გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე
ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი

გავიმეოროთ მათემატიკა

წიგნი აბიტურიენტებისთვის და მათემატიკის მასწავლებლებისთვის

II ნაწილი

გეომეტრია, მონაცემთა ანალიზი, სტატისტიკა, ალბათობა

რედაქტორი თეიმურაზ ვეფხვაძე

გამომცემლობა ინტელექტი
თბილისი

წიგნი დაწერილია აბიტურიენტებისა და მასწავლებლებისთვის. გათვალისწინებულია 2009 წლის მისაღები გამოცდების პროგრამა, მასწავლებელთა სასერთიფიკაციო გამოცდების მოთხოვნები, ახალი ეროვნული სასწავლო გეგმა. ამ გეგმის მიხედვით შედგენილმა სახელმძღვანელოებმა, რომლებიც ჩვენი ავტორობით შეიქმნა (მათემატიკის VII-XII კლასები), წარმატებით გაიარა პილოტირება და სკოლებს მიეწოდა განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს რეკომენდაციით.

წიგნი ძირითადად ამ სახელმძღვანელოებში მოცემულ მასალაზეა აგებული, თუმცა შევსებულია ამოცანებით. მასალა დალაგებულია პროგრამის მიხედვით და გადმოცემულია გეომეტრიის, მონაცემთა ანალიზის, ალბათობისა და სტატისტიკის საკითხები.

ეს წიგნი წარმოადგენს II ნაწილს სახელმძღვანელოსი „გავიმეოროთ მათემატიკა". აბიტურიენტებისა და მასწავლებლების გარდა წიგნი გამოადგება სხვადასხვა დარგის იმ სპეციალისტებსაც, რომლებიც მათემატიკის აღნიშნული საკითხებით არიან დაინტერესებულნი.

ISBN 978-9941-402-80-7 (ტომეულის)
ISBN 978-9941-410-05-5 (II ნაწილის)

სარჩევი

I თავი. პლანიმეტრია

§1.1. წერტილი, წრფე, მონაკვეთი, სხივი, კუთხე, ტეხილი 5
§1.2. მონაკვეთის სიგრძე. ტეხილის სიგრძე 10
§1.3. კუთხის გრადუსული ზომა. მართი, მახვილი, ბლაგვი და გაშლილი კუთხეები. მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეები. კუთხის ბისექტრისა 14
§1.4. კუთხის ბისექტრისის თვისება 20
§1.5. მონაკვეთის შუამართობი. შუამართობის თვისება 22
§1.6. ორ წრფეს შორის კუთხე. წრფეთა მართობულობა და პარალელურობა. ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების თვისებები. წრფეთა პარალელურობის ნიშნები 25
§1.7. სამკუთხედი. სამკუთხედის სახეები. სამკუთხედის უტოლობა. სამკუთხედის ელემენტები 31
§1.8. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. გარე კუთხის თვისება 35
§1.9. სამკუთხედის ტოლობის ნიშნები 38
§1.10. მანძილი წერტილიდან წრფემდე. მართობი. დახრილი 42
§1.11. მრავალკუთხედი. მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი 45
§1.12. პარალელოგრამი. რომბი. მართკუთხედი. კვადრატი. მათი დიაგონალების თვისებები 49
§1.13. ტრაპეცია. ტრაპეციის კერძო სახეები. ტრაპეციის თვისებები 54
§1.14. თალესის თეორემა 57
§1.15. სამკუთხედის და ტრაპეციის შუახაზების თვისებები. სამკუთხედის მედიანების თვისება 60
§1.16. ფართობი. მართკუთხედის ფართობი 63
§1.17. პარალელოგრამის ფართობი. სამკუთხედის ფართობი 67
§1.18. ტრაპეციის ფართობი 71
§1.19. მსგავსი ფიგურები. მსგავსი სამკუთხედები. სამკუთხედის მსგავსების ნიშნები 73
§ 1.20. პითაგორას თეორემა. პროპორციული მონაკვეთები მართკუთხა სამკუთხედში 79
§ 1.21. ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედში 83
§ 1.22. სინუსების თეორემა. კოსინუსების თეორემა. სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება. პარალელოგრამის დიაგონალების თვისება 87
§ 1.23. წრეწირი, წრე და მათთან დაკავშირებული კუთხეებისა და მონაკვეთების თვისებები 92
§ 1.24. წრეწირის სიგრძე. წრეწირის რკალის სიგრძე. წრის ფართობი. წრიული სექტორის ფართობი 101
§ 1.25. წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები. წესიერი მრავალკუთხედი 104
§ 1.26. წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი 110

II თავი. გეომეტრიული გარდაქმნები

§ 2.1. ღერძული სიმეტრია 113
§ 2.2. ცენტრული სიმეტრია 122
§ 2.3. ვექტორი. ვექტორის კოორდინატები სიბრტყეზე. ვექტორის რიცხვზე გამრავლება. ვექტორთა შეკრება. ორ ვექტორს შორის კუთხე 125
§ 2.4. პარალელური გადატანა 136
§ 2.5. მობრუნება 141
§ 2.6. ჰომოთეტია 146

III თავი. სტერეომეტრია

§ 3.1. წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში. წრფეების ურთიერთგანლაგება სივრცეში. წრფეთა პარალელობის ნიშანი 150
§ 3.2. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი 154
§ 3.3. მრავალწახნაგები. მრავალწახნაგების შლილები 157
§ 3.4. წრფისა და სიბრტყის მართობულობა. წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი 163
§ 3.5. სიბრტყეთა პარალელურობა. ორი სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი 166
§ 3.6. წერტილის, წრფის, მონაკვეთის ორთოგონალური დაგეგმილება სიბრტყეზე. მართობი. დახრილი. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი 169
§ 3.7. თეორემა სამი მართობის შესახებ 174
§ 3.8. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. სიბრტყეთა მართობულობა. ორწახნაგა კუთხე. ორწახნაგა კუთხის ზომა 176
§ 3.9. ვექტორები სივრცეში. კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორები 183
§ 3.10. კოორდინატები სივრცეში. ვექტორის კოორდინატები. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი 188
§ 3.11. ვექტორებისა და კოორდინატების გამოყენება 197
§ 3.12. კუბი. მართკუთხა პარალელეპიპედი. მართი პრიზმა. პირამიდა. დიაგონალური კვეთები. გვერდითი და სრული ზედაპირის ფართობის გამოთვლა 204
§ 3.13. ცილინდრი. კონუსი. სფერო. ბირთვი. გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობები 210
§ 3.14. მოცულობა 219

IV თავი. მონაცემთა ანალიზი. ალბათობა და სტატისტიკა

§ 4.1. მონაცემთა თვალსაჩინო წარმოდგენის ხერხები 230
§ 4.2. მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები 245
§ 4.3. ალბათობა. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. არათავსებადი ხდომილობები. დამოუკიდებელი ხდომილობები. ხდომილობის ალბათობა. ჯამის ალბათობა. დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა 261
§ 4.4. გეომეტრიული ალბათობა 281
§ 4.5. პირობითი ალბათობა 287

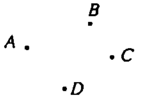
ტესტური დავალებების ნიმუშები 292
ცნობარი 311
პასუხები 316

I თავი

პლანიმეტრია

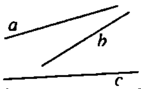
§1.1. წერტილი, წრფე, მონაკვეთი, სხივი, კუთხე, ტეხილი

„წერტილი“, „წრფე“, „სიბრტყე“, „სიმრავლე“ საწყისი ცნებებია. ყოველ ახალ გეომეტრიულ ცნებას, როგორც წესი, საწყისი ცნებებისა და ადრე შემოღებული ცნებების საშუალებით განვსაზღვრავთ ხოლმე.



წერტილებს — A, B, C, D, ... დიდი ლათინური ასოებით აღვნიშნავთ,

წრფეებს — პატარა a, b, c, ... ასოებით.

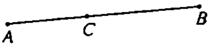


ზოგიერთი წინადადება მოკლედ ჩაიწერება ხოლმე: „A წერტილი ეკუთვნის a წრფეს“ — ასე ჩაიწერება: $A \in a$.

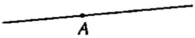
„A წერტილი არ ეკუთვნის a წრფეს“ — ასე ჩაიწერება: $A \notin a$.

AB მონაკვეთი ეწოდება წერტილების სიმრავლეს, რომელიც შედგება ორი A და B წერტილისა და მათ შორის მდებარე ყველა წერტილისგან.

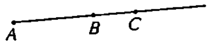
მაგალითად, C წერტილი A და B წერტილებს შორისაა — ამ წერტილებიდან A და B წერტილებამდე მანძილების ჯამი ტოლია A და B **წერტილებს შორის მანძილის**. ამ მანძილს AB **მონაკვეთის სიგრძე** ეწოდება.

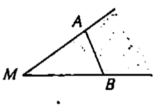


წრფის ყოველი წერტილით ეს წრფე იყოფა ორ ნაწილად; თითოეული ნაწილი ამ წერტილთან ერთად წარმოადგენს **სხივს**, რომლის სათავე ამ წერტილშია. თითოეული სხივი მეორე სხივის **დამატებითი სხივია**.

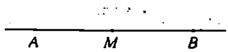


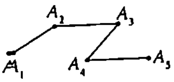
AB სხივი არის სიმრავლე A წერტილისა და მის ერთ მხარეს (B-ს მხარეს) მდებარე (AB წრფეზე) წერტილებისა; A ამ **სხივის სათავეა**, $C \in AB$.





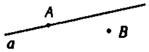
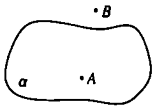
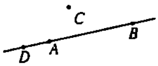
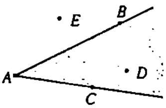
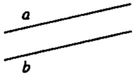
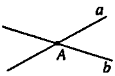
კუთხე სიბრტყის ერთ-ერთი ნაწილია, რომელიც საერთო სათავის მქონე სხივებითაა შემოსაზღვრული (თვით სხივები კუთხის ნაწილია). სურათზე გამოსახული MA და MB სხივები ორ კუთხეს ქმნის, MA და MB სხივები ამ კუთხეთა გვერდებია; $\angle AMB$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ იმ კუთხეს, რომელიც კუთხის გვერდებზე ნებისმიერად შერჩეული A და B წერტილებისთვის შეიცავს AB მონაკვეთს. ეს ფიგურა სურათზე დამუქებულია. ამ კუთხეს ასეც აღვნიშნავთ: $\angle M$. დამატებითი სხივებით შედგენილი კუთხეებიდან თითოეულს **გაშლილი კუთხე** ეწოდება.

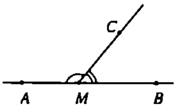




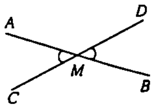
სურათზე $A_1A_2A_3A_4A_5$ **ტეხილია** გამოსახული. იგი შედგება A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 და A_4A_5 მონაკვეთებისგან. ამ მონაკვეთებს **ტეხილის გვერდები** ეწოდება. A_1 და A_5 **ტეხილის ბოლოებია**.

წარმოგიდგენთ ძირითად გეომეტრიულ ფიგურათა ურთიერთგანლაგების ზოგიერთ შემთხვევას და სათანადო აღნიშვნებს.

ფიგურათა განლაგება	აღწერა	აღნიშვნები
	A წერტილი ეკუთვნის a წრფეს. a წრფე გადის A წერტილზე.	$A\in a$
	B წერტილი არ ეკუთვნის a წრფეს. a წრფე არ გადის B წერტილზე.	$B\in a$ ან $B\notin a$
	A წერტილი ეკუთვნის α სიბრტყეს. α სიბრტყე გადის A წერტილზე.	$A\in\alpha$
	B წერტილი არ ეკუთვნის α სიბრტყეს. α სიბრტყე არ გადის B წერტილზე.	$B\overline{\in}\alpha$ ან $B\notin\alpha$
	B წერტილი ეკუთვნის AB სხივს A წერტილი ეკუთვნის AB სხივს C წერტილი არ ეკუთვნის AB სხივს D წერტილი არ ეკუთვნის AB სხივს	$B\in AB$ $A\in AB$ $C\notin AB$ $D\notin AB$
	A, B, C, D წერტილები ეკუთვნის BAC კუთხეს. E წერტილი არ ეკუთვნის BAC კუთხეს.	$B\in\angle BAC$, $B\in\angle A$ $E\notin\angle BAC$
	a და b წრფეები ერთ სიბრტყეზეა და საერთო წერტილი არა აქვს — a და b პარალელური წრფეებია.	$a\parallel b$, $b\parallel a$
	a და b წრფეები იკვეთება, გადაკვეთის წერტილი A წერტილია.	$A\in a$, $A\in b$.



AMC და CMB კუთხეებს საერთო MC გვერდი აქვს. დანარჩენი ორი გვერდი (MA და MB) დამატებითი სხივებია; $\angle AMC$ და $\angle CMB$ **მოსაზღვრე კუთხეებია.**

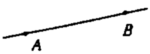


AMC და DMB კუთხეებს საერთო წვერო აქვს, გვერდები დამატებითი სხივებია. $\angle AMC$ და $\angle DMB$ **ვერტიკალური კუთხეებია.**

ᲖᲝᲒᲘᲔᲠᲗᲘ ᲫᲘᲠᲘᲗᲐᲓᲘ ᲗᲕᲘᲡᲔᲑᲐᲐ:

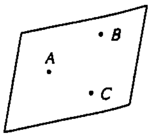
1. ყოველ ორ წერტილზე ერთადერთი წრფე გადის (ორი წერტილი ერთადერთ წრფეს განსაზღვრავს).

მაგალითი. A და B წერტილებზე ერთადერთი AB წრფე გადის.



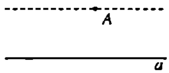
2. ყოველ სამ წერტილზე ერთადერთი სიბრტყე გადის (სამი წერტილი ერთადერთ სიბრტყეს განსაზღვრავს).

მაგალითი. A, B და C წერტილებზე ერთადერთი ABC სიბრტყე გადის.



3. წერტილზე, რომელიც მოცემულ წრფეს არ ეკუთვნის, გადის ამ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფე.

მაგალითი. A წერტილზე გადის ერთადერთი წრფე, რომელიც პარალელურია a წრფის.



✓**1.** ყოველ წერტილზე

ა) ორი წრფე გადის ბ) სამი წრფე გადის

გ) ერთადერთი წრფე გადის დ) უამრავი წრფე გადის.

✓**2.** ვთქვათ, M რაიმე წერტილია, a — წრფე. წაიკითხეთ ჩანაწერი: $M \in a$.

ა) M წრფე გადის a წერტილზე ბ) a წრფე გადის M წერტილზე

გ) a წრფე არ გადის M წერტილზე დ) M წრფე არ გადის a წერტილზე.

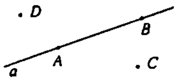
✓**3.** სურათზე გამოსახულია a წრფე და A, B, C, D წერტილები. მოცემულია წინადადებები:

I. a წრფე გადის A და B წერტილებზე;

II. a წრფე გადის C წერტილზე;

III. D წერტილი a წრფეს ეკუთვნის;

IV. D და C წერტილები არ ეკუთვნის a წრფეს.



ამ წინადადებებიდან სწორია:

ა) მხოლოდ I ბ) მხოლოდ II გ) მხოლოდ III დ) I და IV.

✓**4.** რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ წრფეს?

ა) ერთი ან არც ერთი ბ) ორი გ) სამი დ) უამრავი.

✓**5.** ვთქვათ, a და b პარალელური წრფეებია. მოცემულია წინადადებები:

I. a და b იკვეთება

II. a-სა და b-ს საერთო წერტილი არა აქვს

III. a და b ერთ სიბრტყეზეა და საერთო წერტილი არა აქვს

IV. a და b ერთ სიბრტყეზე არ არის და საერთო წერტილი არა აქვს.

ამ წინადადებებიდან სწორია:

ა) I ბ) I და II გ) II და III დ) IV.

✓**6.** AB და CD წრფეები O წერტილში იკვეთება.

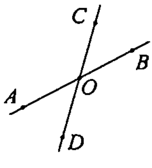
მოცემულია წინადადებები:

I $\angle AOD$ და $\angle COB$ ვერტიკალური კუთხეებია;

II. $\angle AOC$ და $\angle COB$ მოსაზღვრე კუთხეებია;

III. $\angle AOC$ და $\angle COB$ ვერტიკალური კუთხეებია;

IV. $\angle AOD$ და $\angle COB$ მოსაზღვრე კუთხეებია.



ამ წინადადებებიდან სწორია:

ა) I და II ბ) მხოლოდ I გ) მხოლოდ II დ) III და IV.

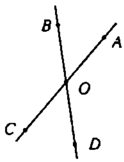
✓**7.** AOB და COD ვერტიკალური კუთხეებია. მათ აქვს

ა) ორი საერთო წერტილი

ბ) ერთი საერთო წერტილი

გ) უამრავი საერთო წერტილი

დ) სამი საერთო წერტილი.

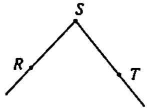


8. დაასახელეთ B წერტილზე გამავალი A წვეროს მქონე სხივი.
ა) AB ბ) BA გ) A დ) B.

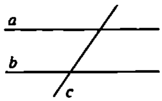
9. წრფე გადის A და B წერტილებზე და არ გადის C წერტილზე. ამ წრფის დასახელება შეიძლება იყოს
ა) BA ბ) CA გ) BC დ) ACB.

10. დაასახელეთ CAB კუთხის წვერო.
ა) C ბ) B გ) C და B დ) A.

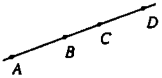
11. სურათზე მოცემული კუთხე შეიძლება ასე ჩავწეროთ:
I. $\angle S$ II. $\angle RST$ III. $\angle SRT$ IV. $\angle STR$ V. $\angle TSR$.
ამ პასუხებიდან სწორია
ა) მხოლოდ I და II
ბ) მხოლოდ III და IV
გ) მხოლოდ V
დ) I, II და V.



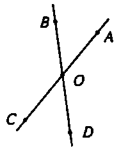
12. a და b წრფეებს საერთო წერტილი არა აქვს. სურათის მიხედვით დაასახელეთ პარალელური წრფეები.
ა) a და c ბ) b და c
გ) a და b დ) a, b და c.



13. რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ სხივს?
ა) მხოლოდ ერთი ან არც ერთი
ბ) ორი ან არც ერთი
გ) ერთი, არც ერთი ან უამრავი
დ) მხოლოდ ერთი.

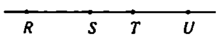


14. დასახელებული სხივებიდან შეარჩიეთ ისინი, რომელთაც არა აქვს საერთო წერტილი.
ა) AB და CD ბ) CA და BD
გ) BA და CD დ) BA და CB.



15. სურათის მიხედვით მოსაზღვრე კუთხეთა ერთ-ერთი წყვილია:
ა) $\angle AOB$ და $\angle COD$ ბ) $\angle ABO$ და $\angle CBO$
გ) $\angle AOB$ და $\angle BOC$ დ) $\angle AOD$ და $\angle BOC$.

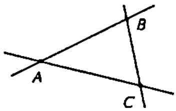
16. სურათის მიხედვით უპასუხეთ კითხვებს:



ა) გადის RS წრფე T წერტილზე?
ბ) ეკუთვნის R წერტილი ST წრფეს?
გ) ეკუთვნის R წერტილი ST სხივს?
დ) დაასახელეთ სხივი, რომელიც გადის R წერტილზე და წვერო S წერტილია.
ე) წარმოადგინეთ მოცემული წრფის ექვსი სხვადასხვა დასახელება.
ვ) დაასახელეთ სამი მონაკვეთი, რომლის ერთი ბოლო S წერტილია.

17. არსებობს თუ არა:
ა) ოთხი წერტილი, რომელიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის?
ბ) ორი წერტილი, რომელიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის?
გ) სამი წერტილი, რომელიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის?
დ) სამი წერტილი, რომელიც ერთ სიბრტყეს არ ეკუთვნის?

18. სურათზე წარმოდგენილია წრფეები, რომლებიც ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილით განისაზღვრება.

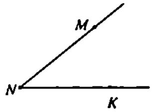


წარმოადგინეთ ყველა წრფე, რომელიც განისაზღვრება 4 წერტილით, რომელთაგან ყოველი სამი ერთ წრფეს არ ეკუთვნის. რამდენი წრფე განისაზღვრება ამ წერტილებით?

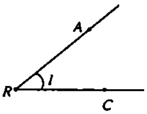
19. ამოხსენით წინა ამოცანის ანალოგიური ამოცანა 5 და 6 წერტილის შემთხვევაში.

20. მოცემულია n წერტილი, რომელთაგან ყოველი სამი ერთ წრფეს არ ეკუთვნის. რამდენი წრფე განისაზღვრება ამ წერტილებით?

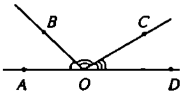
21. მოცემული 6 წერტილიდან მხოლოდ ერთი სამეული ეკუთვნის ერთ წრფეს. რამდენი წრფე განისაზღვრება ამ 6 წერტილით?



22. დაასახელეთ სურათზე გამოსახული კუთხის წვერო და გვერდები.



23. დაასახელეთ სურათზე გამოსახული კუთხე ოთხი სხვადასხვა სახით.



24. დაასახელეთ სურათზე მონიშნული:

ა) მოსაზღვრე კუთხეების წყვილები.

ბ) ყველა კუთხე, რომლის ერთი გვერდია OB.

25. A, B და C წერტილები ერთ წრფეს ეკუთვნის. B, C და D წერტილებიც ერთ წრფეს ეკუთვნის. ეკუთვნის თუ არა A, B, C და D წერტილები ერთ წრფეს?

26. c წრფე a და b წრფეების პარალელურია. შეიძლება თუ არა, რომ a და b იკვეთებოდეს?

27. a და b პარალელური წრფეებია, b და c — გადამკვეთი. იკვეთება თუ არა a და c წრფეები?

28. შეიძლება თუ არა, რომ ორ მონაკვეთს ჰქონდეს:

ა) მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი?

ბ) მხოლოდ ორი საერთო წერტილი?

29. მოცემულია A, B, C და D წერტილები. რამდენი სხვადასხვა მონაკვეთი არსებობს ისეთი, რომელთა ორივე ბოლო ეკუთვნის

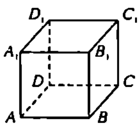
ა) A, B და C წერტილების სიმრავლეს?

ბ) A, B, C, D წერტილების სიმრავლეს?

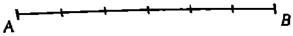
30. კუბის მოდელზე აჩვენეთ ტეხილები, რომელთა

ა) ყველა გვერდი ერთ სიბრტყეშია;

ბ) გვერდები ერთ სიბრტყეში არ არის.



§1.2. მონაკვეთის სიგრძე. ტეხილის სიგრძე



AB მონაკვეთის სიგრძე A-დან B წერტილამდე მანძილია. AB მონაკვეთის სიგრძის, ანუ A-დან B-მდე მანძილის გასაზომად ვიყენებთ სიგრძის ერთეულს. მაგალითად, 1 სმ-ს. თუ AB მონაკვეთზე მონიშნული თითოეული მცირე მონაკვეთი 1 სმ-ია, მაშინ AB-ს სიგრძე 6 სმ-ია. ვწერთ: AB=6 სმ-ს.

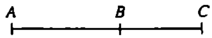
წარმოვადგინოთ სიგრძის სხვადასხვა ერთეული და მათ შორის კავშირები:

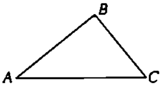
კილომეტრი	კმ	1 კმ=1000 მ (1 კილომეტრი 1000 მეტრია).
მეტრი	მ	1 მ=100 სმ.
დეციმეტრი	დმ	1 დმ=0,1 მ, 1 დმ=10 სმ.
სანტიმეტრი	სმ	1 სმ=0,01 მ, 1 სმ=10 მმ.
მილიმეტრი	მმ	1 მმ=0,001 მ.

მონაკვეთების ტოლობა: მონაკვეთები ტოლია, თუ მათი სიგრძეები ტოლია.

ძირითადი თვისება: ნებისმიერი A, B, C წერტილებისთვის $AB+BC \geq AC$.

თუ $AB+BC=AC$, მაშინ A, B და C წერტილები ერთ წრფეზეა და B არის A-სა და C-ს შორის.

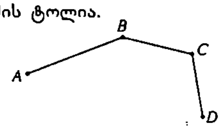




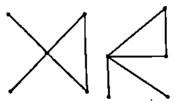
თუ $AB+BC>AC$, მაშინ B არ არის A-სა და C-ს შორის.

ტეხილის სიგრძე: ტეხილის სიგრძე მისი გვერდების სიგრძეთა ჯამის ტოლია.

სურათზე გამოსახული ტეხილის სიგრძე არის $AB+BC+CD$.



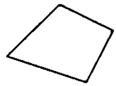
მარტივი ტეხილი ეწოდება ტეხილს, რომლის არამეზობელ გვერდებს საერთო წერტილები არა აქვს.



ეს ტეხილები არ არის მარტივი ტეხილები.

მარტივი ტეხილის სიგრძე არ არის ნაკლები მის ბოლოებს შორის მანძილზე.

ჩვენ მხოლოდ მარტივ ტეხილს ვიხილავთ. თუ ტეხილის ბოლოები ერთმანეთს ემთხვევა, ტეხილს ეწოდება შეკრული ტეხილი. სურათზე მარტივი **შეკრული ტეხილია** გამოსახული.



ა

✓**1.** C წერტილი ძევს A-სა და B-ს შორის, თუ

ა) $AB=AC+CB$ ბ) $AB>AC+CB$ გ) $AB<AC+CB$ დ) $AC>AB+CB$.

✓**2.** C წერტილი არ ძევს A-სა და B-ს შორის, თუ

ა) $AB=AC+CB$ ბ) $AB<AC+CB$ გ) $AB \geq AC+CB$ დ) $AB-CB=AC$.

✓**3.** თუ AB=2,4 სმ, BC=5,6 სმ, AC=8 სმ, მაშინ

ა) B ძევს A-სა და C-ს შორის ბ) C ძევს A-სა და B-ს შორის

გ) A ძევს B-სა და C-ს შორის დ) B არ ძევს A-სა და C-ს შორის.

✓**4.** თუ $AB=2,4$ სმ, $BC=5,6$ სმ, $AC=7$ სმ, მაშინ

ა) B ძევს A-სა და C-ს შორის ბ) C ძევს A-სა და B-ს შორის
გ) A ძევს B-სა და C-ს შორის დ) B არ ძევს A-სა და C-ს შორის.

✓**5.** თუ $AM=3$ სმ, $MB=3$ სმ, $AB=6$ სმ, მაშინ

ა) M არ ძევს AB წრფეზე ბ) A არ ძევს BM წრფეზე
გ) M არ ძევს A-სა და B-ს შორის დ) M არის AB მონაკვეთის შუა წერტილი.

✓**6.** თუ $AB=8,4$ სმ, M არის AB-ს შუა წერტილი, მაშინ

ა) $AM=5$ სმ ბ) $MB=5,6$ სმ გ) $AM=4,2$ სმ დ) $MB=3,4$ სმ.

✓**7.** 4,27 მ=

ა) 42,7 სმ ბ) 427 სმ გ) 0,427 სმ დ) 4270 სმ.

✓**8.** 112 მმ=

ა) 11,2 მ ბ) 1,12 მ გ) 0,112 მ დ) 112 მ.

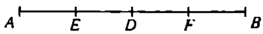
✓**9.** 0,8 სმ=

ა) 80 მმ ბ) 8 მმ გ) 800 მმ დ) 0,8 მმ.

✓**10.** 13,8 კმ=

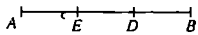
ა) 138 მ ბ) 1380 მ გ) 13800 მ დ) 138000 მ.

✓**11.** AB, DB და AD მონაკვეთების შუა წერტილებია, შესაბამისად, D, F და E წერტილები. მაშინ



ა) $AB=EF$ ბ) $EF=\frac{1}{4}AB$ გ) $EF=\frac{1}{3}AB$ დ) $EF=\frac{1}{2}AB$.

12. თუ D წერტილი A და B წერტილებს შორისაა, $AB=15$ სმ, E წერტილი A-სა და D-ს შორისაა, $AE=ED=DB$, მაშინ $AD=$



ა) 5 სმ ბ) 10 სმ გ) 8 სმ დ) 4 სმ.

✓**13.** $AB=44$ მ, $AM=28$ მ, $MB=16,3$ მ. მაშინ

ა) M წერტილი ეკუთვნის AB წრფეს ბ) M წერტილი არ ეკუთვნის AB წრფეს
გ) M წერტილი AB-ს შუა წერტილია დ) B წერტილი ეკუთვნის AM წრფეს.

✓**14.** $AC=4$ სმ, $CB=7$ სმ, $AB=3$ სმ. მაშინ

ა) C წერტილი A და B წერტილებს შორისაა
ბ) A წერტილი B და C წერტილებს შორისაა
გ) A წერტილი არ ეკუთვნის BC მონაკვეთს
დ) B წერტილი არ ეკუთვნის BC მონაკვეთს.

✓**15.** თუ $AC=4,8$ სმ, $CB=3,2$ სმ, მაშინ

ა) $AB\le1,5$ სმ ბ) $AB\ge1,6$ სმ და $AB\le8$ სმ გ) $AB>8$ სმ დ) $AB<1,6$ სმ.

✓**16.** A წერტილი ძევს B და C წერტილებს შორის. $BA=8$ სმ, $AC=12$ სმ, მაშინ AB არის BC-ს

ა) $\frac{2}{3}$ ნაწილი ბ) 0,4 ნაწილი გ) $\frac{3}{2}$ ნაწილი დ) 0,6 ნაწილი.

✓**17.** A წერტილი ძევს B და C წერტილებს შორის. AB არის AC-ს $\frac{2}{3}$, $AB=4$ სმ. მაშინ BC მონაკვეთის სიგრძეა

ა) 4 სმ ბ) 6 სმ გ) 10 სმ დ) 20 სმ.

✓**18.** AB მონაკვეთი MN მონაკვეთზე 2-ჯერ მეტია. ამასთანავე, AB-ს სიგრძე MN-ის სიგრძეზე 4,8 სმ-ით მეტია. AB-ს სიგრძეა

ა) 2,4 სმ ბ) 9,6 სმ გ) 4,8 სმ დ) 6,8 სმ.

✓**19.** AB მონაკვეთი MN მონაკვეთზე 3-ჯერ მეტია. ამასთანავე, AB-ს სიგრძე MN-ის სიგრძეზე 4,8 სმ-ით მეტია; AB-ს სიგრძეა

ა) 2,4 სმ   გ) 4,8 სმ   გ) 7,2 სმ   დ) 14.4 სმ.

✓**20.** მატარებლით გზის $\frac{2}{3}$ ნაწილის გავლის შემდეგ მგზავრს ჩაეძინა და დანარჩენი მანძილის ნახევარი ძილში გაატარა. ამის შემდეგ მას გასავლელი დარჩა 12 კმ. მთელი გზის სიგრძეა

ა) 24 კმ   ბ) 18 კმ   გ) 36 კმ   დ) 72 კმ.

21. იპოვეთ x:

ა) 1,7 სმ=x მმ,   ბ) 6 სმ=x მმ,   გ) 38 მმ=x სმ,

დ) 13,6 სმ=x მმ,   ე) 85 მმ=x სმ,   ვ) 99 მმ=x სმ,

ზ) 11,6 სმ=x მმ,   თ) 5 სმ=x მმ.

22. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით

2 მ,   199 სმ,   1,3 კმ,   3000 მმ.

23. სიგრძის რა ერთეულს (კმ, მ, სმ, მმ) შეარჩევდით მანძილის გასაზომად:

ა) მთის სიმაღლის გასაზომად,

ბ) ავტომობილის სიგრძის გასაზომად,

გ) ქუჩის სიგანის გასაზომად,

დ) თბილისიდან ბათუმამდე მანძილის გასაზომად,

ე) თქვენი სიმაღლის წარმოსადგენად,

ვ) მკლავის სიგრძის წარმოსადგენად,

ზ) ოთახის სიგრძის წარმოსადგენად,

თ) საშლელის გასაზომად,

ი) 10-თეთრიანი მონეტის დიამეტრის გასაზომად?

24. რომელი წინადადება მიგაჩნიათ შეუძლებლად?

ა) ჩემი სახლიდან სკოლამდე მანძილი 10 სმ-ია,

ბ) ოთახის კარის სიმაღლე 2 კმ-ია,

გ) ჩემი სახელმძღვანელოს სიგანე 20 სმ-ია,

დ) ჩემი ფეხის სიგრძე 1,5 მმ-ია.

25. შეარჩიეთ შესაძლებელი სწორი პასუხი:

ა) ფანქრის სიგრძეა:

1) 14 მმ   2) 14 სმ   3) 14 კმ;

ბ) 200 გვერდიანი წიგნის სისქეა:

1) 1,76 მმ   2) 1,76 სმ   3) 1,76 მ.

26. მოცემულია: AB=16,6 სმ, AC=17 სმ, BC=4,5 სმ. მდებარეობს თუ არა, A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე?

27. მოცემულია: AB=25,6 სმ, AC=18,5 სმ, BC=43 სმ. მდებარეობს თუ არა, B წერტილი A და C წერტილებს შორის?

28. ვთქვათ, AB=116,2 სმ, BC=212,6 სმ, AC=328,8 სმ. დაადგინეთ — A, B და C წერტილებიდან რომელი ძევს დანარჩენ ორს შორის?

29. ვთქვათ, AB=15,5 სმ, AC=7,3 სმ, BC=22,8 სმ. დაადგინეთ A, B და C წერტილებიდან რომელი ძევს დანარჩენ ორს შორის?

30. ცნობილია, რომ AB=20,2 სმ, BC=48,6 სმ, AC=28,4 სმ. მდებარეობს, თუ არა, A წერტილი B-სა და C-ს შორის?

31. B წერტილი A და C წერტილებს შორისაა, D წერტილი — B და C წერტილებს შორის. არის თუ არა:

ა) D წერტილი A-სა და C-ს შორის?

ბ) C წერტილი B-სა და D-ს შორის?

32. C წერტილი ძევს A-სა და B-ს შორის, D წერტილი — C-სა და B-ს შორის. არის თუ არა:

ა) D წერტილი C-სა და B-ს შორის? ბ) D წერტილი A-სა და B-ს შორის?

33. ვთქვათ, $AB=7$ მ, $BC=6$ მ. შეიძლება თუ არა, რომ AC იყოს: 3 მ, 13 მ, 2 მ, 7 მ, 14 მ?

34. ცნობილია, რომ $AB=5{,}3$ სმ, $BC=42{,}7$ სმ, მანძილი A-სა და C-ს შორის არის x სმ. იპოვეთ x-ის უმცირესი და უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობები.

35. ვთქვათ, $AB=16{,}4$ სმ, $BC=4{,}4$ სმ, $CD=2{,}2$ სმ. რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება ჰქონდეს AD-ს?

36. $AB=7$ სმ. იპოვეთ AM, თუ ცნობილია, რომ M წერტილი AB წრფეზეა და $BM=3$ სმ.

37. A და B წერტილები OM სხივზე ძევს. $OA=12{,}5$ სმ, $OB=17{,}2$ სმ.

ა) O, A და B წერტილებიდან რომელი ძევს დანარჩენ ორს შორის?

ბ) იპოვეთ AB.

38. C წერტილი ძევს A და B წერტილებს შორის. $AB=124$ სმ. იპოვეთ AC და CB მონაკვეთების სიგრძეები, თუ ცნობილია, რომ:

ა) AC მეტია CB-ზე 3-ჯერ, ბ) AC მეტია CB-ზე 2 სმ-ით,

გ) AC ნაკლებია CB-ზე 26,2 სმ-ით, დ) AC ნალებია CB-ზე 4-ჯერ,

ე) AC არის AB-ს 0,6 ნაწილი, ვ) AC ისე შეეფარდება CB-ს, როგორც 5:3.

39. C წერტილი ძევს A და B წერტილებს შორის. $AB=1$ მ. იპოვეთ AC და CB მონაკვეთების შუა წერტილებს შორის მანძილი.

40. C წერტილი ძევს A და B წერტილებს შორის. AC და CB მონაკვეთების შუა წერტილებს შორის მანძილი 20 სმ-ია. იპოვეთ AB.

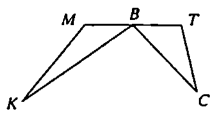
41. C წერტილი ძევს A და B წერტილებს შორის, D წერტილი ძევს C და B წერტილებს შორის. ცნობილია, რომ $AC{:}CD=3{:}2$, $CD{:}DB=3{:}4$, $AB=27{,}6$ დმ. იპოვეთ AC, CD და DB მონაკვეთების სიგრძეები.

42. $KPTM$ ტეხილის გვერდებია: $KP=1$ სმ, $PT=2$ სმ, $TM=3$ სმ. შეიძლება თუ არა, რომ KM მანძილი ტოლი იყოს:

1) 0,5 სმ; 2) 6 სმ; 3) 1 სმ, 4) 7 სმ?

43. რა სიგრძე შეიძლება ჰქონდეს AB მონაკვეთს, თუ მისი ბოლოები შეერთებულია ტეხილით, რომლის გვერდების სიგრძეებია:

1) 3 სმ, 2 სმ და 5,5 სმ; 2) 3 სმ, 4 სმ და 8 სმ?



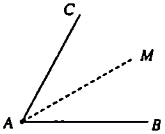
44. დაასაბუთეთ: ABC ტეხილის სიგრძე ნაკლებია $AMTC$ ტეხილის სიგრძეზე.

45. რა უმცირესი ოდენობის გვერდები შეიძლება ჰქონდეს შეკრულ ტეხილს (ბოლოები ერთმანეთს ემთხვევა)?

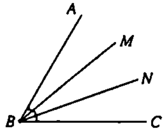
46. C წერტილი ძევს A და B წერტილებს შორის, $AC{:}CB=3{:}1$, $AB=24$ სმ. იპოვეთ AB და BC მონაკვეთების შუა წერტილებს შორის მანძილი.

47. M წერტილი P და K წერტილებს შორისაა, $PM{:}MK=4{:}3$; $PK=49$ სმ, T წერტილი M და K წერტილებს შორისაა, $MT{:}TK=4{:}3$. იპოვეთ TK მონაკვეთის სიგრძე.

§1.3. კუთხის გრადუსული ზომა. მართი, მახვილი, ბლაგვი და გაშლილი კუთხეები. მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეები. კუთხის ბისექტრისა

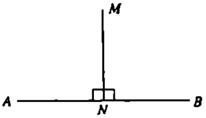


სურათზე CAB კუთხეა გამოსახული, გავლებულია AM სხივი ისე, რომ თუ წარმოვიდგენთ — CAB კუთხე გადაკეცილია AM სხივზე, მაშინ MAC კუთხე შეუთავსდება MAB კუთხეს. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, AM არის **CAB კუთხის ბისექტრისა**, იგი ამ კუთხეს შუაზე ჰყოფს: $\angle CAM=\angle BAM$, ანუ CAM და BAM კუთხეები ტოლია.

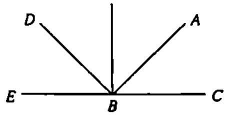


ამ სურათზე ABC კუთხე სამ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. თითოეული ეს კუთხე ($\angle ABM$, $\angle MBN$, $\angle NBC$) არის ABC კუთხის $\frac{1}{3}$.

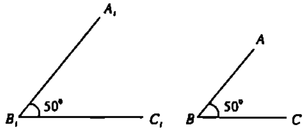
თუ α კუთხე გაშლილი კუთხის $\frac{1}{180}$-ნაწილია, მაშინ მას 1^0-იანი კუთხე ეწოდება. **გაშლილი კუთხის ზომა 180^0-ია.**



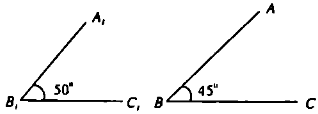
$\angle MNB$ და $\angle MNA$ კუთხეებიდან თითოეული გაშლილი კუთხის ნახევარია, თითოეული მათგანის ზომა 90^0-ია.



$\angle ABC$ გაშლილი კუთხის მეოთხედია, მისი ზომა 45^0-ია.
თუ $\angle DBE$-ც გაშლილი კუთხის მეოთხედია, მაშინ მისი ზომაც 45^0-ია და $\angle DBE=\angle ABC$, რადგან **თუ კუთხეების ზომები ტოლია, მაშინ კუთხეები ტოლია.**

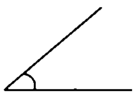


მაგალითად, სურათზე $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.

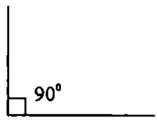


აქ $\angle A_1B_1C_1$ ზომით მეტია $\angle ABC$-ზე, ვამბობთ: $\angle A_1B_1C_1$ მეტია $\angle ABC$-ზე, $\angle ABC$ ნაკლებია $\angle A_1B_1C_1$ -ზე; ვწერთ: $\angle ABC<\angle A_1B_1C_1$.

კუთხეების კლასიფიკაცია

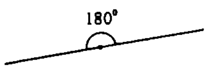


მახვილი კუთხე არის კუთხე, რომლის ზომა 90^0-ზე ნაკლებია (გაშლილი კუთხის ნახევარზე ნაკლებია).

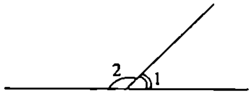


მართი კუთხე არის კუთხე, რომლის ზომა 90^0-ია (გაშლილი კუთხის ნახევარია).

ბლაგვი კუთხე არის კუთხე, რომლის ზომა მეტია 90^0-ზე.

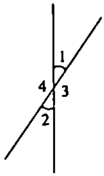


გაშლილი კუთხე. მისი ზომა არის 180^0.

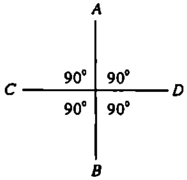


მოსაზღვრე კუთხეებს ერთი გვერდი საერთო აქვს, დანარჩენი ორი — ერთმანეთის დამატებითი სხივებია.

მოსაზღვრე კუთხეების თვისება: მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180^0-ია, $\angle 1+\angle 2=180^0$.



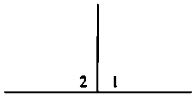
ვერტიკალური კუთხეების გვერდები დამატებითი სხივებია.
$\angle 1$ და $\angle 2$ ვერტიკალური კუთხეებია; $\angle 3$ და $\angle 4$ კუთხეებიც ვერტიკალურია.
ვერტიკალური კუთხეების თვისება: ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.
$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.



მართობული წრფეები:

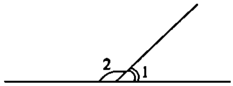
ვთქვათ, AB და CD წრფეების გადაკვეთით მიიღება ოთხი ტოლი კუთხე (მიღებული კუთხეებიდან თითოეული 90^0-ია), მაშინ AB და CD **მართობული წრფეებია**. ვწერთ: $AB \perp CD$.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

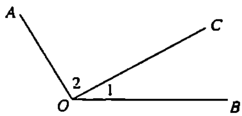


1. მოსაზღვრე კუთხეები ტოლია; რისი ტოლია თითოეული მათგანი?
ამოხსნა. რადგან $\angle 1=\angle 2$ და $\angle 1+\angle 2=180^0$,
ამიტომ, $2\cdot\angle 1=180^0$,
$\angle 1=180^0:2=90^0$, $\angle 2=90^0$.

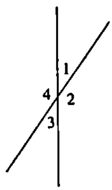
2. მოსაზღვრე კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ თითოეული მათგანი.



ამოხსნა. ეს კუთხეები შეიძლება ასე აღვნიშნოთ $\angle 1=2x$, $\angle 2=3x$.
მაშინ $2x+3x=180^0$, $5x=180^0$.
$x=36^0$.
$\angle 1=2\cdot 36^0=72^0$, $\angle 2=3\cdot 36^0=108^0$.



3. ვთქვათ, $\angle AOB=120^0$, $\angle COB=30^0$.
იპოვეთ $\angle AOC$.
ამოხსნა. $\angle 1+\angle 2=120^0$, $\angle 1=30^0$,
ამიტომ $\angle 2=120^0-30^0$,
ე. ი. $\angle AOC=90^0$.



4. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთი 30^0-ია. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.
ამოხსნა. $\angle 1=30^0$.
რადგან $\angle 1=\angle 3$, ამიტომ $\angle 3=30^0$;
რადგან $\angle 1+\angle 2=180^0$, ამიტომ $\angle 2=180^0-30^0=150^0$;
$\angle 4=\angle 2$, ამიტომ $\angle 4=150^0$.

5. იპოვეთ მექანიკური საათის ისრებს შორის კუთხე 12 სთ-სა და 12 წთ-ზე.

ამოხსნა. 12 საათის ნიშნულიდან წუთების ისარი 12 წუთში გადაადგილდება 72^0-ით (1 წთ-ში 6^0), საათის ისარი 12-ჯერ ნელა მოძრაობს და გადაადგილდება 6^0-ით. მაშასადამე, ისრებს შორის კუთხეა

$$72^0-6^0=66^0.$$

✓**1.** მახვილი კუთხის ზომა
ა) 90^0-ის ტოლია　　ბ) 90^0-ზე ნაკლებია　　გ) 90^0-ზე მეტია　　დ) 180^0-ია.

✓**2.** მართი კუთხის ზომა
ა) 90^0-ის ტოლია　　ბ) 90^0-ზე ნაკლებია　　გ) 90^0-ზე მეტია　　დ) 180^0-ია.

✓**3.** ბლაგვი კუთხის ზომა
ა) 90^0-ის ტოლია　　ბ) 90^0-ზე ნაკლებია　　გ) 90^0-ზე მეტია　　დ) 180^0-ია.

✓**4.** გაშლილი კუთხის ზომა
ა) 90^0-ის ტოლია　　ბ) 90^0-ზე ნაკლებია　　გ) 90^0-ზე მეტია　　დ) 180^0-ია.

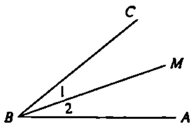
✓**5.** თუ მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთი 45^0-ია, მაშინ მეორე
ა) 45^0-ია　　2) 90^0-ია　　გ) 135^0-ია　　დ) 180^0-ია.

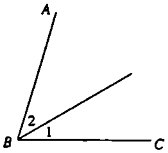
✓**6.** თუ ორი ვერტიკალური კუთხიდან ერთ-ერთი 45^0-ია, მაშინ მეორე
ა) 45^0-ია　　ბ) 90^0-ია　　გ) 135^0-ია　　დ) 180^0-ია.

✓**7.** 1^0-იანი კუთხე არის
ა) გაშლილი კუთხის ნახევარი　　ბ) გაშლილი კუთხის $\frac{1}{180}$ ნაწილი
გ) გაშლილი კუთხის მეოთხედი　　დ) გაშლილი კუთხის $\frac{1}{90}$ ნაწილი.

✓**8.** თუ $\angle 1=138^0$, მაშინ $\angle 1$
ა) მახვილი კუთხეა　　ბ) ბლაგვი კუთხეა
გ) მართი კუთხეა　　დ) გაშლილი კუთხეა.

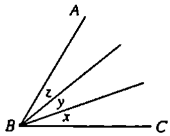
✓**9.** ვთქვათ, BM არის CBA კუთხის ბისექტრისა, $\angle CBA=40^0$; მაშინ
ა) $\angle 1=30^0$　　ბ) $\angle 2=40^0$
გ) $\angle 2=20^0$　　დ) $\angle 1=24^0$.





✓**10.** $\angle ABC=72^0$, $\angle 1=30^0$, მაშინ $\angle 2=$
ა) 30^0　　ბ) 40^0
გ) 42^0　　დ) 45^0.

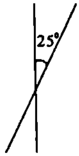
✓**11.** x-ით, y-ითა და z-ით აღნიშნულია სურათზე წარმოდგენილი კუთხეები. რომელი ტოლობაა სწორი?
ა) $x+y+z=180^0$　　ბ) $y+z=x$
გ) $z+y=z+x$　　დ) $x+y+z=\angle ABC$.



✓**12.** თუ $\angle 1=75^0$, მაშინ მისი მოსაზღვრე კუთხის ზომაა
ა) 105^0　　ბ) 25^0　　გ) 90^0　　დ) 180^0.

✓**13.** თუ ორ მართ კუთხეს საერთო აქვს მხოლოდ თითო გვერდი, მაშინ ეს კუთხეები
ა) მოსაზღვრე კუთხეებია　　ბ) ვერტიკალური კუთხეებია
გ) არ არის მოსაზღვრე კუთხეები　　დ) არ არის ტოლი.

✓**14.** ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთი 25^0-ია. იპოვეთ დანარჩენი 3 კუთხიდან უმცირესის ზომა.

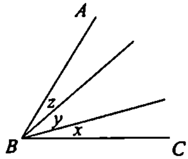


ა) 15^0 ბ) 10^0

გ) 20^0 დ) 25^0.

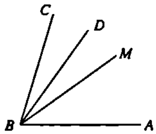
✓**15.** ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთის ზომა 30^0-ია. იპოვეთ დანარჩენი სამიდან უდიდესის ზომა.

ა) 140^0 ბ) 150^0 გ) 160^0 დ) 180^0.



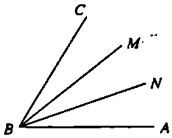
✓**16.** სურათზე გამოსახული კუთხეების შესახებ ცნობილია, რომ $x+y=46^0$, $y+z=40^0$, $x+z=34^0$. მაშინ$\angle ABC=$

ა) 120^0 გ) 40^0 გ) 60^0 დ) 43^0.



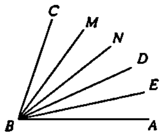
✓**17.** თუ BM არის ABC კუთხის ბისექტრისა, BD არის CBM კუთხის ბისექტრისა, მაშინ $\angle CBD$ არის $\angle ABC$ კუთხის

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{3}{4}$.



✓**18.** BM და BN სხივები ABC კუთხეს სამ ტოლ ნაწილად ყოფს. მაშინ $\angle CBN$ არის ABC კუთხის

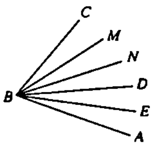
ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{2}{3}$ დ) $\frac{3}{4}$.



✓**19.** სურათზე ABC კუთხე BM, BN, BD და BE სხივებით დაყოფილია 5 ტოლ კუთხედ. რომელი კუთხის ბისექტრისაა BN სხივი?

ა) ABC კუთხის ბ) MBE კუთხის

გ) CBD და MBA კუთხეების დ) MBD და CBE კუთხეების.



✓**20.** სურათზე ABC კუთხე BM, BN, BD და BE სხივებით დაყოფილია 5 ტოლ კუთხედ. CBN კუთხე არის ABC კუთხის

ა) $\frac{3}{5}$ ბ) $\frac{2}{5}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{5}$.

✓**21.** ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან სამის ჯამი 320^0-ია. იპოვეთ ამ კუთხეებიდან უდიდესის ზომა

ა) 140^0 ბ) 40^0 გ) 90^0 დ) 120^0.

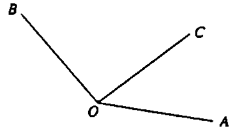
✓**22.** ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან სამის გრადუსულ ზომათა ჯამი 15-ჯერ მეტია მეოთხის გრადუსულ ზომაზე, მაშინ ამ ოთხი კუთხიდან უდიდესი მეტია უმცირესზე

ა) 15-ჯერ ბ) 5-ჯერ გ) 7-ჯერ დ) 7,5-ჯერ.

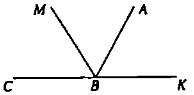
23. მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთი მეორეზე 3-ჯერ მეტია. იპოვეთ თითოეული მათგანის ზომა.

24. მოსაზღვრე კუთხეების შეფარდებაა 1:4. იპოვეთ თითოეული მათგანის ზომა.

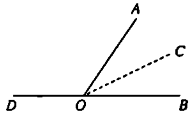
25. მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთის ზომა მეორის ზომაზე 40^0-ით მეტია. იპოვეთ თითოეულის ზომა.



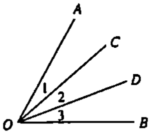
26. ცნობილია, რომ $\angle COB$ არის $\angle AOC$-ზე 20^0-ით მეტი. $\angle AOB=160^0$. იპოვეთ $\angle COB$.



27. $\angle ABC=120^0$. BM არის ABC კუთხის ბისექტრისა. იპოვეთ $\angle KBM$ (K წერტილი BC წრფეზეა).



28. DOB გაშლილი კუთხეა, OC არის AOB კუთხის ბისექტრისა. AOD კუთხის ზომა $\angle AOB$-ს ზომაზე 30^0-ით მეტია. იპოვეთ $\angle COD$.

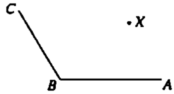


29. $\angle AOB=60^0$, $\angle 1=\angle 2=\angle 3$. იპოვეთ:
ა) $\angle 1$, $\angle 2$ და $\angle 3$, ბ) $\angle AOD$.

30. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთი მეორეზე 10^0-ით მეტია. იპოვეთ თითოეული კუთხე.

31. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთი მეორეზე 2-ჯერ მეტია. იპოვეთ თითოეული კუთხე.

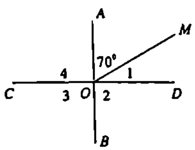
32. მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთი არის მეორის $\frac{2}{3}$. იპოვეთ თითოეული მათგანი.



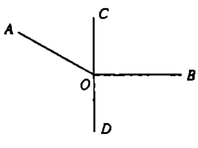
33. X არის ABC კუთხის წერტილი, $\angle ABC=110^0$, $\angle ABX=30^0$. იპოვეთ $\angle XBC$.

34. თუ X წერტილი ABC კუთხის ნებისმიერად შერჩეული შიგა წერტილია (არ ეკუთვნის კუთხის გვერდებს). მაშინ სწორია თუ არა, რომ
ა) BX სხივი ამ კუთხეს შუაზე ჰყოფს;
ბ) ABC კუთხე, თუ ის მართია, BX სხივით მახვილ კუთხეებად იყოფა?

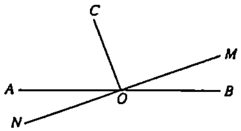
35. სწორია, თუ არა რომ:
ა) ყოველი ორი მახვილი კუთხე ტოლია;
ბ) ყოველი ორი მოსაზღვრე კუთხე ტოლია?



36. $AB\perp CD$, $\angle AOM=70^0$. იპოვეთ: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.



37. $\angle AOB=150^0$, $CD\perp OB$, იპოვეთ: ა) $\angle AOC$, ბ) $\angle AOD$.



38. $MN \perp OC$, $\angle NOB=160^0$. იპოვეთ $\angle COB$.

39. საერთო წვეროს მქონე ბლაგვი და მახვილი კუთხეების გვერდები მართობულია, ბლაგვი კუთხის ზომა 150^0-ია. იპოვეთ მახვილი კუთხის ზომა.

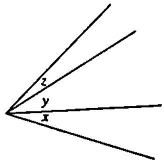
40. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისებს შორის კუთხე.

41. იპოვეთ მექანიკური საათის ისრებს შორის კუთხე:

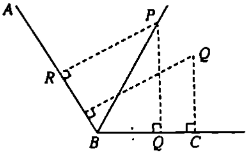
ა) 12 სთ-სა და 20 წთ-ზე;

ბ) 14 სთ-სა და 30 წთ-ზე;

გ) 13 სთ-სა და 10 წთ-ზე.



42. სურათზე აღნიშნული კუთხეების შესახებ ცნობილია, რომ $x+y=52^0$, $y+z=45^0$, $x+z=35^0$. იპოვეთ x, y და z.



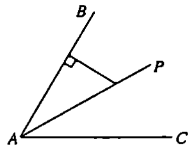
BP სხივი ABC კუთხის ბისექტრისაა — იგი ამ კუთხეს შუაზე ჰყოფს, $\angle ABP=\angle CBP$.

თუ P წერტილი ბისექტრისას ეკუთვნის, მაშინ P წერტილი ტოლი მანძილებით არის დაშორებული კუთხის გვერდებიდან, $PQ=PR$.

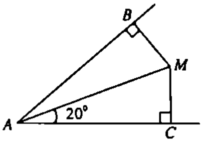
თუ ABC კუთხის Q წერტილი ბისექტრისას არ ეკუთვნის, მაშინ Q წერტილი კუთხის გვერდებიდან ტოლი მანძილებით არ არის დაშორებული.

კუთხის ბისექტრისა იმ წერტილების სიმრავლეა („გეომეტრიული ადგილი"), რომლებიც ტოლი მანძილებითაა დაშორებული კუთხის გვერდებიდან.

თუ წარმოვიდგენთ, რომ ABC კუთხე გადავკეცეთ BP ბისექტრისაზე, მაშინ R და Q წერტილები ერთმანეთს დაემთხვევა: $PQ=PR$ და $RB=BQ$.



ამრიგად, თუ წერტილი „მოძრაობს" BAC კუთხის ბისექტრისაზე და რაიმე მომენტში მისი დაშორება AB გვერდიდან 5 სმ-ია, მაშინ ამავე მომენტში დასახელებული წერტილიდან მანძილი AC გვერდამდეც 5 სმ-ია.



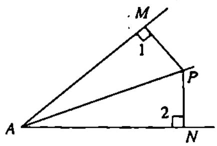
თუ M წერტილი BAC კუთხის AB და AC გვერდებიდან ტოლი მანძილებითაა დაშორებული, $MB=MC$, $\angle MAC=20^0$, მაშინ M წერტილი BAC კუთხის ბისექტრისაზეა და ამიტომ $\angle BAC=40^0$.

ა

✓**1.** მართი კუთხის ბისექტრისა ამ კუთხის გვერდებთან ქმნის

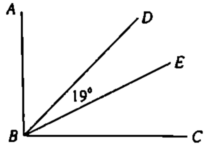
ა) 30^0-იან კუთხეებს ბ) 45^0-იან კუთხეებს

გ) 90^0-იან კუთხეებს დ) 60^0-იან კუთხეებს.



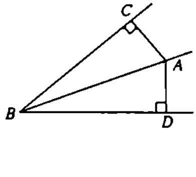
2. AP სხივი MAN კუთხის ბისექტრისაა, $\angle 1=\angle 2=90^0$; თუ $MP=6$, მაშინ $PN=$

ა) 5 ბ) 6 გ) 3 დ) 4.



3. $\angle ABC=90^0$, BD ბისექტრისაა, $\angle DBE=19^0$. იპოვეთ $\angle EBC$.

ა) 26^0 ბ) 36^0 გ) 16^0 დ) 46^0.



4. თუ $AC\perp CB$, $AD\perp DB$, $AC=AD$, მაშინ

ა) $\angle ACB=\angle ABD$ ბ) $\angle ABD\neq\angle ABC$

გ) $\angle CBA=\angle DBA$ დ) $\angle CBA\neq\angle DBA$.

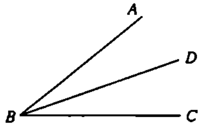
5. თუ AD სხივი BAC კუთხის ბისექტრისაა, მაშინ

ა) B წერტილი DAC კუთხის გვერდებიდან თანაბრადაა დაშორებული

ბ) C წერტილი DAB კუთხის გვერდებიდან თანაბრადაა დაშორებული

გ) D წერტილი BAC კუთხის გვერდებიდან თანაბრადაა დაშორებული

დ) D წერტილი BAC კუთხის გვერდებიდან თანაბრად არ არის დაშორებული.

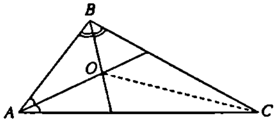


6. BD სხივი ABC კუთხის ბისექტრისაა. D წერტილიდან მანძილი AB გვერდამდე 14 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი D წერტილიდან BC გვერდამდე.

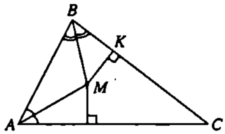
ა) 10 სმ ბ) 4 სმ
გ) 7 სმ დ) 14 სმ.

7. M წერტილი DBE კუთხეს ეკუთვნის. M-დან BD და BE წრფეებზე დაშვებული MK და ML მართობები ტოლია, $\angle MBE=30^0$. იპოვეთ $\angle DBE$.

ა) 30^0 ბ) 60^0 გ) 90^0 დ) 120^0.



8. ABC სამკუთხედში A და B კუთხეების ბისექტრისები O წერტილში იკვეთება. $\angle BCO=15^0$. იპოვეთ ACB კუთხე.



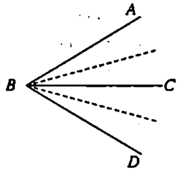
9. ABC სამკუთხედში A და B კუთხეების ბისექტრისები M წერტილში იკვეთება. M წერტილიდან BC გვერდამდე მანძილი 5 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან AC გვერდამდე.

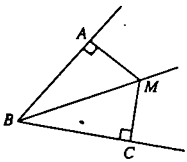
10. ABC სამკუთხედში M წერტილი არის A და B კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი. $\angle C=70^0$. იპოვეთ CM სხივის მიერ CA და CB სხივებთან შექმნილი კუთხეების გრადუსული ზომები.

11. იპოვეთ კუთხე 50^0-იანი ABC კუთხის ბისექტრისასა და BC სხივის დამატებით სხივს შორის.

12. ცნობილია, რომ $\angle ABC=120^0$. BM არის ABC კუთხის ბისექტრისა, BN არის MBC კუთხის ბისექტრისა, BK არის NBC კუთხის ბისექტრისა. იპოვეთ MBK კუთხის გრადუსული ზომა.

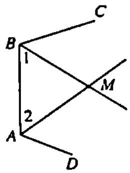
13. სურათზე ABC და CBD კუთხეების ბისექტრისებს შორის კუთხე 32^0-ია. იპოვეთ ABD კუთხის გრადუსული ზომა.

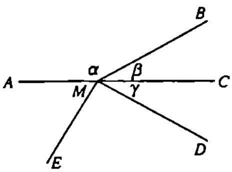




14. სურათზე გამოსახული BM სხივი არის ABC კუთხის ბისექტრისა, ABM სამკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ია, $ABCM$ ოთხკუთხედის — 28 სმ. იპოვეთ BM-ის სიგრძე.

15. AM და BM არის A და B კუთხეების ბისექტრისები. $\angle 1+\angle 2=110^0$. იპოვეთ DAB და ABC კუთხეების გრადუსული ზომების ჯამი.





16. α და β მოსაზღვრე კუთხეებია, $\alpha=150^0$, $\gamma=\beta$.
იპოვეთ:

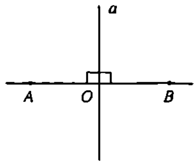
ა) კუთხე AMD კუთხის ME ბისექტრისასა და MD სხივს შორის,

ბ) კუთხე ME და MC სხივებს შორის,

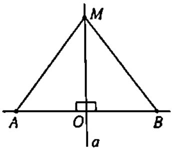
გ) ME სხივსა და β კუთხის ბისექტრისას შორის.

§1.5. მონაკვეთის შუამართობი. შუამართობის თვისება

მონაკვეთის **შუამართობი** არის წრფე, რომელიც მართობულია ამ მონაკვეთის და მის შუა წერტილზე გადის.



თვისება: მონაკვეთის შუამართობის ყოველი წერტილი ტოლი მანძილებით არის დაშორებული ამ მონაკვეთის ბოლოებიდან.

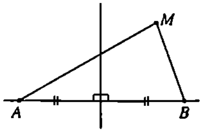


მაშასადამე, თუ a წრფე AB მონაკვეთის შუამართობია, მაშინ a-ს ნებისმიერი M წერტილიდან A და B წერტილებამდე მანძილები ტოლია, $MA=MB$.

თუ რაიმე წერტილი არ ეკუთვნის მონაკვეთის შუამართობს, მაშინ ამ წერტილიდან მონაკვეთის ბოლოებამდე მანძილები ტოლი არ არის.

ამრიგად, თუ M წერტილი არ ეკუთვნის AB მონაკვეთის შუამართობს, მაშინ $MA \neq MB$.

ყოველ მონაკვეთს ერთადერთი შუამართობი აქვს.



✓**1.** ვთქვათ, $MA=MB$, მაშინ

ა) M წერტილი აუცილებლად AB წრფეს ეკუთვნის

ბ) M წერტილი AB მონაკვეთის შუამართობს ეკუთვნის

გ) M წერტილი AB მონაკვეთის შუამართობს არ ეკუთვნის

დ) B წერტილი MA წრფეს ეკუთვნის.

✓**2.** მონაკვეთის შუამართობი არის

ა) სხივი ბ) მონაკვეთი გ) წრფე დ) წერტილი.

✓**3.** თუ $AO=OB$, $MA=MB$, მაშინ MO წრფე

ა) AB-ს შუამართობი არ არის ბ) არ არის მართობული AB წრფის

გ) არ გადის AB-ს შუა წერტილზე დ) AB წრფის შუამართობია.

✓**4.** ABC ტოლფერდა სამკუთხედია, $AB=BC$, მაშინ B წერტილი

ა) AC-ს შუამართობს ეკუთვნის ბ) AC-ს შუამართობს არ ეკუთვნის

გ) AC წრფეს ეკუთვნის დ) AC მონაკვეთს ეკუთვნის.

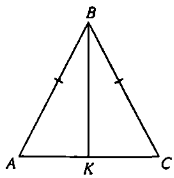
✓**5.** ვთქვათ, ABC ტოლფერდა სამკუთხედია, BK მედიანაა, ე. ი. $AK=KC$. მაშინ BK

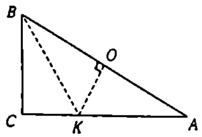
ა) არ არის ABC სამკუთხედის სიმაღლე

ბ) არ არის AC-ს მართობული

გ) ABC სამკუთხედის სიმაღლეა

დ) პარალელურია AC წრფის.

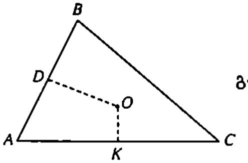




✓**6.** ABC მართკუთხა სამკუთხედია, K წერტილი AB-ს შუამართობს ეკუთვნის. $AC=8$ სმ, $BC=6$ სმ. იპოვეთ KCB სამკუთხედის პერიმეტრი.

ა) 48 სმ ბ) 14 სმ

გ) 10 სმ დ) 12 სმ.



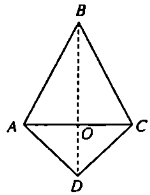
✓**7.** *O* წერტილი არის *AB* და *AC* მონაკვეთების შუამართობების გადაკვეთის წერტილი. $BO=5$ სმ. იპოვეთ *CO*.

ა) 10 სმ ბ) 5 სმ

გ) 8 სმ დ) 2,5 სმ.

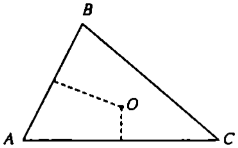
8. *ABC* მართკუთხა სამკუთხედში $C=90^0$. *AC* კათეტის შუამართობი *AB* ჰიპოტენუზას *D* წერტილში კვეთს. *BCD* სამკუთხედის პერიმეტრი 18 სმ-ია. $BC=5$ სმ. იპოვეთ *AB* ჰიპოტენუზის სიგრძე.

9. ორი წრეწირი რომელთა რადიუსები ტოლია, *A* და *B* წერტილებში იკვეთება. წრეწირების ცენტრებს შორის მანძილი $OO_1=10$ სმ. *AB* წრფე OO_1 წრფეს კვეთს *D* წერტილში. იპოვეთ *OD*.



10. *ABC* და *ACD* ტოლფერდა სამკუთხედებია, $AB=CB$, $AD=DC$, $AC=12$ სმ. *BD* კვეთს *AC*-ს *O* წერტილში. იპოვეთ *AO*.

11. *ABC* მართკუთხა სამკუთხედია. *AB* კათეტის შუამართობი *AC* ჰიპოტენუზას *D* წერტილში კვეთს, $AC=16$ სმ, $BC=12$ სმ. იპოვეთ *CDB* სამკუთხედის პერიმეტრი.

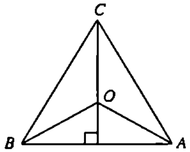


12. *O* წერტილი არის *AB* და *AC* გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილი. ეკუთვნის თუ არა *O* წერტილი *BC* გვერდის შუამართობს?

არის თუ არა *O* წერტილი ტოლი მანძილებით დაშორებული *A*, *B* და *C* წერტილებიდან?

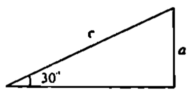
13. *ABC* მართკუთხა სამკუთხედში $\angle C=90^0$, $\angle A=40^0$. *AC* კათეტის შუამართობი *AB* ჰიპოტენუზას *D* წერტილში კვეთს. იპოვეთ $\angle DCB$.

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ **სამკუთხედში ტოლი გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია და ტოლი კუთხეების მოპირდაპირე გვერდები ტოლია.**



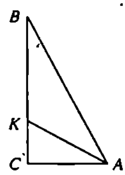
14. *ABC* სამკუთხედში $\angle B=60^0$. *O* წერტილი ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია. მანძილი *O*-დან *BC* გვერდამდე 7 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი *O*-დან *B* წვერომდე.

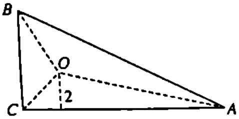
მითითება: გამოიყენეთ მართკუთხა სამკუთხედში 30^0-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის თვისება: $a=\frac{c}{2}$.



15. *MPN* სამკუთხედში *PE* ბისექტრისაა. $\angle MPE=15^0$. იპოვეთ *PMN* სამკუთხედში *MN* გვერდის მოპირდაპირე კუთხე.

16. *ABC* მართკუთხა სამკუთხედია, $\angle C=90^0$, *AK* არის *A* კუთხის ბისექტრისა, $\angle A=60^0$, $AK=9$ სმ. იპოვეთ მანძილი *K* წერტილიდან *AB* ჰიპოტენუზამდე.



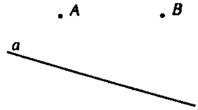


17. ABC მართკუთხა სამკუთხედია, კათეტების ჯამი 12 სმ-ია. O წერტილი ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია, მანძილი O წერტილიდან AC კათეტამდე 2 სმ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

18. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 10 სმ-ია. K წერტილი AB ჰიპოტენუზის შუამართობზე ძევს და დაშორებულია ჰიპოტენუზიდან 6,2 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი K წერტილიდან სამკუთხედის მართი კუთხის C წვერომდე.

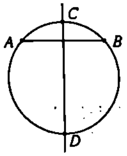
19. ABC მართკუთხა სამკუთხედის A მახვილი კუთხე 30^0-ია. AC კათეტის K წერტილი AB ჰიპოტენუზის შუამართობზე ძევს და დაშორებულია ჰიპოტენუზიდან 3,6 სმ-ით. იპოვეთ K წერტილიდან სამკუთხედის A და B წვეროებამდე მანძილების ჯამი.

20. ABC მართკუთხა სამკუთხედის AC კათეტის K წერტილი AB ჰიპოტენუზის შუამართობზე ძევს. $AB=13$ სმ, KBC სამკუთხედის პერიმეტრი 17 სმ-ია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

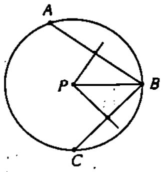


21. რა ადგილზე უნდა აშენდეს a ტრასაზე A და B პუნქტებიდან ტოლად დაშორებული ბენზინგასამართი სადგური?

22. K არის ABC მართკუთხა სამკუთხედის AC კათეტის შუამართობისა და AB ჰიპოტენუზის გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ K წერტილიდან სამკუთხედის C და B წვეროებამდე მანძილების ჯამი, თუ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 15 სმ-ია.



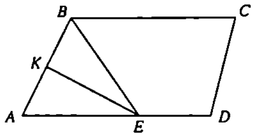
23. AB ქორდის შუამართობი წრეწირს კვეთს C და D წერტილებში, $CD=24$ სმ. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.



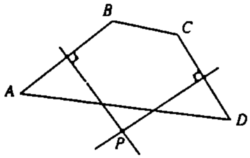
24. AB და BC ქორდების შუამართობების გადაკვეთის P წერტილი B წერტილიდან დაშორებულია 2,4 დმ-ით. იპოვეთ P-დან A და C წერტილებამდე მანძილების ჯამი.

25. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია $A(3;\ 7)$ და $B(3;\ 12)$ წერტილები. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუამართობის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

26. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია $A(5;\ 0)$ და $B(0;\ -5)$ წერტილები. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუამართობის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.



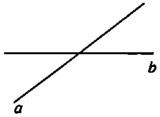
27. KE არის $ABCD$ ოთხკუთხედის AB გვერდის შუამართობი. E ძევს AD-ზე. ცნობილია, რომ $AB=12$ სმ და $EBCD$ ოთხკუთხედის პერიმეტრია 46 სმ. იპოვეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.



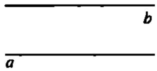
28. P არის $ABCD$ ოთხკუთხედის AB და CD გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილი; P-დან A, B, C და D წერტილებამდე მანძილების ჯამი 8,4 დმ-ია. იპოვეთ P-დან A წერტილამდე მანძილი.

§1.6. ორ წრფეს შორის კუთხე. წრფეთა მართობულობა და პარალელურობა. ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების თვისებები. წრფეთა პარალელურობის ნიშნები

სიბრტყეზე წრფეთა ურთიერთგანლაგების შემთხვევებია:

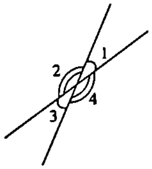


ა) წრფეები ერთმანეთს კვეთს;



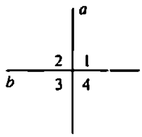
ბ) წრფეებს საერთო წერტილი არა აქვს. წრფეები პარალელურია: $a \parallel b$.

ორი წრფის გადაკვეთისას ოთხი კუთხე იქმნება:



ამასთანავე, $\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 3\\ \angle 2=\angle 4\end{array}\right\}$ ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.

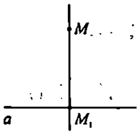
$\left.\begin{array}{l}\angle 1+\angle 2=180^0\\ \angle 2+\angle 3=180^0\\ \angle 3+\angle 4=180^0\\ \angle 4+\angle 1=180^0\end{array}\right\}$ მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180^0-ია.



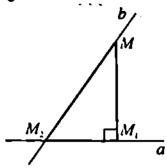
წრფეების გადაკვეთისას შეიძლება ოთხივე კუთხე ტოლი იყოს; მაშინ

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=90^0.$$

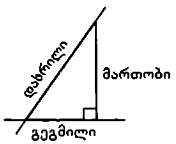
ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ **წრფეები მართობულია,** $a \perp b$.



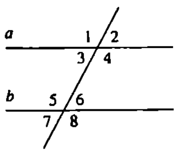
ყოველ M წერტილზე შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი წრფე, რომელიც მოცემული a წრფის მართობულია. თუ ეს წრფე კვეთს a წრფეს M_1 წერტილში, მაშინ M_1-ს ეწოდება M-ის **გეგმილი** (მართობული გეგმილი) a წრფეზე. MM_1 მონაკვეთს ეწოდება M წერტილიდან a წრფისადმი გავლებული **მართობი**. M-დან a წრფემდე მანძილი ეწოდება MM_1 მართობის სიგრძეს.



თუ M წერტილიდან გავლებულია a წრფის მიმართ MM_1 მართობული წრფე, მაშინ M წერტილზე გავლებული ნებისმიერი სხვა b წრფე არ არის მართობული a წრფის. აღნიშნული b წრფის a წრფესთან გადაკვეთის წერტილი იყოს M_2, მაშინ MM_2 მონაკვეთს ეწოდება **დახრილი** (M წერტილიდან a წრფის მიმართ გავლებული), M_2M_1-ს ეწოდება MM_2-ის **გეგმილი** a წრფეზე. ამ საკითხებზე უფრო დაწვრილებით მე-10 პარაგრაფში ვისაუბრებთ.



ორ წრფეს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფეების გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან უმცირესს.



a და b წრფეების მესამე წრფით გადაკვეთისას მიიღება რვა კუთხე.

$\angle 3$ და $\angle 6$;
$\angle 4$ და $\angle 5$ **შიგა ჯვარედინად მდებარე** კუთხეთა წყვილებია.

$\angle 3$ და $\angle 5$;
$\angle 4$ და $\angle 6$ **შიგა ცალმხრივად მდებარე** კუთხეთა წყვილები.

შემოკლებით ასე ვიტყვით ხოლმე — შიგა ჯვარედინი კუთხეები, შიგა ცალმხრივი კუთხეები.

თუ ორი პარალელური წრფე იკვეთება მესამე წრფით, მაშინ შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია: $\angle 3=\angle 6$, $\angle 4=\angle 5$.

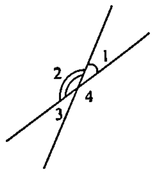
თუ ორი პარალელური წრფე იკვეთება მესამე წრფით, მაშინ შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180^0-ია.

წრფეთა პარალელურობის ნიშნები:

თუ ორი წრფის მესამით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია.

თუ ორი წრფის მესამით გადაკვეთისას შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180^0-ია. მაშინ ეს წრფეები პარალელურია.

ამოცანის ამოხსნის ნიმუშები:



1. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთი 150^0-ია. იპოვეთ წრფეებს შორის კუთხე.

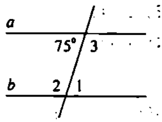
ამოხსნა. $\angle 2=150^0$, მაშინ $\angle 1=180^0-150^0=30^0$,
$\angle 3=\angle 1=30^0$, $\angle 4=\angle 2=150^0$.
წრფეებს შორის კუთხე 30^0-ია.

2. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთი 90^0-ია. რისი ტოლია წრფეებს შორის კუთხე?

ამოხსნა. წრფეებს შორის კუთხე 90^0-ია, წრფეები მართობულია.

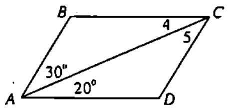
3. $a||b$, იპოვეთ $\angle 3$, $\angle 2$, $\angle 1$.

ამოხსნა. $\angle 1=75^0$,
$\angle 3=\angle 2=180^0-75^0=105^0$.

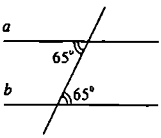


4. $BC||AD$, $AB||CD$.
იპოვეთ $\angle 4$ და $\angle 5$.

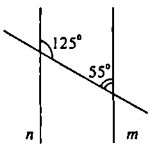
ამოხსნა. რადგან $BC||AD$, ამიტომ $\angle 4=20^0$;
რადგან $AB||DC$, ამიტომ $\angle 5=30^0$.



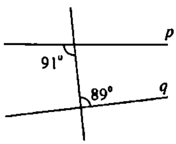
5. ა)



ბ)



გ)



არის თუ არა მოცემული წრფეები პარალელური?

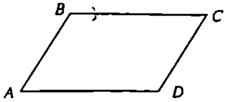
ამოხსნა.

ა) $a||b$, რადგან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია;

ბ) $n||m$, რადგან შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამია: $125^0+55^0=180^0$;

გ) p არ არის პარალელური q წრფის, რადგან, შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლი არ არის.

6. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$,



მიუთითეთ რა თანაფარდობებია:

ა) $\angle A$-სა და $\angle B$-ს შორის, ბ) $\angle B$-სა და $\angle C$-ს შორის,

გ) $\angle C$-სა და $\angle D$-ს შორის, დ) $\angle A$-სა და $\angle D$-ს შორის.

ე) $\angle A$-სა და $\angle C$-ს შორის, ვ) $\angle B$-სა და $\angle D$-ს შორის.

ამოხსნა. ა) $\angle A+\angle B=180^0$;

ბ) $\angle B+\angle C=180^0$;

გ) $\angle C+\angle D=180^0$;

დ) $\angle A+\angle D=180^0$;

შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი

ე) $\angle A=\angle C$ — გამომდინარეობს ა) და ბ)-დან;

ვ) $\angle B=\angle D$ — გამომდინარეობს ა) და დ)-დან.

ა

✓**1.** თუ a და b წრფეების გადაკვეთისას შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხები ტოლია, მაშინ

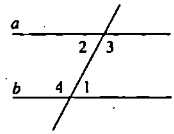
ა) a და b არაპარალელურია

ბ) $a \parallel b$

გ) a და b იკვეთება

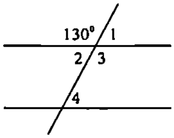
დ) ზოგიერთ შემთხვევაში $a \parallel b$, ზოგიერთ შემთხვევაში — არა.

✓**2.** $a \parallel b$, მაშინ რომელი თანაფარდობა შეიძლება არ იყოს სწორი?



ა) $\angle 1+\angle 3=180^0$ ბ) $\angle 1=\angle 2$

გ) $\angle 3=\angle 4$ დ) $\angle 2=\angle 4$.

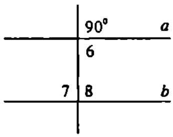


✓**3.** რომელი თანაფარდობა არ არის სწორი?

ა) $\angle 3=130^0$ ბ) $\angle 4=50^0$

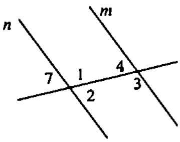
გ) $\angle 1=50^0$ დ) $\angle 2+\angle 4=180^0$.

✓**4.** $a \parallel b$, რომელი თანაფარდობა არ არის სწორი?



ა) $\angle 6=90^0$ ბ) $\angle 7=90^0$

ბ) $\angle 8=90^0$ დ) $\angle 6+\angle 7\neq 180^0$.

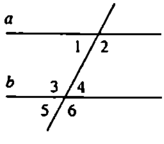


✓**5.** $n \parallel m$. დაასახელეთ კუთხე, რომელიც $\angle 1$-ის ტოლია.

ა) $\angle 2$ ბ) $\angle 4$

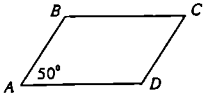
გ) $\angle 3$ დ) $\angle 7$.

✓**6.** $a \parallel b$. დაასახელეთ კუთხეთა წყვილი, რომელთა ჯამი 180^0-ია.



ა) $\angle 1$ და $\angle 4$ ბ) $\angle 1$ და $\angle 3$

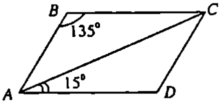
გ) $\angle 1$ და $\angle 5$ დ) $\angle 2$ და $\angle 6$.



✓**7.** $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$, $\angle A=50^0$. რომელი ტოლობა არ არის სწორი?

ა) $\angle B=130^0$ ბ) $\angle D=130^0$

გ) $\angle C=50^0$ დ) $\angle D=50^0$.



✓8. $BC\parallel AD$, $AB\parallel CD$, $\angle CAD=15^0$, $\angle B=135^0$, მაშინ

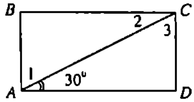
ა) $\angle BAD=130^0$ ბ) $\angle BAC=30^0$

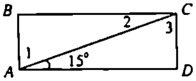
გ) $\angle ACD=15^0$ დ) $\angle ADC=130^0$.

✓9. $AB\parallel CD$, $BC\parallel AD$, $\angle B=90^0$, $\angle CAD=30^0$, მაშინ

ა) $\angle 1=30^0$ ბ) $\angle 2=60^0$

გ) $\angle 3=30^0$ დ) $\angle 2=30^0$.





✓10. $AB\parallel CD$, $BC\parallel AD$, $\angle D=90^0$, $\angle CAD=15^0$, მაშინ

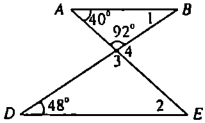
ა) $\angle 2=15^0$ ბ) $\angle 2=75^0$

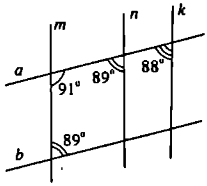
გ) $\angle 1=15^0$ დ) $\angle 3=15^0$.

✓11. $AB\parallel DE$, იპოვეთ:

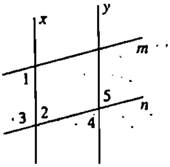
ა) $\angle 3$; ბ) $\angle 1$;

გ) $\angle 2$; დ) $\angle 4$.





12. სურათზე წარმოდგენილ შემთხვევაში მიუთითეთ პარალელური წრფეები.

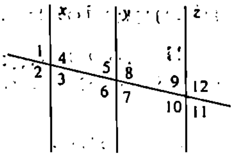


13. მიუთითეთ პარალელური წრფეები, თუ:

ა) $\angle 1=\angle 2$; ბ) $\angle 3+\angle 5=180^0$;

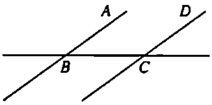
გ) $\angle 2+\angle 3=180^0$; დ) $\angle 4=\angle 5$;

ე) $\angle 1+\angle 3=180^0$; ვ) $\angle 2=\angle 4$.

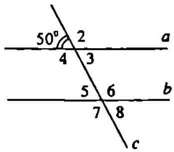


14. ა) $\angle 4=\angle 6$ და $\angle 8=\angle 10$. დაასახელეთ პარალელური წრფეები;

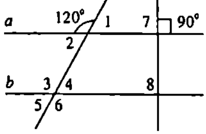
ბ) თუ $x\parallel y$ და $y\parallel z$, იქნება თუ არა x პარალელური z-ის?



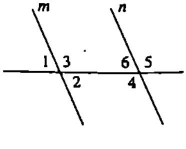
15. $AB\parallel CD$, $\angle BCD$ 30^0-ით მეტია ABC კუთხის გასამკეცებულზე. იპოვეთ $\angle ABC$ და $\angle BCD$.



16. $a\parallel b$, ამასთანავე, a და b წრფეების c წრფით გადაკვეთისას მიღებული ერთ-ერთი კუთხე 50^0-ია. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.



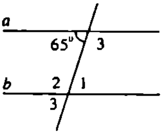
17. ვთქვათ, $a\parallel b$; იპოვეთ $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ და $\angle 8$ მითითებული 120^0-იანი და 90^0-იანი კუთხების მიხედვით.



18. დაამთავრეთ ჩანაწერი ისე, რომ ჭეშმარიტი წინადადება მიიღოთ:

ა) თუ $\angle 1=...$, მაშინ $m\parallel n$; ბ) თუ $\angle 3+...=180^0$, მაშინ $m\parallel n$;

გ) თუ $\angle 2=...$, მაშინ $m\parallel n$.

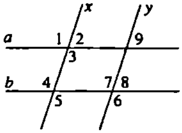


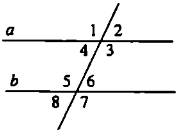
19. ვთქვათ, $a \| b$. სურათის მიხედვით იპოვეთ გადანომრილი კუთხეები.

20. მიუთითეთ პარალელური წრფეები, თუ:

ა) $\angle 1 = \angle 4$; ბ) $\angle 4 = \angle 6$; გ) $\angle 2 + \angle 1 = 180^\circ$;

დ) $\angle 8 = \angle 9$; ე) $\angle 4 = \angle 5$; ვ) $\angle 4 + \angle 8 = 180^\circ$.

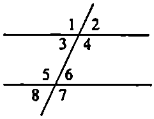




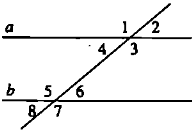
21. ცნობილია, რომ $\angle 4 = \angle 6$ და $\angle 5 = 150^\circ$.

ა) არის თუ არა a პარალელური b წრფის?

ბ) იპოვეთ $\angle 2 + \angle 6$.



22. ვთქვათ, $\angle 1 = \angle 7 = 128^\circ$. იპოვეთ $\angle 4 + \angle 6$.

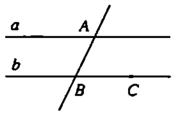


23. $\angle 2 = \angle 6 = 20^\circ$. იპოვეთ დანარჩენი ექვსი კუთხის ზომათა ჯამი. არის თუ არა a და b წრფეები პარალელური?

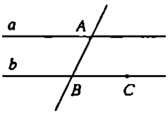
24. a და b წრფეების c წრფით გადაკვეთისას მიღებული ერთ-ერთი კუთხე 140°-ია. შიგა ცალმხრივად მდებარე ორი კუთხის ჯამი 180°-ია. იპოვეთ მიღებული 8 კუთხიდან უმცირესი.

25. a და b პარალელური წრფეების c წრფით გადაკვეთისას მიღებული 8 კუთხიდან ორის გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება, როგორც 4:5. იპოვეთ ეს ზომები.

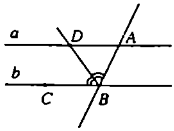
26. a და b პარალელური წრფეების c წრფით გადაკვეთისას მიღებული 8 კუთხიდან ორის ჯამი 80°-ია. იპოვეთ რვავე კუთხე.



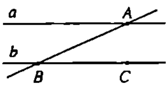
27. სურათზე $a \| b$, მიღებული 8 კუთხიდან ერთ-ერთი 130°-ია. იპოვეთ a წრფესა და ABC კუთხის ბისექტრისას შორის კუთხე.



28. სურათზე $a \| b$, a და b წრფეების AB წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი 110°-ია. ABC კუთხის ბისექტრისა a წრფეს D წერტილში კვეთს. იპოვეთ ABD სამკუთხედის კუთხეები, დაადგინეთ ამ სამკუთხედის სახე.

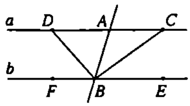


29. სურათზე $a \| b$. ABC კუთხის ბისექტრისა a წრფეს D წერტილში კვეთს. $AB = 10$ სმ. იპოვეთ AD.



30. სურათზე $a \| b$. ABC კუთხის ბისექტრისის მიერ a წრფესთან შედგენილი კუთხე 15°-ია. იპოვეთ a და b წრფეების AB წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების გრადუსული ზომები.

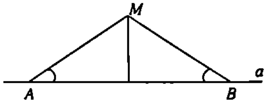
31. სურათზე $a \| b$, BC და BD, შესაბამისად, ABE და ABF კუთხეების ბისექტრისებია. $AB=2{,}4$ დმ. a და b წრფეების AB წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი 114^0-ია. იპოვეთ DBC სამკუთხედის კუთხეები და DC გვერდი.



32. A წერტილიდან a წრფისადმი გავლებულია AO მართობი და AA_1, AA_2 დახრილები. $A_1A_2=12$ სმ. დახრილების გეგმილების შეფარდებაა 1:3. იპოვეთ ეს გეგმილები (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

33. b წრფე კვეთს a წრფეს M წერტილში. ამ წრფეებს შორის კუთხე 30^0-ია. B წერტილი ეკუთვნის b წრფეს, $BM=12$ სმ. იპოვეთ მანძილი B წერტილიდან a წრფემდე.

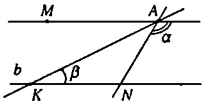
34. a წრფიდან 10 სმ-ით დაშორებული M წერტილიდან გავლებული MA და MB დახრილები a წრფესთან ადგენენ 30^0-იან კუთხეებს. იპოვეთ AMB ტეხილის სიგრძე.



35. 24 სმ სიგრძის AB მონაკვეთისა და a წრფის გადაკვეთის C წერტილი AB-ს ყოფს 2:1 შეფარდებით. გადაკვეთით შექმნილი მახვილი კუთხე 30^0-ია. იპოვეთ:

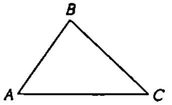
ა) მანძილები A და B წერტილებიდან a წრფემდე,

ბ) AB მონაკვეთის შუა წერტილიდან a წრფემდე.



36. a და b წრფეები პარალელურია. AK არის MAN კუთხის ბისექტრისა. α კუთხის $\frac{1}{32}$ ტოლია β კუთხის 0,5-ის. იპოვეთ α და β კუთხეები.

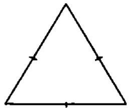
§1.7. სამკუთხედი. სამკუთხედის სახეები. სამკუთხედის უტოლობა. სამკუთხედის ელემენტები



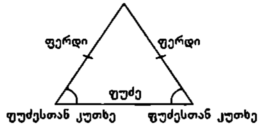
სურათზე სამკუთხედია გამოსახული, A, B და C მისი წვეროებია, AB, BC და AC — გვერდები.

$\angle BAC$, $\angle ACB$ და $\angle ABC$ სამკუთხედის კუთხეებია, ისინი თითო ასოთიც შეიძლება აღვნიშნოთ: $\angle A$, $\angle C$ და $\angle B$.

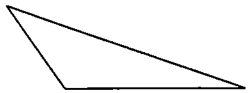
ტოლი გვერდების ოდენობის ან კუთხეების მიხედვით გვაქვს სამკუთხედის შემდეგი სახეები:



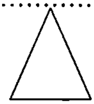
ტოლგვერდა სამკუთხედი
(ყველა გვერდი ტოლი აქვს)



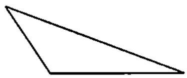
ტოლფერდა სამკუთხედი
(ორი გვერდი აქვს ტოლი)



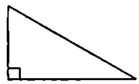
სხვადასხვაგვერდა
(განსხვავებული სიგრძის გვერდები აქვს)



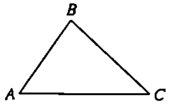
მახვილკუთხა (ყველა კუთხე მახვილი აქვს)



ბლაგვკუთხა
(ერთი კუთხეა ბლაგვი)



მართკუთხა (ერთი კუთხე მართია, იგი მონიშნულია)



სამკუთხედების გვერდებისთვის გვაქვს:

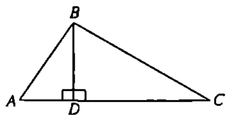
$AB<BC+AC$

$BC<AC+AB$

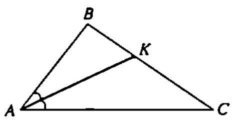
$AC<AB+BC$

ყოველი გვერდი ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე.

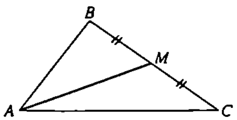
სამკუთხედის ელემენტებია: გვერდები, წვეროები, კუთხეები, სიმაღლე, მედიანა, ბისექტრისა.



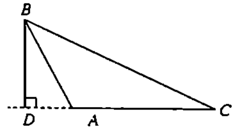
B წერტილიდან AC წრფეზე დაშვებული მართობი სამკუთხედის BD **სიმაღლეა.**



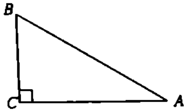
თუ AK სხივი A კუთხის ბისექტრისაა, მაშინ AK მონაკვეთი **სამკუთხედის ბისექტრისაა.**



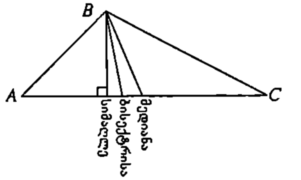
თუ M არის BC-ს შუა წერტილი, მაშინ AM მონაკვეთი სამკუთხედის **მედიანაა.**



ABC სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, B წერტილიდან გავლებული სიმაღლეა BD. იგი AC მონაკვეთს არ კვეთს.

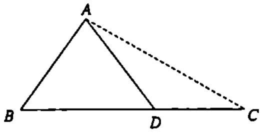


ეს სამკუთხედი მართკუთხაა. B-დან გავლებული სიმაღლე BC კათეტს ემთხვევა.



თუ $AB<BC$, მაშინ B წვეროდან გავლებული სიმაღლის, ბისექტრისასა და მედიანას განლაგება სქემატურად სურათზეა წარმოდგენილი.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:



1. D წერტილი BC მონაკვეთს ეკუთვნის. ADB სამკუთხედი მახვილკუთხაა. რა სახისაა (კუთხეების მიხედვით) ADC სამკუთხედი?

ამოხსნა. რადგან $\angle ADB<90^0$, ამიტომ $\angle ADC>90^0$ (მათი ჯამი ხომ 180^0-ია); ამიტომ ΔADC ბლაგვკუთხაა.

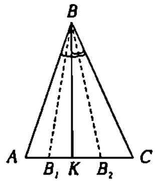
2. ABC სამკუთხედი მახვილკუთხაა, BK მისი სიმაღლეა. ABK და KBC კუთხეების ბისექტრისები BK სიმაღლესთან, შესაბამისად, 10^0-იან და 12^0-იან კუთხეებს ადგენს. იპოვეთ ABC კუთხე.

მოც.: $\angle B_1BK=10^0$, $\angle B_2BK=12^0$

უნდა ვიპოვოთ $\angle ABC$.

ცხადია, $\angle ABK=20^0$,
$\angle KBC=24^0$.

$\angle ABC=44^0$.



✓**1.** ყოველი სამკუთხედის წვეროები

ა) ერთ წრფეზე ძევს ბ) ერთ სხივზე ძევს
გ) ერთ წრფეზე არ ძევს დ) ერთმანეთს ემთხვევა.

2. ყოველი სამკუთხედის ერთი გვერდი

ა) მეტია დანარჩენი ორის ჯამზე
ბ) ტოლია დანარჩენი ორის ჯამის
გ) ნაკლებია დანარჩენი ორის ჯამზე
დ) არ არის ნაკლები დანარჩენი ორის ჯამზე.

3. რამდენი მართი კუთხე აქვს მართკუთხა სამკუთხედს?

ა) ერთი ბ) ორი გ) სამი დ) არც ერთი.

4. რამდენი ბლაგვი კუთხე აქვს ბლაგვკუთხა სამკუთხედს?

ა) ერთი 2) ორი გ) სამი დ) არც ერთი.

5. რამდენი მახვილი კუთხე აქვს მახვილკუთხა სამკუთხედს?

ა) ერთი ბ) ორი გ) სამი დ) არც ერთი.

6. მახვილკუთხა სამკუთხედში მოცემული გვერდისადმი გავლებული სიმაღლე

ა) ამ გვერდს ემთხვევა ბ) მეორე გვერდს ემთხვევა
გ) ერთ-ერთ გვერდს ემთხვევა დ) არც ერთ გვერდს არ ემთხვევა.

7. მართკუთხა სამკუთხედში კათეტისადმი გავლებული სიმაღლე

ა) ემთხვევა ჰიპოტენუზას ბ) ემთხვევა მეორე კათეტს

გ) არც ერთ გვერდს არ ემთხვევა დ) არც ერთ კათეტს არ ემთხვევა.

8. თუ ტოლგვერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 30 სმ-ია, მაშინ მისი ერთი გვერდი

ა) 12 სმ-ია ბ) 24 სმ-ია გ) 6 სმ-ია დ) 10 სმ-ია.

9. გამოარკვიეთ: ტოლგვერდა, ტოლფერდა თუ სხვადასხვაგვერდაა სამკუთხედი:

ა) ΔABC, თუ $AB=8$, $BC=10$, $AC=8$; ბ) ΔXYZ, თუ $XY=10$, $YZ=8$, $XZ=5$;

გ) ΔRST, თუ $RS=7$, $ST=7$ და $TR=7$.

10. გამოარკვიეთ მახვილკუთხაა, მართკუთხაა, თუ ბლაგვკუთხაა სამკუთხედი:

ა) ΔMNO, თუ $\angle M=132^0$, $\angle N=31^0$, $\angle O=17^0$.

ბ) ΔGHI, თუ $\angle G=55^0$, $\angle H=90^0$, $\angle I=35^0$;

გ) ΔABC, თუ $\angle A=65^0$, $\angle B=58^0$, $\angle C=57^0$.

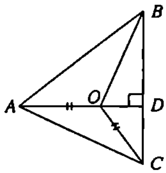
11. ცნობილია, რომ $AB=BC$. სურათის მიხედვით დაასახელეთ:

ა) 8 სამკუთხედი,

ბ) სამი ბლაგვკუთხა სამკუთხედი,

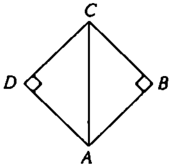
გ) ორი ტოლფერდა სამკუთხედი,

დ) ოთხი მართკუთხა სამკუთხედი.

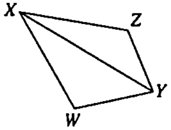


12. სურათის მიხედვით დაასახელეთ რა სახისაა გამოსახული სამკუთხედები კუთხეების ან გვერდების მიხედვით?

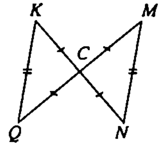
ა)



ბ)



გ)



13. A, B, C და D წერტილები ისეა შერჩეული, რომ მათგან ყოველი სამი წერტილი ერთ წრფეს არ ეკუთვნის. ამ წერტილებიდან ყოველი ორი შეერთებულია მონაკვეთით. რამდენი სამკუთხედი მიიღება?

14. შეიძლება თუ არა, რომ სამკუთხედის გვერდები იყოს:

ა) 8,5 მ; 13,5 მ და 5 მ? ბ) 32,4 მ; 14,6 მ და 49 სმ?

15. MNP სამკუთხედის MN და NP გვერდები, შესაბამისად, 14,6 და 18,2 ერთეულია. რა უდიდესი მთელი რიცხვით შეიძლება გამოისახოს MP გვერდის სიგრძე (იმავე ერთეულებში)?

16. სამკუთხედის უდიდესი გვერდი 50 სმ-ია. დანარჩენი გვერდები, შესაბამისად, 3 სმ-ით და 7 სმ-ით ნაკლებია. რისი ტოლია ამ სამკუთხედის პერიმეტრი?

17. ABC სამკუთხედში $AB=6{,}2$ სმ, BC კი მისი $\frac{3}{4}$-ია. AC გვერდი AB-ზე 0,9 სმ-ით გრძელია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.

18. სამკუთხედის გვერდები 13,6 სმ და 6,4 სმ-ია. მესამე გვერდი ამ გვერდებიდან ერთ-ერთის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

19. სამკუთხედის გვერდები 13,6 სმ და 10,2 სმ-ია. მესამე გვერდი ამ გვერდებიდან ერთ-ერთის ტოლია. რისი ტოლი შეიძლება იყოს სამკუთხედის პერიმეტრი.

20. ABC სამკუთხედში AD მედიანაა, $AC=26$ სმ, $BC=30$ სმ, $AD=18$ სმ. იპოვეთ ΔADC-ს პერიმეტრი.

21. ABC სამკუთხედში $AB=8$ სმ, $BC=9$ სმ, AM და CN მედიანებია, $MN=1,5$ სმ. იპოვეთ MNB-ს პერიმეტრი.

22. ABC სამკუთხედში BD მედიანაა, $AB=16$ სმ, $AD=12$ სმ. სამკუთხედის პერიმეტრი 66 სმ-ია. იპოვეთ BC.

23. ABC სამკუთხედში AD ბისექტრისაა. ბლაგვკუთხა, მართკუთხა, თუ მახვილკუთხაა ΔABC, თუ:

ა) $\angle BAD=67^0$; ბ) $\angle BAD=45^0$?

24. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 40,2 სმ-ია. მისი ფუძე ფერდზე 4,2 სმ-ით მეტია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის გვერდები.

25. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 17 სმ-ია. მისი ფერდი ფუძეზე 1,2-ჯერ მეტია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

26. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდის სიგრძე ფუძის სიგრძეზე 3-ჯერ მეტია. პერიმეტრის რა ნაწილია ფუძე?

27. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი არის პერიმეტრის $\frac{3}{10}$ ნაწილი. პერიმეტრის რა ნაწილია ფუძე?

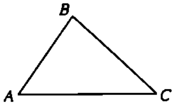
28. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი არის პერიმეტრის $\frac{5}{12}$ ნაწილი. ფერდის რა ნაწილია ფუძე?

29. სამკუთხედის პერიმეტრი 100 სმ-ია. მისი გვერდები 8-ის, 6-ისა და 11-ის პროპორციულია. იპოვეთ გვერდები.

30. BD არის ABC სამკუთხედის მედიანა. BC გვერდი AB გვერდზე 3,5 სმ-ით გრძელია. ABD სამკუთხედის პერიმეტრი 26 სმ-ია. იპოვეთ BCD სამკუთხედის პერიმეტრი.

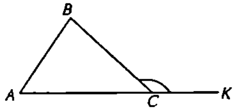
31. ABC სამკუთხედის AB გვერდი პერიმეტრის $\frac{2}{5}$-ია. BC გვერდი AB გვერდის $\frac{3}{4}$-ია. პერიმეტრის რა ნაწილია AC გვერდი?

§1.8. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. გარე კუთხის თვისება



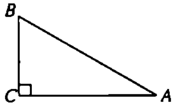
სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180^0-ია.

$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$.



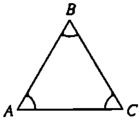
სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე კუთხეების ჯამის ტოლია.

$\angle BCK=\angle A+\angle B$.

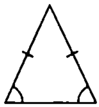


მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხეების ჯამი 90^0-ია.

$\angle A+\angle B=90^0$.



ტოლგვერდა სამკუთხედის ყველა კუთხე 60^0-ია.



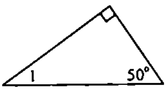
ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

ა

გამოიყენეთ სურათზე მითითებული მონაცემები და იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი კუთხე.

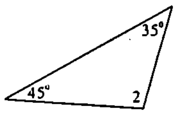
✓**1.** $\angle 1=$

ა) 50^0
ბ) 40^0
გ) 30^0
დ) 60^0.



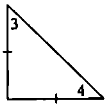
✓**2.** $\angle 2=$

ა) 90^0
ბ) 80^0
გ) 100^0
დ) 110^0.



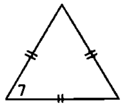
✓**3.** $\angle 3=\angle 4=$

ა) 50^0
ბ) 40^0
გ) 45^0
დ) 30^0.



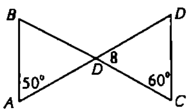
✓**4.** $\angle 7=$

ა) 50^0
ბ) 30^0
გ) 60^0
დ) 50^0.



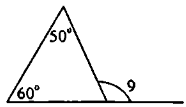
✓**5.** $AB\|CD$, მაშინ $\angle 8=$

ა) 50^0
ბ) 70^0
გ) 60^0
დ) 75^0.

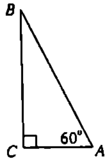


✓**6.** $\angle 9=$

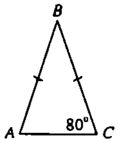
ა) 50^0
ბ) 80^0
გ) 90^0
დ) 110^0.



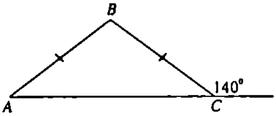
✓7. $\angle B=$
ა) 60^0
ბ) 30^0
გ) 40^0
დ) 50^0.



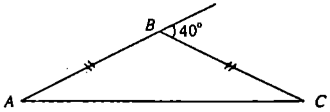
✓8. $\angle B=$
ა) 20^0
ბ) 10^0
გ) 40^0
დ) 80^0.



✓9. $\angle A=$
ა) 30^0
ბ) 40^0
გ) 50^0
დ) 140^0.



✓10. $\angle A=$
ა) 40^0
ბ) 20^0
გ) 80^0
დ) 30^0.

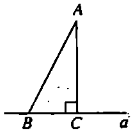


11. PQR სამკუთხედი ტოლფერდაა, $PQ=QR$. ფუძესთან მდებარე $\angle P=25^0$.
ა) იპოვეთ $\angle R$; ბ) იპოვეთ $\angle Q$;
გ) რა სახისაა PQR სამკუთხედი (კუთხეების მიხედვით)?

12. ტოლფერდა ბლაგვკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 40^0-ია. იპოვეთ დანარჩენი ორი კუთხე.

13. სწორია თუ არა, რომ
ა) მახვილკუთხა სამკუთხედის ყოველი გარე კუთხე ბლაგვია?
ბ) ტოლგვერდა სამკუთხედის გარე კუთხეები ტოლია?
გ) ბლაგვკუთხა სამკუთხედის ყოველი გარე კუთხე მახვილია?
დ) მართკუთხა სამკუთხედის ყოველი გარე კუთხე მართია?

14. ახსენით, რატომ არ შეიძლება AB და AC მართობული იყოს a წრფის.



15. ABC მართკუთხა სამკუთხედის C მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზისადმი გავლებულია CD სიმაღლე, $\angle BCD=40^0$. იპოვეთ $\angle A$.

16. სამკუთხედის A და B წვეროებთან მდებარე გარე კუთხეების (თითო-თითოდ აღებული) ჯამი 260^0-ია. იპოვეთ $\angle C$.

17. ABC სამკუთხედის A და C კუთხეების შეფარდებაა 2:5. C კუთხე 27^0-ით მეტია $\angle A$-სა და $\angle B$-ს შორის უმცირესზე. იპოვეთ ეს კუთხეები.

18. სამკუთხედის უდიდესი კუთხე 4-ჯერ მეტია უმცირეს კუთხეზე, მესამე კუთხე უმცირესზე 18^0-ით მეტია. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

19. სამკუთხედის ორი კუთხე ტოლია; მესამე კუთხე ამ ორი კუთხის ჯამის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

20. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხე ხუთჯერ მეტია მეორე მახვილ კუთხეზე. იპოვეთ ეს მახვილი კუთხეები.

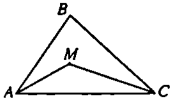
21. სამკუთხედის უდიდესი კუთხე 5-ჯერ მეტია უმცირეს კუთხეზე. მესამე კუთხე სამჯერ მეტია უმცირეს კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

22. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ მათი გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება, როგორც 1:2:3.

23. ABC სამკუთხედში $\angle A=60^0$. $\angle B=72^0$, A და B კუთხეების ბისექტრისები M წერტილში იკვეთება. იპოვეთ $\angle AMB$.

24. სამკუთხედის A და B კუთხეების ბისექტრისებით შექმნილი მახვილი კუთხე 72^0-ია. იპოვეთ:

ა) A და B კუთხეების ჯამი, ბ) $\angle C$.

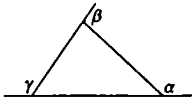


25. M არის ABC სამკუთხედის A და B კუთხეთა ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი; $\angle AMB=\alpha$.

ა) იპოვეთ $\angle C$,

ბ) დაადგინეთ α-ს დასაშვები მნიშვნელობები.

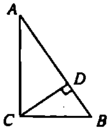
26. M არის ABC სამკუთხედის A და B კუთხეთა ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი. ცნობილია, რომ $\angle M$ არის 2-ჯერ მეტი $\angle C$-ზე. იპოვეთ $\angle C$.



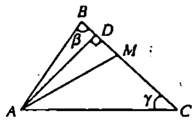
27. სამკუთხედის გარე კუთხეები ისე შეეფარდება, როგორც 2:3:4. იპოვეთ ეს გარე კუთხეები.

28. სამკუთხედში $\angle A=80^0$, $\angle B=68^0$. იპოვეთ უმცირესი კუთხე A და B წვეროებიდან გავლებულ AD და BE სიმაღლეებს შორის.

29. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი მახვილი კუთხე 75^0-ია. იპოვეთ კუთხე მართი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლესა და ბისექტრისას შორის.

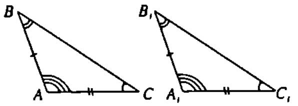


30. CD არის ABC მართკუთხა სამკუთხედის C მართი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე. $\angle A=\alpha$. იპოვეთ ABC, ACD და BCD სამკუთხედების კუთხეები.



31. ABC სამკუთხედის AD სიმაღლესა და AM ბისექტრისას შორის კუთხე გამოსახეთ B და C კუთხეების საშუალებით.

32. ABC სამკუთხედი მართკუთხაა, $\angle C=90^0$, $\angle A=30^0$, $BC=7$ სმ. CD სიმაღლეა. იპოვეთ AD და DB მონაკვეთების სიგრძეები.



ორი სამკუთხედი ტოლია, თუ მათი გვერდები ტოლია და ტოლი გვერდების მოპირდაპირე კუთხეებიც ტოლია.

მაშასადამე, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ ნიშნავს, რომ

$AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$;

$\angle A=\angle A_1$; $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$.

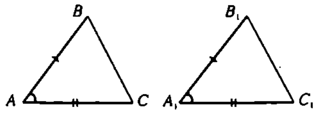
ორი სამკუთხედის ტოლობის დადგენა შეიძლება **სამკუთხედების ტოლობის ნიშნებითაც:**

I ნიშანი:

თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

მაშასადამე, თუ, მაგალითად,

$$\left.\begin{array}{l} AB=A_1B_1 \\ AC=A_1C_1 \\ \angle A=\angle A_1 \end{array}\right| \quad \text{მაშინ } \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1.$$

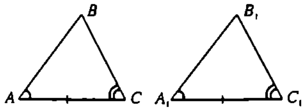


II ნიშანი:

თუ ერთი სამკუთხედის ერთი გვერდი და მასთან მდებარე ორი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ერთი გვერდისა და მასთან მდებარე ორი კუთხის, მაშინ სამკუთხედები ტოლია.

მაშასადამე, თუ, მაგალითად,

$$\left.\begin{array}{l} AC=A_1C_1 \\ \angle A=\angle A_1 \\ \angle C=\angle C_1 \end{array}\right| \quad \text{მაშინ } \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1.$$

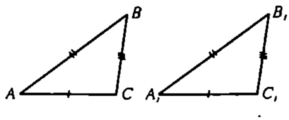


III ნიშანი:

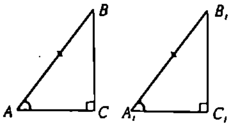
თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის სამი გვერდის, მაშინ სამკუთხედები ტოლია.

მაშასადამე,

$$\left.\begin{array}{l} AB=A_1B_1 \\ AC=A_1C_1 \\ BC=B_1C_1 \end{array}\right| \quad \text{მაშინ } \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1.$$



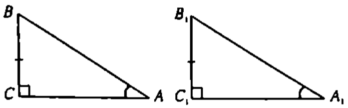
მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობას სხვა ნიშნებითაც დავადგენთ:



I. (სამკუთხედების ტოლობა ჰიპოტენუზითა და ერთი მახვილი კუთხით)

თუ $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$,

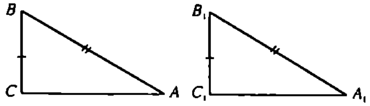
მაშინ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.



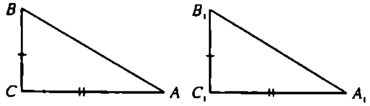
II. (სამკუთხედების ტოლობა კათეტითა და კათეტის მოპირდაპირე მახვილი კუთხით)

თუ $BC=B_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$,

მაშინ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

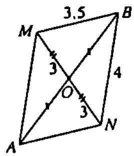


III. (სამკუთხედების ტოლობა კათეტითა და ჰიპოტენუზით)
თუ $BC=B_1C_1$, $AB=A_1B_1$,
მაშინ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.



IV. (სამკუთხედების ტოლობა ორი კათეტით)
თუ $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$,
მაშინ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:



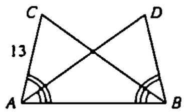
1. AB და MN მონაკვეთები გადაკვეთისას შუაზე იყოფა. $MN=6$ სმ; $NB=4$ სმ, $MB=3{,}5$ სმ. იპოვეთ AMN სამკუთხედის პერიმეტრი.

ამოხსნა. ვთქვათ, AB და MN იკვეთება O წერტილში. სამკუთხედების ტოლობის I ნიშნის თანახმად,

$$\Delta MOB=\Delta NOA, \qquad (1)$$
$$\Delta AOM=\Delta BON, \qquad (2)$$

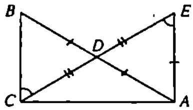
(1)-დან $AN=3{,}5$ სმ, (2)-დან $AM=4$ სმ,
მაშასადამე,

$$P_{\Delta AMN}=3{,}5+4+6=13{,}5 \text{ (სმ)}.$$



2. სურათზე $\angle DAB=\angle CBA$, $\angle CAB=\angle DBA$, $CA=13$ სმ. იპოვეთ DB.

ამოხსნა. განვიხილოთ ΔACB და ΔADB. AB საერთო გვერდია, ამ გვერდთან მდებარე კუთხეები სამკუთხედებს ტოლი აქვს. ამიტომ, II ნიშნის თანახმად, $\Delta ACB=\Delta ADB$. ტოლ სამკუთხედებში ტოლი კუთხეების მოპირდაპირე გვერდები ტოლია: $DB=AC=13$ (სმ).



3. დაასაბუთეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია.

$\angle BCA=90^0$, CD მედიანაა.

დავასაბუთოთ: $CD=\frac{1}{2}AB$.

CD სხივზე გადავზომოთ CD მონაკვეთის ტოლი DE მონაკვეთი, $DE=CD$.
მაშინ $\Delta CDB=\Delta DAE$, ე. ი.

$$AE=BC, \ \angle BCD=\angle DEA.$$

ამიტომ $EA||BC$, $\angle EAC+\angle BCA=180^0$. ვიცით, რომ $\angle BCA=90^0$, ამრიგად,

$$\angle EAC=\angle BCA=90^0.$$

განვიხილოთ ΔABC და ΔEAC — კათეტების ტოლობის გამო ეს სამკუთხედები ტოლია; მაშასადამე,

$$CE=AB;$$
$$\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}AB,$$
$$CD=AD=DB.$$

✓**1.** ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია. $\angle A=\angle A_1$, BC და B_1C_1 მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი 12 სმ-ია. იპოვეთ მათი სიგრძეები.

ა) 10 სმ და 2 სმ ბ) 6 სმ და 6 სმ გ) 8 სმ და 4 სმ დ) 5 სმ და 7 სმ.

✓**2.** ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია. $AB=35$ სმ, $AC=32$ სმ. $\Delta A_1B_1C_1$-ის პერიმეტრი 100 სმ-ია. იპოვეთ BC გვერდი.

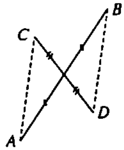
ა) 33 სმ ბ) 23 სმ ბ) 32 სმ დ) 43 სმ.

✓**3.** ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია. $AB=BC=14$ სმ და $B_1C_1+A_1C_1=35$ სმ. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

ა) 50 სმ ბ) 49 სმ გ) 48 სმ დ) 52 სმ.

✓**4.** ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\angle C=90^0$, $\angle A=30^0$, $AC=8$ სმ, $\Delta A_1B_1C_1=\Delta ABC$, $\angle C_1=90^0$, $\angle B_1=60^0$. მაშინ $A_1C_1=$

ა) 8 სმ ბ) 16 სმ გ) 4 სმ დ) 10 სმ.

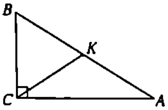


✓**5.** AB და CD მონაკვეთები გადაკვეთისას შუაზე იყოფა. $BD=4$ სმ, მაშინ $AC=$

ა) 8 სმ ბ) 4 სმ გ) 2 სმ დ) 6 სმ.

✓**6.** თუ AB და CD მონაკვეთები გადაკვეთისას შუაზე იყოფა, მაშინ

ა) $DB\|AC$ ბ) $\angle B\neq\angle A$ გ) $\angle C\neq\angle D$ დ) $AB\|CD$.



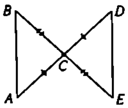
✓**7.** $\angle C=90^0$, $AB=18$ სმ, CK მედიანაა. იპოვეთ CK.

ა) 19 სმ ბ) 9 სმ

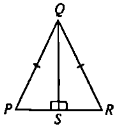
გ) 12 სმ დ) 3 სმ.

8. დაასახელეთ ტოლი სამკუთხედები სურათის მიხედვით.

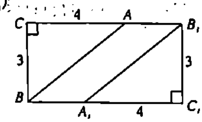
ა)



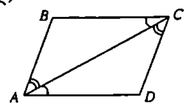
ბ)



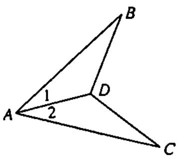
გ)



დ)



9. AD არის ABC სამკუთხედის მედიანა, $\Delta ADB=\Delta ADC$; $AB=5$ სმ, $BD=3$ სმ. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.



10. სურათზე $AB=AC$, $BD=CD$, $\angle BAC=50^0$. იპოვეთ $\angle 1$ და $\angle 2$.

11. ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია. $AB=32$ სმ, $BC=26$ სმ, $A_1C_1=30$ სმ, $B_1C_1=26$ სმ. იპოვეთ AC და A_1B_1.

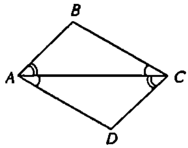
12. P არის AB მონაკვეთის შუა წერტილი. $AB=36$ სმ. MN მონაკვეთი P წერტილში კვეთს AB-ს. $AM=24{,}4$ სმ. $\Delta PAM=\Delta PBN$. BPN სამკუთხედის პერიმეტრი 72,4 სმ-ია. იპოვეთ MN.

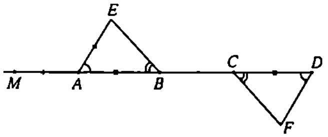
13. AB და CD მონაკვეთები გადაკვეთისას შუაზე იყოფა, $CD=24$ სმ, $BC=16$ სმ, $BD=14$ სმ. იპოვეთ ADC სამკუთხედის პერიმეტრი.

14. AB და CD მონაკვეთები გადაკვეთისას P წერტილით შუაზე იყოფა, $AB=28$ სმ, $CD=32$ სმ, $AC=18$ სმ. იპოვეთ PBD სამკუთხედის პერიმეტრი.

15. ABC და MNP სამკუთხედები ტოლია. თითოეული მათგანის პერიმეტრი 42 სმ-ია, ABC სამკუთხედის უმცირესი გვერდი 12,4 სმ-ია, ხოლო MNP სამკუთხედის უდიდესი გვერდი — 16 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედების გვერდები.

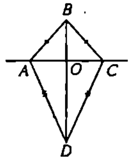
16. სურათზე ერთნაირი ნიშნაკებით ტოლი კუთხეებია მონიშნული. AB მონაკვეთი AD-ზე 2 სმ-ით მოკლეა, $ABCD$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი 1 მ-ია. იპოვეთ AB, BC, CD და AD.

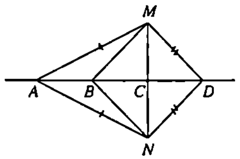




17. სურათზე ტოლი კუთხეები და ტოლი მონაკვეთები ერთნაირადაა მონიშნული. ABE სამკუთხედის პერიმეტრი 20 სმ-ია, $MC=23$ სმ. შეადარეთ BC და CF მონაკვეთების სიგრძეები.

18. სურათზე ABC და ADC ტოლფერდა სამკუთხედებია. დაასახელეთ ტოლი სამკუთხედების წყვილები.

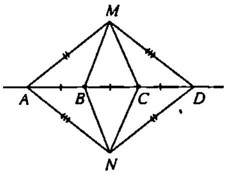


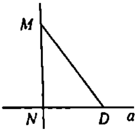


19. ცნობილია, რომ $AM=AN$, $MD=ND$. დაასახელეთ ტოლი სამკუთხედების წყვილები. პასუხები დაასაბუთეთ.

20. ცნობილია, რომ სურათზე წარმოდგენილ ფიგურაში $AB=BC=CD$, $AM=ND$, $MD=AN$.

დაასახელეთ ტოლი სამკუთხედების წყვილები. პასუხები დაასაბუთეთ.



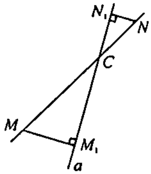


M წერტილზე შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი წრფე, რომელიც a წრფის მართობულია. ვთქვათ, გადაკვეთის წერტილი არის N. მაშინ MN მონაკვეთის სიგრძეს ეწოდება **M წერტილიდან a წრფემდე მანძილი.** MN მონაკვეთს ეწოდება M წერტილიდან a წრფისადმი გავლებული **მართობი.**

თუ D არის a წრფის წერტილი, განსხვავებული N-ისგან, მაშინ MD მონაკვეთი არ არის მართობი, იგი არის M წერტილიდან a წრფისადმი გავლებული **დახრილი.**

მართობის სიგრძე, ანუ M წერტილიდან a წრფემდე მანძილი, ნებისმიერ დახრილზე ნაკლებია, $MN<MD$.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:



1. 36 სმ სიგრძის MN მონაკვეთისა და a წრფის გადაკვეთის C წერტილი MN-ს ყოფს 2:1 შეფარდებით (M წერტილის მხრიდან). გადაკვეთისას შექმნილი კუთხე 30^0-ია. იპოვეთ მანძილები M და N წერტილებიდან a წრფემდე.

ამოხსნა. უნდა გავავლოთ $MM_1\perp a$, $NN_1\perp a$. ვეძებთ ამ მართობების სიგრძეებს.

ჯერ ვიპოვოთ MC და CN. თუ $NC=x$, მაშინ

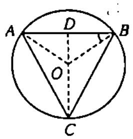
$$MC=2x,\ 2x+x=36,\ 3x=36,\ x=12,\ 2x=24.$$

$$NC=12 \text{ სმ},\ MC=24 \text{ სმ}.$$

ვიყენებთ მართკუთხა სამკუთხედში 30^0-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის თვისებას:

$$N_1N=\frac{1}{2}NC=6 \text{ (სმ)},\ M_1M=\frac{1}{2}MC=12 \text{ (სმ)}.$$

2. წრეწირის AB, BC და AC ქორდები ტოლია. წრეწირის რადიუსია 15 სმ. იპოვეთ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან AB ქორდამდე.



ამოხსნა. რადგან ABC სამკუთხედი ტოლგვერდაა, ამიტომ

$$\angle A=\angle B=\angle C=60^0.$$

$\Delta AOB=\Delta COB=\Delta AOC$ (III ნიშნით). ამიტომ $\angle ABO=\angle CBO=30^0$.

ამიტომ

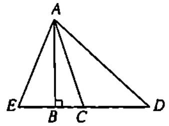
$$OD=\frac{1}{2}OB,\ OB=R=15$$

$$OD=\frac{1}{2}\cdot 15,$$

$$OD=7{,}5 \text{ (სმ)}.$$

მანძილი O წერტილიდან AB გვერდამდე 7,5 სმ-ია.

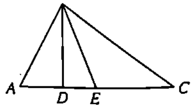
ა



✓**1.** სურათის მიხედვით A წერტილიდან ED წრფემდე მანძილი არის

ა) AE ბ) AC

გ) AD დ) AB.



✓**2.** BD არის ABC სამკუთხედის სიმაღლე, BE მედიანაა. B წერტილიდან AC-მდე მანძილი არის

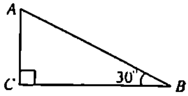
ა) BD ბ) BE

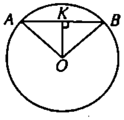
გ) BA დ) BC.

✓**3.** *ABC* მართკუთხა სამკუთხედია, $AB=10$, $\angle B=30^0$, *A* წერტილიდან *BC* წრფემდე მანძილი არის

ა) 5 ბ) 10

გ) 6 დ) 9.





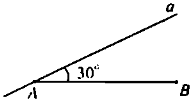
✓**4.** *AB* ქორდაა, *O* წრეწირის ცენტრია, *OK* მონაკვეთი *OAB* სამკუთხედის მედიანაა. მანძილი წრეწირის ცენტრიდან *AB* ქორდამდე არის

ა) *AO* ბ) *BO*

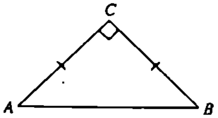
გ) *AB* დ) *OK*.

✓**5.** *AB* მონაკვეთის სიგრძე 10 სმ-ია. *a* წრფესა და *AB*-ს შორის კუთხე არის 30^0; იპოვეთ მანძილი *B* წერტილიდან *a* წრფემდე.

ა) 10 სმ ბ) 20 სმ გ) 5 სმ დ) 25 სმ.

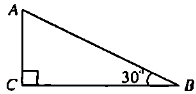


6. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 12 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზამდე.



7. $AC=CB$, $\angle C=90^0$. *C*-დან *AB*-მდე მანძილი 4,8 სმ-ია. იპოვეთ *AB*.

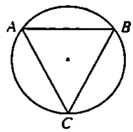
8. სურათზე მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხე 30^0-ია. *C* წვეროდან ჰიპოტენუზამდე მანძილი 6 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი *B* წერტილიდან *AC* კათეტამდე.



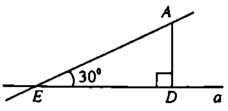
9. მანძილი წრეწირის *O* ცენტრიდან *AB* ქორდამდე 14 სმ-ია. ქორდის ბოლოებზე გავლებული რადიუსები მართ კუთხეს ქმნის. იპოვეთ *AB* ქორდა.

10. მანძილი წრეწირის *O* ცენტრიდან *PQ* ქორდამდე 20 სმ-ია. ქორდის ბოლოებზე გავლებული რადიუსები ერთმანეთთან 120^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

11. წრეწირის *AB*, *BC* და *AC* ქორდები ტოლია, რადიუსი 30 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის ცენტრიდან თითოეულ ქორდამდე მანძილი.



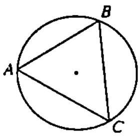
12. 12 სმ სიგრძის *AB* მონაკვეთისა და *a* წრფის გადაკვეთის *C* წერტილი *AB*-ს ყოფს 2:1 შეფარდებით. *AB* და *a* წრფე ერთმანეთს კვეთს 30^0-იანი კუთხით. იპოვეთ მანძილები *A* და *B* წერტილებიდან *a* წრფემდე.



13. *A* წერტილიდან *a* წრფისადმი გავლებულია *AE* დახრილი და *AD* მართობი. $\angle AED=30^0$, $AE=2$ დმ. იპოვეთ მანძილი *A* წერტილიდან *a* წრფემდე.

14. *AB* და *CD* პარალელური ქორდებია. მანძილი ცენტრიდან *AB* ქორდამდე 7 სმ-ია, *CD* ქორდამდე — 9,2 სმ. იპოვეთ მანძილი *AB* და *CD* პარალელურ წრფეებს შორის.

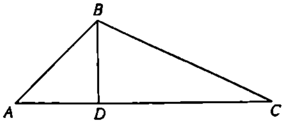
15. *AB*, *BC* და *AC* ტოლი ქორდებია. მანძილი ცენტრიდან *AB* ქორდამდე 5,4 სმ-ია. იპოვეთ წრის რადიუსი.

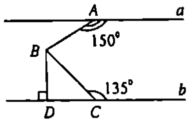


16. ABC სამკუთხედში $\angle A=45^0$, $\angle C=30^0$, $BC=10$ სმ. იპოვეთ:

ა) მანძილი B წერტილიდან AC გვერდამდე.

ბ) მანძილი A წვეროდან BD სიმაღლის შემცველ წრფემდე.



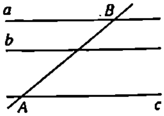


17. სურათზე მოცემული მონაცემების გარდა ცნობილია, რომ $AB=32$ სმ და $DC=15$ სმ.

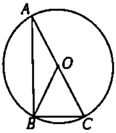
იპოვეთ:

ა) მანძილი a და b წრფეებს შორის,

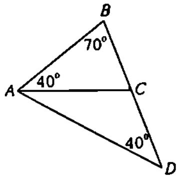
ბ) $\angle ABC$.



18. a, b და c პარალელური წრფეების AB წრფით გადაკვეთისას მიღებული ერთ-ერთი კუთხე 150^0-ია. მანძილი a და b წრფეებს შორის 8 სმ-ია, b და c წრფეებს შორის — 12 სმ. იპოვეთ AB-ს სიგრძე.

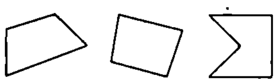


19. AC წრეწირის დიამეტრია, O – ცენტრი, $\angle OBC=60^0$. იპოვეთ მანძილი O წვეროდან AB ქორდამდე, თუ წრეწირის რადიუსია 7 სმ.

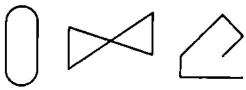


20. ABD სამკუთხედში $\angle BAC=40^0$, $\angle B=70^0$, $AB=6,4$ სმ, $\angle D=40^0$. იპოვეთ მანძილი C წერტილიდან AD წრფემდე.

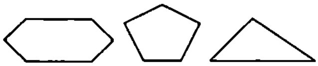
§1.11. მრავალკუთხედი. მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი



სურათზე მრავალკუთხედებია გამოსახული

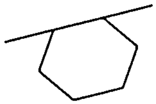


ეს ფიგურები მრავალკუთხედები არ არის



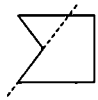
ეს მრავალკუთხედები ამოზნექილი მრავალკუთხედებია

ეს მრავალკუთხედები არ არის ამოზნექილი მრავალკუთხედებია

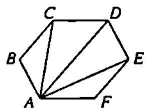


ამოზნექილი მრავალკუთხედი მისი ყოველი გვერდის შემცველი წრფის ცალ მხარესაა.

არაამოზნექილ მრავალკუთხედს ეს თვისება არა აქვს.



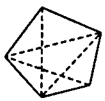
ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ამოზნექილ მრავალკუთხედებს.



სურათზე $ABCDEF$ ექვსკუთხედია გამოსახული.

AB, BC, CD, DE, EF, FA — გვერდებია, A, B, C, D, E, F — წვეროები, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$ — ექვსკუთხედის კუთხეებია.

AC, AD და AE არის A წვეროდან გავლებული დიაგონალები.



დიაგონალი არის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს მრავალკუთხედის იმ ორ წვეროს, რომლებიც ერთ გვერდს არ ეკუთვნის.

თუ მრავალკუთხედს n გვერდი აქვს, მას n-კუთხედი ვუწოდოთ.

n-კუთხედის ყოველი წვეროდან $n-3$ დიაგონალი შეიძლება გავავლოთ, სულ n-კუთხედში დიაგონალების ოდენობაა $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

n-კუთხედის კუთხეების ჯამი $180^0(n-2)$-ის ტოლია.

თუ მრავალკუთხედის ყველა გვერდი ტოლია და ტოლია ყველა კუთხეც, მაშინ მას **წესიერი მრავალკუთხედი** ეწოდება.

მრავალკუთხედის პერიმეტრი მისი გვერდების ჯამია.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ექვსკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:2:2:2:1:1. იპოვეთ კუთხეები.

ამოხსნა. ვთქვათ, ექვსკუთხედის უმცირესი კუთხეა x, მაშინ სხვა კუთხეები იქნება: x, $2x$, $2x$, $2x$, $2x$, მათი ჯამი $180^0(6-2)$-ია, ანუ 720^0.

$$x+x+2x+2x+2x+2x=720^0,\ 10x=720^0,\ x=72^0.$$

ექვსკუთხედის კუთხეებია: 144^0, 144^0, 144^0, 144^0, 72^0, 72^0.

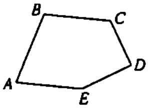
2. n-კუთხედის დიაგონალების ოდენობა 35-ია. იპოვეთ n.

ამოხსნა. $\frac{n(n-3)}{2}=35$, $n(n-3)=70$.

n ნატურალური რიცხვია. კვადრატული განტოლების ამოხსნით, ან სინჯვის ხერხით, შეიძლება მივაგნოთ n-ს, $n=10$.

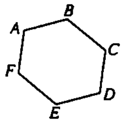
3. სურათის მიხედვით დაასახელეთ მრავალკუთხედის:

ა) ხუთი წვერო და 5 გვერდი;
ბ) A კუთხის მეზობელი კუთხეები;
გ) ED გვერდთან მდებარე კუთხეები;
დ) D-ს მეზობელი წვეროები.



პასუხები: ა) A, B, C, D, E; AB, BC, CD, DE, AE;
ბ) $\angle E$ და $\angle B$, გ) $\angle E$ და $\angle D$, დ) E და C.

4. ა) დაასახელეთ მოცემული ექვსკუთხედი ორი სხვადასხვა ხერხით.
ბ) დაასახელეთ ყველა დიაგონალი, რომლის ერთი წვეროა C.
პასუხები:
ა) მაგალითად, $ABCDEF$, $BCDEFA$, ბ) CA, CF, CE.



✓1. n-კუთხედის კუთხეების ჯამია
ა) $180^0(n-2)$ ბ) $180^0(n-3)$ გ) $360^0(n-2)$ დ) 180^0n.

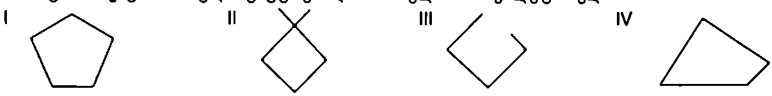
✓2. ექვსკუთხედის კუთხეების ჯამია
ა) 360^0 ბ) 720^0 გ) 1080^0 დ) 144^0.

✓3. წესიერი ექვსკუთხედის თითოეული კუთხეა
ა) 60^0 ბ) 150^0 გ) 120^0 დ) 30^0.

✓4. n-კუთხედში დიაგონალების რიცხვია
ა) $\frac{n(n-2)}{2}$ ბ) $\frac{n(n-1)}{2}$ გ) $\frac{n(n-3)}{2}$ დ) $\frac{n^2}{2}$.

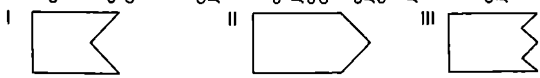
✓5. ექვსკუთხედში დიაგონალების რიცხვია
ა) 9 ბ) 18 გ) 6 დ) 12.

✓6. სურათზე გამოსახული ფიგურებიდან რომელია მრავალკუთხედი?



ა) I და II ბ) III და IV გ) I და IV დ) III.

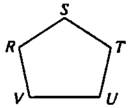
✓7. სურათზე გამოსახული მრავალკუთხედებიდან რომელია ამოზნექილი მრავალკუთხედი?



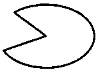
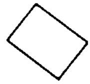
ა) I და II ბ) II და III გ) მხოლოდ II დ) მხოლოდ I.

8. მრავალკუთხედი, რომელსაც ყველაზე მცირე ოდენობის გვერდები აქვს, არის
ა) ოთხკუთხედი ბ) სამკუთხედი ბ) მონაკვეთი დ) ხუთკუთხედი.

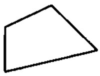
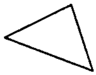
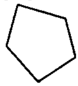
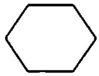
9. ა) დაასახელეთ სურათზე გამოსახული მრავალკუთხედის ყველა წვერო, ყველა გვერდი;
ბ) ჩაწერეთ ეს მრავალკუთხედი ორი ხერხით (ჩაწერა დაიწყეთ R წვეროდან).



10. არის თუ არა მოცემული ფიგურა მრავალკუთხედი, ამოზნექილი მრავალკუთხედი ?

ა)  ბ)  გ)  დ) 

11. დაასახელეთ ფიგურა კუთხეების ოდენობის მიხედვით:

ა)  ბ)  გ)  დ) 

12. ხუთკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება, როგორ 2:3:7:1:5, პერიმეტრი 27 დმ-ია. იპოვეთ გვერდები.

13. ხუთკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება, როგორც 2:4:3:7:5. უმცირესი გვერდი 18 სმ-ია. იპოვეთ პერიმეტრი.

14. წესიერი ექვსკუთხედის პერიმეტრია 90 სმ. იპოვეთ ექვსკუთხედის ერთ გვერდზე აგებული წესიერი სამკუთხედის პერიმეტრი.

15. რისი ტოლია წესიერი n-კუთხედის თითოეული კუთხის გრადუსული ზომა?

16. მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი 1440^0-ია. იპოვეთ ამ მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვი.

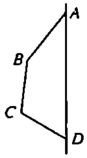
17. წესიერი მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი 1260^0-ია. რისი ტოლია თითოეული კუთხე?

18. ხუთკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება, როგორც 5:4:3:4:2. იპოვეთ ეს კუთხეები.

19. სამკუთხედის კუთხეების შეფარდებაა 1:2:3. უმცირესი გვერდი 6 დმ-ია. იპოვეთ უდიდესი გვერდი.

20. დახაზეთ ორი სამკუთხედი ისე, რომ მათი საერთო ნაწილი იყოს:
ა) ერთი წერტილი, ბ) მონაკვეთი, გ) სამკუთხედი,
დ) ხუთკუთხედი, ე) ექვსკუთხედი, ვ) ოთხკუთხედი.

21. ხუთკუთხედის ოთხი გვერდიდან თითოეულის სიგრძე მეხუთე გვერდის სიგრძეზე 2,4 სმ-ით ნაკლებია. იპოვეთ ხუთკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე, თუ ხუთკუთხედის პერიმეტრი 87,4 სმ-ია.



22. $ABCD$ ოთხკუთხედის გვერდებია $AB=8$ სმ, $BC=7$ სმ, $CD=5$ სმ, $AD=12$ სმ. ააგეთ AD წრფის მიმართ B და C წერტილების სიმეტრიული B_1 და C_1 წერტილები. იპოვეთ AB_1C_1DCB ექვსკუთხედის პერიმეტრი.

23. ასკუთხედის შიგნით აღებული P წერტილი შეაერთეს ასკუთხედის ყოველ წვეროსთან;
ა) რამდენი სამკუთხედი მიიღება?
ბ) რას უდრის ამ სამკუთხედების კუთხეების ჯამი?

გ) რამდენი გრადუსითაა მეტი ამ სამკუთხედების კუთხეების ჯამი ასკუთხედის კუთხეების ჯამზე?

დ) რას უდრის ასკუთხედის კუთხეების ჯამი?

24. n-კუთხედის შიგნით აღებული P წერტილი შეაერთეს n-კუთხედის ყოველ წვეროსთან;

ა) რამდენი სამკუთხედი მიიღება?

ბ) რას უდრის ამ სამკუთხედების კუთხეების ჯამი?

გ) რამდენი გრადუსითაა მეტი ამ სამკუთხედების კუთხეების ჯამი n-კუთხედის კუთხეების ჯამზე?

დ) რას უდრის n-კუთხედის კუთხეების ჯამი?

25. n-კუთხედის ერთ-ერთი წვეროდან გაავლეს ყველა შესაძლო დიაგონალი;

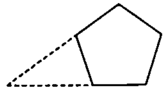
ა) რამდენი სამკუთხედი მიიღება?

ბ) რას უდროს ამ სამკუთხედების კუთხების ჯამი?

გ) შეადარეთ ამ სამკუთხედების კუთხეების ჯამი n-კუთხედის კუთხეების ჯამს.

დ) რას უდრის n-კუთხედის კუთხეების ჯამი?

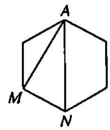
26. წესიერი ხუთკუთხედის ორი გვერდი გააგრძელეს ურთიერთგადაკვეთამდე. იპოვეთ მიღებული კუთხე.



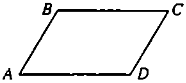
27. იპოვეთ n-კუთხედის გარე კუთხეების ჯამი (ყოველ წვეროსთან თითო გარე კუთხე აიღეთ).

28. წესიერი n-კუთხედის კუთხეებისა და A წვეროსთან მდებარე ერთი გარე კუთხის გრადუსულ ზომათა ჯამი 780^0-ია. რამდენი გვერდი აქვს ამ მრავალკუთხედს.

29. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხედის AM და AN დიაგონალებს შორის კუთხე — $\angle MAN$.



§1.12. პარალელოგრამი. რომბი. მართკუთხედი. კვადრატი. მათი დიაგონალების თვისებები



პარალელოგრამი ეწოდება ოთხკუთხედს, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია.

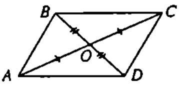
$ABCD$ პარალელოგრამია; $AB \| CD$, $BC \| AD$.

პარალელოგრამის გვერდებისა და კუთხეების თვისებები:

- პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია.
- პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია.
- ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180^0-ია.

თუ $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ $AB=CD$, $BC=AD$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, $\angle A+\angle B=180^0$, $\angle B+\angle C=180^0$.

- პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.



თუ $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ $AO=OC$; $BO=OD$.

ოთხკუთხედი პარალელოგრამი რომ იყოს, საკმარისია:

ა) მოპირდაპირე გვერდები ტოლი იყოს,

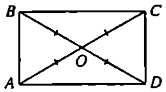
ბ) მოპირდაპირე გვერდების ერთი წყვილი იყოს ტოლი და პარალელური მონაკვეთების წყვილი,

გ) დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფოდეს.

ა), ბ) და გ) პირობებს **პარალელოგრამობის ნიშნებსაც** უწოდებენ.

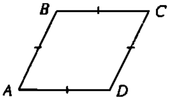
პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე მართია, **მართკუთხედი** ეწოდება.

მართკუთხედის თვისება, რომელიც მას პარალელოგრამიდან გამოარჩევს:



- მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია: $AC=BD$, ამიტომ

$AO=OB=OC=OD$.



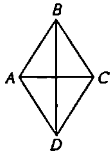
რომბი ეწოდება პარალელოგრამს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია.

რომბის თვისებები, რომლებიც მას ყველა პარალელოგრამისაგან გამოარჩევს:

- რომბის დიაგონალები:

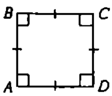
1) მართობულია,

2) რომბის კუთხეთა ბისექტრისებია.



თუ $ABCD$ რომბია, მაშინ

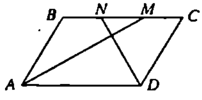
$AC \perp BD$, $\angle ABD=\angle DBC$, $\angle ADB=\angle BDC$, $\angle BAC=\angle CAD$, $\angle BCA=\angle DCA$.



კვადრატი არის რომბი, რომლის ყველა კუთხე მართია.

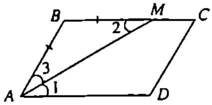
ყოველი კვადრატი არის რომბი, და ამიტომ, პარალელოგრამიც. ყოველი კვადრატი არის მართკუთხედი. კვადრატს აქვს პარალელოგრამის, მართკუთხედის, რომბის თვისებები.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:



1. $ABCD$ პარალელოგრამის A და D კუთხეების ბისექტრისები BC გვერდს M და N წერტილებში კვეთს. $AB=6$ სმ, $BC=8$ სმ. იპოვეთ MN.

ამოხსნა. გავითვალისწინოთ შემდეგი ფაქტი:

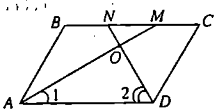


თუ AM არის A კუთხის ბისექტრისა, მაშინ ABM ტოლფერდა სამკუთხედია (მართლაც, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 1=\angle 3$ ე. ი. $\angle 2=\angle 3$, მაშინ $AB=BM$). ტოლფერდაა DCN სამკუთხედიც.

მაშასადამე, $BM=6$, $CN=6$,

$NM=6+6-8=4$.

2. რომბის ერთი გვერდის მიერ დიაგონალებთან შედგენილი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:5. იპოვეთ რომბის კუთხეები.



ამოხსნა. $\angle AOD=90^0$, $\angle 1:\angle 2=4:5$,

$\angle 1=4x$, $\angle 2=5x$,

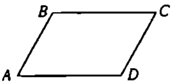
$\angle 1+\angle 2=90^0$,

$4x+5x=90^0$,

$9x=90^0$, $x=10^0$, $4x=40^0$, $5x=50^0$.

$\angle A=80^0$, $\angle D=100^0$.

3. პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:7. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები.



$\angle A:\angle B=2:7.$

უნდა ვიპოვოთ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

ამოხსნა. ვთქვათ, $\angle A=2x$, მაშინ $\angle B=7x$.

პარალელოგრამის თვისებაა:

$\angle A+\angle B=180^0$,

$\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.

$2x+7x=180^0$, $9x=180^0$, $x=20^0$,

$\angle A=40^0$, $\angle B=140^0$, $\angle C=40^0$, $\angle D=140^0$.

✓**1.** პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები

ა) ტოლია ბ) ტოლი არ არის

გ) პარალელური არ არის დ) ზოგჯერ ტოლი არ არის.

✓**2.** პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები

ა) ტოლია ბ) ტოლი არ არის

გ) მოსაზღვრე კუთხეებია დ) აუცილებლად მართია.

✓**3.** ყოველი რომბი:

ა) კვადრატია ბ) პარალელოგრამია

გ) მართკუთხედია დ) არატოლი გვერდების მქონე პარალელოგრამია.

✓**4.** ყოველი მართკუთხედი

ა) პარალელოგრამია ბ) კვადრატია გ) რომბია

დ) ისეთი რომბია, რომელიც პარალელოგრამი არ არის.

✓**5.** თუ $ABCD$ პარალელოგრამში AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება, მაშინ

ა) $AO>OC$ ბ) $AO=OC$ გ) $AO<OC$ დ) $AO\neq OC$.

✓**6.** თუ $ABCD$ მართკუთხედია, მაშინ

ა) $AC>BD$ ბ) $AC<BD$ გ) $AC\neq BD$ დ) $AC=BD$.

✓**7.** კვადრატის დიაგონალის მიერ გვერდთან შედგენილი კუთხის ზომაა

ა) 30^0 ბ) 60^0 გ) 90^0 დ) 45^0.

✓**8.** პარალელოგრამის ორი გვერდი 2 დმ და 7 დმ სიგრძისაა. იპოვეთ პერიმეტრი

ა) 9 დმ ბ) 12 დმ გ) 18 დმ დ) 24 დმ.

✓**9.** თუ რაიმე $ABCD$ ოთხკუთხედში $AB=CD$, $BC=AD$, მაშინ $ABCD$ ოთხკუთხედი

ა) პარალელოგრამია ბ) კვადრატია

გ) მართკუთხედია დ) რომბია.

✓**10.** რომბი

ა) შეიძლება პარალელოგრამი არ იყოს ბ) არ არის პარალელოგრამი

გ) არ შეიძლება კვადრატი იყოს დ) არის პარალელოგრამი.

✓**11.** კვადრატი

ა) შეიძლება რომბი არ იყოს ბ) არ არის პარალელოგრამი

გ) შეიძლება მართკუთხედი არ იყოს დ) არის მართკუთხედი.

12. პარალელოგრამის პერიმეტრი 160 სმ-ია; ერთი გვერდი მეორეზე 10 სმ-ით მეტია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

13. პარალელოგრამის პერიმეტრი 44,8 სმ-ია. ერთი გვერდის სიგრძე მეორეზე 3-ჯერ მეტია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

14. პარალელოგრამის პერიმეტრი 48,4 სმ-ია. ორი გვერდი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:6. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

15. $ABCD$ პარალელოგრამის პერიმეტრი 84,8 სმ-ია. ABC სამკუთხედის პერიმეტრი არის 62 სმ. იპოვეთ AC დიაგონალი.

16. $ABCD$ პარალელოგრამის AC დიაგონალი 30 სმ-ია. ABC სამკუთხედის პერიმეტრია 84 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.

17. პარალელოგრამის ერთი გვერდი 72 სმ-ია, მეორე გვერდის სიგრძე მისი 60%-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.

18. $MNPQ$ პარალელოგრამის MP და NQ დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. MNO სამკუთხედის პერიმეტრი 29 სმ-ია. NP გვერდი MN-ზე 2,4 სმ-ით მეტია. იპოვეთ NOP სამკუთხედის პერიმეტრი.

19. $MNPQ$ პარალელოგრამის დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. MNO სამკუთხედის პერიმეტრი 42 სმ-ია. MP და NQ დიაგონალები, შესაბამისად, 30 სმ და 22 სმ-ია. იპოვეთ MN.

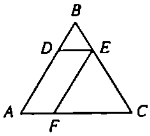
20. AM არის $ABCD$ პარალელოგრამის A კუთხის ბისექტრისა. M ეკუთვნის BC-ს, $AB=8$ სმ, $BC=20$ სმ. იპოვეთ BM და MC.

21. $ABCD$ პარალელოგრამის პერიმეტრი 24,4 სმ-ია. AM არის A კუთხის ბისექტრისა, M ეკუთვნის BC-ს. MB-ს სიგრძე MC-ზე 4 სმ-ით მეტია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

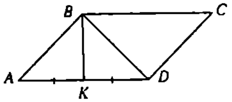
22. პარალელოგრამის გვერდები 16 სმ და 6 სმ-ია; დიდ გვერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები მოპირდაპირე გვერდს სამ ნაწილად ყოფს. იპოვეთ ეს ნაწილები.

23. პარალელოგრამის ერთ-ერთი დიაგონალი მისი ერთ-ერთი გვერდის ტოლია. პარალელოგრამის მახვილი კუთხე 40^0-ია. იპოვეთ ამ დიაგონალის მიერ გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.

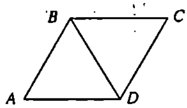
24. პარალელოგრამის მცირე გვერდი 4,8 სმ-ია. ამ პარალელოგრამის ერთ-ერთი გვერდი პერიმეტრის 20%-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.



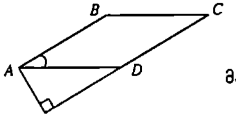
25. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის ერთი გვერდია a. $DE \parallel AC$, $EF \parallel AB$. იპოვეთ $ADEF$-ის პერიმეტრი.



26. მოცემულია $BK \perp AD$, $AK=KD$, $BD=4{,}8$ სმ, იპოვეთ DC.

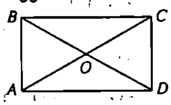


27. რომბის მახვილი კუთხე 60^0-ია. ABD სამკუთხედის პერიმეტრი 19,2 სმ-ია. იპოვეთ რომბის პერიმეტრი.



28. რომბის მახვილი კუთხე 30^0-ია. A წვეროდან CD წრფემდე მანძილი 4,8 სმ-ია; იპოვეთ რომბის პერიმეტრი.

29. რომბის ერთ-ერთი დიაგონალი გვერდის ტოლია. იპოვეთ რომბის კუთხეები.



30. $ABCD$ მართკუთხედის BD დიაგონალი AD გვერდთან 30^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ AOB კუთხე.

31. $ABCD$ მართკუთხედის AC და BD დიაგონალებს შორის კუთხე 50^0-ია. იპოვეთ კუთხე დიაგონალსა და მცირე გვერდს შორის.

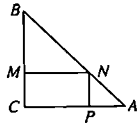
32. $ABCD$ მართკუთხედის A წვეროდან BD დიაგონალზე დაშვებული მართობი ამ დიაგონალს 1:3 შეფარდებით ყოფს. იპოვეთ:

ა) AC და BD წრფეებს შორის კუთხე.

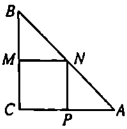
ბ) მართკუთხედის მცირე გვერდი, თუ მართკუთხედის დიაგონალი 48 სმ-ია.

33. $ABCD$ მართკუთხედში $AB=14$ სმ, $BC=40$ სმ. A და D კუთხეების ბისექტრისები BC გვერდს M და N წერტილებში კვეთს. იპოვეთ BM, NM და NC.

34. $ABCD$ მართკუთხედში $AB=14$ სმ, $BC=24$ სმ, AM და DP ბისექტრისებია, M და P ეკუთვნის BC გვერდს. იპოვეთ BP, PM და MC.

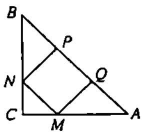


35. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული კათეტი 20 სმ-ია. სამკუთხედში ჩახაზულია მართკუთხედი $MNPC$. იპოვეთ ამ მართკუთხედის პერიმეტრი.

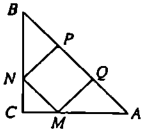


36. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია $MNPC$ კვადრატი. კვადრატის დიაგონალი 16,2 სმ-ია. იპოვეთ AB ჰიპოტენუზა.

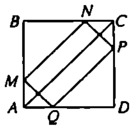
37. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია $MNPC$ კვადრატი (იხილეთ სურათი). კვადრატის გვერდი 6,2 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.



38. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში $MNPQ$ კვადრატია ჩახაზული (იხილეთ სურათი). კვადრატის პერიმეტრი 6,4 სმ-ია. იპოვეთ AB ჰიპოტენუზა.



39. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია $MNPQ$ კვადრატი. სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 6,3 სმ-ია. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი.



40. $ABCD$ კვადრატის დიაგონალი 40 სმ-ია. კვადრატში ჩახაზულია $MNPQ$ მართკუთხედი, $MN \| AC$. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.

41. $ABCD$ კვადრატის დიაგონალი 48 სმ-ია. კვადრატში ჩახაზულია $MNPQ$ მართკუთხედი, $MN \| AC$, $MN:NP=3:2$. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

42. AB მონაკვეთის შუამართობის C და D წერტილები ტოლადაა დაშორებული AB მონაკვეთიდან, $AC=12$ სმ. დაადგინეთ $ACBD$ ოთხკუთხედის სახე და იპოვეთ მისი პერიმეტრი.

43. AC წრფე $ABCD$ პარალელოგრამში A კუთხის ბისექტრისაა. პარალელოგრამის AB გვერდი 4 სმ-ია. იპოვეთ პერიმეტრი.

44. ABC სამკუთხედის წვეროებზე გავლებულია AB, BC და AC გვერდების პარალელური წრფეები, რომლებიც M, N და P წერტილებში იკვეთება. ABC სამკუთხედის პერიმეტრი 42 სმ-ია. იპოვეთ MNP სამკუთხედის პერიმეტრი.

45. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში AC ფუძე 2,8 სმ-ია. AM მედიანაა. AM სხივზე გადადეს $MD=AM$. მიღებული $ABDC$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი 12 სმ აღმოჩნდა. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფერდი.

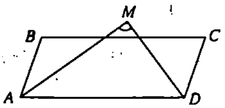
46. რომბის პერიმეტრი 9,6 სმ-ია, რომბის სიმაღლე — 1,2 სმ. იპოვეთ რომბის კუთხეები.

✓**47.** თუ $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედია და P არის მისი პერიმეტრი, მაშინ

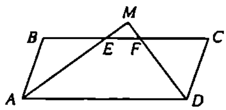
ა) $AC+BD>P$ ბ) $AC+BD=P$ გ) $AC+BD<P$.

✓**48.** თუ $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედია და P არის მისი პერიმეტრი, მაშინ

ა) $AC+BD=\frac{P}{2}$ ბ) $AC+BD<\frac{P}{2}$ გ) $AC+BD>\frac{P}{2}$.



49. AM და DM არის $ABCD$ პარალელოგრამის A და D კუთხეების ბისექტრისები. იპოვეთ $\angle M$.



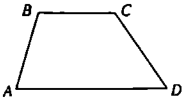
50. AM და DM არის $ABCD$ პარალელოგრამის A და D კუთხეების ბისექტრისები. $AB=a$, $AD=b$. იპოვეთ EF.

51. ABC სამკუთხედის BC გვერდის D წერტილზე გავლებულია DE და DF წრფეები ისე, რომ $DE \| AC$, $DF \| AB$, $E \in AB$, $F \in AC$. EBD სამკუთხედის პერიმეტრი 39 სმ-ია. FDC სამკუთხედის პერიმეტრი 13 სმ-ია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

52. $ABCD$ რომბის A ბლაგვი კუთხის წვეროდან BC და CD გვერდებზე დაშვებულ მართობებს შორის კუთხე 60^0-ია. რომბის პერიმეტრი 88 სმ-ია. იპოვეთ რომბის მცირე დიაგონალი.

53. ABC სამკუთხედში $\angle A=70^0$, $\angle C=50^0$. BC გვერდზე შერჩეულია D წერტილი ისე, რომ ამ წერტილზე AC და AB გვერდების პარალელური წრფეების გავლების შემდეგ მიღებული DE და DF მონაკვეთები ტოლია ($DE \| AC$, $DF \| AB$, $E \in AB$, $F \in AC$). იპოვეთ ABD სამკუთხედის კუთხეები.

§1.13. ტრაპეცია. ტრაპეციის კერძო სახეები. ტრაპეციის თვისებები

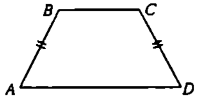


ტრაპეცია არის ოთხკუთხედი, რომლის ორი მოპირდაპირე გვერდი პარალელურია, დანარჩენი ორი გვერდი კი არ არის პარალელური.

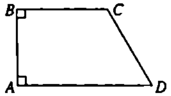
ამრიგად, თუ $BC\|AD$, AB არ არის პარალელური CD-სი, მაშინ $ABCD$ ტრაპეციაა.

ტრაპეციის პარალელურ გვერდებს **ფუძეები** ეწოდება, არაპარალელურს — **ფერდები**.

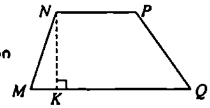
ტრაპეციის სახეები:



თუ ტრაპეციის ფერდები ტოლია, ტრაპეციას ეწოდება **ტოლფერდა**.

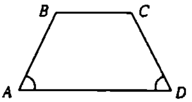


ამ ტრაპეციის ორი კუთხე მართია, ეს ტრაპეცია **მართკუთხა ტრაპეციაა** და AB ფერდი ამ ტრაპეციის სიმაღლეა.

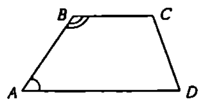


$MNPQ$ ტრაპეციის N წვეროდან MQ ფუძეზე დაშვებული NK მართობი ტრაპეციის სიმაღლეა.

ტრაპეციის თვისებები:

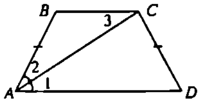


ტოლფერდა ტრაპეციის თითოეულ ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.



ნებისმიერი ტრაპეციის თითოეულ ფერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180^0-ია. მაგალითად, $\angle A+\angle B=180^0$.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:



1. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაა. AC დიაგონალი A კუთხის ბისექტრისაა. ტრაპეციის პერიმეტრი 22 დმ-ია. დიდი ფუძისა და ფერდის შეფარდებაა 5:2. იპოვეთ ტრაპეციის გვერდები.

ამოხსნა. რადგან $\angle 1=\angle 2$, $\angle 1=\angle 3$, ამიტომ $\angle 2=\angle 3$.

მაშასადამე, $AB=BC$.

მოცემულობით,

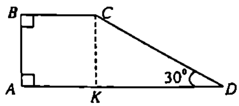
$$AB:AD=2:5.$$

თუ $AB=2x$, მაშინ $BC=2x$, $CD=2x$, $AD=5x$;

პირობით, $11x=22$,

$x=2$.

$AB=4$ დმ, $BC=4$ დმ, $CD=4$ დმ, $AD=10$ დმ.



2. მართკუთხა ტრაპეციის მახვილი კუთხე 30^0-ია. ფერდების ჯამი 12 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

ამოხსნა. ვთქვათ, $CK=x$, მაშინ $CD=2x$.

პირობით, $x+2x=12$,

$3x=12$

$x=4$,

$AB=4$ სმ.

✓**1.** ტოლფერდა ტრაპეციის ერთ-ერთი კუთხე 140^0-ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის მახვილი კუთხე.

ა) 50^0 ბ) 45^0 გ) 40^0 დ) 60^0.

✓**2.** თუ $ABCD$ ოთხკუთხედში $AD \| BC$, AB არ არის პარალელური CD წრფის, მაშინ $ABCD$

ა) პარალელოგრამია ბ) მართკუთხედია გ) რომბია დ) ტრაპეციაა.

✓**3.** თუ $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაა, $AB=CD$, $BC \| AD$, მაშინ

ა) $\angle A=\angle B$ ბ) $\angle A=\angle D$ გ) $\angle C=\angle D$ დ) $\angle A+\angle D=180^0$.

✓**4.** ტოლფერდა ტრაპეციის ერთ-ერთი კუთხე 45^0-ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ბლაგვი კუთხე.

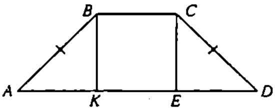
ა) 140^0 ბ) 135^0 გ) 150^0 დ) 120^0.

✓**5.** ტოლფერდა ტრაპეციაში ორი კუთხის ჯამი 100^0-ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის მახვილი კუთხე.

ა) 50^0 ბ) 30^0 გ) 40^0 დ) 60^0.

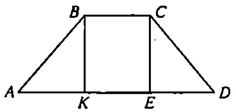
6. ტრაპეციის სამი მომდევნო კუთხე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:2:1. იპოვეთ ტრაპეციის კუთხეები.

7. შეიძლება თუ რა, რომ ტოლფერდა ტრაპეცია იყოს მართკუთხა?



8. ტოლფერდა ტრაპეციაში BK და CE სიმაღლეებია. $AK+ED=40$ სმ. $\angle D=45^0$. იპოვეთ CE.

9. ტოლფერდა ტრაპეციაში BK და CE სიმაღლეებია; $AD+BC=48$ სმ. იპოვეთ KD.



10. ტოლფერდა ტრაპეციაში BK და CE სიმაღლეებია. $AD=a$, $BC=b$, $a>b$. იპოვეთ AK და KD.

11. მართკუთხა ტრაპეციაში ორი კუთხის ჯამი 120^0-ია. იპოვეთ:

ა) ტრაპეციის კუთხეები; ბ) დიდი ფერდი, თუ მცირე ფერდი 6,5 სმ-ია.

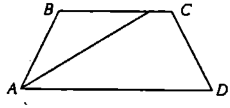
12. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაში AC-ს დიაგონალი A კუთხის ბისექტრისაა. ტრაპეციის პერიმეტრი 13,2 დმ-ია. მცირე ფუძე ისე შეეფარდება დიდ ფუძეს, როგორც 2:5. იპოვეთ ტრაპეციის გვერდები.

13. შეიძლება თუ არა, რომ ტრაპეციის კუთხეები (თანამიმდევრობით აღებული) ისე შეეფარდებოდეს, როგორც

ა) 1:2:3:5, ბ) 1:2:3:4?

14. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის AB ფერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისებს შორის კუთხე.

15. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციის A კუთხის ბისექტრისამ BC ფუძე გაყო შეფარდებით 4:1 (B წვეროს მხრიდან). ტრაპეციის დიდი ფუძე მცირეზე 1,4-ჯერ მეტია. იპოვეთ ტრაპეციის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრია 40 სმ.



16. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციის AC დიაგონალი CD ფერდის მართობულია. ამ ტრაპეციის ერთ-ერთ ფუძესთან მდებარე ორი კუთხის ჯამი 200^0-ია. იპოვეთ $\angle CAD$.

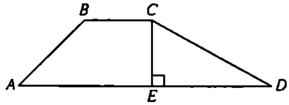
17. ტოლფერდა ტრაპეციის AC დიაგონალი CD ფერდის მართობულია. ტრაპეციის სიმაღლე AC დიაგონალის ნახევარია. იპოვეთ ტრაპეციის კუთხეები.

18. ტოლფერდა ტრაპეციაში ორი კუთხის ჯამი 300^0-ია, ფერდი — 7 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

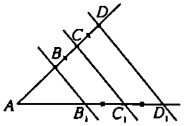
19. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები მართობულია, დიდი და მცირე ფუძეების სიგრძეები, შესაბამისად, 20 სმ და 8 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან:

ა) მცირე ფუძემდე, ბ) დიდ ფუძემდე.

20. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალები მართობულია. დიდი და მცირე ფუძეები, შესაბამისად, არის a და b. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.



21. $ABCD$ ტრაპეციაში $\angle A=45^0$, $\angle C=150^0$, $CD=30$ სმ, $BC=6$ სმ. იპოვეთ AE.



თუ კუთხის გვერდების გადამკვეთი პარალელური წრფეები კუთხის ერთ-ერთ გვერდზე მოკვეთს ტოლ მონაკვეთებს, მაშინ ეს წრფეები მეორე გვერდზეც მოკვეთს ტოლ მონაკვეთებს.

თუ $BB_1 \| CC_1 \| DD_1$ და $BC=CD$, მაშინ $B_1C_1=C_1D_1$.

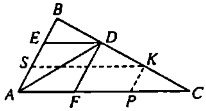
ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

1. AD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა.

$BD:CD=1:2$.

$AB=4,2$ დმ, $DE \| AC$, $DF \| AB$.

იპოვეთ $AEDF$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.



ამოხსნა. ცხადია, $AEDF$ პარალელოგრამია (მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია). რადგან AD ბისექტრისაა, ამიტომ $AEDF$ რომბია.

DC-ს შუა K წერტილიდან გავავლოთ $KS \| AC$.

თალესის თეორემის თანახმად, რადგან $BD=DK=KC$ და $ED \| SK \| AC$,

ამიტომ $BE=ES=AS$.

მაშასადამე, $AE=\frac{2}{3}\cdot 4,2=2,8$.

$P_{AEDF}=4\cdot 2,8=11,2$ (დმ).

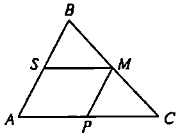
შენიშვნა. შემდეგ პარაგრაფში ამ სახის ამოცანებს სამკუთხედების მსგავსების გამოყენებითაც ამოვხსნით.

2. $AB=13$ სმ, $AC=15$ სმ,

$BM=MC$,

$MP \| AB$, $MS \| AC$.

ვიპოვოთ $ASMP$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.



ამოხსნა. ცხადია, $ASMP$ პარალელოგრამია.

თალესის თეორემის თანახმად, $AP=PC$, $AS=SB$.

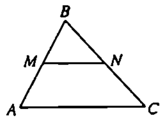
ე. ი. $AS=\frac{1}{2}AB=6,5$ სმ, $AP=\frac{1}{2}AC=7,5$ სმ,

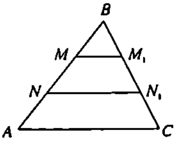
$P_{ASMP}=2(6,5+7,5)=2\cdot 14=28$ (სმ).

✓**1.** თუ $AM=MB$, $MN \| AC$, მაშინ

ა) $BN>NC$ ბ) $BN<NC$

გ) $BN \neq NC$ დ) $BN=NC$.





2. თუ $AN=NM=MB$, $MM_1 \| AC$, $NN_1 \| AC$, მაშინ

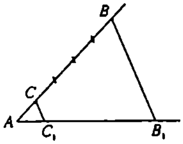
ა) $M_1N_1=\frac{1}{2}BC$ ბ) $BM_1=\frac{1}{2}BC$

გ) $CN_1=\frac{1}{2}BC$ დ) $M_1N_1=\frac{1}{3}BC$.

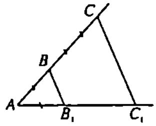
✓**3.** თუ $CC_1 \| BB_1$, $AC=\frac{1}{5}AB$, მაშინ $AC_1=$

ა) $\frac{1}{4}AB_1$ ბ) $\frac{1}{3}AB_1$

გ) $\frac{1}{5}AB_1$ დ) $\frac{1}{3}AB_1$.



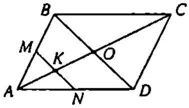
✓**4.** თუ $BB_1 \| CC_1$, $AB:BC=2:3$, მაშინ



ა) $AB_1:B_1C_1=2:5$ ბ) $AB_1:AC_1=2:5$

გ) $AB_1:B_1C_1=3:5$ დ) $AB_1:B_1C_1=5:7$.

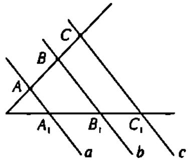
✓**5.** $ABCD$ პარალელოგრამია. M წერტილი AB-ს შუა წერტილია, $MN \| BD$, MN კვეთს AC-ს K წერტილში, მაშინ

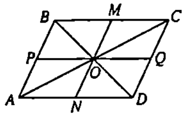


ა) $AK=\frac{1}{3}AC$ ბ) $AK=\frac{1}{4}AC$

გ) $AK=\frac{1}{2}AC$ დ) $AK=\frac{1}{5}AC$.

6. $a \| b \| c$, $AB:BC=5:4$,
$A_1C_1=7{,}2$ დმ. იპოვეთ A_1B_1 და B_1C_1.

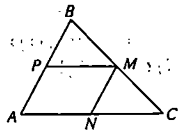


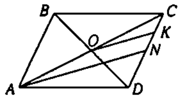


7. $ABCD$ პარალელოგრამის გვერდები 14 სმ და 24,8 სმ-ია. დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე გავლებულია გვერდების პარალელური წრფეები — MN და PQ. იპოვეთ $APON$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

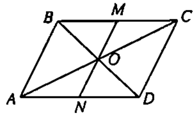
8. ABC სამკუთხედში $AB=42$ სმ, $AC=50$ სმ. BC გვერდის შუა M წერტილზე გავლებულია AB-ს და AC-ს პარალელური წრფეები: MN და PM. დაადგინეთ $APMN$ ოთხკუთხედის სახე და იპოვეთ მისი გვერდები.

9. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედში BC გვერდის შუა M წერტილიდან გავლებული, შესაბამისად, AB-სა და AC-ს პარალელური MN და MP წრფეებით სამკუთხედიდან მოკვეთილია $APMN$ ოთხკუთხედი, რომლის პერიმეტრია 2,8 დმ. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

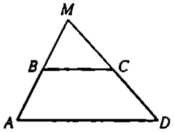




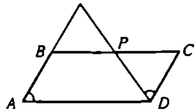
10. $ABCD$ პარალელოგრამია, $CN=ND$, დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე გავლებულია AN-ის პარალელური OK წრფე. იპოვეთ $CK:KD$.



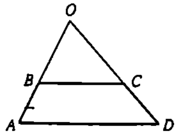
11. $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე გავლებულია MN წრფე, $MN=4{,}2$ სმ. იპოვეთ MO და ON.



12. ტრაპეციის ფერდების შემცველი წრფეები M წერტილში იკვეთება, $AB=BM$, MD მეტია CD-ზე 7 დმ-ით. იპოვეთ CD.



13. $ABCD$ პარალელოგრამში $A=60^0$, $AB=6$ სმ. E წერტილი AB სხივზეა, $BE=AB$. ED მონაკვეთი BC გვერდს P წერტილში კვეთს და DC-თან 60^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ PD და PE.



14. O წერტილი $ABCD$ ტრაპეციის ფერდების შემცველი წრფეების გადაკვეთის წერტილია. ცნობილია, რომ $OB:BA=3:2$ და OC-ს სიგრძე მეტია CD-ს სიგრძეზე 2,4 დმ-ით. იპოვეთ ტრაპეციის CD ფერდი.

15. AD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. გავლებულია, შესაბამისად, AC-სა და AB-ს პარალელური DE და DF წრფეები, $E \in AB$, $F \in AC$, $DE=17$ სმ. იპოვეთ $AEDF$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

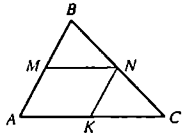
16. ABC სამკუთხედის AD ბისექტრისა BC გვერდს B წვეროს მხრიდან 4:3 შეფარდებით ყოფს, $AB=8{,}4$ დმ. გავლებულია, შესაბამისად, AC-სა და AB-ს პარალელური DE და DF წრფეები, $E \in AB$, $F \in AC$. იპოვეთ $AEDF$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

17. M წერტილი ტრაპეციის AB ფერდს A წვეროს მხრიდან ყოფს 2:5 შეფარდებით. CD ფერდის სიგრძე 9,1 დმ-ია. იპოვეთ CD ფერდის მონაკვეთები, რომელსაც ქმნის M წერტილზე გავლებული AD-ს პარალელური წრფე.

18. ABC სამკუთხედის AB გვერდის M შუა წერტილზე გაავლეს AC-ს პარალელური MN წრფე, $N \in BC$; N წერტილზე გაავლეს AB-ს პარალელური NK წრფე, $K \in AC$.

ა) რა შეფარდებით ყოფს K წერტილი AC გვერდს?

ბ) რას უდრის MN, თუ $AC=9$ სმ.

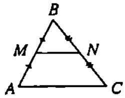


19. $ABCD$ ტრაპეციაში $\angle D=30^0$, BC მცირე ფუძე 8 სმ-ია, AD დიდი ფუძე — 20 სმ, ტრაპეციის AB და CD ფერდების შემცველი წრფეები იკვეთება M წერტილში მართი კუთხით. იპოვეთ MC:CD.

20. ABC სამკუთხედში $AB=15$ სმ, $BC=18$ სმ, $AC=20$ სმ. AB გვერდზე M და N წერტილები ისე შეარჩიეს, რომ $AM=7{,}5$ სმ, $MN=3$ სმ (M წერტილი A და N წერტილებს შორისაა). M და N წერტილებზე გაავლეს AC-ს პარალელური MK და NP წრფეები, P და K ეკუთვნის BC-ს. P და K წერტილებზე გაავლეს AB-ს პარალელური PD და KL წრფეები, D და L ეკუთვნის AC-ს. დაადგინეთ $MNPK$, $ANPD$, $AMKL$, $AMKC$ ოთხკუთხედების სახეები და იპოვეთ მათი პერიმეტრები.

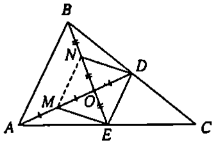
§1.15. სამკუთხედის და ტრაპეციის შუახაზების თვისებები. სამკუთხედის მედიანების თვისება

სამკუთხედის შუახაზი არის მონაკვეთი, რომელიც სამკუთხედის ორი გვერდის შუა წერტილებს აერთებს.



თვისება: სამკუთხედის შუახაზი მოპირდაპირე გვერდის პარალელურია და მისი ნახევრის ტოლია.

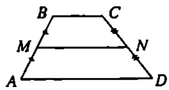
თუ MN შუახაზია, მაშინ $MN \| AC$ და $MN=\frac{1}{2}AC$.



ვთქვათ, AD და BE მედიანებია. ისინი იკვეთება O წერტილში. თუ MN მონაკვეთი ΔAOB-ს შუახაზია, მაშინ $MNDE$ პარალელოგრამია, და მივიღებთ: $BO:OE=AO:OD=2:1$.

სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილით თითოეული მედიანა იყოფა 2:1 შეფარდებით (წვეროს მხრიდან). სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება.

ტრაპეციის შუახაზი არის მონაკვეთი, რომელიც ფერდების შუა წერტილებს აერთებს.

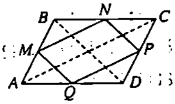


თვისება: ტრაპეციის შუახაზი ფუძეების პარალელურია და მათი ჯამის ნახევრის ტოლია.

თუ MN შუახაზია, მაშინ $MN \| BC$, $MN \| AD$, $MN=\frac{1}{2}(BC+AD)$.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

1. $ABCD$ პარალელოგრამის გვერდების შუა წერტილები მიმდევრობითაა შეერთებული, $AC=a$, $BD=b$. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.



ამოხსნა. MN არის ABC სამკუთხედის შუახაზი, ამიტომ $MN \| AC$, $MN=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}a$.

ანალოგიურად, $PQ \| AC$, $PQ=\frac{1}{2}a$; $MQ \| BD$, $MQ=\frac{1}{2}b$;

$NP \| BD$, $NP=\frac{1}{2}b$. მაშასადამე, $MNPQ$ პარალელოგრამია და მისი პერიმეტრია.

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b=a+b.$$

2. ტრაპეციის ფუძეების შეფარდებაა 3:4, შუახაზი 14 სმ-ია. იპოვეთ ფუძეები.

ამოხსნა. შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ფუძეებია $3x$ და $4x$, მაშინ $14=\frac{1}{2}(3x+4x)$, $28=7x$, $x=4$. ფუძეებია 12 სმ და 16 სმ.

ა

✓**1.** თუ სამკუთხედის შუახაზისა და მისი მოპირდაპირე გვერდის ჯამი 24 სმ-ია, მაშინ შუახაზი არის

ა) 6 სმ ბ) 8 სმ გ) 12 სმ დ) 18 სმ.

✓**2.** თუ O წერტილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია და $BO=12$ სმ; მაშინ BD მედიანა არის

ა) 18 სმ ბ) 15 სმ გ) 24 სმ დ) 28 სმ.

✓**3.** თუ ტრაპეციის ფუძეები 7 სმ და 13 სმ-ია, მაშინ შუახაზი არის
ა) 20 სმ ბ) 10 სმ გ) 12 სმ დ) 18 სმ.

✓**4.** თუ ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი 3 სმ-ია, პერიმეტრი — 14 სმ, მაშინ შუახაზი არის
ა) 8 სმ ბ) 4 სმ გ) 6 სმ დ) 3 სმ.

✓**5.** ტრაპეციის დიდი ფუძე 24,8 სმ-ია, მცირე ფუძე მისი $\frac{1}{4}$-ია. იპოვეთ შუახაზი.
ა) 15 სმ ბ) 15,5 სმ გ) 16 სმ დ) 18 სმ.

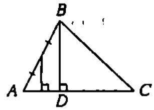
✓**6.** ტრაპეციის შუახაზი 80 სმ-ია. ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:5. იპოვეთ დიდი ფუძე.
ა) 50 სმ ბ) 30 სმ გ) 75 სმ დ) 100 სმ.

✓**7.** ტოლგვერდა სამკუთხედის შუახაზი 4,2 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედების პერიმეტრი.
ა) 8,4 სმ ბ) 16,8 სმ გ) 25,2 სმ დ) 26,8 სმ.

✓**8.** სამკუთხედის გვერდები 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ-ია. იპოვეთ იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროები მოცემული სამკუთხედის შუა წერტილებია.
ა) 12 სმ ბ) 24 სმ გ) 19 სმ დ) 16 სმ.

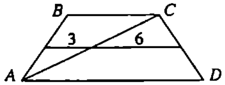
✓**9.** სამკუთხედის პერიმეტრი 100 სმ-ია. იპოვეთ მისი გვერდების შუა წერტილების შეერთებით მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი.
ა) 100 სმ ბ) 50 სმ გ) 25 სმ დ) 75 სმ.

10. ABC სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:4:5. სამკუთხედის შუახაზებით შედგენილი სამკუთხედის პერიმეტრი 26,4 დმ-ია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის გვერდები.



11. ABC სამკუთხედის AB გვერდის შუა წერტილიდან AC გვერდისადმი გავლებული მართობის სიგრძე 2,4 დმ-ია. იპოვეთ BD სიმაღლე.

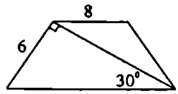
12. ტრაპეციის შუახაზი 27 სმ-ია. ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:7. იპოვეთ ფუძეები.



13. ტრაპეციის შუახაზი AC დიაგონალით 3 სმ და 6 სმ სიგრძის მონაკვეთებად იყოფა. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

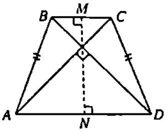
14. ტრაპეციის შუახაზი დიაგონალით 3:4 შეფარდებით იყოფა. მცირე ფუძე 8,1 სმ-ია. იპოვეთ დიდი ფუძე.

15. ტრაპეციის ფუძეები 4 სმ და 7 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ტრაპეციის დიაგონალების შუა წერტილებს შორის.



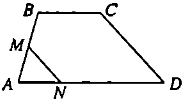
16. ტრაპეციის მცირე ფუძე 8 დმ-ია. ერთ-ერთი დიაგონალი ფერდის მართობულია და დიდ ფუძესთან 30°-იან კუთხეს ადგენს. ამ კუთხის მოპირდაპირე ფერდი 6 დმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შუახაზი.

17. ტოლფერდა ტრაპეციის პერიმეტრი 48 სმ-ია, ფერდი 10 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შუახაზი.

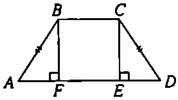


18. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები მართობულია. ტრაპეციის შუახაზი 24 სმ-ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის სიმაღლე — MN მონაკვეთის სიგრძე.

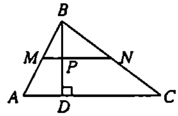
19. $ABCD$ ტრაპეციის AB ფერდის შუა M წერტილზე გავლებულია CD-ს პარალელური MN წრფე. $ND=12{,}8$ სმ. იპოვეთ ტრაპეციის შუახაზი.



20. $ABCD$ ტრაპეციის AB ფერდის შუა M წერტილზე გავლებულია CD-ს პარალელური MN წრფე. $AN=4$ სმ. $ND=12{,}8$ სმ. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფუძე.

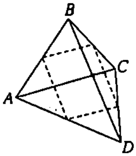


21. ტოლფერდა $ABCD$ ტრაპეციაში შუახაზი a-ს ტოლია. იპოვეთ AE და FD მონაკვეთები.



22. MN არის ABC სამკუთხედის შუახაზი. $BP=2$ სმ. იპოვეთ BD სიმაღლის სიგრძე.

23. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის შუა წერტილი კათეტებიდან 6 სმ და 8 სმ მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ ამ სამკუთხედის კათეტების სიგრძეები.



24. $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედის AC დიაგონალი BD დიაგონალის 25%-ია. ამ დიაგონალების ნამრავლი 36 სმ^2-ია.

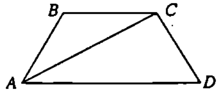
დაადგინეთ ამ ოთხკუთხედის გვერდების შუა წერტილების მიმდევრობით შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედის სახე და იპოვეთ მისი პერიმეტრი.

25. საკოორდინატო სიბრტყეზე $A(2;\ 0)$, $B(9;\ 12)$ და $C(7;\ 0)$ წერტილები სამკუთხედის წვეროებია. იპოვეთ AC გვერდის მოპირდაპირე MN შუახაზის სიგრძე და მისი ბოლო წერტილების კოორდინატები.

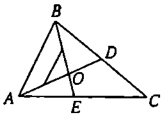
26. ტრაპეციის მიმდევრობით აღებული გვერდები ისე შეეფარდება, როგორც 4:5:4:8. მისი შუახაზი 7,8 დმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.

27. ტრაპეციის შუახაზი 12 სმ-ია. დიდი ფუძე მცირე ფუძეზე 6 სმ-ით მეტია. იპოვეთ ფუძეები.

28. ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი 1 დმ-ია, შუახაზიც 1 დმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.



29. $ABCD$ ტრაპეციის AC დიაგონალი A კუთხის ბისექტრისაა, $AB=8$ სმ, $AD=15$ სმ. იპოვეთ შუახაზი.



30. ABC სამკუთხედში AD და BE მედიანებია, $AB=c$. იპოვეთ:

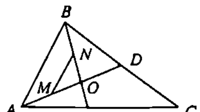
ა) DE,

ბ) ABO სამკუთხედის AB გვერდის მოპირდაპირე შუახაზი.

31. ABC სამკუთხედში AD და BE მედიანებია. MN მონაკვეთი ABO სამკუთხედის შუახაზია.

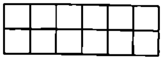
ა) დაადგინეთ $MNDE$ ოთხკუთხედის სახე.

ბ) იპოვეთ $BO{:}OE$, $AO{:}OD$ და ჩამოაყალიბეთ სამკუთხედის მედიანების სათანადო თვისება.

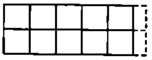


§1.16. ფართობი. მართკუთხედის ფართობი

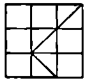
თუ ამ კვადრატის გვერდი ერთეული სიგრძისაა (მაგალითად, 1 სმ, 1 დმ, ...), მაშინ ამ კვადრატის ფართობი ფართობის ზომის ერთეულია (1 სმ^2, 1 დმ^2, ...).



ეს ფიგურა შედგება 12 ერთეულოვანი კვადრატისგან, რომელთაგან თითოეულის ფართობი არის ფართობის ზომის ერთეული. ფიგურის ფართობი 12 კვადრატული ერთეულია.

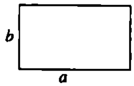


ეს ფიგურა შედგება 10 ერთეულოვანი კვადრატისა და 2 ცალი ერთეულოვანი კვადრატის ნახევრისგან. მისი ფართობი 11 კვადრატული ერთეულია.



თუ □ ფართობის ერთეულია, მაშინ გამუქებული ფიგურის ფართობი $5\frac{1}{2}$ კვადრატული ერთეულია; შედგება 4 ცალი ერთეულოვანი კვადრატისა და კიდევ 3 ცალი ერთეულოვანი კვადრატის ნახევრისგან.

გამუქებული ნაწილის ფართობი სურათის მიხედვით შეიძლება ასეც ვიპოვოთ: $9-3\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$ (კვადრატული ერთეული).

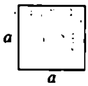


მართკუთხედის ფართობი შეიძლება ფორმულით ვიპოვოთ. ერთ-ერთ გვერდს ვუწოდოთ ფუძე, მის მართობ გვერდს — სიმაღლე.

თუ ფუძეა a, სიმაღლე — b, მაშინ ფართობი ასე გამოითვლება:

$$S=ab.$$

თუ $a>b$, მაშინ ზოგჯერ a-ს უწოდებენ მართკუთხედის **სიგრძეს**, b-ს — **სიგანეს**.



თუ კვადრატის გვერდის სიგრძე a ერთეულია, მაშინ მისი ფართობი არის

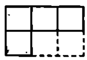
$$S=a^2.$$

ფართობის თვისებები:

1) ტოლ მრავალკუთხედებს ტოლი ფართობი აქვს;

2) თუ მრავალკუთხედი დაყოფილია რამდენიმე მრავალკუთხედად ისე, რომ მათ საერთო შიგა წერტილები არა აქვს, მაშინ მოცემული მრავალკუთხედის ფართობი დაყოფის შედეგად მიღებული მრავალკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია.

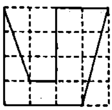
ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:



1. იპოვეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი (□ ერთეულოვანი კვადრატია).

ფიგურა შედგება 4 ცალი ერთეულოვანი კვადრატისგან. მისი ფართობი 4 კვადრატული ერთეულია.

2. იპოვეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი:



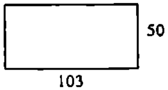
I ხერხი: ფიგურა შედგება 6 ცალი ერთეულოვანი კვადრატისგან და დანარჩენი ნაწილი არის 7 ერთეულოვანი კვადრატის ნახევარი.

$$6+3\frac{1}{2}=9\frac{1}{2} \text{ კვ. ერთ.}$$

II ხერხი: შეიძლება ასეც ვიანგარიშოთ:

$$16-3-\frac{1}{2}\cdot4-\frac{1}{2}\cdot3=9\frac{1}{2} \text{ (კვ. ერთეული).}$$

3. ფეხბურთის მოედანს 103 მ სიგრძე და 50 მ სიგანე აქვს. რისი ტოლია მისი S ფართობი?



$S=103\cdot50=5150$

$S=5150$ მ².

1 მმ², 1 სმ², 1 დმ², 1 მ², 1 კმ², 1 არი, 1 ჰა — **ფართობის ერთეულებია.**

1 სმ²=100 მმ²

1 მ²=100 დმ²

1 მ²=10000 სმ²

1 კმ²=1 000000 მ²

1 არი=100 მ²=0,01 ჰა, 1 არი ჰექტარის მეასედია

1 ჰა (ჰექტარი)=10 000 მ².

ა

✓1. თუ კვადრატის გვერდი 5 მ-ია, მაშინ მისი ფართობი არის

ა) 5 მ² ბ) 10 მ² გ) 20 მ² დ) 25 მ².

✓2. თუ კვადრატის პერიმეტრი 1,6 სმ-ია, მაშინ მისი ფართობი არის

ა) 0,4 სმ² ბ) 0,16 სმ² გ) 1,6 სმ² დ) 0,9 სმ².

✓3. თუ კვადრატის ფართობი 1,69 მ²-ია, მაშინ მისი პერიმეტრი არის

ა) 5,2 მ ბ) 1,3 მ გ) 2,6 მ დ) 52 მ.

✓4. თუ კვადრატის თითოეულ გვერდს 2-ჯერ გავზრდით, მაშინ ფართობი

ა) 2-ჯერ გაიზრდება ბ) არ გაიზრდება

გ) 4-ჯერ გაიზრდება დ) 8-ჯერ გაიზრდება.

✓5. თუ მართკუთხედის გვერდებია 4 მ და 9 მ, მაშინ ამავე ფართობის მქონე (ამ მართკუთხედის ტოლდიდი) კვადრატის პერიმეტრი არის

ა) 6 მ ბ) 12 მ გ) 18 მ დ) 24 მ.

✓6. 1 ჰა=

ა) 100 არი ბ) 10 არი გ) 1000 არი დ) 1 არი.

✓7. 1 ჰა=

ა) 10 მ² ბ) 100 მ² გ) 1000 მ² დ) 10000 მ².

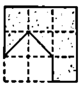
✓8. ვთქვათ, არის ერთეულოვანი კვადრატი. იპოვეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი.

ა) 6 კვადრატული ერთეული

ბ) 9 კვადრატული ერთეული

გ) 4 კვადრატული ერთეული

დ) 5 კვადრატული ერთეული.



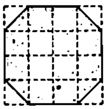
✓9. ვთქვათ, წარმოადგენს ფართობის 1 ერთეულს. იპოვეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი.

ა) 16 კვ. ერთ.

ბ) 12 კვ. ერთ.

გ) 14 კვ. ერთ.

დ) 10 კვ. ერთ.



✓10. კვადრატის თითოეული გვერდი 50%-ით გავზარდეთ. რამდენი პროცენტით გაიზრდება ფართობი?

ა) 25%-ით ბ) 200%-ით გ) 225%-ით დ) 125%-ით.

✓**11.** ვთქვათ, მართკუთხედის ერთი გვერდი 2-ჯერ გავზარდეთ, მეორე — 3-ჯერ. რამდენჯერ გაიზრდება ფართობი?

ა) 6-ჯერ ბ) 3-ჯერ გ) 2-ჯერ დ) 1,5-ჯერ.

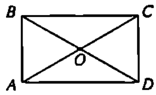
✓**12.** ვთქვათ, მართკუთხედის თითოეული გვერდი 10%-ით გავზარდეთ. რამდენჯერ გაიზრდება ფართობი?

ა) 2-ჯერ ბ) 1,5-ჯერ გ) 1,1-ჯერ დ) 1,21-ჯერ.

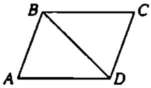
✓**13.** ვთქვათ, მართკუთხედის ორი მოპირდაპირე გვერდიდან თითოეული 20%-ით გავზარდეთ. დანარჩენი ორი უცვლელი დავტოვეთ. რამდენი პროცენტით გაიზრდება ფართობი?

ა) 20%-ით ბ) 44%-ით გ) 30%-ით დ) 40%-ით.

✓**14.** $ABCD$ მართკუთხედის ფართობი არის S. იპოვეთ ABD სამკუთხედის ფართობი.



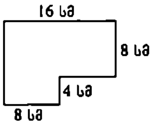
ა) $\frac{S}{2}$ ბ) $\frac{S}{3}$ გ) $\frac{S}{4}$ დ) $\frac{S}{5}$.



✓**15.** ABD სამკუთხედის ფართობი არის S. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი.

ა) S ბ) $2S$

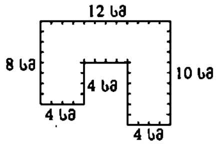
გ) $4S$ დ) $3S$.



✓**16.** მოცემული ფიგურის ფართობი არის

ა) 19 სმ^2 ბ) 160 სმ^2

გ) 120 სმ^2 დ) 148 სმ^2.

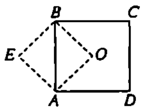


✓**17.** სურათზე გამოსახული ფიგურის ფართობი არის

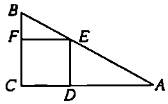
ა) 88 სმ^2 ბ) 72 სმ^2

გ) 96 სმ^2 დ) 128 სმ^2.

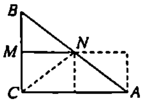
18. მართკუთხედის a გვერდი 125 მ-ია. b გვერდი მეტია a-ზე 1,2-ჯერ. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.



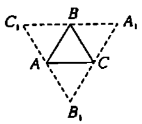
19. $ABCD$ კვადრატის დიაგონალი 4,8 სმ-ია. მისი AB გვერდი $AOBE$ კვადრატის დიაგონალია. იპოვეთ $AOBE$-ს ფართობი.



20. ABC სამკუთხედში $CDEF$ კვადრატია ჩახაზული. $\angle A=30^0$, $AE=6$ სმ. იპოვეთ ჩახაზული კვადრატის ფართობი.



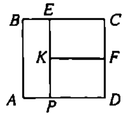
21. ABC მართკუთხა სამკუთხედია, მისი ფართობი 40 სმ^2-ია. MN შუახაზია. იპოვეთ MNB სამკუთხედის ფართობი.



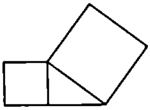
22. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედია, მის თითოეულ გვერდზე სამკუთხედის გარეთ აგებულია ტოლგვერდა სამკუთხედები. ABC-ს ფართობია S. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ ფიგურის ფართობი.

23. მართკუთხედის გვერდებია 2,5 მ და 0,4 მ. იპოვეთ ამ მართკუთხედის ტოლდიდი კვადრატის ფართობი და პერიმეტრი.

24. კვადრატის ფართობი 15 სმ²-ია. იპოვეთ მისი ტოლდიდი იმ მართკუთხედის პერიმეტრი, რომლის სიგრძე სიგანეზე 2,4-ჯერ მეტია.



25. *ABCD* კვადრატის ფართობია *S*. *BE* — კვადრატის გვერდის მესამედია, *CF* — გვერდის ნახევარია. იპოვეთ *ABEP*, *ECFK* და *PKFD* მართკუთხედების ფართობები.



26. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთ კათეტსა და ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატების ფართობებია 9 სმ² და 36 სმ². იპოვეთ სამკუთხედების კუთხეები.

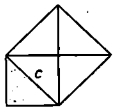
27. მართკუთხედის სიგანე სიგრძის 62,5%-ია. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები, თუ მისი ფართობია 230,4 მ².

28. მართკუთხედის ერთი გვერდი მეორის 75%-ია. იპოვეთ ამ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრია 5,6 დმ.

29. მართკუთხედის ყოველი გვერდი 10-ჯერ შემცირდა.

ა) რამდენჯერ შემცირდა მართკუთხედის ფართობი?

ბ) რამდენი პროცენტით შემცირდა მართკუთხედის ფართობი?

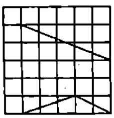
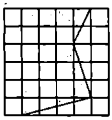
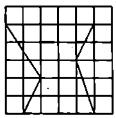


30. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა არის *c*.

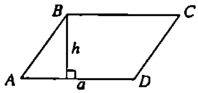
ა) ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ფართობის რა ნაწილია ამ სამკუთხედის ფართობი?

ბ) იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

31. სურათებზე ყოველი პატარა კვადრატის ფართობი 1 სმ²-ია. იპოვეთ დაშტრიხული ფიგურების ფართობი:

ა)  ბ)  გ) 

32. *ABC* სამკუთხედის წვეროებზე გავლებულია *AB*, *BC* და *AC* გვერდების პარალელური წრფეები, რომლებიც იკვეთება, შესაბამისად, *M*, *N* და *P* წერტილებში. *ABC* სამკუთხედის პერიმეტრია 42 სმ, ფართობი — 84 სმ². იპოვეთ *MNP* სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი.

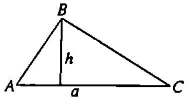


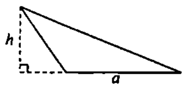
პარალელოგრამის ფართობი ამ პარალელოგრამის ფუძისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია:

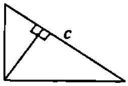
$$S=ah.$$

სამკუთხედის ფართობი მისი ფუძისა და სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია:

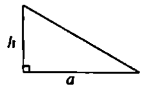
$$S=\frac{1}{2}ah.$$

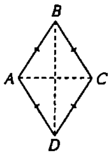






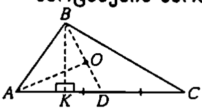
მაშასადამე, **მართკუთხა სამკუთხედის** ფართობი კათეტების ნამრავლის ნახევრის ტოლია. ეს ფართობი ჰიპოტენუზისა და ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლიცაა.





რომბის ფართობი შეიძლება ასეც გამოვითვალოთ: რომბის ფართობი დიაგონალების ნამრავლის ნახევრის ტოლია, $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

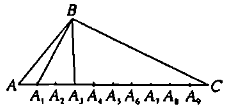


1. სამკუთხედის ფართობი 84 სმ^2-ია. BD მედიანაა. O წერტილი მედიანების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ AOD სამკუთხედის ფართობი.

ამოხსნა. რადგან ABD და BDC სამკუთხედებს საერთო სიმაღლე აქვს — BK და $AD=DC$, ამიტომ $S_{ABD}=S_{BDC}=42$ სმ^2.

მედიანების თვისების თანახმად, $OD=\frac{1}{3}BD$, რადგან AOD და ABD სამკუთხედებს საერთო სიმაღლე აქვს — საერთო A წვეროდან გავლებული, ამიტომ $S_{AOD}=\frac{1}{3}S_{ABD}=\frac{1}{3}\cdot 42=14$ (სმ^2).

2. ABC სამკუთხედის ფართობი 81 სმ^2-ია. AC გვერდი A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 წერტილებით 10 ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი. იპოვეთ A_1BA_3 სამკუთხედის ფართობი.



ამოხსნა. ცხადია, $S_{A_1BA_3}=\frac{1}{5}S_{ABC}=\frac{81}{5}=16{,}2$ (სმ^2).

1. თუ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 6 სმ და 8 სმ-ია, მაშინ მისი ფართობი არის
ა) 48 სმ^2 ბ) 24 სმ^2 გ) 36 სმ^2 დ) 12 სმ^2.

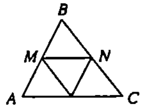
2. პარალელოგრამის ფართობი 48 სმ^2-ია, ფუძე — 12 სმ. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.
ა) 3 სმ ბ) 6 სმ გ) 8 სმ დ) 4 სმ.

3. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი 10 სმ-ია. იპოვეთ ფართობი.
ა) 100 სმ^2 ბ) 50 სმ^2 გ) 25 სმ^2 დ) 75 სმ^2.

4. თუ პარალელოგრამის ერთი გვერდი არის 12 სმ. მასზე დაშვებული სიმაღლე — 10 სმ, მეორე გვერდი — 20 სმ, მაშინ ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე არის

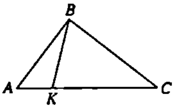
ა) 6 სმ   ბ) 12 სმ   გ) 18 სმ   დ 24 სმ.

5. ვთქვათ, MN შუახაზია, ABC სამკუთხედის ფართობი 40 სმ²-ია; იპოვეთ MBN სამკუთხედის ფართობი.



ა) 4 სმ²   ბ) 10 სმ²

გ) 8 სმ²   დ) 16 სმ².



6. თუ $AK=\frac{1}{4}AC$ და ABC სამკუთხედის ფართობი 80 სმ²-ია, მაშინ BKC სამკუთხედის ფართობი არის

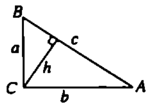
ა) 20 სმ²   ბ) 40 სმ²

გ) 60 სმ²   დ) 50 სმ².

7. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა არის c. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

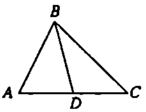
ა) $\frac{1}{2}c^2$ ბ) $\frac{1}{4}c^2$ გ) $\frac{1}{8}c^2$ დ) $\frac{1}{6}c^2$.

8. ვთქვათ, მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია a და b, ჰიპოტენუზაა c, ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლეა h, მაშინ



ა) $ab=ch$ ბ) $\frac{1}{2}ab=ch$

გ) $ab=\frac{1}{2}ch$ დ) $2ab=ch$.

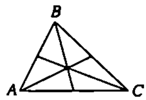


9. თუ BD არის ABC სამკუთხედის მედიანა, მაშინ

ა) $S_{ABD}=\frac{1}{3}S_{ABC}$ ბ) $S_{ABD}=S_{DBC}$

გ) $S_{ABD}=2S_{BDC}$ დ) $S_{ABD}=\frac{2}{3}S_{ABC}$

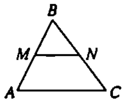
10. ნებისმიერი სამკუთხედის სამი მედიანით დაყოფისას შექმნილი ექვსივე სამკუთხედი



ა) ტოლია

ბ) ტოლდიდია

გ) განსხვავებული ფართობებისაა.



11. MN შუახაზით შექმნილი BNM სამკუთხედის ფართობი ABC სამკუთხედის ფართობის

ა) ნახევარია   ბ) მესამედია

გ) $\frac{2}{3}$-ია   დ) მეოთხედია.

12. თუ მართკუთხედსა და პარალელოგრამს ტოლი გვერდები აქვს, პარალელოგრამის მახვილი კუთხე 30^0-ია, მაშინ

ა) მათი ფართობები ტოლია

ბ) პარალელოგრამის ფართობი მართკუთხედის ფართობზე მეტია

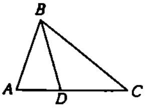
გ) მართკუთხედის ფართობი პარალელოგრამის ფართობზე 2-ჯერ მეტია

დ) მართკუთხედის ფართობი პარალელოგრამის ფართობზე 3-ჯერ მეტია.

13. სამკუთხედის ერთი კუთხე 30^0-ია. ამ კუთხის შემადგენელი გვერდებია 12 სმ და 24 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

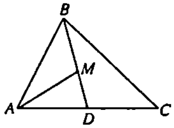
14. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხე 150^0-ია, გვერდები 12 სმ და 18 სმ-ია. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის ფართობი.

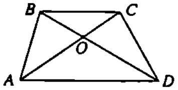
15. სამკუთხედის ფართობი 64 სმ^2-ია. მისი ერთი გვერდი მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე ორჯერ მეტია. იპოვეთ ეს გვერდი.



16. D წერტილი ABC სამკუთხედის AC გვერდს ეკუთვნის. $AD:DC=2:3$. ABC სამკუთხედის ფართობი 80 სმ^2-ია. იპოვეთ ABD სამკუთხედის ფართობი.

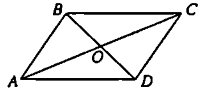
17. BD არის ABC სამკუთხედის მედიანა. M წერტილი აღებულია BD-ზე, $\frac{BM}{MD}=\frac{4}{3}$. სამკუთხედის ფართობი 84 სმ^2-ია. იპოვეთ AMD სამკუთხედის ფართობი.





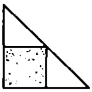
18. $ABCD$ ტრაპეციის AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება, $BO:OD=3:4$. AOD სამკუთხედის ფართობი 42 სმ^2-ია. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობი.

19. $ABCD$ პარალელოგრამია. AOB სამკუთხედის ფართობი 15 სმ^2-ია. იპოვეთ BOC, COD და AOD სამკუთხედების ფართობები.



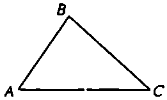
20. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ჯამი 96 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

21. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებზე აგებული კვადრატების ფართობებია 1,44 დმ^2 და 2,56 დმ^2. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.



22. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი, რომელსაც სამკუთხედთან საერთო მართი კუთხე აქვს. კვადრატის გვერდი 5 სმ-ია. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფართობი.

23. ABC სამკუთხედში $AB=13$ სმ, $AC=14$ სმ. AC-ზე დაშვებული სიმაღლე 12 სმ-ია. იპოვეთ AB-ზე დაშვებული სიმაღლე.



24. ABC სამკუთხედის პერიმეტრი 42 სმ-ია. ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი AB გვერდიდან დაშორებულია 5 სმ-ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი.

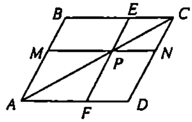
25. ABC სამკუთხედის ფართობი 60 სმ^2-ია, პერიმეტრი — 60 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილიდან სამკუთხედის თითოეულ გვერდამდე მანძილი.

26. პარალელოგრამის სიმაღლეები 12 სმ და 30 სმ-ია. პერიმეტრი 112 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

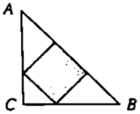
27. პარალელოგრამის ფართობი 96 სმ^2-ია, მისი სიმაღლეებია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.

28. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე 30^0-ია. გვერდებია 8 სმ და 15 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

29. $ABCD$ პარალელოგრამის AC დიაგონალის რაიმე P წერტილზე გაავლეს პარალელოგრამის გვერდების პარალელური MN და EF წრფეები. $FPND$ პარალელოგრამის ფართობი 50 სმ^2 აღმოჩნდა. იპოვეთ $MBEP$ ოთხკუთხედის ფართობი.

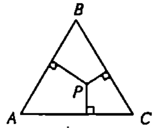


30. $ABCD$ პარალელოგრამის AC დიაგონალის ნებისმიერი P წერტილი შეაერთეს B და D წვეროებთან. CPD სამკუთხედის ფართობი 24 სმ^2-ია. იპოვეთ BPC სამკუთხედის ფართობი.



31. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული კვადრატის ორი წვერო ჰიპოტენუზაზეა, დანარჩენი ორი — კათეტებზე. ჰიპოტენუზა 12,6 სმ-ია. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

32. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედია, მისი სიმაღლე 12 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა P წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე მანძილების ჯამი.

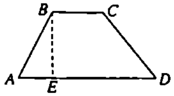


33. პარალელოგრამის ფუძე 10 სმ-ია, სიმაღლე — 5 სმ. შეიძლება თუ არა, რომ პარალელოგრამის მეორე გვერდი იყოს ტოლი:

ა) 4 კმ-ის; ბ) 4 დმ-ის; გ) 4 მ-ის; დ) 4 სმ-ის?

§1.18. ტრაპეციის ფართობი

ტრაპეციის ფართობი ფუძეების ჯამის ნახევრისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია:

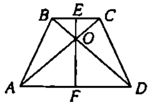


$$S=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot BE$$

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები მართობულია, სიმაღლე არის h. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობი.

ამოხსნა. ცხადია, $OF=\frac{1}{2}AD$ (მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევარია)



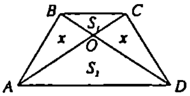
$OE=\frac{1}{2}BC$

$h=\frac{1}{2}(BC+AD)$

$S=\frac{1}{2}(BC+AD)h=h^2$

$S=h^2$.

2. $ABCD$ ტრაპეციის დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. BOC სამკუთხედის ფართობი არის S_1, AOD სამკუთხედის ფართობი არის S_2. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი.



ამოხსნა. ცხადია, $S_{ABC}=S_{BDC}$ — ამ სამკუთხედების BC ფუძეზე დაშვებული სიმაღლეები ტოლია.

ამიტომ $S_{AOB}=S_{COD}$, აღვნიშნოთ ეს ფართობი x-ით.

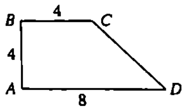
ცხადია, $\frac{x}{S_2}=\frac{BO}{OD}$, $\frac{BO}{OD}=\frac{S_1}{x}$, $\frac{x}{S_2}=\frac{S_1}{x}$ $x=\sqrt{S_1S_2}$.

მაშასადამე, $S_{ABCD}=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$.

✓**1.** თუ ტრაპეციის სიმაღლე 10 სმ-ია, ფართობი 360 სმ^2-ია, მაშინ შუახაზი არის

ა) 72 სმ ბ) 36 სმ გ) 18 სმ დ) 144 სმ.

✓**2.** სურათზე მართკუთხა ტრაპეციაა გამოსახული. იპოვეთ მისი ფართობი.

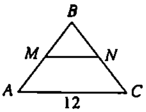


ა) 24 სმ^2 ბ) 32 სმ^2

გ) 48 სმ^2 დ) 16 სმ^2.

✓**3.** ტრაპეციის შუახაზი 12 სმ-ია, სიმაღლე — 5 სმ. იპოვეთ ფართობი.

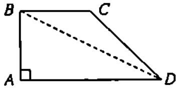
ა) 30 სმ^2 ბ) 60 სმ^2 გ) 45 სმ^2 დ) 64 სმ^2.



✓**4.** ABC სამკუთხედის სიმაღლე 8 სმ-ია, ფუძე — 12 სმ, MN შუახაზია. იპოვეთ $AMNC$ ტრაპეციის ფართობი.

ა) 72 სმ^2 ბ) 64 სმ^2

გ) 48 სმ^2 დ) 36 სმ^2.

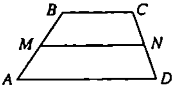


✓**5.** $ABCD$ მართკუთხა ტრაპეციაა. $BC=2$ სმ, $AB=2$ სმ. ABD სამკუთხედის ფართობი 6 სმ^2-ია. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი.

ა) 16 სმ^2 ბ) 5 სმ^2
გ) 12 სმ^2 დ) 8 სმ^2.

✓**6.** ტრაპეციის ფუძეები — 22 სმ და 18 სმ-ია. სიმაღლე მათი არითმეტიკული საშუალოა. იპოვეთ ფართობი.

ა) 424 სმ^2 ბ) 1600 სმ^2 გ) 400 სმ^2 დ) 200 სმ^2.



✓**7.** ტრაპეციაში ფუძეებია 12 სმ და 8 სმ, სიმაღლეა — 4,5 სმ. MN შუახაზია. იპოვეთ $AMND$ და $MBCN$ ტრაპეციების ფართობები.

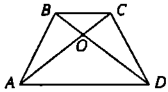
✓**8.** ტრაპეციის ფართობი 108 სმ^2-ია, სიმაღლე — 12 სმ. ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ ფუძეები.

✓**9.** ტრაპეციის ფართობი 72 დმ^2-ია, სიმაღლე 7,2 დმ. იპოვეთ შუახაზი.

✓**10.** ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლე 14 სმ-ია. დიაგონალი დიდ ფუძესთან 45^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

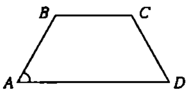
✓**11.** ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი ფუძესთან 45^0-იან კუთხეს ადგენს. ტრაპეციის ფუძეებია 3,2 სმ და 2,4 სმ. იპოვეთ ფართობი.

✓**12.** ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, ფუძეები 6 სმ და 10 სმ-ია. იპოვეთ ფართობი.

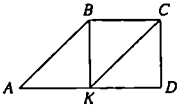


✓**13.** $ABCD$ ტრაპეციის დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. BOC სამკუთხედის ფართობი 16 სმ^2-ია, AOD სამკუთხედის ფართობი — 64 სმ^2. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი.

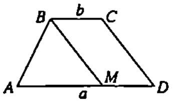
✓**14.** $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი 324 სმ^2-ია. AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. AOD სამკუთხედის ფართობი 4-ჯერ მეტია BOC სამკუთხედის ფართობზე. იპოვეთ AOD სამკუთხედის ფართობი.



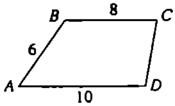
✓**15.** ტოლფერდა $ABCD$ ტრაპეციის A კუთხე 45^0-ია. $AD=2BC$, $BC=8$სმ. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი.



✓**16.** $ABCD$ ტრაპეციაში $BK \| CD$ და $KC \| AB$. $S_{ABCD}=q$. იპოვეთ S_{ABK}, S_{KCD}, S_{BKC}.



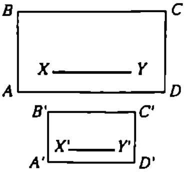
✓**17.** $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია a და b, $BM \| CD$. იპოვეთ $S_{ABCD}:S_{BCDM}:S_{ABM}$.



✓**18.** $ABCD$ ტრაპეციაში $AB=6$, $BC=8$, $AD=10$. AD ფუძის M წერტილზე CD ფერდის პარალელურად გავლებული წრფე ტრაპეციას ორ ნაწილად ყოფს. რამდენჯერ მეტი იქნება ერთ-ერთის ფართობი მეორეზე იმ შემთხვევაში, როცა:

ა) $AM:MD=3:2$; ბ)$AM:MD=1:4$; გ) $AM:MD=1:9$?

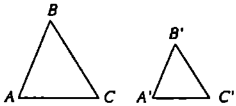
§1.19. მსგავსი ფიგურები. მსგავსი სამკუთხედები. სამკუთხედის მსგავსების ნიშნები



ფიგურებს შეიძლება ჰქონდეს ერთი და იგივე ფორმა, მაგრამ ზომები — განსხვავებული. მაგალითად, ერთი და იგივე ფოტოსურათი ორი სხვადასხვა ზომით შეიძლება იყოს წარმოდგენილი — ისინი **მსგავსი ფიგურებია** — შესაბამისი $ABCD$ და $A'B'C'D'$ მართკუთხედების სიგანეების შეფარდება სიგრძეების შეფარდების ტოლია, მაგალითად

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{2}{3}.$$

შეიძლება ასეც ვთქვათ, არსებობს ამ ფიგურების წერტილთა ისეთი შესაბამისობა, რომლის დროს მანძილები ერთი და იმავე შეფარდებით იცვლება. კერძოდ, თუ პირველი სურათის X წერტილს მეორე სურათის X' წერტილი შეესაბამება, Y-ს — Y', მაშინ $\frac{X'Y'}{XY}$ შეფარდება იმავე რიცხვის — $\frac{2}{3}$-ის ტოლია.



ABC სამკუთხედი **მსგავსია** $A'B'C'$ სამკუთხედის, თუ სრულდება პირობები: გვაქვს შესაბამისობა წვეროებს შორის: $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ ისეთი, რომ შესაბამისი გვერდები პროპორციულია:

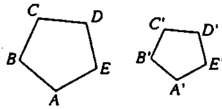
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

და შესაბამისი კუთხეები ტოლია:

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C'.$$

ვწერთ: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

თუ $\frac{AB}{A'B'}=k$, მაშინ k-ს **მსგავსების კოეფიციენტი** ეწოდება.



ანალოგიურად, **მრავალკუთხედები მსგავსია**, თუ მათი შესაბამისი კუთხეები ტოლია და შესაბამისი გვერდები — პროპორციული.

მაგალითად, $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$, თუ

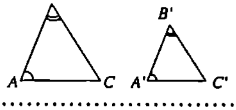
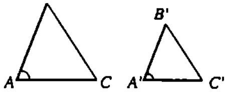
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}.$$

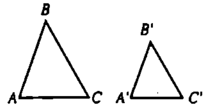
$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D',\ \angle E=\angle E'.$$

თუ $\frac{AB}{A'B'}=k$, მაშინ k მსგავსების კოეფიციენტია.

თუ ABC სამკუთხედი მსგავსია $A'B'C'$ სამკუთხედის, მაშინ $A'B'C'$ სამკუთხედი მსგავსია ABC სამკუთხედის, ამიტომ ვიტყვით — ეს სამკუთხედები მსგავსია.

სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები:

I ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.		თუ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, მაშინ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
II ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი პროპორციულია, ამ გვერდებს შორის კუთხეები კი ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.		თუ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$, $\angle B=\angle B'$, მაშინ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

III ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები პროპორციულია მეორე სამკუთხედის გვერდების, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.		თუ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$, მაშინ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრების შეფარდება ტოლია შესაბამისი გვერდების შეფარდების, ფართობების შეფარდება — შესაბამის გვერდების შეფარდების კვადრატის. მაგალითად, თუ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, ABC სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობია P და S, $A'B'C'$ სამკუთხედის — P_1 და S_1, მაშინ $\frac{P}{P_1}=\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{S}{S_1}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

1. გავითვალისწინოთ, რომ, თუ $MN \parallel AC$, მაშინ $\Delta MBN \sim \Delta ABC$, რადგან ამ სამკუთხედებს ტოლი კუთხეები აქვს.

მოც., $\frac{MB}{AM}=\frac{2}{3}$, $MN=12$ სმ.

ვიპოვოთ AC.

ამოხსნა. რადგან $\Delta MBN \sim \Delta ABC$, ამიტომ

$\frac{MB}{AB}=\frac{MN}{AC}$ პირობიდან ვღებულობთ

$\frac{MB}{AB}=\frac{2}{5}$.

ამრიგად, $\frac{MN}{AC}=\frac{2}{5}$, $\frac{12}{AC}=\frac{2}{5}$, $AC=\frac{60}{2}=30$ (სმ).

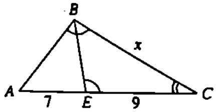
2. ABC სამკუთხედში BE ისეა გავლებული, რომ $\angle ABC=\angle BEC$, $AE=7$, $EC=9$. ვიპოვოთ BC.

ამოხსნა. ვთქვათ, $BC=x$.

$\Delta ABC \sim \Delta BEC$,

$\frac{BC}{EC}=\frac{AC}{BC}$,

$\frac{x}{9}=\frac{16}{x}$, $x^2=16\cdot 9$, $x=12$.

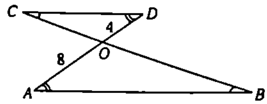


3. $CD \parallel AB$, $AO=8$, $OD=4$, $CD=12$.

ვიპოვოთ AB.

ამოხსნა. $\angle C=\angle B$, $\angle A=\angle D$, ამიტომ $\Delta AOB \sim \Delta DOC$.

$\frac{AO}{OD}=\frac{AB}{CD}$, $\frac{8}{4}=\frac{AB}{12}$, $AB=24$.



ა

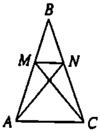
✓**1.** თუ $MN \parallel AC$, მაშინ აუცილებლად

ა) $\Delta MBN \sim \Delta ABC$

ბ) $\Delta MNC \sim \Delta MBN$

გ) $\Delta AMN \sim \Delta MBN$

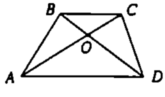
დ) $\Delta ABC \sim \Delta BAN$.



✓**2.** თუ $ABCD$ ტრაპეციაა, მაშინ აუცილებლად

ა) $\Delta COB \sim \Delta AOD$ ბ) $\Delta AOB \sim \Delta AOD$

გ) $\Delta BOC \sim \Delta COD$ დ) $\Delta ABD \sim \Delta AOB$.

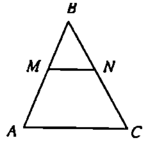


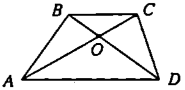
✓**3.** $MN \parallel AC$, $MB=\frac{1}{3}AB$, $MN=6$, მაშინ $AC=$

ა) 12 ბ) 18 გ) 14 დ) 36.

✓**4.** თუ $MN \parallel AC$, $MB=\frac{1}{3}AM$, $AC=16$, მაშინ $MN=$

ა) 8 ბ) 4 გ) 2 დ) 10.



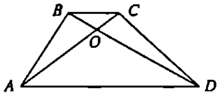


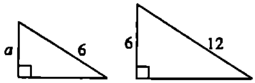
✓**5.** $ABCD$ ტრაპეციაა. $\frac{BC}{AD}=\frac{1}{3}$. იპოვეთ $\frac{BO}{OD}$.

ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{2}{3}$.

✓**6.** $ABCD$ ტრაპეციაა, $\frac{BO}{OD}=\frac{1}{4}$, $AD=8$. იპოვეთ BC.

ა) 1 ბ) 3 გ) 4 დ) 2.





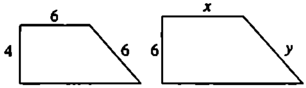
✓**7.** თუ აქ გამოსახული სამკუთხედები მსგავსია, მაშინ $a=$

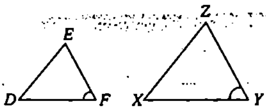
ა) 6 ბ) 3 გ) 4 დ) 2.

✓**8.** თუ მითითებული ოთხკუთხედები მსგავსია, მაშინ

ა) $x=8$, $y=8$ ბ) $x=8$, $y=10$

გ) $x=9$, $y=9$ დ) $x=9$, $y=8$.





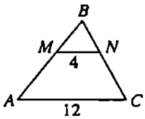
✓**9.** $\Delta DEF \sim \Delta XZY$, $\angle F=\angle Y$, $DE=4$, $XZ=10$. იპოვეთ მსგავსების კოეფიციენტი.

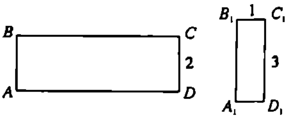
ა) 0,2 ბ) 0,3

გ) 0,4 დ) 0,5.

✓**10.** $MN \parallel AC$, $MN=4$, $AC=12$. იპოვეთ MBN და ABC სამკუთხედების მსგავსების კოეფიციენტი.

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{12}$.





✓**11.** $ABCD$ და $A'B'C'D'$ მართკუთხედები მსგავსია. CD არის $ABCD$ მართკუთხედის მცირე გვერდი. სურათზე მითითებული მონაცემებით იპოვეთ $ABCD$-ს პერიმეტრი.

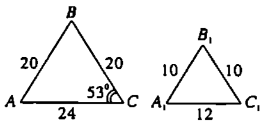
ა) 8 ბ) 10

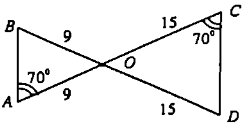
გ) 16 დ) 12.

✓**12.** სურათზე წარმოდგენილი მონაცემების მიხედვით იპოვეთ $\angle B_1$.

ა) 53^0 ბ) 74^0

გ) 106^0 დ) 80^0.





✓**13.** სურათზე წარმოდგენილი მონაცემებით შეარჩიეთ არასწორი თანაფარდობა.

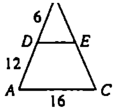
ა) $\angle B=70^0$ ბ) $AB \parallel CD$

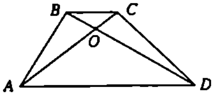
გ) $\frac{AB}{CD}=0,6$ დ) $\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}$.

✓**14.** თუ $DE \parallel AC$, $DB=6$, $AD=12$, $AC=16$, მაშინ $DE=$

ა) 8 ბ) 6

გ) 4 დ) $\frac{16}{3}$.





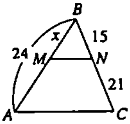
✓**15.** $ABCD$ ტრაპეციაა. $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{4}$, მაშინ $\frac{AO}{AC} =$

ა) $\frac{4}{5}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{3}{4}$ დ) $\frac{4}{1}$.

✓**16.** $MN \parallel AC$, $\frac{AM}{MB} = \frac{5}{4}$, $BN=1{,}4$ დმ. იპოვეთ BC.

ა) 3,15 დმ ბ) 2,1 დმ

გ) 1,65 დმ დ) 2,8 დმ.



✓**17.** $MN \parallel AC$. სურათზე მითითებული ზომების მიხედვით $x=$

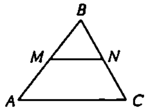
ა) 9 ბ) 10

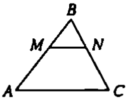
გ) 12 დ) 8.

✓**18.** MN არის ABC სამკუთხედის შუახაზი. მაშინ MNB სამკუთხედის ფართობი არის ABC სამკუთხედის ფართობის

ა) ნახევარი ბ) მეოთხედი

გ) მესამედი დ) მეხუთედი.





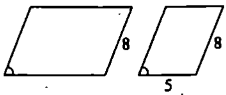
✓**19.** თუ $MN \parallel AC$, MB არის AB-ს მესამედი, მაშინ MNB-ს ფართობი არის ABC სამკუთხედის ფართობის

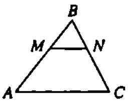
ა) მეექვსედი ბ) მერვედი

გ) მეთექვსმეტედი დ) მეცხრედი.

✓**20.** აქ გამოსახული არატოლი პარალელოგრამები მსგავსია. მეორის ფართობის შეფარდება პირველის ფართობთან არის

ა) $\frac{25}{64}$ ბ) $\frac{5}{8}$ გ) $\frac{9}{25}$ დ) $\frac{64}{25}$.



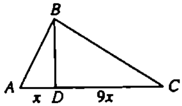


✓**21.** $MN \parallel AC$, $AM:MB=3:2$. MNB სამკუთხედის ფართობი არის ABC სამკუთხედის ფართობის

ა) $\frac{2}{5}$ ბ) $\frac{2}{25}$ გ) $\frac{16}{25}$ დ) $\frac{4}{25}$.

✓**22.** თუ AD არის AC-ს მეათედი, მაშინ ABD სამკუთხედის ფართობი არის ABC სამკუთხედის ფართობის

ა) $\frac{1}{10}$ ბ) $\frac{1}{81}$ გ) $\frac{1}{9}$ დ) $\frac{1}{100}$.



23. AC წრფის პარალელური წრფე ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებს, შესაბამისად, D და E წერტილებში კვეთს; $AB=18$ სმ, $AC=21$ სმ, $AD=3$ სმ. იპოვეთ DE.

24. D წერტილი ABC სამკუთხედის AB გვერდს ეკუთვნის; $\angle BDC=\angle ACB$, $AD=9$ სმ, $DB=16$ სმ. იპოვეთ BC.

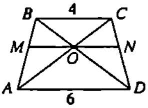
25. AC წრფის პარალელური წრფე ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებს, შესაბამისად, D და E წერტილებში კვეთს; AB წრფის პარალელური EF წრფე AC წრფეს კვეთს F წერტილში. $ADEF$ რომბია. $AB=a$, $AC=b$. იპოვეთ რომბის გვერდი.

26. $ABCD$ ტრაპეციის ($BC\|AD$) AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება, $AO=10$ სმ, $OC=8$ სმ. მცირე ფუძე 12 სმ-ია. იპოვეთ დიდი ფუძე.

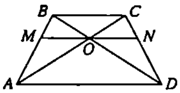
27. AC წრფის პარალელური წრფე ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებს D და E წერტილებში კვეთს, $AB=8$ სმ, $BC=12$ სმ, $AD=BE$. იპოვეთ BE და BD.

28. D წერტილი ABC სამკუთხედის BC გვერდს ეკუთვნის. ცნობილია, რომ $\angle BAD=\angle ACD$, $BC=9$ სმ, $AB=6$ სმ. იპოვეთ BD და DC.

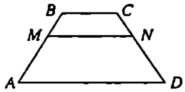
29. $ABCD$ ტრაპეციის ($BC\|AD$) AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. $AO=12$ სმ, $OC=9$ სმ. ფუძეების ჯამი 35 სმ-ია. იპოვეთ ფუძეები.



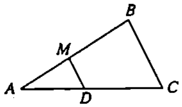
30. ტრაპეციის ფუძეები 4 სმ და 6 სმ-ია. იპოვეთ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე ფუძეების პარალელურად გავლებული MN წრფის მონაკვეთი, რომელიც ტრაპეციაშია მოქცეული.



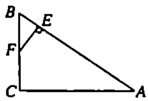
31. ტრაპეციის ფუძეებია a და b, $BC=a$, $AD=b$. იპოვეთ MN მონაკვეთი (იგი წინა ამოცანაშია აღწერილი).



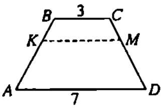
32. $ABCD$ ტრაპეციაში MN ისეა გავლებული, რომ $MBCN \sim AMND$. $BC=a$, $AD=b$. იპოვეთ MN.



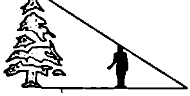
33. ABC სამკუთხედში $AB=6$ სმ, $MB=4$ სმ, $MD\|BC$, $AD=4$ სმ. იპოვეთ AC.



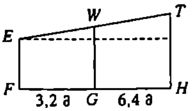
34. $\angle C=90^\circ$, $AC=8$ სმ, $AB=10$ სმ, $BF=2{,}5$ სმ. იპოვეთ მანძილი F წერტილიდან AB გვერდამდე.



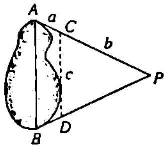
35. $ABCD$ ტრაპეციაში $AD=7$ სმ, $BC=3$ სმ, $KM\|BC$. $\frac{AK}{KB}=\frac{7}{3}$. იპოვეთ KM.



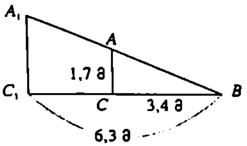
36. ხის ჩრდილის სიგრძე 10,5 მ-ია, 1,8 მ სიმაღლის ადამიანისა — 2,1 მ. იპოვეთ ხის სიმაღლე.



37. ნატო აკვირდება ხის კენწეროს (T წერტილს). მისი თვალი E წერტილითაა წარმოდგენილი. GW კედლის სიმაღლე 1,92 მ-ია. ნატო კედლიდან 3,2 მ-ის დაშორებით დგას, ხიდან — 9,6 მ-ის დაშორებით. ნატოს სიმაღლე 1,76 მ-ია. იპოვეთ ხის სიმაღლე.

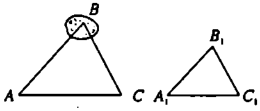


38. სურათზე დაშტრიხული ფიგურით ტბაა გამოსახული, $AC=a$, $CP=b$, $CD=c$ — ამ ზომების მიხედვით როგორ ვიპოვით ტბის AB სიგრძეს?

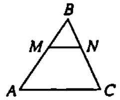


39. A_1C_1 ბოძის სიმაღლის გასაგებად ვიყენებთ AC ჭოკს. სურათზე წარმოდგენილი მონაცემების მიხედვით იპოვეთ A_1C_1.

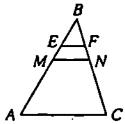
40. A წერტილიდან მიუწვდომელ B წერტილამდე მანძილის გასაგებად შერჩეულია C წერტილი; ვიპოვეთ AC, $\angle BAC$ და $\angle BCA$. შემდეგ ავაგეთ $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. $AC=42$ მ, $A_1C_1=6{,}3$ სმ, $A_1B_1=7{,}2$ სმ. იპოვეთ AB.



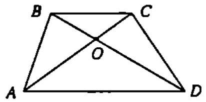
41. ორი ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდებს შორის კუთხეები ტოლია. ერთ-ერთის გვერდებია 9 სმ, 9 სმ და 6 სმ. მეორის პერიმეტრია 48 სმ. იპოვეთ მეორის გვერდები.



42. $MN \| AC$, $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$. ABC სამკუთხედის ფართობი 125 სმ^2-ია. იპოვეთ $AMNC$ ტრაპეციის ფართობი.



43. $MN \| AC$, $EF \| AC$, $AM:ME:EB=4:1:2$. ΔABC-ს ფართობი 80 სმ^2-ია. იპოვეთ $MEFN$ ტრაპეციის ფართობი.

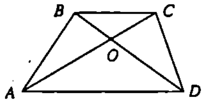


44. $ABCD$ ტრაპეციაა. BOC სამკუთხედის ფართობი 4 სმ^2-ია, AOD-ს ფართობი — 9 სმ^2. იპოვეთ:

ა) $BC:AD$, ბ) $OC:AO$,

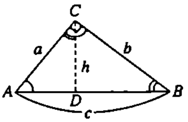
გ) $S_{ABO}:S_{BOC}$, დ) $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი.

45. BC და AD ტრაპეციის მცირე და დიდი ფუძეებია, O — დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. ცნობილია, რომ $BC:AD=1:k$ და $S_{BOC}=S$. იპოვეთ S_{ABO}, S_{CDO}, S_{AOD} და S_{ABCD}.



46. AOD სამკუთხედის ფართობი 16 სმ^2-ია. $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი 25 სმ^2. იპოვეთ BOC სამკუთხედის ფართობი.

§ 1.20. პითაგორას თეორემა. პროპორციული მონაკვეთები მართკუთხა სამკუთხედში



თუ ABC მართკუთხა სამკუთხედია, CD — ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე, $CD=h$, მაშინ

$\Delta ACD \sim \Delta CBD$,

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$,

$\Delta CDB \sim \Delta ACB$.

სამკუთხედების მსგავსების შედეგია თანაფარდობები:

$$a^2=c\cdot AD \qquad (1)$$

$$b^2=c\cdot BD \qquad (2)$$

$$h^2=AD\cdot DB \qquad (3)$$

$$ab=ch \qquad (4)$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{AD}{DB} \qquad (5)$$

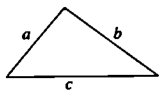
(1), (2) და (3) შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: **მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული კათეტი ჰიპოტენუზისა და ჰიპოტენუზაზე ამ კათეტის გეგმილის საშუალო გეომეტრიულია; მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზისადმი გავლებული სიმაღლე ჰიპოტენუზაზე კათეტების გეგმილის საშუალო გეომეტრიულია.**

(1) და (2)-დან შეიძლება მივიღოთ პითაგორას თეორემა:

$$a^2+b^2=c^2,$$

კათეტების კვადრატების ჯამი ჰიპოტენუზის კვადრატის ტოლია.

ამასთანავე, თუ რაიმე სამკუთხედში ორი გვერდის კვადრატების ჯამი მესამე გვერდის კვადრატის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხა სამკუთხედია, მესამე გვერდის მოპირდაპირე კუთხე მართია.



თუ $a^2+b^2=c^2$, მაშინ $\angle C=90^0$.

ეს პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემაა.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

1. არის თუ არა სამკუთხედი მართკუთხა, თუ მისი გვერდებია 7 სმ, 5 სმ, 9 სმ?

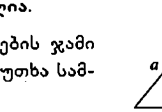
ამოხსნა. მართი კუთხე შეიძლება იყოს მხოლოდ 9 სმ სიგრძის გვერდის მოპირდაპირე კუთხე (უდიდესი კუთხე), მაგრამ

$9^2=81, \qquad 7^2+5^2=49+25=73.$

$9^2\neq 7^2+5^2.$

მაშასადამე, სამკუთხედი არ არის მართკუთხა.

2. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტი 6 სმ-ია, მეორე კათეტის გეგმილი ჰიპოტენუზაზე — 6,4 სმ. იპოვეთ მეორე კათეტი და ჰიპოტენუზა.



ამოხსნა. $36=x(x+6,4)$, $\qquad x^2+6,4x-36=0$

$x=3,6$ (სმ).

$AB=10$ სმ. $\qquad AC^2=100-36$

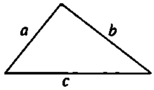
$AC=8$ სმ.

✓**1.** თუ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 5 სმ და 12 სმ-ია, მაშინ ჰიპოტენუზა არის
ა) 5 სმ   ბ) 12 სმ   გ) 8,5 სმ   დ) 13 სმ.

✓2. თუ მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტი არის a, ჰიპოტენუზაა c, მაშინ მეორე კათეტი არის

ა) $\sqrt{a^2-c^2}$ ბ) $\sqrt{a^2+c^2}$ გ) $\sqrt{c^2-a^2}$ დ) $c-a$.

✓3. თუ სამკუთხედში $a^2+b^2=c^2$, მაშინ ეს სამკუთხედი

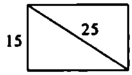


ა) მახვილკუთხაა ბ) მართკუთხაა

ბ) ბლაგვკუთხაა გ) არ არის მართკუთხა.

✓4. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 29 სმ-ია, ერთ-ერთი კათეტი — 20 სმ. იპოვეთ მეორე კათეტი.

ა) 7 სმ ბ) 21 სმ გ) 9 სმ დ) 49 სმ.



✓5. მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდი 15 სმ-ია, დიაგონალი — 25 სმ. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.

ა) 50 სმ ბ) 60 სმ გ) 70 სმ დ) 80 სმ.

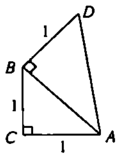
✓6. მართკუთხედის ერთი გვერდი 70 სმ-ია, პერიმეტრი — 188 სმ. იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე.

ა) 64 სმ ბ) 74 სმ გ) 84 სმ დ) 94 სმ.

✓7. თუ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 2 სმ-ია, ერთ-ერთი კათეტი 1 სმ-ია, მაშინ მეორე კათეტი არის

ა) 3 სმ ბ) $\sqrt{3}$ სმ გ) $\sqrt{5}$ სმ დ) 1,7 სმ.

✓8. სურათზე მართი კუთხეებია მონიშნული. $AC=BC=BD=1$. იპოვეთ AD.



ა) $\sqrt{2}$ ბ) 1

გ) 1,5 დ) $\sqrt{3}$.

✓9. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი 3 სმ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

ა) 6 სმ ბ) 3 სმ გ) $3\sqrt{2}$ სმ დ) $4\sqrt{2}$ სმ.

✓10. კვადრატის ფართობი 1,44 დმ^2-ია. იპოვეთ ამ კვადრატის დიაგონალი.

ა) 1,44 დმ ბ) 1,2 დმ გ) 1,3 დმ დ) $1{,}2\sqrt{2}$ დმ.

✓11. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე 16 სმ-ია, ფერდი 17 სმ. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.

ა) 15 სმ ბ) 16 სმ გ) 14 სმ დ) 13 სმ.

✓12. ცნობილია, რომ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძე 10 სმ-ია. ერთ-ერთი კათეტი 2 სმ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ კათეტების სიგრძეები.

ა) 4 სმ და 6 სმ ბ) 5 სმ და 7 სმ

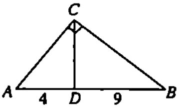
გ) 6 სმ და 8 სმ დ) 8 სმ და 10 სმ.

✓13. თუ ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი არის a, მაშინ სიმაღლე არის

ა) $a\sqrt{3}$ ბ) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ გ) $\frac{a}{2}$ დ) a.

✓14. თუ ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი არის a, მაშინ მისი ფართობია

ა) $a^2\sqrt{3}$ ბ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ გ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ დ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

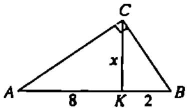


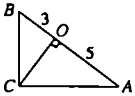
✓15. $\angle C=90^0$, CD სიმაღლეა, $AD=4$, $DB=9$. იპოვეთ CD.

ა) 9 ბ) 4 გ) 13 დ) 6.

✓16. $\angle C=90^0$, CK სიმაღლეა, $x=$

ა) 2 ბ) 4 გ) 6 დ) 5.





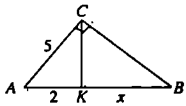
✓17. CO სიმაღლეა, $\angle C=90^0$, $CO=$

ა) $\sqrt{15}$ ბ) $\sqrt{40}$ გ) $\sqrt{8}$ დ) $\sqrt{2}$.

✓18. $\angle C=90^0$, CK სიმაღლეა, x-ის პოვნა შეიძლება განტოლებიდან

ა) $(2+x)\cdot 5=2$ ბ) $(4+x)\cdot 5=2$

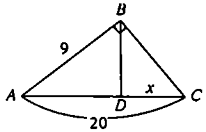
გ) $(2+x)\cdot 2=5$ დ) $(2+x)\cdot 2=25$.

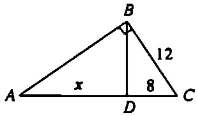


✓19. BD სიმაღლეა, $\angle B=90^0$, $x=$

ა) $\frac{9}{20}$ ბ) $\frac{81}{20}$

გ) $\frac{319}{20}$ დ) $\frac{20}{81}$.





✓20. $\angle B=90^0$, BD სიმაღლეა, x-ის პოვნა შეიძლება განტოლებიდან

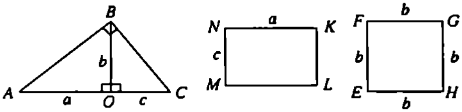
ა) $12=(x+8\cdot)x$ ბ) $144=(x+8)\cdot 8$

გ) $144=(x+8)\cdot x$ დ) $144=8x$.

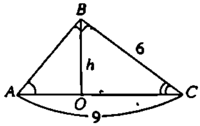
✓21. თუ S_1 არის $MNKL$ მართკუთხედის ფართობი, S_2 არის $EFGH$ კვადრატის ფართობი, $\angle B=90^0$, მაშინ წარმოდგენილი მონაცემების მიხედვით

ა) $S_1<S_2$ ბ) $S_1>S_2$

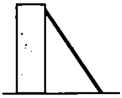
გ) $S_1=S_2$ დ) $S_1=2S_2$.



22. $\angle B=90^0$, BO სიმაღლეა, $BC=6$, $AC=9$. იპოვეთ BO, AB, AO, OC.



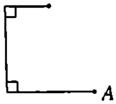
23. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდება არის $\frac{3}{7}$, ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე 42 სმ-ია. იპოვეთ კათეტების გეგმილები ჰიპოტენუზაზე.



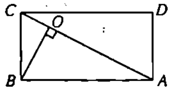
24. კედელზე მიდგმული კიბის ქვედა ბოლო 2 მ-ის მანძილზეა კედლიდან. კიბის სიგრძე 5 მ-ია. მიწის ზედაპირიდან რა მანძილზეა კიბის ზედა ბოლო? იპოვეთ საძიებელი რიცხვი მეათედებამდე სიზუსტით.

25. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი და ფუძე, შესაბამისად, 5-ისა და 8-ის პროპორციულია, სიმაღლე 7,2 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

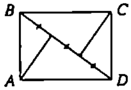
26. სამკუთხედის გვერდებია a, a და b. იპოვეთ b გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.



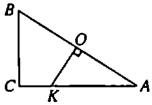
27. ტურისტებმა შეკრების A წერტილიდან იარეს 1800 მ დასავლეთით, შემდეგ ჩრდილოეთით — 1,6 კმ, შემდეგ — აღმოსავლეთით — 600 მ და შეისვენეს. რა მანძილზეა შესვენების ადგილი A წერტილიდან?



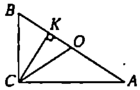
28. მართკუთხედის B წერტილიდან დიაგონალზე დაშვებული BO მართობი 8 სმ-ია, $\frac{CO}{OA}=\frac{1}{4}$. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.



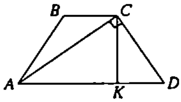
29. მართკუთხედის A და C წვეროებიდან BD დიაგონალზე დაშვებული მართობები ამ დიაგონალს სამ ტოლ ნაწილად ყოფს, $AB=19\sqrt{2}$. იპოვეთ AD.



30. $\angle C=90^0$, $AB=34$ სმ, $BC=16$ სმ, $BO=AO$, $KO\perp AB$. იპოვეთ OK.



31. $\angle C=90^0$, CK სიმაღლეა, CO — მედიანა. $BC=12\sqrt{41}$ სმ, $\frac{CK}{CO}=\frac{40}{41}$. იპოვეთ CK და CO.

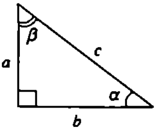


32. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი ფერდის მართობულია. C წერტილიდან გავლებული CK სიმაღლე დიდ ფუძეს 4 სმ და 16 სმ სიგრძის მონაკვეთებად ყოფს. იპოვეთ BC და AB.

33. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი ფერდის მართობულია, დიაგონალი 12 სმ-ია. დიდ ფუძეზე ფერდის გეგმილი 7 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე და სიმაღლე.

34. რომბის დიაგონალები ისე შეეფარდება, როგორც 24:7. რომბის პერიმეტრი 10 მ-ია. იპოვეთ რომბის დიაგონალები.

35. მართკუთხა ტრაპეციის მახვილი კუთხე 30^0-ია. მცირე ფუძე და მცირე ფერდი, შესაბამისად, 4 სმ და 3 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.



მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია a და b, ჰიპოტენუზა — c, a კათეტის მოპირდაპირე კუთხეა α, b კათეტის — β.

α მახვილი კუთხის ოთხი ტრიგონომეტრიული ფუნქცია — სინუსი (sin), კოსინუსი (cos), ტანგენსი (tg), კოტანგენსი (ctg) — ასე განისაზღვრება:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\qquad \cos\alpha=\frac{b}{c},\qquad \mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b},\qquad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{b}{a}.$$

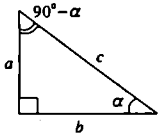
მაშასადამე, მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის **სინუსი** არის ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტების შეფარდება ჰიპოტენუზასთან, ხოლო **კოსინუსი** — მიმდებარე კათეტის ჰიპოტენუზასთან შეფარდებაა; **ტანგენსი** არის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება მიმდებარე კათეტთან, **კოტანგენსი** — მიმდებარე კათეტის შეფარდება მოპირდაპირე კათეტთან.

ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები:

α	30^0	45^0	60^0
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

α და $90^0-\alpha$ კუთხეებს დამატებითი კუთხეები ეწოდება. ამასთანავე,

$$\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha,\qquad \cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\mathrm{tg}(90^0-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha,\qquad \mathrm{ctg}(90^0-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha.$$



α კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირების დადგენის მიზნით გავიხსენოთ პითაგორას თეორემა: $a^2+b^2=c^2$, აქედან ვღებულობთ

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1. \qquad (1)$$

ძირითადი ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (2)$$

(მიიღება (1)-დან და სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრებიდან),

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (მიიღება (2)-ის $\cos^2\alpha$-ზე გაყოფით),

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ (მიიღება (2)-ის $\sin^2\alpha$-ზე გაყოფით),

$\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha=1.$

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

1. α მახვილი კუთხეა, $\sin\alpha=0{,}6$; ვიპოვოთ $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$.

ამოხსნა. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\quad\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha=1-(0{,}6)^2$, $\quad\cos^2\alpha=0{,}64$.

$\cos\alpha=0{,}8$, $\quad\mathrm{tg}\alpha=\frac{0,6}{0,8}=\frac{3}{4}$, $\quad\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$.

2. α მახვილი კუთხეა, $\operatorname{tg}\alpha=2$. ვიპოვოთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

ამოხსნა. რადგან $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, ამიტომ $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$.

ვიყენებთ ფორმულებს:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha, \qquad \frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

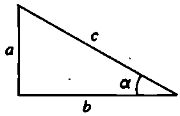
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \sin^2\alpha=\frac{4}{5}, \qquad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

შენიშვნა: $\sin\alpha$ შეიძლება ასეც ვიპოვოთ $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$.

✓1. სურათზე წარმოდგენილი მონაცემების მიხედვით შეარჩიეთ სწორი ტოლობა.

ა) $\sin\alpha=\frac{b}{c}$ ბ) $\cos\alpha=\frac{a}{c}$

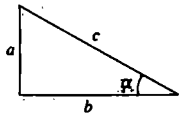
გ) $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ დ) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$.



✓2. სურათზე წარმოდგენილი მონაცემების მიხედვით:

ა) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$ ბ) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b}$

გ) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$ დ) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{c}$



✓3. $\operatorname{tg}\alpha=$

ა) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ბ) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ გ) $\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ დ) $\sqrt{1+\sin^2\alpha}$.

✓4. მოცემულია:

I) $\sin30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ II) $\cos60^0=\frac{1}{2}$ III) $\operatorname{tg}45^0=1$ IV) $\sin60^0=\frac{1}{2}$.

მათგან ჭეშმარიტია

ა) I ბ) II და III გ) მხოლოდ II დ) IV.

✓5. შეარჩიეთ სწორი თანაფარდობა:

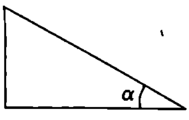
ა) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ბ) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha<1$ გ) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq1$ დ) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha>1$.

✓6. თუ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, მაშინ $\sin\alpha=$

ა) $\frac{3}{5}$ ბ) $\frac{2}{3}$ გ) $\frac{3}{4}$ დ) $\frac{4}{5}$.

✓7. თუ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, მაშინ $\sin\alpha=$

ა) $\frac{3}{5}$ ბ) $\frac{4}{5}$ გ) $\frac{3}{4}$ დ) $\frac{4}{3}$.

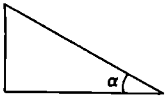


✓8. თუ $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, მაშინ $\operatorname{ctg}\alpha=$

ა) $\sqrt{3}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ დ) 3.

9. თუ $\cos\alpha=0{,}8$, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha=$

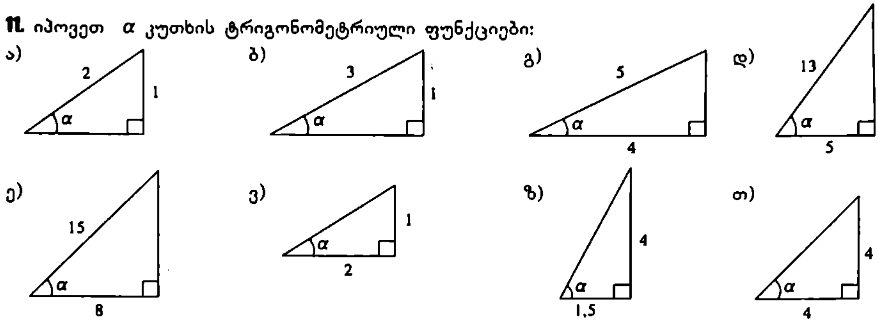
ა) $\frac{4}{3}$ ბ) $\frac{3}{4}$ გ) 0,6 დ) 0,8.



10. თუ $\sin\alpha=0{,}6$, მაშინ $\operatorname{ctg}\alpha=$

ა) $\frac{4}{3}$ ბ) $\frac{3}{4}$ გ) 0,6 დ) 0,8.

11. იპოვეთ α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

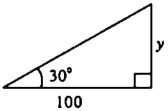


12. მოცემულია: $\cos\alpha=\frac{1}{4}$. იპოვეთ:

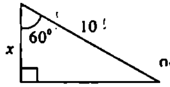
ა) $\sin(90^0-\alpha)$; ბ) $\cos(90^0-\alpha)$; გ) $\sin\alpha$.

13. მოცემულია: $\operatorname{tg}\alpha=2$. იპოვეთ:

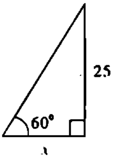
ა) $\operatorname{tg}(90^0-\alpha)$; ბ) $\operatorname{ctg}(90^0-\alpha)$.

14. 

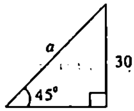
იპოვეთ y.

15. 

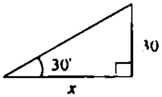
იპოვეთ x.

16. 

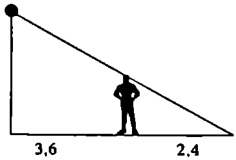
იპოვეთ x.

17. 

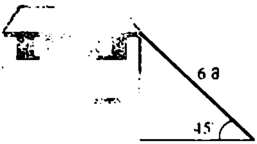
იპოვეთ a.

18. 

იპოვეთ x.

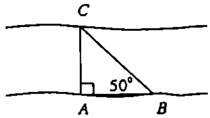


19. 180 სმ სიმაღლის მამაკაცის ჩრდილი 2,4 მ სიგრძისაა. იპოვეთ ლამპიონის სიმაღლე, თუ მამაკაცი მისგან 3,6 მ მანძილზეა.



20. 6 მ სიგრძის კიბე მიდგმულია შენობაზე მიწის ზედაპირთან 45°-იანი დახრის კუთხით. მიწის ზედაპირიდან რა სიმაღლეზეა (მიახლოებით) მიდგმული ეს კიბე შენობას?

21. მდინარეზე AC სიგრძის ხიდის გასადებად ვმოძრაობთ AC-ს მართობულად B წერტილისკენ, საიდანაც AC მონაკვეთი 50^0-იანი კუთხით ჩანს, $AB=30$ მ. არის თუ არა AC მეტი 30 მეტრზე?



22. მართკუთხედის სიგრძე სიგანეზე 1,05-ჯერ მეტია. იპოვეთ დიაგონალის მიერ დიდ გვერდთან შედგენილი კუთხის სინუსი და კოსინუსი.

23. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 1 მ-ია, ერთ-ერთი მახვილი კუთხის სინუსი 0,6. იპოვეთ კათეტები.

24. ტოლფერდა ტრაპეციაში მახვილი კუთხის კოსინუსი 0,5-ია, ფერდი — 4 დმ, მცირე ფუძე — 3,2 დმ. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე და დიდი ფუძე.

25. მართკუთხა სამკუთხედში დიდი კათეტის სიგრძე 40 დმ-ია. მისი მოპირდაპირე კუთხის კოსინუსი $\frac{1}{\sqrt{5}}$-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა და მეორე კათეტი.

26. მართკუთხედის მცირე გვერდი 2 მ-ია. დიაგონალის მიერ მცირე გვერდთან შედგენილი კუთხის კოსინუსი $\frac{1}{\sqrt{10}}$-ია. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.

27. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეა α. შეადარეთ ნულს:
ა) $\sin^2\alpha+1$; ბ) $\sin^2\alpha-1$; გ) $\sin^2\alpha-4$.

28. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხის სინუსი $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ის ტოლია. ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტი 10,8 სმ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანა.

29. მართკუთხედის დიაგონალი 4 სმ-ით მეტია მცირე გვერდზე. დიაგონალის მიერ დიდ გვერდთან შედგენილი კუთხის სინუსი $\frac{1}{4}$-ია. იპოვეთ ამავე კუთხის ტანგენსი და მართკუთხედის დიაგონალი.

30. მართკუთხა სამკუთხედის α მახვილი კუთხის ტანგენსი $\frac{1}{2}$-ია. ამ სამკუთხედის ფართობი 25 დმ^2-ია. იპოვეთ კათეტები.

31. რომბის მცირე დიაგონალის მიერ გვერდთან შედგენილი კუთხის ტანგენსი $\frac{8}{5}$-ის ტოლია. მცირე დიაგონალი 6,4 დმ-ის ტოლია. იპოვეთ რომბის ფართობი.

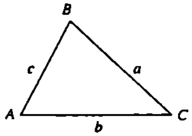
32. ABC სამკუთხედში $AB=BC=20$ სმ, $\mathrm{tg}A=\frac{1}{3}$. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

33. ABC სამკუთხედში $AB=15$სმ, A მახვილი კუთხის სინუსი 0,2-ია. იპოვეთ B წვეროდან გავლებული სიმაღლე.

34. ABC სამკუთხედში $AB=a$, $\angle A$ მახვილია და $\angle A=\alpha$. იპოვეთ B წვეროდან გავლებული სიმაღლე.

35. ABC სამკუთხედში A და C მახვილი კუთხეებია, $\angle A=\alpha$, $\angle C=\gamma$ $AB=c$, $BC=a$. იპოვეთ:
ა) AC და B-დან გავლებული BD სიმაღლე,
ბ) ABC სამკუთხედის ფართობი.

§ 1.22. სინუსების თეორემა. კოსინუსების თეორემა. სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება. პარალელოგრამის დიაგონალების თვისება



სინუსების თეორემა. სამკუთხედის გვერდები ამ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \qquad (1)$$

(1) ფორმულით წარმოდგენილი თითოეული შეფარდება სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ტოლია, ანუ სინუსების თეორემა შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R. \qquad (2)$$

კოსინუსების თეორემა. სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

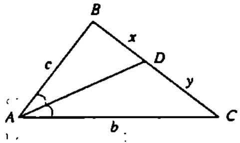
შედეგი 1.

ა) თუ a უდიდესი გვერდია და $a^2>b^2+c^2$, მაშინ სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, $\angle A>90^0$.

ბ) თუ a უდიდესი გვერდია და $a^2<b^2+c^2$, მაშინ სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

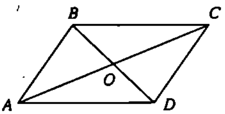
გ) თუ a გვერდი უდიდესია და $a^2=b^2+c^2$, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა, $\angle A=90^0$.

ჭეშმარიტია ა), ბ) და გ) დებულებათა შებრუნებული დებულებებიც.



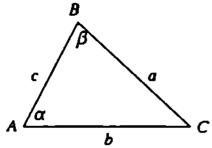
შედეგი 2. სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება:

თუ AD ბისექტრისაა, მაშინ $\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$.



შედეგი 3. პარალელოგრამში გვერდების კვადრატების ჯამი დიაგონალების კვადრატების ჯამის ტოლია:

$$AC^2+BD^2=2AB^2+2AD^2.$$



შედეგი 4. ვთქვათ, a და b სამკუთხედის გვერდებია, α და β — მათი მოპირდაპირე კუთხეები:

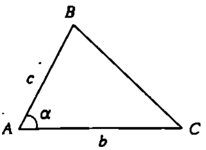
ა) თუ $\alpha>\beta$, მაშინ $a>b$; თუ $\alpha<\beta$, მაშინ $a<b$.

ბ) თუ $\alpha=\beta$, მაშინ $a=b$.

სამკუთხედის ამოხსნა ამ სამკუთხედის ზოგიერთი — ცნობილი ელემენტის მიხედვით სხვა ელემენტის პოვნას ნიშნავს;

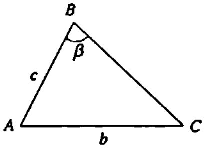
სამკუთხედის ამოხსნის შემთხვევები:

1) თუ ცნობილია სამკუთხედის სამი გვერდი — a, b და c, მაშინ კუთხეების საპოვნელად ვიყენებთ კოსინუსების თეორემას.



2) თუ მოცემულია სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე — b, c და α, მაშინ BC გვერდს კოსინუსების თეორემით ვიპოვით.

სხვა კუთხეების კოსინუსებს ან სინუსებს ვიპოვით კოსინუსების ან სინუსების თეორემით.



3) ვთქვათ, მოცემულია ორი გვერდი და ერთ-ერთის მოპირდაპირე კუთხე — b, c და β.

ვპოულობთ $\sin C$-ს (სინუსების თეორემით)

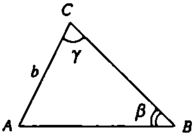
$$\sin C = \frac{c\sin\beta}{b}.$$

თუ $c\sin\beta>b$, მაშინ $\sin C>1$, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, ასეთი მოცემულობების სამკუთხედი არ არსებობს – სამკუთხედის ამოხსნა შეუძლებელია.

თუ $c\sin\beta=b$, მაშინ $\sin C=1$, $\angle C=90^0$, სხვა ელემენტებს ადვილად ვიპოვით;

თუ $c\sin\beta<b$ და $b\geq c$, მაშინ $\sin C = \frac{c\sin\beta}{b}<1$ ტოლობიდან ერთადერთ C კუთხეს ვიპოვით, რადგან შეუძლებელია C კუთხე იყოს ბლაგვი.

თუ $c\sin\beta<b$ და $b<c$, მაშინ $\sin C = \frac{c\sin\beta}{b}$ ტოლობიდან განსაზღვრული $\angle C$ შეიძლება იყოს მახვილიც და ბლაგვიც. ამოცანას ორი ამონახსნი აქვს.



4) ვთქვათ, მოცემულია ერთი გვერდი და ორი კუთხე — b, β და γ. მაშინ მესამე კუთხეს ადვილად ვიპოვით:

$$\angle A=180^0-(\beta-\gamma)$$

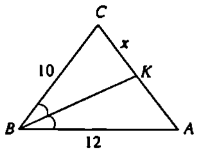
სხვა გვერდების საპოვნელად ვიყენებთ სინუსების თეორემას (შესაძლოა კოსინუსის თეორემის გამოყენებაც).

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

1. სამკუთხედის გვერდები 5 სმ, 6 სმ და 9 სმ-ია. მახვილკუთხაა, მართკუთხაა, თუ ბლაგვკუთხაა ეს სამკუთხედი?

$$9^2=81,\ 5^2+6^2=25+36=61$$
$$61<81.$$

სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა.



2. ABC სამკუთხედში BK ბისექტრისაა.
$AC=CB=10$ სმ, $AB=12$ სმ.
იპოვეთ BK ბისექტრისა.

ამოხსნა. ვიყენებთ ბისექტრისის თვისებას:

$$\frac{x}{10-x}=\frac{10}{12},\ 12x=100-10x,$$
$$22x=100$$
$$x=\frac{50}{11}.$$

ABC სამკუთხედის სამი გვერდით ვპოულობთ $\cos C$-ს

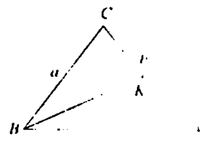
$$\cos C = \frac{10^2+10^2-12^2}{2\cdot 10\cdot 10},$$

$$\cos C = \frac{7}{25}.$$

BCK სამკუთხედიდან

$$BK^2=10^2+\frac{2500}{121}-2\cdot 10\cdot\frac{50}{11}\cdot\frac{7}{25}$$

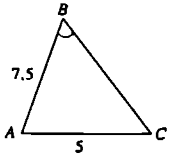
აქედან ვპოულობთ BK-ს.



ანალოგიურად მივიღებთ, რომ თუ სამკუთხედის გვერდებია a, b და c, მისი ბისექტრისა გამოითვლება ფორმულით

$$BK=\frac{1}{a+c}\sqrt{ac\left((a+c)^2-b^2\right)}.$$

3. ABC სამკუთხედში $AB=7,5$ სმ, $AC=5$ სმ. შეიძლება თუ არა, რომ $\sin B$ ტოლი იყოს $\frac{3}{4}$-ის?



ამოხსნა. ვიყენებთ სინუსების თეორემას:

$$\frac{5}{\sin B}=\frac{7,5}{\sin C},\qquad \frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{7,5}{\sin C},\ \text{საიდანაც}$$

$$\sin C=\frac{4,5}{4}>1.$$

რაც შეუძლებელია.

მაშასადამე, თუ $AB=7,5$ სმ, $AC=5$ სმ, მაშინ შეუძლებელია $\sin B$ ტოლი იყოს $\frac{3}{4}$-ის.

✓**1.** PQR სამკუთხედში $P=60^0$, $\frac{PQ}{\sin R}=4$, მაშინ $QR=$

ა) $2\sqrt{3}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ გ) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ დ) $4\sqrt{3}$.

✓**2.** ვთქვათ, სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია 3,5 სმ და 3 სმ. მათი მოპირდაპირე კუთხეები, შესაბამისად, α და 30^0-ია. იპოვეთ $\sin\alpha$.

ა) $\frac{7}{6}$ ბ) $\frac{7}{12}$ გ) $\frac{6}{7}$ დ) $\frac{6}{12}$.

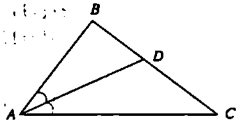
✓**3.** სამკუთხედის ერთი გვერდი 24 სმ-ია. მოპირდაპირე კუთხე 30^0-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი.

ა) 24 სმ ბ) 12 სმ გ) 48 სმ დ) 72 სმ.

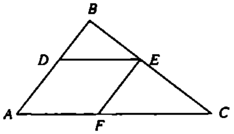
✓**4.** 6 სმ რადიუსის მქონე წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედის 30^0-იანი კუთხის მოპირდაპირე გვერდია

ა) 12 სმ ბ) 3 სმ გ) 24 სმ დ) 6 სმ.

✓**5.** AD ბისექტრისაა, $BC=14$ სმ, $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$. იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე.



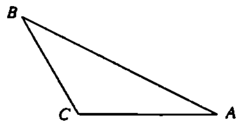
ა) 6 სმ ბ) 3 სმ
გ) 8 სმ დ) 7 სმ.



✓**6.** ABC სამკუთხედში $ADEF$ რომბია ჩახაზული. $BC=28$ სმ. $\frac{AB}{AC}=\frac{2}{5}$. იპოვეთ EC.

ა) 76 სმ ბ) 4 სმ
ბ) 20 სმ დ) 18 სმ.

✓**7.** სურათზე გამოსახულ ABC ბლაგვკუთხა სამკუთხედში $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. მაშინ



ა) $c^2<a^2+b^2$ ბ) $c^2=a^2+b^2$
გ) $c^2>a^2+b^2$ დ) $a^2>c^2+b^2$.

✓**8.** თუ ABC სამკუთხედში $AB^2=BC^2+AC^2$, მაშინ

ა) $\angle C<90^0$ ბ) $\angle C>90^0$ გ) $\angle C=90^0$ დ) $\angle A=90^0$.

✓**9.** თუ რაიმე სამკუთხედის ორი გვერდია a და b, მათ შორის კუთხე — α, მაშინ მესამე გვერდის კვადრატი არის

ა) $a^2+b^2+2ab\cos\alpha$ ბ) $a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ გ) a^2-b^2 დ) $a^2+b^2-ab\cos\alpha$.

10. ვთქვათ, სამკუთხედის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ. მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსი არის 0,8. იპოვეთ მესამე გვერდი.

ა) $2\sqrt{58}$ ბ) $2\sqrt{5,8}$ გ) $2\sqrt{5,6}$ დ) 11,6.

11. სამკუთხედის მახვილი კუთხის სინუსი 0,8-ია. ამ კუთხის შემადგენელი გვერდები 12 სმ და 16 სმ-ია. იპოვეთ მესამე გვერდი.

ა) 84,8 სმ ბ) $2\sqrt{23,2}$ სმ გ) $2\sqrt{42,4}$ სმ დ) $2\sqrt{157,6}$ სმ.

12. ვთქვათ, a, b და c სამკუთხედის გვერდებია და $c^2=a^2+b^2$. მაშინ ეს სამკუთხედი

ა) მახვილკუთხაა ბ) არ არის მართკუთხა

გ) მართკუთხაა დ) ბლაგვკუთხაა.

13. ვთქვათ, a და b სამკუთხედის გვერდებია, α და β — მათი მოპირდაპირე კუთხეები, $a>b$, მაშინ

ა) $\alpha>\beta$ ბ) $\alpha=\beta$ გ) $\alpha<\beta$ დ) $\beta>\alpha$.

14. თუ სამკუთხედის გვერდებია 5 სმ, 12 სმ და 13 სმ-ია, მაშინ ეს სამკუთხედი

ა) არის მახვილკუთხა ბ) არის ბლაგვკუთხა

გ) არ არის მართკუთხა დ) არის მართკუთხა.

15. თუ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 5 სმ, 6 სმ და 8 სმ, მაშინ ეს სამკუთხედი

ა) არის მახვილკუთხა ბ) არის მართკუთხა

გ) არის ბლაგვკუთხა დ) არ არის ბლაგვკუთხა სამკუთხედი.

16. თუ სამკუთხედის გვერდები 5 სმ, 6 სმ და 7 სმ სიგრძისაა, მაშინ ეს სამკუთხედი

ა) არის მახვილკუთხა ბ) არ არის მახვილკუთხა

გ) არის მართკუთხა დ) არის ბლაგვკუთხა.

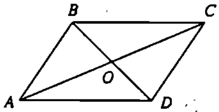
17. თუ $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ

ა) $AB^2+AD^2=AC^2+BD^2$

ბ) $2AB^2+AD^2=AC^2+BD^2$

გ) $AB^2+2AD^2=AC^2+BD^2$

დ) $2AB^2+2AD^2=AC^2+BD^2$.



18. თუ სამკუთხედის ერთი გვერდი არის a, მასთან მდებარე კუთხეებია β და γ, მაშინ β კუთხის მოპირდაპირე გვერდი შეიძლება გამოვითვალოთ ფორმულით:

ა) $\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$ ბ) $\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$ გ) $\dfrac{a\sin\beta}{\sin\gamma}$ დ) $\dfrac{a\sin\gamma}{\sin\beta}$.

19. თუ სამკუთხედის ორი გვერდია b და c, მათ შორის კუთხეა α, მაშინ მესამე გვერდი გამოითვლება ფორმულით:

ა) $\sqrt{b^2+c^2}$ ბ) $\sqrt{b^2+c^2-2bc\sin\alpha}$

გ) $\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$ დ) $\sqrt{b^2+c^2+2bc\sin\alpha}$.

20. იპოვეთ ABC სამკუთხედის BC გვერდი, თუ:

ა) $AC=10$ სმ, $\angle B=30^0$, $\angle A=45^0$;

ბ) $AB=20$ სმ, $\angle C=135^0$, $\angle A=30^0$.

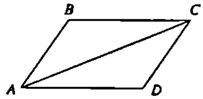
21. იპოვეთ ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდები, თუ: $AC=5$ სმ, $\angle A=45^0$, $\angle B=30^0$.

22. იპოვეთ ABC სამკუთხედის B და C კუთხეების სინუსები, თუ

ა) $AB=20$ სმ, $BC=40$ სმ, $\angle A=30^0$;

ბ) $AB=30$ სმ, $BC=40$ სმ, $\angle A=45^0$.

23. AC არის $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალი, $\angle BAC=\alpha$, $\angle DAC=\beta$, $AC=d$. გამოსახეთ d, α და β-თი პარალელოგრამის გვერდები.



24. ABC სამკუთხედში $BC=a$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. გამოსახეთ a, β და γ-თი AD ბისექტრისა.

25. იპოვეთ ABC სამკუთხედის AB გვერდი, თუ:
ა) $AC=3$ სმ, $BC=4$ სმ, $\angle C=60^0$; ბ) $AC=2$ სმ, $BC=4$ სმ, $\angle C=150^0$.

26. სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე არის α, მისი შემადგენელი გვერდებია a და b. გამოსახეთ მესამე გვერდი a და b-თი, თუ:
ა) $\alpha=45^0$; ბ) $\alpha=60^0$; გ) $\alpha=90^0$; დ) $\alpha=120^0$.

27. პარალელოგრამის მახვილი კუთხე 45^0-ია, გვერდები — 2 სმ და 3 სმ. იპოვეთ მცირე დიაგონალი.

28. ABC სამკუთხედში $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. გამოსახეთ a, b და c-თი სამკუთხედის კუთხეების კოსინუსები.

29. ABC სამკუთხედში $AB=3$ სმ, $BC=4$ სმ, $AC=6$ სმ. იპოვეთ:
ა) A კუთხის კოსინუსი; ბ) C კუთხის კოსინუსები.

30. $ABCD$ პარალელოგრამში $AB=a$, $BC=b$, $\angle A=30^0$. გამოსახეთ a და b-თი პარალელოგრამის დიაგონალები.

31. სამკუთხედების გვერდებია 1, $\sqrt{2}$ და $\sqrt{5}$. იპოვეთ უდიდესი კუთხე.

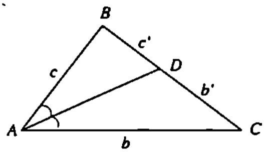
32. მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი, $\angle BAD=45^0$, $AB=a$, $BC=b$. დაასაბუთეთ:

$$AC^2 \cdot BD^2=a^4+b^4.$$

33. ვთქვათ, სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. გამოსახეთ a, b და c-თი სამკუთხედის მედიანები.

34. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია: $3\sqrt{2}$ სმ, $5\sqrt{2}$ სმ და 6 სმ. იპოვეთ უდიდესი გვერდისადმი გავლებული მედიანა.

35. ABC სამკუთხედში AD ბისექტრისაა: $AC=CB=5$ სმ, $AB=6$ სმ. იპოვეთ:
ა) AD,
ბ) დაასაბუთეთ $AD = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}$, სადაც $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$.



36. AD ბისექტრისაა.
ა) დაასაბუთეთ: $AD^2=bc-b'c'$;
ბ) იპოვეთ AD, თუ $AC=8$, $AB=12$, $BC=10$.

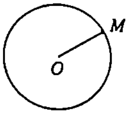
37. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედია, $AB:BC=4:5$, $BC=1{,}2$ დმ. სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი 1 დმ-ია. იპოვეთ AB და AC.

38. ბლაგვკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე 8 სმ-ია. სამკუთხედის გვერდები, რომლებიც ბლაგვ კუთხეს ქმნის, 10 სმ და 17 სმ-ია. იპოვეთ მესამე გვერდი.

39. ABC სამკუთხედში $AB=15$ სმ, $AC=10$ სმ. შეიძლება თუ არა, რომ $\sin B$ ტოლი იყოს $\frac{3}{4}$-ის?

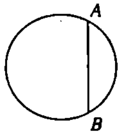
40. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ მართი კუთხის ბისექტრისა.

§ 1.23. წრეწირი, წრე და მათთან დაკავშირებული კუთხეებისა და მონაკვეთების თვისებები

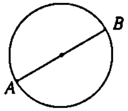


წრეწირი სიბრტყის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილია, რომლებიც მოცემული წერტილიდან მოცემული მანძილითაა დაშორებული. მოცემული წერტილი წრეწირის **ცენტრია**, მოცემული მანძილი — **რადიუსი**.

O ცენტრია, *OM* — რადიუსი, *M* წრეწირის წერტილია. *OM* მონაკვეთსაც რადიუსს ვუწოდებთ ხოლმე.

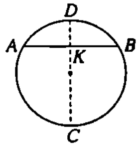


ქორდა არის მონაკვეთი, რომელიც წრეწირის ორ წერტილს აერთებს. სურათზე *AB* ქორდაა გამოსახული.

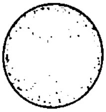


უდიდესი ქორდა — ქორდა, რომელიც წრეწირის ცენტრზე გადის, წრეწირის **დიამეტრია**. *AB* დიამეტრია.

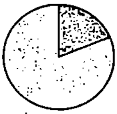
$AB=2r$, r — რადიუსია.



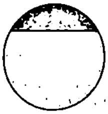
ქორდის მართობული *CD* დიამეტრი ამ ქორდას შუაზე ჰყოფს. შებრუნებით ქორდის შუა წერტილზე გავლებული დიამეტრი ამ ქორდის მართობულია.



სიბრტყის ნაწილს, რომელიც წრეწირითაა შემოსაზღვრული ამ წრეწირთან ერთად **წრე** ეწოდება.

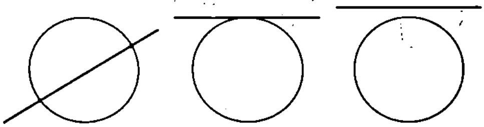


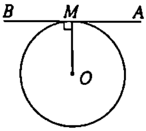
სექტორი ორ რადიუსს შორის მოთავსებული წრის ნაწილია, ორი რადიუსით წრე ორ სექტორად იყოფა.



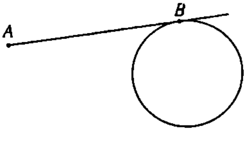
ყოველი ქორდა წრეს ორ **სეგმენტად** ჰყოფს.

წრფეს წრეწირთან შეიძლება ჰქონდეს ორი საერთო წერტილი (წრფე კვეთს წრეწირს), ერთი საერთო წერტილი (წრფე წრეწირის მხებია), ან არ ჰქონდეს საერთო წერტილი.

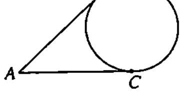




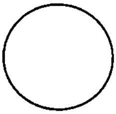
თუ წრფე წრეწირის მხებია, მაშინ იგი შეხების წერტილზე გავლებული რადიუსის მართობულია, $AB \perp OM$. შებრუნებით — თუ წრფე მართობულია რადიუსის და გადის რადიუსის იმ წერტილში, რომელიც წრეწირს ეკუთვნის, მაშინ ეს წრფე წრეწირის მხებია.



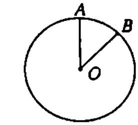
სურათზე *AB* წრფე *A* წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხებია, ზოგჯერ ***AB*** მონაკვეთსაც ვუწოდებთ წრეწირის მხებს.



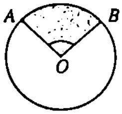
ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული ორი მხები ტოლია — $AB=AC$.



წრეწირის გრადუსული ზომა 360°-ია, ნახევარწრეწირის — 180°. ერთგრადუსიანი რკალი წრეწირის $\frac{1}{360}$ ნაწილია.

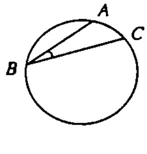


OA და OB რადიუსებით ორი კუთხე განისაზღვრება, პირველი — $\angle AOB$ 180°-ზე ნაკლებია და წრეწირის მცირე რკალს ეყრდნობა, მეორე — 180°-ზე მეტია და წრეწირის დიდ რკალს ეყრდნობა.

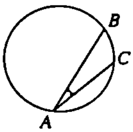


კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირის ცენტრია, **ცენტრული კუთხე** ეწოდება. **რკალის გრადუსული ზომა მისი შესაბამისი ცენტრული კუთხის გრადუსული ზომის ტოლია.** თუ, მაგალითად, $\angle AOB=80^\circ$, მაშინ $\cup AB=80^\circ$.

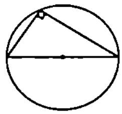
თუ რკალების გრადუსული ზომები ტოლია, მაშინ ეს რკალები ტოლია.



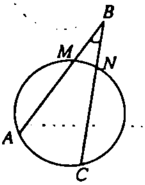
კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირს ეკუთვნის და გვერდები კვეთს წრეწირს, **ჩახაზული კუთხე** ეწოდება. სურათზე ABC ჩახაზული კუთხეა.

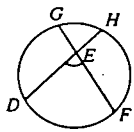


ჩახაზული კუთხის ზომა იმ რკალის გრადუსული ზომის ნახევარია, რომელსაც ეს კუთხე მოიცავს $\angle BAC=\frac{1}{2}\cup BC$. ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ თუ $\cup BC=60^\circ$, მაშინ $\angle BAC=30^\circ$.

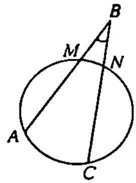


თუ ჩახაზული კუთხე დიამეტრს ეყრდნობა, მაშინ მისი ზომა 90°-ია, (ეს კუთხე 180°-იან რკალს ეყრდნობა).



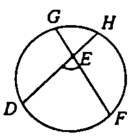


$\angle ABC$ და $\angle DEF$ წრეწირის მკვეთი კუთხეებია. პირველ შემთხვევაში მკვეთი კუთხის გვერდები კვეთს წრეწირს, წვერო წრეწირის გარეთაა, მეორე შემთხვევაში მკვეთი კუთხის გვერდები კვეთს წრეწირს, ცენტრი წრეწირის შიგნითაა.



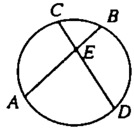
თუ მკვეთი კუთხის წვერო წრეწირის გარეთაა, მაშინ მისი ზომა არის კუთხის გვერდებს შორის მოქცეული რკალების გრადუსული ზომების ნახევარსხვაობა —

$$\angle B=\frac{1}{2}(\cup AC-\cup MN).$$



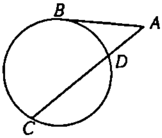
თუ მკვეთი კუთხის წვერო წრეწირის შიგნითაა, მაშინ მისი ზომა კუთხის გვერდებზე გამავალ წრფეებს შორის მოქცეული რკალების ზომათა ნახევარჯამის ტოლია:

$$\angle DEF=\frac{1}{2}(\cup GH+\cup DF).$$

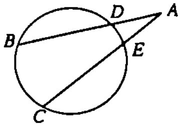


გადამკვეთი ქორდების თვისება: თუ წრეწირის ორი ქორდა იკვეთება, მაშინ ერთი ქორდის მონაკვეთების ნამრავლი მეორე ქორდის მონაკვეთების ნამრავლის ტოლია:

$$AE\cdot EB=CE\cdot ED.$$



თუ რაიმე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი, მაშინ მხების კვადრატი მკვეთისა და ამ მკვეთის გარე ნაწილის ნამრავლის ტოლია: $AB^2=AC\cdot AD$.



თუ რაიმე წერტილიდან წრეწირისადმი ორი მკვეთია გავლებული, მაშინ ერთ-ერთის ნამრავლი მის გარე ნაწილზე მეორე მკვეთის მის გარე ნაწილზე ნამრავლის ტოლია.

$$AB\cdot AD=AC\cdot AE.$$

1. თუ წრეწირის რადიუსია r, მაშინ დიამეტრი არის

ა) $\frac{r}{2}$ ბ) $2r$ გ) $3r$ დ) $4r$.

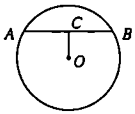
2. წრეწირის უდიდესი ქორდა

ა) დიამეტრია ბ) დიამეტრზე მეტია

გ) რადიუსია დ) დიამეტრზე ნაკლებია.

3. თუ წრეწირის დიამეტრი 16,8 მ-ია, მაშინ რადიუსი

ა) 8,2 მ-ია ბ) 8,4 მ-ია გ) 16,8 მ-ია დ) 33,6 სმ-ია.

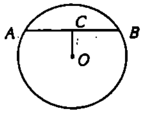


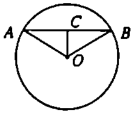
4. თუ წრეწირის AB ქორდა 12 სმ-ია და ამ ქორდაზე O ცენტრიდან დაშვებულია OC მართობი, მაშინ $CB=$

ა) 6 სმ ბ) 12 სმ გ) 24 სმ დ) 3 სმ.

5. წრეწირის AB ქორდა 16 სმ-ია, მასზე დაშვებული OC მართობი 6 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

ა) 8 სმ ბ) 6 სმ გ) 10 სმ დ) 13 სმ.



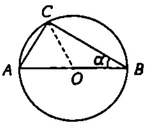


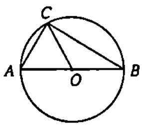
6. წრეწირის AO რადიუსი 3,6 სმ-ია, $\angle AOB=120^0$. იპოვეთ მანძილი O ცენტრიდან AB ქორდამდე.

ა) 2 სმ ბ) 1,8 სმ გ) 3 სმ დ) 0,8 სმ.

7. AB დიამეტრია, O ცენტრია, C — წრეწირის წერტილი. $\angle OBC=\alpha$. მაშინ $\angle AOC=$

ა) α ბ) 2α გ) $90^0-\alpha$ დ) $90^0-2\alpha$.



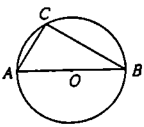


8. AB დიამეტრია, O ცენტრია, $\angle ABC=\alpha$, მაშინ $\angle ACO=$

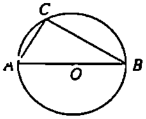
ა) $90^0-\alpha$ ბ) α გ) $180^0-\alpha$ დ) $90^0+\alpha$.

9. ვთქვათ, AB დიამეტრია, $AB=20$ სმ, C წრეწირის წერტილია. იპოვეთ ABC სამკუთხედში C წერტილიდან გავლებული მედიანა.

ა) 10 სმ ბ) 20 სმ გ) 15 სმ დ) 12 სმ.



✓**10.** AB წრეწირის დიამეტრია, $AB=10$ სმ. C წრეწირის წერტილია და $\angle CAB=60^0$. იპოვეთ AC.



ა) 10 სმ ბ) 5 სმ გ) 15 სმ დ) 4 სმ.

✓**11.** AB წრეწირის დიამეტრია, C — წრეწირის წერტილი, O — ცენტრი, $\angle CAB=\alpha$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $BC=12$ სმ. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

ა) 10 სმ ბ) 20 სმ გ) 16 სმ დ) 24 სმ.

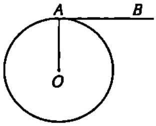
✓**12.** წრეწირის A წერტილიდან გავლებულია რადიუსის ტოლი ქორდები — AB და AC. იპოვეთ $\angle BAC$.

ა) 60^0 ბ) 120^0 გ) 150^0 დ) 90^0.

✓**13.** წრეწირის B წერტილიდან გავლებულია მართობული ქორდები — BA და BC. ცენტრიდან ამ ქორდებამდე მანძილებია, შესაბამისად, 6 სმ და 10 სმ. იპოვეთ AB და BC.

ა) 10 სმ, 6 სმ ბ) 20 სმ, 12 სმ

გ) 40 სმ, 24 სმ დ) 3 სმ, 5 სმ.

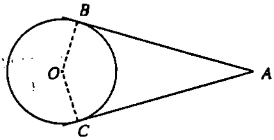


✓**14.** AB წრეწირის A წერტილზე გავლებული მხებია, AO რადიუსია, მაშინ

ა) $\angle BAO<90^0$ ბ) $\angle BAO>90^0$

გ) $\angle BAO=100^0$ დ) $\angle BAO=90^0$.

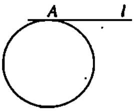
✓**15.** თუ AB და AC წრეწირის მხებებია (B და C წრეწირის წერტილებია), მაშინ



ა) $\Delta AOB=\Delta AOC$ ბ) $\Delta AOB\neq\Delta AOC$

გ) $AB\neq AC$ დ) $OB\neq OC$.

✓**16.** l წრფე წრეწირის A წერტილზე გავლებული მხებია, მაშინ A წერტილზე l წრფის მართობული წრფე



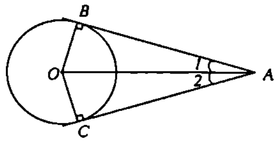
ა) წრეწირის ცენტრზე არ გადის

ბ) წრეწირის ცენტრზე გადის

გ) შეიძლება არ გადიოდეს წრეწირის ცენტრზე

დ) წრეწირს არ კვეთს O ცენტრის მიმართ A-ს სიმეტრიულ წერტილში.

✓**17.** AB და AC წრეწირის B და C წერტილებზე A წერტილიდან გავლებული მხებებია, O ცენტრია, მაშინ



ა) $\angle BAO=\angle CAO$ ბ) $\angle BAO<\angle CAO$

გ) $\angle BAO>\angle CAO$ დ) $\angle BAO\neq\angle CAO$.

✓**18.** წრეწირისადმი გავლებული მხები შეხების წერტილზე გავლებული

ა) რადიუსის პარალელურია

ბ) რადიუსის მართობულია

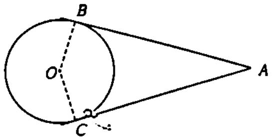
გ) ნებისმიერი წრფის მართობულია

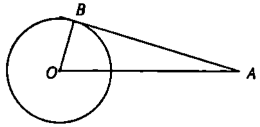
დ) ნებისმიერი ქორდის მართობულია.

✓19. AB და AC მონაკვეთები წრეწირის B და C წერტილებზე გავლებული მხებებია. რადიუსი 6,4 სმ-ია, O წრეწირის ცენტრია, $ABOC$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი 40 სმ-ია. იპოვეთ AB.

ა) 28 სმ ბ) 27,2 სმ

გ) 13,6 სმ დ) 33,6 სმ.





✓20. A წერტილიდან წრეწირის O ცენტრამდე მანძილი 26 სმ-ია, AB მხების სიგრძე 24 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

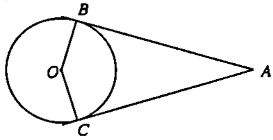
ა) 20 სმ ბ) 10 სმ

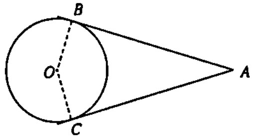
გ) 16 სმ დ) 24 სმ.

✓21. AB და AC მხებებია, $\angle BAC=60^0$, $BO=24$ სმ. იპოვეთ AO.

ა) 24 სმ ბ) 12 სმ

გ) 48 სმ დ) 96 სმ.





✓22. წრეწირის რადიუსი 12 სმ-ია, $\angle BAC=60^0$, AB და AC მხებებია, იპოვეთ AB.

ა) $12\sqrt{3}$ სმ ბ) $4\sqrt{3}$ სმ

გ) 6 სმ დ) 24 სმ.

✓23. ნახევარწრეწირის გრადუსული ზომაა

ა) 90^0 ბ) 180^0 გ) 360^0 დ) 270^0.

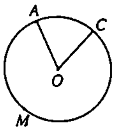
✓24. თუ წრეწირის ცენტრზე გავლებული წრფეები მართობულია, მაშინ წრეწირი ოთხ „მცირე" რკალად იყოფა. იპოვეთ თითოეულის გრადუსული ზომა.

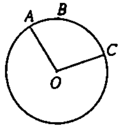
ა) 45^0 ბ) 60^0 ბ) 180^0 დ) 90^0.

✓25. თუ $\angle AOC=34^0$, მაშინ $\cup AMC=$

ა) 68^0 ბ) 292^0

გ) 316^0 დ) 326^0.





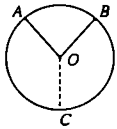
✓26. თუ $\angle AOC=96^0$, მაშინ $\cup ABC=$

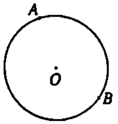
ა) 48^0 ბ) 96^0

გ) 86^0 დ) 92^0.

✓27. $\angle AOB=130^0$, C წერტილი ACB რკალს შუაზე ჰყოფს. იპოვეთ $\angle AOC$.

ა) 120^0 ბ) 115^0 გ) 165^0 დ) 135^0.





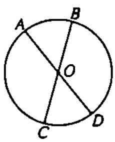
✓28. A და B წერტილებით წრეწირი გაიყო ორ ნაწილად (მცირე და დიდ რკალებად), მათი ზომების შეფარდებაა 2:3. იპოვეთ დიდი რკალის ზომა.

ა) 216^0 ბ) 144^0

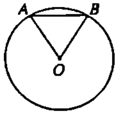
გ) 72^0 დ) 300^0.

✓29. O წრეწირის ცენტრია, $\angle AOC=120^0$, მაშინ $\cup BDA=$

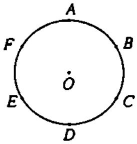
ა) 150^0 ბ) 120^0 გ) 240^0 დ) 300^0.



✓**30.** წრეწირის AB ქორდა ამ წრეწირის რადიუსის ტოლია. იპოვეთ ამ ქორდით მოჭიმული AB რკალის ზომა.



ა) 120^0 ბ) 60^0 გ) 90^0 დ) 45^0.

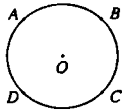


✓**31.** წრეწირი A, B, C, D, E, F წერტილებით 6 ტოლ ნაწილად იყოფა. წრეწირის რადიუსი 6 სმ-ია. იპოვეთ $ABCDEF$ ექვსკუთხედის პერიმეტრი.

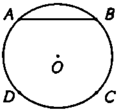
ა) 72 სმ ბ) 36 სმ

გ) 48 სმ დ) 96 სმ.

✓**32.** A, B, C და D წერტილები წრეწირს 4 ტოლ ნაწილად ჰყოფს. AB ქორდის სიგრძე 1 დმ-ია. იპოვეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.



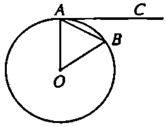
ა) 4 დმ ბ) 8 დმ გ) 2 დმ დ) 16 დმ.



✓**33.** A, B, C და D წერტილებით წრეწირი ოთხ ტოლ ნაწილად იყოფა. AB ქორდის სიგრძე 2 დმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

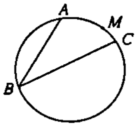
ა) $8\sqrt{2}$ დმ ბ) $2\sqrt{2}$ დმ

გ) $6\sqrt{2}$ დმ დ) $\sqrt{2}$ დმ.



✓**34.** AC მხებია, $\angle CAB=30^0$. იპოვეთ $\angle AOB$.

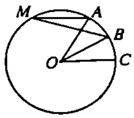
ა) 30^0 ბ) 60^0 გ) 90^0 დ) 45^0.



✓**35.** თუ AMC რკალის გრადუსული ზომა 48^0-ია. მაშინ $\angle ABC=$

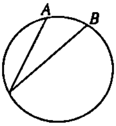
ა) 48^0 ბ) 36^0

გ) 24^0 დ) 96^0.



✓**36.** $\angle AMB=15^0$, OB არის AOC კუთხის ბისექტრისა. იპოვეთ $\angle AOC$.

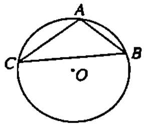
ა) 60^0 ბ) 45^0 გ) 30^0 დ) 15^0.



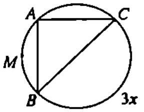
✓**37.** თუ AB რკალის ზომა 34^0-ია, მაშინ მასზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხის ზომა არის

ა) 34^0 ბ) 17^0 ბ) 20^0 დ) 27^0.

38. AB ქორდა წრეწირის რადიუსის ტოლია. იპოვეთ ACB ჩახაზული კუთხის ზომა.

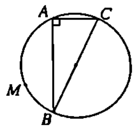


ა) 30^0 ბ) 60^0 გ) 90^0 დ) 36^0.



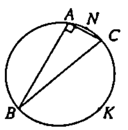
39. $AB\perp AC$ და $AB=AC$. იპოვეთ $\cup AMB$.

ა) 30^0 ბ) 60^0 გ) 90^0 დ) 45^0.



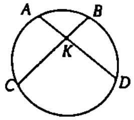
40. $AB\perp BC$ და $AB=\frac{1}{2}AC$. იპოვეთ $\cup BMC$.

ა) 120^0 ბ) 30^0 გ) 15^0 დ) 60^0.

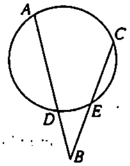


41. $AB\perp AC$ და $\cup ANC:\cup BKC=1:9$. იპოვეთ $\angle ABC$.

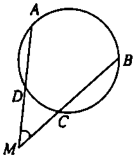
ა) 20^0 ბ) 10^0 გ) 5^0 დ) 9^0.



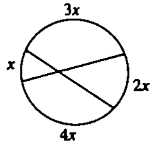
42. $\cup AB=63^0$ და $\cup CD=157^0$. იპოვეთ $\angle AKB$.
ა) 110^0 ბ) 220^0 გ) 70^0 დ) 160^0.



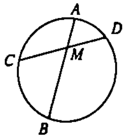
43. $\cup DE=20^0$ და $\cup AC=140^0$. იპოვეთ $\angle ABC$.
ა) 30^0 ბ) 80^0
გ) 60^0 დ) 90^0.



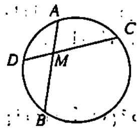
44. $\cup AB=160^0$ და $\angle M=60^0$. იპოვეთ $\cup CD$.
ა) 80^0 ბ) 60^0 გ) 90^0 დ) 40^0.



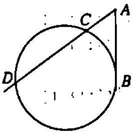
45. იპოვეთ x.
ა) 72^0 ბ) 18^0 გ) 54^0 დ) 36^0.



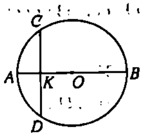
46. თუ $AM=8$, $CM=16$, $MB=12$. მაშინ $MD=$
ა) 2 ბ) 4 გ) 6 დ) 8.



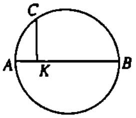
47. ვთქვათ, $CM:MD=3:2$, $AM=2$, $MB=12$. მაშინ $CM=$
ა) 6 ბ) 12 ბ) 24 დ) 18.



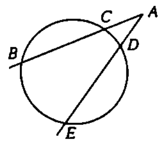
48. ვთქვათ, $AC=8$, $CD=10$, AB მხებია. იპოვეთ AB.
ა) 18 ბ) 12 ბ) 8 დ) 13.



49. AB დიამეტრია, CD — მისი მართობული ქორდა, რომელიც AB-ს K წერტილში კვეთს, $AK=8$, $KB=18$. იპოვეთ CD.
ა) 6 ბ) 4 გ) 12 დ) 24.

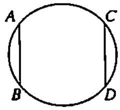


50. თუ AB დიამეტრია, CK არის წრეწირის C წერტილიდან დიამეტრისადმი გავლებული მართობი, მაშინ $CK^2=$
ა) AK^2 ბ) KB^2 გ) $AK \cdot KB$ დ) $AK+KB$.



51. $BC=12$, $AC=3$, $AD=2$. იპოვეთ ED.
ა) 22,5 ბ) 20,5 გ) 22 დ) 25.

52. წრეწირის AB ქორდა 8 სმ-ია, $\cup AB=90^0$. იპოვეთ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან AB ქორდამდე.



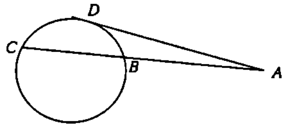
53. წრეწირში გავლებულია AB და CD ქორდები, $AB \| CD$. $\smile AB + \smile CD = 90^0$. $AB = 12$ სმ. იპოვეთ ქორდებს შორის მანძილი.

54. წრეწირის ცენტრიდან 9 სმ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებული მხების სიგრძე 7,2 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

55. A წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მკვეთის სიგრძე 36 სმ-ია, მხები — 24 სმ-ია. ცნობილია, რომ ეს მკვეთი წრეწირის ცენტრზე გადის. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

56. წრეწირის რადიუსი 6 სმ-ია. ცენტრიდან რა მანძილზეა ქორდა, რომლის სიგრძეა
ა) 2 სმ; ბ) 4 სმ; გ) 6 სმ?

57. წრეწირის რადიუსი 4 სმ-ია, AB ქორდაა, O ცენტრია. იპოვეთ ცენტრიდან ამ ქორდამდე მანძილი, თუ $\angle AOB$-ს ზომაა:
ა) 60^0; ბ) 90^0; გ) 120^0.



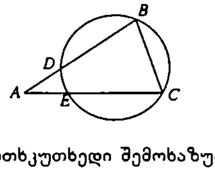
58. A წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია AD მხები (D შეხების წერტილია) და AC მკვეთი. $AD = 12$ სმ, მკვეთის შიგა მონაკვეთის — BC-ს სიგრძე 10 სმ-ია. იპოვეთ მკვეთის სიგრძე.

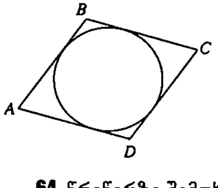
59. A წერტილიდან წრეწირისადმი, რომლის რადიუსი 12 სმ-ია, გავლებულია AB მხები (B შეხების წერტილია). $AB = 16$ სმ. იპოვეთ A წერტილიდან წრეწირის ცენტრზე გამავალი მკვეთის სიგრძე.

60. წრეწირის გარეთ მდებარე A წერტილიდან გავლებულია AC და AB მხებები (B და C შეხების წერტილებია). BC ქორდით მოჭიმული მცირე რკალი არის α. გამოსახეთ α-თი $\angle A$.

61. წრეწირის გარეთ მდებარე A წერტილიდან გავლებულ AB და AC მხებებს შორის კუთხე 60^0-ია. იპოვეთ BC ქორდით მოჭიმული მცირე რკალის გრადუსული ზომა.

62. $\smile BC = 110^0$, $\smile DB = 100^0$, $\smile EC = 120^0$. იპოვეთ:
ა) $\smile DE$; ბ) $\angle A$;
გ) $\angle B$; დ) $\angle C$.

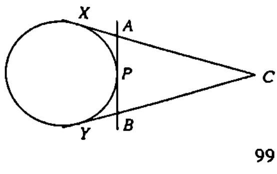




63. დაასაბუთეთ, რომ, თუ ოთხკუთხედი შემოხაზულია წრეწირზე (გვერდები წრეწირის მხებებია), მაშინ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამები ტოლია, ანუ **წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამები ტოლია.**

64. წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის სამი მომდევნო გვერდი ისე შეეფარდება, როგორც 3:2:7. ოთხკუთხედის უდიდესი გვერდი 24 სმ-ია. იპოვეთ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

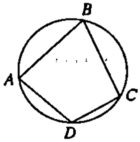
65. წრეწირისადმი გავლებულია სამი მხები — CX, CY და წრეწირის P წერტილზე გამავალი AB მხები, რომელიც კვეთს CX-ს და CY-ს, შესაბამისად, A და B წერტილებში. $CX = 10$ სმ, იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.



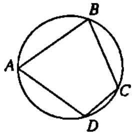
66. წრეწირის 16 სმ-ის ტოლი ქორდის შუა P წერტილზე გავლებული AB ქორდის ერთი მონაკვეთი 4-ჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ AB.

67. AB და CD ქორდები E წერტილში 30^0-იანი კუთხით იკვეთება A და B წერტილებიდან CD წრფეზე დაშვებული მართობები 2 სმ და 6 სმ-ია. იპოვეთ:

ა) AB; ბ) CE და ED, თუ $CD=19$ სმ.



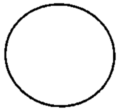
68. წრეწირში ჩახაზულია $ABCD$ ოთხკუთხედი. დაასაბუთეთ: $\angle A+\angle C=180^0$ და $\angle B+\angle D=180^0$, ანუ **წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის ყოველი ორი მოპირდაპირე კუთხის ჯამი 180^0-ია.**



69. წრეწირში ჩახაზულია $ABCD$ ოთხკუთხედი, $\angle A=30^0$, $\angle B=50^0$. იპოვეთ $\angle C$ და $\angle D$.

70. წრეწირზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ერთი კუთხე 150^0-ია. ტრაპეციის შუახაზი 40 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

§ 1.24. წრეწირის სიგრძე. წრეწირის რკალის სიგრძე. წრის ფართობი. წრიული სექტორის ფართობი



წრეწირის სიგრძის შეფარდება დიამეტრთან ყველა წრეწირისთვის ერთი და იგივე რიცხვია, ეს რიცხვი — π რიცხვი — ირაციონალური რიცხვია. მეასედებამდე სიზუსტით, $\pi \approx 3{,}14$.

მაშასადამე, წრეწირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

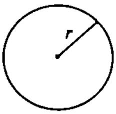
$$C=2\pi r,$$

r წრეწირის რადიუსია.

1^0-იანი რკალის სიგრძე არის $\frac{C}{360}$, ანუ $\frac{2\pi r}{360}=\frac{\pi r}{180}$.

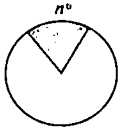
n^0-იანი რკალის სიგრძე ასე გამოითვლება:

$$l=\frac{\pi r}{180}\cdot n.$$



თუ წრის რადიუსი არის r, მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\pi r^2.$$



თუ სექტორის ცენტრული კუთხე არის n^0, მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\frac{\pi r^2\cdot n}{360}.$$

1. თუ წრეწირის დიამეტრი არის d, მაშინ სიგრძე არის

ა) $2\pi d$ ბ) πd გ) $\frac{\pi d}{2}$ დ) $4\pi d$.

2. რამდენჯერ გაიზრდება წრეწირის სიგრძე, თუ მის რადიუსს 4-ჯერ გავზრდით?

ა) 16-ჯერ ბ) 4-ჯერ გ) 2-ჯერ დ) 8-ჯერ.

3. თუ რკალის გრადუსული ზომა 60^0-ია, რადიუსი 1-ის ტოლია, მაშინ ამ რკალის სიგრძე არის

ა) $\frac{\pi}{3}$ ბ) $\frac{\pi}{6}$ გ) $\frac{2\pi}{3}$ დ) $\frac{\pi}{4}$.

4. თუ წრეწირის 120^0-იანი რკალის სიგრძე არის $\frac{4\pi}{3}$, მაშინ ამ წრეწირის რადიუსი არის

ა) 1 ბ) 2 გ) 3 დ) 4.

5. თუ წრეწირის სიგრძე არის 6π, მაშინ ამ წრეწირის რადიუსია

ა) 6 ბ) 3 გ) 4 დ) 5.

6. რამდენჯერ გაიზრდება წრის ფართობი, თუ მის რადიუსს 2-ჯერ გავზრდით?

ა) 2-ჯერ ბ) 8-ჯერ გ) 16-ჯერ დ) 4-ჯერ.

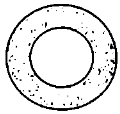
7. თუ სექტორის ცენტრული კუთხე არის 120^0, რადიუსი — r, მაშინ ამ სექტორის ფართობია

ა) $\frac{1}{3}\pi r^2$ ბ) $\frac{1}{6}\pi r^2$ გ) $\frac{1}{4}\pi r^2$ დ) $\frac{2}{3}\pi r^2$.

8. წრის სექტორის ცენტრული კუთხე არის 60^0, მისი ფართობია $\frac{2\pi}{3}$. იპოვეთ წრის რადიუსი.

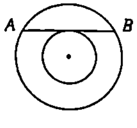
ა) 2 ბ) 1 გ) 3 დ) 4.

✓**9.** თუ დიდი წრეწირის რადიუსია 8, მცირესი — 6, მაშინ რგოლის ფართობია



ა) 56π ბ) 14π

გ) 28π დ) 21π.



✓**10.** დიდი წრეწირის AB ქორდა მცირე წრეწირს ეხება. $AB=3$. იპოვეთ რგოლის ფართობი.

ა) 9π ბ) $\frac{9\pi}{2}$ გ) 6π დ) $\frac{9\pi}{4}$.

✓**11.** წრის დიამეტრი 2,4-ია. იპოვეთ მისი ფართობი.

ა) $1{,}4\pi$ ბ) $1{,}44\pi$ გ) $5{,}76\pi$ დ) $0{,}7\pi$.

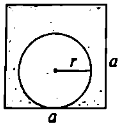
✓**12.** თუ წრეწირის სიგრძე არის C, მაშინ ამ წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობი არის

ა) $\frac{C^2}{\pi}$ ბ) $\frac{C^2}{2\pi}$ გ) $\frac{C^2}{4\pi}$ დ) $\frac{C^2}{3\pi}$.

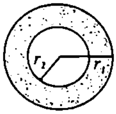
13. წრის ფორმის დიდი ხაჭაპური, რომლის რადიუსი 12 სმ-ია, 3,5 ლარი ღირს, იმ ხაჭაპურის ფასი კი, რომლის რადიუსი 9 სმ-ია, — 2,2 ლარი. ორივე ხაჭაპური ერთნაირი სისქისაა. რა უფრო ხელსაყრელია, თქვენი აზრით, მცირე ხაჭაპურის, თუ დიდი ხაჭაპურის ყიდვა („ხელსაყრელობაში"— ფართობის ერთეულში ნაკლები თანხის გადახდას ვგულისხმობთ)?

14. რა ფორმულით შეიძლება დაშტრიხული ნაწილის ფართობის პოვნა?

ა)

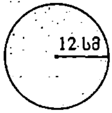


ბ)

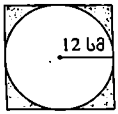


15. იპოვეთ დაშტრიხული ნაწილის ფართობია:

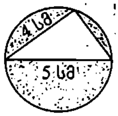
ა)



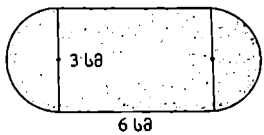
ბ)



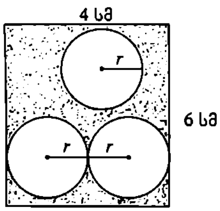
გ)



დ)



ე)



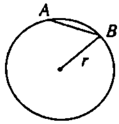
16. დაასაბუთეთ:

ა) ერთი და იმავე პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებიდან კვადრატს აქვს უდიდესი ფართობი;

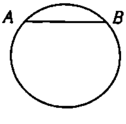
ბ) თუ კვადრატისა და წრის პერიმეტრები (შესაბამისი წრეწირის სიგრძე) ტოლია, მაშინ კვადრატის ფართობი ნაკლებია წრის ფართობზე.

17. წრეწირის რადიუსი 1-ის ტოლია. იპოვეთ იმ რკალის სიგრძე, რომლის გრადუსული ზომა არის

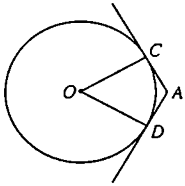
ა) 30^0 ბ) 135^0 გ) 240^0 დ) 315^0 ე) 70^0.



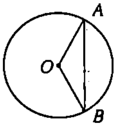
18. $AB=r$, r წრეწირის რადიუსია. იპოვეთ AB ქორდის მიერ მოჭიმული რკალის სიგრძე.



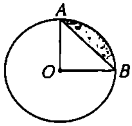
19. წრეწირის რადიუსი r-ის ტოლია. AB ქორდის მიერ მოჭიმული დიდი რკალი 2-ჯერ მეტი სიგრძისაა, ვიდრე მცირე რკალი. გამოსახეთ r-ით AB-ს სიგრძე.



20. AC და AD არის A წერტილიდან გავლებული მხებები (C და D შეხების წერტილებია). $AC=1$, $\angle CAD=120^0$. იპოვეთ CD რკალის სიგრძე.



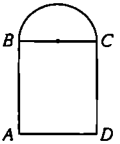
21. წრის რადიუსი არის R და AOB სექტორის ცენტრული კუთხე — φ^0. გამოსახეთ R და φ-ით სეგმენტის ფართობი (დაშტრიხული ნაწილი).



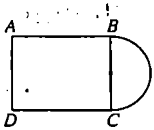
22. წრის რადიუსია 1. იპოვეთ სეგმენტის ფართობი, თუ $\angle AOB=$

ა) 30^0, ბ) 45^0, გ) 60^0, დ) 90^0,

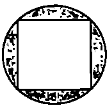
ე) 120^0, ვ) 135^0, ზ) 150^0.



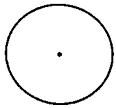
23. ფანჯარას სურათზე მითითებული ფორმა აქვს — მართკუთხედია, რომლის ერთ მხარეს წრის ნახევარია დამატებული. ფანჯრის პერიმეტრია P. მართკუთხედის გვერდების რა შეფარდებისთვის ატარებს ფანჯარა მეტ შუქს?



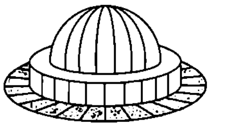
24. ნაკვეთს აქვს წინა ამოცანაში წარმოდგენილი ფიგურის ფორმა. მართკუთხედის ფორმის ნაწილზე ხორბალი უნდა დაითესოს, მისი ყოველი კვ. მ 10 თეთრ მოგებას იძლევა. დანარჩენ ნაწილზე სიმინდი დაითესება და მოგება ყოველ კვ. მეტრზე 12 თეთრია. ნაკვეთის პერიმეტრი 800 მეტრია. რა ზომები უნდა ჰქონდეს ნაკვეთს, რომ მაქსიმალური მოგების მიღება იყოს შესაძლებელი?



25. წრეში ჩახაზული კვადრატის ფართობი 50 სმ^2-ია. იპოვეთ დაშტრიხული ნაწილის ფართობი.



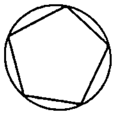
26. ფოლადის ფურცელს წრის ფორმა აქვს. რამდენჯერ უნდა შემცირდეს ამ წრის რადიუსი, რომ მისი მასა განახევრდეს?



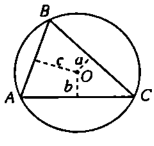
27. ცირკის შენობის ფუძეს წრის ფორმა აქვს, რომლის დიამეტრი 40 მ-ია. ამ წრის გარშემო — 5 მ სიგანის რგოლზე უნდა დაიგოს ასფალტი. 1 მ^2-ის ასფალტის დაგება ღირს 30 ლ. რა თანხა დასჭირდება ცირკის გარშემო ასფალტის დაგებას?

28. ქალაქში მოაწყვეს წრის ფორმის სპორტული მოედანი. მისი საზღვრის შემოვლას 2 მ/წმ სიჩქარით სჭირდება 30 წამით მეტი დრო, ვიდრე წრის დიამეტრის ამავე სიჩქარით გავლას. იპოვეთ ამ მოედნის რადიუსი.

§ 1.25. წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები. წესიერი მრავალკუთხედი



მრავალკუთხედს ეწოდება **წრეწირში ჩახაზული**, თუ მისი ყველა წვერო წრეწირს ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში ვიტყვით აგრეთვე — **წრეწირი შემოხაზულია მრავალკუთხედზე**.



ნებისმიერ სამკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. შემოხაზული წრეწირის ცენტრი სამკუთხედის გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილია. შემოხაზული წრეწირის R რადიუსი შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულებით:

$$R = \frac{abc}{4S},$$

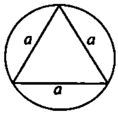
$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, S — ფართობი.

თუმცა, ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში სხვა ფორმულითაც შეიძლება ვისარგებლოთ:

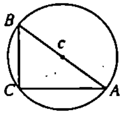
თუ სამკუთხედი წესიერია (ტოლგვერდაა), მაშინ

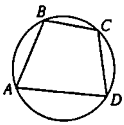
$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ შემოხაზული წრის ცენტრი ჰიპოტენუზის შუა წერტილია და რადიუსი ჰიპოტენუზის ნახევარია.

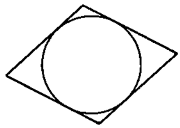
$$R = \frac{c}{2}.$$

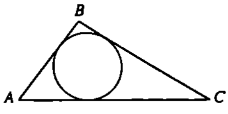




თქვენ უკვე გაეცანით წრეწირში ჩახაზულ ოთხკუთხედს — თუ წრეწირში ჩახაზულია ოთხკუთხედი, მაშინ მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი არის 180^0, შებრუნებით — თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი არის 180^0, მაშინ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი.

მრავალკუთხედს ეწოდება **წრეწირზე შემოხაზული**, თუ მისი ყოველი გვერდი ეხება წრეწირს. ამ შემთხვევაში ვამბობთ აგრეთვე: **წრეწირი ჩახაზულია მრავალკუთხედში.**





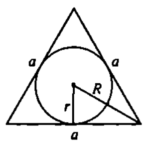
ნებისმიერ სამკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა; ჩახაზული წრეწირის r რადიუსი შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულით:

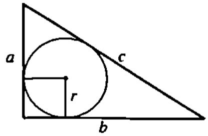
$$r = \frac{2S}{a+b+c},$$ S სამკუთხედის ფართობია, a, b, c — გვერდები.

სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია.

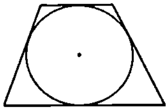
კერძო შემთხვევებში შეიძლება გამოვიყენოთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსის სხვა ფორმულებიც.

თუ სამკუთხედი წესიერია, მაშინ $r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.





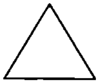
თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ $r = \frac{a+b-c}{2}$.

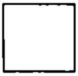


გავიხსენოთ წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის თვისება — მისი მოპირდაპირე გვერდების ჯამები ტოლია; შებრუნებით — თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამები ტოლია, მაშინ ამ ოთხკუთხედში ჩაიხაზება წრეწირი.

წესიერი მრავალკუთხედი ეწოდება მრავალკუთხედს, რომლის კუთხეები ტოლია და გვერდებიც ტოლია.

წესიერი მრავალკთხედების მაგალითები:

წესიერი სამკუთხედი (ტოლგვერდა სამკუთხედი) 

წესიერი ოთხკუთხედი (კვადრატი) 

წესიერი ექვსკუთხედი 

ნებისმიერი წესიერი მრავალკუთხედისთვის არსებობს ამ მრავალკუთხედში ჩახაზული და მრავალკუთხედზე შემოხაზული წრეწირები. ამ წრეწირების ცენტრები ემთხვევა ერთმანეთს და კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია.

შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსები, შესაბამისად, R და r, შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულებით:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}, \quad r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}},$$ a გვერდია, n — გვერდების რიცხვი.

კერძოდ, თუ n=3, მაშინ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

თუ n=4, მაშინ $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$;

თუ n=6, მაშინ $R=a$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

✓**1.** ნებისმიერ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ამ სამკუთხედის
ა) სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია
ბ) გვერდების შუა მართობების გადაკვეთის წერტილია
გ) ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია
დ) მედიანების გადაკვეთის წერტილია.

✓**2.** ნებისმიერ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ამ სამკუთხედის
ა) სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია
ბ) გვერდების შუა მართობების გადაკვეთის წერტილია
გ) ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია
დ) მედიანების გადაკვეთის წერტილია.

✓3. მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი
ა) მცირე კათეტის შუა წერტილია
ბ) დიდი კათეტის შუა წერტილია
გ) სამკუთხედის შიგნითაა
დ) ჰიპოტენუზის შუა წერტილია.

✓4. ნებისმიერ ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი
ა) ფუძესთან მდებარე ერთ-ერთი კუთხის ბისექტრისას ეკუთვნის
ბ) ფერდისადმი გავლებულ სიმაღლეს ეკუთვნის
გ) ფერდისადმი გავლებულ მედიანას ეკუთვნის
დ) ფუძისადმი გავლებულ სიმაღლეს ეკუთვნის.

✓5. თუ წესიერ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი არის R, მაშინ ამ სამკუთხედის გვერდი არის
ა) $R\sqrt{2}$ ბ) $R\sqrt{3}$ გ) $\frac{R}{2}$ დ) $2R$.

✓6. თუ კვადრატზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი არის R, მაშინ კვადრატის გვერდი არის
ა) $R\sqrt{2}$ ბ) $R\sqrt{3}$ გ) $2R$ დ) $\frac{R}{2}$.

✓7. თუ წესიერ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი არის R, მაშინ ამ ექვსკუთხედის გვერდი არის
ა) $R\sqrt{3}$ ბ) $2R$ გ) R დ) $3R$.

✓8. თუ წესიერ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r, მაშინ ამ სამკუთხედის გვერდი არის
ა) $2r$ ბ) $2r\sqrt{3}$ გ) $r\sqrt{3}$ დ) r.

✓9. თუ კვადრატში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი არის r, მაშინ ამ კვადრატის გვერდია
ა) $2r$ ბ) $r\sqrt{2}$ გ) $3r$ დ) $r\sqrt{3}$.

✓10. თუ წესიერ ექვსკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r, მაშინ ამ ექვსკუთხედის გვერდი არის
ა) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ ბ) $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ გ) $2r$ დ) $\frac{r\sqrt{3}}{3}$.

✓11. თუ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი არის 8 სმ, BC=8 სმ, მაშინ $\angle A$=
ა) 60^0 ბ) 30^0 გ) 40^0 დ) 90^0.

✓12. თუ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი არის 8 სმ, BC=16 სმ, მაშინ $\angle A$=
ა) 60^0 ბ) 30^0 გ) 45^0 დ) 90^0.

✓13. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 12 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.
ა) 12 სმ ბ) 8 სმ გ) 4 სმ დ) 6 სმ.

✓14. თუ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 6 სმ და 8 სმ სიგრძისაა, მაშინ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია
ა) 2 სმ ბ) 1 სმ გ) 4 სმ დ) 6 სმ.

✓15. გამოსახეთ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი a და b კათეტებით.
ა) $r=\frac{a+b}{2}$ ბ) $r=\frac{a+2b}{2}$ გ) $r=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ დ) $r=\frac{2a+b}{2}$.

✓**16.** მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი გამოსახეთ a და b კათეტებით.

ა) $R = \frac{a + b - \sqrt{a^2+b^2}}{2}$ ბ) $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

გ) $R = \sqrt{a^2+b^2}$ დ) $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$.

✓**17.** მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 20 სმ-ია. ჩახაზული წრეწირის რადიუსია 4 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

ა) 28 სმ ბ) 48 სმ გ) 38 სმ დ) 58 სმ.

✓**18.** წესიერ სამკუთხედში ჩახაზული და ამავე სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსების ჯამი 27 სმ-ია. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) 6 სმ ბ) 9 სმ გ) 12 სმ დ) 24 სმ.

✓**19.** $ABCD$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში. $\angle A=70^0$. იპოვეთ $\angle C$.

ა) 70^0 ბ) 110^0 გ) 100^0 დ) 90^0.

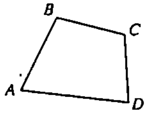
✓**20.** თუ $\angle A+\angle C=180^0$, მაშინ C წერტილი ABD სამკუთხედზე

ა) შემოხაზული წრეწირის შიგნითაა

ბ) შემოხაზული წრეწირის გარეთაა

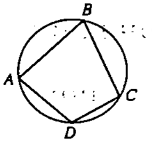
გ) შემოხაზულ წრეწირზეა

დ) შემოხაზული წრეწირის ცენტრია.



✓**21.** $ABCD$ ოთხკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი. $AB=BC=3$ სმ, $CD=5$ სმ, მაშინ $AD=$

ა) 3 სმ ბ) 5 სმ გ) 8 სმ დ) 4 სმ.



✓**22.** $ABCD$ ოთხკუთხედი წრეწირშია ჩახაზული, $\smile AB=70^0$, $\smile BC=40^0$. იპოვეთ $\angle B$.

ა) 55^0 ბ) 125^0

გ) 135^0 დ) 115^0.

✓**23.** $ABCD$ ოთხკუთხედი წრეწირშია ჩახაზული, $\angle A:\angle B:\angle C=4:3:1$, მაშინ $\angle A$

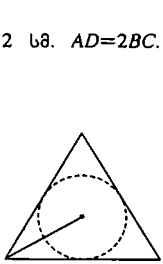
ა) $\angle C+\angle D$ ბ) $\angle C$ გ) $\angle D$ დ) $2\angle D$.

✓**24.** $ABCD$ ტრაპეცია შემოხაზულია წრეწირზე. ტრაპეციის პერიმეტრი 90 სმ-ია. $AD:BC=5:4$. იპოვეთ AD.

ა) 20 სმ ბ) 25 სმ გ) 45 სმ დ) 40 სმ.

✓**25.** $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეცია შემოხაზულია წრეწირზე. $AB=CD=12$ სმ. $AD=2BC$. იპოვეთ AD.

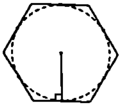
ა) 8 სმ ბ) 24 სმ გ) 16 სმ დ) 12 სმ.



✓**26.** წესიერი სამკუთხედის ცენტრიდან (სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრიდან) ერთ-ერთ წვერომდე მანძილი 5,2 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი.

ა) 5,2 სმ ბ) $5{,}2\sqrt{2}$ სმ

გ) $5{,}2\sqrt{3}$ სმ დ) $4{,}8\sqrt{3}$ სმ.



✓**27.** წესიერი ექვსკუთხედის ცენტრიდან გვერდამდე მანძილი 2,4 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან ერთ-ერთ წვერომდე.

ა) $\frac{4,8}{\sqrt{6}}$ სმ ბ) $1,2\sqrt{3}$ სმ

გ) $2,4\sqrt{3}$ სმ დ) $1,6\sqrt{3}$ სმ.

✓**28.** წესიერ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი 16 სმ-ია. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $8\sqrt{3}$ სმ ბ) $16\sqrt{3}$ სმ გ) $12\sqrt{3}$ სმ დ) $24\sqrt{3}$ სმ.

✓**29.** თუ წესიერ n-კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი არის r, მაშინ ამ n-კუთხედის გვერდი არის

ა) $2r\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}$ ბ) $2r\operatorname{tg}\frac{360^0}{n}$ გ) $2r\operatorname{tg}\frac{90^0}{n}$ დ) $r\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}$.

✓**30.** თუ წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი არის R, მაშინ ამ n-კუთხედის გვერდია

ა) $2R\sin\frac{360^0}{n}$ ბ) $2R\sin\frac{180^0}{n}$ გ) $2R\operatorname{tg}\frac{90^0}{n}$ დ) $2R\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}$.

✓**31.** თუ წესიერი ექვსკუთხედის გვერდია a, შემოხაზული წრეწირის რადიუსი — R, ჩახაზული წრეწირის რადიუსი — r, მაშინ

ა) $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $r=a$ ბ) $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$

გ) $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $r=\frac{a}{2}$ დ) $R=a$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

✓**32.** ვთქვათ, კვადრატის გვერდი არის a, კვადრატზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი — R, ჩახაზული წრეწირის რადიუსი — r. მაშინ

ა) $R=a$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ბ) $R=a$, $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$

გ) $R=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $r=\frac{a}{2}$ დ) $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $r=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

✓**33.** იპოვეთ სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსები, თუ მისი გვერდებია:

ა) 3, 4, 5; ბ) 13, 14, 15; გ) 5, 12, 13; დ) 10, 10, 16.

34. $ABCD$ ოთხკუთხედში $\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=1:2:3:2$, O ჩახაზული წრეწირის ცენტრია. იპოვეთ $\angle AOD$, $\angle DOC$, $\angle BOC$ და $\angle AOB$.

35. წესიერ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი და ამ სამკუთხედზე შემოხაზულია წრეწირი. იპოვეთ ამ წრეწირების სიგრძეების შეფარდება.

36. ამოხსენით წინა ამოცანის ანალოგიური ამოცანა, როცა სამკუთხედის ნაცვლად გვაქვს:

ა) კვადრატი; ბ) წესიერი n-კუთხედი.

37. იპოვეთ იმ წრეწირის სიგრძე, რომელიც შემოხაზულია

ა) a და b კათეტების მქონე მართკუთხა სამკუთხედზე;

ბ) მართკუთხა სამკუთხედზე, რომლის კათეტია a, მოპირდაპირე კუთხე — α.

38. იპოვეთ იმ წრის ფართობი, რომელიც შემოხაზულია

ა) 1-ის ტოლი გვერდის მქონე წესიერ სამკუთხედზე;

ბ) 1-ის ტოლი კათეტის მქონე ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედზე.

39. იპოვეთ წინა ამოცანაში ჩამოთვლილ სამკუთხედებში ჩახაზული წრეების ფართობები.

40. იპოვეთ იმ ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი, რომლის ფუძე 12 სმ-ია, ფერდი — 6,5 სმ.

41. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი 54 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის შიგნით მოთავსებული ყველა ისეთი კონცენტრული წრეწირის ოდენობა, რომლის ცენტრი სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს ემთხვევა და რადიუსის სიგრძე სანტიმეტრებში მთელი რიცხვით გამოისახება.

42. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე არის α, $sin\alpha=\frac{3}{5}$. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობის შეფარდება სამკუთხედის ფართობთან.

43. ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზულია წრეწირი. ამ ტრაპეციის მახვილი კუთხის სინუსი $\frac{\pi}{4}$-ის ტოლია.

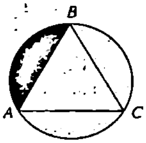
იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობის შეფარდება ჩახაზული წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობთან.

44. ტოლფერდა ტრაპეცია წრეწირზეა შემოხაზული. ტრაპეციის ბლაგვი კუთხე 120^0-ია, დიდი ფუძე — 12 სმ. იპოვეთ წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობი.

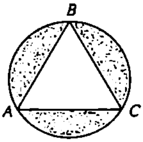
45. ტოლფერდა ტრაპეცია შემოხაზულია წრეწირზე, ტრაპეციის შუახაზი 80 სმ-ია, ბლაგვი კუთხე — 150^0. იპოვეთ წრის ფართობი.

46. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 2 სმ და 6 სმ. ამ ტრაპეციაში შეიძლება ჩაიხაზოს წრეწირი. იპოვეთ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირით შემოსაზღვრული წრის რადიუსი.

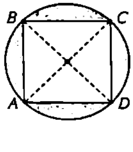
47. ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე 120^0-ია. ჩახაზული წრეწირის რადიუსი არის $\sqrt{12}$ სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.



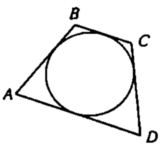
48. *ABC* წესიერი სამკუთხედია, მასზე შემოხაზულია წრეწირი. იპოვეთ *AB* ქორდით შემოსაზღვრული სეგმენტების ფართობების შეფარდება.



49. *ABC* სამკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში. წრეწირის რადიუსი 8 სმ-ია. იპოვეთ დაშტრიხული ნაწილის ფართობი.

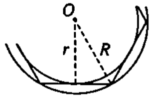


50. *ABCD* კვადრატია. წრეწირის რადიუსი 8 სმ-ია. იპოვეთ დაშტრიხული ნაწილის ფართობი.



51. *ABCDEF* წესიერი ექვსკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში, რომლის რადიუსი 16 სმ-ია. იპოვეთ დაშტრიხული ნაწილის ფართობი.

§ 1.26. ᲬᲔᲡᲘᲔᲠᲘ ᲛᲠᲐᲕᲐᲚᲙᲣᲗᲮᲔᲓᲘᲡ ᲤᲐᲠᲗᲝᲑᲘ

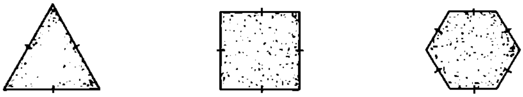


ვთქვათ, წესიერი n-კუთხედის გვერდი არის a, ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r, შემოხაზული წრეწირის რადიუსია R. ამ n-კუთხედის S ფართობი შეიძლება ასე გამოვთვალოთ:

$S=\frac{1}{2}r\cdot n\cdot a$, ანუ $S=\frac{1}{2}p\cdot r$ (p მრავალკუთხედის პერიმეტრია);

$$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^0}{n}.$$

გამოვყოთ წესიერი სამკუთხედის, კვადრატისა და წესიერი ექვსკუთხედის შემთხვევები, მათი ფართობები შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულებით:



$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\qquad$ $S=a^2$ $\qquad$ $S=\frac{a^2\cdot 3\sqrt{3}}{2}$

✓**1.** თუ წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი არის 1, მაშინ მისი ფართობი ტოლია

ა) $3\sqrt{3}$ $\qquad$ ბ) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ გ) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ $\qquad$ დ) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

✓**2.** თუ წესიერი სამკუთხედის გვერდი არის 2, მაშინ ფართობი ტოლია

ა) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad$ გ) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ $\qquad$ დ) $\sqrt{3}$.

✓**3.** წრეწირში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი $18\sqrt{3}$ სმ²-ია. იპოვეთ ამ წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობი.

ა) 6π სმ² $\qquad$ ბ) 12π სმ² $\qquad$ გ) 36π სმ² $\qquad$ დ) 24π სმ².

✓**4.** R რადიუსიან წრეწირში ჩახაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

ა) $S=4R^2$ $\qquad$ ბ) $S=2R^2\sqrt{3}$ $\qquad$ გ) $S=\frac{4R^2\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ დ) $S=2R^2\sqrt{2}$.

✓**5.** r-რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდი 1-ია, გამოითვლება ფომულით

ა) $S=2r$ $\qquad$ ბ) $S=3r$ $\qquad$ გ) $S=6r$ $\qquad$ დ) $S=4r$.

6. იპოვეთ $R=12$ სმ რადიუსის მქონე წრეწირში ჩახაზული წესიერი n-კუთხედის ფართობი, თუ:

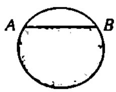
ა) $n=4$; $\qquad$ ბ) $n=6$; $\qquad$ გ) $n=8$.

7. იპოვეთ სხვაობა $R=2$ დმ რადიუსის მქონე წრის ფართობისა და სათანადო წრეწირში ჩახაზული წესიერი n-კუთხედის ფართობს შორის, თუ:

ა) $n=8$; $\qquad$ ბ) $n=12$.

8. წრეწირში ჩახაზული წესიერი ოთხკუთხედის ფართობი 11,52 სმ^2-ია. იპოვეთ ამავე წრეწირში ჩახაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი.

9. სურათზე გამოსახული წრეწირის რადიუსი 40 სმ-ია. AB ამ წრეწირში ჩახაზული n-კუთხედის გვერდია. იპოვეთ სურათზე დაშტრიხული სეგმენტის ფართობი, თუ:



ა) $n=6$; ბ) $n=3$; გ) $n=8$; დ) $n=12$.

10. წრეწირში ჩახაზული წესიერი თორმეტკუთხედის გვერდი 15 სმ-ია. იპოვეთ ამ თორმეტკუთხედის ერთ-ერთი გვერდის მიერ შექმნილი ორივე სეგმენტის ფართობი.

11. იპოვეთ $R=8$ სმ რადიუსის მქონე წრეწირში ჩახაზული n-კუთხედის ფართობი, თუ:
ა) $n=3$; ბ) $n=4$; გ) $n=5$.

12. იპოვეთ $r=4$ სმ რადიუსის მქონე წრეწირზე შემოხაზული n-კუთხედის ფართობი, თუ:
ა) $n=3$; ბ) $n=4$; გ) $n=5$.

13. ორი წესიერი n-კუთხედის გვერდებია a და b. იპოვეთ:
ა) ამ მრავალკუთხედების პერიმეტრების შეფარდება,
ბ) ამ მრავალკუთხედების ფართობების შეფარდება.

14. R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია წესიერი n-კუთხედი და ამავე წრეწირზე შემოხაზულია n-კუთხედი. იპოვეთ ამ მრავალკუთხედების:
ა) პერიმეტრების შეფარდება,
ბ) ფართობების შეფარდება, როცა $n=3$, $n=4$, $n=6$.

15. დაამტკიცეთ, რომ R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზული წესიერი n-კუთხედის ფართობი შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:
$$S=\frac{1}{2}P_nR\cos\frac{180^0}{n},$$ სადაც n მრავალკუთხედის პერიმეტრია.

16. წესიერი n-კუთხედის უმცირესი დიაგონალი გამოსახეთ a გვერდით. იპოვეთ ეს დიაგონალი, თუ:
ა) $a=1$, $n=5$; ბ) $a=5$, $n=6$.

17. R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია წესიერი ოთხკუთხედი. ოთხკუთხედის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუა წერტილებზე გავლებულია ქორდა. იპოვეთ ამ ქორდის სიგრძე, თუ
ა) $R=2$; ბ) $R=3$.

II თავი

გეომეტრიული გარდაქმნები

M სიმრავლის ამავე M სიმრავლეზე ბიექციურ (ურთიერთცალსახა) ასახვას ეწოდება M სიმრავლის გარდაქმნა. მაშასადამე, M სიმრავლის გარდაქმნა არის ისეთი ასახვა M სიმრავლისა M სიმრავლეზე, როცა M სიმრავლის განსხვავებულ ელემენტებს ამავე სიმრავლის გასხვავებული ელემენტები შეესაბამება. თუ M არის სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, მაშინ მის გარდაქმნას **გეომეტრიული გარდაქმნა** ეწოდება.

თუ გეომეტრიული გარდაქმნა ისეთია, რომ სიბრტყის ყოველ X წერტილს შეესაბამება იგივე X წერტილი, მაშინ ამ გეომეტრიულ გადაქმნას **იგივური გარდაქმნა** ეწოდება. მაშასადამე, თუ I იგივური გარდაქმნაა, მაშინ ყოველი X წერტილისთვის $I(X)=X$.

ყოველი f გარდაქმნისთვის არსებობს შექცეული გარდაქმნა — f^{-1} (თუ რაიმე X წერტილისთვის $f(X)=X'$, მაშინ $f^{-1}(X')=X$).

f გეომეტრიულ გარდაქმნას ეწოდება **გადაადგილება** (მოძრაობა, იზომეტრიული ასახვა), თუ სიბრტყის ყოველ X და Y წერტილებს შორის მანძილი ტოლია მათ სახეებს შორის მანძილის — ანუ, თუ $X'=f(X)$, $Y'=f(Y)$, მაშინ $XY=X'Y'$.

გადაადგილებებია: ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრია, პარალელური გადატანა, მობრუნება.

არსებობს გეომეტრიული გარდაქმნა, რომელიც არ არის გადაადგილება: **ჰომოთეტიის გარდაქმნა**. ჰომოთეტია და გადაადგილება მსგავსების გარდაქმნის კერძო შემთხვევებია. მსგავსების გარდაქმნა k კოეფიციენტით ($k\neq0$) არის სიბრტყის გარდაქმნა, როცა ნებისმიერ X და Y წერტილებს შეესაბამება ისეთი X' და Y' წერტილები, რომ $X'Y'=kXY$.

ამ თავში შევისწავლით გადაადგილებებსა და ჰომოთეტიის გარდაქმნას.

ახლა კი ჩამოვთვალოთ **გადაადგილებების თვისებები:**

ა) იგივური გარდაქმნა გადაადგილებაა;

ბ) ორი გადაადგილების კომპოზიცია გადაადგილებაა;

გ) გადაადგილების შექცეული ასახვა გადაადგილებაა;

დ) თუ A', B' და C' არის, შესაბამისად, A, B და C წერტილების სახეები რაიმე გადაადგილების დროს და A, B და C ერთ წრფეს ეკუთვნის ისე, რომ B არის A-სა და C-ს შორის, მაშინ A', B' და C' წერტილებიც ეკუთვნის ერთ რაიმე წრფეს, ამასთანავე, B' არის A'-სა და C'-ს შორის;

ე) გადაადგილებისას: მონაკვეთი აისახება მონაკვეთზე, სხივი აისახება სხივზე, წრფე აისახება წრფეზე, ფიგურა — მის ტოლ ფიგურაზე.

მსგავსების გარდაქმნის თვისებებია:

ა) იგივური ასახვა მსგავსების გარდაქმნაცაა ($k=1$);

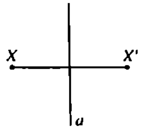
ბ) მსგავსების გარდაქმნების კომპოზიცია მსგავსების გარდაქმნაა;

გ) მსგავსების გარდაქმნის შექცეული ასახვა მსგავსების გარდაქმნაა;

დ) მსგავსების გარდაქმნისას ყოველი სამი A, B, C წერტილი, რომელიც ერთ წრფეს ეკუთვნის, აისახება ერთ წრფეზე მდებარე A', B', C' წერტილებზე, ამასთანავე, თუ B არის A-სა და C შორის, მაშინ B' არის A'-სა და B'-ს შორის;

ე) მსგავსების გარდაქმნისას — მონაკვეთი აისახება მონაკვეთზე, სხივი აისახება სხივზე, წრფე აისახება წრფეზე, პარალელური წრფეები აისახება პარალელურ წრფეებზე, კუთხე აისახება მის ტოლ კუთხეზე, წრეწირი — წრეწირზე; ნებისმიერი ორი მონაკვეთის სიგრძეთა შეფარდება მსგავსების გარდაქმნისას არ იცვლება.

§ 2.1. ღერძული სიმეტრია

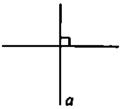


X და *X'* წერტილებს *a* **წრფის მიმართ სიმეტრიული წერტილები** ეწოდება, თუ ეს წრფე *XX'* მონაკვეთის მართობულია და მის შუა წერტილზე გადის.

სიმეტრია *a* ღერძის მიმართ ეწოდება სიბრტყის თავის თავზე ასახვას, რომელიც სიბრტყის ყოველ წერტილს ასახავს მის სიმეტრიულ წერტილზე (*a* წრფის მიმართ). ამ ასახვას ასე ჩავწერთ: S_a.

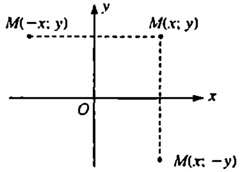
ღერძული სიმეტრია არის გადაადგილება, ამიტომ, ღერძულ სიმეტრიას აქვს გადაადგილების ყველა თვისება. ამასთანავე,

1) ღერძული სიმეტრიის უძრავი წერტილები (წერტილები, რომლებიც თავის თავზე აისახება) მხოლოდ ის წერტილებია, რომლებიც სიმეტრიის ღერძზეა;



2) ყოველი წრფე, რომელიც მართობულია *a* წრფის, თავის თავზე აისახება;

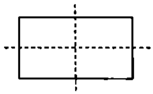
3) თუ S_a ღერძული სიმეტრიაა, მაშინ კომპოზიცია $S_a \circ S_a$ არის იგივური ასახვა.



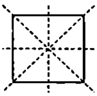
Ox ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიისას $M(x;\ y)$ წერტილი აისახება $M(x;\ -y)$ წერტილზე, *Oy* ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიისას $M(x;\ y)$ წერტილი აისახება $M(-x;\ y)$ წერტილზე.

თუ ფიგურა თავის თავზე აისახება რაიმე ღერძის მიმართ სიმეტრიისას, მაშინ ვიტყვით, რომ ფიგურა სიმეტრიულია თავისი თავის ამ ღერძის მიმართ. აღნიშნულ ღერძს ფიგურის **სიმეტრიის ღერძი** ეწოდება.

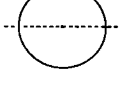
მაგალითი 1. წრფეს უსასრულოდ ბევრი სიმეტრიის ღერძი აქვს — თვით ეს წრფე და ნებისმიერი წრფე, რომელიც მისი მართობულია.



მაგალითი 2. მართკუთხედს თუ ის კვადრატს არ წარმოადგენს, მხოლოდ ორი სიმეტრიის ღერძი აქვს — გვერდების შუა მართობები.

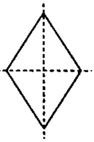


მაგალითი 3. კვადრატს ორი სიმეტრიის ღერძი აქვს — დიაგონალებზე გავლებული წრფეები და გვერდების შუა მართობები.



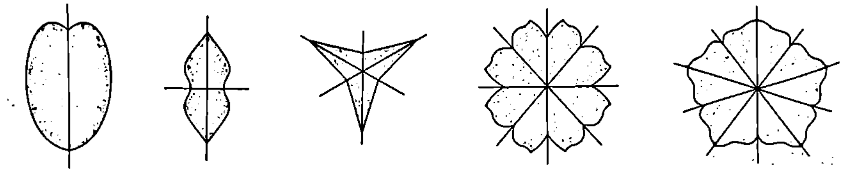
მაგალითი 4. წრეწირი (წრე) სიმეტრიულია მის ცენტრზე გამავალი ნებისმიერი წრფის მიმართ.

მაგალითი 5. სამკუთხედს მხოლოდ მაშინ აქვს სიმეტრიის ღერძი, როცა ის ტოლფერდაა – ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროზე გავლებული ფუძის მართობული წრფე სამკუთხედის სიმეტრიის ღერძია. ტოლგვერდა სამკუთხედს სამი სიმეტრიის ღერძი აქვს.



მაგალითი 6. რომბის დიაგონალებზე გამავალი წრფეები რომბის სიმეტრიის ღერძებია.

სურათზე გამოსახულია ფიგურები, რომლებსაც აქვს ერთი, ორი, სამი, ოთხი ან ხუთი სიმეტრიის ღერძი.



მაგალითი 7. თუ OY ღერძის მიმართ სიმეტრიისას $M(x;\ y)$ წერტილი აისახება $M'(x';\ y')$-ზე, მაშინ

$$\begin{cases} x'=-x, \\ y'=y. \end{cases}$$

მაშასადამე, Oy ღერძის მიმართ სიმეტრიისას $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$ წრფე აისახება $-ax+by+c=0$ წრფეზე.

მაგალითი 8. თუ Ox ღერძის მიმართ სიმეტრიისას $M(x;\ y)$ წერტილი აისახება $M'(x';\ y')$ წერტილზე, მაშინ

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y. \end{cases}$$

მაშასადამე, ამ სიმეტრიისას $ax+by+c=0$ წრფე აისახება $ax-by+c=0$ წრფეზე.

მაგალითი 9. $y=x$ წრფის მიმართ სიმეტრიისას $M(x;\ y)$ წერტილი აისახება $M'\ (x';\ y')$ წერტილზე, ე. ი. თუ $M(x;y)\rightarrow M'(x';\ y')$, მაშინ $x'=y$, $y'=x$. მაშასადამე, ამ სიმეტრიისას $ax+by+c=0$ წრფე აისახება $bx+ay+c=0$ წრფეზე, კერძოდ, $y=kx+l$ წრფე აისახება $y=\frac{1}{k}x-\frac{l}{k}$ წრფეზე.

ტ

✓1. თუ $A(x_1;\ y_1)$ და $B(x_2;\ y_2)$ აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია, მაშინ აუცილებლად

ა) $x_1=x_2,\ y_1=y_2$ ბ) $x_1=x_2,\ y_1=-y_2$ გ) $x_1=-x_2,\ y_1=y_2$ დ) $x_1=-x_2,\ y_1=-y_2$.

✓2. ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული ყოველი $A(x_1;\ y_1)$ და $B(x_2;\ y_2)$ წერტილებისთვის

ა) $x_1=x_2,\ y_1=y_2$ ბ) $x_1=x_2,\ y_1=-y_2$ გ) $x_1=-x_2,\ y_1=y_2$ დ) $x_1=-x_2,\ y_1=-y_2$.

✓3. თუ A და B წერტილები სიმეტრიულია a წრფის მიმართ, მაშინ

ა) AB წრფე a წრფის პარალელურია

ბ) a არის A წერტილზე AB-ს მართობულად გავლებული წრფე

გ) a არის B წერტილზე AB-ს მართობულად გავლებული წრფე

დ) a არის AB მონაკვეთის შუა მართობი.

✓4. თუ S_a არის a წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრია, $S_a(X)=X'$, $S_a(Y)=Y'$, მაშინ

ა) $X'Y'\neq XY$ ბ) $X'Y'>XY$ გ) $X'Y'<XY$ დ) $X'Y'=XY$.

✓5. იპოვეთ წერტილი, რომელიც $(-93;\ 101)$ წერტილის სიმეტრიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ.

ა) $(-93;\ 101)$ ბ) $(93;\ 101)$ გ) $(-93;\ -101)$ დ) $(93;\ -101)$.

✓**6.** ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძისადმი გავლებული ბისექტრისის შემცველი წრფე ამ სამკუთხედის

ა) სიმეტრიის ღერძი არ არის

ბ) სიმეტრიის ღერძი შეიძლება არ იყოს

გ) სიმეტრიის ღერძის მართობულია

დ) სიმეტრიის ღერძია.

✓**7.** *ABCD* რომბის სიმეტრიის ღერძებია

ა) *AB* და *CD* წრფეები ბ) *AB* წრფე

გ) *CD* წრფე დ) *AC* და *BD* წრფეები.

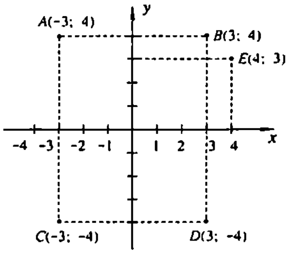
✓**8.** ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმეტრიის ღერძებია

ა) მედიანებზე გამავალი სამივე წრფე

ბ) გვერდებზე გამავალი წრფეები

გ) შუახაზზე გამავალი წრფე

დ) რომელიმე წვეროზე მოპირდაპირე გვერდის პარალელურად გამავალი წრფე.



✓**9.** რომელი წერტილია *OX* ღერძის მიმართ *A* წერტილის სიმეტრიული წერტილი?

ა) *B* ბ) *D*

გ) *C* დ) *E*.

✓**10.** $D(5;\ 3)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი y ღერძის მიმართ არის

ა) $D'(-5;\ -3)$ ბ) $D'(-5;\ 3)$ გ) $D'(3;\ 5)$ დ) $D'(5;\ -3)$.

✓**11.** $A(5;\ 0)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი აბსცისათა ღერძის მიმართ არის

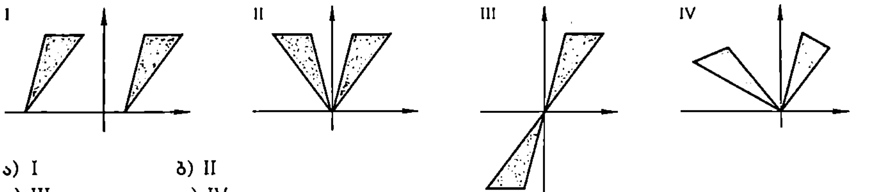
ა) $(-5;\ 0)$ ბ) $(0;\ 5)$ გ) $(0;\ -5)$ დ) $(5;\ 0)$.

✓**12.** თუ $A(x;\ y)$ და $B(x_1;\ y_1)$ წერტილები სიმეტრიულია $x=1$ წრფის მიმართ, მაშინ

ა) $x_1=-x+2,\ y_1=y$ ბ) $x_1=-x,\ y_1=y$

გ) $x_1=-x+1,\ y_1=y$ დ) $x_1=x;\ y_1=-y+2$.

✓**13.** რომელ სურათზეა ფიგურები სიმეტრიული რაიმე წრფის მიმართ?



ა) I ბ) II

გ) III დ) IV.

✓**14.** *a* წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიის უძრავი წერტილია (წერტილი, რომელიც თავის თავზე აისახება):

ა) სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი

ბ) წერტილი, რომელიც *a* წრფის პარალელურ წრფეს ეკუთვნის

გ) ყოველი წერტილი, რომელიც *a* წრფეს ეკუთვნის

დ) ყოველი წერტილი, რომელიც *a* წრფეს არ ეკუთვნის.

✓15. ღერძული სიმეტრიის უძრავი წრფეა (წრფე, რომელიც თავის თავზე აისახება ღერძული სიმეტრიისას)

ა) მხოლოდ სიმეტრიის ღერძი
ბ) მხოლოდ სიმეტრიის ღერძის მართობული ერთ-ერთი წრფე
გ) სიმეტრიის ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე
დ) სიმეტრიის ღერძი და სიმეტრიის ღერძის მართობული ნებისმიერი წრფე.

✓16. წრეწირის სიმეტრიის ღერძია

ა) ნებისმიერ ქორდაზე გამავალი წრფე
ბ) ცენტრზე გამავალი ნებისმიერი წრფე
გ) წრეწირის რაიმე წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფე
დ) წრფე, რომელსაც წრეწირთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს.

✓17. F ფიგურა a და b მართობული წრფეების წერტილთა სიმრავლეა. რამდენი სიმეტრიის ღერძი აქვს F ფიგურას?

ა) 2 ბ) 4 გ) 3 დ) 1.

✓18. $M(3;\ 2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $y=x$ წრფის მიმართ არის

ა) $M(-3;\ 2)$ ბ) $M(2;\ 3)$ გ) $M(-2;\ 3)$ დ) $M(-2;\ -3)$.

✓19. თუ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლის ასახვა თავის თავზე არის მოძრაობა, მაშინ იგი სიბრტყის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილს

ა) არ ცვლის ბ) ორჯერ ზრდის
გ) სამჯერ ზრდის დ) 5 ერთეულით ცვლის.

✓20. მოძრაობა

ა) არ არის შექცევადი ასახვა ბ) შექცევადი ასახვაა
გ) ზოგჯერ შექცევადი ასახვაა დ) შეიძლება არ იყოს შექცევადი ასახვა.

✓21. რომბი სიმეტრიული ფიგურაა

ა) მისი თითოეული დიაგონალის შემცველი წრფის მიმართ
ბ) მხოლოდ მცირე დიაგონალის შემცველი წრფის მიმართ
გ) მხოლოდ დიდი დიაგონალის შემცველი წრფის მიმართ
დ) ერთ-ერთი გვერდის შემცველი წრფის მიმართ.

✓22. ტოლფერდა ტრაპეციის სიმეტრიის ღერძია

ა) ფერდების შუა წერტილების შემაერთებელი წრფე
ბ) მცირე ფუძეზე გავლებული წრფე
გ) დიაგონალის შემცველი წრფე
დ) ფუძეების შუა წერტილების შემაერთებელი წრფე.

✓23. კვადრატისგან განსხვავებულ რომბს აქვს სიმეტრიის მხოლოდ

ა) 2 ღერძი ბ) 3 ღერძი გ) 4 ღერძი დ) 5 ღერძი.

✓24. კვადრატს აქვს სიმეტრიის მხოლოდ

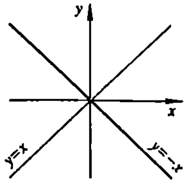
ა) 2 ღერძი ბ) 3 ღერძი გ) 4 ღერძი დ) 5 ღერძი.

✓25. წრეწირს აქვს

ა) სიმეტრიის მხოლოდ 2 ღერძი ბ) სიმეტრიის მხოლოდ 3 ღერძი
გ) სიმეტრიის მხოლოდ 4 ღერძი დ) სიმეტრიის უამრავი ღერძი.

✓26. კვადრატისგან განსხვავებულ მართკუთხედს აქვს

ა) სიმეტრიის მხოლოდ 2 ღერძი ბ) სიმეტრიის მხოლოდ 1 ღერძი
გ) სიმეტრიის 4 ღერძი დ) სიმეტრიის 5 ღერძი.



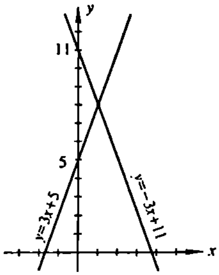
27. ვთქვათ, F არის საკოორდინატო სიბრტყეზე $y=x$ და $y=-x$ წრფეების წერტილთა სიმრავლეების გაერთიანება. იპოვეთ F ფიგურის სიმეტრიის ღერძები.

ა) მხოლოდ $x=0$ წრფე

ბ) მხოლოდ $y=0$ წრფე

გ) $x=0$, $y=0$, $y=x$ და $y=-x$ წრფეები

დ) $x=1$ და $y=1$ წრფეები.



28. ვთქვათ, F არის საკოორდინატო სიბრტყეზე $y=3x+5$ და $y=-3x+11$ წრფეების წერტილთა სიმრავლეების გაერთიანება. იპოვეთ F ფიგურის სიმეტრიის ღერძები.

ა) მხოლოდ $x=1$ წრფე

ბ) მხოლოდ $y=8$ წრფე

გ) $x=-1$ და $y=-8$ წრფეები

დ) $x=1$ და $y=8$ წრფეები.

29. მოცემულია წერტილები: $A(2;\ 4)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ -3)$, $D(-4;\ -3)$, $E(0;\ 3)$ და $F(-4;\ 0)$. იპოვეთ ამ წერტილების სიმეტრიული წერტილები:

ა) აბსცისათა ღერძის მიმართ; ბ) ორდინატთა ღერძის მიმართ;

გ) $y=x$ წრფის მიმართ; დ) $y=-x$ წრფის მიმართ.

30. C წერტილი $A(3;\ 2{,}1)$ და $B(3;\ 3{,}4)$ წერტილებს შორისაა (AB მონაკვეთს ეკუთვნის, ამასთანავე, A-სა და B-ს შორისაა). მისი კოორდინატები ნატურალური რიცხვებია. იპოვეთ:

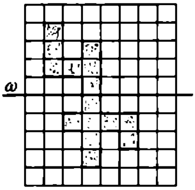
ა) C წერტილი;

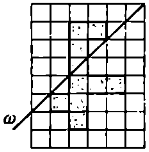
ბ) C წერტილის სიმეტრიული წერტილები საკოორდინატო ღერძებისა და $y=x$ წრფის მიმართ.

31. $A(4;\ 2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი აბსცისათა ღერძის მიმართ არის B წერტილის სიმეტრიული წერტილი ორდინატთა ღერძის მიმართ. იპოვეთ B-ს კოორდინატები.

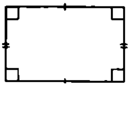
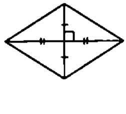
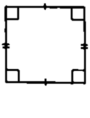
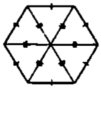
32. საკოორდინატო სიბრტყის რომელ წერტილში შეიძლება გადავიტანოთ კოორდინატთა სათავე (ღერძების მიმართულებების შეუცვლელად), რომ ახალ სისტემაში $A(3;\ 7)$ და $B(3;\ -3)$ წერტილები ახალი აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიულები აღმოჩნდნენ?

33. დაშტრიხეთ უმცირესი ოდენობის უჯრები ისე, რომ მიიღოთ ω წრფის მიმართ სიმეტრიული ფიგურა:

ა) 

ბ) 

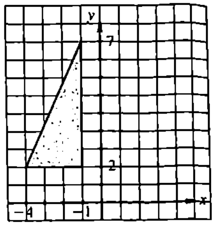
34. დაადგინეთ სურათზე გამოსახული ფიგურების სიმეტრიის ღერძების ოდენობა:

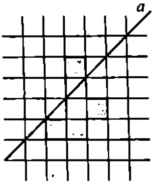
ა) 
ბ) 
გ) 
დ) 

35. ააგეთ მოცემული სამკუთხედის სიმეტრიული ფიგურა:

ა) x ღერძის მიმართ და იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები;

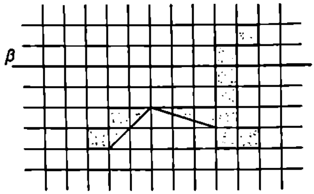
ბ) y ღერძის მიმართ და იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები.

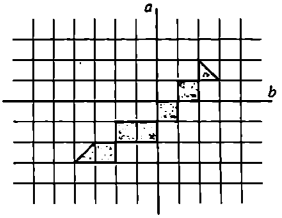




36. უმცირესი ოდენობის უჯრების დამატებით შეავსეთ სურათზე მოცემული ფიგურა a წრფის მიმართ სიმეტრიულ ფიგურამდე და იპოვეთ მიღებული ფიგურის ფართობი, თუ ერთი კვადრატის გვერდი 2 სმ-ია.

37. უმცირესი ოდენობის უჯრების დამატებით შეავსეთ სურათზე მოცემული ფიგურა β წრფის მიმართ სიმეტრიულ ფიგურამდე და იპოვეთ მიღებული ფიგურის ფართობი, თუ ერთი კვადრატის ფართობი 1 სმ^2.





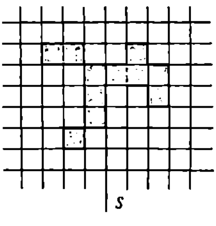
38. უმცირესი ოდენობის უჯრების დამატებით შეავსეთ სურათზე მოცემული ფიგურა ისეთ ფიგურამდე, რომელიც სიმეტრიული იქნება, როგორც a, ისე b წრფის მიმართ. იპოვეთ მიღებული ფიგურის ფართობი, თუ ერთი კვადრატის გვერდი 1 სმ-ია.

39. იპოვეთ $x=7$ და $x=-1$ წრფეებით შექმნილი ზოლის სიგანე და დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომლის მიმართაც ეს წრფეები სიმეტრიულია.

40. იპოვეთ $y=3$ და $y=-12$ წრფეებით შექმნილი ზოლის სიგანე და დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომლის მიმართაც ეს წრფეები სიმეტრიულია.

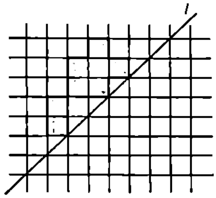
41. ვთქვათ, $ABCD$ კვადრატის წვეროებია $A(-3;\ 3)$, $B(3;\ 3)$, $C(3;\ -3)$ და $D(-3;\ -3)$. დაწერეთ ამ კვადრატის სიმეტრიის ყველა ღერძის განტოლება.

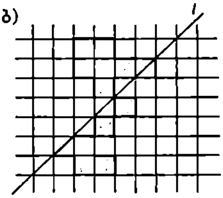
42. ვთქვათ, $ABCD$ კვადრატის წვეროებია $A(-1;\ 7)$, $B(7;\ 7)$, $C(7;\ -1)$, $D(-1;\ -1)$. დაწერეთ ამ კვადრატის სიმეტრიის ყველა ღერძის განტოლება.

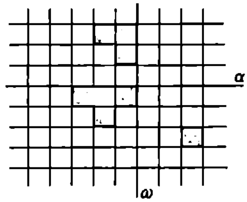


43. უმცირესი ოდენობის უჯრათა დაშტრიხვით შეავსეთ სურათზე მოცემული ფიგურა S წრფის მიმართ სიმეტრიულ ფიგურამდე.

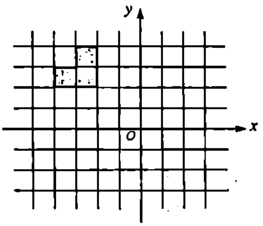
44. უმცირესი ოდენობის უჯრათა დაშტრიხვით შეავსეთ სურათზე მოცემული ფიგურა l ღერძის მიმართ სიმეტრიულ ფიგურამდე.

ა)


ბ)


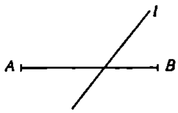


45. უმცირესი ოდენობის უჯრათა დაშტრიხვით შეავსეთ სურათზე მოცემული ფიგურა ისეთ ფიგურამდე, რომელიც სიმეტრიულია α ღერძის მიმართაც და ω ღერძის მიმართაც.



46. ააგეთ Φ ფიგურის სიმეტრიული Φ_1 ფიგურა y ღერძის მიმართ და Φ_1-ის სიმეტრიული Φ_2 ფიგურა x ღერძის მიმართ. იპოვეთ Φ, Φ_1 და Φ_2 ფიგურების წერტილთა სიმრავლეების გაერთიანებით მიღებული ფიგურის სიმეტრიის ღერძი.

47. l წრფე კვეთს AB მონაკვეთს. იპოვეთ l წრფეზე ისეთი C წერტილი, რომ ACB კუთხის ბისექტრისა l წრფეზე მდებარეობდეს.



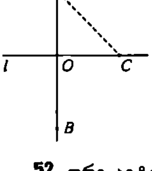
48. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია $M(3;\ 5)$ წერტილი. იპოვეთ ის წერტილი, რომელიც მიიღება M წერტილისგან გარდაქმნათა კომპოზიციით — სიმეტრია y ღერძის მიმართ, სიმეტრია $x=5$ წრფის მიმართ.

49. ამოხსენით წინა ამოცანის ანალოგიური ამოცანა სამ შემთხვევაში:

ა) $M(-2;\ 3)$; ბ) $M(2;\ 3)$;

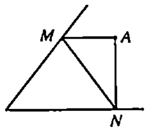
გ) ნებისმიერი $M(x;\ y)$ წერტილის შემთხვევაში.

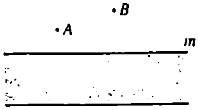
50. იპოვეთ $y=x$ წრფის მიმართ: ა) $M(3;\ -4)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი, ბ) $M(4;\ 3)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი, გ) $M(a;\ b)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი.



51. გამოიყენეთ ღერძული სიმეტრია და დაასაბუთეთ: თუ $l \perp AB$ და კვეთს AB-ს O წერტილში, მაშინ AO მანძილი ნაკლებია A წერტილიდან l წრფის ნებისმიერ სხვა წერტილამდე მანძილზე.

52. ორი ავტოტრასა მახვილი კუთხით იკვეთება. კუთხის შიგნით გვაქვს A წერტილი. როგორ ვიპოვოთ ტრასებზე M და N პუნქტები ისე, რომ $AMNA$ გზის სიგრძე უმცირესი იყოს?

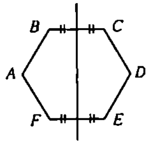




53. A და B დასახლებული პუნქტების წყლით მომარაგება არხიდან ხდება. სად ავაგოთ წყალსატუმბი კოშკი, რომ მისგან დასახლებულ პუნქტებამდე წყლის მილების საერთო სიგრძე უმცირესი იყოს?

54. გამოიყენეთ კოორდინატთა მეთოდი და დაასაბუთეთ, რომ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.

55. რა ფორმულით მოიცემა სიმეტრია $y=x$ წრფის მიმართ?



56. ვთქვათ, $ABCDEF$ წესიერი ექვსკუთხედია. l წრფე BC და EF გვერდების შუა წერტილებზე გადის. შეავსეთ წინადადება ისე, რომ ჭეშმარიტი გამონათქვამი მიიღოთ: l ღერძის მიმართ სიმეტრიით A წერტილი აისახება ... წერტილზე, AB მონაკვეთი .... მონაკვეთზე, AF — ...-ზე, BF — ...-ზე, ABF სამკუთხედი — ...-ზე.

57. ცნობილია, რომ $y=2x+l$ და $y=kx-7$ წრფეები Oy ღერძის მიმართ სიმეტრიული წრფეებია.

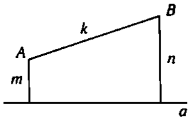
ა) იპოვეთ k და l;

ბ) იპოვეთ $y=2x+l$ წრფის წერტილი, რომელიც ამ სიმეტრიის უძრავი წერტილია.

58. $y=kx+3$ და $y=-5x+l$ წრფეები x ღერძის მიმართ სიმეტრიული წრფეებია. იპოვეთ k და l.

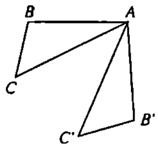
59. ცნობილია, რომ $y=3x+7$ წრფე Ox ღერძის მიმართ სიმეტრიით აისახება წრფეზე, რომელსაც ეკუთვნის წერტილი $A(1; a)$. იპოვეთ a.

60. შეარჩიეთ ფუნქციები, რომელთა გრაფიკები სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ: $y=|x|$, $y=x$, $y=x^2+1$, $y=(x-1)^2$, $y=x^2+x$, $y=|x-2|$.



61. შეარჩიეთ a წრფეზე C წერტილი ისე, რომ ACB სამკუთხედის პერიმეტრი უმცირესი იყოს. გამოსახეთ ეს პერიმეტრი k, m და n-ით.

62. რამდენი სიმეტრიის ღერძი აქვს ა) წრფეს, ბ) მონაკვეთს?



63. სურათზე ABC და $AB'C'$ ტოლი სამკუთხედებია, $\angle C=\angle C'$, $\angle B=\angle B'$. იპოვეთ ამ ორი სამკუთხედით შედგენილი ფიგურის სიმეტრიის ღერძი. პასუხი დაასაბუთეთ.

64. ვთქვათ, $B'(x; y)$ წერტილი სიმეტრიულია $B(-5; 7)$ წერტილის l წრფის მიმართ. იპოვეთ x და y, თუ l წრფის განტოლებაა:

ა) $y=x$; ბ) $y=-x$; გ) $y=a$; დ) $x=a$.

65. ვთქვათ, $B'(x'; y')$ წერტილი სიმეტრიულია $B(a; b)$ წერტილის l წრფის მიმართ. იპოვეთ x' და y' (გამოსახეთ a, b და c-ს საშუალებით), თუ l წრფის განტოლებაა

ა) $y=x$; ბ) $y=-x$; გ) $y=c$; დ) $x=c$.

66. წრფე მოცემულია განტოლებით: $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq0)$. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია მოცემული წრფის

ა) Ox ღერძის მიმართ; ბ) Oy ღერძის მიმართ;

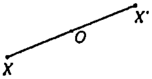
გ) $y=x$ წრფის მიმართ; დ) $y=-x$ წრფის მიმართ.

67. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $y=2x+3$ წრფის:
ა) Ox ღერძის მიმართ, ბ) Oy ღერძის მიმართ,
გ) $y=x$ წრფის მიმართ, დ) $y=-x$ წრფის მიმართ.

68. იპოვეთ b და k, თუ $y=2x+b$ და $y=kx-7$ წრფეები სიმეტრიულია:
ა) Oy ღერძის მიმართ, ბ) $y=x$ წრფის მიმართ.

69. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკების სიმეტრიის ღერძები:
ა) $y=|x|$; ბ) $y=x$; გ) $y=x^2$; დ) $y=x^2+1$;
ე) $y=(x-1)^2$; ვ) $y=x^2+x$; ზ) $y=|x-2|$.

70. შეიძლება თუ არა ღერძული სიმეტრიით მივიღოთ $y=x$, $y=2x+3$, $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ ფუნქციების გრაფიკებიდან, შესაბამისად, $y=|x|$, $y=|2x+3|$, $y=|ax^2+bx+c|$ ფუნქციების გრაფიკები?



X' წერტილს ეწოდება X წერტილის სიმეტრიული O წერტილის (ცენტრის) მიმართ, თუ O წერტილი XX' მონაკვეთის შუა წერტილია.

მაგალითად, საკოორდინატო სიბრტყის $M'(-x;\ -y)$ წერტილი სიმეტრიულია $M(x;\ y)$ წერტილისა კოორდინატთა სათავის მიმართ.

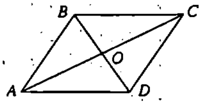
სიბრტყის ყოველ M წერტილს შევუსაბამოთ ამავე სიბრტყის O წერტილის მიმართ მისი სიმეტრიული M' წერტილი. ასახვის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეა. ამ ასახვას O წერტილის მიმართ **ცენტრული სიმეტრია** ვუწოდოთ. მას აღვნიშნავთ S_0-ით.

ცენტრული სიმეტრია გადაადგილებაა — ამ ასახვით ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება. ამრიგად, ცენტრულ სიმეტრიას აქვს გადაადგილების ყველა თვისება.

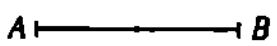
ამასთანავე, ცენტრული სიმეტრიისას
1) უძრავი წერტილი ერთადერთია — სიმეტრიის ცენტრია მხოლოდ
2) ცენტრზე გამავალი ყოველი წრფე თავის თავზე აისახება.
3) სხივი აისახება მის საწინააღმდეგოდ მიმართულ სხივზე.
4) წრფე, რომელიც ცენტრზე არ გადის, აისახება მის პარალელურ წრფეზე.
5) S_0 ცენტრული სიმეტრიისას $S_0 \circ S_0$ კომპოზიცია იგავური ასახვაა.

თუ F ფიგურა რაიმე S_A ცენტრული სიმეტრიისას F'-ზე აისახება, მაშინ F'-ს ეწოდება F-ის **ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა A წერტილის მიმართ.** თუ F' ცენტრულ-სიმეტრულია F-ისა A წერტილის მიმართ, მაშინ F არის ცენტრულ-სიმეტრიული F'-ის A წერტილის მიმართ.

თუ ფიგურა რაიმე S_0 ცენტრული სიმეტრიისას თავის თავზე აისახება, მაშინ ფიგურას **ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა** ეწოდება, O წერტილს — **ფიგურის სიმეტრიის ცენტრი.**



მაგალითი 1. ყოველი პარალელოგრამი ცენტრულ-სიმეტრიულია დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ.



მაგალითი 2. ყოველი მონაკვეთი ცენტრულ-სიმეტრულია მისი შუა წერტილის მიმართ. არსებობს კიდევ სამი გადაადგილება, როცა AB მონაკვეთი თავის თავზე აისახება: სიმეტრია AB წრფის მიმართ, სიმეტრია AB მონაკვეთის შუა მართობის მიმართ, იგავური გარდაქმნა.

მაგალითი 3. კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიისას $M(x;\ y)$ წერტილი აისახება $M(-x;\ -y)$ წერტილზე, $ax+by+c=0$ წრფე — $ax+by-c=0$ წრფეზე, $y=kx+l$ წრფე — $y=kx-l$ წრფეზე,

ა

✓**1.** თუ A და B წერტილები სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ, მაშინ
ა) $AO=OB$ და $AO+OB=AB$ ბ) $AO<OB$
გ) $AO>OB$ დ) $AO+OB>AB$.

✓**2.** $ABCD$ პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრია
ა) A წერტილი ბ) B წერტილი
გ) C წერტილი დ) AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი.

✓**3.** $A(3;\ 5)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ არის
ა) $A'(-3;\ 5)$ ბ) $A'(3;\ -5)$ გ) $A'(-3;\ -5)$ დ) $A'(5;\ 3)$.

✓**4.** O წერტილის მიმართ ცენტრული სიმეტრიისას უძრავი წერტილია
ა) O წერტილისგან განსხვავებული ნებისმიერი წერტილი
ბ) სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი
გ) O წერტილი
დ) O წერტილიდან 1 ერთეულით დაშორებული ნებისმიერი წერტილი.

✓**5.** თუ $M'(x;\ y)$ წერტილი არის $M(-3;\ 5)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ, მაშინ
ა) $x=-3;\ y=5$ ბ) $x=-3;\ y=-5$
გ) $x=3;\ y=5$ დ) $x=3;\ y=-5$.

✓**6.** თუ A და A_1, აგრეთვე, B და B_1 რაიმე O წერტილის მიმართ სიმეტრიულ წერტილთა წყვილებია, მაშინ
ა) $AB>A_1B_1$ ბ) $AB<A_1B_1$ გ) $AB\neq A_1B_1$ დ) $AB=A_1B_1$.

✓**7.** კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით $x=5$ წრფე აისახება
ა) ამავე წრფეზე ბ) $x=-5$ წრფეზე
გ) $y=5$ წრფეზე დ) $y=-5$ წრფეზე.

✓**8.** კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით $y=7$ წრფე აისახება
ა) $y=-7$ წრფეზე ბ) $y=7$ წრფეზე
გ) $x=7$ წრფეზე დ) $x=-7$ წრფეზე.

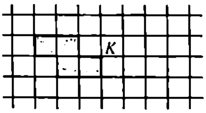
✓**9.** Ox ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიისა და Oy ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიის კომპოზიცია არის
ა) ღერძული სიმეტრია Ox ღერძის მიმართ
ბ) ღერძული სიმეტრია Oy ღერძის მიმართ
გ) ცენტრული სიმეტრია კოორდინატთა სათავის მიმართ
დ) ცენტრული სიმეტრია $A(1;\ 0)$ წერტილის მიმართ.

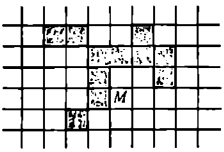
✓**10.** კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით $x+y-1=0$ წრფე აისახება
ა) $x+y=0$ წრფეზე ბ) $x+y=1$ წრფეზე
გ) $x-y-1=0$ წრფეზე დ) $x+y+1=0$ წრფეზე.

✓**11.** $y=x$ წრფის მიმართ და $y=-x$ წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიების კომპოზიცია არის
ა) ცენტრული სიმეტრია კოორდინატთა სათავის მიმართ
ბ) ღერძული სიმეტრია $y=x$ წრფის მიმართ
გ) ღერძული სიმეტრია Ox ღერძის მიმართ
დ) ღერძული სიმეტრია Oy ღერძის მიმართ.

✓**12.** კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით $ax+by+1=0$ წრფე აისახება
ა) $ax+by-1=0$ წრფეზე ბ) $ax-by+1=0$ წრფეზე
გ) $ax-by-1=0$ წრფეზე დ) $ax+by+1=0$ წრფეზე.

13. უმცირესი ოდენობის უჯრათა დაშტრიხვით შეავსეთ სურათზე მოცემული ფიგურა K ცენტრის მიმართ სიმეტრიულ ფიგურამდე.





14. უმცირესი ოდენობის უჯრათა დაშტრიხვით შეავსეთ სურათზე მოცემული ფიგურა M ცენტრის მიმართ სიმეტრიულ ფიგურამდე.

15. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია $A(2;\ 3)$, $B(-4;\ 3)$, $C(-4;\ 5)$ და $D(2;\ 5)$ წერტილები. დაასახელეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის სიმეტრიის ცენტრი.

16. O არის $ABCD$ მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ:

ა) A წერტილის სიმეტრიული წერტილი O-ს მიმართ.

ბ) B წერტილის სიმეტრიული წერტილი O-ს მიმართ

გ) BC გვერდის შუა წერტილის სიმეტრიული O-ს მიმართ.

17. მოცემულია $ABCD$ მართკუთხედი, $AB=12$ სმ. E წერტილი A კუთხის ბისექტრისის BC გვერდთან გადაკვეთის წერტილია. F წერტილი E-ს სიმეტრიული წერტილი- დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილის მიმართ. იპოვეთ FD.

18. E წერტილი $ABCD$ მართკუთხედის BC გვერდს ეკუთვნის, $BE:EC=3:5$ და $AB:BE=2:1$. მართკუთხედის დიაგონალი $3\sqrt{10}$ სმ-ია. F წერტილი არის E წერტილის სიმეტრიული დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ. იპოვეთ EF.

19. O არის $ABCD$ რომბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ:

ა) B-ს სიმეტრიული O-ს მიმართ;

ბ) BC გვერდის შუა წერტილის სიმეტრიული O-ს მიმართ.

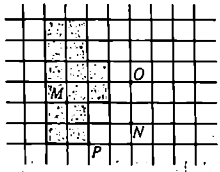
20. ააგეთ Φ ფიგურის სიმეტრიული ფიგურა

ა) O წერტილის მიმართ;

ბ) N წერტილის მიმართ;

გ) P წერტილის მიმართ;

დ) M წერტილის მიმართ.



21. აღწერეთ რა გეომეტრიული გარდაქმნები მოიცემა ფორმულით:

ა) $(x;\ y)\to(x;\ -y)$ ბ) $(x;\ y)\to(-x;\ y)$ გ) $(x;\ y)\to(-x;\ -y)$.

22. არის თუ არა სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ:

ა) $y=\frac{6}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი;

ბ) $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკი;

გ) $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი?

23. არსებობს თუ არა:

ა) წრფე, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება;

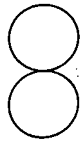
ბ) სხივი, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება;

გ) წერტილი, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება?

24*. ვთქვათ, $M'(x';\ y')$ არის $M(x;\ y)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $A(a;\ b)$ ცენტრის მიმართ. გამოსახეთ M'-ის კოორდინატები M-ის კოორდინატებითა და a და b რიცხვებით.

25*. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც არის $3x+4y-12=0$ წრფის სიმეტრიული $A(1;\ 2)$ წერტილის მიმართ.

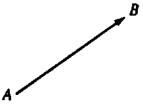
26. იპოვეთ ერთმანეთის მხები ორი ტოლრადიუსიანი წრეწირით შედგენილი ფიგურის სიმეტრიის ცენტრი.



27. იპოვეთ ორი პარალელური წრფით შედგენილი ფიგურის სიმეტრიის ცენტრები.

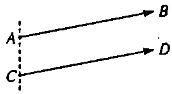
§ 2.3. ვექტორი. ვექტორის კოორდინატები სიბრტყეზე. ვექტორის რიცხვზე გამრავლება. ვექტორთა შეკრება. ორ ვექტორს შორის კუთხე

ზოგიერთი სიდიდე სავსებით განისაზღვრება თავისი რიცხვითი მნიშვნელობით (მაგალითად, სიგრძე, კუთხის ზომა, ტემპერატურა). ასეთ სიდიდეებს **სკალარულ სიდიდეებს** უწოდებენ. ზოგიერთ სიდიდეს რიცხვითი მნიშვნელობის გარდა ახასიათებს მიმართულებაც. ასეთ სიდიდეებს **ვექტორულ სიდიდეებს** ანუ **ვექტორებს** ვუწოდებთ. მაგალითად, ძალა, სიჩქარე, აჩქარება ვექტორული სიდიდეებია.

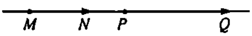


ვექტორულ სიდიდეს მიმართული მონაკვეთით გამოვსახავთ და სურათზე ვექტორის ერთ-ერთი ბოლო — A წერტილი — **საწყისი წერტილია** (სათავეა), მეორე ბოლო — B წერტილი — **ბოლო წერტილია**. ამ ვექტორს ასე ჩავწერთ $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}$ **ვექტორის სიგრძე** (მოდული) ეწოდება AB მონაკვეთის სიგრძეს, მას ასე ჩავწერთ — $|\overrightarrow{AB}|$. ვექტორები ერთი ასოს გამოყენებითაც შეიძლება ჩაიწეროს: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$.

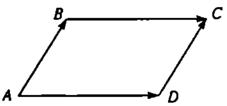
შევთანხმდეთ, რომ იმ ვექტორსაც განვიხილავთ, რომლის ბოლო და სათავე ერთმანეთს ემთხვევა. თუ A რაიმე წერტილია, მაშინ $\overrightarrow{AA}$ **ნულოვანი ვექტორია**, მას ასეც ჩავწერთ: $\vec{0}$. მისი მოდულიც ნულია: $|\vec{0}|=0$. რაიმე გარკვეული მიმართულება ამ ვექტორს არა აქვს — ნებისმიერი მიმართულების ვექტორად შეიძლება მივიჩნიოთ.



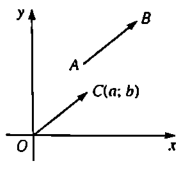
სურათზე გამოსახული ორივე ვექტორისთვის — AB და CD სხივები AC წრფით შემოსაზღვრულ ერთ-ერთ ნახევარსიბრტყეშია. თუ ამასთანავე, $AB \| CD$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორები **თანამიმართულია** და ჩავწერთ $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. თანამიმართულია აგრეთვე სურათზე წარმოდგენილი ერთ



წრფეზე მდებარე $\overrightarrow{MN}$ და $\overrightarrow{PQ}$ მიმართული მონაკვეთებით გამოსახული ვექტორებიც. თუ ვექტორები ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზეა განლაგებული და ისინი არ არის თანამიმართული, მაშინ მათ **საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს** ვუწოდებთ. **თუ ორი არანულოვანი ვექტორი თანამიმართულია და მათი სიგრძეები ტოლია, მაშინ ამ ვექტორებს ეწოდება ტოლი ვექტორები.** თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ტოლი ვექტორებია, მაშინ ჩავწერთ $\vec{a}=\vec{b}$. მაგალითად, თუ $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \text{ და } \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}.$$



ყოველ წერტილზე შეიძლება მოვდოთ მოცემული ვექტორის ტოლი ერთადერთი ვექტორი.

თუ $A=(x_1;\ y_1)$ და $B=(x_2;\ y_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია

$$x_2-x_1; \qquad y_2-y_1$$

და ვწერთ: $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, ან ასე $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$.

ტოლ ვექტორებს ტოლი კოორდინატები აქვს და პირიქით — ტოლი კოორდინატების მქონე ვექტორები ტოლია.

თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორს სათავეზე მოვდებთ — $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ და $C=(a;\ b)$, მაშინ $a=x_2-x_1$, $b=y_2-y_1$.

თუ გავიხსენებთ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულას, მაშინ მივიღებთ:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

მაშასადამე, თუ $\overrightarrow{AB}=(m;\ n)$, მაშინ
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{m^2+n^2}.$$

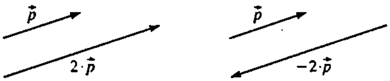
ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი. თუ $\vec{p}\neq\vec{0}$, $k\neq0$, მაშინ $\vec{p}$ ვექტორისა და k რიცხვის ნამრავლი არის ვექტორი (მას $k\vec{p}$-თი აღვნიშნავთ), რომელიც ასე განისაზღვრება:

1) $|k\vec{p}|=|k|\cdot|\vec{p}|$;

2) თუ $k>0$, მაშინ $k\vec{p}$ ვექტორი და $\vec{p}$ ვექტორი თანამიმართული ვექტორებია.

თუ $k<0$, მაშინ $k\vec{p}$ ვექტორი და $\vec{p}$ ვექტორი საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია.

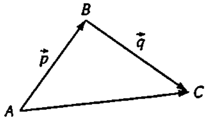
მაგალითად,



თუ $\vec{p}=\vec{0}$, ან $k=0$, მაშინ $k\vec{p}=\vec{0}$.

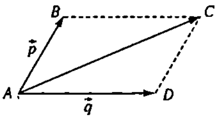
$(-1)\vec{p}$ ვექტორი არის $\vec{p}$ ვექტორის **მოპირდაპირე ვექტორი**, მას ასე ჩავწერთ: $-\vec{p}$.

ვექტორთა შეკრება. $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორების შეკრებისას სიბრტყის რაიმე წერტილზე, ვთქვათ, A-ზე მოვდებთ $\vec{p}$ ვექტორს: $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$; B წერტილზე მოვდებთ $\vec{q}$ ვექტორს: $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$, მაშინ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორების ჯამი $\overrightarrow{AC}$ ვექტორია.



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$
$$\vec{p}+\vec{q}=\overrightarrow{AC}.$$

შეკრების ეს წესი ვექტორთა შეკრების **სამკუთხედის წესია**.



ამ სურათზე $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორები **პარალელოგრამის წესით** შევკრიბეთ ($ABCD$ პარალელოგრამია).
$$\overrightarrow{AC}=\vec{p}+\vec{q}.$$
ამავე შედეგს მოგვცემს სამკუთხედის წესით შეკრებაც.
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{q}+\vec{p}.$$

ვექტორზე მოქმედებების თვისებები:

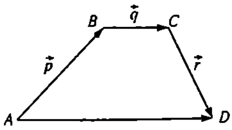
ნებისმიერი $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ ვექტორებისა და λ, μ ნამდვილი რიცხვებისთვის —

1) $\vec{p}+\vec{q}=\vec{q}+\vec{p}$ 2) $(\vec{p}+\vec{q})+\vec{r}=\vec{p}+(\vec{q}+\vec{r})$

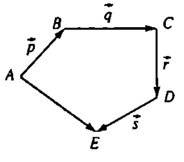
3) $\vec{p}+\vec{0}=\vec{p}$ 4) $\vec{p}+(-\vec{p})=\vec{0}$

5) $\lambda(\vec{p}+\vec{q})=\lambda\vec{p}+\lambda\vec{q}$ 6) $(\lambda+\mu)\vec{p}=\lambda\vec{p}+\mu\vec{p}$

7) $1\cdot\vec{p}=\vec{p}$ 8) $\lambda(\mu\vec{p})=(\lambda\mu)\vec{p}$.



მაშასადამე, სამი ვექტორის ჯამი შეიძლება ასე განვსაზღვროთ:
$$\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=(\vec{p}+\vec{q})+\vec{r}=\vec{p}+(\vec{q}+\vec{r})$$
$$\overrightarrow{AD}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}.$$



ანალოგიურად, შეიძლება განვსაზღვროთ ოთხი და მეტი ვექტორის ჯამი.
$$\overrightarrow{AE}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}+\vec{s}.$$

თუ ვექტორები კოორდინატებითაა მოცემული, მაშინ გვაქვს:

1) ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისას ვექტორის კოორდინატები მრავლდება ამ რიცხვზე: თუ $\vec{a}=(a_1;\ a_2)$ და m ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $m\vec{a}=(ma_1;\ ma_2)$.

2) **ვექტორების შეკრებისას შესაბამისი კოორდინატები იკრიბება:**

თუ $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, მაშინ

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2).$$

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობას ასე განვსაზღვრავთ:

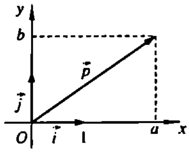
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

ცხადია, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (O სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია).

მართლაც, $-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}$ და

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}.$$

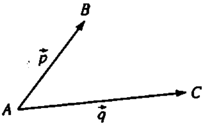
საკოორდინატო ღერძების ორტები ვუწოდოთ ვექტორებს: $\vec{i}=(1;\ 0)$ და $\vec{j}=(0;\ 1)$.



თუ $\vec{p}=(a;\ b)$, მაშინ

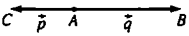
$$\vec{p}=a\vec{i}+b\vec{j}.$$

$\vec{p}$ **ვექტორის ასეთი სახით წარმოდგენას ეწოდება ვექტორის საკოორდინატო ღერძების მიმართ დაშლა.**

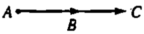


კუთხე ორ ვექტორს შორის. მოვდოთ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორები A წერტილში: $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AC}$. $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებს შორის კუთხე ვუწოდოთ AB და AC სხივებს შორის კუთხეს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$0\le\alpha\le180^0.$$



ამ სურათზე წარმოდგენილ საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 180^0-ია.



ამ სურათზე წარმოდგენილია თანამიმართული ვექტორები: $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AC}$. $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებს შორის კუთხე 0^0-ია.

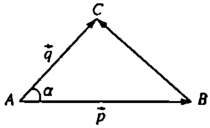
მაგალითი. ვიპოვოთ კუთხე $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}$ და $\vec{q}=2\vec{i}-2\vec{j}$ ვექტორებს შორის. ვთქვათ, $\overrightarrow{AB}=\vec{p}=(1;\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=\vec{q}=(2;\ -2)$.

მაშინ

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1;\ -3),$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10},\qquad \overrightarrow{AB}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

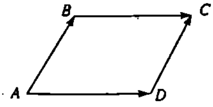


კოსინუსების თეორემის თანახმად, $\cos\alpha=\dfrac{8+2-10}{2\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=0.$

მაშასადამე, $\alpha=90^0$.

S

✓**1.** თუ $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ აქ გამოსახული ვექტორებიდან ტოლია



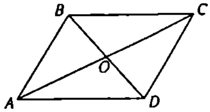
ა) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ბ) $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{DA}$

გ) $\overrightarrow{DA}$ და $\overrightarrow{DC}$ დ) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{DC}$

✓2. $ABCD$ პარალელოგრამია, O არის AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი, მაშინ

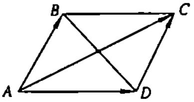
ა) $\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AO}$ ბ) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

გ) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$ დ) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$.



✓3. $ABCD$ პარალელოგრამია. O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია, მაშინ

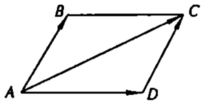
ა) $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OC}$ ბ) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ გ) $\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OD}$ დ) $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AD}$.



✓4. $ABCD$ ოთხკუთხედში $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=$

ა) $\overrightarrow{AC}$ ბ) $\overrightarrow{BD}$

გ) $\overrightarrow{AB}$ დ) $\overrightarrow{DC}$.



✓5. თუ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, მაშინ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=$

ა) $\overrightarrow{BD}$ ბ) $\overrightarrow{AC}$ გ) $\overrightarrow{CB}$ დ) $\overrightarrow{CA}$.

✓6. თუ $\vec{a}=(2;\ 1)$, $\vec{b}=(3;\ 5)$, მაშინ $\vec{a}+\vec{b}=$

ა) (1; 2) ბ) (5; 3) გ) (5; 6) დ) (7; 4).

✓7. თუ $\vec{a}=(1;\ 2)$, $\vec{c}=(2;\ 3)$, მაშინ $2\vec{a}+\vec{c}=$

ა) (3; 5) ბ) (5; 9) გ) (4; 7) დ) (3; 1).

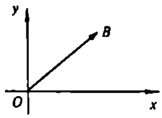
✓8. თუ $\vec{a}=(3;\ 4)$, მაშინ $|\vec{a}|=$

ა) 3 ბ) 4 გ) 7 დ) 5.

✓9. თუ $\overrightarrow{OB}=(3;\ 4)$, მაშინ B წერტილის კოორდინატებია

ა) 3 და 4 ბ) 3 და 5

გ) 5 და 4 დ) 5 და 0.



✓10. ვთქვათ, $A=(5;\ 7)$, $B=(3;\ 1)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}=$

ა) (2; 6) ბ) (−2; −6) გ) (8; 8) დ) (−6; −2).

✓11. თუ $A=(x_1;\ y_1)$, $B=(x_2;\ y_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}=$

ა) $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ ბ) $(x_1+x_2;\ y_2+y_1)$

გ) $(x_2-y_1;\ y_2-x_1)$ დ) $(x_1+y_1;\ x_1+y_2)$.

✓12. ნებისმიერ ვექტორულ სიდიდეს ახასიათებს

ა) მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობა

ბ) მხოლოდ მიმართულება

გ) რიცხვითი მნიშვნელობა და მიმართულება.

✓13. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორისთვის

ა) B არის სათავე, A — ბოლო ბ) A და B სათავეებია

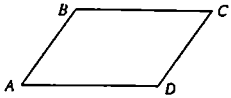
გ) A არის სათავე, B — ბოლო დ) A და B ბოლო წერტილებია.

✓14. ნულოვანი ვექტორის სათავე და ბოლო

ა) ერთი და იგივე წერტილია ბ) ორი სხვადასხვა წერტილია

გ) შეიძლება არ იყოს ერთი და იგივე წერტილი.

✓**15.** ვთქვათ, $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ

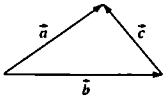


ა) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ და $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$ ბ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$

გ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ და $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ დ) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$.

✓**16.** თუ $\vec{a}=\vec{b}$, მაშინ

ა) $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$ ბ) $|\vec{a}|>|\vec{b}|$ გ) $|\vec{a}|<|\vec{b}|$ დ) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

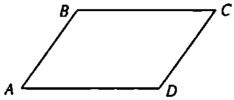


✓**17.** სურათის მიხედვით

ა) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ბ) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$

გ) $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ დ) $\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$.

✓**18.** თუ $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ



ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

გ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$ დ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$.

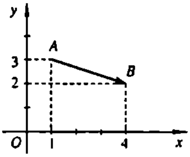
✓**19.** თუ $|\vec{a}|=3$, მაშინ $|4\vec{a}|=$

ა) 7 ბ) 0 გ) 12 დ) 1.

✓**20.** თუ $|\vec{a}|=5$, მაშინ $|-4\vec{a}|=$

ა) 20 ბ) -20 გ) 9 დ) -9.

✓**21.** სურათის მიხედვით $\overrightarrow{AB}=$



ა) (3; 1) ბ) (−3; 1)

გ) (−3; −1) დ) (3; −1).

✓**22.** თუ $A=(2;\ 2)$, $B=(-1;\ 4)$, $C=(2;4)$, $D=(5;\ 2)$, მაშინ

ა) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ბ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ გ) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$ დ) $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DC}$.

✓**23.** ნულოვანი ვექტორის მოდული

ა) დადებითი რიცხვია ბ) ნულია

გ) უარყოფითი რიცხვია დ) შეიძლება დადებითი რიცხვი იყოს.

✓**24.** $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე

ა) AB მონაკვეთის სიგრძეზე მეტია ბ) AB მონაკვეთის სიგრძეზე ნაკლებია

გ) AB მონაკვეთის სიგრძის ტოლია დ) AB მონაკვეთისა და (−1)-ის ნამრავლია.

✓**25.** ტემპერატურა

ა) ვექტორული სიდიდეა ბ) სკალარული სიდიდეა

გ) ზოგჯერ ვექტორული სიდიდეა დ) ზოგჯერ სკალარული სიდიდე არ არის.

✓**26.** სიჩქარე

ა) ვექტორული სიდიდეა ბ) სკალარული სიდიდეა

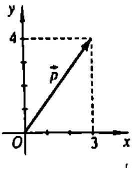
გ) ზოგჯერ ვექტორული სიდიდე არ არის დ) ზოგჯერ სკალარული სიდიდეა.

✓**27.** საკოორდინატო სიბრტყის $O(0;\ 0)$ და $B(7;\ 0)$ წერტილების მიხედვით იპოვეთ $\overrightarrow{OB}$ ვექტორის სიგრძე.

ა) 49 ბ) 7 გ) 3,5 დ) 14.

✓**28.** ვთქვათ, $A=(3;\ 2)$, $B=(6;\ 6)$. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე.

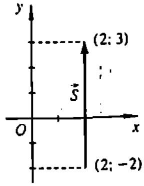
ა) 3 ბ) 4 გ) 5 დ) 6.



29. $\vec{p}=$

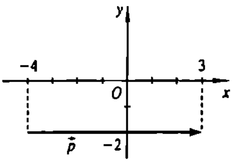
ა) $(4;\ 3)$ ბ) $(0;\ 0)$

გ) $(3;\ 4)$ დ) $(-3;\ -4)$.



✓**30.** სურათზე წარმოდგენილი $\vec{s}=$

ა) $(0;\ 5)$ ბ) $(0;\ -5)$ გ) $(0;\ 1)$ დ) $(0;\ 2)$.



✓**31.** სურათზე წარმოდგენილი $\vec{p}=$

ა) $(7;\ 0)$ ბ) $(-1;\ 0)$

გ) $(1;\ 0)$ დ) $(7;\ -2)$.

✓**32.** იპოვეთ იმ ვექტორის კოორდინატთა წყვილი, რომლის სათავეა $(-1;\ 5)$, ბოლო $(15;\ 2)$.

ა) $(16;\ -3)$ ბ) $(-16;\ 3)$ გ) $(16;\ 3)$ დ) $(-16;\ -3)$.

✓**33.** თუ $\vec{p}=(3;\ 2)$, მაშინ $-\vec{p}=$

ა) $(3;\ -2)$ ბ) $(-3;\ 2)$ გ) $(-3;\ -2)$ დ) $(3;\ -2)$.

✓**34.** თუ $\vec{p}=(3;\ 2)$, $\vec{q}=(2;\ 3)$, მაშინ $3\vec{p}+2\vec{q}=$

ა) $(12;\ 13)$ ბ) $(13;\ 12)$ გ) $(1;\ 2)$ დ) $(2;\ 1)$.

✓**35.** ვთქვათ, $\vec{p}=(3;\ 2)$, $\vec{q}=(2;\ 1)$, $\vec{r}=(1;\ 1)$. ცნობილია, რომ $x\vec{p}+y\vec{q}=\vec{r}$. იპოვეთ x და y.

ა) $x=1;\ y=1$ ბ) $x=1;\ y=-1$ გ) $x=-1;\ y=-1$ დ) $x=-1;\ y=1$.

✓**36.** მოცემულია: $A=(4;\ 1)$, $B=(2;\ 3)$, $C=(3;\ 1)$. იპოვეთ ისეთი $D(x;\ y)$ წერტილი, რომ ტოლი იყოს $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორები.

ა) $D=(1;\ 3)$ ბ) $D=(-1;\ 3)$ გ) $D=(-1;\ -3)$ დ) $D=(1;\ -3)$.

✓**37.** მოცემულია წერტილები: $A(1;\ 3)$, $B(3;\ -1)$, $C(4;\ 2)$. იპოვეთ ისეთი D წერტილის კოორდინატები, რომ $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

ა) $(13;\ 1)$ ბ) $(-13;\ 1)$ გ) $(1;\ 13)$ დ) $(-1;\ 13)$.

✓**38.** თუ $\vec{b}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის თანამიმართულია და მისი სიგრძე 2-ჯერ მეტია $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეზე, მაშინ

ა) $\vec{b}=-2\vec{a}$ ბ) $\vec{b}=2\vec{a}$ გ) $\vec{a}=2\vec{b}$ დ) $\vec{a}=-2\vec{b}$.

✓**39.** თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სიგრძეები ტოლია და ისინი საწინააღმდეგოდაა მიმართული, მაშინ

ა) $\vec{b}=-\vec{a}$ ბ) $\vec{a}=\vec{b}$ გ) $\vec{b}=2\vec{a}$ დ) $\vec{b}=-2\vec{a}$.

✓**40.** $\vec{b}$ ვექტორი $\vec{a}(3;\ 4)$ ვექტორის თანამიმართულია, $\vec{b}$-ს სიგრძე 20-ის ტოლია. იპოვეთ $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

ა) $(6;\ 8)$ ბ) $(12;\ 16)$ გ) $(-12;\ -16)$ დ) $(12;\ 20)$.

✓**41.** იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ მისი სიგრძე 5-ის ტოლია და $\vec{b}(-1;\ 2)$ ვექტორის საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორია.

ა) $(-\sqrt{5};\ 2\sqrt{5})$ ბ) $(\sqrt{5};\ -2\sqrt{5})$ გ) $(-5;\ 10)$ დ) $(5;\ -10)$.

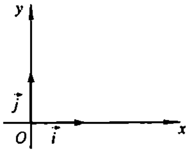
✓**42.** იპოვეთ $\vec{p}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ იგი $\vec{q}(-3;\ 2)$ ვექტორის თანამიმართულია და მისი სიგრძე 13-ის ტოლია.

ა) $(-3\sqrt{13};\ 2\sqrt{13})$ ბ) $(3\sqrt{13};\ 2\sqrt{13})$ გ) $(3\sqrt{13};\ -2\sqrt{13})$ დ) $\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

✓**43.** მოცემულია წერტილები $A(3;\ 2)$, $B(-1;\ 0)$ და $C(2;\ -6)$. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები, თუ $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

ა) $(8;\ -3)$ ბ) $(-8;\ -3)$ გ) $(8;\ 3)$ დ) $(3;\ 3{,}5)$.

✓**44.** საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტებიდან თითოეულის სიგრძე



ა) ნულის ტოლია ბ) ერთის ტოლია

გ) 2-ის ტოლია დ) 3-ის ტოლია.

✓**45.** საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტების კოორდინატებია

ა) $(1;\ 0)$ და $(0;\ 1)$ ბ) $(1;\ 1)$ და $(-1;\ -1)$

გ) $(1;\ 2)$ და $(2;\ 1)$ დ) $(-2;\ -1)$ და $(-1;\ -2)$.

✓**46.** ვთქვათ, $\vec{p}=(3;\ 4)$, მაშინ

ა) $\vec{p}=4\vec{i}+3\vec{j}$ ბ) $\vec{p}=3\vec{i}+4\vec{j}$ გ) $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}$ დ) $\vec{p}=-\vec{i}+\vec{j}$.

✓**47.** თუ $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}$, მაშინ $|\vec{p}|=$

ა) 1 ბ) 2 გ) $\sqrt{2}$ დ) $\sqrt{3}$.

✓**48.** თუ $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{q}=2\vec{i}-3\vec{j}$, მაშინ $\vec{p}+\vec{q}=$

ა) $3\vec{i}-2\vec{j}$ ბ) $-2\vec{i}+3\vec{j}$ გ) $-\vec{i}+4\vec{j}$ დ) $-\vec{i}-4\vec{j}$.

✓**49.** ნებისმიერი $\vec{p}$ არანულოვანი ვექტორის თანამიმართული ერთეულოვანი ვექტორია (ვექტორი, რომლის სიგრძე 1-ია):

ა) $-\frac{1}{|\vec{p}|}\cdot\vec{p}$ ბ) $\frac{1}{|\vec{p}|}\cdot\vec{p}$ გ) $\frac{2}{|\vec{p}|}\cdot\vec{p}$ დ) $-\frac{2}{|\vec{p}|}\cdot\vec{p}$.

✓**50.** იპოვეთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომელიც თანამიმართულია $\vec{p}=4\vec{i}+3\vec{j}$ ვექტორისა

ა) $-\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$ ბ) $-\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}$ გ) $\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$ დ) $\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}$.

51. მოცემულია ABC სამკუთხედის წვეროები: $A(1;\ 3)$, $B(5;\ 7)$, $C(3;\ -4)$.

ა) იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების კოორდინატები;

ბ) იპოვეთ დასახელებული ვექტორების სიგრძეები.

52. $ABCD$ ოთხკუთხედის წვეროებია: $A(-5;\ -3)$, $B(-3;\ 4)$, $C(2:\ 1)$, $D(0;\ -6)$.

ა) იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ და $\overrightarrow{AD}$ ვექტორების კოორდინატები,

ბ) დაასახელეთ ტოლი ვექტორები,

გ) დაადგინეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის სახე.

53. მოცემულია $A(2;\ 1)$, $B(5;\ 6)$ და $C(7;\ 4)$ წერტილები.

ა) იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების კოორდინატები;

ბ) იპოვეთ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები და შეადარეთ ეს ვექტორი $\overrightarrow{AC}$ ვექტორს. გამოსახეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ეს ვექტორები.

54. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}(3;\ 4)$, $\vec{b}(-1;\ 3)$. იპოვეთ:

ა) $\vec{a}+\vec{b}$; $-2\vec{a}$; $3\vec{b}$; $2\vec{a}+4\vec{b}$; $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატები

ბ) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|3\vec{a}|$, $|-2\vec{b}|$, $|\vec{a}+\vec{b}|$.

55. მოცემულია წერტილები: $A(2;\ 0)$, $B(8;\ 4)$, $C(8;\ 0)$.

- იპოვეთ: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების კოორდინატები;
- იპოვეთ დასახელებული ვექტორების სიგრძეები;
- გამოსახეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ABC სამკუთხედი;
- იპოვეთ x და y რიცხვები თუ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$ და $M=(x;\ 5-y)$.

56. ABC სამკუთხედში $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$.

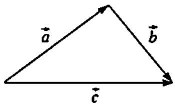
ა) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ბ) $\overrightarrow{BA}$ გ) $\overrightarrow{CB}$ დ) $\overrightarrow{AC}$.

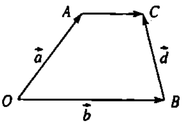
57. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. გამოსახეთ:

ა) $\overrightarrow{CA}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით;

ბ) $\overrightarrow{BA}$ ვექტორი $\vec{c}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით;

გ) $\overrightarrow{CB}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{c}$ ვექტორებით.



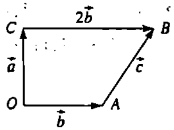


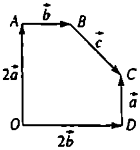
58. გამოსახეთ $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორები $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{d}$ ვექტორებით.

მითითება. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})$.

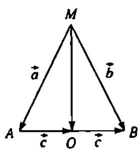
59. გამოსახეთ $\vec{c}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

მითითება. $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}$.

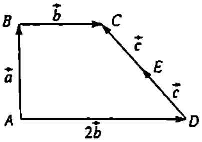




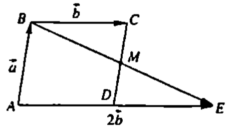
60. გამოსახეთ $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.



61. გამოსახეთ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}$ და $\overrightarrow{MO}$ ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.



62. გამოსახეთ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{AE}$ ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

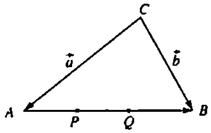


63. ცნობილია, რომ $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=2\vec{b}$. გამოსახეთ $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MD}$ ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

64. M, N და K წერტილები, შესაბამისად, AB, BC და AC მონაკვეთების შუა წერტილებია, $\overrightarrow{BA}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$.

ა) გამოსახეთ $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{MN}$ ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

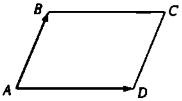
ბ) გამოსახეთ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{KN}$ და $\overrightarrow{MK}$ ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.



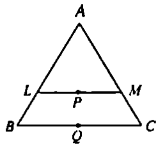
65. ვთქვათ, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $AP=\frac{1}{3}AB$, $AQ=\frac{2}{3}AB$.

ა) გამოსახეთ $\overrightarrow{CP}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით;

ბ) გამოსახეთ $\overrightarrow{PQ}$ და $\overrightarrow{CQ}$ ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.



66. $ABCD$ პარალელოგრამია. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$ ვექტორები.



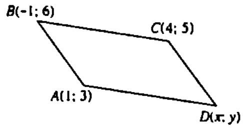
67. ცნობილია, რომ $AL=2LB$, $AM=2MC$, $|\overrightarrow{BC}|=a$.

ა) იპოვეთ $\overrightarrow{LM}$ ვექტორის სიგრძე;

ბ) ვთქვათ, P და Q არის LM-ისა და BC-ს შუა წერტილი. $|\overrightarrow{AQ}|=b$. იპოვეთ $|\overrightarrow{AP}|$.

68. ცნობილია, რომ $\vec{a}(x;7)$ და $\vec{b}(-5;\ y)$ ვექტორები ტოლია. იპოვეთ x და y.

69. ცნობილია, რომ $\vec{a}(\ 2x-y;\ 1)$ და $\vec{b}(-10;\ x+y)$ ვექტორები ტოლია. იპოვეთ x და y.



70. $ABCD$ პარალელოგრამია.

- იპოვეთ $\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები.
- $\overrightarrow{AD}$ ვექტორის კოორდინატები გამოსახეთ x-ითა და y-ით.
- იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები.

71. ვთქვათ, $2k$ სიგრძის MN მონაკვეთის შუა წერტილი r-რადიუსიანი წრეწირის ცენტრია; დაასაბუთეთ, რომ წრეწირის ნებისმიერი A წერტილისთვის $\overrightarrow{AM}$ და $\overrightarrow{AN}$ ვექტორების სიგრძეთა კვადრატების ჯამი ერთი და იგივეა.

72. მოცემულია წერტილები: $A(2;\ -7)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 1)$. ცნობილია, რომ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები.

73. მოცემულია $A(4;\ 4)$ და $B(7;1)$ წერტილები. C და D წერტილები, შესაბამისად, y და x ღერძებს ეკუთვნის. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. იპოვეთ C და D წერტილების კოორდინატები.

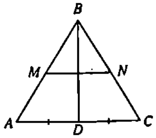
74. ცნობილია $ABCD$ პარალელოგრამის სამი წვერო: $A(8;\ -1)$, $B(2;\ 9)$, $C(11;\ 32)$. იპოვეთ მეოთხე წვეროს კოორდინატები.

75. ცნობილია, რომ C წერტილი ძევს წრფეზე, რომლის განტოლებაა $x=y$ და დაშორებულია $A(6;\ 1)$ წერტილიდან 5 ერთეულის ტოლი მანძილით. იპოვეთ C წერტილის კოორდინატები.

76. A წერტილი ძევს $y=x^2$ პარაბოლაზე და დაშორებულია (6;1) წერტილიდან 5 ერთეულის ტოლი მანძილით. იპოვეთ A წერტილის კოორდინატები.

77. მოცემულია $L(4;\ 1)$, $P(-2;\ 3)$, $R(4;\ 5)$ წერტილები. იპოვეთ ისეთი $K(x;\ y)$ წერტილი, რომ ტოლი იყოს:

ა) $\overrightarrow{LP}$ და $\overrightarrow{PK}$ ვექტორები, ბ) $\overrightarrow{KL}$ და $\overrightarrow{RP}$ ვექტორები.

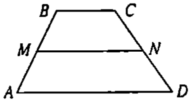


78. ABC სამკუთხედში MN შუახაზია, $AD=DC$. $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$. გამოსახეთ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებით:

ა) $\overrightarrow{AD}$; ბ) $\overrightarrow{MN}$;

გ) $\overrightarrow{AN}$; დ) $\overrightarrow{BD}$.

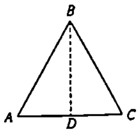
79. $ABCD$ ტრაპეციაა. MN შუახაზია. $\overrightarrow{BC}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$. გამოსახეთ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებით:



ა) $\overrightarrow{MN}$;

ბ) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{BC}$;

გ) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}$.



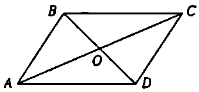
80. BD მედიანაა. გამოსახეთ $\overrightarrow{BD}$ ვექტორი $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$ და $\vec{q}=\overrightarrow{BC}$ ვექტორებით.

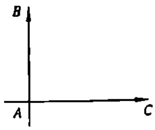
81. $ABCD$ პარალელოგრამია. იპოვეთ k რიცხვი, თუ:

ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{AC}$

ბ) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=k\overrightarrow{CA}$

გ) $(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{CA}$





82. $\angle BAC=90^0$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. იპოვეთ

ა) $|\vec{a}+\vec{b}|$; ბ) $|\vec{a}-\vec{b}|$; გ) $|2\vec{a}+4\vec{b}|$; დ) $|5\vec{a}+3\vec{b}|$.

83. $\vec{a}=-3\vec{b}$, $|\vec{a}|=2$. იპოვეთ $|\vec{b}|$.

84. მოცემულია წერტილები: $A(2;\ -5)$ და $B(-1;\ 3)$. გამოსახეთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი საკოორდინატო ღერძების ორტებით (ე. ი. $\vec{i}=(1;\ 0)$ და $\vec{j}=(0;\ 1)$ ვექტორებით).

85. $\vec{p}=3\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{q}=\vec{i}+2\vec{j}$; $\vec{i}$ და $\vec{j}$ საკოორდონატო ღერძების ორტებია. გამოსახეთ $\vec{a}$ ვექტორი $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორებით, თუ:

ა) $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{p}$, ბ) $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, გ) $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$,

დ) $\vec{a}=\frac{1}{2}(5\vec{p}+\vec{q})$, ე) $\vec{a}=-\vec{p}+\vec{q}$, ვ) $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$.

86. იპოვეთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომლის თანამიმართული ვექტორია:

ა) $\vec{p}=\vec{i}-\vec{j}$; ბ) $\vec{p}=2\vec{j}$; გ) $\vec{p}=\vec{i}-2\vec{j}$.

87. გამოიყენეთ კოსინუსების თეორემა და იპოვეთ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებს შორის კუთხე:

ა) $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{q}=2(\vec{i}-\vec{j})$; ბ) $\vec{p}=3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{q}=2\vec{i}-\vec{j}$;

გ) $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{q}=3\vec{i}-\vec{j}$; დ) $\vec{p}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{q}=\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$.

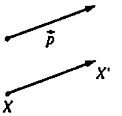
88. რა წერტილზე აისახება $M(3;\ 4)$ წერტილი P წერტილის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით, თუ P წერტილის კოორდინატების წყვილია:

ა) $(3;\ 4)$; ბ) $(-3;\ 4)$; გ) $(5;\ 6)$; დ) $(0;\ 6)$.

89. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზეც აისახება $y=2x+3$ წრფე ცენტრული სიმეტრიით P ცენტრის მიმართ, თუ P წერტილის კოორდინატების წყვილია:

ა) $(2;\ 4)$, ბ) $(0;\ 0)$, გ) $(-2;\ 4)$, დ) $(4;\ -2)$.

პარალელური გადატანა არის სიბრტყის თავის თავზე ასახვა, რომელიც ყოველ X წერტილს ისეთ X' წერტილზე ასახავს, რომ 1) XX' სხივს მოცემული მიმართულება აქვს, 2) XX' მონაკვეთს მოცემული სიგრძე აქვს. მაშასადამე, თითოეული პარალელური გადატანა სავსებით განისაზღვრება თავისი მიმართულებით და იმ საერთო მანძილით, რომელზედაც იგი სიბრტყის ნებისმიერ წერტილს გადაადგილებს — ე. ი. განისაზღვრება ვექტორით, რომელსაც აღნიშნული მიმართულება აქვს და სიგრძე გადაადგილების მანძილის ტოლია.



ასეც შეიძლება ვთქვათ, პარალელური გადატანა $\vec{p}$ ვექტორით ყოველ X წერტილს ასახავს ისეთ X' წერტილზე, რომლისთვისაც

$$\overrightarrow{XX'}=\vec{p} \qquad (1)$$

თუ $\vec{p}$ ვექტორის კოორდინატებია a და b — $\vec{p}=(a;\ b)$, მაშინ, (1) ფორმულის თანახმად,

$$\begin{array}{l|l} x'-x=a & x'=x+a \\ y'-y=b & y'=y+b \end{array} \qquad (2)$$

(2) ფორმულებით პარალელური გადატანა კოორდინატებითაა წარმოდგენილი.

პარალელური გადატანა გადაადგილებაა — ე. ი. პარალელური გადატანისას არ იცვლება ორ წერტილს შორის მანძილი. წარმოგიდგენთ ზოგიერთ სხვა თვისებასაც: $\vec{p}$ ვექტორით პარალელური გადატანისას

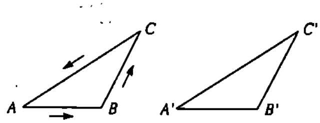
1) ყოველი წრფე, რომელიც $\vec{p}$-ს პარალელურია, თავის თავზე აისახება; ხოლო წრფე, რომელიც $\vec{p}$-ს პარალელური არ არის, აისახება ამ წრფის პარალელურ წრფეზე;

2) მონაკვეთი, რომელიც $\vec{p}$-ს პარალელურია აისახება ამ მონაკვეთზე გამავალი წრფის მონაკვეთზე;

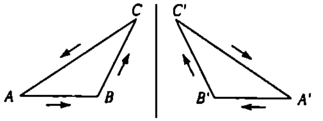
მონაკვეთი, რომელიც $\vec{p}$-ს პარალელური არ არის, აისახება ამ მონაკვეთის პარალელურ მონაკვეთზე.

3) სხივი აისახება მის თანამიმართულ სხივზე;

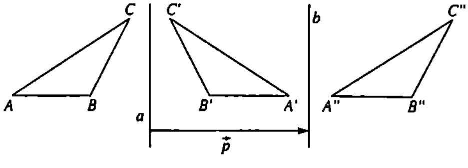
4) ფიგურის ორიენტაცია არ იცვლება;



მაგალითად, ვთქვათ, ABC სამკუთხედის გარშემო შემოვლის მიმართულება $A \to B \to C$ თანამიმდევრობით განისაზღვრა — ასეთი შემოვლა საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას ხდება. მაშინ ABC სამკუთხედის სახის — $A'B'C'$ სამკუთხედის შემოვლის მიმართულებაც — $A' \to B' \to C'$ გვაძლევს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით შემოვლას.



როგორც სურათიდან ჩანს, ღერძული სიმეტრიისას ფიგურის ორიენტაცია იცვლება.



თუ განვიხილავთ a და b პარალელური წრფეების მიმართ ღერძულ სიმეტრიათა კომპოზიციას, მაშინ მივიღებთ პარალელურ გადატანას — $A''B''C''$ მიიღება ABC სამკუთხედიდან $2\vec{p}$ ვექტორით პარალელური გადატანისას.

ორი პარალელური გადატანის კომპოზიცია კი პარალელური გადატანაა — თუ პირველი პარალელური გადატანა ხდება $\vec{p}$ ვექტორით, მეორე — $\vec{q}$ ვექტორით, მაშინ ამ პარალელურ გადატანათა კომპოზიცია ხორციელდება $(\vec{p}+\vec{q})$ ვექტორით.

ტ

✓**1.** ვთქვათ, პარალელური გადატანა მოცემულია ფორმულით: $(x;\ y) \to (x-5;\ y+3)$. იპოვეთ წერტილი, რომელიც მიიღება $(3;\ -5)$ წერტილისგან მოცემული პარალელური გადატანისას.

ა) $(8;\ -8)$ ბ) $(2;\ 2)$ გ) $(-2;\ -2)$ დ) $(2;\ -2)$.

✓**2.** თუ პარალელური გადატანის ვექტორია $\vec{p}(3;\ -4)$, მაშინ ეს პარალელური გადატანა კოორდინატებით ასე ჩაიწერება

ა) $(x;\ y) \to (x+3;\ y+4)$ ბ) $(x;\ y) \to (x-4;\ y+3)$

გ) $(x;\ y) \to (x-3;\ y+4)$ დ) $(x;\ y) \to (x+3;\ y-4)$.

✓**3.** თუ პარალელური გადატანისას A წერტილი აისახა A'-ზე, B წერტილი — B'-ზე, მაშინ

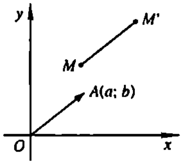
ა) $AB \parallel A'B'$, ან AB და $A'B'$ ერთ წრფეზე ძევს ბ) AB კვეთს $A'B'$-ს

გ) $AB \neq A'B'$ დ) $AB > A'B'$.

✓**4.** თუ პარალელური გადატანისას A წერტილი აისახა A'-ზე, B წერტილი — B'-ზე, მაშინ

ა) AB კვეთს $A'B'$-ს ბ) $AB \neq A'B'$ გ) $AB > A'B'$ დ) $A'B' = AB$.

✓**5.** თუ $M'(x';\ y')$ მიიღება $M(x;\ y)$ წერტილისგან $\overrightarrow{OA}(a;\ b)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას, მაშინ



ა) $x' = x-a;\ y' = y-b$

ბ) $x' = x-2a,\ y' = y-2b$

გ) $x' = x+2a,\ y' = y+2b$

დ) $x' = x+a,\ y' = y+b$.

✓**6.** თუ შევასრულებთ პარალელურ გადატანას $\overrightarrow{OA}$ ვექტორით, სადაც $O=(0;\ 0)$, $A=(4;\ -5)$, მაშინ ეს პარალელური გადატანა კოორდინატებით ასე ჩაიწერება:

ა) $(x;\ y) \to (x-5;\ y+4)$ ბ) $(x;\ y) \to (x+4;\ y-5)$

გ) $(x;\ y) \to (x+5;\ y-4)$ დ) $(x;\ y) \to (x-4;\ y+5)$.

✓**7.** ვთქვათ, პარალელური გადატანა მოცემულია ფორმულით: $(x;\ y) \to (x-3;\ y+2)$. იპოვეთ წერტილი, რომელშიც აისახება $(3;\ -2)$ წერტილი.

ა) $(0;\ 0)$ ბ) $(6;\ 4)$ გ) $(-6;\ 4)$ დ) $(0;\ -4)$.

✓**8.** ვთქვათ, $\vec{p}(2;\ -6)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას $M(x;\ y) \to M'(x';\ y')$, მაშინ

ა) $x'=x+2$, $y'=y+6$ ბ) $x'=x-2$, $y'=y-6$ გ) $x'=x-2$, $y'=y+6$ დ) $x'=x+2$, $y'=y-6$.

✓**9.** ვთქვათ, $M=(-3;\ 1)$. იპოვეთ მისი სახე $\vec{p}(5;\ 0)$-ით პარალელური გადატანისას.

ა) $M'(8;\ 0)$ ბ) $M'(2;\ 1)$ გ) $M'(-8;\ 1)$ დ) $M'(8;\ 1)$.

✓**10.** ცნობილია, რომ $\vec{p}(a;\ b)$ პარალელური გადატანისას $M(3;\ 5) \to M'(8;\ 8)$. იპოვეთ a და b.

ა) $a=5,\ b=3$ ბ) $a=3,\ b=5$ გ) $a=-5,\ b=-3$ დ) $a=-5,\ b=3$.

✓**11.** $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებით პარალელურ გადატანათა კომპოზიცია არის

ა) ღერძული სიმეტრია

ბ) ცენტრული სიმეტრია

გ) პარალელური გადატანა $\vec{p}+\vec{q}$ ვექტორით

დ) პარალელური გადატანა $\vec{p}-\vec{q}$ ვექტორით.

✓**12.** ცნობილია, რომ T პარალელური გადატანისას $(0;\ 0) \to (3;\ 0)$. რა წერტილი აისახება ამ პარალელური გადატანისას $A'(5;\ 4)$ წერტილზე?

ა) $(8;\ 4)$ ბ) $(2;\ 4)$ გ) $(-2;\ -4)$ დ) $(0;\ 4)$.

✓**13.** ორი ღერძული სიმეტრიის კომპოზიცია, რომელთა ღერძები პარალელურია,

ა) ღერძული სიმეტრიაა ბ) პარალელური გადატანაა

გ) ცენტრული სიმეტრიაა დ) ასახვაა, რომელიც მანძილებს ცვლის.

✓**14.** თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორით პარალელური გადატანისას რაიმე $M(x;\ y)$ წერტილი აისახება $M'(x';\ y')$ წერტილზე, მაშინ $\overrightarrow{BA}$ ვექტორით $M'(x';\ y')$ აისახება

ა) $M(y;\ x)$ წერტილზე ბ) $M(-x;\ -y)$ წერტილზე

გ) $M(x;\ -y)$ წერტილზე დ) $M(x;\ y)$ წერტილზე.

✓**15.** $\vec{p}(3;\ 0)$ ვექტორით პარალელური გადატანისას $A(2;\ 5)$ წერტილი აისახება

ა) $A'(5;\ 5)$ წერტილზე ბ) $A'(-1;\ 5)$ წერტილზე

გ) $A'(2;\ 2)$ წერტილზე დ) $A'(2;\ 5)$ წერტილზე.

✓**16.** დაწერეთ იმ T პარალელური გადატანის ფორმულები, რომლითაც $A(-3;\ -5)$ აისახება $B(-3;\ -7)$ წერტილზე.

ა) $x'=x-3$, $y'=y-7$ ბ) $x'=x-3$, $y'=y-5$ გ) $x'=x$, $y'=y-2$ დ) $x'=x$, $y'=y+2$.

✓**17.** A და B წერტილებს შორის მანძილი 5 ერთეულია. T პარალელური გადატანაა, $A'=T(A)$, $B'=T(B)$, მაშინ $A'B'=$

ა) 10 ბ) 2,5 გ) 15 დ) 5.

✓**18.** $\vec{p}(2;\ 3)$ პარალელური გადატანისას $y=3x+7$ წრფე აისახება

ა) $y=3x+2$ წრფეზე ბ) $y=3x+4$ წრფეზე

გ) $y=-3x+4$ წრფეზე დ) $y=3x-2$ წრფეზე.

✓**19.** იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზეც აისახება $y=2x-1{,}5$ წრფე პარალელური გადატანით, რომელიც $\overrightarrow{OM}(3;\ -4)$ ვექტორით განისაზღვრება.

ა) $y=2x-8{,}7$ ბ) $y=2x-7{,}5$ გ) $y=2x-5{,}5$ დ) $y=2x-11{,}5$.

✓**20.** ვთქვათ, პარალელური გადატანისას $(2;\ -7)$ წერტილი აისახა $(-6;\ 9)$ წერტილზე. იპოვეთ წერტილი, რომელზეც იმავე პარალელური გადატანისას კოორდინატთა სათავე აისახება.

ა) $(8;\ -16)$ ბ) $(-8;\ 16)$ გ) $(-4;\ 2)$ დ) $(4;\ 1)$.

✓**21.** ვთქვათ, $A=(2;\ 3)$, $B=(-2;\ 4)$, $O(0;\ 0)$, მაშინ $\overrightarrow{BO}$ ვექტორით პარალელური გადატანისას A წერტილი აისახება

ა) $(4;\ -1)$-ზე ბ) $(-4;\ 1)$-ზე გ) $(0;\ -1)$-ზე დ) $(0;\ 1)$-ზე.

✓**22.** ვთქვათ, O კოორდინატთა სათავეა. პარალელური გადატანა ხდება $\overrightarrow{OM}$ ვექტორით, $M=(0;\ 2)$. ამ პარალელური გადატანით $B(5;\ b)$ აისახა $B'(a;\ -3)$-ზე. იპოვეთ a და b.

ა) $a=3;\ b=-5$ ბ) $a=5,\ b=-1$ გ) $a=2,\ b=-3$ დ) $a=5,\ b=-5$.

✓**23.** ვთქვათ, $\overrightarrow{OP}=(1;\ 1)$. T პარალელური გადატანისას $M(x;\ y)$ აისახება $M'(x';\ y')$-ზე, მაშინ

ა) $x'=x-1$, $y'=y-1$ ბ) $x'=x+1$, $y'=y+1$ გ) $x'=x$, $y'=y$ დ) $x'=1-x$, $y'=1-y$.

✓**24.** T პარალელური გადატანა განსაზღვრულია $\vec{p}(2;\ 2)$ ვექტორით. $T(M(3;\ 4))=M'(x';\ y')$. იპოვეთ x' და y'.

ა) $x'=4$, $y'=5$ ბ) $x'=2$, $y'=3$ გ) $x'=-1$, $y'=2$ დ) $x'=5$, $y'=4$.

✓**25.** ვთქვათ, S_1 არის ღერძული სიმეტრია $x=3$ წრფის მიმართ, S_2 არის ღერძული სიმეტრია $x=5$ წრფის მიმართ. მაშინ S_1 და S_2 ღერძული სიმეტრიების კომპოზიციით ($S_2 \circ S_1$ ასახვით) $M(2;\ 3)$ წერტილი აისახება

ა) $M(5;\ 3)$ წერტილზე   ბ) $M(2;\ 3)$ წერტილზე
გ) $M(4;\ 3)$ წერტილზე   დ) $M(6;\ 3)$ წერტილზე.

✓**26.** ვთქვათ, S_1 არის ღერძული სიმეტრია $x=5$ წრფის მიმართ. S_2 არის ღერძული სიმეტრია $x=7$ წრფის მიმართ. მაშინ $S_2 \circ S_1$ არის პარალელური გადატანა, რომელიც განისაზღვრება ვექტორით

ა) $\vec{p}(2;\ 0)$ ბ) $\vec{p}(4;\ 0)$ ბ) $\vec{p}(3;\ 0)$ დ) $\vec{p}(6;\ 0)$.

✓**27.** პარალელური გადატანა $A(-2;\ 1)$ წერტილს ასახავს $A'(0;\ 3)$ წერტილზე. რომელი ვექტორით განისაზღვრება ეს პარალელური გადატანა?

ა) $\vec{p}(2;\ 2)$ ბ) $\vec{p}(1;\ 1)$ გ) $\vec{p}(1;\ 3)$ დ) $\vec{p}(2;\ 4)$.

✓**28.** პარალელური გადატანა $A(-2;\ 1)$ წერტილს ასახავს $A'(0;\ 3)$ წერტილზე. რომელ წრფეზე ასახავს ეს პარალელური გადატანა $y=-3x+1$ წრფეს?

ა) $y=-3x+6$ ბ) $y=-3x+8$ გ) $y=-3x+1$ დ) $y=-3x+9$.

✓**29.** პარალელური გადატანა $A(-3;\ 1)$ წერტილს ასახავს $A'(2;\ 5)$ წერტილზე. რომელ წრფეზე ასახავს ეს პარალელური გადატანა $y=-4x+2$ წრფეს?

ა) $y=-4x+26$ ბ) $y=-4x+20$ გ) $y=-4x+4$ დ) $y=-4x+2$.

✓**30.** დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(2;\ 3)$ წერტილზე და მიიღება $y=-2x+1$ წრფისგან პარალელური გადატანით.

ა) $y=-2x+4$ ბ) $y=-2x+7$ გ) $y=-2x+3$ დ) $y=-2x+1$.

✓**31.** T პარალელური გადატანით $y=-2x+1$ წრფე აისახება $y=-2x+3$ წრფეზე. k-ს რა მნიშვნელობისთვის აისახება ამავე T პარალელური გადატანით $M(1;\ 1)$ წერტილი $M'(3;\ k)$ წერტილზე?

ა) $k=2$ ბ) $k=1$ გ) $k=-3$ დ) $k=-1$.

32. $C(-1;\ 4)$, $D(3;\ 8)$ და $E(6;\ 10)$ სამკუთხედის წვეროებია. პარალელური გადატანა მოცემულია $\overrightarrow{DK}$ ვექტორით, სადაც $K=(0;\ 5)$. რა წერტილებზე აისახება C და E წერტილები?

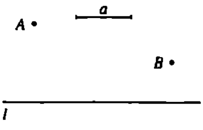
33. ვთქვათ, $A=(2;\ -5)$, $B=(1;\ 1)$, $C=(-3;\ -1)$, T პარალელური გადატანაა; ამასთანავე, $T(A)=A'(5;\ 7)$, $T(B)=B'(x_1;\ y_1)$, $T(C)=C'(x_2;\ y_2)$. იპოვეთ $(x_1;\ y_1)$ და $(x_2;\ y_2)$.

34. ვთქვათ, მოცემული ღერძულ სიმეტრიათა კომპოზიცია: $S_2 \circ S_1$ — ჯერ ვასრულებთ S_1 ღერძულ სიმეტრიას y ღერძის მიმართ, შემდეგ S_2 ღერძულ სიმეტრიას — $x=4$ წრფის მიმართ. ვთქვათ, $S_1(M(x;\ y))=M'\ (x';\ y')$, $S_2(M'(x';\ y'))=M''(x'';\ y'')$.

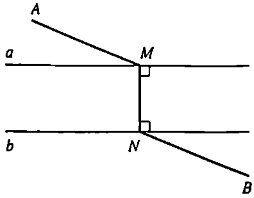
- გამოსახეთ x' და y' რიცხვები x და y რიცხვებით;
- გამოსახეთ x'' და y'' რიცხვები x და y რიცხვებით;
- რა პარალელური გადატანით მიიღება M'' წერტილი M-დან?

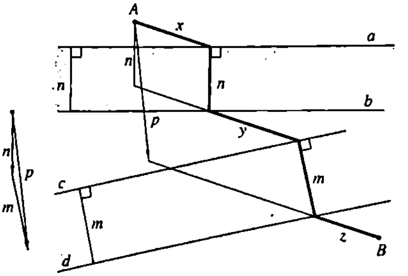
35. მოცემულია წერტილები: $(1;\ 3)$, $(-3;\ 7)$, $(0;\ 2)$, $(-2;\ 4)$, $(1;\ 4)$, $(0;\ 7)$, $(3;\ 2)$, $(-2;\ 0)$. შეარჩიეთ იმ წერტილთა წყვილები, რომელშიც პირველი წერტილი აისახება მეორე წერტილზე, $\vec{p}(3;\ 0)$ ვექტორით.

36. სიბრტყეზე მოცემული a სიგრძის მონაკვეთი, l წრფე, A და B წერტილები. სად უნდა ავიღოთ l წრფეზე a სიგრძის მონაკვეთი — მაგალითად, MF, რომ $AM+BF$ მანძილი უმცირესი იყოს?



37. A და B წერტილებით ორი პუნქტია გამოსახული, a და b პარალელური წრფეებით მდინარის ნაპირები. სად უნდა ავაგოთ მდინარეზე ნაპირების მართობულად MN ხიდი, რომ A-დან B-მდე მანძილი ხიდის გავლით — $AMNB$ ტეხილის სიგრძე — უმცირესი იყოს?





38. სურათზე გამოსახულია ორი მდინარის ნაპირები (a და b, c და d წრფეები). A და B წერტილებით დასახლებული პუნქტებია გამოსახული, a-სა და b-ს შორის მანძილია n, c-სა და d-ს შორის — m.

სურათის მიხედვით შეეცადეთ აღწეროთ მდინარეებზე ხიდების აგების ადგილების შერჩევის ისეთი წესი, რომ A-დან B-მდე მანძილი ამ ხიდების გავლით უმცირესი იყოს.

39. ვთქვათ, S_1 და S_2 ღერძული სიმეტრიებია პარალელური ღერძების მიმართ. წარმოადგენს თუ არა $S_1 \circ S_2$ და $S_2 \circ S_1$ ერთსა და იმავე პარალელურ გადატანას?

40. ჩავწეროთ იმ პარალელური გადატანის ფორმულები, რომელიც

ა) $y=x^2$ ფორმულით მოცემულ გრაფიკს (პარაბოლას) ასახავს $y=x^2-2x-3$ პარაბოლაზე;

ბ) $y=x^2$ პარაბოლას ასახავს $y=x^2-4x+10$ პარაბოლაზე;

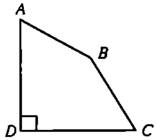
გ) $y=x^2$ პარაბოლას ასახავს $y=(x+2)^2-3$ პარაბოლაზე;

დ) $y=ax^2$ პარაბოლას ასახავს $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლაზე.

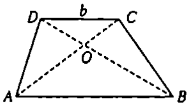
41. აისახება თუ არა:

ა) $y=2x+1$ წრფე $y=2x+3$ წრფეზე $\vec{p}(0;\ 2)$ პარალელური გადატანით?

ბ) $y=2x+1$ წრფე $y=2x+3$ წრფეზე $\vec{p}(-1;\ 0)$ პარალელური გადატანით?



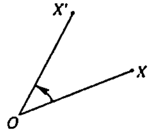
42. $ABCD$ ოთხკუთხედში $AB=6\sqrt{3}$, $CD=12$, $\angle A=60^0$, $\angle B=150^0$, $\angle D=90^0$. იპოვეთ BC და AD.



43. $ABCD$ ტრაპეციაში მოცემულია: $AC=d_1$, $BD=d_2$, $CD=b$, $\angle COB=\alpha$. იპოვეთ AB.

§ 2.5. მობრუნება

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია O წერტილი. ვიტყვით, რომ X' წერტილი მიღებულია X წერტილისგან საათის ისრის მიმართულებით (ან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით) α ($0^0 \le \alpha \le 180^0$) კუთხით მობრუნებისას, თუ



1) $OX=OX'$,

2) $\angle X'OX=\alpha$,

3) OX' სხივი მიიღება OX სხივისგან საათის ისრის მიმართულებით (ან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით) მობრუნებისას.

ამრიგად, მობრუნება განსაზღვრულია, როცა ვიცით:

1) O წერტილი (მობრუნების ცენტრი),

2) α კუთხე (მობრუნების კუთხე $0^0 \le \alpha \le 180^0$),

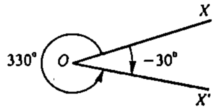
3) მობრუნების მიმართულება.

სურათზე ის შემთხვევაა გამოსახული, როცა მობრუნება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ხდება.

α კუთხის სიდიდე შეიძლება რადიანებშიც იყოს მოცემული. ამასთანავე, შევთანხმდეთ: საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნება დადებითად მივიჩნიოთ, საათის ისრის მიმართულებით მობრუნება — უარყოფითად.

თუ, მაგალითად, ვიტყვით, რომ გვაქვს მობრუნება $\alpha=-30^0$-ით. ეს ნიშნავს, რომ გვაქვს მობრუნება საათის ისრის მიმართულებით და $\angle X'OX=30^0$.

ნებისმიერი რიცხვისთვის შეიძლება განვიხილოთ მობრუნება ისეთი კუთხით, რომლის გრადუსული ზომა მოცემული რიცხვით გამოისახება, ამასთანავე, $\beta=\alpha+360^0 \cdot n$ (n მთელია, $-180^0 \le \alpha \le 180^0$) კუთხით O ცენტრის გარშემო მობრუნება α კუთხით მობრუნებად მივიჩნიოთ.



მაგალითად, 330^0-ით მობრუნება იგივეა, რაც -30^0-ით მობრუნება — X წერტილი ერთსა და იმავე X' წერტილზე აისახება.

მობრუნების თვისებები:

1. მობრუნებისას წერტილის სახე წერტილია, სხივის სახე სხივია, წრფე აისახება წრფეზე, ფიგურა — მის ტოლ ფიგურაზე.
2. მობრუნების უძრავი წერტილია მობრუნების ცენტრი.
3. მობრუნება არ ცვლის ფიგურის ორიენტაციას.
4. წრფე, რომელიც მობრუნების ცენტრზე გადის აისახება წრფეზე, რომელიც მობრუნების ცენტრზე გადის.
5. მობრუნება არის გეომეტრიული გარდაქმნა.
6. მობრუნება არის გადაადგილება.
7. O ცენტრის გარშემო α კუთხით მობრუნების შექცეული ასახვაა მობრუნება O ცენტრის გარშემო $-\alpha$ კუთხით.
8. თუ მობრუნებისას a წრფე აისახება a' წრფეზე, მაშინ a ამ a'-თან ადგენს კუთხეს, რომელიც მობრუნების კუთხის ტოლია. მობრუნებას α კუთხით O ცენტრის გარშემო ასე ჩავწერთ R_O^{α}.
9. ორი მობრუნების კომპოზიცია მობრუნებაა; ამასთანავე, $R_O^{\alpha} \circ R_O^{\beta} = R_O^{\alpha+\beta}$.

✓**1.** ცენტრული სიმეტრია არის

ა) მობრუნება 60^0-ით   ბ) მობრუნება 90^0-ით

გ) მობრუნება 180^0-ით   დ) მობრუნება 45^0-ით.

✓**2.** მობრუნება O ცენტრის გარშემო 390^0-იანი კუთხით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით არის მობრუნება

ა) საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 60^0-ით

ბ) საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 30^0-ით

გ) საათის ისრის მიმართულებით 30^0-ით

დ) საათის ისრის მიმართულებით 60^0-ით.

✓**3.** 390^0-ით მობრუნება O ცენტრის გარშემო ჩაწერეთ R_O^α $(-180^0<\alpha\le180^0)$ სახით

ა) $R_O^{-30^0}$ ბ) $R_O^{30^0}$ გ) $R_O^{360^0}$ დ) $R_O^{-360^0}$.

✓**4.** ვთქვათ, $\beta=-370^0$, მაშინ მობრუნება β კუთხით O ცენტრის გარშემო არის მობრუნება α კუთხით O ცენტრის გარშემო, სადაც

ა) $\alpha=-10^0$ ბ) $\alpha=10^0$ გ) $\alpha=30^0$ დ) $\alpha=-30^0$.

✓**5.** მობრუნება O ცენტრის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 30^0-ით ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

ა) $R_O^{30^0}$ ბ) $R_O^{-30^0}$ გ) $R_O^{60^0}$ დ) $R_O^{-60^0}$.

✓**6.** $R_O^{100^0}\circ R_O^{250^0}=$

ა) $R_O^{-10^0}$ ბ) $R_O^{360^0}$ გ) $R_O^{10^0}$ დ) $R_O^{-20^0}$.

✓**7.** თუ $R_O^{70^0}\circ R_O^\alpha=E$ (E იგივური ასახვაა), მაშინ α შეიძლება იყოს

ა) 310^0 ბ) -70^0 გ) 70^0 დ) 90^0.

✓**8.** კოორდინატთა სათავის მიმართ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 90^0-ით მობრუნებისას $M(3;\ 4)$ წერტილი აისახება

ა) $M'(-3;\ 4)$ წერტილზე ბ) $M'(4;\ 3)$ წერტილზე

გ) $M'(-4;\ 3)$ წერტილზე დ) $M'(-4;\ -3)$ წერტილზე.

✓**9.** თუ კოორდინატთა სათავის მიმართ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 90^0-ით მობრუნებისას $M(x;\ y)$ წერტილის სახე არის $M'(x';\ y')$ წერტილი, მაშინ

ა) $x'=y$, $y'=-x$ ბ) $x'=y$, $y'=x$ გ) $x'=-y$, $y'=-x$ დ) $x'=-y$, $y'=x$.

✓**10.** $R_O^{\frac{13\pi}{6}}$ არის მობრუნება O ცენტრის გარშემო $\frac{13\pi}{6}$ კუთხით. $R_O^{\frac{13\pi}{6}}=$

ა) $R_O^{\frac{3\pi}{6}}$ ბ) $R_O^{\frac{\pi}{6}}$ გ) $R_O^{\frac{\pi}{2}}$ დ) $R_O^{\frac{\pi}{3}}$.

✓**11.** $R_O^{-\pi}=$

ა) R_O^{π} ბ) $R_O^{2\pi}$ გ) $R_O^{\frac{\pi}{2}}$ დ) $R_O^{\frac{3\pi}{2}}$.

✓**12.** თუ $n\in Z$, მაშინ ნებისმიერი α-სთვის $R_O^{\alpha+2\pi n}=$

ა) $R_O^{2\pi n}$ ბ) $R_O^{2\pi}$ გ) $R_O^{\frac{\pi}{2}}$ დ) R_O^{α}.

✓**13.** თუ A' არის A-ს სახე O ცენტრის გარშემო α კუთხით მობრუნებისას, B' არის B-ს სახე ამავე მობრუნებისას, მაშინ

ა) $A'B'=2AB$ ბ) $A'B'=AB$ გ) $A'B'=\frac{1}{2}AB$ დ) $A'B'\neq AB$.

✓**14.** დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მიიღება $y=2x-1$ წრფისგან კოორდინატთა სათავის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნებისას.

ა) $y=\frac{1}{2}x+1$ ბ) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ გ) $y=\frac{1}{2}x-1$ დ) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

✓**15.** $A(3;\ 2)$ წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით α $(0<\alpha<180^0)$ კუთხით მობრუნებისას აისახება $A'(x;\ 3)$ წერტილზე. იპოვეთ x.

ა) მხოლოდ 2 ბ) მხოლოდ 4 გ) 4 ან −4 დ) −2 ან 2.

✓ **16.** $A(3;\ 2)$ წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ საათის ისრის მიმართულებით მახვილი კუთხით მობრუნებისას აისახება $A'\ (2;\ y)$ წერტილზე. იპოვეთ y.

ა) 3 ბ) −3 გ) 2 დ) −2.

17. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები $A(6;\ 0)$, $B(-2;\ 0)$, $C(1;\ 4)$, $D(-2;\ -7)$. იპოვეთ კოორდინატები იმ წერტილებისა, რომლებიც მიიღება A, B, C და D წერტილებიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით კოორდინატის სათავის გარშემო 90^0-იანი კუთხით მობრუნებისას.

შეიცვლება თუ არა ეს კოორდინატები, როცა მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით?

18. ცნობილია, რომ X წერტილი α კუთხით მობრუნებისას აისახება X' წერტილზე

ა) $\alpha=45^0$; ბ) $\alpha=75^0$; გ) $\alpha=-130^0$;

დ) $\alpha=-40^0$; ე) $\alpha=-90^0$.

თითოეული შემთხვევისთვის იპოვეთ მობრუნების კუთხის სხვა ორი რაიმე მნიშვნელობა, რომლისთვისაც X კვლავ X'-ზე აისახება.

19. მოცემული მობრუნება წარმოადგინეთ R_O^α $(-180^0<\alpha\leq180^0)$ სახით:

ა) $R_O^{1080^0}$ ბ) $R_O^{750^0}$ გ) $R_O^{-570^0}$ დ) $R_O^{-1000^0}$.

ე) $R_O^{380^0}$ ვ) $R_O^{1200^0}$ ზ) $R_O^{1500^0}$

20. ვთქვათ, გვაქვს საკოორდინატო სიბრტყის მობრუნება O სათავის გარშემო α კუთხით. რა წერტილზე აისახება $X=(1;\ 0)$ წერტილი, როცა:

ა) $\alpha=-30^0$; ბ) $\alpha=-45^0$; გ) $\alpha=-90^0$; დ) $\alpha=-120^0$;

ე) $\alpha=60^0$; ვ) $\alpha=135^0$; ზ) $\alpha=-60^0$; ლ) $\alpha=-135$.

21. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები:

$$A(5;\ 0),\quad B(2\sqrt{3};\ 2),\quad C(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}),\quad D(-1;\ \sqrt{3}).$$

იპოვეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ის წერტილები, რომლებზეც ეს წერტილები აისახება საათის ისრის მიმართულებით სათავის გარეშემო 60^0-ით მობრუნებისას (ანუ R_O^{-60} მობრუნებისას).

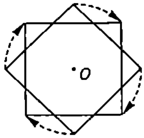
22. ვთქვათ, $A(1;\ 2)$ წერტილი აისახა $A'(2;\ -1)$ წერტილზე R_O^α მობრუნებით. იპოვეთ α, თუ $-180^0<\alpha<0$.

23. არსებობს თუ არა კოორდინატთა სათავის გარშემო მობრუნება, რომლის დროსაც $A(1;\ 2)$ აისახება $A'(2;\ 3)$-ზე?

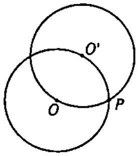
24. $A(4;\ 2)$, $B(7;\ 4)$, $C(6;\ 1)$ წერტილები სამკუთხედის წვეროებია. კოორდინატთა სათავის გარშემო მობრუნებისას A აისახა $A'(-4;\ -2)$ წერტილზე. რა წერტილებზე აისახება B და C წვეროები?

25. ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყის $M(a;\ 0)$ წერტილი $(a\neq0)$ $R_O^{30^0}$ მობრუნებისას აისახა X წერტილზე, ხოლო $R_O^{-45^0}$ მობრუნებისას — Y წერტილზე (O კოორდინატთა სათავეა). იპოვეთ მობრუნება, რომლითაც X აისახება Y-ზე.

26. კოორდინატთა სათავის გარშემო $R_O^{90^0}$ მობრუნებისას $A(2;\ 4)$ წერტილი აისახა A' წერტილზე. იპოვეთ AA'.



27. 2 სმ გვერდის მქონე კვადრატის ცენტრია O წერტილი. იპოვეთ ამ კვადრატისა და $R_O^{-45^0}$ მობრუნებისას მიღებული ოთხკუთხედის თანაკვეთის ფართობი.



28. მოცემულია R რადიუსიანი წრე ცენტრით O წერტილში; P წერტილი ძევს $(0;\ R)$ წრეწირზე. იპოვეთ მოცემული წრისა და $R_P^{-60^0}$ მობრუნებისას მიღებული წრის საერთო ნაწილის (თანაკვეთის) ფართობი.

29. იპოვეთ მობრუნების α $(-180^0<\alpha\leq 180^0)$ კუთხე, რომელიც საერთო ცენტრის მქონე β და γ კუთხეებით მობრუნების კომპოზიციაა:

ა) $\beta=25^0$, $\gamma=80^0$; ბ) $\beta=-45^0$, $\gamma=180^0$. გ) $\beta=-160^0$, $\gamma=-20^0$;

დ) $\beta=90^0$, $\gamma=45^0$. ე) $\beta=245^0$, $\gamma=155^0$, ვ) $\beta=180^0$, $\gamma=-180^0$.

30. ცნობილია, რომ საერთო ცენტრის გარშემო ერთი და იმავე α $(-180^0<\alpha\leq 180^0)$ კუთხით ორი მობრუნების კომპოზიცია იგივური ასახვაა. იპოვეთ α კუთხის ყოველი შესაძლო მნიშვნელობა.

31. ვთქვათ, მიმდევრობით ჩავატარეთ საერთო ცენტრის გარშემო ერთი და იმავე α $(-180^0<\alpha\leq 180^0)$ კუთხით სამი მობრუნება და შედეგი იგივური ასახვაა. იპოვეთ α კუთხის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა.

32. ცნობილია, რომ საერთო ცენტრის გარშემო 2-ჯერ α კუთხით მიმდევრობით მობრუნების შედეგი არის 90^0-ით მობრუნება.

- იპოვეთ უმცირესი შესაძლებელი დადებითი α.
- ჩაწერეთ ფორმულის სახით α კუთხის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა.

33. იპოვეთ n-ის ის უმცირესი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც საერთო ცენტრის გარშემო n-ჯერ მიმდევრიბით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით 19^0-იანი კუთხით მობრუნებათა კომპოციზია არის მობრუნება

ა) 10^0-ით, ბ) 20^0-ით.

34. ცნობილია, რომ საკოორდინატო სიბრტყეზე $(a;\ 0)$ წერტილი კოორდინატთა სათავის ირგვლივ 60^0-იანი კუთხით მობრუნებისას A წერტილში აისახა, ხოლო -60^0-იანი კუთხით მობრუნებისას — B წერტილში. იპოვეთ:

ა) A და B წერტილების კოორდინატები;

ბ) OAB სამკუთხედის ფართობი.

35. ცნობილია, რომ საკოორდინატო სიბრტყეზე $(1;\ 0)$ წერტილი სათავის ირგვლივ 135^0-იანი კუთხით მობრუნებისას A წერტილში აისახა, ხოლო -135^0-იანი კუთხით მობრუნებისას — B წერტილში. C და D წერტილები არის, შესაბამისად, A და B წერტილების სიმეტრიული წერტილები სათავის მიმართ.

ა) იპოვეთ A, B, C და D წერტილების კოორდინატები;

ბ) იპოვეთ ABO სამკუთხედის ფართობი;

გ) დაადგინეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის სახე და იპოვეთ მისი ფართობი.

დ) იპოვეთ რომელიმე R_O^{α} მობრუნება, რომლითაც C აისახება D-ზე. რა წერტილზე აისახება ამ მობრუნებით $M(0;\ 2)$ წერტილი, $N(-1;\ 2)$ წერტილი?

36. იპოვეთ კოორდინატთა სათავის გარშემო

ა) $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების ფორმულები,

ბ) $-\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების ფორმულები,

გ) მოცემულია წერტილები $(-3;\ 1)$, $(-2;\ 5)$, $(7;\ 1)$, $(1;\ 3)$, $(-1;\ 7)$, $(-9;\ 0)$. შეარჩიეთ იმ წერტილების წყვილები, რომელთაგან პირველი მიიღება მეორისგან $\frac{\pi}{2}$ -ის ტოლი კუთხით მობრუნებით.

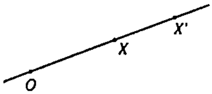
დ) მოცემულია წერტილები: $(0;\ -1)$, $(3;\ 1)$, $(2;\ 0)$, $(-7;\ -3)$, $(-5;\ -2)$, $(-1;\ 0)$, $(1;\ -3)$, $(-3;\ 7)$. შეარჩიეთ იმ წერტილების წყვილები, რომელთაგან პირველი მიიღება მეორისგან კოორდინატთა სათავის გარშემო $-\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი კუთხით მობრუნებით (ე. ი. საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნებით).

37. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მიიღება $y=3x-1$ წრფისგან კოორდინატთა სათავის გარშემო მობრუნებისას:

ა) $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლი კუთხით, ბ) $-\frac{\pi}{2}$-ს ტოლი კუთხით.

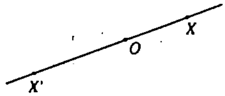
ჰომოთეტია O ცენტრითა და k $(k\neq 0)$ კოეფიციენტით ეწოდება სიბრტყის თავის თავზე ასახვას, როცა ყოველ X წერტილს შეესაბამება ისეთი X' წერტილი, რომ

$$\overrightarrow{OX'}=k\cdot\overrightarrow{OX}. \qquad (1)$$



მაშასადამე, თუ $k>0$, მაშინ X' ეკუთვნის OX სხივს და $OX'=k\cdot OX$. სურათზე ის შემთხვევაა გამოსახული, როცა $k>1$.

თუ $k<0$, მაშინ X' ეკუთვნის OX-ის დამატებით სხივს და $OX'=|k|\cdot OX$.



თუ $k=-1$, მაშინ, ცხადია, X' არის X-ის სიმეტრიული O ცენტრის მიმართ. ცენტრული სიმეტრია ჰომოთეტიის კერძო შემთხვევაა; **ჰომოთეტია $k=-1$ კოეფიციენტით ცენტრული სიმეტრიაა.**

თუ $k=1$, მაშინ X' წერტილი ეკუთვნის OX სხივს და $OX'=OX$. ე. ი X' ემთხვევა X-ს. **ჰომოთეტია, რომლის კოეფიციენტი 1-ის ტოლია, იგივური ასახვაა.**

თუ H არის ჰომოთეტია O ცენტრითა და k კოეფიციენტით, მაშინ მისი შექცეული ასახვა H^{-1} არის **ჰომოთეტია** O ცენტრითა და $\frac{1}{k}$ კოეფიციენტით.

ჰომოთეტიას O ცენტრითა და k კოეფიციენტით ასე ჩავწერთ: H_O^k.

ვთქვათ, ჰომოთეტიისას (O ცენტრითა და k კოეფიციენტით) F ფიგურა აისახა F' ფიგურაზე. მაშინ ვიტყვით, რომ F **ჰომოთეტიურია** F ფიგურის (ჰომოთეტიით O ცენტრითა და k კოეფიციენტით).

ჰომოთეტიის თვისებები:

1) ჰომოთეტიის ცენტრი უძრავი წერტილია — ჰომოთეტიისას ის თავის თავზე აისახება;

2) უძრავი წრფეები ჰომოთეტიის ცენტრზე გამავალი წრფეებია, სხვა ნებისმიერი წრფე აისახება ამავე წრფის პარალელურ წრფეზე.

3) კუთხე მის ტოლ კუთხეზე აისახება.

4) თუ $k>0$, მაშინ სხივი აისახება მის თანამიმართულ სხივზე, თუ $k<0$ — საწინააღმდეგოდ მიმართულ სხივზე.

5) ჰომოთეტიის მოცემისთვის საკმარისია მითითებული იყოს ცენტრი და წერტილთა წყვილი $(A;\ A')$, სადაც A' სახეა A წერტილისა — A' წერტილი OA წრფეზეა.

6) (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ გვაქვს ჰომოთეტია ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, $X=(x;\ y)$, $X'=(x';\ y')$ და X აისახება X'-ზე, მაშინ $\boldsymbol{x'=kx}$, $\boldsymbol{y'=ky}$. თუ ჰომოთეტიის ცენტრის კოორდინატებია a და b, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} x'-a&=k(x-a)\\ y'-b&=k(y-b)\end{aligned}\right| \quad \text{ანუ} \quad \begin{aligned} x'&=k(x-a)+a\\ y'&=k(y-b)+b\end{aligned}$$

თუ ჰომოთეტიისას ჰომოთეტიის კოეფიციენტია k და $X\to X'$, $Y\to Y'$, მაშინ

$$\overrightarrow{X'Y'}=k\cdot\overrightarrow{XY}.$$

ა

✓**1.** ვთქვათ, Y წერტილი X-ის ჰომოთეტიურია O ცენტრითა და k კოეფიციენტით $(k\neq 0)$ მაშინ

ა) $\overrightarrow{OY}=k\cdot\overrightarrow{OX}$ ბ) $\overrightarrow{OY}=-k\cdot\overrightarrow{OX}$ გ) $\overrightarrow{OY}=-2k\cdot\overrightarrow{OX}$ დ) $\overrightarrow{OY}=3k\cdot\overrightarrow{OX}$.

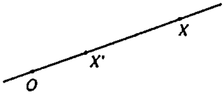
✓**2.** კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტია k კოეფიციენტით კოორდინატებში ასე ჩაიწერება

ა) $x'=kx$, $y'=(k+1)y$ ბ) $x'=ky$, $y'=kx$ გ) $x'=kx$, $y'=ky$ დ) $x'=(k+1)x$, $y'=(k+1)y$.

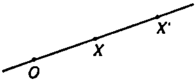
✓**3.** თუ $H_O^k(X)=X'$, $H_O^k(Y)=Y'$, მაშინ

ა) $\overrightarrow{X'Y'}=k\cdot\overrightarrow{XY}$ ბ) $\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{XY}$ გ) $\overrightarrow{X'Y'}=-\overrightarrow{XY}$ დ) $\overrightarrow{X'Y'}=(k+1)\cdot\overrightarrow{XY}$.

✓**4.** თუ X' მიიღება X წერტილისგან H_O^k ჰომოთეტიით და X' არის O და X წერტილებს შორის, მაშინ



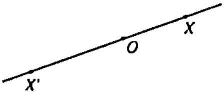
ა) $k>1$ ბ) $0<k<1$
გ) $k<0$ დ) $k=1$.



✓**5.** თუ X' მიიღება X წერტილისგან H_O^k ჰომოთეტიით და X არის O და X'-ს შორის, მაშინ

ა) $k>1$ ბ) $0<k<1$
გ) $k<0$ დ) $k=1$.

✓**6.** თუ X' ჰომოთეტიურია X წერტილის H_O^k ჰომოთეტიისას და X' ეკუთვნის OX სხივის დამატებით სხივს, მაშინ



ა) $k>1$ ბ) $0<k<1$
გ) $k<0$ დ) $k=1$.

✓**7.** ჰომოთეტია, რომლის კოეფიციენტია -1

ა) იგივური ასახვაა ბ) ღერძული სიმეტრიაა
გ) პარალელური გადატანაა დ) ცენტრული სიმეტრიაა.

✓**8.** ჰომოთეტია, რომლის კოეფიციენტია 1

ა) იგივური ასხვაა ბ) არ არის იგივური ასახვა
გ) ზოგჯერ არ არის იგივური ასახვა.

✓**9.** ვთქვათ, H_O^k ჰომოთეტია გადაადგილებაა (მოძრაობაა), მაშინ

ა) $k=2$ ბ) $k=3$ გ) $k=\pm1$ დ) $k=\pm2$.

✓**10.** ვთქვათ, $X'=H_O^k(X)$ და $X'=H_O^{\frac{1}{k}}(X)$. იპოვეთ k.

ა) $k=2$ ბ) $k=\pm1$ გ) $k=\pm2$ დ) $k=-2$.

✓**11.** ჰომოთეტიის ($k\neq1$) უძრავი წერტილი არის

ა) ჰომოთეტიის ცენტრი
ბ) წერტილი, რომელიც ჰომოთეტიის ცენტრიდან 1-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული
გ) ჰომოთეტიის ცენტრისგან განსხვავებული ნებისმიერი წერტილი.

✓**12.** ჰომოთეტიის ცენტრზე გამავალი წრფე ჰომოთეტიით აისახება

ა) ამ წრფის გადამკვეთ წრფეზე ბ) ამ წრფის პარალელურ წრფეზე
გ) ნებისმიერ სხვა წრფეზე დ) თვით ამ წრფეზე.

✓**13.** თუ $X'=H_O^k(X)$, $Y'=H_O^k(Y)$, მაშინ ყოველთვის $X'Y'=$

ა) XY ბ) $|k|\cdot XY$ გ) $k\cdot XY$ დ) $-k\cdot XY$.

✓**14.** თუ ჰომოთეტიის k კოეფიციენტი აკმაყოფილებს პირობას: $|k|>1$, მაშინ ამ ჰომოთეტიის შესრულებისას ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი

ა) მცირდება $|k|$-ჯერ ბ) იზრდება $|k|$-ჯერ
გ) არ იცვლება დ) იზრდება k ერთეულით.

✓**15.** დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზედაც აისახება $y=-2x$ წრფე H_O^3 (O კოორდინატთა სათავეა) ჰომოთეტიისას.

ა) $y=-2x+3$ ბ) $y=-2x-3$ გ) $y=-2x+1$ დ) $y=-2x$.

✓**16.** დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზედაც აისახება $y=-2x+1$ წრფე H_O^3 (O კოორდინატთა სათავეა) ჰომოთეტიისას.

ა) $y=-6x+1$ ბ) $y=-2x+1$ გ) $y=-2x+\frac{1}{3}$ დ) $y=-2x+3$.

✓**17.** დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზედაც აისახება $y=4x+2$ წრფე H_O^{-3} (O კოორდინატთა სათავეა) ჰომოთეტიისას

ა) $y=4x+3$ ბ) $y=4x-2$ გ) $y=4x+6$ დ) $y=4x-6$.

✓**18.** ვთქვათ, $A=(3;\ 1)$, $B=(7;\ -2)$. იპოვეთ AB მონაკვეთის ჰომოთეტიით მიღებული $A'B'$ მონაკვეთის სიგრძე, თუ ჰომოთეტიის კოეფიციენტია 0,5.

ა) 5 ბ) 2,5 გ) 3 დ) 4.

✓**19.** ვთქვათ, $A=(3;\ 1)$, $B=(7;\ -2)$. იპოვეთ კოორდინატთა სათავის მიმართ AB მონაკვეთის ჰომოთეტიით მიღებული $A'B'$ მონაკვეთის ბოლოების კოორდინატები, თუ ჰომოთეტიის კოეფიციენტია 0,5.

ა) $A'=(1{,}5;\ 1)$ $B'=(3{,}5;\ -2)$ ბ) $A'=(1{,}5;\ 0{,}5)$ $B'=(3{,}5;\ -1)$ გ) $A'=(1;\ 0)$ $B'=(3;\ -1)$ დ) $A'=(1;\ 1)$ $B'=(3;\ -2)$

✓**20.** ვთქვათ, $A=(3;\ 1)$, $B=(7;\ -2)$. იპოვეთ კოორდინატთა სათავის მიმართ AB მონაკვეთის ჰომოთეტიით მიღებული $A'B'$ მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები, თუ ჰომოთეტიის კოეფიციენტია 0,5.

ა) (1,75; 0,75) ბ) (2,5; −0,25) გ) (2; −0,5) დ) (2; −0,25).

✓**21.** რისი ტოლი უნდა იყოს კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი და y რიცხვი, რომ AB მონაკვეთის შუა წერტილი აისახოს $(0{,}1;\ y)$ წერტილზე, თუ $A=(0;\ 3)$, $B=(1;\ -1)$?

ა) $k=0{,}5$ $y=1$ ბ) $k=0{,}2$ $y=0{,}2$ გ) $k=0{,}1$ $y=0{,}3$ დ) $k=-0{,}2$ $y=0{,}4$.

22. იპოვეთ $A(0;\ 5)$, $B(3;\ 0)$, $C(-3;\ 2)$ და $E(-2;\ -3)$ წერტილების ჰომოთეტიური წერტილები ჰომოთეტიისას, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, კოეფიციენტი 2-ის ტოლია.

23. ცნობილია, რომ $A(2;\ 3)$ აისახება $A'(4;\ 6)$ წერტილზე ჰომოთეტიით, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა. იპოვეთ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი.

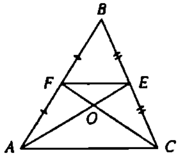
24. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ $x^2+y^2=4$ წრეწირი და მისი ჰომოთეტიური წრეწირი, თუ ჰომოთეტიის ცენტრი კოორდინატთა O სათავეა, $k=2{,}5$. იპოვეთ ამ ორი წრეწირით შემოსაზღვრული რგოლის ფართობი.

25. $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი ABC სამკუთხედის ჰომოთეტიურია k კოეფიციენტით, $k=2{,}4$. ABC სამკუთხედის გვერდებია 10 სმ, 12 სმ, 15 სმ. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის გვერდები.

26. O არის $ABCD$ კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ იმ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, რომლის ცენტრი O წერტილია და რომელიც AOB სამკუთხედს ასახავს COD სამკუთხედზე.

27. $ABCD$ კვადრატის გვერდი 2,5 დმ-ია. იპოვეთ იმ $A'B'C'D'$ კვადრატის პერიმეტრი და ფართობი, რომელიც $ABCD$ კვადრატის ჰომოთეტიურია ცენტრით დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში და k კოეფიციენტით:

ა) $k=3$; ბ) $k=\frac{1}{5}$; გ) $k=-2$.



28. AE და CF არის ABC სამკუთხედის მედიანები, O — მედიანების გადაკვეთის წერტილი. H ჰომოთეტიაა, რომელიც FOE სამკუთხედს ასახავს AOC სამკუთხედზე. იპოვეთ H და H^{-1} (H-ის შექცეული) ჰომოთეტიების კოეფიციენტები.

29. ვთქვათ, $H_O^k(X)=Y$ და A წერტილი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. დაასაბუთეთ, რომ

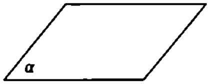
$$\overrightarrow{AY}=(1-k)\overrightarrow{AO}+k\overrightarrow{AX}.$$

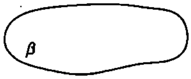
III თავი

სტერეომეტრია

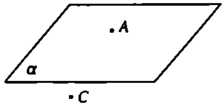
§ 3.1. წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში. წრფეების ურთიერთგანლაგება სივრცეში. წრფეთა პარალელობის ნიშანი

ერთ-ერთი სივრცული ფიგურა სიბრტყეა. სიბრტყე წერტილებისგან შედგება. სიბრტყეზე წარმოდგენას გვიქმნის, მაგალითად, მაგიდის ზედაპირი, თუ წარმოვიდგენთ, რომ იგი უსასრულოდაა გაწვენილი.



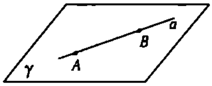


სურათზე სიბრტყე ორი სხვადასხვა სახითაა გამოსახული. ისინი α და β ასოებითაა აღნიშნული.



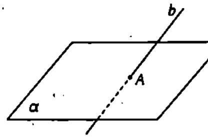
თუ A წერტილი α სიბრტყეს ეკუთვნის, C — არ ეკუთვნის, მაშინ ჩავწერთ

$$A\in\alpha,\ C\notin\alpha.$$

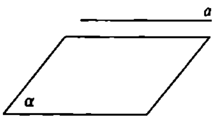


ამ სურათზე გამოსახულია a წრფე და γ სიბრტყე.

თუ წრფის რაიმე ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ ეს წრფე სიბრტყეზე მდებარეობს — სიბრტყე გადის ამ წრფეზე, $a\subset\gamma$.

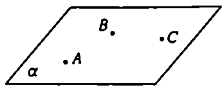


ამ სურათზე b წრფეს α სიბრტყესთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს: **წრფე კვეთს სიბრტყეს.**

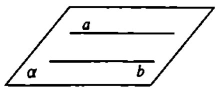


ამ სურათზე a წრფესა და α სიბრტყეს საერთო წერტილი არა აქვს: **a წრფე α სიბრტყის პარალელურია,** $a\|\alpha$.

ვთქვათ, A, B და C წერტილები ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, მაშინ არსებობს ერთადერთი α სიბრტყე, რომელიც გადის ამ წერტილებზე — **ყოველ სამ წერტილზე, რომლებიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, გადის ერთადერთი სიბრტყე.** A, B და C წერტილებზე გადის α სიბრტყე, ამ სიბრტყეს ასეც ჩავწერთ: ABC სიბრტყე.



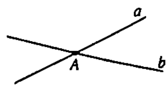
წრფეთა ურთიერთგანლაგება სივრცეში.



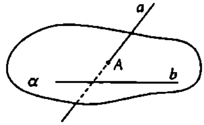
თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს საერთო წერტილი არა აქვს, მაშინ ამ წრფეებს **პარალელური წრფეები** ეწოდება: $a\|b$.

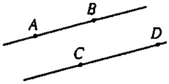
სივრცეში წერტილზე, რომელიც მოცემულ წრფეს არ ეკუთვნის, შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი წრფე, რომელიც მოცემული წრფის პარალელურია.

თუ ორ წრფეს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ეს წრფეები **გადამკვეთი წრფეებია. გადამკვეთ წრფეებზე შეიძლება ერთადერთი სიბრტყის გავლება.**



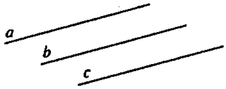
თუ a და b წრფეებს საერთო წერტილი არა აქვს და არ არსებობს, სიბრტყე, რომელიც ამ წრფეებზე გადის, მაშინ ასეთ წრფეებს **აცდენილი წრფეები** ეწოდება. სურათზე გამოსახული a და b აცდენილი წრფეებია.





თუ მონაკვეთები პარალელურ წრფეებზე მდებარეობს, მათ პარალელური მონაკვეთები ვუწოდოთ: მაგალითად, თუ AB და CD წრფეები პარალელურია, მაშინ AB და CD მონაკვეთებიც პარალელურია.

წრფეთა პარალელობის ნიშანი: თუ ორი წრფე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია.



მაგალითად, თუ a და b წრფეები c წრფის პარალელურია, მაშინ $a \| b$.

✓**1.** ყოველ სამ წერტილზე, რომლებიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, შეიძლება

ა) ორი სიბრტყის გავლება ბ) სამი სიბრტყის გავლება

გ) ერთადერთი სიბრტყის გავლება დ) უამრავი სიბრტყის გავლება.

✓**2.** ყოველი ორი წრფე, რომელთაც საერთო წერტილი არა აქვს

ა) პარალელური წრფეებია ბ) აცდენილი წრფეებია

გ) გადამკვეთი წრფეებია დ) პარალელური ან აცდენილი წრფეებია.

✓**3.** თუ ორი წრფე პარალელურია, მაშინ ეს წრფეები

ა) შეუძლებელია ერთ სიბრტყეზე მდებარეობდეს

ბ) იკვეთება

გ) არ იკვეთება და ისინი ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს

დ) არ იკვეთება და შეუძლებელია ერთ სიბრტყეზე მდებარეობდეს.

✓**4.** თუ a და b აცდენილი წრფეებია, მაშინ

ა) მათ საერთო წერტილი არ აქვს და ისინი ერთ სიბრტყეზეა

ბ) მათ საერთო წერტილი არა აქვს და არ არსებობს სიბრტყე, რომელზეც ორივე ეს წრფე მდებარეობს

გ) ისინი იკვეთება

დ) ისინი პარალელურია.

✓**5.** წრფე შეიძლება პარალელური იყოს

ა) მხოლოდ ერთი წრფის ბ) მხოლოდ ორი წრფის

გ) მხოლოდ სამი წრფის დ) უამრავი წრფის.

✓**6.** თუ მოცემული ოთხი წრფიდან ყოველი ორი პარალელურია, მაშინ მათგან განსხვავებული m წრფე შეიძლება პარალელური იყოს მოცემული წრფეებიდან

ა) მხოლოდ ორის ბ) მხოლოდ ერთის

გ) მხოლოდ სამის დ) თითოეულის.

✓**7.** ყოველ წრფეზე შეიძლება

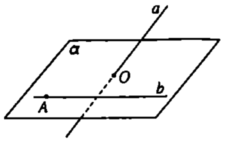
ა) ერთადერთი სიბრტყის გავლება

ბ) მხოლოდ ორი სიბრტყის გავლება

გ) მხოლოდ სამი სიბრტყის გავლება

დ) უამრავი სიბრტყის გავლება.

8. თუ a წრფე კვეთს α სიბრტყეს O წერტილში, ხოლო b წრფე α სიბრტყეზე მდებარეობს და არ გადის O წერტილზე, მაშინ

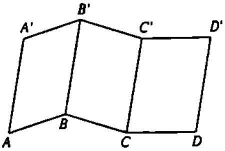


ა) $a \| b$
ბ) a კვეთს b-ს
გ) a და b აცდენილი წრფეებია
დ) a და b არ არის აცდენილი წრფეები.

9. ორ გადამკვეთ წრფეზე
ა) ერთადერთი სიბრტყე გადის
ბ) უამრავი სიბრტყე გადის
გ) ზუსტად სამი სიბრტყე გადის
დ) ზუსტად ორი სიბრტყე გადის.

10. თუ $a \| c$ და $b \| c$, მაშინ
ა) $a \perp b$
ბ) a არ არის პარალელური b წრფის
გ) a და b იკვეთება
დ) $a \| b$.

11. თუ AA_1B_1B, BB_1C_1D და CC_1D_1D პარალელოგრამებია, მაშინ

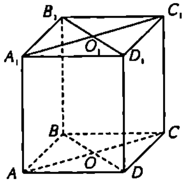


ა) $BB_1 \| DD_1$
ბ) BB_1 არ არის პარალელური DD_1 წრფის
გ) CC_1 არ არის პარალელური AA_1-ის
დ) BB_1 კვეთს DD_1-ს.

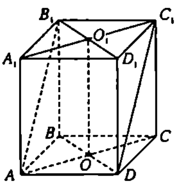
12. თუ პარალელურ წრფეთა სიმრავლიდან ერთ-ერთი წრფე კვეთს მოცემულ სიბრტყეს, მაშინ ამ სიმრავლის ყოველი წრფე
ა) შეიძლება არ კვეთდეს ამ სიბრტყეს
ბ) შეიძლება პარალელური იყოს ამ სიბრტყის
გ) კვეთს ამ სიბრტყეს
დ) მდებარეობს ამ სიბრტყეზე.

13. შეიძლება თუ არა, რომ რაიმე წრფე პარალელური იყოს მე-11 ამოცანაში გამოსახული პარალელოგრამების
ა) ზუსტად ხუთი გვერდის;
ბ) დიაგონალებიდან მხოლოდ ერთი დიაგონალის?

14. სურათზე წარმოდგენილი ფიგურა ექვსი მართკუთხედითაა შემოსაზღვრული (მართკუთხა პარალელეპიპედია), O და O_1 წერტილები, შესაბამისად, $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ მართკუთხედების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილებია. A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, O, O_1 წერტილებიდან

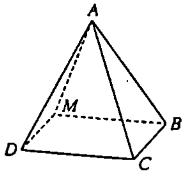


ა) რომელი ეკუთვნის $ABCD$ მართკუთხედის სიბრტყეს;
ბ) რომელი არ ეკუთვნის $ABCD$ მართკუთხედის სიბრტყეს;
გ) რომელი ეკუთვნის $A_1B_1C_1D_1$ მართკუთხედის სიბრტყეს;
დ) რომელი არ ეკუთვნის AA_1B_1B მართკუთხედის სიბრტყეს?



15. აქ წარმოდგენილი მართკუთხა პარალელეპიპედის მიხედვით დაასახელეთ
ა) პარალელური წრფეები;
ბ) აცდენილი წრფეები;
გ) გადამკვეთი წრფეები;
დ) წრფე, რომელზეც იკვეთება $ABCD$ და AA_1B_1B მართკუთხედების სიბრტყეები;
ე) წრფე, რომელზეც იკვეთება AA_1C_1C და BB_1D_1D სიბრტყეები.

16. *ABC*, *ABM*, *ADM* და *ADC* სამკუთხედებითა და *DMBC* პარალელოგრამით შემოსაზღვრულია *ABCDM* პირამიდა. დაასახელეთ:



ა) აცდენილ წრფეთა წყვილები;

ბ) გადამკვეთ წრფეთა წყვილები;

გ) პარალელური წრფეები.

17. მე-15 ამოცანაში წარმოდგენილი ფიგურის მიხედვით დაასახელეთ:

ა) წრფეები, რომლებიც AB_1C_1D მართკუთხედის სიბრტყეს კვეთს და რაიმე ორ დასახელებულ წერტილზე გადის;

ბ) AB_1C_1D და BB_1D_1D მართკუთხედების სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე;

გ) AB_1C_1D და AA_1C_1C მართკუთხედების სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე.

18. ვთქვათ, a და b აცდენილი წრფეებია, $c \parallel a$. დაასაბუთეთ, რომ c არ არის პარალელური b წრფის.

19. ვთქვათ, a და b აცდენილი წრფეებია, c კვეთს a-ს. რა შესაძლო ურთიერთგანლაგება შეიძლება ჰქონდეს b-სა და c-ს — შეიძლება თუ არა, რომ

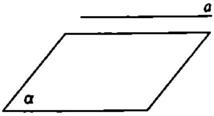
ა) c იყო b-ს პარალელური;

ბ) c კვეთდეს b-ს;

გ) c და b იყოს აცდენილი წრფეები?

20. ვთქვათ, a და b აცდენილი წრფეებია, a და c-ც აცდენილი წრფეებია. რა შესაძლო ურთიერთგანლაგება შეიძლება ჰქონდეს b და c წრფეებს — შეიძლება იყოს პარალელური, აცდენილი ან იკვეთებოდეს?

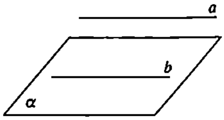
§ 3.2. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი



თუ წრფესა და სიბრტყეს საერთო წერტილი არა აქვს, მაშინ ვიტყვით, რომ წრფე პარალელურია სიბრტყის:

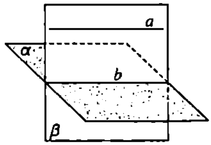
$$a \parallel \alpha.$$

წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი. თუ წრფე a სიბრტყეზე არ მდებარეობს და ამ სიბრტყეზე მდებარე რაიმე წრფის პარალელურია, მაშინ ეს წრფე α სიბრტყის პარალელურია.



თუ b წრფე α სიბრტყეზეა, $a \parallel b$ და a არ მდებარეობს α-ზე, მაშინ $a \parallel \alpha$.

ეს დებულება შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: ვთქვათ, α სიბრტყე არ გადის a წრფეზე, β სიბრტყე კი გადის a წრფეზე და კვეთს α-ს b წრფეზე. თუ $a \parallel b$, მაშინ $a \parallel \alpha$.



სწორია შებრუნებული დებულებაც: თუ a წრფე მდებარეობს β სიბრტყეზე, α სიბრტყეზე კი არ მდებარეობს, α და β იკვეთება b წრფეზე და $a \parallel \alpha$, მაშინ $a \parallel b$.

ა

1. a წრფე პარალელურია α სიბრტყის, თუ a წრფესა და α სიბრტყეს
   ა) ერთი საერთო წერტილი აქვს
   ბ) საერთო წერტილი არა აქვს
   გ) ორი საერთო წერტილი აქვს
   დ) უამრავი საერთო წერტილი აქვს.

2. თუ a წრფე α სიბრტყეზე არ მდებარეობს და პარალელურია α სიბრტყეზე მდებარე რაიმე b წრფის, მაშინ
   ა) a შეიძლება არ იყოს პარალელური α სიბრტყის
   ბ) $a \parallel \alpha$
   გ) a კვეთს α-ს
   დ) a-სა და α-ს ორი მაინც საერთო წერტილი აქვს.

3. თუ a წრფე პარალელურია α სიბრტყეზე მდებარე რაიმე b წრფის, მაშინ
   ა) a წრფეს α სიბრტყესთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს
   ბ) შეუძლებელია a მდებარეობდეს α-ზე ან a იყოს პარალელური α სიბრტყის
   გ) a ძევს α-ზე, ან $a \parallel \alpha$.
   დ) a აუცილებლად ძევს α-ზე.

4. თუ α სიბრტყე გადის β სიბრტყის პარალელურ a წრფეზე და კვეთს β-ს b წრფეზე, მაშინ
   ა) $a \parallel b$ ბ) a კვეთს b-ს
   გ) a არ არის პარალელური b წრფის დ) a შეიძლება კვეთდეს b-ს.

✓5. თუ სიბრტყე გადის $ABCD$ პარალელოგრამის AB გვერდზე და არ გადის CD გვერდზე, მაშინ

ა) CD წრფე კვეთს ამ სიბრტყეს

ბ) CD წრფე პარალელურია ამ სიბრტყის

გ) BC პარალელურია ამ სიბრტყის

დ) AD პარალელურია ამ სიბრტყის.

✓6. თუ α სიბრტყე გადის $ABCD$ ტრაპეციის AB ფუძეზე და არ გადის CD ფუძეზე, მაშინ

ა) BC წრფე პარალელურია α სიბრტყის

ბ) AD წრფე პარალელურია α სიბრტყის

გ) CD წრფე კვეთს α სიბრტყეს

დ) CD წრფე პარალელურია α სიბრტყის.

✓7. α სიბრტყე გადის ABC სამკუთხედის AC გვერდზე და არ გადის B წვეროზე. M და N, შესაბამისად, AB და BC გვერდების შუა წერტილებია, მაშინ

ა) MN წრფე კვეთს α სიბრტყეს

ბ) MN წრფე პარალელურია α სიბრტყის

გ) AB წრფე პარალელურია α სიბრტყის

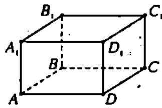
დ) BC წრფე პარალელურია α სიბრტყის.

8. მოცემულია ABC სამკუთხედი. α სიბრტყე პარალელურია AB წრფის, კვეთს AC-ს M წერტილში, BC-ს — N წერტილში. იპოვეთ MN მონაკვეთის სიგრძე, თუ:

ა) $AB=15$ სმ, $AM:AC=2:3$; ბ) $AB=16$ სმ, $AM:MC=5:3$;

გ) $NC=10$ სმ, $AB:BC=4:5$; დ) $AM=a$, $AB=b$, $MC=c$.

9. სურათზე მართკუთხა პარალელეპიპედია გამოსახული. დაასახელეთ:

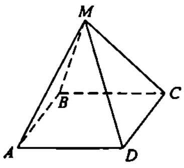


ა) $ABCD$ მართკუთხედის სიბრტყის პარალელური სამი წრფე;

ბ) BB_1D_1D მართკუთხედის სიბრტყის პარალელური წრფე;

გ) AB_1C_1D მართკუთხედის სიბრტყის პარალელური ორი წრფე;

დ) DC წრფის პარალელური ორი სიბრტყე.



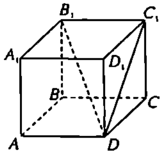
10. ვთქვათ, $ABCD$ პარალელოგრამია. სურათის მიხედვით დაასახელეთ:

ა) DC წრფის პარალელური სიბრტყე;

ბ) BC წრფის პარალელური სიბრტყე;

გ) DMC სამკუთხედის სიბრტყის პარალელური წრფე.

11. სურათის მიხედვით, რომელზეც მართკუთხა პარალელეპიპედია გამოსახული, დაასახელეთ:

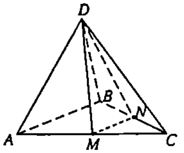


ა) სიბრტყე, რომელიც DC_1 წრფის პარალელურია და გადის AB წიბოზე;

ბ) სიბრტყე, რომელიც DD_1 წრფის პარალელურია და გადის AA_1 წიბოზე;

გ) სიბრტყე, რომელიც BC წრფის პარალელურია და გადის B_1D წრფეზე.

12. ვთქვათ, რაიმე a წრფე α სიბრტყეზე მდებარეობს, b წრფე — β სიბრტყეზე. გამომდინარეობს თუ არა აქედან, რომ ასეთი წრფეები აუცილებლად ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს? პასუხი დაასაბუთეთ.

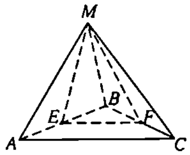


13. სურათზე M და N წერტილები, შესაბამისად, AC და BC მონაკვეთების შუა წერტილებია. დაასახელეთ:

ა) DMN სამკუთხედის სიბრტყის პარალელური წრფე;

ბ) ABD სამკუთხედის სიბრტყის პარალელური წრფე.

14. MEF სამკუთხედის სიბრტყე AC წრფის პარალელურია.



ა) დაამტკიცეთ, რომ EF წრფე AC წრფის პარალელურია;

ბ) იპოვეთ EF მონაკვეთის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ $AC=2$ დმ, $AB=1{,}6$ დმ, $BE=1{,}2$ დმ.

გ) იპოვეთ EF მონაკვეთის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ $AC=2$ დმ, $AB=1{,}6$ დმ და BE მონაკვეთის სიგრძე AE-ს სიგრძეზე $0{,}4$ დმ-ით მეტია.

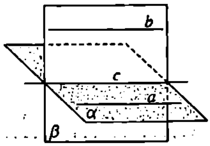
15. ABC სამკუთხედის A და C წვეროები α სიბრტყეზე ძევს. α სიბრტყის პარალელური a წრფე სამკუთხედის AB და BC გვერდებს კვეთს, შესაბამისად, M და N წერტილებში.

ა) დაამტკიცეთ, რომ MN წრფე არის AC წრფის პარალელური;

ბ) იპოვეთ AC მონაკვეთის სიგრძე, თუ $MN=12$ სმ და MB მონაკვეთის სიგრძე AB მონაკვეთის სიგრძის $\frac{2}{3}$-ია.

გ) იპოვეთ MN მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC=20$ სმ და $BM{:}AM=4{:}1$.

16. a და b წრფეები, შესაბამისად, α და β სიბრტყეებზეა, $a\|b$. დასახელებული სიბრტყეები იკვეთება c წრფეზე. დაასაბუთეთ, რომ მაშინ $c\|a$ და $c\|b$.



მითითება. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშნის თანახმად, $a\|\beta$, მაშინ შეგვიძლია შებრუნებული დებულების გამოყენება — $c\|a$. ანალოგიურად, $c\|b$.

17. სურათზე MEF სამკუთხედის სიბრტყე AC წრფის პარალელურია. იპოვეთ EF, თუ:

ა) $AC=12$ დმ და $AE=EB$;

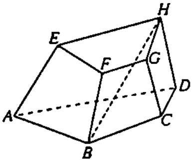
ბ) $AC=5$ დმ, BE-ს სიგრძე AE-ს სიგრძეზე $1{,}5$-ჯერ მეტია.

18. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის A და C წვეროები α სიბრტყეს ეკუთვნის. α სიბრტყის პარალელური a წრფე სამკუთხედის AB და BC გვერდებს კვეთს, შესაბამისად, M და N წერტილებში.

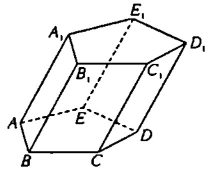
ა) იპოვეთ AC, თუ $MN=12$ სმ და $CN=3$ სმ;

ბ) იპოვეთ MN, თუ $AC=25$ სმ და $MB=\frac{CN}{4}$.

§ 3.3. მრავალწახნაგები. მრავალწახნაგების შლილები



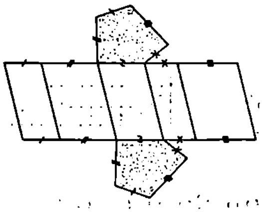
სურათზე ერთ-ერთი მრავალწახნაგაა გამოსახული. **მრავალწახნაგა სივრცული ფიგურაა, რომელიც მრავალკუთხედებითაა შემოსაზღვრული.** ეს მრავალწახნაგა — ექვსწახნაგაა, ექვსი მრავალკუთხედით შემოსაზღვრული ფიგურაა. მრავალკუთხედები მრავალწახნაგას **წახნაგებია**, წახნაგების წვეროებს მრავალწახნაგას **წვეროები** ეწოდება. გვერდებს — მრავალწახნაგას წიბოები. B და H წვეროები ერთსა და იმავე წახნაგს არ ეკუთვნის — მათ შემაერთებელ მონაკვეთს მრავალწახნაგას **დიაგონალი** ეწოდება.



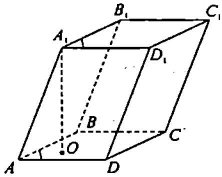
პრიზმა მრავალწახნაგას კერძო სახეა. პრიზმის ორი წახნაგი პარალელურ სიბრტყეზე მდებარე n-კუთხედებია — მათ **პრიზმის ფუძეები** ეწოდება; დანარჩენი n წახნაგი პარალელოგრამია, მათ **გვერდითი წახნაგები** ეწოდება.

სურათზე გამოსახული პრიზმის ფუძებია $ABCDE$ და $A_1B_1C_1D_1E_1$ ხუთკუთხედები, გვერდითი წახნაგები პარალელოგრამებია. მაგალითად, AA_1B_1B პარალელოგრამი **გვერდითი წახნაგია**.

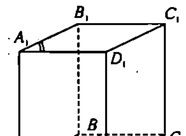
თუ წარმოვიდგენთ, რომ ამ მრავალწახნაგას მოდელი თხელი მუყაოსგან არის დამზადებული, მაშინ იგი შეიძლება რამდენიმე წიბოზე გაიჭრას და გაიშალოს ისე, რომ მრავალკუთხედის მოდელად გარდაიქმნას. ამ მრავალკუთხედს **მრავალწახნაგას ზედაპირის შლილი** ეწოდება. მას ზოგჯერ მრავალწახნაგას შლილსაც ვუწოდებთ. ცხადია, მოდელი წიბოებზე სხვადასხვა წესით შეიძლება ჩაიჭრას — სხვადასხვა შლილს მივიღებთ.



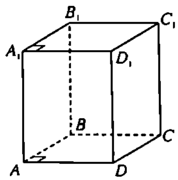
სურათზე გამოსახულია ზემოთ განხილული პრიზმის ერთ-ერთი შლილი.



პრიზმის კერძო სახეა **პარალელეპიპედი** — პრიზმა, რომლის ფუძეები პარალელოგრამებია.



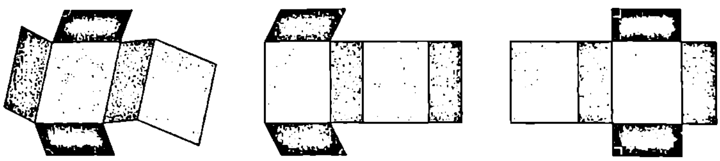
აქ გამოსახული პარალელეპიპედის ყველა გვერდითი წახნაგი მართკუთხედია. ეს ფიგურა **მართი პარალელეპიპედია**.



თუ მართი პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი მართკუთხედია, მაშინ მას **მართკუთხა პარალელეპიპედი** ეწოდება.

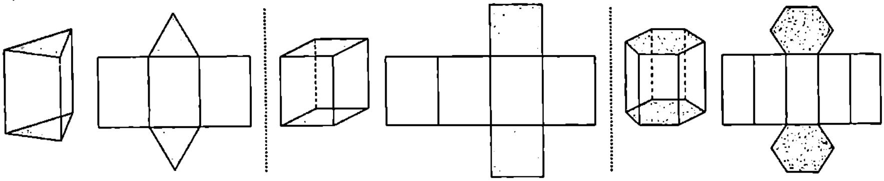
მართკუთხა პარალელეპიპედი სურათზე მართი პარალელეპიპედის მსგავსად გამოისახება.

განსხვავებულია პარალელეპიპედის, მართი პარალელეპიპედისა და მართკუთხა პარალელეპიპედის შლილები; ისინი ქვემოთაა წარმოდგენილი.



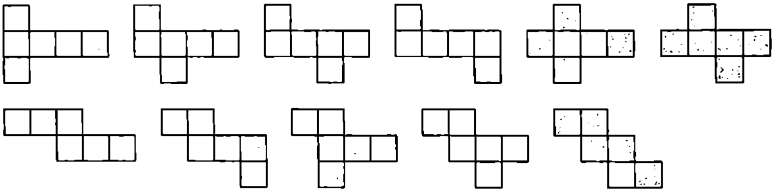
თუ პრიზმის გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია, პრიზმას **მართი პრიზმა** ეწოდება. მართ პრიზმას, რომლის ფუძეები წესიერი მრავალკუთხედებია, **წესიერი პრიზმა** ეწოდება.

ქვემოთ სურათებზე გამოსახულია წესიერი სამკუთხა, ოთხკუთხა და ექვსკუთხა პრიზმები და მათი შლილები.

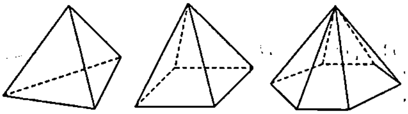


კუბი წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის კერძო სახეა — მისი ყველა წახნაგი კვადრატია.

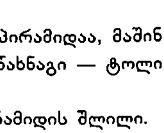
კუბის 11 სხვადასხვა შლილი არსებობს. ექვს შლილში კუბის ოთხი წახნაგი შეიძლება ერთ „მწკრივში" გამოვსახოთ, ოთხ შლილში, ყოველ მწკრივში არა უმეტეს სამი წახნაგია, ერთ შლილში — არაუმეტეს ორი წახნაგია.



პირამიდა არის მრავალწახნაგა, რომლის ერთი წახნაგი (ფუძე) n-კუთხედია, დანარჩენი n წახნაგი (გვერდითი წახნაგები) — საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებია. ამ საერთო წვეროს **პირამიდის წვერო** ეწოდება.

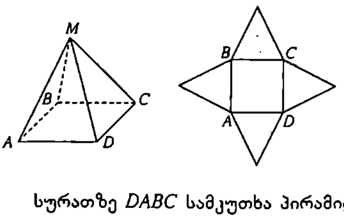


სურათზე, $n=3$, $n=4$, $n=6$ შემთხვევებია გამოსახული, შესაბამისად, გვაქვს — სამკუთხა, ოთხკუთხა, ექვსკუთხა პირამიდები.



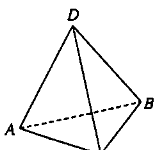
სურათზე $MABCD$ პირამიდაა გამოსახული. MA, MB, MC, MD გვერდითი წიბოებია, M — წვეროა, $ABCD$ ფუძეა, MAB, MBC, MDC, MAD სამკუთხედები გვერდითი წახნაგებია.

თუ პირამიდის ყველა გვერდითი წიბო ტოლია, ფუძე კი წესიერი მრავალკუთხედია, მაშინ პირამიდას **წესიერი პირამიდა** ეწოდება.



თუ $MABCD$ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდაა, მაშინ $ABCD$ კვადრატია, ოთხი გვერდითი წახნაგი — ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედები.

ეს არის აღნიშნული წესიერი პირამიდის შლილი.



სურათზე $DABC$ სამკუთხა პირამიდაა გამოსახული. ყველა წახნაგი სამკუთხედია. თითოეული მათგანი შეიძლება ფუძედ მივიჩნიოთ. მაგალითად, თუ DBC-ს ფუძედ მივიჩნევთ, მაშინ A არის წვერო.

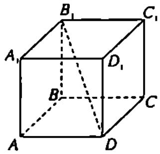
ა

✓**1.** წახნაგების რა უმცირესი ოდენობა შეიძლება ჰქონდეს პრიზმას?
ა) 6 ბ) 5 გ) 4 დ) 9.

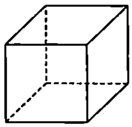
✓**2.** რამდენი წვერო აქვს სამკუთხა პრიზმას?
ა) 9 ბ) 6 გ) 3 დ) 4.

✓**3.** რამდენი წიბო აქვს ოთხკუთხა პრიზმას?
ა) 8 ბ) 12 გ) 9 დ) 6.

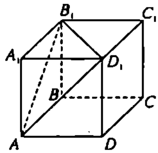
✓**4.** შეიძლება თუ არა ხუთწახნაგას ერთ-ერთი წახნაგი ხუთკუთხედი იყოს?
ა) შეიძლება ზოგიერთი სახის პრიზმისთვის
ბ) არ შეიძლება
გ) შეიძლება ზოგიერთი სახის პირამიდისთვის.



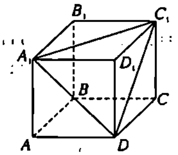
✓**5.** სურათზე $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია გამოსახული. მისი ერთ-ერთი დიაგონალია
ა) AC ბ) B_1C_1
გ) AB დ) B_1D.



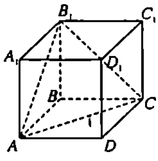
✓**6.** თუ კუბის წიბო არის a, მაშინ მისი ფუძის დიაგონალი არის
ა) $a\sqrt{2}$ ბ) $a\sqrt{3}$
გ) a დ) $2a$.



✓**7.** კუბის წიბო არის a. იპოვეთ AB_1D_1 სამკუთხედის პერიმეტრი.
ა) $3a$ ბ) $6a$
გ) $3a\sqrt{3}$ დ) $3a\sqrt{2}$.

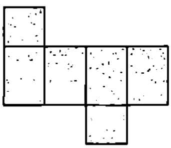


✓**8.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია, იპოვეთ $\angle C_1A_1D$.
ა) 120^0 ბ) 90^0
გ) 60^0 დ) 45^0.



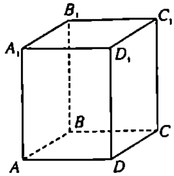
✓**9.** კუბის წიბოა a. იპოვეთ AB_1C სამკუთხედის ფართობი.
ა) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ბ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
გ) $a^2\sqrt{3}$ დ) a^2.

✓**10.** მრავალწახნაგას **დიაგონალური კვეთა** ეწოდება მრავალწახნაგას ისეთი სიბრტყით კვეთას, რომელიც ორ გვერდით წიბოზე გადის და ფუძეებს დიაგონალებზე კვეთს.
კუბის წიბოა a. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის — AA_1C_1C მართკუთხედის ფართობი.
ა) $2a^2$ ბ) $a^2\sqrt{2}$ გ) $a^2\sqrt{3}$ დ) a^2.



✓**11.** სურათზე მრავალწახნაგას შლილია წარმოდგენილი — ფიგურა, რომელიც 4 ტოლი მართკუთხედისა და ორი ტოლი კვადრატისგან შედგება. თუ ამ შლილით აღვადგენთ მრავალწახნაგას, მივიღებთ
ა) კუბს ბ) წესიერ ოთხკუთხა პრიზმას
გ) წესიერ სამკუთხა პრიზმას დ) წესიერ ექვსკუთხა პრიზმას.

✓12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმაა, AA_1D_1D გვერდითი წახნაგის ფართობი არის Q. იპოვეთ AA_1C_1C დიაგონალური კვეთის ფართობი.



ა) Q ბ) $2Q$

გ) $\sqrt{2}Q$ დ) $\sqrt{3}Q$.

✓13. ვთქვათ, n არის რაიმე პრიზმის წიბოების ოდენობა. მაშინ

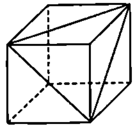
ა) n იყოფა 3-ზე ბ) n-ის 3-ზე გაყოფისას ნაშთია 1

გ) n-ის 3-ზე გაყოფისას ნაშთია 2 დ) n არ იყოფა 3-ზე.

✓14. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი არის a, გვერდითი წიბოა b. იპოვეთ გვერდითი წახნაგების ფართობების ჯამი.

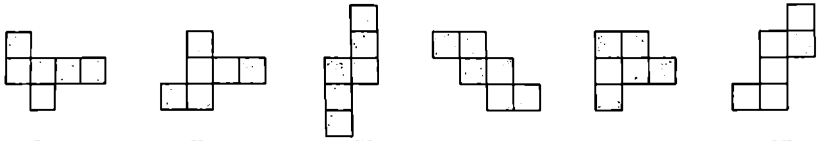
ა) ab ბ) $3ab$ გ) $4ab$ დ) $5ab$.

✓15. კუბის წიბო არის a. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს ბოლოებზე გადის.



ა) $\sqrt{\frac{3}{2}}a^2$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ გ) $\sqrt{3}a^2$ დ) $\sqrt{2}a^2$.

✓16. აქ გამოსახული ექვსი ფიგურიდან კუბის შლილია



ა) მხოლოდ I, II, VI. ბ) ყველა, გარდა V ფიგურის

გ) მხოლოდ I, II, III დ) ექვსივე ფიგურა.

✓17. პარალელეპიპედის ფუძეები

ა) ტრაპეციებია ბ) ექვსკუთხედებია

გ) სამკუთხედებია დ) პარალელოგრამებია.

✓18. ნებისმიერი მართი პარალელეპიპედის ფუძეები

ა) ტრაპეციებია ბ) მართკუთხედებია

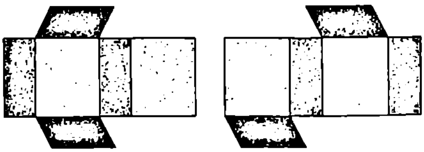
გ) პარალელოგრამებია დ) სამკუთხედებია.

✓19. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძეები

ა) ტრაპეციებია ბ) ექვსკუთხედებია

გ) სამკუთხედებია დ) მართკუთხედებია.

✓20. სურათზე გამოსახული შლილებიდან



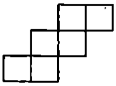
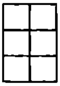
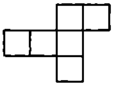
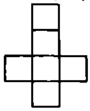
ა) ორივე მართკუთხა პარალელეპიპედის შლილია

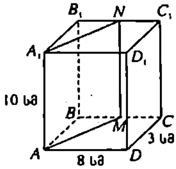
ბ) მხოლოდ II არის მართი პარალელეპიპედის შლილი

გ) მხოლოდ I არის მართი პარალელეპიპედის შლილი

დ) ორივე მართი პარალელეპიპედის შლილია.

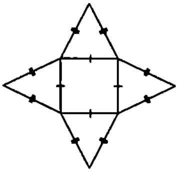
✓**21.** სურათზე გამოსახული ფიგურებიდან, რომელი არ არის კუბის შლილი?

ა) 
ბ) 
გ) 
დ) 

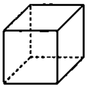


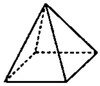
✓**22.** $ABCD$ მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოებია: $AA_1=10$ სმ, $AD=8$ სმ, $AB=3$ სმ. M და N არის BC და B_1C_1 წიბოების შუა წერტილები. იპოვეთ AA_1NM მართკუთხედის ფართობი.

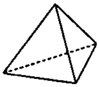
ა) 40 სმ² ბ) 50 სმ²
გ) 30 სმ² დ) 60 სმ².

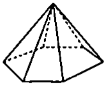


✓**23.** სურათზე ტოლი სიგრძის მონაკვეთები ერთნაირადაა მონიშნული. რა მრავალწახნაგას შლილია გამოსახული სურათზე?

ა)  წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის

ბ) წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის 

გ)  წესიერი სამკუთხა პირამიდის.

დ) წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის. 

✓**24.** რამდენი წახნაგი აქვს ექვსკუთხა პირამიდას?

ა) 6 ბ) 3 გ) 7 დ) 8.

✓**25.** წესიერი პირამიდის ფუძე შეიძლება იყოს

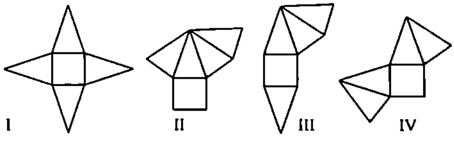
ა) ნებისმიერი პარალელოგრამი ბ) ნებისმიერი რომბი
გ) ნებისმიერი მრავალკუთხედი დ) ნებისმიერი კვადრატი.

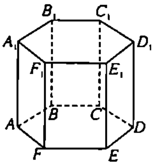
✓**26.** მრავალწახნაგას ერთ-ერთი წახნაგი ექვსკუთხედია. წიბოთა რა უმცირესი ოდენობა შეიძლება ჰქონდეს ამ მრავალწახნაგას?

ა) 12 ბ) 10 გ) 8 დ) 6 ე) 7.

✓**27.** მოცემული ფიგურებიდან პირამიდის შლილი შეიძლება იყოს

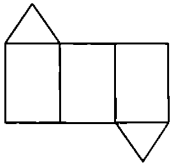
ა) მხოლოდ I
ბ) III
გ) I, II, IV
დ) მხოლოდ I და II.

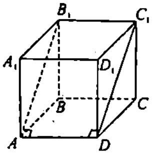




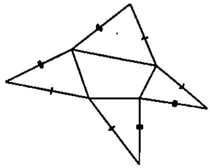
28. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგის ფართობი არის Q. იპოვეთ მისი დიაგონალური კვეთების — AA_1E_1E და AA_1D_1D მართკუთხედების ფართობები.

29. გამოსახეთ მრავალწახნაგა, რომლის შლილი სურათზეა წარმოდგენილი.

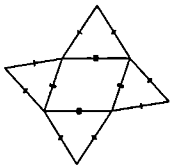




30. კუბის AB_1C_1D კვეთის ფართობი $16\sqrt{2}$ სმ^2-ია. იპოვეთ კუბის წიბო და კუბის დიაგონალი.



31. აღადგინეთ ფიგურა, რომლის შლილი მოცემულია სურათზე.



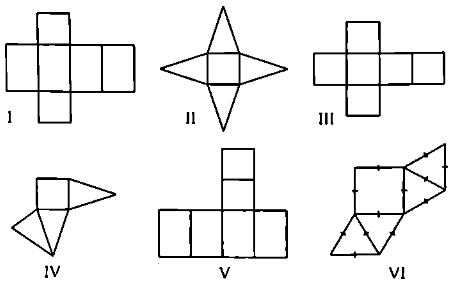
32. სურათზე ტოლი მონაკვეთები ერთნაირადაა მონიშნული. არის თუ არა ეს ფიგურა ოთხკუთხა პირამიდის შლილი?

33. მოცემული ფიგურებიდან რომელი შეიძლება იყოს:

ა) კუბის შლილი;

ბ) მართკუთხა პარალელეპიპედის შლილი;

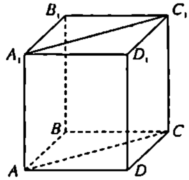
გ) პირამიდის შლილი.



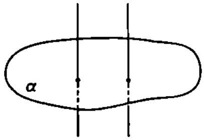
§ 3.4. ᲬᲠᲤᲘᲡᲐ ᲓᲐ ᲡᲘᲑᲠᲢᲧᲘᲡ ᲛᲐᲠᲗᲝᲑᲣᲚᲝᲑᲐ. ᲬᲠᲤᲘᲡᲐ ᲓᲐ ᲡᲘᲑᲠᲢᲧᲘᲡ ᲛᲐᲠᲗᲝᲑᲣᲚᲝᲑᲘᲡ ᲜᲘᲨᲐᲜᲘ

წრფეს ეწოდება სიბრტყის მართობული წრფე, თუ ის კვეთს სიბრტყეს და ამ სიბრტყეზე მდებარე და გადაკვეთის წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის მართობულია.

წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი: თუ წრფე კვეთს სიბრტყეს და მართობულია სიბრტყეზე მდებარე და გადაკვეთის წერტილზე გამავალი რაიმე ორი წრფის, მაშინ მოცემული წრფე სიბრტყის მართობულია.

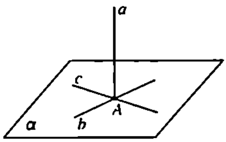


მაგალითი. სურათზე მართკუთხა პარალელეპიპედია გამოსახული; მისი ყველა წახნაგი მართკუთხედია; მართკუთხედებია, მაგალითად, AA_1D_1D და AA_1B_1B წახნაგები. ამიტომ $AA_1 \perp AB$; $AA_1 \perp AD$. აქედან გამომდინარეობს, რომ AA_1 მართობულია ფუძის სიბრტყის და $AA_1 \perp AC$. ანალოგიურად, $AA_1 \perp A_1C_1$, $CC_1 \perp AC$, $CC_1 \perp A_1C_1$ — AA_1C_1C მართკუთხედია.



წრფისა და სიბრტყის მართობულობა შეიძლება წრფეთა პარალელურობას დავუკავშიროთ და კიდევ ერთი ნიშანი ჩამოვაყალიბოთ:

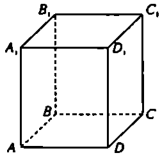
თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი მართობულია α სიბრტყის, მაშინ მეორე წრფეც მართობულია α სიბრტყის.



✓**1.** თუ a წრფე კვეთს α სიბრტყეს და მართობულია გადაკვეთის წერტილზე გამავალი და α სიბრტყეზე მდებარე რაიმე b და c წრფეების, მაშინ

ა) $a \| \alpha$ ბ) $a \perp \alpha$

გ) $a \| b$ დ) $a \| c$.



2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედში

ა) AA_1 პარალელურია $ABCD$ სიბრტყის

ბ) AA_1 მართობულია $ABCD$ სიბრტყის

გ) AA_1 არ არის მართობული $ABCD$ სიბრტყის

დ) AA_1 პარალელურია AA_1D_1D სიბრტყის.

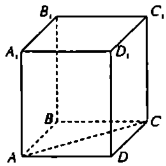
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედში

ა) $AA_1 \perp AC$

ბ) $AA_1 \| AC$

გ) $AA_1 \| AD$

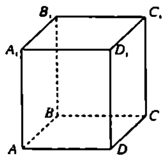
დ) $AA_1 \| AB$.



4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედში

ა) B_1BDD_1 მართკუთხედია ბ) B_1BDD_1 არ არის მართკუთხედი

გ) $\angle D_1DB < 90^0$ დ) $\angle B_1BD > 90^0$.



5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. $ABCD$ არ არის კვადრატი. მაშინ

ა) AC მართობულია BB_1D_1D სიბრტყის ბ) AC პარალელურია BB_1D_1D სიბრტყის

გ) AC არ კვეთს BB_1D_1D სიბრტყეს დ) AC არ არის მართობული BB_1D_1D სიბრტყის.

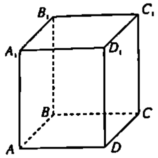
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია. მაშინ

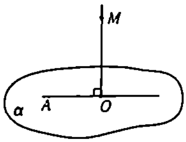
ა) AC მართობულია BB_1D_1D სიბრტყის

ბ) AC არ არის მართობული B_1BDD_1 სიბრტყის

გ) AC არ კვეთს B_1BDD_1 სიბრტყეს

დ) AC პარალელურია B_1BDD_1 სიბრტყის.





7. MO არის α სიბრტყის მართობული წრფე. $MO=12$ სმ. OA არის α სიბრტყეზე მდებარე წრფე, $OA=5$ სმ, მაშინ $MA=$

ა) 12 სმ

ბ) 5 სმ

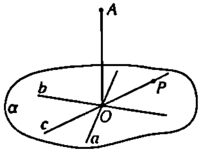
გ) 17 სმ

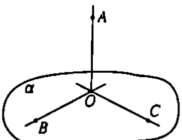
დ) 13 სმ.

8. a, b და c წრფეები α სიბრტყეზე მდებარეობს და O წერტილში იკვეთება, $AO\perp a$, $AO\perp b$, $AO=18$ სმ, P წერტილი ეკუთვნის c წრფეს და $OP=24$ სმ. იპოვეთ AP.

ა) 32 სმ ბ) 33 სმ

გ) 30 სმ დ) 35 სმ.





9. $AO\perp\alpha$; OB და OC წრფეები α სიბრტყეზეა. $OB\perp OC$. $AO=BO=OC=2$ სმ. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

ა) 6 სმ

ბ) $3\sqrt{2}$ სმ

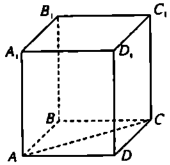
გ) $4\sqrt{2}$ სმ

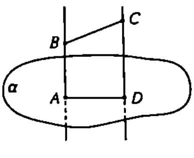
დ) $6\sqrt{2}$ სმ.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. დაადგინეთ, არის თუ არა AC წრფე B, B_1, D_1 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის მართობული, თუ

ა) $AB=8$ სმ, $BC=5$ სმ,

ბ) $AB=BC=8$ სმ.





11. AB და CD წრფეები α სიბრტყის მართობულია, $A\in\alpha$, $D\in\alpha$, $AB=6{,}2$ სმ, $CD=10{,}4$ სმ.

ა) დაადგინეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის სახე,

ბ) იპოვეთ AD და BC მონაკვეთების შუა წერტილებს შორის მანძილი,

გ) იპოვეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი, თუ $\angle C=60^0$.

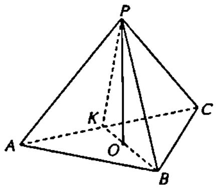
12. ABC მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზის O შუა წერტილზე გავლებულია სამკუთხედის სიბრტყის მართობული OM წრფე. $OM=15$ სმ. სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 16 სმ-ია. იპოვეთ M წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილები.

13. AB და AC მონაკვეთები α სიბრტყეზეა, $AB=AC=16$ სმ, $BC=12$ სმ, AM წრფე α სიბრტყის მართობულია, AM მონაკვეთი 12 სმ-ია.

ა) იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან B და C წერტილებამდე;

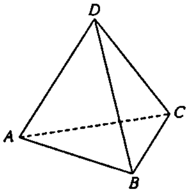
ბ) იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან BC მონაკვეთის შუა წერტილამდე.

14. $PABC$ პირამიდის ყველა წიბო $2\sqrt{3}$ სმ-ია. პირამიდას კვეთს სიბრტყე, რომელიც გადის ABC ფუძის O ცენტრზე და მართობულია AC წრფის.



ა) დაასაბუთეთ, რომ ეს სიბრტყე ABC ფუძეს კვეთს BK სიმაღლეზე, APC გვერდით წახნაგს — PK სიმაღლეზე და კვეთა PKB სამკუთხედია.

ბ) იპოვეთ კვეთის ფართობი.



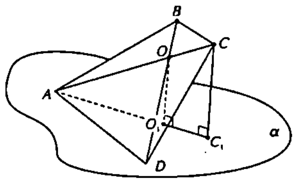
15. $DABC$ სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბო $\sqrt{3}$ სმ-ია. პირამიდას კვეთს სიბრტყე, რომელიც გადის DC წიბოს შუა წერტილზე და DC წიბოს მართობულია. ააგეთ კვეთა და იპოვეთ კვეთის ფართობი.

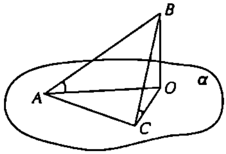
16. $DABC$ სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბო $\sqrt{3}$ სმ-ია. პირამიდას კვეთს სიბრტყე, რომელიც გადის DC წიბოზე და მართობულია AB წიბოსი. ააგეთ კვეთა და იპოვეთ კვეთის ფართობი.

17. $DABC$ სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბო $\sqrt{3}$ სმ-ია. პირამიდას კვეთს სიბრტყე, რომელიც გადის DC წიბოს შუა წერტილზე და მართობულია DO წრფის, O ფუძის ცენტრია. ააგეთ კვეთა და იპოვეთ კვეთის ფართობი.

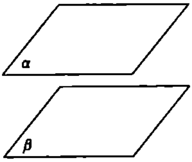
18. $DABC$ სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბო $\sqrt{3}$ სმ-ია. პირამიდას კვეთს სიბრტყე, რომელიც გადის ფუძის O ცენტრზე და მართობულია BD წიბოსი. ააგეთ კვეთა და იპოვეთ კვეთის ფართობი.

19. $ABCD$ ტრაპეციაა, მისი ფუძეებია $AD=18$ სმ, $BC=12$ სმ. α სიბრტყე გადის AD ფუძეზე, C წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი 10 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი.





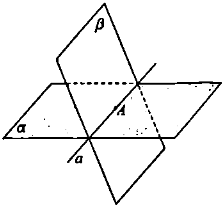
20. α სიბრტყე გადის ABC ტოლფერდა სამკუთხედის AC ფუძეზე. AB და BC ფერდები AO და OC გეგმილებთან 30^0-იან კუთხეებს ადგენს. იპოვეთ ABC სამკუთხედის გეგმილის ფართობი, თუ $AB=BC=10$ სმ, $AC=16$ სმ.



ორ სიბრტყეს ეწოდება **პარალელური სიბრტყეები**, თუ მათ საერთო წერტილი არა აქვს.

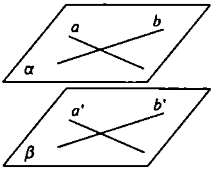
სურათზე α და β პარალელური სიბრტყეებია — $\alpha \| \beta$.

თუ ორ სიბრტყეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ამ სიბრტყეებს საერთო წრფე აქვს — წრფე, რომელიც ამ საერთო წერტილზე გადის. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ სიბრტყეები იკვეთება.



სურათზე α და β სიბრტყეები იკვეთება a წრფეზე, რომელიც A წერტილზე გადის.

ორი სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი: თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი გადამკვეთი წრფე პარალელურია მეორე სიბრტყეზე მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის — $a \| a_1$; $b \| b_1$ — მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.



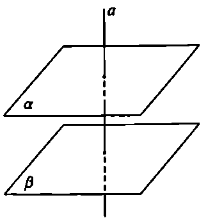
თუ $a \| a_1$, $b \| b_1$, მაშინ $\alpha \| \beta$.

ამოცანების ამოხსნისას სიბრტყეებისა და წრფეების კიდევ ორ თვისებას გამოვიყენებთ ხოლმე:

1) თუ ორი სიბრტყე ერთი და იმავე წრფის მართობულია, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

თუ $a \perp \alpha$ და $a \perp \beta$, მაშინ $\alpha \| \beta$.

ამ თვისებით შეიძლება დავადგინოთ — არის თუ არა ორი სიბრტყე პარალელური — **ეს დებულებაც ორი სიბრტყის პარალელურობის ნიშანია.**



2) თუ ორი პარალელური სიბრტყიდან წრფე ერთ-ერთი სიბრტყის მართობულია, მაშინ ეს წრფე მეორე სიბრტყის მართობულიცაა.

თუ $\alpha \| \beta$ და $a \perp \alpha$, მაშინ $a \perp \beta$.

ეს დებულება **წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანია.**

✓**1.** თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფე მეორე სიბრტყეზე მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის პარალელურია, მაშინ ეს სიბრტყეები

ა) იკვეთება　　　　　ბ) არ არის პარალელური

გ) პარალელურია　　　　დ) მართობულია.

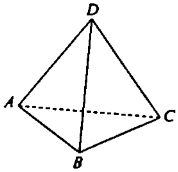
✓**2.** თუ წრფე ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ ეს წრფე

ა) მეორე სიბრტყის პარალელურია　　　　ბ) მეორე სიბრტყეს არ კვეთს

გ) მეორე სიბრტყის მართობული არ არის　　დ) მეორე სიბრტყის მართობულიცაა.

✓**3.** თუ ორი სიბრტყე ერთი და იმავე წრფის მართობულია, მაშინ ეს სიბრტყეები

ა) იკვეთება　　　ბ) არ არის პარალელური　　　გ) პარალელურია.

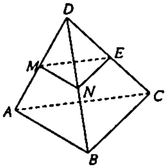


✓**4.** *DABC* პირამიდაში

ა) *DAB* და *ABC* სიბრტყეები პარალელურია

ბ) *DAB* და *ABC* სიბრტყეები იკვეთება

გ) *DAC* და *ABC* სიბრტყეები პარალელურია.



✓**5.** *DABC* პირამიდაა, *MN* არის *ADB* სამკუთხედის შუახაზი, *NE* არის *DBC*-ს შუახაზი, მაშინ

ა) *MNE* სიბრტყე კვეთს *ABC* სიბრტყეს

ბ) *MNE* სიბრტყე მართობულია *ABC* სიბრტყის

გ) *MNE* სიბრტყე პარალელურია *ABC* სიბრტყის

დ) *MNE* სიბრტყე არ არის პარალელური *ABC* სიბრტყის.

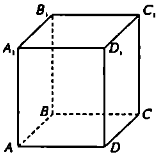
✓**6.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედია, მაშინ

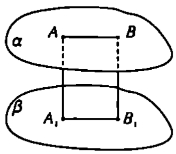
ა) *ABD* სიბრტყე კვეთს $A_1B_1D_1$ სიბრტყეს

ბ) *ADC* სიბრტყე კვეთს $A_1D_1C_1$ სიბრტყეს

გ) *BCD* სიბრტყე კვეთს $B_1C_1D_1$ სიბრტყეს

დ) *ABD* სიბრტყე პარალელურია $A_1B_1D_1$ სიბრტყის.





✓**7.** $\alpha \| \beta$, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $AA_1=8$ სმ, $AB=5$ სმ, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $A_1 \in \beta$, $B_1 \in \beta$. იპოვეთ AA_1B_1B ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

ა) 13 სმ

ბ) 18 სმ

გ) 23 სმ

დ) 26 სმ.

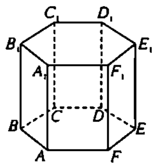
✓**8.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმაა, მაშინ

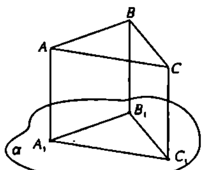
ა) *ABC* სიბრტყე კვეთს $A_1B_1C_1$ სიბრტყეს

ბ) *AEF* სიბრტყე კვეთს $A_1B_1C_1$ სიბრტყეს

გ) *ABC* სიბრტყე კვეთს $A_1F_1E_1$ სიბრტყეს

დ) *ABC* სიბრტყე პარალელურია $A_1B_1C_1$ სიბრტყის.

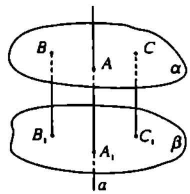




9. *ABC* სიბრტყე α-ს პარალელურია, A_1, B_1, C_1 წერტილები α სიბრტყეზეა, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$. *ABC* სამკუთხედის პერიმეტრი 10 დმ-ია.

იპოვეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის გვერდების შუა წერტილების შეერთებით მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი.

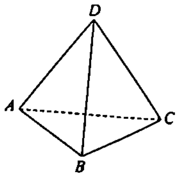
10. $\alpha \| \beta$, AA_1 წრფე კვეთს ამ სიბრტყეებს *A* და A_1 წერტილებში, AA_1 (ანუ სიბრტყეებს შორის მანძილი) არის 12 დმ. BB_1 და CC_1 წრფეებიც მართობულია α და β სიბრტყეების, *B* და *C* ეკუთვნის α-ს, B_1 და C_1 — β-ს. AA_1B_1B, AA_1C_1C და BB_1C_1C ოთხკუთხედების ფართობებია, შესაბამისად, 1,56 დმ², 1,68 დმ² და 1,8 დმ². იპოვეთ *ABC* და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების პერიმეტრები და ფართობები.



11. A, B და C წერტილები l წრფეს ეკუთვნის. A და B წერტილებზე გავლებულია l წრფის მართობული α და β სიბრტყეები. იპოვეთ მანძილი α და β სიბრტყეებს შორის, თუ

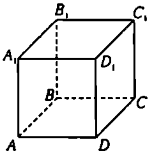
ა) C წერტილი A-სა და B-ს შორისაა და $AC=7{,}2$ სმ, $BC=5{,}1$ სმ,

ბ) B არის A-სა და C-ს შორის და $AC=3{,}4$ დმ, $BC=2{,}1$ დმ.

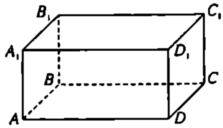


12. $DABC$ სამკუთხა პირამიდის ყოველი წიბო 2 დმ-ია. ააგეთ პირამიდის კვეთა, რომელიც ADC სიბრტყის პარალელურია და გადის AB და BC წიბოების შუა წერტილებზე. იპოვეთ ამ კვეთის ფართობი.

13. $DABC$ სამკუთხა პირამიდის ყოველი წიბო 2 დმ-ია. ააგეთ პირამიდის კვეთა ABC წახნაგის მედიანების გადაკვეთის წერტილებზე გამავალი და BDC წახნაგის პარალელური სიბრტყით. იპოვეთ ამ კვეთის ფართობი.



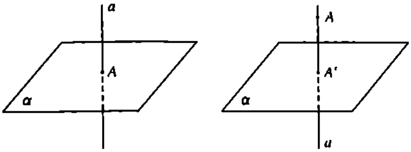
14. სურათზე კუბია გამოსახული, მისი წიბო 1 დმ-ია. ააგეთ AD წიბოს შუა წერტილზე გამავალი AA_1C_1C სიბრტყის პარალელური კვეთა და იპოვეთ კვეთის ფართობი.



15. სურათზე მართკუთხა პარალელეპიპედია გამოსახული $AB=36$ სმ, $BC=48$ სმ, $AA_1=36$ სმ. ააგეთ BB_1 წიბოს შუა წერტილზე გამავალი AD_1C სიბრტყის პარალელური კვეთა და იპოვეთ კვეთის ფართობი.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის კვეთა გადის AA_1 წიბოს M წერტილზე და $A_1B_1C_1D_1$ ფუძის B_1D_1 დიაგონალზე, $AM:MA_1=1:3$, $AA_1=20$ სმ, $AB=10$ სმ. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

§ 3.6. წერტილის, წრფის, მონაკვეთის ორთოგონალური დაგეგმილება სიბრტყეზე. მართობი. დახრილი. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი



ვთქვათ, A წერტილზე გადის α სიბრტყის მართობული a წრფე.

სურათზე ორი შემთხვევაა განხილული.

1) A წერტილი ეკუთვნის α-ს;

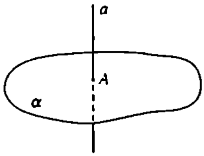
2) A წერტილი არ ეკუთვნის α-ს.

თუ A წერტილი ეკუთვნის α სიბრტყეს, მაშინ A-ს ორთოგონალური გეგმილი α სიბრტყეზე ვუწოდოთ თვით A წერტილს.

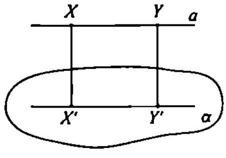
თუ A წერტილი არ ეკუთვნის α სიბრტყეს, მაშინ A წერტილის ორთოგონალური გეგმილი α სიბრტყეზე ეწოდება A წერტილზე α-ს მართობულად გავლებული a წრფის α-სთან გადაკვეთის A' წერტილს. AA' მონაკვეთს კი A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებული მართობი ეწოდება, A' წერტილს — ამ მართობის ფუძე. A წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი ამ მართობის სიგრძეა.

თუ A წერტილი α სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ A წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი ნულის ტოლია.

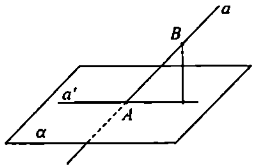
F ფიგურის გეგმილი α სიბრტყეზე ვუწოდოთ F ფიგურის ყველა წერტილის გეგმილთა F' სიმრავლეს.



თუ $a \perp \alpha$, მაშინ a წრფის ორთოგონალური გეგმილი α სიბრტყეზე A წერტილია — a-ს მოცემულ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი.



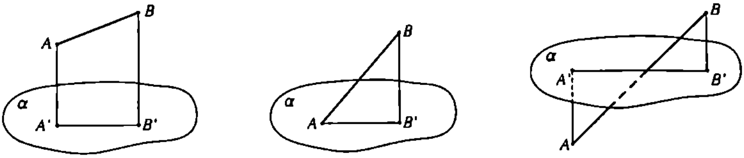
თუ $a \| \alpha$, მაშინ a წრფის ორთოგონალური გეგმილი α სიბრტყეზე არის წრფე, რომელიც a წრფის რაიმე X და Y წერტილების X' და Y' გეგმილებზე გადის. a და $X'Y'$ წრფეები პარალელურია. სიბრტყის პარალელური წრფიდან სიბრტყემდე მანძილი ვუწოდოთ ამ წრფიდან სიბრტყეზე მის გეგმილამდე მანძილს.



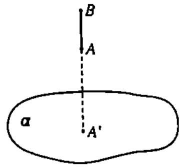
ამ სურათზე a წრფე კვეთს α სიბრტყეს A წერტილში. a წრფის ორთოგონალური გეგმილი α სიბრტყეზე არის წრფე, რომელიც გადის A წერტილზე და a წრფის რაიმე B წერტილის B' გეგმილზე.

ახლა მონაკვეთის ორთოგონალური გეგმილი განვსაზღვროთ.

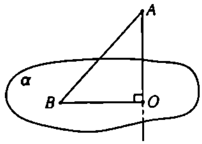
სურათზე სხვადასხვა შემთხვევაა წარმოდგენილი:



სამივე სურათზე $A'B'$ არის AB მონაკვეთის გეგმილი; A' და B' არის AB მონაკვეთის A და B ბოლოების ორთოგონალური გეგმილები.



რადგან სხვა სახის გეგმილებს ამჯერად არ განვიხილავთ, ამიტომ სიტყვა ორთოგონალურს გამოვტოვებთ ხოლმე. ამ სურათზე AB მონაკვეთი α სიბრტყის მართობულ წრფეზეა. AB-ს გეგმილი α სიბრტყეზე A' წერტილია (A და B წერტილის გეგმილი).



ამ სურათზე AO წრფე α სიბრტყის მართობულია და კვეთს მას O წერტილში — AO არის A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებული მართობი. ნებისმიერი სხვა მონაკვეთი, რომლის ერთი ბოლო A წერტილია, მეორე ბოლო კი α სიბრტყეს ეკუთვნის, არის A წერტილიდან გავლებული დახრილი; მაგალითად, AB დახრილია, AB მონაკვეთის გეგმილი — BO — არის AB დახრილის გეგმილი.

✓**1.** ვთქვათ, A წერტილი α სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ A წერტილის გეგმილი α სიბრტყეზე

ა) არის A წერტილი ბ) არ არის A წერტილი

გ) შეიძლება არ იყოს A წერტილი დ) ამ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია.

✓**2.** თუ A წერტილი α სიბრტყეზეა, მაშინ A წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი

ა) ნულია ბ) არ არის ნული

გ) ნებისმიერი რიცხვია დ) ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

✓**3.** მოცემულია წინადადებები:

I. წრფის გეგმილი α სიბრტყეზე შეიძლება იყოს წერტილი,

II. ნებისმიერი წრფის გეგმილი სიბრტყეზე წრფეა,

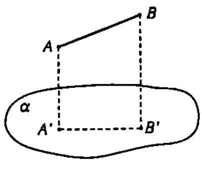
III. წრფის გეგმილი სიბრტყეზე შეიძლება იყოს წრფე.

მათგან ჭეშმარიტია

ა) I და III ბ) მხოლოდ I გ) მხოლოდ III დ) II.

✓**4.** მონაკვეთის გეგმილი სიბრტყეზე არ შეიძლება იყოს

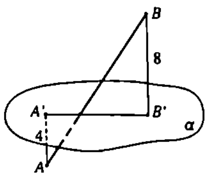
ა) წერტილი ბ) მონაკვეთი გ) წრფე.



✓**5.** A წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი 4 სმ-ია, B წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი — 12 სმ. $AB=10$ სმ. იპოვეთ α სიბრტყეზე AB მონაკვეთის გეგმილის სიგრძე (AB მონაკვეთი არ კვეთს სიბრტყეს).

ა) 3 სმ ბ) 8 სმ

გ) 10 სმ დ) 6 სმ.

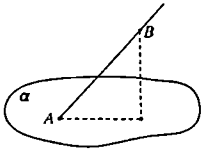


✓**6.** AB მონაკვეთი კვეთს α სიბრტყეს. AB-ს სიგრძე 13 სმ-ია. A წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი 4 სმ-ია, B წერტილიდან — 8 სმ. იპოვეთ AB-ს ორთოგონალური გეგმილი α სიბრტყეზე.

ა) 10 სმ ბ) 5 სმ

გ) 8 სმ დ) 6 სმ.

✓**7.** AB მონაკვეთის გეგმილი α სიბრტყეზე 1,6 დმ-ია, A ეკუთვნის α სიბრტყეს. B წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი 1,2 დმ-ია. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.

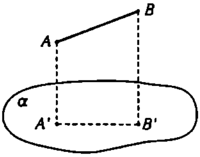


ა) 1 დმ ბ) 2 დმ

გ) 1,5 დმ დ) 1,2 დმ.

✓**8.** A_1 და B_1 არის A და B წერტილების გეგმილები α სიბრტყეზე. AB მონაკვეთი α სიბრტყეს არ კვეთს. $AA_1=12,5$ სმ; $BB_1=7,5$ სმ; $A_1B_1=12$ სმ. იპოვეთ AB.

ა) 12 სმ ბ) 5 სმ გ) 10 სმ დ) 13 სმ.



✓**9.** თუ A წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი არის a, B წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილია b, AB არ კვეთს α სიბრტყეს, მაშინ AB-ს შუა წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი არის

ა) $\frac{a-b}{2}$ ბ) $\frac{b-a}{2}$

გ) $\frac{a+b}{2}$ დ) $\frac{2a+b}{2}$.

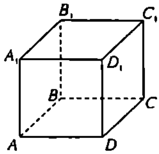
✓**10.** თუ AB მონაკვეთი კვეთს α სიბრტყეს, A წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი არის a, B წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი არის b, $a>b$, მაშინ AB-ს შუა წერტილიდან α-მდე მანძილი არის

ა) $\frac{a-b}{2}$ ბ) $\frac{b-a}{2}$ გ) $\frac{a+b}{2}$ დ) $\frac{2a+b}{2}$.

✓**11.** AB მონაკვეთი არ კვეთს α სიბრტყეს. A წერტილიდან მანძილი α სიბრტყემდე 2 სმ-ია, B წერტილიდან — 7 სმ. M წერტილი ჰყოფს AB მონაკვეთს 3:7 შეფარდებით A წვეროს მხრიდან. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან α სიბრტყემდე.

ა) 2 სმ ბ) 5 სმ გ) 3,5 სმ დ) 4,5 სმ.

12. სურათზე მართკუთხა პარალელეპიპედია გამოსახული. დაასახელეთ:



ა) A_1, B_1, C_1 და D_1 წერტილების გეგმილები $ABCD$ მართკუთხედის სიბრტყეზე;

ბ) D, D_1, C_1 და C წერტილების გეგმილები AA_1B_1B მართკუთხედის სიბრტყეზე;

გ) AB_1, B_1C_1, AA_1, A_1C_1 და DB_1 მონაკვეთების გეგმილები $ABCD$ მართკუთხედის სიბრტყეზე.

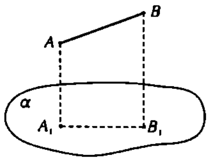
13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის AB წიბო 4 სმ-ია. AA_1B_1B და AA_1D_1D წახნაგების ფართობები, შესაბამისად, არის 20,8 სმ^2 და 31,2 სმ^2. იპოვეთ მანძილი A_1 წერტილიდან:

ა) $ABCD$ მართკუთხედის სიბრტყემდე;

ბ) DD_1C_1C მართკუთხედის სიბრტყემდე;

გ) BB_1D_1D მართკუთხედის სიბრტყემდე.

14. სურათზე A_1 და B_1, შესაბამისად, A და B წერტილების გეგმილებია α სიბრტყეზე. AA_1 და BB_1 მართობების სიგრძეები, შესაბამისად, 8,4 სმ და 16 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი AB მონაკვეთის შუა წერტილიდან α სიბრტყემდე.



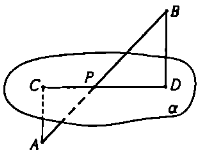
15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია, $AB=3$ დმ, $AB_1=5$ დმ, AB_1C_1D ოთხკუთხედის პერიმეტრი 24 დმ-ია. იპოვეთ:

ა) მანძილი B_1 წერტილიდან $ABCD$ მართკუთხედის α სიბრტყემდე;

ბ) AB_1C_1D ოთხკუთხედის α სიბრტყეზე გეგმილის ფართობი.

16. A წერტილი ძევს α სიბრტყეზე, AB მონაკვეთის სიგრძე თავისივე გეგმილის (α სიბრტყეზე) სიგრძეს ისე შეეფარდება, როგორც 29:21, $AB=58$ სმ. იპოვეთ მანძილი B წერტილიდან α სიბრტყემდე.

17. AB მონაკვეთი კვეთს α სიბრტყეს P წერტილში, $AB=41$ სმ. A და B წერტილებიდან α სიბრტყემდე მანძილები, შესაბამისად, 4 სმ და 5 სმ-ია. იპოვეთ AB მონაკვეთის α სიბრტყეზე გეგმილის სიგრძე.

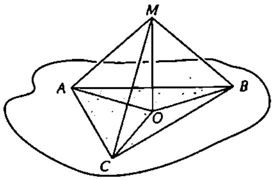


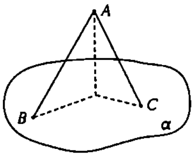
18. AB მონაკვეთი კვეთს α სიბრტყეს. A და B წერტილები α სიბრტყიდან დაშორებულია, შესაბამისად, 4,2 სმ-ითა და 7,6 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი AB მონაკვეთის შუა წერტილიდან α სიბრტყემდე.

19. M წერტილის გეგმილი $ABCD$ კვადრატის სიბრტყეზე ამ კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილია, კვადრატის გვერდი 8 სმ-ია, M წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი — 7 სმ. იპოვეთ M წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე მანძილები.

20. წრეწირი, რომლის ცენტრია O წერტილი, რადიუსი კი 12 სმ-ია, ძევს α სიბრტყეზე. O წერტილი M წერტილის გეგმილია α სიბრტყეზე, M-დან α სიბრტყემდე მანძილი 35 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან წრეწირის რაიმე წერტილამდე.

21. M წერტილიდან ABC სამკუთხედის სიბრტყემდე მანძილი 10 სმ-ია. MA, MB და MC მონაკვეთების AO, BO და CO გეგმილები α სიბრტყეზე ერთმანეთის ტოლია და უდრის 24 სმ-ს. იპოვეთ MA, MB და MC მონაკვეთების სიგრძეები.





22. A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი AB და AC, $AB=10$ სმ, $AC=17$ სმ. AB და AC მონაკვეთების გეგმილების სხვაობა 9 სმ-ია. იპოვეთ ეს გეგმილები.

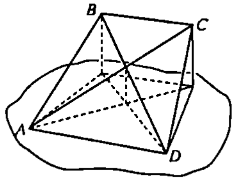
23. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, AB და AC. იპოვეთ მათი სიგრძეები, თუ

ა) მათი გეგმილები 12 სმ და 40 სმ-ია და ერთ-ერთი დახრილი მეორეზე 26 სმ-ით გრძელია;

ბ) $AB:AC=1:2$, მათი გეგმილები კი 1 სმ და 7 სმ-ია.

24. წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, მათი სიგრძეებია 23 სმ და 33 სმ. იპოვეთ ამ წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი, თუ დახრილთა გეგმილების სიგრძეების შეფარდება არის 2:3.

25. სიბრტყე გადის რომბის ერთ-ერთ გვერდზე და დაშორებულია 4 მ-ით მეორე გვერდიდან. რომბის დიაგონალების გეგმილები ამ სიბრტყეზე 8 მ და 2 მ-ია. იპოვეთ რომბის გვერდების გეგმილები.



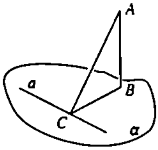
26. α სიბრტყე გადის $ABCD$ ტრაპეციის AD ფუძეზე და BC წრფიდან დაშორებულია a მანძილით. იპოვეთ ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი, თუ ფუძეების შეფარდებაა $m:n$ ($AD:BC=m:n$).

27. A წერტილი α სიბრტყიდან 1 მ-ითაა დაშორებული. A წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, მათ შორის კუთხე მართია. თითოეული მათგანი A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულ მართობთან 60^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მანძილი დახრილების ფუძეებს შორის.

28. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი, თითოეულის სიგრძე 2 მეტრია. დახრილებს შორის კუთხე 60^0-ია, მათ გეგმილებს შორის კუთხე მართია. იპოვეთ A წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი.

§ 3.7. თეორემა სამი მართობის შესახებ

თუ სიბრტყისადმი გავლებულია დახრილი და ამ სიბრტყეზე მდებარე წრფე გადის დახრილის ფუძეზე ამ დახრილის გეგმილის მართობულად, მაშინ ეს წრფე მართობულია დახრილისაც; თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის მართობულია, მაშინ იგი მართობულია ამ დახრილის გეგმილისაც.

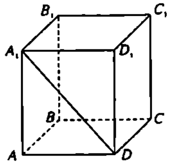


სურათზე AB მართობია (A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებული), AC დახრილია. C წერტილზე გადის a წრფე, რომელიც α სიბრტყეზე მდებარეობს.

ა) თუ $a \perp BC$, მაშინ $a \perp AC$,

ბ) თუ $a \perp AC$, მაშინ $a \perp BC$.

✓**1.** სურათზე მართკუთხა პარალელეპიპედია გამოსახული, მაშინ

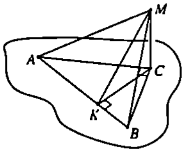


ა) $\angle A_1DC=60^0$

ბ) $\angle A_1DC=45^0$

გ) $\angle A_1DC=180^0$

დ) $\angle A_1DC=90^0$.

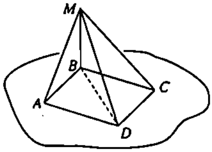


✓**2.** ABC მართკუთხა სამკუთხედია, $\angle C=90^0$. M წერტილის გეგმილი ABC სიბრტყეზე არის C წერტილი. CK სამკუთხედის სიმაღლეა. M წერტილიდან მანძილი AB ჰიპოტენუზამდე არის

ა) MB ბ) MA

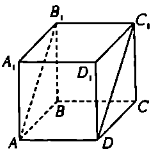
გ) MC დ) MK.

✓**3.** $ABCD$ კვადრატია; MB არის BC და AB გვერდების მართობული წრფე. შემდეგი ტოლობებიდან რომელი არ არის სწორი?



ა) $\angle MAD=90^0$ ბ) $\angle MCD=90^0$

გ) $\angle MDB=90^0$ დ) $\angle MBD=90^0$.



✓**4.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია. მისი წიბო 2 სმ-ია. იპოვეთ AB_1C_1D ოთხკუთხედის ფართობი.

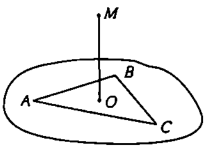
ა) $4\sqrt{2}$ სმ²

ბ) $2\sqrt{2}$ სმ²

გ) $8\sqrt{2}$ სმ²

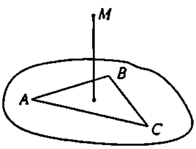
დ) 4 სმ².

✓**5.** ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის O ცენტრიდან აღმართულია OM მართობი, $OM=2,4$ მ. ჩახაზული წრეწირის რადიუსი 0,7 მ-ია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან ABC სამკუთხედის AB გვერდამდე.



ა) 2,4 მ ბ) 4,8 მ

გ) 1,2 მ დ) 2,5 მ.



✓**6.** M წერტილიდან ABC სიბრტყემდე მანძილი 1,1 მეტრია, ABC სამკუთხედის თითოეულ გვერდამდე მანძილი 6,1 მ-ია. იპოვეთ ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

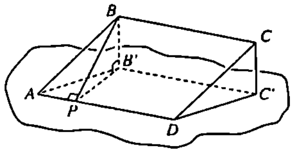
ა) 5 მ ბ) 6 მ

გ) 6,1 მ დ) 1,1 მ.

✓**7.** ABC ტოლგვერდა სამკუთხედია. A წვეროდან ABC სიბრტყისადმი აღმართულია AM მართობი, $AM=13$ სმ, $AB=BC=AC=6$ სმ. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან BC წრფემდე.

ა) 14 სმ ბ) 16 სმ გ) 12 სმ დ) 13 სმ.

✓**8.** α სიბრტყე გადის $ABCD$ პარალელოგრამის AD გვერდზე. B' და C' არის B და C წვეროების გეგმილები α სიბრტყეზე. პარალელოგრამის BP სიმაღლე 15 სმ-ია. $BB'=12$ სმ, $AD=20$ სმ. იპოვეთ $AB'C'D$ ოთხკუთხედის ფართობი.



ა) 240 სმ^2 ბ) 200 სმ^2

გ) 180 სმ^2 დ) 120 სმ^2.

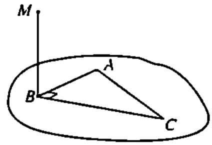
✓**9.** α სიბრტყე გადის AB მონაკვეთის A ბოლოზე და მართობულია AB წრფის, $AB=12$ სმ. α სიბრტყეზე გავლებულია a წრფე, რომელიც დაშორებულია A წერტილიდან 5 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი B წერტილიდან ამ წრფემდე.

ა) 5 სმ ბ) 13 სმ გ) 14 სმ დ) 12 სმ.

✓**10.** A წერტილიდან კვადრატის თითოეულ გვერდამდე მანძილი არის a. იპოვეთ A წერტილიდან კვადრატის სიბრტყემდე მანძილი, თუ კვადრატის დიაგონალი არის d.

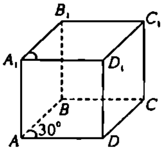
ა) $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{4}}$ ბ) $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{2}}$ გ) $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$ დ) $\sqrt{a^2-d^2}$.

11. $\angle ABC=90^0$. ABC სამკუთხედის სიბრტყის B წერტილიდან ამ სიბრტყისადმი აღმართულია BM მართობი. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან AC ჰიპოტენუზამდე, თუ $AB=a$, $BC=b$, $MB=c$.



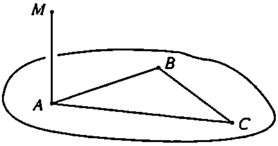
12. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედია, A და B წერტილებიდან ABC სიბრტყისადმი აღმართულია AA_1 და BB_1 მართობები, $AB=2$ მ, $CA_1=3$ მ, $CB_1=7$ მ. A_1B_1 არ კვეთს ABC სიბრტყეს. იპოვეთ მანძილი C წვეროდან A_1B_1 მონაკვეთის შუა წერტილამდე.

13. ABC მართკუთხა სამკუთხედია, $\angle C=90^0$, A და B წვეროებიდან ABC სიბრტყისადმი აღმართულია AA_1 და BB_1 მართობები. A_1B_1 არ კვეთს α სიბრტყეს. $A_1C=4$ მ, $A_1A=3$ მ, $B_1C=6$ მ, $B_1B=2$ მ. იპოვეთ მანძილი C წვეროდან A_1B_1 მონაკვეთის შუა წერტილამდე.

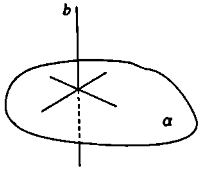


14. სურათზე გამოსახული მართი პარალელეპიპედის სიმაღლე 8 სმ-ია. ფუძე პარალელოგრამია, რომლის მახვილი კუთხე 30^0-ია, გვერდები — $AB=8$ სმ და $AD=10$ სმ. იპოვეთ AD და B_1C_1 წიბოებზე გამავალი კვეთის ფართობი.

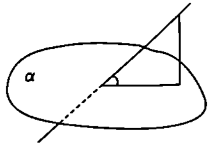
15. სურათზე AM წრფე ABC სამკუთხედის სიბრტყის მართობულია. ცნობილია, რომ $AM=6{,}4$ დმ, $AC=13$ დმ, $AB=14$ დმ, $BC=15$ დმ. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან BC წრფემდე.



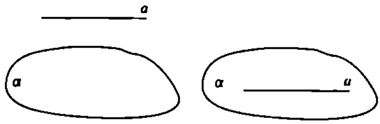
§ 3.8. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. სიბრტყეთა მართობულობა. ორწახნაგა კუთხე. ორწახნაგა კუთხის ზომა



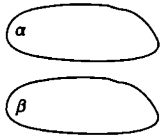
ვთქვათ, b წრფე მართობულია α სიბრტყის, მაშინ b წრფესა და α სიბრტყეს შორის კუთხე 90^0-ის ტოლია.



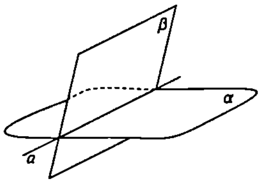
თუ წრფე კვეთს სიბრტყეს და არ არის ამ სიბრტყის მართობული, მაშინ **წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე** ეწოდება ამ წრფესა და სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის კუთხეს.



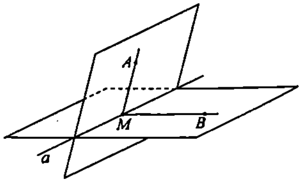
თუ წრფე პარალელურია სიბრტყის, ან ძევს სიბრტყეზე, მაშინ წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე 0^0-ია.



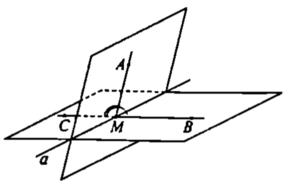
თუ α და β სიბრტყეები პარალელურია, მაშინ ვიტყვით, რომ მათ შორის კუთხე 0^0-ია.



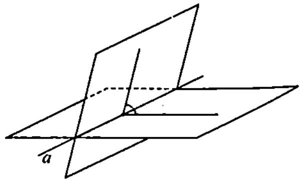
ვთქვათ, α და β გადამკვეთი სიბრტყეებია — ისინი a წრფეზე იკვეთება; ამ სიბრტყეებით სივრცე იყოფა 4 ნაწილად, თითოეულ მათგანს შემომსაზღვრელ ნახევარსიბრტყეებთან ერთად **ორწახნაგა კუთხე** ეწოდება. ნახევარსიბრტყეებს ეწოდება **წახნაგები.**



სურათზე M წერტილი ერთ-ერთი ორწახნაგა კუთხის წახნაგების საერთო საზღვარს — a წრფეს — **ორწახნაგა კუთხის წიბოს** ეკუთვნის. წახნაგებზე გავლებულია a წრფის მართობული MA და MB სხივები; AMB კუთხეს ორწახნაგა კუთხის **ხაზოვანი კუთხე** ეწოდება. თუ წიბოზე სხვა M_1 წერტილს ავიღებთ და ანალოგიურად ავაგებთ $\angle A_1M_1B_1$-ს, მაშინ $\angle A_1M_1B_1=\angle AMB$ — **ხაზოვანი კუთხის სიდიდე** M **წერტილის** (წვეროს) **შერჩევაზე არ არის დამოკიდებული.**

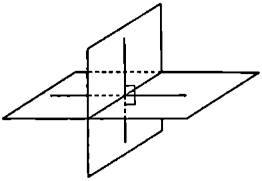


ორწახნაგა კუთხის ზომა მისი ხაზოვანი კუთხის ზომაა. სურათზე გამოსახული ერთ-ერთი ორწახნაგა კუთხის ზომა, $\angle AMB$, ნაკლებია 90^0-ზე, მეორე ორწახნაგა კუთხის ზომა — $\angle AMC$ — მეტია 90^0-ზე.



ორ სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება ამ სიბრტყეთა გადაკვეთისას მიღებული ოთხი ორწახნაგა კუთხიდან უმცირესს. მაშასადამე, ორ სიბრტყეს შორის კუთხე არის იმ წრფეებს შორის კუთხე, რომლებიც სიბრტყეთა გადაკვეთის

წრფის რაიმე წერტილზე გადის, ამ წრფის მართობულია და მოცემულ სიბრტყეებზე ძევს.



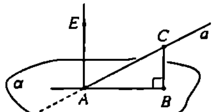
ორ სიბრტყეს მართობული ეწოდება, თუ მათ შორის კუთხე 90^0-ია.

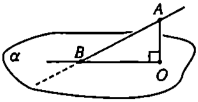
ორი სიბრტყის მართობულობის პირობა: თუ α სიბრტყე გადის β სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ α მართობულია β სიბრტყის და ვწერთ $\alpha \perp \beta$.

✓**1.** ვთქვათ, α არის წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე, მაშინ
ა) $90^0<\alpha<180^0$ ბ) $0^0\leq\alpha\leq90^0$ გ) $\alpha>180^0$ დ) $\alpha>90^0$.

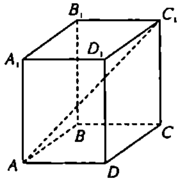
✓**2.** მოცემულია წინადადებები: I. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე შეიძლება იყოს ბლაგვი; II. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე შეიძლება იყოს მართი; III. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე შეიძლება იყოს მახვილი; IV. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე შეიძლება იყოს 0^0-ის ტოლი. მათგან ჭეშმარიტია
ა) I. ბ) მხოლოდ IV. გ) მხოლოდ III. დ) II., III. და IV.

✓**3.** სურათზე გამოსახული a წრფე კვეთს α სიბრტყეს A წერტილში, $CB\perp\alpha$, C ეკუთვნის a-ს, B წერტილი C-ს გეგმილია α-ზე, მაშინ a-სა და α-ს შორის კუთხე არის
ა) $\angle EAC$ ბ) $\angle EAB$
გ) $\angle ACB$ დ) $\angle CAB$.

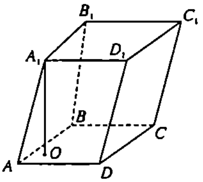




✓**4.** AB წრფე სიბრტყესთან 30^0-იან კუთხეს ადგენს. BO წრფე AB-ს გეგმილია α-ზე. AB მონაკვეთის α-ზე გეგმილი არის BO; $AO=a$. მაშინ
ა) $AB=2a$ ბ) $AB=a\sqrt{3}$
გ) $AB=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ დ) $AB=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.



✓**5.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. AC_1 დიაგონალის დახრის კუთხე ფუძის სიბრტყისადმი (AC_1 წრფესა და $ABCD$ სიბრტყეს შორის კუთხე) არის α. მაშინ
ა) $\angle C_1AD=\alpha$ ბ) $\angle C_1AC=\alpha$
გ) $\angle ACC_1=\alpha$ დ) $\angle A_1AD=\alpha$.

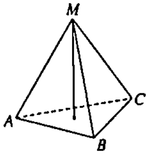


✓**6. პარალელეპიპედის სიმაღლე ეწოდება მის ფუძეებს შორის მანძილს** (ერთ-ერთი ფუძიდან მეორეზე დაშვებულ მართობსაც ვუწოდებთ ხოლმე პარალელეპიპედის სიმაღლეს). AA_1 გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყისადმი 30^0-იანი კუთხითაა დახრილი, $AA_1=a$. მაშინ პარალელეპიპედის სიმაღლე არის
ა) $a\sqrt{3}$ ბ) $2a$ გ) $3a$ დ) $\frac{a}{2}$.

✓**7. პირამიდის სიმაღლე ეწოდება მისი წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს** (თავად მართობსაც ვუწოდებთ ხოლმე პირამიდის სიმაღლეს). პირამიდის

თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 60^0-იან კუთხეს. მაშინ თითოეული მათგანი სიმაღლესთან ადგენს

ა) 60^0-იან კუთხეს ბ) 30^0-იან კუთხეს
გ) 90^0-იან კუთხეს დ) 45^0-იან კუთხეს.



8. $MABC$ პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $MA=MB=MC=10$ სმ. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

ა) 6 სმ ბ) 8 სმ გ) 10 სმ დ) 12 სმ.

9. ვთქვათ, ორწახნაგა კუთხის სიდიდეა α. მოცემულია წინადადებები: I. α შეიძლება იყოს 90^0-ზე მეტი და 180^0-ზე ნაკლები; II. α აუცილებლად 90^0-ზე ნაკლებია; III. α აუცილებლად ბლაგვია. ამ წინადადებებიდან ჭეშმარიტია

ა) II. ბ) I. და II. გ) I. დ) III.

10. ორ სიბრტყეს შორის კუთხის სიდიდე არ შეიძლება იყოს

ა) 90^0-ზე ნაკლები ბ) 0^0-ზე მეტი გ) 90^0-ზე მეტი დ) 0^0.

11. თუ α და β სიბრტყეებს შორის კუთხე არის 90^0, მაშინ

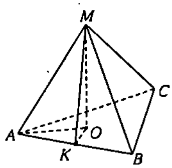
ა) $\alpha\perp\beta$ ბ) α არ არის მართობული β სიბრტყის
გ) $\alpha\|\beta$ დ) ზოგჯერ α არ არის მართობული β სიბრტყის.

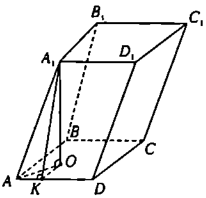
12. ვთქვათ, m წრფე ძევს α სიბრტყეზე და m მართობულია β სიბრტყის. მაშინ

ა) $\alpha\perp\beta$ ბ) $\alpha\|\beta$
გ) α კვეთს β-ს და არ არის მისი მართობული
დ) α არ კვეთს β-ს.

13. $MABC$ პირამიდაა, MO მისი სიმაღლეა. MK არის MAB წახნაგის სიმაღლე. MAB წახნაგის დახრის კუთხე ფუძის სიბრტყისადმი (კუთხე MAB სიბრტყესა და ABC სიბრტყეს შორის) არის

ა) $\angle MAO$ ბ) $\angle MAC$
გ) $\angle MKO$ დ) $\angle MKB$.





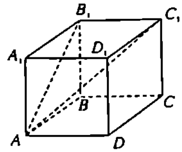
14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედია, A_1O მისი სიმაღლეა. A_1K არის A_1ADD_1 გვერდითი წახნაგის სიმაღლე. ამ წახნაგის ფუძის სიბრტყისადმი დახრის კუთხე არის

ა) $\angle A_1AO$ ბ) $\angle A_1KO$
გ) $\angle A_1KD$ დ) $\angle A_1AC$.

15. α სიბრტყისადმი გავლებული დახრილი α სიბრტყესთან 45^0-იან კუთხეს ქმნის. დახრილის ფუძეზე α სიბრტყეზე გავლებულია წრფე, რომელიც გეგმილთან 45^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ φ კუთხე ამ წრფესა და დახრილს შორის.

16. სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილიდან ამ სიბრტყისადმი გავლებულია მართობი და ორი ტოლი დახრილი. ამ დახრილთაგან თითოეული მართობთან α კუთხეს ქმნის. იპოვეთ φ კუთხე დახრილთა გეგმილებს შორის, თუ დახრილებს შორის კუთხე β-ს ტოლია.

17. სურათის მიხედვით, რომელზეც კუბია გამოსახული, დაასახელეთ:



ა) AB_1 წრფესა და $ABCD$ წახნაგის სიბრტყეს შორის კუთხე;

ბ) BC წრფესა და DD_1C_1C წახნაგის სიბრტყეს შორის კუთხის სიდიდე;

გ) A_1B_1 წრფესა და AB_1C_1D წახნაგის სიბრტყეს შორის კუთხე;

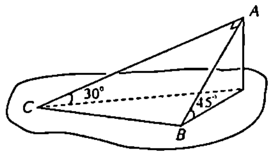
დ) A_1B წრფესა და AB_1C_1D წახნაგის სიბრტყეს შორის კუთხის სიდიდე.

18. a წრფესა და α სიბრტყეს შორის კუთხე 30^0-ია. ამ წრფისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილია A, B წერტილი a წრფეზეა, $AB=1,2$ მ. იპოვეთ α სიბრტყეზე AB მონაკვეთის (დახრილის) გეგმილის სიგრძე.

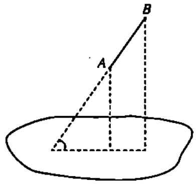
19. M წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებული MA დახრილის და MO მართობის სიგრძეები, შესაბამისად, 20სმ და 12 სმ-ია. იპოვეთ MA დახრილსა და α სიბრტყეს შორის კუთხის კოსინუსი.

20. A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებული AC და AB დახრილები α სიბრტყესთან ადგენენ, შესაბამისად, 45^0-იან და 30^0-იან კუთხეებს, A წერტილი α სიბრტყიდან 7,2 დმ-ით არის დაშორებული. იპოვეთ ეს დახრილები და მათი გეგმილები.

21. A წერტილი ჰორიზონტალური სიბრტყიდან 8 სანტიმეტრითაა დაშორებული, B და C წერტილები კი ამ სიბრტყეზე ძევს. AC და AB დახრილები ერთმანეთთან 90^0-იან კუთხეს ქმნის, ჰორიზონტალურ სიბრტყესთან კი — შესაბამისად, 30^0-იან და 45^0-იან კუთხეებს. იპოვეთ BC.



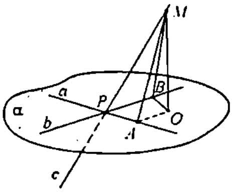
22. A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებული AC დახრილი ამ სიბრტყესთან 45^0-იან კუთხეს ადგენს. AB დახრილი 13სმ-ია, მისი გეგმილი — 5სმ. იპოვეთ AC დახრილის სიგრძე.



23. AB მონაკვეთი α სიბრტყეს არ კვეთს, $AB=10$ სმ. AB წრფე α სიბრტყესთან 60^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ α სიბრტყეზე AB მონაკვეთის გეგმილის სიგრძე.

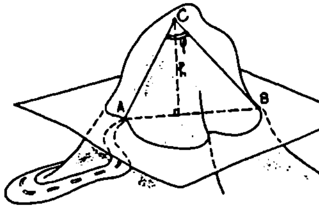
24. A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებული AO მართობი 30სმ-ია. AB დახრილი α სიბრტყეზე მდებარე BC წრფესთან 60^0-იან კუთხეს ადგენს, $AB=50$ სმ. ცნობილია, რომ AP დახრილი BC წრფის მართობულია. იპოვეთ AP დახრილის გეგმილის სიგრძე.

25. c წრფე α სიბრტყეზე მდებარე a და b წრფეების გადაკვეთის P წერტილზე გადის და a და b წრფეებთან ტოლ კუთხეებს ადგენს. c წრფის M წერტილი არ ძევს α სიბრტყეზე. M წერტილიდან გავლებულია MO, MA და MB მართობები, შესაბამისად, α სიბრტყისადმი, a და b წრფეებისადმი. დაამტკიცეთ, რომ

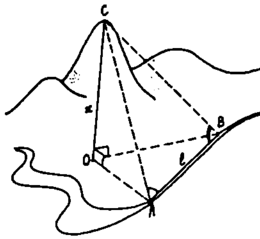


ა) $MA=MB$; ბ) $AO=BO$;

გ) PO არის BPA კუთხის ბისექტრისა.

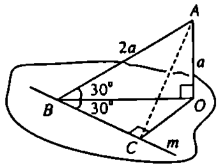


26. მთის A და B წერტილებს შორის უნდა გაიყვანონ ჰორიზონტალური სწორხაზოვანი გვირაბი. C წერტილიდან, რომელიც AB-ზე გამავალი ჰორიზონტალური სიბრტყიდან h მანძილითაა დაშორებული, AB მონაკვეთი ჩანს φ კუთხით, ხოლო AC და BC მონაკვეთები ჰორიზონტალურ სიბრტყესთან ქმნის α და β კუთხეებს. იპოვეთ გვირაბის სიგრძე.

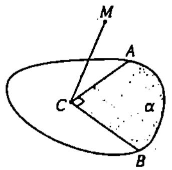


27. გზის ჰორიზონტალური AB მონაკვეთი l სიგრძისაა. A და B წერტილებიდან მთის CB და CA ფერდები ჩანს, შესაბამისად, $\angle CAB=\alpha$ და $\angle CBA=\beta$ კუთხეებით. რომელი კუთხის ცოდნაა კიდევ საჭირო, რომ ვიპოვოთ მთის x სიმაღლე? როგორ მოახერხებთ საჭირო მონაცემის მოცემის შემთხვევაში x-ის პოვნას?

28. სიბრტყისადმი გავლებული დახრილი სიბრტყესთან 30^0-იან კუთხეს ქმნის. დახრილის ფუძეზე მოცემულ სიბრტყეზე გავლებულია m წრფე, რომელიც დახრილის გეგმილთან 30^0-იან კუთხეს ქმნის. φ არის კუთხე m წრფესა და დახრილს შორის. იპოვეთ $\cos\varphi$.

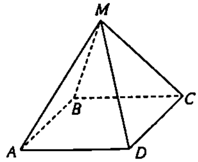


მითითება: I ხერხი: ვთქვათ, $AO=a$, მაშინ, $AB=2a$, $BO=a\sqrt{3}$, დავუშვათ მართობი: $OC\perp BC$, მაშინ $OC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BC=\dfrac{3a}{2}$, $\angle BCA=90^0$.

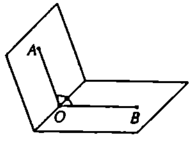


29. მართი ACB კუთხე α სიბრტყეზეა. M წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებულია MC დახრილი. ეს დახრილი CA და CB გვერდებთან ქმნის 60^0-იან კუთხეებს. იპოვეთ MC-სა და α-ს შორის კუთხე.

30. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის (ფუძე კვადრატია და პირამიდის სიმაღლე ფუძის ცენტრში გეგმილდება) ფუძის გვერდია 4 სმ, ფუძესთან მდებარე ერთ-ერთი ორწახნაგა კუთხე (გვერდით წახნაგსა და ფუძის სიბრტყეს შორის) 60^0-ია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი (გვერდითი წახნაგების ფართობების ჯამი).

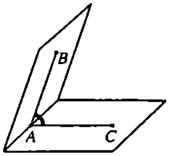


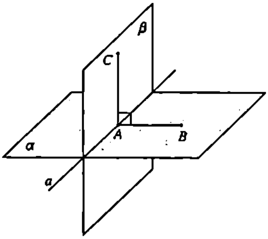
31. $MABCD$ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 16სმ-ია, ფუძის გვერდთან ერთ-ერთი ორწახნაგა კუთხეა 45^0. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



32. AOB არის 150^0-იანი ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე, $OA=OB=12$ სმ. იპოვეთ AB.

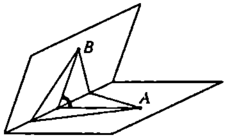
33. BAC არის 45^0-იანი ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე, $AB=AC$, $BC=10$სმ. იპოვეთ AB და AC.

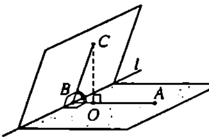




34. α და β მართობული სიბრტყეები a წრფეზე იკვეთება. A წერტილიდან α და β სიბრტყეებზე გავლებულია — $AB\perp a$, $AC\perp a$; $AB=9$სმ, $AC=9\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ BC.

35. ორ ტოლფერდა სამკუთხედს აქვს საერთო ფუძე. მათი სიბრტყეები კი 60^0-იან კუთხეს ქმნის. საერთო ფუძე 16მ-ია, ერთ-ერთი სამკუთხედის ფერდი 17მ-ია, მეორის ფერდები მართობულია. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედების A და B წვეროებს შორის.





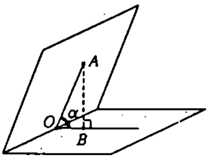
36. ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის B წვეროდან ამავე კუთხის გვერდებზე გადადეს BA და BC მონაკვეთები. C წერტილიდან დაშვებულია მართობი იმ წახნაგზე, რომელსაც C არ ეკუთვნის.

ა) დაამტკიცეთ, რომ ეს მართობი ABC სამკუთხედის სიმაღლეა;

ბ) იპოვეთ ამ მართობის სიგრძე, თუ $BC=15$ სმ, $BA=14$ სმ და $AC=13$სმ.

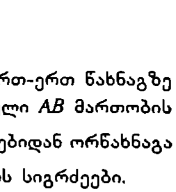
37. 30^0-იანი ორწახნაგა კუთხის α წახნაგზე მდებარე M წერტილიდან დაშვებულია MO და MA მართობები, შესაბამისად, β წახნაგზე და ორწახნაგა კუთხის წიბოზე. ცნობილია, რომ AM მონაკვეთის გეგმილი β წახნაგზე 2,4 დმ-ია. იპოვეთ MA და MO მართობების სიგრძეები.

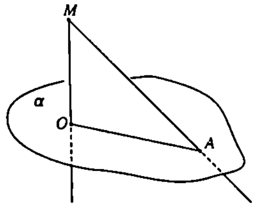
38. α სიდიდის ($0^0<\alpha<90^0$) ორწახნაგა კუთხის ერთ-ერთ წახნაგზე მდებარე M წერტილიდან მეორე წახნაგზე დაშვებული მართობის სიგრძეა a. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე.



39. α სიდიდის ($0^0<\alpha<90^0$) ორწახნაგა კუთხის ერთ-ერთ წახნაგზე მდებარე A წერტილიდან მეორე წახნაგზე დაშვებული AB მართობის სიგრძე 1,8 დმ-ია, $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. იპოვეთ A და B წერტილებიდან ორწახნაგა კუთხის წიბოზე დაშვებული OA და OB მართობების სიგრძეები.

40. ორწახნაგა კუთხის წახნაგებზე M წერტილიდან დაშვებული MA და MB მართობები, შესაბამისად, 15სმ და 18სმ-ია. M და A წერტილებიდან ორწახნაგა კუთხის წიბოზე დაშვებული მართობები α კუთხეს ადგენენ, $\sin\alpha=0,6$. იპოვეთ M, A და B წერტილებიდან კუთხის წიბოზე დაშვებული MO, AO და BO მართობების სიგრძეები.



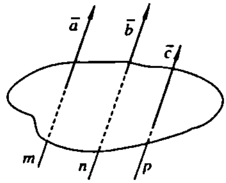


41. M წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებულია MA დახრილი და MO მართობი. იპოვეთ კუთხე α სიბრტყესა და AMO სამკუთხედის სიბრტყეს შორის. პასუხი დაასაბუთეთ.

42. α და β მართობული სიბრტყეები a წრფეზე იკვეთება. ამ წრფის M წერტილიდან გავლებულია a წრფის მართობული და α და β სიბრტყეებზე მდებარე MA და MB მონაკვეთები. ცნობილია, რომ $MA=24$ სმ, მანძილი A და B წერტილებს შორის 26 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი B წერტილიდან a წრფემდე.

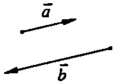
43. α და β მართობული სიბრტყეები a წრფეზე იკვეთება. A წერტილიდან α და β სიბრტყეებისადმი გაავლეს AB და AC მართობები, $AB=33$ სმ, $AC=56$ სმ. დაამტკიცეთ, რომ A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებული მართობი AB და AC წრფეებზე გამავალ სიბრტყეზე ძევს და იპოვეთ ამ მართობის სიგრძე.

§ 3.9. ვექტორები სივრცეში. კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორები



სივრცეში ისევე, როგორც სიბრტყეზე, ვექტორს მიმართული მონაკვეთით გამოვსახავთ; ვექტორების ტოლობა, ვექტორის სიგრძე, ვექტორებზე მოქმედებები (შეკრება, რიცხვზე გამრავლება) მოქმედებების თვისებებიც ისევე წარმოგვიდგება, როგორც სიბრტყეზე. მაგალითად, თუ ვექტორები m, n და p პარალელურ წრფეებზეა და ერთნაირადაა მიმართული, მაშინ ეს ვექტორები თანამიმართული ვექტორებია.

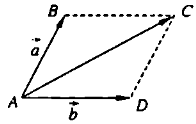
თუ ორი არანულოვანი ვექტორი პარალელურ წრფეზე, ან ერთ წრფეზე მდებარე მიმართული მონაკვეთებით გამოისახება, მაშინ მათ **კოლინეარული** ვექტორები ეწოდება. კოლინეარული ვექტორები ან თანამიმართულია, ან საწინააღმდეგოდ მიმართული. სურათზე არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები კოლინეარული ვექტორებია, ამასთანავე, $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ და ეს ვექტორები საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია, ამიტომ $\vec{b}=-2\vec{a}$.



თუ არსებობს λ რიცხვი, რომ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, მაშინ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარული ვექტორებია. პირიქით, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ არსებობს λ რიცხვი, რომ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. კოლინეარული ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია.

ორი არაკოლინეარული ვექტორის შესაკრებად შეიძლება გამოვიყენოთ პარალელოგრამის წესი:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}.$$



სამ არანულოვან ვექტორს **კომპლანარული ვექტორები** ეწოდება, თუ ისინი შეიძლება ერთ სიბრტყეზე მდებარე მიმართული მონაკვეთებით გამოვსახოთ (მათ ზოგჯერ ერთ სიბრტყეში მდებარე ვექტორებსაც ვუწოდებთ). ცხადია, ყოველი ორი ვექტორი კომპლანარული ვექტორებია.

თუ ორი ვექტორიდან ერთ-ერთი ნულოვანია, მაშინ ასეთ ვექტორებს კოლინეარულ ვექტორებად ჩავთვლით (ისინი კომპლანარულიცაა).

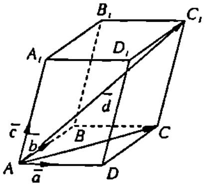
თუ სამი ვექტორიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ მათ კომპლანარულ ვექტორებად ჩავთვლით.

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, მაშინ ნებისმიერი $\vec{c}$ ვექტორი, რომელიც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებთან ერთად კომპლანარულია, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ერთადერთი სახით ($\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით):

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b},\ x\in\mathrm{R},\ y\in\mathrm{R}.$$

თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია, მაშინ ნებისმიერი $\vec{d}$ ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ ერთადერთი სახით ($\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით):

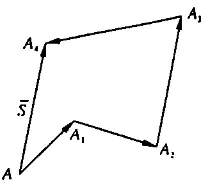
$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c},\ x\in\mathrm{R},\ y\in\mathrm{R},\ z\in\mathrm{R}.$$



სურათზე ის შემთხვევაა წარმოდგენილი, როცა $\vec{d}$ ვექტორი მოცემული სამი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებიდან არცერთი ორის კომპლანარული არ არის, ისინი მოდებულია ერთ წერტილზე — A წერტილზე; ავაგეთ პარალელეპიპედი, რომლის AC_1 დიაგონალით $\vec{d}$ ვექტორია გამოსახული: აქ

$$\vec{d}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}.$$

აქ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორები პარალელეპიპედის წესით შევკრიბეთ.



სამი ან მეტი ვექტორის ჯამი შეიძლება ვიპოვოთ **მრავალკუთხედის წესით.** ვთქვათ, გვსურს ვიპოვოთ ჯამი:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{S}.$$

სივრცეში ვირჩევთ რაიმე A წერტილს და თანამიმდევრულად გადავდებთ ვექტორებს:

$$\overrightarrow{AA_1}=\vec{a},\ \overrightarrow{A_1A_2}=\vec{b},\ \overrightarrow{A_2A_3}=\vec{c},\ \overrightarrow{A_3A_4}=\vec{d}.$$

ვექტორი $\overrightarrow{AA_4}$ იქნება საძიებელი $\vec{S}$ ვექტორი.

გავიხსენოთ **ვექტორებზე მოქმედებების თვისებები** (იხილეთ წინა თავის 2.2. პარაგრაფი).

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ 4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ ($-\vec{a}$ არის $\vec{a}$-ს მოპირდაპირე, ამასთანავე, $-\vec{a}=(-1)\cdot\vec{a}$)

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ 6) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$

7) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ 8) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

ვექტორთა სხვაობას ასე განვსაზღვრავთ: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

სასარგებლოა გვახსოვდეს, რომ ნებისმიერი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

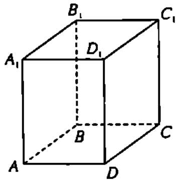
$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\end{cases}$$ (C ნებისმიერი წერტილია).

ა

✓**1.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. დასახელებულ ვექტორთაგან, რომელი ორი ვექტორია ტოლი?

ა) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{DC}$ ბ) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AA_1}$

გ) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC_1}$ დ) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AB_1}$.



✓**2.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. $\overrightarrow{AC_1}=$

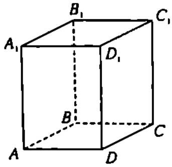
ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$ ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

გ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ დ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}$.

✓**3.** წინა ამოცანის სურათის მიხედვით $\overrightarrow{AC_1}=$

ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ ბ) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$

გ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A}$ დ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}$.



✓**4.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. რომელია არასწორი ტოლობა?

ა) $\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{D_1D}$ ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{AC}$

გ) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ დ) $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

✓**5.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=$

ა) $\overrightarrow{AC}$ ბ) $\overrightarrow{CA}$ გ) $\overrightarrow{CD}$ დ) $\overrightarrow{AD}$.

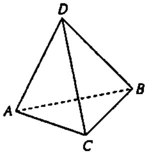
✓**6.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$

ა) $\overrightarrow{CA}$ ბ) $\overrightarrow{CB}$ გ) $-\overrightarrow{CA}$ დ) $2\overrightarrow{CA}$.

✓**7.** $\overrightarrow{SA}=$

ა) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{SB}$ ბ) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{AB}$ გ) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{AB}$ დ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{SB}$.

✓**8.** $DABC$ პირამიდაა. მაშინ $\overrightarrow{AD}=$



ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$

ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

გ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$

დ) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$.

✓**9.** ვთქვათ, არსებობს ისეთი α და β რიცხვები, რომ $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, მაშინ $\vec{d}$, $\vec{a}$ და $\vec{b}$

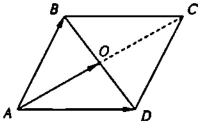
ა) არ არის კომპლანარული ვექტორები

ბ) კომპლანარული ვექტორებია

გ) აუცილებლად კოლინეარული ვექტორებია

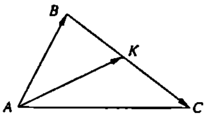
დ) ზოგჯერ არ არის კომპლანარული ვექტორები.

✓**10.** $ABCD$ პარალელოგრამია, $\overrightarrow{AO}=$



ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

გ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ დ) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

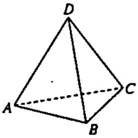


✓**11.** ABC სამკუთხედში AK მედიანაა; $\overrightarrow{AK}=$

ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ბ) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

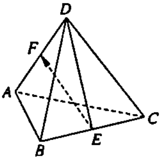
გ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ დ) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$.

✓**12.** $ABCD$ ტეტრაედრია, $\overrightarrow{CB}=$



ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ ბ) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

გ) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}$ დ) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$.



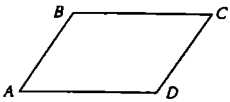
✓**13.** $DABC$ ტეტრაედრია, E წერტილი BC გვერდზეა, F წერტილი — AD გვერდის შუა წერტილია. მაშინ $\overrightarrow{EF}=$

ა) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}$ ბ) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})$

ბ) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}$ დ) $2(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})$.

✓**14.** $ABCD$ პარალელოგრამია, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=$

ა) $\overrightarrow{AC}$ ბ) $\overrightarrow{CA}$ გ) $\overrightarrow{BD}$ დ) $\overrightarrow{DA}$.



✓**15.** თუ $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|=$

ა) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}|$ ბ) $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}|$

გ) $|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}|$ დ) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

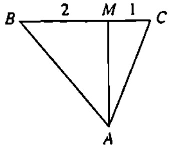
✓**16.** თუ ABC სამკუთხედში C კუთხე მართია, მაშინ $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=$

ა) $|\overrightarrow{CA}|$ ბ) $|\overrightarrow{CB}|$ გ) $|\overrightarrow{AB}|$ დ) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$.

✓**17.** თუ ABC სამკუთხედში $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$, მაშინ

ა) $\angle C<90^0$ ბ) $\angle C>90^0$ გ) $\angle C=90^0$ დ) $\angle C\neq 90^0$.

✓**18.** თუ M წერტილი BC გვერდს ჰყოფს 2:1 შეფარდებით B წვეროს მხრიდან, მაშინ $\overrightarrow{AM}=$



ა) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ბ) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

გ) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ დ) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

მითითება. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$.

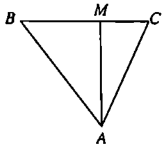
✓**19.** თუ M წერტილი BC-ს ჰყოფს შეფარდებით $m:n$ (B წვეროს მხრიდან), მაშინ $\overrightarrow{AM}=$

ა) $\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n}\overrightarrow{AC}$

ბ) $\frac{1}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m+n}\overrightarrow{AC}$

გ) $\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$

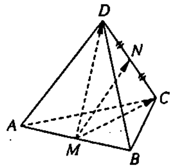
დ) $\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.



✓**20.** M წერტილი $DABC$ პირამიდის AB წიბოს შუა წერტილია, N წერტილი — DC-ს შუა წერტილი. მაშინ $\overrightarrow{MN}=$

ა) $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}$ ბ) $2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC})$

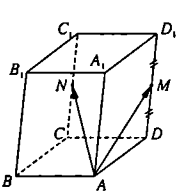
გ) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC})$ დ) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC})$.



✓**21.** M წერტილი $DABC$ პირამიდის AB წიბოს შუა წერტილია, N წერტილი — DC-ს შუა წერტილი. რომელი ტოლობაა მცდარი?

ა) $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$ ბ) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$

გ) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{MN}$ დ) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MN}$.



22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედია, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. წარმოადგინეთ ამ ვექტორებით:

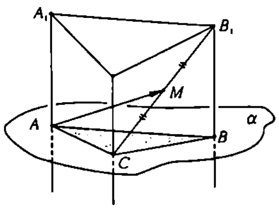
ა) $\overrightarrow{AB_1}$;

ბ) $\overrightarrow{AC_1}$;

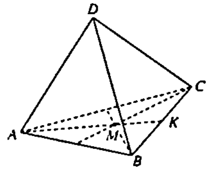
გ) $\overrightarrow{AM}$, თუ M არის DD_1-ის შუა წერტილი;

დ) $\overrightarrow{AN}$, თუ N არის CC_1-ის შუა წერტილი.

23. ΔABC არის $\Delta A_1B_1C_1$-ის ორთოგონალური გეგმილი α სიბრტყეზე. ცნობილია, რომ $AA_1=x$, $BB_1=y$, M არის B_1C-ს შუა წერტილი. გამოსახეთ $\overrightarrow{AM}$ ვექტორი $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{r}$ ვექტორებით.



24. $DABC$ ტეტრაედრის ABC წახნაგის მედიანები იკვეთება M წერტილში. გამოსახეთ $\overrightarrow{DM}$ ვექტორი $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ და $\overrightarrow{DC}$ ვექტორებით.

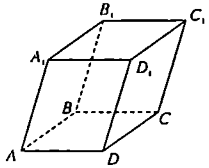


25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედია. არის თუ არა კომპლანარული ვექტორები:

ა) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ და $\overrightarrow{B_1B}$? ბ) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{AA_1}$?

გ) $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{DD_1}$? დ) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ და $\overrightarrow{CC_1}$?

26. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედია. $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{r}=\overrightarrow{AA_1}$. წარმოადგინეთ $\vec{p}$, $\vec{q}$ და $\vec{r}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით:



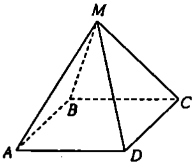
ა) $\overrightarrow{A_1B_1}$; ბ) $\overrightarrow{AM}$, თუ M არის DD_1-ის შუა წერტილი;

გ) $\overrightarrow{AN}$, თუ N არის CC_1-ის შუა წერტილი;

დ) $\overrightarrow{AP}$, თუ P არის B_1D-ს შუა წერტილი;

ე) $\overrightarrow{AQ}$, თუ Q ეკუთვნის D_1C_1-ს და $D_1Q:D_1C_1=5:11$;

ვ) $\overrightarrow{AF}$, სადაც F ეკუთვნის D_1C_1-ს და $D_1F:D_1C_1=5:13$.

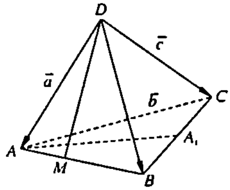


27. $MABCD$ პირამიდის ფუძე $ABCD$ პარალელოგრამია. $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$. გამოსახეთ ამ ვექტორების წრფივი კომბინაციით ვექტორი:

ა) $\overrightarrow{MP}$, სადაც P არის AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი;

ბ) $\overrightarrow{MD}$; გ) $\overrightarrow{MK}$, სადაც K არის AD-ს შუა წერტილი.

28. $DABC$ ტეტრაედრია, AA_1 არის ფუძის მედიანა. $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{5}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. გამოსახეთ ამ ვექტორებით $\overrightarrow{MA_1}$ ვექტორი.



29. დაასაბუთეთ:

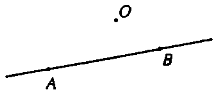
ა) $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ და $\vec{c}-\vec{a}$ ვექტორები კომპლანარული ვექტორებია;

ბ) $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{a}$ და $-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ კომპლანარული ვექტორებია;

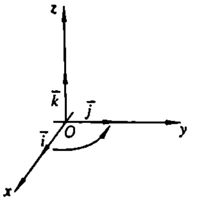
გ) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ და $8\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ კომპლანარული ვექტორებია.

30. ა) ვთქვათ, O სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. აჩვენეთ, რომ AB (A-სა და B-ზე გამავალი წრფე) წრფე არის იმ X წერტილთა სიმრავლე, რომლისთვისაც $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AB}$, α ნებისმიერი რიცხვია.

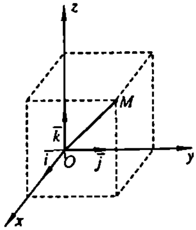
ბ) ვთქვათ, O სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. აჩვენეთ, რომ AB წრფე არის იმ X წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\overrightarrow{OX}=m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$, $m+n=1$.



§ 3.10. კოორდინატები სივრცეში. ვექტორის კოორდინატები. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი



ვთქვათ, სივრცეში O წერტილზე სამი ურთიერთმართობული წრფე გადის, O წერტილზე მოვდოთ ამ წრფეებზე მდებარე ერთეულოვანი ვექტორები — $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ — ისინი შესაბამის წრფეზე მიმართულებებს და საერთო მასშტაბებს განსაზღვრავს — მივიღებთ სამ რიცხვით ღერძს: x ღერძს, y ღერძსა და z ღერძს. ამასთანავე, ვექტორები ისეა შერჩეული (მაშასადამე, შესაბამისი რიცხვითი ღერძებიც), რომ პირველი — $\vec{i}$ ვექტორის უმცირესი კუთხით მობრუნება მეორე — $\vec{j}$ ვექტორისკენ, მესამე — $\vec{k}$ ვექტორის ბოლოდან მოჩანს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნებად. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ გვაქვს $Oxyz$ **კოორდინატთა მარჯვენა სისტემა**. თუ ასეთი მობრუნება მოჩანს საათის ისრის მიმართულებით — გვაქვს **კოორდინატთა მარცხენა სისტემა**. ჩვენ მარჯვენა სისტემას განვიხილავთ ხოლმე. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ვექტორებს **ორტებს** ვუწოდებთ.



ვთქვათ, a ნებისმიერი ვექტორია; რადგან $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ არაკომპლანარულ ვექტორთა სამეულია, არსებობს რიცხვთა ერთადერთი (x; y; z) სამეული, რომ გვაქვს:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

მოვდოთ $\vec{a}$ ვექტორი სათავეზე — $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, მაშინ

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

x, y, z რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის (ე. ი. $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის) კოორდინატები ეწოდება (ამავე რიცხვებს M წერტილის კოორდინატებს ვუწოდებთ, ვწერთ: $\overrightarrow{OM}(x;\ y;\ z)$, $\vec{a}(x;\ y;\ z)$, $M(x;\ y;\ z)$). x-ს ვუწოდოთ პირველი კოორდინატი — აბსცისა, y რიცხვს მეორე კოორდინატი — ორდინატი ვუწოდოთ, z-ს ვუწოდოთ მესამე კოორდინატი — აპლიკატი.

შევნიშნოთ: M წერტილის x, y და z კოორდინატებს მარტივად მივიღებთ, თუ M წერტილზე გავავლებთ, შესაბამისად, Ox, Oy, Oz საკოორდინატო ღერძების მართობულ სიბრტყეებს და ვიპოვით გადაკვეთის წერტილების კოორდინატებს ამ ღერძებზე. თუ M წერტილი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა, მისი კოორდინატთა სამეული არის (0; 0; 0).

მნიშვნელოვანია კავშირი ვექტორებზე მოქმედებებსა და ვექტორის კოორდინატებს შორის:

1) თუ $\vec{p}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{q}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, მაშინ

$$\vec{p}+\vec{q}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2);$$
$$\vec{p}-\vec{q}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2);$$

2) თუ $\vec{p}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\lambda\in\mathrm{R}$, მაშინ $\lambda\vec{p}=(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$.

მაშასადამე, ვექტორების შეკრებისას შესაბამისი კოორდინატები იკრიბება, ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისას კოორდინატები მრავლდება ამ რიცხვზე.

თუ $A=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები ასე გამოითვლება:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1).$$

$\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე (მოდული), ანუ AB მონაკვეთის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

სკალარული ნამრავლი

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ერთეულოვანი ვექტორებია, მაშინ $\vec{a}$-სა და $\vec{b}$-ს **სკალარული ნამრავლი** ეწოდება ამ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le180^0.$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებიდან ერთ-ერთი მაინც ნულოვანი ვექტორია, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

თუმცა, არანულოვანი ვექტორების ნამრავლიც შეიძლება იყოს ნულის ტოლი — თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მართობული ვექტორებია (მათ შორის კუთხე 90^0-ია), მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

პირიქით, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია და $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, მაშინ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები მართობულია.

სკალარული ნამრავლის თვისებები.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$,

2) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$, α რაიმე რიცხვია.

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

4) $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot(\gamma\vec{c}+\delta\vec{d})=(\alpha\gamma)(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\beta\gamma)(\vec{b}\cdot\vec{c})+(\alpha\delta)(\vec{a}\cdot\vec{d})+(\beta\delta)(\vec{b}\cdot\vec{d})$.

5) $\vec{a}\cdot\vec{a}\ge0$; ამასთანავე, ნამრავლი ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როცა $\vec{a}=\vec{0}$.

ფრჩხილების გახსნის წესი (4) თვისება) მაშინაცაა სწორი, როცა შესაკრებთა რიცხვი 2-ზე მეტია.

ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ვექტორები:

$$\vec{a}(x_1;\ y_1),\ \vec{b}(x_2;\ y_2),$$

მაშინ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

მაშასადამე, საკოორდინატო სიბრტყეზე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

(რადგან $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, და $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$).

ორი არანულოვანი **ვექტორის მართობულობის პირობა კოორდინატებში** ასე ჩაიწერება:

$$x_1x_2+y_1y_2=0.$$

თუ სივრცეში მოცემულია $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ და $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ვექტორები, მაშინ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ასე წარმოიდგინება:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეს კი ასე ვიპოვით:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},$$

აქ $\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=|\vec{a}|,\quad \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}=|\vec{b}|.$

✓1. ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია, φ მათ შორის კუთხეა, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

ა) $\vec{a}\cos\varphi$ ბ) $\vec{b}\cos\varphi$ გ) $\vec{a}+\vec{b}$ დ) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$.

✓2. ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია, მათ შორის კუთხე ბლაგვია, მაშინ

ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ დ) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.

✓3. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

ა) რიცხვია ბ) ვექტორია

გ) აუცილებლად დადებითი რიცხვია

დ) აუცილებლად უარყოფითი რიცხვია.

✓4. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სიგრძეებია 2 და 2,2, მათ შორის კუთხე 60^0-ია, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

ა) 4,4 ბ) 2,2 გ) 4,2 დ) 4.

✓5. ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები მართობულია, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

ა) 0 ბ) 6 გ) 5 დ) 3.

✓6. ვთქვათ, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2{,}2$. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე არის $\frac{\pi}{4}$, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

ა) 2,2 ბ) $2{,}2\sqrt{2}$ გ) $4{,}4\sqrt{2}$ დ) $8{,}8\sqrt{2}$.

✓7. $ABCD$ არის a გვერდის მქონე კვადრატი. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

ა) a^2 ბ) $a^2\sqrt{2}$ გ) $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ დ) $2a^2\sqrt{2}$.

✓8. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სიგრძეებია 8 და 15. სკალარული ნამრავლი არის 72. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

ა) $\frac{4}{5}$ ბ) $\frac{3}{5}$ გ) $\frac{5}{13}$ დ) $\frac{12}{13}$.

✓9. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სიგრძეებია 8 და 5. სკალარული ნამრავლი არის 24. მაშინ ამ ვექტორებს შორის კუთხეა

ა) $\arccos\frac{4}{5}$ ბ) $\arccos\frac{3}{5}$ გ) $\arccos\frac{7}{40}$ დ) $\arccos\frac{9}{40}$.

✓10. 3 და 6 ერთეულის სიგრძის ვექტორების სკალარული ნამრავლი $9\sqrt{3}$-ია. იპოვეთ ვექტორებს შორის კუთხის ზომა.

ა) 90^0 ბ) 45^0 გ) 60^0 დ) 30^0.

✓11. თუ $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

ა) $x_1^2+y_1^2+z_1^2$ ბ) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ გ) $x_2^2+y_2^2+z_2^2$ დ) $x_2^2+y_2^2+z_1z_2$.

✓12. $\vec{a}(x;\ -5)$ და $\vec{b}(-4;\ 3)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი 17,5-ია. იპოვეთ x.

ა) -8 ბ) $-8{,}5$ გ) $-8{,}12$ დ) $-8{,}125$.

✓13. ვთქვათ, $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$, მაშინ $|\vec{a}|^2=$

ა) $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ ბ) $x_1^2+y_1^2$ გ) $x_1^2+y_1$ დ) $x_1+y_1^2$.

✓14. თუ $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე ბლაგვია, მაშინ

ა) $x_1x_2+y_1y_2=0$ ბ) $x_1x_2+y_1y_2\geq 0$ გ) $x_1x_2+y_1y_2>0$ დ) $x_1x_2+y_1y_2<0$.

✓**15.** ცნობილია, რომ $\vec{a}(x; -15)$ და $\vec{b}(2; 1{,}4)$ მართობული ვექტორებია. იპოვეთ x.

ა) 10 ბ) 10,5 გ) 11 დ) 11,5.

✓**16.** ცნობილია, რომ $\vec{a}(-2; y)$ და $\vec{b}(2{,}5; 3)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი 22-ის ტოლია. იპოვეთ y.

ა) 7 ბ) 8 გ) 9 დ) 6.

✓**17.** მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}(4; -3)$ და $\vec{b}(2; 2)$. იპოვეთ $3\vec{a}+2\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

ა) (5; −16) ბ) (16; −5) გ) (8; −2,5) დ) (5; 16).

✓**18.** ცნობილია, რომ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}+x\vec{b}$ და $\vec{a}-x\vec{b}$ მართობული ვექტორებია. იპოვეთ $|x|$.

ა) $\frac{3}{4}$ ბ) $\frac{4}{3}$ გ) $\frac{3}{5}$ დ) $\frac{5}{3}$.

✓**19.** ცნობილია, რომ $|\vec{a}|=5$, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

ა) −25 ბ) 25 გ) 0 დ) −10.

✓**20.** ცნობილია, რომ $\vec{a}(x; 4)$ ვექტორი $\vec{b}(-2; 3)$ ვექტორის მართობულია. იპოვეთ x.

ა) 6 ბ) −6 გ) 12 დ) −12.

✓**21.** სივრცის კოორდინატთა სათავის კოორდინატთა სამეულია

ა) (1; 0; 0) ბ) (0; 0; 1) გ) (0; 1; 0) დ) (0; 0; 0).

✓**22.** თუ წერტილი Oxy სიბრტყეზეა, მაშინ მისი აპლიკატი

ა) $z=0$ ბ) $z\neq0$ გ) $z=1$ დ) $z=2$.

✓**23.** თუ წერტილის ორდინატი — $y=0$, მაშინ ეს წერტილი ეკუთვნის

ა) Oxy სიბრტყეს ბ) Oxz სიბრტყეს

გ) Oyz სიბრტყეს დ) Oy ღერძს.

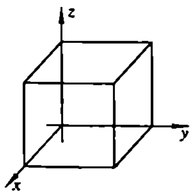
✓**24.** აბსცისათა ღერძის ყოველი წერტილის

ა) აბსცისა ნულია ბ) ორდინატი ნული არ არის

გ) აპლიკატი ნული არ არის დ) ორდინატიც ნულია და აპლიკატიც ნულია.

✓**25.** $M(1; 2; 3;)$ წერტილზე აპლიკატთა ღერძის (Oz ღერძის) მართობულად გამავალი სიბრტყე z ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის კოორდინატთა სამეულია

ა) (0; 2; 0) ბ) (1; 0; 3) გ) (0; 0; 3) დ) (1; 0; 0).



✓**26.** სურათზე გამოსახული კუბის გვერდის სიგრძე ორი ერთეულია, მაშინ კუბის ერთ-ერთი წვეროა

ა) (1; 0; 0)

ბ) (−2; −2; −2)

გ) (−2; 0; 2)

დ) (2; 0; 2).

✓**27.** თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (−2; −3; 4), მაშინ $-2\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია

ა) (4; 6; −8) ბ) (4; −6; −8) გ) (−4; 6; 8) დ) (0; 5; 2).

✓28. $\vec{a}(p;\ q;\ r)$ ვექტორის სიგრძეა

ა) $p+q+r$ ბ) pqr გ) $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ დ) $\sqrt{p^2+q+r^2}$.

✓29. თუ $\vec{a}(m;\ 2;\ 3)$ ვექტორის სიგრძე 7 ერთეულია, მაშინ $m=$

ა) 7 ბ) -7 გ) 8 დ) ± 6.

✓30. ვექტორის სიგრძე $7\sqrt{3}$-ია. იპოვეთ ამ ვექტორის სამივე კოორდინატის ჯამი, თუ ცნობილია, რომ ისინი დადებითია და ერთმანეთის ტოლია.

ა) 14 ბ) 21 გ) 35 დ) 28.

✓31. მოცემულია ვექტორი $\vec{b}=(2;\ 3;\ 6)$ და $\lambda\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე 5 ერთეულია. იპოვეთ λ, თუ ცნობილია, რომ ის უარყოფითი რიცხვია.

ა) $-\frac{5}{7}$ ბ) $\frac{5}{7}$ გ) 1,4 დ) $-1{,}4$.

✓32. მოცემულია წერტილები $A(5;\ 6;\ -1)$ და $B(7;\ -4;\ 0)$. მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატთა სამეულია:

ა) $(2;\ -10;\ 1)$ ბ) $(12;\ 2;\ -1)$ გ) $(6;\ 1;\ 0{,}5)$ დ) $(6;\ 2;\ -0{,}6)$.

✓33. თუ $\vec{a}=(2;\ 1;\ 1)$ და $\vec{b}=(3;\ 1;\ 1)$, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

ა) 6 ბ) 7 გ) 9 დ) 8.

✓34. ყოველი წერტილი, რომლის აპლიკატი ნულია, ეკუთვნის

ა) Oxy სიბრტყეს ბ) Oxz სიბრტყეს

გ) Oyz სიბრტყეს დ) Oz ღერძს.

✓35. თუ $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ და $|2\vec{a}|=$

ა) $\sqrt{xyz}$ ბ) $\sqrt{2x^2+2y^2+2z^2}$ გ) $2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ დ) $2xyz$.

✓36. თუ $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, მაშინ $\vec{a}+\vec{b}=$

ა) $(x_1x_2;\ y_1y_2,\ z_1z_2)$ ბ) $(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$

გ) $(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2)$ დ) $(2x_1x_2;\ 2y_1y_2;\ 2z_1z_2)$.

✓37. მოცემულია წერტილები: $A(3;\ -1;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ -7)$, $C(2;\ 0;\ 0)$, $D(-4;\ 0;\ 3)$, $E(0;\ -1;\ 0)$, $F(1;\ 2;\ 3)$, $G(0;\ 5;\ -7)$, $H(-\sqrt{5};\ \sqrt{3};\ 0)$. მათგან xz სიბრტყეს ეკუთვნის

ა) A და F ბ) G და H

გ) A, E, F და G დ) B, C და D.

✓38. ვთქვათ, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ საკოორდინატო ღერძების ერთეულოვან ვექტორთა სამეულია და $\vec{p}=\vec{j}+\vec{k}$, მაშინ $\vec{p}=$

ა) $(1;\ 0;\ 0)$ ბ) $(1;\ 1;\ 0)$ გ) $(0;\ 1;\ 1)$ დ) $(1;\ 1;\ 1)$.

✓39. თუ $\vec{n}=0{,}7\vec{k}$ ($\vec{k}$ არის z ღერძის ერთეულოვანი ვექტორი — ორტი), მაშინ $\vec{n}=$

ა) $(0;\ 0;\ 0{,}7)$ ბ) $(0;\ 0{,}7;\ 0)$

გ) $(0{,}7;\ 0;\ 0)$ დ) $(0{,}7;\ 0{,}7;\ 0{,}7)$.

✓40. თუ $\vec{p}=(-3;\ 5;\ -7)$, მაშინ $-\vec{p}=$

ა) $(-3;\ 5;\ 7)$ ბ) $(3;\ -5;\ 7)$

გ) $(-3;\ 5;\ -7)$ დ) $(3;\ 5;\ 7)$.

✓41. თუ $A=(2;\ -3;\ 0)$ და O კოორდინატთა სათავეა, მაშინ $\overrightarrow{OA}=$

ა) $(2;\ 0;\ -3)$ ბ) $(-3;\ 2;\ 0)$ გ) $(-2;\ 3;\ 0)$ დ) $(2;\ -3;\ 0)$.

✓**42.** მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}(3;\ -5;\ 1)$ და $\vec{b}(0;\ 1;\ -5)$. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$.
ა) -5 ბ) -10 გ) 15 დ) -15.

✓**43.** თუ $A=(2;\ 5;\ 4)$, $B=(3;\ 1;\ 0)$, მაშინ AB მონაკვეთის სიგრძეა
ა) $4\sqrt{2}$ ბ) $\sqrt{33}$ გ) $\sqrt{31}$ დ) $\sqrt{10}$.

✓**44.** გავიხსენოთ: არანულოვანი p და q ვექტორები კოლინეარულია, თუ არსებობს α რიცხვი, რომ $\vec{p}=\alpha\vec{q}$. x და y-ის რა მნიშვნელობებისთვის არის კოლინეარული $\vec{a}(x;\ -2;\ 10)$ და $\vec{b}(1;\ y;\ -6)$ ვექტორები?
ა) $x=-\frac{5}{3},\ y=\frac{6}{5}$ ბ) $x=\frac{5}{3},\ y=\frac{6}{5}$ გ) $x=-\frac{5}{3},\ y=-\frac{6}{5}$ დ) $x=\frac{5}{3},\ y=-\frac{6}{5}$.

✓**45.** მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}(-3;\ 4{,}5;\ -1)$, $\vec{b}(-2;\ 1;\ 6)$, $\vec{c}(6;\ -3;\ -3)$. იპოვეთ $\vec{p}=\frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$ ვექტორის კოორდინატები.
ა) $(12;\ 8;\ 19)$ ბ) $(-12;\ 8;\ 19)$ გ) $(-12;\ 8;\ 19\frac{1}{3})$ დ) $(-12;\ 4;\ 17\frac{1}{3})$.

✓**46.** თუ $\vec{a}(-2;\ 1;\ 3)$ და $\vec{b}(6;\ -5;\ 4)$ ვექტორებს შორის კუთხე არის α, მაშინ
ა) $\alpha<90^0$ ბ) $90^0<\alpha<180^0$ გ) $\alpha=90^0$ დ) $\alpha=45^0$.

✓**47.** თუ $\vec{a}(12;\ 0;\ 24)$ და $\vec{b}(-16;\ 26;\ 8)$ ვექტორებს შორის კუთხე არის α, მაშინ
ა) $\alpha<90^0$ ბ) $90^0<\alpha<180^0$ გ) $\alpha=90^0$ დ) $\alpha=45^0$.

✓**48.** ცნობილია, რომ ვექტორის სიგრძე არის 6. მისი კოორდინატები ტოლი დადებითი რიცხვებია. იპოვეთ ეს კოორდინატები.
ა) $(\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ \sqrt{3})$ ბ) $(2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$
გ) $(4\sqrt{3};\ 4\sqrt{3};\ 4\sqrt{3})$ დ) $(\frac{2}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}})$.

✓**49.** x-ის რა მნიშვნელობებისთვისაა $\vec{p}(x;\ -3;\ 2)$ ვექტორი $\vec{b}(1;\ 2;\ -x)$ ვექტორის მართობული?
ა) $x=6$ ბ) $x=-6$ გ) $x=3$ დ) $x=-3$.

✓**50.** მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=(-1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}(5;\ x;\ -1)$. x-ის რა მნიშვნელობისთვის სრულდება პირობა: $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$?
ა) $x=-4$ ბ) $x=3{,}5$ გ) $x=4{,}5$ დ) $x=8$.

✓**51.** მოცემულია წერტილები: $A(-2;\ 6;\ 4)$, $B(3;\ -1;\ 0)$, $C(8;\ 4;\ -12)$. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები.
ა) $(-15;\ -27;\ 44)$ ბ) $(15;\ 27;\ 44)$ გ) $(25;\ 27;\ 52)$ დ) $(15;\ 30;\ 48)$.

✓**52.** მოცემულია წერტილები: $A(1;\ -3;\ 2)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(2;\ 1;\ -3)$. ცნობილია, რომ $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=0$. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები.
ა) $(-3;\ 4;\ 11)$ ბ) $(7;\ -4;\ -11)$ გ) $(3;\ 4;\ 11)$ დ) $(3;\ 4;\ -11)$.

53. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი 12 ერთეულია. AD სამკუთხედის სიმაღლეა. იპოვეთ სკალარული ნამრავლი:
ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; ბ) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$; გ) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$; დ) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}$.

54. $ABCD$ მართკუთხედში $AB=3$, $BC=4$. იპოვეთ სკალარული ნამრავლი:
ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; ბ) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$; გ) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; დ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$.

55. $ABCD$ რომბის მახვილი კუთხე 60°-ია, გვერდი 1 ერთეულია. იპოვეთ სკალარული ნამრავლი:

ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; ბ) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$; გ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; დ) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

56. მოცემულია წერტილები: $A(2;\ 1)$, $B(7;\ 1)$ და $C(2;\ 0)$. იპოვეთ სკალარული ნამრავლი:

ა) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ ბ) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ გ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

57. ABC სამკუთხედის წვეროებია: $A(-3;\ 5)$, $B(1;\ 9)$, $C(7;\ -1)$. იპოვეთ:

ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ბ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

58. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე:

ა) $\vec{a}(3;\ -4)$, $\vec{b}(-12;\ 5)$; გ) $\vec{a}(-1;\ 3)$, $\vec{b}(-4;\ 2)$;

გ) $\vec{a}(-3;\ 2)$, $\vec{b}(4;\ -6)$; დ) $\vec{a}(1;\ -2)$, $\vec{b}(2;\ 1)$.

59. $\vec{a}(-2;\ y)$ და $\vec{b}(7{,}5;\ 3)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი 18-ია. იპოვეთ y.

60. ABC სამკუთხედის წვეროებია: $A(5;\ 12)$, $B(7;\ -3)$, $C(-1;\ 1)$, AH მედიანაა. იპოვეთ:

ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$; ბ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$; გ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; დ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

61. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი:

ა) $\vec{a}(3;\ 1)$, $\vec{b}(4;\ -6)$; ბ) $\vec{a}(5\sqrt{3};\ 5)$, $\vec{b}(5\sqrt{3};\ -5)$;

გ) $\vec{a}(2;\ 2)$, $\vec{b}(0;\ 4)$; დ) $\vec{a}(4;\ 2)$, $\vec{b}(2;\ -4)$.

62. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}(5;\ -2)$, $\vec{b}(1;\ 1)$, $\vec{c}(4;\ 3)$, $\vec{d}(3;\ -4)$. იპოვეთ მათგან ვექტორთა წყვილები, რომელთა შორის კუთხე

ა) მართია; ბ) ბლაგვია; გ) მახვილია.

63. ცნობილია, რომ ABC სამკუთხედის წვეროებია: $A(1;\ 9)$, $B(2;\ 0)$ და $C(11;\ 1)$. იპოვეთ კუთხე:

ა) $\overrightarrow{CA}$ და $\overrightarrow{CB}$ ვექტორებს შორის; ბ) $\overrightarrow{BA}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორებს შორის;

გ) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებს შორის.

64. ABC სამკუთხედის წვეროებია: $A(-1;\ 1)$, $B(5;\ 3)$ და $C(7;\ -2)$. დაადგინეთ: მართი, მახვილი, თუ ბლაგვია B კუთხე.

65. დაამტკიცეთ:

ა) $A(3;\ 1)$, $B(3;\ 4)$, $C(6;\ 5)$ და $D(9;\ 3)$ წერტილები ტრაპეციის წვეროებია,

ბ) $A(3;\ 4)$, $B(7;\ 5)$, $C(10;\ 2)$ და $D(6;\ 1)$ წერტილები პარალელოგრამის წვეროებია;

გ) $A(2;\ 3)$, $B(3;\ 6)$, $C(6;\ 5)$ და $D(5;\ 2)$ რომბის წვეროებია.

66. იპოვეთ $\vec{a}(-3;\ 4)$ და $\vec{b}(1;\ 2)$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი.

67. მოცემულია $\vec{a}(4;\ -3)$ და $\vec{b}(2;\ 2)$ ვექტორები. იპოვეთ

ა) $3\vec{a}+2\vec{b}$; ბ) $2\vec{a}-5\vec{b}$; გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; დ) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$.

68. მოცემულია: $\vec{p}(12;\ -5)$ და $\vec{q}(-1;\ 2)$ ვექტორები. იპოვეთ:

ა) $\vec{p}\cdot\vec{q}+3\vec{q}\cdot\vec{q}-2|\vec{p}|$; ბ) $(2\vec{p}-\vec{q})(2\vec{p}-\vec{q})$.

69. მოცემულია $\vec{p}(5;\ -6)$ და $\vec{q}(-1;\ 3)$ ვექტორები. იპოვეთ:

ა) $\vec{p}\cdot\vec{q}$; ბ) $(\vec{p}-2\vec{q})(\vec{p}-2\vec{q})$; გ) $(3\vec{p}-\vec{q})(\vec{p}+2\vec{q})$;

დ) $|\vec{p}+\vec{q}|$; ე) $|3\vec{p}-4\vec{q}|$.

70. $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორები 60^0-იან კუთხეს ადგენს. $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=12$. იპოვეთ:
ა) $|\vec{p}+\vec{q}|$; ბ) $|\vec{p}-\vec{q}|$.

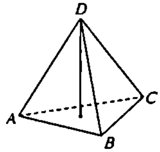
71. p და q მართობული ვექტორებია, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=6$. იპოვეთ:
ა) $|3\vec{p}+2\vec{q}|$; ბ) $|3\vec{p}-2\vec{q}|$.

72. მოცემულია: $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=15$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=72$. იპოვეთ:
ა) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი;
ბ) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალები.

73. $A(3;\ 1)$, $B(4;\ -3)$ და $C(6;\ -1)$ სამკუთხედის წვეროებია. იპოვეთ AM მედიანის სიგრძე.

74. $DABC$ ტეტრაედრის თითოეული წიბო a-ს ტოლია. M, N და P, შესაბამისად, AB, AD და DC წიბოების შუა წერტილებია. იპოვეთ:
ა) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; ბ) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$; გ) $\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{BC}$; დ) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}$; ე) $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{PB}$.

75. $DABC$ ტეტრაედრში $AB=AC=a$, $\angle DAB=\angle DAC=\varphi$. იპოვეთ $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}$.



76. $DABC$ პირამიდაა. ვთქვათ, DO სიმაღლეა და
$$\overrightarrow{DO}=\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\gamma\overrightarrow{DC}.$$
იპოვეთ $\alpha+\beta+\gamma$.

77. მოცემულია სამი წერტილი სივრცეში: $A(3;\ -2;\ 5)$, $B(4;\ -1;\ 0)$ და $C(2;\ -3;\ 7)$. დაადგინეთ სამკუთხედის სახე კუთხეების მიხედვით (მართკუთხაა, მახვილკუთხაა, თუ ბლაგვკუთხაა).

78. მოცემულია სამი წერტილი: $M(-2;\ 3;\ 1)$, $N(0;\ 2;\ 4)$ და $K(5;\ 3;\ -1)$. აჩვენეთ, რომ K წერტილზე გამავალი MN წრფის პარალელური წრფის ყოველი X წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს პირობებს:
$x=5+2t$,
$y=3-t$,
$z=-1+3t$, სადაც t ნებისმიერი რიცხვია.

79. მოცემულია წერტილები: $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$, $D(-5;\ -5;\ 3)$. იპოვეთ $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{BD}$ ვექტორებს შორის კუთხე.

80. იპოვეთ $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$ და $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

81. მოცემულია: $\vec{a}(-1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}(5;\ x;\ -1)$. x-ის რა მნიშვნელობებისთვის სრულდება პირობა:
ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$; ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$; გ) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მართობული ვექტორებია.

82. ვთქვათ, $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ვექტორებს შორის კუთხე 60^0-ია, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$. იპოვეთ სკალარული ნამრავლი:
ა) $(2\vec{m}-\vec{n})(\vec{m}+\vec{n})$; ბ) $(\vec{m}+\vec{n})(\vec{m}-2\vec{n})$.

83. მოცემულია სამი წერტილი: $P(0;\ 2;\ -1)$, $Q(1;\ 0;\ 1)$ და $R(-1;\ 1;\ 2)$. იპოვეთ Oz ღერძის ის M წერტილი, რომლისთვისაც $\overrightarrow{PM}$ და $\overrightarrow{QR}$ მართობული ვექტორებია.

84. რა კუთხით მოჩანს AB მონაკვეთი კოორდინატთა სათავიდან, თუ $A=(1;\ 4;\ 8)$ და $B=(-4;\ 0;\ 3)$?

85. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ტოლი სიგრძის არანულოვანი ვექტორებია. იპოვეთ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე.

86. B წერტილი არის Oyx საკოორდინატო სიბრტყეზე $A(2; -3; 1)$ წერტილის ორთოგონალური გეგმილი. იპოვეთ $|\overrightarrow{OB}|$.

87. იპოვეთ იმ წერტილის კოორდინატები, რომელიც Oy საკოორდინატო ღერძს ეკუთვნის და ტოლი მანძილებითაა დაშორებული $A(2; -1; 1)$ და $B(0; 1; 3)$ წერტილებიდან.

88. ABC სამკუთხედის წვეროებია: $A(3; -2; 1)$, $B(3; 1; 5)$ და $C(4; 0; 3)$. იპოვეთ:

ა) AA_1 და BB_1 მედიანების სიგრძეები;

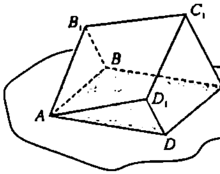
ბ) მანძილი კოორდინატთა სათავიდან ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილამდე;

გ) სამკუთხედის კუთხეები.

89. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები, თუ ცნობილია სამი წვერო: $A(1; -3; 0)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(-3; 1; 1)$.

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას და მათემატიკური დებულებების დასაბუთებისას ხშირად გამოიყენება ვექტორები, ვექტორებზე მოქმედებები და კოორდინატთა მეთოდი. განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. $ABCD$ და $AB_1C_1D_1$ პარალელოგრამებია. ისინი სხვადასხვა სიბრტყეზეა. დავასაბუთოთ, რომ BB_1, CC_1 და DD_1 ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურია.



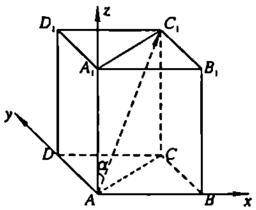
ამოხსნა. საკმარისია დავასაბუთოთ, რომ $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ და $\overrightarrow{DD_1}$ კომპლანარული ვექტორებია.

$$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AD}).$$

მაშასადამე, $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}$. ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ და $\overrightarrow{CC_1}$ კომპლანარული ვექტორებია.

მაგალითი 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია, $\angle C_1AB=\angle C_1AD=60^0$. ვიპოვოთ $\angle A_1AC_1$.



ამოხსნა. საძიებელი კუთხე აღვნიშნოთ α-თი. შემოვიღოთ კოორდინატთა სისტემა. ამ სისტემაში $\overrightarrow{AC_1}$ ვექტორის კოორდინატთა სამეულია $(|\overrightarrow{AC_1}|\cos60^0,\ |\overrightarrow{AC_1}|\cos\overline{60},\ |\overrightarrow{AC_1}|\cos\alpha)$.

ამიტომ

$$|\overrightarrow{AC_1}|^2=|\overrightarrow{AC_1}|^2\cdot\frac{1}{4}+|\overrightarrow{AC_1}|^2\cdot\frac{1}{4}+|\overrightarrow{AC_1}|^2\cdot\cos^2\alpha.$$

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cos^2\alpha,\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2},\qquad \alpha=45^0.$$

ამოცანის ამოხსნა სხვა ხერხითაც შეიძლება.

მაგალითი 3. დახრილი სიბრტყესთან 45^0-იან კუთხეს ადგენს. სიბრტყეზე გავლებულია BC წრფე, რომელიც დახრილის BO გეგმილთან 45^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ დახრილსა და BC წრფეს შორის α კუთხე.

ამოხსნა. B წერტილში მოდებულია $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BA}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორები.

უნდა ვიპოვოთ კუთხე $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{BA}$ ვექტორებს შორის.

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}),$$

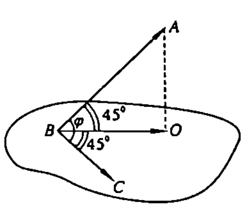
მაგრამ, რადგან $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$, ამიტომ

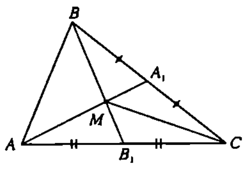
$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO};$$

$$|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cos\varphi=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BO}|\cos45^0.$$

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{BO}|}{|\overrightarrow{BA}|}\cdot\cos45^0=\cos45^0\cdot\cos45^0.$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}.\qquad \varphi=60^0.$$





მაგალითი 4. დავასაბუთოთ ვექტორების გამოყენებით სამკუთხედის მედიანების თვისება — სამკუთხედის მედიანები ერთ წერტილში იკვეთება და გადაკვეთის წერტილით ყოველი მედიანა იყოფა შეფარდებით 2:1 (შესაბამისი წვეროს მხრიდან).

ამოხსნა. MA_1 არის MBC-ს მედიანა, ამიტომ

$$\overrightarrow{MA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$$
$$2\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

$2\overrightarrow{MA_1}$ კოლინეარულია $\overrightarrow{MA}$ ვექტორის.

ვთქვათ, $\quad 2\overrightarrow{MA_1}=k\cdot\overrightarrow{MA}.$

ე. ი. $\quad k\cdot\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}. \qquad (1)$

ანალოგიურად, $\quad 2\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$

$$l\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}. \qquad (2)$$

(1) და (2)-დან

$$k\cdot\overrightarrow{MA}-l\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA},$$
$$(k+1)\cdot\overrightarrow{MA}=(l+1)\cdot\overrightarrow{MB}.$$

რადგან $\overrightarrow{MA}$ და $\overrightarrow{MB}$ არ არის კოლინეარული, ამიტომ აუცილებლად,

$$k=-1,\ l=-1.$$

ე. ი. $\quad \overrightarrow{MA_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}, \qquad \overrightarrow{MB_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}.$

ეს დებულება ადრე სხვა მეთოდით გვქონდა დამტკიცებული.

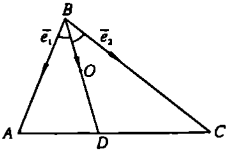
მაგალითი 5. დავასაბუთოთ სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება — ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს დანარჩენი ორი გვერდის პროპორციულ ნაწილებად ჰყოფს.

ამოხსნა. ავიღოთ BA და BC გვერდებზე ერთეულოვანი ვექტორები, $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$. ვთქვათ,

$$\overrightarrow{BO}=\vec{e}_1+\vec{e}_2.$$

მაშინ O წერტილი ეკუთვნის BD ბისექტრისას. ამიტომ

$$\overrightarrow{BD}=k\cdot\overrightarrow{BO}=k\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2),\ k>0.$$



ვთქვათ, $\frac{AD}{DC}=m$, მაშინ

$$\overrightarrow{AD}=m\cdot\overrightarrow{DC},$$
$$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=m\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}),$$
$$k\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2)-|\overrightarrow{BA}|\vec{e}_1=m(|\overrightarrow{BC}|\cdot\vec{e}_2-k\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2)).$$

ე. ი. $\quad k\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2)-c\vec{e}_1=m(a\vec{e}_2-k\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2)),$

$$(k-c)\vec{e}_1+k\vec{e}_2=-mk\vec{e}_1+(ma-mk)\vec{e}_2.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\begin{cases} k-c=-mk \\ k=ma-mk \end{cases} \quad \left| \quad \begin{matrix} k(1+m)=c \\ k(1+m)=ma \end{matrix} \quad \right| \quad \boldsymbol{c=ma}.$$

ე. ი. $\quad \frac{c}{a}=m=\frac{AD}{DC}.$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $f(x)=a\sin x+b\cos x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

I ხერხი (ვექტორების გამოყენება).

ყოველ x რიცხვს შევუსაბამოთ ვექტორი: $\vec{p}(\sin x,\ \cos x)$.

განვიხილოთ $\vec{q}(a;\ b)$ ვექტორიც. ცხადია, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=\sqrt{a^2+b^2}$. ამიტომ

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cos\varphi=\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi.$$

რადგან $-1\le\cos\varphi\le1$, ამიტომ

$$-|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\le\vec{p}\cdot\vec{q}\le|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|$$
$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$$

უმცირესი მნიშვნელობაა $-\sqrt{a^2+b^2}$, უდიდესია $\sqrt{a^2+b^2}$.

II ხერხი. ცხადია, არსებობს φ რიცხვი, რომლისთვისაც $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ამიტომ

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

აქედან თუ გავითვალისწინებთ, რომ $-1\le\sin(x+\varphi)\le 1$, ამასთანავე, -1 და 1 მნიშვნელობები (უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები) $\sin(x+\varphi)$ ფუნქციისთვის მიღწევადია, მაშინ მივიღებთ, რომ $a\sin x+b\cos x$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა $\sqrt{a^2+b^2}$, უმცირესი მნიშვნელობაა — $-\sqrt{a^2+b^2}$.

მაგალითი 7. დავასაბუთოთ:

$$-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\le x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\le\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

ამოხსნა. განვიხილოთ ვექტორები: $\vec{p}(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{q}(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cos\varphi,$$

ამიტომ

$$-|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\le\vec{p}\cdot\vec{q}\le|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|.$$

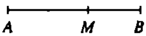
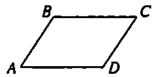
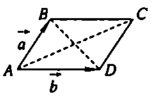
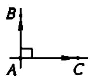
მაგრამ

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

ამიტომ

$$-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\le x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\le\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

ზოგიერთი გეომეტრიული დებულება შეიძლება ვექტორებით ასე წარმოვადგინოთ:

1) A, B და C წერტილები ერთ წრფეს ეკუთვნის	$\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$
2)  $\frac{AM}{MB}=k$	$\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$
3) $ABCD$ პარალელოგრამია 	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
4) პარალელოგრამის გვერდების კვადრატების ჯამი დიაგონალების კვადრატების ჯამის ტოლია 	$2\lvert\vec{a}\rvert^2+2\lvert\vec{b}\rvert^2=$ $=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2$
5) $AB\perp AC$ 	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

✓**1.** $ABCD$ პარალელოგრამია, თუ

ა) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ბ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ გ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ დ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$.

✓**2.** C წერტილი AB მონაკვეთის შუა წერტილია, თუ

ა) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ ბ) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$ გ) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ დ) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

✓**3.** თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მართობული (ორთოგონალური) ვექტორებია, მაშინ

ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ დ) $\vec{a}\cdot\vec{b}\ne 0$.

4. თუ $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ორთოგონალური ვექტორებია, მაშინ

ა) $x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1 \cdot z_2=0$ ბ) $x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1 \cdot z_2<0$

გ) $x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1 \cdot z_2>0$ დ) $x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1 \cdot z_2 \neq 0$.

5. თუ a, b, c და d დადებითი რიცხვებია და $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, მაშინ

ა) $ac+bd>1$ ბ) $ac+bd\leq 1$ გ) $ac+bd<0$ დ) $ac+bd<-1$.

6. თუ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 რაიმე რიცხვებია, მაშინ

ა) $a_1 \cdot a_2+b_1 \cdot b_2+c_1 \cdot c_2 \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$

ბ) $a_1 \cdot a_2+b_1 \cdot b_2+c_1 \cdot c_2 > \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$

გ) $a_1 \cdot a_2+b_1 \cdot b_2+c_1 \cdot c_2 \geq \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$

დ) $a_1 \cdot a_2+b_1 \cdot b_2+c_1 \cdot c_2 > (a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)$.

7. თუ $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$, $a_2^2+b_2^2+c_2^2=1$, მაშინ

ა) $a_1 \cdot a_2+b_1 \cdot b_2+c_1 \cdot c_2>1$ ბ) $a_1 \cdot a_2+b_1 \cdot b_2+c_1 \cdot c_2>2$

გ) $a_1 \cdot a_2+b_1 \cdot b_2+c_1 \cdot c_2<-1$ დ) $a_1 \cdot a_2+b_1 \cdot b_2+c_1 \cdot c_2 \leq 1$.

8. $f(x)=3\sin x+4\cos x$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა

ა) 10 ბ) 4 გ) 5 დ) 7.

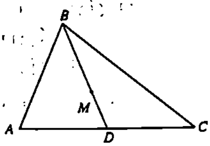
9. $f(x)=3\sin 4x+4\cos 4x$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა

ა) −7 ბ) −3 გ) −4 დ) −5.

10. იპოვეთ x-ისა და y-ის ის მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც $M(x;\ y;\ 8)$ წერტილი $A(6;\ 0;\ 2)$ და $B(1;\ -3;\ 4)$ წერტილებზე გამავალ წრფეს ეკუთვნის.

ა) $x=-15$, $y=3$ ბ) $x=-9$, $y=-9$ გ) $x=9$, $y=9$ დ) $x=15$, $y=-3$.

11. AB მედიანაა, M წერტილი მედიანების გადაკვეთის წერტილია. მაშინ $\overrightarrow{MD}=$



ა) $\overrightarrow{MB}$ ბ) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

გ) $\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ დ) $\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

12. მოცემულია წერტილები: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ და $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. $C(x;\ y;\ z)$ წერტილი არის AB-ს შუა წერტილი. მაშინ

ა) $x-x_1=x_2-x$, $y-y_1=y_2-y$, $z-z_1=z_2-z$

ბ) $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, $z=z_1+z_2$

გ) $x_1=x+x_2$, $y_1=y+y_2$, $z_1=z+z_2$

დ) $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, $z=z_2-z_1$.

13. მოცემულია წერტილები: $A(3;\ 4;\ 5)$, $B(1;\ 1;\ 1)$. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები.

ა) (2; 2,5; 3) ბ) (2,5; 3; 2) გ) (4; 5; 6) დ) (1; 1,5; 2).

14. თუ არსებობს ისეთი k ($k\neq 0$) რიცხვი, რომ $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$ მაშინ AB და CD წრფეები

ა) მართობულია

ბ) პარალელურია ან ერთმანეთს ემთხვევა

გ) გადაკვეთისას 30^0-იან კუთხეს ქმნის

დ) გადაკვეთისას 60^0-იან კუთხეს ქმნის.

15. თუ M წერტილი AB მონაკვეთს ჰყოფს შეფარდებით 1:2 (A ბოლოს მხრიდან) და O არის სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ

ა) $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ბ) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})$

გ) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ დ) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

✓**16.** ვთქვათ, O წერტილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია, მაშინ

ა) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ ბ) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$

გ) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ დ) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$.

17. ვთქვათ, O წერტილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია, M წერტილი ABC სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. გამოსახეთ $\overrightarrow{MO}$ ვექტორი $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ და $\overrightarrow{MC}$ ვექტორებით.

18. დაასაბუთეთ ვექტორების გამოყენებით:

ა) სამკუთხედის შუახაზის თვისება;

ბ) ტრაპეციის შუახაზის თვისება.

19. ვთქვათ, T პარალელური გადატანა განისაზღვრება ვექტორით — $\vec{p}(3;\ 5)$. იპოვეთ $A(1;\ 2)$ წერტილის სახე ამ პარალელური გადატანისას.

20. ვთქვათ, T პარალელური გადატანისას ABC სამკუთხედის სახეა $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი, ($A\to A_1$, $B\to B_1$, $C\to C_1$). T განისაზღვრება ვექტორით: $\vec{p}(2;\ -2)$. იპოვეთ A_1, B_1, C_1 წერტილების კოორდინატები, თუ:

ა) $A=(1;\ 1)$, $B=(2;\ -3)$, $C=(5;\ 2)$;

ბ) $A=(-4;\ 2)$, $B=(0;\ -1)$, $C=(1;\ 6)$.

21. T პარალელური გადატანაა, რომლისთვისაც $T(A)=M$; იპოვეთ ვექტორი, რომლითაც განისაზღვრება ეს ასახვა, თუ

ა) $A=(-1;\ 3)$, $M=(4;\ 4)$, ბ) $A=(0;\ 5)$, $M=(5;\ -3)$,

გ) $A=(4;\ 1)$, $M=(-3;\ -5)$.

22. მოცემულია წერტილები: $A(4;\ 5)$, $B(-1;\ 2)$, $C(6;\ -1)$. T პარალელური გადატანით ABC აისახება MNP სამკუთხედზე, $T(A)=M(3;\ -3)$. იპოვეთ B და C წერტილების სახეების — N-სა და P-ს კოორდინატები.

23. მოცემულია წერტილები: $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 1)$, $C(5;\ 4)$.

* არის თუ არა ეს სამკუთხედი მართკუთხა?

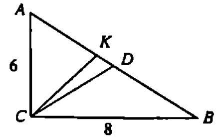
* რა ვექტორით განისაზღვრება პარალელური გადატანა, რომელიც B წვეროს კოორდინატთა სათავეზე ასახავს?

* იპოვეთ ამ პარალელური გადატანისას A-სა და C-ს სახეების კოორდინატები.

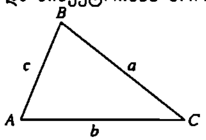
24. რა ვექტორით განისაზღვრება პარალელური გადატანა, რომელიც $y=x^2$ პარაბოლას ასახავს პარაბოლაზე:

ა) $y=(x+2)^2$; ბ) $y=x^2+2$; გ) $y=(x+2)^2+2$; დ) $y=(x+2)^2-3$.

25. ვექტორების გამოყენებით დაასაბუთეთ, რომ სამკუთხედის სამივე სიმაღლე ერთ წერტილში იკვეთება.



26. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტი 6 სმ-ია, მეორე — 8 სმ. იპოვეთ კუთხე მართი კუთხის წვეროდან გავლებულ მედიანასა და ბისექტრისას შორის.



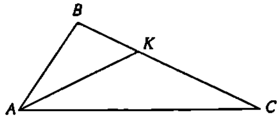
27. ვთქვათ, ABC სამკუთხედში $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. გამოსახეთ a, b და c რიცხვებით A წვეროდან გავლებული m_a მედიანა.

28. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ კუთხე ამ სამკუთხედის მახვილი კუთხეების წვეროებიდან გავლებულ მედიანებს შორის.

29. ABC მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზაზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $AD:DB=1:3$, $AC=b$, $BC=a$. გამოსახეთ CD მონაკვეთი a-სა და b-ს საშუალებით.

30. ABC სამკუთხედში $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $a^2+b^2=5c^2$. იპოვეთ კუთხე AC და BC გვერდებისადმი გავლებულ მედიანებს შორის.

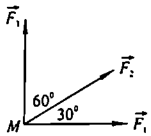
31. ABC სამკუთხედში $\angle BAC=60^0$, $AB:AC=1:3$. A კუთხის ბისექტრისაა AK და $K\in BC$. იპოვეთ AKB კუთხის კოსინუსი.



მითითება: კუთხის ბისექტრისის თვისების გამოყენებით, $\overrightarrow{KC}=3\overrightarrow{BK}$.

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BC}=|\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\alpha.$$

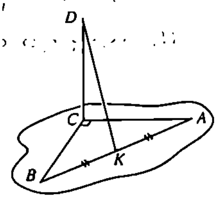


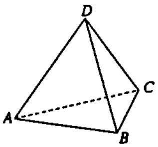
32. M წერტილზე $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ და $\vec{F_3}$ ძალებია მოდებული, თითოეული მათგანის მოდული 10 ნიუტონია, $\vec{F_1}$-სა და $\vec{F_2}$-ს შორის კუთხე 30^0-ია, $\vec{F_2}$-სა და $\vec{F_3}$-ს შორის — 60^0, $\vec{F_1}$-სა და $\vec{F_3}$-ს შორის — 90^0. იპოვეთ ამ ძალების ტოლქმედის სიდიდე.

33. დაასაბუთეთ: ნებისმიერი ABC სამკუთხედში $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$.

34. სკალარული ნამრავლის გამოყენებით დაასაბუთეთ, რომ, თუ $x+y=1$, მაშინ $x^2+y^2\ge\frac{1}{2}$.

35. ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია: $AC=b$, $BC=a$. CD წრფე ABC სიბრტყის მართობულია, $CD=c$. გამოსახეთ a, b და c რიცხვებით D წერტილიდან AB ჰიპოტენუზის K შუა წერტილამდე მანძილი.



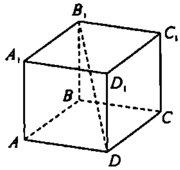


36. ვთქვათ, $DABC$ ტეტრაედრში $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორები მართობულია (ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ AD და BC აცდენილი წრფეები მართობულია), $\overrightarrow{BD}$ და $\overrightarrow{AC}$-ც მართობულია. იპოვეთ კუთხე CD და AB წრფეებს შორის.

37. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია. დაასაბუთეთ სხვადასხვა ხერხით, რომ AD_1 წრფე B_1D წრფის მართობულია.

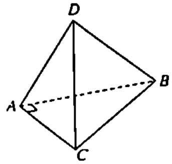
მითითება. I ხერხი. გამოიყენეთ კოორდინატთა მეთოდი;

II ხერხი. გამოიყენეთ ვექტორები.



38. OA, OB და OC წყვილ-წყვილად მართობული წრფეებია. იპოვეთ კუთხე COA და AOB კუთხეების ბისექტრისებს შორის.

39. $DABC$ სამკუთხა პირამიდაა, $\angle CAB=90^0$, $AB=4$, $AC=3$, $AD=5$, $\angle DAB=60^0$, $\angle DAC=45^0$. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან DBC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილამდე.



40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის AC_1 დიაგონალი AB და AD გვერდებთან 60^0-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ CAC_1.

41. ვთქვათ, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია. იპოვეთ კუთხე A_1D და D_1C წრფეებს შორის.

42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია. კუბის წიბო 1-ის ტოლია. X წერტილი A_1D დიაგონალს ეკუთვნის,

$$\frac{XD}{A_1X}=\frac{1}{2}.$$

Y წერტილი D_1C-ს ეკუთვნის,

$$\frac{D_1Y}{YC}=\frac{1}{2}.$$

იპოვეთ:

ა) XY;

ბ) კუთხე XY და A_1D წრფეებს შორის;

გ) კუთხე XY და AD წრფეებს შორის.

43. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა:

ა) $f(x)=\dfrac{-5x^2+24x+5}{1+x^2}$; ბ) $f(x)=4\sqrt{1-x}+3\sqrt{x}$;

გ) $f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$.

44. დაასაბუთეთ: თუ $x+y+z=1$, მაშინ $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$.

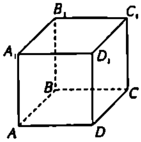
§ 3.12. კუბი. მართკუთხა პარალელეპიპედი. მართი პრიზმა. პირამიდა. დიაგონალური კვეთები. გვერდითი და სრული ზედაპირის ფართობის გამოთვლა

პრიზმის **გვერდითი ზედაპირის ფართობი** არის გვერდითი წახნაგების ფართობების ჯამი.

მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობის ფორმულაა:

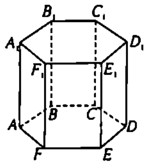
$$S_{გვ.}=P\cdot H. \qquad (1)$$

აქ P ფუძის პერიმეტრია, H — გვერდითი წიბო (გვერდითი წიბო მართი პრიზმის სიმაღლეცაა).



მაგალითად, კუბის გვერდითი ზედაპირის ფართობის ფორმულაა:

$$S_{გვ.}=4a^2.$$



სურათზე მართი ექვსკუთხა პრიზმაა გამოსახული, მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი (1) ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ. თუ ეს პრიზმა წესიერია, მაშინ

$$S_{გვ}=6aH,$$

a — ფუძის გვერდია, H — გვერდითი წიბო.

პრიზმის **სრული ზედაპირის ფართობი** მისი ყველა წახნაგის ფართობების ჯამია; რადგან მართი პრიზმის ფუძეები ტოლი მრავალკუთხედებია, ამიტომ

$$S_{სრ}=S_{გვ}+2Q,$$

Q ფუძის ფართობია, ე. ი.

$$S_{სრ}=P\cdot H+2Q.$$

მაგალითად, წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის შემთხვევაში გვაქვს:

$$S_{სრ}=6a\cdot H+3a^2\sqrt{3},$$

რადგანაც წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი არის $\dfrac{a^2\cdot 3\sqrt{3}}{2}$.

თუ კუბის წიბო არის a, მაშინ, ცხადია, $S_{სრ}=6a^2$.

მართი პარალელეპიპედის შემთხვევაში

$$S_{სრ}=2a\cdot H+2bH+2Q,$$

a და b ფუძის გვერდებია (ფუძე პარალელოგრამია), Q ფუძის ფართობია.

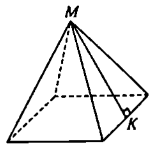
მართკუთხა პარალელეპიპედის შემთხვევაში — $S_{სრ}=2aH+2bH+2ab$.

მართკუთხა პარალელეპიპედის კიდევ ერთი თვისება გამოვყოთ: თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია a, b და c (ერთი წვეროდან გამოსული წიბოები), მაშინ ამ პარალელეპიპედის d დიაგონალი ასე გამოითვლება:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობისა და ფუძის ფართობის ჯამის ტოლია:

$$S_{სრ}=S_{გვ}+S_{ფ}.$$



თუ პირამიდა წესიერია, მაშინ ფუძე წესიერი n-კუთხედია და ყველა გვერდითი წახნაგი ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედია. თითოეული გვერდითი წახნაგის სიმაღლეს, რომელიც პირამიდის წვეროდანაა გავლებული, პირამიდის აპოთემა ეწოდება. სურათზე MK აპოთემაა, ამ შემთხვევაში:

$$S_{გვ}=\frac{1}{2}na\cdot MK,$$

ანუ

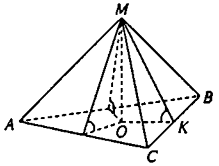
$$S_{გვ}=\frac{1}{2}P\cdot MK, \qquad (2)$$

P ფუძის პერიმეტრია, MK აპოთემაა.

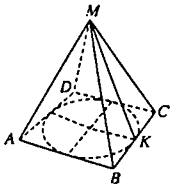
გვერდითი წახნაგების სიმაღლეები იმ შემთხვევაშიც არის ტოლი, როცა პირამიდის ფუძის გვერდებთან ორნახნაგა კუთხეები ტოლია (იხილეთ სურათი), პირამიდის სიმაღლე ფუძის ცენტრში ეშვება და

$$S_{გვ}=\frac{1}{2}P\cdot MK$$

P — ფუძის პერიმეტრია.



სამკუთხა პირამიდა



ოთხკუთხა პირამიდა

1. თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია a, b და c, მაშინ მისი დიაგონალია

ა) $a^2+b^2+c^2$ ბ) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ გ) a^2+b^2 დ) a^2+c^2.

2. თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ, მაშინ ამ პარალელეპიპედის ყველა წიბოს სიგრძეთა ჯამი არის

ა) 24 სმ ბ) 96 სმ გ) 72 სმ დ) 144 სმ.

3. თუ კუბის წიბო არის 6 სმ, მაშინ მისი სრული ზედაპირის ფართობი არის

ა) 36 სმ^2 ბ) 144 სმ^2 გ) 72 სმ^2 დ) 216 სმ^2.

4. პრიზმის ყველა წიბოს სიგრძეთა ჯამი 30 სმ-ია. ყველა წიბო ტოლი სიგრძისაა და გამოისახება მთელი რიცხვით. თითოეული წიბოს სიგრძე შეიძლება იყოს

ა) 1 სმ ბ) 3 სმ გ) 10 სმ დ) 5 სმ.

5. მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 3 სმ, 4 სმ და 5 სმ. იპოვეთ ამ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი.

ა) 47 სმ^2 ბ) 94 სმ^2 გ) 48 სმ^2 დ) 96 სმ^2.

6. მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი წიბო 15 სმ-ია. ფუძე კვადრატია — ამ კვადრატის პერიმეტრი 48 სმ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი.

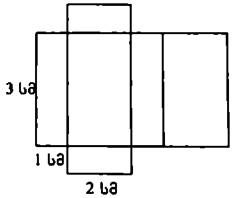
ა) 720 სმ^2 ბ) 1008 სმ^2

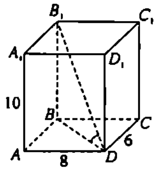
გ) 480 სმ^2 დ) 864 სმ^2.

7. სურათზე მართკუთხა პარალელეპიპედის შლილია გამოსახული. იპოვეთ ამ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი.

ა) 22 სმ^2 ბ) 21 სმ^2

გ) 20 სმ^2 დ) 44 სმ^2.

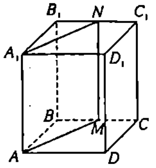




8. მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ. იპოვეთ იმ კუთხის ზომა, რომელსაც მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს.

ა) 30^0 ბ) 60^0

გ) 45^0 დ) 90^0.

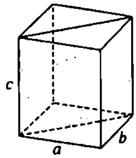


✓**9.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია $AB=3$ სმ, $BC=8$ სმ და $AA_1=10$ სმ. M და N წერტილები, შესაბამისად, BC და B_1C_1 წიბოების შუა წერტილებია. იპოვეთ AA_1NM ოთხკუთხედის ფართობი.

ა) 40 სმ^2 ბ) 50 სმ^2
გ) 30 სმ^2 დ) 60 სმ^2.

✓**10.** მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 6 სმ და 2,5 სმ. დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან 45^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი.

ა) 140,5 სმ^2 ბ) 130,5 სმ^2 გ) 145,5 სმ^2 დ) 138,5 სმ^2.



✓**11.** თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b, გვერდითი წიბო — c, დიაგონალური კვეთა კვადრატია, მაშინ

ა) $a^2=c^2+b^2$ ბ) $c^2=a^2+b^2$
გ) $b^2=a^2+c^2$ დ) $c=a+b$.

✓**12.** რამდენი წახნაგი აქვს ექვსკუთხა პირამიდას?

ა) 6 ბ) 3 გ) 7 დ) 8.

✓**13.** წესიერი პირამიდის ფუძე შეიძლება იყოს

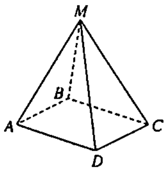
ა) ნებისმიერი პარალელოგრამი ბ) ნებისმიერი რომბი
გ) ნებისმიერი მართკუთხედი დ) ნებისმიერი კვადრატი.

✓**14.** მრავალწახნაგას ერთ-ერთი წახნაგი ექვსკუთხედია. წიბოების რა უმცირესი ოდენობა შეიძლება ჰქონდეს ამ მრავალწახნაგას?

ა) 12 ბ) 10 გ) 8 დ) 7.

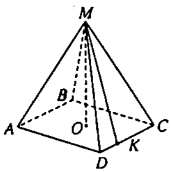
✓**15.** წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი არის a, აპოთემა — m. იპოვეთ ამ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) am ბ) $3am$ გ) $\frac{3}{2}am$ დ) $\frac{1}{2}am$.



✓**16.** $MABCD$ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა H, ფუძის გვერდი — a. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი (MAC სამკუთხედის ფართობი).

ა) $aH\sqrt{2}$ ბ) $\frac{aH\sqrt{2}}{2}$
გ) $2aH$ დ) aH.

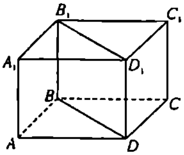


✓**17.** $MABCD$ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე არის 8 სმ, MK აპოთემა — 10 სმ. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

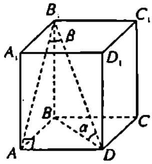
ა) 120 სმ^2 ბ) 240 სმ^2
გ) 360 სმ^2 დ) 280 სმ^2.

✓**18.** პირამიდის ფუძე რომბია, რომლის დიაგონალები 12 სმ და 16 სმ-ია. ფუძის გვერდებთან ორწახნაგა კუთხეებია 60^0. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

ა) 198 სმ^2 ბ) 288 სმ^2 გ) 300 სმ^2 დ) 304 სმ^2.



19. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 16 სმ და 30 სმ, მათ შორის კუთხე არის 60^0, ფუძის მცირე დიაგონალია BD, ამასთანავე, BB_1D_1D დიაგონალური კვეთის ფართობი 260 სმ^2-ია. იპოვეთ სრული ზედაპირის ფართობი.



20. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი d-ს ტოლია და ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ადგენს, ხოლო ABB_1A_1 გვერდით წახნაგთან — β კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი არის d, გვერდითი წახნაგის დიაგონალია d_1, ფუძის დიაგონალია d_2. იპოვეთ ფუძის ფართობი.

22. მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბო 10 მ-ია, ფუძის გვერდებია 12 მ და 16 მ. ფუძის ერთ-ერთი დიაგონალი 24 მ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები.

23. მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბო 2 მ-ია. ფუძის გვერდებია 46 დმ და 22 დმ. ფუძის დიაგონალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობები.

24. მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 5 სმ, 11 სმ და 8 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი.

25. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 მ და 8 მ. მათ შორის კუთხე 60^0-ია, გვერდითი ზედაპირის ფართობი 55 მ^2-ია. იპოვეთ სრული ზედაპირის ფართობი.

26. ვთქვათ, მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი წახნაგებთან ქმნის α, β და γ კუთხეებს. იპოვეთ $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$.

27. მართი სამკუთხა პრიზმის ყველა წიბო ტოლია. გვერდითი ზედაპირის ფართობი 24 სმ^2-ია. იპოვეთ სრული ზედაპირის ფართობი.

28. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი 20 სმ^2-ია, გვერდითი ზედაპირის ფართობია 16 სმ^2. იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე.

29. ყინულისგან ქანდაკებების დასამზადებელ მასალად ხშირად ყინულის კუბებს იყენებენ. ერთ-ერთი ასეთი კუბი გადახერხეს წვეროდან გამოსული სამი წიბოს შუა წერტილზე. კვეთის ფართობი 6 დმ^2-ია. იპოვეთ ფუძის სრული ზედაპირის ფართობი.

30. წინა ამოცანის ანალოგიურად გადახერხვა ჩატარდა ყველა წიბოს მიმართ. დარჩენილი ფიგურის ზედაპირის ფართობი 64 დმ^2-ია. იპოვეთ კუბის სრული ზედაპირის ფართობი.

31. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი 72 სმ^2-ია, გვერდითი ზედაპირის ფართობი — 59,04 სმ^2. იპოვეთ:

ა) პირამიდის ფუძის გვერდი;

ბ) პირამიდის სიმაღლე.

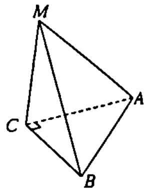
32. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი 336 სმ^2-ია, გვერდითი წიბო — 10 სმ. იპოვეთ ფუძის გვერდი.

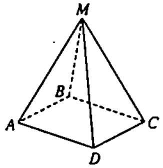
33. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $96\sqrt{3}$ სმ^2-ია, სრული ზედაპირის ფართობი — $112\sqrt{3}$ სმ^2. იპოვეთ ფუძის გვერდი.

34. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 4 სმ, ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე 60^0-ია. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

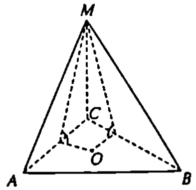
35. პირამიდის ფუძე არის რომბი, რომლის გვერდი 12 სმ-ია, მახვილი კუთხე — 45^0. პირამიდის ფუძის გვერდთან თითოეული ორწახნაგა კუთხე 30^0-ია. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

36. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია, $\angle C=90^0$, $AB=6$ სმ. პირამიდის სიმაღლე არის MC (MC წიბო ფუძის სიბრტყის მართობულია). $MC=4$ სმ. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.



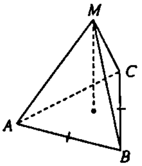


37. $MABCD$ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 16 სმ-ია, ფუძის გვერდთან ორწახნაგა კუთხე — 60^0. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

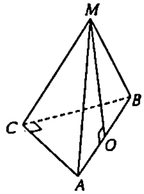


38. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, $\angle C=90^0$, $AC=6$ სმ, $BC=8$ სმ. პირამიდის ფუძის თითოეულ გვერდთან ორწახნაგა კუთხე α-ს ტოლია, $\cos\alpha=0{,}25$. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

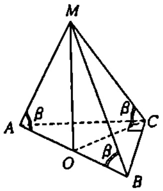
39. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლე 6 სმ-ია, გვერდითი წიბო — 10 სმ. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



40. $MABC$ პირამიდის ფუძეა ABC ტოლფერდა სამკუთხედი, $AB=BC=20$ სმ, $AC=24$ სმ. ფუძის ყველა გვერდთან ორწახნაგა კუთხეები 45^0-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

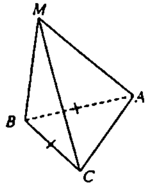


41. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, ამ სამკუთხედის კათეტები 3 სმ და 4 სმ-ია, თითოეული გვერდითი წიბო 6,5 სმ სიგრძისაა. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.



42. პირამიდის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზა c-ს ტოლია, თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან β კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

43. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტები 12 სმ და 16 სმ-ია, ფუძის ყველა გვერდთან ორწახნაგა კუთხეები 60^0-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.



44. პირამიდის ფუძე ABC ტოლფერდა სამკუთხედია, $AB=BC=25$ სმ, $AC=40$ სმ. პირამიდის სიმაღლე MB გვერდითი წიბოა, $MB=8$ სმ. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

45. $MABCD$ პირამიდის ფუძე $ABCD$ კვადრატია. $AB=BC=CD=AD=20$ სმ. MB პირამიდის სიმაღლეა. $MB=21$ სმ. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

46. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 36 სმ^2-ია, გვერდითი წიბო — 5 სმ. იპოვეთ პირამიდის ფუძის გვერდი და პირამიდის აპოთემა.

47. პირამიდის ფუძე მართკუთხედია. ამ მართკუთხედის ფართობი 12 სმ^2-ია. პირამიდის ორი გვერდითი წახნაგი ფუძის მართობულია, ხოლო ორი დანარჩენის მიერ ფუძესთან შედგენილი ორწახნაგა კუთხე, შესაბამისად, 30^0 და 60^0-ია. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

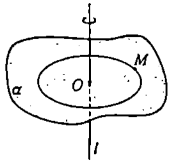
48. პირამიდის ფუძე პარალელოგრამია α მახვილი კუთხით. პირამიდის ორი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის მართობულია, ორი დანარჩენის მიერ ფუძესთან შედგენილი ორწახნაგა კუთხეებია β და γ. იპოვეთ ფუძის ფართობი, თუ მცირე გვერდითი წიბო 8 სმ-ია.

49. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია, ამ რომბის დიდი დიაგონალი $\sqrt{21}$ სმ-ია, ხოლო გვერდი — 3 სმ. პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან 60^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

50. პირამიდის ფუძე კვადრატია. პირამიდის ორი გვერდითი წახნაგი ფუძის მართობულია; იპოვეთ დანარჩენი ორი წახნაგის მიერ ფუძესთან შედგენილი ორწახნაგა კუთხეები, თუ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $\sqrt{3}$-ჯერ მეტია ფუძის ფართობზე.

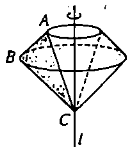
§ 3.13. ცილინდრი. კონუსი. სფერო. ბირთვი. გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობები

1. ბრუნვის ფიგურა.

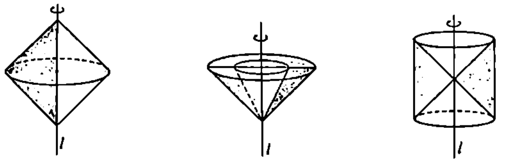


ვთქვათ, α სიბრტყეს მისი მართობული l წრფე O წერტილში კვეთს. M წერტილი α სიბრტყეს ეკუთვნის. განვიხილოთ α სიბრტყეზე წრეწირი, რომლის რადიუსია OM. ცხადია, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს წრეწირი მიიღება M წერტილის ბრუნვით l ღერძის გარშემო.

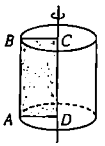
ვთქვათ, რაიმე ფიგურა l წრფეზე გამავალ სიბრტყეზე მდებარეობს. მაგალითად, ეს ფიგურაა ABC სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ყოველი წერტილი l წრფის გარშემო ბრუნვისას წრეწირს შემოწერს. ამ წრეწირების წერტილებისგან შედგენილ ფიგურას ეწოდება ABC სამკუთხედის l ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ფიგურა — **ბრუნვის ფიგურა (ბრუნვის სხეული)**.



აქ რამდენიმე ასეთი ფიგურაა გამოსახული —

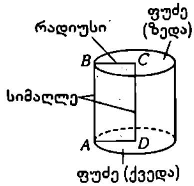


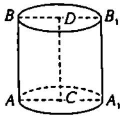
2. ცილინდრი.



ცილინდრი ეწოდება ბრუნვის ფიგურას, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით ამ მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდის შემცველი წრფის გარშემო. სურათზე ის შემთხვევაა გამოსახული, როცა ბრუნვა CD გვერდის (წრფის) გარშემო ხდება. AD, AB და BC გვერდებით შედგენილი ტეხილი ამ ბრუნვისას ქმნის ფიგურას, რომელსაც ცილინდრის ზედაპირი ეწოდება.

როდესაც ვუყურებთ ცილინდრის მოდელს, სწორედ ცილინდრის ზედაპირს ვხედავთ. AB გვერდის ბრუნვით მიიღება **ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი**, BC და AD გვერდებით კი — **ცილინდრის ფუძეები** — წრეები. AB **მსახველია**, მსახველია ნებისმიერი მონაკვეთი, რომელიც AB-ს პარალელურია და ფუძეების წრეწირთა ორ წერტილს აერთებს.



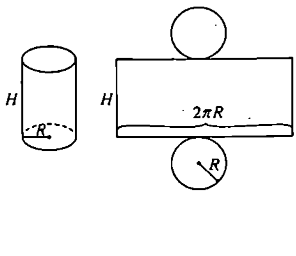


ცილინდრის სიმაღლე ეწოდება მანძილს მის ფუძეებს შორის — AB, CD, A_1B_1 — თითოეული ეს მონაკვეთი ცილინდრის სიმაღლეა. ABB_1A_1 მართკუთხედი — ცილინდრის კვეთა სიბრტყით, რომელიც მსახველსა და ფუძის ცენტრზე გადის — **ღერძული კვეთაა**.

ახლა წარმოვადგენთ ცილინდრსა და მისი ზედაპირის შლილს. ეს შლილი მართკუთხედისა და ორი წრისგან შედგება. ამ შლილის ფართობი ცილინდრის სრული ზედაპირია.

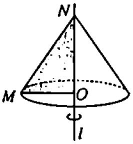
$$S_{სრ}=S_{გვ}+2S_{ფ}.$$

გვერდითი ზედაპირი მართკუთხედია, რომლის გვერდებია $2\pi R$ და H (R — ფუძის რადიუსია, H — ცილინდრის სიმაღლეა). ამრიგად,

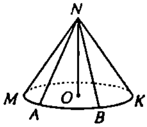


$$S_{გვ}=2\pi RH, \qquad S_{ფ}=\pi R^2,$$
$$S_{სრ}=2\pi RH+2\pi R^2.$$

3. კონუსი.

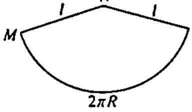


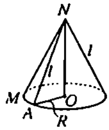
კონუსი არის ბრუნვის ფიგურა, რომელიც მიიღება მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვით ამ სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტის შემცველი წრფის გარშემო. სურათზე გამოსახული სამკუთხედი ბრუნავს l წრფის გარშემო. ამ ბრუნვისას მეორე კათეტი (OM) წრეს ქმნის — **კონუსის ფუძეს**, ჰიპოტენუზა — **გვერდით ზედაპირს**. MN მონაკვეთი **კონუსის მსახველია**. საზოგადოდ, კონუსის მსახველი ეწოდება ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც კონუსის N წვეროს ფუძის წრეწირის წერტილთან აერთებს. ამრიგად, NA, NB, NK კონუსის მსახველებია.



NO **კონუსის სიმაღლეა** — მონაკვეთი, რომელიც კონუსის N წვეროს ფუძის ცენტრთან აერთებს.

ამ სურათზე კონუსი და მისი გვერდითი ზედაპირის შლილია წარმოდგენილი — გვერდითი ზედაპირის შლილი არის წრის სექტორი, რომლის ფართობი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია:

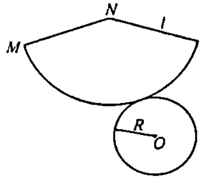




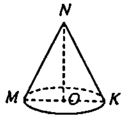
$$S_{\text{გვ}}=\pi Rl,$$

l კონუსის მსახველია, R — ფუძის რადიუსი.

ამ სურათზე კონუსის სრული ზედაპირის შლილია წარმოდგენილი. მისი ფართობი კონუსის ზედაპირის ფართობია (სრული ზედაპირის ფართობი):

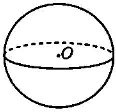


$$S_{\text{სრ}}=\pi Rl+\pi R^2.$$



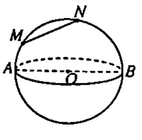
კონუსის **ღერძული კვეთა** არის სამკუთხედი, რომელიც მიიღება კონუსის კვეთით მის სიმაღლესა და მსახველზე გამავალი სიბრტყით. MNK სამკუთხედი კონუსის ღერძული კვეთაა — მისი ფუძე ფუძის დიამეტრია, სიმაღლე კონუსის სიმაღლის ტოლია.

4. სივრცის ყველა იმ წერტილის სიმრავლეს, რომლებიც მოცემული O წერტილიდან ერთი და იმავე R მანძილითაა დაშორებული, **სფერო** ეწოდება.



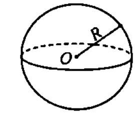
O წერტილს სფეროს **ცენტრი** ეწოდება. OM მონაკვეთს (M სფეროს ნებისმიერი წერტილია) **რადიუსი** ეწოდება; $OM=R$.

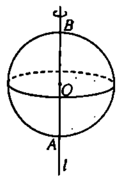
სფეროს ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს სფეროს **ქორდა** ეწოდება. ცენტრზე გამავალ ქორდას **დიამეტრი** ეწოდება.



AB დიამეტრია, $AB=2R$; MN ქორდაა.

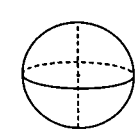
ბირთვი სივრცის ყველა იმ წერტილის სიმრავლეს ეწოდება, რომელთაგან თითოეულის დაშორება მოცემული O წერტილიდან R მანძილს არ აღემატება.





ბირთვი შეიძლება მივიღოთ ნახევარწრის ბრუნვით იმ ღერძის გარშემო, რომელიც ნახევარწრის დიამეტრზე გადის. ფიგურა, რომელიც ნახევარწრეწირის ბრუნვით მიიღება არის სფერო — **ბირთვის ზედაპირი.**

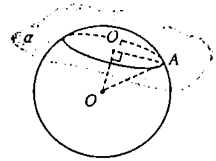
ამ სფეროს რადიუსს, ცენტრს, ქორდას, დიამეტრს შესაბამისი ბირთვის რადიუსი, ცენტრი, ქორდა და დიამეტრი ეწოდება. ბირთვის ყველა იმ წერტილს, რომელიც ბირთვის ზედაპირს — სფეროს არ ეკუთვნის — ბირთვის შიგა წერტილი ეწოდება.



თუ სფეროს რადიუსი არის R, მაშინ მისი S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=4\pi R^2.$$

5. ვთქვათ, ბირთვი გაკვეთილია α სიბრტყით.



კვეთაში წრე მიიღება. ამ წრის ცენტრი — O_1 წერტილი — არის ბირთვის O ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძე.

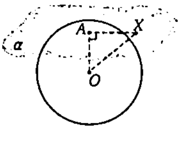
ვთქვათ, A წერტილი ბირთვის ზედაპირის ის წერტილია, რომელიც α სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ

$$OA^2=OO_1^2+O_1A^2.$$

მაშასადამე,

$$R^2=h^2+r^2,$$

h არის მანძილი ბირთვის ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყემდე, R — ბირთვის რადიუსი, r — კვეთაში მიღებული წრის რადიუსი.



6. ვთქვათ, სიბრტყე გადის ბირთვის ზედაპირის A წერტილზე AO რადიუსის მართობულად. ამ სიბრტყეს **ბირთვის მხები სიბრტყე** ეწოდება; A წერტილს — **შეხების წერტილი**. მხებ სიბრტყეს ბირთვის ზედაპირთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს — A წერტილი.

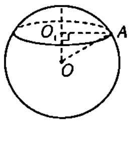
A წერტილზე გამავალ ნებისმიერ წრფეს, რომელიც α სიბრტყეს ეკუთვნის, ამ წერტილში ბირთვის **მხები** (ბირთვის ზედაპირის მხები) **წრფე** ეწოდება. მხებ წრფესაც ბირთვთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს.

ახლა რამდენიმე ამოცანა ამოვხსნათ.

ამოცანა 1. ბირთვის რადიუსი 26 სმ-ია. ერთ-ერთი რადიუსის შუა წერტილზე გავლებულია სიბრტყე; იპოვეთ კვეთის ფართობი.

მოცემულობის თანახმად,

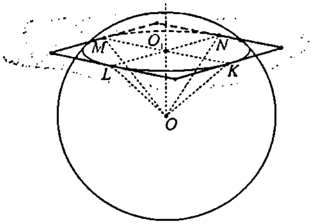
$$h=OO_1=\frac{1}{2}\cdot 26=13,$$
$$R=OA=26$$
$$O_1A^2=r^2=R^2-h^2$$
$$r^2=26^2-13^2=507$$



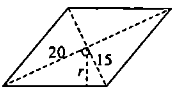
კვეთის ფართობია $\pi r^2=507\pi$ (სმ^2).

ამოცანა 2. ვთქვათ, რომბის თითოეული გვერდის შემცველი წრფე ბირთვის მხები წრფეა. რომბის დიაგონალებია 30 სმ და 40 სმ-ია. ბირთვის რადიუსი 20 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან რომბის სიბრტყემდე.

ვთქვათ, M, N, K, L შეხების წერტილებია, მაშინ $OK=OL=OM=ON=R$ — ბირთვის რადიუსია.



ცხადია, $O_1L=O_1K=O_1M=O_1N$ (ტოლი მონაკვეთების გეგმილები). ამრიგად, წერტილი O_1 რომბში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია, $O_1M=O_1N=O_1L=O_1K=r$ — რომბში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია.



$$r=\frac{15\cdot 20}{\sqrt{15^2+20^2}}=12$$
$$OO_1^2=R^2-r^2$$
$$OO_1^2=20^2-12^2$$
$$OO_1=16 \text{ სმ}.$$

7. კოორდინატები საშუალებას იძლევა რიცხვებით, განტოლებებით, უტოლობებით ან მათგან შედგენილი სისტემებით სივრცეში წარმოვადგინოთ წერტილთა სიმრავლეები. თუ კოორდინატთა სისტემის სათავე სფეროს ცენტრია, მაშინ, სფეროს განსაზღვრების თანახმად, $M(x;\ y;\ z)$ წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ ეკუთვნის მას, როცა

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \text{ (}R\text{ სფეროს რადიუსი)} \qquad (1)$$

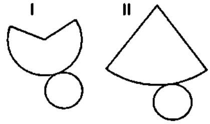
(1) განტოლება **სფეროს განტოლებაა. ბირთვი მოიცემა უტოლობით:**

$$x^2+y^2+z^2\le R^2.$$

თუ სფეროს ცენტრი $C(a;\ b;\ c)$ წერტილშია, მაშინ სფეროს განტოლებას აქვს სახე

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

✓1. სურათზე მოცემული ფიგურებიდან



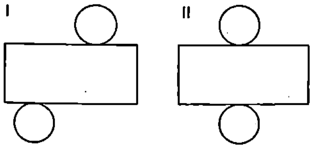
ა) I შეიძლება იყოს ცილინდრის ზედაპირის შლილი, II — არა

ბ) ორივე შეიძლება იყოს ცილინდრის ზედაპირის შლილი

გ) II შეიძლება იყოს კონუსის ზედაპირის შლილი, I — არა

დ) ორივე შეიძლება იყოს კონუსის ზედაპირის შლილი.

✓2. სურათზე მოცემული ფიგურებიდან



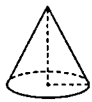
ა) I შეიძლება იყოს ცილინდრის ზედაპირის შლილი, II — არა

ბ) ორივე შეიძლება იყოს ცილინდრის ზედაპირის შლილი

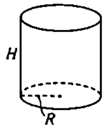
გ) არც ერთი არ შეიძლება იყოს ცილინდრის ზედაპირის შლილი

დ) II შეიძლება იყოს ცილინდრის ზედაპირის შლილი, I — არა.

✓3. თუ კონუსის სიმაღლე 8 სმ-ია, ფუძის ფართობი 36π სმ^2, მაშინ კონუსის მსახველია



ა) 8 სმ　　ბ) 6 სმ　　გ) 12 სმ　　დ) 10 სმ.

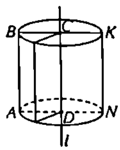


✓4. თუ ცილინდრის სიმაღლეა H, ფუძის რადიუსი — R, მაშინ ამ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობია

ა) $2\pi RH$　　ბ) $2\pi RH+\pi R^2$

გ) $2\pi RH+2\pi R^2$　　დ) $\pi RH+\pi R^2$.

✓5. სურათზე გამოსახული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი მიიღება l წრფის გარშემო



ა) მხოლოდ AB გვერდის ბრუნვით

ბ) მხოლოდ KN გვერდის ბრუნვით

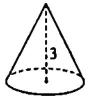
გ) მხოლოდ AB ან NK გვერდების ბრუნვით

დ) ნებისმიერი მონაკვეთის ბრუნვით, რომელიც AB-ს პარალელურია და ცილინდრის ფუძეთა წრეწირების წერტილებს აერთებს.

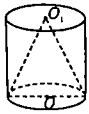
✓6. თუ ცილინდრის სიმაღლეა 8სმ, ფუძის ფართობი — 16π სმ^2, მაშინ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია

ა) 32π სმ^2　　ბ) 16π სმ^2　　გ) 64π სმ^2　　დ) 128π სმ^2.

7. თუ კონუსის ფუძის ფართობია 16π სმ^2, სიმაღლე — 3 სმ, მაშინ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი არის



ა) 12π სმ^2 ბ) 20π სმ^2 გ) 15π სმ^2 დ) 30π სმ^2.



8. კონუსის წვერო ცილინდრის ზედა ფუძის ცენტრშია. კონუსის ფუძე ცილინდრის ქვედა ფუძეს ემთხვევა. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 96π სმ^2-ია, ფუძის ფართობი — 64π სმ^2. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) 40π სმ^2 ბ) 80π სმ^2 გ) 144π სმ^2 დ) 104π სმ^2.

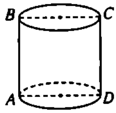
9 კონუსის ფუძის ფართობი არის 9π სმ, მსახველი — $\frac{10}{\pi}$ სმ. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) 15 სმ^2 ბ) 30 სმ^2 გ) 40 სმ^2 დ) 60 სმ^2.

10. კონუსის მსახველი ფუძის სიბრტყესთან 60^0-იან კუთხეს ადგენს. მსახველი $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ სმ-ია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

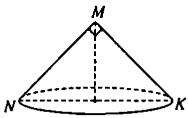
ა) 32π სმ^2 ბ) 40 სმ^2 გ) 48 სმ^2 დ) 32 სმ^2.

11. ცილინდრის ღერძული კვეთის ($ABCD$ მართკუთხედის) ფართობი არის $\frac{10}{\pi}$ სმ^2. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



ა) 10 სმ^2 ბ) 12 სმ^2

გ) 16 სმ^2 დ) 40 სმ^2.

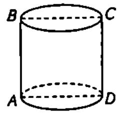


12. კონუსის ღერძული კვეთა ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია ($\angle NMK=90^0$), რომლის ჰიპოტენუზა 4 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

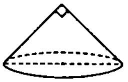
ა) 4π სმ^2 ბ) $4\sqrt{2}\pi$ სმ^2

გ) 8π სმ^2 დ) $8\sqrt{2}\pi$ სმ^2.

13. ცილინდრის ღერძული კვეთა ($ABCD$ მართკუთხედი) კვადრატია, ფუძის დიამეტრი 16 სმ-ია. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



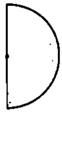
ა) 32π სმ^2 ბ) 128π სმ^2 გ) 256π სმ^2 დ) 512π სმ^2.



14. კონუსის ღერძული კვეთა ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის ფართობი 18 სმ^2-ია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) $18\sqrt{2}\pi$ სმ^2 ბ) 18π სმ^2 გ) $36\sqrt{2}\pi$ სმ^2 დ) 36 სმ^2.

15. ნახევარწრის ბრუნვით ამ ნახევარწრის დიამეტრის შემცველი წრფის გარშემო მიიღება



ა) კონუსი ბ) ბირთვი გ) ცილინდრი დ) სფერო.

16. ბირთვის მხებ სიბრტყეს ამ ბირთვის ზედაპირთან

ა) უამრავი საერთო წერტილი აქვს

ბ) ორი საერთო წერტილი აქვს

გ) სამი საერთო წერტილი აქვს

დ) ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს.

17. ბირთვის მხებ წრფეს ბირთვთან

ა) უამრავი საერთო წერტილი აქვს

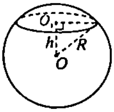
ბ) ორი საერთო წერტილი აქვს

გ) ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს

დ) საერთო წერტილი არა აქვს.

✓**18.** ბირთვის ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის ბირთვის მხები
ა) ერთადერთი სიბრტყე ბ) არანაკლებ ორი სიბრტყისა
გ) უამრავი სიბრტყე.

✓**19.** ბირთვის ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის ბირთვის მხები
ა) ერთადერთი წრფე ბ) მხოლოდ ორი წრფე
გ) უამრავი წრფე.

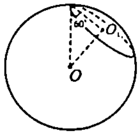


✓**20.** ბირთვი, რომლის რადიუსია R, გადაკვეთილია სიბრტყით. მკვეთი სიბრტყე ბირთვის ცენტრიდან h მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ კვეთის რადიუსი.
ა) $\sqrt{R^2+h^2}$ ბ) $\sqrt{h^2-R^2}$
გ) R დ) $\sqrt{R^2-h^2}$.

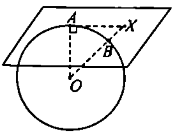
✓**21.** ბირთვის რადიუსი 41 სმ-ია. ბირთვი გადაკვეთილია სიბრტყით, რომელიც ცენტრიდან 40 სმ-ითაა დაშორებული. იპოვეთ კვეთაში მოცემული ფიგურის ფართობი.
ა) 9π სმ^2 ბ) 18π სმ^2 გ) 81π სმ^2 დ) 12π სმ^2.

✓**22.** ბირთვის რადიუსის შუა წერტილზე გავლებულია ამ რადიუსის მართობული სიბრტყე. ბირთვის რადიუსი 12 სმ-ია. იპოვეთ კვეთის ფართობი.
ა) 100π სმ^2 ბ) 108π სმ^2 გ) 144π სმ^2 დ) 72π სმ^2.

✓**23.** ბირთვის რადიუსის ბოლოზე გავლებული სიბრტყე ამ რადიუსთან 60^0-იან კუთხეს ადგენს, რადიუსი 8 სმ-ია. იპოვეთ კვეთის ფართობი.
ა) 16π სმ^2 ბ) 8π სმ^2
გ) 20π სმ^2 დ) 64π სმ^2.

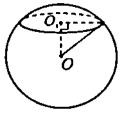


✓**24.** ბირთვის რადიუსის ბოლოზე გავლებულია კვეთა, რომელიც რადიუსთან 30^0-იან კუთხეს ადგენს, რადიუსის სიგრძე 4 სმ-ია. იპოვეთ კვეთის ფართობი.
ა) 8π სმ^2 ბ) 12π სმ^2 გ) 16π სმ^2 დ) 20π სმ^2.



✓**25.** X წერტილი ბირთვის მხებ α სიბრტყეს ეკუთვნის და შეხების A წერტილიდან 8 სმ-ითაა დაშორებული. ბირთვის ცენტრი O წერტილია, OX სხივი ბირთვს B წერტილში კვეთს. ბირთვის რადიუსი 6 სმ-ია. იპოვეთ XB მონაკვეთის სიგრძე.
ა) 3 სმ ბ) 5 სმ
გ) 4 სმ დ) 8 სმ.

✓**26.** ბირთვს კვეთს სიბრტყე, რომელიც ცენტრიდან 12 სმ-ითაა დაშორებული. კვეთაში მიღებული წრის რადიუსი 20 სმ-ია. იპოვეთ ბირთვის ზედაპირის (სფეროს) ფართობი.
ა) 544π სმ^2 ბ) 1088π სმ^2 გ) 2176π სმ^2 დ) 400π სმ^2.



✓**27.** ორი სფეროს ზედაპირების ფართობების შეფარდებაა 9:4. იპოვეთ ამ სფეროების რადიუსების შეფარდება.
ა) 9:4 ბ) 3:2 გ) 5:2 დ) 3:1.

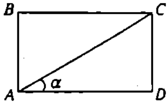
✓**28.** თუ სფეროს რადიუსი არის R, მაშინ მისი ფართობია
ა) πR^2 ბ) $2\pi R^2$ გ) $4\pi R^2$ დ) $3\pi R^2$.

29. მართკუთხედის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ იმ ფიგურის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება ამ მართკუთხედის ბრუნვით:
ა) მცირე გვერდის გარშემო; ბ) დიდი გვერდის გარშემო.

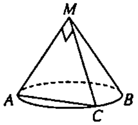
30. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 5 სმ და 12 სმ-ია. იპოვეთ იმ ფიგურის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული სამკუთხედის ბრუნვით:

ა) მცირე კათეტის გარშემო; ბ) დიდი კათეტის გარშემო.

31. ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობი არის Q. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



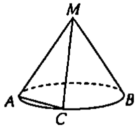
32. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილის დიაგონალი ამ შლილის ფუძესთან α კუთხეს ქმნის. დიაგონალი d-ს ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.



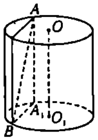
33. კონუსის MA და MC მსახველებზე გავლებული სიბრტყით მიღებული კვეთა არის მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ფართობია 50 სმ^2. კონუსის ფუძის ფართობი არის 36π სმ^2.

ა) იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი;

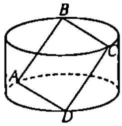
ბ) იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.



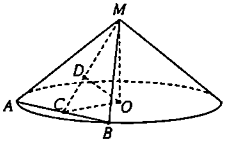
34. კონუსის MA და MC მსახველებზე გავლებულია სიბრტყე. მიღებული კვეთის (MAC სამკუთხედის) ფართობი არის S, $\angle AMC=\alpha$. კონუსის ფუძის ფართობი არის Q. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



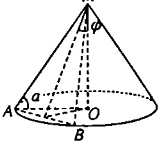
35. ცილინდრის სიმაღლე 12სმ-ია, ფუძის რადიუსი — 10სმ. A წერტილი ზედა ფუძის წრეწირს ეკუთვნის, B — ქვედა ფუძის წრეწირს. $AB=20$სმ. AA_1 ფუძის სიბრტყის მართობულია (ცილინდრის მსახველია). იპოვეთ მანძილი ქვედა ფუძის O_1 ცენტრიდან AA_1B სიბრტყემდე.



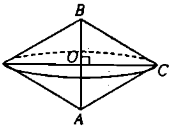
36. ცილინდრის სიმაღლე 4 სმ-ია, ფუძის რადიუსი — 14 სმ. $ABCD$ კვადრატია (B და C ზედა ფუძის წრეწირს ეკუთვნის, A და D — ქვედა ფუძის წრეწირს). იპოვეთ კვადრატის გვერდი.



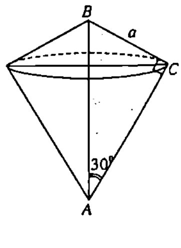
37. კონუსის სიმაღლე 10 სმ-ია, ფუძის რადიუსი — 12,5 სმ. A და B კონუსის ფუძის წრეწირს ეკუთვნის. ფუძის O ცენტრიდან MAB კვეთამდე (სიბრტყემდე) მანძილი 6 სმ-ია. იპოვეთ კვეთის ფართობი.



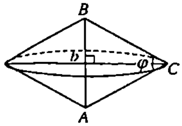
38. კონუსის ფუძის რადიუსი არის R, MA მსახველი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. კონუსის MO სიმაღლესა და MAB სამკუთხედის სიბრტყეს შორის კუთხეა φ. იპოვეთ MAB კვეთის ფართობი.



39. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი არის a. იგი ბრუნავს ერთ-ერთი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის ზედაპირის ფართობი.

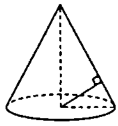


40. ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტია a და ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხეა 30^0, ბრუნავს ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ იმ ფიგურის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული სამკუთხედის კათეტებით შედგენილი ტეხილის ბრუნვით.



41. ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძის სიგრძეა b, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე φ, ბრუნავს ფუძის გარშემო. იპოვეთ იმ ფიგურის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული სამკუთხედის ფერდებისგან შედგენილი ტეხილის ბრუნვით.

42. კონუსის მსახველისა და სიმაღლის სხვაობა არის $\frac{16}{\sqrt{\pi}}$ სმ, მათ შორის კუთხეა φ და $\cos\varphi = \frac{5}{13}$. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



43. კონუსის ფუძის ცენტრიდან მის მსახველამდე მანძილი $4\sqrt{3}$ სმ-ია. კონუსის ფუძის ფართობი არის 64π სმ^2. იპოვეთ კუთხე მსახველსა და სიმაღლეს შორის.

44. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი არის კვადრატი. ამ კვადრატის დიაგონალი არის d. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.

45. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი არის m, ფუძესთან კუთხე — φ. ეს სამკუთხედი ბრუნავს ფუძის გარშემო. იპოვეთ იმ ფიგურის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება სამკუთხედის ფერდებისგან შედგენილი ტეხილის ბრუნვით.

46. კონუსის ფუძის რადიუსია R, მსახველი — l. გამოიყვანეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა.

მითითება. ა) დახაზეთ კონუსის შლილი — სექტორი, აღნიშნეთ ამ სექტორის კუთხის რადიანული ზომა α-თი და დაწერეთ სექტორის რკალის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა;

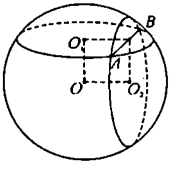
ბ) დაწერეთ სექტორის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა.

თუ α-ს განსაზღვრავთ რკალის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულიდან და ჩასვამთ სექტორის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულაში, მიიღებთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას!

47. ბირთვის რადიუსის შუა წერტილზე გავლებულია ამ რადიუსის მართობული სიბრტყე. იპოვეთ მიღებული კვეთისა და უდიდესი კვეთის (ბირთვის ცენტრზე გამავალი სიბრტყით კვეთის) ფართობების შეფარდება.

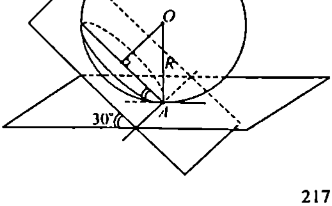
48. ბირთვის ზედაპირზე მოცემულია სამი წერტილი — A, B და C, $AB=3$ სმ, $AC=3$ სმ, $BC=4$ სმ. ბირთვის რადიუსი 6,5 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან A, B და C წერტილებზე გამავალ სიბრტყემდე.

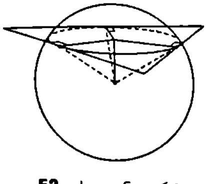
49. ბირთვის რადიუსი 25 სმ-ია. A წერტილი ამ ბირთვის ზედაპირს ეკუთვნის. ბირთვის ზედაპირზე მდებარეობს წრეწირი, რომლის ნებისმიერი M წერტილისთვის AM მონაკვეთი 15 სმ-ია. იპოვეთ ამ წრეწირის რადიუსი.



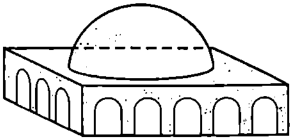
50. ბირთვის რადიუსი 14 სმ-ია. მის ზედაპირზე მოცემულია ორი ტოლი წრეწირი, რომლებსაც საერთო AB ქორდა აქვს. $AB=4$ სმ. ცნობილია, რომ ამ წრეწირების სიბრტყეები მართობულია. იპოვეთ წრეწირების რადიუსები.

51. ბირთვის რადიუსი არის R. მის A წერტილზე გავლებულია ორი სიბრტყე — პირველი მხები სიბრტყეა, მეორე კი კვეთს ბირთვს და მხებ სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კვეთის ფართობი.





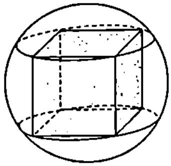
52. ბირთვის რადიუსი არის R. იგი ეხება a გვერდის მქონე წესიერი სამკუთხედის სამივე გვერდს. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.



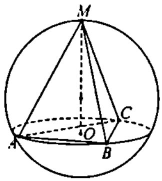
53. საკონცერტო დარბაზის გუმბათს ნახევარსფეროს ფორმა აქვს. მისი ზედაპირის ფართობი 900 მ^2-ია. იპოვეთ გუმბათის სიმაღლე.

54. სამკუთხედის გვერდებია 13სმ, 14სმ და 15სმ. ბირთვი ეხება ამ სამკუთხედის სამივე გვერდს. ბირთვის რადიუსი 15სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

55. ბირთვის ზედაპირის A წერტილზე გავლებულია ორი ურთიერთმართობული სიბრტყე. ეს სიბრტყეები კვეთს ბირთვს, მიიღება ორი წრე, რომელთა რადიუსებია r_1 და r_2. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი.



56. კუბის ოთხივე წვერო ბირთვის ზედაპირს ეკუთვნის (კუბი ჩახაზულია ბირთვში). კუბის გვერდი არის a. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი.



57. წესიერი $MABC$ პირამიდის ყველა წვერო ბირთვის ზედაპირს ეკუთვნის. (პირამიდა ჩახაზულია ბირთვში). პირამიდის ყველა წიბო არის a. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი.

58. სივრცის წერტილთა რა სიმრავლე განისაზღვრება მოცემული განტოლებით?
ა) $x^2+y^2+z^2=9$; ბ) $x^2-4x+y^2-6y+z^2=1$.

59. იპოვეთ იმ სფეროს ზედაპირის ფართობი, რომელსაც ეხება $MABC$ წესიერი სამკუთხა პირამიდის MA, MB, MC გვერდითი წიბოები A, B და C წერტილებში. პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი $3\sqrt{6}$ სმ^2-ია, ფუძის გვერდი — $2\sqrt{3}$ სმ-ია.

60. ორი კონუსის საერთო ფუძის საზღვარი არის წრეწირი, რომელიც ორი სფეროს თანაკვეთაა. ერთი კონუსის წვერო ერთ-ერთი სფეროს ცენტრშია, მეორე კონუსის წვერო — მეორე სფეროს ცენტრში. კონუსების სიმაღლეთა ჯამი 7 სმ-ია, მცირე კონუსის სიმაღლესა და მსახველს შორის კუთხის სინუსი $\frac{1}{\sqrt{5}}$-ია, მცირე სფეროს რადიუსი — $\sqrt{5}$ სმ. იპოვეთ დიდი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი (მცირე კონუსი ის კონუსია, რომლის სიმაღლე ნაკლებია, მცირე სფერო ის სფეროა, რომლის რადიუსია ნაკლები).

§ 3.14. მოცულობა

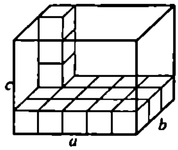
მრავალწახნაგების ერთ-ერთი თვისებაა: ყოველ მრავალწახნაგას შეიძლება შევუსაბამოთ დადებითი V სიდიდე (დადებითი რიცხვით გამოსახული სიდიდე) — **მოცულობა** — ისე, რომ შესრულდეს პირობები:

1. მოცულობის ზომის ერთეულია იმ კუბის მოცულობა, რომლის წიბოს სიგრძე ერთი ერთეულია.

მაგალითად, იმ კუბის მოცულობა, რომლის წიბოა 1 სმ-ია, არის 1 სმ³ — მოცულობის ზომის ერთ-ერთი ერთეული.

2. თუ ფიგურები ტოლია, მაშინ მათი მოცულობები ტოლია.

3. თუ ფიგურა დაყოფილია რამდენიმე ფიგურად (ანუ მოცემული ფიგურის ყოველი წერტილი ერთ-ერთ ასეთ ნაწილს მაინც ეკუთვნის) და ან ნაწილებიდან ნებისმიერ ორს საერთო შიგა წერტილი არა აქვს, მაშინ მოცემული ფიგურის მოცულობა მისი ყველა ასეთი ნაწილის მოცულობების ჯამია.



სურათზე მართკუთხა პარალელეპიპედია წარმოდგენილი, მისი განზომილებებია a=5 სმ, b=3 სმ, c=4 სმ.

. მის ფუძეზე 15 ერთეულოვანი კუბია განლაგებული, თითოეულის მოცულობა 1 სმ³-ია. კუბების 4 ასეთი შრე შეავსებს ამ ფიგურას. ამრიგად, მართკუთხა პარალელეპიპედი შედგება 60 ტოლი კუბისგან (5·3·4=60), მაშასადამე, პარალელეპიპედის მოცულობა 60 სმ³-ია.

არა მხოლოდ მრავალწახნაგებისთვის განისაზღვრება მოცულობა. კერძოდ, განისაზღვრება ცილინდრის, კონუსის, ბირთვის მოცულობა (მათი გამოსათვლელი ფორმულებიც ქვემოთ იქნება მითითებული).

ახლა მეორე თვისების პირობა აღვწეროთ — რა შემთხვევაშია ფიგურები ტოლი? ამისთვის დაგვჭირდება სივრცის გადაადგილების (მოძრაობის) ცნების შემოღება:

სივრცის (სივრცის წერტილთა სიმრავლის) თავის თავზე ასახვას, რომელიც მანძილს არ ცვლის გადაადგილება ეწოდება. ე. ი. f ასახვა გადაადგილებაა, თუ ყოველი ორი A და B წერტილისთვის, როცა $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, მაშინ $A'B'=AB$. φ' ფიგურას ეწოდება φ ფიგურის ტოლი, თუ არსებობს გადაადგილება, რომელიც φ-ს ასახავს φ'–ზე.

მაგალითად, ცენტრული სიმეტრია, პარალელური გადატანა $\vec{a}(a;\ b;\ c)$ ვექტორით. გადაადგილებებია. პარალელური გადატანა $\vec{a}(a;\ b;\ c)$ ვექტორით $M(x;\ y;\ z)$ წერტილს შეუსაბამებს M' $(x';\ y';\ z')$ წერტილს ისე, რომ $\overrightarrow{MM_1}$, ანუ $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$.

მოცულობის თვისებების გამოყენებით მიიღება სივრცული ფიგურების მოცულობათა გამოსათვლელი ფორმულები:

პრიზმისა და ცილინდრის მოცულობა — $V=Q{\cdot}H$, Q ფუძის ფართობია, H — სიმაღლე.

კერძოდ, თუ პრიზმა მართკუთხა პარალელეპიპედია, რომლის განზომილებებია a, b და c, მაშინ $V=abc$.

ცილინდრის მოცულობა — $V=\pi R^2H$, R ფუძის რადიუსია, H — სიმაღლე.

პირამიდისა და კოსინუსის მოცულობა — $V=\frac{1}{3}Q{\cdot}H$, Q ფუძის ფართობია, H — სიმაღლე.

კერძოდ, **კოსინუსის** — $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$, R — ფუძის რადიუსია, H — სიმაღლე.

ბირთვის მოცულობა — $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, R — ბირთვის რადიუსია.

1. თუ კუბის წიბოს სიგრძე 2 სმ-ია, მაშინ მისი მოცულობაა
ა) 2 სმ^3 ბ) 4 სმ^3 გ) 6 სმ^3 დ) 8 სმ^3.

2. თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 1 სმ, 3 სმ და 6 სმ, მაშინ მისი მოცულობაა
ა) 36 სმ^3 ბ) 18 სმ^3 გ) 72 სმ^3 დ) 48 სმ^3.

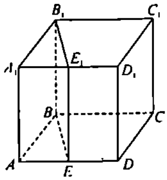
3. თუ რაიმე კუბის წიბოს სიგრძეა a, მოცულობა — V, მაშინ $V=$
ა) a^2 ბ) a გ) $3a$ დ) a^3.

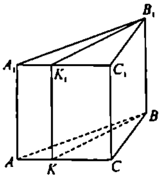
4. თუ რაიმე მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია a, b და c, V მოცულობაა, მაშინ $V=$
ა) $a^3+b^3+c^3$ ბ) abc გ) $a+b+c$ დ) $a^3b^3c^3$.

5. თუ Q-თი აღვნიშნავთ ნებისმიერად შერჩეული მართი პრიზმის ფუძის ფართობს, V-თი — მოცულობას, H-ით — სიმაღლეს, მაშინ $V=$
ა) $\frac{1}{3}QH$ ბ) $\frac{1}{2}QH$ გ) QH დ) $2QH$.

6. ვთქვათ, ორი მართი პარალელეპიპედის ფუძეები ტოლი მრავალკუთხედებია, ამ პარალელეპიპედების გვერდითი ზედაპირები ტოლია. მაშინ ამ პარალელეპიპედის მოცულობები
ა) ტოლი არ არის ბ) ტოლია გ) შეიძლება ტოლი არ იყოს.

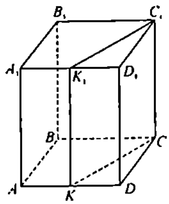
7. ვთქვათ, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის წიბოს სიგრძე 10 სმ-ია. E და E_1 წერტილები, შესაბამისად, AD და A_1D_1 წიბოების შუა წერტილებია. იპოვეთ $ABEA_1B_1E_1$ მართი პრიზმის მოცულობა.
ა) 125 სმ^3 ბ) 250 სმ^3
გ) 750 სმ^3 დ) 100 სმ^3.

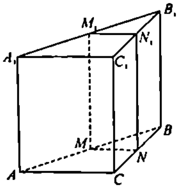




8. $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმაა, $AK:KC=1:2$, $A_1K_1:K_1C_1=1:2$. $ABCA_1B_1C_1$ მართი პრიზმის მოცულობა არის V. იპოვეთ $ABKA_1B_1K_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა.
ა) $\frac{V}{3}$ ბ) $\frac{2}{3}V$ გ) $\frac{V}{2}$ დ) $\frac{V}{4}$.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია, $AK=KD$, $A_1K_1=K_1D_1$. იპოვეთ $CDKC_1D_1K_1$ და $ABCKA_1B_1C_1K_1$ მართი პრიზმების მოცულობების შეფარდება.
ა) $\frac{1}{10}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{1}{4}$.



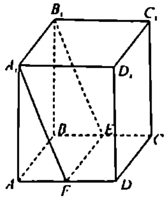


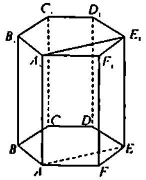
10. ცნობილია, რომ $MN||AC$, $M_1N_1||A_1C_1$; $ABCA_1B_1C_1$ და $MBNM_1B_1N_1$ მართი სამკუთხა პრიზმებია. ცნობილია, $AMNCA_1M_1N_1C_1$ და $NMBN_1M_1B_1$ პრიზმების მოცულობები ტოლია, $AC=20$ სმ-ია. იპოვეთ MN.
ა) 4 სმ ბ) 8 სმ
გ) $10\sqrt{2}$ სმ დ) $5\sqrt{2}$ სმ

✓**11.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა 48 სმ³-ია. E და F, შესაბამისად, AD და BC წიბოების შუა წერტილებია. იპოვეთ AA_1FBB_1E მართი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა:

ა) 16 სმ³ ბ) 12 სმ³

გ) 24 სმ³ დ) 36 სმ³.





✓**12.** $ABCDEFA_1B_1C_1E_1F_1$ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის მოცულობა არის V. იპოვეთ $AEFA_1E_1F_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა.

ა) $\frac{V}{6}$ ბ) $\frac{V}{5}$ გ) $\frac{V}{4}$ დ) $\frac{5V}{6}$.

✓**13.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმაა. იპოვეთ $AEFA_1E_1F_1$ და $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ მართი პრიზმების მოცულობების შეფარდება.

ა) $\frac{1}{6}$ ბ) $\frac{1}{5}$ გ) $\frac{2}{3}$ დ) $\frac{1}{9}$.

✓**14.** მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 15 სმ, 50 სმ და 36 სმ. იპოვეთ იმ კუბის წიბო, რომლის მოცულობა ამ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია.

ა) 30 სმ ბ) 15 სმ გ) 45 სმ დ) 50 სმ.

✓**15.** მართი პარალელეპიპედის სიმაღლე 10 სმ-ია, ფუძის გვერდებს შორის ერთ-ერთი კუთხეა 45^0, ეს გვერდები $2\sqrt{2}$ სმ და 5 სმ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

ა) 50 სმ³ ბ) $50\sqrt{2}$ სმ³ გ) $100\sqrt{2}$ სმ³ დ) 100 სმ³.

✓**16.** წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია a, გვერდითი წიბო — b. იპოვეთ ამ პრიზმის მოცულობა.

ა) a^2b ბ) $\frac{1}{2}a^2b$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$ დ) $\sqrt{3}a^2b$.

✓**17.** წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია a, გვერდითი წიბო — b. იპოვეთ ამ პრიზმის მოცულობა.

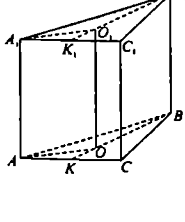
ა) $\sqrt{3}a^2b$ ბ) $\frac{1}{2}a^2b$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2b$.

✓**18.** წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია a, გვერდითი წიბო — b. იპოვეთ ამ პრიზმის მოცულობა.

ა) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2b$ ბ) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$ გ) $\frac{3}{2}a^2b$ დ) $\frac{3}{4}a^2b$.

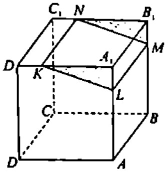
✓**19.** მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდებია 3 სმ, 4 სმ და 5 სმ. ამ სამკუთხედში უდიდესი გვერდისადმი გავლებული სიმაღლე გვერდითი წიბოს ტოლია. იპოვეთ ამ პრიზმის მოცულობა.

ა) 14,4 სმ³ ბ) 28,8 სმ³ გ) 7,2 სმ³ დ) 36,4 სმ³.



✓**20.** $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმაა. BK და B_1K_1 ფუძეების მედიანებია. O_1 და O წერტილები, შესაბამისად, K_1B_1 და KB მედიანებს 1:5 შეფარდებით ჰყოფს ($OK:OB=1:5$ და $O_1K_1:O_1B_1=1:5$). იპოვეთ $ABCA_1B_1C_1$ და $AOBA_1O_1B_1$ მართი პრიზმების მოცულობების შეფარდება.

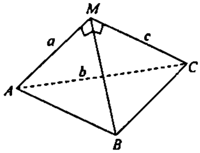
ა) $\frac{5}{12}$ ბ) $\frac{5}{6}$ გ) $\frac{1}{6}$ დ) $\frac{4}{5}$.



✓**21.** კუბის მოცულობა 216 სმ³-ია. $KN \| C_1D_1$, $LM \| AB$, $AL=3$ სმ, $KD_1=1$ სმ. იპოვეთ A_1LKB_1MN პრიზმის მოცულობა.

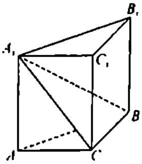
ა) 15 სმ³ ბ) 30 სმ³

გ) 90 სმ³ დ) 45 სმ³.



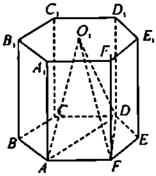
✓**22.** ცნობილია, რომ $MABC$ პირამიდაში, $MA \perp MB$, $MB \perp MC$, $MA \perp MC$; $MA=MB=MC=a$. იპოვეთ ამ პირამიდის მოცულობა.

ა) a^3 ბ) $\frac{1}{3}a^3$ გ) $\frac{1}{6}a^3$ დ) $\frac{1}{4}a^3$.



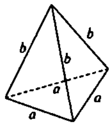
✓**23.** $ABCA_1B_1C_1$ მართი პრიზმის მოცულობა არის V. იპოვეთ A_1ABC პირამიდის მოცულობა.

ა) V ბ) $\frac{1}{2}V$ გ) $\frac{1}{4}V$ დ) $\frac{1}{3}V$.



✓**24.** $\frac{1}{2}ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის მოცულობაა V; O_1 ზედა ფუძის ცენტრია. იპოვეთ O_1ADF პირამიდის მოცულობა.

ა) $\frac{2V}{3\sqrt{3}}$ ბ) $\frac{V}{9}$ გ) $\frac{V}{27\sqrt{3}}$ დ) $\frac{2V}{27}$.

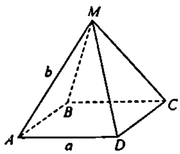


✓**25.** წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია a, გვერდითი წიბო — b. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ა) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2b$

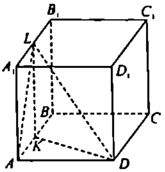
გ) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2-a^2}$ დ) $\frac{1}{12}a^2\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$.

✓**26.** წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია a, გვერდითი წიბო — b. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.



ა) $\frac{a^2}{3}b$ ბ) $\frac{a^2}{3}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$

გ) $a^2\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$ დ) $\frac{a^2}{3}\sqrt{b^2-a^2}$.

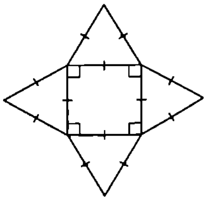


✓**27.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის წიბო 6 სმ-ია. K წერტილი AB-ს შუა წერტილია, L არის A_1B_1-ის შუა წერტილი.

იპოვეთ $LAKD$ პირამიდის მოცულობა.

ა) 18 სმ³ ბ) 6 სმ³

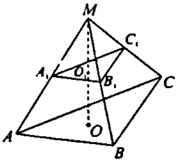
გ) 9 სმ³ დ) 12 სმ³.



✓**28.** სურათზე მრავალწახნაგას შლილია გამოსახული. ტოლი მონაკვეთები ერთნაირადაა მონიშნული და თითოეული 9 სმ-ია. იპოვეთ ამ მრავალწახნაგას მოცულობა.

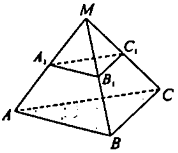
ა) $54\sqrt{6}$ სმ³ ბ) $81\sqrt{6}$ სმ³

გ) $324\sqrt{6}$ სმ³ დ) $121{,}5\sqrt{2}$ სმ³.



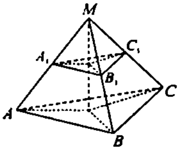
✓**29.** სამკუთხა პირამიდის MA, MB და MC გვერდითი წიბოების შუა წერტილებია, შესაბამისად, A_1, B_1 და C_1. იპოვეთ $MA_1B_1C_1$ და $MABC$ პირამიდების M წვეროდან დაშვებული სიმაღლეების შეფარდება.

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{1}{6}$.



✓**30.** A_1, B_1 და C_1 არის $SABC$ პირამიდის, შესაბამისად, SA, SB და SC გვერდითი წიბოების შუა წერტილები. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ და ABC სამკუთხედების ფართობების შეფარდება.

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{5}$.

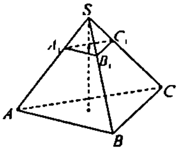


✓**31.** A_1, B_1 და C_1, შესაბამისად, MA, MB და MC წიბოების შუა წერტილებია. იპოვეთ $MA_1B_1C_1$ და $MABC$ პირამიდების მოცულობების შეფარდება.

ა) $\frac{1}{8}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{1}{6}$.

✓**32.** ცნობილია, რომ A_1 წერტილი SA წიბოს, B_1 წერტილი SB წიბოს და C_1 წერტილი SC წიბოს წვეროს მხრიდან 1:2 შეფარდებით ჰყოფს. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ და ABC სამკუთხედების ფართობების შეფარდება.

ა) $\frac{1}{6}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{9}$ დ) $\frac{1}{2}$.



✓**33.** ცნობილია, რომ A_1 წერტილი SA წიბოს, B_1 წერტილი SB წიბოს და C_1 წერტილი SC წიბოს 1:2 შეფარდებით ჰყოფს. იპოვეთ $SA_1B_1C_1$ და $SABC$ პირამიდების S წვეროდან დაშვებული სიმაღლეების შეფარდება.

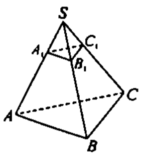
ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{5}$.

✓**34.** კონუსის ფუძის რადიუსი 3 სმ-ია, მსახველი — 5 სმ. იპოვეთ კოსინუსის მოცულობა.

ა) 36π სმ² ბ) 18π სმ² გ) 12π სმ² დ) 60 სმ².

✓**35.** ჩათვალეთ, რომ მთვარე და დედამიწა ბირთვის ფორმისაა და მთვარის დიამეტრი დედამიწის დიამეტრის 0,25-ია. დედამიწის მოცულობის რა ნაწილია მთვარის მოცულობა?

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{16}$ გ) $\frac{1}{64}$ დ) $\frac{1}{8}$.



✓**36.** ცნობილია, რომ A_1 წერტილი SA წიბოს, B_1 წერტილი SB წიბოს და C_1 წერტილი SC წიბოს წვეროს მხრიდან 1:2 შეფარდებით ჰყოფს. იპოვეთ $SA_1B_1C_1$ და $SABC$ პირამიდების მოცულობების შეფარდება

ა) $\frac{1}{9}$ ბ) $\frac{1}{27}$ გ) $\frac{1}{6}$ დ) $\frac{1}{8}$.

✓**37.** თუ ცილინდრის ფუძის რადიუსი არის R, სიმაღლე — H, მაშინ მოცულობა არის

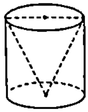
ა) $2\pi R^2H$ ბ) πR^2H გ) $\frac{1}{3}\pi R^2H$ დ) $\frac{1}{4}\pi R^2H$.

✓**38.** თუ კონუსის ფუძის რადიუსია R, სიმაღლე — H, მაშინ მოცულობა არის

ა) $2\pi R^2H$ ბ) πR^2H გ) $\frac{1}{3}\pi R^2H$ დ) $\frac{1}{4}\pi R^2H$.

✓**39.** თუ ბირთვის რადიუსი არის R, მაშინ ამ ბირთვის მოცულობა არის

ა) $\frac{3}{4}\pi R$ ბ) $4\pi R^3$ გ) πR^3 დ) $\frac{4}{3}\pi R^3$.

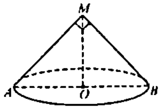


✓**40.** ცილინდრის მოცულობა არის 30 სმ³. იპოვეთ იმ კონუსის მოცულობა, რომლის ფუძე ცილინდრის ერთ ფუძეს ემთხვევა, წვერო კი ამავე ცილინდრის მეორე ფუძის ცენტრშია.

ა) 10 სმ³ ბ) 20 სმ³

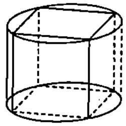
გ) 30 სმ³ დ) 15 სმ³.

✓**41.** კონუსის ღერძული კვეთა (MAB სამკუთხედი) მართკუთხა სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის ფართობი არის 36 სმ². იპოვეთ კონუსის მოცულობა.



ა) 216π სმ³ ბ) 72π სმ³

გ) 144π სმ³ დ) 96π სმ³.



✓**42.** ცილინდრში კუბია ჩახაზული — კუბის ფუძეები ცილინდრის ფუძეებში (სათანადო წრეწირებში) ჩახაზული კვადრატებია, კუბის სიმაღლე ცილინდრის სიმაღლეს ემთხვევა. კუბის მოცულობა 64 სმ³-ია. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

ა) 16π სმ³ ბ) 8π სმ³ გ) 32π სმ³ დ) 12π სმ³.

✓**43.** იპოვეთ ორი ბირთვის რადიუსთა შეფარდება, თუ მათი მოცულობების შეფარდებაა 0,008.

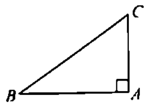
ა) 0,2 ბ) 0,3 გ) 0,4 დ) 0,64.

✓**44.** ნახევარწრის ფართობი 18π სმ²-ია. იპოვეთ იმ ბრუნვის ფიგურის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ ნახევარწრის ბრუნვით დიამეტრის გარშემო.

ა) 288π სმ³ ბ) 144π სმ³

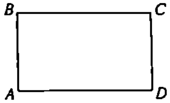
გ) 256π სმ³ დ) 196π სმ³.

45. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა — BC=10 სმ, მცირე კათეტი — AC=6 სმ. იპოვეთ იმ ბრუნვის ფიგურის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ სამკუთხედის ბრუნვით:



ა) AC კათეტის გარშემო; ბ) AB კათეტის გარშემო;

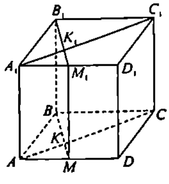
გ) BC ჰიპოტენუზის გარშემო.



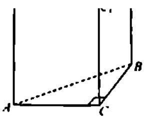
46. $ABCD$ მართკუთხედის ერთი გვერდი — AD=4სმ, მეორე გვერდი — CD=3სმ. იპოვეთ იმ ბრუნვის ფიგურის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ მართკუთხედის ბრუნვით:

ა) CD გვერდის გარშემო; ბ) BC გვერდის გარშემო.

47. კუბის წიბოს სიგრძე 20 სმ-ია. M და M_1 წერტილები, შესაბამისად, AD და A_1D_1 წიბოების შუა წერტილებია. BM-ის AC-სთან და B_1M_1-ის A_1C_1-თან გადაკვეთის წერტილებია, შესაბამისად, K და K_1. იპოვეთ $AKMA_1K_1M_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა.



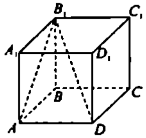
48. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის ფართობი არის S, მახვილი კუთხე — α. პრიზმის დიდი გვერდითი წახნაგის — ABB_1A_1 მართკუთხედის ფართობი Q-ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.



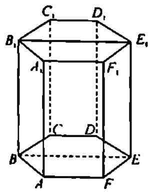
49. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b, მათ შორის კუთხე — 30^0. პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირი S-ის ტოლია. იპოვეთ მოცულობა.

50. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია $4\sqrt{2}$ სმ და 10 სმ; მათ შორის კუთხე — 45^0. პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალი 14 სმ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

51. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია. რომბის ფართობი 4 მ^2-ია. დიაგონალური კვეთების ფართობებია 12 მ^2 და 24 მ^2. იპოვეთ მართი პარალელეპიპედის მოცულობა.



52. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი — $B_1D=7$ სმ, გვერდითი წახნაგის დიაგონალი — $AB_1=5$ სმ. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

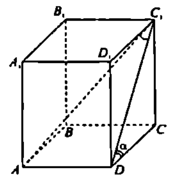


53. წესიერ ექვსკუთხა პრიზმაში უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი — $S_{BB_1E_1E}=16$ მ^2. ფუძის მცირე დიაგონალი 4 მ-ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

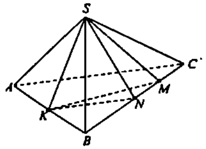
54. მართი პარალელეპიპედის დიაგონალები 8 მ და 10 მ-ია, ფუძის გვერდები — 3 მ და 5 მ. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

55. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალი 16 სმ-ია. იგი გვერდით წიბოსთან 30^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

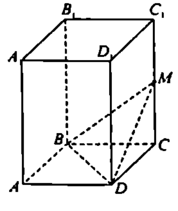
56. მართი პარალელეპიპედის ფუძის დიაგონალი არის d. იგი ფუძის გვერდებთან α და β კუთხეებს ადგენს. პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი არის S. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.



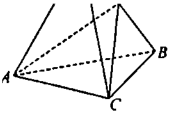
57. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგის DC_1 დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს, $tg\alpha=2$; იპოვეთ პრიზმის AC_1 დიაგონალსა და DC_1 მონაკვეთს შორის კუთხის კოსინუსი.



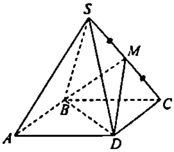
58. ცნობილია, რომ $SABC$ პირამიდის მოცულობა 64 სმ^3-ია, K წერტილი AB-ს შუა წერტილია, N წერტილი BC-ს შუა წერტილია, M წერტილი CN-ის შუა წერტილია. იპოვეთ $SKMN$ პირამიდის მოცულობა.



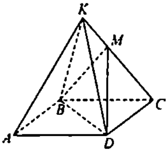
59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის მოცულობა 120 სმ^3-ია. M წერტილი CC_1 წიბოს შუა წერტილია. იპოვეთ $MBCD$ პირამიდის მოცულობა.



60. *MABC* წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა 30 სმ^3-ია. *K* წერტილი *MB* წიბოს შუა წერტილია. იპოვეთ *KABC* პირამიდის მოცულობა.



61. *SABCD* წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა 120 სმ^{3}ია. *M* წერტილი *SC* წიბოს შუა წერტილია. იპოვეთ *MBCD* პირამიდის მოცულობა.



62. *KABCD* წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა 120 სმ^3-ია. *M* წერტილი *KC*-ს ჰყოფს 1:2 შეფარდებით *K* წვეროს მხრიდან. იპოვეთ *MBCD* პირამიდის მოცულობა.

63. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე 6 სმ-ია, გვერდითი წიბო 10 სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

64. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე 6 სმ-ია, გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან 45^0-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

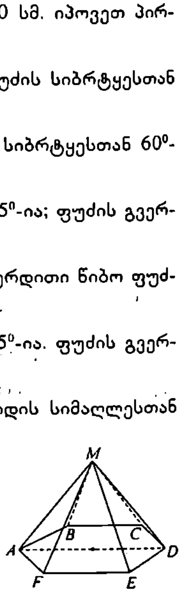
65. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო 6 სმ-ია, იგი ფუძის სიბრტყესთან 60^0-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

66. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდთან ორწახნაგა კუთხე 45^0-ია; ფუძის გვერდი 12 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

67. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 12 სმ-ია. პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან 45^0-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

68. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდთან ორწახნაგა კუთხე 45^0-ია. ფუძის გვერდი 12 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

69. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო 8 სმ-ია, იგი პირამიდის სიმაღლესთან 30^0-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.



70. წესიერ ექვსკუთხა პირამიდაში დიდი დიაგონალური კვეთა (*MAD* სამკუთხედი) მართკუთხა სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 12 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

71. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის ერთ-ერთი მახვილი კუთხე არის α. პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო არის b და ფუძის სიბრტყესთან β კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

72. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები წყვილ-წყვილად მართობულია. გვერდითი წახნაგების ფართობებია Q_1, Q_2 და Q_3. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

73. პირამიდის ფუძე არის მართკუთხედი, რომლის გვერდებია 18სმ და 24სმ. გვერდითი წიბოებიდან თითოეული 25სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

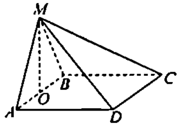
74. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის გვერდები 3სმ, 3სმ და 4სმ-ია. გვერდითი წიბოებიდან თითოეული 4,5 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

75. სამკუთხა პირამიდის ერთ-ერთი წიბო 8 სმ-ია, დანარჩენი წიბოებიდან თითოეული 6 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

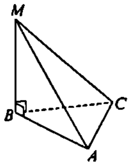
76. პირამიდის ფუძე არის მართკუთხედი. გვერდითი წიბოებიდან თითოეული l-ის ტოლია და ფუძის მოსაზღვრე გვერდებთან (ამ წიბოსთან საერთო წერტილის მქონე გვერდებთან), შესაბამისად, α და β კუთხეებს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

77. პირამიდის გვერდითი წიბოებიდან თითოეული ფუძის სიბრტყესთან γ კუთხეს ქმნის. პირამიდის ფუძე არის სამკუთხედი, რომლის ორი კუთხეა α და β; ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია R. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

78. პირამიდის ფუძე არის ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია a და b ($a>b$). პირამიდის ფუძის გვერდებთან ორწახნაგა კუთხეებიდან თითოეული α-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.



79. პირამიდის ფუძე $ABCD$ კვადრატია 4 სმ-ის ტოლი გვერდით. პირამიდის სიმაღლე ფუძის AB გვერდის O შუა წერტილზე ეშვება. MDC სამკუთხედის პერიმეტრი 16 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.



80. პირამიდის ფუძე არის ABC ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდი 12 სმ-ია. MAB და MBC გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყის მართობულია. ცნობილია, რომ AMC სამკუთხედის პერიმეტრი 38 სმ-ია.

ა) იპოვეთ $\angle MBA$ და $\angle MBC$;

ბ) დაასახელეთ ამ პირამიდის სიმაღლე;

გ) იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

81. პირამიდის ფუძე არის ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 21 სმ და 9 სმ, სიმაღლე — 8 სმ. თითოეული გვერდითი წიბო $\frac{689}{64}$ სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

82. იპოვეთ იმ ფიგურის მოცულობა, რომელიც მიიღება ABC სამკუთხედის ბრუნვით BC გვერდის გარშემო, თუ $\angle A=150^0$, $BC=2{,}5$ სმ, $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$ სმ.

83. პირამიდის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა. ამ ტრაპეციის დიდ ფუძესთან მდებარე კუთხეების ჯამი 120^0-ია. უდიდესი ფერდი — 16 სმ-ია. პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 120 სმ^2-ია. პირამიდის ყოველი გვერდითი წახნაგის მიერ ფუძესთან შედგენილი ორწახნაგა კუთხე ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

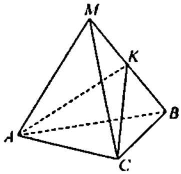
84. $MABC$ სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბო b-ს ტოლია. AC წიბოზე MB წიბოს მართობულად გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ:

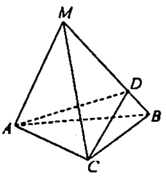
ა) $\angle AKB$, $\angle CKB$;

ბ) კვეთაში მიღებული AKC სამკუთხედის ფართობი;

გ) მკვეთი სიბრტყითა და ფუძის სიბრტყით შექმნილი ორწახნაგა კუთხის სინუსი;

დ) $KABC$ პირამიდის მოცულობა.

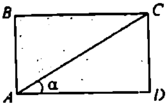




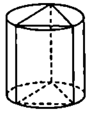
85. $MABC$ წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია n, გვერდითი წიბო — m; AC წიბოზე გავლებულია MB წიბოს მართობული სიბრტყე. იპოვეთ:

ა) კვეთაში მიღებული ADC სამკუთხედის ფართობი;

ბ) $DABC$ პირამიდის მოცულობა.



86. $ABCD$ მართკუთხედის დიაგონალი ერთ-ერთ გვერდთან α კუთხეს ადგენს. ერთი ცილინდრი მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით მცირე გვერდის გარშემო (CD-ს გარშემო), მეორე ცილინდრი — დიდი გვერდის გარშემო (AD-ს გარშემო). იპოვეთ ამ ცილინდრების მოცულობების შეფარდება.



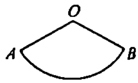
87. ცილინდრში ჩახაზულში წესიერი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა არის V. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

88. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი არის 64 სმ^2, ფუძის წრეწირის სიგრძე — 4π სმ. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

89. კონუსის ფუძის ფართობი 64π სმ^2-ია, მსახველი — 10 სმ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

90. კონუსის ფუძის წრეწირის სიგრძე არის 24π სმ, მსახველი — 20 სმ; იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

91. კონუსის ფუძის ფართობია 36π სმ^2, სრული ზედაპირის ფართობი — 96π სმ^2. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

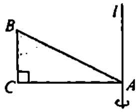


92. სურათზე კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილია გამოსახული, ცენტრული კუთხე — $\angle AOB=120^0$, სექტორის ფართობი 3π სმ^2-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

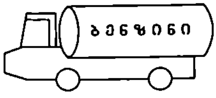
93. კონუსის მსახველი, რომელიც l-ის ტოლია, ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

94. ტოლგვერდა სამკუთხედი ბრუნავს მისი ერთ-ერთი გვერდის გარშემო. სამკუთხედის თითოეული გვერდი a-ს ტოლია. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა.

95. მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია a და b, ბრუნავს ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.



96. ABC მართკუთხა სამკუთხედია, $\angle C=90^0$, $\angle BAC=30^0$, $BC=12$ სმ; l წრფე BC წრფის პარალელურია და გადის A წვეროზე. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის l წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.

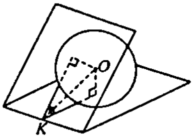


97. ბენზინის გადასაზიდი ცისტერნის ტევადობა 10 000 ლიტრია. ცისტერნას ცილინდრის ფორმა აქვს, რომლის ფუძის რადიუსი 0,9მ-ია. ცისტერნა ორ ფენად უნდა გადაიღებოს. ცნობილია, რომ ყოველი 5 მ^2 ზედაპირის შეღებვას 1 ლიტრი საღებავი ჭირდება (ერთი ფენით დაფარვისას). საღებავი 4-ლიტრიანი ქილებით იყიდება. რამდენი ქილა საღებავის შეძენა იქნება საჭირო?

98. ორი ბირთვის ზედაპირების ფართობები ისე შეეფარდება, როგორც $m:n$. იპოვეთ მათი მოცულობების შეფარდება.

99. იპოვეთ იმ ბირთვის მოცულობა, რომლის ზედაპირის ფართობი 400π სმ^{2}ია.

100. ბირთვის მოცულობა $\frac{32}{3}\pi$ სმ^3-ია. მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე 4 სმ-ია ($OK=4$ სმ). იპოვეთ ორწახნაგა კუთხის სიდიდე.



101. ცნობილია, რომ ბირთვის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი ერთი და იმავე რიცხვით გამოისახება. იპოვეთ ამ ბირთვის რადიუსი.

102. პირამიდის ფუძე $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაა 20 სმ და 12 სმ სიგრძის ფუძეებით, პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო 16 სმ-ია. პირამიდის სიმაღლე ტრაპეციის დიდი ფუძის შუა წერტილში გადის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

103. პირამიდის ფუძე ტრაპეციაა. ამ ტრაპეციის ფუძეები 4 სმ და 8 სმ-ია. პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო 5 სმ-ია. ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის მართობულია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

104. $MABC$ პირამიდის ფუძე ABC წესიერი სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის ფუძის გვერდი — 1 სმ-ია. AB გვერდზე გამავალი წახნაგი ფუძის სიბრტყის მართობულია, დანარჩენი ორი წახნაგი ფუძესთან ადგენს 30^0-ის ტოლ ორწახნაგა კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

105. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია; ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 10 სმ-ია, მცირე კათეტი — 3 სმ. ფუძის დიდ კათეტზე გამავალი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის მართობულია, დანარჩენი ორი წახნაგი ფუძესთან ადგენს 30^0-ის ტოლ ორწახნაგა კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

106. კონუსის მოცულობა V-ს ტოლია. კონუსი გადაკვეთილია ფუძის პარალელური ორი სიბრტყით, რომლებიც სიმაღლეს სამ ტოლ ნაწილად ჰყოფს. იპოვეთ კვეთებს შორის მოთავსებული კუნუსის ნაწილის მოცულობა.

107. სამკუთხედი, რომლის უდიდესი გვერდის სიგრძე არის 3 სმ, ხოლო ამ გვერდთან მდებარე მახვილი კუთხეებია 45^0 და 15^0, ბრუნავს მცირე გვერდის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

IV თავი

მონაცემთა ანალიზი. ალბათობა და სტატისტიკა

§ 4.1. მონაცემთა თვალსაჩინო წარმოდგენის ხერხები

ა. სკალა სხვადასხვა სახეობის მზომ ხელსაწყოზე ერთმანეთის მიმდევრობით გამოსახული დანაყოფებისა და რიცხვების ერთობლიობაა. სკალა ლათინური სიტყვაა და კიბეს ნიშნავს.

სურათზე სახაზავის ნაწილია გამოსახული. იგი შტრიხებით (ნიშნებით) ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი — აქ მცირე დანაყოფების სიგრძე 1 მმ-ია, ერთეული მონაკვეთის სიგრძე 1 სმ-ია; ამ სახაზავზე სკალაა გამოსახული. ვიცნობთ თერმომეტრის სკალას, საათის სკალას, სპიდომეტრის (ავტომობილის სიჩქარის მაჩვენებლის) სკალას, რომელსაც ხშირად წრიული ფორმა აქვს და ყოველი დანაყოფი — 10 კმ/სთ სიჩქარეს უდრის.

ბ. დედამიწის ზედაპირის ნაწილი ქაღალდზე შემცირებული სახით უნდა გამოისახოს. ბინაში ოთახების განლაგებაც შემცირებული სახით — სათანადო გეგმით გამოისახება რუკაზე; გეგმაზე მოცემული ნებისმიერი მონაკვეთის სიგრძის შეფარდებას ამ მონაკვეთით გამოხატულ რეალურ სიგრძესთან **მასშტაბი** ეწოდება. თუ რუკაზე მასშტაბი რიცხვების შეფარდებითაა მოცემული, მაგალითად, — 1:1 000 000 — ეს ნიშნავს, რომ ამ რუკაზე 1 სმ სიგრძის მონაკვეთი 1 000 000 სმ სიგრძის რეალურ მონაკვეთს შეესაბამება; თუ ასეთ რუკაზე ორი ქალაქი ერთმანეთს 20 სმ სიგრძის მონაკვეთით უკავშირდება, მაშინ, მასშტაბის განსაზღვრების თანახმად, ვიპოვით ქალაქებს შორის მანძილს:

$\frac{1}{1000000}=\frac{20}{x}$, $x=20\,000\,000$. ქალაქებს შორის მანძილი 20 000 000 სმ, ანუ 200 კმ-ია.

ზოგჯერ მცირე ზომის საგნები გადიდებული სახით გამოისახება. მაგალითად, 1 სმ სიგრძის მონაკვეთი შეიძლება 0,1 მმ სიგრძის მონაკვეთს გამოსახავდეს, მაშინ მასშტაბი შეიძლება ასე ჩავწეროთ: 1: 0,01 (ან 100:1).

გ. სტატისტიკა (ლათინურად *Ctatus* — მდგომარეობა) არის მეცნიერება ცხოვრების სხვადასხვა მოვლენის თაობაზე მონაცემების შეგროვების, დამუშავებისა და ანალიზის შესახებ. მაგალითად, **ეკონომიკური სტატისტიკა** შეისწავლის სხვადასხვა საქონელზე მოთხოვნის საკითხებს, ფასების ცვლილებებს, პროდუქტების წარმოების ზრდისა და შემცირების ტენდენციებს. სამედიცინო სტატისტიკა შეისწავლის წამლების მოქმედების და მკურნალობის მეთოდების ეფექტურობის საკითხებს. არსებობს კიდევ დემოგრაფიული სტატისტიკა, ფინანსური სტატისტიკა, ბიოლოგიური სტატისტიკა.

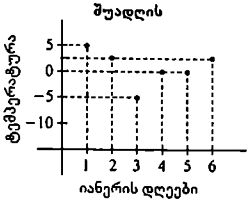
სტატისტიკური მონაცემების ოდენობა, როგორც წესი, დიდია, ამიტომ მათი დამუშავებისა და ანალიზის გასაადვილებლად გამოიყენება თვალსაჩინოდ წარმოდგენის ხერხები.

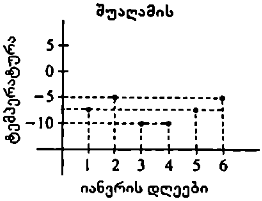
მაგალითი 1. ცხრილით, წერტილოვანი დიაგრამით, ხაზოვანი დიაგრამით მონაცემთა წარმოდგენის მაგალითები.

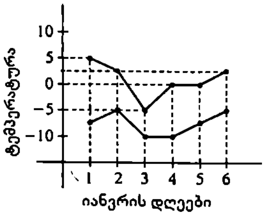
ცხრილით წარმოდგენილია გუდაურში 1-დან 6 იანვრამდე შუადღისა და შუაღამის შესაბამისი გარემოს ტემპერატურათა მონაცემები.

	შუადღის	შუაღამის
1 იანვარი	5^0	$-7,5^0$
2 იანვარი	$2,5^0$	-5^0
3 იანვარი	-5^0	-10^0
4 იანვარი	0^0	-10^0
5 იანვარი	0^0	$-7,5^0$
6 იანვარი	$2,5^0$	-5^0

ეს მონაცემები შეიძლება **წერტილოვანი დიაგრამებით** წარმოვადგინოთ:







ამ სურათზე მონაცემთა ორივე ერთობლიობა **ხაზოვანი დიაგრამის** სახითაა წარმოდგენილი. ეს დიაგრამა უკეთ წარმოადგენს დღეების მიხედვით ტემპერატურის ცვლილებას.

. **მაგალითი 2.** ცხრილით წარმოდგენილია ერთ-ერთი სამშობიარო სახლის ახალშობილთა სარეგისტრაციო წიგნის ერთ-ერთი გვერდი.

ცხრილი 1

დაბადების თარიღი	დაბადების სახელი	სქესი
03. 09. 2005	ქეთევანი	გოგონა
03. 09. 2005	თორნიკე	ვაჟი
04. 09. 2005	ნინო	გოგონა
06. 09. 2005	გიორგი	ვაჟი
06. 09. 2005	სანდრო	ვაჟი
07. 09. 2005	გიორგი	ვაჟი
07. 09. 2005	ნიკო	ვაჟი
07. 09. 2005	ნატო	გოგონა
08. 09. 2005	ქეთევანი	გოგონა
09.09 2005	გიორგი	ვაჟი

ამ ცხრილის მიხედვით შეიძლება შევადგინოთ კიდევ სამი ცხრილი.

ცხრილი 2

დაბადების თარიღი	დაბადებულთა ოდენობა
03. 09. 2005	2
04. 09. 2005	1
05. 09. 2005	0
06. 09. 2005	2
07. 09. 2005	3
08. 09. 2005	1
09. 09. 2005	1

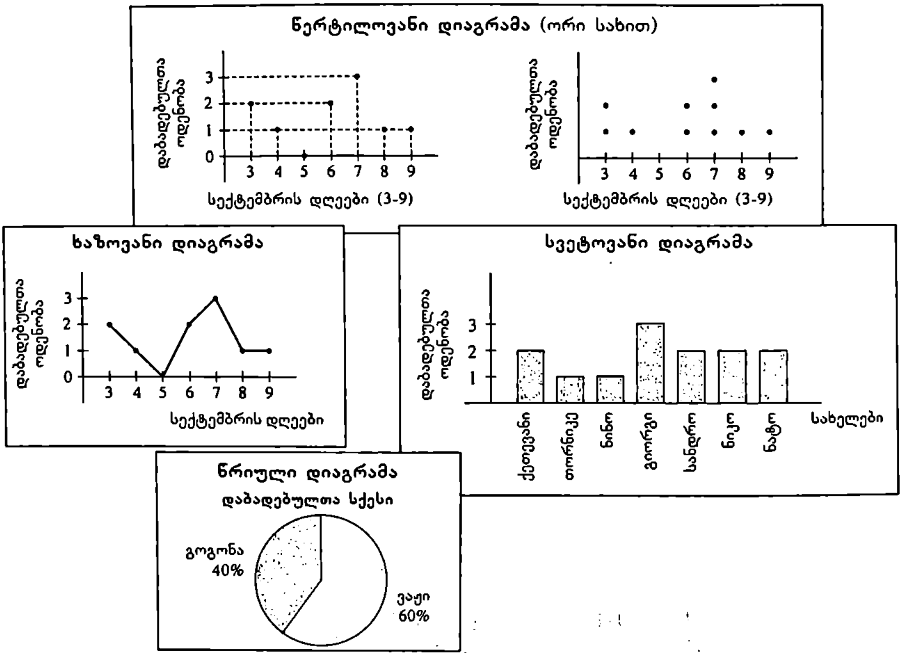
ცხრილი 3

სახელი	დაბადებულთა რიცხვი
ქეთევანი	2
თორნიკე	1
ნინო	1
გიორგი	3
სანდრო	1
ნიკო	1
ნატო	1

ცხრილი 4

დაბადებულის სქესი	დაბადებულთა რიცხვი
ვაჟი	6
გოგონა	4

ამ ცხრილების მიხედვით (2-4) შეიძლება ავაგოთ დიაგრამები:



ხაზოვანი დიაგრამა მეტწილად მაშინ გამოიყენება, როცა სურთ დროის მიხედვით სიდიდის ცვლილება წარმოადგინონ — ჰორიზონტალურ წრფეზე გამოისახება დროის მომენტები, ვერტიკალურზე — სიდიდის მნიშვნელობები (ჩვენთან ახალდაბადებულთა რიცხვი). შემდეგ მიღებულ წერტილებს ვაერთებთ მონაკვეთებით.

სვეტოვანი დიაგრამის ჰორიზონტალურ წრფეზე წარმოადგენენ რაიმე ნიშნის (ჩვენთან — სახელების) სხვადასხვა მნიშვნელობას, ყოველი მნიშვნელობის გასწვრივ აიგება სვეტი, რომლის სიმაღლე ჩვენთვის საინტერესო სიდიდის ტოლია (ჩვენთან ახალდაბადებულთა რიცხვი).

სვეტოვან დიაგრამაზე კარგად ჩანს სიდიდეებს შორის რაოდენობრივი თანაფარდობები.

თვალსაჩინოებით გამოირჩევა **წრიული დიაგრამა**. წრე სექტორებად ისეა დაყოფილი, რომ სექტორების ცენტრული კუთხეები (და შესაბამისი რკალები) მათ მიერ წარმოდგენილი მონაცემების (ჩვენთან — ახალდაბადებულის სქესის) ოდენობის პროპორციული იყოს.

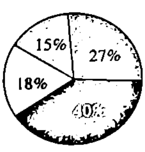
მაგალითი 3. ვთქვათ, მაღაზიაში დღის განმავლობაში პურის გაყიდვებიდან შემოსული თანხა მთელი ნავაჭრის 40%-ია, შაქრის — 18 %, კარაქის — 15%, სხვა პროდუქტების — 27%.

ააგეთ ამ მონაცემების შესაბამისი წრიული დიაგრამა.

წრიული დიაგრამის ასაგებად სრული კუთხე — 360^0 ამ მონაცემის პროპორციულ ნაწილებად უნდა დავყოთ:

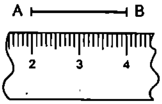
$360^0 \cdot 0{,}4=144^0$	$360^0 \cdot 0{,}15=54^0$
$360^0 \cdot 0{,}18=64{,}8^0$	$360^0 \cdot 0{,}27=97{,}2^0$

შემდეგ წრე იყოფა მიღებული სიდიდეების ცენტრული კუთხეების შესაბამის სექტორებად.



1. დილით თერმომეტრის სკალა 2^0 სითბოს აჩვენებდა, დღის 2 საათისთვის ტემპერატურამ 1^0-ით მოიმატა, საღამოს კი 5^0-ით დაიკლო. რა ტემპერატურას უჩვენებდა თერმომეტრი საღამოს?

ა) 2^0-ს ბ) -2^0-ს გ) 8^0-ს დ) -5^0-ს.



2. გიორგის სახაზავზე დანაყოფები 1 დმ-იანია, ერეკლეს სახაზავზე — 1 სმ-იანი. სურათზე გიორგის სახაზავით AB მონაკვეთის გაზომვის შედეგია გამოსახული. იმავე მონაკვეთის A ბოლო შეუთავსეს ერეკლეს სახაზავის ნიშნულს, რომელიც 7-ს შეესაბამება. იპოვეთ ერეკლეს სახაზავზე B-ს შესაბამისი ნიშნულის შესაბამისი რიცხვი.

ა) 17 ბ) 27 გ) 7 დ) 37.

3. დროის რა მონაკვეთი შეესაბამება საათის ციფერბლატზე საათების ისრის ერთი დანაყოფით გადაადგილებას?

ა) 20 წთ ბ) 12 წთ

გ) 15 წთ დ) 18 წთ.

4. მოძრავი ავტომობილის სპიდომეტრი 1 საათისა და 30 წთ-ის განმავლობაში 70 კმ-ს უჩვენებდა. ეს ნიშნავს, რომ ავტომობილმა ამ დროში გაიარა.

ა) 105 კმ ბ) 130 კმ გ) 115 კმ დ) 120 კმ.

5. ვთქვათ, ახლა პირველი საათია. რა დანაყოფს (რიცხვს) გაუსწორდება საათის ციფერბლატზე საათის ისარი მას შემდეგ, რაც წუთების ისარი სამ სრულ ბრუნს გააკეთებს?

ა) 3 ბ) 4 გ) 5 დ) 2.

6. 5 სმ სიგრძის AB მონაკვეთის A ბოლოს თუ შევუთავსებთ სახაზავის 4-ის შესაბამის დანაყოფს, მაშინ B ბოლო შეუთავსდება დანაყოფს, რომელიც არის

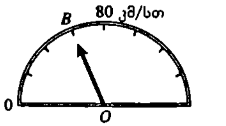
ა) 4-ის შესაბამისი ბ) 5-ის შესაბამისი

გ) 9-ის შესაბამისი დ) 10-ის შესაბამისი.

7. დილით ტემპერატურა -2^0-ს უჩვენებდა, შუადღისას კი $+3^0$-ს. ეს ნიშნავს, რომ

ა) ტემპერატურა გაიზარდა 3^0-ით ბ) ტემპერატურა გაიზარდა 5^0-ით

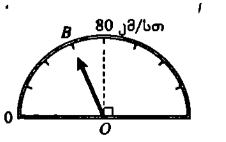
გ) ტემპერატურა შემცირდა 1^0-ით დ) ტემპერატურა გაიზარდა 1^0-ით.



8. სურათზე გამოსახულია მოძრავი ავტომობილის სპიდომეტრი. იპოვეთ ავტომობილის მოძრაობის სიჩქარე ამ მომენტში.

ა) 40კმ/სთ ბ) 60კმ/სთ

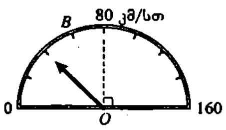
გ) 30კმ/სთ დ) 45კმ/სთ.



9. სურათზე მოძრავი ავტომობილის სპიდომეტრია წარმოდგენილი. რა სიჩქარე იქნება გამოსახული სპიდომეტრზე OB ისრის 54^0-ით მობრუნების (საათის ისრის მიმართულებით) შემდეგ?

ა) 96 კმ/სთ ბ) 128 კმ/სთ

გ) 108 კმ/სთ დ) 120 კმ/სთ.



10. რამდენი გრადუსით შემცირდება AOB კუთხე, თუ სიჩქარე შემცირდება 20 კმ/სთ-ით?

ა) $22{,}5^0$-ით ბ) 30^0-ით

გ) 45^0-ით დ) $12{,}5^0$ -ით.

11. იპოვეთ მექანიკური საათის წუთებისა და საათების ისრებს შორის კუთხე 14 სთ-სა და 30 წთ-ზე.

ა) 108^0 ბ) 90^0 გ) 105^0 დ) 45^0.

12. იპოვეთ მექანიკური საათის წუთებისა და საათების ისრებს შორის კუთხე 13 სთ და 10 წუთზე.

ა) 30^0 ბ) 35^0 გ) 25^0 დ) 15^0.

13. კინოსეანსი 20 საათზე იწყება. რომელ საათზე დასრულდება ეს სეანსი, თუ ის 95 წუთს გრძელდება?

ა) 20 საათი 35 წთ ბ) 20 სთ 55 წთ

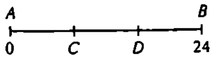
გ) 21 სთ და 25 წთ დ) 21 სთ და 35 წთ.

14. საათის ისრები 2 საათს უჩვენებდნენ, ნახევარი საათიც არ იყო გასული, რომ ისრებს შორის კუთხე 90^0 გახდა. რა დროს უჩვენებს ამ მომენტში საათი (უპასუხეთ მიახლოებით 1 წთ-მდე სიზუსტით).

ა) 2 სთ და 25 წთ ბ) 2 სთ 27 წთ

გ) 2 სთ 26 წთ დ) 2 სთ 29 წთ.

15. AB მონაკვეთის A წერტილთან დავწერეთ რიცხვი 0, B წერტილთან — 24 (A წერტილს შევუსაბამეთ 0, B წერტილს — 24). AB მონაკვეთი C და D წერტილებით სამ ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი. რა რიცხვი შეესაბამება D წერტილს?



ა) 20 ბ) 16 გ) 18 დ) 12.

16. თუ რუკის მასშტაბია 1:500 000, მაშინ 1 სმ-ის შესაბამისი რეალური მანძილი არის

ა) 5 კმ ბ) 50 კმ გ) 0,5 კმ დ) 500 კმ.

17. ბინის გეგმაზე 4 სმ მონაკვეთით 6 მ სიგრძის მონაკვეთია გამოსახული, ამ გეგმის მასშტაბი არის

ა) 2:3 ბ) 2:5 გ) 1:150 დ) 1:6.

18. თუ ადგილის გეგმის მასშტაბი არის 1:750 000, მაშინ 8 სმ სიგრძის მონაკვეთი გამოსახავს

ა) 60 კმ-ს ბ) 50 კმ-ს გ) 80 კმ-ს დ) 45 კმ-ს.

19. ორ ქალაქს შორის მანძილი 120 კმ-ია, რუკაზე ამ ქალაქებს შორის მანძილი — 6 სმ. რუკის მასშტაბი არის

ა) 1:1000 000 ბ) 1:200 000 გ) 1:2000 000 დ) 1:200.

20. სოფლის გეგმის შედგენისას რომელი მასშტაბის შერჩევა აჯობებს?

ა) 1:1000 ბ) 1:100000 გ) 1000:1 დ) 1:0,001.

21. 2 მმ სიგრძის ჭიანჭველა სურათზე 3 სმ-ია. ამ სურათის მასშტაბი არის

ა) 3:2 ბ) 1,5:1 გ) 15:1 დ) 20:3.

22. უწვრილესი სისხლძარღვის — კაპილარის სიგრძე 0,5 მმ-ია. იპოვეთ სურათის მასშტაბი, თუ სურათზე კაპილარის გამოსახულება 1,5 სმ სიგრძისაა.

ა) 15:1 ბ) 30:1 გ) 3:1 დ) 1:3.

23. 1500 000 მასშტაბიან რუკაზე ორ ქალაქს შორის მანძილი 18 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ამავე ქალაქებს შორის იმ რუკაზე, რომლის მასშტაბი არის 1:1200 000.

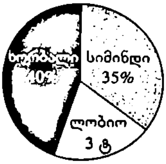
ა) 10,5 სმ ბ) 12 სმ გ) 7,5 სმ დ) 12,5 სმ.

24. 3 კმ სიგრძის მონაკვეთი რუკაზე 6 სმ სიგრძის მონაკვეთითაა გამოსახული. რა მანძილს გამოხატავს რუკაზე ის მონაკვეთი, რომლის სიგრძე 1,8 სმ-ია?

ა) 9 კმ ბ) 900 მ გ) 90 კმ დ) 900 კმ.

25. დეტალის სიგრძე სურათზე, რომელიც 1:3 მასშტაბითაა შესრულებული, 2,4 სმ-ია, რისი ტოლი იქნება ამ დეტალის სიგრძე იმ სურათზე, რომელიც 2:1 მასშტაბითაა შესრულებული?

ა) 14,4 სმ ბ) 16,4 სმ გ) 14 სმ დ) 16 სმ.



26. ფერმერმა სიმინდის, ხორბლის და ლობიოს მოსავალი აიღო. ლობიოს მოსავალი 3 ტონა იყო. წრიულ დიაგრამაზე მითითებულია მთელი მოსავლის რამდენი პროცენტია სიმინდისა და ხორბლის მოსავალი. ამ დიაგრამის მიხედვით რამდენი ტონა სიმინდია აღებული?

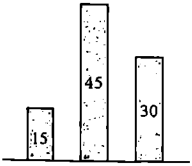
ა) 5 ტ ბ) 5,25 ტ

გ) 5,025 ტ დ) 5,05 ტ.

27. სოფლის 45 სახლს ლითონის გადახურვა აქვს, 15-ს — პლასტმასის ფილების, დანარჩენ 30-ს — შიფერის. შესაბამის წრიულ დიაგრამაზე იპოვეთ შიფერის შესაბამისი სექტორის ცენტრული კუთხის ზომა.

ა) 30^0 ბ) 60^0

გ) 45^0 დ) 120^0.



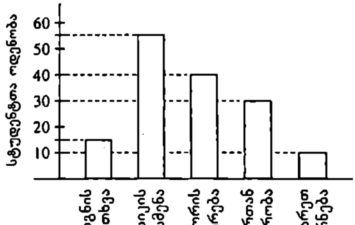
28. წინა ამოცანაში მითითებული მონაცემები გვსურს წარმოვადგინოთ სვეტებიანი დიაგრამით. ვთქვათ, პლასტმასის გადახურვათა შესაბამისი სვეტის სიმაღლე 20 მმ-ია. მაშინ მეორე სვეტის სიმაღლე უნდა იყოს

ა) 60 მმ ბ) 80 მმ

გ) 75 მმ დ) 45 მმ.

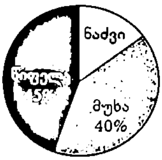
29. თავისუფალი დროის გატარების შესახებ გამოკითხვის შედეგები წარმოდგენილია სვეტებიანი დიაგრამით. ყოველ სტუდენტს უნდა დაესახელებინა დასვენების ყველაზე სასურველი ფორმა.

გამოკითხულ სტუდენტთა რამდენ პროცენტს უყვარს მუსიკის მოსმენა?



ა) 36% ბ) $36\frac{2}{3}$%

გ) $36\frac{1}{3}$ % დ) 36,6 %

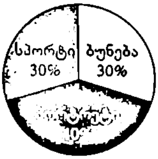


30. ტყეში მხოლოდ წიფლის, მუხისა და ნაძვის ხეებია. წიფლის ხეების ოდენობა 330-ზე მეტია. წრიულ დიაგრამაზე მითითებულია ტყეში ხეების საერთო რაოდენობის რამდენი პროცენტია წიფლის და მუხის ხეების ოდენობა. ამ დიაგრამის მიხედვით ნაძვის ხეების ოდენობა

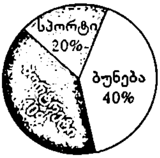
ა) 110-ის ტოლია ბ) 110-ზე ნაკლებია

გ) 110-ზე მეტია დ) 100-ზე ნაკლებია.

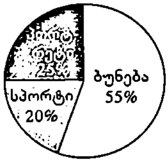
31-34. მოცემული დიაგრამები ლევანის, პაატასა და ნიკას მიერ სასკოლო გამოფენაზე წარმოდგენილი ფოტოების მიხედვითაა აგებული.



ლევანი
სულ: 100 ფოტო



პაატა
სულ: 50 ფოტო



ნიკა
სულ: 200 ფოტო

ამ დიაგრამების მიხედვით ამოხსენით ამოცანები:

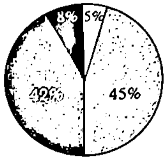
31. რომელმა მოსწავლემ წარმოადგინა ყველაზე მეტი ფოტო-პორტრეტი?
ა) ნიკამ ბ) პაატამ
გ) ლევანმა დ) პასუხის გაცემა შეუძლებელია.

32. რომელი მოსწავლეა სხვებზე ნაკლებად გატაცებული პორტრეტების გადაღებით?
ა) ნიკა ბ) პაატა
გ) ლევანი დ) პასუხის გაცემა შეუძლებელია.

33. რომელმა მოსწავლემ გადაიღო ყველაზე მეტი სპორტის შესახებ?
ა) ლევანმა ბ) პაატამ
გ) ნიკამ დ) პასუხის გაცემა შეუძლებელია.

34. რომელი მოსწავლე უფრო არის გატაცებული სპორტულ თემაზე გადაღებით?
ა) ლევანი ბ) პაატა
გ) ნიკა დ) პასუხის გაცემა შეუძლებელია.

35-37. მაღაზიამ გაზაფხულზე 248 გამათბობელი გაყიდა.

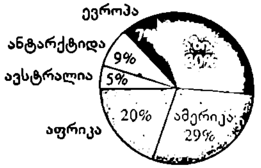


დიაგრამაზე გამოსახულია წლის განმავლობაში გაყიდული გამათბობელების ოდენობების განაწილება წელიწადის დროების მიხედვით. უპასუხეთ კითხვებს:

35. რამდენი გამათბობელი გაიყიდა მთელი წლის განმავლობაში?
ა) 310 ბ) 3000 გ) 3100 დ) 31000.

36. რამდენით მეტი გამათბობელი გაიყიდა შემოდგომაზე, ვიდრე ზამთარში?
ა) 93-ით ბ) 90-ით გ) 930-ით დ) 910-ით.

37. რამდენით მეტი გამათბობელი გაიყიდა ზამთარში და შემოდგომაზე წელიწადის დანარჩენ დროებთან შედარებით?
ა) 74-ით ბ) 2290-ით გ) 2294-ით დ) 2292-ით.



38-39. წრიულ დიაგრამაზე წარმოდგენილია დედამიწის ხმელეთის ზედაპირის (მიახლოებით 150 მლნ. კმ^2) განაწილება მსოფლიოს კონტინენტების მიხედვით. ისარგებლეთ ამ დიაგრამით და უპასუხეთ კითხვებს:

38. რომელი ნაწილია ყველაზე დიდი (ფართობით)?
ა) აზია ბ) ამერიკა
გ) აფრიკა დ) ევროპა.

39. მიახლოებით რამდენი კმ^2-ია აფრიკის ფართობი?

ა) 30 მლნ. კმ^2 ბ) 300 მლნ. კმ^2 გ) 3000 მლნ. კმ^2 დ) 0,3 მლნ. კმ^2.

40. სვეტოვანი დიაგრამით ერთ-ერთი სკოლის მე-7 კლასებში მოსწავლეთა ოდენობებია წარმოდგენილი.

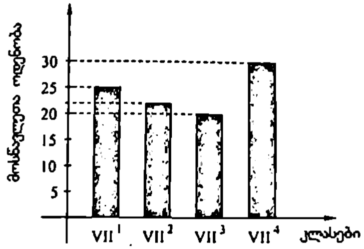
რა ინფორმაცია არ არის წარმოდგენილი ამ დიაგრამით?

ა) VII^1 კლასში მეტი მოსწავლეა, ვიდრე VII^3-ში

ბ) VII^2 კლასში ნაკლები მოსწავლეა, ვიდრე VII^4-ში

გ) VII^4-ში გოგონები მეტია, ვიდრე VII^3-ში

დ) VII^2-ში მეტი მოსწავლეა, ვიდრე VII^3-ში.



41. ცხრილით მოცემულია სიმღერის შემსწავლელ ერთ-ერთ ჯგუფში 36 ბავშვის ასაკის მიხედვით განაწილება.

ასაკი	5	6	7	8	9
ბავშვების ოდენობა	9	10	5	6	7

ამ ცხრილის მიხედვით შეადგინეთ

ა) წერტილოვანი დიაგრამა

ბ) სვეტოვანი დიაგრამა.

42. მოცემული ცხრილის მეორე სვეტში ჩაწერილია ბიბლიოთეკიდან ერთ-ერთი კვირის დღეებში გატანილი წიგნების ოდენობები, მესამე სვეტში — დაბრუნებული წიგნების ოდენობები.

კვირის დღეები	გატანილი წიგნების ოდენობები	დაბრუნებული წიგნების ოდენობები
ორშაბათი	17	8
სამშაბათი	22	29
ოთხშაბათი	25	20
ხუთშაბათი	10	33
პარასკევი	27	14
ჯამი	101	104

გამოსახეთ მონაცემები წერტილოვანი და ხაზოვანი დიაგრამებით.

43. ცხრილში მოცემულია წლის პირველი 6 თვის განმავლობაში ერთ-ერთი ქარხნის მიერ გამოშვებული ხელსაწყოების ოდენობები. შეადგინეთ შესაბამისი ხაზოვანი დიაგრამა.

თვე	I	II	III	IV	V	VI
ხელსაწყოების ოდენობა (ათასები)	2,3	2,2	2,5	2,6	2,8	1,9

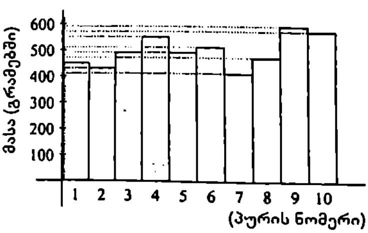
44. დიაგრამაზე მოცემულია საცხობში შემთხვევით შერჩეული 10 ცალი თონის პურის მასა.

უპასუხეთ კითხვებს:

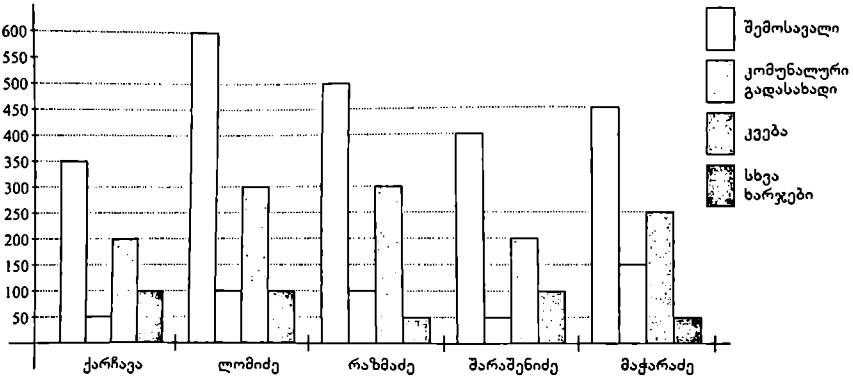
ა) რამდენი ცალი პურის მასაა 500 გრამზე ნაკლები, 500 გრამზე მეტი?

ბ) რას უდრის შერჩეული 10 პურის საშუალო მასა?

გ) რამდენი გრამით განსხვავდება შერჩეული პურების საშუალო მასა 500 გრამისგან?



45. სვეტოვან დიაგრამაზე მოცემულია ხუთი ოჯახის შემოსავალი და გასავალი (ლარებში) ერთი თვის განმავლობაში.



დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ კითხვებს:

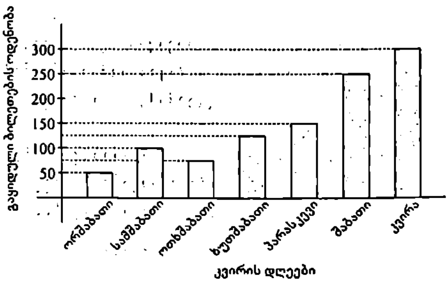
ა) რომელ ოჯახს ჰქონდა ამ თვეში ყველაზე მეტი შემოსავალი?

ბ) რომელმა ოჯახმა დახარჯა ყველაზე მეტი თანხა კვებაზე?

გ) ჩამოთვალეთ დასახელებული ოჯახებიდან თითოეულის კომუნალური გადასახადი. გამოთვალეთ საშუალო კომუნალური გადასახადი ერთ ოჯახზე მოცემულ თვეში.

დ) გამოთვალეთ თითოეული ოჯახის დანაზოგი მოცემულ თვეში.

46. დიაგრამაზე მოცემულია ერთ-ერთ კინოთეატრში კვირის დღეების მიხედვით გაყიდული ბილეთების ოდენობა. ამ დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ კითხვებს:



ა) რომელ დღეს გაიყიდა ყველაზე მეტი ბილეთი?

ბ) რომელ დღეს გაიყიდა 2-ჯერ მეტი ბილეთი, ვიდრე ორშაბათს?

გ) რამდენი ბილეთი გაიყიდა ხუთშაბათს?

დ) რომელ დღეს გაიყიდა 100 ბილეთი?

ე) რომელ დღეს გაიყიდა 100 ბილეთზე მეტი? 100 ბილეთზე ნაკლები?

ვ) მიახლოებით რამდენი ბილეთი გაიყიდა შვიდივე დღეში?

ზ) საშუალოდ რამდენი ბილეთი იყიდებოდა ამ კვირის დღეებში?

47. იპოვეთ იმ ცენტრული კუთხის ზომა, რომელიც წრიულ დიაგრამაზე მოცემულ პროცენტს წარმოადგენს:

ა) 62%; ბ) 30%; გ) 12,5%; დ) 25%.

48. მოცემულია წლის განმავლობაში სამ სხვადასხვა ქვეყანაში შექმნილი კინოფილმების ოდენობათა ცხრილი:

ქვეყნები	ფილმების ოდენობა
I	133
II	106
III	278

ა) შეადგინეთ ამ ცხრილის შესაბამისი სვეტოვანი დიაგრამა. ვერტიკალურ წრფეზე აიღეთ დანაყოფები: 0, 100, 200, 300 (კინოფილმების ოდენობები).

ბ) შეადგინეთ წრიული დიაგრამა.

№	მოსწავლის გვარი	უმაღლეს შეფასებათა ოდენობა
1	ადეიშვილი	18
2	ბენდუქიძე	5
3	გიორგაძე	30
4	დადიანი	14
5	ვაშაკიძე	8
6	ზოდელავა	26
7	თაბაგარი	2
8	იაძე	7
9	კარიაული	9
10	ლომაძე	16
11	მინდელი	21
12	ჭანტურია	18

49. ცხრილში მოცემულია ერთ-ერთი კლასის მოსწავლეთა სია და ამ მოსწავლეების სასწავლო წლის მანძილზე მიღებული უმაღლეს შეფასებათა ოდენობები. ეს ცხრილი მოსწავლეთა რეიტინგის გარკვეული მაჩვენებელია.

წარმოადგინეთ იგივე მონაცემები სვეტოვანი დიაგრამის სახით და უპასუხეთ კითხვებს:

ა) რომელი მოსწავლე იღებს ფრიადებს დანარჩენებზე ხშირად, იშვიათად?

ბ) რომელი მოსწავლეების მაჩვენებლებია მიახლოებით ერთნაირი?

50. ავტომობილების მაღაზია სამი მარკის ავტომობილებზე მოსახლეობის მოთხოვნილების შესწავლით წარმატებულ ვაჭრობას გეგმავს. აქ მოცემულია ამ ავტომობილების გაყიდვის ამსახველი ცხრილი:

თვე	გაყიდული ავტომანქანების ოდენობები		
	„ოპელი"	„ფორდი"	„მერსედესი"
იანვარი	57	116	23
თებერვალი	68	108	37
მარტი	54	125	61
აპრილი	45	120	75

წარმოადგინეთ ეს მონაცეები სვეტოვანი დიაგრამის სახით.

აგებული დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ კითხვებს:

ა) იანვარში რომელი მარკის ავტომანქანებზე იყო ყველაზე მეტი მოთხოვნილება?

ბ) რომელი მარკის ავტომანქანებზე იყო ყველაზე მეტი მოთხოვნილება ოთხივე თვის განმავლობაში?

გ) რომელი მარკის ავტომანქანებზე იზრდებოდა მოთხოვნილება თვეების მიხედვით?

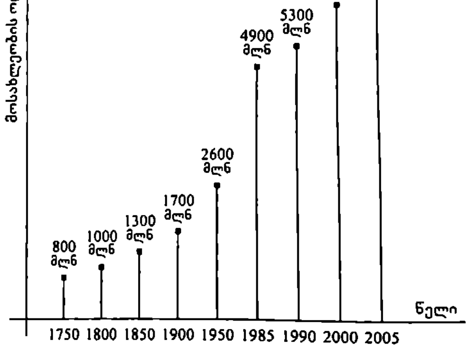
დ) რომელი მარკის ავტომანქანების მეტი ოდენობით (აპრილის მონაცემებთან შედარებით) შეტანას ურჩევდით შემდეგ თვეში მაღაზიას?

51. დიაგრამა გვიჩვენებს, როგორ იცვლებოდა (მიახლოებით) მსოფლიოს მოსახლეობის ოდენობა წლების მიხედვით. დიაგრამის ასაგებად გამოყენებულია მასშტაბი — 1მმ სიგრძის მონაკვეთი 100 მილიონს შეესაბამება, ანუ 1:100 მილიონს.

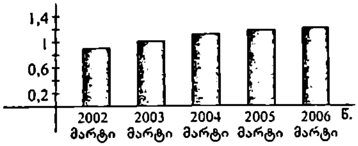
ა) რა რიცხვების პროპორციულია სვეტების სიგრძეები?

ბ) რა ტენდენცია შეიმჩნევა დიაგრამის მიხედვით?

გ) ვთქვათ, შენარჩუნდა მოსახლეობის ზრდის ტემპი. გამოთქვით ვარაუდი მსოფლიოში მოსახლეობის ოდენობის შესახებ, მაგალითად 2008 წლისთვის?

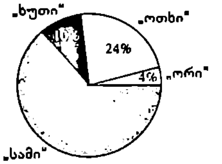


52. სურათზე მოცემული დიაგრამით აღწერილია ევროს კურსის დოლარის კურსთან დამოკიდებულება 2002 წლიდან 2006 წლამდე (მიახლოებით).



ა) მიახლოებით რამდენი პროცენტით მოიმატა ევროს კურსმა დოლარის მიმართ 2006 წელს 2002 წელთან შედარებით?

ბ) ცნობილია, რომ 2006 წლის მარტში 1 დოლარი იცვლებოდა 1,8 ლარზე. რამდენ ლარზე იცვლებოდა ამ დროს 1 ევრო?



53. სურათზე 50 სპორტსმენის შეფასების პროცენტული მონაცემებია. დახაზეთ ამავე მონაცემების აღსაწერად სვეტოვანი დიაგრამა.

54. გაეცანით და შეადარეთ ერთმანეთს ჭვავის, ხორბლის I ხარისხისა და ხორბლის II ხარისხის ფქვილისგან დამზადებული პურის კვებითი ღირებულებების ზოგიერთი მონაცემი (განიხილება თითოეული სახეობის 100 გრამი პური). ყოველი ნიშნის მიხედვით შეადგინეთ სვეტოვანი დიაგრამა.

პურის სახეობა	კალციუმი (მგ)	ფოსფორი (მგ)	მაგნიუმი (მგ)	რკინა (მგ)	კალორიულობა (კკალ)
ჭვავის	21	174	57	3,6	170
ხორბლის I ხ.	26	82	35	1,6	240
ხორბლის II ხ.	23	131	51	3,2	218

55. მათემატიკაში ტრიმესტრული შეფასებების მიხედვით ერთ-ერთი კლასის მოსწავლეები შემდეგნაირად განაწილდნენ:

შეფასება	მოსწავლეთა ოდენობა
9-10	3
7-8	10
6	17
6-ზე ნაკლები	2

შეადგინეთ შესაბამისი სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები.

56. ერთ-ერთ ფერმაში ნათესების განაწილება შემდეგი სახით წარმოგვიდგება:

ხორბლის ნათესებს უკავია მთელი ფართობის 63%,

ქერს — 16%,

სიმინდს — 12%,

ლობიოს — 9%.

შეადგინეთ შესაბამისი წრიული დიაგრამა.

57. ცხრილით მოცემულია ერთ-ერთი დაწესებულების თანამშრომელთა განაწილება სამუშაო სტაჟის მიხედვით:

სამუშაო სტაჟი	არაუმეტეს 3 წელი	4 წელი	5 წელი	6 და მეტი წელი
ფარდობითი სიხშირე (%)	8	12	16	64

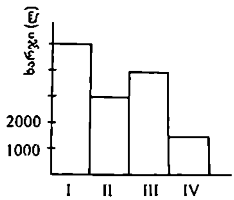
შეადგინეთ წრიული დიაგრამა ამ მონაცემების მიხედვით.

58. დიაგრამაზე საწარმოს ოთხი განყოფილების მთელი წლის ხარჯია გამოსახული.

ა) გამოთვალეთ საწარმოს მთელი წლის ხარჯი (ოთხივე განყოფილების);

ბ) დაადგინეთ: მთელი ხარჯის რამდენი პროცენტია (მიახლოებით) თითოეული განყოფილების ხარჯი.

გ) შეადგინეთ წლიური ხარჯის წრიული დიაგრამა.



59. ცხრილში მოცემულია მონაცემები ძირითად ნავთობმომპოვებელ ქვეყნებში ნავთობის ყოველდღიური მოპოვების შესახებ (1 ბარელი — 159 ლიტრია).

შეადგინეთ სათანადო სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები, რომელიც გვიჩვენებს ამ ქვეყნებს შორის ნავთობის დღიური მოპოვების თანაფარდობას.

ქვეყნები	დღიური მოპოვება (მლნ. ბარელი)
საუდის არაბეთი	10,4
რუსეთი	9,3
აშშ	8,7
ირანი	4,1
მექსიკა	3,8

60. ამ ცხრილში მოცემულია ნავთობის მთელი მარაგის ოდენობები ძირითად ნავთობმომპოვებელ და უდიდესი მარაგის მქონე ქვეყნებში.

შეადგინეთ სათანადო სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები.

ქვეყნები	ნავთობის მარაგი (მლნ. ბარელი)
საუდის არაბეთი	267
რუსეთი	60
აშშ	21
ირანი	132
მექსიკა	13
კანადა	179
კუვეიტი	104
ერაყი	115
გაერთიანებული ემირატები	98
ვენესუელა	79

61. ცხრილში მოცემულია ევროპის ხუთი საუკეთესო გუნდის მიერ ჩემპიონთა ლიგაში მონაწილეობისას აღებული თანხები (გარკვეულ პერიოდში). შეეცადეთ მიახლოებით ააგოთ შესაბამისი სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები.

№	კლუბი	თამაშებში მონაწილეობისთვის აღებული თანხა (დოლარი)	რეკლამებში აღებული თანხა (დოლარი)	სულ (დოლარი)
1	არსენალი	25 672 125	29 999 000	55 671 125
2	ბარსელონა	28 228 125	20 733 000	48 961 125
3	ლიონი	14 328 125	25 162 000	39 490 125
4	ჩელსი	10 578 125	28 084 000	38 662 125
5	მილანი	17 578 125	14 284 000	31 862 125

ოჯახის თვიური დანახარჯები	
კვება	35%
ტანსაცმელი	5%
ჯანმრთელობა	10%
ტრანსპორტი	12%
განათლება	8%
გადასახადები	20%
სხვა ხარჯები	10%

62. ცხრილით მოცემულია ერთ-ერთი ოჯახის საშუალო თვიური შემოსავლის განაწილების შესახებ გამოკითხვის შედეგები.

ა) ააგეთ წრიული დიაგრამა.

ბ) გამოთვალეთ ოჯახის მთლიანი თვიური დანახარჯი, თუ ცნობლია, რომ განათლებაზე დაიხარჯა 192 ლარი.

63. ცხრილით მოცემულია დედამიწის ხმელეთის ზედაპირის ფართობის განაწილება კონტინენტების მიხედვით:

ა) მიახლოებით რამდენი კვადრატული კილომეტრია დედამიწის ხმელეთის ზედაპირის ფართობი?

ბ) დედამიწის ხმელეთის ზედაპირის რამდენი პროცენტია ევრაზიის ფართობი?

გ) ააგეთ კონტინენტების მიხედვით ფართობის განაწილების წრიული დიაგრამა.

დ) ცნობილია, რომ ევროპის ხმელეთის ფართობი დედამიწის მთელი ხმელეთის ფართობის მიახლოებით 7%-ია. რამდენი პროცენტია აზიის ფართობი?

კონტინენტები	ფართობი
აფრიკა	29,22 მლნ კმ^2
ავსტრალია	7,56 მლნ კმ^2
სამხრეთ ამერიკა	18,13 მლნ კმ^2
ჩრდილოეთ ამერიკა	20,36 მლნ კმ^2
ევრაზია	53,44 მლნ კმ^2
ანტარქტიდა	12,40 მლნ კმ^2

64. ერთიანი ეროვნული გამოცდებისთვის მზადების პერიოდში ჩატარდა მოსამზადებელი წერა მათემატიკაში. შედეგები ასეთი იყო: 0-29 ქულა მიიღო მოსწავლეთა საერთო ოდენობის 12%-მა; 30-59 ქულა — 55%-მა; 60-84 ქულა — 29%-მა, 85-100 ქულა — 4%-მა. შეადგინეთ მოსწავლეთა ნიშნების განაწილების წრიული დიაგრამა.

65. 50 მოსწავლეს დაუსვეს შეკითხვა: რამდენი წიგნი წაიკითხეს ზაფხულის არდადეგებზე? პასუხების მიხედვით შედგენილია სვეტოვანი დიაგრამა.

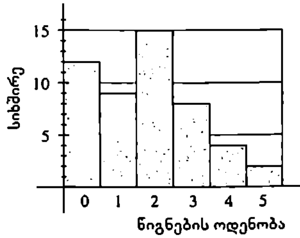
ა) დიაგრამის მიხედვით — რამდენ მოსწავლეს არ წაუკითხავს წიგნი არდადეგებზე?

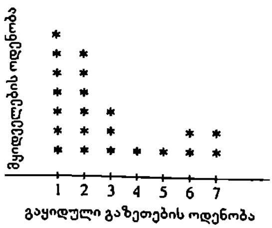
ბ) რამდენ წიგნს ასახელებდნენ ყველაზე ხშირად მოსწავლეები?

დაასახელეთ ასეთ მოსწავლეთა რიცხვი.

გ) რამდენით მეტია იმ მოსწავლეთა რაოდენობა, რომლებმაც 3 წიგნი წაიკითხეს იმ მოსწავლეთა რაოდენობაზე, რომლებმაც 5 წიგნი წაიკითხეს?

დ) რამდენმა წაიკითხა 2 ან მეტი წიგნი?





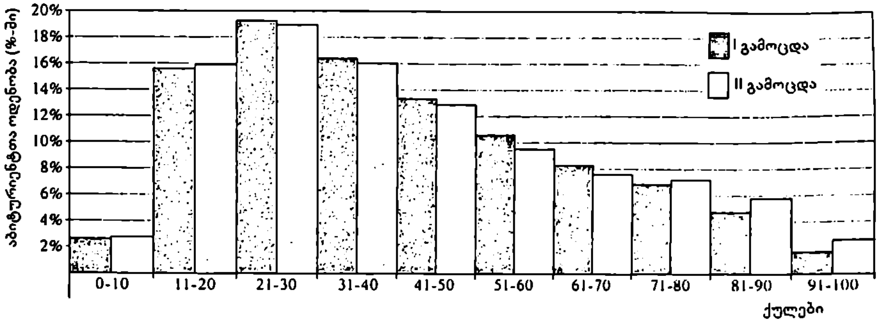
66. გაზეთების გამყიდველი აღრიცხავს რამდენი გაზეთი მიყიდა თითოეულ მყიდველს დღის პირველ ნახევარში. წერტილოვანი დიაგრამა ამ რაოდენობების შესაბამისადაა შედგენილი.

ა) რამდენით მეტია იმ მყიდველების რიცხვი, რომლებმაც 2 გაზეთი იყიდეს, იმ მყიდველების ოდენობაზე, რომლებმაც 4 გაზეთი იყიდეს?

ბ) რამდენმა იყიდა 3-ზე მეტი გაზეთი?

გ) სულ რამდენი გაზეთი გაიყიდა დღის პირველ ნახევარში?

67. აქ გამოსახულ ჰისტოგრამაზე წარმოდგენილია მათემატიკაში 2005 წლის ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე აბიტურიენტთა მიერ მოპოვებული ქულების განაწილება



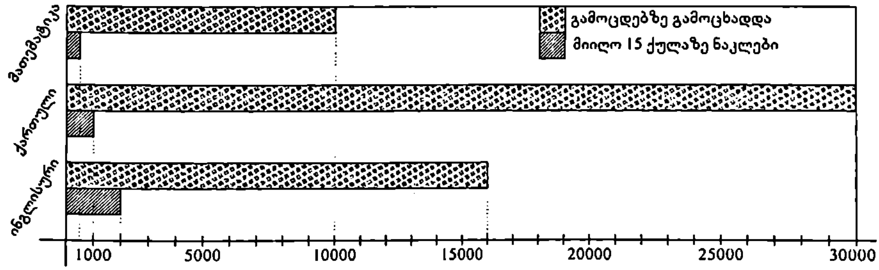
ა) რამდენმა აბიტურიენტმა (%-ებში) გადალახა 50-ქულიანი ზღვარი I გამოცდაზე, II გამოცდაზე?

ბ) აბიტურიენტთა რამდენი პროცენტის შეფასება იყო 11-დან 50-ქულამდე I გამოცდაზე, II გამოცდაზე?

გ) როგორ შეაფასებდით იმ აბიტურიენტთა რიცხვს, რომლებმაც მოაგროვეს 76 ქულა I გამოცდაზე, II გამოცდაზე?

68. მოცემულია სვეტოვანი დიაგრამა, რომელიც ასახავს მათემატიკაში, ქართულსა და ინგლისურში ერთ-ერთი წლის ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე გამოცხადებულ აბიტურიენტთა და ამ გამოცდებზე ჩაჭრილთა (ვინც ვერ გადალახა 15-ქულიანი ზღვარი) ოდენობებს.

მიახლოებით რამდენი აბიტურიენტი გამოცხადდა თითოეულ გამოცდაზე და მათგან რამდენმა გადალახა 15-ქულიანი ზღვარი?



69. ყოველწლიურად მიახლოებით 60 მილიონ ავტომობილს უშვებს მსოფლიოს სხვადასხვა ქვეყნის ავტოქარხნები. ავტომობილების 36% ევროპის ქვეყნებში იწარმოება, 27% — იაპონიაში, 18% — ამერიკის შეერთებულ შტატებში, 4% — კანადაში, 15% — სხვა ქვეყნებში. შეადგინეთ ავტომანქანების წარმოების მოცემული მონაცემების წრიული დიაგრამა.

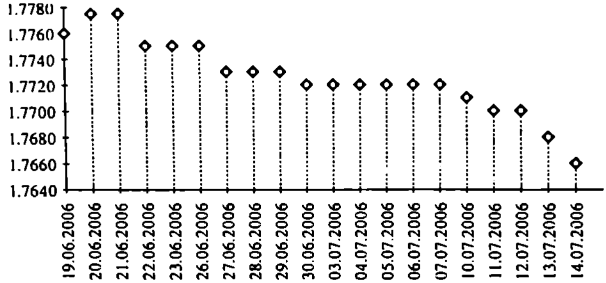
ა) მიახლოებით რამდენ ავტომანქანას აწარმოებს ამერიკის შეერთებული შტატები?

ბ) იპოვეთ წრიულ დიაგრამაში შესაბამისი კუთხეების ზომები (1^0-მდე სიზუსტით).

70. კონფერენციის 240 მონაწილიდან 72 აზერბაიჯანიდანაა, 96 — სომხეთიდან, 12 — თურქეთიდან, 60 — საქართველოდან. გამოსახეთ პროცენტულად მონაწილეთა ოდენობები ქვეყნების მიხედვით და მიღებული მონაცემებით შეადგინეთ წრიული დიაგრამა.

71. მეანაბრე აპირებს ერთი წლით 20 000 ლარის შეტანას ერთ-ერთ ბანკში. ამ ბანკის წესებით 1 წლის შემდეგ მეანაბრის თანხას დამატებით დაერიცხება შეტანილი თანხის 11,25% — სარგებელი, ფულის გამოტანისას კი დაექვითება (დაუკავდება) სახელმწიფო გადასახადი — დარიცხული სარგებლის 10%. თუ მეანაბრე ამავე თანხას აშშ დოლარების შესაბამისი ოდენობით შეცვლის და შეიტანს ბანკში, მაშინ ერთი წლის შემდეგ მას დაერიცხება შეტანილი თანხის 9,25%. ამ შემთხვევაშიც, თანხის გამოტანისას, დაექვითება დარიცხული თანხის 10%.

ვთქვათ, მეანაბრე აპირებდა თანხის შეტანას 2006 წლის 19 ივნისიდან 13 ივლისამდე — ერთ-ერთ დღეს.



დოლარის ლარში გაცვლის კურსის ცვლილება

ა) იპოვეთ 1 წლის შემდეგ ასაღები თანხა, თუ მეანაბრე თანხას შეიტანს ლარებში.

ბ) გაითვალისწინეთ ლარის კურსის მიმართება ამ პერიოდში დოლარის კურსთან და მოცემული დიაგრამის მიხედვით იპოვეთ 1 წლის შემდეგ ასაღები თანხა თითოეულ შემთხვევაში, თუ მეანაბრე თანხას შეიტანს დოლარებში.

გ) რომელ დღეს და რომელი ვალუტის (ლარისა თუ დოლარის) შეტანა აღმოჩნდებოდა უფრო ხელსაყრელი მეანაბრისთვის, თუ გაცვლის ეს კურსი არ შეიცვლება (გაითვალისწინეთ, რომ ეს ბანკი ანაბრის თანხებს უფასოდ ცვლის სხვა ვალუტაში).

დ) რამდენი ლარი შეიძლება იზარალოს მეანაბრემ თუ ვალუტისა და დღის შერჩევისას საუკეთესო ვარიანტის მაგიერ ყველაზე უარესს შეარჩევს?

§ 4.2. მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები

ა. წინა პარაგრაფში ვისაუბრეთ მონაცემების დამუშავების მიზნით ამ მონაცემთა ხელსაყრელი ფორმით — სხვადასხვა დიაგრამით წარმოდგენის შესახებ. მონაცემთა დამუშავების განხორციელებას ემსახურება მათი რიცხვითი მახასიათებლების შესწავლა. ერთ-ერთი რიცხვითი მახასიათებელია სიხშირე — რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს მონაცემთა ერთობლიობაში რამდენჯერ გვხვდება დასახელებული მონაცემი (ან დასახელებული თვისების მონაცემი).

მონაცემის ფარდობითი სიხშირე კი არის ამ მონაცემის სიხშირის შეფარდება მონაცემთა საერთო ოდენობასთან.

მაგალითი 1. ერთ-ერთი ჰუმანიტარული ორგანიზაციის დავალებით ნინომ და ბექამ ჩაატარეს გამოკითხვა, რათა დაედგინათ — რამდენშვილიანი ოჯახები ცხოვრობენ მათთვის უახლოეს საცხოვრებელ კორპუსში.

ბექა მიღებულ შედეგებს თანამიმდევრობით წერდა: 1; 2; 3; 2; 2; 3; 1; 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 2; 2; 2; 2; 3; 4; 2; 2; 3; 5; 2.

ოჯახში შვილების ოდენობა	სიხშირე
1	3
2	12
3	7
4	2
5	1

ამ ცხრილის მიხედვით სამშვილიანი ოჯახების ოდენობა არის 7, ანუ ამ მონაცემის სიხშირე არის 7. ეს მონაცემები შეიძლება **სიხშირეთა ცხრილით** წარმოვადგინოთ — მითითებული იქნება თითოეული მონაცემის სიხშირე.

ამ მონაცემთა ფარდობითი სიხშირეებია: $\frac{3}{25}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{1}{25}$. ეს რიცხვები უმჯობესია პროცენტებით გამოვსახოთ, მაშინ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი ასე წარმოგვიდგება:

ოჯახში შვილების ოდენობა	ფარდობითი სიხშირე (პროცენტებში)
1	12%
2	48%
3	28%
4	8%
5	4%

ხშირად მონაცემების დასამუშავებლად — მოსაწესრიგებლად ხელსაყრელია არა ცალკეული მონაცემების წარმოდგენა, არამედ მათი რაიმე ნიშნით დაჯგუფება. ამ შემთხვევაში ყოველ ჯგუფს ვუსაბამებთ **სიხშირეს** (დაჯგუფებულ სიხშირეს — რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს მოცემულ ჯგუფში მონაცემების ოდენობას).

მაგალითი 2. ვთქვათ, საკალათბურთო ტურნირში მონაწილე კალათბურთელების სიმაღლეები დაჯგუფებულია ინტერვალების მიხედვით: 180 სმ — 185 სმ, 186 სმ — 190 სმ, 191 სმ — 195 სმ, 196 სმ — 200 სმ და 201 სმ — 210 სმ.

ვთქვათ, პირველ ჯგუფში 12 სპორტსმენის მონაცემია, ანუ შესაბამისი დაჯგუფებული სიხშირე 12-ია, მეორე ჯგუფში — 16, მესამეში — 20, მეოთხეში — 18, მეხუთეში — 12. ამ სიხშირეთა ცხრილი ასე წარმოგვიდგება.

სიმაღლე (სმ)	180-185	186-190	191-195	196-200	201-210
სიხშირე	12	16	20	18	12

სიხშირეთა წარმოდგენილ ცხრილს ზოგჯერ **სიხშირეთა ინტერვალურ ცხრილს** უწოდებენ — მონაცემები დაჯგუფებულია ინტერვალებში და მოცემულია ამ ინტერვალებში მონაცემთა

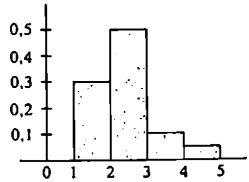
ოდენობები. შეიძლება ამ ცხრილს სვეტოვანი დიაგრამა შევუსაბამოთ — სვეტების სიმაღლეები სიხშირეთა შესაბამისია ხოლმე, მონაცემების დაჯგუფება კი, როგორც წესი, ტოლი სიგრძის ინტერვალებში ხდება. ინტერვალების ოდენობაზე მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული მონაცემთა წარმოდგენის ხარისხი — თუ ინტერვალების ოდენობა მცირეა, მაშინ განაწილების ცალკეული დეტალები შეიძლება ვერ გავითვალისწინოთ, თუ ინტერვალების ოდენობა ძალიან დიდია, მაშინ დაჯგუფებამ შეიძლება აზრიც დაკარგოს.

მაგალითი 3. ერთ-ერთი სკოლის ოცი მე-3 კლასელის ჩანთების აწონვამ შემდეგი შედეგები მოგვცა (თითოეული ჩანთის წონა კგ-ითაა მოცემული): 2,1; 2,45; 1,9; 2,6; 3,1; 1,95; 3,4; 4,3; 1,15; 2,7; 2,2; 3,2; 2,4; 2,2; 1,8; 1,5; 2,4; 2,25; 2,6; 1,75; აქ თითოეული მონაცემის სიხშირე არის 1 ან 2. ცხადია, ამ შემთხვევაში საინტერესო დასკვნების კარგ შესაძლებლობას მოგვცემს მონაცემთა წარმოდგენა სიხშირეთა ინტერვალური ცხრილით. 1-დან 5 კგ-მდე ინტერვალი 4 ტოლ ინტერვალად დავყოთ, მაშინ სიხშირეთა ცხრილი ასე წარმოგვიდგება.

ჩანთის მასა (კგ)	სიხშირე	ფართობითი სიხშირე
1-დან 2-მდე	6	0,3
2-დან 3-მდე	10	0,5
3-დან 4-მდე	3	0,15
4-დან 5-მდე	1	0,05

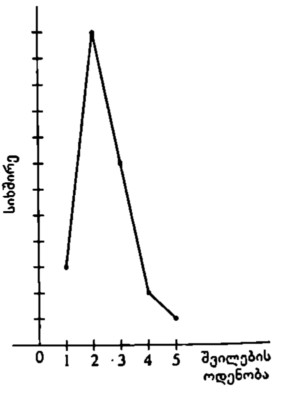
თუ მონაცემი ხვდება ორი ინტერვალის საზღვარზე, იგი ერთ-ერთს მივაკუთვნოთ (ვთქვათ, მარჯვენა ინტერვალს). მაგალითად, თუ ერთ-ერთი ჩანთის წონა იქნებოდა 3 კგ, მას მივაკუთვნებდით ინტერვალს „3-დან 4-მდე".

ფარდობით სიხშირეთა ცხრილის წარმოდგენა სვეტოვანი დიაგრამით (ჰისტოგრამით)



ცხრილი შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ დიაგრამით — **სვეტოვანი დიაგრამით** (მას სიხშირეთა **ჰისტოგრამა** ეწოდება): ჰორიზონტალურ ღერძზე მოვნიშნავთ ინტერვალებს და მათზე ავაგებთ მართკუთხედებს, რომელთა სიმაღლეები სიხშირეების (ან ფარდობითი სიხშირეების) შესაბამისია.

სიხშირეთა ცხრილი, რომელიც პირველ მაგალითებშია მოცემული შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ **სიხშირეთა პოლიგონით** — ტეხილით; ჰორიზონტალურ ღერძზე წარმოვადგენთ მონაცემებს, ვერტიკალურ ღერძზე — სიხშირეებს (ან ფარდობით სიხშირეებს). მათ შესაბამის წერტილებს შევაერთებთ წრფის მონაკვეთებით. მიიღება სიხშირეთა პოლიგონი (ან ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი).



ბ. წინა ნაწილში წარმოდგენილი იყო მონაცემთა ერთობლიობის ის რიცხვითი მახასიათებლები, რომლებიც ცხრილებით და შესაბამისი დიაგრამებით იყო მოცემული, ახლა სხვა რიცხვითი მახასიათებლები განვიხილოთ.

რიცხვით მონაცემთა საშუალო ეწოდება ყველა ამ რიცხვის ჯამის შეფარდებას ამ მონაცემთა ოდენობასთან:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

(x_1, x_2, ..., x_n მოცემული რიცხვებია, $\bar{x}$ — ამ რიცხვების არითმეტიკული საშუალოა. სტატისტიკაში — $\bar{x}$ არის x_1, x_2, ... x_n მონაცემთა საშუალო). ეს მახასიათებელი ძალიან ხშირად გამოიყენება. მაგალითად, — „საშუალო შემოსავალი", „საშუალო შეფასება", „საშუალო ხელფასი" და ა. შ.

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოსწავლის შეფასებები მათემატიკაში პირველ ტრიმესტრში იყო:

10; 6; 9; 10; 10; 9; 9; 10; 10; 10.

ვიპოვოთ საშუალო ქულა:

$$\bar{x} = \frac{10 + 6 + 9 + 10 + 10 + 9 + 9 + 10 + 10 + 10}{10} = 9{,}3.$$

საშუალო ქულა არც ერთ შეფასებას არ ემთხვევა; რა ნიშნით შეიძლება შევაფასოთ მოსწავლე პირველ ტრიმესტრში? მიღებული საშუალოს მიხედვით, ეს შეფასება შეიძლება იყოს 9 ქულა. თუმცა, შეიძლება 10 ქულის დაწერაც. 10 ქულა ხომ ყველაზე ხშირად გვხვდება მონაცემებში? ასეთ რიცხვით მახასიათებელს **მოდა** ეწოდება.

რიცხვით მონაცემთა მოდა ეწოდება იმ რიცხვს, რომელიც მონაცემებში ყველაზე ხშირად გვხვდება. ჩვენს მაგალითში მოდა არის 10. რიცხვით მონაცემებს შეიძლება რამდენიმე მოდა ჰქონდეს.

მაგალითად, 47; 46; 50; 52; 47; 52; 49; 45; 43; 53 — აქ ორი მოდა გვაქვს, 47 და 52; თითოეული მათგანი 2-ჯერ გვხვდება, დანარჩენებიდან თითოეული — ერთხელ.

12; 8; 10; 7; 9 — მონაცემთა ერთობლიობაა, რომელსაც მოდა არა აქვს — არცერთი რიცხვი აქ არ გვხვდება უფრო ხშირად, ვიდრე სხვა რომელიმე.

მონაცემთა ერთობლიობის კიდევ ერთი მახასიათებელია **მედიანა.**

ვთქვათ, მონაცემები ზრდის მიხედვითაა დალაგებული. თუ ამ მონაცემთა ოდენობა კენტია, მაშინ მედიანა შუა რიცხვია, თუ მონაცემთა ოდენობა ლუწია, მაშინ მედიანა ორი „შუა" რიცხვის საშუალოა.

მაგალითი 2. ვთქვათ, შვიდი სხვადასხვა საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის მოცულობები პროპორციულია რიცხვების: 5; 3; 2; 6; 8; 9 და 51.

საწარმოთა ამ ჯგუფის მიერ გამოშვებული პროდუქციის შესაფასებლად ვიპოვოთ რიცხვების საშუალო:

$$\frac{5 + 3 + 2 + 6 + 8 + 9 + 51}{7} = \frac{84}{7} = 12.$$

ეს საშუალო შვიდი რიცხვიდან ექვსზე მეტია, ამიტომ იგი კარგად ვერ აღწერს მონაცემთა ერთობლიობას.

დავალაგოთ რიცხვები ზრდის მიხედვით — 2; 3; 5; 6; 8; 9; 51.

აქ შუა რიცხვი არის 6. ეს რიცხვიც არ არის მწკრივის საუკეთესო მახასიათებელი, თუმცა, იგი შეიძლება მივიჩნიოთ უკეთეს მაჩვენებლად, ვიდრე საშუალოა. საშუალო რომ არ არის მოცემულ მონაცემთა საუკეთესო მაჩვენებელი იქიდანაც ჩანს, რომ ერთი რიცხვის (51-ის) ამოგდების შემდეგ საშუალო მკვეთრად იცვლება.

მაგალითი 3. მაღაზიაში ლურსმნები წონით იყიდება, ერთ კილოგრამში ლურსმნების რაოდენობის შეფასების მიზნით გადაწყვიტეს გაეგოთ ერთი ლურსმნის წონა. აწონეს 8 ლურსმანი. აწონვის შედეგებმა (გრამებში) მოგვცა მონაცემები: 4,47; 4,44; 4,64; 4,32; 4,45; 4,54; 4,56; 4,32.

რომელი მახასიათებლით შეიძლება უკეთესად შევაფასოთ ერთი ლურსმნის წონა?

ვიპოვოთ სამივე მახასიათებელი. $\bar{x}$(საშუალო), *Mo* (მოდა), *Me* (მედიანა).

$$\bar{x}=4{,}47;\ Mo=4{,}32;\ Me=4{,}46.$$

მათგან, ამოცანის პირობის მიხედვით, ყველაზე კარგი მახასიათებელი საშუალოა, მედიანაც შეიძლება გამოვიყენოთ 1 ლურსმნის წონის შესაფასებლად. მოდა კი ნაკლებად შეიძლება გამოვიყენოთ, რადგან მხოლოდ ორი რიცხვია ერთნაირი და 4,32 არ შეიძლება რაიმე კანონზომიერებას იძლეოდეს.

თუ მონაცემები სიხშირეთა ცხრილითაა მოცემული, მაშინ როგორ გამოვითვალოთ მახასიათებლები?

ვთქვათ, მონაცემებია x_1; x_2; x_3; ...; x_k, შესაბამისი სიხშირეებია n_1, n_2, n_3, ..., n_n, ფარდობითი სიხშირეებია f_1, f_2, f_3, ..., f_k, მაშინ, ცხადია,

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_n \cdot n_n}{n}; \quad \bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k.$$

მონაცემთა მოდის დასადგენად უნდა ვიპოვოთ ამ მონაცემთა სიხშირეებს შორის მაქსიმალური მნიშვნელობები და შევარჩიოთ მათი შესაბამისი მონაცემები.

საშუალოს, მოდასა და მედიანას **ცენტრალური ტენდენციის საზომებს** ან „საშუალო" საზომებსაც უწოდებენ.

ახლა **გაფანტულობის საზომები** განვიხილოთ:

მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი ეწოდება ამ მონაცემებიდან უდიდესისა და უმცირესის სხვაობას.

პლანეტა მერკურიზე საშუალო ტემპერატურაა $+15^0$-ია. ამ მონაცემის მიხედვით შეიძლება შეგვექმნას შთაბეჭდილება, რომ მერკურიზე ზომიერი ჰავაა. სინამდვილეში ტემპერატურა ამ პალანეტაზე -150^0-დან $+350^0$-მდე მერყეობს. მერკურის კლიმატის უკეთესად დაახასიათებს გაბნევის დიაპაზონი: $350^0-(-150^0)=500^0$. ცხადია, ტემპერატურის ასეთი ცვლილების პირობები არ შეიძლება ჩაითვალოს ზომიერ კლიმატად, ადამიანების საცხოვრებლად ხელსაყრელ გარემოდ.

გაბნევის დიაპაზონი ადვილად გამოითვლება, თუმცა, ყოველთვის არ იძლევა საკმარის ინფორმაციას მონაცემთა მწკრივის შესახებ. ამიტომ უფრო ხშირად გაფანტულობის სხვა სტატისტიკური მახასიათებელი — საშუალო კვადრატული **გადახრა** (სტანდარტული გადახრა) გამოიყენება.

ვთქვათ, მონაცემთა მწკრივია

$$x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n.$$

ვპოულობთ ამ მონაცემთა საშუალოს:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$x_1+x_2+\dots+x_n$ შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$x_1+x_2+\dots+x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \text{ ე. ი. } \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}.$$

ვპოულობთ თითოეული რიცხვისა და ამ საშუალოს სხვაობას:

$$x_1-\bar{x};\ x_2-\bar{x};\ \dots;\ x_n-\bar{x}.$$

ვპოულობთ მიღებული სხვაობების კვადრატების საშუალოს

$$D = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}{n}.$$

ამ რიცხვს **დისპერსია** ეწოდება, მაშინ $D = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} (x_k-\bar{x})^2}{n}$.

ვპოულობთ კვადრატულ ფესვს ნაპოვნი საშუალოდან (დისპერსიიდან):

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}{n}}.$$

მიღებულ რიცხვს ეწოდება მონაცემთა **საშუალო კვადრატული გადახრა** (სტანდარტული გადახრა). ამ რიცხვით ვპოულობთ საშუალოდან გადახრას — საშუალოს მიმართ მონაცემების სიახლოვეს.

დისპერსიის ნაცვლად თითოეული რიცხვისა და საშუალოს სხვაობების საშუალო რომ გამოგვეთვალა ნულს მივიღებდით, მართლაც,

$$\frac{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\dots+(x_n-\bar{x})}{n}=\frac{x_1+x_2+\dots+x-n\bar{x}}{n}=\bar{x}-\bar{x}=0.$$

მაგალითი 4. ვთქვათ, მონაცემები სიხშირეთა ცხრილითაა მოცემული; მოსწავლის ნიშნები ასეა წარმოდგენილი:

შეფასება	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
6	1	0,1
9	3	0,3
10	6	0,6
სულ	10	1

გაბნევის დიაპაზონი: 10–6=4.

საშუალო ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს: $\bar{x}=9{,}3$. საშუალო კვადრატული გადახრა სხვადასხვა ხერხით შეიძლება გამოვითვალოთ:

I ხერხი:

სიხშირეები

$$D=\frac{(6-9{,}3)^2\cdot 1+(9-9{,}3)^2\cdot 3+(10-9{,}3)^2\cdot 6}{10},$$ მაშასადამე, $\sigma=\sqrt{D}\approx 1{,}26.$

II ხერხი:

$$(6-9{,}3)^2\cdot 0{,}1+(9-9{,}3)^2\cdot 0{,}3-(10-9{,}3)^2\cdot 0{,}6=1{,}61.$$

ფარდობითი სიხშირეები

$$\sigma\approx 1{,}26.$$

✓1. ვთქვათ, რიცხვითი მონაცემებია: 2; 2; 3; 3; 3; 5; 5; 5. ამ მონაცემებში 3-ის სიხშირეა
ა) 2 ბ) 3 გ) 1 დ) 8.

✓2. წინა ამოცანაში წარმოდგენილ მონაცემებში 3-ის ფარდობითი სიხშირე (გამოსახული პროცენტებში) არის
ა) 75% ბ) 37,5% გ) 32,5% დ) 35%.

✓3. ვთქვათ, რიცხვითი მონაცემებია 5; 5; 6; 6; 6; 10. ამ მონაცემების სიხშირეთა ცხრილია:

ა)

რიცხვი	5	6	10
სიხშირე	2	3	1

ბ)

რიცხვი	5	6	10
სიხშირე	8	2	6

გ)

რიცხვი	5	6	10
სიხშირე	2	1	5

დ)

რიცხვი	5	6	10
სიხშირე	2	6	10

✓4. თუ კამათლის 12-ჯერ გაგორებისას რიცხვი 4 მოვიდა მხოლოდ 3-ჯერ, მაშინ რიცხვი 4-ის მოსვლის ფარდობითი სიხშირეა
ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{2}{5}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{3}{10}$.

✓5. თუ მონეტის 20-ჯერ აგდებისას გერბი გამოჩნდა მხოლოდ 9-ჯერ, მაშინ გერბის მოსვლის ფარდობითი სიხშირეა
ა) 0,5 ბ) 0,8 გ) 0,9 დ) 0,45.

✓6. ათი მონეტა ააგდეს ერთდროულად და ჩაინიშნეს იმ მონეტების ოდენობა, რომლებიც გერბით „მოვიდა". ეს ცდა 50-ჯერ გაიმეორეს და შედეგები ჩაინიშნეს:

5, 4, 5, 6, 2, 6, 8, 6, 3, 4, 5, 8, 5, 2, 5, 2, 5, 7, 3, 3, 5, 4, 5, 5, 6,
5, 7, 6, 3, 5, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 5, 4, 7, 4, 5, 4, 5, 7, 7, 7, 6, 6, 4, 4;

ამ მონაცემებიდან უდიდესი ფარდობითი სიხშირე აქვს

ა) 5-ს ბ) 4-ს გ) 3-ს დ) 7-ს.

✓7. შეადგინეთ წინა ამოცანაში მოცემული რიცხვების ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი (რიცხვები განალაგეთ ზრდის მიხედვით) და წარმოადგინეთ შესაბამისი პოლიგონი.

✓8. მოცემულია რიცხვები: 3; −4; 6; −2; 4,5. მათი არითმეტიკული საშუალოა

ა) 1,5 ბ) −1,5 გ) 0 დ) 3,75.

✓9. მოცემულია სპორტსმენის მაჩვენებლები 100 მ-ზე სირბილში სხვადასხვა შეჯიბრების დროს:

9,8; 9,9; 10,3; 10,5; 10,7; 10,7; 10,8; 10,9;

ამ მონაცემთა მწკრივის მოდაა

ა) 10,8 ბ) 10,9 გ) 10,5 დ) 10,7.

✓10. წინა ამოცანაში მოცემულ მონაცემთა მედიანაა

ა) 10,8 ბ) 10,9 გ) 10,6 დ) 9,9.

✓11. რიცხვითი მონაცემებია:

24; 28; 16; 18; 32; 35; 38; 39; 35; 43; 45.

ამ მონაცემთა მოდაა

ა) 43 ბ) 45 გ) 35 დ) 39.

✓12. წინა ამოცანაში წარმოდგენილ მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონია:

ა) 29 ბ) 39 გ) 19 დ) 28.

✓13. რიცხვით მონაცემებს შეიძლება არ ჰქონდეს

ა) გაბნევის დიაპაზონი ბ) საშუალო

გ) მოდა დ) მედიანა.

✓14. ვთქვათ, რიცხვითი მონაცემებია: 1; 1; 1; 2; 2; 2; თუ აქ 2-ს შევცვლით 3-ით, მაშინ

ა) საშუალო არ შეიცვლება ბ) მოდა არ შეიცვლება

გ) მოდა შეიცვლება დ) მედიანა არ შეიცვლება.

✓15. ვთქვათ, რიცხვით მონაცემებში ყველა რიცხვს 5-ით გავადიდებთ, მაშინ რომელი წინადადება არ არის სწორი?

ა) საშუალო 5-ით გაიზრდება

ბ) მედიანა 5-ით გაიზრდება

გ) მოდა (თუ ის არსებობდა) 5-ით გაიზრდება

დ) საშუალო კვადრატული გადახრა 5-ით გაიზრდება.

✓16. თუ ერთმანეთისგან განსხვავებული a, b და c რიცხვების საშუალო არის x, მაშინ $3x-a-b=$

ა) $c-a$ ბ) c გ) $c+a$ დ) $c-b$.

✓17. თუ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ რიცხვების საშუალო არის $\bar{x}$, მაშინ $x_1-\bar{x}$; $x_2-\bar{x}$; ... ; $x_n-\bar{x}$ რიცხვების საშუალო არის

ა) 0 ბ) 1 გ) $\bar{x}$ დ) 2.

18. სკოლის 50 მასწავლებლიდან 40 ქალია, 10 — მამაკაცი. ქალების საშუალო ასაკი 40 წელია, მამაკაცებისა — 30 წელი. რისი ტოლია ყველა მასწავლებლის საშუალო ასაკი?

ა) 40 ბ) 38 გ) 36 დ) 35.

19. პირველ სამ გამოცდაში აბიტურიენტის მიერ მიღებული ქულების საშუალო 65 ქულა იყო. რამდენი ქულა უნდა მიიღოს აბიტურიენტმა მეოთხე გამოცდაზე, რომ მისი საშუალო იყოს 70 ქულა?

ა) 75 ბ) 80 გ) 85 დ) 90.

20. სტუდენტმა უნივერსიტეტში სწავლის პროცესში რამდენიმე გამოცდა ჩააბარა. მისი საშუალო შეფასება იყო 60 ქულა. კიდევ ერთი გამოცდის ჩაბარების შემდეგ მისი საშუალო მაჩვენებელი 65 ქულა გახდა. უკანასკნელი გამოცდის შეფასება 95 ქულა იყო. სულ რამდენი გამოცდა ჩააბარა სტუდენტმა?

ა) 6 ბ) 7 გ) 5 დ) 8.

21. კალათბურთელთა გუნდის (10 მოთამაშე) მოთამაშეებიდან ორი მოთამაშე მიღებული პერსონალური შენიშვნების გამო გამოეთიშა თამაშს. თითოეულის სიმაღლე 2 მეტრია. ამის შემდეგ დანარჩენი (8 მოთამაშის) საშუალო სიმაღლე 4 სმ-ით ნაკლები აღმოჩნდა წარდგენილი მოთამაშეების (10 მოთამაშის) საშუალო სიმაღლეზე. იპოვეთ გუნდის (10 მოთამაშე) საშუალო სიმაღლე.

ა) 185 სმ ბ) 184 სმ გ) 190 სმ დ) 192 სმ.

22. ფეხბურთელთა გუნდის (11 მოთამაშე) საშუალო ასაკი 25 წელია; მინდვრის მოთამაშეებიდან თითოეულის ასაკი 24 წელზე მეტია და 28 წელზე ნაკლებია. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან, რომლის ტოლი შეიძლება იყოს მეკარის ასაკი?

ა) 35 წელი ბ) 36 წელი გ) 37 წელი დ) 34 წელი.

23. ერთ-ერთი ოჯახი ზამთრის თვეებში (ნოემბერი, დეკემბერი, იანვარი) თვეში საშუალოდ 240 ლარს იხდის გაზის ხარჯის დასაფარავად, სხვა თვეებში — 60 ლარს. საშუალოდ რამდენი ლარის გაზს ხარჯავს ეს ოჯახი ყოველთვიურად?

ა) 100 ბ) 105 გ) 102 დ) 75.

24. მოსწავლეთა საკონტროლო სამუშაოების შესრულების შედეგები ქვემოთაა მოცემული.

ქულები	ფარდობითი სიხშირე
0-2	0
3-4	0,3
5-6	?
7-8	0,15
9-10	0,05

არ არის ცნობილი იმ მოსწავლეების ფარდობითი სიხშირე, რომლებმაც 5-6 ქულა მიიღეს. თუმცა, ცნობილია, რომ 7-8 ქულა 2-ით მეტმა მოსწავლემ დააგროვა, ვიდრე 9-10 ქულა. იპოვეთ იმ მოსწავლეთა ოდენობა, რომლებმაც 5-6 ქულა მიიღეს.

ა) 8 ბ) 4 გ) 6 დ) 10.

25. რიცხვითი მონაცემებია: 1; 2; 2; 7. იპოვეთ სტანდარტული გადახრა.

ა) $\sqrt{11}$ ბ) $\sqrt{\frac{11}{2}}$ გ) $\sqrt{\frac{11}{4}}$ დ) $\sqrt{\frac{11}{8}}$.

26. კალათბურთელი ზაზა ფაჩულია პირველ ხუთ თამაშში საშუალოდ 17 ქულას აგროვებდა. სულ რამდენი ქულა დააგროვა მან ხუთივე თამაშში?

ა) 80 ბ) 85 გ) 90 დ) 95.

27. გამოიკითხა მოქალაქეების ერთი ჯგუფი — რამდენი წევრისგან შედგებოდა მათი ოჯახი. შესაბამის ფარდობით სიხშირეთა ცხრილში არ არის მითითებული 2-წევრიანი და 5-წევრიანი ოჯახების ოდენობების ფარდობითი სიხშირეები. თუმცა, ცნობილია, რომ 3-სულიანი ოჯახების რიცხვი 14-ით მეტია 4-სულიანი ოჯახების რიცხვზე, ხოლო 2-სულიანი ოჯახების ფარდობითი სიხშირე მეტია 5-სულიანი ოჯახების ფარდობით სიხშირეზე. რამდენი 5-სულიანი ოჯახი აღირიცხა გამოკითხვის შედეგად?

ოჯახის წევრთა რიცხვი	ფარდობითი სიხშირე
2	?
3	0,475
4	0,125
5	?

ა) 15 ბ) 10 გ) 2 დ) 19.

28. ავტომობილების ერთ-ერთ სამრეცხაოში კვირის განმავლობაში გარეცხილი ავტომობილების ოდენობები ცხრილითაა წარმოდგენილი.

შეადგინეთ შესაბამისი ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი. ფარდობითი სიხშირეები გამოსახეთ პროცენტებით.

ავტომობილი	სიხშირე
„ჟიგული"	17
„მერსედესი"	8
„ოპელი"	23
„აუდი"	6
„ფორდი"	11
„ტოიოტა"	5

29. კამათელი გააგორეს 20-ჯერ, რიცხვი 1 მოვიდა 5-ჯერ, 2 — 2-ჯერ, 3 — 4-ჯერ, 4 — 3-ჯერ, 5 — 2-ჯერ, 6 — 4-ჯერ.

შეადგინეთ:

ა) ამ რიცხვების მოსვლის სიხშირეთა ცხრილი;

ბ) ფარდობით სიხშრეთა ცხრილი.

30. გამოიკითხა 50 ახალგაზრდა — რამდენი ფილმი ნახა კინოთეატრში გასულ თვეში. შედეგები სიხშირეთა ცხრილითაა წარმოდგენილი:

ნანახი ფილმების ოდენობა	0	1	2	3	4	5
სიხშირე	12	10	15	9	3	1

ა) რამდენმა ნახა არანაკლებ 2 ფილმისა?

ბ) რამდენმა ნახა არაუმეტეს 2 ფილმისა?

გ) ფილმების რა ოდენობაა წარმოდგენილი უდიდესი სიხშირით?

დ) შეადგინეთ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.

ე) ააგეთ შესაბამისი სვეტებიანი დიაგრამა.

31. წიგნების გამყიდველი აღრიცხავდა დღიურ ნავაჭრს. აღმოჩნდა, რომ ერთი დღის განმავლობაში თითო წიგნი იყიდა ოთხმა მყიდველმა; ორ-ორი — ხუთმა, სამ-სამი — სამმა, ოთხი — ერთმა, ხუთი — ერთმა, ექვს-ექვსი — ორმა. შეადგინეთ ამ მონაცემების:

ა) სიხშირეთა ცხრილი,

ბ) ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.

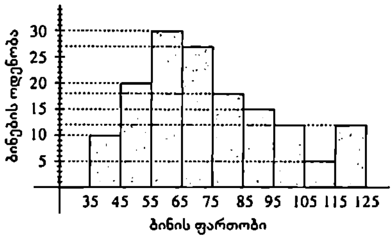
32. მარიამმა გამოიკითხა თანაკლასელები და აღმოჩნდა, რომ დილით 7 სთ-დან 7 სთ 15 წთ-მდე მისი 1 თანაკლასელი დგება, 7 სთ 15 წთ-დან 7 სთ 30 წთ-მდე — 4 თანაკლასელი, 7 სთ 30-დან 7 სთ 45 წთ-მდე — 8 თანაკლასელი, 7 სთ 45 წთ-დან 8 სთ-მდე — 1. თვითონ მარიამი 7 სთ 50 წთ-ზე დგება. შეადგინეთ ამ მონაცემების ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.

33. ცხრილით წარმოდგენილია 100 ლარიან აქციათა ოდენობები, რომლებიც ერთ-ერთი საწარმოს თანამშრომლებმა შეიძინეს.

იპოვეთ ამ მონაცემების საშუალო, გაბნევის დიაპაზონი, მოდა და მედიანა.

აქციათა რიცხვი	სიხშირე
2	20
5	12
10	7
25	4
100	2

34. სვეტოვანი დიაგრამა (ჰისტოგრამა) აგებულია ერთ-ერთი სამშენებლო კომპანიის მიერ აშენებულ სახლში ყველა ბინის ფართობის მიხედვით. შეადგინეთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილები.



35. მოცემულია ერთ-ერთ საკურორტო ქალაქში 2004-2005 წლებში ივნისის თვეში ჰაერის მაქსიმალური ტემპერატურის მონაცემების ცხრილი:

ტემპერატურა (გრად.)	2004	2005
16-20-მდე	2	1
20-24-მდე	9	6
24-28-მდე	12	17
28-32-მდე	6	3
32-36	1	3

ა) რომელ წელს იყო მეტი დღეები, როცა მაქსიმალური ტემპერატურა ნაკლები იყო 24^0-ზე?

ბ) რომელ წელს იყო მეტი დღეები, როცა ტემპერატურა მეტი იყო 26^0-ზე?

გ) იპოვეთ მიახლოებით საშუალო ტემპერატურები და შეადარეთ ერთმანეთს.

დ) ააგეთ სიხშირეების დიაგრამები.

36. მოცემულია მონაცემების ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი. შეავსეთ სიხშირეების სვეტი, თუ ცნობილია, რომ სულ 60 მონაცემია.

მონაცემები	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
I		0,05
II		0,1
III		0,25
IV		0,35
V		0,2
VI		0,05

37. ცხრილით მოცემულია მონაცემები ფეხბურთში ერთ-ერთი ქვეყნის ჩემპიონატში I წრეში გატანილი გოლების შესახებ (I წრეში გუნდების ყოველი წყვილი ერთმანეთში თითო შეხვედრას ატარებს).

ა) დაამატეთ ფარდობით სიხშირეთა სვეტი.

ბ) ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა დიაგრამა (პოლიგონი).

გ) ყველა თამაშის რამდენ პროცენტს ადგენს იმ თამაშების ოდენობა, რომლებშიც არაუმეტეს 3 გოლია გატანილი?

დ) რამდენი გუნდი მონაწილეობდა შეჯიბრებაში?

გატანილი გოლების რიცხვი	თამაშების ოდენობა
0	20
1	42
2	40
3	37
4	12
5	9
6	6
7	3
8	1
11	1

38. ფეხსაცმლის მაღაზიაში შეაჯამეს დღის განმავლობაში გაყიდული ფეხსაცმელების ოდენობები ფასების მიხედვით. მონაცემები ასე გამოიყურება:

120; 110; 230; 89; 32; 120; 56; 134; 140; 105; 105; 470; 320; 290; 210;
245; 89; 111; 120; 120; 230; 105; 140; 120; 89; 32; 132; 89; 110.

• წარმოადგინეთ ეს მონაცემები სიხშირეთა ინტერვალური ცხრილით — 0-დან 500-მდე ფასების დიაპაზონი დაყავით 100-ლარიან ინტერვალებად.

• წარმოადგინეთ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი, მისი დიაგრამა (ჰისტოგრამა).

• სიხშირეთა ცხრილის მიხედვით როგორ ვიპოვოთ (მიახლოებით) შემოსული თანხის ოდენობა?

39. აქ მოცემულია ერთ-ერთი სკოლის მეათეკლასელი მოსწავლეების მათემატიკაში საკონტროლო ნამუშევრების შეფასებების ცხრილები ვაჟებისთვის და გოგონებისთვის.

ვაჟები:

ქულა	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	1	1	3	4	2	5	7	9	4	3	1

გოგონები:

ქულა	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	2	0	2	6	5	4	8	6	3	2	2

ა) შეადგინეთ ვაჟებისა და გოგონების შეფასებების ფარდობით სიხშირეთა ცხრილები, გამოსახეთ ფარდობითი სიხშირეები პროცენტებითაც (დაუმატეთ მოცემულ ცხრილებს ორ-ორი სტრიქონი: III — „ფარდობითი სიხშირე", IV — „ფარდობითი სიხშირე პროცენტებში").

ბ) დააჯგუფეთ მონაცემები რაიმე წესით. მაგალითად, ქულების ოდენობის მიხედვით გამოყავით სამი ჯგუფი:

I. 0, 1, 2, 3 ან 4; II. 5, 6 ან 7; III. 8, 9 ან 10.

შეადგინეთ მონაცემთა ამ დაჯგუფების შესაბამისი სიხშირეთა ცხრილი, ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი, ფარდობითი სიხშირეები გამოსახეთ პროცენტებითაც.

40. კინოთეატრში ფილმის ჩვენების შემდეგ მაყურებელთა გამოკითხვის შედეგად შეადგინეს მათი ასაკის სიხშირეთა ცხრილი. შედეგები დააჯგუფეს და ცხრილმა ასეთი სახე მიიღო:

ასაკი	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70	71-80
სიხშირე	0	32	74	68	86	52	72	31	24	25	19	12	3	0	2

ა) შეადგინეთ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.

დაუმატეთ ცხრილს სტრიქონი, სადაც ფარდობითი სიხშირეები გამოსახულია პროცენტებით.

ბ) ცნობილია, რომ ფილმს ესწრებოდა 40 წელს გადაცილებული 62 მანდილოსანი. სულ მცირე რამდენი მამაკაცი ესწრებოდა ფილმს? 25 წელს გადაცილებული სულ დიდი რამდენი ქალი შეიძლება ყოფილიყო მაყურებელთა შორის?

41. 57, 57, 49, 52, 50, 51, 51, 56, 61, 61, 64, 56, 47, 56, 60, 61, 57, 54, 50, 56,
55, 55, 62, 52, 57, 68, 48, 54, 54, 51, 43, 69, 58, 51, 65, 49, 42, 54, 55, 64

აქ წარმოდგენილი რიცხვები ამერიკის შეერთებული შტატების 40 პრეზიდენტის წლოვანებებს გამოსახავს მათი პირველი არჩევის მომენტში.

დააჯგუფეთ ეს მონაცემები ტოლი სიგრძის ინტერვალებად და წარმოადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი, ააგეთ ამ სიხშირეთა ჰისტოგრამა, თუ პირველი ინტერვალია:

ა) 41-45, ბ) 40-44.

42. ერთ-ერთი კომპანიის ხელმძღვანელმა შეარჩია ერთ-ერთი თვის 21 სამუშაო დღე და აღწერა ამ პერიოდში თანამშრომელთა მიერ სამსახურის გაცდენის დღეების სიხშირეები და დაგროვილი სიხშირეები (რაიმე მონაცემისთვის დაგროვილი სიხშირე მიიღება ყველა ამ მონაცემის სიხშირის შეკრებით, რომლებიც არ აღემატება მითითებულ მონაცემებს).

გაცდენების ოდენობა	0	1	2	3	4
დღეების ოდენობა	2	8	6	3	2
დაგროვილი სიხშირეები	2	10	16	...	...

ა) დაასრულეთ დაგროვილ სიხშირეთა დასახელება.

ბ) რამდენია იმ დღეთა ოდენობა, როცა ორზე მეტი გაცდენა არ აღრიცხულა?

გ) შეადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი წერტილოვანი დიაგრამით.

დ) წარმოადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი წერტილოვანი დიაგრამით.

43. ვთქვათ, მოცემულია მონაცემთა ორი შერჩევა:

A	8	9	10	10	13	10
B	1	5	10	16	18	10

ა) იპოვეთ თითოეულის საშუალო და მედიანა;

ბ) იპოვეთ თითოეული შერჩევის საშუალო კვადრატული გადახრა.

44. ცხრილით მოცემულია დღის განმავლობაში ტელევიზორთან გატარებული დროის აღრიცხვის შედეგები ერთ-ერთი სოციალური კვლევის მიხედვით.

x-ის რა მნიშვნელობისთვის არ ეწინააღმდეგება ამ მონაცემებს წინადადება:

„გამოკითხულთაგან ნახევარი ტელევიზორთან ატარებს x საათამდე დროს, მეორე ნახევარი — x საათზე მეტ დროს.

დრო (სთ)	მაყურებლის ოდენობა (%-ში)
1 სთ-ზე ნაკლები	10,1
1-2 სთ-მდე	15,1
2-3 სთ-მდე	17,1
3-4 სთ-მდე	16,0
4 სთ-ზე მეტი	41,7

45. ერთ-ერთ ქვეყანაში ჩატარდა კვლევა შემოსავლების მიხედვით ოჯახების ოდენობების განაწილების შესახებ.

შედგენილია ცხრილი (შემოსავლები დოლარებშია მოცემული).

შემოსავალი	ფარდობითი სიხშირე (ოჯახების ოდენობების სიხშირე პროცენტებში)
500-ზე ნაკლები	2
500-1000	6
1000-1500	7
1500-2000	12
2000-2500	36
2500-3000	27
3000-ზე მეტი	10

კვლევის შედეგად გამოცხადდა, რომ მიახლოებით 12% გამოკვლეული ოჯახებისა ცხოვრობს სიღარიბის „ზღვარს მიღმა". რა შემოსავალი ითვლება სიღარიბის „ზღვარს მიღმა" ცხოვრებად?

46. 10 სპორტსმენი სროლაში ეჯიბრება ერთმანეთს. 10 გასროლის მიხედვით არსებული შედეგები წარმოდგენილია ცხრილით:

სპორტსმენის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
მიზანში მოხვედრათა ოდენობა	8	4	9	9	7	8	8	5	7	6

გამოთვალეთ ამ მონაცემების საშუალო, მოდა, მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

47. მსროლელის მიერ 8 გასროლით მიღებული ქულები მოცემულია ცხრილის სახით:

გასროლის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8
ქულების ოდენობა	10	8	7	9	9	8	6	9

გამოთვალეთ ამ მონაცემების საშუალო, მოდა, მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

48. შოთას მიერ 16 მატჩში გატანილი გოლების ოდენობებია:

0, 2, 1, 1, 0, 3, 3, 4, 0, 2, 2, 2, 1, 3, 1, 1.

ა) შეადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი,

ბ) იპოვეთ საშუალო, მოდა, მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

49. ფიგურულ სრიალში შეჯიბრებისას ერთ-ერთმა სპორტსმენმა მიიღო შეფასებები:

5,8; 5,7; 5,4; 5,7; 5,6; 5,8; 5,7; 5,7.

მეორემ მიიღო: 5,4; 5,5; 5,6; 5,7; 5,8; 5,4; 5,5; 5,9.

იპოვეთ თითოეული ერთობლიობის საშუალო, დიაპაზონი და მოდა.

50. სტადიონზე გამართულ ოთხ თამაშზე მაყურებელთა ოდენობები იყო:

24532; 18711, 22871, 24334.

რისი ტოლია ამ თამაშებზე საშუალო დასწრება?

51. ბოლო ხუთ დღეში ნათიას მიერ დახარჯული თანხებია: 18 ლარი, 25 ლარი, 17 ლარი, 24 ლარი და 25 ლარი. გამოთვალეთ ამ მონაცემების დიაპაზონი და საშუალო.

52 სატელევიზიო კონკურსის ოთხმა მონაწილემ შემდეგი შეფასებები მიიღო:

A მონაწილე – 1; 1; 2; 1; 2; 1; 1; 1; 1.

B მონაწილე – 2; 2; 1; 2; 1; 2; 2; 2; 2.

C მონაწილე – 3; 4; 4; 3; 4; 3; 4; 5; 4.

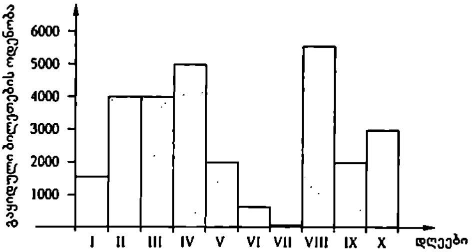
D მონაწილე – 4; 4; 3; 3; 4; 4; 3; 4; 3.

ამ მონაცემებში თითოეული რიცხვი ჟიურის წევრის მიერ მონაწილესთვის მინიჭებულ ადგილს ნიშნავს, ანუ რაც უფრო მცირეა რიცხვები, მით მაღალია შეფასება.

ა) იპოვეთ რიცხვთა თითოეული ერთობლიობის მოდა და საშუალო,

ბ) გაანაწილეთ სპორტსმენები ადგილების მიხედვით.

53 სვეტოვანი დიაგრამით მოცემულია 10 საფეხბურთო მატჩზე გაყიდული ბილეთების ოდენობები, მონაცემები დამრგვალებულია ასეულებამდე სიზუსტით.



ა) შეადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი

ბ) საშუალოდ რამდენი ბილეთი იყიდებოდა თითო მატჩზე?

გ) იპოვეთ მონაცემთა მოდა, მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

54. შუბის ტყორცნაში პირველ სამ ადგილზე გასულთა შედეგები (მეტრებში, ერთეულებამდე დამრგვალებული) 7 ცდის მიხედვით ასეთია:

I ადგილი	84	85	81	80	91	85	85
II ადგილი	86	87	90	86	85	83	89
III ადგილი	84	83	79	80	84	86	80

ა) იპოვეთ თითოეული სპორტსმენის შედეგების საშუალო?

ბ) იპოვეთ სამივე ერთობლიობისთვის მოდა, მედიანა;

გ) ანიჭებს თუ არა უმაღლესი საშუალო შედეგი უმაღლეს ადგილს?

55. გამოთვალეთ 23; 20; 22; 27; 25; 39; 40 რიცხვითი მონაცემების საშუალო კვადრატული გადახრა.

56. პურის ქარხანამ 10 დღიანი მუშაობის შედეგების მიხედვით დაადგინა წუნდებული პურების ოდენობები.

დღეები	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
წუნდებული პურების ოდენობა	15	11	5	8	8	10	10	8	9	10

შეადგინეთ ამ მონაცემთა ერთობლიობის სიხშირეთა ცხრილი და იპოვეთ სტანდარტული გადახრა.

57. ცხრილი შედგენილია შემთხვევით შერჩეული 10 მილის მონაცემების მიხედვით.

მილის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
დიამეტრი (მმ)	5,2	5,4	4,9	5,4	5,5	5	5,1	5,2	4,8	4,7

გამოთვალეთ ამ მონაცემების საშუალო კვადრატული გადახრა, მოდა, მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

58. მოცემულია ორი სახით მონაცემები ცხრილით სახით:

ა)

ცდის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
მნიშვნელობა	−1	0	−1	0	0	0	1	1	0	0

ბ)

ცდის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
მნიშვნელობა	0	0	−100	0	−100	100	0	100	0	0

გამოთვალეთ თითოეული მათგანის საშუალო, მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

59. ფირმის თანამშრომელთა ხელფასები ცხრილის სახითაა წარმოდგენილი.

თანამშრომლების ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ხელფასი (ლარებში)	470	520	525	490	485	480	480	510	510	480

გამოთვალეთ ამ მონაცემების საშუალო, მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

60. ზრდის მიხედვით დალაგებულ მონაცემთა ერთობლიობა ცხრილითაა მოცემული:

მონაცემი	x_1	3	5	6,5	9	x_6
სიხშირე	3	4	9	1	5	2

იპოვეთ x_1 და x_6, თუ ცნობილია, რომ ამ ერთობლიობის დიაპაზონია 8,5, ხოლო საშუალოა 5,75.

61. იპოვეთ მონაცემთა ერთობლიობის გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

x	0,5	1,8	2	2,4	3	5,5
სიხშირე	12	10	3	5	8	2

62. იპოვეთ საშუალო, გაბნევის დიაპაზონი, მედიანა და მოდა რიცხვითი მონაცემებისთვის

1, 2, 3, 5, 6, 7, 11.

• მონაცემებში 7 შეცვალეთ 10-ით და იპოვეთ ახალი მონაცემების საშუალო, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი.

• რა მახასიათებლებზე იმოქმედა 7-ის შეცვლამ 10-ით?

63. ვთქვათ, (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა. დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის, a_1; a_2; ...; a_n მონაცემთა საშუალო მედიანის ტოლია.

64. გამოცდების წარმატებით დასრულებისთვის საჭიროა 5 გამოცდის საშუალო 80 ქულაზე ნაკლები არ იყოს. სანდრომ პირველი, მეორე, მესამე და მეოთხე გამოცდაზე, შესაბამისად 70, 76, 83 და 80 ქულა დააგროვა. იპოვეთ მე-5 გამოცდაზე მოსაპოვებელ ქულათა ის უმცირესი ოდენობა, რომელიც საკმარისია გამოცდების წარმატებით დასრულებისთვის.

65. ვთქვათ, რიცხვითი მონაცემებია: 1, 1, 1, 2, 2, 2. თუ ერთ-ერთ რიცხვს — 2-ს შევცვლით 3-ით, მაშინ რომელი რიცხვითი მახასიათებელი შეიცვლება — მოდა, მედიანა, საშუალო, თუ გაბნევის დიაპაზონი?

66. რისი ტოლია იმ მონაცემთა საშუალო, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა ნულია? რა მონაცემებისთვის არის საშუალო კვადრატული გადახრა ნული?

67. კამათელი გააგორეს 50-ჯერ. 6-იანი მოვიდა 10-ჯერ, 5-იანი — 6-ჯერ, 4-იანი — 8-ჯერ, 3-იანი — 8-ჯერ, 2-იანი — 8-ჯერ, 1-იანი — 10-ჯერ. შეადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი. იპოვეთ მონაცემთა საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა.

68. ვთქვათ, მონაცემთა რაოდენობა არის 11. ზრდის მიხედვით დალაგებისას მეექვსე რიცხვი აღმოჩნდა 19. შეიძლება თუ არა მედიანის დასახელება?

69. რიცხვები დალაგებულია ზრდის მიხედვით. მათი რაოდენობა არის 30, მეთხუთმეტე რიცხვია 18, მეთექვსმეტე — 20. იპოვეთ მედიანა.

70. ერთ-ერთი კორპორაციის მენეჯერმა შეისწავლა ბოლო ხუთი წლის განმავლობაში ორი სხვადასხვა მიმართულებით ჩადებული ინვესტიციებიდან მიღებული მოგებები და ასეთი მონაცემები მიიღო:

წლები	A მიმართულება	B მიმართულება
5 წლის წინ	11,3%	9,4%
4 წლის წინ	12,5%	17,1%
3 წლის წინ	13,0%	13,3%
2 წლის წინ	12,0%	10,0%
1 წლის წინ	12,2%	11,2%

ა) იპოვეთ საშუალო წლიური მოგება (პროცენტებში) თითოეული მიმართულებით.
ბ) იპოვეთ საშუალო კვადრატული გადახრები.
გ) რომელი მიმართულებითაა ინვესტიციები უფრო მეტ რისკთან დაკავშირებული?

71. მეტროპოლიტენის ერთ-ერთ სადგურში მატარებლების გასვლებს შორის დროის ინტერვალების აღიცხვის შედეგად მიღებულია მონაცემები:

2 წთ 10 წმ; 1 წთ 59 წმ; 2 წთ 05 წმ; 2 წთ 05 წმ;
2 წთ 08 წმ; 2 წთ 03 წმ; 1 წთ 58 წმ; 1 წთ 56 წმ; 2 წთ 12 წმ.

იპოვეთ მატარებლების გასვლებს შორის ინტერვალების საშუალო.

72. მონაცემებიდან ყოველი რიცხვი 10-ით გაზარდეს. შეიცვლება თუ არა (და როგორ) საშუალო, მედიანა, მოდა, დიაპაზონი?

73. ყველა მონაცემი 2-ჯერ გაზარდეს. შეიცვლება თუ არა (როგორ) საშუალო, მოდა, მედიანა, დიაპაზონი?

74. 1, 2, 3, 4, x მონაცემებისთვის იპოვეთ x-ის ის შესაძლო მნიშვნელობები, როცა
ა) საშუალო არის 3 ბ) მოდა არის 3 გ) მედიანა არის 3.

75. დაასაბუთეთ, რომ $x_1, x_2, ..., x_n$ მონაცემების დისპერსია (საშუალო კვადრატული გადახრის კვადრატი) ასეც შეიძლება გამოვთვალოთ:

$$D = \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} - \bar{x}^2.$$

$\bar{x}$ არის $x_1, x_2, ..., x_n$ მონაცემების საშუალო.

76. მონაცემებიდან თითოეული 30-ით გაზარდეს. როგორ შეიცვლება გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა?

77. მონაცემებიდან თითოეული 4-ჯერ გაზარდეს. როგორ შეიცვლება გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა?

78. დასახელებულია მონაცემები:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x.

იპოვეთ ამ პარაგრაფში აღწერილი ყველა რიცხვითი მახასიათებელი. რომელი მათგანია დამოკიდებული x-ზე? გამოსახეთ გრაფიკულად ეს დამოკიდებულებები.

79. ცნობილია, რომ x, $2x-1$, $2x$, $3x+1$ რიცხვების საშუალო არის 6. იპოვეთ x.

80. ცნობილია, რომ 11,2; 3; 3,2; 13,14; 8,4; x რიცხვების მედიანა არის 8. იპოვეთ x.

81. მარიამი იმედოვნებდა, რომ ინგლისურ ენაში რამდენიმე 100-ქულიანი ტესტის ჩაბარებისას საშუალოდ 90 ქულას მოაგროვებდა. პირველ 5 ტესტზე მისი შეფასებები იყო 87; 96; 70; 82; 93.

ა) იპოვეთ ამ შეფასებების საშუალო;

ბ) შეიძლება თუ არა, რომ მეექვსე ტესტის ჩაბარების შემდეგ საშუალო იყოს 90?

82. 25-ჯერ ჩატარებული ცდის შედეგები მოცემულია სიხშირეთა ცხრილით:

მნიშვნელობა	−2	−1	0	1	2
სიხშირე	n_1	3	15	2	n_2

ცნობილია, რომ მონაცემების საშუალო არის −0,12. იპოვეთ n_1 და n_2. იპოვეთ საშუალო კვადრატული გადახრა.

83. ცდის შედეგი მოცემულია სიხშირეთა ცხრილით:

მნიშვნელობა	−3	−2	−1	0	3	5
სიხშირე	n_1	2	5	3	2	5

ცნობილია, რომ მონაცემთა საშუალო არის 0,65.

ა) იპოვეთ n_1,

ბ) იპოვეთ მოდა და მედიანა,

გ) იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

84. ათ სერიაში ტყვიის მსროლელის მიერ მიღებული შედეგები მოცემულია ცხრილით:

სერიის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ქულების ოდენობა	92	95	92	92	93	95	88	98	96	90

შეადგინეთ ქულების სიხშირეთა ცხრილი:

ქულები	88	90	92	93	95	96	98
სიხშირე							

იპოვეთ მონაცემების საშუალო, მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი, საშუალო კვადრატული გადახრა.

§ 4.3. ალბათობა. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. არათავსებადი ხდომილობები. დამოუკიდებელი ხდომილობები. ხდომილობის ალბათობა. ჯამის ალბათობა. დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა

ალბათობის თეორიის შესწავლას ამ თეორიის ძირითადი ცნებების — ექსპერიმენტის, შემთხვევითი ხდომილობის აღწერით ვიწყებთ.

შემთხვევითი ხდომილობის შესახებ საუბრისას ყოველთვის ვგულისხმობთ გარკვეული პირობების შესრულებას. ამ პირობების ერთობლიობა განსაზღვრავს **შემთხვევით ექსპერიმენტს** (ექსპერიმენტს).

შემთხვევით ხდომილობას უწოდებენ ნებისმიერ ხდომილობას, რომელიც დაკავშირებულია შემთხვევით ექსპერიმენტთან. ექსპერიმენტის ჩატარებამდე, როგორც წესი, შეუძლებელია ზუსტად განსაზღვროთ, განხორციელდება ხდომილობა, თუ არა — ეს მხოლოდ ექსპერიმენტის დამთავრების შემდეგ გაირკვევა. აქ ჩვენ სიტყვები — „როგორც წესი" — იმიტომ ჩავრთეთ, რომ ხშირად შემთხვევით ხდომილობებად განვიხილავთ ყველა ხდომილობას, რომელიც მოცემულ ექსპერიმენტს უკავშირდება, მათ შორის:

- **შეუძლებელ ხდომილობას**, რომელიც არ შეიძლება მოცემული ექსპერიმენტისას განცხორციელდეს.
- **აუცილებელ ხდომილობას**, რომელიც ყოველთვის განხორციელდება.

მაგალითად, ხდომილობა „კამათელზე, 7 ქულა მოვა" — შეუძლებელი ხდომილობაა; ხდომილობა: „კამათელზე 7-ზე ნაკლები ქულა მოვა" — აუცილებელი ხდომილობაა, იგულისხმება კამათელი, რომლის წახნაგებზე მითითებულია (წერტილების რაოდენობებით, ან ციფრებით) რიცხვები 1-დან 6-მდე. ალალბედად (შემთხვევით) მონეტის აგდება, კამათლის გაგორება, კარტის დასტიდან ერთ-ერთის ალალბედად ამოღება, ურნიდან რომელშიც ბურთულებია, ერთ-ერთის ამოღება — შემთხვევითი ექსპერიმენტის მაგალითები; თითოეული მათგანი, პირობების შეუცვლელად გავიმეოროთ რამდენჯერაც გვინდა (ან წარმოვიდგინოთ, რომ გავიმეორეთ): ამ ექსპერიმენტების ზუსტი შედეგების წინასწარმეტყველება შეუძლებელია. ამასთანავე, თითოეულს ამ ექპერიმენტებიდან შედეგების სასრული ოდენობა აქვს. ყოველი ორი შედეგი არათავსებადია, ურთიერთგამომრიცხავია — **ერთდროულად არ შეიძლება განხორციელდეს**.

მოცემული ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ეწოდება ამ ექსპერიმენტის **არათავსებადი შედეგების** S სიმრავლეს, ამასთანავე, ექპერიმენტის ყოველ შესაძლო შედეგს **ელემენტარული ხდომილობა** ეწოდება, ექპერიმენტის შედეგად ყოველთვის განხორციელდება ერთი და მხოლოდ ერთი შესაძლო შედეგი; ე. ი. ერთის მხრივ, ერთდროულად ორი შედეგი არ შეიძლება განხორციელდეს, მეორეს მხრივ — ექსპერიმენტი რაიმე შედეგით უნდა დასრულდეს. ამასთანავე, შესაძლო შედეგების განხილვისას ელემენტარულ ხდომილობებად იმ შედეგებს განვიხილავთ, რომლებიც მართლაც „ელემენტარულია" — არ იშლება სხვა ხდომილობების ერთობლიობად. მაგალითად, ვატარებთ ექსპერიმენტს — ვაგდებთ ორ მონეტას. აქ შესაძლო შედეგების სხვადასხვა სიმრავლე შეიძლება განვიხილოთ (იმის მიხედვით, რა გვაინტერესებს).

- რა მოვა — {გგ, გს, სგ, სს} (გგ — გერბი, გერბი, გს — გერბი, საფასური, სგ — საფასური, გერბი, სს — საფასური, საფასური).
- გერბებისა და საფასურების ოდენობა — {(2; 0); (1; 1); (0; 2)}, აქ პირველი რიცხვი გვიჩვენებს გერბის მოსვლათა ოდენობას, მეორე — საფასურის.
- ორივე მონეტა მოვიდა ერთნაირად თუ არა — {ე; ს} (ე — ერთნაირად, ს — სხვადასხვანაირად).

თითოეული სიმრავლე მოცემული ექსპერიმენტის ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების სიმრავლეა, მაგრამ პირველი სიმრავლე უფრო მეტ ინფორმაციას გვაძლევს: თუ ცნობილია პირველი სიმრავლის (მოცემული ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სიერცის) რომელი ელემენტია ექსპერიმენტის დროს განხორციელებული, მაშინ გვეცოდინება ის შედე-

გებიც, რომლებიც მეორე და მესამე სიმრავლეებში განხორციელდა. მაგალითად, მეორე სიმრავლის მეორე ელემენტს — (1; 1)-ს — შეესაბამება პირველი სიმრავლის (იშლება ორ ელემენტარულ ხდომილობად) ორი ელემენტი („გს" და „სგ").

ვთქვათ, Ω **არის მოცემული ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე.** Ω **სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ხდომილობა ეწოდება.** ელემენტარულ ხდომილობებს, რომლისგანაც მოცემული ხდომილობა შედგება, ამ ხდომილობის **ხელშემწყობი** ელემენტარული ხდომილობები ეწოდება.

მაგალითი 1. ექსპერიმენტი — კამათლის გაგორება.

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე: $\Omega=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. ხდომილობები:

A={მოვიდა ლუწი რიცხვი}=$\{2;\ 4;\ 6\}$, $A\subset\Omega$

B={მოვიდა რიცხვი, რომელიც ნაკლებია 3-ზე}=$\{1;\ 2\}$

C={მოვიდა მარტივი რიცხვი}=$\{2;\ 3;\ 5\}$

D={მოვიდა რიცხვი, რომელიც 14-ის გამყოფია}=$\{1;\ 2\}$

ხდომოლობის სხვადასხვა აღწერას ზოგჯერ ერთი და იმავე სიმრავლემდე მივყავართ — ერთი და იმავე ხდომილობამდე:

ჩვენთან $D=B$.

A ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობა არის 3.

Ω-ს ქვესიმრავლეა ცარიელი სიმრაველე, რომელიც შეუძლებელ ხდომილობას წარმოადგენს.

Ω-ს ქვესიმრავლეა თვით Ω სიმრავლე — აუცილებელი ხდომილობა.

ალბათობის ფორმულა. ვთქვათ, Ω არის მოცემულ ექსპერიმენტთან დაკავშირებული ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე:

$$\Omega=\{E_1;\ E_2;\ ...;\ E_n\}.$$

E_1, E_2, ..., E_n ელემენტარულ ხდომილობებს შევუსაბამებთ რიცხვებს p_1, p_2, ..., p_n, — ამ ხდომილობების ალბათობებს, ამასთანავე, $p_1+p_2+...+p_n=1$. თუ ხდომილობათა სივრცე n თანაბრად მოსალოდნელი ელემენტრული ხდომილობისგან შედგება (ვგულისხმობთ რომ ჩვენ მიერ განხილულ ექსპერიმენტებს ეს თვისება აქვს), მაშინ $p_1=p_2=...=p_n=\frac{1}{n}$. ყოველი ხდომილობის ალბათობა მასში შემავალი ელემენტარული ხდომილობების ალბათობათა ჯამის ტოლია.

მაშასადამე, თუ მოცემული ექსპერიმენტის ყველა ელემენტარული ხდომილობა თანაბრად მოსალოდნელია, მაშინ ამ ექსპერიმენტს რაიმე A ხდომილობის ალბათობა ასე გამოითვლება:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

სადაც m არის A ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, n — ელემენტარულ ხდომილობათა საერთო ოდენობა. კერძოდ, შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა ნულია. რადგან $m=0$. აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა 1-ია, რადგან $m=n$.

ვიპოვოთ პირველ მაგალითში მითითებული ხდომილობის ალბათობები;

ექსპერიმენტი: ვაგორებთ კამათელს და ვაკვირდებით, რა მოვა? ამ ექსპერიმენტში, ისევე როგორც ზემოთ მითითებულ სხვა ექსპერიმენტებში, ვგულისხმობთ, რომ ელემენტარული ხდომილობები თანაბრად მოსალოდნელი ხდომილობებია. ამის მინიშნება ზოგჯერ სიტყვების „ალალბედზე", „შემთხვევით" — საშუალებითაც ხდება.

ვიპოვოთ $P(A)$ — ალბათობა იმისა, რომ ლუწი რიცხვი მოვა; მაშასადამე, შეგვიძლია (1) ფორმულის გამოყენება; აქ $m=3$, $n=6$;

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

ვიპოვოთ $P(B)$ — ალბათობა იმისა, რომ 3-ზე ნაკლები რიცხვი მოვა;

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

$P(C)$ — ალბათობა იმისა, რომ მარტივი რიცხვი მოვა.

$$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 2. ერთ-ერთ სკოლაში 30 მასწავლებელი მუშაობს, მათგან 20 ქალია, 10 — მამაკაცი. შემთხვევით ხდება 5 მასწავლებლის შერჩევა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ა) შერჩეულთა შორის მხოლოდ ქალებია, ბ) შერჩეულთა შორის მხოლოდ 2 მამაკაცია.

ამ მაგალითით ის შემთხვევაა წარმოდგენილი, როცა ყველა ელემენტარული ხდომილობის ამოწერა მოუხერხებელია, თუმცა, არც არის საჭირო — ჩვენ ხომ მათი ოდენობა გვაინტერესებს.

30 ადამიანიდან 5-ის შერჩევათა რიცხვია C_{30}^5, მათგან ის შერჩევები, რომლებიც მხოლოდ ქალებისგან შედგება C_{20}^5-ია. მაშასადამე, ალბათობა იმისა, რომ „შერჩეულია მხოლოდ ქალები" — არის $\dfrac{C_{20}^5}{C_{30}^5}$. ეს რიცხვი შეიძლება მეათასედებამდე სიზუსტით ადვილად ვიპოვოთ.

ახლა მეორე კითხვას ვუპასუხოთ: 5 მასწავლებლისგან შედგენილ ჯგუფებში 2 მამაკაცი და 3 ქალია. ასეთი ხუთეულის შერჩევათა რიცხვი კი არის $C_{20}^3 \cdot C_{10}^2$.

მაშასადამე, ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული 5 მასწავლებლისგან შედგენილ ჯგუფებში 2 მამაკაცი და სამი ქალი, არის $\dfrac{C_{20}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{30}^5}$.

საზოგადოდ, ვთქვათ, გვაქვს n ცალი ობიექტისგან შემდგენილი ერთობლიობა, რომელშიც m ცალი ობიექტი A_1 ტიპისაა, დანარჩენი k ცალი ობიექტი — A_2 ტიპის ($m+k=n$). n ობიექტისგან შემთხვევით ვირჩევთ r ცალ ობიექტს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ შერჩევაში A_1 ტიპის x ცალი ($x \le m$, $x \le r$) ობიექტი მოხვდება? საძიებელი ალბათობა $\dfrac{C_m^x \cdot C_k^{r-x}}{C_n^r}$-ის ტოლია.

ოპერაციები ხდომილობებზე. ჯამისა და ნამრავლის ალბათობები.

A და B **ხდომილობების ჯამი (გაერთიანება)** ეწოდება იმ ელემენატრული ხდომილობებისგან შედგენილ C ხდომილობას, რომლებიც ეკუთვნის ან A-ს, ან B-ს, ან ორივეს, ანუ, სიმრავლეთა ენაზე, C არის A და B სიმრავლეების გაერთიანება. ამიტომ ვწერთ:

$$C=A\cup B \quad (\text{ზოგჯერ ასეც წერენ: } C=A+B).$$

ორი A და B ხდომილობის **ნამრავლი (თანაკვეთა)** ეწოდება იმ ელემენტარულ ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომელიც ეკუთვნის, როგორც A-ს, ასევე — B-ს. ამიტომ ვწერთ:

$$C=A\cap B \quad (\text{ზოგჯერ ასეც ვწერთ: } C=A\cdot B).$$

ცხადია, თუ ორი ხდომილობა არათავსებადია, მაშინ მათი ნამრავლი შეუძლებელი ხდომილობაა. შეუძლებელ ხდომილობას ასე აღვნიშნავთ: $\varnothing$. ჭეშმარიტია ამ დებულების შებრუნებული დებულებაც.

ვთქვათ, Ω ელემენტარულ ხდომილობათა რაიმე სიერცეა. A და B ხდომილობათა **სხვაობა** ეწოდება A-ს ყველა იმ ელემენატრული ხდომილობისგან შედგენილ ხდომილობას, რომელიც არ ეკუთვნის B-ს, სხვაობას ასე ჩავწერთ: $A\backslash B$ (ან ასე — $A-B$). კერძოდ, $\Omega\backslash A$ ხდომილობას ეწოდება A-ს **საწინააღმდეგო ხდომილობა** და ასე აღვნიშნავთ: $\overline{A}$. მაგალითად, კამათლის გაგორების ექსპერიმენტში, თუ A არის ლუწი რიცხვის მოსვლა — $A=\{2;\ 4;\ 6\}$, მაშინ $\overline{A}$ არის კენტი რიცხვის მოსვლა: $\overline{A}=\{1;\ 3;\ 5\}$. თუ განხორციელდა A, მაშინ არ განხორციელდება $\overline{A}$.

ცხადია, ყოველი A ხდომილობისთვის $A+\overline{A}=\Omega$ (აუცილებელი ხდომილობაა).

ჯამის ალბათობის ფორმულა. ნებისმიერი A და B ხდომილობებისთვის:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (2)$$

კერძოდ, როცა A და B არათავსებადი ხდომილობებია, მაშინ $A\cap B=\varnothing$, $P(A\cap B)=0$, ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

კერძოდ,

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$
$$P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})$$
$$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad (3)$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

A და B ხდომილობებს დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot(B). \qquad (4)$$

მაშასადამე, თუ სრულდება (4), მაშინ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, თუ მითითებულია, რომ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ გვაქვს (4) ფორმულა — ნამრავლის ალბათობის ფორმულა დამოუკიდებელი ხდომილობებისთვის.

მაშასადამე, თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ ჯამის ალბათობის (2) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B). \qquad (5)$$

შევნიშნავთ, რომ თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია და მათი ალბათობები არ არის ნული, მაშინ ეს ხდომილობები არ არის არათავსებადი ხდომილობები. მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს — $A\cap B=\varnothing$, მაშინ გვექნება:

$P(A\cap B)=0$, $P(A)\cdot P(B)=0$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას — $P(A)\neq 0$ და $P(B)\neq 0$.

ცხადია, თუ A და B მოცემული ექსპერიმენტის ორი ხდომილობაა და A-ს ყოველი ელემენტარული ხდომილობა B—შიც შედის (თუ ხდება A, მაშინ აუცილებლად ხდება B), მაშინ

$$P(A)\leq P(B).$$

ანუ, როცა $A\subset B$, მაშინ $P(A)\leq P(B)$.

მაგალითი 3. ვთქვათ, A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, $P(A)=\frac{2}{7}$ და $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$. იპოვეთ $P(B)$.

ამოხსნა. რადგან A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, ამიტომ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. ვიყენებთ (5) ფორმულას:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

აღვნიშნოთ $P(B)$ რიცხვი x-ით.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{7}+x-\frac{2}{7}x$$
$$\frac{7}{14}-\frac{4}{14}=x\cdot\frac{5}{7}$$
$$\frac{3}{14}=x\cdot\frac{5}{7}, \qquad x=\frac{3\cdot 7}{14\cdot 5}=\frac{3}{10}.$$

მაგალითი 4. მონეტა 7-ჯერ ააგდეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად 4-ჯერ მოვა გერბი.

ამოხსნა. ყოველი აგდებისას ორი შემთხვევა გვაქვს — ან გერბი მოვა, ან საფასური. სულ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი, ცხადია, არის 2^7. ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვი არის C_7^4. მაშასადამე,

$$P=\frac{C_7^4}{2^7}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{35}{128}.$$

მაგალითი 5. კამათელი 7-ჯერ გააგორეს. იპოვეთ ალბათბა იმისა, რომ 3-ჯერ მოვა რიცხვი ორი.

ამოხსნა. I ხერხი. ეს ამოცანა ურნისა და ბირთვების უკან ჩაბრუნებით ექსპერიმენტის ანალოგიურია — ურნაში 6 ბირთვია, რომლებიც გადანომრილია — 1, 2, 3, 4, 5, 6, ვიღებთ თითო-თითოს, ვიწერთ ნომერს და უკან ვაბრუნებთ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ მოქმედების 7-ჯერ ჩატარებისას ამოწერილ რიცხვებს შორის სამჯერ გეხვდება რიცხვი 2?

ამ ექსპერიმენტში ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი არის 6^7. მათგან C_7^3 შემთხვევაა ისეთი, როცა 3-ჯერ გვხვდება 2. თითოეული ამ შემთხვევისთვის გვაქვს შემთხვევა, როცა შეიდეულში დანარჩენ 4 ადგილზე მოდის რომელიმე რიცხვი (2-სგან განსხვავებული). სულ $C_7^3 \cdot 5^4$ — ელემენტარული ხდომილობა. მაშასადამე,

$$P = \frac{C_7^3 \cdot 5^4}{6^7}.$$

II ხერხი. ამ ამოცანაში, ისევე, როგორც მონეტის აგდება განმეორებით ცდებში, ურნიდან ბირთვების ამოღებისას (უკან ჩაბრუნებით), ხდომილობები შეიძლება მივიჩნიოთ დამოუკიდებელ ხდომილობებად (მაგალითად, ხდომილობა — „ავაგდეთ მონეტა" და ხდომილობა „მეორედ ავაგდეთ მონეტა").

თუ ხდომილობას — „კამათლის გაგორებისას მოვიდა 2", აღვნიშავთ A-თი, $\overline{A}$ არის ხდომილობა — არ მოვიდა 2 (მისი ალბათობაა — $\overline{A}$), მაშინ საძიებელი ხდომილობაა $A \cdot A \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A}$, $A \cdot A \cdot \overline{A} \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A$, ... $\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A \cdot A \cdot A$ სახის ხდომილობების ჯამი; შესაკრებების რაოდენობა, ცხადია, არის C_7^3, თითოეულის ალბათობა არის

$$P(A) \cdot P(A) \cdot P(B) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

მაშასადამე, საძიებელი ალბათობა არის:

$$P = C_7^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \text{ — იგივე შედეგი მივიღეთ.}$$

ამ ხერხით შეიძლება წინა მაგალითის განხილვაც.

საზოგადოდ, თუ ექსპერიმენტი შედგება n დამოუკიდებელი ცდისგან, მაშინ ამ ცდების სერიაში A ხდომილობის k-ჯერ ($k \leq n$)განხორციელების ალბათობა, არის $C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$, P არის A ხდომილობის ალბათობა ერთი ცდის განხორციელებისას.

მაშასადამე, როგორც აღვნიშნეთ, მონეტის k-ჯერ აგდება ტოლფასია იმ ურნიდან k-ჯერ ბირთვის ამოღებისა (ჩაბრუნებით), რომელშიც ორი გადანომრილი ბირთვია: 1, 2.

კამათლის k-ჯერ გაგორება (ან ერთდროულად k კამათლის გაგორება) ტოლფასია იმ ურნიდან k ბირთვის ამოღების (ჩაბრუნებით), რომელშიც 6 (გადანომრილი) ბირთვია.

ამასთანავე, თუ ურნაში n ბირთვია, რომლებიც გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, ..., n, ვიღებთ ბირთვს, ვიწერთ ნომერს და ვაბრუნებთ, მაშინ ამ მოქმედების k-ჯერ გამეორებისას შედეგების რაოდენობა (თანაბრად შესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა) n^k-ს ტოლია (თითოეული ბირთვის ამოღებისას გვაქვს n შესაძლებლობა). თუ k ბირთვს ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ ურნაში დაბრუნების გარეშე, მაშინ თანაბრად შესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი არის $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (წყობათა რიცხვი).

თუ k ბირთვს ერთდროულად ვიღებთ, მაშინ თანაბრად შესაძლებელ ხდომილობათა რიცხვი არის $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (ჯუფთებათა რიცხვი).

ს

✓**1.** ვთქვათ, U არის აუცილებელი ხდომილობა, მაშინ მისი ალბათობა არის

ა) 0　　ბ) 1　　გ) 0,5　　დ) 0,3.

✓**2.** ვთქვათ, V არის შეუძლებელი ხდომილობა, მაშინ მისი ალბათობაა

ა) 0　　ბ) 1　　გ) 0,5　　დ) 0,3.

✓**3.** ვთქვათ, U ხდომილობის ალბათობა არის 0,3. მაშინ მისი საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობაა $P(\overline{U})=$

ა) 0,3　　ბ) 0　　გ) 1　　დ) 0,7.

✓4. კამათლის გაგორებისას 8-ის მოსვლის ალბათობა არის

ა) 0 ბ) 1 ბ) 0,5 გ) 0,3.

✓5. ხდომილობის ალბათობა არ შეიძლება ტოლი იყოს

ა) 0,5-ის ბ) 0-ის გ) 1-ის დ) 1,2-ის.

✓6. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსული რიცხვების ჯამი არის 13?

ა) 1 ბ) 0 გ) 0,5 დ) 0,3.

✓7. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსული რიცხვების ჯამი არის 12?

ა) $\frac{1}{6}$ ბ) $\frac{1}{36}$ გ) $\frac{1}{18}$ დ) $\frac{1}{9}$.

✓8. ურნაში 6 შავი და 2 წითელი ბურთია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებულ 3 ბურთს შორის ერთი მაინც შავია?

ა) 0 ბ) 1 გ) 0,5 დ) 0,4.

✓9. ურნაში 6 შავი და 2 წითელი ბურთია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებულ 7 ბურთს შორის ერთი მაინც წითელია?

ა) 0 ბ) 1 გ) 0,5 დ) 0,4.

✓10. ყუთში 4 შავი, 2 წითელი და 3 თეთრი ბურთია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებულ 8 ბურთს შორის ერთი მაინც წითელია?

ა) 0 ბ) 0,5 გ) 0,3 დ) 1.

✓11. ექსპერიმენტი ორი კამათლის გაგორებაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოსული რიცხვების ჯამი არ აღემატება 12-ს.

ა) 1 ბ) 0 გ) 0,5 დ) 0,3.

✓12. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსული რიცხვების ჯამი მეტია 1-ზე.

ა) 0 ბ) 1 გ) 0,5 დ) 0,8.

✓13. ვთქვათ, p_1 არის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე დასახელებულ 6 რიცხვს შორის მოიძებნება ორი რიცხვი, რომელთა სხვაობა 5-ზე იყოფა; p_2 არის ალბათობა იმისა, რომ კამათლის 3-ჯერ გაგორებისას მოსული რიცხვების ჯამი 20-ზე ნაკლებია, P_3 — ამავე ექსპერიმენტის დროს მოსული რიცხვების ჯამი 20-ის ტოლია, p_4 არის ალბათობა იმისა, რომ კლასში, რომელშიც 26 მოსწავლეა, სამი მაინც ერთ თვეშია დაბადებული. რომელია სწორი ტოლობა?

ა) $p_1=0$ ბ) $p_2=0{,}5$ გ) $p_3=1$ დ) $p_4=1$.

✓14. თუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე n ოდენობის თანაბრად შესაძლებელი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება, მაშინ თითოეული ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა არის

ა) n ბ) $\frac{1}{n}$ გ) $\frac{1}{2n}$ დ) $\frac{2}{n}$.

✓15. ურნაში 6 ბირთვია. ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, 4, 5, 6. ორჯერ — ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ თითო ბირთვს, მის ნომერს ვინიშნავთ და მას ურნაში ვაბრუნებთ. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) 16 ბ) 12 გ) 36 დ) 18.

✓**16.** ვაგორებთ ორ კამათელს და ვინიშნავთ — რა მოვიდა, რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) 36 ბ) 12 გ) 6 დ) 32.

✓**17.** ურნაში 8 ბირთვია. ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. ორჯერ — ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ თითო ბირთვს. ამოღებული ბირთვის ნომერს ვინიშნავთ და მას უკან ვაბრუნებთ. რამდენი ელემენატარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) 8 ბ) 16 გ) 64 დ) 24.

✓**18.** მონეტის 6-ჯერ აგდებისას ყოველ ჯერზე ვინიშნავთ რა მოვა — გერბი, თუ საფასური. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) 64 ბ) 32 გ) 36 დ) 12.

✓**19.** ურნაში 4 ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, 4. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, რომელიც შეესაბამება ექსპერიმენტს — ერთმანეთის მიყოლებით (ურნაში დაბრუნების გარეშე) ვიღებთ ურნიდან 2 ბირთვს და ნომრებს ვინიშნავთ.

ა) $4 \cdot 3$ ბ) $4 \cdot 4$ გ) $4 \cdot 5$ დ) $1 \cdot 4$.

✓**20.** ურნაში n ბირთვია. გადანომრილია რიცხვებით — 1, 2, 3, ..., n. ვიღებთ ერთმანეთის მიყოლებით m-ჯერ თითო ბირთვს ($m<n$) ვინიშნავთ ნომერს და უკან ვაბრუნებთ. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) n^m ბ) m^n გ) $m \cdot n$ დ) $m+n$.

✓**21.** მონეტის n-ჯერ აგდებისას (ან n ცალი მონეტის აგდებისას) ვაკვირდებით — რა მოვიდა? რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) n^2 ბ) 2^n გ) $2n$ დ) $2+n$.

✓**22.** კამათლის n-ჯერ გაგორებისას (ან ერთდროულად n კამათლის გაგორებისას) ვაკვირდებით რა მოვიდა. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) 6^n ბ) n^6 გ) $6n$ დ) $6+n$.

✓**23.** ურნაში n ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით: 1, 2, 3, ..., n. ალალბედზე ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ m ($m<n$) ბირთვს (უკან დაბრუნების გარეშე) და ყოველ ჯერზე ვინიშნავთ ნომერს. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$ ბ) $P_m = m!$

გ) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ დ) $2A_n^m$.

✓**24.** ურნაში n ბირთვია. ისინი გადანომრილია რიცხვებით: 1, 2, 3, ..., n. ალალბედზე ერთდროულად ვიღებთ m ბირთვს და ვაკვირდებით — რა ნომრის ბირთვები ამოვიღეთ. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) nm ბ) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$ გ) $n+m$ დ) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

✓25. ურნაში 4 ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით: 1, 2, 3, 4. შემთხვევით ვიღებთ ერთ ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვი ლუწი ნომრისაა?

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{3}{4}$.

✓26. ურნაში 4 ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით: 1, 2, 3, 4. ალალბედზე ვიღებთ ერთ ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მისი ნომერი არ არის 1?

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{3}{4}$.

✓27. ურნაში 8 ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით: 1, 2,..., 8. ალალბედზე ვიღებთ ერთ ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მასზე მარტივი რიცხვი იქნება გამოსახული?

ა) $\frac{5}{8}$ ბ) $\frac{3}{8}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{3}{4}$.

✓28. ურნაში 33 ბირთვია, მათზე ქართული ასოებია გამოსახული — თითო ბირთვზე თითო ასო. ალალბედზე ვიღებთ ერთ ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მასზე ხმოვანი ასოა გამოსახული?

ა) $\frac{5}{33}$ ბ) $\frac{2}{11}$ გ) $\frac{7}{33}$ დ) $\frac{3}{11}$.

✓29. ავაგდებთ მონეტას და ჩავინიშნავთ — რა მოვიდა საფასური თუ გერბი. ამის შემდეგ ვაგორებთ კამათელს და ჩანიშნულ სიტყვას მივუწერთ მოსულ რიცხვს. რისი ტოლია ამ ექსპერიმენტის შესაბამის ხდომილობათა სივრცეში ელემენტარული ხდომილობების რიცხვი?

ა) 6 ბ) 12 გ) 8 დ) 10.

✓30. ერთმანეთის მიყოლებით ვაგდებთ სამ მონეტას და თითოეული აგდების შემდეგ ვინიშნავთ — რა მოვიდა. ამ ექსპერიმენტის შესაბამის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეში ელემენტარული ხდომილობების რიცხვი არის

ა) 8 ბ) 2 გ) 6 დ) 18.

✓31. ვთქვათ, მოცემულია მოძრავი ანბანის ოთხი ასო: „გ", „ო", „ლ" და „ი". მათგან შემთხვევით ვირჩევთ ჯერ ერთ ასოს, შემდეგ — მეორეს. რისი ტოლია ამ ექსპერიმენტის შესაბამის ხდომილობათა სივრცეში ელემენტარულ ხდომილობათა ოდენობა?

ა) C_4^2 ბ) A_4^2 გ) 4^2 დ) 4.

✓32. ურნაში 8 თეთრი და 12 შავი ბირთვია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ ურნიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი თეთრია?

ა) $\frac{4}{5}$ ბ) $\frac{2}{5}$ გ) $\frac{3}{5}$ დ) $\frac{5}{4}$.

✓33. ერთმანეთის მიყოლებით ვაგდებთ სამ მონეტას და ვინიშნავთ თითოეული აგდების შემდეგ რა მოვიდა, რა არის ალბათობა იმისა, რომ სამივე გერბი მოვა?

ა) $\frac{1}{8}$ ბ) $\frac{1}{6}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{2}$.

✓34. ვაგორებთ სამ კამათელს და ვინიშნავთ — რა რიცხვი მოვიდა. რისი ტოლია ამ ექსპერიმენტის ხდომილობათა სივრცეში ელემენტარული ხდომილობების რიცხვი? .

ა) 36 ბ) 12 გ) 32 დ) 216.

✓35. ვაგორებთ ორ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოსული რიცხვების ჯამი 12-ია?

ა) $\frac{1}{6}$ ბ) $\frac{1}{12}$ გ) $\frac{1}{32}$ დ) $\frac{1}{36}$.

✓**36.** ვაგორებთ ორ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოსული რიცხვების ჯამი 18-ია?

ა) 1 ბ) 0 გ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{36}$.

✓**37.** ვაგორებთ სამ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოსული რიცხვების ჯამი არის 18?

ა) $\frac{1}{216}$ ბ) $\frac{1}{36}$ გ) $\frac{1}{6}$ დ) $\frac{1}{18}$.

✓**38.** ვაგორებთ სამ კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოსული რიცხვების ჯამი არის 19-ზე ნაკლები?

ა) 0 ბ) 1 გ) $\frac{1}{216}$ დ) $\frac{1}{36}$.

✓**39.** თუ A და B არის მოცემული ექსპერიმენტის შესაბამისი ხდომილობები და $A \subset B$, მაშინ აუცილებლად

ა) $P(A)>P(B)$ ბ) $P(A)\leq P(B)$ გ) $P(A)=P(B)$ დ) $P(A)\geq P(B)$.

✓**40.** ლევანს ჯიბეში 5-თეთრიანი, 10-თეთრიანი, 20-თეთრიანი და 50-თეთრიანი თითო მონეტა აქვს. იგი ჯიბიდან შემთხვევით ერთმანეთი'ს მიყოლებით იღებს ორ მონეტას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული მონეტები ჯამში ზუსტად 25 თეთრს შეადგენს?

ა) $\frac{1}{6}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{12}$.

✓**41.** ლევანს ჯიბეში 5-თეთრიანი, 10-თეთრიანი, 20-თეთრიანი და 50-თეთრიანი თითო მონეტა აქვს. იგი ჯიბიდან შემთხვევით იღებს 3 მონეტას, თითო-თითოს, ერთმანეთის მიყოლებით, ინიშნავს თანხას და მონეტას აბრუნებს უკან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოწერილი თანხა შეადგენს 30 თეთრს?

ა) $\frac{1}{16}$ ბ) $\frac{1}{64}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{32}$.

✓**42.** ილია ჭავჭავაძის ნაწარმოებთა 5-ტომეულიდან (I, II, III, IV, V) შემთხვევით ვირჩევთ სამ ტომს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ სამ ტომში I ტომიც შეირჩევა?

ა) $\frac{3}{5}$ ბ) $\frac{4}{5}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{3}{7}$.

✓**43.** ვთქვათ, ექიმი 5 წამლიდან 3-ის გამოკვლევას ატარებს. ეს სამი წამალი 5-დან შემთხვევით შეირჩევა. წამლები გადავნომროთ: 1, 2, 3, 4, 5. რა არის ალბათობა იმისა, რომ შეირჩევა წამლები — 1 და 2?

ა) $\frac{9}{10}$ ბ) $\frac{3}{10}$ გ) $\frac{6}{10}$ დ) $\frac{5}{10}$.

✓**44.** სათამაშო ავტომატი 5 ცალ მონეტას ალალბედად ორ კოლოფში (წითელსა და ლურჯში) ანაწილებს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ლურჯ კოლოფში ზუსტად 3 მონეტა აღმოჩნდება?

ა) $\frac{3}{5}$ ბ) $\frac{5}{16}$ გ) $\frac{5}{32}$ დ) $\frac{1}{6}$.

✓**45.** ურნაში n ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, ..., n. გამოსახეთ n-ით ალბათობა იმისა, რომ ერთმანეთის მიყოლებით ყველა ბირთვის თითო-თითოდ (დაბრუნების გარეშე) ამოღებისას, ბირთვები ნომრების ზრდის მიხედვით იქნება ამოღებული?

ა) $\frac{1}{n!}$ ბ) $\frac{1}{n}$ გ) $\frac{1}{n(n-1)}$ დ) $\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$.

✓**46.** ლატარიის ბილეთის ნომერი შეიძლება იყოს ნებისმიერი 5 ციფრისგან შედგენილი „რიცხვი" — 00001-დან 99999-მდე (ჩათვლით). რა არის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ნაყიდი ბილეთის ნომერი ერთი და იმავე ციფრებისგან შედგება?

ა) $\frac{9}{11111}$ ბ) $\frac{9}{99999}$ გ) $\frac{10}{99999}$ დ) $\frac{9}{100000}$.

✓**47.** ნაწარმოებთა 8 ტომს ალალბედზე ვაწყობთ თაროზე ერთმანეთის გვერდით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ I და II ტომები ერთმანეთის გვერდით აღმოჩნდება.

ა) $\frac{1}{8}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{7}{8}$ დ) $\frac{1}{2}$.

✓**48.** ურნაში 5 ბირთვია, მათზე მითითებული ასოები: ბ, ი, რ, უ, თ. ალალბედზე, თითო-თითოდ, ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ ბირთვებს (არ ვაბრუნებთ) და ვიწერთ ასოებს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღების შესაბამისად მიღებული იქნება სიტყვა „ბურთი"?

ა) $\frac{1}{5!}$ ბ) $\frac{1}{5^4}$ გ) $\frac{1}{5}$ დ) $\frac{1}{25}$.

✓**49.** ვთქვათ, კამათლის გაგორებისას A არის კენტი რიცხვის მოსვლა, B არის მარტივი რიცხვის მოსვლა, მაშინ $P(A+B)=$

ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{6}$ დ) $\frac{2}{3}$.

✓**50.** ვთქვათ, კამათლის გაგორებისას A არის კენტი რიცხვის მოსვლა, B არის მარტივი რიცხვის მოსვლა, მაშინ

ა) $P(A+B)=P(A)+P(B)$ ბ) $P(A+B)<P(A)+P(B)$
გ) $P(A+B)>P(A)+P(B)$ დ) $P(A+B)\geq P(A)+P(B)$.

✓**51.** ქარხნის მთელი ნაწარმის 2% წუნდებულია, ვარგისი ნაწარმის (არა წუნდებულის) 20% არის უმაღლესი ხარისხის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ნაწარმი არის წუნდებული ან უმაღლესი ხარისხის.

ა) 0,216 ბ) 0,20 გ) 0,18 დ) 0,21.

✓**52.** საგამოცდო ბილეთები გადანომრილია 1-დან 100-მდე (ჩათვლით). რა არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ბილეთის ნომერი ჯერადია 10-ის, ან 11-ის?

ა) $\frac{19}{100}$ ბ) $\frac{20}{100}$ გ) $\frac{21}{100}$ დ) $\frac{9}{100}$.

✓**53.** იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის სამჯერ გაგორებისას 5-იანი მოვიდეს ერთხელ მაინც.

ა) $\frac{5}{6}$ ბ) $\frac{5^2}{6^2}$ გ) $\frac{5^3}{6^3}$ დ) $1-\frac{5^3}{6^3}$.

✓**54.** იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის n-ჯერ გაგორებისას 5-იანი მოვიდეს ერთხელ მაინც.

ა) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ ბ) $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ გ) $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ დ) $1-\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

✓**55.** თუ კამათლის n-ჯერ გაგორებისას 5-იანის ერთხელ მაინც მოსვლის ალბათობა 0,5-ზე მეტია, მაშინ

ა) $n>\log_{\frac{5}{6}}0,5$ ბ) $n<\log_{\frac{5}{6}}0,5$ გ) $n<4$ დ) $n\leq 3$.

✓**56.** თუ A და B არათავსებადი ხდომილობებია, მაშინ აუცილებლად

ა) $A\cap B=A$ ბ) $A\cap B=B$
გ) $A\cap B$ შეუძლებელი ხდომილობაა დ) $A\cap B$ აუცილებელი ხდომილობაა.

✓**57.** ორი სპორტსმენი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ერთი და იმავე სამიზნეს ესვრის. პირველი სპორტსმენის მიერ სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა არის 0,6, მეორის — 0,7. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს?

ა) 1,3   ბ) 0,42   გ) 0,13   დ) 4,2.

✓**58.** ერთ ყუთში 10 ბირთვია, მათგან 5 შავია; მეორე ყუთში 12 ბირთვია, მათგან 4 არის შავი. ალალბედზე ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ყუთებიდან ვიღებთ თითო ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორივე შავია?

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{6}$ დ) $\frac{5}{6}$.

✓**59.** ერთ ყუთში 10 ბირთვია, მათგან 5 შავია, მეორე ყუთში 12 ბირთვია, მათგან 4 არის შავი. ყუთებიდან ალალბედზე ვიღებთ თითო ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ არცერთი არ არის შავი?

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{2}{3}$ გ) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$ დ) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$.

✓**60.** ვთქვათ, სპორტსმენის მიერ ყოველი გასროლისას სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა არის 0,7. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ორჯერ გასროლისას სპორტსმენი სამიზნეს ორივეჯერ მოახვედრებს?

ა) 1,4   ბ) 0,49   გ) 0,7   დ) 0,14.

✓**61.** ვთქვათ, ორ ჩოგბურთელს შორის შეხვედრისას ერთ-ერთი სპორტსმენის მიერ ბურთის ყოველი გათამაშების მოგების ალბათობა 0,6-ია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ბურთის სამჯერ გათამაშებისას სამივეს ეს სპორტსმენი მოიგებს? (გათამაშებები ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად მიიჩნიეთ).

ა) 0,36   ბ) 0,216   გ) 0,0216   დ) 0,12.

✓**62.** ვთქვათ, ორ ჩოგბურთელს შორის შეხვედრისას ერთ-ერთი სპორტსმენის მიერ ბურთის ყოველი გათამაშების მოგების ალბათობა 0,7-ია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორი გათამაშებისას ეს სპორტსმენი ერთ-ერთს მოიგებს და მეორეს წააგებს (ან პირველს მოიგებს, ან მეორეს მოიგებს)?

ა) 0,21   ბ) 1   გ) 0,42   დ) 0,14.

✓**63.** 25 ერთნაირ ბარათზე თითო ნატურალური რიცხვია ჩაწერილი — 1-დან 25-მდე (ჩათვლით). ვიღებთ ერთ ბარათს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მასზე მარტივი რიცხვი იქნება გამოსახული?

ა) $\frac{8}{25}$ ბ) $\frac{9}{25}$ გ) $\frac{16}{25}$ დ) $\frac{1}{5}$.

✓**64.** 25 ერთნაირ ბარათზე თითო ნატურალური რიცხვია ჩაწერილი — 1-დან 25-მდე (ჩათვლით). ალალბედად ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ ორ ბარათს — თითო-თითოდ, ამოღებულ ბარათს ყოველ ჯერზე უკან ვაბრუნებთ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბარათზე მარტივი რიცხვი იქნება?

ა) $\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{25}$ ბ) $\frac{9}{25}\cdot\frac{9}{25}$ გ) $\frac{16}{25}\cdot\frac{16}{25}$ დ) $\frac{9}{25}\cdot\frac{16}{25}$.

✓**65.** ვთქვათ, ორი ჩოგბურთელის ყოველი შეხვედრისას თანაბარშესაძლებელია ერთ-ერთის გამარჯვებაც და დამარცხებაც. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ხუთი ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი შეხვედრიდან ყველა ერთ-ერთის გამარჯვებით დამთავრდება?

ა) $\frac{1}{8}$ ბ) $\frac{1}{32}$ გ) $\frac{1}{16}$ დ) $\frac{1}{64}$.

✓**66.** კოლოფში ლატარიის 100 ბილეთია, მათგან მომგებიანია 25. კოლოფიდან ალალბედზე ვიღებთ 3 ბილეთს — თითო-თითოს, ერთმანეთის მიყოლებით და უკან ვაბრუნებთ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ სამივე მომგებიანი იქნება?

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{16}$ გ) $\frac{1}{64}$ დ) $\frac{3}{4}$.

✓**67.** კოლოფში ლატარიის 100 ბილეთია, მათგან მომგებიანია 25. კოლოფიდან ალალბედზე ვიღებთ 4 ბილეთს — თითო-თითოდ, ერთმანეთის მიყოლებით და უკან ვაბრუნებთ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ სამივე მომგებიანი იქნება?

ა) $\frac{1}{10}$ ბ) $\frac{1}{64}$ გ) $\frac{1}{118}$ დ) $\frac{1}{256}$.

✓**68.** მონეტა 6-ჯერ ააგდეს. იპოვეთ იმ ხდომილობის ალბათობა, რომლის დროსაც ზუსტად 4-ჯერ მოვა გერბი.

ა) $\frac{15}{32}$ ბ) $\frac{15}{64}$ გ) $\frac{5}{32}$ დ) $\frac{7}{64}$.

✓**69.** მონეტა ხუთჯერ ააგდეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად 3-ჯერ მოვა საფასური.

ა) $\frac{5}{16}$ ბ) $\frac{3}{5}$ გ) $\frac{3}{32}$ დ) $\frac{5}{8}$.

✓**70.** კამათელი 5-ჯერ გააგორეს, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად 3-ჯერ მოვა „ხუთი".

ა) $10 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$ ბ) $\frac{10 \cdot 5^3}{6^6}$ გ) $\frac{10 \cdot 5^2}{6^5}$ დ) $10 \cdot \frac{1}{6^5}$.

✓**71.** კამათელი 6-ჯერ გააგორეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად 2-ჯერ მოვა „სამი".

ა) $15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$ ბ) $15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6$ გ) $15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$ დ) $\frac{15 \cdot 5^4}{6^6}$.

✓**72.** იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას ერთ-ერთ კამათელზე მოსული რიცხვი 1-ით მეტია მეორეზე მოსულ რიცხვზე.

ა) $\frac{7}{36}$ ბ) $\frac{5}{36}$ გ) $\frac{5}{18}$ დ) $\frac{1}{36}$.

✓**73.** იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას ერთ-ერთ კამათელზე მოსული რიცხვი 2-ით მეტია მეორეზე მოსულ რიცხვზე.

ა) $\frac{1}{6}$ ბ) $\frac{2}{9}$ გ) $\frac{11}{16}$ დ) $\frac{1}{36}$.

✓**74.** ვთქვათ, A და B არათავსებადი ხდომილობებია. იპოვეთ $P(B)$, თუ $P(A)=0{,}4$ და $P(A \cup B)=0{,}9$.

ა) 0,5 ბ) 0,4 გ) 0,6 დ) 0,3.

✓**75.** ერთ ურნაში 4 თეთრი და 4 შავი ბურთია, მეორეში — 3 თეთრი და 2 შავი. ორივე ურნიდან ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ამოიღეს თითო-თითო ბურთი. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთი მაინც იქნება თეთრი?

ა) $\frac{4}{5}$ ბ) $\frac{1}{5}$ გ) $\frac{3}{5}$ დ) $\frac{2}{5}$.

✓**76.** ვთქვათ, A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია. იპოვეთ $P(A)$, თუ $P(B)=\frac{3}{5}$ და $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$.

ა) $\frac{1}{6}$ ბ) $\frac{5}{6}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{2}{3}$.

✓77. ცნობილია, რომ A და B ხდომილობებიდან ერთი მაინც აუცილებლად განხორციელდება. A ხდომილობის ალბათობა არის $\frac{5}{9}$, B ხდომილობის — $\frac{2}{3}$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ A და B ერთდროულად განხორციელდება?

ა) $\frac{1}{9}$ ბ) $\frac{2}{9}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{2}{3}$.

✓78. ყუთიდან, რომელშიც ქართული ასოების 33 ბარათია (თითოზე — თითოა), ალალბედზე ვიღებთ 4 ბარათს. ყოველ ბარათს ამოღების შემდეგ ვაბრუნებთ უკან, ასოს კი ვინიშნავთ ცალკე ფურცელზე. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ოთხი ამოღებული ასოთი შეიძლება შევადგინოთ სიტყვა „ბარი"?

ა) $\frac{1}{33^4}$ ბ) $\frac{12}{33^4}$ გ) $\frac{24}{33^4}$ დ) $\frac{16}{33^4}$.

79. წინა ამოცანის პირობების მიხედვით ვეძებთ იმის ალბათობას, რომ ამოღებული ასოებით შევადგენთ სიტყვას „დედა".

ა) $\frac{12}{33^4}$ ბ) $\frac{1}{33^4}$ გ) $\frac{24}{33^4}$ დ) $\frac{16}{33^4}$.

✓80. სათამაშო დომინო 28 ქვისგან შედგება. რა არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ქვის ერთი ნახევარი მაინც „ცარიელია"?

ა) $\frac{1}{7}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{5}$ დ) $\frac{1}{4}$.

✓81. მონეტა ისეა გალუნული, რომ საფასურის მოსვლის ალბათობა მონეტის აგდებისას 3-ჯერ მეტია გერბის მოსვლის ალბათობაზე. რისი ტოლია საფასურის მოსვლის ალბათობა?

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{3}{4}$.

✓82. კამათელი ისეა დამზადებული, რომ ყოველი რიცხვის მოსვლის ალბათობა ამ რიცხვის პროპორციულია. თუ P_n არის n რიცხვის ($n=1, 2, ..., 6$) მოსვლის ალბათობა, მაშინ

ა) $P_n=\frac{1}{6}n$ ბ) $P_n=\frac{1}{21}n$ გ) $P_n=\frac{1}{7}n$ დ) $P_n=\frac{1}{3}n$.

✓83. მოცემული ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო ურთიერთგამომრიცხავი შედეგია x_1, x_2, x_3 და x_4, ამასთანავე, P_k ($k=1, 2, 3, 4$) შესაბამისი ალბათობებია. თუ $P_1=0,2$, $P_2=0,42$; $P_3=0,28$; მაშინ $P_4=$

ა) 0,5 ბ) 0,3 გ) 0,2 დ) 0,1.

✓84. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე (ალბათობების მითითებით) შემდეგი ცხრილითაა მოცემული

ხდომილობა	x_1	x_2	x_3	x_4
ალბათობა	0,2	0,1	0,5	0,2

რომელი შედეგებია თანაბრად მოსალოდნელი?

ა) x_1 და x_2 ბ) x_1 და x_3 გ) x_2 და x_3 დ) x_1 და x_4.

✓85. ორი მონეტის აგდებისას რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთზე მოვიდა გერბი, მეორეზე — საფასური?

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{3}{4}$.

✓86. 4 მონაკვეთიდან, რომელთა სიგრძეებია 1 სმ, 3 სმ, 5 სმ და 7 სმ, შემთხვევით ვირჩევთ სამს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული მონაკვეთების საშუალებით სამკუთხედი აიგება?

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{2}{3}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{1}{3}$.

✓**87.** რა არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული რომელიმე წლის იანვრის თვეში 5 კვირადღეა?

ა) $\frac{4}{7}$ ბ) $\frac{3}{7}$ გ) $\frac{5}{7}$ დ) $\frac{2}{7}$.

✓**88.** ექვს ბარათზე „ი", „ე", „ო", „ქ", „თ", „ნ" ასოებია ჩამოწერილი. თითო ბარათზე — თითო ასო, მათ ალალბედზე ვაწყობთ ერთმანეთის მიყოლებით. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მიიღება „ქეთინო"?

ა) $\frac{1}{600}$ ბ) $\frac{1}{720}$ გ) $\frac{1}{36}$ დ) $\frac{1}{120}$.

✓**89.** სათამაშო ლატარია ისეა მოწყობილი, რომ მოთამაშე წინასწარ ირჩევს ექვს რიცხვს 1-დან 40-მდე (ჩათვლით) და, თუ ეს ექვსი რიცხვი დაემთხვევა გათამაშებისას შემთხვევით მიღებულ ექვს რიცხვს, მოთამაშე იგებს. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ მოგების მიღწევის ალბათობა?

ა) $P=\frac{1}{A_{40}^6}$ ბ) $P=\frac{1}{P_{40}}$ გ) $P=\frac{6}{C_{40}^6}$ დ) $P=\frac{1}{C_{40}^6}$.

✓**90.** კარტის დასტიდან, რომელშიც 36 კარტია, შემთხვევით ვიღებთ 3 კარტს. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ზუსტად ერთი ტუზია?

ა) $P=\frac{C_4^1\cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}$ ბ) $P=\frac{C_{32}^2}{C_{36}^3}$ გ) $P=\frac{C_4^1}{C_{36}^3}$ დ) $P=\frac{8\cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}$.

✓**91.** ექსპერიმენტი არის 10 დეტალიდან, რომელთა შორის 3 წუნდებულია, შემთხვევით 6 დეტალის შერჩევა. განვიხილავთ ხდომილობას: შერჩეული 6 დეტალიდან 2 არის წუნდებული. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ მისი ალბათობა?

ა) $P=\frac{C_7^2\cdot C_4^3}{C_7^4}$ ბ) $P=\frac{C_3^2\cdot C_7^4}{C_7^6}$ გ) $P=\frac{C_3^2\cdot C_7^4}{C_{10}^6}$ დ) $P=\frac{C_2^3\cdot C_4^7}{C_{10}^6}$.

✓**92.** ურნაში 5 ბირთვია. ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, 4, 5. ალალბედზე ვიღებთ ჯერ ერთ ბირთვს, შემდეგ მეორეს, შემდეგ — მესამეს. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ბირთვებზე კენტი რიცხვებია და ისინი დალაგებულია კლების მიხედვით?

ა) $\frac{P_3}{A_5^3}$ ბ) $\frac{1}{P_3}$ გ) $\frac{1}{A_5^3}$ დ) $\frac{1}{C_5^3}$.

✓**93.** ურნაში 4 ბირთვია. ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, 4. ურნიდან მიმდევრობით ვიღებთ ჯერ ერთ ბირთვს, შემდეგ დარჩენილებიდან — მეორეს. შემდეგ დარჩენილებიდან — მესამეს, შემდეგ — მეოთხეს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ბირთვების ნომრები ზრდის მიხედვით იქნება ამოღებული?

ა) $\frac{1}{3!}$ ბ) $\frac{1}{2!}$ გ) $\frac{1}{5}$ დ) $\frac{1}{4!}$.

✓**94.** ურნაში 5 ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, 4, 5. ვიღებთ ერთ ბირთვს, ვიწერთ მის ნომერს და ვაბრუნებთ უკან ურნაში; შემდეგ იგივე მოქმედებას კიდევ 2-ჯერ ვიმეორებთ. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ ბირთვებს სხვადასხვა ნომერი აქვს?

ა) $P=\frac{1}{A_5^3}$ ბ) $P=\frac{A_5^3}{C_5^3}$ გ) $P=\frac{A_5^3}{5^3}$ დ) $P=\frac{P_3}{C_5^3}$.

✓**95.** ურნაში 5 ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, 4, 5. ალალბედზე ვიღებთ 3 ბირთვს. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ ბირთვებს კენტი ნომერი აქვს?

ა) $P=\frac{1}{A_5^3}$ ბ) $P=\frac{1}{3!5!}$ გ) $P=\frac{1}{C_5^3}$ დ) $P=\frac{3}{P_5}$.

✓**96.** სკოლის მოჭადრაკეთა ნაკრებმა, რომელშიც 5 მოსწავლეა, კაპიტნის არჩევა კენჭისყრას მიანდო. გამზადებულია 5 ბარათი, რომელთგან მხოლოდ ერთზეა ჩანაწერი „კაპიტანი". მოსწავლეები რიგრიგობით იღებენ ბარათს და უკან აბრუნებენ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ კენჭისყრაში მონაწილე ბოლო მოსწავლე ამოიღებს სასურველ ბარათს?

ა) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot\frac{1}{5}$ ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^5$ გ) $\frac{1}{10}$ დ) $\frac{1}{15}$.

✓**97.** ყუთში 10 თეთრი და 5 შავი ბურთულაა, ალალბედზე ვიღებთ 3 ბურთულას. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულია 2 თეთრი და 1 შავი ბურთულა?

ა) $P=\frac{C_{10}^2\cdot C_5^1}{C_{15}^3}$ ბ) $P=\frac{C_{10}^1\cdot C_5^2}{C_{15}^3}$ გ) $P=\frac{C_5^2}{C_{15}^3}$ დ) $P=\frac{90}{C_{15}^3}$.

✓**98.** $(m+n)$ ოდენობის საგნების ჯგუფში m საგანს აქვს რაღაც A თვისება, n საგანს — B თვისება (ორივე ეს თვისება არც ერთს არა აქვს). საგნების ამ ჯგუფიდან შემთხვევით ვიღებთ r საგანს, რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულთა შორის იქნება a ცალი A თვისების საგანი და b ცალი — B თვისებისა $(a+b=r)$?

ა) $\frac{1}{C_m^a\cdot C_n^b}$ ბ) $\frac{C_m^a\cdot C_n^b}{C_{m+n}^r}$ გ) $\frac{C_m^n}{C_{m+n}^r}$ დ) $\frac{C_n^b}{C_{m+n}^r}$.

✓**99.** 10 სხვადასხვა წიგნიდან 5 წიგნს ერთნაირი ფასი აქვს — 4 ლარი; სხვა 3 წიგნიდან თითოეული 1 ლარი ღირს, დანარჩენი 2-დან თითოეული 3 ლარი ღირს. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული ორი წიგნის საერთო ღირებულება იქნება 5 ლარი?

ა) $P=\frac{1}{C_{10}^2}$ ბ) $P=\frac{3}{C_{10}^2}$ გ) $P=\frac{5}{C_{10}^2}$ დ) $P=\frac{5\cdot 3}{C_{10}^2}$.

✓**100.** ლატარიის 10 ბილეთიდან ორი მომგებიანია. ამ 10-დან შემთხვევით ვირჩევთ 5 ბილეთს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ზუსტად ერთია მოგებული?

ა) $\frac{1}{9}$ ბ) $\frac{5}{9}$ გ) $\frac{7}{9}$ დ) $\frac{1}{3}$.

✓**101.** 60 საკითხიდან სტუდენტმა 50 მოამზადა. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ბილეთი, რომელიც 2 საკითხს შეიცავს, ორივე საკითხი სტუდენტს მომზადებული აქვს?

ა) $P=\frac{1}{C_{60}^2}$ ბ) $P=\frac{1}{C_{50}^2}$ გ) $P=\frac{C_{50}^2}{C_{60}^2}$ დ) $P=\frac{1}{C_{50}^2\cdot C_{60}^2}$.

✓**102.** 10-მა სტუდენტმა გადაწყვიტა ელექტრომატარებლით ერთად იმგზავროს, მათ შემთხვევით დაიკავეს ადგილები მატარებელში, რომელიც 10 ვაგონისგან შედგებოდა. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ არცერთი სტუდენტი სხვა სტუდენტთან ერთად არ აღმოჩნდება ერთ ვაგონში?

ა) $P=\frac{1}{10!}$ ბ) $P=\frac{1}{10^{10}}$ გ) $P=\frac{10!}{10^{10}}$ დ) $P=\frac{1}{10!10^{10}}$.

103. 10 მგზავრი 3 ვაგონში შემთხვევით განთავსდა. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთ ვაგონში 6 მგზავრია, მეორეში — 3, მესამეში — 1?

ა) $P = \frac{C_{10}^6 C_4^3}{10^3}$ ბ) $P = \frac{C_{10}^6}{10^3}$ გ) $P = \frac{C_{10}^6 \cdot C_4^3}{3^{10}}$ დ) $P = \frac{C_4^3}{C_{10}^6}$.

104. ურნაში n ცალი ბურთია. ისინი გადანომრილია რიცხვებით: 1, 2, 3, ..., n. მათგან ალალბედზე r-ჯერ ვიღებთ ბურთს, ვიწერთ ნომერს და ვაბრუნებთ. რა ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოწერილი ნომრები ზრდად მიმდევრობას შექმნის?

ა) $P = \frac{1}{n^r}$ ბ) $P = \frac{C_n^r}{n^r}$ გ) $P = \frac{A_n^r}{n^r}$ დ) $P = \frac{r!}{n^r}$.

105. ამოხსენით წინა ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა ბურთებს უკან არ ვაბრუნებთ.

ა) $P = \frac{1}{r!}$ ბ) $P = \frac{1}{(n-r)!}$ გ) $P = \frac{1}{A_n^r}$ დ) $P = \frac{1}{n^r}$.

106. გაითვალისწინეთ, რომ $A = A \cap B + A \cap \overline{B}$ და იპოვეთ $P(A \cap \overline{B})$, თუ $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{12}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{1}{8}$.

107. ვთქვათ, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. იპოვეთ $P(\overline{A} \cap B)$.

ა) $\frac{3}{20}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{5}$ დ) $\frac{1}{20}$.

108. ახალგაზრდულ თამაშებზე გასაყიდი დარჩა ფეხბურთის, კალათბურთის და ფრენბურთის ფინალურ მატჩებზე დასწრების ბილეთები, შესაბამისად, 500, 300 და 200 ცალი. მათგან ერთ-ერთი ბილეთი შემთხვევით შეირჩა და გადაეცა სპორტულ ვიქტორინაში გამარჯვებულს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულია იმ თამაშის ბილეთი, რომელშიც აკრძალულია ფეხით თამაში?

ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{1}{5}$.

109. ვთქვათ, კარტის დასტაში 52 კარტია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ერთ-ერთი კარტი ან ათიანია, ან ჯვრის კარტია (გამოიყენეთ ჯამის ალბათობის ფორმულა)?

ა) $\frac{17}{52}$ ბ) $\frac{16}{52}$ გ) $\frac{15}{52}$ დ) $\frac{1}{52}$.

110. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ აუცილებლად

ა) $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ბ) $P(A+B) = P(A) + P(A) - P(A) \cdot P(B)$

გ) $P(A \cap B) = 0$ დ) $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

111. თუ ორი ხდომილობა არათავსებადია, მაშინ არ არის სწორი, რომ

ა) $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ბ) $P(A \cap B) \neq 0$

გ) $P(A \cap B) = 0$ დ) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

112. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 5-ჯერ აგდებისას ხუთჯერვე გერბი მოვა?

ა) $\frac{1}{7}$ ბ) $\frac{4}{5}$ გ) $\frac{1}{32}$ დ) $\frac{1}{16}$.

113. სპორტსმენი 3-ჯერ ესვრის სამიზნეს, თითოეული სროლისას მოხვედრის ალბათობა არის P. რა არის ალბათობა იმისა, რომ პირველი გასროლა წარმატებული იქნება, შემდეგი ორი — არა?

ა) P^2 ბ) $P(1-n)$ გ) $(1-P)^2 P$ დ) $P^2(1-P)$.

114. ორი საზენიტო ქვემეხი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ცდილობს მტრის თვითმფრინავის ჩამოგდებას. თვითმფრინავის ჩამოგდება ერთი ყუმბარითაც შეიძლება.

პირველი ქვემეხის მიერ თვითმფრინავის ჩამოგდების ალბათობა არის 0,8, მეორის — 0,75. რა არის თვითმფრინავის ჩამოგდების ალბათობა ერთდროულად ორივე ქვემეხის გასროლისას?

ა) 0,9 ბ) 0,75 გ) 0,8 დ) 0,95.

✓115. ვთქვათ, კომპიუტერულ ქსელში ჩართული ოთხი „მეომარი" ერთდროულად, ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად „ესვრის" ერთსა და იმავე „ტანკს". ერთი „ტყვიის" მოხვედრის შემთხვევაშიც ტანკი ზიანდება. ვთქვათ, ყოველი მეომრის მიერ „ტანკის" დაზიანების ალბათობაა $\frac{2}{3}$. რა არის ალბათობა იმისა რომ ოთხივე მეომრის თითო გასროლისას ტანკი დაზიანდება?

ა) $\frac{1}{81}$ ბ) $\frac{1}{80}$ გ) $\frac{79}{80}$ დ) $\frac{80}{81}$.

✓116. ვთქვათ, ყოველი 1000 ნათურიდან ერთი უხარისხოა. ერთი ნათურის დამზადება არ არის დამოკიდებული მეორე ნათურის დამზადებაზე. უხარისხო ნათურის შერჩევის ალბათობა არის 0,001. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთი-მეორის მიყოლებით შერჩეული ორი ნათურა ხარისხიანია?

ა) $0{,}001^2$ ბ) $0{,}999^2$ გ) 0,001 დ) 0,999.

✓117. მონეტის 10-ჯერ აგდებისას რამდენი შემთხვევა შეიძლება გვქონდეს, როცა მონეტა გერბით მოვა 2-ჯერ?

ა) C_{10}^6 ბ) C_{10}^2 გ) C_{10}^3 დ) C_{10}^4.

✓118. მონეტის 10-ჯერ აგდებისას, რისი ტოლია გერბის ზუსტად 2-ჯერ მოსვლის ალბათობა?

ა) $C_{10}^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8$ ბ) $C_{10}^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7$

გ) $C_{10}^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$ დ) $C_{10}^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

119. 10-ჯერ ვაგორებთ კამათელს. რისი ტოლია 5-ის 4-ჯერ მოსვლის ალბათობა?

ა) $C_{10}^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$ ბ) $C_6^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5$ გ) $C_{10}^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6$ დ) $C_6^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

120. ერთი გასროლით სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა $\frac{1}{8}$-ია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ 12 გასროლისას ტყვია მხოლოდ 2-ჯერ მოხვდება სამიზნეს?

ა) $C_{12}^2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{12}$ ბ) $C_{12}^2\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{12}$ გ) $C_{12}^2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{10}$ დ) $C_{12}^2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{10}$.

121. ერთი გასროლისას ტყვიის სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა $\frac{1}{7}$-ია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ 10 გასროლისას 10-ვე ტყვია აცდება სამიზნეს?

ა) $\left(\frac{1}{7}\right)^{10}$ ბ) $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}$ გ) $\left(\frac{1}{7}\right)^0\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{12}$ დ) $\left(\frac{1}{7}\right)^0\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{12}$.

122. თუ სამგზავრო ბილეთები გადანომრილია „ოთხნიშნა" რიცხვებით — 0000-დან 9999-მდე (ჩათვლით), რა არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ერთი ბილეთის ნომერი შეიცავს ციფრ „8"-ს?

123. ლატარიაში n ბილეთი თამაშდება, მათგან m ცალი მომგებიანია, ერთ-ერთმა პიროვნებამ k ბილეთი შეიძინა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ პიროვნებას ერთი მაინც მომგებიანი ბილეთი აქვს?

124. 36 კარტისგან შედგენილი დასტიდან შემთხვევით ვიღებთ ერთ კარტს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული იქნება ნებისმიერი სურათის კარტი, ან ტუზი?

125. მარიამის კლასიდან, რომელშიც 25 მოსწავლეა, შემთხვევით ხდება ორი მორიგეს შერჩევა. ა) რა არის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული იქნება მარიამი? ბ) რა არის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული იქნება მარიამი და მისი მეგობარი ნინიკო?

126. ერთდროულად აგორებენ 3 კამათელს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ: ა) სამივეზე ერთნაირი რიცხვები მოვა? ბ) მოსული რიცხვები განსხვავებული იქნება? გ) ზუსტად ორი ტოლი რიცხვი მოდა?

127. 36 კარტისგან შედგენილ დასტას შემთხვევით ვყოფთ შუაზე. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ნახევარში ტუზების რაოდენობა ტოლია?

128. ლატარიის 10 ბილეთიდან ორი მომგებიანია. ამ 10-დან შემთხვევით ვირჩევთ 5 ბილეთს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის:

ა) ზუსტად ერთია მომგებიანი; ბ) ზუსტად ორია მომგებიანი;
გ) ერთი მაინც არ არის მომგებიანი; დ) არ არის მომგებიანი?

129. N ბილეთიდან k მომგებიანია, შემთხვევით შეიძინეს r ბილეთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შეძენილებს შორის S მომგებიანია ($s \leq k$, $s \leq r$).

130. r დეტალიდან k წუნდებულია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული s დეტალიდან l ცალი წუნდებულია ($l \leq k$, $l \leq s$).

131. ტყვიის მსროლელი ათიანში (10 ქულა) 0,05 ალბათობით ახვედრებს, ცხრიანში (9 ქულა) — 0,2 ალბათობით, რვიანში (8 ქულა) — 0,6 ალბათობით. ერთი გასროლის შემთხვევაში რა არის ალბათობა იმისა, რომ შედეგი

ა) 8 ქულაზე ნაკლები არ არის?
ბ) 8 ქულაზე მეტია?
გ) 8 ქულაზე ნაკლებია?

132. სამი მსროლელი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ისვრის მიზანში. პირველის მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,8, მეორის — 0,75, III-ის — 0,7. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი გასროლისას

ა) ერთი ტყვია მაინც მოხვდება მიზანში;
ბ) ზუსტად ორი მოხვდება მიზანში;
გ) ზუსტად ერთი ტყვია მოხვდება მიზანში;
დ) სამივე მოხვდება მიზანში;
ე) სამივე ააცილებს მიზანს.

133. ჰიდროელექტროსადგურში ელექტროენერგიას სამი ტურბინა გამოიმუშავებს. თითოეული ტურბინა სხვებისგან დამოუკიდებლად შეიძლება გაფუჭდეს. ამასთანავე, ერთ-ერთის გაფუჭებაც კი სადგურის მუშაობას აჩერებს. დღელამის განმავლობაში I ტურბინის შეუფერხებლად მუშაობის ალბათობა 0,9-ია; II-ის — 0,95, მესამის — 0,85. იპოვეთ 0,1-ის სიზუსტით ალბათობა იმისა, რომ სადგური დღე-ღამის განმავლობაში მუშაობისას ტურბინის დაზიანების გამო არ გაჩერდება.

134. გამომთვლელი მანქანა n ბლოკისგან შედგება. თითოეული ბლოკის საიმედოობა (დროის რაიმე შუალედში უწყვეტი მუშაობის ალბათობა) არის P_k ($k=1, 2, ..., n$). ბლოკების დაზიანება ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ხდება ხოლმე. რისი ტოლია მანქანის საიმედოობა?

135. სათამაშო კამათელს 4-ჯერ ვაგორებთ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად ორი ექვსიანი გვექნება?

136. ლატარიის ერთი ბილეთით მოგების ალბათობა $\frac{1}{7}$-ია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ექვსი ბილეთის ყიდვის შემთხვევაში მომგებიანი იქნება

ა) ორი ბილეთი;

ბ) სამი ბილეთი?

137. ერთმანეთის მიყოლებით სამი ცდა ტარდება: მონეტის აგდება, კამათლის გაგორება და კარტის ამოღება 52 კარტის შემცველი დასტიდან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოვა: პირველი ცდისას — გერბი, მეორე ცდისას — 5, მესამე ცდისას — ტუზი?

138. სამი კამათლის აგდებისას რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოსული რიცხვების ჯამი 5-ია (კამათლის აგდება ერთმანეთისგან დამოუკიდებელია)?

139. ვთქვათ, ალბათობა იმისა, რომ 60 წელს გადაცილებულთაგან შემთხვევით შერჩეული კაცი შემდეგ თვეში საავადმყოფოში მოხვდება არის 0,01. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ ასაკის შემთხვევით შერჩეული 3 კაციდან ზუსტად ერთი მოხვდება შემდეგ თვეში საავადმყოფოში?

140. ორი მონეტის აგდებისას რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორივე გერბით მოვა?

141. სამი მონეტის აგდებისას რა არის ალბათობა იმისა, რომ სამივე საფასურით მოვა?

142. სამი ყუთიდან თითოეულში 10 დეტალია. ამასთანავე, პირველში — 2 დეტალი, მეორეში — 3 დეტალი, მესამეში კი — 1 დეტალი წუნდებულია. თითოეული ყუთიდან ვიღებთ თითო დეტალს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ სამივე წუნდებული იქნება?

143. თითოეული ცდისას A ხდომილობის ალბათობა 0,2-ია. ცდები მიმდევრობით ტარდება A ხდომილობის განხორციელებამდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ საჭირო გახდება მეოთხე ცდის ჩატარება.

144. ვთქვათ, ექვსი ადამიანი დაავადებულია რაღაც ავადმყოფობით და მოცემული წამლის გამოყენებით მათი განკურნების ალბათობა 98%-ია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ აღნიშნული წამლის გამოყენებით

ა) განიკურნება ექვსივე ავადმყოფი;

ბ) ვერცერთი ვერ განიკურნება;

გ) მხოლოდ 5 განიკურნება?

145. ყუთში 12 წითელი, 8 მწვანე და 10 თეთრი ბურთულაა. შემთხვევით ვიღებთ ერთ-ერთ ბურთულას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა წითელია, თუ ცნობილია, რომ იგი არ არის თეთრი?

146. ყუთში 12 წითელი, 8 მწვანე და 10 თეთრი ბურთულაა. შემთხვევით ვიღებთ ორ ბურთულას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ისინი მწვანეა, თუ ცნობილია, რომ არცერთი თეთრია არ არის?

ბ) ამოღებული ბურთები სხვადასხვა ფერისაა, თუ ცნობილია, რომ არცერთი არ არის თეთრი?

147. საფეხბურთო მოედანს 10 ნათურა ანათებს. ყოველი ნათურისთვის იმის ალბათობა, რომ წლის განმავლობაში არ გადაიწვება, არის p. რა არის ალბათობა იმისა, რომ

ა) წლის განმავლობაში ერთი ნათურა მაინც გადაიწვება;

ბ) წლის განმავლობაში ზუსტად ერთი ნათურა გადაიწვება;

გ) წლის განმავლობაში ზუსტად ორი ნათურა გადაიწვება?

148. სამხედრო საფრენოსნო სასწავლებელში გამოცდა 4 დამოუკიდებელი შემოწმებისგან შედგება. ვთქვათ, მფრინავობის ერთ-ერთი მსურველისთვის პირველი შემოწმების წარმატებით

გავლის ალბათობა არის 0,9, II-ის — 0,95, მესამის — 0,8, IV-ის — 0,85. რა არის ალბათობა იმისა, რომ

ა) ახალგაზრდა ყველა შემოწმებას წარმატებით გაივლის;

ბ) ახალგაზრდა ამ შემოწმებებიდან მხოლოდ რომელიმე ორს გაივლის წარმატებით;

გ) არანაკლებ ორ შემოწმებას გაივლის წარმატებით?

149. ვთქვათ, ერთმანეთთან თამაშობს ერთნაირი ძალის ორი ჩოგბურთელი (მოგების ალბათობა თითოეულისთვის 0,5-ია). გამოთვალეთ ალბათობა რომელიმე ჩოგბურთელის

ა) 4 სეტში 3 გამარჯვების,

ბ) 8 სეტში — 5 გამარჯვების?

150. ბანაკში m ახალგაზრდა ისვენებს. მათ n ცალი კოცონი დაანთეს და შემთხვევით განაწილდნენ ამ კოცონებთან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ პირველ კოცონთან k ახალგაზრდა მოხვდა ($k \leq m$)?

151. ვთქვათ, წყალქვეშა ნავი უტევს კრეისერს და 4 ჭურვს ესვრის. თითოეულის მიზანში მოხვედრის ალბათობა $\frac{3}{4}$-ია.

ა) რა არის ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად ერთი ჭურვი მოხვდება მიზანს?

ბ) რა არის ალბათობა იმისა, რომ მხოლოდ 3 ჭურვი მოხვდება მიზანს?

152. ვთქვათ, ცდის ერთ-ერთი ხდომილობა არის A და $P(A)=0{,}01$. სულ მცირე რამდენჯერ უნდა გავიმეოროთ ეს ცდა, რომ A-ს ერთხელ მაინც განხორციელების ალბათობა იყოს არანაკლებ 0,5?

153. საამქროში 6 დაზგაა. ყოველი დაზგისთვის ალბათობა იმისა, რომ „იგი ჩართულია" არის 0,8.

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ

ა) ჩართულია რაიმე 4 დაზგა; ბ) ყველა დაზგა ჩართულია;

გ) ყველა დაზგა გამორთულია.

154. ვთქვათ, ყოველი ცდის დროს A ხდომილობის განხორციელების ალბათობა არის 0,3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ცდის ხუთჯერ განმეორების შემთხვევაში A განხორციელდება არანაკლებ ორჯერ.

155. ვთქვათ, მოცემული ცდისას A ხდომილობის განხორციელების ალბათობა 0,4-ია. B ხდომილობა ხორციელდება მაშინ, როცა A ხორციელდება არანაკლებ ორჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 6-ჯერ ცდის გამეორებისას B განხორციელდება.

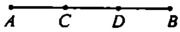
156. ვთქვათ, მონეტის აგდების ცდას n-ჯერ ვიმეორებთ. განიხილეთ შემთხვევები: $n=4$, $n=8$, $n=12$, $n=16$ და თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი $\frac{n}{2}$-ჯერ მოვა.

§ 4.4. გეომეტრიული ალბათობა

ამ პარაგრაფში ვისაუბრებთ სხვადასხვა გეომეტრიულ ფიგურაში (მაგალითად, მონაკვეთზე, წრეში, კვადრატში, სამკუთხედში) წერტილების ალალბედად შერჩევაზე; რა „ხდომილობებთან" გვაქვს ამ შემთხვევაში საქმე? როგორ განისაზღვრება ალბათობა ამ შემთხვევაში?

მოვიშველიოთ მაგალითები.

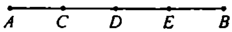
მაგალითი 1. ვთქვათ, AB მონაკვეთი l სიგრძისაა, C და D წერტილები ეკუთვნის AB მონაკვეთს და $AC=CD=DB$. ალალბედზე ვირჩევთ AB მონაკვეთის რაიმე წერტილს.



რა არის ალბათობა ხდომილობისა: არჩეული წერტილი CD მონაკვეთს ეკუთვნის?

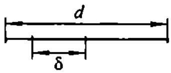
აქ AB მონაკვეთი ხდომილობათა სივრცის როლშია. დასახელებულ ხდომილობას AB მონაკვეთის ქვესიმრავლეს — CD მონაკვეთს ვუთანადებთ; საძიებელი ალბათობა CD მონაკვეთის სიგრძის AB მონაკვეთის სიგრძესთან შეფარდებაა, $\frac{1}{3}$-ის ტოლია.

მაგალითი 2. AB მონაკვეთი ამჯერად 4 ტოლ ნაწილად არის გაყოფილი. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული წერტილი AC ან DE მონაკვეთზე მოხვდება?



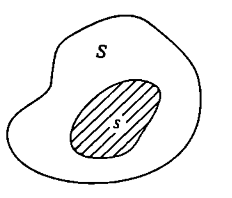
ამ მონაკვეთებს საერთო წერტილი არა აქვს. აქ ჯამის ალბათობის გამოყენებაც შეიძლება; საძიებელი ალბათობა არის $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$; ეს ალბათობა, შეიძლება განვიხილოთ, როგორც საერთო წერტილების არმქონე მონაკვეთების სიგრძეების ჯამის შეფარდება მთელი მონაკვეთის სიგრძესთან.

ალბათობა იმისა, რომ d სიგრძის მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდება δ სიგრძის მონაკვეთზე გამოითვლება



$$\frac{\delta}{d} \qquad (1)$$

ფორმულით.



ანალოგიურად, როცა ვსაუბრობთ შემთხვევით (ალალბედზე) წერტილის შერჩევაზე S ფართობის მქონე კვადრატში, ან ამავე S ფართობის მქონე რაიმე სხვა ფიგურაში, ჩავთვალოთ — ალბათობა იმისა, რომ წერტილი მოხვდეს ამ ფიგურის წერტილთა სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეში, რომლის ფართობი არის s, არის

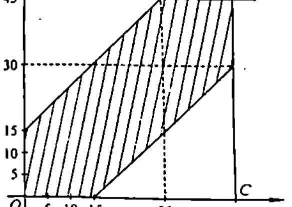
$$\frac{s}{S}. \qquad (2)$$

(1) და (2) გეომეტრიული ალბათობის ფორმულებია.

მაგალითი 3. ორი მეგობარი შეთანხმდა, რომ შეხვდებოდნენ ერთმანეთს მეტროს სადგურ „რუსთაველთან" დღის 12 საათიდან 13 საათამდე. თითოეული მათგანი — დროის ამ მონაკვეთში შემთხვევით მოდის, ელოდება მეორეს მხოლოდ 15 წუთი და მიდის (13საათამდე). რა არის ალბათობა იმისა, რომ მეგობრები შეხვდებიან ერთმანეთს?

ამოხსნა

ამ ამოცანას გეომეტრიული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით ამოვხსნით; დროის მთელი მონაკვეთი წუთების გამოყენებით ასე გამოვსახოთ: [0; 60]. მაშასადამე, თითოეული მეგობარი დროის [0; 45] მონაკვეთში მოდის და ელოდება მეორეს 15 წუთი; მაშასადამე, მეგობრები ერთმანეთს შეხვდებიან, თუ მათი მოსვლის მომენტების — y-ისა და x-ის სხვაობის მოდული (ვგულისხმობთ, რომ $x\in[0;\ 45]$, $y\in[0;\ 45]$) არ აღემატება 15-ს.



სურათზე წარმოდგენილია საკოორდინატო სიბრტყეზე $\begin{cases}0 \le x \le 45\\ 0 \le y \le 45\end{cases}$ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე — $OABC$ კვადრატი.

ამ $(x,\ y)$ წყვილებისთვის მოცემულია $|y-x|\le 15$ უტოლობა. იგი ტოლფასია $-15\le y-x\le 15$ უტოლობის, ანუ $\begin{cases} y-x\ge -15\\ y-x\le 15\end{cases}$ სისტემის.

ამ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოდგენილია კვადრატის დაშტრიხული ნაწილით; მისი ფართობია $S=45^2-30^2$; საძიებელი ალბათობა „გეომეტრიულ ენაზე" შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: რა არის ალბათობა იმისა, რომ კვადრატში შერჩეული $(x;\ y)$ წერტილი მოხვდება დაშტრიხულ ნაწილში (დააკმაყოფილებს პირობას — $|y-x|\le 15$)?

(2) ფორმულის თანახმად,

$$P=\frac{45^2-30^2}{45^2}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9};$$

1. მონაკვეთი სამ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი შუა ნაწილში მოხვდება.

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{5}$ დ) $\frac{1}{3}$.

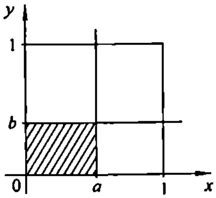
2. მონაკვეთი სამ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი შუა ნაწილში არ მოხვდება.

ა) $\frac{2}{3}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{3}{4}$.

3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ (0; 1) შუალედიდან აღებული რიცხვის ათობით ჩანაწერში მძიმის შემდეგ პირველი ციფრი მარტივ რიცხვს გამოსახავს.

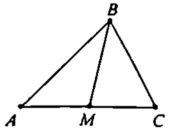
ა) 0,5 ბ) 0,4 გ) 0,3 დ) 0,1.

4. საკოორდინატო სიბრტყეზე ერთეულის სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატია გამოსახული. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ კვადრატში შემთხვევით შერჩეული წერტილი დაშტრიხულ მართკუთხედში — $x=a$, $y=b$ და საკოორდინატო ღერძებით შემოსაზღვრულ მართკუთხედში მოხვდება.



ა) $\frac{1}{ab}$ ბ) $a+b$

გ) ab დ) $ab+1$.

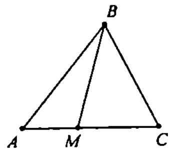


5. BM მედიანაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი BMC სამკუთხედში მოხვდება.

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{2}$

გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{2}{3}$.

6. ABC სამკუთხედს AC გვერდზე შერჩეულია M წერტილი ისე, რომ $AM:MC=2:3$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი AMB სამკუთხედს ეკუთვნის.



ა) $\frac{2}{5}$ ბ) $\frac{2}{3}$

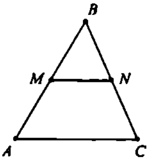
გ) $\frac{3}{5}$ დ) $\frac{3}{8}$.

7. ალბათობა იმისა, რომ d სიგრძის მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდეს ამავე მონაკვეთზე მდებარე δ სიგრძის მონაკვეთზე, გამოითვლება ფორმულით:

ა) $\delta \cdot d$ ბ) $\delta + d$ გ) $\frac{d}{\delta}$ დ) $\frac{\delta}{d}$.

8. ალბათობა იმისა, რომ S ფართობის მქონე ფიგურაში ალალბედზე შერჩეული წერტილი მოხვდეს ამ ფიგურის იმ ნაწილში, რომლის ფართობია s, მოიცემა ფორმულით

ა) $\frac{s}{S}$ ბ) $\frac{S}{s}$ გ) $S \cdot s$ დ) $s+S$.

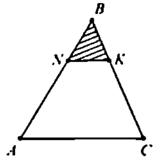


9. MN შუახაზია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი BMN სამკუთხედში მოხვდება.

ა) $\frac{1}{8}$ ბ) $\frac{1}{2}$

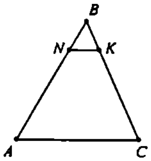
გ) $\frac{3}{4}$ დ) $\frac{1}{4}$.

10. ვთქვათ, $BN=\frac{1}{3}AB$, $NK \parallel AC$; იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი BNK სამკუთხედში მოხვდება?



ა) $\frac{1}{9}$ ბ) $\frac{1}{3}$

გ) $\frac{2}{3}$ დ) $\frac{1}{2}$.



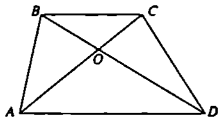
11. $BN=\frac{1}{4}AB$; $NK \parallel AC$;

რა არის ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი $ANKC$ ტრაპეციაში მოხვდება?

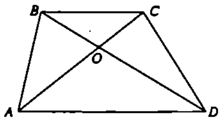
ა) $\frac{15}{16}$ ბ) $\frac{1}{16}$

გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{3}{4}$.

12. $ABCD$ ტრაპეციაა, $\frac{AD}{BC} = k$, $k>1$. ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდეს BOC სამკუთხედში, არის



ა) $\frac{1}{k}$ ბ) $\frac{k}{k+1}$ გ) $\frac{1}{k+1}$ დ) $\frac{k-1}{k+1}$.

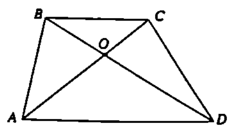


13. $ABCD$ ტრაპეციაა, $\frac{AD}{BC} = k$, $k>1$. ალბათობა იმისა, რომ BCD სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი COD სამკუთხედში მოხვდეს, არის

ა) $\frac{1}{k}$ ბ) $\frac{k}{k+1}$ გ) $\frac{1}{k+1}$ დ) $\frac{k-1}{k+1}$.

14. $BC \parallel AD$; $\frac{AD}{BC} = k$, $k>1$.

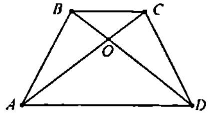
ალბათობა იმისა, რომ $ABCD$ ტრაპეციაში შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდეს AOD სამკუთხედში არის



ა) $\frac{1}{(k+1)^2}$ ბ) $\frac{k^2}{(k+1)^2}$

გ) $\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}$ დ) $\frac{1}{k^2}$.

15. *ABCD* ტრაპეციაში $BC=a$, $AD=b$.

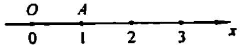


იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ *ABCD* ტრაპეციაში შემთხვევით შერჩეული წერტილი

ა) *BOC* სამკუთხედს ეკუთვნის;

ბ) *AOB* სამკუთხედს ეკუთვნის;

გ) *AOD* სამკუთხედს ეკუთვნის?



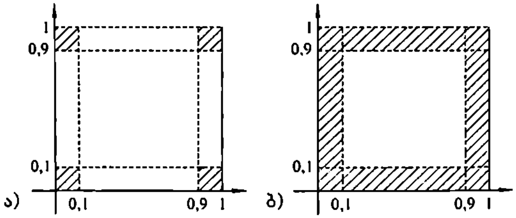
16. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ რიცხვით წრფეზე *OA* მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი ამ მონაკვეთის შუა წერტილიდან არაუმეტეს 0,1-ითაა დაშორებული.

17. ვთქვათ, x და y არის [0; 1] შუალედიდან შემთხვევით შერჩეული რიცხვები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ

ა) ორივე რიცხვი შუალედის რომელიმე ბოლოდან არაუმეტეს 0,1-ითაა დაშორებული;

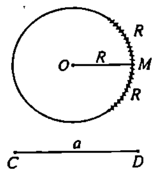
ბ) ერთ-ერთი რიცხვი მაინც შუალედის ბოლოდან დაშორებულია არაუმეტეს 0,1-ით.

მითითება. გამოიყენეთ აქ მითითებული სურათები. თითოეულ შემთხვევაში საჭიროა დაშტრიხული ნაწილის ფართობის პოვნა.



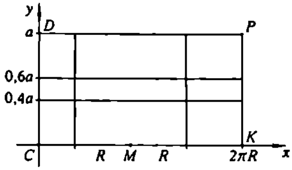
18. *AB* მონაკვეთზე ალალბედზე ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ვირჩევთ ორ წერტილს — *M*-სა და *N*-ს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ *M* აღმოჩნდება *A*-სთან უფრო ახლოს, ვიდრე *N*?

19. (*O*; *R*) წრეწირზე ალალბედზე ვირჩევთ *A* წერტილს; *CD* მონაკვეთზე, ასევე ალალბედზე, ვირჩევთ *B* წერტილს; $CD=a$. ვთქვათ, ამ წრეწირზე მოცემულია *M* წერტილი.



რა არის ალბათობა იმისა, რომ *AM* რკალის სიგრძე არაუმეტეს *R*-ია და *B* წერტილი *CD*-ს ერთ-ერთი ბოლოდან არაუმეტეს $0{,}4a$ მანძილითაა დაშორებული?

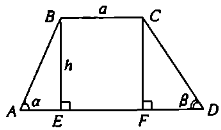
მითითება.



20. ორ ნამდვილ რიცხვს — x-სა და y-ს ალალაბედზე ვირჩევთ ისე, რომ $x^2+y^2\leq64$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ x-ისა და y-ის კვადრატების ჯამი 8-ზე ნაკლები იქნება?

21. ორ ნამდვილ x და y რიცხვს ალალბედზე ვირჩევთ ისე, რომ $|x|<3$ და $|y|<5$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვები დადებითი იქნება?

22. *ABCD* ტრაპეციაში შემთხვევით შეირჩევა წერტილი. რა არის ალბათობა, იმისა რომ წერტილი ან *ABE*, ან *CFD* სამკუთხედში იქნება? მოცემულობები სურათზეა წარმოდგენილი.



23. ვთქვათ, x და y არის [0; 1] შუალედიდან შემთხვევით აღებული რიცხვები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ

ა) $x+y>\frac{1}{3}$;   ბ) $x+y>1,5$.

24. ორი მეგობარი შეთანხმდა შეხვედრაზე 19 საათიდან 20 საათამდე. თითოეული მათგანი დროის ამ შუალედში შემთხვევით მოდის შეხვედრის ადგილზე და მეორეს მხოლოდ 20 წუთი ელოდება. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მეგობრები ერთმანეთს შეხვდებიან?

25. ვთქვათ, ხდომილობა არის სიგნალი, რომელიც პირველიდან ხუთ საათამდე უეცრად გაისმის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სიგნალი 2 საათის შემდეგ 20 წუთის ინტერვალში (2 საათიდან 2 სთ 20 წთ-მდე) გაჟღერდება?

26. მოცემულია განტოლება: $ax=b$; $0<a\leq 8$, $0<b\leq 10$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ განტოლების ფესვი 1-ზე მეტია?

27. ორ ნამდვილ x და y რიცხვს შემთხვევით ვირჩევთ ისე, რომ $x^2+y^2<100$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

ა) $x^2+y^2<64$;   ბ) $x^2+y^2>25$?

28. x და y რიცხვები აკმაყოფილებს სისტემას

$$\begin{cases}-1<x<3\\ 2<x<5\end{cases}.$$

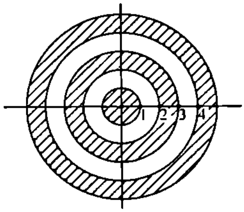
იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული x, y რიცხვები აკმაყოფილებს სისტემას:

$$\begin{cases}0<x<1\\ 3<y<4\end{cases}.$$

29. 1-ის ტოლი სიგრძის მონაკვეთზე შემთხვევით ვიღებთ ორ წერტილს. მონაკვეთი იყოფა სამ ნაწილად. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სამი მონაკვეთიდან შეიძლება სამკუთხედის აგება.

30. ვთქვათ, ისარი სურათზე გამოსახულ სამიზნეს რაიმე M წერტილში მოხვდა და M წერტილიდან სამიზნეს ცენტრამდე მანძილია S.

• რა არის ალბათობა იმისა, რომ $[S]=0$, $[S]=1$? $[S]$ არის S რიცხვის მთელი ნაწილი — უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც S-ს არ აღემატება.



31. მოცემულია $y(x)=3x-3$ ფუნქცია, $x\in[1; 3]$. ვთქვათ, A არის $y(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე ალალბედზე შერჩეული წერტილი.

ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის სიგრძე არ აღემატება 3-ს.

ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის აბსცისათა ღერძის მიმართ დახრის α კუთხე არ აღემატება $\frac{\pi}{4}$-ს.

32. მოცემულია წრფივი განტოლება: $y=kx$.

k-ს ვირჩევთ ალალბედზე [0; 10] შუალედიდან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ წრფის მიერ OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე 30^0-ს არ აღემატება?

33. ნამდვილი x და y რიცხვები მოიცემა სისტემით:

$$\begin{cases}-1<x<10\\ -2<y<6\end{cases}$$

რა არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული რიცხვები, რომლებიც ამ სისტემას აკმაყოფილებს, $xy>0$ პირობასაც აკმაყოფილებს?

34. ორი მეგობარი შეთანხმდა 12 საათიდან 13 საათამდე შუალედში შეხვდნენ ერთმანეთს. რა დროის განმავლობაში უნდა უცადოს მეგობარს პირველად მისულმა, რომ მეგობრების შეხვედრის ალბათობა იყოს 0,75-ზე მეტი?

35. საღამოს 8 საათიდან დროის 20 წუთიან მონაკვეთში ნიკა ტელეფონით ურეკავს ვატოს და 2 წუთიან მონაკვეთში ელოდება პასუხს. დროის იმავე 20 წუთიან მონაკვეთში ვატო შემთხვევით შქივლის შინ მხოლოდ 5 წუთით და და ამ დროის განმავლობაში ტელეფონის ზარს დაელოდება. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მეგობრებს შორის საუბარი შედგება?

36. ვთქვათ, დროის $[0;\ T]$ შუალედის x მომენტში შემოდის სიგნალი, რომლის ხანგრძლივობაა Δ. მიმღები კი ამავე $[0;\ T]$ შუალედის რაღაც y მომენტში ჩაირთვება შემთხვევით და ჩართულია t დროის განმავლობაში. წარმოადგინეთ $(x;\ y)$ წყვილი $[0;\ T]\times[0;\ T]$ კვადრატის წერტილით და აჩვენეთ: ალბათობა იმისა, რომ სიგნალი მიღებული იქნება

$$1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{T}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

ფორმულით გამოითვლება.

განვიხილოთ ექსპერიმენტი: კამათლის გაგორება. მაშინ მარტივი რიცხვის მოსვლის ალბათობა $\frac{1}{2}$-ია. მართლაც, ელემენტარულ ხდომილობათა S სივრცე ასე წარმოვადგინოთ: $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A ხდომილობა — „მოვიდა მარტივი რიცხვი" ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლით — $\{2, 3, 5\}$, ამიტომ $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. დავუშვათ გვაქვს დამატებითი ინფორმაცია (პირობა): განხორციელდა B ხდომილობა — „მოვიდა კენტი რიცხვი". ამ პირობის გათვალისწინებით, ყველა შესაძლო შედეგია — $\{1, 3, 5\}$. მათგან A-ს ხელშემწყობია ორი. A-ს პირობითი ალბათობა იმ პირობით, რომ განხორციელდა B, ასე გამოითვლება:

$$P(A|B)=\frac{2}{3}. \qquad (1)$$

აქ A-ს ხელშემწყობი ხდომილობები აიღება იმ ელემენტარული ხდომილობებიდან, რომლებიც B-ს ხელშემწყობია. მათი ოდენობა, ცხადია, არის $A\cap B$-ში ელემენტარული ხდომილობების ოდენობა (ანუ $A\cap B$-ს ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა ოდენობა) — $n(A\cap B)$.

B-ში ელემენტარულ ხდომილობათა $n(B)$ რიცხვითა და $n(A\cap B)$ რიცხვით **A-ს პირობითი ალბათობა** იმ პირობით, რომ განხორციელდა B ხდომილობა, ასე წარმოიდგინება:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}.$$

ვთქვათ, ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი (ხდომილობათა S სივრცის ელემენტთა რიცხვი) არის k, მაშინ პირობითი ალბათობა — $P(A|B)$ ორი ალბათობის შეფარდების სახით წარმოიდგინება —

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)}{k}:\frac{n(B)}{k}=P(A\cap B):P(B).$$

თუ განხორციელდა B ხდომილობა, მაშინ, ცხადია, $P(B)\neq 0$.

თუ B შეუძლებელი ხდომილობაა, მაშინ ვიგულისხმებთ, რომ $P(A|B)=0$.

ამ მაგალითის მსგავსად, ხდომილობათა ნებისმიერი S სივრცის შემთხვევაშიც, A ხდომილობის პირობითი ალბათობა იმ პირობით, რომ განხორციელდა B ხდომილობა ($(P(B)\neq 0)$ წარმოიდგინება ფორმულით:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \qquad (2)$$

შევნიშნოთ, რომ (2) ფორმულა იმ შემთხვევაშიც არის სწორი, როცა S სივრცე შეიცავს არა ტოლშესაძლებელ ხდომილობებს.

(2) ფორმულიდან გვაქვს ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის ფორმულა:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B). \qquad (3)$$

თუ $P(A)\neq 0$, მაშინ (2)-ის ანალოგიურად,

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}. \qquad (4)$$

გვაქვს ნამრავლის ალბათობის კიდევ ერთ ფორმულა:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A).$$

S

✓**1.** ნებისმიერი B ხდომილობებისთვის, რომელიც არ არის შეუძლებელი ($P(B)\neq 0$), $P(A|B)=$

ა) $P(A\cap B)$ ბ) $P(A)$ გ) $P(B)$ დ) $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

✓**2.** თუ B შეუძლებელი ხდომილობაა, მაშინ აუცილებლად $P(A|B)=$

ა) $P(B)$ ბ) $P(A)$ გ) $P(A\cap B)$ დ) $P(B|A)$.

✓3. თუ B აუცილებელი ხდომილობაა, მაშინ ნებისმიერი A ხდომილობისთვის $P(A|B)=$
ა) $P(A\cap B)$ ბ) $P(B)$ გ) $1-P(B)$ დ) $1-P(A)$.

✓4. თუ A და B რაიმე დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ $P(A|B)=$
ა) $P(A\cap B)$ ბ) $P(B)$ გ) $P(A)$ დ) $1-P(A)$.

✓5. თუ A და B რაიმე დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ აუცილებლად $P(B|A)=$
ა) $P(A\cap B)$ ბ) $P(B)$ გ) $P(A)$ დ) $1-P(B)$.

✓6. ვთქვათ, A და B რაიმე ექსპერიმენტის შესაბამისი ორი ხდომილობაა, მაშინ $P(A\cap B)=$
ა) $P(A)\cdot P(B)$ ბ) $P(A)P(B|A)$ გ) $P(A)$ დ) $P(B)$.

✓7. ვთქვათ, A და B რაიმე ექსპერიმენტის შესაბამისი ორი ხდომილობაა, მაშინ $P(A\cap B)=$
ა) $P(A)\cdot P(B)$ ბ) $P(A)$ გ) $P(B)P(A|B)$ დ) $P(B)$.

✓8. ყუთში 9 ბურთულაა. ისინი გადანომრილია რიცხვებით: 1, 2, ..., 9.
ექსპერიმენტი ასეთია: შემთხვევით ვიღებთ ერთ ბურთულას, მას უკან არ ვაბრუნებთ და ვიღებთ მეორეს. გვაინტერესებს ბურთულების რა დალაგებულ წყვილს მივიღებთ. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება ეს ექსპერიმენტი?
ა) 9 ბ) 8 გ) 72 დ) 81.

✓9. ვიხილავთ წინა ამოცანაში განხილულ ექსპერიმენტს, რომელშიც პირველი ექვსი ნომრის მქონე ბურთულა თეთრია, დანარჩენები — შავი. A არის ხდომილობა — შერჩეულ წყვილში პირველი თეთრია, რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება A?
ა) 72 ბ) 24 გ) 54 დ) 48.

✓10. ვიხილავთ წინა ამოცანაში განხილულ ექსპერიმენტს. B არის ხდომილობა — „მეორე ბურთულა შავია" (პირველი ნებისმიერი). რამდენი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება B?
ა) 72 ბ) 48 გ) 54 დ) 24.

11. მონეტას ვაგდებთ სამჯერ. განვიხილოთ ხდომილობები:
A – 1 აგდებისას საფასურის მოსვლა,
B – გერბის მოსვლა ერთ-ერთი აგდებისას მაინც.
იპოვეთ $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A)$ და $P(B)$.

12. განვიხილოთ ხდომილობები:
A – „ერთი კამათლის გაგორებისას ლუწი რიცხვის მოსვლა"
B – „ერთი კამათლის გაგორებისას 3-ის ჯერადი რიცხვის მოსვლა"
ა) იპოვეთ $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A)$ და $P(B)$.
ბ) არის თუ არა A და B ხდომილობები დამოუკიდებელი?

13. განვიხილოთ ხდომილობები:
A — „ცისფერ კამათელზე მოვიდა 5-იანი"
B — „ვარდისფერ კამათელზე მოვიდა ლუწი რიცხვი".
ა) იპოვეთ $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A)$, $P(B)$.
ბ) დამოუკიდებელია თუ არა A და B ხდომილობები?

14. 36-კარტიან დასტიდან შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს და განიხილავენ ხდომილობებს:
A – ამოღებული კარტი ათიანია;
B — ამოღებული კარტი შავია;
C — ამოღებული კარტი ყვავის ათიანია;
D — ამოღებული კარტი ტუზია.
იპოვეთ $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(B|D)$, $P(B|C)$, $P(C|D)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$.
დამოუკიდებელია თუ არა ხდომილობათა წყვილები:
ა) A და B, ბ) A და C, გ) B და D, დ) B და C, ე) C და D.

15. მონეტას აგდებენ ორჯერ და განიხილავენ ხდომილობებს:

A – მეორე აგდებისას საფასურის მოსვლა;

B – ერთ-ერთი აგდებისას მაინც საფასურის მოსვლა;

C – ერთ-ერთი აგდებისას მაინც გერბის მოსვლა;

D – I აგდებისას გერბის მოსვლა.

იპოვეთ $P(A|C)$, $P(A|B)$, $P(A|D)$, $P(B|C)$, $P(B|D)$, $P(A)$, $P(B)$.

დამოუკიდებელია თუ არა ხდომილობათა წყვილები:

ა) A და C, ბ) A და C, გ) A და D, დ) B და C, ე) B და D?

16. წესიერი ტეტრაედრის (სამკუთხა პირამიდისა, რომლის ყველა წახნაგი წესიერი სამკუთხედია) ერთი წახნაგი თეთრია, მეორე – წითელი, მესამე – ლურჯი, მეოთხეზე სამივე ფერია: თეთრი, წითელი და ლურჯი. ტეტრაედრის გაგორებისას განვიხილოთ ხდომილობები:

A – მის ქვედა წახნაგზე თეთრი ფერია;

B – მის ქვედა წახნაგზე წითელი ფერია;

C – მის ქვედა წახნაგზე ლურჯი ფერია.

იპოვეთ $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$.

დამოუკიდებელია თუ არა ხდომილობები

ა) A და B, ბ) A და C?

17. ჯგუფის ოთხი სტუდენტიდან ერთ-ერთს ჩასაბარებელი დარჩა მხოლოდ გეომეტრია, მეორეს – მხოლოდ ალბათობის თეორია, მესამეს – მხოლოდ ფიზიკა, მესამეს – სამივე საგანი. ამ ოთხი სტუდენტისგან შემთხვევით ირჩევენ ერთ-ერთს და იხილავენ ხდომილობებს:

A – შერჩეულ სტუდენტს ჩასაბარებელი დარჩა გეომეტრია;

B – შერჩეულ სტუდენტს ჩასაბარებელი დარჩა ალბათობის თეორია;

C – შერჩეულ სტუდენტს ჩასაბარებელი დარჩა ფიზიკა.

გამოთვალეთ $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(B|C)$ ალბათობები და დაადგინეთ, დამოუკიდებელია თუ არა ხდომილობები:

ა) A და B, ბ) A და C, გ) B და C?

18. ყუთში 7 თეთრი, 6 მწვანე, 4 წითელი და 3 ლურჯი ბირთვია. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი წითელი იქნება, თუ ცნობილია, რომ ის ფერადია (თეთრი არ არის).

19. ყუთში 12 წითელი, 8 მწვანე და 10 თეთრი ბურთია. შემთხვევით ვიღებთ ორ ბურთს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ისინი მწვანეა, თუ ცნობილია, რომ ამოღებულებს შორის არც ერთი თეთრი არ არის;

ბ) ისინი სხვადასხვა ფერისაა, თუ ცნობილია, რომ ამოღებულებს შორის არც ერთი არ არის თეთრი.

20. ვთქვათ, გვაქვს 10 თეთრი და 20 შავი ყუთი. თითოეულ თეთრ ყუთში 7 წითელი და 3 მწვანე ბურთია, თითოეულ შავ ყუთში 4 წითელი და 6 მწვანე ბირთვია. შემთხვევით ვირჩევთ ერთ-ერთ ყუთს და შემთხვევით ვიღებთ ამ ყუთიდან ბურთს.

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულია წითელი ბურთი იმ პირობით, რომ შერჩეულია

ა) შავი ყუთი, ბ) თეთრი ბურთი.

21. A ქარხნის მთელი ნაწარმის 2% წუნდებულია, B ქარხნის მთელი ნაწარმის 5% წუნდებულია. ამ ქარხნებიდან C საწარმოში გაიგზავნა 1000-1000 ნაწარმი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ C საწარმოში ამ 2000 ნაწარმიდან შემთხვევით შერჩეული წუნდებულია, თუ ცნობილია, რომ ის დამზადებულია

ა) A ქარხანაში, ბ) B ქარხანაში, გ) A და B-დან ერთ-ერთ ქარხანაში.

22. ყუთში 7 თეთრი და 4 შავი ბურთულაა. ექსპერიმენტი ასეთია: შემთხვევით ვიღებთ ერთ ბურთულას, უკან არ ვაბრუნებთ და ვიღებთ მეორეს, A ხდომილობაა — „პირველი ბურთულა თეთრია", B — „მეორე ბურთულა შავია". იპოვეთ $P(AB)$, $P(A)$, $P(B|A)$.

23. ერთ-ერთი სამედიცინო დაწესებულების პაციენტებში ჩატარებულმა გამოკვლევებმა გვიჩვენა, რომ მამაკაცთა 50%-ს და ქალების 30%-ს გულ-სისხლძარღვთა სისტემის დარღვევები აქვს. ამ საავადმყოფოს პაციენტებში ქალების ოდენობა 3-ჯერ მეტია კაცების ოდენობაზე. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ კლინიკაში შემთხვევით შერჩეული ავადმყოფი, რომელსაც აღნიშნული დავალება აქვს, მამაკაცია?

24. ერთ-ერთმა სამედიცინო დაწესებულებამ ჩაატარა ორი სახის დიეტის გამოკვლევა; შეირჩა მოხალისეთა ორი თანაბარი ჯგუფი. I დიეტა შეიცავდა მეტი იდენობით ცხიმებს, ვიდრე II. ექსპერიმენტის დამთავრების შემდეგ აღმოჩნდა, რომ გულ-სისხლძარღვთა დაავადებების ოდენობები საკონტროლო ჯგუფებში, შესაბამისად, 31% და 48% იყო. შემთხვევით შერჩეული ადამიანი დაავადებული აღმოჩნდა; რა არის ალბათობა იმისა, რომ იგი II დიეტით სარგებლობდა?

25. ვთქვათ, გვაქვს 10 ცალი თეთრი და 20 ცალი შავი ტომარა. თითოეულ თეთრ ტომარაში 7 წითელი და 3 მწვანე ბურთია, თითოეულ შავ ტომარაში 4 წითელი და 6 მწვანე ბურთია. შემთხვევით ვირჩევთ ერთ-ერთ ტომარას და ვიღებთ ბურთს.

ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულია თეთრი ტომარა — P(თ);

ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულია შავი ტომარა — P(შ);

გ) იპოვეთ პირობითი ალბათობები — ამოღებულია წითელი ბურთი იმ პირობით, რომ შერჩეულია თეთრი ტომარა; ამოღებულია წითელი ბურთი იმ პირობით, რომ შერჩეულია შავი ტომარა.

დ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულია თეთრი ტომარა და ამოღებულია წითელი ბურთი — P(თ.წ).

ე) იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ შემთხვევით შერჩეული ტომრიდან ამოღებული ბურთი წითელი იქნება.

26. ვთქვათ, ხდომილობათა U სივრცე წარმოდგენილია ორი არათავსებადი ხდომილობის ჯამის სახით:

$$U=X+Y,\ X{\cdot}Y=\varnothing;$$

დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერი A ხდომილობისთვის გვაქვს:

- $A=A{\cdot}U=A{\cdot}X+AY$,

AX და AY არათავსებადი ხდომილობებია;

- $P(A)=P(X)P(A|X)+P(Y)P(A|Y)$.

მიღებულ ფორმულას **სრული ალბათობის ფორმულას** უწოდებენ.

27. X_1, X_2, ..., X_k წყვილ-წყვილად არათავსებადი ხდომილობებია და U ხდომილობათა სივრცეა. $U=X_1+X_2+...+X_k$. წინა ამოცანის ანალოგიურად დაასაბუთეთ, რომ ნებისმიერი ხდომილობისთვის $P(A)=P(X_1)P(A|X_1)+P(X_1)P(A|X_2)+...+\ P(X_k)P(A|X_k)$ ეს ფორმულაც **სრული ალბათობის** ფორმულაა.

28. გამოიყენეთ წინა ამოცანის პირობები, სრული ალბათობის ფორმულა და დაასაბუთეთ (**ბაიესის ფორმულა**)

$$P(X_k|A)=\frac{P(X_k)P(A|X_k)}{P(X_1)P(A|X_1)+P(X_2)P(A|X_2)+\ ...\ +\ P(X_k)P(A|X_k)}$$

მაშასადამე, თუ ხდომილობათა U სივრცე არის წყვილ-წყვილად არათავსებადი X_1; ...; X_k ხდომილობების ჯამი, ცნობილია რაიმე A ხდომილობის პირობითი ალბათობა თითოეული X_k-ს მიმართ, მაშინ ამ ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ თითოეული X_k ხდომილობის ალბათობა იმ

პირობით, რომ განხორციელდა A ხდომილობა. ეს ფორმულა ფართოდ გამოიყენება წინასწარ — ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ცნობილი $P(X_k)$ ალბათობების საშუალებით ცდის შემდგომი A ხდომილობის განხორციელებისას X_k ხდომილობის პირობითი ალბათობის პოვნის მიზნით.

29. საწყობში შემოსული ელექტრონათურების 50% დამზადებულია ერთ-ერთ ქარხანაში, 20% — II ქარხანაში, 30% — III ქარხანაში. I ქარხანაში წუნდებული ნათურის გამოშვების ალბათობა 0,006-ია, II ქარხანაში — 0,01, III-ში — 0,005.

იპოვეთ A ხდომილობის — „საწყობში შემთხვევით შერჩეული ნათურა წუნდებულია" ალბათობა — $P(A)$.

30. მაღაზიაში საათები სამი ქარხნიდან შემოდის. პირველ ქარხანაზე მოდის შემოსული საათების 40%, მეორეზე — 45%, მესამეზე — 15%. ცნობილია რომ მექანიკური საათები შეადგენს: I ქარხნის მიერ დამზადებული საათების 20%-ს, II ქარხნის მიერ დამზადებული საათების 30%-ს და მესამე ქარხნის მიერ დამზადებული საათების 10%-ს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მაღაზიაში შემთხვევით შერჩეული საათი მექანიკურია?

31. ვთქვათ, ქვემეხის მიერ მოძრავ ტანკზე პირველი გასროლით ჭურვის მოხვედრის ალბათობა 0,4-ია, II გასროლით — 0,5, მესამე გასროლით — 0,7; ერთი მოხვედრით ტანკის დაზიანების ალბათობაა 0,2, ორი მოხვედრით — 0,6; სამი მოხვედრით — 1.

ვიხილავთ ხდომილობას: A — „სამი გასროლით ტანკის დაზიანება". იპოვეთ $P(A)$.

32. კლასში 20 მოსწავლეა. მასწავლებელმა მათ დაავალა 20 საკითხის მომზადება. მოსწავლეთაგან 6-ს ყველა საკითხი აქვს მომზადებული; 8-ს — მხოლოდ 16 საკითხი აქვს მომზადებული, 4-ს — 10 საკითხი, ორმა მოსწავლემ მხოლო 5 საკითხის მომზადება შეძლო. ყოველ მოსწავლეს მასწავლებელი აძლევს 3 საკითხს, რომელსაც იგი შემთხვევით არჩევს 20-დან. პირველად გამოძახებულმა მოსწავლემ ყველა საკითხზე (სამივეზე) უპასუხა. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ გამოძახებულ მოსწავლეს 20-ვე საკითხი აქვს მომზადებული.

33. საწყობში დეტალების 53 ყუთია (თითოეულში დეტალების ერთი და იგივე ოდენობაა), მათგან 3 ყუთში მხოლოდ წუნდებული დეტალებია, დანარჩენ 50 ყუთში წუნდებული დეტალები არ გვხვდება. ამ 50 ყუთში მოთავსებული დეტალების 90% (ყოველ ყუთში) შეღებილია, ხოლო წუნდებული დეტალების ყოველ ყუთში 5%-ია შეღებილი. შემთხვევით ერთ-ერთი ყუთიდან ამოღებული დეტალი შეღებილი აღმოჩნდა, ვეძებთ იმის ალბათობას, რომ იგი არ არის წუნდებული.

34. სამი ყუთიდან ერთ-ერთში 6 თეთრი და 4 შავი ბურთია, მეორეში — 7 თეთრი და 3 შავი, მესამეში — მხოლოდ 8 თეთრი. შემთხვევით ვირჩევთ ერთ-ერთ ყუთს და იქიდან შემთხვევით ვიღებთ ერთ ბურთს. იგი თეთრია, რა არის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბურთი ამოღებულია მეორე ყუთიდან?

ტესტური დავალებების ნიმუშები

I ვარიანტი

✓**1.** იპოვეთ უდიდესი ნატურალური n რიცხვი, რომლისთვისაც 2^n ნაკლებია 100-ზე.

ა) 7 ბ) 5 გ) 4 დ) 6.

✓**2.** p და q მარტივი რიცხვებია, $p \neq q$. იპოვეთ იმ ნატურალური რიცხვების ოდენობა, რომლებზეც p^2q ნამრავლი იყოფა.

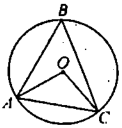
ა) 3 ბ) 4 გ) 5 დ) 6.

✓**3.** აგურის ქარხანამ შეკვეთა ორ დღეში შეასრულა. I დღეს შეკვეთის მხოლოდ 35% ჰქონდა შესრულებული, მეორე დღეს ქარხანამ 3600 აგურით მეტი დაამზადა, ვიდრე წინა დღეს. რამდენი აგურის დამზადება შეუკვეთეს ქარხანას?.

ა) 11000 ბ) 12600 გ) 12000 დ) 21000.

✓**4.** ვთქვათ, a და b დადებითი რიცხვებია და a რიცხვის ორი პროცენტი მეტია b რიცხვის სამ პროცენტზე. თუ x არის a რიცხვის 5 პროცენტი, y არის b რიცხვის 7 პროცენტი, მაშინ

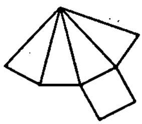
ა) $x<y$ ბ) $x=y$ გ) $x \leq y$ დ) $x>y$.



✓**5.** ABC სამკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში, რომლის ცენტრი O წერტილია. თუ $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, მაშინ $\cos\angle AOC =$

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ გ) $-\frac{1}{2}$ დ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

✓**6.** სურათზე გამოსახული ფიგურა შეიძლება იყოს

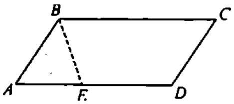


ა) კუბის შლილი

ბ) მართკუთხა პარალელეპიპედის შლილი

გ) სამკუთხა პირამიდის შლილი

დ) ოთხკუთხა პირამიდის შლილი.



✓**7.** $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი 49 სმ²-ია. AD გვერდზე E წერტილი ისეა შერჩეული, რომ $AE:ED=3:4$. იპოვეთ ABE სამკუთხედის ფართობი.

ა) 10,5 სმ² ბ) 22,5 სმ²

გ) 21 სმ² დ) 20 სმ².

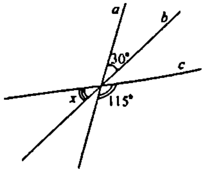
✓**8.** პირველ დღეს ავტომობილმა გასავლელი გზის 20% გაიარა, მეორე დღეს — გზის დარჩენილი ნაწილის 25%. გზის რა ნაწილი დარჩა გასავლელი ავტომობილს ფერია?

ა) $\frac{3}{5}$ ბ) $\frac{2}{5}$ გ) $\frac{1}{5}$ დ) $\frac{1}{4}$.

✓**9.** თუ $2<x<3$, მაშინ $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}=$

ა) $2x-5$ ბ) 1 გ) 5 დ) $2x$.

✓**10.** a, b და c წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება. a და b წრფეებს შორის მახვილი კუთხე 30^0-ია. a და c წრფეებს შორის ბლაგვი კუთხე 115^0-ია. იპოვეთ მახვილი კუთხე c და b წრფეებს შორის (უცნობი კუთხის სიდიდე x-ითაა აღნიშნული).



ა) 35^0 ბ) 30^0 გ) 15^0
დ) 25^0 ე) 45^0.

✓**11.** $y=1-4\sin^2x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკული არის

ა) -2 ბ) -1 გ) 0 დ) 1 ე) $\frac{1}{4}$.

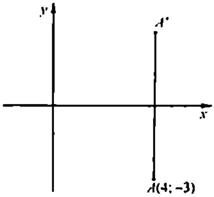
✓**12.** რამდენი ამონახსნი აქვს $(x-3)^2+(y-6)^2=0$ ორუცნობიან განტოლებას?

ა) ერთი ბ) ორი გ) ოთხი დ) უამრავი ე) არცერთი.

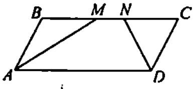
✓**13.** $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{12}$

ა) $\sqrt{3}$ ბ) $\sqrt{3}-1$ გ) $\sqrt{3}+1$ დ) $3\sqrt{3}-1$ ე) $-3\sqrt{3}-1$.

✓**14.** A' წერტილი არის A წერტილის სიმეტრიული აბსცისათა ღერძის მიმართ. A წერტილის კოორდინატები მითითებულია. იპოვეთ მანძილი A' წერტილიდან O წერტილამდე.



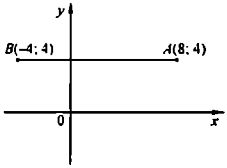
ა) 7 ბ) 25
გ) 4,9 დ) 5.



✓**15.** $ABCD$ პარალელოგრამში $AD=7$ სმ, $AB=2$ სმ. AM და CN არის A და D კუთხეების ბისექტრისები. MN მონაკვეთი BC გვერდზეა. იპოვეთ MN.

ა) 5 სმ ბ) 3 სმ გ) 2 სმ
დ) 1 სმ ე) 6 სმ.

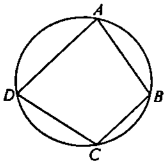
✓**16.** საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია AB მონაკვეთი, მისი ბოლოების კოორდინატები მითითებულია. ცნობილია, რომ AB მონაკვეთი სიმეტრულია $x=a$ წრფის მიმართ. იპოვეთ a.



ა) 6 ბ) -6
გ) 0 დ) 2.

✓**17.** $\log_4 144-2\log_4 6==$

ა) -1 ბ) 0 გ) 1 დ) 2 ე) 3.



✓**18.** წრეწირში ჩახაზულია $ABCD$ ოთხკუთხედი. ცნობილია, რომ $\cos C=-\frac{3}{5}$. იპოვეთ $\sin A$.

ა) $-\frac{4}{5}$ ბ) $\frac{4}{5}$ გ) $\frac{3}{5}$ დ) $-\frac{3}{5}$.

✓**19.** რა ნაშთი მიიღება $2\cdot3^5\cdot7^4$ რიცხვის 10-ზე გაყოფის შედეგად?

ა) 3 ბ) 2 გ) 7 დ) 6.

✓**20.** a_1; a_2; a_3; ... არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_1+a_{16}=18$. იპოვეთ a_3+a_{14}.

ა) 9 ბ) 16 გ) 14 დ) 18.

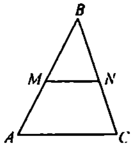
✓**21.** იპოვეთ უმცირესი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც $9^x>\frac{1}{81}$.

ა) -1 ბ) 1 გ) -2 დ) 2.

✓**22.** იპოვეთ $\cos x=-\frac{1}{3}$ განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: $2\pi<x<3\pi$.

ა) $\pi-\arccos\frac{1}{3}$ ბ) $2\pi-\arccos\frac{1}{3}$ გ) $3\pi-\arccos\frac{1}{3}$ დ) $2\pi+\arccos\frac{1}{3}$.

✓**23.** ABC სამკუთხედის AC გვერდი 18 სმ-ია. M წერტილი AB-ს ეკუთვნის, N წერტილი — BC-ს და $MN \parallel AC$. ცნობილია, რომ MBN სამკუთხედის ფართობი $AMNC$ ოთხკუთხედის ფართობის ნახევარია. იპოვეთ MN.



ა) 6 სმ ბ) $6\sqrt{3}$ სმ

გ) 9 სმ დ) $9\sqrt{3}$ სმ.

✓**24.** ცნობილია, რომ a_1, a_2, a_3,... მიმდევრობის ყოველი მომდევნო სამი წევრის ჯამი 12-ის ტოლია. $a_{16}=2$, $a_{18}=9$. იპოვეთ ოცდამეთორმეტე წევრი.

ა) 2 ბ) 9 გ) 12 დ) 1.

✓**25.** იპოვეთ საათის ისრებს შორის კუთხე 12 საათსა და 12 წუთზე.

ა) 54^0 ბ) 60^0 გ) 66^0 დ) 72^0.

✓**26.** იპოვეთ ყველა ის რიცხვი, რომელზეც 71-ის გაყოფისას ნაშთი არის 6.

ა) 5 და 13 ბ) 13 და 65 გ) მხოლოდ 13 დ) მხოლოდ 65.

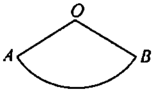
✓**27.** ექვსი რიცხვის საშუალო არის 12. ამ ექვსი რიცხვიდან სამი რიცხვის ჯამი არის 39. იპოვეთ დანარჩენი სამი რიცხვის საშუალო.

ა) 10 ბ) 11 გ) 9 დ) 4.

✓**28.** თუ $\log_a 12{,}5<\log_a 15$, მაშინ

ა) $a>1$ ბ) a ნებისმიერი დადებითი რიცხვია

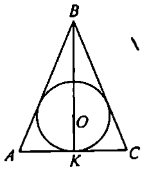
გ) ერთზე ნაკლები ნებისმიერი რიცხვია დ) $0<a<1$.



✓**29.** სურათზე წრიული სექტორია გამოსახული, $AO=OB=5$ სმ. AB რკალის სიგრძე 6π სმ-ია. იპოვეთ იმ ფიგურის მოცულობა, რომლის გვერდითი ზედაპირის შლილია ეს სექტორი.

ა) 36π სმ^3 ბ) 12π სმ^3 გ) 18π სმ^3 დ) 24π სმ^3

✓**30.** ABC ტოლფერდა სამკუთხედის AB ფერდი ისე შეეფარდება AC ფუძეს, როგორც 9:4. სამკუთხედის BK სიმაღლე 22 სმ-ია. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.



ა) 6 სმ ბ) 11 სმ

გ) 2 სმ დ) 4 სმ.

✓**31.** ცნობილია, რომ $\vec{p}(4;\, x)$ მართობულია $\vec{q}(3;\, 13)$ ვექტორის. იპოვეთ x.

ა) -1 ბ) $\frac{12}{13}$ გ) $-\frac{12}{13}$ დ) $\frac{13}{12}$ ე) $-\frac{13}{12}$.

✓**32.** მოცემულია: $f(x)=3^{4x}$, $g(x)=\log_3 x$. იპოვეთ $f(g(2))$.

ა) 8 ბ) 16 გ) 32 დ) 64 ე) 256.

✓**33.** ცნობილია, რომ A და B ხდომილობებიდან ერთი მაინც აუცილებლად განხორციელდება, A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა $\frac{3}{4}$-ია. B ხდომილობის ალბათობა $\frac{3}{5}$-ია. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ A და B ერთდროულად განხორციელდება.

ა) $\frac{3}{5}$ ბ) $\frac{3}{4}$ გ) $\frac{9}{20}$ დ) $\frac{7}{20}$ ე) $\frac{3}{20}$.

✓**34.** მოცემულია სიმრავლეები: $A=\{\{1\}; 2; 3; 4\}$, $B=\{1; 2; 3; 5\}$. იპოვეთ $A \cap B$.

ა) $\{1; 2; 3\}$ ბ) $\{2; 3\}$ გ) $\{1; 2; 3; 5\}$
დ) $\{4; 5\}$ ე) $\{\{1\}\}$.

✓**35.** რიცხვის ჩანაწერი ორობით სისტემაში არის $(10000)_2$. ჩანერეთ x რიცხვი ათობით სისტემაში.

ა) 32 ბ) 16 გ) 64 დ) 256 ე) 8.

✓**36.** იპოვეთ $A(1; 0)$ წერტილის ანასახის კოორდინატები, თუ თანამიმდევრობით ჩავატარებთ ორ გარდაქმნას: 1) მობრუნებას კოორდინატთა სათავის გარშემო 45^0-იანი კუთხით; 2) პარალელურ გადატანას $\vec{p}(\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$ ვექტორით.

ა) $(\sqrt{2};\ 2{,}5\sqrt{2})$ ბ)$(2\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$ გ) $(0;\ \sqrt{2})$
დ) $(3\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$ ე) $(1{,}5\sqrt{2};\ 2{,}5\sqrt{2})$.

37. a-ს რა მნიშვნელობებისთვის არის $y=ax^2+(a+7)x+11$ კვადრატული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა 20?

38. BCD სამკუთხედის CD გვერდზე შერჩეულია P წერტილი ისე, რომ $\frac{CP}{PD}=3$. BD გვერდზე კი შერჩეულია K წერტილი ისე, რომ $\frac{BK}{KD}=2{,}5$. BCD სამკუთხედის ფართობი 280 სმ^2-ია. CK და BP მონაკვეთები A წერტილში იკვეთება. იპოვეთ:

ა) BCK სამკუთხედის ფართობი; ბ) $\frac{CA}{AK}$;
გ) ABK სამკუთხედის ფართობი.

39. ვთქვათ, ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით $S_n=\frac{1}{5}(6^n-1)$. იპოვეთ ამ პროგრესიის პირველი წევრი და მნიშვნელი.

40. ორ ქალაქს შორის მანძილი 600 კმ-ია. ამ ქალაქებიდან ერთმანეთის შესახვედრად ორი ავტომობილი გამოვიდა. ისინი ერთმანეთს 3 საათსა და 20 წუთში შეხვდნენ. ერთი ავტომობილის სიჩქარე მეორისაზე 1,25-ჯერ მეტია. იპოვეთ თითოეული ავტომობილის სიჩქარე.

II ვარიანტი

✓**1.** ცნობილია, რომ 2^n რიცხვის ათობით ჩანაწერში ბოლო (ერთეულების თანრიგის) ციფრია 8. მაშინ

ა) n იყოფა 4-ზე ბ) n-ის 4-ზე გაყოფისას ნაშთია 1
გ) n-ის 4-ზე გაყოფისას ნაშთია 3 დ) n ლუწი რიცხვია
ე) n-ის 4-ზე გაყოფისას ნაშთია 2.

✓**2.** p მარტივი რიცხვია. იპოვეთ იმ ნატურალური რიცხვების ოდენობა, რომლებზედაც p^3 იყოფა.

ა) 3 ბ) 2 გ) 1 დ) 4 ე) 5.

✓**3.** თუ მართკუთხედის გვერდები რაიმე ნატურალური რიცხვებით გამოისახება, მაშინ რიცხვი, რომლითაც მისი პერიმეტრი გამოისახება

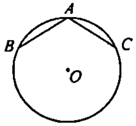
ა) მარტივია ბ) კენტია გ) ლუწი შედგენილი რიცხვია

დ) ლუწი მარტივი რიცხვია ე) 4-ზე გაყოფისას ნაშთში 3-ს იძლევა.

✓**4.** კოტეს ხელფასი 480 ლარი იყო. შემდეგ კოტეს ხელფასი გაეზარდა 25%-ით. კიდევ რამდენი პროცენტით უნდა გაიზარდოს ახალი ხელფასი, რომ იგი 660 ლარი იყოს?

ა) 10%-ით ბ) 12%-ით გ) 60%-ით

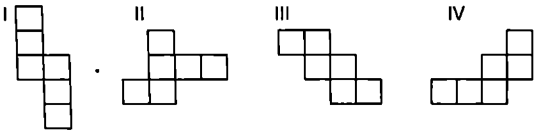
დ) 6%-ით ე) 24%-ით.



✓**5.** წრეწირის AB და AC ქორდებიდან თითოეული წრეწირის რადიუსის ტოლია. O წრეწირის ცენტრია. იპოვეთ $\angle BOC$.

ა) 60^0 ბ) 150^0 გ) 120^0 დ) 90^0 ე) 30^0.

✓**6.**

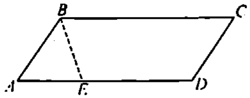


სურათზე გამოსახული ფიგურებიდან კუბის შლილი არ შეიძლება იყოს.

ა) მხოლოდ III ბ) მხოლოდ II და IV გ) III და IV

დ) მხოლოდ IV ე) არც ერთი.

✓**7.** $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი 128 სმ²-ია. $AE{:}ED=3{:}5$. იპოვეთ ABE სამკუთხედის ფართობი.

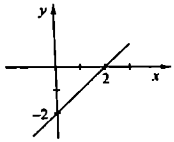


ა) 48 სმ² ბ) 16 სმ² გ) 24 სმ²

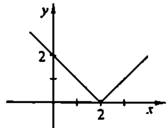
დ) 36 სმ² ე) 32 სმ².

✓**8.** $y=\sqrt{x^2-4x+4}$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკია

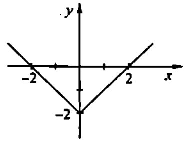
ა)



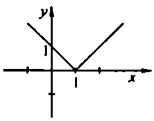
ბ)



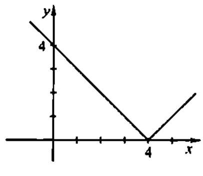
გ)



დ)



ე)



✓**9.** სამკუთხედის ფართობი 36 სმ²-ია. მისი მედიანების გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია ერთ-ერთი გვერდის პარალელური წრფე. ამ წრფით მოკვეთილი სამკუთხედის ფართობია

ა) 18 სმ² ბ) 16 სმ² გ) 24 სმ²

დ) 28 სმ² ე) 12 სმ².

✓**10.** მძღოლი ყოველდღიურად ერთი და იმავე თანხის ბენზინს ყიდულობს. ბენზინის ფასის 20%-ით შემცირებისას რამდენი პროცენტით მეტ ბენზინს იყიდის მძღოლი?

ა) 20% ბ) 15% გ) 10%

დ) 25% ე) 30%.

✓**11.** თუ $3<x<4$ და $5<y<11$, მაშინ

ა) $\frac{3}{5} < \frac{x}{y} < \frac{4}{11}$ ბ) $15 < \frac{x}{y} < 44$ გ) $\frac{5}{3} < \frac{x}{y} < \frac{11}{4}$

დ) $\frac{3}{11} < \frac{x}{y} < \frac{4}{5}$ ე) $\frac{4}{11} < \frac{x}{y} < \frac{3}{5}$.

✓**12.** $\sqrt{x^2-8x+16} = 4-x$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

ა) $\{4\}$ ბ) $[4; +\infty)$ ბ) $(-\infty; 4]$

დ) R ე) $(-\infty; 4)$.

✓**13.** მოცემულია: $f(x)=-2x^2+3$. იპოვეთ $f(f(a))$.

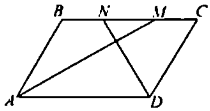
ა) $-8a^4+24a^2-18$ ბ) $-8a^4-24a^2-15$ გ) $-8a^4-24a^2-15$

დ) $-8a^4-15$ ე) $-2a^2+3$.

✓**14.** 800 გამოკითხულიდან 230 ყოველდღიურად (კვირის გარდა) ყიდულობს გაზეთს — „11×11", 120 — „მთავარ სპორტს", 90 — ორივე ამ გაზეთს. გამოკითხულთაგან რამდენი არ ყიდულობს არც ერთს მითითებული გაზეთებიდან?

ა) 360 ბ) 540 გ) 450 დ) 420 ე) 520.

✓**15.** $ABCD$ პარალელოგრამში $AB=6$ სმ, $BC=8$ სმ. AM და DN არის A და D კუთხეების ბისექტრისები. იპოვეთ MN.



ა) 4 სმ ბ) 2 სმ გ) 6 სმ

დ) 8 სმ ე) 5 სმ.

✓**16.** $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც $(4\pi; \frac{9\pi}{2})$ შუალედს ეკუთვნის, არის

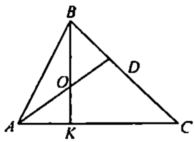
ა) $\frac{\pi}{6}$ ბ) $\frac{25\pi}{6}$ გ) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n=Z$

დ) $\frac{35\pi}{6}$ ე) $\frac{27\pi}{6}$.

✓**17.** $2\log_9 6 - \log_3 54=$

ა) 2 ბ) −2 გ) 3 დ) −3 ე) 4.

✓**18.** ცნობილია, რომ $BD:DC=3:5$, $AO=OD$. რა შეფარდებით ჰყოფს BO წრფე AC გვერდს (A წვეროს მხრიდან)?



ა) 1:5 ბ) 3:8 გ) 1:4

დ) 1:3 ე) 1:6.

✓**19.** ორი ნატურალური რიცხვის კვადრატების ჯამის 4-ზე გაყოფისას ნაშთი არ შეიძლება იყოს

ა) 0 ბ) 2 გ) 1 დ) 3 ე) 0 ან 2.

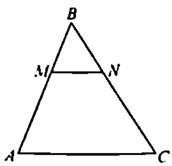
✓**20.** თუ $\sin x=a$ განტოლებას x-ის მიმართ არა აქვს ამონახსნი, მაშინ

ა) $0<a<1$ ბ) $-1<a<0$ გ) $a=0$ დ) $a=1$ ე) $a>1$ ან $a<-1$.

✓**21.** 2, a, b და $\frac{1}{4}$ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი ოთხი წევრია. იპოვეთ a და b.

ა) $\frac{1}{4}$ და $\frac{1}{8}$ ბ) 1 და $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{8}$ და $\frac{1}{9}$ დ) 2 და 4 ე) 4 და 2.

✓**22.** $MN\|AC$. ცნობილია, რომ MBN სამკუთხედის ფართობი $AMNC$ ოთხკუთხედის ფართობის მეხუთედია, $MN=\sqrt{6}$ სმ. იპოვეთ AC.



ა) 6 სმ ბ) 12 სმ გ) 18 სმ

დ) 24 სმ ე) 3 სმ.

✓23. ცნობილია, რომ a_1, a_2, ... მიმდევრობის ყოველი მომდევნო სამი წევრის ჯამი 15-ის ტოლია, $a_{17}=2$, $a_{19}=3$. იპოვეთ ოცდამეთოთხმეტე წევრი.

ა) 2 ბ) 3 გ) 10 დ) 1 ე) 4.

✓24. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის შუა წერტილიდან კათეტებამდე მანძილია 3 სმ და 4 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა.

ა) 5 სმ ბ) 10 სმ გ) 8 სმ დ) 6 სმ ე) 12 სმ.

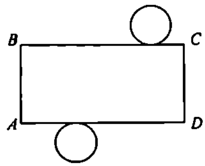
✓25. იპოვეთ საათის ისრებს შორის კუთხე 13 საათსა და 10 წუთზე.

ა) 30^0 ბ) 60^0 გ) 35^0 დ) 25^0 ე) 24^0.

✓26. რვა რიცხვის საშუალო არის 24. ამ 8 რიცხვიდან ოთხის ჯამი არის 100. იპოვეთ დანარჩენი ოთხის საშუალო.

ა) 23 ბ) 24 გ) 48 დ) 20 ე) 28.

✓27. სურათზე ბრუნვითი ფიგურის შლილია გამოსახული — ორი წრე და მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია $AD=8$ სმ, $CD=6$ სმ. იპოვეთ ამ ფიგურის მოცულობა.

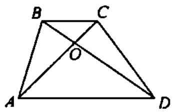


ა) $\frac{48}{\pi}$ სმ³ ბ) $\frac{32}{\pi}$ სმ³ გ) $\frac{96}{\pi}$ სმ³

დ) $\frac{64}{\pi}$ სმ³ ე) 96π სმ³.

✓28. ვთქვათ, a ნატურალური რიცხვია და $5a$-ს ნატურალური გამყოფების ოდენობა არის 2, მაშინ $a=$

ა) 2 ბ) 1 გ) 3 დ) 4 ე) 0.



✓29. $ABCD$ ტრაპეციის AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. BOC სამკუთხედის ფართობი 9 სმ²-ია, AOD სამკუთხედის ფართობი — 16 სმ². იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობი.

ა) 4 სმ² ბ) 3 სმ² გ) 12 სმ²

დ) 16 სმ² ე) 9 სმ².

✓30. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზეც აისახება $y=2x-1{,}5$ წრფე $\vec{p}(3;\ -4)$ პარალელური გადატანით.

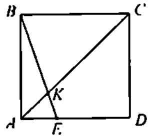
ა) $y=2x-8{,}7$ ბ) $y=2x-7{,}5$ გ) $y=2x-5{,}5$

დ) $y=2x-11{,}5$ ე) $y=2x+1$.

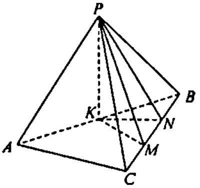
✓31. რა არის იმის ალბათობა, რომ ოთხი მონეტის ერთდროულად აგდების შემდეგ ორი მონეტა გერბით დაეცემა, დანარჩენი ორი — საფასურით?

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{3}{8}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{5}{8}$ ე) $\frac{3}{16}$.

32. $ABCD$ კვადრატის გვერდი 24 სმ-ია. E წერტილი AD გვერდზე ისეა აღებული, რომ $AE=\frac{1}{3}AD$; ამასთანავე, AC და BE მონაკვეთები K წერტილში იკვეთება. იპოვეთ AKE სამკუთხედის ფართობი.



33. a და b ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვებია, $a>b$. რა რიცხვის ტოლი შეიძლება იყოს $a+b$ და $a-b$ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი (პასუხი დაასაბუთეთ)?



34. *PABC* პირამიდის მოცულობა 64 სმ^3-ია. *K* წერტილი *AB*-ს შუა წერტილია. *CM=MN=NB* (*M* და *N* წერტილები *BC* გვერდზეა). იპოვეთ *PKMN* პირამიდის მოცულობა.

35. (a_n) მიმდევრობაში $a_1=a_2=a_3=1$; $a_4=-1$. როცა $n>4$, მაშინ $a_n=a_{n-4}\cdot a_{n-3}$. იპოვეთ a_{2000}.

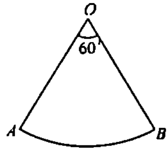
36. იპოვეთ m-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

$$y=(2m-2)x^2-6x+(2m+6)$$

ფუნქციის გრაფიკი ორ წერტილში კვეთს აბსცისათა ღერძს.

37. თუთიის, სპილენძისა და ნიკელის შენადნობის მასა 2 კგ-ია. ამ ლითონების მასები შენადნობში, შესაბამისად, 3:3:2 შეფარდებითაა. რამდენი გრამი ასეთი შენადნობი უნდა ავიღოთ, რომ იგი 300 გრამ თუთიას შეიცავდეს?

38. სურათზე კონუსის გვერდით ზედაპირის შლილია გამოსახული — სექტორი, რომლის ცენტრული კუთხეა, $\angle AOB=60^0$. სექტორის ფართობი 6π სმ^2-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.



39. ორი ნატურალური რიცხვის ჯამია 200. პირველი რიცხვის 6-ზე გაყოფისას მიიღება ნაშთი 5. მეორის 11-ზე გაყოფისას — ნაშთი 4. იპოვეთ ეს რიცხვები.

40. ყოველ მთელ რიცხვს შევუსაბამოთ 5-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი. იპოვეთ ამ ასახვის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე. არის თუ არა, ეს ასახვა შექცევადი ასახვა?

III ვარიანტი

✓**1.** გზის მეორე მონაკვეთის გავლა, რომელიც პირველ მონაკვეთზე 20%-ით გრძელია, ავტომობილს ნაკლები სიჩქარით უწევს — ყოველ საათში საშუალოდ 40%-ით ნაკლებ მანძილს გადის. როგორ შეიცვალა ავტომობილის მიერ დახარჯული დრო II მონაკვეთის გავლისას I-თან შედარებით?

ა) გაიზარდა 50%-ით ბ) გაიზარდა 100%-ით
გ) შემცირდა 20%-ით დ) გაიზარდა 60%-ით.

✓**2.** $\begin{cases} ax+by=11 \\ bx+ay=10 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნია $x=2$, $y=1$. იპოვეთ a და b.

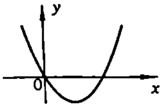
ა) $a=4$, $b=3$ ბ) $a=5$, $b=1$ გ) $a=6$, $b=-1$ დ) $a=3$, $b=4$.

✓**3.** p და q მარტივი რიცხვებია. იპოვეთ იმ ნატურალური რიცხვების ოდენობა, რომლებზეც p^3q^2 იყოფა.

ა) 6 ბ) 7 გ) 12 დ) 8.

✓**4.** თუ $2<x<3$, მაშინ $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}=$

ა) $2x-5$ ბ) 1 გ) 5 დ) $4x$.



✓**5.** სურათზე $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკია გამოსახული. სურათის მიხედვით

ა) $c=0,\ a>0,\ b>0$ ბ) $c>0,\ a>0,\ b<0$
გ) $c<0,\ a=0,\ b>0$ დ) $c=0,\ a>0,\ b<0$.

✓**6.** რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსული რიცხვების ჯამი 5-ზე ნაკლები არ არის?

ა) $\frac{5}{6}$ ბ) $\frac{5}{9}$ გ) $\frac{11}{36}$ დ) $\frac{13}{18}$.

✓**7.** რა ნაშთი მიიღება $7!-2$ რიცხვის 6-ზე გაყოფისას?

ა) -2 ბ) 2 გ) 4 დ) 0.

✓**8.** a-ს რა მნიშვნელობებისთვის არის $y=ax^2+2x+5$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე $(-\infty;\ \frac{16}{3}]$?

ა) $a=-3$ ბ) $a=-1$ გ) $a=1$ დ) $a=3$.

✓**9.** თუ სამკუთხედის წვეროებია $A(-1;\ 3)$, $B(3;\ 6)$ და $C(3;\ 3)$, მაშინ ეს სამკუთხედი

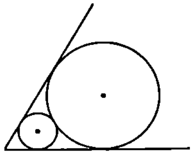
ა) მახვილკუთხაა ბ) მართკუთხაა
გ) ბლაგვკუთხაა დ) ტოლფერდაა.

✓**10.** რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს იმ წრეწირის r რადიუსი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, რომ მას არ ჰქონდეს საერთო წერტილი $x+y=8$ წრფესთან?

ა) $r<4$ ბ) $r<4\sqrt{2}$ გ) $r<8\sqrt{2}$ დ) $r<6\sqrt{2}$.

✓**11.** 60^0-იან კუთხეში ჩახაზული ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. დიდი წრეწირის რადიუსი 18 სმ-ია. იპოვეთ პატარა წრეწირის რადიუსი.

ა) 9 სმ ბ) 6 სმ
გ) 3 სმ დ) 8 სმ.



✓**12.** ABC სამკუთხედის წვეროებია $A(0;\ -1)$, $B(1;\ 1)$, $C(3;\ y)$. მაშინ

ა) y შეიძლება ნებისმიერი დადებითი რიცხვი იყოს
ბ) $y\neq-1$ გ) $y\neq1$ დ) $y\neq5$.

✓**13.** $ABCD$ ტრაპეციის AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება, AD ფუძის სიგრძე 3-ჯერ მეტია BC-ს სიგრძეზე. BOC სამკუთხედის ფართობი 24 სმ^2-ია. იპოვეთ $ABCD$-ს ფართობი.

ა) 72 სმ^2 ბ) 216 სმ^2 გ) 144 სმ^2 დ) 384 სმ^2.

✓**14.** ვთქვათ, ABC სამკუთხედში $AB=15$ სმ, $AC=10$ სმ. შეარჩიეთ ის რიცხვი, რომლის ტოლი შეიძლება იყოს $\sin B$.

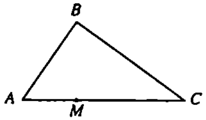
ა) $\frac{3}{4}$ ბ) $\frac{4}{5}$ გ) $\frac{3}{5}$ დ) $\frac{5}{6}$.

✓**15.** ნახევარწრის ფართობი 18π სმ^2-ია. იპოვეთ იმ ფიგურის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება ამ ნახევარწრის ბრუნვით დიამეტრის გარშემო.

ა) 188π სმ^2 ბ) 144π სმ^2 გ) 256π სმ^2 დ) 196π სმ^2.

✓**16.** თუ (a_n) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულებით $a_1=1$; $a_{n+1}=(n+1)a_n$, $n\in N$, მაშინ $a_n=$

ა) $(n+1)!$ ბ) $n!$ გ) $(n-1)!$ დ) $\frac{n(n+1)}{2}$.



17. ABC სამკუთხედის AC გვერდზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ $AM:MC=1:2$. მაშინ $\overrightarrow{BM}=$

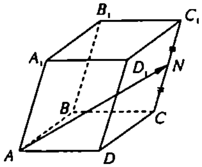
ა) $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ბ) $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

გ) $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ დ) $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

18. თუ T პარალელური გადატანა მოიცემა $\vec{p}(3;\ 5)$ ვექტორით, $T(A)=(4;\ 7)$, მაშინ A-ს კოორდინატებია

ა) $(2;\ 3)$ ბ) $(2;\ 1)$ გ) $(1;\ 2)$ დ) $(1;\ 3)$.

19. $ABCDA'B'C'D'$ პარალელოგრამია, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{r}$, N წერტილი CC' წიბოს შუა წერტილია, მაშინ $\overrightarrow{AN}=$



ა) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{r}$ ბ) $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{r}$

გ) $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{r}$ დ) $\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{r}$.

20. იპოვეთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა $[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}]$ შუალედიდან, რომელთათვისაც $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

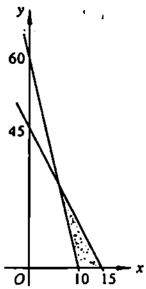
ა) $\frac{5\pi}{4}$ ბ) $\frac{5\pi}{4}$ და $\frac{7\pi}{4}$ გ) $\frac{7\pi}{4}$ დ) $\frac{3\pi}{4}$ და $\frac{9\pi}{4}$.

21. სურათზე დაშტრიხული ფიგურიდან რომელზე შეიძლება იყოს გამოსახული

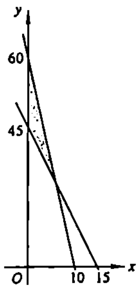
$$\begin{cases} 6x+y\le 60 \\ 6x+2y\le 90 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე?

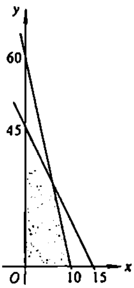
ა)



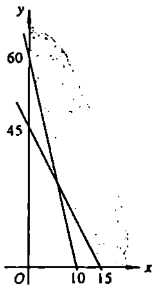
ბ)



გ)



დ)

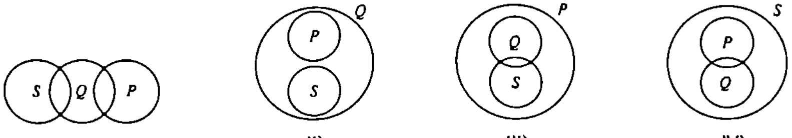


1) ა) 2) ბ) 3) გ) 4) დ).

22. $ABCD$ მართკუთხედის AC დიაგონალი AD გვერდთან α კუთხეს ადგენს. ერთი ცილინდრი მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით AB გვერდის გარშემო, მეორე ცილინდრი — AD გვერდის გარშემო. იპოვეთ პირველი ცილინდრის მოცულობის შეფარდება მეორე ცილინდრის მოცულობასთან.

ა) $\operatorname{tg}\alpha$ ბ) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ გ) $\sin\alpha$ დ) $\cos\alpha$.

✓**23.** ვთქვათ, P ტოლგვერდა სამკუთხედების სიმრავლეა, Q — ტოლფერდა სამკუთხედების, S — ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედების. რომელ (I, II, III თუ IV). სურათზე შეიძლება იყოს ისინი გამოსახული?



I) II) III) IV)

ა) I ბ) II გ) III დ) IV.

✓**24.** ABC სამკუთხედის C წვეროზე გავლებულია წრფე, რომელიც AB გვერდს D წერტილში კვეთს და $\angle BDC=\angle ACB$; $AD=14$ სმ, $BD=18$ სმ. იპოვეთ BC.

ა) 18 სმ ბ) 32 სმ გ) 24 სმ დ) 48 სმ.

✓**25.** ABC სამკუთხედის ფართობი 84 სმ²-ია. M წერტილი AK მედიანას 3:4 შეფარდებით ყოფს (A წვეროს მხრიდან). იპოვეთ CMK სამკუთხედის ფართობი.

ა) 42 სმ² ბ) 18 სმ² გ) 24 სმ² დ) 36 სმ².

✓**26.** თუ ბრტყელ ბმულ გრაფში წვეროების რიცხვია 6, წიბოების რიცხვი არის 7, მაშინ წახნაგების რიცხვი („უსასრულო წახნაგის" ჩათვლით) არის

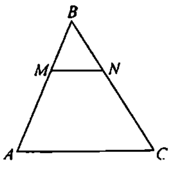
ა) 4 ბ) 2 გ) 3 დ) 5.

✓**27.** ერთ-ერთ სკოლაში 30 მასწავლებელი მუშაობს. მათგან 20 ქალია, 10 — მამაკაცი. შემთხვევით ხდება 5 მასწავლებლის შერჩევა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულთა შორის ზუსტად 2 მამაკაცია?

ა) $\dfrac{C_{20}^5}{C_{30}^5}$ ბ) $\dfrac{C_{10}^2\cdot C_{20}^3}{C_{30}^5}$ გ) $\dfrac{C_{20}^2\cdot C_{10}^3}{C_{30}^5}$ დ) $\dfrac{C_{20}^3}{C_{30}^5}$.

✓**28.** სპორტსმენი ხუთჯერ ესვრის სამიზნეს. თითოეული ნასროლის მოხვედრის ალბათობა არის p. რა არის ალბათობა იმისა, რომ პირველი სამი გასროლა წარმატებული იქნება, შემდეგი ორი — არა?

ა) p^5 ბ) $p^2(1-p)^3$ გ) $(1-p)^2p^5$ დ) $p^3(1-p)^2$.



✓**29.** $MN\|AC$, $\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{1}{3}$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი $AMNC$ ტრაპეციაში იქნება?

ა) $\dfrac{4}{9}$ ბ) $\dfrac{5}{9}$ გ) $\dfrac{8}{9}$ დ) 0,4 ე) 0,5.

✓**30.** რიცხვები ჩაწერილია ორობით სისტემაში: $(10010)_2$ და $(11000)_2$. იპოვეთ მათი ჯამი ორობით სისტემაში.

ა) $(21010)_2$ ბ) $(101010)_2$ გ) $(1010)_2$
დ) $(100110)_2$ ე) $(100011)_2$.

31. ქარხნის მიერ გამოშვებული პროდუქციის 15% უმაღლესი ხარისხისაა, 25% — I ხარისხის, 40% — მეორე ხარისხის, დანარჩენი წუნდებულია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული ნაკეთობა არ არის წუნდებული.

32. $y=-0{,}75x-0{,}6$ წრფის აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილია A, ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილია B.

ა) იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე;

ბ) კოორდინატთა სათავიდან AB წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძე.

33. ამოხსენით უტოლობა $\log_2(7x+3)<3$.

34. არითმეტიკული პროგრესიის პირველი სამი წევრის ჯამი 15-ია. ამავე წევრების ნამრავლი არის 80. იპოვეთ პროგრესიის პირველი წევრი და სხვაობა.

35. კატერმა A-დან B-მდე მანძილის გასავლელად მდინარის მიმართულებით a საათი დახარჯა, საწინააღმდეგო მიმართულებით იმავე მანძილის გავლას b საათი მოანდომა. რა დროს მოანდომებს A-დან B-მდე მანძილის გავლას ტივი?

36. იპოვეთ მანძილი $3x+4y=1$ და $4x+3y=2$ განტოლებების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.

37. იპოვეთ a-ს ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც

$$\begin{cases} ax-1\leq 0 \\ x-4a\geq 0 \end{cases}$$ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

38. გვაქვს თუთიისა და სპილენძის ორი შენადნობი. პირველში ამ ლითონების მასები 1:2 შეფარდებითაა, მეორეში — 3:5 შეფარდებით. რამდენი გრამი პირველი შენადნობი და რამდენი გრამი მეორე შენადნობი უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ 1 კგ მასის ახალი შენადნობი, რომელშიც თუთიისა და სპილენძის მასები 9:16 შეფარდებით იქნება?

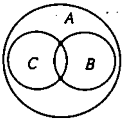
39. იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:

ა) $y=x^2+2x+2$; ბ) $y=\dfrac{1}{x-1}$; გ) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

40. ყუთში დევს ქართული მოძრავი ანბანის ყველა ასო. იპოვეთ ალბათობა, იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ასო იქნება;

ა) ხმოვანი; ბ) თანხმოვანი.

IV ვარიანტი



1. სურათზე A, B და C სიმრავლეებია გამოსახული. ყოველი ელემენტი, რომელიც ეკუთვნის B სიმრავლეს, ეკუთვნის აგრეთვე

ა) C სიმრავლესაც ბ) A-საც და C-საც

გ) $B\cap C$-აც დ) A სიმრავლესაც.

2. მოცემულია ორი დებულება:

1) მხოლოდ M სიმრავლის ელემენტებს აქვს p თვისება;

2) a ობიექტს აქვს p თვისება.

დავუშვათ, ეს ორი დებულება ჭეშმარიტია. რა დასკვნა გამომდინარეობს მათგან?

ა) a არ არის M-ის ელემენტი

ბ) ზოგიერთი ობიექტი, რომელსაც აქვს p თვისება, არ არის M-ის ელემენტი

გ) a არის M-ის ელემენტი

დ) არსებობს ობიექტი, რომელიც არ ეკუთვნის M-ს და აქვს p თვისება.

3. ვთქვათ, f — მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოების რიცხვია, m — წახნაგების, n — წვეროების. მაშინ

ა) $f=8$, $m=12$, $n=6$ ბ) $f=6$, $m=8$, $n=12$

გ) $f=12$, $n=8$, $m=6$ დ) $f=6$, $m=12$, $n=6$.

✓**4.** $y=x+\frac{1}{x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა

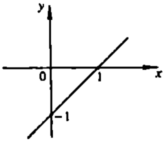
ა) $[2; +\infty]$ ბ) $(-\infty; +\infty)$ გ) $(-\infty; -2]$ დ) $(-\infty; -2]\cup[2; +\infty)$.

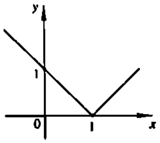
✓**5.** თუ სამკუთხედის გვერდები 5 სმ, 6 სმ და 8 სმ სიგრძისაა, მაშინ სამკუთხედი

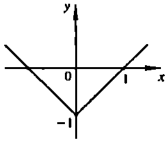
ა) მახვილკუთხაა ბ) მართკუთხაა

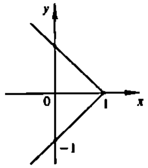
გ) ბლაგვკუთხაა დ) ტოლფერდაა.

✓**6.** $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ ფუნქციის გრაფიკია

ა) 

ბ) 

გ) 

დ) 

✓**7.** $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-1}$ ფუნქცია

ა) კენტი ფუნქციაა ბ) არც ლუწია და არც კენტი

გ) ლუწი ფუნქციაა დ) ლუწიცაა და კენტიც.

✓**8.** თუ შემოვიღებთ ახალ ოპერაციას: $a*b=(a+1)(b+2)$, მაშინ $2*3=$

ა) 6 ბ) 15 გ) 5 დ) 8.

✓**9.** მანძილი $y=x^2+6x+13$ პარაბოლის წვეროდან კოორდინატთა სათავემდე არის

ა) 3 ბ) 4 გ) 1 დ) 5.

✓**10.** თუ დადებით რიცხვს 4-ჯერ გავზრდით, მაშინ ის გაიზრდება

ა) 400%-ით ბ) 50%-ით გ) 300%-ით დ) 500%-ით.

✓**11.** თუ n^k შესაკრები ალებულია n-ჯერ, მაშინ ჯამია

ა) $k\cdot n^k$ ბ) n^{k+1} გ) $n+n^k$ დ) n^{2k}.

✓**12.** 700 გამოკითხულიდან 430 ყოველდღიურად (კვირის გარდა) ყიდულობს გაზეთს; „11×11", 220 — „ლელოს", 180 — ორივეს. გამოკითხულთაგან რამდენი არ ყიდულობს არც ერთს მითითებული გაზეთებიდან?

ა) 330 ბ) 230 გ) 310 დ) 50.

✓**13.** $\begin{cases}(a+1)x+3y=4\\ x-(1-a)y=2\end{cases}$ სისტემას ამონახსნი არა აქვს, თუ

ა) $a=-2$ ან $a=2$ ბ) $a=2,1$ გ) $a=1$ დ) $a=-1$.

✓**14.** თუ $2<x<5$ და $4<y<9$, მაშინ

ა) $\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < \frac{5}{9}$ ბ) $\frac{2}{9} < \frac{x}{y} < \frac{5}{4}$ გ) $8 < \frac{x}{y} < 4,5$ დ) $\frac{5}{9} < \frac{x}{y} < \frac{1}{2}$.

✓**15.** $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

ა) $\{3\}$ ბ) $[-3; -\infty)$ გ) R დ) $(-\infty; 3]$.

✓**16.** $y=|2-x|$ და $y=3-|x-1|$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილია

ა) მხოლოდ (0; 2) ბ) (0; 2) და (3; 1)

გ) (0; 2) და (2; 0) დ) (1; 1).

✓**17.** $\frac{x^2+x-12}{(x+2)^2} \le 0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა

ა) $[-4; -2)\cup(-2; 3]$ ბ) $[-4; 3]$

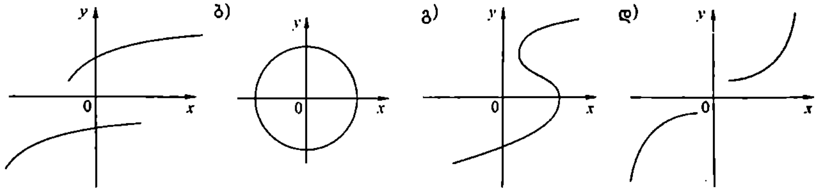
გ) $[-4; -2)$ დ) $(-2; 3]$.

✓**18.** ალბათობა იმისა, რომ მონეტის სამჯერ აგდებისას ერთხელ მაინც მოვა საფასური არის

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{6}$ გ) $\frac{1}{8}$ დ) $\frac{7}{8}$.

✓**19.** მოცემული წირებიდან რომელი შეიძლება იყოს რაიმე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი?

ა) ბ) გ) დ)



✓**20.** ერთი კუბის წიბო 3 სმ-ით ნაკლებია მეორე კუბის წიბოზე. მეორე კუბის მოცულობა 512 სმ³-ია. იპოვეთ პირველი კუბის მოცულობა.

ა) 243 სმ³ ბ) 64 სმ³ გ) 216 სმ³ დ) 125 სმ³.

✓**21.** თუ ორი დადებითი თანამამრავლიდან ერთს 25%-ით გავზრდით, მეორეს 20%-ით შევამცირებთ, მაშინ ნამრავლი

ა) არ შეიცვლება ბ) შემცირდება

გ) გაიზრდება 10%-ით დ) 5%-ით გაიზრდება.

✓**22.** $y=2x^2-3x$ და $y=x^2+x-3$ პარაბოლების გადაკვეთის წერტილებია

ა) (1; 0) და (3; 0) ბ) (0; −1) და (0; 9)

გ) (0; 0) და (2; 2) დ) (1; −1) და (3; 9).

✓**23.** $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{4}{2-\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt{2}}=$

ა) $3+6\sqrt{2}$ ბ) 3 გ) $3\sqrt{2}$ დ) $-\frac{6}{\sqrt{2}}$.

✓**24.** ავტომობილი A-დან B-მდე მანძილის გავლისას V_1 სიჩქარით მოძრაობს, B-დან A-მდე V_2 — სიჩქარით. მთელ გზაზე საშუალო სიჩქარეა

ა) $\frac{V_1+V_2}{2}$ ბ) $\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$ გ) V_1-V_2 დ) V_1+V_2.

✓**25.** იპოვეთ ჯამი ორობით სისტემაში $(111111)_2+(11)_2$

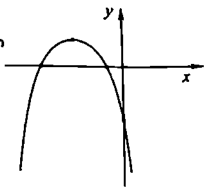
ა) 111122 ბ) 111100 გ) 1000000 დ) 1000010.

✓**26.** თუ D წერტილი AB მონაკვეთის შუა წერტილია, M წერტილი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ $\overrightarrow{MD}=$

ა) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ ბ) $\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ გ) $\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$ დ) $\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$.

✓**27.** რამდენი 3 ელემენტიანი განსხვავებული ქვესიმრავლე აქვს 5-ელემენტიან სიმრავლეს?

ა) 10 ბ) 15 გ) 20 დ) 25 ე) 5.



✓**28.** სურათზე გამოსახულია $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი, წვერო მეორე მეოთხედშია. ამ მოცემულობის მიხედვით:

ა) $a<0$, $c>0$, $D<0$, $b>0$ ბ) $a<0$, $c<0$, $D>0$, $b<0$

გ) $a<0$, $b>0$, $c<0$, $D>0$ დ) $a<0$, $b>0$, $c<0$, $D<0$

ე) $a>0$, $b<0$, $c<0$, $D>0$.

✓**29.** თუ $m=2+5^k$, $n=3-5^{-k}$, მაშინ

ა) $n=\dfrac{3m-7}{2-m}$ ბ) $n=\dfrac{3m-6}{m-2}$ გ) $n=\dfrac{3m-7}{m-2}$ დ) $n=\dfrac{2+m^2+m}{2-m}$.

✓**30.** იპოვეთ იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებიც (2; 3) წერტილიდან 5 ერთეულით არის დაშორებული და $y=-3x+24$ წრფეს ეკუთვნის

ა) მხოლოდ (6; 6) ბ) (6; 6) და (7; 3)

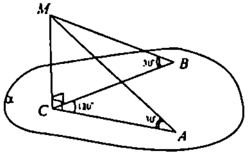
გ) (6; 6) და (3; 7) დ) (6; 6) და (5; 7).

31. ცხრილით მოცემულია მოსწავლეთა შეფასებების ფარდობითი სიხშირეები. უცნობია 3 ქულის ფარდობითი სიხშირე.

ქულა	0	1	2	3	4
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	x	$\frac{2}{15}$

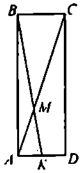
იმ მოსწავლეთა ოდენობა, რომლებმაც 4 ქულა მიიღეს — 1-ით ნაკლებია იმ მოსწავლეების ოდენობაზე, რომლებმაც 1 ქულა მიიღეს. იპოვეთ იმ მოსწავლეთა ოდენობა, რომლებმაც 3 ქულა მიიღეს.

32. რიცხვითი მონაცემებიდან თითოეული 10-ით გაზარდეს. როგორ შეიცვლება საშუალო, მედიანა, საშუალო კვადრატული გადახრა?



33. M წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებულია MC მართობი და ორი დახრილი: MA და MB (A და B დახრილების ფუძეებია, C — მართობის ფუძე). თითოეულ დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე 30^0-ია. ამ დახრილების გეგმილებს შორის კუთხე 120^0-ია. იპოვეთ $\angle AMB$.

34. $ABCD$ მართკუთხედში $AB=36$ სმ, $AD=12$ სმ. K წერტილი AD-ს შუა წერტილია, BK და AC მონაკვეთები M წერტილში იკვეთება. იპოვეთ AMK სამკუთხედის ფართობი.



35. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ავზის $\frac{2}{3}$ შეავსეს ბენზინით. კიდევ 90 ლიტრის დამატებით ავზის 80% შეივსება. რამდენი ლიტრი ეტევა ავზში?

36. იპოვეთ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე:

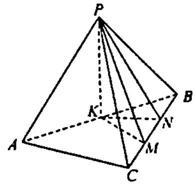
$$\left(\frac{5}{9}\right)^{2x^2-7}<\frac{25}{81}.$$

37. იპოვეთ a-ს იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $\dfrac{2a-1}{1-a}$ გამოსახულების მნიშვნელობა ეკუთვნის $[-3;+\infty)$ შუალედს.

38. ტრაპეციის შუახაზი ტრაპეციის დიაგონალებით სამ ტოლ ნაწილად იყოფა. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძის მცირე ფუძესთან შეფარდება.

39. m-ის რა მნიშვნელობებისთვის არის $y=\dfrac{1}{\sqrt{(m-1)x^2-2(m-3)x+3m-9}}$ ფუნქცია განსაზღვრული ნებისმიერი x-სთვის?

40. *PABC* პირამიდის მოცულობა 64 სმ^3-ია. *K* წერტილი *AB*-ს შუა წერტილია, *CM*=*MN*=*NB* (*M* და *N* წერტილები *BC* გვერდზეა). იპოვეთ *PKMN* პირამიდის მოცულობა.



V ვარიანტი

1. ვთქვათ, n ერთისგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვია. რა ნაშთი მიიღება (n^2+n+1)-ის $(n+2)$-ზე გაყოფისას?

ა) 5 ბ) 4 გ) 1 დ) 3.

2. ვთქვათ, ნებისმიერი n $(n \geq 2)$ ნატურალური რიცხვისთვის მიმდევრობის პირველი n წევრის S_n ჯამი მოიცემა $S_n=5^n-1$ ფორმულით. იპოვეთ მესამე წევრი.

ა) 110 ბ) 100 გ) 124 დ) 140.

3. ვთქვათ, x_n მიმდევრობა მოცემულია ფორმულებით: $x_1=5$, $x_{n+1}=3x_n$. იპოვეთ x_4.

ა) 135 ბ) 35 გ) 27 დ) 45.

4. შეარჩიეთ გამოსახულება, რომლის მნიშვნელობა არის ჯამი იმ ორნიშნა რიცხვებისა, რომელთა 6-ზე გაყოფისას ნაშთი 1-ია.

ა) $\frac{13+97}{2} \cdot 16$ ბ) $\frac{13+97}{2} \cdot 15$ გ) $\frac{13+97}{2} \cdot 14$ დ) $\frac{7+97}{2} \cdot 16$.

5. $f(x)=2^{kx}$ ფუნქციის გრაფიკი გადის (1; 16) წერტილზე. იპოვეთ k.

ა) 4 ბ) 3 გ) 2 დ) 1.

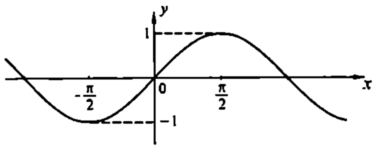
6. სურათზე შეიძლება იყოს გამოსახული

ა) კოსინუს ფუნქციის გრაფიკი

ბ) ტანგენს ფუნქციის გრაფიკი

გ) სინუს ფუნქციის გრაფიკი

დ) ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი.



7. თუ $a>1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია

ა) პერიოდული ფუნქციაა ბ) კენტი ფუნქციაა

გ) ლუწი ფუნქციაა დ) ზრდადი ფუნქციაა.

8. თუ $\cos\alpha-\sin\alpha=1,32$, მაშინ α ეკუთვნის

ა) I მეოთხედს ბ) II მეოთხედს

გ) III მეოთხედს დ) IV მეოთხედს.

9. თუ $\sin\alpha=5\cos\alpha$, მაშინ α ეკუთვნის

ა) I ან III მეოთხედს ბ) II მეოთხედს

გ) IV მეოთხედს დ) II ან IV მეოთხედს.

10. იპოვეთ $x_n=2n-n^2$, $n\in$N ფორმულით მოცემული მიმდევრობის პირველი ოთხი წევრის საშუალო.

ა) −2 ბ) −10 გ) −2,5 დ) −4.

11. $\frac{\log_3 72-\log_3 9}{\log_7 28-\log_7 7}=$

ა) 2 ბ) 3 გ) 1 დ) 1,5.

✓**12.** შემდეგი თანაფარდობიდან რომელია ჭეშმარიტი?

ა) $\log_2 3+\log_2 7>\log_2(3+7)$　　ბ) $\log_2 3+\log_2 7<\log_2(3+7)$

გ) $\log_2 3+\log_2 7=\log_2(3+7)$　　დ) $\log_2 3+\log_2 7\le\log_2(3+7)$.

✓**13.** ვთქვათ, $M(x;\ y)$ წერტილი არის $N(-5;\ 3)$ წერტილის სიმეტრიული Ox ღერძის მიმართ, მაშინ

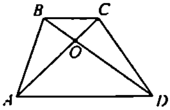
ა) $x=-5,\ y=3$　　ბ) $x=-5,\ y=-3$　　გ) $x=5;\ y=3$　　დ) $x=5;\ y=-3$.

✓**14.** რომელი თანაფარდობაა მცდარი?

ა) $\sin 2>\sin 4$　　ბ) $\cos 2>\cos 1$

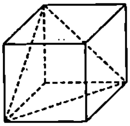
გ) $\operatorname{tg}2<\operatorname{tg}1$　　დ) $\cos 2<\cos 1$.

✓**15.** $ABCD$ ტრაპეციის AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. BOC სამკუთხედის ფართობი 9 სმ²-ია. AOD-ს ფართობია 16 სმ². იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობი.



ა) 4 სმ²　　ბ) 16 სმ²

გ) 12 სმ²　　დ) 9 სმ².



✓**16.** კუბის წიბო არის a. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც ერთი წვეროდან გამოსული სამივე წიბოს ბოლოებზე გადის.

ა) $\sqrt{\frac{3}{2}}a^2$　　ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

გ) $\sqrt{3}a^2$　　დ) $\sqrt{2}a^2$.

✓**17.** რამდენჯერ გაიზრდება ორნიშნა რიცხვი, თუ მის ათობით წარმოდგენას მარჯვნიდან ამავე რიცხვს მივუწერთ (მივიღებთ ოთხნიშნა რიცხვს)?

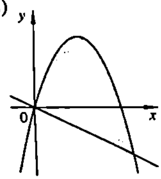
ა) 2-ჯერ　　ბ) 10-ჯერ　　გ) 101-ჯერ　　დ) 100-ჯერ.

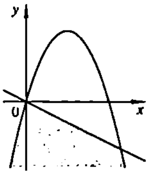
✓**18.** $(x;\ y)$ წერტილს შემთხვევით ვირჩევთ იმ ერთეულოვანი კვადრატიდან, რომლის სამი წვერო ცნობილია: $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 1)$ და $C(1;\ 0)$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ აღნიშნული წერტილის კოორდინატებმა დააკმაყოფილოს $y\ge 2x$ პირობა?

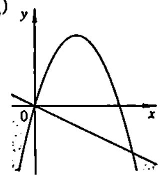
ა) $\frac{1}{4}$　　ბ) $\frac{1}{8}$　　გ) $\frac{3}{4}$　　დ) $\frac{1}{2}$.

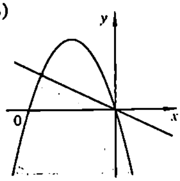
✓**19.** მოცემული სურათებიდან, რომელზე შეიძლება იყოს გამოსახული

$$\begin{cases} 0{,}5x+y\le 0 \\ y\le 8x-x^2 \end{cases}$$ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე?

ა)


ბ)


გ)


დ)


✓**20.** ვთქვათ, $f(x)=1-x$. იპოვეთ $f(f(x))$.

ა) $1-x$　　ბ) x　　გ) $-x$　　დ) $x-1$.

✓**21.** A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია; $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$. იპოვეთ $P(A\cup B)$.

ა) $\frac{1}{3}$　　ბ) $\frac{1}{4}$　　გ) $\frac{1}{2}$　　დ) $\frac{1}{12}$.

✓**22.** a_n არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა 4-ის ტოლია. იპოვეთ $b_n=2^{a_n}$ ფორმულით განსაზღვრული (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი.

ა) 8 ბ) 16 გ) 32 დ) 4.

✓**23.** ჩაწერეთ ათობით სისტემაში უდიდესი რიცხვი, რომელიც ორობით სისტემაში ექვსი ციფრით ჩაიწერება.

ა) 64 ბ) 63 გ) 65 დ) 66.

✓**24.** რამდენი ისეთი განსხვავებული სამნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლის ჩანაწერში არ გვხვდება ციფრები: 1, 2, 3 და 4?

ა) $6^2{\cdot}5$ ბ) $5^2{\cdot}4$ გ) $5{\cdot}4^2$ დ) 5^3.

✓**25.** ჰომოთეტიით, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, კოეფიციენტი 0,5-ია, AB მონაკვეთი აისახება $A'B'$ მონაკვეთზე, $A=(0;\ 2)$, $B=(2;\ -4)$. იპოვეთ AB-ს შუა წერტილის კოორდინატები.

ა) $(0{,}5;\ -0{,}5)$ ბ) $(0{,}5;\ 0{,}5)$
გ) $(-0{,}5;\ 0{,}5)$ დ) $(-0{,}5;\ -0{,}5)$.

✓**26.** მსროლელის მიერ ათიანში მოხვედრის ალბათობა 0,04-ია, ცხრიანში — 0,1, რვიანში — 0,2. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთ გასროლაში მსროლელი არა ნაკლებ 8 ქულას დააგროვებს?

ა) 0,5 ბ) 0,35 გ) 0,04 დ) 0,34.

✓**27.** $y=kx^2+(2k-1)x+k-3$ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს x ღერძთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს. იპოვეთ k.

ა) $k=-2$ ბ) $k<-0{,}5$ გ) $k=-0{,}125$ დ) $k=0{,}5$.

✓**28.** ერთი ონკანი აუზს ავსებს 24 წთ-ში, მეორე — 10 წთ-ში. აუზის რა ნაწილი აივსება, თუ ორივე ონკანს 2 წთ-ით გავხსნით?

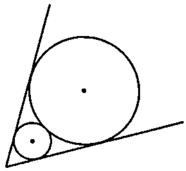
ა) $\frac{1}{120}$ ბ) $\frac{23}{60}$ გ) $\frac{2}{17}$ დ) $\frac{17}{60}$.

✓**29.** A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, ამ დახრილების სიგრძეებია 40 სმ და 25 სმ, მათი გეგმილების სხვაობა 25 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან α სიბრტყემდე.

ა) 42 სმ ბ) 24 სმ გ) 31 სმ დ) 23 სმ.

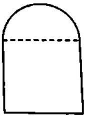
✓**30.** თუ 60^0-იან კუთხეში ჩახაზული ორი წრეწირი ერთმანეთს ეხება, მაშინ დიდი წრეწირის რადიუსი მეტია პატარა წრეწირის რადიუსზე

ა) 2-ჯერ ბ) 1,5-ჯერ
გ) 3-ჯერ დ) 2,5-ჯერ.



31. დასახელებულია მონაცემები: 1; 1; 1; 1; 1; 1; x. წარმოადგინეთ მათი რიცხვითი მახასიათებლები: საშუალო, მოდა, მედიანა, საშუალო კვადრატული გადახრა. რომელი მათგანია x-ზე დამოკიდებული?

32. AB და CD ქორდები E წერტილში 45^0-იანი კუთხით იკვეთება. A და B წერტილებიდან CD წრფეზე დაშვებული მართობები, შესაბამისად, 2 სმ და 5 სმ-ია; CD ქორდა 9 სმ-ია. იპოვეთ CE და ED.



33. ფანჯარას სურათზე მითითებული ფორმა აქვს — მართკუთხედი, რომლის ერთ მხარეს წრის ნახევარია დამატებული. ფანჯრის პერიმეტრი არის p. მართკუთხედის გვერდების შეფარდების რა მნიშვნელობისთვის ატარებს ფანჯარა მეტ შუქს?

34. ილია ჭავჭავაძის ნაწარმოებები 8 ტომს ალალბედად ვაწყობთ თაროზე ერთმანეთის გვერდით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ I და II ტომები ერთმანეთის გვერდით აღმოჩნდება.

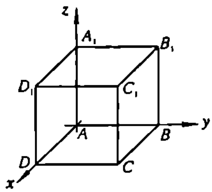
35. ამოხსენით განტოლება: $x^2+3\sqrt{x^2-3x+4}=3(x+2)$.

36. მოსწავლეებმა თეატრის და კინოს ბილეთებისთვის თანაბარი თანხები დახარჯეს, სულ 50 ბილეთი შეიძინეს. თუ კინოს 1 ბილეთის ფასი თეატრის 1 ბილეთის ფასის ტოლი იქნებოდა, მაშინ კინოს ბილეთებში 27 ლარს გადაიხდიდნენ, ხოლო თუ თეატრის ბილეთს შეიძენდნენ კინოს ბილეთის ფასად, მაშინ თეატრის ბილეთებში გადაიხდიდნენ 12 ლარს. კინოს და თეატრის რამდენი ბილეთი იყო შეძენილი?

37. იპოვეთ უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც 28-ზე გაყოფისას იძლევა ნაშთს 21-ს, 19-ზე გაყოფისას — 17-ს.

38. გამოსახეთ a-თი და b-თი $ax+by=6ab$ განტოლების ყველა არაუარყოფითი მთელი ამონახსნი, თუ a და b ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვებია.

39. სურათზე კუბია გამოსახული, კოორდინატთა სათავე A წერტილშია. კუბის წიბოს სიგრძე 1-ის ტოლია.



ა) იპოვეთ კუბის წვეროების კოორდინატები;

ბ) იპოვეთ CC_1 წიბოს შუა წერტილის კოორდინატები;

გ) იპოვეთ AA_1B_1B წახნაგის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები;

დ) იპოვეთ კუბის (0, 0, 0) წვეროდან BB_1C_1C წახნაგის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე მანძილი.

40. გემის სათბობის ხარჯი ორ ნაწილად იყოფა. პირველი ნაწილი არ არის დამოკიდებული სიჩქარეზე და საათში 480 დოლარია, მეორე ნაწილი კი სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია. ამასთანავე, 10 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას საათში 3 დოლარს უდრის. გემის რა სიჩქარით მოძრაობისას იქნება 1 კმ მანძილზე გაწეული ხარჯების საერთო ჯამი უმცირესი?

ტრიგონომეტრიის ფორმულები

განტოლებების ამოსახსნელი ფორმულები:

$\sin x=a,\quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\quad n\in Z,\quad (|a|\leq 1)$

$\cos x=a,\quad x=\pm\mathrm{arctg}\,a+2\pi n,\quad n\in Z,\quad (|a|\leq 1)$

$\mathrm{tg}\,x=a,\quad x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n,\quad n\in Z,\quad (a\in R)$

$\mathrm{ctg}\,x=a,\quad x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n,\quad n\in Z,\quad (a\in R)$

$\sin x=0,\quad x=\pi n,\ n\in Z$ $\qquad$ $\sin x=1,\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z$

$\sin x=-1;\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ $\qquad$ $\cos x=0,\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$

$\cos x=1,\quad x=2\pi n,\ n\in Z$ $\qquad$ $\cos x=-1,\quad x=\pi+2\pi n,\quad n\in Z$

a	$\arcsin a$	$\arccos a$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{8}$

a	$\mathrm{arctg}\,a$	$\mathrm{arcctg}\,a$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

დაყვანის ფორმულები

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

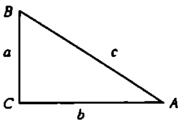
$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha,$ $\qquad$ $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{tg}(-\alpha)=-tg\alpha,$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\sin(\alpha+\pi n)=(-1)^n\sin\alpha,$ $\qquad$ $\cos(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cos\alpha,\ n\in Z$

მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

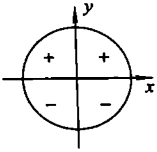


$\sin A=\frac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos A=\frac{b}{c}$

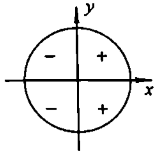
$\mathrm{tg}A=\frac{a}{b},$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}A=\frac{b}{a}.$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნები

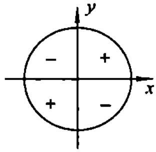
სინუსის ნიშნები



კოსინუსის ნიშნები



ტანგენსის ნიშნები



პერიოდულობა: ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისა და მთელი k რიცხვისთვის

$$\sin(x+2\pi k)=\sin x,$$
$$\cos(x+2\pi k)=\cos x,$$

თუ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, მაშინ $\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x.$

sin და cos ფუნქციების პერიოდია (უმცირესი დადებითი პერიოდია) 2π, tg-ის პერიოდია π.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები

(არგუმენტის ზოგიერთი მნიშვნელობისთვის)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	არ არსე-ბობს	0	არ არსე-ბობს

ტრიგონომეტრიის ძირითადი ფორმულები:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \ .$$

(a_n) არითმეტიკულ პროგრესიაში: $a_{n+1}-a_n=d$ (d მუდმივი რიცხვია, $n \in N$), d — პროგრესიის სხვაობაა; n-ური წევრის ფორმულაა: $a_n=a_1+d(n-1)$;

პირველი n წევრის ჯამის ფორმულები: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; $\quad S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$.

(b_n) გეომეტრიულ პროგრესიაში: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$ (q მუდმივი რიცხვია, $n \in N$); ამასთანავე, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$; n-ური წევრის ფორმულაა: $b_n=b_1 \cdot q^{n-1}$;

პირველი n წევრის ჯამის ფორმულები:

თუ $q \neq 1$, $S_n=\frac{a_n q-a_1}{q-1}$; $\quad S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

თუ $q=1$, $S_n=na_1$.

ლოგარითმის თვისებები:

თუ x და y დადებითი რიცხვებია, $a>0$, $a\neq1$, მაშინ

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y;$$

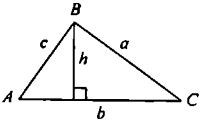
$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y;$$

თუ k ნებისმიერი რიცხვია, $x>0$, $a>0$, $a\neq1$, მაშინ

$$\log_a x^k=k\log_a x;$$

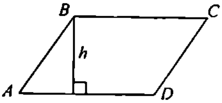
თუ a, b, c დადებითი რიცხვებია, $a\neq1$, $c\neq1$, მაშინ $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

ფიგურის ფართობი



$S=\frac{1}{2}bh$; $S=\frac{1}{2}bc\sin A$; $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

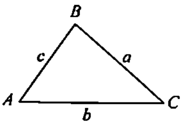
h სიმაღლეა, $p=\frac{a+b+c}{2}$.



$ABCD$ პარალელოგრამია

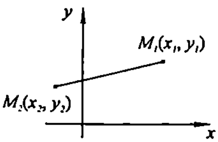
$S=AD\cdot h$; $S=AB\cdot AD\cdot\sin A$; $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$;

h სიმაღლეა, α — დიაგონალებს შორის კუთხე.



სინუსების თეორემა: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$;

კოსინუსების თეორემა: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.



ორ წერტილს შორის მანძილი:

$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

გეომეტრიული გარდაქმნები: $M(x;\ y)\to M'(x';\ y')$

პარალელური გადატანა $\vec{u}(a;\ b)$ ვექტორით: $x'=x+a$, $y'=y+b$;

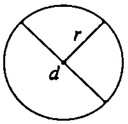
სიმეტრია აბსცისათა ღერძის მიმართ: $x'=x$, $y'=-y$;

სიმეტრია ორდინატთა ღერძის მიმართ: $x'=-x$, $y'=y$;

სიმეტრია კოორდინატთა სათავის მიმართ: $x'=-x$, $y'=-y$;

ჰომოთეტია k კოეფიციენტით კოორდინატთა სათავის მიმართ: $x'=kx$, $y'=ky$;

მობრუნება კოორდინატთა სათავის გარშემო $\frac{\pi}{2}$ კუთხით: $x'=-y$, $y'=x$.

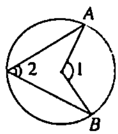


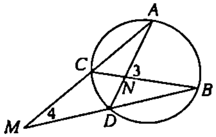
წრეწირის სიგრძე: $C=2\pi r$

წრის ფართობი: $S=\pi r^2$

ცენტრული კუთხე: $\angle1$-ის ზომა AB რკალის ზომაა

ჩახაზული კუთხე: $\angle2$-ის ზომა არის AB რკალის ზომის ნახევარია

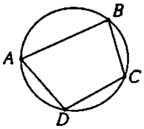


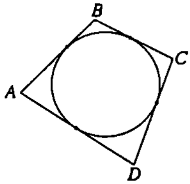


მკვეთი კუთხეები (ANB და AMB სახის კუთხეები)

$\angle 3=\frac{1}{2}(AB+CD)$ $\quad$ $\angle 4=\frac{1}{2}(AB-CD)$

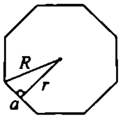
ოთხკუთხედი და წრეწირი





$ABCD$ ჩახაზული ოთხკუთხედია
$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^0$

$ABCD$ შემოხაზული ოთხკუთხედია
$AB+CD=BC+AD$

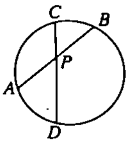


წესიერი მრავალკუთხედი (n-კუთხედი)

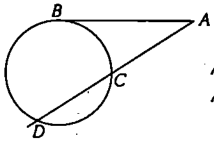
$R=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{n}}$ $\qquad$ $r=\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^0}{n}}$

ფართობი: $Q=\frac{1}{2}na\cdot r$

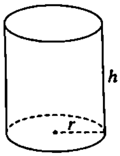
წრეწირთან დაკავშირებული მონაკვეთები:



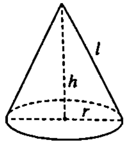
$AP\cdot PB=CP\cdot PD$



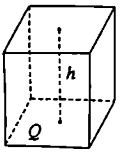
$AB^2=AD\cdot AC$
AB მხებია.



ცილინდრი
მოცულობა: $V=\pi r^2h$
გვერდითი ზედაპირი — $S_{გვ}=2\pi rh$
სრული ზედაპირი — $S_{სრ}=2\pi rh+2\pi r^2$

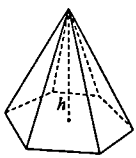


კონუსი
მოცულობა: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$
გვერდითი ზედაპირის ფართობი: $S_{გვ}=\pi rl$
სრული ზედაპირის ფართობი: $S_{სრ}=\pi rl+\pi r^2$



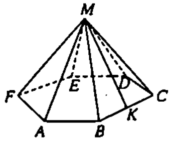
პრიზმა

მოცულობა: $V=Q\cdot h$
Q — ფუძის ფართობი



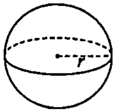
პირამიდა

მოცულობა: $V=\frac{1}{3}Qh$



წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი:

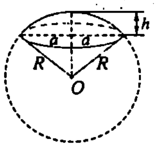
$S_{გვ}=\frac{1}{2}P\cdot a$, P — ფუძის პერიმეტრი, a — აპოთემა, $a=MK$.



სფერო, ბირთვი

მოცულობა: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

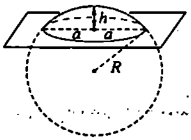
ზედაპირის ფართობი: $S=4\pi r^2$



სფერული სექტორი

ზედაპირის ფართობი: $S=\pi R(2h+a)$

მოცულობა: $V=\frac{2}{3}\pi R^2h$



სფერული სეგმენტი

ზედაპირის ფართობი: $S=2\pi Rh$

მოცულობა: $V=\frac{1}{6}\pi h(3a^2+h^2)=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$

მონაცემები: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$

საშუალო: $\bar{x} = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ დისპერსია: $S = \dfrac{\sum_{i=i}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$

საშუალო კვადრატული გადახრა: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$

პასუხები

I ნაწილი

§ 1.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
დ	ბ	დ	ა	გ	ა	ბ	ა	ა	დ	დ	გ	გ	გ	გ

16. ა) გადის, ბ) ეკუთვნის, გ) არ ეკუთვნის, დ) *SR*, ე) *RS*, *RT*, *RU*, *ST*, *SU*, *TU*, ვ) *SR*, *ST*, *SU*. **17.** ა) არსებობს, ბ) არ არსებობს, გ) არსებობს, დ) არ არსებობს. **18.** ექვსი წრფე: *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*. **19.** 5 წერტილით — 10 წრფე, 6 წერტილით — 15 წრფე. **20.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **21.** 13. **22.** *N*; *NM* და *NK* სხივები. **23.** $\angle R$; $\angle 1$; $\angle ARC$; $\angle CRA$. **24.** ა) $\angle AOB$ და $\angle BOD$; $\angle AOC$ და $\angle COD$. ბ) $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle BOD$. **25.** ეკუთვნის. **26.** არ შეიძლება. **27.** იკვეთება. **28.** ა) შეიძლება, ბ) არ შეიძლება. **29.** ა) სამი: *AB*, *BC* და *AC*, ბ) ექვსი: *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*. **30.** ა) *ABCD* ტეხილი, AA_1C_1C ტეხილი, AA_1D_1D, ... , ბ) ABB_1C_1 ტეხილი, ADD_1C_1C ტეხილი, ...

§ 1.2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ა	ბ	ა	დ	დ	გ	ბ	გ	ბ	გ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
დ	ბ	ბ	ბ	ბ	ბ	გ	ბ	გ	დ

21. ა) 17. ბ) 60, გ) 3,8, დ) 136, ე) 8,5, ვ) 9,9. ზ) 116, თ) 50. **22.** 199 სმ<2 მ<3000 მმ<1,3 კმ. **23.** ა) მეტრი, ბ) მეტრი, გ) მეტრი, დ) კილომეტრი, ე) სმ, ვ) სმ, ზ) მეტრი, თ) მმ, ი) მმ. **24.** ა), ბ) და დ). **25.** ა) – 2) 14 სმ, ბ) – 2) 1,76 სმ. **26.** არ მდებარეობს. **27.** არ მდებარეობს. **28.** *B*. **29.** *A*. **30.** მდებარეობს. **31.** ა) არის, ბ) არ არის. **32.** ა) არის, ბ) არის. **33.** 3 მ, 13 მ, 2 მ, 7 მ — შეიძლება; 14 მ — არ შეიძლება. **34.** უმცირესი — 37,4 სმ, უდიდესი — 48 სმ. **35.** 23 სმ. **36.** 4 სმ ან 10 სმ. **37.** ა) *A*, ბ) 4,7 სმ. **38.** ა) 93 სმ და 31 სმ, ბ) 63 სმ და 61 სმ, გ) 48,9 სმ და 75,1 სმ, დ) 24,8 სმ და 99,2 სმ, ე) 74,4 სმ და 49,6 სმ, ვ) 7,5 სმ და 46,5 სმ. **39.** 0,5 მ. **40.** 40 სმ. **41.** 10,8 დმ; 7,2 დმ; 9,6 დმ. **42.** 1), 2), 3) — შეიძლება; 4) — არ შეიძლება. **43.** 1) $0,5 \leq AB \leq 10,5$ (სმ), 2) $1 \leq AB \leq 15$ (სმ). **44.** სამკუთხედის უტოლობით $AB<AM+MB$, $BC<BT+TC$, საიდანაც $AB+BC<AM+MT+TC$. **45.** სამი გვერდი. **46.** 9 სმ. **47.** 9 სმ.

§ 1.3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ბ	ა	გ	დ	გ	ა	ბ	ბ	გ	გ	დ

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ა	ა	დ	ბ	გ	გ	გ	დ	ბ	ა	გ

23. 45^0 და 135^0. **24.** 36^0 და 144^0. **25.** 70^0 და 110^0. **26.** 90^0. **27.** 120^0. **28.** $142,5^0$. **29.** ა) 20^0, 20^0, 20^0, ბ) 40^0. **30.** 85^0, 95^0, 85^0, 95^0. **31.** 60^0, 120^0, 60^0, 120^0. **32.** 72^0, 108^0. **33.** 80^0. **34.** ა) არ არის სწორი, ბ) სწორია. **35.** ა) არ არის სწორი, ბ) არ არის სწორი. **36.** $\angle 1=20^0$, $\angle 2=\angle 3=\angle 4=90^0$. **37.** ა) 60^0, ბ) 120^0. **38.** 110^0. **39.** 30^0. **40.** 90^0. **41.** ა) 110^0, ბ) 105^0, გ) 25^0. **42.** 66^0.

§ 1.4.

1	2	3	4	5	6	7
ბ	ბ	ა	გ	გ	დ	ბ

8. 30^0. **9.** 5 სმ. **10.** 35^0, 35^0. **11.** 155^0. **12.** 45^0. **13.** 64^0. **14.** 10 სმ. **15.** 220^0. **16.** 75^0, 105^0, 120^0.

§ 1.5.

1	2	3	4	5	6	7
ბ	გ	დ	ა	გ	ბ	ბ

8. 13 სმ. **9.** 5 სმ. **10.** 6 სმ. **11.** 28 სმ. **12.** *O* არის სამივე გვერდის შუა მართობების გადაკვეთის წერტილი, $OA=OB=OC$. **13.** 50^0. **14.** 14 სმ. **15.** 30^0. **16.** 4,5 სმ. **17.** 8 სმ. **18.** 1,2 სმ ან 11,2 სმ. **19.** 14,4 სმ. **20.** 30 სმ. **21.** *AB* მონაკვეთის შუამართობისა და *a* წრფის გადაკვეთის წერტილი. **22.** 15 სმ. **23.** 12 სმ. **24.** 4,8 დმ. **25.** (0; 9,5). **26.** (0; 0). **27.** 58 სმ. **28.** 2,1 დმ.

§ 1.6.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ბ	დ	დ	დ	გ	ბ	დ	ბ	დ	ა

11. ა) 92^0, ბ) 48^0, გ) 40^0, დ) 88^0. **12.** $a\|b$, $m\|n$. **13.** ა) $m\|n$; ბ) $x\|y$; გ) დ) — ვერ მივუთითებთ, მოცემული პირობები არ არის საკმარისი, ე) $m\|n$, ვ) $x\|y$. **14.** ა) $x\|y\|z$, ბ) პარალელურია. **15.** $\angle ABC=37{,}5^0$, $\angle BCD=142{,}5^0$. **16.** $\angle3=\angle5=\angle8=50^0$, $\angle2=\angle4=\angle6=\angle7=130^0$. **17.** $\angle1=\angle2=\angle4=\angle5=60^0$, $\angle3=\angle6=120^0$, $\angle7=\angle8=90^0$. **18.** ა) $\angle6$, ბ) $\angle6$, გ) $\angle6$. **19.** $\angle1=\angle3=65^0$, $\angle2=115^0$. **20.** ა) $a\|b$, ბ) $x\|y$, გ) შეუძლებელია მითითება, დ) $a\|b$, ე) შეუძლებელია მითითება. ვ) $x\|y$. **21.** ა) $a\|b$, ბ) 60^0. **22.** 180^0. **23.** 680^0; $a\|b$. **24.** 40^0. **25.** 80^0 და 100^0. **26.** 40^0, 40^0, 40^0, 40^0, 140^0, 140^0, 140^0, 140^0. **27.** 25^0. **28.** 110^0; 35^0; 35^0; ტოლფერდა ბლაგვკუთხა სამკუთხედი. **29.** 10 სმ. **30.** 30^0 და 150^0. **31.** 33^0, 57^0, 90^0; $DC=4{,}8$ დმ. **32.** 3 სმ; 9 სმ ან 6 სმ; 18 სმ. **33.** 6 სმ. **34.** 20 სმ; 10 სმ. **35.** ა) 4 სმ; 8 სმ, ბ) 2 სმ. **36.** 160^0, 10^0.

§ 1.7.

1	2	3	4	5	6	7	8
გ	გ	ა	ა	გ	დ	ბ	დ

9. ა) ტოლფერდა, ბ) სხვადასხვაგვერდა, გ) ტოლგვერდა. **10.** ა) ბლაგვკუთხა, ბ) მართკუთხა, გ) მახვილკუთხა. **11.** ა) *ABO*, *BOD*, *COD*, *AOC*, *ABD*, *ACD*, *BOC*, *ABC*, ბ) *BOC*, *AOB*, *AOC*, გ) *AOC*, *ABC*, დ) *BOD*, *COD*, *CAD*, *BAD*. **12.** ა) *ADC* და *ABC* მართკუთხა სამკუთხედები, ბ) *XZY* და *XWY* ბლაგვკუთხა სამკუთხედებია, გ) *KCQ* და *MCN* ტოლფერდა სამკუთხედები. **13.** რვა. **14.** ა) არ შეიძლება, ბ) არ შეიძლება. **15.** 32 ერთეული. **16.** 140 სმ. **17.** 17,95 სმ. **18.** 33,6 სმ. **19.** 37,4 სმ ან 34 სმ. **20.** 59 სმ. **21.** 10 სმ. **22.** 26 სმ. **23.** ა) ბლაგვკუთხა, ბ) მართკუთხა. **24.** 12 სმ; 12 სმ; 16,2 სმ. **25.** 5 სმ; 6 სმ; 6 სმ; **26.** $\frac{1}{7}$. **27.** 0,4. **28.** 0,4. **29.** 32 სმ, 24 სმ, 44 სმ. **30.** 29,5 სმ. **31.** 0,3.

§ 1.8.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ბ	გ	გ	გ	ბ	დ	ბ	ა	ბ	ბ

11. ა) 25^0, ბ) 130^0, გ) ბლაგვკუთხა. **12.** 40^0, 100^0. **13.** ა) სწორია, ბ) სწორია, გ) არ არის სწორი, დ) არ არის სწორი. **14.** არ შეიძლება, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ABC სამკუთხედში ორი კუთხე იქნება მართი. **15.** 40^0. **16.** 80^0. **17.** 34^0; 85^0; 61^0. **18.** 27^0; 108^0; 45^0. **19.** 45^0; 45^0; 90^0. **20.** 15^0; 75^0. **21.** 20^0, 60^0, 100^0. **22.** 30^0, 60^0, 90^0. **23.** 114^0. **24.** ა) 144^0, ბ) 36^0. **25.** ა) $2\alpha-180^0$, ბ) $90^0<\alpha<180^0$. **26.** 60^0. **27.** 80^0, 120^0, 160^0. **28.** 32^0. **29.** 30^0. **30.** სამივე სამკუთხედის კუთხეებია 90^0, α და $90^0-\alpha$. **31.** $\angle DAM=\dfrac{\beta-\gamma}{2}$. **32.** 10,5 სმ, 3,5 სმ.

§ 1.9.

1	2	3	4	5	6	7
ბ	ა	ბ	ა	ბ	ა	ბ

8. ა) ΔABC და ΔDCE, ბ) ΔPQS და ΔRQS, გ) ΔABC და $\Delta A_1B_1C_1$, დ) ΔABC და ΔCDA. **9.** 16 სმ. **10.** $\angle 1=\angle 2=25^0$. **11.** AC=30 სმ, A_1B_1=32 სმ. **12.** 60 სმ. **13.** 54 სმ. **14.** 48 სმ. **15.** 13,6 სმ; 12,4 სმ და 16 სმ. **16.** 24 სმ, 26 სმ, 24 სმ, 26 სმ. **17.** BC მეტია CF-ზე 3 სმ-ით. **18.** $\Delta ABC=\Delta BOC$, $\Delta ADO=\Delta CDO$, $\Delta ABD=\Delta CBD$. **19.** $\Delta AMC=\Delta ANC$, $\Delta AMB=\Delta ANB$, $\Delta BMC=\Delta BNC$, $\Delta MDC=\Delta NDC$, $\Delta BMD=\Delta BND$, $\Delta AMD=\Delta AND$. **20.** $\Delta AMD=\Delta AND$, $\Delta AMB=\Delta CND$, $\Delta BMC=\Delta BNC$, $\Delta CMD=\Delta ABN$, $\Delta AMC=\Delta BND$, $\Delta BMD=\Delta ACN$.

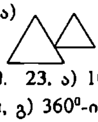
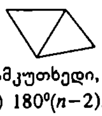
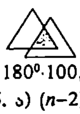
§ 1.10.

1	2	3	4	5
დ	ა	ა	დ	გ

6. 6 სმ. **7.** 9,6 სმ. **8.** 12 სმ. **9.** 28 სმ. **10.** 40 სმ. **11.** 15 სმ. **12.** 4 სმ და 2 სმ. **13.** 1 დმ. **14.** 16,2 სმ. **15.** 10,8 სმ. **16.** ა) 5 სმ, ბ) 5 სმ. **17.** ა) 31 სმ, ბ) 75^0. **18.** 40 სმ. **19.** 3,5 სმ. **20.** 3,2 სმ.

§ 1.11.

1	2	3	4	5	6	7	8
ა	ბ	გ	გ	ა	გ	გ	ბ

9. ა) R, S, T, U, V; RS, ST, TU, UV, RV, ბ) $RSTUV$, $RVUTS$. **10.** ა) და გ) არ არის მრავალკუთხედი, ბ) არაამოზნექილი მრავალკუთხედია, დ) ამოზნექილი მრავალკუთხედია. **11.** ა) ოთხკუთხედი, ბ) სამკუთხედი, გ) ხუთკუთხედი, დ) ექვსკუთხედი. **12.** 3 დმ; 4,5 დმ; 10,5 დმ; 1,5 დმ; 7,5 დმ. **13.** 189 სმ. **14.** 45 სმ. **15.** $\dfrac{180^0(n-2)}{n}$. **16.** 10. **17.** 140^0. **18.** 150^0, 120^0, 90^0, 120^0, 60^0. **19.** 12 დმ. **20.** ა)  ბ)  გ)  დ)  ე) 

21. 19,4 სმ. **22.** 40 სმ. **23.** ა) 100 სამკუთხედი, ბ) $180^0\cdot100$, გ) 360^0-ით, დ) $180^0\cdot98$. **24.** ა) n სამკუთხედი, ბ) 180^0-n, გ) 360^0-ით, დ) $180^0(n-2)$. **25.** ა) $(n-2)$ სამკუთხედი, ბ) $(n-2)180^0$, დ) $180^0(n-2)$. **26.** 36^0. **27.** 360^0. **28.** ექვსი. **29.** 30^0.

§ 1.12.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ა	ა	ბ	ა	ბ	დ	დ	გ	ა	დ	დ

12. 35 სმ; 45 სმ. **13.** 5,6 სმ; 16,8 სმ. **14.** 11 სმ; 13,2 სმ. **15.** 19,6 სმ. **16.** 108 სმ. **17.** 230,4 სმ. **18.** 31,4 სმ. **19.** 16 სმ. **20.** 8 სმ; 12 სმ. **21.** 5,4 სმ; 6,8 სმ. **22.** 6 სმ; 4 სმ; 6 სმ. **23.** 40^0; 100^0. **24.** 24 სმ. **25.** $2a$. **26.** 4,8 სმ. **27.** 25,6 სმ. **28.** 38,4 სმ. **29.** 60^0, 120^0, 60^0, 120^0. **30.** 60^0. **31.** 65^0. **32.** ა) 60^0, ბ) 24 სმ. **33.** 14 სმ; 12 სმ; 14 სმ. **34.** 10 სმ; 4 სმ; 10 სმ. **35.** 40 სმ. **36.** 32,4 სმ. **37.** 12,4 სმ; 12,4 სმ. **38.** 4,8 სმ. **39.** 8,4 სმ. **40.** 80 სმ. **41.** 28,8 სმ; 19,2 სმ. **42.** რომბი; 48 სმ. **43.** 16 სმ. **44.** 84 სმ. **45.** 3,2 სმ. **46.** 30^0 და 150^0. **47.** გ). **48.** გ). **49.** 90^0. **50.** $b-2a$. **51.** 52 სმ. **52.** 22 სმ. **53.** 60^0; 35^0; 85^0.

§ 1.13.

1	2	3	4	5
გ	დ	ბ	ბ	ა

6. 108^0; 72^0; 36^0; 144^0. **7.** არ შეიძლება. **8.** 20 სმ. **9.** 24 სმ. **10.** $\frac{a-b}{2}$; $\frac{a+b}{2}$. **11.** ა) 90^0; 90^0; 150^0, 30^0, ბ) 13 სმ. **12.** 2,4 სმ; 2,4 სმ; 2,4 სმ; 6 სმ. **13.** ა) არ შეიძლება, ბ) შეიძლება. **14.** 90^0. **15.** 8 სმ; 10 სმ; 8 სმ; 14 სმ. **16.** 10^0. **17.** 60^0; 60^0; 120^0; 120^0. **18.** 3,5 სმ. **19.** ა) 4 სმ, ბ) 10 სმ. **20.** $\frac{a+b}{2}$. **21.** 21 სმ.

§ 1.14.

1	2	3	4	5
დ	დ	გ	ბ	ბ

6. 4 სმ; 3,2 სმ. **7.** 38,8 სმ. **8.** პარალელოგრამი; 21 სმ; 25 სმ. **9.** 4,2 დმ. **10.** 1:3. **11.** 2,1 სმ; 2,1 სმ. **12.** 7 დმ. **13.** 6 სმ; 6 სმ. **14.** 4,8 დმ. **15.** 68 სმ. **16.** 14,4 დმ. **17.** 6,5 დმ და 2,6 დმ. **18.** ა) 1:1, ბ) 4,5 სმ. **19.** 2:3. **20.** $MNPK$, $AMKC$ — ტრაპეციები; $ANPD$, $AMKL$ — პარალელოგრამები; P_{MNPK}=22,6 სმ, P_{ANPD}=33 სმ, P_{AMKL}=35 სმ, P_{AMKC}=46,5 სმ.

§ 1.15.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
ბ	ა	ბ	ბ	ბ	დ	გ	ა	ბ

10. 9,6 დმ; 19,2 დმ; 24 დმ. **11.** 4,8 დმ. **12.** 16,2 სმ; 37,8 სმ. **13.** 6 სმ და 12 სმ. **14.** 10,8 სმ. **15.** 1,5 სმ. **16.** 10 დმ. **17.** 14 სმ. **18.** 24 სმ. **19.** 12,8 სმ. **20.** 8,8 სმ. **21.** $AE=FD=a$. **22.** 4 სმ. **23.** 12 სმ და 16 სმ. **24.** პარალელოგრამი; 15 სმ. **25.** MN=2,5; (5,5; 6); (8; 6). **26.** 25,2 დმ. **27.** 9 სმ; 15 სმ. **28.** 4 დმ. **29.** 12,5 სმ. **30.** ა) $\frac{c}{2}$, ბ) $\frac{c}{2}$. **31.** ა) პარალელოგრამი, ბ) $BO:OE=AO:OD$=2:1.

§ 1.16.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
დ	ბ	ა	გ	დ	ა	დ	ა	გ	დ	ა	დ	ა	ა	ბ	ბ	ა

18. 18750 მ². **19.** 5,76 სმ². **20.** 9 სმ². **21.** 10 სმ². **22.** $4S$. **23.** 1 მ²; 4 მ. **24.** 17 სმ. **25.** $\frac{1}{3}S$; $\frac{1}{3}S$; $\frac{1}{3}S$. **26.** 30°; 60°; 90°. **27.** 19,2 მ; 12 მ. **28.** 1,92 დმ². **29.** ა) 100-ჯერ, ბ) 99%-ით. **30.** ა) $\frac{1}{4}$, ბ) $\frac{c^2}{4}$. **31.** ა) 17,5 სმ², ბ) 19,5 სმ², გ) 16,5 სმ². **32.** 84 სმ; 336 სმ²

§ 1.17.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ბ	დ	ბ	ა	ბ	გ	ბ	ა	ბ	ბ	დ	გ

13. 72 სმ². **14.** 108 სმ². **15.** 16 სმ. **16.** 32 სმ². **17.** 18 სმ². **18.** 31,5 სმ². **19.** $S_{BOC}=S_{COD}=S_{AOD}=15$ სმ². **20.** 1152 სმ². **21.** 0,96 დმ². **22.** 50 სმ². **23.** $\frac{168}{13}$ სმ. **24.** 105 სმ². **25.** 2 სმ. **26.** 480 სმ². **27.** 56 სმ. **28.** 60 სმ². **29.** 50 სმ². **30.** 24 სმ². **31.** 17,64 სმ². **32.** 12 სმ. **33.** 1), 2), 3) — შეიძლება, 4) — არ შეიძლება.

§ 1.18.

1	2	3	4	5	6
ბ	ა	ბ	დ	დ	გ

7. 24,75 სმ²; 20,25 სმ². **8.** 7,2 სმ; 10,8 სმ. **9.** 10 დმ. **10.** 196 სმ². **11.** 1,12 სმ². **12.** 64 სმ². **13.** 144 სმ². **14.** 144 სმ². **15.** 48 სმ². **16.** $S_{ABK}=S_{KCD}=S_{BKC}=\frac{q}{3}$. **17.** $\frac{a+b}{2}:b:\frac{a-b}{2}$. **18.** ა) $\frac{5}{4}$-ჯერ, ბ) 8-ჯერ, გ) 35-ჯერ.

§ 1.19.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ა	ა	ბ	ბ	ა	დ	ბ	გ	გ	ბ	გ

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ბ	დ	დ	ა	ა	ბ	ბ	დ	ა	დ	ა

23. 17,5 სმ. **24.** 20 სმ. **25.** $\frac{ab}{a+b}$. **26.** 15 სმ. **27.** $BE=4{,}8$ სმ, $BD=3{,}2$ სმ. **28.** 4 სმ და 5 სმ. **29.** 15 სმ და 20 სმ. **30.** 4,8 სმ. **31.** $\frac{2ab}{a+b}$. **32.** $\sqrt{ab}$. **33.** 12. **34.** 2 სმ. **35.** 4,2 სმ. **36.** 9 მ. **37.** 2,24 მ. **38.** $\frac{c(a+b)}{b}$. **39.** 3,15 სმ. **40.** 48 მ. **41.** 18 სმ, 18 სმ და 12 სმ. **42.** 80 სმ². **43.** $\frac{400}{49}$ სმ². **44.** ა) 2:3, ბ) 2:3, გ) 3:2, დ) 25 სმ². **45.** $S_{ABO}=S_{CDO}=kS$, $S_{AOD}=k^2S$, $S_{ABCD}=(k+1)^2S$. **46.** 1 სმ².

§ 1.20.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
დ	გ	ბ	ბ	გ	ბ	ბ	დ	გ	დ	ა	გ	ბ	გ	დ	ბ	ა	დ	გ	ბ	გ

22. $BO=2\sqrt{5}$, $AB=3\sqrt{5}$, $AO=5$, $OC=4$. **23.** 98 სმ და 18 სმ. **24.** $\sqrt{21}\approx4{,}6$ სმ. **25.** 43,2 სმ. **26.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$. **27.** 2 კმ. **28.** $24\sqrt{5}$ სმ. **29.** 38 სმ. **30.** $\frac{136}{15}$ სმ. **31.** $CK=60$ სმ, $CO=61{,}5$ სმ. **32.** $BC=12$ სმ; $AB=4\sqrt{5}$ სმ. **33.** 16 სმ; $3\sqrt{7}$ სმ. **34.** 4,8 მ; 1,4 მ. **35.** $(17+3\sqrt{3})$ სმ.

§ 1.21.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
გ	გ	ბ	ბ	ა	დ	ა	გ	ბ	ა

11. ა) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\sqrt{3}$, ბ) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\mathrm{ctg}\alpha=2\sqrt{2}$, გ) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$, დ) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{12}{5}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{5}{12}$, ე) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{161}}{15}$, $\cos\alpha=\frac{8}{15}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{161}}{8}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{8}{\sqrt{161}}$, ვ) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\mathrm{ctg}\alpha=2$, ზ) $\sin\alpha=\frac{8}{\sqrt{73}}$, $\cos\alpha=\frac{65}{\sqrt{73}}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{8}{65}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{65}{8}$, თ) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{ctg}\alpha=1$. 12. ა) $\frac{1}{4}$, ბ) $\frac{\sqrt{15}}{4}$, გ) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. 13. ა) $\frac{1}{2}$, ბ) 2. 14. $\frac{100\sqrt{3}}{3}$. 15. 5. 16. $\frac{25\sqrt{3}}{3}$. 17. $30\sqrt{2}$. 18. $30\sqrt{3}$. 19. 4,5 მ. 20. $3\sqrt{2}$ მ≈4,2 მ. 21. $30\mathrm{tg}50^0>30$. 22. $\sin\alpha=\frac{20}{29}$, $\cos\alpha=\frac{21}{29}$. 23. 0,6 მ და 0,8 მ. 24. სიმაღლე — $2\sqrt{3}$ დმ, დიდი ფუძე — 7,2 დმ. 25. $20\sqrt{5}$ დმ, 20 დმ. 26. 12 მ^2. 27. ა) >0, ბ) <0, გ) <0. 28. $5{,}4\sqrt{2}$ სმ. 29. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$, დიაგონალი — $\frac{16}{3}$ სმ. 30. 5 დმ და 10 დმ. 31. 32,768 დმ^2. 32. 120 სმ^2. 33. 3 სმ. 34. $a\sin\alpha$. 35. $AC=a\cos\gamma+c\cos\alpha$, $BD=c\sin\alpha=a\sin\gamma$. $S_{\Delta ABC}=\frac{(a\cos\gamma+c\cos\alpha)c\sin\alpha}{2}=\frac{(a\cos\gamma+c\cos\alpha)a\sin\gamma}{2}$.

§ 1.22.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
ა	ბ	გ	დ	ა	გ	გ	გ	ბ	ბ	გ	გ	ა	დ	გ	ა	დ	ბ	გ

20. ა) $10\sqrt{2}$ სმ, ბ) $10\sqrt{2}$ სმ. 21. $BC=5\sqrt{2}$ სმ, $AB=\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ სმ. 22. ა) $\sin C=\frac{1}{4}$, $\sin B=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$, ბ) $\sin C=\frac{3\sqrt{2}}{8}$, $\sin B=\frac{3+\sqrt{23}}{8}$. 23. $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ და $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. 24. $\frac{a\sin\gamma\sin\beta}{(\sin\beta+\sin\gamma)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$ ანუ $\frac{a\sin\gamma\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$ სმ. 25. ა) $\sqrt{13}$ სმ, ბ) $\sqrt{20+8\sqrt{3}}$ სმ.

26. $\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}$, ბ) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$, გ) $\sqrt{a^2+b^2}$, დ) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$. 27. $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ სმ. 28. $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. 29. ა) $\cos A=\frac{29}{36}$, ბ) $\cos C=\frac{43}{48}$. 30. $\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}$, $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}$. 31. 135^0. 32. გადაამრავლეთ $BD^2=a^2+b^2-ab\sqrt{2}$ და $AC^2=a^2+b^2+ab\sqrt{2}$ ტოლობები. 33. $\frac{\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$. 34. $\frac{\sqrt{58}}{2}$ სმ. 35. $\frac{24\sqrt{5}}{11}$ სმ. 36. ა) გამოვიყენოთ თქვენთვის უკვე ცნობილი ფორმულა ბისექტრისისთვის —

$AD=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}$. აქედან მივიღებთ: $AD^2=\frac{bc(b+c)^2-bca^2}{(b+c)^2}=bc-\frac{\frac{c}{b}(c'+b')^2}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}=$

$=bc-\frac{\frac{c'}{b'}(c'+b')^2}{\left(1+\frac{c'}{b'}\right)^2}=bc-\frac{c'}{b'}b'^2=bc-b'c'$, ბ) $6\sqrt{2}$ სმ. 37. $AB=1{,}6$ დმ, $AC=2$ დმ. 38. $\sqrt{593}$ სმ ან $\sqrt{689}$ სმ. 39. არ შეიძლება. 40. $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ სმ.

§ 1.23.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ბ	ა	ბ	ა	გ	ბ	ბ	ა	ა	ბ	ა	ბ	ბ	დ	ა	ბ	ა	ბ	გ	ბ

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
გ	ა	ბ	დ	დ	ბ	ბ	ა	დ	ბ	ბ	ა	დ	ბ	გ	ა	ბ	ა	გ	ა

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
ბ	ა	გ	დ	დ	გ	ა	ბ	დ	გ	ბ

52. 4 სმ. **53.** 12 სმ. **54.** 5,4 სმ. **55.** 10 სმ. **56.** ა) $\sqrt{35}$ სმ, ბ) $4\sqrt{2}$ სმ, გ) $3\sqrt{3}$ სმ. **57**: ა) $2\sqrt{3}$ სმ, ბ) $2\sqrt{2}$ სმ, გ) 2 სმ. **58.** 18 სმ. **59**: 32 სმ. **60.** $180^0-\alpha$. **61.** 120^0. **62.** ა) 30^0, ბ) 40^0, გ) 75^0, დ) 65^0. **63.** გავითვალისწინოთ, რომ ერთი წერტილიდან გავლებული მხებები ტოლია. **64.** 60 სმ. **65.** 20 სმ. **66.** 20 სმ. **67.** ა) 16 სმ, ბ) 16 სმ და 3 სმ. **68.** $\angle A=\cup BCD$, $\angle C=\cup BAD$, წრეწირის რკალები, რომლებსაც ეყრდნობა მოპირდაპირე კუთხეები, წრეწირს ადგენს, ამიტომ მათი ჯამი 360^0-ია. **69.** $\angle C=150^0$, $\angle D=130^0$. **70.** 10 სმ.

§ 1.24.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ბ	ბ	ა	ბ	ბ	დ	ა	ა	გ	დ	ბ	გ

13. დიდი ხაჭაპურის ყიდვაა ხელსაყრელი. **14.** ა) $a^2-\pi r^2$, ბ) $\pi(r_1^2-r_2^2)$. **15.** ა) 144π სმ²; ბ) $144(4-\pi)$ სმ²; გ) $(\frac{25}{4}\pi-6)$ სმ², დ) $(18+2{,}25\pi)$ სმ², ე) $(24-3\pi)$ სმ². **16.** ა) განვიხილოთ, მართკუთხედები, რომელთა პერიმეტრია P, გვერდები — x და $\frac{P}{2}-x$, ფართობია $x(\frac{P}{2}-x)$. $y=-x^2+\frac{P}{2}x$ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას აღწევს, როცა $x=\frac{P}{4}$, ანუ x შესაბამისი პარაბოლის წვეროს აბსცისაა, მაშინ მართკუთხედი კვადრატია. ბ) თუ კვადრატის და წრის პერიმეტრებს P-თი აღვნიშნავთ, მათი ფართობები, შესაბამისად, იქნება $\frac{P^2}{16}$ და $\frac{P^2}{4\pi}$, $\frac{P^2}{16}<\frac{P^2}{4\pi}$. **17.** ა) $\frac{\pi}{6}$, ბ) $\frac{3\pi}{4}$, გ) $\frac{4\pi}{3}$, დ) $\frac{7\pi}{4}$, ე) $\frac{7\pi}{18}$. **18.** $\frac{\pi r}{3}$. **19.** $r\sqrt{3}$. **20.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. **21.** $\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi\varphi}{180}-\sin\varphi^0\right)$. **22.** ა) $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)$, ბ) $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)$, გ) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, დ) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, ე) $\frac{1}{4}\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$, ვ) $\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2}-\sqrt{2}\right)$, ზ) $\frac{1}{4}\left(\frac{5\pi}{3}-1\right)$. **23.** $AB:BC=1:2$. მითითება: ფართობი უდიდესია, როცა $S=\frac{\pi x^2}{2}+x(p-2x-\pi x)$ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, სადაც $x=\frac{BC}{2}$. **24.** $AD=\frac{2000}{5+\pi}\approx 246$ (მ); $AB=\frac{10-\pi}{5+\pi}\approx 84$ მ. მითითება: მოგება მაქსიმალურია, როცა $y=6\pi x^2+10x(800-2x-\pi x)$ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, სადაც $x=\frac{BC}{2}$. **25.** $(25\pi-50)$სმ². **26.** $\sqrt{2}$-ჯერ. **27.** $6750\pi\approx 21195$ ლ. **28.** $\frac{30}{\pi-1}\approx 14$ მ.

§ 1.25.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ბ	გ	დ	დ	ბ	ა	გ	ბ	ა	ბ	ბ	დ	დ	ა	გ	ბ	ბ	ბ	ბ	გ

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
ბ	ბ	დ	ბ	გ	გ	დ	ა	ა	ბ	დ	გ

33. 1) $r=1$, $R=2{,}5$, 2) $r=4$, $R=\frac{65}{8}$, 3) $r=2$, $R=6{,}5$, 4) $r=\frac{8}{3}$, $R=\frac{25}{3}$. 34. $\angle AOD=112{,}5^0$, $\angle DOC=67{,}5^0$, $\angle BOC=67{,}5^0$, $\angle AOB=112{,}5^0$. მითითება: ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია. 35. 1:2. 36. ა) $\sqrt{2}:2$, ბ) $\cos\frac{180^0}{n}$. 37. ა) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$, ბ) $\frac{a\pi}{\sin\alpha}$. 38. ა) $\frac{\pi}{3}$, ბ) $\frac{\pi}{2}$. 39. ა) $\frac{\pi}{12}$, ბ) $\frac{\pi(3-2\sqrt{2})}{2}$. 40. $\pi\cdot 8{,}45^2=71{,}4025\pi$. 41. 15. 42. $\frac{625\pi}{432}$. 43. $\frac{16}{\pi^2}$. 44. 12π სმ². 45. 400π სმ². 46. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ სმ. 47. $4\sqrt{3}(7+4\sqrt{3})$ სმ². 48. $\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{4\pi-3\sqrt{3}}$. 49. $(64\pi-48\sqrt{3})$ სმ². 50. $64(\pi-2)$ სმ². 51. $128(2\pi-3\sqrt{3})$ სმ².

§ 1.26.

1	2	3	4	5
ბ	დ	ბ	დ	დ

6. ა) 288 სმ², ბ) $216\sqrt{3}$ სმ², გ) $288\sqrt{2}$ სმ². 7. ა) $(4\pi-8\sqrt{2})$ დმ², ბ) $(4\pi-12)$ დმ². 8. $11{,}52\sqrt{2}$ სმ². 9. ა) $\frac{400}{3}(10\pi+3\sqrt{3})$ სმ², ბ) $\frac{400}{3}(8\pi+3\sqrt{3})$ სმ², გ) $200(7\pi+2\sqrt{2})$ სმ², დ) $\frac{400}{3}(11\pi+1)$ სმ². 10. $\frac{75(\pi-3)}{4(2-\sqrt{3})}$ სმ²; $\frac{75(11\pi+3)}{4(2-\sqrt{3})}$. 11. ა) $48\sqrt{3}$ სმ², ბ) 128 სმ², გ) $160\sin 72^0$ სმ². 12. ა) $48\sqrt{3}$ სმ², ბ) 64 სმ², გ) $80\mathrm{tg}36^0$ სმ². 13. ა) $a:b$, ბ) $a^2:b^2$. 14. ა) $\cos\frac{180^0}{n}$, როცა $n=3$, მაშინ 1:2. როცა $n=4$, მაშინ $\sqrt{2}:2$, როცა $n=6$, მაშინ $\sqrt{3}:2$. ბ) $\cos^2\frac{180^0}{n}$; როცა $n=3$, მაშინ 1:4, როცა $n=4$, მაშინ 1:2; როცა $n=6$, მაშინ 3:4. 15. $S=n\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^0}{n}= =nR(R\sin\frac{180^0}{n})\cos\frac{180^0}{n}=\frac{nRa}{2}\cos\frac{180^0}{n}$, სადაც a არის n-კუთხედის გვერდი. 16. ა) $2\sin 54^0$; ბ) $5\sqrt{3}$. 17. ა) $2\sqrt{3}$, ბ) $3\sqrt{3}$.

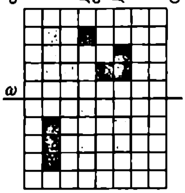
§ 2.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ბ	გ	დ	დ	გ	დ	დ	ა	გ	ბ	დ	ა	ბ	გ	დ	ბ	ბ	ბ	ა	ბ

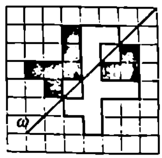
21	22	23	24	25	26	27	28
ა	დ	ა	გ	დ	ა	გ	დ

29. $A'(2;\ -4)$; $B'(-1;\ -3)$; $C'(2;\ 3)$; $D'(-4;\ 3)$; $E'(0;\ -3)$; $F'(-4;\ 0)$. ბ) $A'(-2;\ 4)$; $B'(1;\ 3)$; $C'(-2;\ -3)$; $D'(4;\ -3)$; $E'(0;\ 3)$, $F'(4;\ 0)$, გ) $A'(4;\ 2)$; $B'(3;\ -1)$, $C'(-3;\ 2)$; $D'(-3;\ -4)$; $E'(3;\ 0)$; $F'(0;\ -4)$, დ) $A'\ (-4;\ -2)$; $B'(-3;\ 1)$; $C'(3;\ -2)$; $D'(3;\ 4)$; $E'(-3;\ 0)$; $F'(0;\ 4)$. 30. ა) $C(3;\ 3)$, ბ) $(3;\ -3)$; $(-3;\ 3)$; $(3;\ 3)$. 31. $(-4;\ -2)$. 32. $y=2$ წრფის ნებისმიერ წერტილში, ანუ $P(a;\ 2)$ წერტილში, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

33. ა) ემატება 7 უჯრა.

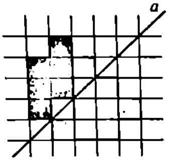


ბ) ემატება 9 უჯრა.

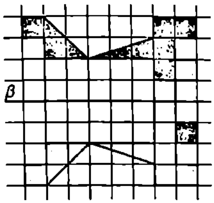


34. ა) 2, ბ) 2, გ) 4, დ) 6. 35. ა) წვეროებია: $(-1;\ -2)$; $(-4;\ -2)$ და $(-1;\ -7)$, ბ) წვეროებია: $(1;\ 2)$; $(4;\ 2)$ და $(1;\ 7)$.

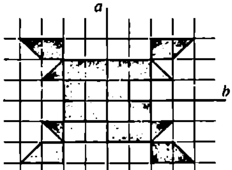
36. ემატება 6 უჯრა, $S=64$ სმ^2.



37. ემატება 9,5 უჯრა, $S=21$ სმ^2.

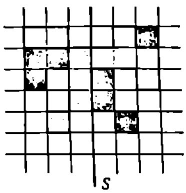


38. ემატება 18 უჯრა. $S=24$ სმ^2.

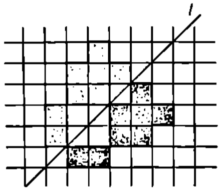


39. 8 ერთ.; $x=3$. **40.** 15 ერთ.; $y=-4{,}5$. **41.** $x=0$; $y=0$; $y=x$; $y=-x$. **42.** $x=3$; $y=3$; $y=x$; $y=-x+6$.

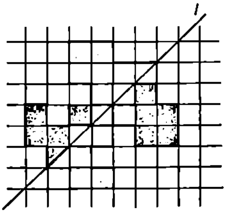
43. ემატება 7 უჯრა.



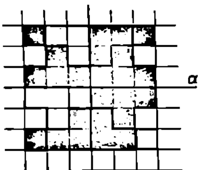
44. ა) ემატება 8 უჯრა,



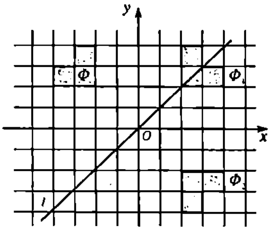
ბ) ემატება 9,5 უჯრა.



45. ემატება 24 უჯრა.

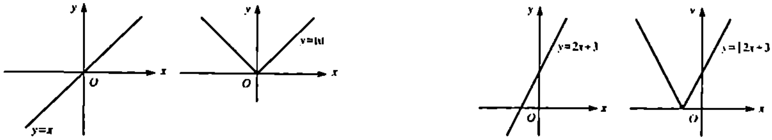


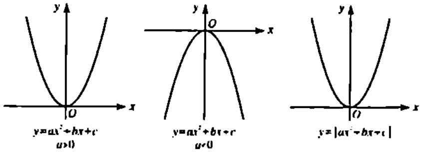
46. Φ_1 ფიგურის ორ წვეროზე გამავალი წრფე.



47. l წრფე ACB კუთხის სიმეტრიის ღერძია, C წერტილი არის $A'B$ და l წრფეების გადაკვეთის წერტილი, სადაც A' არის A წერტილის სიმეტრიული წერტილი l წრფის მიმართ. **48.** (13; 5). **49.** ა) (8; 3), ბ) (12; 3), გ) $(10+x;\ y)$. **50.** ა) $(-4;\ 3)$, ბ) (3; 4), გ) $(b;\ a)$. **51.** თუ A' არის A წერტილის სიმეტრიული l წრფის მიმართ, მაშინ $AC=A'C$, $AO=A'O$. მივიღებთ: $AC+A'C>AA'$, საიდანაც $2AC>2AO$, $AC>AO$ l წრფის ნებისმიერი O-გან განსხვავებული წერტილისთვის. **52.** იპოვეთ A წერტილის სიმეტრიული A_1 და A_2 წერტილები კუთხის გვერდების შემცველი წრფეების მიმართ. $AMNA$ გზის სიგრძე ტოლია A_1MNA_2 გზის სიგრძის, რომელიც უმცირესია, როცა M და N არის A_1A_2 წრფისა და კუთხის გვერდების გადაკვეთის წერტილები. **53.** ავაგოთ A-ს (ან B-ს) სიმეტრიული A' წერტილი m წრფის — არხის ნაპირის მიმართ. სატუმბო კოშკი ავაგოთ $A'B$-ს და არხის m ნაპირის გადაკვეთის O წერტილში. მართლაც, AOB გზის სიგრძე ტოლია $A'OB$ გზის სიგრძის, რომელიც უმცირესია, როცა $O\in A'B$. **54.** თუ $(a;\ b)$ წერტილი ეკუთვნის $y=x^2$-ის გრაფიკს ($b=a^2$), მაშინ $(-a;\ b)$ წერტილიც ეკუთვნის $y=x^2$-ის გრაფიკს ($(-a)^2=a^2=b^2$). **55.** $M(x;\ y)\to M'(y;\ x)$ ანუ $(x;\ y)\to(x';\ y')$, $x'=y$, $y'=x$. **56.** D; CD; DE; CE; ΔDCE. **57.** ა) $k=-2$; $l=-7$, ბ) $(0;\ -7)$. **58.** $k=5$; $l=-3$. **59.** $a=-10$. **60.** $y=|x|$ და $y=x^2+1$. **61.** C არის a და AB' წრფეების გადაკვეთის წერტილი, სადაც B' არის B-ს სიმეტრიული წერტილი a წრფის მიმართ; $P_{ACB}=k+\sqrt{k^2+4mn}$. **62.** ა) უამრავი — თვით ეს წრფე და მისი მართობული ნებისმიერი წრფე, ბ) ორი — ამ მონაკვეთის შუამართობი და ამ მონაკვეთზე გამავალი წრფე. **63.** CAC' კუთხის ბისექტრისის

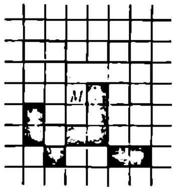
შემცველი წრფე. **64.** ა) (7; −5), ბ) (−7; 5), გ) $(-5; 2a-7)$, დ) $(2a+5; 7)$. **65.** ა) $(b; a)$, ბ) $(-b; -a)$, გ) $(a; 2c-b)$, დ) $(2c-a; b)$. **66.** ა) $ax-by+c=0$, ბ) $-ax+by+c=0$, გ) $bx+ay+c=0$, დ) $-bx-ay+c=0$. **67.** ა) $y=-2x-3$, ბ) $y=-2x+3$, გ) $y=0{,}5x-1{,}5$, დ) $y=0{,}5x+1{,}5$. **68.** ა) $k=-2$; $b=7$, ბ) $k=0{,}5$; $b=14$. **69.** ა) $x=0$, ბ) $y=x$ და $y=x$-ის მართობული ნებისმიერი წრფე, მისი განტოლება ასე წარმოიდგინება: $y=-x+b$, $b\in R$, გ) $x=0$, დ) $x=0$, ე) $x=1$, ვ) $x=-0{,}5$, ზ) $x=2$. **70.** ვიყენებთ ღერძულ სიმეტრიას Ox ღერძის მიმართ; მითითება: $y=|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$-ის გრაფიკის III და IV მეოთხედებში მოთავსებული ნაწილის OX ღერძის მიმართ სიმეტრიისას მიღებული ნირისა და I და II მეოთხედებში მოთავსებული ნაწილის გაერთიანებით.



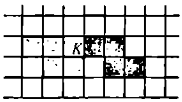


§ 2.2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ა	დ	გ	გ	დ	დ	ბ	ა	გ	დ	ა	ა

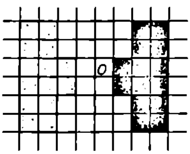


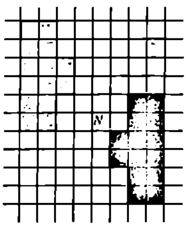
13. ემატება 4 უჯრა.

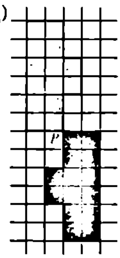


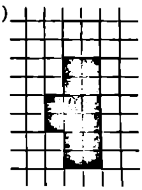
14. ემატება 9 უჯრა.

15. (−1; 4). **16.** ა) C, ბ) D, გ) AD გვერდის შუა წერტილი. **17.** 12 სმ. **18.** 6 სმ. **19.** ა) D, ბ) AD გვერდის შუა წერტილი.

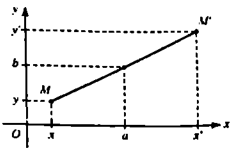
20. ა) 

ბ) 

გ) 

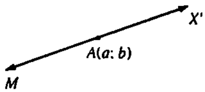
დ) 

21. ა) ღერძული სიმეტრია OX-ის მიმართ, ბ) ღერძული სიმეტრია Oy ღერძის მიმართ, გ) ღერძული სიმეტრია სათავის მიმართ. **22.** ა), ბ) — არის, გ) — არ არის. **23.** ა) არსებობს — ნებისმიერი წრფე თავისი ყოველი წერტილის მიმართ ცენტრულ-სიმეტრიულია, ბ) არ არსებობს, გ) ნებისმიერი წერტილი თვით ამ წერტილის მიმართ ცენტრულ-სიმეტრიულია. **24.** $x'=2a-x$; $y'=2b-y$. მითითება. გამოვიყენოთ გეომეტრიული წარმოდგენები:



მივიღებთ: $a=\dfrac{x+x'}{2}$; $b=\dfrac{y+y'}{2}$, საიდანაც $x=2a-x$, $y=2b-y$.

ვექტორების შესწავლის შემდეგ შეიძლება ეს ამოცანა ასეც ამოიხსნას:



$a=\overrightarrow{AM}$; $b=\overrightarrow{AM'}$, საიდანაც $x'-a=-(x-a)$, $y'-b=-(y-b)$.

25. $3x+4y-10=0$. მითითება. გამოიყენეთ წინა ამოცანაში მიღებული $A(a;\ b)$ ცენტრის მიმართ სიმეტრიული წერტილის კორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები: $x'=2a-x$, $y'=2b-y$. ამ ფორმულებიდან მივიღებთ: $x=2a-x'$, $y=2b-y'$. პასუხის ჩაწერისას კი დაუბრუნდებით ჩვეულ აღნიშვნებს x-ითა და y-ით. **26.** შეხების წერტილი. **27.** მოცემული წრფეების პარალელური და მათგან ტოლად დაშორებული წრფის ნებისმიერი წერტილი.

§ 2.3.

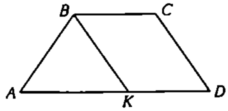
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
დ	ა	ბ	ა	ბ	გ	გ	დ	ა	ბ	ა	გ	გ	ა	გ	დ	გ

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
ბ	გ	ა	დ	ბ	ბ	გ	ბ	ა	ბ	გ	გ	ა	ა	ა	გ	ბ

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ბ	ა	გ	ბ	ა	ბ	ბ	ა	ა	ბ	ა	ბ	გ	ა	ბ	გ

51. ა) $\overrightarrow{AB}=(4;\ 4)$; $\overrightarrow{AC}=(2;\ -7)$; $\overrightarrow{BC}=(2;\ -11)$, ბ) $|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{53}$; $|\overrightarrow{BC}|=5\sqrt{5}$. 52. ა) $\overrightarrow{AB}(2;\ 7)$; $\overrightarrow{BC}(5;\ -3)$; $\overrightarrow{CD}(-2;\ -7)$; $\overrightarrow{AD}(5;\ -3)$, ბ) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, გ) პარალელოგრამი. 53. ა) $\overrightarrow{AB}(3;\ 5)$; $\overrightarrow{BC}(2;\ -2)$; $\overrightarrow{AC}(5;\ 3)$; ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(5;\ 3)=\overrightarrow{AC}$. 54. ა) $(2;\ 7)$; $(-6;\ -8)$; $(-3;\ 9)$; $(2;\ 20)$; $(4;\ 1)$; $(5;\ -2)$, ბ) 5; $\sqrt{10}$; 15; $2\sqrt{10}$; $\sqrt{53}$. 55. $\overrightarrow{AB}(6;\ 4)$; $\overrightarrow{AC}(6;\ 0)$; $\overrightarrow{BC}(0;\ -4)$; $|\overrightarrow{AB}|=10$; $|\overrightarrow{AC}|=6$; $|\overrightarrow{BC}|=4$; $x=2$; $y=9$. 56. ა) $\vec{0}$, ბ) $-\vec{c}$, გ) $-\vec{a}$, დ) $-\vec{b}$. 57. ა) $-\vec{a}-\vec{b}$, ბ) $\vec{b}-\vec{c}$, გ) $\vec{a}-\vec{c}$. 58. $\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{d}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$; $\overrightarrow{AC}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$. 59. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. 60. $\overrightarrow{OC}=2\vec{b}+\vec{a}$; $\overrightarrow{AD}=2\vec{b}-2\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}$. 61. $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$; $\overrightarrow{MO}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. 62. $\overrightarrow{DC}=\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{EC}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{AE}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{2}$. 63. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{ME}=\vec{b}-0{,}5\vec{a}$; $\overrightarrow{MD}=-0{,}5\vec{a}$. 64. ა) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{c}$; $\overrightarrow{MN}=\frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}$; ბ) $\overrightarrow{AM}=-\frac{\vec{c}}{2}$; $\overrightarrow{KC}=\frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}$; $\overrightarrow{CN}=-\frac{\vec{a}}{2}$; $\overrightarrow{KN}=-\frac{\vec{c}}{2}$; $\overrightarrow{MK}=\frac{\vec{a}}{2}$. 65. ა) $\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}$; ბ) $\overrightarrow{PQ}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{3}$; $\overrightarrow{CQ}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$. 66. $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$; $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$. 67. ა) $\frac{2}{3}a$; ბ) $\frac{2}{3}b$. 68. $x=-5$; $y=7$. 69. $x=-3$; $y=4$. 70. $\overrightarrow{BC}=(5;\ -1)$; $\overrightarrow{AD}(x-1;\ y-3)$; $D(6;\ 2)$. 71. მითითება. გამოიყენეთ პარალელოგრამის გვერდებისა და დიაგონალების დამოკიდებულების ფორმულა. გვერდებია $|\overrightarrow{AM}|$ და $|\overrightarrow{AN}|$, დიაგონალებია $2r$ და $2k$, მივიღებთ, $|\overrightarrow{AM}|^2+|\overrightarrow{AN}|^2=2k^2+2r^2$ — არ არის დამოკიდებული x-სა და y-ზე. 72. $(3;\ 11)$. 73. $C(0;\ 3)$; $D(3;\ 0)$. 74. $(17,\ 22)$. 75. $(6;\ 6)$ ან $(1;\ 1)$. 76. $(1;\ 1)$ ან $(2;\ 4)$. 77. ა) $(-8;\ 5)$, ბ) $(10;\ 3)$. 78. ა) $\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})$, ბ) $\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})$, გ) $\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}$, დ) $\frac{1}{2}(\vec{q}-\vec{p})$. 79. ა) $\overrightarrow{MN}=\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}$; ბ) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{BC}=\frac{\vec{q}-\vec{p}}{2}$; გ) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}=\vec{q}-\vec{p}$. მითითება: გ) გავლებულია $BK \parallel CD$ მაშინ $BK=CD$ და $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}=\vec{q}-\vec{p}$.



80. $\frac{\vec{q}-\vec{p}}{2}$. 81. ა) $0{,}5$; ბ) $-0{,}5$; გ) -1. 82. ა) $\sqrt{34}$, ბ) $\sqrt{34}$, გ) $2\sqrt{109}$, დ) $15\sqrt{2}$. 83. ა) $\frac{2}{3}$. 84. $-3\vec{i}+8\vec{j}$. 85. ა) $\frac{3}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$, ბ) $5\vec{i}+3\vec{j}$, გ) $4\vec{i}+\vec{j}$, დ) $8\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$, ე) $-2\vec{i}+3\vec{j}$, ვ) $-7\vec{j}$.

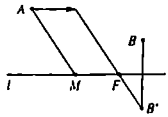
86. ა) $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$, ბ) $\vec{j}$, გ) $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. **87.** ა) 90^0, ბ) 45^0. გ) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$, დ) 90^0. **88.** ა) (3; 4), ბ) (−9; 4), გ) (7; 8), დ) (−3; 8). მითითება: თუ M წერტილი P წერტილის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით აისახება M' წერტილზე, მაშინ $\overrightarrow{PM'}=-\overrightarrow{PM}$. დაწერეთ კოორდინატების ტოლობა. **89.** ა) $y=2x-3$, ბ) $y=2x-3$, გ) $y=2x+13$, დ) $y=2x-23$.

§ 2.4.

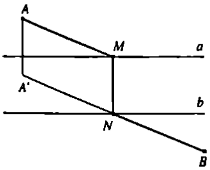
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
გ	დ	ა	დ	დ	ბ	ა	დ	ბ	ა	გ	ბ	ბ	დ	ა	გ

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
დ	ბ	დ	ბ	ა	დ	ბ	დ	დ	ბ	ა	დ	ა	ბ	დ

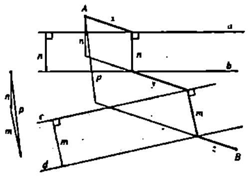
32. C' (−4; 1); E'(3; 7). **33.** (4; 13) და (0; 11). **34.** $x'=-x$; $y'=y$; $x''=8+x$; $y''=y$; $\vec{p}$(8; 0). **35.** (−3; 7) და (0; 7); (0; 2) და (3; 2); (−2; 4) და (1; 4).



36. სურათის მიხედვით, განიხილეთ პარალელური გადატანა $\overrightarrow{AA'}$ ვექტორით, რომელიც l წრფის პარალელურია და $|\overrightarrow{AA'}|=a$. ააგეთ l წრფის მიმართ B-ს სიმეტრიული B' წერტილი. საძიებელი მონაკვეთის F ბოლო არის l და $A'B'$ წრფეების გადაკვეთის წერტილი, M წერტილი ისე შეარჩიეთ, რომ $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{AA'}$.



37. განვიხილავთ პარალელურ გადატანას $\overrightarrow{MN}$ ვექტორით და ავაგებთ A წერტილის სახეს — A'-ს — ამ პარალელური გადატანისას. $AMNB$ ტეხილის ნაცვლად ვიხილავთ მის ტოლ ტეხილს — $AA'NB$-ს. ეს უკანასკნელი მაშინაა უმცირესი, როცა A', N და B ერთ წრფეს ეკუთვნის — ხიდი უნდა აიგოს $A'B$ წრფისა და მდინარის b ნაპირის გადაკვეთის წერტილზე.



38. ავაგოთ A და B წერტილების სახეები A' და B' შესაბამისად, $\overrightarrow{PQ}$ და $\overrightarrow{SR}$ ვექტორებით განსაზღვრული პარალელური გადატანისას. $AEMNFB$ ტეხილი ტოლია $AA'MNB'B$ ტეხილის. ეს უკანასკნელი უმცირესია, როცა A', M, N და B' წერტილები ერთ წრფეზეა — ხიდები უნდა აიგოს $A'B'$ წრფის b და c წრფეებთან გადაკვეთის M და N წერტილებში.

39. არ წარმოადგენს ერთსა და იმავე პარალელურ გადატანს. **40.** ა) $x'=x+1$; $y'=y-4$; ბ) $x'=x+2$; $y'=y+6$; გ) $x'=x-2$; $y'=y-3$; დ) $x'=x-\frac{b}{2a}$; $y'=y+\frac{4ac-b^2}{4a}$. **41.** ა) აისახება, ბ) აისახება. **42.** $BC=6$, $AD=6\sqrt{3}$. მითითება. განიხილეთ პარალელური გადატანა $T_{\overrightarrow{BC}}$ ($\overrightarrow{BC}$ ვექტორით). მაშინ $AMCB$ პარალელოგრამია, სადაც $M=T(A)$, MD-ს ვიპოვით კოსინუსების თეორემით ΔMCD-დან დავრწმუნდებით, რომ ΔMCD მართკუთხაა; ΔAMD სამკუთხედის ცნობილი ელემენტებით ვიპოვით AM და AD მონაკვეთებს, $BC=AM$. **43.** $\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\alpha}-b$. მითითება: განიხილეთ პარალელური გადატანა $T_{\overrightarrow{DC}}$. ვთქვათ $T(B)=B'$, მაშინ $CB'=DB$.

§ 2.5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
გ	ბ	ბ	ა	ა	ა	ბ	გ	დ	ბ	ა	დ	ბ	დ	დ	ბ

17. საათის ისრის საწინააღმდეგოდ: A'(0; 6), B'(0; −2); C'(−4; 1); D'(7; −2). საათის ისრის მიმართულებით: A''(0; −6); B''(0; 2); C''(4; −1); D''(−7; 2). **18.** მაგალითად, ა) 405^0; -315^0, ბ)

435°; −285°; გ) 230°; 590°, დ) 320°; −400°, ე) 270°; −450°. 19. ა) $R_O^{0°}$, ბ) $R_O^{30°}$, გ) $R_O^{150°}$, დ) $R_O^{80°}$, ე) $R_O^{20°}$, ვ) $R_O^{120°}$, ზ) $R_O^{60°}$. 20. ა) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, ბ) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, გ) (0; −1), დ) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ე) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ვ) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ზ) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, თ) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 21. $R_O^{-60}(A)=(2{,}5; -2{,}5\sqrt{3})$; $R_O^{-60}(B)=(2\sqrt{3}; -2)$; $R_O^{-60}(C)=(1; 0)$; $R_O^{-60}(D)=(1; \sqrt{3})$. 22. −90°. 23. არ არსებობს. 24. $B'(-7; -4)$; $C'(-6; -1)$. 25. $R_O^{-75°}$. 26. $2\sqrt{10}$. 27. $8(\sqrt{2}-1)$ სმ². 28. $\frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$. 29. ა) 105°, ბ) 135°, გ) 180°, დ) 135°, ე) 40°, ვ) 0°. 30. $\alpha=180°$, $\alpha=0°$. 31. $\alpha=0°$; $\alpha=120°$; $\alpha=-120°$. 32. $\alpha=45°$; $\alpha=180°k+45°$, $k\in Z$. 33. ა) $n=190$, ბ) $n=380$. 34. ა) $A\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, ბ) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. 35. ა) $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ბ) 0,5 კვ. ერთ. გ) კვადრატი, 2 კვ. ერთ. დ) $R_O^{90°}$; $M'(-2; 0)$; $N'(-2; -1)$. 36. ა) $x'=-y$; $y'=x$, ბ) $x'=y$, $y'=-x$. გ) (7; 1) და (−1; 7); (1; 3) და (−3; 1), დ) (0; −1) და (−1; 0); (3; 1) და (1; −3), (−7; −3) და (−3; 7). 37. ა) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$, ბ) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$.

§ 2.6.

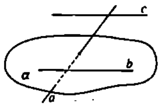
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
ა	გ	ა	ბ	ა	გ	დ	ა	გ	ბ	ა	დ	ბ	ბ	დ	დ	დ	ბ	ბ	ბ	ბ

22. $A'(0; 10)$; $B'(6; 0)$; $C'(-6; 4)$; $E'(-4; -6)$. 23. 2. 24. 21π. 25. 24 სმ; 28,8 სმ; 36 სმ. 26. −1. 27. ა) $p=30$ დმ; $S=56{,}25$ დმ², ბ) $p=2$ დმ; $S=0{,}25$ დმ², გ) $p=20$ დმ; $S=25$ დმ². 28. −2; −0,5. 29. $\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{AO}+k\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{AO}+k(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AO})=(1-k)\overrightarrow{AO}+k\overrightarrow{AX}$.

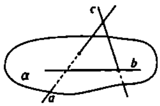
§ 3.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
გ	დ	გ	ბ	დ	დ	დ	გ	ა	დ	ა	გ

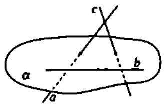
13. ა) არ შეიძლება, ბ) შეიძლება. 14. ა) A, B, C, D, O, ბ) A_1, B_1, C_1, D_1, O_1, გ) A_1, B_1, C_1, D_1, O_1, დ) O, O_1, D_1, D, C_1, C. 15. ა) $AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1\|OO_1$; $AD\|BC\|A_1D_1\|B_1C_1$; $AB\|DC\|D_1C_1\|A_1B_1$; $AB_1\|DC_1$; ბ) AD და BB_1, AD და A_1B_1, AD და D_1C_1, AD და CC_1, DC_1 და BB_1 და სხვა. გ) AB და BB_1, AB და AC და სხვა, დ) AB წრფე, ე) OO_1 წრფე. 16. ა) DC და AB; DC და AM, BC და AM და სხვა, ბ) AB და BC, AB და BM და სხვა; გ) $MB\|DC$, $BC\|DM$. 17. ა) DD_1 წრფე, D_1C_1 წრფე და სხვა, ბ) DB_1 წრფე, გ) AC_1 წრფე. 18. დავუშვათ საწინააღმდეგო, $c\|b$, მაშინ წრფეთა პარალელურობის ნიშნით მივიღებთ, რომ $a\|b$, რაც შეუძლებელია. 19. c და b შეიძლება იყოს აცდენილი ან პარალელური წრფეები; c შეიძლება კვეთდეს b-ს.



$b\|c$

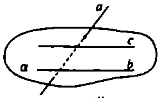


c კვეთს b-ს

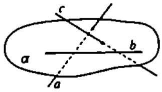


c და b აცდენილია

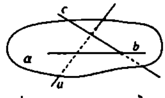
20. b და c შეიძლება იყოს პარალელური, აცდენილი ან იკვეთებოდეს.



$b\|c$

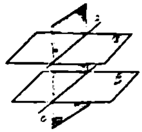


b და c აცდენილია



b და c იკვეთება

1	2	3	4	5	6	7
ბ	ბ	გ	ა	ბ	დ	ბ



8. ა) 5 სმ, ბ) 6 სმ, გ) 8 სმ, დ) $\frac{bc}{a+c}$. 9. ა) A_1B_1; B_1C_1; A_1D_1, ბ) AA_1; CC_1, გ) A_1D_1; BC, დ) AA_1B_1B; $A_1B_1C_1D_1$. 10. ა) AMB, ბ) AMD, გ) AB. 11. ა) AA_1B_1B, ბ) AA_1B_1B, გ) AB_1C_1D. 12. არ გამომდინარეობს. მაგალითად, სურათზე $a \nparallel b$. 13. ა) AB, ბ) MN. 14. ა) MEF სიბრტყეს AC წრფესთან საერთო წერტილები არა აქვს, ე. ი. AC და EF არ იკვეთება და ისინი ძევს ერთ სიბრტყეზე — ABC სიბრტყეზე. ამრიგად, $AC \parallel EF$. ბ) 1,5 დმ, გ) 1,25 დმ. 15. ა) MN წრფეს (ანუ a წრფეს) α სიბრტყესთან საერთო წერტილი არა აქვს. ამიტომ, არც α-ზე მდებარე AC წრფესთან აქვს საერთო წერტილი. ამასთანავე, MN და AC წრფეები ABC სიბრტყეზეა. ამრიგად, $MN \parallel AC$. ბ) 18 სმ, გ) 16 სმ. 16. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშნის თანახმად, $a \parallel \beta$. ე. ი. a და c წრფეები ერთ სიბრტყეშია და საერთო წერტილები არა აქვს — $a \parallel c$. ანალოგიურად, $c \parallel b$. 17. ა) 6 დმ, ბ) 3 დმ. 18. ა) 15 სმ, ბ) 5 სმ.

§ 3.3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ბ	ბ	ბ	ბ	დ	ა	დ	გ	ბ	ბ	ბ	გ	ა	ბ	ბ	ბ

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
დ	გ	დ	დ	ბ	ბ	ბ	გ	დ	ა	გ

28. $S_{AA_1E_1E}=Q\sqrt{3}$; $S_{AA_1D_1D}=2Q$. 29. სამკუთხა პრიზმა. 30. წიბო — 4 სმ; დიაგონალი — $4\sqrt{3}$ სმ. 31. ოთხკუთხა პირამიდა. 32. არ შეიძლება. 33. ა) III, ბ) I და III, გ) II და VI.

§ 3.4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
ბ	ბ	ა	ა	დ	ა	დ	გ	დ

10. ა) არ არის, ბ) არის. 11. ა) მართკუთხა ტრაპეცია, ბ) 8,3 სმ, გ) $34,86\sqrt{3}$. 12. $MA=MB=MC=17$ სმ. 13. ა) $MB=MC=20$ სმ, ბ) $2\sqrt{91}$ სმ. 14. ბ) $3\sqrt{2}$ სმ². 15. $S_{\Delta AKB}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ სმ², სადაც K არის DC-ს შუა წერტილი; მითითება. თუ M არის AB-ს შუა წერტილი, მაშინ $AB \perp DM$ და $AB \perp CM$, ე. ი. $AB \perp DMC$ სიბრტყის, $AB \perp KM$. 16. $S_{\Delta MKC}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ სმ², სადაც M არის AB-ს შუა წერტილი. 17. $S_{KA_1B_1}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ სმ², სადაც A_1 და B_1, შესაბამისად, AD და BD წიბოების შუა წერტილებია, K არის DC-ს შუა წერტილი. 18. $S_{A_1KC_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ სმ², სადაც K არის O წერტილიდან BD-ზე დაშვებული მართობის ფუძე. $A_1 \in AB$, $C_1 \in CB$ და $AA_1:A_1B=CC_1:C_1B=1:2$. 19. 6 სმ. 20. $8\sqrt{11}$ სმ².

§ 3.5.

1	2	3	4	5	6	7	8
გ	დ	გ	ბ	გ	დ	დ	დ

9. 5 დმ. 10. $P_{ABC}=P_{A_1B_1C_1}=0,42$ დმ; $S_{ABC}=S_{A_1B_1C_1}=0,0084$ დმ². 11. ა) 12,3 სმ, ბ) 1,3 დმ. 12. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ დმ². 13. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ დმ². 14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ დმ². 15. $54\sqrt{41}$ სმ². 16. $25\sqrt{22}$.

§ 3.6.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ა	ა	ა	გ	დ	ბ	ბ	დ	გ	ა	გ

12. A; B; C და D, ბ) A; A_1; B_1 და B, გ) AB; BC; A წერტილი; AC და DB. **13.** ა) 5,2 სმ, ბ) 6 სმ, გ) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$ სმ. **14.** 12,2 სმ. **15.** ა) 4 დმ, ბ) 21 დმ². **16.** 40 სმ. **17.** 40 სმ. **18.** 1,7 სმ. **19.** $MA=MB=MC=MD=9$ სმ. **20.** 37 სმ. **21.** $MA=MB=MC=26$ სმ. **22.** 6 სმ და 15 სმ. **23.** ა) 15 სმ და 41 სმ, ბ) 4 სმ და 8 სმ. **24.** 9 სმ. **25.** 5 სმ; 3 სმ; 5 სმ; 3 სმ. **26.** $\frac{am}{m+n}$. **27.** $2\sqrt{2}$ მ. **28.** $\sqrt{2}$ მ.

§ 3.7.

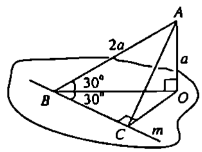
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
დ	დ	გ	ა	დ	ბ	ა	გ	ბ	გ

11. $\sqrt{\frac{c^2a^2+c^2b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}}$. **12.** $\sqrt{23}$ სმ. **13.** 4 მ. **14.** $40\sqrt{5}$ სმ². **15.** $8\sqrt{2,6}$ დმ.

§ 3.8.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ბ	დ	დ	ა	ბ	დ	ბ	ბ	გ	გ	ა	ა	გ	ბ

15. 60°. **16.** $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. **17.** ა) 45°, ბ) 90°, გ) $\angle A_1B_1A$, დ) 90°. **18.** $0,6\sqrt{3}$ მ. **19.** $\frac{4}{5}$. **20.** $AC=7,2\sqrt{2}$ დმ, $AB=14,4$ დმ. გეგმილები, შესაბამისად, 7,2 დმ და $7,2\sqrt{3}$ დმ. **21.** $8\sqrt{6}$ სმ. **22.** $12\sqrt{2}$ სმ. **23.** 5 სმ. **24.** $5\sqrt{39}$ სმ. **25.** ა) $MA=MB=MP\cos\varphi$, სადაც $\varphi=\angle MPB=\angle MPA$, ბ) $\sqrt{MA^2-MO^2}=\sqrt{MB^2-MO^2}$, საიდანაც $AO=BO$, გ) $\angle POB=\angle POA$, საიდანაც $\angle BPO=\angle APO$. **26.** $h\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{2\cos\varphi}{\sin\alpha\sin\beta}}$. **27.** $\frac{l\sin\beta\sin\varphi}{\sin(\alpha+\beta)}$.



28. 0,75. **მითითება.** გავავლოთ მართობი დახრილის ფუძიდან m წრფისადმი და გამოვიყენოთ სურათზე შემოღებული აღნიშვნები. **29.** 45°. **30.** 32 სმ². **31.** $256\sqrt{2}$ სმ². **32.** $12\sqrt{2+\sqrt{3}}$ სმ. **33.** $5\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ სმ. **34.** 18 სმ. **35.** 13 მ. **36.** ა) $CB\perp l$, ამიტომ სამი მართობის თეორემით, CB-ს გეგმილი $OB\perp l$; $AB\perp l$. ე. ი. O, B და A წერტილები ერთ წრფეზეა, CO არის ABC სამკუთხედის სიმაღლე, ბ) $CO=12$ სმ. **37.** $MA=1,6\sqrt{3}$ სმ; $MO=0,8\sqrt{3}$ სმ. **38.** $\frac{a}{\sin\alpha}$. **39.** $OA=2,7$ დმ; $OB=0,9\sqrt{5}$ დმ. **40.** $MO=25$ სმ; $AO=20$ სმ; $BO=\sqrt{301}$ სმ. **41.** 90°. **42.** 10 სმ. **43.** 65 სმ.

§ 3.9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ა	ა	ბ	დ	დ	ბ	ბ	დ	ბ	დ	ბ	დ	ბ	ბ

15	16	17	18	19	20	21
დ	გ	გ	გ	გ	გ	დ

22. ა) $\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}+\vec{c}$, ბ) $\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, გ) $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$, დ) $\overrightarrow{AN}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. 23. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{r}+\vec{b}+\frac{y}{x}\vec{a})$. **მითითება.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{y}{x}\overrightarrow{AA_1}$. 24. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$. **მითითება.** $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})$. 25. ა) არის, ბ) არ არის, გ) არის, დ) არ არის. 26. ა) $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{p}$, ბ) $\overrightarrow{AM}=\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}$, გ) $\overrightarrow{AN}=\vec{p}+\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}$, დ) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})$, ე) $\overrightarrow{AQ}=\vec{q}+\vec{r}+\frac{5}{11}\vec{p}$, ვ) $\overrightarrow{AF}=\vec{q}+\vec{r}+\frac{5}{13}\vec{p}$. 27. ა) $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$, ბ) $\overrightarrow{MK}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. 28. $\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{3}{14}\vec{b}-\frac{5}{7}\vec{a}$.
29. **მითითება.** სამი ვექტორი კომპლანარულია, თუ ერთ-ერთი მათგანი დანარჩენი ორის წრფივი კომბინაციაა. ა) $\vec{a}-\vec{b}=x(\vec{b}-\vec{c})+y(\vec{c}-\vec{a})$, სადაც $x=y=-1$, ბ) $\vec{a}-\vec{b}=x(\vec{c}-\vec{a})+y(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, სადაც $x=1$, $y=-1$, გ) $8\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=x(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})+y(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$, სადაც $x=2$, $y=3$. 30. ა) $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$. $\overrightarrow{AX}$ და $\overrightarrow{AB}$ კოლინეარულია, ამიტომ არსებობს ნამდვილი რიცხვი α, რომ $\overrightarrow{AX}=\alpha\overrightarrow{AB}$, ბ) $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\alpha(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-\alpha)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}$, $m=(1-\alpha)$, $n=\alpha$, $m+n=1$.

§ 3.10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
დ	დ	ა	ბ	ა	ბ	ა	ბ	ბ	დ	ბ	დ	ბ	დ	ბ	გ	ბ	ბ

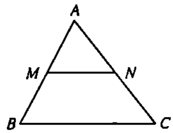
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
ა	ა	დ	ა	ბ	დ	გ	დ	ა	გ	დ	ბ	ა	ა	დ	ა	გ	ბ

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
დ	გ	ა	ბ	დ	ბ	ბ	ა	გ	ბ	გ	ბ	ბ	ბ	ა	ბ

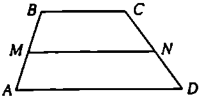
53. ა) 72, ბ) 108, გ) 0, დ) −108. 54. ა) 0, ბ) 16, გ) 16, დ) 9. 55. ა) 0,5, ბ) −0,5, გ) 1,5, დ) 0. 56. ა) 0, ბ) 25, გ) −25. 57. ა) 16, ბ) −16. 58. ა) $\arccos(-\frac{56}{65})$, ანუ $\pi-\arccos\frac{56}{65}$, ბ) 45^0, გ) $\pi-\arccos\frac{12}{13}$, დ) $\frac{\pi}{2}$. 59. 11. 60. ა) 191, ბ) −38, გ) 153, დ) −76. 61. ა) $\frac{3}{\sqrt{130}}$, ბ) 0.5, გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, დ) 0. 62. ა) $\vec{c}$ და $\vec{d}$, ბ) $\vec{b}$ და $\vec{d}$, გ) $\vec{a}$ და $\vec{b}$; $\vec{a}$ და $\vec{c}$; დ) $\vec{a}$ და $\vec{d}$; $\vec{b}$ და $\vec{c}$. 63. ა) 45^0, ბ) 90^0, გ) 45^0. 64. ბლაგვი. 65. ა) $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{AD}|\neq|\overrightarrow{BC}|$, ბ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, გ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$. 66. 10. 67. ა) (16; −5), ბ) (−2; −16), გ) 2, დ) 37. 68. ა) −33, ბ) 769. 69. ა) −23, ბ) 193, გ) 48, დ) 5, ე) $\sqrt{1261}$. 70. ა) $\sqrt{277}$, ბ) $\sqrt{109}$. 71. ა) $12\sqrt{2}$, ბ) $12\sqrt{2}$. 72. ა) 96 კვ. ერთ. ბ) $\sqrt{145}$ ერთ., $\sqrt{433}$ ერთ. 73. $\sqrt{13}$. 74. ა) $\frac{a^2}{2}$, ბ) $-\frac{a^2}{2}$, გ) $-\frac{a^2}{4}$, დ) $-\frac{a^2}{4}$, ე) $\frac{a^2}{8}$, **მითითება.** $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{DN}\cdot(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB})=-\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DB}$. 75. 0. **მითითება.** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$. 76. 1. **მითითება.** $\overrightarrow{DO}$ არის $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ და $\overrightarrow{OC}$ ვექტორების მართობული, ამიტომ $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{OC}=0$. ამასთანავე, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$. იპოვეთ $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}\cdot(\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\gamma\overrightarrow{DC})$. 77. ბლაგვკუთხა. 78. $\overrightarrow{KX}=(x-5;\ y-3;\ z+1)$, $\overrightarrow{MN}=(2;\ -1;\ 3)$. $\overrightarrow{KX}\parallel\overrightarrow{MN}$, ამიტომ $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{3}=t$. 79. $\frac{\pi}{2}$. 80. $\frac{5}{21}$. 81. ა) 5,5, ბ) 3,5, გ) 4. 82. ა) 2, ბ) −17. 83. $M(0;\ 0;\ 1)$. **მითითება.** M წერტილის აბსცისა და ორდინატი 0-ის ტოლია. M-ს ვეძებთ $(0;\ 0;\ z)$ სახით. 84. $\arccos\frac{4}{9}$. 85. $\frac{\pi}{2}$. 86. $\sqrt{10}$. 87. (0; 1; 0). 88. ა) $|AA_1|=0{,}5\sqrt{62}$; $|BB_1|=0{,}5\sqrt{53}$, ბ) $\frac{\sqrt{182}}{3}$, გ) $\angle A=\arccos\frac{14}{15}$, $\angle B=\arccos\frac{11\sqrt{6}}{30}$, $\angle C=\pi-\arccos\frac{5\sqrt{6}}{18}$. 89. $\sqrt{33}$ და $\sqrt{105}$.

§ 3.11.

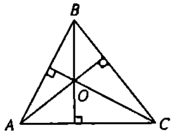
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ბ	დ	ა	ა	ბ	ა	გ	გ	დ	ბ	ბ	ა	ა	ბ	გ	გ



5. მითითება. განიხილეთ პარაგრაფის დასაწყისში წარმოდგენილი მე-7 ამოცანა და მიღებული შედეგი. **17.** $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$. **18.** ა) თუ MN არის ABC სამკუთხედის შუახაზი, მაშინ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$;



ბ) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, საიდანაც $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\frac{\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}}{2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$. **19.** (4; 7). **20.** ა) $A_1(3;\ -1)$, $B_1(4;\ -5)$, $C_1(7;\ 0)$, ბ) $A_1(-2;\ 0)$, $B_1(2;\ -3)$, $C_1(3;\ 4)$. **21.** ა) $\vec{T}(5;\ 1)$, ბ) $\vec{T}(5;\ -8)$, გ) $\vec{T}(-7;\ -6)$. **22.** $N(-2;\ -6)$, $P(5;\ -9)$. **23.** სამკუთხედი მართკუთხაა; $\vec{T}(-2;\ -1)$; $T(A)=(-1;\ 1)$, $T(C)=(3;\ 3)$. **24.** ა) $\vec{T}(-2;\ 0)$, ბ) $\vec{T}(0;\ 2)$, გ) $\vec{T}(-2;\ 2)$, დ) $\vec{T}(-2;\ -3)$.



25. ვავლებთ ორ სიმაღლეს, ისინი აუცილებლად იკვეთება, ვთქვათ, O წერტილში; აჩვენეთ, რომ მესამე სიმაღლეც O წერტილზე გაივლის. ამისთვის საკმარისია აჩვენოთ, რომ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO}=0$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC})=$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AO}-(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AC}$. უნდა გავითვალისწინოთ, რომ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. **26.** $\arccos\frac{7\sqrt{2}}{10}$. **მითითება.** შემოვიღოთ კოორდინატთა სისტემა: სათავე დაემთხვეს C წერტილს, ღერძები მივმართოთ CB და CA სხივების გასწვრივ. ამ სისტემაში $A=(0;\ 6)$, $B=(8;\ 0)$, $D=(4;\ 3)$. ვეძებთ α კუთხეს $\vec{e}(1;\ 1)$ და $\overrightarrow{CD}(4;\ 3)$ ვექტორებს შორის. ცხადია, $\vec{e}$ არის $\overrightarrow{CK}$-ს თანამიმართული ვექტორი. $\cos\alpha=\frac{\vec{e}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\vec{e}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}$. **27.** $0{,}5\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. **მითითება.** ვთქვათ, $m_a=|\overrightarrow{AK}|$. მივიღებთ $|\overrightarrow{AK}|=\sqrt{\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AK}}=$

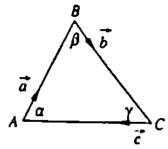
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+2bc\cos\varphi+b^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

28. $\arccos\frac{25}{\sqrt{949}}$. **29.** $\frac{1}{4}\sqrt{a^2+9b^2}$. **მითითება.** $\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

30. $\arccos\frac{4c^2}{\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)(2a^2+2c^2-b^2)}}$. **მითითება.** ვთქვათ, მედიანებია AN და BN, მაშინ ერთი მხრივ, $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-c^2$. ($\cos\angle A$, $\cos\angle B$ და $\cos\angle C$ ვიპოვოთ კოსინუსების თეორემის გამოყენებით და გავითვალისწინოთ, რომ $a^2+b^2=5c^2$); მეორე მხრივ, $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\cos\alpha$. ორი მედიანის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან თუ შევარჩევთ კუთხეს, რომელიც ბლაგვი არ არის, მივიღებთ მითითებულ ფორმულას. **31.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **მითითება.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ (იხ. პარაგრაფის ტექსტი), საიდანაც $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BC}=|\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\alpha$. მეორე მხრივ, $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})\cdot$ $\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2$. შემოვიღოთ აღნიშვნა, $AB=c$, მაშინ $AC=3c$. მივიღებთ: $\sqrt{\frac{1}{16}\cdot 9c^2+\frac{9}{16}c^2+\frac{3}{16}\cdot 3c^2}\cdot\sqrt{9c^2+c^2-3c^2}\cos\alpha=\frac{1}{4}\cdot 3c^2+\frac{1}{4}\cdot 9c^2-\frac{3}{4}\cdot c^2$, საიდანაც $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

32. $10\sqrt{4+\sqrt{3}}$. 33. ავიღოთ სამკუთხედის გვერდებზე ერთეულოვანი ვექტორები $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$. ცხადია, $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2\geq 0$, $\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\,\vec{b}+2\vec{a}\,\vec{c}+2\vec{b}\,\vec{c}\geq 0$. $3+2\cos(\pi-\beta)+2\cos(\pi-\alpha)+2\cos(\pi-\gamma)\geq 0$, საიდანაც, დაყვანის ფორმულების გამოყენებით, $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}$.



34. განვიხილოთ ვექტორები $\vec{a}(x;\ y)$ და $\vec{b}(1;\ 1)$. $\vec{a}\,\vec{b}=x+y=1$ (პირობით); $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\geq 1$, $|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\geq 1$, საიდანაც $x^2+y^2\geq\frac{1}{2}$. 35. $0{,}5\sqrt{a^2+b^2+4c^2}$. **მითითება.** შემოვიტანოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა შემდეგნაირად: ღერძები მივმართოთ CB, CA და CD სხივების გასწვრივ. მაშინ დასახელებული წერტილებია $B(a;\ 0;\ 0)$, $A(0;\ b;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ c)$, $K(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2};\ 0)$. იპოვეთ DK. 36. $\frac{\pi}{2}$. დასაბუთება. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}$. პირობით, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. ამასთანავე, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}$. მივიღეთ, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$. AB და CD მართობული წრფეებია. 37. განვიხილოთ $\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{B_1D}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})\cdot$ $\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})=0$, საიდანაც დავასკვნით: $AD_1\perp B_1D$. 38. $\frac{\pi}{3}$. **მითითება.** თუ საკოორდინატო ღერძებს OB, OC და OA სხივების გასწვრივ მივმართავთ, COA და AOB კუთხეების ბისექტრისების თანამიმართული ვექტორები იქნება $(0;\ 1;\ 1)$ და $(1;\ 0;\ 1)$. იპოვეთ კუთხე ამ ვექტორებს შორის. 39. $\frac{1}{3}\sqrt{70+15\sqrt{2}}$. **მითითება.** თუ O წერტილი არის DBC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, მაშინ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $|\overrightarrow{AO}|=\sqrt{(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}$. 40. $\frac{\pi}{4}$. 41. $\frac{\pi}{3}$. 42. ა) $xy=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ბ) $\frac{\pi}{2}$, გ) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **მითითება:** ა) $\overrightarrow{XY}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{XY}=\sqrt{\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XY}}$, ბ) განვიხილოთ $\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{A_1D}$, გ) განვიხილოთ $\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{AD}$. 43. ა) უდიდესი მნიშვნელობაა 13. ის მიიღწევა, როცა $x=\frac{2}{3}$ ან $x=-\frac{3}{2}$, ბ) უდიდესი მნიშვნელობაა 5, როცა $x=\frac{9}{25}$, გ) უდიდესი მნიშვნელობაა $3\sqrt{2}$, როცა $x=\frac{2}{9}$. **მითითება.** ა) განვიხილოთ ვექტორები $\vec{a}=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2};\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $\vec{b}(5;\ 12)$. $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$. უდიდესია, როცა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართული ვექტორებია: $\frac{1-x^2}{5(1+x^2)}=\frac{2x}{12(1+x^2)}$, საიდანაც $x=\frac{2}{3}$ ან $x=-\frac{3}{2}$. $f(x)$-ის უდიდესი მნიშვნელობაა $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=13$. ბ) ვიხილავთ ვექტორებს: $\vec{a}=(\sqrt{1-x};\sqrt{x})$, $\vec{b}(4;\ 3)$. $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$ უდიდესია, როცა $\frac{\sqrt{1-x}}{4}=\frac{\sqrt{x}}{3}$, საიდანაც $x=\frac{9}{25}$. $f(x)$-ის უდიდესი მნიშვნელობაა $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=5$, ან $f(\frac{9}{25})=5$. გ) განვიხილოთ ვექტორები: $\vec{a}=(1;\ 2;\ 2)$ და $\vec{b}\left(\sqrt{x};\sqrt{1-\frac{x}{2}};\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)$. $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$. ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$, საიდანაც $x=\frac{2}{9}$, უდიდესი მნიშვნელობაა: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=f(\frac{2}{9})=3\sqrt{2}$. 44. განვიხილოთ ვექტორები $\vec{a}(x;\ y;\ z)$, $\vec{b}(1;\ 1;\ 1)$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$. $\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, საიდანაც $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$.

§ 3.12.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
ბ	ბ	დ	ა	ბ	ბ	ა	გ	ბ

10	11	12	13	14	15	16	17	18
ა	ბ	გ	დ	ა	გ	ბ	ბ	ბ

19. $40(23+12\sqrt{3})$სმ². 20. $2d^2\sin\alpha(\sin\beta+\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta})$. 21. $\sqrt{(d^2-d_1^2)(d_1^2+d_2^2-d^2)}$. 22. 26 მ; 18 მ. 23. 8 მ²; 12 მ². 24. 366 სმ². 25. $(55+24\sqrt{3})$ მ². 26. 1. 27. $4(6+\sqrt{3})$ სმ². 28. $2\sqrt{2}$ სმ. 29. $96\sqrt{3}$ დმ². 30. $64(3-\sqrt{3})$ დმ². 31. ა) 3,6 სმ, ბ) 8 სმ. 32. 12 სმ. 33. 8 სმ. 34. 32 სმ². 35. $24(3\sqrt{2}+2\sqrt{6})$ სმ². 36. $12(2+\sqrt{2})$ სმ². 37. 512 სმ². 38. 120 სმ². 39. $48\sqrt{21}$ სმ². 40. 6 სმ. 41. 6 სმ. 42. $\frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta$. 43. $4\sqrt{3}$ სმ. 44. 540 სმ². 45. 1000 სმ². 46. 6 სმ; 4 სმ ან 8 სმ; 3 სმ. 47. $12(2+\sqrt{3})$ სმ². 48. $\frac{64}{\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$ 49. $36\sqrt{5}$ სმ². 50. 30^0.

§ 3.13.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
დ	ბ	დ	გ	დ	გ	ბ	ბ	ბ	დ	ა	ბ	გ	ა

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
ბ	დ	გ	ა	გ	დ.	გ	ბ	ა	ბ	გ	გ	ბ	გ

29. ა) 224π სმ²; ბ) 168π სმ². 30. ა) 300π სმ²; ბ) 90π სმ². 31. $Q\pi$. 32. $\frac{d^2\cos^2\alpha}{2\pi}+d^2\cos\alpha\sin\alpha$. 33. ა) 60π სმ²; ბ) 8 სმ. 34. $\sqrt{\frac{2SQ\pi}{\sin\alpha}}$. 35. 6 სმ. 36. 20 სმ. 37. 125 სმ². **მითითება.** O-დან MAB კვეთამდე მანძილია OD — COM მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე O-დან დაშვებული მართობის სიგრძე, $OD=6$ სმ. 38. $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}}{\cos\varphi}$ 39. $\pi a^2\sqrt{3}$. 40. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{3})\pi$. 41. $\frac{\pi b^2\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ 42. 624 სმ². 43. $\frac{\pi}{6}$. 44. $\frac{d^2}{4\pi}(2\pi+1)$. 45. $2\pi m^2\sin\varphi$. 46. ა) $l\alpha$, ბ) $\frac{\alpha l^2}{2}$, $S_{გვ}=\pi Rl$. 47. $\frac{3}{4}$. 48. $\sqrt{\frac{191}{5}}$ სმ. 49. $1{,}5\sqrt{91}$ სმ. 50. 10 სმ. 51. $\frac{\pi R^2}{4}$. 52. $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{12}}$. 53. $15\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ მ. 54. $\sqrt{159}$ სმ. 55. $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. 56. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 57. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **მითითება.** ბირთვის ცენტრი პირამიდის MO სიმაღლეს ეკუთვნის. 58. ა) სფერო, ცენტრით სათავეში, რადიუსით 3; ბ) სფერო, ცენტრით (2; 3; 0) წერტილში, რადიუსით $\sqrt{14}$. 59. . 80π სმ². 60. $\pi\sqrt{26}$ სმ².

§ 3.14.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
დ	ბ	დ	ბ	გ	ბ	ბ	ა	ბ	გ	ბ	ა	ბ	ა	დ	ა	გ	ბ	ა	ა

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
დ	გ	დ	ბ	ა	ბ	ა	დ	ბ	გ	ა	გ	ბ	გ	გ	ბ	ბ	გ	დ	ა

41	42	43	44
ბ	გ	ა	ა

45. ა) 128π სმ³, ბ) 96π სმ³, გ) $76{,}8\pi$ სმ³. 46. ა) 48π სმ³, ბ) 36π სმ³. 47. $\frac{2000}{3}$ სმ³. 48. $\frac{Q}{2}\sqrt{S\sin2\alpha}$. 49. $\frac{Sab}{4(a+b)}$. 50. 480 სმ³. 51. 24 მ³. 52. 24 სმ³. 53. 48 მ³. 54. $48\sqrt{3}$ მ³. 55. 576 სმ³.

56. $\frac{Sd\sin\alpha\sin\beta}{2(\sin\alpha+\sin\beta)}$. მითითება. ფუძის გვერდების საპოვნელად შეიძლება სინუსების თეორემა გამოვიყენოთ. 57. $\sqrt{\frac{5}{6}}$. 58. 8 სმ^3. 59. 10 სმ^3. 60. 15 სმ^3. 61. 30 სმ^3. 62. 40 სმ^3. 63. 256 სმ^3. 64. 144 სმ^3. 65. $18\sqrt{3}$ სმ^3. 66. 288 სმ^3. 67. 144 სმ^3. 68. 72 სმ^3. 69. 96 სმ^3. 70. $108\sqrt{3}$ სმ^3. 71. $\frac{1}{3}b^3\sin\beta\cos^2\beta\sin2\alpha$. 72. $\frac{1}{3}\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}$. 73. 2880 სმ^3. 74. 6 სმ^3. 75. $8\sqrt{11}$ სმ^3. 76. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$. 77. $\frac{2}{3}R^3tg\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$. 78. $\frac{ab(a+b)\mathrm{tg}\alpha}{12}$. 79. $\frac{64}{3}$ სმ^3. 80. ა) 90^0; 90^0, ბ) MB, გ) $60\sqrt{3}$ სმ^3. 81. $\frac{555}{8}$ სმ^3. მითითება. $ABCD$ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირი ემთხვევა ABD სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს. 82. $\frac{(26-7\sqrt{3})\pi}{240}$ სმ^3. 83. 96 სმ^2. 84. ა) $\angle AKB=\angle CKB=90^0$; ბ) $\frac{b^2}{2\sqrt{2}}$, გ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, დ) $\frac{b^3}{12\sqrt{2}}$. 85. ა) $\frac{n^2}{4m}\sqrt{3m^2-n^2}$, ბ) $\frac{n^4\sqrt{3m^2-n^2}}{24m^2}$. 86. $\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$. 87. $\frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$. 88. 64 სმ^3. 89. 128π სმ^3. 90. 768π სმ^3. 91. 96π სმ^3. 92. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ სმ^3. 93. $\frac{1}{3}xl^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. 94. $\frac{\pi a^3}{4}$. 95. $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. 96. 3456π სმ^3, $144(3+4\sqrt{3})\pi$ სმ^2. 97. 3 ქილა. 98. $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$. 99. $\frac{400\pi}{3}$ სმ^3. 100. 60^0. 101. 3. 102. $\frac{256\sqrt{39}}{3}$ სმ^3. 103. $12\sqrt{3}$ სმ^3. 104. $\frac{\sqrt{3}}{48}$ სმ^3. 105. $3{,}5\sqrt{3}$ სმ^3. 106. $\frac{7V}{27}$. 107. $\frac{3\pi\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{4}$ სმ^3.

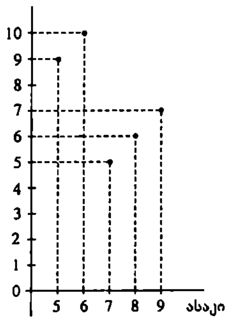
§ 4.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ბ	ბ	ბ	ა	ბ	გ	ბ	ბ	გ	ა	გ	გ	დ	ბ

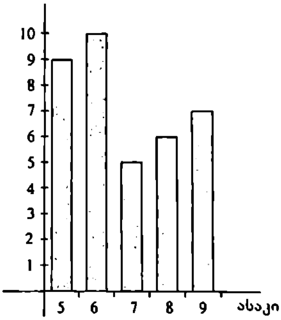
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
ბ	ა	გ	ა	გ	ა	გ	ბ	გ	ბ	ა	ბ	დ	ა

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ბ	გ	ა	ა	გ	ა	გ	ა	გ	ა	ა	გ

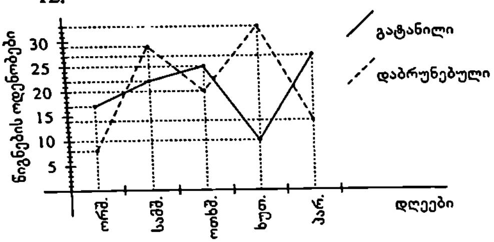
41. ა)



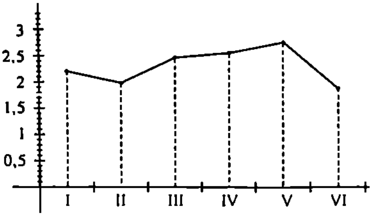
ბ)



42.



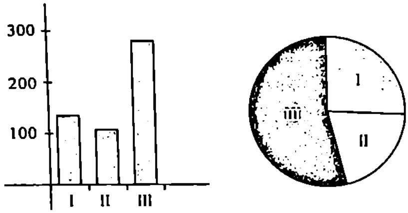
43.



44. ა) 6 პური 500 გრამზე ნაკლები, 4 პური 500 გრამზე მეტი, ბ) 496 გ, გ) 4 გრამით. **45.** ა) ლომიძეს, ბ) ლომიძე და რაზმაძე, გ) 50 ლარი, 100 ლარი, 100 ლარი, 50 ლარი და 150 ლარი. საშუალო — 90 ლარი, დ) ქარჩავა — 0 ლარი, ლომიძე — 100 ლარი, რაზმაძე — 50 ლარი, შარაშენიძე — 50 ლარი, მაჭარაძე — 0 ლარი. **46.** ა) კვირას, ბ) სამშაბათს, გ) 125, დ) სამშაბათს, ე) 100 ბილეთზე მეტი — ხუთშაბათს, პარასკევს, შაბათს, კვირას; 100 ბილეთზე ნაკლები — ორშაბათს, ოთხშაბათს, ვ) 1050, ზ) 150.

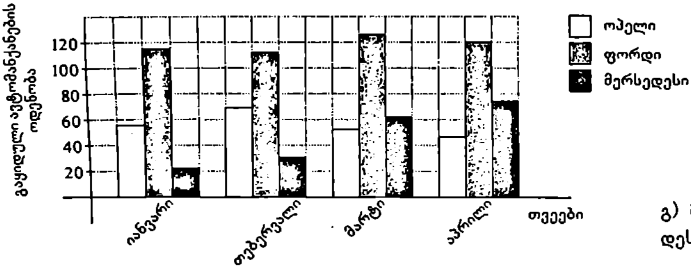
47. ა) $223{,}2^0$, ბ) 108^0, გ) 45^0, დ) 90^0.

48.



49. ა) ხშირად — გიორგაძე, იშვიათად — თაბაგარი, ბ) ადეიშვილი და ჭანტურია.

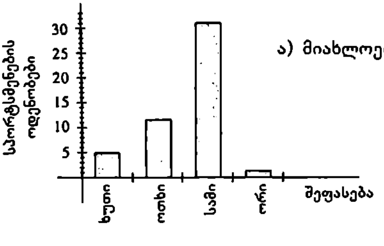
50.



ა) ფორდი, ბ) ფორდი, გ) მერსედესი, დ) მერსედესი.

51. ა) 8:10:13:17:26:49:53:61:65, ბ) მსოფლიოს მოსახლეობის ოდენობა იზრდება, გ) მიახლოებით 8200 მლნ.

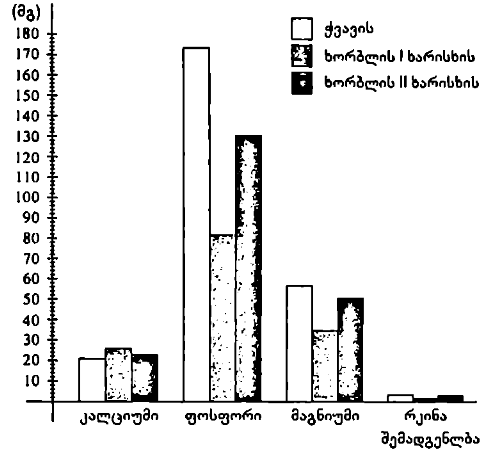
52.

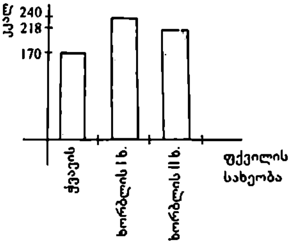


ა) მიახლოებით 33%-ით, ბ) 2,16 ლარზე.

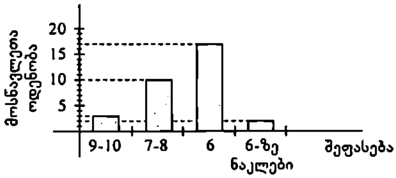
53. „ხუთი" — 5 სპორტსმენი, „ოთხი" — 12, „სამი" — 31, „ორი" — 2.

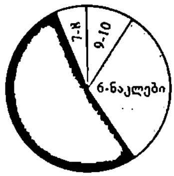
54.



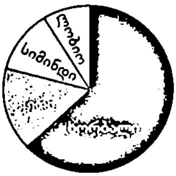


55.

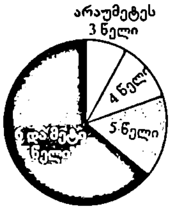




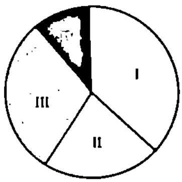
56.



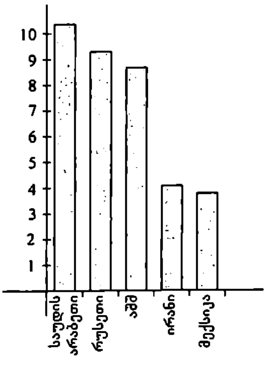
57.

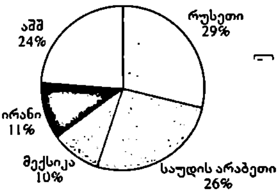


58. ა) 13500 ლარი, ბ) I — 37%, II — 22%, III — 30%, IV — 11 %, გ)

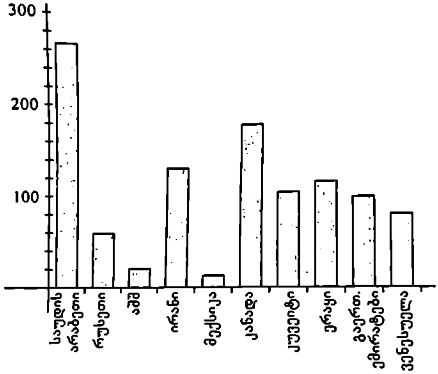


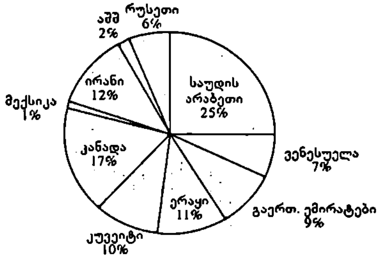
59.



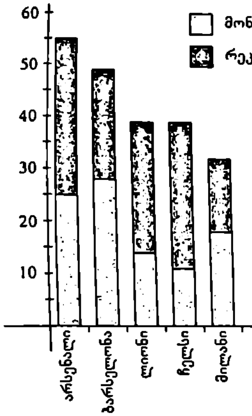


60.





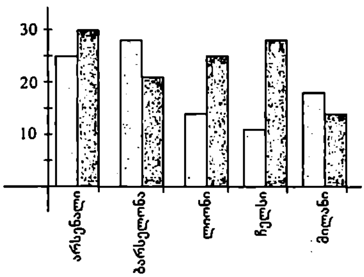
61.



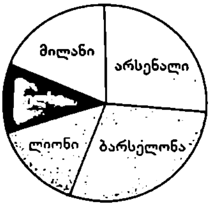
მონაწილეობისთვის აღებული თანხა

რეკლამებში აღებული თანხა

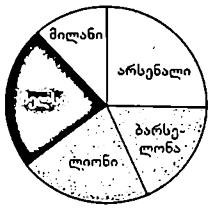
ან



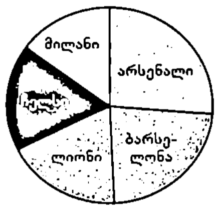
თამაშებში მონაწილეობისთვის, აღებული თანხა



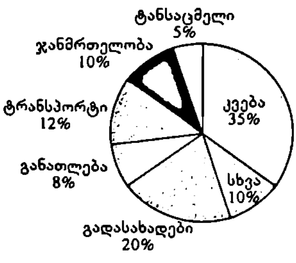
რეკლამებში აღებული თანხა



მთელი თანხა

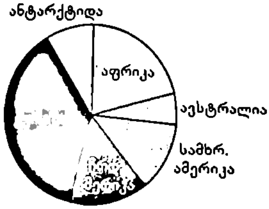


62. ა)



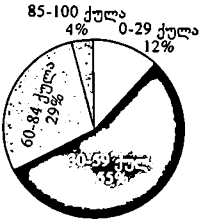
ბ) 2400 ლარი.

63. ა) 141, 11 მლნ კმ², ბ) მიახლოებით 38 %, გ)



დ) მიახლოებით 31%.

64.

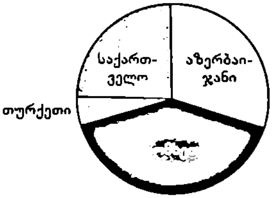


65. ა) 12-ს, ბ) 2-ს, გ) 6-ით, დ) 29 მოსწავლემ.

66. 5-ით, ბ) 6-მა, გ) 63.

67. ა) მიახლოებით, I გამოცდაზე — 32%, II გამოცდაზე — 33 %, ბ) მიახლოებით I გამოცდაზე — 65%, II გამოცდაზე — 64%, გ) 76 ქულიანების ოდენობა შეიძლება იყოს I გამოცდაზე — 0-დან 6,5 % -ის ჩათვლით, II გამოცდაზე — 0-დან 7%-ის ჩათვლით. **68.** მათემატიკის გამოცდაზე გამოცხადდა 10000, ზღვარი გადალახა 9500-მა, ქართულის გამოცდაზე მივიდა 30000, ზღვარი გადალახა 29000-მა, ინგლისურის გამოცდაზე გამოცხადდა 16000, ზღვარი გადალახა 14000-მა. **69.** ა) აშშ აწარმოებს მიახლოებით 10,8 მილონს; ბ) ევროპა — 129,6°, იაპონია — 97,2°, აშშ — 64,8°, კანადა — 14,4°, სხვა ქვეყნები — 54°.

70. აზერბაიჯანი — 30%, სომხეთი — 40%, თურქეთი — 5%, საქართველო 25%.



71. ა) 22025 ლარი, ბ) თუ შეიტანს 19. 06 — 12198,76 დოლარი, 20. 06 — 12 185, 038 დოლარი, 21. 06— 12185,038 დოლარი, 22. 06 — 12205, 633 დოლარი, 23. 06 — 12205,633 დოლარი, 26. 06 — 12205, 633 დოლარი, 27. 06 — 29. 06 — 12219, 401 დოლარი, 30.06 — 07. 07 — 12 226,297 დოლარი.

ა) 22025 ლარი, ბ)

დღე	19.06	20.06 21.06	22.06 23.06 26.06	27.06– –29.06	30.06– –07.07	10.07	11.07 12.07	13.07	14.07
1 წლის შემდეგ ასაღები თანხა დოლარებში	12198,76	12185,038	12205,633	12219,401	12226,297	12233,2	12240,112	12253,959	12267,836

გ) ნებისმიერი დღეს ლარის შეტანა უფრო ხელსაყრელია.

დ) ყველაზე უარესია 20 ან 21 ივნისს დოლარის შეტანა, იზარალებთ 360 ლარს.

1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14
ბ	ბ	ა	გ	დ	ა	ა	დ	გ	გ	ა	გ	გ

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
დ	ბ	ა	ბ	გ	ბ	ბ	დ	ბ	დ	ბ	ბ	გ

7.

2	3	4	5	6	7	8
6%	8%	16%	38%	16%	12%	4%

28.

	ჟიგული	მერსედესი	ოპელი	აუდი	ფორდი	ტოიოტა
ფარდ. სიხშირე (% ≈)	24,3	11,4	32,9	8,6	15,7	7,1

29.

მონაცემი	1	2	3	4	5	6
სიხშირე	5	2	4	3	2	4
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

30. ა) 28, ბ) 37, გ) 2 ფილმი, დ)

ოდენობა	0	1	2	3	4	5
ფარდობითი სიხშირე	0,24	0,2	0,3	0,18	0,06	0,02

31.

წიგნების ოდენობა	1	2	3	4	5	6
სიხშირე	4	5	3	1	1	2
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

32.

დრო	7 სთ – 7 სთ 15წთ	7 სთ 15 წთ – 7 სთ 30 წთ	7 სთ 30 წთ – 7 სთ 45 წთ	7 სთ 45 წთ – 8 სთ
ფარდ. სიხშირე	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

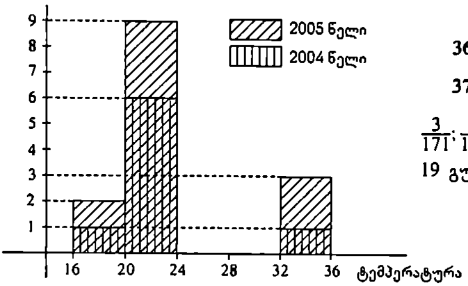
33. საშუალო — $\frac{94}{9} \approx 10,4$, გაბნევის დიაპაზონი — 98; მოდა — 2; მედიანა — 5.

34.

ბინის ფართობი	35-45-მდე	45-55-მდე	55-65-მდე	65-75-მდე	75-85-მდე	85-95-მდე	95-105-მდე	105-115-მდე	115-125-მდე
სიხშირე	10	20	30	27	18	15	12	5	13
ფარდ. სიხშირე	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{13}{150}$

35. ა) 2004 წელს, ბ) ვერ დავადგენთ, გ) საშუალო ტემპერატურა 2004 წლის ივნისში $23{,}3^0$-$27{,}3^0$-მდე, 2005 წლის ივნისში $24{,}1^0$-$28{,}1^0$-მდე, ამ მიახლოებით მნიშვნელობების მიხედვით შეუძლებელია დადგინდეს — რომელ წელს იყო უფრო მაღალი ივნისის საშუალო ტემპერატურა.

დ)



36. 3; 6; 15; 21; 12; 3.

37. $\frac{20}{171}$; $\frac{42}{171}$; $\frac{40}{171}$; $\frac{37}{171}$; $\frac{12}{171}$; $\frac{9}{171}$; $\frac{6}{171}$; $\frac{3}{171}$; $\frac{1}{171}$; $\frac{1}{171}$, გ) მიახლოებით 81,3%, დ) 19 გუნდი.

38.

ფასი	0-100-მდე	100-200-მდე	200-300-მდე	300-400-მდე	400-500-მდე
სიხშირე	7	15	5	1	1
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{7}{29} \approx 24\%$	$\frac{15}{29} \approx 52\%$	$\frac{5}{29} \approx 17{,}2\%$	$\frac{1}{29} \approx 3{,}4\%$	$\frac{1}{29} \approx 3{,}4\%$

სულ შემოსულია 3200-დან 6100 ლარამდე (სიხშირეთა ცხრილის მიხედვით), საწყისი მონაცემებით ვღებულობთ: შემოსულია 4263 ლარი,

39. ვაჟები

ქულა	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	1	1	3	4	2	5	7	9	4	3	1
ფარდ. სიხშირე	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$
ფარდ. სიხშირე პროცენტებში	2,5	2,5	7,5	10	5	12,5	17,5	22,5	10	7,5	2,5

გოგონები

ქულა	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	2	0	2	6	5	4	8	6	3	2	2
ფარდ. სიხშირე	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
ფარდ. სიხშირე პროცენტებში	5	0	5	15	12,5	10	20	15	7,5	5	5

დაჯგუფებული მონაცემები

ვაჟები

ქულა	0, 1, 2, 3 ან 4	5, 6 ან 7	8, 9 ან 10
სიხშირე	11	21	8
ფარდ. სიხშირე	$\frac{11}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{1}{5}$
ფარდ.სიხშირე პროცენტებში	27,5	52,5	20

გოგონები

ქულა	0, 1, 2, 3 ან 4	5, 6 ან 7	8, 9 ან 10
სიხშირე	15	18	7
ფარდ. სიხშირე	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{40}$
ფარდ. სიხშირე პროცენტებში	37,5	45	17,5

40. ა)

ასაკი	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70	71-80
სიხშირე	0	32	74	68	86	52	72	31	24	25	19	12	3	0	2
ფარდ. სიხშირე	0	0,064	0,148	0,136	0,172	0,104	0,144	0,062	0,048	0,05	0,038	0,024	0,006	0	0,004
ფარდ. სიხშირე პროცენ-ტებში	0	6,4	14,8	13,6	17,2	10,4	14,4	6,2	4,8	5	3,8	2,4	0,6	0	0,4

ბ) ესწრებოდა სულ მცირე 23 მამაკაცი; 25 წელს გადაცილებული სულ დიდი 217 ქალი.

41. ა)

ასაკი	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70
სიხშირე	2	6	13	10	7	2

ბ)

ასაკი	41-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-70
სიხშირე	2	4	12	12	7	3

42.

გამცდენების ოდენობა	0	1	2	3	4
დღეების ოდენობა (სიხშირე)	2	8	6	3	2
დაგროვილი სიხშირეები	2	10	16	19	21
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{2}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$
ფარდობითი სიხშირე პროცენტებში	9,5	38,1	28,6	14,3	9,5

ბ) 16 დღე.

43. ა) A-ს საშუალოა 10, მედიანა — 10, B-ს საშუალოა 10, მედიანა — 10, ბ) $\sigma_A=1{,}53, \sigma_B=5{,}86$. **44.** მიახლოებით, 3,48. მითითება. შევკრიბოთ ფარდობითი სიხშირეები მარჯვენა სვეტში, სანამ არ მივაღწევთ 50%-ს: 10,1+15,1+17,1+16=58,3. შესაბამისი სტრიქონი არის 3-4. მოსალოდნელია, რომ შეფასება უფრო ზუსტი იქნება, თუ x რიცხვით 3-4 ინტერვალს (1 სთ) დავყოფთ (50%-42,3%)-ისა და (58%-50%)-ის პროპორციულად, ანუ 7,7 და 8,3 რიცხვების პროპორციულად: $\frac{x-3}{4-x}=\frac{7{,}7}{8{,}3}$, ანუ $\frac{x-3}{1}=\frac{7{,}7}{16}$ საიდანაც $x\approx 3{,}48$. **45.** მიახლოებით 1285,7 დოლარზე ნაკლები. **46.** საშუალო — 7,1; მოდა — 8; მედიანა — 7,5; გაბნევის დიაპაზონი — 5. **47.** საშუალო — 8,25; მოდა — 9; მედიანა — 8,5; გაბნევის დიაპაზონი — 4.

48. ა)

გოლების ოდენობა	0	1	2	3	4
მატჩების ოდენობა	3	5	4	3	1

ბ) საშუალო — 1,625; მოდა — 1; მედიანა — 1,5; გაბნევის დიაპაზონი — 4. **49.** I — საშუალო — 5,675; დიაპაზონი — 0,4; მოდა — 5,7. II — საშუალო — 5,6; დიაპაზონი —0,5; მოდა — 5,4 და 5,5. **50.** 22612. **51.** დიაპაზონი — 8; საშუალო — 21,8.

52.

მონაწილე	*A*	*B*	*C*	*D*
მოდა	1	2	4	4
საშუალო	≈1,22	≈1,78	≈3,78	≈3,56

ბ) I ადგილი — *A*, II ადგილი — *B*, III ადგილი — *D*, IV ადგილი — *C*.

53. ა)

ბილეთების ოდენობა	0	500	1500	2000	3000	4000	5000	5500
დღეების ოდენობა	1	1	1	2	1	2	1	1

ბ) 2750, გ) მოდა — 2000 და 4000; მედიანა — 2500; გაბნევის დიაპაზონი — 5500.

54. ა)-ბ)

	საშუალო	მოდა	მედიანა
I	≈84	85	85
II	≈87	86	86
III	≈82	84	84

გ) უმაღლესი საშუალო შედეგი სპორტის ამ სახეობაში უმაღლეს ადგილს არ ანიჭებს.

55. $\sqrt{\frac{400}{7}} \approx 7,56$.

56.

წუნდებული პურების ოდენობა (x)	5	8	9	10	11	15
დღეების ოდენობა (სიხშირე)	1	3	1	3	1	1
$(x-a)$	-4,4	-1,4	-0,4	0,6	1,6	5,6
$(x-a)^2$	19,36	1,96	0,16	0,36	2,56	31,36

$a = \frac{5 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 1 + 15 \cdot 1}{10} = 9,4$.

საშუალო კვადრატული გადახრაა $\sqrt{\frac{55,76}{6}} \approx 3,05$.

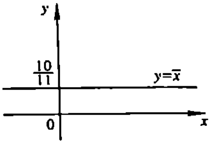
57. საშუალო კვადრატული გადახრა — $\sqrt{0,0656} \approx 0,26$, მოდა — 5,2 და 5,4; მედიანა — $\frac{5,1+5,2}{2} = 5,15$; გაბნევის დიაპაზონი — 9,8.

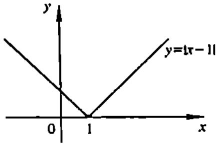
58.

	საშუალო	მოდა	მედიანა	დიაპაზონი	საშ. კვადრატული გადახრა
I მონაცემთა ერთობლიობა	0	−1 და 1	0	2	$\sqrt{0,4} \approx 0,63$
II მონაცემთა ერთობლიობა	0	−100 და 100	0	200	$\sqrt{4000} \approx 63,25$

59. საშუალო — 495; მოდა — 480; მედიანა — $\frac{485+490}{2} = 487,5$; დიაპაზონი — 55. საშუალო კვადრატული გადახრა — $\sqrt{340} \approx 18,44$. 60. $x_1 = 2,5$, $x_6 = 11$. 61. გაბნევის დიაპაზონი — 5; საშუალო კვადრატული გადახრა — $\sqrt{\frac{60,475}{40}} \approx 1,23$. 62. I მონაცემებისთვის საშუალოა 5, დიაპაზონი — 10, მედიანა — 5, მოდა არა აქვს; II მონაცემებისთვის საშუალოა $\frac{38}{7} \approx 5,4$, დიაპაზონი — 10, მედიანა — 5, მოდა არა აქვს; იმოქმედა საშუალოზე. 63. თუ n კენტია, მედიანა უდრის $a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 + \frac{n-1}{2}d$; თუ n ლუწია, მედიანა უდრის $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right) = a_1 + \frac{n-1}{2}d$; $a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{S_n}{n}$. 64. არანაკლებ 91 ქულისა. 65. მოდა იქნება 1, საშუალო გაიზრდება, დიაპაზონი გაიზრდება — ყველა მახასიათებელი იცვლება. 66. ყველა მონაცემი ტოლია. საშუალო თვით ამ მონაცემს უდრის. 67. საშუალო — 3,44; საშუალო კვ. გადახრა ≈1,79. 68. შეიძლება, უდრის 19-ს. 69. 19. 70. ა) A მიმართულებით — 12,2%, B მიმართულებით — 12,2%, ბ) A მიმართულებით $\sigma_A \approx 0,56$, B მიმართულებით — $\sigma_B \approx 2,8$, გ) B მიმართულებით ინვესტირება მეტ რისკთან არის დაკავშირებული. 71. 2 წთ 04 წმ. 72. საშუალო გაიზრდება 10-ით, მედიანა გაიზრდება 10-

ით, მოდა (თუ ის არსებობდა) — გაიზრდება 10-ით, დიაპაზონი არ შეიცვლება. 73. საშუალო 2-ჯერ გაიზრდება, მოდა (თუ ის არსებობდა) 2-ჯერ გაიზრდება, მედიანა 2-ჯერ გაიზრდება, დიაპაზონი 2-ჯერ გაიზრდება. 74. ა) $x=5$, ბ) $x=3$, გ) $x\geq 3$. 75. $\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}=$ $=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-2\bar{x}\,\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+\frac{n\cdot\bar{x}^2}{n}=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2$. 76. გაბნევის დიაპაზონი არ შეიცვლება; საშუალო კვ. გადახრა არ შეიცვლება. 77. გაბნევის დიაპაზონი 4-ჯერ გაიზრდება; საშუალო კვ. გადახრა გაიზრდება 4-ჯერ.





78. საშუალო $\bar{x}=\frac{10+x}{11}$, დიაპაზონი — $|x-1|$, მედიანა — 1, მოდა — 1.

79. $x=3$. 80. $x=7{,}6$. 81. ა) 85,6, ბ) არ შეიძლება. 82. $n_1=3$, $n_2=2$; $\sigma\approx 0{,}99$. 83. ა) $n_1=3$, ბ) მოდა — 5 და -1; მედიანა ტოლია $-0{,}5$-ის, გ) გაბნევის დიაპაზონი არის 8, საშუალო კვადრატული გადახრა $\approx 2{,}95$.

84.

ქულები	88	90	92	93	95	96	98
სიხშირე	1	1	3	1	2	1	1

საშუალო — 93,1; მოდა — 92; მედიანა —92,5; გაბნევის დაიპაზონი — 10; საშუალო კვადრატული გადახრა — 2,80.

§ 4.3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ბ	ა	დ	ა	დ	ბ	ბ	ბ	ბ	დ	ა	ბ	დ	ბ	გ	ა

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
გ	ა	ა	ა	ბ	ა	გ	ბ	ბ	დ	გ	ა	ბ	ა	ბ	ბ

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
ა	დ	დ	ბ	ა	ბ	ბ	ა	ა	ა	ბ	ბ	ა	ბ	ბ	ა

49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
დ	ბ	ა	ა	დ	ა	ა	გ	ბ	გ	გ	ბ	ბ	გ	ბ	ბ

65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
ბ	გ	დ	ბ	ა	გ	დ	გ	ბ	ა	ა	ა	ბ	გ	ა	დ

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
დ	ბ	დ	დ	ა	ა	ბ	ბ	დ	ა	გ	გ	დ	გ	გ	ა

97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
ა	ბ	დ	ბ	გ	გ	გ	ბ	ა	ბ	დ	გ	ბ	ბ	ბ	გ

113	114	115	116	117	118	119	120	121
გ	დ	დ	ბ	ბ	ა	გ	დ	ბ

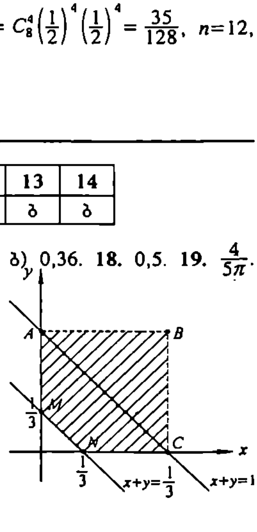
42. მითითება. ყველა შესაძლო შემთხვევების ოდენობაა C_5^3. ხელშემწყობია ის შემთხვევები, როცა ორი ტომი შერჩეული იქნება ოთხიდან — II, III, IV და V ტომიდან. ამ შემთხვევების ოდენობა C_4^2. პასუხი: $\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$. 44. მითითება. თითოეულ ყუთში ავტომატი ან განათავსებს მონეტას, ან — არა (2 შესაძლებლობაა). ხუთი ყუთისთვის განაწილების შესაძლებლობის რიცხვია 2^5. ლურჯ ყუთში ამ ხუთი მონეტიდან სამი მონეტის განთავსების C_5^3 შესაძლებლობა არსებობს. ამრიგად, $P=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$. 47. მითითება. 8 ტომის დაწყობის 8! შესაძლებლობაა. ხელშემწყობი შემთხვევების ოდენობის დასათვლელად წარმოვიდგინოთ, რომ I და II ტომი ერთი წიგნია; 7 წიგნის დაწყობის 7! შესაძლებლობაა, I და II ტომის ერთად დაწყობის 2 შესაძლებლობასაც თუ გავითვალისწინებთ, გვექნება 2·7! ხელშემწყობი შედეგი. $P=\frac{2\cdot 7!}{8!}=\frac{1}{4}$. 53. მითითება. იპოვეთ საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა: სამი გაგორებისას არ მოვიდა 5. 55. მითითება. გვაქვს უტოლობა $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0,5$. 65. მითითება. ხდომილობები დამოკიდებულია, თითოეულის ალბათობაა $\frac{1}{2}$. 68. მითითება. ამ ცდის შესაძლო შედეგების ოდენობაა 2^6. მათგან ხელშემწყობია C_6^4. ამრიგად, $P=\frac{C_6^4}{2^6}=\frac{15}{64}$. 70. მითითება. ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვია 6^5, სამჯერ „5"-ის მოსვლა და დანარჩენ ორ შემთხვევაში სხვა რაიმე რიცხვის მოსვლის შესაძლებლობათა ოდენობაა $C_5^3\cdot 5^2$, ამრიგად, $P=\frac{C_5^3\cdot 5^2}{6^5}=\frac{10\cdot 5^2}{6^5}$. 75. საწინააღმდეგო ხდომილობის — ორივე ბურთი შავია — ალბათობაა $\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{5}$. 76. ცნობილია, რომ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. რადგან ხდომილობები დამოუკიდებელია, ამიტომ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. 78. ბარათის ყოველი ამოღებისას არის 33 შესაძლებლობა, ე. ი. ყველა შესაძლო შემთხვევათა ოდენობაა 33^4, ხელშემწყობი — 4!. 79. მითითება. ხელშემწყობ ოთხეულებში, რომელთა ოდენობაა 4!, ერთი და იმავე გადანაცვლებასაც მივიღებთ (ასო „დ" მეორდება), მათი ოდენობაა 2!. მაშასადამე, ხელშემწყობი ხდომილობების ოდენობაა $\frac{4!}{2!}$. 81. გაითვალისწინეთ, რომ აღნიშნული ორი ხდომილობის ჯამი არის 1. 82. ვთქვათ, „1"-ის მოსვლის ალბათობაა $1\cdot p$, „2"-ის იქნება $2p$, „3"-ის — $3p$ და ა. შ. მათი გაერთიანება აუცილებელი ხდომილობაა, ე. ი. $1p+2p+3p+4p+5p+6p=1$, საიდანაც $p=\frac{1}{21}$. 83. ექსპერიმენტის შედეგები ურთიერთგამომრიცხავია, ამიტომ $p_1+p_2+p_3+p_4=1$. 86. იგივეა, რაც ვირჩევთ ერთ მონაკვეთს (1 სმ-იანს) (დანარჩენი სამისგან აიგება სამკუთხედი). 87. 28 იანვრის ჩათვლით კვირის ყოველი დღე არის 4-ჯერ. 29 იანვარს 7 შესაძლო შემთხვევიდან სამია ხელშემყობი: კვირა, შაბათი და პარასკევი. 89. ტოლშესაძლებელ შემთხვევათა რიცხვია C_{40}^6. აქედან ხელშემწყობია მხოლოდ ერთი. 90. ერთი კარტი 4 ტუზიდან უნდა შეირჩეს — C_4^1, დანარჩენი ორი — დანარჩენი 32 კარტიდან — C_{32}^2. ე. ი. ხელშეწყობ შემთხვევათა ოდენობაა $C_4^1C_{32}^2$, ყველა შესაძლო შემთხვევების ოდენობა — C_{36}^3. 91. ხდომილობები დამოუკიდებელია. ალბათობა იმისა, რომ პირველი ოთხი მონაწილე ცარიელ ბარათს ამოიღებს, ხოლო მეხუთე — წარწერიანს, არის $\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$. 99. უნდა შეირჩეს 1 წიგნი 5 ოთხლარიანი წიგნიდან და 1 წიგნი 3 ლარიანი წიგნებიდან. ხელშემწყობ შემთხვევათა ოდენობაა 5·3, ყველა შესაძლო შემთხვევათა ოდენობა — C_{10}^2. 100. საძიებელი ალბათობაა $\frac{C_2^1\cdot C_8^4}{C_{10}^5}$. 105. აქ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეში A_n^r ელემენტია. ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობების ოდენობა არის $\frac{A_n^r}{r!}$ (ანუ C_n^r) — r ელემენტიან დალაგებაში მხოლოდ ერთია ზრდის მიხედვით დალაგებული r-ეული. 115. A_k ($k=1, 2, 3, 4$) იყოს ხდომილობა — k-ურმა მეომარმა მოარტყა მიზანს. ვეძებთ $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$

და ვითვალისწინებთ, რომ $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})=1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4})=$ $=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(\overline{A_4})$. **122.** 1-0,9. მითითება. იპოვეთ საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა — ალბათობა იმისა, რომ არცერთი ციფრი არ იქნება 8. **123.** $1-\frac{C^k_{n-m}}{n}$. მითითება. განიხილეთ საწინააღმდეგო ხდომილობა — შეძენილი ბილეთებიდან არც ერთი არაა მომგებიანი, სულ არამომგებიანი ბილეთების ოდენობა არის $n-m$, მათგან k-ს შერჩევის ოდენობა — C^k_{n-m}. **124.** $\frac{4}{9}$. **125.** ა) $\frac{24}{C^2_{25}}=0{,}08$, ბ) $\frac{1}{C^2_{25}}=\frac{1}{300}$. **126.** ა) $\frac{1}{36}$, ბ) $\frac{5}{9}$, გ) $\frac{5}{12}$. მითითება. გ) ხელშემწყობია 216–6–120=90, სადაც 6 შემთხვევაა, როცა სამივე რიცხვი ტოლია; 120 შემთხვევაა, როცა სამივე განსხვავებულია. **127.** $\frac{C^{16}_{32}\cdot C^2_4}{C^{18}_{36}}$. **128.** ა) $\frac{C^1_2\cdot C^4_8}{C^5_{10}}=\frac{5}{9}$, ბ) $\frac{C^3_8}{C^5_{10}}=\frac{2}{9}$, გ) 1, დ) $\frac{C^5_8}{C^5_{10}}=\frac{2}{9}$. **129.** $\frac{C^s_k\cdot C^{r-s}_{N-k}}{C^r_N}$. **130.** $\frac{C^l_k\cdot C^{s-l}_{r-k}}{C^s_r}$. **131.** ა) 0,85, ბ) 0,25, გ) 0,15. **132.** ა) 0,985. მითითება. საპირისპირო ხდომილობაა — სამივე ააცილებს, ალბათობა — 0,2·0,25·0,3=0,015, ბ) 0,425. მითითება. 0,8·0,75·0,3+0,8·0,25·0,7+0,2·0,75·0,7=0,425, გ) 0,14, დ) 0,42, ე) 0,015. **133.** ≈0,7. **134.** $P_1\cdot P_2\cdot\ldots\cdot P_n$. **135.** $\frac{25}{216}$. **136.** ა) $C^2_6\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{6}{7}\right)^4\approx0{,}165$, ბ) $C^3_6\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^3\approx0{,}037$. **137.** $\frac{1}{156}$. **138.** $\frac{1}{36}$. **139.** $3\cdot0{,}1\cdot0{,}99^2\approx0{,}029$. **140.** $\frac{1}{4}$. **141.** $\frac{1}{8}$. **142.** 0,006. **143.** $(1-0{,}2)^3=0{,}512$. **144.** ა) $0{,}98^6$, ბ) $0{,}02^6$, გ) $C^5_6 0{,}98^5\cdot0{,}02$. **145.** 0,6. **146.** ა) $\frac{14}{95}$, ბ) $\frac{48}{95}$. **147.** ა) $1-P^{10}$, ბ) $C^1_{10}p^9(1-p)$, გ) C^2_{10} $p^8(1-p)^2$. **148.** ა) 0,5814, ბ) 0,06965, გ) 0,9942. **149.** ა) $\frac{1}{2}$, ბ) $\frac{7}{16}$. მითითება. ა) p (4 სეტში I მოთამაშე გაიმარჯვებს სამჯერ, ან II გაიმარჯვებს 3-ჯერ)$=C^3_4\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+C^3_4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1$. **150.** $C^k_m\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-k}$. მითითება. ყოველი ახალგაზრდის I კოცონთან მისვლის ალბათობაა $\frac{1}{n}$. **151.** ა) $C^1_4\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{64}$, ბ) $C^3_4\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$. **152.** მიახლოებით, სულ მცირე 69-ჯერ. მითითება. n ცდაში A-ს ერთხელ მაინც განხორციელების ალბათობაა $1-0{,}99^n$. პირობით, $1-0{,}99^n\geq0{,}5$, საიდანაც $n\geq\frac{\lg0{,}5}{\lg0{,}99}$. ლოგარითმული ცხრილების გამოყენებით მივიღებთ, მიახლოებით $n\geq68{,}96$. **153.** ა) $C^4_6(0{,}8)^4\cdot(0{,}2)^2$, ბ) $(0{,}8)^6$, გ) $(0{,}2)^6$. **154.** $1-0{,}7^5-C^1_5\cdot0{,}3\cdot(0{,}7)^4=0{,}47178$. **155.** $1-0{,}6^6-6\cdot0{,}4\cdot0{,}6^5=0{,}76672$. **156.** $n=4$, $p=C^2_4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$; $n=8$, $p=C^4_8\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$, $n=12$, $p=C^6_{12}\cdot0{,}5^{12}=\frac{231}{1024}$, $n=16$, $p=C^8_{16}0{,}5^{16}=\frac{6435}{2^{15}}$.

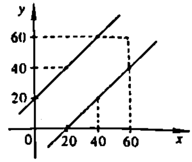
§ 4.4.

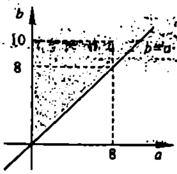
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
დ	ა	ბ	გ	ბ	ა	დ	ა	დ	ა	ბ	გ	ბ	ბ

15. ა) $\frac{a^2}{(a+b)^2}$, ბ) $\frac{ab}{(a+b)^2}$, გ) $\frac{b^2}{(a+b)^2}$. **16.** 0,2. **17.** ა) 0,02, ბ) 0,36. **18.** 0,5. **19.** $\frac{4}{5\pi}$. **20.** $\frac{1}{8}$. **21.** $\frac{1}{4}$. **22.** $\frac{h(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}{h(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)+a}$. **23.** ა) $\frac{17}{18}$, ბ) $\frac{1}{8}$. მითითება. $x+y=1$ არის ერთეული სიგრძის გვერდის მქონე $OABC$ კვადრატის დიაგონალის შემცველი წრფე. $x+y=\frac{1}{3}$ და $x+y=1{,}5$ არის ამ წრფის პარალელური წრფეები. პირველ შემთხვევაში საჭირო იქნება დაშტრიხული ფიგურის ფართობის გამოთვლა. თუ ამ ფიგურას MN მონაკვეთს მივუერთებთ, მიიღება $MABCN$ ხუთკუთხედი.



ასეთ შემთხვევაში დაშტრიხული ფიგურის ფართობი ხუთკუთხედის ფართობია — $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$.
24. $\frac{5}{9}$. მითითება. თუ x და y-ით აღვნიშნავთ მეგობრების შეხვედრის ადგილზე მოსვლის დროებს, მაშინ $x\in[0;\ 60]$, $y\in[0;\ 60]$ და $|y-x|\le 20$, საიდანაც მივიღებთ $\begin{cases} y \le x+20 \\ y \ge x-20 \end{cases}$. ეს პირობები სურათზე გამოვსახოთ. მეგობრების შეხვედრის ალბათობა დაშტრიხული ნაწილის ფართობის კვადრატის ფართობთან შეფარდების $\frac{5}{9}$-ის ტოლია. 25. $\frac{1}{12}$.





26. 0,6. მითითება. $x=\frac{b}{a}$; $b>a$; საძიებელი ალბათობა ტოლია დაშტრიხული ნაწილის ფართობის მთელი მართკუთხედის ფართობთან შეფარდების. 27. ა) 0,64, ბ) 0,75. 28. $\frac{1}{12}$.

29. $\frac{1}{4}$. მითითება. ერთ-ერთი მონაკვეთის სიგრძე — x, მეორის — y. შესაძლო მნიშვნელობები: $0\le x+y\le 1$. სამკუთხედის ასაგებად: $x<\frac{1}{2}$, $y<\frac{1}{2}$, $x+y>\frac{1}{2}$. 30. $P([S]=0)=\frac{1}{25}$, $P([S]=1)=\frac{3}{25}$. 31. ა) 0,4, ბ) 0,25. 32. $\frac{1}{10\sqrt{3}}$. 33. $\frac{30}{44}$. 34. ნახევარ საათზე მეტი. 35. $\frac{251}{800}$. მითითება. ვთქვათ, 8 საათიდან y წუთის შემდეგ დარეკა ნიკამ, ვატო კი — x წუთის შემდეგ შევიდა ბინაში. გამოსახეთ $(x;\ y)$ წერტილი — $[0;\ 20]\times[0;\ 20]$ კვადრატის წერტილით. თუ $x\ge y$, საუბარი შედგება, როცა $x-y<2$; თუ $y>x$ — როცა $y-x<5$. გამოსახეთ შესაბამის $(x;\ y)$ წერტილთა სიმრავლე. მისი თანაკვეთა ყველა შესაძლო წერტილთა სიმრავლესთან (კვადრატთან) წარმოადგენს ხელსაყრელი შედეგების სიმრავლეს. 36. აღვნიშნოთ სიგნალის შემოსვლის მომენტი x-ით, მიმღების ჩართვის მომენტი — y—ით; მაშინ ხდომილობათა სიმრავლე წარმოადგენს $[0;\ T]\times[0;\ T]$ კვადრატის წერტილების სიმრავლეს. თუ $x>y$, მაშინ $x-y<t$; თუ $x<y$, მაშინ $y-x<\Delta$. ალბათობა იმისა, რომ სიგნალი აღებული იქნება, არის $y=x-t$ და $y=x+\Delta$ წრფეებით შექმნილი ზოლის $[0;\ T]\times[0;\ T]$ კვადრატში მოთავსებული ნაწილის ფართობის შეფარდება კვადრატის ფართობთან: $p=\dfrac{T^2-\frac{1}{2}(T-\Delta)^2-\frac{1}{2}(T-t)^2}{T^2}=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{T}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$.

§ 4.5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
დ	ა	ა	გ	ბ	ბ	გ	გ	დ	დ

11. $P(A|B)=\frac{3}{7}$, $P(B|A)=\frac{3}{4}$, $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{7}{8}$. 12. ა) $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, ბ) A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, რადგან $P(A|B)=P(A)$ და $P(B|A)=P(B)$. 13. ა) $P(A|B)=\frac{1}{6}$, $P(B|A)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, ბ) A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია. 14. $P(A|B)=\frac{1}{9}$, $P(A|C)=1$, $P(B|D)=\frac{1}{2}$, $P(B|C)=1$, $P(C|D)=0$, $P(A)=\frac{1}{9}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{36}$, $P(D)=\frac{1}{9}$. ა) დამოუკიდებელია, ბ) დამოკიდებულია, გ) დამოუკიდებელია, დ) დამოკიდებულია, ე) დამოკიდებულია. 15. $P(A|C)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{2}{3}$, $P(A|D)=\frac{1}{2}$, $P(B|C)=\frac{2}{3}$, $P(B|D)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{4}$. ა) დამოკიდებულია, ბ) დამოკიდებულია, გ) დამოუკიდებელია, დ) დამოკიდებულია, ე) დამოკიდებულია. 16. $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$, $P(A|C)=\frac{1}{2}$. ა) დამოუკიდებელია, ბ) დამოუ-

კიდებელია. **17.** $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$, $P(A|C)=\frac{1}{2}$, $P(B|C)=\frac{1}{2}$. ა) დამოუკიდებელია, ბ) დამოუკიდებელია, გ) დამოუკიდებელია. **18.** $\frac{4}{13}$. **19.** ა) $\frac{C_8^2}{C_{20}^2}=\frac{14}{95}$, ბ) $\frac{12\cdot 8}{C_{20}^2}=\frac{48}{95}$. **20.** ა) 0,4, ბ) 0,7. **21.** ა) 0,02, ბ) 0,05, გ) 0,035. **22.** $P(A\cap B)=\frac{28}{110}$, $P(A)=\frac{7}{11}$, $P(B|A)=\frac{4}{10}$. **23.** $\frac{5}{14}$. **24.** $\frac{48}{395}$. **25.** ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{2}{3}$, გ) $\frac{7}{10}$; $\frac{4}{10}$, დ) $\frac{7}{30}$, ე) $\frac{1}{2}$. მითითება. არჩეულია თეთრი ტომარა და ამოღებულია წითელი ბურთი, ან არჩეულია შავი ტომარა და ამოღებულია წითელი ბურთი — $-\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{10}=0,5$. **26.** $P(A)=P(AU)=P(AX+AY)=P(X)P(A|X)+P(Y)P(A|Y)$. **28.** ნამრავლის ალბათობის ფორმულით, $P(AX_k)=P(A)\cdot P(X_k|A)$, საიდანაც $P(X_k|A)=\frac{P(A\cdot X_k)}{P(A)}=$ $=\frac{P(X_k)\cdot P(A|X_k)}{P(X_1)P(A|X_1)+P(X_2)P(A|X_2)+\ldots+P(X_k)P(A|X_k)}$. **29.** 0,0065. მითითება. წინასწარ განიხილეთ ხდომილობები: X_1 — „შემთხვევით შერჩეული ნათურა I ქარხნის მიერ არის დამზადებული", X_2 — „შემთხვევით შერჩეული ნათურა II ქარხნის მიერ არის დამზადებული", X_3 — „შემთხვევით შერჩეული ნათურა მესამე ქარხნის მიერ არის დამზადებული". გამოიყენეთ სრული ალბათობის ფორმულა. **30.** 0,23. **31.** 0,458. მითითება. განიხილეთ ხდომილობები: A_0 — ტანკს ყველა ჭურვი აცდა, A_1 — მოხვდა ერთი ჭურვი, A_2 — მოხვდა ორი ჭურვი, A_3 — მოხვდა სამი ჭურვი. $P(A_0)=0,6\cdot 0,5\cdot 0,3=0,09$; $P(A_1)=0,4\cdot 0,5\cdot 0,3+0,6\cdot 0,5\cdot 0,3+0,6\cdot 0,5\cdot 0,7=0,36$; $P(A_2)=0,6\cdot 0,5\cdot 0,7+0,4\cdot 0,5\cdot 0,7+0,4\cdot 0,5\cdot 0,3=0,41$; $P(A_3)=0,4\cdot 0,5\cdot 0,7=0,14$; $P(A)=P(A_0)\cdot P(A|A_0)+P(A_1)\cdot P(A|A_1)+P(A_2)\cdot P(A|A_2)+P(A_3)\cdot P(A|A_3)=0,09\cdot 0+0,36\cdot 0,2+0,41\cdot 0,6+0,14\cdot 1=0,458$. **32.** $\approx 0,579$. მითითება. მაშასადამე, ვიხილავთ პირობით ალბათობას — „გამოძახებულ მოსწავლეს ოცივე საკითხი აქვს მომზადებული", იმ პირობით, რომ მან „ყველა კითხვას უპასუხა" — $P(A_1|A)$ ალბათობას. A — „გამოძახებულმა მოსწავლემ ყველა კითხვას უპასუხა". A_1 — „გამოძახებულ მოსწავლეს 20-ივე საკითხი აქვს მომზადებული". განიხილეთ ხდომილობები: A_2 — „გამოძახებულია მოსწავლე, რომელსაც 16 საკითხი აქვს მომზადებული". A_3 — გამოძახებულია მოსწავლე, რომელსაც მომზადებული აქვს 10 საკითხი. A_4 — „გამოძახებულია მოსწავლე, რომელმაც 5 საკითხი მოამზადა". იპოვეთ, პირობის მიხედვით, $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$, $P(A_4)$; მაგალითად, $P(A_1)=\frac{6}{20}=0,3$, $P(A_2)=0,4$, $P(A_3)=0,2$, $P(A_4)=\frac{2}{20}=0,1$; $P(A|A_1)=1$, $P(A|A_2)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}\approx 0,491$, $P(A|A_3)=\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}\approx 0,105$, $P(A|A_4)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}\approx 0,009$. $P(A_1|A)$-ს გამოსათვლელად გამოიყენეთ ბაიესის ფორმულა. $P(A_1|A)=\frac{0,3}{0,5183}$. **33.** $\approx 0,997$. **34.** $\approx 0,3$.

ტესტი I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
დ	დ	გ	დ	ა	დ	ა	ა	ბ	ა	ბ	ა	დ	დ	ბ	დ	გ	ბ

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
დ	დ	ა	გ	ბ	დ	გ	ბ	ბ	ა	ბ	დ	გ	ბ	დ	ბ	ბ	ე

37. $a=-49$, $a=-1$. **38.** ა) 200 სმ², ბ) $\frac{21}{5}$, გ) $\frac{500}{13}$ სმ². **39.** $b_1=1$, $q=6$. **40.** 80 კმ/სთ, 100 კმ/სთ.

ტესტი 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
გ	დ	გ	ა	გ	დ	გ	ბ	ბ	დ	დ	გ	ბ	ბ	ა	ბ

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
ბ	ბ	დ	ე	ბ	ა	ბ	ბ	დ	ა	გ	ბ	გ	დ	ბ

32. 24 სმ². 33. $k=1$ ან $k=2$. 34. $\frac{32}{3}$ სმ³. 35. 1. 36. $m\in(-\frac{7}{2},\ 1)\cup(1;\ \frac{3}{2})$. 37. 800 გრ. 38. $\frac{2\pi\sqrt{34}}{3}$ სმ³. 39. 185 და 15; 119 და 81; 53 და 147. 40. განსაზღვრის არე Z (მთელი რიცხვთა სიმრავლე); მნიშენელობათა სიმრავლე {0; 1; 2; 3; 4}; ასახვა არ არის შექცევადი.

ტესტი 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ბ	ა	გ	ბ	დ	ა	გ	ა	ბ	ბ	ბ	დ	დ	გ	ბ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ბ	ბ	გ	დ	დ	გ	ბ	ბ	გ	გ	გ	ბ	დ	გ	ბ

31. 0,8. 32. ა) 1 ერთეული, ბ) 0,48 ერთეული. 33. $\left(-\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$. 34. $a_1=2,\ d=3$ ან $a_1=8,\ d=-3$. 35. $\frac{2ab}{b-a}$ სთ. 36. $\frac{\sqrt{29}}{7}$ ერთ. 37. $a=\frac{1}{2}$. 38. 360 გრ — I შენადნობი, 640 გრ — II შენადნობი. 39. ა) $[1;\ +\infty)$, ბ) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$, გ) $(0;\ 1]$. 40. ა) $\frac{5}{33}$, ბ) $\frac{28}{33}$.

ტესტი 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
დ	გ	გ	დ	გ	ბ	ა	ბ	დ	გ	ბ	ბ	ა	ბ	დ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ბ	ა	დ	დ	დ	ა	დ	ბ	ბ	დ	ბ	ა	ბ	დ	ბ

31. 8 მოსწავლე. 32. საშუალო, მოდა (თუ ის არსებობდა), მედიანა — გაიზრდება 10-ით; საშუალო კვადრატული გადახრა არ შეიცვლება. 33. $\angle AMB=180^0-\arccos\frac{1}{8}$. 34. 36 სმ². 35. 675 ლიტრი. 36. $(-\infty;\ -\frac{3\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{3\sqrt{2}}{2};\ +\infty)$. 37. $(-\infty;\ 1)\cup[2;\ +\infty)$. 38. 2:1. 39. $m\in(3;\ +\infty)$. 40. $\frac{32}{3}$ სმ³.

ტესტი 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
დ	ბ	ა	ბ	ა	გ	დ	დ	ა	გ	დ	ა	ბ	ბ	გ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ბ	გ	ა	ბ	ბ	გ	ბ	ბ	ა	ა	დ	გ	დ	ბ	გ

31. საშუალო $\frac{6+x}{7}$; მოდა — 1; მედიანა — 1; საშუალო კვადრატული გადახრა — $\frac{|x-1|\sqrt{6}}{7}$. x-ზე დამოკიდებულია საშუალო და საშუალო კვადრატული გადახრა. **32.** 4 სმ; 5 სმ. **33.** 1:2. მითითება. ალვნიშნოთ x-ით, მაგალითად, ნახევარწრის რადიუსი, მაშინ მართკუთხედის გვერდები იქნება $2x$ და $\frac{P-2x-\pi x}{2}$, ფანჯრის ფართობია $S=(-2-\frac{\pi}{2})x^2+px$. S უდიდესია, როცა $x=\frac{P}{4+\pi}$. **34.** 0,25. მითითება. ხელშემწყობი შემთხვევების ოდენობაა $2 \cdot 7!$. **35.** $x=0$, $x=3$. **36.** თეატრის — 20 ბილეთი, კინოს — 30 ბილეთი. **37.** 245. **38.** $(0,6a)$, $(b;\ 5a)$, $(2b;\ 4a)$, $(3b;\ 3a)$, $(4b;\ 2a)$, $(5b;\ a)$, $(6b;\ 0)$. მითითება. by იყოფა a-ზე და ax იყოფა b-ზე, ამასთანავე, a და b თანამარტივი რიცხვებია, ამიტომ $y=ka$, $x-=lb$. განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ: $l+k=6$. **39.** ა) $A(0;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ 1;\ 0)$; $C(1;\ 1;\ 0)$; $D(1;\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 1)$; $B_1(0;\ 1;\ 1;)$; $C_1(1;\ 1;\ 1)$; $D_1(1;\ 0;\ 1)$, ბ) $(1;\ 1;\ \frac{1}{2})$ გ) $(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$, დ) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **40.** 20 კმ/სთ. მითითება. თუ გემის სიჩქარეს x-ით ალვნიშნავთ, I ნაწილის ხარჯი 1 კმ-ზე არის $\frac{480}{x}$ დოლარი, II ნაწილის — kx^2. პირობით, $3=k \cdot 10^2$, საიდანაც $k=0,03$. მოგვიწევს $\left(\frac{480}{x}+0,03x^2\right)$-ის უმცირესი მნიშვნელობის პოვნა, ანუ $\left(\frac{240}{x}+\frac{240}{x}+0,03x^2\right)$-ის უმცირესი მნიშვნელობის პოვნა. რადგან შესაკრებების ნამრავლი მუდმივია, ეს ჯამი უმცირესია, როცა შესაკრებები ტოლია. $\frac{240}{x}=0,03x^2$, საიდანაც $x=20$ (კმ/სთ).

საგამომცემლო ჯგუფი

ეთერ კვაჭიანი
ვიოლა უღუში
ილია ელაია
ალექსანდრე ჯიქურიძე

გამომცემლობა
ინტელექტი

თბილისი, ილია ჭავჭავაძის გამზირი №17ბ
25-05-22, 91-22-83, 8(99) 55-66-54
ფაქსი: 25-05-22, 91-22-83
www.intelekti.ge inteleqti@caucasus.net