც პრაქტიკა გვიჩვენებს, სკოლებში ამ გარემოებას არ ითვალისწინებენ. ამის გამო კი ხშირია შემთხვევა, როცა სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის ფუძეს იმის ნაცვლად, რომ იგი პირამიდის ფუძის გამოსახვის გარეთ იყოს მოთავსებული (შემთხვევა, როცა ფუძე ბლაგვკუთხა სამკუთხედია და გვერდითი წიბოები ტოლია), მის შიგნით იღებენ.

ყოველი ზემოთ ნათქვამი საკმაოდ მიუთითებს იმაზე, რომ მეტრიკული ამოცანების ამოხსნის სწავლებას დიდი მნიშვნელობა აქვს საერთოდ და, კერძოდ, სტერეომეტრიის კურსის სწავლების სათანადო სიმაღლეზე დაყენებისათვის.

მეტრიკული ამოცანების ამოხსნის სწავლება ხელს უწყობს მოსწავლეთა სივრცითი წარმოდგენების განვითარებას და მათში კონსტრუქციული ოპერაციების წარმოების ჩვევების აღზრდას. გარდა ყოველივე თქმულისა მეტრიკული ამოცანების ამოხსნა ხელს უწყობს მოსწავლეთა ლოგიკური მსჯელობის უნარის განვითარებას, რადგან მათი ამოხსნის დროს მოსწავლე უნდა აწარმოებდეს ზუსტ ლოგიკურ მსჯელობას.

იმ მიზნით, რომ მეტრიკული ამოცანების თემატიკა, რაც შეიძლება უფრო მეტად დავუახლოვოთ სტერეომეტრიის არსებულ სასკოლო კურსს და ამით მასწავლებელს გავუადვილოთ სწავლების პროცესში მთელი რიგი საკითხების მართებულად გარკვევა, აქ უმთავრესად ისეთი ამოცანების ამოხსნის ნიმუშებს განვიხილავთ, რომლებიც უპასუხებენ ამ მიზანს.

[1] ნ. რიბკინი, გეომეტრიულ ამოცანათა კრებული, ნაწ. II, § 17, № 16.

§ 2. მეტრიკული ამოცანები პლანიმეტრიული ორიგინალების გამოსახვებზე

სწავლების პრინციპი: „მარტივიდან რთულისაკენ“—მოითხოვს, რომ მეტრიკული ამოცანების ამოხსნის სწავლებაც ამ გზით წარიმართოს.

იმისათვის, რომ მოსწავლეებმა კარგად დაინახონ ის განსხვავება, რომელიც არსებობს ორიგინალში მეტრიკულ აგებებსა და გამოსახვაზე შესაბამ აგებებს შორის, საჭიროა მათ განვუმარტოთ ეს განსხვავება მარტივ მაგალითებზე.

მაგალითად, სამკუთხედის სიმაღლეთა აგება ორიგინალში, ყოველთვის შეიძლება ეფექტურად განვახორციელოთ, თუ მართი კუთხის ასაგებად გამოვიყენებთ სახაზავ სამკუთხედს. გამოსახვაზე კი, *რომელიც მოცემული ორიგინალის მსგავსი ორიგინალის პარალელურ პროექციას წარმოადგენს*, ხსენებული სახაზავი სამკუთხედი სიმაღლეთა აგებისათვის გამოუსადეგარი ხდება, რადგან პარალელურ პროექციაში კუთხეების სიდიდე საზოგადოდ შენარჩუნებული არ არის.[1] იმისათვის, რომ შესაძლებლობა გვექნეს ეს აგებები ეფექტურად განვახორციელოთ გამოსახვაზეც, საჭიროა, რომ ეს უკანასკნელი მეტრიკულად განსაზღვრული იყოს, ე. ი. რომ ორიგინალზე დადებული პირობები ადგენდენ გამოსახვის მეტრიკას.

მასთან როგორც ქვემოთაც დავინახავთ, მნიშვნელობა არ აქვს იმას, თუ რომელი პირობა ადგენს გამოსახვის მეტრიკულ განსაზღვრულობას. ამ გარემოებას შეიძლება მნიშვნელობა ჰქონდეს მხოლოდ შესასრულებელი აგებების სირთულის თვალსაზრისით, რადგან ერთ შემთხვევაში ეს აგებები უფრო ადვილად შესასრულებელია, ვიდრე მეორე შემთხვევაში.

მაგალითად, თუ გამოსახვის მეტრიკა დადგენილია წრეხაზის გამოსახვით—ელიფსით, რომლის სიბრტყეზე მოთავსებულია აგრეთვე წერტილი და სწორი, მაშინ მოცემული წერტილიდან მოცემულ სწორზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვის აგება უფრო მარტივია, ვიდრე იგივე აგება იმ შემთხვევაში, როცა გამოსახვის მეტრიკა დადგენილია, მაგალითად, კვადრატის ისეთი გამოსახვით, როგორიც პარალელოგრამია.

[1] კუთხის სიდიდე შენარჩუნებული იქნება მხოლოდ მაშინ, როცა ამ კუთხის სიბრტყე გამოსახვათა სიბრტყის პარალელურია, მაგრამ ჩვენ არ ვიზღუდებით ამ კერძო შემთხვევის განხილვით.

ხშირად, იმ ფიგურის გამოსახვა, რომელიც მთელი გამოსახვის მეტრიკულ განსაზღვრულობას ადგენს, გამოდის დამხმარე როლში, ე. ი. იგი არ წარმოადგენს გამოსახვის შემადგენელ ნაწილს, არამედ იგი მოცემულია მხოლოდ გამოსახვაზე მეტრიკის დადგენის მიზნით. ამ გარემოებას ადგილი ჰქონდა ახლახან განხილულ მაგალითებში, რომლებშიაც ელიფსი (როგორც წრეხაზის გამოსახვა) ან პარალელოგრამი (როგორც კვადრატის გამოსახვა) გამოდიოდენ დამხმარე ფიგურების როლში.

სხვა შემთხვევაში კი, გამოსახვაზე მეტრიკის დამდგენი ფიგურის გამოსახვა გამოსახვის შ ე მ ა დ გ ე ნ ე ლ ი ნ ა წ ი ლ ი ა. მაგალითად, სფეროზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული სხეულების გამოსახვათა აგების დროს, სფეროს შემონახაზი, ადგენს რა გამოსახვის მეტრიკულ განსაზღვრულობას, იმავე დროს წარმოადგენს გამოსახვის შემადგენელ ნაწილსაც.

მეტრიკული ამოცანების ამოხსნისას დიდი მნიშვნელობა ენიჭება იმ პირობათა კარგად გარკვევას, რომელიც მოცემულია ამოცანაში.

გავარჩიოთ შემდეგი ამოცანა: „გამოსახვაზე მოცემული ნებისმიერი ელიფსი წარმოადგენს წრეხაზის გამოსახვას. ამ წრეხაზის სიბრტყეზე მოცემულია აგრეთვე ნებისმიერი სამკუთხედი, რომელიც გამოსახვაზე აღნიშნულია ABC-თი. მოითხოვება ABC სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვების აგება“ (იხ. ამოხსნა ქვემოთ, ამოცანა № 8).

ამ ამოცანის პირობებში ლაპარაკია იმაზე, რომ ორიგინალის სიბრტყე შეიცავს წრეხაზს, ამ სიბრტყეზე მოთავსებულია აგრეთვე ნებისმიერი სამკუთხედი. ამ სამკუთხედში აგებულია სიმაღლეები (შეიძლება არც იყოს აგებული).

გამოსახვათა სიბრტყეზე კი წარმოდგენილია: ელიფსი, რომელიც წარმოადგენს წრეხაზის გამოსახვას და სამკუთხედი, რომელიც ორიგინალში მოცემული სამკუთხედის გამოსახვაა. მოითხოვება ამ სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვების აგება (რომელნიც, რასაკვირველია, გამოსახვაზე მოცემულნი არ არიან).

შევნიშნოთ, რომ ელიფსი, როგორც წრეხაზის გამოსახვა თამაშობს როგორიღაც დამხმარე როლს: სახელდობრ, იგი ადგენს გამოსახვის მეტრიკულ განსაზღვრულობას და ამდენად შესაძლებ-

ლობას გვაძლევს სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვების ეფექტური აგებებისას. აშკარაა, რომ გამოსახვის მეტრიკული განსაზღვრულობა შეიძლება დადგენილი ყოფილიყო სხვა ფიგურითაც. მაგალითად, გამოსახვაზე მოცემული ყოფილიყო პარალელოგრამი, როგორც კვადრატის გამოსახვა.

განვიხილოთ კიდევ ამოცანა: „გამოსახვაზე მოცემული ABC სამკუთხედი წარმოადგენს წესიერი სამკუთხედის გამოსახვას, რომლის სიბრტყეზე მოცემულია აგრეთვე წერტილი M და სწორი PQ, მოითხოვება M წერტილიდან PQ-ზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვის აგება" (ამ ამოცანის ამოხსნა იხ. მეორე თავის § 4-ში).

ამ ამოცანის პირობაში ნათქვამია, რომ წესიერი სამკუთხედის სიბრტყეზე მოცემულია წერტილი და სწორი. ამ წერტილიდან გავლებულია პერპენდიკულარი ხსენებული სწორისადმი (შეიძლება არც იყოს გავლებული).

გამოსახვაზე მოცემულია: წესიერი სამკუთხედის, სწორი ხაზისა და წერტილის გამოსახვები. პერპენდიკულარის გამოსახვა კი არ არის ნაჩვენები. საჭიროა მისი აგება.

ამ შემთხვევაში გამოსახვის მეტრიკულ განსაზღვრულობას ადგენს პირობა: „გამოსახვაზე მოცემული სამკუთხედი წარმოადგენს წესიერი სამკუთხედის გამოსახვას".

მოტანილი ამოცანებიდან პირველში ლაპარაკი იყო სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვის აგების შესახებ, მეორეში კი მოცემული წერტილიდან მოცემულ სწორზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვის აგებაზე.

ამ ამოცანების ამოხსნისათვის, ე. ი. საჭირო აგებების ჩატარებისათვის, მნიშვნელობა არ აქვს იმას, საჭირო აგებები შესრულებულია თუ არა ორიგინალში. ჩვენთვის მნიშვნელოვანია მხოლოდ ის, რომ გამოსახვა იყოს მეტრიკულად განსაზღვრული და, მაშასადამე, იგი შესაძლებლობას იძლეოდეს ეფექტურად განვახორციელოდ საჭირო აგებანი.

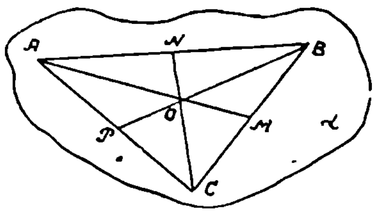
ეს შენიშვნა ზოგადი ხასიათისაა, ამიტომ ის სამართლიანი იქნება სივრცითი ფიგურების გამოსახვებისათვისაც.

გადავიდეთ ახლა მაგალითების განხილვაზე.

ამოცანა 1. 135-ე ნახაზზე მოცემული ABC სამკუთხედი წარ-

მოადგენს წესიერი სამკუთხედის გამოსახვას. ავაგოთ ამ სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წესიერი სამკუთხედის სიმაღლეები იმავე დროს მედიანებიცაა. მედიანების თვისება კი შენარჩუნებულია გამოსახვაზეც, ამიტომ წესიერი სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვების ასაგებად საკმარისია თითოეული გვერდი გავყოთ შუაზე და გაყოფის წერტილები სამკუთხედის შესაბამი წვეროების გამოსახვებთან შევაერთოთ, მივიღებთ სიმაღლეთა გამოსახვებს.

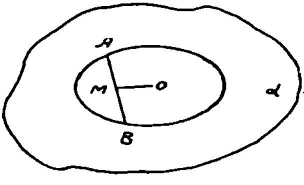


ნახ. 135.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. საკმარისია ავაგოთ ორი სიმაღლის გამოსახვა, მაშინ მესამე მათი გადაკვეთის წერტილში გაივლის (სამკუთხედის სიმაღლეთა თვისება).

ა მ ო ც ა ნ ა 2. 136-ე ნახაზზე მოცემული ელიფსი წარმოადგენს წრეხაზის გამოსახვას. მოცემულია აგრეთვე ამ წრეხაზის ქორდის გამოსახვა AB. ავაგოთ წრეხაზის ცენტრიდან AB ქორდაზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წრეხაზის ცენტრიდან ქორდაზე დაშვებული პერპენდიკულარი შუაზე ყოფს ამ ქორდას და პირიქით. ამრიგად, გამოსახვაზე საჭიროა AB ქორდა გავყოთ შუაზე M წერტილში და ეს წერტილი შევაერთოთ ელიფსის ცენტრთან, მივიღებთ საძებნი პერპენდიკულარის OM გამოსახვას.



ნახ. 136.

ა მ ო ც ა ნ ა 3. 137-ე ნახაზზე მოცემული ABC სამკუთხედი გამოსახავს ტოლფერდა სამკუთხედს, რომლის ფერდი ორჯერ მეტია ფუძეზე. ავაგოთ ნახაზზე ტოლფერდა სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვები.

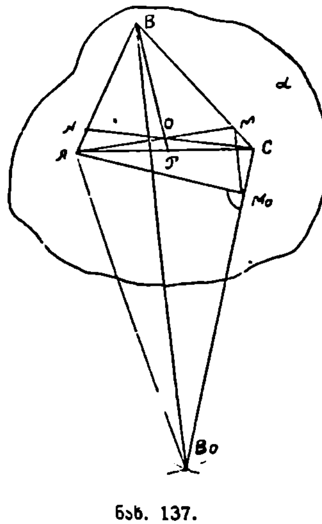
ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან ABC სამკუთხედი ორიგინალში ტოლფერდაა, ამიტომ მისი ერთი სიმაღლე ფუძის მედიანას წარმოადგენს; მისი აგება ადვილია. დანარჩენი სიმაღლეების გამოსახვებიდან საკმაოა ავაგოთ რომელიმე ერთის გამოსახვა, რადგან მესამე სიმაღ-

ლის გამოსახვა პირველი ორი სიმაღლის გადაკვეთის წერტილში გაივლის.

მივიღოთ ABC სამკუთხედის AC გვერდი ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის გამოსახვად, მაშინ BP მედიანა იქნება ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის გამოსახვა ($AP=PC$). დანარჩენი სიმაღლეებიდან ავაგოთ BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის გამოსახვა.

ამ აგებისათვის ეფექტურად გამოვიყენოთ ორიგინალი. ეს ნიშნავს შემდეგს: ავაგებთ ნებისმიერ ტოლფერდა სამკუთხედს, რომლის ფერდი ორჯერ მეტია ფუძეზე. ამ გზით მიღებული სამკუთხედი იქნება ორიგინალის ნამდვილი ფორმა. ეფექტურად ავაგოთ ამ სამკუთხედის სიმაღლე. ეს სიმაღლე გარკვეული შეფარდებით გაყოფს შესაბამ გვერდს. მაგრამ პარალელურ პროექციაში ერთსადაიმავე სწორზე მდებარე მონაკვეთების შეფარდება უდრის გამოსახვის შესაბამი მონაკვეთების შეფარდებას.

გამოვიყენებთ რა ამ თვისებას, აგების საშუალებით, განვსაზღვრავთ ასაგები სიმაღლის გამოსახვის ფუძეს შესაბამი გვერდის გამოსახვაზე და ამნაირად ავაგებთ სამკუთხედის სიმაღლის გამოსახვას.



ნახ. 137.

ორიგინალის ნამდვილი ფორმის აგების დროს შეიძლება წავიდეთ ორი გზით: ერთი—ორიგინალის ნამდვილი ფორმა შეიძლება ავაგოთ ცალკე, მოცემული გამოსახვისაგან დამოუკიდებლად და მეორე—გამოსახვის რომელიმე გვერდი მივიღოთ ორიგინალური სამკუთხედის ფუძის ან ფერდის ნატურალურ სიდიდედ და მასზე ავაგოთ ორიგინალის ნამდვილი ფორმა, მოცემული პირობების შესაბამისად.

ამ გზებიდან უპირატესობა მიეცემა იმას, რომელიც უფრო სწრაფად და მარტივად მიგვიყვანს მიზნამდე.

ჩვენს მაგალითში უმჯობესია გამოვიყენოთ მეორე გზა. ამრი-

გად, AC მონაკვეთი მივიღოთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის ნატურალურ სიდიდედ და მასზე ავაგოთ AB_0C ტოლფერდა სამკუთხედი ისე, რომ $AB_0=2AC$, მაშინ ეს სამკუთხედი იქნება ორიგინალის ნამდვილი ფორმა.

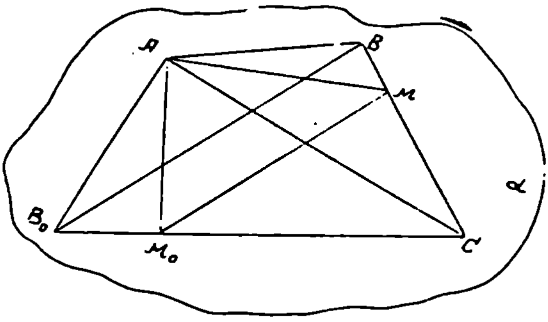
ავაგოთ ამ სამკუთხედში $AM_0 \perp CB_0$;

ამის შემდეგ განვსაზღვროთ M_0 წერტილის მდებარეობა გამოსახვაზე, ე. ი. BC-ზე. ამისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ M_0 წერტილი B_0C მონაკვეთს ყოფს იმავე შეფარდებით, რა შეფარდებითაც M_0 წერტილის გამოსახვა ყოფს B_0C მონაკვეთის BC გამოსახვას, ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას: $CM_0:M_0B_0=CM:MB$, სადაც M წერტილი M_0 წერტილის გამოსახვაა.

M წერტილის ასაგებად საჭიროა გავავლოთ BB_0 სწორი და შემდეგ $M_0M \parallel BB_0$, მაშინ M წერტილი დააკმაყოფილებს პირობას: $CM_0:M_0B_0=CM:MB$, ე. ი. იგი იქნება M_0 წერტილის გამოსახვა.

AM იქნება BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის გამოსახვა, ხოლო $O=BP\times AM$ წერტილი სამკუთხედის ორთოცენტრის გამოსახვა, ამიტომ CN სამკუთხედის მესამე სიმაღლეს გამოსახავს.

ამოცანა 4. 138-ე ნახაზზე მოცემული ABC სამკუთხედი წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის გამოსახვას, რომლის AB და



ნახ. 138

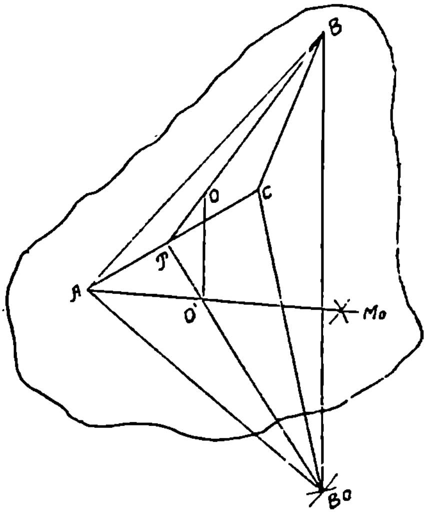
AC კათეტები (ორიგინალში) შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 3 : 5. ავაგოთ ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის გამოსახვა.

ამოხსნა. ავაგოთ სამკუთხედ-ორიგინალის ნამდვილი ფორმა. ამისათვის ABC სამკუთხედის AC კათეტი მივიღოთ სამკუთხედ-

ორიგინალის კათეტის ნატურალურ სიდიდედ და ავაგოთ AB_0C მართკუთხა სამკუთხედი ისე, რომ $AB_0:AC=3:5$, მაშინ აგებული სამკუთხედი იქნება ორიგინალის ნამდვილი ფორმა.

ავაგოთ ამ სამკუთხედის სიმაღლე AM_0, ე. ი. გავავლოთ $AM_0 \perp B_0C$; M_0 წერტილის გამოსახვის ასაგებად, საჭიროა $CM_0 : M_0B_0$ შეფარდება უცვლელად გადავიტანოთ BC მონაკვეთზე. ამისათვის ჯერ გავავლოთ BB_0 სწორი და შემდეგ $M_0M \parallel B_0B$, მაშინ გვექნება: $M_0C : M_0B_0 = CM : MB$ ე. ი. M წერტილი იქნება ასაგები სიმაღლის ფუძის გამოსახვა, ხოლო AM საძებნი სიმაღლის გამოსახვა.

ა მ ო ც ა ნ ა 5. 139-ე ნახაზზე მოცემული ABC სამკუთხედი წარმოადგენს ტოლფერდა სამკუთხედის გამოსახვას, რომლის AB ფერდი $1\frac{1}{2}$-ჯერ მეტია AC ფუძეზე (ორიგინალში). ავაგოთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრის გამოსახვა.



ნახ. 139.

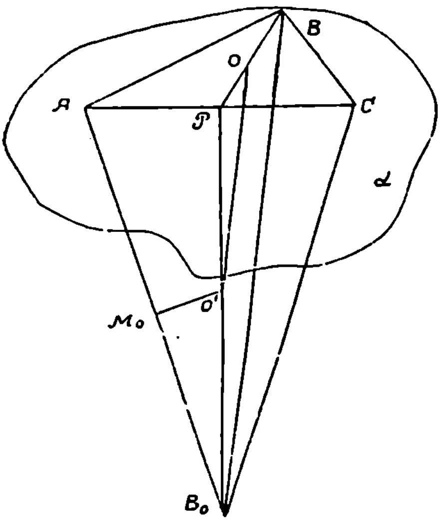
ა მ ო ხ ს ნ ა. სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრს წარმოადგენს ამ სამკუთხედის კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი. რადგან ნახაზზე წარმოდგენილი სამკუთხედი ორიგინალში ტოლფერდაა, ამიტომ ერთ-ერთი ბისექტრისის გამოსახვა ფუძის BP მედიანას წარმოადგენს. ვიპოვოთ, ჩახაზული წრის ცენტრის მდებარეობა ამ მედიანაზე.

ავაგოთ ორიგინალის ნამდვილი ფორმა. ამისათვის AC მონაკვეთი მივიღოთ ორიგინალის ფუძის ნატურალურ სიდიდედ და ავაგოთ AB_0C ტოლფერდა სამკუთხედი ისე, რომ $AB_0=1\frac{1}{2}AC$; AB_0C სამკუთხედი ორიგინალის ნამდვილი ფორმაა.

ავაგოთ AB_0C სამკუთხედის B_0AC კუთხის AM_0 ბისექტრისა (ბისექტრისის აგებას ვაწარმოებთ ჩვეულებრივი ხერხით). $O'=PB_0\times AM_0$ წერტილი AB_0C სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრს წარმოადგენს.

ცხადია, რომ O' წერტილი B_0P მონაკვეთს ყოფს იმავე შეფარდებით, რა შეფარდებითაც O' წერტილის გამოსახვა გაყოფს BP მონაკვეთს. ამიტომ გავავლოთ BB_0 სწორი და O' წერტილზე გავიყვანოთ $OO' \parallel BB_0$, მაშინ გვექნება: $PO':O'B_0=PO:OB$ ე. ი. O წერტილი ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრს გამოსახავს.

ა მ ო ც ა ნ ა 6. 140-ე ნახაზზე მოცემული ABC სამკუთხედი წარმოადგენს ტოლფერდა სამკუთხედის გამოსახვას, რომლის ფუძისა და მისი შესაბამი სიმაღლის შეფარდება უდრის $\frac{2}{3}$ ავაგოთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის გამოსახვა.



ნახ. 140.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრი ძევს ფუძის მედიანზე. ავაგოთ ABC სამკუთხედის AC ფუძის BP მედიანა და ვიპოვოთ შემოხაზული წრის ცენტრის გამოსახვა ამ მედიანაზე.

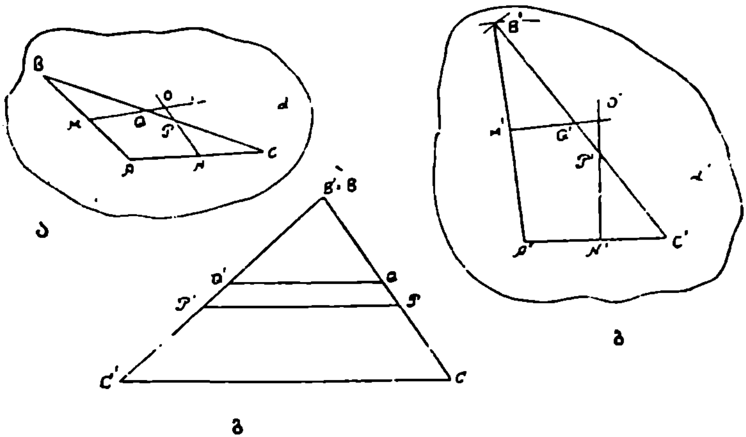
გამოვიყენოთ ორიგინალი ეფექტურად. ამისათვის AC მონაკვეთი მივიღოთ სამკუთხედ ორიგინალის ფუძის ნატურალურ სიდიდედ და ავაგოთ მასზე ტოლფერდა AB_0C სამკუთხედი ისე, რომ $AC:B_0P=2:3$; სამკუთხედი AB_0C ორიგინალის ნამდვილი ფორმაა

განვსაზღვროთ AB_0C სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის მდებარეობა ეფექტური აგებით. ამისათვის AB_0 მონაკვეთის შუა წერტილზე გავავლოთ $M_0O'\perp AB_0$, მაშინ O' იქნება AB_0C სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრი.

ამის შემდეგ $PO':O'B_0$ შეფარდება უცვლელად გადავიტანოთ BP მონაკვეთზე. ამისათვის ჯერ გავავლოთ BB_0 სწორი და შემდეგ კი O' წერტილზე გავიყვანოთ $O'O \parallel BB_0$; გვექნება: $PO':O'B_0=PO:OB$, ე. ი. O წერტილი წარმოადგენს ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის გამოსახვას.

ა მ ო ც ა ნ ა. 7. 141 ა ნახაზზე მოცემული ABC სამკუთხედი წარმოადგენს ისეთი სამკუთხედის გამოსახვას, რომლის გვერდებია: 5 სმ, 8 სმ და 10 სმ. ავაგოთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის გამოსახვა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრი მდებარე-



ნახ. 141.

ობს ამ სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებიდან ამართული პერპენდიკულარების გადაკვეთის წერტილში.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ამ პერპენდიკულარების მიმართულებანი გამოსახვაზე, საჭიროა ეფექტურად გამოვიყენოთ ორიგინალი.

ავაგოთ $A'B'C'$ სამკუთხედი (ნახ. 141 ბ) ისე, რომ მასშტაბი იყოს 1 : 2, მასთან მივიღოთ, რომ ორიგინალში $AC=5$ სმ, $AB=8$ სმ და $BC=10$ სმ; მაშინ ეს სამკუთხედი იქნება ორიგინალის ნამდვილი ფორმა. ავაგოთ $A'B'C'$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის O' ცენტრი ეფექტური აგებით.

გამოსახვაზე AB და AC მონაკვეთების შუაწერტილებზე გავ-

ლებული პერპენდიკულარების მიმართულებანი ნაპოვნი იქნება, თუ BC მონაკვეთზე (როგორც $B'C'$ მონაკვეთის გამოსახვაზე) ავაგებთ Q' და P' წერტილების გამოსახვებს, ე .ი. $B'Q' : Q'P' : P'C'$ შეფარდებებს უცვლელად გადავიტანთ მასზე.

ეს აგება ცალკე ნახაზზეა შესრულებული (ნახ. 141 გ). აქ საჭიროა BC და $B'C'$ მონაკვეთების ბოლოები B და B' ან C და C' ისე შევუთავსოთ ერთმანეთს, რომ თვით მონაკვეთებმა რაიმე კუთხე შექმნან. შემდეგ, $B'C'$ მონაკვეთზე გადავიტანოთ $B'Q'$, $Q'P'$ და $P'C'$ მონაკვეთები უცვლელად. C და C' წერტილები შევაერთოთ სწორი ხაზით და გავავლოთ $P'P \parallel Q'Q \parallel C'C$, მაშინ ჩვენ განვსაზღვრავთ P' და Q' წერტილების გამოსახვების მდებარეობას BC-ზე. დასასრულ BC მონაკვეთზე (ნახ. 141 ბ) უცვლელად გადავიტანოთ BQ, QP და PC მონაკვეთები ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე და გავავლოთ MQ და NP სწორები, მაშინ $O=MQ\times NP$ წერტილი იქნება ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის გამოსახვა.

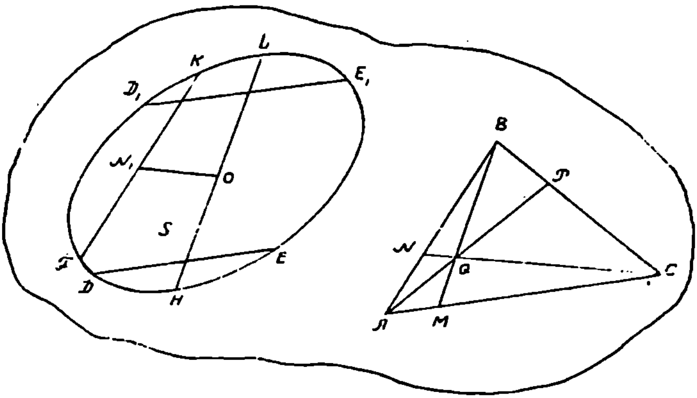
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. რადგან $10^2>8^2+5^2$, ამიტომ მოცემული სამკუთხედი (ორიგინალი) ბლაგვკუთხაა და, მაშასადამე, მასზე შემოხაზული წრის ცენტრი მოთავსდება სამკუთხედის გარეთ. ამ გარემოებას ადგილი ექნება გამოსახვაზე რაც ჩანს ნახაზიდანაც. ამიტომ ნახაზების აგება გაკვეთილის პროცესშიაც (გამოანგარიშებაზე ამოცანების ამოხსნის დროს), არ შეიძლება შევასრულოთ ამოცანის რიცხვითი მონაცემების მხედველობაში მიუღებლად, თუ გვსურს, რომ ჩვენს მიერ შესრულებული ნახაზები მიახლოებით მაინც იყოს სწორი.

ა მ ო ც ა ნ ა 8. 142-ე ნახაზზე მოცემული ელიფსი წარმოადგენს წრეხაზის გამოსახვას, რომლის სიბრტყეზე მოთავსებულია აგრეთვე ნებისმიერი სამკუთხედი, რომელიც გამოსახვაზე აღნიშნულია ABC თი. ავაგოთ ABC სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გავავლოთ ელიფსის ორი DE და D_1E_1 ქორდა სამკუთხედის AC გვერდის პარალელურად. ვიპოვოთ ამ ქორდების შუაწერტილები და გავავლოთ ამ წერტილებზე HL სწორი, მაშინ ეს სწორი იქნება ელიფსის დიამეტრი. ეს დიამეტრი შეუღლებულია DE და D_1E_1 ქორდებისადმი (ორიგინალში პერპენდიკულარი). ამიტომ სამკუთხედის ერთი სიმაღლე იქნება $BM \parallel LH$. მართლაც, OSE და BMC კუთხეების გვერდები შესაბამად პარალელურია და ერთმხრივ არიან მიმართული, ხოლო OSE კუთხე ორიგინალში მართია.

ამიტომ BMC კუთხეც მართი იქნება ორიგინალში, ე. ი. BM სამკუთხედის სიმაღლეს გამოსახავს.

საჭიროა კიდევ განვსაზღვროთ ერთი სიმაღლის გამოსახვის მიმართულება. განვსაზღვროთ, მაგალითად, სამკუთხედის C წვეროზე გამავალი სიმაღლის მიმართულება. ამისათვის გავავლოთ ელიფსის $FK \parallel AB$ ქორდა და გამოვსახოთ ამ ქორდის პერპენდიკულარული მიმართულება. ამისათვის ელიფსის ცენტრზე გავავლოთ ON_1 მიმართულება ($FN_1 = N_1K$). ამის შემდეგ სამკუთხედის C წვეროზე გავავლოთ $CN \parallel ON_1$, CN იქნება სამკუთხედის სიმაღლის გამოსახვა (დამტკიცება ზემოთ მოცემულის ანალოგიურია)



ნახ. 142.

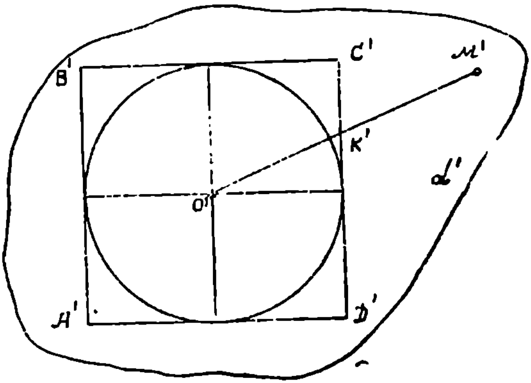
სამკუთხედის მესამე სიმაღლე გადის პირველი ორის გადაკვეთის Q წერტილზე.

როგორც აგებიდან ჩანს ABC სამკუთხედის ორიგინალი მახვილკუთხა სამკუთხედი იქნება, რადგან მისი ორთოცენტრი სამკუთხედის შიგნით მდებარეობს.

განხილულ ამოცანასთან დაკავშირებით გავერკვეთ შემდეგში: თუ წრეხაზის გამოსახვად მიღებულია ნებისმიერი ელიფსი შეიძლება თუ არა, ამის შემდეგ, ამავე წრეხაზის სიბრტყეზე მდებარე სამკუთხედის გამოსახვად მივიღოთ ნებისმიერი სამკუთხედი?

იმისათვის, რომ პასუხი გავცეთ ამ კითხვაზე, გავარკვიოთ უფრო მარტივი საკითხი: ვთქვათ, მოცემულია O' წრეხაზი, რომლის სიბრტყეზე მოცემულია აგრეთვე M' წერტილი (ნახ. 143 ა). გამოვ-

სახოთ მიღებული გეომეტრიული კონფიგურაცია α სიბრტყეზე (გამოსახვათა სიბრტყეზე). ამისათვის წინასწარ პასუხი გავცეთ შემდეგზე: მას შემდეგ, რაც α სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ფორმის ელიფსი მიღებულია წრეხაზის გამოსახვად, შეიძლება თუ არა ამავე სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი M წერტილი ჩავთვალოდ M' წერტილის გამოსახვად?



ნახ. 143 ა

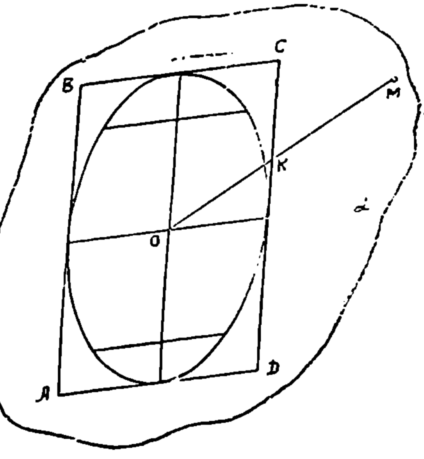
ამ საკითხზე პასუხის გასაცემად მოცემული O' წრეხაზზე (ნახ. 143 ა) შემოვხაზოთ კვადრატი და M' წერტილი შევაერთოთ სწორი ხაზით O' წერტილთან, მაშინ $O'M'$ სწორი გადაკვეთს შემოხაზული კვადრატის $C'D'$ გვერდს. რადგან გამოსახვა წარმოადგენს მოცემული ორიგინალის ან მისი მსგავსი ორიგინალის პარალელურ პროექციას, ამიტომ M' წერტილის M გამოსახვა უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას: $O'K' : K'M' = OK : KM$, სადაც K არის ელიფსზე შემოხაზული $ABCD$ პარალელოგრამის CD გვერდისა და OM სწორის გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 143 ბ); ცხადია, რომ K წერტილიც თავის მხრივ აკმაყოფილებს პირობას: $C'K' : K'D' = CK : KD$;

ამრიგად, M' წერტილის გამოსახვა მას შემდეგ, რაც წრეხაზის გამოსახვად მიღებულია ნებისმიერი ელიფსი, არ შეიძლება ნებისმიერად ავიღოთ, არამედ იგი განისაზღვრება აგებით. ეს აგება შემდეგი თანამიმდევრობით უნდა ჩავატაროთ: გამოვსახოთ წრეხაზი ნებისმიერი ელიფსით და შემოვხაზოთ მასზე $ABCD$ პარალე-

ლოგრამი. ამ პარალელოგრამის CD გვერდზე ვიპოვოთ K წერტილი, ხოლო შემდეგ OK მონაკვეთის გაგრძელებაზე—M წერტილი.

მიღებული შედეგი საშუალებას გვაძლევს ვუპასუხოთ ჩვენს მიერ თავდაპირველად დასმულ საკითხზე: სამკუთხედის გამოსახვად, რომელიც მოთავსებულია მოცემული O' წრეხაზის სიბრტყეზე, მას შემდეგ რაც ამ წრეხაზის გამოსახვად მიღებულია ნებისმიერი ფორმის ელიფსი, არ შეიძლება ნებისმიერად ავიღოთ, არამედ ამ სამკუთხედის გამოსახვა განისაზღვრება აგებით.

ახლა დავუბრუნდეთ ჩვენს მიერ ამოხსნილ ამოცანას (ამოცანა 8). ამ ამოცანაში ლაპარაკი იყო იმაზე, რომ წრეხაზის სიბრტყეზე მოთავსებულია ნებიესმიერი სამკუთხედი, რომლებიც გამოსახვაზე წარმოდგენილი არიან ელიფსისა და სამკუთხედის სახით. გამოვარკვიოთ: შეგვეძლო თუ არა ჩვენ, ყოველივე იმის შემდეგ, რაც ახლა ზემოთ ითქვა, სამკუთხედის გამოსახვა ნებისმიერად აგვეღო?



ნახ. 143 ბ.

შეგვეძლო და აი რატომ: ჩვენ არ გვქონია მოცემული ის ორიგინალი, რომელიც უნდა გამოგვესახა ნახაზზე, არ ყოფილა აგრეთვე დადებული რაიმე პირობა[1] იმ სამკუთხედზე, რომელიც მდებარეობს წრეხაზის სიბრტყეზე. ჩვენს ამოცანაში ნათქვამი იყო მხოლოდ ის, რომ წრეხაზის სიბრტყეზე მოცემულია *ნებისმიერი* სამკუთხედი. ამის გამო კი ჩვენ შეგვეძლო გამოსახვათა სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ელიფსი და ნებისმიერი სამკუთხედი მიგვეღო იმ გეომეტრიული კონფიგურაციის გამოსახვად, რომელზეც ლაპარაკია ამოცანაში.

ამ დასკვნის სისწორეში უფრო კარგად დავრწმუნდებით, თუ ვაჩვენებთ, რომ სინამდვილეში არსებობს ისეთი ორიგინალი,

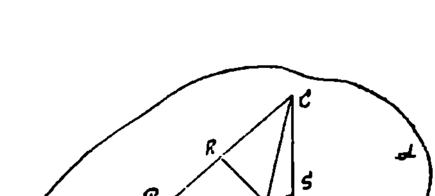
[1] მაგალითად ასეთი: სამკუთხედი მახვილკუთხაა, ბლაგვკუთხაა, ტოლფერდაა ან სხვა რამ.

რომლის გამოსახვასაც ნახ. 142-ზე მოცემული გეომეტრიული კონფიგურაცია წარმოადგენს.

ამ ორიგინალის არსებობის დამტკიცებისათვის საკმარისია ელიფსზე შემოვხაზოთ პარალელოგრამი და ამ ელიფსის ცენტრი შევაერთოთ ABC სამკუთხედის წვეროებთან. დავხაზოთ ნებისმიერი წრეხაზი მასზე შემოხაზული კვადრატით და მივიღოთ იგი ნახაზზე წარმოდგენილი ელიფსისა და მასზე შემოხაზული პარალელოგრამის ორიგინალად. ამის შემდეგ, თუ ABC სამკუთხედის წვეროებისათვის ჩავატარებთ ისეთივე აგებებს, რაც M' წერტილის გამოსახვის აგებისათვის იყო ნაჩვენები (ნახ. 143 ა და ნახ. 143 ბ), მაშინ ჩვენ ფაქტიურად განვსაზღვრავთ ორიგინალს, რომლის გამოსახვასაც ნახ. 142-ზე მოცემული გეომეტრიული კონფიგურაცია წარმოადგენს.

აღვნიშნავთ აგრეთვე იმ ფაქტს, რომ, თუ სამკუთხედი (ან რომელიმე სხვა ბრტყელი ფიგურა) მოთავსებულია კვადრატის სიბრტყეზე, მაშინ მისი გამოსახვა იმის შემდეგ, რაც კვადრატი გამოსახულია ნებისმიერი პარალელოგრამის სახით, არ შეიძლება ნებისმიერად ავიღოთ, არამედ ეს გამოსახვა განისაზღვრება აგებით.

ამოცანა 9. 144-ზე ნახაზზე მოცემული ABC სამკუთხედი წესიერი სამკუთხედის გამოსახვას წარმოადგენს. ამ სამკუთხედის AC და BC გვერდები გადაკვეთილია სწორი ხაზით. გადაკვეთის წერტილები ნახაზზე აღნიშნულია M-ით და N-ით. ავაგოთ სამკუთხედის C წვეროდან MN-ზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვა.



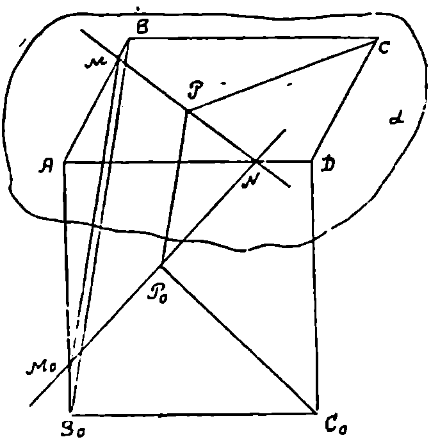
ნახ. 144.

ამოხსნა. MN სწორი ხაზი ABC სამკუთხედის AC და BC გვერდების გადაკვეთისას ქმნის MCN სამკუთხედს. საჭიროა ავაგოთ ამ სამკუთხედის იმ სიმაღლის გამოსახვა, რომელიც C წვეროდან დაშვებულია MN გვერდზე ამისათვის ავაგოთ ჯერ ABC სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვები AQ და BP ამის შემდეგ M და N წერტილებიდან გავავლოთ $MS \parallel AQ$ და

$NR \perp BP$, მაშინ MS და NR მონაკვეთები MCN სამკუთხედის სიმაღლეებს გამოსახავენ, ამიტომ $O=MS \times NR$ წერტილი იქნება ამ სამკუთხედის ორთოცენტრის გამოსახვა, ხოლო CL მონაკვეთი იმავე სამკუთხედის მესამე სიმაღლის გამოსახვაა.

CL სწორი ხაზი MN სწორის პერპენდიკულარულ სწორ ხაზს გამოსახავს.

ა მ ო ც ა ნ ა 10. 145-ე ნახაზზე მოცემული $ABCD$ პარალელოგრამი წარმოადგენს კვადრატის გამოსახვას. სწორი ხაზი კვეთს კვადრატის ორ მოსაზღვრე გვერდს. გადაკვეთის წერტილები ნახაზზე აღნიშნულია M-ით და N-ით. გამოვსახოთ პერპენდიკულარი, რომელიც C წერტილიდან დაშვებულია MN სწორზე.



ნახ. 145.

ა მ ო ხ ს ნ ა. C წერტილიდან MN სწორზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვის აგებისათვის გამოვიყენოთ ორიგინალი ეფექტურად.

მივიღოთ $ABCD$ პარალელოგრამის AD გვერდი კვადრატის გვერდის ნატურალურ სიდიდედ და ავაგოთ AB_0C_0D კვადრატი. ვიპოვოთ MN სწორი ხაზის მდებარეობა ორიგინალში. ამისათვის გავავლოთ ჯერ BB_0 სწორი, ხოლო შემდეგ M წერტილზე გავიყვანოთ $MM_0 \parallel BB_0$, მაშინ გვექნება, რომ $AM:MB=AM_0:M_0B_0$, ე. ი. M_0 წერტილი M წერტილის მდებარეობას გამოსახავს ორიგინალში.

ამრიგად, MN სწორ ხაზს ორიგინალში ექნება M_0N მდებარეობა. ავაგოთ C_0 წერტილიდან M_0N სწორზე დაშვებული პერპენდიკულარი ეფექტურად, ე. ი. გავავლოთ $C_0P_0 \perp M_0N$;

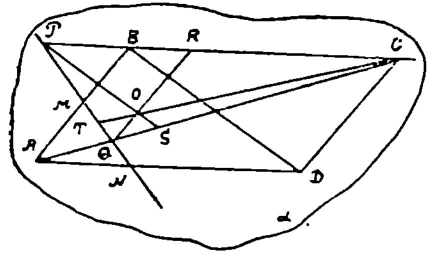
ამის შემდეგ განვსაზღვროთ C_0P_0 სწორი ხაზის მდებარეობა გამოსახვაზე. ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ P_0 წერტილის მდებარეობა MN სწორზე, რისთვისაც $NP_0 : P_0M_0$ შეფარდება უცვლელად

უნდა გადავიტანოთ ამ სწორზე. ამ მიზნით კი უნდა გავავლოთ $P_0P \parallel M_0M$, მაშინ $NP_0 : P_0M_0 = NP : PM$, ე. ი. P წერტილი P_0 წერტილის გამოსახვას წარმოადგენს.

სულ ბოლოს, გავავლოთ CP სწორი. ეს სწორი საძებნი პერპენდიკულარის გამოსახვას წარმოადგენს.

მივუთითოთ ამ ამოცანის ამოხსნის კიდევ ერთ ხერხზე. ეს ხერხი არ მოითხოვს ორიგინალის ეფექტურ გამოყენებას, არამედ იგი დამყარებულია იმაზე, რომ სწორები, რომლებზეც სამკუთხედის სიმაღლეები მდებარეობენ, ერთ წერტილში იკვეთებიან.[1]

ავაგოთ $P = BC \times MN$ წერტილი და გავიყვანოთ პარალელოგრამის AC დიაგონალი. მაშინ ჩვენ მივიღებთ PQC სამკუთხედს (ნახ. 146). ავაგოთ ამ სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვები.



ნახ. 146.

გავავლოთ $PS \parallel BD$ და $QR \parallel AB$, მაშინ PS და QR გამოსახავენ PQC სამკუთხედის ორ სიმაღლეს. მართლაც, $A'B' \perp B'C'$ (როგორც კვადრატის გვერდები), ამიტომ $Q'R' \perp P'C'$. გარდა ამისა $B'D' \perp A'C'$ (როგორც კვადრატის დიაგონალები), ამიტომ $P'S' \perp Q'C'$.

ამრიგად, $O = PS \times QR$ წერტილი გამოსახავს PQC სამკუთხედის ორთოცენტრს, ამიტომ CT იქნება ამ სამკუთხედის მესამე სიმაღლის გამოსახვა. CT სწორი MN-ის პერპენდიკულარ სწორს გამოსახავს.

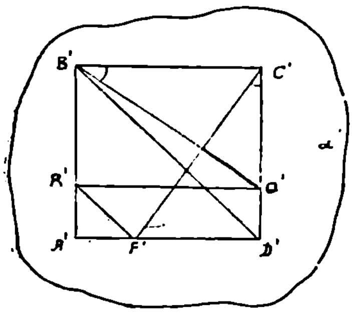
ამოცანა 11. 147 ბ ნახაზზე მოცემული $ABCD$ პარალელოგრამი წარმოადგენს კვადრატის გამოსახვას. პარალელოგრამის AD გვერდზე აღებულია F წერტილი. ავაგოთ B წერტილიდან CF-ზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვა.

ამოხსნა. ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ როგორც ორიგინალის ეფექტური გამოყენებით, ისე სამკუთხედის სიმაღლეთა თვისების გამოყენებითაც. მაგრამ სასარგებლოა ვიცოდეთ ამ ამოცანის ამოხსნის სხვა ხერხიც, რომელიც ორიგინალის თვისებებზეა დამყარებული.

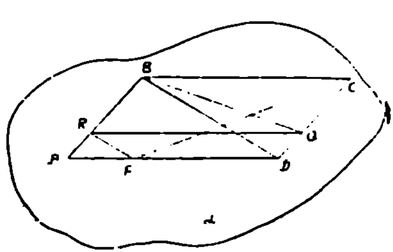
[1] ეს ხერხი ერთხელ უკვე იყო გამოყენებული ჩვენ მიერ მე-9 ამოცანის ამოხსნის დროს.

ჩავატაროთ პერპენდიკულარის აგება ჯერ ორიგინალში (ნახ. 147 ა). გავავლოთ $B'Q' \perp C'F'$ და განვიხილოთ $B'C'Q'$ და $C'F'D'$ სამკუთხედები. ეს სამკუთხედები ტოლია, რადგან $B'C' = C'D'$ და $\angle C'B'Q' = \angle F'C'D'$ (როგორც პერპენდიკულარულ გვერდებიანი კუთხეები). სამკუთხედების ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $C'Q' = F'D'$ და, მაშასადამე, $A'F' = Q'D'$. აქედან ვღებულობთ: $A'F' : F'D' = D'Q' : Q'C'$; გავავლოთ $Q'R' \parallel B'C'$, მაშინ $A'R' : R'B' = Q'D' : C'Q'$;

მიღებული პროპორციებიდან გამომდინარეობს, რომ:



ნახ. 147 ა.



ნახ. 147 ბ.

$A'R' : R'B' = A'F' : F'D'$, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ $R'F' \parallel B'D'$.

აქედან გამომდინარეობს ხსენებული ამოცანის ამოხსნის შემდეგი მარტივი ხერხი:

F წერტილზე (ნახ. 147 ბ) ვავლებთ $FR \parallel BD$; მიღებულ R წერტილზე გავავლებთ $RQ \parallel BC$ და Q წერტილს სწორი ხაზით შევაერთებთ B წერტილთან. BQ გამოსახავს საძებნ პერპენდიკულარს.

§ 3. პერპენდიკულარული სწორები და სიბრტყეები

სტერეომეტრიული ორიგინალის გამოსახვაზე მეტრიკული ამოცანის ეფექტური ამოხსნისათვის საჭიროა, რომ ეს გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრული იყოს. სტერეომეტრიული ორიგინალის გამოსახვის მეტრიკული განსაზღვრულობისათვის საჭიროა, რომ გამოსახვაზე დადებული პირობები განსაზღვრავდენ გამოსახვის რომელიმე ტეტრაედრ-ორიგინალის ნამდვილ ფორმას.

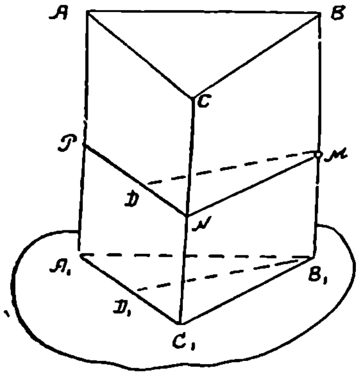
ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ისეთი მეტრიკული ამოცანების ამოხსნის ნიმუშებს, რომლებიც შეეხებიან პერპენდიკულარულ სწორებსა და სიბრტყეებს.

ასეთ ამოცანებზე მუშაობისას მოსწავლეებს უნდა გავურკვიოთ, რომ მოცემული სიბრტყის პერპენდიკულარული სწორის გამოსახვის აგება ორი ნაწილისაგან შედგება: ა) განვსაზღვროთ იმ სწორის მიმართულება, რომელიც ორიგინალში მოცემული სიბრტყის პერპენდიკულარია და ბ) ვიპოვოთ ამ პერპენდიკულარისა და ხსენებული სიბრტყის შეხვედრის წერტილი.

ამ მიზნით ამოვხსნათ ასეთი მარტივი ამოცანა.

ამოცანა 1. 148-ე ნახაზზე გამოსახულია $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმა. ამ პრიზმის ერთ-ერთ გვერდით წიბოზე აღებულია წერტილი M. ავაგოთ იმ პერპენდიკულარის გამოსახვა, რომელიც გავლებულია M წერტილის შემცველი გვერდითი წიბოს მოპირდაპირე წახნაგის მიმართ.

ამოხსნა. ვთქვათ, რომ M წერტილი მდებარეობს პრიზმის BB_1 გვერდით წიბოზე, მაშინ ჩვენ უნდა ავაგოთ პერპენდიკულარის გამოსახვა, რომელიც M წერტილზეა გავლებული AA_1C_1C გვერდითი წახნაგისადმი.



ნახ. 148.

1) განვსაზღვროთ ასაგები პერპენდიკულარის მიმართულება გამოსახვაზე.

ამისათვის ვისარგებლოთ იმით, რომ ერთი და იგივე სიბრტყის პერპენდიკულარული სწორები პარალელურია, რასაც ადგილი აქვს გამოსახვაზეც. ამიტომ საკმარისია ვიპოვოთ AA_1C_1C წახნაგისადმი გავლებული რომელიმე პერპენდიკულარის მიმართულება.

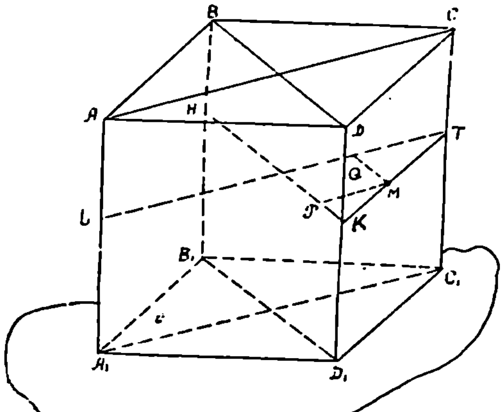
ვისარგებლოთ იმ პირობით, რომ მოცემული პრიზმა წესიერია, ე. ი. $A'_1B'_1C'_1$ წესიერი სამკუთხედია და ამ სამკუთხედის სიბრტყე $A'A'_1C'_1C'$ წახნაგის სიბრტყის პერპენდიკულარულია. ამიტომ $A'_1B'_1C'_1$ სამკუთხედის B_1' წვეროდან გავლებული სიმაღლე იქნება $A'A'_1C'_1C'$ წახნაგის პერპენდიკულარული სწორი. ავაგოთ

სამკუთხედის ეს სიმაღლე. ამისათვის $A_1B_1C_1$ სამკუთხედში უნდა გავავლოთ A_1C_1 გვერდის B_1D_1 მედიანა.

ამრიგად, B_1D_1 სწორი გამოსახავს პრიზმის AA_1C_1C წახნაგის პერპენდიკულარულ მიმართულებას. ცხადია, რომ საძებნი პერპენდიკულარის მიმართულებას მივიღებთ, თუ M წერტილზე გავავლებთ $MD \parallel B_1D_1$ სწორს.

2) იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ამ პერპენდიკულარისა და პრიზმის AA_1C_1C წახნაგის შეხვედრის წერტილი, საჭიროა M წერტილზე გავავლოთ $A_1B_1C_1$-ის პარალელური კვეთა. ამისათვის გავიყვანოთ $MN \parallel B_1C_1$ და $NP \parallel A_1C_1$. წერტილი $D=NP\times MD$ იქნება ასაგები პერპენდიკულარისა და პრიზმის AA_1C_1C წახნაგის შეხვედრის წერტილი.

ამრიგად, MD წარმოადგენს საძებნი პერპენდიკულარის გამოსახვას. როგორც ვხედავთ, ამოცანის ამოხსნისათვის არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს პრიზმის გვერდითი წიბოს სიდიდეს.



ნახ. 149.

ამოვხსნათ კიდევ რამდენიმე ამოცანა.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. 149-ე ნახაზზე გამოსახულია წესიერი ოთხკუთხა პრიზმა $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M წერტილი მდებარეობს პრიზმის გვერდით წახნაგზე. ავაგოთ იმ პერპენდიკულარების გამოსახვები, რომ-

ლებიც დაშვებულია ამ წერტილიდან პრიზმის დიაგონალური კვეთის სიბრტყეებზე.

ამოხსნა. ვთქვათ, რომ M წერტილი ძევს წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის CC_1D_1D წახნაგზე.

1) განვსაზღვროთ ასაგები პერპენდიკულარების გამოსახვათა მიმართულებანი. ამისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ:

სიბრტყე $B'B'_1D'_1D' \perp A'A'_1C_1'C'$ სიბრტყის, ამიტომ $B'D' \perp A'A'_1C_1'C'$ სიბრტყის, ხოლო $A'C' \perp B'B'_1D'_1D'$ სიბრტყის.

ამრიგად, გამოსასახავი პერპენდიკულარების მისაღებად M წერტილზე გავავლოთ BD და AC სწორების პარალელური სწორები.

2) იმისათვის, რომ ავაგოთ ამ პერპენდიკულარებისა და შესაბამისი სიბრტყეების შეხვედრის წერტილები, საჭიროა M წერტილზე გავავლოთ $ABCD$ სიბრტყის პარალელური კვეთა. ჩვენთვის საკმარისია გამოვსახოთ ამ კვეთის ერთი $KT \parallel CD$ გვერდი, ხოლო K და T წერტილებზე გავავლოთ $KH \parallel BD$ და $TL \parallel AC$ სწორები. ეს სწორები გამოსახავენ მკვეთი სიბრტყისა და პრიზმის ხსენებული დიაგონალური სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზებს.

ბოლოს M წერტილზე გავავლოთ $MP \parallel TL$ და $MQ \parallel HK$, მაშინ P და Q წერტილები შესაბამად წარმოადგენენ MP და MQ სწორების ფუძეებს BB_1D_1D და AA_1C_1C დიაგონალურ სიბრტყეებზე, ხოლო MP და MQ სწორები საძებნ პერპენდიკულარებს გამოსახავენ.

ამოცანა 3. 150 ნახაზზე გამოსახულია წესიერი სამკუთხა პირამიდა $SABC$. ავაგოთ გამოსახვა პერპენდიკულარისა, რომელიც გავლებულია პირამიდის ფუძისადმი გვერდით წიბოზე მდებარე M წერტილიდან.

ამოხსნა. პირამიდის ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულ მიმართულებას პირამიდის სიმაღლე წარმოადგენს. სიმაღლის ასაგებად საჭიროა ვიპოვოთ ფუძის ორთოცენტრის გამოსახვა O, მაშინ OS იქნება პირამიდის სიმაღლის გამოსახვა.

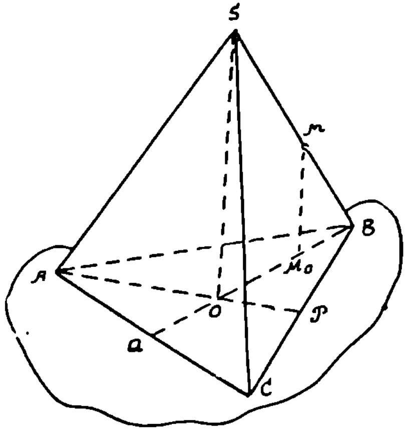
M წერტილზე გავავლოთ $MM_0 \parallel SO$. MM_0 წარმოადგენს საძებნი პერპენდიკულარის გამოსახვას.

ამოცანა 4. M წერტილი ძევს წესიერი ხუთკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოზე. გამოვსახოთ პერპენდიკულარები, რომლებიც დაშვებულია ამ წერტილიდან პრიზმის გვერდით წახნაგებზე.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. მიიღოთ მხედველობაში, რომ წესიერი ხუთკუთხედის წვეროსა და მისი მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილის შემაერთებელი სწორი ხუთკუთხედის ამ გვერდის პერპენდიკულარულია.

ა მ ო ც ა ნ ა 5. დახრილ პარალელეპიპედს ფუძედ აქვს კვადრატი, რომლის გვერდი 1 მ-ია. ერთ-ერთი გვერდითი წიბო ქმნის ფუძის თითოეულ მასთან მდებარე გვერდთან 60° კუთხეს და უდრის 2 მ.ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა[1].

ა მ ო ხ ს ნ ა. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ჩვენ არ გვაინტერესებს პარალელეპიპედის მოცულობის გამოთვლა, არამედ ჩვენთვის საინტერესოა მხოლოდ მისი სიმაღლის გამოსახვის აგება.



ნახ. 150.

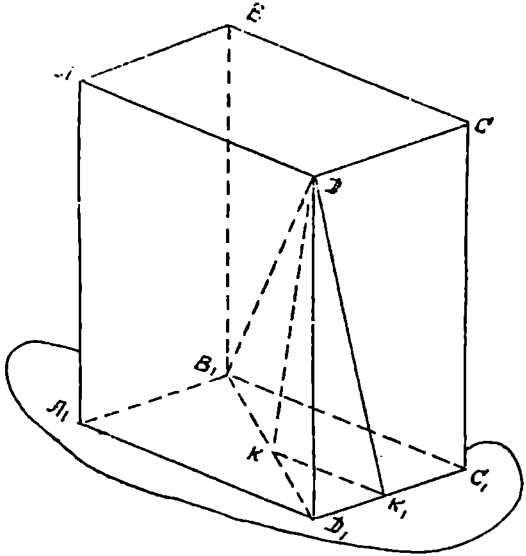
ავაგოთ, მაგალითად, პარალელეპიპედის იმ სიმაღლის გამოსახვა, რომელიც გავლებულია ზედა ფუძის D წვეროდან. ამ სიმაღლის ფუძე მოთავსდება ფუძის B_1D_1 დიაგონალზე (ნახ. 151). მართლაც, რადგან $D'D_1'$ გვერდითი წიბო (ორიგინალში) ტოლ კუთხეებს ქმნის $A_1'D_1'$ და $D_1'C_1'$ ფუძის გვერდებთან, ამიტომ ამ გვერდითი წიბოს პროექცია (ორთოგონალური) პარალელეპიპედის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე იქნება $A_1'D_1'C_1'$ კუთხის ბისექტრისა. მაგრამ $A_1'B_1'C_1'D_1'$ ოთხკუთხედი (ორიგინალში) კვადრატია, ამიტომ $A_1'D_1'C_1'$ კუთხის ბისექტრისა ნახაზზე გამოსახული იქნება $A_1B_1C_1D_1$ პარალელოგრამის B_1D_1 დიაგონალის სახით.

ამრიგად, პარალელეპიპედის D წვეროზე გამავალი სიმაღლის გამოსახვა ფუძის სიბრტყეს გადაკვეთს B_1D_1 სწორზე.

[1] ნ. რ ი ბ კ ი ნ ი, გეომეტრიულ ამოცანათა კრებული, ნაწ. II, § 16, № 45/1.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ პარალელეპიპედის სიმაღლის ეს ფუძე, გამოვიყენოთ ამოცანის რიცხვითი მონაცემები[1].

მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ პარალელეპიპედის სიმაღლის ფუძე დაშორებულია D_1 წერტილიდან $\sqrt{2}$ მ მანძილით. მაგრამ ასეთი წერტილია B_1; ამრიგად, DB_1 გამოსახავს პარალე-



ნახ. 151.

ლეპიპედის საძებნ სიმაღლეს, ხოლო DK_1 იქნება გვერდითი წახნაგის სიმაღლე (თეორემა სამი პერპენდიკულარის შესახებ).

ა მ ო ც ა ნ ა 6. პირამიდას ფუძედ აქვს სამკუთხედი, რომლის გვერდებია: 9 სმ, 17 სმ და 28 სმ. თითოეული გვერდითი წიბო უდრის 22,9 სმ. გაიგეთ ამ პირამიდის მოცულობა.[2]

[1] გამოთვლების ჩასატარებლად შევადგენთ საორიენტაციო ნახაზს, ე. ი. D წერტილიდან გავავლებთ DK სწორს, რომელსაც ჩავთვლით პარალელეპიპედის სიმაღლის გამოსახვად. K წერტილზე გავავლებთ $KK_1 \parallel B_1C_1$ სწორს და D წერტილს შევაერთებთ K_1 წერტილთან. მაშინ DK_1 იქნება გვერდითი წახნაგის სიმაღლის გამოსახვა (თეორემა სამი პერპენდიკულარის შესახებ). მაგრამ, $\angle D'D'_1K'_1=60^\circ$, ამიტომ $\angle D'_1D'K'_1=30^\circ$, ე. ი. $D'_1K'_1=D'_1D':2=1$. ამრიგად, K_1 წერტილი უნდა ემთხვეოდეს C_1 წერტილს და, მაშასადამე, K წერტილი B_1 წერტილს.

[2] იქვე, § 17, № 16.

პირამიდის მოცულობის გამოთვლა მოითხოვს მისი სიმაღლის გამოანგარიშებას. ჩვენ შევჩერდებით მხოლოდ ამ სიმაღლის გამოსახვის აგებაზე.

რადგან პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლნი არიან, ამიტომ პირამიდის ფუძის სიბრტყეზე მათი გეგმილებიც ტოლნი იქნებიან და, მაშასადამე, პირამიდის სიმაღლის ფუძე მდებარეობს ამ პირამიდის ფუძეზე შემოხაზული წრის ცენტრში.

ამრიგად, პირამიდის სიმაღლის გამოსახვის ასაგებად საჭიროა განისაზღვროს ამ პირამიდის ფუძეზე შემოხაზული წრის ცენტრის მდებარეობა ნახაზზე. ეს აგება ჩვენთვის ცნობილია (იხ. ამ თავის § 2, ამოცანა 7).

ა მ ო ც ა ნ ა 7. პირამიდას ფუძედ აქვს ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ტოლი გვერდები (თითოეული) 39 სმ-ია, მესამე გვერდი კი უდრის 30 სმ. ორწახნაგა კუთხეები ფუძესთან ტოლია და თითოეული შეიცავს 45°.

გაიგეთ ამ პირამიდის მოცულობა.[1]

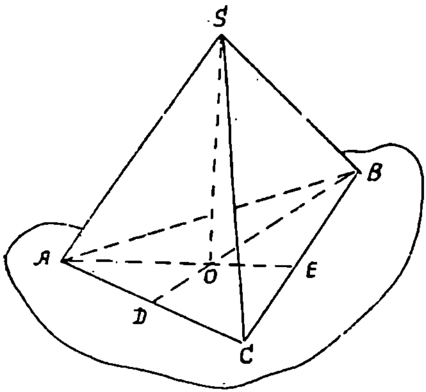
ა მ ო ხ ს ნ ა. აქაც ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ პირამიდის სიმაღლის გამოსახვის აგება. რადგან პირამიდის თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 45°-იანი კუთხით, ამიტომ პირამიდის სიმაღლის ფუძე იქნება პირამიდის ფუძეში ჩახაზული წრის ცენტრის გამოსახვა.

ამრიგად, პირამიდის სიმაღლის გამოსახვის ასაგებად საჭიროა განვსაზღვროთ ამ პირამიდის ფუძეში ჩახაზული წრის ცენტრის მდებარეობა ნახაზზე.

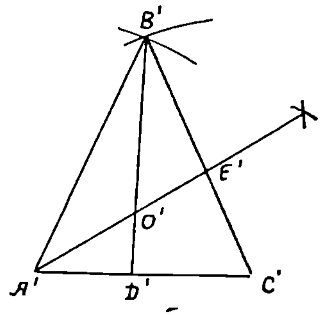
მივიღოთ პირამიდის ABC ფუძის AB და BC გვერდები ფერდების გამოსახვად და ავაგოთ ამ სამკუთხედის ორიგინალის ნამდვილი ფორმა (ნახ. 152 ბ), რისთვისაც მივიღოთ მასშტაბი 1 : 10, მაშინ $A'B'C'$ ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდებია: $A'B = B'C' = 3{,}9$ სმ და $A'C' = 3$ სმ იქნება პირამიდის ფუძის ორიგინალის ნამდვილი ფორმა. ავაგოთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრი ეფექტურად. ამისათვის საკმარისია ავაგოთ სამკუთხედის ორი კუთხის ბისექტრისა. ამ ბისექტრისებიდან ერთი ავიღოთ წვეროსთან მდებარე კუთხის, რომლის აგება მარტივია, ხოლო მეორე ფუძესთან მდებარე A' კუთხისა. ამ ბისექტრისების გადაკვეთის O' წერტილი იქნება $A'B'C'$ სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრი.

[1] იქვე, § 17, № 17/1.

ჩავატაროთ ახლა შესაბამი აგებანი გამოსახვაზე. ამისათვის ABC სამკუთხედის AC გვერდი გავყოთ შუაზე D წერტილში და გავავლოთ AD მედიანა (ნახ. 152 ა). იგი იქნება $B'D'$ ბისექტრისის გამოსახვა. შემდეგ BC მონაკვეთი გავყოთ იმავე შე-



ნახ. 152 ა.



ნახ. 152 ბ.

ფარდებით, როგორი შეფარდებითაც $B'C'$ მონაკვეთი იყოფა A' კუთხის ბისექტრისით. ეს აგებაც ცნობილია ჩვენთვის. ამნაირად მივიღებთ E წერტილს BC გვერდზე, მაშინ AE იქნება ABC სამკუთხედის A კუთხის ბისექტრისის გამოსახვა, ხოლო O წერტილი ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრის გამოსახვა.

ამრიგად, OS მონაკვეთი პირამიდის სიმაღლეს გამოსახავს. განვიხილოთ ახლა რამდენიმე ამოცანა მოცემული სწორი ხაზის პერპენდიკულარული სიბრტყის აგებაზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 8. წესიერი ტეტრაედრის ფუძის გვერდზე გავავლოთ მოპირდაპირე გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარული სიბრტყე.

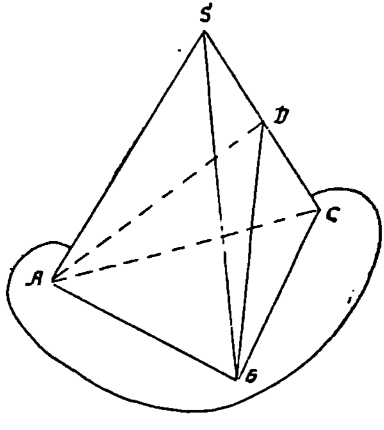
ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, რომ ფუძის AB გვერდზე უნდა გავავლოთ SC წიბოს პერპენდიკულარული სიბრტყე (ნახ. 153).

ეს სიბრტყე წესიერი ტეტრაედრის SAC და SBC წახნაგებს გადაკვეთს ისეთ სწორებზე, რომლებიც SC წიბოს პერპენდიკულარებია ორიგინალში. მაშასადამე, საძებნი სიბრტყის აგება დაიყვანება A და B წერტილებიდან SC წიბოსადმი გავლებული პერპენდიკულარების გამოსახვათა აგებაზე. მაგრამ SAC და SBC წახნა-

გები ორიგინალში წესიერი სამკუთხედებია, ამიტომ ხსენებული პერპენდიკულარები გამოსახვაზე წარმოგვიდგებიან ამ წახნაგების AD და BD მედიანების სახით.

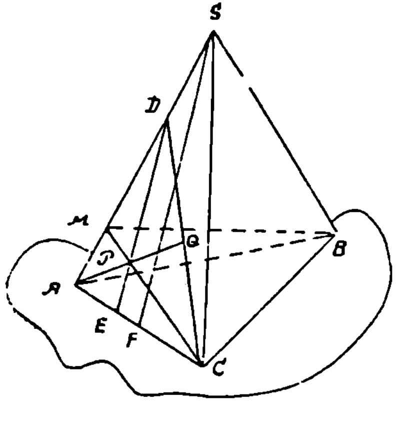
ამრიგად, ADB სიბრტყე გამოსახავს SC წიბოს პერპენდიკულარულ სიბრტყეს.

ა მ ო ც ა ნ ა 9. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო $1\frac{1}{2}$-ჯერ მეტია ფუძის გვერდზე. ავაგოთ სიბრტყე, რომელიც გადის პირამიდის ფუძის გვერდზე მოპირდაპირე გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარულად.



ნახ. 153.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, რომ პირამიდის BC გვერდზე უნდა გავავლოთ AS გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარული სიბრტყე (ნახ. 154).



ნახ. 154.

ეს სიბრტყე პირამიდის ASB და ASC წახნაგებს გადაკვეთს AS გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარულ ხაზებზე. ამრიგად, საძებნი სიბრტყის აგება დაიყვანება B და C წერტილებიდან SA წიბოსადმი გავლებული პერპენდიკულარების გამოსახვათა აგებაზე. საკმარისია ამ პერპენდიკულარებიდან ავაგოთ ერთ-ერთი.

ავაგოთ, მაგალითად, C წერტილიდან AS წიბოზე დაშვებული პერპენდიკულარის გამოსახვა. ამისათვის მოვიქცეთ ასე: გავავლოთ ASC სამკუთხედის AC გვერდის SF მედიანა, მაშინ $S'F' \perp A'C'$. გავ-

ყოთ AS წიბო სამ ტოლ ნაწილად, A-დან მეორე დანაყოფი აღვნიშნოთ D ასოთი და D წერტილი შევაერთოთ C წერტილთან, მაშინ ADC სამკუთხედი იქნება ტოლფერდა სამკუთხედის გამოსახვა ($A'D'=A'C'$, რადგან პირობის თანახმად $A'S'=1\frac{1}{2}A'C'$).

ავაგოთ ახლა ADC სამკუთხედის სიმაღლეთა გამოსახვები. ერთი სიმაღლის გამოსახვა იქნება $DE \parallel SF$, ხოლო მეორისა—CD გვერდის AQ მედიანა. $P=AQ\times DE$ წერტილი ADC სამკუთხედის ორთოცენტრს გამოსახავს, ამიტომ CM იქნება ამ სამკუთხედის მესამე სიმაღლის გამოსახვა.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ BM გამოსახავს B წერტილიდან SA წიბოზე დაშვებულ პერპენდიკულარს.

ამრიგად, CMB იქნება საძებნი სიბრტყე.

ა მ ო ც ა ნ ა 10. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის 6 სმ. გვერდითი წიბო კი 7 სმ-ია. ავაგოთ სიბრტყე, რომელიც გადის პირამიდის ფუძის ერთ წვეროზე მოპირდაპირე გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარულად.

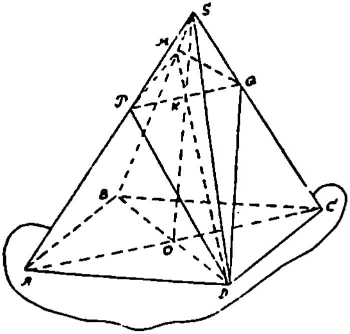
ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, რომ D წერტილზე უნდა გავავლოთ SB წიბოს პერპენდიკულარული სიბრტყე (ნახ. 155 ა).

ამ სიბრტყის ასაგებად საჭიროა ავაგოთ პერპენდიკულარის გამოსახვა, რომელიც D წერტილიდან დაშვებულია SB წიბოზე. ამ პერპენდიკულარის ასაგებად გამოვიყენოთ ორგინალი ეფექტურად. ავაგოთ BSD სამკუთხედის ნამდვილი ფორმა, რისთვისაც საჭიროა ჯერ განვსაზღვროთ BD მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდე (მოცემულ მასშტაბში). ამისათვის მივიღოთ მასშტაბი 1:2 და ავაგოთ $ABCD$ პარალელოგრამის ნამდვილი ფორმა $A'B'C'D'$ კვადრატის სახით, მაშინ $B'D'$ დიაგონალი იქნება BD მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდე (ნახ. 155 ბ).

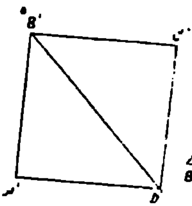
ამის შემდეგ შეიძლება ავაგოთ ტოლფერდა BSD სამკუთხედის ნამდვილი ფორმა (მასშტაბი 1:2) $B'D'S'$ სამკუთხედის სახით (ნახ. 155 გ). ავაგოთ ამ სამკუთხედის $B'S'$ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, ე. ი. გავავლოთ $D'M'\perp B'S'$ და შემდეგ BS წიბოზე უცვლელად გადავიტანოთ $S'M':M'B'$ შეფარდება. ამნაირად ჩვენ ავაგებთ M წერტილს SB წიბოზე, მაშინ DM იქნება SB წიბოს პერპენდიკულარის გამოსახვა.

ამის შემდეგ $K=OS\times MD$ წერტილზე გავიყვანოთ $PQ \parallel AC$, მაშინ ჩვენ ავაგებთ $PMQD$ სიბრტყეს. ვაჩვენოთ, რომ ეს სიბრტყე SB წიბოს პერპედიკულარულია.

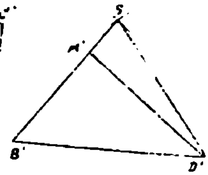
მართლაც, $M'D' \perp S'B'$ აგების თანახმად. $A'C' \perp B'O'$ (როგორც კვადრატის დიაგონალები), მაგრამ $B'O'$ არის $B'S'$ დახრილის პროექცია პირამიდის ფუძეზე, ამიტომ $B'S' \perp A'C'$; $P'Q' \parallel A'C'$, ამიტომ $B'S' \perp P'Q'$.



ნახ. 155 ა.



ნახ. 155 ბ.



ნახ. 155 გ.

ამრიგად, $PMQD$ სიბრტყეზე მდებარე ორი არაპარალელური MD და PQ სწორები გამოსახავენ BS წიბოს პერპენდიკულარულ სწორებს, ამიტომ თვით $PMQD$ სიბრტყე SB წიბოს პერპენდიკულარულ სიბრტყეს გამოსახავს.

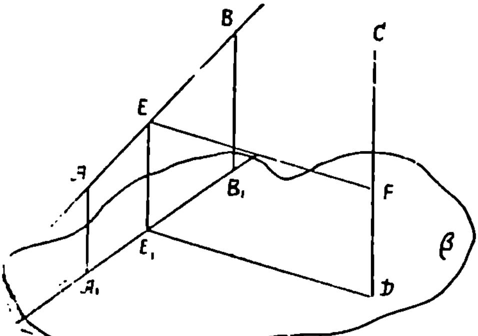
§ 4. ორი აცდენილი სწორი ხაზის საერთო პერპენდიკულარის აგება

სტაბილურ სახელმძღვანელოში (ა. კისელევი, გეომეტრია, ნაწ. II, § 37) განხილულია ორი აცდენილი სწორი ხაზის საერთო პერპენდიკულარის აგების მეთოდი. ამ მეთოდთან ერთად მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ აგრეთვე ორი აცდენილი სწორი ხაზის საერთო პერპენდიკულარის აგების ის მეთოდი, რომელიც განხილულია პროფ. ნ. ჩეტვერუხინის წიგნში.[1] გავეცნოთ მას.

ვთქვათ, მოცემულია ორი AB და CD აცდენილი სწორი ხაზი. ვთქვათ, რომ β სიბრტყე პერპენდიკულარულია მოცემული აცდენილი სწორებიდან ერთ-ერთის, მაგალითად, CD-ს, ხოლო AB სწორი ხაზის ორთოგონალური გეგმილი β სიბრტყეზე არის A_1B_1 სწორი ხაზი (ნახ. 156).

[1] Стереометрические задачи на проекционном чертеже, Учпедгиз, 1952, стр. 86.

ვთქვათ, რომ EF-მოცემული AB და CD სწორების საერთო პერპენდიკულარის გამოსახვაა, მაშინ ორიგინალში $E'F' \perp C'D'$ და, მაშასადამე, $E'F' \parallel \beta'$ სიბრტყისა. ამის გამო EF სწორი თავისი გეგმილის პარალელური იქნება β სიბრტყეზე. დავამტკიცოთ, რომ $B'E'F'$ მართი კუთხის ორთოგონალური პროექცია β' სიბრტყეზე იქნება ისევ მართი კუთხე.



ნახ. 156.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) $A'B' \parallel \beta'$ სიბრტყის, მაშინ $B'E'F$ კუთხის სიბრტყე β' სიბრტყის პარალელურია, ამიტომ ეს კუთხე β' სიბრტყეზე დაგეგმილდება დაუმახინჯებლად.

ბ) $A'B' \nparallel \beta'$ სიბრტყის, მაშინ β' სიბრტყისა და $A'B'$ სწორის გადაკვეთის წერტილზე, ე. ი. $Q' = A'_1B'_1 \times A'B'$ წერტილზე, ავაგოთ $Q'P' \parallel E'F'$. მაშინ $\angle B'Q'P' = \angle B'E'F'$, ამიტომ სამი პერპენდიკულარის თეორემის თანახმად $\angle B_1'Q'P'$ იქნება მართი და, მაშასადამე, $\angle B'E'_1D' = 90°$.

ამრიგად, როგორი მდებარეობაც არ უნდა ჰქონდეს $A'B'$ სწორსა და β' სიბრტყეს,[1] ყოველთვის $B'E'F'$ კუთხის ორთოგონალური პროექცია ამ სიბრტყეზე იქნება მართი კუთხე.

აქედან გამომდინარეობს საპროექციო ნახაზზე ორი აცდენილი სწორი ხაზის საერთო პერპენდიკულარის აგების შემდეგი ხერხი: D წერტილზე, რომელიც წარმოადგენს მოცემული CD სწორი ხაზის ფუძეს β სიბრტყეზე, ავაგებთ A_1B_1 სწორი ხაზის პერპენდიკულარული სწორის DE_1 გამოსახვას. შემდეგ E_1 წერტილზე ავაგებთ $E_1E \parallel CD$ სწორს და ბოლოს E წერტილზე ავაგებთ $EF \parallel E_1D$.

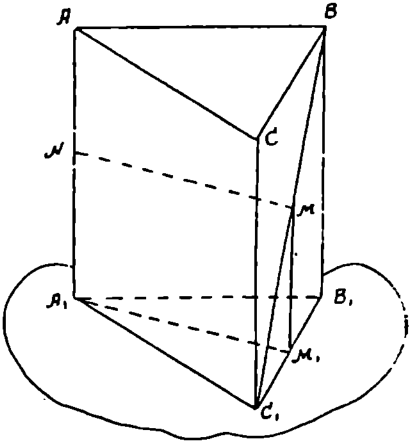
EF მონაკვეთი იქნება მოცემული აცდენილი სწორი ხაზების საერთო პერპენდიკულარის გამოსახვა.

ამოვხსნათ რამდენიმე ამოცანა ამ ხერხის გამოყენებით.

[1] ეს სიბრტყე და სწორი ხაზი არ შეიძლება იყვნენ პერპენდიკულარნი, რადგან მაშინ CD და AB ხაზები პარალელური იქნებოდნენ და არა აცდენილი.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. 157-ე ნახაზზე მოცემულია წესიერი სამკუთხა პრიზმის $ABCA_1B_1C_1$ გამოსახვა. ავაგოთ AA_1 გვერდითი წიბოსა და BB_1C_1C გვერდითი წახნაგის BC_1 დიაგონალის საერთო პერპენდიკულარის გამოსახვა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. AA_1 და BC_1 აცდენილი სწორი ხაზებიდან AA_1-ის პერპენდიკულარულ სიბრტყეს პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყე წარმოადგენს (აგრეთვე ზედა ფუძის სიბრტყეც). ამ სიბრტყეზე BC_1 სწორის ორთოგონალური პროექციაა B_1C_1 სწორი. AA_1 სწორი კი პრიზმის ქვედა ფუძის სიბრტყეს კვეთს A_1 წერტილში.



ნახ. 157.

ჩვენი ხერხის თანახმად, საჭიროა ავაგოთ სწორის გამოსახვა, რომელიც გადის A_1 წერტილზე B_1C_1 სწორის პერპენდიკულარულად. ასეთი სწორია $A_1M_1(C_1M_1=M_1B_1)$. ამის შემდეგ დაგვრჩენია M_1 წერტილზე ავაგოთ $M_1M \parallel CC_1$, ხოლო M წერტილზე—$MN \parallel A_1M_1$;

MN მონაკვეთი AA_1 და BC_1 აცდენილი სწორების საერთო პერპენდიკულარის გამოსახვას წარმოადგენს.

ა მ ო ც ა ნ ა. 2. კუბის წიბო უდრის a-ს. იპოვეთ უმცირესი მანძილი დიაგონალიდან მის არამკვეთ წიბომდის.[1]

ა მ ო ხ ს ნ ა. უმცირეს მანძილს ორ აცდენილ სწორ ხაზს შორის წარმოადგენს მათი საერთო პერპენდიკულარი[2]. ავაგოთ, მაგალითად, კუბის AA_1 წიბოსა და BD_1 დიაგონალის საერთო პერპენდიკულარის გამოსახვა (ნახ. 158). ჩვენ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ მისი აგებით.

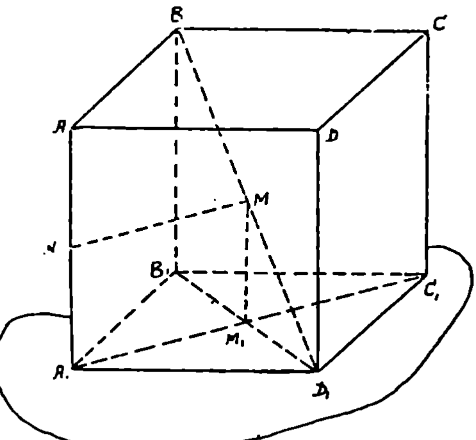
გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარულ სიბრტყეს გამოსახავს, მაგალითად, კუბის ქვედა ფუძის სიბრტყე, რომელზეც BD_1 დიაგონალი ფუძის B_1D_1 დიაგონალად გეგმილდება.

---

[1] ნ. რიბკინი, გეომეტრიულ ამოცანათა კრებული, ნაწ. II, § 7, № 8.

[2] ამის დამტკიცებას მკითხველი ადვილად მოახერხებს.

საერთო პერპენდიკულარის გამოსახვის ასაგებად საჭიროა ავაგოთ A_1 წერტილიდან B_1D_1 დიაგონალისადმი გავლებული პერპენდიკულარის გამოსახვა. ასეთი პერპენდიკულარის გამოსახვას A_1C_1



ნახ. 158.

დიაგონალი წარმოადგენს (კვადრატის დიაგონალები ერთმანეთის პერპენდიკულარია). ამ დიაგონალების გადაკვეთის M_1 წერტილზე ავაგოთ $MM_1 \parallel BB_1$, ხოლო შემდეგ—$MN \parallel A_1M_1$; MN მონაკვეთი გამოსახავს უმოკლეს მანძილს AA_1 წიბოსა და BD_1 დიაგონალს შორის.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $AN=A_1N$;

ამოცანა 3. ცილინდრის სიმაღლე 6 დმ-ია, ფუძის რადიუსი კი 5 დმ. მოცემული მონაკვეთის ბოლოები დევს ორივე ფუძის წრეხაზზე; მისი სიგრძე 10 დმ-ია. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ამ მონაკვეთიდან ღერძამდის[1].

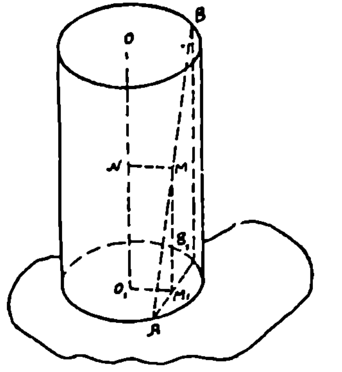
ამოხსნა. ვთქვათ, რომ AB არის მოცემული მონაკვეთი (ნახ. 159). ამოცანაში მოთხოვნილია OO_1 და AB აცდენილი სწორ ხაზებს შორის უმოკლესი მანძილის პოვნა. ჩვენ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ მისი აგებით.

მართი წრიული ცილინდრის ფუძეები პერპენდიკულარულია ცი-

[1] ნ. რიბკინი, გეომეტრიულ ამოცანათა კრებული, § 13, № 8.

ლინდრის ღერძისადმი. ავაგოთ AB მონაკვეთის ორთოგონალური პროექცია ცილინდრის ქვედა ფუძის სიბრტყეზე. ამისათვის B წერტილზე გავავლოთ $BB_1 \parallel OO_1$, მაშინ AB_1 იქნება საძებნი პროექცია.

ავაგოთ პერპენდიკულარის გამოსახვა, რომელიც O_1 წერტილიდან გავლებულია AB_1 ქორდისადმი. ეს იქნება O_1M_1, სადაც $AM_1 = M_1B_1$; ამის შემდეგ M_1 წერტილზე ავაგოთ $MM_1 \parallel OO_1$, ხოლო M წერტილზე—$MN \parallel O_1M_1$; MN იქნება საძებნი უმოკლესი მანძილის გამოსახვა.



ნახ. 159.

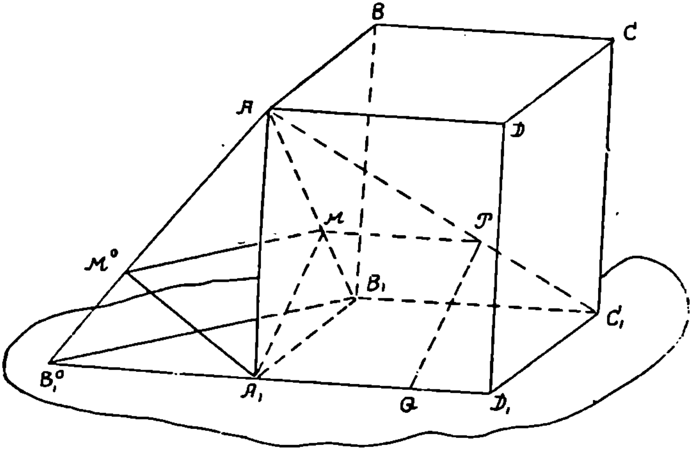
ა მ ო ც ა ნ ა 4. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი ისე შეეფარდება გვერდით წიბოს, როგორც $3:4$; ავაგოთ პრიზმის ფუძის გვერდისა და მისი არაგადამკვეთი პრიზმის დიაგონალის საერთო პერპენდიკულარის გამოსახვა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ, მაგალითად, A_1D_1 და AC_1 აცდენილი სწორი ხაზების საერთო პერპენდიკულარი. რადგან პრიზმა წესიერია, ამიტომ A_1D_1 სწორის პერპენდიკულარულ სიბრტყეს წარმოადგენს, მაგალითად, პრიზმის AA_1B_1B წახნაგის სიბრტყე. ამ სიბრტყეზე AC_1 დიაგონალის ორთოგონალური პროექცია იქნება AB_1 სწორი (ნახ. 160).

საჭიროა ავაგოთ პერპენდიკულარის გამოსახვა, რომელიც გადის A_1 წერტილზე AB_1 სწორი ხაზისადმი. ამისათვის ავაგოთ AA_1B_1 სამკუთხედის ნამდვილი ფორმა. მივიღოთ ამ სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტის ნატურალურ სიდიდედ AA_1 მონაკვეთი და ავაგოთ $AA_1B_1^0$ მართკუთხა სამკუთხედი ისე, რომ $AB_1^0 : AA_1 = 3:4$, მაშინ იგი იქნება AA_1B_1 სამკუთხედის ნამდვილი ფორმა. ავაგოთ $A_1M^0 \perp AB_1^0$.

ამის შედეგად ვიპოვოთ M წერტილის მდებარეობა AB_1-ზე, რისთვისაც $AM^0 : M^0B^0_1$ შეფარდება უცვლელად უნდა გადავიტანოთ AB_1-ზე; გავავლოთ $B_1{}^0B_1$ სწორი და შემდეგ $M^0M \parallel B_1{}^0B_1$ სწორი, მაშინ $AM^0 : M^0B_1{}^0 = AM : MB_1$; AM სწორი AB_1 სწორის

პერპენდიკულარის გამოსახვას წარმოადგენს. დაგვრჩენია ავაგოთ $MP \parallel A_1D_1$ და შემდეგ $PQ \parallel MA_1$ სწორები. PQ იქნება საძებნი პერპენდიკულარის გამოსახვა.



ნახ. 160.

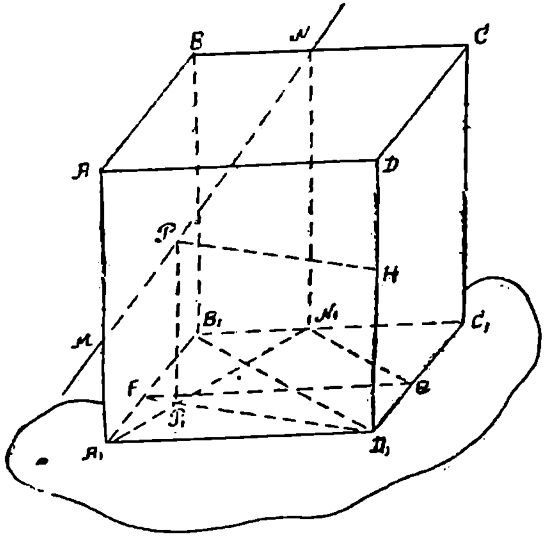
ამოცანა 5. ნახაზზე (ნახ. 161) მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის გამოსახვა. M და N წერტილები შესაბამად მდებარეობენ AA_1 და BC წიბოებზე. ავაგოთ იმ მონაკვეთის გამოსახვა, რომელიც უმოკლესი გზით შეაერთებს MN სწორსა და კუბის DD_1 წიბოს.

ამოხსნა. MN და DD_1 აცდენილი სწორებიდან DD_1-ს ეპერპენდიკულარება, მაგალითად, კუბის ქვედა ფუძის სიბრტყე. MN სწორის ორთოგონალური გეგმილი ამ სიბრტყეზე იქნება A_1N_1 სწორი.

ამრიგად, საჭიროა ავაგოთ პერპენდიკულარის გამოსახვა A_1N_1 სწორისადმი, რომელიც გადის D_1 წერტილზე. ამისათვის ავაგოთ $N_1Q \parallel B_1D_1$, შემდეგ $QF \parallel A_1D_1$, მაშინ D_1F გამოსახავს A_1N_1-ის პერპენდიკულარულ სწორ ხაზს (იხ. ამ თავში § 2 ამოცანა 11). $P_1 = D_1F \times A_1N_1$ წერტილზე ავაგოთ $PP_1 \parallel AA_1$ და P წერტილზე—$PH \parallel D_1F$.

PH მონაკვეთი MN და DD_1 სწორებს შორის უმოკლესი მანძილის გამოსახვას წარმოადგენს.

ამ მაგალითების ამოხსნის საფუძველზე მოსწავლეები ეუფლებიან ორი აცდენილი სწორი ხაზის საერთო პერპენდიკულარის აგების იმ ხერხს, რომელიც ამ §-ის დასაწყისში იყო აღწერილი. სა-



ნახ. 161.

ჭიროა, მხოლოდ, რომ მუშაობა ამით არ ამოვწუროთ. მოსწავლეებს უნდა ამოვახსნევინოთ სხვა სავარჯიშოებიც. სავარჯიშოების შედგენაში შეიძლება ჩავაბათ თვით მოსწავლეებიც.

დასკვნები

სივრცითი ფიგურების გამოსახვათა აგების ის მეთოდიკა, რომელიც გადმოცემულია მეორე თავში, საშუალებას იძლევა მოსწავლეებს მივცეთ გამოსახვათა აგების ეფექტური ჩვევები. მასთან, იმ თეორიული მასალის მოცულობა, რომელიც საჭიროა იცოდეს მოსწავლემ, არ არის ვრცელი და მისი დაძლევა სავსებით შესაძლებელია. როგორც ვნახეთ, ეს მასალა შემდეგია:

1. პარალელური დაგეგმილების ცნება და მისი თვისებები. ეს თვისებები მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ ამისათვის სპეციალურად დამზადებულ მოდელებზე, რადგან თავიდანვე ნახაზებით სარგებლობა ნაადრევად უნდა იქნას მიჩნეული.

2. მოსწავლე კარგად უნდა ერკვეოდეს გამოსახვის ცნებაში, ე. ი. იმაში, რომ გეომეტრიული ფიგურის გამოსახვა ეწოდება იმ ორიგინალის პროექციას, რომელიც მოცემული გეომეტრიული ფიგურის მსგავსია.

3. ბრტყელი ფიგურების გამოსახვათა აგება ხდება ძირითადი თეორემისა და პარალელური დაგეგმილების თვისებების გამოყენებით. რაც შეეხება წრეხაზს, მოსწავლეებს უნდა ვაჩვენოთ, რომ წრეხაზის გამოსახვად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი ფორმის ელიფსი. ამ საკითხებით ამოიწურება ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურის გამოსახვის ჭგების საკითხი.

4. მრავალწახნაგა სხეულების გამოსახვათა აგება ემყარება პოლკე-შვარცის თეორემას და პარალელური დაგეგმილების თვისებებს.

5. კონუსისა და ცილინდრის გამოსახვათა აგებისათვის საჭიროა მოსწავლეებს გავაცნოთ სხეულის შემონახაზის ცნება.

6. სფეროს გამოსახვისათვის უნდა გამოვიყენოთ ორთოგონალური პროექცია, რადგან მხოლოდ ორთოგონალური პროექციაში მივიღებთ სფეროს შემონახაზს წრეხაზის სახით. ამ მიზეზის გამო მთელი გამოსახვა, რომელიც დაკავშირებული არის სფეროსთან, უნდა შევასრულოთ ორთოგონალურ პროექციაში, რადგან არ შეიძლება გამოსასახავი ფიგურის ელემენტები სხვადასხვა პროექციაში იქნეს გამოსახული.

შრომის მესამე თავში განხილულია პოზიციური ამოცანები და მოცემულია იმ მასალის ძირითადი შინაარსი, რომელიც, ჩვენი აზრით, უნდა მუშავდებოდეს საშუალო სკოლაში.

დიდი ყურადღება უნდა მიექცეს საპროექციო ნახაზის შემოტანის მომენტს. ამისათვის ბუნებრივია, რომ მოსწავლეები დარწმუნდნენ საპროექციო ნახაზის უპირატესობაში საილუსტრაციო ნახაზთან შედარებით. პირველ ხანებში შესაძლებელია მოსწავლეებს ველაპარაკოთ საპროექციო ნახაზის მხოლოდ იმ უპირატესობაზე, რომელიც ნახაზზე წარმოდგენილი გეომეტრიული კონფიგურაციის ელემენტების ურთიერთგანლაგების საკითხს შეეხება, ხოლო მას შემდეგ, რაც ისინი გაეცნობიან საკმაო რაოდენობის ამოცანების ამოხსნას, მათ უნდა მივუთითოთ საპროექციო ნახაზის მეორე უპირატესობაზე—ასეთ ნახაზზე შეიძლება სინამდვილეში განვახორციელოთ საჭირო აგებანი.

განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მივაქციოთ პირველი სავარჯიშოების ამოხსნას საპროექციო ნახაზზე, რადგან მხოლოდ ამ

გზით შეიძლება გაიგონ მოსწავლეებმა საპროექციო ნახაზის ენა და დაეუფლონ მას.

ძირითადი პოზიციური ამოცანების ამოხსნა უნდა შევასწავლოთ არა ერთად, არამედ ცალ-ცალკე, იმ ვარაუდით, რომ მათ შორის შევქმნათ დროის გარკვეული შუალედი (2-3 საათი), რასაც დაეუთმობთ იმავე შინაარსის ამოცანების ამოხსნას, რომლებიც დაკავშირებული არიან მრავალწახნაგა სხეულებთან.

გამოცდილებამ გვიჩვენა, რომ მასალის ასეთი გეგმით შესწავლა კარგ შედეგს იძლევა და ქმნის კარგ წინაპირობებს შემდგომი მუშაობისათვის საპროექციო ნახაზზე.

ზოგიერთი ამოცანების ამოხსნაში (სადაც განსაკუთრებით საინტერესოა ამ საკითხების დასმა) უნდა შევიტანოთ გამოკვლევის ელემენტები. აღსანიშნავია, რომ ასეთი მუშაობა ძლიერ უწყობს ხელს მოსწავლეთა სივრცითი წარმოდგენების განვითარებას.

სასურველი იყო ყველა ამოცანის ამოხსნა მოგვეხდინა შემდეგი სქემის დაცვით: ანალიზი, აგება, დამტკიცება და გამოკვლევა. მაგრამ ასეთი სქემით სარგებლობა ძლიერ რთულია კვეთების აგებაზე ამოცანების ამოხსნის დროს, ამიტომ ამ შემთხვევაში ხსენებულ სქემაზე ხელი უნდა ავიღოთ.

საპროექციო ნახაზის შემოტანასთან დაკავშირებით, სახელდობრ, წერტილების, სწორებისა და სიბრტყეების მოცემის წესების გაცნობისას მოსწავლეებს უნდა მივცეთ ცნება გამოსახვის სისრულის შესახებ.

დ ა ს ა ს რ უ ლ მ ე ო თ ხ ე თ ა ვ შ ი მ ო ც ე მ უ ლ მ ა ს ა ლ ი ს შ ე ს ა ხ ე ბ. მეტრიკული ამოცანების ამოხსნის ჩვევები, როგორც ვნახეთ, განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობის მატარებელია. მოსწავლეებში უნდა გამოვიმუშაოთ ის აზრი, რომ, თუ გამოსახვა მეტრიკულად განსაზღვრულია, მაშინ მასზე არ შეიძლება აგებები თავისუფლად შევასრულოთ. ამასთან, იგულისხმება, რომ მეტრიკულად განსაზღვრული გამოსახვის ცნება მოსწავლეებს ეძლევათ კონკრეტული მაგალითების განხილვის საფუძველზე.

მეტრიკული ამოცანების ამოხსნას უნდა ვაწარმოებდეთ სტერეომეტრიის სწავლების მთელ მანძილზე. მასთან საჭიროა, რომ ეს საკითხი მჭიდროდ დავუკავშიროთ შესასწავლ თემებს.

შრომაში გადმოცემული ძირითადი დებულებების პრაქტიკაში შემოწმებას ვაწარმოებდით პირადად ჩვენ, ორი წლის მანძილზე

1954-55 და 1955-56 სასწ. წ.), თბილისის რკინიგზის № 2 საშუალო სკოლაში, სადაც მასწავლებლად ვმუშაობდით.

იმ მუშაობის შედეგები, რომელიც მოგვცა შრომაში გადმოცემული მეთოდიკის პრაქტიკულად გამოყენებამ დაიყვანება შემდეგზე:

ა) ამაღლდა მოსწავლეთა ინტერესი სტერეომეტრიისადმი, რაც გამოიხატა უფრო კარგი აკადემიური მაჩვენებლებით, ვიდრე ამას ადგილი ჰქონდა წინა წლებში.

ბ) მოსწავლეებმა შეიძინეს სივრცითი ნაკვთების გამოსახვათა აგების საჭირო ჩვევები. ამ გარემოებამ ხელი შეუწყო მოსწავლეთა წარმატებით მუშაობას საერთოდ სტერეომეტრიაში. კერძოდ, მოსწავლეებს გაუადვილდათ ამოცანების ამოხსნა გამოანგარიშებაზე; უფრო მეტიც, მათ შეეძლოთ პასუხი მოეცათ ისეთ საკითხებზე — დაც კი, რომლებზეც საერთოდ არავითარი წარმოდგენა არ აქვთ და არც შეიძლება ჰქონდეთ იმათ, რომლებთანაც ასეთი მუშაობა არ წარმოებდა.

გ) აგებაზე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ჩვევები, რომლებიც მოსწავლეებმა შეიძინეს, სასარგებლო აღმოჩნდება ტექნიკური უმაღლესი სასწავლებლების მომავალი სტუდენტებისათვის, რადგან მათ გაუადვილდებათ მხაზველობითი გეომეტრიის კურსის შესწავლა და აგრეთვე იმ მოსწავლეთათვის, რომლებიც საშუალო სკოლის დამთავრების შემდეგ სამუშაოდ წავლენ წარმოებაში.

დ) მოსწავლეებს განუვითარდათ სივრცითი წარმოდგენები. მათ მიიღეს კონსტრუქციული ამოცანების ამოხსნის გარკვეული ჩვევები.

ე) მოსწავლეებს შემდგომ განუვითარდათ ლოგიკური მსჯელობის უნარი, რაც იმის შედეგია, რომ ისინი ყოველი ამოცანის ამოხსნისას იძლეოდნენ ჩატარებული აგებების ზუსტ ახსნა-განმარტებებს.

ვ) ნიადაგი გამოეცალა სტერეომეტრიული ნახაზების აგების უცოდინარობას, ამ ნახაზების გაიგივებას ნახაზ-ორიგინალში. ეს გარემოება კი ხელს შეუწყობს ფორმალიზმის ელემენტების აღმოფხვრას სტერეომეტრიის სწავლებაში.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Барыбин К. С. и Исаков А. К.—Сборник задач по математике, Учпедгиз, М., 1952.
2. Бескин Н. М.—О книге Н. Ф. Четверухина „Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии". „Математика в школе", № 3, 1947 г.
3. Его-же—Методика геометрии, Учпедгиз, М.—Л., 1947
4. Богушевский К. С.—Первые уроки по стереометрии в IX классе. Учпедгиз, М., 1955.
5. Брадис В. М.—Методика преподавания математики в средней школе, Учпедгиз, М., 1954.
6. Буртаев В. А.—К вопросу о выполнении экзаменационных работ на аттестат зрелости, „Математика в школе", № 2, 1954 г.
7. Владимирский Г. А. и Калецкий С. Ю.—Черчение, Учпедгиз, 1952.
8. Гангнус Р. В. и Гурвиц Ю. О.—Систематический курс геометрии, ч. II, Стереометрия, Учпедгиз, М., 1936.
9. Их же—Геометрия (методическое пособие), ч. II, Учпедгиз, М., 1935 г.
10. Глаголев Н. А.—Элементарная геометрия, стереометрия, Учпедгиз, 1954.
11. Его—же—მხაზველობითი გეომეტრია, თბილისი, 1952.
12. Гопп Н. В.—Из опыта обучения учащихся геометрическому черчению круглых тел, „Математика в школе", № 6, 1950 г.
13. Давидов А. Ю.—Элементарная геометрия в объёме гимназического курса, изд. 35, 1915.
14. Долгушин П. А.—Систематический курс геометрии для средних учебных заведений, изд. „Сотрудник",—П.—Киев, 1912.
15. Зеленин Е.—Изложение первых глав стереометрии и задачи на построение, „Математика в школе", № 5, 1940.
16. Ирошников Н. П.—Задачи и упражнения в курсе стереометрии как средство развития пространственных представлений и пространственного воображения учащихся, диссертация, М., 1951.
17. Ирошников Н. П.—Из опыта обучения решению задач на пос-

роение. Сборник „Из опыта работы передовых учителей математики" изд. АПН РСФСР, М., 1950.
18. Его-же—Построение изображений в курсе стереометрии, сборник „Решение задач в средней школе", Изд. АПН РСФСР, М., 1952.
19. Киселев А. П.—Геометрия, ч. II, Стереометрия, М. 1955.
20. Кочеткова Е. С.—Обоснование геометрических построений в пространстве, „Математика в школе", № 2, 1949.
21. Лоповок Л. М.—Сборник стереометрических задач на построение, Учпедгиз. 1953.
22. Маркович Б. А.—Геометрия пространства, ч. I, изд. 4, Д. Сытина, М., 1910.
23. Моденов П. С.—Сборник задач по математике, изд. „Советская наука", М., 1951.
24. Назаревский Г. А.—О развитии пространственных представлений на уроках геометрии, „Математика в школе", № 5, 1951 и № 3, 1953.
25. Норкин С. В.—О вписанных и описанных шарах, „Математика в школе", № 5, 1955.
26. Падучев В.—Вписанный и описанный шар, „Математика в школе", № 6, 1940.
27. Панкратов А. А.—Связь преподавания геометрии и черчения в средней школе, диссертация, М., 1952.
28. Песков Т.,—Пространственные представления учащихся средней школы, „Математика в школе", № 1, 1940.
29. Романовский В. В.—Задачи на построение в стереометрии, Учпедгиз, М., 1936.
30. Семушин А. Д.— Построение и применение изображений в курсе стереометрии средней школы, диссертация, М., 1955.
31. Федорович Л. В. и Кекчеева М. Х.—Из опыта проведения упражнений и решений задач на проекционном чертеже, Известия АПН РСФСР, выпуск 21, 1949.
32. Франк М. Л.—Геометрический чертёж в курсе стереометрии, Л., 1941.
33. Четверухин Н. Ф.—Проблема изображения пространственных фигур в условиях преподавания, Известия АПН РСФСР, т. 4, 1946.
34. Его же—Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии, Известия АПН РСФСР т. 6, 1946.
35. Его же—Опыт исследования пространственных представлении и пространственного воображения учащихся, Известия АПН РСФСР, выпуск 21, 1949.

36. Его же—Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, М., 1946.
37. Его же—Стереометрические задачи на проекционном чертеже, Учпедгиз, М., 1952.
38. Шахно К. У.—Сборник конкурсных задач по математике, Изд. Ленинградского гос. ордена Ленина Университета им. А. А. Жданова. Л., 1951.
39. რიბკინი ნ.—გეომეტრიულ ამოცანათა კრებული, ნაწ. II, 1955.
40. მისივე—ტრიგონომეტრიულ ამოცანათა კრებული, თბილისი, 1950.
41. საშუალო სკოლის პროგრამები, მათემატიკა, სახელგამი, 1955.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

თ ა ვ ი I

თ ა ვ ი II

თ ა ვ ი III

თავი IV.